



**HAL**  
open science

# Des systèmes bidimensionnels frustrés aux modèles minimaux couplés

Pascal Simon

► **To cite this version:**

Pascal Simon. Des systèmes bidimensionnels frustrés aux modèles minimaux couplés. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1998. Français. NNT : . tel-00002322

**HAL Id: tel-00002322**

**<https://theses.hal.science/tel-00002322>**

Submitted on 23 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THESE

Présentée

Pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

PAR

**Pascal SIMON**

**SUJET: Des systèmes bidimensionnels frustrés  
aux modèles minimaux couplés**

Soutenue le 24 avril 1998 devant la commission d'examen :

<b>Mr. J. Chalker</b>	Rapporteur
<b>Mr. Vl. Dotsenko</b>	
<b>Mr. B. Douçot</b>	Directeur de thèse
<b>Mr. M. Gabay</b>	Président
<b>Mr. M. Henkel</b>	Rapporteur
<b>Mme. C. Lhuillier</b>	



# Remerciements

Le travail présenté ici a été en majeure partie réalisé au Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies des Universités Pierre et Maris Curie et Denis Diderot. Je tiens à remercier l'ensemble des membres du laboratoire et en particulier L. Baulieu, son directeur, pour m'y avoir accueilli.

Mes premières pensées vont évidemment vers Benoît Douçot, pour avoir dirigé cette thèse. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour sa grande ouverture d'esprit, sa culture scientifique remarquable et surtout pour son enthousiasme quotidien.

Je remercie John Chalker et Malte Henkel pour avoir gentiment accepté d'être rapporteur de ce mémoire. Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Vladimir Dotsenko pour m'avoir introduit aux techniques de la perturbation conforme et pour avoir pris part au jury de cette thèse. J'adresse également mes remerciements aux autres membres du jury à savoir Marc Gabay et Claire Lhuillier.

Je souhaiterais remercier toutes les personnes avec qui j'ai collaboré ou eu des discussions fructueuses au cours de mes recherches et plus particulièrement: Bertrand Delamotte, Vladimir Dotsenko, Jean-Luc Jacquot, Philippe Lecheminant, Marc-André Lewis, Frederic Mila, Dominique Mouhanna, Asher Perez, Marco Picco, J. Polonyi, Michel Rausch de Trautenberg, J. Richert et Nicolas Rivier.

Je pense également aux amis physiciens ou non et au réconfort qu'ils m'ont apporté. Enfin, the last but not the least, une dernière pensée à ma famille, pour m'avoir toujours soutenu dans mes études.



# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>I</b>	<b>Modèle XY <math>J_1 - J_2</math> et au-delà</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	<b>Etude d'un modèle XY bidimensionnel classique frustré</b>	<b>13</b>
1.1	Généralités sur le modèle XY . . . . .	13
1.1.1	Transition de Kosterlitz-Thouless . . . . .	13
1.1.2	Modèle XY et représentation en terme de gaz de Coulomb . . . . .	15
1.1.3	Renormalisation et diagramme de phase . . . . .	17
1.1.4	Extension de ces résultats . . . . .	19
1.1.5	Vérifications expérimentales . . . . .	20
1.2	Etude du modèle XY $J_1 - J_2$ sur réseau carré . . . . .	21
1.2.1	Présentation du modèle . . . . .	21
1.2.2	Etude de la phase faiblement frustrée . . . . .	23
1.2.3	Etude de la phase complètement frustrée . . . . .	26
1.3	Modèle XY $J_1 - J_2$ - quantique . . . . .	35
1.3.1	Diagramme de phase classique du modèle XY $J_1 - J_2 - J_3$ . . . . .	35
1.3.2	Ondes de spin dans le modèles XY frustrés quantiques et phases liquide de spin . . . . .	37
1.4	Résumé et conclusions . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Modèles à symétrie <math>Z_2 \times U(1)</math></b>	<b>43</b>
2.1	Introduction. . . . .	43
2.1.1	Problématique expérimentale . . . . .	45
2.2	Sur le modèle XY complètement frustré . . . . .	47
2.2.1	Représentation en terme de gaz de Coulomb . . . . .	47
2.2.2	Vers le modèle Ising-XY . . . . .	49
2.2.3	Modèles XY couplés . . . . .	53
2.2.4	Bilan des prédictions théoriques . . . . .	54
2.3	Résultats numériques . . . . .	55

2.3.1	Modèle FFXY . . . . .	56
2.3.2	Modèle Ising-XY . . . . .	58
2.4	Lien avec les modèles de croissance de surface . . . . .	60
2.5	Bilan des études numériques . . . . .	64

## **II Une approche semi-classique de l'ordre par le désordre: application aux liquides de spin 69**

<b>3</b>	<b>Une approche semi-classique de l'ordre par le désordre</b>	<b>71</b>
3.1	Présentation de l'article . . . . .	71
3.2	Introduction . . . . .	72
3.3	Some simple examples with two degrees of freedom . . . . .	76
3.3.1	An integrable toy model . . . . .	76
3.3.2	A more generic example . . . . .	77
3.4	A ferromagnetic chain . . . . .	83
3.4.1	Ground state and dispersion relations in the different phases . . . . .	83
3.4.2	Order by disorder along the transition lines . . . . .	85
3.5	The Husimi tree . . . . .	88
3.5.1	Thermal fluctuations . . . . .	89
3.5.2	Quantum fluctuations . . . . .	90
3.6	A geometrical analysis of the spin dynamics on the Husimi cactus . . . . .	97
3.6.1	Properties of the flow associated to rotations around a given spin . . . . .	97
3.6.2	Vector flow associated to internal rotations and Hamiltonian Flow . . . . .	98
3.6.3	Case of the leaves of the Husimi tree . . . . .	101
3.7	Summary, Conclusions and perspectives . . . . .	104
3.8	APPENDIX A . . . . .	106
3.9	APPENDIX B . . . . .	107
3.10	APPENDIX C . . . . .	109
3.11	APPENDIX D . . . . .	112
3.12	APPENDIX E . . . . .	113
3.12.1	General point of view . . . . .	113
3.12.2	Application to the Husimi cactus . . . . .	114
3.12.3	Links between two different classical configurations . . . . .	116
3.13	Résumé et perspectives . . . . .	118

## **III Modèles minimaux couplés et systèmes désordonnés 119**

<b>4</b>	<b>Couplage entre modèles critiques</b>	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	121

4.2	Invariance conforme et modèles minimaux . . . . .	122
4.2.1	Invariance conforme . . . . .	122
4.2.2	Modèles minimaux . . . . .	127
4.2.3	Application à la physique statistique . . . . .	128
4.3	Méthode du gaz de coulomb . . . . .	130
4.4	Fonctions de corrélation . . . . .	132
4.5	Modèles minimaux couplés . . . . .	134
4.5.1	Présentation du modèle et généralités . . . . .	134
4.5.2	Flot de renormalisation . . . . .	137
4.5.3	Fonctions de corrélation spin-spin . . . . .	140
4.6	Résumé et conclusion . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Systèmes désordonnés</b>	<b>145</b>
5.1	Désordre et transition du second ordre . . . . .	145
5.1.1	Descriptif . . . . .	145
5.1.2	Principaux résultats . . . . .	148
5.2	Désordre et transition du premier ordre . . . . .	150
5.2.1	Arguments généraux . . . . .	150
5.2.2	Désordre dans les transitions de phase du premier ordre induites par les fluctuations . . . . .	152
5.2.3	Désordre dans les transitions de phase du premier ordre . . . . .	154
5.3	Résumé et conclusion . . . . .	159
<b>6</b>	<b>Coupled minimal models with and without disorder</b>	<b>161</b>
6.1	Introduction . . . . .	162
6.2	Coupled minimal models without disorder . . . . .	164
6.2.1	The model . . . . .	164
6.2.2	Coulomb gas formulation . . . . .	165
6.2.3	Renormalisation group equations . . . . .	166
6.2.4	Fixed point structure . . . . .	170
6.3	Coupled minimal models with disorder . . . . .	176
6.3.1	The model . . . . .	176
6.3.2	Beta functions . . . . .	177
6.3.3	Study of the fixed point structure . . . . .	178
6.4	Conclusions and Discussions . . . . .	182
6.5	APPENDIX A: Beta functions in the pure case . . . . .	184
6.5.1	First order . . . . .	184
6.5.2	Second order . . . . .	185
6.6	APPENDIX B: Renormalisation of $m_i$ in the pure case . . . . .	190
6.6.1	First order . . . . .	190



6.6.2	Second order . . . . .	191
6.7	APPENDIX C: Renormalisation of $h_i$ in the pure case . . . . .	192
6.7.1	Second order . . . . .	192
6.7.2	third order . . . . .	194
6.8	APPENDIX D: Beta function in the disordered case . . . . .	196
6.9	APPENDIX E: Computation of integrals . . . . .	197
<b>7</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>203</b>
<b>A</b>	<b>Dualité Abélienne et transformation de Villain généralisée</b>	<b>205</b>
A.1	Formes différentielles sur un réseau hypercubique . . . . .	205
A.2	Dualité . . . . .	206
A.3	Application aux modèles de Villain généralisés . . . . .	207
<b>B</b>	<b>Renormalisation d'un gaz de Coulomb à plusieurs espèces</b>	<b>211</b>
<b>C</b>	<b>ARTICLES</b>	<b>215</b>

# Chapitre 0

## Introduction générale

La physique de la matière condensée essaie d'expliquer les propriétés des systèmes en interaction dans lesquels interviennent des degrés de liberté de spin et de charge. Le problème est bien souvent trop compliqué pour être abordé de front. La physique des systèmes de purs spins où l'on a négligé les degrés de liberté électroniques constitue une discipline à part entière de la matière condensée depuis plusieurs décennies.

L'étude des systèmes magnétiques a connu des progrès rapides au cours des 25 dernières années grâce, notamment, à l'apparition de nouveaux concepts théoriques, au développement des techniques expérimentales ainsi qu'à la puissance accrue des ordinateurs permettant des simulations sans cesse plus élaborées. Au centre de ces nouveaux concepts, se trouve le groupe de renormalisation. Il a été au départ développé pour la physique des hautes énergies afin de se débarrasser des divergences ultraviolettes causées par les fluctuations quantiques. Partant d'une théorie nue définie à une échelle  $\Lambda$ , sans réelle signification physique, l'idée était de substituer aux constantes de couplage définies à cette échelle, un nouveau jeu de paramètres choisis judicieusement pour éliminer toutes les divergences ultraviolettes de la théorie de départ. Ces nouveaux paramètres ont donc une limite finie quand le "cut-off"  $\Lambda$  tend vers l'infini, donc à haute énergie qui est la limite intéressante en physique des particules. Tout le génie de Wilson [1, 2] a été de reformuler et de donner un sens et une portée nouvelle au concept de renormalisation. En physique statistique, contrairement à la physique des particules, l'échelle  $a = \Lambda^{-1}$  a une signification naturelle et correspond au pas d'un réseau. Dans ce cadre, la théorie nue représente une théorie microscopique décrivant par exemple les interactions magnétiques entre atomes voisins. L'essence de la procédure de renormalisation est, par des transformations d'échelle successives, d'éliminer les degrés de liberté associés aux courtes distances de la théorie et d'obtenir une action effective décrivant le comportement infrarouge (donc cette fois à basse énergie) de la théorie de départ. Dans un modèle de spin, cela consiste à utiliser une procédure de décimation (par exemple des blocs de spins) de manière à privilégier les modes collectifs subsistant à grande distance. L'énorme intérêt de cette procédure est que la connaissance de la région infrarouge de la théorie donne *a priori* accès aux com-

portements des grandeurs macroscopiques mesurables expérimentalement. Il est à noter que ce procédé de renormalisation est exacte par essence, puisqu'il consiste à remplacer une théorie définie à une échelle  $\Lambda$  et d'intégrer sur les modes de courte distance pour obtenir une théorie effective contenant tous les ingrédients physiques de la théorie de départ [2, 3]. La plupart du temps, cette procédure de renormalisation est néanmoins construite perturbativement, c'est à dire que l'on se restreint à un certain nombre de constantes de couplage (renormalisable) que l'on utilise comme petit paramètres pour effectuer des développements diagrammatiques. Un certain engouement est apparu récemment pour aller explorer le domaine non-perturbatif de certaines théories à l'aide de procédures de renormalisation exactes où toutes les constantes de couplage sont *a priori* prises en compte [4, 5, 6].

Le groupe de renormalisation a permis d'expliquer pourquoi les propriétés critiques et, notamment, les valeurs des exposants critiques (qui caractérisent la manière dont divergent les principales grandeurs thermodynamiques) d'une classe de systèmes donnée ne dépendent pas (dans certains cas) de la structure microscopique sous-jacente. Il a donc pu étayer le concept d'universalité et surtout définir un cadre unificateur à l'approche des phénomènes critiques et plus particulièrement à l'étude des systèmes magnétiques. Ainsi, la plupart des systèmes de spins classiques avec un ordre collinéaire conventionnel (ferromagnétique et antiferromagnétique) ont pu être relativement bien compris à l'aide de ces concepts de théories effectives sans oublier, bien sûr, l'apport expérimental et numérique. Motivés par ces succès remarquables, les chercheurs ont tourné leur attention vers des matériaux présentant de nouveaux types d'ordre non conventionnels induits notamment par de la frustration ou par le désordre dû aux impuretés.

Ce concept de frustration sera souvent au coeur de cette thèse. Un système est dit frustré lorsque l'interaction véhiculée par les liens du réseau est contradictoire. Deux types de frustration peuvent être distingués, la frustration géométrique ou structurale et la frustration induite par des interactions supplémentaires compétitives. Pour illustrer ces idées, rien ne vaut mieux que deux exemples. Sur la figure 0.1, j'ai donc représenté le cas le plus connu d'une frustration géométrique, à savoir le modèle d'Ising avec des interactions antiferromagnétiques (AF) entre plus proches voisins sur un réseau triangulaire.

J'ai donné deux états fondamentaux équivalents possibles, chacun d'énergie  $E = J$ , où  $J > 0$  désigne la constante de couplage. Si on imagine un réseau triangulaire de ce type, avec une infinité de sites (limite thermodynamique), le système aura un nombre infini d'états fondamentaux possibles et une entropie par site macroscopique. J'étudierai, au cours de la deuxième partie de cette thèse, des systèmes encore plus dégénérés. On peut donner une définition formelle à la frustration géométrique: si le signe du produit des interactions autour d'une plaquette donnée définit par  $\phi_C = \text{signe}[\prod_{i \in C} (-J_i)]$  est négatif alors le système est frustré [7].

Sur la figure 0.2, j'ai représenté deux états fondamentaux d'énergie nulle pour le modèle

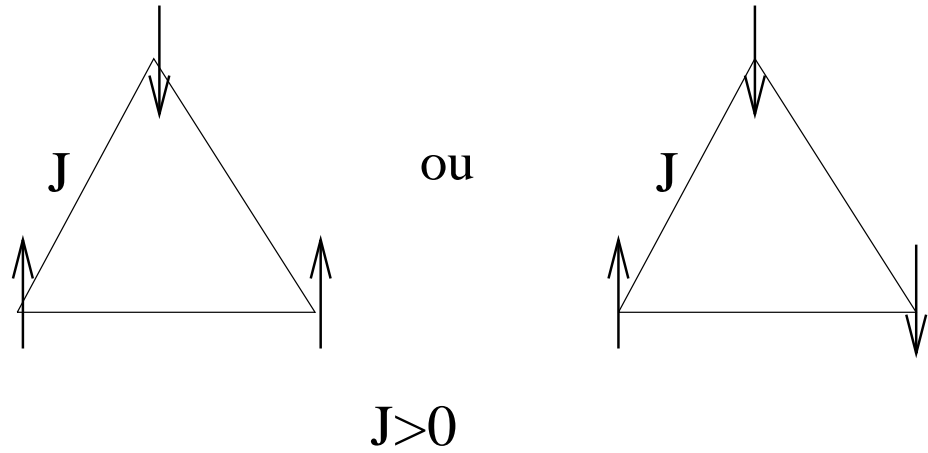


FIG. 0.1 - Deux configurations possibles du modèle d'Ising AF sur réseau triangulaire

d'Ising sur réseau carré avec une constante de couplage  $J_1 > 0$  entre premiers voisins et une constante de couplage  $J_2 = J_1/2$  entre second voisins. On peut trouver d'autres configurations équivalentes pour ce système. Ceci constitue un exemple de frustration due à la compétition entre différentes interactions. J'ai étudié un exemple du même type qui fera l'objet de la première partie de cette thèse.

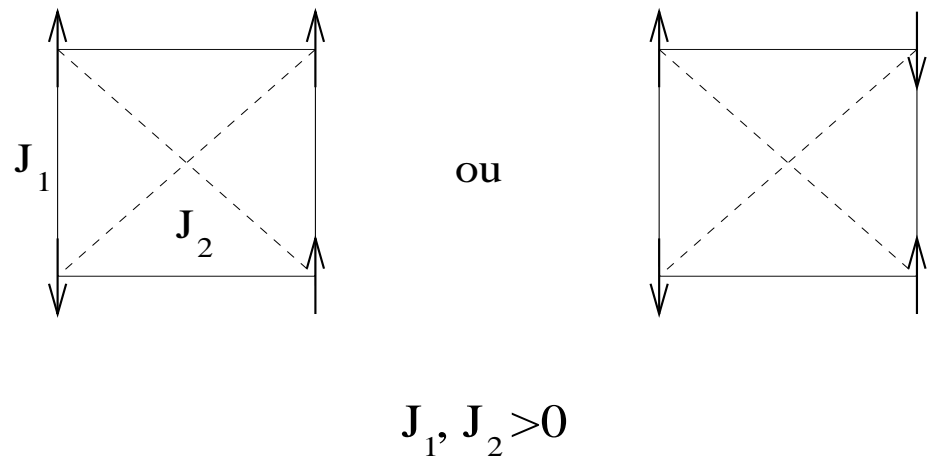


FIG. 0.2 - Deux configurations possibles du modèle d'Ising sur réseau carré avec des interactions entre premiers et seconds voisins

L'introduction de frustration ou de désordre dans un système donne généralement lieu à des comportements très inhabituels et à un diagramme de phase complexe.

L'étude des systèmes frustrés a connu un essor important à la fin des années 80 grâce, notamment, à la découverte des supraconducteurs à haute température critique dans les matériaux  $La_2CuO_4$  [8, 9]. Cette découverte oblige à trouver une nouvelle façon d'apparier les électrons dans la mesure où le mécanisme d'appariement introduit autrefois par

Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) [10] pour expliquer la supraconductivité prédit une température critique trop faible. Un nouveau mécanisme développé par Anderson [11] a été invoqué donnant une large place aux fluctuations magnétiques. Cette idée reposait sur la destruction de l'ordre AF à longue distance pour conduire à un état dit de liquide de spin caractérisé par des fonctions de corrélation de courte portée (de l'ordre de la maille du réseau). Il est maintenant clair qu'un tel état ne peut apparaître que par l'ajout de frustration dans le système, l'idée étant que le dopage, nécessaire à l'apparition de la supraconductivité, introduit de manière effective des interactions compétitives [12, 13]. De nombreux autres états de liquide de spin ont été invoqués pour ces systèmes (voir par exemple le livre de Fradkin [14]). Le lien entre ces états dits de liquide de spin et l'apparition de la supraconductivité est très loin d'être clair. Cette idée repose sur un découplage entre les degrés de liberté de spin et de charge, ce qui n'est pas du tout évident pour les systèmes bidimensionnels.

La non-compréhension de la supraconductivité à haute température critique a au moins eu le mérite de (re)lancer activement les recherches sur les différents états magnétiques possibles induits par de la frustration ou du désordre au niveau classique et surtout quantique. Ainsi, au cours de cette dernière décennie, s'est développée une quête d'états exotiques dans les systèmes uni- et bidimensionnels frustrés classiques et quantiques. Parmi ces systèmes, on peut mentionner entre autres, le modèle de Heisenberg AF sur le réseau Kagomé qui représente l'archétype des systèmes frustrés. Le spectre basse énergie de ce modèle est encore très loin d'être compris. Une des difficultés liées à l'étude des modèles frustrés est le manque d'approche (analytique) systématique. Cette thèse se situe au coeur de cette problématique. Plutôt que de partir de situations d'emblée très compliquées (par exemple l'étude de spin  $S = 1/2$  sur le réseau Kagomé), j'ai plutôt cherché à étudier les conséquences de la frustration ou du désordre sur des modèles bidimensionnels *a priori* plus simples, tout d'abord classiquement (en prenant en compte les fluctuations thermiques), puis en utilisant des approches semi-classiques (en prenant en compte les fluctuations quantiques), ceci en vue de dégager des idées relativement simples.

Cette thèse comporte trois parties relativement indépendantes.

Dans la première partie, je vais tout d'abord présenter un traitement du modèle XY à deux dimensions sur réseau carré avec des constantes de couplage entre premiers et seconds voisins compétitives (modèle XY,  $J_1 - J_2$ ). Dans un certain domaine de paramètres, l'état fondamental classique est très dégénéré. L'effet des fluctuations thermiques ou quantiques (à température nulle) est de lever cette dégénérescence classique et de sélectionner un état plus ordonné. Ce phénomène qui porte l'appellation maintenant célèbre d' "ordre par le désordre" fut découvert initialement par Villain [15] pour des spins d'Ising et s'avère être également valable pour des spins à symétrie continue. Une fois les fluctuations thermiques incluses, l'état fondamental possède néanmoins une symétrie discrète  $Z_2$  résiduelle. Cette dernière va complètement bouleverser le comportement critique du modèle (comparé au

cas non frustré), par l'introduction d'un nouveau paramètre d'ordre supplémentaire de type Ising couplé au degré de liberté XY. J'établirai un diagramme de phase détaillé de ce modèle et discuterai la nature des transitions de phase. Le cas quantique sera abordé par une approche semi-classique valable à  $S$  grand. J'essaierai dans le deuxième chapitre de faire le point sur le comportement critique des modèles bidimensionnels à symétrie  $Z_2 \times U(1)$  et mettrai l'accent sur le modèle Ising-XY, consistant simplement en un modèle d'Ising couplé à un modèle XY par leur densité d'énergie. Ce dernier semble décrire de manière effective le comportement critique des systèmes à symétrie  $Z_2 \times U(1)$ .

L'étude du modèle XY  $J_1 - J_2$  possède l'avantage de soulever deux problématiques très générales.

Tout d'abord, on peut s'interroger sur le degré de généralité de ce phénomène d'ordre par le désordre. En effet, a-t-on toujours localement un mécanisme de sélection par les fluctuations? Dans le modèle XY,  $J_1 - J_2$ , fluctuations thermiques et quantiques sélectionnent le même état fondamental. Est-ce un cas général ou peut-on trouver des exemples où elles agissent différemment. Pour répondre à ces questions, je présenterai dans la deuxième partie de cette thèse, un travail effectué avec B. Douçot, consistant en l'étude du modèle de Heisenberg AF sur le cactus de Husimi. Ce réseau est un ensemble de triangles connectés par leurs sommets dont le réseau dual est un arbre de Cayley. Il possède localement la structure du réseau Kagomé. Ce modèle est très dégénéré classiquement. Il constitue en quelque sorte un cadre de travail idéal pour étudier les effets locaux liés à l'ordre par le désordre, d'une part à cause de sa structure récursive qui permet de pousser relativement loin les calculs analytiques, et d'autre part, car il n'y a pas de mécanisme de sélection par les fluctuations thermiques tandis que ce dernier n'est que partiel au niveau quantique. Une des principales caractéristiques du cactus de Husimi est de posséder un ensemble d'états fondamental qui peut être décrit par une vraie variété différentiable. L'étude de la dynamique de spin (le spin est alors assimilé alors à un simple rotateur) à température nulle donne accès aux énergies de point zéro dues aux fluctuations quantiques. Cela constitue donc une analyse semi-classique. En analysant le voisinage de cette variété (c'est donc une analyse *locale*), je développerai une image géométrique du phénomène d'ordre par le désordre et montrerai qu'un mécanisme de sélection *local* par les fluctuations quantiques est inévitable lorsque la dégénérescence de l'état fondamental n'est pas protégée par une vraie symétrie de l'Hamiltonien.

Enfin, dans la dernière partie de cette thèse, je reviendrai sur la problématique posée dans la première partie se rapportant au comportement critique du modèle Ising-XY, un système possédant deux paramètres d'ordre couplés. J'aborderai ce problème sous un angle différent et d'emblée plus général. Dans le chapitre 4, j'utiliserai l'arsenal des théories de champs conformes pour analyser le comportement critique de modèles critiques couplés par un terme de type énergie-énergie analogue au modèle Ising-XY. J'étudierai

typiquement le comportement infrarouge d'un modèle d'Ising couplé à plusieurs modèles de Potts, l'idée étant de vérifier si des comportements critiques nouveaux (comparable à Ising-XY) peuvent survenir dans des problèmes à symétrie  $Z(2) \times Z(q)^N$ . Le formalisme est relativement analogue à celui utilisé pour l'étude des modèles d'Ising et de Potts en présence d'un faible désordre. Je profiterai de cette analogie pour étendre ces résultats en présence d'un faible désordre. Le chapitre 5 sera tout d'abord consacré à un bref panorama des systèmes bidimensionnels désordonnés et présentera notamment des résultats récents concernant le rôle du désordre sur les transitions de phase du premier ordre. Dans le chapitre 6, plus technique, je généraliserai les résultats du chapitre 4 par l'adjonction d'un faible désordre, et montrerai sur des exemples précis comment une transition du premier ordre pour le modèle pur peut devenir une transition du second ordre si on introduit un faible désordre.

## Première partie

Modèle **XY**  $J_1 - J_2$  et au-delà





# Chapitre 1

## Etude d'un modèle XY bidimensionnel classique frustré

Dans ce chapitre, je vais étudier un modèle frustré particulier, à savoir le modèle XY,  $J_1 - J_2$ , sur un réseau carré où  $J_1$  est une interaction ferromagnétique entre premiers voisins et  $J_2$  une interaction antiferromagnétique (AF) entre second voisins. L'étude de ce modèle va me servir d'exemple illustratif et de tremplin vers des notions plus générales qui feront l'objet de la deuxième et troisième partie de cette thèse.

Je vais tout d'abord rappeler quelques généralités sur le modèle XY et sur le formalisme qui permet d'étudier ce modèle. Ensuite, je rentrerai dans le vif du sujet en étendant ce même formalisme au modèle XY  $J_1 - J_2$  qui a fait l'objet de mon premier travail de thèse.

### 1.1 Généralités sur le modèle XY

#### 1.1.1 Transition de Kosterlitz-Thouless

Le modèle XY est un modèle de spins à deux composantes ( $\vec{S}_i = S_i^x, S_i^y$ ) soumises à la contrainte  $(S_i^x)^2 + (S_i^y)^2 = 1$ . L'Hamiltonien de ce modèle s'écrit :

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (1.1)$$

où  $\theta_i$  est l'angle fait par le vecteur  $\vec{S}_i$  par rapport à une direction arbitraire, et où la somme porte sur les plus proches voisins. A température nulle, l'état fondamental est de type ferromagnétique. L'énergie est invariante par une rotation globale de l'ensemble du système autour de l'axe orthogonal au plan où vivent les spins. D'après le théorème de Mermin-Wagner[16], une brisure spontanée de symétrie continue ne peut avoir lieu à  $D \leq 2$  dimensions. Le modèle de spins XY à deux dimensions ( $2D$ ) est original par le fait qu'il possède cependant, à basse température, un quasi-ordre à longue portée (ses fonctions de corrélation sont en loi de puissance). Néanmoins, la valeur moyenne du paramètre d'ordre local (aimantation) reste nulle. Il subit pourtant une transition de phase avec une

divergence de la susceptibilité, sa chaleur spécifique restant finie. Un nouveau mécanisme doit donc être invoqué pour ne pas violer le théorème de Mermin-Wagner. La transition est en fait induite par des défauts topologiques, plus précisément par des tourbillons ou vortex. où les spins tournent de  $\pm 2\pi$  lorsque l'on suit un parcours entourant le vortex. C'est la densité de vortex qui sert alors de paramètre d'ordre (non local). Ce nouveau mécanisme fut tout d'abord découvert par Berezinski [17] puis indépendamment par Kosterlitz et Thouless (KT) [18, 19]. Ces excitations, de nature topologique, correspondent à des configurations du système où les spins tournent de  $\pm 2\pi$  lorsque l'on suit un parcours entourant le vortex. J'ai représenté un exemple de vortex sur la figure 1.1.

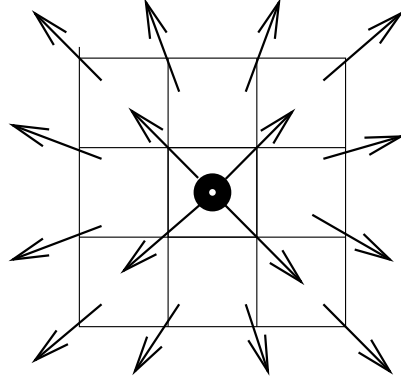


FIG. 1.1 - Représentation d'un vortex de vorticité +1. Le disque noir représente le centre du vortex

Le moyen le plus rapide de se convaincre de l'existence de ces vortex est de considérer la limite continue du modèle à basse température où les variations angulaires d'un site à l'autre sont minimales. L'Hamiltonien s'écrit :

$$H \approx \frac{1}{2}J \int d^2r (\nabla\theta)^2 \quad (1.2)$$

tandis que la fonction de partition s'exprime sous la forme :

$$Z = \int \mathcal{D}[\theta(x)] e^{-\beta J \int d^2r (\nabla\theta)^2}. \quad (1.3)$$

Les solutions minimisant l'action sont solutions de l'équation de Laplace  $\nabla^2\theta = 0$ . A part les solutions triviales constantes, cette équation possède également à  $2D$  des solutions singulières localisées qui sont justement les vortex ou tourbillons :

$$\theta = q \arctan \left[ \frac{y - y_0}{x - x_0} \right] \quad (1.4)$$

où  $q$  correspond à la charge entière du vortex ( $\oint dl \cdot \nabla\theta = 2\pi q$ ) et  $(x_0, y_0)$  aux coordonnées du vortex. En insérant la solution (1.4) dans (1.2), il est aisé de montrer que l'énergie associée à une paire de vortex s'écrit :

$$E_v = 2\pi J q_1 q_2 \log \frac{\rho_{12}}{a} \quad (1.5)$$

où  $\rho_{12}$  est la distance entre les vortex et  $a$  une constante qui peut être assimilée à la maille du réseau. On peut donner une première estimation de la température critique par des arguments d'énergie-entropie: dans une boîte de taille  $L$ , la contribution d'une paire vortex-antivortex ( $q_1 q_2 = -1$ ) à l'énergie libre est:

$$F \sim 4\left(\frac{1}{2}\pi J - T\right) \log L \quad (1.6)$$

Pour  $T < \frac{1}{2}\pi J = T_{KT}$ , cette contribution sera négligeable à la limite thermodynamique, par contre lorsque  $T > \frac{1}{2}\pi J$ , il est favorable de créer des paires vortex largement séparées d'où l'instabilité. Ces arguments simples indiquent une transition à la température  $T_{KT} = \frac{1}{2}\pi J$ . Pour plus de détails, je renvoie aux ouvrages, désormais classiques, de théorie statistique des champs [20, 21].

### 1.1.2 Modèle XY et représentation en terme de gaz de Coulomb

Dans cette section, je vais brièvement rappeler le traitement du modèle XY à l'aide de la transformée de Villain [22] qui permet de passer de l'étude d'un modèle de spins à un problème de gaz de Coulomb.

Je vais maintenant revenir à un traitement plus direct du modèle XY. La fonction de partition sur le réseau du modèle XY s'écrit:

$$\mathcal{Z} = \left( \prod_r \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_r \right) \exp \left( \beta J \sum_{\langle r, r' \rangle} \cos(\theta_r - \theta_{r'}) \right) \quad (1.7)$$

où  $\beta = \frac{1}{T}$ . L'approximation de Villain [22], valable à basse température, est la suivante:

$$\exp(\beta \cos(\theta - \theta')) \sim C \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp \left( -\frac{\beta}{2} (\theta - \theta' - 2\pi n)^2 \right) \quad (1.8)$$

Elle consiste en fait à faire un développement en fonction de Bessel et à utiliser le fait que  $\beta \gg 1$  pour donner une valeur approchée des fonctions de Bessel. Cette manipulation possède la vertu de remplacer une dépendance compliquée dans les variables  $\theta$  par une dépendance quadratique (au niveau de l'action). Si l'on applique cette transformation sur la fonction de partition du modèle XY (1.7), celle-ci devient:

$$\mathcal{Z} = \left( \prod_r \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_r \right) \sum_{\{n_{rr'}\}} \exp \left( -\frac{\beta J}{2} \sum_{\langle r, r' \rangle} (\theta_r - \theta_{r'} - 2\pi n_{rr'})^2 \right) \quad (1.9)$$

Dans cette équation, on a introduit sur chaque lien une variable entière  $n_{rr'}$  qui peut être assimilée à un champ de jauge. En effet, au cours de la transformation de jauge:

$$\begin{aligned}\theta_r &\rightarrow \theta_r + 2\pi k_r \\ n_{rr'} &\rightarrow n_{rr'} - (k_r - k_{r'}) ,\end{aligned}\tag{1.10}$$

l'action demeure invariante. Dans la mesure d'intégration, les variables  $\theta_r$  varient entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Afin de simplifier les notations, on introduit le vecteur unitaire de coordonnées  $e^\mu = (e^1, e^2)$  et l'équivalent de la dérivée sur le réseau  $\nabla^\mu \theta(r) = \theta(r + e^\mu) - \theta(r)$ . On peut étendre les bornes d'intégration entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , sans changer la physique (cela donne un facteur multiplicatif de volume qui ne joue aucun rôle au niveau des fonctions de corrélation). Ceci me permet d'intégrer sur les variables angulaires  $\theta$ . La fonction de partition s'écrit alors  $\mathcal{Z} = Z_{SW} \cdot Z_v$  où  $Z_{SW}$  représente la partie onde de spin:

$$Z_{SW} = \int \mathcal{D}\theta \exp \left[ -\frac{\beta J}{2} \sum_{r,\mu} [(\nabla^\mu \theta(r))^2] \right]\tag{1.11}$$

et  $Z_v$  la partie vortex:

$$Z_v = \sum_{\{n_r^\mu\}} \exp \left[ -2\pi^2 \beta J \sum_r n_r^\mu \left[ \delta^{\mu\nu} - \nabla^\mu \frac{1}{\nabla^2} \nabla^\nu \right] n_r^\nu \right]\tag{1.12}$$

avec  $\nabla^2 = \nabla^\mu \cdot \nabla_\mu$ .

$P = \frac{1}{\nabla^2}$  indique en fait le propagateur défini sur le réseau par sa transformée de Fourier  $P(k) = \left( \sum_\mu 4 \sin^2 \frac{k^\mu}{2} \right)^{-1}$ . Dans l'espace réel, ce propagateur s'écrit par transformée de Fourier inverse dans la limite  $r \gg 1$ :

$$P(r) \approx -\frac{1}{2\pi} \log(r) - \frac{1}{4}.\tag{1.13}$$

En utilisant l'identité:

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\gamma} = \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\gamma} - \delta^{\mu\gamma} \delta^{\nu\alpha}$$

on montre aisément que :

$$n_r^\mu \left[ \delta^{\mu\nu} - \nabla^\mu \frac{1}{\nabla^2} \nabla^\nu \right] n_r^\nu = m_r \frac{1}{\nabla^2} m_r ,\tag{1.14}$$

où  $m_r = \epsilon^{\mu\nu} \nabla^\mu n_r^\nu$  et  $\epsilon^{\mu\nu}$  est le tenseur complètement antisymétrique. Cette quantité  $m_r$  représente dans cette formulation la vorticité au point  $r$ . Elle est en fait définie sur le réseau dual comme le rotationnel sur une plaquette (du réseau initial) de la variable de lien  $n$ . Après ces transformations, l'action associée aux variables de type vortex s'écrit dans l'espace réel:

$$\mathcal{A}_v = \sum_{r \neq r'} -\pi \beta J m_r \log |r - r'| m_{r'} + \frac{\pi^2 \beta J}{2} \sum (m_r)^2\tag{1.15}$$

Elle décrit maintenant un gaz de Coulomb où les charges sont cette fois-ci des charges topologiques. Le second terme dans l'action peut être interprété comme provenant de l'énergie de coeur dur d'un vortex ou d'un potentiel chimique de valeur  $\pi^2\beta J/2$ . Avant d'aborder la renormalisation de ce gaz de Coulomb, deux remarques peuvent être formulées:

- Tout d'abord, ce type de transformation reliant le modèle XY à un modèle de gaz de Coulomb peut se généraliser lorsque l'on a plusieurs modèles XY (avec des températures différentes) [23]. Dans ce cas, on a à faire à un gaz de Coulomb avec plusieurs espèces de charges éventuellement couplées. J'en donnerai des exemples par la suite.
- De plus, ce type d'équivalence entre modèles peut être relié dans un cadre géométrique plus général à des transformations de dualité Abélienne. J'ai exposé, dans l'annexe A en fin de manuscrit, la transformation de Villain sur un réseau hypercubique généralisant les résultats ci-dessus. Cette généralisation apparaît dans un langage purement géométrique comme une conséquence directe des théorèmes de Hodge-De Rham.

### 1.1.3 Renormalisation et diagramme de phase

Pour obtenir le flot de renormalisation du modèle XY, on utilise une extension de sa formulation en termes de gaz de Coulomb:

$$\mathcal{A}_v = \sum_{r \neq r'} -2\pi\beta J m_r \log |r - r'| m_{r'} + \log z \sum_r (m_r)^2 \quad (1.16)$$

où  $z$  correspond en fait à une fugacité quelconque.

Pour obtenir le flot de renormalisation associé à ces deux paramètres, plusieurs méthodes peuvent être utilisées. J'en distinguerai trois.

i) La méthode la plus directe consiste à utiliser le langage et les propriétés du gaz de Coulomb à savoir la renormalisation de la constante diélectrique et de la polarisabilité d'une paire de charges. Ce fut celle qui fut initialement proposée par Kosterlitz et Thouless [18] puis reformulée par Young [24]. On trouvera une revue complète sur le sujet dans [25, 26].

ii) La seconde méthode repose sur une transformations de dualité reliant le modèle de gaz de Coulomb et le modèle de sine-Gordon. Plus précisément, si l'on rajoute au modèle XY initial (1.1) un terme de couplage avec un champ extérieur, de type  $2h \sum_r \cos q\theta_r$ ,  $q$  entier, il est aisé de montrer que la fonction de partition  $Z_v$  associée à l'action généralisée:

$$A = \beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) + 2h \sum_r \cos q\theta_r + \log z \sum_{plaq.} (m_p)^2, \quad (1.17)$$

satisfait dans le cadre de l'approximation de Villain à la relation de dualité [27]:

$$Z_v\left(\frac{q^2 T}{2\pi}, z, h\right) = \left(\frac{2\pi}{qT}\right)^N Z_v\left(\frac{2\pi}{T}, h, z\right) \quad (1.18)$$

avec  $N$  le nombre total de spins. Dans la limite  $z \rightarrow 0$  (donc à basse température), l'action (1.17) se réduit au modèle de sine-Gordon, reliant ainsi ce dernier au modèle XY. Amit *et al.* [28] ont étudié la renormalisation du modèle de sine-Gordon par une approche diagrammatique, donc plus systématique. Ils ont ainsi obtenu le flot associé aux deux paramètres du modèle (leur flot inclut les termes d'ordre cubique, contrairement au flot proposé par Kosterlitz et Thouless [18, 19]).

iii) Enfin, une autre méthode consiste en une renormalisation directe dans l'espace réel et repose simplement sur le fait que deux charges opposées proches l'une de l'autre n'ont que des effets à courte distance. Cette dernière méthode est exposée dans l'annexe B dans le cadre plus général d'un gaz de Coulomb à plusieurs espèces en interaction avec en plus une anisotropie spatiale.

Le flot obtenu en négligeant les termes du troisième ordre est le suivant:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dl} &= -4\pi^3 \beta^2 z^2, \\ \frac{dz}{dl} &= -z(\pi\beta - 2). \end{aligned} \quad (1.19)$$

L'allure de ce flot est représentée sur la figure (Fig. 1.2). L'intégration du flot peut s'effectuer directement, les trajectoires du groupe de renormalisation ont la forme:

$$z^2 = \frac{1}{2\pi^3}(2T - \pi \log T) + C \quad (1.20)$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

Sur ce diagramme de flot, on peut distinguer trois types de trajectoires. Les trajectoires de type I convergent vers une ligne de points fixes attractifs caractérisée par  $T^* < T_{KT} = \frac{\pi J}{2}$  et une fugacité nulle. Cela correspond à la région où la description par les ondes de spin reste valable. La fonction de corrélation spin-spin  $\Gamma(r, T)$  décroît algébriquement comme:

$$\Gamma(r, T) \propto \frac{1}{r^{\eta(T)}} \quad (1.21)$$

avec  $\eta(T) = \frac{T}{2\pi J}$ . En fait chacun des points de la région I est critique (mais pas fixe!).

Par contre, la ligne de points fixes  $T^* > T_{KT}$ ,  $z^* = 0$  est très instable (c'est une ligne de points fixes dans l'ultraviolet) et le flot dans les régions II et III est conduit vers des régions de couplage fort et de haute fugacité. Il est clair que ce flot n'a de sens qu'au voisinage de la transition de Kosterlitz-Thouless, c'est à dire à basse densité.

L'image, en termes de gaz de Coulomb, que l'on peut donner à ce flot est la suivante: à basse température, les vortex (charges) sont groupés en paires neutres et n'influencent

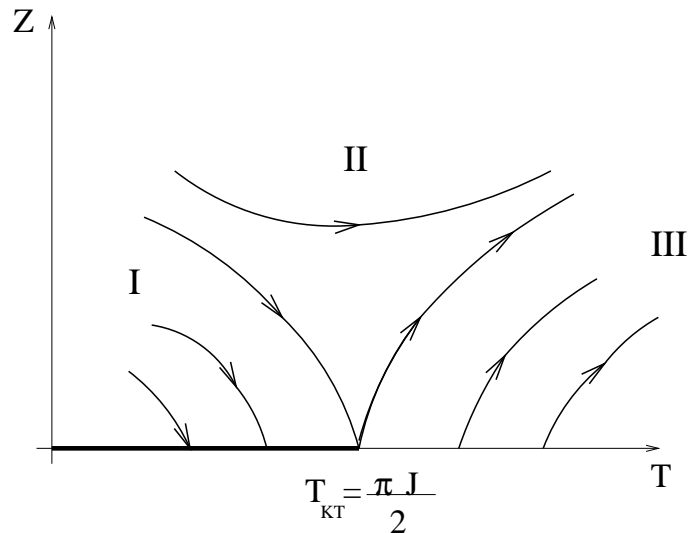


FIG. 1.2 - Flot de renormalisation du modèle XY. Le segment en gras est une ligne de points fixes et  $T_{KT}$  est la température de transition de Kosterlitz-Thouless

pas le comportement longue distance du modèle qui est alors décrit par une théorie libre. C'est donc une phase isolante d'un point de vue gaz de Coulomb. A haute température, les charges se libèrent et écrantent le système. C'est la phase conductrice. La transition est d'ordre infini et est caractérisée par une divergence de la longueur d'écran de Debye.

Il faut mentionner, qu'au niveau de la transition de Kosterlitz-Thouless, la valeur de l'exposant  $\eta$  est universelle et vaut  $1/4$ .

### 1.1.4 Extension de ces résultats

Une question toujours d'actualité concerne la nature du flot à plus haute densité. Le premier résultat allant au-delà du flot donné par Kosterlitz et Thouless est dû à Amit *et al.* comme cela a déjà été mentionné. Minnhagen [29] a étendu le flot de KT à l'aide d'une expansion en cumulant d'ordre infini en  $z$  (cela revient à resommer une infinité de diagramme). Une nouvelle température critique  $T^* < T_{KT}$  avec une fugacité  $z^* > 0$  a été suggérée par Minnhagen. Cette dernière correspondrait à la fin de la ligne de transition de Kosterlitz-Thouless. Pour  $T < T^*$ , une ligne de transition du premier ordre remplacerait la ligne KT [30, 31]. L'existence ou non de cette ligne de transition du premier ordre a été beaucoup discutée dans plusieurs articles [32, 33, 34, 35]. Il n'y a toujours pas de réponses claires à cette question.

D'autres scénarios ont été invoqués. Par exemple, Levin *et al.* [36, 37] ont prédit que la ligne KT se termine en un point tri-critique au-delà duquel on trouverait une nouvelle phase où coexisteraient la phase isolante et la phase conductrice. Dans une autre extension des équations de KT développée récemment par Timm [38], prenant en compte l'aspect géométrique ("volume occupée par une paire de vortex") des paires de vortex à plus



haute densité, aucune transition du premier ordre n'a été trouvée. Il est clair que toutes ces extensions coïncident au niveau du point de Kosterlitz-Thouless.

Les simulations numériques (Monte Carlo) sont plus en faveur d'une transition du premier ordre lorsque une faible énergie de coeur dur est incluse pour les vortex [39, 40, 41, 42]. Il est également à noter qu'à ce jour, aucune mise en évidence expérimentale permettant de favoriser un scénario plutôt qu'un autre n'a été possible. A plus haute densité, la question est encore plus compliquée car on ne dispose pas vraiment d'outils analytiques. Lie et Teitel [40, 41] ont effectué des simulations numériques du modèle de gaz de Coulomb sur un réseau. Ils ont trouvé une ligne de transition du premier ordre se prolongeant à haute densité de vortex jusqu'à une phase cristalline de vortex au dessus d'une certaine densité critique. Cette phase cristalline serait caractérisée par une alternance de vortex de charges opposées. Un tel scénario a également été développé par Gabay et Kapitulnik [43] (voir aussi Zhang [44]) avec une phase cristalline (au dessus d'une fugacité  $z^*$ ) séparant la phase conductrice traditionnelle (où les paires vortex-antivortex sont liées) et la phase plasma de vortex. Ces études supposent l'existence sous-jacente d'un réseau. Plus récemment, Lidmar et Wallin [42], ont essayé de se débarrasser de cette contrainte. Leurs résultats semblent indiquer que ce cristal de vortex ne subsiste pas à la limite continue et ce, même pour une faible température. Néanmoins, les temps de calculs sont, dans de tels régimes de basse température, énormes et leur conclusion est peut-être erronée. La question de la nature du diagramme de phase loin du point critique de Kosterlitz-Thouless demeure donc à ce stade assez incertaine et nécessite encore de nombreux travaux aussi bien numériques qu'analytiques.

### 1.1.5 Vérifications expérimentales

Un grand nombre de systèmes magnétiques réels peuvent être correctement décrits par les modèles d'Ising et d'Heisenberg. Certains composés possèdent une anisotropie planaire suffisamment forte pour constituer des réalisations expérimentales du modèle 2D XY. On peut citer par exemple les composés de la famille  $\text{BaM}_2(\text{XO}_4)$  avec  $\text{M}=\text{Co}$ ,  $\text{Ni}$  et  $\text{X}=\text{P}$ ,  $\text{As}$  [45]. Dans ces composés, le comportement critique est de type KT. D'autres composés ont un comportement critique similaire, je renvoie pour cela à [46, 47].

Une autre application importante du modèle XY concerne la transition superfluide-normal dans les films d' $^4\text{He}$ . Nelson et Kosterlitz [48] ont prédit le saut universel de la densité superfluide lorsque la température critique est approchée inférieurement. Les auteurs sont partis de l'Hamiltonien effectif suivant:

$$h = -\frac{1}{2}K \int d^2r (\nabla\phi)^2 + \pi K \int \int d^2r d^2r' n(r)n(r') \log|r-r'| + \log y \int d^2r n^2(r) \quad (1.22)$$

où  $K = \frac{\rho_0 \hbar^2}{m^2 k_B T}$ , avec  $\rho_0$  la densité superfluide initiale et  $m$  la masse d'un atome d'Hélium.

Le premier terme correspond à la partie continue du potentiel associé à la vitesse superfluide et le second terme aux tourbillons ( $n(r)$  est un champ à valeur entière). Cet Hamiltonien est similaire à la représentation en gaz de Coulomb du modèle XY. Il est ensuite aisé à partir des équations de flot du modèle XY, d'en déduire comment se renormalise la densité superfluide au voisinage de la transition:

$$\lim_{T \rightarrow T_c^-} K_R = \lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{\rho_s(T) \hbar^2}{m^2 k_B T} = \frac{2}{\pi}. \quad (1.23)$$

Nelson et Kosterlitz ont ainsi pu prédire qu'à la transition

$$\lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{\rho_s(T)}{T} = \text{const}$$

quelles que soient les conditions initiales, ce qui a été vérifié expérimentalement par la suite.

Le modèle XY a bien d'autres applications par exemple dans les films supraconducteurs [49] ou dans les cristaux liquides [50].

Le modèle XY est également dans la même classe d'universalité que le modèle SOS (solid on solid) décrivant la transition d'une interface lisse sur une interface rugueuse (ce point sera détaillé au chapitre suivant). Cela a pu être vérifié expérimentalement [51, 52].

Un dispositif expérimental découlant des supraconducteurs granulaires permet d'étudier la transition de Kosterlitz-Thouless. Il s'agit d'un réseau de jonctions Josephson qui est représenté schématiquement sur la Figure 1.3

Chaque élément est constitué d'un îlot supraconducteur central et d'une liaison Josephson à chacune de ses branches qui permet de les connecter entre-eux. A chaque grain supraconducteur  $i$ , on peut associer une variable  $\theta_i$ , qui représente la phase du paramètre d'ordre supraconducteur de ce grain. Si les couplages Josephson sont tous de type ferromagnétique, le montage ci-dessus est isomorphe au modèle XY [53, 54, 55]. Ce type de réalisation est surtout utile si l'on cherche à étudier des extensions du modèle XY. J'y reviendrai au chapitre suivant.

## 1.2 Etude du modèle XY $J_1 - J_2$ sur réseau carré

### 1.2.1 Présentation du modèle

Le modèle que je vais présenter consiste en une extension du modèle XY, dans lequel une constante de couplage antiferromagnétique au-delà des plus proches voisins a été ajouté à l'Hamiltonien. Ce travail a fait l'objet de la première partie de ma thèse (voir aussi [56, 57]).

L'Hamiltonien s'écrit:

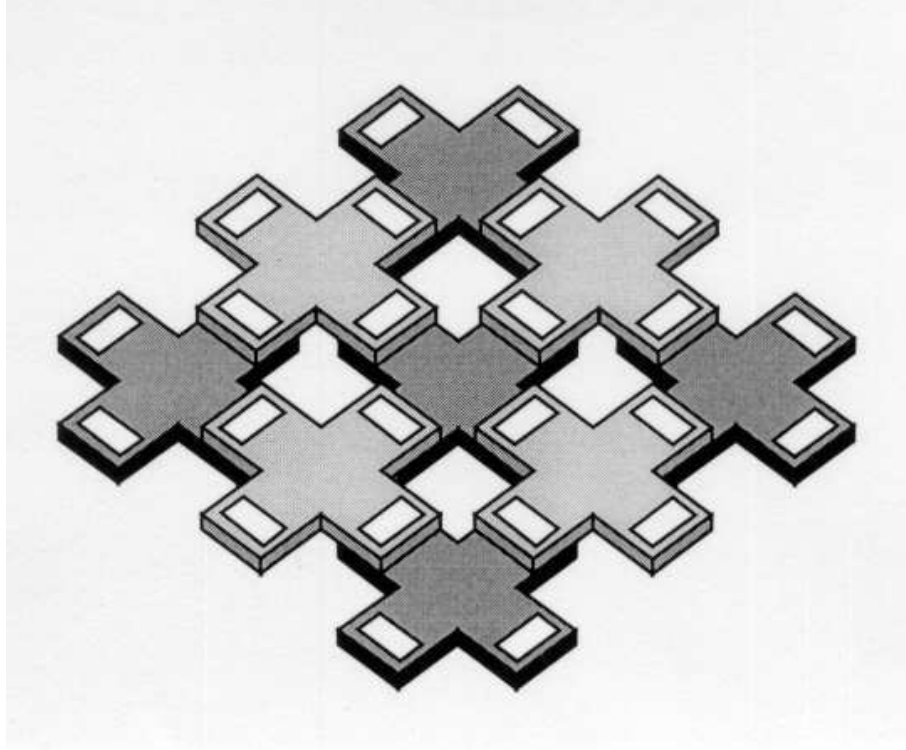


FIG. 1.3 - Montage expérimental d'un réseau de jonctions Josephson reliant les différents éléments supraconducteurs.

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{\langle x, x' \rangle} \cos(\theta_x - \theta_{x'}) + J_2 \sum_{\langle\langle x, x' \rangle\rangle} \cos(\theta_x - \theta_{x'}) \quad (1.24)$$

où le symbole  $\langle \dots \rangle$  correspond aux premiers voisins et  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  au seconds voisins. Ce modèle peut être réalisé dans les modèles bi-couches (de  $MnTe$  dans  $CdTe$ ), ou bien dans des couches de  $CuO_2$  centrées les unes sur les autres ( $J_1$  est alors constante d'échange entre couches). Comme on le verra à la section 1.3, l'étude de ce type de modèles frustrés a également été motivée pour la supraconductivité à haute température critique.

Tout d'abord, il faut distinguer deux domaines bien distincts dans l'espace des paramètres. Pour  $\eta = J_2/J_1 < 1/2$ , l'état fondamental classique est de type ferromagnétique. Par contre pour  $\eta = J_2/J_1 > 1/2$ , le système se décompose en deux sous-réseaux indépendants (de maille  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ ) avec un ordre AF sur chaque sous-réseau (voir la figure 1.4) [58, 59, 60, 56]. En effet l'énergie de l'état fondamental vaut  $E_0 = -4NJ_2$ ,  $N$  étant le nombre de sites, et est indépendante de  $J_1$ .

Le point  $\eta = 1/2$  est très particulier car *a priori* les deux états fondamentaux sont possibles. Néanmoins, vu la forme de l'Hamiltonien de départ, il reste la contrainte sur

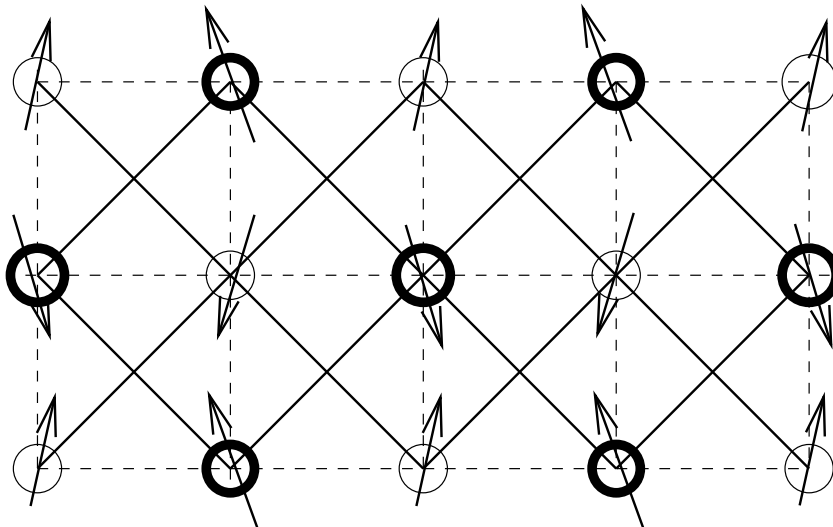


FIG. 1.4 - *Etat fondamental pour  $\eta > 1/2$ . J'ai représenté un angle arbitraire entre les sous-réseaux*

chaque plaquette du réseau que  $\sum_{\text{plaquette}} \vec{S}_i = \vec{0}$ .

### 1.2.2 Etude de la phase faiblement frustrée

Du fait que l'état fondamental reste ferromagnétique, on va pouvoir appliquer la transformation de Villain sur chacun des termes en cosinus, étendant ainsi la relation (1.8). La fonction de partition peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \left( \prod_{\vec{x}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_{\vec{x}} \right) \exp(\beta J_1 \sum_{\langle x, x' \rangle} \cos(\theta_{\vec{x}} - \theta_{\vec{x}'}) - \beta J_2 \sum_{\langle\langle x, x' \rangle\rangle} \cos(\theta_{\vec{x}} - \theta_{\vec{x}'})) \\ &= \left( \prod_{\vec{x}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_{\vec{x}} \right) \sum_{\{n_{\vec{x}}^{\mu}\}, \{\tilde{n}_{\vec{x}}^{\alpha}\}} \exp\left(-\frac{\beta J_1}{2} \mathcal{A}(\theta_{\vec{x}}, n_{\vec{x}}^{\mu}, \tilde{n}_{\vec{x}}^{\alpha})\right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

où,

$$\mathcal{A}(\theta_{\vec{x}}, n_{\vec{x}}^{\mu}, \tilde{n}_{\vec{x}}^{\alpha}) = \sum_{\vec{x}, \mu} (\theta_{\vec{x} + \vec{e}_{\mu}} - \theta_{\vec{x}} - 2\pi n_{\vec{x}}^{\mu})^2 - \eta \sum_{\vec{x}, \alpha} (\theta_{\vec{x} + \vec{e}_{\alpha}} - \theta_{\vec{x}} - 2\pi \tilde{n}_{\vec{x}}^{\alpha})^2. \quad (1.26)$$

Dans ces équations, j'ai défini les indices  $\mu = 1, 2$ ,  $\alpha = 1, 2$  indiquant respectivement les directions  $\vec{i}, \vec{j}$  du réseau carré ( $1 \times 1$ ) et les directions  $(\vec{i} + \vec{j}), (\vec{j} - \vec{i})$  des réseaux  $(\sqrt{2} \times \sqrt{2})$ . Le symbole  $\{n_{\vec{x}}^{\mu}\}, \{\tilde{n}_{\vec{x}}^{\alpha}\}$  signifie que l'on somme en chaque site sur quatre variables de liens entières. Lorsque l'on met à zéro ces variables de liens, on retrouve l'action des ondes de spin. D'ailleurs, on aurait très bien pu inclure directement la  $2\pi$ -périodicité sur chaque terme quadratique de l'action associée aux ondes de spin (c'est ce que l'on utilise dans les théories de jauge sur réseau [61]). Il est clair que cette expression

n'est valide que pour  $\eta < \frac{1}{2}$ . Comme dans la section 1.1.2, on définit les dérivées sur réseau  $\nabla^\mu \theta(x) = \theta(x + \mu) - \theta(x)$  et  $\tilde{\nabla}^\alpha \theta(x) = \theta(x + \alpha) - \theta(x)$  que l'on a modifiées dans (1.26) par l'ajout de variables de liens pour rendre l'action invariante de jauge à travers les transformations:

$$\begin{aligned} \theta(x) &\rightarrow \theta(x) + 2\pi k(x) \\ n_x^\mu &\rightarrow n_x^\mu - \nabla^\mu k(x) \\ \tilde{n}_x^\alpha &\rightarrow \tilde{n}_x^\alpha - \tilde{\nabla}^\alpha k(x) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

La prochaine étape consiste à trouver une action duale en terme de variables de vorticité. On ne peut pas appliquer les résultats de Kadanoff [23] (plusieurs modèles XY couplés) car les variables de liens ne vivent pas sur les mêmes réseaux. On est donc obligé de suivre une procédure plus pédestre donc plus lourde.

Dans un premier temps, on effectue l'intégration sur les variables  $\theta(x)$ . Dans ce cas, la fonction de partition s'écrit  $\mathcal{Z} = Z_{SW} \cdot Z_V$  avec:

$$Z_{SW} = \int \mathcal{D}\theta \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \sum_{x,\mu,\alpha} [(\nabla^\mu \theta(x))^2 - \eta(\tilde{\nabla}^\alpha \theta(x))^2] \right] , \quad (1.28)$$

la partie onde de spin et

$$\begin{aligned} Z_V &= \sum_{\{n_x^\mu\}\{\tilde{n}_x^\alpha\}} \exp \left[ -2\pi^2 \beta n_x^\mu [\delta^{\mu\nu} - \nabla^\mu \mathcal{P} \nabla^\nu] n_x^\nu \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 \eta n_x^\mu [\nabla^\mu \mathcal{P} \tilde{\nabla}^\alpha] \tilde{n}_x^\alpha - 2\pi^2 \eta^2 \tilde{n}_x^\alpha [\delta^{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}^\alpha \mathcal{P} \tilde{\nabla}^\beta] \tilde{n}_x^\beta \right] . \end{aligned} \quad (1.29)$$

la partie vortex. Le symbole  $\mathcal{P}$  représente le propagateur sur réseau tenant compte des deux interactions. En transformée de Fourier:

$$(\mathcal{P})(\vec{k}) = \left( \sum_\mu 4 \sin^2 \frac{k_\mu}{2} - \sum_\alpha 4\eta \sin^2 \frac{k_\alpha}{2} \right)^{-1} . \quad (1.30)$$

Par transformée de Fourier inverse, on obtient le propagateur dans l'espace réel. A grande distance, on peut montrer en généralisant [62] que le potentiel d'interaction  $\mathcal{V}(x)$  vaut:

$$\mathcal{V}(x) \approx \frac{-1}{2\pi} \frac{1}{1-2\eta} \ln \left( 4|x| e^\gamma \sqrt{\frac{1-2\eta}{2}} \right) . \quad (1.31)$$

Par contre à courte distance de l'ordre de la maille du réseau on peut montrer que :

$$\mathcal{V}(a) \propto \frac{1}{\sqrt{1-2\eta}} . \quad (1.32)$$

Après quelques manipulations un peu fastidieuses, l'action associée aux vortex s'écrit [56]:

$$\mathcal{A}(n^\nu, \tilde{n}^\alpha) = \sum_x -2\pi^2\beta(m_1(x)\mathcal{P}m_1(x) + \eta^2 m_2(x)\mathcal{P}m_2(x) + \eta m_3^{\mu\alpha}(x)\mathcal{P}m_3^{\mu\alpha}(x)) , \quad (1.33)$$

avec

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \epsilon_{\mu\nu} \nabla^\mu n_x^\nu \\ m_2(x) &= \epsilon_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^\alpha \tilde{n}_x^\beta \\ m_3^{\mu\alpha}(x) &= \tilde{\nabla}^\alpha n_x^\mu - \nabla^\mu \tilde{n}_x^\alpha \end{aligned} \quad (1.34)$$

Que définissent ces variables?

$m_1$  est la vorticité usuelle du modèle XY,  $m_2$  est la généralisation de  $m_1$  mais définie sur le réseau  $(\sqrt{2} \times \sqrt{2})$  et finalement les variables  $m_3^{\mu\alpha}$  mélangent des liens  $n$  et  $\tilde{n}$ . Elles correspondent à des variables de contour sur des trapèzes  $(\sqrt{2} \times 1)$  (il y en a quatre!). Ces variables définissent tous les contours fermés à 4 liens possibles. Il ne faut pas oublier qu'en chaque site, il y a quatre variables de liens plus une contrainte de jauge (1.27) ce qui fait trois degrés de liberté restants. Dans ce cas, les variables  $m_1, m_2, m_3$  ne sont pas indépendantes et donc mal appropriées pour décrire les excitations élémentaires du système. Le problème provient du fait que l'on ne peut pas définir comme dans le cas du modèle XY simple un réseau dual et de fait les variables  $m_2$  et  $m_3$  ne sont pas vraiment locales. On n'est donc contraint de définir un nouveau jeu de variables à savoir:

$$\begin{aligned} t_1(x) &= n_x^1 + n_{x+\vec{i}}^2 - \tilde{n}_x^1 \\ t_2(x) &= -n_x^2 - n_{x+\vec{j}}^1 + \tilde{n}_x^1 \\ t_3(x) &= n_x^1 - n_x^2 - \tilde{n}_{x+\vec{i}}^2 . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ces variables sont indépendantes par construction. Elles correspondent à des contours associées à des plaquettes triangulaires. On peut r  crire l'action (1.33) en terme de ces nouvelles variables  $t_i$  vivant sur des triangles:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx \sum_{x \neq x'} -2\pi^2\beta \left( (1 - 2\eta)^2 (t_1(x) + t_2(x)) \mathcal{V}(x - x') (t_1(x') + t_2(x')) + \dots \right) , \\ &= \sum_{x \neq x'} \pi\beta(1 - 2\eta) m_1(x) \ln|x - x'| m_1(x') + \dots \end{aligned} \quad (1.36)$$

car  $m_1(x) = (t_1(x) + t_2(x))$ . J'ai en fait négligé les autres termes car ils sont associés aux dérivées du potentiel et se comportent donc à large distance comme  $\frac{1}{|x-x'|^p}$  avec  $p$  entier. Des termes de ce type sont inessentiels dans la limite infrarouge comparés à l'interaction Coulombienne. De tels termes apparaissent à cause de la non-localité des

variables  $m_2$  et  $m_3$ . L'action (1.36) est très simple. Elle contient un seul type de vortex défini sur le réseau  $1 \times 1$ . L'interaction antiferromagnétique au-delà des plus proches voisins demeure trop faible pour créer des vortex. L'inverse de la température se retrouve simplement renormalisé par un facteur  $(1 - 2\eta)$ . Ce résultat n'a rien d'étonnant. En effet, on aurait pu dérivé formellement les mêmes résultats avec  $J_2 < 0$ . Or on sait par des arguments d'universalité qu'une interaction "non-frustrante" (qui ne change pas la nature du fondamental) ne doit pas modifier le comportement infrarouge. Par conséquent les autres excitations doivent être non-pertinentes à grande distance.

La température de transition de Kosterlitz-Thouless est simplement:

$$T_{KT} = \frac{\pi J_1(1 - 2\eta)}{2}. \quad (1.37)$$

Au niveau du diagramme de phase, on aura donc une ligne de transition séparant une région quasi-ordonnée d'une région désordonnée pour  $\eta < \frac{1}{2}$  (voir Fig. 1.5). Il est clair que ce raisonnement n'est valable que lorsque l'on est loin du point  $J_1 = 2J_2$ . Il n'y a plus d'interaction à longue portée et le potentiel que j'ai utilisé n'a plus de raisons d'être valable. On a vu que le potentiel à courte portée possédait une singularité en  $(1 - 2\eta)^{-\frac{1}{2}}$  (comparée à  $(1 - 2\eta)^{-1}$  à longue distance). Ceci va donc modifier le comportement linéaire de  $T_{KT} = f(\eta)$ . Dans le cas de systèmes héliomagnétiques, Garel et Doniach [63] ont trouvé un comportement en  $T_{KT} = \sqrt{1 - 2\eta}$  (à l'aide d'une analyse de type Ginzburg-Landau qui *a priori* n'a pas plus de raisons d'être valable ici).

Au voisinage du point  $\eta = \frac{1}{2}$ , la température de Kosterlitz-Thouless s'annule. Ceci n'a rien de surprenant dans la mesure où il n'y a plus d'interactions longue portée. Il demeure seulement la contrainte:

$$\sum_{\text{plaquette}} \vec{S}_i = \vec{0},$$

qui est vérifiée par les vortex. Le fait d'avoir une transition classique à température nulle oblige à incorporer les fluctuations quantiques, ce que je ferai dans la section 1.3.

### 1.2.3 Etude de la phase complètement frustrée

Je vais maintenant considérer le cas  $J_1 < 2J_2$ . On a vu que le fondamental (Fig. 1.4) consistait en deux sous-réseaux indépendants avec sur chacun un ordre antiferromagnétique. L'état fondamental classique est par conséquent fortement dégénéré. Néanmoins, comme l'a prouvé Henley, cette dégénérescence est levée par les fluctuations thermiques ou bien les fluctuations quantiques. Cela constitue un effet d'ordre par le désordre. Cela aura des conséquences importantes comme on va le voir. Le phénomène d'ordre par le désordre est très courant dans les systèmes frustrés et fera l'objet d'une étude générale dans la deuxième partie de cette thèse. Les fluctuations thermiques sélectionnent un ordre

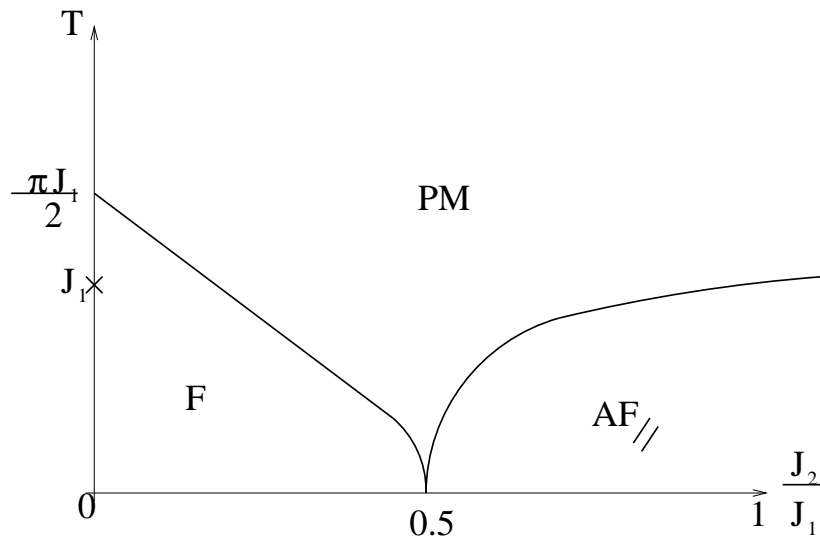


FIG. 1.5 - Diagramme de phase schématique du modèle XY  $J_1 - J_2$ .  $F$  correspond à la phase ferromagnétique,  $AF_{//}$  à la phase nématique et  $PM$  à la phase paramagnétique.

nématique ou collinéaire [58, 59]. Pour voir cela, il suffit de regarder les petites fluctuations autour d'une configuration d'équilibre  $\{\theta_i\}$  paramétrée par l'angle  $\phi$  entre les deux sous-réseaux. Pour cela on écrit  $\theta_i = \theta_i^0 + \delta\theta_i$  puis on ne conserve que les termes quadratiques en  $\delta\theta_i$  dans l'action. En transformée de Fourier, l'Hamiltonien associées à ces fluctuations s'écrit :

$$\delta H(\phi) = -N \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} [J_1(\cos q_x - \cos q_y) - 2J_2(1 - \cos q_x \cos q_y)] |\delta\theta_q|^2 \quad (1.38)$$

En intégrant sur les fluctuations de phase, on obtient une action effective  $S_0(\phi)$  pour l'angle  $\phi$  :

$$-S_0(\phi) = const - 0.32 \left( \frac{J_1 \cos(\phi)}{2J_2} \right)^2. \quad (1.39)$$

Il est clair que les configurations telles que  $\cos(\phi) = \pm 1$  sont favorisées.

Je vais maintenant au-delà des ondes de spin et étudier le rôle des vortex.

L'idée est tout d'abord de se ramener à une action effective avec un fondamental ferromagnétique. J'ai effectué tout d'abord une expansion en gradient de l'énergie (1.24) en suivant par exemple [64]. Cela revient pour chaque plaquette  $(1 \times 1)$ , à regrouper deux par deux les spins diagonalement opposés au centre de la plaquette. On a alors à faire à une théorie effective sur un réseau carré de taille  $2 \times 2$  par rapport à l'ancien avec deux spins 1 et 2 par sites. Il reste ensuite à effectuer un changement d'échelle pour se ramener à un réseau de maille 1. Dans la suite de cette section, le nouveau réseau sera noté (N) et l'ancien (A). La nouvelle action classique dans le réseau (N) s'écrit à l'approximation des ondes de spins :



$$\mathcal{A} = \frac{2J_2}{2T} \sum_x \left[ \sum_{i=1,2} (\nabla\theta_i)^2 + 2\lambda \cos\phi (\nabla^x\theta_1 \nabla^x\theta_2 - \nabla^y\theta_1 \nabla^y\theta_2) \right] \quad (1.40)$$

où l'on a introduit les dérivées sur réseau  $\nabla^x$ ,  $\nabla^y$  et défini  $\lambda = \frac{J_1}{2J_2}$  et  $\phi$  l'angle entre les spins de type 1 et 2. Si, dans la fonction de partition, on effectue l'intégration sur  $\theta_i$ , on trouve l'énergie associée aux ondes de spin calculée précédemment:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{SW}(\phi) &= \text{const} - \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} \log[2J_2(q_x^2(1 - \lambda \cos(\phi)) + q_y^2(1 + \lambda \cos(\phi)))] \\ &= \text{const} - 0.32 \left( \frac{J_1 \cos(\phi)}{2J_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.41)$$

L'énergie des ondes de spin est minimale lorsque  $\phi = 0$  ou  $\phi = \pi$ . Cette dégénérescence discrète résiduelle va jouer le rôle d'un paramètre d'ordre type Ising. En effet, si l'on définit dans l'ancien réseau (A):

$$\tau_i = \left[ \frac{(S_i - S_k) \cdot (S_j - S_l)}{4} \right], \quad (1.42)$$

où les sites  $i, j, k, l$  forment les quatre côtés d'une plaquette qui a pour diagonales  $(ik)$  et  $(jl)$ . Il est clair que pour un ordre collinéaire,  $\tau_i = \pm 1$ . Au niveau numérique, le paramètre d'ordre de type Ising est défini par:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \langle \tau_i \rangle \quad (1.43)$$

il faut maintenant essayer d'intégrer la partie vortex dans cette analyse qui est fondamentale pour le modèle XY.

### Une première approche

On va tout d'abord chercher à inclure la  $2\pi$  périodicité des variables  $\theta_1, \theta_2$ . Avant d'écrire une action effective pour ce modèle, je vais procéder de la manière la plus générale qu'il soit en appliquant la transformée de Villain sur chaque terme quadratique. Cette méthode va s'avérer trop naïve mais est néanmoins très instructive.

Un spin paramétrisé par  $\theta_1(r)$  interagit avec  $\theta_1(r+e^\mu)$  mais aussi avec  $\theta_2(r+e^\nu)$ ,  $\mu, \nu = 1, 2$  indiquant les directions des vecteurs de base du nouveau réseau (N). On introduit pour chaque interaction une variable de lien, soit quatre variables de liens par sites. La première étape consiste tout d'abord à diagonaliser la forme quadratique en  $\theta_i$  et d'introduire les variables de liens ensuite. On aurait pu directement introduire les variables de liens et diagonaliser ensuite. Les résultats restent identiques mais après quelques transformations de jauge non triviales. La fonction de partition se met sous la forme:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_1^\mu(r), l_1^\mu(r)\}} \sum_{\{n_2^\mu(r), l_2^\mu(r)\}} \int \mathcal{D}\theta_1 \mathcal{D}\theta_2 e^{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}, \quad (1.44)$$

où

$$\mathcal{A}_1 = -\frac{J_2}{2T} \sum_r \left[ (\nabla^\mu \theta_1(r) - 2\pi n_1^\mu(r))^2 - \lambda [(\nabla^1 \theta_1(r) - 2\pi l_1^1(r))^2 - (\nabla^2 \theta_1(r) - 2\pi l_1^2(r))^2] \right] \quad (1.45)$$

$$\mathcal{A}_2 = -\frac{J_2}{2T} \sum_r \left[ (\nabla^\mu \theta_2(r) - 2\pi n_2^\mu(r))^2 + \lambda [(\nabla^1 \theta_2(r) - 2\pi l_2^1(r))^2 - (\nabla^2 \theta_2(r) - 2\pi l_2^2(r))^2] \right]. \quad (1.46)$$

Si l'on avait introduit deux types de variables de liens  $n_1^\mu, n_2^\nu$ , on aurait simplement obtenu deux gaz de Coulomb découplés après une transformation de dualité ce qui ne permettrait pas de savoir comment se renormalise le paramètre  $\lambda$ . De plus, le fait d'introduire des champs de liens  $l_i$  permet de garder une trace du problème initial. En effet, on peut aisément se convaincre que les champs de liens  $n_i$  sont associés dans l'ancien réseau (A) aux interactions antiferromagnétiques tandis que les champs de liens  $l_i$  correspondent aux interactions ferromagnétiques.

Les actions  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont interchangeable par  $\lambda \longleftrightarrow -\lambda$ . Elles comportent donc la même physique. Je considère par exemple l'action  $\mathcal{A}_2$ . Elle obéit à la condition d'invariance de jauge :

$$\begin{aligned} \theta_2(x) &\rightarrow \theta_2(x) + 2\pi k_2(x) \\ n_2^\mu(x) &\rightarrow n_2^\mu(x) - \nabla^\mu k_2(x) \\ l_2^\mu(x) &\rightarrow l_2^\mu(x) - \nabla^\mu k_2(x). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Cette contrainte de jauge couple les variables de jauge  $n_2$  et  $l_2$ . Pour un site associé à  $\theta_2(r)$ , il reste donc trois degrés de liberté (de même pour  $\theta_1(r)$ ). La difficulté est maintenant d'écrire l'action  $\mathcal{A}_2$  en terme de variable de vortex. Le calcul étant un peu fastidieux, je donne directement le résultat pour l'action des vortex [56]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2V} = -2\pi^2 \beta J_2 \sum_x & (1 + \lambda) N(x) \mathcal{P} N(x) + \lambda(1 - \lambda) L(x) \mathcal{P} L(x) \\ & + 2\lambda N(x) \mathcal{P}^{-1} L(x) \\ & - 2\lambda(N(x) + L(x)) \mathcal{P}^{-1} M(x), \end{aligned} \quad (1.48)$$

où l'on a défini le propagateur anisotrope:

$$\mathcal{P} = [(\nabla^x)^2(1 + \lambda) + (\nabla^y)^2(1 - \lambda)]^{-1} \quad (1.49)$$

ainsi que trois vorticités indépendantes:

$$N(x) = \epsilon^{\mu\nu} \nabla^\mu n_2^\nu \quad (1.50)$$

$$L(x) = \epsilon^{\mu\nu} \nabla^\mu l_2^\nu \quad (1.51)$$

$$M(x) = \nabla^1 n_2^2 - \nabla^2 l_2^1 \quad (1.52)$$

$N(x)$  est associée aux interactions antiferromagnétiques,  $L(x)$  aux interactions ferromagnétiques et  $M(x)$  au mélange des deux. On a transformé l'action  $\mathcal{A}_2$  en un problème de gaz de Coulomb à trois espèces interagissant les unes les autres. La prochaine étape est maintenant d'introduire trois fugacités et d'étudier le flot de renormalisation. Mais on peut facilement anticiper le résultat en regardant de plus près l'action  $\mathcal{A}_{2V}$ . Les vortex de type  $M$  n'interagissent pas entre eux. Cela signifie que cela ne coûte pas d'énergie au système de fabriquer de tels vortex y compris à basse température. On peut s'attendre à ce que de tels vortex amènent le système vers une haute densité de vortex loin du point fixe de Kosterlitz-Thouless où l'on ne sait rien dire. Néanmoins, ce raisonnement est quelque peu biaisé car les vortex de type  $M$  interagissent tout de même avec les autres types de vortex, ce qui engendrent une interaction effective entre les vortex de type  $M$ .

Pour vérifier ces hypothèses, le plus simple est d'étudier les équations de renormalisation associées à ces trois vorticités. Pour rester générique, on écrit l'action  $\mathcal{A}_{2V}$  sous la forme:

$$\mathcal{A}_V = \sum_{\vec{r} \neq \vec{r}'} \sum_{i,j=1}^3 m_i(\vec{r}) \mathcal{C}_{ij} m_j(\vec{r}') \ln \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a} + \sum_{\vec{r},i} \log z_i m_i(\vec{r})^2, \quad (1.53)$$

où l'anisotropie spatiale est paramétrisée par une re-définition de la norme  $|\vec{r}|^2 = \frac{x^2}{1-\lambda} + \frac{y^2}{1+\lambda}$ . La fugacité  $z_1$  est associée au vortex de type  $N$ ,  $z_2$  à  $L$  et enfin  $z_3$  à  $M$ .  $\mathcal{C}$  est une matrice ( $3 \times 3$ ) de constantes de couplage dont les valeurs initiales sont déterminées par l'équation (1.48). Les équations de renormalisation des coefficients  $\mathcal{C}_{ij}$  et des fugacités ont été démontrées dans l'annexe B et prennent la forme:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}_{ij}}{dl} &= -\frac{(2\pi)^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\pi}{2} \sum_k (z_k)^2 \mathcal{C}_{ik} \mathcal{C}_{kj} \\ \frac{dz_k}{dl} &= (2 - \mathcal{C}_{kk} \frac{\pi}{2}) z_k, \end{aligned} \quad (1.54)$$

Des équations similaires ont été obtenues dans le traitement par la méthode des répliques du modèle XY avec des phases aléatoires [65, 66]. Normalement, il aurait également fallu introduire les fugacités associées aux vortex hybrides (des configurations où deux vortex de différentes espèces coïncident au même point). On a *a priori* trois types de vortex hybrides. Les équations de renormalisation pour ces vortex hybrides s'obtiennent aisément

en suivant [67, 68]. J'ai préféré ne pas les inclure pour ne pas alourdir les équations sachant que ceci n'altérera en rien les conclusions.

Le flot défini par (1.54) peut être étudié numériquement. La conclusion est très simple et peut être résumée en un seul schéma. Lorsque  $\lambda = 0$ , l'équation (1.48) se réduit à un gaz de Coulomb habituel à une seule espèce. J'ai représenté sur la figure 1.6 l'évolution des fugacités  $z_2$  et  $z_3$  en fonction de la température effective  $T = 1/C_{11}$  (c'est la température lorsque  $\lambda = 0$ )

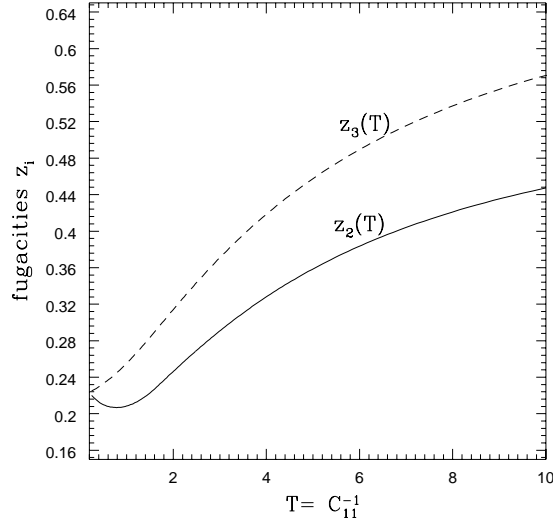


FIG. 1.6 - Evolution des fugacités  $z_2$  et  $z_3$  avec la température. Elles sont irrémédiablement conduites vers une région de couplage fort

Comme ce fut déjà anticipé, ces trajectoires indiquent que les fugacités  $z_2$  et  $z_3$  sont conduites rapidement vers une région de haute densité où le schéma de renormalisation utilisé n'a plus de sens. De plus les températures effectives  $C_{22}^{-1}$  et  $C_{33}^{-1}$  associées à ces vorticités sont ou tendent vers l'infini ce qui correspond bien à l'image du couplage fort. Cependant, cela peut aussi s'interpréter comme le fait que  $\lambda \propto C_{22} \rightarrow 0$  dans la limite grande distance. Cela revient à dire que les spins de type 1 et 2 dans l'équation (1.40) se découplent ou encore dans la représentation initiale (A) que les deux sous-réseaux AF se découplent dans la limite grande distance. Il est clair dans cette image que les fluctuations d'un réseau à l'autre sont très fortes. Or les vortex de type  $M$  et  $L$  sont construits à partir de spins appartenant à ces deux sous-réseaux et sont donc fortement soumis à ces fluctuations. Ils sont ainsi "par construction" très instables voir mal définis. Finalement la figure (1.6) résulte du découplage entre les deux sous-réseaux ( $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ ) dans le réseau initial (A). Une conclusion similaire avait été obtenue par Chandra *et al.*

pour des spins de Heisenberg à l'aide d'un modèle sigma non-linéaire effectif [69].

### Théorie effective

La première approche est axée sur l'approximation de Villain, autrement dit, sur l'inclusion de la  $2\pi$  périodicité dans les termes quadratiques. La conclusion est que les deux sous-réseaux 1 et 2 se découplent dans la limite infrarouge. Néanmoins, la théorie de basse température décrite par les ondes de spin prédit tout de même un ordre nématique. Dans l'analyse précédente, on n'a pas pris en compte cet effet car une des conséquences immédiates de l'approximation de Villain est le découplage entre la partie vortex et la partie onde de spin. De plus, on a vu qu'une description prenant en compte toutes les vorticités possibles analogues au modèle XY n'est pas appropriée à cause de ces fluctuations entre sous-réseaux (en effet, un vortex appartenant aux deux sous-réseaux est alors mal défini et instable). Cette conclusion demeure si on suppose un ordre nématique, car il reste toujours la possibilité de retourner un spin d'un sous réseau par rapport à l'autre. Une bonne théorie effective contenant tous les ingrédients du problème doit comprendre l'action des vortex associée à chaque sous-réseau plus un terme de couplage dû aux ondes de spin. Le terme le plus simple décrivant localement les effets des ondes de spin est de type quadrupolaire (il va forcément au-delà de l'approximation harmonique). L'idée consiste simplement à prendre en compte le couplage local entre les deux sous-réseaux. Pour cela, on remplace dans l'équation (1.41)  $\phi$  (qui est un angle constant décrivant l'orientation globale relative des deux sous-réseaux) par  $\theta_1(r) - \theta_2(r)$  qui correspond à la version locale des effets d'onde de spin:

$$\mathcal{A}_{SW} \approx -0.32\lambda^2 \sum_r \cos^2(\theta_1(r) - \theta_2(r)) \quad (1.55)$$

Un terme similaire avait été introduit par Garel *et al.* dans le traitement des héliomagnétiques [63], ainsi que par Chandra *et. al.* dans le modèle  $J_1 - J_2$  avec des spins de Heisenberg [69]. Il peut être traité au niveau de l'action de la manière suivante:

$$\exp [h \cos p(\theta_1(\vec{r}) - \theta_2(\vec{r}))] = \sum_{S(\vec{r})} \exp [ipS(\vec{r})(\theta_1(\vec{r}) - \theta_2(\vec{r})) + \log y_s S^2(\vec{r})], \quad (1.56)$$

où  $p = 2$  et  $y_s = h/2 = 0.08\lambda^2$ . Plutôt que de partir de (1.40), on remplace le terme "anisotrope" par le terme de couplage local entre les deux sous-réseaux (1.55). Dans ce cas, la fonction de partition associée à l'action effective prenant en compte les éléments décrits ci-dessus s'écrit:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{n_1^\mu(r)\}} \sum_{\{n_2^\mu(r)\}} \sum_{S(r)} \int \mathcal{D}\theta_1 \mathcal{D}\theta_2 \exp \left( -\frac{J_2}{T} \sum_r \sum_{i=1,2} [(\nabla^\mu \theta_i(r) - 2\pi n_i^\mu(r))^2] \right)$$

$$+ ip \sum_r \left[ S(r)(\theta_1(\vec{r}) - \theta_2(\vec{r})) + \log y_s S^2(\vec{r}) \right] \quad (1.57)$$

En intégrant sur les variables angulaires, on montre facilement que l'action effective se met sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{eff} = & \sum_{r \neq r'} \left[ \pi \beta J_2 M_1(r) \log \frac{|r - r'|}{a} M_1(r') + \pi \beta J_2 M_2(r) \log \frac{|r - r'|}{a} M_2(r') \right. \\ & \left. - ip(M_1(r) + M_2(r)) \Theta |r - r'| S(r') + \frac{p^2}{2\pi\beta} S(r) \log \frac{|r - r'|}{a} S(r') \right] \quad (1.58) \\ & + \sum_r \left[ \log y_1 (M_1)^2(r) + \log y_2 (M_2)^2(r) + \log y_s S^2(r) \right], \end{aligned}$$

où l'on a introduit les fugacités associés aux vortex  $N_i = \epsilon^{\mu\nu} \nabla^\mu n_i^\nu$  définies initialement par  $y_i^0 = \exp(-\frac{\pi^2 \beta J_2}{2})$ . Les variables de vortex  $N_i$  correspondent aux excitations sur les deux sous-réseaux. Le terme d'interaction  $\Theta$  est défini par:

$$\Theta |r - r'| = \arctan\left(\frac{y - y'}{x - x'}\right),$$

et vérifie  $\partial_y \log |r - r'| = -\partial_x \Theta |r - r'|$ .

L'action effective correspond à deux modèles XY couplés. Sous les transformations du groupe de renormalisation, le terme de couplage s'avère très pertinent et favorise un ordre collinéaire  $\theta_1(r) = \theta_2(r) + k\pi$  avec  $k = 0, 1$  [67, 68]. Dans la limite infrarouge où le terme de couplage est très fort, ce modèle est dans la même classe d'universalité que le modèle Ising-XY dont l'Hamiltonien est:

$$H_{XYI} = - \sum_{\langle i,j \rangle} [(A + B\sigma_i\sigma_j) \cos(\theta_i - \theta_j) + C\sigma_i\sigma_j], \quad (1.59)$$

Pour le modèle XY,  $J_1 - J_2$ , on a  $A = B$  et  $C$  dépend des valeurs initiales de  $h$  et  $\beta J_2$ . Cela montre que le comportement critique du modèle XY  $J_1 - J_2$  dans la phase frustrée est décrit par le modèle Ising-XY dont le comportement critique sera largement débattue au cours du chapitre 2. Ce modèle, toujours fortement controversé, semble posséder une transition (ou deux transitions très rapprochées) avec une perte simultanée de l'ordre associé aux spins Ising et XY.

Je présenterai l'étude de la renormalisation du modèle de gaz de Coulomb correspondant à l'équation (1.58) au prochain chapitre quand bien même cela ne permet pas vraiment de déterminer le comportement critique.

La (ou les) transition a lieu approximativement lorsque  $y_1, y_1' \sim y_s$  initialement. Connaissant la définition des fugacités initiales, cela permet d'estimer la température de transition pour une valeur donnée de  $\lambda = J_1/2J_2$ :

$$\frac{T_c}{J_2} \sim 0.5 * [\log(\gamma\lambda^2) + \sqrt{\log^2(\gamma\lambda^2) + 2\pi^2}]. \quad (1.60)$$

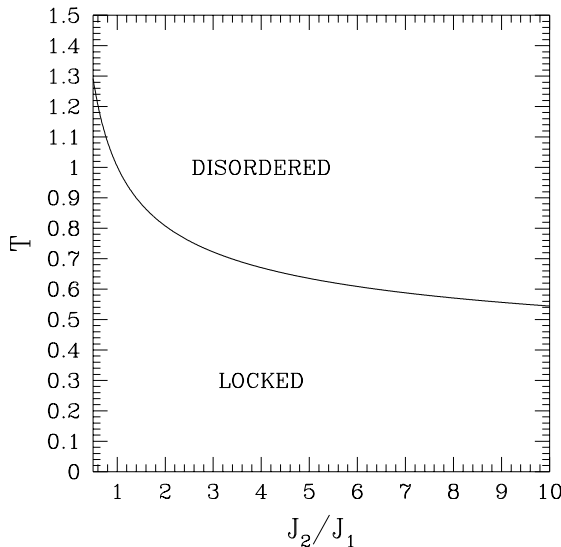


FIG. 1.7 - Estimation de la température critique de transition  $T_c/J_2$  entre la phase nématique basse température et la phase désordonnée haute température en fonction de  $J_2/J_1$ . Cette phase est caractérisée par une perte de l'ordre associé aux paramètres d'ordre Ising et XY.

Cette estimation est certes grossière mais donne le bon ordre de grandeur. J'ai représenté cette courbe sur la figure 1.7 dans les grandeurs  $(J_2/J_1, T/J_2)$ .

A la limite où  $\frac{J_1}{J_2} \rightarrow 0$ , la température suit une décroissance logarithmique vers 0. Chandra *et al.* sont arrivés à la même conclusion pour des spins de Heisenberg. A ma connaissance, très peu de simulations numériques ont été réalisées sur ce modèle. Pour  $J_2 = J_1$ , j'ai trouvé une température de transition  $\frac{T_c}{J_2} = 1.0$ . Ces résultats sont en à peu près en accord avec Henley [59] qui a trouvé une seule transition à  $\frac{T_c}{J_2} = 0.97 \pm 0.02$ . Plus récemment, Fernández *et al.* [70] ont trouvé une seule température de transition plus basse à  $\frac{T_c}{J_2} = 0.90 \pm 0.02$ . Il est clair que d'autres simulations seraient nécessaires pour  $J_2 \neq J_1$  pour pouvoir comparer efficacement prédictions théoriques et résultats numériques. La nature de la transition n'a pas pu être mise clairement en évidence car les simulations doivent être faites sur des grandes tailles  $L$  (le temps de calcul augmente comme  $L^4$ ). En effet, dans la phase complètement frustrée, on a, comme on l'a vu dans l'analyse précédente, deux types d'excitations: les excitations de type vortex à l'intérieur de chaque sous-réseaux et les excitations dues aux ondes de spin qui couplent les deux sous-réseaux. Ce dernier crée des domaines où le paramètre d'ordre Ising vaut  $\pm 1$ . Fernández *et al.* ont montré que la taille des parois de domaine varie approximativement comme  $\frac{10}{\sqrt{T}}$  ce qui nécessite d'aller au moins vers des tailles de l'ordre de  $100 \times 100$  pour voir les effets de ce

paramètre d'ordre. Ces auteurs semblent avoir mis en évidence des déviations par rapport au comportement critique de Kosterlitz Thouless pour des grandes tailles. Néanmoins leurs erreurs sont relativement large et ne permettent pas de conclusions claires sur la nature de la ou des transitions.

Finalement, j'ai esquissé un diagramme de phase complet (cette fois-ci, dans le plan  $(T/J_1; J_2/J_1)$ ) sur la figure 1.5 dont j'ai déjà discuté la partie faiblement frustrée. Au voisinage du point  $J_2 = 2J_1$ , la courbe a été extrapolée car l'analyse ci-dessus n'est plus valide.

L'étude analytique de ce modèle assez complète a permis de relier le comportement critique (dans la phase frustrée) du modèle XY  $J_1 - J_2$  au modèle Ising-XY qui fait l'objet d'intenses études depuis plusieurs années et reste encore très loin d'être compris. Je ne peux donc pas conclure quant à la nature exacte de la ou des transitions. Néanmoins, cette analyse a permis d'exhiber un comportement complètement non-trivial induit par la frustration et les fluctuations thermiques.

### 1.3 Modèle XY $J_1 - J_2$ - quantique

J'ai étudié au cours de la section précédente le modèle XY  $J_1 - J_2$  à température finie. Une des principales caractéristiques du diagramme de phase de la figure 1.5 est l'annulation de la température de Kosterlitz-Thouless pour  $J_1 = 2J_2$ . Il est donc nécessaire d'inclure autour de ce point les fluctuations quantiques. Je vais tout d'abord étendre cette étude lorsque l'on rajoute une interaction  $J_3$  entre troisième voisins. L'Hamiltonien s'écrit formellement:

$$H = \sum_{ij} J_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (1.61)$$

avec  $J_{ij} = -J_1$  entre premiers voisins,  $J_{ij} = J_2, J_3$  entre seconds et troisièmes voisins ( $J_1, J_2, J_3 \geq 0$ ).

#### 1.3.1 Diagramme de phase classique du modèle XY $J_1 - J_2 - J_3$

Lorsque l'on rajoute la constante de couplage  $J_3$ , on obtient quatre types d'états fondamentaux qui sont résumés dans la figure 1.8

Lorsque  $J_1 - 2J_2 - 4J_3 > 0$ , l'état fondamental est ferromagnétique (F). Par contre pour  $J_1 - 2J_2 - 4J_3 < 0$  et  $J_3$  petit, on retrouve la phase avec un ordre AF indépendant sur chacun des deux sous-réseaux (AF<sub>2</sub>). Les phases C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> sont deux phases hélicoïdales incommensurables. La phase C<sub>1</sub> a pour vecteurs d'onde  $(\pi, \pm Q_1)$ ,  $(\pm Q_1, \pi)$  et la phase C<sub>2</sub>  $(\pm Q_2, \pm Q_2)$  où  $Q_1, Q_2$  sont définis par:



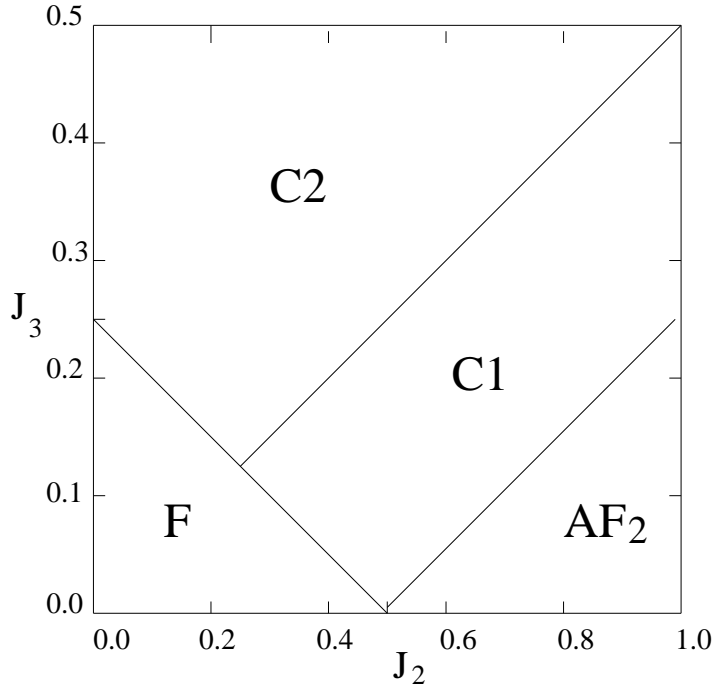


FIG. 1.8 - Diagramme de phase classique à  $T = 0$  du modèle  $J_1 - J_2 - J_3$  pour  $|J_1| = 1$

$$\cos(Q_1) = \frac{(2J_2 - J_1)}{4J_3}$$

et

$$\cos(Q_2) = \frac{-J_1}{(2J_2 + 4J_3)}.$$

Je vais surtout m'intéresser à la ligne  $J_1 - 2J_2 - 4J_3 = 0$ . On peut refaire exactement le même calcul que dans la sous section 1.2.2 et montrer qu'elle correspond à l'annulation de la température de Kosterlitz-Thouless. En fait, cela s'interprète surtout comme l'annulation de la constante de raideur des ondes de spin. Dans ce cas, toutes les excitations locales sont permises y compris les vortex.

Plus explicitement, l'approximation quadratique de l'Hamiltonien (1.61) donne une action effective classique pour les ondes de spin qui s'écrit sous la forme:

$$\mathcal{A}_{SW} = \int d^2x \frac{1}{2T} \left\{ (\rho_{0,cl}(\nabla\theta)^2 + J_3(\nabla^2\theta)^2 + (J_2 - 2J_3)(\nabla_x\nabla_y\theta)^2) \right\}, \quad (1.62)$$

où  $\rho_{0,cl} = J_1 - 2J_2 - 4J_3$  est la constante de raideur des ondes de spin classiques. Les autres termes sont des interactions d'ordre supérieur. Le problème est maintenant de voir ce qui se passe lorsque l'on inclut les fluctuations quantiques autour de ce point.

### 1.3.2 Ondes de spin dans le modèles XY frustrés quantiques et phases liquide de spin

Je présente dans cette section quelques calculs d'ondes de spin sur le version quantique du modèle XY  $J_1 - J_2 - J_3$  [71]. Des calculs similaires ont été effectués pour le modèle de Heisenberg [72, 73]. L'Hamiltonien quantique s'écrit:

$$H = \sum_{ij} J_{ij} [(\hat{S}_i^x \hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_j^y)] = \sum_{ij} \frac{1}{2} J_{ij} [(\hat{S}_i^+ \hat{S}_j^- + \hat{S}_i^- \hat{S}_j^+)] \quad (1.63)$$

où les  $\hat{S}_i$  sont maintenant des opérateurs. On a introduit  $\hat{S}_i^\pm = \hat{S}_i^x \pm \hat{S}_i^y$ .

La transformation de Holstein-Primakoff [74] permet de transformer un problème de spins en un problème bosonique. Pour un opérateur de spin  $S$ , c'est la suivante:

$$\begin{cases} \hat{S}_i^z = S - a_i^+ a_i \\ \hat{S}_i^+ = \sqrt{2S} \left(1 - \frac{a_i^+ a_i}{2S}\right)^{\frac{1}{2}} a_i \\ \hat{S}_i^- = \sqrt{2S} a_i^+ \left(1 - \frac{a_i^+ a_i}{2S}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.64)$$

où les opérateurs  $a_i, a_i^+$  sont des opérateurs de bosons qui satisfont aux relations bosoniques  $[a_i, a_i^+] = 1$ . Néanmoins, cette transformation n'est pas la plus "adaptée" au problème planaire bien qu'elle donne des résultats similaires.

Je vais utiliser une quantification plus naturelle pour le modèle XY due à Villain [75]. Le spin  $\hat{S}_i$  est décrit par sa composante  $\hat{S}_i^z$  selon  $z$  et par un opérateur  $\hat{\phi}$

$$[\hat{\phi}_i, \hat{S}_j^z] = \delta_{ij} \quad (1.65)$$

où  $\hat{\phi}_i = i \frac{\partial}{\partial \hat{S}_i^z}$  est l'opérateur angle conjugué à  $\hat{S}_i^z$ . Les opérateurs de spin  $\hat{S}_r^\pm$  sont représentés de la manière suivante [75]:

$$\begin{cases} \hat{S}_r^+ = e^{i\hat{\phi}_r} \sqrt{(S + \frac{1}{2})^2 - (S_r^z + \frac{1}{2})^2} \\ \hat{S}_r^- = \sqrt{(S + \frac{1}{2})^2 - (S_r^z + \frac{1}{2})^2} e^{-i\hat{\phi}_r} \end{cases} \quad (1.66)$$

Dans la limite classique  $S \rightarrow \infty$ , l'angle  $\phi_r$  correspond à l'angle polaire. Ces opérateurs obéissent à certaines relations de commutation:

$$\begin{cases} [\hat{S}_r^z, e^{\pm im\hat{\phi}_r}] = \pm m e^{\pm im\hat{\phi}_r} \\ [\hat{S}_r^z, \hat{S}_{r'}^\pm] = \pm \delta_{rr'} \\ [\hat{S}_r^+, \hat{S}_{r'}^-] = 2\delta_{rr'} \hat{S}_r^z \\ \frac{1}{2}(\hat{S}_r^+ \hat{S}_r^- + \hat{S}_r^- \hat{S}_r^+) \hat{S}_r^z = S(S+1) \end{cases} \quad (1.67)$$

Je vais tout d'abord m'intéresser au modèle  $J_1 - J_2$  donc prendre  $J_3 = 0$  dans (1.63).

Dans ce cas, on développe l'exponentielle sous la forme :

$$e^{i(\hat{\phi}_r - \hat{\phi}_{r'})} = \epsilon_{rr'} \left\{ 1 + i(\hat{\psi}_r - \hat{\psi}_{r'}) - \frac{1}{2}i(\hat{\psi}_r - \hat{\psi}_{r'})^2 \right\}.$$

Si l'interaction est ferromagnétique, on prend  $\hat{\psi}_r = \hat{\phi}_r$ ,  $\epsilon_{rr'} = 1$ . Par contre si l'interaction est antiferromagnétique, on décompose le réseau en deux sous réseaux avec  $\epsilon_{rr'} = -1$ ,  $\hat{\psi}_r = \hat{\phi}_r$  pour un sous réseau et  $\hat{\psi}_{r'} = \hat{\phi}_{r'} + \pi$  pour l'autre.

Si l'on introduit la transformée de Fourier de  $\hat{\psi}_r$  et de  $\hat{S}_r^z$ :

$$\begin{cases} \hat{\psi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_r \hat{\psi}_r e^{ik \cdot r} \\ \hat{S}_k^z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_r \hat{S}_r^z e^{ik \cdot r} \end{cases} \quad (1.68)$$

on peut alors récrire l'Hamiltonien (1.63) sous la forme:

$$H = G(0) - S^2 \sum_k \left[ (G(0) - G(k)) \hat{\psi}_k \hat{\psi}_k^* \right] - \sum_k G(0) \hat{S}_k^z \hat{S}_{-k}^z, \quad (1.69)$$

avec

$$G(k) = \sum_{ij} J_{ij} \epsilon_{ij} e^{ik(r_i - r_j)}. \quad (1.70)$$

En diagonalisant l'Hamiltonien (1.69), on obtient aisément la relation de dispersion:

$$\hbar\omega_k = 2S \sqrt{G(0)(G(0) - G(k))}. \quad (1.71)$$

Les fluctuations quantiques vont apporter des corrections à la magnétisation.

Lorsque  $J_1 > 2J_2$ , l'état fondamental classique est ferromagnétique, et la magnétisation  $M_F$  vaut au premier ordre en  $1/S$ :

$$M_F = S + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d^2k \frac{2 - \alpha_k - \eta(2 - \eta'_k)}{\{(2 - \alpha_k - \eta(2 - \alpha'_k))^2 - (\alpha_k - \eta\alpha'_k)^2\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.72)$$

avec  $\eta = \frac{J_2}{J_1}$ ,  $\alpha_k = \frac{1}{2}[\cos(k_x) + \cos(k_y)]$  et  $\alpha'_k = \cos(k_x) \cos(k_y)$ .

Lorsque  $J_1 < 2J_2$ , l'état fondamental est collinéaire (au niveau quantique, la dégénérescence classique est levée), la magnétisation  $M_{Col}$  vaut:

$$M_{Col} = S + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi^2} \int d^2k \frac{|2 - \cos(k_x) \cos(k_y) - \lambda(\cos(k_x) - \cos(k_y))|}{2\{1 - \cos(k_x) \cos(k_y) - \lambda(\cos(k_x) - \cos(k_y))\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.73)$$

où  $\lambda = \frac{|J_1|}{2J_2}$ .

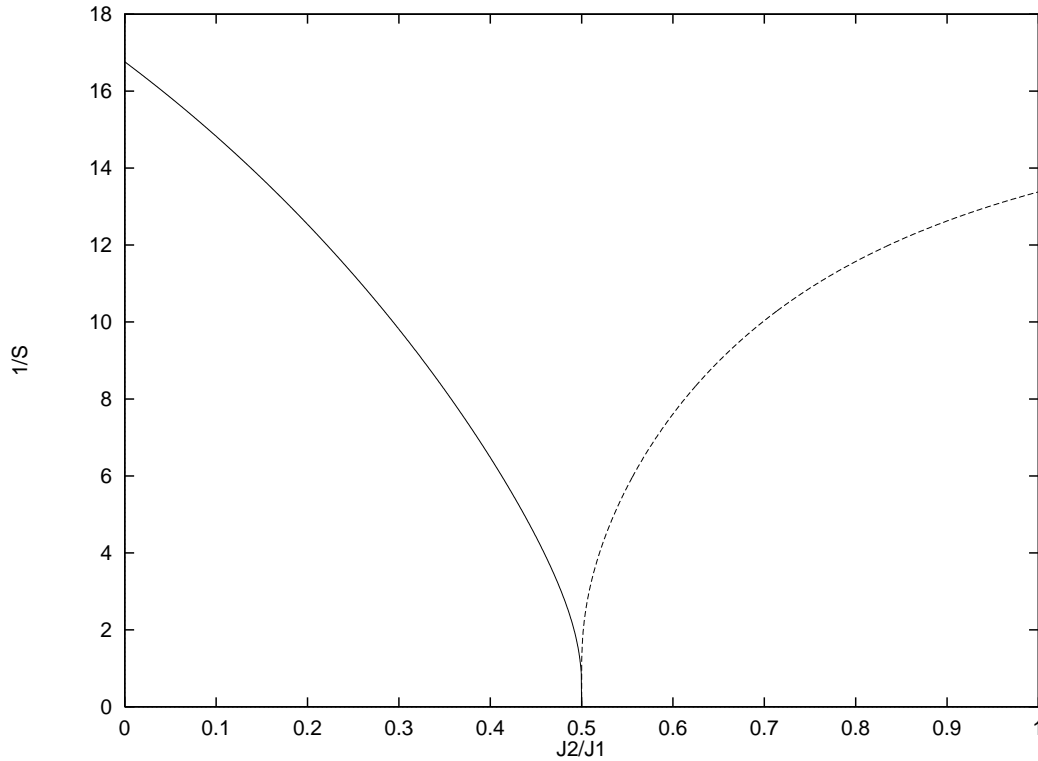


FIG. 1.9 - Premières corrections à la magnétisation du modèle XY  $J_1 - J_2$  (plus précisément l'inverse) en fonction de  $J_2/J_1$ .

Les premières corrections aux ondes de spin prédisent une annulation de la magnétisation le long de deux lignes que j'ai représentées sur la figure 1.9 dans le plan  $(J_2/J_1, 1/S)$ .

Si l'on suppose que le calcul des ondes de spin reste valable pour des spins  $S = \frac{1}{2}$ , il prédit l'existence d'une région finie (très petite) autour du point  $J_1 = 2J_2$  où l'état fondamental est désordonné (d'aimantation nulle). Les ondes de spin divergent même pour  $J_2 \rightarrow J_1/2$  comme:

$$\begin{aligned} M_F &\sim S + \frac{1}{2} - \gamma \log^2(1 - 2\eta), \eta < \frac{1}{2} \\ M_{Col} &\sim S + \frac{1}{2} - \gamma'(2\eta_2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \eta_2 > \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

avec  $\gamma, \gamma'$  des constantes.

Des calculs similaires ont été entrepris pour la première fois par Chandra et Douçot pour le modèle de Heisenberg  $J_1 - J_2$  avec des conclusions qualitativement similaires. En fait, l'étude du modèle de Heisenberg frustré par des interactions compétitives a été considérablement étudié il y a quelques années dans le but de trouver des phases dites liquide de spin. Ce calcul d'onde de spin fut l'un des premiers capable de prédire une phase liquide de spin dans le modèle de Heisenberg  $J_1 - J_2$ . Comme on pouvait s'y attendre, le résultat est comparable pour le modèle XY.

Ces calculs se généralisent au modèle  $J_1 - J_2 - J_3$ . De manière générale, on obtient la relation de dispersion et les corrections à la magnétisation [22]:

$$\omega_k = 2\sqrt{J(Q_0)\left[J(Q_0) - \frac{J(Q_0+k) + J(Q_0-k)}{2}\right]} \quad (1.75)$$

$$\langle S^z \rangle = S + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\pi^2} \int d^2k \frac{\left| -J(Q_0) + \frac{J(Q_0+k) + J(Q_0-k)}{4} \right|}{\sqrt{J(Q_0)\left[J(Q_0) - \frac{J(Q_0+k) + J(Q_0-k)}{2}\right]}}. \quad (1.76)$$

où  $Q_{0,cl}$  est définie par  $\partial_Q J_{Q_{0,cl}} = 0$ ,  $J_Q$  étant la transformée de Fourier de  $J_{ij}$ . Lorsque  $Q_0 = 0$ , on retrouve le résultat (1.72). Le long de la ligne où la constante de raideur des ondes de spin  $\rho_{0,cl}$  s'annule, on retrouve le même genre de divergences qu'au point  $J_2 = 2J_1$ . Par exemple, au point  $J_2 = 0$ , la magnétisation se comporte comme:

$$\langle S^z \rangle \sim S + \frac{1}{2} - \alpha \log |1 - 4J_3/J_1|. \quad (1.77)$$

Contrairement au point spécial  $J_2 = 2J_1$  qui sépare deux phases qui n'ont pas du tout les mêmes états fondamentaux, on peut passer continûment de la phase ferromagnétique aux phases chirales.

Comme on vient de le voir, les calculs d'onde de spin prévoient une phase liquide de spin autour de  $\rho_{0,cl} = 0$ , y compris pour le cas purement quantique des spins  $1/2$ . Il est légitime de s'interroger sur la validité de ce type de traitement basée sur une approche semi-classique (à  $S$  grand). Ce point a été beaucoup controversé pour le modèle de Heisenberg. Un calcul à partir des bosons de Schwinger dans le modèle de Heisenberg frustré prédit un élargissement de la phase ferromagnétique et une disparition de la phase liquide de spin pour les spins  $S = 1/2$ . Ferrer [76] a montré que les corrections d'ordre supérieur dans le calcul des ondes de spin induit une renormalisation de  $\rho_{0,cl} \rightarrow \rho_Q(S)$  qui a pour conséquence cet élargissement de la phase ferromagnétique. Cet élément permet ainsi de réconcilier les deux approches et prédit toujours une phase liquide de spin mais plutôt autour de  $J_2/J_1 \sim 0.6 - 0.7$ .

De nombreux travaux numériques ont confirmé l'existence de cette phase liquide de spin notamment par des méthodes de diagonalisation exacte et des expansions en série. Pour plus de détails, je renvoie à la revue de Schulz *et al.* [77]. Par contre les valeurs données pour  $(J_2/J_1)_c$  (valeur à partir de laquelle on trouve la phase liquide de spin) sont souvent contradictoires et sont comprises entre 0.2 et 0.7.

Pour aller au-delà de ces approches d'onde de spin ou de bosons de Schwinger, plusieurs auteurs ont formulé des théories effective (plus précisément des modèles sigma non-linéaire) afin de décrire le comportement critique dans les différentes phases [78, 79, 69, 76]. Néanmoins aucune n'est capable d'explicitement la nature de la phase liquide de spin ni même de donner la nature des transitions entre ces différentes phases. En effet, au cours d'un processus de renormalisation, la constante de couplage du modèle sigma non-linéaire

(l'équivalent de la température) varie comme  $1/\rho_Q(S)$  et part donc, au cours d'un processus de renormalisation, en couplage fort lorsque l'on approche de la phase liquide de spin caractérisée par  $\rho_Q(S) = 0$  [76]. Ceci exclut toute approche perturbative. On peut néanmoins supposer que les excitations topologiques de type instantoniques vont proliférer à couplage fort et risquent de jouer un grand rôle pour induire cette phase liquide de spin [79]. Dans cette optique, le modèle XY paraît peut-être plus adapté pour étudier l'importance de ces excitations topologiques car elles sont parfaitement connues au niveau classique (et peut-être plus facile à manipuler). Néanmoins une théorie effective efficace reste difficile à formuler [71].

Une multitude d'états possibles pour cette phase liquide de spin a été proposée: différentes variétés d'états "valence bond", dans lesquels le fondamental se décrit en termes de paires singlètes de spins, des états brisant l'invariance par renversement du temps, comme les états de spin chiraux et des états dits dimérisés dans lesquels la symétrie par translation du réseau est brisée. Je renvoie au livre de Fradkin pour plus de détails [14]. La situation n'est pas du tout claire. De plus, ces états dits de liquide de spin avaient à l'origine été proposés en lien avec la supraconductivité à haute température critique. Or les liens entre ces phases désordonnées quantique et la supraconductivité n'ont pas du tout été établis. Cette piste semble même à l'heure actuelle plus ou moins abandonnée.

## 1.4 Résumé et conclusions

J'ai présenté dans ce premier chapitre l'étude du modèle  $J_1 - J_2$  XY, un système frustré par des interactions compétitives. Lorsque la frustration est faible, on retrouve le comportement du modèle XY simple. Par contre, à forte frustration, la dégénérescence classique est levée par les fluctuations thermiques ou quantiques. Néanmoins ce phénomène d'ordre par le désordre n'est que partiel et il reste une symétrie discrète  $Z(2)$  résiduelle. J'ai montré que le comportement critique est identique à celui du modèle Ising-XY. Ce modèle semble décrire le comportement critique de tous les modèles bidimensionnels à symétrie  $Z(2) \times U(1)$ . Je présenterai dans le chapitre suivant, qui sera plus une revue, l'état des lieux sur l'étude de ces problèmes à symétrie  $Z(2) \times U(1)$ .

Dans l'exemple traité dans ce chapitre, les fluctuations thermiques et quantiques agissent de même vis à vis de la levée de dégénérescence. Je présenterai au cours de la deuxième partie de cette thèse, d'autres exemples de systèmes frustrés (cette fois-ci géométriquement), et montrerai que ce phénomène n'est pas général. Ceci prouve la grande diversité des phénomènes physiques en place dans les systèmes de spin frustrés.



# Chapitre 2

## Modèles à symétrie $Z_2 \times U(1)$

Dans ce chapitre, je vais essayer de faire le point sur ces modèles  $2D$  à symétrie  $Z_2 \times U(1)$  mais surtout d'en exposer la problématique. Le panorama que je vais essayer de dégager sur la question sera forcément incomplet car les problèmes posés depuis maintenant vingt ans sur ces systèmes sont encore relativement ouverts. Il n'existe pas, à ma connaissance, de revue sur la question. Je me suis donc appuyé pour écrire ce chapitre sur un grand nombre d'articles. J'ai tenté d'en dégager une ligne directrice.

### 2.1 Introduction.

Les modèles bidimensionnels à symétrie  $Z_2 \times U(1)$  peuvent donner lieu à un comportement critique assez inhabituel. Du fait de la présence de deux paramètres d'ordre, on peut s'attendre *a priori* à deux transitions distinctes. Néanmoins, l'existence d'un couplage entre les deux paramètres d'ordre vient compliquer considérablement la situation. On peut tout de même envisager trois scénarios possibles:

- deux transitions de type Ising et Kosterlitz-Thouless bien séparées;
- deux transitions se superposant; à la même température
- une seule et même transition dans une nouvelle classe d'universalité.

On a typiquement vu que les simulations numériques sur le modèle XY,  $J_1 - J_2$ , étaient plus en faveur des deux derniers scénarios. Tout le problème lié à ces modèles à symétrie  $Z_2 \times U(1)$  tient au fait qu'il est très difficile de distinguer ces deux scénarios d'un point de vue numérique.

L'archétype des modèles XY frustrés a été introduit par Villain [80, 81]. On le dénomme dans la littérature par modèle FFXY (fully frustrated XY model). Dans la suite du manuscrit, je considérerai le modèle FFXY comme un modèle XY frustré sur un réseau carré (dans la littérature, la dénomination FFXY prend parfois un sens plus large et comprend notamment le modèle XY sur réseau triangulaire avec des interactions AF) qui a pour Hamiltonien:



$$H = - \sum_{ij} J_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (2.1)$$

où  $J_{ij} = \pm J$ , et  $J > 0$ . La somme porte sur les premiers voisins et le modèle obéit à la contrainte que le produit des constantes de couplage sur une plaquette élémentaire soit négatif. Ainsi chaque plaquette est frustrée d'après le critère de Toulouse [7]. Cette condition est par exemple réalisée dans une configuration où la moitié des liens verticaux sont AF (voir la figure 2.1). Cette configuration fut proposée par Villain [80, 81].

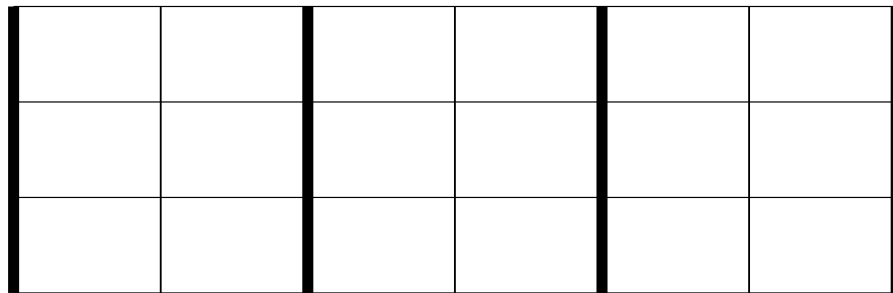


FIG. 2.1 - Configuration en bretelles des interactions AF (en gras)

Néanmoins, on peut envisager d'autres manières de frustrer toutes les plaquettes. Récemment, Benakli et Granato [82] ont par exemple proposé et étudié une distribution en zigzag des liens AF (avec une interaction anisotrope  $\lambda J$ ). J'ai représenté sur la figure 2.2 cette distribution de liens. Pour  $\lambda = 1$ , ce système possède une température de transition analogue au modèle FFXY proposé par Villain de l'ordre de  $0.45J$ .

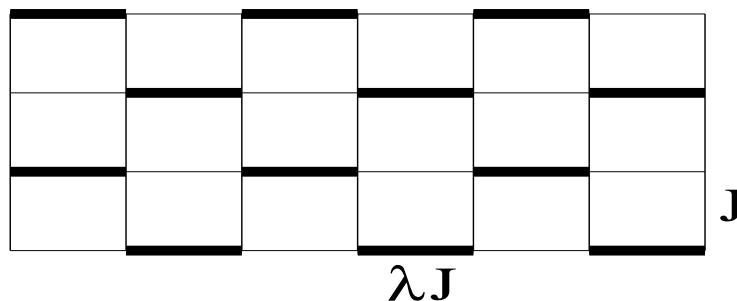
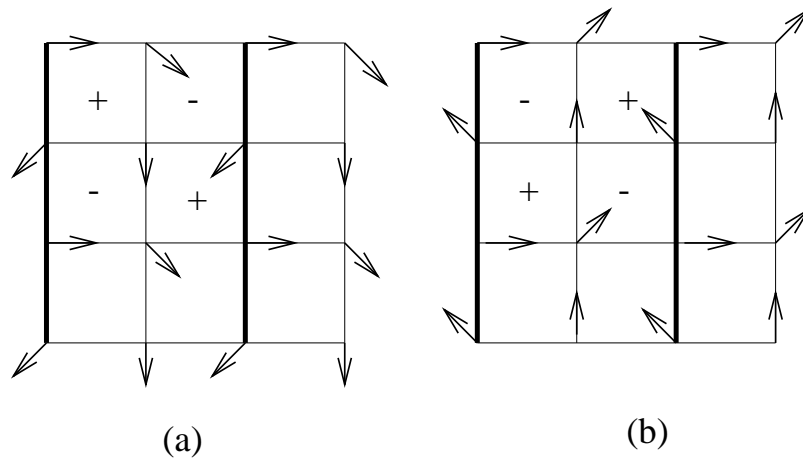


FIG. 2.2 - Configuration en zigzag des interactions AF (en gras)

Je vais par la suite me concentrer sur le modèle original proposé par Villain. J'ai représenté sur la figure 2.3 les deux types d'états fondamentaux possibles. Il est impossible de passer continuellement d'un état fondamental à l'autre. On peut associer à chaque plaquette une variable de chiralité  $\pm 1$  suivant que les spins autour d'une plaquette tournent dans le sens trigonométrique (type (a)) ou inversement (type (b)) comme indiqué sur la figure 2.3. C'est la même symétrie que le modèle d'Ising antiferromagnétique.

FIG. 2.3 - *Etats fondamentaux du modèle FFXY.*

A basse température, le système choisit l'un des deux états fondamentaux et brise la symétrie  $Z_2$ . Quand on augmente la température, on aura un mélange de régions de type (a) et (b) séparées par des parois de domaine. C'est la forte interaction entre ces parois de domaine et les excitations topologiques usuelles du modèle XY qui donnent tout son caractère original à la transition. D'autres modèles ont exactement la même symétrie du fondamental comme par exemple le modèle XY AF sur réseau triangulaire [83, 84, 85, 86] ou bien encore les modèles XY hélimagnétiques [63].

A partir de cette étude sur les symétries du fondamental, on peut déjà remarquer que l'état fondamental "effectif" (après l'inclusion du mécanisme de sélection par les fluctuations thermiques) du modèle XY,  $J_1 - J_2$ , étudié dans le chapitre 1 possède la même symétrie. On peut donc légitimement s'attendre à ce que tous ces modèles correspondent à la même classe d'universalité.

### 2.1.1 Problématique expérimentale

L'étude du comportement critique du modèle XY complètement frustré a été en partie motivée par (et a motivé!) des expériences sur les réseaux de liaisons Josephson reliant des grains supraconducteurs sous champ magnétique transverse (pour une revue sur le sujet, voir [53]).

Ce problème peut être modélisé par l'Hamiltonien suivant [87, 88]:

$$H = - \sum_{\langle r, r' \rangle} J \cos(\theta(r) - \theta(r') + f(r, r')) \quad (2.2)$$

où  $f(r, r') = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_r^{r'} \vec{A} \cdot d\vec{l}$  et  $\vec{A}$  représente le potentiel vecteur du champ magnétique et  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  un quantum de flux. Pour une frustration  $f$  uniforme par plaquette, définie par:

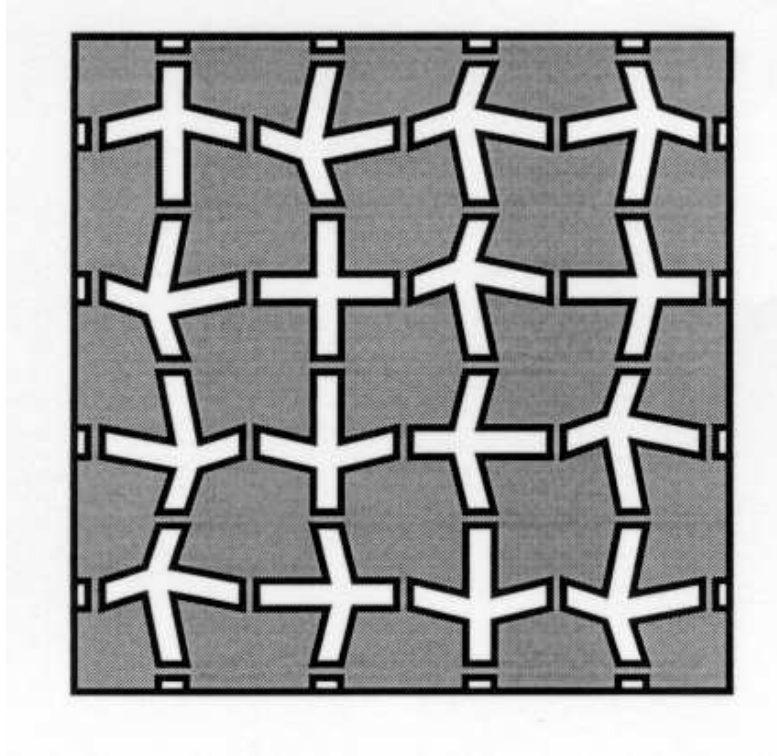


FIG. 2.4 - Représentation schématique d'un ensemble de liaison Josephson

$$\sum_{\text{plaquette}} f(r, r') = \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint_{\text{plaq.}} \vec{A} d\vec{l} = 2\pi f \quad (2.3)$$

Lorsque  $f = 0$ , on retrouve le modèle XY usuel et le système présente une transition de Kosterlitz-Thouless (voir chap. 1).

Si  $f = \frac{1}{2}$ , toutes les plaquettes sont frustrées et l'Hamiltonien (2.2) est similaire au modèle XY complètement frustré. Au niveau expérimental, cela se manifeste par une chute de la température de transition et de plus, le saut du module d'hélicité n'est plus universel dans ce cas [89, 55, 90]. Ces changements ont été interprétés dans le cadre du modèle FFXY [87, 88, 91] comme on le verra par la suite bien que la situation ne soit toujours pas complètement claire.

Si  $f \neq \frac{1}{2}$ , la compétition entre deux longueurs d'échelle à savoir la longueur moyenne séparant les vortex et la période intrinsèque du réseau, donne lieu à des problèmes de commensurabilité. Il y a actuellement une forte activité sur la nature de la (ou des) transition de phase pour d'autres valeurs rationnelles de la frustration mais aussi pour  $f$  irrationnel [92, 93, 94].

Le modèle FFXY est supposé décrire une autre classe de systèmes à savoir des échelles de liaisons Josephson quantiques à demi quantum de flux par plaquette [95, 96]. C'est l'équivalent 1D quantique des réseaux bidimensionnels de liaisons Josephson. En présence d'un champs magnétique, les grains supraconducteurs se chargent à cause de leur faible

capacité et donnent lieu à de fortes fluctuations du paramètre d'ordre supraconducteur. Il en résulte une compétition entre le couplage Josephson entre les grains et ces fluctuations induites par les effets capacitifs. L'échelle de jonctions Josephson subit alors une transition de type supraconducteur-isolant à température nulle [97, 98] lorsque l'on varie l'énergie capacitive des grains [97, 99]. Pour décrire cette transition, Granato [100, 101] a introduit un modèle XY frustré quantique sur une échelle représenté schématiquement sur la figure 2.5

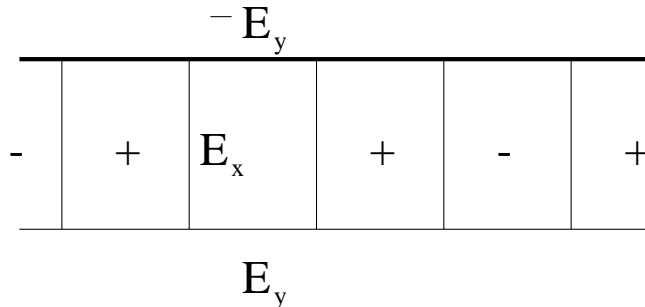


FIG. 2.5 - Représentation schématique d'un modèle XY 1D frustré.

L'Hamiltonien de ce modèle est défini par:

$$H = -\frac{E_c}{2} \sum_r \left( \frac{d}{d\theta_r} \right)^2 - \sum_{\langle rr' \rangle} E_{rr'} \cos(\theta_r - \theta_{r'}) \quad (2.4)$$

et consiste en fait en une chaîne unidimensionnelle de plaquette frustrée où  $E_c$  représente l'énergie de charge du grain supraconducteur. Le cas  $E_x = E_y$ , le plus intéressant, correspond à la frustration maximale. Lorsque  $E_c = 0$  (limite classique), on a un ordre AF des chiralités comme indiqué sur la figure (2.5). Pour  $E_c \neq 0$ , on peut montrer par le formalisme de l'intégrale de chemin que ce modèle est directement relié au modèle FFXY où le rapport  $\alpha = \left( \frac{E_u}{E_x} \right)^{\frac{1}{2}}$  joue le rôle de l'inverse d'une température.

Ces sont essentiellement ces deux dispositifs expérimentaux qui ont motivés ces recherches sur le FFXY modèle.

## 2.2 Sur le modèle XY complètement frustré

### 2.2.1 Représentation en terme de gaz de Coulomb

Le plus simple est d'utiliser la représentation du modèle FFXY sous la forme:

$$H = - \sum_{\langle r, r' \rangle} K \cos(\theta(r) - \theta(r') + 2\pi l_{rr'}) \quad (2.5)$$

où  $l_{rr'} = 0$  ou  $\frac{1}{2}$  suivant que le lien est ferro- ou antiferromagnétique. On peut alors suivre la même démarche que le traitement du modèle XY (voir section 1.1). On se ramène à

l'aide de la transformation de Villain à un modèle de gaz de Coulomb:

$$H(K) = K \sum_{r,r'} m(r)G(r,r')m(r') \quad (2.6)$$

où les charges (topologiques) sont cette fois demi-entière ( $\pm\frac{1}{2}$ ) [80] et pour  $r \gg 1$ ,  $G(r) \sim -\pi \log r + \frac{\pi^2}{2}$ .

L'état fondamental est doublement dégénéré. J'ai représenté sur la Figure 2.6 un arrangement possible de ces charges demi-entières. représenté une La paroi  $A$  (en pointillé) sépare les deux états possibles du paramètre d'ordre Ising.

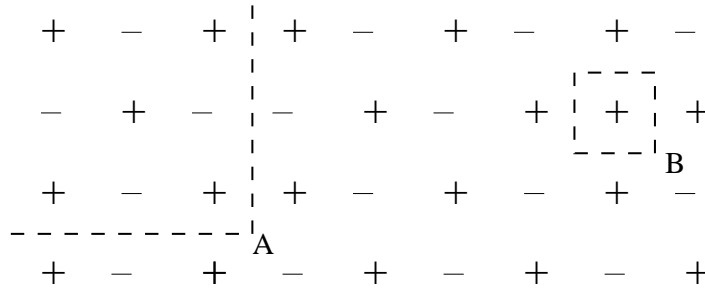


FIG. 2.6 - *Un arrangement de charges possibles avec deux parois de domaines séparant deux configurations différentes.*

Dans cette description, la transition Ising est caractérisée par une condensation des parois de domaine de manière à restorer la symétrie  $Z_2$ . Les coins des parois de domaine portent des charges fractionnaires  $\pm\frac{1}{4}$  (moyenne des 4 charges entourant le coin). Le domaine  $B$  correspond tout simplement à une excitation de charge  $+1$  au dessus du fondamental. Une idée astucieuse due à Halsey [102] (voir aussi [103] fut de décrire la transition de type Ising comme libération des charges  $\pm\frac{1}{4}$ , unifiant ainsi dans un même langage les deux paramètres d'ordre. D'un point de vue qualitatif, on peut imaginer essentiellement deux types d'excitations et deux températures associées: la température  $T_v$  de libération des charges entières, et la température  $T_{Ising}$  de mélange des parois de domaines. Par un argument d'énergie-entropie, Halsey a montré que cette dernière est plus basse que  $T_v$ . On peut ainsi imaginer le scénario qualitatif suivant: lorsque les parois de domaine vont se mélanger, les charges  $\pm 1/4$  à leurs coins vont se libérer et écranter les charges entières et de ce fait déclencher la transition de Kosterlitz Thouless. Ainsi, les transitions vont être très rapprochées, voir au même point. La (ou les) transition sera alors complètement dominée par le paramètre d'ordre d'Ising. Cet argument heuristique donné par Halsey [102] rend compte au moins qualitativement des expériences. En effet, cette description prédit une température de transition de Kosterlitz-Thouless plus basse "déclenchée" par celle d'Ising et de ce fait on peut s'attendre à un saut du module d'hélicité non-universel. Mais ceci reste très spéculatif.

Comme le paramètre d'Ising n'est pas très apparent dans ce modèle de gaz de Coulomb de charges demi-entières, Thijssen et Knops [32] ont introduit un terme d'interaction AF à courte portée entre les charges. L'Hamiltonien du gaz de Coulomb (2.6) généralisé s'écrit alors:

$$H(K, J) = K \sum_{r, r'} m(r) G(r, r') m(r') + J \sum_{\langle r, r' \rangle} m_r m_{r'} \quad (2.7)$$

Lorsque  $J > 0$ , les deux transitions (Ising et KT) sont ainsi séparées. Lorsque  $J \leq \approx 0$ , ces auteurs ont montré numériquement que les transitions semblent se joindre en une seule, ce qui semble en accord avec l'image décrite par Halsey [102].

### 2.2.2 Vers le modèle Ising-XY

Une idée naturelle pour les modèles de spins est de construire une théorie de Ginzburg-Landau-Wilson (GLW) reflétant les bonnes symétries du modèle. Une telle approche fut initialement introduite sur les modèles XY complètement frustrés sur réseau carré et triangulaire par Choi et Doniach [104] puis par Yosefin et Domany [67].

Je suivrai tout d'abord ce dernier article. On définit pour chaque plaquette du réseau carré deux vecteurs  $\vec{\phi}_1$  et  $\vec{\phi}_2$  par:

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1 &= S^A + \mathcal{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)S^B + \mathcal{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)S^C + \mathcal{R}\left(\frac{3\pi}{4}\right)S^D \\ \vec{\phi}_2 &= S^A + \mathcal{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right)S^B + \mathcal{R}\left(-\frac{\pi}{2}\right)S^C + \mathcal{R}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)S^D \end{aligned}$$

où  $S^A, S^B, S^C, S^D$  sont les quatre spins d'une plaquette. Dans la figure 2.3, l'état fondamental (a) est caractérisé par  $|\vec{\phi}_1| = 1, \vec{\phi}_2 = 0$  et inversement pour l'état (b) ce qui définit un paramètre d'ordre capable de différencier les deux types d'états fondamentaux. Ensuite, la construction de l'action de GLW est standard. Les termes invariants par rotation et également sous la transformation  $\vec{\phi}_1 \longleftrightarrow \vec{\phi}_2$  sont  $\vec{\phi}_1^2 + \vec{\phi}_2^2, \vec{\phi}_1 \cdot \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_1^2 \vec{\phi}_2^2$ . A partir de ces trois invariants de base, on peut construire des invariants d'ordre plus élevé. Ils peuvent s'écrire sous la forme compacte:

$$O_k = |\vec{\phi}_1|^k |\vec{\phi}_2|^k \cos(k\alpha)$$

avec  $k \geq 2$  et  $\alpha$  l'angle entre les deux vecteurs. A partir de cette définition, l'Hamiltonien le plus général est de la forme:

$$\mathcal{H} = r((\vec{\phi}_1)^2 + (\vec{\phi}_2)^2) + \frac{1}{2}e(\nabla \vec{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}e(\nabla \vec{\phi}_2)^2 + u((\vec{\phi}_1)^2 + (\vec{\phi}_2)^2)^2 + v(\vec{\phi}_1)^2(\vec{\phi}_2)^2 + \sum_{k \geq 1} w_k O_k + \dots \quad (2.8)$$

où  $e, r, u, v, w_k$  sont des constantes dépendant du modèle sur le réseau initial. Dans cette action, on a tenu compte de la parité  $\vec{\phi}_i \longleftrightarrow -\vec{\phi}_i$ . Il reste ensuite *a priori* à prendre en compte des symétries du réseau de départ pour simplifier cette action. Il faut *a priori* tenir compte par exemple de la symétrie  $C_{3V}$  du réseau triangulaire. Le paramètre d'ordre doit typiquement être invariant sous la transformation  $\xi$  défini par:

$$\xi(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2) = (\mathcal{R}(\gamma)(\vec{\phi}_1), \vec{\phi}_2) \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{R}(\gamma)$  correspond à une rotation d'angle  $\gamma$  préservant la symétrie du réseau ( $\frac{2n\pi}{3}$  pour le réseau triangulaire). Ainsi, dans la somme sur  $k$ , on ne retient que le terme à  $k = 3$  (le plus faible invariant d'ordre 3) pour le réseau triangulaire, à  $k = 4$  pour le réseau carré. Néanmoins, si l'on introduit une anisotropie spatiale, en remplaçant par exemple l'interaction AF  $J$  par  $\eta J$  dans le modèle FFXY [105], la symétrie d'espace du réseau est brisée. Dans ce cas, le premier invariant permis est le terme à  $k = 2$  et l'action de GLW prend la forme:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & r(\vec{\phi}_1^2 + \vec{\phi}_2^2) + \frac{1}{2}e[(\nabla^x \vec{\phi}_1)^2 + (\nabla^x \vec{\phi}_2)^2] + \frac{1}{2}f[(\nabla^y \vec{\phi}_1)^2 + (\nabla^y \vec{\phi}_2)^2] \\ & + u((\vec{\phi}_1)^2 + (\vec{\phi}_2)^2)^2 + v[(\vec{\phi}_1 \cdot \vec{\phi}_2)^2 - (\vec{\phi}_1)^2(\vec{\phi}_2)^2] \end{aligned} \quad (2.10)$$

où j'ai introduit  $f \neq e$  à cause de l'anisotropie.

Cette action semble *a priori* la plus générale car dans la limite continue, la symétrie liée au réseau perd son sens. De plus, le terme lié à l'invariant  $O_2$  risque d'être généré par le processus de renormalisation. On doit donc retenir l'invariant  $O_2$  (ce terme est toujours présent dans une autre construction plus rigoureuse de l'action GLW que je vais exposer brièvement ci-dessous).

L'action (2.8) a été étudiée en dimension  $4 - \epsilon$  pour des champs à  $n$  composantes [106, 107] en ne conservant que les termes de degré 4 (les seuls pertinents). Un nouveau point fixe dit chiral a été déterminé par Kawamura [107] par des calculs à deux boucles, ce dernier étant stable pour  $n > 21.8 - 23.4\epsilon + O(\epsilon^2)$ . Ce résultat a été confirmé par des développements en  $1/n$  [107]. Néanmoins, il semble difficile d'extrapoler ces conclusions au cas qui nous intéresse à savoir  $d = 2, n = 2$ . D'ailleurs, à ma connaissance, la transition de Kosterlitz-Thouless n'a déjà pas été vu dans un développement en  $4 - \epsilon$ . De plus, des calculs récents à trois boucles ne vont pas dans la même direction [108] et semble contredire l'hypothèse d'un point fixe chiral stable. Pour la discussion de ces résultats, je renvoie à [109].

Il est à noter que l'action de GLW peut être obtenue par une autre méthode basée sur la transformation de Hubbard-Stratonovich. La transformation sur l'Hamiltonien général:

$$H = \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j$$

s'écrit:

$$\exp \left[ \frac{\beta}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j \right] = \frac{1}{\sqrt{\det \beta J}} \prod_i \left( \int \frac{\mathcal{D} \vec{h}_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{h}_i (\beta J)_{ij}^{-1} \vec{h}_j + \beta \sum_i \vec{h}_i \vec{S}_i \right] \quad (2.11)$$

où  $[J]$  est une matrice  $N \times N$ ,  $N$  étant le nombre de sites. Dans le cas de spin XY, il suffit d'intégrer sur les variables angulaires  $\theta_i$  associées aux spins  $S_i$  et de poser  $\vec{\psi}_i = \sum_j ([\beta J]_{ij}^{-1}) \vec{h}_j$ , on obtient alors une action sur les  $\vec{\psi}_i$  donnée par:

$$-\beta \mathcal{A}\{\vec{\psi}_i\} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{\psi}_i [\beta J]_{ij} \vec{\psi}_j + \sum_i \log 2\pi I_0 \left( \beta \sum_j J_{ij} \vec{\psi}_j \right) \quad (2.12)$$

où  $I_0$  est une fonction de Bessel. L'étape suivante consiste à étudier l'action (2.12) en champ moyen puis à analyser les fluctuations autour du champ moyen. Cette procédure est un peu plus longue que la précédente mais relativement standard [104]. On obtient une action effective identique à (2.10) en approximant la fonction de Bessel par

$$\log I_0(x) = x^2/4 - x^4/64 + O(x^6).$$

L'intérêt de cette approche est que l'on peut relier les paramètres  $r$  et  $e$  aux valeurs propres de la transformée de Fourier de la matrice d'interaction  $[J]$  et donc d'avoir un diagramme de phase relativement correct déjà au niveau du champ moyen.

Les transitions de phase dans les systèmes bidimensionnels sont surtout étudiées à l'aide d'un développement en  $2 + \epsilon$ , où, contrairement à la dimension  $d = 4$ , la norme du paramètre d'ordre est fixée (modèle sigma non-linéaire) [110]. La fonction de partition s'écrit en tenant compte de cette contrainte:

$$Z = \int \mathcal{D} \vec{\phi}_1 \mathcal{D} \vec{\phi}_2 \delta(1 - \vec{\phi}_1^2 - \vec{\phi}_2^2) \exp \left[ - \int d^d x \left( (\nabla \vec{\phi}_1)^2 + (\nabla \vec{\phi}_2)^2 + v(\vec{\phi}_1)^2 (\vec{\phi}_2)^2 + \sum_{k \geq 2} w_k O_k + \dots \right) \right] \quad (2.13)$$

En dimension  $2 + \epsilon$ , une rapide analyse dimensionnelle montre que  $[v] = 2 - \epsilon$ , donc que ce terme est fortement pertinent au voisinage de la dimension 2. Les autres termes seront moins pertinents. Dans une théorie de perturbation, le système sera conduit dans un domaine de couplage fort à ( $v = \infty$ ). Une bonne théorie effective ne retient que ce terme en  $v \vec{\phi}_1^2 \vec{\phi}_2^2$ , les autres termes étant moins pertinents dans la limite de couplage fort. Dans ce cas, l'action peut parfaitement être assimilée à la limite continue du modèle sur réseau suivant:

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{\phi}_i \vec{\phi}_j - v \sum_i (\vec{\phi}_{i,1})^2 (\vec{\phi}_{i,2})^2 \quad (2.14)$$



avec  $v \gg 1$ . En posant  $\vec{S}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\phi}_{i,1} + \vec{\phi}_{i,2})$  et  $\vec{S}'_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\phi}_{i,1} - \vec{\phi}_{i,2})$ , l'Hamiltonien (2.14) devient:

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j + \vec{S}'_i \vec{S}'_j + v \sum_i [(\vec{S}_i \vec{S}'_i)^2 - \frac{1}{4}] \quad (2.15)$$

où l'on a tenu compte de la contrainte  $\vec{\phi}_1^2 + \vec{\phi}_2^2 = 1$ . Remarquons que  $(\vec{S}_i \vec{S}'_i)^2 \leq \frac{1}{4}$

Dans la limite de couplage fort  $v \rightarrow \infty$ , seul les termes tels que:

$$\vec{S}'_i = \sigma_i \vec{S}_i \text{ avec } \sigma_i = \pm 1 \quad (2.16)$$

ont une contribution non nulle à la fonction de partition. Dans ce cas, le modèle effectif décrivant (2.15) se met sous la forme:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j (1 + \sigma_i \sigma_j) \quad (2.17)$$

qui décrit un vecteur à deux composantes couplé à des variables d'Ising. Par le biais de toutes ces transformations, on a simplement réécrit l'action (2.10) en dimension deux, comme la limite continue d'un Hamiltonien effectif microscopique.

On peut arriver à un résultat similaire en ne retenant directement que les fluctuations de phase du paramètre d'ordre (on pose  $\phi_i = |\phi| e^{i\theta_i}$ ) dans l'action de GLW (2.10) [104]. Dans ce cas, on aboutit à une action effective entre les phases  $\theta_i$  prenant la forme de deux modèles XY couplés:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} \Gamma_1 [\cos(\theta_{1,i} - \theta_{1,j})] + \Gamma_2 [\cos(\theta_{2,i} - \theta_{2,j})] - h \sum_i \cos 2(\theta_{1,i} - \theta_{1,i}) \quad (2.18)$$

avec  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  dans le cas isotrope. On est déjà tombé sur ce modèle dans le chapitre 1. Il décrit également de manière effective le comportement critique du modèle XY  $J_1 - J_2$ . Dans une étude de la renormalisation de ce modèle,  $h$  est un paramètre très pertinent et impose  $\theta_{2,i} = \theta_{1,i} + \pi \tau_i$  avec  $\tau_i = 0, \pm 1$  [68, 111]. Dans la limite  $h \rightarrow \infty$ , on retrouve un hamiltonien effectif similaire à (2.17) avec un terme en  $C \sigma_i \sigma_j$  en plus. Ce terme doit être présent car il est de tout façon généré par la renormalisation du modèle (2.17).

Plus généralement, on définit le modèle Ising-XY étendant (2.17) comme:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} [(A + B \sigma_i \sigma_j) \cos(\theta_i - \theta_j) + C \sigma_i \sigma_j] \quad (2.19)$$

Le cas  $A \neq B$  correspond à la limite  $h \rightarrow \infty$  avec  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ , c'est à dire le cas anisotrope.

### 2.2.3 Modèles XY couplés

L'étude du modèle (2.18) peut s'effectuer directement à l'aide de la transformation de Villain. Je vais donner les grandes lignes de ce calcul en suivant [68, 67]. J'ai déjà traité ce genre de problème au chapitre précédent. La fonction de partition s'écrit :

$$Z = \left[ \prod_r \int_0^{2\pi} d\theta_1(r) d\theta_2(r) \right] \sum_{S(r)} \sum_{\{n_1(r,r')\}} \sum_{\{n_2(r,r')\}} \exp -A \quad (2.20)$$

avec

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{2}\Gamma_1 \sum_{\langle r,r' \rangle} (\theta_1(r) - \theta_1(r') - 2\pi n_1(r, r'))^2 + \frac{1}{2}\Gamma_2 \sum_{\langle r,r' \rangle} (\theta_2(r) - \theta_2(r') - 2\pi n_2(r, r'))^2 \\ & + \gamma \sum_{\langle r,r' \rangle} (\theta_1(r) - \theta_1(r') - 2\pi n_1(r, r'))(\theta_2(r) - \theta_2(r') - 2\pi n_2(r, r')) \\ & - 2i \sum_r S(r)(\theta_1(r) - \theta_2(r)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

où les variables de liens  $n_1, n_2, S$  sont à valeurs entières et ont été introduites par la transformée de Villain. On a également introduit un couplage entre les variables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  car il est de toute façon généré par le groupe de renormalisation. L'intégration sur les variables angulaires s'effectue aisément et on obtient une action  $A(M_1, M_2, S)$  où  $M_1, M_2$  sont les variables de vortex (définies sur le réseau dual) associées aux champs de liens  $n_1$  et  $n_2$ :

$$\begin{aligned} A(M_1, M_2, S) = & \pi\Gamma_1 \sum_{R,R'} M_1(R)G(R - R')M_1(R') + \pi\Gamma_2 \sum_{R,R'} M_2(R)G(R - R')M_2(R') \\ & + 2\pi\gamma \sum_{R,R'} M_1(R)G(R - R')M_2(R') + 2i \sum_R \sum_r S(r)\Theta(r - R)(M_1(R) - M_2(R)) \\ & + \delta \sum_{R,R'} S(r)G(r - r')S(r') \\ & + \sum_R (\log y_1 M_1^2(R) + \log y_2 M_2^2(R)) + \log y_S \sum_r S^2(r) \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec  $\delta = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\gamma}{\pi(\Gamma_1\Gamma_2 - \gamma^2)}$ .

La notation  $R$  correspond à un site du réseau dual. Les fugacités  $y_1, y_2, y_S$  associées aux variables  $M_1(R), M_2(R), S(r)$  ont également été introduites. Le comportement à grande distance des fonction de Green  $G(R)$  et  $\Theta(r)$  est :

$$G(R) = \log(R/a) + \frac{\pi}{2} ; \quad \Theta(r) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.23)$$

avec  $r = (x, y)$  et  $a$  le pas du réseau. On a ainsi transformé l'étude de l'action (2.18) en un problème de gaz de Coulomb à plusieurs espèces. Des équations du groupe de renormalisation associées à des problèmes similaires ont été établies dans l'annexe B en

fin de manuscrit. Je donne directement sur la Figure 2.7 le diagramme de phase obtenu (pour les détails de l'étude, voir [68, 67]).

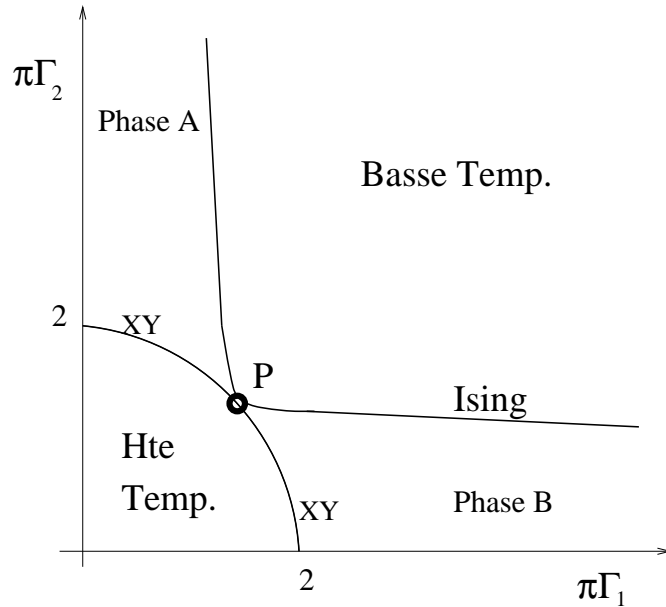


FIG. 2.7 - *Diagramme de phase du problème à deux modèles XY couplés dans le plan  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$*

La phase basse température correspond à une décroissance en loi de puissance des fonctions de corrélation pour  $\theta_1, \theta_2$ . La phase A correspond à une phase désordonnée vis à vis du paramètre d'ordre d'Ising et quasi ordonnée pour la variable  $\theta_2$ . La phase B est similaire à la phase A mais avec la variable  $\theta_1$ . Enfin, la phase à haute température est paramagnétique. On peut tout d'abord remarquer que les transitions de type Ising et XY sont bien séparées pour  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ . Cette condition, préservée par les équations de renormalisation, correspond à des modèles FFXY anisotropes. Par contre, sur la droite  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ , les deux transitions semblent se mélanger au point  $P$ . L'étude des équations du groupe de renormalisation ne permet pas de conclure s'il y a en ce point une ou deux transitions bien qu'un article récent ait prétendu le contraire [112] (leur analyse reste purement spéculative).

#### 2.2.4 Bilan des prédictions théoriques

J'ai présenté dans les sections précédentes quelques outils théoriques pour étudier le modèle FFXY. La principale démarche repose sur une action type GLW et une étude des fluctuations de phase. On a ainsi pu relier entre eux, par des théories effectives, différents modèles que l'on suppose dans la même classe d'universalité comme le modèle FFXY, le modèle Ising-XY, deux modèles XY couplés. A cette liste, il faut rajouter le modèle XY AF sur réseau triangulaire, certains modèles XY hélimagnétiques sans oublier, bien sûr,

le modèle XY  $J_1 - J_2$  qui a fait l'objet du chapitre 1. Cependant, il n'y a absolument pas de conclusion claire quant à la nature de ou des transitions.

D'un point de vue qualitatif, l'image en terme de gaz de Coulomb interagissant avec des parois de domaine donnée par Halsey [102] semble séduisante. En effet, la "fonte" des parois de domaine, transition supposée de type Ising, déclencherait la transition de type XY d'où deux transitions très rapprochées voir ou même point. Cette image permettait d'expliquer qualitativement le comportement non-universel de la transition XY dans les expériences sur les réseaux de jonctions Josephson. Néanmoins, ce raisonnement demeure limité car il est complètement basé sur le paramètre d'ordre Ising et ignore la corrélation entre les deux paramètres d'ordre. De plus, cette image de charges fractionnaires aux coins des parois de domaine ne s'applique qu'aux modèles FFXY.

L'étude des modèles FFXY anisotropes où les deux transitions sont clairement séparées, a permis de montrer que le cas isotrope est vraiment très particulier. Beaucoup de chercheurs pensent qu'une symétrie supplémentaire doit exister pour le modèle FFXY isotrope.

Dans cette perspective, Foda [113] a conjecturé que la transition du modèle FFXY était décrite par une théorie supersymétrique d'action:

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int dx dy \left[ \partial^\alpha \Phi \partial_\alpha \Phi - i \bar{\psi} \sigma^\alpha \partial_\alpha \psi \right] \quad (2.24)$$

où  $\alpha = 1, 2$ ;  $\sigma^\alpha$  sont les matrices de Dirac à  $2D$ .

Le premier terme correspond à un champ libre décrivant le comportement critique du modèle Gaussien. Le second terme est un fermion de Majorana non massif décrivant le comportement critique du modèle d'Ising. C'est une théorie de charge centrale  $c = 3/2$ . Cette action suppose que les transitions de type Ising et XY se découplent à la limite infrarouge. Cette idée, bien que sans fondement, est attrayante dans la mesure où l'action (2.24) décrit la plus simple des théories superconformes. De plus, la supersymétrie serait cette symétrie tant recherchée. Une idée similaire fut également proposée par Den Nijs [114] mais pour un modèle de croissance de surface difficile à relier au modèle FFXY.

Comme les arguments théoriques sont relativement limités et surtout peu prédictifs, la plupart des travaux des dix dernières années sur le sujet sont essentiellement de nature numérique.

## 2.3 Résultats numériques

Il est impossible d'énumérer tous les travaux numériques tellement ils sont nombreux et parfois contradictoires. Je vais surtout essayer de résumer ceux qui me paraissent essentiels.

### 2.3.1 Modèle FFXY

La plupart des simulations ont pour but de répondre à une question, à savoir y a-t-il deux transitions très proches ou une seule transition dans une nouvelle classe d'universalité. Pour ce faire, Berge *et al.* [105] ont introduit une anisotropie dans le modèle FFXY en remplaçant les interactions AF  $J$  par  $\lambda J$ . Des mesures Monte Carlo de chaleur spécifique en fonction de  $\lambda$  leur ont permis de mettre à jour le diagramme de phase de ce modèle représenté sur la Figure 2.8

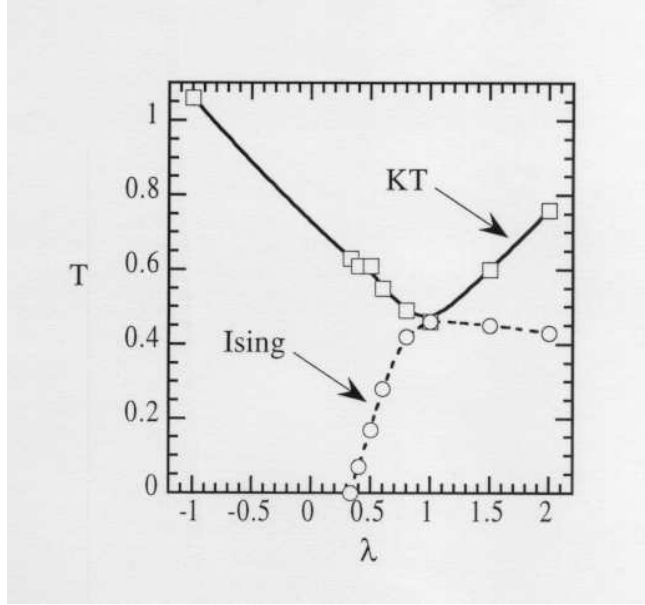


FIG. 2.8 - Diagramme de phase schématisé du modèle FFXY modifié obtenu par Berge *et al.* par mesure Monte Carlo de la chaleur spécifique.

Pour toute valeur  $\lambda \neq 1$ , ils ont parfaitement identifié deux transitions distinctes. Ce résultat est bien en accord avec les prédictions théoriques de la section précédente. Pour  $\lambda = 1$ , les deux transitions semblent fusionner ce qui semble indiquer, que si les deux transitions ne se produisent pas à la même température, elles sont pour le moins très proches.

Beaucoup plus récemment, Ramirez-Santiago *et al.* [115] ont mesuré numériquement les exposants critiques associés aux différents paramètres d'ordre. Leurs simulations Monte Carlo portent sur des tailles allant jusque  $240 \times 240$ . Ces auteurs prédisent deux transitions très proches aux erreurs systématiques près. Les exposants critiques associés à la transition chirale (prétendue de type Ising) sont :

$$\nu = 0.875, \quad 2\beta = 0.1936(35), \quad 2\gamma = 1.82(13)$$

et différent de ceux du modèle d'Ising. De même, le saut du module d'hélicité est non universel (ces auteurs ont trouvé une valeur de  $\eta = 0.19$  au lieu de 0.25 pour le modèle XY

pur). Des résultats similaires ont été obtenus par des méthodes indépendantes, l'élément le plus caractéristique étant  $\nu_{Z(2)} < 1$  [116, 117, 118, 119].

D'autres simulations dues à Olsson [120, 121] du modèle FFXY prennent pour point de départ sa représentation en terme de gaz de coulomb. Contrairement aux auteurs précédents, Olsson a trouvé deux transitions bien séparées de type Ising et Kosterlitz-Thouless (avec  $T_{KT} \approx 0.446 < T_I \approx 0.452$ ). A la lumière de ces résultats, on peut peut-être s'interroger sur la validité de la représentation en terme de gaz de Coulomb. De plus, ce résultat me semble difficile à raccorder avec le diagramme de la figure 2.8. En effet, au niveau de la transition, le diagramme de phase aurait l'allure représentée sur la figure 2.9. Le fait d'avoir  $T_{KT} < T_I$  donne au diagramme de phase du modèle FFXY

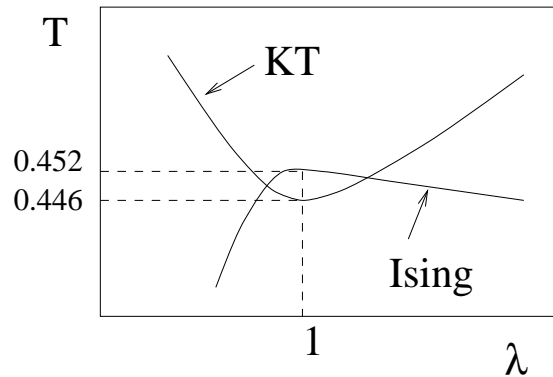


FIG. 2.9 - Représentation schématique des prévisions de Olsson pour le diagramme de phase du modèle FFXY anisotrope

anisotrope une topologie très particulière et peu probable. En effet, cela suppose qu'il existerait deux valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles les deux transitions sont superposées, donc cela décale le problème.

Une autre quantité intéressante accessible numériquement à l'aide de méthodes de matrice de transfert [122] est la charge centrale  $c$ . Pour mesurer la charge centrale, on utilise le fait que l'énergie libre par spin sur une bande de largeur  $L$  aux conditions limites périodiques varie comme [123]

$$F = F_\infty - \frac{\pi c}{6L^2}$$

Si les deux transitions étaient bien découplées et de type Ising et KT, on aurait une charge centrale  $c = 1 + \frac{1}{2}$ . Thijssen et Knops [124] ont trouvé  $c \approx 1.66 \pm 0.04$  par des simulations Monte Carlo de matrice de transfert [122]. Il est néanmoins difficile de donner une interprétation significative à ce résultat dans la mesure où les effets de taille sont très importants.

Pour finir, il faut mentionner une étude très récente due à Luo *et al.* [119] basée sur une approche de la dynamique à temps court des variables de chiralité du modèle FFXY. Cette méthode part du principe qu'à partir d'un certain temps microscopique  $t_m$ ,

des comportements d'échelle universels apparaissent dans le processus de dynamique à temps courts [125, 126]. Les auteurs ont tout d'abord clairement mis en évidence ces lois d'échelle dynamiques à temps courts dans le modèle FFXY. A partir de cela, ils ont pu identifier tous les exposants critiques associés aux variables de chiralité. Ils ont trouvé  $\nu = 0.81(2)$  et une température critique  $T_c = 0.4545$ . Cette valeur est 20% en dessous de celle du modèle d'Ising pur! L'efficacité de cette méthode reste néanmoins à démontrer sur d'autres systèmes mais semble très prometteuse car moins coûteuse en temps de calculs du fait que l'on est à temps court. De plus, elle ne nécessite pas des tailles aussi grandes qu'une étude statique.

### 2.3.2 Modèle Ising-XY

Plutôt que d'étudier le modèle FFXY qui ne possède qu'un seul paramètre dans sa version isotrope, plusieurs auteurs ont tenté de comprendre le modèle Ising-XY (2.19) qui possède deux paramètres (dans le cas isotrope) que l'on pourra varier à volonté. Dans l'esprit, cela revient à utiliser la même méthode que Berge *et al.* à savoir rajouter un paramètre pour mieux étudier l'approche de la transition. De plus, dans le modèle Ising-XY, les variables d'Ising sont introduit directement au niveau de l'action.

Le diagramme de phase de ce modèle a été calculé à l'aide de simulations Monte Carlo par Granato *et al.* [111, 127]. Pour  $A \neq B$ , les transitions Ising et XY sont bien séparées. Ce point fut déjà expliqué dans la section précédente. Le cas intéressant correspond à  $A = B$  et semble inclure le modèle FFXY. Le diagramme de phase pour  $A = B$  est présenté sur la figure 2.10. Un diagramme de phase similaire a été établi par une approche de type Migdal-Kadanoff [111].

Tout d'abord, la région  $A \gg 1$  correspond à la région ordonnée donc basse température. On peut donc déjà remarquer pour  $C > C^* \sim 0$ , que les deux transitions sont séparées. Lorsque l'on augmente la température, on a tout d'abord une transition de type XY suivi d'une transition de type Ising. On peut s'attendre à ce qu'il n'en soit pas autrement, dans la mesure où l'on a vu par des arguments heuristiques, que la transition Ising semblait déclencher la transition XY. Cela peut aussi se voir directement sur l'Hamiltonien (2.19): lorsque  $A = B$ , le modèle possède la symétrie supplémentaire sous les transformations  $S_i \rightarrow \sigma_i S_i$  où  $S_i$  est le spin du modèle XY. Ainsi les modèles XY ne sont pas couplés à travers les parois de domaine associées au spins d'Ising. Quand la température augmente, le nombre de domaines augmente et en quelque sorte "découpe" les interactions XY. On retrouve un peu l'image de gaz de Coulomb introduite pour le modèle FFXY mais sans faire intervenir de charge fractionnaire (qui sont plus un artéfact de la représentation en gaz de Coulomb du modèle FFXY).

Dans le modèle FFXY, les vortex peuvent interagir via l'interaction coulombienne sans forcément appartenir au même domaine. Cette interaction n'est pas prise en compte dans

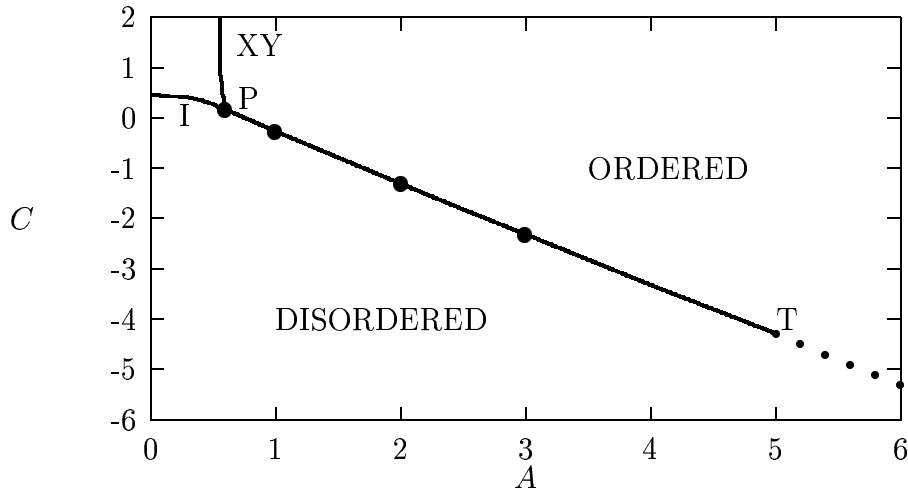


FIG. 2.10 - Diagramme de phase du modèle Ising-XY. Les lignes pleines indiquent des transitions continues et la ligne en pointillé des transitions du premier ordre

l'Hamiltonien (2.19). Knops *et al.* ont montré que cet effet était non pertinent dans la limite infrarouge [128].

Les deux transitions Ising et KT se mélangent au point  $P$  en une seule aux incertitudes numériques près. Le point  $T$  correspond à un point tri-critique où la transition devient du premier ordre. La transition du modèle FFXY correspond seulement à un point de cette ligne. Il est par contre difficile de par la nature effective du modèle Ising-XY de savoir exactement où se situe ce point, d'autant plus qu'il n'est pas du tout évident que cette ligne soit une ligne de points fixes stables.

Il est à noter que des extensions du modèle FFXY dont le comportement critique serait décrit par toute la ligne  $PT$  ont été proposées [82]. Dans cette perspective, on peut se demander si la transition du modèle XY,  $J_1 - J_2$ , étudié au chapitre 1, correspond à un point ou à un segment de cette ligne lorsque l'on fait varier le rapport  $J_2/J_1$  [57]. Il est difficile de répondre à cette question.

Granato *et al.* ont effectué des simulations Monte Carlo par des calculs de matrices de transfert en deux points de la ligne ( $PT$ ) ( $A \sim 1.$ ,  $A \sim 2.$ ) pour mesurer les exposants critiques associées au paramètre d'ordre d'Ising [127, 129]. Ces auteurs ont trouvé  $y_T = \frac{1}{\nu} = 1.27$  pour  $A \sim 1.$  et  $y_T = 1.42$  pour  $A = 2.$ . Des calculs de matrice de transfert avaient été effectués par Knops *et al.* [128] sur le modèle FFXY avec des résultats plus ou moins similaires.

L'autre grandeur accessible par cette approche est la charge centrale. Granato *et al.* [129] ont mesuré l'évolution de la charge centrale avec la largeur  $L$  de la bande considérée pour différentes valeurs de  $A$ . Les résultats sont présentés sur la figure 2.11.

Les valeurs de  $c_{eff}$  pour  $A = 0.6$  (cela correspond au point de branchement) ne sont



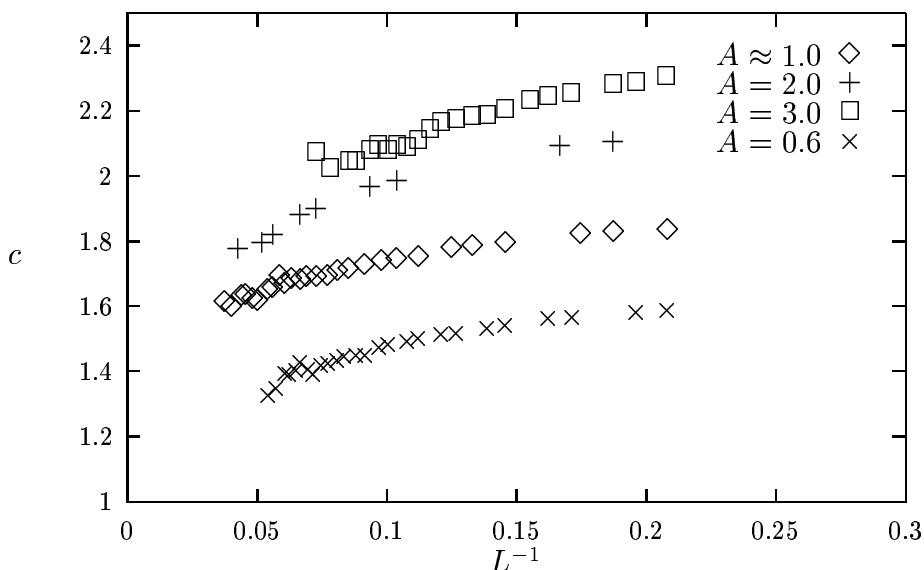


FIG. 2.11 - Charge centrale effective en fonction de  $1/L$  pour différentes valeurs de  $A$

pas très pertinentes dans la mesure ou la convergence n'est pas bonne. Le fait remarquable est que la charge centrale effective semble diminuer lentement avec la taille. D'après les auteurs, il est difficile d'extrapoler la valeur de la charge centrale dans la limite  $L \rightarrow \infty$  car les corrections aux scaling décroissent trop lentement avec la taille [129]. Néanmoins, on peut remarquer qu'une valeur de la charge centrale  $c = \frac{3}{2}$  n'est pas exclue. A cause de forts effets de taille finie, la charge centrale ne permet pas de trancher quant à la nature de la transition. De plus, il est, au regard de cette étude, difficile de dire si la ligne (PT) correspond à une ligne de point fixe stable comme c'est le cas dans le modèle d'Ashkin-Teller [130], où bien s'il n'y a qu'un seul point fixe stable attractif dans une nouvelle classe d'universalité.

## 2.4 Lien avec les modèles de croissance de surface

Comme une approche numérique directe des modèles FFXY et Ising-XY ne permet pas vraiment de trancher, la communauté s'est tournée vers d'autres représentations de ces modèles.

Le modèle XY peut être relié au modèle SOS (solid on solid). De nombreux travaux récents ont remarqué diverses analogies entre certains problèmes de croissance de surface (modélisés par des extensions du modèle SOS) et les modèles FFXY [131, 114, 132, 133, 134]. En fait, chacune de ces extensions contient une symétrie discrète supplémentaire de type  $Z(2)$  et la nature du comportement critique se pose. Je ne vais pas toutes les décrire car elles sont assez difficile à comparer entre-elles. Je vais surtout présenter un travail

récent de Lee *et al.* [135] dont le point de départ est le modèle Ising-XY.

La fonction de partition du modèle Ising-XY peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ C_0 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \right] \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^N d\theta_k \prod_{\langle i,j \rangle} \exp [K_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] \quad (2.25)$$

avec  $K_{ij} = A_0(1 + \sigma_i \sigma_j)$  et  $N$  le nombre de site.

Le potentiel s'écrit en série de Fourier:

$$\exp [K_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] = \sum_{n_{ij}} = \exp[in_{ij}\theta_{ij}] \exp [\tilde{V}(n_{ij})], \quad (2.26)$$

Après intégration sur les variables  $\theta$ , la fonction de partition se met sous la forme:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ C_0 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \right] \sum_{\{n\}} \left[ \prod_i \Delta(i) \right] \prod_{\langle k,l \rangle} \exp [\tilde{V}(n_{kl})] \quad (2.27)$$

où  $\Delta(i)$  représente la contrainte sur les liens partant ou arrivant au site  $i$ . Par exemple pour le site 0 entouré par les sites 1, 2, 3, 4 comme indiqué sur la figure 2.12, le contrainte est :

$$\Delta(0) = \delta_{n_{01}+n_{02}, n_{30}+n_{40}}.$$

Cette contrainte est automatiquement satisfaite lorsque l'on définit les variables  $h$  sur le réseau dual par:

$$\begin{aligned} n_{01} &= h_1 - h_2, & n_{02} &= h_2 - h_3 \\ n_{30} &= h_4 - h_3, & n_{40} &= h_1 - h_4. \end{aligned}$$

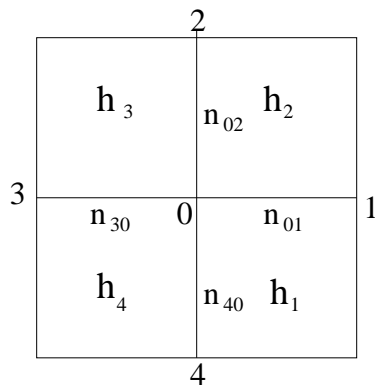


FIG. 2.12 - Définition des variables de hauteur sur le réseau dual

La fonction de partition s'écrit avec ces nouvelles variables:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ C_0 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \right] \sum_{\{h\}} \exp \left[ \sum_{\langle I,J \rangle} \tilde{V}(h_I - h_J) \right] \quad (2.28)$$

où  $I, J$  sont les sites du réseau dual. Cette procédure peut bien sûr s'appliquer au modèle XY simple. C'est d'ailleurs comme cela qu'il fut traité dans le célèbre papier de José *et al.* [27]. A ce stade, la transformation est exacte ! Les variables  $h$  sont entières et peuvent être assimilées à des hauteurs sur le réseau dual.

Le potentiel  $\tilde{V}$  est par définition:

$$\exp \left[ \tilde{V}(h_I - h_J) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-i(h_I - h_J)\theta_{ij}] \exp[A_0(1 + \sigma_i \sigma_j) \cos \theta_{ij}] d\theta_{ij}, \quad (2.29)$$

où le lien  $IJ$  du réseau dual croise le lien  $ij$  dur réseau origine.

Deux cas de figure se présentent:

- Si  $\sigma_i \sigma_j = -1$ , alors  $\exp \left[ \tilde{V}(h_{IJ}) \right] = \delta_{h_{IJ}, 0}$ . Cela signifie qu'il n'y a pas de variation de hauteur lorsque l'on traverse une paroi de domaine de type Ising.
- Si  $\sigma_i \sigma_j = +1$  alors  $\exp[\tilde{V}(h_I - h_J)] = I_{h_{IJ}}(2A)$  est simplement la fonction de Bessel d'ordre  $h_{IJ}$ . Du fait de la décroissance rapide des fonctions de Bessel avec  $h_{IJ}$ :

$$I_{h_{IJ}}(2A_0)/I_0(2A_0) \approx \exp(-h_{IJ}^2/4A_0),$$

on utilise l'approximation habituelle consistant à se restreindre aux valeurs  $h_{IJ} = 0, \pm 1$ .

A partir de ces arguments, un bon Hamiltonien effectif pour ce système est le suivant:

$$-\beta H = C \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - A \sum_{\langle I,J \rangle} |h_I - h_J| \quad (2.30)$$

où  $(h_I - h_J) = 0, \pm 1$  si  $\sigma_i \sigma_j = 1$  et  $h_I = h_J$  sinon.  $A$  et  $C$  sont reliés à  $A_0$  et  $C_0$  par:

$$\exp(-A) = I_1(2A_0)/I_0(2A_0) \quad \text{et} \quad \exp(2C) = \exp(2C_0)I_0(2A_0) \quad (2.31)$$

Lorsqu'il n'y a pas de variables d'Ising, l'Hamiltonien se réduit au modèle RSOS (restricted solid on solid) qui décrit un système de croissance de surface où l'écart entre deux hauteurs successives ne peut excéder 1. Le modèles RSOS peut être décrit comme un modèle à six vertex qui est intégrable [136]. Il possède deux phases:

A basse température, l'énergie est trop faible pour engendrer des fluctuations de la surface, on parle de phase lisse (Flat). Lorsque l'énergie thermique est au dessus d'une valeur critique, la hauteur de la surface fluctue beaucoup, on parle alors de surface rugueuse (rough). La transition entre les deux phases est dans la même classe d'universalité que celle du modèle XY. Lorsque l'on inclut le paramètre d'ordre de type Ising, Lee *et*

*al.* [135] ont montré que le modèle possède comme dans le modèle Ising-XY trois phases: une phase IOF (Ising ordered flat) où le paramètre d'ordre Ising est ordonné et la surface lisse, une phase IOR (Ising ordered rough) où la surface est rugueuse et ordonnée vis à vis du paramètre d'ordre Ising et enfin une phase DOF (Ising disordered flat) où la surface est lisse et désordonnée pour le paramètre Ising. Par rapport au modèle Ising-XY, on a la correspondance suivante:

$$\begin{aligned} \text{phase IOR} &\iff \text{Ising et XY ordonnés} \\ \text{phase IOF} &\iff \text{Ising ordonné et XY désordonné} \\ \text{phase DOF} &\iff \text{Ising et XY désordonnés} \end{aligned}$$

Le diagramme de phase est présenté sur la figure 2.13

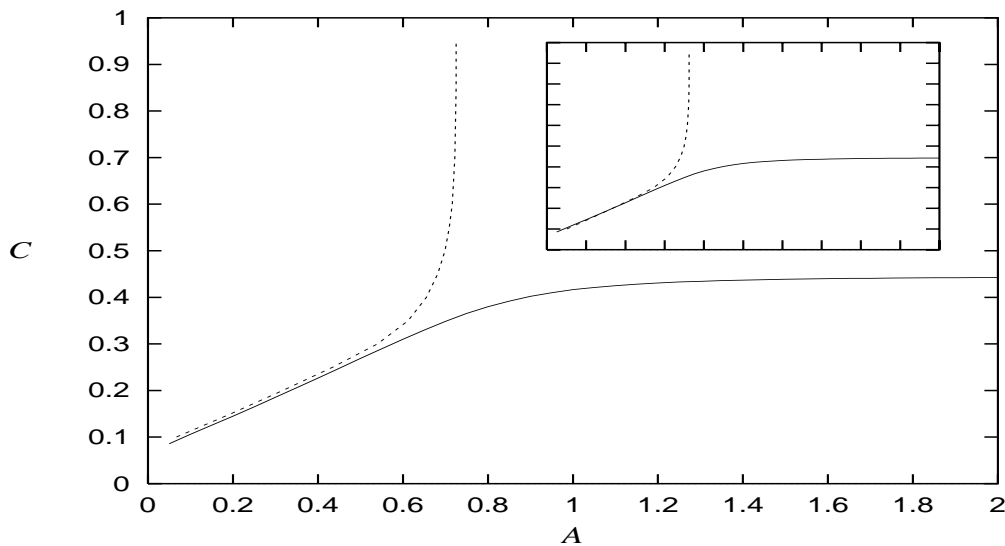


FIG. 2.13 - Diagramme de phase du modèle Ising-RSOS. On trouve en bas la phase DOF, au milieu la phase IOF et à gauche la phase IOR

La phase IOF est intercalée entre la phase DOF (en bas) et la phase IOR (à gauche). D'après les auteurs, les phases IOF et DOR sont bien séparées par la phase IOF, ce qui suggère pour le modèle Ising-XY deux transitions de phase séparées. Ces auteurs ont également mesuré la susceptibilité associé au paramètre d'ordre de type Ising. L'exposant magnétique  $\gamma/\nu$  est en accord avec celui du modèle d'Ising (1.75) pour  $A > 0.8$  et

décroît par la suite quand les transitions sont très proches. Ces auteurs ont interprété ces déviations comme étant dues à des effets de taille finie apportant ainsi de grandes corrections au lois d'échelle.

Une autre étude due à Knops *et al.* [128] part directement du modèle FFXY. Ces auteurs ont exhibé un “mapping” entre le modèle FFXY et une extension du modèle à 19 vertex. Ce dernier est relié au modèle RSOS. En effet, une flèche d'un vertex (une variable de lien orientée) peut être vue comme une différence de  $\pm 1$  entre deux hauteurs adjacentes sur le réseau dual. Le modèle à 19 vertex est intégrable [136] mais hélas pas l'extension proposée par Knops *et al.* [128]. Néanmoins, cette représentation se prête bien à une étude numérique par la méthode des matrices de transfert. Ces auteurs ont obtenu une charge centrale  $c \approx 1.55(5)$  (résultat en accord avec la ref. [129]). Par contre, ils ont trouvé un exposant  $\nu_I \approx 0.81(3)$ .

D'autres études partent directement du modèle à six vertex (directement relié au modèle SOS) dans lequel on introduit un paramètre d'ordre de type Ising (soit à partir d'une dégénérescence  $Z(2)$  au niveau du réseau [132], soit à partir d'interactions compétitives entre premiers et second voisins [134]). Elles ont donné des résultats relativement similaires, c'est à dire des déviations significatives de l'exposant  $\nu_I$  du paramètre d'ordre Ising lorsque les deux transitions se fondent l'une l'autre.

## 2.5 Bilan des études numériques

Au vu des résultats numériques exposés précédemment, je vais essayer de tirer quelques conclusions:

i) Tout d'abord, les simulations les plus récentes [135, 119, 121, 116, 137, 128] semblent indiquer deux transitions séparées. Cet élément s'appuie soit sur des simulations Monte Carlo du modèle FFXY plus précise (notamment par l'étude de la dynamique à temps court), soit sur une représentation en terme de gaz de Coulomb ou en terme de modèle SOS. L'énorme intérêt numérique de ces représentations est que les degrés de liberté associés aux ondes de spin ne sont par présents et donc ne polluent pas le comportement à taille finie. Il est clair que ces résultats reposent sur le fait que les ondes de spin se découplent des vortex et des spins d'Ising, et sont non-pertinentes à la limite infrarouge. Ceci a été montré explicitement pour la version à 19-vertex du modèle FFXY par Knops *et al.*. Si on admet l'hypothèse qu'il y ait deux transitions (ces arguments sont numériques), on pourrait s'attendre à ce qu'elles soient de type Ising et XY, mais les résultats ne semblent pas aller dans ce sens.

ii) J'ai regroupé les valeurs de certains exposants critiques et de la charge centrale de différents modèles à symétrie  $Z(2) \times U(1)$  (FFXY, FFXY dans sa représentation en gaz de Coulomb (CG), Ising-XY, extension du modèle à 19 vertex) dans le tableau 2.1

obtenus par des méthodes Monte Carlo (MC), des méthodes Monte Carlo dynamiques (MC-dyn), des simulations Monte Carlo de matrice de transfert (MCTM), des calculs de matrices de transfert (TM).

Modèle	Méthode	Ref.	$c$	$\nu_I$	$2\beta_I/\nu$
FFXY	MCTM	Knops <i>et al.</i> [124]	1.66		0.40(2)
FFXY	MC	J. Lee <i>et al.</i> [138]		0.82(4)	0.31(3)
FFXY	MCTM	Granato <i>et al.</i> [118]	1.61(3)	0.75(6)	0.38(3)
FFXY	MC	Ramirez <i>et al.</i> [115]		0.875(35)	0.22(4)
FFXY	MC	Ramirez <i>et al.</i> [117]		0.898(3)	
FFXY	MC-dyn.	S. Lee <i>et al.</i> [116]		0.813(5)	0.22(2)
FFXY	MC-dyn.	Luo <i>et al.</i> [119]		0.81(2)	0.261(5)
CG	MC	Olsson [120, 121]		$\sim 1.$	$\sim 0.25$
CG	MC	J.-R. Lee [137]		0.84	0.26
Ising-XY	MC	J. Lee <i>et al.</i> [127, 111]	1.5-2.	0.84	0.31
Ising-XY	MCTM	Nightingale <i>et al.</i> [129]	$\sim 1.6$	0.79	0.4
19-vertex	TM	Knops <i>et al.</i> [128]	1.55(5)	0.77(3)	0.28 $\rightarrow$ 0.37

TAB. 2.1 - *Exposants critiques et charge centrale associées à la transition dite chirale obtenus par différents groupes.*

Dans ce tableau, je n'ai pas inclus les résultats concernant les extensions des modèles RSOS [114, 134, 132, 133] car ils sont difficile à comparer avec les modèles ci-dessus.

Le point commun à presque tous ces résultats est la valeur de  $\nu_I < 0.9$ . Ce résultat semble indiquer des déviations significatives à la transition de type Ising. Par contre la valeur de  $2\beta_I/\nu$  est beaucoup plus sujette à controverse et d'une méthode à l'autre. On peut naturellement s'interroger sur les valeurs obtenues par Olsson [120, 121]. En y regardant de plus près, on se rend compte que l'analyse de Olsson est fondée sur une détermination "précise" des températures de transition en supposant un saut du module d'hélicité pour la transition XY universel. Or c'est justement un des points les plus controversés. De plus, comme l'ont fait remarqué José *et al.*, il n'y a pas dans l'analyse de Olsson de calculs d'erreur systématiques prenant en compte l'indétermination précise des températures de transitions.

Face à tous ces résultats numériques parfois contradictoires, plusieurs attitudes (en fait quatre) peuvent être adoptées:

- Ne pas croire aux résultats numériques car les effets de taille finie sont très grands dans les systèmes liés au modèle XY.
- Ne pas croire au fait qu'il y ait deux transitions car elles sont trop proches pour être

distinguées de manière fiable. Cela privilégie le scénario d'une seule transition dans une nouvelle classe d'universalité.

- Ne pas croire au fait que  $\nu_I < 1$  car les mesures de cet exposant sont polluées par la proximité de la transition KT (surtout si celle-ci a lieu avant la transition Ising) qui induirait une longueur d'écrantage susceptible de perturber les analyses numériques à taille finie comme l'a suggéré Olsson [121]. On aurait alors deux transitions de type Ising et XY bien séparées.
- Supposer acquis le fait d'avoir numériquement deux transitions et  $\nu_I < 1$  et essayer de concilier ces deux points *a priori* contradictoires. C'est plutôt cette dernière direction que je vais tenter d'éclaircir. Une solution possible est que les deux transitions soient effectivement découplées à la limite infrarouge mais qu'il y ait un fort régime de "cross-over" induit par la présence d'un autre point fixe instable. Cette hypothèse a été formulée par Knops *et al.* [128]. On aurait par exemple le diagramme de flot présenté sur la figure 2.14 pour le modèle Ising-XY (dans le plan  $(A, C)$ ) [128].

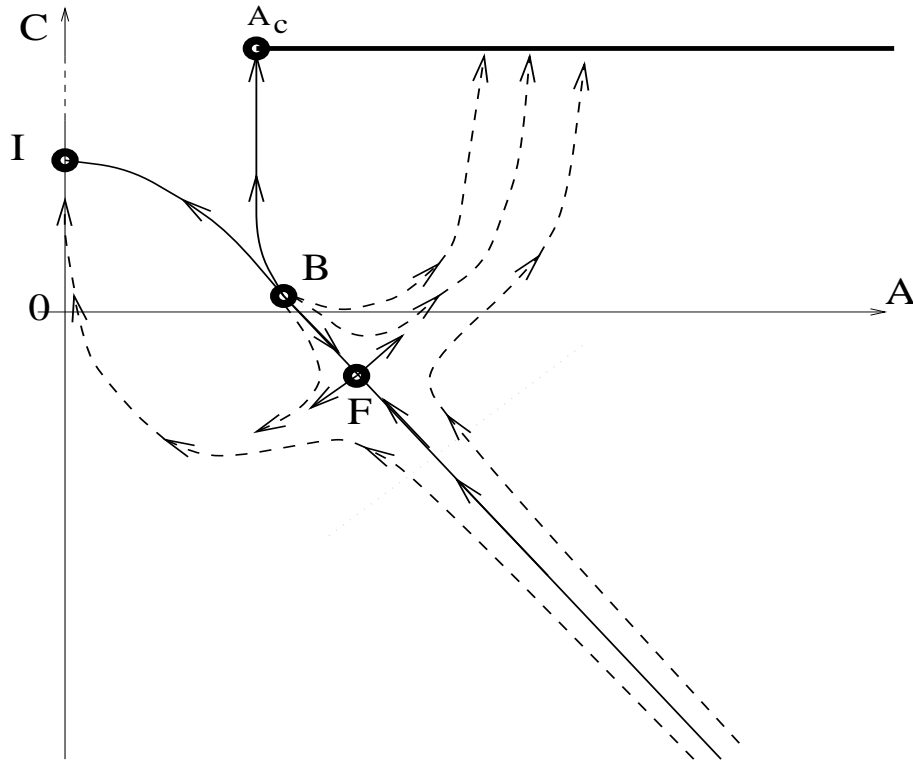


FIG. 2.14 - Trajectoires du flot de renormalisation (en tiret) du modèle Ising-XY. La ligne en pointillé en dessous du point F correspond à la variation de la température dans le modèle FXY.

Sur l'axe  $A = 0$ , on trouve le point fixe stable du modèle d'Ising noté I. Pour  $C$  très grand, les spins d'Ising sont figés et on retrouve un modèle XY avec une ligne de point fixe attractive pour  $A > A_c$ . Knops *et al.* ont conjecturé l'existence d'un point fixe F sur la ligne critique trouvée par Granato *et al.* [111]. Ce point fixe pourrait parfaitement expliquer les résultats de Granato *et al.* [129] de variation continue des exposants critiques sur la ligne critique. Si l'on suppose que varier la température dans le modèle FFXY revient à se déplacer sur la ligne en pointillé. Au niveau de la transition, le point fixe F va jouer un rôle déterminant et pourrait expliquer les déviations des exposants critiques tel que  $\nu_I < 1$ . En effet, les trajectoires sont toutes d'abord attirées par ce point fixe puis repoussées. Si les échelles typiques des simulations correspondent au régime de cross-over, alors les exposants vont surtout dépendre de ce point fixe F. De plus, le théorème C de Zamolodchikov [139, 140] indique que la charge centrale ne peut que décroître le long des trajectoires de renormalisation. Cela implique que  $c(F) > 3/2$  conformément aux résultats obtenus par la méthode des matrices de transfert.

J' étudierai au chapitre 4 une situation assez similaire avec un modèle d'Ising critique couplé à plusieurs modèles de Potts critiques par leurs densité d'énergie (comme le modèle Ising-XY) et je montrerai l'existence de nouveaux points fixes tri-critiques susceptibles de perturber le comportement infrarouge. Bien que la comparaison entre les deux situations soit difficile, l'exemple que je vais étudier a le mérite de montrer que ce genre de situation peut survenir lorsque l'on couple un modèle d'Ising à un grand nombre de degrés de liberté.

Tous ces arguments me laissent à penser qu'il doit sûrement exister un point fixe tri-critique dans le modèle Ising-XY qui doit dominer la physique du modèle FFXY pour les tailles de réseau accessibles numériquement. Ceci demeure néanmoins une conjecture. Il faudra sûrement une nouvelle idée *analytique* pour débloquer cette situation ou il est difficile de croire aveuglément les résultats numériques parfois contradictoires.





## Deuxième partie

Une approche semi-classique de  
l'ordre par le désordre: application  
aux liquides de spin



---

## Chapitre 3

# Une approche semi-classique de l'ordre par le désordre

### 3.1 Présentation de l'article

J'ai présenté au cours de la première partie l'étude du modèle XY bidimensionnel  $J_1 - J_2$ . On a vu que les fluctuations thermiques ou quantiques lèvent la dégénérescence classique. Il demeure néanmoins une symétrie discrète résiduelle  $Z(2)$  qui donne, comme on l'a vu, tout le caractère original de ce modèle. Une question vient immédiatement à l'esprit à savoir si ces conclusions sont communes à tous les systèmes de spins présentant un état fondamental très dégénéré. Afin de répondre à cette question, je vais étudier dans cette deuxième partie de thèse des modèles frustrés géométriquement où l'état fondamental classique est encore plus dégénéré. Je vais clairement différencier fluctuations quantiques et thermiques et montrer que dans certaines situations, elles n'ont pas du tout les mêmes effets vis à vis de l'ordre par le désordre. Ce travail s'est effectué en collaboration avec B. Douçot. Le but de l'article qui suit est de donner également des résultats généraux concernant l'effet des fluctuations quantiques dans les systèmes très dégénérés. Pour ce faire, nous avons utilisé le fait que la dynamique de spin nous donne accès aux corrections à l'énergie de point zéro du spectre basse énergie. Ainsi, nous avons formulé l'étude des fluctuations quantiques pour des spins  $S$  grand, en une analyse de la dynamique de spin dans l'espace de phase, ce qui fournit une vision géométrique de ces effets d'ordre par le désordre quantique.

J'ai directement inclus l'article dans la mesure où il est largement détaillé et s'inscrit parfaitement dans la suite de cette thèse.

B. Douçot and P. Simon

**Résumé**

We study in this paper the Heisenberg antiferromagnet with nearest neighbours interactions on the Husimi cactus, a system which has locally the same topology as the Kagomé lattice. This system has a huge classical degeneracy corresponding to an extensive number of degrees of freedom. We show that unlike thermal fluctuations, quantum fluctuations lift partially this degeneracy and favour a discrete subset of classical ground states. In order to clarify the origin of these effects, we have set up a general semi-classical analysis of the order from disorder phenomenon and clearly identified the differences between classical and quantum fluctuations. This semi-classical approach also enables us to classify various situations where a selection mechanism still occurs. Moreover, once a discrete set of ground states has been preselected, our analysis suggests that tunnelling processes within this set should be the dominant effect underlying the strange low energy spectrum of Kagomé-like lattices.

**3.2 Introduction**

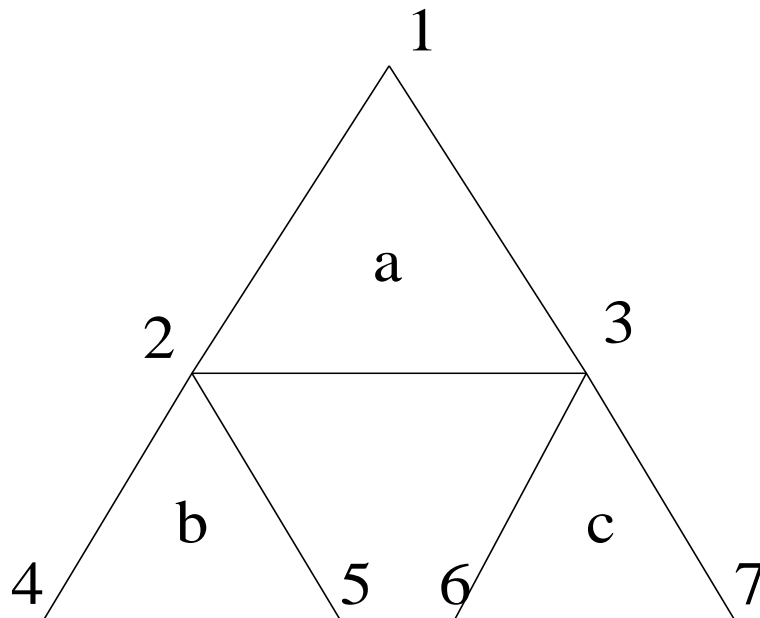
Motivated by the search and understanding of new quantum disordered ground states in magnetic systems, recent years have seen a renewal of interest on the properties of frustrated Heisenberg antiferromagnetic (HAF) systems with a special attention to their possible relations with superconductivity. More specifically, a considerable amount of work has been done on frustrated systems whose classical ground states exhibit an infinite number of local continuous degeneracies. Typical examples of such systems are the HAF models on the Kagomé lattice in two dimensions ( $2D$ ) and the HAF models on the pyrochlore lattice in three dimensions. The HAF models on the Kagomé lattice has been originally inspired by the structure of the  $SC_7GO$  compound [141, 142, 143] but also by the experiments on the  $^3\text{He}$  layer on graphite [144, 145, 146] despite the possibility that the adsorption of Helium on graphite may have the Kagomé lattice structure seems now to have been ruled out. Other compounds whose magnetic ions live on a pyrochlore lattice have also been experimentally studied by neutron scattering [147, 148, 149].

From the theoretical point of view, the ground state of the quantum HAF model on the Kagomé lattice is believed to be a quantum spin liquid. This model has been investigated by exact diagonalizations on finite lattices [150, 151], series expansions [152], Large- $N$  calculations [153] and also with semi-classical approaches [154, 155, 156, 157]. More recently, some theoretical works on the HAF model on the pyrochlore lattice have pointed out that this model is already disordered at any finite temperature [158] unlike

the classical Kagomé Heisenberg antiferromagnet which chooses coplanar spin configurations at low temperatures. The low energy spectrum of the HAF model with spin  $\frac{1}{2}$  on the Kagomé lattice [159, 160] and the pyrochlore lattice [161] have been analyzed by performing exact diagonalizations on small clusters. The results are quite fascinating in both cases since there is a singlet-triplet gap and nevertheless a large singlet degeneracy which increases exponentially with the cluster size. It seems then plausible that the huge classical degeneracy should play a major role in order to explain these surprising results.

Systems with many degenerate classical ground-states were often considered as useful toy models before studying for instance spin glasses for which *both* frustration and randomness are relevant. It has been then noticed by J. Villain and coworkers [15], and also by E. Shender [58], that switching on any source of fluctuation (typically, either classical thermal or quantum zero-point fluctuations) has a tendency to lift the degeneracy between these classical ground-states. Often this mechanism picks ordered ground-states since they exhibit more symmetries and therefore encourage larger fluctuations. This is the so-called “order from disorder” phenomenon. Over the last ten years, many interesting contributions have been dedicated to this topic, in the context of the frustrated square lattice [59], the Kagomé lattice [155, 156], and the pyrochlore lattice [158, 161]. A common trend in all these works is the appearance of at least a partial degeneracy lifting within the ground-state manifold, in the presence of classical thermal or quantum zero-point fluctuations. In most cases, both types of fluctuations favour the same subset of ground-states. This appears to be a little surprising, since we shall provide in this paper an explicit example for which they behave in a qualitatively different way. But the question of degeneracy lifting is only one part of the story, since it is mostly a *local* analysis in the vicinity of a given ground-state. Maybe more crucial to the physical behaviour is the *global* question of whether the system remains close to any of the favoured ground-states or not. This question is closely connected to the size of energy barriers separating these pre-selected ground-states. If these barriers are too small, either thermal activation or quantum tunneling may delocalize the system in phase-space, and thus destroy the selection itself. In fact, evidence now strongly accumulates to support such a scenario, either for the Kagomé or the pyrochlore lattices, which exhibit classical and quantum spin liquid phases with apparently no long-range order. Although this global aspect of the selection mechanism is very interesting, there are few systems for which a rather complete analytical treatment is available. Therefore, in spite of the fact that different systems often exhibit different behaviours, we believe that valuable insight may be gained from simpler models which can be studied more easily than more realistic geometries.

Among these, the Husimi cactus (see Figures 3.1 and 3.2) has already provided an explicit example of a system with a continuous manifold of classical ground-states where energy barriers are too low to freeze the system in the vicinity of a given ground-state in the classical *thermal* case [162]. From the quantum point of view, the relevance of

FIG. 3.1 - *The 3-generation Husimi cactus.*

tunneling effects is clearly demonstrated by comparing the relatively small ground-state degeneracy (for spin  $S = 1/2$ ) which scales as the number of sites and the huge classical degeneracy: for instance the number of *coplanar* spin ground-states (once the direction of the top spin has been fixed) is growing exponentially with the number of sites in so far as it corresponds to the configurations of a 3-state Potts model on the Husimi cactus. The question we address here is: tunneling between *which* classical ground-states? More precisely: does the quantum zero point energy depend on the classical ground-state? We have found that unlike classical thermal fluctuations for which all classical ground-states on the Husimi cactus are equivalent, quantum fluctuations do favour the discrete subset of coplanar classical ground-states. We believe it is one of the clearest examples where thermal and quantum fluctuations behave in a qualitatively different way, already at the non-interacting spin-wave level. In order to clarify the origin of this effect, we have set-up a semi-classical analysis of order from disorder. The main idea is simply to calculate the spin-wave spectrum from the classical equations of motion for spins, since the classical frequency also determines the quantum zero-point motion energy of a harmonic mode. The classical dynamical approach greatly simplifies for instance the separation between fast oscillations around a classical ground-state and slow drift motions along the classical ground-state manifold, which are connected to zero modes. It also provides a very simple understanding for the different nature of classical thermal and quantum zero point fluctuations. In the context of the Husimi cactus, the equivalence between all the ground-states for thermal fluctuations is related to the presence of continuous transformations which conserve the total energy and phase-space volume, and therefore the Gibbs measure. An example of such a transformation is a rotation of all the spins below a given site on

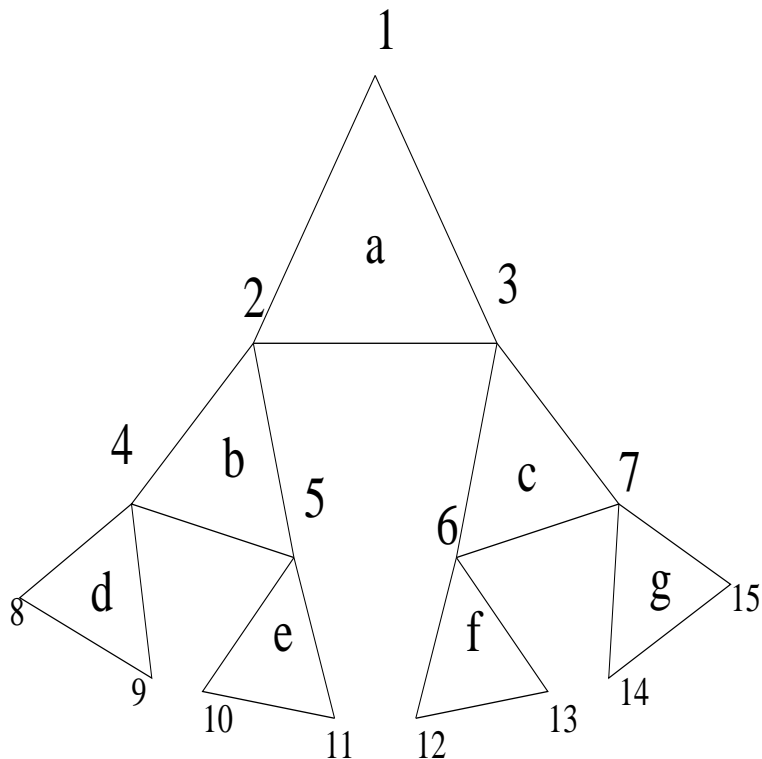


FIG. 3.2 - *The 4-generation Husimi cactus.*

the cactus around the spin at this given site. However, conservation of the Gibbs measure is not sufficient to enforce conservation of the zero-point motion energy, since hamiltonian dynamics requires also a symplectic structure on phase-space (Poisson brackets), which turns out not to be preserved by the aforementioned transformations. We shall show that the non-conservation of Poisson brackets under these phase-space transformations is due to the fact that they cannot be generated (via Poisson brackets) by functions defined on phase-space or in other words that not are not true symmetry of the Hamiltonian. This shows that it is rather difficult to preserve quantum-mechanically a continuous classical degeneracy which is not enforced by a symmetry of the Hamiltonian. We expect that only a discrete residual degeneracy survives after introducing quantum zero point motion.

We believe this analysis contributes to rule out one possible scenario which might have been advocated to understand the unusual situation of the spin 1/2 Kagomé lattice. The generation of very low energy scales in the singlet sector might have been attributed to very slow drift motions close to and along the continuous set of classical ground-states. Note that this continuous set is *not* a smooth manifold for either the Kagomé or the pyrochlore lattices, since for those the number of zero modes depends on the classical ground-state [155]. Although simple and appealing, this idea does not work for two reasons. The first one is the large gap between the singlet and the spin one sectors, which shows the impossibility to construct long-lived wave packets centered mostly around a single classical ground-state. The other reason is provided by our analysis: because of



quantum zero-point fluctuations, the ground-state continuum turns into a discrete set, so that classical drift motions in the vicinity of this continuum acquire finite typical frequencies. Therefore, we conclude that a semi-classical analysis of the energy spectrum on Kagomé-like lattices (of which the Husimi cactus is a simple example) should focus on tunneling processes within a discrete set of preselected (via quantum fluctuations) classical ground-states. These processes are crucial to induce the gap in the spin one sector. The main challenge for the Kagomé lattice is then to understand why they lift so weakly the degeneracy in the singlet sector. We haven't addressed this crucial question here, but we have clarified what happens when we try to quantize a system with a smooth manifold of classical ground-states, whose dimension is larger than the number of independent symmetries of the Hamiltonian. Either tunneling plays a minor role, but then the classical slow variables experience an effective energy landscape which is no longer flat, or tunneling is the dominant effect, as we believe is the case for both the Husimi cactus and the Kagomé lattice.

Our presentation is organized as follows. Section 2 will present very simple examples with two degrees of freedom and a one dimensional degenerate ground-state manifold. This will illustrate how order from disorder works in a classical hamiltonian system, provided the fast modes are prepared with a finite value of the corresponding action variable. Section 3 is dedicated to a simple spin chain for special values of coupling parameters which produce a more symmetrical ground-state manifold (the full sphere  $S^2$ ) than one would expect from the symmetries of the Hamiltonian (rotations around a single axis). Section 4 presents the main results for the Husimi cactus, and section 5 contains our geometrical interpretation of the difference between thermal classical and quantum zero-point fluctuations. A brief conclusion is given in section 6, and several appendices present some technical details that most readers will prefer to skip.

### 3.3 Some simple examples with two degrees of freedom

In this section, we consider simple examples of dynamical systems where the classical ground-state manifold is one dimensional. This will demonstrate explicitly that classical dynamics exhibits the phenomenon of order from disorder provided the fast modes are “fast enough”.

#### 3.3.1 An integrable toy model

Let us consider a dynamical system with two degrees of freedom, with coordinates  $(X_1, P_1, X_2, P_2)$  on phase space. Here  $(X_1, P_1)$  denote a slow mode which is continuously degenerate along the line  $(X_1, 0, 0, 0)$  in phase space, and  $(X_2, P_2)$  a fast mode, which oscillation frequency

$\Omega$  is a smooth function of  $X_1$ . We thus introduce the following Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}\Omega(X_1)(P_2^2 + X_2^2) \quad (3.1)$$

We note that  $P_1$  commutes with  $H$  only if  $\Omega$  is a constant. So the classical degeneracy is not in general due to a symmetry of  $H$ . This Hamiltonian is integrable since we can perform the following canonical transformation  $(X_1, P_1, X_2, P_2) \longrightarrow (X_1, P_1, J_2, \theta_2)$ , where  $X_2 = \sqrt{2J_2} \sin \theta_2$  and  $P_2 = \sqrt{2J_2} \cos \theta_2$ . With these new canonical variables,  $H$  becomes:

$$H = \frac{1}{2}P_1^2 + \Omega(X_1)J_2 \quad (3.2)$$

The motion of the fast mode is described by:

$$\dot{J}_2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{\theta}_2 = \Omega(X_1) \quad (3.4)$$

So, as we expect, the oscillation frequency is controlled by the “slow” variable  $X_1$ , and is therefore time-dependent in general. Here the action  $J_2$  is *exactly* conserved, which is a special feature of this model. In general,  $J_2$  may be approximately conserved with good accuracy, since it is an adiabatic invariant [163, 164]. However, this requires a good separation between the slow and the fast time scales. This question will be addressed soon. Turning now to the “slow” variables, we have:

$$\dot{X}_1 = P_1 \quad (3.5)$$

$$\dot{P}_1 = -J_2 \frac{d\Omega}{dX_1}(X_1) \quad (3.6)$$

We see that if  $J_2$  is non-vanishing, the slow variables  $(X_1, P_1)$  acquire a non-trivial dynamics, with an effective potential given by:  $V_{eff}(X_1) = J_2\Omega(X_1)$ . Therefore the classical degeneracy is dynamically lifted, and  $X_1$  oscillates around the value which minimizes the fast frequency  $\Omega(X_1)$ . In a semi-classical approach, the fast oscillator is excited with quantized values for  $J_2 = \hbar(n + 1/2)$ , where  $n$  is a non-negative integer. So the effective potential corresponding to quantum zero-point motion is obtained from  $J_2 = \frac{\hbar}{2}$ . Although very simple, this model captures the main idea we need throughout the rest of the paper.

### 3.3.2 A more generic example

The special status of the previous model comes from the fact that action-angle variables corresponding to the fast motion do not depend on the slow variables  $(X_1, P_1)$ . In quantum mechanical words, only the frequency of the fast motion depends on  $X_1$ , but the eigenstate basis of the corresponding harmonic oscillator doesn't. In such a case, the adiabatic principle is exact, and eigenstates of the time-dependent problem are given by those

of the time independent one (up to phase factors). But in general, we expect the local eigenstate basis to depend on the actual value of  $X_1$ . As a result, the classical action is only approximately conserved, and therefore transitions to excited states may occur for the fast oscillator, specially if the two frequency scales are not very well separated. We show here a simple example where the adiabatic principle may break down. We think this is a very interesting problem in classical mechanics, which deserves further investigation. But this would be beyond the scope of this paper. We just provide here an illustration that complicated things may happen. Let us then consider the following Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}P_2^2 + \frac{1}{2}(1 + \epsilon X_1^2)X_2^2 \quad (3.7)$$

This represents as before a potential landscape similar to a gutter with variable curvature depending on  $X_1$ . Assume first that  $X_1$  can be frozen. The fast oscillator evolves with a frequency  $\Omega(X_1) = (1 + \epsilon X_1^2)^{1/2}$ . The corresponding action-angle variables  $(J_2, \theta_2)$  would now be given by:

$$X_2 = \left(\frac{2J_2}{\Omega(X_1)}\right)^{1/2} \sin \theta_2 \quad (3.8)$$

$$P_2 = (2J_2\Omega(X_1))^{1/2} \cos \theta_2 \quad (3.9)$$

But now, since the definition of  $(J_2, \theta_2)$  involves explicitly  $X_1$ , the corresponding transformation is no longer canonical. As before  $\frac{1}{2}P_2^2 + \frac{1}{2}\Omega^2(X_1)X_2^2 = \Omega(X_1)J_2$  is the effective potential of the slow variables, but  $J_2$  is not exactly conserved. As usual, this effective Hamiltonian is obtained by averaging over one period for the fast variables [163]. To evaluate when the adiabatic approximation makes sense, let us compare the slow and the fast frequencies. The averaged motion of the slow variables is given by:

$$\dot{X}_1 = P_1 \quad (3.10)$$

$$\dot{P}_1 = -J_2 \frac{d\Omega}{dX_1}(X_1) = -J_2 \epsilon \frac{X_1}{(1 + \epsilon X_1^2)^{1/2}} \quad (3.11)$$

For the small oscillations of  $X_1$ , we find the slow frequency  $\omega = (J_2\epsilon)^{1/2}$  which has to be much smaller than the minimum value of  $\Omega(X_1)$ , that is we require  $J_2\epsilon \ll 1$ . We have performed a numerical integration of the equations of motion for this model in order to check the overall picture. The results are summarized in Figures 3.3, 3.4, 3.5. The Figures 3.3 and 3.4 represent the “quasi orbits” of the slow and fast oscillators for two different values of the parameter  $\epsilon = 0.1$  and  $\epsilon = 0.25$ . We clearly see a qualitative change in the dynamics as  $\epsilon$  is increased with a breakdown of the adiabatic approximation for larger values of  $\epsilon$ . This can be seen in a more explicit way by plotting directly the variations of the adiabatic invariant  $J_2$  of the fast motion during one quasi period of the slow motion.

This has been done in Figure 3.5. The adiabatic approximation is no longer valid for  $\epsilon = 0.25$ . It would be very interesting to identify the underlying mechanism by which this breakdown occurs. We just mention here that Figure 3.5 suggests that  $J_2$  acquires a time dependence with frequencies which are close to simple harmonics of the “fast” frequency. Therefore, a perturbative approach might give valuable insights here.

The data support however the validity of our picture up to rather large values of  $J_2\epsilon$ , around 0.1. We shall now move on to spin systems with many degrees of freedom.

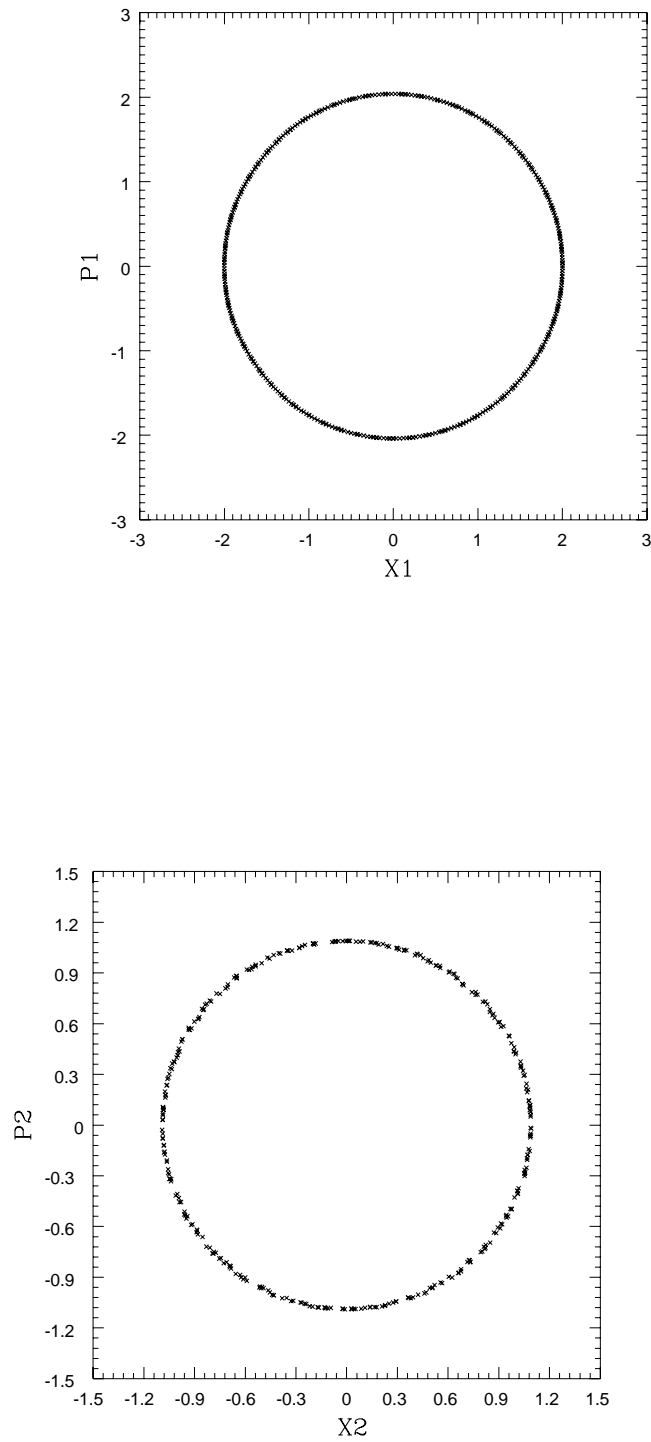


FIG. 3.3 - Poincaré sections of the slow (1) and the fast (2) motions for  $\epsilon = 0.1$  with rescaling of the variables  $(X_2, P_2)$ . The adiabatic approximation seems good even for rather high values of  $\epsilon$ .

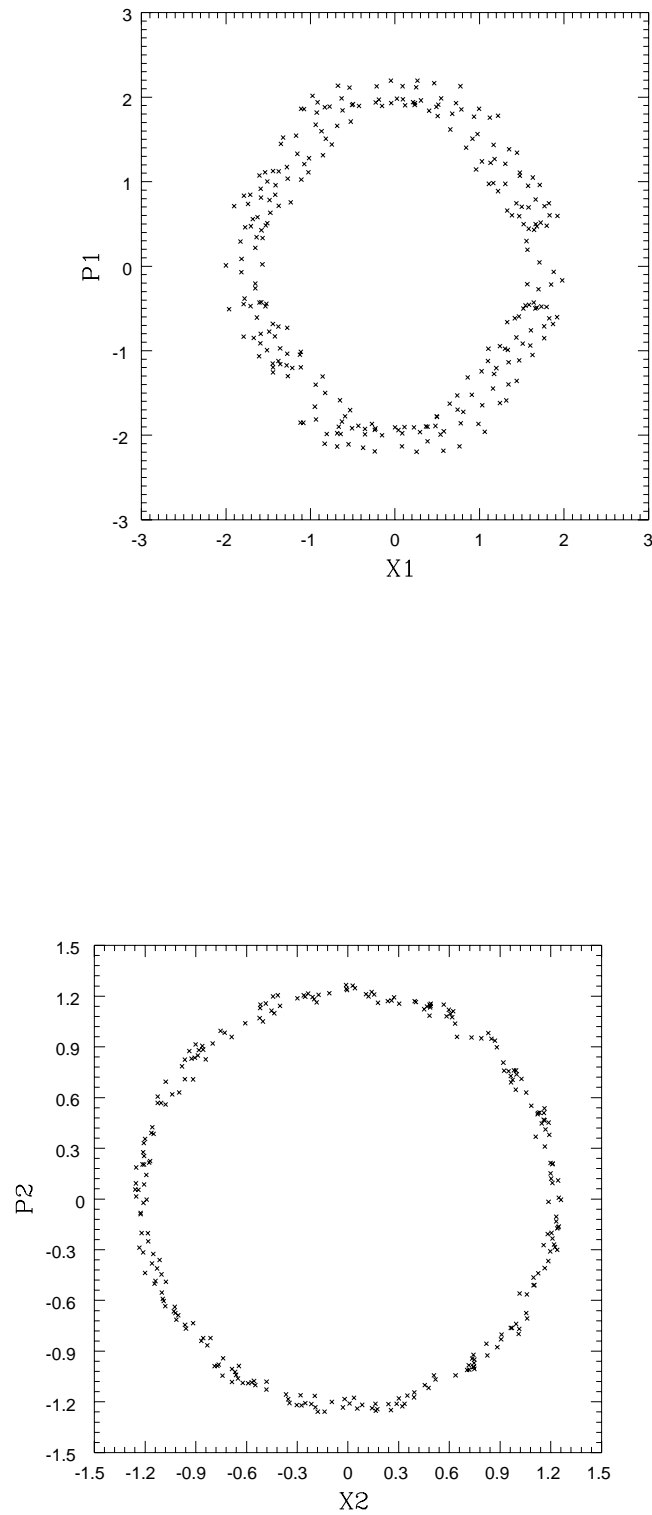


FIG. 3.4 - *Poincaré sections for the slow and fast motions for  $\epsilon = 0.25$ . We begin to see the deviations from the circular orbits signaling violation of the adiabatic approximation.*

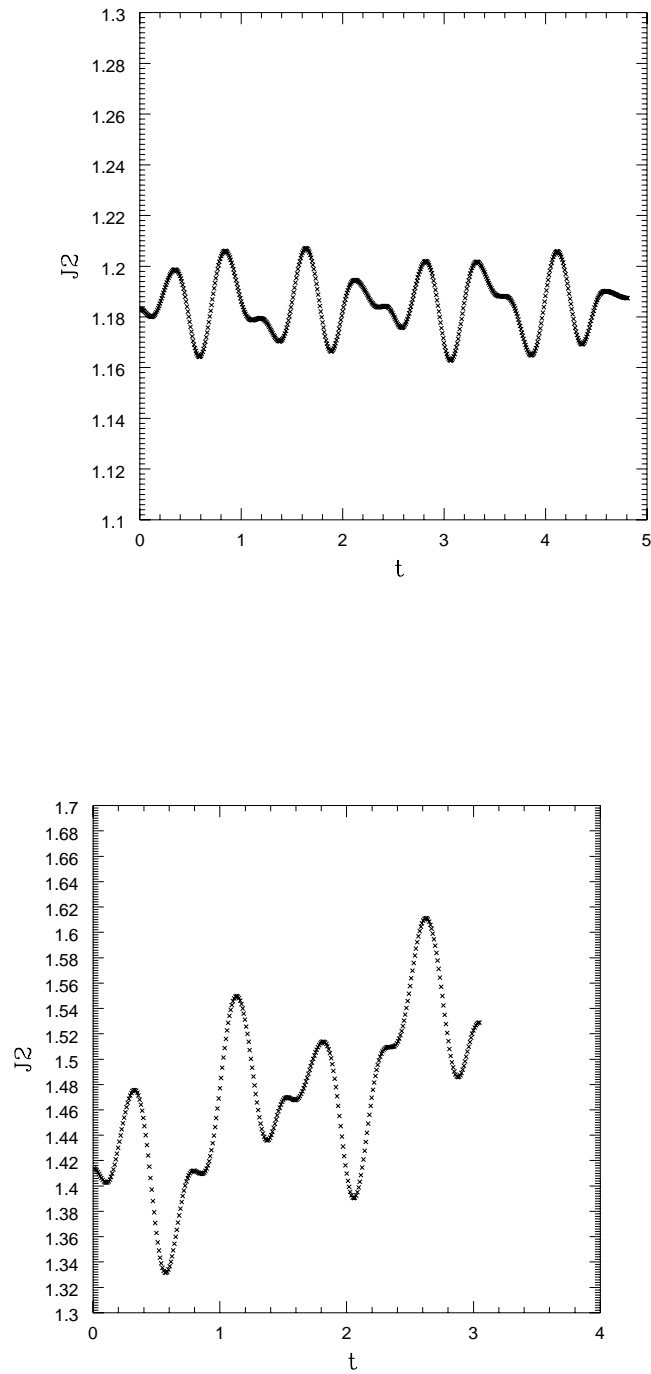


FIG. 3.5 - Variation of the adiabatic invariant  $J_2$  of the fast oscillator during one “period” of the slow oscillator for  $\epsilon = 0.1$  and  $\epsilon = 0.25$ . These curves are more accurate to indicate the deviations of the adiabatic approximation which are much stronger for  $\epsilon = 0.25$

## 3.4 A ferromagnetic chain

### 3.4.1 Ground state and dispersion relations in the different phases

We study in this section the spin dynamics of a one dimensional XXZ chain with an anisotropic quadratic term. The Hamiltonian reads

$$\mathcal{H} = \sum_i J \left( S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y + \Delta S_i^z S_{i+1}^z \right) + \sum_i (S_i^z)^2 \quad (3.1)$$

where  $\vec{S}_i$  is a three dimensional vector normalized to  $S$  (the length of the vector is a constant of motion from a classical and quantum point of view).

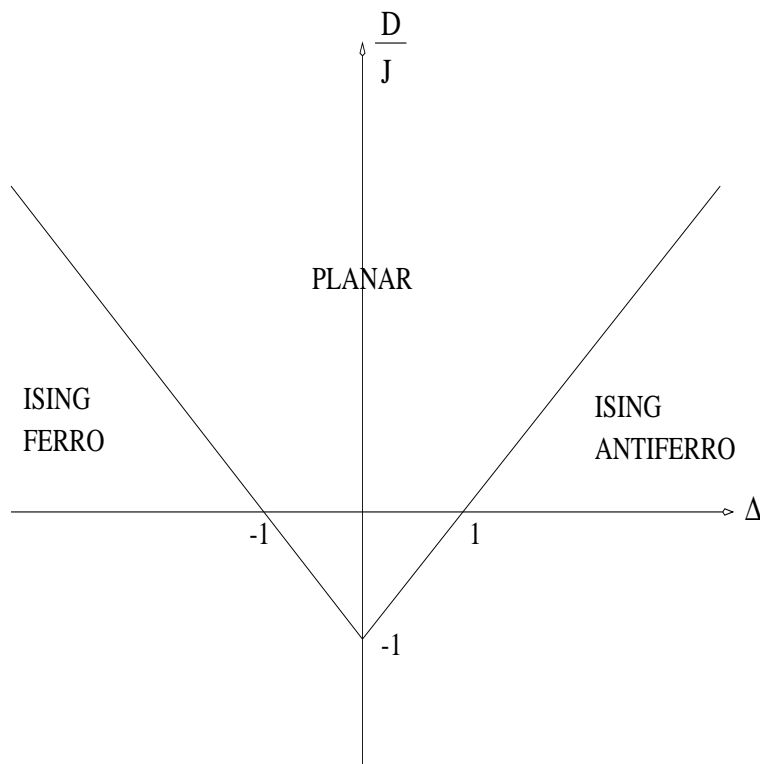


FIG. 3.6 - *Classical phase diagram of the anisotropic Heisenberg spin chain*

The classical phase diagram of this model can be determined easily and has been drawn on Figure 3.6 (see also ref. [131] for a quantum analysis with  $S = \frac{1}{2}$ ,  $S = 1$ ). It is composed of three different phases: the ferromagnetic one, the planar one and the antiferromagnetic one (AF). In order to compute the low energy spectrum in the various phases (at large  $S$ ), it is easy to use the Holstein-Primakoff transformation. Nevertheless, we prefer to work here with classical spin dynamics at  $T = 0$  in order to give a consistent treatment of the order from disorder phenomenon. This assumes a spin  $\hat{S}$  reacts like a rotor which can be parametrized by a vector  $\vec{S}$ . The evolution of a quantity  $O(S)$  is given



by:

$$\frac{dO(S)}{dt} = \{O, H\}$$

with  $\{\cdot \cdot \cdot\}$  the Poisson brackets defined as:

$$\{f, g\} = \epsilon^{abc} \frac{\partial f}{\partial S^a} \frac{\partial g}{\partial S^b} S^c$$

with  $\epsilon^{abc}$  the completely antisymmetric tensor. If  $\vec{S}$  is a vector living on a sphere  $S^2$ , the corresponding classical Poisson brackets are given by:  $\{S^a, S^b\} = \epsilon^{abc} S^c$ . After a standard quantization process, we would obtain the usual commutation rules for spin operators (see [165] for a rigorous treatment *à la Dirac*). The equations of motion then become:

$$\frac{dS^a}{dt} = \epsilon^{abc} \frac{\partial H}{\partial S^b} S^c \quad (3.2)$$

These equations of motion can also be derived directly from a variational principle, the latter being more adapted for a direct path integral quantization scheme.

We are now ready to derive the equations of motion following eq. (3.2) for the hamiltonian (3.1) in each of the three possible phases.

In the ferromagnetic ground-state, we use the decomposition  $\vec{S} = S^z \vec{z} + \vec{S}^\perp$  (with  $(\vec{z})^2 = 1$ ) and we obtain the system of equations:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{S}_n^\perp}{dt} = & J \left[ (\vec{S}_{n-1}^\perp + \vec{S}_{n+1}^\perp) \wedge S_n^z \vec{z} + \Delta (S_{n-1}^z + S_{n+1}^z) \vec{z} \wedge \vec{S}_n \right. \\ & \left. + \frac{D}{J} (S_n^z (\vec{z} \wedge \vec{S}_n^\perp)) + (\vec{z} \wedge \vec{S}_n^\perp) S_n^z \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{d\vec{S}_n^z}{dt} = J (\vec{S}_{n-1}^\perp + \vec{S}_{n+1}^\perp) \wedge \vec{S}_n^\perp \quad (3.4)$$

In the vicinity of the ferromagnetic ground-state, we can assume:

$$\vec{S}_n(t) = S \vec{z} + \exp i(kn - \omega t) \vec{\epsilon} + O(\epsilon^2)$$

with  $\vec{\epsilon} \cdot \vec{z} = 0$ . By solving this system, we find the dispersion relation:

$$|\omega(k)| = 2JS \left| \Delta + \frac{D}{J} - \cos(k) \right| \quad (3.5)$$

We would have obtained the same low energy spectrum (with  $\hbar = 1$ ) by using for example the Holdstein-Primakoff transformation. When  $\Delta + \frac{D}{J} = -1$ , the mode at  $k = \pi$  becomes slow and has the expected  $k^2$  dispersion for a ferromagnetic ground-state.

In the planar region, we use the following general decomposition for  $\vec{S}_n = \vec{S}_n^0 + \delta \vec{S}_n \vec{u}$

$$\vec{S}_n = (-1)^n S \vec{u} + (A(-1)^n \vec{v} + B \vec{z}) \exp i(kn - \omega t) \quad (3.6)$$

where  $\vec{S}_n^0 = (-1)^n S$ . We have also defined  $\vec{u} \cdot \vec{z} = 0$ ,  $(\vec{u})^2 = 1$  and  $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$ . The equations giving  $A$  and  $B$  are:

$$\begin{aligned} -i\omega A &= 2JS[1 + \Delta \cos(ka) + \frac{D}{J}]B \\ i\omega B &= 2JS(1 - \cos(ka))A \end{aligned} \quad (3.7)$$

As  $|\Delta| \leq 1 + \frac{D}{J}$  in the planar region, we find:

$$\omega = \pm 2JS(1 - \cos(ka))^{\frac{1}{2}} \left(1 + \Delta \cos(ka) + \frac{D}{J}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Two interesting limits can be taken. First, when  $\Delta + \frac{D}{J} \rightarrow -(1)^+$ , we recover the soft mode in  $k^2$ , whereas when  $\Delta - \frac{D}{J} \rightarrow (1)^-$ , we find a linear dispersion around  $k = 0$  typical of an AF ground-state.

In the AF area, we can use the decomposition:

$$\vec{S}_n = \vec{S}_n^z + \vec{S}_n^\perp = (-1)^n S \vec{z} + [(-1)^n \vec{\varepsilon} + \vec{\eta}] \exp i(kn - \omega t) \quad (3.9)$$

with  $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{z} = \vec{\eta} \cdot \vec{z} = 0$ . By inserting this decomposition in the equation of motion, we obtain the following dispersion relation:

$$\omega = \pm 2JS \left[ \left(\Delta - \frac{D}{J}\right)^2 - \cos^2(ka) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

In the limit  $\Delta - \frac{D}{J} \rightarrow 1^+$  we recover the same dispersion relation as  $\Delta - \frac{D}{J} \rightarrow 1^-$  found in the planar region.

### 3.4.2 Order by disorder along the transition lines

In the following, we take special interest in the transition lines between these areas. Let us first analyze the transition between the ferromagnetic and planar ground-state. Along the line separating both regions in the phase diagram, the classical ground-state is *a priori* strongly degenerate and can be parametrized by the two spherical angles  $(\theta, \phi)$  ( $\theta$  is the angle between  $\vec{S}$  and  $\vec{z}$ ). The Hamiltonian (3.1) is invariant by rotation around the  $z$  axis and therefore the energy does not depend on  $\phi$ . We are here in the unusual situation where the classical ground-state manifold is invariant under a *larger* group ( $SO(3)$ ) than the Hamiltonian itself ( $SO(2)$ ). This suggests that quantum fluctuations may reduce this larger group to the smaller one by selecting one orbit on the classical ground-state manifold under the smaller group. In our view, this is then a toy model for the order from disorder phenomenon. We use the decomposition:

$$\vec{S}_n = (-1)^n \vec{S}_n^\perp + S_n^z \vec{z} = \vec{\sigma}_n^\perp + \vec{\sigma}_n^z$$

The equations of motion reduce to:

$$\frac{d\vec{\sigma}_n^\perp}{dt} = -J \left[ (\vec{\sigma}_{n-1}^\perp + \vec{\sigma}_{n+1}^\perp) \wedge \vec{\sigma}_n^z + |\Delta| (\vec{\sigma}_{n-1}^z + \vec{\sigma}_{n+1}^z) \wedge \vec{\sigma}_n^\perp \right] \quad (3.11)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_n^z}{dt} = -J \left[ [(\vec{\sigma}_{n-1}^\perp + \vec{\sigma}_{n+1}^\perp) \wedge \vec{\sigma}_n^\perp] \right] \quad (3.12)$$

where we have used  $\Delta + \frac{D}{J} + 1 = 0$ . We are looking for solutions around  $\vec{\sigma}_0 = S(\cos\theta\vec{z} + \sin\theta\vec{u})$  with  $\vec{u}\cdot\vec{u} = 1$  and  $\vec{u}\cdot\vec{z} = 0$ . We therefore write  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 + \delta\vec{\sigma}$  where  $\delta\vec{\sigma}$  can be parametrized by:

$$\delta\vec{\sigma} = [A\vec{v} + B(\cos\theta\vec{u} - \sin\theta\vec{z})] \exp i(kn - \omega t)$$

with  $\vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u}$ . After standard manipulations we find:

$$\omega_\theta(k) = \pm 2JS[\cos(ka) - 1][1 + (|\Delta| - 1)\sin^2\theta]^\frac{1}{2} \quad (3.13)$$

with a dispersion in  $k^2$  for the slow mode at  $ka = 0$ . We see that when  $|\Delta| \neq 1$  there is a selection mechanism. When  $|\Delta| > 1$ , the spin wave zero-point motion favours a ferromagnetic ground-state ( $\theta = 0$ ) whereas for  $|\Delta| < 1$  the planar ground-state is favoured ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

This is the most simple example of order from disorder phenomenon in so far as the variable  $\theta$  has no dynamics ( $S^z = S \cos\theta$  is a constant of motion) and plays rather the role of a parameter than a true variable. If we try to classify various possible situations, we may say here that we have a dynamical system with one conserved quantity and a 2-dimensional ground-state manifold. Furthermore, in the present model, this ground-state manifold is generated by two symplectic flows which do not commute (for instance the rotations along  $\vec{z}$  and the rotations along  $\vec{x}$ ). A general model for this is given by the Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 2} \sum_{j \geq 2}^N a_{ij}(P_1) P_i P_j + b_{ij}(P_1) X_i X_j + 2c_{ij}(P_1) P_i X_j \quad (3.14)$$

For this Hamiltonian,  $P_1$  is conserved and therefore plays the role of  $\cos\theta$ . The ground-state manifold is given by  $P_i = X_i = 0$  for  $2 \leq i \leq N$ . This  $2D$  manifold appears as a collection of  $1D$  orbits under the symmetry generated by  $P_1$ , and characterized precisely by the value of  $P_1$ . Note that the drift motion along these orbits arises from the excitations of the “fast” variables ( $2 \leq i \leq N$ ), as may be seen from the equation giving the time-derivative of  $X_1$ . Apart from this drift motion, we can clearly separate the fast variables from the collective ones ( $i = 1$ ).

Returning to our example, it is straightforward to describe the average drift motion  $\langle \dot{\phi} \rangle$  due to the quantum zero-point motion of the internal (i.e.  $k \neq 0$ ) modes. The idea is, as explained before, to view the zero-point motion energy of the internal modes (which

depends on  $\theta$ ) as an effective potential for the collective variables  $\phi$  and  $\theta$ . Summing up the zero-point motion energy obtained from 3.13 over all  $k$ 's yields the effective potential:

$$V_{eff}(\theta) = 2JS\sqrt{1 + \frac{D}{J}\sin^2\theta} \quad (3.15)$$

This effective potential for  $S^z$  leads to an average drift for the  $\phi$  variable:

$$\dot{\phi} = \frac{D \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{D}{J}\sin^2\theta}} \quad (3.16)$$

Let us now consider the Ising-like case  $|\Delta| > 1$ , for which  $\theta = 0$  is selected. The most interesting fact is that  $\dot{\phi}$  still has a non zero limit when  $\theta \rightarrow 0$ . Indeed

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \dot{\phi} = D \quad (3.17)$$

How shall we interpret this fact? It simply means that the rotor has a residual energy even when  $\theta \rightarrow 0$  which corresponds to an easy-axis ferromagnetism. This is nothing but an anisotropy gap of the system. It is easy to check using Holstein-Primakoff's representation that the lowest excitation corresponds to a magnon with a gap  $D$  for  $ka = \pm\pi$ . This simple calculation gives a classical image for a gap which has however a purely quantum origin, through zero-point motion of internal modes. The results (3.13)(3.17) show that classical hamiltonian dynamics provides in this case a simple way to understand the low-lying excitations of the quantum system. This analysis suggests that the critical theory controlling the behavior of the ferromagnetic chain can be described by a simple rotor (independently of the nature of the spin  $S$ ). This has been analyzed in detail and from a different point of view in [166, 167].

We can perform the same work for the transition line separating the planar ground-state and the AF one. The details of the algebra have been gathered in appendix A. The low energy spectrum is given by equation (3.14):

$$\omega_{\theta}(k) = \pm 2JS(ka)\sqrt{1 + \frac{D}{J}\sin^2\theta} \quad (3.18)$$

with  $\frac{D}{J} = \Delta - 1$ . For  $\Delta = 1$ , the spectrum does not depend on  $\theta$ . When  $\Delta < 1$ , we find that spin waves favour the planar ground-state whereas for  $\Delta > 1$ , the AF ground-state is selected. We have therefore the same kind of order from disorder phenomenon as for the Planar-Ferromagnetic transition.

Through this example, we have analyzed a simple one dimensional example of order from disorder. Similar situations may occur in  $2D$ , frustrated systems like for example in the  $J_1 - J_2$  XY or Heisenberg model on a square lattice [59, 57], where the classical degeneracy is *global*, and *partially* enforced by a true symmetry. This list is obviously not

exhaustive and many other models with frustrating interactions experience this kind of order from disorder. However, note that the spin chain analyzed here is special (and actually simpler) in that the classical ground-state manifold is *not* isotropic for the symplectic form which defines the classical dynamics (see section 5.1)

The Hamiltonian (3.1) has been studied only from the point of view of order from disorder using a semi-classical analysis. A full quantum analysis demands a more careful study for instance of tunneling processes which are sensitive to the actual value of the spin (integer or half-integer). This is not the purpose of this article. We refer the reader to [131] for a careful study of the phase diagram and transitions.

### 3.5 The Husimi tree

In this section, we will see another non-trivial example of the order from disorder phenomenon, which we shall study in an extensive way. We consider a pseudo-lattice called the Husimi cactus. A three-generation cactus has been represented on Figure 3.1. It consists of a succession of triangles connected only by their vertices. The geometrical dual of the Husimi cactus is a Cayley tree with constant coordination number. The interesting fact is that at least locally this pseudo-lattice looks like the Kagomé lattice. However, by contrast to the Kagomé lattice, there is no closed loop of connected triangles. Each node of the cactus has one Heisenberg spin. We consider only nearest neighbour AF interactions, namely the Hamiltonian reads:

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j \quad (3.1)$$

with  $\vec{S}_i^2 = 1$ . An essential feature of the Husimi cactus is the huge degeneracy of its classical ground-states. This is because minimizing the energy on each triangular plaquette yields the constraint:

$$\sum_{i \in \Delta} \vec{S}_i = \vec{0} \quad (3.2)$$

which does not define a unique ground-state configuration. Indeed, suppose one spin on a given plaquette is fixed (say  $\vec{S}_1$ ), then its two neighbours have to live on a half-cone centered on  $-\vec{S}_1$  with an opening angle of  $\frac{\pi}{3}$ . The ground-state manifold of a finite cactus is then a smooth manifold (i.e. the number of zero modes is independent of the ground-state configuration). To describe this manifold, let us assume that the top spin is fixed. Then, we have to choose a rotation angle for the two “offspring” spins around this ancestor. Because of the hierarchical structure of this lattice, a similar freedom exists at each successive level of the hierarchy, until we reach the bottom boundary triangles which we shall call the leaves. Of course, we have a complete freedom to choose the value of the

top spin, which adds two more global zero modes. For a  $p$ -generation cactus with  $2^p - 1$  sites, the phase space manifold for the Heisenberg model is a product of  $2^p - 1$  spheres  $S^2$ , whereas the ground-state manifold is isomorphic to the product of  $S^2$  (choice of the top spin value) by a torus of dimension  $(2^{(p-1)} - 1)$  (i.e. one angle per spin which is not on the bottom boundary). Hence the ratio

$$\frac{\text{Number of zero modes}}{\text{Number of degrees of freedom}} = \frac{2^{(p-1)} + 1}{2(2^p - 1)} \longrightarrow \frac{1}{4}, \quad p \gg 1. \quad (3.3)$$

The Husimi cactus with Heisenberg spins is interesting so far as it exhibits a macroscopic number of zero modes and we expect spin waves to be very soft. Hence, it is not *a priori* obvious whether order from disorder can occur in such a system. In particular, are coplanar ground-states favoured as in the Heisenberg Kagomé antiferromagnets? We emphasize however that the degeneracy lifting mechanism is slightly different for “real” systems such as the Kagomé or the pyrochlore lattices since for them, the most relevant effect amounts to maximizing the number of zero modes [158].

### 3.5.1 Thermal fluctuations

As we explained in the Introduction, we should distinguish the question of degeneracy lifting within the ground-state manifold with the more global question of actual selection or freezing in the vicinity of a particular ground-state. Regarding the first question, it is easy to show that classical thermal fluctuations do not lift any degeneracy. The reason has been given in the Introduction: a rotation of all the spins below a given site on the cactus around this ancestor spin preserves the phase space volume element (since the Jacobian matrix is then triangular and rotations preserve volumes), and also the total energy. Therefore such transformations preserve the Gibbs measure. Clearly any two ground-state configurations may be connected by a finite number of such transformations. Our statement then follows easily. Although very simple, this point has not been noticed in ref.[162]. This paper emphasized the other aspect, namely that energy barriers are too small to allow freezing (for instance after a quench from high temperatures) in any of the classical ground-state configurations. Consequently, we do not expect an order from disorder phenomenon induced by thermal fluctuations in this model. This system is too soft for a selection mechanism to work. Other situations with extensive entropy and inequivalent ground-states, where there is a partial degeneracy lifting within the ground-state manifold but the global selection mechanism fails, have been presented in ref. [162]. More recently, the study of the Heisenberg model on a pyrochlore lattice led to the same conclusions [158, 161]. Here, maximizing the number of zero modes favours collinear magnetic states, but the effective barriers are too weak for the system to remain confined in the vicinity of these states.

How similar is the quantum case?

### 3.5.2 Quantum fluctuations

#### General considerations

As in the previous sections, we wish to understand the classical spin dynamics at  $T = 0$  on the Husimi cactus. Again, the main feature of this system is its huge degeneracy and the fact that these ground-states build up a smooth manifold. If we examine the vicinity of the ground-state manifold, we see essentially two kinds of motion, those associated to finite frequency oscillations around the chosen ground-state and those associated to what we may call slow drift motions. Typically, this can be described by an approximate Hamiltonian (defined around the chosen ground-state) which takes the general form [168]:

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + \cdots + P_r^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=r+s+1}^n \omega_j (P_j^2 + Q_j^2) \quad (3.4)$$

The  $(P_i, Q_i)$ ,  $1 \leq i \leq r + s$  are associated to the slow drift motions and  $(P_j, Q_j)$ ,  $r + s + 1 \leq i \leq n$  describe the “fast” oscillators. Note that the  $(P_i, Q_i)$ ,  $r + 1 \leq i \leq r + s$  are associated to global symmetries. The equations of motion are:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j &= P_j \quad ; \quad \dot{P}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq r \\ \dot{Q}_j &= 0 \quad ; \quad \dot{P}_j = 0, \quad r + 1 \leq j \leq r + s \\ \dot{Q}_j &= \omega_j P_j \quad ; \quad \dot{P}_j = -\omega_j Q_j, \quad r + s + 1 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (3.5)$$

The degenerate manifold is generated by the vectors associated to  $Q_1, \dots, Q_{r+s}; P_{r+1}, \dots, P_{r+s}$ .

Our main goal is to determine if the spectrum depends on the ground-state we consider and more precisely if zero-point fluctuations lift at least partially the classical degeneracy. In order to compute the oscillator spectrum, we will proceed as follow:

(i) First we have to find in phase space the submanifold associated to the drift motions. They are defined by initial conditions producing a speed parallel to the ground-state submanifold. For the general Hamiltonian (3.4), the drift space is generated by the directions associated to  $(P_i, Q_i)$   $1 \leq i \leq r + s$ .

(ii) Second, the oscillator submanifold is obtained by taking the symplectic orthogonal of the drift motions submanifold.

By symplectic form, we mean the antisymmetric bilinear form which is defined by  $\mathcal{G}(X, X') = \sum_{i=1}^n (P_i Q'_i - Q_i P'_i)$ , where  $X \equiv (P_i, Q_i)$  and  $X' \equiv (P'_i, Q'_i)$  are any two vectors in the  $2n$ -dimensional classical phase-space. The main interest of this symplectic form is that the Poisson bracket of two functions  $f$  and  $g$  defined on phase-space is given by:

$$\{f, g\} = \mathcal{G}(\nabla f, \nabla g).$$

This bilinear form is non-degenerate (i.e. it is impossible to find any non-vanishing vector which is orthogonal to any other vector), so for any linear subspace  $D$ , the set  $D^\perp$  of all the vectors orthogonal to any vector of  $D$  has a dimension  $\dim D^\perp = 2n - \dim D$ . We shall call  $D^\perp$  the symplectic orthogonal of  $D$ . These notions will be quite useful for the analysis given in section 5. But it turns out that even for basic computations, they provide substantial simplification as we shall show shortly.

In the Husimi cactus case, phase-space is simply  $(S^2)^N$ , where  $S^2$  refers to the sphere and  $N$  is the total number of spins. If we consider only one spin  $\vec{n}$  and two tangent vectors  $d\vec{n}_1$  and  $d\vec{n}_2$  to  $\vec{n}$ , the symplectic form  $\mathcal{G}$  is defined by

$$\mathcal{G}(d\vec{n}_1, d\vec{n}_2) = -\vec{n} \cdot (d\vec{n}_1 \wedge d\vec{n}_2) \quad (3.6)$$

It simply corresponds to the area of the parallelogram  $(d\vec{n}_1, d\vec{n}_2)$ . When we have more than one site, this definition extends in a straightforward way

$$\mathcal{G}(d\vec{n}, \delta\vec{n}) = - \sum_i \vec{n}_i \cdot (d\vec{n}_i \wedge \delta\vec{n}_i) \quad (3.7)$$

where  $(d\vec{n}, \delta\vec{n})$  are tangent vectors in phase space. The equations of motion for this spin system are:

$$\frac{d\vec{n}_i}{dt} = \sum_{a,i \in \Delta^a} \left( \sum_{j \in \Delta^a} \vec{n}_j \right) \wedge \vec{n}_i \quad (3.8)$$

Here  $\Delta^a$  denotes any triangle on the lattice. With the present form, it is easy to derive the linearized equations of motion in the vicinity of a given ground-state configuration  $\vec{n}_i$ . The spin at site  $i$  is  $\vec{n}_i + \delta\vec{n}_i$ , where  $\vec{n}_i \cdot \delta\vec{n}_i = 0$ . For an equilibrium state, we have  $\sum_{j \in \Delta^a} \vec{n}_j = 0$  for any triangle  $\Delta^a$ . Therefore, the linearized equations read:

$$\frac{d\delta\vec{n}_i}{dt} = \sum_{a,i \in \Delta^a} \left( \sum_{j \in \Delta^a} \delta\vec{n}_j \right) \wedge \vec{n}_i \quad (3.9)$$

Our goal is now to extract the finite frequency spectrum from these equations. Rather than remaining abstract, let us apply this strategy to a 3-generation cactus.

### Spectrum of the 3-generation cactus

We consider a 3-generation cactus whose sites have been numbered from 1 to 7 (see Figure 3.1). At each site, we define a Heisenberg spin  $\vec{n}_i$ . Let us derive the most general drift motion around an equilibrium configuration  $\vec{n}_{i, 1 \leq i \leq 7}$ . We have then  $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = \vec{n}_2 + \vec{n}_4 + \vec{n}_5 = \vec{n}_3 + \vec{n}_6 + \vec{n}_7 = 0$ . This motion is generated by a global rotation around a vector  $\vec{r}$ , a global rotation of vector  $\epsilon\vec{n}_1$ , a partial rotation of  $\vec{n}_4$  and  $\vec{n}_5$  around  $\vec{n}_2$  (of angle  $\eta$ ), and finally a partial rotation of  $\vec{n}_6$  and  $\vec{n}_7$  around  $\vec{n}_3$  (of angle  $\zeta$ ). We are looking for tangent vectors  $\delta\vec{n}_i$  ( $\vec{n}_i \cdot \delta\vec{n}_i = 0$ ) producing a motion parallel to the ground-state manifold.



Therefore, we have to solve the system (the arrows on vectors will be omitted in order to lighten expressions):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{n}_1 = r \wedge n_1 = (\delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3) \wedge n_1 \\ \dot{n}_2 = (r + \epsilon n_1) \wedge n_2 = (\delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 + \delta n_2 + \delta n_4 + \delta n_5) \wedge n_2 \\ \dot{n}_3 = (r + \epsilon n_1) \wedge n_3 = (\delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 + \delta n_3 + \delta n_6 + \delta n_7) \wedge n_3 \\ \dot{n}_4 = (r + \epsilon n_1 + \eta n_2) \wedge n_4 = (\delta n_2 + \delta n_4 + \delta n_5) \wedge n_4 \\ \dot{n}_5 = (r + \epsilon n_1 + \eta n_2) \wedge n_5 = (\delta n_2 + \delta n_4 + \delta n_5) \wedge n_5 \\ \dot{n}_6 = (r + \epsilon n_1 + \zeta n_3) \wedge n_6 = (\delta n_3 + \delta n_6 + \delta n_7) \wedge n_6 \\ \dot{n}_7 = (r + \epsilon n_1 + \zeta n_3) \wedge n_7 = (\delta n_3 + \delta n_6 + \delta n_7) \wedge n_7 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

The fact that we are in the vicinity of an equilibrium state imposes that  $n_5$  and  $n_6$  are linearly independent as well as  $n_6$  and  $n_7$ . This fact is used in the resolution of the system (3.10) and we thus find that the submanifold associated to the drift motion is locally defined by:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 = 0 \\ \delta n_2 + \delta n_4 + \delta n_5 = \epsilon n_1 + \eta n_2 \\ \delta n_3 + \delta n_6 + \delta n_7 = \epsilon n_1 + \zeta n_3 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

We call  $D_1$  this subspace. The case  $\epsilon = \eta = \zeta = 0$  corresponds to initial conditions with a vanishing speed, namely to the tangent space to the degenerate submanifold, which we shall denote by  $D_2$ . We have now to take the symplectic orthogonal of this submanifold  $D_1$ . More accurately, we are looking for vectors  $u_i \in (D_1)^\perp$  such that

$$\begin{array}{ll} i) & \forall i, u_i \cdot n_i = 0 \\ ii) & \forall \delta n_i \in D_1, \sum_i n_i \cdot (\delta n_i \wedge u_i) = 0 \end{array} \quad (3.12)$$

The procedure to construct explicitly this submanifold is not straightforward and is explained in Appendix B. Nevertheless, in order to determine the spectrum, we may work with the larger submanifold  $(D_2)^\perp$  which has been defined in appendix B. To give some illustration of what these subspaces mean, let us return to the “flat” canonical phase-space used in the context of the general Hamiltonian 3.4. The drift space  $D_1$  is as we have said generated by the vectors associated to  $(P_i, Q_i)$  for  $1 \leq i \leq r + s$ , and  $D_1^\perp$  corresponds to the finite frequency modes  $(P_i, Q_i)$ ,  $r + s + 1 \leq i \leq n$ . The space  $D_2$  is spanned by the vectors associated to  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq r + s$  and  $P_j$ ,  $r + 1 \leq j \leq r + s$ . Its orthogonal  $D_2^\perp$  contains the direct sum of  $D_1^\perp$  and the subspace of  $D_2$  generated by the vectors associated to  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . As the equations of motion 3.5 show,  $D_2^\perp$  is stable for the Hamiltonian flow. The velocity vanishes everywhere on  $D_2^\perp \cap D_2$ , and the image of  $D_2^\perp$  for the linear

mapping  $(P_i, Q_i) \rightarrow (\dot{P}_i, \dot{Q}_i)$  is precisely the subspace associated to the finite frequency modes, namely  $D_1^\perp$ .

Consider now a vector  $u \in D_2^\perp$  which can be defined by:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^a; & u_2 = u_2^a + u_2^b; & u_3 = u_3^a + u_3^c \\ u_4 = u_4^b; & u_5 = u_5^b; & u_6 = u_6^c; & u_7 = u_7^c \end{cases} \quad (3.13)$$

with  $u_1^a + u_2^a + u_3^a = u_2^b + u_4^b + u_5^b = u_3^c + u_6^c + u_7^c = 0$ .

We now compute the flow associated to  $u$  which is naturally defined as

$$\begin{cases} v_1 = (u_1 + u_2 + u_3) \wedge n_1 = (u_2^b + u_3^c) \wedge n_1 = v_1^a \\ v_2 = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \wedge n_2 = (u_2^a + u_2^b + u_3^c) \wedge n_2 = v_2^a + v_2^b \\ v_3 = (u_1 + u_2 + u_3 + u_6 + u_7) \wedge n_3 = (u_3^a + u_3^c + u_6^b) \wedge n_3 = v_3^a + v_3^c \\ v_4 = (u_4 + u_5 + u_2) \wedge n_4 = u_2^a \wedge n_4 = v_4^b \\ v_5 = (u_4 + u_5 + u_2) \wedge n_5 = u_2^a \wedge n_5 = v_5^b \\ v_6 = (u_3 + u_6 + u_7) \wedge n_6 = u_3^c \wedge n_6 = v_6^c \\ v_7 = (u_3 + u_6 + u_7) \wedge n_7 = u_3^c \wedge n_7 = v_7^c \end{cases} \quad (3.14)$$

where the velocities ( $v_i = \dot{n}_i$ ) are given by the linearized equations of motion 3.9. By defining

$$\begin{cases} v_1^a = (u_2^b + u_3^c) \wedge n_1; & v_2^a = (u_2^b + u_3^c) \wedge n_2; & v_3^a = (u_3^c + u_2^b) \wedge n_3 \\ v_2^b = u_2^a \wedge n_2; & v_4^b = u_2^a \wedge n_4; & v_5^b = u_2^a \wedge n_5 \\ v_3^c = u_3^a \wedge n_3; & v_6^c = u_3^a \wedge n_6; & v_7^c = u_3^a \wedge n_7 \end{cases} \quad (3.15)$$

we check that  $(D_2)^\perp$  is stable under the Hamiltonian flow. Indeed, we clearly have:

$$v_1^a + v_2^a + v_3^a = v_2^b + v_4^b + v_5^b = v_3^c + v_6^c + v_7^c = 0.$$

Moreover, we can prove that  $v \in (D_1)^\perp$ , as we discussed using the Hamiltonian (3.4).

To show explicitly this interesting property here, we have just to show that  $v$  is orthogonal to any tangent vectors  $\delta n$  satisfying (3.11). The demonstration proceeds in a pedestrian way. The main ingredient involved is that  $\mathcal{G}(v, \delta n)$  involves only the sums of the  $n$  field on the various triangles, which are precisely given by the right-hand side of equations 3.11. A similar reasoning is detailed at the end of Appendix B.

We now compute the frequencies of the oscillators. We therefore consider the square of the application giving the Hamiltonian flow:

$$u \xrightarrow{\text{flow}} v \xrightarrow{\text{flow}} -\omega^2 u \quad (3.16)$$

The application closes because of the stability of  $D_2^\perp$  under the linearized flow. We obtain:

$$\begin{cases} -\omega^2 u_1^a = (v_2^b + v_3^c) \wedge n_1 = (u_2^a \wedge n_2 + u_3^a \wedge n_3) \wedge n_1 \\ -\omega^2 u_2^a = (v_2^b + v_3^c) \wedge n_2 = (u_2^a \wedge n_2 + u_3^a \wedge n_3) \wedge n_2 \\ -\omega^2 u_3^a = (v_2^b + v_3^c) \wedge n_3 = (u_2^a \wedge n_2 + u_3^a \wedge n_3) \wedge n_3 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} -\omega^2 u_2^b = v_2^a \wedge n_2 = ((u_2^b + u_3^c) \wedge n_2) \wedge n_2 \\ -\omega^2 u_4^b = v_2^a \wedge n_4 = ((u_2^b + u_3^c) \wedge n_2) \wedge n_4 \\ -\omega^2 u_5^b = v_2^a \wedge n_5 = ((u_2^b + u_3^c) \wedge n_2) \wedge n_5 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} -\omega^2 u_3^c = v_3^a \wedge n_3 = ((u_2^b + u_3^c) \wedge n_3) \wedge n_3 \\ -\omega^2 u_6^c = v_3^a \wedge n_6 = ((u_2^b + u_3^c) \wedge n_3) \wedge n_6 \\ -\omega^2 u_7^c = v_3^a \wedge n_7 = ((u_2^b + u_3^c) \wedge n_3) \wedge n_7 \end{cases} \quad (3.19)$$

We notice that the equations associated to  $(u_2^a, u_3^a)$  and to  $(u_2^b, u_3^c)$  are closed. We have therefore to solve two systems

$$(A) \begin{cases} -\omega^2 u_2^a = -u_2^a + (u_3^a \cdot n_2) n_3 + \frac{1}{2} u_3^a \\ -\omega^2 u_3^a = -u_3^a + (u_2^a \cdot n_3) n_2 + \frac{1}{2} u_2^a \end{cases} \quad (3.20)$$

$$(B) \begin{cases} -\omega^2 u_2^b = -(u_2^b + u_3^c) + ((u_2^b + u_3^c) \cdot n_2) \cdot n_2 \\ -\omega^2 u_3^c = -(u_2^b + u_3^c) + ((u_2^b + u_3^c) \cdot n_3) \cdot n_3 \end{cases} \quad (3.21)$$

In order to solve the system (A), we introduce the vector  $z = \frac{n_1 \wedge n_2}{\|n_1 \wedge n_2\|}$  and write

$$u_i^a = \rho_i z + \sigma z \wedge n_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

and

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0$$

. We find for system (A) that the possible values for  $\omega^2$  are  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 2. We can solve the system (B) in the same coordinate system and we find the same eigenvalues.

We can thus conclude that the eigenvalues of the massive modes for the 3-generation cactus are  $\omega^2 = \frac{1}{2}$ ,  $\omega^2 = \frac{3}{2}$ ,  $\omega^2 = 2$  and are doubly degenerate.

Moreover, the spectrum **does not** depend on the classical ground-state and the order from disorder phenomenon does not occur for this system.

### Order by disorder in the $p$ -generation cactus

We would like to see now if these results also apply to any finite cactus with  $p$  generations. The general structure of the calculations is as outlined in the previous paragraph. We also work within the linear space  $D_2^\perp$  whose definition is the natural generalisation of equations 3.13. Since  $D_2^\perp$  is stable under the linearized flow, we define a linear mapping of  $D_2^\perp$  which sends any tangent vector  $u_i$  of  $D_2^\perp$  into the corresponding velocity  $v_i$ .

An explicit calculation of the secular determinant for the  $p = 4$  cactus is presented in Appendix C. The main conclusion is that for  $p \geq 4$ , the zero-point energy does depend on the classical ground-state configuration. An illustration of this is given on Figure 3.7 where the zero-point energy is plotted along a special curve on the classical ground-state manifold.

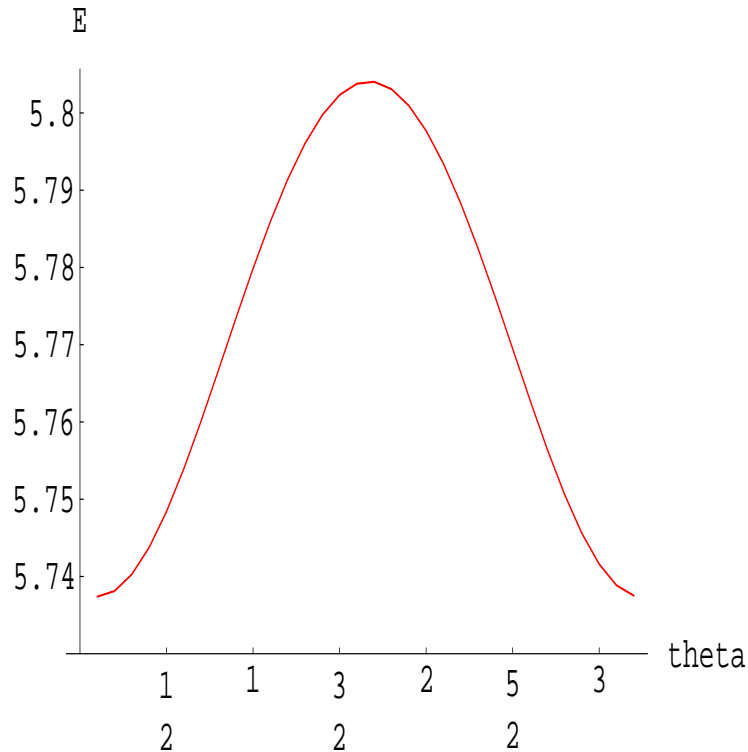


FIG. 3.7 - *The energy barrier separating two discrete ground-states in the 4-generation cactus. Spins below site 2 (i.e. at sites 4, 5, 8, 9, 10, 11) are rotated around  $\vec{n}_2$  by an angle  $\theta$ , giving a smooth path on the ground-state manifold. Note that  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi$  correspond to coplanar ground-states. The height of this barrier is around 1% of the low energy excitation which suggests a quite flat low energy landscape in the spectrum.*

This curve corresponds to the ground-states which originate from a coplanar configuration and are then obtained by rotating all the spins below site 2 (i.e sites 2,4,5,8,9,10,11) by an angle  $\theta \in [0, \pi]$  around  $\vec{n}_2$ . The zero-point energy is minimal for  $\theta = \pi k$ , ( $k$  integer) and maximal for  $\theta = (k + \frac{1}{2})\pi$ . Therefore, zero-point fluctuations favour coplanar states, and induce effective barriers between such states. We remark that all the planar ground-states are equivalent even after introducing zero-point fluctuations. This is because the Husimi cactus has a huge space-group which preserves both the Hamiltonian and the symplectic structure. For instance, consider one triangle  $\alpha, \beta, \gamma$  in the bulk of the cactus ( $\alpha$  being the top site of the triangle). If we exchange the sites  $\beta$  and  $\gamma$  and also all their

descendants, it is clear the lattice is preserved. It is also clear that any coplanar ground-state may be mapped into any other by a finite sequence of such transformations. Now, Figure 3.7 also suggests that these degenerate coplanar states are connected by rather low effective energy barriers. Indeed, the height of the barrier is about 1% of the low energy excitation which is very low. We would have thought intuitively to a much higher barrier since we rotate all spin below sites 2. It indicates that the effective low energy landscape is rather flat and that tunnelling processes will play a very important role. On intuitive grounds, we expect these effective barriers to remain *finite* as the system size goes to infinity, since such a rotation around a given ancestor spin induces only *local* corrections to the small oscillation matrix (see appendix E3).

Another feature of the cactus is that this degeneracy lifting mechanism occurs *only* in the bulk of the cactus but not on the leaves. The 3-generation cactus appears in fact as a particular case because it is built only of leaves (the leaves are defined as the bottom boundary triangles). We have demonstrated these results for the 4-generation tree, but the conclusion still holds for a  $p$ -generation cactus ( $p > 4$ ) by a straightforward induction proof. The special case of leaves is addressed in section 5.3.

This set of results suggests that physical properties of this system will be dominated at  $T = 0$  by dramatic tunneling processes within the discrete set of coplanar classical ground-states. This will be the subject of further work [169].

A simpler example in the same class is what is referred to in the literature as the Delta chain. It consists of a chain of triangles linked by their vertices as shown in Figure 3.8.

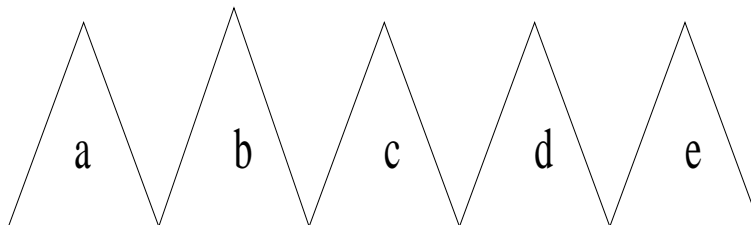


FIG. 3.8 - *The so called Delta chain with 5 triangles*

This system has been much studied and the specific heat was shown to have a double peak structure as in the Kagomé antiferromagnet [170]. Therefore, it was believed that an understanding of its properties can shed light on the Kagomé antiferromagnet. Theoretical interests on this chain have also been enhanced by its experimental realization [171]. Many studies have been devoted to its extreme quantum version namely for  $S = 1/2$  spins [170, 172, 167]. The ground-state is exactly known to be a dimer state [173]. The low lying excitations were found to be kink and antikink-type domain walls in the dimer singlet ground-state [172].

Our semi-classical analyses applies directly to an *open* Delta chain, and we find that

coplanar ground-states minimize the spin-wave zero-point energy here as well.

## 3.6 A geometrical analysis of the spin dynamics on the Husimi cactus

### 3.6.1 Properties of the flow associated to rotations around a given spin

Let us consider one spin at a site labelled  $i$ . The infinitesimal rotation of angle  $\epsilon$  around this spin defines a vector field on phase-space. More accurately, if the phase space is  $(S^2)^N$  (with  $N$  the number of spins), a tangent vector  $\vec{m}_i$  to the configuration  $\vec{n}_i$  verifies  $\vec{m}_i \cdot \vec{n}_i = 0$  ( $i \in [1, \dots, N]$ ). If  $j$  is a descendant of  $i$  then  $\vec{m}_j = \epsilon \vec{n}_i \wedge \vec{n}_j$  else  $\vec{m}_j = 0$ . We will characterize and analyze in the following the properties of these vector fields.

- The first and main property of these vector fields is that the energy is conserved along their flow in phase-space.
- Secondly, we may wonder if these vector fields can be associated to the symplectic flow of a function defined in phase-space (that would therefore commute with the Hamiltonian!). According to the previous section, we know that the answer to this issue is negative because a particular order is selected (indeed, if the hypothesis were true, it would imply that actual symmetry protects these internal rotations and therefore prevents any selection mechanism from acting). Nevertheless, we now prove it in a direct way. In a general manner, suppose we have a vector field  $U^i$  on a manifold and  $g_{ij}$  denotes the symplectic form in any coordinate system. We assume that:

$$\exists F \text{ such that } U^i = g^{ij} \partial_j F \tag{3.1}$$

It implies that  $\forall i, \alpha_i = g_{ij} U^j = \partial_i F$ , where  $\alpha_i$  is a one-form. We consider the simple case of two spins  $\vec{n}_1$  and  $\vec{n}_2$  and take the rotation of  $\vec{n}_2$  around  $\vec{n}_1$  of angle  $\epsilon$ . This defines a vector field  $\vec{m}_1 = 0$ ;  $\vec{m}_2 = \epsilon \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ . If  $d\vec{n}_1$  and  $d\vec{n}_2$  are respectively tangent vectors to  $\vec{n}_1$  and  $\vec{n}_2$  then:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot d\vec{n}_1 + \alpha_2 \cdot d\vec{n}_2 &= -\vec{n}_1 \cdot (d\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_1) - \vec{n}_2 \cdot (d\vec{n}_2 \wedge \vec{n}_2) \\ &= -\epsilon \vec{n}_2 \cdot (d\vec{n}_2 \wedge (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)) = \vec{n}_1 \cdot d\vec{n}_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

This property comes from

$$\alpha_i \cdot d\vec{n}^i = d\vec{n}^i g_{ij} U^j = \mathcal{G}(d\vec{n}_1, d\vec{n}_2)$$

where  $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$  has been defined in (3.6). From (3.2), it appears that  $\alpha_i d\vec{n}^i$  is not an exact differential because it is not closed. Indeed, the equivalent of the rotational is defined by

$$\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i = b_{ij}, \quad (3.3)$$

If  $d\vec{n}_i$  and  $\delta\vec{n}_i$  ( $i \in [1, 2]$ ) are two tangent vectors to the point  $\vec{n}_i$ , then

$$b_{ij} dn^i \delta n^j = d\vec{n}_1 \delta \vec{n}_2 - \delta \vec{n}_1 d\vec{n}_2 \neq 0 \quad (3.4)$$

We can therefore conclude that those flows associated to internal rotations around a given spin are not symplectic flows of fonctions defined on the phase-space despite they do not change the energy.

- Another interesting property that may be checked concerns the commutativity of the flows associated to two different rotations. Suppose, we first perform a rotation around a spin  $i$  and then a rotation around a spin  $j$  which is a descendant of spin  $i$ . This is not *a priori* obvious that the two operations commute. However, we have shown in the appendix D that this is the case.
- Finally, we want to mention another property of vector fields. Let us consider two internal rotations and their two associated vector fields say  $U$  and  $V$ . Suppose  $U$  corresponds to a rotation of angle  $\epsilon$  around one spin  $\vec{n}_i$  and  $V$  to a rotation of angle  $\eta$  around one spin  $\vec{n}_j$ . If  $i$  and  $j$  are not comparable in the lattice hierarchy then  $\mathcal{G}(U, V) = 0$ . But if  $j$  is a descendant of  $i$ , then  $\mathcal{G}(U, V)$  has no reason to be equal to 0.

Nevertheless, on the ground-state manifold, it is easy to verify that

$$\forall U, \forall V, \quad \mathcal{G} \Big|_{\text{Ground-State}}(U, V) = 0 \quad (3.5)$$

This follows directly from the fact the ground-state property  $\sum_i \vec{S}_i^{(a)}$ ,  $i$  indicating the three sites of a given triangle  $a$ . In more technical words, the submanifold of the ground-state manifold generated by these internal rotations is isotropic for the symplectic form.

### 3.6.2 Vector flow associated to internal rotations and Hamiltonian Flow

In this section, we want to clarify why the flow associated with these internal rotations does not in general commute with the Hamiltonian flow (except for the rotations of the leaves of the Husimi tree). As we shall see, this is closely related to the non-vanishing of the 2-form  $b_{ij}$  (3.4).

### General considerations

In this subsection, we derive some general considerations which will be useful for our problem. We consider a phase-space with a symplectic closed form  $\mathcal{G}$  (of components  $g_{ij}$ ), a Hamiltonian  $H$  which is invariant under the flow associated to a vector field  $X$ . It reads as:

$$\mathcal{L}_X H = X^i \partial_i H = 0, \quad (3.6)$$

with  $\mathcal{L}_X$  the Lie derivative in the  $X$  direction. We also define  $Y$  to be the Hamiltonian vector field which therefore satisfies

$$Y^i = g^{ij} \partial_j H \quad (3.7)$$

The quantity we are interested in is the Lie bracket:

$$[X, Y]^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i \quad (3.8)$$

By using the definitions (3.7,3.8) and the invariance of  $H$  under  $X$  (3.6), we can easily prove that:

$$\begin{aligned} [X, Y]^i &= -\left\{ -(\partial_j g^{ik}) X^j + g^{ij} (\partial_j X^k) + g^{jk} (\partial_j X^i) \right\} (\partial_k H) \\ &= -a^{ik} \partial_k H \end{aligned} \quad (3.9)$$

where we have defined  $a^{ik} = -(\partial_j g^{ik}) X^j + g^{ij} (\partial_j X^k) + g^{jk} (\partial_j X^i)$ .

The relation (3.9) can also be formulated as:

$$[X, Y]^i = -g^{ij} a_{jk} Y^k \quad (3.10)$$

with:

$$a_{ij} = g_{ik} a^{kl} g_{lj} = -a_{ji} = (\partial_k g_{ij}) X^k + g_{ik} (\partial_j X^k) + g_{kj} (\partial_i X^k) \quad (3.11)$$

We can therefore conclude that:

$$[X, Y] = 0 \iff a_{ij} Y^j = 0 \quad (3.12)$$

The 2-form  $a_{ij}$  plays a crucial role. We first restrict to the simplest hypothesis  $\forall i, j$   $a_{ij} = 0$ . This condition has a simple interpretation in differential geometry and means that  $X$  is a Killing vector field [174]. It means that the symplectic form  $g_{ij}$  is invariant under the flow associated to  $X$ , *i.e.*

$$\mathcal{L}_X \mathcal{G} = 0$$

or in components:



$$(\partial_k g_{ij})X^k + g_{ik}(\partial_j X^k) + g_{kj}(\partial_i X^k) = 0 \quad (3.13)$$

Therefore  $a_{ij} = 0 \iff \mathcal{L}_X \mathcal{G} = 0$ . Moreover, if  $X$  is a Killing vector field, it is at least locally the flow associated to a conserved quantity  $F$  [174] (a conserved quantity because the flow of  $X$  leaves  $H$  invariant<sup>1</sup>).

From these generalities, we can conclude that a *sufficient* condition for the flow  $U$  associated to internal rotations to commute with the Hamiltonian flow is that  $U$  should be the flow of a conserved quantity. We have proved in section 5.1, that it cannot be true for our symplectic form.

Nevertheless, we must not forget that the condition (3.12) is weaker. In the Husimi cactus, we have  $a_{ij} \neq 0$  as already suggested by eq. (3.4) and as will be seen further. A natural issue occurs, namely can we find a vector field  $X$  leaving the Hamiltonian invariant such that  $a_{ij} \neq 0$  but  $a_{ij}Y^j = 0$ ? Before analysing this question, let us make a pause to summarize the important consequences of the equivalences derived above.

The relation (3.12) implies the following statement:

*In a system with a huge continuous classical degeneracy, the order from disorder phenomenon (induced by quantum fluctuations) will in almost cases occur unless these degeneracies are protected by true symmetries of the Hamiltonian.* Note that here, order from disorder refers to degeneracy lifting within the ground-state manifold and not to the *global* behaviour of the system.

### Application to the Husimi cactus

We now turn back to the question where  $a_{ij} \neq 0$ . Can we find in the Husimi cactus vector fields such that  $a_{ij}Y^j = 0$ ? Suppose we consider the vector field  $X$  associated to the rotation of angle  $\epsilon$  around  $\vec{n}_i$  of the vectors  $\vec{n}_j$  ( $\vec{n}_j$  are descendant spins of  $\vec{n}_i$ ). The 2-form  $a_{ij}$  is also given by  $\partial_i(g_{jk}X^k) - \partial_j(g_{ik}X^k)$  which corresponds to the 2-form  $b_{ij}$  defined in (3.3). Therefore, if  $\vec{u}_j$  and  $\vec{v}_j$  refer to two tangent vectors to the point  $\vec{n}_j$ , then according to relation (3.4),

$$a(u, v) = \sum_{j \geq i} \vec{u}_i \cdot \vec{v}_j - \vec{u}_j \cdot \vec{v}_i \quad (3.14)$$

where the notation  $j \geq i$  means  $j$  descendant of  $i$ . We now consider the 1-form  $\beta_i = a_{ij}V^j$ , where  $V^j$  is the Hamiltonian flow at the point  $\vec{n}_j$  in phase-space. For the Husimi tree, it is defined by:

---

1. To show that, we suppose  $X^i = g^{ij}\partial_j F \iff \partial_i F = g_{ij}X^j$ . By using the Schwartz equality  $\partial_i\partial_j F = \partial_j\partial_i F$  and the Leibnitz rule, we prove the equivalence. Note that this also requires that  $g_{ij}$  is closed *i. e.*  $\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} = 0$ .

$$\vec{v}_j = \sum_{k \in N_j} \vec{n}_k \wedge \vec{n}_j \quad (3.15)$$

where  $N_j$  means the nearest neighbours sites of  $j$ . Consequently,

$$\beta(u) \equiv a(u, v) = \sum_{j \geq i} \left\{ \sum_{k \in N_j} (\vec{n}_k \wedge \vec{n}_j) \right\} \vec{u}_i - \sum_{k \in N_i} (\vec{n}_k \wedge \vec{n}_i) \cdot \sum_{j \geq i} \vec{u}_j \quad (3.16)$$

This summation has absolutely no reason to vanish. We can thus conclude according to (3.12) that the Hamiltonian flow does not commute with the flow associated to internal rotations (except the case of the leaves of the Husimi tree as we will see in the next subsection). To analyze this phenomenon more precisely, we shall also consider the vicinity of an equilibrium state, and study the evolution of the small oscillation matrix under the action of the flow  $X$  associated to internal rotations. This has been developed extensively in appendix E. We only summarize the main results. First, we have recalled in appendix E1 how the variation of the oscillation matrix  $A$  under the flow  $X$  is connected to the 2-form  $a_{ij}$ :

$$(\mathcal{L}_X A)_{ij} = 0 \iff -a_{ik} A^k_j = 0 \quad (3.17)$$

$$\iff \forall u, v \quad a(u, Av) = 0 \quad (3.18)$$

It is another way of showing that the low-energy spectrum is invariant with the flow of  $X$  when  $X$  is a Killing vector field.

We have then applied this general formulation to the Husimi cactus in appendix E2 and proved explicitly that the oscillation matrix is not invariant under the flow associated to internal rotations (see eq:(3.15)).

And finally, in appendix E3, we have compared the oscillation matrices for two configurations connected by an internal rotation and shed light on the general dependence of the low energy spectrum with the angle of the rotations.

### 3.6.3 Case of the leaves of the Husimi tree

We now treat the problem of the leaves of the tree. We consider one leaf  $(\vec{n}_0, \vec{n}_1, \vec{n}_2)$  with  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  the two edge spins. We have seen in appendix B that the degeneracy still holds. According to our geometrical discussion in subsection 5.1, this degeneracy must therefore be associated to a conserved quantity.

For one triangle, the Hamiltonian simply reduces to

$$H = (\vec{n}_0 + \vec{n}_1 + \vec{n}_2)^2 \quad (3.19)$$

This degeneracy still occurs because the quantity  $(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)^2$  commutes with the Hamiltonian (under Poisson brackets). Indeed, the symplectic flow associated to  $(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)^2$  is given by

$$\begin{cases} \frac{d\vec{n}_1}{d\lambda} = \vec{n}_2 \wedge \vec{n}_1 \\ \frac{d\vec{n}_2}{d\lambda} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \\ \frac{d\vec{n}_i}{d\lambda} = 0 \text{ if } i \notin \{1, 2\} \end{cases} \quad (3.20)$$

where  $\lambda$  is the parameter associated to the transformation. Therefore,

$$\frac{d(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)}{d\lambda} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dH}{d\lambda} = 0 \quad (3.21)$$

It is worth noticing that such a transformation cannot be in general identified with all the rotations we may imagine, namely:

- a rotation around  $\vec{n}_0$
- a rotation around  $\vec{n}_0^0$  excluding  $\vec{n}_0$
- a rotation around  $\vec{n}_0^0$  including  $\vec{n}_0$

Here,  $\vec{n}_i^0$  denotes an equilibrium value, and we assume  $\vec{n}_i$  is close to  $\vec{n}_i^0$ . The only exception corresponds to  $(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)$  colinear to  $\vec{n}_0$  for the first case and to  $\vec{n}_0^0$  for the last two cases.

Furthermore, we can prove explicitly that the order from disorder phenomenon does not apply for the leaves of the cactus. We will simply check in the following that the flow associated to the function  $f = (\vec{n}_1 + \vec{n}_2)^2$  commutes with the Hamiltonian flow.

If we replace in Figure 3.9, the application  $R$  by  $f$ , we have therefore to show (using the same notations) that  $\xi = \tilde{\xi}$ .

We consider an infinitesimal transformation associated to the fonction  $f = (\vec{n}_1 + \vec{n}_2)^2$ . Therefore,

$$(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \longrightarrow (\vec{n}_1 + \epsilon \vec{n}_2 \wedge \vec{n}_1; \vec{n}_2 + \epsilon \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)$$

Let us consider a tangent vector  $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$  to  $(\vec{n}_1; \vec{n}_2)$  in phase-space. The symplectic transformation  $f$  implies that:

$$(\vec{n}_1 + \vec{\eta}_1; \vec{n}_2 + \vec{\eta}_2) \longrightarrow (\vec{n}_1 + \vec{\eta}_1 + \epsilon \vec{n}_2 \wedge \vec{n}_1 + \epsilon \vec{n}_2 \wedge \vec{\eta}_1 + \epsilon \vec{\eta}_2 \wedge \vec{n}_1; \vec{n}_2 + \vec{\eta}_2 + \epsilon \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 + \epsilon \vec{n}_1 \wedge \vec{\eta}_2 + \epsilon \vec{\eta}_1 \wedge \vec{n}_2) \quad (3.22)$$

Therefore:

$$(\vec{\eta}_1; \vec{\eta}_2) \longrightarrow (\vec{\psi}_1; \vec{\psi}_2) = (\vec{\eta}_1 + \epsilon \vec{n}_2 \wedge \vec{\eta}_1 + \epsilon \vec{\eta}_2 \wedge \vec{n}_1; \vec{n}_2 + \epsilon \vec{n}_1 \wedge \vec{\eta}_2 + \epsilon \vec{\eta}_1 \wedge \vec{n}_2) \quad (3.23)$$

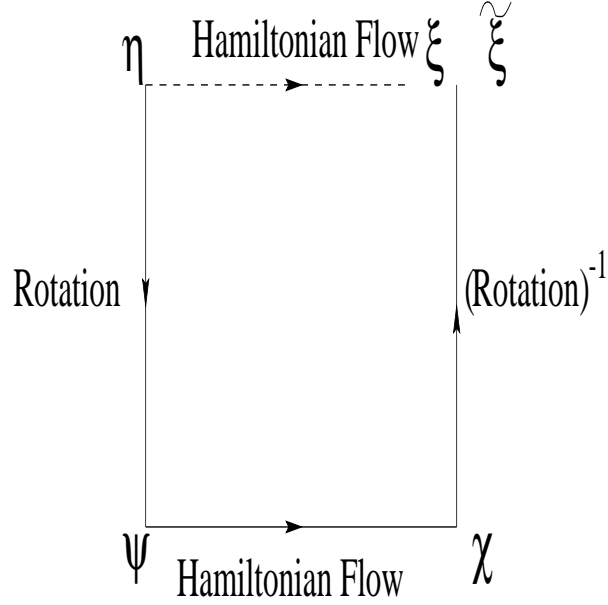


FIG. 3.9 - Schematic representation of the action of the linearized Hamiltonian flow and the flow associated to internal rotations.

The Hamiltonian flow in the initial configuration defines the  $\vec{\xi}_i$   $i \in \{0, 1, 2\}$  as follows

$$\begin{cases} \vec{\xi}_0 = -\vec{n}_0^0 \wedge [\vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_{-1} + \vec{\eta}_{-2}] \\ \vec{\xi}_1 = -\vec{n}_1^0 \wedge [\vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2] \\ \vec{\xi}_2 = -\vec{n}_2^0 \wedge [\vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2] \end{cases} \quad (3.24)$$

where the sites  $(-1)$  and  $(-2)$  are the NN of site  $(0)$ , in the ancestor triangle.

Because of  $\vec{\psi}_0 = \vec{\eta}_0$  and  $\vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2 = \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2$ , we have

$$\vec{\eta}_T = [\vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2] = \vec{\psi}_T = [\vec{\psi}_0 + \vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2]$$

.

Therefore, following the notations of Figure 3.9,

$$\begin{cases} \vec{\chi}_0 = -\vec{n}_0^0 \wedge [\vec{\eta}_T + \vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_{-1} + \vec{\eta}_{-2}] \\ \vec{\chi}_1 = -[\vec{n}_1^0 + \epsilon \vec{n}_2^0 \wedge \vec{n}_1^0] \wedge \vec{\eta}_T \\ \vec{\chi}_2 = -[\vec{n}_2^0 + \epsilon \vec{n}_1^0 \wedge \vec{n}_2^0] \wedge \vec{\eta}_T \end{cases} \quad (3.25)$$

By applying the inverse transformation of  $f$  to the vectors  $\chi_i$ , we can easily prove that

$$\forall j \quad \tilde{\xi}_j = f^{-1}(\vec{\chi}_j) = \xi_j \quad (3.26)$$

Therefore, the existence of a true symmetry (associated to  $(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)^2$ ) leads to the absence of order from disorder for all the spins belonging to the edge of the Husimi cactus. Note that it is in complete agreement with the geometric vision of order from disorder developed along this paper.

### 3.7 Summary, Conclusions and perspectives

Our main conclusions have been in fact already presented in the Introduction. The main result of this work is to show that continuous degeneracies which are not enforced by continuous symmetries of the Hamiltonian are more fragile quantum-mechanically than under the action of classical thermal fluctuations. This is because classical thermal fluctuations are not sensitive to the underlying Poisson bracket structure which is of course crucial for quantization. To put this work in perspective, we give in a Table 3.1 a summary of what we believe is the present status of three closely related systems: the Kagomé, the pyrochlore lattices and the Husimi cactus. The first line of the Table 2.1 refers to the local analysis of degeneracy lifting. We have included both thermal and quantum fluctuations. Note that the degeneracy lifting mechanism is quite different between the “real” lattices and the Husimi cactus. For the former, optimal states are the ones which maximize the number of zero modes. This generates a discrete subset of classical ground-states (namely the coplanar states for the Kagomé lattice and the collinear states for the pyrochlore lattice), within which a finer selection may occur (for instance favouring an ordered state on the Kagomé lattice). Note that the zero mode counting mechanism does not introduce much difference between classical thermal fluctuations and quantum zero-point fluctuations. However, the residual finer selection is sensitive to whether the system is classical or quantum mechanical. This mechanism is of course not available on the Husimi cactus, for which the number of zero modes is independent of the ground-state configuration. The second line of the table summarizes the global selection effects namely whether the system remains or not close to any of the favoured ground-states.

Two extensions of the present work may be considered. The first one would be to set-up a similar semi-classical analysis for systems in which the number of zero modes actually depends on the ground-state configuration. As we have just mentioned, this would be more relevant to “real” systems such as the Kagomé or the pyrochlore lattices. The other direction would be to take advantage of the simpler phase-space structure on the cactus to analyze tunneling processes within the discrete set of coplanar ground-states. As usual, these effects are sensitive for instance to the value of the quantum spin  $S$  [175, 176], and a rich pattern of possible quantum phases as  $S$  varies may occur in such a system. Numerical diagonalizations would therefore be very instructive, specially if performed for several values of the spin  $S$ .

**Acknowledgements:** We would like to thank P. Azaria and F. Mila for several interesting

discussions concerning this work.

	Classical Husimi cactus	Quantum Husimi cactus
Local degeneracy lifting	No <i>this work</i>	Yes (coplanar) <i>this work</i>
Global selection	No [162]	No [162]

	Classical Kagomé	Quantum kagomé
Local degeneracy lifting	Coplanar or ordered [155]	Ordered [153]-[156]
Global selection	Coplanar states [155]	No (Spin Liquid) [159, 160]

	Classical Pyrochlore	Quantum Pyrochlore
Local degeneracy lifting	Collinear state [177, 178]	Collinear state
Global selection	No [158]	No (Spin Liquid) [158, 161]

TAB. 3.1 - *Status of the ground-states of the classical and quantum Heisenberg model on the Husimi, Kagomé and pyrochlore lattices with respect to local or global selection phenomena*

### 3.8 APPENDIX A: Low energy spectrum along the Planar-AF transition

We suppose  $\frac{D}{J} - \Delta + 1 = 0$  with  $\Delta > 0$ . Because of the AF behaviour, we use the decomposition  $\vec{S}_n = (-1)^n \vec{\sigma}_n + a \vec{l}_n$  with  $\vec{\sigma}_n \cdot \vec{l}_n = 0$ .  $a$  represents the lattice constant. Because of the anisotropy in the  $z$  direction, we are forced to separate  $\vec{\sigma}_n$  and  $\vec{l}_n$  in two parts:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_n^\perp + \vec{\sigma}_n^z \quad ; \quad \vec{l}_n = \vec{l}_n^\perp + \vec{l}_n^z$$

We can write the equations satisfied by these four vectors (we directly take the continuum limit):

$$\frac{d\vec{\sigma}^\perp}{dt} = 4aJ(\vec{l}^\perp \wedge \vec{\sigma}^z) + Da^3(\vec{l}^\perp \wedge \frac{\partial^2 \vec{\sigma}^z}{\partial x^2}) + 4a(D+J)(\vec{l}^z \wedge \vec{\sigma}^\perp) \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}^z}{dt} = 4aJ(\vec{l}^\perp \wedge \vec{\sigma}^\perp) \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vec{l}^\perp}{dt} = -(D+J)a^2(\frac{\partial^2 \vec{\sigma}^z}{\partial x^2} \wedge \vec{\sigma}^\perp) - Ja^2(\frac{\partial^2 \vec{\sigma}^\perp}{\partial x^2} \wedge \vec{\sigma}^z) \quad (3.3)$$

$$\frac{d\vec{l}^z}{dt} = -Ja^2(\frac{\partial^2 \vec{\sigma}^\perp}{\partial x^2} \wedge \vec{\sigma}^\perp) \quad (3.4)$$

As in section 2, we are looking for solutions around  $\vec{S}^0 = S(\cos \theta \vec{z} + \sin \theta \vec{u})$  with  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$  and  $\vec{u} \cdot \vec{z} = 0$ . We write  $\vec{S} = \vec{S}^0 + \delta \vec{S}$  where  $\delta \vec{S} = (-1)^n \delta \vec{\sigma} + a \vec{l}$ . Using the above equations we obtain the following system for  $\delta \vec{\sigma}^z, \delta \vec{\sigma}^\perp, \vec{l}^z, \vec{l}^\perp$ :

$$\frac{d\delta \vec{\sigma}^\perp}{dt} = 4aJS(\vec{l}^\perp \wedge \cos \theta \vec{z}) + 4a(D+J)S(\vec{l}^z \wedge \vec{u} \sin \theta) \quad (3.5)$$

$$\frac{d\delta \vec{\sigma}^z}{dt} = 4aJS(\vec{l}^\perp \wedge \cos \theta \vec{z}) \quad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{l}^\perp}{dt} = -(D+J)a^2S \sin \theta (\frac{\partial^2 \delta \vec{\sigma}^z}{\partial x^2} \wedge \vec{u}) - Ja^2S \cos \theta (\frac{\partial^2 \delta \vec{\sigma}^\perp}{\partial x^2} \wedge \vec{z}) \quad (3.7)$$

$$\frac{d\vec{l}^z}{dt} = -Ja^2S \sin \theta (\frac{\partial^2 \delta \vec{\sigma}^\perp}{\partial x^2} \wedge \vec{u}) \quad (3.8)$$

We use the following form for  $\delta \vec{\sigma}$  and  $\vec{l}$ :

$$\begin{aligned} \delta \vec{\sigma} &= [A\vec{z} \wedge \vec{u} + B\vec{w}] \exp i(kx - \omega t) \\ \vec{l} &= [C\vec{z} \wedge \vec{u} + E\vec{w}] \exp i(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

where  $\vec{w} = -\sin \theta \vec{z} + \cos \theta \vec{u}$ . Using the basis  $(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v} = \vec{z} \wedge \vec{u})$ , and the system (3.5-3.8), we obtain four equations:

$$i\omega B = -4aJC \quad (3.10)$$

$$i\omega A = 4E[J + D \sin^2 \theta] \quad (3.11)$$

$$i\omega E = -J(ka)^2 A \quad (3.12)$$

$$i\omega C = (J + D \sin^2 \theta)(ka)^2 B \quad (3.13)$$

The resolution of this simple system gives the dispersion relation

$$\omega = \pm 2JS(ka) \sqrt{1 + \frac{D}{J} \sin^2 \theta} \quad (3.14)$$

with  $\frac{D}{J} = \Delta - 1$ .

### 3.9 APPENDIX B: Vectors associated to the spectrum for the 3-generation cactus

In this appendix, we are looking for vectors  $u_i \in (D_1)^\perp$  such that:

$$\begin{aligned} i) \quad & \forall i, u_i \cdot n_i = 0 \\ ii) \quad & \forall \delta n_i \in D_1, \sum_i n_i \cdot (\delta n_i \wedge u_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

where  $D_1$  is defined by (3.11). We first determine the symplectic orthogonal of the subspace  $D_2$  defined by the solutions of the homogeneous equations:

$$\begin{aligned} \delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 &= 0 \\ \delta n_2 + \delta n_4 + \delta n_5 &= 0 \\ \delta n_3 + \delta n_6 + \delta n_7 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

We have obviously  $D_2 \subset D_1$ . Therefore the symplectic orthogonal of  $D_1$  is included in the one of  $D_2$ . It is easier to work with the submanifold  $D_2$  since  $D_2$  is defined by an intersection of subspaces defined by only one condition:

$$D_2^a = \{ \delta n_i / \sum_{i \in \Delta^a} \delta n_i^a = 0 \}$$

where  $a$  indicates the  $a^{\text{th}}$  triangle and  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Hence  $D_2 = \bigcap_a D_2^a$ . Therefore the symplectic orthogonal of  $D_2$  is given by:

$$D_2^\perp = \bigoplus_a (D_2^a)^\perp$$



since the symplectic form is non-degenerate. This elementary algebra has interesting consequences because we have only to work on one triangle. Indeed, the first thing to notice is that a vector  $u_i$  tangent to an equilibrium configuration  $n_i$  and belonging to  $(D_2^a)^\perp$  vanishes on all the sites which do not belong to the triangle labelled by  $a$ . To show this, we remark that any tangent vector  $\delta n_i$  for which  $\delta n_1^a = \delta n_2^a = \delta n_3^a = 0$  belongs to  $D_2^a$ . So  $u_i$  has to be orthogonal to all such  $\delta n_i$ 's. More precisely, this implies  $\sum_{i \notin \Delta^a} n_i \cdot (\delta n_i \wedge u_i) = 0$  for any set of  $\delta n_i$  defined for  $i \notin \Delta^a$  (and of course  $\delta n_i \cdot n_i = 0$ ). Since  $u_i \cdot n_i = 0$ , this implies that  $u_i = 0$  for any  $i \notin \Delta^a$ . Therefore, we have only to determine  $u_i$  for  $i \in \Delta^a$ . For this, it is convenient to consider a unit vector  $z^a$  normal to the plane containing  $(n_1^a, n_2^a, n_3^a)$  (note that  $\sum_{i=1}^3 n_i^a = 0$ ). The tangent vectors  $\delta n_i$  and  $u_i$  to  $n_i$  restricted to the plaquette  $\Delta^a$  are then conveniently expressed as:

$$u_i = \rho_i z^a + \sigma_i (z^a \wedge n_i^a) \quad (3.3)$$

$$\delta n_i^a = \lambda_i z^a + \mu_i (z^a \wedge n_i^a) \quad (3.4)$$

After an elementary algebra (using  $n_i^a \cdot n_j^a = -1/2$  for  $i \neq j$ ), we find that  $D_2^a$  restricted to  $\Delta^a$  is the set of tangent vectors  $\delta n_i^a$  such that  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  and  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ . This can be shown to imply that  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0$  and  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . So  $(D_2^a)^\perp$  is the subspace of  $D_2^a$  of tangent vectors which vanish everywhere but on the triangle  $\Delta^a$ . To summarize, and changing notation slightly, for each triangle  $\Delta^a$  containing the sites  $\alpha(a), \beta(a), \gamma(a)$ , the tangent vectors  $u_i^a$  in  $(D_2^a)^\perp$  are defined by:

$$\begin{aligned} i) \quad & \forall i, \quad u_i^a \cdot n_i = 0 \\ ii) \quad & u_i^a = 0 \quad \forall i \neq \alpha(a), \beta(a), \gamma(a) \\ iii) \quad & u_{\alpha(a)}^a + u_{\beta(a)}^a + u_{\gamma(a)}^a = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

One vector of  $D_2^\perp$  is written naturally as  $u_i = \sum_a u_i^a$ .

In order to form  $D_1^\perp$ , we have just to impose the orthogonality to the particular solutions of the inhomogeneous equations (3.11). The symplectic form of a vector  $u$  in  $D_2^\perp$  with a tangent vector  $\{\delta n\}$  equals:

$$\mathcal{G}[u, \delta n] = - \sum_a \sum_i n_i \cdot (u_i^a \wedge \delta n_i) \quad (3.6)$$

According to (3.5),  $u_i^a = 0$  if  $i$  does not belong to the triangle  $a$ , we can therefore focus on one particular triangle  $a$ . With the same notations as before, the contribution of the triangle  $a$  to the symplectic form reads as:

$$\mathcal{G}[u^a, \delta n] = -\sigma(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2 + \rho_3 \mu_3 \quad (3.7)$$

It is then easy to show that the symplectic form  $\mathcal{S}[u^a, \delta n]$  depends *only* on the sum  $\delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3$

$$\mathcal{G}[u^a, \delta n] = (\delta n_1^a + \delta n_2^a + \delta n_3^a) \cdot \left[ \frac{2}{3} \sum_i u_i^a \wedge n_i^a + \sigma z^a \right] \quad (3.8)$$

The main point is that the sum  $\delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3$  is just the quantity involved in the equations (3.11). The dimension of  $(D_2)^\perp$  is 9. For  $(D_1)^\perp$ , we have three more conditions. Its dimension is therefore 6 and we have consequently only three independent massive modes. More explicitly, for the 3-generation cactus (see Figure 3.1 for notations),  $(D_1)^\perp$  is parametrized by:

$$\begin{aligned} \sigma^a, \sigma^b, \sigma^c \\ \rho_1^a + \rho_2^a + \rho_3^a &= 0 \\ \rho_2^b + \rho_4^b + \rho_5^b &= 0 \\ \rho_3^c + \rho_6^c + \rho_7^c &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

and they are constrained by:

$$\begin{aligned} n_1 \cdot \left[ \frac{2}{3} z^b \wedge (\rho_2^b n_2 + \rho_4^b n_4 + \rho_5^b n_5) - \sigma^b z^b \right] + \\ n_1 \cdot \left[ \frac{2}{3} z^c \wedge (\rho_3^c n_3 + \rho_6^c n_6 + \rho_7^c n_7) - \sigma^c z^c \right] = 0 \\ n_2 \cdot \left[ \frac{2}{3} z^b \wedge (\rho_2^b n_2 + \rho_4^b n_4 + \rho_5^b n_5) - \sigma^b z^b \right] = 0 \\ n_3 \cdot \left[ \frac{2}{3} z^c \wedge (\rho_3^c n_3 + \rho_6^c n_6 + \rho_7^c n_7) - \sigma^c z^c \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.10 APPENDIX C: Vectors associated to the spectrum for the 4-generation cactus

We consider the 4-generation cactus whose sites and triangles have been labelled following Figure 3.2. We follow exactly the same construction as for the 3-generation cactus. We thus define vectors  $u_i^\alpha$   $i \in [1, \dots, 15]$ ;  $\alpha \in \{a, \dots, g\}$  such that

$$\begin{aligned} u_i^\alpha \cdot n_i &= 0 \\ u_i^\alpha &= 0 \text{ if } i \text{ is not a site belonging to the } \alpha^{\text{th}} \text{ triangle} \\ \sum_i u_i^\alpha &= 0, \quad i \text{ is a site of the } \alpha^{\text{th}} \text{ triangle} \end{aligned} \quad (3.1)$$

The vectors  $u$  define the symplectic orthogonal  $D_2^\perp$  of the degenerate submanifold  $D_2$ . The subspace  $D_2^\perp$  is stable under the linearized hamiltonian flow. This defines vectors  $v_i^\alpha$  as:

$$\begin{aligned}
 v_j^a &= (u_2^b + u_3^c) \wedge n_j, \quad j \in \{1, 2, 3\} \\
 v_j^b &= (u_2^a + u_4^d + u_5^e) \wedge n_j, \quad j \in \{2, 4, 5\} \\
 v_j^c &= (u_3^a + u_6^f + u_7^g) \wedge n_j, \quad j \in \{3, 6, 7\} \\
 v_j^d &= (u_4^b) \wedge n_j, \quad j \in \{4, 7, 9\} \\
 v_j^e &= (u_5^b) \wedge n_j, \quad j \in \{5, 10, 11\} \\
 v_j^f &= (u_6^c) \wedge n_j, \quad j \in \{6, 12, 13\} \\
 v_j^g &= (u_7^c) \wedge n_j, \quad j \in \{7, 14, 15\}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

As in the previous case, we can show that the vectors  $v$  are in fact in the submanifold  $D_1^\perp$ . In order to find the eigenvalues of the flow associated to the vectors  $u$ , we consider the square of the linearized hamiltonian flow application. We have therefore the following system to solve:

$$-\omega^2 u_j^a = \left[ (u_2^a + u_4^d + u_5^e) \wedge n_2 + (u_3^a + u_6^f + u_7^g) \wedge n_3 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{1, 2, 3\} \tag{3.3}$$

$$-\omega^2 u_j^b = \left[ (u_2^b + u_3^c) \wedge n_2 + u_4^b \wedge n_4 + u_5^b \wedge n_5 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{2, 4, 5\} \tag{3.4}$$

$$-\omega^2 u_j^c = \left[ (u_2^b + u_3^c) \wedge n_3 + u_6^c \wedge n_6 + u_7^c \wedge n_7 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{3, 6, 7\} \tag{3.5}$$

$$-\omega^2 u_j^d = \left[ (u_2^a + u_4^d + u_5^e) \wedge n_4 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{4, 8, 9\} \tag{3.6}$$

$$-\omega^2 u_j^e = \left[ (u_2^a + u_4^d + u_5^e) \wedge n_5 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{5, 10, 11\} \tag{3.7}$$

$$-\omega^2 u_j^f = \left[ (u_3^a + u_6^f + u_7^g) \wedge n_6 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{6, 12, 13\} \tag{3.8}$$

$$-\omega^2 u_j^g = \left[ (u_3^a + u_6^f + u_7^g) \wedge n_7 \right] \wedge n_j, \quad j \in \{7, 14, 15\} \tag{3.9}$$

Let us notice a rather surprising fact: this system divides into two subsystems of independent variables. The first subset contains equations (3.4,3.5) associated to triangles (b), (c), the second subsystem contains equations (3.3),(3.5-3.9). Therefore, these equations connect next nearest neighbour triangles to each other. This property is clearly general and does not depend upon the number of generations of the Husimi cactus. This is associated to the fact that we consider the square of the Hamiltonian flow application.

We first consider the systems of equations (3.4,3.5) related to triangle (b) and (c). We define a system of coordinates where:

$$n_1 = (1, 0, 0); \quad n_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right); \quad n_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

where  $z^a = (0, 0, 1)$  is a vector orthogonal to the plane containing  $n_1, n_2, n_3$  and is linked to triangle (a). In a similar manner, we can define vectors  $z^b, z^c$  associated to triangles (b) and (c). The vectors  $u$  decompose on this basis as follows:

$$\begin{aligned} u_i^b &= \rho_i^b z^b + \sigma^b (z^b \wedge n_i^b), \quad i \in \{2, 4, 5\} \quad \text{with} \quad \sum_i \rho_i^b = 0 \\ u_j^c &= \rho_j^c z^c + \sigma^c (z^c \wedge n_j^c), \quad j \in \{3, 6, 7\} \quad \text{with} \quad \sum_j \rho_j^c = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

We first consider the equation (3.4) with  $j = 2$ :

$$\omega^2 u_2^b - (u_2^b + u_3^c) + n_2 \cdot (u_2^b \cdot n_2 + u_3^c \cdot n_2) + \frac{1}{2}(u_4^b + u_5^b) + n_4 \cdot (u_4^b \cdot n_2) + n_5 \cdot (u_5^b \cdot n_2) = 0 \quad (3.11)$$

We then use the properties of the vectors  $u_i$ , namely  $u_2^b + u_4^b + u_5^b = 0$  and  $u_2^b \cdot n_2 = 0$ . We project this equation on the  $z \wedge n_2$  axis and use the relations:

$$\begin{aligned} u_4^b \cdot n_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma^b \\ u_5^b \cdot n_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma^b \end{aligned}$$

The vectors  $z^b$  and  $z^c$  can be parametrised respectively with the angles  $\theta_b$  and  $\theta_c$  which represent the angles made with  $z_a$ . Therefore, we have

$$\begin{aligned} z^b &= \left( \epsilon^b \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta_b), \epsilon^b \frac{1}{2} \sin(\theta_b), \cos(\theta_b) \right) \\ z^c &= \left( \epsilon^c \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta_c), -\epsilon^c \frac{1}{2} \sin(\theta_c), \cos(\theta_c) \right) \end{aligned}$$

with  $\epsilon^b, \epsilon^c = \pm 1$ . After projection on the  $z \wedge n_2$  axis, the equation (3.11) becomes:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - 3)\sigma^b &+ \sigma^c \left[ \frac{1}{2} \cos \theta_b \cos \theta_c + \epsilon^b \epsilon^c \sin \theta_b \sin \theta_c \right] \\ &+ \rho_3^c \left[ \frac{1}{2} \epsilon^c \cos \theta_b \sin \theta_c - \epsilon^b \sin \theta_b \cos \theta_c \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Using similar algebra, we project (3.11) on the  $z^b$  axis and obtain

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \frac{3}{2}\right)\rho_2^b &- \rho_3^c \left[ \cos \theta_b \cos \theta_c + \epsilon^b \epsilon^c \sin \theta_b \sin \theta_c \right] \\ &+ \sigma^c \left[ \epsilon^c \cos \theta_b \sin \theta_c - \frac{\epsilon^b}{2} \sin \theta_b \cos \theta_c \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

If we consider equation (3.4) with  $j = 4, 5$ , we obtain equations compatible with equations (3.12,3.13). We can treat the system (3.5) in a similar way and we obtain in this case:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - 3)\sigma^c &+ \sigma^b \left[ \frac{1}{2} \cos \theta_b \cos \theta_c + \epsilon^b \epsilon^c \sin \theta_b \sin \theta_c \right] \\ &+ \rho_2^b \left[ \frac{1}{2} \epsilon^b \cos \theta_c \sin \theta_b - \epsilon^c \sin \theta_c \cos \theta_b \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \frac{3}{2})\rho_3^c &- \rho_2^b \left[ \cos \theta_b \cos \theta_c + \epsilon^b \epsilon^c \sin \theta_b \sin \theta_c \right] \\ &+ \sigma^b \left[ \epsilon^b \cos \theta_c \sin \theta_b - \frac{\epsilon^c}{2} \sin \theta_c \cos \theta_b \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

In the coplanar case ( $\theta_b = \theta_c = 0$ ), we obtain the following eigenvalues for  $\omega^2$ :  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{7}{2}$  with double degeneracy. When ( $\theta_b, \theta_c \neq 0$ ), we have to compute the eigenvalues of a  $4 \times 4$  matrix. The characteristic polynomial reads:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w^2 = X, \theta_1, \theta_2) &= X^4 - 9X^3 + 28X^2 - \left( 36 + \frac{9}{8}(\cos^2 \theta_b + \cos^2 \theta_c) \right) X \\ &+ \frac{175}{16} - \frac{45}{16} \sin^2 \theta_b \sin^2 \theta_c + \frac{63}{16}(\sin^2 \theta_b + \sin^2 \theta_c) - \frac{9}{4} \cos \theta_b \cos \theta_c \sin \theta_b \sin \theta_c \end{aligned} \quad (3.16)$$

and therefore depends on the ground-state!

Notice that this result is in apparent contradiction with the case of the 3-generation cactus where the spectrum does not depend on the ground-state. In the 4-generation cactus, a selection mechanism holds. It is easy from (3.16) to see that the configuration minimizing the energy is the planar one ( $\theta_b = \theta_c = 0$ ). Under these conditions we find four eigenvalues  $w^2 = \frac{1}{2}^{(1)}$ ,  $\frac{5}{2}^{(2)}$ ,  $\frac{7}{2}^{(1)}$ .

Therefore, the spins belonging to the triangles ( $a$ ), ( $b$ ), ( $c$ ) are coplanar. Rather than solving the heavy system of equations (3.3),(3.6-3.9), we can use an extension of the result proved in the previous appendix. Indeed, if we consider one centered triangle  $b$  connected to three free triangles by its vertices. The results of appendix B extend in a straightforward way, and no selection mechanism is found in this system with 9 spins. Therefore, the three pairs of spins can rotate independently. If we apply this result to triangles ( $b$ ), ( $a$ ), ( $d$ ), ( $e$ ) ( $b$  being the centered triangle), we find that the spins (8, 9) and (10, 11) are free to rotate though the spins of triangle ( $a$ ) are fixed. Consequently, to summarize, there is no selection mechanism in the leaves of the Husimi tree!

### 3.11 APPENDIX D: Lie brackets between vectors fields associated to internal rotations

In this appendix, we check in a pedestrian way that the flow associated to two different internal rotations commute. In the Husimi tree, we consider  $R_i(\theta)$  and  $R_j(\eta)$ , with  $R_i(\theta)$

the rotation of angle  $\theta$  around  $\vec{n}_i$ . Three cases have to be looked upon. We have therefore to compare the result of the application  $R_i(\theta)R_j(\eta)$  with  $R_j(\eta)R_i(\theta)$  on a vector  $\vec{n}_k$  ( $k \neq i, j$ ).

- If  $i$  and  $j$  are not connected by a descendance relation, the result is trivial.
- If  $k$  is between  $i$  and  $j$ , then

$$\begin{aligned} R_i(\theta)R_j(\eta)(\vec{n}_k) &= R_i(\theta)(\vec{n}_k) \\ R_j(\eta)R_i(\theta)(\vec{n}_k) &= R_i(\theta)(\vec{n}_k), \end{aligned} \quad (3.1)$$

which ensures the result.

- If  $k$  is below both  $i$  and  $j$ , the result is *a priori* less trivial. Let us assume that  $i$  is an ancestor of  $j$ . We have to compare:

$$R[\vec{n}_i, \theta]R[\vec{n}_j, \eta](\vec{n}_k) \quad \text{and} \quad R[R(\vec{n}_i, \theta)(\vec{n}_j); \eta]R[\vec{n}_i, \theta](\vec{n}_k) \quad (3.2)$$

where  $R[\vec{n}, \alpha]$  denotes the rotation of angle  $\alpha$  around  $\vec{n}$ .

A little algebra shows that this property indeed holds and that the two quantities defined in (3.2) are equal.

## 3.12 APPENDIX E: Vicinity of the equilibrium manifold

### 3.12.1 General point of view

We first analyze the vicinity of a sub-manifold  $\mathcal{E}$  of equilibrium state of an Hamiltonian  $H$ . Therefore,  $\mathcal{E}$  is defined by:

$$x \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} H(x) = 0 \\ \partial_i H(x) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Let  $x_0 \in \mathcal{E}$ . We consider a small deviation around  $x_0$  and thus write  $x^i = x_0^i + y^i$  with  $\|y\| \ll \|x_0\|$ . The equation of motion for  $y$  is:

$$\frac{dy^i}{dt} = g^{ij}(x_0 + y)\partial_j H(x_0 + y) \quad (3.2)$$

Using  $\|y\| \ll \|x_0\|$ , this equation becomes:

$$\frac{dy^i}{dt} = g^{ij}(x_0)\partial_j \partial_k H(x_0)y^k + O(y^2) \quad (3.3)$$

Defining  $A^i_j(x_0) = g^{ij}(x_0)\partial_j\partial_k H(x_0)$ , the linearized equation of motion around  $x^0$  simply reads:

$$\frac{dy^i}{dt} = A^i_j(x_0)y^j \quad (3.4)$$

It is worth noticing that  $A^i_j$  is *not* in general a tensor. It can be checked easily that  $\partial_j\partial_k H$  does not transform in a covariant way under coordinate transformations. However, if we restrict ourselves to the submanifold  $\mathcal{E}$ , the matrix  $A^i_j(x_0)$  does define a tensor. Let us now express the invariance of  $A$  under the flow associated to  $X$  on the submanifold  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{L}_X A = 0 \iff (\partial_k A^i_j)X^k + A^i_k \partial_j X^k - A^k_j \partial_k X^i = 0 \quad (3.5)$$

with  $\mathcal{L}$  the Lie derivative.

Let us now extend this definition in the vicinity of  $\mathcal{E}$ , though  $A$  is no longer a tensor. We therefore define  $M^i_j = (\partial_k A^i_j)X^k + A^i_k \partial_j X^k - A^k_j \partial_k X^i$ .

Using  $A^i_k = g^{ij}\partial_j\partial_k H$ , we obtain

$$M^i_j = (\partial_k g^{il})X^k(\partial_l\partial_j H) + g^{il}X^k(\partial_k\partial_l\partial_j H) + g^{il}(\partial_j X^k)(\partial_l\partial_k H) - g^{kl}(\partial_k X^i)(\partial_l\partial_j H) \quad (3.6)$$

The invariance of  $H$  under the flow of  $X$  is expressed by  $\mathcal{L}_X H = 0$  or in coordinates

$$X^k \partial_k H = 0 \implies (\partial_j X^k)(\partial_k H) + X^k(\partial_j \partial_k H) = 0 \quad (3.7)$$

$$\implies (\partial_j \partial_l X^k)(\partial_k H) + (\partial_j X^k)(\partial_l \partial_k H) + (\partial_l X^k)(\partial_j \partial_k H) + X^k(\partial_j \partial_k \partial_l H) = 0 \quad (3.8)$$

The term  $(\partial_j \partial_l X^k)(\partial_k H)$  equals zero on  $\mathcal{E}$ . By injecting (3.8) in (3.6), we find that:

$$\begin{aligned} M^i_j &= \left\{ (\partial_k g^{il})X^k - g^{ik}(\partial_k X^l) - g^{kl}(\partial_k X^i) \right\} (\partial_l \partial_j H) \\ &= -a^{il} \partial_l \partial_k H, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where  $a^{ij}$  has been introduced in (3.9). The relation (3.9) can be still written as

$$M_{ij} = -g_{im} a^{mn} g_{nk} g^{kl} (\partial_l \partial_j H) = -a_{ik} A^k_j \quad (3.10)$$

Not surprisingly, we recover the 2-form  $a_{ij}$  corresponding to  $\mathcal{L}_X g$ . We can therefore conclude that if  $X$  is a Killing vector field, then the matrix  $A$  of small oscillations around an equilibrium configuration is invariant under the flow associated to  $X$ .

### 3.12.2 Application to the Husimi cactus

Let  $\vec{u}$  and  $\vec{v}$  two tangent vectors to an equilibrium configuration  $\{\vec{n}^0\}$  of phase-space. According to (3.10),

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = -u^i a_{ik} A^k_j v^j = -a(\vec{u}, A\vec{v}) \quad (3.11)$$

We recall how to build the matrix  $A$  for the Husimi tree. We consider  $\vec{n}_i = \vec{n}_i^0 + \vec{v}_i$  with  $\vec{n}_i \cdot \vec{v}_i = 0$ . Therefore,

$$\begin{aligned} (A\vec{v})_i &= \frac{d\vec{n}_i}{dt} = \sum_{j \in N_i} \vec{n}_j \wedge \vec{n}_i \\ &= \sum_{j \in N_i} \vec{n}_j^0 \wedge \vec{v}_i + \sum_{j \in N_i} \vec{v}_j \wedge \vec{n}_i^0 + O(v^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

where  $N_i$  indicates all the nearest neighbours of  $i$ . At lowest order,

$$(A\vec{v})_i = \vec{w}_i = -\vec{n}_i^0 \wedge \left( \sum_{k \in N_i} \vec{v}_k + \frac{1}{2} z_i \vec{v}_i \right) \quad (3.13)$$

where  $z_i$  is the coordination number of site  $i$ . Using the expression (3.14) of  $a(u, w)$ , we find

$$a(\vec{u}, A\vec{v}) = \sum_{j>i} (\vec{u}_i \vec{w}_j - \vec{u}_j \vec{w}_i) \quad (3.14)$$

where  $\vec{w}$  has been defined in the previous relation. The expression

$$\sum_{j>i} \vec{w}_j = - \sum_{j>i} \vec{n}_j^0 \wedge \left( \sum_{k \in N_j} \vec{v}_k + \frac{1}{2} z_j \vec{v}_j \right)$$

can be simplified by noticing that:

- For  $k > i$  and  $k \notin N_i$ , the term containing  $\vec{v}_k$  vanishes because  $(\sum_{j \in N_k} \vec{n}_j^0 + \frac{1}{2} z_k \vec{n}_k^0 = 0)$  for an equilibrium state.
- For  $k > i$  and  $k \in N_i$ , the term containing  $\vec{v}_k$  is:

$$- \left( \sum_{j \in N_k} \vec{n}_j^0 + \frac{1}{2} z_k \vec{n}_k^0 \right) \wedge \vec{v}_k = \vec{n}_i^0 \wedge \vec{v}_k$$

- For  $k = i$ , the term containing  $\vec{v}_i$  is  $\vec{n}_i^0 \wedge \vec{v}_i$

From these three types of contributions, we infer:

$$a(\vec{u}, A\vec{v}) = \vec{n}_i^0 \cdot \left\{ \left( \sum_{k>i, k \in N_i} \vec{v}_k + \vec{v}_i \right) \wedge \vec{u}_i \right\} + \vec{n}_i^0 \cdot \left\{ \left( \sum_{k \in N_i} \vec{v}_k + 2\vec{v}_i \right) \wedge \sum_{j>i} \vec{u}_j \right\} \quad (3.15)$$

Consequently, the 2-form is clearly different from zero. This result proves that rotations of spins  $\vec{n}_j$  around  $\vec{n}_i$  (with  $j$  descendant of  $i$ ) do not preserve the form of the oscillation



matrix around equilibrium. Notice also that it explains why a direct calculation of the low-energy spectrum with standard methods is difficult to implement. However, this result does not enable us to show explicitly that the matrices  $A^i_j$  of two equilibrium configurations are not equivalent. In order to prove it, we have to compute the characteristic polynomial and show it depends on the chosen ground-state as we checked explicitly in appendix C for the 4-generation cactus. It seems difficult to get general analytical expressions as in appendix C for a  $p$ -generation cactus. Another less ambitious solution consists in analyzing how the oscillations matrices of two different equilibrium configurations are connected. This is the subject of the next subsection of this appendix.

### 3.12.3 Links between two different classical configurations

Consider one vector  $\eta$  in phase-space. We want to compare the Hamiltonian flow of  $\eta$  with another one linked to  $\eta$  by a rotation around  $\vec{n}_i^0$ . Furthermore, it provides us with a way of connecting the matrices of small oscillations around two different classical ground-states. This is schematized in Figure 3.9. We are to compare  $\xi$  and  $\tilde{\xi}$ . In this scheme, we first begin with a state  $\eta$ . The state  $\psi$  is deduced by a rotation around  $\vec{n}_i^0$  of angle  $\theta$ , therefore,

$$\begin{cases} \psi_j = R(\vec{n}_i^0, \theta)\eta_j & \text{if } j > i \\ \psi_j = \eta_j & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (3.16)$$

We have to distinguish the cases  $j > i$  and  $j \geq i$ . We first examine the Hamiltonian flow around this new equilibrium configuration. It defines a state  $\chi$  as follow

$$\chi_j = -R(\vec{n}_i^0, \theta)[\vec{n}_j^0] \wedge \left( \sum_{k \in N_j} \psi_k + \frac{1}{2}z_j\psi_j \right) \quad \text{if } j > i \quad (3.17)$$

$$\chi_j = -\vec{n}_j^0 \wedge \left( \sum_{k \in N_j} \psi_k + \frac{1}{2}z_j\psi_j \right) \quad \text{elsewhere} \quad (3.18)$$

We have used (3.13) in order to establish these equations. We now apply the inverse rotation  $R(\vec{n}_i^0, -\theta)$  (see Figure 3.9). We also use the property discussed in appendix D:

$$R(\vec{n}_i^0; -\theta)R(R(\vec{n}_i^0, \theta)[\vec{n}_j^0]; \eta)R(\vec{n}_i^0; \theta) = R(\vec{n}_j^0; \eta) \quad (3.19)$$

In the limit  $\eta \rightarrow 0$ , we deduce:

$$R(\vec{n}_i^0; -\theta) \left\{ R(\vec{n}_i^0, \theta)[\vec{n}_j^0] \wedge R(\vec{n}_i^0, \theta)[\vec{u}] \right\} = \vec{n}_j^0 \wedge \vec{u} \quad (3.20)$$

We have to distinguish four different cases:

- $j > i$  and  $j$  has not  $i$  as a nearest neighbour (NN). In this case

$$\forall k \in N_j, \psi_k = R(\vec{n}_i^0, \theta)\eta_k .$$

Therefore,

$$\tilde{\xi}_j = -\vec{n}_j^0 \wedge \left( \sum_{k \in N_j} \eta_k + \frac{1}{2} z_j \eta_j \right) = \xi_j \quad (3.21)$$

–  $j > i$  and  $j$  NN of  $i$ . In this case  $\psi_i = \eta_i$ . Using (3.20), we show

$$\tilde{\xi}_j = -\vec{n}_j^0 \wedge \left( \sum_{k \in N_j, k \neq i} \eta_k + R(\vec{n}_i^0; -\theta)\eta_i + \frac{1}{2} z_j \eta_j \right) \quad (3.22)$$

–  $j = i$

$$\tilde{\xi}_j = -\vec{n}_i^0 \wedge \left( \sum_{k \in N_{j=i}, k < i} \eta_k + \sum_{k \in N_{j=i}, k > i} R(\vec{n}_i^0; \theta)\eta_k + \frac{1}{2} z_i \eta_i \right) \quad (3.23)$$

Notice that the notation  $k < i$  means that  $k$  is not a descendant of  $i$ .

–  $j \neq i$  and  $j < i$ . In this case, we trivially show that  $\tilde{\xi}_j = \xi_j$ .

We may also consider the case of the rotation of the  $\vec{n}_j$ 's around  $\vec{n}_i^0$  for  $j \geq i$ , and similar conclusions can be drawn.

Consequently, we can infer from this analysis that the problem of small oscillations around a new configuration (deduced by an internal rotation around spin  $\vec{n}_i^0$ ) reduces to a problem of small oscillation in the initial configuration but with a modification of the bounds between  $i$  and its two immediate descendants (the new “interaction”) depends of  $\theta$ . This modification seems to be the origin of the dependence of the low energy spectrum with the angle  $\theta$ . Note that after this change of basis, the modification of the linearized equation of motion due to a change in  $\theta$  is only local. This is why we do not expect large effective energy barrier between different coplanar ground-states.

### 3.13 Résumé et perspectives

Dans l'article précédent, j'ai étudié en collaboration avec B. Douçot le modèle de Heisenberg AF sur le cactus de Husimi. Ce système apparenté au réseau Kagomé, est un cadre idéal pour mettre en perspective le degré de généralité du phénomène d'ordre par le désordre (j'entends par là l'aspect local). En effet le cactus de Husimi est un système extrêmement mou avec une dégénérescence classique macroscopique. De plus, il n'y a pas de mécanisme de sélection thermique. Malgré cela, nous avons établi par une approche semi-classique que les fluctuations quantiques sélectionnent un état fondamental coplanaire pour tous les spins à l'intérieur de l'arbre mais pas pour les spins de bord. Le cactus est en quelque sorte un réseau hybride vis à vis de l'ordre par le désordre dans la mesure où les spins de bord représentent la moitié du nombre total de spin. L'approche utilisée dans l'article, s'applique à tous les systèmes frustrés dont l'espace des états fondamentaux classiques peut être représenté par une variété différentiable dans l'espace de phase. En étudiant la dynamique au voisinage de cette variété, on a montré qu'un mécanisme de sélection local s'applique irrémédiablement dès que les états classiques ne sont pas protégés par une symétrie de l'Hamiltonien.

Néanmoins, ce mécanisme de sélection ne lève pas complètement la dégénérescence classique puisqu'il reste un nombre discret macroscopique (qui varie exponentiellement avec le nombre de spins) d'états fondamentaux classiques dû aux symétries du réseau. Il faut tout de même noter que l'on est passé d'une variété continue à un ensemble discret. La suite de ce programme consiste à analyser, d'une part ce qu'il se passe lorsque l'on diminue la valeur du spin  $S$  vers le cas purement quantique  $S = \frac{1}{2}$ , et d'autre part de comprendre le rôle joué par ces symétries discrètes résiduelles. On a déjà vu, par exemple, qu'au niveau classique, elles étaient responsables du changement complet du comportement critique du modèle XY  $J_1 - J_2$ . La dégénérescence du fondamental pour des spins  $s = \frac{1}{2}$  varie comme le nombre de sites. Il est alors clair qu'un nouveau mécanisme allant au-delà des fluctuations quantiques doit être invoqué pour abaisser le nombre d'états fondamentaux classiques. Cette question n'a été qu'à peine effleurée dans l'article précédent. On a typiquement montré sur le cactus à 4 générations (15 spins) que les barrières entre ces différents états fondamentaux sont très faibles ce qui laisse supposer que l'effet tunnel va complètement mélanger ces états. Il serait très intéressant de voir si ce phénomène est susceptible de produire un gap entre le secteur triplet et singulet pour des spins  $s = \frac{1}{2}$ . Cette question est en cours d'étude [179]. A ce stade, une approche numérique serait également complémentaire et la bienvenue. Elle devrait permettre de vérifier si le spectre basse l'énergie du cactus est comparable à ceux des réseaux Kagomé ou pyrochlore, mais ceci concerne l'aspect global qui est beaucoup plus complexe que l'aspect local traité ici.

## Troisième partie

# Modèles minimaux couplés et systèmes désordonnés



# Chapitre 4

## Couplage entre modèles critiques

### 4.1 Introduction

Dans la première partie de cette thèse, on a rencontré le modèle Ising-XY consistant en un modèle d'Ising couplé à un modèle XY par leur densité d'énergie. Le diagramme de phase (Fig. 2.10) possède pour certaines valeurs de ses paramètres une ligne de transition dont la classe d'universalité demeure incertaine (deux transitions de type Ising et XY séparées ou bien une seule transition d'un nouveau type). Ce point a été longuement discuté au cours du chapitre 2. J'ai l'intention d'aborder dans cette partie ce problème sous un angle plus général.

L'idée est de regarder quel peut être l'effet d'un couplage de type énergie-énergie en supposant que les deux modèles aient atteint leur température critique. Est-ce qu'un couplage de ce type est capable de conduire le système vers un nouveau point fixe avec une nouvelle classe d'universalité?

Comme les problèmes que l'on considère sont en dimension deux, je vais utiliser l'extraordinaire richesse de l'invariance conforme. En imposant certaines contraintes de minimalité, Belavin, Polyakov et Zamolodchikov (BPZ)[180], ont pu identifier tous les exposants critiques d'une grande partie de modèles statistiques (ou plutôt des classes d'universalité). Ce résultat est sûrement l'un des plus importants de ces dernières années. Je vais donc essayer d'analyser l'effet d'un couplage de type énergie-énergie sur des modèles critiques décrits par la théorie conforme. Toute la question est maintenant d'être capable de trouver un schéma de perturbation cohérent que l'on sache contrôler (le terme de perturbation étant naturellement joué par le terme de couplage énergie-énergie).

Comme on va le voir par la suite, une telle approche est infructueuse pour le cas du modèle Ising-XY, dans la mesure où l'on est tout simplement incapable de définir un schéma de perturbation. Néanmoins, une analyse a pu être menée sur différents modèles minimaux couplés entre-eux. Les modèles minimaux font partie de la série unitaire trouvée par BPZ. On trouve notamment le modèle d'Ising ainsi que les modèles de Potts à 3 états.

C'est essentiellement les deux modèles que je vais considérer dans cette partie.

Plus précisément, je vais m'intéresser à des modèles possédant une symétrie  $Z(2) \times Z(q)^N$  avec  $q = 3, 4$ , l'idée étant de décrire le couplage entre un modèle d'Ising et un modèle avec un grand nombre de degré de liberté comme dans le cas du modèle Ising-XY. Certes, bien qu'un rapprochement entre les deux situations semble irréaliste, on va voir que de nouveaux comportements critiques peuvent émerger dans ces situations *a priori* plus simples. Tout d'abord, dans les sections 4.2-4.4, je ferai quelques rappels succincts sur la théorie conforme, les modèles minimaux et le calcul des fonctions de corrélation. Pour une description bien plus complète, je renvoie plutôt aux ouvrages et revues nombreuses sur le sujet dont [181, 182, 183].

## 4.2 Invariance conforme et modèles minimaux

### 4.2.1 Invariance conforme

Le fait que le groupe conforme en dimension 2 soit engendré par les transformations analytiques et anti-analytiques donne à la dimension 2 un caractère particulier. Le groupe conforme est alors de dimension infinie ce qui permet d'imposer une infinité de contraintes sur l'algèbre. Dans un système de coordonnées complexes  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , les transformations conformes sont simplement les transformations analytiques et anti-analytiques:

$$z \rightarrow z'(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}'(\bar{z}) \quad (4.1)$$

Les générateurs de ces transformations conformes sont  $T(z)$  et  $\bar{T}(\bar{z})$  et forment ce que l'on appelle le tenseur énergie-impulsion.

Le groupe des transformations conformes se factorise en le produit de sa partie analytique par sa partie anti-analytique, c'est pourquoi on ne considère en général que la partie analytique engendrée par  $T(z)$ .

Je vais traiter directement le cas des théories conformes quantiques. Dans ce cas, les transformations du tenseur énergie-impulsion  $T$  ne se déduisent pas simplement des lois de transformations tensorielles.

On décompose tout d'abord le tenseur énergie-impulsion en modes  $L_n$ :

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n \quad (4.2)$$

où chacun des  $L_n$  est le générateur des transformations infinitésimales:

$$z \rightarrow z + \epsilon z^{n+1} \quad (4.3)$$

Les lois de transformation les plus générales pour ces modes sont données par l'algèbre de Virasoro [184]:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n - 1)(n + 1)\delta_{n, -m}. \quad (4.4)$$

On a une algèbre similaire pour les modes  $\bar{L}_n$  de  $\bar{T}$  qui commutent par ailleurs avec les  $L_n$ .

Dans le cas particulier où  $n \in \{-1, 0, 1\}$ , la loi de transformation (4.4) se simplifie. On retrouve une algèbre classique simple engendrée par  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ . Cet ensemble (plus son conjugué) génère le groupe  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$  des transformations conformes projectives (translation, rotation, dilatation et transformation conforme spéciale) qui peut s'écrire:

$$z \longleftrightarrow \omega_p(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.5)$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  et  $ad - bc = 1$ .

Le paramètre  $c$  dans (4.4) ne peut pas être fixé par des considérations générales et *dépend* de la théorie considérée. Il s'agit de la charge centrale ou anomalie conforme que l'on a déjà rencontré dans la première partie de cette thèse. Il est immédiat de vérifier que l'algèbre classique des générateurs  $-z^{n+1}d/dz$  des transformations conformes est donnée par (4.4) avec  $c = 0$  et parmi ces générateurs, seul le sous ensemble  $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$  (que nous avons déjà introduit ci-dessus) définit des transformations analytiques dans tout le plan complexe  $\mathbb{C}$ . On voit donc que la charge centrale a un caractère purement quantique et est une sorte d'énergie de point zéro engendrée par les fluctuations quantiques. Elle prend une importance primordiale en mécanique statistique. Si l'on considère un système défini sur une bande de largeur  $L$  et de longueur infinie, l'énergie libre par unité de longueur sera donnée par (voir [123, 185, 186, 187] pour les détails):

$$F(L) = F(\infty)L - \frac{c\pi}{6L} + \dots$$

Cet effet de taille finie n'est autre que l'analogie de l'effet Casimir dans le cas de l'électrodynamique quantique.

D'un point de vue plus algébrique, l'algèbre de Virasoro (4.4) apparaît ainsi comme une extension centrale de l'algèbre conforme (à  $c = 0$ ).

On va maintenant s'intéresser aux opérateurs de la théorie. La loi de transformation la plus naturelle et la plus simple d'un opérateur  $\phi^i$  sous une transformation conforme (4.1) est:

$$\phi^i(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{dz'}{dz}\right)^{\Delta_i} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}_i} \phi^i(z', \bar{z}'). \quad (4.6)$$

L'indice  $i$  sert à distinguer les divers champs. Le champ  $\phi^i$  est dit de poids  $\Delta_i$  et  $\bar{\Delta}_i$ . L'équation (4.6) est une extension de la loi de transformation tensorielle classique. Les champs qui ont une loi de transformation donnée par (4.6) sont dits primaires. Tous les champs ne peuvent obéir à cette transformation, la dérivée d'un champ primaire n'étant



déjà clairement pas un champ primaire. Les transformations (4.3) engendrées par les  $L_n$  s'écrivent donc pour un tel champ:

$$[L_n, \phi^i(z)] = z^n \left( z \frac{d}{dz} + (n+1)\Delta_i \right) \phi^i(z) \quad (4.7)$$

On obtient une expression similaire pour les  $\bar{L}_n$ .

Dans la théorie conforme, il y a une correspondance directe entre les opérateurs et les états. Les opérateurs engendrent les états à partir du vide. Au vu du développement en modes (4.2) de  $T$ , le vide  $|\mathbb{0}\rangle$  “entrant” (correspondant donc à  $z = 0$ ) doit être annihilé par les modes  $L_n$  tels que  $-n - 2 < 0$ , sinon  $T(z)$  aurait une singularité en 0:

$$L_n |\mathbb{0}\rangle = 0 \text{ pour } n \geq -1. \quad (4.8)$$

Le vide  $|\mathbb{0}\rangle$  est donc en particulier invariant sous les transformations globales de  $Sl_2(\mathbb{C})$  engendrées par  $L_1, L_0, L_{-1}$ . Les états sont obtenus par action des champs sur le vide:

$$|\psi\rangle = \phi^i(0) |\mathbb{0}\rangle. \quad (4.9)$$

Si le champ  $\phi^i$  est primaire, l'état correspondant est aussi dit primaire (la notation (4.9) est réservée aux états primaires). On peut déduire à partir des relations de commutation entre champs primaires que les états primaires (dits de poids  $\Delta_i$ ) vérifient:

$$L_0 |\psi\rangle = \Delta_i |\psi\rangle \text{ et } L_n |\psi\rangle = 0 \text{ pour } n \geq 1. \quad (4.10)$$

Contrairement au vide  $|\mathbb{0}\rangle$ , ils ne sont pas invariants sous  $Sl_2(\mathbb{C})$ : il y a maintenant un opérateur inséré en  $z = 0$  qui est modifié par les transformations  $Sl_2(\mathbb{C})$ . De la même manière, à partir de la transformation  $z \rightarrow 1/z$ , on peut définir symétriquement les états sortants:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{0} | L_{-n} &= 0 \quad \text{pour } -n \leq 1 \\ \langle \psi | L_{-n} &= 0 \quad \text{pour } -n \leq -1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

On a introduit les champs et les états primaires, on peut maintenant examiner les autres champs et états de la théorie. On a en effet déjà remarqué que la dérivée d'un champ primaire ne l'était pas. De façon plus générale que la dérivée, qui correspond à une translation locale engendrée par  $L_{-1}$ , on peut appliquer à un champ  $\phi^i$  tous les générateurs  $L_n$  des transformations conformes locales. Ces opérateurs doivent nécessairement être inclus dans l'algèbre car ils apparaissent par exemple dans le développement à courte distance de  $T(z)\phi^i(z')$ . Ils sont engendrés à partir des champs primaires par:

$$\phi^{i,(-k_1, \dots, -k_N)}(z) = L_{-k_1}(z) \dots L_{-k_N}(z) \phi^i(z) \quad (4.12)$$

pour des entiers positifs  $k_1, \dots, k_N$ , d'où leur nom de descendants. Comme les  $L_n$  sont les modes de  $T(z)$  développés autour de 0, les  $L_n(z)$  de (4.12) sont les modes pour un développement autour de  $z$ . Pour les états (donc  $z = 0$ ) on a également les descendants ou états secondaires:

$$|i, (-k_1, \dots, -k_N)\rangle = L_{-k_1} \dots L_{-k_N} |\dot{i}\rangle. \quad (4.13)$$

L'état  $|i, \{-k_1, \dots, -k_N\}\rangle$  n'est plus annihilé par les  $L_n$ ,  $n > 0$ , et la condition (4.11) constitue une caractérisation des états primaires. Son poids se calcule aisément par (4.10) et (4.4):

$$L_0 |i, (-k_1, \dots, -k_N)\rangle = (\Delta_i + k_1 + \dots + k_N) |i, (-k_1, \dots, -k_N)\rangle. \quad (4.14)$$

Le poids d'un descendant est donc obtenu par accroissement d'un entier positif à partir du poids  $\Delta_i$  de l'état primaire dont il est issu. C'est pourquoi on appelle aussi ces derniers "états de plus haut poids", par référence à une convention de signe opposée. On a ainsi à partir de chaque champ primaire toute une série de champs dits secondaires ou descendants. Ils constituent la famille conforme de  $\phi^i$ . L'espace de tous les états engendrés par action des  $L_{-k}$  sur l'état de plus haut poids  $|\dot{i}\rangle$  est appelé *module de Verma*. C'est une représentation de l'algèbre de Virasoro. Elle est caractérisée par le poids  $\Delta_i$ . Nous allons voir plus loin que des descendants de l'opérateur primaire peuvent être également primaires et engendrer ainsi une sous-structure. On peut ranger les opérateurs descendants par "couche" ou chaque couche est caractérisée par une valeur propre de  $L_0$ . De plus, à l'intérieur d'une couche caractérisée par la valeur propre  $\Delta_i + P$ , les champs peuvent être classés (par commutation entre les  $L_n$ ) sous la forme:

$$|i, (-k_1, \dots, -k_N)\rangle \text{ avec } k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^N k_i = P.$$

L'invariance conforme permet également d'avoir plus d'informations sur le produit d'opérateurs en théorie des champs:

$$\phi_1(x)\phi_2(y) \sim \sum_i C_i(x-y)O_i(y) \quad (4.15)$$

où les  $O$  forment un ensemble complet d'opérateurs. En effet, l'analyse dimensionnelle ainsi que les contraintes supplémentaires imposées par l'invariance conforme indiquent que le membre de droite peut s'écrire uniquement en termes des autres opérateurs primaires de la théorie et de ses descendants [180]:

$$\begin{aligned} \phi_n(z, \bar{z})\phi_m(0) &\sim \sum_P \sum_{\{k\}, \{\bar{k}\}} C_{nm}^P \beta_{nm}^{p; \{k\}} \beta_{nm}^{p; \{\bar{k}\}} \\ &\times z^{\Delta_p - \Delta_n - \Delta_m + \sum \{k\}} \bar{z}^{\bar{\Delta}_p - \bar{\Delta}_n - \bar{\Delta}_m + \sum \{\bar{k}\}} \phi_p^{\{k\}, \{\bar{k}\}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

De plus, l'algèbre est associative, ce qui permet de calculer, par exemple, une fonction de corrélation à quatre points en groupant les opérateurs de deux façons différentes. L'associativité est une contrainte très forte de l'algèbre et impose des relations parmi les coefficients  $C$  de l'équation (4.16).

On va maintenant étudier plus en détail les représentations de l'algèbre de Virasoro. Je présenterai ici uniquement les résultats qui seront de grande importance pour la suite et renvoyer le lecteur à des références plus détaillées (voir par exemple [188, 189]). En général, les représentations de l'algèbre de Virasoro sont irréductibles, c'est à dire que les opérateurs d'une couche donnée du module de Verma associée au champ primaire  $\Phi_i$  sont tous indépendants. Cependant, en étudiant les dégénérescences du module de Verma, on peut montrer qu'il existe, pour certaines valeurs très particulières de la charge centrale  $c$  et de  $\Delta_i$ , des représentations caractérisées par le poids:

$$\Delta_{(n,m)} = \Delta_0 + \frac{1}{4}(\alpha_+ n + \alpha_- m)^2 \quad (4.17)$$

avec

$$\Delta_0 = \frac{1}{24}(c-1); \quad \alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \quad (4.18)$$

qui sont réductibles. Cette analyse a été réalisée dans les références [189, 188]. Dans ce cas, il existe dans cette représentation un vecteur descendant  $|\chi\rangle$  de poids  $\Delta_{(n,m)} + nm$  qui satisfait aux équations des champs primaires (4.10) avec  $\Delta_{(n,m)} + nm$  à la place de  $\Delta_i$ . De ce fait, ce vecteur peut être considéré comme primaire et engendre son propre module de Verma et donc la représentation de poids  $\Delta_{(n,m)}$  n'est pas réductible. On obtient une représentation réductible si l'on impose formellement que le vecteur  $|\chi\rangle$  soit nul. Ce choix est possible du fait que grâce à (4.10), celui-ci est orthogonal à tous les autres vecteurs du module de Verma. A ce vecteur "nul" on peut associer un opérateur que l'on notera tout simplement  $\chi$ . De ce fait, toutes les fonctions de corrélation l'intérieur du module de Verma contenant cet opérateur  $\chi$  seront nulles:

$$\langle \chi \phi_1 \cdots \phi_k \rangle = 0 \quad (4.19)$$

Comme le champ  $\chi$  est un  $nm$ -ième descendant du champs primaire  $\phi_{n,m}$ , et que toute fonction de corrélation contenant un descendant, disons  $\phi_{n,m}^{(-k_1, \dots, -k_N)}(z)$ , peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n,m}^{(-k_1, \dots, -k_N)}(z) \phi_1(z_1) \cdots \phi_s(z_s) \rangle = \\ \hat{L}_{-k_N}(z, z_i) \cdots \hat{L}_{-k_1}(z, z_i) \langle \phi_{nm}(z) \phi_1(z_1) \cdots \phi_s(z_s) \rangle \end{aligned} \quad (4.20)$$

où les opérateurs différentiels  $\hat{L}_{-k}$  sont donnés par

$$\hat{L}_{-k} = \sum_{i=1}^s \left[ \frac{(1-k)\Delta_i}{(z-z_i)^k} - \frac{1}{(z-z_i)^{k-1}} \frac{\partial}{\partial z_i} \right] \quad (4.21)$$

la condition (4.19) nous indique alors que la fonction de corrélation:

$$\langle \phi_{nm}(z) \phi_1(z_1) \cdots \phi_s(z_s) \rangle$$

satisfait à une équation différentielle d'ordre  $nm$ .

### 4.2.2 Modèles minimaux

On va maintenant étudier plus en détail l'équation (4.17). Si la valeur de la charge centrale est telle que l'on a:

$$\alpha_-/\alpha_+ = p/q \quad (4.22)$$

avec  $p$  et  $q$  entiers positifs, chaque représentation dégénérée a non seulement un vecteur nul mais une infinité de vecteurs nuls. On a donc un nombre *fini* d'opérateurs primaires. De plus, les familles d'opérateurs avec  $0 < n < p$  et  $0 < m < q$  forment une sous-algèbre, *fermée* par rapport aux autres opérateurs; en particulier, le produit (4.16) entre des opérateurs de cette sous algèbre ne donnera que des opérateurs (primaires et descendants) de cette même sous-algèbre finie. Ceci aura des conséquences primordiales pour faire le lien avec la physique statistique. De plus, d'un point de vue pratique, on pourra calculer explicitement le produit d'opérateurs ainsi que toutes les fonctions de corrélation contenant ces opérateurs. Les valeurs de la charge centrale pour lesquelles on aura ces modèles minimaux sont données par (4.22):

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \quad (4.23)$$

En général, les théories minimales décrites par (4.23) *ne sont pas* unitaires; elles contiennent des états, primaires ou descendants dont la norme est négative. Contrairement aux théories de champs quantiques où l'unitarité est de grande importance, elle ne constitue pas une contrainte réelle en mécanique statistique. Nous pouvons mentionner, par exemple, le modèle  $O(n)$  dans la limite  $n \rightarrow 0$  qui décrit le comportement critique des polymères ou la singularité de Yang-Lee du modèle d'Ising (voir [182] par exemple). Cependant, les systèmes que l'on va étudier par la suite sont unitaires.

Parmi les modèles minimaux dans (4.23), seuls ceux qui correspondent à une charge centrale donnée par  $q = p + 1$  où

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}, \quad (4.24)$$

seront unitaires avec  $p \geq 2$  [190]. On parle alors de modèles minimaux unitaires ou de la série minimale unitaire. Il y aura donc  $p \times (p - 1)$  opérateurs primaires de dimension conforme:

$$\Delta_{n,m} = \frac{(pn - (p+1)m)^2 - 1}{4p(p+1)} \quad (4.25)$$

qui formeront la sous-algèbre ou grille conforme.

### 4.2.3 Application à la physique statistique

Les différents modèles des séries décrites ci-dessus correspondent à des classes d'universalité de systèmes bidimensionnels. En effet, des modèles qui à l'échelle du réseau semblent être très différents, peuvent donner dans la limite continue la même théorie conforme. S'il existe un nombre fini d'opérateurs pertinents pour ces systèmes, ceux-ci doivent figurer dans la grille conforme de la théorie correspondante. De ce fait, un même modèle minimal peut représenter différents systèmes statistiques dans la limite continue où éventuellement l'interprétation des opérateurs de la grille conforme change en fonction du système initial. Pour associer à chacun de ces opérateurs leur correspondant dans cette grille, il faut donc connaître la dimension physique que donne le calcul direct dans chacun des systèmes (si possible). La théorie conforme indique quelles sont les propriétés générales de la classe d'universalité correspondant au système initial.

Par exemple, pour un modèle de type magnétique la correspondance entre opérateurs peut être établie de la façon suivante : si les quantités physiques sont reliées à la température réduite  $\tau = (T - T_c)/T_c$  de la manière standard :  $C(\tau) \sim |\tau|^{-\alpha}$ ,  $M(\tau) \sim |\tau|^\beta$  et  $R(\tau) \sim |\tau|^{-\nu}$  on utilise les relations:

$$\nu = \frac{1}{d - x_\varepsilon} ; \alpha = \frac{d - 2x_\varepsilon}{d - x_\varepsilon} ; \beta = \frac{x_\sigma}{d - x_\varepsilon} \quad (4.26)$$

avec  $C$  la chaleur spécifique,  $M$  la magnétisation,  $R$  la longueur de corrélation et où la dimension physique  $x$  d'un opérateur  $O$  est définie par  $x_O = 2\Delta_O$ .

Le premier modèle non trivial dans la série unitaire minimale correspond au cas  $p = 3$ . Il a été identifié avec le modèle d'Ising [180]. La grille d'opérateurs ainsi que leurs dimensions conformes sont représentées sur la figure 4.1. Dans la grille,  $\sigma$  correspond à

l'opérateur de spin et  $\varepsilon$  à l'opérateur d'énergie. En effet, à partir de la grille, on identifie  $x_\sigma = 1/8$  et  $x_\varepsilon = 1$ . En utilisant (4.26), on trouve  $\nu = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/8$ , qui sont bien les exposants critiques du modèle d'Ising calculés exactement par Onsager. Par la suite, on a identifié avec le cas  $p = 5$  le modèle de Potts  $Z_3$ . Les exposants de ce modèle sont connus grâce à la solution de Baxter du modèle d'hexagones durs [191] qui a la symétrie  $Z_3$  et est supposé être dans la même classe d'universalité que le modèle de Potts. Il existe

1/2	0
1/16	1/16
0	1/2

 $\longrightarrow$ 

$\varepsilon$	I
$\sigma$	$\sigma$
I	$\varepsilon$

FIG. 4.1 - *Tableau conforme du modèle d'Ising*

dans le cas  $p = 5$ , un sous-ensemble fermé d'opérateurs qui correspond justement aux champs physiques du modèle de Potts à 3 états. Le tableau d'opérateurs correspondant est donné par la figure (Fig. 4.2) [192, 193]:

3	7/5	2/5	0
2/3	1/15	1/15	3
0	2/5	7/5	3

 $\longrightarrow$ 

Y	X	$\varepsilon$	I
Z	$\sigma$	$\sigma$	Z
I	$\varepsilon$	X	Y

FIG. 4.2 - *Tableau conforme du modèle de Potts à 3 états*

En plus des opérateurs de spin et d'énergie  $(\sigma, \varepsilon)$ , on trouve dans le tableau 4.2 trois opérateurs non locaux  $X, Y, Z$  de type parafermioniques que l'on peut mieux mettre en évidence dans l'algèbre  $W_3$ . Les cases vides du tableau correspondent à d'autres opérateurs qui s'interprètent dans le cadre de modèles RSOS. Ce sont essentiellement ces deux modèles que je vais considérer dans ce chapitre et les deux suivants. Le modèle de Potts à  $q$  états peut être défini pour différentes valeurs de  $q$  et même pour des valeurs continues.

Pour  $q \leq 4$ , les transitions sont du deuxième ordre et les exposants critiques dans ce cas ont été obtenus dans la représentation du gaz de Coulomb [26]. Ces modèles correspondent à des théories avec une charge centrale  $c \leq 1$ . Dans cette série de modèles, l'opérateur d'énergie est toujours dans la position (1, 2) de la grille conforme [194, 195]. La série unitaire minimale avec  $p = 4, 6, 8, \dots$  a été identifiée avec des modèles tri-critiques [26]. Dans ce cas, la position de l'opérateur d'énergie dans la grille conforme est (2, 1) [190]. Les deux premiers de ces modèles correspondent respectivement au modèle d'Ising et au modèle de Potts  $Z_3$ , tous deux tri-critiques. Plusieurs modèles de la série minimale ont été identifiés aussi à des modèles  $O(n)$  avec  $n \leq 2$  [26]. Le lien entre théorie conforme et modèles statistiques est bien détaillé dans [196].

L'algèbre de Virasoro décrite par (4.4) peut naturellement être étendue. Une solution consiste à rajouter des symétries supplémentaires dans l'algèbre telle que la supersymétrie ou des extensions, donnant lieu à la théorie superconforme [197], ou d'autres théories plus compliquées [198, 199]. D'autres solutions reposent sur des extensions bosoniques des symétries conformes basées sur des algèbres de Kac-Moody [200] ou sur des algèbres  $W$  [201]. Certaines de ces extensions sont très détaillées dans [181].

### 4.3 Méthode du gaz de coulomb

De nombreux modèles en physique statistique peuvent être reliés à des gaz de Coulomb à deux dimensions. On va voir dans cette section que chaque modèle minimal peut être représenté comme un gaz de Coulomb auquel on impose des contraintes à l'infini. Cette représentation est d'un grand intérêt pratique car elle permet *a priori* de calculer toutes les fonctions de corrélation des modèles minimaux. Elle a été développée dans les remarquables papiers de Fateev et Dotsenko [194, 195] (voir aussi [202] pour une étude très détaillée).

Le cas le plus simple correspond à la théorie scalaire libre, dont l'action est:

$$A[\phi] = \int d^2z (\partial_z \phi \partial_{\bar{z}} \phi) \quad (4.27)$$

Le tenseur d'énergie impulsion (en prenant directement l'ordre normal) est donné par:

$$T_{zz} = -\frac{1}{4} : \partial_z \phi \partial_z \phi : \quad (4.28)$$

Les fonctions de corrélation d'opérateurs locaux  $O_i$  sont tout simplement données par:

$$\langle O_1 \cdots O_n \rangle = \frac{\int D\phi e^{-A[\phi]} O_1 \cdots O_n}{\int D\phi e^{-A[\phi]}} \quad (4.29)$$

et la fonction à deux points du champ  $\phi$  est de la forme:

$$\langle \phi(z, \bar{z}) \phi(z', \bar{z}') \rangle = 4 \ln \frac{R}{|z - z'|} \quad (4.30)$$

où  $R$  est un cut-off infrarouge correspondant par exemple à la taille du système [203].

A partir du champs libre  $\phi$ , on définit l'opérateur de vertex par:

$$V_\alpha(z) =: e^{i\alpha\phi(z)} : , \quad (4.31)$$

où  $\alpha$  est un paramètre qui va définir la dimension conforme  $\Delta_\alpha$  de l'opérateur de vertex  $V_\alpha(z)$ . On a introduit un ordre normal usuel qui supprime également l'apparition de la dépendance dans un régulateur courte distance. Avec (4.30) on peut calculer facilement le produit d'opérateurs [203]:

$$T(z)V_\alpha(z') = \frac{\Delta_\alpha}{(z-z')^2}V_\alpha(z') + \frac{1}{(z-z')} \partial_{z'} V_\alpha(z') + \dots \quad (4.32)$$

avec  $\Delta_\alpha = \alpha^2$ . Par conséquent, (4.31) est un opérateur primaire (on en a donc une infinité!). On peut aussi calculer, en utilisant l'action du champ libre, la fonction à deux points:

$$\langle V_\alpha(z)V_{\alpha'}(z') \rangle \sim \frac{\delta_{0,\alpha+\alpha'}}{(z-z')^{2\alpha^2}} \quad (4.33)$$

Dans ce modèle simple, on peut calculer toutes les fonctions de corrélation de la forme:

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle \sim \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{4\alpha_i \alpha_j} \quad (4.34)$$

où la fonction de corrélation sera non nulle uniquement si  $\sum \alpha_i = 0$ . On voit alors apparaître tout l'intérêt pratique de cette représentation, les fonctions de corrélation entre opérateurs de vertex étant relativement triviales.

Finalement, on peut aussi obtenir très simplement la fonction à deux points pour le tenseur d'énergie impulsion:

$$\langle T(z)T(z') \rangle = \frac{c/2}{(z-z')^4} = \frac{1/2}{(z-z')^4} \quad (4.35)$$

et on voit que le modèle de théorie de champs le plus simple dont on dispose (4.27) correspond à une théorie conforme de charge centrale  $c = 1$ . Il existe de nombreux modèles avec une charge centrale  $c = 1$  (XY, Ashkin-Teller, le modèle de Potts à 4 états,...). Les théories de charge centrale  $c = 1$  ont été classifiées (classification ADE) [204].

Le fait d'avoir une infinité de champs "primaires" (et en plus autant de modèles avec une même charge centrale) rend difficile (voir impossible) la formulation d'une théorie perturbative à partir de ces modèles .

C'est pourquoi, je vais m'intéresser à des modèles minimaux qui correspondent aux points critiques de modèles statistiques  $c \leq 1$ . Ces modèles ont un nombre fini d'opérateurs primaires et en plus forment une sous-algèbre fermée.



Afin de pouvoir représenter ces modèles avec un champ scalaire, on déforme le tenseur d'énergie impulsion de la façon suivante:

$$T_{zz} = -\frac{1}{4} : \partial_z \phi \partial_z \phi : + i\alpha_0 \partial_z^2 \phi \quad (4.36)$$

On peut par exemple obtenir (4.36) en imposant des conditions de bord non triviales sur le champ  $\phi$  [186]. Dans le plan complexe, ceci revient à introduire une singularité de courbure ou “charge” à l’infini [202]. Comme on a introduit un terme de bord, la fonction à deux points (4.30) reste la même. On peut donc calculer la fonction de corrélation (4.35) pour la nouvelle forme du tenseur énergie impulsion, le résultat sera de la même forme mais la valeur de la charge centrale sera maintenant:

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \quad (4.37)$$

De même, les fonctions de corrélation de la forme:

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_{\alpha_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle$$

seront maintenant non nulles si les poids des opérateurs satisfont:

$$\sum \alpha_i = 2\alpha_0, \quad (4.38)$$

relation traduisant simplement la conservation de la charge.

On voit donc que la charge à l’infini introduite, doit être compensée par celles des opérateurs de vertex dans les fonctions de corrélation. En particulier, la fonction à deux points sera maintenant non nulle uniquement entre les opérateurs conjugués  $V_\alpha$  et  $V_{2\alpha_0-\alpha}$ . En effet, en calculant le produit d’opérateurs de ces champs avec (4.36) on obtient:

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0-\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 \quad (4.39)$$

Cela explique la raison du dédoublement des opérateurs primaires dans la grille conforme pour  $c \leq 1$  (voir Figures 4.1,4.2). En effet, on voit que les opérateurs de vertex  $V_\alpha$  et  $V_{2\alpha_0-\alpha}$  qui ont des positions différentes dans l’espace des charges correspondent au même opérateur primaire. Bien entendu, ceci est un fait général que l’on voit très clairement dans cette représentation et n’est pas seulement intrinsèque à la série minimale unitaire.

## 4.4 Fonctions de corrélation

Je vais brièvement exposer dans cette section les méthodes de calcul des fonctions de corrélation dans les modèles minimaux. Dans les deux prochains chapitres, je vais utiliser une analyse perturbative, où le calcul de fonctions de corrélation à plusieurs points s’avère indispensable pour obtenir les exposants critiques du système au nouveau point fixe. Ces

calculs sont en général assez lourds et seront détaillés dans le chapitre 6. On pourra trouver le détail des calculs dans le contexte de la méthode du gaz de Coulomb dans les références originales [194, 195, 202].

L'équation (4.39) indique que les opérateurs de vertex  $V_{\pm} = \exp(i\alpha_{\pm}\phi)$  avec  $\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}$  ont un poids conforme  $\Delta_{\pm} = 1$ . Si l'on définit alors les opérateurs d'écran:

$$J_{\pm} = \oint_C dz V_{\pm}(z) \quad (4.40)$$

avec  $C$  un contour fermé, on obtient deux opérateurs invariants par rapport à toutes les transformations conformes. De plus, si à l'action libre (4.27) on rajoute les termes suivants:

$$A[\phi] \rightarrow A[\phi] + \int d^2z \left( \lambda_+ e^{i\alpha_+\phi(z,\bar{z})} + \lambda_- e^{i\alpha_-\phi(z,\bar{z})} \right) \quad (4.41)$$

on maintient l'invariance conforme. Comme notre seul critère pour la représentation d'une théorie minimale est de préserver l'invariance conforme, on doit considérer toutes les généralisations possibles de l'action pour le champ  $\phi$ . Dans le calcul des fonctions de corrélation, on développe alors en puissances de  $\lambda_+ J_+$  et  $\lambda_- J_-$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(x_1) \cdots \Phi_N(x_N) \rangle &\propto \\ &\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle V_{\alpha_1}(x_1) \cdots V_{\alpha_N}(x_N) (\lambda_+ J_+)^l (\lambda_- J_-)^k \rangle \end{aligned}$$

et la condition de compensation de charges (4.38) donne un résultat non nul uniquement pour des puissances particulières de  $J_+$  et  $J_-$ . En fait, l'insertion d'opérateurs d'écran dans les fonctions de corrélation n'altère pas ses propriétés sous le groupe de transformations conformes du fait de la loi de transformation triviale de ces opérateurs d'écran. D'autre part, la relation (4.39) nous indique que dans le calcul d'une fonction à quatre points de l'opérateur  $V_{\alpha}$ , on peut utiliser aussi l'opérateur  $V_{2\alpha_0-\alpha}$  car tous deux représentent le même opérateur primaire. De ce fait, dans la fonction à quatre points d'un opérateur primaire, on peut utiliser les deux opérateurs et construire ainsi trois types de fonctions à quatre points à l'aide d'opérateurs de vertex: quatre opérateurs identiques, trois identiques et un conjugué ou finalement deux et deux (voir [202]). Le seul résultat non nul (et ceci du fait de la compensation de charge à l'aide d'écrans) sera le deuxième cas, où l'on a alors:

$$\langle V_{\alpha} V_{\alpha} V_{\alpha} V_{2\alpha_0-\alpha} \oint_{C_1} V_+ \cdots \oint_{C_m} V_+ \oint_{S_1} V_- \cdots \oint_{S_n} V_- \rangle \quad (4.42)$$

La condition (4.38) donne une quantification dans la valeur de  $\alpha$ :

$$2\alpha_0 + 2\alpha + n\alpha_- + m\alpha_+ = 2\alpha_0 \quad (4.43)$$

et on voit que si l'on décale les valeurs de  $n$  et  $m$  de 1 on obtient:

$$\alpha = \alpha_{n,m} = \frac{1-n}{2}\alpha_- + \frac{1-m}{2}\alpha_+ \quad (4.44)$$

ce qui, à l'aide de (4.39) donne les poids conformes des opérateurs du tableau de Kac:

$$\Delta_{n,m} = \frac{(\alpha_- n + \alpha_+ m)^2 + (\alpha_- + \alpha_+)^2}{4} \quad (4.45)$$

De façon plus générale, la fonction à quatre points (dont trois de ces points peuvent être fixés par des transformations conformes du plan) est donnée par:

$$\langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z, \bar{z})V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty) \oint_{C_1} V_+ \cdots \oint_{C_m} V_+ \oint_{S_1} V_- \cdots \oint_{S_n} V_- \rangle \quad (4.46)$$

sera non nulle s'il existe des nombres entiers  $n$  et  $m$  d'opérateurs d'écrans pour lesquels la condition (4.38) est satisfaite. Il est clair que chaque insertion d'un opérateur d'écran introduit une variable supplémentaire sur laquelle on doit intégrer. On obtient ainsi une représentation intégrale pour les fonctions de corrélations:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(0)\Phi_2(z, \bar{z})\Phi_3(1)\Phi_4(\infty) \rangle &\propto |z|^{4\alpha_1\alpha_2}|z-1|^{4\alpha_2\alpha_3} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \int d^2u_i \int d^2v_j \\ &\prod_{i=1}^n |u_i|^{4\alpha-\alpha_1} |u_i-1|^{4\alpha-\alpha_3} |u_i-z|^{4\alpha-\alpha_2} \prod_{j=1}^m |v_j|^{4\alpha+\alpha_1} |v_j-1|^{4\alpha+\alpha_3} |v_j-z|^{4\alpha+\alpha_2} \\ &\prod_{i < i'} |u_i - u_{i'}|^{4\alpha^2} \prod_{j < j'} |v_j - v_{j'}|^{4\alpha^2} \prod_{i,j} |u_i - v_j|^{-4} \end{aligned} \quad (4.47)$$

On trouvera les détails des techniques de calcul des intégrales du même type que (4.47) dans [202]). Il existe deux façons de faire le calcul.

Dans la première approche, on considère directement la partie holomorphe des fonctions de corrélation ou blocs conformes. On étudie les transformations de monodromie de ces fonctions analytiques et l'on construit avec les blocs conformes des formes quadratiques invariantes par rapport à des transformations de monodromie. Ces formes invariantes correspondent aux fonctions de corrélation physiques.

La deuxième méthode consiste à faire des changements de variables dans le plan complexe et à déformer les contours d'intégration afin de réduire l'intégrale totale à une somme de produits d'intégrales holomorphes et anti-holomorphes; ces intégrales d'une seule variable seront à leur tour données par des fonctions hypergéométriques. C'est cette dernière approche que j'utiliserai pour les calculs des fonction de corrélation.

## 4.5 Modèles minimaux couplés

### 4.5.1 Présentation du modèle et généralités

Je vais maintenant rentrer dans le vif du sujet et considérer le cas plus général qui m'a préoccupé à savoir  $M$  modèles d'Ising couplés à  $N$  modèles de Potts à  $q$ -états avec  $q = 3$

par leur densité d'énergie comme expliqué dans la section 4.1.

L'Hamiltonien s'écrit:

$$H = \sum_{a=1}^M H_1^a + \sum_{b=M+1}^{M+N} H_2^b - \sum_{c,d} g_{cd} \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z) , \quad (4.48)$$

où  $c, d \in [1, \dots, M+N]$ .  $H_1^a, H_2^b$  représentent respectivement les modèles d'Ising purs et de Potts purs à leurs températures critiques.  $\varepsilon^c$  représente l'opérateur d'énergie du  $c^{\text{ième}}$  modèle tandis que  $g_{cd}$  correspond à une matrice  $(M+N) \times (M+N)$  de constantes de couplage.

La fonction de partition de ce système est définie par:

$$Z = \prod_{a=1}^M Tr_{a,s_{i,a}} \prod_{b=M+1}^{M+N} Tr_{b,s_{i,b}} e^{-\sum_{a=1}^M S_{0,a} - \sum_{b=M+1}^{M+N} S_{0,b} + \int \sum_{c \neq d} g_{cd} \varepsilon_c(z) \varepsilon_d(z) d^2 z} . \quad (4.49)$$

Dans nos notations  $a$  et  $b$  correspondent respectivement aux modèles d'Ising et de Potts. Dans l'équation (4.49),  $s_{i,c}$  est l'opérateur de spin du  $c^{\text{ième}}$  modèle. Si l'on suppose que l'on veuille faire le calcul d'une fonction de corrélation du type  $\langle O(0)O(R) \rangle$ , où  $O$  est un opérateur local (en ce qui me concerne,  $O$  se réduit à l'opérateur de spin ou d'énergie), on utilise le développement perturbatif suivant:

$$\langle O(0)O(R) \rangle = \langle O(0)O(R) \rangle_0 + \langle S_I O(0)O(R) \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle S_I^2 O(0)O(R) \rangle_0 + \dots$$

où  $\langle \rangle_0$  correspond au vide de la théorie non perturbée.

Le terme d'interaction que l'on va traiter en perturbation a pour action:

$$S_I = \int H_I(z) d^2 z = \int \sum_{c \neq d} g_{cd} \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z) d^2 z , \quad (4.50)$$

Le modèle de Potts à  $q$  états est formulé comme une déviation continue du modèle d'Ising. Cela signifie que l'on ne considère que les opérateurs de spin et d'énergie. Ceci constitue une approximation car il n'existe pas de modèle minimal associé au modèle de Potts à  $q$  états avec  $q$  paramètre continue compris entre 2 et 4. Ce type de description s'est néanmoins avérée très performant pour l'étude du modèle de Potts désordonné [205, 206]. Par simple soucis de validation de la méthode, on compare dans la figure 4.3 l'exposant magnétique du modèle de Potts à  $q$  états désordonné calculé par cette approche aux résultats numériques (obtenus par simulation Monte Carlo) de Cardy et Jacobsen<sup>1</sup> [207, 208]. Les résultats analytiques ont été tracés en pointillé, tandis que les résultats numériques correspondent aux points noirs. Pour  $q \leq 3$ , l'accord est excellent. A la limite de l'approche analytique  $q = 4$ , l'écart est encore inférieur à 5%. Ceci justifie *a posteriori* l'approximation consistant à décrire le modèle de Potts comme déformation continue du modèle d'Ising.

---

1. Je tiens à remercier J.L. Jacobsen pour m'avoir envoyer cette figure.

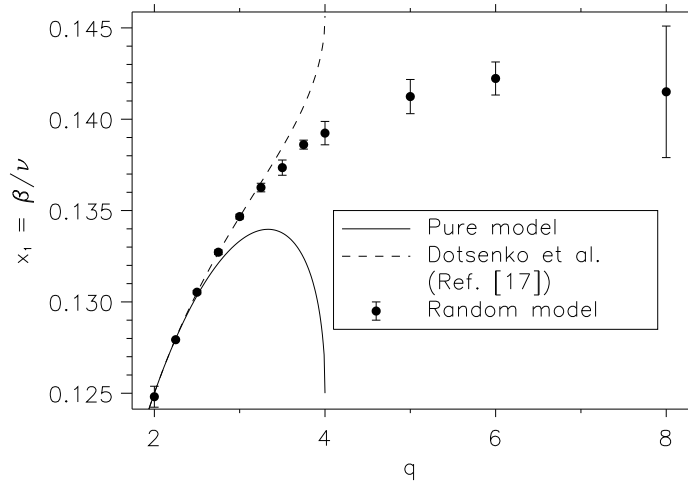


FIG. 4.3 - Comparaison de l'exposant magnétique du modèle de Potts désordonné calculé numériquement et analytiquement par l'approche décrite ci-dessus

Dans la représentation du gaz de Coulomb, la charge centrale est caractérisée par le paramètre  $\alpha_+^2 = \frac{2p}{2p-1}$ . On utilisera la paramétrisation suivante  $\alpha_+^2 = \frac{4}{3} + \epsilon$  avec  $\epsilon = 0$  pour le modèle d'Ising ( $c = \frac{1}{2}$ ),  $\epsilon = -\frac{2}{15}$  pour le modèle de Potts à 3 états ( $c = \frac{4}{5}$ ) et finalement  $\epsilon = -\frac{1}{3}$  pour le modèle de Potts à 4 états ( $c = 1$ ).

L'opérateur de spin peut être représenté par l'opérateur de vertex  $V_{p,p-1}$  tandis que l'opérateur d'énergie correspond à  $V_{1,2}$  d'après les tableaux 4.1,4.2.

Lorsque l'on a qu'une seule constante de couplage  $g_0$ , la renormalisation de cette dernière est donnée par:

$$g_0 \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2 z + \frac{1}{2} \left( g_0 \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2 z \right)^2 + \dots = g \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2 z, \quad (4.51)$$

avec  $g = g_0 + A_2 g_0^2 + \dots$ , et  $A_2$  se calcule en effectuant la contraction d'opérateurs suivante:

$$\frac{1}{2} \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2 z \int \varepsilon_c(z) \varepsilon_d(z) d^2 z = A_2 \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2 z \quad (4.52)$$

Par exemple, dans ce cas:

$$\begin{aligned} A_2(r, \epsilon) &\propto \int_{|y-x|<r} \langle \varepsilon(x) \varepsilon(y) \rangle_0 d^2 y \propto 2\pi \int_{|y|<r} \left( \frac{dy}{y^{1+3\epsilon}} \right) \\ &\propto -2\pi \left( \frac{r^{-3\epsilon}}{3\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

où l'on a utilisé que la dimension de l'opérateur d'énergie vaut  $2\Delta_{12} = 1 + 3\epsilon$ . Dans l'intégrale, on a introduit un cut-off infrarouge  $r$  qui va également servir à définir la

variation des constantes de couplage avec l'échelle à laquelle on se place (et donc à calculer les fonctions  $\beta$ ). Le coefficient de proportionnalité dépend du facteur de symétrie du graphe.

### 4.5.2 Flot de renormalisation

Cette procédure de renormalisation se généralise aisément lorsque l'on a plusieurs constantes de couplage. Dans la suite, on va simplement supposer que  $g_{cd} = g_1$  pour  $c, d \in [1, M]$ ,  $g_{cd} = g_2$  pour  $c, d \in [M + 1, M + N]$  et enfin  $g_{cd} = g_{12}$  pour  $c \in [1..M], d \in [M + 1, M + N]$  ou inversement. Il reste donc trois constantes de couplage,  $g_1$  associée aux couplages Ising-Ising,  $g_2$  associée aux couplages Potts-Potts, et enfin  $g_{12}$  associée aux couplage Ising-Potts. On obtient alors les équations de renormalisation de ces trois constantes de couplage à deux boucles (pour les détails de calcul, je renvoie au chapitre 6):

$$\begin{aligned}
\beta_1 = \frac{dg_1}{d(\ln r)} &= 4\pi(M-2)g_1^2 + 4\pi N g_{12}^2 - 16\pi^2(M-2)g_1^3 - 16\pi^2 N g_1 g_{12}^2 + O(g^4), \\
\beta_2 = \frac{dg_2}{d(\ln r)} &= -3\epsilon g_2 + 4\pi(N-2)g_2^2 + 4\pi M g_{12}^2 - 16\pi^2(N-2)g_2^3 \\
&\quad - 16\pi^2 M g_2 g_{12}^2 + O(g^4), \\
\beta_{12} = \frac{dg_{12}}{d(\ln r)} &= -3\frac{\epsilon}{2}g_{12} + 4\pi(M-1)g_1 g_{12} + 4\pi(N-1)g_2 g_{12} - 8\pi^2(M+N-2)g_{12}^3 \\
&\quad - 8\pi^2(M-1)g_1^2 g_{12} - 8\pi^2(N-1)g_2^2 g_{12} + O(g^4).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Dans ce système d'équations, les limites  $\epsilon \rightarrow -\frac{2}{15}$  et  $\epsilon \rightarrow -\frac{1}{3}$  correspondent à des modèles d'Ising couplés à des modèles de Potts à 3 et 4 états. Lorsque  $g_{12} = 0$ , les modèles d'Ising et de Potts sont découplés. A partir des fonctions beta, on a accès aux points fixes de la théorie.

- Lorsque  $M > 1$  et  $N \geq 1$ , le seul point fixe non trivial de la théorie correspond à

$$g_1^* = g_{12}^* = 0 \quad g_2^* = \frac{3\epsilon}{4\pi(N-2)} + \frac{9\epsilon^2}{16\pi^2(N-2)^2} \quad \text{si } N > 2$$

et est instable vis à vis de  $g_{12}$ . Le système sera alors conduit dans une situation de couplage fort dont on peut penser qu'elle donnera lieu à une transition du premier ordre. Il n'y a pas de point fixe non trivial pour  $N = 2$ . Dans ce cas, le couplage  $g_2$  est conduit vers une région de couplage fort dont on sait par les modèles intégrables qu'elle correspond à une transition du premier ordre et à une génération de masse [209].

- Lorsque  $M = N = 1$ , le système est également conduit vers une région de couplage fort. Dans l'hypothèse (raisonnable) où cette dernière indique une transition du premier ordre, cela signifie qu'une perturbation de type énergie-énergie autour d'un modèle d'Ising

plus un modèle de Potts critique est très pertinente et conduit le système vers des excitations massives. Je n'ai pas trouvé (perturbativement) un comportement infrarouge non trivial pour ce système. Ce cas de figure est intéressant car il correspond pour  $\epsilon = -\frac{1}{3}$  à un modèle d'Ising couplé à un modèle de Potts à 4 états qui est comme le modèle XY une théorie de charge centrale  $c = 1$ . Cela semble indiquer que le comportement critique non trivial du modèle Ising-XY à symétrie  $Z(2) \times U(1)$  n'est pas présent dans un modèle à symétrie  $Z(2) \times Z(4)$ . Ceci reste à prendre avec précaution car notre analyse est d'une part perturbative et d'autre part le modèle de Potts à 4 états est le cas limite de notre description. Néanmoins, Thijssen et Knops [124] ont fait des simulations du modèle FFXY en se restreignant à des valeurs discrètes  $\frac{2\pi k}{p}$  du spin XY et ont trouvé que les deux transitions (Ising et XY) étaient toujours découplées pour  $p = 8$ . Ce résultat semble aller dans le même sens que le notre, à savoir qu'il n'y a pas de comportement infrarouge non trivial si l'on décrit l'orientation du spin XY par quelques valeurs discrètes. Il serait vraiment très intéressant d'étudier numériquement le modèle Ising-XY avec des valeurs discrètes du spin XY pour savoir si le comportement critique non trivial demeure pour des problèmes à symétrie  $Z(2) \times Z(p)$  avec  $p$  grand<sup>2</sup>. Existe-il une valeur critique  $p_c$  à partir de laquelle le comportement change?

- Je vais considérer maintenant le cas  $M = 1, N > 1$ . On trouve six points fixes:

$$g_1^* = g_2^* = g_{12}^* = 0 \quad (4.55)$$

$$g_1^* = g_{12}^* = 0; \quad g_2^* = \frac{3\epsilon}{4\pi(N-2)} + \frac{9\epsilon^2}{16\pi^2(N-2)^2} \quad \text{si } N > 2 \quad (4.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1^* = \tau_1 \frac{-3\epsilon N}{8\pi(N-1)} - \tau_1 \frac{9\epsilon^2(3N-1)}{128\pi^2(N-1)^2} \\ g_2^* = \frac{3\epsilon}{4\pi(N-1)} + \frac{9(N+1)\epsilon^2}{128\pi^2(N-1)^2} \\ g_{12}^* = \tau_2 \frac{-3\epsilon\sqrt{N}}{8\pi(N-1)} - \tau_2 \frac{9\epsilon^2(3N-1)}{128\pi^2\sqrt{N}(N-1)^2} \end{array} \right. \quad (4.57)$$

avec  $\tau_1, \tau_2 = \pm 1$ . On a maintenant quatre nouveaux points fixes (4.57). Il reste ensuite à étudier la stabilité de chacun de ces points fixes. Pour ce faire, j'exprime le système (4.54) autour des points fixes en posant  $g_i = g_i^* + \delta g_i$  et ne conserve que les termes les plus bas en  $\epsilon$ . Cela donne un système d'équations linéaire du type

$$\delta \dot{g} = A \delta g$$

où, dans le cas présent  $\delta g$  est un vecteur à trois composantes et  $A$  une matrice réelle  $3 \times 3$ . Pour analyser la stabilité des points fixes, il suffit simplement de calculer les valeurs

---

<sup>2</sup>. Un modèle à symétrie  $Z(p)$  qui est la version discrète du spin XY est appelé "clock model" ou modèle de Potts *vectoriel*. Lorsque  $p = 2, 3$ , ce modèle est équivalent au modèle d'Ising ou de Potts à 3 états.

propres de cette matrice  $A$ . De cette manière, on voit ainsi que (4.55) est instable, et que (4.56) est stable dans le plan  $(g_2, g_{12})$  et marginal dans la direction  $g_1$ . Cela correspond au point fixe à  $N$  modèles de Potts couplés [210].

Concernant les quatre autres points fixes (4.57), deux sont instables dans deux directions (lorsque  $\tau_1 = -1$ ) et les deux autres ( $\tau_1 = +1$ ) sont des points fixes “hyperboliques”, c’est à dire stable dans deux directions instable dans une. Ce sont des nouveaux points fixes tri-critiques. Au voisinage de ces deux points, on peut définir un plan localement stable par les deux vecteurs de coordonnées dans l’espace  $(g_1, g_2, g_{12})$ :

$$(1, 0, 0); \left(0, \frac{\tau_2 \sqrt{2n(n-1) + 1 - 1}}{\sqrt{n(n-1)}}, 1\right).$$

J’ai représenté sur la figure 4.4 une projection de l’allure du flot de renormalisation (pour le cas  $N = 3$ ) dans le plan  $(g_{12}, g_2)$  pour une valeur fixée  $g_1 = g_1^*$ .

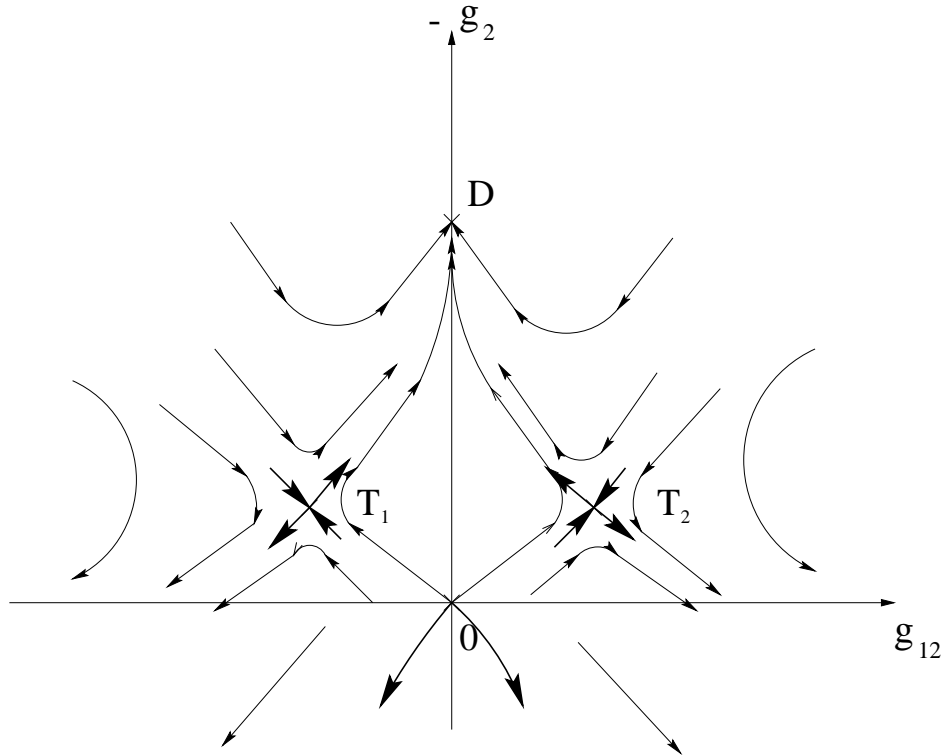


FIG. 4.4 - *Projection du flot de renormalisation dans le plan  $(g_{12}, g_2)$  pour un modèle d’Ising critique couplé à trois modèles de Potts. Les points  $T_1$  et  $T_2$  sont des points tri-critiques susceptibles de donner un régime de cross over à taille finie.*

Le flot est symétrique le long de l’axe  $g_2$ . Si l’on suppose que  $g_2^0 > 0$ , alors le flot de renormalisation est dans ce cas conduit vers une région de couplage fort qui donnera



certainement lieu à une génération de masse comme dans le cas du modèle de Potts à  $N$  couleurs [210]. Par contre si  $g_2^0 < 0$ , et au voisinage de l'origine, le flot est tout d'abord attiré par une des point fixes  $T_i$  selon le signe de  $g_{12}^0$ , avant d'être repoussé vers le point fixe stable  $D$  où les modèles sont découplés. Dans le cas  $N = 2$ , le flot possède une allure légèrement différente dans la mesure où le point fixe  $D$  est repoussé à l'infini. Le flot est alors toujours rejeté vers des régions de couplage fort, sauf bien sûr, lorsque l'on est sur la surface stable autour des points  $T_i$ . Ceci est dû au fait que le modèle de Potts à deux couleurs ne contient que des excitations massives [209].

### 4.5.3 Fonctions de corrélation spin-spin

Dans cette sous-section, je vais caractériser un peu mieux ces points fixes tri-critiques. Dans cette sous-section, je vais donc considérer le cas  $M = 1$ . Pour ce faire, je calcule la renormalisation des exposants critiques associés aux fonctions de corrélation spin-spin. Il faut noter que les opérateurs d'énergie sont mélangés à ces points de part la nature du couplage. La manière usuelle de faire ces calculs est de rajouter un terme de source pour les spins (typiquement un champ magnétique) à l'Hamiltonien de départ (4.48) qui donnera une contribution à l'action du type:

$$h_1^0 \int \sigma_1(z) d^2 z + h_2^0 \int \sum_{a=1}^n \sigma_2(z) d^2 z.$$

On définit ensuite les fonctions multiplicatives  $Z_{\sigma_1}$  pour les opérateurs de spins du modèle d'Ising et  $Z_{\sigma_2}$  pour ceux des modèles de Potts par:

$$h_1 \int \sigma_1(z) d^2 z + h_2 \int \sum_{a=1}^N \sigma_2(z) d^2(z) = h_1^0 Z_{\sigma_1} \int \sigma_1(z) d^2 z + h_2^0 Z_{\sigma_2} \int \sum_{a=1}^n \sigma_2(z) d^2 z . \quad (4.58)$$

Toutes comme les fonctions beta, ces fonctions  $Z_\sigma$  se calculent perturbativement. Le calcul est dans ce cas un peu différent car on mélange des opérateurs de spin et des opérateurs d'énergie. La première contribution non nulle arrive au second ordre compte tenu de l'algèbre d'opérateurs [205]. Les détails des calculs ont été relégués au chapitre 6. On obtient la renormalisation suivante des opérateurs de spin:

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_1(1 + A_2(g_{12}^0)^2 + A_3(g_{12}^0)^2 g_2^0 + \dots) \equiv Z_{\sigma_1} \sigma_1 \quad (4.59)$$

$$\sigma_2 \rightarrow \sigma_2(1 + B_2(g_2^0)^2 + C_2(g_{12}^0)^2 + B_3(g_2^0)^3 + C_3(g_{12}^0)^2 g_2^0 + \dots) \equiv Z_{\sigma_2} \sigma_2 \quad (4.60)$$

avec

$$A_2 = \frac{\pi^2 N}{2} r^{-3\epsilon} \quad (4.61)$$

$$A_3 = -8N(N-1)\pi^3 \frac{r^{-6\epsilon}}{6\epsilon} \quad (4.62)$$

$$B_2 = (N-1)\pi^2 \frac{r^{-6\epsilon}}{2} \left[ 1 + 2 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] \quad (4.63)$$

$$C_2 = \pi^2 \frac{r^{-3\epsilon}}{2} \left[ 1 + 4 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] \quad (4.64)$$

$$B_3 = -12\pi^3(N-1)(N-2) \frac{r^{-9\epsilon}}{9\epsilon} \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] \quad (4.65)$$

$$C_3 = -8\pi^3(N-1) \left( \frac{r^{-6\epsilon}}{6\epsilon} \right) \left[ 1 + 2 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] \quad (4.66)$$

Ces résultats ont été calculés jusqu'au troisième ordre dans les constantes de couplage. En utilisant les équations de renormalisation pour les constantes de couplage  $g_i$  (4.54), on obtient les variations de  $Z_{\sigma_i}$  avec  $r$ :

$$\frac{d \log(Z_{\sigma_1})}{d \log(r)} = -3Ng_{12}^2(r) \frac{\pi^2}{2} \epsilon + 4N(N-1)\pi^3 g_{12}^2(r) g_2(r) \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \log(Z_{\sigma_2})}{d \log(r)} &= -3(N-1)g_2^2 \pi^2 \epsilon [1 + 2\mathcal{R}] - 3g_{12}^2 \frac{\pi^2}{2} \epsilon [1 + 4\mathcal{R}] \\ &\quad + 4(N-1)(N-2)\pi^3 g_2^3(r) + 4(N-1)\pi^3 g_{12}^2(r) g_2(r) \end{aligned} \quad (4.68)$$

où l'on a défini:

$$\mathcal{R} = \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}$$

On dispose maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour calculer les fonctions de corrélation spin-spin ainsi que les corrections aux exposants critiques. Pour cela, on utilise les équations de Callan-Symanzik qui donnent la forme de la fonction de corrélation dans le contexte du groupe de renormalisation. Pour une constante de couplage  $g$ , celle-ci s'écrit:

$$\langle \sigma(0)\sigma(sR) \rangle_{r,g(r)} = e^{2 \int_{g(r)}^{g(sr)} \frac{\gamma_\sigma(g)}{\beta(g)} dg} s^{-2\Delta_\sigma} \langle \sigma(0)\sigma(R) \rangle_{r,g(sr)} \quad (4.69)$$

où on a noté:

$$\frac{d \ln(Z_\sigma)}{d \ln(r)} = \gamma_\sigma(g).$$

Dans ces équations, on utilise  $r$  comme une échelle de cut-off associée à un réseau. De même,  $R$  est une échelle arbitraire qui peut être fixée par exemple à la maille  $r$  du réseau,  $s$  représente alors le coefficient de dilatation et mesure la distance entre les deux spins dans  $\langle \sigma(0)\sigma(sR) \rangle$ . Du fait que la fonction  $\langle \sigma(0)\sigma(R) \rangle_{r,g(sr)}$  est un objet local, on suppose la dépendance en  $s$  de ce terme négligeable par rapport aux deux autres termes multiplicatifs

et l'assimiler à une constante. On prendra par la suite  $r = 1$ . Pour  $s$  grand par rapport à 1, l'intégrale dans l'exponentielle (4.69) va être dominée par le voisinage du point critique  $g \sim g^*$  où la fonction beta s'annule. Je m'intéresse aux points tri-critiques  $T_1$  et  $T_2$  et cherche à calculer les corrections aux exposants critiques près de ces points fixes. Lorsque  $g \sim g^*$ , on a la propriété:

$$\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\sigma(g)}{\beta(g)} dg \sim \gamma_s(g^*) \log(s) . \quad (4.70)$$

On obtient alors le comportement à grande distance de la fonction de corrélation:

$$\langle \sigma(0)\sigma(s) \rangle_{g_0} \sim s^{-(2\Delta_\sigma - 2\gamma_\sigma(g^*))} \quad (4.71)$$

Ce raisonnement reste valable lorsque l'espace des constantes de couplage est plus grand. J'ai ainsi calculé les corrections aux exposants critiques au voisinage des points fixes  $T_i$  en utilisant l'expression (4.57):

$$\gamma_{\sigma_1}(T_i) = -3N \frac{\pi^2}{2} \epsilon (g_{12}^*)^2 + 4N(N-1)\pi^3 (g_{12}^*)^2 g_2^* = 0 + O(\epsilon^4) \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\sigma_2}(T_i) &= -3(N-1)(g_2^*)^2 \pi^2 \epsilon [1 + 2\mathcal{R}] - 3(g_{12}^*)^2 \frac{\pi^2}{2} \epsilon [1 + 4\mathcal{R}] \\ &\quad + 4(N-1)(N-2)\pi^3 (g_2^*)^3 + 4(N-1)\pi^3 (g_{12}^*)^2 g_2^* \\ &= \frac{-27N\epsilon^3}{128(N-1)^2} - \frac{27(2N-1)\epsilon^3}{32(N-1)^2} \mathcal{R} + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Je rappelle que  $\epsilon$  représente l'écart par rapport au modèle d'Ising et  $\epsilon = -\frac{2}{15}$  pour le modèle de Potts à 3 états et  $\epsilon = -\frac{1}{3}$  pour le modèle de Potts à 4 états. J'obtiens alors un résultat plutôt curieux, à savoir qu'il n'y a pas de renormalisation de l'exposant critique du spin d'Ising au troisième ordre en  $\epsilon$ . Il est difficile de savoir si cela relève du pur hasard. Néanmoins, la correction  $\gamma_{\sigma_2}(T_i)$  est non nulle et surtout différente de celle que l'on obtiendrait au voisinage du point fixe infrarouge du modèle de Potts à  $N$  couleurs. Ceci prouve que ces point fixes  $T_i$  sont nouveaux et non triviaux.

## 4.6 Résumé et conclusion

Dans la section précédente, j'ai montré l'existence de nouveaux points fixes tri-critiques susceptibles d'influencer le comportement infrarouge de la théorie (voir Fig. 4.4). Supposons que l'on fasse des simulations numériques d'un modèle présentant ce type de flot, le fait d'être à taille finie impose que l'on soit dans un régime de "cross-over" entre les points fixes tri-critiques et le point fixe de découplage des modèles. Dans ce cas, les résultats risquent de dépendre fortement de la taille ( $y$  compris les exposants critiques) et rendre l'extrapolation du comportement critique difficile.

De plus, si l'on applique le théorème C de Zamolodchikov [139, 140] (la charge centrale ne peut que décroître le long d'une ligne de flot) au diagramme de flot présenté sur la figure 4.4, on peut en déduire directement que la charge centrale vérifie

$$c(T_i) \geq c(D).$$

J'ai mentionné au chapitre 2 un comportement similaire pour le modèle Ising-XY.

Il serait cependant hasardeux de tirer des conséquences hâtives quant à la physique du modèle Ising-XY. Il est néanmoins important de souligner que l'existence d'un régime de "cross-over" pourrait expliquer la forte dépendance des résultats avec la taille du réseau (notamment la charge centrale) ainsi que les déviations significatives des exposants critiques par rapport aux modèles purs comme je l'ai argué au chapitre 2. Le point commun entre les deux systèmes est le couplage d'un modèle d'Ising avec un grand nombre de degrés de liberté (le modèle XY comme limite d'un modèle à symétrie  $Z_N$  avec  $N \rightarrow \infty$  dans le premier cas et plusieurs modèles de Potts dans le second cas). La comparaison, si comparaison il y a, s'arrête néanmoins là.

J'ai donc, au cours de ce chapitre, mis en évidence le rôle non trivial joué par un terme de couplage de type énergie-énergie entre deux modèles critiques.



# Chapitre 5

## Systemes désordonnés

Dans ce chapitre, en fait introductif au chapitre suivant, je vais brièvement résumer les problématiques et les principaux résultats concernant le rôle d'un faible désordre dans des systèmes ferromagnétiques classiques à deux dimensions. Cela pourrait sembler très limitatif, mais le domaine est déjà très vaste et je ne prétends pas donner une énumération exhaustive de tous les travaux dans cette thèse (voir par exemple [211]). Je vais notamment essayer de faire le point sur un sujet une question toujours d'actualité, à savoir quel est le rôle du désordre dans les transitions du premier ordre et plus particulièrement dans le modèles de Potts à  $q > 4$  états.

### 5.1 Désordre et transition du second ordre

#### 5.1.1 Descriptif

L'influence des impuretés dans les transitions de phases du deuxième ordre a été étudiée depuis très longtemps par divers moyens. Dans un premier temps, il a été suggéré que les impuretés détruisaient complètement les fluctuations de grande échelle et donc les singularités des quantités thermodynamiques [212, 213]. Parallèlement, certains auteurs défendaient la thèse contraire selon laquelle le désordre ne pouvait altérer le comportement critique d'un système [214, 215]. Postérieurement, en étudiant le désordre dans le contexte de la théorie en  $\Phi^4$  [216], on a découvert qu'il pouvait y avoir des situations intermédiaires où le désordre produisait un nouveau comportement critique sans pour autant détruire les singularités du système pur. Il est clair aujourd'hui qu'on ne peut donner une réponse générale sur les transitions de phases des systèmes désordonnés. En effet, le comportement critique dépend non seulement *du modèle* mais aussi du type *de désordre* que l'on considère.

Dans les systèmes de type ferromagnétique bidimensionnel, on peut distinguer trois catégories majeures de désordre qui constituent l'essentiel des travaux sur ces systèmes jusqu'à présent.

La première manière de modéliser le désordre consiste à laisser de manière aléatoire des

sites vides dans le réseau. Si les interactions sont uniquement entre les premiers voisins, il y aura donc des spins qui compteront un nombre de voisins réduit. Si  $p$  est la concentration des sites vides, il existe une concentration critique (de percolation)  $p_c$  à partir de laquelle tous les spins ne seront plus connectés en un seul amas infini. Il est clair que pour avoir alors la possibilité d'une transition de phase (avec notamment des divergences de la susceptibilité et la chaleur spécifique) cet amas infini doit exister. Ceci donne  $p_c$  comme borne supérieure pour la concentration de sites vides afin qu'il puisse exister une transition de phase à température non nulle. On s'attend alors à un diagramme de phase comme celui de la figure 5.1 où la ligne de transition correspond à  $J_c(p)$ . On a indiqué sur cette figure l'endroit où une approche perturbative reste valable. Je parlerai alors de désordre faible, dans la mesure où celui-ci peut être traité comme une perturbation autour du point critique du modèle pur. La "force" du désordre est donnée par sa variance. Cette dernière servira de petit paramètre dans un schéma de perturbation. Lorsque aucun schéma de perturbation n'est envisageable, je parlerai de désordre fort.

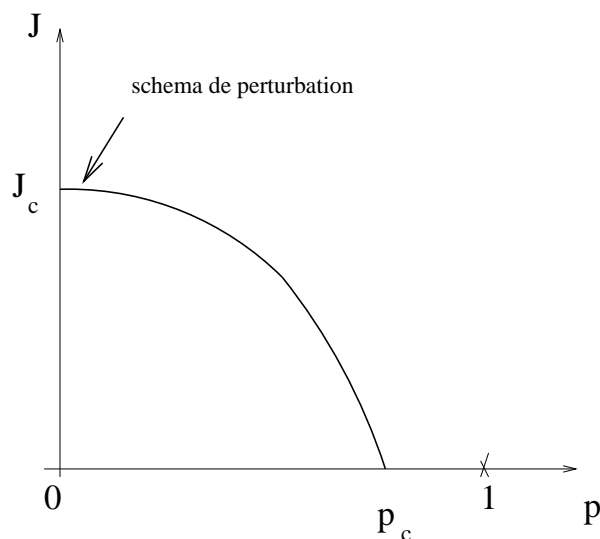


FIG. 5.1 - Diagramme de phase schématique d'un système ferromagnétique avec de la dilution de sites. La courbe  $J_c(p)$  représente la "température critique fonction de  $p$

Un deuxième type de désordre qui a été considéré dans un grand nombre de systèmes consiste à donner des valeurs aléatoires aux couplages entre spins. On peut par exemple considérer le cas d'un système tel que la constante de couplage prend la valeur  $J_1$  avec une probabilité  $p$  et  $J_2$  avec une probabilité  $1 - p$  ( $J_1, J_2 > 0$ ). on s'attend à trouver un diagramme de phase comme celui de la figure 5.2.

Ce type de désordre revient à donner à chaque lien du réseau une valeur aléatoire indépendante de celle des autres avec une distribution de probabilité très piquée sur la valeur critique  $J_c$ . Plus cette distribution est piquée, plus on sera dans le régime de faible désordre où l'approche perturbative peut être appliquée. Le cas extrême consiste à donner aux liens comme seules valeurs possibles  $J$  ou 0 avec  $J > 0$ . Ce cas se rapproche

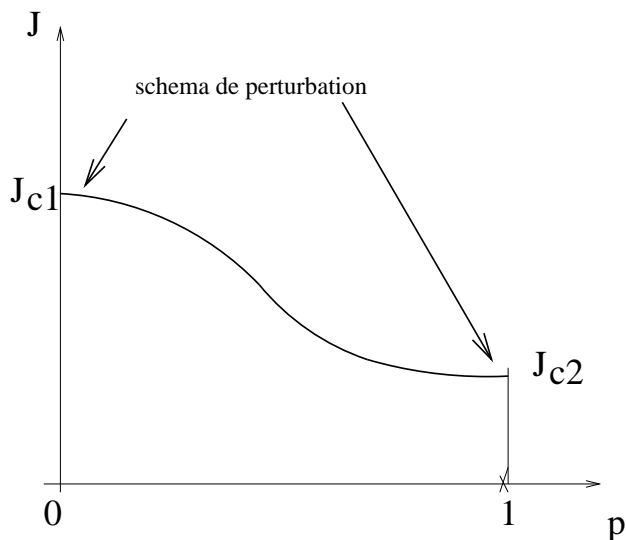


FIG. 5.2 - *Diagramme de phase schématisé d'un système ferromagnétique avec deux constantes de couplage distribuées aléatoirement.*

de celui des sites aléatoires mentionné plus haut. En fait, ces deux cas devraient donner la même classe d'universalité [211], et il est clair que les problèmes liés aux phénomènes de percolation seront les mêmes.

Ces résultats font intervenir des désordres dé-corrélés. Il existe également des résultats exacts très intéressants, notamment le modèle de McCoy et Wu [212] où l'on traite des désordres de bande corrélés (le désordre a alors une corrélation infinie) dans un modèle d'Ising sur réseau carré. Ce type de désordre correspond plutôt à un désordre fort (dans notre définition d'un désordre faible, on a introduit la variance pour mesurer la force du désordre, celle-ci n'a plus de sens ici car le désordre est corrélé et on a donc plus de petit paramètre). Dans ce système, la chaleur spécifique est non-analytique mais infiniment dérivable.

Si les constantes de couplage peuvent prendre des valeurs négatives et devenir donc antiferromagnétiques, alors cela induit de la frustration dans le système et cela concerne le domaine des verres de spins. Dans ce cas, aucune approche perturbative est valable, bien qu'un grand nombre de méthodes utilisées dans les systèmes désordonnés aient été empruntées de l'étude des verres de spins (brisure de la symétrie des répliques, etc.)

Enfin, un troisième type de désordre consiste à introduire des champs aléatoires qui se couplent localement aux paramètres d'ordre. Le plus célèbre des exemples est le modèle d'Ising en champs aléatoire qui reste encore un problème très ouvert. Je renvoie à la revue [217].



### 5.1.2 Principaux résultats

Tout d'abord, on dispose cependant d'un critère, introduit par Harris [218] qui permet d'anticiper sans trop de calculs, indépendamment du modèle et de sa dimension, si le désordre peut changer ou non la classe d'universalité de ce dernier. Il s'applique dans une grande variété de cas de désordre dé-corrélé. Il stipule que lorsque l'exposant thermique  $\alpha$  du système pur est négatif, alors l'effet du désordre ne changera pas le comportement du système au voisinage de la température critique. Ce critère repose simplement sur des arguments de dimensionalité et d'invariance d'échelle.

Il existe des cas où le critère de Harris ne permet de conclure. Cela correspond à  $\alpha = 0$ , soit une situation marginale. C'est typiquement le cas du modèle d'Ising. Dans ce cas, une étude par des méthodes plus approfondies est nécessaire. Il existe des exemples où ce critère est violé tel que le modèle de Baxter aléatoire [219]. La chaleur spécifique de ce système se comporte dans le cas pur comme:

$$C_{pur}(\tau) \sim -|\tau|^{\frac{-4g}{\pi}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{(T - T_c)}{T_c},$$

et est finie ( $g$  est la constante de couplage du modèle). Lorsque  $\alpha \propto g < 0$ , le critère de Harris prédit que le désordre est non pertinent, pourtant celui-ci change radicalement le comportement de la chaleur spécifique et introduit une singularité du type:

$$C_{des.}(\tau) \sim -\frac{1}{\log \log \frac{1}{|\tau|}},$$

lorsque  $g < 0$ . En fait, le critère de Harris ne s'applique pas ici car il repose simplement sur des arguments d'échelle et de dimensionnalité or le comportement critique du modèle de Baxter pur dépend de la constante de couplage  $g$ , et dans ce cas une analyse plus fine est nécessaire (car  $\alpha$  n'est pas vraiment fixé).

Dans les cas où le désordre est pertinent ou marginal, toute la problématique va être de calculer le nouveau comportement infrarouge du système en présence de désordre. On dispose pour cela d'un certain nombre d'outils théoriques. Le plus connu d'entre eux est la méthode des répliques.

Cette méthode fut tout d'abord introduite dans le cas des systèmes de verre de spin [220, 221] puis dans les systèmes désordonnés par la suite (une méthode analogue fut introduite par De Gennes [222] pour étudier les exposants critiques des chaînes auto-évitantes (polymères)). Je donne juste l'idée de la méthode. Pour une présentation détaillée, je renvoie aux revues nombreuses sur le sujet [217, 223, 224]. Si l'on veut calculer la moyenne sur le désordre de l'énergie libre avec une distribution de probabilité  $P[\eta]$  pour les variables de désordre:

$$F = \overline{F[\eta]} = -\frac{1}{\beta} \overline{\log Z[\eta]}$$

où la fonction de partition:

$$Z[\eta] = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H[\sigma, \eta])$$

doit être calculée pour une configuration de désordre (représentée ici par  $\eta$ ) fixe. Pour calculer la moyenne du logarithme de la fonction de partition, on introduit un nombre  $n$  de copies identiques du système. La fonction de partition de l'union de tous ces systèmes est tout simplement donnée par  $(Z[\eta])^n$ . L'étape suivante consiste à moyenner sur le désordre cette fonction de partition répliquée et faire ensuite un prolongement analytique sur le nombre  $n$ . En prenant la limite  $n \rightarrow 0$  on obtient:

$$F = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\overline{(Z[\eta])^n - 1}}{n} = \frac{d}{dn} \bigg|_{n=0} \overline{(Z[\eta])^n} \quad (5.1)$$

Les différentes copies du système, qui étaient découplées pour une configuration de désordre fixe, se couplent entre elles en prenant la moyenne sur le désordre. On obtient ainsi un hamiltonien effectif qui peut permettre, perturbativement par exemple, de calculer la fonction de partition comme une fonction analytique de  $n$ . Il est facile ensuite de prendre la limite gelée  $n \rightarrow 0$  en supposant que toutes les répliques agissent de manière similaire. On parle alors de symétrie de réplique. Dans la suite de ce manuscrit, je ne considérerai que le cas de la symétrie de réplique. Il est clair que la validité de cette méthode repose sur l'analyticité en  $n$  de la fonction de partition effective. Il n'est souvent pas possible de vérifier ceci directement, mais il existe cependant des exemples [224] où la méthode des répliques donne des résultats en parfait accord avec les solutions exactes. De plus, la méthode des répliques permet une interprétation de  $n$  comme le rapport des températures effectives entre degré de liberté de spin et degré de liberté associées aux impuretés [225, 226].

La méthode des répliques a été appliquée avec succès au modèle d'Ising bidimensionnel. Dans le cas pur le modèle d'Ising critique peut être représenté notamment par un modèle de fermions de Majorana [21]. Après avoir introduit  $n$  copies du système et moyenne sur le désordre, le modèle effectif décrivant le modèle d'Ising désordonné est un modèle de Gross-Neveu à  $n$  couleurs [227] [228]. Les effets liés au désordre peuvent alors être calculés en perturbation (le terme de perturbation étant à quatre fermions). Il a ainsi été montré qu'un faible désordre apportait des corrections dominantes de type  $(C \sim \log \log \frac{1}{|T-T_c|})$  quand on est au voisinage immédiat de la température critique) à la chaleur spécifique [228, 229]. Ce résultat peut également se montrer dans le formalisme que j'utiliserai par la suite à savoir la perturbation autour de théories conformes. Ces résultats ont été confirmés numériquement [230, 231, 232, 233, 234], la vérification la plus nette étant [234] (Il est très difficile de mesurer numériquement un tel comportement en  $\log(\log)$ ).

Une analyse similaire a été entreprise avec succès pour le modèle de Potts à  $q$  états ( $2 < q \leq 4$ ) récemment [229, 235, 205, 206]. Pour ce modèle, le critère de Harris prédit

un désordre pertinent ( $\alpha = \frac{1}{3}$ ). Un nouveau point fixe décrivant la classe d'universalité du modèle de Potts à 3 états désordonné a été trouvé. Ce travail fut initié par Ludwig et Cardy par une approche en perturbation consistant à faire un développement analytique en  $q - 2$  des exposants critiques. Cette approche permet d'avoir des résultats dans tout le domaine  $2 \leq q \leq 4$ , et de retrouver pour  $q = 2$  les résultats du modèle d'Ising. Cette méthode fut reformulée par Dotsenko *et al.* dans le contexte des théories conformes comme je l'ai déjà mentionné au chapitre précédent. Cette dernière a permis de calculer avec précision les corrections à la magnétisation. Ces corrections ont été représentées sur la figure 4.3. Elles sont très faibles pour  $q \leq 3$  dans la mesure où le point fixe du modèle désordonné est très proche du modèle de Potts pur.

Ces résultats concernent un faible désordre. Si l'on cherche à traiter le cas d'un désordre fort, tel qu'une distribution bimodale  $\pm J$  des constantes de couplage sur le réseau (qui introduit de la frustration dans le système), il faut alors recourir, la plupart du temps, aux outils numériques. De nouveaux points fixes ont été trouvés pour de tels désordres forts aussi bien dans le modèle d'Ising [236, 237, 238] que dans le modèle de Potts, notamment un point fixe bi-critique<sup>1</sup>, appelé point de Nishimori, qui semble être commun aux deux modèles [239].

Par soucis de complétude, je tiens à mentionner d'autres méthodes analytiques que les répliques à savoir les méthodes supersymétriques [240] et variationnelles [66, 241].

J'ai, dans cette section, rappelé quelques résultats quant à l'influence d'un faible désordre sur des transitions du second ordre. Je n'ai considéré que les modèles bidimensionnels parmi les plus simples. L'approche est basée sur la symétrie de réplique. Dans certaines situations, cette méthode est insuffisante. L'idée est alors de ne pas traiter toutes les répliques sur le même plan d'égalité et de briser la symétrie de réplique. Cette méthode a été introduite par Parisi dans le contexte des verres de spin [224] mais également dans le modèle XY désordonné [242].

En conclusion, on peut retenir, qu'il n'y a pas de règles systématiques, hormi le critère de Harris qui reste d'un champ d'investigation limité, capable de prévoir les effets du désordre. Il faut souvent y regarder au cas par cas.

## 5.2 Désordre et transition du premier ordre

### 5.2.1 Arguments généraux

J'ai exposé dans la section précédente l'influence d'un faible désordre sur les les transitions du second ordre, plus particulièrement sur les modèles d'Ising et de Potts. Il est également fondamental de comprendre les effets du désordre sur les transitions du premier

---

1. Un point fixe bi-critique possède dans le diagramme de flot à deux paramètres deux branches instables.

ordre.

Comme dans le cas des transitions du second ordre, on dispose de résultats généraux. Tout d'abord, l'argument de Imry et Wortis [243] anticipe que la discontinuité du paramètre d'ordre dans le cas désordonné doit diminuer sinon disparaître. Une transition du premier ordre est liée à la formation "spontanée" d'un nombre d'amas de grande taille de même type à la température critique. C'est une transition brutale. En introduisant du désordre, par exemple des impuretés avec une concentration  $p$ , il faudra définir pour ces amas une température critique  $T_c(p)$  dépendant du nombre d'impuretés au sein de l'amas. A cause des fluctuations  $\Delta p$  de la distribution de désordre, il n'y a aucune raison pour que les amas aient exactement la même température de transition. Néanmoins, si le système tend à former des amas à des températures différentes, cela lui coûte de l'énergie.

Il y a donc pour résumer compétition entre les fluctuations liées au désordre qui tendent à former des amas de phase différente au voisinage de  $T_c$  et l'énergie d'interface de ces amas. Il est difficile de prédire dans tous les cas lequel de ces deux phénomènes l'emportera mais on peut tout de même souligner un élément en faveur d'une transition du second ordre. Tout d'abord, l'énergie associée aux fluctuations induites par le désordre varie avec le volume de l'amas tandis que l'énergie d'interface varie avec sa longueur, ce qui défavorise les amas de grande taille et fera que la discontinuité présente à  $T_c(p)$  sera amoindrie car une partie des amas mise à contribution pour produire le saut du paramètre d'ordre aura disparu. Ces arguments ne constituent en rien une preuve mais permettent d'anticiper que le désordre va diminuer la discontinuité (sans forcément la supprimer).

Il existe néanmoins un théorème fondamental dû à Aizenman et Wehr [244] qui permet d'aller bien au delà de cet argument. Ce théorème (dont je ne prétend pas donner la démonstration) s'applique à un ensemble de systèmes en  $D \leq 2$  avec un désordre figé et prédit l'absence de discontinuité du paramètre d'ordre. Il s'applique entre autres au modèle d'Ising en champs aléatoire, y compris avec des interactions spin-spin à longue portée de type  $J_{ij} = |i - j|^{-\alpha}$  (avec  $\alpha > d$ ), au modèle de Potts à  $q$  états (toujours avec la même condition sur l'interaction), au modèle de verre de spin (mais cette fois-ci avec une interaction entre premiers voisins).

Dans ces trois cas, la variable  $\eta$  caractérisant la distribution de probabilité du désordre doit satisfaire:

$$\overline{\eta} = 0 ; \overline{\eta^2} = 1 ; \forall s \quad \overline{e^{s\eta}} < \infty \quad (5.2)$$

ce qui semble être une condition assez peu contraignante. Il faut également signaler un travail parallèle dû à Hui et Berker [245] aboutissant aux mêmes conclusions mais par des arguments phénoménologiques (donc non exacts) du groupe de renormalisation. Je vais, dans les sections suivantes, donner des illustrations de ce théorème.

### 5.2.2 Désordre dans les transitions de phase du premier ordre induites par les fluctuations

Dans cette section, je vais considérer des systèmes dont les propriétés à l'ordre des arbres semblent indiquer qu'ils vont subir une transition du second ordre. Néanmoins, l'inclusion des fluctuations thermiques change radicalement ce comportement et conduit ces systèmes vers des régions de couplage fort dont on sait dans certains cas, qu'elles sont associées à des transitions du premier ordre. Elles constituent en ce sens un premier champ d'investigation quant aux propriétés du désordre dans de tels systèmes. C'est dans ce cadre que s'inclut une partie de mes travaux exposés dans ce manuscrit. Vu que les calculs sont pour le moins fastidieux, j'ai opté pour une présentation générale et exposé mes contributions au chapitre suivant.

- La première étude concerne le modèle d'Ashkin-Teller à  $N$  couleurs et est due à Cardy [246]. L'Hamiltonien du modèle pur s'écrit:

$$H = \beta \sum_{\langle i,j \rangle} \left( \sum_{a=1}^N \sigma_i^a \sigma_j^a - g \left( \sum_{a=1}^N \sigma_i^a \sigma_j^a \right)^2 \right) \quad (5.3)$$

où la somme porte seulement sur les premiers voisins. Le cas  $N = 2$  correspond au modèle d'Ashkin-Teller usuel et est intégrable sur la ligne critique [247] tandis que le cas  $N > 2$  a été étudié dans une approche perturbative de couplage faible par Grest et Widom [130]. L'équation du groupe de renormalisation pour  $g$  est

$$\frac{dg}{dl} = 4(N - 2)g^2 + \dots \quad (5.4)$$

Pour  $g < 0$ , le terme de couplage est marginalement non pertinent et la transition reste continue de type Ising avec des corrections logarithmiques. En revanche, pour  $g > 0$  le terme de couplage devient marginal pertinent et donnera lieu à une transition discontinue. Ce résultat a été confirmé par Fradkin [248] par une approche en  $\frac{1}{N}$ , puis surtout par Shankar [249] qui a montré que le régime  $g > 0$  correspond à celui du modèle de Gross-Neveu. Le couplage dans ce cas rend les excitations massives et donne lieu à des longueurs de corrélation finie.

On introduit maintenant du désordre dans ce modèle. Tout d'abord, il est préférable de réécrire l'Hamiltonien (5.3) sous la forme:

$$H = \sum_a (H_I^a)^0 + \sum_{\vec{r}} \left( \tau \sum_{a=1}^N \varepsilon^a(\vec{r}) - g \sum_{a \neq b} \varepsilon^a(\vec{r}) \varepsilon^b(\vec{r}) \right) \quad (5.5)$$

où  $(H_I^a)^0$  est le  $a^{\text{ième}}$  modèle d'Ising pur,  $\varepsilon^a$  représente la densité d'énergie de ce dernier. Le terme  $\tau$  mesure l'écart par rapport à la température critique. Le fait d'introduire des constantes de couplage aléatoires implique une dépendance spatiale locale de l'écart à la température critique  $t \rightarrow \tau + \delta\tau(x)$  avec

$$\overline{\delta\tau(x)} = 0 \quad ; \quad \overline{\delta\tau(x)\delta\tau(x')} = \Delta\delta(x-x').$$

On introduit ensuite  $n$  répliques du système et moyenne sur le désordre et l'on obtient:

$$H = \sum_a (H_I^a)^0 + \sum_{\vec{r}} \left( \tau \sum_{a,i} \varepsilon_i^a(\vec{r}) - g \sum_{a \neq b,i} \varepsilon_i^a(\vec{r}) \varepsilon_i^b(\vec{r}) - \Delta \sum_{a,b,i,j} \varepsilon_i^a(\vec{r}) \varepsilon_j^b(\vec{r}) \right) \quad (5.6)$$

où  $a, b \in [1 \cdots N]$ ;  $i, j \in [1 \cdots n]$ . On retrouve une situation que l'on a déjà traité au chapitre précédent, à savoir des termes de couplage de type énergie-énergie. Il suffit de reprendre les résultats où l'on couplait  $M$  modèles d'Ising à  $N$  modèles de Potts (en annulant les constantes de couplage du modèle de Potts) sachant que l'on a cette fois  $nN$  modèles d'Ising. En prenant directement la limite de réplique  $n \rightarrow 0$ , on obtient pour les fonctions beta:

$$\frac{dg}{dl} = 4(N-2)g^2 - 8g\Delta + \cdots \quad (5.7)$$

$$\frac{d\Delta}{dl} = -8\Delta^2 + 8(N-1)g\Delta + \cdots \quad (5.8)$$

Les trajectoires du flot obéissent à la relation suivante:

$$g \propto \left( \frac{\Delta}{g} \right)^{\frac{-2}{N}} e^{\frac{-2\Delta}{Ng}} \quad (5.9)$$

On a représenté sur la figure 5.3 trois trajectoires partant initialement des points  $A_0, B_0, C_0$ .

Sur cette figure, on voit tout d'abord que le flot est conduit vers une région de couplage fort loin du point fixe ultraviolet, puis les trajectoires se retournent complètement vers le point fixe trivial  $g^* = \Delta^* = 0$ . Cela donne lieu à une transition de type Ising avec éventuellement des corrections de type logarithmiques.

- Ces résultats se généralisent au cas de  $N$  modèles de Potts couplés avec du désordre [210] (le cas  $N = 2$  est un peu particulier et dans ce cas une analyse plus précise est nécessaire [250]). La conclusion est similaire à savoir que le désordre transforme la transition (présumée) du premier ordre en second ordre. Néanmoins, le point fixe attractif est différent du point fixe trivial (mais tout de même très proche).

- J'ai généralisé ces résultats aux cas de  $M$  modèles d'Ising couplés à  $N$  modèles de Potts en présence d'un faible désordre de lien. Les calculs étant relativement lourds, j'ai préféré les reléguer au chapitre suivant et introduire directement l'article. Je vais simplement donner un résumé des principaux résultats. Tout d'abord, le flot de renormalisation dans les variables couplant les modèles d'Ising et de Potts a exactement la même allure que la figure 5.3. La principale conclusion que je peux tirer est que *le désordre découple et factorise les modèles en produit de modèles désordonnés découplés*. Plus précisément,

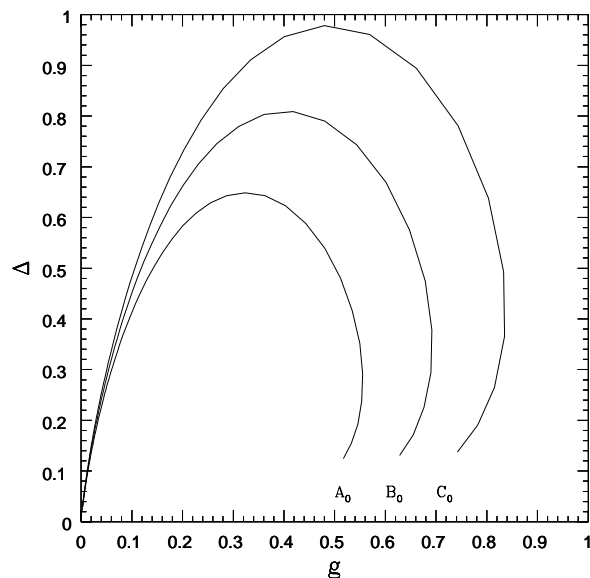


FIG. 5.3 - *Trois Trajectoires du groupe de renormalisation du modèle Askin-Teller à  $N$  couleurs (ici  $N = 3$ ) avec un faible désordre  $\Delta$ . Les flots partent des points  $A_0, B_0, C_0$  et se dirigent vers l'origine.*

par l'ajout d'un faible désordre sur deux modèles de Potts à  $q_1$  et  $q_2$  états ( $q_1 \neq q_2$ ), j'obtiens dans la limite infrarouge deux modèles de Potts désordonnés et découplés [250]. Lorsque  $q_1 = q_2$ , on retrouve les cas de figure déjà discutés ci-dessus. Il est clair que cette conclusion résulte d'une approche perturbative et n'est valable qu'à faible couplage entre les modèles. A fort couplage, on peut imaginer que l'on aura à faire à un modèle de Potts à  $q_1 q_2$  états en présence de désordre avec  $q_1 q_2 > 4$ , d'où l'intérêt d'étudier le modèle de Potts à  $q > 4$  états en présence de désordre.

### 5.2.3 Désordre dans les transitions de phase du premier ordre

Dans cette section, je vais présenter quelques résultats récents (essentiellement numériques) sur le désordre dans les transitions qui sont du premier ordre y compris en champs moyen. L'archétype d'une telle transition est celle du modèle de Potts à  $q > 4$  états. D'après le théorème d'Aizenman et Wehr [244], toutes les discontinuités du paramètre d'ordre vont être éliminées en présence d'un faible désordre. Cela pose une nouvelle question à savoir quelle est alors la classe d'universalité de cette transition du second ordre induite par le désordre ?

La première étude sur le sujet concerne le modèle de Potts à 8 états avec des constantes

de couplage aléatoires et est due à Chen *et al.* [251]. Ces auteurs considèrent un Hamiltonien du type:

$$H = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \quad (5.10)$$

où les spins  $\sigma_i$  prennent les valeurs  $1, \dots, q$ . La somme porte sur les plus proches voisins tandis que l'interaction est paramétrisée par:

$$J_{ij} = \begin{cases} J_1 & \text{avec une probabilité } p \\ J_2 = rJ_1 & \text{avec une probabilité } 1 - p \end{cases} \quad (5.11)$$

Ces auteurs ont effectivement confirmé la prédiction du théorème d'Aizenman et Wehr et ont de plus affirmé que la transition était de même nature que celle du modèle d'Ising. Cela a amené certains auteurs à supposer que le désordre puisse unifier plusieurs modèles *a priori* différents [246]. Néanmoins, comme on va le voir, les derniers résultats numériques ne vont pas dans ce sens.

L'étude du modèle de Potts à 8 états a été repris par Cardy et Jacobsen avec des résultats très différents. J'ai redonné sur la figure 5.4 la variation de l'exposant  $\beta/\nu$  en fonction de  $q$ .

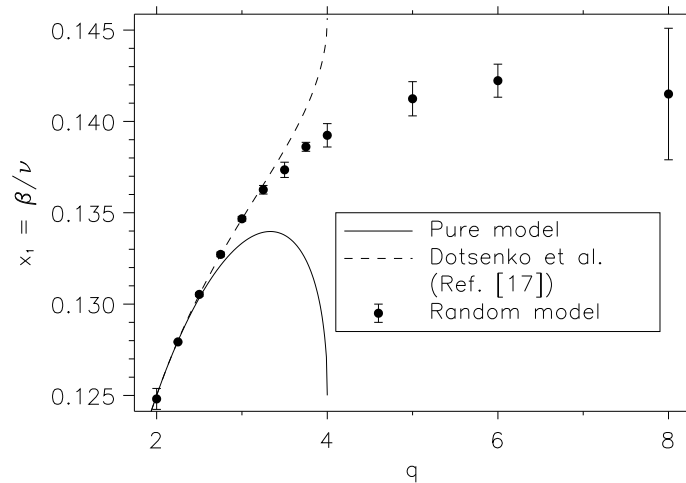


FIG. 5.4 - Variation de l'exposant magnétique du modèle de Potts désordonné calculé numériquement et analytiquement pour  $q \leq 4$ . On voit clairement pour  $q = 8$  que l'exposant magnétique diffère considérablement de celui du modèle d'Ising pur.

Pour  $q = 8$ , Cardy et Jacobsen [207] ont trouvé  $\beta/\nu = 0.142 \pm 0.001$  ce qui est en forte contradiction avec les résultats de Chen *et al.*. Ceci a été confirmé par la suite par Chatelain *et al.* [252] et Picco [253]. Cardy et Jacobsen ont exhibé à  $q$  très grand un isomorphisme entre le modèle de Potts à  $q$  états et le modèle d'Ising en champs aléatoire. Ils ont ainsi pu conjecturer une ligne critique stable dans le plan  $(q, w)$  [207, 208],  $w$  étant



relatif à l'intensité du désordre. J'ai représenté schématiquement un diagramme de flot possible en dimension  $d > 2$  sur la figure 5.5.

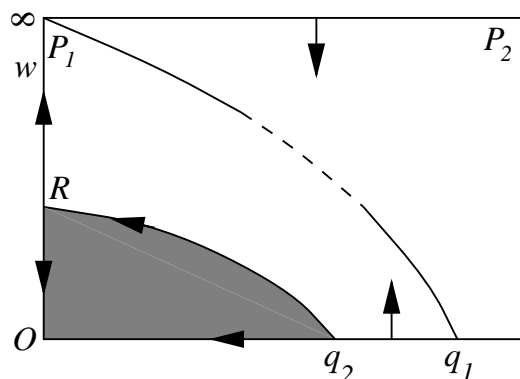


FIG. 5.5 - Diagramme de phase schématisé pour  $d > 2$  dans le plan  $(q, w)$ ,  $w$  étant l'intensité du désordre. Noter que l'axe des  $q$  est inversé, à savoir que  $q_1 < q_2$ .

La région colorée correspond à une transition du premier ordre. Cette région est limitée par la ligne  $Rq_2$  de points tri-critiques. Lorsque  $d \rightarrow 2$ , cette région se réduit à un segment sur l'axe des  $q$ . La ligne  $P_1P_2$  correspond à un désordre  $w \rightarrow \infty$  donc à un comportement critique de percolation. L'existence d'une ligne de points fixes stables  $P_1q_1$  a été postulé à partir de cet isomorphisme à  $q \rightarrow \infty$ . En dimension 2, le début de la ligne en  $q_1 = 2$  correspondrait au point fixe du modèle de Potts à  $q$  états désordonné trouvé perturbativement par Dotsenko *et al.* par un développement en  $(q - q_1)$ . Toujours pour  $d = 2$ , on aurait  $q_2 = 4$  qui correspond à la dernière valeur de  $q \leq 4$  pour laquelle on a encore une transition du second ordre. Ce diagramme de phase semble cohérent avec les dernières estimations numériques de Picco [253]. En effet, Picco a clairement identifié un phénomène de “cross-over” pour le modèle de Potts à 8 états désordonné avec un désordre critique  $r_c \approx 10$  où  $r$  a été défini dans l'équation (5.11). J'ai représenté d'après Picco [253] sur la figure 5.6 dans un diagramme log-log la magnétisation en fonction de la taille du réseau. De haut en bas, on trouve les courbes avec les valeurs du désordre  $r = 2, 10, 100$  et 1000. On peut vérifier que la courbe à  $r = 10$  correspond à une parfaite ligne droite ( ce qui correspond à une loi d'échelle) tandis que les trois autres courbes convergent asymptotiquement vers cette valeur critique  $r_c \approx 10$  du désordre pour les grandes tailles [253]. Pour  $r = 2$ , le désordre est trop faible, le régime asymptotique reste difficile à atteindre, il n'y a pas de lois d'échelle. Cela indique clairement que l'on est dans un régime de “crossover”. Il faut signaler d'autre part que les temps de calcul sont très élevés pour des faible désordre car le système a plus de mal à s'“auto-corréler”.

Les valeurs  $r = 100$  et  $r = 1000$  indiquent que le flot s'éloigne du point fixe à  $r_c \approx 10$  à cause de la présence du point fixe instable de percolation. Cette étude numérique de Picco [253] semble confirmer le diagramme de phase proposé par Cardy et Jacobsen [207, 208] représenté sur la figure 5.5 avec une ligne critique  $P_1q_1$  de points fixes stables s'interpolant

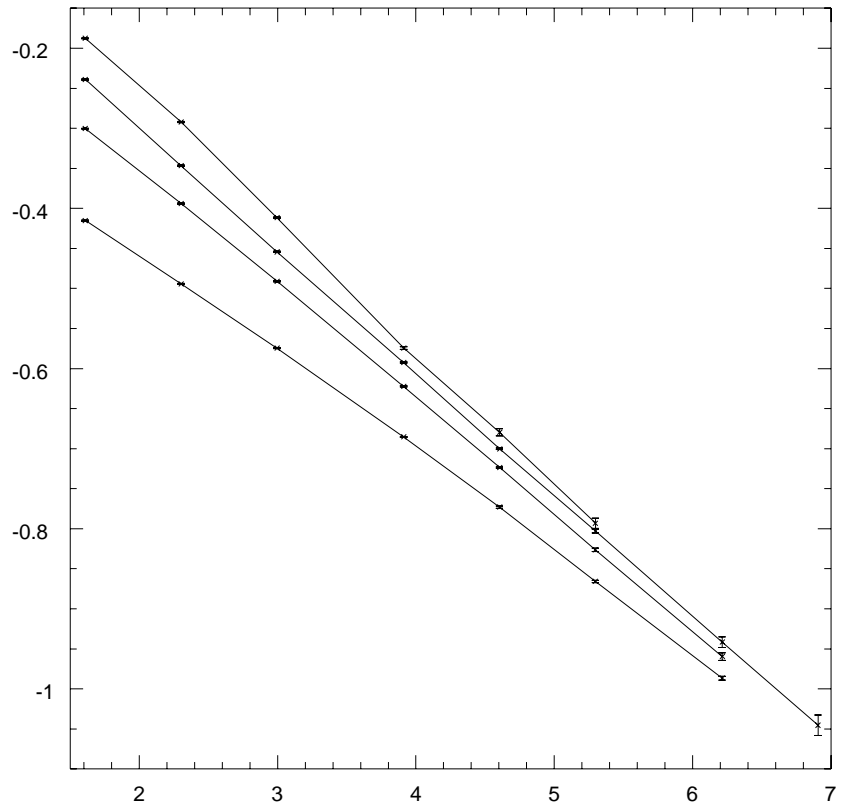


FIG. 5.6 - Représentation dans un diagramme log-log de la magnétisation en fonction de la taille pour quatre valeurs du désordre (de  $r = 2$  en haut à  $r = 1000$  en bas).

entre deux régimes critiques instables (le modèle de Potts à  $q$  états pur et la percolation).

A ce stade, d'autres simulations numériques sont nécessaires pour confirmer cette ligne de points fixes, notamment pour des valeurs  $q > 8$ .

Ces modèles ont été également simulés sur des bandes de largeur  $L$  et de longueur infinie, l'intérêt étant de mesurer un paramètre universel (que je vais abusivement appeler  $c(q)$ ) qui représenterait la charge centrale si l'on était sûr que les modèles de Potts à  $q$  états désordonnés critiques étaient décrits par la symétrie conforme. Néanmoins, rien ne permet jusqu'à maintenant de dire si c'est le cas. Le fait que le paramètre  $c$  qui apparaît dans la relation  $F \approx F(\infty)L - \pi c/6 + \dots$  soit universel, a été démontré par Privman et Fisher [254]. Les résultats sont assez curieux et résumés dans le tableau dans le tableau 5.1 [255].

On peut vérifier que le paramètre  $c(q)$  obéit approximativement à la propriété de factorisation suivante:

L	q=2	3	4	5	8	10	12	256
2-4	0.53004	0.85335	1.08010	1.243 (3)	1.614 (3)	1.789 (3)	1.930 (3)	4.251 (4)
3-5	0.49875	0.79846	1.00493	1.189 (8)	1.543 (8)	1.709 (8)	1.847 (8)	4.044 (9)
4-6	0.49507	0.79222	0.99610	1.16 (5)	1.45 (6)	1.60 (7)	1.81 (7)	4.08 (9)

TAB. 5.1 - *Mesure du paramètre  $c(q)$ .*

$$c(q = q_1 \times q_2) = c(q_1) + c(q_2), \quad (5.12)$$

et par exemple,  $c(256 = 2^8) \approx 8 \times \frac{1}{2}$ . Cette propriété surprenante de l'équivalent de la charge centrale suggère une dépendance logarithmique de  $c(q)$  avec  $q$ . De plus, cela écarte définitivement tout lien entre le modèle de Potts à  $q$  états désordonné ( $q$  quelconque) et le modèle d'Ising. Ces résultats ont été confirmés par Cardy et Jacobsen [207, 208]. De plus, un argument analytique concernant la dépendance logarithmique de l'équivalent de la charge centrale a été fourni par ces mêmes auteurs. En effet, le modèle de Potts à  $q$  états répliqué est un modèle de Potts à  $q^n$  états. Dans ce cas, l'équivalent de la charge centrale du modèle désordonné s'écrit (en utilisant l'énergie libre du système et les répliques):

$$c'(q) \propto \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} c(q^n) \propto \log q \quad (5.13)$$

La charge centrale du modèle pur est donnée par l'expression suivante [186, 194]:

$$c = \frac{(2 - 3y)(1 + y)}{(2 - y)}, \quad (5.14)$$

avec  $\sqrt{q} = 2 \cos(\frac{\pi y}{2})$  et  $0 \leq y \leq 1$ . On arrive ainsi au résultat suivant:

$$c'(q) \approx \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} \log q. \quad (5.15)$$

Le coefficient devant  $\log q$  a également été évalué numériquement à  $0.688 \pm 0.003$  en accord avec  $\frac{5\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.689$  [208]. Il est à noter que cette valeur est proche de  $\frac{1}{2 \log 2} \approx 0.721$  que l'on obtiendrait en supposant que le point  $q = 2$  obéirait à cette loi. De ce fait, il apparaît difficile de distinguer si l'équivalent de la charge centrale d'un modèle de Potts à  $2^n$  états vaut  $n \times \frac{1}{2}$  ou bien  $n \times \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} \log 2$ . Par conséquent, on ne peut actuellement pas dire si la valeur du paramètre  $c(q)$  du modèle de Potts à  $2^n$  états, désordonné, est liée à la charge centrale du modèle d'Ising, ou bien au point fixe de percolation ou encore à un autre point fixe inconnu. Quoi qu'il en soit, la valeur de l'exposant magnétique du modèle de Potts à  $2^n$  états est clairement différente de celle du modèle d'Ising.

Une expérience récente sur une structure à base d'atomes d'Hydrogène dont la transition est supposée être décrite par le modèle de Potts à 4 états a été réalisé par Schwenger

*et al.* [256]. En introduisant du désordre sous forme d'impuretés (des atomes d'Oxygène), ces auteurs ont pu mesurer les variations des exposants critiques et ont trouvé:

$$\beta \approx 0.135 \pm 0.01, \nu \approx 1.03 \pm 0.08, \gamma = 1.68 \pm 0.15.$$

Ces auteurs ont conclu que ces exposants sont en accord avec la classe d'universalité du modèle d'Ising. En fait, la valeur de  $\beta/\nu \sim 0.131 \pm 0.09$  prédit par l'expérience est également en accord avec les résultats récents de Cardy et Jacobsen  $\beta/\nu \sim 0.135$  [207]. Il faut néanmoins reconnaître que la mesure de  $\beta/\nu$  n'est pas très bonne pour distinguer deux classes d'universalité différentes car de nombreuses classes d'universalité ont des  $\beta/\nu$  comparables.

### 5.3 Résumé et conclusion

J'ai résumé dans ce chapitre quelques résultats sur le rôle d'un faible désordre dans les transitions du premier et second ordre. J'ai principalement traité des systèmes bidimensionnels simples (Ising et Potts) profitant de la richesse de l'invariance conforme. Concernant les transitions du second ordre, le critère de Harris permet bien souvent de prévoir si le désordre va changer ou non la transition. Dans les cas où ce dernier ne peut rien conclure, il faut alors examiner la situation au cas par cas à l'aide d'outils tels que les méthodes des répliques (avec ou sans brisure), les méthodes variationnelles et supersymétriques.

Concernant les transitions du premier ordre (soit directement en champ moyen ou induites par les fluctuations), on dispose finalement d'un critère plus strict puisqu'il s'agit du théorème d'Aizenman et Wehr pour les dimensions  $d \leq 2$ . Néanmoins, la question quant à la classe d'universalité de la transition induite par le désordre demeure ouverte. Les résultats analytiques exposés dans ce chapitre portent sur des modèles minimaux couplés en présence de faible désordre. Un traitement complet de ces problèmes est exposé dans le chapitre suivant. Le désordre a pour effet de découpler et de factoriser les modèles. Une question intéressante serait d'étudier le "cross over" entre couplage faible et couplage fort pour ces modèles couplés en présence de désordre. Il est clair que cela nécessite des résultats allant au-delà de l'approche perturbative développée dans l'article du chapitre suivant. Dans ce contexte, des méthodes exactes seraient les bienvenues. Une approche prometteuse pourrait être celle des perturbations intégrables appliquées avec succès par Vaysburd [209] et plus récemment par Leclair *et al.* [257] pour deux modèles d'Ising couplés. A l'heure actuelle, les méthodes d'investigation les plus efficaces restent néanmoins les simulations numériques. La classe d'universalité du modèle de Potts à  $q$  états désordonné devrait rapidement être complètement identifiée.

L'étude des systèmes statistiques bidimensionnels reste l'un des sujets à l'heure actuelle en permanente évolution où la confrontation entre résultats théoriques, numériques et

expérimentaux reste la plus riche.

---

## Chapitre 6

# Coupled minimal models with and without disorder

P. Simon

### Résumé

We analyse in this article the critical behavior of  $M$   $q_1$ -state Potts models coupled to  $N$   $q_2$ -state Potts models ( $q_1, q_2 \in [2..4]$ ) with and without disorder. The technics we use are based on perturbed conformal theories. Calculations have been performed at two loops. We already find some interesting situations in the pure case for some peculiar values of  $M$  and  $N$  with new tricritical points. When adding weak disorder, the results we obtain tend to show that disorder makes the models decouple. Therefore, no relations emerges, at a perturbation level, between for example the disordered  $q_1 \times q_2$ -state Potts model and the two disordered  $q_1, q_2$ -state Potts models ( $q_1 \neq q_2$ ), despite their central charges are similar according to recent numerical investigations.

NUCL. PHYS. **B515**, 624 (1998)

## 6.1 Introduction

In order to understand the role of impurities and inhomogeneities in real physics systems, many statistical models with quenched randomness have been proposed. Therefore, the effect of randomness of continuous phase transitions have been of great interest for many years. The main question is to determine if the randomness leaves unchanged the critical properties of the pure system. One prediction concerning models with random bonds comes from the Harris conjecture [218], which states that bond randomness changes the values of the critical exponents only if the specific-heat exponent  $\alpha$  is positive. The effects of bond randomness has been studied intensively in the  $2D$  Ising model (The Harris criterion does not enable to be conclusive about the relevance of disorder) first by Dotsenko and Dotsenko [192]. They represent the near critical point by a Gross-Neveu model and found an asymptotic behavior for the specific heat in  $\ln(\ln(\frac{1}{|t|}))$  with  $|t|$  the reduced temperature. This has been confirmed numerically [230, 231, 232, 233, 234]. For  $2D$  random Potts model (the Harris criterion predicts here that randomness is relevant and changes the critical behavior), conformal field theory techniques have been a powerful tool to compute in perturbation the shifts in the critical exponents [229, 235, 205]. The numerical results have proved this approach to be accurate (see [258] and [207] for more recent results). All these results concern simple models having a second order phase transition in the pure case.

However, it has been realized recently, that a weak bond randomness can also have strong effects on  $2D$  systems possessing a first order transition. Hence, following earlier work of Imry and Wortis [243], Hui and Berker have shown with a phenomenological renormalisation group that bond randomness will induce a second order transition (a vanishing of the latent heat) in a system that would have undergone a first order one [245]. This result has been stated on a more rigorous level by Aizenman and Wehr [244]. At this level, a question naturally arises concerning the universality class of this second order transition. In order to test these predictions, Cardy has studied a system presenting a fluctuation driven first order transition, namely a transition which is expected to be continuous at the mean field level, but become first order when fluctuations are included. Therefore, Cardy was able to show that the addition of weak randomness on a system of  $N$  coupled Ising models makes the system flow to  $N$  decoupled Ising models [246]. This result has been extended to the case of  $N$  ( $N > 2$ ) coupled Potts models by Pujol [210] (the case  $N = 2$  is quite peculiar and deserves a special attention [210, 250]). The result was a non-Ising like second order transition. The universality class depends on the sign of the coupling between the models and therefore these systems seem to violate the Imry-Wortis argument [243].

Naturally, the  $q$ -state Potts model with  $q > 4$  appears more suitable to test and study the effects of disorder, because the first order transition is by now of mean field type. The

hint is that there is now analytical approach able to control the effect of disorder except at large  $q$  where a mapping to the random field Ising model shows the absence of any latent heat in  $2D$  [207, 208]. For  $q$  not too large, only numerical simulations are able to check the Imry-Wortis arguments. Hence, Chen *et al.* [251] have investigated the 8-state Potts model using Monte Carlo simulations and confirmed the transition to be continuous but also found numerical values of the critical exponents consistent with those of the Ising model. Nevertheless, recent numerical studies of Cardy and Jacobsen [207, 208] and of Picco [255] are in a clear disagreement with the latter conclusion. The magnetization exponent  $\frac{\beta}{\nu}$  is found to vary continuously with  $q$ . Moreover, it has also been “shown” numerically, using the powerful tool of conformal invariance combined with finite size scaling, that the values of the central charges of disordered  $q$ -state Potts models are related to one another by a factorization law  $c(q = q_1 \times q_2) = c(q_1) + c(q_2)$  [255, 207]. Therefore, the numerical measure of central charges can not distinguish between a disordered  $q = q_1 \times q_2$ -state Potts model and two decoupled  $q_1$  and  $q_2$  disordered Potts models. As the only analytical results concern the behavior of similar coupled  $q$ -state Potts model ( $q = 2, 3$ ) under weak disorder, it should be interesting to extend these results to different disordered Potts models in order to compare the critical behavior of coupled  $q_1$  and  $q_2$ -state Potts models under weak randomness with the disordered  $q_1 \times q_2$ -state Potts model.

In order to bring some answers to this issue, the main goal of this paper is therefore the study of the critical behavior of  $M$  Ising models coupled to  $N$   $q$ -state Potts models ( $q = 3, 4$ ) with disorder. Nevertheless, a special attention will be first paid to the pure case.

Indeed, it seems important to understand in a general context the critical behavior of different minimal models notably coupled by their energy density. This question was recently addressed by Leclair *et al.* [257] (see also [209]) in the context of integrable perturbations theories. Namely could the mixing of two or more critical models create a new critical behavior? Moreover, it might be a way to approach the critical behavior of some  $3D$  systems. For example, when we couple one Ising model to  $N$   $q$ -state Potts model, we obtain using one loop calculations a non-trivial flow with new tricritical points [259]. Nevertheless, the most puzzling situation concerns the unusual critical behavior of one Ising model coupled to an XY model, currently referred as Ising-XY in the literature [111, 127, 129, 135]. This model is expected to include in its range of parameters a whole class of systems with  $Z_2 \times U(1)$  symmetry like the  $2D$  fully frustrated XY model [105, 120, 121] the  $2D$  arrays of Josephson junctions [260], the ANNNXY model [57] and so on. The Ising-XY model have in its phase diagram a continuous critical line with simultaneous XY and Ising ordering where the critical exponent associated to the Ising magnetization varies continuously and differs significantly from the pure Ising one. Therefore, along this critical line, we have two models at their critical temperature coupled by their energy density and the numerical results indicate an unusual behavior. Those examples shows that an energy-energy



coupling term may have drastic effects in certain situations. Therefore, before introducing weak disorder, we carefully study the critical behavior of  $M$  Ising models to  $N$   $q$ -state Potts models. We thus confirm, using two loops calculations, the existence of the two tricritical points quoted above. These results also extend when we consider  $M$  3-state Potts models coupled to  $N$  4-state Potts models.

The paper is written in a self-contained way and completes the work presented in [259, 250]. It is organized as follows. In section 2, we analyse the critical behavior of  $M$  Ising models coupled to  $N$  Potts models. A specific attention is paid to the cases  $M = 1, 2$ . Near their critical points, these models are presented by perturbed conformal theory. Then, in section 3, we study the effects of weak randomness on these models. We use the replica trick method. We show that disorder makes the models decouple. Therefore, our analysis confirms no apparent relations (at least perturbatively!) between the disordered  $q_1 \times q_2$ -state Potts model and the corresponding coupled  $q_1, q_2$  disordered Potts model, despite their central charge are similar. Section 4 contains a summary of the results and some future perspectives. All the integrals involved in the computation of the beta functions, the renormalisations of the spin and energy operators are worked out explicitly in the appendices.

## 6.2 Coupled minimal models without disorder

### 6.2.1 The model

The model we intend to study in this section consists of a superposition of  $M$  Ising and  $N$   $q$ -state Potts models coupled by their energy density. The system possess a  $Z_2^M \times Z_q^N$  symmetry. The Hamiltonian has the following form:

$$H = \sum_{a=1}^M H_1^a + \sum_{b=M+1}^{M+N} H_2^b - \sum_{c,d} g_{cd} \int d^2z \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z), \quad (6.1)$$

where  $c, d$  belong to  $[1, \dots, M+N]$ .  $H_1^a$  and  $H_2^b$  represent respectively one pure Ising model and one pure  $q$ -state Potts model at their respective critical temperature.  $\varepsilon^c$  corresponds to the energy operator of the  $c^{th}$  model (either Ising or Potts depending on the value of  $c$ ). Therefore, the partition function reads as:

$$Z = \prod_{a=1}^m Tr_{a,s_i,a} \prod_{b=M+1}^{M+N} Tr_{b,s_i,b} e^{-\sum_{a=1}^m S_{0,a} - \sum_{b=M+1}^{M+N} S_{0,b} + \int \sum_{c \neq d} g_{cd} \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z) d^2z}. \quad (6.2)$$

This model can be described as a pure conformal field theory perturbed by the interaction term which is quadratic in the  $\varepsilon$  operators. The infrared behavior of the coupling constants of the complete model ( $g_{ij}$  and also the different masses that have not been included

in (6.1)) can be analysed perturbatively. In a similar way, a correlation function like  $\langle O(0)O(R) \rangle$ , where  $O$  is some local operator, can be expanded perturbatively like:

$$\langle O(0)O(R) \rangle = \langle O(0)O(R) \rangle_0 + \langle S_I O(0)O(R) \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle S_I^2 O(0)O(R) \rangle_0 + \dots$$

where  $\langle \rangle_0$  means the expectation value taken with respect to the bare action and:

$$S_I = \int H_I(z) d^2 z = \int \sum_{c \neq d} g_{cd} \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z) d^2 z, \quad (6.3)$$

the interaction term.

## 6.2.2 Coulomb gas formulation

In order to compute the integrals involved in the calculus of correlations functions, we used the Coulomb-gas representation of a conformal field theory [194, 195]. In this representation, the central charge is written as  $c = \frac{1}{2} + \epsilon$ , where  $\epsilon$  will be used as a short distance regulator for the integrals involved in correlation functions calculations. In our calculations, we are obliged to introduce two UV regulators  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , since we mix two different minimal models. In addition, we also use an I.R. cut -off  $r$  which is useful to derive the RG equations. Then the limit  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  and a finite value for  $\epsilon_2$  corresponds to Ising models coupled to  $q$ -state Potts models. The integrals will thus be expressed as finite series in  $\epsilon_1, \epsilon_2$  with coefficients depending on  $r$ .

In the Coulomb gas representation, the central charge  $c$  will be characterized in the following by the parameter  $\alpha_+^2 = \frac{2p}{2p-1} = \frac{4}{3} + \epsilon$  with:

$$\begin{aligned} c = 1 - 24\alpha_0^2 \quad ; \quad \alpha_{\pm} &= \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 1}; \\ \alpha_+ \alpha_- &= -1. \end{aligned} \quad (6.4)$$

For the pure Ising model  $\alpha_+^2 = \frac{4}{3}$  and  $c = \frac{1}{2}$  while for the 3-states Potts model  $\alpha_+^2 = \frac{6}{5}$ ,  $c = \frac{4}{5}$  and  $\epsilon = -\frac{2}{15}$ . The 4-states Potts model can be considered as the limiting case of this perturbative scheme [205], it has  $c=1$  and  $\epsilon = -\frac{1}{3}$ . The vertex operators are defined by  $V_{nm}(x) = e^{i\alpha_{nm}\Phi(x)}$  where  $\Phi(x)$  is a free scalar field and the  $\alpha_{nm}$  are defined by:

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{2}(1-n)\alpha_- + \frac{1}{2}(1-m)\alpha_+. \quad (6.5)$$

The conformal dimension of the operator  $V_{nm}(x)$  is  $\Delta_{nm} = -\alpha_{\overline{nm}}\alpha_{nm}$  with:

$$\alpha_{\overline{nm}} = 2\alpha_0 - \alpha_{nm} = \frac{1}{2}(1+n)\alpha_- + \frac{1}{2}(1+m)\alpha_+. \quad (6.6)$$

The spin field  $\sigma$  can be represented by the vertex operator  $V_{p,p-1}$  whereas  $V_{1,2}$  corresponds to the energy operator  $\varepsilon$ . Note that in the Ising case the  $\sigma$  operator could also be represented by the  $V_{2,1}$ . Therefore, the spin operator can be represented in the general case (Ising or Potts) by  $V_{k,k-1}$  where  $k = \frac{2+3\lambda\epsilon}{1+3\epsilon}$ . We thus have  $\lambda = 2$  for  $V_{21}$  and  $\lambda = \frac{1}{2}$  for  $V_{p,p-1}$ . All these notations generalise in a straightforward way when we mix two minimal models since we introduce two UV regulators  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$ .

### 6.2.3 Renormalisation group equations

In this section, we deal with the renormalisation of the  $\sigma_i$  and  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ) operators. Nevertheless, we first need to compute the renormalisation of the couplings constants  $g_{ij}$ .

#### Beta functions

When we have only one coupling constant  $g_0$ , its renormalisation is determined directly by a perturbative computation.  $g$  is also given by the O.A. producing:

$$g_0 \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2z + \frac{1}{2} \left( g_0 \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2z \right)^2 + \dots = g \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2z, \quad (6.7)$$

with  $g = g_0 + A_2 g_0^2 + \dots$  where  $A_2$  comes from the contraction:

$$\frac{1}{2} \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2z \int \varepsilon_c(z) \varepsilon_d(z) d^2z = A_2 \int \varepsilon_a(z) \varepsilon_b(z) d^2z \quad (6.8)$$

This procedure generalizes to two loops and more. In this article, we restrict to two loops calculations.

All this formulation can be extended in a straightforward way to our case. We suppose that  $g_{cd} = g_1$  for  $c, d \in [1, M]$ ,  $g_{cd} = g_2$  for  $c, d \in [M+1, M+N]$  and finally  $g_{cd} = g_{12}$  for  $c \in [1..M], d \in [M+1, M+N]$  or vice versa. The technical details are explained in the appendix A. We find:

$$\begin{aligned} g_1(r) = & r^{-3\epsilon_1} \left( g_1^0 - 4\pi(M-2)(g_1^0)^2 \frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 4\pi N(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right. \\ & + 8\pi^2(M-2)(g_1^0)^3 \frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \left[ 1 + \frac{2(M-2)}{3\epsilon_1} \right] \\ & + 32\pi^2 N(M-2)g_1^0(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ \frac{1}{3\epsilon_1} + \frac{1}{3\epsilon_2} \right] \\ & \left. + 16\pi^2 N g_1^0(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_1} \right] + 16\pi^2 N(N-1)g_2^0(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-6\epsilon_2}}{9\epsilon_2^2} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$g_2(r) = r^{-3\epsilon_2} \left( g_2^0 - 4\pi(N-2)(g_2^0)^2 \frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} - 4\pi M(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +8\pi^2(N-2)(g_2^0)^3 \frac{r^{-6\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \left[ 1 + \frac{2(N-2)}{3\epsilon_2} \right] \\
& +32\pi^2 M(N-2)g_2^0(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ \frac{1}{3\epsilon_1} + \frac{1}{3\epsilon_2} \right] \\
& + 16\pi^2 M g_2^0(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_2} \right] + 16\pi^2 M(M-1)g_1^0(g_{12}^0)^2 \frac{r^{-6\epsilon_1}}{9\epsilon_1^2} \quad \Big)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}
g_{12}(r) = & r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left( g_{12}^0 - 4\pi(M-1)g_1^0g_{12}^0 \frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 4\pi(N-1)g_2^0g_{12}^0 \frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right. \\
& +4\pi^2(M-1)(g_1^0)^2g_{12}^0 \frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \left[ 1 + \frac{2(M-1)}{3\epsilon_1} \right] \\
& +4\pi^2(N-1)(g_2^0)^2g_{12}^0 \frac{r^{-6\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \left[ 1 + \frac{2(N-1)}{3\epsilon_2} \right] \\
& + 16\pi^2(N-1)(M-1)g_1^0g_2^0g_{12}^0 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ \frac{1}{3\epsilon_1} + \frac{1}{3\epsilon_2} \right] \\
& + 16\pi^2(N-1)(M-1)(g_{12}^0)^3 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ \frac{1}{3\epsilon_1} + \frac{1}{3\epsilon_2} \right] \\
& \left. + 8\pi^2(g_{12}^0)^3 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ M+N-2 + \frac{2(M-1)}{3\epsilon_1} + \frac{2(N-1)}{3\epsilon_2} \right] \right)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

We have multiplied each equations by a power of  $r$  in order to have dimensionless coupling constants  $g_i(r)$ . From these expressions, it is then easy to obtain the three beta functions associated to  $g_1, g_2, g_{12}$ . We obtain the following result:

$$\beta_1 = \frac{dg_1}{d(\ln l)} = \epsilon_1 g_1 + (M-2)g_1^2 + N g_{12}^2 - (M-2)g_1^3 - N g_1 g_{12}^2 + o(g^3), \tag{6.12}$$

$$\beta_2 = \frac{dg_2}{d(\ln l)} = \epsilon_2 g_2 + (N-2)g_2^2 + 4\pi M g_{12}^2 - (N-2)g_2^3 - M g_2 g_{12}^2 + o(g^3) \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{12} = \frac{dg_{12}}{d(\ln l)} = & \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} g_{12} + (M-1)g_1 g_{12} + (N-1)g_2 g_{12} - \frac{1}{2}(M+N-2)g_{12}^3 \\
& - \frac{1}{2}(M-1)g_1^2 g_{12} - \frac{1}{2}(N-1)g_2^2 g_{12} + o(g^3).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

In the above equations, we have made for simplicity the changements  $g \rightarrow 4\pi g$  and  $\epsilon_i \rightarrow -3\epsilon_i$ . If we consider the case of  $M$  Ising models coupled to  $N$  3-state Potts models, we take the limits  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  and  $\epsilon_2 \rightarrow \frac{2}{5}$ . The fixed point structure is studied in a further section.

### Renormalisation of $\varepsilon_i$

Under the action of the perturbation term, the operators  $\varepsilon_i$  will be renormalised into  $\varepsilon'_i$ . It means that we have to compute the  $2 \times 2$  matrix  $Z_\varepsilon$  defined by  $\tilde{\varepsilon}' = Z_\varepsilon \tilde{\varepsilon}$ , where

$\tilde{\varepsilon}'$  are two components vectors. Indeed, since the interaction term mixes different energy operators, the matrix  $Z_\varepsilon$  contains off-diagonal terms. In order to compute these matrix function, we add source terms to  $\tilde{\varepsilon}$  in the action, namely mass terms. Therefore, the renormalisation of the operator  $\tilde{\varepsilon}$  is equivalent to the renormalisation of the mass term  $\tilde{m}$  defined by:

$$\tilde{m} \tilde{E} = \tilde{m}^0 Z_\varepsilon \tilde{E}, \quad (6.15)$$

with

$$\tilde{E} = \left( \int \sum_{a=1}^M \varepsilon_1^a(z) d^2 z, \int \sum_{b=M+1}^{M+N} \varepsilon_2^b(z) d^2 z \right).$$

As for the computation of the beta functions, we can compute in perturbation the renormalisation of  $\tilde{m}$ . The details of the computation are presented in appendix B. We thus have:

$$\begin{aligned} m_1(r) r^{-1+\frac{3}{2}\varepsilon_1} &= m_1^0 \left( 1 - 4\pi(M-1)g_1^0 \frac{r^{-3\varepsilon_1}}{3\varepsilon_1} + 4\pi^2(M-1)(g_1^0)^2 \frac{r^{-6\varepsilon_1}}{3\varepsilon_1} \left[ 1 + \frac{4M-6}{3\varepsilon_1} \right] \right. \\ &\quad \left. + 8\pi^2 N (g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \left[ 1 + \frac{2M}{3\varepsilon_1} + \frac{2(M-1)}{3\varepsilon_2} \right] \right) \\ &\quad + m_2^0 \left( -4\pi N g_{12}^0 \frac{r^{-3\varepsilon_2}}{3\varepsilon_2} + 8\pi^2 N (M-1) g_1^0 g_{12}^0 \frac{r^{-3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{9\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right. \\ &\quad \left. + 8\pi^2 N(N-1) g_2^0 g_{12}^0 \frac{r^{-6\varepsilon_2}}{9\varepsilon_2^2} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} m_2(r) r^{-1+\frac{3}{2}\varepsilon_2} &= m_2^0 \left( 1 - 4\pi(N-1)g_2^0 \frac{r^{-3\varepsilon_2}}{3\varepsilon_2} + 4\pi^2(N-1)(g_2^0)^2 \frac{r^{-6\varepsilon_2}}{3\varepsilon_2} \left[ 1 + \frac{4N-6}{3\varepsilon_2} \right] \right. \\ &\quad \left. + 8\pi^2 M (g_{12}^0)^2 \frac{r^{-3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \left[ 1 + \frac{2N}{3\varepsilon_2} + \frac{2(N-1)}{3\varepsilon_1} \right] \right) \\ &\quad + m_1^0 \left( -4\pi M g_{12}^0 \frac{r^{-3\varepsilon_1}}{3\varepsilon_1} + 8\pi^2 M(N-1) g_2^0 g_{12}^0 \frac{r^{-3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{9\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right. \\ &\quad \left. + 8\pi^2 M(M-1) g_1^0 g_{12}^0 \frac{r^{-6\varepsilon_1}}{9\varepsilon_1^2} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Here again, we have multiplied the two renormalised masses by a power of  $r$  in order to obtain a dimensionless coupling constant. From these equations and the renormalisations of the coupling constants (6.9,6.10,6.11), we obtain the RG equations at two loops associated with the matrix  $Z_\varepsilon$  (we have again used the normalisations  $g \rightarrow 4\pi g$ ):

$$\frac{d \log(Z_\varepsilon)}{\log(r)} = \begin{pmatrix} (M-1)g_1 - \frac{1}{2}(M-1)g_1^2 - \frac{1}{2}N g_{12}^2 & N g_{12} \\ M g_{12} & (N-1)g_1 - \frac{1}{2}(M-1)g_1^2 - \frac{1}{2}M g_{12}^2 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

The logarithm of the matrix has been defined by its series expansion. We clearly see that both energy operators of the two models are mixed under the perturbation term. Therefore, the bare operators  $\varepsilon_i$  are not the true energy eigen-operators of the problem.

### Renormalisation of $\sigma_i$

In a similar way, the spin operators  $\sigma_i$  will be renormalised in  $\sigma'_i$ . We can thus define the fonctions  $Z_{\sigma_1}$ ,  $Z_{\sigma_2}$  by  $\sigma'_i = Z_{\sigma_i}\sigma_i$  with  $i = 1, 2$  (the interaction term does not mix the spin operators). A convenient way to compute these functions is to introduce two magnetic field  $h_i^0$  which couple to the spins  $\sigma_i$ . Then, we have to calculate the effect of the perturbation term  $\sum_{c,d} g_{cd} \int d^2z \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z)$  on the coupling terms  $\sum_{i=1,2} h_i^0 \sum_{a_i=1}^{M+N} \sigma_i^{a_i}(z) d^2z$ . More precisely, the corrections to the spin operators will come from the operator algebra between the  $\varepsilon$  and  $\sigma$  operators. Therefore, as in the previous subsections, we can compute these corrections perturbatively in power of  $g_{ij}$  up to third order. The computation is detailed in the appendix C. We find:

$$\begin{aligned}
h_1(r)r^{-\frac{15}{8}-a(\varepsilon_1)} &= h_1^0 \left( 1 + (M-1)(g_1^0)^2 \pi^2 \frac{r^{-6\varepsilon_1}}{2} \left[ 1 + \frac{4}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right] \right. \\
&\quad + \frac{3N}{2}(g_{12}^0)^2 \pi^2 \frac{r^{-3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \left[ \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \left( 1 + \frac{8}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right) \right] \\
&\quad - 12(M-1)(M-2)(g_1^0)^3 \pi^3 \frac{r^{-9\varepsilon_1}}{9\varepsilon_1} \left[ 1 + \frac{8}{9}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right] \\
&\quad - 8N(N-1)\pi^3 (g_{12}^0)^2 (g_2^0) \frac{r^{-3\varepsilon_1-6\varepsilon_2}}{3\varepsilon_1+6\varepsilon_2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2} \left( 1 + \frac{8}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right) \right] \\
&\quad - 8N(M-1)\pi^3 (g_{12}^0)^2 g_1^0 \frac{r^{-6\varepsilon_1-3\varepsilon_2}}{6\varepsilon_1+3\varepsilon_2} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left( 1 + \frac{4}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \right] \left. \right), \tag{6.19}
\end{aligned}$$

and in a similar way by exchanging  $(1, M) \leftrightarrow (2, N)$ :

$$\begin{aligned}
h_2(r)r^{-\frac{15}{8}-a(\varepsilon_2)} &= h_2^0 \left( 1 + (N-1)(g_2^0)^2 \pi^2 \frac{r^{-6\varepsilon_2}}{2} \left[ 1 + \frac{4}{3}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right] \right. \\
&\quad + \frac{3M}{2}(g_{12}^0)^2 \pi^2 \frac{r^{-3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{3(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \left[ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left( 1 + \frac{8}{3}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right) \right] \\
&\quad - 12(N-1)(N-2)(g_2^0)^3 \pi^3 \frac{r^{-9\varepsilon_2}}{9\varepsilon_2} \left[ 1 + \frac{8}{9}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right] \\
&\quad - 8M(M-1)\pi^3 (g_{12}^0)^2 (g_1^0) \frac{r^{-6\varepsilon_1-3\varepsilon_2}}{6\varepsilon_1+3\varepsilon_2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1} \left( 1 + \frac{8}{3}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right) \right] \\
&\quad - 8M(N-1)\pi^3 (g_{12}^0)^2 g_2^0 \frac{r^{-3\varepsilon_1-6\varepsilon_2}}{3\varepsilon_1+6\varepsilon_2} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \left( 1 + \frac{4}{3}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \right] \left. \right), \tag{6.20}
\end{aligned}$$

where we have defined:

$$\mathcal{R} = \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})}.$$

As usual, the multiplicative term  $r^{-\frac{15}{8}-a(\epsilon_i)}$  in front of  $h_i(r)$  is introduced in order to deal with dimensionless parameters. The function  $a(\epsilon_i)$  is a function of  $\epsilon_i$  depending on which representation of the spin field we take in the Coulomb gas picture (see section 2.2). Now, we deduce from the above equations and from (6.9,6.10,6.11), the RG equations associated to  $Z_{\sigma_1}$ ,  $Z_{\sigma_2}$  (with  $\epsilon_i \rightarrow -3\epsilon_i$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d \log(Z_{\sigma_1})}{d \log(r)} &= (M-1)g_1^2(r)\pi^2\epsilon_1 \left[ 1 + \frac{4}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right] \\ &+ N g_{12}^2(r) \frac{\pi^2}{2} \left[ \epsilon_2 + \epsilon_1 \left( 1 + \frac{8}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R} \right) \right] \\ &+ 4(M-1)(M-2)\pi^3 g_1^3(r) + 4N(N-1)\pi^3 g_{12}^2(r)g_2(r) \quad (6.21) \\ &+ 4N(M-1)\pi^3 g_{12}^2(r)g_1(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d \log(Z_{\sigma_2})}{d \log(r)} &= (N-1)g_2^2(r)\pi^2\epsilon_2 \left[ 1 + \frac{4}{3}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right] \\ &+ M g_{12}^2(r) \frac{\pi^2}{2} \left[ \epsilon_1 + \epsilon_2 \left( 1 + \frac{8}{3}(2-\lambda_2)\mathcal{R} \right) \right] \\ &+ 4(N-1)(N-2)\pi^3 g_1^3(r) + 4M(M-1)\pi^3 g_{12}^2(r)g_1(r) \quad (6.22) \\ &+ 4M(N-1)\pi^3 g_{12}^2(r)g_2(r) \end{aligned}$$

## 6.2.4 Fixed point structure

In this section, we analyse the fixed points structure associated with the beta functions defined in (6.12-6.14). We focus in this paper on the case of Ising models coupled to 3 or 4-states Potts models. Indeed, the 3-state Potts model corresponds to  $\epsilon = \frac{2}{5}$  in our reduced normalisation whereas the 4-state Potts model corresponds to  $\epsilon = 1$ . One can wonder about the validity of the perturbation expansion for the latter case. In fact, the beta functions have still fixed points order by order. And surprisingly, the approximation still remains quite good qualitatively. For example, if we compare the magnetic exponent of the disordered 4-state Potts model predicted by the theory with numerical results, we find an error less than 5% [207, 208].

We now take the limit  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  and  $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon$  in the equations (6.12-6.14). They reduce to:

$$\beta_1 = \frac{dg_1}{d(\ln l)} = (M-2)g_1^2 + N g_{12}^2 - (M-2)g_1^3 - N g_1 g_{12}^2,$$

$$\begin{aligned}\beta_2 = \frac{dg_2}{d(\ln l)} &= \epsilon g_2 + (N-2) g_2^2 + 4\pi M g_{12}^2 - (N-2) g_2^3 - M g_2 g_{12}^2, \\ \beta_{12} = \frac{dg_{12}}{d(\ln l)} &= \frac{\epsilon}{2} g_{12} + (M-1) g_1 g_{12} + (N-1) g_2 g_{12} - \frac{1}{2}(M+N-2) g_{12}^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}(M-1) g_1^2 g_{12} - \frac{1}{2}(N-1) g_2^2 g_{12}.\end{aligned}\quad (6.23)$$

We consider in the following different peculiar values of  $(M, N)$ .

### Case $M = 1$

It corresponds to one Ising model coupled to one or several Potts model.

• Let us first analyse the case of one Ising model couple to one  $q$ -state Potts model. Then, the equation (6.14) reduces to

$$\beta_{12} = \frac{dg_{12}}{d(\ln l)} = \frac{\epsilon}{2} g_{12} + o(g_{12}^3) \quad (6.24)$$

We clearly see that the system is then driven in a strong coupling regime indicating probably a first order transition though a non-perturbative fixed point cannot be ruled out. A similar situation has been encountered when one couple two  $q$ -state Potts model [210]. Moreover, in the latter case, it can be proved exactly that we have a mass gap generation [209]. Consequently, when one superposes a critical Ising model to a critical 3 or 4 states potts model, no new critical behaviour is found in perturbation when coupling both models by their energy density. Of course, new non-perturbative fixed points cannot be excluded by this method. Therefore, It suggests (perturbatively) that no line with simultaneous disordering of the Ising and Potts order parameter survives in the phase diagram of this model contrary to those of the FFX model [129]. Similar conclusions can be drawn with two different Potts models.

• We now consider the case of one Ising model coupled to  $N > 1$  Potts models. We take  $M = 1$  in the equations (6.23). We find the following fixed points:

$$g_1^* = g_2^* = g_{12}^* = 0 \quad (6.25)$$

$$g_1^* = g_{12}^* = 0; \quad g_2^* = \frac{-\epsilon}{(N-2)} + \frac{\epsilon^2}{(N-2)^2} \quad \text{if } n > 2 \quad (6.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1^* = \frac{\epsilon\tau_1 N}{2(N-1)} - \frac{\tau_1 \epsilon^2 (3N-1)}{8(N-1)^2} \\ g_2^* = \frac{-\epsilon}{2(N-1)} + \frac{(N+1)\epsilon^2}{8(N-1)^2} \\ g_{12}^* = \frac{\epsilon\tau_2 \sqrt{N}}{2(N-1)} - \frac{\tau_2 \epsilon^2 (3N-1)}{8\sqrt{N}(N-1)^2} \end{array} \right. \quad (6.27)$$

with  $\tau_1, \tau_2 = \pm 1$ . There are four new fixed points (6.27). We can study the stability of each of these fixed points by re-expressing the solutions of (6.23) around these fixed points.



Namely, we write  $g_i = g_i^* + \delta g_i$  and keep the smallest order in  $\epsilon$ . This gives a linear system  $\delta \dot{g} = A \delta g$ , with  $\delta g$  a three component vector and  $A$  a real  $3 \times 3$  matrix. Therefore, the informations about the stability of each fixed points is obtained by calculating the eigenvalues of  $A$  in each cases. By the way, we can see that the trivial fixed point (6.25) is unstable, and that (6.26) is stable in the  $(g_2, g_{12})$  plane and marginal in the  $g_1$  direction. It corresponds to the infrared fixed point of  $N$  coupled Potts models. Concerning the other four fixed points (6.27), two are unstable in two directions (when  $\tau_1 = -1$ ) and the order two ( $\tau_1 = +1$ ) are hyperbolic fixed points, namely unstable only in one direction. They constitute new tricritical points. The local stable plane is defined by the vectors

$$(1, 0, 0) ; \left( 0, \frac{\tau_2 \sqrt{2n(n-1) + 1} - 1}{\sqrt{n}(n-1)}, 1 \right)$$

in the  $(g_1, g_2, g_{12})$  space. A projection of the flow in the  $(g_{12}, g_2)$  plane has been given in Figure 6.1 for the case  $N = 3$ .

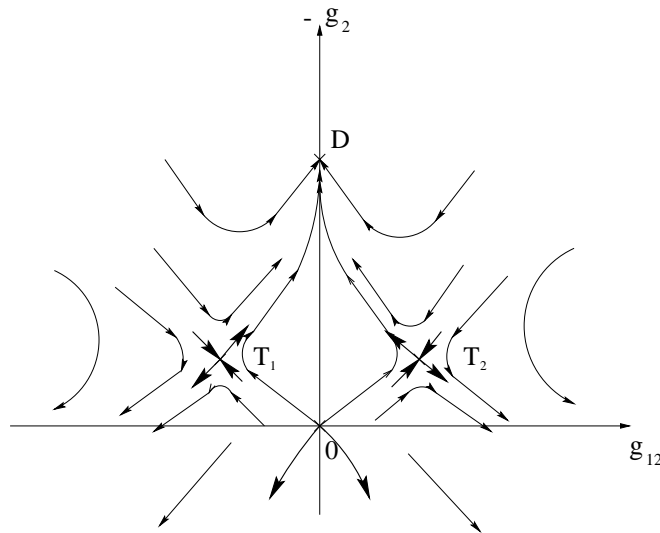


FIG. 6.1 - *The projection of the flow in the  $(g_{12}, g_2)$  plane for one Ising model coupled to three Potts models. Two new tricritical points denoted by  $T_1, T_2$  are found.*

The flow is symmetric along the  $g_2$  axis. If initially  $g_2^0 > 0$  then the flow is always driven in a strong coupling regime indicating mass generation as for the simple  $N$ -colored Potts model [210]. Nevertheless, if  $g_2^0 < 0$  and small, the trajectory will be first attracted by one of the tricritical points  $T_1$  or  $T_2$  (depending on the sign of  $g_{12}^0$ ) and then flow toward the stable fixed point of the  $N$ -colored Potts model. The case  $N = 2$  is quite different since the fixed point (6.26) is rejected to the infinity, therefore the system always flow in a strong coupling regime except on the stable surface in the  $(g_1, g_2, g_{12})$  space. It is a reminiscence of the exactly integrable 2-colored Potts model which is always massive [209].

If we consider the case of one 3-state Potts model coupled to  $N$  4-state models, we can derive exactly similar conclusions. The four tricritical points are now defined by (at first order in  $\epsilon_1, \epsilon_2$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1^* = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_1 + \tau_1 \sqrt{\epsilon_1^2 + \frac{N}{(N-1)^2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) (N(\epsilon_2 - \epsilon_1) + 2\epsilon_1)} \right] \\ g_2^* = \frac{-(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2(N-1)} \\ g_{12}^* = \frac{\tau_2}{2(N-1)} \sqrt{(\epsilon_1 + \epsilon_2) (N(\epsilon_2 - \epsilon_1) + 2\epsilon_1)} \end{array} \right. \quad (6.28)$$

We find a similar structure of fixed points as the previous case, namely two are stable in one direction, two are stable in two directions.

In order to better characterise these fixed points, we can compute the corrections to the critical exponents of the pure case. The energy operators are completely mixed at the tricritical points and are therefore not the most appropriate variables, especially for a numerical simulation. Nevertheless, we can compute the renormalisation of the critical exponents of the spin-spin correlation functions. Hence, we use the Callan-Symanzik equations which give the form of the correlation functions. For one coupling constant  $g$ , we have:

$$\langle \sigma_i(0) \sigma_i(sL) \rangle_{a, g_0} = e^{2 \int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_{\sigma_i}(g)}{\beta(g)} dg} s^{-2\Delta_{\sigma_i}} \langle \sigma_i(0) \sigma_i(L) \rangle_{r, g(s)} \quad (6.29)$$

where we used the notation:  $\frac{d \ln(Z_\sigma)}{d \ln(r)} = \gamma_\sigma(g)$ ;  $g(a) = g_0$  and  $g(s)$  is defined by

$$\int_{g_0}^{g(s)} \beta(g) dg = \log(s) \quad ; \quad r = sa,$$

with  $a$  the lattice cut-off scale.  $L$  is an arbitrary scale which can be fixed to one lattice spacing  $a$  of a true statistical model. The dependence in  $s$  of the term  $\langle \sigma_i(0) \sigma_i(L) \rangle_{r, g(s)}$  is thus negligible and can be considered as a constant. We want to compute the corrections to the critical exponents close to the infrared tricritical points defined in (6.27). Hence, the integral is dominated by the region  $g \sim g^*$  and we have  $\int_{g_0}^{g(s)} \frac{\gamma_\sigma(g)}{\beta(g)} dg \sim \gamma_s(g^*) \log(s)$ . We thus obtain:

$$\langle \sigma(0) \sigma(s) \rangle_{g_0} \sim s^{-(2\Delta_\sigma - 2\gamma_\sigma(g^*))} \quad (6.30)$$

Therefore,  $-2\gamma_{\sigma_i}(g^*)$  corresponds to the correction of the magnetic critical exponent of the operator  $\sigma_i$ . Using the equations (6.21, 6.22) with  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon$ ,  $M = 1$ , we find:

$$\gamma_{\sigma_1}(g^*) = N \frac{\pi^2}{2} \epsilon (g_{12}^*)^2 + 4N(N-1) \pi^3 (g_{12}^*)^2 g_2^* = 0 + O(\epsilon^4) \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\sigma_2}(g^*) &= (N-1)(g_2^*)^2\pi^2\epsilon[1+2\mathcal{R}] + (g_{12}^*)^2\frac{\pi^2}{2}\epsilon[1+4\mathcal{R}] \\
&\quad + 4(N-1)(N-2)\pi^3(g_2^*)^3 + 4(N-1)\pi^3(g_{12}^*)^2g_2^* \\
&= \frac{N\epsilon^3}{128(N-1)^2} + \frac{(2N-1)\epsilon^3}{32(N-1)^2}\mathcal{R} + O(\epsilon^4),
\end{aligned} \tag{6.32}$$

with  $\epsilon = \frac{2}{5}$  for the 3-state Potts model and  $\epsilon = 1$  for the 4-state Potts model. We thus find the surprising result that there is no renormalisation of the critical exponent  $\Delta_{\sigma_1}$  associated to the Ising spin at third order in  $\epsilon$ ! Yet, the corrections to  $\Delta_{\sigma_2}$  are non zero and different from those of the infrared fixed point of  $N$  coupled Potts models [210]. Therefore, it seems that the physics at these tricritical points is non-trivial. It should be interesting to analyse and test numerically these predictions despite the corrections to the magnetization are very small. Before considering the other cases, we mention one remark. Suppose we have a theory described by one of the tricritical fixed points  $T_i$ ,  $i = 1, 2$  (see Figure 6.1), then a small perturbation can send the flow to the fixed point  $D$  characterized by decoupled Potts and Ising models. The central charge at this point  $c_D$  is thus the sum of the central charges of each model. Therefore according to Zamolodchikov c-theorem [139, 140], the central charge at  $T_i$  ( $c_{T_i}$ ) verifies  $c_{T_i} \geq c_D$ . A similar scenario could be imagined for the FFX model with a new tricritical point inducing a strong cross-over regime. Such a scenario would justify strong finite size effects and  $c_{FFX} > \frac{3}{2}$  as it has been established numerically [111, 127, 129, 121].

### Case $M > 1$

We analyse in this subsection different peculiar cases and the general one.

- Let first begin with  $M = 2, N = 1$ . The RG equations reduce in this case to:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{dg_1}{d(\ln l)} = g_{12}^2 - g_1g_{12}^2 \\
\beta_2 &= \frac{dg_2}{d(\ln l)} = \epsilon g_2 - g_2^2 + 2g_{12}^2 + g_2^3 - 2g_2g_{12}^2 \\
\beta_{12} &= \frac{dg_{12}}{d(\ln l)} = \frac{\epsilon}{2}g_{12} + g_1g_{12} - \frac{1}{2}g_{12}^3 - \frac{1}{2}g_1^2g_{12}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

The fixed points are:

$$g_1^* = ? ; g_2^* = \begin{cases} \epsilon + \epsilon^2 \\ 0 \end{cases} ; g_{12}^* = 0 \tag{6.34}$$

We recover the line of fixed point parametrised by  $g_1^*$  which corresponds to the Ashkin-Teller model [246]. We can study (perturbatively) the stability of this line of fixed

point especially according to the variable  $g_{12}$  (around  $g_2^* = \epsilon + \epsilon^2$  corresponding to the fixed point of the Potts model). We have

$$\frac{d\delta g_{12}}{\log l} = \left(\frac{\epsilon}{2} + g_1^* - \frac{1}{2}(g_1^*)^2\right)\delta g_{12} \quad (6.35)$$

We thus see that the line of fixed point is stable only for  $g_1^* < -\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{8}$ . We have drawn on Figure 6.2 a schematic representation of the flow in the  $(g_1, g_{12})$  plane).

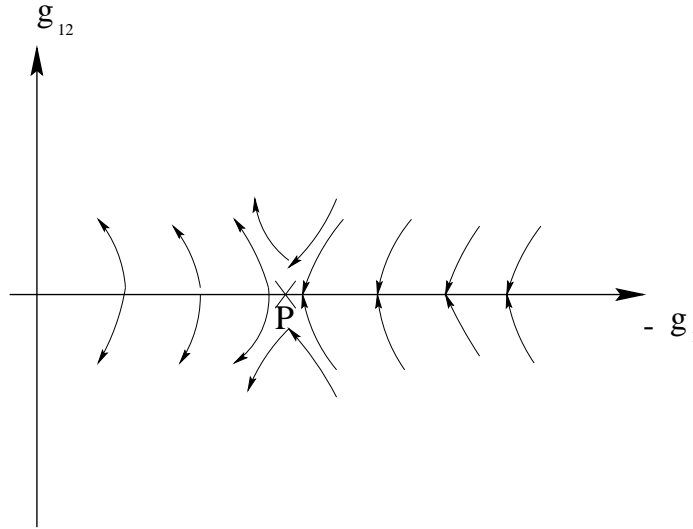


FIG. 6.2 - The projection of the flow in the  $(g_1, g_{12})$  plane for two Ising models coupled to a Potts model. The point  $P$  separates the fixed point line  $g_1$  in stable and unstable parts.

The point  $P(g_1^* = -\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{8}; g_2^* = \epsilon + \epsilon^2; g_{12}^* = 0)$  separates the line parametrized by  $g_1^*$  in two parts, a stable one and an unstable one. At the fixed point  $P$ , we can compute the corrections to the spin and energy critical exponents. We find on one hand no correction to the Ising magnetization and on the other hand:

$$2\Delta'_{\epsilon_1}(P) = 2\Delta_\epsilon - \gamma_{\epsilon_1}(P) = 2\Delta_{\epsilon_1} + \epsilon + o(\epsilon^2).$$

This result may be checked numerically.

- If we now consider the case  $M = 2, N = 2$ , we can draw similar conclusions than the previous case except that the fixed point  $g_2^* = \epsilon + \epsilon^2$  has disappeared and the line parametrized by  $g_1^*$  is therefore unstable in the  $g_2$  direction.

- The case  $M = 2, N > 2$  can be studied in a similar way. We find the following fixed point:

$$g_1^* = ? ; g_2^* = \begin{cases} \frac{-\epsilon}{N-2} + \frac{\epsilon^2}{(N-2)^2} \\ 0 \end{cases} ; g_{12}^* = 0 \quad (6.36)$$

The value  $g_2^* = \frac{-\epsilon}{N-2} + \frac{\epsilon^2}{(N-2)^2}$  corresponds to the fixed point of the  $N$  colored Potts model [205, 206]. We can show that the latter is stable for  $g_2^0 < 0$  otherwise we have a strong coupling regime indicating probably mass generation. We recover the Ashkin-Teller fixed line which is stable for  $g_1 < 0$  independently of  $g_{12}$ .

- Finally, if we consider the case  $M > 2$ . We find the fixed points  $g_1^* = g_{12}^* = 0$ . The value of  $g_2^*$  depends on the value of  $N$  we consider.

When we consider only one Potts model, we find that  $g_{12}^* = 0$  is unstable whereas  $g_1^* = 0$  is stable for  $g_1^0 < 0$ .

For  $N = 2$ , the only fixed point is the trivial and unstable one. Therefore, the flow is always driven in a strong coupling regime.

For  $N > 2$ , it depends on the initial conditions we consider. For  $g_1^0 < 0$  and  $g_2^0 < 0$  the fixed points  $g_1^* = 0$ ;  $g_2^* = \frac{-\epsilon}{N-2} + \frac{\epsilon^2}{(N-2)^2}$ ;  $g_{12}^* = 0$  is stable. Nevertheless, the situation is uninteresting because the Ising and Potts models are completely decorrelated in the infrared limit.

We have thus studied in this general section the critical behavior of  $M$  Ising models and  $N$  Potts model coupled each other by their energy density. New non-trivial situations have been exhibited for  $M = 1$  and  $M = 2$ . We refer to the Figures 6.16.2. The case of one Ising model coupled to several potts models is interesting in so far as it could offer a possible scenario for the puzzling physics of the Ising-XY model [129, 135].

We have also seen that in many cases, the flow is driven in a strong coupling regime (it often depends on initial conditions). It should be interesting to analyse the effects of weak disorder on such systems in order to test the Imry-Wortis arguments. It will be the matter of the next section.

## 6.3 Coupled minimal models with disorder

In this section, we analyse the effects of weak disorder on the previous systems, namely  $M$   $q_1$ -state Potts models coupled to  $N$   $q_2$ -state Potts models, with  $q_1, q_2 \in \{2, 3, 4\}$ . We will pay special attention to the case  $q_1 = 2$ ;  $q_2 = 3$ .

### 6.3.1 The model

The Hamiltonian of the pure system have the following form (see also (6.1))

$$H = \sum_{a=1}^M H_1^a + \sum_{b=M+1}^{M+N} H_2^b - \sum_{c,d} g_{cd} \int d^2z \varepsilon^c(z) \varepsilon^d(z)$$

$$+m_1 \sum_{a=1}^M \int d^2x \varepsilon_1^a + m_2 \sum_{b=M+1}^{M+N} \int d^2x \varepsilon_2^b \quad (6.37)$$

The masses  $m_i$  correspond to the reduced temperatures. The addition of a position dependent random coupling constant is equivalent to consider position dependent random mass terms  $m_i \rightarrow m_i(x)$  with  $\overline{m_i(x)} = m_i$  and  $\overline{m_i(x)m_j(y)} = \Delta_{ij}\delta(x-y)$ .  $\Delta_{ij}$  represents the  $2 \times 2$  symmetric covariance matrix whose elements are strictly positive as it should be. If we have considered a diagonal covariance matrix corresponding to independent disorders for each models, then  $\Delta_{12}$  would have been generated by the R.G. equations. We then apply the replicated method by introducing  $n$  copies of the system and averaging Gaussian distributions for  $m_i(x)$ . We finally obtain the sum of  $nM$   $q_1$  and  $nN$   $q_2$ -state Potts models coupled by their energy densities. The Hamiltonian can be written as:

$$H = H_1 + H_2 - \int d^2x \sum_{i,j} g_{ij} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \varepsilon_i^{a,\alpha} \varepsilon_j^{b,\alpha} - \int d^2x \sum_{i,j} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \Delta_{ij}^{a,\alpha;b,\beta} \varepsilon_i^{a,\alpha} \varepsilon_j^{b,\beta}, \quad (6.38)$$

where  $i, j = 1, 2$ ,  $a, b$  runs from 1 to  $M + N$  depending on the values taken by the lower indices  $i, j$  and finally  $\alpha, \beta$  run from 1 to  $n$ . We consider in the following the replica symmetry scheme. Moreover, a recent work on the random bond Potts model has been performed in order to test the replica symmetry breaking in [261]. The results so obtained are in favor of a non replica symmetry breaking scenario. The hamiltonian (6.38) has therefore six coupling constants  $g_1 = g_{11}$ ,  $g_2 = g_{22}$ ,  $g_{12} = g_{21}$  and  $\Delta_1 = \Delta_{11}^{a,\alpha;b,\beta}$ ,  $\Delta_2 = \Delta_{22}^{a,\alpha;b,\beta}$ ,  $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta_{12}^{a,\alpha;b,\beta}$ . It is therefore a generalisation of the study of  $N$  Ising or Potts models with disorder [246] [210].

### 6.3.2 Beta functions

As the model we consider has six coupling constants, we have six beta functions. We have shown in appendix D how can we obtain them for  $M = N = 1$ . Th general case goes along the same line but is much more lengthy. Taking directly the replica limit  $n \rightarrow 0$ , we obtain:

$$\begin{aligned} \beta_{g_1} \equiv \frac{dg_1}{d \ln l} &= \epsilon_1 g_1 + (M-2)g_1^2 - 2g_1 \Delta_1 + N g_{12}^2 \\ &\quad + 4\Delta_1^2 g_1 - (2M-5)\Delta_1 g_1^2 - (M-2)g_1^3 - N g_1 g_{12}^2 - 2N g_1 g_{12} \Delta_{12} \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\Delta_1} \equiv \frac{d\Delta_1}{d \ln l} &= \epsilon_1 \Delta_1 - 2\Delta_1^2 + 2(M-1)\Delta_1 g_1 + 2N g_{12} \Delta_{12} \\ &\quad + 2\Delta_1^3 - (M-1)g_1 \Delta_1 (2\Delta_1 + g_1) - N g_{12} \Delta_1 (2\Delta_{12} + g_{12}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\beta_{g_2} \equiv \frac{dg_2}{d \ln l} = \epsilon_2 g_2 + (N-2)g_2^2 - 2g_2 \Delta_2 + M g_{12}^2$$

$$+4\Delta_2^2 g_2 - (2N - 5)\Delta_2 g_2^2 - (N - 2)g_2^3 - M g_2 g_{12}^2 - 2M g_2 g_{12} \Delta_{12} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\Delta_2} \equiv \frac{d\Delta_2}{d \ln l} &= \epsilon_2 \Delta_2 - 2\Delta_2^2 + 2(N - 1)\Delta_2 g_2 + 2M g_{12} \Delta_{12} \\ &+ 2\Delta_2^3 - (N - 1)g_2 \Delta_2 (2\Delta_2 + g_2) - M g_{12} \Delta_2 (2\Delta_{12} + g_{12}) \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \beta_{g_{12}} \equiv \frac{dg_{12}}{d \ln l} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} g_{12} + (M - 1)g_1 g_{12} + (N - 1)g_2 g_{12} - g_{12}(\Delta_1 + \Delta_2) \\ &- \frac{1}{2}(M + N - 2)g_{12}^3 - \frac{1}{2}(M - 1)g_{12} g_1^2 - \frac{1}{2}g_{12} g_2^2 + \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)g_{12} \\ &+ 3\Delta_{12}^2 g_{12} - (M + N - 3)\Delta_{12} g_{12}^2 - (M - 1)g_1 \Delta_1 g_{12} - (N - 1)g_2 \Delta_2 g_{12} \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\Delta_{12}} \equiv \frac{d\Delta_{12}}{d \ln l} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \Delta_{12} - \Delta_{12}(\Delta_{11} + \Delta_{22}) + (M - 1)g_1 \Delta_{12} + (N - 1)g_2 \Delta_{12} \\ &+ M g_{12} \Delta_1 + N g_{12} \Delta_2 + \Delta_{12}^3 + \frac{1}{2}\Delta_{12}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) - \frac{1}{2}(M - 1)g_1 \Delta_{12} (2\Delta_1 + g_1) \\ &- \frac{1}{2}(N - 1)g_2 \Delta_{12} (2\Delta_2 + g_2) - \frac{1}{2}(M + N)\Delta_{12} g_{12} (2\Delta_{12} + g_{12}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Notice that we recover the results of Pujol [210] by taking in these equations the limit  $g_{12} = \Delta_{12} \rightarrow 0$ . We now want to exploit these equations in order to analyse the fixed point structure in some peculiar cases and in the general one.

### 6.3.3 Study of the fixed point structure

We first consider some peculiar values of  $M$  and  $N$ . The most simple non trivial case consists in coupling one  $q_1$ -state to a  $q_2$  state Potts model under disorder [250].

**Case  $M = N = 1$**

In this case, the beta functions (6.39-6.44) reduce to:

$$\begin{aligned} \beta_{g_{12}} \equiv \frac{dg_{12}}{d \ln l} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} g_{12} - g_{12}(\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{1}{2}g_{12}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + 3\Delta_{12}^2 g_{12} + \Delta_{12} g_{12}^2 \\ \beta_{\Delta_1} \equiv \frac{d\Delta_1}{d \ln l} &= \epsilon_1 \Delta_1 - 2\Delta_1^2 + 2g_{12} \Delta_{12} + 2\Delta_1^3 - 2\Delta_1 \Delta_{12} g_{12} - \Delta_1 g_{12}^2 \\ \beta_{\Delta_2} \equiv \frac{d\Delta_2}{d \ln l} &= \epsilon_2 \Delta_2 - 2\Delta_2^2 + 2g_{12} \Delta_{12} + 2\Delta_2^3 - 2\Delta_2 \Delta_{12} g_{12} - \Delta_2 g_{12}^2 \\ \beta_{\Delta_{12}} \equiv \frac{d\Delta_{12}}{d \ln l} &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \Delta_{12} + g_{12}(\Delta_1 + \Delta_2) - \Delta_{12}(\Delta_1 + \Delta_2) \\ &+ \Delta_{12} \left[ \frac{1}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2) + \Delta_{12}^2 - 2\Delta_{12} g_{12} - g_{12}^2 \right] \end{aligned} \quad (6.45)$$

When we consider one Ising model coupled to a 3 or 4-state Potts model, we take the limit  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  and  $\epsilon_2 = \epsilon$ , we find the following fixed points:

$$g_{12}^* = 0 \quad ; \quad \Delta_1^* = \Delta_2^* = \Delta_{12}^* = 0 \quad (6.46)$$

$$g_{12}^* = 0; \Delta_1^* = 0; \Delta_2^* = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} + o(\epsilon^2); \Delta_{12}^* = 0 + o(\epsilon) \quad (6.47)$$

$$g_{12}^* = 0; \Delta_1^* = 0; \Delta_2^* = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} + o(\epsilon^2); \Delta_{12}^* = \frac{\sqrt{2}\epsilon}{4} + o(\epsilon) \quad (6.48)$$

The first one is trivial and unstable. The second one corresponds to a perfect decoupling of the disordered Ising and Potts models (6.47) and we obtain a new fixed point mixing *a priori* both models. Let us notice that  $\Delta_{12}^*$  is undetermined at one and two loop calculations just enable to compute the first order in  $\epsilon$ . When one considers a 3–state coupled to a 4–state Potts model, we only find the fixed points (6.46), (6.47).

In order to study the stability of each of these fixed points, we re-express the systems (6.45) around the above solutions. Therefore, we write  $g_{12} = g_{12}^* + \delta g_{12}$ ;  $\Delta_i = \Delta_i^* + \delta \Delta_i$  and keep only the smallest order in  $\epsilon$ . We thus obtain a linear system  $\delta \dot{X} = AX$  with  $X = (\delta \Delta_1, \delta \Delta_2, \delta \Delta_{12}, \delta g_{12})$ . All the information concerning the stability is contained in the matrix  $A$ . We can thus see that (6.46) and (6.48) are unstable, and that (6.47) is stable. We have represented in Figure 6.3, the projection on the flow in the  $(g_{12}, \Delta_{12})$  plane for two different initial conditions (points  $A_0$  and  $B_0$ ).

We clearly see that the flow first try to go away and then is driven by disorder at the origin corresponding to a perfect decoupling of the models. As it has been already noticed in [246], such a flow is unusual because it violates the  $c$ –theorem [139, 140]. This example constitutes a new example of first order transition driven by randomness in a second order one (see Figure 6.3) and moreover, the models factorize.

Another interesting case concerns the limit  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$  which corresponds to two Potts models. We have therefore  $g_{12} = g$ ,  $\Delta_1 = \Delta_{12} = \Delta_2 = \Delta$  and the flow reduces to:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d \log l} &= \epsilon g - 2g\Delta + g^2\Delta + 4g\Delta^2 \\ \frac{d\Delta}{d \log l} &= \epsilon\Delta - 2\Delta^2 + 2\Delta g + 2\Delta^3 - g^2\Delta - 2\Delta^2 g \end{aligned} \quad (6.49)$$

We recover the equations introduced by Pujol [210]. There are three fixed points:

$$g = 0 \quad ; \quad \Delta = 0 \quad (6.50)$$

the trivial one, and

$$g = 0 \quad ; \quad \Delta = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{4} + O(\epsilon^3) \quad (6.51)$$



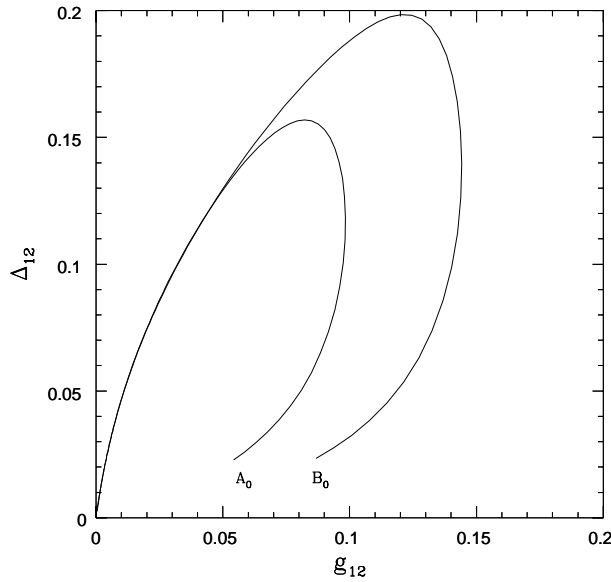


FIG. 6.3 - *The projection of the flow in the  $(g_{12}, \Delta_{12})$  plane for one Ising model coupled to one Potts model under weak disorder. We clearly see that disorder prevents the flow from running in a strong coupling regime and therefore makes the models decouple.*

the fixed point corresponding to a decoupling of the models and

$$g = \frac{\epsilon^2}{4} + O(\epsilon^3) \quad ; \quad \Delta = \frac{\epsilon + \epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3) \quad (6.52)$$

a new non-trivial one mixing both models. The study of the stability of the fixed point (6.52) is non-trivial. For the initial conditions  $g(0) < 0$ ,  $\Delta(0) > 0$ , the flow is always driven in a strong coupling regime. This is in contradiction with the Imry-Wortis argument [243]. For  $g(0) > 0$ ,  $\Delta(0) > 0$ , a naive numerical study shows apparently that the flow is also driven in a strong coupling regime. Nevertheless, we must not forget that the beta functions and therefore the fixed points have been computed order by order in  $\epsilon$  and the numerical and analytical fixed points can not correspond at all in a few cases. This is exactly what we see in this case. Therefore, we have to take care with a direct interpretation of the numerical flow. Moreover, an analytical study of the fixed point (6.52) does not enable to conclude directly since the coefficient  $A_{11}$  of the matrix of stability  $A$  is zero up to  $\epsilon^2$ . A solution could be to include higher order terms and to determine the fixed points up to  $\epsilon^3$ . Obviously, the calculations are probably unfeasible. Nevertheless by assuming the general form of the fixed point (6.52) up to  $\epsilon^3$ , we can show that  $a_{11}$  does not depend on this form and equals at lowest order in  $\epsilon$   $\frac{\epsilon^3}{8}$ . By injecting this value in the matrix of stability, we see that the fixed point (6.52) is in fact stable for  $g(0) > 0$ .

It proves in fact that fourth order terms (three loops one) have at least to be included in a numerical analysis of the flow.

**case**  $N > 1$

We consider in this section the case of  $M$  Ising models coupled to  $N$   $q$ -state Potts models with disorder. We are looking for the fixed points of the system (6.39-6.44).

First of all, when  $M = 1$  and  $\Delta_1^* = \Delta_2^* = \Delta_{12}^* = 0$ , we recover the case studied in the section 2. The value  $M = 2$  is peculiar since it corresponds to the Ashkin-Teller model. Secondly, by considering only two Ising models, the beta functions associated to  $g_1, \Delta_1$  are those of ref. [192]. In this case, the flow can be exactly integrated. When adding the other coupling constants, the situation gets quite more complicated. We have done directly a simulation of the flow in this case. We also find that disorder makes the models decouple as in the previous subsection.

Otherwise, for general  $M \neq 2$ , the fixed points are, up to second order in  $\epsilon$ , the following (the trivial fixed point is still present):

$$\begin{aligned} g_1^* &= 0, \quad \Delta_1^* = 0; \\ g_2^* &= \frac{-\epsilon}{(N-2)} + \frac{\epsilon^2}{(N-2)^2}, \quad \Delta_2^* = 0 \quad \text{if } N > 2; \\ g_{12}^* &= 0, \quad \Delta_{12}^* = 0 \end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned} g_1^* &= 0, \quad \Delta_1^* = 0; \\ g_2^* &= 0, \quad \Delta_2^* = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{4}; \\ g_{12}^* &= 0, \quad \Delta_{12}^* = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon \end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned} g_1^* &= 0, \quad \Delta_1^* = 0; \\ g_2^* &= \frac{\epsilon^2}{2N}, \quad \Delta_2^* = \frac{\epsilon}{2} + \frac{(3N-2)\epsilon^2}{4N}; \\ g_{12}^* &= 0, \quad \Delta_{12}^* = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon \end{aligned} \tag{6.55}$$

The three different fixed points we have found correspond in fact to the three non-trivial fixed points of the “ $N$  colored Potts model with disorder [210]. As in the previous subsection, we recover for the fixed points (6.54,6.55) a non trivial value of the disorder mixing *a priori* both models, namely  $\Delta_{12}^* = \frac{\sqrt{2}}{4}\epsilon$ . Nevertheless, it is straightforward to show that this value is unstable. We can also prove that the fixed point (6.54) is unstable. Therefore, only the fixed points (6.53) and (6.55) (with  $\Delta_{12}^* = 0$ ) are stable. The flow reaches them depending on initial conditions (see the discussion in [210]). If  $N \neq 2$  and  $g_2(0) < 0$ ,

the flow is always driven in a strong coupling regime as it was already mentioned in the previous subsection (in fact the fixed point (6.53) goes to infinity).

Consequently, the infrared physics of  $M$  Ising models coupled to  $N$   $q$ -state Potts models under weak disorder corresponds to  $M$  disordered Ising models plus  $N$  disordered Potts models. These results can be easily extended to  $M$  3-state Potts models coupled to  $N$  4-state Potts models. We also find that disorder makes the models decouple.

## 6.4 Conclusions and Discussions

In this article, we have studied the critical behavior of different coupled minimal models under weak disorder. But already in the pure case, we obtain some interesting features.

By coupling one Ising model to a several Potts models, we get a non-trivial flow of renormalisation in a three parameter space (see Figure 6.1). We have found new tricritical points that should correspond to *a priori* new conformal theories. Moreover, these results prove that an energy-energy coupling term is a relevant perturbation which can influence the critical behavior. Such a situation might also be encountered in the problem of the XY-Ising model. Indeed, a tricritical point close to the fixed point corresponding to a decoupling of both models can strongly alter numerical results based notably on finite size scaling. It could explain why continuously varying critical exponents are found numerically [111, 127, 129]. Moreover, the study of the pure model is also interesting in order to better understand the behavior of several coupled conformal field theories. This approach is complementary to the technics of exact integrability developped recently in [209, 257].

We have also seen that the perturbation term can also drive the system in a strong coupling regime (it depends on initial conditions) indicating probably a first order transition and mass generation. For example, when one considers two different  $q$ -state Potts models, the flow is always driven in a strong coupling regime. By adding weak randomness, we have found that the first order transitions are often transformed in second order one (see Figure 6.3) as it should be according to Imry-Wortis argument. Nevertheless, when we consider two coupled Potts models, this argument is violated for some initial conditions in the flow of renormalisation. Moreover, by considering the general case of  $M$   $q_1$ -state Potts models coupled to  $N$   $q_2$ -state Potts models under weak randomness, we have show that disorder often makes the models decouple (except the above case violating Imry-Wortis argument).

Recent numerical results of the disordered  $q > 4$ -state Potts model have shown a puzzling property of the central charge of this model namely  $c(q = q_1 \times q_2) = c(q_1) + c(q_2)$  [255, 207, 208]. Therefore, we could have expected some relations between the critical behavior of for example the disordered 6-state Potts models and one Ising model coupled to 3-state Potts model with disorder since their central charge are similar. Nevertheless,

the magnetic critical exponent  $\beta/\nu \sim 0.142$  found in [207], for the disordered 6–state Potts model appears clearly different from the one of the Ising or disordered 3–state Potts model. Hence, it seems that no relations emerge at a perturbative level between two coupled  $q_1$  and  $q_2$ -state Potts model and a disordered  $q_1 \times q_2$ -state Potts model. Nevertheless, for a large coupling between both Potts models, we could expect some relations between the two situations, but it is outside of our perturbative analysis. That is why it would be very interesting to investigate numerically the critical behavior of several  $q$ -state Potts models with disorder especially in the strong coupling regime to analyse if we could observe a cross-over phenomena between the two regimes.

#### **Acknowledgements**

I would like to thank Vl. S. Dotsenko for helpful suggestions and stimulating discussions. I also acknowledge M. Picco and P. Pujol for useful discussions.

## 6.5 APPENDIX A: Beta functions in the pure case

In this appendix, we compute the beta function of  $M$  Ising models (indiced by 1) coupled to  $N$  Potts models (indiced by 2). We have three coupling constant  $g_1, g_2, g_{12}$ . Some terms have already been computed in [205], nevertheless, we recall some details for completeness.

### 6.5.1 First order

A first order correction to  $g_1$  comes from the contraction of two  $(\varepsilon_1 \varepsilon_1)$  terms (plus some combinatorial factor corresponding to all of the possible contractions):

$$\frac{(g_1^0)^2}{2} \int_{|x-y|<r} \sum_{a \neq b=1}^M \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_1^d(y) d^2 x d^2 y$$

When  $b = c \neq a, d$  this contractions gives:

$$A_1^1(r, \varepsilon_1) (g_1^0)^2 \int \sum_{a \neq d} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^d(x) d^2 x$$

Here,  $A_1^1(r, \varepsilon_1)$  (the lower indice corresponds to the first contribution while the upper indice indicates first order) is the result of the integral produced by the contraction of two  $\varepsilon_1$  operators:

$$\begin{aligned} A_1^1(r, \varepsilon_1) &= 2(M-2) \int_{|y-x|<r} \langle \varepsilon_1(x) \varepsilon_1(y) \rangle_0 d^2 y = 4\pi(M-2) \int_{y<r} \left( \frac{dy}{y^{1+3\varepsilon_1}} \right) \\ &= -4\pi(M-2) \left( \frac{r^{-3\varepsilon_1}}{3\varepsilon_1} \right) \end{aligned} \quad (6.56)$$

Another first order correction to  $g_1$  comes from the contraction of two  $(\varepsilon_2 \varepsilon_2)$  terms:

$$\frac{(g_{12}^0)^2}{2} \int_{|x-y|<r} \sum_{a=1}^M \sum_{b=M+1}^{M+N} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_2^b(x) \sum_{c=1}^M \sum_{d=M+1}^{M+N} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_2^d(y) d^2 x d^2 y$$

When  $b = d$  this contractions gives:

$$A_2^1(r, \varepsilon_2) (g_{12}^0)^2 \int \sum_{a \neq c} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^c(x) d^2 x$$

with:

$$A_2^1(r, \varepsilon_2) = 2N \int_{|y-x|<r} \langle \varepsilon_2(x) \varepsilon_2(y) \rangle_0 d^2 y = 4\pi N \int_{y<r} \left( \frac{dy}{y^{1+3\varepsilon_2}} \right)$$

$$= -4\pi N \left( \frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right) \quad (6.57)$$

We obtain similar correction to  $g_2$  by changing  $(1, M) \leftrightarrow (2, N)$ .

There are two contributions to  $g_{12}$  coming from the contraction of two  $(\epsilon_1\epsilon_1)$  or two  $(\epsilon_2\epsilon_2)$ . The integral involved are therefore the same as above and we find:

$$\left( A_3^1(r, \epsilon_1)g_{12}^0g_1^0 + A_4^1(r, \epsilon_2)g_{12}^0g_2^0 \right) \int \sum_{a,c} \epsilon_1^a(x)\epsilon_2^c(x)d^2x$$

with

$$A_3^1(r, \epsilon_1) = 2(M-1) \left( \frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right) \quad (6.58)$$

$$A_4^1(r, \epsilon_2) = 2(N-1) \left( \frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right) \quad (6.59)$$

### 6.5.2 Second order

The second order corrections to  $g_i$  comes from the contaction of three  $(\epsilon\epsilon)$  terms. We first detail the second order terms for  $g_1$ .

#### Contribution to $g_1$

- The first contribution comes from the contraction of  $2 \times 2$   $\epsilon_1$  operators:

$$\frac{(g_1^0)^3}{3!} \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b=1}^M \epsilon_1^a(x)\epsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d} \epsilon_1^c(y)\epsilon_1^d(y) \sum_{e \neq f} \epsilon_1^e(z)\epsilon_1^f(z) d^2x d^2y d^2z \quad (6.60)$$

The first one corresponds to the case when  $b = c; d = e; b, d \neq a, f$ . We find:

$$A_1^2(r, \epsilon_1)(g_1^0)^3 \int \sum_{a \neq f} \epsilon_1^a(x)\epsilon_1^f(x)d^2x$$

where  $A_1^2(r, \epsilon_1)$  corresponds to the following:

$$A_1^2(r, \epsilon_1) = 4(M-2)(M-3) \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle \epsilon_1(x)\epsilon_1(y) \rangle_0 \langle \epsilon_1(y)\epsilon_1(z) \rangle_0 d^2z d^2y \quad (6.61)$$

We replace  $\langle \epsilon(x)_1\epsilon(y)_1 \rangle_0$  by  $|x-y|^{-2-3\epsilon_1}$ . This integral has been performed in [205] and we have:

$$\begin{aligned} A_1^2(r, \epsilon_2) &= 8\pi(M-2)(M-3) \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+6\epsilon_1}} \right) \int |z|^{-2-3\epsilon_1} |z-1|^{-2-3\epsilon_1} d^2z \\ &= 16\pi^2(M-2)(M-3) \left( \frac{r^{-6\epsilon_1}}{9\epsilon_1^2} \right) \end{aligned} \quad (6.62)$$

The second term is produced when  $a = c = e \neq f; b = d \neq f$ . This will be denoted by:

$$A_2^2(r, \epsilon_1)(g_1^0)^3 \int \sum_{a \neq f} \epsilon_1^a(x) \epsilon_1^f(x) d^2x$$

with:

$$A_2^2(r, \epsilon_1) = 4(M-2) \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle \epsilon_1(x) \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \epsilon_1(\infty) \rangle_0 \langle \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \rangle_0 d^2y d^2z \quad (6.63)$$

The calculation of this integral has been made in [205]. We will nevertheless give the main steps because we will have to compute other integrals using similar technics.

The  $\langle \epsilon_1(x) \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \epsilon_1(\infty) \rangle_0$  term corresponds to the result of  $\epsilon_1 \epsilon_1 \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1$  obtained by projecting  $\epsilon_1 \epsilon_1 \epsilon_1$  over  $\epsilon_1(\infty)$ . We know use the Coulomb gas formulation:

$$A_2^2(r, \epsilon_1) = 4(M-2) \mathcal{N} \times \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle V_{\frac{12}{2}}(x) V_{12}(y) V_{12}(z) V_+(u) V_{12}(\infty) \rangle |y-z|^{-2-3\epsilon_1} d^2y d^2z d^2u, \quad (6.64)$$

where  $\mathcal{N}$  is a normalisation constant which is fixed by taking the limit  $R \rightarrow 0$  in the four points function. Indeed, we thus have

$$\langle \epsilon_1(0) \epsilon_1(R) \epsilon(x) \epsilon(y) \rangle = \mathcal{N} \int \langle V_{\frac{12}{2}}(0) V_{12}(R) V_{12}(x) V_+(u) V_{12}(y) \rangle d^2u .$$

By taking the limit  $R \rightarrow 0$  in both sides, we therefore obtain:

$$\mathcal{N} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(\Gamma(-\frac{2}{3}))^2}{(\Gamma(-\frac{1}{3}))^4} . \quad (6.65)$$

In order to compute (6.63), we first redefine  $y \rightarrow y - x; z \rightarrow z - x$ . Then, the idea is to pass to the ‘‘gauge’’  $z_1 = 0, z_2 = z, z_3 = 1, z_4 \rightarrow \infty$ . For arbitrary value of  $z_i; i \in [1..4]$ , we can show using different changes of variables that:

$$\begin{aligned} I &= \int d^2u \langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) V_{\alpha_4}(z_4) V_+(u) \rangle \\ &\propto |z_{12}|^{4\alpha_1\alpha_2} |z_{13}|^{4\alpha_1\alpha_3} |z_{23}|^{4\alpha_2\alpha_3} \\ &\quad |z_{14}|^{2+4(\alpha_1+\alpha_4)\alpha_++4\alpha_1\alpha_4} |z_{24}|^{4\alpha_2\alpha_++4\alpha_2\alpha_4} |z_{34}|^{2+4(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_++4\alpha_3\alpha_4} \\ &\quad \int d^2u |u|^{4\alpha_1\alpha_+} |u-\eta|^{4\alpha_2\alpha_+} |u-1|^{4\alpha_3\alpha_+}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

with  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_+ = 2\alpha_0$  as it should be, and  $\eta = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{14}}$ . Using the above formula (6.66) and two trivial changes of variables, we find:

$$A_2^2(r, \epsilon_1) = 8\pi(M-2)\mathcal{N} \times \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+6\epsilon}} \right) \int |z|^{-4\Delta_{12}} |z-1|^{-4\Delta_{12}+4\alpha_{12}^2} |u|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-1|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-z|^{4\alpha+\alpha_{12}} d^2z d^2u \quad (6.67)$$

The second integral is computed in [205] and recalled in appendix E (eq: (6.123)). It equals  $\sqrt{3}\pi \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})}$ . In the  $z$  integration, we introduce a new singularity at infinity which need to be subtracted (see [205] for more details). We finally obtain:

$$A_2^2(r, \epsilon_1) = 8\pi^2(M-2) \left( \frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right) \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_1} \right] \quad (6.68)$$

•The second type of terms comes from two  $\epsilon_1$  and two  $\epsilon_2$  contractions. namely

$$\frac{g_1^0(g_{12}^0)^2}{3!} \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b=1}^M \epsilon_1^a(x) \epsilon_1^b(x) \sum_{c,d} \epsilon_1^c(y) \epsilon_2^d(y) \sum_{e,f} \epsilon_1^e(z) \epsilon_2^f(z) d^2x d^2y d^2z \quad (6.69)$$

The first contribution comes from the case  $b = c \neq a, e; d = f$ . We denote this term by

$$A_3^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) g_1^0 (g_{12}^0)^2 \int \sum_{a \neq e} \epsilon_1^a(x) \epsilon_1^e(x) d^2x$$

with:

$$A_3^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 8N(M-2) \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle \epsilon_1(x) \epsilon_1(y) \rangle_0 \langle \epsilon_2(y) \epsilon_2(z) \rangle_0 d^2z d^2y \quad (6.70)$$

Using standard manipulations, we find:

$$A_3^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 32\pi^2 N(M-2) \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \quad (6.71)$$

The second contribution comes from the case  $a = c = e; d = f$  and is denoted by:

$$A_4^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) g_1^0 (g_{12}^0)^2 \int \sum_{a \neq e} \epsilon_1^a(x) \epsilon_1^e(x) d^2x$$

with

$$A_4^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 4N \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle \epsilon_1(x) \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \epsilon_1(\infty) \rangle_0 \langle \epsilon_2(y) \epsilon_2(z) \rangle_0 d^2y d^2z \quad (6.72)$$

Using the same transformations explained in the calculation of  $A_2^2$ , we find:

$$A_4^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 8\pi N \mathcal{N} \times \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+3\epsilon_1+3\epsilon_2}} \right) \int |z|^{-4\Delta_{12}} |z-1|^{-4\Delta'_{12}+4\alpha_{12}^2} |u|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-1|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-z|^{4\alpha+\alpha_{12}} d^2z d^2u \quad (6.73)$$



with  $4\Delta'_{12} = -2 - 3\epsilon_2$  while  $4\Delta_{12} = -2 - 3\epsilon_1$ . The first integral equals  $-\frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)}$ . The second integral is computed in the appendix E (eq:(6.127)) and equals:

$$\pi\sqrt{3}\frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})}\left[1 + \frac{1}{3\epsilon_1} - \frac{1}{3\epsilon_2}\right] \quad (6.74)$$

As for the calculation of  $A_2^2$ , the  $z$  integration in (6.73) is performed over the whole complex plane, while the domain of integration is in fact restricted to the disk  $|z| < \frac{r}{|y|}$ . This introduces a new singularity at infinity. This is equivalent for this integral to add the singularity at the origin (see [205]). Some easy manipulations show that this extra contribution from  $z \rightarrow 0$  introduces an integral similar as in (6.70). We finally obtain:

$$\begin{aligned} A_4^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) &= 16\pi^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[1 + \frac{1}{3\epsilon_1} - \frac{1}{3\epsilon_2}\right] + 16\pi^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \\ &= 16\pi^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[1 + \frac{2}{3\epsilon_1}\right] \end{aligned} \quad (6.75)$$

• There is finally a last contribution to  $g_1$  corresponding to the contraction of  $2 \times 2$   $\epsilon_2$  operators. It comes from:

$$g_2^0(g_{12}^0)^2 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b = M+1}^{M+N} \epsilon_2^a(x) \epsilon_2^b(x) \sum_{c,d} \epsilon_1^c(y) \epsilon_2^d(y) \sum_{e,f} \epsilon_1^e(z) \epsilon_2^f(z) d^2x d^2y d^2z$$

The contribution comes from the case  $a = d; b = f$ . We denote this case by:

$$g_2^0(g_{12}^0)^2 A_5^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{c \neq e} \epsilon_1^c \epsilon_1^e$$

The computation of  $A_5^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2)$  is straightforward and we find

$$A_5^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 16\pi^2 N(N-1) \frac{r^{-6\epsilon_2}}{9\epsilon_2^2} \quad (6.76)$$

When we gather all these contributions to  $g_1$ , we find the equations (6.9). Obviously, by exchanging  $(1, M) \leftrightarrow (2, N)$ , we obtain the whole contribution to  $g_2$  (see eq. (6.10)).

### Contribution to $g_{12}$

• The first contribution to  $g_{12}$  happens with contractions of  $\epsilon_1$  operators. It comes from:

$$(g_1^0)^2 g_{12}^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b = 1}^M \epsilon_1^a(x) \epsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d} \epsilon_1^c(y) \epsilon_1^d(y) \sum_{e,f} \epsilon_1^e(z) \epsilon_2^f(z) d^2x d^2y d^2z$$

We then have two possible contractions. We write the result in the form:

$$g_{12}^0 (g_1^0)^2 A_6^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a,b} \epsilon_1^a \epsilon_2^b$$

We then follow calculations similar to  $A_1^2$  and  $A_2^2$  (except the symmetry factors) and find:

$$A_6^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 4\pi^2(M-1) \frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \left[ 1 + \frac{2(M-1)}{3\epsilon_1} \right] \quad (6.77)$$

We have also the symmetric contribution coming from  $\epsilon_2$  contractions, namely:

$$A_7^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 4\pi^2(N-1) \frac{r^{-6\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \left[ 1 + \frac{2(N-1)}{3\epsilon_2} \right] \quad (6.78)$$

- We then have the contribution coming from the contraction of two  $\epsilon_1$  and two  $\epsilon_2$ :

$$g_1^0 g_2^0 g_{12}^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b=1}^M \epsilon_1^a(x) \epsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d=M+1}^{M+N} \epsilon_2^c(y) \epsilon_2^d(y) \sum_{e,f} \epsilon_1^e(z) \epsilon_2^f(z) d^2 x d^2 y d^2 z$$

By taking  $a = e \neq b; c = f \neq d$ , we obtain

$$g_1^0 g_2^0 g_{12}^0 A_8^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a,b} \epsilon_1^a \epsilon_2^b$$

with:

$$A_8^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 16\pi^2(N-1)(M-1) \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \quad (6.79)$$

- Finally, we have terms coming from  $(g_{12}^0)^3$  (written as  $(g_{12}^0)^3 A_9^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a,b} \epsilon_1^a \epsilon_2^b$ ):

$$(g_{12}^0)^3 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a,b} \epsilon_1^a(x) \epsilon_2^b(x) \sum_{c,d} \epsilon_1^c(y) \epsilon_2^d(y) \sum_{e,f} \epsilon_1^e(z) \epsilon_2^f(z) d^2 x d^2 y d^2 z$$

We have three different possibilities: first contracting two  $\epsilon_1$  and two  $\epsilon_2$ , second contracting three  $\epsilon_1$  (by the operator algebra  $\epsilon_1 \epsilon_1 \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1$ ) and two  $\epsilon_2$  and third contracting three  $\epsilon_2$  and two  $\epsilon_1$ . The first one leads to a similar contribution as  $A_8^2$ . The second and third case involve similar integrals as for  $A_4^2$ . We find

$$\begin{aligned} A_9^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) &= 16\pi^2(N-1)(M-1) \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \\ &+ 8\pi^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ M+N-2 + \frac{2(M-1)}{3\epsilon_1} + \frac{2(N-1)}{3\epsilon_2} \right] \end{aligned} \quad (6.80)$$

By gathering all these contributions, we recover the equation (6.11).

## 6.6 APPENDIX B: Renormalisation of $m_i$ in the pure case

This appendix is devoted to the computation of the renormalisation of the coupling constants  $m_i$  associated to the energy operator  $\varepsilon_i$ . As in the appendix A, only contraction between different  $\varepsilon_i$  are involved.

### 6.6.1 First order

There are two contributions at this order to  $m_1$ . The first one comes from the term:

$$g_1^0 m_1^0 \int_{|x-y|<r} \sum_{a \neq b=1}^M \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c=1}^M \varepsilon_1^c(y) d^2x d^2y$$

When  $b = c$ , we can contract two  $\varepsilon_1$  operators:

$$g_1^0 m_1^0 B_1(r, \epsilon_1) \int \sum_a \varepsilon_1^a(y) d^2y$$

with

$$B_1^1(r, \epsilon_1) = 2(M-1) \int_{|y-x|<r} \langle \varepsilon_1(x) \varepsilon_1(y) \rangle_0 d^2y = -4\pi(M-1) \left( \frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right) \quad (6.81)$$

The second contribution comes from the contraction of an  $(g_{12}^0) \varepsilon_1 \varepsilon_2$  with  $m_2^0 \varepsilon_2$ :

$$g_{12}^0 m_2^0 \int_{|x-y|<r} \sum_{a,b} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_2^b(x) \sum_{c=M+1}^{M+N} \varepsilon_2^c(y) d^2x d^2y$$

When  $b = c$ , we can contract two  $\varepsilon_2$  operators:

$$g_{12}^0 m_2^0 B_2^1(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_a \varepsilon_1^a(y) d^2y$$

with

$$B_2^1(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 2N \int_{|y-x|<r} \langle \varepsilon_2(x) \varepsilon_2(y) \rangle_0 d^2y = -4\pi N \left( \frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right) \quad (6.82)$$

This is precisely this term which mix both masses. Obviously, we have by symmetry similar contributions for  $m_2$ .

### 6.6.2 Second order

We now compute the contributions at second order to  $m_1$ . The first involves only  $\varepsilon_1$  operators:

$$\frac{(g_1^0)^2}{2} m_1^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b=1}^M \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_1^d(y) \sum_e \varepsilon_1^e(z) d^2 x d^2 y d^2 z$$

This expression is very similar to the one involved in the calculations of  $A_1^2$  and  $A_2^2$ . Using the same reasoning, we find:

$$(g_1^0)^2 m_1^0 B_1^2(r, \epsilon_1) \int \sum_e \varepsilon_1^a(x) d^2 x$$

with

$$\begin{aligned} B_1^2(r, \epsilon_1) &= 16\pi^2 (M-1)(M-2) \left( \frac{r^{-6\epsilon_1}}{9\epsilon_1^2} \right) + 4\pi^2 (M-1) \left( \frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right) \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_1} \right] \\ &= 4\pi^2 (M-1) \left( \frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right) \left[ 1 + \frac{4M-6}{3\epsilon_1} \right] \end{aligned} \quad (6.83)$$

The second contribution comes from:

$$\frac{(g_{12}^0)^2}{2} m_1^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a,b} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_2^b(x) \sum_{c,d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_2^d(y) \sum_e \varepsilon_1^e(z) d^2 x d^2 y d^2 z$$

In this case, we then follow the calculations of  $A_3^2$  and  $A_4^2$ . We find

$$(g_{12}^0)^2 m_1^0 B_2^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_e \varepsilon_1^a(x) d^2 x$$

with

$$\begin{aligned} B_2^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) &= 16\pi^2 N (M-1) \left( \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \right) + 8\pi^2 N \left( \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \right) \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_1} \right] \\ &= 4\pi^2 N \left( \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \right) \left[ 1 + \frac{2M}{3\epsilon_1} + \frac{2(M-1)}{3\epsilon_2} \right] \end{aligned} \quad (6.84)$$

We have finally the contributions coming from  $m_2^0$  at second order, namely:

$$\frac{g_{12}^0 g_1^0}{2} m_2^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b=1}^M \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c,d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_2^d(y) \sum_{e=M+1}^{M+N} \varepsilon_2^e(z) d^2 x d^2 y d^2 z$$

and

$$\frac{g_{12}^0 g_2^0}{2} m_2^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b=M+1}^{M+N} \varepsilon_2^a(x) \varepsilon_2^b(x) \sum_{c,d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_2^d(y) \sum_{e=M+1}^{M+N} \varepsilon_2^e(z) d^2 x d^2 y d^2 z$$

Taking  $b = c; d = e$  in the first one and  $a = e; b = d$  in the second one we obtain:

$$\left( g_{12}^0 g_1^0 m_2^0 B_3^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) + g_{12}^0 g_2^0 m_2^0 B_4^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \right) \int \sum_e \varepsilon_1^a(x) d^2x$$

with

$$B_3^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 8\pi^2 N(M-1) \left( \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \right) \quad (6.85)$$

$$B_4^2(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 8\pi^2 N(N-1) \left( \frac{r^{-6\epsilon_2}}{9\epsilon_2^2} \right) \quad (6.86)$$

By collecting all these contributions, we obtain the equations (6.16) and by symmetry the equation (6.17).

## 6.7 APPENDIX C: Renormalisation of $h_i$ in the pure case

We now compute the renormalisation of the coupling constants  $h_i(r)$  associated to the spin operators  $\sigma_i$  ( $\sigma_1$  the Ising spin operator,  $\sigma_2$  a Potts spin operator). We restrict ourself to the most interesting case, namely  $M = 1$  Ising model coupled to  $N$  Potts models. Here, the renormalisation of the spin operators is induced by the interaction term (see eq: ()) containing only energy operators. Therefore, we have a mixture of  $\sigma_i$  with  $\varepsilon_i$ . The first order term gives no contribution because the OPE of two  $\varepsilon$  operators does not involve  $\sigma$  operators. The first non-zero contribution is at second order.

### 6.7.1 Second order

Here, we compute the renormalisation of a Potts spin operator with the interaction term  $\sum_{c,d} \sum_{i,j} g_{ij} \int d^2z \varepsilon_i^c(z) \varepsilon_j^d(z)$ . There are two non-zero contributions. The first one comes from:

$$\frac{(g_1^0)^2}{2} h_1^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a \neq b} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_1^d(y) \sum_e \sigma_1^e(z) d^2x d^2y d^2z \quad (6.87)$$

A similar integral has been encountered in [205]. When  $a = c = e \neq b = d$  the product  $\sigma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$  contains a  $\sigma$  operator. As usual, we project the product  $\sigma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1$  on a  $\sigma_1(\infty)$  operator, obtaining therefore:

$$h_1^0 (g_1^0)^2 C_1^{(2)}(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a=1}^M \sigma_1^a(z) d^2z$$

where

$$C_1^{(2)}(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 2(N-1) \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle \sigma_1(x) \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \sigma_1(\infty) \rangle_0 \langle \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \rangle_0 d^2 y d^2 z \quad (6.88)$$

Using the Coulomb gas formulation, this integral reads:

$$4(M-1) \mathcal{N} \pi \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+6\epsilon_1}} \right) \times \int |z|^{4\alpha_{12}\alpha_{\bar{k}, \bar{k}-1}} |z-1|^{-4\Delta_{12}+4\alpha_{12}^2} |u|^{4\alpha+\alpha_{\bar{k}, \bar{k}-1}} |u-1|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-z|^{4\alpha+\alpha_{12}} d^2 z d^2 u \quad (6.89)$$

where the normalisation  $\mathcal{N}$  is the same as the one computed in the appendix A. The second non-trivial has been computed in [205] (see also the equation (6.134) for such integrals) and we find:

$$C_1^{(2)}(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = (M-1) \pi^2 \frac{r^{-6\epsilon_1}}{2} \left[ 1 + \frac{4}{3} (2 - \lambda_1) \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3}) \Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3}) \Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] \quad (6.90)$$

The other one comes from:

$$\frac{(g_{12}^0)^2}{2} h_1^0 \int_{|x-y|, |x-z| < r} \sum_{a,b} \epsilon_1^a(x) \epsilon_2^b(x) \sum_{c,d} \epsilon_1^c(y) \epsilon_2^d(y) \sum_e \sigma_1^e(z) d^2 x d^2 y d^2 z \quad (6.91)$$

We take  $a = c = e$ ,  $b = d$  and project on the  $\sigma_1(\infty)$  operator and thus obtain:

$$h_1^0 (g_{12}^0)^2 C_2^{(2)}(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a=1}^M \sigma_1^a(z) d^2 z$$

with

$$C_2^{(2)}(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = 2N \int_{|y-x|, |z-x| < r} \langle \sigma_1(x) \epsilon_1(y) \epsilon_1(z) \sigma_1(\infty) \rangle_0 \langle \epsilon_2(y) \epsilon_2(z) \rangle_0 d^2 y d^2 z \quad (6.92)$$

Using the Coulomb gas formalism, we obtain an integral very similar to (6.89):

$$4N \mathcal{N} \pi \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+3\epsilon_1+3\epsilon_2}} \right) \times \int |z|^{4\alpha_{12}\alpha_{\bar{k}, \bar{k}-1}} |z-1|^{-4\Delta'_{12}+4\alpha_{12}^2} |u|^{4\alpha+\alpha_{\bar{k}, \bar{k}-1}} |u-1|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-z|^{4\alpha+\alpha_{12}} d^2 z d^2 u \quad (6.93)$$

with  $4\Delta'_{12} = -2 - 3\epsilon_2$  whereas  $4\Delta_{12} = -2 - 3\epsilon_1$ . This integral has been computed in the appendix E (see (6.138)) and yields:

$$C_2^{(2)}(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{3N}{2} \pi^2 \frac{r^{-3(\epsilon_1+\epsilon_2)}}{3(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ \epsilon_2 + \epsilon_1 \left( 1 + \frac{8}{3} (2 - \lambda_1) \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3}) \Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3}) \Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right) \right] \quad (6.94)$$

Obviously, we get similar contributions for  $h_2^0$  when we substitute  $(1, M) \leftrightarrow (2, N)$ .

### 6.7.2 third order

At third order, we have to do the contraction of threee ( $\epsilon\epsilon$ ) operators with one  $\sigma$  operator. We obtain three main contributions.

- The first one does not mix the  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  operators and has been computed in [205].

It reads:

$$\frac{(g_1^0)^3}{3!} h_1^0 \int_{|x-y|, |x-z|, |x-u| < r} \sum_{a \neq b} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c \neq d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_1^d(y) \sum_{e \neq f} \varepsilon_1^e(x) \varepsilon_1^f(x) \sum_g \sigma_1^g(z) d^2 x d^2 y d^2 z d^2 u$$

Here contributions come from the following contractions  $a = c = g; b = e; d = f$  and produce:

$$(g_1^0)^3 h_1^0 C_1^3(r, \epsilon_1) \int \sum_{a=1}^M \sigma_1^a(z) d^2 z$$

where

$$C_1^3(r, \epsilon_1) = 4(M-1)(M-2) \times \int_{|y-x|, |z-x|, |w-x| < r} \langle \sigma_1(x) \varepsilon_1(y) \varepsilon_1(z) \sigma_1(\infty) \rangle \langle \varepsilon_1(y) \varepsilon_1(w) \rangle \langle \varepsilon_1(w) \varepsilon_1(z) \rangle d^2 y d^2 z d^2 w \quad (6.95)$$

and leads in the Coulomb gas representation to:

$$8(M-1)(M-2) \mathcal{N} \pi \int |w|^{-2-3\epsilon_1} |w-1|^{-2-3\epsilon_1} d^2 w \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+9\epsilon_1}} \right) \int |z|^{4\alpha_{12} \alpha_{k, k-1}} |z-1|^{-8\Delta_{12} + 4\alpha_{12}^2 + 2} |u|^{4\alpha + \alpha_{k, k-1}} |u-1|^{4\alpha + \alpha_{12}} |u-z|^{4\alpha + \alpha_{12}} d^2 z d^2 u. \quad (6.96)$$

In order to factorize the  $y$  and  $w$  integrations, we have used the formula (6.66) and three trivial changes of variables. The first two integrations will then produce  $\frac{24\pi r^{-9\epsilon_1}}{81\epsilon_1^2}$  while the results of the  $z$  and  $u$  integrations are given in [205] and in appendix E (6.141). Therefore, the final result is:

$$C_1^3(r, \epsilon_1) = -12(M-1)(M-2) \pi^3 \left( \frac{r^{-9\epsilon_1-1}}{9\epsilon_1-1} \right) \left[ 1 + \frac{8}{9} (2 - \lambda_1) \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3}) \Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3}) \Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] \quad (6.97)$$

- The second contribution reads as:

$$\frac{(g_{12}^0)^2}{3!} g_1^0 h_1^0 \int_{|x-y|, |x-z|, |x-u| < r} \sum_{a \neq b} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_1^b(x) \sum_{c, d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_2^d(y) \sum_{e, f} \varepsilon_1^e(x) \varepsilon_2^f(x) \sum_g \sigma_1^g(z) d^2 x d^2 y d^2 z d^2 u$$

Taking for example  $a = c = g; b = e; d = f$ , we obtain:

$$(g_{12}^0)^2 g_1^0 C_2^3(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a=1}^M \sigma_1^a(z) d^2 z$$

where

$$C_2^3(r, \epsilon_1) = 8N(M-1) \times \int_{|y-x|, |z-x|, |w-x| < r} \langle \sigma_1(x) \varepsilon_1(y) \varepsilon_1(z) \sigma_1(\infty) \rangle_0 \langle \varepsilon_1(y) \varepsilon_1(w) \rangle_0 \langle \varepsilon_2(w) \varepsilon_2(z) \rangle_0 d^2 y d^2 z d^2 w \quad (6.98)$$

and leads in the Coulomb gas representation to:

$$16N(M-1) \mathcal{N} \pi \int |w|^{-2-3\epsilon_1} |w-1|^{-2-3\epsilon_2} d^2 w \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+6\epsilon_1+3\epsilon_2}} \right) \int |z|^{4\alpha_{12} \overline{\alpha_{k,k-1}}} |z-1|^{-4\Delta_{12}-4\Delta'_{12}+4\alpha_{12}^2+2} |u|^{4\alpha+\alpha_{k,k-1}} |u-1|^{4\alpha+\alpha_{12}} |u-z|^{4\alpha+\alpha_{12}} d^2 z d^2 u. \quad (6.99)$$

The third integral is computed in appendix E (see (6.144)) and the final result is:

$$C_2^3(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = -8N(M-1) \pi^3 (g_{12}^0)^2 g_1^0 \frac{r^{-6\epsilon_1-3\epsilon_2}}{6\epsilon_1+3\epsilon_2} \left[ \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) \left(1 + \frac{4}{3}(2 - \lambda_1) \mathcal{R}\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) \right]. \quad (6.100)$$

• The third contribution reads as:

$$\frac{(g_{12}^0)^2}{3!} g_2^0 h_1^0 \int_{|x-y|, |x-z|, |x-u| < r} \sum_{a,b} \varepsilon_1^a(x) \varepsilon_2^b(x) \sum_{c,d} \varepsilon_1^c(y) \varepsilon_2^d(y) \cdot \sum_{e \neq f=M+1}^{M+N} \varepsilon_2^e(x) \varepsilon_2^f(x) \sum_g \sigma_1^g(z) d^2 x d^2 y d^2 z d^2 u$$

Taking for example  $a = c = g; b = f; d = e$ , we obtain:

$$(g_{12}^0)^2 g_2^0 C_3^3(r, \epsilon_1, \epsilon_2) \int \sum_{a=1}^M \sigma_1^a(z) d^2 z$$

where

$$C_3^3(r, \epsilon_1) = 8N(N-1) \times \int_{|y-x|, |z-x|, |w-x| < r} \langle \sigma_1(x) \varepsilon_1(y) \varepsilon_1(z) \sigma_1(\infty) \rangle_0 \langle \varepsilon_2(y) \varepsilon_2(w) \rangle_0 \langle \varepsilon_2(w) \varepsilon_2(z) \rangle_0 d^2 y d^2 z d^2 w \quad (6.101)$$

and leads in the Coulomb gas representation to:

$$16N(N-1) \mathcal{N} \pi \int |w|^{-2-3\epsilon_2} |w-1|^{-2-3\epsilon_2} d^2 w \int_{y < r} \left( \frac{dy}{y^{1+3\epsilon_1+6\epsilon_2}} \right)$$



$$\int |z|^{4\alpha_{12}\overline{\alpha_{k,k-1}}}|z-1|^{-8\Delta'_{12}+4\alpha_{12}^2+2}|u|^{4\alpha+\overline{\alpha_{k,k-1}}}|u-1|^{4\alpha+\alpha_{12}}|u-z|^{4\alpha+\alpha_{12}}d^2z d^2u. \quad (6.102)$$

with  $4\Delta'_{12} = -2 - 3\epsilon_2$ . The third integral is computed in appendix E (see (6.147)) and the final result is

$$C_3^3(r, \epsilon_1, \epsilon_2) = -8N(N-1)\pi^3(g_{12}^0)^2(g_2^0)\frac{r^{-3\epsilon_1-6\epsilon_2}}{3\epsilon_1+6\epsilon_2}\left[1+\frac{\epsilon_1}{2\epsilon_2}\left(1+\frac{8}{3}(2-\lambda_1)\mathcal{R}\right)\right] \quad (6.103)$$

When we gather all these second and third contributions, we find the renormalisations of  $h_i^0$  (6.19,6.20).

## 6.8 APPENDIX D: Beta function in the disordered case

In this appendix, we only give the renormalisation associated to the coupling constants of one Ising model plus one Potts model with disorder, namely  $g_{12}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_{12}$ . We do not give the details of all contributions but only the final results since the integrals we compute are similar to appendix A. The only difference lays in symmetry factors. The results extend to  $M$  Ising models coupled to  $N$  Potts models with disorder, nevertheless there are much more terms that will simplify when we use the renormalised coupling constants. In the following equations,  $n$  represents the replica number.

$$\begin{aligned} \Delta_1(r) = r^{-3\epsilon_1} & \left[ \Delta_1^0 - 4\pi(n-2)(\Delta_1^0)^2\frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 4\pi n(\Delta_{12}^0)^2\frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} - 8\pi g_{12}^0\Delta_{12}^0\frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right. \\ & + 4(n-2)(n-3)(\Delta_1^0)^3\mathcal{I}_{11} + 4(n-2)(\Delta_1^0)^3\mathcal{J}_{11} \\ & + 8(n-2)^2\Delta_1^0(\Delta_{12}^0)^2\mathcal{I}_{12} + 4(n-1)\Delta_1^0(\Delta_{12}^0)^2\mathcal{J}_{12} \\ & + 16(n-2)\Delta_1^0\Delta_{12}^0(\Delta_{12}^0+g_{12}^0)\mathcal{I}_{12} + 4(\Delta_{12}^0+g_{12}^0)^2\Delta_1^0\mathcal{J}_{12} \\ & \left. + 4\left((2n^2-3n+3)(\Delta_{12}^0)^2\Delta_2^0 + 2(n-2)(g_{12}^0+\Delta_{12}^0)\Delta_{12}^0\Delta_2^0 + (g_{12}^0+\Delta_{12}^0)^2\Delta_2^0\right)\mathcal{I}_{22} \right] \end{aligned} \quad (6.104)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(r) = r^{-3\epsilon_2} & \left[ \Delta_2^0 - 4\pi(n-2)(\Delta_2^0)^2\frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} - 4\pi n(\Delta_{12}^0)^2\frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 8\pi g_{12}^0\Delta_{12}^0\frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \right. \\ & + 4(n-2)(n-3)(\Delta_2^0)^3\mathcal{I}_{22} + 4(n-2)(\Delta_2^0)^3\mathcal{J}_{22} \\ & + 8(n-2)^2\Delta_2^0(\Delta_{12}^0)^2\mathcal{I}_{21} + 4(n-1)\Delta_2^0(\Delta_{12}^0)^2\mathcal{J}_{21} \\ & + 16(n-2)\Delta_2^0\Delta_{12}^0(\Delta_{12}^0+g_{12}^0)\mathcal{I}_{21} + 4(\Delta_{12}^0+g_{12}^0)^2\Delta_2^0\mathcal{J}_{21} \\ & \left. + 4\left((2n^2-3n+3)(\Delta_{12}^0)^2\Delta_1^0 + 2(n-2)(g_{12}^0+\Delta_{12}^0)\Delta_{12}^0\Delta_1^0 + (g_{12}^0+\Delta_{12}^0)^2\Delta_1^0\right)\mathcal{I}_{11} \right] \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$(\Delta_{12}+g_{12})(r) = r^{-\frac{3}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2)} \left[ (\Delta_{12}^0+g_{12}^0) - 4\pi(n-1)\Delta_1^0\Delta_{12}^0\frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 4\pi(n-1)\Delta_2^0\Delta_{12}^0\frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& +4(n-1)(n-2)(\Delta_1^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{11} + 4(n-1)(n-2)(\Delta_2^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{22} \\
& +2(n-1)(\Delta_1^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{J}_{11} + 2(n-1)(\Delta_2^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{J}_{22} \\
& +4(n-1)(n-2)\Delta_1^0\Delta_2^0\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{12} + 4(n-1)\Delta_1^0\Delta_2^0(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{I}_{12} \quad (6.106) \\
& +4(n-1)(n-2)(\Delta_{12}^0)^3\mathcal{I}_{12} + 4(n-1)(\Delta_{12}^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{I}_{12} \\
& +2(n-1)(\Delta_{12}^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)(\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{21})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{12}(r) = & r^{-\frac{3}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[ \Delta_{12}^0 - 4\pi(n-2)\Delta_1^0\Delta_{12}^0\frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 4\pi(n-2)\Delta_2^0\Delta_{12}^0\frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \right. \\
& - 4\pi\Delta_1^0(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\frac{r^{-3\epsilon_1}}{3\epsilon_1} - 4\pi\Delta_2^0(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\frac{r^{-3\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \\
& + 4(n-2)^2(\Delta_1^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{11} + 4(n-2)(\Delta_1^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{I}_{11} \\
& + 2(n-1)(\Delta_1^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{J}_{11} + 4(n-2)^2(\Delta_2^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{22} \\
& + 4(n-2)(\Delta_2^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{I}_{22} + 2(n-1)(\Delta_2^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{J}_{22} \\
& + 4(n-1)^2\Delta_1^0\Delta_2^0\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{12} + 4(n-2)\Delta_1^0\Delta_2^0g_{12}^0\mathcal{I}_{12} \quad (6.107) \\
& + 4(n-2)(n-3)(\Delta_{12}^0)^3\mathcal{I}_{12} + 2(n-2)(\Delta_{12}^0)^3(\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{21}) \\
& + 12(n-2)(\Delta_{12}^0)^2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)\mathcal{I}_{12} + 4(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)^2\Delta_{12}^0\mathcal{I}_{12} \\
& \left. + 2(\Delta_{12}^0 + g_{12}^0)^2\Delta_{12}^0(\mathcal{J}_{12} + \mathcal{J}_{21}) \right]
\end{aligned}$$

In this system of equations, we have defined for readability the following integrals:

$$\mathcal{I}_{11} = 4\pi^2\frac{r^{-6\epsilon_1}}{9\epsilon_1^2} \quad ; \quad \mathcal{I}_{22} = 4\pi^2\frac{r^{-6\epsilon_2}}{9\epsilon_2^2} \quad (6.108)$$

$$\mathcal{I}_{12} = \mathcal{I}_{21} = 4\pi^2\frac{r^{-3(\epsilon_1 + \epsilon_2)}}{9\epsilon_1\epsilon_2} \quad (6.109)$$

$$\mathcal{J}_{11} = 2\pi^2\frac{r^{-6\epsilon_1}}{3\epsilon_1} \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_1} \right] \quad ; \quad \mathcal{J}_{22} = 2\pi^2\frac{r^{-6\epsilon_2}}{3\epsilon_2} \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_2} \right] \quad (6.110)$$

$$\mathcal{J}_{12} = 4\pi^2\frac{r^{-3(\epsilon_1 + \epsilon_2)}}{3(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_1} \right] \quad ; \quad \mathcal{J}_{21} = 4\pi^2\frac{r^{-3(\epsilon_1 + \epsilon_2)}}{3(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left[ 1 + \frac{2}{3\epsilon_2} \right] \quad (6.111)$$

The calculations of the last four integrals is recalled in the appendix E. The last step consists in deriving the beta function,  $r$  being the scale variable.

## 6.9 APPENDIX E: Computation of integrals

In this appendix, we detail the calculation of some integrals we have used in the previous appendices. These integrals take the general form:

$$I = \int |x|^{2a}|x-1|^{2b}|y|^{2a'}|y-1|^{2b'}|x-y|^{4g}d^2x d^2y \quad (6.112)$$

where the integration is performed over the whole complex plane. Some general techniques to compute this kind of integrals have been shown in ref.[194, 195, 202, 262]. We just recall the main steps in this appendix (see also ref. [205] for the method). This integral can be decomposed into holomorphic and antiholomorphic parts :

$$I = s(b)s(b') \left[ J_1^+ J_1^- + J_2^+ J_2^- \right] + s(b)s(b' + 2g) J_1^+ J_2^- + s(b + 2g)s(b') J_2^+ J_1^- \quad (6.113)$$

where  $s(x)$  corresponds to  $\sin(\pi x)$  and:

$$\begin{aligned} J_1^+ &= J(a, b, a', b', g) ; J_2^+ = J(b, a, b', a', g) \\ J_1^- &= J(b, -2 - a - b - 2g, b', -2 - a' - b' - 2g, g) \\ J_2^- &= J(-2 - a - b - 2g, b, -2 - a' - b' - 2g, b', g) \end{aligned} \quad (6.114)$$

Here, we used the notation:

$$\begin{aligned} J(a, b, a', b', g) &= \int_0^1 du \int_0^1 dv u^{a+a'+2g+1} (1-u)^b v^{a'} (1-v)^{2g} (1-uv)^{b'} \\ &= \frac{\Gamma(2+a+a'+2g)\Gamma(1+b)\Gamma(1+a')\Gamma(1+2g)}{\Gamma(3+a+a'+b+2g)\Gamma(2+a'+2g)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b')_k (2+a+a'+2g)_k (1+a')_k}{k! (3+a+a'+b+2g)_k (2+a'+2g)_k} \end{aligned} \quad (6.115)$$

and

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$$

The  $J$  integrals appearing in (6.113) are not all independent. Using contour deformation of integrals it can be shown that we have the following relations:

$$s(2g+a+b)J_1^- + s(a+b)J_2^- = \frac{s(a)}{s(2g+a'+b')} \left( s(a')J_1^+ + s(2g+a')J_2^+ \right) \quad (6.116)$$

$$s(2g+a'+b')J_2^- + s(a'+b')J_1^- = \frac{s(a')}{s(2g+a+b)} \left( s(a)J_2^+ + s(2g+a)J_1^+ \right) \quad (6.117)$$

With these formulas, the integrals appearing in the appendices A,C can be calculated as a power series of  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$ .

• Let us detail the integral referred as (6.67). This integral has been computed in [205] but we recall it since we find some errors in the intermediary steps of ref. [205].

The coefficients corresponding to that case are:

$$a = -2a' = 2 + 3\epsilon_1 \quad ; \quad b' = -\frac{1}{3} - \epsilon_1 \quad ; \quad b = 2g = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad (6.118)$$

Substituting these values in (6.113), we obtain at the second order in  $\epsilon_1$

$$I = \frac{3}{4}(J_2^+ - J_1^+)(J_1^- - J_2^-) - \frac{\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{4} (J_1^+(2J_1^- + J_2^-) + J_2^+(J_1^- + 2J_2^-)) \\ + \frac{\pi^2\epsilon_1^2}{8} (4(J_1^+J_1^- + J_2^+J_2^-) - 19(J_1^+J_2^- + J_2^+J_1^-)) \quad (6.119)$$

Now we write the  $J_i^-$  as functions of the  $J_i^+$  with the help of relations (6.116,6.117)

$$J_1^- = -J_1^+ + 2 \left( 1 - \frac{\pi\sqrt{3}\epsilon_1}{2} - \frac{\pi^2\epsilon_1^2}{4} \right) J_2^+ \quad (6.120)$$

$$J_2^- = - \left( 1 + \pi\sqrt{3}\epsilon_1 + \frac{19}{2}\pi^2\epsilon_1^2 \right) J_1^+ + 2 \left( 1 + \frac{3\pi\sqrt{3}\epsilon_1}{2} + \frac{33\pi^2\epsilon_1^2}{4} \right) J_2^+ \quad (6.121)$$

The equation (6.119) simplifies to:

$$I = 3\sqrt{3}\pi\epsilon_1 J_1^+ J_2^+ - \frac{9}{2}\pi^2\epsilon_1^2 (J_1^+)^2 \quad (6.122)$$

The  $J_1^+$  and  $J_2^+$  can now be computed explicitly using formulas (6.114,6.115). We obtain:

$$J_1^+ = \frac{4}{9\epsilon_1} \frac{\Gamma^2(-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} + O(cst) \\ J_2^+ = \frac{2}{9} \left( \frac{3}{2} + \pi\sqrt{3} \right) \frac{\Gamma^2(-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} + O(\epsilon)$$

The final result is therefore (at lowest order in  $\epsilon_1$ ):

$$I = \sqrt{3}\pi \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \quad (6.123)$$

- We now compute the integral (6.73). The coefficients are now:

$$a = -2a' = 2 + 3\epsilon_1 \quad ; \quad b' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - 3\epsilon_2) \quad ; \quad b = 2g = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad (6.124)$$

Substituting these values in (6.113), we obtain at the second order in  $\epsilon$ :

$$I = \frac{3}{4}(J_2^+ - J_1^+)(J_1^- - J_2^-) \\ - \frac{\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{8} (J_1^+J_1^- + J_2^+J_2^- - J_1^+J_2^- + 5J_2^+J_1^-) \\ - \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_2}{8} (J_1^+J_1^- + J_2^+J_2^- + J_1^+J_2^- - J_2^+J_1^-) \\ + \frac{\pi^2\epsilon_1^2}{32} (19(J_1^+J_1^- + J_2^+J_2^-) - 19J_1^+J_2^- - 43J_2^+J_1^-) \\ - \frac{3\pi^2\epsilon_1\epsilon_2}{16} (5(J_1^+J_1^- + J_2^+J_2^-) + 5J_1^+J_2^- + J_2^+J_1^-) \\ + \frac{27\pi^2\epsilon_2^2}{32} (J_1^+J_1^- + J_2^+J_2^- - J_1^+J_2^- - J_2^+J_1^-) \quad (6.125)$$

Now we write the  $J_i^-$  as functions of the  $J_i^+$  with the help of relations (6.116,6.117) and the equation (6.125) simplifies after tedious algebra to

$$I = 3\sqrt{3}\pi \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2} J_1^+ J_2^+ - \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi \epsilon_1^2 \left[ \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right] (J_1^+)^2 - \frac{3}{2} \pi^2 \epsilon_1^2 (J_1^+)^2 \left[ 1 + 2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right] \quad (6.126)$$

The  $J_1^+$  and  $J_2^+$  are now be computed explicitly using formulas (6.114,6.115). We find:

$$\begin{aligned} J_1^+ &= \frac{4}{9\epsilon_1} \frac{\Gamma^2(-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \left( 1 + \left( \frac{3}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \epsilon_1 + o(\epsilon_i) \right) \\ J_2^+ &= \frac{2}{9} \left( \frac{3}{2} + \pi\sqrt{3} \right) \frac{\Gamma^2(-\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} + O(\epsilon_i) \end{aligned}$$

The calculation of the sums (6.115) is quite heavy. We refer to ref. [202, 262] where some tricks concerning their manipulations are given.

The final result is therefore:

$$I = \sqrt{3}\pi \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \left( 1 + \frac{1}{3\epsilon_1} - \frac{1}{3\epsilon_2} \right) \quad (6.127)$$

Note that we recover the result (6.123) when  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  as it should be. During the calculation, we have checked that the terms in  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  simplify each other in order to ensure renormalisability. Nevertheless, we are obliged to admit the result for terms in  $\frac{\epsilon_1^p}{\epsilon_2}$ . On the other hand, singularities in  $\frac{1}{\epsilon_i}$  are necessary in order to compensate the ones coming from one loop calculations.

- We now compute the integral (6.89). Here, we have:

$$a = -\frac{1}{3} + \lambda_1 \epsilon_1 = -2a' \quad ; \quad b = 2g = b' - 1 = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad (6.128)$$

Substituting these values, we find:

$$I = \frac{3}{4} (J_2^+ - J_1^+) (J_1^- - J_2^-) - \frac{\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{4} \left( J_1^+ (2J_1^- + J_2^-) + J_2^+ (J_1^- + 2J_2^-) \right) \quad (6.129)$$

Then, relating the  $J_i^-$  to the  $J_i^+$ ,

$$J_1^+ = -\pi\sqrt{3}\epsilon_1(2 - \lambda_1)J_1^- - (1 - \pi\sqrt{3}\epsilon_1(2 - \lambda_1))J_2^- \quad (6.130)$$

$$J_2^+ = -\pi\frac{\sqrt{3}}{3}\epsilon_1(2 - \lambda_1)J_1^- - \left( 1 + \pi\frac{\sqrt{3}}{3}\epsilon_1(1 + \lambda_1) \right) J_2^- \quad (6.131)$$

we obtain for  $I$ :

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{2} (J_2^-)^2 + \frac{\sqrt{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1}{2} (J_2^- - J_1^-)^2 + O(\epsilon_1^2) \quad (6.132)$$

These  $J_i^-$  can again be computed with the help of (6.114,6.115):

$$J_1^- = J_2^- + \frac{\Gamma(-\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(-\frac{1}{6})} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2(-\frac{1}{3})}{\Gamma(-\frac{2}{3})} + \frac{\Gamma(-\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(-\frac{1}{6})} + O(\epsilon_1) \quad (6.133)$$

Therefore:

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{8} \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \left[ 1 + \frac{4}{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] + O(\epsilon_1^2) \quad (6.134)$$

- We now compute the integral (6.93). Here, we have now:

$$a = -\frac{1}{3} + \lambda_1\epsilon_1 = -2a' \quad ; \quad b = 2g = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad ; \quad b' = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - 3\epsilon_2) \quad (6.135)$$

Substituting these values, we find:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4}(J_2^+ - J_1^+)(J_1^- - J_2^-) \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{8} (J_1^+ J_1^- + J_2^+ J_2^- - J_1^+ J_2^- + 5J_2^+ J_1^-) \\ &\quad - \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_2}{8} (J_1^+ J_1^- + J_2^+ J_2^- + J_1^+ J_2^- - J_2^+ J_1^-) \end{aligned} \quad (6.136)$$

The relations between the  $J_i^-$  to the  $J_i^+$  remain the same as above and we obtain for  $I$ :

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} (J_2^-)^2 + \frac{\sqrt{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1}{2} (J_2^- - J_1^-)^2 + O(\epsilon_1^2) \quad (6.137)$$

The values of the  $J_i^-$  remain the same as (6.133) and thus

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{16} \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \left[ \epsilon_2 + \epsilon_1 \left( 1 + \frac{8}{3}(2 - \lambda_1) \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right) \right] \quad (6.138)$$

- We now calculate the integral (6.96). We have the following coefficients:

$$a = -\frac{1}{3} + \lambda\epsilon_1 = -2a' \quad ; \quad b = 2g = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad ; \quad b' = -\frac{1}{3} - \frac{5}{2}\epsilon_1 \quad (6.139)$$

With similar manipulations, the integral reads:

$$I = \frac{9\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{4} (J_2^-)^2 + \frac{\sqrt{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1}{2} (J_2^- - J_1^-)^2 + O(\epsilon_1^2), \quad (6.140)$$

and the final result is:

$$I = \frac{9\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{16} \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \left[ 1 + \frac{8}{9}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right] + O(\epsilon_1^2) \quad (6.141)$$

- We now compute the integral (6.99). We have:

$$a = -\frac{1}{3} + \lambda\epsilon_1 = -2a' \quad ; \quad b = 2g = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad ; \quad b' = -\frac{1}{3} - (\epsilon_1 + \frac{3}{2}\epsilon_2) \quad (6.142)$$

With similar manipulations, the integral reads:

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi(2\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} (J_2^-)^2 + \frac{\sqrt{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1}{2} (J_2^- - J_1^-)^2 + O(\epsilon_1^2) , \quad (6.143)$$

and the final result is:

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{16} \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \left[ \epsilon_2 + 2\epsilon_1 \left( 1 + \frac{4}{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right) \right] + O(\epsilon^2) \quad (6.144)$$

- Concerning the integral (6.102), we have the following coefficients:

$$a = -\frac{1}{3} + \lambda\epsilon_1 = -2a' \quad ; \quad b = 2g = -\frac{4}{3} - \epsilon_1 \quad ; \quad b' = -\frac{1}{3} + \frac{\epsilon_1}{2} - 3\epsilon_2 \quad (6.145)$$

With similar manipulations, the integral reads:

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)}{4} (J_2^-)^2 + \frac{\sqrt{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1}{2} (J_2^- - J_1^-)^2 + O(\epsilon_1^2) , \quad (6.146)$$

and the final result is:

$$I = \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_1}{16} \frac{\Gamma^4(-\frac{1}{3})}{\Gamma^2(-\frac{2}{3})} \left[ 2\epsilon_2 + \epsilon_1 \left( 1 + \frac{8}{3}(2 - \lambda_1)\pi\epsilon_1 \frac{\Gamma^2(-\frac{2}{3})\Gamma^2(\frac{1}{6})}{\Gamma^2(-\frac{1}{3})\Gamma^2(-\frac{1}{6})} \right) \right] + O(\epsilon^2) \quad (6.147)$$

# Chapitre 7

## Conclusion générale

J'ai présenté dans ce mémoire quelques exemples de systèmes bidimensionnels frustrés et étudié les conséquences de la frustration à travers le phénomène d'ordre par le désordre. J'ai tout d'abord analysé le modèle XY  $J_1 - J_2$ , classique sur réseau carré. J'ai montré que l'effet de l'ordre par le désordre est d'engendrer dans la phase frustrée une symétrie discrète  $Z(2)$  supplémentaire, qui va bouleverser la nature du comportement critique (comparée à la phase faiblement frustrée). Celui-ci apparaît dans la même classe d'universalité que celui du modèle Ising-XY qui décrit simplement un modèle d'Ising couplé à un modèle XY par leur densité d'énergie. Le comportement critique de ce modèle où les lignes de transitions de type Ising et KT semblent se fondre en une seule, n'est toujours pas compris. J'ai présenté dans le chapitre 2 une synthèse (non exhaustive) des nombreux travaux sur le sujet.

L'étude du modèle XY  $J_1 - J_2$  m'a ainsi poussé dans deux directions relativement indépendantes, tout d'abord vers une meilleure compréhension de ces effets d'ordre par le désordre et également vers une étude du comportement critique de situations analogues au modèle Ising-XY.

Ainsi, dans la deuxième partie de cette thèse, j'ai étudié sous la direction de B. Douçot le phénomène d'ordre par le désordre à travers des problèmes de dynamique à température nulle dans des systèmes Hamiltoniens dégénérés. L'analyse dans l'espace de phase nous a permis de reformuler ce phénomène dans un cadre purement géométrique et donc d'en tirer des conclusions générales. Nous avons appliqué ces idées au modèle de Heisenberg AF sur le cactus de Husimi, un système dont l'état fondamental est extrêmement dégénéré. Nous avons montré qu'un mécanisme de sélection survint au niveau quantique contrairement au cas classique. Cela constitue un bel exemple où fluctuations quantiques et thermiques agissent clairement différemment. Il reste néanmoins, encore un nombre discret macroscopique d'états fondamentaux classiques. La prochaine étape de ce travail consiste à comprendre comment l'effet tunnel va agir et probablement mélanger ces états. De plus, quelles vont-en être les conséquences au niveau du spectre?



Plutôt que d'aborder de front le modèle Ising-XY, j'ai tenté au chapitre 4 de comprendre si l'on pouvait retrouver des comportements critiques similaires dans des situations plus simples. J'ai donc regardé par le biais de perturbation autour de théories conformes, des problèmes analogues avec une symétrie  $Z(2) \times Z(q)$  ou plus généralement  $Z(2) \times (Z(q)^N)$  avec  $q = 3, 4$ . J'ai exhibé de nouveaux points fixes tri-critiques susceptibles d'induire un phénomène de "cross over" dans la limite infrarouge. Cela fournit explicitement un exemple où le couplage entre un modèle d'Ising critique avec un grand nombre de degré de liberté (plusieurs modèles de Potts couplés) donne typiquement lieu à un comportement critique non trivial. Bien qu'il soit difficile d'extrapoler ces résultats au modèle Ising-XY, cela me conforte dans l'idée qu'un point fixe tri-critique, capable d'induire de violents effets de "cross over", doit exister dans le modèle Ising-XY.

Fort de l'expérience acquise sur le couplage de modèles minimaux, j'ai étendu (chapitres 5 et 6) les résultats précédents en présence d'un faible désordre. J'ai ainsi montré que le désordre, y compris en très faible proportion, a pour effet de découpler et en quelque sorte de factoriser les modèles couplés en modèles découplés désordonnés. Ceci est un *a fortiori* un résultat non trivial car sans le désordre le couplage conduit souvent les paramètres vers des régions de couplage fort et des transitions du premier ordre. Dans cette approche, le couplage entre les modèles critiques est traité en perturbation, ce qui limite la méthode au couplage faible. Le couplage fort cache probablement une physique très intéressante. On peut espérer que la voie des perturbations intégrables puissent peut-être à court terme donner quelques éléments de solution à ces problèmes aux applications multiples.

## Annexe A

# Dualité Abélienne et transformation de Villain généralisée

Dans la transformation de Villain, on est passé des variables angulaires  $\theta(r)$  aux variables de vorticité  $m(R)$  vivant sur le réseau dual. Dans cette annexe, je vais tenter de généraliser la transformation de Villain pour un réseau hypercubique à  $D$  dimensions quelconques en utilisant le langage de la géométrie différentielle. L'esprit de cette annexe s'inspire de l'exellente revue de Savit [263] mais aussi des références suivantes [264, 265, 266, 267]. L'idée est principalement de définir la notion de  $p$ -forme sur le réseau ainsi que les outils associés de manière à appliquer les théorèmes généraux de cohomologie.

### A.1 Formes différentielles sur un réseau hypercubique

Une forme différentielle d'ordre  $p$  est définie sur chaque face d'ordre  $p$  du réseau  $\mathbb{Z}^m$  ( $m > p$ ). La face est localisée par sa position  $\vec{R}$  où  $R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_p}$  appartiennent à  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  (réseau dual) et  $R_j \in \mathbb{Z}$  si  $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ . Pour résumer, une face est définie par l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^m$  vérifiant  $R_{i_\alpha - \frac{1}{2}} \leq X_{i_\alpha} \leq R_{i_\alpha + \frac{1}{2}}$  si  $\alpha \in [1, \dots, p]$  et  $X_j = R_j$  sinon. On définit une forme différentielle d'ordre  $p$  comme suit:

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_p} : \mathfrak{R}_{i_1, i_2, \dots, i_p} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathfrak{R}_{i_1, i_2, \dots, i_p}$  est le réseau de tous les centres des faces d'ordre  $p$ .

On peut étendre ces définitions aux opérations usuelles agissant sur les  $p$ -formes.

Notamment, la différentielle extérieure d'une  $p$ -forme  $\alpha$  s'écrit:

$$d\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{d\alpha}{d\xi_i} (-1)^{i-1} [\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_{p+1}] \quad (\text{A.2})$$

où  $\hat{\xi}_i$  signifie que l'on a enlevé  $\xi_i$ . Sur le réseau, cela se met sous une forme simple:

$$(dA)_{i_1, \dots, i_p}[R] = \sum_{\alpha=1}^{p+1} (-1)^{\alpha-1} \left[ A_{i_1, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, i_{p+1}} \left( R + \frac{1}{2} \vec{e}_\alpha \right) - A_{i_1, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, i_{p+1}} \left( R - \frac{1}{2} \vec{e}_\alpha \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

Lorsque  $A$  est un scalaire, on retrouve la dérivée sur réseau usuelle. De plus on peut montrer facilement la propriété:  $d(dA) = 0$ .

## A.2 Dualité

Soit  $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}^m$ , le réseau de départ et  $\mathfrak{R}^* = (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^m$  le réseau dual. On considère  $i_1, \dots, i_p$  dans  $[1, \dots, m]$  et  $j_1, \dots, j_{m-p}$  l'ensemble complémentaire. L'idée est la suivante: un point  $\vec{R}$  de  $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}$  peut également être considéré comme un point de  $\mathfrak{R}_{j_1, \dots, j_{m-p}}^*$ . Par ce biais, on peut donc établir une correspondance entre les  $p$  formes sur  $\mathfrak{R}$  et les  $m-p$  formes sur  $\mathfrak{R}^*$ . Ce type de dualité fut découvert par Poincaré. La correspondance est donnée par:

$${}^*A_{j_1, \dots, j_{m-p}} = \frac{1}{p!} \eta_{j_1, \dots, j_{m-p}, i_1, \dots, i_p} A_{i_1, \dots, i_p} \quad (\text{A.4})$$

où  $\eta$  est une  $m$ -forme complètement antisymétrique. On a la propriété:

$$**A = (-1)^{p(m-p)} A.$$

Une propriété importante dans le continu est  $A \wedge (*B) = B \wedge (*A)$  où  $(\cdot \wedge \cdot)$  désigne le produit extérieur et  $A, B$  sont deux  $p$ -formes. Au niveau du discret, on peut également définir un produit extérieur avec les bonnes propriétés bien que sa définition soit un peu lourde [267].

Si  $A$  et  $B$  sont deux  $p$ -formes sur  $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}$  alors  $*B$  est une  $(m-p)$ -forme sur  $\mathfrak{R}_{j_1, \dots, j_{m-p}}^* \equiv \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}$ . Par conséquent  $A \wedge *B$  est une  $m$  forme définie sur  $\mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}$  (donc un élément de volume) et:

$$(A \wedge *B)_{1,2, \dots, m} = \eta_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{m-p}} A_{i_1, \dots, i_p} \eta_{j_1, \dots, j_{m-p}, i_1, \dots, i_p} B_{i_1, \dots, i_p} \quad (\text{A.5})$$

et dans ce cas:

$$(A \wedge *B)_{1,2, \dots, m}[R] = A_{i_1, \dots, i_p}[R] B_{i_1, \dots, i_p}[R] \quad (\text{A.6})$$

On peut ainsi définir un produit scalaire sur l'espace des  $p$ -formes (l'équivalent de l'intégration sur l'élément de volume):

$$(A, B) \longrightarrow \langle A, B \rangle \equiv \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}} A_{i_1, \dots, i_p}[R] B_{i_1, \dots, i_p}[R] \quad (\text{A.7})$$

Pour finir, on a juste besoin de définir l'application duale que je noterai  $\partial$  de la différentielle extérieure. Dans le continu, elle vérifie  $\langle A; dB \rangle = \langle \partial A; B \rangle$ . D'après les définitions (A.3) et (A.7), on en déduit:

$$\begin{aligned}
\langle A; dB \rangle = \langle dB; A \rangle = & \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}} \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} \left[ B_{i_1, \dots, \hat{i}_{\alpha}, \dots, i_p} \left( R + \frac{1}{2} \vec{e}_{\alpha} \right) \right. \\
& \left. - B_{i_1, \dots, \hat{i}_{\alpha}, \dots, i_p} \left( R - \frac{1}{2} \vec{e}_{\alpha} \right) \right] A_{i_1, \dots, i_p}(R)
\end{aligned} \tag{A.8}$$

On suppose que l'on peut effectuer un changement de variable (conditions aux limites périodiques par exemple). Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\langle dB; A \rangle = \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, \hat{i}_{\alpha}, \dots, i_p}} & B_{i_1, \dots, \hat{i}_{\alpha}, \dots, i_p}(R) \left[ A_{i_1, \dots, i_p} \left( R - \frac{1}{2} \vec{e}_{\alpha} \right) \right. \\
& \left. - A_{i_1, \dots, i_p} \left( R + \frac{1}{2} \vec{e}_{\alpha} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

ce qui conduit naturellement à poser:

$$(\partial A)_{i_1, \dots, i_{p-1}}(R) \equiv \sum_{i_{\alpha} \neq i_1, \dots, i_{p-1}} (-1)^{\alpha} \left[ A_{i_1, \dots, \hat{i}_{\beta}, \dots, i_p} \left( R + \frac{1}{2} \vec{e}_{\beta} \right) - A_{i_1, \dots, \hat{i}_{\beta}, \dots, i_p} \left( R - \frac{1}{2} \vec{e}_{\beta} \right) \right] \tag{A.10}$$

avec  $i_1 < \dots < i_{\alpha-1} < i_{\beta} < \dots < i_{p-1}$ . On peut vérifier que  $\partial \partial A = 0$  comme il se doit. Une fois ces notations un peu lourdes et formelles mises en place, on peut appliquer ceci à une généralisation de la transformée de Villain.

### A.3 Application aux modèles de Villain généralisés

Soit  $A$  une  $p-1$  forme différentielle. Il est naturel de considérer une action de type  $S = \frac{1}{2} \langle dA; dA \rangle$  [265, 266]. Le cas  $p=1$  correspond au champ scalaire et  $p=2$  au champ de jauge abélien. On suppose également que  $A$  est une variable périodique de période  $P$ . En suivant l'idée de Villain, la fonction de partition s'écrit:

$$Z = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}M \exp -\frac{\beta}{2} \langle dA - PM; dA - PM \rangle \tag{A.11}$$

où

$$\int \mathcal{D}A = \prod_{i_1 < \dots < i_{p-1}} \prod_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{p-1}}} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} dA_{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}}(R) \tag{A.12}$$

$$\int \mathcal{D}M = \prod_{i_1 < \dots < i_p} \prod_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}} \sum_{M_{i_1, \dots, i_p}(R) \in \mathbb{Z}} \tag{A.13}$$

Si  $M$  est une configuration des variables de liens, alors  $dM = N$  est une  $p+1$  forme à coefficients entiers qui représente l'équivalent de la charge topologique (l'équivalent de la

vorticité à  $2D$  du modèle XY). On peut maintenant utiliser les théorèmes principaux sur les décomposition des  $p$ -formes. Tout d'abord la décomposition de Hodge-de Rham [264], donne le résultat suivant: si  $M$  est donnée, on peut écrire:

$$M = d\tilde{A} + \partial C + h \quad (\text{A.14})$$

où  $\tilde{A}$  est une  $p-1$  forme,  $C$  une  $p+1$  forme et  $h$  une  $p$  forme harmonique. Dans la suite, on supposera que l'ensemble des  $p$  formes harmoniques est nul sur la variété (cet ensemble est isomorphe à l'ensemble  $\mathcal{H}^p$  de de Rham des  $p$ -formes fermées non exactes d'après le théorème de Hodge [264]).

-  $C$  est déterminée par  $d\partial C = dM = N$  et  $dC = 0$ .

-  $\tilde{A}$  est déterminée par  $\partial d\tilde{A} = \partial M$  et  $\partial\tilde{A} = 0$

De plus, cette décomposition est unique. On a alors:

$$\begin{aligned} \langle dA - PM; dA - PM \rangle &= \langle d(A - P\tilde{A}) - P\partial C; d(A - P\tilde{A}) - P\partial C \rangle \\ &= \langle d(A - P\tilde{A}); d(A - P\tilde{A}) \rangle + P^2 \langle \partial C; \partial C \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

L'intégrale sur  $\int \mathcal{D}A$  comme dans le cas du modèle XY,  $2D$ , peut se ramener à une intégrale sur  $\mathbb{R}$  pour chaque  $A_{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}}(R)$  à cause de la périodicité. La fonction de partition (A.11) peut donc se décomposer sous la forme  $Z = Z_{SW} Z_V$  avec:

$$Z_{SW} = \prod_{i_1 < \dots < i_{p-1}} \prod_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_{p-1}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dA_{i_1, i_2, \dots, i_{p-1}}(R) \exp\left(-\frac{\beta}{2} \langle dA; dA \rangle\right) \quad (\text{A.16})$$

$$Z_V = \prod_{i_1 < \dots < i_p} \prod_{R \in \mathfrak{R}_{i_1, \dots, i_p}} \sum_{M_{i_1, \dots, i_p}(R) \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\beta P^2}{2} \langle (d\partial)^{-1} N; N \rangle\right) \quad (\text{A.17})$$

car  $\langle \partial C; \partial C \rangle = \langle C; d\partial C \rangle = \langle (d\partial)^{-1} N; N \rangle$ . La première partie  $Z_{SW}$  est associée aux ondes de spin tandis que la deuxième partie  $Z_V$  correspond au gaz de Coulomb généralisé sur un réseau hypercubique. On peut effectivement montrer que  $\Delta = \partial d + d\partial$  définit bien un Laplacien sur le réseau. Le calcul est assez fastidieux et on obtient:

$$[\partial d + d\partial] A_{i_1 < \dots < i_p} = -2 \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_p\}} \left[ A_{i_1, i_2, \dots, i_p}(R + \vec{e}_j) - 2A_{i_1, i_2, \dots, i_p}(R) + A_{i_1, i_2, \dots, i_p}(R - \vec{e}_j) \right] \quad (\text{A.18})$$

ce qui correspond bien au Laplacien discrétisé.

Pour résumer, l'essentiel du travail dans cette annexe a consisté à généraliser ("proprement") la notion de  $p$ -forme sur un réseau. Le passage de l'action initiale à l'action de

gaz de Coulomb n'est alors plus qu'une conséquence directe des théorèmes de Hodge-de Rham. Mais contrairement à ce qui a été fait dans la section 1.1.2, ce raisonnement est valable pour un réseau hypercubique quelconque, ce qui est non trivial.

Ce type de dualité exposée correspond à ce qui est couramment dualité ordre-désordre. Lorsque l'on a la possibilité d'effectuer ce type de transformation, il peut être plus avantageux de travailler avec un jeu de variables plutôt qu'un autre (typiquement les vortex pour XY). Assez curieusement, ces idées ont été appliquées seulement récemment pour la transition supraconductrice (type BCS) décrite par la théorie de Ginzburg-Landau. Kio-metziš *et al.* [268, 269] puis d'autres auteurs par la suite [270, 271, 272], ont formulé et étudié le comportement critique de la théorie de Ginzburg-Landau *duale*. Cette dernière a comme paramètre d'ordre (de désordre en fait) une boucle de vortex (ou une boucle de tube de flux).

Enfin, ces notions de dualité sont également reliées à la bosonisation abélienne. Je renvoie pour cela aux références suivantes: [265, 266, 273].



## Annexe B

# Renormalisation d'un gaz de Coulomb à plusieurs espèces

Dans cette annexe, je vais étendre les équations du groupe de renormalisation pour un gaz de Coulomb à plusieurs espèces couplées avec une anisotropie spatiale. On se restreint à des charges valant  $\pm 1$  comme il est d'usage. Je suivrai essentiellement l'article original de Kosterlitz [19] et également la récente revue de Pierson [274]. L'action du gaz de Coulomb généralisé s'écrit (1.53):

$$\mathcal{A}_\nu = \sum_{\vec{r} \neq \vec{r}'} \sum_{i,j}^p m_i(\vec{r}) \mathcal{C}_{ij} m_j(\vec{r}') \ln \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{a} + \sum_{\vec{r},i} \log z_i m_i(\vec{r})^2 \quad (\text{B.1})$$

où l'on a défini  $|\vec{r}|^2 = \frac{x^2}{1-\lambda} + \frac{y^2}{1+\lambda}$ , une norme particulière traduisant l'anisotropie spatiale. Une anisotropie de ce type ne change presque pas formellement les calculs puisque cela revient à travailler avec une nouvelle norme. La matrice  $\mathcal{C}$  est une matrice  $p \times p$  de constante de couplage. On a introduit pour chaque espèce de charges (ou vortex) l'équivalent d'un potentiel chimique,  $p$  indique le nombre total d'espèce. Dans la suite de cette annexe, j'omettrai les flèches sur les vecteurs pour éviter des notations trop lourdes. On peut ainsi définir la fonction grand-partition associée à l'action (B.1):

$$\mathcal{Z} = \sum_{n_1, \dots, n_p} \frac{z_1^{2n_1} \dots z_p^{2n_p}}{(n_1!)^2 \dots (n_p!)^2} \int_{D_{2n_p}^p} \dots \int_{D_{2n_1}^1} d^2 r_{2n_1,1} \dots \int_{D_{\alpha_1}^1} d^2 r_{\alpha_1} \dots \int_{D_1^1} d^2 r_{1,1} \exp \left[ \sum_{i,j} \sum_{\alpha_i, \beta_j} m_{\alpha_i} \mathcal{C}_{ij} m_{\beta_j} \log \frac{|r_{\alpha_i} - r_{\beta_j}|}{a} \right] \quad (\text{B.2})$$

où  $N = 2(n_1 + n_2 + \dots + 2n_p)$  est le nombre total de particules, sachant que la charge est conservée à l'intérieur de chacune des espèces. De plus,  $r_{\alpha_i}$  correspond aux coordonnées de la  $\alpha^{\text{eme}}$  particule appartenant à la  $i^{\text{eme}}$  espèce, les indices latins indiquant l'espèce, les indices grecques correspondant à l'étiquette du vortex dans une espèce donnée. L'ordre de



l'intégration est fixé et  $D_{\alpha_k}^k$  est le plan privé des disques (ou ellipse à cause de l'anisotropie) définis par  $|r_{\alpha_k} - r_{\beta_l}| < a$ , avec  $l > k$ , ou  $l = k$  et  $\beta_l > \alpha_l$ . Le résultat final ne dépend pas de l'ordre d'intégration.

Comme dans toute analyse par le groupe de renormalisation (dans l'espace réel ou réciproque), on distingue deux étapes: la première consiste à intégrer sur les degrés de liberté à courte distance modifiant par la même, les paramètres du système; la seconde à effectuer une transformation d'échelle de telle sorte que le cut-off infrarouge reste le même. Dans notre cas, l'idée est de "rescaler" le pas du réseau de  $a$  à  $a + da$  et d'intégrer sur les contributions induites par les paires vortex-antivortex (d'une même espèce) comprises à l'intérieur de l'anneau de rayon  $da$ . Pour ce faire, on ré-arrange chaque intégrale comme suit:

$$\int_{D_{\alpha_k}^k} d^2 r_{\alpha_k} = \int_{D_{\alpha_k}^k} d^2 r_{\alpha_k} + \sum_{\beta_k < \alpha_k} \int_{\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)} d^2 r_{\alpha_k} \quad (\text{B.3})$$

où  $D'$  joue le même rôle que  $D$  mais avec un disque de rayon  $a + da$  tandis que  $\delta_{\beta_l}^l$  représente le disque de centre  $r_{\alpha_k}$  de rayon  $a$  de largeur  $da$ . On applique cette relation (B.3) à toute les intégrales de telle sorte que:

$$\begin{aligned} \int_{D_{2n_p}^p} \dots \int_{D_1^1} d^2 r_{1,1} &= \int_{D_{2n_p}^p} \dots \int_{D_1^1} d^2 r_{1,1} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{\alpha_k \neq \beta_k} \int_{D_{2n_p}^p} \dots \\ &\int_{D_{2n_k}^k} \dots \int_{D_{\alpha_k+1}^k} \times \int_{D_{\alpha_k-1}^k} \dots \int_{D_{\beta_k+1}^k} \int_{D_{\beta_k-1}^k} \dots \int_{D_1^1} d^2 r_{1,1} \int_{\bar{D}_{\alpha_k}^k} d^2 r_{\alpha_k} \int_{\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)} d^2 r_{\beta_k}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$\bar{D}_{\alpha_k}^k$  est le plan privé des disques centrés sur les  $N - 2$  autres points. Physiquement, l'intégrale sur  $\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)$  prend en compte les charges  $m_{\beta_k}$  appartenant à l'anneau de centre  $r_{\alpha_k}$  de largeur  $da$  capable de former des paires avec  $m_{\alpha_k}$ , tandis que l'intégrale sur  $\bar{D}_{\alpha_k}^k$  concerne toutes les positions possibles de cette paire. On peut donc tout d'abord isoler cette paire de charges. On doit dans un premier temps calculer:

$$\int_{\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)} d^2 r_{\beta_k} \exp \left( 2 \sum_{l, \gamma_l} \mathcal{C}_{lk} [m_{\alpha_k} m_{\gamma_l} \log \frac{|r_{\alpha_k} - r_{\gamma_l}|}{a} + m_{\beta_k} m_{\gamma_l} \log \frac{|r_{\beta_k} - r_{\gamma_l}|}{a}] \right), \quad (\text{B.5})$$

On définit  $\vec{\rho} = \vec{r}_{\alpha_k} - \vec{r}_{\beta_k}$ , avec  $|\vec{\rho}| \sim a$ . Pour former une paire, il faut que les deux particules soient de charge opposée, donc  $m_{\alpha_k} = -m_{\gamma_l}$ . L'intégrale devient:

$$\int_{\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)} d^2 r_{\beta_k} \prod_{l, \gamma_l} \left( \left[ 1 + \frac{2\vec{\rho} \cdot (\vec{r}_{\alpha_k} - \vec{r}_{\gamma_l})}{|\vec{r}_{\alpha_k} - \vec{r}_{\gamma_l}|^2} + \frac{a^2}{|\vec{r}_{\alpha_k} - \vec{r}_{\gamma_l}|^2} \right]^{\mathcal{C}_{kl} m_{\alpha_k} m_{\gamma_l}} \right) \quad (\text{B.6})$$

A ce stade, le fait d'avoir plusieurs espèces n'intervient pas. Pour effectuer ces intégrales, on peut reprendre exactement le résultat de Kosterlitz (les intégrales sur  $\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)$  et sur  $\bar{D}_{\alpha_k}$  ne posent pas de réelle difficulté si ce n'est les notations assez lourdes). Une seule différence intervient néanmoins dans la surface d'intégration sur le disque elliptique  $\delta_{\beta_k}^k(\alpha_k)$ , cette dernière vaut:

$$\frac{2\pi a da}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

La fonction grand-partition s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \sum_{n_1, \dots, n_p} \frac{z_1^{2n_1} \dots z_p^{2n_p}}{(n_1!)^2 \dots (n_p!)^2} \int_{D_{2n_p}^1} \dots \int_{D_{2n_1}^1} d^2 r_{2n_1,1} \dots \int_{D_1^1} d^2 r_{1,1} \\ & \left[ 1 + \sum_k z_k^2 \frac{2\pi a da}{\sqrt{1-\lambda^2}} (A - 2\pi a^2 \sum_{l,l'} \mathcal{C}_{kl} \mathcal{C}_{kl'} m^2 \sum_{\beta_i \neq \beta_{l'}} m_{\beta_i} m_{\beta_{l'}} \log \frac{|r_{\beta_i} - r_{\beta_{l'}}|}{a}) \right] \\ & \times \exp \left[ \sum_{i,j} \sum_{\alpha_i, \beta_j} m_{\alpha_i} \mathcal{C}_{ij} m_{\beta_j} \log \frac{|r_{\alpha_i} - r_{\beta_j}|}{a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où  $A$  est une constante liée au volume d'intégration. On utilise maintenant le fait que  $da \ll a$  pour ré-exponentier la seconde ligne de (B.7). Cela donne une renormalisation des coefficients de la matrice de constante de couplage:

$$\mathcal{C}_{ll'} \rightarrow \mathcal{C}_{ll'} - \frac{(2\pi)^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} m^2 \frac{da}{a} \sum_k (z_k)^2 \mathcal{C}_{lk} \mathcal{C}_{kl'} \quad (\text{B.8})$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la deuxième étape du groupe de renormalisation à savoir ramener par un changement d'échelle les bornes des intégrales à leurs valeurs initiales. On utilise:

$$\log \frac{|r_{\alpha_i} - r_{\beta_j}|}{a} \sim \log \frac{|r_{\alpha_i} - r_{\beta_j}|}{a + da} + \frac{da}{a} \quad (\text{B.9})$$

Cela donne une renormalisation des fugacités pour chaque espèce (la charge est conservée à l'intérieur de chaque espèce donc les fugacités sont renormalisées indépendamment les unes des autres):

$$z_l \rightarrow (2 - \mathcal{C}_{ll} m^2 \frac{da}{a}) z_l \quad (\text{B.10})$$

En réitérant ce processus, on obtient un système d'équations différentielles couplées:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{C}_{ij}}{dl} = -\frac{(2\pi)^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} m^2 \sum_k (z_k)^2 \mathcal{C}_{ik} \mathcal{C}_{kj} \\ \frac{dz_k}{dl} = (2 - \mathcal{C}_{kk} m^2) z_k \end{cases} \quad (\text{B.11})$$



## **Annexe C**

### **ARTICLES**





































































































































































































# Bibliographie

- [1] K.G. Wilson and J. Kogut. *Physics Report C*, 12:75, 1974.
- [2] K.G. Wilson. *Rev. Mod. Phys.*, 47:773, 1975.
- [3] F. Wegner and A. Houghton. *Phys. Rev. A*, 8:401, 1973.
- [4] R. Shankar. *Rev. Mod. Phys.*, 66:3417, 1994.
- [5] T. R. Morris. *hep-th/9709100 and hep-th/9610012*.
- [6] C. Wetterich. *Phys. Lett. B*, 301:90, 1993.
- [7] G. Toulouse. *Commun. Phys.*, 2:115, 1977.
- [8] J.G. Bednorz and K.A. Muller. *Z. Phys. B*, 64:188, 1986.
- [9] C.W. Chu, P.H. Hor, R.L. Meng, L. Gao, Z.J. Huang, and Y.Q. Wang. *Phys. Rev. Lett.*, 58:405, 1987.
- [10] J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.
- [11] P.W. Anderson. *Science*, 235:1196, 1987.
- [12] M. Inui, S. Doniach, and M. Gabay. *Phys. Rev. B.*, 38:6631, 1988.
- [13] S. Doniach, M. Inui, V. Kalmeyer, and M. Gabay. *Europhys. Lett.*, 6:663, 1988.
- [14] E. Fradkin. *Field Theories of Condensed Matter Systems*, (Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1991).
- [15] J. Villain, R. Bidaux, J. P. Carton, and R. Conte. *J. Phys. (Paris)*, 41:1263, 1980.
- [16] N. D. Mermin and H. Wagner. *Phys. Rev. Lett.*, 17:1133, 1966.
- [17] V.L. Berezinskii. *Soviet Physics JETP*, 32:493, 1971.
- [18] J. M. Kosterlitz and D. Thouless. *J. Phys. C*, 6:1181, 1973.
- [19] J. M. Kosterlitz. *J. Phys. C*, 7:1046, 1974.

- [20] M. Le Bellac. *Des Phénomènes critiques aux champs de jauge*, InterEditions (1988).
- [21] C. Itzykson and J.M. Drouffe. *Théorie Statistique des champs - tome 1*, InterEditions-Editions du CNRS (1989).
- [22] J. Villain. *J. Phys. (Paris)*, 38:26, 1977.
- [23] L. P. Kadanoff. *J. Phys. A*, 11:1399, 1978.
- [24] A. P. Young. *J. Phys. C (letter)*, 11:453, 1978.
- [25] P. Minnhagen. *Rev. Mod. Phys.*, 59:1101, 1987.
- [26] B. Nienhuis. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz (academic, London, 1987), vol. 11.
- [27] J. José, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, and D. Nelson. *Phys. Rev. B*, 16:1217, 1977.
- [28] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, and G. Grinstein. *J. Phys. A*, 13:585, 1980.
- [29] P. Minnhagen. *Phys. Rev. B*, 32:3088, 1985.
- [30] P. Minnhagen and M. Wallin. *Phys. Rev. B*, 13:5620, 1987.
- [31] P. Minnhagen and M. Wallin. *Phys. Rev. B*, 40:5109, 1989.
- [32] J. M. Thijssen and H. J. F. Knops. *Phys. Rev. B*, 38:9080, 1988.
- [33] G. M. Zhang, H. Chen, and X Wu. *Phys. Rev. B*, 48:12304, 1993.
- [34] B.-W. Xu and Y.-M. Zhang. *Phys. Rev. B*, 50:18651, 1994.
- [35] G.-H. Ding and B.-W Xu. *Phys. Rev. B*, 51:12653, 1995.
- [36] Y. Levin, X. Li, and M. E. Fisher. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2716, 1994.
- [37] A. Diehl, M. C. Barbosa, and Y. Levin. *cond-mat/9702140*.
- [38] C. Timm. *Physica C*, 265:31, 1996.
- [39] J. M. Caillol and D. Levesque. *Phys. Rev. B*, 33:499, 1986.
- [40] J.-R. Lee and S. Teitel. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1483, 1990.
- [41] J.-R. Lee and S. Teitel. *Phys. Rev. B*, 46:3247, 1992.
- [42] J. Lidmar and M. Wallin. *cond-mat/9607025*.
- [43] M. Gabay and A. Kapitulnik. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2138, 1993.

- [44] S. C. Zhang. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2142, 1993.
- [45] J. Rossat-Mignod, P. Burlet, L. P. Regnault, and C. Vettier. *J. M. M. M.*, 5:90, 1990.
- [46] S. T. Bramwell and P. C. W. Holdsworth. *J. Appl. Phys.*, 73:6096, 1993.
- [47] S. T. Bramwell, P. C. W. Holdsworth, and J. Rothman. *Mod. Phys. Lett. B*, 11:13, 1997.
- [48] D. Nelson and J. M. Kosterlitz. *Phys. Rev. Lett.*, 39:1201, 1977.
- [49] B.I. Halperin and D. R. Nelson. *J. Low T. Phys.*, 36:599, 1979.
- [50] B.I. Halperin and D. R. Nelson. *Phys. Rev. Lett.*, 41:121, 1978.
- [51] J. Villain, D. Grepel, and J. Lapujoulade. *J. Phys. (Paris)*, 15:809, 1985.
- [52] F. Gallet, S. Balibar, and E. Rolley. *J. Phys. (Paris)*, 48:369, 1987.
- [53] C. Lobb. *Physica B*, 152:1, 1988.
- [54] Ch. Leemann, Ph. Lerch, B. A. Racine, and P. Martinolli. *Phys. Rev. Lett.*, 56:1291, 1986.
- [55] B. J. Van Wees, H. S. J. van der Zant, and J. E. Mooij. *Phys. Rev. B*, 35:7291, 1987.
- [56] P. Simon. *J. Phys. A*, 30:2653, 1997.
- [57] P. Simon. *Euro. Phys. Lett.*, 39:129, 1997.
- [58] E. F. Shender. *Sov. Phys. -JETP*, 56:178, 1982.
- [59] C. L. Henley. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2056, 1989.
- [60] C. L. Henley. *J. Appl. Phys.*, 61:3962, 1987.
- [61] J. B. Kogut. *Rev. Mod. Phys.*, 51:659, 1979.
- [62] H. Kleinert. *Gauge fields in condensed matter, vol. 1,2*, Singapore: World Scientific (1989).
- [63] T. Garel and S. Doniach. *J. Phys. C (letter)*, 46:887, 1980.
- [64] I. Affleck. *in Fields, Strings and Critical Phenomena, Les Houches*, edited by E. Brezin and J. Zinn Justin (North Holland, Amsterdam) 1988.
- [65] S. Scheidl. *Phys. Rev. B*, 55:457, 1997.

- [66] S.E. Korshunov. *Phys. Rev. B*, 48:1124, 1993.
- [67] M. Yosefin and E. Domany. *Phys. Rev. B*, 32:1778, 1985.
- [68] E. Granato and J.M. Kosterlitz. *Phys. Rev. B*, 33:1124, 1986.
- [69] P. Chandra, P. Coleman, and A. Larkin. *Phys. Rev. Lett*, 64:88, 1990.
- [70] J. F. Fernandez, M. Puma, and R. F. Angulo. *Phys. Rev. B*, 44:10057, 1991.
- [71] P. Simon. *Phys. Rev. B*, 56:10975, 1997.
- [72] P. Chandra and B. Douçot. *Phys. Rev. B*, 38:9335, 1988.
- [73] A. Moreo, E. Dagotto, T. Jolicoeur, and J. Riera. *Phys. Rev. B*, 42:6283, 1990.
- [74] T. Holstein and H. Primakoff. *Phys. Rev.*, 58:1908, 1940.
- [75] J. Villain. *J. Phys. (Paris)*, 35:27, 1974.
- [76] J. Ferrer. *Phys. Rev. B*, 347:8769, 1993.
- [77] H. J. Schulz, T. A. Ziman, and D. Poilblanc. *Magnetic Systems with Competing interactions*, ed. by H. T. Diep (World Scientific Singapore 1988).
- [78] L.B. Ioffe and A.L. Larkin. *Int. J. Mod. Phys. B*, 2:203, 1988.
- [79] T. Einarsson and H. Johansson. *Phys. Rev. B*, 43:5867, 1991.
- [80] J. Villain. *J. Phys. C*, 10:1717, 1977.
- [81] J. Villain. *J. Phys. C*, 10:4793, 1977.
- [82] M. Benakli and E. Granato. *Phys. Rev. B*, 55:8361, 1997.
- [83] D. H. Lee, J. D. Joannopoulos, J.W. Negele, and D. P. Landau. *Phys. Rev. Lett*, 52:433, 1984.
- [84] D. H. Lee, J. D. Joannopoulos, J.W. Negele, and D. P. Landau. *Phys. Rev. B*, 33:450, 1986.
- [85] J. E. van Himbergen. *Phys. Rev. B*, 34:6567, 1986.
- [86] W. M. Saslow, M. Gabay, and W. M. Zhang. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3627, 1992.
- [87] S. Teitel and C. Jayaprakash. *Phys. Rev. B*, 27:598, 1983.
- [88] S. Teitel and J. Jayaprakash. *Phys. Rev. Lett.*, 51:199, 1983.

- [89] D. Kimhi, Fl. Leyvraz, and D. Ariosa. *Phys. Rev. B*, 29:1487, 1984.
- [90] H. S. J. van der Zant, H. A. Rijken, and J. E. Mooij. *J. Low. Temp. Phys.*, 79:289, 1990.
- [91] J.V. José et al. *Physica B+C*, 194:1671, 1994.
- [92] T. C. Halsey. *Phys. Rev. Lett.*, 55:1018, 1985.
- [93] C. Denniston and C. Tang. *Phys. Rev. Lett*, 79:451, 1997.
- [94] P. Gupta, S. Teitel, and M. J. P. Gingras. *Phys. Rev. Lett*, 80:105, 1998.
- [95] E. Granato. *Phys. Rev. B*, 42:4797, 1990.
- [96] E. Granato. *Phys. Rev. B*, 45:2557, 1992.
- [97] L. J. Geerligs et al. *Phys. Rev. Lett*, 63:326, 1989.
- [98] H. S. J. van der Zant, L. J. Geerligs, and J. E. Mooij. *Euro. Phys. Lett.*, 119:541, 1992.
- [99] E. Granato and J.M. Kosterlitz. *Phys. Rev. Lett*, 65:1267, 1990.
- [100] E. Granato. *Phys. Rev. B*, 48:7727, 1993.
- [101] E. Granato. *J. Appl. Phys.*, 75:6690, 1994.
- [102] T. C. Halsey. *J. Phys. C*, 18:2437, 1985.
- [103] S.E. Korshunov and G. V. Uimin. *J. Stat. Phys.*, 43:1, 1986.
- [104] M. Y. Choi and S. Doniach. *Phys. Rev. B*, 31:4516, 1985.
- [105] B. Berge, H. T. Diep, A. Ghazali, and P. Lallemand. *Phys. Rev. B*, 34:3177, 1986.
- [106] D. Bailin, A. Love, and M. Moore. *J. Phys. C*, 9:1159, 1977.
- [107] H. Kawamura. *Phys. Rev. B*, 38:4916, 1988.
- [108] S.A. Antonenko and A.I. Sokolov. *Renormalisation Group 91 - Second International Conference*, Edited by D.V. Shirkov and V.B. Priezzhev, World Scientific (1991).
- [109] D. Mouhanna. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6 (1994)*.
- [110] A.M. Polyakov. *Gauge fields and strings*, (Harwood Academic Publishers, 1987).
- [111] J. Lee, E. Granato, and J. M. Kosterlitz. *Phys. Rev. Lett*, 66:1090, 1991.



- [112] G. S. Jeon, S. Y. Park, and M. Y. Choi. *Phys. Rev. B*, 55:14088, 1997.
- [113] O. Foda. *Nucl. Phys. B*, 300:611, 1988.
- [114] M. den Nijs. *Phys. Rev. B*, 46:10386, 1992.
- [115] G. Ramirez-Santiago and J.V. José. *Phys. Rev. B*, 49:9567, 1994.
- [116] S. Lee and K. Lee. *Phys. Rev. B*, 49:15184, 1994.
- [117] J. V. José and G. Ramirez-Santiago. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4849, 1996.
- [118] E. Granato and M. P. Nightingale. *Phys. Rev. B*, 48:7438, 1993.
- [119] H. J. Luo, L. Schulke, and B. Zheng. *cond-mat/9801253*.
- [120] P. Olsson. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2758, 1995.
- [121] P. Olsson. *Phys. Rev. B*, 55:3585, 1997.
- [122] M. P. Nightingale and H. W. J. Blöte. *Phys. Rev. Lett*, 60:1562, 1988.
- [123] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, and M. P. Nightingale. *Phys. Rev. Lett*, 56:742, 1986.
- [124] J. M. Thijssen and H. J. F. Knops. *Phys. Rev. B*, 42:2438, 1990.
- [125] D. Huse. *Phys. Rev. B*, 40:304, 1989.
- [126] B. Zheng. *Int. J. Mod. Phys. B*, in press, 1998.
- [127] J. Lee, E. Granato, and J. M. Kosterlitz. *Phys. Rev. B*, 44:4819, 1991.
- [128] Y. M. M. Knops, B. Nienhuis, H. J. F. Knops, and H. Blöte. *Phys. Rev. B*, 50:1061, 1994.
- [129] M. P. Nightingale, E. Granato, and J. M. Kosterlitz. *Phys. Rev. B*, 52:7402, 1995.
- [130] G. Grest and M. Widom. *Phys. Rev. B*, 24:6508, 1981.
- [131] M. den Nijs and K. Rommelse. *Phys. Rev. B*, 40:4709, 1989.
- [132] E. Carlon. *Phys. Rev. E*, 53:5549, 1996.
- [133] E. Carlon, G. Mazzeo, and H. van Beijeren. *Phys. Rev. B*, 55:757, 1997.
- [134] P. J. M. Bastiaansen and H. J. F. Knops. *Phys. Rev. B*, 53:126, 1996.
- [135] S. Lee, K. C. Lee, and J. M. Kosterlitz. *cond-mat/9612242*.
- [136] R. J. Baxter. *J. Phys. A (letter)*, 13:61, 1980.

- [137] J.-R. Lee. *Phys. Rev. B*, 49:3317, 1994.
- [138] J. Lee, J. M. Kosterlitz, and E. Granato. *Phys. Rev. B*, 43:11531, 1991.
- [139] A. B. Zamolodchikov. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 46:6, 1987.
- [140] A. B. Zamolodchikov. *Advances Studies in Pure Mathematics*, 19:641, 1989.
- [141] X. Obradors, A. Labarta, A. Isalgué, J. Tejada, J. Rodriguez, and M. Pernet. *Solid State Com.*, 65:189, 1988.
- [142] A.P. Ramirez, G. P. Espinosa, and A. S. Cooper. *Phys. Rev. Lett.*, 64:2070, 1990.
- [143] C. Broholm, G. Aeppli, G.P. Espinoza, and A.S. Cooper. *Phys. Rev. Lett.*, 65:3173, 1990.
- [144] V. Elser. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2405, 1989.
- [145] D. S. Greywall and P. A. Busch. *Phys. Rev. Lett.*, 62:1868, 1989.
- [146] H. Franco, R. E. Rapp, and H. Godfrin. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1161, 1986.
- [147] B. D. Gaulin, J. N. Reimers, T. E. Mason, J. E. Greedan, and Z. Tun. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3244, 1992.
- [148] M. J. Harris, M. P. Zinkin, Z. Tun, B.M. Wanklyn, and I. P. Swanson. *Phys. Rev. Lett.*, 73:189, 1994.
- [149] R. Ballou, E. Lelièvre-Berna, and B. Fak. *Phys. Rev. Lett.*, 76:2125, 1996.
- [150] C. Zeng and V. Elser. *Phys. Rev. B*, 52:15304, 1995.
- [151] J.T. Chalker and J. F. J. Eastmond. *Phys. Rev. B*, 46:8436, 1992.
- [152] R.R.P. Singh and D.A. Huse. *Phys. Rev. Lett*, 68:1766, 1992.
- [153] S. Sachdev. *Phys. Rev. B*, 45:12377, 1992.
- [154] A. Chubukov. *Phys. Rev. Lett.*, 69:832, 1992.
- [155] J.T. Chalker, P.C.W. Holdsworth, and E.F. Shender. *Phys. Rev. Lett.*, 68:855, 1992.
- [156] I. Ritchey, P. Chandra, and P. Coleman. *Phys. Rev. B*, 47:15342, 1993.
- [157] P. Chandra, P. Coleman, and I. Ritchey. *J. Phys. (France)*, I3:591, 1993.
- [158] R. Moessner and J. T. Chalker. *cond-mat/9712063*.

- [159] P. Lecheminant, B. Bernu, C. Lhuillier, L. Pierre, and P. Sindzingre. *Phys. Rev. B*, 56:2521, 1997.
- [160] Ch. Waldtmann, H. U. Everts, B. Bernu, P. Sindzingre, C. Lhuillier, P. Lecheminant, and L. Pierre. *cond-mat/9802168*.
- [161] B. Canals and C. Lacroix. *Preprint submitted to Phys. Rev. Lett.*
- [162] P. Chandra and B. Douçot. *J. Phys. A*, 27:1541, 1994.
- [163] Vl. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, vol. I and II Springer-Verlag (1983) (chap. 4).
- [164] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics*, Pergamon Press (Chap 7).
- [165] D. Cabra, A. Dobry, A. Greco, and G. L. Rossini. *J. Phys. A*, 30:2699, 1997.
- [166] H. Nakamura, N. Hatano, and M. Takahashi. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 64:4142, 1995.
- [167] T. Nakamura and S. Takada. *cond-mat/9604162*.
- [168] Vl. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1989).
- [169] B. Douçot and P. Simon. *in preparation*.
- [170] K. Kubo. *Phys. Rev. B*, 48:10552, 1993.
- [171] R. E. Walstedt, R. J. Cava, R. F. Bell, J. J. Krjeewski, and W. F. Peck. *Phys. Rev. B*, 49:12369, 1994.
- [172] T. Nakamura and K. Kubo. *Phys. Rev. B*, 53:6396, 1996.
- [173] F. Monti and A. Sütö. *Phys. Lett. A*, 156:191, 1991.
- [174] B. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press (1980).
- [175] D. Loss, D. P. Di Vincenzo, and G. Grinstein. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3232, 1992.
- [176] J. von Delft and C. L. Henley. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3236, 1992.
- [177] J. N. Reimers. *Phys. Rev. B*, 45:7287, 1992.
- [178] J. N. Reimers and A. J. Berlinsky. *Phys. Rev. B*, 48:9539, 1993.
- [179] B. Douçot and P. Simon. *in preparation*.
- [180] A. A. Beliaev, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. *Nucl. Phys. B*, 241:333, 1984.

- [181] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*, ed. Springer (1996).
- [182] P. Christe and M. Henkel. *Introduction to conformal invariance and its applications to critical phenomena*, Springer-Verlag (1993).
- [183] P. Ginsparg. in *Fields, Strings and Critical Phenomena, Les Houches*, edited by E. Brezin and J. Zinn Justin (North Holland, Amsterdam) 1988.
- [184] M. A. Virasoro. *Phys. Rev. D*, 1:2933, 1970.
- [185] I. Affleck. *Phys. Rev. Lett*, 56:746, 1986.
- [186] J. L. Cardy. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz (academic, London, 1987), vol. 11.
- [187] J. C. Cardy. in *Fields, Strings and Critical Phenomena, Les Houches*, edited by E. Brezin and J. Zinn Justin (North Holland, Amsterdam) 1988.
- [188] B. L. Feigin and D. B. Fuks. *Funktz. Analiz.*, 16:47, 1982.
- [189]
- [190] Z. Qiu D. Friedan and S. Shenker. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1575, 1984.
- [191] R. J. Baxter. *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics*, Academic press, London, 1982.
- [192] Vl. S. Dotsenko. *Nucl.Phys. B*, 235:54, 1984.
- [193] Vl. S. Dotsenko. *J. Stat. Phys.*, 34:781, 1984.
- [194] Vl. S. Dotsenko and V. A. Fateev. *Nucl. Phys. B*, 240:312, 1984.
- [195] Vl. S. Dotsenko and V. A. Fateev. *Nucl. Phys. B*, 251:691, 1985.
- [196] P. Di Francesco. *Int. J. Mod. Phys. A*, 7:407, 1992.
- [197] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker. *Phys. Lett. B*, 151:37, 1985.
- [198] A. Perez, M. Rausch de Traubenberg, and P. Simon. *Nucl. Phys. B*, 482:325, 1996.
- [199] M. Rausch de Traubenberg and P. Simon. *Nucl. Phys. B*, in press, 1998.
- [200] P. Goddard and D. Olive. *Int. J. Mod. Phys. A*, 1:37, 1985.
- [201] V. A. Fateev and A. B. Zamolodchikov. *Nucl. Phys. B*, 280:644, 1987.
- [202] Vl. S. Dotsenko. *Adv. Studies in pure Math.*, 16:123, 1988.

- [203] Vl. S. Dotsenko. *Série de cours de DEA sur les théories conformes*.
- [204] A. Cappelli, C. Itzykson, and J. B. Zuber. *Nucl. Phys. B*, 280:445, 1987.
- [205] Vl. S. Dotsenko, M. Picco, and P. Pujol. *Nucl. Phys. B*, 455:701, 1995.
- [206] Vl. S. Dotsenko, M. Picco, and P. Pujol. *Phys. Lett. B*, 347:113, 1995.
- [207] J. L. Cardy and J. L. Jacobsen. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4063, 1997.
- [208] J. L. Cardy and J. L. Jacobsen. *cond-mat/9711279*, Nucl. Phys. B, 1998.
- [209] L. Vaysburd. *Nucl. Phys. B*, 446:387, 1995.
- [210] P. Pujol. *Euro. Phys. Lett.*, 35:283, 1996.
- [211] R. B. Stinchcombe. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz (academic, London, 1983), vol. 7.
- [212] B. M. McCoy and T. T. Wu. *Phys. Rev.*, 176:631, 1968.
- [213] D. C. Rapaport. *J. Phys. C*, 5:1830, 1972.
- [214] C. Domb. *J. Phys. C (letter)*, 5:25, 1970.
- [215] P. G. Watson. *J. Phys. C*, 3:1399, 1972.
- [216] A. B. Harris and T. C. Lubensky. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1540, 1974.
- [217] Vl. S. Dotsenko. *An introduction to the theory of spin glass and neural networks*, World Scientific (1994).
- [218] A. B. Harris. *J. Phys. C*, 7:1671, 1974.
- [219] Vl. S. Dotsenko and Vl. S. Dotsenko. *J. Phys. A (letter)*, 17:495, 1982.
- [220] V. J. Emery. *Phys. Rev. B*, 11:239, 1975.
- [221] S. F. Edwards and P. W. Anderson. *J. Phys. (Paris)*, 5:965, 1975.
- [222] P. G. De Gennes. *Phys. Lett. A*, 38:339, 1972.
- [223] K. Binder and A. P. Young. *Rev. Mod. Phys.*, 58:801, 1986.
- [224] M. Mézard, G. Parisi, and M. Virasoro. *Spin glass theory and beyond*, World Scientific (1987).
- [225] R. W. Penney, T. Coolen, and D. Sherrington. *J. Phys. A*, 26:3681, 1993.

- [226] Vik. Dotsenko, S. Franz, and M. Mézard. *J. Phys. A*, 27:2351, 1994.
- [227] D. J. Gross and A. Neveu. *Phys. Rev. D*, 10:3235, 1974.
- [228] Vik. S. Dotsenko and Vl. S. Dotsenko. *Sov. Phys. JETP Lett.*, 33:37, 1981.
- [229] A. W. W. Ludwig and J. L. Cardy. *Nucl. Phys. B*, 285:97, 1987.
- [230] V. B. Andreichenko, Vl. S. Dotsenko, W. Selke, and J.-S. Wang. *Nucl.Phys. B*, 344:531, 1990.
- [231] J.-S. Wang, W. Selke, Vl. S. Dotsenko, and V. B.Andreichenko. *Euro. Phys. Lett.*, 11:301, 1990.
- [232] J.-S. Wang, W. Selke, Vl. S. Dotsenko, and V. B.Andreichenko. *Physica A*, 164:221, 1990.
- [233] A. L. Talapov and L. N. Shchur. *hep-lat/9404002*.
- [234] J. K. Kim and A. Patrascioiu. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2785, 1994.
- [235] A. W. W. Ludwig. *Nucl. Phys. B*, 330:639, 1990.
- [236] W. L. Mc Millan. *Phys. Rev. B*, 29:4026, 1984.
- [237] H. Nishimori. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 55:3305, 1986.
- [238] H. Nishimori. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 61:1011, 1992.
- [239] E. Sørensen, M. J. P. Gingras, and D. Huse. *cond-mat/9801056*.
- [240] G. Parisi and N. Sourlas. *Phys. Rev. Lett.*, 43:744, 1979.
- [241] T. Giamarchi and P. Le Doussal. *Phys. Rev. Lett*, 72:1530, 1994.
- [242] T. Giamarchi and P. Le Doussal. *Phys. Rev. Lett*, 74:606, 1995.
- [243] Y. Imry and M. Wortis. *Phys. Rev. B*, 19:3581, 1979.
- [244] M. Aizenman and J. Wehr. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2503, 1989.
- [245] K. Hui and N. Berker. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2507, 1989.
- [246] J. L. Cardy. *J.Phys. A*, 9:1897, 1996.
- [247] R. J. Baxter. *Phys. Rev. Lett*, 26:832, 1971.
- [248] E. Fradkin. *Phys. Rev. Lett*, 21:1967, 1984.

- [249] R. Shankar. *Phys. Rev. Lett*, 55:453, 1985.
- [250] P. Simon. *Euro. Phys. Lett.*, 41:605, 1998.
- [251] S. Chen, A.M. Ferrenberg, and D. P. Landau. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1213, 1992.
- [252] C. Chatelain and B. Berche. *Phys. Rev. Lett.*, 80:1670, 1998.
- [253] M. Picco. *cond-mat/9802092*.
- [254] V. Privman and M. E. Fisher. *Phys. Rev. B*, 30:322, 1984.
- [255] M. Picco. *Phys. Rev. Lett.*, 79:2998, 1997.
- [256] L. Schwenger, K. Budde, C. Voges, and H. Pfneur. *Phys. Rev. Lett.*, 73:296, 1994.
- [257] A. LeClair, A. W. W. Ludwig, and G. Mussardo. *Nucl Phys. B*, 512:523, 1998.
- [258] M. Picco. *Phys. Rev. B*, 54:14930, 1996.
- [259] P. Simon. *Phys. Lett. B*, 408:293, 1997.
- [260] E. Granato, J. M. Kosterlitz, and M. P. Nightingale. *Physica B*, 222:266, 1996.
- [261] Vik S. Dotsenko, Vl. S. Dotsenko, and M. Picco. *hep-th/9709136*.
- [262] Vl. S. Dotsenko. *Nucl. Phys. B*, 314:687, 1988.
- [263] R. Savit. *Rev. Mod. Phys.*, 52:453, 1980.
- [264] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*, (Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, Bristol and New-York, 1990).
- [265] J. Fröhlich, R. Goetschmann, and P.A. Marchetti. *J. Phys. A*, 28:1169, 1995.
- [266] P. A. Marchetti. *hep-th/9511100*.
- [267] B. Douçot. *unpublished*.
- [268] M. Kiometzis, H. Kleinert, and A.M.J. Schakel. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1975, 1994.
- [269] M. Kiometzis, H. Kleinert, and A.M.J. Schakel. *Fortschr. Phys.*, 43:1995, 1995.
- [270] I. F. Herbut and Z. Tesanović. *Phys. Rev. Lett.*, 76:4588, 1996.
- [271] I. F. Herbut and Z. Tesanović. *Phys. Rev. Lett.*, 78:980, 1997.
- [272] I. F. Herbut. *Phys. Rev. Lett*, 79:3502, 1997.
- [273] P. Degiovanni, Ch. Chaubet, and R. Melin. *cond-mat/9711173*.
- [274] S. W. Pierson. *Phil. Mag. B*, 76:715, 1997.