



**HAL**  
open science

# Description des noyaux faiblement liés par le modèle en couches avec couplage au continuum

Nicolas Michel

► **To cite this version:**

Nicolas Michel. Description des noyaux faiblement liés par le modèle en couches avec couplage au continuum. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université de Caen, 2002. Français. NNT : . tel-00002338

**HAL Id: tel-00002338**

**<https://theses.hal.science/tel-00002338>**

Submitted on 30 Jan 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée par

Nicolas MICHEL

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN**

Spécialité: Constituants élémentaires

(Arrêté du 30 Mars 1992)

**Sujet :**

**Description des noyaux faiblement liés par le modèle en couches avec  
couplage au continuum**

Soutenue publiquement le 15 novembre 2002 devant le jury composé de:

Madame	<b>I. Rotter</b> , professeur d'Université	Rapporteur
Monsieur	<b>A. Poves</b> , professeur d'Université	Rapporteur
Monsieur	<b>M. Lewitowicz</b> , directeur de recherches	
Monsieur	<b>O. Naviliat-Cuncic</b> , professeur d'Université	
Monsieur	<b>M. Płoszajczak</b> , chercheur CEA	Directeur de thèse

# Remerciements

En premier lieu, je remercie mon directeur de thèse M. Płoszajczak pour son soutien constant.

Ensuite, je voudrais remercier les directeurs du laboratoire du GANIL, d'abord D. Guerreau et J.P. Fouan, et maintenant D. Goutte et M. Lewitowicz, pour m'avoir accueilli au GANIL et avoir rendu ma thèse possible.

Je tiens aussi à remercier I. Rotter, M. Lewitowicz, O. Naviliat-Cuncic et A. Poves, pour avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

De plus, je dois remercier J. Okołowicz, K. Bennaceur, F. Nowacki et O. Juillet, dont les conseils m'ont été très utiles. Il est important de mentionner de même l'aide qu'ont pu m'apporter B. Barrett, J. Dobaczewski, J. Draayer, J. Frankland, A. Kruppa, W. Nazarewicz, F. de Oliveira, P. Van Isacker et T. Vertse, qui m'ont aidé quant à la compréhension de certains problèmes en physique nucléaire.

Je dois aussi remercier l'aide qu'ont pu m'apporter tout particulièrement A. Latour-Lecouturier, A. Kahwati, J. Fournier, M. Lion, D. Vaillant et Y. Patois dans les domaines administratifs et informatiques.

Enfin, je remercie tous les autres étudiants thésards, docteurs ou post-doc qui m'ont accompagné durant ces trois années, soit P. Chau, S. Basnary, S. Gibouin, J. Rotureau, Y. Luo, L. Giot, O. Monnoye, S. Hudan, V. Régnard, A. Mignon, B. Guiot, C. Escano-Rodriguez, A. Letourneau, M. Lopez-Jimenez, A.S. Lalleman, A. de Vismes, J.M. Daugas, C.E. Demonchy, N. Le Neindre, M. Stanoiu, J. Marie, plus tous les autres qui se reconnaîtront.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modèle en couches couplé au continuum : SMEC</b>	<b>8</b>
2.1	Le modèle en couches classique . . . . .	8
2.2	Prise en compte du continuum dans le modèle en couches . . . . .	10
2.3	Equations de CSM et SMEC . . . . .	13
2.4	Potentiel auto-consistant dans SMEC . . . . .	19
2.5	Observables des réactions de capture radiative et diffusion élastique . .	20
2.5.1	Facteur astrophysique d'une capture radiative . . . . .	20
2.5.2	Section efficace de diffusion . . . . .	20
2.6	Etude de $^{17}\text{F}$ et de $^{17}\text{O}$ . . . . .	21
2.6.1	Interaction effective, spectres et transitions réduites . . . . .	21
2.6.2	Diffusion élastique $^{16}\text{O}(\text{p,p})^{16}\text{O}$ . . . . .	24
2.6.3	Captures radiatives $^{16}\text{O}(\text{p},\gamma)^{17}\text{F}$ . . . . .	26
2.7	Décroissances $\beta$ premières interdites . . . . .	30
2.7.1	Définitions . . . . .	30
2.7.2	Transitions $\beta$ premières interdites dans les noyaux miroirs $A = 17$	31
2.8	Calcul des corrections dues au continuum des masses d'isotopes d'oxygènes	37
<b>3</b>	<b>Modèle en couches avec états de Gamow</b>	<b>41</b>
3.1	Normalisation et éléments de matrice avec états de Gamow . . . . .	42
3.1.1	Méthode de Zel'dovich . . . . .	42
3.1.2	Éléments de matrice et rotation complexe . . . . .	42
3.2	Relations de complétudes avec états de Gamow . . . . .	46
3.2.1	Relation de complétude à un corps . . . . .	46
3.2.2	Illustration de la relation de complétude à un corps . . . . .	48
3.3	Relation de complétude à $N$ corps . . . . .	53
3.4	Recherche des états liés et résonnants . . . . .	53
3.4.1	Méthode pour trouver les états liés et résonnants . . . . .	53
3.4.2	Exemples de détermination d'états résonnants . . . . .	53
3.4.3	Illustrations de la relation de complétude à deux corps . . . . .	56
3.5	Etude de la chaîne d'isotopes d'oxygènes de $^{18}\text{O}$ à $^{22}\text{O}$ . . . . .	59
3.6	Etude de la chaîne d'isotopes d'hélium de $^6\text{He}$ à $^9\text{He}$ . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>76</b>
<b>A</b>	<b>Equation radiale et méthode de shooting</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Sections efficaces de capture radiative</b>	<b>80</b>

<b>C</b>	Terme résiduel des équations de canaux couplés	<b>82</b>
<b>D</b>	Terme source des équations de canaux couplés	<b>87</b>
<b>E</b>	Traitement numérique de l'opérateur $q$	<b>91</b>
<b>F</b>	Calcul de $\langle \Phi_i^{(J)}   H_{QP}   \omega_n^+ \rangle$ et $\langle \Phi_i^{(J)}   H_{QP}   \xi \rangle$	<b>93</b>
<b>G</b>	Wronskiens et fonctions de Jost	<b>94</b>
G.1	Fonctions de Jost . . . . .	94
G.2	Dérivée de $\mathcal{J}$ . . . . .	94
<b>H</b>	Calcul de décroissances $\beta$	<b>96</b>
H.1	Facteur de l'espace de phase $f$ . . . . .	96
H.2	Temps de vie partiel . . . . .	97
H.3	Fonction de Fermi $F(Z, W)$ . . . . .	97
H.4	Facteur de forme $C(W)$ . . . . .	98
H.4.1	Transitions permises . . . . .	98
H.4.2	Transitions premières interdites . . . . .	98
H.5	Calcul des éléments de matrice . . . . .	100
H.5.1	Traitement dans SMEC . . . . .	100
H.5.2	Éléments de matrice de particules indépendantes . . . . .	101

# Chapitre 1

## Introduction

L'étude théorique des noyaux exotiques est désormais rendue possible par le nombre important de données expérimentales obtenues dans ce domaine. Un pas décisif a été franchi par l'émergence de rayons très énergétiques issus de fragmentation [Tan89]. D'importantes installations ont été construites aux GANIL, RIKEN, Michigan State University et Oak Ridge National Laboratory. Des projets nouveaux et ambitieux sont en cours de discussion aux Etats-Unis avec le projet RIA, en Europe avec le projet Eurisol ou les nouveaux appareillages de GSI/Darmstadt, au Japon avec le projet RIKEN. Avec l'arrivée des réactions nucléaires induites, l'étude des noyaux jusqu'à la drip-line neutron est maintenant possible dans les noyaux légers, et de futures installations vont permettre d'étendre ces études vers les noyaux plus lourds. Dans les noyaux légers riches en neutron, des chaînes d'isotopes d'hydrogènes et d'hélium stables ont été découvertes [Ogl89], avec les présentes limites de  ${}^5\text{H}$  [Kor01] et  ${}^{10}\text{He}$  [Kor94] [Ost94]. Une intense recherche de systèmes liés multineutroniques se fait depuis plusieurs années [Ogl89]. Dans ce contexte, des données récentes ont motivé la recherche d'un éventuel tétranéutron [Mar02].

Pour comprendre les noyaux exotiques, on doit faire appel à des modèles sophistiqués. Un des outils les plus utilisés en physique nucléaire est le modèle en couches, introduit il y a cinquante ans [Hax49] [Gop50]. Il a permis de comprendre de nombreuses données telles que les spins et parités nucléaires, les moments quadrupolaires électriques ou magnétiques, ainsi que les probabilités de transition électromagnétiques,  $\beta$  ou de particules [Boh75]. Les fondations du modèle en couche ont été comprises quand le rapport entre l'interaction nucléon-nucléon élémentaire et l'existence d'un potentiel nucléaire effectif avec un couplage spin-orbite a été établi [Bru62] [Bru58] [Bet56]. La manière dont l'interaction résiduelle à deux corps entre les nucléons dans le potentiel nucléaire effectif donne les spectres observés a commencé à être étudiée vers le milieu des années cinquante avec la première application du modèle en couches multiconfigurationnel aux noyaux de la couche  $p$  [Lan55] [Kur56] [Wil57]. Ces études, permettant de comprendre l'évolution du couplage  $LS$  vers le couplage  $jj$  avec l'augmentation du nombre de masse [Kur56], a donné naissance à la théorie de structure nucléaire qui existe aujourd'hui. Ses succès accompagnent des efforts pour atteindre les drip-lines ou pour tester les limites de stabilité nucléaire à haut spin ou grandes déformations.

Au départ, le continuum non résonnant n'était pas considéré dans le modèle en couches. Les nucléons étaient supposés n'occuper que des orbites d'états liés dans le potentiel moyen, parfaitement isolés de l'environnement d'états de diffusion. Le succès des premières applications du modèle en couches multiconfigurationnel était si impressionnant que les problèmes rencontrés dans la description de spectres de noyaux miroirs

(par exemple, les spectres des noyaux  $^{13}\text{C}$  et  $^{13}\text{N}$  [Ehr51]), n'ont pas changé la séparation fondamentale de la structure nucléaire et des méthodes de réactions nucléaires.

Ainsi, cette séparation est malheureusement devenue un paradigme de la physique nucléaire. La situation était cependant différente à l'époque de la création du modèle en couches multiconfigurationnel. Feshbach, à la fin des années cinquante, exprima la matrice de collision du modèle optique à partir des éléments de matrice de l'hamiltonien nucléaire [Fes62]. Cela fut le point de départ du développement des théories microscopiques de réaction nucléaires basées sur le modèle en couches [Bre59] [Rod61] [Mac64] [Fan61]. En effet, la structure nucléaire détermine les propriétés des états nucléaires par les effets apparaissant dans les collisions nucléaires. Ceci implique une certaine connaissance des théories de réaction nucléaire, qui elle-même demande de connaître un peu de structure nucléaire. Ainsi, il y a une dépendance mutuelle entre ces deux domaines, ce qui demande un cadre théorique unifié.

En dehors du modèle en couches, le couplage au continuum est aussi pris en compte. On a, par exemple, la méthode HFB (Hartree-Fock-Bogolyoubov), qui est une théorie variationnelle de champ moyen prenant en compte les corrélations d'appariement [Rin80]. Pour les noyaux sphériques, la solution des équations de HFB peut se calculer en base position, car le problème s'y réduit alors à un système d'équations à une dimension, ce qui permet de prendre en compte explicitement le couplage au continuum [Bul80] [Dob84] [Zve85] [Bel87] [Dob96] [Dob98] [Gra01]. Pour les noyaux déformés, on peut utiliser un développement sur une base THO (Transformed Oscillator Basis), qui est une modification de la base d'oscillateur harmonique de sorte que ses états aient un comportement asymptotique physique [Sto98a] [Sto98b]. Il existe aussi des méthodes hybrides de résolution des équations HFB sur une base de fonctions HF (Hartree-Fock) [Ter97]. Néanmoins, ces deux dernières méthodes ne peuvent être utilisées que pour des états liés. D'autre part, les méthodes de clusters, avec les techniques de GCM (Generating Coordinate Method) et matrice R [Lan58] (voir [Phi77] [Hal79] [Hal81] [Phi75] [Hal75] pour une étude de noyaux légers et [Bay77] [Bay83] [Fla88] [Yos86] pour une étude de noyaux lourds) ou avec rotation complexe [Cso94] [Pic97], permettent de calculer les largeurs d'états résonnants et sections efficaces de capture radiative. Cependant, ces méthodes demandent toujours une connaissance qualitative des fonctions d'ondes pour déterminer quels clusters seront opportuns dans leur description.

Dans ce travail, on a utilisé et développé deux modèles, SMEC (Shell Model Embedded in the Continuum) et GSM (Gamow Shell Model). SMEC est une variante du CSM (Continuum Shell Model) de Barz, Rotter et Höhn [Bar71] [Bar77a] [Bar77b], et trouve ses racines dans le premier modèle en couches avec couplage au continuum de Mahaux et Weidenmüller [Mah69]. Le CSM consista d'abord à séparer l'espace de Hilbert en deux espaces, l'un, discret, constitué d'états liés, et l'autre le continuum des états de diffusion avec une particule dans le continuum. Ces deux espaces sont générés par un potentiel de puits fini et leurs états interagissent par une interaction schématique. L'état d'un noyau est donc la somme de deux termes, l'un correspondant aux corrélations entre états liés et quasi liés, dont le calcul ressemble beaucoup au modèle en couches classique, et un autre donnant le comportement asymptotique de cet état, qui est calculé via un système d'équations de type canaux couplés. Ensuite, les états résonnants étroits à un corps issus du potentiel fini furent ajoutés à l'ensemble des états liés [Bar71] [Bar77a]. Ceci a été possible car il a été montré que les résonances à un corps pouvaient être traitées comme des états liés en introduisant un cut de ces fonctions à une distance donnée [Wan70]. Avec cette approche, on obtient des largeurs d'émissions pour les états

résonnants, et les états liés proches du seuil d'émission de particule sont modifiés de manière non négligeable par le couplage états discrets - états du continuum. Cependant, il y a un problème avec CSM : une interaction schématique ne suffit pas pour avoir un mélange de configurations réaliste pour la partie discrète, nécessaire pour des états de basse énergie. C'est la considération de ce problème qui différencie SMEC de CSM : on utilise dans SMEC une interaction effective de modèle en couches pour la partie états liés et faiblement résonnants [Ben99] [Ben00a]. On peut alors déterminer précisément les spectres, ainsi que les taux de transitions électromagnétiques et de transitions dues à la force faible. Cependant, on ne peut pour l'instant n'avoir qu'un seul nucléon dans le continuum, ce qui implique que l'étude des halos de deux nucléons ou des noyaux borroméens est impossible pour l'instant.

Les applications de SMEC étudiées dans ce travail concernent en premier lieu les noyaux miroirs  $^{17}\text{F}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{17}\text{N}$  et  $^{17}\text{Ne}$ . Les noyaux  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  sont intéressants car ils possèdent un seuil d'émission de particule relativement bas et sont bien connus expérimentalement. De plus, ils interviennent directement dans les cycles CNO par les réactions  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$  et  $^{16}\text{O}(n,\gamma)^{17}\text{O}$ . On a aussi traité la section efficace de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$ , qui dépend fortement de la dynamique du coeur de  $^{16}\text{O}$ . Ensuite, les décroissances  $\beta$  premières interdites ont été étudiées dans ce formalisme. Leur intérêt vient de la forte brisure de symétrie miroir existant entre les décroissances premières interdites  $5/2^+ \rightarrow 1/2^+$  de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ . Le SMEC a permis de mieux cerner l'origine de cette brisure, venant surtout des différentes structures des états nucléaires miroirs intervenant dans la réaction. Enfin, les énergies de liaison de la chaîne d'isotopes d'oxygène de  $^{18}\text{O}$  à  $^{26}\text{O}$  ont été calculées avec SMEC. On a pu y étudier la correction à l'énergie de séparation à un et deux nucléons due au couplage au continuum, en fonction du nombre de nucléons de valence et de la position du seuil d'émission de neutron. SMEC est donc un outil très utile pour l'étude des noyaux exotiques.

Le second modèle étudié et développé dans cette thèse est le GSM (Gamow Shell Model). Il utilise les états de Gamow, introduits par Georg Gamow pour traiter les émetteurs de particules  $\alpha$  [Gam28]. Ces états sont générés par un potentiel fini et peuvent être liés, résonnants ou de diffusion. Ils ne peuvent cependant pas être normalisés de la manière usuelle (sauf les états liés), car les états résonnants divergent à l'infini. On doit alors faire appel à d'autres méthodes pour les normaliser [Zel61] [Gya71]. Enfin, on peut définir plusieurs relations de complétude avec ces états [Ber67] [Ber92a] [Lin93].

En ce qui concerne le problème à  $N$  corps, une étude des résonances géantes de  $^{208}\text{Pb}$  a été faite dans une approche RPA (Random-Phase-Approximation) [Cur89], et récemment le continuum non résonnant a été inclus pour décrire deux particules corrélées dans un champ moyen [Bet02]. Pourtant, aucune tentative d'aborder ce problème dans une optique de modèle en couches avec ces états n'avait été faite, et c'est pour la première fois qu'on utilise la base de Gamow pour développer des états complexes dans une approche de ce type [Mic02b] [Mic03]. L'intérêt de cette étude est que le continuum est explicitement pris en compte dans cette base, car elle provient d'un potentiel fini. De plus, on peut développer des états résonnants avec celle-ci, bien qu'on se place dans un formalisme stationnaire. Avec cette approche, on a alors à la fois les avantages du modèle en couches standard, par la prise en compte des corrélations entre nucléons, et les avantages des modèles de réactions, car on utilise une base de potentiel fini. De plus, et c'est la propriété la plus importante, il n'y a aucune limitation au nombre de particules dans le continuum.



Dans ce travail, on s'est particulièrement intéressé aux chaînes d'isotopes d'oxygène et hélium, respectivement de  $^{17}\text{O}$  à  $^{22}\text{O}$  et de  $^5\text{He}$  à  $^9\text{He}$  avec une interaction schématique de portée nulle SDI (Surface Delta Interaction). En effet, la présence de la résonance neutron à un corps  $0d_{3/2}$  pour les isotopes d'oxygènes et des résonances à un corps  $0p_{3/2}$  et  $0p_{1/2}$  pour les isotopes d'hélium implique que le continuum est important pour ces deux chaînes et donc qu'un calcul avec une base de Gamow peut apporter des éléments nouveaux sur la description de ces noyaux. Ainsi, les énergies des états fondamentaux des isotopes d'oxygènes ont été reproduites, de même que l'augmentation de l'énergie de liaison des isotopes d'hélium pairs en allant de  $^6\text{He}$  à  $^8\text{He}$ . Enfin, on a considéré d'autres observables que l'énergie avec ces noyaux : les transitions électromagnétiques connues des isotopes d'oxygènes ont été calculées, ainsi que les densités de particules de valence d'états de  $^{18}\text{O}$  et  $^6\text{He}$ .

Les deux modèles théoriques étudiés dans cette thèse sont donc complémentaires :

- SMEC permet de décrire les spectres des noyaux de structure complexes (énergies, largeurs, transitions électromagnétiques, transitions  $\beta$ ), ainsi que des sections efficaces (capture radiative, dissociation coulombienne, diffusion élastique et inélastique), mais avec une seule particule dans le continuum.
- GSM peut développer des états complexes avec un nombre arbitraire de particules dans le continuum, mais les dimensions des espaces de modèles en couches augmentent beaucoup plus vite qu'avec SMEC et on ne peut pas encore utiliser d'interaction nucléaire effective. On doit utiliser en effet une interaction schématique, comme l'interaction SDI dans ce travail. Par conséquent, les calculs de sections efficaces demandant des fonctions d'ondes de structure très précise ne peuvent pas encore être entrepris avec GSM.

Ce travail se présente alors comme suit. En premier lieu (Chapitre 2), on se consacrera à l'étude de SMEC. On introduira d'abord son formalisme, pour ensuite passer aux applications. On considèrera alors les spectres de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ , et après les réactions de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  et de capture radiative  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$ . Ensuite, on s'intéressera aux décroissances beta premières interdites  $^{17}\text{Ne} \rightarrow ^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$ , et on terminera l'étude de SMEC avec le calcul des corrections dues au continuum des masses d'isotopes d'oxygènes. En second lieu (Chapitre 3), on étudiera GSM. On verra d'abord quel est le formalisme des états de Gamow en développant les notions fondamentales de rotation complexe et de relations de complétudes à un et plusieurs corps. Les relations de complétudes à un et deux corps seront illustrées par des exemples. Ensuite, on expliquera comment on recherche les états liés et résonnants à plusieurs corps, qui demande une autre technique que la méthode de Lanczos en modèle en couches, et on montrera son efficacité sur des exemples précis. Enfin, on passera aux applications, soit l'étude des chaînes d'isotopes d'oxygènes de  $^{17}\text{O}$  à  $^{22}\text{O}$  et d'hélium  $^5\text{He}$  à  $^9\text{He}$  avec une interaction SDI. On considèrera alors les spectres de ces isotopes, ainsi que les transitions électromagnétiques connues de la chaînes d'isotopes d'oxygènes et les densités de particules de valence des noyaux  $^{18}\text{O}$  et  $^6\text{He}$ . Les conclusions quant à la valeur opportune de ces deux modèles et les améliorations possibles qu'on peut leur apporter seront données en conclusion.

## Chapitre 2

# Modèle en couches couplé au continuum : SMEC

### 2.1 Le modèle en couches classique

Le point de départ de SMEC est le modèle en couches classique. Celui-ci a pour hypothèse que le noyau peut être décrit comme un ensemble de nucléons de valence interagissant dans un nombre fini de couches hors d'un coeur inerte, formés des nucléons restants du noyau.

Dans ce modèle, la fonction d'onde du noyau  $|\Psi\rangle$  est solution de l'équation de Schrödinger

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (2.1)$$

où

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V(i,j). \quad (2.2)$$

Dans l'hamiltonien, on a le terme cinétique à un corps et un terme d'interaction à deux corps.

On sait qu'une grande partie de cette interaction consiste en un champ attractif moyen, créé par tous les nucléons. Ce fait, dû au principe de Pauli, est expliqué dans [Sha74]. Par conséquent, on peut écrire l'hamiltonien d'une manière plus simple à traiter:

$$H = \sum_{i=1}^{N_v} \left[ \frac{p_i^2}{2m} + v_i \right] + \sum_{(i<j) \in Val} V_{res}(i,j) + H_{core}, \quad (2.3)$$

où :

- $N_v$  est le nombre de particules de valence;
- $H_{core}$  est le terme de coeur inerte;
- $v_i$  est le champ moyen agissant sur le nucléon  $i$ ;
- $V_{res}(i,j)$  est le terme de l'interaction nucléaire entre les nucléons  $i$  et  $j$  résiduel, autrement dit qui ne peut s'écrire sous la forme d'une interaction à un corps.

En modèle en couches, on utilise une base d'oscillateur harmonique. Cette base a l'avantage d'être analytique, ainsi que beaucoup d'intégrales faisant intervenir les états de cette base. De plus, elle permet un traitement rigoureux du centre de masse du noyau.

Ainsi, on a séparé  $H$  en trois parties :

$$H = H_0 + H_1 + H_{core} \quad (2.4)$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N_v} \left[ \frac{p_i^2}{2m} + v_i \right] \quad (2.5)$$

$$H_1 = \sum_{(i<j) \in Val} V_{res}(i,j) \quad (2.6)$$

$H_{core}$  ne donne qu'un terme constant à l'énergie des états et donc peut être oublié. On a alors le terme à un corps  $H_0$ , et le terme à deux corps  $H_1$ , plus petit que  $H_0$ . Les solutions de  $H_0|\Psi\rangle = E_0|\Psi\rangle$  sont immédiates, ce sont les déterminants de Slater  $|DS\rangle = |\phi_1 \dots \phi_{N_v}\rangle$ , les états  $\phi_i$  étant ceux de la base harmonique. Cette base étant complète, on peut développer les états propres de  $H$  avec cette base, soit :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^d c_n |DS_n\rangle, \quad (2.7)$$

où  $d$  est la dimension de l'espace de Hilbert choisi, et les  $c_n$  des coefficients à déterminer.

On obtient alors un problème matriciel aux valeurs propres  $MC = EC$ , où  $C = [c_n]_{n \in [1:d]}$  dont la matrice  $M$  est constituée des recouvrements :

$$M_{if} = \langle DS_f | H_0 + H_1 | DS_i \rangle.$$

Il est clair que  $\langle DS_f | H_0 | DS_i \rangle = E_0 \delta_{if}$ . Il reste donc le terme  $\langle DS_f | H_1 | DS_i \rangle$ . Pour le traiter, il faut alors faire appel à des méthodes phénoménologiques, car l'interaction nucléaire n'est pas connue.

Il existe principalement trois méthodes pour y arriver :

- On peut prendre une interaction de forme analytique simple, dite schématique, pour  $V_{res}$ , qui a les caractéristiques principales de l'interaction nucléaire. Par exemple, la plus simple de ces interactions est l'interaction SDI [Rin80], une interaction de portée nulle. Cependant, on ne peut espérer reproduire précisément les données expérimentales avec cette méthode.
- On peut calculer  $V_{res}$  à partir de l'interaction nucléaire de deux nucléons dans le vide, avec la technique de matrice G [Bru60a] [Bru60b] (Pour une discussion récente de cette technique, voir [Hol00] [Eng02]). Cependant, cette méthode donne de mauvaises énergies pour les noyaux et elle demande une correction des éléments de matrice : on doit modifier la partie monopolaire de l'hamiltonien [Duf96].
- On peut aussi oublier la décomposition  $H_0 + H_1$  et ajuster les éléments de matrice de sorte de reproduire au mieux les spectres des noyaux d'une région donnée, que ce soit par une méthode de moindres carrées [Bro88], ou par un ajustement des paramètres d'une interaction schématique sur un grand nombre de noyaux [Ric91]. Cela donne de très bons résultats. Cependant, cela ne permet pas de remonter à l'interaction nucléaire véritable, car les éléments de matrice dépendent fortement du nombre de couches, donc de la troncation de l'espace de Hilbert utilisé.

Ces deux dernières méthodes donnent une interaction effective, c'est-à-dire qu'on n'a pas l'interaction nucléaire en soit, mais une interaction, qui, dans un espace donné, reproduit au mieux les effets de l'interaction nucléaire.

Le modèle en couches a permis de reproduire et comprendre de nombreux résultats expérimentaux. Cependant, dans ce modèle, on n'a que des états liés, car la base de

l'oscillateur harmonique est complète, mais seulement dans l'espace des fonctions de carré intégrable. De plus, l'influence du continuum sur les états liés est absente, ce qui veut dire que même les états peu liés ne peuvent pas être bien décrits avec la base de l'oscillateur harmonique. Pour pallier tous ces problèmes, le continuum est pris en compte effectivement dans l'interaction nucléaire, par exemple quand on ajuste les éléments de matrice de l'interaction avec les données expérimentales. Cependant, cette approche reste phénoménologique et par conséquent ne donne pas de nouvelles informations sur les noyaux peu liés ou non liés. Ainsi, seule une intervention explicite du continuum peut permettre de mesurer son influence et de savoir quantitativement comment il agit sur les états nucléaires, pour les noyaux exotiques peu liés et résonants, mais aussi pour les états excités des noyaux bien liés, qui se rapprochent des seuils d'émission de particules quand leur énergie augmente.

## 2.2 Prise en compte du continuum dans le modèle en couches

L'idée principale du modèle en couches avec couplage au continuum [Mah69] [Bar71] [Bar77a] [Bar77b] [Rot91] est que pour les états nucléaires, l'action du continuum est faible par rapport à celle des états discrets [Kuk89]. En effet, les noyaux émetteurs de particules ont souvent une largeur de l'ordre du keV, ce qui signifie que leur structure est plus proche de celle d'un état lié que de celle d'un état de diffusion. Par conséquent, il est logique de séparer l'espace de Hilbert en deux :

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} + \mathcal{Q} , \quad (2.8)$$

où  $\mathcal{P}$  est l'espace des états à  $A$  corps du continuum non résonnant et  $\mathcal{Q}$  celui des états à  $A$  corps liés ou peu résonnants. En toute rigueur,

$$\mathcal{P} = \sum_{k+l>0} \mathcal{P}_{k\pi,l\nu} , \quad (2.9)$$

somme sur l'ensemble des états ayant  $A - k - l$  nucléons dans un état lié ou quasi lié,  $k$  protons et  $l$  neutrons dans le continuum non résonnant. Cependant, on fera toujours l'approximation

$$\mathcal{P} \simeq \mathcal{P}_{1\pi(\nu)} , \quad (2.10)$$

c'est-à-dire qu'on aura toujours au plus une particule dans le continuum. Ce n'est pas que le modèle interdise d'avoir plusieurs particules dans le continuum, mais l'ajout des espaces correspondants complique considérablement le formalisme. En fait, cette approximation est justifiée si les seuils d'émission de  $\alpha$ , deuton, triton,  $\dots$ , sont très hauts par rapport au seuil d'émission d'une particule. C'est le cas pour les noyaux étudiés dans ce chapitre.

Le potentiel utilisé pour générer les états à un corps est un potentiel Woods-Saxon avec un terme spin-orbite standard et un terme coulombien de sphère uniformément chargée :

$$V(r) = -V_0 f(r) - V_{so} 4\vec{l} \cdot \vec{s} \frac{1}{r} \frac{df}{dr}(r) + V_c(r) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \left[ 1 + e^{\frac{r-R_0}{d}} \right]^{-1} \\
 V_c(r) &= C_c Z \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \quad r \leq R_0 \\
 &= C_c \frac{Z}{r} \quad r \geq R_0 \\
 \vec{l} \cdot \vec{s} &= \frac{j(j+1) - l(l+1) - 0.75}{2},
 \end{aligned}$$

où :

- $R_0$  est le rayon du potentiel;
- $d$  est la diffusivité du potentiel;
- $V_0$  est la force du potentiel central;
- $V_{so}$  est la force du potentiel spin-orbite;
- $f(r)$  est le facteur de forme du potentiel;
- $V_c(r)$  est le potentiel coulombien;
- $C_c$  est la constante de Coulomb ( $C_c \sim 1.44$  MeV).

Pour trouver les états propres de ce potentiel, il faut résoudre l'équation de Schrödinger [Mes95] :

$$h|\phi\rangle = e|\phi\rangle \quad (2.12)$$

$$h = \frac{p^2}{2m} + V. \quad (2.13)$$

Comme le potentiel est sphérique, on a [Mes95]:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \mathcal{Y}_{ljm}(\theta, \varphi) \frac{u(r)}{r}. \quad (2.14)$$

$\mathcal{Y}_{ljm}$  est le terme angulaire couplé à  $j$ , défini par :

$$\mathcal{Y}_{ljm}(\theta, \varphi) = \sum_{m_l + m_s = m} \langle l m_l s m_s | jm \rangle Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \chi_{sm_s}. \quad (2.15)$$

où  $Y_{lm_l}$  est une harmonique sphérique et  $\chi_{sm_s}$  est le terme de spin  $s = 1/2$ , et de projection sur  $s_z$  :  $m_s = \pm 1/2$ .

La fonction radiale  $u$  vérifie :

$$u''(r) = \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (V(r) - e) \right] u(r) \quad (2.16)$$

$$u(r) \sim C_0 \cdot r^{l+1} \quad r \rightarrow 0_+ \quad (2.17)$$

$$u(r) \sim C^{(+)} \cdot H_{l,\eta}^{(+)}(kr) \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.18)$$

où :

- $\mu$  est la masse réduite du système nucléon + coeur;
- $k$  est le nombre d'onde ( $k^2 = 2\mu/\hbar^2 e$ );
- $C_0$  et  $C^{(+)}$  sont des constantes de normalisation;
- $\eta$  est le paramètre de Sommerfeld :  $\eta = C_c Z (2\mu/\hbar^2) (1/2k)$ ;
- $H_{l,\eta}^{(+)}$  est la fonction d'onde de Coulomb sortante.

La condition (2.18) vient du fait que les états liés et résonnants ont un comportement d'onde sortante en  $+\infty$ , et que seuls les termes centrifuge en  $l(l+1)/r^2$  et coulombien  $V_c(r)$  subsistent après un certain rayon  $R$  de l'ordre de 20 fm.

Seul un ensemble discret d'énergies peut satisfaire la condition précédente : il s'agit des énergies d'états liés ( $e < 0$ ) et résonnants ( $e = E - i\Gamma/2$ ),  $E > 0$  et  $\Gamma > 0$ . Pour les états résonnants,  $E$  est l'énergie de la résonance et  $\Gamma$  sa largeur. Leur recherche se fait en utilisant la méthode de shooting, décrite en annexe A. Les intégrations doivent être faites numériquement et se font avec la méthode Bulirsch-Stoer-Henrici [Pre92]. Les états obtenus sont appelés états de Gamow [Gam28] [Zel61] [Fra64] [Rom63] [Kuk89]. Aussi, cette méthode est à quelques détails près celle utilisée dans le programme GAMOW [Ver82].

Il faut cependant pour l'espace  $\mathcal{Q}$  une base discrète appartenant à l'espace de Hilbert. Quand  $e < 0$ , il n'y a pas de problème car dans ce cas les états de Gamow sont identiques aux états liés usuels et y appartiennent. On notera ces états  $|\phi_i\rangle$ . Cependant, pour les états résonnants, quand  $e$  est complexe, ce n'est plus le cas, et il faut faire appel à une autre fonction. Après avoir calculé  $e = E - i\Gamma/2$ , on réintègre (2.16) mais cette fois-ci avec l'énergie  $E = \text{Re}[e]$  à la place de  $e$ . Pour que l'état soit normalisable, il faut multiplier la fonction  $u$  par une fonction de coupure [Wan70] :

$$g_{cut}(r) = \left[ 1 + \exp\left(\frac{r - R_{cut}}{a_{cut}}\right) \right]^{-1}, \quad (2.19)$$

où les paramètres  $R_{cut}$  et  $a_{cut}$  sont déterminés suivant les résonances. Habituellement, on place  $R_{cut}$  au premier zéro de  $u(r)$  en dehors du noyau, et  $a_{cut}$  est choisi de l'ordre de  $10d$ , où  $d$  est la diffusivité du potentiel Woods-Saxon. Le choix de  $R_{cut}$  est fait de sorte que la partie de la résonance influencée par le noyau et la barrière coulombienne soit dans l'espace  $\mathcal{Q}$ . Aussi, les résultats sont indépendants de  $R_{cut}$  si celui-ci est pris plus loin que le premier zéro de  $u(r)$  en dehors du noyau.  $a_{cut}$  est pris assez large de sorte que la coupure ne se fasse pas trop brusquement, et qu'ainsi  $u(r)$  reste numériquement dérivable. De plus, comme on va le voir, l'hamiltonien à un corps est redéfini à cause de cette coupure et on aura toujours un ensemble de fonctions à un corps orthonormé complet. On obtient alors les fonctions résonnantes  $|w_{res}^i\rangle$  appartenant à l'espace de Hilbert. Tous ces états doivent vérifier la condition de normalisation usuelle :

$$\int_0^{+\infty} |u(r)|^2 dr = 1. \quad (2.20)$$

A partir des états liés  $|u_i\rangle$  et des états résonnants  $|w_{res}^i\rangle$ , il faut construire un ensemble orthogonal. En effet, l'introduction de la fonction de coupure de (2.19) pour les résonances brise l'orthogonalité entre tous les états calculés précédemment. Seuls les états liés restent orthogonaux entre eux. On utilise donc le procédé de Gramm-Schmidt pour orthogonaliser l'ensemble de ces états. Pour cela, on définit pour chaque résonance une nouvelle fonction d'onde :

$$|\widetilde{w}_{res}^n\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} A_i |w_{res}^i\rangle + \sum_i B_i |\phi_i\rangle \quad (2.21)$$

avec les conditions :

$$\langle \widetilde{w}_{res}^n | \widetilde{w}_{res}^n \rangle = 1 \quad (2.22)$$

$$\langle \widetilde{w}_{res}^n | w_{res}^i \rangle = 0 \quad i < n \quad (2.23)$$

$$\langle \widetilde{w}_{res}^n | \phi_i \rangle = 0 \quad \forall i. \quad (2.24)$$

Pour simplifier les notations, on notera par la suite  $|\phi_n\rangle$  au lieu de  $|\widetilde{w}_{res}^n\rangle$ .

Ainsi, on a obtenu un ensemble orthogonal d'états à un corps pouvant générer des déterminants de Slater de  $A$  nucléons, qui formeront une base de l'espace  $\mathcal{Q}$ . Il reste à compléter cet ensemble par le continuum non résonnant pour avoir un ensemble complet d'états. Pour cela, définissons l'hamiltonien partiel suivant :

$$h_{ljt_z} = q_{ljt_z} h q_{ljt_z} + p_{ljt_z} h p_{ljt_z} , \quad (2.25)$$

avec  $q_{ljt_z}$  le projecteur sur l'espace  $\mathcal{D}_{ljt_z}$  des états à un corps liés et quasi liés ayant pour nombres quantiques intrinsèques  $l, j$  et  $t_z$ , et  $p_{ljt_z}$  le projecteur sur l'espace  $\mathcal{C}_{ljt_z}$  des états à un corps du continuum ayant ces mêmes nombre quantiques:

$$q_{ljt_z} = \sum_{\delta \in \mathcal{D}_{ljt_z}} |u_\delta\rangle \langle u_\delta| \quad (2.26)$$

$$p_{ljt_z} = \int_0^{+\infty} |u_\epsilon\rangle \langle u_\epsilon| d\epsilon \quad (2.27)$$

Remarquons que  $p_{ljt_z} + q_{ljt_z} = \mathbb{1}$ . Il est clair que par construction, les états liés et quasi liés sont états propres de  $h_{ljt_z}$ , et a fortiori de  $h$ , car :

$$h = \sum_{ljt_z} h_{ljt_z} .$$

Les états du continuum non résonnant sont normalisés par  $\langle u_k | u_{k'} \rangle = \delta(k - k')$ . Toutes les fonctions sont alors orthonormées. Donc, cet ensemble de fonctions est orthogonal et complet, car défini par un unique hamiltonien [Mor53].

## 2.3 Equations de CSM et SMEC

Pour faire apparaître la contribution des espaces  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{P}$ , introduisons les projecteurs sur ces espaces :

$$Q = \sum_m |DS_m\rangle \langle DS_m| \quad (2.28)$$

$$P = \mathbb{1} - Q , \quad (2.29)$$

où les déterminants de Slater  $|DS_m\rangle$  sont formés des états  $|\phi_n\rangle$  définis au chapitre (2.2).

On peut alors réécrire l'hamiltonien  $H$  :

$$\begin{aligned} H &= (P + Q)H(P + Q) \\ &= PHP + QHQ + PHQ + QHP \\ &= H_{PP} + H_{QQ} + H_{PQ} + H_{QP} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ces opérateurs vont nous permettre d'introduire les différentes composantes de la fonction d'onde totale  $|\Psi\rangle$  solution de :

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle , \quad (2.31)$$

où  $E$  est l'énergie du système cible + projectile.

On définit un ensemble de fonctions liées et quasi liées par l'équation dans  $\mathcal{Q}$  :

$$H_{QQ}|\Phi_i\rangle = E_i^{SM}|\Phi_i\rangle . \quad (2.32)$$

C'est une équation de modèle en couches standard qui se résout de la manière décrite dans la section 2.1.

Dans le CSM [Bar77a] [Bar77b], la base utilisée provient du potentiel de puits fini tel celui de (2.11), et l'interaction entre nucléons est schématique. Cependant, ce n'est pas suffisant pour avoir une bonne spectroscopie du noyau considéré et il faut procéder autrement. En effet, à l'heure actuelle, seules les interactions effectives avec une base d'oscillateur harmonique peuvent apporter un bon mélange de configuration apportant des énergies proches des données expérimentales. Par conséquent, dans SMEC, l'approche est la suivante :

- L'hamiltonien  $H_{QQ}$  est identifié à un hamiltonien de modèle en couches effectif  $H_{SM}$  correspondant au noyau considéré;
- On résout  $H_{SM}|\Phi_i\rangle_{OH} = E_i^{SM}|\Phi_i\rangle_{OH}$ . L'indice  $(OH)$  est là pour indiquer qu'on utilise l'oscillateur harmonique dans cette étape, et non les états à un corps du chapitre (2.2); on obtient donc les états :

$$|\Phi_i\rangle_{OH} = \sum_n c_n |DS_n\rangle_{OH} \quad (2.33)$$

- On définit l'état  $|\Phi_i\rangle$  de  $\mathcal{Q}$  par :

$$|\Phi_i\rangle = \sum_n c_n |DS_n\rangle, \quad (2.34)$$

où on prend les mêmes coefficients  $c_n$  que dans l'équation (2.33), et on remplace  $|DS_n\rangle_{OH}$  par l'état correspondant  $|DS_n\rangle$  de  $\mathcal{Q}$ . Par la suite, nous aurons besoin des états de la cible à  $A-1$  corps pour calculer des éléments de matrice de couplage entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Ils se calculent de la même manière que les  $|\Phi_i\rangle$ .

On définit la solution de diffusion  $|\xi\rangle$  par l'équation dans  $\mathcal{P}$  :

$$H_{PP}|\xi\rangle = E|\xi\rangle. \quad (2.35)$$

C'est une équation de type canaux couplés, qui modélise la diffusion d'un projectile sur une cible à une énergie  $E$ . Les conditions aux limites la définissant sont ondes sortantes dans tous les canaux et onde entrante uniquement dans le canal de départ. Un canal  $c$  est défini par :

$$[|\Phi_{T_c}\rangle \otimes |l j t_z\rangle]^{(J)}, \quad (2.36)$$

où  $|\Phi_{T_c}\rangle$  est l'état de la cible et  $|l j t_z\rangle$  l'état de la particule dans le continuum. Dans un canal, le projectile et la cible sont indépendants, et la corrélation projectile-cible est prise en compte par les potentiels de couplage entre différents canaux. La résolution de cette équation donnera la partie radiale de la fonction d'onde du projectile. Tous les canaux de l'équation ont même  $J$ , parité et énergie  $E$ . On a donc :

$$\vec{J} = \vec{J}_{T_c} + \vec{j} \quad (2.37)$$

$$\Pi = \Pi_{T_c} \cdot \pi \quad (2.38)$$

$$E = E_{T_c} + e \quad (2.39)$$

où les termes en minuscules correspondent au projectile et ceux avec l'indice  $T_c$  correspondent à la cible. Comme l'ensemble des états de la cible est discret, celle-ci étant liée, l'ensemble des canaux est discret.



Pour résoudre l'équation (2.35), on développe alors  $\xi$  sur la représentation de ces canaux:

$$|\xi\rangle = \int dr r^2 \sum_c \langle c, r | \xi \rangle |c, r\rangle . \quad (2.40)$$

Soit  $c$  un canal défini par les conditions ci-dessus. On a donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle c, r | H_{PP} - E | c', r' \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle c, r | E - PH_0P - PH_1P | c', r' \rangle \langle c', r' | \xi \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle c, r | E - P \sum_{\alpha} \langle \alpha | h | \alpha \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} P \\ & - P \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \gamma > \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} P | c', r' \rangle \langle c', r' | \xi \rangle = 0 . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Les états  $\alpha \dots \gamma$  parcourent l'ensemble  $\mathcal{D}$  des états discrets  $|u_n\rangle$  et l'ensemble  $\mathcal{C}$  des états continus  $|u_{\epsilon}\rangle$  définis au chapitre (2.2). Dans (2.41), l'énergie de la cible apparaît par :

$$\begin{aligned} & \int dr' r'^2 \sum_{c'} \langle c, r | \sum_{\alpha \in \mathcal{D}} \langle \alpha | h | \alpha \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \sum_{\substack{(\alpha > \beta) \in \mathcal{D} \\ (\gamma > \delta) \in \mathcal{D}}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} | c', r' \rangle \\ = & \int dr' r'^2 \sum_{c'} \langle c, r | c', r' \rangle E_{T_{c'}} \\ = & \sum_{c'} E_{T_c} \delta_{cc'} , \end{aligned} \quad (2.42)$$

où on a reconnu dans l'expression l'hamiltonien de la cible  $H_{T_{c'}}$  écrit en seconde quantification, impliquant naturellement  $H_{T_{c'}} |c', r'\rangle = E_{T_{c'}} |c', r'\rangle$ .

Aussi, comme on n'a qu'une particule dans le continuum, le terme à deux corps ayant  $\alpha \dots \gamma$  dans le continuum disparaît. De plus, comme  $\alpha > \beta$  et  $\gamma > \delta$ , il ne reste que le terme à deux corps ayant  $(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C}$  et  $(\beta, \delta) \in \mathcal{D}$ . On suppose en effet qu'on a ordonné les états de sorte que les indices des états discrets soient plus petits que ceux des états du continuum.

Soit  $\xi_{c'}(r')/r' = \langle c', r' | \xi \rangle$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{c'} \int dr' r' \langle c, r | (E - E_{T_c}) \delta_{cc'} & - \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \langle \alpha | h | \alpha \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \\ & - \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta, \delta) \in \mathcal{D}}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} | c', r' \rangle \xi_{c'}(r') = 0 . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Le terme à un corps se calcule en remarquant que  $\alpha$  possède les nombres quantiques de la particule du continuum du canal  $c$  défini en (2.36) :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \langle \alpha | h | \alpha \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} & = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \langle \alpha | h_{l_j t_z} | \alpha \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \\ & = p_{l_j t_z} h p_{l_j t_z} , \end{aligned} \quad (2.44)$$

où on a utilisé le fait que  $\alpha$  appartient au continuum (voir (2.25) et (2.27)). En notant  $p_c = p_{ljt_z}$  et  $q_c = q_{ljt_z}$  :

$$\begin{aligned}
 & \int dr' r'^2 \langle c, r | \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{1}{r'} \langle \alpha | h | \alpha \rangle a_\alpha^\dagger a_\alpha | c', r' \rangle \xi_{c'}(r') \\
 &= \int dr' r'^2 \frac{1}{r'} \langle c, r | p_c h p_c | c', r' \rangle \xi_{c'}(r') \\
 &= (1 - q_c(r)) \frac{\hbar}{r} (1 - q_c(r)) \xi_c(r) \delta_{cc'} ,
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

où  $q_c(r)$  est l'opérateur  $q_c$  écrit dans l'espace des coordonnées :

$$q_c(r) \varphi(r) = \sum_{\delta \in \mathcal{C}} u_\delta(r) \int_0^{+\infty} u_\delta(r') \varphi(r') dr' . \tag{2.46}$$

Le calcul du terme à deux corps est assez complexe et est expliqué en annexe C. On a pour ce terme :

$$\begin{aligned}
 & \int dr' r' \langle c, r | \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta, \delta) \in \mathcal{D}}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma | c', r' \rangle \xi_{c'}(r') \\
 &= (1 - q_c(r)) V_{cc'}(r) \frac{1}{r} (1 - q_{c'}(r)) \xi_{c'}(r)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$V_{cc'}(r)$  est donné en (C.9). Donc :

$$\sum_{c'} [(E - E_{T_c} - (1 - q_c(r))h) \delta_{cc'} - (1 - q_c(r))V_{cc'}(r)] \xi_{c'}(r) = 0 , \tag{2.48}$$

car  $(1 - q_{c'}(r))\xi_{c'}(r) = \xi_{c'}(r)$  par définition. On a donc obtenu un système d'équations différentielles couplées. Les équations sont en effet différentielles et non intégral-différentielles car l'interaction utilisée dans l'espace  $\mathcal{P}$  est de portée nulle. Sa résolution, qui a pour principale difficulté la prise en compte de  $q_c(r)$ , est expliquée en annexe E.

On définit le prolongement  $|\omega_i^{(+)}\rangle$  appartenant à  $\mathcal{P}$  de l'état  $|\Phi_i\rangle$  de  $\mathcal{Q}$  par l'équation dans  $\mathcal{P}$  :

$$(E - H_{PP})|\omega_i^{(+)}\rangle = H_{PQ}|\Phi_i\rangle . \tag{2.49}$$

Les conditions aux limites la définissant sont ondes sortantes dans tous les canaux et pas d'onde entrante. C'est une aussi équation de type canaux couplés, avec une condition supplémentaire dépendant de  $E$  :

- si  $E > 0$ , on considère que l'état est résonnant, et cette équation décrit la perte possible d'une particule de l'état  $|\Phi_i\rangle$  de  $\mathcal{Q}$ .
- si  $E < 0$ , on considère que l'état est lié et cette équation décrit l'action du continuum non résonnant sur l'état  $|\Phi_i\rangle$  par l'intermédiaire de l'hamiltonien  $H_{PQ}$ .

Le signe de  $E$  est déterminé par la valeur de l'énergie  $E_i^{SM}$  de  $|\Phi_i\rangle$ . Si elle est au dessus du seuil d'émission de particule  $E_0$ ,  $E$  est positive et sinon  $E$  est négative. Donc :

$$E_i^{SM} < E_0 \Rightarrow \omega_i^{(+)}(r) \rightarrow 0 \quad , \quad r \rightarrow +\infty \tag{2.50}$$

$$E_i^{SM} > E_0 \Rightarrow \omega_i^{(+)}(r) \rightarrow C \cdot H_{i,\eta}^{(+)}(kr) \quad , \quad r \rightarrow +\infty. \tag{2.51}$$

où  $k^2 = 2\mu/\hbar^2 e$  est l'énergie de la particule émise et  $C$  une constante de normalisation.

Ce seuil  $E_0$  pourrait être calculé dans SMEC à partir des états fondamentaux de  $A$  et  $A - 1$  nucléons. Cependant, ce n'est pas assez précis pour pouvoir reproduire les sections efficaces et il faut le fixer à la valeur expérimentale. Ceci est licite, car les énergies  $E_i^{SM}$  ne sont définies qu'à une constante près. En effet, si  $H_{QQ}|\Phi_i\rangle = E_i^{SM}|\Phi_i\rangle$ ,  $(H_{QQ} - E_0)|\Phi_i\rangle = (E_i^{SM} - E_0)|\Phi_i\rangle$ . L'écriture de l'équation (2.49) sous une forme numériquement utilisable se fait de la même manière que pour l'équation (2.35), avec cependant un terme source  $H_{PQ}|\Phi_i\rangle$  en plus. En utilisant les notations de (2.48), ce système d'équations s'écrit :

$$\sum_{c'} [(E - E_{T_c} - (1 - q_c)h) \delta_{cc'} - (1 - q_c)V_{cc'}(r)] \omega_{c'}^{(+)}(r) = (1 - q)w_i^{(c)}(r) , \quad (2.52)$$

où le calcul du terme source  $w_i^{(c)}(r)$  est donné en (D.3).

La solution de diffusion générale s'écrit :

$$|\Psi\rangle = |\xi\rangle + \sum_n c_n [|\Phi_n\rangle + |\omega_n^{(+)}\rangle] , \quad (2.53)$$

où on voit la partie diffusive  $|\xi\rangle$  et les composantes liées et résonnantes  $|\Phi_n\rangle + |\omega_n^{(+)}\rangle$ . Les coefficients  $c_n$  sont à déterminer. On a :

$$\begin{aligned} H|\Psi\rangle &= E|\Psi\rangle \\ \iff H_{PP}|\Psi\rangle + H_{PQ}|\Psi\rangle + H_{QP}|\Psi\rangle + H_{QQ}|\Psi\rangle &= E|\Psi\rangle \\ \iff H_{PP}|\xi\rangle + \sum_n c_n [(H_{PP} + H_{QP})|\omega_n^{(+)}\rangle + (H_{PQ} + H_{QQ})|\Phi_n\rangle] + H_{QP}|\xi\rangle \\ &= E|\xi\rangle + E \sum_n c_n (|\Phi_n\rangle + |\omega_n^{(+)}\rangle) \\ \iff [H_{PP} - E]|\xi\rangle + \sum_n c_n [H_{PQ}|\Phi_n\rangle - (E - H_{PP})|\omega_n^{(+)}\rangle] + H_{QP}|\xi\rangle \\ &\quad + \sum_n c_n (H_{QP}|\omega_n^{(+)}\rangle + E_n^{SM}|\Phi_n\rangle) = E \sum_n c_n |\Phi_n\rangle \\ \iff \sum_n c_n [(E_n^{SM} - E)|\Phi_n\rangle + H_{QP}|\omega_n^{(+)}\rangle] &= -H_{QP}|\xi\rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

Pour arriver à cette équation, on a utilisé le fait que  $Q|\omega_n^{(+)}\rangle = 0$ ,  $P|\Phi_n\rangle = 0$  et  $Q|\xi\rangle = 0$ , ainsi que les équations (2.32), (2.35) et (2.49).

On obtient le système à résoudre en multipliant (2.54) par  $\langle\Phi_m| + \langle\omega_m^{(+)}|$  :

$$\sum_n c_n [(E_n^{SM} - E) \delta_{nm} + \langle\Phi_m|H_{QP}|\omega_n^{(+)}\rangle] = -\langle\Phi_m|H_{QP}|\xi\rangle . \quad (2.55)$$

Les éléments de matrice intervenant dans ce système sont donnés en annexe F. En écrivant :

$$M(E) = [E_n^{SM} \delta_{n,m} + \langle\Phi_m|H_{QP}|\omega_n^{(+)}\rangle]_{n,m} \quad (2.56)$$

$$X = [c_n]_n \quad (2.57)$$

$$B = [-\langle\Phi_m|H_{QP}|\xi\rangle]_m \quad (2.58)$$

on obtient l'écriture matriciel du système :

$$(M(E) - E \cdot I_d) X = B . \quad (2.59)$$

$M$  dépend de  $E$  par l'intermédiaire des  $|\omega_n^{(+)}\rangle$ . C'est un système linéaire écrit sur la base des  $|\Phi_n\rangle + |\omega_n^{(+)}\rangle$ . Cependant, en pratique, on aura toujours la base propre générée par  $M(E)$  :

$$M \left( |\widetilde{\Phi}_n\rangle + |\widetilde{\omega}_n^{(+)}\rangle \right) = \left( E_n - i \frac{\Gamma_n}{2} \right) \left( |\widetilde{\Phi}_n\rangle + |\widetilde{\omega}_n^{(+)}\rangle \right) . \quad (2.60)$$

Dans ce cas, la résolution du système linéaire dans cette base est triviale, et on obtient pour  $|\Psi\rangle$  :

$$|\Psi\rangle = |\xi\rangle + \sum_n \frac{\langle \widetilde{\Phi}_n | H_{QP} | \xi \rangle}{E - E_n + i \frac{\Gamma_n}{2}} \left( |\widetilde{\Phi}_n\rangle + |\widetilde{\omega}_n^{(+)}\rangle \right) . \quad (2.61)$$

Un état lié, de même qu'un état résonnant, a un comportement d'onde sortante. Par conséquent, il ne peut avoir de terme de diffusion  $|\xi\rangle$  car celui-ci a une partie entrante correspondant à l'arrivée du projectile. Ainsi, il s'écrit :

$$|\widetilde{\Phi}_n\rangle + |\widetilde{\omega}_n^{(+)}\rangle = \sum_n c_n \left[ |\Phi_n\rangle + |\omega_n^{(+)}\rangle \right] . \quad (2.62)$$

Cependant, seuls les états liés sont états propres de  $H$ . En effet, le système cible+projectile est un système fermé, qui ne peut pas émettre de particule, et seuls les états liés ont cette propriété, les états résonnants ayant une durée de vie finie.

Considérons d'abord un état lié, donc avec  $E < 0$ , et reprenons le calcul du chapitre précédent. Comme la composante avec  $|\xi\rangle$  a disparu, on obtient le système :

$$(M(E) - E \cdot I_d) X = 0 . \quad (2.63)$$

Ce système n'admet de solution  $X$  non nulle uniquement si :

$$\det[M(E) - E \cdot I_d] = 0 .$$

Cette équation définit un problème aux valeurs propres, qui donne un ensemble de solutions discret  $(E_n, |\widetilde{\Phi}_n\rangle + |\widetilde{\omega}_n^{(+)}\rangle)$  : ce sont les états liés du système.

Pour prendre en compte les résonances, il faut reconsidérer l'équation (2.63). Un état résonnant s'obtient quand  $E > 0$ . Dans ce cas, à cause de la condition (2.51),  $M(E)$  n'est plus hermitique, et ses valeurs propres sont complexes. On définit alors le problème aux valeurs propres :

$$(M(E) - \widetilde{E} \cdot I_d) X = 0 . \quad (2.64)$$

Les états propres obtenus ont une structure d'état résonnant, leur caractère non stationnaire étant pris en compte par la partie non hermitique de  $M(E)$ . Il est clair que  $\widetilde{E}$  est fonction de  $E$ . Il reste donc à déterminer l'énergie  $E$  donnant  $\widetilde{E}$ . Cette condition est :

$$\text{Re}[\widetilde{E}] = E . \quad (2.65)$$

Cette équation signifie que le système cible+projectile a été préparé à l'énergie de la résonance, de sorte qu'un composite puisse se former pendant un temps relativement long. Les équations (2.64) et (2.65) définissent alors l'ensemble des états propres :

$$\begin{aligned} & (\widetilde{E}_n ; |\widetilde{\Phi}_n\rangle + |\widetilde{\omega}_n^{(+)}\rangle) \\ & \widetilde{E}_n = E_n - i \frac{\Gamma_n}{2} , \end{aligned}$$

où  $E_n$  est l'énergie de la résonance et  $\Gamma_n$  sa largeur.

## 2.4 Potentiel auto-consistant dans SMC

Considérons le terme diagonal de la matrice des équations couplées (2.48) et (2.52); il s'écrit :

$$E - E_{T_c} - (1 - q) (h + V_{cc}(r)) . \quad (2.66)$$

Soit  $V_{A-1}$  le potentiel créé par les  $A - 1$  particules liés sur celle pouvant aller dans le continuum. Il est pris de la forme donnée par (2.11) et déterminé de sorte qu'il reproduise les énergies des états de particule indépendante. Prenons alors  $V = V_{A-1}$  dans (2.66). Il y a alors un problème, car les  $A - 1$  particules liées ne forment pas le coeur de l'espace de modèle en couches utilisé. Considérons, pour guider la discussion, l'interaction ZBM, qui sera utilisée plus tard dans ce travail. Dans l'espace ZBM, on a un coeur de  $^{12}\text{C}$  et les couches de valence  $0p_{1/2}$ ,  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$ . Comme on étudie  $^{17}\text{F}(^{17}\text{O})$ ,  $V_{A-1}$  est le potentiel moyen issu de  $^{16}\text{O}$ . Par conséquent, si on ajoute l'interaction résiduelle à  $V_{A-1}$ , il y aura double comptage dans (2.66), car l'interaction résiduelle entre les particules de valence de la couche  $0p_{1/2}$  est déjà prise en compte dans  $V_{A-1}$ .

Pour y remédier, on n'utilise plus le potentiel  $V_{A-1}$ , mais le potentiel  $V_{sc} = V_{new} + V_{cc}(r)$ , où  $V_{sc}$  doit reproduire les énergies des états de particule indépendante;  $V_{new}$  est un potentiel Woods-Saxon de la forme donnée par (2.11) à déterminer.  $V_{sc}$  dépend du canal  $c$ , et des ondes liés et quasi liés qu'il doit engendrer (eqs. (C.9) et (C.3)).  $V_{sc}$  doit cependant aussi reproduire l'état de particule indépendante défini par le canal  $c$  (2.66) avec les nombres quantiques  $(l, j, t_z)$  du projectile de (2.36).

On est donc en présence d'un double problème auto-consistant. Par conséquent, on utilisera deux processus itératifs imbriqués, l'un se faisant suivant l'indice  $i$  (chiffres romains) et l'autre sur l'indice  $j$  (chiffres arabes). On le résout de la manière suivante :

I) On choisit  $V_{new}^{(i=0)} = V_{A-1}$  (initialisation des itérations en  $i$ );

II.1) on pose  $V_{sc}^{(i,j=0)} = V_{new}^{(i)}$  comme potentiel et  $V_{cc}^{(j=0)}(r) = 0$  par définition (initialisation des itérations en  $j$ .  $i$  reste fixé dans toute l'étape II.);

II.2) on résout (2.12) avec  $V_{sc}^{(i,j)}$  comme potentiel;

II.3) on calcule  $V_{cc}^{(j)}(r)$  à partir des ondes issues du potentiel  $V_{sc}^{(i,j)}$  de l'étape II.2;

II.4) on définit  $V_{sc}^{(i,j+1)} = V_{new}^{(i)} + V_{cc}^{(j)}(r)$ ;

II.5) on réitère (II.2)-(II.3)-(II.4) jusqu'à convergence:  $V_{sc}^{(i,j)} \rightarrow V_{sc}^{(i)}$  pour  $j \rightarrow +\infty$ ;

III) On définit  $C^{(i)}$  avec le potentiel auxiliaire  $V_{aux} = C^{(i)} \cdot V_{new}^{(i)} + (V_{sc}^{(i)} - V_{new}^{(i)})$ , où  $C^{(i)}$  est déterminé de sorte que  $V_{aux}$  reproduise l'état de particule indépendante du projectile du canal  $c$ ;

IV) On définit  $V_{new}^{(i+1)} = C^{(i)} \cdot V_{new}^{(i)}$ ;

V) On réitère (II)-(III)-(IV) jusqu'à convergence:  $C^{(i)} \rightarrow 1$ ,  $V_{new}^{(i)} \rightarrow V_{new}$  et  $V_{sc}^{(i)} \rightarrow V_{sc}$  pour  $i \rightarrow +\infty$ .

Notons que  $V_{sc}$  n'est pas un potentiel Woods-Saxon : c'est la somme de deux termes,  $V_{new}$ , un potentiel Woods-Saxon et  $V_{cc}(r)$ , qui est non analytique car dépendant des fonctions d'ondes de  $V_{sc}$ . On peut remarquer aussi que les termes non diagonaux  $V_{cc'}$  n'interviennent pas dans la correction de  $V$ .

Cette technique permet de reproduire les résultats expérimentaux. En effet, en considérant l'exemple de l'interaction ZBM décrit ci-dessus, prendre un potentiel Woods-Saxon de  $^{12}\text{C}$  pour  $V_{new}$  et simplement y ajouter l'interaction résiduelle ne suffirait pas, car il faut que  $V_{new} + V_{cc}(r)$  reproduise les états de particule indépendante de  $^{17}\text{F}$  ( $^{17}\text{O}$ ).

## 2.5 Observables des réactions de capture radiative et diffusion élastique

### 2.5.1 Facteur astrophysique d'une capture radiative

Le facteur astrophysique  $S(E_{CM})$  est une fonction de l'énergie dans le centre de masse  $E_{CM}$  du proton incident proportionnelle à la section efficace totale de la réaction  $\sigma$ . La section efficace est proportionnelle à la probabilité de pénétration du proton dans la barrière. En prenant le modèle simple d'un potentiel carré entre 0 et le rayon nucléaire  $r_N$  et un champ coulombien après  $r_N$  [Eva61], on montre que les fonctions d'onde du proton avec  $k \rightarrow 0_+$  à sont proportionnelles à  $e^{-\pi\eta}$  entre 0 et  $r_N$ , où  $k$  est le nombre d'onde du projectile et  $\eta$  le paramètre de Sommerfeld. Par conséquent, la probabilité de présence dans le noyau du proton est proportionnelle à  $e^{-2\pi\eta}$  [Bla79], et la section efficace totale  $\sigma$  aussi. Ainsi, on définit le facteur astrophysique  $S$  par :

$$S(E_{CM}) = \sigma(E_{CM}) \cdot E_{CM} \cdot e^{2\pi\eta} . \quad (2.67)$$

Le facteur  $E_{CM}$  en plus vient du terme en  $1/k^2$  de la section efficace  $\sigma(E_{CM})$ . De cette manière, l'information sur la structure nucléaire n'est plus noyée dans la croissance exponentielle de  $\sigma$ . Dans notre cas, les seules transitions électromagnétiques non négligeables sont les transitions E1, M1 et E2. Les formules donnant les sections efficaces des différentes multipolarités sont données en annexe B.

### 2.5.2 Section efficace de diffusion

Dans une expérience de diffusion dont le canal d'entrée est  $c_0$  et le canal de sortie est  $c$ , la fonction d'onde du système est [Bar77a] [Bar77b] :

$$|\Psi_c^{c_0}\rangle = |\xi_c^{c_0}\rangle + \sum_n |\widetilde{\Omega}_n\rangle \frac{1}{E - E_n + i\frac{1}{2}\Gamma_n} \langle \widetilde{\Phi}_n | H_{QP} | \xi_c^{c_0} \rangle \quad (2.68)$$

et quand  $r \rightarrow +\infty$  [Bar77a] :

$$\xi_c^{c_0}(r) \rightarrow -\frac{1}{2i} \left( H_{l,\eta}^-(k_{c_0}r) - \sqrt{\frac{k_{c_0}}{k_c}} S_{cc_0}^0 H_{l,\eta}^+(k_{c_0}r) \right) \quad (2.69)$$

$$\langle c,r | \widetilde{\Omega}_n \rangle \rightarrow \widetilde{\omega}_c^n(r) \rightarrow e^{i\delta_c^{(0)}} \sqrt{\frac{m_r}{\hbar^2 k_c}} \gamma_c^{(n)} H_{l,\eta}^+(k_c r) \quad (2.70)$$

où :

- $k_{c_0}$  et  $k_c$  sont les nombres d'ondes respectifs des projectiles des canaux  $c_0$  et  $c$ ;
- $m_r$  est la masse réduite du projectile;
- $S_{cc_0}^0$  est l'élément de matrice sans interaction de la matrice  $S$ ;
- $\delta_c^{(0)} = 1/2 \arg(S_{cc}^0)$  est le déphasage de diffusion donnée par  $\xi_c^c$ ;

–  $\gamma_c^{(n)}$  est l'amplitude de la largeur partielle de  $|\widetilde{\Omega}_n\rangle$ .

L'amplitude de la largeur partielle de  $|\widetilde{\Omega}_n\rangle$  vaut [Bar77a] :

$$\gamma_c^{(n)} = -e^{-i\delta_c^{(0)}} \sqrt{\frac{4m_r}{\hbar k_c}} \sum_i \alpha_{ni} \sum_{c'} \int dr \xi_{c'}^c(r) w_{c'}^{(i)}(r), \quad (2.71)$$

avec

$$|\widetilde{\Omega}_n\rangle = \sum_i \alpha_{ni} |\Omega_i\rangle. \quad (2.72)$$

On peut alors exprimer les éléments de la matrice  $S$  entre les canaux  $c$  et  $c_0$  [Bar77a] :

$$S_{cc_0} = S_{cc_0}^{(0)} - ie^{i(\delta_c^{(0)} + \delta_{c_0}^{(0)})} \sum_n \frac{\gamma_c^{(n)} \gamma_{c_0}^{(n)}}{E - E_n + i\frac{1}{2}\Gamma_n}. \quad (2.73)$$

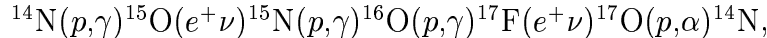
La section efficace différentielle s'exprime alors par [Jac70] :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(c_0 \rightarrow c) = \frac{\pi}{k_{c_0}^2} \left| \sum_{l,l',m'} i^{l-l'} \sqrt{2l+1} Y_l^{m'}(\theta, \varphi) (S_{cc_0} - \delta_{cc_0}) \right|^2, \quad (2.74)$$

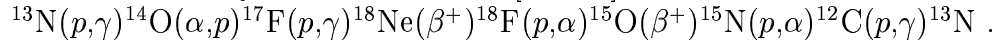
où  $Y_l^{m'}$  est l'harmonique sphérique couplée à  $l'$ , de projection  $m'$ . Dans le cas particulier de la diffusion élastique, il n'y a qu'un canal de sortie  $c$  et il est égal au canal d'entrée  $c_0$ .

## 2.6 Etude de $^{17}\text{F}$ et de $^{17}\text{O}$

Les noyaux  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  sont d'une grande importance, à la fois théorique et pratique [Ben00a] [Mic02a]. En premier lieu, ce sont des noyaux bien connus expérimentalement. De plus, le seuil d'émission de proton de  $^{17}\text{F}$  est très bas (0.6 MeV), tandis que celui du miroir  $^{17}\text{O}$  est plus haut (4.143 MeV). Par conséquent, cela va permettre de voir l'influence des corrections dues au continuum, qui seront plus grandes pour  $^{17}\text{F}$  que pour  $^{17}\text{O}$ . En second lieu,  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  ont un rôle essentiel en astrophysique, car ils apparaissent dans le cycle CNO-II [Cha92] :



et sont donc fondamentaux pour la synthèse des isotopes  $^{16}\text{O}$  et  $^{17}\text{O}$ . De plus  $^{17}\text{F}$  est présent dans le cycle HCNO suivant [Cha92] :



Il est le point de départ de synthèse d'éléments plus lourds comme Ne, Na, Mg et Al.

### 2.6.1 Interaction effective, spectres et transitions réduites

L'interaction utilisée pour déterminer les vecteurs propres de  $H_{QQ}$  (voir (2.32)) est l'interaction ZBM proposée par Zuker, Buck et Mc Grory [Zuk68]. Cette interaction est construite sur l'espace constitué des couches protons et neutrons  $0p_{1/2}$ ,  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$ . Son avantage principal est de donner une bonne spectroscopie des noyaux  $A \sim 16$ , tout en ayant des matrices de dimensions très petites ( $< 5000$ ) et surtout est pratiquement dépourvue d'excitations de centre de masse.

Les potentiels générant l'espace  $\mathcal{Q}$  (voir chapitres (2.2) et (2.2)) doivent reproduire les énergies des états  $5/2_1^+$  et  $1/2_1^+$  de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ , car dans la base utilisée ils ont une

structure d'états de particule indépendante donnée respectivement par  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$  (une bonne reproduction de l'énergie  $3/2_1^+$  n'est pas nécessaire car  $0d_{3/2}$  ne fait pas partie de l'espace ZBM). Pour cela, on part d'un potentiel Woods-Saxon de diffusivité  $d = 0.58$  fm, de rayon  $R_0 = 3.214$  fm et de spin-orbite  $V_{so} = 3.683$  MeV. Ensuite, on détermine le potentiel auto-consistant  $V_{sc}$  par la méthode décrite dans la section (2.4). L'interaction de couplage avec le continuum est une force de portée nulle avec dépendance en densité (DDSM1) [Ben00a] [Ben00b]:

$$V_{12} = V_0 [a(r) + (1 - a(r))P^\sigma] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.75)$$

$$a(r) = \rho(r) (v_{00}^{in} - v_{01}^{in}) + (1 - \rho(r)) (v_{00}^{ex} - v_{01}^{ex}) \quad (2.76)$$

où  $\rho(r)$  est la densité du noyau considéré.

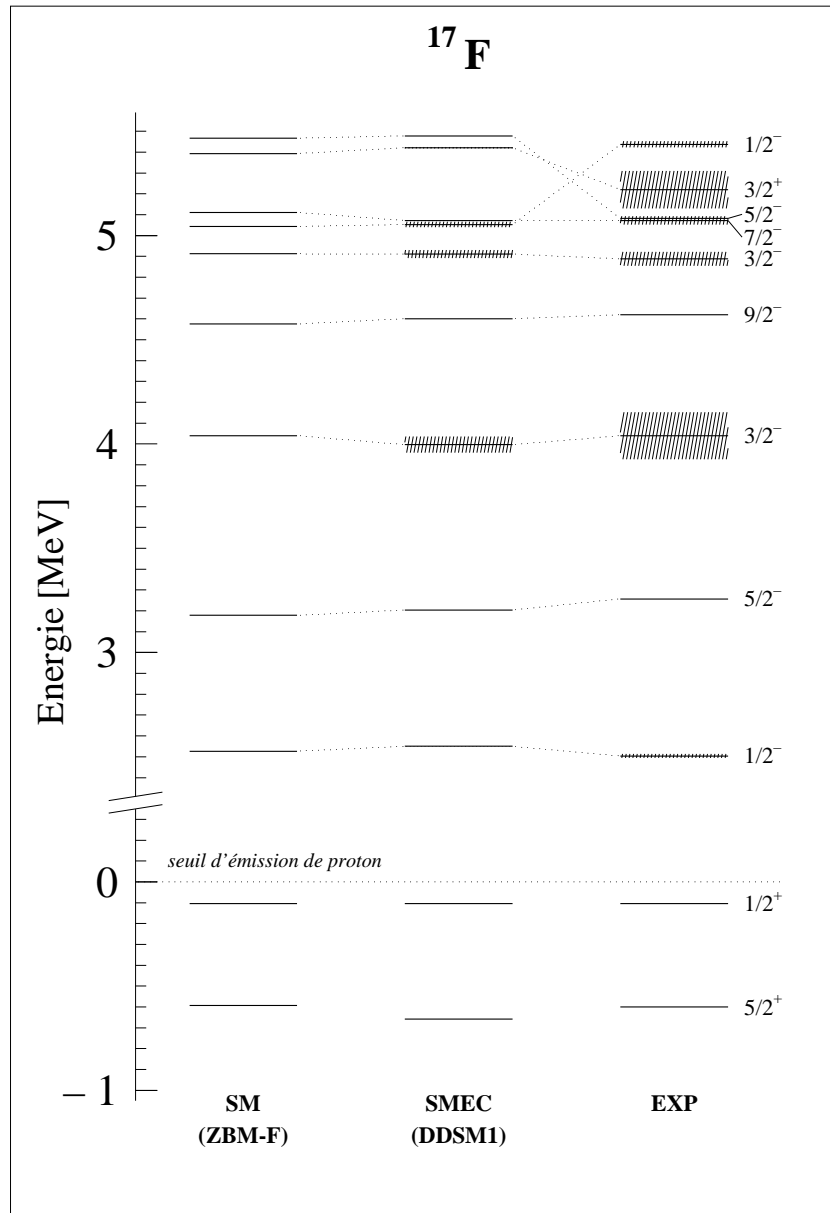


FIG. 2.1 – Spectre du  $^{17}\text{F}$  avec l'interaction ZBM-F et la force de couplage résiduelle DDSM1.



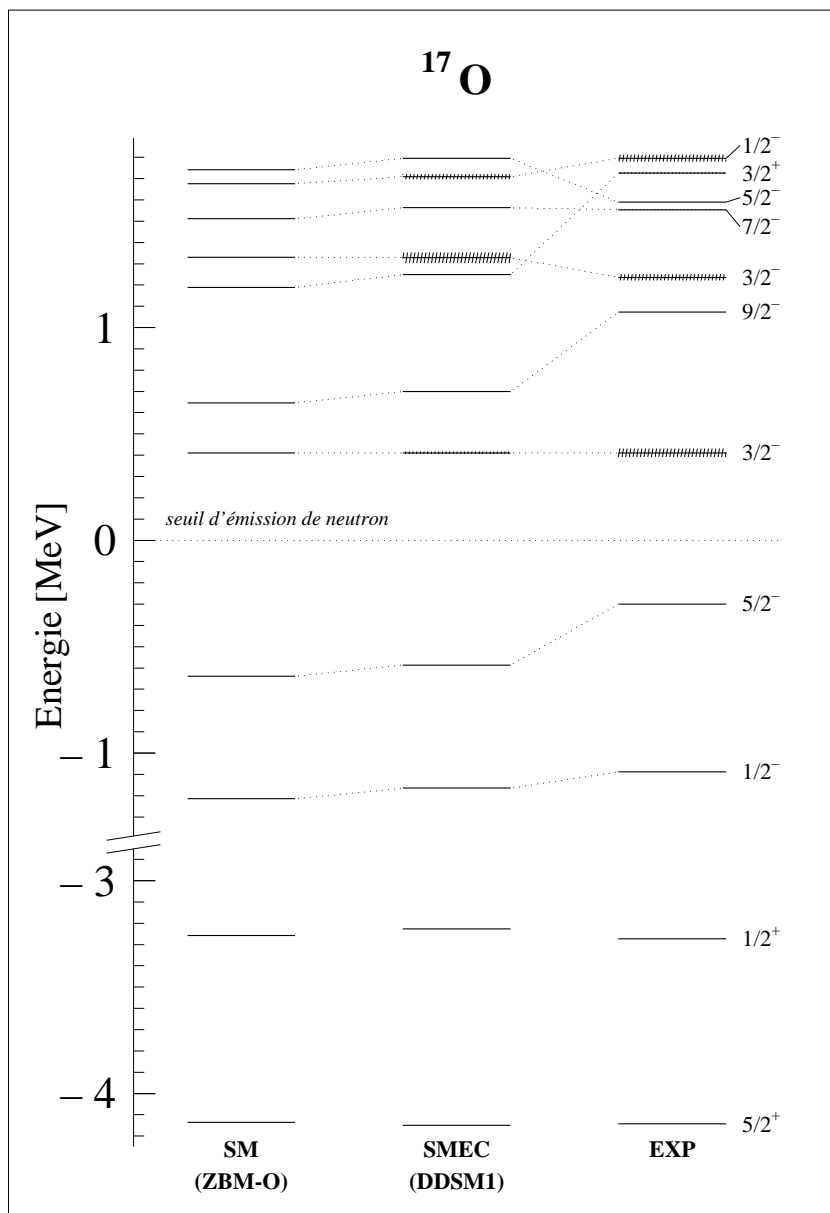


FIG. 2.2 – Spectre du  $^{17}\text{O}$  avec l'interaction ZBM-O et la force de couplage résiduelle DDSM1.

Le zéro d'énergie a été fixé de sorte que le dernier état lié soit à sa position expérimentale; ceci est nécessaire pour que la section efficace de la réaction  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$  ait un comportement correct quand l'énergie du proton incident tend vers 0. Les figures (2.1) et (2.2) montrent respectivement les spectres de  $^{17}\text{F}$  et de  $^{17}\text{O}$  obtenus avec l'interaction ZBM pour l'espace  $\mathcal{Q}$  et l'interaction de couplage au continuum DDSM1.

On peut voir une brisure de symétrie miroir importante en comparant ces deux spectres. C'est un effet provenant à la fois du champ coulombien et des différentes énergies de séparation de proton/neutron de  $^{17}\text{F}$  /  $^{17}\text{O}$ . L'influence du couplage au continuum, différent pour  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  à cause des différentes positions des seuil d'émission de particule, ne peut pas prendre en compte à elle seule toute la brisure de symétrie miroir. Il faut donc modifier le mélange de configuration dans l'espace  $\mathcal{Q}$ . Le moyen le plus simple de le faire est d'ajuster l'espacement entre les états  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$  de l'espace ZBM (voir tableau (2.1)), pour reproduire dans les calculs de SMEC la différence entre les énergies des états  $5/2_1^+$  et  $1/2_1^+$  expérimentale. L'interaction hybride avec les énergies associées à  $^{17}\text{F}$  sera notée ZBM-F et celle avec avec les énergies associées à  $^{17}\text{O}$  sera notée ZBM-O.

TAB. 2.1 – *Energies à un corps utilisées dans les interactions hybrides ZBM-F et ZBM-O (voir texte).*

Energies à un corps	$^{17}\text{F}$	$^{17}\text{O}$
$\epsilon_{0d_{5/2}}$ (MeV)	3.95	3.5
$\epsilon_{1s_{1/2}}$ (MeV)	3.3	3.3

On a aussi calculé la transition réduite  $B(E2)$  entre les états peu liés  $1/2_1^+$  et  $5/2_1^+$ . C'est en effet un test intéressant des fonctions d'ondes, car les transitions électromagnétiques sont très sensibles à la structure des états nucléaires. Avec DDSM1,  $B(E2) = 79.85 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ , en prenant pour charge effective respectives proton et neutron  $1 + \delta$  et  $\delta$ , avec  $\delta = 0.2$ , valeur correspondant aux estimations théoriques [Kir74]. Ce  $B(E2)$  reproduit bien la donnée expérimentale  $B(E2)_{exp} = 69.92 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ . De même, avec  $^{17}\text{O}$ , on obtient  $B(E2) = 3 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ , à comparer avec la valeur expérimentale  $B(E2)_{exp} = 6.2 \text{ e}^2 \text{ fm}^4$ .

Avec  $\delta$  compris entre 0.1 et 0.3, les  $B(E2)$  calculés avec le modèle en couches sont bien plus faibles. Si les  $B(E2)$  sont plus petits avec la base d'oscillateur harmonique, c'est parce que la dépendance radiale de  $1/2_1^+$  y est moins réaliste que dans SMEC, dont le couplage au continuum apporte la structure en halo de cet état. Le rayon quadratique moyen de cet état  $1s_{1/2}$  dans SMEC est :  $\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 5.24 \text{ fm}$ , et en modèle en couches :  $\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 3.03 \text{ fm}$ . Cette dernière valeur a été obtenue avec la valeur usuelle du paramètre d'oscillateur  $b = A^{\frac{1}{6}} \text{ fm}$ .

### 2.6.2 Diffusion élastique $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$

Les déphasages et section efficace de diffusion élastique contiennent des informations de valeur sur le mélange de configuration dans l'espace  $\mathcal{Q}$  et le couplage au continuum. Aussi, SMEC apporte les corrélations entre nucléons dans les réactions simples comme la diffusion élastique, et on peut alors tester les fonctions d'ondes issues de SMEC par cette observable.

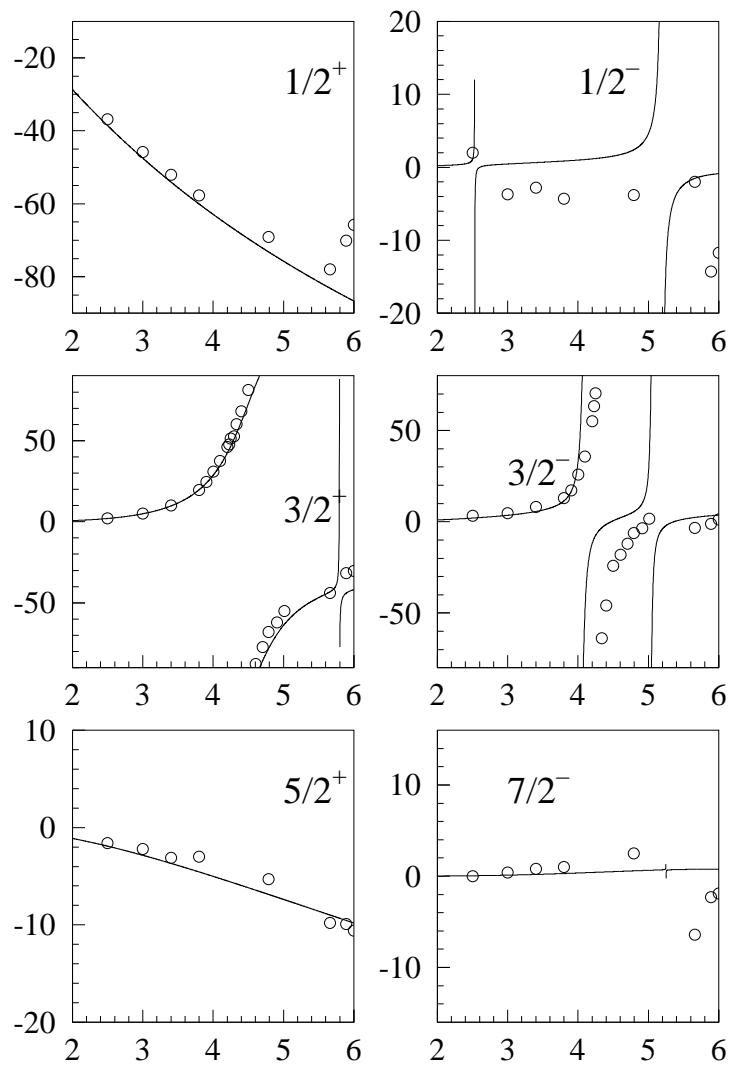


FIG. 2.3 – Déphasages de la réaction  $^{16}\text{O}+p$  en fonction de l'énergie du proton  $E_p$  pour différentes ondes partielles. Les données expérimentales viennent de [Blu65].

Les déphasages de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  pour toutes les ondes partielles de  $1/2^+$  à  $7/2^-$  ont été calculées avec SMEC (voir figure (2.3)) [Ben00b]. L'accord avec les données expérimentales est très satisfaisant. Aussi, il faut ajouter que, bien que la résonance  $0d_{3/2}$  ne soit pas présente dans l'espace ZBM, elle est déterminante pour la réaction. Par conséquent, pour prendre en compte son influence, à défaut de l'avoir dans l'espace  $\mathcal{Q}$ , on la place dans l'espace  $\mathcal{P}$  en l'approximant par un simple déterminant de Slater [ $^{16}\text{O} \oplus d_{3/2}$ ], en ajustant le potentiel fini du chapitre 2.2 pour que l'énergie de l'état  $d_{3/2}$  reproduise l'énergie expérimentale de l'état  $3/2_1^+$ . Cette approximation est tout à fait justifiée, car premièrement cet état est très probablement une résonance à un corps dans la base choisie, et deuxièmement il est si large qu'on peut bien considérer qu'il fait partie du continuum non résonnant, donc de  $\mathcal{P}$ .

On compare la section efficace de diffusion élastique  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$ , calculée avec ZBM-F et DDSM1, avec les résultats expérimentaux (voir figure (2.4) en bas). Ceux-ci sont très bien reproduits. De plus, l'inclusion de  $0d_{3/2}$  est indispensable, car l'augmentation rapide de la section efficace à  $E_p = 4.2$  MeV y est entièrement due.

Un bon mélange de configurations des ondes de  $^{17}\text{F}$  est ici nécessaire pour obtenir une bonne section efficace. Pour montrer ceci, comparons les calculs faits avec ZBM-F et DDSM1 avec ceux issus d'un calcul avec une interaction qu'on notera PSD, qui est définie sur les couches  $p$  et  $sd$  à partir de différentes interactions [Ben00a] et où toutes les excitations autres que 1p-1h sont négligées, et l'interaction DDSM1\*, qui reprend les paramètres de DDSM1 mais avec une renormalisation de certains éléments de matrice intervenant dans (2.49), prenant en compte l'absence des excitations autres que 1p-1h [Ben00a]. Les états de parité positive calculés avec l'interaction PSD et les deux couplages résiduels DDSM1 et DDSM1\* sont donnés sur la figure (2.5). Tout d'abord, le spectre des états de parité positive de  $^{17}\text{F}$  calculés avec DDSM1 donne l'état fondamental  $5/2_1^+$  beaucoup trop lié, et l'interaction renormalisée DDSM1\* améliore un peu l'énergie de cet état mais il reste néanmoins en dessous de la valeur expérimentale. Cela a pour conséquence que la section efficace (voir figure (2.4) en haut) est mal reproduite même à basse énergie. Pour corriger ceci, il faut retirer la contribution résonnante de  $0d_{5/2}$ , car vue des énergie positives, la correction due à SMEC de l'état  $5/2_1^+$  est complexe et crée une largeur qui influence la section efficace (voir figure (2.4) en haut). Cependant, même avec cette correction, la section efficace calculée avec PSD ne reproduit pas bien les données expérimentales. Par conséquent, le problème vient de l'espace  $\mathcal{Q}$ , et donc des excitations autres que 1p-1h, négligées avec PSD et présentes avec ZBM. Avec ZBM, on a pu reproduire la section efficace, car, dans SMEC, on a accès aux corrélations dans la section efficace de diffusion élastique. Sans ces corrélations, que seul SMEC peut apporter, la reproduction de la section efficace est impossible en ne considérant qu'un seul hamiltonien pour l'espace tout entier  $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ .

### 2.6.3 Captures radiatives $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$

Dans tous les calculs de capture radiative, toutes les ondes partielles entrantes  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $f$  et  $g$  ont été prises en compte, ainsi que toutes les transitions  $E1$ ,  $E2$  et  $M1$  possibles, mais ce sont néanmoins les transitions  $E1$  provenant des ondes  $p$  qui sont dominantes, car les états liés de  $^{17}\text{F}$  sont de parité positive. Pour la transition vers l'état fondamental, la contribution  $E1$  de  $f_{7/2}$  est négligeable pour  $E_{CM} \sim 0$ , mais cependant atteint  $\sim 0.3$  à  $3.5$  MeV. Rappelons aussi que la position du  $1/2_1^+$  du  $^{17}\text{F}$  a été ajustée à sa position expérimentale par rapport du seuil d'émission de proton, ceci

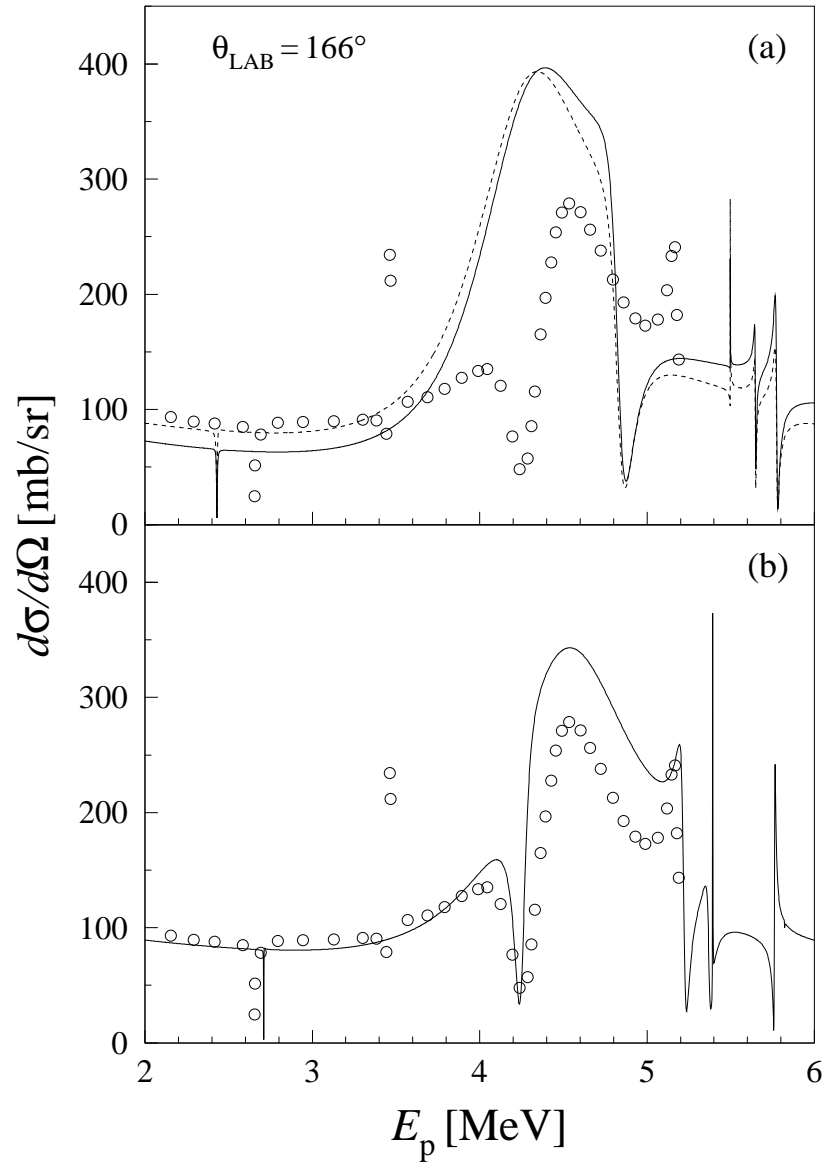


FIG. 2.4 – Section efficace de diffusion élastique calculée à  $\theta_{\text{lab}} = 166$  degrés de la réaction  $^{16}\text{O}+p$  en fonction de l'énergie du proton  $E_p$ . Les courbes en haut ont été calculées avec une interaction PSD (voir texte) et l'interaction DDSM1 et celle du bas avec les interactions ZBM-F et DDSM1. La courbe en haut en trait plein diffère de celle en pointillé en ce que l'influence résonante de  $0d_{5/2}$  a été supprimée pour cette dernière (voir texte). Les données expérimentales viennent de [Sal62].

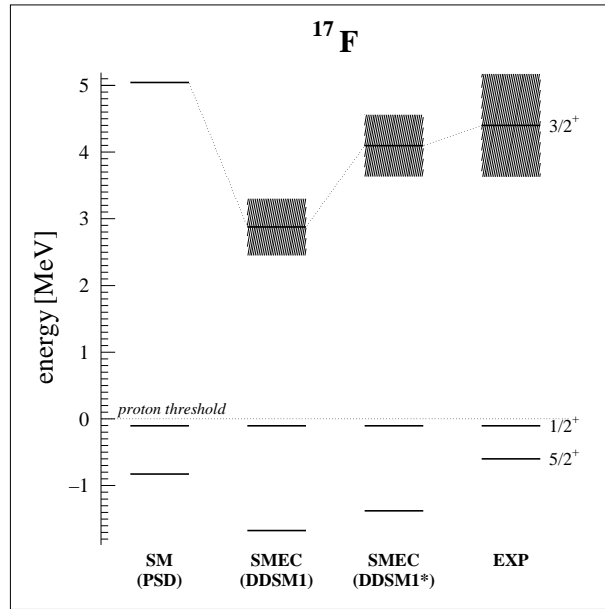


FIG. 2.5 – *Etats de parité positive de  $^{17}\text{F}$  calculés avec l'interaction PSD et les couplages résiduels DDSM1 et DDSM1\**.

pour avoir un bon comportement des sections efficaces quand l'énergie tend vers 0.

On considère le facteur astrophysique  $S$  provenant des réactions suivantes :

$$\begin{aligned} &^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}(J^\pi = 5/2_1^+) \\ &^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}(J^\pi = 1/2_1^+) . \end{aligned}$$

Il dépend naturellement de l'extension radiale du noyau, ici prise en compte par le potentiel auto-consistant générant l'espace  $\mathcal{Q}$ . Sur la figure (2.6), trois calculs du facteur astrophysique  $S$  ont été faits avec les diffusivités 0.4, 0.55 et 0.8 fm, et le rayon  $R$  du potentiel fixé à 3.214 fm. Les deux autres paramètres, soit le potentiel central  $V_0$  et spin-orbite  $V_{so}$ , ont été ajustés de sorte que les énergies des états  $5/2_1^+$  et  $1/2_1^+$  de  $^{17}\text{F}$ , respectivement décrits par  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$  soient reproduites pour chaque diffusivité.

On voit clairement que la diffusivité reproduisant au mieux les données expérimentales est 0.55 fm. La diffusivité de 0.4 fm ne sous-estime que quelque peu le facteur astrophysique  $S$ , tandis la diffusivité de 0.8 fm peut être rejetée totalement.

L'étude du comportement des sections efficaces et de  $S$  quand  $E_{CM} \rightarrow 0$  a un intérêt physique conséquent, car les réactions stellaires se font très souvent à très basse énergie. Cela est particulièrement vrai pour les réactions  $(p,\gamma)$  du cycle HCNO, qui se font entre 25 keV et 1.1 MeV [Cha92]. En définissant  $S$  avec (2.67), on enlève toute la partie cinétique de la section efficace et  $S$  a généralement un comportement lentement variable en fonction de l'énergie. Par conséquent, on peut déterminer  $S$  au voisinage de 0 par une extrapolation des valeurs de  $S$  obtenues pour  $E$  compris entre 20 et 50 keV par exemple, avec une simple technique de moindres carrés. Ceci est nécessaire car la zone  $E \sim 0$  est impossible à traiter numériquement par un calcul direct de  $S$ .

Ainsi, les valeurs de  $S(0)$  et  $S'(0)/S(0)$  donnent des renseignements sur les réactions à très basse énergie ( $\sim 1$  keV), car dans cette zone une approximation linéaire de  $S$  suffit :  $S(E) \sim S(0)[1 + E \cdot S'(0)/S(0)]$ . Pour la désexcitation vers l'état fondamental  $5/2_1^+$  de  $^{17}\text{F}$ , l'extrapolation du facteur astrophysique  $S$  calculé avec l'interaction ZBM-

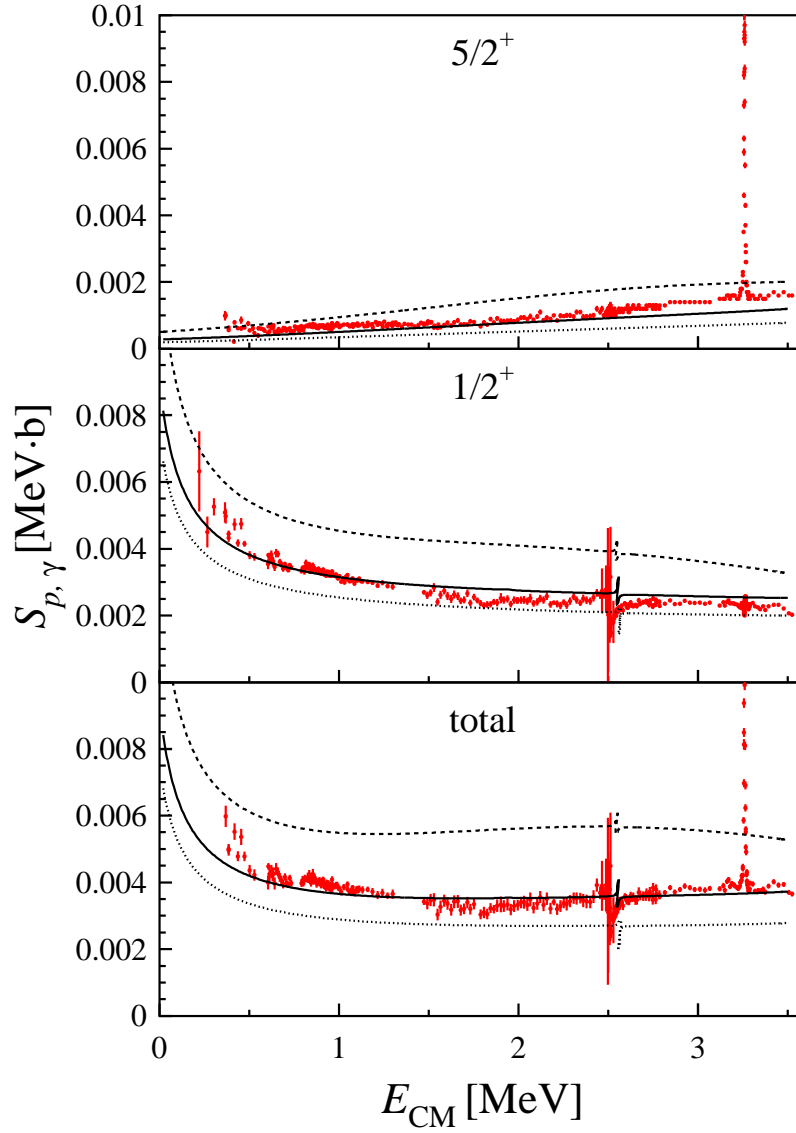


FIG. 2.6 – Facteur astrophysique  $S$  des réactions  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}(J^\pi = 5/2_1^+)$  et  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}(J^\pi = 1/2_1^+)$  en fonction de l'énergie de centre de masse  $E_{CM}$ . L'interaction résiduelle utilisée est *DDSM1*. Les données expérimentales proviennent de [Mor97].

F et le couplage résiduel DDSM1 donne  $S(0) = 3 \cdot 10^{-4}$  MeV.b et  $S'(0)/S(0) = 0.649$  MeV $^{-1}$ .

## 2.7 Décroissances $\beta$ premières interdites

### 2.7.1 Définitions

Dans les noyaux, l'interaction faible donne lieu à des réactions, dites transitions  $\beta$  [Bla79]. Par cette interaction, un nucléon peut changer de nature, ce qui implique qu'un proton se transforme en neutron, ou inversement. On a les deux réactions possibles suivantes :

$$\underline{\text{Transition } \beta^+ : p \rightarrow n + e^+ + \nu} \quad (2.77)$$

$$\underline{\text{Transition } \beta^- : n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}} \quad (2.78)$$

Les éléments de matrice servant pour le calcul de décroissances  $\beta$  se trouvent en annexe H.

Les transitions  $\beta$  apparaissant le plus souvent sont les transitions permises. Du point de vue du modèle en couches, quand une configuration du noyau père se transforme en une configuration du noyau fils, le nucléon changeant de nature garde tous ses nombres quantiques intrinsèques identiques (transition de Fermi ou Gamow-Teller), ou change seulement son moment cinétique  $j$  d'une unité, en conservant son moment orbital  $l$  (Gamow-Teller). Ainsi, le couple  $(e, \nu)$  émis est dans un état singulet ( $S = 0$ ) pour une transition de Fermi, et dans un état triplet ( $S = 1$ ) dans une transition de Gamow-Teller, en emportant un moment orbital  $L$  nul dans les deux cas. Par conséquent, les fonctions d'ondes des nucléons de départ et d'arrivée sont très proches, ce qui donne un recouvrement proche de 1, et donc une probabilité de décroissance maximale. Les règles de sélection de ces transitions sont :

#### Transition de Fermi

$$|J_i - J_f| = 0, |T_i - T_f| = 0, \pi_i \cdot \pi_f = 1$$

#### Transition de Gamow-Teller

$$|J_i - J_f| = 0,1, |T_i - T_f| = 0,1, \pi_i \cdot \pi_f = 1$$

Par conservation du moment angulaire dans la réaction,  $\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_f + \mathbf{S} = \mathbf{0}$ , car  $\mathbf{J} = \mathbf{S}$  pour le couple  $(e, \nu)$ ,  $L$  étant nul. Par conséquent, on ne peut pas avoir de transition  $0 \rightarrow 0$  pour Gamow-Teller, car il est impossible d'avoir  $\mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ .

Les transitions où le couple  $(e, \nu)$  émis emporte un moment orbital  $L$  non nul sont appelées transitions  $\beta$   $L$ -ièmes interdites. De même que pour les transitions permises, celui-ci est dans un état singulet (Fermi), et dans un état triplet (Gamow-Teller). Par conséquent, le nucléon changeant de nature peut voir son moment orbital changer, ce qui signifie que le recouvrement nucléon de départ-nucléon d'arrivée sera plus petit que 1, et diminue de plus en plus suivant que  $L$  augmente. Cela signifie qu'elles ne prennent de l'importance en général que si les règles de sélection des transitions permises ne sont pas respectées. Les règles de sélection de ces transitions sont :

#### Transition de Fermi



$$|J_i - J_f| = 0, 1, \dots, L, \quad |T_i - T_f| = 0, 1, \quad \pi_i \cdot \pi_f = (-1)^L$$

### Transition de Gamow-Teller

$$|J_i - J_f| = 0, 1, \dots, L + 1, \quad |T_i - T_f| = 0, 1, \quad \pi_i \cdot \pi_f = (-1)^L$$

On ne peut pas avoir de transition de Fermi  $0 \rightarrow 0$ . On le montre avec un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent, car, pour le couple  $(e, \nu)$ ,  $S = 0$  et donc  $J = L > 0$ . On n'étudiera ici que les transitions premières interdites: ce sont en effet les transitions  $\beta$  les plus importantes quand les états nucléaires initiaux et finaux sont de parité différente.

## 2.7.2 Transitions $\beta$ premières interdites dans les noyaux miroirs $A = 17$

Dans ce travail, on étudiera les réactions miroirs  $^{17}\text{Ne} \rightarrow ^{17}\text{F}$  ( $\beta^+$ ) et  $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$  ( $\beta^-$ ) [Mic02a]. Elles présentent en effet une grande asymétrie miroir. Cette asymétrie est donnée par la quantité [Wil78]:

$$\delta = \frac{(ft)^+}{(ft)^-} - 1,$$

où  $(ft)^+$  est la valeur  $ft$  pour la décroissance  $\beta^+$  et  $(ft)^-$  est la valeur  $ft$  pour la décroissance  $\beta^-$ . Cette quantité  $\delta$  vaut zéro si les noyaux des réactions miroir  $\beta^+$  et  $\beta^-$  ont une symétrie d'isospin parfaite. Alors que la valeur mesurée vaut généralement moins de 0.1 en valeur absolue pour les noyaux légers [Bor93], elle vaut -0.55 pour les réactions miroir  $^{17}\text{Ne} \rightarrow ^{17}\text{F}$  ( $\beta^+$ ) et  $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$  ( $\beta^-$ ). Cela pose la question de l'importance des fonctions radiales très différentes des ondes  $1s_{1/2}$  dans les états  $1/2_1^-$  de  $^{17}\text{Ne}$  et  $^{17}\text{N}$ , car l'état  $1s_{1/2}$  proton est résonnant pour  $^{17}\text{Ne}$  et que l'état  $1s_{1/2}$  neutron est lié pour  $^{17}\text{N}$  (fait provenant uniquement de la force de Coulomb) [Bor93]. En effet, la contribution principale à ces réactions est le passage d'un proton(neutron) de  $1s_{1/2}$  à un neutron(proton)  $0p_{1/2}$ .

Il est important de dire que le formalisme utilisé pour calculer les transitions  $\beta$  est celui de SMEC, et l'hamiltonien donnant les fonctions d'ondes est le même que celui utilisé pour calculer les transitions de capture radiative et la section efficace de diffusion élastique. On voit ici l'avantage de SMEC, qui permet de calculer des quantités aussi différentes dans une seule approche et avec le même hamiltonien. Avant SMEC, les transitions de capture radiative se calculaient avec un modèle de réaction uniquement et les transitions  $\beta$  avec un modèle de structure uniquement.

Sur la figure (2.7), on montre  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  (voir (H.1) pour les définitions de  $f^+$  et  $f^-$ ) pour des valeurs différentes de la diffusivité du potentiel générant l'espace  $\mathcal{Q}$  [Mic02a]. Dans chaque cas, la même diffusivité est prise pour tous les noyaux  $^{17}\text{Ne}$ ,  $^{17}\text{N}$ ,  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ . Les zones ombrées montrent les limites expérimentales pour ces valeurs.  $f_+$  et  $f_-$  sont calculées respectivement avec ZBM-F et ZBM-O, la différence entre ces deux interactions étant la modifications des énergies prenant en compte la force coulombienne. Les courbes en pointillé ont été calculées avec ZBM-F, car on a alors la symétrie miroir dans ce cas. Le potentiel de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  est obtenu de sorte d'avoir leurs énergies de particule indépendantes, et pour ceux de  $^{17}\text{Ne}$  et  $^{17}\text{N}$  on modifie le potentiel de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$  en prenant la masse et la force coulombienne correspondant à ces noyaux. On obtient la valeur expérimentale [Bor93] [Til93] [Oza98] de  $f^+/f^-$  ( $f_{exp}^+/f_{exp}^- = 24 \pm 3$ )

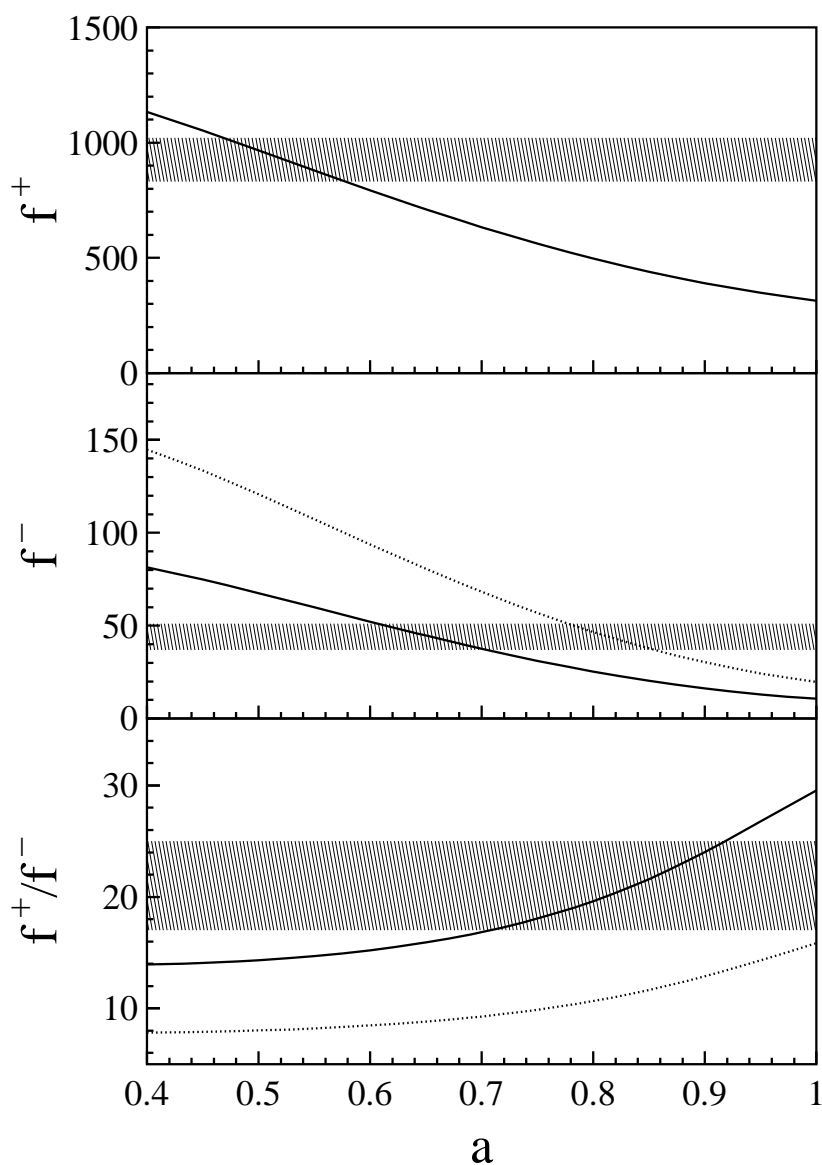


FIG. 2.7 –  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  des transitions  $\beta^+ {}^{17}\text{Ne} \rightarrow {}^{17}\text{F}$  et  $\beta^- {}^{17}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O}$  en fonction de la diffusivité  $a$  du potentiel. Les zones ombrées montrent les limites expérimentales [Bor93] [Til93] [Oza98]. Les courbes en trait plein ont été calculées avec ZBM-F pour  $f^+$  et ZBM-O pour  $f^-$ , tandis que les courbes en pointillé ont été calculées juste avec ZBM-F (symétrie miroir).

en prenant  $a \sim 0.8$  fm, mais dans ce cas les valeurs  $f^+$  ( $f_{exp}^+ = 927 \pm 95$ ) et  $f^-$  ( $f_{exp}^- = 44 \pm 7$ ) ne sont pas reproduites.

La contribution des éléments de matrice de rang 1, qui détermine aussi la dépendance en énergie du facteur de forme dans  $f^+$  et  $f^-$ , augmente avec la diffusivité de  $\sim 11$  % pour  $a = 0.4$  fm à  $\sim 21$  % pour  $a = 0.8$  fm et est similaire pour  $f^+$  et  $f^-$ . Cet effet est indépendant du choix de l'interaction ZBM-F ou ZBM-O pour la description de la décroissance  $\beta^-$   $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$ . Par conséquent, la dépendance en  $a$  de  $f^+/f^-$  n'est pas liée au choix d'une variante de ZBM ou à l'hypothèse d'une symétrie miroir stricte dans les réactions  $\beta^+$  et  $\beta^-$ . D'autre part,  $f^+/f^-$  dépend fortement de la force de la brisure de symétrie dans la fonction d'onde à plusieurs corps. En remplaçant ZBM-O par ZBM-F dans le calcul du taux de transition de  $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$ , on obtient une diminution de  $f^-$  d'un facteur de  $\sim 1.8$ ;  $f^-$  est plus sensible à ce changement qu'à celui de  $a$ .

Pour séparer les contributions respectives des extensions radiales des plus importants états à un corps et la brisure de symétrie miroir dans les fonctions d'onde dans l'espace  $\mathcal{Q}$ , on doit utiliser des observables expérimentales indépendantes pour fixer la diffusivité du potentiel de référence. Une telle contrainte est donnée par la section efficace de capture radiative  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$  par l'intermédiaire du facteur astrophysique (voir figure (2.6)). On y voit que le choix  $a = 0.55$  fm s'impose. Cette comparaison, ici nécessaire, ne peut se faire que parce que les calculs de capture radiative et de transition  $\beta$  se font avec les mêmes états nucléaires issus du même formalisme. Pour cette valeur,  $f^+$  reproduit bien les données expérimentales mais  $f^-$  est trop grand d'un facteur  $\sim 1.4$ .

Comme les dépendances radiales sont cohérentes avec les données provenant de la réaction de capture radiative de proton et donnent une bonne valeur de  $f^+$  ainsi que le spectre de  $^{17}\text{F}$ , les mauvaises valeurs obtenues pour  $f^-$  et  $f^+/f^-$  sont liées à l'interaction ZBM-O donnant le mélange de configuration dans  $^{17}\text{O}$ . Si on simule les effets de brisure de symétrie miroir en modèle en couches par une modification des énergies à un corps de ZBM, alors la valeur de  $f^-$  peut être reproduite par SMEC avec  $a = 0.55$  fm en utilisant  $\epsilon_{0d_{5/2}} = 3.21$  MeV et  $\epsilon_{1s_{1/2}} = 3.3$  MeV. Avec cette interaction hybride, appelée ZBM-O\*, les états de parité négative sont presque les mêmes qu'avec ZBM-O [Mic02a]. La différence entre les énergies  $5/2_1^+$  et  $1/2_1^+$  avec SMEC utilisant ZBM-O\* dans l'espace  $\mathcal{Q}$  est un peu plus grande que la valeur expérimentale [Mic02a].

La figure (2.8) montre  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  pour différentes valeurs de la diffusivité  $a$  du potentiel de référence, calculés avec ZBM-F et ZBM-O\*. Le paramètre physique essentiel est l'amplitude de la composante  $(1s_{1/2}^2 0p_{1/2}^{-1})$  dans l'état fondamental de  $^{17}\text{Ne}$  et  $^{17}\text{N}$ . Cette amplitude est donnée dans le tableau (2.2), ainsi que la composante dominante de la fonction d'onde dans l'état final  $1/2_1^+$ .

TAB. 2.2 – Amplitudes des composantes  $(1s_{1/2}^2 0p_{1/2}^{-1})$ ,  $(0d_{5/2}^2 0p_{1/2}^{-1})$  dans l'état initial de la décroissance  $\beta^+/\beta^-$  de  $^{17}\text{Ne} / ^{17}\text{N}$  et et composantes dominantes  $1s_{1/2}$  et  $0d_{5/2}$  dans l'état final  $1/2_1^+$  de  $^{17}\text{F} / ^{17}\text{O}$ , respectivement, pour différentes variantes de l'interaction ZBM [Zuk68].

	$(1s_{1/2}^2 0p_{1/2}^{-1})^{J^\pi=1/2_1^-}$	$(0d_{5/2}^2 0p_{1/2}^{-1})^{J^\pi=1/2_1^-}$	$(1s_{1/2})^{J^\pi=1/2_1^+}$	$(0d_{5/2})^{J^\pi=5/2_1^+}$
ZBM	0.41	0.758	0.65	0.69
ZBM-F	0.399	0.78	0.665	0.707
ZBM-O	0.311	0.80	0.62	0.667
ZBM-O*	0.268	0.81	0.587	0.637

L'amplitude de la configuration  $(1s_{1/2}^2 0p_{1/2}^{-1})$  dans  $^{17}\text{Ne}$  (ZBM-F) est  $\sim 30\%$  plus grande que dans  $^{17}\text{N}$  (ZBM-O\*). Néanmoins, cette différence concerne une petite composante de la fonction d'onde, et la composante dominante de la fonction d'onde de l'état fondamental de  $^{17}\text{Ne}$  et de  $^{17}\text{N}$  diffère de moins de  $5\%$  pour ces deux interactions. Le même changement de l'interaction effective n'introduit qu'une petite différence ( $\sim 12\%$ ) de la configuration dominante  $1p-0h$  dans la fonction d'onde  $1/2_1^+$  de  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ . Ces estimations sont supposées dépendre de manière non négligeable de l'espace de modèle en couches. En particulier, l'absence des couches  $0p_{3/2}$  et  $0d_{3/2}$  de l'espace ZBM devraient amplifier la sensibilité de la contribution de  $1s_{1/2} \rightarrow 0p_{1/2}$  aux effets dépendants de charge [Mil97].

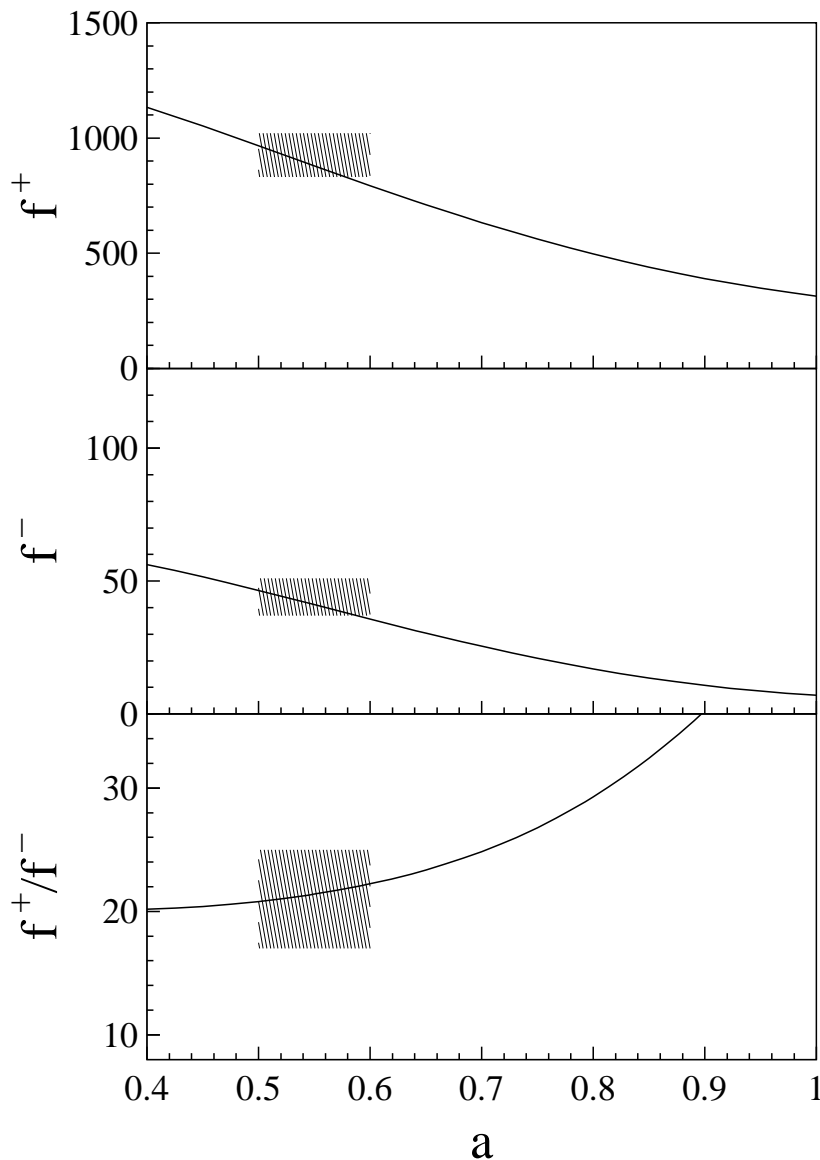


FIG. 2.8 –  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  des transitions  $\beta^+ \ ^{17}\text{Ne} \rightarrow ^{17}\text{F}$  et  $\beta^- \ ^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$  ( $\beta_-$  en fonction de la diffusivité  $a$  du potentiel. Les zones ombrées montrent les limites expérimentales [Bor93] [Til93] [Oza98]. ZBM-F est utilisé pour  $f^+$  et ZBM-O\* pour  $f^-$ ).

Afin de voir l'importance de l'extension radiale de l'onde  $1s_{1/2}$  par rapport à celle de la diffusivité, on a fait varier à la fois la diffusivité  $a$  et le rayon  $R$  du potentiel, de sorte que le rayon quadratique moyen de  $1s_{1/2}$  soit constant. On voit alors sur la figure (2.9) que les valeurs  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  sont presque constantes pour  $a$  variant de 0.4 à 0.6 fm, ce qui n'est pas le cas quand  $R$  reste constant. Le changement pour  $a > 0.6$  fm vient du fait que  $R$  diminue quand  $a$  augmente.

En comparant les figures (2.7), (2.8) et (2.9), on voit que le rayon quadratique moyen de  $1s_{1/2}$  n'est pas le seul paramètre déterminant pour reproduire les données expérimentales. La figure (2.9) montre que les valeurs de  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  ne bougent plus si le rayon quadratique moyen de  $1s_{1/2}$  reste constant, mais les valeurs expérimentales ne peuvent être obtenues que si l'interaction apporte le bon mélange de configurations. Pour cela, l'introduction de ZBM-F et ZBM-O\* est nécessaire.

De nombreux éléments de matrice nucléaires (voir annexe H) contribuent à la probabilité de transition de sorte que les seules déterminations du temps de vie et du spectre sont insuffisantes pour tous les déterminer. Une transition  $\beta$  première interdite unique de  $^{17}\text{N}$  vers  $^{17}\text{O}$  est connue ( $f = 24 \pm 8$ ) [Sil64]. Malheureusement, cette transition teste l'élément de matrice nucléaire de rang 2 qui est absent dans les transitions premières interdites étudiées et qui ne peut pas être bien calculé dans un petit espace de modèle en couches [War92] [War94]. SMEC donne pour cette transition unique une valeur  $\sim 3$  fois trop grande que la valeur expérimentale et dépend faiblement de l'interaction hybride choisie pour l'interaction ZBM. Ce problème doit se résoudre avec un espace plus grand, considérant toutes les excitations jusqu'à  $4\hbar\omega$  [War92] [War94]. L'information de structure nucléaire ne peut être extraite sans ambiguïtés des transitions  $\beta$  et l'importance relative du mélange de configuration (mélange interne) et de la dépendance radiale exotique des ondes à un corps (mélange externe) ne peut être démêlée que dans des circonstances favorables.

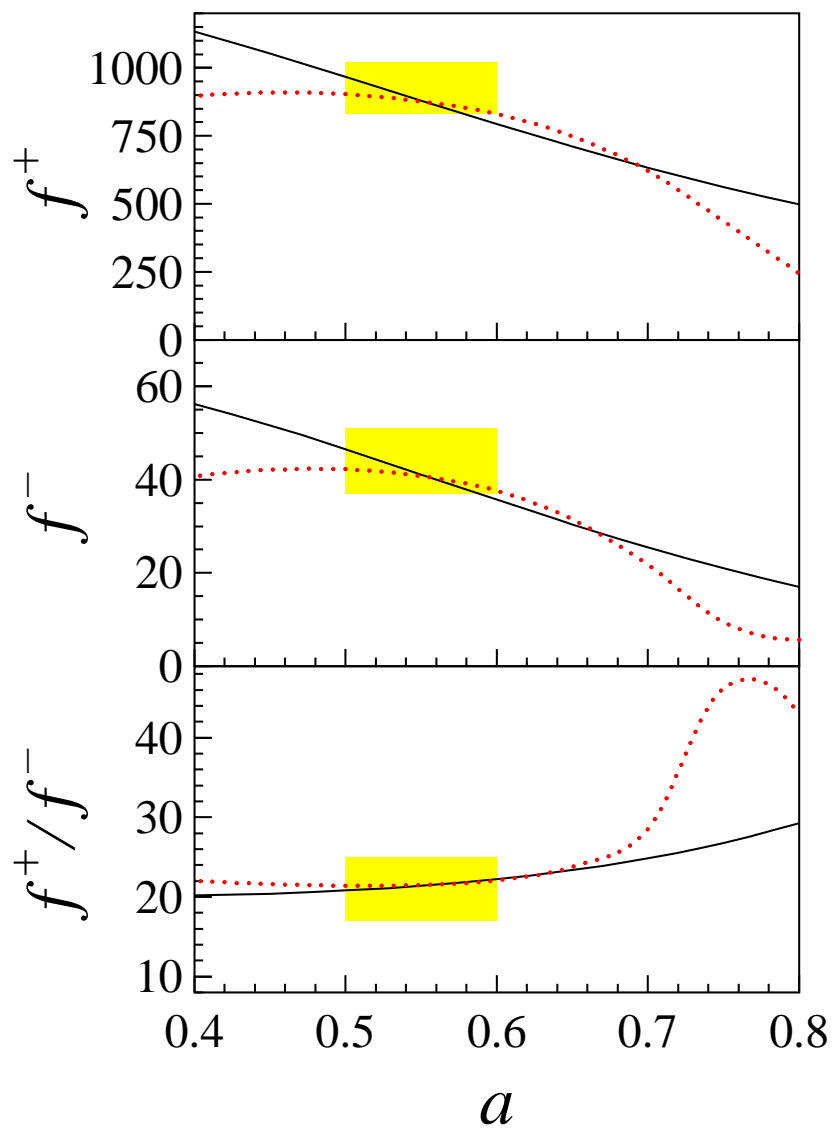


FIG. 2.9 –  $f^+$ ,  $f^-$  et  $f^+/f^-$  des transitions  $\beta^+ {}^{17}\text{Ne} \rightarrow {}^{17}\text{F}$  et  $\beta^- {}^{17}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O}$  en fonction de la diffusivité  $a$  du potentiel. Les zones ombrées montrent les limites expérimentales [Bor93] [Til93] [Oza98]. ZBM-F est utilisé pour  $f^+$  et ZBM-O\* pour  $f^-$ . Les courbes en trait plein sont calculées avec le rayon  $R$  du potentiel constant, tandis que les courbes en pointillé sont calculées avec  $R$  variant avec  $a$  de sorte que le rayon quadratique moyen de  $1s_{1/2}$  reste constant.

## 2.8 Calcul des corrections dues au continuum des masses d'isotopes d'oxygènes

L'oxygène possède une chaîne d'isotopes riches en neutrons assez longue, de  $^{17}\text{O}$  à  $^{26}\text{O}$ . Comme on se rapproche de la drip-line neutron, quand le nombre de neutrons augmente, le seuil d'émission de neutron va devenir de plus en plus bas, et le continuum aura donc une importance de plus en plus grande. Ainsi, en ajoutant l'interaction de couplage  $\mathcal{P} - \mathcal{Q}$  à l'interaction utilisée dans l'espace  $\mathcal{Q}$ , on pourra mieux voir l'influence du continuum sur ces noyaux, d'habitude considérée phénoménologiquement dans l'interaction de modèle en couches classique.

Dans cette étude, les canaux où un neutron peut être émis, soit les canaux  $[\xi_E^{c(+)} \otimes \Phi_i^{A-1}]$ , sont fermés, de sorte que seule la partie réelle de l'énergie et le seuil d'émission de neutron de modèle en couches vont être modifiés. On considère un coeur fermé de  $^{16}\text{O}$  avec l'interaction USD dans la couche  $sd$  [Bro88] et l'interaction «Madrid-Strasbourg» [Cau98] [Num01] dans la couche  $fp$ . La force du couplage résiduel avec le continuum de Wigner-Bartlett (voir (2.76)) est  $V_{12}^0 = 1000 \text{ MeV fm}^3$  et la fraction  $\alpha$  de la partie directe est 0.73. Cette force a été ajustée de sorte que la correction de SMEC à l'énergie de modèle en couches de l'état  $2_1^+$  de  $^{24}\text{O}$  ne pousse pas cet état en dessous du seuil à l'émission d'un neutron, en accord avec l'expérience<sup>1</sup>: le modèle en couches sans continuum donne  $E_{2_1^+}^{SM} = 4.1773 \text{ MeV}$  avec une énergie de séparation  $S_n^{SM} = 3.5538 \text{ MeV}$  et avec SMEC, on a  $E_{2_1^+}^{SMEC} = 3.8861 \text{ MeV}$  et  $S_n^{SMEC} = 3.7061 \text{ MeV}$ . Cette manière de fixer  $V_{12}^0$  donne la limite inférieure de la force de résiduelle de couplage au continuum car les éléments de matrice USD, qui ont été obtenus par un ajustement global sur un grand nombre d'états de la couche  $sd$ , et donc donnent l'énergie de l'état  $2_1^+$  de  $^{24}\text{O}$  près du seuil à l'émission d'un neutron, contiennent implicitement quelques effets de ce couplage. Pour cette raison, les résultats de ce chapitre montrent les tendances qualitatives attendues du couplage au continuum et donne la limite inférieure de ces effets.

La figure (2.10) montre les contributions individuelles de SMEC à l'énergie de l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^{24}\text{O}$  venant des couplages des différents canaux fermés  $[\xi_E^{c(+)} \otimes \Phi_i^{23}]$ . L'apport d'énergie de liaison de ces canaux sur l'énergie de l'état  $0_1^+$  de  $^{24}\text{O}$  par le couplage au continuum converge lentement avec l'énergie des états excités de  $^{23}\text{O}$ : bien que la figure donne une convergence exponentielle avec cette énergie, le nombre de canaux à prendre en compte augmente très vite avec cette énergie. En général, la contribution individuelle des canaux avec des seuils d'émission bas fluctue, et dépend de la structure interne des fonctions d'ondes de modèle en couches intervenant dans le couplage. Dans la plupart des cas, le contribution dominante vient du canal contenant l'état fondamental à  $A - 1$  particules. Habituellement, les fluctuations des contributions individuelles décroissent exponentiellement avec l'énergie de l'état de  $^{23}\text{O}$  du canal. Cette décroissance est aussi plus rapide que l'augmentation de la densité d'états du noyau à  $A - 1$  particules, soit que l'énergie totale de correction converge quand le nombre de canaux considérés augmente. Par la suite, on inclura tous les canaux des isotopes d'oxygènes avec le nombre de neutrons  $N \leq 21$ . Leur nombre dans la couche  $sd$  varie de 3 avec  $^{28}\text{O}$  à 119 dans  $^{23}\text{O}$ . Les calculs de SMEC pour  $N = 21$  ont été faits en couplant l'état fondamental de  $^{29}\text{O}$  aux états excités de parité négative de  $^{28}\text{O}$ .

La figure (2.11) montre la correction à l'énergie de l'état fondamental dans la chaîne

---

1. M. Stanoiu, communication privée.

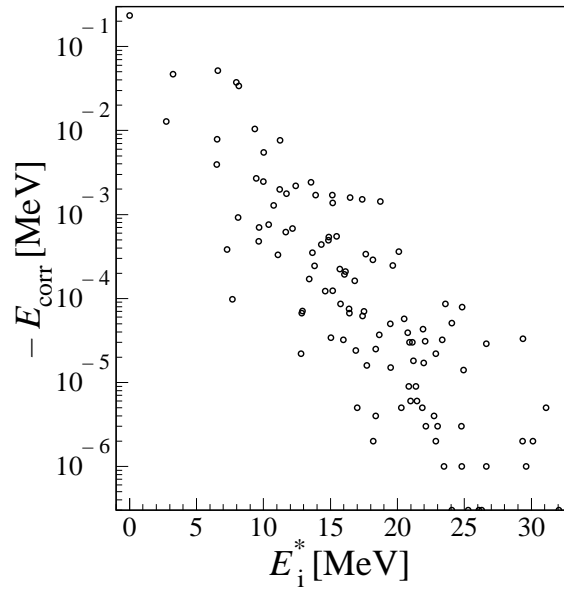


FIG. 2.10 – Corrections de SMEC à l'état fondamental de  $^{24}\text{O}$  provenant des différents canaux fermés  $[^{23}\text{O}\oplus n]$  correspondant aux états du spectre de  $^{23}\text{O}$ .

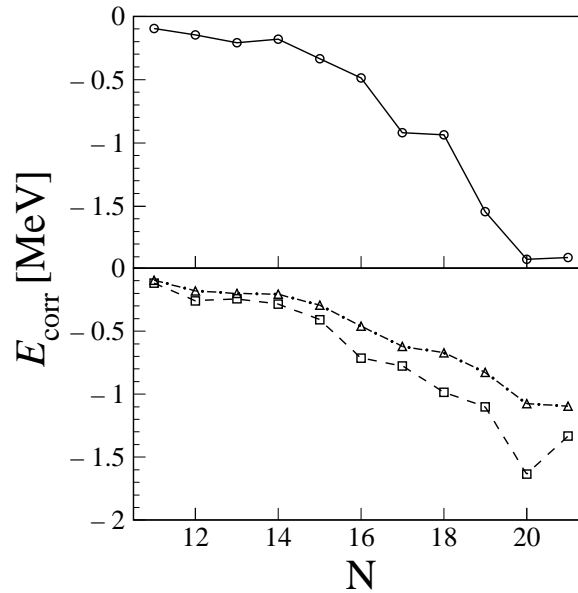


FIG. 2.11 – Corrections avec SMEC de l'énergie de l'état fondamental dans la chaîne d'isotopes d'oxygènes. La figure du haut montre la correction obtenue pour l'énergie de séparation de neutron calculée pour chaque noyau séparément. La figure du bas montre les corrections de SMEC calculées pour deux valeurs fixées différentes du seuil d'émission de neutron : 0 MeV (courbe en pointillé) et 4 MeV (courbe en tirets).



d'oxygènes [Mic01]. La figure du haut a été obtenue en prenant  $S_n$  (le seuil d'émission de neutron) des calculs de modèles en couches. La dépendance moyenne de cette correction en fonction du nombre de nucléons actifs est approximativement quadratique. Des fluctuations locales autour de cette dépendance moyenne sont dues à la variation de  $S_n$  et au changement de corrélations à plusieurs corps pour les noyaux pairs et impairs. Dans la figure du bas, la correction de SMEC a été calculée pour deux différentes valeurs du seuil d'émission de neutron fixées à 0 MeV pour la courbe en pointillé et à 4 MeV pour la courbe en tirets. On peut voir que la correction du continuum à l'énergie de l'état fondamental augmente quand la valeur du seuil d'émission de neutron diminue mais cette augmentation n'est pas uniforme. En comparant la correction de la figure du haut avec  $S_n$  variant avec la courbe en tirets du bas avec  $S_n$  fixé à 4 MeV, on peut voir l'effet de la variation du seuil d'émission de neutron au voisinage des isotopes pairs et impairs sur la correction à l'énergie de l'état fondamental. D'autre part, la tendance des variations pair-impair s'accroît fortement à l'approche de la drip-line neutron, où le seuil d'émission de neutrons vaut 0 MeV, comme on le voit sur la partie basse de la figure. Cet effet de drip-line se voit pour  $^{28}\text{O}$  ( $N = 20$ ), pour qui le nombre de canaux  $n_c$  est réduit ( $n_c = 14, 3$  et  $33$  pour  $^{27}\text{O}$ ,  $^{28}\text{O}$  et  $^{29}\text{O}$  respectivement), mais leur contribution individuelle est beaucoup plus grande.

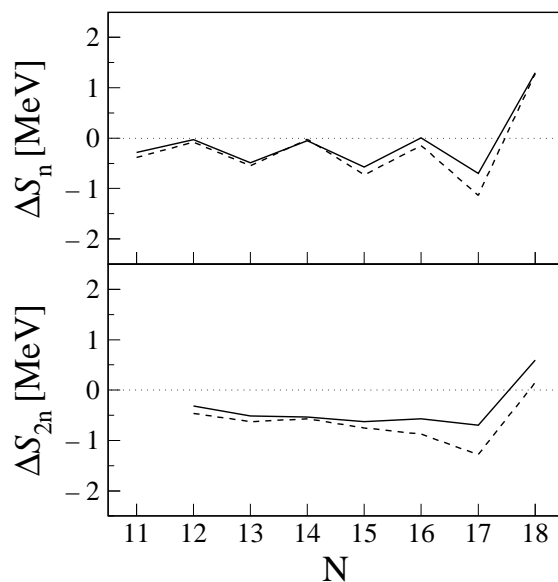


FIG. 2.12 – Pour la partie haute, différences  $S_n^{SMEC} - S_n^{EXP}$  (en trait plein) et  $S_n^{SMEC} - S_n^{EXP}$  (en pointillés) en fonction du nombre de neutrons. Pour la partie basse, même chose avec  $S_{2n}$ .

On compare les énergies de séparation d'un neutron calculées dans SMEC avec les données expérimentales dans la partie haute de la figure (2.12). Dans la partie basse de la figure (2.12), on montre la correction due à SMEC à l'énergie de séparation  $S_n^{SMEC} - S_n^{EXP}$ , qui est calculée pour deux valeurs différentes du seuil d'émission de neutron, 0 et 4 MeV. On remarque une grande augmentation de la sensibilité aux différents couplages pour l'état fondamental des isotopes d'oxygènes pairs et impairs pour  $N \geq 14$  quand le seuil d'émission de neutron tend vers 0 MeV, soit quand on s'approche de la drip-line, fait déjà remarqué sur la figure (2.11). Une conséquence directe de cet effet est aussi une importante modification des excès de masses  $\Delta =$

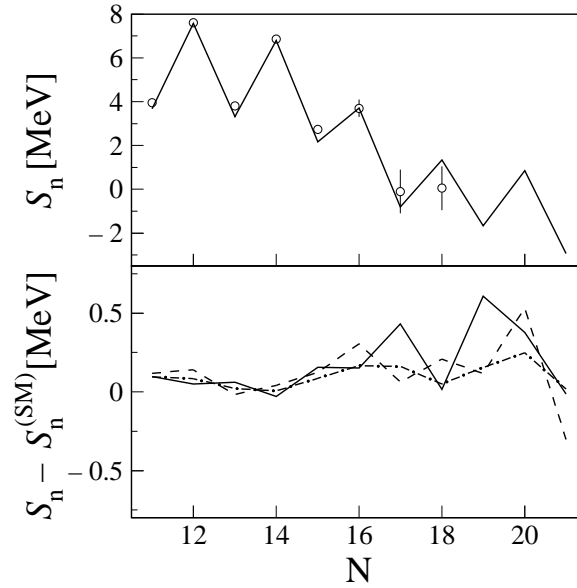


FIG. 2.13 – Energies de séparation d'un neutron dans les isotopes d'oxygènes riches en neutron. La partie haute de la figure compare le  $S_n$  calculé dans SMEC (trait plein) avec les données expérimentales. La partie basse de la figure montre la correction de SMEC à l'énergies de séparation qui est calculée pour deux différentes valeurs du seuil d'émission de neutron:  $E_{th} = 0$  (pointillés) et 4 MeV (ligne mixte). La courbe en trait plein de la partie basse de la figure montre la correction de SMEC calculée avec les énergies de séparation d'un neutron données par la partie haute de la figure.

$E(N + 1) - 2E(N) + E(N - 1)$  par le couplage au continuum près de la drip-line neutron.

La différence entre les énergies de séparation d'un et deux neutrons  $S_n$  et  $S_{2n}$  est donnée par la figure (2.13) pour le modèle en couches (courbe en tirets) et SMEC (courbe en trait plein). L'accord avec les données expérimentales est meilleur quand le couplage au continuum non résonnant est inclus bien qu'il reste des problèmes pour les isotopes impairs.

## Chapitre 3

# Modèle en couches avec états de Gamow

Les états de Gamow ont été la première fois utilisés par Georg Gamow en 1928 pour étudier les résonances  $\alpha$  [Gam28]. Pour cela, il a défini des états d'énergie complexe  $\tilde{E} = E - i\Gamma/2$  afin que des états puissent décrire une émission de particule dans un formalisme stationnaire. En effet, si on regarde la partie temporelle de tels états, qui vaut  $e^{iEt/\hbar} e^{-\Gamma t/(2\hbar)}$ , on s'aperçoit que le module de la fonction d'onde au carré possède une dépendance temporelle en  $e^{-\Gamma t}$ . Or, on sait que l'équation macroscopique de décroissance est  $N(t) = N(0)e^{-wt}$ , et que celle-ci est liée à  $\int |\psi|^2 d\vec{r}$  dans le noyau. Donc, on peut identifier  $\hbar w$  à  $\Gamma$ .  $\hbar/(\Gamma \log 2)$  est donc la demi-vie du système, et par les relations d'incertitude temps-énergie, l'imprécision sur l'énergie  $E$ , qui est en toute rigueur non définie.

L'onde correspondant à cet état a un comportement d'onde sortante, et sa partie radiale se comporte comme  $f(r) \cdot e^{ik_r r + k_i \cdot r}$ , où  $k_r$  et  $k_i$  sont positifs pour  $E > 0$  et  $f$  est une fonction à croissance polynômiale. Cela implique que  $\int |\psi(r)|^2 dr$  diverge, et donc que l'onde ne peut pas être normalisée de la manière usuelle. Cela est gênant pour l'interprétation de la fonction d'onde; cependant, ce comportement est physique, et vient du fait qu'on utilise un formalisme stationnaire pour décrire un phénomène qui ne l'est pas [Kuk89].

Afin de pouvoir utiliser ces états, Zel'dovich a proposé la première méthode pour les normaliser et pouvoir calculer des éléments de matrice avec [Zel61]. En utilisant cette méthode, Berggren a montré que les états de Gamow pouvaient former une base complète, dans un espace en fait plus grand que celui des états liés et de diffusion, contenant des résonances [Ber67]. D'autres relations de complétude avec des états de Gamow ont été étudiées par Lind [Lin93]. Gyarmati et Vertse ont permis de rendre la base de Gamow numériquement plus simple à utiliser en donnant une seconde méthode pour normaliser et calculer les éléments de matrice avec états de Gamow, la rotation complexe extérieure [Gya71] [Ver87]. Cette base contient néanmoins un continuum d'états de diffusion, qui est difficile à traiter. Par conséquent, il a été choisi de le négliger dans certaines applications [Dus92] [For96], donnant ce qu'on appelle l'approximation des pôles ("the pole approximation"), car les états de Gamow liés ou résonnants sont des pôles de la matrice  $S$ . L'importance de ce continuum a été étudiée dans [Ver95] [Lin94] dans un contexte de continuum RPA, avec des interactions particule-trou séparables, où il a été conclu qu'il doit être inclus si on veut avoir des résultats quantitatifs. Pour cela, il faut discrétiser le continuum [Ver87] [Lin93]; on peut alors développer des états à un corps d'un potentiel Woods-Saxon, qu'ils soient liés ou résonnants, à partir de la base

de Gamow issue d'un autre potentiel [Lio96]. Récemment, la base complète de Gamow a été appliquée au cas de deux particules interagissant avec une interaction séparable [Bet02]. Les états de Gamow ont été aussi appliqués dans des analyses de réactions [Cok73] et études de d'émetteurs de proton [Kru00].

Par conséquent, la base des états de Gamow sont un outil sûr pour l'étude des états nucléaires proches des seuils d'émission de particule, et logiquement, l'étape suivante les concernant est leur utilisation dans un calcul de modèle en couches multiconfigurationnel. Ce travail, jamais tenté auparavant, fait l'objet de ce chapitre [Mic02b] [Mic03].

## 3.1 Normalisation et éléments de matrice avec états de Gamow

### 3.1.1 Méthode de Zel'dovich

La première méthode pour donner un sens aux intégrales divergentes intervenant dans les éléments de matrice d'états de Gamow a été donné par Zel'dovich, qui a proposé de multiplier l'intégrande par un facteur gaussien qui fait converger l'intégrale, dépendant d'un paramètre qu'on fait tendre vers 0 [Zel61] :

$$\langle u_f | u_i \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon r^2} u_f(r) O(r) u_i(r) dr , \quad (3.1)$$

où  $|u_f\rangle$  et  $|u_i\rangle$  sont des états à un corps et  $O(r)$  un opérateur quelconque. On peut montrer qu'avec cette définition tous les états de Gamow sont orthogonaux et peuvent être normés ( $O(r) = 1$ ). Par conséquent, on peut utiliser ces fonctions orthonormées pour calculer des éléments de matrice quelconques. Cependant, cette méthode, bien qu'utile sur le plan théorique, ne peut pas être utilisée numériquement, à cause du processus de limite qui donne à calculer des intégrales "proches" de la divergence.

### 3.1.2 Eléments de matrice et rotation complexe

Il existe une méthode équivalente à la précédente pour renormaliser les intégrales divergentes induites par les fonctions radiales exponentiellement croissantes [Kuk89]. De plus, on peut la justifier en faisant appel au prolongement analytique. Pour cela, on définit la fonctionnelle suivante sur  $]-\infty; V_{lim}[$  [Kuk89]:

$$F(V_o) = \int_0^{+\infty} u_f(r) O(r) u_i(r) dr \left( \int_0^{+\infty} u_f^2(r) dr \int_0^{+\infty} u_i^2(r) dr \right)^{-\frac{1}{2}} , \quad (3.2)$$

où :

- $|u_f\rangle$  et  $|u_i\rangle$  sont des états à un corps;
- $V_o$  est la profondeur du potentiel générant  $u_f$  et  $u_i$ ;
- $V_{lim}$  la profondeur du potentiel pour laquelle une des deux fonctions est liée et l'autre a pour énergie  $e = 0$ ;
- $O(r)$  un opérateur analytique quelconque.

Cette fonctionnelle est donc définie car l'intégrale converge sur le domaine  $]-\infty; V_{lim}[$ . Elle représente l'élément de matrice radial  $\langle u_f | O | u_i \rangle / \|u_f\| \|u_i\|$  entre deux fonctions d'onde (non forcément normées), car,  $u_f$  et  $u_i$  étant liées,  $u_f^* = u_f$  et  $u_i^* = u_i$  avec la convention de phase usuelle. Dans [Kuk89], le prolongement analytique de  $F$  se fait avec des approximations de Padé. Cependant, une autre technique a été choisie ici : la rotation complexe [Gya71]. Elle permet de calculer  $F$  avec  $V_o > V_{lim}$ . Pour cela, appelons  $f(r)$  une des trois intégrandes  $u_f(r)$ ,  $O(r)$ ,  $u_i(r)$ ,  $u_f^2(r)$  ou  $u_i^2(r)$  et prenons  $V_o < V_{lim}$ .

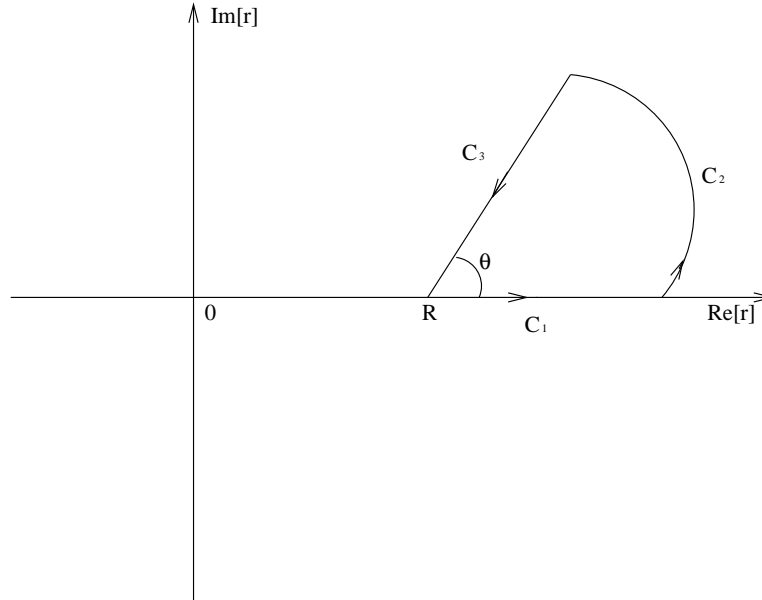


FIG. 3.1 – Chemin dans l'espace de la coordonnée radiale  $r$  où se fait la rotation complexe d'angle  $\theta$ .  $R$  est le point où commence la rotation complexe extérieure. L'intégration sur  $C_1$  est remplacée par l'intégration sur  $C_3$  et l'intégration sur le contour  $C_2$  s'annule quand son rayon tend vers l'infini (voir texte).

Comme  $f$  est analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , on a, d'après le théorème de Cauchy (voir figure (3.1)):

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz = 0 .$$

Comme  $f$  décroît exponentiellement pour  $Re[z] > 0$ , l'intégrale  $\int_{C_2} f(z) dz$  tend vers 0 quand  $R_f \rightarrow +\infty$ .

Pour la même raison, les intégrales  $\int_{C_1} f(z) dz$  et  $\int_{C_3} f(z) dz$  convergent quand  $R_f \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, on a, avec  $R_f \rightarrow +\infty$ :

$$\int_R^{+\infty} f(r) dr = \int_0^{+\infty} f(R + x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx . \quad (3.3)$$

Ainsi, on peut définir  $F$  sur  $]-\infty; V_{lim}[$  par :

$$F(V_o) = \frac{O_p}{N_i N_f} , \quad (3.4)$$

où :

$$O_p = \int_0^R u_f(r) O(r) u_i(r) dr$$

$$+ \int_0^{+\infty} u_f(R+x \cdot e^{i\theta}) O(R+x \cdot e^{i\theta}) u_i(R+x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx \quad (3.5)$$

$$N_i = \sqrt{\int_0^R u_i^2(r) dr + \int_0^{+\infty} u_i^2(R+x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx} \quad (3.6)$$

$$N_f = \sqrt{\int_0^R u_f^2(r) dr + \int_0^{+\infty} u_f^2(R+x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx} \quad (3.7)$$

Si  $u_f$  et  $u_i$  sont des états liés ou résonnants, on peut écrire  $k_f = |k_f|e^{-i\alpha_f}$  et  $k_i = |k_i|e^{-i\alpha_i}$ , où  $e_f = k_f^2$  et  $e_i = k_i^2$ . Avec  $z = R+x \cdot e^{i\theta}$ ,  $u_f(z) \sim a_f(z)e^{ik_f z}$  et  $u_i \sim a_i(z)e^{ik_f z}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , avec  $a_f$  et  $a_i$  des fonctions à croissance polynômiale. Les intégrales définissant  $F$  convergent alors si on prend :

$$\theta > \alpha_f + \alpha_i . \quad (3.8)$$

Cette expression de  $F$  est analytique si  $u_f$  et  $u_i$  sont des états liés ou résonnants, car elle est fonction d'intégrales convergentes de fonctions analytiques. Aussi, les racines carrées ne posent pas de problème car  $N_i^2$  et  $N_f^2$  ont toujours une partie réelle positive dans les cas qui nous intéressent. Par conséquent, d'après le théorème du prolongement analytique, l'équation (3.4) définit aussi  $F$  pour  $V > V_{lim}$  avec (3.8). Ainsi, on peut calculer les normes et parties radiales des éléments de matrice d'états résonnants a priori non normalisables.

En conclusion, on a :

$$\langle \widetilde{u}_f | u_f \rangle = \int_0^R u_f^2(r) dr + \int_0^{+\infty} u_f^2(R+x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx = 1 \quad (3.9)$$

$$\langle \widetilde{u}_i | u_i \rangle = \int_0^R u_i^2(r) dr + \int_0^{+\infty} u_i^2(R+x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx = 1 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{u}_f | O(r) | u_i \rangle &= \int_0^R u_f(r) O(r) u_i(r) dr \\ &+ \int_0^{+\infty} u_f(R+x \cdot e^{i\theta}) O(R+x \cdot e^{i\theta}) u_i(R+x \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

en utilisant des fonctions d'onde normées. On notera par la suite :

$$\langle \widetilde{u}_f | O(r) | u_i \rangle = \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} u_f(r) O(r) u_i(r) dr \right] \quad (3.12)$$

pour alléger l'écriture.

La signification physique du  $\langle \tilde{u} |$  dans les éléments de matrice est la suivante : si  $|u\rangle$  est un état décroissant, on doit utiliser dans l'élément de matrice un état *entrant*, noté  $\langle \tilde{u} |$ . En effet,  $\langle \widetilde{u}_f | O(r) | u_i \rangle$  représente une réaction induite par  $O(r)$  qui transforme  $u_i$  émetteur en  $u_f$  receveur.  $\tilde{u}(r) = u(r)^*$ , car  $|\tilde{u}\rangle$  représente l'état  $|u\rangle$  qui remonte le temps, l'inversion du sens du temps se faisant avec la conjugaison complexe [Mes95]. Par conséquent, en utilisant la définition usuelle des éléments de matrice (en régularisant l'intégrale), on obtient la disparition des complexes conjugués :

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{u}_f | O(r) | u_i \rangle &= \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} \langle \widetilde{u}_f | r \rangle O(r) \langle r | u_i \rangle dr \right] \\ &= \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} \widetilde{u}_f(r)^* O(r) u_i(r) dr \right] \\ &= \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} u_f(r) O(r) u_i(r) dr \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les états de diffusions interviennent aussi dans les états de Gamow mais il faut les calculer autrement que les états liés et résonnants. En effet, leur comportement asymptotique quand  $r \rightarrow +\infty$  est :

$$u(r) \sim C^+ H_{l,\eta}^{(+)}(kr) + C^- H_{l,\eta}^{(-)}(kr) . \quad (3.14)$$

On doit les normaliser avec le delta de Dirac, comme les états de diffusion usuels :

$$\int_0^{+\infty} \tilde{u}(k,r) u(k',r) dr = \delta(k - k') . \quad (3.15)$$

Cette condition est équivalente à :

$$C^+ C^- = \frac{1}{2\pi} . \quad (3.16)$$

On obtient ainsi les états de diffusion  $u(k,r)$  en intégrant directement (2.16) avec la condition (2.17). Connaissant  $u(r)$ ,  $H_{l,\eta}^{(+)}$ ,  $H_{l,\eta}^{(-)}$  et leurs dérivées au point  $R$ , les coefficients  $C^+$  et  $C^-$  sont déterminés à un facteur près par la résolution du système linéaire :

$$u(R) = C^+ H_{l,\eta}^{(+)}(kR) + C^- H_{l,\eta}^{(-)}(kR) \quad (3.17)$$

$$u'(R) = k \cdot C^+ \left[ \frac{dH_{l,\eta}^{(+)}}{dz} \right]_{z=kR} + k \cdot C^- \left[ \frac{dH_{l,\eta}^{(-)}}{dz} \right]_{z=kR} \quad (3.18)$$

Ensuite, l'état est normalisé pour vérifier la condition (3.16).

Les éléments de matrice avec états de diffusion reposent aussi sur la rotation complexe (3.11). Cependant, le prolongement analytique doit être introduit autrement; on considère

$$F(k_f) = \int_0^R u_f(r) V(r) u_i(r) dr + A_f A_i F_{++}(k_f) + A_f B_i F_{+-}(k_f) \\ + B_f A_i F_{-+}(k_f) + B_f B_i F_{--}(k_f) , \quad (3.19)$$

où :

- $u_f = A_f u_f^+ + B_f u_f^-$ ;
- $u_i = A_i u_i^+ + B_i u_i^-$ ,  $k_i$  étant fixé dans  $F$ , et  $u_i$  peut être lié, résonnant ou de diffusion;
- $F_{s_f s_i}(k_f) = \int_0^{+\infty} u_f^{s_f}(R+x) O(R+x) u_i^{s_i}(R+x) dx$  avec  $s_f \in (+, -)$  et  $s_i \in (+, -)$ .

Cette séparation est nécessaire, car la présence d'ondes entrantes et sortantes dans la même intégrale ne permet pas de trouver un chemin complexe où l'intégrande décroît exponentiellement. Par conséquent, on considère chaque  $F_{s_f s_i}$  sur un domaine du plan complexe où elle converge, et on procède au prolongement analytique avec  $\theta_{s_f s_i}$  :

$$F_{s_f s_i}(k_f) = \int_0^{+\infty} u_f^{s_f}(z(x)) O(z(x)) u_i^{s_i}(z(x)) e^{i\theta_{s_f s_i}} dx , \quad (3.20)$$

où  $z(x) = R + x \cdot e^{i\theta_{s_f s_i}}$ .  $\theta_{s_f s_i}$  sera donc différent selon les signes  $s_f$  et  $s_i$ .

Il peut exister cependant des intégrales qui ne peuvent pas être régularisées: ce sont  $F_{+-}$  et  $F_{-+}$  quand  $u_i = u_f$ . Pour  $O(r) = 1$ , l'intégrande tend vers une valeur constante en  $+\infty$  quel que soit  $\theta_{+-}$ : cela se voit facilement pour les neutrons, car avec

$z = R + x \cdot e^{i\theta}$  tel que  $|z| \rightarrow +\infty$ :  $u^+(z) \cdot u^-(z) \rightarrow \text{const} \times e^{ikz} \times e^{-ikz} = \text{const}$ , et l'intégrale sur un domaine infini d'une constante non nulle diverge. Cela est lié au fait que les états résonnants sont normalisés avec un delta de Dirac; l'intégrale précédente est en effet une distribution delta, qui ne peut pas être calculée numériquement. Dans ce cas, on utilise le delta de Dirac discrétisé :

$$\delta(k - k_0) \rightarrow \frac{\delta_{k,k_0}}{\Delta k}, \quad (3.21)$$

où  $\Delta k$  est le pas de discrétisation en  $k$ .

Il faut remarquer que seul le calcul des parties radiales des éléments de matrice change avec les états de Gamow; la partie angulaire des éléments de matrice reste identique à celle des états liés.

## 3.2 Relations de complétudes avec états de Gamow

### 3.2.1 Relation de complétude à un corps

Le point de départ est la relation de complétude de Newton [New66], qui s'écrit avec les états  $|u_k\rangle$  normalisés par (3.15) :

$$\sum_n |u_n\rangle\langle u_n| + \int_0^{+\infty} |u_k\rangle\langle u_k| dk = \mathbb{1}. \quad (3.22)$$

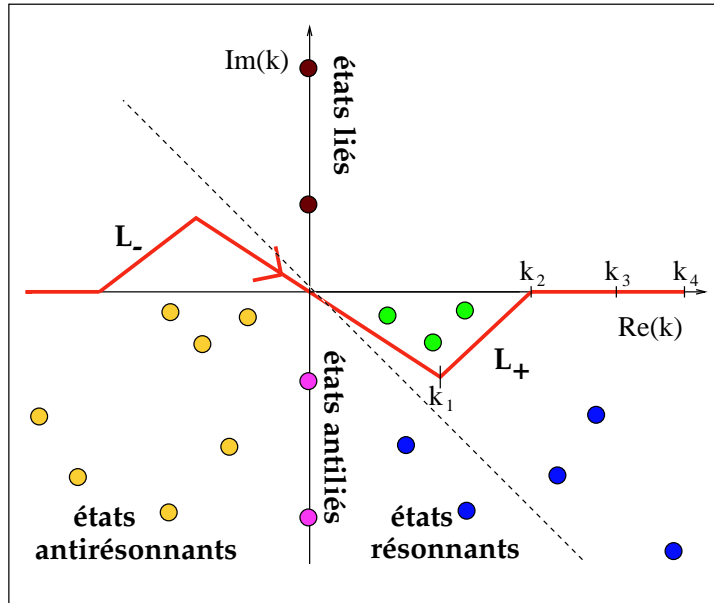


FIG. 3.2 – Plan complexe dans l'espace des  $k$ , donnant les positions des états liés, résonnants, antirésonnants et antiliés.  $L^+$  est le contour du continuum non résonnant. Les seuls états à prendre en compte dans la relation de complétude de Berggren sont les états liés, les états résonnants entre  $L^+$  et l'axe réel et les états de diffusion de  $L^+$  (voir texte).

Avec cette base, on peut développer n'importe quel état lié ou de diffusion d'énergie réelle. Pour pouvoir développer les états de Gamow, il faut modifier le contour des  $k$  en



le déformant dans le plan complexe (voir figure (3.2)). D'après le théorème des résidus, on obtient :

$$-\int_0^{+\infty} |u_k\rangle\langle u_k| dk + \int_{L_+} |u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k| dk = 2i\pi \sum_{k_n} \text{Res} (|u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k|)_{k=k_n} , \quad (3.23)$$

où les  $k_n$  sont les pôles de  $|u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k|$  entre l'axe réel et le chemin complexe. Comme cette zone se trouve dans le plan physique ( $E > 0$ ,  $\Gamma > 0$ ), les pôles ne peuvent correspondre qu'à des résonances. En effet, d'après la définition des fonction de Jost (voir (G.1) et (G.2)) et la condition de normalisation (3.16), on a pour un état de diffusion de nombre d'onde  $k$  quelconque :

$$u_k(r) = \sqrt{\frac{-\mathcal{J}^-(k)}{2\pi\mathcal{J}^+(k)}} u_k^+(r) + \sqrt{\frac{-\mathcal{J}^+(k)}{2\pi\mathcal{J}^-(k)}} u_k^-(r) . \quad (3.24)$$

De plus,  $\mathcal{J}^-(k) \neq 0$  pour les résonances et états liés, car cette fonction s'annule seulement pour les états ayant un comportement d'onde entrante. Ainsi, quand  $k \rightarrow k_n$ , soit quand  $u_k$  s'approche d'un état résonnant :

$$|u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k| \sim -\frac{\mathcal{J}^-(k_n)}{2\pi\mathcal{J}^+(k)} |u_{k_n}^+\rangle\langle \widetilde{u}_{k_n}^+| . \quad (3.25)$$

La dérivée de la fonction de Jost en  $k_n$  vaut (voir (G.6)) :

$$\left[ \frac{d\mathcal{J}}{dk} \right]_{k=k_n} = i\mathcal{J}^-(k_n) \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} u_{k_n}^+{}^2(r) dr \right] . \quad (3.26)$$

Comme cette dérivée est non nulle, on a quand  $k \rightarrow k_n$  :

$$\mathcal{J}^+(k) \sim (k - k_n) \left[ \frac{d\mathcal{J}^+}{dk} \right]_{k=k_n} . \quad (3.27)$$

Par conséquent, avec  $k \rightarrow k_n$  :

$$|u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k| \sim -\frac{\mathcal{J}^-(k_n)}{2\pi i \mathcal{J}^-(k_n)(k - k_n)} |u_{k_n}^+\rangle\langle \widetilde{u}_{k_n}^+| \left( \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} u_{k_n}^+{}^2(r) dr \right] \right)^{-1} . \quad (3.28)$$

On obtient alors le résidu en  $k_n$  :

$$\text{Res} [|u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k|]_{k=k_n} = -\frac{1}{2i\pi} |u_n\rangle\langle \widetilde{u}_n| , \quad (3.29)$$

en définissant la résonance normalisée :

$$u_n(r) = u_{k_n}^+(r) \left( \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} u_{k_n}^+{}^2(r) dr \right] \right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (3.30)$$

La relation de complétude s'en déduit de suite :

$$\sum_n |u_n\rangle\langle \widetilde{u}_n| + \int_{L_+} |u_k\rangle\langle \widetilde{u}_k| dk = \mathbb{1} , \quad (3.31)$$

où les  $|u_n\rangle$  décrivent les états liés et résonnants normalisés entre l'axe réel et le chemin complexe. C'est la relation de complétude de Berggren [Ber67]; elle permet de

développer des états liés ou dont le  $k$  complexe se trouve dans la zone entre l'axe réel et le chemin complexe (voir figure(3.2)).

Pour pouvoir utiliser numériquement (3.31), il faut discrétiser l'intégrale :

$$\int_{L_+} |u_k\rangle \langle \widetilde{u}_k| dk \simeq \sum_{i=1}^N |u_{k_i}\rangle \langle \widetilde{u}_{k_i}| \Delta_{k_i} . \quad (3.32)$$

$\Delta_{k_i}$  dépend de la méthode de discrétisation utilisée, et dans notre cas est calculé par un calcul numérique de la dérivée à quatre points du chemin  $L_+$  en  $k_i$ . Pour traiter le  $\Delta_{k_i}$ , on introduit une normalisation supplémentaire des ondes de diffusion [Lin93] :

$$u_i(r) = \sqrt{\Delta_{k_i}} u_{k_i}(r) . \quad (3.33)$$

Aussi, les  $\delta(k - k')$  intervenant par les états de diffusion doivent être remplacés par leur valeur discrétisée (voir (3.21)). Il est facile de voir que les  $|u_i\rangle$  vérifient alors:

$$\langle \widetilde{u}_i | u_j \rangle = \delta_{ij} . \quad (3.34)$$

Ainsi la relation (3.31) discrétisée devient :

$$\sum_n |u_n\rangle \langle \widetilde{u}_n| + \sum_{i=1}^N |u_i\rangle \langle \widetilde{u}_i| \simeq \mathbb{1} . \quad (3.35)$$

Cette relation est formellement identique à une relation de complétude discrète; ainsi, elle conduit à un problème aux valeurs propres  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$  dans cette base. Comme le formalisme des états de Gamow est non hermitique, la matrice de  $H$  est symétrique complexe. Cependant, on peut quand même la diagonaliser par les méthodes usuelles, les méthodes valables pour des matrices hermitiques pouvant presque toujours être adaptées aux matrices symétriques complexes.

Aussi, dans l'équation (3.30), les résonances sont normalisées en utilisant le carré de la fonction d'onde, et non son module au carré. Cela vient du fait que le prolongement analytique utilisé pour introduire la normalisation des états de Gamow fait intervenir les fonctions d'ondes au carré (voir chapitre (3.1.2)). Aussi, on normalise les vecteurs de Gamow dans l'espace de configuration en utilisant le carré des composantes, et non leur module au carré :

$$\sum_n c_n^2 = 1 . \quad (3.36)$$

De plus, dans une approche quasi stationnaire avec états de Gamow, une résonance est un vecteur propre de  $H$  avec énergie complexe  $E - i\Gamma/2$  et chaque observable  $O$  calculée sur cet état est complexe. L'interprétation de ces valeurs est due à Berggren [Ber67]:  $\text{Re}[O]$  est la probabilité moyenne d'obtenir une certaine mesure et  $\text{Im}[O]$  est l'imprécision sur cette moyenne. Cette imprécision vient du fait que l'état n'a qu'une durée de vie finie, ce qui implique qu'aucune mesure sur cet état ne peut avoir de probabilité définie.

### 3.2.2 Illustration de la relation de complétude à un corps

Pour montrer que la relation (3.35) permet bien de développer les états propres d'un hamiltonien à un corps donné par (2.12) avec un potentiel sphérique, on va calculer les

états propres d'un potentiel Woods-Saxon de la forme donnée par l'équation (2.11) à partir de la base générée par un autre potentiel de même nature mais de profondeur différente. On considère les potentiels suivants (les notations sont celles de (2.11)):

- diffusivité  $d$ : 0.65 fm;
- potentiel spin-orbite  $V_{so}$ : 5 MeV;
- rayon  $R_0$ : 5.3 fm;
- $2\mu/\hbar^2 = 0.0453975 \text{ MeV}^{-1} \text{ fm}^{-2}$ ;
- potentiel central  $V_0$ : 58, 59, 62 ou 64 MeV suivant le cas.

Le potentiel de Coulomb est absent car on considère uniquement des états de neutrons.

Le chemin du continuum est constitué de trois segments de droite du plan complexe de l'espace des  $k$  reliés par les points  $k_0 = 0.0 + i0.0$ ,  $k_1 = 0.2 - i0.2$ ,  $k_2 = 0.5$  et  $k_3 = 2.0$ . On a fait le calcul en discrétisant le continuum avec 60, 80, 100, 120 et 160 points et en extrapolant le résultat avec la méthode de Richardson.

Dans cette étude, on cherchera à développer l'état  $2p_{3/2}$ , soit peu lié soit résonnant d'un potentiel Woods-Saxon, à partir de la base  $p_{3/2}$  issue de l'autre potentiel. Notons que les états  $0p_{3/2}$  et  $1p_{3/2}$  de la base n'interviendront jamais dans les expansions, car ils sont trop liés (respectivement  $\sim 40 \text{ MeV}$  et  $\sim 18 \text{ MeV}$ ) pour y jouer un rôle.

- Le potentiel générant la base a  $V_0^{(in)} = 59 \text{ MeV}$  et le potentiel dont on veut calculer le  $2p_{3/2}$  par diagonalisation a  $V_0^{(out)} = 58 \text{ MeV}$ . La densité d'amplitude au carré associée aux composantes issues de la base est montrée sur la figure (3.3). On y voit que le continuum non résonnant est nécessaire à la décomposition de l'état  $2p_{3/2}$ , bien que le  $2p_{3/2}$  de la base soit résonnant aussi. Néanmoins, le  $2p_{3/2}$  de la base est la composante dominante, car son amplitude carrée est proche de 1.
- Le potentiel générant la base a  $V_0^{(in)} = 62 \text{ MeV}$  et le potentiel dont on veut calculer le  $2p_{3/2}$  par diagonalisation a  $V_0^{(out)} = 64 \text{ MeV}$ . La densité d'amplitude au carré associée aux composantes issues de la base est montrée sur la figure (3.4). De même que pour le cas précédent, c'est la composante due au  $2p_{3/2}$  de la base qui domine, tandis que le continuum a un rôle secondaire, bien que non négligeable. Sur cette figure, comme sur les figures suivantes de cette section, on peut remarquer un point non dérivable de la densité d'amplitudes carrées du continuum en  $\text{Re}[k] = 0.2$ . Cependant, la fonction  $c^2$  est une fonction analytique de  $k$  sur  $\mathbb{C}^*$ . Ce paradoxe apparent s'explique en voyant d'une part qu'on trace la densité en fonction de  $\text{Re}[k]$ , où la donnée de  $\text{Im}[k]$  est absente, et d'autre part que le chemin utilisé dans le plan complexe est continu mais non dérivable, car on a un point anguleux en  $k = 0.2 - i0.2$ . Ce sont uniquement les effets conjugués de ces deux faits qui engendrent les points anguleux sur les courbes.
- Le potentiel générant la base a  $V_0^{(in)} = 62 \text{ MeV}$  et le potentiel dont on veut calculer le  $2p_{3/2}$  par diagonalisation a  $V_0^{(out)} = 59 \text{ MeV}$ . La densité d'amplitude au carré associée aux composantes issues de la base est montrée sur la figure (3.5). Maintenant, l'état qu'on diagonalise, une résonance, n'a plus la même nature que l'état correspondant dans la base, qui est lié. Une résonance de Gamow a une partie réelle et imaginaire, la partie imaginaire étant reliée à son caractère décroissant. Par conséquent, c'est le continuum qui doit lui apporter toute sa partie imaginaire, car les états liés sont réels: c'est pourquoi le continuum est maintenant dominant dans cette expansion.
- Le potentiel générant la base a  $V_0^{(in)} = 59 \text{ MeV}$  et le potentiel dont on veut calculer le  $2p_{3/2}$  par diagonalisation a  $V_0^{(out)} = 64 \text{ MeV}$ . La densité d'amplitude au carré

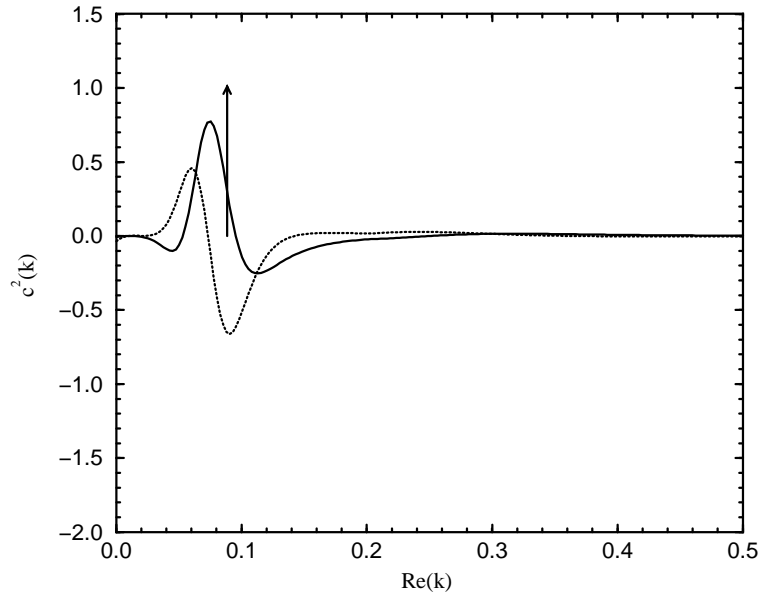


FIG. 3.3 – Densité d’amplitude carrée des composantes du vecteur propre  $2p_{3/2}$  du potentiel de profondeur  $V_0^{(out)} = 59$  MeV avec la base du potentiel de profondeur  $V_0^{(in)} = 58$  MeV, en fonction du  $Re[k]$  de chaque composante. La flèche donne l’amplitude carrée de la composante résonante  $2p_{3/2}$  de la base. Le trait plein donne la partie réelle de la densité d’amplitude carrée (états du continuum et discrets) et celui en pointillé sa partie imaginaire.

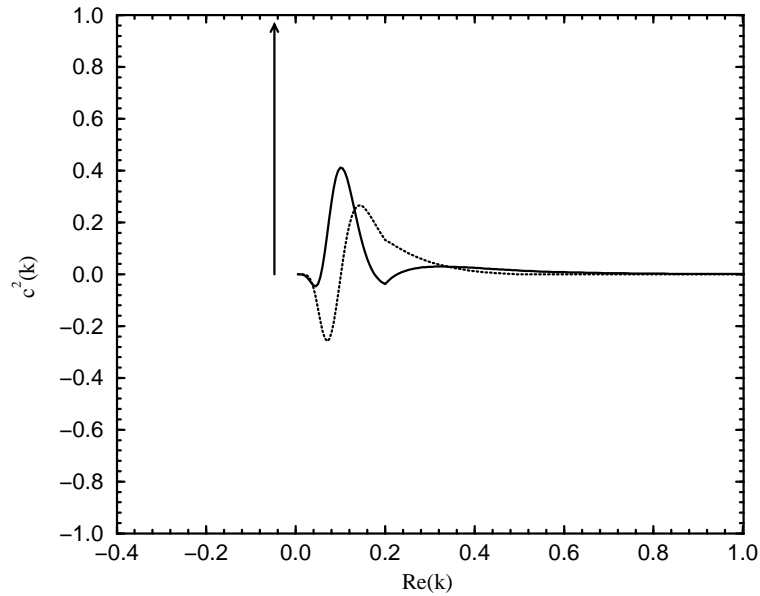


FIG. 3.4 – Densité d’amplitude carrée des composantes du vecteur propre  $2p_{3/2}$  du potentiel de profondeur  $V_0^{(out)} = 64$  MeV issu de la diagonalisation de la base issue du potentiel de profondeur  $V_0^{(in)} = 62$  MeV. La flèche donnant l’amplitude carrée de la composante  $2p_{3/2}$  est donnée en fonction de  $-Im[k]$ , car la composante  $2p_{3/2}$  est liée, donc de  $k$  imaginaire pur. Pour les autres informations, voir figure (3.3).

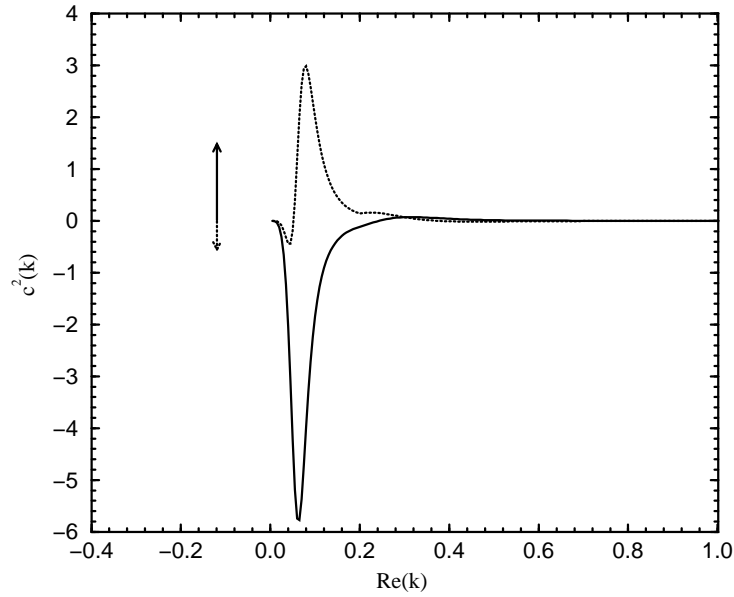


FIG. 3.5 – Densité d'amplitude carrée des composantes du vecteur propre  $2p_{3/2}$  du potentiel de profondeur  $V_0^{(out)} = 59 \text{ MeV}$  issu de la diagonalisation de la base issue du potentiel de profondeur  $V_0^{(in)} = 62 \text{ MeV}$ . Pour les autres informations, voir figure (3.3) et 3.5).

associée aux composantes issues de la base est montrée sur la figure (3.6). C'est le cas le plus difficile : on doit en effet développer un état réel à partir d'une base complexe, les états  $0p_{3/2}$  et  $1p_{3/2}$  étant négligeables dans ce calcul. Par conséquent, le continuum non résonnant va devoir compenser la partie imaginaire issue de la résonance  $2p_{3/2}$  de la base; il est donc dans ce cas dominant dans l'expansion.

Pour montrer la convergence de la fonction d'onde avec le nombre de points du continuum dans ce dernier cas, on a calculé la différence entre la fonction d'onde issue de la diagonalisation et celle issue d'une intégration directe (voir figure(3.7)). On y voit qu'il y a convergence quand le nombre de points du continuum augmente, mais cette convergence est lente. Cela signifie que pour avoir une précision inférieure au keV, l'extrapolation de Richardson est nécessaire.

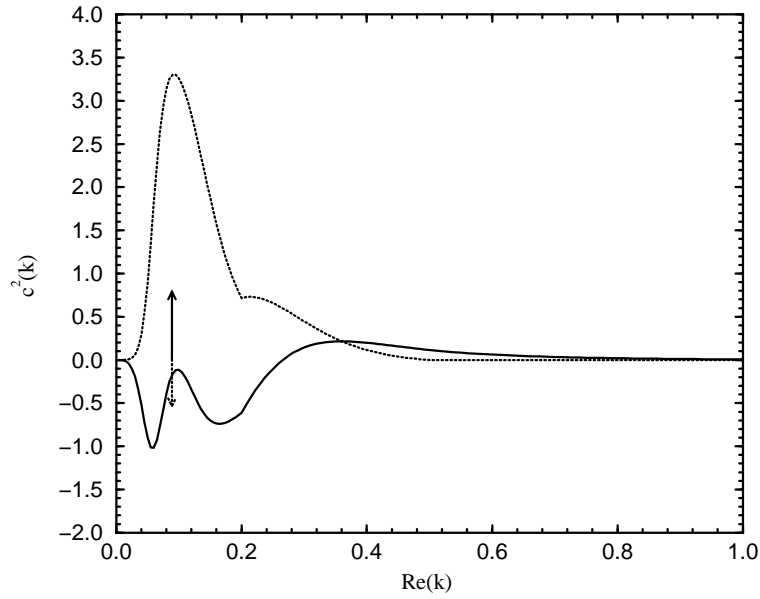


FIG. 3.6 – Densité d'amplitude carrée des composantes du vecteur propre  $2p_{3/2}$  du potentiel de profondeur  $V_0^{(out)} = 64$  MeV issu de la diagonalisation de la base du potentiel de profondeur  $V_0^{(in)} = 59$  MeV. Pour les autres informations, voir figure (3.3).

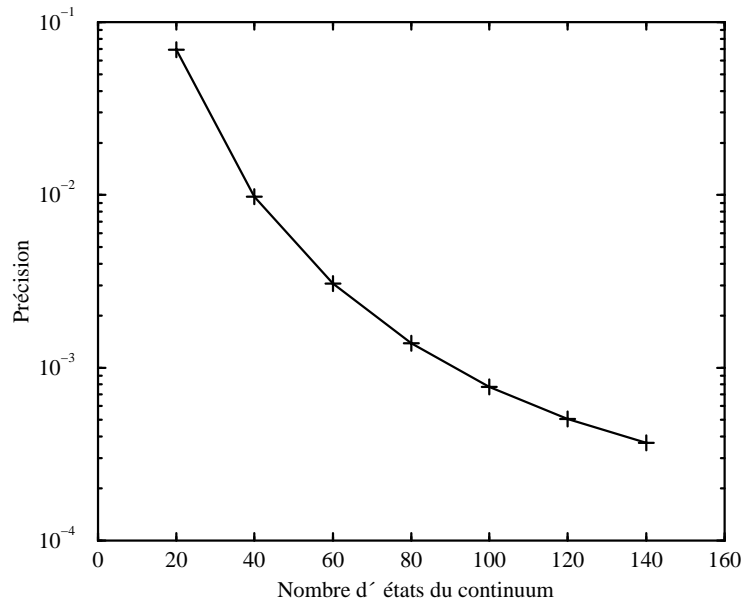


FIG. 3.7 – Précision moyenne  $(1/N) \sum_i |u(r_i) - u_0(r_i)|$ , où  $u_0$  est l'onde calculée par intégration directe et  $u$  l'onde calculée par diagonalisation, en fonction du nombre d'états du continuum.  $r_i$  varie de 0 à 15 fm.

### 3.3 Relation de complétude à $N$ corps

En modèle en couches standard, la relation de complétude à  $N$  corps se fait à l'aide de déterminants de Slater formés des états liés de la base de l'oscillateur harmonique (voir section 2.1), en partant de leur relation de complétude à un corps :

$$\sum_n |\phi_n^{OH}\rangle \langle \phi_n^{OH}| = \mathbb{1} , \quad (3.37)$$

où les  $|\phi_n^{OH}\rangle$  sont les états à un corps de l'oscillateur harmonique. Aussi, la relation de complétude discrétisée (3.35) est formellement identique à une relation de complétude discrète à un corps, comme celle de la base de l'oscillateur harmonique (3.37). Par conséquent, on peut former à partir de la relation (3.35) une relation de complétude à  $N$  corps en construisant des déterminants de Slater avec les états à un corps liés, résonnants et de diffusion, de tout  $l, j, m$  et  $t_z$ . Ainsi :

$$\sum_n |DS_n\rangle \langle \widetilde{DS}_n| \simeq \mathbb{1} , \quad (3.38)$$

où les déterminants de Slater  $|DS_n\rangle$  sont de la forme  $|\phi_1^G \dots \phi_N^G\rangle$ , où les  $|\phi_k^G\rangle$  sont des états liés, résonnants ou de diffusion de Gamow.

## 3.4 Recherche des états liés et résonnants

### 3.4.1 Méthode pour trouver les états liés et résonnants

En modèle en couches usuel, on utilise la méthode de Lanczos [Wil65], qui permet de trouver les vecteurs propres de valeur propre extrémale, c'est-à-dire les états nucléaires les plus liés, donc ceux qu'on veut étudier. Cependant, on ne peut plus utiliser cette méthode pour la recherche des états propres dans le formalisme de Gamow, car ceux-ci se trouvent au milieu d'états nucléaires de diffusion. Si on utilisait la méthode de Lanczos, on obtiendrait les états de diffusion de plus basse énergie avant les résonances, et on ne pourrait pas faire la différence entre les deux. Par conséquent, on doit procéder en deux étapes [Mic02b]:

- On diagonalise d'abord l'hamiltonien dans l'espace restreint aux états de base liés et résonnants. Ici, la méthode de Lanczos s'applique car on n'a aucun état de diffusion dans la base. La diagonalisation donne alors les vecteurs propres résonnants d'ordre zéro  $|\Psi_0\rangle$  ;
- Pour chaque vecteur  $|\Psi_0\rangle$  donné par la méthode Lanczos de la première étape, on construit un sous-espace de Lanczos généré par  $|\Psi_0\rangle$ , mais cette fois-ci dans l'espace des états liés, résonnants et de diffusion. On diagonalise l'hamiltonien dans ce sous-espace, et on cherche le vecteur propre  $|\Phi\rangle$  dont le recouvrement avec  $|\Psi_0\rangle$  est maximal. Cet état est l'état lié ou résonnant recherché.

Ceci est une généralisation aux matrices symétriques complexes de la méthode de Davidson [Dav75], originellement proposée pour les matrices hermitiques.

### 3.4.2 Exemples de détermination d'états résonnants

Une méthode pour trouver les états résonnants parmi les divers états issus de la diagonalisation de l'hamiltonien a été proposée au chapitre (3.4.1). On va montrer que cette méthode est à la fois obligatoire et efficace pour trouver les résonances.

On considère les noyaux  $^{18}\text{O}$  et  $^{20}\text{O}$  avec un coeur de  $^{16}\text{O}$ , soit avec deux et quatre particules de valence. L'hamiltonien utilisé est celui du paragraphe (3.4.3). Le continuum pris en compte est celui de  $d_{3/2}$ . Il est discrétisé avec 17 points pour  $^{18}\text{O}$  et avec 9 points pour  $^{20}\text{O}$ , afin que le nombre d'états du continuum non résonnant ne soit pas trop grand, de sorte qu'une diagonalisation totale, nécessaire pour cette étude, soit possible. De plus, on n'accepte dans l'espace de valence que les déterminants de Slater ayant au plus 5 MeV d'énergie et 1.7 MeV de largeur.

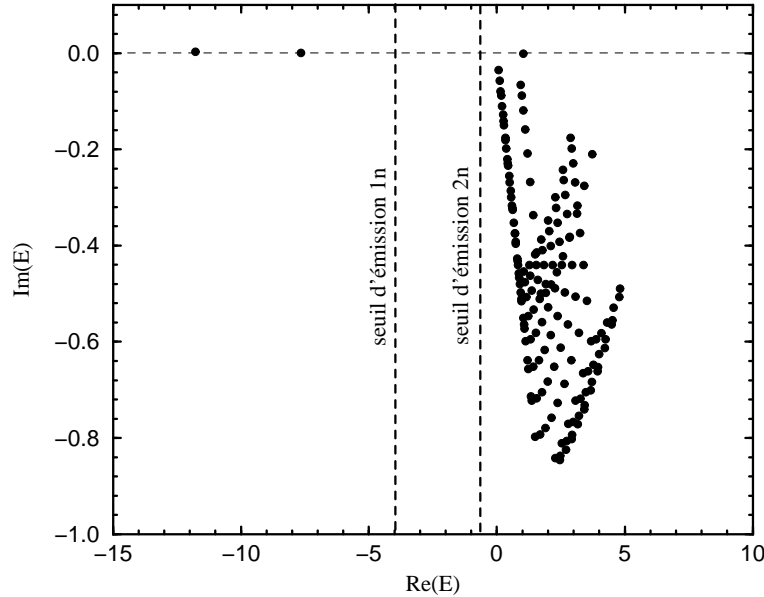


FIG. 3.8 – *Energies complexes de tous les états  $0^+$  de  $^{18}\text{O}$ . Les seuils d'émission de un et deux neutrons sont représentés.*

Sur la figure (3.8) donnant les énergies des états  $0^+$  de  $^{18}\text{O}$ , on voit les deux états liés, d'énergie négative et de largeur nulle, ainsi que la résonance, qui est le troisième point presque sur la droite  $\text{Im}(E) = 0$ . Dans ce cas, il est facile de repérer les états liés et résonnants, mais seul leur recouvrement avec les états calculés sans continuum peut l'assurer.

Sur la figure (3.9) donnant les énergies des états  $0^+$  de  $^{20}\text{O}$ , on voit les deux états liés, mais après il est strictement impossible de séparer les résonances du continuum en regardant simplement leurs énergies. Le recouvrement des états avec leur homologues calculés sans continuum est voisin de 1, et c'est uniquement ce qui permet de les localiser.

Avec le même hamiltonien que précédemment, on a calculé le recouvrement du fondamental de  $^{18}\text{O}$  calculé sans continuum avec tous les états  $0^+$  calculés avec le continuum sur la figure 3.10. Il est clair qu'un état se détache nettement des autres, car le module de son recouvrement avec l'état issu de l'approximation sans continuum est proche de 1. Tous les autres états ont le module de leur recouvrement avec cet état plus petit de 0.1, ce qui implique qu'ils forment le continuum non résonnant et les autres résonances.

On considère maintenant le noyau  $^6\text{He}$  avec un coeur de  $^4\text{He}$ . L'hamiltonien utilisé est celui du paragraphe (3.4.3). Ici, il existe quelques états qui ont un recouvrement non négligeable avec le fondamental de  $^6\text{He}$  calculé sans continuum. Cependant, il n'y en a qu'un seul qui a le module de son recouvrement avec celui-ci très proche de 1 ( $\sim 1.08$ ),



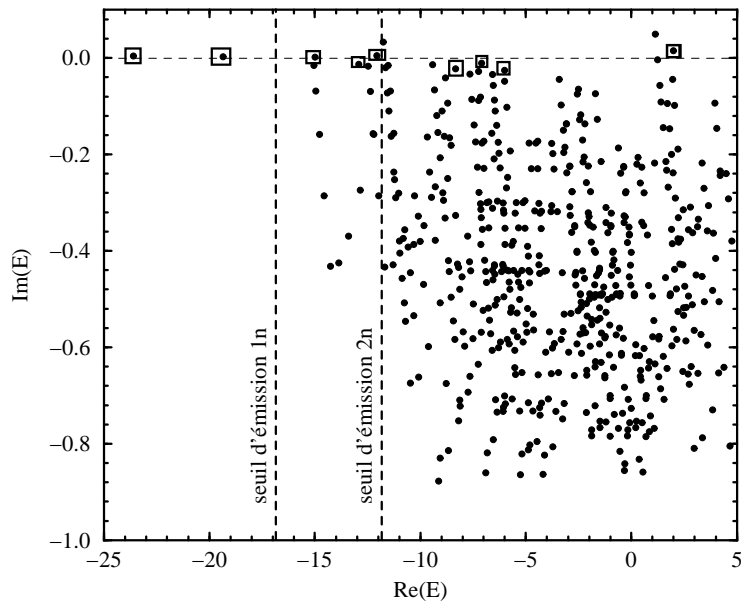


FIG. 3.9 – *Energies complexes de tous les états  $0^+$  de  $^{20}\text{O}$ . Les seuils d'émission de un et deux neutrons sont représentés. Les états liés et résonnants sont entourés par un rectangle.*

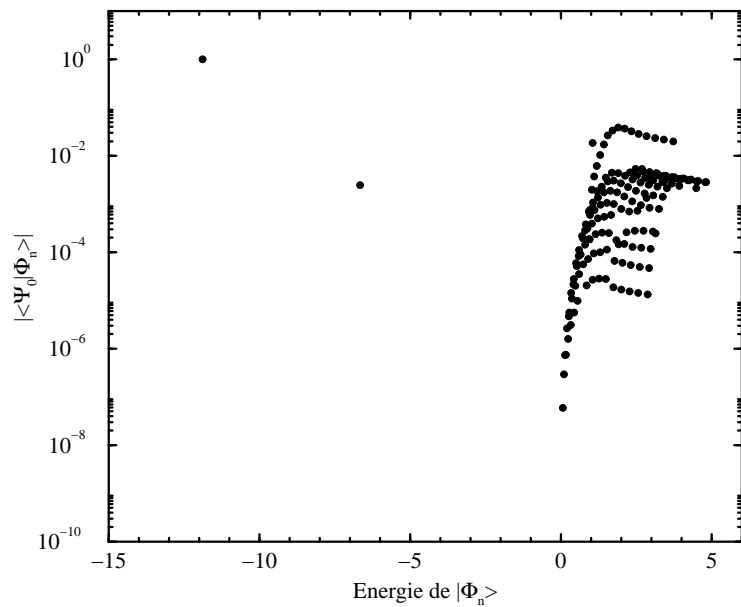


FIG. 3.10 – *Module des recouvrement entre le fondamental de  $^{18}\text{O}$  calculé sans continuum, noté  $\Psi_0$ , et les états propres  $0^+$  calculés avec le continuum  $d_{3/2}$ , notés  $\Phi_n$ , en fonction de leur énergie.*

tous les autres ayant le module de leur recouvrement plus petits que 0.88 (voir figure (3.11)). Par conséquent, même si dans ce cas la situation est plus complexe, et c'est normal car le continuum joue un rôle crucial pour  ${}^6\text{He}$ , il est possible de déterminer sans ambiguïté l'état recherché.

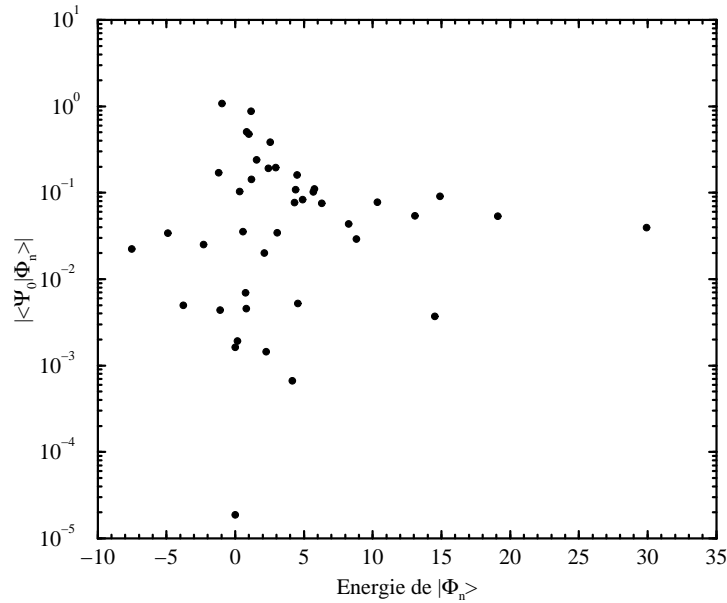


FIG. 3.11 – *Module des recouvrement entre le fondamental de  ${}^6\text{He}$  calculé sans continuum, noté  $\Psi_0$ , et les états propres  $0^+$  calculés avec les continuums  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$ , notés  $\Phi_n$ , en fonction de leur énergie.*

### 3.4.3 Illustrations de la relation de complétude à deux corps

Etant donné que le nombre d'états nécessaires pour atteindre la complétude explose avec le nombre de particules de valences, il n'est pas possible d'obtenir pour l'instant des vecteurs propres de noyaux de plusieurs particules de valence avec une base complète. Néanmoins, c'est encore possible avec deux particules de valence. Aussi, il est intéressant de voir le comportement de la fonction d'onde quand le nombre d'états de base augmente de plus en plus, car cela permet de voir si l'effet de la troncation effectuée sur l'espace de valence est important ou non. De plus, on utilise une interaction résiduelle SDI, de portée nulle dans l'espace des coordonnées donc de portée infinie dans l'espace des  $k$ . Par conséquent, il faut établir un cut-off dans l'espace des énergies. On choisit alors d'avoir dans les espaces utilisés uniquement les déterminants de Slater dont les énergies ne dépassent pas 35 MeV. Cette valeur est similaire avec celle utilisée dans [Ber92b].

On va considérer la convergence de l'état fondamental  $0_1^+$  de  ${}^{18}\text{O}$  quand la taille de l'espace augmente. Pour cela, on prendra deux neutrons de valence hors d'un coeur inerte de  ${}^{16}\text{O}$  avec une interaction SDI avec une constante de couplage de  $700 \text{ MeV fm}^3$ . Dans l'espace considéré, on a alors les états liés  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et résonnant  $0d_{3/2}$  donnés par un potentiel de  ${}^{16}\text{O}$ . Les paramètres de ce potentiel sont (les notations sont celles de (2.11)):

- diffusivité  $d$ : 0.65 fm;
- potentiel spin-orbite  $V_{so}$ : 6.06 MeV;

- rayon  $R_0$  : 3.05 fm;
- $2\mu/\hbar^2 = 0.0453975 \text{ MeV}^{-1} \text{ fm}^{-2}$ ;
- potentiel central  $V_0$  : 55.8 MeV.

Le choix de l'hamiltonien est ici sans grande importance, vu qu'on s'intéresse à l'aspect mathématique du développement par états de Gamow, et son importance physique sera discutée au chapitre (3.5), où sera traitée une partie de la chaîne d'isotopes d'oxygènes. L'espace sera alors complété en ajoutant successivement les continus non résonnants  $s_{1/2}$ ,  $p_{1/2}$ ,  $p_{3/2}$ , ... dans l'ordre décroissant d'importance jusqu'à convergence, soit quand l'ajout d'un continuum ne change plus les résultats.

Etant donné que seul  $0d_{3/2}$  est résonnant, seul le continuum associé à  $0d_{3/2}$  doit être complexe. Il est constitué de trois segments de droite reliés par les points  $k_0 = 0.0 + i0.0$ ,  $k_1 = 0.3 - i0.2$ ,  $k_2 = 0.5$  et  $k_3 = 1.3$ . Tous les autres continus sont réels et sont constitués du segment de l'espace des  $k$   $[0:1.3]$ . La discrétisation du continuum se fait avec 10 points par continuum.

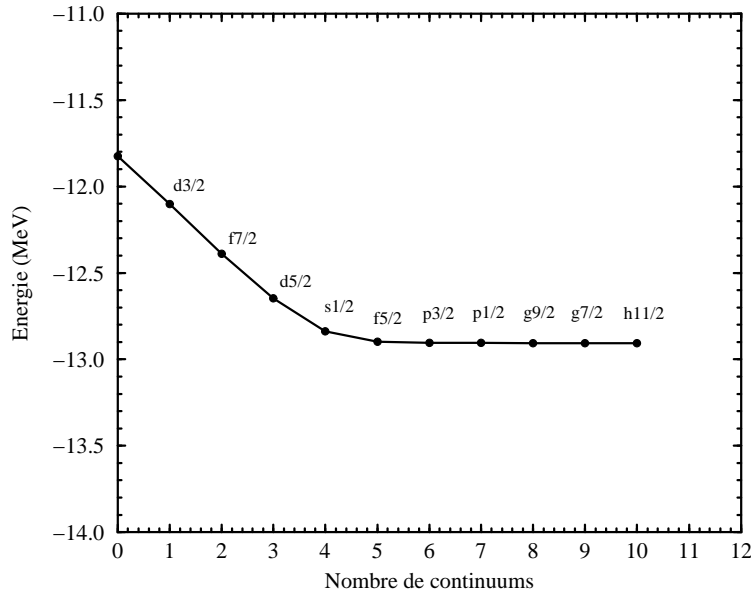


FIG. 3.12 – *Énergie du fondamental de  $^{18}\text{O}$  en fonction du nombre de continuum utilisés dans l'espace de valence. Les nombres quantiques du continuum ajouté sont notés au dessus de chaque valeur obtenue.*

On peut voir sur la figure (3.12) que la convergence est atteinte avec  $f_{5/2}$ , et que toutes les ondes de diffusion avec un  $l > 3$  sont négligeables, ainsi que les ondes avec  $l = 1$ . Notons que le continuum  $d_{3/2}$  change non seulement la partie réelle de l'énergie du fondamental, mais aussi sa partie imaginaire : l'énergie du fondamental a une «fausse» largeur de  $\sim -130 \text{ keV}$  sans ce continuum, tandis qu'elle tombe à  $\sim -2 \text{ keV}$  avec. Cette «fausse» largeur reste stable avec l'ajout des autres continus, dont l'action est réelle uniquement.

Aussi, et c'est le plus important, les continus qui apportent le plus d'énergie de liaison sont ceux qui ont une résonance ou un état lié associé relativement proches du seuil de 0 MeV. C'est en effet le cas pour  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$ , mais aussi pour  $0f_{7/2}$ , qui a une énergie de 7.434 MeV et une largeur de 3.043 MeV. Bien qu'absente, cette résonance agit par l'intermédiaire de son continuum  $f_{7/2}$ , qui en subit l'influence. C'est

aussi le cas pour  $0f_{5/2}$ , qui a une énergie de 11.912 MeV et une largeur de 12.466 MeV, mais dans une moindre mesure. Aussi, ces deux résonances agissent sur l'énergie de liaison car les déterminants de Slater résonnants  $0f_{7/2}^2$  et  $0f_{5/2}^2$  ont une énergie plus petite que 35 MeV et donc peuvent agir à travers les continums  $f_{7/2}$  et  $f_{5/2}$ . Ce n'est pas le cas pour  $0g_{9/2}$ , par exemple, car son énergie est de 19.002 MeV.

La structure de la fonction d'onde obtenue à la complétude est donnée dans le tableau (3.1). On y voit que la configuration avec deux neutrons dans  $0d_{5/2}$  est dominant, et que les autres configurations sont du même ordre de grandeur, de 3-4 % , mais dont la somme vaut  $\sim 15$  % de la fonction d'onde. Le continuum est non négligeable, et les configurations avec deux particules dans le continuum sont du même ordre de grandeur que celles avec une particule dans le continuum. On voit aussi que la partie imaginaire des composantes est faible devant leur partie réelle. Cela est due au fait que la résonance  $0d_{3/2}$  a une largeur de 97 keV, très inférieure à son énergie de 0.898 MeV.

TAB. 3.1 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^{18}\text{O}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ , et prennent en compte tous les continums de  $s_{1/2}$  à  $h_{11/2}$ .

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^2$	$0.872+i1.146\cdot 10^{-4}$
$1s_{1/2}^2$	$0.0436-i5.972\cdot 10^{-6}$
$0d_{3/2}^2$	$0.0275-i6.624\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(1)}$	$0.0419+i4.709\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$0.0154+i1.795\cdot 10^{-3}$

On va voir à présent la convergence de l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^6\text{He}$  . Le choix de cet état vient du fait qu'il est peu lié, il se trouve environ à 1 MeV du seuil d'émission de dineutron. Ainsi, on prendra aussi deux neutrons de valence hors d'un coeur inerte de  $^4\text{He}$  avec une interaction SDI avec une constante de couplage de  $1670 \text{ MeV fm}^3$ . Dans l'espace considéré, on a alors les états résonnants  $0p_{3/2}$  et  $0p_{1/2}$  donnés par un potentiel de  $^4\text{He}$ . Les paramètres de ce potentiel sont (les notations sont celles de (2.11)):

- diffusivité  $d$ : 0.65 fm;
- potentiel spin-orbite  $V_{so}$ : 7.5 MeV;
- rayon  $R_0$ : 2 fm;
- $2\mu/\hbar^2 = 0.0385408 \text{ MeV}^{-1} \text{ fm}^{-2}$ ;
- potentiel central  $V_0$ : 47 MeV.

Pour la même raison que dans le paragraphe (3.4.3), ce choix d'hamiltonien sera expliqué au chapitre (3.6), où sera traitée une partie de la chaîne d'isotopes d'hélium. Maintenant, on a deux résonances dans la base, donc les continums  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$  doivent être complexes. On choisit pour le continuum  $p_{3/2}$  trois segments de droite reliés par les points  $k_0 = 0.0 + i0.0$ ,  $k_1 = 0.3 - i0.35$ ,  $k_2 = 0.5$  et  $k_3 = 0.7$ . Pour le continuum  $p_{1/2}$ , on prend trois segments de droite reliés par les points  $k_0 = 0.0 + i0.0$ ,  $k_1 = 0.4 - i0.5$ ,  $k_2 = 0.5$  et  $k_3 = 0.7$ . Les autres continums sont réels et pour eux on prend le segment  $[0:0.7]$ . Pour la discrétisation, on prend 20 points pour  $p_{3/2}$ , et 10 points pour tous les autres.

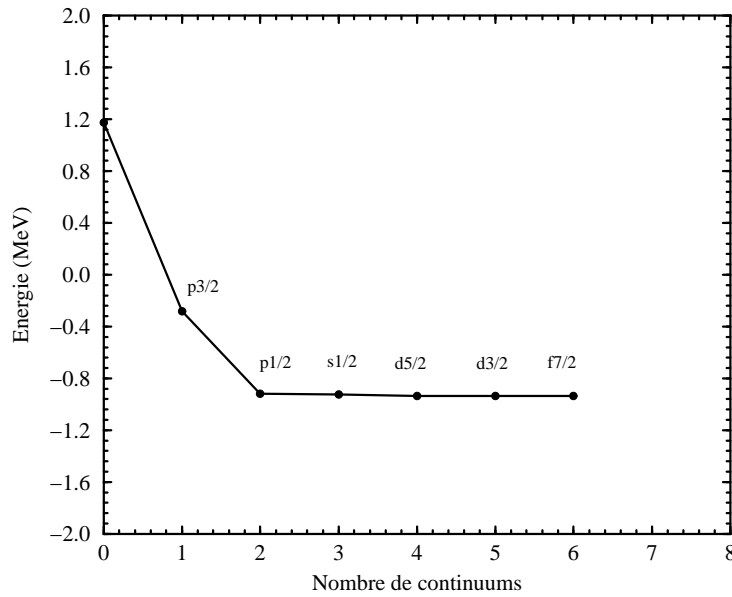


FIG. 3.13 – Energie du fondamental de  ${}^6\text{He}$  en fonction du nombre de continuum utilisés dans l'espace de valence. Les nombres quantiques du continuum ajouté sont notées au dessus de chaque valeur obtenue.

On peut voir sur la figure (3.13) que la convergence est atteinte avec  $p_{1/2}$ , et que toutes les ondes de diffusion avec un  $l > 1$  sont négligeables. Dans ce cas, les continums  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$  changent non seulement la partie réelle de l'énergie du fondamental, mais aussi sa partie imaginaire: l'énergie du fondamental a une «fausse» largeur de  $\sim -2$  MeV sans continums, une «fausse» largeur de  $\sim -650$  keV avec seulement  $p_{3/2}$ , et on atteint  $\sim 10$  keV avec  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$ . Aussi, contrairement au cas de  ${}^{18}\text{O}$ , l'approximation sans continuum ne donne même pas une approximation grossière de l'état en question: le continuum non résonnant ici est absolument déterminant pour décrire l'état. La raison en est qu'on veut décrire un état lié à partir d'une base n'en contenant aucun: c'est la même situation que le cas à un corps du paragraphe (3.2.2). Par conséquent, le continuum est nécessaire pour compenser les parties imaginaires données par les résonances de la base.

La structure de la fonction d'onde obtenue à la complétude est donnée dans le tableau (3.2). On y voit que la configuration avec deux neutrons dans  $0p_{3/2}$  est dominante, avec cependant une partie imaginaire presque égale en valeur absolue à sa partie réelle. La configuration avec deux neutrons dans  $0p_{1/2}$  est mineure, tandis que la somme des configurations avec une particule dans le continuum est de même importance que celle avec deux neutrons dans  $0p_{3/2}$ . Les configurations avec deux particules dans le continuum sont elles aussi très importantes.

### 3.5 Etude de la chaîne d'isotopes d'oxygènes de ${}^{18}\text{O}$ à ${}^{22}\text{O}$

Afin d'introduire le modèle en couches avec états de Gamow avec plusieurs particules de valence, on a choisi d'étudier la chaîne d'isotopes d'oxygènes de  ${}^{18}\text{O}$  à  ${}^{22}\text{O}$  [Mic03]. On prendra un coeur inerte de  ${}^{16}\text{O}$  et les particules de valence seront toutes des neutrons.

TAB. 3.2 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ , et prennent en compte tous les continuums de  $s_{1/2}$  à  $f_{7/2}$ .

Configuration	$c^2$
$0p_{3/2}^2$	0.891-i0.811
$0p_{1/2}^2$	$4.120 \cdot 10^{-3}$ -i0.0793
$L_+^{(1)}$	0.255+i0.861
$L_+^{(2)}$	-0.150+i0.0286

Aussi, l'interaction entre nucléons est une interaction SDI.

L'action du coeur inerte de  ${}^{16}\text{O}$  est donnée par le potentiel Woods-Saxon du paragraphe (3.4.3). Ce potentiel est obtenu en ajustant les états  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$  avec les énergies des états correspondants  $5/2_1^+$ ,  $1/2_1^+$  et  $3/2_1^+$  de  ${}^{17}\text{O}$ . On a alors :

- $e_{0d_{5/2}} = -4.142$  MeV;
- $e_{1s_{1/2}} = -3.272$  MeV;
- $e_{0d_{3/2}} = 0.898$  MeV,  $\gamma_{0d_{3/2}} = 97$  keV.

L'accord avec l'expérience est excellent :

- $e_{5/2_1^+}^{exp} = -4.143$  MeV;
- $e_{1/2_1^+}^{exp} = -3.273$  MeV;
- $e_{3/2_1^+}^{exp} = 0.942$  MeV,  $\gamma_{3/2_1^+} = 96$  keV.

On prend pour espace les états liés  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$ , l'état résonnant  $0d_{3/2}$  et un continuum  $d_{3/2}$ . Le continuum  $0d_{3/2}$  est constitué de deux segments reliés par les points  $k_1 = 0 + i0$ ,  $k_2 = 0.2 - i0.05$ , et  $k_3 = 0.4 - i0.0$ . Il est discrétisé avec 10 points. Tous les autres continuums agissent uniquement sur la partie réelle des énergies. Par conséquent, en première approximation, l'inclusion de ces continuums devrait seulement induire une renormalisation de l'interaction résiduelle, et sont donc ignorés dans cette étude. La force de l'interaction SDI avec une constante de couplage de  $700 \text{ MeV fm}^3$  (voir paragraphe (3.4.3)), est choisie de sorte qu'avec l'espace précédent l'énergie du fondamental de  ${}^{18}\text{O}$  reproduise l'énergie expérimentale.

Rappelons qu'on a introduit une troncation de l'espace de modèle en couches : seuls les déterminants de Slater ayant au plus 5 MeV d'énergie et 1.7 MeV de largeur font partie de l'espace de valence (voir paragraphe (3.4.2)). De plus, on n'accepte que les déterminants de Slater ayant 2 états neutrons au plus dans le continuum non résonnant. Les calculs ont en effet montrés que la contribution des autres déterminants de Slater est négligeable pour tous les isotopes d'oxygènes étudiés ( $< 0.01$  % de la fonction d'onde).

Sur les figures (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17), on montre les spectres respectifs de  ${}^{18}\text{O}$ ,  ${}^{19}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{O}$  et  ${}^{21}\text{O}$ .  ${}^{22}\text{O}$  n'est représenté ici car on ne connaît de ce noyau que l'état fondamental. Etant donné la rudesse de l'hamiltonien, il n'était pas prévu de reproduire exactement les données expérimentales, mais de montrer si le modèle pouvait donner les caractéristiques principales de ces noyaux.

On peut en effet voir pour le spectre de  ${}^{18}\text{O}$  sur la figure (3.14) que seuls les trois premiers états  $0_1^+$ ,  $2_1^+$  et  $4_1^+$  sont relativement bien décrits. Cependant, le seuil d'émission de neutron est bien reproduit : celui-ci est calculé par la différence entre les énergies de liaison des états fondamentaux  ${}^{17}\text{O}$  et  ${}^{18}\text{O}$ . De plus, tous les états au dessus de ce seuil,

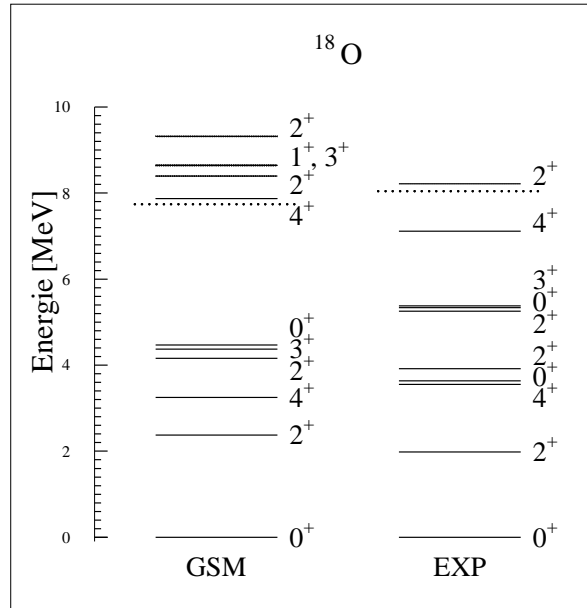


FIG. 3.14 – Premiers états du spectre de  $^{18}\text{O}$  calculés avec une interaction SDI et deux neutrons de valence dans la couche  $sd$  et un continuum  $d_{3/2}$  discrétisé avec 10 points. Les lignes en tirets montrent les seuils d'émission de neutron calculés dans GSM et expérimentaux. Dans GSM, le seuil d'émission de neutron est calculé avec la différence des énergies de liaison des états fondamentaux de  $^{17}\text{O}$  et  $^{18}\text{O}$ .

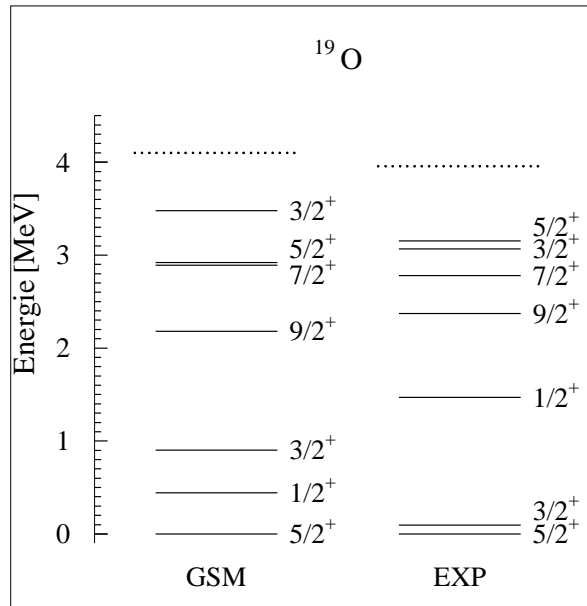


FIG. 3.15 – Premiers états du spectre de  $^{19}\text{O}$  calculés avec une interaction SDI et trois neutrons de valence dans la couche  $sd$  et un continuum  $d_{3/2}$  discrétisé avec 10 points. Les lignes en tirets montrent les seuils d'émission de neutron calculés dans GSM et expérimentaux. Dans GSM, le seuil d'émission de neutron est calculé avec la différence des énergies de liaison des états fondamentaux de  $^{18}\text{O}$  et  $^{19}\text{O}$ .

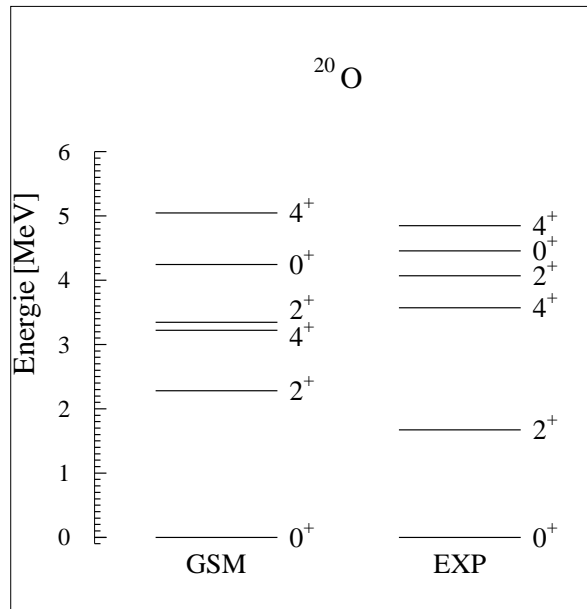


FIG. 3.16 – Premiers états du spectre de  $^{20}\text{O}$  calculés avec une interaction SDI et quatre neutrons de valence dans la couche sd et un continuum  $d_{3/2}$  discrétisé avec 10 points. Le seuil d'émission de neutron est trop haut pour être vu sur la figure.

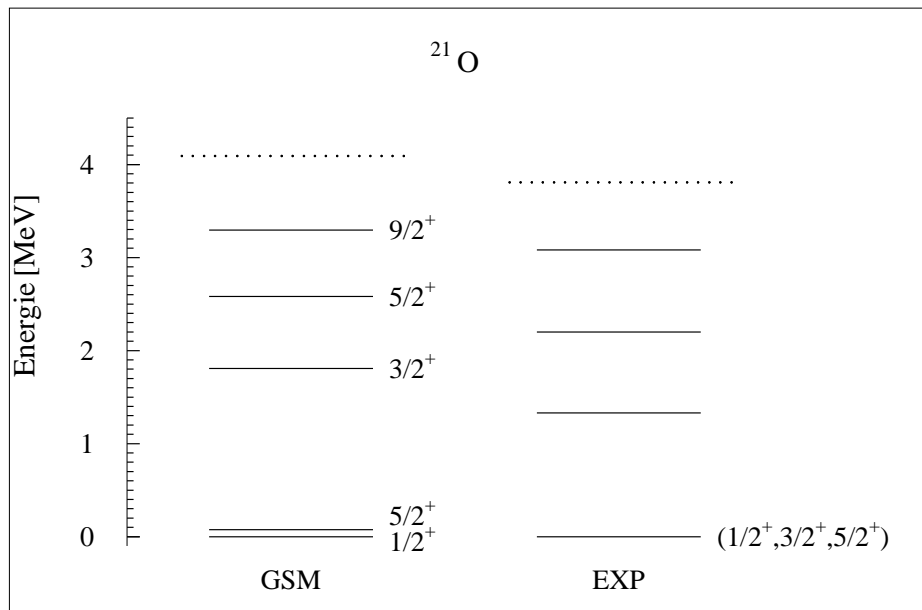


FIG. 3.17 – Premiers états du spectre de  $^{21}\text{O}$  calculés avec une interaction SDI et cinq neutrons de valence dans la couche sd et un continuum  $d_{3/2}$  discrétisé avec 10 points. Les lignes en tirets montrent les seuils d'émission de neutron calculés dans GSM et expérimentaux. Dans GSM, le seuil d'émission de neutron est calculé avec la différence des énergies de liaison des états fondamentaux de  $^{20}\text{O}$  et  $^{21}\text{O}$ .



TAB. 3.3 – Dépendance des énergies (à gauche, en MeV) et largeurs (à droite, en keV) des états calculés de  $^{18}\text{O}$  en fonction du nombre d'états de diffusion discrétisés de  $L_+$ . Le contour  $L_+$  utilisé est celui de la section 3.4.3.

$J^\pi$	0 états	10 états	30 états	50 états
Etats liés				
$0_1^+$	-11.825,-136.171	-12.102,-1.904	-12.107,0.0936	-12.107,0.0206
$2_1^+$	-9.494,-43.078	-9.558,-0.509	-9.559,0.113	-9.559,0.0932
$4_1^+$	-8.631,-14.308	-8.648,-0.221	-8.649,8.180 $\cdot 10^{-3}$	-8.649,2.076 $\cdot 10^{-3}$
$0_2^+$	-6.649,-2.033	-6.653,-5.75 $\cdot 10^{-4}$	-6.653,0.0320	-6.653,0.0310
$2_2^+$	-7.724,-3.900	-7.729,-0.022	-7.729,0.0382	-7.729,0.0365
Etats résonnants				
$4_2^+$	-4.0112,-94.154	-4.050,-7.784	-4.052,0.409	-4.052,0.380
$2_3^+$	-3.489,18.687	-3.504,38.279	-3.504,40.128	-3.504,40.120
$2_4^+$	-2.569,58.974	-2.575,71.864	-2.575,72.762	-2.575,72.760
$0_3^+$	1.076,-168.57	0.978,-14.480	0.972,1.857	0.972,1.799
$2_5^+$	1.640,118.418	1.642,117.947	1.639,126.864	1.637,128.801

et seulement eux, ont une largeur positive. Il faut bien voir que ce fait n'est pas inclus explicitement dans le formalisme : le seuil, contrairement à CSM et SMEC, n'est jamais ici considéré dans la méthode pour déterminer si un état est lié ou résonnant. Il faut donc considérer ceci comme une preuve a posteriori de la cohérence du modèle.

Aussi, vu que le continuum est discrétisé, il est impossible que les états très faiblement résonnants ou liés aient respectivement une largeur infime ou strictement nulle. Par conséquent, ils ont une «fausse» largeur, négative sans continuum, qui diminue quand le nombre d'états du continuum non résonnant  $d_{3/2}$  augmente (voir tableau (3.3)). Avec 10 états pris en compte pour la discrétisation, cette «fausse» largeur vaut à peu près -5 keV pour tous les états liés, ce qui est une précision tout à fait raisonnable.

Le spectre de  $^{19}\text{O}$ , donné par la figure (3.15) ne donne aussi que les traits grossiers du spectre. L'état fondamental est bien un  $5/2_1^+$ , mais les deux états suivants  $3/2_1^+$  et  $1/2_1^+$  sont inversés, et la différence entre l'énergie expérimentale et l'énergie calculée vaut presque 1 MeV en valeur absolue pour ces deux états. Néanmoins, les quatre états suivants sont assez bien reproduits, malgré une inversion des deux états  $5/2_2^+$  et  $3/2_2^+$ .

Le spectre de  $^{20}\text{O}$ , donné par la figure (3.16), est de meilleure qualité que les précédents, même si la précision est de l'ordre de 500 keV. Les premiers états sont en effet tous dans l'ordre, mais ceci doit être considéré comme un heureux hasard.

Quand au dernier spectre, celui de  $^{21}\text{O}$ , donné par la figure (3.17), il est difficile de dire s'il reproduit bien ou mal les données car les  $J^\pi$  des états excités sont inconnus. Néanmoins, on sait que l'état fondamental est soit un  $1/2^+$ , un  $3/2^+$  ou un  $5/2^+$ , et le calcul donne deux états  $1/2_1^+$  et  $5/2_1^+$  quasi dégénérés (le premier est plus lié que le second de seulement  $\sim 60$  keV).

Sur les figures (3.18), (3.19), on a représenté respectivement les énergies de séparation à un et deux neutrons. Les énergies de séparation à un neutron sont plutôt bien reproduites (voir figure (3.18)) : l'erreur sur l'énergie ne dépasse pas 550 keV. On peut en effet constater avec les structures des fonctions d'ondes données dans les tableaux (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9), que celles-ci ont toujours une configuration très dominante, faisant à elle seule 80 - 95 % de la fonction d'onde. De plus, le potentiel

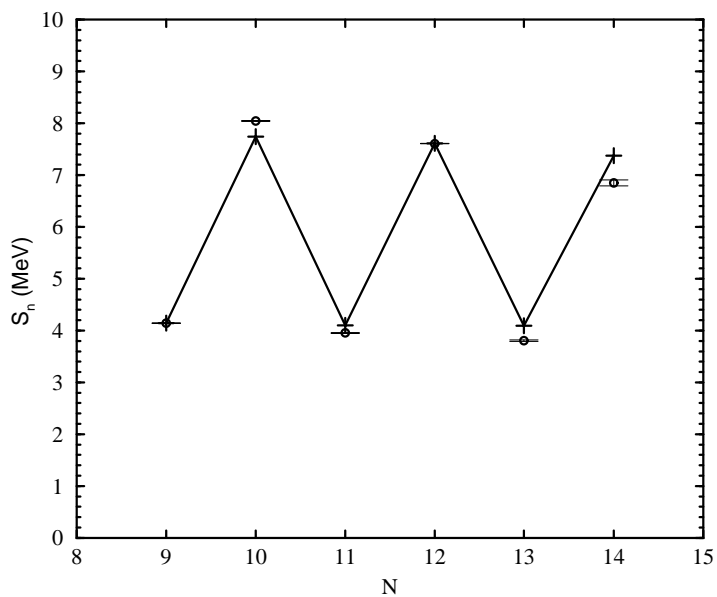


FIG. 3.18 – *Energies de séparation d'un neutron pour différents isotopes d'oxygènes. Les plus reliés par un trait plein donnent les valeurs calculées et les cercles donnent les valeurs expérimentales avec les barres d'erreurs.*

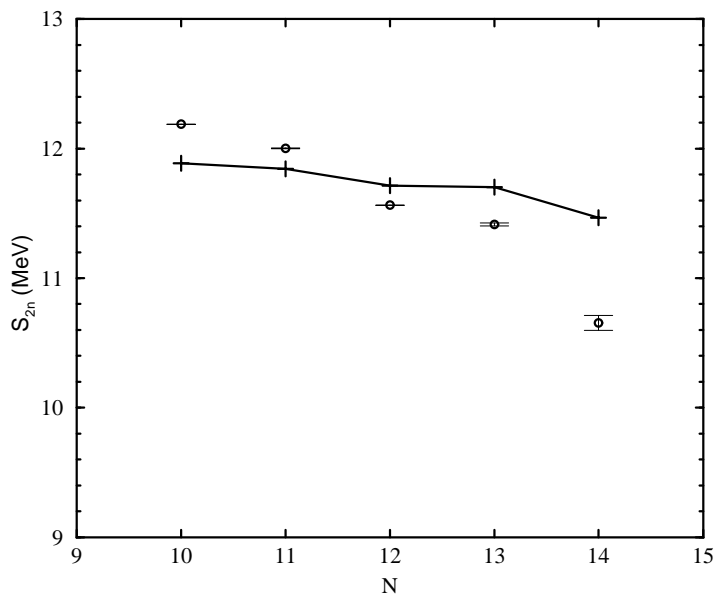


FIG. 3.19 – *Energies de séparation de deux neutron pour différents isotopes d'oxygènes. Les plus reliés par un trait plein et les plus donnent les valeurs calculées et les cercles donnent les valeurs expérimentales avec les barres d'erreurs.*

Woods-Saxon du coeur de  $^{16}\text{O}$ , donné au paragraphe (3.4.3), donne une différence de  $\sim 10.5$  MeV entre les états  $0p_{1/2}$  et  $0d_{5/2}$ , impliquant que l'approximation de coeur inerte de  $^{16}\text{O}$ , en particulier pour ce potentiel, est amplement justifiée. Cela signifie que l'espace utilisé est suffisant pour décrire assez bien les énergies des états fondamentaux considérés. On peut aussi comparer les deux tableaux (3.1) et (3.4), car ils donnent les structures du même état  $0_1^+$  de  $^{18}\text{O}$ , mais dans le premier tableau donne la structure de l'état quand on a atteint la complétude. On y voit que celui-ci, comme on s'y attend, a un mélange de configurations plus prononcé, car toutes les configurations autres que la principale ont un poids plus important que celles du tableau (3.4), et c'est l'inverse pour la configuration principale. De plus, le continuum est plus important de un ordre de magnitude pour les configurations à un neutron dans le continuum, et de deux ordres de magnitude pour les configurations à deux neutrons dans le continuum. Néanmoins, les structures sont qualitativement similaires et l'approximation consistant à négliger tous les continus sauf  $d_{3/2}$  est raisonnable.

On notera aussi que les continus non résonnants à un état neutron dans le continuum non résonnants forment entre 0.1 et 1 % de la fonction d'onde, tandis que ceux avec deux particules forment entre 0.01 et 0.1 % de la fonction d'onde. Cela montre que le continuum non résonnant ici a presque pour unique rôle de compenser la «fausse» largeur induite par la présence de la résonance  $0d_{3/2}$  dans l'espace, son action sur la partie réelle étant de l'ordre du millièrme. Bien que ne représentant qu'une faible fraction de la fonction d'onde, ils sont néanmoins nécessaires pour que la «fausse» largeur atteigne  $\sim -5$  keV, tandis que sans continuum elle vaut entre -100 et -300 keV, et avec seulement le continuum avec un seul état neutron du continuum non résonnant elle vaut entre -20 et -40 keV. Comme dit précédemment, l'ajout des continus à plus de deux états neutrons dans le continuum n'améliore plus les résultats.

TAB. 3.4 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^{18}\text{O}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ .

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^2$	$0.935+i1.836\cdot 10^{-4}$
$1s_{1/2}^2$	$0.0403-i1.560\cdot 10^{-5}$
$0d_{3/2}^2$	$0.0207-i4.973\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(1)}$	$3.913\cdot 10^{-3}+i4.411\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$-1.002\cdot 10^{-4}+i3.939\cdot 10^{-4}$

Les énergies de séparation à deux neutrons sont en revanche un peu moins bonnes (voir figure (3.19)), le  $S_{2n}$  de  $^{22}\text{O}$  n'étant donné qu'à  $\sim 800$  keV près. On voit sur cette figure que les  $S_{2n}$ , sous-estimés pour  $^{18}\text{O}$  et  $^{19}\text{O}$  de  $\sim 200$  et  $100$  keV, sont ensuite surestimés de respectivement  $\sim 150$ ,  $300$  et  $800$  keV pour  $^{20}\text{O}$ ,  $^{21}\text{O}$  et  $^{22}\text{O}$ .

Les tableaux (3.10), (3.11) et (3.12) montrent respectivement les valeurs obtenues des transitions électromagnétiques connues pour  $^{18}\text{O}$ ,  $^{19}\text{O}$  et  $^{20}\text{O}$ , en prenant en compte le continuum  $d_{3/2}$  ou non, comparées aux données expérimentales. On a pris 0.5 comme charge effective du neutron. Les valeurs sont données en unités de Weisskopf (W.u.).

Dans ces tableaux, on voit premièrement que le continuum a un rôle à la fois visible pour la partie réelle et la partie imaginaire des transitions, bien qu'on ait une assez bonne approximation des transitions quand le continuum est absent. La partie

TAB. 3.5 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $5/2_1^+$  de  $^{19}\text{O}$ .  
Pour plus de détails, voir le tableau (3.4).

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^3$	$0.935+i1.325\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2}$	$0.0121+i2.234\cdot 10^{-6}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2}^2$	$0.0280-i1.366\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^2 0d_{3/2}$	$3.449\cdot 10^{-3}-i3.879\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2} 0d_{3/2}$	$2.607\cdot 10^{-3}-i2.966\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2} 0d_{3/2}^2$	$0.0155-i3.720\cdot 10^{-3}$
$1s_{1/2} 0d_{3/2}^2$	$1.112\cdot 10^{-6}-i2.161\cdot 10^{-7}$
$L_+^{(1)}$	$3.328\cdot 10^{-3}+i3.968\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$-4.373\cdot 10^{-5}+i3.159\cdot 10^{-4}$

TAB. 3.6 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^{20}\text{O}$ .  
Pour plus de détails, voir le tableau (3.4).

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^4$	$0.875+i4.423\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2}^2$	$0.0807-i4.095\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^3 0d_{3/2}$	$6.921\cdot 10^{-7}-i2.889\cdot 10^{-8}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2} 0d_{3/2}$	$1.037\cdot 10^{-3}-i1.190\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^2 0d_{3/2}^2$	$0.0345-i8.321\cdot 10^{-3}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2} 0d_{3/2}^2$	$1.459\cdot 10^{-5}-i3.655\cdot 10^{-6}$
$1s_{1/2}^2 0d_{3/2}^2$	$1.801\cdot 10^{-3}-i4.360\cdot 10^{-4}$
$0d_{3/2}^4$	$2.024\cdot 10^{-4}-i1.049\cdot 10^{-4}$
$L_+^{(1)}$	$6.944\cdot 10^{-3}+i7.866\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$-1.068\cdot 10^{-4}+i7.169\cdot 10^{-4}$

TAB. 3.7 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état  $5/2_1^+$  de  $^{21}\text{O}$ . Pour plus de détails, voir le tableau (3.4).

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^5$	$0.880+i2.652\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^4 1s_{1/2}$	$0.0316+i3.061\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^3 1s_{1/2}^2$	$0.0445-i4.234\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^4 0d_{3/2}$	$5.739\cdot 10^{-3}-i6.458\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^3 1s_{1/2} 0d_{3/2}$	$9.615\cdot 10^{-3}-i1.105\cdot 10^{-3}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2}^2 0d_{3/2}$	$3.847\cdot 10^{-4}-i4.380\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^3 0d_{3/2}^2$	$0.0214-i5.162\cdot 10^{-3}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2} 0d_{3/2}^2$	$4.240\cdot 10^{-4}-i1.013\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2}^2 0d_{3/2}^2$	$7.118\cdot 10^{-4}-i1.726\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^2 0d_{3/2}^3$	$1.114\cdot 10^{-4}-i4.060\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2} 0d_{3/2}^3$	$1.615\cdot 10^{-5}-i5.885\cdot 10^{-6}$
$0d_{5/2} 0d_{3/2}^4$	$8.037\cdot 10^{-5}-i4.134\cdot 10^{-5}$
$L_+^{(1)}$	$5.388\cdot 10^{-3}+i6.601\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$-5.741\cdot 10^{-5}+i4.641\cdot 10^{-4}$

TAB. 3.8 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état  $1/2_1^+$  de  $^{21}\text{O}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ .

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^4 1s_{1/2}$	$0.949+i3.147\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^4 0d_{3/2}$	$5.289\cdot 10^{-3}-i5.939\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^3 1s_{1/2} 0d_{3/2}$	$5.801\cdot 10^{-3}-i6.528\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2}^2 0d_{3/2}$	$1.588\cdot 10^{-3}-i1.815\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^3 0d_{3/2}^2$	$1.744\cdot 10^{-3}-i4.146\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2} 0d_{3/2}^2$	$0.0298-i7.201\cdot 10^{-3}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2}^2 0d_{3/2}^2$	$6.684\cdot 10^{-5}-i1.569\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^2 0d_{3/2}^3$	$4.557\cdot 10^{-5}-i1.650\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2} 1s_{1/2} 0d_{3/2}^3$	$9.869\cdot 10^{-5}-i3.587\cdot 10^{-5}$
$1s_{1/2} 0d_{3/2}^4$	$1.401\cdot 10^{-4}-i7.210\cdot 10^{-5}$
$L_+^{(1)}$	$6.959\cdot 10^{-3}+i8.210\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$-7.584\cdot 10^{-5}+i6.588\cdot 10^{-4}$

TAB. 3.9 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^{22}\text{O}$ . Pour plus de détails, voir le tableau (3.4).

Configuration	$c^2$
$0d_{5/2}^6$	$0.829+i6.026\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^4 1s_{1/2}^2$	$0.113-i1.071\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^4 1s_{1/2} 0d_{3/2}$	$6.989\cdot 10^{-3}-i8.075\cdot 10^{-4}$
$0d_{5/2}^3 1s_{1/2}^2 0d_{3/2}$	$1.202\cdot 10^{-4}-i1.355\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^4 0d_{3/2}^2$	$0.03700-i8.921\cdot 10^{-3}$
$0d_{5/2}^3 1s_{1/2} 0d_{3/2}^2$	$1.429\cdot 10^{-4}-i3.398\cdot 10^{-5}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2}^2 0d_{3/2}^2$	$4.500\cdot 10^{-3}-i1.091\cdot 10^{-3}$
$0d_{5/2}^3 0d_{3/2}^3$	$2.328\cdot 10^{-5}-i8.632\cdot 10^{-6}$
$0d_{5/2}^2 1s_{1/2} 0d_{3/2}^3$	$1.354\cdot 10^{-6}-i4.947\cdot 10^{-7}$
$0d_{5/2}^2 0d_{3/2}^4$	$3.936\cdot 10^{-4}-i2.024\cdot 10^{-4}$
$1s_{1/2}^2 0d_{3/2}^4$	$2.449\cdot 10^{-5}-i1.262\cdot 10^{-5}$
$L_+^{(1)}$	$8.543\cdot 10^{-3}+i9.747\cdot 10^{-3}$
$L_+^{(2)}$	$-9.407\cdot 10^{-5}+i8.489\cdot 10^{-4}$

TAB. 3.10 – Probabilités réduites de transitions électromagnétiques de  $^{18}\text{O}$  entre différents états calculés avec GSM avec et sans contour  $d_{3/2}$ .

Transitions	Sans contour (W.u.)	Avec contour (W.u.)	Exp. (W.u.)
$2_1^+ \xrightarrow{E2} 0_1^+$	$2.777-i0.0114$	$2.717-i1.4\cdot 10^{-3}$	3.32
$4_1^+ \xrightarrow{E2} 2_1^+$	$2.006+i7.84\cdot 10^{-3}$	$1.961+i7.5\cdot 10^{-4}$	1.19
$0_2^+ \xrightarrow{E2} 2_1^+$	$1.652-i0.0292$	$1.500+i3.7\cdot 10^{-3}$	17
$2_2^+ \xrightarrow{M1} 2_1^+$	$0.0411-i2.9\cdot 10^{-4}$	$0.0411-i1.1\cdot 10^{-5}$	0.14
$2_2^+ \xrightarrow{E2} 0_1^+$	$0.194+i3.4\cdot 10^{-3}$	$0.185+i2.5\cdot 10^{-4}$	1.3

TAB. 3.11 – Probabilités réduites de transitions électromagnétiques de  $^{19}\text{O}$  entre différents états calculés avec GSM avec et sans contour  $d_{3/2}$ .

Transitions	Sans contour (W.u.)	Avec contour (W.u.)	Exp. (W.u.)
$3/2_1^+ \xrightarrow{M1} 5/2_1^+$	$0.0135-i1.6\cdot 10^{-3}$	$0.0143-i4.1\cdot 10^{-5}$	0.088
$1/2_1^+ \xrightarrow{M1} 3/2_1^+$	$0.0173-i3.17\cdot 10^{-3}$	$0.0186+i7.8\cdot 10^{-5}$	0.0093
$1/2_1^+ \xrightarrow{E2} 5/2_1^+$	$3.07+i0.013$	$3.067-i1.1\cdot 10^{-4}$	0.58
$9/2_1^+ \xrightarrow{E2} 5/2_1^+$	$1.804-i3.7\cdot 10^{-3}$	$1.769+i5.9\cdot 10^{-4}$	<1

TAB. 3.12 – Probabilités réduites de transition électromagnétique de  $^{20}\text{O}$  entre différents états calculés avec GSM avec et sans contour  $d_{3/2}$ .

Transitions	Sans contour (W.u.)	Avec contour (W.u.)	Exp. (W.u.)
$2_1^+ \xrightarrow{E2} 0_1^+$	$2.775-i0.0485$	$2.750-i2.8\cdot 10^{-4}$	1.8

imaginaire des transitions, comme il se doit pour des états liés, diminue avec l'ajout du continuum et doit tendre vers zéro quand le nombre de points du continuum  $d_{3/2}$  tend vers l'infini; elle est divisée par deux ordres de grandeur avec les 10 points du continuum  $d_{3/2}$ . La partie réelle subit néanmoins une modification allant jusqu'à  $\sim 10\%$ , ce qui est beaucoup sachant que le continuum ne présente que  $\sim 0.1\%$  des fonctions d'onde.

Si on compare les résultats avec les données expérimentales, on s'aperçoit que la plupart des transitions sont reproduites par moins d'un facteur 3. On ne peut néanmoins attendre une meilleure reproduction des résultats considérant la rusticité de l'hamiltonien et de l'espace utilisé.

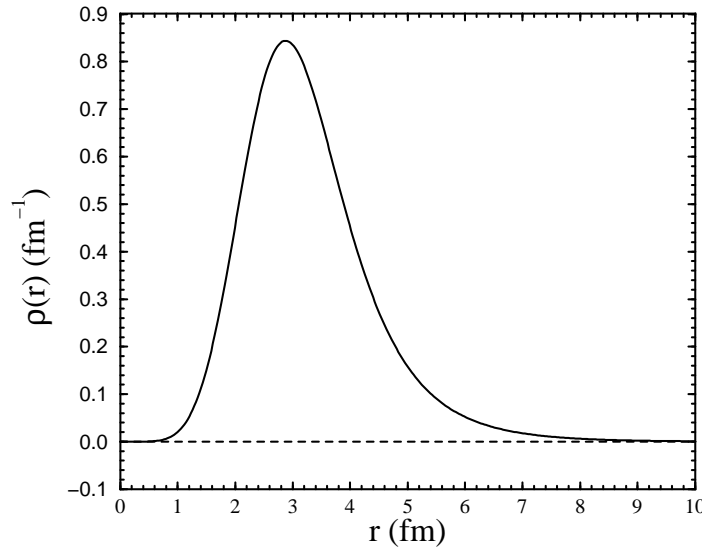


FIG. 3.20 – Densité de neutrons de valence  $\rho(r)$  de l'état fondamental  $0_1^+$  de  $^{18}\text{O}$ . La partie réelle est donnée par la courbe en trait plein et la partie imaginaire par la courbe en pointillé.

Sur les figures (3.20) et (3.21), on a représenté les densités de particules de valence des états respectifs  $0_1^+$  et  $2_5^+$  de  $^{18}\text{O}$ . L'opérateur associé à cette densité de particules de valence  $\hat{\rho}$  est :

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{N_{val}} r_i^2 |r_i\rangle \langle r_i|, \quad (3.39)$$

où  $r_i$  est la position de la particule de valence  $i$ . L'intérêt de ce choix est que  $0_1^+$  est lié et que  $2_5^+$  est résonnant, et a une largeur non négligeable, de  $\sim 150$  keV.

Comme pour toutes les observables déjà étudiées, la densité de particules de valence de l'état lié  $0_1^+$ , (voir figure (3.20)) est réelle, bien qu'il y ait une résonance complexe dans l'espace. Le continuum non résonnant  $d_{3/2}$  ici diminue la partie imaginaire de la densité, qui ne dépasse pas  $3 \cdot 10^{-5}$ , et est donc indiscernable de 0 sur la figure.

Comme on peut le voir sur la figure (3.21), la densité de l'état  $2_5^+$  est complexe, et vue la précision obtenue avec 10 points dans le continuum  $d_{3/2}$ , elle ne vient pas d'une imprécision numérique. Il faut alors l'interpréter de la manière de Berggren, soit que la partie réelle de la densité est la moyenne des mesures de densités qu'on obtiendrait en un point, tandis que la partie imaginaire est l'imprécision sur cette moyenne.

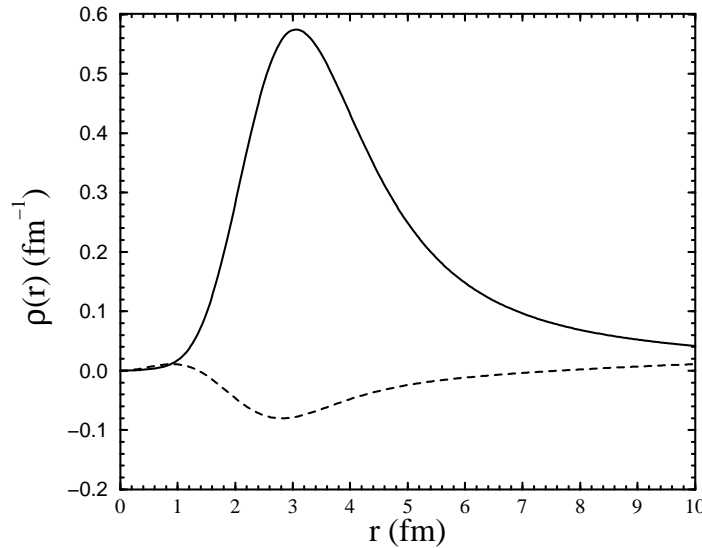


FIG. 3.21 – Densité de neutrons de valence  $\rho(r)$  de l'état résonnant  $2_5^+$  de  $^{18}\text{O}$ . La partie réelle est donné par la courbe en trait plein et la partie imaginaire par la courbe en pointillé.

### 3.6 Etude de la chaîne d'isotopes d'hélium de $^6\text{He}$ à $^9\text{He}$

La chaîne d'isotopes d'hélium est à la fois plus intéressante et plus difficile que celle des isotopes d'oxygènes. Les états fondamentaux de la chaîne d'isotopes d'hélium sont en effet soit faiblement liés, soit possèdent une grande largeur, excédant toujours 100 keV.

On considère alors comme coeur inerte  $^4\text{He}$ . Par conséquent, on n'a que des neutrons de valence pour les noyaux étudiés et on prend alors, de même que pour la chaîne d'isotopes d'oxygènes, une interaction SDI.

L'action du coeur de  $^4\text{He}$  est donné par le potentiel Woods-Saxon du paragraphe (3.4.3). Ce potentiel est obtenu en ajustant les états  $0p_{3/2}$  et  $0p_{1/2}$  avec les énergies des états correspondants  $3/2_1^-$  et  $1/2_1^-$  de  $^5\text{He}$ .

On a alors :

- $e_{0p_{3/2}} = 0.745$  MeV,  $\gamma_{0p_{3/2}} = 640$  keV;
- $e_{0p_{1/2}} = 2.130$  MeV,  $\gamma_{0p_{1/2}} = 5.873$  MeV.

L'état  $3/2_1^-$  de  $^5\text{He}$  est assez bien reproduit :  $e_{3/2_1^-}^{exp} = 0.890$  MeV,  $\gamma_{3/2_1^-}^{exp} = 600$  keV.

L'état  $1/2_1^-$  a cependant une énergie trop petite et une largeur trop grande, mais donne qualitativement les caractéristiques de cet état :  $e_{1/2_1^-}^{exp} = 4.890$  MeV,  $\gamma_{1/2_1^-}^{exp} = 4$  MeV.

On prend pour espace les états résonnants  $0p_{3/2}$  et  $0p_{1/2}$ , et les deux continums associés  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$ . Cependant, il n'est plus possible de choisir simplement les contours par des segments de droite comme pour la chaîne d'isotopes d'oxygènes : les largeurs des états résonnants de la base sont soit presque égales, soit supérieures à leur énergies, et il faudrait donc un très grand nombre de points sur le continuum pour compenser la «fausse» largeur induite par ces résonances, ce qui ferait exploser les dimensions. Par



conséquent, on a pris que 5 points par continuum, mais en les choisissant un par un de sorte de que la «fausse» largeur soit la plus petite possible. Ils sont donnés dans le tableau (3.13). Aussi, on ne fait aucune troncation en énergie et largeur : tous les déterminants

TAB. 3.13 – *Contours discrétisés  $p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$ . Le nombre entre parenthèses est l'indice de la couche du continuum.*

Couche du contour	$k$ (fm <sup>-1</sup> )
$p_{3/2}(1)$	0.01-i0.01
$p_{3/2}(2)$	0.10-i0.06
$p_{3/2}(3)$	0.20-i0.095
$p_{3/2}(4)$	0.30-i0.06
$p_{3/2}(5)$	0.40-i0.01
$p_{1/2}(1)$	0.05-i0.05
$p_{1/2}(2)$	0.20-i0.43
$p_{1/2}(3)$	0.40-i0.45
$p_{1/2}(4)$	0.60-i0.43
$p_{1/2}(5)$	0.75-i0.05

de Slater sont pris en compte dans l'espace. On ne donne aucune limitation au nombre d'états neutrons dans le continuum, mis à part pour le calcul de <sup>9</sup>He, où on a au plus 4 neutrons dans le continuum. Tous les autres continus agissent uniquement sur la partie réelle des énergies. Par conséquent, pour la même raison que pour la chaîne d'isotopes d'oxygènes, ils ne sont pas pris en compte. La force de l'interaction SDI, de 1670 MeV fm<sup>3</sup> (voir paragraphe (3.4.3)), est choisie de sorte qu'avec l'espace précédent l'énergie du fondamental de <sup>6</sup>He reproduise l'énergie expérimentale.

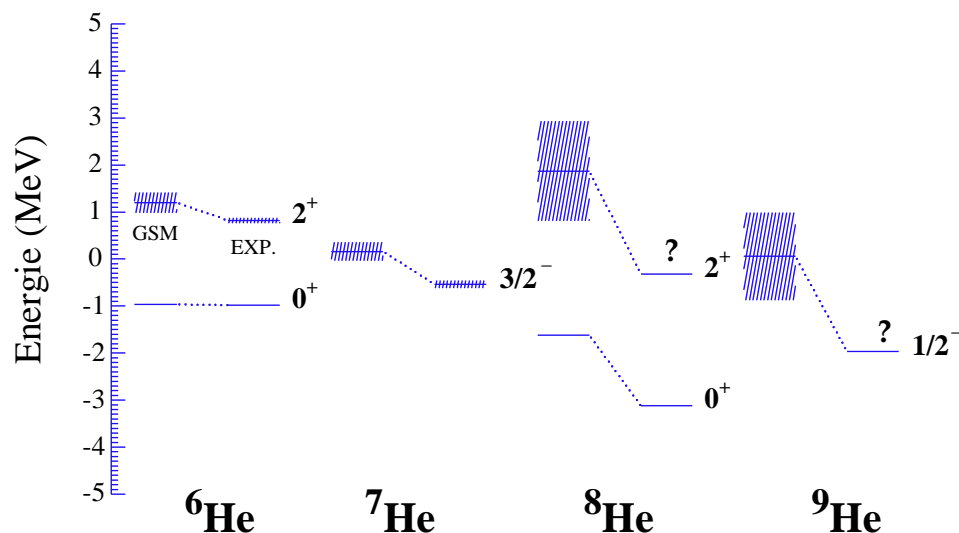


FIG. 3.22 – *Premiers états des spectres de différents isotopes d'hélium. Les énergies sont données par rapport au coeur de <sup>4</sup>He.*

Sur la figure (3.22), on a représenté les premiers états des spectres de <sup>6</sup>He à <sup>8</sup>He. On voit tout d'abord que tous les états fondamentaux calculés d'isotopes d'hélium pairs

sont liés, tandis que les états fondamentaux calculés d'isotopes d'hélium impairs sont résonnants, conformément à l'expérience. L'état fondamental de  ${}^8\text{He}$  n'est cependant pas assez lié : on a  $-1.618$  MeV au lieu de  $-3.118$  MeV. En augmentant l'interaction résiduelle, l'écart entre les états  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$  et  ${}^8\text{He}$  s'approche de la valeur expérimentale, mais les calculs deviennent de plus en plus difficiles car le continuum prend de plus en plus d'importance. Par conséquent, on a préféré prendre en compte le calcul ayant à la meilleure précision, même si  ${}^8\text{He}$  n'est pas assez lié avec.

Ainsi, quantitativement, mis à part l'état  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$  qui est d'ailleurs ajusté, il manque toujours de l'énergie de liaison aux états :  $\sim 400$  keV pour l'état  $2_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ ,  $\sim 600$  keV pour l'état  $3/2_1^-$  de  ${}^7\text{He}$  et  $\sim 1.5$  MeV pour l'état  $0_1^+$  de  ${}^8\text{He}$ . Par conséquent, les états résonnants ont une largeur trop grande, de  $\sim 300$  keV. Les états résonnants  $2_1^+$  de  ${}^8\text{He}$  et  $1/2_1^-$  de  ${}^9\text{He}$  sont eux aussi trop hauts en énergie, mais on ne peut rien dire sur leur largeur car celle-ci n'est pas connue expérimentalement.

TAB. 3.14 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ .

Configuration	$c^2$
$0p_{3/2}^2$	0.870-i0.736
$0p_{1/2}^2$	$6.505 \cdot 10^{-3}$ -i0.0762
$L_+^{(1)}$	0.271+i0.752
$L_+^{(2)}$	-0.147+i0.0603

TAB. 3.15 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $3/2_1^-$  de  ${}^7\text{He}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ .

Configuration	$c^2$
$0p_{3/2}^3$	1.110-i0.879
$0p_{3/2}^2 0p_{1/2}$	$5.915 \cdot 10^{-3}$ -i0.0294
$0p_{3/2} 0p_{1/2}^2$	0.0224-i0.0417
$L_+^{(1)}$	0.0499+i0.951
$L_+^{(2)}$	-0.185+i $8.461 \cdot 10^{-3}$
$L_+^{(3)}$	$-2.713 \cdot 10^{-3}$ -i $9.511 \cdot 10^{-3}$

Pour ce qui est de la précision, soit la «fausse» largeur de l'état lié de  ${}^8\text{He}$ , elle est de  $\sim 100$  keV. A cause de la résonance à un corps  $0p_{3/2}$ , qui a sa largeur presque égale à son énergie, il est impossible d'avoir un calcul avec une précision de l'ordre du keV, comme pour la chaîne d'isotopes d'oxygènes. En effet, comme on peut le voir sur les tableaux (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17), donnant les structures des états fondamentaux des isotopes d'hélium de  ${}^6\text{He}$  à  ${}^9\text{He}$ , le continuum non résonnant est aussi important que les configurations discrètes, ce qui signifie que les effets de discrétisation vont être très amplifiés par rapport aux calculs de la chaîne d'isotopes d'oxygènes. Une précision de  $\sim 100$  keV est cependant excellente, vu le peu de points pris pour les continums

TAB. 3.16 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $0_1^+$  de  ${}^8\text{He}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ .

Configuration	$c^2$
$0p_{3/2}^4$	0.296-i1.323
$0p_{3/2}^2 0p_{1/2}^2$	-0.0597-i0.158
$L_+^{(1)}$	1.596+i1.0656
$L_+^{(2)}$	-0.728+i0.630
$L_+^{(3)}$	-0.125-i0.204
$L_+^{(4)}$	0.0202-i0.0116

TAB. 3.17 – Amplitudes carrées de configurations dans l'état fondamental  $1/2_1^-$  de  ${}^9\text{He}$ . La somme des amplitudes carrées des déterminants de Slater ayant  $n$  particule(s) dans le continuum est notée  $L_+^{(n)}$ .

Configuration	$c^2$
$0p_{3/2}^4 0p_{1/2}$	0.180-i1.328
$L_+^{(1)}$	1.596+i0.734
$L_+^{(2)}$	-0.584+i0.801
$L_+^{(3)}$	-0.217-i0.193
$L_+^{(4)}$	0.0251-i0.0336

$p_{3/2}$  et  $p_{1/2}$ . Aussi, bien que la résonance à un corps  $0p_{1/2}$  a sa largeur supérieure à son énergie de 2 MeV, elle ne joue qu'un rôle mineur dans la précision des calculs de  ${}^6\text{He}$  à  ${}^8\text{He}$ , car les composantes associés à cette couche sont toujours faibles pour ces isotopes (voir tableaux précédents). Aussi, on peut comparer les tableaux (3.2) et (3.14), qui donnent les structures du même état  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ . Ici, contrairement au cas de  ${}^{18}\text{O}$ , il n'y a pas de grande différence entre les deux états, les poids des différentes configurations différant au plus de 13 %. Ceci n'est pas surprenant, car on avait vu sur la figure (3.13) que la convergence pour l'énergie est atteinte avec  $p_{1/2}$ . Les autres continums n'ont alors qu'un rôle perturbatif sur la fonction d'onde.

Comme on le voit sur les tableaux précités, le continuum non résonnant est déterminant pour la description des états. Par exemple, pour le fondamental  $0_1^+$  de  ${}^8\text{He}$ , toutes les configurations avec plusieurs états neutrons dans le continuum sont nécessaires. La contribution avec un neutron dans le continuum est même plus importante que la configuration discrète, et celle avec 4 neutrons dans le continuum est encore de l'ordre du pourcent. Sans continuum, on obtient une énergie de 2.08 MeV et une «fausse» largeur de -4.16 MeV pour cet état, ce qui n'est même pas une approximation d'ordre zéro de l'état.

Cette importance due au continuum non résonnant a deux raisons principales :

- le seuil d'émission de neutron(s) pour ces noyaux est très bas ou négatif pour tous ces isotopes, et, par conséquent, il est normal que le continuum non résonnant joue un rôle important;
- le potentiel donnant la base est celui d'un  ${}^4\text{He}$  pour tous les isotopes. Aussi, une possibilité, pas encore essayée, serait d'utiliser l'hamiltonien à deux corps pour générer le potentiel utilisé pour avoir une base de modèles en couches, par exemple dans une approche type champ moyen. Cela permettrait peut-être de mettre plus de corrélations dans la base, qui n'auraient alors pas à être prises en compte par le mélange de configurations.

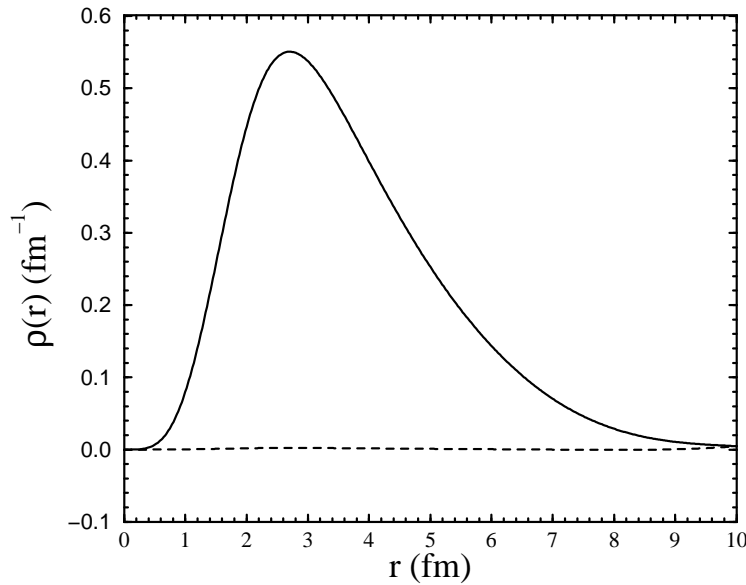


FIG. 3.23 – Densité de neutrons de valence  $\rho(r)$  de l'état fondamental  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ . La partie réelle est donné par la courbe en trait plein et la partie imaginaire par la courbe en pointillé.

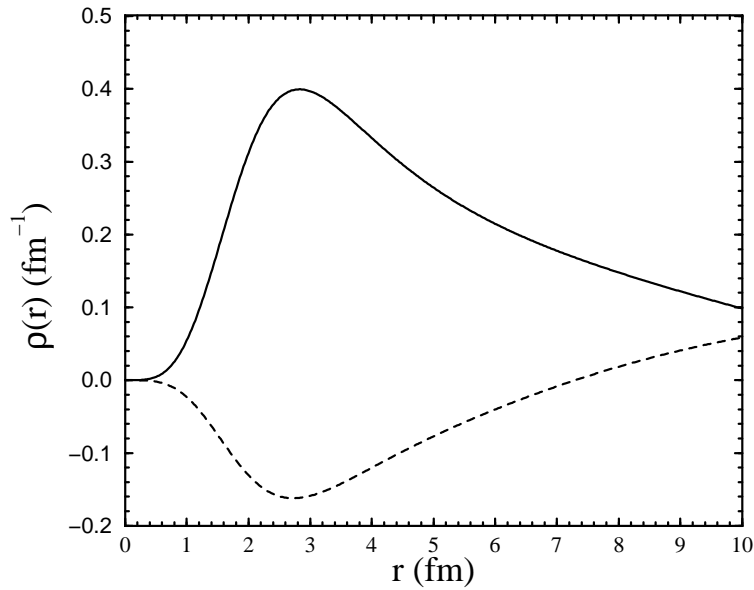


FIG. 3.24 – Densité de neutrons de valence  $\rho(r)$  de l'état résonnant  $2_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ . La partie réelle est donné par la courbe en trait plein et la partie imaginaire par la courbe en pointillé.

Sur les figures (3.23) et (3.24), on a représenté les densités de neutrons de valence  $\rho(r)$  des états respectifs  $0_1^+$  et  $2_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ . La définition de  $\hat{\rho}$  est donné en (3.39). On a pris 20 états pour les continums  $p_{1/2}$  et  $p_{3/2}$  dans ces calculs. Avec cette discrétisation, la partie imaginaire de la densité de neutrons de valence de l'état fondamental  $0_1^+$  de  ${}^6\text{He}$ , donné par la figure (3.23) atteint quand même  $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ , ce qui montre la lenteur de la convergence avec le nombre de points dans le continuum dans cet exemple. Néanmoins, la figure montre une densité de neutrons de valence conforme à celle d'un état peu lié, avec une densité qui s'étend jusqu'à 10 fm.

Sur la figure (3.24), on voit que la densité de neutrons de valence de l'état  $2_1^+$  de  ${}^6\text{He}$  est complexe, et la partie imaginaire est du même ordre de grandeur que la partie réelle. Cela est lié à la grande largeur de l'état ( $\sim 500$  keV).

# Chapitre 4

## Conclusion générale et perspectives

La découverte des noyaux exotiques, dont les propriétés sont très différentes des noyaux bien liés (halos, peaux de neutrons, seuils d'émission de particule très bas), a motivé l'introduction de nouveaux modèles, qui doivent prendre en compte explicitement l'action du continuum. Les halos de plusieurs nucléons doivent en effet être bien compris pour pouvoir étudier les noyaux borroméens ( ${}^6\text{He}$ ,  ${}^8\text{He}$ ,  ${}^{11}\text{Li}$ , ...), car ces noyaux sont liés mais faiblement, et uniquement à cause des corrélations entre les nucléons des halos.

SMEC est un outil bien adapté à l'étude des noyaux peu liés et résonnants où les seuils d'émission d'une particule sont prépondérants, qui permet de donner de nouvelles informations sur le comportement des noyaux proches des drip-lines. Il donne des fonctions d'onde à  $N$  corps réalistes et prend en compte l'influence des corrélations entre états liés et continuum. La considération de la section efficace de diffusion élastique  ${}^{16}\text{O}(p,p){}^{16}\text{O}$  à très basse énergie en est une preuve. En physique nucléaire, la diffusion des proton sur une cible fait partie des réactions fondamentales pour comprendre les noyaux, et la réaction étudiée est classique. Cependant, on a vu que reproduire cette section efficace est difficile et dans le cas de la section efficace étudiée, le mélange de configurations est nécessaire pour la décrire. La première interaction utilisée pour traiter le problème a été l'interaction PSD [Ben00a], où le coeur de  ${}^{16}\text{O}$  est fermé pour les états de parité positive, et n'admet que des excitations 1p-1h de la couche  $p$  vers la couche  $sd$  pour les états de parité négative. On a vu que, même en renormalisant les opérateurs pour prendre en compte la troncation, elle n'était pas suffisante, et qu'elle ne donnait que les tendances principales de la section efficace. Au contraire, avec l'interaction ZBM [Zuk68], qui considère aussi les excitations jusqu'à 4p-4h et donc prend en compte la dynamique du coeur de  ${}^{16}\text{O}$ , on reproduit bien les données. Par conséquent, un mélange de configurations précis est obligatoire pour bien décrire la section efficace, que seul SMEC est à présent capable de prendre en compte. Cela signifie aussi que la section efficace de diffusion élastique à très basse énergie peut être utilisée pour tester les corrélations à  $N$  corps de la fonction d'onde de l'état fondamental de la cible (système à  $A - 1$  nucléons) et des fonctions d'ondes résonnantes de basse énergie (système à  $A$  nucléons). Ainsi, l'étude de ces «observables simples» devrait être continuée à la fois pour les noyaux loin de la vallée de stabilité et pour les noyaux de la vallée de stabilité.

Il a été aussi question des transitions  $\beta$  premières interdites des réactions miroirs  ${}^{17}\text{Ne} \rightarrow {}^{17}\text{F}$  ( $\beta_+$ ) et  ${}^{17}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O}$  ( $\beta_-$ ). Là aussi, c'est le mélange de configurations, et non le halo de proton de  ${}^{17}\text{F}$ , qui est responsable de la brisure de symétrie miroir entre les réactions  $\beta^+$  et  $\beta^-$ . De plus, la possibilité de SMEC de considérer des observables indépendantes telles que le facteur astrophysique de la section efficace de capture radia-

tive  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}$  et les transitions  $\beta$  avec le même hamiltonien a permis de fixer la forme du potentiel Woods-Saxon dans le calcul des transitions  $\beta$ . Cependant, les transitions  $\beta$  premières interdites dépendent d'un grand nombre d'éléments de matrice, et il est impossible de tous les définir univoquement à partir des résultats expérimentaux. Il semble que les transitions  $\beta$  premières interdites, qui ont une dépendance sensible à la fois aux détails fins de l'interaction effective de modèle en couches et aux facteurs de forme radiaux des fonctions d'ondes dans les systèmes miroir vont être particulièrement difficiles à exploiter en tant que source d'information direct et claire de la structure des noyaux exotiques.

Une nouvelle approche des noyaux faiblement liés ou résonnants a été étudiée et développée dans ce travail, le modèle en couches avec états de Gamow. Bien que connus depuis longtemps, les états de Gamow n'avaient pas été utilisés pour développer des états nucléaires complexes à cause, d'une part, de leur comportement exponentiellement croissant en  $+\infty$ , et d'autre part, de la présence du continuum non résonnant, qui est difficile à traiter. Le modèle GSM a montré, par l'intermédiaire des techniques de rotation complexe, de discrétisation du continuum et des méthodes matricielles utilisées en modèle en couches, pouvoir résoudre les problèmes conceptuels et pratiques que la prise en compte du continuum pose. L'étude des chaînes d'isotopes d'oxygènes de  $^{17}\text{O}$  à  $^{22}\text{O}$  et d'hélium de  $^5\text{He}$  à  $^9\text{He}$  avec un hamiltonien très simple a permis de reproduire les caractéristiques principales de ces noyaux. Cela implique que le modèle en couches avec états de Gamow est une approche véritablement pratique pour la description des noyaux proches des seuils d'émission de particules. De plus, la considération possible de plusieurs particules dans le continuum dans un formalisme simple en fait un outil unique. Cela permet l'étude des noyaux possédant un halo à plusieurs nucléons, en particulier des noyaux borroméens. La considération dans ce travail de la chaîne d'isotopes d'hélium en est le premier exemple. Néanmoins, et cela de manière plus prononcée que dans le modèle en couches avec une base d'oscillateur harmonique, les dimensions des matrices augmentent de manière explosive avec le nombre de particules de valence. Par conséquent, il serait souhaitable d'un point de vue numérique que le continuum puisse toujours jouer un rôle secondaire, le continuum  $d_{3/2}$  de la chaîne d'oxygènes en étant un cas extrême. Le cas de  $^8\text{He}$  avec une base donnée par un cœur de  $^4\text{He}$  est typique : le continuum se doit de compenser le fait que la base ne possède aucun état lié, et par là acquiert une importance considérable. La discrétisation obligée du continuum en peu de points a alors pour conséquence une précision numérique de l'ordre de 100 keV, ce qui n'est pas assez dans le cas général.

Il sera peut-être possible dans le futur de résoudre ce problème en prenant un hamiltonien ne contenant qu'une interaction à deux corps, et de calculer le potentiel générant la base des états de Gamow à partir de cet hamiltonien par une méthode variationnelle. Cela permettrait de mettre beaucoup de corrélations dans la base des états de Gamow, ce qui impliquerait que le continuum ne soit plus prépondérant dans les calculs. Un bon candidat pour cette interaction est la force de Gogny [Gog73] [Gog75]. En effet, il est connu que cette force donne un champ moyen réaliste pour beaucoup de noyaux [Gog75] [Dec80] [Dec81]. De plus, il a été constaté qu'elle donne des éléments de matrice à deux corps similaires à ceux des interactions effectives [Pov00]. Donc, son utilisation dans ce contexte est très appropriée.

Une méthode intéressante pour traiter le problème des dimensions est la méthode du groupe de renormalisation de la matrice densité (Density Matrix Renormalisation Group method), qui permet de diagonaliser des espaces de l'ordre de  $10^{200}$  [Whi98] [Duk02].

Cette méthode a, pour l'instant, été appliquée seulement pour des problèmes hermitiques; ainsi, sa généralisation aux matrices symétriques complexes, et par conséquent au formalisme de Gamow permettrait de résoudre le problème du aux dimensions présent dans le modèle de Gamow.



## Annexe A

# Equation radiale et méthode de shooting

Le potentiel utilisé est de la forme donnée par (2.11). On recherche alors les états liés et résonnants de l'hamiltonien à un corps avec ce potentiel en résolvant numériquement l'équation radiale (2.16) associée à l'hamiltonien. Donc, pour un état donné :

- On considère un  $k_{try}$ , qu'on suppose proche du  $k$  de l'état recherché;
- On intègre l'équation (2.16) de 0 à un point de jonction  $R_m$  en utilisant la condition (2.17). Un bon choix pour  $R_m$  est le rayon du potentiel, soit  $R_m = R_0$ . Elle donne la fonction  $u_{try}(r)$  sur  $[0:R_m]$ .
- On intègre l'équation (2.16) du point  $R$  (voir section 2.2) au point de jonction  $R_m$  en utilisant la condition (2.18). Elle donne la fonction  $u_{try}(r)$  sur  $[R_m:R]$ . La fonction d'onde de Coulomb  $H_{l,\eta}^+$  intervenant dans (2.18) se calcule en utilisant la méthode de Thompson et Barnett [Tho86].
- On calcule la fonction de Jost (voir (G.1)) :

$$\mathcal{J}(k_{try}) = u'_{try}(R_m^{(+)}) \cdot u_{try}(R_m^{(-)}) - u'_{try}(R_m^{(-)}) \cdot u_{try}(R_m^{(+)}) \quad (\text{A.1})$$

Les zéros de cette fonction sont les  $k$  des états liés et résonnants et sont calculés par la méthode de Newton dans le plan complexe.

## Annexe B

# Sections efficaces de capture radiative

On considère une réaction de capture radiative de proton  $A(p,\gamma)B$ . Dans SMEC, les états initial  $\Psi_i(\vec{r})$  de A et final  $\Psi_f(\vec{r})$  de B sont donnés par :

$$\Psi_i(\vec{r}) = \sum_{l_i, j_i} \frac{\psi_{l_i, j_i}^{J_i}(r)}{r} \left[ [Y^{l_i} \otimes \chi^s]^{j_i} \otimes T^{J_T} \right]_{M_i}^{J_i} \quad (\text{B.1})$$

$$\Psi_f(\vec{r}) = \sum_{l_f, j_f} A_{l_f, \frac{1}{2}j_f}^{j_f J_T J_F} \frac{u_{l_f, j_f}^{J_f}(r)}{r} \left[ [Y^{l_f} \otimes \chi^s]^{j_f} \otimes T^{J_T} \right]_{M_f}^{J_f} \quad (\text{B.2})$$

où :

- $J_i, M_i$  et  $J_f, M_f$  sont les moments cinétiques totaux et projections de ces moments sur  $O_z$  respectifs des états initial et final A et B;
- $l_i, j_i$  et  $l_f, j_f$  sont les moments cinétiques orbitaux et totaux respectifs du projectile  $p$  et du proton capturé;
- $T$  est l'état de la cible, et  $J_T$  est son moment cinétique total;
- $\chi^s$  est la fonction de spin du projectile ou du nucléon capturé;
- $\psi_{l_i, j_i}$  est une solution de (2.48);
- $u_{l_f, j_f}$  est une solution de (2.25) du continuum non résonnant;
- $A_{l_f, \frac{1}{2}j_f}^{j_f J_T J_F}$  est un coefficient de parenté fractionnaire.

Ainsi, on peut exprimer les amplitudes partielles de transitions électromagnétiques, en fonction desquelles s'expriment les sections efficaces [Chr61] [Tom63] [Kim87] [Ber96] [Ben00a]:

$$\begin{aligned} T^{M_1} &= i^{l_i} \mu_N \sqrt{2J_f + 1} \langle 1 M_i - M_f \ J_f M_f | J_i M_i \rangle \} \\ &\times \left( (-1)^{j_f + J_T + 1 + J_i} \sqrt{2j_i + 1} \sqrt{2j_f + 1} \left\{ \begin{matrix} j_f & J_T & J_f \\ J_i & 1 & j_i \end{matrix} \right\} \right. \\ &\times \left[ \mu \left( \frac{Z_T}{m_T^2} + \frac{Z_i}{m_i^2} \right) \sqrt{2l_i + 1} \sqrt{l_i(l_i + 1)} (-1)^{l_f + \frac{1}{2} + 1 + j_i} \left\{ \begin{matrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ j_i & 1 & l_i \end{matrix} \right\} \right. \\ &+ \left. (-1)^{j_f - j_i} \sqrt{6} \mu_i (-1)^{\frac{1}{2} + l_f + 1 + j_i} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} & l_f & j_f \\ j_i & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \right] \\ &+ \left. \mu_T (-1)^{J_f - J_i} \sqrt{2J_T + 1} \sqrt{J_T(J_T + 1)} (-1)^{J_T + j_f + 1 + J_i} \left\{ \begin{matrix} J_T & j_f & J_f \\ J_i & 1 & J_T \end{matrix} \right\} \delta_{j_i j_f} \right) \end{aligned}$$

$$\times \delta_{l_i l_f} I_{l_i j_i l_f j_f}^{0 J_i} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} T^{\text{E1}} &= \mu \left( \frac{Z_i}{m_i} - \frac{Z_T}{m_T} \right) i^{l_i} \\ &\times \sqrt{2J_f + 1} \sqrt{2l_f + 1} \sqrt{2j_f + 1} \sqrt{2j_i + 1} \langle 1 M_i - M_f \ J_f M_f | J_i M_i \rangle \langle l_f 0 \ 1 0 | l_i 0 \rangle \\ &\times (-1)^{j_i + J_T + 1 + J_i} \begin{Bmatrix} j_f & J_T & J_f \\ J_i & 1 & j_i \end{Bmatrix} (-1)^{l_f + \frac{1}{2} + 1 + j_i} \begin{Bmatrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ j_i & 1 & l_i \end{Bmatrix} I_{l_i j_i l_f j_f}^{1 J_i} \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{\text{E2}} &= \mu^2 \left( \frac{Z_i}{m_i^2} + \frac{Z_T}{m_T^2} \right) i^{l_i} \\ &\times \sqrt{2J_f + 1} \sqrt{2l_f + 1} \sqrt{2j_f + 1} \sqrt{2j_i + 1} \langle 2 M_i - M_f \ J_f M_f | J_i M_i \rangle \langle l_f 0 \ 2 0 | l_i 0 \rangle \\ &\times (-1)^{j_i + J_T + 2 + J_i} \begin{Bmatrix} j_f & J_T & J_f \\ J_i & 2 & j_i \end{Bmatrix} (-1)^{l_f + \frac{1}{2} + 2 + j_i} \begin{Bmatrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ j_i & 2 & l_i \end{Bmatrix} I_{l_i j_i l_f j_f}^{2 J_i} \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

où :

- $\mu_N$  est l'unité de magnéton nucléaire;
- $Z_T$  et  $Z_i$  sont les charges respectives de la cible et du projectile;
- $\mu_T$  et  $\mu_i$  sont les moments magnétiques respectifs de la cible et du projectile;
- $m_T$  et  $m_i$  sont les masses respectives de la cible et du projectile;
- $\mu$  est la masse réduite de B;
- $I_{l_i j_i l_f j_f}^{L J_i}$  est l'intégrale radiale :

$$\int_0^{+\infty} u_{l_f j_f}(r) r^L \psi(l_i, j_i)^{J_i}(r) dr .$$

On a alors :

$$\sigma^{\text{E1}, \text{M1}} = \frac{16\pi}{9} \left( \frac{k_\gamma}{k_i} \right)^3 \left( \frac{\mu}{\hbar c} \right) \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{2s + 1} \frac{1}{2J_T + 1} \sum |T^{\text{E1}, \text{M1}}|^2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma^{\text{E2}} = \frac{4\pi}{75} \left( \frac{k_\gamma^5}{k_i^3} \right) \left( \frac{\mu}{\hbar c} \right) \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{2s + 1} \frac{1}{2J_T + 1} \sum |T^{\text{E2}}|^2 , \quad (\text{B.7})$$

$$(\text{B.8})$$

où on a utilisé (B.3), (B.4 et (B.5)).

## Annexe C

# Terme résiduel des équations de canaux couplés

Le terme à deux corps de l'équation (2.43) à calculer est :

$$\int dr' r' \langle c, r | \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta, \delta) \in \mathcal{D}}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} | c', r' \rangle \frac{\xi_{c'}(r')}{r'}$$

qu'on notera  $T_{cc'}$

Pour pouvoir le calculer, utilisons le théorème de Wigner-Eckhart<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} T_{cc'} &= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta, \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{2L+1} \\ &\times V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \int dr' r' \xi_{c'}(r') \\ &\times \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} || [(\mathbf{a}_{\alpha}^{\dagger} \mathbf{a}_{\beta}^{\dagger})^{(L)} (\widetilde{\mathbf{a}}_{\gamma} \widetilde{\mathbf{a}}_{\delta})^{(L)}]^{(0)} || [J_{T_{c'}}(j'r')]^{(J)} \rangle \end{aligned}$$

Recouplons les opérateurs de création et d'annihilation pour ne faire apparaître que des couplages entre un opérateur de création et un opérateur d'annihilation :

$$\begin{aligned} T_{cc'} &= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta, \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_{L, K} \sqrt{2L+1} (2L+1) (2K+1) \begin{Bmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & L \\ j_{\gamma} & j_{\delta} & L \\ K & K & 0 \end{Bmatrix} \\ &\times V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \int dr' r' \xi_{c'}(r') \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} || [(\mathbf{a}_{\alpha}^{\dagger} \widetilde{\mathbf{a}}_{\gamma})^{(K)} \cdot (\mathbf{a}_{\beta}^{\dagger} \widetilde{\mathbf{a}}_{\delta})^{(K)}]^{(0)} || [J_{T_{c'}}(j'r')]^{(J)} \rangle \end{aligned}$$

Découplons les états cible+projectile précédemment couplés à  $J$  :

$$\begin{aligned} T_{cc'} &= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta, \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_{L, K} \sqrt{2L+1} (2L+1) (2K+1) \begin{Bmatrix} j_{\alpha} & j_{\beta} & L \\ j_{\gamma} & j_{\delta} & L \\ K & K & 0 \end{Bmatrix} \\ &\times (2J+1) \begin{Bmatrix} J_{T_{c'}} & j_{\alpha} & J \\ J_{T_c} & j_{\gamma} & J \\ K & K & 0 \end{Bmatrix} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_{\beta}^{\dagger} \widetilde{\mathbf{a}}_{\delta})^{(K)} || J_{T_{c'}} \rangle V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \\ &\times \int dr' r' \xi_{c'}(r') \langle (jr) || (\mathbf{a}_{\alpha}^{\dagger} \widetilde{\mathbf{a}}_{\gamma})^{(K)} || (j'r') \rangle \end{aligned}$$

1. Pour les notations et méthodes concernant les couplages, voir [Bru77].

Pour simplifier la formule, on utilise les propriétés de symétries des signes de Wigner :

$$\begin{aligned}
T_{cc'} &= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta,\delta) \in \mathcal{D}}} \sum_{L,K} \sqrt{2L+1} (2L+1)(2K+1) \begin{Bmatrix} j_\beta & j_\alpha & L \\ j_\delta & j_\gamma & L \\ K & K & 0 \end{Bmatrix} \\
&\times (-1)^{j_\alpha+j_\beta+j_\gamma+j_\delta} (2J+1) \begin{Bmatrix} J_{T_{c'}} & j_\alpha & J \\ J_{T_c} & j_\gamma & J \\ K & K & 0 \end{Bmatrix} \\
&\times V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_{c'}} \rangle \int dr' \xi_{c'}(r') r' \langle (jr) || (\mathbf{a}_\alpha^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\gamma)^{(K)} || (j'r') \rangle \\
&= -\sqrt{2J+1} \sum_{\substack{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta,\delta) \in \mathcal{D}}} \sum_{L,K} \sqrt{2L+1} (2L+1)(2K+1) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2K+1}\sqrt{2L+1}} \begin{Bmatrix} j_\beta & j_\delta & j_\gamma \\ j_\alpha & K & L \end{Bmatrix} (-1)^{j_\alpha+2j_\beta+2j_\gamma+j_\delta+L+K} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2K+1}\sqrt{2J+1}} \begin{Bmatrix} J_{T_{c'}} & J_{T_c} & j_\gamma \\ j_\alpha & K & J \end{Bmatrix} (-1)^{j_\alpha+J_{T_c}+J+K} \\
&\times V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_{c'}} \rangle \int dr' \xi_{c'}(r') r' \langle (jr) || (\mathbf{a}_\alpha^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\gamma)^{(K)} || (j'r') \rangle \\
&= \sum_{\substack{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta,\delta) \in \mathcal{D}}} \sum_{L,K} (2L+1) \begin{Bmatrix} j_\alpha & j_\gamma & K \\ j_\delta & j_\beta & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_\alpha & j_\gamma & K \\ J_{T_c} & J_{T_{c'}} & J \end{Bmatrix} (-1)^{j_\delta+J_{T_c}+J+L} \\
&\times V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_{c'}} \rangle \int dr' \xi_{c'}(r') r' \langle (jr) || (\mathbf{a}_\alpha^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\gamma)^{(K)} || (j'r') \rangle
\end{aligned}$$

Le terme  $\langle (j'r') || (\mathbf{a}_\alpha^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\gamma)^{(K)} || (jr) \rangle$  est non nul seulement si  $|j\rangle = |j_\alpha\rangle$  et  $|j'\rangle = |j_\gamma\rangle$  et alors vaut :

$$\sqrt{2K+1} \left( \frac{u_\alpha(r)}{r} \right) \left( \frac{u_\gamma(r')}{r'} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
T_{cc'} &= \sum_{\substack{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{C} \\ (\beta,\delta) \in \mathcal{D}}} \sum_{L,K} \sqrt{2K+1} (2L+1) \begin{Bmatrix} j & j' & K \\ j_\delta & j_\beta & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & j' & K \\ J_{T_c} & J_{T_{c'}} & J \end{Bmatrix} \\
&\times (-1)^{j_\delta+J_{T_c}+J+L} \int dr' r' \xi_{c'}(r') V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r)}{r} \frac{u_\gamma(r')}{r'} \\
&\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_{c'}} \rangle
\end{aligned}$$

Il reste à calculer :

$$\sum_{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{C}} \int dr' r' \xi_{c'}(r') V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r)}{r} \frac{u_\gamma(r')}{r'}$$

et

$$\langle J_{T_{c'}} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_c} \rangle$$

$V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} = \frac{\langle (\alpha\beta)^L || W || (\gamma\delta)^L \rangle}{\sqrt{2L+1}}$  est l'élément de matrice à deux corps antisymétrisé, où  $W$  est une interaction de portée nulle avec échange de spin :

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (a + b \cdot P_\sigma) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (\text{C.1})$$

où  $a$  et  $b$  dépendent de  $r = |\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2|$  uniquement.

On présuppose que  $m_\alpha + m_\beta = m_\gamma + m_\delta$  et  $t_{z_\alpha} + t_{z_\beta} = t_{z_\gamma} + t_{z_\delta}$ , car sinon l'élément de matrice est nul.  $V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)}$  vaut alors :

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} &= \frac{\langle (\alpha\beta)^L ||W|| (\gamma\delta)^L \rangle}{\sqrt{2L+1}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} \int \int dr_1 dr_2 \left[ \frac{a(r_1) - b(r_1)}{r_1 r_2} \right] u_\alpha(r_1) u_\beta(r_2) \delta(r_1 - r_2) u_\gamma(r_1) u_\delta(r_2) \right. \\ &\quad + V_{ang}^{(L0)} \int \int dr_1 dr_2 \left[ \frac{a(r_1) + b(r_1)}{r_1 r_2} \right] u_\alpha(r_1) u_\beta(r_2) \delta(r_1 - r_2) u_\gamma(r_1) u_\delta(r_2) \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \delta_{t_{z_\alpha} t_{z_\beta}} \delta_{t_{z_\gamma} t_{z_\delta}} \right) \right] \end{aligned}$$

où  $V_{ang}^{(LT)}$  est l'élément de matrice angulaire couplé à  $J$  et  $T$  [Bru77]:

$$\begin{aligned} V_{ang}^{(LT)} &= \sqrt{\frac{(2j_\alpha + 1)(2j_\beta + 1)(2j_\gamma + 1)(2j_\delta + 1)}{(1 + \delta_{\alpha\beta})(1 + \delta_{\gamma\delta})}} \\ &\times \left[ (-1)^{j_\beta + j_\delta + l_\beta + l_\delta} \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\beta & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\gamma & j_\delta & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left( \frac{1 - (-1)^{J+T+l_\gamma+l_\delta}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} j_\alpha & j_\beta & L \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_\gamma & j_\delta & L \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \left( \frac{1 + (-1)^T}{2} \right) \right] \quad (C.2) \end{aligned}$$

Ainsi, intégrant la fonction  $\delta$ , on obtient:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} &= \frac{\langle (\alpha\beta)^L ||W|| (\gamma\delta)^L \rangle}{\sqrt{2L+1}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} \int dr'' \left[ \frac{a(r'') - b(r'')}{r''^2} \right] u_\alpha(r'') u_\beta(r'') u_\gamma(r'') u_\delta(r'') \right. \\ &\quad + V_{ang}^{(L0)} \int dr'' \left[ \frac{a(r'') + b(r'')}{r''^2} \right] u_\alpha(r'') u_\beta(r'') u_\gamma(r'') u_\delta(r'') \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \delta_{t_{z_\alpha} t_{z_\beta}} \delta_{t_{z_\gamma} t_{z_\delta}} \right) \right] \quad (C.3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\sum_{(\alpha,\gamma) \in \mathcal{C}} \int dr' \xi_{c'}(r') r' V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r')}{r'} \frac{u_\gamma(r)}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} \int dr' \xi_{c'}(r') r' \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r'} \right. \\ &\quad \int dr'' \left[ \frac{a(r'') - b(r'')}{r''^2} \right] \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{u_\alpha(r'') u_\alpha(r)}{r} u_\beta(r'') u_\delta(r'') \\ &\quad + V_{ang}^{(L0)} \int dr' \xi_{c'}(r') r' \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r'} \\ &\quad \left. \int dr'' \left[ \frac{a(r'') + b(r'')}{r''^2} \right] \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{u_\alpha(r'') u_\alpha(r)}{r} u_\beta(r'') u_\delta(r'') \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \delta_{t_{z_\alpha} t_{z_\beta}} \delta_{t_{z_\gamma} t_{z_\delta}} \right) \right] \end{aligned}$$

En utilisant les projecteurs  $q_c(r)$  et  $q_{c'}(r)$  (voir (2.46) pour la définition), on a :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{u_\alpha(r'') u_\alpha(r)}{r} = \sum_{\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}} (1 - q_c(r'')) \frac{u_\alpha(r'') u_\alpha(r)}{r} \quad (\text{C.4})$$

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r'} = \sum_{\gamma \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}} (1 - q_{c'}(r)) \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r'} \quad (\text{C.5})$$

Comme les sommes de (C.4) et (C.5) se font sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ , ce sont des relations de complétudes. Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}} (1 - q_c(r'')) \frac{u_\alpha(r'') u_\alpha(r)}{r} &= (1 - q_c(r'')) \frac{\delta(r - r'')}{r} \\ &= (1 - q_c(r)) \frac{\delta(r - r'')}{r} \\ \sum_{\gamma \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}} (1 - q_{c'}(r)) \frac{u_\gamma(r) u_\gamma(r')}{r'} &= (1 - q_{c'}(r)) \frac{\delta(r - r')}{r'} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

En insérant ces deltas dans (C.3), on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C}} \int dr' \xi_{c'}(r') r' V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r')}{r'} \frac{u_\gamma(r)}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} (1 - q_c(r)) \int dr'' \left[ \frac{a(r'') - b(r'')}{r''^2} \right] u_\beta(r'') u_\delta(r'') \frac{\delta(r - r'')}{r} \right. \\ &\quad (1 - q_{c'}(r)) \int dr' \xi_{c'}(r') r' \frac{\delta(r - r')}{r'} \\ &\quad \left. + V_{ang}^{(L0)} (1 - q_c(r)) \int dr'' \left[ \frac{a(r'') + b(r'')}{r''^2} \right] u_\beta(r'') u_\delta(r'') \frac{\delta(r - r'')}{r} \right. \\ &\quad \left. (1 - q_{c'}(r)) \int dr' \xi_{c'}(r') r' \frac{\delta(r - r')}{r'} \times (1 - \delta_{t_{z\alpha} t_{z\beta}} \delta_{t_{z\gamma} t_{z\delta}}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} (1 - q_c(r)) u_\beta(r) u_\delta(r) \left[ \frac{a(r) - b(r)}{r^2} \right] (1 - q_{c'}(r)) \xi_{c'}(r) \right. \\ &\quad \left. + V_{ang}^{(L0)} (1 - q_c(r)) u_\beta(r) u_\delta(r) \left[ \frac{a(r) + b(r)}{r^2} \right] \frac{1}{r} (1 - q_{c'}(r)) \xi_{c'}(r) \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \delta_{t_{z\alpha} t_{z\beta}} \delta_{t_{z\gamma} t_{z\delta}}) \right] \end{aligned}$$

Le second terme,  $\langle J_{T_c} | (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} | J_{T_{c'}} \rangle$ , est un élément de matrice à  $A-1$  corps entre deux états de la cible. Ces états sont souvent des combinaisons linéaires de déterminants de Slater non couplés. Donc, on doit découpler entièrement l'élément de matrice. Soient :

$$\begin{aligned} |J_{T_c} M_{T_c} \rangle &= \sum_n g_n |DS_n \rangle \\ |J_{T_{c'}} M_{T_{c'}} \rangle &= \sum_n g'_n |DS_n \rangle \end{aligned}$$

Les coefficients  $g_n$  et  $g'_n$  sont donnés par la diagonalisation de l'hamiltonien correspondant à la cible.

Soit  $M_K$  la projection de  $K$  sur  $O_z$  :

$$M_K = M_{T_c} - M_{T_{c'}} .$$

D'après le théorème de Wigner-Eckhart, on a alors :

$$\begin{aligned} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_{c'}} \rangle &= \left[ (-1)^{K-M_K} \begin{pmatrix} J_{T_c} & K & J_{T_{c'}} \\ -M_{T_c} & M_K & M_{T_{c'}} \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &\times \langle J_{T_c} M_{T_c} | (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)_{M_K}^K | J_{T_{c'}} M_{T_{c'}} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

On calcule alors l'élément de matrice non réduit :

$$\begin{aligned} \langle J_{T_c} M_{T_c} | (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)_{M_K}^K | J_{T_{c'}} M_{T_{c'}} \rangle &= \langle J_{T_c} M_{T_c} | \sum_{m_\beta - m_\delta = M_K} \langle j_\beta m_\beta j_\delta - m_\delta | K M_K \rangle a_\beta^\dagger \widetilde{a}_\delta | J_{T_{c'}} M_{T_{c'}} \rangle \\ &= \sum_{\substack{k,l \\ m_\beta - m_\delta = M_K}} g_l g'_k \langle j_\beta m_\beta j_\delta - m_\delta | K M_K \rangle \langle DS_l | a_\beta^\dagger \widetilde{a}_\delta | DS_k \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$\langle DS_l | a_\beta^\dagger \widetilde{a}_\delta | DS_k \rangle$  vaut :

1.  $(-1)^{j_\delta + m_\delta + \varphi}$  si  $|DS_k\rangle = (-1)^{\varphi_1} |v \beta\rangle$  et  $|DS_l\rangle = (-1)^{\varphi_2} |v \delta\rangle$ , où  $|v\rangle$  est un déterminant de Slater à  $A-2$  nucléons et  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des phases de réarrangement ( $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ );
2. 0 sinon.

Ainsi :

$$T_{cc'} = (1 - q_c(r)) V_{cc'}(r) \frac{1}{r} (1 - q_{c'}(r)) \xi_{c'}(r) ,$$

où

$$\begin{aligned} V_{cc'}(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{(\beta, \delta) \in \mathcal{D}} \sum_{L, K} \sqrt{2K+1} (2L+1) \begin{Bmatrix} j & j' & K \\ j_\delta & j_\beta & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & j' & K \\ J_{T_c} & J_{T_{c'}} & J \end{Bmatrix} \\ &\times (-1)^{j_\delta + J_{T_c} + J + L} \\ &\times \left[ V_{ang}^{(L1)} u_\beta(r) u_\delta(r) \left[ \frac{a(r) - b(r)}{r^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + V_{ang}^{(L0)} u_\beta(r) u_\delta(r) \left[ \frac{a(r) + b(r)}{r^2} \right] (1 - \delta_{t_{z\alpha} t_{z\beta}} \delta_{t_{z\gamma} t_{z\delta}}) \right] \\ &\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(K)} || J_{T_c} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$



## Annexe D

# Terme source des équations de canaux couplés

Sur la représentation des canaux (2.36), l'équation (2.49) devient :

$$\begin{aligned} & \sum_{c'} \int dr' r'^2 \langle c, r | (E - H_{PP}) | c', r' \rangle \langle c', r' | \omega_i^{(+)} \rangle = \langle c, r | H_{PQ} | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ \Leftrightarrow & \sum_{c'} \int dr' r' \langle c, r | (E - H_{PP}) | c', r' \rangle \omega_{c'}^{(+)}(r') = \langle c, r | H_{PQ} | \Phi_i^{(J)} \rangle \end{aligned}$$

Le terme  $\sum_{c'} \int dr' r' \langle c, r | (E - H_{PP}) | c', r' \rangle \omega_{c'}^{(+)}(r')$  a été calculé au chapitre précédent, au changement près  $\xi_{c'}(r') \rightarrow \omega_{c'}^{(+)}(r')$ .

Le terme source est donné par les éléments de matrice  $\langle c, r | H_{PQ} | \Phi_i^{(J)} \rangle$  qu'il faut calculer. On notera  $[[J_{T_c}(jr)]^{(J)}]$  le canal dont la cible  $T_c$  est couplée à  $J_{T_c}$ , le projectile est couplé à  $j$  et sa fonction d'onde radiale est donnée en  $r$ . Le tout est couplé à  $J$ .

On a :

$$\begin{aligned} & \langle c, r | H_{PQ} | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ &= \langle c, r | PH_0Q + PH_1Q | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ &= \langle c, r | PH_1Q | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ &= \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} | P \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \gamma < \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ &= \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \gamma < \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} | a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma | \Phi_i^{(J)} \rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que  $Q | \Phi_i^{(J)} \rangle = | \Phi_i^{(J)} \rangle$ ,  $P | c, r \rangle = | c, r \rangle$  et  $H_0 | \Phi_i^{(J)} \rangle = E_0 | \Phi_i^{(J)} \rangle$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \gamma < \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} | a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \geq \beta \\ \gamma \leq \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \sum_L \sqrt{2L+1} \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} | [(\mathbf{a}_\alpha^\dagger \mathbf{a}_\beta^\dagger)^{(L)} (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)}]^0 | \Phi_i^{(J)} \rangle \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \geq \beta \\ \gamma \leq \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \sum_L \sqrt{2L+1} \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} | [\mathbf{a}_\alpha^\dagger (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{j_\alpha}]^0 | \Phi_i^{(J)} \rangle \end{aligned}$$

Dans cette expression,  $[J_{T_c}(jr)]^{(J)}$  a une seule particule dans le continuum. Donc  $\mathbf{a}_\alpha^\dagger$  et  $\mathbf{a}_\beta^\dagger$  créent obligatoirement un état lié ou quasi lié et un état du continuum. Comme  $\alpha > \beta$ ,  $\alpha$  ne peut être qu'un état du continuum et  $\beta$  un état discret, car on suppose qu'on a numéroté les états de sorte que les états du continuum aient un indice plus grand que les états discrets.

Comme  $|\Phi_i^{(J)}\rangle$  n'a aucune particule dans le continuum,  $\gamma$  et  $\delta$  sont tous deux des états discrets. Il faut noter aussi que  $\mathbf{a}_\alpha^\dagger$  agit sur le vide à droite, car  $|\Phi_i^{(J)}\rangle$  n'a aucune particule dans le continuum.

Aussi, le recouplage des opérateurs de création et annihilation se démontre en utilisant la définition des couplages entre opérateurs avec les coefficients de Clebsch-Gordan.

Donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ \gamma < \delta}} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle [J_{T_c}(jr)]^{(J)} | \mathbf{a}_\alpha^\dagger \mathbf{a}_\beta^\dagger \mathbf{a}_\delta \mathbf{a}_\gamma | \Phi_i^{(J)} \rangle \\
&= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{C} \\ (\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{2L+1} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \sum_K (2J+1) \left\{ \begin{array}{ccc} J_{T_c} & j & J \\ J & 0 & J \\ K & K & 0 \end{array} \right\} \\
&\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(K)} || \Phi_i^{(J)} \rangle \langle (jr) || (\mathbf{a}_\alpha^\dagger)^{(K)} || 0 \rangle \\
&= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{C} \\ (\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{2L+1} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} (2J+1) \left\{ \begin{array}{ccc} J_{T_c} & j & J \\ J & 0 & J \\ j & j & 0 \end{array} \right\} \\
&\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle \langle (jr) || \alpha \rangle \\
&= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{C} \\ (\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{2L+1} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} (2J+1) \sqrt{2j+1} \left\{ \begin{array}{ccc} J_{T_c} & j & J \\ J & 0 & J \\ j & j & 0 \end{array} \right\} \\
&\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle \frac{u_\alpha(r)}{r} \\
&= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{C} \\ (\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{2L+1} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} (2J+1) \sqrt{2j+1} \\
&\times \frac{(-1)^{2J+2j}}{\sqrt{2J+1}\sqrt{2j+1}} \left\{ \begin{array}{ccc} j & J & J_{T_c} \\ J & j & 0 \end{array} \right\} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle \frac{u_\alpha(r)}{r} \\
&= -\sqrt{\frac{1}{2J+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{C} \\ (\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{2L+1} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \\
&\times (2J+1) \sqrt{2j+1} \frac{(-1)^{2J+2j}}{\sqrt{2J+1}\sqrt{2j+1}} \frac{(-1)^{J_{T_c}+j+J}}{\sqrt{2J+1}\sqrt{2j+1}} \\
&\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle \frac{u_\alpha(r)}{r} \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{C} \\ (\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}}} \sum_L \sqrt{\frac{2L+1}{(2J+1)(2j+1)}} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} (-1)^{j-J+J_{T_c}} \\
&\times \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle \frac{u_\alpha(r)}{r}
\end{aligned}$$

Il reste à calculer :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{C}} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r)}{r}$$

et

$$\langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle$$

On calcule en premier :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r)}{r} \\ = & \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} \int dr'' \left[ \frac{a(r'') - b(r'')}{r''^2} \right] \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{u_\alpha(r) u_\alpha(r'')}{r} u_\beta(r'') u_\gamma(r'') u_\delta(r'') \right. \\ & + V_{ang}^{(L0)} \int dr'' \left[ \frac{a(r'') + b(r'')}{r''^2} \right] \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} \frac{u_\alpha(r) u_\alpha(r'')}{r} u_\beta(r'') u_\gamma(r'') u_\delta(r'') \\ & \left. \times \left( 1 - \delta_{t_{z\alpha} t_{z\beta}} \delta_{t_{z\gamma} t_{z\delta}} \right) \right] \end{aligned}$$

On a utilisé (C.3), et les termes  $V_{ang}^{(L1)}$  et  $V_{ang}^{(L0)}$  sont ceux de l'équation (C.2).

En utilisant la technique du chapitre précédent avec les relations (C.4) et (C.6), on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathcal{C}} V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(L)} \frac{u_\alpha(r)}{r} \\ = & \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} (1 - q_c(r)) \int dr'' \left[ \frac{a(r'') - b(r'')}{r''^2} \right] \frac{\delta(r - r'')}{r} u_\beta(r'') u_\gamma(r'') u_\delta(r'') \right. \\ & + V_{ang}^{(L0)} (1 - q_c(r)) \int dr'' \left[ \frac{a(r'') + b(r'')}{r''^2} \right] \frac{\delta(r - r'')}{r} u_\beta(r'') u_\gamma(r'') u_\delta(r'') \\ & \left. \times \left( 1 - \delta_{t_{z\alpha} t_{z\beta}} \delta_{t_{z\gamma} t_{z\delta}} \right) \right] \\ = & \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} (1 - q_c(r)) \left[ \frac{a(r) - b(r)}{r^3} \right] u_\beta(r) u_\gamma(r) u_\delta(r) \right. \\ & + V_{ang}^{(L0)} (1 - q_c(r)) \left[ \frac{a(r) + b(r)}{r^3} \right] u_\beta(r) u_\gamma(r) u_\delta(r) \\ & \left. \times \left( 1 - \delta_{t_{z\alpha} t_{z\beta}} \delta_{t_{z\gamma} t_{z\delta}} \right) \right] \end{aligned}$$

On calcule maintenant  $\langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle$ . Cet élément de matrice doit être totalement découplé. Soient :

$$\begin{aligned} |J_{T_c} M_{T_c}\rangle &= \sum_n g_n |DS_n\rangle_{A-1} \\ |J_\Phi M_\Phi\rangle &= \sum_n g'_n |DS_n\rangle_A \end{aligned}$$

D'après le théorème de Wigner-Eckhart, avec  $m = M_{T_c} - M_\Phi$  :

$$\begin{aligned} \langle J_{T_c} || (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^j || \Phi_i^{(J)} \rangle &= \left[ (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} J_{T_c} & j & J_\Phi \\ -M_{T_c} & m & M_\Phi \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &\times \langle J_{T_c} M_{T_c} | (\mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)})^j | J_\Phi M_\Phi \rangle \end{aligned} \quad (D.1)$$

On calcule l'élément de matrice non réduit :

$$\begin{aligned}
& \langle J_{T_c} M_{T_c} | \left( \mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)} \right)_m^j | J_\Phi M_\Phi \rangle \\
= & \langle J_{T_c} M_{T_c} | \sum_{M_L+m_\beta=m} \langle j_\beta m_\beta L M_L | jm \rangle a_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)_{M_L}^L | J_\Phi M_\Phi \rangle \\
= & \langle J_{T_c} M_{T_c} | \sum_{M_L+m_\beta=m} \langle j_\beta m_\beta L M_L | jm \rangle a_\beta^\dagger \sum_{-m_\gamma-m_\delta=M_L} \langle j_\gamma -m_\gamma j_\delta -m_\delta | LM_L \rangle \widetilde{a}_\gamma \widetilde{a}_\delta | J_\Phi M_\Phi \rangle \\
= & \sum_{k,l} g_l g'_k \sum_{\substack{M_L+m_\beta=m \\ -m_\gamma-m_\delta=M_L}} \langle j_\beta m_\beta L M_L | jm \rangle \langle j_\gamma -m_\gamma j_\delta -m_\delta | LM_L \rangle \langle DS_l | a_\beta^\dagger \widetilde{a}_\gamma \widetilde{a}_\delta | DS_k \rangle \quad (D.2)
\end{aligned}$$

$\langle DS_l | a_\beta^\dagger \widetilde{a}_\gamma \widetilde{a}_\delta | DS_k \rangle$  vaut :

1.  $(-1)^{j_\delta+m_\gamma+j_\delta+m_\delta+\varphi}$  si  $|DS_l\rangle = (-1)^{\varphi_1} |v \beta\rangle$  et  $|DS_k\rangle = (-1)^{\varphi_2} |v \gamma \delta\rangle$ , où  $|v\rangle$  est un déterminant de Slater à  $A-2$  nucléons et où  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des phases de réarrangement ( $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ );
2. 0 sinon.

Ainsi, le terme source vaut :

$$\begin{aligned}
w_i^{(c)}(r) &= \langle c, r | H_{PQ} | \Phi_i^{(J)} \rangle \\
&= \sum_{(\beta, \gamma \leq \delta) \in \mathcal{D}} \sum_L \sqrt{\frac{2L+1}{(2J+1)(2j+1)}} (-1)^{j-J+J_{T_c}} \\
&\times \frac{1}{4\pi} \left[ V_{ang}^{(L1)} (1 - q_c(r)) \left[ \frac{a(r) - b(r)}{r^2} \right] u_\beta(r) u_\gamma(r) u_\delta(r) \right. \\
&\quad \left. + V_{ang}^{(L0)} (1 - q_c(r)) \left[ \frac{a(r) + b(r)}{r^2} \right] u_\beta(r) u_\gamma(r) u_\delta(r) \right] \\
&\times \left( 1 - \delta_{t_{z_\alpha} t_{z_\beta}} \delta_{t_{z_\gamma} t_{z_\delta}} \right) \langle J_{T_c} || \left( \mathbf{a}_\beta^\dagger (\widetilde{\mathbf{a}}_\gamma \widetilde{\mathbf{a}}_\delta)^{(L)} \right)^{(j)} || \Phi_i^{(J)} \rangle . \quad (D.3)
\end{aligned}$$

## Annexe E

# Traitement numérique de l'opérateur $q$

Les équations (2.48) et (2.52) ont toutes deux la forme suivante :

$$\sum_{c'} (1 - q) H_{cc'} \zeta_{c'}(r) = (1 - q) w(r) . \quad (\text{E.1})$$

Ainsi, on a  $\zeta_{c'}(r) = \xi_{c'}(r)$  et  $w(r) = 0$  dans (2.48) et  $\zeta_{c'}(r) = \omega_{c'}(r)$  dans (2.52).

L'écriture directe de ce système d'équations donne un problème intégro-différentiel.

Aussi, on procède autrement, suivant la méthode décrite dans [Bar77a].

Soit :

$$\zeta_c(r) = A_c(r) + \sum_{n', c'} a_{c'}^{(n')} B_c^{(n')(c')}(r) \quad (\text{E.2})$$

avec les fonctions  $A_c(r)$  et  $B_c^{(n')(c')}(r)$  définies par :

$$\sum_{c'} H_{cc'} A_{c'}(r) = w(r) \quad (\text{E.3})$$

$$\sum_{c'} H_{cc'} B_c^{(n)(c)}(r) = u_n(r) \quad \forall n \quad (\text{E.4})$$

Il s'agit de systèmes d'équations différentielles couplées, qui se résolvent presque aussi facilement qu'une équation différentielle ordinaire.

Si  $c = [|J_{T_c}\rangle \otimes |l_c j_c t_{z_c}\rangle]^{(J)}$ , (voir (2.36)), on considère dans (E.4) tous les états liés ou quasi liés  $|u_\alpha\rangle$  (engendrant les  $|DS\rangle$  de  $\mathcal{Q}$ ) dont les nombres quantiques sont :

$$l_\alpha = l_c , j_\alpha = j_c , t_{z_\alpha} = t_{z_c} \quad (\text{E.5})$$

$n = n_\alpha$  par définition, et donc on note  $u_n(r) = \langle r | u_\alpha \rangle$ .

Les équations (2.48) et (2.52) ont été montrées en considérant que  $q_c(r) \zeta_c(r) = 0 \quad \forall c$ .

Cette condition définit univoquement les coefficients  $a_{c'}^{(n')}$  :

$$\begin{aligned} q_c(r) \zeta_c(r) &= 0 \quad \forall c \\ \iff \sum_{\alpha_c} u_{\alpha_c}(r) \int_0^{+\infty} u_{\alpha_c}(r') \zeta_c(r') dr' &= 0 \quad \forall c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{\alpha_c} \left( \int_0^{+\infty} u_{\alpha_c}(r') A_c(r') dr' + \sum_{n',c'} a_{c'}^{(n)} \int_0^{+\infty} u_{\alpha_c}(r') B_c^{(n')(c')}(r') dr' \right) u_{\alpha_c}(r) = 0 \quad \forall c \\
&\Leftrightarrow \sum_{n',c'} a_{c'}^{(n')} \int_0^{+\infty} u_{\alpha_c}(r') B_c^{(n')(c')}(r') dr' = - \int_0^{+\infty} u_{\alpha_c}(r') A_c(r') dr' \quad \forall \alpha_c, c \quad (\text{E.6})
\end{aligned}$$

Les états  $\alpha_c$  dans ce calcul doivent tous vérifier les conditions (E.5). Les coefficients  $a_{c'}^{(n')}$  sont donc définis par le système linéaire d'équations (E.6). Le fait que tous les canaux interviennent dans (E.6) prouvent que les coefficients  $a_{c'}^{(n')}$  sont indépendents de  $c$  dans (E.2).

Enfin, montrons que  $\zeta_c(r)$  est bien solution de (E.1) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{c'} (1-q) H_{cc'} \zeta_{c'}(r) - (1-q) w(r) \\
&= \sum_{c'} (1-q) H_{cc'} A_c(r) + (1-q) \sum_{n,c,c'} a_c^{(n)} H_{cc'} B_c^{(n)(c)}(r) - (1-q) w(r) \\
&= (1-q) \left( \sum_{c'} H_{cc'} A_c(r) - w(r) \right) + (1-q) \sum_{n,c,c'} a_c^{(n)} H_{cc'} B_c^{(n)(c)}(r) \\
&= \sum_{n,c,c'} a_c^{(n)} (1-q) H_{cc'} B_c^{(n)(c)}(r) \\
&= \sum_{n,c} a_c^{(n)} (1-q) \sum_{c'} H_{cc'} B_c^{(n)(c)}(r) \\
&= \sum_{n,c} a_c^{(n)} (1-q) u_n(r) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

où on a utilisé les équations (E.3), (E.4) et le fait que  $(1-q_c(r))u_{\alpha_c}(r) = 0 \quad \forall \alpha$ , lié ou quasi lié. Cette méthode permet donc de transformer un problème intégro-différentiel couplé en plusieurs problèmes différentiels couplés, ce qui est beaucoup plus simple à résoudre.

## Annexe F

### Calcul de $\langle \Phi_i^{(J)} | H_{QP} | \omega_n^+ \rangle$ et $\langle \Phi_i^{(J)} | H_{QP} | \xi \rangle$

Soit  $|\zeta\rangle$  la fonction  $|\omega_n^+\rangle$  ou  $|\xi\rangle$  suivant le cas.

En utilisant les canaux de (2.36), on a:

$$\langle \Phi_i^{(J)} | H_{QP} | \zeta \rangle = \sum_c \int dr \langle \Phi_i^{(J)} | H_{QP} | [J_{T_c}(jr)]^J \rangle \zeta_c(r) . \quad (\text{F.1})$$

L'élément de matrice  $\langle \Phi_i^{(J)} | H_{QP} | [J_{T_c}(jr)]^J \rangle$  est égal à  $\langle [J_{T_c}(jr)]^J | H_{PQ} | \Phi_i^{(J)} \rangle$ , qui n'est autre que le terme source des équations de couplage PQ. Il est donc donné par l'équation (D.3). Il suffit alors de sommer sur tous les canaux et d'intégrer sur  $r$  pour avoir  $\langle \Phi_i^{(J)} | H_{QP} | \zeta \rangle$ .

# Annexe G

## Wronskiens et fonctions de Jost

### G.1 Fonctions de Jost

Si  $u$  la solution de (2.16) vérifiant (2.17) avec  $C_0 = 1$ , on peut écrire  $u = Au^+ + Bu^-$ , où  $u^+(r) \sim H_{l,\eta}^+(kr)$  et  $u^- \sim H_{l,\eta}^-(kr)$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . On définit alors les fonctions de Jost :

$$\mathcal{J}^+(k) = W(u^+, u) = u^+ \frac{du}{dr} - u \frac{du^+}{dr} \quad (\text{G.1})$$

$$\mathcal{J}^-(k) = W(u^-, u) = u^- \frac{du}{dr} - u \frac{du^-}{dr} \quad (\text{G.2})$$

où  $W(f, g)$  est le wronskien des fonctions  $f$  et  $g$  :  $W(f, g) = fg' - f'g$ . On utilise aussi l'écriture  $\mathcal{J}$  pour  $\mathcal{J}^+$ . Les fonctions de Jost ne dépendent que du nombre d'onde  $k$  de  $u$ , car  $u$ ,  $u^+$  et  $u^-$  sont solutions de (2.16) (propriété standard du wronskien). De plus, elles sont analytiques sur  $\mathbb{C}^*$ . On remarquera que  $W(u^+, u^-) = -2ik$ , formule que l'on peut démontrer en utilisant les formes asymptotiques des fonctions d'ondes de Coulomb en  $+\infty$ . Par conséquent :

$$u = \frac{1}{2ik} (\mathcal{J}^-(k)u^+ - \mathcal{J}^+(k)u^-) . \quad (\text{G.3})$$

### G.2 Dérivée de $\mathcal{J}$

Dans les démonstrations de complétude, on a besoin de la dérivée de la fonction de Jost. Pour cela, on considère deux solutions  $f$  et  $g$  de (2.16) à des énergies *différentes* [New66]. On dérive alors par rapport à  $r$  le wronskien de  $f$  et  $g$   $W(f, g)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} W(f, g) &= (k_f^2 - k_g^2) f(r) g(r) \\ \Rightarrow W(f, g)(b) - W(f, g)(a) &= (k_f^2 - k_g^2) \int_a^b f(r) g(r) dr . \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Considérons que  $W(f, g)$  est une fonction de  $k = k_g$ , et dérivons (G.4) par rapport à  $k$ , en notant  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial k}$  :

$$W(f, g)(b) - W(f, g)(a) = (k_f^2 - k_g^2) \int_a^b f(r) g(r) dr$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow W(f, \dot{g})(b) - W(f, \dot{g})(a) = -2k \int_a^b f(r) g(r) dr \\ &+(k_f^2 - k^2) \int_a^b f(r) \dot{g}(r) dr \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

On peut à présent calculer la dérivée de  $\mathcal{J}$ . On considère en premier lieu  $k^2 < 0$ , de sorte que  $f^+ \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . De plus, comme  $f$  vérifie (2.17) avec  $C_0 = 1$ ,  $\dot{f}$  vérifie  $\dot{f}(0) = df/dr(0) = 0$ . Ainsi,  $W(f, f^+)(+\infty) = 0$  et  $W(f^+, \dot{f})(0) = 0$ . Donc, comme  $\mathcal{J}$  est indépendant de  $r$ , avec  $r$  quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}}{dk} &= \frac{d}{dk} [W(f^+, f)](r) \\ &= W(f^+, \dot{f})(r) - W(f, \dot{f}^+)(r) \\ &= W(f^+, \dot{f})(r) - W(f^+, \dot{f})(0) + W(f, \dot{f}^+)(+\infty) - W(f, \dot{f}^+)(r) \\ &= -2k \int_0^r f(r') f^+(r') dr' - 2k \int_r^{+\infty} f(r') f^+(r') dr' \\ &= -2k \int_0^{+\infty} f(r') f^+(r') dr' \end{aligned}$$

On a utilisé (G.5) sachant que  $k_f = k_{f^+} = k$ . En particulier, si  $\mathcal{J}(k_0) = 0$ , on a un état lié et  $f = \frac{1}{2ik_0} \mathcal{J}^-(k_0) f^+$ . Donc :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathcal{J}}{dk} \right]_{k=k_0} &= -2 \frac{1}{2ik_0} \mathcal{J}^-(k_0) k_0 \int_0^{+\infty} f^+(r)^2 dr \\ &= i \mathcal{J}^-(k_0) \int_0^{+\infty} f^+(r)^2 dr . \end{aligned}$$

Enfin, on utilise le prolongement analytique comme pour (3.4) pour avoir la formule utilisable pour les résonances :

$$\left[ \frac{d\mathcal{J}}{dk} \right]_{k=k_0} = i \mathcal{J}^-(k_0) \text{Reg} \left[ \int_0^{+\infty} f^+(r)^2 dr \right] . \quad (\text{G.6})$$

# Annexe H

## Calcul de décroissances $\beta$

Dans ce chapitre, toutes les notations utilisées sont classiques et communes à la plupart des articles et livres concernant les transitions  $\beta$ . Pour une description plus détaillée, voir [Kon69] [Beh71] [Tow72] [Val82].

### H.1 Facteur de l'espace de phase $f$

Toute l'information nécessaire d'une transition  $\beta$  se trouve dans le facteur de l'espace de phase  $f$  défini par :

$$f = \int_1^{W_0} C(W)F(Z,W)[W\sqrt{W^2-1}][W_0-W]^2 dW \quad (\text{H.1})$$

où

- $Z$  est la charge du noyau fils;
- $W_0 = Q/(m_e c^2) + 1$ , avec  $Q$  l'énergie maximale disponible pour la réaction et  $m_e$  la masse de l'électron;
- $F(Z,W)$  est la fonction de Fermi, qui prend en compte l'effet de la barrière coulombienne sur la fonction d'onde de l'électron;
- $C(W)$  est le facteur de forme de la réaction, qui contient la dépendance structurelle des états initiaux et finaux des noyaux père et fils;
- $W\sqrt{W^2-1}$  est l'impulsion relativiste de l'électron en unité de  $m_e c^2$ ;
- $(W_0 - W)^2$  est l'impulsion relativiste du neutrino en unité de  $m_e c^2$ , en négligeant l'énergie du recul du noyau et la masse du neutrino.

L'énergie maximale  $Q$  diffère suivant qu'on a une transition  $\beta^+$  ou  $\beta^-$  :

- $Q_{\beta^-} = M_i c^2 - M_f c^2 + E_i - E_f$ ;
- $Q_{\beta^+} = M_i c^2 - M_f c^2 + E_i - E_f - 2m_e c^2$ ,

où :

- $M_i$  et  $M_f$  sont les masses respectives des noyaux père et fils;
- $E_i$  et  $E_f$  sont les énergies d'excitation respectives des noyaux père et fils;

Le  $2m_e c^2$  est l'énergie de création de l'électron positif.

Il est important de remarquer que le  $f$  défini dans (H.1) n'est pas le  $f$  utilisé dans la notation usuelle  $\log ft$  [Val82]; ce dernier  $f$  a pour expression :

$$f = \int_1^{W_0} F(Z, W) [W \sqrt{W^2 - 1}] [W_0 - W]^2 dW . \quad (\text{H.2})$$

Le  $f$  de (H.2) ne dépend pas de la structure des états nucléaires, tandis que le  $f$  de (H.1) en dépend. Dans tous les calculs et équations, on ne considèrera que le  $f$  défini par (H.1).

## H.2 Temps de vie partiel

Le temps de vie partiel  $t$  de la transition est donné par la relation :

$$ft = \frac{K}{G_v^2} \quad (\text{H.3})$$

$$K = \frac{2\pi^3 (\ln 2) \hbar^7}{m_e^5 c^4} \quad (\text{H.4})$$

$$G_v = G_F V_{ud} g_V , \quad (\text{H.5})$$

où :

- $G_F$  est la constante de Fermi;
- $V_{ud}$  est l'élément de la matrice de Cabbibo reliant les quarks  $u$  et  $d$ ;
- $g_V$  est la constante de couplage vectorielle de l'interaction faible; sous l'hypothèse de conservation du courant vectoriel  $g_V = 1$ .

## H.3 Fonction de Fermi $F(Z, W)$

La fonction de Fermi est définie comme le rapport de la probabilité que l'électron se trouve dans le noyau avec le champ coulombien du noyau fils sur la probabilité que l'électron se trouve à l'infini [Kon69]. Pour l'évaluer, on considère le noyau comme une charge ponctuelle et on prend la valeur de la fonction d'onde de l'électron en  $r = R$ , où  $R$  est le rayon de charge :

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

$$r_0 = 1.614 - 0.1067 \ln(A) + 0.005456 (\ln(A))^2 + \frac{6.112}{(A - 1.76)^2} \text{ fm} .$$

Cette approximation est justifiée car la longueur d'onde de l'électron est très supérieure aux dimensions du noyau et car la distribution de charge du noyau peut être approximée par une sphère uniformément chargée de rayon  $R$ . On obtient alors :

$$F(Z, W) = 2(1 + \gamma_1) (2pR)^{-2(1-\gamma_1)} \left| \frac{\Gamma(\gamma_1 + iy)}{\Gamma(2\gamma_1 + 1)} \right|^2 e^{\pi y} ,$$

où :

$$- \gamma_1 = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2};$$

- $p = \sqrt{W^2 - 1}$ ;
- $y = \alpha Z W p^{-1}$ ;
- $\alpha$  est la constante de structure fine.

Il faut changer  $Z$  en  $-Z$  pour les transitions  $\beta^+$ .

## H.4 Facteur de forme $C(W)$

### H.4.1 Transitions permises

Dans le cas des transitions permises, on a pour le facteur de forme l'expression suivante :

$$C(W) = \frac{1}{2J_i + 1} \left[ \langle \Psi_f || T_{\pm} || \Psi_i \rangle^2 + \left( \frac{g_A}{g_V} \right)^2 \langle \Psi_f || \mathbf{2ST}_{\pm} || \Psi_i \rangle^2 \right], \quad (\text{H.6})$$

où :

- $\Psi_i$  et  $\Psi_f$  sont respectivement les états initiaux et finaux des noyaux père et fils de moment cinétique total  $J_i$  et  $J_f$ ;
- $T_{\pm}$  est l'opérateur d'élévation d'isospin total  $T_+$  pour une transition  $\beta^+$  et l'opérateur d'abaissement d'isospin total  $T_-$  pour une transition  $\beta^-$ ;
- $g_A$  est la constante de couplage axial-vectorel, qui vaut  $\sim -1.26$  dans le vide [Tow72]; dans le milieu nucléaire, une renormalisation de 0.77 est nécessaire;
- $S$  est l'opérateur tensoriel de spin total.

Le terme provenant de l'opérateur  $T_{\pm}$  est le terme de Fermi et celui provenant de l'opérateur  $\mathbf{2ST}_{\pm}$  est le terme de Gamow-Teller.

### H.4.2 Transitions premières interdites

Dans le cas des transitions premières interdites, le facteur de forme dépend de l'énergie et vaut [Tow72] :

$$C(W) = k(1 + aW + bW^{-1} + cW^2).$$

Les coefficients  $k$ ,  $ka$ ,  $kb$  et  $kc$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} k &= \zeta_0^2 + \frac{1}{9}w^2 + \zeta_1^2 + \frac{1}{9}(x+u)^2 \\ &\quad - \frac{4}{9}\mu_1\gamma_1u(x+u) + \frac{1}{18}W_0^2(2x+u)^2 \\ &\quad - \frac{1}{18}\lambda_2(2x+u)^2 + \frac{1}{12}z^2(W_0^2 - \lambda_2) \\ ka &= -\frac{4}{3}uY - \frac{1}{9}W_0(4x^2 + 5u^2) - \frac{1}{6}z^2W_0 \\ kb &= \frac{2}{3}\mu_1\gamma_1(-\zeta_0w + \zeta_1(x+u)) \\ kc &= \frac{1}{18}(8u^2 + (2x+u)^2 + \lambda_2(2x-u)^2) + \frac{1}{12}(z^2(1 + \lambda_2)) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} V &= \xi'v + \xi u' \\ Y &= \xi'y - \xi(u' + x') \\ \zeta_0 &= V + \frac{1}{3}wW_0 \\ \zeta_1 &= Y + \frac{1}{3}(u - x)W_0 . \end{aligned}$$

$\xi = \alpha Z/2R$  est le potentiel électrique au centre du noyau en le supposant comme une sphère uniformément chargée de rayon  $R$ .  $\mu_1$  et  $\lambda_2$  sont des fonctions pouvant se calculer à partir de l'équation de Dirac, mais pour des noyaux légers dans le domaine énergétique considéré, elles valent pratiquement 1.

Les termes  $x, x', u, u', w, w', z, \xi'v, \xi'y$  dépendent directement des éléments de matrice faisant intervenir  $|\Psi_i\rangle$  et  $|\Psi_f\rangle$  :

$$\begin{aligned} w &= C\lambda\sqrt{3}\langle\Psi_f||ir[\mathbf{C}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]^0\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ x &= -C\langle\Psi_f||ir\mathbf{C}_1\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ u &= C\lambda\sqrt{2}\langle\Psi_f||ir[\mathbf{C}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]^1\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ z &= -2C\lambda\langle\Psi_f||ir[\mathbf{C}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]^2\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ w' &= C\lambda\sqrt{3}\langle\Psi_f||ir\frac{2}{3}I(1,1,1,1,r)[\mathbf{C}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]^0\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ x' &= -C\langle\Psi_f||ir\frac{2}{3}I(1,1,1,1,r)\mathbf{C}_1\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ u' &= C\lambda\sqrt{2}\langle\Psi_f||ir\frac{2}{3}I(1,1,1,1,r)[\mathbf{C}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]^1\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ \xi'v &= \lambda C\langle\Psi_f||\gamma_5\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ &= -\lambda C\sqrt{3}\langle\Psi_f||\frac{i}{M}[\boldsymbol{\sigma} \times \nabla]^0\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ \xi'y &= -C\langle\Psi_f||\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle \\ &= -C\langle\Psi_f||\frac{i}{M}\nabla\boldsymbol{\tau}^1||\Psi_i\rangle , \end{aligned}$$

où :

- $C$  est un coefficient de double réduction en  $J$  et  $T$  :

$$C = \frac{\langle T_i T_{z_i} 1 \pm 1 | T_f T_{z_f} \rangle}{\sqrt{2(2J_i + 1)(2T_f + 1)}} .$$

Bien que ces formules demandent que  $|\Psi_i\rangle$  et  $|\Psi_f\rangle$  aient un bon isospin, on peut les généraliser au cas où ce n'est pas le cas; pour cela, il faut appliquer le théorème de Wigner-Eckhart aux éléments de matrice pour qu'ils ne soient plus réduits en  $T$  et remplacer  $\boldsymbol{\tau}$  par  $\tau_{\pm}$ , suivant qu'on a une transition  $\beta^+$  ou  $\beta^-$  ;

- $\lambda = -g_A/g_V = -1.26$ . Pour les transitions  $\beta^+$ , il faut remplacer  $\lambda$  par  $-\lambda$ .
- $\mathbf{C}_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\mathbf{Y}_1$ , avec  $\mathbf{Y}_1$  le tenseur d'harmonique sphérique de rang 1;

- $I(1,1,1,1,r)$  prend en compte la distribution de charge du noyau fils. On le calcule en approximant cette distribution par celle d'une sphère uniformément chargée de rayon  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}I(1,1,1,1,r) &= 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{r}{R} \right)^2, & 0 \leq r \leq R \\ &= \frac{R}{r} - \frac{1}{5} \left( \frac{R}{r} \right)^3, & r \geq R. \end{aligned}$$

Pour  $\xi'v$  et  $\xi'y$ , on a utilisé les approximations non relativistes de  $\gamma_5$  et  $\alpha$ , soit :

$$\begin{aligned} \gamma_5 &\rightarrow -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}}{M} \\ \boldsymbol{\alpha} &\rightarrow \frac{\mathbf{p}}{M}. \end{aligned}$$

De plus, pour prendre en compte les courants de méson, principalement l'échange d'un pion, on multiplie  $\xi'v$  par 1.61, valeur déterminée expérimentalement pour  $A \sim 16$  [Bor93].

## H.5 Calcul des éléments de matrice

### H.5.1 Traitement dans SMEC

D'après l'équation (2.62), les ondes  $|\Psi_i\rangle$  et  $|\Psi_f\rangle$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle &= \sum_n c_n \left[ |\Phi_n\rangle + |\omega_n^{(+)}\rangle \right] \\ |\Psi_f\rangle &= \sum_{n'} c_{n'} \left[ |\Phi_{n'}\rangle + |\omega_{n'}^{(+)}\rangle \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, avec  $B$  un opérateur intervenant dans les transitions  $\beta$  premières interdites (voir section précédente):

$$\langle \Psi_f | B | \Psi_i \rangle = \sum_{n,n'} c_n c_{n'} \left[ \langle \Phi_{n'} | B | \Phi_n \rangle + \langle \Phi_{n'} | B | \omega_n^{(+)} \rangle + \langle \omega_{n'}^{(+)} | B | \Phi_n \rangle + \langle \omega_{n'}^{(+)} | B | \omega_n^{(+)} \rangle \right].$$

$|\Phi_n\rangle$  est une combinaison linéaire de déterminants de Slater<sup>1</sup>:

$$|\Phi_n\rangle = \sum_{k_n} a_{k_n} |DS_{k_n}\rangle.$$

$|\omega_n^{(+)}\rangle$  est définie par :

$$|\omega_n^{(+)}\rangle = \sum_c |c, \omega_c^{(+)}\rangle,$$

où  $c$  est un canal d'entrée (voir (2.36)) et  $|\omega_c^{(+)}\rangle$  est l'onde radiale associée à la particule dans le continuum.

Donc :

$$\begin{aligned} |c, \omega_c^{(+)}\rangle &= \left( |T\rangle^{J_T} \otimes |\omega_c^{(+)}\rangle^j \right)_M^J \\ &= \sum_{M_T+m=M} \langle J_T M_T j m | J M \rangle |T\rangle_{M_T}^{J_T} |\omega_c^{(+)}\rangle_m^j, \end{aligned}$$

---

1. C'est valable aussi pour  $|\Phi_{n'}\rangle$ . Même chose après pour  $|\omega_{n'}^{(+)}\rangle$ .

où  $T$  est la cible, et  $j$  et  $m$  se rapportent aux projectile, tandis que  $J$  et  $M$  sont les nombres quantiques de l'état couplé cible+particule. Par conséquent,  $|\omega_n^{(+)}\rangle$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de déterminants de Slater, en sachant qu'un état de chaque déterminant de Slater se trouve dans le continuum.

Ainsi, le calcul de  $\langle \Psi_f | B | \Psi_i \rangle$  demande uniquement de connaître les éléments de matrice  $\langle DS_f | B | DS_i \rangle$ , où  $|DS_i\rangle$  et  $|DS_f\rangle$  sont des déterminants de Slater avec au plus une particule dans le continuum. Enfin, il suffit d'appliquer le théorème de Wigner-Eckhart en  $J$  et  $T$  pour obtenir  $\langle \Psi_f ||| B ||| \Psi_i \rangle$ .

## H.5.2 Éléments de matrice de particules indépendantes

Comme  $B$  est un opérateur à un corps, l'élément de matrice à  $A$  corps  $\langle DS_f | B | DS_i \rangle$  vaut:

1.  $(-1)^\varphi \langle \phi_f | B | \phi_i \rangle$  si  $|DS_f\rangle = (-1)^{\varphi_1} |v \phi_f\rangle$  et  $|DS_i\rangle = (-1)^{\varphi_2} |v \phi_i\rangle$ , où  $|v\rangle$  est un déterminant de Slater à  $A-1$  nucléons,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des phases de réarrangement ( $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ), et où  $\phi_i$  et  $\phi_f$  sont des états à un corps (voir (2.14)), qui doivent être différents.
2. 0 sinon.

Notons que les éléments de matrice diagonaux  $\langle DS | B | DS \rangle$  sont nécessairement nuls car  $B$  inverse la parité dans une transition  $\beta$  première interdite.

Les éléments de matrice à un corps intervenant dans le calcul sont les suivants:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_f ||| F(r) \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\tau}^1 ||| \phi_i \rangle &= -i^{l_i - l_f + 1} (-1)^{j_f - \frac{1}{2}} \sqrt{6(2j_i + 1)(2j_f + 1)} \\
&\times \begin{pmatrix} j_f & 1 & j_i \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left( \frac{1 + (-1)^{l_i + l_f + 1}}{2} \right) \\
&\times \int_0^{+\infty} u_f(r) F(r) u_i(r) dr \\
\langle \phi_f ||| F(r) [\mathbf{C}_1 \times \boldsymbol{\sigma}]^k \boldsymbol{\tau}^1 ||| \phi_i \rangle &= 6 \cdot i^{l_i - l_f + 1} \sqrt{(2j_i + 1)(2j_f + 1)(2k + 1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ l_i & \frac{1}{2} & j_i \\ 1 & 1 & k \end{Bmatrix} (-1)^{l_f} \sqrt{(2l_i + 1)(2l_f + 1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} l_f & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \int_0^{+\infty} u_f(r) F(r) u_i(r) dr \\
\langle \phi_f ||| \frac{i}{M} [\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla}]^0 \boldsymbol{\tau}^1 ||| \phi_i \rangle &= \lambda_e^2 \cdot m_e \cdot 6 \cdot i^{l_i - l_f + 1} \sqrt{(2j_i + 1)(2j_f + 1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ l_i & \frac{1}{2} & j_i \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} (-1)^{l_f} \sqrt{(2l_i + 1)(2l_f + 1)} \\
&\times \begin{Bmatrix} l_f & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \\
&\times \int_0^{+\infty} u_f \left[ u_i'(r) + \left( \frac{l_i(l_i + 1) - l_f(l_f + 1)}{2r} \right) u_i(r) \right] dr \\
\langle \phi_f ||| \frac{i}{M} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\tau}^1 ||| \phi_i \rangle &= \lambda_e^2 \cdot m_e \cdot -i^{l_i - l_f + 1} (-1)^{j_f - \frac{1}{2}} \sqrt{6(2j_i + 1)(2j_f + 1)} \\
&\times \begin{pmatrix} j_f & 1 & j_i \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1 + (-1)^{l_i + l_f + 1}}{2}
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^{+\infty} u_f \left[ u_i'(r) + \left( \frac{l_i(l_i + 1) - l_f(l_f + 1)}{2r} \right) u_i(r) \right] dr ,$$

où :

- $F(r) = ir$  ou  $F(r) = ir \frac{2}{3} I(1,1,1,1,r)$ ;
- $k$  vaut 0, 1 ou 2;
- $\lambda_e$  est la longueur d'onde de Compton de l'électron divisée par  $2\pi$  (fm);
- $m_e$  est la masse de l'électron (en u.m.a.).



# Bibliographie

- [Bar71] H.W. Barz, I. Rotter, J. Höhn, Phys. Lett. **37 B** (1971) 4.
- [Bar77a] H.W. Barz, I. Rotter, J. Höhn, Nucl. Phys. **A275** (1977) 111.
- [Bar77b] H.W. Barz, I. Rotter, J. Höhn, Nucl. Phys. **A307** (1977) 285.
- [Bay77] D. Baye, P.H. Heenen, M. Libert-Heinemann, Nucl. Phys. **A291** (1977) 230.
- [Bay83] D. Baye, P. Descouvemont, Nucl. Phys. **A407** (1983) 77.
- [Beh71] H. Behrens, W. Bühring, Nucl. Phys. **A162** (1971) 111.
- [Bel87] S.T. Belyaev, A.V. Smirnov, S.V. Tolonnikov, S.A. Fayans, Sov. J. Nucl. Phys. **45** (1987) 783.
- [Ben99] K. Bennaceur, F. Nowacki, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. **A 651** (1999) 289.
- [Ben00a] K. Bennaceur, F. Nowacki, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. **A 671** (2000) 203.
- [Ben00b] K. Bennaceur, N. Michel, F. Nowacki, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, Phys. Lett. B **488** (2000) 75.
- [Ber67] T. Berggren, Nucl. Phys. **A109** (1967) 265.
- [Ber92a] T. Berggren, P. Lind, Phys. Rev. C **47** (1992) 768.
- [Ber92b] G.F. Bertsch, H. Esbensen, Nucl. Phys. **A 542**, (1992) 310.
- [Ber96] C.A. Bertulani, Z. Phys. A **356(3)** (1996) 293.
- [Bet02] R.Id. Betan, R.J. Liotta, N. Sandulescu, T. Vertse, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 042501.
- [Bet56] H.A. Bethe, Phys. Rev. **103** (1956) 1353.
- [Bla79] J.M. Blatt, V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* Chap II, Chap XIII, Springer-Verlag (New York-Heidelberg-Berlin), 1979.
- [Blu65] R.A. Blue, W. Haeberli. Phys. Rev. B **137** (1965) 284.
- [Boh75] Å. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear Structure* (Benjamin, Reading, MA) 1975, Vol. I et II.
- [Bor93] M.J.G. Borge *et al.*, Phys. Lett. B **317** (1993) 25.
- [Bre59] W. Brenig, Nucl. Phys. **13** (1959) 333.
- [Bro88] B.A. Brown, B.H. Wildenthal, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **38** (1988) 29.
- [Bru58] K.A. Brueckner, L. Gammel, Phys. Rev. **109** (1958) 1023.
- [Bru60a] K.A. Brueckner, D.T. Goldman, Phys. Rev. **117** (1960) 207.
- [Bru60b] K.A. Brueckner, J.L. Gammel, J.T. Kubis Phys. Rev. **118** (1960) 1438.
- [Bru62] K.A. Brueckner, D.R. Bates, *Quantum Theory*, Vol. III, Chap. VIII, Academic Press (New York, London), 1962.
- [Bru77] P.J. Brussaard and P.W.M. Glaudemans, *Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy*, North-Holland Publishing Company, 1977.

- [Bul80] A. Bulgac FT-194-1980, Central Institute of Physics, Bucharest, 1980, nucl-th/9907088.
- [Cau98] E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, J. Retamosa, Phys Rev. C **58** (1998) 2033.
- [Cha92] A.E. Champagne, M. Wiescher, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **42** (1992) 29.
- [Chr61] R.F. Christy, I. Duck, Nucl. Phys. **33** (1980) 177.
- [Cok73] W.R. Coker, Phys. Rev. C **9** (1973) 784.
- [Cso94] A. Csótó, Phys. Rev. C **49** (1994) 3035.
- [Cur89] P. Curutchet, T. Vertse, R.J. Liotta, Phys. Rev. C **39**, (1989) 1020.
- [Dav75] E.R. Davidson, J. Comp. Phys., **17** (1975) 87.
- [Dec80] J. Dechargé, D. Gogny, Phys. Rev. C **21** (1980) 1568.
- [Dec81] J. Dechargé, M. Girod, D. Gogny, B. Grammaticos, Nucl. Phys. **A358** (1981) 203c.
- [Dob84] J. Dobaczewski, H. Flocard, J. Treiner, Nucl. Phys. **A 422** (1984) 878.
- [Dob96] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, T.R. Werner, J.F. Berger, C.R. Chinn, J. Dechargé, Phys. Rev. C **53** (1996) 2809.
- [Dob98] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **A 356** (1998) 2007.
- [Duf96] M. Dufour, A.P. Zuker, Phys. Rev. C **54** (1996) 1641.
- [Duk02] J. Dukelski, S. Pittel, S.S. Dimitrova, M.V. Stoitsov, Phys.Rev. C **65** (2002) 054319.
- [Dus92] G.G. Dussel, R.J. Liotta, H. Sofia, T. Vertse Phys. Rev. C **46** (1992) 558.
- [Ehr51] J.B. Ehrman, Phys. Rev. **81** (1951) 412.
- [Eng02] T. Engeland, M. Hjorth-Jensen, E. Osnes, Nucl.Phys. **A701** (2002) 416.
- [Eva61] R.D. Evans, *Le Noyau Atomique* p.76, Dunod, Paris, 1961.
- [Fan61] U. Fano, Phys. Rev. **124** (1961) 1866.
- [Fes62] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **5** (1958) 357; **19** (1962) 287.
- [Fla88] B. Fladt, K.W. Schmid, F. Grümmer, Ann. Phys. (NY) **184** (1988) 254,300.
- [For96] S. Fortunato, A. Insolia, R.J. Liotta, T. Vertse, Phys. Rev. C **54** (1996) 3279.
- [Fra64] W.R. Frazer, A.W. Hendry, Phys. Rev. **B 134** (1964) 1307
- [Gam28] G.A. Gamow, Zs. f. Phys., **51** (1928) 204; *ibid.***52** (1928) 510.
- [Gog73] D. Gogny, dans *Proceedings of the International Conference on Nuclear Physics München 1973*, édité par J. de Boer et H.J. Mang, North-Holland (Amsterdam), 1973.
- [Gog75] D. Gogny, *Nuclear Self-Consistent fields*, G. Ripka et M. Porneuf, North-Holland, (Amsterdam), 1975.
- [Gop50] M. Göppert-Mayer, Phys. Rev. **78** (1950) 16.
- [Gra01] M. Grasso, N. Sandulescu, N. Van Giai, R.J. Liotta, Phys. Rev. C **64** (2001) 064321
- [Gya71] B. Gyarmati, T. Vertse, Nucl. Phys. **A 160** (1971) 523.
- [Hal75] D.W. Halderson, P. Goldhammer, Phys. Rev. C **11** (1975) 237.
- [Hal79] D. Halderson, R.J. Philpott, Nucl. Phys. **A321** (1979) 295.
- [Hal81] D. Halderson, R.J. Philpott, Nucl. Phys. **A359** (1981) 365.
- [Hax49] O. Haxel, J.H.D. Jensen et H.E. Suess, Phys. Rev. **75** (1949) 1766.
- [Hol00] A. Holt, T. Engeland, M. Hjorth-Jensen, E. Osnes, Phys. Rev. C **61** (2000) 064318.

- [Jac70] D.F. Jackson, *Nuclear Reactions*, Methuen & Co Ltd (London), 1970.
- [Kir74] M.W. Kirson, Ann. Phys. (N.Y.) **82** (1974) 345.
- [Kim87] B.T. Kim, K.H. Kim, M.H. Park, Phys. Rev. C **35** (1987) 363.
- [Kon69] E.J. Konopinski, M.E. Rose, *Alpha, beta and gamma-ray spectroscopy*, Vol. 1, K. Siegbahn, North-Holland (Amsterdam), Chap. XXIII, 1969.
- [Kor94] A.A. Korshennikov *et al.*, Phys. Lett. B **326** (1994) 31.
- [Kor01] A.A. Korshennikov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 092501.
- [Kru00] A.T. Kruppa, B. Barmore, W. Nazarewicz, T. Vertse, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 4549.
- [Kuk89] V.I. Kukulin, V.M. Krasnopol'sky, J. Horáček, *Theory of Resonances*, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht-Boston-London), 1989.
- [Kur56] D. Kurath, Phys. Rev. **101** (1956) 216.
- [Lan55] A.M. Lane, Proc. Phys. Soc. **A 68** (1955) 189; *ibid.* 197.
- [Lan58] A.M. Lane, R.G. Thomas, Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 257.
- [Lin93] P. Lind, Phys. Rev. C **47** (1993) 1903.
- [Lin94] P. Lind, R.J. Liotta, E. Maglione, T. Vertse, Z. Phys. **A347** (1994) 231.
- [Lio96] R.J. Liotta, E. Maglione, N. Sandulescu, T. Vertse, Phys. Lett. B **367** (1996) 1.
- [Mac64] W.M. Macdonald, Nucl. Phys. **54** (1964) 393; *ibid.* **56** (1964) 636.
- [Mah69] C. Mahaux, H.A. Weidenmüller, *Shell Model Approach to Nuclear Reactions*, North Holland (Amsterdam), 1969.
- [Mar02] F.M. Marqués *et al.*, Phys. Rev. C **65** (2002) 044006.
- [Mes95] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris, 1995.
- [Mic01] N. Michel, J. Okołowicz, M. Płoszajczak, *The Nuclear Many-Body Problem 2001* p.69, W. Nazarewicz, D. Vretenar, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [Mic02a] N. Michel, J. Okołowicz, F. Nowacki, M. Płoszajczak, Nucl. Phys. **A 703** (2002) 202.
- [Mic02b] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, K. Bennaceur, Phys. Rev. Lett. **89**, (2002) 042502.
- [Mic03] N. Michel, W. Nazarewicz, M. Płoszajczak, J. Okołowicz, soumis à publication.
- [Mil97] D.J. Millener, Phys. Rev. C **55** R1633 (1997).
- [Mor53] P.M. Morse, H.F. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Chap. 6.3 McGraw-Hill Book Company (New York, Toronto, London) 1953.
- [Mor97] R. Morlock *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3837.
- [New66] R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles (Second Edition)*, Springer-Verlag, (New York, Heidelberg, Berlin) 1966, 1982.
- [Num01] S. Nummela *et al.*, Phys. Rev. C **63** (2001) 044316.
- [Ogl89] A.A. Oglobin, Y.E. Penionzhkevich, *Treatise on Heavy-Ion Science, Nuclei Far From Stability*, Vol. 8, p.261, D.A. Bromley (Plenum, New York), 1989.
- [Ost94] A.N. Ostrowski *et al.*, Phys. Lett. B **338** (1994) 13.
- [Oza98] A. Ozawa *et al.*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **24** (1998) 143.
- [Phi75] R.J. Philpott, Nucl. Phys. **A243** (1975) 260.
- [Phi77] R.J. Philpott, Nucl. Phys. **A289** (1977) 109.
- [Pic97] R. Pichler, H. Oberhummer, A. Csótó, S.A. Moszkowski, Nucl. Phys. **A 618** (1997) 55.

- [Pov00] A. Poves, Large scale shell model calculations along the  $N=Z$  line, Pingst 2000 International Workshop, Lund (Suède), <http://pingst2000.kosufy.lu.se/proceedings/poves.ps>.
- [Pre92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C* Chap. 16.4-16.5; *ibid.* Chap. 11.7 Cambridge University Press 1988-1992.
- [Ric91] W.A. Richter, M.G. Vandermerwe, R.E. Julis, B.A. Brown, Nucl. Phys. **523** (1991) 325.
- [Rin80] P. Ring, P. Schuck *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag (New York) 1980, Chap. VII; *ibid.* Chap. IV.
- [Rod61] L.S. Rodberg, Phys. Rev. **124** (1961) 210.
- [Rom63] W.J. Romo, Nucl. Phys. **A 116** (1968) 618.
- [Rot91] , I. Rotter, Rep. Prog. Phys. **54** (1991) 635.
- [Sal62] S.R. Salisbury, G. Haradie, L. Oppliger, R. Dangle, Phys. Rev. **126** (1962) 2143.
- [Sha74] A. de Shalit, H. Feshbach *Theoretical Nuclear Physics* Vol. I, Chap. III (New York) 1974.
- [Sil64] M.G. Silbert, J.C. Hopkins, Phys. Rev. **B 16** (1964) 134.
- [Sto98a] M.V. Stoitsov, P. Ring, D. Vretenar, G.A. Lalazissis, Phys. Rev. C **58** (1998) 2086.
- [Sto98b] M.V. Stoitsov, W. Nazarewicz, S. Pittel, Phys. Rev. C **58** (1998) 2092.
- [Tan89] I. Tanihata, *Treatise on Heavy-Ion Science, Nuclei Far From Stability*, Vol. 8, D.A. Bromley, Plenum, New York, 1989, p.143.
- [Ter97] J. Terasaki, H. Flocard, P.H. Heenen, P. Bonche, Nucl. Phys. **A621** (1997) 706.
- [Tho86] I.J. Thompson, A.R. Barnett, Jour. Comp. Phys. **64**, (1986) 490.
- [Til93] D.R. Tilley, H.R. Weller, C.M. Cheves, Nucl. Phys. **564** (1993) 1.
- [Tom63] T.A. Tombrello, P.D. Parker, Phys. Rev. **131** (1963) 2582.
- [Tow72] I.S. Towner, J.C. Hardy, Nucl. Phys. **A179** (1972) 489.
- [Val82] L. Valentin, *Physique Subatomique : Développement, Noyaux et particules*, Appendice I, Hermann, 1982.
- [Ver82] T. Vertse, K.F. Pál, Z. Balogh, Comp. Phys. Comm. **27** (1982) 309.
- [Ver87] T. Vertse, P. Curutchet, R.J. Liotta, *Lecture Notes in Physics* **325** p. 179, Springer-Verlag (Berlin), 1987.
- [Ver95] T. Vertse, R.J. Liotta, E. Maglione, Nucl. Phys. **A584** (1995) 13.
- [Wan70] W.L. Wang, C.M. Shakin, Phys. Lett. **32 B** (1970) 421.
- [War92] E.K. Warburton, B.A. Brown, D.J. Millener, Phys. Lett. **B 293** (1992) 7.
- [War94] E.K. Warburton, I.S. Towner, B.A. Brown, Phys. Rev. C **49** (1994) 824.
- [Whi98] S.R. White, Phys. Rep. **301** (1998) 187.
- [Wil57] D.H. Wilkinson *Proc. Robert A. Welsh Foundation Conf. Chemical Research. I. The Structure of the Nucleus* p.13, Houston, Texas (1957).
- [Wil65] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press (Oxford) 1965.
- [Wil78] D.H. Wilkinson, *Ecole d'été de Physique Théorique*, Session XXX, North-Holland (Amsterdam), 1978.
- [Yos86] S. Yoshida, S. Adashi, Z. Phys. **A325** (1986) 441.
- [Zel61] Ya.B. Zel'dovich, Sov. Phys. JETP **12** (1961) 542.
- [Zuk68] A.P. Zuker, B. Buck, J.B. Mc Grory, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 39.

[Zve85] M.V. Zverev, E.E. Saperstein, Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985) 683.



## Résumé :

Les résultats expérimentaux récents concernant les noyaux aux limites de la stabilité ont motivé la recherche de nouveaux modèles nucléaires.

Pour cela, on a développé le modèle en couches avec couplage au continuum, qui permet de prendre en compte à la fois les corrélations entre nucléons et l'influence du continuum. Ce modèle a été utilisé dans ce travail pour l'étude des spectres des noyaux  $^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{O}$ . Aussi, on peut calculer des sections efficaces de capture radiative et de diffusion élastique, qu'on a appliqué aux réactions  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  et  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$ . Cette dernière réaction a un intérêt astrophysique car elle joue un rôle important dans la formation des éléments légers dans les étoiles. On a de plus calculé les transitions  $\beta$  premières interdites des réactions  $^{17}\text{Ne} \rightarrow ^{17}\text{F}$  et  $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$ . Le formalisme étudié permet en effet de considérer avec le même hamiltonien les différentes observables de structure et de réaction.

Aussi, et c'est une première, on a introduit un nouveau modèle susceptible de donner de nouvelles informations sur les noyaux peu liés ou résonnants, le modèle en couches avec états de Gamow. Ce modèle est une généralisation du modèle en couche standard, car sa base est constituée d'états liés, résonnants et de diffusion. De plus, l'émission de plusieurs particules corrélés peut se faire, contrairement au modèle en couches avec couplage au continuum. On a étudié avec ce modèle les spectres des noyaux issus des chaînes d'isotopes d'oxygène de  $^{17}\text{O}$  à  $^{22}\text{O}$  et d'hélium de  $^5\text{He}$  à  $^9\text{He}$ , où le continuum a un rôle respectivement non négligeable et crucial. Aussi, on a considéré les transitions électromagnétiques et les densités de particules de valence de ces isotopes pour ces mêmes chaînes. On a pu montrer que ce modèle est utilisable d'un point de vue pratique, ce qui est intéressant car il possède la généralité du modèle en couches et n'a aucune restriction du nombre de particules dans le continuum.

**Mots-clés : structure nucléaire, modèles en couches (physique nucléaire), décroissance radioactive, sections efficaces (physique nucléaire), transitions radiatives, interactions faibles (physique nucléaire), isotopes d'oxygènes, isotopes d'hélium.**

## Description of weakly bound nuclei with the Shell Model Embedded in the Continuum

### Abstract:

The new experimental results about nuclei at the limits of stability have motivated the search for new nuclear models. In this work, we have further applied the Shell Model Embedded in the Continuum, which takes into account both correlations between the nucleons and the coupling to the non-resonant continuum. This model has been used to study the spectra of  $^{17}\text{F}$  and  $^{17}\text{O}$ , as well as to calculate  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$  radiative capture cross section and  $^{16}\text{O}(p,p)^{16}\text{O}$  elastic scattering cross section. The reaction  $^{16}\text{O}(p,\gamma)^{17}\text{F}$  is of astrophysical relevance, as it plays an important role in the formation of light elements in stars. The first forbidden  $\beta$  transitions in the mirror systems  $^{17}\text{Ne} \rightarrow ^{17}\text{F}$  and  $^{17}\text{N} \rightarrow ^{17}\text{O}$  have also been investigated. Indeed, using the same Hamiltonian, one can investigate in the Shell Model Embedded in the Continuum various structure and reaction observables.

In this work, we have also introduced the Gamow Shell Model for the description of weakly bound or particle unstable nuclei. This model is a generalization of the usual Shell Model, as its complete basis consists of bound, resonant and scattering states. Furthermore, contrary to the Shell Model Embedded in the Continuum, the emission of several correlated particles can be described. The spectra of both the oxygen isotopes from  $^{17}\text{O}$  to  $^{22}\text{O}$ , as well as the helium isotopes from  $^5\text{He}$  to  $^9\text{He}$  have been studied, where the continuum is respectively non-negligible and crucial. The electromagnetic transitions and valence particle densities have also been considered. We have shown that this model can be used in practical applications, which is an interesting feature as it has the generality of the Shell Model and at the same time has no restriction concerning the number of particles in the continuum.

**Keywords: nuclear structure, nuclear shell theory, radioactive decay, cross sections (nuclear physics), radiative transitions, weak interactions (nuclear physics), oxygen isotopes, helium isotopes.**