HAL
open science

Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal

Clothilde Melot

To cite this version:

Clothilde Melot. Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal. Mathématiques [math]. Université Paris XII Val de Marne, 2002. Français. NNT : . tel-00002349

HAL Id: tel-00002349

https://theses.hal.science/tel-00002349v1

Submitted on 25 Feb 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Clothilde Mélot

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XII

Spécialité : Mathématiques

Titre : *Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal.*

Soutenue le 10 Décembre 2002 devant le jury composé de

M.	**Albert COHEN**	**Examinateur**
M.	**Patrick FLANDRIN**	**Examinateur**
M.	**Yanick HEURTEAUX**	**Rapporteur**
M.	**Stéphane JAFFARD**	**Directeur de thèse**
M.	**Jacques LEVY-VEHEL**	**Rapporteur**
M.	**Yves MEYER**	**Président du jury**

Table des matières

Introduction **3**

1 Préliminaires **7**

1.1 Notion de régularité 7

1.1.1 Régularité hölderienne ponctuelle et uniforme 7

1.1.2 Comportement oscillant : exposants de chirp et d'oscillation 9

1.1.3 Comportement en moyenne : exposant de Calderon-Zygmund 12

1.2 Analyse multifractale 17

1.2.1 Notion de dimension 18

1.2.2 Formalisme multifractal 21

1.3 Ondelettes 25

1.3.1 Espaces de régularité hölderienne 27

1.3.2 Espaces de régularité globale 32

1.3.3 Espaces de Xu 32

2 Singularités oscillantes **47**

2.1 Introduction 47

2.2 Majoration du spectre de singularités oscillantes 60

2.3 Cas $B_p^{s,q}$ avec $s - \frac{d}{p} > 0$ 66

2.3.1 Singularités oscillantes dans la fonction de saturation . . 66

2.3.2 Singularités oscillantes dans quasi-toutes fonctions 71

2.3.3 Estimation de $d(h, \beta)$ 75

2.4 Cas $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ si $s - \frac{d}{p} < 0$ et $s > \gamma$ 79
2.4.1 Singularités oscillantes dans la fonction de saturation . . 79
2.4.2 Singularités oscillantes dans quasi-toutes fonctions 81
2.4.3 Estimation de $d(h, \beta)$ 83
2.5 Cas d'une fonction d'échelle arbitraire 87
2.5.1 Singularités oscillantes dans la fonction de saturation . . 88
2.5.2 Singularités oscillantes dans quasi-toutes fonctions 95
2.5.3 Estimation de $d(h, \beta)$ 97
2.6 Optimalité de la majoration 109

3 Vers moins de régularité 121
3.1 Introduction 121
3.2 Caractérisation par ondelettes des $T_p^u(x_0)$ 130
3.2.1 $\dot{X}_0^{s,-s,p,1} \subset T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$. 131
3.2.2 Inclusion réciproque 143
3.3 p-exposant et coefficients en ondelettes 152
3.4 Majoration du spectre de singularités T_p^u 159

4 Une étude de frontière fractale 173
4.1 Introduction 173
4.2 Exposant de Hölder et p-exposant 175
4.3 Notion de chirp 180
4.4 Algorithme de décomposition 185

Introduction

L'approche multifractale a été initiée avec les modèles de cascades multiplicatives de B.Mandelbrot, [25] et [26], pour la dissipation de l'énergie dans le contexte de la turbulence pleinement développée.

Elle s'est développée ensuite à partir de l'étude de mesures de vitesses d'écoulement turbulent dans les années 80 .

La vitesse dans un écoulement turbulent a une structure très complexe (cf [14]). En particulier des comportements irréguliers qui se produisent en des endroits très "rares" au sens de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^3$ ont une importance déterminante dans l'évolution du phénomène turbulent.

Ainsi une approche "traitement du signal " a été développée, qui consiste à étudier la régularité du signal de vitesse v. On cherche à déterminer en x_0 la loi de variation de la vitesse v, c'est à dire le meilleur exposant, dit "exposant de Hölder", $h(x_0)$ tel que, au voisinage de x_0,

$$|v(x_0 + y) - v(x_0)| \sim |y|^{h(x_0)}.$$

Et on s'intéresse pour h fixé à l'ensemble S_h des points x_0 pour lesquels l'exposant $h(x_0)$ a la valeur fixée h. Ces ensembles, dans le cas de signaux comme ceux d'un signal de vitesse de turbulence, peuvent être de mesure de Lebesgue nulle.

Cependant si ils ne sont pas significatifs en terme de mesure, on peut chercher à savoir de quelle manière ils remplissent l'espace, et c'est alors leur dimension qu'on veut calculer. Une courbe est à priori de dimension topologique

1, et une surface de dimension topologique 2, mais que dire d'une courbe de $\mathbb{R}^2$ qui a son graphe inscrit dans une surface finie, est d'une longueur infinie, et remplit l'espace presque comme une surface ? On ne réussira pas à la recouvrir par des segments dont la longueur totale serait finie. La dimension va donner la taille du recouvrement optimal qu'il faudrait appliquer pour donner une juste idée de "l'étalement" de l'ensemble.

Ainsi les physiciens ont cherché à calculer la dimension de Hausdorff $d(h)$ des ensembles S_h à h fixé. Ils ont appelé la fonction $h \mapsto d(h)$ spectre de singularités. En utilisant la convention que $d(h) = -\infty$ si $S_h = \emptyset$ (ou autrement dit si h n'est l'exposant de Hölder en aucun point x_0), une fonction multifractale est une fonction pour laquelle $d(h)$ est finie pour deux h différents au moins.

Le calcul direct du spectre de singularité pour des signaux réels s'avère difficile à mener numériquement étant donné le nombre infini de dimensions à calculer.

Une formule, appelée "formalisme multifractal" a été alors mise au point par Parisi et Frisch (cf [13]) avec l'objectif de déterminer ce spectre. Elle consiste à évaluer la "fonction de structure"

$$S_q(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |v(x+y) - v(x)|^q dx$$

Si quand y tend vers 0, on a $S_q(y) \sim |y|^{\zeta(q)}$. La fonction ζ est concave.

$$d(h) = \inf_q (qh - \zeta(q) + d).$$

Cette formule prise telle quelle est encore difficilement applicable sur les signaux réels. Aussi l'équipe d'A.Arnéodo au C.R.P.P de Bordeaux a proposé des méthodes numériques stables à base d'ondelettes pour le formalisme multifractal. Ces méthodes ont entre autre permis de mettre en évidence que la vitesse d'un écoulement turbulent est bien multifractale (cf [2]).

Cependant le formalisme multifractal est au départ une formule heuristique, et n'est pas valide en toute généralité. Un vaste champ de recherche

mathématique a ainsi été ouvert autour de la question des conditions de validité de la formule.

Cette thèse s'articule ainsi autour de la problématique du lien entre régularité et formalisme multifractal.

Le premier chapitre présente des rappels sur différents critères de régularités et leurs caractérisation par transformée en ondelettes, qui sera notre principal outil d'analyse.

Le deuxième chapitre concerne le travail de thèse proprement dit et aborde cette problématique en examinant le lien entre non-validité du formalisme multifractal et singularités oscillantes.

Il semblait au départ avec les travaux de S.Jaffard et M.Ben Slimane sur les fonctions autosimilaires que la validité du formalisme multifractal était liée à une structure précise de la fonction étudiée (autosimilarité exacte ou approchée, en un sens déterministe ou stochastique). Mais S.Jaffard dans [16] démontre que, pour les fonctions de certains espaces Sobolev la formule est vraie au sens de Baire, ou "quasi-surement" (c'est dire dans une intersection dénombrable d'ouverts denses) alors qu'elle doit être légèrement modifiée pour les fonctions d'intersection quelconque d'espaces de Sobolev.

D'autre part, on savait déjà, voir [3] et [19], qu'une cause possible de non-validité du formalisme multifractal est la présence de singularités oscillantes, (points où la fonction se comporte localement comme $x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta})$).

Nous montrons dans ce chapitre que, lorsque le formalisme multifractal n'est pas vérifié quasi-surement, ce phénomène en est une des causes. Pour quasi-toutes fonctions, chaque ensemble S_h pour lequel le formalisme multifractal ne donne pas la bonne dimension, contient un ensemble de points, où la fonction a un comportement oscillant, de même dimension que S_h lui-même.

De plus, alors que jusque-là on pensait que les comportements oscillants sur des suites de points d'accumulation étaient exceptionnels, nous montrons que la présence de singularités oscillantes est générique, au sens où nous pouvons en trouver presque-partout, dans quasi-toutes fonctions de beaucoup d'espaces

fonctionnels

Le troisième chapitre aborde la généralisation d'un formalisme multifractal à des fonctions non continues. Les espaces $T_p^u(x_0)$ ont été introduits par Calderon et Zygmund dans le contexte des équations aux dérivées partielles elliptiques (voir [10]) et permettent d'obtenir un nouveau critère de régularité ponctuelle plus faible que la notion de régularité hölderienne ponctuelle puisque les fonctions étudiées peuvent ne plus être continues en aucun point. Nous obtenons une presque-caractérisation de ces espaces grâce à des relations sur les modules des coefficients en ondelettes de leurs fonctions et une caractérisation du nouvel exposant de régularité défini grâce aux espaces $T_p^u(x_0)$.

Nous montrons que la généralisation de l'exposant de Hölder donnée par la condition de Calderon et Zygmund permet de définir une nouvelle notion de fonction multifractale qui est adaptée aux fonctions non-localement bornées. Nous démontrons des majorations valides sur le spectre de singularités de toutes fonctions dans ce cadre d'étude.

Le quatrième chapitre étudie un cas particulier de fonction caractéristique oscillante en deux dimensions qui sert de modèle pour des matériaux finement stratifiés. On montre dans un premier temps que cette fonction ne peut pas être rattachée à la théorie sur les fonctions oscillantes type "chirp" en deux dimensions et on étudie d'abord la fonction oscillante "chirp" qu'on peut extraire de la première fonction. On montre ensuite qu'on peut appliquer un algorithme de seuillage des coefficients en ondelettes utilisé en traitement de l'image pour décomposer la première fonction en sa partie oscillante et sa partie non oscillante.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est de formaliser mathématiquement les notions qui ont été évoquées dans l'introduction et dont nous allons avoir besoin dans les parties suivantes.

Notation : On notera dans cette thèse C ou C' en général les constantes qui ne dépendent que des paramètres du problème.

1.1 Notion de régularité

1.1.1 Régularité hölderienne ponctuelle et uniforme

La régularité hölderienne ponctuelle d'une fonction est définie de la façon suivante.

Définition 1.1.1. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit α un réel tel que $\alpha \geq 0$. Une fonction $f \in L^\infty_{loc}$ $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est $C^\alpha(x_0)$ si il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P_{x_0} de degré au plus $[\alpha]$ tel que dans un voisinage de x_0,*

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \tag{1.1}$$

Remarquons que cette définition est locale et n'implique aucune régularité hölderienne uniforme.

L'*exposant de Hölder ponctuel* de f en x_0 est $h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}$.

On a clairement que $C^\alpha(x_0) \subset C^{\alpha'}(x_0)$ si $\alpha' \leq \alpha$.

D'autre part notons que si $\alpha < h(x_0)$ alors $f \in C^\alpha(x_0)$, mais on n'a pas nécessairement $f \in C^{h(x_0)}(x_0)$. Par exemple la fonction $f(x) = |x|^h \ln(|x|)$ est dans tout $C^\alpha(x_0)$ pour $\alpha < h$ mais pas dans $C^h(x_0)$.

Nous aurons besoin également de la notion de régularité uniforme d'une fonction.

Définition 1.1.2. *Soit α un réel non entier positif. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dans $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si il existe une constante $C > 0$ tel que (1.1) soit vraie pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^d$.*

On peut noter que, à cause du fait que la constante de la définition 1.1.2 doit être la même pour tout x_0, l'exposant de Hölder uniforme n'est pas l'infimum des exposants de Hölder ponctuels de la fonction. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = x\sin(1/x)$ est une fonction de $C^1(0)$ à l'origine et C^∞ ailleurs mais son exposant de Hölder uniforme est $\alpha = 1/2$.

Pour définir les espaces $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ lorsque α est entier on définit d'abord la classe de Zygmund.

Définition 1.1.3. *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ appartient à la classe de Zygmund notée $\dot{C}^1(\mathbb{R}^d)$ si elle est continue et vérifie*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \ |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq C|y|$$

Les espaces $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ lorsque α est entier sont alors donnés par la caractérisation suivante.

Définition 1.1.4. *Soit α un entier positif.*
Une fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ appartient à $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si elle vérifie

$$\forall m \in \mathbb{N}^d,\ |m| = \alpha - 1,\ \partial^m f \in \dot{C}^1(\mathbb{R}^d).$$

Il faut être vigilant sur le fait que contrairement aux espaces de Hölder uniformes, les espaces de Hölder ponctuels ne sont pas stables par différentiation, ni vis-à vis des opérateurs pseudo-différentiels classiques. Autrement dit si f appartient à un certain $C^\alpha(x_0)$, on n'est pas certain que $\partial^m f$ soit dans $C^{\alpha-m}(x_0)$ comme on s'y attend. Par exemple la fonction $x^2 \sin(1/x)$ est dans $C^2(0)$ alors que sa dérivée $2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ n'est même pas continue en 0, et donc certainement pas dans $C^1(0)$.
La conséquence importante de cette non-stabilité sera le fait que l'exposant de Hölder ponctuel ne sera pas stable par différentiation ni même intégration. Ainsi la fonction $x \mapsto x\sin(1/x)$ a pour exposant de Hölder ponctuel en 0 $h(0) = 1$ alors que la primitive de cette fonction a pour exposant de Hölder ponctuel 3.

Il existe différents types d'exposants locaux pour pallier ce problème mais nous nous contenterons de présenter ceux qui vont être utiles dans la suite de ce travail.

1.1.2 Comportement oscillant : exposants de chirp et d'oscillation

Le contre-exemple précédent $x \mapsto x\sin(1/x)$ va ainsi servir de point de départ pour la définition de deux exposants qui prennent en compte cette non-stabilité par intégration.

En effet, on peut remarquer, grâce au calcul suivant de [22], que la primitive qui s'annule en 0 de $x^\alpha \sin(1/x^\beta)$ a pour exposant de Hölder ponctuel en 0

$h_1(0) = \alpha + \beta + 1$.

$$\int_0^x t^\alpha \sin\left(\frac{1}{t^\beta}\right) dt = \int_0^x \frac{t^{\alpha+\beta+1} \sin\left(\frac{1}{t^\beta}\right)}{t^{\beta+1}} dt$$

$$= -\frac{x^{\alpha+\beta+1}}{\beta} \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) + \frac{\alpha+\beta+1}{\beta} \int_0^x t^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{1}{t^\beta}\right) dt$$

$$= -\frac{x^{\alpha+\beta+1}}{\beta} \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right) + \frac{\alpha+\beta+1}{\beta} x^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 s^{\alpha+\beta} \cos\left(\frac{1}{(sx)^\beta}\right) ds$$

En itérant ce procédé on peut montrer facilement qu'une primitive n-ième de $x^\alpha \sin(1/x^\beta)$ nulle en 0 a pour exposant de Hölder ponctuel $h_n(0) = \alpha + n(\beta+1)$. L'exposant de chirp (cf [22], [3]) est défini comme suit.

Définition 1.1.5. *Soit f une fonction de L^∞_{loc}.*

Soit $h_n(x_0)$ l'exposant de Hölder de la n-ième primitive de f nulle en x_0.

L'exposant de chirp de f en x_0 est

$$\beta_c(x_0) = \liminf_{n\to\infty} \frac{h_n(x_0)}{n} - 1.$$

Mais dans [3] les auteurs font la remarque suivante. La fonction $x\sin(1/x^\beta) + |x|^{3/2}$ a pour exposant de Hölder 1 en 0. Si $\beta \neq 0$, à partir de $n = 1$ on aura $1 + n(\beta+1) > 3/2 + n$, et donc pour n tel que $n\beta > 1/2$, on a $h_n(0) = 3/2 + n$, ce qui donne $\beta_c(0) = 0$, et ne décrit pas le comportement oscillant en 0.

Ils en viennent donc à définir un exposant d'oscillation qui tienne compte du comportement de la fonction pour des intégrations fractionnaires, et non plus après un nombre infini d'intégrations.

Soit $h_t(x_0)$ l'exposant de Hölder de la primitive fractionnaire d'ordre t en x_0 de $f \in L^\infty_{loc}$. Plus précisément, si f est une fonction bornée, nous noterons

$h_t(x_0)$ l'exposant de Hölder en x_0 de la fonction

$$f_t = (Id - \Delta)^{-t/2}(\phi f) \tag{1.2}$$

où ϕ est une fonction C^∞ à support compact qui vérifie $\phi(x_0) = 1$, et l'opérateur $(Id - \Delta)^{-t/2}$ l'opérateur de convolution qui consiste à multiplier la transformée de Fourier de la fonction par $(1 + |\xi|^2)^{-t/2}$.

Reprenons la fonction $f : x \mapsto x \sin(1/x^\beta) + |x|^{3/2}$. Pour t assez petit une intégration fractionnaire d'ordre t de f donnera pour f_t un exposant de Hölder $1 + t(\beta + 1)$ en 0, à la place de l'exposant attendu $1 + t$. Nous pouvons donc déduire β de l'étude de l'évolution de l'exposant de Hölder par intégration fractionnaire.

Dans [3] on introduit ainsi la définition suivante, justifiée par le fait que $t \mapsto h_t(x_0)$ est dérivable à droite en 0.
On note $\frac{\partial}{\partial t} F(t)|_{t=a^+}$ la dérivée à droite si elle existe d'une fonction F en un point a.

Définition 1.1.6. *soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Les exposants d'oscillation de f en un point x_0 sont donnés par*

$$(h, \beta) = \left(h(x_0), \frac{\partial}{\partial t} h_t(x_0) \Big|_{t=0^+} - 1 \right) \tag{1.3}$$

Ces exposants appartiennent à $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$.

Remarque 1.1.1. *Si $h(x_0) = +\infty$ l'exposant β n'est pas défini.*

1.1.3 Comportement en moyenne : exposant de Calderon-Zygmund

Les exposants précédents concernaient l'étude des fonctions continues. Nous allons être amenés à travailler sur des fonctions non continues, ou continues sans régularité supplémentaire. Une manière de mesurer la régularité en un point x_0 peut être alors d'évaluer des moyennes sur des boules centrées en x_0.

Dans [10], Calderon et Zygmund étudient les propriétés locales des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires. Ils démontrent d'une part des théorèmes de régularité en des points isolés et d'autre part des résultats du type presque partout avec le critère de régularité suivant.

Définition 1.1.7. *Soit $p \in [1, \infty]$ et u un réel tel que $u \geq -\frac{d}{p}$.*
Soit f une fonction de L^p_{loc}.
f appartient à $T^u_p(x_0)$ s'il existe $R > 0$, P polynôme de degré inférieur ou égal à u et $C > 0$ tel que

$$\forall \rho \leq R : \quad \left(\frac{1}{\rho^d} \int_{|x-x_0| \leq \rho} |f(x) - P(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \rho^u. \tag{1.4}$$

Remarquons que si $p = \infty$ $T^u_\infty(x_0)$ est exactement l'espace $C^u(x_0)$. D'autre part si u est positif et $f \in C^u(x_0)$, alors f est dans $T^u_p(x_0)$ quel que soit p.

De plus, on a évidemment pour f dans L^p_{loc}

$$\left(\int_{|x-x_0| \leq \rho} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{|x| \leq 2A} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\left(\frac{1}{\rho^d} \int_{|x-x_0| \leq \rho} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \rho^{-\frac{d}{p}}$$

Donc toute fonction de L^p_{loc} est une fonction de $T_p^{-\frac{d}{p}}(x_0)$.

Examinons les premières propriétés de ces espaces.

Dans [10], les auteurs démontrent le fait que ce sont des espaces complets et aussi la propriété importante de stabilité par pseudo-différentation.

La proposition suivante donne des propriétés de base de ces espaces.

Proposition 1.1.1. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $p, p' \geq 1$.*

1. *$T_p^{u'}(x_0) \subset T_p^u(x_0)$ si $u' \geq u \geq -\frac{d}{p}$.*
2. *$T_{p'}^u(x_0) \subset T_p^u(x_0)$ si $p' \geq p$.*
3. *Si f appartient à $T_p^u(x_0)$ et $T_{p'}^u(x_0)$, alors f appartient à $T_r^u(x_0)$ avec, pour $0 \leq \theta \leq 1$, r tel que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p'}$.*

Démonstration:

1. Ce point est évident d'après la définition 1.1.7.
2. Soit f dans L^p_{loc} et dans $T_{p'}^u(x_0)$.
   D'après l'inégalité de Hölder pour $1 \leq p \leq p'$ et p" tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p"}$, on peut écrire
   $$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho} |f(x) - P(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{|x-x_0|\leq\rho} |f(x) - P(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \times (C\rho)^{\frac{d}{p"}}$$
   où C ne dépend pas de ρ.
   Ce qui donne donc
   $$\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{|x-x_0|\leq\rho} |f(x) - P(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{|x-x_0|\leq\rho} |f(x) - P(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.5}$$
   On a donc
   $$T_{p'}^u(x_0) \subset T_p^u(x_0) \text{ si } p' \geq p. \tag{1.6}$$
3. Soient $0 \leq \theta \leq 1$, et r tel que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p'}$.

On a d'après l'inégalité d'interpolation,

$$\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f(x)-P(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{\rho^d}\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f(x)-P(x)|^p dx\right)^{\frac{\theta}{p}} \tag{1.7}$$

$$\times\left(\frac{1}{\rho^d}\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f(x)-P(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1-\theta}{p'}} \tag{1.8}$$

$$\tag{1.9}$$

D'où le résultat.

□

Revenons sur le fait que toutes les fonctions de L^p_{loc} sont dans $T_p^{-\frac{d}{p}}(x_0)$. Pour f dans L^p_{loc}, l'ensemble $\{u : f \in T_p^u(x_0)\}$ n'est pas vide. On peut donc définir un p-exposant en x_0 avec

$$u_f^p(x_0) = \sup\{u : f \in T_p^u(x_0)\}. \tag{1.10}$$

Pour $p = \infty$, on retrouve l'exposant de Hölder.

Examinons les propriétés de la fonction, définie sur $[0,1]$, $\tilde{u}(x_0) : q \mapsto u_f^{\frac{1}{q}}(x_0)$.

Proposition 1.1.2. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L^p_{loc}$.*

1. *$\tilde{u}(x_0)$ est une fonction croissante sur $[0,1]$.*
2. *$\tilde{u}(x_0)$ est une fonction concave sur $[0,1]$.*

Démonstration: Ces propriétés découlent directement de la proposition 1.1.1.

1. D'après le point 1 de la proposition 1.1.1 on a clairement

$$u_f^{p'}(x_0) \leq u_f^p(x_0) \text{ si } p \leq p'.$$

On a donc en posant $q = \frac{1}{p}$ et $q' = \frac{1}{p'}$,

$$u_f^{\frac{1}{q'}}(x_0) \leq u_f^{\frac{1}{q}}(x_0) \text{ si } q' \leq q.$$

D'où le résultat.

2. Soient $p, p' \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$, et r tel que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p'}$. On peut utiliser l'inégalité (1.7) dans la démonstration de la proposition 1.1.1 et on a

$$\theta u_f^p(x_0) + (1-\theta) u_f^{p'}(x_0) \leq u_f^r(x_0).$$

En posant $s = \frac{1}{r}$, $q = \frac{1}{p}$, $q' = \frac{1}{p'}$, on a bien

$$\theta u_f^{\frac{1}{q}}(x_0) + (1-\theta) u_f^{\frac{1}{q'}}(x_0) \leq u_f^{\frac{1}{s}}(x_0).$$

Ainsi la fonction $\tilde{u}(x_0)$ est concave.

□

Remarque 1.1.2. *Du point 1 de la proposition précédente, on déduit que $u_f^p(x_0) \geq u_f^\infty(x_0) = h_f(x_0)$. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ vérifie ainsi l'égalité. Mais même si $h_f(x_0) \neq 0$, on peut avoir $u_f^p(x_0) > h_f(x_0)$. L'exemple suivant le confirme.*

On note $\mathbb{I}_A$ la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Soit $0 \leq \alpha \leq 1$ et $p \neq \infty$.

Considérons la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha \sum_{j \geq 4} \mathbb{I}_{[2^{-j}-2^{-2j}, 2^{-j}]}(x)$. Elle a clairement pour exposant de Hölder α. Calculons son p-exposant en O et montrons qu'il vaut $u_f^p(0) = \alpha + \frac{1}{p}$.

En effet, en prenant $\rho \leq \frac{1}{2}$,

$$\int_{|x|\leq\rho} |f(x)|^p dx = \int_{0\leq x\leq\rho} x^{\alpha p} \sum_{j\geq 4} \mathbb{I}_{[2^{-j}-2^{-2j},2^{-j}]}(x)dx \tag{1.11}$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\int_{|x|\leq\rho} |f(x)|^p dx \leq \sum_{j\geq j_0} \int_{0\leq x\leq\rho} x^{\alpha p} \mathbb{I}_{[2^{-j}-2^{-2j},2^{-j}]}(x)dx + R_\rho \tag{1.12}$$

avec j_0 et R_ρ tels que

1. si $2^{-j_0+1} - 2^{-2(j_0-1)} \leq \rho \leq 2^{-j_0+1}$: $R_\rho = \int_{2^{-j_0+1}-2^{-2(j_0-1)}}^{\rho} x^{\alpha p} dx$
2. si $2^{-j_0} \leq \rho \leq 2^{-j_0+1} - 2^{-2j_0+1}$: $R_\rho = 0$.

On pose S_ρ tel que $S_\rho = \sum_{j\geq j_0} \int_{0\leq x\leq\rho} x^{\alpha p} \mathbb{I}_{[2^{-j}-2^{-2j},2^{-j}]}(x)dx$

On a donc

$$\begin{aligned} S_\rho &= \sum_{j\geq j_0} \int x^{\alpha p} \mathbb{I}_{[2^{-j}-2^{-2j},2^{-j}]}(x)dx \\ &= C \sum_{j\geq j_0} 2^{-j(\alpha p+1)} - (2^{-j} - 2^{-2j})^{\alpha p+1} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Or on a

$$2^{-j(\alpha p+1)} - (2^{-j} - 2^{-2j})^{\alpha p+1} = 2^{-j(\alpha p+1)}(1 - (1 - 2^{-j}))^{\alpha p+1}$$

Ce qui donne

$$2^{-j(\alpha p+1)} - (2^{-j} - 2^{-2j})^{\alpha p+1} \sim 2^{-j(\alpha p+2)}.$$

On a donc

$$S_\rho \sim 2^{-j_0(\alpha p+2)} \tag{1.14}$$

Or d'après la définition de ρ, $2^{-j_0} \leq \rho \leq 2^{-j_0+1}$.
Et donc il existe C et C' tels que

$$C'\rho^{\alpha p+2} \leq S_\rho \leq C\rho^{\alpha p+2}. \tag{1.15}$$

D'autre part, pour R_ρ dans le premier cas, on a

$$R_\rho = \int_{2^{-j_0+1}-2^{-2(j_0-1)}}^{\rho} x^{\alpha p} dx = C(\rho^{\alpha p+1} - (2^{-j_0+1} - 2^{-2(j_0-1)})^{\alpha p+1})$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a donc

$$0 \leq R_\rho \leq C(2^{-j_0+1} - 2^{-2(j_0-1)})^{\alpha p+2} \leq C2^{-(j_0-1)(\alpha p+2)} \leq C\rho^{\alpha p+2}$$

On a donc bien dans tous les cas

$$C'\rho^{\alpha p+2} \leq S_\rho + R_\rho \leq C\rho^{\alpha p+2}.$$

D'après (1.12), on a

$$C'\rho^{\alpha p+2} \leq \int_{|x|\leq\rho} |f(x)|^p dx \leq C\rho^{\alpha p+2}.$$

Donc ici on a bien $u_f^p(x_0) = \alpha + \frac{1}{p} \neq h_f(x_0) = \alpha$.

Le p exposant apporte donc une information supplémentaire sur la régularité ponctuelle de la fonction même dans le cas où la fonction est hölderienne au point considéré.

Nous verrons ultérieurement le lien entre le p-exposant et les autres exposants qui permettent de mesurer la régularité locale.

Nous l'utiliserons aussi pour caractériser la régularité locale des fonctions éventuellement non continues.

1.2 Analyse multifractale

L'analyse multifractale concerne l'étude des fonctions dont la régularité ponctuelle varie de point en point. Une approche a alors été développée qui

consiste à étudier les ensembles de points où la fonction a une régularité ponctuelle donnée.

Il est des fonctions dont la régularité varie de point en point, et dont les ensembles $S_h = \{x_0 : h_f(x_0) = h\}$ peuvent avoir des structures très complexes (ce qui est le cas par exemple des signaux de vitesse d'écoulement turbulent).

Ces ensembles sont de mesure de Lebesgue nulle. Nous allons utiliser la notion de dimension pour les caractériser.

1.2.1 Notion de dimension

Il existe de nombreuses manières, qui ne sont pas en général équivalentes, de définir la dimension d'un ensemble. Les ensembles de singularités que nous allons étudier peuvent être denses et la dimension de Hausdorff est alors plus adaptée que la dimension de boîte.

Nous reprenons ici la construction donnée dans [9].

La première notion est celle de mesure s-dimensionnelle de Hausdorff.

Définition 1.2.1. *Soit $F \subset \mathbb{R}^d$ et $s \geq 0$.*
$\forall \delta > 0$, on pose

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : F \subset \bigcup_i U_i, diam(U_i) \leq \delta \right\}$$

où $diam(U_i)$ désigne le diamètre de U_i.

La mesure s-dimensionnelle de Hausdorff de F est $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$.

On la notera aussi $Mes_s(F)$.

Proposition 1.2.1. *Soit F est un borélien de $\mathbb{R}^d$.*

On a alors $\mathcal{H}^d(F) = c_d\ Mes^d(F)$ *où* c_d *est l'inverse du volume de la boule d-dimensionnelle et* Mes *la mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}^d$.

On peut alors faire les remarques suivantes.

- $\mathcal{H}^s(F)$ est une fonction décroissante de s.
- Si $t > s$ on a alors $\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$
  d'où : $\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(F)$ par passage à l'inf.
  Ce qui donne : si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ alors $\mathcal{H}^t(F) = 0$.
  On a donc une valeur critique de s pour laquelle $\mathcal{H}^s(F)$ passe de ∞ à 0.

Définition 1.2.2. *Sous les hypothèses de la définition précédente, la dimension de Hausdorff de* F *est*

$$D = \inf\{s, \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s, \mathcal{H}^s(F) = +\infty\}.$$

Pour calculer une dimension de Hausdorff on devra donc trouver cette valeur critique pour laquelle la mesure s-dimensionnelle passe de $+\infty$ à 0. Il est donc intéressant de pouvoir minorer la mesure s-dimensionnelle d'un ensemble et nous utiliserons pour cela un théorème de S.Jaffard dans [19]. Il utilise une généralisation de la mesure s-dimensionnelle de Hausdorff.

Définition 1.2.3. *Soit* $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction croissante continue qui vérifie* $w(0) = 0$, *et* A *un ensemble borné de* $\mathbb{R}^d$. *Si* $|A|$ *représente le diamètre de la boule* A, *on pose*

$$\mathcal{H}^w_\varepsilon(A) = \inf_{\mathcal{U}} \left(\sum_{(u_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{U}} w(|u_i|) \right)$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements possibles $\mathcal{U}$ *de diamètre au*

plus ε. La mesure $\mathcal{H}^w$ de Hausdorff de A est définie comme

$$\mathcal{H}^w(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^w_\varepsilon(A). \tag{1.16}$$

Remarquons qu'en prenant la famille de fonctions particulières $w_c(x) = (\log x)^2|x|^c$, $c > 0$, on a directement les inégalités suivantes

$$\mathcal{H}^{w_c}(A) \geq \mathcal{H}^c(A),$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $c > \varepsilon$,

$$\mathcal{H}^{w_c}(A) \leq \mathcal{H}^{c-\varepsilon}(A). \tag{1.17}$$

Remarque 1.2.1. *Si A vérifie 1.17 pour un $c > 0$, alors la dimension de Hausdorff de A est au moins égale à c.*

Le théorème suivant démontré dans [19] va nous servir pour minorer les mesures s-dimensionnelles de certains ensembles particuliers.

Théorème 1.2.1. *Soit λ_n une suite de points de $T = [0,1]^d$ et $\varepsilon_n > 0$. Pour a donné on considère l'ensemble $E_a = \limsup_{N \to \infty} B(\lambda_n, \varepsilon_n^a)$.*

On pose $w_c(x) = (\log x)^2|x|^c$. Si presque tout x (au sens de la mesure de Lebesgue) appartient à E_a, alors

$$\forall b > a, \mathcal{H}^{w_{da/b}}(E_b) > 0.$$

En particulier la dimension de Hausdorff de E_b est au moins égale à da/b.

Dans le cadre de ce travail nous allons étudier les méthodes qui ont été mises en place pour le calcul de la dimension de Hausdorff d'un type d'ensemble particulier. Ces ensembles dont on souhaite évaluer la dimension de Hausdorff sont les suivants.

Définition 1.2.4. *Soit f une fonction de $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On appelle spectre de singularités de f la fonction qui à un réel positif h associe la dimension de Hausdorff*

de l'ensemble $S_h = \{x_0 : h_f(x_0) = h\}$.

Nous allons dans cette thèse travailler sur une méthode mise en place et utilisée par des physiciens pour le calcul du spectre de singularités.

1.2.2 Formalisme multifractal

Les spécialistes de la turbulence ont fait l'hypothèse, basée sur les considérations heuristiques suivantes, qu'on pouvait appliquer une formule pour calculer ce spectre. Elle peut être justifiée de la façon suivante.

On considère une fonction f L^q intégrable et les L^q-modules de continuité, appelés ici "fonctions de structures", pour l qui tend vers 0 sont donnés par

$$S_q(l) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+l) - f(x)|^q dx. \tag{1.18}$$

On estime leur loi de décroissance quand l tend vers 0

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+l) - f(x)|^q dx \sim |l|^{\zeta_f(q)},$$

ou autrement dit $\liminf_{l \to 0} \dfrac{\ln \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+l) - f(x)|^q dx}{\ln l} = \zeta_f(q)$.

D'autre part, on peut partitionner $\mathbb{R}^d$ grâce aux ensembles S_h avec la relation $\mathbb{R}^d = \bigcup_h S_h$.

Supposons l suffisamment petit et x_0 dans un S_h donné. On peut supposer encore que pour tout x dans la boule $B(x_0, |l|)$ de centre x_0 et de rayon $|l|$,

$$|f(x+l) - f(x)| \sim |l|^h. \tag{1.19}$$

Ce qui donne la contribution

$$\int_{B(x_0,|l|)} |f(x+l) - f(x)|^q dx \sim |l|^{hq+d}. \tag{1.20}$$

On peut recouvrir S_h par $|l|^{-d(h)}$ boules du type $B(x_0, |l|)$. On aurait alors une contribution de chaque intégrale $\int_{S_h} |f(x+l) - f(x)|^q dx$ de l'ordre de $|l|^{hq-d(h)+d}$.

La contribution principale, qui donnerait la décroissance

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+l) - f(x)|^q dx \sim |l|^{\zeta_f(q)}$$

est donnée par le h tel que $\int_{S_h} |f(x+l) - f(x)|^q dx \sim |l|^{\inf_h hq-d(h)+d}$.

On aurait donc

$$\zeta_f(q) = \inf_h (hq - d(h) + d).$$

La fonction ζ_f étant concave, on obtient, par transformée de Legendre,

$$d(h) = \inf_q (hq - \zeta_f(q) + d). \tag{1.21}$$

La formule (1.21) est appelée formalisme multifractal.

Lorsque pour une fonction donnée, $d(h)$ est effectivement donné par (1.21), on dira que le formalisme multifractal est vérifié.

D'abord on peut remarquer que la formulation précédente concerne les exposants de Hölder inférieurs ou égaux à 1 puisqu'on n'utilise que des différences d'ordre au plus 1.

Cette remarque peut être levée en adoptant une formulation équivalente de (1.21) qui fait intervenir les espaces fonctionnels auquels la fonction appartient. Ainsi rappelons la définition des espaces de Sobolev $H^{s,q}$.

Définition 1.2.5. *Soit $s \geq 0$, non entier et $s = \sigma + [s]$*

$f \in H^{s,q}$ si et seulement si $f \in L^q$ et pour tout multiindice α tel que $|\alpha| = [s]$ on a :

$$\int \frac{|\partial^\alpha f(x+l) - \partial^\alpha f(x)|^q}{|l|^{\sigma q}} dx \leq C$$

Soit $\tilde{\zeta}_f(q) = \sup\{s : f \in H^{s/q,q}\}$.

Examinons le lien entre $\tilde{\zeta}_f(q)$ et $\zeta_f(q)$.
$\zeta_f(q)$ est défini par

$$\limsup_{l \to 0} \frac{\ln \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+l) - f(x)|^q dx}{\ln l} = \zeta_f(q)$$

On a donc bien pour $q \geq 1$ et $\zeta_f(q) < q$

$$\zeta_f(q) = \tilde{\zeta}_f(q) = \sup\{s : f \in H^{s/q,q}\}.$$

Dans le cas où $\zeta_f(q) \geq q$, il nous suffit de modifier la formule de la fonction de structure (1.18) en remplaçant f par des différences d'ordre 2. On itérera ainsi le procédé en utilisant des différences finies d'ordre supérieur au lieu d'une différence d'ordre 1.

De plus si $q \geq 1$ les inclusions suivantes entre les espaces de Sobolev $H^{s,q}$ et les espaces de Besov $B_p^{s,q}$ (que nous pouvons voir pour le moment comme des espaces de Sobolev précisés par un troisième indice q) sont valables (cf [1]).

$$\forall \varepsilon > 0, H^{s+\varepsilon,q} \hookrightarrow B_q^{s,q} \hookrightarrow H^{s-\varepsilon,q}$$

On peut donc écrire en posant $\eta_f(q) = \sup\{s : f \in B_q^{s/q,q}\}$,

$$\forall q \geq 1, \tilde{\zeta}(q) = \eta(q).$$

On posera comme prolongement de la fonction ζ dans le cas où $q \leq 1$ la fonction η.

Ainsi la formule (1.21) est équivalente à la formule

$$d(h) = \inf_{q>0} \left(hq - \eta_f(q) + d\right). \tag{1.22}$$

Nous avons donc obtenu une formulation équivalente du formalisme multifractal et nous dirons que le formalisme est vérifié pour une fonction f si

$$d(h) = \inf_q \left(hq - \eta_f(q) + d\right) \text{ avec } \eta_f(q) = \sup\{s : f \in B_q^{s/q,q}\}. \tag{1.23}$$

De nombreuses fonctions vérifient cette formule, comme par exemple les fonctions autosimilaires sous certaines hypothèses (voir [11]), ou encore des fonctions particulières comme la fonction de Riemann. Stéphane Jaffard dans [16] démontre qu'elle est vérifiée génériquement au sens de Baire (c'est à dire dans une intersection dénombrable d'ouverts denses) dans les espaces de Besov qui s'injectent dans les espaces de fonctions continues. Ainsi on peut considérer que de larges ensembles de fonctions vérifient le formalisme multifractal.

Cependant toutes les fonctions ne vérifient pas le formalisme multifractal. Dans [3] des contre-exemples sont exhibés. D'autre part dans [16], S.Jaffard démontre que, génériquement, dans une intersection quelconque d'espaces de Besov la formule n'est pas vraie et doit être légérement modifiée pour permettre de calculer le spectre.

La présence de singularités oscillantes est, comme nous le verrons plus loin, une des causes principales de ce phénomène. Les contre-exemples de [3] contiennent presque partout des points d'oscillation. Et une façon heuristique de le comprendre peut être donnée par l'objection immédiate suivante à la justification de (1.21). Il n'est pas du tout évident que pour x_0 dans S_h, on ait l'estimation (1.19) pour x dans $B(x_0, |l|)$. Ainsi la fonction $f : x \mapsto x \sin(1/\sqrt{x})$ ne vérifie pas cette estimation quand x appartient à une boule centrée en 0. En tout x différent de 0, f est de classe C^∞ et ne vérifie donc pas (1.19) avec $h = 1/2$. Il en sera de même pour toutes les fonctions du type $x^\alpha \sin(1/x^\beta)$.

Dans le chapitre 2, nous étudierons plus avant la question du lien entre les singularités oscillantes et le formalisme multifractal.

1.3 Ondelettes

Les exposants de régularités que nous venons de présenter, ainsi que les dimensions d'ensembles, et enfin le calcul de $d(h)$ grâce au formalisme multifractal, s'avèrent difficiles, voire extrêmement difficiles à évaluer directement. Néanmoins leurs liens avec la transformée en ondelettes, apparue dans les années 80 en traitement du signal, peut être quant à lui relativement simple à formaliser. En particulier, pour ce qui est du formalisme multifractal, ce sont A.Arnéodo et ses collaborateurs qui ont utilisé les premiers la transformée en ondelettes pour calculer grâce au formalisme multifractal le spectre de singularités d'une fonction (voir [2]).

Pour notre travail, nous allons dans la suite utiliser des bases orthonormées d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Leur construction dépend d'abord de la construction d'une fonction dite "fonction d'échelle" $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que la famille

$$\{\phi_{j,k} : x \mapsto 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}^d\}$$

1. forme une base orthonormée d'un sous-espace V_j de $L^2(\mathbb{R}^d)$,
2. avec $V_0 \subset V_1$,
3. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$,
4. et $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

On définit ensuite W_j comme le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}.

Il existe alors 2^d fonctions $\psi^{(i)}, i = 1...2^d - 1$ telle que la famille

$$\{\{\psi^{(i)}_{j,k} : x \mapsto 2^{\frac{j}{2}}\psi^{(i)}(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}^d, i = 1...2^d - 1\}$$

forme une base orthonormée de W_j, on les appelle ondelettes.

L'ondelette la plus simple est l'ondelette de Haar.

Nous prendrons des ondelettes $\psi^{(i)}$, $i = 1...2^d-1$ qui possèdent les propriétés suivantes.

- Elle sont régulières (d'une régularité meilleure que la fonction à analyser), dans la classe de Schwarz (voir [27]) ou même à support compact (voir [7]).
- Elle sont bien localisées en temps et en fréquence.
- Elle sont oscillantes, c'est à dire qu'elles ont un certain nombre de moments nuls.

Nous utiliserons une normalisation L^∞ pour les ondelettes, si bien que nous écrirons

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} C_k \phi(x-k) + \sum_{i,j\geq 0, k\in\mathbb{Z}^d} C_{j,k}^{(i)}\, \psi^{(i)}(2^j x - k)(i) \tag{1.24}$$

où $C_k = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \phi(x-k)\, dx$ et $C_{j,k}^{(i)} = 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \psi^{(i)}(2^j x - k)\, dx$.

Nous pouvons aussi décomposer f, en utilisant le fait que les fonctions

$$2^{\frac{dj}{2}} \psi^{(i)}(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in Z^d, i = 1...2^d - 1$$

forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On a alors la décomposition suivante.

$$f(x) = \sum_{i,j,k} C_{j,k}^{(i)}\, \psi^{(i)}(2^j x - k) \tag{1.25}$$

où $C_{j,k}^{(i)} = 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \psi^{(i)}(2^j x - k)\, dx$.

Pour simplifier les notations, nous ne noterons pas l'index (i) ce qui est sans conséquence puisque nous ne nous intéresserons pas à la direction des coefficients.

De plus nous utiliserons parfois les notations simplifiées suivantes. Nous indexerons les ondelettes en termes de cubes dyadiques. Si λ est le cube

$$\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : \ 2^j x - k \in [0,1]^d\},$$

nous noterons $\psi_\lambda(x) = \psi^{(i)}(2^j x - k)$.

Pour l'étude des questions liées aux singularités ponctuelles et au formalisme multifractal, les ondelettes apparaissent un outil particulièrement adapté.

En effet elles permettent de caractériser de façon très simple les espaces fonctionnels qui entrent en jeu dans l'étude de la régularité locale et permettent aussi de donner des critères simples pour caractériser la régularité globale du type Besov qui intervient dans le formalisme multifractal.

1.3.1 Espaces de régularité hölderienne

Espaces 2-microlocaux

Le premier critère de régularité locale que nous avons vu est la régularité hölderienne. Il n'existe pas de caractérisation portant sur les modules des coefficients en ondelettes des fonctions des espaces $C^\alpha(x_0)$. Ce sont les espaces deux-microlocaux $C^{s,s'}(x_0)$ introduits par J.M.Bony qui vont offrir un cadre fonctionnel pour l'étude de la régularité hölderienne ponctuelle. Leur caractérisation par coefficients en ondelettes démontrée dans [18] est le point de départ crucial de l'étude par ondelettes de la régularité ponctuelle. Nous donnons ici la définition des espaces locaux (définis sur un voisinage de x_0) dont nous aurons besoin.

Proposition 1.3.1. *Une distribution tempérée f appartient à $C^{s,s'}_{x_0}$ si et seulement il existe $C > 0$ et A telles que ses coefficients en ondelettes vérifient pour tout k tel que $|k - 2^j x_0| \leq A 2^j$:*

$$|C_{j,k}| \leq C 2^{-sj} (1 + |k - 2^j x_0|)^{-s'}. \tag{1.26}$$

Les propriétés suivantes donnent la relation entre $C^s(x_0)$ et $C^{s,s'}_{x_0}$ dans [18].

Proposition 1.3.2. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,*

- *si $t \leq s$ et $t + t' \leq s + s'$, alors $C^{s,s'}_{x_0} \subset C^{t,t'}_{x_0}$.*
- *Soit $s > 0$, $C^s(x_0) \subset C^{s,-s}_{x_0}$.*
- *Soient (s, s') tels que $s + s' > 0$, alors $C^{s,s'}_{x_0} \subset C^s(x_0)$.*

Pour calculer l'exposant de Hölder grâce à des relations sur les coefficients en ondelettes par l'intermédiaire des espaces $C^{s,s'}_{x_0}$, il nous faut faire une hypothèse de régularité uniforme supplémentaire.

Ainsi dans le cas où pour un δ donné, f est dans $C^\delta(\mathbb{R}^d)$, on a la formule suivante pour l'exposant de Hölder

$$h_f(x_0) = \liminf_{\lambda \to x_0} \frac{\log(|c_\lambda|)}{\log(2^{-j} + |x_0 - \lambda|)}. \tag{1.27}$$

De cette caractérisation vient aussi la caractérisation par ondelettes, démontrée dans [3], de l'exposant d'oscillation défini par (1.3), toujours dans le cas où la fonction a un minimum de régularité hölderienne uniforme.

En introduisant les notions suivantes,

Définition 1.3.1. *Si F et G sont deux fonctions,*

$$F = \overline{\mathcal{O}}(G) \ \textit{si} \ \liminf \frac{\log|F|}{\log|G|} \geq 1,$$

et

$$F \sim G \ \textit{si} \ \lim \frac{\log|F|}{\log|G|} = 1.$$

les auteurs démontrent dans [3] la proposition suivante.

Proposition 1.3.3. *Soit $f \in C^\delta(\mathbb{R}^m)$ pour $\delta > 0$. Les exposants de singularités oscillantes de F en x sont (h, β) si et seulement si les coefficients en ondelettes de f vérifient les conditions suivantes.*

1. $|C_{j,k}| = \overline{\mathcal{O}}(2^{-jh} + |\frac{k}{2^j} - x|^h)$ *pour* $j \to +\infty$ *et* $\frac{k}{2^j} \to x$
2. *Il existe une suite* $(j_n, \frac{k_n}{2^{j_n}})$ *telle que*

$$(2^{-j_n} + |\frac{k_n}{2^{j_n}} - x|)^{1+\beta} \sim 2^{-j_n} \text{ et } |C_{j_n,k_n}| \sim (2^{-j_n h} + |\frac{k_n}{2^{j_n}} - x|^h). \quad (1.28)$$

3. β *est la borne inférieure des nombres pour lesquels (1.28) est vérifié. Nous appelerons les suites du type* $(j_n, \frac{k_n}{2^{j_n}})$ *suites minimisantes pour* F *en* x.

Frontière 2-microlocale

On peut poursuivre l'analyse de la régularité locale en se servant pleinement du cadre fonctionnel offert par les espaces $C_{x_0}^{s,s'}$.

À chaque point x_0 on peut associer un domaine dit 2-microlocal qui est l'ensemble des couples (s', s) tels que $f \in C_{x_0}^{s,s'}$. La connaissance de ce domaine permet de déduire beaucoup d'informations sur la régularité locale de la fonction (cf [34] et [29]), en particulier grâce à l'étude de la frontière de ce domaine. Elle est définie par la fonction

$$s' \mapsto s(s') = \sup\{r : f \in C_{x_0}^{r,s'}\}.$$

On peut la paramétrer de différentes façons et un choix possible (cf [34]) qui nous servira dans la suite est de paramétrer cette frontière en $(s', \sigma(s') = s+s')$.

Le calcul direct de σ est possible grâce à la réécriture de (1.26) suivante :

Il existe une constante A telle que

$$\forall k \text{ tel que } |k - 2^j x_0| \leq A2^j : |C_{j,k}| \leq C2^{-(s+s')j}(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^{-s'}. \quad (1.29)$$

On obtient donc l'expression pour σ (prise en $x_0 = 0$ pour simplifier)

$$\sigma(s') = \liminf_{j\to\infty} \inf_{|k|\leq A2^j} \frac{s' \log(2^{-j} + |k2^{-j}|) + \log|C_{j,k}|}{-j \log 2} \quad (1.30)$$

Les premières propriétés de σ se déduisent facilement de la proposition 1.3.2.

Proposition 1.3.4. *Soit f une distribution tempérée. La frontière 2-microlocale de f, σ, est concave et croissante, ses dérivées à gauche et à droite sont comprises entre* 0 *et* 1.

D'autre part, la connaissance de σ permet de calculer d'une autre manière les exposants de régularité usuels.

Ainsi on peut déduire des propositions précédentes la proposition suivante

Proposition 1.3.5. *Soit $s' \mapsto \sigma(s')$ la frontière 2-microlocale d'une distribution tempérée f en x_0. On note $h_f(x_0)$ l'exposant de Hölder de f en x_0, $\beta_c(x_0)$ l'exposant de chirp de f en x_0, $\beta_o(x_0)$ l'exposant d'oscillation de f en x_0 et σ'_g la dérivée à gauche de σ.*

- *si $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$, alors $h_f(x_0) = -\inf\{s' : \sigma(s') \geq 0\}$ (et $h_f(x_0) = +\infty$ si $\sigma(s') \geq 0$ pour tout s'.)*
- $\beta_c(x_0) = \lim\limits_{s' \to -\infty} \frac{s' - \sigma(s')}{\sigma(s')}$
- $\beta_o(x_0) = \lim\limits_{s' \to -h_f(x_0)^-} \left(\frac{\sigma(s')}{s' + h_f(x_0)}\right)^{-1} = (\sigma'_g(h_f(x_0)))^{-1} - 1.$

L'étude des propriétés de la frontière 2-microlocale, et des fonctions obtenues quand on la prescrit fait l'objet d'un champ de recherche dans l'analyse de la régularité locale (cf [15] et [29]).

En particulier, le résultat de J.Lévy-Véhel et S.Seuret sur le formalisme 2-microlocal dans [34] va nous servir dans ce qui suit.

Définition 1.3.2. *Soient f une distribution tempérée et sa décomposition en ondelettes $f = \sum\limits_{j,k} C_{j,k}\psi_{j,k}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$.*

On pose

- $\theta^0 : (0,1) \to \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$

$$\theta^0(\rho) = \sup\{\gamma : \exists\delta > 0, 2^{-j\rho} \leq |\frac{k}{2^j} - x_0| \leq \delta \Rightarrow |C_{j,k}| \leq K_\rho 2^{-j\gamma}\}$$

- $\theta^1 : (0,1) \to \mathbb{R}^+ \bigcup\{+\infty\}$

$$\theta^1(\rho) = \sup\{\gamma : \exists\delta > 0, |\frac{k}{2^j} - x_0| \leq \min(\delta, 2^{-j\rho}) \Rightarrow |C_{j,k}| \leq K_\rho 2^{-j\gamma}\}$$

- *θ^0 est une fonction décroissante et θ^1 une fonction croissante. On pose*

$$\theta^0(0) = \lim_{\rho\to 0^+} \theta^0(\rho)$$

$$\theta^1(1) = \lim_{\rho\to 1^-} \theta^1(\rho)$$

- *Pour $\varepsilon > 0$,*

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(\rho) = &\sup\{\gamma : \exists j_0, \forall j \geq j_0, 2^{-j(\rho+\varepsilon)} \leq |\frac{k}{2^j} - x_0| \leq 2^{-j(\rho-\varepsilon)}) \\ &\Rightarrow |C_{j,k}| \leq C_{\rho,\varepsilon} 2^{-j\gamma}\}\end{aligned} \tag{1.31}$$

  Pour ρ fixé la fonction $\varepsilon \mapsto \chi_\varepsilon(\rho)$ est une fonction décroissante. Donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \chi_\varepsilon(\rho)$ est bien définie.
- *La fonction $\chi : (0,1) \to \mathbb{R}^+ \bigcup\{+\infty\}$ est définie par*
  - $\chi(0) = \theta^0(0)$.
  - $\rho \in (0,1) : \chi(\rho) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \chi_\varepsilon(\rho)$.
  - $\chi(1) = \theta^1(1)$.

  χ est appelé spectre 2-microlocal de f en x_0.

Le théorème suivant est alors démontré dans [34].

Théorème 1.3.1. *Soit f une distribution. Alors la frontière 2-microlocale de f en x_0 est donnée par*

$$\sigma(s') = \inf_{\rho\in[0,1]} (\rho s' + \chi(\rho)) . \tag{1.32}$$

Ce théorème a de nombreuses conséquences et nous en aurons une application dans les parties suivantes.

1.3.2 Espaces de régularité globale

Espaces de Besov

Pour ce qui est de la régularité globale, on préferera utiliser les espaces de Besov plutôt que les espaces de Sobolev, car leur caractérisation par ondelettes est très simple (cf [28]).

$$f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_\lambda 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{1/p} = \epsilon_j \quad \text{avec} \quad \epsilon_j \in l^q. \tag{1.33}$$

Les espaces de Besov sont des espaces d'interpolation, ce qui signifie ici que si une fonction f appartient à $B_p^{s,q}$ et $B_{p'}^{s',q}$, elle appartient à $B_{p"}^{s",q}$ où $s" = \theta s + (1-\theta)s'$ et $\frac{1}{p"} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p'}$, $0 \leq \theta \leq 1$. Ils vérifient des propriétés d'inclusion du type Sobolev, c'est à dire

$$B_p^{s,q} \subset B_{p'}^{s',q} \text{ si } s \geq s' \text{ et } s - \frac{d}{p} = s' - \frac{d}{p'}. \tag{1.34}$$

Domaine de Besov d'une fonction

Savoir à quels espaces de Besov une fonction appartient nous permet de caractériser d'une certaine manière sa régularité globale. Nous aurons besoin ainsi de la notion de domaine de Besov d'une fonction f, c'est à dire l'ensemble des couples (q, s) tels que f appartienne à $B_{1/q,loc}^{s,1/q}$. On vient de voir que les espaces de Besov sont des espaces d'interpolation, la frontière du domaine de Besov sera donc une fonction concave. D'autre part les inclusions de Sobolev nous montrent que la frontière du domaine de Besov est une fonction croissante s telle que, aux points où elle existe, sa dérivée vérifie $0 \leq s'(q) \leq d$.

1.3.3 Espaces de Xu

Les espaces $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ opèrent une généralisation, à la fois des espaces de Besov et des espaces deux-microlocaux.

Ces espaces ont été introduits par Y.Meyer et H.Xu dans [36] ou encore [31], et le théorème suivant y est démontré.

Théorème 1.3.2. *f appartient à $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ si f est une distribution tempérée et si*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{(s-\frac{d}{p})qj}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right)^{\frac{q}{p}} < +\infty \tag{1.35}$$

- Dans le cas s'=0, $X_{x_0}^{s,0,p,q} = B_p^{s,q}$.
- Dans le cas $p = q = +\infty$, la condition (1.35) devient

$$\sup_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^d} 2^{sj}|C_{j,k}|(1+|k-2^jx_0|)^{s'} < +\infty,$$

ce qui est la définition de l'espace $C_{x_0}^{s,s'}$.

Nous aurons besoin de la définition locale des espaces $X_{x_0}^{s,s',p,q}$.

Définition 1.3.3. *On dit que f appartient à $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ localement, noté $\dot{X}_0^{s,s',p,q}$ si il existe $\tilde{f}$ appartient à $X_0^{s,s',p,q}$ telle que $f-\tilde{f}=0$ sur un voisinage de x_0.*

Et cette définition est équivalente à la proposition suivante.

Proposition 1.3.6. *f appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,q}$ si il existe $A>0$ tel que*

$$\sum_{j\geq 0} 2^{(s-\frac{d}{p})qj}\left(\sum_{|k-2^jx_0|\leq A2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right)^{\frac{q}{p}} < +\infty.$$

Examinons les premières propriétés de ces espaces.

Dans [36] l'auteur démontre que ce sont des espaces complets et ils vérifient les inclusions de Sobolev à s' fixé, c'est à dire

Proposition 1.3.7. *Soit $x_0\in\mathbb{R}^d$. Si $-\infty<s_1<s_2<\infty$, $1\leq p_2\leq p_1\leq\infty$, et si $s_1-\frac{d}{p_1}=s_2-\frac{d}{p_2}$, alors*

$$X_{x_0}^{s_2,s',p_2,q}\subset X_{x_0}^{s_1,s',p_1,q} \tag{1.36}$$

Nous montrons ensuite la proposition suivante

Proposition 1.3.8. *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}^d$

1. *si* $t \leq s$ *et* $t + t' \leq s + s'$, *alors* $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,q} \leq \dot{X}_{x_0}^{t,t',p,q}$.
2. *Soient* $-\infty < s_1' < s_2' < \infty$, $1 \leq p_2 \leq p_1 \leq \infty$.
   Si f *appartient à* $X_{x_0}^{s_1,s_1',p_1,\infty}$ *et* $X_{x_0}^{s_2,s_2',p_2,\infty}$,
   alors, pour tout $0 \leq \theta \leq 1$, f *appartient à* $X_{x_0}^{s,s',p,\infty}$
   avec, pour $0 \leq \theta \leq 1$, $s' = \theta s_1' + (1-\theta)s_2'$, $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$ *et* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$.

Démonstration: Plaçons nous en $x_0 = 0$ pour simplifier les notations.

1. Remarquons que pour $|k| \leq A2^j$, on a $2^{jt}(1+|k|)^{t'} \leq C.2^{js}(1+|k|)^{s'}$.
   En effet
   $$\frac{2^{jt}(1+|k|)^{t'}}{2^{js}(1+|k|)^{s'}} \leq 2^{j(t-s)}(1+|k|)^{-s'+t'}$$
   Or $t' - s' \leq s - t$ et $1 + |k| \geq 1$, ce qui donne
   $$\frac{2^{jt}(1+|k|)^{t'}}{2^{js}(1+|k|)^{s'}} \leq 2^{j(t-s)}(1+|k|)^{s-t}.$$
   Or ici $|k| \leq A2^j$ et $s - t \geq 0$ et on a
   $$\frac{2^{jt}(1+|k|)^{t'}}{2^{js}(1+|k|)^{s'}} \leq C.$$
   Donc on a bien
   $$\forall |k| \leq A2^j,\ 2^{jt}(1+|k|)^{t'} \leq C.2^{js}(1+|k|)^{s'} \tag{1.37}$$
   et alors
   $$\sum_{j\geq 0} 2^{(t-\frac{d}{p})qj} \left(\sum_{|k|\leq A2j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{t'p} \right)^{\frac{q}{p}} \leq \sum_{j\geq 0} 2^{(s-\frac{d}{p})qj} \left(\sum_{|k|\leq A2j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{s'p} \right)^{\frac{q}{p}} < +\infty.$$
   d'où le résultat.

2. Soient $0 \leq \theta \leq 1$ et $s' = \theta s'_1 + (1-\theta)s'_2$, $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$ et $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$.
Nous voulons montrer que

$$2^{(s-\frac{d}{p})j}\left(\sum_k |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{s'p}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \tag{1.38}$$

On a

$$\left(\sum_k |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{s'p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_k |C_{j,k}|^{\theta p}(1+|k|)^{s'_1\theta p}|C_{j,k}|^{(1-\theta)p}(1+|k|)^{(1-\theta)s'_2 p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.39}$$

On applique l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$.
On a alors

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{|k|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{s'p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad\leq \left(\sum_k |C_{j,k}|^{p_1}(1+|k|)^{s'_1 p_1}\right)^{\frac{\theta}{p_1}} . \left(\sum_k |C_{j,k}|^{p_2}(1+|k|)^{s'_2 p_2}\right)^{\frac{1-\theta}{p_2}}\end{aligned} \tag{1.40}$$

On a donc avec $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, et $\frac{d}{p} = \frac{d\theta}{p_1} + \frac{d(1-\theta)}{p_1}$,

$$\begin{aligned}&2^{(s-\frac{d}{p})j}\left(\sum_k |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{s'p}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad\leq \left(2^{(s_1p_1-d)j}\sum_k |C_{j,k}|^{p_1}(1+|k|)^{s'_1 p_1}\right)^{\frac{\theta}{p_1}} . \left(2^{(s_2p_2-d)j}\sum_k |C_{j,k}|^{p_2}(1+|k|)^{s'_2 p_2}\right)^{\frac{1-\theta}{p_2}}\end{aligned} \tag{1.41}$$

Or f par hypothèse est dans $X_0^{s_1,s'_1,p_1,\infty}$ et $X_0^{s_2,s'_2,p_2,\infty}$, donc d'après le théorème 1.3.2, on a bien f appartient à $X_0^{s,s',p,\infty}$.

□

Nous allons démontrer dans le troisième chapitre de cette thèse que les espaces $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,q}$ avec $s' = -s$ permettent de caractériser les espaces $T_p^u(x_0)$, et nous obtiendrons ainsi une caractérisation par ondelettes du p-exposant défini par (1.10), de la même manière que les espaces $C^{s,s'}(x_0)$ nous ont permis de caractériser l'exposant de Hölder ponctuel.

Domaine de Xu

De même que pour les espaces précédents, on peut envisager un domaine "de Xu" qui est l'ensemble des triplets (p, s', s) tels que la fonction appartienne à $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,\infty}$. L'intersection de ce domaine avec le plan $p = \infty$ correspond au domaine 2-microlocal alors que l'intersection de ce domaine avec le plan $s' = 0$ correspond au domaine de Besov.

Pour p fixé, comme précédemment dans le cas des espaces 2-microlocaux, pour une fonction f donnée, on considère la frontière du domaine Xu d'une fonction f en un point x_0, c'est à dire

$$s' \mapsto s_p(s') = \sup\{s : f \in \dot{X}_{x_0}^{s,s',p,\infty}\} \tag{1.42}$$

On choisit comme précédemment de la paramétrer par $(s', \sigma_p(s') = s + s')$.

Et on peut maintenant considérer la fonction de deux variables $\tilde{\sigma} : (s', p) \mapsto \sigma_p(s')$.

La fonction $\tilde{\sigma}$ a les propriétés suivantes.

Proposition 1.3.9. *Soit f une distribution régulière et $\tilde{\sigma}$ la frontière de son domaine de Xu.*

1. *$\tilde{\sigma}$ est une fonction concave.*

2.
$$0 \leq \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial p}\right)_d (s', p) \leq \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial p}\right)_g (s', p) \leq d$$
et
$$0 \leq \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial s'}\right)_d (s', p) \leq \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial s'}\right)_g (s', p) \leq 1$$
avec $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_g$ *et* $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_g$ *qui désignent les opérateurs de dérivée partielle respectivement à gauche et à droite.*

Démonstration: Ces résultats sont des conséquences directes de la proposition 1.3.8 et de la proposition 1.3.7.

□

Dans [34], J.Lévy-Véhel et S.Seuret considèrent des exposants définis d'une façon équivalente pour $p = 1$ et $d = 1$. Ils ont obtenu les estimations de la proposition 1.3.10 dans ce cas. On peut facilement généraliser pour p quelconque leur résultat et l'appliquer aux espaces de Xu comme suit.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}^d$, une distribution f définie sur un voisinage de x_0 de diamètre $A > 0$.

Considérons la quantité

$$\Sigma_j^p(s') = 2^{(-s'p-d)j} \left(\sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{s'p} \right) \tag{1.43}$$

Proposition 1.3.10. *Soit f une fonction de L^p_{loc}. Alors*

1. *La quantité* $\liminf_{j\to\infty} \dfrac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}$ *est indépendante de la valeur de A choisie.*
2. $\tilde{\sigma}(s', p) = \liminf_{j\to\infty} \dfrac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}$
3. $\forall s' \ \sigma(s' + \frac{d}{p}) \leq \tilde{\sigma}(s', p) \leq \sigma(s') + \frac{d}{p}$

Démonstration: Démontrons le premier point.

Pour notre démonstration nous prendrons une famille d'ondelettes $\psi^{(i)}$, $i = 1, \cdots, 2^d - 1$ de classe C^n, avec $n \geq s$, à support compact, telle que $2^{dj/2}\psi^{(i)}(2^j x - k)$, $i = 1, \cdots, 2^d - 1$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$, (pour la construction de telles bases, voir [7]).

Nous utiliserons une normalisation L^∞ pour les ondelettes, et la décomposition d'une fonction f sur cette base sera celle donnée par (1.25).

Nous supposerons enfin que les ondelettes-mères $\psi^{(i)}$ sont à support compact dans $B(0, M)$, boule de centre 0 et de rayon M, avec $M > 0$ fixé. Ainsi le support de l'ondelette $\psi_{j,k}$ est inclus dans ce que nous noterons $\lambda_{j,k} = k2^{-j} + [\frac{-M}{2^j}, \frac{M}{2^j}]^d$.

Soit $B > A$.

Posons

$$\tilde{\Sigma}_j^p(s') = 2^{(-s'p-d)j} \left(\sum_{|k-2^j x_0| \leq B2^j} |C_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{s'p} \right) \tag{1.44}$$

Nous voulons montrer que

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log\left(\tilde{\Sigma}_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} \tag{1.45}$$

On peut réécrire (1.44) comme

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_j^p(s') &= 2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{|k-2^jx_0|\leq A2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right)\\ &\quad+2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right)\\ &=\Sigma_j^p(s')+2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right)\end{aligned} \tag{1.46}$$

Étudions la quantité à j fixé

$$2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right) \tag{1.47}$$

On peut la majorer par

$$\begin{aligned}2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right) &\leq C2^{js'p}2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p\right)\\ &\leq C2^{-dj}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p\right)\end{aligned} \tag{1.48}$$

où C ne dépend que de A, B et $s'p$.

Nous voulons maintenant évaluer la quantité pour j fixé

$$\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p. \tag{1.49}$$

Nous savons que la fonction f appartient à L^p_{loc}. Donc elle appartient par définition de L^p_{loc} à l'espace $L^p([-2B,2B]^d)$.

On a alors $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour $x \in [-2B, 2B]^d$, avec $\tilde{f}$ une fonction de $L^p(\mathbb{R}^d)$ nulle en dehors de $[-2B, 2B]^d$.

On peut donc écrire

$$\int_{[-2B,2B]^d} |f(x)|^p dx = \int_{[-2B,2B]^d} |\tilde{f}(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x)|^p dx. \tag{1.50}$$

D'autre part si on note

$$\tilde{f} = \sum_{\lambda} \tilde{C}_\lambda \psi_\lambda, \tag{1.51}$$

la caractérisation par ondelettes des fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$ nous donne qu'il existe $C > 0$ et $C' > 0$ tels que

$$C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int \left(\sum_{\lambda} |\tilde{C}_\lambda|^2 \chi_\lambda(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C' \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.52}$$

où χ_λ désigne la fonction caractéristique du cube dyadique λ.

Or sur $[-2B, 2B]^d$, on a

$$\tilde{f}(x) = f(x) = \sum_{\lambda_{j,k} \bigcap [-2B,2B]^d \neq \emptyset} C_\lambda \psi_\lambda(x). \tag{1.53}$$

Et on sait que le support de ψ_λ est inclus dans $\lambda_{j,k} = k2^{-j} + [\frac{-M}{2^j}, \frac{M}{2^j}]^d$.

Donc pour $\lambda_{j,k}$ tel que $\lambda_{j,k} \bigcap [-2B, 2B]^d = \emptyset$, on a

$$\tilde{C}_{j,k} = 0 \tag{1.54}$$

Et pour $\lambda_{j,k}$ tel que $\lambda_{j,k} \subset]-2B, 2B[^d$, on a

$$\tilde{C}_{j,k} = C_{j,k} \tag{1.55}$$

On suppose maintenant que l'on prend j suffisamment grand pour que si $\frac{k}{2^j} \leq B$ alors $\lambda \subset]-2B, 2B[^d$ et $\lambda_{j,k} \subset]-2B, 2B[^d$.

D'après (1.50), (1.52) et (1.53), on peut écrire

$$\left(\int\left(\sum_{\lambda_{j,k}\bigcap[-2B,2B]^d\neq\emptyset}|\tilde{C}_\lambda|^2\chi_\lambda(x)\right)^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\int_{[-2B,2B]^d}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C. \tag{1.56}$$

et

$$\int\left(\sum_{k:\frac{k}{2^j}\leq B}|\tilde{C}_{j,k}|^2\chi_\lambda(x)^2\right)^{\frac{p}{2}}dx\leq\int_{\lambda_{j,k}\bigcap[-2B,2B]^d\neq\emptyset}\left(\sum_{j,k}|C_{j,k}|^2\psi_\lambda(x)^2\right)^{\frac{p}{2}}dx\leq C. \tag{1.57}$$

À l'échelle j fixé on a $\lambda=\frac{k}{2^j}+[0,\frac{1}{2^j}]^d$ et les cubes λ forment une partition. On a alors

$$\sum_{k:\frac{k}{2^j}\leq B}|\tilde{C}_{j,k}|^p\left(\int\chi_\lambda(x)dx\right)=\int\left(\sum_{k:\frac{k}{2^j}\leq B}|\tilde{C}_{j,k}|^2\chi_\lambda(x)^2\right)^{\frac{p}{2}}\leq C \tag{1.58}$$

Or

$$\int\chi_\lambda(x)dx=2^{-dj}. \tag{1.59}$$

Donc

$$\sum_{k:\frac{k}{2^j}\leq B}|C_{j,k}|^p 2^{-dj}\leq C. \tag{1.60}$$

$$\sum_{k:\frac{k}{2^j}\leq B}|C_{j,k}|^p\leq C2^{dj}. \tag{1.61}$$

On peut donc majorer (1.62) pour j suffisamment grand comme suit.

$$\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p\leq C2^{dj}. \tag{1.62}$$

Et on a alors pour (1.48),

$$2^{(-s'p-d)j}\left(\sum_{A2^j\leq|k-2^jx_0|\leq B2^j}|C_{j,k}|^p(1+|k-2^jx_0|)^{s'p}\right)\leq C \tag{1.63}$$

La quantité (2.22) est donc majorée par une constante qui ne dépend que des paramètres s', p, A et B.

On peut donc écrire d'après (1.46), pour j suffisamment grand,

$$\Sigma_j^p(s')\leq\tilde{\Sigma}_j^p(s')\leq C+\Sigma_j^p(s') \tag{1.64}$$

et clairement par concavité du logarithme,

$$\log(\Sigma_j^p(s'))\leq\log(\tilde{\Sigma}_j^p(s'))\leq\log(C+\Sigma_j^p(s'))\leq C+\log(\Sigma_j^p(s')). \tag{1.65}$$

Donc

$$\frac{C}{-j\log 2}+\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}\leq\frac{\log\left(\tilde{\Sigma}_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}\leq\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}. \tag{1.66}$$

Or si u_n et v_n sont deux suites,

$$\liminf(u_n)+\liminf(v_n)\leq\liminf(u_n+v_n).$$

D'où

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{C}{-j\log 2}+\liminf_{j\to\infty}\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}\leq\liminf_{j\to\infty}\frac{\log\left(\tilde{\Sigma}_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}\leq\liminf_{j\to\infty}\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}. \tag{1.67}$$

On a donc bien l'égalité

$$\liminf_{j\to\infty}\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}=\liminf_{j\to\infty}\frac{\log\left(\tilde{\Sigma}_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}.$$

Et la quantité

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}$$

ne dépend pas de A.

Démontrons le deuxième point. On note

$$T(s') = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}. \tag{1.68}$$

Par définition on a $\sigma_p(s') = s(s') + s'$ avec $s(s')$ défini par (1.42).
Donc pour tout $\varepsilon > 0$, f appartient à $\dot{X}_{x_0}^{\sigma_p(s')-s'-\varepsilon,s',p,\infty}$.
Ce qui donne, d'après la proposition 1.3.6, il existe A tel que

$$\sup_j 2^{j((\sigma_p(s')-s'-\varepsilon)p-d)} \sum_{|k-2^j x_0|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{s'p} < +\infty \tag{1.69}$$

Donc il existe C telle que pour tout j

$$\Sigma_j^p(s') \leq C 2^{jp(-\sigma_p(s')+\varepsilon)} \tag{1.70}$$

Ce qui donne, pour tout j et tout ε

$$\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} \geq \sigma_p(s') - \varepsilon \tag{1.71}$$

Donc

$$T(s') \geq \sigma_p(s'). \tag{1.72}$$

D'autre part d'après (1.68)
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe j_0 pour tout $j \geq j_0$

$$\frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} \geq T(s') - \varepsilon \tag{1.73}$$

D'où il existe A tel que

$$2^{-j(s'p+d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{s'p} \leq 2^{-jp(T(s')-\varepsilon)} \tag{1.74}$$

Ce qui donne donc

$$2^{j(-s'p-d+pT(s')-p\varepsilon))} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A.2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{s'p} \leq 1 \tag{1.75}$$

Donc f appartient à $X_{x_0}^{-s'+T(s')-\varepsilon,s',p,\infty}$.
Donc $T(s') - \varepsilon \leq \sigma_p(s')$ pour tout $\varepsilon > 0$.
Donc

$$T(s') \leq \sigma_p(s'). \tag{1.76}$$

Avec (1.72) on a bien $\sigma_p(s') = T(s')$. Le deuxième point est donc démontré.

Démontrons le troisième point en suivant toujours la méthode décrite dans [34], avec $x_0 = 0$ et $A = 1$ pour simplifier les calculs.

Soit ρ_k tel que $(|k|+1)2^{-j} = 2^{-j\rho_k}$. Quand k varie dans $[-2^j+1, 2^j-1]^d$, ρ_k varie dans $[0,1]$. On a

$$\Sigma_j^p(s') = \sum_{|k| \leq 2^j-1} 2^{-j(d+s'p\rho_k)} |C_{j,k}|^p \tag{1.77}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $K = [1/\varepsilon]$, où $[.]$ désigne la partie entière, et $\beta_i = i\varepsilon$ avec i variant de 1 à K.

Alors

$$\Sigma_j^p(s') \leq \sum_{i=0}^{K} \sum_{k:|\rho_k-\beta_i| \leq \varepsilon} 2^{-j(d+s'p\rho_k)} |C_{j,k}|^p \tag{1.78}$$

On note β l'indice β_i pour lequel $\left(\sum_{k:|\rho_k-\beta_i| \leq \varepsilon} 2^{-j(d+s'p\rho_k)} |C_{j,k}|^p \right)$ est maximal et on prend par exemple le plus petit de ces indices si il y en a plusieurs.

On a donc

$$\begin{aligned}\Sigma_j^p(s') &\leq (K+1)\sum_{k:|\rho_k-\beta|\leq\varepsilon} 2^{-j(d+s'p\rho_k)}|C_{j,k}|^p \\ &\leq (K+1)2^{-j(d+ps'(\beta\pm\varepsilon))}\sum_{k:|\rho_k-\beta|\leq\varepsilon}|C_{j,k}|^p\end{aligned} \tag{1.79}$$

Fixons $\eta > 0$.

La définition de χ_ε, pour j assez grand nous donne la majoration

$$\sup\{|C_{j,k}| : |\rho_k - \beta| \leq \varepsilon\} \leq C2^{-j(\chi_\varepsilon(\beta)-\eta)}. \tag{1.80}$$

Déterminons le cardinal de l'ensemble $B = \{k : |\rho_k - \beta| \leq \varepsilon\}$.

Si k appartient à cet ensemble, alors

$$\beta - \varepsilon \leq \rho_k \leq \beta + \varepsilon$$

Donc

$$2^{-j(\beta+\varepsilon)} \leq (|k|+1)2^{-j} \leq 2^{-j(\beta-\varepsilon)}$$

Donc on a au plus $2^{jd(1-\beta+\varepsilon)}$ valeurs de k qui vérifient cette inégalité et qui appartiennent à B.

On peut donc majorer (1.79) avec (1.80), ce qui donne

$$\Sigma_j^p(s') \leq (K+1)2^{-j(d+ps'(\beta\pm\varepsilon)+\chi_\varepsilon(\beta)p-\eta p+d\beta-d-d\varepsilon)} \tag{1.81}$$

On fait tendre j vers l'infini, puis η vers 0, et enfin ε aussi vers 0. Alors on obtient

$$\sigma_p(s') \geq \beta(s' + \frac{d}{p}) + \chi(\beta) \tag{1.82}$$

Or le théorème 1.3.1 nous donne exactement la valeur du minimum de la fonction $\beta \mapsto \beta(s' + \frac{d}{p}) + \chi(\beta)$, c'est $\sigma(s' + \frac{d}{p})$.

Donc on obtient la majoration

$$\sigma_p(s') \geq \sigma(s' + \frac{d}{p}). \tag{1.83}$$

D'autre part, on a clairement

$$\Sigma_j^p(s') \geq \sup_{|k|<2^j} (|k|+1)^{s'p} 2^{-j(s'p-d)} |C_{j,k}|^p$$

D'où

$$\frac{\log \Sigma_j^p(s')}{-j\log 2} \leq \inf_{|k|<2^j} \frac{s'p\log(2^{-j}+|k2^{-j}|)+log|C_{j,k}|^p+d}{-j\log 2}$$

Et d'après (1.30), on a

$$\sigma_p(s') \leq \sigma(s') + \frac{d}{p}. \tag{1.84}$$

□

Nous allons démontrer dans le troisième chapitre de cette thèse que les espaces $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ avec $s' = -s$ permettent de caractériser les espaces $T_p^u(x_0)$, et obtiendrons ainsi une caractérisation par ondelettes du p-exposant défini par 1.10, de la même manière que les espaces $C^{s,s'}(x_0)$ nous ont permis de caractériser l'exposant de Hölder ponctuel.

Ainsi nous avons maintenant grâce aux ondelettes un outil d'analyse qui nous permet d'examiner les différentes questions que nous avons soulevées dans l'introduction. La première d'entre elles sera la question de la validité du formalisme classique et de son rapport avec les singularités oscillantes.

Chapitre 2

Singularités oscillantes

2.1 Introduction

Nous allons d'abord nous intéresser à la question de la validité du formalisme multifractal. Remarquons que la formulation de (1.23) fait appel aux espaces fonctionnels $B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ auxquels la fonction appartient. On peut, pour tester la validité du formalisme multifractal, examiner à quels espaces fonctionnels $B_{p,loc}^{s,p}$ une fonction donnée appartient et examiner la validité en général du formalisme multifractal dans l'ensemble constitué par l'intersection d'espaces fonctionnels auquels la fonction appartient.

Autrement dit le formalisme multifractal défini à partir de (1.23) peut être formulé de la manière équivalente suivante. Considérons une fonction f dans L_{loc}^{∞} et sa fonction d'échelle défini par (1.23). Soit V l'espace fonctionnel

$$V = \bigcap_{\varepsilon>0,p>0} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}. \tag{2.1}$$

Alors f appartient à V et dire que le formalisme multifractal est vrai équivaut à dire que

$$d(h) = \inf_{p>0}(ph - \eta_f(p) + d). \tag{2.2}$$

Ainsi on peut aborder la question de la validité du formalisme multifractal

en étudiant les espaces V. On les munit à partir de maintenant de la topologie la moins fine qui rend continues les injections de V dans les espaces $B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$.

Ainsi, ayant adopté ce point de vue d'analyse fonctionnelle, une question naturelle est de savoir si la conjecture de Frisch-Parisi est vraie pour "quasi-toutes" fonctions dans V, c'est à dire dans une intersection dénombrable d'ouverts denses de V.

V est en effet un espace de Baire (une intersection dénombrable d'ouverts denses y est partout dense) bien qu'il ne soit pas un espace de Banach.

S.Jaffard dans [16] montre que la réponse est mitigée : il existe un spectre quasi-sur mais seule une partie du spectre est donnée par la formule de Frisch et Parisi.

Notre objectif est de donner l'explication de ce phénomène. On savait déjà (cf [3] and [19]) que le formalisme multifractal pouvait être faux pour des fonctions contenant des singularités oscillantes du type $x^h \sin(\frac{1}{x^\beta})$.

Nous montrerons que ce phénomène est une des causes du fait que quasi-surement le formalisme multifractal n'est pas vérifié. Pour quasi-toutes fonctions, chaque ensemble S_h pour lequel le formalisme multifractal ne donne pas la bonne dimension, contient un ensemble de points, où la fonction a un comportement oscillant, de même dimension que S_h lui-même.

De plus, alors que jusque-là on pensait que les comportements oscillants sur des suites de points d'accumulation étaient exceptionnels, nous montrerons que la présence de singularités oscillantes est générique, au sens où nous pouvons en trouver presque-partout, dans quasi-toutes fonctions de beaucoup d'espaces fonctionnels (c'est le cas en particulier dans V).

Définition 2.1.1. *Un espace topologique séparé est appelé espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est un ouvert dense.*

Remarque 2.1.1. *Si une propriété (P) est vraie dans une intersection dénombrable d'ouverts denses, que nous noterons G_δ, d'un espace de fonctions B qui est de Baire, nous dirons que (P) est vraie génériquement dans B, ou que quasi-*

toutes fonctions de B vérifient (P).

Nous allons maintenant caractériser les espaces du type de celui de V. Rappelons (cf partie 1.3.2) que la frontière du domaine de Besov est concave et est une fonction croissante s telle que $0 \leq s'(q) \leq d$.

Dans [16], S.Jaffard démontre la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Toute fonction concave s qui vérifie $0 \leq s'(q) \leq d$ définit le domaine de Besov d'une distribution f.*

D'autre part la fonction d'échelle de f définie par (1.23) est reliée à s par l'expression $\eta(q) = qs(1/q)$.

Lemme 2.1.1. *Si s est une fonction concave, la fonction η définie par $\eta(q) = qs(1/q)$ est concave.*

Démonstration: On fixe $q_0 \in \mathbb{R}$. On étudie la fonction $q \mapsto \dfrac{qs(1/q) - q_0 s(1/q_0)}{q - q_0}$ et on montre que c'est une fonction décroissante. Pour cela il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{qs(1/q) - q_0 s(1/q_0)}{q - q_0} &= \frac{qs(1/q) - qs(1/q_0) + qs(1/q_0) - q_0 s(1/q_0)}{q - q_0}. \\
&= \frac{q\left(s(1/q) - s(1/q_0)\right)}{q - q_0} + s(1/q_0) \\
&= \frac{1}{q_0}.\frac{s(1/q) - s(1/q_0)}{\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{q_0}} + s(1/q_0)
\end{aligned}$$

La fonction $q \mapsto s(q)$ étant concave, la fonction $q \mapsto \dfrac{s(q) - s(q_0)}{q - q_0}$ est décroissante.

Donc la fonction $q \mapsto \dfrac{s(1/q) - s(1/q_0)}{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}}$ est croissante, et par suite $q \mapsto \dfrac{qs(1/q) - q_0 s(1/q_0)}{q - q_0}$ est décroissante.

Donc η est bien une fonction concave si s est une fonction concave.

□

Nous allons étudier les fonctions f qui ont une régularité hölderienne uniforme donnée, c'est à dire telles qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^d)$. Or les espaces $B^{s,\infty}_\infty$ sont les espaces $C^s(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s > 0$. La condition de régularité uniforme sur f est vérifiée lorsque f appartient à l'un de ces espaces, c'est à dire lorsque $s(0) > 0$.

Nous appellerons fonctions admissibles les fonctions $\eta(p)$ qui sont des fonctions d'échelle et peuvent être obtenues grâce à (1.23). Ces définitions sont introduites dans [16].

Proposition 2.1.2. *Une fonction $\eta(p) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est dite admissible si $s(q) = q\eta(1/q)$ est concave et vérifie $0 \leq s'(q) \leq d$. Elle est dite fortement admissible si de plus $s(0) > 0$.*

Lemme 2.1.2. *Si s est une fonction concave et croissante qui vérifie $0 \leq s'(q) \leq d$, alors il existe une valeur critique p_c telle que si $q < 1/p_c$, $s(q) > dq$ et si $q > 1/p_c$, $s(q) < dq$. Dans le cas dégénéré où $s(q) = s_0 + dq$ on a $1/p_c = +\infty$.*

Démonstration: La fonction $\tilde{s} : q \mapsto s(q) - dq$ est une fonction concave.

Donc on a l'inégalité suivante

$$\frac{s(q) - dq - s(q_0) + dq_0}{q - q_0} \leq s'_d(q_0) \leq s'_g(q_0). \tag{2.3}$$

La fonction $\tilde{s}$ est clairement décroissante étant donné que ses dérivées à droite et à gauche sont négatives.

Si elles ne sont pas constantes, elles vérifient à partir d'un certain q_0,

$$\forall q \geq q_0, s'_d(q) - d < s'_g(q) - d < 0.$$

Donc on peut écrire, d'après 2.3,

$$s(q) - dq < s'_d(q_0)(q - q_0) + s(q_0) - dq_0.$$

et donc pour q suffisamment grand,

$$s(q) - dq < 0.$$

Or $\tilde{s}(0) = s(0) > 0$ par hypothèse et $\tilde{s}$ est continue.

Donc il existe une valeur p_c telle que si $q < 1/p_c$, $s(q) > dq$ et si $q > 1/p_c$, $s(q) < dq$. □

Dans la suite nous excluons le cas dégénéré $p_c = +\infty$.

Le théorème suivant de [16] est le point de départ de ce travail.

Théorème 2.1.1. *Soit η une fonction admissible.*
Soit p_c tel que $s(1/p_c) = d/p_c$
Le spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de $V = \bigcap_{\varepsilon>0,p>0} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ est défini sur $[s(0), d/p_c]$ et est donné par

$$d(h) = \inf_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d) \tag{2.4}$$

Le formalisme multifractal standard n'est pas vrai pour quasi-toutes fonctions de V.

Si on examine le résultat précédent, en supposant pour simplifier que η est dérivable (mais le résultat est vrai dans le cas général), on obtient deux parties dans le spectre de singularités.

Examinons quelles sont ces deux parties.

Posons f telle que $f(p) = hp - \eta(p) + d$.

f est une fonction convexe car η est concave d'après le lemme 2.1.1. Son minimum sur $\mathbb{R}_+$ est donné par $f(p_0)$ où p_0 annule $f'(p) = h - \eta'(p)$.

Nous avons vu que η' est une fonction décroissante, donc

1. $h \geq \eta'(p)$ pour $p \geq p_0$ et f est croissante sur $[p_0, +\infty]$.

2. $h \leq \eta'(p)$ pour $p \leq p_0$ et f est décroissante sur $[0, p_0]$.

Cherchons le minimum de f sur $[p_c, +\infty]$.

On a deux situations :
- Soit $p_0 \geq p_c$ et dans ce cas $\inf\limits_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d) = \inf\limits_{p \geq 0} (hp - \eta(p) + d) = f(p_0)$.
- Soit $p_0 \leq p_c$ et dans ce cas $\inf\limits_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d) = f(p_c)$.

Donc si on a $p_c < p_0$ alors $\eta'(p_0) < \eta'(p_c)$ et $h < \eta'(p_c)$.

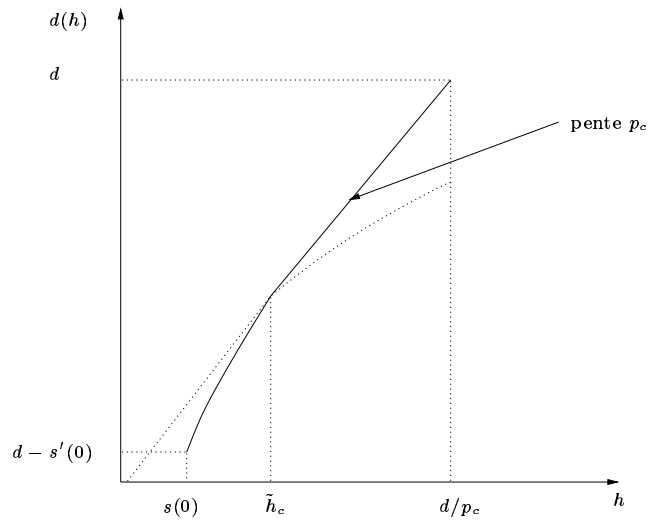
Le nombre p_c est défini par $s(1/p_c) = d/p_c$. Avec $\eta'(p) = s(1/p) - \frac{s'(1/p)}{p}$, on a $\eta'(p_c) = \frac{d - s'(\frac{1}{p_c})}{p_c}$.

Donc pour $h \leq \frac{d - s'(\frac{1}{p_c})}{p_c}$, on a $\inf\limits_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d) = \inf\limits_{p \geq 0} (hp - \eta(p) + d) = f(p_0)$.

Sinon on a $\inf\limits_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d) = f(p_c) = hp_c$.

La figure suivante résume le résultat.

Le spectre de singularités est donné par le formalisme multifractal (trait plein et formule $d(h) \inf\limits_{p \geq 0} (hp - \eta(p) + d)$) jusqu'au point $h = \dfrac{d - s'(1/p_c)}{p_c}$, ensuite il est donné par la droite de pente p_c.



La question est maintenant d'étudier le lien entre le fait que le formalisme multifractal soit faux et les comportements oscillants pour quasi-toutes fonctions.

Les contre-exemples au formalisme multifractal de [19] et [20] comprenaient des singularités oscillantes du type $f(x) = |x - x_*|^h g(\frac{1}{|x-x_*|^\beta})$ en x_*.

Nous verrons que chaque fois que le formalisme multifractal est faux dans un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts denses) construit ainsi que dans [16], les fonctions de cet ensemble G_δ contiennent des singularités oscillantes.

L'exposant d'oscillation est celui qui est défini par la définition 1.1.6. Nous appellerons spectre de singularités oscillantes d'une fonction F et nous noterons $d(h, \beta)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble $E^{(h,\beta)}$ de points où F a des exposants de singularités oscillantes (h, β).

Il est clair que si $h \neq +\infty$

$$S_h = \bigcup_\beta E^{(h,\beta)}, \tag{2.5}$$

si bien que, quel que soit β, $d(h, \beta) \leq d(h)$.

Nous allons étendre la méthode utilisée par S.Jaffard dans [16] pour étudier les singularités oscillantes des fonctions d'un ensemble G_δ donné dans V.

Nous montrerons que lorsque le formalisme multifractal n'est pas vérifié pour une fonction F dans cet ensemble G_δ, il existe un ensemble $E^{(h,\beta)}$ avec $\beta \neq 0$, dont la dimension de Hausdorff est exactement celle de S_h.

Le théorème suivant synthétise ces résultats.

Théorème 2.1.2. *Soit η une fonction fortement admissible et* $V = \bigcap_{\varepsilon>0, p>0} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$.
Soit p_c tel que $s(1/p_c) = d/p_c$ et $q_c = 1/p_c$.
Soit s'_d la dérivée à droite de s et s'_g la dérivée à gauche de s. On note $\tilde{h}_c = \dfrac{d - s'_d(1/p_c)}{p_c}$.

1. *Soit $h = s(0)$.*

   - *Si $\beta = 0$, alors*
   $$d(h,\beta) = d(h,0) = d(h).$$
   - *Si $\beta \neq 0$, alors*
   $$d(h,\beta) = -\infty.$$

2. *Soit $h \in]s(0), \tilde{h}_c]$.*

   - *Si $\beta = 0$, alors*
   $$d(h,\beta) = d(h,0) = d(h).$$
   - *Si $\beta > \max(0, \frac{hp_c}{(d-s'_g(1/p_c))} - 1)$, alors*
   $$d(h,\beta) < d(h).$$

3. *Soit $h \in [\tilde{h}_c, d/p_c]$.*

   - *Si $\beta = \dfrac{hp_c}{(d - s'_d(1/p_c))} - 1$, alors*
   $$d(h,\beta) = d(h) = \inf_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d).$$
   - *Si $\beta \notin [\frac{hp_c}{(d-s'_d(1/p_c))} - 1, \frac{hp_c}{(d-s'_g(1/p_c))} - 1]$, alors*
   $$d(h,\beta) < d(h).$$

4. *De plus quasi-toutes fonctions de V ont presque partout comme exposants de singularités oscillantes* $(h,\beta) = (d/p_c, \frac{d}{d-s'_d(1/p_c)} - 1)$.

Dans le cas où s est dérivable en $1/p_c$, le théorème précédent devient

Corollaire 2.1.1. *Soit η une fonction fortement admissible et* $V = \bigcap_{\varepsilon>0,p>0} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$. *Soit p_c tel que $s(1/p_c) = d/p_c$ et $q_c = 1/p_c$. On suppose de plus que s est dérivable en $1/p_c$. On note* $\tilde{h}_c = \dfrac{d - s'(1/p_c)}{p_c}$.

Alors

1. *Soit $h = s(0)$.*

   - *Si $\beta = 0$, alors*
   $$d(h,\beta) = d(h,0) = d(h).$$
   - *Si $\beta \neq 0$, alors*
   $$d(h,\beta) = -\infty.$$

2. *Soit $h \in]s(0), \tilde{h}_c]$.*

   - *Si $\beta = 0$, alors*
   $$d(h,\beta) = d(h,0) = d(h).$$
   - *Si $\beta \neq 0$, alors*
   $$d(h,\beta) < d(h).$$

3. *Soit $h \in [\tilde{h}_c, d/p_c]$.*

   - *Si $\beta = \dfrac{h}{\tilde{h}_c} - 1$, alors*
   $$d(h,\beta) = d(h) = \inf_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d).$$

– *Si* $\beta \neq \frac{h}{\tilde{h}_c} - 1$, *alors*

$$d(h, \beta) < d(h).$$

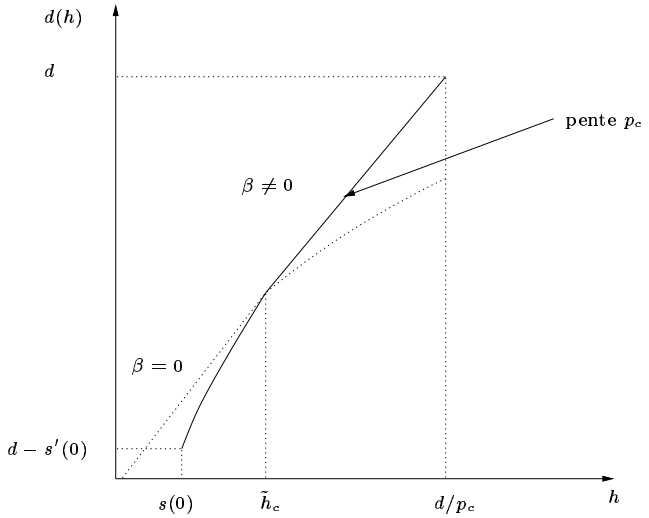
4. *De plus quasi-toutes fonctions de* V *ont presque partout comme exposants de singularités oscillantes* $(h, \beta) = (d/p_c, \frac{d}{d - s'(1/p_c)} - 1)$.

Le cas du corollaire 2.1.1 pour lequel on a des oscillations correspond au cas du théorème 2.1.1 où le formalisme multifractal est faux. En effet, dans le théorème 2.1.1, $\tilde{h}_c$ était le point à partir duquel formalisme multifractal et spectre réél différaient.

Dans le cas où $h < \tilde{h}_c$, le point 1 du corollaire 2.1.1 nous indique qu'il peut y avoir des singularités oscillantes mais les singularités "cusps" (c'est à dire $\beta = 0$) dominent.Le formalisme multifractal est alors vrai.

Par contre, dans le cas où $h > \tilde{h}_c$, ce sont au contraire les singularités oscillantes qui l'emportent, et le formalisme multifractal tombe en défaut.

La figure suivante synthétise ces résultats .



Avant de démontrer le théorème 2.1.2, nous allons étudier le problème plus simple du spectre de singularités oscillantes quasi-sur des fonctions d'un espace

de Besov donné qui sera d'abord inclus dans un espace de fonctions continues.

S.Jaffard a déjà fait l'étude du spectre de singularités (non-oscillantes) de quasi-toutes fonctions et nous rappelons son théorème dans [16] qui est le point de départ de ce travail.

Théorème 2.1.3. *Soient $p > 0$, $q > 0$ et $s > d/p$. Le domaine de définition du spectre de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ est l'intervalle $[s - d/p, s]$ sur lequel il est donné par*

$$d(H) = p(H - s) + d. \tag{2.6}$$

Le formalisme multifractal est vrai pour quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$.

De plus pour quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$, l'exposant de Hölder prend presque partout la valeur s.

Si $p > 1$, on a le même résultat dans $L^{p,s}(\mathbb{R}^d)$.

S.Jaffard a démontré que dans ce cas, le formalisme multifractal est vrai pour quasi-toutes fonctions dans cet espace. Le résultat attendu est alors qu'on ne trouvera pas beaucoup de singularités oscillantes dans ces fonctions et le théorème suivant confirme en effet cette impression.

Théorème 2.1.4. *Supposons que $s > \frac{d}{p}$, $q > 0$, $p > 0$*

Soit h un élément du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire un élément de l'intervalle $[s - d/p, s]$.

1. *Si $\beta = 0$, alors*

$$d(h, \beta) = d(h, 0) = d(h).$$

   Si $\beta \neq 0$, alors

$$d(h, \beta) < d(h).$$

2. *De plus pour quasi-toutes fonctions de V l'exposant d'oscillation prend presque-partout la valeur $\beta = 0$.*

Nous allons étudier ensuite le cas des fonctions continues dans les espaces de Besov qui ne sont pas inclus dans un espace de fonctions continues, c'est à dire les fonctions de $B_p^{s,q} \bigcap C^\gamma$ avec $s < \frac{d}{p}$ et $\gamma < s$.

S.Jaffard a déjà fait l'étude du spectre de singularités (non-oscillantes) de quasi-toutes fonctions et nous rappelons son théorème dans [16].

Théorème 2.1.5. *Si $s < d/p$ et $\gamma > 0$, le domaine de définition du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d) \cap C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ ou de $L^{p,s}(\mathbb{R}^d) \cap C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ est l'intervalle $\left[\gamma, \frac{d\gamma}{d-sp+\gamma p}\right]$ où son spectre est donné par*

$$d(H) = \left(p + \frac{d-sp}{\gamma}\right) H. \tag{2.7}$$

De plus, pour quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d) \cap C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ ou de $L^{p,s}(\mathbb{R}^d) \cap C^\gamma(\mathbb{R}^d)$, l'exposant de Hölder est égal presque partout à $\frac{d\gamma}{d-sp+\gamma p}$.

S.Jaffard a déjà démontré que le formalisme multifractal n'est pas vérifié pour quasi-toutes fonctions dans ces espaces. Nous montrerons qu'on peut alors trouver presque-partout des points de singularités oscillantes dans ces fonctions.

Théorème 2.1.6. *Soit $s < \frac{d}{p}$ et $f \in B_p^{s,q} \bigcap C^\gamma$ avec $\gamma < s$.*

Soit h un élément du domaine de définition du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q} \bigcap C^\gamma$ avec $\gamma < s$, c'est à dire un élément de l'intervalle $[\gamma, \frac{d\gamma}{d+\gamma p-sp}]$.

1. *Si $\beta = \frac{h}{\gamma} - 1$, alors*

$$d(h,\beta) = d(h) = \left(p + \frac{d-sp}{\gamma}\right) h.$$

Si $\beta \neq \frac{h}{\gamma} - 1$, alors

$$d(h,\beta) < d(h).$$

2. *De plus quasi-toutes fonctions de V ont presque partout les exposants de singularités oscillantes*
   $(h, \beta) = (\frac{d\gamma}{d+\gamma p - sp}, \frac{d}{d+\gamma p - sp} - 1)$.

Pour démontrer les théorèmes 2.1.2, 2.1.4, et 2.1.6 nous emploierons la méthode décrite dans [16].

Rappelons que pour tout $(h, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$ nous avons une majoration évidente de $d(h, \beta)$ donnée par $d(h, \beta) \leq d(h)$.

Nous démontrerons d'abord une majoration plus fine pour le spectre de singularités oscillantes d'une fonction continue dans un e space de Besov.

Proposition 2.1.3. *Soit f telle qu'il existe un γ tel que $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$d(h, \beta) \leq \inf_{p>0} [hp - \eta_f(p)(\beta + 1) + d(\beta + 1)] \tag{2.8}$$

où η_f représente la fonction d'échelle de f.

Alors pour chaque espace fonctionnel, nous développerons les différentes étapes suivantes.

D'abord nous étudierons une fonction particulière à chaque espace, dite "de saturation", dont les ensembles de singularités S_h seront les plus nombreux et les plus gros possibles. Nous calculerons en chaque point ses exposants de singularités oscillantes et son spectre de singularités oscillantes. Nous démontrerons que cette fonction "sature" l'inégalité (2.8), c'est à dire que $d(h, \beta) = \inf_{p>0} [hp - \eta_f(p)(\beta + 1) + d(\beta + 1)]$ pour cette fonction.

Ensuite nous perturberons légèrement une suite dense de fonctions dans l'espace considéré en remplaçant les coefficients en ondelettes de chaque élément de la suite, pour les échelles $j \geq j_n$, par ceux de la fonction de saturation. Nous obtiendrons une nouvelle suite dense (g_n). Nous considérerons alors un ensemble résiduel

$$A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$$

où r_n est suffisamment petit pour que, à l'échelle $j = j_n$, les coefficients en ondelettes d'une fonction dans A soit proches de ceux d'un des g_n.

Pour chaque f dans A et chaque exposant de Hölder h, nous démontrerons qu'il existe un exposant d'oscillation β et un ensemble $E^{(h,\beta)}$ qui a exactement la dimension $d(h)$, alors que les autres ensembles $E^{(h,\beta)}$ ont une dimension strictement plus petite.

2.2 Majoration du spectre de singularités oscillantes

Nous allons montrer dans cette partie la proposition 2.1.3 mais nous démontrerons dans la partie 2.6 que la majoration proposée est optimale.

Commençons par démontrer le lemme 2.2.1 et la proposition 2.2.1 dont nous allons avoir besoin dans la preuve de la proposition 2.1.3.

Nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *Soit $f \in C^\delta(\mathbb{R}^d)$, avec $\delta > 0$.*

Si f a comme exposants d'oscillation (h, β) au point x, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite (j_n, k_n) telle que

$$|x - k_n.2^{-j_n}|^{\beta+1+\varepsilon} \leq 2^{-j_n} \leq |x - k_n.2^{-j_n}|^{\beta+1-\varepsilon} \tag{2.9}$$

et

$$|C_{j_n,k_n}| \geq |x - k_n 2^{-j_n}|^{h+\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Démonstration:

Supposons que f a pour exposants d'oscillation (h, β) en x .

Fixons $\varepsilon > 0$.

D'après la proposition 1.3.3, dans le domaine $|\frac{k}{2^j} - x|^{1+\beta+\varepsilon} \leq 2^{-j}$ il existe une

suite minimisante (j_n, k_n) telle que

$$(2^{-j_n} + |\tfrac{k_n}{2^{j_n}} - x|)^{1+\beta} \sim 2^{-j_n} \text{ et } |C_{j_n,k_n}| \sim (2^{-j_n h} + |\tfrac{k_n}{2^{j_n}} - x|^h).$$

Donc pour n assez grand, $|C_{j_n,k_n}| \geq |\frac{k_n}{2^{j_n}} - x|^{h+\varepsilon}$.

D'autre part on a nécessairement $|\frac{k_n}{2^{j_n}} - x|^{1+\beta-\varepsilon} \geq 2^{-j_n}$ car sinon la suite ne serait pas minimisante.

□

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante, qui nous servira ensuite dans la preuve de la proposition 2.1.3.

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et à partir de maintenant on note $Mes_D(A)$ la mesure D-dimensionnelle de Hausdorff de A.

Proposition 2.2.1. *Soient $\gamma > 0$ et $f \in B_p^{s,\infty} \bigcap C^\gamma(\mathbb{R}^d)$.*
Soit $\beta \geq 0$ et $D > hp - sp(\beta+1) + d(\beta+1)$.

1. *Si $d - sp > 0$, alors*
$$Mes_D(\bigcup_{\beta' \leq \beta} E^{(h,\beta')}) = 0.$$
2. *Si $d - sp < 0$. Alors*
$$Mes_D(\bigcup_{\beta' \geq \beta} E^{(h,\beta')}) = 0.$$
3. *Dans tous les cas, $Mes_D(E^{(h,\beta)}) = 0$.*

Rappelons que l'on note $\mathcal{H}(A)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$.

Corollaire 2.2.1. *Soient $\gamma > 0$ et $f \in B_p^{s,\infty} \bigcap C^\gamma(\mathbb{R}^d)$.*

1. *Si* $d - sp > 0$. *alors*

$$\mathcal{H}(\bigcup_{\beta' \leq \beta} E^{(h,\beta')}) \leq hp + (d - sp)(\beta + 1)$$

2. *Si* $d - sp < 0$. *Alors*

$$\mathcal{H}(\bigcup_{\beta' \geq \beta} E^{(h,\beta')}) \leq hp + (d - sp)(\beta + 1).$$

Montrons la proposition 2.2.1.

Démonstration: si $f \in B_p^{s,\infty}$, alors

$$\forall j : \sum_k |C_{j,k}|^p 2^{(ps-d)j} \leq C. \tag{2.11}$$

Soit D tel que $D > hp - sp(\beta + 1) + d(\beta + 1)$ et $B_{j,k}$ la boule de centre $\frac{k}{2^j}$ et de diamètre

$$diam(B_{j,k}) = |C_{j,k}|^{\frac{p}{D}} 2^{\frac{(ps-d)j}{D}} j^{-\frac{2}{D}}.$$

Nous pouvons réécrire (2.11) avec $diam(B_{j,k})^D = |C_{j,k}|^p 2^{(ps-d)j} j^{-2}$
et ainsi

$$\forall j : \sum_k diam(B_{j,k})^D \leq \frac{C}{j^2}.$$

Soit $A_j = \bigcup_k B_{j,k}$ et $A = \limsup A_j = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \geq j} A_l$.
L'ensemble A est inclus dans $\bigcup_{l \geq j} A_l$, donc

$$Mes_D(A) \leq \sum_{l \geq j} \left(\sum_k diam(B_{j,k})^D \right) \leq C \sum_{l \geq j} \frac{1}{l^2}.$$

Or pour $j \to +\infty$, on a $\sum_{l \geq j} \frac{1}{l^2} \to 0$,
donc $Mes_D(A) = 0$.

Donc si $x \notin A$ $\exists j_0 : \forall j \geq j_0 \forall k : x \notin B_{j,k}$

c'est à dire

$$|x - k2^{-j}| \geq |C_{j,k}|^{\frac{p}{D}} 2^{\frac{(ps-d)j}{D}} j^{-\frac{2}{D}}$$

et alors

$$|C_{j,k}| \leq |x - k2^{-j}|^{\frac{D}{p}} 2^{(-s+\frac{d}{p})j} j^{\frac{2}{p}}. \tag{2.12}$$

– **Premier cas :** $d - sp > 0$

Si $x \notin A$ et de plus $x \in \bigcup_{\beta' \leq \beta} E^{(h,\beta')}$, il existe $\beta' \leq \beta$ tel que f a pour exposants d'oscillation (h, β') en x.

Fixons $\varepsilon > 0$, d'après le lemme 2.2.1, il existe une suite (j_n, k_n) telle que

$$|x - k_n.2^{-j_n}|^{\beta'+1+\varepsilon} \leq 2^{-j_n} \leq |x - k_n.2^{-j_n}|^{\beta'+1-\varepsilon} \tag{2.13}$$

$$|C_{j_n,k_n}| \geq |x - k_n 2^{-j_n}|^{h+\varepsilon}.$$

En appliquant (2.12) en (j_n, k_n), on obtient

$$|x - k_n 2^{-j_n}|^{h+\varepsilon} \leq |x - k_n 2^{-j_n}|^{\frac{D}{p}} 2^{(-s+\frac{d}{p})j_n} j_n^{\frac{2}{p}},$$

ce qui donne

$$|x - k_n 2^{-j_n}|^{h+\varepsilon-\frac{D}{p}} \leq 2^{(-s+\frac{d}{p})j_n} j_n^{\frac{2}{p}}. \tag{2.14}$$

On a supposé que $D > hp - sp(\beta+1) + d(\beta+1)$, donc pour $\beta' \leq \beta$ et $d - sp > 0$

$$D > hp - sp(\beta'+1) + d(\beta'+1).$$

On peut donc choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$D > hp + \varepsilon p + (-sp + d)(\beta' + 1 + \varepsilon). \tag{2.15}$$

Ainsi

$$h + \varepsilon - \frac{D}{p} < 0.$$

Les inégalités (2.13) et (2.14) impliquent que pour tout n,

$$2^{-j_n(\frac{1}{\beta'+1+\varepsilon})(h+\varepsilon-\frac{D}{p})} \leq 2^{(-s+\frac{d}{p})j_n} j_n^{\frac{2}{p}}.$$

Ce qui donne

$$-(\frac{1}{\beta'+1+\varepsilon})(h+\varepsilon-\frac{D}{p}) \leq -s+\frac{d}{p}.$$

Mais, d'après (2.15)

$$-(\frac{1}{\beta'+1+\varepsilon})(h+\varepsilon-\frac{D}{p}) > -s+\frac{d}{p}.$$

On a donc une contradiction. Par conséquent, si $x \notin A$ alors f n'a pas de singularité oscillante de type (h, β') en x avec $\beta' \leq \beta$.

– **Deuxième cas :** $d - sp < 0$.
Si $x \notin A$ et $x \in \bigcup_{\beta' \geq \beta} E^{(h,\beta')}$, il existe $\beta' \geq \beta$ tel que f a pour exposants d'oscillation (h, β') en x.

Fixons $\varepsilon > 0$, d'après le lemme 2.2.1, il existe une suite (j'_n, k'_n) telle que

$$|x - k'_n.2^{-j'_n}|^{\beta'+1+\varepsilon} \leq 2^{-j'_n} \leq |x - k'_n.2^{-j'_n}|^{\beta'+1-\varepsilon} \tag{2.16}$$

et

$$|C_{j'_n,k'_n}| \geq |x - k'_n 2^{-j'_n}|^{h+\varepsilon}.$$

Or $x \notin A$, donc d'après (2.12),

$$|x - k'_n 2^{-j'_n}|^{h+\varepsilon-\frac{D}{p}} \leq 2^{(-s+\frac{d}{p})j'_n} {j'_n}^{\frac{2}{p}}. \tag{2.17}$$

On a supposé que $D > hp - sp(\beta+1) + d(\beta+1)$, donc pour $\beta' \geq \beta$ et $d - sp < 0$

$$D > hp - sp(\beta'+1) + d(\beta'+1).$$

On peut donc choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$D > hp + \varepsilon p + (-sp+d)(\beta'+1-\varepsilon). \tag{2.18}$$

Ainsi

$$h + \varepsilon - \frac{D}{p} < 0$$

et

$$D > hp + \varepsilon p + (-sp + d)(\beta' + 1 + \varepsilon).$$

On peut alors appliquer la même démonstration que pour le cas précédent puisqu'on n'y a besoin que de ces deux inégalités et on obtient alors une contradiction.
Donc si $x \notin A$ alors f n'a pas de singularités oscillantes de type (h, β'), avec $\beta' \geq \beta$, en x.

Si $d - sp > 0$, $\bigcup_{\beta' \leq \beta} E^{(h,\beta')} \subset A$.
Si $d - sp > 0$, $\bigcup_{\beta' \leq \beta} E^{(h,\beta')} \subset A$
Mais $Mes_D(A) = 0$, d'où le résultat.

Dans tous les cas, si $D > hp - sp(\beta + 1) + d(\beta + 1)$ et $x \notin A$, alors f n'a pas de singularités oscillantes de type (h, β) en x.

□

Démontrons maintenant la proposition 2.1.3.

Démonstration: Soit f telle que $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^d)$ $\gamma > 0$. On considère $(h, \beta) \in \mathbb{R}^2_+$.

Par définition de la fonction d'échelle de f, f appartient à l'espace $V = \bigcap_{\varepsilon > 0, p > 0} B^{(\eta(p) - \varepsilon)/p, p}_{p,loc}$.
Soient $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ et $p > 0$.

La fonction f appartient à $B^{(\eta(p) - \varepsilon)/p, p}_{p,loc}$.

Soit $D_\delta = hp - (\eta_f(p) - \varepsilon)(\beta+1) + d(\beta+1) + \delta > hp - (\eta_f(p) - \varepsilon)(\beta + 1) + d(\beta+1)$.

On peut appliquer l a proposition 2.2.1 et on obtient

$$Mes_{D_\delta}(E^{(h,\beta)}) = 0$$

Donc pour tous $\delta > 0$, $p > 0$ $\varepsilon > 0$, on a

$$d(h,\beta) \leq hp - (\eta_f(p) - \varepsilon)(\beta+1) + d(\beta+1) + \delta.$$

Ce qui donne donc

$$d(h,\beta) \leq \inf_{p>0} \left[hp - \eta_f(p)(\beta+1) + d(\beta+1)\right].$$

□

Pour démontrer la proposition 2.1.3, on n'a besoin que de la proposition 2.2.1. On applique exactement la même méthode pour la démonstration du corollaire 2.2.1.

2.3 Cas $B_p^{s,q}$ avec $s - \frac{d}{p} > 0$

Nous allons maintenant étudier quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ du point de vue des exposants d'oscillation. Avant d'aborder le spectre de singularités oscillantes de quasi-toutes fonctions, nous allons tout d'abord examiner les propriétés d'une fonction particulière dite "de saturation" .

2.3.1 Singularités oscillantes dans la fonction de saturation

Une fonction de saturation dans un espace de fonctions donné ($B_p^{s,q}$ si $s - \frac{d}{p} > 0$,ou $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ si $s - \frac{d}{p} < 0$ et $s > \gamma$, ou $V = \bigcap_{\varepsilon>0,p>0} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ avec η une fonction fortement admissible), ainsi que les construit S.Jaffard dans

[16], est définie par ses coefficients en ondelettes. Cette fonction "sature" les majorations de spectre au sens où elle a les ensembles de singularités les plus gros possibles dans l'espace en question.

S.Jaffard a démontré dans [16] que la fonction de saturation de $B_p^{s,q}$ pour $s - \frac{d}{p} > 0$ vérifie (2.2).

Nous allons maintenant examiner cette fonction du point de vue des oscillations.

Nous calculerons en chaque point de $(0,1)^d$ les exposants de singularités oscillantes (h_0, β_0) et nous montrerons que la dimension $d(h_0, 0)$ de l'ensemble $E^{(h_0,0)}$ est exactement $d(h_0)$.

Nous montrerons alors que pour quasi-toutes fonctions et pour les mêmes exposants $(h_0, 0)$ $d(h_0, 0) = d(h_0)$. Ce résultat ne dépend pas du choix particulier du cube unité, donc il est vrai pour n'importe quel cube. En recouvrant $\mathbb{R}^d$ par une famille dénombrable de cubes ouverts, on obtient $d(h_0, 0) = d(h_0)$ pour une intersection dénombrable d'ensembles G_δ, c'est à dire un G_δ. Donc à partir de maintenant nous travaillerons uniquement dans $(0,1)^d$.

Rappelons la définition de la fonction de saturation F de l'espace $B_p^{s,q}$, $s - \frac{d}{p} > 0$, telle qu'elle est construite dans [16].

Donnons sur $(0,1)^d$ les coefficients en ondelettes $c_\lambda^{(i)}$ de F. Soient $j \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}^d$ fixés. Nous définissons $J \leq j$ comme suit. Considérons la représentation irréductible

$$\frac{K}{2^J} = \frac{k}{2^j} \text{ où } K \in \mathbb{Z}^d - (2\mathbb{Z})^d \tag{2.19}$$

et $a \geq 1$ un réel ; les coefficients en ondelettes de F sont donnés par

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{d}{p} - s)j} 2^{(-\frac{d}{p} J)}. \tag{2.20}$$

Les résultats suivants sont démontrés dans [16].

Proposition 2.3.1. *Soit $s > \frac{d}{p}$. Si*

$$a = \frac{2}{p} + \frac{2}{q} + 1, \tag{2.21}$$

alors la fonction de saturation F dont les coefficients en ondelettes sont donnés par (2.20) appartient à $B_p^{s,q}$.

Nous aurons également besoin de la définition suivante donnée dans [16].

Definition 2.3.1. *Un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est α-approché par des dyadiques si il existe une suite (k_n, j_n) telle que*

$$\left| x_0 - \frac{k_n}{2^{j_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha j_n}}.$$

L'exposant dyadique en x_0 est la borne supérieure des α tels que x_0 est α-approché par des dyadiques. Nous le notons $\alpha(x_0)$.

Nécessairement $\alpha(x_0) \in [1, +\infty]$.

Proposition 2.3.2. *Soit $s > \frac{d}{p}$. Si*

$$a = \frac{2}{p} + \frac{2}{q} + 1, \tag{2.22}$$

alors l'exposant de Hölder en x_0 de la fonction de saturation F dont les coefficients sont donnés par (2.20) est $h(x_0) = s - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha(x_0)p}$.

Montrons la proposition suivante.

Proposition 2.3.3. *La fonction de saturation F a en tout point x_0 l'exposant d'oscillation $\beta = 0$.*

Son spectre de singularités oscillantes est défini pour $h \in [s - \frac{d}{p}, s]$, $\beta = 0$ et donné par

$d(h,\beta) = d(h,0) = d(h) = hp - sp + d.$

Remarque 2.3.1. *La fonction F vérifie ici le formalisme multifractal, ainsi que le démontre S.Jaffard dans [16]. Avec la proposition précédente nous démontrerons que F n'a dans ce cas aucun point où son comportement est oscillant.*

Démonstration:

Pour calculer les exposants d'oscillation, nous suivons la méthode contenue dans la définition 1.1.6 et nous calculons d'abord l'exposant de Hölder h_t de F_t, la primitive fractionnaire d'ordre t de F, définie par (1.2) dans le chapitre 1.1.2.

Calculons les coefficients en ondelettes c_λ^t sur une base d'ondelettes de F_t.

Remarquons d'abord que la fonction ψ^{-t} où $\psi^{-t} = (-\Delta)^{-t/2}\psi$ est encore dans la classe de Schwarz, elle garde aussi les propriétés d'oscillation des ondelettes ($\int \psi^{-t}(x)dx = \hat{\psi^{-t}}(0) = 0$ où $\hat{\psi^{-t}}$ désigne la transformée de Fourier de ψ^{-t}).

La base $\left(\psi_\lambda^{-t} : x \mapsto \psi^{-t}(2^j.x - k)\right)$ formée à partir de cette fonction mère n'est plus orthonormée mais forme grâce au système $(\psi_\lambda^t : x \mapsto \psi^t(2^j.x - k))$ un système biorthogonal au sens où $< \psi_\lambda^t, \psi_{\lambda'}^{-t} >= 0$ si $\lambda \neq \lambda'$.

La décomposition de f sur cette base s'écrit alors

$$F_t(x) = \sum_\lambda < F_t, \psi_\lambda^t > \psi_\lambda^{-t}(x).$$

Écrivons dans cette base le coefficient en ondelettes de F_t. On a

$$\begin{aligned} c_\lambda^t &= 2^{dj}\int F_t(x)\psi_\lambda^t(x)dx \\ &= 2^{-jt}\int \hat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-t/2}e^{i\frac{k.\xi}{2^j}}|\xi|^t\hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)d\xi \\ &= 2^{-jt}\int \hat{f}(\xi)\frac{|\xi|^t}{(1+|\xi|^2)^{t/2}}\hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)e^{i\frac{k.\xi}{2^j}}d\xi \\ &= 2^{-jt}2^{dj}\int \hat{f}(\xi)\frac{|\xi|^t}{(1+|\xi|^2)^{t/2}}\hat{\psi_\lambda}(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{2.23}$$

L'opérateur qui à $T : f \mapsto g$ tel que $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\frac{|\xi|^t}{(1+|\xi|^2)^{t/2}}$ est un opérateur d'ordre 0 et nous savons par [28] qu'il est continu sur les espaces de Besov.

Une intégration fractionnaire de F revient donc à appliquer à f un opérateur qui est le produit d'un opérateur linéaire d'ordre 0 et d'un opérateur diagonal sur une base d'ondelettes (chaque coefficient est multiplié par 2^{-jt}).

On en déduit d'abord que la fonction F_t est une fonction de l'espace de Besov $B_p^{s+t,q}$. En effet ses coefficients vérifient

$$\left(\sum_k |c_\lambda^t 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p\right)^{1/p} = \varepsilon_j,$$

avec ε_j dans l^1.

Pour t suffisamment petit nous avons encore $s + t - \frac{1}{p} > 0$. Donc $B_p^{s+t,q}$ s'injecte dans un espace de régularité hölderienne uniforme.

Ainsi le coefficient

$$\tilde{c}_\lambda^t == 2^{-jt}2^{dj}\int \hat{f}(\xi)\hat{\psi}_\lambda(\xi)d\xi = \frac{1}{j^a}2^{(\frac{d}{p}-s-t)j}2^{(-\frac{d}{p}J)} \text{ si } \frac{K}{2^J} = \frac{k}{2^j}.$$

est exactement le coefficient de la fonction de saturation de l'espace $B_p^{s+t,q}$.

La fonction F_t est donc l'image par l'opérateur d'ordre 0 T de la fonction de saturation de l'espace $B_p^{s+t,q}$.

Remarquons que les espaces deux-microlocaux sont stables par les opérateurs d'ordre 0.

Or comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.3.1, le coefficient de Hölder et le coefficient d'oscillation d'une fonction, dans le cas où celle-ci a une régularité uniforme donnée ne dépendent que des espaces deux-microlocaux auquels appartient la fonction.

Donc on peut en déduire que la fonction de saturation de l'espace $B_p^{s+t,q}$ et F_t ont les mêmes coefficients de Hölder et d'oscillation.

Calculer le coefficient de Hölder de F_t revient donc à calculer le coefficient de Hölder de la fonction de saturation de $B_p^{s+t,q}$.

Ainsi en appliquant la proposition 2.3.2, on obtient $h_t = s+t-\dfrac{d}{p}+\dfrac{d}{\alpha(x_0)p}$.

On a donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h_t - h(x_0)}{t} = 1$ et l'exposant d'oscillation en x_0 est donc $\beta(x_0) = 0$.

Pour chaque h fixé il y a un unique exposant d'oscillation $\beta = 0$ et ainsi $d(h) = d(h,0)$, $d(h,0) = \dfrac{d}{\alpha}$ avec $h = s - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha p}$, ce qui donne le résultat.

□

2.3.2 Singularités oscillantes dans quasi-toutes fonctions

Dans cette partie nous étudions l'ensemble G_δ pour lequel le formalisme multifractal est vrai (voir [16]).

Cet ensemble est construit dans chaque espace de Besov en partant d'une suite dense f_n de l'espace.

f_n est légèrement modifiée de manière à ce que ses coefficients soient ceux de la fonction de saturation pour $j \geq n$. On obtient ainsi une nouvelle suite g_n. Ensuite on choisit un réél r_n suffisamment petit pour que les fonctions de la boule $B(g_n, r_n)$ aient leurs coefficients en ondelettes à l'échelle $j = n$ proches de ceux de la fonction de saturation.

Enfin on étudie les exposants de singularités oscillantes des fonctions de l'ensemble G_δ suivant : $A = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\geq m} B(g_n, r_n)$.

Cependant, avant d'évaluer les exposants de singularités oscillantes des fonctions de A, nous allons d'abord démontrer des majorations les concernant.

Nous avons besoin du lemme suivant qui met en liaison la régularité hölderienne globale d'une fonction f et ses exposants de singularités oscillantes.

Lemme 2.3.1. *Soit $f \in C^\delta$ et (h, β) ses exposants de singularités oscillantes au point x_0.*
Alors $h \geq \delta(\beta + 1)$.

Démonstration: On a $f \in C^\delta$, et ses coefficients en ondelettes, d'après la caractérisation 1.33 des espaces de Hölder $C^\delta(\mathbb{R}^d) = B^{\delta,\infty}_\infty$, vérifient

$$\forall (j,k) : |C_{j,k}| \leq C 2^{-\delta j}.$$

D'après le lemme 2.2.1, il existe une suite (k_n, j_n) telle que

$$|x - k_n 2^{-j_n}|^{h+\varepsilon} \leq |C_{j_n,k_n}|$$

et

$$|C_{j_n,k_n}| \leq C 2^{-\delta j_n}.$$

Ainsi

$$|x - k_n 2^{-j_n}|^{h+\varepsilon} \leq |C_{j_n,k_n}| \leq C 2^{-\delta j_n}.$$

En appliquant (2.9) on obtient

$$2^{-j_n(\frac{h+\varepsilon}{\beta+1-\varepsilon})} \leq |C_{j_n,k_n}| \leq C 2^{-\delta j_n},$$

$$-j_n(\frac{h+\varepsilon}{\beta+1-\varepsilon}) \leq -\delta j_n$$

et

$$\frac{h+\varepsilon}{\beta+1-\varepsilon} \geq \delta \ \forall \varepsilon > 0.$$

On a donc

$$h \geq \delta(\beta + 1).$$

□

Nous allons maintenant développer la méthode décrite dans l'introduction de cette partie dans le cas de l'espace $B_p^{s,q}$, avec $s - \frac{d}{p} > 0$.

On pose A tel que

$A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$, avec g_n une suite dense de $B_p^{s,q}$, $s - \frac{d}{p} > 0$, telle que :

1. si $j \geq n$ les coefficients en ondelettes $c_\lambda^{(i)}$ de g_n sont ceux de la fonction de saturation F construites dans la section précédente.
2. $r_n = \frac{1}{2n^a} 2^{-nd/p}$

Le point 1 du résultat suivant a déjà été démontré par S.Jaffard dans [16] mais nous rappellerons sa preuve.

Proposition 2.3.4. *Soient $f \in A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$ et (n_l) une suite telle que $f \in \bigcap_{n_l} B(g_{n_l}, r_{n_l})$. Soit F_α l'ensemble des points x tels que, pour une infinité de valeurs de l,*

$$\exists K \in \mathbb{Z}^d - (2\mathbb{Z})^d : \quad \left| x - \frac{K}{2^{[n_l/\alpha]}} \right| \leq \frac{1}{2^{n_l}} \tag{2.24}$$

et soient (h, β) les exposants de singularités oscillantes de f en $x \in F_\alpha$, alors

1. $h \leq h(\alpha) = s - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha p}$.
2. *Si* $h = h(\alpha)$, $\beta = 0$.
3. *Si* $h < h(\alpha)$, $\beta < \frac{d}{\alpha(sp-d)}$.

Remarque 2.3.2. *Cette proposition nous montre que $F_\alpha \subset E^{(h(\alpha),0)} \bigcup \left(\bigcup_{h' < h(\alpha), \beta' < \beta_0(\alpha)} E^{(h',\beta')} \right)$ avec $\beta_0(\alpha) = \frac{d}{\alpha(sp-d)}$.*

Démonstration:

Aux échelles $j = n_l$, les coefficients en ondelettes de f sont "près" de ceux de la fonction de saturation F.

On considère le coefficient en ondelettes indexé par j et k tels que $j = n_l$ et

$$\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^{[n_l/\alpha]}}.$$

On a

$$c_\lambda^{(i)} \geq \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{-\frac{d}{p}[n_l/\alpha]}.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 calculé avec (1.27) est borné par

$$\frac{\log(|c_\lambda^{(i)}|)}{\log(2^{-j} + |x_0 - \lambda|)} = \frac{(\frac{d}{p} - s)j - \frac{d}{p}[n_l/\alpha]}{-j}(1 + o(1)) = (s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p})(1 + o(1)).$$

Le point 1 est donc démontré.

Par intégration fractionnaire on conserve les inégalités sur les coefficients en ondelettes et on obtient

$$c_\lambda^{t(i)} \geq \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{d}{p}-s-t)j} 2^{-\frac{d}{p}[n_l/\alpha]}.$$

$h_t \leq s + t - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha p}$, ce qui donne $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{h_t - h(\alpha)}{t} \leq 1$.

Donc $\beta = 0$ si $h = h(\alpha)$.

On a donc démontré le point 2.

Montrons le point 3 :

$f \in B_p^{s,q}$, $s - \frac{d}{p} > 0$ donc, d'après les inégalités de Sobolev, $f \in C^{s-\frac{d}{p}}$, ce qui donne en appliquant le lemme 2.3.1

$$\beta + 1 \leq \frac{h}{s - \frac{d}{p}}.$$

On a supposé que $h < h(\alpha) = s - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha p}$ donc

$$\beta + 1 < \frac{s - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha p}}{s - \frac{d}{p}}$$

et finalement

$$\beta < \frac{d}{\alpha(ps - d)}.$$

□

2.3.3 Estimation de $d(h, \beta)$

Nous finissons dans cette partie la preuve du théorème 2.1.4.

Nous allons appliquer la méthode suivante dans $B_p^{s,q}$.

Nous allons montrer que pour quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}$, et h dans le domaine de définition du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}$, l'ensemble $E^{(h,0)}$ est tel que $d(h) = d(h, 0)$ et si $\beta' \neq 0$ alors $d(h, \beta') < d(h)$.

Pour obtenir ce résultat, nous prenons une fonction f dans l'ensemble $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$. Cette fontion est donc un élément de l'intersection dénombrable d'ouverts denses dans laquelle le théorème 2.1.3 est valable. Donc le spectre de singularités de f est le spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de l'espace $B_p^{s,q}$.

Nous prenons un h dans le domaine de définition du spectre de singularités de f (c'est à dire le domaine de définition du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de l'espace $B_p^{s,q}$) et un ensemble de mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ (définition 1.2.3) de Hausdorff strictement positive, qui est en fait l'ensemble F_α, donné par l'équation (2.24) (cet ensemble est fixé par la donnée de α, qui est fixé lorsque h est fixé et par la donnée de la suite n_l, qui dépend de f).

D'après la proposition 2.3.4, $F_\alpha \subset \bigcup_{(h',\beta')\in I} E^{(h',\beta')}$ (où I dépend de $B_p^{s,q}$).

Cette inclusion nous montre que $\bigcup_{(h',\beta')\in I} E^{(h',\beta')}$ a aussi une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff strictement positive.

D'autre part, nous montrons que l'ensemble $\bigcup_{(h',\beta')\in I/\{(h,0)\}} E^{(h',\beta')}$ a une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff nulle. Ainsi seul l'ensemble $E^{(h,0)}$ peut avoir une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff strictement positive. Ce qui signifie d'après la remarque 1.2.1, que la dimension de Hausdorff de $E^{(h,0)}$ est au moins égale à $d(h)$. Or $E^{(h,0)}$ a une dimension inférieure ou égale à $d(h)$ puisque $E^{(h,\beta)} \subset S_h$. Donc la dimension de $E^{(h,0)}$ est exactement $d(h)$.

Nous montrons ensuite que chacun des ensembles $E^{(h,\beta')}$ avec $\beta' \neq 0$ a une dimension strictement plus petite que $d(h)$.

Soit h dans le domaine de définition du spectre de singularités de f, donc de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}$, pour $s - \frac{d}{p} > 0$, i.e dans l'intervalle $[s - \frac{d}{p}, s]$.

D'après le théorème 2.1.3, on sait que pour quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}$, donc pour f,

$$d(h) = hp - sp + d. \tag{2.25}$$

Soit α tel que $d(h) = hp - sp + d = \frac{d}{\alpha}$, ce qui donne $h = s - \dfrac{d}{p} + \dfrac{d}{\alpha p}$.
Nous utiliserons les notations de la proposition 2.3.4, c'est à dire

$$h(\alpha) = h = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}. \tag{2.26}$$

– La fonction f est dans $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} B(g_n, r_n)$. Il existe donc une suite n_l avec $n_l \to \infty$ telle que $f \in B(g_{n_l}, r_{n_l})$.

Examinons l'ensemble F_α défini par (2.24) dans la section 2.3.2.

On a $\bigcup_{m \geq l, K} \frac{K}{2^{[n_l/\alpha]}} + \left[-\frac{1}{2^{n_l/\alpha}}, \frac{1}{2^{n_l/\alpha}}\right]^d = [0,1]^d$. On peut donc appliquer le théorème 1.2.1 en posant $a = 1/\alpha$, $b = 1$, $\lambda_n = \frac{K}{2^{[n_l/\alpha]}}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n_l}}$. Cela nous donne

$$\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}(F_\alpha) > 0 \tag{2.27}$$

(ainsi la dimension de F_α est au moins égale à d/α).

– D'autre part, la remarque 2.3.2 indique que

$$F_\alpha \subset E^{(h(\alpha),0)} \bigcup \left(\bigcup_{h' < h(\alpha), \beta' < \beta_0(\alpha)} E^{(h',\beta')} \right)$$

avec $\beta_0(\alpha) = \frac{d}{\alpha(sp-d)}$.

Or

$$\bigcup_{h' < h(\alpha), \beta' < \beta_0(\alpha)} E^{(h',\beta')} \subset \bigcup_{h' < h(\alpha)} S_{h'}.$$

Nous avons donc

$$F_\alpha \subset E^{(h(\alpha),0)} \bigcup \left(\bigcup_{h' < h(\alpha)} S_{h'} \right). \tag{2.28}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}} \left(\bigcup_{h' < h(\alpha)} S_{h'} \right) = 0$.

Nous pouvons écrire cet ensemble $\bigcup_{h' < h(\alpha)} S_{h'} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \left(\bigcup_{h' < h(\alpha) - 1/n} S_{h'} \right)$.
Le théorème suivant de [22] nous donne que l'ensemble $\bigcup_{h' < h(\alpha) - 1/n} S_{h'}$ a une dimension au plus égale à $hp - \frac{p}{n} - sp + d$.

Théorème 2.3.1. *Soit $f \in B_p^{s,\infty}$*

1. *Si $0 < s - \frac{d}{p} < h < s$, l'ensemble $\{x, f \notin C^h(x)\}$ a une dimension de Hausdorff d'au plus $hp - sp + d$, et $f \in C^s(x)$ pour presque tout x.*

2. *Si* $s - \frac{d}{p} < 0$, *alors, si* $f \in B_p^{s,\infty} \bigcap C^\gamma$ *pour* $\gamma > 0$, *l'ensemble* $\{x : f \notin C^h(x)\}$ *a une dimension de Hausdorff d'au plus* $h\left(\frac{d-sp}{\gamma} + p\right)$.

Or, d'après (2.26), $hp - \frac{p}{n} - sp + d = d(h) - \frac{p}{n} = \frac{d}{\alpha} - \frac{p}{n}$. Donc pour tout n et $\varepsilon < \frac{p}{n}$, la mesure $(\frac{d}{\alpha} - \varepsilon)$-dimensionnelle de Hausdorff de $\bigcup_{h' < h(\alpha) - 1/n} S_{h'}$ est nulle. On peut conclure, d'après (1.17), que

$$\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}\left(\bigcup_{h' < h(\alpha) - 1/n} S_{h'}\right) = 0.$$

Donc

$$\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}\left(\bigcup_{h' < h(\alpha)} S_{h'}\right) = 0.$$

Or, d'après (2.27), F_α a une mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}$-dimensionnelle strictement positive et celle de $\bigcup_{h' < h(\alpha)} S_{h'}$ est nulle. Donc, d'après (2.28), $E^{(h(\alpha),0)}$ a une mesure $\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}$-dimensionnelle strictement positive.
Donc, d'après la remarque 1.2.1, la dimension de Hausdorff de $E^{(h(\alpha),0)}$ est au moins égale à $d(h) = d/\alpha$.
Mais $E^{(h(\alpha),0)} \subset S_{h(\alpha)}$, par définition la dimension de $S_{h(\alpha)}$ est $d(h)$,

$$d(h(\alpha), 0) = d(h(\alpha)) = d(h).$$

Ce résultat est vrai pour toute fonction f dans A. Donc il est vrai pour quasi-toutes fonctions dans $B_p^{s,q}$.

– Nous voulons maintenant calculer la dimension de $E^{(h(\alpha),\beta')}$ quand $\beta' \neq 0$.
Fixons $\beta' > 0$.
On a $d - sp < 0$, donc

$$d(h) = hp + d - sp > hp + (d - sp)(\beta' + 1).$$

D'après la proposition 2.1.3, on a

$$hp + (d - sp)(\beta' + 1) \geq d(h, \beta').$$

Donc on a bien

$$d(h) > hp + (d - sp)(\beta' + 1) > d(h, \beta') \text{ si } \beta' \neq 0.$$

Là encore, ce résultat est vrai pour une fonction quelconque de A, donc pour quasi-toutes fonctions dans $B_p^{s,q}$.

- Remarquons que $F_1 = [0,1]^d$ et que si $x \in F_1$ alors $h(1) \leq s$. La démonstration précédente nous montre que $Mes_d(\bigcup_{h'<h} S_{h'}) = 0$ et d'après la proposition 2.3.4, si $\beta \neq 0$ alors $E^{(h,\beta)} = \emptyset$.
  Ainsi les exposants de singularités oscillantes de f dans A, donc de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q}$, en presque tout point (au sens de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$) sont égaux à $(s, 0)$.

On vient donc de démontrer le théorème 2.1.4.

2.4 Cas $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ si $s - \frac{d}{p} < 0$ et $s > \gamma$

Notre objectif est ici d'étudier quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ si $s - \frac{d}{p} < 0$ et $s > \gamma$ du point de vue des exposants d'oscillation.

Nous allons appliquer la même méthode que dans la partie précédente. Avant d'étudier quasi-toutes fonctions, nous calculons d'abord les exposants de singularités oscillantes d'une fonction de saturation particulière.

2.4.1 Singularités oscillantes dans la fonction de saturation

Comme dans la partie précédente nous rappelons que la fonction dite de saturation F de l'espace $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$ a comme coefficients en ondelettes, avec $L = \left[\frac{d+(\gamma-s)p}{d} j\right]$, (remarquons que $L < j$)

$$c_\lambda^{(i)} = j^{-\frac{2}{q}} 2^{-\gamma j} \quad \text{si chaque coordonnée de } k \text{ est un multiple de } 2^j 2^{-L} \tag{2.29}$$

$$c_\lambda^{(i)} = j^{-\frac{2}{q}} 2^{-sj} \quad \text{autrement.} \tag{2.30}$$

De la même façon que dans la partie 2.3.1, nous dirons que x est α-approché si il existe un nombre infini de coefficients en ondelettes $c_\lambda^{(i)}$ qui vérifie (2.29) et tels que

$$2^{-j} + |x - \lambda| \leq 2^{-\alpha L}. \tag{2.31}$$

Nous appellerons la borne supérieure de tous les α qui vérifient (2.31) exposant dyadique en x et nous le noterons $\alpha(x)$.

Remarque 2.4.1. *Ici $\alpha(x)$ n'est pas défini exactement comme dans la définition 2.3.1 et appartient en fait à $[1, \frac{d}{d+(\gamma-s)p}]$.*

Dans [16], S.Jaffard montre la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *La fonction de saturation définie par (2.29) a pour exposant de Hölder en x_0 $h(x_0) = \dfrac{d\gamma}{\alpha(x_0)(d - sp + \gamma p)}$.*

Nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.4.2. *La fonction de saturation F de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$ a pour exposant d'oscillation en x_0 $\beta = \dfrac{d}{\alpha(x_0)(d - sp + \gamma p)} - 1$.*

Son spectre de singularités oscillantes est donné par $h \in [\gamma, \frac{\gamma d}{d+(\gamma-s)p}]$, $\beta = \frac{h}{\gamma} - 1$ où

$d(h, \beta) = d(h) = \frac{d+(\gamma-s)p}{\gamma} h$ et $h = \dfrac{d\gamma}{\alpha(d - sp + \gamma p)}$.

Remarque 2.4.2. *Dans [16], on montre que dans le cas de cet espace fonctionnel, le formalisme multifractal n'est pas vrai pour la fonction de saturation F, et nous allons démontrer avec le résultat précédent que la fonction de saturation de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$ a des points où son comportement est oscillant.*

Démonstration: Appliquons la proposition 2.4.1, on obtient que $h(x_0) = \dfrac{d\gamma}{\alpha(x_0)(d - sp + \gamma p)}$.

De la même façon que précédemment, on calcule h_t en remplaçant s par $s + t$ et γ par $\gamma + t$ ce qui nous donne $h_t = \dfrac{d(\gamma + t)}{\alpha(d - sp + \gamma p)}$.
(Remarquons que cela ne change pas la valeur de L).

Ainsi $\beta = \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$.

Il existe un unique $\beta = \frac{h}{\gamma} - 1$ pour un h fixé dans $[\gamma, \frac{\gamma d}{d+(\gamma-s)p}]$ et donc

$$d(h) = d(h, \beta) = \frac{d + (\gamma - s)p}{\gamma} h.$$

□

2.4.2 Singularités oscillantes dans quasi-toutes fonctions

Comme dans la partie précédente, on pose $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$, avec g_n une suite dense dans $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$, telle que :

1. Si $j \geq n$ les coefficients en ondelettes $c_\lambda^{(i)}$ de g_n sont ceux de la fonction de saturation F de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$.
2. $r_n = \frac{1}{2n^{2/q}} 2^{-sn}$.

Soit $\beta(\alpha) = \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$.

Nous voulons montrer la proposition suivante .

Proposition 2.4.3. *Soient $f \in A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$. Soit (n_l) une suite d'entiers telle que $f \in B(g_{n_l}, r_{n_l})$.*

Soit J_α l'ensemble des x tels que
pour un nombre infini de valeurs j prises par la sous-suite n_l, il existe k qui

vérifie (2.29) et tel que

$$\left| x - \frac{k}{2^j} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha L}}. \tag{2.32}$$

et soient (h, β) les exposants de singularités oscillantes de f en un point $x \in J_\alpha$.

Alors

1. *si $h = h(\alpha) = \frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$, $\beta \leq \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$;*
2. *si $h < h(\alpha)$, $\beta < \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$.*

D'après [16] on sait que $h(\alpha) = \frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$ majore l'exposant de Hölder de quasi-toutes fonctions de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$, en un point $x \in J_\alpha$.

Remarque 2.4.3. *Cette proposition nous montre que*

$$J_\alpha \subset \left(\bigcup_{h'=h(\alpha), \beta' \leq \beta_0(\alpha)} E^{(h'\beta')} \right) \bigcup \left(\bigcup_{h'<h(\alpha), \beta'<\beta_0(\alpha)} E^{(h'\beta')} \right)$$

avec $\beta_0(\alpha) = \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$.

Démonstration:

Si f appartient à A, elle appartient à un nombre infini de boules $B(g_n, r_n)$, suite notée B_{n_l}.

Avec la méthode de la partie précédente, on obtient

$h_t \leq \dfrac{d(\gamma + t)}{\alpha(d - sp + \gamma p)}$.

Si $h = h(\alpha)$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{h_t - h(\alpha)}{t} \leq \frac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$$

et donc $\beta \leq \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$.

On a donc démontré le point 1.

Prouvons le point 2.

Supposons que $h < h(\alpha)$
et montrons que $\beta < \beta(\alpha) = \dfrac{d}{\alpha(d - sp + \gamma p)} - 1$.

Ici (h, β) sont respectivement l'exposant de Hölder et l'exposant d'oscillation de f en x.
D'autre part $f \in C^\gamma$ donc d'après le lemme 2.3.1,

$$\gamma(\beta + 1) \leq h$$

mais $h(\alpha) = \gamma(\beta(\alpha) + 1)$ et $h < h(\alpha)$
donc $\beta < \beta(\alpha)$. □

2.4.3 Estimation de $d(h, \beta)$

Nous suivons ici la même méthode que dans la partie précédente.

Nous choisissons f dans $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$ défini dans la partie précédente.

Nous montrons que pour chaque h dans le domaine de définition du spectre de f, c'est à dire dans le domaine de définition de quasi-toutes fonctions de $B_q^{s,p} \cap C^\gamma$ (avec $s - \frac{d}{p} < 0$), il existe un ensemble $E^{(h,\beta)}$ (avec $\beta = \frac{h}{\gamma} - 1$ l'exposant d'oscillation de la fonction de saturation correspondante) tel que $d(h) = d(h, \beta)$ et tel que si $\beta' \neq \beta$ alors $d(h, \beta') < d(h)$.

Nous considérons l'ensemble J_α qui a en fait une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ (définition 1.2.3) de Hausdorff strictement positive.
La remarque 2.4.3 nous indique que

$$J_\alpha \subset \left(\bigcup_{h' = h(\alpha), \beta' \leq \beta(\alpha)} E^{(h'\beta')} \right) \bigcup \left(\bigcup_{h' < h(\alpha), \beta' < \beta(\alpha)} E^{(h'\beta')} \right). \tag{2.33}$$

Cela nous montre que l'ensemble $\bigcup_{h' = h(\alpha), \beta' \leq \beta(\alpha)} E^{(h'\beta')} \bigcup \left(\bigcup_{h' < h(\alpha), \beta' < \beta(\alpha)} E^{(h'\beta')} \right)$ a une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff strictement positive.

Nous montrons ensuite que $\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h'\beta')}$ et $\bigcup_{h'<h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h'\beta')}$ ont une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff nulle. Ainsi seul l'ensemble $E^{(h,\beta)}$ peut avoir une mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff strictement positive. Nous concluons alors que la dimension de $E^{(h,\beta)}$ est exactement $d(h)$.

Nous montrons enfin que chacun des ensembles $E^{(h',\beta')}$ avec $\beta' \neq \beta$ a une dimension strictement inférieure à $d(h)$.

Soit h dans le domaine de définition de f, donc de quasi-toutes fonctions de $B_q^{s,p} \cap C^\gamma$, si $s - \frac{d}{p} < 0$, i.e un élément de l'intervalle $\left[\gamma, \frac{d\gamma}{d-sp+\gamma p}\right]$.

D'après le théorème 2.1.5 [16], pour quasi-toutes fonctions, $d(h) = \left(p + \frac{d-sp}{\gamma}\right) h$.

Soit α tel que $d(h) = \left(p + \frac{d-sp}{\gamma}\right) h = \frac{d}{\alpha}$, ce qui est équivalent à

$$h = \frac{d\gamma}{\alpha(d - sp + \gamma p)}.$$

Nous emploierons les notations de la proposition 2.4.3 $h(\alpha) = h = \dfrac{d\gamma}{\alpha(d - sp + \gamma p)}$ et $\beta(\alpha) = \beta = \frac{d}{\alpha(d-sp+\gamma p)} - 1 = \frac{h}{\gamma} - 1$.

Remarquons que

$$d(h) = \frac{d}{\alpha} = h(\alpha)p + (d - sp)(\beta(\alpha) + 1). \tag{2.34}$$

– Examinons J_α défini par (2.32) dans la partie 2.4.2.
  En suivant la même méthode que dans la partie précédente, nous pouvons remarquer que le calcul de la dimension de J_α est une conséquence directe du théorème 1.2.1 qui affirme que $\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}(J_\alpha) > 0$ (si bien que la dimension de J_α est au moins égale à $d/\alpha = d(h)$).

– Notons que

$$\bigcup_{h'<h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h'\beta')} \subset \bigcup_{h'<h(\alpha)} S_{h'}.$$

Nous suivons la même méthode que dans la partie précédente, et écrivons que

$$\bigcup_{h'<h(\alpha)} S_{h'} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left(\bigcup_{h'<h(\alpha)-1/n} S_{h'} \right).$$

Calculons la mesure $\mathcal{H}^{w_{d(h)}}$ de Hausdorff de $\bigcup_{h'<h(\alpha)-1/n} S_{h'}$.

D'après le théorème 2.3.1, la dimension de Hausdorff de $\bigcup_{h'<h(\alpha)-1/n} S_{h'}$ est inférieure à $\left(p + \frac{d-sp}{\gamma}\right)(h(\alpha) - 1/n) = d(h) - \frac{\gamma p+d-sp}{n\gamma}$. Donc pour $\varepsilon < \frac{\gamma p+d-sp}{n\gamma}$, la mesure $(d(h) - \varepsilon)$ de Hausdorff de $\bigcup_{h'<h(\alpha)-1/n} S_{h'}$ est nulle. Donc d'après l'équation (1.17),

$$\mathcal{H}^{w_{d(h)}} \left(\bigcup_{h'<h(\alpha)-1/n} S_{h'} \right) = 0.$$

Donc

$$\mathcal{H}^{w_{d(h)}} \left(\bigcup_{h'<h(\alpha)} S_{h'} \right) = 0. \tag{2.35}$$

– Nous voulons maintenant examiner les ensembles $\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h'\beta')}$.

Nous pouvons écrire

$$\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h'\beta')} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)-\frac{1}{n}} E^{(h'\beta')} \right).$$

Nous voulons appliquer maintenant la proposition 2.2.1. D'après (2.34), nous avons pour $0 < \varepsilon < \frac{d-sp}{n}$,

$$d(h) - \varepsilon > h(\alpha)p + (d - sp)(\beta(\alpha) - \frac{1}{n}).$$

Donc d'après la proposition 2.2.1,

$$Mes_{d(h)-\varepsilon}\left(\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'\leq\beta-1/n} E^{(h'\beta')}\right)=0.$$

Ce qui donne d'après l'équation (1.17),

$$\mathcal{H}^{w_{d(h)}}\left(\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'\leq\beta-1/n} E^{(h'\beta')}\right)=0.$$

Et on a donc,

$$\mathcal{H}^{w_{d(h)}}\left(\bigcup_{h'=h(\alpha),\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h'\beta')}\right)=0. \tag{2.36}$$

Donc on a d'après (2.35) et (2.36)

$$\mathcal{H}^{w_{d(h)}}\left(E^{(h(\alpha)\beta(\alpha))}\right)>0. \tag{2.37}$$

On en déduit avec la remarque 1.2.1 que la dimension de Hausdorff de $E^{(h(\alpha),\beta(\alpha))}$ est au moins égale à $d(h)=\frac{d}{\alpha}$.
Mais $E^{(h(\alpha),\beta(\alpha))}\subset S_h$, si bien que

$$d(h,\beta)=d(h(\alpha),\beta(\alpha))=d(h).$$

– Calculons maintenant la dimension de $E^{(h(\alpha),\beta')}$ pour $\beta'\neq\beta(\alpha)$.

D'après le lemme 2.3.1, si (h,β') sont les exposants de f en un point x, on a $\beta'+1\leq\frac{h}{\gamma}$. Or pour $h=h(\alpha)$, on a $\beta(\alpha)+1=\frac{h}{\gamma}$.
Donc si $\beta'>\beta(\alpha)$, on a $d(h,\beta')=-\infty$.

Examinons maintenant le cas $0\leq\beta'<\beta(\alpha)$.
Avec (2.34) et $d-sp>0$, on a

$$d(h)>hp-sp(\beta'+1)+d(\beta'+1).$$

D'autre part, la proposition 2.1.3 nous permet d'affirmer que

$$hp - sp(\beta' + 1) + d(\beta' + 1) \geq d(h, \beta').$$

D'où

$$d(h) > hp - sp(\beta' + 1) + d(\beta' + 1) \geq d(h, \beta') \text{ si } \beta' \neq \beta(\alpha). \qquad (2.38)$$

– D'autre part, $J_1 = [0,1]^d$ et si $x \in J_1$ $h(1) \leq \frac{d\gamma}{d-sp+\gamma p}$. On a donc d'après la démonstration précédente

$$Mes_d(\bigcup_{h'<h(1)} S_{h'}) = 0$$

et

$$Mes_d\left(\bigcup_{h'=h(1),\beta'<\beta(1)} E^{(h'\beta')}\right) = 0.$$

Ainsi les exposants de singularités oscillantes prennent presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$) la valeur $(h(1), \beta(1)) = (\frac{d\gamma}{d-sp+\gamma p}, \frac{d}{d-sp+\gamma p} - 1)$

Nous venons de démontrer le théorème 2.1.6.

2.5 Cas d'une fonction d'échelle arbitraire

On considère l'espace topologique $V = \bigcap_{\varepsilon>0, 0<p<\infty} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ avec η une fonction fortement admissible.

Nous notons s la fonction associée à η par la définition 2.1.2.

2.5.1 Singularités oscillantes dans la fonction de saturation

Posons, avec J défini par (2.19) :

$$a(j,k) = \inf_p \left(\frac{d(j-J) - \eta(p)j}{p} \right) \tag{2.39}$$

et

$$a_j = \log j.$$

La fonction de saturation dans V est définie à partir de ses coefficients en ondelettes (voir [16])

$$c_\lambda^{(i)} = \frac{1}{j^{a_j}} 2^{a(j,k)}. \tag{2.40}$$

On pose $c_\lambda^{(i)} = 0$ si le minimum dans (2.40) est $-\infty$.

Soit $\alpha(x_0)$ l'exposant dyadique en x_0 (voir la définition 2.3.1).

Notons s'_g la dérivée à gauche de s et s'_d sa dérivée à droite.

S.Jaffard dans [16] fait l'étude de la régularité hölderienne de la fonction de saturation et nous allons utiliser ses résultats.

Proposition 2.5.1. *Soit $h(\alpha)$ l'exposant de Hölder en un point x_0 tel que $\alpha(x_0) = \alpha$ de la fonction de saturation F définie par (2.40). Il est donné en tout point par la formule*

$$h(x_0) = \frac{1}{\alpha(x_0)} \inf_{\omega \geq \alpha(x_0)} \sup_q (\omega(s(q) - dq) + dq) \tag{2.41}$$

On a alors les différents cas suivants

1. *si* $\alpha \geq \frac{d}{d-s'(0)}$: $h(\alpha) = s(0)$
2. *si* $1 \leq \alpha < \frac{d}{d-s'_d(q_c)}$: $h(\alpha) = \frac{dq_c}{\alpha}$,

3. *si* $\frac{d}{d-s'_d(q_c)} \leq \alpha \leq \frac{d}{d-s'(0)}$ $h(\alpha) = \sup_q (s(q) - dq + \frac{dq}{\alpha})$.

Montrons la proposition suivante.

Proposition 2.5.2. *Soit* $\alpha \in [1, +\infty]$.

Soient $(h(\alpha), \beta(\alpha))$ *les exposants de singularités oscillantes aux points* x_0 *tels que* $\alpha(x_0) = \alpha$ *de la fonction de saturation* F *de* $V = \bigcap_{\varepsilon>0, 0<p<\infty} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$.
On a alors

1. *si* $\alpha \geq \frac{d}{d-s'(0)}$, *on a* $h(\alpha) = s(0)$, $\beta(\alpha) = 0$
2. *si* $1 \leq \alpha < \frac{d}{d-s'_d(q_c)}$, *on a* $h(\alpha) = \frac{dq_c}{\alpha}$ *et* $\beta(\alpha) = \frac{d}{\alpha(d-s'_d(q_c))} - 1$,
3. *si* $\frac{d}{d-s'_d(q_c)} \leq \alpha \leq \frac{d}{d-s'(0)}$, *on a* $h(\alpha) = \sup_q (s(q) - dq + \frac{dq}{\alpha})$, *et* $\beta(\alpha) = 0$

Démonstration:

En chaque x_0 on calcule h_t l'exposant de Hölder de la primitive fractionnaire F_t d'ordre t de F.

En suivant les mêmes arguments que dans les parties 2.3 et 2.4, une intégration fractionnaire d'ordre t revient à multiplier c_λ par 2^{-jt}.

On a alors $c_\lambda^{(i),t} = \frac{1}{j^{a_j}} 2^{a(j,k)-jt}$.

Soit

$$a_t(j,k) = \inf_p \left(\frac{d(j-J) - \eta(p)j}{p} \right) - tj$$

et

$$\rho = d(1 - \frac{J}{j})$$

ρ prend des valeurs discrètes entre 0 et d régulièrement espacées de d/j.

On a

$$a_t(j,k) = j \inf_q (\rho q - s(q) - t). \tag{2.42}$$

Nous excluons le cas dégénéré $p_c = +\infty$.

Si $p_c \neq +\infty$ alors s_t défini par $s_t(q) = s(q) + t$, pour t proche de 0 et strictement positif, est encore une fonction fortement admissible et toutes les propriétés de s s'appliquent encore à s_t.
Ainsi nous pouvons suivre la méthode décrite dans [16] pour calculer h_t, en remplaçant s par s_t dans le calcul. L'exposant de Hölder de la fonction de saturation F est alors, d'après la proposition 2.5.1

$$h_t(x_0) = \frac{1}{\alpha(x_0)} \inf_{\omega \geq \alpha(x_0)} \sup_q \left(\omega(s_t(q) - dq) + dq\right).$$

On peut écrire cette relation

$$h_t(x_0) = \frac{1}{\alpha(x_0)} \inf_{\omega \geq \alpha(x_0)} G_t(\omega) \tag{2.43}$$

avec

$$F_t(\omega, q) = \omega(s_t(q) - dq) + dq. \tag{2.44}$$

et

$$G_t(\omega) = \sup_{q>0} \left(\omega(s(q) + t - d) - dq\right) = \sup_{q>0} F_t(\omega, q). \tag{2.45}$$

Remarquons que G_t a exactement les mêmes propriétés que $G = G_0$ dans [16] en remplaçant s par s_t.

Ces propriétés sont les suivantes.

$$\begin{aligned} G_t(\omega) &= +\infty \text{ si } \omega < \frac{d}{d - s'(+\infty)} \\ G_t(\omega) &= \omega s_t(0) \text{ si } \omega \geq \frac{d}{d - s'(0)} \end{aligned} \tag{2.46}$$

G_t est convexe.

Cherchons le minimum de G_t sur l'ensemble $\{\omega / \omega \geq \alpha(x_0)\}$.

D'après 2.46, si $\alpha \geq \dfrac{d}{d - s'(0)}$, alors $\inf\limits_{\omega \geq \alpha(x_0)} G_t(\omega) = \alpha s_t(0)$ et on a

$$h_t(\alpha) = s_t(0)$$

Supposons maintenant $\alpha \leq \dfrac{d}{d - s'(0)}$.

Nous allons d'abord chercher le minimum de G_t sur l'ensemble $[1, +\infty]$.

Étudions d'abord l'équation d'inconnue q et de paramètre $t \geq 0$

$$s(q) + t - dq = 0. \tag{2.47}$$

La fonction $q \mapsto s(q) - dq$ est strictement monotone et continue, l'équation (2.47) a donc une unique solution, que nous notons $\tilde{q}_t$, finie puisque $p_c \neq +\infty$. De plus la fonction $t \mapsto \tilde{q}_t$ est continue étant donné que la fonction $q \mapsto s(q) - dq$ est continue.

Rappelons que si $q < q_c$, alors $s(q) - dq > 0$ et si $q > q_c$, alors $s(q) - dq < 0$. Ainsi

$$\tilde{q}_0 = q_c$$

et

$$\forall t > 0, \ \tilde{q}_t > q_c.$$

Remarquons que $F_t(\omega, \tilde{q}_t) = d\tilde{q}_t$ et

$$G_t(\omega) = \sup_q F_t(\omega, q) \geq F_t(\omega, \tilde{q}_t) \geq d\tilde{q}_t, \tag{2.48}$$

Si nous pouvons trouver ω_0^t tel que

$$G_t(\omega_0^t) = \sup_q F_t(\omega_0^t, q) = d\tilde{q}_t \tag{2.49}$$

alors nous aurons

$$G_t(\omega) \geq G_t(\omega_0^t). \tag{2.50}$$

Posons $\tilde{\omega_0^t} = \frac{d}{d - s'_d(\tilde{q}_t)}$ où s'_d est la dérivée à droite de s (et s'_g sa dérivée à gauche). La fonction s'_d est décroissante car s est concave. Or $\tilde{q}_t > q_c$, donc

$$\tilde{\omega_0^t} = \frac{d}{d - s'_d(\tilde{q}_t)} \leq \frac{d}{d - s'_d(q_c)}. \tag{2.51}$$

Calculons $G_t(\tilde{\omega_0^t})$, et pour cela nous allons calculer

$$\sup_q \Big(F_t(\tilde{\omega_0^t}, q)\Big) = \frac{d}{d - s'_d(\tilde{q}_t)}(s(q) + t - dq) + dq.$$

Or t étant un paramètre, c'est donc équivalent à calculer

$$\sup_q \Big(F_t(\tilde{\omega_0^t}, q) - d\tilde{q}_t\Big) = \frac{d}{d - s'_d(\tilde{q}_t)}(s(q) + t - dq) + dq - d\tilde{q}_t.$$

La fonction s est concave, donc $g_t : q \mapsto dq - s(q) - t$ est convexe et sa dérivée à gauche est $d - s'_g$. Rappelons que par définition $d\tilde{q}_t - s(\tilde{q}_t) - t = 0$.

Ainsi, si $q < \tilde{q}_t < q'$, on a

$$\frac{dq - s(q) - t}{q - \tilde{q}_t} \leq d - s'_g(\tilde{q}_t) \leq d - s'_d(\tilde{q}_t) \leq \frac{dq' - s(q') - t}{q' - \tilde{q}_t}$$

Cela nous donne que pour tout $q < \tilde{q}_t$

$$F_t(\tilde{\omega_0^t}, q) - d\tilde{q}_t \leq 0,$$

et pour tout $q' > \tilde{q}_t$

$$F_t(\tilde{\omega_0^t}, q') - d\tilde{q}_t \leq 0.$$

Or

$$F_t(\tilde{\omega_0^t}, \tilde{q}_t) - d\tilde{q}_t = 0,$$

donc $\tilde{q}_t$ est un point de maximum local de la fonction $q \mapsto F_t(\tilde{\omega_0^t}, q) - d\tilde{q}_t$. Celle-ci est une fonction concave, donc si elle n'est pas constante ce maximum est unique.

Dans tous les cas $\tilde{q}_t$ est un point de maximum global de la fonction $q \mapsto F_t(\tilde{\omega_0^t}, q) - d\tilde{q}_t$.

Nous venons juste de démontrer que

$$G_t(\tilde{\omega_0^t}) = \sup_q F_t(\tilde{\omega_0^t}, q) = F_t(\tilde{\omega_0^t}, \tilde{q}_t) = d\tilde{q}_t. \tag{2.52}$$

et trouvé un $\omega_0^t = \tilde{\omega_0^t}$ tel que (2.50) soit vérifiée.

Calculons $h_t(x_0) = \frac{1}{\alpha(x_0)} \inf_{\omega \geq \alpha(x_0)} G_t(\omega)$.

Nous avons deux cas à étudier

1. $1 \leq \alpha < \dfrac{d}{d - s'_d(q_c)}$
2. $\dfrac{d}{d - s'_d(q_c)} \leq \alpha \leq \dfrac{d}{d - s'(0)}$.

Étudions le premier cas.

1. $1 \leq \alpha < \dfrac{d}{d - s'_d(q_c)}$.

   La fonction $q \mapsto s'_d(q)$ est continue à droite en q_c. On a $\tilde{q}_t \to q_c$ quand $t \to 0$, et par composition des limites, pour t assez petit, (2.51) nous donne

   $$\omega_0^t \geq \alpha.$$

   On peut alors appliquer (2.52) et (2.50) et on obtient

   $$h_t(\alpha) = \frac{1}{\alpha} G_t(\omega_0^t) = \frac{d\tilde{q}_t}{\alpha}. \tag{2.53}$$

2. $\dfrac{d}{d - s'_d(q_c)} \leq \alpha \leq \dfrac{d}{d - s'(0)}$

   Nous allons démontrer l'égalité suivante

   $$h_t(\alpha) = \frac{1}{\alpha} G_t(\alpha) = \sup_q \left(s(q) + t - dq + \frac{dq}{\alpha} \right) \tag{2.54}$$

   D'après (2.51), $\tilde{\omega_0^t} \leq \alpha$.

   Nous savons que $\tilde{\omega_0^t}$ est le minimum de la fonction G_t sur l'ensemble $[1, +\infty]$ et G_t est convexe.

   Donc elle est strictement décroissante sur $[1, \tilde{\omega_0^t}]$ et strictement croissante sur $[\tilde{\omega_0^t}, +\infty]$, elle est donc strictement croissante sur $[\alpha, +\infty]$.

   Donc le minimum sur $[\alpha, +\infty]$ de G_t est donné par $G_t(\alpha)$, ce qui nous donne (2.54).

Calculons maintenant l'exposant d'oscillation dans les cas suivants :

1. Si $\alpha \geq \dfrac{d}{d - s'(0)}$, $h_t(\alpha) = s(0) + t$ donc
$$\lim_{t \to 0} \frac{h_t - h(\alpha)}{t} = 1.$$
Alors $\beta(\alpha) = 0$.

2. Si $1 \leq \alpha < \dfrac{d}{d - s'_d(q_c)}$, pour t suffisamment petit $h_t(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} G_t(\omega_0^t) = \dfrac{d\tilde{q}_t}{\alpha}$.

   Calculons, avec $h(\alpha) = \frac{dq_c}{\alpha} = \frac{d\tilde{q}_0}{\alpha}$, la limite
$$\lim_{t \to 0, t > 0} \frac{h_t - h(\alpha)}{t} = \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{d\tilde{q}_t - dq_c}{\alpha t}. \tag{2.55}$$
   Évaluons maintenant la dérivée à droite de $t \mapsto \tilde{q}_t$ au point $t = 0$.
   $\tilde{q}_t$ est par définition la solution de (2.47), ce qui nous donne la relation
$$d\tilde{q}_t = t + s(\tilde{q}_t).$$
   On a donc
$$\frac{d\tilde{q}_t - dq_c}{t} = 1 + \frac{s(\tilde{q}_t) - s(q_c)}{t} = 1 + \frac{s(\tilde{q}_t) - s(q_c)}{\tilde{q}_t - q_c} \times \frac{\tilde{q}_t - q_c}{t}.$$
   La fonction s a une dérivée à droite en chaque point car elle est concave, et pour $t \to 0$, on a donc
$$\lim_{t \to 0, t > 0} d \times \frac{\tilde{q}_t - q_c}{t} = 1 + \left(s'_d(q_c) \times \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{\tilde{q}_t - q_c}{t} \right),$$
   donc
$$\lim_{t \to 0, t > 0} \frac{\tilde{q}_t - q_c}{t} = \frac{d}{d - s'_d(q_c)}.$$
   On peut donc réécrire (2.55) comme
$$\lim_{t \to 0, t > 0} \frac{h_t - h(\alpha)}{t} = \lim_{t \to 0, t > 0} \frac{d\tilde{q}_t - dq_c}{\alpha t} = \frac{d}{\alpha(d - s'_d(q_c))} \tag{2.56}$$
   et $\beta(\alpha) = \frac{d}{\alpha(d - s'_d(q_c))} - 1$.

3. Si $\dfrac{d}{d - s'_d(q_c)} \leq \alpha \leq \dfrac{d}{d - s'(0)}$,

$$h_t(\alpha) = \frac{1}{\alpha} G_t(\alpha) = \sup_q \left(s(q) + t - dq + \frac{dq}{\alpha} \right), \tag{2.57}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{h_t - h(\alpha)}{t} = 1$$

et $\beta(\alpha) = 0$.

□

2.5.2 Singularités oscillantes dans quasi-toutes fonctions

Comme dans la partie précédente, nous posons $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$, avec g_n une suite dense dans V, telle que :

1. si $j \geq n$ les coefficients en ondelettes $c_\lambda^{(i)}$ de g_n sont les mêmes que ceux de la fonction de saturation F construite dans V.
2. $r_n = 2^{-n \ln n}$.

Montrons la proposition suivante.

Proposition 2.5.3. *Soient $f \in A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} B(g_n, r_n)$ et n_l une suite telle que $f \in B(g_{n_l}, r_{n_l})$.*

Soit K_α l'ensemble des points x tels qui satisfont la propriété suivante : pour une infinite de valeurs de l,
il existe K tel que

$$\left| x - \frac{K}{2^{[n_l/\alpha]}} \right| \leq \frac{1}{2^{n_l}}. \tag{2.58}$$

et soient (h, β) les exposants de singularités oscillantes de f en $x \in K_\alpha$, alors

1. *si* $\alpha \geq \frac{d}{d-s'(0)}$ *: si* $h \leq h(\alpha) = s(0)$ *alors* $\beta = 0$
2. *si* $1 \leq \alpha < \frac{d}{d-s'_d(q_c)}$ *:*
   (a) *si* $h = h(\alpha) = \frac{dq_c}{\alpha}$*, alors* $\beta \leq \beta(\alpha) = \frac{d}{\alpha(d-s'_d(q_c))} - 1$ *;*
   (b) *si* $h < \dfrac{dq_c}{\alpha}$*, alors* $\beta < \frac{dq_c}{\alpha(s(0))} - 1$.
3. *si* $\frac{d}{d-s'_d(q_c)} \leq \alpha \leq \frac{d}{d-s'(0)}$ *:*
   (a) *si* $h = h(\alpha) = \sup\limits_q(s(q) - dq + \frac{dq}{\alpha})$*, alors* $\beta = 0$ *;*
   (b) *si* $h < h(\alpha) = \sup\limits_q(s(q) - dq + \frac{dq}{\alpha})$*, alors* $\beta < \dfrac{\sup\limits_q(s(q)-dq+\frac{dq}{\alpha})}{s(0)} - 1$.

Remarque 2.5.1. *Cette proposition nous montre que* $K_\alpha \subset \left(\bigcup\limits_{(h',\beta')\in I} E^{(h',\beta')} \right)$ *où* I *est donné par les conditions précédentes 1, 2.(a), 2(b), 3.(a) et 3(b).*

Nous aurons besoin de la proposition suivante de [16] (où $h(\alpha)$ est donné par la proposition 2.5.2).

Proposition 2.5.4. *Soit* f *appartenant à* A *et* h *l'exposant de Hölder de* f *en* x_0 *appartenant à* K_α*, alors* $h \leq h(\alpha)$.

Démontrons maintenant la proposition 2.5.3.

Démonstration:

Considérons d'abord le cas 2.
Les mêmes méthodes que dans les propositions 2.3.4 et 2.4.3 peuvent être appliquées pour montrer le point 2.a.

Montrons maintenant le point 2.b.
La fonction f appartient à A et a (h, β) comme exposants de singularités oscillantes en $x \in K_\alpha$.

La fonction f appartient à V, donc d'après les inclusions de Sobolev, f appartient à l'espace $C^{s(0)}$.

En appliquant le lemme 2.3.1, nous obtenons

$$s(0)(\beta+1) \leq h$$

et puisque $h < \dfrac{dq_c}{\alpha}$, nous avons

$$\beta < \frac{dq_c}{\alpha(s(0))} - 1.$$

Les points 1 et 3 peuvent être démontrés à l'aide des mêmes arguments.

□

2.5.3 Estimation de $d(h,\beta)$

Concluons maintenant la preuve du théorème 2.1.2.

Nous allons utiliser la même méthode que dans les parties précédentes.

Nous montrons que pour tout h dans le domaine de définition du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de V il existe un ensemble $E^{(h,\beta)}$ (avec β l'exposant d'oscillation correspondant de la fonction de saturation) tel que $d(h) = d(h,\beta)$ et tel que, si $\beta' \notin [\frac{hp_c}{(d-s'_d(1/p_c))} - 1, \frac{hp_c}{(d-s'_g(1/p_c))} - 1]$ alors $d(h,\beta') < d(h)$.

Nous considérons K_α, ensemble de dimension au moins égale à $d(h)$, et tel que sa mesure de Hausdorff $w_{d(h)}$ est strictement positive. D'après la proposition 2.5.3 cet ensemble est la réunion $\bigcup_{(h',\beta')\in I} E^{(h',\beta')}$ (où I dépend de η).

Nous montrons que la réunion des $E^{(h',\beta')}$ avec $(h',\beta') \in I$ a une mesure $w_{d(h)}$ de Hausdorff nulle. Cela nous donne que seul $E^{(h,\beta)}$ peut avoir une mesure de Hausdorff $w_{d(h)}$-dimensionnelle strictement positive. On conclue que la dimension de Hausdorff de $E^{(h,\beta)}$ est exactement $d(h)$.

Enfin nous montrons que pour $\beta' \notin [\frac{hp_c}{(d-s'_d(1/p_c))} - 1, \frac{hp_c}{(d-s'_g(1/p_c))} - 1]$, $d(h,\beta') < d(h,\beta)$.

Pour cette preuve nous avons besoin des relations suivantes entre η et s.

Lemme 2.5.1. *Soient $\eta : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}_+$ et $s : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}_+$ deux fonctions concaves telles que $\eta(p) = p.s(1/p)$ et $0 \leq s'(q) \leq d$. Alors*

1. $\eta(p_c) = d$
2. $\eta(p) < d$ *si* $p < p_c$.
3. $\eta(p) > d$ *si* $p > p_c$.
4. $\eta'_g(p_c) = q_c(d - s'_d(q_c))$ *(avec η'_g la dérivée à gauche de η et η'_d celle à droite)*
5. $s(0) = \lim_{p \to +\infty} \eta'_g(p)$.

Démonstration: Démontrons les points 1, 2 et 3. On a $\eta(p) = p.s(1/p)$ et $s(1/p_c) = d/p_c$ par définition de p_c (cf Lemma 2.1.2), donc $\eta(p_c) = p_c.s(1/p_c) = d$.

On a $s(q) - dq > 0$ if $q < 1/p_c$, donc

$$\eta(p) < d \text{ si } p < p_c. \tag{2.59}$$

Réciproquement,

$$\eta(p) > d \text{ si } p > p_c. \tag{2.60}$$

Démontrons maintenant les points 4 et 5.

La fonction s est concave donc elle est dérivable à gauche en tout point. On a donc pour la dérivée à droite de η en un point p_0

$$\eta'_d(p_0) = s\left(\frac{1}{p_0}\right) - \frac{1}{p_0} s'_g\left(\frac{1}{p_0}\right). \tag{2.61}$$

Or $\eta(p_c) = p_c.s(1/p_c) = d$, donc le calcul de la dérivée à gauche de η donne

$$\eta'_g(p_c) = q_c(d - s'_d(q_c)).$$

On a une formule similaire à (2.61) pour η'_g

$$\eta'_g(p_0) = s\left(\frac{1}{p_0}\right) - \frac{1}{p_0} s'_d\left(\frac{1}{p_0}\right). \tag{2.62}$$

De plus par hypothèse, s'_d est bornée donc on peut écrire

$$\lim_{p\to+\infty} \eta'_g(p) = s(0). \tag{2.63}$$

□

Dans la preuve du théorème 2.1.2, nos outils principaux seront les propositions 2.2.1 et 2.1.3. Elles font intervenir, à h et β fixés la fonction

$$f : p \mapsto hp + (d - \eta(p))(\beta + 1). \tag{2.64}$$

Nous donnons maintenant les propriétés principales de f qui nous serviront dans la suite.

Lemme 2.5.2. *Soient h et $\beta \geq 0$. Pour tout $p \geq 0$ on pose $f(p) = hp + (d - \eta(p))(\beta + 1)$. Alors*

1. *$f(p_c) = hp_c$.*
2. *La fonction f est convexe.*
3. *Si $s(0) < \frac{h}{\beta+1}$, le minimum de f est atteint en $\tilde{p}$ tel que*

$$\eta'_d(\tilde{p}) \leq \frac{h}{\beta+1} \leq \eta'_g(\tilde{p}).$$

4. *De plus si p_1 est tel que $\frac{h}{\beta+1} > \eta'_g(p_1)$, alors $p_1 > \tilde{p}$ et $f(p_1) > f(\tilde{p})$.*
5. *Si p_0 est tel que $\frac{h}{\beta+1} < \eta'_d(p_0)$, alors $p_0 < \tilde{p}$ et $f(p_0) > f(\tilde{p})$.*

Démonstration:

Par définition $\eta(p_c) = d$ donc le point 1 est immédiat.

La fonction f est une fonction convexe comme somme de fonctions convexes. Donc f est dérivable à droite et à gauche et ses dérivées en p valent

$$f'_d(p) = (\beta' + 1)\left(\frac{h(\alpha)}{\beta' + 1} - \eta'_d(p)\right) \tag{2.65}$$

et

$$f_g'(p) = (\beta' + 1)\left(\frac{h(\alpha)}{\beta' + 1} - \eta_g'(p)\right). \tag{2.66}$$

Elle vérifie la relation suivante, pour $p_0 < \tilde{p} < p_1$,

$$\frac{f(p_0) - f(\tilde{p})}{p_0 - \tilde{p}} \leq f_g'(\tilde{p}) \leq f_d'(\tilde{p}) \leq \frac{f(p_1) - f(\tilde{p})}{p_1 - \tilde{p}}. \tag{2.67}$$

Supposons

$$\eta_d'(\tilde{p}) \leq \frac{h}{\beta + 1} \leq \eta_g'(\tilde{p}). \tag{2.68}$$

D'après (2.66), on a

$$f_g'(\tilde{p}) \leq 0$$

et

$$f_d'(\tilde{p}) \geq 0.$$

Donc, d'après (2.67) pour tout $p_0 < \tilde{p}$,

$$f(p_0) \geq f(\tilde{p}),$$

et pour tout $p_1 > \tilde{p}$,

$$f(p_1) \geq f(\tilde{p}).$$

Donc on a bien le minimum de f qui est atteint en $\tilde{p}$.

Enfin si p_1 est tel que $\frac{h}{\beta+1} > \eta_g'(p_1)$, alors, d'après (2.66), on a

$$f_g'(p_1) > 0 > f_g'(\tilde{p}).$$

Or f est convexe donc f_g' est croissante et on a $p_1 > \tilde{p}$. De plus, en écrivant

$$\frac{f(\tilde{p}) - f(p_1)}{\tilde{p} - p_1} \leq f_g'(p_1). \tag{2.69}$$

on a facilement $f(p_1) > f(\tilde{p})$.

De même si p_0 est tel que $\frac{h}{\beta+1} < \eta'_d(p_0)$, on a, d'après (2.65), et donc

$$f'_d(p_0) < 0 < f'_d(\tilde{p}).$$

Or f est convexe donc f'_d est croissante et on a $p_0 < \tilde{p}$. Donc de même on a directement $f(p_0) > f(\tilde{p})$.

□

Nous ne redémontrons pas le résultat intermédiaire suivant de [16].

Proposition 2.5.5. *Soit h dans le domaine de définition du spectre de singularités de quasi-toutes fonctions de V. Alors avec α tel que $h = h(\alpha)$, on a*

$$d(h) = \frac{d}{\alpha}. \tag{2.70}$$

Nous étudions d'abord le troisième cas du théorème 2.1.2.

Cas 3 du théorème 2.1.2.

Soit $h \in [\frac{d-s'_d(1/p_c)}{p_c}, d/p_c]$.

Prenons α tel que $h = \frac{dq_c}{\alpha} = h(\alpha)$, ce qui nous donne $\alpha = \frac{dq_c}{h}$. Avec $q_c = 1/p_c$, on a

$$1 \leq \alpha \leq \frac{d}{d - s'_d(q_c)}.$$

L'hypothèse h dans l'intervalle $[\frac{d-s'_d(1/p_c)}{p_c}, d/p_c]$ est donc équivalente au cas 2 de la proposition 2.5.3.

On note

$$\beta(\alpha) = \frac{d}{\alpha(d - s'_d(q_c))} - 1 \tag{2.71}$$

comme dans la proposition 2.5.3.

D'après le point 4 du lemme 2.5.1, on a

$$h(\alpha) = \frac{dq_c}{\alpha} = \eta'_g(p_c)(\beta(\alpha) + 1) \tag{2.72}$$

- Rappelons que K_α est défini par (2.58) dans la partie 2.5.2.
  En suivant la méthode de [16], on remarque que le calcul de la dimension de K_α est une conséquence directe du théorème 1.2.1 qui affirme que $\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}(K_\alpha) > 0$ (la dimension de Hausdorff de K_α est plus grande que d/α).
- D'autre part, la remarque 2.5.1 nous indique que $K_\alpha \subset \left(\bigcup_{(h',\beta')\in I} E^{(h',\beta')} \right)$ où I est donné par les conditions 1, 2.(a), 2(b), 3.(a), 3(b) de la proposition 2.5.3.
  En appliquant la proposition 2.5.3, nous avons

$$K_\alpha \subset \left(\bigcup_{h'<h(\alpha),\beta'<\frac{dq_c}{\alpha(s(0))}-1} E^{(h',\beta')} \right) \bigcup \left(\bigcup_{\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h(\alpha),\beta')} \right) \bigcup E^{(h(\alpha),\beta(\alpha)}.$$

- Clairement $\bigcup_{h'<h(\alpha),\beta'<\frac{dq_c}{\alpha(s(0))}-1} E^{(h',\beta')} \subset \bigcup_{h'<h(\alpha)} S_{h'}$.

  Comme précédemment, l'application du théorème 2.3.1 nous donne que la mesure $w_{d/\alpha}$ de Hausdorff de $\bigcup_{h'<h(\alpha)} S_{h'}$ est nulle. cl
- Montrons maintenant que $\bigcup_{\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h(\alpha),\beta')}$ a une mesure $\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}$ de Hausdorff nulle.

  Fixons $\beta' < \beta(\alpha)$.
  D'après le point 1 de la proposition 2.2.1, nous voulons trouver p_0 et $\varepsilon > 0$ tels que $d - s(1/p_0)p_0 = d - \eta(p_0) > 0$ et

$$h(\alpha)p_0 - \eta(p_0)(\beta'+1) + d(\beta'+1) < \frac{d}{\alpha} - \varepsilon = h(\alpha)p_c - \varepsilon. \qquad (2.73)$$

  En prenant en compte (2.59), la condition $d-\eta(p_0) > 0$ est équivalente à $p_0 < p_c$. On cherche donc à démontrer qu'il existe $p_0 < p_c$ tel que (2.73) soit vérifié.
  Pour cela nous reprenons la fonction introduite dans le lemme 2.5.2 avec

$h = h(\alpha)$ et $\beta = \beta' < \beta(\alpha)$

$$f(p) = h(\alpha)p - \eta(p)(\beta' + 1) + d(\beta' + 1).$$

D'après le point 1 du lemme on a $f(p_c) = h(\alpha)p_c$, et d'après (2.70),

$$f(p_c) = d(h) = \frac{d}{\alpha}. \tag{2.74}$$

Montrer (2.73) est donc équivalent à montrer qu'il existe $p_0 < p_c$ tel que $f(p_0) < f(p_c)$.

Or par hypothèse $\beta' < \beta(\alpha)$, avec (2.72), on a

$$\frac{h(\alpha)}{\beta' + 1} > \frac{h(\alpha)}{\beta(\alpha) + 1} \geq \eta_g'(p_c) \tag{2.75}$$

On note $\tilde{p}$ le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$.
Avec (2.75), d'après le point 4 du lemme 2.5.2, avec $p_1 = p_c$ on a $\tilde{p} < p_c$ et $f(\tilde{p}) < f(p_c)$.
On peut donc trouver $\tilde{p}$ avec $\tilde{p} < p_c$ et $\varepsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = \frac{f(p_c) - f(\tilde{p})}{4}$) tel que

$$f(\tilde{p}) < f(p_c) - \varepsilon.$$

D'après (2.74), on a $f(p_c) = d(h) = \frac{d}{\alpha}$.

On a donc trouvé $p_0 = \tilde{p}$ tel que

$$h(\alpha)p_0 + (d - \eta(p_0))(\beta' + 1) < \frac{d}{\alpha} - \varepsilon.$$

Ainsi on peut appliquer le point 1 de la proposition 2.2.1.
On obtient

$$Mes_{\frac{d}{\alpha} - \varepsilon}\left(\bigcup_{\beta'' \leq \beta'} E^{(h(\alpha), \beta'')}\right) = 0.$$

Donc, d'après l'équation (1.17),

$$\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}\left(\bigcup_{\beta''<\beta'} E^{(h(\alpha),\beta')}\right) = 0.$$

et on a donc

$$\mathcal{H}^{w_{d/\alpha}}\left(\bigcup_{\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h(\alpha),\beta')}\right) = 0.$$

– On conclue alors que $E^{(h(\alpha),\beta(\alpha))}$ a une dimension au plus égale à $\frac{d}{\alpha} = d(h)$.

  Or comme $E^{(h(\alpha),\beta(\alpha))} \subset S_{h(\alpha)}$, la dimension de $E^{(h(\alpha),\beta(\alpha))}$ est exactement de $d(h)$.
  On a

$$d(h(\alpha), \beta(\alpha)) = d(h(\alpha)) = d(h).$$

– Montrons maintenant le deuxième point du cas 3.
  Supposons que $\beta' \neq \beta(\alpha)$.
  Examinons les différents cas :

  1. **Supposons que** $\beta' < \beta(\alpha)$.
     On considère de nouveau

$$f(p) = h(\alpha)p - \eta(p)(\beta' + 1) + d(\beta' + 1).$$

     La même démonstration que pour l'ensemble $\bigcup_{\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h(\alpha),\beta')}$ nous permet de montrer qu'il existe $p_0 < p_c$ tel que $f(p_0) < f(p_c)$.

     On a alors par la proposition 2.1.3,

$$d(h, \beta') \leq \inf_p f(p) \leq f(p_0) < f(p_c).$$

Or $f(p_c) = d(h)$ par (2.74).

Donc on a bien dans ce cas

$$d(h, \beta') < d(h).$$

2. **Supposons que** $\beta' > \beta(\alpha)$

   On considère de nouveau

$$f(p) = h(\alpha)p - \eta(p)(\beta' + 1) + d(\beta' + 1).$$

   On a deux cas possibles.

   (a) Soit

$$\beta' > \frac{h(\alpha)}{\eta'_d(p_c)} - 1,$$

   c'est à dire

$$\frac{h(\alpha)}{\beta' + 1} < \eta'_d(p_c).$$

   Donc d'après le lemme 2.5.2, la fonction f a son minimum en $\tilde{p} > p_c$ et $f(\tilde{p}) < f(p_c)$.

   Or d'après la proposition 2.1.3, on a

$$d(h, \beta') \leq \inf_p f(p) = f(\tilde{p}).$$

   et de plus $f(p_c) = d(h)$ d'après (2.74).

   Donc on a bien dans ce cas

$$d(h, \beta') \leq f(\tilde{p}) < d(h).$$

   Ce qui donne bien

$$d(h, \beta') < d(h).$$

   (b) Soit

$$\frac{h(\alpha)}{\eta'_g(p_c)} - 1 < \beta' < \frac{h(\alpha)}{\eta'_d(p_c)} - 1,$$

ce qui est équivalent à

$$\eta'_d(p_c) \leq \frac{h(\alpha)}{\beta'+1} < \eta'_g(p_c).$$

D'après le lemme 2.5.2, la fonction f a son minimum en p_c.
Donc on a

$$\inf f(p) = f(p_c) = \frac{d}{\alpha} = d(h).$$

On peut donc seulement écrire, d'après la proposition 2.1.3,

$$d(h, \beta') \leq d(h).$$

Cas 1 du théorème 2.1.2.

Étudions maintenant le premier cas du théorème 2.1.2.
Supposons $h = s(0)$, i.e $\alpha \geq \frac{d}{d-s'(0)}$:

D'après la proposition 2.5.3, si $h = s(0)$ l'exposant d'oscillation en $x \in K_\alpha$ est nécessairement

$$\beta = 0.$$

Donc en reprenant la méthode habituelle, on trouve

$$d(h, 0) = d(h).$$

Remarquons qu'en fait si $h = s(0)$ en un point quelconque x (pas nécessairement un point de K_α) alors l'exposant d'oscillation en x est nécessairement 0.

En effet si f est une fonction de V, alors elle appartient à $C^{s(0)}$ et d'après le lemme 2.2.1, on a

$$\frac{h}{\beta+1} \geq s(0).$$

Donc quand $h = s(0)$ on a nécessairement

$$\beta = 0.$$

D'où, si $\beta \neq 0$,

$$d(h, \beta) = -\infty.$$

Cas 2 du théorème 2.1.2.

Supposons $s(0) < h < \frac{d - s'_d(1/p_c)}{p_c}$.
C'est équivalent à avoir

$$\frac{d}{d - s'_d(1/p_c)} < \alpha < \frac{d}{d - s'(0)}.$$

Si on a en un point $x \in K_\alpha$ des exposants d'oscillation (h, β), alors d'après la proposition 2.5.3, $h \leq h(\alpha) = \sup_q (s(q) - dq + \frac{dq}{\alpha})$, et si $h = h(\alpha)$ alors l'exposant d'oscillation en x est $\beta = 0$.

On a donc, avec la même méthode que précédemment,

$$d(h, 0) = d(h).$$

Examinons maintenant $d(h, \beta)$ pour $\beta \neq 0$.
Supposons $h = h(\alpha) = \sup_q (s(q) - dq + \frac{dq}{\alpha})$ et $\beta > 0$.
Reprenons maintenant la fonction du lemme 2.5.2

$$f(p) = hp + (d - \eta(p))(\beta + 1).$$

Afin d'appliquer la proposition 2.1.3, on veut maintenant montrer qu'il existe $\tilde{p}$ tel que

$$f(\tilde{p}) < d(h)$$

Nous savons, d'après (2.4) dans le théorème 2.1.1, que

$$d(h) = \frac{d}{\alpha} = \inf_{p \geq p_c} (hp - \eta(p) + d). \tag{2.76}$$

Nous savons que $s(0) < h < \eta'_g(p_c)$ par hypothèse et d'après le dernier point du lemme 2.5.1, $s(0) = \lim_{p \to +\infty} \eta'_g(p)$.

Donc il existe p_0 tel que $\eta'_g(p_0) < h < \eta'_g(p_c)$.

On a donc maintenant deux cas possibles.

1. Soit $s(0) < h < \eta'_d(p_c)$.

   D'après le point 5 du lemme 2.5.2 pris avec $\beta = 0$, la borne inférieure de la fonction $p :\mapsto hp - \eta(p) + d$ est atteinte en $\tilde{p} > p_c$.

   Ce qui nous donne donc $d - \eta(\tilde{p}) < 0$

   On a alors pour tout $\beta' > 0$,

   $$d(h, \beta') \leq h\tilde{p} + (d - \eta(\tilde{p})(\beta + 1) < h\tilde{p} - \eta(\tilde{p}) + d = d(h).$$

   On obtient pour tout $\beta' > 0$,

   $$d(h, \beta') < d(h).$$

2. Soit $\eta'_d(p_c) \leq h \leq \eta'_g(p_c)$.

   On a donc toujours grâ ce au point 5 du lemme 2.5.2 pris avec $\beta = 0$, que la borne inférieure de la fonction $p :\mapsto hp - \eta(p) + d$ est atteinte en p_c.

   Supposons

   $$\frac{h(\alpha)}{\eta'_d(p_c)} - 1 < \beta'$$

   ce qui est équivalent à

   $$\frac{h(\alpha)}{\beta' + 1} < \eta'_d(p_c).$$

   Donc d'après le point 5 du lemme 2.5.2, le minimum de f est atteint en $\tilde{p} > p_c$, et comme précédemment on peut conclure, d'après la proposition 2.1.3,

   $$d(h, \beta') \leq f(\tilde{p}) < f(p_c) = d(h).$$

   Dans tous les cas on a bien pour $\beta' > \max(0, \frac{h(\alpha)}{\eta'_d(p_c)} - 1)$,

$$d(h,\beta') < d(h).$$

Remarquons que $K_1 = [0,1]^d$.

On a montré que $Mes_d\left(\bigcup_{h'<h(\alpha)} S_{h'}\right) = 0$ et $Mes_d\left(\bigcup_{\beta'<\beta(\alpha)} E^{(h(\alpha),\beta')}\right) = 0$.

Donc les exposants de singularités oscillantes prennent presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) la valeur $(h,\beta) = (\frac{d}{p_c}, \frac{d}{d-s'_d(1/p_c)} - 1)$.

Nous venons donc de finir la preuve du théorème 2.1.2.

2.6 Optimalité de la majoration

Le dernier résultat que nous voulons démontrer est l'optimalité de la majoration de la proposition 2.1.3, c'est à dire le résultat suivant.

Proposition 2.6.1. *1. Soit $s < \frac{d}{p}$ et $\gamma < s$.*

(a) Soient $f \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, et (h,β) ses exposants de singularités oscillantes au point x_0.
Alors $h \geq \gamma(\beta+1)$.

(b) Pour tout (h,β) tel que $h \geq \gamma(\beta+1)$, il existe $f \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ telle que

$$d(h,\beta) = \inf_{p>0}\left[hp - \eta_f(p)(\beta+1) + d(\beta+1)\right].$$

où η_f est la fonction d'échelle de f définie comme dans (1.23).

2. Soit $s > \frac{d}{p}$.

(a) Soient $f \in B_p^{s,q}$, $s - \frac{d}{p} > 0$, et (h,β) ses exposants de singularités oscillantes au point x_0. Alors $h \geq (s-\frac{d}{p})(\beta+1)$.

(b) Pour tout (h,β) tel que $h > (s-\frac{d}{p})(\beta+1)$, il existe $f \in B_p^{s,q}$ telle que

$$d(h,\beta) = \inf_{p>0}\left[hp - \eta(p)(\beta+1) + d(\beta+1)\right].$$

Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 2.6.1. *Soient s tel que $s - \frac{d}{p} < 0$ et γ tel que $s > \gamma > 0$.*

On pose $L = \left[\frac{d+(\gamma-s)p}{d} j\right]$ et $\delta = \frac{d+(\gamma-s)p}{d}$.

Posons $g_{s,\gamma}$ définie par ses coefficients en ondelettes comme suit.

$c_\lambda^{(i)} = j^{-\frac{2}{q}} 2^{-\gamma j}$ *si chaque coordonnée de k est un multiple de $2^j 2^{-L}$,*
$c_\lambda^{(i)} = 0$ *sinon.*

1. *$g_{s,\gamma}$ appartient à $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$.*
2. *Les exposants de singularités oscillantes de $g_{s,\gamma}$ en $x_0 \in J_\alpha$ sont*
   $h(x_0) = \frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)} = \frac{\gamma}{\alpha\delta}$,
   $\beta(x_0) = \frac{d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)} - 1 = \frac{1}{\alpha\delta} - 1$.
3. *$g_{s,\gamma}$ vérifie pour $h = \gamma(\beta+1)$ et $h \in [\gamma, \frac{\gamma}{\delta}]$*

$$d(h,\beta) = \inf_{p>0} [hp - \eta(p)(\beta+1) + d(\beta+1)]$$

où η est la fonction d'échelle de $g_{s,\gamma}$ définie par (1.23).

Remarque 2.6.1. *La fonction $g_{s,\gamma}$ est en fait une légère modification de la fonction de saturation de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ définie dans la section 2.4.1.*

Démonstration:

La fonction $g_{s,\gamma}$ appartient à $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, puisque

$$\begin{aligned}\left(\sum_k |c_\lambda^{(i)}|^p 2^{(sp-d)j}\right)^{1/p} &\leq j^{-2/q} \left(2^{dL}(2^{-\gamma jp} 2^{(sp-d)j}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq j^{-2/q} 2^{(\gamma-s+\frac{d}{p})j} 2^{(s-\frac{d}{p})j} 2^{-\gamma j} \\ &\leq j^{-2/q};\end{aligned}$$

De plus $|c_\lambda^{(i)}| \leq 2^{-\gamma j}$, donc $g_{s,\gamma}$ appartient à C^γ.
D'où le point 1.

On peut écrire $g_{s,\gamma} = F - f_s$ où F est la fonction de saturation définie dans la partie 2.4.1 et f_s est définie par sa suite de coefficients en ondelettes de la façon suivante :

$$c_\lambda^{(i)} = 0 \quad \text{si chaque coordonnée de } k \text{ est un multiple de } 2^j 2^{-L} \tag{2.77}$$

$$c_\lambda^{(i)} = j^{-\frac{2}{q}} 2^{-sj} \quad \text{sinon.} \tag{2.78}$$

Comparons la régularité locale de F et f_s pour déterminer la régularité de $g_{s,\gamma}$.

D'une part f_s appartient à C^s car ses coefficients en ondelettes sont de taille au plus 2^{-sj}.

D'autre part, la proposition 2.4.2 affirme que la fonction de saturation de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$ est une fonction de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, et a en $x_0 \in J_\alpha$ un exposant de Hölder $h_F(x_0) = \frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$.

On a $d - sp > 0$ et $\gamma < s$.

Donc on est dans les conditions d'applications de la remarque 2.4.1. Cela nous donne donc

$$\frac{\gamma d}{\alpha(d + (\gamma - s)p)} \leq \frac{\gamma d}{(d + (\gamma - s)p)}.$$

Étudions la fonction $\Gamma : \gamma \mapsto \frac{\gamma d}{(d+(\gamma-s)p)}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$\frac{d(d - sp)}{(d + (\gamma - s)p)^2}.$$

Or $d - sp > 0$ donc Γ est strictement croissante et on a en s

$$\Gamma(s) = s.$$

Donc pour $\gamma < s$, $\Gamma(\gamma) < \Gamma(s)$.

Donc

$$\frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)} < s.$$

Donc $g_{s,\gamma}$ a en $x_0 \in J_\alpha$ la régularité hölderienne ponctuelle $h_{g_{s,\gamma}}(x_0) = h_F(x_0) = \frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$.

Le même calcul que pour F donne l'exposant d'oscillation $\beta = \frac{d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)} - 1$ en $x_0 \in J_\alpha$. D'où le point 2.

La méthode exposée dans [16] permet de calculer la dimension de J_α grâce au théorème 1.2.1 qui donne que $\mathcal{H}^{h_{d/\alpha}}(J_\alpha) > 0$ (si bien que la dimension de Hausdorff de J_α est au moins égale à d/α). D'après le théorème 2.3.1 l'ensemble des points où une fonction de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ a un exposant de Hölder au plus égal à $\frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$ a une mesure $\mathcal{H}^{h_{d/\alpha}}$ de Hausdorff nulle. Il s'ensuit que l'ensemble des points où l'exposant de Hölder de f est exactement $\frac{\gamma d}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$ a pour dimension d/α. Alors le spectre de singularités a pour domaine de définition le segment $[\gamma, \frac{\gamma d}{d+(\gamma-s)p}]$ où

$$d(h) = \frac{d+(\gamma-s)p}{\gamma} h.$$

Pour chaque h pris comme exposant de Hölder nous avons un et un seul β associé. Donc le spectre de singularités oscillantes de $g_{s,\gamma}$ est

$$d(h,\beta) = d(h) = \frac{d+(\gamma-s)p}{\gamma} h.$$

Calculons maintenant la fonction d'échelle de $g_{s,\gamma}$.

Déterminons maintenant les espaces de Besov $B_{p'}^{s',q'}$ auquel la fonction $g_{s,\gamma}$ appartient.

Il y a 2^{dL} coefficients en ondelettes de taille $j^{-2/q}2^{-\gamma j}$ où $L = [\frac{d+(\gamma-s)p}{d}j]$, donc $\sum_k |c_\lambda^{(i)} 2^{(s'-\frac{d}{p'})j}|^{p'}$ est équivalente à

$$j^{-2p'/q}2^{(d+(\gamma-s)p)j}2^{-\gamma p' j}2^{(s'p'-d)j}$$

$$= j^{-2p'/q}2^{(\gamma(p-p')+s'p'-sp)j}.$$

Il s'ensuit que

$$\eta(p') = (s-\gamma)p + \gamma p' \tag{2.79}$$

est la fonction d'échelle de $g_{s,\gamma}$.

Remarquons que cette fonction d'échelle η de $g_{s,\gamma}$ n'est pas la même que la fonction d'échelle de la fonction de saturation de l'espace $B_p^{s,q} \bigcap C^\gamma$.

En effet en reprenant le résultat de [16] dans lequel est calculé la fonction d'échelle $\tilde{\eta}$ de la fonction de saturation de l'espace $B_p^{s,q} \bigcap C^\gamma$, on a pour cette fonction de saturation F

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\eta}(p') &= p's && \text{if} \quad p' \leq p. \\ &= (s-\gamma)p + \gamma p' && \text{if} \quad p' \geq p. \end{aligned}\right\} \tag{2.80}$$

Ce n'est donc pas la même fonction que η.

Étudions $f(p') = hp' - \eta(p')(\beta+1) + d(\beta+1)$.

$f'(p') = h - \gamma(\beta+1)$ et nous avons les différents cas :

- $h < \gamma(\beta+1)$
  $\inf\limits_{p'>0} hp' - \eta(p')(\beta+1) + d(\beta+1) = -\infty$
- $h \geq \gamma(\beta+1)$
  $\inf\limits_{p'>0} hp' - \eta(p')(\beta+1) + d(\beta+1) = (\beta+1)(-sp + \gamma p + d)$.
  Donc pour $h = \gamma(\beta+1)$ on a

$$d(h,\beta) = \inf_{p'>0} \left(hp' - \eta(p')(\beta+1) + d(\beta+1)\right).$$

□

Démontrons la proposition 2.6.1 :

Démonstration:

1. D'abord on considère l'espace $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, $s - \frac{d}{p} < 0$.
   Le point 1.(a) de la proposition 2.6.1 est une conséquence directe du lemme 2.3.1.

   Montrons maintenant le point 1.(b).
   Fixons (h, β) tel que
   $$h \geq \gamma(\beta + 1) \tag{2.81}$$
   et nous voulons construire une fonction $f \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ qui vérifie
   $$d(h, \beta) = \inf_{p>0} \left(hp - \eta(p)(\beta + 1) + d(\beta + 1)\right).$$
   Définissons γ_0 tel que
   $$h = \gamma_0(\beta + 1). \tag{2.82}$$
   Il s'ensuit d'après (2.81), et (2.82) que
   $$\gamma_0 \geq \gamma. \tag{2.83}$$
   Déterminons (s_0, p_0) tel que g_{s_0,γ_0}
   (a) appartienne à $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$
   (b) appartienne à $B_{p_0}^{s_0,q_0} \cap C^{\gamma_0}$
   (c) a (h, β) comme exposants de singularités oscillantes sur l'ensemble J_1 de dimension $d(h, \beta)$ donnée par
   $$d(h, \beta) = \inf_{p>0} \left(hp - \eta(p)(\beta + 1) + d(\beta + 1)\right).$$

Examinons maintenant les conditions d'existence d'un tel couple (s_0, p_0). D'abord on définit g_{s_0,γ_0} comme dans le lemme 2.6.1 avec $L_0 = \left[\frac{d+(\gamma_0-s_0)p_0}{d} j\right]$, $\delta_0 = \frac{d+(\gamma_0-s_0)p_0}{d}$, et les coefficients en ondelettes suivants :

$c_\lambda^{(i)} = j^{-\frac{2}{q}} 2^{-\gamma_0 j}$ si chaque coordonnée de k est un multiple de $2^j 2^{-L_0}$
$c_\lambda^{(i)} = 0$ sinon.

Les conditions nécessaires suivantes doivent être vérifiées.

(a) $g_{s_0,\gamma_0} \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma$.

(b) $\gamma_0 = \frac{h}{\beta+1}$ (car le spectre de singularités oscillantes est défini pour $h = \gamma_0(\beta+1)$

(c) en $x_0 \in J_1$ $\beta = \frac{1}{\delta_0} - 1$, donc

$$\delta_0 = \frac{1}{\beta+1}$$

(d) $\delta_0 = \frac{d+(\gamma_0-s_0)p_0}{d}$ peut être réécrit

$$d(1-\delta_0) = (-\gamma_0 + s_0)p_0 \tag{2.84}$$

et $0 \leq \delta_0 \leq 1$

(e) $\gamma_0 < s_0$ et $s_0 p_0 < d$ avec la condition (2.84) donnent

$$d - \gamma_0 p_0 > d(1-\delta_0) \tag{2.85}$$

Déterminons si la condition (a) peut être remplie.
Les coefficients en ondelettes de g_{s_0,γ_0} vérifient $|c_\lambda^{(i)}| \leq 2^{-\gamma_0 j}$. Grâce à (2.83), $g_{s_0,\gamma_0} \in C^\gamma$.

Pour que $g_{s_0,\gamma_0} \in B_p^{s,q}$, il faut que

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\sum_k |c_\lambda^{(i)}|^p 2^{(sp-d)j}\right)^{q/p} &< +\infty \\ \sum_j \left(j^{-2p/q} 2^{dL_0} \left(2^{-\gamma_0 j}\right)^p 2^{(sp-d)j}\right)^{q/p} &< +\infty \end{aligned}$$

Et il suffit que

$$dL_0 - \gamma_0 pj + (sp - d)j \leq 0$$

$$d\delta_0 - \gamma_0 p + sp - d \leq 0$$

ce qui nous donne

$$d(1 - \delta_0) \geq (s - \gamma_0)p. \tag{2.86}$$

Il nous suffit maintenant de voir si il existe un couple (s_0, p_0) qui vérifie les conditions précédentes.

Pour cela, nous transcrivons les conditions précédentes sur un diagramme qui permet d'associer à chaque espace de Besov du type $B_p^{s,\infty}$ un point dans un système de coordonnées à deux dimensions (les espaces $B_p^{s,q}$ sont inclus dans les $B_p^{s,\infty}$ que nous représenterons grâce à ce diagramme).
Sur l'axe des abscisses nous avons le paramètre en $1/p$ et sur l'axe des ordonnées nous avons le paramètre de régularité s.

Par exemple dans cette représentation,

l'espace C^γ a pour coordonnées $(0, \gamma)$,

l'espace $B_p^{s,\infty}$ a pour coordonnées $(1/p, s)$.

Les espaces de fonctions qui sont au dessus de la droite de pente d passant par 0 (droite que nous noterons Δ) s'injectent, grâce aux inclusions de Sobolev, dans un espace de fonctions continues.

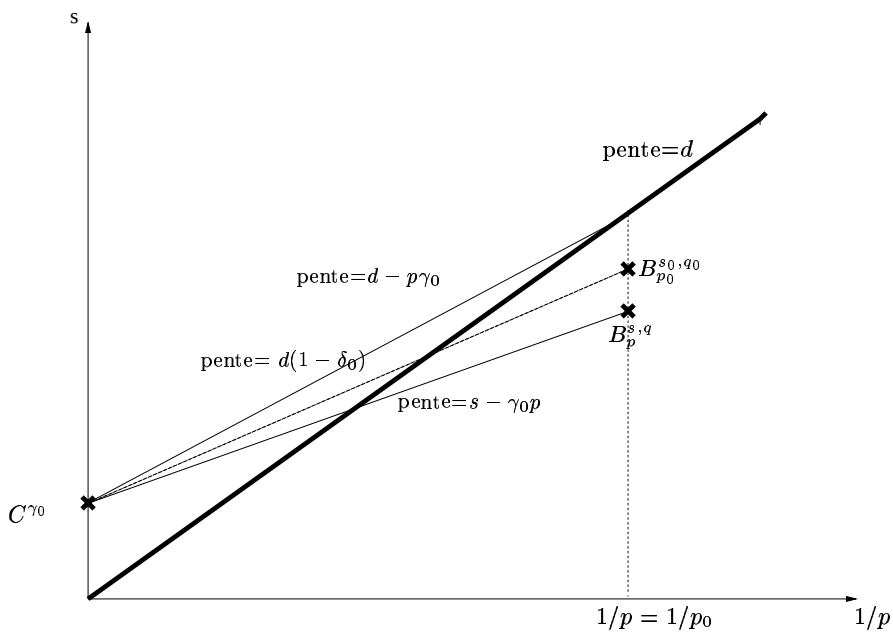
D'autre part, un espace $B_p^{s,\infty}$ s'injecte dans un autre $B_{p'}^{s',\infty}$ par une inclusion de Sobolev si ils sont tous les deux sur la même droite de pente d et si $1/p \geq 1/p'$.

Ainsi la condition (2.84) nous indique que $d(1 - \delta_0)$ n'est autre que la pente de la droite qui relie C^{γ_0} à $B_{p_0}^{s_0,\infty}$.
La condition (2.86) indique que cette pente doit être au moins égale à celle de la droite qui relie C^{γ_0} à $B_p^{s,\infty}$.
La condition (2.85) indique que cette pente doit être strictement plus

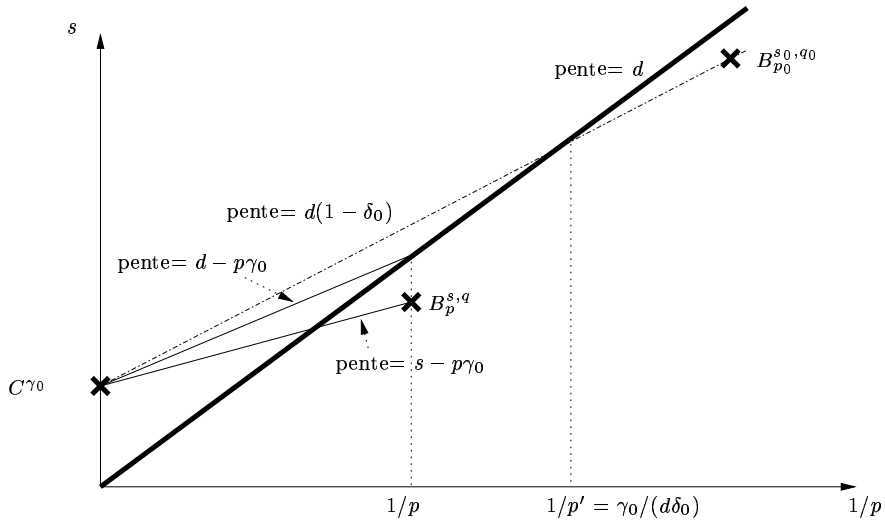
petite que celle de la droite qui relie C^{γ_0} à $B_{p_0}^{d/p_0,\infty}$.

Existe-t-il un espace de Besov qui vérifie toutes ces conditions ? Nous distinguons deux cas :

le cas $d - p\gamma_0 > d(1-\delta_0)$



le cas $d - p\gamma_0 \leq d(1-\delta_0)$



Dans chaque cas on peut trouver un espace $B_{p_0}^{s_0,\infty}$.

Par exemple il suffit de choisir l'espace

– dans le cas $d - p\gamma_0 > d(1-\delta_0)$, $B_{p_0}^{s_0,\infty}$ avec $s_0 = \frac{d+sp}{2p}$ et $p = p_0$

– dans le cas $d - p\gamma_0 \leq d(1-\delta_0)$, $B_{p_0}^{s_0,\infty}$ avec $s_0 = \frac{\gamma_0(2-\delta_0)}{\delta_0}$ et $p_0 = \frac{d\delta_0}{2\gamma_0}$

Cela termine la démonstration du point 1.

2. Examinons le cas $B_p^{s,q}$, $s - \frac{d}{p} > 0$.

   De la même façon que dans le cas précédent nous voulons trouver (s_0, p_0) tel qu'une fonction du type g_{s_0,γ_0}

   (a) appartienne à $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$

   (b) appartienne à $B_{p_0}^{s_0,q_0} \cap C^{\gamma_0}$

   (c) a les exposants de singularités oscillantes (h, β) sur l'ensemble J_1 de dimension $d(h, \beta)$.

   Si nous adoptons la même méthode nous devons juste remplacer γ par $s - \frac{d}{p}$ pour obtenir

   (a) $g_{s_0,\gamma_0} \in B_p^{s,q}$.

   (b) $\gamma_0 = \frac{h}{\beta+1} \geq s - \frac{d}{p}$

   (c) en $x_0 \in J_1$ $\beta = \frac{1}{\delta_0} - 1$, donc

   $$\delta_0 = \frac{1}{\beta+1}$$

   (d) on peut réécrire $\delta_0 = \frac{d+(\gamma_0-s_0)p_0}{d}$ comme

   $$d(1-\delta_0) = (-\gamma_0 + s_0)p_0 \tag{2.87}$$

et $0 \leq \delta_0 \leq 1$,

(e) $\gamma_0 < s_0$ et $s_0 p_0 < d$ avec la condition (2.87) nous donnent

$$d - \gamma_0 p_0 > d(1 - \delta_0) \tag{2.88}$$

La condition $g_{s_0,\gamma_0} \in B_p^{s,q}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\sum_k |c_\lambda^{(i)}|^p 2^{(sp-d)j} \right)^{q/p} &< +\infty \\ \sum_j \left(j^{-2/q} 2^{dL_0} \left(2^{-\gamma_0 j}\right)^p 2^{(sp-d)j} \right)^{q/p} &< +\infty \end{aligned}$$

Et on peut donc dire que

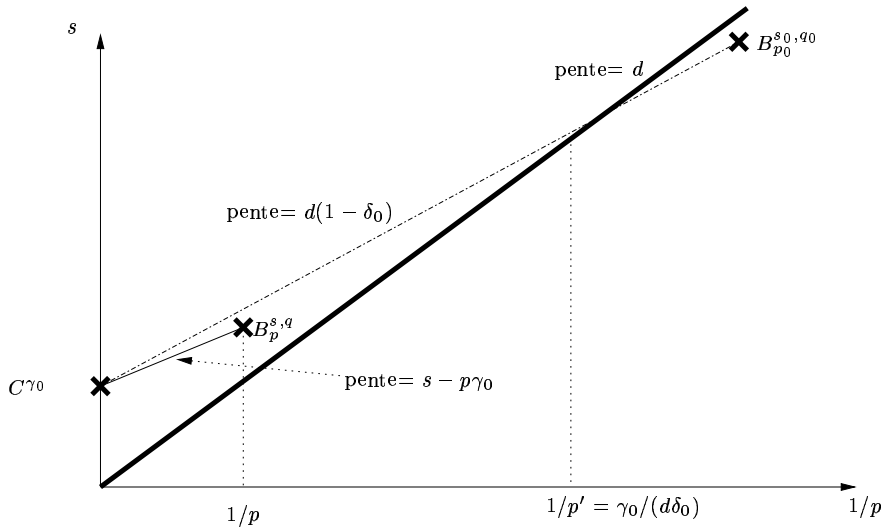
$$dL_0 - \gamma_0 pj + (sp - d)j \leq 0$$

$$d\delta_0 - \gamma_0 p + sp - d \leq 0$$

ce qui nous donne

$$d(1 - \delta_0) \geq (s - \gamma_0)p. \tag{2.89}$$

On utilise un diagramme de la même façon que précédemment.



Pour le cas $\gamma_0 = \frac{h}{\beta+1} > s - \frac{d}{p}$, on peut prendre par exemple l'espace

$B_{p_0}^{s_0,\infty}$ avec $s_0 = \gamma_0 \frac{2-\delta_0}{\delta_0}$ et $p_0 = \frac{d\delta_0}{2\gamma_0}$. D'où le point 2 de la proposition 2.6.1.

$\square$

Chapitre 3

Vers moins de régularité

3.1 Introduction

Les résultats précédents concernent l'étude de la conjecture de Frisch-Parisi et de sa validité dans des espaces fonctionnels où les fonctions ont toutes une régularité hölderienne uniforme minimale. En particulier l'étude et le calcul des coefficients d'oscillation en un point par une méthode d'ondelettes exigent cette régularité hölderienne uniforme minimale.

Cette condition est très restrictive pour les applications. Dans le cadre de la turbulence pleinement développée, le passage occasionnel, à l'endroit de la mesure de la vitesse d'un écoulement turbulent, de fins filaments de vorticité correspond à des exposants de Hölder négatifs (voir [4]). Pour beaucoup d'autres problèmes où l'analyse multifractale est maintenant utilisée, il n'y a pas de raison de faire une hypothèse de continuité a priori sur les fonctions étudiées. Et, si dans l'analyse multifractale classique, il est nécessaire de se restreindre aux fonctions bornées, ce n'est pas pour des hypothèses techniques qui faciliteraient la démonstration, mais parce que la définition de la régularité hölderienne ponctuelle implique que la fonction soit localement bornée.

Ainsi, si on veut étendre les techniques de l'analyse multifractale aux fonctions éventuellement non localement bornées, il faut étendre la notion de

régularité ponctuelle et utiliser une notion plus faible adaptée aux fonctions non bornées.

Notre objectif est ici d'introduire et d'étudier une généralisation de l'analyse multifractale adaptée au cadre L^p, et plus précisément de montrer que le formalisme multifractal, établi dans ce cadre, procure une majoration du spectre de singularités pour n'importe quelle fonction.

Le critère de régularité ponctuelle que nous allons utiliser est une généralisation de la régularité hölderienne et utilise les espaces $T_p^u(x_0)$ qui ont été introduits dans le chapitre 1.1.3 avec la définition 1.4. Nous commencerons par démontrer qu'on peut obtenir une "presque" caractérisation de ces espaces grâce à des relations sur les modules des coefficients en ondelettes de leurs fonctions. Ainsi le p-exposant, défini par (1.10), qui mesure à p fixé l'appartenance d'une fonction aux espaces $T_p^u(x_0)$, peut être calculé grâce à des relations sur les modules des coefficients en ondelettes, ainsi que l'était l'exposant de Hölder ponctuel. Il va maintenant jouer le rôle de l'exposant de Hölder ponctuel pour la mesure de la régularité ponctuelle.

Fixant $u \geq -\frac{d}{p}$ et $f \in L^p_{loc}$, nous pouvons considérer les ensembles $S_u^p = \{x_0 : u_f^p(x_0) = u\}$ où u_f^p désigne le p-exposant de f. Nous montrerons que dans le cas où f a une régularité globale du type Besov, même si elle est discontinue, les majorations suivantes des dimensions de Hausdorff des ensembles S_u^p sont vraies.

Comme précédemment si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, $Mes_D(A)$ désigne la mesure D-dimensionnelle de Hausdorff de A.

Proposition 3.1.1. *Soit $s \geq 0$.*
Soit $f \in L^{p_0,s_0}$ ou $B_{p_0}^{s_0,q_0}$ avec $q_0 \neq \infty$ si $p_0 \neq \infty$.
Soit $p \geq 1$ tel que $s_0 \geq \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p}$,

On suppose $s_0 > 0$. Soit $D \geq 0$ tel que

$$D > p_0(s - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p}). \tag{3.1}$$

Alors

$$Mes_D\{x_0 : f \notin T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)\} = 0.$$

et $\{x : f \notin T_p^{s-\frac{d}{p}}(x)\}$ a pour dimension au plus $d + (s - s_0)p_0 - \frac{dp_0}{p}$.

Remarque 3.1.1. *Les seules hypothèses $f \in L^p$ et $f \in B_{p_0}^{s_0,p_0}$ ne sont pas suffisantes pour obtenir une majoration de la dimension de l'ensemble des points x_0 où f n'appartient pas à l'espace $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.*

En effet il existe des fonctions de $L^p \bigcap B_{p_0}^{s_0,p_0}$ qui n'appartiennent à aucun espace $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ quel que soit $s > 0$ et quel que soit x_0. Par exemple la fonction $f : x \mapsto \sum_{j,k} \frac{2^{\frac{dj}{p}}}{j^{\frac{2}{p}}}\psi_{j,k}(x)$ appartient à L^p et à $B_\infty^{s_0,q_0}$ avec $s_0 < 0$, mais n'appartient à aucun $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ quel que soit $s > 0$ et quel que soit x_0.

Dans le cas $p = \infty$, on sait que le p-exposant correspond à l'exposant de Hölder ponctuel. La proposition 3.1.1 est alors une réécriture, pour le cas $s_0 > \frac{d}{p_0}$, du théorème 2.3.1 utilisé dans les démonstrations du chapitre 2 (démontré par S.Jaffard dans [22]) et pour le cas $s_0 = \frac{d}{p_0}$, de ceux de S.Jaffard et Y.Meyer dans [23], que le théorème suivant 3.1.1 rappelle. La démonstration de ce théorème est d'ailleurs le point de départ de ce travail.

Théorème 3.1.1. *1. Soit $s_0 > \frac{d}{p_0}$ et $f \in B_{p_0}^{s_0,q_0}$.*

Alors, pour tout h dans l'intervalle $[s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0]$,

le spectre de singularités $d(h)$ de f est majoré par

$$d(h) \leq hp - s_0p + d.$$

2. *Soient* $s \geq 0$ *et* $q_0 \leq 1$.
   Soit $f \in \dot{B}_{p_0}^{\frac{d}{p_0},q_0}$.

   Alors, pour tout $h \in [0, \frac{d}{sup(q_0,p_0)}]$,
   le spectre de singularités $d(h)$ *de* f *est majoré par*

$$d(h) \leq sup(q_0, p_0)h.$$

Dans les chapitres qui précèdent le spectre de singularités est lié à l'exposant de Hölder. Pour ce qui est du p-exposant, nous appelons spectre de p-singularités la fonction qui à u associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble S_u^p et nous la noterons $u \mapsto d_p(u)$.

Remarque 3.1.2. *Le spectre de p-singularités permet de donner des informations plus précises en particulier sur les fonctions non continues.*

Étudions à titre d'exemple la fonction caractéristique $G : (x, y) \mapsto \mathbb{I}_{\{|y| \leq x^{\alpha+1}, 0 \leq x \leq 1\}}$ avec $\alpha > 0$ où $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A. Le spectre de singularités $h \mapsto d_p(h)$ de G est fini si et seulement si $h = 0$ et vaut alors 1. Pour $1 \leq p < \infty$, le spectre de p-singularités $u \mapsto d_p(u)$ de G est fini si et seulement si $u = 0$ ou $u = \frac{\alpha}{p}$ (du à la singularité en 0 qui donne un p exposant non nul) et on a $d_p(0) = 1$ et $d_p(\frac{\alpha}{p}) = 0$.

On peut de même réécrire la proposition 3.1.1 pour majorer le spectre de p-singularités.

Corollaire 3.1.1. *Supposons que* $f \in B_{p_0}^{s_0,q_0}$ *avec* $s_0 > 0$ *et soit* $p \geq 1$ *tel que* $s_0 \geq \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p}$.
Alors

$$d_p(u) \leq p_0 u + d - s_0 p_0.$$

Soit f une distribution tempérée.

On note maintenant $\eta_f(q) = \sup\{\tau : \ f \in B^{\tau/q,\infty}_{q,loc}\}$ la fonction déchelle de f et S_f telle que $\eta_f(q) = qS_f(1/q)$.

Nous allons à partir de maintenant considérer la classe des distributions f telles que l'ensemble $\{p_0 \geq 1 : S_f(1/p_0) > 0\}$ soit non vide.

Cela revient à supposer qu'il existe $p \geq 1$ tel que $S_f(1/p) > 0$, ou de manière équivalente qu'il existe $\delta > 0$ et $p \geq 1$ tels que $f \in B^{\delta,p}_p$.

On pose alors

$$\tilde{p} = \sup\{p_0 : S_f(1/p_0) > 0\}.$$

Et on note p^p_c tel que

$$S_f\left(\frac{1}{p^p_c}\right) - \frac{d}{p^p_c} = -\frac{d}{p}. \tag{3.2}$$

Rappelons que la fonction S_f est croissante, donc $S_f(1/p_0) > 0$ sur $]0, \tilde{p}]$.

Lemme 3.1.1. *Si $f \in B^{\delta,p}_p$ pour $\delta > 0$, alors $\tilde{p} \geq p \geq p^p_c$.*

Démonstration: La fonction $f \in B^{\delta,p}_p$ pour $\delta > 0$, donc

$$S_f(1/p) > 0$$

et par conséquent

$$\tilde{p} \geq p.$$

On a donc

$$S_f(1/p) - \frac{d}{p} \geq -\frac{d}{p},$$

et donc avec (3.2), on a

$$S_f(1/p) - \frac{d}{p} \geq S_f\left(\frac{1}{p^p_c}\right) - \frac{d}{p^p_c}.$$

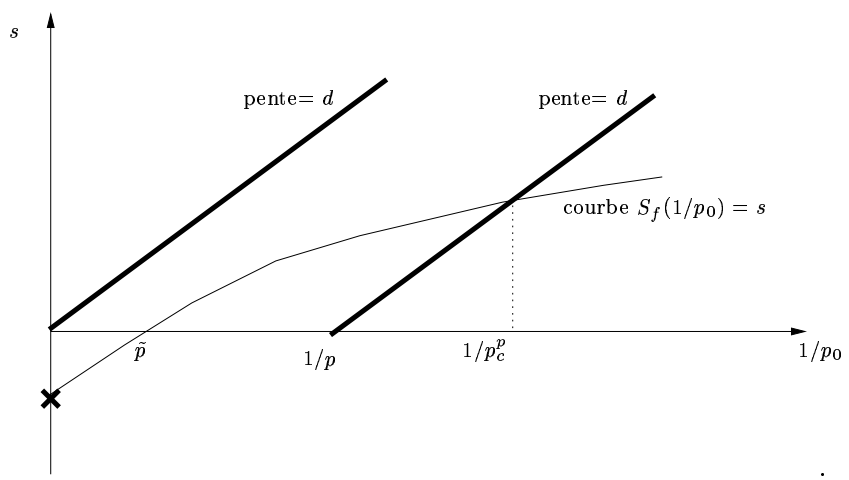
Comme la fonction $x \mapsto S_f(x) - dx$ est décroissante, on a dans ce cas

$$\tilde{p} > p \geq p_c^p.$$

□

Remarque 3.1.3. *Le nombre p_c^p est l'indice critique à partir duquel pour $p \geq p_0 \geq p_c^p$, et tout $\varepsilon > 0$, $B_{p_0}^{S_f\left(\frac{1}{p_0}\right)-\varepsilon,p_0}$ s'injecte dans L^p par les injections de Sobolev.*

La figure suivante résume les résultats du lemme 3.1.1.



On a alors la majoration suivante.

Théorème 3.1.2. *Soit f une fonction de L^p_{loc} telle qu'il existe $p \geq 1$ et $\delta > 0$ tels que $f \in B_p^{\delta,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Soit $\tilde{p} = \sup\{p_0 : S_f(1/p_0) > 0\}$ et p_c^p tel que $S_f\left(\frac{1}{p_c^p}\right) - \frac{d}{p_c^p} = -\frac{d}{p}$.

Alors

$$d_p(u) \leq \inf_{\tilde{p} > p_0 \geq p_c^p} (p_0 u + d - \eta_f(p_0))$$

Le cas $p = +\infty$ avec $\tilde{p} = +\infty$ correspond à la majoration du spectre de singularités usuel (c'est à dire pour l'exposant de Hölder)

$$d(h) \leq \inf_{p \geq p_c} (ph + d - \eta_f(p))$$

où p_c est défini comme dans le théorème 2.1.1 ou encore comme dans l'équation (3.2) en prenant $p = \infty$. Elle prend en compte uniquement les espaces de Besov auxquels la fonction appartient qui s'injectent dans des espaces de fonctions continues, .

Mais ici, en prenant p quelconque, on va prendre les espaces de Besov auxquelles la fonction appartient qui s'injectent dans L^p, ce qui nous donne une gamme d'espaces pris en compte beaucoup plus large. Nous pouvons maintenant étudier par des méthodes d'analyse multifractale des fonctions non continues, comme les fonctions utilisées pour modéliser les images en traitement de l'image.

Nous finirons avec une autre conséquence de la proposition 3.1.1 qui concerne les séries d'ondelettes creuses. Celles-ci interviennent dans de nombreuses applications comme par exemple en traitement du signal dans [12]. Une suite $(a(j,k)_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^d})$ est infiniment creuse si

$$\forall p > 0, \sum_j \sum_k |a(j,k)|^p < \infty.$$

Ou autrement dit, le réarrangement décroissant des coefficients $c_0^\star \geq c_1^\star \geq ...$ de la suite $|a(j,k)|$, $j \in \mathbb{Z}$, est à décroissance rapide ; ou encore nous verrons que la suite des coefficients en ondelettes d'une fonction est infiniment creuse si cette fonction appartient à une intersection infinie d'espaces de Besov donnée.

Le résultat suivant a été démontré dans le cas $p = \infty$ par Y.Meyer et S.Jaffard dans [23]. Il a été suggéré dans le cas général par Yves Meyer.

On note $T_p^\infty(x_0) = \bigcap_{u \geq -\frac{d}{p}} T_p^u(x_0)$

(rappelons que les espaces $T_p^u(x_0)$ ne sont définis que pour $u \geq -\frac{d}{p}$).

Corollaire 3.1.2. *Soit $p \geq 1$.*
Soit $f = \sum_j \sum_k \tilde{C}_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}$ avec $\tilde{\psi}_{j,k} = 2^{\frac{dj}{p}} \psi(2^j x - k)$ une base orthogonale d'ondelettes dans la classe de Schwarz telle que $\| \tilde{\psi}_{j,k} \|_p = C$ (ondelettes normalisées dans L^p).

Supposons que

$$\forall \theta > 0, \sum_j \sum_k |\tilde{C}_{j,k}|^\theta < +\infty. \tag{3.3}$$

Alors la dimension de Hausdorff de $\{x_0 : f \notin T_p^\infty(x_0)\}$ est nulle.

Pour démontrer ces résultats, il nous faut d'abord faire le lien entre les espaces $T_p^u(x_0)$ et les espaces de Xu définis par (1.35). Cela nous permettra alors d'obtenir une caractérisation du p-exposant (défini par (1.10)) par des relations sur les modules de coefficients en ondelettes. Les notations sont celles du chapitre 1.3.

Rappelons que la caractérisation que nous utilisons ici des espaces $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,q}$ est donnée dans la proposition 1.3.6.

Théorème 3.1.3. *Soient $p \geq 1$, $s \geq 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit f une fonction de L^p_{loc}.*

1. *Alors si f appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1}$, f appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.*
2. *Si $f \in T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ (avec $f(x) = \sum_{j,k} C_{j,k} \psi(2^j x - k)$)*
   alors $\exists A > 0$ tel que

$$\sup_{j>0} \frac{2^{(sp-d)j}}{j} \left[\sum_{|k-2^j x_0| \leq A 2^j} |C_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp} \right] < +\infty. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1.4. *Remarquons que si f vérifie (3.4) alors f n'appartient pas nécessairement à $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,q}$ pour $q \geq 1$ et en particulier pour $q = \infty$. En effet les fonctions du type $f : x \mapsto \sum_{j,k} 2^{j(s-\frac{d}{p})} j^{\frac{1}{p}} \psi_{j,k}(x)$ vérifient (3.4) mais ne sont pas éléments de $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,q}$ pour $q \geq 1$.*

Nous pouvons maintenant mettre en liaison le p exposant et un exposant $i_p(x_0)$ lié à la frontière Xu. Nous trouvons ainsi une caractérisation du p exposant grâce aux coefficients en ondelettes.

Avec les notations de la proposition 1.3.10,

Théorème 3.1.4. *Soit $p \geq 1$. Soient $f \in L^p_{loc}$ définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^d$ de diamètre A.*

On pose

$$\Sigma_j^p(s) = 2^{j(-sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A 2^j} |C_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{sp} \tag{3.5}$$

et

$$i_p(x_0) = \sup \left\{ s : \liminf \frac{\log \left(\Sigma_j^p(s)\right)^{\frac{1}{p}}}{-j \log 2} \geq 0 \right\}. \tag{3.6}$$

Alors

1. *$i_p(x_0)$ ne dépend pas du voisinage de x_0 choisi pour f et on a $i_p(x_0) = -\inf\{s' : \sigma_p(s') \geq 0\}$.*
2. *$u_f^p(x_0) \leq i_p(x_0) - \frac{d}{p}$.*
3. *Si il existe $\delta > 0$ tel que $f \in B_p^{\delta,p}$, alors $u_f^p(x_0) = i_p(x_0) - \frac{d}{p}$.*

Remarque 3.1.5. *Si nous voulons démontrer que $u_f^p(x_0) = i_p(x_0) - \frac{d}{p}$, l'hypothèse $f \in L^p_{loc}$ n'est plus suffisante. En effet on peut trouver des fonctions qui vérifient $u_f^p(x_0) \neq i_p(x_0) - \frac{d}{p}$, comme par exemple la fonction $x \mapsto$*

$\sum_j C j^{\frac{1}{p}} 2^{-(s-\frac{d}{p})j} \psi(2^j x)$.

Nous appliquerons ensuite ces résultats pour démontrer la proposition 3.1.1, le corollaire 3.1.1, le théorème 3.1.2 et enfin le corollaire 3.1.2.

3.2 Caractérisation par ondelettes des $T_p^u(x_0)$

Il est clair que si $f \in T_p^u(x_0)$, alors $f(x+x_0) \in T_p^u(0)$, et de même dans le cas des $X_{x_0}^{s,-s,p,1}$. On peut donc donc se placer sans perdre en généralité au point $x_0 = 0$.

De plus les espaces $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,q}$ (et en particulier $\dot{X}_0^{s,s',p,q}$) ne dépendent pas de la base d'ondelettes choisie pour les définir.

Pour notre démonstration nous prendrons une fonction déchelle ϕ et une famille d'ondelettes $\psi^{(i)}$, $i = 1, \cdots, 2^d - 1$, de classe C^n, avec $n \geq s$, à support compact, telle que $2^{dj/2}\psi^{(i)}(2^j x - k)$, $i = 1, \cdots, 2^d - 1$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$, forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$, (pour la construction de telles bases, voir [7]).

Nous utiliserons une normalisation L^∞ pour les ondelettes, et la décomposition d'une fonction f sur cette base sera celle donnée par (1.25).

Nous supposerons enfin que les ondelettes-mères $\psi^{(i)}$ sont à support compact dans $B(0, M)$, boule de centre 0 et de rayon M, avec $M > 0$ fixé. Ainsi le support de l'ondelette $\psi_{j,k}$ est inclus dans ce que nous noterons $\lambda_{j,k} = k2^{-j} + [\frac{-M}{2^j}, \frac{M}{2^j}]^d$.

Nous allons démontrer le théorème 3.1.3.

Démonstration: Démontrons d'abord le point 1.

3.2.1 $\dot{X}_0^{s,-s,p,1} \subset T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$.

Soit $f \in \dot{X}_0^{s,-s,p,1}$. D'après (1.35), on a donc

$$\sum_{j\geq 0} 2^{(s-\frac{d}{p})j} \left(\sum_{|k|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-sp} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

c'est à dire

$$\sum_{|k|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-sp} \leq C{\varepsilon_j}^p 2^{(-sp+d)j} \tag{3.7}$$

où ε_j est le terme général d'une série convergente à termes positifs.

Nous voulons montrer qu'il existe P polynôme de degré inférieur ou égal à $s-\frac{d}{p}$, $C>0$ et $R>0$ tel que (1.4) soit vraie avec $x_0=0$.

Posons

$$\Delta_j f(x) = \sum_{|k|\leq A2^j} C_{j,k}\psi(2^j x - k). \tag{3.8}$$

Les ondelettes ψ étant à support compact, on peut donc écrire, d'après (1.25), pour tout x tel que $|x|<A$,

$$f(x) = \sum_k C_k \phi(x-k) + \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x) \tag{3.9}$$

La partie $x \mapsto \sum_k C_k\phi(x-k)$ est sur chaque intervalle une somme finie de fonctions de classe C^n avec $n \geq s$, donc elle appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$.

On doit donc maintenant examiner la fonction $\sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x)$.

Nous envisagerons deux cas selon les valeurs du paramètre positif s :

– si $s \geq \frac{d}{p}$, on pose

$$P(x) = \sum_{|N| \leq [s-\frac{d}{p}]} \sum_{j=0}^{+\infty} (\partial^N \Delta_j f)(0) \frac{x^N}{N!}. \tag{3.10}$$

Pour simplifier les notations nous écrirons $\partial^N \Delta_j f = \Delta_j^{(N)} f$.

L'expression (3.10) pour P est justifiée car on a toujours convergence de $\sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j^{(N)} f(0)$ pour tout $|N| \leq [s - \frac{d}{p}]$.
En effet, $\Delta_j^{(N)} f(x) = 2^{j|N|} \sum_{|k| \leq A2^j} C_{j,k} (\partial^N \psi)(2^j x - k)$ d'après (3.8) et les ondelettes $\psi_{j,k}$ sont à support compact, donc

$$|\Delta_j^{(N)} f(0)| \leq C 2^{j|N|} \sum_{|k| \leq M} |C_{j,k}|, \tag{3.11}$$

et d'autre part, d'après (3.7), on a

$$2^{j|N|} \sum_{|k| \leq M} |C_{j,k}| \leq C \varepsilon_j 2^{j(|N| + \frac{d}{p} - s)}. \tag{3.12}$$

Cela nous permet d'avoir la majoration

$$|\Delta_j^{(N)} f(0)| \leq 2M \varepsilon_j 2^{j(|N| + \frac{d}{p} - s)}. \tag{3.13}$$

Or $|N| \leq [s - \frac{d}{p}]$, donc $|N| + \frac{d}{p} - s \leq 0$, et puisque ε_j est le terme général d'une série convergente, on peut donc conclure grâce à (3.13) que (3.10) est finie pour tout x.

Dans cette première partie nous chercherons donc à évaluer

$$\left[\int_{|x| \leq \rho} |\sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{|x| \leq \rho} \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x) - \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} \sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j^{(N)} f(0) \frac{x^N}{N!} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.14}$$

– si $s < \frac{d}{p}$, on pose $P = 0$.

Dans cette deuxième partie nous chercherons donc à évaluer, avec $\rho \leq A$,

$$\left[\int_{|x|\leq\rho} |\sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x) - P(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{|x|\leq\rho} \left|\sum_{j=0}^{+\infty} \Delta_j f(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.15}$$

Nous étudierons le cas $s \geq \frac{d}{p}$, puis le cas $s < \frac{d}{p}$.

Soit J tel que

$$2^{-J} \leq \rho < 2^{-J+1} \leq A. \tag{3.16}$$

Cas $s \geq \frac{d}{p}$

Nous allons examiner séparément les contributions dans (3.14) des termes $\Delta_j f$ pour $j \leq J$ et $j \geq J$ (avec J défini par (3.16)).

1. Étudions d'abord le cas $j \geq J$, ce qui correspond aux termes "hautes fréquences".

   Grâce à une inégalité triangulaire on peut majorer (3.14) comme suit.

$$\left[\int_{|x]\leq\rho} \left|\sum_{j=J}^{+\infty} \left(\Delta_j f(x) - \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} \Delta_j^{(N)} f(0) \frac{x^N}{N!}\right)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left[\int_{|x]\leq\rho} \left|\sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} \Delta_j^{(N)} f(0) \frac{x^N}{N!}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{|x|\leq\rho} \left|\sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j f(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.17}$$

   Nous allons étudier R_J^1 le terme suivant de l'inégalité (3.17).

$$R_J^1 = \left[\int_{|x| \leq \rho} \left| \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} \Delta_j^{(N)} f(0) \frac{x^N}{N!} \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.18}$$

Et on note R_J^2 le terme de l'inégalité (3.17) qui vaut

$$R_J^2 = \left[\int_{|x| \leq \rho} \left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j f(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.19}$$

Nous allons d'abord étudier R_J^1, puis R_J^2.

– On peut majorer R_J^1 par

$$R_J^1 \leq \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} \left[\int_{|x| \leq \rho} \left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j^{(N)} f(0) \right|^p \frac{|x|^{|N|p}}{(|N|!)^p} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.20}$$

Or, d'après (3.13),

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j^{(N)} f(0) \right| &\leq C \sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j 2^{j(|N|+\frac{d}{p}-s)} \\ &\leq C 2^{J(|N|+\frac{d}{p}-s)} \sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j. \end{aligned} \tag{3.21}$$

De plus $2^{-J} \leq \rho < 2^{-J+1}$, donc $2^{J(|N|+\frac{d}{p}-s)} \leq \rho^{s-\frac{d}{p}-|N|}$ et (3.21) devient

$$\left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j^{(N)} f(0) \right| \leq C \rho^{s-\frac{d}{p}-|N|} \sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j.$$

On peut donc majorer R_J^1 comme suit.

$$R_J^1 \leq \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} C\rho^{s-\frac{d}{p}-|N|} \sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j \left[\int_{|x|\leq\rho} |x|^{|N|p} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.22}$$

Or on a évidemment

$$\left[\int_{|x|\leq\rho} |x|^{|N|p} dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^{|N|+\frac{d}{p}}$$

d'où, d'après (3.22),

$$\begin{aligned} R_J^1 &\leq \sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]} C\rho^{s-\frac{d}{p}-|N|} \sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j \left[\int_{|x|\leq\rho} |x|^{|N|p} dx \right]^{\frac{1}{p}}. \\ &\leq C\rho^{s-\frac{d}{p}-|N|} \rho^{|N|+\frac{d}{p}} \sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j \\ &\leq C\rho^s \left[\sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j \right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

– D'autre part, nous allons étudier le terme suivant de (3.17)

$$R_J^2 = \left[\int_{|x|\leq\rho} \left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j f(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=J}^{+\infty} \left[\int_{|x|\leq\rho} \left| \Delta_j f(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.24}$$

Fixons j et k, nous avons au plus $(2M)^d$ ondelettes $\psi_{j,k'}$ non-nulles sur le support de $\psi_{j,k}$.
Donc nous pouvons partitionner les ondelettes de l'échelle j en $(2M)^d$ ensembles P_i, telles que les ondelettes d'un même P_i sont à support disjoint.

La convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ donne

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq\rho}\Big|\Delta_j f(x)\Big|^p dx &\leq C\sum_{i\in I}\left(\int_{|x|\leq\rho}\Big|\sum_{k\in P_i} C_{j,k}\psi(2^j x-k)\Big|^p dx\right)\\
&\leq C\sum_{i\in I}\sum_{k\in P_i}|C_{j,k}|^p\int|\psi(2^j x-k)|^p dx\\
&\leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{-dj}|C_{j,k}|^p.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où k appartient à l'ensemble $\Omega(j,\rho)=\{k:\lambda_{j,k}\bigcap B(0,\rho)\neq\emptyset\}$.

Ce qui donne finalement

$$\int_{|x|\leq\rho}|\Delta_j f(x)|^p dx \leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}|C_{j,k}|^p 2^{-dj}2^{spj}2^{-spj}. \tag{3.26}$$

Majorons 2^{-spj} en fonction de k pour faire apparaître la norme (3.7) dans (3.26).
Dans (3.26), k appartient à $\Omega(j,\rho)$ et vérifie

$$\left(\frac{k}{2^j}+[-\frac{M}{2^j},\frac{M}{2^j}]^d\right)\bigcap B(0,\rho)\neq\emptyset.$$

D'où

$$\left|\frac{k}{2^j}\right|\leq\rho+\frac{M}{2^j}.$$

Puisque $j\geq J$ on a $2^{-j}\leq 2^{-J}\leq\rho$, et donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{k}{2^j}\right| &\leq \rho + M2^{-j}\\ &\leq \rho(1+M).\end{aligned}$$

D'où

$$2^{-j} \leq \frac{\rho(1+M)}{|k|} \text{ quand } |k| \geq 1,$$

c'est à dire, avec $\dfrac{1}{|k|} \leq \dfrac{4}{|k|+1}$,

$$2^{-j} \leq \frac{C\rho}{|k|+1}.$$

Or $s \geq 0$ par hypothèse, donc

$$2^{-spj} \leq \frac{\rho^{sp}}{(|k|+1)^{sp}}. \tag{3.27}$$

En revenant à (3.26), on obtient donc

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq\rho} |\Delta_j f(x)|^p dx &\leq C \sum_{k\in\Omega(j,\rho)} |C_{j,k}|^p 2^{-dj} 2^{spj} \frac{\rho^{sp}}{(|k|+1)^{sp}}\\ &\leq C \sum_{k\in\Omega(j,\rho)} |C_{j,k}|^p 2^{(sp-d)j} \frac{\rho^{sp}}{(|k|+1)^{sp}}\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ce qui donne, en utilisant (3.7)

$$\int_{|x|\leq\rho} |\Delta_j f(t)|^p dt \leq C\varepsilon_j^p \rho^{sp}.$$

Et on a bien, avec (3.24)

$$R_J^2 \leq \left[\int_{|t|\leq\rho} \left|\sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j f(t)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^s \left[\sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j\right]. \tag{3.29}$$

(3.17), combinée avec (3.29) et (3.23) donne

$$\left[\int_{|x|\leq\rho}\left|\sum_{j=J}^{+\infty}\left(\Delta_j f(x)-\sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]}\Delta_j^{(N)}f(0)\frac{x^N}{N!}\right)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^s\left[\sum_{j=J}^{+\infty}\varepsilon_j\right] \tag{3.30}$$

2. On doit maintenant étudier le cas où $j\leq J$.

Posons

$$S_J=\left[\int_{|x|\leq\rho}\left|\sum_{j=0}^{J}\Delta_j f(x)-\sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]}\sum_{j=0}^{J}\Delta_j^{(N)}f(0)\frac{x^N}{N!}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}S_J&\leq\sum_{j=0}^{J}\left[\int_{|x|\leq\rho}\left|\Delta_j f(x)-\sum_{N=0}^{[s-\frac{d}{p}]}\Delta_j^{(N)}f(0)\frac{x^N}{N!}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\\&\leq\sum_{j=0}^{J}\left[\int_{|x|\leq\rho}|x|^{([s-\frac{d}{p}]+1)p}\sup_{|x|\leq\rho,|N|=[s-\frac{d}{p}]+1}\left|\Delta_j^N f(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{3.31}$$

d'après le théorème des accroissements finis.

Les ondelettes $\psi_{j,k}$ qui interviennent dans l'intégrale vérifient $\lambda_{j,k}\bigcap B(0,\rho)\neq\emptyset$.

Or $j\leq J$, donc $\rho\leq 2^{-J+1}\leq 2.2^{-j}$ et on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{k}{2^j}\right| &\leq \rho + M2^{-j}\\ &\leq 2^{-j}(1+2M).\end{aligned}$$

Et donc

$$|k| \leq 1 + 2M.$$

On doit donc avoir $|k| \leq 1+2M$ pour que l'ondelette $\psi_{j,k}$ intervienne dans l'expression de $\Delta_j^{(N)} f$, ce qui donne

$$\forall x \in B(0,\rho) : \Delta_j^N f(x) = \sum_{|k|\leq 2M+1} 2^{j([s-\frac{d}{p}]+1)} C_{j,k}(\psi^{(N)})(2^j x - k)$$

$|\partial^N \psi|$ a pour maximum C.

On a donc

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\leq\rho}\left|\Delta_j^N f(x)\right|^p &\leq C2^{jp([s-\frac{d}{p}]+1)}\left[\sum_{|k|\leq 2M+1}|C_{j,k}|\right]^p\\ &\leq C2^{jp([s-\frac{d}{p}]+1)}\sum_{|k|\leq 2M+1}|C_{j,k}|^p \qquad (3.32)\\ &\leq C2^{jp([s-\frac{d}{p}]+1)}(4M+1)^d\varepsilon_j^p 2^{j(d-sp)}\end{aligned}$$

puisque (3.7) est vraie.

On en déduit, avec (3.31)

$$\begin{aligned}S_J &\leq C\sum_{j=0}^{J}\rho^{[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p}}2^{([s-\frac{d}{p}]+1)j}\varepsilon_j 2^{(\frac{d}{p}-s)j}\\ &\leq C\rho^{[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p}}\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j 2^{(-s+[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p})j}.\end{aligned}$$

Or $[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p}\geq s$, et $2^{-J}\leq\rho\leq 2^{-J+1}$, d'où $\rho 2^J$ est borné et donc

$$\begin{aligned}
S_J &\leq C\rho^s\rho^{-s+[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p}}\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j 2^{(-s+[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p})j}\\
&\leq C\rho^s\rho^{-s+[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p}}\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j 2^{(-s+[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p})J}\\
&\leq C\rho^s(\rho 2^J)^{-s+[s-\frac{d}{p}]+1+\frac{d}{p}}\left[\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j\right]\\
&\leq C\rho^s\left[\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j\right]
\end{aligned}$$

On a donc bien dans ce cas

$$S_J\leq C\rho^s\left[\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j\right]. \tag{3.33}$$

Nous avons aussi majoré la partie $j\geq J$.
Donc on peut en déduire grâce à (3.33) et (3.30) que

$$\left[\int_{|x|\leq\rho}|\sum_{j=0}^{+\infty}\Delta_j f(x)-P(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^s.$$

D'où on peut conclure avec (3.9) et le fait que $x\mapsto\sum_k C_k\phi(x-k)$ est dans $T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$, que f vérifie bien

$$\left[\int_{|x|\leq\rho}|f(x)-P(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^s.$$

D'où on peut conclure que $\dot{X}_0^{s,-s,p,1} \subset T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$.

Cas $s < \frac{d}{p}$

On va majorer pour $j \geq J$ le terme issu de (3.15)

$$\int_{|x|\leq\rho} \Big|\sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j f(x)\Big|^p dx = R_J.$$

On peut appliquer la même méthode que pour la majoration du terme R_J^2 du cas précédent, car elle ne fait intervenir que l'hypothèse $s \geq 0$.

On obtient donc pour ce terme la majoration

$$\left[\int_{|t|\leq\rho} \Big|\sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_j f(t)\Big|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^s \left[\sum_{j=J}^{+\infty} \varepsilon_j\right] \tag{3.34}$$

D'autre part on va majorer le terme S_J intervenant dans (3.15) pour $j \leq J$.

$$\begin{aligned} S_J &= \left[\int_{|t|\leq\rho} \Big|\sum_{j=0}^{J} \Delta_j f(t)\Big|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{J} \left[\int_{|t|\leq\rho} \Big|\Delta_j f(t)\Big|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{j=0}^{J} \left[\int_{|t|\leq\rho} \sup_{|t|\leq\rho} \Big|\Delta_j f(t)\Big|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

De même que dans le cas précédent ($s \geq \frac{d}{p}$), les ondelettes qui interviennent dans l'intégrale sont en nombre fini et on a

$$\forall x \in B(0,\rho) : \Delta_j f(x) = \sum_{|k|\leq 2M+1} C_{j,k}\psi(2^j x - k).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sup_{|t|\leq\rho}\Big|\Delta_j f(t)\Big|^p \qquad &\leq C\left[\sum_{|k|\leq 2M+1}|C_{j,k}|\right]^p\\ &\leq C\sum_{|k|\leq 2M+1}|C_{j,k}|^p\\ &\leq C(4M+1)^d\varepsilon_j^p 2^{j(d-sp)}\end{aligned}$$

puisque (3.7) est vraie.

D'où d'après (3.35)

$$S_J \leq C\sum_{j=0}^{J}\rho^{\frac{d}{p}}\varepsilon_j 2^{(\frac{d}{p}-s)j}$$

et puisque $s<\frac{d}{p}$,

$$S_J \leq C\sum_{j=0}^{J}\rho^{\frac{d}{p}}\varepsilon_j 2^{(\frac{d}{p}-s)J}.$$

Or $2^{-J}\leq\rho\leq 2^{-J+1}$, donc $2^{(\frac{d}{p}-s)J}\leq C'\rho^{-\frac{d}{p}+s}$ et on a

$$S_J \leq C\rho^s\left[\sum_{j=0}^{J}\varepsilon_j\right]. \tag{3.36}$$

Donc d'après (3.34) et (3.36), on peut majorer (3.15) par

$$\left(\int_{|x|\leq\rho}|\sum_{j=0}^{+\infty}\Delta_j f(x)-P(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^s \tag{3.37}$$

Or avec l'équation (3.9) et le fait que $x\mapsto\sum_k C_k\phi(x-k)$ soit dans $T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$, on peut conclure que

$$\left(\int_{|x|\leq\rho}|f(x)-P(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^s. \tag{3.38}$$

Ce qui montre bien dans le cas où $s < \frac{d}{p}$, que si f appartient à $X_0^{s,-s,p,1}$, alors elle est dans $T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$.

On a donc dans tous les cas démontré le point 1 du théorème.

Démontrons maintenant le point 2 du théorème.

3.2.2 Inclusion réciproque

Soit $f \in T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$, elle vérifie donc (1.4), c'est à dire, il existe P de degré inférieur à $s - \frac{d}{p}$, C et R tels que

$$\forall \rho \leq R : \int_{|x-x_0|\leq\rho} |f(x) - P(x-x_0)|^p dx \leq C\rho^{sp}.$$

Nous voulons démontrer que dans ce cas f définie avec $f(x) = \sum_j \sum_k C_{j,k}\psi_{j,k}$ vérifie (3.4).

Réecrivons cette dernière équation (3.4) lorsque f se décompose sur une base d'ondelettes orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire

$$f(x) = \sum_j \sum_k \tilde{C}_{j,k}\tilde{\psi}_{j,k} \text{ avec } \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}_{j,k}(x) &= 2^{\frac{dj}{2}}\psi(2^j x - k) \\ \tilde{C}_{j,k} &= 2^{-\frac{dj}{2}} C_{j,k} \end{aligned} \tag{3.39}$$

(3.4) est équivalente au fait que la quantité suivante, avec $x_0 = 0$,

$$\sup_{j\geq 0} \frac{2^{(sp-d+\frac{dp}{2})j}}{j} \left[\sum_{|k|\leq A2^j} |\tilde{C}_{j,k}|^p (1+|k|)^{-sp} \right] \tag{3.40}$$

soit finie.

Calculons (3.40) avec $A = R$ et a tel que $2^a \leq R < 2^{a+1}$. Nous pouvons la réécrire

$$\sup_{j\geq 0} \frac{2^{(sp-d+\frac{dp}{2})j}}{j} \left[|\tilde{C}_{j,0}|^p + \sum_{l=1}^{j+a+1} \sum_{2^{l-1}\leq |k|<2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^p (1+|k|)^{-sp} \right] \tag{3.41}$$

Estimons d'abord à j fixé et $1 \leq l \leq j+a+1$,

$$A_{l,j} = \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^p (1+|k|)^{-sp} \tag{3.42}$$

La base $\tilde{\psi}_{j,k}$ étant orthonormée, on a

$$A_{l,j} =< \sum_{j'\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tilde{C}_{j',k} \tilde{\psi}_{j',k}, \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^{p-1} sgn(\tilde{C}_{j,k})(1+|k|)^{-sp} \tilde{\psi}_{j,k} > \tag{3.43}$$

où $< .,. >$ désigne le produit scalaire dans L^2.

Or par hypothèse $f \in T_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$, donc il existe un polynôme P de degré inférieur à $s-\frac{d}{p}$, donc inférieur à $[s-\frac{d}{p}]$ (nul si $s<\frac{d}{p}$), tel que (1.4) soit vérifiée.

De plus $(\tilde{\psi}_{j,k} = 2^{\frac{dj}{2}}\psi(2^j. - k))_{j,k}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ à support compact de régularité C^n avec $n \geq [s-\frac{d}{p}]$, donc les moments d'ordre $\leq [s-\frac{d}{p}]$ de ψ sont nuls et pour tout polynôme de degré inférieur à $[s-\frac{d}{p}]$

$$\int P(x)\tilde{\psi}_{j,k}(x)dx = \int 2^{\frac{dj}{2}} P\left(\frac{x+k}{2^j}\right)\psi(x)dx = 0$$

Nous avons donc avec (3.43)

$$A_{l,j} =< \sum_{j'} \sum_{k'} \tilde{C}_{j',k'} \tilde{\psi}_{j',k'} - P, \sum_{2^{l-1} \leq |k| \leq 2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^{p-1} sgn(\tilde{C}_{j,k})(1+2|k|)^{-sp} \tilde{\psi}_{j,k} > \tag{3.44}$$

Or on a $f - P = \sum_{j'} \sum_{k} \tilde{C}_{j',k} \tilde{\psi}_{j',k} - P$ et on pose

$$g_{l,j} = \sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^{p-1} sgn(\tilde{C}_{j,k})(1+|k|)^{-sp} \tilde{\psi}_{j,k}. \tag{3.45}$$

D'où d'après (3.44),

$$A_{l,j} = \int (f(x) - P(x)).g_{l,j}(x)dx \tag{3.46}$$

Remarquons que lorsque $2^{l-1} > M$, $g_{l,j}$ est à support dans la couronne de centre 0, de rayon inférieur $\frac{2^{l-1}-M}{2^j}$ et de rayon supérieur $\frac{2^l+M}{2^j}$ et lorsque $2^{l-1} \leq M$, $g_{l,j}$ est à support dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{2^l+M}{2^j}$. On note $\mathcal{C}_{l,j}$ ce support.

$$A_{l,j} = \int (f(x) - P(x)).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}}(x) g_{l,j}(x)dx.$$

En notant q l'exposant conjugué de p, l'inégalité de Hölder nous permet de majorer

$$A_{l,j} \leq \left|\left|(f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}}\right|\right|_{L^p} \times \left|\left|g_{l,j}\right|\right|_{L^q} \tag{3.47}$$

Étudions $\left|\left|g_{l,j}\right|\right|_{L^q}$.

$$\left|\left|g_{l,j}\right|\right|_{L^q}^q = \left|\left|\sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^{p-1} sgn(\tilde{C}_{j,k})(1+|k|)^{-sp} \tilde{\psi}_{j,k}\right|\right|_{L^q}^q$$

Donc (3.47) donne

$$A_{l,j} \leq C\left|\left|(f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}}\right|\right|_{L^p}.\left[\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l}|\tilde{C}_{j,k}|^{q(p-1)}(1+|k|)^{-spq}\left|\left|\tilde{\psi}_{j,k}\right|\right|_{L^q}^q\right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.48}$$

car un nombre fini d'ondelettes vont se recouvrir (au plus $(2M)^d$ comme précédemment).

$$\text{Or on a } \left|\left|\tilde{\psi}_{j,k}\right|\right|_{L^q}^q = \int 2^{\frac{djq}{2}}|\psi(2^jx-k)|^q dx \tag{3.49}$$

$$= 2^{\frac{djq}{2}}2^{-dj}\int |\psi(u)|^q du \text{ en posant } u = 2^jx-k \tag{3.50}$$

$$= C2^{\frac{djq}{2}-dj}. \tag{3.51}$$

Et $|\tilde{C}_{j,k}|^{q(p-1)} = |\tilde{C}_{j,k}|^p$ car $q(p-1)=p$,
de plus $-spq = -sp-sq$.

On obtient donc d'après (3.48)

$$A_{l,j} \leq C \parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} \parallel_{L^p} . \left[\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l}|\tilde{C}_{j,k}|^{q(p-1)}(1+|k|)^{-sp-sq}2^{\frac{djq}{2}-dj}\right]^{\frac{1}{q}}$$

Et on a $(1+|k|)^{-sp-sq} \leq (1+|k|)^{-sp}(1+2^{l-1})^{-sq}$ car $|k| \geq 2^{l-1}$. Donc on peut écrire $(1+|k|)^{-sp-sq} \leq C(1+|k|)^{-sp}(1+2^l)^{-sq}$

Ce qui nous donne

$$A_{l,j} \leq C \parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} \parallel_{L^p} (1+2^l)^{-s} \left[\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |\tilde{C}_{j,k}|^p (1+|k|)^{-sp} \right]^{\frac{1}{q}} .2^{\frac{dj}{2}-\frac{dj}{q}}$$

$$A_{l,j} \leq C \parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} \parallel_{L^p} (1+2^l)^{-s}.2^{\frac{dj}{2}-\frac{dj}{q}}.A_{l,j}^{\frac{1}{q}}$$

D'où

$$A_{l,j}^{\frac{1}{p}} \leq C \parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} \parallel_{L^p} (1+2^{l-1})^{-s}.2^{\frac{dj}{2}-\frac{dj}{q}} \tag{3.52}$$

$$A_{l,j} \leq C \parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} \parallel_{L^p}^p (1+2^{l-1})^{-sp}.2^{\frac{djp}{2}-\frac{djp}{q}} \tag{3.53}$$

Nous voulons obtenir une majoration de (3.41), remarquons d'abord que $\frac{p}{q} = p-1$, donc

$$\frac{p}{2} - \frac{p}{q} = \frac{p}{2} - p + 1 = -\frac{p}{2} + 1. \tag{3.54}$$

D'où on peut réécrire (3.52)

$$2^{(sp+\frac{dp}{2}-d)j} A_{l,j} \leq C \parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} \parallel_{L^p}^p 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}. \tag{3.55}$$

Avec l'équation (3.42) qui définit $A_{l,j}$, nous obtenons en sommant maintenant (3.55) sur l variant de 1 à $j+a+1$,

$$2^{(sp-d+\frac{dp}{2})j}\left[\sum_{l=1}^{j+a+1}\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l}|\tilde{C}_{j,k}|^p(1+|k|)^{-sp}\right]\leq C\sum_{l=1}^{j+a+1}\parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}}\parallel_{L^p}^p 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}. \tag{3.56}$$

Évaluons maintenant le deuxième membre de (3.56).

Par définition de $\chi_{\mathcal{C}_{l,j}}$, on a clairement

$$\sum_{l=1}^{j+a+1}\parallel (f-P).\chi_{\mathcal{C}_{l,j}}\parallel_{L^p}^p .2^{spj}(1+2^l)^{-sp}=\sum_{l=1}^{j+a+1}2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{C}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt.$$

Si on note à présent

$$\mathcal{B}_{l,j}=\{x\in\mathbb{R}^d/|x|\leq\frac{2^l}{2^j}\},$$

et

$$M\mathcal{B}_{0,j}=\{x\in\mathbb{R}^d/|x|\leq M\frac{2}{2^j}\},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{C}_{l,j}} &= \chi_{\mathcal{B}_{l,j}}-\chi_{\mathcal{B}_{l-1,j}} && \text{si } 2^{l-1}>M\\ \chi_{\mathcal{C}_{l,j}} &= \chi_{M\mathcal{B}_{0,j}} && \text{si } 2^{l-1}\leq M\end{aligned}$$

Soit a' tel que $2^{a'-1}\leq M<2^{a'}$. Pour j assez grand, on a clairement $a'\leq j+a$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{j+a+1} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{C}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \\
&\quad\leq \sum_{l=a'+1}^{j+a+1} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{B}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt - \sum_{l=a'+1}^{j+a+1} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{B}_{l-1,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{a'} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{M\mathcal{B}_{0,j}}|f(t)-P(t)|^p dt
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Et donc, en utilisant une transformée d'Abel, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{j+a+1} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{C}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \\
&\quad\leq \sum_{l=a'+1}^{j+a+1} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{B}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt - \sum_{l=a'}^{j+a} 2^{spj}(1+2^{l+1})^{-sp}\int_{\mathcal{B}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \\
&\qquad + C'2^{spj}\int_{M\mathcal{B}_{0,j}}|f(t)-P(t)|^p \\
&\quad\leq \sum_{l=a'}^{j+a} 2^{spj}[(1+2^l)^{-sp}-(1+2^{l+1})^{-sp}]\int_{\mathcal{B}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \\
&\qquad + 2^{spj}(1+2^{j+a+1})^{-sp}\int_{\mathcal{B}_{j+a+1,j}}|f(t)-P(t)|^p - 2^{spj}(1+2^{a'})^{-sp}\int_{\mathcal{B}_{0,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \\
&\qquad + C2^{spj}\int_{M\mathcal{B}_{0,j}}|f(t)-P(t)|^p.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Or par définition de $\dot{T}_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$ (équation 1.4),

$$\int_{\mathcal{B}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt \leq C\left(\frac{2^l}{2^j}\right)^{sp}.$$

Et donc, on obtient, s étant positif,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{j+a+1} 2^{spj}(1+2^l)^{-sp}\int_{\mathcal{C}_{l,j}}|f(t)-P(t)|^p dt &\leq C' + C\sum_{l=a'}^{j+a}\left(\frac{2^l}{2^j}\right)^{sp} 2^{spj}[(1+2^l)^{-sp}-(1+2^{l+1})^{-sp}]\\ &\leq C' + C\sum_{l=a'}^{j+a}(2^l)^{sp}[(1+2^l)^{-sp}-(1+2^{l+1})^{-sp}]\end{aligned} \tag{3.59}$$

D'où, d'après (3.56),

$$2^{(sp-d+\frac{dp}{2})j}\left[\sum_{l=1}^{j+a+1}\sum_{2^{l-1}\leq|k|\leq 2^l}|\tilde{C}_{j,k}|^p(1+2|k|)^{-sp}\right] \leq C'+C\sum_{l=a'}^{j+a}(2^l)^{sp}[(1+2^l)^{-sp}-(1+2^{l+1})^{-sp}] \tag{3.60}$$

Or pour l tendant vers $+\infty$,

$$\left(\frac{2^l}{1+2^l}\right)^{sp}-\left(\frac{2^l}{1+2^{l+1}}\right)^{sp}\sim 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{sp}$$

Cette constante ne dépend que de s et p qui sont fixés, donc

$$\sum_{l=a'}^{j+a+1}(2^l)^{sp}[(1+2^l)^{-sp}-(1+2^{l+1})^{-sp}] \leq C(j+a-a').$$

Pour obtenir la majoration de (3.41), il nous faut encore évaluer $|C_{j,0}|^p$.

On a

$$\begin{aligned}C_{j,0} &= \int 2^{dj}f(x)\psi(2^jx)dx\\ &= \int 2^{dj}(f(x)-P(x))\psi(2^jx)dx \text{ car } \psi \text{ a au moins } N \text{ moments nuls.}\end{aligned}$$

Or ψ est à support dans la boule $B(0,M)$. Donc on peut écrire d'après l'inégalité de Hölder,

$$|C_{j,0}| \leq \left|\left|(f-P).\chi_{M\mathcal{B}_{0,j}}\right|\right|_{L^p} \times \left|\left|\psi(2^j.)\right|\right|_{L^q} \tag{3.61}$$

D'après (3.49), on a $\left|\left|\psi(2^j.)\right|\right|_{L^q} \leq C2^{\frac{dj}{2}-\frac{dj}{q}}$. Et f appartient à $\dot{T}_p^{s-\frac{d}{p}}(0)$, donc d'après (1.4),

$$|C_{j,0}| \leq C2^{-sj+\frac{dj}{2}-\frac{dj}{q}} \tag{3.62}$$

$$|C_{j,0}|^p \leq C2^{-sjp+\frac{djp}{2}-\frac{djp}{q}} \tag{3.63}$$

$$\leq C2^{-sjp-\frac{djp}{2}+dj} \text{ d'après (3.54)} \tag{3.64}$$

Ce qui donne finalement la majoration suivante pour (3.41),

$$\begin{aligned}\frac{2^{(sp-d+\frac{dp}{2})j}}{j}\left[|\tilde{C}_{j,0}|^p + \sum_{l=1}^{j+a+1}\sum_{2^{l-1}\leq|k|<2^l}|\tilde{C}_{j,k}|^p(1+|k|)^{-sp}\right] &\leq \frac{C'(j+a-a')+C}{j} \\ &\leq C' + \frac{C+C'(a-a')}{j} \\ &\leq C + C'(a-a')\end{aligned} \tag{3.65}$$

car ici a est fixé et ne dépend que de A fixé au départ.

Donc (3.41) est donc bien une quantité finie.

□

3.3 p-exposant et coefficients en ondelettes

On souhaite maintenant caractériser par ondelettes le p-exposant qui est défini par (1.10) et démontrer le théorème 3.1.4.

Démonstration:

1. D'après la proposition 1.3.10, on sait déjà que $\liminf_{j\to\infty} \dfrac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}$ ne dépend pas de la valeur de A et que

$$\sigma_p(s') = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log\left(\Sigma_j^p(s')^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2}. \tag{3.66}$$

   Donc on a évidemment d'après 3.6,

$$i_p(x_0) = \sup\left\{ s : \liminf \frac{\log\left(\Sigma_j^p(s)^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} \geq 0 \right\} = -\inf\{s' : \sigma_p(s') \geq 0\} \tag{3.67}$$

2. Montrons que $u_f^p(x_0) \leq i_p(x_0) - \frac{d}{p}$.
   On a par définition $u_f^p(x_0) = \sup\{u : f \in T_p^u(x_0)\}$.
   Donc $\forall u_0 < u_f^p(x_0)$, f appartient à $T_p^{u_0}(x_0)$.
   Donc d'après le théorème 3.1.3, f vérifie (3.4), c'est à dire il existe A tel que

$$\sup_{j>0} \frac{2^{((u_0+\frac{d}{p})p-d)j}}{j} \left[\sum_{|k-2^j x_0|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{-(u_0+\frac{d}{p})p} \right] < +\infty. \tag{3.68}$$

   D'où

$$\sup_{j>0} \frac{2^{u_0 pj}}{j} \left[\sum_{|k-2^j x_0|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{-(u_0 p+d)} \right] < +\infty. \tag{3.69}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sup_{j>0} 2^{(u_0-\varepsilon)pj} \left[\sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{-(u_0 p+d)} \right] < +\infty. \quad (3.70)$$

Dans ce cas on a aussi puisque $f \in L^p_{loc}$,

$$\sup_{j>0} 2^{(u_0-\varepsilon)pj} \left[\sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-2^j x_0|)^{-(u_0 p+d)} \right] < +\infty. \quad (3.71)$$

D'où, par définition de Σ^p_j, pour tout j, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Sigma^p_j(-(u_0 + \frac{d}{p})) \leq C 2^{\varepsilon pj} \quad (3.72)$$

Ce qui donne pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\log\left(\Sigma^p_j(-(u_0+\frac{d}{p}))^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} \geq -\varepsilon \quad (3.73)$$

Donc en utilisant (3.66),

$$\sigma_p\left(-(u_0+\frac{d}{p})\right) \geq 0 \quad (3.74)$$

et donc d'après (3.67),

$$-(u_0+\frac{d}{p}) \geq -i_p(x_0) \quad (3.75)$$

On a alors

$$u_0 \leq i_p(x_0) - \frac{d}{p} \quad (3.76)$$

3. Remarquons tout de suite que si $i_p(x_0) = 0$, alors d'après(3.76) et le fait que nécéssairement $u^p_f(x_0) \geq -\frac{d}{p}$, on a $u^p_f(x_0) = -\frac{d}{p} = i_p(x_0) - \frac{d}{p}$.

Supposons maintenant que $i_p(x_0) \neq 0$ et que f appartienne à $B_p^{\delta,p}$. Nous nous plaçons au point $x_0 = 0$ et nous posons $A = 1$ pour simplifier les notations mais la même démonstration est bien sûr valable dans le cas général.

Nous voulons montrer que pour tout $i_0 < i_p(0)$ alors f appartient à $T_p^{i_0 - \frac{d}{p}}(0)$.

Pour cela nous allons utiliser le point 1 du théorème 3.1.3 et montrer d'abord que f appartient à$\dot{X}_0^{i_0,-i_0,p,1}$, c'est à dire montrer que

$$\sum_{j\geq 0} 2^{(i_0-\frac{d}{p})j} \left(\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

ou encore

$$\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} \leq C \varepsilon_j^p 2^{(-i_0 p + d)j} \tag{3.77}$$

avec ε_j le terme général d'une série convergente.

Calculons maintenant

$$\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} \tag{3.78}$$

On peut réécrire (3.78) comme

$$\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} = |C_{j,0}|^p + \sum_{l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} \tag{3.79}$$

Or si $2^{l-1} < |k| \leq 2^l$, et par hypothèse $i_0 > 0$, on a donc

$$(1+2^l)^{-i_0} \leq (1+|k|)^{-i_0} \leq (1+2^{l-1})^{-i_0}$$

et donc

$$2^{-i_0}.2^{-li_0} \leq (1+2^l)^{-i_0} \leq (1+|k|)^{-i_0} \leq 2^{i_0}.2^{-li_0} \tag{3.80}$$

D'où (3.79) est majoré par

$$\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} \leq |C_{j,0}|^p + \sum_{l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p. \quad (3.81)$$

Soit $0 \leq \theta \leq 1$ dont la valeur exacte sera choisie ultérieurement.
On peut écrire (3.81)

$$\begin{aligned} |C_{j,0}|^p + \sum_{l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p = |C_{j,0}|^p &+ \sum_{l\leq \theta j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p \\ &+ \sum_{\theta j+1\leq l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p. \end{aligned} \quad (3.82)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} \leq |C_{j,0}|^p &+ \sum_{l\leq \theta j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p \\ &+ \sum_{\theta j+1\leq l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p. \end{aligned} \quad (3.83)$$

On note

$$S_\theta^1 = |C_{j,0}|^p + \sum_{l\leq \theta j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p \quad (3.84)$$

et

$$S_\theta^2 = \sum_{\theta j+1\leq l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} 2^{-l i_0 p} |C_{j,k}|^p. \quad (3.85)$$

Pour majorer S_θ^1, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Pour tout* $0 < i_1 < i_p(0)$ *et* $\varepsilon > 0$,

$$\forall j > 0,\ |C_{j,0}|^p + \sum_{0\leq l\leq j} \sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |C_{j,k}|^p 2^{-l i_1 p} \leq C 2^{j\varepsilon p} 2^{(-i_1 p + d)j}. \quad (3.86)$$

Démontrons ce lemme.

Démonstration: D'après (3.67), pour tout $0 < i_1 < i_p(0)$, $\sigma_p(-i_1) \geq 0$. Donc, d'après le premier point de la proposition 1.3.10, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists j_0 : \forall j \geq j_0, \frac{\log\left(\Sigma_j^p(-i_1)^{\frac{1}{p}}\right)}{-j\log 2} \geq -\varepsilon \tag{3.87}$$

Donc

$$\sup_{j>0} 2^{((i_1-\varepsilon)p-d)j}\left[\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{-i_1 p}\right] < +\infty. \tag{3.88}$$

Nous pouvons réécrire (3.88) comme

$$\forall j > 0,\ 2^{(i_1 p-d)j}\left[\sum_{|k|\leq 2^j} |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{-i_1 p}\right] \leq C2^{j\varepsilon p}. \tag{3.89}$$

ou encore en découpant la somme sur k sur des couronnes

$$\forall j > 0,\ 2^{(i_1 p-d)j}\left[|C_{j,0}|^p + \sum_{0\leq l\leq j}\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |C_{j,k}|^p(1+|k|)^{-i_1 p}\right] \leq C2^{j\varepsilon p}. \tag{3.90}$$

En utilisant (3.80) on obtient la minoration

$$\forall j > 0,\ C'2^{(i_1 p-d)j}\left[|C_{j,0}|^p + \sum_{0\leq l\leq j}\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |C_{j,k}|^p 2^{-li_1 p}\right] \leq C2^{j\varepsilon p}. \tag{3.91}$$

D'où

$$\forall j > 0,\ C'2^{(i_1 p-d)j}\left[|C_{j,0}|^p + \sum_{0\leq l\leq j}\sum_{2^{l-1}<|k|\leq 2^l} |C_{j,k}|^p 2^{-li_1 p}\right] \leq C2^{j\varepsilon p}. \tag{3.92}$$

Donc l'hypothèse $\sigma_p(-i_1) \geq 0$ entraîne (3.86).

$\square$

On peut maintenant l'utiliser avec i_1 et $\varepsilon' > 0$ tel que $i_1 = i_0 + \varepsilon' < i_p(x_0)$.
Majorons (3.84)

$$\begin{aligned}
|C_{j,0}|^p + \sum_{l \leq \theta j} \sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} 2^{-l(i_1-\varepsilon')p} |C_{j,k}|^p &\leq |C_{j,0}|^p + 2^{\theta\varepsilon' pj} \sum_{l \leq \theta j} \sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} 2^{-li_1 p} |C_{j,k}|^p \\
&\leq 2^{\theta\varepsilon' pj} \left(|C_{j,0}|^p + \sum_{l \leq \theta j} \sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} 2^{-li_1 p} |C_{j,k}|^p \right) \\
&\leq 2^{\theta\varepsilon' pj} 2^{j\varepsilon p} 2^{(-i_1 p + d)j} \\
&\leq 2^{(\theta-1)\varepsilon' pj} 2^{j\varepsilon p} 2^{(-i_0 p + d)j}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Pour majorer S_θ^2, on utilise l'hypothèse que f est dans $B_p^{\delta,p}$, ce qui s'écrit d'après (1.33)

$$\sum_k |C_{j,k} 2^{(\delta - \frac{d}{p})j}|^p = \delta_j \quad \text{avec} \quad \delta_j \in l^1. \tag{3.94}$$

$$\sum_{\theta j+1 \leq l \leq j} \sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} 2^{-li_0 p} |C_{j,k}|^p \leq 2^{-\theta j i_0 p} \left(\sum_{\theta j+1 \leq l \leq j} \sum_{2^{l-1} < |k| \leq 2^l} |C_{j,k}|^p \right) \leq 2^{-\theta j i_0 p} 2^{(-\delta p + d)j} \delta_j. \tag{3.95}$$

avec $\delta_j \in l^1$.
On a donc pour (3.83), avec (3.93) et (3.95),

$$\begin{aligned}
\sum_{|k| \leq 2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k|)^{-i_0 p} &\leq 2^{(\theta-1)\varepsilon' pj} 2^{j\varepsilon p} 2^{(-i_0 p + d)j} + 2^{((1-\theta)i_0 p - \delta p)j} 2^{(-i_0 p + d)j} \delta_j \\
&\leq 2^{(-i_0 p + d)j} \left(2^{((\theta-1)\varepsilon' p + \varepsilon p)j} + 2^{((1-\theta)i_0 p - \delta p)j} \delta_j \right)
\end{aligned} \tag{3.96}$$

D'après (3.77), pour avoir f dans $\dot{X}_0^{i_0,-i_0,p,1}$, il nous faut vérifier que $(2^{((\theta-1)\varepsilon' p+\varepsilon p)j}+2^{((1-\theta)i_0 p-\delta p)j}\delta_j)^{\frac{1}{p}}$ est le terme général d'une série convergente.

On doit donc choisir θ pour avoir

$$\begin{cases} (\theta-1)\varepsilon' p+\varepsilon p & <0 \\ (1-\theta)i_0 p-\delta p & <0 \end{cases} \tag{3.97}$$

il suffit donc d'avoir

$$1-\frac{\delta}{i_0}<\theta<-\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+1. \tag{3.98}$$

Ici $\delta>0$ et i_0 sont strictement positifs donc $1-\frac{\delta}{i_0}<1$ et on peut prendre $\theta>1-\frac{\delta}{i_0}$ avec $\theta<1$.

On choisit ensuite ε' tel que $i_0+\varepsilon'<i_p(x_0)$. Enfin on choisit ε pour que $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ soit assez petit et qu'on puisse vérifier $\theta<-\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+1$. Donc $(2^{((\theta-1)\varepsilon' p+\varepsilon p)j}+2^{((1-\theta)i_0 p-\delta p)j}\delta_j)^{\frac{1}{p}}$ est le terme général d'une série convergente et la relation(3.77) est donc vérifiée pour f.

Donc f est élément de $X_0^{i_0,-i_0,p,1}$, et par suite le théorème 3.1.3 nous donne qu'elle est élément de $T^{i_0-\frac{d}{p}}(0)$.

Donc par définition de $u_f^p(0)$,

$$u_f^p(0)\geq i_0-\frac{d}{p}$$

Or on a pris i_0 quelconque tel que $i_0<i_p(0)$. Donc

$$u_f^p(0)\geq i_p(0)-\frac{d}{p}.$$

On a avec le point 1 de la proposition l'inégalité inverse.

Donc

$$u_f^p(0)=i_p(0)-\frac{d}{p}.$$

□

3.4 Majoration du spectre de singularités T_p^u

Nous allons d'abord démontrer la proposition 3.1.1.
Démonstration:

Afin de simplifier les notations, nous supposerons à partir de maintenant que $f \in B_{p_0}^{s_0,p_0}$ mais on peut démontrer avec les mêmes arguments le cas général.

Nous supposerons aussi que les ondelettes mères ψ sont de classe C^N avec $N > s$, à support compact dans $B(0,M)$ pour $M > 0$. Le support d'une ondelette $\psi_{j,k} = \psi(2^j x - k)$ est inclus dans $\lambda_{j,k} = k2^{-j} + [\frac{-M}{2^j}, \frac{M}{2^j}]^d$.

Notre objectif est de construire un sous-ensemble W^D de $\mathbb{R}^d$, de mesure D-dimensionnelle de Hausdorff nulle, tel que si $x_0 \notin W^D$ alors $f \in T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.

Nous définissons deux sous-ensembles U^D et V^D de $\mathbb{R}^d$ tels que $U^D \bigcup V^D = W^D$.

– Considérons U^D défini comme suit.

Soit $f \in B_{p_0}^{s_0,p_0}$,

$$\forall j, \sum_k |C_{j,k}|^{p_0} 2^{(p_0 s_0 - d)j} \leq C\varepsilon_j \text{ avec } (\varepsilon_j) \in l^1(\mathbb{Z}). \tag{3.99}$$

Soit $B_{j,k}$ la boule de centre $\frac{k}{2^j}$ et de rayon

$$\begin{aligned} diam(B_{j,k}) &= |C_{j,k}|^{\frac{p_0}{D}} 2^{\frac{(p_0 s_0 - d)j}{D}}. \\ diam(B_{j,k})^D &= |C_{j,k}|^{p_0} 2^{(p_0 s_0 - d)j} \end{aligned} \tag{3.100}$$

et (3.99) donne

$$\forall j : \sum_k diam(B_{j,k})^D \leq C\varepsilon_j. \tag{3.101}$$

Si bien que clairement $diam(B_{j,k}) \to_{j\to\infty} 0$
Soit $A_j = \bigcup_k B_{j,k}$ and $U^D = \limsup A_j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\geq j} A_l$.

L'ensemble $\bigcup_{l\geq j} A_l$ peut être recouvert par $\bigcup\limits_{l\geq j}\bigcup\limits_{k} B_{l,k}$ et (**??**) nous donne

$$\sum_{l\geq j}\left(\sum_{k} diam(B_{l,k})^D\right) \leq C\sum_{l\geq j}\varepsilon_l. \tag{3.102}$$

Puisque les ensembles $B_{l,k}$ pour $l \geq j$ forment un ε-recouvrement où ε peut être choisi arbitrairement petit, la mesure D-dimensionnelle de Hausdorff de U^D est nulle.

Si $x_0 \notin U^D$ $\exists j_0 : \forall j \geq j_0, \forall k : x_0 \notin B_{j,k}$ ce qui signifie que

$$|x_0 - k2^{-j}| \geq |C_{j,k}|^{\frac{p_0}{D}} 2^{\frac{(p_0 s_0 - d)j}{D}}.$$

Donc

$$|C_{j,k}| \leq |x_0 - k2^{-j}|^{\frac{D}{p_0}} 2^{(-s_0+\frac{d}{p_0})j}. \tag{3.103}$$

– Nous définissons V^D comme suit.
Soit Λ_j la collection de cubes dyadiques $\lambda = k2^{-j} + [0, 2^{-j})^d$ et $\Lambda = \bigcup\limits_{j=-\infty}^{j=+\infty} \Lambda_j$. Fixons j et notons $C_\lambda = C_{j,k}$. Nous notons W_j^D l'ensemble des cubes $\lambda \in \Lambda_j$ tels que

$$\sum_{\lambda' \subset 5\lambda} |C_{\lambda'}|^{p_0} 2^{(s_0 p_0 - d)j'} \geq 2^{-Dj}.$$

Posons

$$V_j^D = \bigcup_{\lambda \in W_j^D} 2M\lambda$$

et $V^D = \limsup\limits_{j\to+\infty} V_j^D$.
D'après (3.99),

$$\forall j, \sum_{\lambda\in\Lambda_j}\sum_{\lambda'\subset 5\lambda} |C_{\lambda'}|^{p_0} 2^{(s_0 p_0 - d)j'} < \infty.$$

Ainsis il y a au plus $C2^{Dj}$ cubes dyadiques dans W_j^D. Donc la dimension de Hausdorff de V^D est inférieure ou égale à D.

Si $x_0 \notin V^D$, il existe $\tilde{j_0}$ tel que $\forall j \geq \tilde{j_0}, k \in \mathbb{Z}^d$,

$$|x_0 - k2^{-j}| \leq 2M2^{-j} \Longrightarrow \sum_{\lambda' \subset 5\lambda} |C_{\lambda'}|^{p_0} 2^{(s_0 p_0 - d)j} \leq 2^{-Dj}. \tag{3.104}$$

Montrons que si x_0 n'est pas dans $U^D \bigcup V^D$, alors f appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$. D'après 3.1, on a donc à montrer que f appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ avec $s < s_0 + \frac{D}{p_0} - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p}$.

Par hypothèse $x_0 \notin V^D$, donc d'après (3.104), il existe $\tilde{j_0}$ tel que $\forall j \geq \tilde{j_0}, \forall k \in \mathbb{Z}^d$

$$|x_0 - k2^{-j}| \leq 2M2^{-j} \Rightarrow \sum_{\lambda'/\lambda' \subset 5\lambda, \lambda \in \Lambda_j} |C_{\lambda'}|^{p_0} 2^{(s_0 p_0 - d)j'} \leq 2^{-Dj}. \tag{3.105}$$

Par hypothèse $x_0 \notin U^D$, et (3.103) nous donne donc

$$|C_{j,k}| \leq |x_0 - k2^{-j}|^{\frac{D}{p_0}} 2^{(-s_0 + \frac{d}{p_0})j}. \tag{3.106}$$

On note $J_0 = \max(j_0, \tilde{j_0})$. La fonction f peut être écrite comme la somme $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ avec

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{j<J_0} \sum_k C_{j,k}\psi_{j,k}(x), \\ f_2(x) &= \sum_{j \geq J_0} \sum_{|x_0 - k2^{-j}| \leq 4M2^{-j}} C_{j,k}\psi_{j,k}(x), \\ f_3(x) &= \sum_{j \geq J_0} \sum_{|x_0 - k2^{-j}| > 4M2^{-j}} C_{j,k}\psi_{j,k}(x), \end{aligned} \tag{3.107}$$

- Remarquons que f_1 appartient à C^n pour n plus grand que s. Donc f_1 appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.

  Montrons que f_2 et f_3 appartiennent à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.

- Pour montrer que f_3 appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.
  nous devons calculer

$$\int_{|x-x_0|\leq\rho} |f_3(x)|^p dx. \tag{3.108}$$

  Soit J tel que $2^{-J} \leq \rho \leq 2^{-J+1}$ et a tel que $2^a \leq M$.
  L'ondelette $\psi_{j,k}$ est par définition à support compact dans le domaine $|x - k2^{-j}| \leq 2M2^{-j}$, et les cubes dyadiques $\lambda_{j,k}$ qui correspondent à une ondelette non nulle sur $|x - x_0| \leq \rho$ vérifient

$$|x_0 - k2^{-j}| \leq |x - x_0| + |x - k2^{-j}| \leq \rho + 2M2^{-j} \leq 2.2^{-J} + 2M2^{-j}. \tag{3.109}$$

  Or par définition de f_3 on a $4M2^{-j} \leq |x_0 - k2^{-j}|$, et donc (3.109) donne $2M2^{-j} < 2.2^{-J}$. D'où $j > J + a$.

  Nous allons maintenant distinguer deux cas dans la majoration de (3.108) : le cas $p \geq p_0$ et le cas $p \leq p_0$.

  - Examinons d'abord le cas $p \geq p_0$.
    En appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho} |f_3(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j\geq J+a} \left(\int_{|x-x_0|\leq\rho} \left|\sum_{|x_0-k2^{-j}|\geq 4M2^{-j}} C_{j,k}\psi(2^j x - k)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.110}$$

    Fixons j et k, nous avons au plus $(2M)^d$ ondelettes $\psi_{j,k'}$ non-nulles sur le support de $\psi_{j,k}$.

Donc nous pouvons partitionner les ondelettes de l'échelle j en $(2M)^d$ ensembles P_i, telles que les ondelettes d'un même P_i sont à support disjoint.
Comme précédemment, nous notons

$$\Delta_j f = \sum_k C_{j,k}\psi_{j,k}.$$

La convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ donne

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq\rho}\Big|\Delta_j f(x)\Big|^p dx &\leq C\sum_{i\in I}\left(\int_{|x|\leq\rho}\Big|\sum_{k\in P_i} C_{j,k}\psi(2^j x-k)\Big|^p dx\right)\\
&\leq C\sum_{i\in I}\sum_{k\in P_i}|C_{j,k}|^p\int|\psi(2^j x-k)|^p dx\\
&\leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{-dj}|C_{j,k}|^p.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

où k appartient à l'ensemble

$$\Omega(j,\rho)=\{k:\lambda_{j,k}\bigcap B(x_0,\rho)\neq\emptyset \text{ et } 4M2^{-j}\leq|x_0-k2^{-j}|\leq 2.2^{-J}+2M2^{-j}\}. \tag{3.112}$$

Cela nous donne donc

$$\int_{|x-x_0|\leq\rho}\Big|\sum_{|x_0-k2^{-j}|\geq 4M2^{-j}} C_{j,k}\psi(2^j x-k)\Big|^p dx \leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{-dj}|C_{j,k}|^{p_0}|C_{j,k}|^{p-p_0}. \tag{3.113}$$

En utilisant (3.106) et $p\geq p_0$, (3.113) nous donne

$$\int_{|x-x_0|\leq\rho}\left|\sum_{|x_0-k2^{-j}|\geq 4M2^{-j}} C_{j,k}\psi(2^jx-k)\right|^p dx$$
$$\leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{-dj}|C_{j,k}|^{p_0}\quad |x_0-k2^{-j}|^{\frac{D(p-p_0)}{p_0}}2^{(-s_0+\frac{d}{p_0})(p-p_0)j}.$$

$$\leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\quad |x_0-k2^{-j}|^{\frac{D(p-p_0)}{p_0}}2^{-(s_0p-\frac{dp}{p_0}+d)j}. \quad (3.114)$$

Majorons le terme $|x_0-k2^{-j}|^{\frac{D(p-p_0)}{p_0}}$ dans (3.114).

Par définition de $\Omega(j,\rho)$ (expression 3.112),
si $k\in\Omega(j,\rho)$, $|x_0-k2^{-j}|\leq\rho+\dfrac{2M}{2^j}$.
Puisque $j>J+a$, et $\rho\geq 2^{-J}$,

$$\begin{aligned}|x_0-k2^{-j}| &\leq \rho+2M2^{-j}\\ &\leq \rho(1+M2^{-a+1}).\end{aligned} \quad (3.115)$$

On a donc

$$|x_0-k2^{-j}|^{\frac{D(p-p_0)}{p_0}}\leq C\rho^{\frac{D(p-p_0)}{p_0}}. \quad (3.116)$$

On a ainsi la majoration pour le terme de droite de (3.111)

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{-dj}|C_{j,k}|^p &\leq C\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\rho^{\frac{D(p-p_0)}{p_0}}2^{-(s_0p-\frac{dp}{p_0}+d)j}\\ &\leq C\rho^{\frac{Dp}{p_0}-D}2^{-(s_0p-\frac{dp}{p_0}+d)j}.\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}.\end{aligned} \quad (3.117)$$

En sommant (3.117) sur j et en utilisant (3.110),

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\sum_{j\geq J+a}\left(\rho^{\frac{Dp}{p_0}-D}2^{-(s_0p-\frac{dp}{p_0}+d)j}\sum_{k\in\ Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}}.$$
$$\leq C\rho^{\frac{D}{p_0}-\frac{D}{p}}\sum_{j\geq J+a}2^{-(s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p})j}\left(\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.118}$$

En notant q l'exposant conjugué de p tel que $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, on peut majorer (3.118) grâce à l'inégalité de Hölder.
En effet par hypothèse $s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p}\geq 0$, donc la série $\sum_{j\geq J+a}2^{-(s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p})qj}$ est convergente.

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\rho^{\frac{D}{p_0}-\frac{D}{p}}\left(\sum_{j\geq J+a}2^{-(s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p})qj}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j\geq J+a}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\rho^{\frac{D}{p_0}-\frac{D}{p}}2^{-(s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p})J}\left(\sum_{j\geq J+a}\sum_{k\in\ Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.119}$$

Majorons les termes $2^{-(s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p})J}$ et $\left(\sum_{j\geq J+a}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}}$ dans (3.119).

Remarquons d'abord que , avec $2^{-J}\leq\rho$, on a
$$2^{-(s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p})J}\leq\rho^{s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p}}. \tag{3.120}$$

D'autre part, pour le terme $\left(\sum_{j\geq J+a}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p}}$, remarquons encore que si k appartient à $\Omega(j,\rho)$, alors le cube dyadique correspondant λ de taille 2^{-j} est contenu dans $5\tilde{\lambda}$, où $\tilde{\lambda}$ est le cube dyadique de taille 2^{-J} (on note $K2^{-J}$ son centre) qui contient x_0.
En effet par définition de $\Omega(j,\rho)$,

$$\forall x\in\lambda, |x-K2^{-J}|\leq|x-k2^{-j}|+|k2^{-j}-x_0|+|x_0-K2^{-J}|\leq 2.2^{-j}+2.2^{-J}+2^{-J}.$$

Puisque $x_0\notin V^D$,

$$\begin{aligned}\sum_{j>J+a}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)} 2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0} &\leq 2^{-DJ}\\ &\leq \rho^D.\end{aligned}\tag{3.121}$$

puisque $2^{-J}\leq\rho\leq 2^{-J+1}$.

(3.121) et (3.120) nous permettent d'obtenir la majoration suivante du premier membre de (3.119).

$$\begin{aligned}\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C\rho^{\frac{D}{p_0}-\frac{D}{p}}\rho^{s_0-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p}}\rho^{\frac{D}{p}}\\ &\leq C\rho^{s_0+\frac{D}{p_0}-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p}}\end{aligned}\tag{3.122}$$

Or d'après (3.1), $s<s_0+\frac{D}{p_0}-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p}$, et donc (3.122) donne

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\rho^s.\tag{3.123}$$

Donc d'après la définition 1.1.7, f_3 appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ dans le cas où $p\geq p_0$.

- Il nous reste à étudier (3.108) dans le cas où $p\leq p_0$.
  On a donc $\frac{p}{p_0}\leq 1$ et on peut écrire $1=\frac{p}{p_0}+1-\frac{p}{p_0}$.
  Appliquons l'inégalité de Hölder à $\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx$ avec $\frac{p_0}{p}$ et $\frac{1}{1-\frac{p}{p_0}}$ comme exposants conjugués. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx &\leq \left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{p}{p_0}}\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}dx\right)^{1-\frac{p}{p_0}}\\ &\leq \left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{p}{p_0}}\left(\rho^d\right)^{1-\frac{p}{p_0}}\\ &\leq \rho^{d(1-\frac{p}{p_0})}\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{p}{p_0}}\end{aligned} \tag{3.124}$$

D'où on peut majorer le premier membre de (3.108) par

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_0}}\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \tag{3.125}$$

On étudie maintenant le terme de (3.124) $\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$.
On a $p_0 \geq p$, donc $p_0 \geq 1$. Ainsi, pour majorer $\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}$ on peut employer les mêmes arguments que dans les majorations (3.110) et (3.111) du cas précédent en changeant simplement le "p" de ces majorations en p_0.
On a donc

$$\begin{aligned}\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq C\sum_{j\geq J+a}\left(\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{-dj}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}.\\ &\leq C\sum_{j\geq J+a}\left(\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{-s_0p_0j}2^{s_0p_0j}2^{-dj}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}.\\ &\leq C\sum_{j\geq J+a}2^{-s_0j}\left(\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}\end{aligned} \tag{3.126}$$

$p_0 \geq p \geq 1$, et on note p_1 l'exposant conjugué de p_0. On peut appliquer l'inégalité de Hölder sur (3.127), ce qui donne

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq C\left(\sum_{j\geq J+a}2^{-s_0p_1j}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\sum_{j\geq J+a}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$\leq C2^{-s_0J}\left(\sum_{j\geq J+a}\sum_{k\in\Omega(j,\rho)}2^{(s_0p_0-d)j}|C_{j,k}|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \tag{3.127}$$

Or la même méthode que pour la majoration (3.121) nous permet de conclure

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq C2^{-s_0J}2^{-\frac{DJ}{p_0}} \tag{3.128}$$

Et puisque $2^{-J}\leq\rho$, on a

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq C\rho^{s_0+\frac{D}{p_0}} \tag{3.129}$$

On peut donc finalement majorer (3.125) comme suit

$$\begin{aligned}\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C\rho^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_0}}\rho^{s_0+\frac{D}{p_0}}\\ &\leq C\rho^{\frac{d}{p}-\frac{d}{p_0}+s_0+\frac{D}{p_0}}\end{aligned} \tag{3.130}$$

Or on a d'après (3.1) $s<s_0+\frac{D}{p_0}-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p}$, donc

$$\left(\int_{|x-x_0|\leq\rho}|f_3(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\rho^{s}. \tag{3.131}$$

Donc d'après la définition 1.1.7, f_3 appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ dans le cas où $p\leq p_0$.

On a donc bien dans tous les cas f_3 appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.

– Examinons f_2.
Rappelons que d'après la proposition 3.1.3,

$$\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1} \subset T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0). \tag{3.132}$$

Ainsi si f_2 appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1}$ quand $s < s_0 + \frac{D}{p_0} - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p}$, alors elle appartient aux espaces $T_p^{s-\frac{d}{p}}$ pour $s < s_0 + \frac{D}{p_0} - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p}$.

Pour montrer que f_2 appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1}$, il nous suffit de trouver un A telle que la norme suivante de f_2 dans $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1}$

$$\sum_{j\geq 0} 2^{(s-\frac{d}{p})j} \left(\sum_{|k-x_0 2^j|\leq A2^j} |C_{j,k}|^p (1+|k-x_0 2^j|)^{-sp} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.133}$$

soit finie.

Calculons d'abord avec $f_2 = \sum_{j\geq j_0} \sum_{|x_0-k2^{-j}|\leq 4M2^{-j}} C_{j,k}\psi_{j,k}$ et j fixé la quantité suivante

$$2^{(sp-d)j} \sum_k |C_{j,k}|^p (1+|k-x_0 2^j|)^{-sp}. \tag{3.134}$$

Or $x_0 \notin U^D$, donc (3.106) nous donne

$$\begin{aligned} 2^{(sp-d)j} & \sum_{k/|k-x_0 2^j|\leq 4M} |C_{j,k}|^p (1+|k-x_0 2^j|)^{-sp} \\ & \leq 2^{(sp-d)j} 2^{(-s_0 p+\frac{dp}{p_0})j} \left(\sum_{k/|k-x_0 2^j|\leq 4M} |x_0 - k2^{-j}|^{\frac{Dp}{p_0}} (1+|k-x_0 2^j|)^{-sp} \right) \\ & \leq 2^{(-s_0 p+\frac{dp}{p_0}+sp-d)j} 2^{-j\frac{Dp}{p_0}} \left(\sum_{k/|k-x_0 2^j|\leq 4M} |2^j x_0 - k|^{\frac{Dp}{p_0}} (1+|k-x_0 2^j|)^{-sp_0} \right). \end{aligned} \tag{3.135}$$

Clairement

$$\sum_{k/|k-x_02^j|\leq 4M} |2^jx_0-k|^{\frac{Dp}{p_0}}(1+|k-x_02^j|)^{-sp_0} = \sum_{k/|k-x_02^j|\leq 4M} |k-2^jx_0|^{\frac{Dp}{p_0}}(1+|k-x_02^j|)^{-sp_0}$$

est majorée par une quantité qui ne dépend pas de j.
(3.135) nous donne la majoration suivante pour (3.134)

$$2^{(sp-d)j} \sum_{k/|k-x_02^j|\leq 4M} |C_{j,k}|^p(1+|k-x_02^j|)^{-sp} \leq C2^{(-s_0p+\frac{dp}{p_0}+sp-d-\frac{Dp}{p_0})j} \tag{3.136}$$

L'hypothèse (3.1) nous donne $-s_0p+\frac{dp}{p_0}+sp-d-\frac{Dp}{p_0}<0$.
Donc (3.133) est une quantité finie. Ainsi f_2 appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1}$, et d'après (3.132), $f_2 \in T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$.

Nous avons donc que si $x_0 \notin U_D \bigcup V_D$, alors f appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ avec $s < s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p} + \frac{D}{p_0}$.
D'où si f appartient à $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)$ avec $s < s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p} + \frac{D}{p_0}$, alors $x_0 \in U_D \bigcup V_D$, dont la mesure D-dimensionnelle de Hausdorff est nulle.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le corollaire 3.1.2.

Démonstration:

Les diiférentes étapes de la démonstration seront les suivantes. D'abord nous allons réécrire les hypothèses du corollaire 3.1.2 en termes de normes de Besov. Ensuite nous montrerons que pour $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ la mesure ε-dimensionelle de Hausdorff de l'ensemble $\{x_0 : f \notin T_p^{n-\frac{d}{p}}(x_0)\}$ est nulle. Et nous concluerons.

Réécrivons les hypothèses du corollaire 3.1.2 afin d'appliquer la proposition 3.1.1.

On supposait que

$$f = \sum_j \sum_k \tilde{C}_{j,k} 2^{\frac{dj}{p}} \psi(2^j x - k) \tag{3.137}$$

et

$$\forall \theta > 0, \sum_j \sum_k |\tilde{C}_{j,k}|^\theta < +\infty. \tag{3.138}$$

Nous pouvons réécrire comme suit (3.137) avec

$$f(x) = \sum_j \sum_k C_{j,k} \psi(2^j x - k) \text{ avec } C_{j,k} = \tilde{C}_{j,k} 2^{\frac{dj}{p}} \tag{3.139}$$

Ensuite nous pouvons réécrire (3.138) avec les coefficients $C_{j,k}$

$$\forall \theta > 0, \sum_j \sum_k 2^{-\frac{dj\theta}{p}} |C_{j,k}|^\theta < +\infty. \tag{3.140}$$

Or (3.137) est la décomposition de f sur une base d'ondelettes normalisée en norme L^∞. D'après (1.33), on peut conclure avec (3.140) que f appartient à tous les espaces $B_\theta^{\frac{d}{\theta}-\frac{d}{p},\theta}$ pour $\theta > 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et n un entier positif. Il existe $\theta > 0$ tel que $\varepsilon > \theta n$ et $p \geq \theta$. Soit $s_0 = \frac{d}{\theta} - \frac{d}{p} \geq 0$, $p_0 = \theta$, $s = n$, $D = \varepsilon$. Remarquons que l'hypothèse $D > p_0(s - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p})$ est vérifiée car $p_0(s - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p}) = \theta n$. Enfin f appartient à l'espace $B_\theta^{\frac{d}{\theta}-\frac{d}{p},\theta}$, donc nous pouvons maintenant appliquer la proposition 3.1.1.

On a donc

$$Mes_\varepsilon\{x_0 : f \notin T_p^{n-\frac{d}{p}}(x_0)\} = 0.$$

Cela nous donne

$$Mes_\varepsilon\{x_0 : f \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_p^{n-\frac{d}{p}}(x_0)\} = 0.$$

De plus, $T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0) \subset T_p^{s'-\frac{d}{p}}(x_0)$ si $s \geq s'$,

$$Mes_\varepsilon\{x_0 : f \notin \bigcap_{s\geq 0} T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)\} = 0. \tag{3.141}$$

(3.141) est vraie pour tout $\varepsilon > 0$. Nous pouvons en déduire que la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\{x_0 : f \notin \bigcap_{s\geq 0} T_p^{s-\frac{d}{p}}(x_0)\}$ est nulle. $\square$

Chapitre 4

Une étude de frontière fractale

4.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents différentes manières d'aborder le problème de la régularité ponctuelle d'une fonction et d'effectuer une classification des singularités ponctuelles.

Cependant de nombreuses fonctions, dès la dimension 2, échappent à cette classification même dans des exemples très simples de fonctions caractéristiques. La connaissance des exposants usuels ne paraît pas suffisante pour déduire la géométrie des fonctions dans ces situations, cruciale pourtant dans les applications. Autrement dit si on considère des ouverts à frontière fractale et qu'on considère leur fonction caractéristique, l'étude de cette fonction et la connaissance des exposants usuels ne permet pas toujours de revenir à la géométrie de l'ouvert.

En physique, mécanique ou chimie, de nombreux phénomènes font intervenir des frontières fractales. C'est par exemple le cas des problèmes de rugosité, des mélanges turbulents... Ainsi, l'instabilité de Raleigh-Taylor se produit quand deux fluides sont placés l'un au-dessus de l'autre, le plus lourd au-dessus. Si la viscosité est assez faible, les deux fluides se mélangent et développent dans un premier temps des interfaces de type "champignon" qui dégénèrent en fila-

ments très fins et allongés.

Un exemple particulier de ces frontières fractales est les fonctions caractéristiques de domaine dont la frontière est le graphe d'une fonction oscillante en un point (graphes du type de celui de $x^\alpha \sin(1/x^\beta)$). On pourrait penser que ces fonctions peuvent être classifiées directement dans la classe des fonctions oscillantes grâce à leur comportement oscillant. Il n'en est rien car dans la théorie sur les fonctions oscillantes (abordée dans le chapitre 1.1.2 et développée plus loin), oscillation signifie d'abord compensation alternativement des parties positives et négatives de la fonction, ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

Notre méthode traite le cas spécifique de ces fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une fonction oscillante au sens de la théorie sur les fonctions oscillantes (autrement dit par exemple une fonction qui est la somme d'une partie négative et d'une partie positive qui se compensent l'une l'autre alternativement) et d'une fonction de "contours" non oscillante qui donne l'enveloppe du domaine.

Il existe un algorithme de traitement de l'image dit d"Osher-Rudin" qui effectue cette décomposition numériquement pour une image : il décompose l'image en une composante dite de "texture" et une composante dite de "contours" (voir [32]). Récemment Y. Meyer et A. Cohen dans [30] et [5] ont montré que cet algorithme est presque équivalent à un autre algorithme en traitement de l'image, l'algorithme de seuillage des coefficients en ondelettes, qui sépare lui-aussi la fonction en une composante d'oscillation et une composante de contours.

Nous montrerons que cette décomposition effectuée "à la main" nous met dans les conditions d'application de l'algorithme et nous permet d'espérer qu'elle sera retrouvée numériquement. Dans les quelques tests effectués, c'est en effet le cas.

Nous allons maintenant décrire notre méthode en étudiant un exemple particulier qui sert de modèle pour un matériau très finement stratifié.

Soient $\alpha \geq 0$, et $\beta \geq \alpha$, on définit

$$G_2 : (x, y) \mapsto \mathbb{I}_{\{|y| \leq x^{\alpha+1}\}}(x, y) C\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$$

où

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [2n, 2n+1], n \in \mathbb{N} \\ C(x) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La figure suivante représente la fonction G_2. Le noir représente la valeur 0 et le blanc 1.

Notre objectif est de comparer son comportement en 0 avec la fonction

$$G_1 : (x, y) \mapsto \mathbb{I}_{\{|y| \leq x^{\alpha+1}, x \geq 0\}}(x, y).$$

et de proposer une méthode pour classifier ces deux types de singularités en 0.

Nous remarquerons d'abord qu'elles ont le même exposant de Hölder ponctuel et le même p-exposant en 0. Examinant le comportement en 0 du point de vue des oscillations, nous verrons que contrairement à ce qu'on peut à première vue penser, G_2 n'est pas une fonction oscillante au sens du chapitre 1.1.2. Cependant la fonction $\tilde{G}_2$, issue de la décomposition $G_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}_2 + G_1\right)$, est quant à elle une fonction oscillante.

En étudiant de plus près cette décomposition $G_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{G}_2 + G_1\right)$, nous verrons qu'elle sépare G_2 en une partie à contours bornés et une partie oscillante.

Cela nous suffira alors pour conclure que l'algorithme de seuillage des coefficients en ondelettes va pouvoir s'appliquer.

4.2 Exposant de Hölder et p-exposant

En ce qui concerne la régularité ponctuelle, il est clair que l'exposant de Hölder en 0 est pour G_1 comme G_2 égal à zéro.

Examinons maintenant le p-exposant en 0 de chacune de ces fonctions.

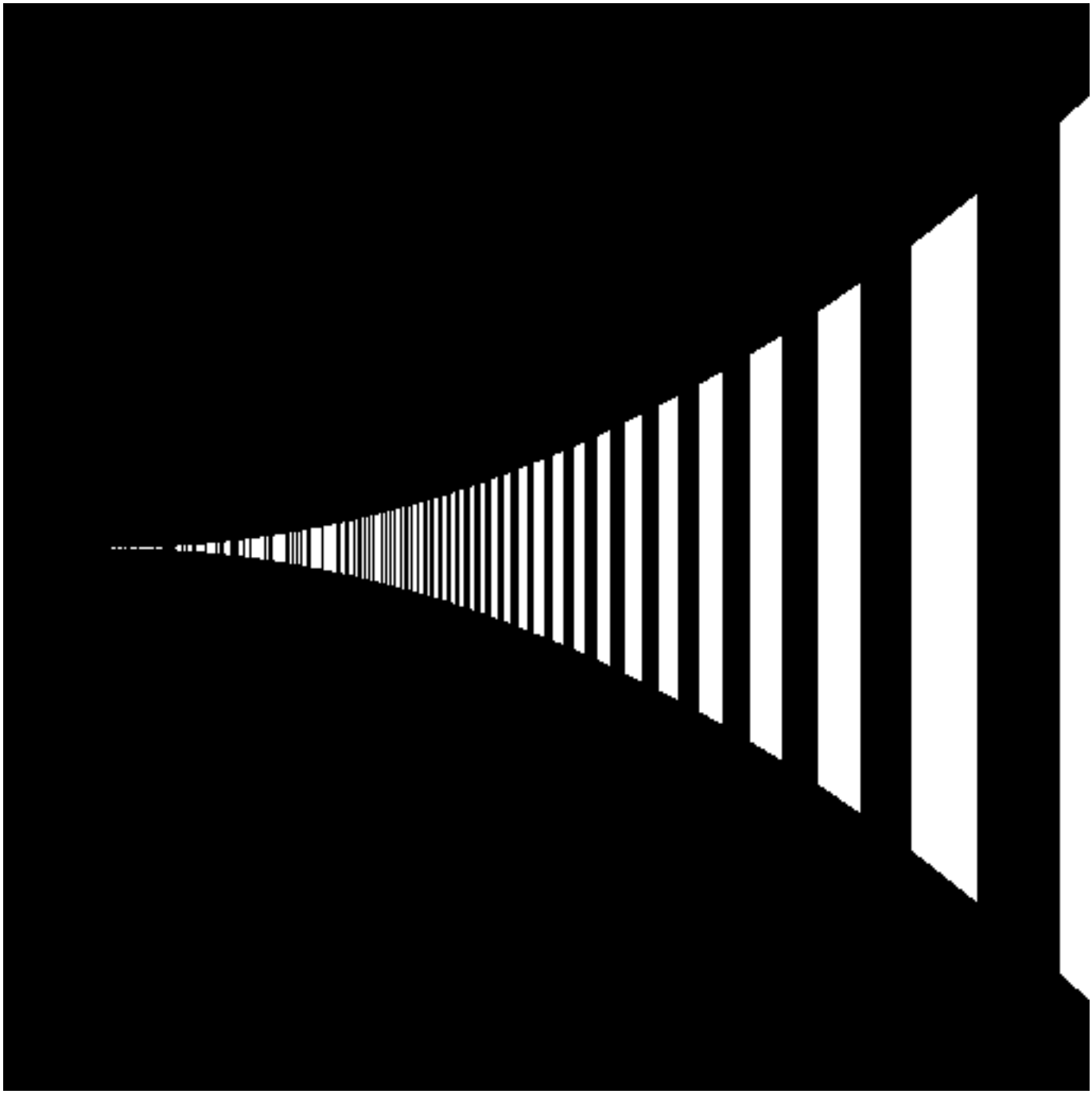


Fig. 4.1 –

Lemme 4.2.1. *Soit $1 \leq p < \infty$. Le p-exposant en 0 de G_1 et de G_2 est $\frac{\alpha}{p}$.*

Démonstration: G_1 et G_2 sont dans L^∞, donc localement intégrables.

Posons $A = 1$ et $\rho \leq 1$ et choisissons comme norme sur $\mathbb{R}^2$ la norme $|(x,y)| = \sup(|x|, |y|)$.

Calculons d'abord $I_\rho = \int\int_{|(x,y)|\leq\rho} |G_1(x,y)|^p dxdy$.

Si $\alpha \geq 1$ et $\rho \leq 1$, on a évidemment $\rho^{\alpha+1} \leq \rho$, donc

$$\begin{aligned} I_\rho &= \int\int_{|(x,y)|\leq\rho} G_1(x,y)dxdy \\ &= \int_0^\rho \int_{-|x|^{\alpha+1}}^{|x|^{\alpha+1}} dydx \\ &= \frac{2}{\alpha+2}\rho^{\alpha+2} \\ (\tfrac{1}{\rho^2} I_\rho)^{\frac{1}{p}} &= C\rho^{\frac{\alpha}{p}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

D'où, avec $d = 2$, d'après (1.4), G_1 appartient à $T^{\frac{\alpha}{p}}(0)$ et d'après (1.10), on a le p-exposant $u^p_{G_1}(0) = \frac{\alpha}{p}$.

Calculons maintenant $J_\rho = \int\int_{|(x,y)|\leq\rho} |G_2(x,y)|dxdy$.

$$\begin{aligned} J_\rho &= \int\int_{|(x,y)|\leq\rho} G_2(x,y)dxdy \\ &= \int_0^\rho \int_{-|x|^{\alpha+1}}^{|x|^{\alpha+1}} \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(x)dydx \\ &= \int_0^\rho 2|x|^{\alpha+1} \sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(x)dx. \end{aligned} \tag{4.3}$$

On a $\rho \leq 1$, donc il existe un n_0 tel que

1. $(2n_0 - 1)^{-\frac{1}{\beta}} \leq \rho \leq (2n_0 - 2)^{-\frac{1}{\beta}}$
2. ou bien $(2n_0)^{-\frac{1}{\beta}} \leq \rho \leq (2n_0 - 1)^{-\frac{1}{\beta}}$.

On peut donc écrire

$$J_\rho = S_\rho + R_\rho \tag{4.4}$$

avec

$$S_\rho = \int_0^\rho 2|x|^{\alpha+1} \sum_{n \geq n_0} \mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(x)dx \tag{4.5}$$

et

1. $R_\rho = \int_{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}}^\rho 2|x|^{\alpha+1}dx$ dans le premier cas
2. $R_\rho = 0$ dans le deuxième cas.

Calculons S_ρ.

$$S_\rho = \int_0^\rho 2|x|^{\alpha+1} \sum_{n \geq n_0} \mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(x)dx \tag{4.6}$$

On peut écrire d'après le théorème de convergence monotone

$$\begin{aligned} S_\rho &= \sum_{n \geq n_0} \int_{(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}}}^{(2n)^{-\frac{1}{\beta}}} 2|x|^{\alpha+1}dx \\ &= C \sum_{n \geq n_0} (2n)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} - (2n+1)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Or on a

$$(2n)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} - (2n+1)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} = (2n)^{-\frac{\alpha pha+2}{\beta}} \left(1 - (1 + \frac{1}{2n})^{-\frac{\alpha+2}{\beta}}\right) \tag{4.8}$$

donc pour n tendant vers l'infini,

$$(2n)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} - (2n+1)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} \sim C(2n)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}-1} \tag{4.9}$$

Et puisque la série de terme général $(2n)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}-1}$ est convergente, on a

$$S_\rho \sim C \sum_{n \geq n_0} (2n)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}-1} \sim C(2n_0)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}} \tag{4.10}$$

Or d'après la définition de n_0 : $(2n_0)^{\frac{-1}{\beta}} \leq \rho \leq C(2n_0)^{\frac{-1}{\beta}}$.
On a donc 2 constantes C et C' telles que

$$C'\rho^{\alpha+2} \leq S_\rho \leq C\rho^{\alpha+2}. \tag{4.11}$$

Examinons R_ρ dans le premier cas, c'est à dire

$$R_\rho = \int_{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}}^{\rho} 2|x|^{\alpha+1}dx = C(\rho^{\alpha+2} - (2n_0-1)^{-\frac{\alpha+2}{\beta}}) \tag{4.12}$$

On a donc bien

$$0 \leq R_\rho \leq C\rho^{\alpha+2} \tag{4.13}$$

Avec (4.11), on a bien dans tous les cas

$$C'\rho^{\alpha+2} \leq J_\rho \leq C\rho^{\alpha+2}. \tag{4.14}$$

Donc, d'après (1.4), G_2 appartient à $T^{\frac{\alpha}{p}}(0)$ et on a le p-exposant $u^p_{G_2}(0) = \frac{\alpha}{p}$.

□

Le p exposant ne nous permet donc pas cette fois de distinguer les comportements de G_1 et G_2.

4.3 Notion de chirp

Examinons maintenant le point de vue des oscillations. La fonction G_2 semble à première vue pouvoir être classifiée parmi les phénomènes oscillants.

Nous pouvons utiliser directement la notion de "chirp" qui désigne un phénomène oscillant au voisinage d'un point x_0 dont la fréquence instantanée diverge quand on s'approche de x_0. La théorie des chirps est développée dans des domaines très variés (traitement de signaux de parole, d'ondes gravitationnelles en cosmologie...cf) et en mathématiques ou plus précisément en analyse par ondelettes, elle connait une définition précise élaborée par Y.Meyer.

Cette définition prend appui sur le modèle en dimension 1 de la fonction $x \mapsto x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta})$. Nous avons vu dans le chapitre 1.1.2 que cette fonction a des primitives plus régulières que ce qu'on aurait pu attendre d'une simple intégration d'ordre 1. Et en plusieurs dimensions la théorie a été développée par H.Xu dans [36] et Y.Meyer dans [30] et [29].

C'est la définition suivante de [30] (p.104) que nous utiliserons.

Définition 4.3.1. *Soit $\gamma > -n$ et $\beta > 0$ deux réels. Soit f une fonction localement intégrable au voisinage de x_0.*
On dit que f est un chirp de type (γ, β) s'il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour tout entier N, il existe une famille finie de fonctions $u_{\alpha,N}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, définies sur V telles que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \partial^\alpha u_{\alpha,N}(x) \tag{4.15}$$

et

$$|u_{\alpha,N}(x)| \leq C_N |x - x_0|^{\gamma + \beta N + |\alpha|}, \ x \in V. \tag{4.16}$$

Cette définition nous donne bien une généralisation du cas $x \mapsto x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta})$ que nous avions examiné dans le chapitre 1.1.2.

Le théorème suivant de [30] donne un critère de caractérisation des comportements chirp en un point $x_0 = 0$.

Théorème 4.3.1. *Soient β et γ tels que $\beta > 0$, $\gamma > -n$. Soit f une fonction intégrable sur un voisinage $V = \{x; |x| \leq \varepsilon_0\}$ de 0. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *f est un chirp de type (h, β) en 0.*
2. *$|f(x)| \leq C_0 |x|^\gamma$ et, pour tout entier N tel que $\gamma + \beta N > 0$, il existe une constante C_N tel que pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et φ à support dans $\{x, |x| \leq \varepsilon\}$,*

$$|\int f(x)\varphi(x)dx| \leq C_N \sup_{|\alpha| \leq N} \varepsilon^{\gamma+\beta N+|\alpha|} \parallel \partial^\alpha \varphi \parallel_1 . \tag{4.17}$$

Cherchons à voir si G_2 est un chirp au sens de cette définition.

Prenons une fonction ϕ à support compact toujours positive, d'intégrale 1 et qui vaut 1 sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$, on a

$$|\int G_2(x,y)\varphi(x,y)dxdy| = \int G_2(x,y)\varphi(x,y)dxdy \geq \int_{|(x,y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}} G_2(x,y)dxdy \tag{4.18}$$

Or dans la démonstration du lemme 4.2.1, l'équation (4.14) nous donne pour (4.18)

$$|\int G_2(x,y)\varphi(x,y)dxdy| \geq C'\varepsilon^{\alpha+2} \tag{4.19}$$

Donc G_2 ne peut pas être un chirp pour $\beta \neq 0$ au sens du théorème 4.3.1. La raison profonde est que dans cette définition, un chirp est une fonction oscillante qui fait se compenser ses parties positives et négatives alors qu'ici la fonction étant toujours positive elle ne peut pas connaître ce phénomène.

Une fonction très proche de G_2 et qui a par contre des chances d'être un chirp en 0 est la fonction $\tilde{G}_2$ telle que, avec C défini par (4.1),

$$\tilde{G}_2(x,y) = \mathbb{I}_{\{|y|\leq x^{\alpha+1}\}}(x,y)\left(2C\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)-1\right) \tag{4.20}$$

Nous allons établir la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *On peut écrire* $\tilde{G}_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x}$ *avec* $|f_1(x,y)| \leq |(x,y)|^{\beta+1}$.

Démonstration:

Déterminons la primitive selon x de $\tilde{G}_2$ qui s'annule en 0 en fixant y dans $[0,1]$. On calcule

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \int_0^x \tilde{G}(u,y)dx = \int_0^x \mathbb{I}_{\{|y|^{\frac{1}{\alpha+1}}\leq u\}}(u,y)\left(2C\left(\frac{1}{|u|^\beta}\right)-1\right)du \\ &= \int_0^x \mathbb{I}_{\{|y|^{\frac{1}{\alpha+1}}\leq u\}}\left(\sum_{n\geq 1}\mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(u) - \mathbb{I}_{[(2n)^{-\frac{1}{\beta}},(2n-1)^{-\frac{1}{\beta}}]}(u)\right)du \end{aligned} \tag{4.21}$$

Notre objectif est de montrer que sur un voisinage de 0

$$|f_1(x,y)| \leq |(x,y)|^{\beta+1}.$$

Or on a clairement

$$|f_1(x,y)| \leq |f_1(x,0)| \tag{4.22}$$

On pose n_0 tel que

1. $(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}} \leq x \leq (2n_0-2)^{-\frac{1}{\beta}}$
2. ou bien $(2n_0-2)^{-\frac{1}{\beta}} \leq x \leq (2n_0-3)^{-\frac{1}{\beta}}$.

On peut donc écrire

$$f_1(x,0) = S_1(x,0) + R_1(x,0) \tag{4.23}$$

avec

$$S_1(x,0) = \int_0^{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}} \left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(u) - \mathbb{I}_{[(2n)^{-\frac{1}{\beta}},(2n-1)^{-\frac{1}{\beta}}]}(u) \right) du \tag{4.24}$$

et

$$R_1(x,0) = \int_{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}}^{x} \tilde{G}_2(x,0)dx. \tag{4.25}$$

Évaluons la borne supérieure de S_1 sur un voisinage de 0.

On a d'après le théorème de convergence dominé sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned} S_1(x,0) &= \sum_{n\geq n_0} \int_0^{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}} \left(\mathbb{I}_{[(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}},(2n)^{-\frac{1}{\beta}}]}(u) - \mathbb{I}_{[(2n)^{-\frac{1}{\beta}},(2n-1)^{-\frac{1}{\beta}}]}(u) \right) du \\ &= \sum_{n\geq n_0} \left(\int_{(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}}}^{(2n)^{-\frac{1}{\beta}}} du - \int_{(2n)^{-\frac{1}{\beta}}}^{(2n-1)^{-\frac{1}{\beta}}} du \right) \\ &= \sum_{n\geq n_0} \left(-(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}} + (2n)^{-\frac{1}{\beta}} + (2n)^{-\frac{1}{\beta ta}} - (2n-1)^{-\frac{1}{\beta}} \right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Le terme général de la série est

$$-(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}}+(2n)^{-\frac{1}{\beta}}+(2n)^{-\frac{1}{\beta}}-(2n-1)^{-\frac{1}{\beta}} = (2n)^{-\frac{1}{\beta}} \left(2 - (1+\frac{1}{2n})^{-\frac{1}{\beta}} - (1-\frac{1}{2n})^{-\frac{1}{\beta}} \right) \tag{4.27}$$

Donc

$$\left(-(2n+1)^{-\frac{1}{\beta}} + (2n)^{-\frac{1}{\beta}} + (2n)^{-\frac{1}{\beta}} - (2n-1)^{-\frac{1}{\beta}} \right) \sim \frac{1}{\beta} \left(\frac{-1}{\beta} - 1 \right) \frac{(2n)^{-\frac{1}{\beta}}}{4n^2} \tag{4.28}$$

On a donc

$$S_1(x,0) \sim C(2n_0)^{-\frac{1}{\beta}-1} \tag{4.29}$$

Or puisque $(2n_0)^{-\frac{1}{\beta}} \leq x$, on a $(2n_0)^{-\frac{1}{\beta}-1} \leq x^{\beta+1}$, donc

$$|S_1(x,0)| \leq C_1 x^{\beta+1} \tag{4.30}$$

d'autre part, pour $R_1(x,0)$, on a

1. si $(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}} \leq x \leq (2n_0-2)^{-\frac{1}{\beta}}$

$$R_1(x,0) = \int_{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}}^{x} dx = x - (2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}} \tag{4.31}$$

   Donc, par le théorème des accroissements finis,

$$|x-(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}| \leq |(2n_0-2)^{-\frac{1}{\beta}} - (2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}| \leq (2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}-1} \leq Cx^{\beta+1} \tag{4.32}$$

   Donc dans ce cas on a bien

$$|R_1(x,0)| \leq Cx^{\beta+1}.$$

2. ou bien $(2n_0-2)^{-\frac{1}{\beta}} \leq x \leq (2n_0-3)^{-\frac{1}{\beta}}$

   et

$$R_1(x,0) = \int_{(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}}}^{x} dx = (2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}} - 2(2n_0-2)^{-\frac{1}{\beta}} + x \tag{4.33}$$

   et de même, par le théorème des accroissements finis,

$$|R_1(x,0)| \leq C(2n_0-1)^{-\frac{1}{\beta}-1} \leq Cx^{\beta+1} \tag{4.34}$$

On a donc bien dans tous les cas avec (4.30),

$$|f_1(x,y)| \leq |f_1(x,0)| \leq Cx^{\beta+1} \tag{4.35}$$

Donc pour $N=1$ on peut écrire

$$\tilde{G}_2(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$$

avec

$$|f_1(x,y)| \leq |(x,y)|^{\beta+1}.$$

ce qui correspond à l'égalité (4.15) et l'inégalité (4.16) dans le cas $N = 1$.

□

4.4 Algorithme de décomposition

Notre objectif est maintenant de revenir à G_2. Nous allons examiner la restriction de G_2 au pavé $[0,\varepsilon]^2$, que nous noterons G_2^ε, avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Nous pouvons écrire G_2^ε :

$$G_2^\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2}\tilde{G}_2^\varepsilon(x,y) + \frac{1}{2}G_1^\varepsilon(x,y)$$

avec $\tilde{G}_2^\varepsilon$ et G_1^ε les restrictions de $\tilde{G}_2$ et G_1 à $[0,\varepsilon]^2$.

Nous avons montré que $\tilde{G}_2^\varepsilon$ est une composante dite "oscillante". Nous allons montrer G_1^ε est une composante dite "de contour".

La bonne notion pour ce dernier type de fonctions est celle de fonctions à variations bornées.

Rappelons leur définition (cf [35]).

Définition 4.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Une fonction f de $L^1(\Omega)$ est une fonction à variations bornées si et seulement si son gradient au sens des distributions ∇f est une mesure finie, c'est à dire que sa variation totale

$$|f|_{BV(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega f div(g); g \in C_c^1(\omega, \mathbb{R}^d), \| g \|_\infty \leq 1\} \tag{4.36}$$

est finie.

La fonction caractéristique d'un ouvert borné $E \subset \Omega$ de frontière régulière appartient à $BV(\Omega)$ et sa norme se calcule en dimension 2 par la formule

$$|\mathbb{I}_E|_{BV(\Omega)} = \mathcal{H}^1(\partial E)$$

Cela revient donc à calculer la longueur du contour de la frontière de la fonction.

Proposition 4.4.1. *G_2^ε n'appartient pas à BV.*

Démonstration:

Il nous suffit de calculer la longueur de la frontière G_2^ε sur $(x, y) \in [0, \varepsilon]^2$.

Celle-ci contient la courbe $|y| = x^{\alpha+1}$ et les segments $[-(2n)^{-\frac{\alpha}{\beta}}, (2n)^{-\frac{\alpha}{\beta}}]$, $[-(2n+1)^{-\frac{\alpha}{\beta}}, (2n+1)^{-\frac{\alpha}{\beta}}]$ pour $n > [\varepsilon^{-\beta}/2]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x.)

Or $\alpha \leq \beta$, donc la série de terme général $n^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ n'est pas convergente et le périmètre de G_2^ε n'est pas borné.

G_2^ε n'est donc pas une fonction de BV. □

La fonction G_1^ε est par contre clairement une fonction de BV sur le pavé $[0, \varepsilon]^2$. Si on calcule le périmètre de son contour, qui est aussi la norme dans BV de cette fonction, on obtient

$$P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \sqrt{1 + (\alpha+1)x^{2(\alpha+1)}}dx \sim C\varepsilon$$

Maintenant nous pouvons faire le lien avec l'algorithme d'Osher-Rudin. L'algorithme d'Osher-Rudin est introduit pour résoudre des problèmes de débruitage d'images par Osher et Rudin dans [32]. L'idée est de décomposer l'image bruitée en une partie dite géométrique qui contient l'image originale et une partie de bruit qu'on veut éliminer. On écrit donc en considérant l'image bruitée comme une fonction y d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $[0, 1]$ (niveaux de gris)

$$y = f + \sigma n$$

où n est un bruit de variance 1.

La fonction f est l'image que l'on veut restaurer.

Une variante très utilisée de l'algorithme d'Osher-Rudin est basée sur la minimisation sur $g \in BV$ de la fonctionnelle suivante

$$K(y,g) = \| y - g \|_{L^2}^2 + \eta |g|_{BV}. \tag{4.37}$$

La composante f recherchée est alors le vecteur g qui minimise cette fonctionnelle.

Un autre algorithme de débruitage coexistait avec l'algorithme d'Osher-Rudin. Il s'agit de l'algorithme de seuillage des coefficients en ondelettes. L'idée est que dans une image les éléments significatifs sont les contours. La variation de l'intensité au voisinage de ces courbes est très brutale et les discontinuités très marquées. Les coefficients en ondelettes seront alors très grands au voisinage de ces courbes, et resteront (si le bruit ne couvre pas tout) au dessus du niveau du bruit. Le principe de l'algorithme de débruitage (dont l'optimalité est démontrée dans [12]) est donc de seuiller les coefficients pour éliminer les coefficients liés au bruit et ne garder que les grands coefficients liés à l'image.

Le théorème de Cohen-Devore-Petrushev-Xu (dans [6]) démontre que le problème de minimisation précédent peut être également résolu grâce à un algorithme de seuillage.

Nous introduisons la définition de l'espace $l^1_\star$.

On note λ le cube avec $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : \ 2^j x - k \in [0,1]^d\},$$

et Λ l'ensemble de tous les cubes dyadiques.

Définition 4.4.2. *L'espace de Lorentz $l^1_\star(\Lambda)$ est l'ensemble des suites $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sharp\{\lambda \in \Lambda; |x_\lambda| > \varepsilon\} \leq C/\varepsilon.$$

Ou autrement dit le réarrangement décroissant $C_n^\star$ de $|x_\lambda|$ vérifie

$$c_n^\star \leq C/n, n \in \mathbb{N}.$$

Ce théorème est le suivant.

Théorème 4.4.1. *Pour toute fonction f de $BV(\mathbb{R}^d)$, la suite des coefficients en ondelettes (c_λ) de f appartient à l'espace $l^1_\star(\Lambda)$.*

L'idée du lien entre l'algorithme de seuillage peut être donnée en remplaçant l'espace BV par l'espace $\dot{B}_1^{1,1}$ dans (4.37). L'espace $\dot{B}_1^{1,1}$ est constitué des fonctions qui ont leurs coefficients en ondelettes dans l^1, c'est un sous-espace de BV.

Ainsi examinons le problème qui consiste à partir d'une suite de coefficients $y_\lambda = x_\lambda + z_\lambda$, à retrouver la suite de coefficients x_λ dont on sait qu'elle appartient à l^1. Nous supposons que la suite de coefficients z_λ appartient à l^2 de norme inférieure à ε. Nous voulons ainsi minimiser sur x_λ la quantité

$$\sum_\lambda \parallel y_\lambda - x_\lambda \parallel_{l^2}^2 + \varepsilon \parallel x_\lambda \parallel_{l^1}$$

Il nous suffit de minimiser terme à terme cette fonctionnelle et de prendre

$$\tilde{x_\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } |y_\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ y_\lambda - \frac{\varepsilon}{2} sign(y_\lambda) & \text{sinon} \end{cases}$$

Revenons à notre problème.

Nous nous nous proposons de suivre la même stratégie de seuillage pour le résoudre.

La fonction $\tilde{G}_2^\varepsilon$ n'est effectivement pas dans l'espace BV mais on peut remarquer que $\tilde{G}_2^\varepsilon$ est dans l'espace $B_\infty^{-1,\infty}$ qui contient l'espace BV.

Définition 4.4.3. *L'espace $B_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des distributions f qui peuvent s'écrire*

$$f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \tag{4.38}$$

les fonctions f_i $(i = 1, 2)$ appartenant à l'espace $B_\infty^{0,\infty}$. La semi-norme de f est l'infimum des sommes des semi-normes des f_i dans $B_\infty^{0,\infty}$ (l'infimum étant pris sur toutes les décompositions du type (4.38).

Une définition équivalente de l'espace $B_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ est donnée par la proposition suivante (cf [30]).

Proposition 4.4.2. *L'espace de Banach $\dot{B}_1^{1,1}$ est le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^2} |c_\lambda| < \infty.$$

Le dual de l'espace $\dot{B}_1^{1,1}$ est l'espace de Banach $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$. Une fonction de $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ est caractérisé par le fait que ses coefficients appartiennent à $l^\infty(\Lambda)$.

D'après la proposition 4.3.1, la fonction $\tilde{G}_2^\varepsilon$ est une fonction de $B_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ avec une norme inférieure à $\varepsilon^{\beta+1}$.

Appliquons maintenant une stratégie de seuillage en tenant compte de cette information.

On veut décomposer $z_\lambda = x_\lambda + y_\lambda$ où x_λ est alors une suite de $l^{1,\star}$ et z_λ la suite des coefficients en ondelettes de $\tilde{G}_2^\varepsilon$.

Nous opérons un seuillage de taille $C\varepsilon^{\beta+1}$.

La suite obtenue par l'algorithme de seuillage ne correspond pas nécessairement à une fonction de BV, et donc pas nécessairement à la fonction $\tilde{G}_1^\varepsilon$.

Cependant on peut espérer retrouver par l'algorithme de troncature une fonction proche de $\tilde{G}_1^\varepsilon$. C'est ce qui se passe effectivement dans les essais effectués.

Le programme utilisé est celui de Basarab Matei dans sa thèse “Méthodes multiéchelles non-linéaires et applications au traitement de l'image”.

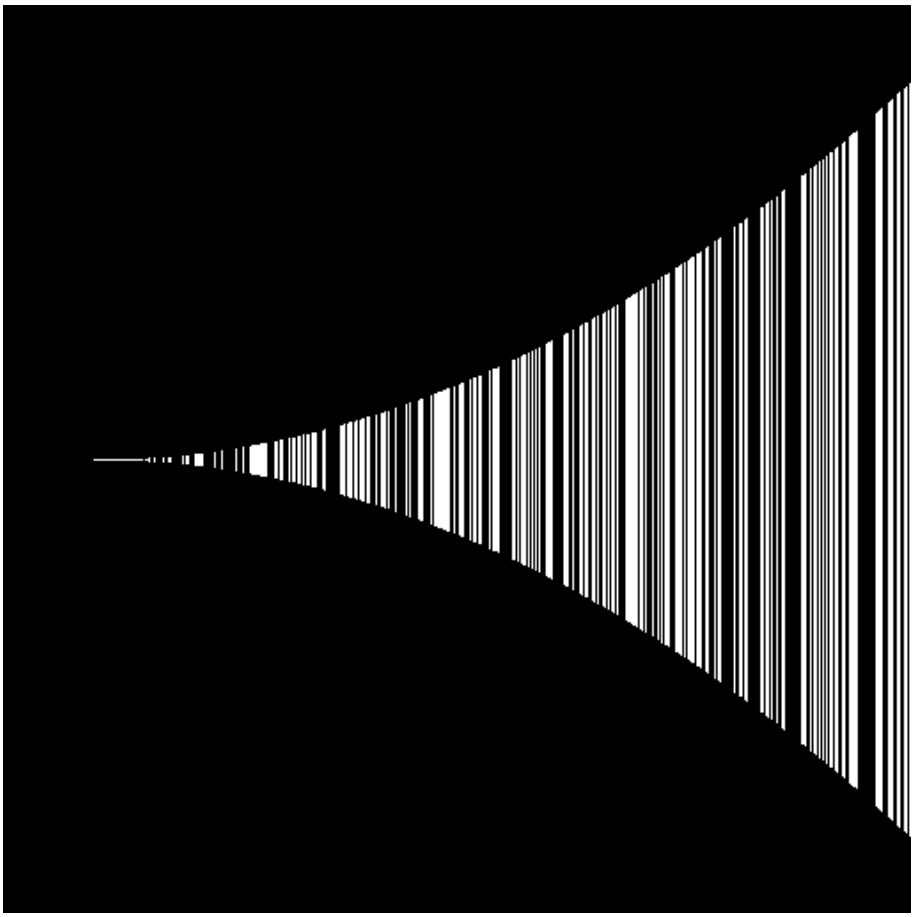


FIG. 4.2 – Image de départ pour les essais numériques.

On prend une fonction G_2^ε avec $\varepsilon = 462.10^{-3}$ et des paramètres $\alpha = 2$ et $\beta = 6$. Le blanc correspond à la valeur 1 et le noir à la valeur 0.

On obtient avec un taux de troncature $C\varepsilon^{\beta+1}$, où on ajuste la constante C, une fonction qui semble être une approximation grossière de $\tilde{G}_1^\varepsilon$. On a en effet en tronquant fortement la transformée en ondelettes supprimé tous les détails.

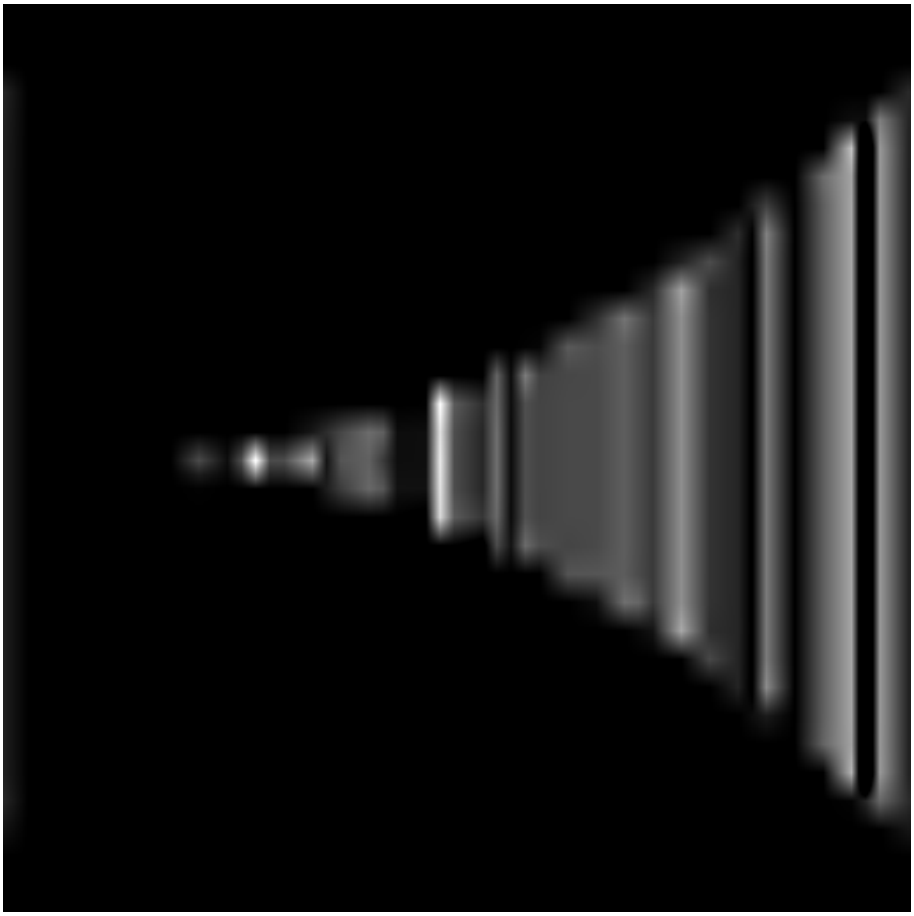


FIG. 4.3 – Image reconstruite après troncature

Bibliographie

[1] R.A.Adams, *Sobolev spaces.* Academic press (1978)

[2] A.Arnéodo, F.Argoul, E.Bacry, J.Elezgaray, J.F Muzy, *Ondelettes, multifractales et turbulences.* Diderot (1995) Science en actes

[3] A.Arnéodo, E.Bacry, S.Jaffard, J.F Muzy, *Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities.* J.Four.Anal.appl **4** (2) (1998) 159-174.

[4] B. Andreotti, S. Douady et Y. Couder *An experiment on two aspects of the interaction between strain and vorticity* J. Fluid Mech.444, 151-174 (2001)

[5] A.Cohen, W.Dahmen, I.Daubechies et R.DeVore *Harmonic analysis of the space BV* Preprint

[6] A.Cohen, R.Devore, P.Petrushev et H.Xu *Non linear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$* Amer.J.Math, 121, 587-628, (1999)

[7] I.Daubechies *Ten lectures on wavelets.* S.I.A.M (1992) Science en actes

[8] D. Donoho *An experiment on two aspects of the interaction between strain and vorticity* J. Fluid Mech.444, 151-174 (2001)

[9] K.J. Falconer, *Fractal geometry : mathematical fundations and applications. Chichester, John Wiley and Sons, 1990* .

[10] A.P. Calderon and A. Zygmund *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations.* Studia Math. Vol 20, p.171-227 (1961)

[11] M. Ben Slimane, *Multifractal formalism for selfsimilar functions under the action of nonlinear dynamical systems*, Constr. Approx. J. **15** : 209-240 (1999).

[12] D.L. Donoho, I.M.Johnstone G. Kerkyachan, et D.Picard *Wavelet shrinkage : Asymptopia*, J. Roy. Statist. Soc. Ber, B**57**, no 2, 301-369 (1995).

[13] U. Frisch and G. Parisi, *On the singularity structure of fully developed turbulence ;* appendice à *Fully developped turbulence and intermittency,* de U. Frisch ; Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi, 84-88 North Holland (1985).

[14] Y. Gagne, *Etude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence pleinement développée*, Thèse de l'Université de Grenoble (1987).

[15] B. Guiheneuf,S. Jaffard, and J.Lévy-Véhel *Two results concerning chirps and 2-microlocal exponents prescription*, Appl. Comput. Harmon. Anal., Vol 5, **4** (1998), 487–492.

[16] S.Jaffard. *On the Frisch-Parisi conjecture.* J.Math Pures Appl **79** (2000) 525-552.

[17] S. Jaffard, *Multifractal formalism for functions. Part 1 : Results valid for all functions and Part 2 : Selfsimilar functions*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), 944–998.

[18] S. Jaffard *Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients*, Publ. Mat. **35** (1991), 155–168.

[19] S. Jaffard, *On lacunary wavelet series*, The Annals of Applied Probability. **10** (2000), 313–329.

[20] S. Jaffard, *Oscillation spaces : Properties and applications to fractal and multifratal functions*, J. Math. Phys. **39** (1998), 4129–4141.

[21] S. Jaffard. *The thermodynamics of fractal boundaries.* Preprint Université Paris 12.

[22] S. Jaffard and Y. Meyer. *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillation of functions*, Mem. Am. Math. Soc. **123** (1996), 587.

[23] S. Jaffard, *On the pointwise regularity in critical Besov spaces*, preprint.

[24] P-G. Lemarié et Y. Meyer. *Ondelettes et bases hilbertiennes* Rev. Mat. Iber. Vol.1 p.1-17 (1986).

[25] B. Mandelbrot *Intermittent turbulence in selfsimilar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier.* J. Fluid Mech. V. 62 p. 331 (1974).

[26] B. Mandelbrot *Multiplications aléatoires itérés et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire.* C. R. A. S. 278 pp. 289-292 (1974).

[27] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, 1990.

[28] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs 2* pp 281.282. Hermann, 1990.

[29] Y. Meyer. *Wavelets, vibrations and scaling* pp 281.282. CRM Monograph Series. AMS, 1997.

[30] Y. Meyer. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution.* University Lecture Series, AMS, 2001.

[31] Y. Meyer,H. Xu. *Wavelet analysis and chirps.* J. Appl. Comput. Harmon. Anal. 4, No.4, 366-379 (1997)

[32] L.I. Rudin,E.Fatemi. Osher. *Non linear total variation based noise removal algorithms.* Physica D, n 60, 259-268 (1992)

[33] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs 2* pp 281.282. Hermann, 1990.

[34] J. Lévy-Véhel and S.Seuret, *2-microlocal analysis. Part I : 2-microlocal formalism* Preprint

[35] W.P.Ziemer, *Weakly differentiable functions* Springer (1989)

[36] H.Xu *Généralisation de la théorie des chirps à divers cadres fonctionnels et applications à leur analyse par ondelettes.* Université Paris Dauphine (1996).