# Theoremes limite pour les champs et les suites stationnaires de variables aleatoires reelles

Mohamed El Machkouri

# Théorèmes limite pour les champs et les suites stationnaires de variables aléatoires réelles

Mohamed El Machkouri
Université de Rouen
mohamed.elmachkouri@univ-rouen.fr

5 février 2003

# Table des matières


**INTRODUCTION** **5**

**1 Contre-exemples dans le théorème limite central fonctionnel pour les champs aléatoires réels** **23**

1.1 Définitions et notations préliminaires . . . . . 23

1.2 Résultats principaux . . . . . 25

1.3 Démonstrations . . . . . 27

**2 Inégalités de Kahane-Khintchine et théorème limite central fonctionnel pour les champs aléatoires réels** **39**

2.1 Définitions et notations préliminaires . . . . . 39

2.2 Inégalités de Kahane-Khintchine . . . . . 41

2.3 Un théorème limite central fonctionnel . . . . . 44

2.4 Démonstrations . . . . . 46

**3 Sur les théorèmes limite local et central pour les suites d'accroissements d'une martingale** **55**

3.1 Rappels sur les suites indépendantes . . . . . 55

3.2 Résultats sur les accroissements d'une martingale . . . . . 57

3.3 Démonstrations . . . . . 60

**4 Une application statistique des inégalités de Kahane-Khintchine** **69**

4.1 Quelques inégalités exponentielles . . . . . 69

4.2 Un modèle de régression non paramétrique . . . . . 72

4.3 Démonstrations . . . . . 74

**ANNEXE** **79**

**BIBLIOGRAPHIE** **83**

# INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous intéressons au comportement asymptotique de champs et de suites stationnaires de variables aléatoires réelles. Un champ aléatoire réel $X$ est une famille $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles indexées par le réseau $\mathbb{Z}^d$ et définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En dimension 1, on dit que $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles. Nous dirons que le champ aléatoire $X$ est stationnaire si les vecteurs $(X_{k_1}, X_{k_2}, ..., X_{k_n})$ et $(X_{k_1+l}, X_{k_2+l}, ..., X_{k_n+l})$ ont la même loi pour tout entier $n \geq 1$ et tous éléments $k_1, k_2, ..., k_n$ et $l$ de $\mathbb{Z}^d$. Quitte à considérer un autre espace probabilisé, on peut supposer sans perte de généralité que le champ aléatoire stationnaire $X$ est défini pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$ par $X_k = g \circ T^k$ où $g$ est une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et $T$ est une action de $\mathbb{Z}^d$ qui préserve la mesure $\mathbb{P}$ (i.e. une famille $(T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de transformations mesurables définies de $\Omega$ dans $\Omega$ qui préservent la mesure $\mathbb{P}$ et qui vérifient $T^k \circ T^l = T^{k+l}$). Par exemple, si on considère l'espace probabilisé $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}, \mu)$ où $\mu$ est la loi du processus stationnaire $X$, si $g$ est la projection de coordonnée 0 définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si $T$ est la famille $(T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ des translations de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ définies pour tout $\omega$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et tous $k$ et $l$ dans $\mathbb{Z}^d$ par $(T^k\omega)_l = \omega_{l+k}$ alors le champ aléatoire stationnaire $(g \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ a la même loi $\mu$ que $X$. On dit que $(g\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est le champ aléatoire canonique associé à $X$.

## Le théorème ergodique

Pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$ et toute fonction réelle mesurable $f$ définie sur $\Omega$, on pose $S_\Gamma(f) = \sum_{i\in\Gamma} f \circ T^i$ et on note $\partial\Gamma$ la frontière de $\Gamma$ définie par

$$\partial\Gamma = \{i \in \Gamma\,;\ \text{il existe } j \notin \Gamma \text{ tel que } |i-j| = 1\} \quad \text{où} \quad |i-j| = \max_{1\leq k\leq d} |i_k - j_k|.$$

On dit qu'une suite $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$ est régulière si le cardinal $|\Gamma_n|$ de $\Gamma_n$ tend vers l'infini et si le cardinal $|\partial\Gamma_n|$ de $\partial\Gamma_n$ vérifie $|\partial\Gamma_n| = o(|\Gamma_n|)$. On s'intéresse aux propriétés asymptotiques de la suite de sommes partielles $(S_{\Gamma_n}(f))_{n\geq 0}$. Le théorème ergodique est un théorème fondamental qui fournit le résultat suivant : si $f$ est une variable aléatoire $\mathbb{P}$-intégrable alors la suite $(|\Gamma_n|^{-1} S_{\Gamma_n}(f))_{n\geq 0}$ converge dans $L^1(\mathbb{P})$ vers l'espérance conditionnelle $E(f|\mathcal{I})$ où $\mathcal{I}$ est la tribu des éléments de $\mathcal{F}$ invariants par l'action $T$ (i.e. $A$

appartient à $\mathcal{I}$ si et seulement si $A = T^k A$ p.s. pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$). Si le champ aléatoire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est i.i.d, la convergence dans le théorème ergodique a également lieu presque-sûrement (p.s.) dès que la suite $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Ceci est une simple conséquence de la loi forte des grands nombres i.i.d. en dimension 1 puisque la géométrie du réseau ne joue aucun rôle du fait de l'indépendance. Plus généralement, Tempelman [70] a démontré que si $(C_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de convexes de $\mathbb{R}^d$ dont la suite des diamètres $(r_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini et si $\Lambda_n = C_n \cap \mathbb{Z}^d$ pour tout entier $n$ positif alors le théorème ergodique p.s. a lieu. À présent, si $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^d_+}$ est une suite généralisée de parallépipèdes de $\mathbb{Z}^d$ croissante dans toutes les directions alors une condition suffisante (voir Zygmund [77] ou Krengel [48]) pour que la suite $(|\Lambda_n|^{-1}S_{\Lambda_n}(f))_{n\in\mathbb{Z}^d_+}$ converge p.s. (la convergence est considérée au sens de Moore-Smith (voir Kelley [45])) est que $f(\log^+|f|)^{d-1}$ soit intégrable. Réciproquement, Smythe [68] a démontré que si le champ aléatoire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d_+}$ est i.i.d. alors la convergence p.s. des sommes partielles normalisées $(|\Lambda_n|^{-1}S_{\Lambda_n}(f))_{n\in\mathbb{Z}^d_+}$ entraîne nécessairement l'intégrabilité de $f(\log^+|f|)^{d-1}$.

## Le théorème limite central (TLC)

Considérons une suite stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes. Pour tout entier $n\geq 1$, on note

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f\circ T^i.$$

Lyapunov (1901) fut le premier à donner une démonstration rigoureuse du théorème limite central suivant : si $f$ est de moyenne nulle et de variance 1 alors la suite $(n^{-1/2}S_n(f))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire normale standard.

En 1922, Lindeberg [54] a étendu le TLC de Lyapunov (1901) à des suites de variables aléatoires indépendantes et non nécessairement identiquement distribuées. En adaptant la méthode de Lindeberg, Ibragimov [40] a démontré indépendamment de Billingsley [7] que le TLC est également valide pour les suites stationnaires ergodiques d'accroissements d'une martingale de carrés intégrables (i.e. des suites stationnaires de variables aléatoires appartenant à $L^2(\mathbb{P})$ dont les sommes partielles forment une martingale). Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Billingsley-Ibragimov. Une façon d'étendre le théorème de Billingsley-Ibragimov a un processus stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ plus général est d'approcher ce dernier par une suite stationnaire d'accroissements d'une martingale. En effet, soit $\mathcal{M}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{M}\subset T^{-1}\mathcal{M}$. Si

$$E\left(f|\vee_{i\in\mathbb{Z}}T^{-i}\mathcal{M}\right) = f \quad \text{et} \quad E\left(f|\cap_{i\in\mathbb{Z}}T^{-i}\mathcal{M}\right) = 0 \quad \text{p.s.}$$

alors une condition nécessaire et suffisante (voir Volný [73]) pour que $f$ satisfasse la décomposition suivante

$$f = m + g - g \circ T \tag{0.1}$$

où $m$ et $g$ sont deux fonctions de $L^2(\mathbb{P})$ telles que les variables aléatoires $(m \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une suite d'accroissements d'une martingale relativement à la filtration $(T^{-k}\mathcal{M})_{k\in\mathbb{Z}}$ est que les suites de termes généraux

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(f \circ T^k | \mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{-k} - E(f \circ T^{-k} | \mathcal{M}) \quad \text{convergent dans } L^2(\mathbb{P}). \tag{0.2}$$

Les fonctions $g - g \circ T$ et $g$ sont appelées respectivement fonction cobord et fonction de transfert et la décomposition (0.1) est connue sous le nom de décomposition en cobord. L'intérêt d'une telle décomposition réside dans le fait que l'on peut profiter de théorèmes limites pour la suite d'accroissements d'une martingale $(m \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pour les étendre au processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Cette technique a été utilisée pour la première fois par Gordin [32] (voir également Hall et Heyde [36]) pour démontrer un TLC sous une condition de nature projective. Cependant, on s'aperçoit qu'il n'est pas nécessaire que la fonction de transfert $g$ soit de carré intégrable pour obtenir le TLC à partir de la décomposition (0.1) et du résultat analogue pour les martingales (i.e. le théorème de Billingsley-Ibragimov). En effet, la décomposition (0.1) fournit pour tout entier $n \geq 1$,

$$n^{-1/2} S_n(f) = n^{-1/2} S_n(m) + n^{-1/2}(g - g \circ T^n)$$

et il suffit que $g$ soit mesurable pour que le terme $n^{-1/2}(g - g \circ T^n)$ converge en probabilité vers zéro lorsque $n$ tend vers l'infini. Par conséquent, la condition (0.2) n'est pas nécessaire pour obtenir le TLC et on peut l'améliorer de la façon suivante (cf. Gordin [33] et Volný [73]) : la décomposition (0.1) a lieu avec $m$ dans $L^2(\mathbb{P})$ et $g$ dans $L^1(\mathbb{P})$ si et seulement si les suites de termes généraux

$$\sum_{k=0}^{n-1} E(f \circ T^k | \mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{-k} - E(f \circ T^{-k} | \mathcal{M}) \quad \text{convergent dans } L^1(\mathbb{P})$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} n^{-1/2} E|S_n(f)| < +\infty.$$

Supposons que $f$ soit une variable aléatoire centrée appartenant à $L^2(\mathbb{P})$ et que $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ soit une suite régulière de sous ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$. On dit que le champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ satisfait un théorème limite central si la suite de variables aléatoires $(|\Gamma_n|^{-1/2} S_{\Gamma_n}(f))_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire normale. Lorsque le champ aléatoire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant, la preuve classique du théorème limite central pour les suites de variables aléatoires réelles i.i.d. s'adapte naturellement au cas des champs puisque la géométrie du réseau $\mathbb{Z}^d$ ne joue aucun rôle du fait de l'indépendance. Notons $<_{lex}$ la relation d'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^d$. Puisque la preuve du théorème de Billingsley-Ibragimov s'étend naturellement aux champs stationnaires de type accroissement d'une martingale (i.e. tout champ aléatoire $(m\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ qui satisfait l'égalité $E(m|\,\sigma(m\circ T^j,\, j<_{lex}k))=0$ p.s.), une façon d'étendre le TLC à un champ stationnaire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ plus général avec $f$ dans $L^2(\mathbb{P})$ serait d'établir une décomposition analogue à (0.1) pour une action $T$ de $\mathbb{Z}^d$ donnée. En 1998, Dedecker [14] a adopté une autre approche et a donné un critère projectif qui fournit le TLC pour les champs stationnaires de variables aléatoires appartenant à $L^2(\mathbb{P})$. En effet, pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on définit les sous-ensembles $V_i^k$ de $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante :

$$V_i^1=\{j\in\mathbb{Z}^d\,;\ j<_{lex} i\} \tag{0.3}$$

et pour $k\geq 2$,

$$V_i^k=V_i^1\cap\{j\in\mathbb{Z}^d\,;\ |i-j|\geq k\}\quad \text{où}\quad |i-j|=\max_{1\leq k\leq d}|i_k-j_k|. \tag{0.4}$$

Enfin, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on considère la tribu $\mathcal{F}_k$ engendrée par les variables aléatoires $\{f\circ T^j\,;\ j\in V_0^k\}$.

**Théorème A (Dedecker, 1998)** *Si $f$ est une variable aléatoire réelle de moyenne nulle appartenant à $L^2(\mathbb{P})$ telle que*

$$\sum_{k\in V_0^1}\|f\circ T^k\,E(f|\,\mathcal{F}_{|k|})\|_1<+\infty \tag{0.5}$$

*et si $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ est une suite régulière de sous-ensembles de $\mathbb{Z}^d$ alors la suite de variables aléatoires $(|\Gamma_n|^{-1/2}S_{|\Gamma_n|}(f))_{n\geq 0}$ converge en loi vers $\sqrt{\eta}\,\varepsilon$ où $\varepsilon$ est une gaussienne centrée réduite indépendante de $\mathcal{I}$ et $\eta$ est la variable aléatoire positive $\mathcal{I}$-mesurable définie par $\eta=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}E(f\times f\circ T^k|\,\mathcal{I})$.*

Nous dirons d'une condition telle que (0.5) faisant intervenir une série de termes contenant des espérances conditionnelles qu'il s'agit d'un critère projectif. Lorsque la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est supposée ergodique (i.e. la tribu $\mathcal{I}$ est $\mathbb{P}$-triviale), on peut remarquer que la variable aléatoire $\eta$ n'est rien d'autre que la série des covariances. La démonstration du théorème A repose sur une extension de la méthode initiée par Lindeberg [54] pour les suites de variables aléatoires indépendantes. On peut remarquer que la condition (0.5) est satisfaite si le champ aléatoire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant ou de type accroissement d'une martingale. D'autre part, la condition projective (0.5) fournit de nouveaux critères pour les champs aléatoires mélangeants. En effet, rappelons que pour mesurer le taux de mélange (ou taux de dépendance) entre deux tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, il existe dans la littérature différents type de cœfficients dits de mélange. Nous nous intéressons ici aux cœfficients de mélange fort (ou $\alpha$-mélange) et aux cœfficients de $\phi$-mélange introduits respectivement par Rosenblatt [66] et Ibragimov [39] et définis par

$$\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup\{|\mathbb{P}(U)\,\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(U\cap V)|\,;\, U\in\mathcal{U},\, V\in\mathcal{V}\},$$
$$\phi(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \sup\{|\mathbb{P}(V|U) - \mathbb{P}(V)|\,;\, U\in\mathcal{U},\, \mathbb{P}(U)>0,\, V\in\mathcal{V}\}.$$

On remarque que les cœfficients sont nuls si et seulement si les tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont indépendantes et on peut vérifier que $2\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V}) \leq \phi(\mathcal{U},\mathcal{V})$. À tout champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ non nécessairement stationnaire, on associe les cœfficients de mélange définis pour tout entier $n\geq 0$ et tout couple $(k,l)$ dans $(\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})^2$ par

$$\alpha_{k,l}(n) = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{\Gamma_1},\mathcal{F}_{\Gamma_2})\,;\, |\Gamma_1|\leq k, |\Gamma_2|\leq l, d(\Gamma_1,\Gamma_2)\geq n\},$$
$$\phi_{k,l}(n) = \sup\{\phi(\mathcal{F}_{\Gamma_1},\mathcal{F}_{\Gamma_2})\,;\, |\Gamma_1|\leq k, |\Gamma_2|\leq l, d(\Gamma_1,\Gamma_2)\geq n\}$$

où pour toute partie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$, la tribu $\mathcal{F}_\Gamma$ est engendrée par les variables aléatoires $\{X_i\,;\, i\in\Gamma\}$ et la distance $d(\Gamma_1,\Gamma_2)$ entre deux sous-ensembles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de $\mathbb{Z}^d$ est donnée par $d(\Gamma_1,\Gamma_2) = \min\{|i-j|\,;\, i\in\Gamma_1, j\in\Gamma_2\}$. S'il existe un couple $(k,l)$ dans $(\mathbb{N}^*\cup\{\infty\})^2$ tel que les cœfficients $\alpha_{k,l}(n)$ (resp. $\phi_{k,l}(n)$) tendent vers zéro lorsque $n$ tend vers l'infini, on dit que le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est $\alpha$-mélangeant (resp. $\phi$-mélangeant). En utilisant une inégalité de covariance due à Rio [64], on peut majorer les termes de la série qui apparaîssent dans (0.5) à l'aide des cœfficients $\alpha_{1,\infty}$ et de la fonction quantile $Q_f$ (i.e. l'inverse cadlag de la fonction $t\mapsto\mathbb{P}(|f|>t)$). Le critère projectif (0.5) est alors vérifié dès que

$$\sum_{k>0} k^{d-1}\int_0^{\alpha_{1,\infty}(k)} Q_f^2(u)\,du < +\infty. \tag{0.6}$$

D'autre part, en utilisant des inégalités de mélange dues à Serfling [67], on peut également majorer les termes de la série (0.5) à l'aide des cœfficients $\phi_{\infty,1}$. Le théorème A reste alors valide si l'on remplace la condition (0.5) par la suivante

$$\sum_{k>0} k^{d-1}\phi_{\infty,1}(k) < +\infty. \tag{0.7}$$

## Le théorème limite central fonctionnel (TLCF)

On dit d'un théorème limite qu'il est fonctionnel ou encore qu'il s'agit d'un principe d'invariance s'il a lieu dans un espace fonctionnel. En l'occurrence, nous nous intéressons à des versions fonctionnelles du théorème limite central. Considérons une suite $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$

de variables aléatoires réelles identiquement distribuées définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t$ de $[0,1]$, on note

$$S_n(f,t) = \sum_{i=0}^{[nt]-1} f \circ T^i + (nt - [nt]) f \circ T^{[nt]} \tag{0.8}$$

où $[\,.\,]$ désigne la fonction partie entière. On dit que la suite $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfait un théorème limite central fonctionnel ou principe d'invariance si la suite de processus de sommes partielles $\{n^{-1/2} S_n(f,t)\,;\, t \in [0,1]\}$ converge en loi vers un mouvement brownien dans l'espace $C([0,1])$ des fonctions réelles continues définies sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. En remarquant que la fonction réelle définie sur l'espace $C([0,1])$ qui à une fonction $g$ associe le réel $g(1)$ est continue par rapport à la norme uniforme, le TLC devient un cas particulier du principe d'invariance. Le premier principe d'invariance a été établi par Donsker [19] pour des suites de variables aléatoires i.i.d. Pour les suites stationnaires d'accroissements d'une martingale, le résultat est du à Billingsley [7]. En 1975, Heyde [37] a démontré que si $f$ est une variable aléatoire centrée de carré intégrable et si le processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ satisfait une certaine condition projective alors le principe d'invariance a lieu. En effet, la condition projective de Heyde [37] est équivalente (cf. Volný [73]) à la condition (0.2) et par conséquent le principe d'invariance de Heyde [37] s'obtient via la décomposition en cobord de $f$ à partir du résultat analogue de Billingsley [7] pour les suites d'accroissements d'une martingale. Contrairement au TLC, Volný et Samek [74] ont montré que le principe d'invariance peut ne plus avoir lieu si la fonction de transfert $g$ est seulement dans $L^1(\mathbb{P})$ et ceci même lorsque la fonction cobord $g - g \circ T$ est dans $L^2(\mathbb{P})$. En adaptant le critère projectif (0.5) à la dimension 1, Dedecker et Rio [17] ont donné une nouvelle condition suffisante pour qu'une suite stationnaire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles satisfasse un principe d'invariance. Comme pour les champs, cette condition projective fournit de nouveaux critères pour les suites $\alpha$-mélangeantes mais aussi pour les chaînes de Markov stationnaires. Enfin, Dedecker et Merlevède [16] ont récemment amélioré ce résultat en donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une version plus forte du principe d'invariance (appelée théorème limite central conditionnel) ait lieu pour la suite $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Le principe d'invariance peut également être formulé pour un champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ en étendant la définition (0.8) du processus de Donsker [19] de la façon suivante : pour tout entier $n \geq 1$ et tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, notons $R_{i/n}$ le cube défini par l'égalité

$$R_{i/n} = ](i_1 - 1)/n, i_1/n] \times \ldots \times ](i_d - 1)/n, i_d/n].$$

Soit $\lambda_{i/n}$ la mesure de probabilité ayant pour densité $n^d \, \mathbb{1}_{R_{i/n}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $\mathbb{R}^d$ et considérons la mesure aléatoire définie pour tout borélien $A$ de $[0,1]^d$

par

$$\nu_n(f,A) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{i/n}(A) f\circ T^i. \tag{0.9}$$

Considérons la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$ de la forme $[0,t] = [0,t_1]\times ... \times [0,t_d]$ pour tout $t$ dans $[0,1]^d$. On voit que le processus $\{S_n(f,t)\,;\, t\in[0,1]\}$ défini par (0.8) n'est rien d'autre que le processus $\{\nu_n(f,A)\,;\, A\in\mathcal{Q}_1\}$ indexé par la classe $\mathcal{Q}_1$ des intervalles d'origine 0 de $[0,1]$. En dimension 1, les intervalles sont à la fois les connexes, les convexes et les boules euclidiennes et par conséquent la classe $\mathcal{Q}_1$ est la principale classe d'intérêt pour les processus indexés par des ensembles. En revanche, en dimension supérieure, la collection des quadrants n'est qu'une classe parmi d'autres. C'est pourquoi, il est intéressant d'étudier la validité du principe d'invariance pour des classes $\mathcal{A}$ de boréliens aussi larges que possibles. Sur la collection $\mathcal{A}$, on définit la distance entre deux ensembles par l'égalité $\rho(A,B)=\sqrt{\lambda(A\Delta B)}$. On appelle entropie métrique de la classe $\mathcal{A}$ et on note $H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)$ le logarithme du plus petit nombre de boules de rayon $\varepsilon$ (relativement à la pseudo-métrique $\rho$) nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}$. Notons $C(\mathcal{A})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathcal{A}$ muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}}|f(A)|$. On dit que $W$ est un mouvement brownien standard indexé par $\mathcal{A}$ si $W$ est un processus gaussien dont les trajectoires appartiennent à $C(\mathcal{A})$ et qui satisfait l'égalité $\mathrm{Cov}\,(W(A),W(B)) = \lambda(A\cap B)$. D'après Dudley [21], nous savons qu'un tel processus existe dès que

$$\int_0^1 \sqrt{H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon)}\,d\varepsilon < +\infty. \tag{H}$$

La condition (H) est satisfaite par une famille importante de classes d'ensembles appelées classes de Vapnik-Chervonenkis dont la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants et les boules euclidiennes de $[0,1]^d$ font partie. La condition (H) de Dudley est également satisfaite par des classes plus "grosses" comme les convexes de $[0,1]^2$ ou la classe des ensembles à bords $\alpha$-différentiables avec $\alpha > d-1$ (cf. Dudley [22]). Nous dirons qu'un champ aléatoire $(f\circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ satisfait un théorème limite central fonctionnel ou principe d'invariance si la suite de processus $\{n^{-d/2}\nu_n(f,A)\,;\, A\in\mathcal{A}\}$ converge en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$ vers un mélange de mouvements browniens indexés par la classe $\mathcal{A}$ (autrement dit, le processus limite est de la forme $\eta W$ où $W$ est un mouvement brownien indexé par $\mathcal{A}$ et $\eta$ est une variable aléatoire positive indépendante de $W$). Les premiers résultats de ce type ont été obtenus pour des champs de variables aléatoires réelles i.i.d. lorsque la classe d'ensembles $\mathcal{A}$ coïncide avec la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$. En effet, Wichura [75] démontra ce résultat pour des champs de variables aléatoires de carrés intégrables améliorant ainsi celui de Kuelbs [49] dans lequel des conditions plus restrictives sont requises au niveau des moments. Ces résultats se réduisent en dimension 1 au principe d'invariance de Donsker [19]. Basu et Dorea [5] ont montré que le principe d'invariance a encore lieu lorsque le processus de sommes partielles défini par (0.9) est indexé par la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$ et issu d'un champ aléatoire réel stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de type accroissement d'une martingale avec $f$ dans $L^2(\mathbb{P})$. En 2001, Dedecker a donné un critère projectif sous lequel le principe d'invariance a lieu lorsque le processus de sommes partielles est issu d'un champ aléatoire réel stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ avec $f$ dans $L^\infty(\mathbb{P})$ et indexé par une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers (i.e. $\lambda(\partial A) = 0$ pour tout $A$ dans $\mathcal{A}$) de $[0,1]^d$ dont la seule restriction est de vérifier la condition (H) de Dudley. Plus précisément, considérons les sous-ensembles $V_i^k$ de $\mathbb{Z}^d$ définis par les égalités (0.3) et (0.4) et adoptons pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$ la notation suivante

$$E_k(X_i) = E(X_i|\,\mathcal{F}_{V_i^k}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{V_i^k} = \sigma(X_j\,;\, j \in V_i^k).$$

**Théorème B (Dedecker, 2001)** *Soit $f$ une variable aléatoire réelle de moyenne nulle appartenant à $L^\infty(\mathbb{P})$ telle que*

$$\sum_{k\in V_0^1} \|f \circ T^k\, E_{|k|}(f)\|_\infty < +\infty \tag{0.10}$$

*et soit $\mathcal{A}$ une collection de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition* (H) *de Dudley. Alors la suite $\{n^{-d/2}\nu_n(f,A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ converge en loi dans $C(\mathcal{A})$ vers $\sqrt{\eta}W$ où $W$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\mathcal{I}$ et $\eta$ est la variable aléatoire positive $\mathcal{I}$-mesurable définie par $\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E(f \times f \circ T^k|\,\mathcal{I})$.*

De nouveau, en utilisant les inégalités de Serfling [67], la condition projective (0.10) fournit le critère suivant pour les champs aléatoires $\phi$-mélangeants,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi_{\infty,1}(|k|) < +\infty. \tag{0.11}$$

Le fait d'exiger $f$ dans $L^\infty(\mathbb{P})$ peut paraître au premier abord comme une hypothèse beaucoup trop forte. En réalité, nous allons voir par la suite que cette hypothèse est plus qu'une simple condition de confort technique. D'autre part, dans le cas particulier où le processus de sommes partielles (0.9) est indexé par la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$, Dedecker [15] donne également un critère projectif qui fournit le principe d'invariance pour un champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ lorsque $f$ a des moments d'ordre strictement supérieur à 2. De nouveau, une façon d'obtenir le résultat lorsque $f$ est seulement dans $L^2(\mathbb{P})$ serait d'établir une version multidimensionnelle de la décomposition en cobord (0.1) et de profiter du principe d'invariance de Basu et Dorea [5] pour les champs de type accroissement d'une martingale.

Supposons que la classe $\mathcal{A}$ de boréliens de $[0,1]^d$ soit précompacte pour l'inclusion. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe une collection finie $\mathcal{A}(\varepsilon)$ de boréliens de

$[0,1]^d$ telle que pour tout $A$ dans $\mathcal{A}$, il existe $A^-$ et $A^+$ dans $\mathcal{A}(\varepsilon)$ tels que $A^- \subset A \subset A^+$ et $\rho(A^-, A^+) \leq \varepsilon$. On appelle entropie métrique avec inclusion et on note $\mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$, le logarithme népérien du cardinal de la plus petite collection $\mathcal{A}(\varepsilon)$ satisfaisant cette propriété. Bass [4] et indépendamment Alexander et Pyke [1] ont montré que si $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de variables aléatoires réelles indépendantes avec $f$ dans $L^2(\mathbb{P})$ alors le principe d'invariance a lieu dès que la classe $\mathcal{A}$ satisfait la condition plus stricte que (H) suivante

$$(\mathbb{H}) \qquad \int_0^1 \sqrt{\mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)}\, d\varepsilon < +\infty.$$

Ce principe d'invariance pour les champs aléatoires indépendants étend un résultat de Pyke [63] où les moments requis dépendent de la classe $\mathcal{A}$ considérée et sont d'autant plus restrictifs que la taille de $\mathcal{A}$ est grande. La démonstration de Bass [4] utilise de manière intensive l'inégalité exponentielle de Bernstein pour les sommes partielles de variables aléatoires indépendantes et bornées. Depuis, l'utilité des inégalités exponentielles dans l'étude du principe d'invariance ne s'est pas démentie. En effet, la démonstration du théorème B repose également sur ce type d'inégalités. Plus précisément, Dedecker [15] a établi une inégalité de type Marcinkiewicz-Zygmund pour les moments d'ordre $p$ des sommes partielles qui généralise au cas des champs un résultat de Rio [65]. En optimisant en $p$ cette inégalité, il obtient une inégalité exponentielle de type Hoeffding sous la condition projective (0.10). Cette inégalité exponentielle permet de mettre en évidence que le processus $\{n^{-d/2}\nu_n(f, A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ est sous-gaussien uniformément en $n$, ce qui fournit la relative compacité de ce dernier via un argument de chaînage classique. D'autre part, en remplaçant la condition (H) par la condition plus stricte $(\mathbb{H})$, en établissant des inégalités exponentielles de type Bernstein et en adaptant la méthode de Bass [4], Dedecker [15] donne également des critères pour des champs aléatoires $\phi$-mélangeants non bornés ayant des moments d'ordre strictement supérieur à 2.

Les deux premiers chapitres de cette thèse sont consacrés au principe d'invariance pour les champs aléatoires réels stationnaires non bornés. Tout d'abord, nous montrons dans le premier chapitre (voir également El Machkouri et Volný [26]) que l'on ne peut pas remplacer purement et simplement la condition d'entropie métrique $(\mathbb{H})$ par la condition moins stricte (H) dans le résultat de Bass [4] et Alexander et Pyke [1]. Plus précisément, on démontre le résultat suivant.

**Théorème C** (Théorème 1 du chapitre 1) *Pour tout réel p positif, il existe un champ* $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *de variables aléatoires i.i.d, symétriques et p-intégrables et une collection* $\mathcal{A}$ *de boréliens réguliers de* $[0,1]^d$ *qui satisfait la condition* (H) *tels que le processus de sommes partielles* $\{n^{-d/2}\nu_n(f, A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ *ne converge pas en loi dans l'espace* $C(\mathcal{A})$.

Dans le premier chapitre de cette thèse (voir également El Machkouri et Volný [25]), on se pose également la question de savoir si le théorème B de Dedecker reste valide pour des champs aléatoires stationnaires qui sont seulement $p$-intégrable ($0 < p < +\infty$) et nous répondons de manière négative en exhibant pour tout réel $p$ positif un champ aléatoire stationnaire $p$-intégrable de type accroissement d'une martingale et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition $(\mathbb{H})$ d'entropie métrique avec inclusion tels que le principe d'invariance n'ait pas lieu. Formellement, notre premier résultat est le suivant : considérons le système dynamique $(\Sigma, \mathcal{S}, \mu, T)$ où $\Sigma$ est un espace de Lebesgue et $T$ est une action de $\mathbb{Z}^d$ qui préserve la mesure de probabilité $\mu$. Supposons que ce système dynamique soit ergodique (i.e. $\mu$ est ergodique) et d'entropie strictement positive (cf. Petersen [60] pour une définition de l'entropie).

**Théorème D** (Théorème 2 du chapitre 1) *Pour tout réel p positif, il existe une application réelle $f$ dans $L^p(\mu)$ et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ vérifiant la condition $(\mathbb{H})$ d'entropie métrique avec inclusion telles que le champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ soit de type accroissement d'une martingale et telles que le principe d'invariance n'ait pas lieu relativement à $\mathcal{A}$. Autrement dit, le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2}\nu_n(f, A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ ne converge pas en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$.*

Le théorème D montre que le principe d'invariance de Dedecker (Théorème B) ne peut s'étendre aux champs aléatoires $p$-intégrables ($0 < p < +\infty$) même si on exige une condition plus stricte en termes d'entropie métrique sur la classe $\mathcal{A}$ (en l'occurrence la condition $(\mathbb{H})$). Ainsi, on se rend compte que l'hypothèse de bornitude dans le résultat de Dedecker (Théorème B) n'est pas seulement une condition technique. De plus, notre résultat met en évidence que le principe d'invariance pour les champs aléatoires indépendants démontré par Bass [4] et Alexander et Pyke [1] ne peut s'étendre aux champs de type accroissement d'une martingale. D'autre part, le champ aléatoire $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ que l'on construit explicitement en utilisant une version multidimensionnelle du lemme de Rokhlin (cf. Conze [11] et Katznelson et Weiss [44]) est un champ de type accroissement d'une martingale au sens strict de Nahapetian et Petrosian [57] puisqu'il vérifie l'égalité

$$E(f \mid \sigma(f \circ T^j\,;\, j \neq 0)) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Les théorèmes B et D posent tout naturellement la question suivante : peut-on obtenir un théorème limite central fonctionnel pour des champs aléatoires réels ayant des moments exponentiels finis ? Le chapitre 2 de cet ouvrage est consacré à cette question (voir également El Machkouri [23]). Tout d'abord, nous établissons des inégalités de type Kahane-Khintchine dans des espaces de Orlicz induits par des fonctions de Young exponentielles (cf. Théorème 3 et Corollaire 1 du chapitre 2). Il s'agit de donner des majorations pour les normes dites de Luxemburg de sommes partielles de champs de variables aléatoires réelles ayant des moments exponentiels finis. En effet, si $\psi$ est une fonction de Young (i.e. une fonction strictement croissante, convexe, définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi(\infty) = \infty$), on appelle espace de Orlicz associé à la fonction de Young $\psi$, l'espace $L_\psi$ de toutes les variables aléatoires $Z$ qui vérifient $E(\psi(|Z|/c)) < +\infty$ pour un certain $c > 0$. On munit $L_\psi$ de la norme de Luxemburg définie pour toute variable aléatoire $Z$ par

$$\|Z\|_\psi = \inf\{c > 0\,;\, E(\psi(|Z|/c)) \leq 1\}.$$

L'espace de Orlicz $(L_\psi, \|\,.\,\|_\psi)$ est alors un espace de Banach. Une classe importante de fonctions de Young est la classe des fonctions exponentielles $\{\psi_\beta\,;\, \beta > 0\}$ définies pour tout $\beta > 0$ et tout réel $x$ positif par

$$\psi_\beta(x) = \exp((x + h_\beta)^\beta) - \exp(h_\beta^\beta) \quad \text{où} \quad h_\beta = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/\beta} \mathbb{1}_{\{0<\beta<1\}}.$$

La forme un peu compliquée de la fonction $\psi_\beta$ vient du fait que la fonction $x \mapsto \exp(x^\beta) - 1$ n'est pas convexe sur l'intervalle $[0, h_\beta]$ lorsque $\beta$ appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite de Rademacher (i.e. une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = \pm 1) = 1/2$) et soit $p > 0$ un réel fixé. L'inégalité suivante est due à Khintchine [46].

**Proposition A (Khintchine, 1923)** *Il existe une constante $C(p) > 0$ qui ne dépend que de $p$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ et tous nombres réels $a_1, ..., a_n$, on ait*

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right\|_p \leq C(p) \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{0.12}$$

Soit $\psi_2$ la fonction de Young définie pour tout réel $x$ positif par $\psi_2(x) = \exp(x^2) - 1$. Kahane [43] a en particulier étendu l'inégalité de Khintchine à l'espace de Orlicz $L_{\psi_2}$.

**Proposition B (Kahane, 1985)** *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ et tous nombres réels $a_1, ..., a_n$, on ait*

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right\|_{\psi_2} \leq C \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{0.13}$$

Enfin, dans son article consacré aux inégalités de Kahane-Khintchine, Peskir [59] a étendu l'inégalité (0.13) a des suites générales de variables aléatoires indépendantes et bornées.

**Proposition C (Peskir, 1993)** *Considérons une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, symétriques et bornées. Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_{\psi_2} \leq \sqrt{8/3} \left( \sum_{i=1}^n \|X_i\|_\infty^2 \right)^{1/2} \tag{0.14}$$

*où* $\sqrt{8/3}$ *est la plus petite constante possible. Si les variables aléatoires* $(X_k)_{k\geq 1}$ *ne sont pas symétriques, l'inégalité* (0.14) *reste valide avec la constante* $\sqrt{32/3}$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ non nécessairement stationnaire de variables aléatoires centrées et notons $\beta(q) = 2q/(2-q)$ pour tout réel $0 < q < 2$. Considérons les sous-ensembles $V_i^k$ définis par les égalités (0.3) et (0.4) et rappelons que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on a posé

$$E_k(X_i) = E(X_i | \mathcal{F}_{V_i^k}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{V_i^k} = \sigma(X_j\,;\, j\in V_i^k\}.$$

On se propose d'étendre au champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ l'inégalité (0.14) établie par Peskir [59] pour des suites de variables aléatoires indépendantes et bornées.

**Théorème E** (Théorème 3 du chapitre 2) *Soit* $0 < q < 2$ *tel que* $X_k$ *soit dans* $L_{\psi_{\beta(q)}}$ *pour tout* $k$ *dans* $\mathbb{Z}^d$. *Il existe une constante universelle* $M_1(q) > 0$ *qui ne dépend que de* $q$ *telle que pour toute partie finie* $\Gamma$ *de* $\mathbb{Z}^d$,

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \leq M_1(q)\left(\sum_{i\in\Gamma} b_{i,q}(X)\right)^{1/2} \tag{0.15}$$

*où*

$$b_{i,q}(X) = \|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + \sum_{k\in V_i^1}\left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}}.$$

*Si* $X_k$ *appartient à* $L^\infty(\mathbb{P})$ *pour tout* $k$ *dans* $\mathbb{Z}^d$ *alors pour tout* $0 < q \leq 2$, *il existe une constante universelle* $M_2(q) > 0$ *qui ne dépend que de* $q$ *telle que pour toute partie finie* $\Gamma$ *de* $\mathbb{Z}^d$,

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \leq M_2(q)\left(\sum_{i\in\Gamma} b_{i,\infty}(X)\right)^{1/2} \tag{0.16}$$

*où*

$$b_{i,\infty}(X) = \|X_i\|^2_\infty + \sum_{k\in V_i^1}\|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_\infty.$$

Nous démontrons ces inégalités à partir de l'inégalité de type Marcinkiewicz-Zygmund pour les moments d'ordre $p$ des sommes partielles de champs aléatoires établie par Dedecker [15] et d'une propriété relative aux normes de Luxemburg associées à des fonctions de Young exponentielles (cf. Lemme 4 du chapitre 2). On évite ainsi la méthode d'optimisation en $p$ utilisée par Dedecker [15] dans la démonstration du théorème B et dont la mise en oeuvre nécessite que les variables aléatoires considérées soient bornées. Dès lors, en utilisant un argument de chaînage classique, nous sommes en mesure d'établir la relative compacité en loi du processus de sommes partielles normalisées $\{n^{-d/2}\nu_n(f,A)\,;\, A\in\mathcal{A}\}$ issu d'un champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ayant des moments exponentiels finis.

**Théorème F** (Théorème 5 du chapitre 2) *Soit $f$ une variable aléatoire réelle de moyenne nulle. Supposons qu'il existe deux réels $0 < q < 2$ et $\theta > 0$ tels que*

$$E\exp(\theta|f|^{\beta(q)}) < +\infty$$

*et*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left\| \sqrt{|f \circ T^k\, E_{|k|}(f)|} \right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} < +\infty. \tag{0.17}$$

*Si $\mathcal{A}$ est une classe de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ qui satisfait la condition d'entropie métrique*

$$\int_0^1 (H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon))^{1/q}\, d\varepsilon < +\infty \tag{0.18}$$

*alors la suite $\{n^{-d/2}\nu_n(f,A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ converge en loi dans $C(\mathcal{A})$ vers $\sqrt{\eta}W$ où $W$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\mathcal{I}$ et $\eta$ est la variable aléatoire positive $\mathcal{I}$-mesurable définie par $\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E(f \times f\circ T^k|\mathcal{I})$.*

En combinant les inégalités de Serfling [67] avec le lemme 4 du chapitre 2, on montre que le théorème F reste valide si on remplace la condition projective (0.17) par la condition suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k|)} < +\infty. \tag{0.19}$$

D'autre part, on voit que le contrôle de la taille de la classe $\mathcal{A}$ se fait en termes d'entropie métrique classique (sans inclusion). À notre connaissance, tous les résultats antérieurs qui établissent un principe d'invariance pour des champs aléatoires non bornés utilisent une notion plus stricte d'entropie métrique (cf. Alexander et Pyke [1], Bass [4], Dedecker [15] et Ziegler [76]).

## Le théorème limite local (TLL) et la vitesse de convergence dans le TLC

Dans le troisième chapitre de cette thèse (voir également El Machkouri et Volný [27]), on s'intéresse au théorème limite local et à la vitesse de convergence dans le théorème limite central pour des suites stationnaires d'accroissements d'une martingale. De manière très heuristique, on peut dire que le théorème limite local est aux densités ce que le théorème limite central est aux fonctions de répartition. En effet, si $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ est une suite stationnaire de variables aléatoires réelles centrées, réduites, indépendantes et de fonction de répartition commune $F$, le théorème limite central classique assure la convergence uniforme des fonctions de répartition $F_n$ des sommes partielles normalisées $S_n(f)/\sqrt{n}$ vers la fonction de répartition $\Phi$ de la loi normale standard. De plus, le théorème limite central de Berry-Esseen démontré par Berry [6] et Esseen [28] fournit la vitesse optimale $n^{-1/2}$ lorsque les variables aléatoires (non nécessairement identiquement distribuées) sont bornées dans $L^3(\mathbb{P})$. On peut vérifier que ce résultat asymptotique pour les fonctions de répartition $F_n$ n'entraîne pas nécessairement la convergence des densités $f_n$ de ces sommes partielles vers la densité $\varphi$ de la loi normale standard même si la fonction $F$ est différentiable. Après tout, dans un cadre plus général, il est bien connu qu'une suite de fonctions peut converger uniformément sans que la suite de ses dérivées ne converge. Par conséquent, certaines conditions supplémentaires sont nécessaires pour obtenir la convergence des densités. En 1954, Gnedenko [31] a résolu le problème en établissant le résultat suivant.

**Théorème G (Gnedenko, 1954)** *Soit $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles indépendantes telle que $f$ soit de moyenne nulle et de variance 1 et notons $f_n$ et $\varphi$ les densités respectives de la variable aléatoire $n^{-1/2}(f + ... + f \circ T^{n-1})$ et de la loi normale standard par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sup_x |f_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

*est qu'il existe un entier $n_0$ tel que la densité $f_{n_0}$ soit bornée.*

Gnedenko [30] a également démontré un résultat similaire pour des suites de variables aléatoires à valeurs dans un réseau : considérons une suite $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi non dégénérée et supposons qu'il existe deux constantes $b$ et $h > 0$ telles que $f$ prenne des valeurs de la forme $b + Nh$ où $N$ parcours $\mathbb{Z}$. On appelle $h$ le pas du réseau et on dit que le pas du réseau est maximal si $h$ est le plus grand nombre strictement positif tel que la loi de $f$ soit portée par $\{b + Nh,\ N \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que $f$ soit de variance finie $\sigma^2$, notons $m$ sa moyenne et posons

$$P_n(N) = \mathbb{P}\left(S_n(f) = nb + Nh\right).$$

**Théorème H (Gnedenko, 1948)** *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sup_N \left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{nb + Nh - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

*est que le pas $h$ du réseau soit maximal.*

Ce type de théorèmes limite qui traitent de la répartition locale (en termes de densités) au lieu des répartitions cumulées (avec les fonctions de répartition) sont appelés théorèmes limite locaux. Les théorèmes limite locaux ont beaucoup été étudiés pour les suites de variables aléatoires indépendantes avec à la clé des estimations de la vitesse de convergence (cf. Petrov [61] et Ibragimov et Linnik [41]). D'autre part, un certain nombre d'articles ont été consacrés à ces théorèmes lorsque la loi limite n'est pas nécessairement une loi normale mais une loi stable arbitraire (cf. Ibragimov et Linnik [41]). Notons également que Broise [10] a établi des théorèmes limite locaux et centraux via des outils de théorie spectrale. En ce qui concerne la vitesse de convergence dans le théorème limite central de Billingsley-Ibragimov pour les suites d'accroissements d'une martingale, Ibragimov [40] a établi la convergence en loi de la suite $(S_{\gamma(n)}/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ de sommes partielles arrêtées issues d'une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'accroissements bornés d'une martingale vers une variable aléatoire normale avec la vitesse $n^{-1/4}$. En 1982, Bolthausen [8] a établi une vitesse de convergence d'ordre $n^{-1/2}\log n$ pour les sommes partielles normalisées $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ issues d'une suite d'accroissements non bornés d'une martingale sous des conditions relatives au comportement asymptotique des variances conditionnelles. Pour des résultats plus récents, on pourra se référer aux travaux de Haeusler [34] et Jan [42]. Soit $(\Sigma, \mathcal{S}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique d'entropie strictement positive où $\Sigma$ est un espace de Lebesgue et $T$ est un automorphisme de $\Sigma$ qui préserve la mesure de probabilité $\mu$.

**Théorème I** (Théorème 11 du chapitre 3) *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui décroît vers zéro. Il existe une application réelle $f$ dans $L^\infty(\mu)$ telle que le processus stationnaire $(f\circ T^k)_{k\geq 0}$ soit une suite d'accroissements d'une martingale qui prennent uniquement les valeurs -1, 0 ou 1 et une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante telle que pour tout entier $k\geq 0$,*

$$\mu(S_{n_k}(f)=0)\geq a_{n_k} \tag{0.20}$$

*et*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}}\leq x\right)-\Phi(x)\right|\geq\frac{a_{n_k}}{2} \tag{0.21}$$

*où $\sigma^2(f)=E(f^2)$ et $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale standard.*

L' inégalité (0.20) montre que le théorème limite local peut ne pas avoir lieu pour les suites d'accroissements d'une martingale (ce qui répond à une question posée par Y. Derriennic). Autrement dit, les hypothèses du théorème limite local de Gnedenko [30] (Théorème H) pour les suites de variables aléatoires réelles i.i.d. à valeurs dans un réseau ne suffisent plus lorsqu'on considère des accroissements d'une martingale. En ce qui concerne la vitesse de convergence dans le théorème limite central, le théorème I montre à travers l'inégalité (0.21) qu'il existe des suites d'accroissements d'une martingale pour lesquelles la vitesse de convergence est arbitrairement lente. Nous donnons également un résultat similaire pour les suites d'accroissements d'une martingale dont les sommes partielles admettent des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, si le système dynamique $(\Sigma, \mathcal{S}, \mu, T)$ est ergodique et d'entropie infinie nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème J** (Théorème 12 du chapitre 3) *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels qui décroit vers zéro. Pour toute constante positive L suffisamment grande, il existe une application réelle $f$ dans $L^\infty(\mu)$ telle que le processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ soit une suite d'accroissements d'une martingale, les sommes partielles $S_n(f)$ aient des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la densité de $f$ soit bornée et telle que la propriété suivante soit satisfaite : il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante, une suite $(\rho_k)_{k\geq 0}$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro telles que pour tout entier $k \geq 0$,*

$$\frac{1}{\rho_k}\,\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \geq L \tag{0.22}$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \geq a_{n_k}. \tag{0.23}$$

Le théorème J entraîne en particulier que l'hypothèse de bornitude sur la densité de l'une des sommes partielles $S_n(f)$ n'est pas suffisante pour obtenir le TLL si on considère des variables aléatoires non indépendantes.

# Un modèle de régression non paramétrique

Dans la dernière partie de cet ouvrage (voir également El Machkouri [24]), nous donnons une application des inégalités de Kahane-Khintchine établies dans le chapitre 2 à travers l'étude d'un modèle de régression non paramétrique où les erreurs sont données par un champ de variables aléatoires réelles dépendantes. Nous considérons des données $(Y_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}^d}$ générées par le modèle

$$Y_i = g(i/n) + \varepsilon_i, \quad i \in \{1, ..., n\}^d \tag{0.24}$$

où $g$ est une fonction réelle inconnue définie sur $[0,1]^d$ et $(\varepsilon_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}^d}$ est un champ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. On estime la fonction de régression $g$ par l'estimateur à noyau $g_n$ défini pour tout $x$ dans $[0,1]^d$ par

$$g_n(x) = \frac{1}{(nh_n)^d}\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}^d} Y_i K\left(\frac{x - i/n}{h_n}\right) \tag{0.25}$$

où $K$ est un noyau de probabilité défini sur $\mathbb{R}^d$ et $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs qui converge vers 0. Hall et Hart [35] ont étudié le modèle (0.24) lorsque les erreurs sont

données par une suite stationnaire $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles et de variances finies. En particulier, ils ont montré que la vitesse optimale de convergence en probabilité de $g_n(x)$ vers $g(x)$ est de l'ordre $n^{-2/5}$ si $h_n = n^{-1/5}$ et si la série de terme général $E(\varepsilon_0\varepsilon_i)$ converge absolument. Bosq [9] a établi la convergence presque-sûre de $g_n(x)$ vers $g(x)$ avec la vitesse $n^{-\beta}$ pour un certain $\beta$ dans l'intervalle $]0,1/3[$ lorsque les erreurs $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ forment une suite $\alpha$-mélangeante et lorsqu'il existe $a>0$ et $\beta/2<\nu<1/2-\beta$ tels que $h_n = an^{-\nu}$. Enfin, Laib [50] a étudié le modèle (0.24) lorsque les erreurs sont données par une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'accroissements d'une martingale.
Les résultats que nous établissons dans le chapitre 4 fournissent la convergence presque-sûre de l'estimateur $g_n(x)$ lorsque les erreurs sont modélisées par un champ $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles dépendantes. Avec les notations du théorème E et sous certaines hypothèses de régularité sur la fonction $g$ et sur le noyau de probabilité $K$, on démontre le résultat suivant.

**Théorème K** (Théorème 16 du chapitre 4) *Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n h_n^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n\,h_n^{d+1}} = 0. \tag{0.26}$$

*Considérons les deux hypothèses suivantes :*

**k1**) *Il existe un réel $0<q<2$ tel que les variables aléatoires $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ appartiennent à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{(\log n)^{1/q}}{(nh_n)^d} \left( \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} b_{i,q}(\varepsilon) \right)^{1/2} = 0. \tag{0.27}$$

**k2**) *Les variables aléatoires $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{P})$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{\sqrt{\log n}}{(nh_n)^d} \left( \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} b_{i,\infty}(\varepsilon) \right)^{1/2} = 0. \tag{0.28}$$

*Sous l'une ou l'autre des hypothèses* **k1)** *et* **k2)***, on a pour tout $x$ dans $]0,1[^d$,*

$$\alpha_n |g_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0. \tag{0.29}$$

Dans le cas où les erreurs sont données par un champ aléatoire stationnaire, on obtient le corollaire suivant.

**Théorème L** (Corollaire 4 du chapitre 4) *Supposons que le champ aléatoire $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ soit stationnaire et soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui satisfait la condition (0.26). La conclusion (0.29) du théorème K reste valide si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

**l1)** *Il existe $0 < q < 2$ tel que la variable aléatoire $\varepsilon_0$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{(\log n)^{1/q}}{(\sqrt{n}h_n)^d} = 0$$

*et*

$$\sum_{k\in V_0^1} \left\| \sqrt{|\varepsilon_k E_{|k|}(\varepsilon_0)|} \right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 < +\infty. \tag{0.30}$$

**l2)** *La variable aléatoire $\varepsilon_0$ appartient à $L^\infty(\mathbb{P})$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{\sqrt{\log n}}{(\sqrt{n}h_n)^d} = 0$$

*et*

$$\sum_{k\in V_0^1} \|\varepsilon_k E_{|k|}(\varepsilon_0)\|_\infty < +\infty. \tag{0.31}$$

Les théorèmes K et L étendent dans plusieurs directions les résultats de Laib [50]. En effet, les conditions projectives (0.30) et (0.31) sont en particulier satisfaites si le champ aléatoire $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant ou de type accroissement d'une martingale. D'autre part, en utilisant les inégalités de mélange de Serfling [67], on montre que le théorème L reste valable si on remplace respectivement les conditions projectives (0.30) et (0.31) par les conditions (0.19) et (0.11). Les démonstrations que nous proposons de nos résultats sont plus simples que celles de Laib [50] car elles s'appuient sur des inégalités exponentielles induites par les inégalités de Kahane-Khintchine établies dans le chapitre 2 qui permettent un contrôle plus efficace du terme $g_n(x) - Eg_n(x)$ uniformément pour tout $x$ dans $[0,1]^d$.

# Chapitre 1

# Contre-exemples dans le théorème limite central fonctionnel pour les champs aléatoires réels

## 1.1 Définitions et notations préliminaires

Soit $\mathcal{A}$ une collection de boréliens de $[0,1]^d$. On munit $\mathcal{A}$ de la pseudo-métrique $\rho$ définie pour tous éléments $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$ par $\rho(A,B) = \sqrt{\lambda(A\Delta B)}$ et on note $C(\mathcal{A})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathcal{A}$ que l'on munit de la norme uniforme définie pour toute fonction $f$ appartenant à $C(\mathcal{A})$ par

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A\in\mathcal{A}} |f(A)|.$$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel stationnaire. Le processus de sommes partielles que l'on considère est défini pour tout $A$ dans $\mathcal{A}$ et tout entier $n \geq 1$ par

$$S_n(A) = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \lambda(nA \cap R_i)X_i \tag{1.1}$$

où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $R_i$ est le cube unité défini pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ par l'égalité

$$R_i = ]i_1 - 1, i_1] \times \dots \times ]i_d - 1, i_d].$$

Pour contrôler la taille de la classe $\mathcal{A}$, on utilise l'entropie métrique : pour tout $\varepsilon > 0$, on appelle entropie métrique de $\mathcal{A}$ et on note $H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$, le logarithme népérien du plus petit nombre $N(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$ de boules ouvertes (pour la pseudo-métrique $\rho$) de rayon $\varepsilon$ nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}$. Une notion plus stricte est celle d'entropie métrique avec inclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe une collection finie $\mathcal{A}(\varepsilon)$ de boréliens de $[0,1]^d$ telle que

pour tout $A$ dans $\mathcal{A}$, il existe $A^-$ et $A^+$ dans $\mathcal{A}(\varepsilon)$ tels que $A^- \subset A \subset A^+$ et $\rho(A^-, A^+) \leq \varepsilon$. On appelle entropie métrique avec inclusion et on note $\mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$, le logarithme népérien du cardinal de la plus petite collection $\mathcal{A}(\varepsilon)$ satisfaisant cette propriété.
On appelle mouvement brownien standard indexé par $\mathcal{A}$, le processus gaussien $W$ de moyenne nulle, à trajectoires dans $C(\mathcal{A})$ qui vérifie pour tous $A$ et $B$ dans $\mathcal{A}$, l'égalité $\mathrm{Cov}\,(W(A), W(B)) = \lambda(A \cap B)$. On sait d'après Dudley [21] qu'un tel processus existe dès que

$$\int_0^1 \sqrt{H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)}\, d\varepsilon < +\infty \tag{1.2}$$

Puisque $H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon) \leq \mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, le mouvement brownien $W$ est bien défini dès que

$$\int_0^1 \sqrt{\mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)}\, d\varepsilon < +\infty. \tag{1.3}$$

Notons également $d$ la pseudo-métrique définie par $d(A, B) = \lambda(A \Delta B)$ pour tous $A$ et $B$ dans $\mathcal{A}$. En remarquant que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon^2) = \mathbb{H}(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon)$, on voit que la condition (1.3) est équivalente à la suivante

$$\int_0^1 \left( \frac{\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon)}{\varepsilon} \right)^{1/2} d\varepsilon < +\infty. \tag{1.4}$$

On dit que le théorème limite central fonctionnel (TLCF) ou que le principe d'invariance a lieu relativement à la classe $\mathcal{A}$ si le processus de sommes partielles normalisées $\{n^{-d/2} S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ converge en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$ vers un mouvement brownien indexé par $\mathcal{A}$.
L'un des premiers principes d'invariance pour de larges classes de boréliens de $[0,1]^d$ a été établi pour des champs de variables aléatoires réelles i.i.d. par Bass [4] et indépendamment Alexander et Pyke [1]. Ce résultat affirme que si la classe $\mathcal{A}$ satisfait la condition (1.4) d'entropie métrique avec inclusion et si les variables aléatoires i.i.d. sont de carrés intégrables alors le principe d'invariance a lieu. Plus récemment, Dedecker [15] a établi un principe d'invariance (cf. Théorème B du chapitre d'introduction) pour des classes d'ensembles dont la seule restriction est de satisfaire la condition (1.2) et pour tout champ stationnaire $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles bornées satisfaisant la condition projective

$$\sum_{k \in V_0^1} \| X_k E(X_0 | \mathcal{F}_{|k|}) \|_\infty < +\infty \tag{1.5}$$

où pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$, on a noté $|k| = \max_{1 \leq i \leq d} |k_i|$,

$$\mathcal{F}_{|k|} = \sigma(X_j\,;\, j <_{lex} 0,\, |j| \geq |k|) \quad \text{et} \quad V_0^1 = \{j \in \mathbb{Z}^d\,;\, j <_{lex} 0\}.$$

Notre objectif est de construire pour tout réel $p$ positif un champ de variables aléatoires i.i.d, $p$-intégrables et de moyennes nulles et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ qui satisfait la condition d'entropie métrique (1.2) tels que le principe d'invariance n'ait pas lieu relativement à la classe $\mathcal{A}$ (cf. Théorème 1). Nous construisons également un champ stationnaire de variables aléatoires $p$-intégrables de type accroissement d'une martingale (cf. définitions (1.7) et (1.8) ci-dessous) et une classe $\mathcal{A}'$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition (1.4) d'entropie métrique avec inclusion tels que le principe d'invariance n'ait pas lieu relativement à la collection $\mathcal{A}'$ (cf. Théorème 2). Autrement dit, nous mettons en évidence le fait que d'une part les hypothèses sur la classe de boréliens garantissant le principe d'invariance pour les champs aléatoires réels i.i.d. (cf. Bass [4] et Alexander et Pyke [1]) ou de type accroissements bornés d'une martingale (cf. Dedecker [15]) ne suffisent plus si on considère des champs aléatoires de type accroissement d'une martingale qui sont seulement $p$-intégrables et que d'autre part, on ne peut pas remplacer purement et simplement la condition d'entropie métrique avec inclusion (1.4) par la condition moins stricte (1.2) dans le résultat de Bass [4] et Alexander et Pyke [1]. Néanmoins, il faut noter que Ziegler [76] a démontré que le principe d'invariance de Bass [4] et Alexander et Pyke [1] a lieu pour toute collection $\mathcal{A}$ satisfaisant la condition suivante

$$\int_0^1 \sqrt{\log N(\mathcal{A},\varepsilon)}\, d\varepsilon < +\infty \tag{1.6}$$

où $\rho_{\mathcal{Q}}$ est la pseudo-métrique définie pour toute mesure de probabilité $\mathcal{Q}$ sur l'espace mesurable $([0,1]^d, \mathcal{B}([0,1]^d))$ et tous $A$ et $B$ dans $\mathcal{A}$ par $\rho_{\mathcal{Q}}(A,B) = \sqrt{\mathcal{Q}(A\Delta B)}$ et où on a noté $N(\mathcal{A},\varepsilon) = \sup_{\mathcal{Q}} N(\mathcal{A},\rho_{\mathcal{Q}},\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, la condition (1.6) est satisfaite par les classes de Vapnik-Chervonenkis.

## 1.2 Résultats principaux

Notre premier résultat est le suivant.

**Théorème 1** *Pour tout réel p positif, il existe un champ* $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *de variables aléatoires réelles i.i.d, symétriques et p-intégrables et une classe* $\mathcal{A}$ *de boréliens réguliers de* $[0,1]^d$ *vérifiant la condition d'entropie métrique* (1.2) *tels que le processus de sommes partielles* $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A\in\mathcal{A}\}$ *ne converge pas en loi dans l'espace* $C(\mathcal{A})$.

Le théorème 1 met en évidence que dans le résultat de Bass [4] et Alexander et Pyke [1], la condition (1.4) d'entropie métrique avec inclusion ne peut pas être purement et simplement remplacée par la condition moins stricte (1.2).

Sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, on définit la relation d'ordre lexicographique $<_{lex}$ de la façon suivante : si $i=(i_1,...,i_d)$ et $j=(j_1,...,j_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}^d$ distincts, la notation $i <_{lex} j$

signifie que ou bien $i_1 < j_1$ ou bien il existe $p$ dans $\{2, ..., d\}$ tel que $i_p < j_p$ et $i_q = j_q$ pour $1 \leq q < p$. On dit qu'un champ aléatoire réel $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de type accroissement d'une martingale (en abrégé AM) si pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$,

$$E(X_k | \mathcal{G}_k) = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{où} \quad \mathcal{G}_k = \sigma(X_j\,;\, j <_{lex} k). \tag{1.7}$$

Ce type de champ aléatoire vérifie le critère projectif (1.5) introduit par Dedecker [15].
Une définition plus stricte est celle utilisée par Nahapetian et Petrosian [57] : le champ $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ aléatoire de type accroissement d'une martingale au sens fort (en abrégé AMF) si pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$,

$$E(X_k | \mathcal{H}_k) = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{où} \quad \mathcal{H}_k = \sigma(X_j\,;\, j \neq k). \tag{1.8}$$

Considérons le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ où $\Omega$ est un espace de Lebesgue, $\mu$ est une mesure de probabilité et $T$ est une action de $\mathbb{Z}^d$ préservant la mesure $\mu$ (i.e. pour tous éléments $i$ et $j$ dans $\mathbb{Z}^d$, $T^i$ et $T^j$ sont des transformations mesurables définies de $\Omega$ dans $\Omega$ qui préservent la mesure $\mu$ et qui vérifient $T^i \circ T^j = T^{i+j}$). Un élément $A$ de la tribu $\mathcal{F}$ est dit invariant si $T^kA = A$ presque-sûrement (p.s.) pour tout élément $k$ de $\mathbb{Z}^d$. On note $\mathcal{I}$ la tribu des éléments invariants de $\mathcal{F}$ et on dit que $\mu$ est ergodique si tout élément $A$ de $\mathcal{I}$ est de mesure 0 ou 1. Supposons que l'entropie du système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ soit strictement positive (cf. Petersen [60] pour une définition de l'entropie) et que la mesure $\mu$ soit ergodique. Si $n$ est un entier strictement positif, $A$ un borélien de $[0,1]^d$ et $f$ une application réelle mesurable définie sur $\Omega$, on adopte la notation suivante

$$S_n(f, A) = \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \lambda(nA \cap R_i)\, f \circ T^i.$$

**Théorème 2** *Pour tout réel $p$ positif, il existe une application réelle $f$ dans $L^p(\mu)$ et une classe $\mathcal{A}$ de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ (i.e. $\lambda(\partial A) = 0$ pour tout $A$ dans $\mathcal{A}$) vérifiant la condition* (1.4) *d'entropie métrique avec inclusion telles que le champ aléatoire stationnaire $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ soit de type AMF mais ne satisfasse pas le principe d'invariance relativement à la classe $\mathcal{A}$. Autrement dit, le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2}S_n(f, A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ ne converge pas en loi dans l'espace $C(\mathcal{A})$.*

Ce résultat montre que contrairement aux champs aléatoires i.i.d. étudiés par Bass [4] et simultanément Alexander et Pyke [1], la condition (1.4) d'entropie métrique ne garantit pas le principe d'invariance pour les champs aléatoires $p$-intégrables de type AM. Néanmoins, si on considère la classe $\mathcal{Q}_d$ des quadrants de $[0,1]^d$, le principe d'invariance a lieu aussi bien pour les champs aléatoires i.i.d. que pour les champs aléatoires de type AM. En effet, Basu et Dorea [5] ont démontré que les champs de type AM satisfont le principe d'invariance relativement à la classe des quadrants de $[0,1]^d$ lorsque seuls les moments d'ordre 2 sont supposés finis et Dedecker [15] a étendu ce résultat à des champs aléatoires ayant des moments d'ordre strictement supérieur à 2 qui vérifient une condition projective.

## 1.3 Démonstrations

### Preuve du théorème 1

Sans perte de généralité, on peut supposer que $p$ est un entier arbitrairement grand. Considérons le champ $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ par la propriété suivante : la variable aléatoire $X_0$ est symétrique et vérifie $\mu(X_0 = 0) = 0$ et $2\mu(X_0 \geq k) = k^{-p-1}$ pour tout entier $k \geq 1$. Le champ aléatoire $X$ ainsi défini est $p$-intégrable puisque

$$E(|X_0|^p) = \sum_{k\geq 1} \mu(|X_0|^p \geq k) = 2\sum_{k\geq 1} \mu(X_0 \geq k^{1/p}) < +\infty.$$

Fixons un entier $r \geq 1$ et considérons les nombres réels suivants :

$$n_r = 4^{rp},$$

$$\beta_r = n_r^{d/2p} = 2^{rd},$$

$$k_r = n_r^d \mu(X_0 \geq \beta_r) = 2^{rd(p-1)-1},$$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{k_r}{n_r^d}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2^{-rd(p+1)/2}.$$

On peut remarquer que les suites $(n_r)_{r\geq 1}$, $(\beta_r)_{r\geq 1}$ et $(k_r)_{r\geq 1}$ sont des suites strictement croissantes d'entiers naturels tandis que $(\varepsilon_r)_{r\geq 1}$ est une suite strictement décroissante de nombres réels qui converge vers zéro.

#### Construction de la classe d'ensembles

Considérons la collection $\mathcal{A}_r$ des boréliens $A$ de $[0,1]^d$ qui vérifient la propriété suivante : ou bien $A$ est vide ou bien il existe $i_l = (i_{l,1}, ..., i_{l,d})$ dans $\{1, ..., n_r\}^d$, $1 \leq l \leq k_r$ tels que

$$A = \bigcup_{l=1}^{k_r} \left]\frac{i_{l,1}-1}{n_r}, \frac{i_{l,1}}{n_r}\right] \times ... \times \left]\frac{i_{l,d}-1}{n_r}, \frac{i_{l,d}}{n_r}\right].$$

Posons alors

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_r \cup \mathcal{C}_r$$

où

$$\mathcal{B}_r = \bigcup_{j=1}^{r-1} \mathcal{A}_j \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_r = \bigcup_{j=r}^{+\infty} \mathcal{A}_j.$$

Nous allons montrer que la classe $\mathcal{A}$ vérifie la condition (1.2) d'entropie métrique classique. Pour cela, nous devons estimer les nombres d'entropie $N(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon_r)$. Pour tout entier $j \geq 1$, le cardinal $|\mathcal{A}_j|$ de $\mathcal{A}_j$ est égal à $1 + C_{n_j^d}^{k_j}$, ainsi,

$$N(\mathcal{B}_r, \rho, \varepsilon_r) \leq \sum_{j=1}^{r-1} (1 + C_{n_j^d}^{k_j}) \leq 2rn_r^{dk_r}.$$

D'autre part, puisque chaque élément de la classe $\mathcal{C}_r$ appartient à la boule de centre $\emptyset$ et de rayon $\varepsilon_r$, il s'en suit que $N(\mathcal{C}_r, \rho, \varepsilon_r) = 1$. En remarquant que

$$N(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon_r) \leq N(\mathcal{B}_r, \rho, \varepsilon_r) + N(\mathcal{C}_r, \rho, \varepsilon_r),$$

on obtient

$$N(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon_r) \leq 1 + 2rn_r^{dk_r},$$

soit

$$H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon_r) = \log N(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon_r) \leq 3dk_r \log n_r.$$

Finalement, on aboutit à l'estimation suivante

$$\sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon_{r-1} \sqrt{H(\mathcal{A}, \rho, \varepsilon_r)} \leq \sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon_{r-1} \sqrt{3dk_r \log n_r} \sim \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{2^{rd(p-1)/2}\sqrt{r}}{2^{rd(p+1)/2}} = \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{r}}{2^{rd}} < +\infty.$$

Autrement dit, la classe $\mathcal{A}$ satisfait la condition (1.2).

### Étude de la tension du processus de sommes partielles

Pour démontrer que le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\ A \in \mathcal{A}\}$ ne converge pas en loi dans $C(\mathcal{A})$, il suffit (cf. Pollard [62]) de prouver l'existence d'un nombre réel $\theta > 0$ tel que

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \mu \left( \sup_{\substack{A,B \in \mathcal{A} \\ \rho(A,B) < \delta}} n^{-d/2} |S_n(A) - S_n(B)| \geq \theta \right) > 0.$$

Pour tout entier $r \geq 1$, notons $\Lambda_r = \{1, ..., n_r\}^d$ et considérons l'ensemble $W_r$ des éléments $\omega$ de $\Omega$ qui vérifient

$$\sum_{i \in \Lambda_r} \mathbb{1}_{\{X_i(\omega) \geq \beta_r\}} \geq k_r.$$

**Lemme 1** *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout entier $r \geq 1$,*

$$\mu(W_r) \geq c. \tag{1.9}$$

**Preuve.** Soit $r \geq 1$ un entier fixé. Pour tout $i$ dans $\Lambda_r$, posons

$$Y_i = \mathbb{1}_{\{X_i \geq \beta_r\}} - \mu(X_0 \geq \beta_r).$$

La famille $\{Y_i\,;\, i \in \Lambda_r\}$ est une suite finie de variables i.i.d, centrées et bornées par 1. D'après une inégalité exponentielle établie par Kolmogorov (cf. Ledoux et Talagrand [52], Lemme 8.1), pour tout $\gamma > 0$, il existe deux constantes strictement positives $K(\gamma)$ (suffisamment grande) et $\varepsilon(\gamma)$ (suffisamment petite) qui ne dépendent que de $\gamma$ telles que pour tout $K(\gamma)b \leq t \leq \varepsilon(\gamma)b^2$,

$$\mu\left(\sum_{i\in\Lambda_r} Y_i > t\right) \geq \exp\left(-(1+\gamma)t^2/2b^2\right)$$

où $b^2 = \sum_{i\in\Lambda_r} EY_i^2$. En particulier, il existe une constante universelle $K > 0$ telle que

$$\mu\left(\sum_{i\in\Lambda_r} Y_i > Kb\right) \geq \exp\left(-K^2\right).$$

En posant $c = \exp(-K^2) > 0$ et en gardant à l'esprit les définitions de la constante $k_r$ et des variables aléatoires $Y_i$, on déduit

$$\mu\left(\sum_{i\in\Lambda_r} \mathbb{1}_{\{X_i\geq\beta_r\}} > Kb + k_r\right) \geq c.$$

Finalement, on obtient l'inégalité (1.9) en notant que $Kb \geq 0$. Ce qui achève la preuve du lemme 1. $\square$

Soit $\omega$ fixé dans $W_r$ et soit $\Gamma_r^*(\omega)$ l'ensemble des éléments $i$ de $\Lambda_r$ tels que $X_i(\omega) \geq \beta_r$. Par définition de l'ensemble $W_r$, on sait que $|\Gamma_r^*(\omega)| \geq k_r$. Soit $\Gamma_r(\omega)$ un sous-ensemble de $\Gamma_r^*(\omega)$ à $k_r$ éléments et posons

$$A_r(\omega) = \bigcup_{i\in\Gamma_r(\omega)} \left]\frac{i_1-1}{n_r}, \frac{i_1}{n_r}\right] \times \ldots \times \left]\frac{i_d-1}{n_r}, \frac{i_d}{n_r}\right] \in \mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}.$$

On remarquera que pour tout $\omega$ dans $W_r$ et tout $i$ dans $\Lambda_r$, on a

$$\lambda(n_r A_r(\omega) \cap R_i) = \mathbb{1}_{\Gamma_r(\omega)}(i).$$

Par conséquent,

$$n_r^{-d/2} S_{n_r}(A_r(\omega)) = n_r^{-d/2} \sum_{i\in\Lambda_r} \lambda(n_r A_r(\omega) \cap R_i) X_i(\omega) = n_r^{-d/2} \sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} X_i(\omega).$$

Puisque $X_i(\omega) \geq \beta_r$ pour tout $i$ dans $\Gamma_r(\omega)$, on déduit

$$n_r^{-d/2} S_{n_r}(A_r(\omega)) \geq n_r^{-d/2} |\Gamma_r(\omega)| \beta_r = n_r^{-d/2} k_r \beta_r = \frac{1}{2} n_r^{d/2} \beta_r^{-p} = 1/2.$$

Ainsi, pour tout entier $r \geq 1$ et tout $\omega$ dans $W_r$, on obtient

$$|n_r^{-d/2} S_{n_r}(A_r(\omega))| \geq 1/2. \tag{1.10}$$

Soit $\delta > 0$ un réel fixé. Il existe $R \geq 1$ tel que pour tout entier $r \geq R$ et tout $\omega$ dans $W_r$, on ait $\lambda(A_r(\omega)) = k_r/n_r^d \leq \delta^2$. Pour tout $r \geq R$, on a

$$\mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ \rho(A,B)<\delta}} |n_r^{-d/2}S_{n_r}(A) - n_r^{-d/2}S_{n_r}(B)| \geq 1/2\right) \geq \mu\left(\sup_{\lambda(A)<\delta^2} |n_r^{-d/2}S_{n_r}(A)| \geq 1/2\right).$$

A fortiori,

$$\mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ \rho(A,B)<\delta}} |n_r^{-d/2}S_{n_r}(A) - n_r^{-d/2}S_{n_r}(B)| \geq 1/2\right) \geq \mu\left(\left\{\omega \in W_r \;\middle|\; |n_r^{-d/2}S_{n_r}(A_r(\omega))| \geq 1/2\right\}\right).$$

En utilisant les minorations (1.9) et (1.10), on obtient

$$\mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ \rho(A,B)<\delta}} |n_r^{-d/2}S_{n_r}(A) - n_r^{-d/2}S_{n_r}(B)| \geq 1/2\right) \geq \mu(W_r) \geq c > 0.$$

On a donc démontré que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ \rho(A,B)<\delta}} |n^{-d/2}S_n(A) - n^{-d/2}S_n(B)| \geq 1/2\right) \geq c > 0.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 1. □

## Preuve du théorème 2

### Construction du champ aléatoire

On a besoin du lemme suivant dont la version unidimensionnelle a été démontrée dans l'article de Lesigne et Volný [53]. On dit qu'une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ est $T$-invariante si pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$, on a l'égalité $T^k\mathcal{G} = \mathcal{G}$ p.s.

**Lemme 2** *Il existe deux sous-tribus $T$-invariantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ et une fonction $\mathcal{B}$-mesurable $g$ définie sur $\Omega$ telles que*

- *les tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient indépendantes,*
- *le processus stationnaire $(g \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ soit un champ de variables aléatoires i.i.d. de moyennes nulles dont la loi est portée par $\{-1, 0, 1\}$,*

– *le système dynamique $(\Omega, \mathcal{C}, \mu_{\mathcal{C}}, T)$ soit apériodique (i.e. pour tout élément non nul $k$ de $\mathbb{Z}^d$ et pour $\mu_{\mathcal{C}}$-presque tout $\omega$ dans $\Omega$, on a $T^k\omega \neq \omega$).*

*De plus, il existe un réel $0 < a \leq 1$ qui ne dépend que de l'entropie $h(T)$ du système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ tel que $\mu(g = \pm 1) = a/2$ et $\mu(g = 0) = 1 - a$. Enfin, si $h(T) > 1$ alors on peut choisir $a = 1$.*

**Preuve.** Notons $h$ l'entropie du système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ et soit $0 < a \leq 1$ tel que

$$h_1 = -(1-a)\log_2(1-a) - a\log_2(a/2) < h.$$

Posons $\Omega_1 = \{-1, 0, 1\}$ et notons $\nu$ la mesure produit $(a/2, 1-a, a/2)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$. Considérons le système dynamique $S_1 = (\Omega_1^{\mathbb{Z}^d}, \nu, (\theta_k)_{k\in\mathbb{Z}^d})$ où pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$, $\theta_k$ est définie par $(\theta_k\omega)_i = \omega_{i+k}$ pour tout $\omega$ dans $\Omega_1^{\mathbb{Z}^d}$ et tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$. $S_1$ est un système dynamique de Bernoulli d'entropie $h_1$ (cf. Conze [11], exemple 2, page 18). Considérons un autre Bernoulli $S_2$ d'entropie inférieure ou égale à $h - h_1$. $S_1 \times S_2$ est alors un Bernoulli d'entropie plus petite que $h$. D'après la version multidimensionnelle du théorème de Sinaï démontrée par Ornstein et Weiss [58], $S_1 \times S_2$ est un facteur du système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$. Nous avons donc dans ce système une copie $\widetilde{S_1}$ de $S_1$ et une copie $\widetilde{S_2}$ de $S_2$ qui sont indépendantes. Ce qui fournit les sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $F$ une bijection bimesurable définie de $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ dans $S_1$ et soit $p_0$ la projection de coordonnée 0 définie de $S_1$ dans $\{-1, 0, 1\}$. On vérife alors que la fonction $g = p_0 \circ F$ satisfait les propriétés voulues. Ce qui achève la preuve du lemme 2. □

Dorénavant, pour simplifier les calculs, nous supposerons que $h(T) > 1$. On peut donc choisir $g$ de sorte que le champ aléatoire $(g \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ prenne les valeurs $-1$ ou $+1$ avec la probabilité $1/2$ (le cas général $h(T) > 0$ se traite de façon similaire). Fixons un entier $d \geq 1$ et supposons sans perte de généralité que $p$ est un entier naturel arbitrairement grand. Pour tout réel $r \geq 1$, on pose

$$n_r = 4 \times 9^{8rp^2},$$

$$L_r = \frac{n_r^{d/2}}{9^{2(r-1)dp}} = 2^d \times 9^{2dp} \times 9^{2rdp(2p-1)},$$

$$k_r = \frac{n_r^d}{9^{4rdp^2}} = 4^d \times 9^{4rdp^2},$$

$$K_r = \frac{n_r}{k_r^{1/d}} = 9^{4rp^2},$$

$$\varepsilon_r = \frac{L_r \times K_r^d}{n_r^d} = \frac{L_r}{k_r} = \frac{9^{2dp}}{2^d \times 9^{2rdp}}.$$

Le lecteur pourra vérifier que si on considère $\alpha = (2p+1)^{-1}$ dans $]0,1[$ alors pour tout réel $r \geq 1$,

$$\varepsilon_r = \frac{L_{\alpha r}}{n_{\alpha r}^d}. \tag{1.11}$$

D'autre part, les suites $(n_r)_{r\geq 1}$, $(k_r)_{r\geq 1}$, $(L_r)_{r\geq 1}$, $(L_r/2)_{r\geq 1}$, $(L_r^{1/d})_{r\geq 1}$ et $(K_r)_{r\geq 1}$ sont des suites croissantes d'entiers positifs tandis que $(\varepsilon_r)_{r\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs qui décroît vers zéro. De plus, on peut vérifier que pour tout entier $r \geq 2$,

$$\frac{n_r^{d/2}}{L_r} \geq 2 \sum_{s=1}^{r-1} \frac{n_s^{d/2}}{L_s}. \tag{1.12}$$

Soit $(\delta_r)_{r\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{r\to+\infty} L_r\, \delta_r = 0. \tag{1.13}$$

Puisque le système $(\Omega, \mathcal{C}, \mu_{\mathcal{C}}, T)$ est apériodique, la version multidimensionnelle du lemme de Rokhlin démontrée par Conze [11] et indépendamment Katznelson et Weiss [11] assure que pour tout entier $r \geq 1$, il existe un ensemble $\mathcal{C}$-mesurable $F_r$ tel que les éléments de $\{T^{-u}F_r\}_{u\in\{0,\ldots,K_r-1\}^d}$ soient deux à deux disjoints et

$$\mu\left(\bigcup_{u_1=0}^{K_r-1} \cdots \bigcup_{u_d=0}^{K_r-1} T^{-(u_1,\ldots,u_d)}\, F_r\right) \geq 1 - \delta_r. \tag{1.14}$$

Pour tout entier $r \geq 1$, posons

$$f_r = \frac{n_r^{d/2}}{L_r}\, g\, \mathbb{1}_{F_r}$$

et notons

$$f = \sum_{r=1}^{+\infty} f_r.$$

Ainsi, $f$ est une application réelle non bornée définie sur $\Omega$. De plus, pour tout entier $r \geq 1$,

$$\|f_r\|_p^p \leq \mu(F_r) \times \left(\frac{n_r^{d/2}}{L_r}\right)^p \leq \frac{1}{K_r^d} \times \left(\frac{n_r^{d/2}}{L_r}\right)^p = 9^{-2(r+1)dp^2}.$$

On en déduit

$$\|f\|_p \leq \sum_{r=1}^{+\infty} 9^{-2(r+1)dp} < +\infty.$$

Par conséquent, $f$ appartient à $L^p(\mu)$. Soit $k$ un élément de $\mathbb{Z}^d$, on pose

$$\mathcal{F}_k = \sigma(g \circ T^j\,;\, j \neq k) \vee \mathcal{C} \supset \sigma(f \circ T^j\,;\, j \neq k).$$

Par hypothèse, la variable aléatoire $g \circ T^k$ est indépendante de la tribu $\mathcal{C}$ et des variables aléatoires $g \circ T^j$, $j \neq k$. Par conséquent,

$$E(f \circ T^k \,|\, \mathcal{F}_k) = E(g \circ T^k \,|\, \mathcal{F}_k) \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{n_r^{d/2}}{L_r} \mathbb{1}_{T^{-k}F_r} = 0 \quad \text{p.s.}$$

En particulier, le champ aléatoire réel $(f \circ T^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est de type AMF.

**Construction de la classe d'ensembles**

Pour tout entier $r \geq 1$, on note $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des boréliens $A$ de $[0,1]^d$ satisfaisant la propriété suivante : il existe $(u_1, ..., u_d)$ dans $\{0, ..., K_r - 1\}^d$ tel que pour tout $l$ dans $\{1, ..., L_r/2\}$, il existe un vecteur $(a_{l,s})_{s \in \{1,...,d\}}$ dans $\{0, ..., L_r^{1/d} - 1\}^d$ tel que

$$i_{l,s} = u_s + a_{l,s} K_r$$

et

$$A = \bigcup_{l=1}^{L_r/2} \left] \frac{i_{l,1} - 1}{n_r}, \frac{i_{l,1}}{n_r} \right] \times ... \times \left] \frac{i_{l,d} - 1}{n_r}, \frac{i_{l,d}}{n_r} \right].$$

Notons

$$\mathcal{A} = \bigcup_{r=1}^{+\infty} \mathcal{A}_r.$$

Pour montrer que la collection $\mathcal{A}$ satisfait la condition (1.4) d'entropie métrique avec inclusion, on a besoin d'estimer pour tout entier $r \geq 2$, les nombres $\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)$.
Soient $r \geq 2$ et $1 \leq j \leq r - 1$ deux entiers. Puisque le cardinal $|\mathcal{A}_j|$ de $\mathcal{A}_j$ est égal à $K_j^d \, C_{L_j}^{L_j/2}$, on a la grossière majoration suivante

$$\exp(\mathbb{H}(\mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)) \leq K_j^d \, C_{L_j}^{L_j/2}. \tag{1.15}$$

Cependant, si $L_j \leq \varepsilon_r n_j^d$, on peut obtenir une majoration plus fine, à savoir,

$$\exp(\mathbb{H}(\mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)) \leq K_j^d + 1. \tag{1.16}$$

De plus, puisque $\cup_{j \geq r} \mathcal{A}_j$ est inclus dans le cube $[0, \varepsilon_r^{1/d}]^d$ de mesure $\varepsilon_r$, on a

$$\exp(\mathbb{H}(\cup_{j \geq r} \mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)) \leq 2. \tag{1.17}$$

D'autre part, d'après la définition de l'entropie métrique avec inclusion, on a

$$\exp(\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)) \leq \sum_{j=1}^{r-1} \exp(\mathbb{H}(\mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)) + \exp(\mathbb{H}(\cup_{j \geq r} \mathcal{A}_j, d, \varepsilon_r)). \tag{1.18}$$

On déduit des inégalités (1.15), (1.16), (1.17) et (1.18), la majoration suivante

$$\exp(\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)) \leq 2 + \sum_{j=1}^{r-1} (K_j^d + 1) \; 1\!\!1_{\{L_j \leq \varepsilon_r \, n_j^d\}} + K_j^d \, C_{L_j}^{L_j/2} \; 1\!\!1_{\{L_j > \varepsilon_r \, n_j^d\}}. \tag{1.19}$$

Finalement, d'après (1.11), (1.19) et le fait que la suite $(L_j/n_j^d)_{j \geq 1}$ soit décroissante, on obtient

$$\exp(\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)) \leq 2 + \sum_{j=1}^{[\alpha r]} K_j^d \, C_{L_j}^{L_j/2} + \sum_{j=[\alpha r]+1}^{r-1} (K_j^d + 1) \tag{1.20}$$

où $[\,.\,]$ symbolise la fonction partie entière. À présent, pour que la classe $\mathcal{A}$ vérifie la condition (1.4) d'entropie métrique avec inclusion, il suffit de s'assurer de la convergence de la série

$$\Sigma = \sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon_{r-1} \left( \frac{\mathbb{H}(\mathcal{A}, d, \varepsilon_r)}{\varepsilon_r} \right)^{1/2}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\Sigma &\leq \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left( \log \left( 2 + \sum_{j=1}^{[\alpha r]} K_j^d \, C_{L_j}^{L_j/2} + \sum_{j=[\alpha r]+1}^{r-1} (K_j^d + 1) \right) \right)^{1/2} \qquad \text{d'après (1.20)} \\
&\leq \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log \left( 2 + L_{\alpha r}! \, [\alpha r] \, K_r^d + (r - 1 - [\alpha r]) \, (K_r^d + 1) \right)} \\
&\leq \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log \left( 3 \, r \, K_r^d \, (L_{\alpha r}!) \right)} \\
&\leq \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log (3 \, r)} + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\log (K_r^d)} + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{L_{\alpha r} \, \log (L_{\alpha r})} \\
&\leq 3 \underbrace{\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{r-1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{L_{\alpha r} \, \log (L_{\alpha r})}}_{\Sigma'}.
\end{aligned}$$

Vérifions que la série $\Sigma'$ est convergente. En effet,

$$\Sigma' = 9^{2dp} \sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon_r^{1/2} \sqrt{L_{\alpha r} \log (L_{\alpha r})} = \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{L_{\alpha r}}{n_{\alpha r}^{d/2}} \sqrt{\log (L_{\alpha r})} \quad \text{d'après (1.11)}.$$

Ainsi,

$$\Sigma' \sim \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{L_{\alpha r}}{n_{\alpha r}^{d/2}} \sqrt{r} = \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{r}}{9^{2(\alpha r - 1)dp}} < +\infty.$$

Finalement, la série $\Sigma$ est convergente et par suite la classe $\mathcal{A}$ vérifie bien la condition (1.4) d'entropie métrique avec inclusion.

### Étude de la tension du processus de sommes partielles

Maintenant, nous allons mettre en évidence que le processus de sommes partielles normalisées $\{n^{-d/2}S_n(f,A)\,;\, A\in\mathcal{A}\}$ n'est pas tendu dans l'espace $C(\mathcal{A})$. Pour cela, il suffit (cf. Pollard [62]) de montrer qu'il existe $\beta>0$ tel que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ d(A,B)<\delta}} n^{-d/2}|\,S_n(f,A)-S_n(f,B)|\,>\beta\right)>0.$$

Fixons un entier $r\geq 1$. Notons $W_r$ l'ensemble des $\omega$ dans $\Omega$ satisfaisant la propriété suivante : il existe $u=u(\omega)=(u_1,...,u_d)$ dans $\{0,...,K_r-1\}^d$ tel que pour tout élément $l=(l_1,...,l_d)$ de $\{0,...,L_r^{1/d}-1\}^d$ et tout entier $s\geq r+1$, $T^{u+l\,K_r}\omega$ appartienne à $F_r$ mais n'appartienne pas à $F_s$. En remarquant que

$$\mu\left(\bigcup_{s\geq r+1}\ \bigcup_{l\in\{0,...,L_r^{1/d}-1\}^d} T^{-(u+lK_r)}\,F_s\right)\leq L_r\sum_{s\geq r+1}\frac{1}{K_s^d}\sim 9^{-2rdp},$$

on déduit

$$\lim_{r\to+\infty}\mu\left(\bigcap_{s\geq r+1}\ \bigcap_{l\in\{0,...,L_r^{1/d}-1\}^d} T^{-(u+lK_r)}\,F_s^c\right)=1. \tag{1.21}$$

D'autre part, en utilisant (1.13), (1.14) et (1.21), on montre que

$$\lim_{r\to+\infty}\mu(W_r)=1. \tag{1.22}$$

Soient $\varepsilon>0$, $u\in\{0,...,K_r-1\}^d$ et $\omega\in\Omega$. Notons

$$\Gamma_r^*(u)=\big\{u+l\,K_r\ |\ l\in\{0,...,L_r^{1/d}-1\}^d\big\},$$

$$\Gamma_r^+(u,\omega)=\big\{k\in\Gamma_r^*(u)\ |\ g(T^k\omega)=1\big\},$$

et

$$E_r^u=E_r^u(\varepsilon)=\left\{\omega\in\Omega\ \Big|\ \left|\frac{|\Gamma_r^+(u,\omega)|}{L_r}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right\}.$$

Comme $\Gamma_r^*(u)=u+\Gamma_r^*(0)$, on a

$$|\Gamma_r^+(u,\omega)|=|u+\big\{k\in\Gamma_r^*(0)\ |\ g(T^{u+k}\omega)=1\big\}|=|u+\Gamma_r^+(0,T^u\omega)|=|\Gamma_r^+(0,T^u\omega)|.$$

Ainsi

$$\mu(E_r^u)=\mu(T^{-u}E_r^0)=\mu(E_r^0). \tag{1.23}$$

De plus, d'après la loi faible des grands nombres,

$$\lim_{r\to+\infty} \mu(E_r^0) = 1. \tag{1.24}$$

On définit également $\Gamma_r(u,\omega)$ comme étant le sous ensemble de $\Gamma_r^*(u)$ vérifiant les propriétés suivantes

**a)** $|\Gamma_r(u,\omega)| = \frac{L_r}{2}$,

**b)** $\Gamma_r^+(u,\omega) \subset \Gamma_r(u,\omega)$ si $|\Gamma_r^+(u,\omega)| \leq \frac{L_r}{2}$,

**c)** $\Gamma_r(u,\omega) \subset \Gamma_r^+(u,\omega)$ si $|\Gamma_r^+(u,\omega)| > \frac{L_r}{2}$.

Enfin, pour $\omega$ dans $W_r$, on pose

$$\Gamma_r(\omega) = \Gamma_r(u(\omega),\omega) \quad \text{et} \quad \Gamma_r^+(\omega) = \Gamma_r^+(u(\omega),\omega).$$

**Lemme 3** *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $V_r = V_r(\varepsilon)$ de $W_r$ tel que pour tout $\omega$ dans $V_r$,*

$$\left| \frac{1}{L_r} \sum_{i\in\Gamma_r(\omega)} g(T^i\omega) - \frac{1}{2} \right| < 2\varepsilon \tag{1.25}$$

*et*

$$\lim_{r\to+\infty} \mu(V_r) = 1. \tag{1.26}$$

**Preuve.** Il suffit de considérer l'ensemble

$$V_r = V_r(\varepsilon) = \left\{ \omega \in W_r \;\middle|\; \left| \frac{|\Gamma_r^+(\omega)|}{L_r} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \right\}.$$

Avec cette définition de $V_r$, on vérifie que l'inégalité (1.25) est satisfaite. De plus, comme

$$V_r = \bigcup_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} W_r \cap T^{-u}F_r \cap E_r^u,$$

on a

$$\begin{aligned}
\mu(V_r) &= \sum_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} \mu(W_r \cap T^{-u}F_r \cap E_r^u) \\
&= \sum_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} \mu(W_r \cap T^{-u}F_r)\, \mu(E_r^u) \quad (\text{car } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sont indépendantes}) \\
&= \mu(E_r^0)\, \mu(W_r \cap \bigcup_{u\in\{0,\dots,K_r-1\}^d} T^{-u}F_r) \quad \text{d'après (1.23)} \\
&= \mu(E_r^0)\, \mu(W_r).
\end{aligned}$$

On obtient alors (1.26) comme conséquence de (1.22) et (1.24). Ce qui achève la preuve du lemme 3. $\square$

Pour tout $\omega$ dans $W_r$, on considère l'élément $A_r(\omega)$ de $\mathcal{A}_r$ défini par l'égalité

$$A_r(\omega) = \bigcup_{i \in \Gamma_r(\omega)} \left]\frac{i_1 - 1}{n_r}, \frac{i_1}{n_r}\right] \times \ldots \times \left]\frac{i_d - 1}{n_r}, \frac{i_d}{n_r}\right].$$

D'autre part, remarquons que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout $\omega$ dans $W_r$, on a

$$\lambda(n_r A_r(\omega) \cap R_i) = \mathbb{1}_{\Gamma_r(\omega)}(i).$$

Fixons $0 < \varepsilon < 1/16$ et $r \geq 2$. Pour tout $\omega$ dans $W_r$, on a

$$\begin{aligned}
\left| n_r^{-d/2} S_{n_r}\left(\sum_{s=1}^{r-1} f_s, A_r(\omega)\right)(\omega)\right| &= \left| n_r^{-d/2} \sum_{i \in \{1,\ldots,n_r\}^d} \lambda(n_r A_r(\omega) \cap R_i) \sum_{s=1}^{r-1} f_s(T^i \omega)\right| \\
&\leq \left| n_r^{-d/2} \sum_{i \in \Gamma_r(\omega)} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{n_s^{d/2}}{L_s}\, g(T^i\omega)\ \mathbb{1}_{F_s}(T^i\omega)\right| \\
&\leq n_r^{-d/2} \sum_{i \in \Gamma_r(\omega)} \sum_{s=1}^{r-1} \frac{n_s^{d/2}}{L_s} \\
&\leq n_r^{-d/2}\, |\Gamma_r(\omega)|\, \frac{n_r^{d/2}}{2\, L_r} \quad \text{d'après (1.12)} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

D'autre part, si $\omega$ appartient à $V_r \subset W_r$ alors

$$\begin{aligned}
\left| n_r^{-d/2} S_{n_r}(f_r, A_r(\omega))(\omega)\right| &= \left| n_r^{-d/2} \sum_{i \in \{1,\ldots,n_r\}^d} \lambda(n_r A_r(\omega) \cap R_i)\, f_r(T^i\omega)\right| \\
&= \left| n_r^{-d/2} \sum_{i \in \Gamma_r(\omega)} \frac{n_r^{d/2}}{L_r}\, g(T^i\omega)\ \mathbb{1}_{F_r}(T^i\omega)\right| \\
&= \frac{1}{L_r} \left| \sum_{i \in \Gamma_r(\omega)} g(T^i\omega)\right| \\
&> \frac{1}{2} - 2\,\varepsilon \quad \text{d'après (1.25).}
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $f_s(T^i\omega) = 0$ pour tout entier $s \geq r+1$, tout $\omega$ dans $W_r$ et tout $i$ dans $\Gamma_r(\omega)$, on obtient pour tout $\omega$ dans $V_r \subset W_r$,

$$\begin{aligned}\left|n_r^{-d/2} S_{n_r}\left(f, A_r(\omega)\right)(\omega)\right| &= \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}\left(\sum_{s=1}^{r-1} f_s, A_r(\omega)\right)(\omega) + n_r^{-d/2} S_{n_r}\left(f_r, A_r(\omega)\right)(\omega)\right| \\ &> \left(\frac{1}{2} - 2\,\varepsilon\right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - 2\,\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Notons $\beta = 1/4 - 2\,\varepsilon > 0$. Pour tout entier $r \geq 1$ et tout $\omega$ dans $V_r$, on a

$$\lambda(A_r(\omega)) = \frac{L_r}{2n_r^d}.$$

Soit $\delta > 0$ fixé. Il existe $R \geq 1$ tel que pour tout entier $r \geq R$, on ait $L_r/2n_r^d < \delta$. Par conséquent, pour tout entier $r \geq R$, on a

$$\begin{aligned}&\mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ d(A,B)<\delta}} \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, A) - n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, B)\right| > \beta\right) \\ &\geq \mu\left(\sup_{\lambda(A)<\delta} \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, A)\right| > \beta\right) \\ &\geq \mu\left(\left\{\omega \in V_r \;\middle|\; \left|n_r^{-d/2} S_{n_r}(f, A_r(\omega))(\omega)\right| > \beta\right\}\right) \\ &= \mu(V_r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 1.\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu\left(\sup_{\substack{A,B\in\mathcal{A}\\ d(A,B)<\delta}} \left|n^{-d/2} S_n(f, A) - n^{-d/2} S_n(f, B)\right| > \beta\right) = 1.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 2. $\square$

# Chapitre 2

# Inégalités de Kahane-Khintchine et théorème limite central fonctionnel pour les champs aléatoires réels

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que contrairement au champs aléatoires bornés, le principe d'invariance peut ne pas avoir lieu pour les champs aléatoires $p$-intégrables. Le but de ce chapitre est de montrer que le principe d'invariance a lieu lorsque les champs aléatoires considérés ont des moments exponentiels finis.

## 2.1 Définitions et notations préliminaires

Considérons un champ $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On munit le réseau $\mathbb{Z}^d$ de la relation d'ordre lexicographique $<_{lex}$ qui a été définie dans le chapitre 1 et naturellement si $i$ et $j$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}^d$, la notation $i \leq_{lex} j$ signifie que ou bien $i = j$ ou bien $i <_{lex} j$. Pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout $k$ dans $\mathbb{N}^*$, on considère les sous-ensembles $V_i^k$ de $\mathbb{Z}^d$ définis dans le chapitre d'introduction par les égalités (0.3) et (0.4) et pour toute partie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$, on pose $\mathcal{F}_\Gamma = \sigma(X_i\,;\, i \in \Gamma)$. Si la variable aléatoire $X_i$ appartient à $L^1(\mathbb{P})$, on adopte la notation

$$E_k(X_i) = E(X_i | \, \mathcal{F}_{V_i^k}).$$

Rappelons que pour mesurer la dépendance entre deux sous-tribus $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de $\mathcal{F}$, il existe dans la littérature différents cœfficients (dits de mélange). Nous nous intéressons ici au cœfficient de $\phi$-mélange introduit par Ibragimov [39] et défini par

$$\phi(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \sup\{|\mathbb{P}(V|U) - \mathbb{P}(V)|\,;\, U \in \mathcal{U},\, \mathbb{P}(U) > 0,\, V \in \mathcal{V}\}.$$

On associe au champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ les cœfficients de $\phi$-mélange non uniformes définis pour tout triplet $(k,l,n)$ dans $(\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})^2 \times \mathbb{N}$ par

$$\phi_{k,l}(n) = \sup\{\phi(\mathcal{F}_{\Gamma_1}, \mathcal{F}_{\Gamma_2}),\ |\Gamma_1| \leq k,\ |\Gamma_2| \leq l,\ d(\Gamma_1,\Gamma_2) \geq n\}, \tag{2.1}$$

où $|\Gamma|$ désigne le cardinal de toute partie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$ et $d$ la distance définie pour toutes parties $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de $\mathbb{Z}^d$ par

$$d(\Gamma_1,\Gamma_2) = \min\{|i-j|,\ i \in \Gamma_1,\ j \in \Gamma_2\} \quad \text{où} \quad |i-j| = \max_{1\leq k\leq d} |i_k - j_k|.$$

On dit que le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est $\phi$-mélangeant s'il existe un couple $(k,l)$ dans $(\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})^2$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \phi_{k,l}(n) = 0$. On peut se référer à Doukhan [20] pour plus de détails sur les cœfficients de mélange.
On dit qu'une fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ est une fonction de Young si $\psi$ est convexe, croissante et telle que $\psi(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = +\infty$. L'espace de Orlicz $L_\psi$ associé à la fonction de Young $\psi$ est l'espace des variables aléatoires $Z$ définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $E(\psi(|Z|/c)) < +\infty$ pour un certain $c > 0$. On munit l'espace de Orlicz $L_\psi$ d'une structure d'espace de Banach grâce à la norme de Luxemburg définie pour toute variable aléatoire $Z$ dans $L_\psi$ par

$$\|Z\|_\psi = \inf\{c > 0\,;\ E(\psi(|Z|/c)) \leq 1\}. \tag{2.2}$$

Pour plus de détails sur la théorie des fonctions de Young et des espaces de Orlicz, le lecteur pourra se référer au livre de Krasnosel'skii et Rutickii [47].
Soit $Y$ un champ aléatoire arbitraire. Nous dirons que le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de type accroissement d'une martingale (en abrégé AM) relativement à $Y$ si pour tout $k$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_k$ est mesurable pour la tribu engendrée par les variables aléatoires $Y_j$, $j \leq_{lex} k$ et

$$E(X_k |\, \sigma(Y_j\,;\ j <_{lex} k)) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Si $Y = (X_k)_k$, on dira simplement que $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de type AM. Dans la section suivante, nous allons établir des inégalités de type Kahane-Khintchine pour des champs de variables aléatoires dépendantes ayant des moments exponentiels finis (cf. Théorème 3 et Corollaire 1) qui généralisent celles établies par Kahane [43] et Peskir [59] pour des suites de variables aléatoires indépendantes et bornées (cf. Propositions B et C du chapitre d'introduction). En particulier, nos résultats s'appliquent pour les champs de type AM ou les champs $\phi$-mélangeants.

## 2.2 Inégalités de Kahane-Khintchine

Une classe importante de fonctions de Young est la classe des fonctions de Young exponentielles. Soit $\beta > 0$ un réel. On note $\psi_\beta$ la fonction de Young définie pour tout $x$ dans $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi_\beta(x) = \exp((x + h_\beta)^\beta) - \exp(h_\beta^\beta) \tag{2.3}$$

où $h_\beta$ est le réel défini par l'égalité $h_\beta = ((1-\beta)/\beta)^{1/\beta}\,\mathbb{1}_{\{0<\beta<1\}}$. La forme un peu compliquée de la fonction $\psi_\beta$ pour $\beta$ compris entre 0 et 1 vient du fait que la fonction $x \mapsto \exp(x^\beta) - 1$ n'est pas convexe sur l'intervalle $[0, h_\beta]$. Notre premier résultat est une inégalité de type Kahane-Khintchine pour des champs aléatoires réels non nécessairement stationnaires. Pour tout réel $0 < q < 2$, on définit $\beta(q) = 2q/(2-q)$ et par convention, on pose $1/\beta(2) = 0$.

**Théorème 3** *Considérons un champ $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. S'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ alors il existe une constante universelle $M_1(q) > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$,*

$$\left\| \sum_{i\in\Gamma} X_i \right\|_{\psi_q} \leq M_1(q) \left( \sum_{i\in\Gamma} b_{i,q}(X) \right)^{1/2} \tag{2.4}$$

*où*

$$b_{i,q}(X) = \|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + \sum_{k\in V_i^1} \left\| \sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|} \right\|^2_{\psi_{\beta(q)}}. \tag{2.5}$$

*Si pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ est dans $L^\infty(\mathbb{P})$ alors pour tout $0 < q \leq 2$, il existe une constante universelle $M_2(q) > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$,*

$$\left\| \sum_{i\in\Gamma} X_i \right\|_{\psi_q} \leq M_2(q) \left( \sum_{i\in\Gamma} b_{i,\infty}(X) \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

*où*

$$b_{i,\infty}(X) = \|X_i\|^2_\infty + \sum_{k\in V_i^1} \|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_\infty. \tag{2.7}$$

**Remarque 1** Si le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est de type AM alors

$$b_{i,\infty}(X) = \|X_i\|^2_\infty \quad \text{et} \quad b_{i,q}(X) = \|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}}$$

pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout réel $0 < q < 2$. Par conséquent, le théorème 3 est bien une extension des inégalités de type Kahane-Khintchine établies par Peskir [59] pour les suites de variables aléatoires réelles indépendantes et bornées (cf. Proposition C du chapitre d'introduction).

**Remarque 2** Supposons que le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ soit de type AM et soit $(\Gamma_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{Z}^d$ telle que le cardinal $|\Gamma_n|$ de $\Gamma_n$ tende vers l'infini. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$S_n = \sum_{i\in\Gamma_n} X_i.$$

Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$,

$$Ee^{|X_i|} \leq K.$$

Par conséquent, on peut vérifier que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$,

$$\|X_i\|_{\psi_1} \leq 1 \vee \log_2 K. \tag{2.8}$$

D'autre part, puisque le champ $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est de type AM, on a pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$,

$$b_{i,2/3}(X) = \|X_i\|_{\psi_1}^2. \tag{2.9}$$

Soit $n \geq 0$ un entier fixé. En utilisant l'inégalité de Markov, on peut majorer la probabilité $\mathbb{P}(|S_n| > |\Gamma_n|)$ par

$$\exp\left[-\left(\frac{|\Gamma_n|}{\|S_n\|_{\psi_{2/3}}} + (1/2)^{3/2}\right)^{2/3}\right] E\exp\left[\left(\frac{|S_n|}{\|S_n\|_{\psi_{2/3}}} + (1/2)^{3/2}\right)^{2/3}\right].$$

Par définition de la norme $\|.\|_{\psi_{2/3}}$, on obtient

$$\mathbb{P}(|S_n| > |\Gamma_n|) \leq (1+\sqrt{e})\exp\left[-\left(\frac{|\Gamma_n|}{\|S_n\|_{\psi_{2/3}}} + (1/2)^{3/2}\right)^{2/3}\right].$$

En appliquant l'inégalité (2.4) du théorème 3 avec $q = 2/3$ et en utilisant (2.8) et (2.9), on déduit

$$\mathbb{P}(|S_n| > |\Gamma_n|) \leq (1+\sqrt{e})\exp\left[-\left(\frac{|\Gamma_n|^{1/2}}{(1\vee\log_2 K)\, M_1(2/3)} + (1/2)^{3/2}\right)^{2/3}\right]. \tag{2.10}$$

Par conséquent, il existe une constante numérique $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(|S_n| > |\Gamma_n|) = O\left(e^{-c|\Gamma_n|^{1/3}}\right). \tag{2.11}$$

L'estimation (2.11) a déjà été démontrée par Lesigne et Volný [53] en utilisant une méthode complètement différente. De plus, l'exposant 1/3 dans l'égalité (2.11) est le meilleur que l'on puisse espérer. En effet, Lesigne et Volný [53] ont montré que la constante 1/3 est optimale même dans la classe plus restreinte des champs aléatoires de type AM qui sont également stationnaires et ergodiques.

En utilisant des inégalités de mélange dues à Serfling [67] (voir également McLeish [56]), on déduit du théorème 3 le résultat suivant pour les champs aléatoires $\phi$-mélangeants.

**Corollaire 1** *Considérons un champ $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. S'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ alors pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$, on a*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \le M_1(q)\left(\sum_{i\in\Gamma}\widetilde{b}_{i,q}(X)\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

*où*

$$\widetilde{b}_{i,q}(X) = \|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + C(q)\|X_i\|_{\psi_{\beta(q)}}\sum_{k\in V_i^1}\|X_k\|_{\psi_{\beta(q)}}\sqrt{\phi_{\infty,1}(|k-i|)}, \tag{2.13}$$

*$M_1(q)$ est la constante universelle introduite dans le théorème 3 et $C(q)$ est une constante universelle strictement positive qui ne dépend que de $q$.*
*Si pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ est dans $L^\infty(\mathbb{P})$ alors pour tout $0 < q \le 2$ et pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$, on a*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \le M_2(q)\left(\sum_{i\in\Gamma}\widetilde{b}_{i,\infty}(X)\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

*où*

$$\widetilde{b}_{i,\infty}(X) = \|X_i\|^2_\infty + 2\,\|X_i\|_\infty\sum_{k\in V_i^1}\|X_k\|_\infty\phi_{\infty,1}(|k-i|) \tag{2.15}$$

*et $M_2(q)$ est la constante universelle introduite dans le théorème 3.*

À présent, nous allons donner une inégalité de type Kahane-Khintchine pour une classe de champs aléatoires de type AM. Nous dirons qu'un champ aléatoire $(W_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est prévisible relativement à un autre champ $Y$ (ou encore $Y$-prévisible) si pour tout élément $k$ de $\mathbb{Z}^d$,

$$E(W_k|\,\sigma(Y_j\,;\,j <_{lex} k)) = W_k \quad \text{p.s.}$$

**Théorème 4** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire de type AM relativement à un champ aléatoire $Y$ et soient $(W_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ et $(Z_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ deux champs aléatoires $Y$-prévisibles tels que les variables aléatoires $Z_i$ soient positives. S'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $Z_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ et*

$$W_i \le X_i \le W_i + Z_i \quad p.s. \tag{2.16}$$

*alors il existe une constante universelle $D(q) > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$,*

$$\left\| \sum_{i\in\Gamma} X_i \right\|_{\psi_q} \leq D(q) \left( \sum_{i\in\Gamma} \|Z_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \right)^{1/2}. \tag{2.17}$$

*S'il existe une famille $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de constantes positives telles que $Z_i \leq c_i$ p.s. alors il existe une constante universelle $D > 0$ telle que pour toute partie finie $\Gamma$ de $Z^d$,*

$$\left\| \sum_{i\in\Gamma} X_i \right\|_{\psi_2} \leq D \left( \sum_{i\in\Gamma} c_i^2 \right)^{1/2}. \tag{2.18}$$

En combinant les inégalités obtenues dans cette section avec un argument de chaînage classique, nous allons démontrer dans la section suivante la relative compacité en loi du processus de sommes partielles normalisées $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ issu d'un champ stationnaire de variables aléatoires ayant des moments exponentiels finis.

## 2.3 Un théorème limite central fonctionnel

Considérons un champ stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et rappelons que l'on peut sans perte de généralité supposer $(X_k)_k = (f \circ T^k)_k$ où $f$ est une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et $T$ est une action de $\mathbb{Z}^d$ qui préserve la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. On note $\mathcal{I}$ la tribu des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont invariants par $T$ (cf. chapitre d'introduction). Pour toute collection $\mathcal{A}$ de boréliens de $[0,1]^d$, on considère le processus de sommes partielles $\{S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ défini par l'égalité (1.1). Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $A \mapsto S_n(A)$ est continue relativement à la pseudo-métrique $\rho$ définie pour tous éléments $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$ par l'égalité $\rho(A,B) = \sqrt{\lambda(A\Delta B)}$.
Notre objectif est d'étendre aux champs de variables aléatoires réelles ayant des moments exponentiels finis, le principe d'invariance établi par Dedecker [15] pour des champs de variables aléatoires bornées. En effet, Dedecker [15] a démontré que si $\mathcal{A}$ est une classe de boréliens de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition (1.2) d'entropie métrique de Dudley [21] et si le champ stationnaire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles bornées vérifie la condition projective (1.5) alors le principe d'invariance a lieu (cf. Théorème B du chapitre d'introduction). Rappelons que dans le chapitre 1 de cette thèse, nous avons montré que le principe d'invariance ne peut pas avoir lieu sous une condition de nature projective similaire à (1.5) lorsque le champ aléatoire considéré est seulement $p$-intégrable. En effet, on peut toujours trouver un champ aléatoire stationnaire d'accroissements d'une martingale $p$-intégrables qui ne vérifie pas le principe d'invariance (cf. Théorème 2 du chapitre 1). En utilisant les inégalités de Kahane-Khintchine que nous avons établi dans le théorème 3, nous allons

démontrer via un argument de chaînage classique la relative compacité en loi de la suite de processus $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\ A \in \mathcal{A}\}$ lorsque les variables aléatoires considérées ont des moments exponentiels finis. Pour tout élément $A$ de $\mathcal{A}$, on note $\partial A$ la frontière de $A$ et on dit que $A$ est régulier si $\lambda(\partial A) = 0$.

**Théorème 5** *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles, identiquement distribuées et de moyennes nulles. Supposons qu'il existe deux réels $0 < q < 2$ et $\theta > 0$ tels que*

$$E\exp\left(\theta|X_0|^{\beta(q)}\right) < +\infty \tag{2.19}$$

*et que*

$$\sum_{k\in V_0^1} \left\| \sqrt{|X_k E_{|k|}(X_0)|} \right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 < +\infty. \tag{2.20}$$

*Soit $\mathcal{A}$ une collection de boréliens réguliers de $[0,1]^d$ satisfaisant la condition d'entropie métrique suivante*

$$\int_0^1 (H(\mathcal{A},\rho,\varepsilon))^{1/q}\, d\varepsilon < +\infty. \tag{2.21}$$

*Sous ces hypothèses,*

1) *pour la tribu $\mathcal{I}$ des éléments invariants de $\mathcal{F}$, on a*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left\| \sqrt{|E(X_0X_k|\,\mathcal{I})|} \right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 < +\infty. \tag{2.22}$$

*Notons $\eta$ la variable aléatoire positive et $\mathcal{I}$-mesurable*

$$\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E(X_0X_k|\,\mathcal{I}). \tag{2.23}$$

2) *la suite de processus $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\ A \in \mathcal{A}\}$ converge en loi dans $C(\mathcal{A})$ vers $\sqrt{\eta}\,W$ où $W$ est un mouvement brownien standard indexé par $\mathcal{A}$ et indépendant de la tribu $\mathcal{I}$.*

Dans le théorème 5 ci-dessus, on peut remarquer que l'on contrôle la taille de la classe $\mathcal{A}$ en utilisant l'entropie métrique classique (sans inclusion) alors que tous les résultats antérieurs que nous connaissons sur le principe d'invariance pour de larges classes d'ensembles utilisent une notion plus stricte d'entropie métrique. En utilisant de nouveau les inégalités de Serfling [67], nous obtenons le corollaire suivant pour les champs aléatoires $\phi$-mélangeants.

**Corollaire 2** *Le théorème 5 reste valide si on remplace la condition projective (2.20) par la condition suivante*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k|)} < +\infty. \tag{2.24}$$

## 2.4 Démonstrations

Nous avons besoin du lemme suivant que l'on peut retrouver (sans preuve) dans l'article de Su [69]. Nous donnons une démonstration de ce résultat en annexe.

**Lemme 4** *Soit $\beta$ un nombre réel strictement positif. Il existe deux constantes universelles strictement positives $A_\beta$ et $B_\beta$ qui ne dépendent que de $\beta$ telles que pour toute variable aléatoire $Z$, on ait*

$$A_\beta \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}} \leq \|Z\|_{\psi_\beta} \leq B_\beta \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Rappelons l'inégalité de type Marcinkiewicz-Zygmund pour les champs aléatoires réels non nécessairement stationnaires démontrée par Dedecker [15].

**Proposition 1 (Dedecker, 2001)** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles et soit $\Gamma$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$. Pour tout réel $p>2$, on a*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_p \leq \left(2\,p\sum_{i\in\Gamma} c_i(X)\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

*où*

$$c_i(X) = \|X_i^2\|_{\frac{p}{2}} + \sum_{k\in V_i^1} \|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_{\frac{p}{2}}.$$

Rappelons que pour tout $0<q<2$, on a noté $\beta(q) = 2q/(2-q)$ et que par convention, on a posé $1/\beta(2) = 0$. En combinant le lemme 4 avec l'inégalité (2.25) et en remarquant que pour tout $p>0$ et toute variable aléatoire $Z$,

$$\|Z\|_{\frac{p}{2}} = \|\sqrt{|Z|}\|_p^2,$$

on obtient le résultat suivant.

**Lemme 5** *Considérons un champ $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. Pour tout $0<q\leq 2$, il existe une constante universelle $B_q>0$ qui ne dépend que de $q$ telle que pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$,*

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \leq \sqrt{2}B_q \sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(q)}} \left(\sum_{i\in\Gamma} c_i(X)\right)^{1/2} \tag{2.26}$$

*et*

$$c_i(X) = \|X_i\|_p^2 + \sum_{k\in V_i^1} \left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|_p^2.$$

## Preuve du théorème 3

Fixons un élément $i$ de $\Gamma$ et un réel $0 < q < 2$. D'après le lemme 4, il existe une constante universelle $A_{\beta(q)} > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que

$$\sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(q)}} \|X_i\|_p \leq A_{\beta(q)}^{-1} \|X_i\|_{\psi_{\beta(q)}} \tag{2.27}$$

et pour tout $k$ dans $V_i^1$,

$$\sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(q)}} \left\| \sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|} \right\|_p \leq A_{\beta(q)}^{-1} \left\| \sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|} \right\|_{\psi_{\beta(q)}} . \tag{2.28}$$

En combinant les inégalités (2.26), (2.27) et (2.28), on obtient

$$\left\| \sum_{i\in\Gamma} X_i \right\|_{\psi_q} \leq M_1(q) \left( \sum_{i\in\Gamma} b_{i,q}(X) \right)^{1/2}$$

où $M_1(q) = \sqrt{2} B_q A_{\beta(q)}^{-1} > 0$ et $b_{i,q}(X)$ est défini par l'égalité (2.5). Maintenant, supposons que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ appartienne à $L^\infty(\mathbb{P})$ et soit $0 < q \leq 2$ un réel fixé. En remarquant que

$$c_i(X) \leq \|X_i\|_\infty^2 + \sum_{k\in V_i^1} \|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_\infty = b_{i,\infty}(X)$$

et en utilisant l'inégalité (2.26), on déduit

$$\left\| \sum_{i\in\Gamma} X_i \right\|_{\psi_q} \leq M_2(q) \left( \sum_{i\in\Gamma} b_{i,\infty}(X) \right)^{1/2}$$

où $M_2(q) = B_q\sqrt{2}/2^{1/\beta(q)} > 0$. Ce qui achève la preuve du théorème 3. □

## Preuve du corollaire 1

Fixons un élément $i$ de $\Gamma$ et un réel $0 < q < 2$. Il est suffisant de montrer les inégalités suivantes

$$b_{i,q}(X) \leq \widetilde{b}_{i,q}(X) \tag{2.29}$$

et

$$b_{i,\infty}(X) \leq \widetilde{b}_{i,\infty}(X). \tag{2.30}$$

Soit $k$ un élément de $V_i^1$. D'après le lemme 4, il existe une constante universelle $B_{\beta(q)} > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} &\leq B^2_{\beta(q)} \sup_{p>2} \frac{1}{p^{2/\beta(q)}} \left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|^2_p \\ &= B^2_{\beta(q)} \sup_{p>2} \frac{1}{p^{2/\beta(q)}} \|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_{\frac{p}{2}} \\ &\leq B^2_{\beta(q)} \sup_{p>2} \frac{1}{p^{2/\beta(q)}} \|X_k\|_p \|E_{|k-i|}(X_i)\|_p.\end{aligned}$$

Des inégalités de Serfling [67], on déduit pour tout $p > 2$,

$$\|E_{|k-i|}(X_i)\|_p \leq 2\|X_i\|_p \phi_{\infty,1}(|k-i|)^{\frac{p-1}{p}} \leq 2\|X_i\|_p \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k-i|)}.$$

Par conséquent,

$$\left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \leq 2\, B^2_{\beta(q)} \sup_{p>2} \frac{1}{p^{2/\beta(q)}} \|X_k\|_p \|X_i\|_p \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k-i|)}$$

En utilisant l'inégalité (2.27), on déduit

$$\left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \leq 2\, B^2_{\beta(q)}\, A^{-2}_{\beta(q)} \|X_k\|_{\psi_{\beta(q)}} \|X_i\|_{\psi_{\beta(q)}} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k-i|)}. \tag{2.31}$$

Finalement, en posant $C(q) = 2B^2_{\beta(q)} A^{-2}_{\beta(q)} > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} b_{i,q}(X) &= \|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + \sum_{k\in V_i^1} \left\|\sqrt{|X_k E_{|k-i|}(X_i)|}\right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \\ &\leq \|X_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + C(q)\|X_i\|_{\psi_{\beta(q)}} \sum_{k\in V_i^1} \|X_k\|_{\psi_{\beta(q)}} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k-i|)} \\ &= \widetilde{b}_{i,q}(X).\end{aligned}$$

À présent, supposons que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ appartienne à $L^\infty(\mathbb{P})$. En utilisant de nouveau les inégalités de Serfling [67], on a pour tout $i$ dans $\Gamma$ et tout $k$ dans $V_i^1$,

$$\|E_{|k-i|}(X_i)\|_\infty \leq 2\|X_i\|_\infty \phi_{\infty,1}(|k-i|)$$

et par suite

$$\|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_\infty \leq 2\|X_i\|_\infty \|X_k\|_\infty \phi_{\infty,1}(|k-i|).$$

Ainsi, pour tout $i$ dans $\Gamma$ et tout $k$ dans $V_i^1$, on a

$$\begin{aligned} b_{i,\infty}(X) &= \|X_i\|^2_\infty + \sum_{k\in V_i^1} \|X_k E_{|k-i|}(X_i)\|_\infty \\ &\leq \|X_i\|^2_\infty + 2\|X_i\|_\infty \sum_{k\in V_i^1} \|X_k\|_\infty \phi_{\infty,1}(|k-i|) \\ &= \widetilde{b}_{i,\infty}(X).\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du corollaire 1. $\square$

## Preuve du théorème 4

Fixons $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et $0 < q < 2$. Posons $\mathcal{G}_i = \sigma(Y_j \,;\, j <_{lex} i)$ et notons

$$\begin{aligned} X_i^+ &= X_i \vee 0, \\ X_i^- &= (-X_i) \vee 0, \\ \widetilde{X}_i^+ &= X_i^+ - E(X_i^+ | \mathcal{G}_i), \\ \widetilde{X}_i^- &= X_i^- - E(X_i^- | \mathcal{G}_i). \end{aligned}$$

Comme le champ aléatoire $X$ est de type AM relativement à $Y$, on peut vérifier que $X_i = \widetilde{X}_i^+ - \widetilde{X}_i^-$. On notera que les champs aléatoires $\widetilde{X}^+$ et $\widetilde{X}^-$ sont aussi des champs de type AM relativement à $Y$.

**Lemme 6** *Pour tout $i$ dans $Z^d$, on a les inégalités suivantes*

$$|\widetilde{X}_i^+| \leq Z_i \quad et \quad |\widetilde{X}_i^-| \leq Z_i \quad p.s.$$

**Preuve.** Nous allons démontrer uniquement la première inégalité, la seconde s'obtient de la même façon. D'après l'inégalité (2.16), on a

$$W_i^+ \leq X_i^+ \leq (W_i + Z_i)^+ \quad \text{p.s.} \tag{2.32}$$

Puisque les champs aléatoires $W$ et $Z$ sont $Y$-prévisibles, on en déduit

$$W_i^+ \leq E(X_i^+ | \mathcal{G}_i) \leq (W_i + Z_i)^+ \quad \text{p.s.} \tag{2.33}$$

En combinant (2.32) et (2.33), on obtient

$$W_i^+ - (W_i + Z_i)^+ \leq \widetilde{X}_i^+ \leq (W_i + Z_i)^+ - W_i^+ \quad \text{p.s.}$$

soit

$$|\widetilde{X}_i^+| \leq (W_i + Z_i)^+ - W_i^+ \quad \text{p.s.}$$

On conclut en notant que pour tout réel $x$ et tout réel positif $y$, on a

$$(x + y)^+ - x^+ \leq y. \tag{2.34}$$

Ce qui achève la preuve du lemme 6. $\square$

D'après les lemmes 5 et 6, il existe une constante $B_q > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in\Gamma} \widetilde{X}_i^+\right\|_{\psi_q} &\leq \sqrt{2}\, B_q \sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(q)}} \left(\sum_{i\in\Gamma} \| \widetilde{X}_i^+\|_p^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}\, B_q \sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(q)}} \left(\sum_{i\in\Gamma} \|Z_i\|_p^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2} B_q \left(\sum_{i\in\Gamma} \sup_{p>2} \frac{1}{p^{2/\beta(q)}} \|Z_i\|_p^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 4, il existe une constante universelle $A_{\beta(q)} > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que

$$\sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(q)}} \|Z_i\|_p \leq A_{\beta(q)}^{-1} \|Z_i\|_{\psi_{\beta(q)}}. \tag{2.35}$$

Par conséquent, en posant $D(q) = 2B_q\sqrt{2}A_{\beta(q)}^{-1}$, on obtient

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} \widetilde{X}_i^+\right\|_{\psi_q} \leq (D(q)/2) \left(\sum_{i\in\Gamma} \|Z_i\|_{\psi_{\beta(q)}}^2\right)^{1/2}. \tag{2.36}$$

De même, on montre que l'inégalité (2.36) reste valide si on remplace le champ $\widetilde{X}^+$ par le champ $\widetilde{X}^-$. Finalement,

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_q} \leq D(q) \left(\sum_{i\in\Gamma} \|Z_i\|_{\psi_{\beta(q)}}^2\right)^{1/2}.$$

Maintenant, on suppose que $Z_i \leq c_i$ p.s. pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$. D'après les lemmes 5 et 6, il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i\in\Gamma} \widetilde{X}_i^+\right\|_{\psi_2} &\leq \sqrt{2}\, B \sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(2)}} \left(\sum_{i\in\Gamma} \| \widetilde{X}_i^+\|_p^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}\, B \sup_{p>2} \frac{1}{p^{1/\beta(2)}} \left(\sum_{i\in\Gamma} c_i^2\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\, B \left(\sum_{i\in\Gamma} c_i^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée également par le champ $\widetilde{X}^-$, on obtient

$$\left\|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right\|_{\psi_2} \leq D \left(\sum_{i\in\Gamma} c_i^2\right)^{1/2}$$

avec $D = 2\sqrt{2}B$. Ce qui achève la preuve du théorème 4. $\square$

## Preuve du théorème 5

Soit $k$ un élément de $V_0^1$. Considérons la tribu $\mathcal{F}_{-\infty} = \cap_{j\in\mathbb{N}^*}\mathcal{F}_{V_0^j}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la tribu $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par le champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$. Ainsi, en utilisant le même argument que dans le livre de Georgii ([29], Proposition 14.9), on montre que la tribu $\mathcal{I}$ des éléments invariants de $\mathcal{F}$ est incluse dans la $\mathbb{P}$-complétion de $\mathcal{F}_{-\infty}$. On en déduit alors que pour tout réel $p > 0$,

$$\|E(X_0X_k|\,\mathcal{I})\|_p \leq \|E(X_0X_k|\,\mathcal{F}_{-\infty})\|_p \leq \|X_kE_{|k|}(X_0)\|_p. \tag{2.37}$$

D'après le lemme 4, il existe une constante universelle $A_{\beta(q)} > 0$ qui ne dépend que de $q$ telle que

$$\left\|\sqrt{|X_kE_{|k|}(X_0)|}\right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 \geq A_{\beta(q)}^2 \sup_{p>2}\frac{1}{p^{2/\beta(q)}}\left\|\sqrt{|X_kE_{|k|}(X_0)|}\right\|_p^2. \tag{2.38}$$

En notant que

$$\left\|\sqrt{|X_kE_{|k|}(X_0)|}\right\|_p^2 = \|X_kE_{|k|}(X_0)\|_{\frac{p}{2}}, \tag{2.39}$$

l'inégalité (2.38) entraîne

$$\left\|\sqrt{|X_kE_{|k|}(X_0)|}\right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 \geq A_{\beta(q)}^2 \sup_{p>2}\frac{1}{p^{2/\beta(q)}}\|X_kE_{|k|}(X_0)\|_{\frac{p}{2}} \tag{2.40}$$

et l'inégalité (2.37) donne

$$\begin{aligned}
\left\|\sqrt{|X_kE_{|k|}(X_0)|}\right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 &\geq A_{\beta(q)}^2 \sup_{p>2}\frac{1}{p^{2/\beta(q)}}\|E(X_0X_k|\,\mathcal{I})\|_{\frac{p}{2}}\\
&= A_{\beta(q)}^2 \sup_{p>2}\frac{1}{p^{2/\beta(q)}}\|\sqrt{|E(X_0X_k|\,\mathcal{I})|}\|_p^2\\
&\geq A_{\beta(q)}^2 B_{\beta(q)}^{-2}\left\|\sqrt{|E(X_0X_k|\,\mathcal{I})|}\right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 \quad \text{(d'après le lemme 1)}
\end{aligned}$$

où $B_{\beta(q)}$ est la constante universelle strictement positive fournie par le lemme 4. On déduit alors la condition (2.22) de la condition projective (2.20). Maintenant, si $\varepsilon$ est un réel strictement positif, les inégalités (2.38) et (2.39) entraînent

$$\left\|\sqrt{|X_kE_{|k|}(X_0)|}\right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 \geq (2+\varepsilon)^{-2/\beta(q)}A_{\beta(q)}^2\|X_kE_{|k|}(X_0)\|_1.$$

Par conséquent, la condition projective (2.20) est plus stricte que la condition projective

$$\sum_{k\in V_0^1}\|X_kE_{|k|}(X_0)\|_1 < +\infty \tag{2.41}$$

introduite par Dedecker [14] comme une condition suffisante pour la validité du théorème limite central pour les champs stationnaires de variables aléatoires réelles ayant des moments d'ordre 2. La positivité de la variable aléatoire $\mathcal{I}$-mesurable $\eta$ définie par (2.23) découle alors de la proposition 3 de l'article de Dedecker [14].
Le principal point de la démonstration consiste à établir la tension du processus de sommes partielles $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ dans l'espace $C(\mathcal{A})$. En effet, la convergence des lois de dimension finie de cette suite de processus est une conséquence du théorème limite central de Dedecker [14] (cf. Théorème A du chapitre d'introduction) et du lemme suivant du également à Dedecker [15]. Pour toute partie finie de $\mathbb{Z}^d$, on note $\partial\Gamma$ la frontière de $\Gamma$ définie par

$$\partial\Gamma = \{i \in \Gamma\,;\, \text{il existe}\, j \notin \Gamma\, \text{tel que}\, |i-j| = 1\}.$$

Pour tout borélien $A$ dans $[0,1]^d$, on note $\Gamma_n(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ défini par l'égalité $\Gamma_n(A) = nA \cap \mathbb{Z}^d$.

**Lemme 7 (Dedecker, 2001)** *Si $A$ est un borélien régulier de $[0,1]^d$ tel que $\lambda(A) > 0$ alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\Gamma_n(A)|}{n^d} = \lambda(A) \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|\partial\Gamma_n(A)|}{|\Gamma_n(A)|} = 0.$$

*Si $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ stationnaire de variables aléatoires réelles tel que $X_0$ soit de moyenne nulle et de variance finie et tel que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |E(X_0X_k)| < +\infty$$

*alors*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-d/2}\|S_n(A) - \sum_{k\in\Gamma_n(A)} X_k\|_2 = 0.$$

On peut remarquer que la condition projective (2.41) et a fortiori la condition projective (2.20) entraînent la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |E(X_0X_k)|$ puisque

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |E(X_0X_k)| \leq E(X_0^2) + 2\sum_{k\in V_0^1} \|X_kE_{|k|}(X_0)\|_1.$$

Maintenant, nous allons utiliser les inégalités de Kahane-Khintchine du théorème 3 pour démontrer la tension du processus de sommes partielles $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ dans l'espace $C(\mathcal{A})$. Pour cela, il suffit (cf. Pollard [62]) de vérifier la condition suivante

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to+\infty} E\left(\sup_{\rho(A,B)<\delta} |n^{-d/2}S_n(A) - n^{-d/2}S_n(B)|\right) = 0. \tag{2.42}$$

Rappelons que par hypothèse, il existe $0 < q < 2$ tel que $\|X_0\|_{\psi_{\beta(q)}} < +\infty$. Soient $A$ et $B$ deux éléments de la classe $\mathcal{A}$ et soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $k$ dans $\{1,...,n\}^d$, on considère les éléments $a_k = \lambda(nA \cap R_k) - \lambda(nB \cap R_k)$ de $[-1,1]$ et on note $X^a$ le champ aléatoire réel $(a_k X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$. L'inégalité de Kahane-Khintchine (2.4) justifie le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\|S_n(A) - S_n(B)\|_{\psi_q} &= \left\| \sum_{k\in\{1,\dots,n\}^d} X_k^a \right\|_{\psi_q} \\
&\leq K_q(X) \left( \sum_{k\in\{1,\dots,n\}^d} |a_k| \right)^{1/2} \\
&\leq K_q(X) \left( \sum_{k\in\{1,\dots,n\}^d} \lambda(n(A\Delta B) \cap R_k) \right)^{1/2} \\
&= K_q(X)\sqrt{\lambda(n(A\Delta B))} \\
&= K_q(X) n^{d/2} \rho(A,B)
\end{aligned}$$

où

$$K_q(X) = M_1(q) \left( \|X_0\|^2_{\psi_{\beta(q)}} + \sum_{k\in V_0^1} \left\| \sqrt{|X_k E_{|k|}(X_0)|} \right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \right)^{1/2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$ et tous éléments $A$ et $B$ de $\mathcal{A}$, on a

$$\|n^{-d/2} S_n(A) - n^{-d/2} S_n(B)\|_{\psi_q} \leq K_q(X)\rho(A,B). \tag{2.43}$$

L'inégalité (2.43) signifie que le processus $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ est lipschitzien uniformément en $n$. Puisque la classe $\mathcal{A}$ de boréliens de $[0,1]^d$ satisfait la condition (2.21) d'entropie métrique, on peut appliquer le théorème 11.6 du livre de Ledoux et Talagrand [52] et on déduit que le processus $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ satisfait la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ qui ne dépend que de $\varepsilon$ et de la valeur de l'intégrale (2.21) tel que

$$E\left( \sup_{\rho(A,B)<\delta} |n^{-d/2}S_n(A) - n^{-d/2}S_n(B)| \right) < \varepsilon.$$

Par conséquent, la condition (2.42) est satisfaite et par suite le processus de sommes partielles $\{n^{-d/2}S_n(A)\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ est tendu dans l'espace $C(\mathcal{A})$. Ce qui achève la preuve du théorème 5. □

## Preuve du corollaire 2

D'après l'inégalité (2.31) établie dans la preuve du corollaire 1 et en utilisant la stationnarité du champ aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, il existe une constante $C(q) > 0$ telle que

$$\sum_{k\in V_0^1} \left\| \sqrt{|X_k E_{|k|}(X_0)|} \right\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \leq C(q)\|X_0\|^2_{\psi_{\beta(q)}} \sum_{k\in V_0^1} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k|)}.$$

Par conséquent, la condition (2.24) est plus stricte que la condition projective (2.20). Ce qui achève la preuve du corollaire 2. $\square$

# Chapitre 3

# Sur les théorèmes limite local et central pour les suites d'accroissements d'une martingale

Dans ce chapitre, nous étudions la validité du théorème limite local ainsi que la vitesse de convergence dans le théorème limite central pour les suites d'accroissements d'une martingale.

## 3.1 Rappels sur les suites indépendantes

Pour toute suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x$, on note

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i, \quad F_n(x) = \mathbb{P}(S_n \leq x\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Lyapunov (1901) a été le premier à donner une démonstration rigoureuse du théorème limite central (TLC) suivant.

**Théorème 6 (Lyapunov, 1901)** *Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que $X_0$ soit de moyenne nulle et de variance 1 alors*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Plus tard, Berry [6] et Esseen [28] ont établi un TLC pour des suites non nécessairement stationnaires de variables aléatoires indépendantes bornées dans $L^3(\mathbb{P})$ avec à la clé une vitesse de convergence optimale d'ordre $n^{-1/2}$.

**Théorème 7 (Berry (1941), Esseen (1942))** *Supposons que $(X_k)_{k\geq 0}$ soit une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées et réduites telle que*

$$\sup_{k\geq 0} E|X_k|^3 \leq \rho$$

*pour un certain réel $\rho > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C\rho n^{-1/2}.$$

La vitesse $n^{-1/2}$ fournie par le théorème de Berry-Esseen est en général la meilleure possible en ce sens que l'on peut trouver une suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires réelles satisfaisant les hypothèses du théorème 7 et une constante $C' > 0$ telles que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \geq C'\rho n^{-1/2}.$$

Par exemple, si les variables aléatoires $X_i$ sont i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$ alors

$$\left|\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{2n-1} X_i < 0\right) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{2n-1} X_i = 0\right) = C_{2n}^{n} 2^{-(2n+1)} \sim \frac{1}{2}(\pi n)^{-1/2}.$$

À présent, considérons une suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires réelles i.i.d. centrées et réduites telle que la loi de la variable aléatoire $X_0$ admette une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f_n$ la densité de la variable aléatoire $S_n/\sqrt{n}$ et on dit que le théorème limite local (TLL) a lieu si la suite des densités $f_n$ converge uniformément vers la densité $\varphi$ de la loi normale standard. Bien entendu, la convergence des densités $f_n$ n'est pas une conséquence de la convergence des fonctions de répartitions $F_n$. Il est donc nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires pour obtenir un résultat asymptotique analogue au niveau des densités $f_n$. Ce problème a été résolu par Gnedenko [31] avec le résultat suivant.

**Théorème 8 (Gnedenko, 1954)** *Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que $X_0$ soit de moyenne nulle et de variance 1 et notons $f_n$ et $\varphi$ les densités respectives de la variable aléatoire $n^{-1/2}(X_0 + \ldots + X_{n-1})$ et de la loi normale standard par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sup_{x} |f_n(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

*est qu'il existe un entier $n_0$ tel que la densité $f_{n_0}$ soit bornée.*

Un résultat similaire existe également pour les suites de variables aléatoires à valeurs dans un réseau : supposons que $(X_k)_{k\geq 0}$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi non dégénérée et supposons qu'il existe deux réels $b$ et $h > 0$ tels que $X_0$

prenne presque-sûrement (p.s.) des valeurs de la forme $b + Nh$ lorsque $N$ parcours $\mathbb{Z}$. On appelle $h$ le pas du réseau et on dit que $h$ est maximal si $h$ est la plus grande constante strictement positive telle que la loi de $X_0$ soit concentrée sur l'ensemble $\{b + Nh\,;\, N \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que $X_0$ soit de variance finie $\sigma^2$ et de moyenne $m$. Pour tous entiers $N$ et $n \geq 1$, on note

$$P_n(N) = \mathbb{P}(S_n = nb + Nh).$$

Le TLL suivant du également à Gnedenko [30] étend un résultat établi par de Moivre [13] et Laplace [51] pour des variables aléatoires de Bernoulli.

**Théorème 9 (Gnedenko, 1948)** *Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\sup_N \left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{nb + Nh - nm}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

*est que le pas $h$ du réseau soit maximal.*

Nous allons voir que du point de vue de la validité du TLL et de la vitesse de convergence dans le TLC, le comportement asymptotique des accroissements d'une martingale est très différent de celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

## 3.2 Résultats sur les accroissements d'une martingale

On dit que la suite $(X_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale (ou de type AM) si pour tout entier $k \geq 1$,

$$E(X_k | \, \sigma(X_j\,;\, j < k)) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Une définition plus stricte a été introduite par Nahapetian et Petrosian [57] : on dit que $(X_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale au sens fort (ou de type AMF) si pour tout entier $k \geq 0$,

$$E(X_k | \, \sigma(X_j\,;\, j \neq k)) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Comme pour les variables aléatoires indépendantes (cf. Théorème 6), le TLC a lieu pour les accroissements d'une martingale.

**Théorème 10 (Billingsley (1961), Ibragimov (1963))** *Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite stationnaire ergodique de type AM telle que $X_0$ soit de variance 1 alors*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Bolthausen [8] et Ibragimov [40] ont montré que la vitesse de convergence dans le théorème de Billingsley-Ibragimov pour les accroissements d'une martingale n'est pas du même ordre que pour les variables aléatoires indépendantes (cf. chapitre d'introduction). Notre objectif est de prouver que d'une part, les hypothèses dans le théorème limite local pour les suites de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un réseau (Théorème 9) ne sont plus suffisantes si on considère des accroissements d'une martingale et d'autre part que la vitesse de convergence dans le TLC de Billingsley-Ibragimov (Théorème 10) peut être arbitrairement lente. Dans toute la suite, nous considérons le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ où $\Omega$ est un espace de Lebesgue, $\mu$ est une mesure de probabilité et $T$ est un automorphisme mesurable de $\Omega$ qui préserve la mesure $\mu$. On note $\mathcal{I}$ la tribu des éléments $A$ de $\mathcal{F}$ qui sont $T$-invariants (i.e. les éléments $A$ de $\mathcal{F}$ qui vérifient TA=A p.s.). Nous dirons que la mesure $\mu$ ou que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ est ergodique si tout élément de $\mathcal{I}$ est de mesure 0 ou 1. Pour tout entier $n \geq 1$, tout réel $x$ et toute variable aléatoire $f$ de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$ finie, on adopte les notations suivantes

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \quad \text{et} \quad F_n(f, x) = \mu(S_n(f) \leq x\sigma\sqrt{n}). \tag{3.1}$$

Supposons que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ soit ergodique et d'entropie strictement positive (cf. Petersen [60] pour une définition de l'entropie).

**Théorème 11** *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroît vers zéro. Il existe une variable aléatoire $f$ dans $L^\infty(\mu)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- *la loi de $f$ est non dégénérée et portée par l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$,*
- *le processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ est une suite de type AMF,*
- *il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers telle que pour tout $k \geq 0$,*

$$\mu(S_{n_k}(f) = 0) \geq a_{n_k} \tag{3.2}$$

*et*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| \geq \frac{a_{n_k}}{2}. \tag{3.3}$$

**Remarque 3** Le théorème de Billingsley-Ibragimov (Théorème 10) assure que les deux suites

$$(\mu(S_n(f) = 0))_{n\geq 1} \quad et \quad \left(\sup_x |F_n(f, x) - \Phi(x)|\right)_{n\geq 1}$$

convergent vers zéro tandis que le théorème 11 met en évidence que cette convergence peut être arbitrairement lente. En particulier, le processus $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ ne satisfait pas le TLL pour les suites de variables aléatoires à valeurs dans un réseau. En d'autres termes, les hypothèses du théorème 9 de Gnedenko [30] ne sont pas suffisantes pour obtenir le TLL pour les accroissements d'une martingale.

**Remarque 4** Considérons une suite $(X_k)_{k\geq 1}$ d'accroissements bornés d'une martingale. Récemment, T. de la Rue [12] a démontré le résultat suivant : s'il existe une constante strictement positive $\beta$ telle que pour tout entier $k \geq 1$,

$$E(X_{k+1}^2 | \, \sigma(X_j \, ; \, j \leq k)) \geq \beta > 0 \quad p.s. \tag{3.4}$$

alors la martingale $S_n = X_1 + ... + X_n$ satisfait une propriété de dispersion. Plus précisément, il existe deux constantes positives $C$ et $\lambda$ telles que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sup_t \mathbb{P}(S_n \in I_t) \leq C n^{-\lambda}$$

où $I_t$ désigne l'intervalle $[t-1, t+1]$ pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 11 met en évience que si les variances conditionnelles des accroissements de la martingale considérée sont nulles avec une probabilité strictement positive alors la vitesse de dispersion de celle-ci peut être arbitrairement lente.

À présent, supposons que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ soit ergodique et d'entropie infinie. Le prochain résultat est l'analogue du théorème 11 pour les accroissements d'une martingale dont les sommes partielles admettent des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 12** *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroît vers zéro. Pour toute constante positive L suffisamment grande, il existe une variable aléatoire $f$ dans $L^\infty(\mu)$ qui satisfait les conditions suivantes :*

- *les variables aléatoires $\{S_n(f) \, ; \, n \geq 1\}$ ont des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et la densité de $f$ est bornée,*
- *le processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ est une suite de type AMF,*
- *il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers, une suite $(\rho_k)_{k\geq 0}$ de réels strictement positifs qui converge vers zéro telles que pour tout $k \geq 0$,*

$$\frac{1}{\rho_k} \mu \left( \frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k] \right) \geq L \tag{3.5}$$

*et*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| \geq a_{n_k}. \tag{3.6}$$

L'inégalité (3.5) montre que le processus $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ ne satisfait pas le TLL. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\frac{1}{\rho_k} \mu \left( \frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k] \right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2\varphi(0),$$

ce qui contredirait (3.5) pour $L$ suffisamment grand. Ainsi, les hypothèses du théorème 8 de Gnedenko [31] ne suffisent pas pour obtenir le TLL pour les accroissements d'une martingale. En ce qui concerne le résultat sur la vitesse de dispersion d'une classe de martingale établi par T. de la Rue [12], nous ne savons pas si la construction de la martingale $S_n(f)$ que nous donnons dans le théorème 12 peut être adaptée pour souligner (comme dans le cas discret) l'importance de l'hypothèse (3.4) sur les variances conditionnelles.

## 3.3 Démonstrations

### Preuve du théorème 11

#### Construction de la martingale

Pour construire la fonction $f$, nous avons besoin du résultat suivant qui est un cas particulier d'un résultat plus général que l'on peut retrouver dans l'article de del Junco et Rosenblatt [18]. Considérons le système dynamique $(\Sigma, \mathcal{S}, \nu, S)$ où $(\Sigma, \mathcal{S}, \nu)$ est un espace de Lebesgue et $S$ est un automorphisme de $\Sigma$ qui préserve la mesure de probabilité $\nu$. Nous dirons que le système dynamique $(\Sigma, \mathcal{S}, \nu, S)$ possède un élément $(\varepsilon, N)$-invariant s'il existe un réel $\varepsilon > 0$, un entier $N \geq 1$ et un élément $A$ de $\mathcal{S}$ tels que $\nu(A \Delta S^{-n} A) < \varepsilon \nu(A)$ pour tout entier $0 \leq n \leq N$.

**Lemme 8 (del Junco et Rosenblatt (1979))** *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $N$ dans $\mathbb{N}$ et tout $x$ dans $]0, 1[$, il existe un élément $A$ de $\mathcal{S}$ qui est $(\varepsilon, N)$-invariant et qui vérifie $\nu(A) = x$.*

D'après la version unidimensionnelle du lemme 2 du chapitre 1 (voir aussi Lesigne et Volný [53], lemme 3.8), il existe deux sous-tribus $T$-invariantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ et une fonction $\mathcal{B}$-mesurable $g$ définie sur $\Omega$ telles que le processus stationnaire $(g \circ T^k)_{k \geq 0}$ soit une suite de variable aléatoire i.i.d. de moyennes nulles et dont la loi commune est portée par $\{-1, 0, 1\}$ et telles que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{C}, \mu_{\mathcal{C}}, T)$ soit apériodique.
Nous allons appliquer le lemme 8 au système dynamique $(\Omega, \mathcal{C}, \mu_{\mathcal{C}}, T)$ (en réalité, le fait que $(\Omega, \mathcal{C}, \mu_{\mathcal{C}}, T)$ soit apériodique permet d'établir l'existence d'un élément $(\varepsilon, N)$-invariant dans $\mathcal{C}$ en utilisant uniquement le lemme de Rokhlin). Pour tout entier $k$ positif, on fixe $N_k$ dans $\mathbb{N}$, $\varepsilon_k > 0$ et $d_k > 0$ de sorte que

- la suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 0}$ soit décroissante vers zéro,
- la suite $(N_k)_{k \geq 0}$ soit croissante vers l'infini,
- la suite $(d_k)_{k \geq 0}$ satisfasse $\sum_{k=0}^{+\infty} d_k < 1$.

D'après le lemme 8, pour tout entier $k$ positif, il existe $A_k$ dans $\mathcal{C}$ tel que

$$\mu(A_k) = d_k \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq n \leq N_k \quad \mu(A_k \Delta T^{-n} A_k) < \varepsilon_k d_k. \tag{3.7}$$

Notons

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \in \mathcal{C}$$

et

$$f = g\, \mathbb{1}_{A^c} \in L^\infty(\Omega).$$

On remarque que $0 < \mu(A) < 1$. De plus, la loi de la variable aléatoire $f$ n'est pas dégénérée puisque

$$\mu(f = \pm 1) = \mu(A^c)\mu(g = \pm 1) > 0.$$

D'autre part, en utilisant l'indépendance des tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on voit que pour tout entier $k$ positif,

$$E(f \circ T^k | \, \mathcal{F}_k) = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_k = \sigma(g \circ T^j \, ; \, j \neq k) \vee \mathcal{C}.$$

En particulier, le processus stationnaire $(f \circ T^k)_{k \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires de type AMF dont la loi commune (non dégénérée) est portée par $\{-1, 0, 1\}$.

### Le théorème limite local

Soit $k$ un entier positif fixé. Pour tout entier $1 \leq n \leq N_k$, on a

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} A_k \subset \{S_n(f) = 0\} \tag{3.8}$$

où $S_n(f)$ est le processus de sommes partielles défini par (3.1). D'après les hypothèses définies par (3.7), on a

$$\mu\left(A_k \backslash \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} A_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} (A_k \backslash T^{-i} A_k)\right) \leq N_k \, \varepsilon_k \, d_k,$$

soit

$$\mu\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i} A_k\right) \geq d_k(1 - N_k \varepsilon_k).$$

En combinant cette dernière inégalité avec l'inclusion (3.8), on obtient

$$\mu(S_n(f) = 0) \geq d_k(1 - N_k \varepsilon_k).$$

Soit $(\rho_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels positifs qui décroît strictement vers zéro. Pour tout entier $k \geq 0$, on choisit $\varepsilon_k$ suffisamment petit de sorte que $N_k \varepsilon_k \leq \rho_k$. Ainsi, pour tout $k \geq 0$ et tout $1 \leq n \leq N_k$,

$$\mu(S_n(f) = 0) \geq d_k(1 - \rho_k). \tag{3.9}$$

Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs satisfaisant la condition $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_k} < 1/2$. Pour tout entier $k$ positif, nous faisons les choix suivants :

$$N_k = n_k, \quad \rho_k = 2^{-k-1} \quad \text{et} \quad d_k = 2a_{n_k}.$$

D'après (3.9), on obtient pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mu(S_{n_k}(f) = 0) \geq 2(1 - 2^{-k-1})a_{n_k} \geq a_{n_k}. \tag{3.10}$$

Ainsi, la convergence de la suite $(\mu(S_n(f) = 0))_{n\geq 1}$ vers zéro (qui est une conséquence du théorème de Billingsley-Ibragimov) est arbitrairement lente.

**La vitesse de convergence dans le théorème limite central**

Soient $y > 0$ et $z < 0$ deux nombres réels et soit $k$ un entier positif. D'après l'inégalité (3.10), on a

$$a_{n_k} \leq \mu(S_{n_k}(f) = 0) \leq |F_{n_k}(f, y) - F_{n_k}(f, z)|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit

$$a_{n_k} \leq 2 \sup_x |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| + |\Phi(y) - \Phi(z)|.$$

Finalement, $y$ et $z$ étant arbitraires, on conclut

$$\sup_x |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| \geq \frac{a_{n_k}}{2}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 11. $\square$

## Preuve du théorème 12

### Construction de la martingale

Puisque le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ est supposé ergodique et d'entropie infinie, on a la version suivante du lemme 3.8 de l'article de Lesigne et Volný [53].

**Lemme 9** *Il existe deux sous-tribus $T$-invariantes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ et une fonction $\mathcal{B}$-mesurable $g$ définie sur $\Omega$ telles que*

- *les tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soient indépendantes,*
- *le processus stationnaire $(g \circ T^k)_{k\geq 0}$ soit une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la loi commune admet pour densité la fonction $\mathbb{1}_{[-1,-1/2]} + \mathbb{1}_{[1/2,1]}$,*
- *le système dynamique $(\Omega, \mathcal{C}, \mu_{\mathcal{C}}, T)$ soit apériodique (i.e. pour tout élément non nul $k$ de $\mathbb{Z}$ et pour $\mu_{\mathcal{C}}$-presque tout $\omega$ dans $\Omega$, on a $T^k\omega \neq \omega$).*

La démonstration du lemme 9 est donnée en annexe.

Soit $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1 \tag{3.11}$$

et soit $(N_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs dont le plus grand diviseur commun est 1. D'après le théorème d'Alpern [2], il existe une suite $(F_k)_{k\geq 0}$ d'ensembles $\mathcal{C}$-mesurables telle que la famille $\{T^i F_k,\ 0 \leq i \leq N_k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$ soit une partition de $\Omega$ et telle que $\mu(F_k) = p_k/N_k$ pour tout entier $k \geq 0$. Soit $(d_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro. Notons

$$G_k = \bigcup_{i=0}^{N_k-1} T^i F_k, \tag{3.12}$$

$$h = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\, \mathbb{1}_{G_k}, \tag{3.13}$$

et

$$f = g\, h \in L^\infty(\Omega) \tag{3.14}$$

où $g$ est la fonction fournie par le lemme 9. Comme dans la preuve du théorème 11, en considérant les tribus $\mathcal{F}_k = \sigma(g \circ T^j\,;\, j \neq k) \vee \mathcal{C}$, on voit que $(f \circ T^k)_{k\geq 0}$ est une suite de type AMF.

**Les densités des sommes partielles**

Nous allons voir que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n(f)$ définie par (3.1) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{P}$ la partition $\{G_0, G_1, ...\}$ de $\Omega$ et soit $n \geq 1$ un entier fixé. Considérons la partition de $\Omega$ suivante

$$\mathcal{P}_n = \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P}$$

et fixons $A$ dans $\mathcal{P}_n$. Il existe des entiers positifs $r_0(A), r_1(A), ..., r_{n-1}(A)$ tels que

$$A = \bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j} G_{r_j(A)}.$$

Pour tout réel $x$, posons

$$F_A(S_n, x) = \mu(A \cap \{S_n(f) \leq x\}) \quad \text{et} \quad F_n(x) = \mu(S_n(f) \leq x).$$

Soit $0 \leq j < n$ fixé. Dans toute la suite, l'écriture $d_j(A)$ désignera la constante $d_{r_j(A)}$. Puisque $f(T^j\omega) = d_j(A)g(T^j\omega)$ pour tout $\omega$ dans $A$, on vérifie que pour tout réel $x$,

$$A \cap \{S_n(f) \leq x\} = A \cap \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} d_j(A)\, g \circ T^j \leq x \right\}.$$

En utilisant l'indépendance des tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on déduit que pour tout réel $x$,

$$F_A(S_n, x) = \mu(A)\, \mu \left( \sum_{j=0}^{n-1} d_j(A)\, g \circ T^j \leq x \right).$$

La fonction de répartition de $g$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ sauf -1, -1/2, 1/2 et 1. Par conséquent, la fonction $F_A(S_n, .)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre denombrable de points. Soit $x < 0$ un nombre réel fixé. Puisque la suite $(d_k)_{k\geq 0}$ converge vers zéro, il existe seulement un nombre fini d'ensembles $A$ dans $\mathcal{P}_n$ tels que $\mu(A) > 0$ et $\sum_{j=0}^{n-1} d_j(A) > -x$. Par conséquent, la somme

$$F_n(x) = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} F_A(S_n, x)$$

contient seulement un nombre fini de termes non nuls. On en déduit alors que la fonction de répartition $F_n$ de $S_n(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ sauf en un nombre dénombrable de points. En utilisant la symétrie de la densité de $g$ et l'indépendance de la suite $(g \circ T^k)_{k\geq 0}$, on obtient la dérivabilité de $F_n$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n(f)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

À présent, nous allons voir que la densité de la variable aléatoire $f$ (ou $S_1(f)$) est bornée. Considérons la fonction de répartition $F_1$ de $f$. Soit $x$ un réel fixé, d'après l'indépendance des tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(G_k \cap \{d_k g \leq x\}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(G_k)\, \mu(d_k g \leq x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, \mu(d_k g \leq x). \end{aligned}$$

De plus,

$$\mu(d_k g \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ x \geq d_k \\ \frac{x}{d_k} & \text{if } \ \frac{d_k}{2} \leq x < d_k \\ \frac{1}{2} & \text{if } \ -\frac{d_k}{2} \leq x < \frac{d_k}{2} \\ \frac{x+d_k}{d_k} & \text{if } \ -d_k \leq x < -\frac{d_k}{2} \\ 0 & \text{if } \ x \leq -d_k. \end{cases}$$

Soient $L_1$ et $L_2$ deux constantes strictement positives telles que $L_2 \gg L_1$. Dans toute la suite, pour tout entier $k \geq 0$, on choisit

$$p_k = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} 2^{-k/2}$$

et

$$d_k = \begin{cases} p_k/L_1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ p_k/L_2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On notera que la condition (3.11) est vérifiée et que la fonction $f$ définie par (3.14) dépend des constantes $L_1$ et $L_2$. De plus, si on pose

$$c_1 = \sum_{j \geq 0} p_{2j}^3 \quad \text{et} \quad c_2 = \sum_{j \geq 0} p_{2j+1}^3$$

alors la variance de la fonction $f$ est donnée par

$$\sigma^2(f) = \frac{7}{12}\left(\frac{c_1}{L_1^2} + \frac{c_2}{L_2^2}\right). \tag{3.15}$$

Si $x \geq d_0$ alors $x \geq d_k$ pour tout entier $k \geq 0$ et par conséquent

$$F_1(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j = 1.$$

Si $0 < x < d_0$ alors il existe un unique entier impair $k = k(x)$ tel que $d_{k+2} = d_k/2 \leq x < d_k$ et un unique entier pair $l = l(x)$ tel que $d_{l+2} = d_l/2 \leq x < d_l$. Ainsi,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} p_{2j+1}\, \mu(d_{2j+1} g \leq x) = \sum_{\substack{j \leq k-1 \\ j \text{ impair}}} \frac{p_j}{2} + x\frac{p_k}{d_k} + \sum_{\substack{j \geq k+1 \\ j \text{ impair}}} p_j$$

et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} p_{2j}\, \mu(d_{2j} g \leq x) = \sum_{\substack{j \leq l-1 \\ j \text{ pair}}} \frac{p_j}{2} + x\frac{p_l}{d_l} + \sum_{\substack{j \geq l+1 \\ j \text{ pair}}} p_j.$$

Par conséquent, la fonction de répartition $F_1$ est dérivable en tout point $x > 0$ distinct de $d_0$, $d_1$, $d_2$,... Puisque $F_1$ est symétrique, on en déduit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre dénombrable de points. De plus, on voit que la densité $F_1'$ de $f$ est alors bornée par $L_1 + L_2$.

### Le théorème limite local

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$b_n = \mu\left(n^{-1/2} S_n(g) \in [-1, 1]\right).$$

D'après le théorème limite central pour les variables aléatoires indépendantes, il existe une constante $b > 0$ telle que $b_n \geq b > 0$ pour tout $n$ suffisamment grand. De plus, il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers telle que pour tout $k \geq 0$,

$$\rho_k \geq a_{n_k} \tag{3.16}$$

où $\rho_k = d_k/\sigma(f)$. Soit $k \geq 0$ un entier fixé, choisissons $N_k$ tel que $N_k \geq 2n_k$ et notons

$$\widetilde{G}_k = \bigcup_{i=0}^{N_k - n_k} T^i F_k \subset G_k$$

et

$$E_k = \{\omega \in \widetilde{G}_k \,;\, n_k^{-1/2} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(T^i\omega) \in [-d_k, d_k]\}.$$

Pour tout $i$ dans $\{0, ..., n_k - 1\}$, on a $T^i\widetilde{G}_k \subset G_k$ et $h(T^i\omega) = d_k$ pour tout $\omega$ dans $\widetilde{G}_k$. En utilisant la définition (3.14) de la fonction $f$, on voit que

$$\begin{aligned} E_k &= \{\omega \in \widetilde{G}_k \,;\, n_k^{-1/2} \sum_{i=0}^{n_k-1} g(T^i\omega)\, h(T^i\omega) \in [-d_k, d_k]\} \\ &= \{\omega \in \widetilde{G}_k \,;\, n_k^{-1/2} \sum_{i=0}^{n_k-1} d_k\, g(T^i\omega) \in [-d_k, d_k]\} \\ &= \{\omega \in \widetilde{G}_k \,;\, n_k^{-1/2} \sum_{i=0}^{n_k-1} g(T^i\omega) \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

D'après l'indépendance de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, il vient

$$\mu\left(n_k^{-1/2} S_{n_k}(f) \in [-d_k, d_k]\right) \geq \mu(E_k) = \mu(\widetilde{G}_k)\, b_{n_k} \geq \mu(\widetilde{G}_k)\, b.$$

Or, on sait que

$$\mu(\widetilde{G}_k) = p_k\left(1 - \frac{n_k}{N_k}\right) \geq \frac{p_k}{2}.$$

Ainsi, on déduit

$$\frac{1}{d_k}\mu\left(n_k^{-1/2} S_{n_k}(f) \in [-d_k, d_k]\right) \geq \frac{bp_k}{2d_k}.$$

En utilisant (3.15), on obtient

$$\frac{1}{\rho_k}\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \geq \frac{bp_k}{2d_k}\sigma(f) = \frac{\sqrt{7}bp_k}{4\sqrt{3}d_k}\left(\frac{c_1}{L_1^2} + \frac{c_2}{L_2^2}\right)^{1/2}.$$

Par conséquent, si $k$ est impair, on a

$$\frac{1}{\rho_k}\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \geq \frac{bp_k}{2d_k}\sigma(f) = \frac{\sqrt{7}b}{4\sqrt{3}}\left(\frac{c_1 L_2^2}{L_1^2} + c_2\right)^{1/2}.$$

Finalement, en choisissant $L_2$ suffisamment grand, on obtient pour tout entier impair $k \geq 0$,

$$\frac{1}{\rho_k}\mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \geq L. \tag{3.17}$$

**La vitesse de convergence dans le théorème limite central**

Rappelons que $\Phi$ et $\varphi$ désignent respectivement la fonction de répartition et la densité de la loi normale standard. Soit $k \geq 0$ un entier impair fixé, en appliquant (3.17), on obtient

$$\begin{aligned} L\rho_k &\leq \mu\left(\frac{S_{n_k}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n_k}} \in [-\rho_k, \rho_k]\right) \\ &= |F_{n_k}(f, \rho_k) - F_{n_k}(f, -\rho_k)| \\ &\leq 2\sup_x |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| + |\Phi(\rho_k) - \Phi(-\rho_k)| \\ &\leq 2\sup_x |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| + 2\rho_k\varphi(0), \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_x |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| \geq (L/2 - \varphi(0))\rho_k.$$

En choisissant $L$ suffisamment grand et en utilisant l'inégalité (3.16), on obtient que pour tout entier impair $k \geq 0$,

$$\sup_x |F_{n_k}(f, x) - \Phi(x)| \geq a_{n_k}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 12. □

# Chapitre 4

# Une application statistique des inégalités de Kahane-Khintchine

Dans ce chapitre, nous donnons une application des inégalités de type Kahane-Khintchine établies dans le chapitre 2 au travers de l'étude d'un modèle de régression non paramétrique lorsque les erreurs sont données par un champ de variables aléatoires dépendantes.

## 4.1 Quelques inégalités exponentielles

En utilisant l'inégalité de Markov et la définition (2.2) de la norme de Luxemburg, nous allons voir que les inégalités de type Kahane-Khintchine établies dans le chapitre 2 fournissent de nouvelles inégalités exponentielles. Rappelons que pour tout $q > 0$, on a posé $h_q = (1 - q/q)^{1/q}\, \mathbb{1}_{\{0<q<1\}}$.

**Théorème 13** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. S'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ alors pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$ et tout réel $x$ positif,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right| > x\right) \leq (1 + e^{h_q^q}) \exp\left[-\left(\frac{x}{M_1(q)(\sum_{i\in\Gamma} b_{i,q}(X))^{1/2}} + h_q\right)^q\right]. \tag{4.1}$$

*Si pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ appartient à $L^\infty(\mathbb{P})$ alors pour tout réel $0 < q \leq 2$, toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$ et tout réel $x$ positif,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i\in\Gamma} X_i\right| > x\right) \leq (1 + e^{h_q^q}) \exp\left[-\left(\frac{x}{M_2(q)(\sum_{i\in\Gamma} b_{i,\infty}(X))^{1/2}} + h_q\right)^q\right] \tag{4.2}$$

*où $M_1(q)$, $M_2(q)$, $b_{i,q}(X)$ et $b_{i,\infty}(X)$ sont les constantes strictement positives introduites dans le théorème 3 du chapitre 2.*

**Remarque 5** Le théorème 13 reste valable si on remplace respectivement les constantes $b_{i,q}(X)$ et $b_{i,\infty}(X)$ par $\widetilde{b}_{i,q}(X)$ et $\widetilde{b}_{i,\infty}(X)$ définies dans le corollaire 1 du chapitre 2 par les égalités (2.13) et (2.15).

Pour tout champ aléatoire $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$, on notera respectivement $\mathcal{G}_i(Y)$ et $\widetilde{\mathcal{G}}_i(Y)$ les tribus $\sigma(Y_j\,;\, j <_{lex} i)$ et $\sigma(Y_j\,;\, j \leq_{lex} i)$. Rappelons qu'un champ aléatoire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est de type AM relativement au champ aléatoire $Y$ si pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $X_i$ est mesurable pour la tribu $\widetilde{\mathcal{G}}_i(Y)$ et si $E(X_i|\,\mathcal{G}_i(Y)) = 0$ p.s. Nous dirons qu'un champ aléatoire $(W_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est $Y$-prévisible si pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $W_i$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{G}_i(Y)$. Le théorème 4 du chapitre 2 fournit les inégalités exponentielles suivantes.

**Théorème 14** *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire de type AM relativement à un champ aléatoire $Y$ et soient $(W_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ et $(Z_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ deux champs aléatoires $Y$-prévisibles tels que les variables aléatoires $Z_i$ soient positives. S'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$, la variable aléatoire $Z_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ et*

$$W_i \leq X_i \leq W_i + Z_i \quad p.s.$$

*alors pour toute partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$ et tout réel $x$ positif,*

$$\mathbb{P}\left(\Big|\sum_{i\in\Gamma} X_i\Big| > x\right) \leq (1+e^{h_q^q})\,\exp\left[-\left(\frac{x}{D(q)\,(\sum_{i\in\Gamma}\|Z_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}})^{1/2}} + h_q\right)^q\right]. \tag{4.3}$$

*S'il existe une famille $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de constantes positives telles que $Z_i \leq c_i$ p.s. alors pour toute partie finie $\Gamma$ de $Z^d$ et tout réel $x$ positif,*

$$\mathbb{P}\left(\Big|\sum_{i\in\Gamma} X_i\Big| > x\right) \leq 2\,\exp\left(-\frac{x^2}{D^2\sum_{i\in\Gamma} c_i^2}\right) \tag{4.4}$$

*où $D$ et $D(q)$ sont les constantes strictement positives introduites dans le théorème 4 du chapitre 2.*

L'inégalité (4.4) est essentiellement connue (voir Hoeffding [38], Azuma [3], van de Geer [72]). En revanche, l'inégalité (4.3) est nouvelle car elle suppose seulement que les variables aléatoires $Z_i$ aient des moments exponentiels finis.
Dans le théorème 14, nous avons considéré un champ aléatoire de type AM. Nous allons maintenant examiner un cas plus général. Nous dirons que deux éléments $k$ et $l$ d'une partie finie $\Gamma$ de $\mathbb{Z}^d$ sont respectivement le sommet et la base de $\Gamma$ si pour tout $i$ dans $\Gamma$, on a $l \leq_{lex} i \leq_{lex} k$.

**Théorème 15** *Soient $\Gamma$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ et $Y$ un champ aléatoire donné. Notons respectivement $k$ et $l$ le sommet et la base de $\Gamma$, supposons que $X_k$ soit une variable aléatoire mesurable pour la tribu $\widetilde{\mathcal{G}}_k(Y)$ et indépendante de la tribu $\mathcal{G}_l(Y)$ et considérons $(W_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$*

*et $(Z_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ deux champs aléatoires $Y$-prévisibles tels que les variables aléatoires $Z_i$ soient positives. S'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que pour tout $i$ dans $\Gamma$, la variable aléatoire $Z_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ et*

$$W_i \leq E(X_k | \widetilde{\mathcal{G}}_i(Y)) \leq W_i + Z_i \quad p.s.$$

*alors pour tout réel $x$ positif,*

$$\mathbb{P}\left(|X_k - E(X_k)| > x\right) \leq (1 + e^{h_q^q}) \exp\left[ - \left( \frac{x}{D(q)\left(\sum_{i\in\Gamma} \|Z_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}}\right)^{1/2}} + h_q \right)^q \right]. \tag{4.5}$$

*S'il existe une famille $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ de constantes positives telles que $Z_i \leq c_i$ p.s. alors pour tout réel $x$ positif,*

$$\mathbb{P}\left(|X_k - E(X_k)| > x\right) \leq 2 \exp\left( - \frac{x^2}{D^2 \sum_{i\in\Gamma} c_i^2} \right) \tag{4.6}$$

*où $D$ et $D(q)$ sont les constantes strictement positives introduites dans le théorème 4 du chapitre 2.*

L'inégalité (4.6) est essentiellement celle démontrée par van de Geer [72] tandis que l'inégalité (4.5) couvre le cas où les variables aléatoires $Z_i$ ont seulement des moments exponentiels finis.

**Remarque 6** Le théorème 15 généralise l'inégalité exponentielle pour des fonctions de variables aléatoires indépendantes établie par McDiarmid [55]. En effet, soit $\Gamma$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ et soit $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ un champ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace mesurable $\mathcal{Y}$. Notons $|\Gamma|$ le cardinal de la partie $\Gamma$ et considérons l'unique bijection $f$ définie sur $\Lambda = \{1, ..., |\Gamma|\}$ à valeurs dans $\Gamma$ telle que $f(x) \leq_{lex} f(y)$ dès que $x \leq y$. Notons respectivement $k$ et $l$ le sommet $f(|\Gamma|)$ et la base $f(1)$ de la partie $\Gamma$. Soit $0 < q < 2$ fixé et soit $g$ une fonction réelle définie sur $\mathcal{Y}^{|\Gamma|}$ telle que pour tout $i$ dans $\Lambda$ et tout couple $(y_{f(i)}, y'_{f(i)})$ dans $\mathcal{Y}^2$, il existe une variable aléatoire positive $Z_i$ appartenant à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ telle que

$$|g(Y_l, .., y_{f(i)}, .., Y_k) - g(Y_l, .., y'_{f(i)}, .., Y_k)| \leq Z_i \quad p.s. \tag{4.7}$$

Posons $X_k = g(Y) = g(Y_l, .., Y_{f(i)}, .., Y_k)$ et notons pour tout $i$ dans $\Lambda$,

$$W_i = \inf_y E(g(Y_l, .., Y_{f(i-1)}, y, Y_{f(i+1)}, .., Y_k) | \widetilde{\mathcal{G}}_{f(i)}(Y)),$$
$$W'_i = \sup_y E(g(Y_l, .., Y_{f(i-1)}, y, Y_{f(i+1)}, .., Y_k) | \widetilde{\mathcal{G}}_{f(i)}(Y)).$$

De par l'indépendance des variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$, les variables aléatoires $W_i$ et $W'_i$ sont mesurables pour la tribu $\mathcal{G}_{f(i)}(Y)$. De plus, on a $W_i \leq E(X_k | \widetilde{\mathcal{G}}_{f(i)}(Y)) \leq W'_i$ p.s. et d'après (4.7), on a $W_i' - W_i \le Z_i$ p.s. pour tout $i$ dans $\Lambda$. L'inégalité (4.5) entraîne alors que pour tout réel $x$ positif,

$$\mathbb{P}(|g(Y) - E(g(Y))| > x) \le (1 + e^{h_q^q}) \exp\left[ - \left( \frac{x}{D(q)\,(\sum_{i\in\Gamma} \|Z_i\|^2_{\psi_{\beta(q)}})^{1/2}} + h_q \right)^q \right].$$

Dans la section suivante, nous allons utiliser les inégalités (4.1) et (4.2) pour l'étude d'un modèle de régression non paramétrique lorsque les erreurs sont données par un champ de variables aléatoires dépendantes.

## 4.2 Un modèle de régression non paramétrique

Soit $(Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}^d}$ des données générées par le modèle suivant

$$Y_i = g(i/n) + \varepsilon_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}^d \tag{4.8}$$

où $g$ est une fonction régulière inconnue et $(\varepsilon_i)_{i\in\{1,\dots,n\}^d}$ est un champ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles. On dit que $K$ est un noyau de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ si $K$ est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(u)du = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} uK(u)du = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} u^2 K(u)du < +\infty.$$

On estime la fonction inconnue $g$ par l'estimateur à noyau $g_n$ défini pour tout réel $x$ dans $[0,1]^d$ par

$$g_n(x) = \frac{1}{(nh_n)^d} \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} Y_i K\left(\frac{x - i/n}{h_n}\right)$$

où $(h_n)_{n\ge1}$ est une suite de nombres réels positifs qui converge vers zéro et $K$ est un noyau de probabilité défini sur $\mathbb{R}^d$.
Pour tout $B > 0$, on note $\mathcal{C}^2(B)$ l'ensemble des fonctions réelles deux fois continûment différentiables sur $]0,1[^d$ telles que

$$\sup_{x\in[0,1]^d} \max_{\alpha\in\mathcal{M}_2} |D_\alpha(f)(x)| \le B$$

avec

$$D_\alpha(f) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = \{\alpha = (\alpha_i)_i \in \mathbb{N}^d \,;\, |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i \le 2\}.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

**A1**) Il existe une constante $B > 0$ telle que $g$ appartienne à $\mathcal{C}^2(B)$.

**A2**) Le noyau de probabilité $K$ est borné, symétrique, positif, à support compact et deux fois continûment différentiable.

Rappelons que $\beta(q) = 2q/(2-q)$ pour tout $0 < q < 2$ et gardons à l'esprit les définitions (2.5), (2.7), (2.13) et (2.15) des nombres réels $b_{i,q}$, $b_{i,\infty}$, $\widetilde{b}_{i,q}$ et $\widetilde{b}_{i,\infty}$ pour tout $i$ dans $\mathbb{Z}^d$ et tout réel $0 < q < 2$.

**Théorème 16** *Supposons que les hypothèses* **A1)** *et* **A2)** *soient satisfaites. Soit* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels strictement positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n h_n^2 = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n\, h_n^{d+1}} = 0. \tag{4.9}$$

*1)* *S'il existe un réel* $0 < q < 2$ *tel que la variable aléatoire* $\varepsilon_i$ *appartienne à* $L_{\psi_{\beta(q)}}$ *pour tout* $i$ *dans* $\mathbb{Z}^d$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{(\log n)^{1/q}}{(nh_n)^d} \left( \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} b_{i,q}(\varepsilon) \right)^{1/2} = 0 \tag{4.10}$$

*alors pour tout réel* $x$ *dans* $[0,1]^d$*,*

$$\alpha_n |g_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0. \tag{4.11}$$

*De plus, la convergence a lieu uniformément sur* $\mathcal{C}^2(B)$*.*

*2)* *Si les variables aléatoires* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ *appartiennent à* $L^\infty(\mathbb{P})$ *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{\sqrt{\log n}}{(nh_n)^d} \left( \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} b_{i,\infty}(\varepsilon) \right)^{1/2} = 0 \tag{4.12}$$

*alors la conclusion* (4.11) *reste valide.*

En utilisant l'inégalité de Serfling [67], on déduit le résultat suivant lorsque les erreurs sont données par un champ aléatoire réel $\phi$-mélangeant.

**Corollaire 3** *Le théorème* 16 *reste valide si l'on remplace la condition* (4.10) *par*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{(\log n)^{1/q}}{(nh_n)^d} \left( \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \widetilde{b}_{i,q}(\varepsilon) \right)^{1/2} = 0, \tag{4.13}$$

*ou la condition* (4.12) *par*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{\sqrt{\log n}}{(nh_n)^d} \left( \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \widetilde{b}_{i,\infty}(\varepsilon) \right)^{1/2} = 0. \tag{4.14}$$

Lorsque le champ aléatoire $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est stationnaire, nous obtenons la formulation suivante.

**Corollaire 4** *Supposons que le champ aléatoire* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ *soit stationnaire et soit* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels strictement positifs qui satisfait la condition* (4.9)*. La conclusion* (4.11) *du théorème* 16 *reste valide si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- *Il existe* $0 < q < 2$ *tel que la variable aléatoire* $\varepsilon_0$ *appartienne à* $L_{\psi_{\beta(q)}}$*,*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{(\log n)^{1/q}}{(\sqrt{n}h_n)^d} = 0$$

*et*

$$\sum_{k\in V_0^1} \left\| \sqrt{|\varepsilon_k E_{|k|}(\varepsilon_0)|} \right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 < +\infty \quad ou \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k|)} < +\infty. \tag{4.15}$$

- *La variable aléatoire* $\varepsilon_0$ *appartient à* $L^\infty(\mathbb{P})$*,*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n \frac{\sqrt{\log n}}{(\sqrt{n}h_n)^d} = 0$$

*et*

$$\sum_{k\in V_0^1} \|\varepsilon_k E_{|k|}(\varepsilon_0)\|_\infty < +\infty \quad ou \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi_{\infty,1}(|k|) < +\infty. \tag{4.16}$$

Laib [50] a étudié le modèle (4.8) lorsque les erreurs sont données par une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'accroissements d'une martingale. Le théorème 16 et les corollaires 3 et 4 étendent les résultats de Laib [50] dans plusieurs directions. Hall et Hart [35] ont étudié le même modèle lorsque les erreurs sont données par une suite stationnaire $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires réelles de moyennes nulles et de variances finies. En particulier, ils ont montré que la vitesse optimale de convergence en probabilité de $g_n(x)$ vers $g(x)$ est de l'ordre $n^{-2/5}$ si $h_n = n^{-1/5}$ et si la série de terme général $E(\varepsilon_0\varepsilon_i)$ converge absolument. Bosq [9] a établi la convergence presque-sûre de $g_n(x)$ vers $g(x)$ avec la vitesse $n^{-\beta}$ pour un certain $\beta$ dans l'intervalle $]0, 1/3[$ lorsque les erreurs $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ forment une suite $\alpha$-mélangeante et lorsqu'il existe $a > 0$ et $\beta/2 < \nu < 1/2 - \beta$ tels que $h_n = an^{-\nu}$.

## 4.3 Démonstrations

### Preuve des théorèmes 13 et 14

Soit $0 < q \leq 2$ fixé. En utilisant l'inégalité de Markov, on peut majorer la probabilité $\mathbb{P}(|S_\Gamma| > x)$ pour tout réel $x > 0$ par

$$\exp\left[-\left(\frac{x}{\|S_\Gamma\|_{\psi_q}} + h_q\right)^q\right] E\exp\left[\left(\frac{|S_\Gamma|}{\|S_\Gamma\|_{\psi_q}} + h_q\right)^q\right]$$

où $S_\Gamma = \sum_{i\in\Gamma} X_i$. Par définition de la norme de Luxemburg $\|.\|_{\psi_q}$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(|S_\Gamma| > x\right) \leq (1 + e^{h_q^q}) \exp\left[ - \left( \frac{x}{\|S_\Gamma\|_{\psi_q}} + h_q \right)^q \right].$$

Enfin, on conclut en utilisant les inégalités (2.4), (2.6), (2.17) et (2.18) établies dans les théorèmes 3 et 4 du chapitre 2. Ce qui achève la preuve des théorèmes 13 et 14. □

## Preuve du théorème 15

Notons $|\Gamma|$ le cardinal de la partie finie $\Gamma$ et considérons l'unique bijection $f$ définie sur $\Lambda = \{1, .., |\Gamma|\}$ à valeurs dans $\Gamma$ telle que $f(x) \leq_{lex} f(y)$ dès que $x \leq_{lex} y$. Pour tout $i$ dans $\Lambda$, on note

$$\widetilde{X}_i = E(X_k | \,\widetilde{\mathcal{G}}_{f(i)}(Y)) - E(X_k | \,\widetilde{\mathcal{G}}_{f(i-1)}(Y))$$

où $k$ est le sommet de $\Gamma$ et $\widetilde{\mathcal{G}}_{f(0)}(Y)$ désigne la tribu $\mathcal{G}_{f(1)}(Y)$. Clairement, la variable aléatoire $\widetilde{X}_i$ est $\widetilde{\mathcal{G}}_{f(i)}(Y)$-mesurable et $E(\widetilde{X}_i | \,\widetilde{\mathcal{G}}_{f(i-1)}(Y)) = 0$ p.s. Puisque par hypothèse, $E(X_k | \,\mathcal{G}_{f(1)}(Y)) = E(X_k)$ p.s, on vérifie que

$$X_k - E(X_k) = \sum_{i=1}^{|\Gamma|} \widetilde{X}_i$$

D'autre part, pour tout $i$ dans $\Lambda$, on a

$$V_i = W_{f(i)} - E(X_k | \,\widetilde{\mathcal{G}}_{f(i-1)}(Y)) \leq \widetilde{X}_i \leq W_{f(i)} + Z_{f(i)} - E(X_k | \,\widetilde{\mathcal{G}}_{f(i-1)}(Y)) = V_i + Z_{f(i)}.$$

On achève la preuve du théorème 15 en appliquant le théorème 14. □

## Preuve du théorème 16

Soit $x$ un élément du cube $[0,1]^d$ et soit $n$ un entier strictement positif. Notons

$$B_n(x) = Eg_n(x) - g(x) \quad \text{et} \quad V_n(x) = g_n(x) - Eg_n(x).$$

Plus précisément,

$$B_n(x) = \frac{1}{(nh_n)^d} \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} g(i/n)\, K\left(\frac{x - i/n}{h_n}\right) - g(x),$$
$$V_n(x) = \frac{1}{(nh_n)^d} \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \varepsilon_i\, K\left(\frac{x - i/n}{h_n}\right).$$

Pour tout $i$ dans $\Lambda_n = \{1, ..., n\}^d$, on pose

$$a_i = K\left(\frac{x - i/n}{h_n}\right).$$

Soit $\lambda$ un réel positif. Supposons qu'il existe un réel $0 < q < 2$ tel que la variable aléatoire $\varepsilon_i$ appartienne à $L_{\psi_{\beta(q)}}$ pour tout $i$ dans $\Lambda_n$. Dans ce cas, l'inégalité (4.1) entraîne

$$\mathbb{P}(\alpha_n|V_n(x)| > \lambda) \leq (1 + e^{h_q^q}) \exp\left[ - \left( \frac{(nh_n)^d \lambda}{M(q)\alpha_n(\sum_{i\in\Lambda_n} b_{i,q}(\varepsilon))^{1/2}} + h_q \right)^q \right] \tag{4.17}$$

où $M(q) = M_1(q) \sup_u K(u) < +\infty$. Si la variable aléatoire $\varepsilon_i$ appartient à $L^\infty(\mathbb{P})$ pour tout $i$ dans $\Lambda_n$ alors l'inégalité (4.2) entraîne

$$\mathbb{P}(\alpha_n|V_n(x)| > \lambda) \leq 2 \exp\left[ - \left( \frac{(nh_n)^d \lambda}{M'(2)\alpha_n(\sum_{i\in\Lambda_n} b_{i,\infty}(\varepsilon))^{1/2}} \right)^2 \right] \tag{4.18}$$

où $M'(2) = M_2(2) \sup_u K(u) < +\infty$. En combinant (4.10) et (4.17) ou bien (4.12) et (4.18), on obtient pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\alpha_n|V_n(x)| > \lambda\right) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, on conclut

$$\alpha_n|V_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0. \tag{4.19}$$

Il nous reste à montrer

$$\alpha_n|B_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 0. \tag{4.20}$$

Dans un premier temps, montrons qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que

$$\left| Eg_n(x) - \int_{[0,1]^d} g(u) \frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) du \right| \leq \frac{a}{nh_n^{d+1}} \tag{4.21}$$

et

$$\left| \int_{[0,1]^d} g(u) \frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) du - g(x) \right| \leq bh_n^2. \tag{4.22}$$

Notons pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x$ dans $[0,1]^d$,

$$I_n(x) = \int_{[0,1]^d} g(u) \frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) du.$$

Soit $u$ dans $[0,1]^d$ fixé et notons $f(u) = g(u)\frac{1}{h_n^d}K\left(\frac{x-u}{h_n}\right)$. Pour tout $i$ dans $\Lambda_n$, on considère le cube

$$R_{i/n} = \left]\frac{i_1 - 1}{n}, \frac{i_1}{n}\right] \times \ldots \times \left]\frac{i_d - 1}{n}, \frac{i_d}{n}\right].$$

On a

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_{[0,1]^d} f(u)du \\
&= \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \int_{R_{i/n}} f(u)du \\
&= \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} \lambda(R_{i/n}) f(c_i) \text{ où } c_i \in R_{i/n} \\
&= \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} n^{-d} f(c_i).
\end{aligned}$$

D'autre part, notons $G(u) = h_n^{-d} g(u)$ et $\phi_x(u) = (x-u)/h_n$. On vérifie que pour tout élément $v$ de $[0,1]^d$,

$$d(K \circ \phi_x)(u)(v) = \frac{-1}{h_n} \sum_{i=1}^{d} v_i \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial K}{\partial u_j}(\phi_x(u)).$$

En utilisant les hypothèses **A1**) et **A2**) et en notant que

$$df(u) = G(u) d(K \circ \phi_x)(u) + (K \circ \phi_x)(u) dG(u),$$

on conclut qu'il existe $a > 0$ telle que $\sup_{u\in[0,1]^d} \|df(u)\| \le a\, h_n^{-(d+1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|Eg_n(x) - I_n(x)| &= \Big| \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} n^{-d}(f(i/n) - f(c_i)) \Big| \\
&\le \sup_{u\in[0,1]^d} \|df(u)\| \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} n^{-d} \|i/n - c_i\|_\infty \\
&\le \frac{a}{h_n^{d+1}} \sum_{i\in\{1,\dots,n\}^d} n^{-(d+1)} \\
&= \frac{a}{n h_n^{d+1}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|i/n - c_i\|_\infty \le 1/n$ pour tout $i$ dans $\Lambda_n$. Ce qui fournit l'estimation (4.21). Pour démontrer l'inégalité (4.22), on remarque que

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_{[0,1]^d} g(u) \frac{1}{h_n^d} K(\phi_x(u)) du \\
&= \int_{\phi_x([0,1]^d)} g(\phi_x^{-1}(y)) \frac{1}{h_n^d} K(y) |J_{\phi_x^{-1}}(y)| dy \\
&= \int_{\phi_x([0,1]^d)} g(x - y h_n) K(y) dy
\end{aligned}$$

où $\phi_x$ est le difféomorphisme défini pour tout $u$ dans $\mathbb{R}^d$ par $\phi_x(u) = (x-u)/h_n$ et $|J_{\phi_x^{-1}}(y)|$ est le déterminant de la matrice jacobienne de $\phi_x^{-1}$ au point $y$. D'après la formule de Taylor, il existe $c$ dans l'intervalle $[x - yh_n, x]$ tel que

$$g(x - yh_n) = g(x) + h_n dg(x)(y) + h_n^2 d_2g(c)(y)$$

où

$$dg(x)(y) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) y_i \quad \text{et} \quad d_2g(c)(y) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(c) y_i y_j.$$

Puisque $d_2g(x)$ est bornée et $K$ est un noyau positif et symétrique (cf. **A1**) et **A2**)), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} dg(x)(y)K(y)dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} d_2g(c)(y)K(y)dy < +\infty.$$

Par conséquent, il existe $b > 0$ telle que $|I_n(x) - g(x)| \le b\, h_n^2$. Ce qui fournit l'estimation (4.22). Ainsi, pour tout entier $n$ suffisamment grand et tout $x$ dans $[0, 1]^d$,

$$|B_n(x)| \le (a \vee b) \left( \frac{1}{n h_n^{d+1}} + h_n^2 \right).$$

On déduit alors (4.20) de l'hypothèse (4.9). D'autre part, toutes les estimations que nous avons utilisé sont valables uniformément pour tout $x$ dans $[0, 1]^d$ et toute fonction $g$ dans $\mathcal{C}^2(B)$. Ce qui achève la preuve du théorème 16. $\square$

## Preuve du corollaire 3

Le corollaire 3 est une conséquence immédiate des inégalités (2.29) et (2.30) établies dans la preuve du corollaire 1 du chapitre 2. $\square$

## Preuve du corollaire 4

Soit $n \ge 1$ un entier et soit $0 < q < 2$ un réel. Il suffit de remarquer qu'en utilisant la stationnarité du champ aléatoire $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, on a pour tout $i$ dans $\{1, ..., n\}^d$,

$$b_{i,q}(\varepsilon) = \|\varepsilon_0\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 + \sum_{k \in V_0^1} \left\| \sqrt{|\varepsilon_k E_{|k|}(\varepsilon_0)|} \right\|_{\psi_{\beta(q)}}^2,$$

$$b_{i,\infty}(\varepsilon) = \|\varepsilon_0\|_\infty^2 + \sum_{k \in V_0^1} \|\varepsilon_k E_{|k|}(\varepsilon_0)\|_\infty,$$

$$\widetilde{b}_{i,q}(\varepsilon) = \|\varepsilon_0\|_{\psi_{\beta(q)}}^2 \left( 1 + D(q) \sum_{k \in V_0^1} \sqrt{\phi_{\infty,1}(|k|)} \right) \text{ où } D(q) > 0,$$

$$\widetilde{b}_{i,\infty}(\varepsilon) = \|\varepsilon_0\|_\infty^2 \left( 1 + 2 \sum_{k \in V_0^1} \phi_{\infty,1}(|k|) \right).$$

Le corollaire 4 est alors une conséquence directe du théorème 16 et du corollaire 3. $\square$

# ANNEXE

Nous démontrons ici le lemme 4 que nous avons utilisé dans le chapitre 2 pour établir des inégalités de type Kahane-Khintchine ainsi que le lemme 9 du chapitre 3.

## Preuve du lemme 4 du chapitre 2

Soit $\beta > 0$ un réel fixé. Pour tout réel positif $x$, on a

$$\psi_\beta(x) = \varphi_\beta(x + h_\beta) - \varphi_\beta(h_\beta) \quad \text{où} \quad \varphi_\beta(x) = \exp(x^\beta).$$

Dans un premier temps, nous allons montrer la proposition suivante.

**Proposition 2** *Soient $K > 0$ un réel fixé et $Z$ une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. S'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$E\varphi_\beta\left(|Z|/c\right) \leq K + 1 \tag{A.1}$$

*alors il existe une constante universelle $A_\beta(K) > 0$ qui ne dépend que de $\beta$ et de $K$ telle que*

$$c \geq A_\beta(K) \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

En effet, l'hypothèse $(A.1)$ est équivalente à

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{\|Z\|_{\beta k}}{c} \right)^{\beta k} \leq K.$$

Par conséquent, si $k \geq 1$ est un entier fixé, on a

$$\frac{1}{k!} \left( \frac{\|Z\|_{\beta k}}{c} \right)^{\beta k} \leq K.$$

Ce qui entraîne

$$c \geq \frac{\|Z\|_{\beta k}}{K^{1/\beta k} \, (k!)^{1/\beta k}} \geq \frac{\|Z\|_{\beta k}}{K^{1/\beta} \, (k!)^{1/\beta k}}. \tag{A.2}$$

Soit $p > 2$ un réel fixé. Si $2 < p < \beta$, l'inégalité $(A.2)$ fournit pour $k = 1$,

$$c \geq \frac{\|Z\|_\beta}{K^{1/\beta}} = \left(\frac{2}{K}\right)^{1/\beta} \frac{\|Z\|_\beta}{2^{1/\beta}} \geq \left(\frac{2}{K}\right)^{1/\beta} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Dans le cas contraire, il existe un entier $k \geq 2$ tel que $\beta(k-1) \leq p < \beta k$ et l'inégalité $(A.2)$ entraîne

$$c \geq A_\beta(k) \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}} \quad \text{où} \quad A_\beta(k) = \frac{\beta^{1/\beta}(k-1)^{1/\beta}}{K^{1/\beta}(k!)^{1/\beta k}} > 0.$$

De plus, en utilisant la formule de Stirling, on a

$$A_\beta(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \left(\frac{\beta\sqrt{e}}{K}\right)^{1/\beta} > 0.$$

Ainsi, il existe une constante $\widetilde{A}_\beta(K) > 0$ qui ne dépend que de $\beta$ et de $K$ telle que $A_\beta(k) \geq \widetilde{A}_\beta(K) > 0$ pour tout entier $k \geq 2$. Par conséquent, on obtient

$$c \geq \widetilde{A}_\beta(K) \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Finalement, en choisissant

$$A_\beta(K) = \min\left(\widetilde{A}_\beta(K), (2/K)^{1/\beta}\right),$$

on conclut que pour tout $p > 2$,

$$c \geq A_\beta(K) \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 2. $\square$

Soient $\beta$ un réel strictement positif, $Z$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$ et $c > 0$ une constante telle que

$$E\psi_\beta(|Z|/c) \leq 1.$$

Autrement dit, on a

$$E\varphi_\beta(|Z|/c) \leq 1 + \varphi_\beta(h_\beta).$$

D'après la proposition 2, il existe une constante universelle $A_\beta > 0$ qui ne dépend que de $\beta$ telle que

$$c \geq A_\beta \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Ainsi,

$$\|Z\|_{\psi_\beta} \geq A_\beta \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

À présent, il reste à montrer que pour tout $\beta > 0$, il existe $B_\beta > 0$ qui ne dépend que de $\beta$ telle que pour toute variable aléatoire $Z$,

$$\|Z\|_{\psi_\beta} \leq B_\beta \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Soient $\beta > 0$ un réel et $Z$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$. Posons

$$S_\beta(Z) = \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Pour tout réel $B > 0$, on a

$$\begin{aligned}
E\varphi_\beta\left(\frac{|Z|}{B\,S_\beta(Z)} + h_\beta\right) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\|Z\|_{\beta k}}{B\,S_\beta(Z)} + h_\beta\right)^{\beta k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{\|Z\|_{\beta k}}{B\,S_\beta(Z)} + h_\beta\right)^{\beta k} + \sum_{k>[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{\|Z\|_{\beta k}}{B\,S_\beta(Z)} + h_\beta\right)^{\beta k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{\|Z\|_{3}}{B\,S_\beta(Z)} + h_\beta\right)^{\beta k} + \sum_{k>[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{\|Z\|_{\beta k}}{B\,S_\beta(Z)} + h_\beta\right)^{\beta k} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{3^{1/\beta}}{B} + h_\beta\right)^{\beta k} + \sum_{k>[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{(\beta k)^{1/\beta}}{B} + h_\beta\right)^{\beta k} \\
&= F(B).
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant la formule de Stirling, on a pour $k$ au voisinage de l'infini,

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{(\beta k)^{1/\beta}}{B} + h_\beta\right)^{\beta k} \sim \left(\frac{e\beta}{B^\beta}\right)^k \times \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ainsi, il existe $\widetilde{B}_\beta > 0$ qui ne dépend que de $\beta$ tel que

$$\sum_{k>[2/\beta]} \frac{1}{k!}\left(\frac{(\beta k)^{1/\beta}}{\widetilde{B}_\beta} + h_\beta\right)^{\beta k} < +\infty.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{B\to+\infty} F(B) = \varphi_\beta(h_\beta).$$

Par conséquent, la quantité $E\psi_\beta(|Z|/B\,S_\beta(Z))$ converge vers zéro uniformément en $Z$ lorsque $B$ tend vers l'infini. Il existe donc une constante $B_\beta > 0$ qui ne dépend que de $\beta$ telle que

$$E\psi_\beta\left(\frac{|Z|}{B_\beta\,S_\beta(Z)}\right) \leq 1.$$

Finalement, par définition de la norme de Luxemburg, on déduit

$$\|Z\|_{\psi_\beta} \leq B_\beta S_\beta(Z) = B_\beta \sup_{p>2} \frac{\|Z\|_p}{p^{1/\beta}}.$$

Ce qui achève la preuve du lemme 4. □

# Preuve du lemme 9 du chapitre 3

Nous allons utiliser le théorème de Sinaï relatif qui est contenu dans la proposition $2'$ de l'article de Thouvenot [71]. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de Lebesgue et $T$ un automorphisme ergodique de $\Omega$. Pour toute partition finie $\mathcal{M} = (M_1, .., M_k)$ de $\Omega$, on note $d(\mathcal{M})$ le vecteur $(\mu(M_1), .., \mu(M_k))$. Nous renvoyons le lecteur au livre de K. Petersen [60] pour une définition de la notion d'entropie que l'on désignera ici par la lettre $H$.

**Théorème 17 (Théorème de Sinaï relatif)** *Soient $\mathcal{Q}$ une partition de $\Omega$ et $\mathcal{P}$ une partition abstraite finie satisfaisant $H(\mathcal{P}) + H(\mathcal{Q}, T) \leq H(T)$ alors il existe une partition $\mathcal{R}$ de $\Omega$ telle que*

- *la suite $\{T^i \mathcal{R}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ soit indépendante,*
- *$d(\mathcal{R}) = d(\mathcal{P})$,*
- *$\bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^i \mathcal{R}$ soit indépendante de $\bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^i \mathcal{Q}$.*

Considérons $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique d'entropie infinie. En utilisant le théorème 17, on construit par récurrence une suite $\{\mathcal{Q}_s\}_{s\geq 0}$ de partitions finies telles que pour tout $s \geq 0$,

- la suite $\{T^i \mathcal{Q}_s\}_{i\in\mathbb{Z}}$ soit indépendante,
- $H(\mathcal{Q}_s) = 1$ et $\mathcal{Q}_s = \{A_s, A_s^c\}$ avec $\mu(A_s) = 1/2$,

et telles que les tribus $\{\bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^i \mathcal{Q}_s\}_{s\geq 0}$ soient mutuellement indépendantes. Notons $\mathcal{B}_0$ la tribu engendrée par les partitions $\{\mathcal{Q}_s,\ s \geq 1\}$. Par construction, les tribus $\{T^i \mathcal{B}_0\}_{i\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes. Considérons les deux sous-tribus $T$-invariantes de $\mathcal{F}$ suivantes

$$\mathcal{C} = \bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^i \mathcal{Q}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^i \mathcal{B}_0$$

Les tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes. De plus, il existe une fonction $\mathcal{B}_0$-mesurable $\varphi$ définie de $\Omega$ dans $[0,1]$ telle que pour tout entier $s \geq 1$,

$$A_s = \varphi^{-1}\left(\{x \in [0,1]\,;\, 2^{s-1}x - [2^{s-1}x] < 1/2\}\right)$$

où $[\,.\,]$ désigne la fonction partie entière. Soit $\psi$ la bijection définie de $[0,1]$ dans l'ensemble $[-1, -1/2[\cup[1/2, 1]$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La fonction $g = \psi \circ \varphi$ satisfait alors les propriétés voulues. □

# Bibliographie


[1] K. S. Alexander and R. Pyke, *A uniform central limit theorem for set-indexed partial-sum processes with finite variance*, Ann. Probab. **14** (1986), 582–597.

[2] S. Alpern, *Generic properties of measure preserving homeomorphisms*, Ergodic Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics **729** (1979), 16–27.

[3] K. Azuma, *Weighted sums of certain dependent random variables*, Tôhoku Mathematical Journal **19** (1967), 357–367.

[4] R. F. Bass, *Law of the iterated logarithm for set-indexed partial sum processes with finite variance*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **70** (1985), 591–608.

[5] A. K. Basu and C. C. Y. Dorea, *On functional central limit theorem for stationary martingale random fields*, Acta. Math. Hung. **33** (1979), 307–316.

[6] A. C. Berry, *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 122–136.

[7] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.

[8] E. Bolthausen, *Exact convergence rates in some martingale central limit theorems*, Ann. Probab. **10** (1982), no. 3, 672–688.

[9] D. Bosq, *Bernstein-type large deviations inequalities for partial sums of strong mixing processes*, Statistics **24** (1993), 59–70.

[10] A. Broise, *Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites*, Astérisque **238** (1996), 2–109.

[11] J. P. Conze, *Entropie d'un groupe abélien de transformations*, Z. Wahrsch. verw. Geb. **25** (1972), 11–30.

[12] T. de la Rue, *Vitesse de dispersion pour une classe de martingales*, Annales de l'IHP **38** (2002), 465–474.

[13] A. de Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London, 1730.

[14] J. Dedecker, *A central limit theorem for stationary random fields*, Probab. Theory Relat. Fields **110** (1998), 397–426.

[15] ______, *Exponential inequalities and functional central limit theorems for random fields*, ESAIM : Probability and Statistics **5** (2001), 77–104.

[16] J. Dedecker and F. Merlevède, *Necessary and sufficient conditions for the conditional central limit theorem*, À paraître dans Annals of Probability.

[17] J. Dedecker and E. Rio, *On the functional central limit theorem for stationary processes*, Annales de l'IHP **36** (2000), 1–34.

[18] A. del Junco and J. Rosenblatt, *Counter-examples in ergodic theory and number theory*, Mathematische Annalen **245** (1979), 185–197.

[19] M. D. Donsker, *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem. Amer. Math. Soc. **6** (1951), 1–12.

[20] P. Doukhan, *Mixing : Properties and Examples*, vol. 85, Lecture Notes in Statistics, Berlin, 1994.

[21] R. M. Dudley, *Sample functions of the Gaussian process*, Ann. Probab. **1** (1973), 66–103.

[22] ______, *Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries*, J. Approx. Theory **10** (1974), 227–236.

[23] M. El Machkouri, *Kahane-Khintchine inequalities and functional central limit theorem for stationary random fields*, Stoch. Proc. and Their Appl. **120** (2002), 285–299.

[24] ______, *Kahane-Khintchine inequalities for dependent random fields and applications*, soumis pour publication, 2002.

[25] M. El Machkouri and D. Volný, *Contre-exemple dans le théorème central limite fonctionnel pour les champs aléatoires réels*, À paraître dans les Annales de l'IHP, 2002.

[26] ______, *On the functional central limit theorem for independent random fields*, soumis pour publication, 2002.

[27] ______, *On the local and central limit theorems for martingale difference sequences*, soumis pour publication, 2002.

[28] C. G. Esseen, *On the Liapunov limit of error in the theory of probability*, Ark. Math. Astr. och Fysik **28A** (1942), 1–19.

[29] H. O. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, De Gruyter, Berlin, 1988.

[30] B. V. Gnedenko, *O lokal'noi predel'noi teoreme teorii veroyatnostei*, Uspehi matem. nauk **3** (1948), 187–194, (On the local limit theorem in the theory of probability).

[31] ______, *Lokal'naya predel'naya teorema dlya plotnostei*, Dokl. AN SSSR **95** (1954), no. 1, 5–7, (The local limit theorem for densities).

[32] M. I. Gordin, *The central limit theorem for stationary processes*, Soviet Math.Dokl. (1969), 1174–1176.

[33] ______, Abstracts of communications, International conference on probability theory, Vilnius, 1973.

[34] E. Haeusler, *On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales with discrete and continuous time*, Ann. of Probab. **16** (1988), 275–299.

[35] P. Hall and J.D. Hart, *Nonparametric regression with long-range dependence*, Stochastic Processes and their Applications **36** (1990), 339–351.

[36] P. Hall and C. C. Heyde, *Martingale limit theory and its application*, Academic Press, New York, 1980.

[37] C. C. Heyde, *On the central limit theorem and iterated logarithm law for stationary processes*, Bull. Austral. Math. Soc. **12** (1975), 1–8.

[38] W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, Journal of the American Statistical Association **58** (1963), 13–30.

[39] I. A. Ibragimov, *Some limit theorems for stationary processes*, Theory Probab. Appl. **7** (1962), 349–382.

[40] ______, *A central limit theorem for a class of dependent random variables*, Theory Probab. Appl. **8** (1963), 83–89.

[41] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff, 1971.

[42] C. Jan, *Vitesse de convergence dans le TCL pour des chaînes de Markov et certains processus associés à des systèmes dynamiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I (2000), 395–398.

[43] J. P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, Cambridge University Press, 1985.

[44] Y. Katznelson and B. Weiss, *Commuting measure-preserving transformations*, Isr. J. Math. **12** (1972), 161–173.

[45] J. L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New-York-Berlin, 1975.

[46] A. Y. Khintchine, *Ueber dyadische brüche*, Math. Z. **18** (1923), 109–116.

[47] M. A. Krasnosel'skii and Y. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff LTD-Groningen-The Netherlands, 1961.

[48] U. Krengel, *Ergodic theorems*, de Gruyter Studies in Mathematics, Berlin, 1985.

[49] J. Kuelbs, *The invariance principle for a lattice of random variables*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), 382–389.

[50] N. Laib, *Exponential-type inequalities for martingale difference sequences. Application to nonparametric regression estimation*, Commun. Statist.-Theory Meth. **28** (1999), no. 7, 1565–1576.

[51] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812.

[52] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer, New York, 1991.

[53] E. Lesigne and D. Volný, *Large deviations for martingales*, Stochastic Processes and Their Applications **96** (2001), 143–159.

[54] J. W. Lindeberg, *Eine neue Herleitung des Exponentialgezetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Zeitschrift **15** (1922), 211–225.

[55] C. McDiarmid, *On the method of bounded differences*, Surveys in Combinatorics, ed. J. Siemons, London Mathematical Society, Lectures notes series 141 (1989), 148–188.

[56] D. L. McLeish, *A maximal inequality and dependent strong laws*, Ann. Probab. **3** (1975), no. 5, 829–839.

[57] B. Nahapetian and A. N. Petrosian, *Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A-I Math. **17** (1992), 105–110.

[58] D. S. Ornstein and B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*, Journal d'analyse mathématique **48** (1987), 1–141.

[59] G. Peskir, *Best constants in Kahane-Khintchine inequalities in Orlicz spaces*, Journal of Multivariate Analysis **45** (1993), 183–216.

[60] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge University Press, 1983.

[61] V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[62] D. Pollard, *Empirical processes : theory and applications*, NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics. IMS-ASA, Hayward-Alexandria, 1990.

[63] R. Pyke, *A uniform central limit theorem for partial-sum processes indexed by sets*, London Math. Soc. Lect. Notes Series **79** (1983), 219–240.

[64] E. Rio, *Covariance inequalities for strongly mixing processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré **29** (1993), no. 4, 587–597.

[65] ———, *Théorèmes limites pour les suites de variables aléatoires faiblement dépendantes*, Springer, Berlin, Collect. Math. Appl. 31, 2000.

[66] M. Rosenblatt, *A central limit theorem and a strong mixing condition*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42** (1956), 43–47.

[67] R. J. Serfling, *Contributions to central limit theory for dependent variables*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), no. 4, 1158–1175.

[68] Robert T. Smythe, *Strong laws of large numbers for $r$-dimensional arrays of random variables*, Ann. Prob. **1** (1973), 164–170.

[69] Z. Su, *Central limit theorems for random processes with sample paths in exponential Orlicz spaces*, Stochastic Processes and Their Applications **66** (1997), 1–20.

[70] A. A Tempelman, *Ergodic theorems for general dynamical systems*, Trudy Moskov. Mat. Obsh. **26** (1972), 95–132.

[71] J.P. Thouvenot, *Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli*, Israel Journal of Mathematics **21** (1975), 177–207.

[72] S. van de Geer, *On Hoeffding's inequality for dependent random variables*, preprint, 2001.

[73] D. Volný, *Approximating martingales and the central limit theorem for strictly stationary processes*, Stochastic Processes and Their Applications **44** (1993), 41–74.

[74] D. Volný and P. Samek, *On the invariance principle and the law of the iterated logarithm for stationary processes*, Mathematical Physical and Stochastic Analysis (2000), 424–438.

[75] M. J. Wichura, *Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters*, Ann. Math. Statist. **40** (1969), 681–687.

[76] N. Ziegler, *Functional central limit theorems for triangular arrays of function-indexed processes under uniformly integrable entropy conditions*, J. Multiv. Anal. **62** (1997), 233–272.

[77] A. Zygmund, *An individual ergodic theorem for non-commutative transformations*, Acta. Sci. Math. Szeged **14** (1951), 103–110.