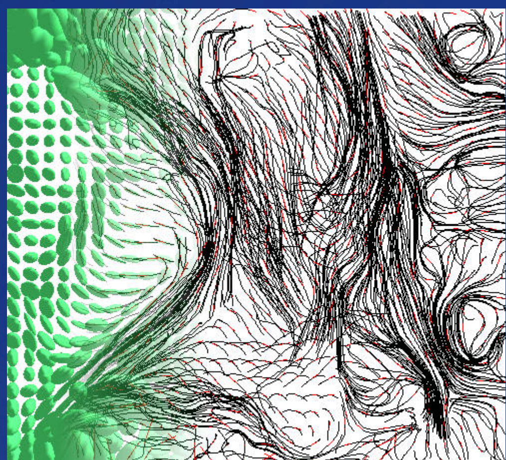
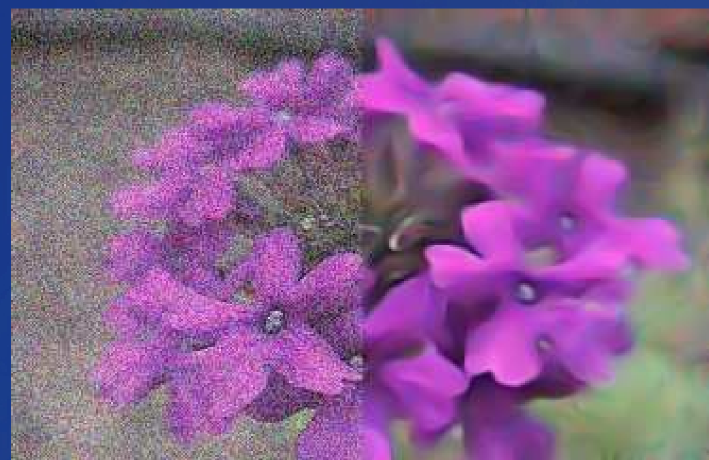
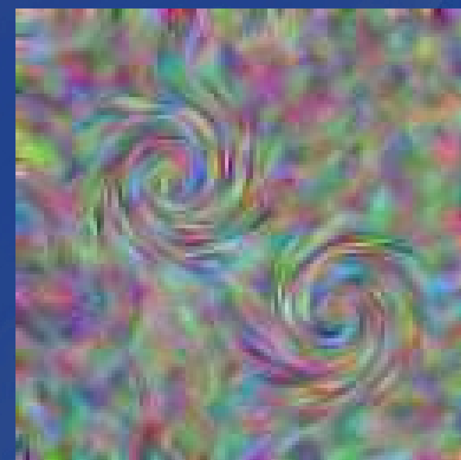
Régularisation par EDP d'Images Multivaluées et Applications







Thèse de l'Université de Nice/Sophia-Antipolis

soutenue par **David Tschumperlé**

Directeur de Thèse : Rachid Deriche

Odyssée Lab/INRIA/ENPC/ENS - 13 Décembre 2002, Sophia-Antipolis/France

Plan de l’exposé

- Régularisation par EDP : Etat de l’art & Discussion
- Régularisation d’images multivaluées
    * Applications
- Régularisation d’images contraintes
    * Applications
- Conclusions & Perspectives

Plan de l’exposé

⇒ **Régularisation par EDP : Etat de l’art & Discussion**

- Régularisation d’images multivaluées

  * Applications

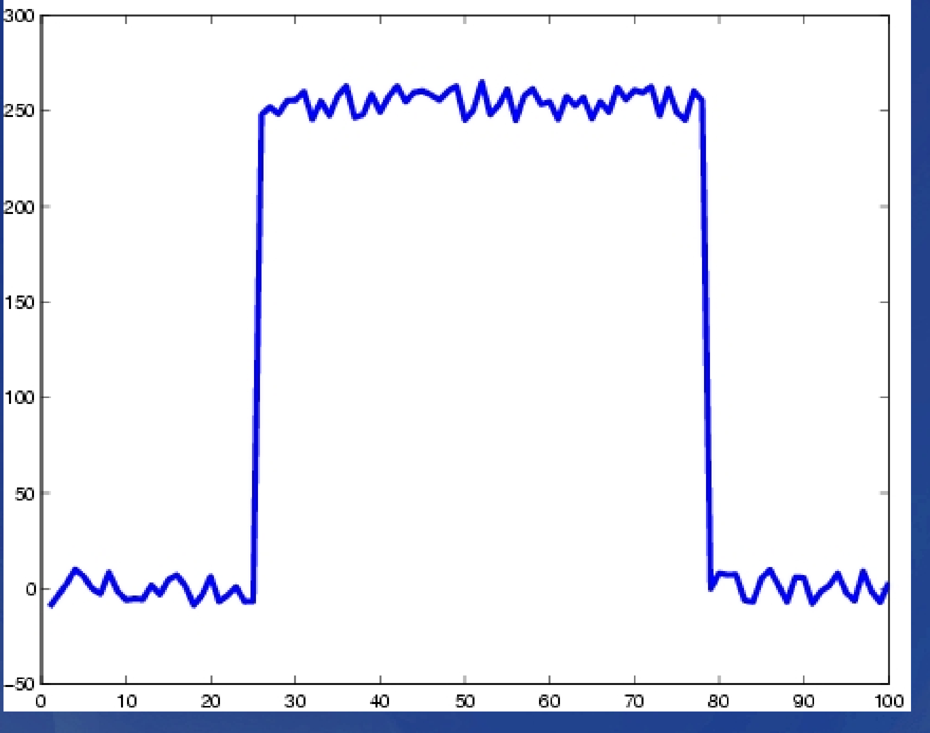
- Régularisation d’images contraintes

  * Applications

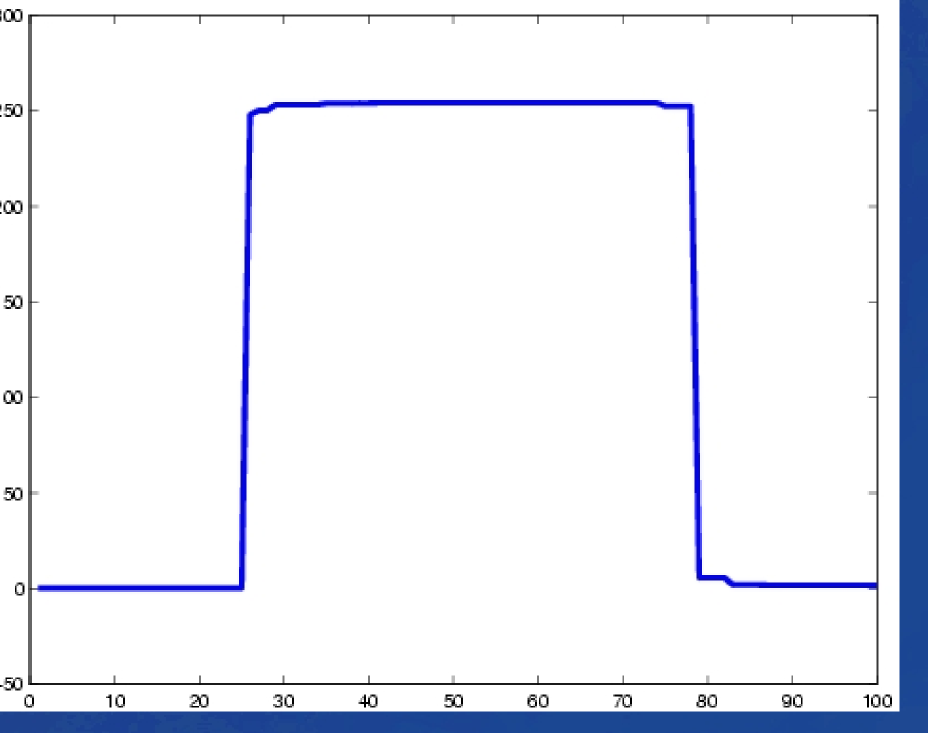
- Conclusions & Perspectives

Régularisation de données

- L'objectif est de transformer un signal bruité en un signal plus régulier, en préservant les informations importantes (discontinuités).



Signal 1D bruité



Signal régularisé

Les EDP et la régularisation d'image

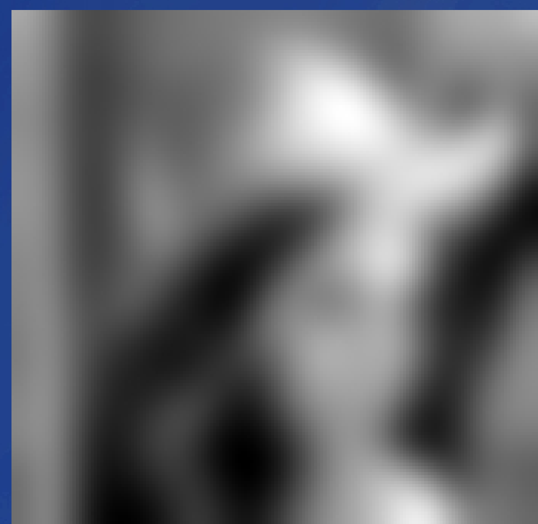
- Convolution et EDP linéaire (Koenderink[84], Alvarez-Guichard-etal[92], ...) :

$$I_{(t)} = I_{(t=0)} * G_\sigma \quad \text{où} \quad G_\sigma = \frac{1}{4\pi t}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial I}{\partial t} = \Delta I$$

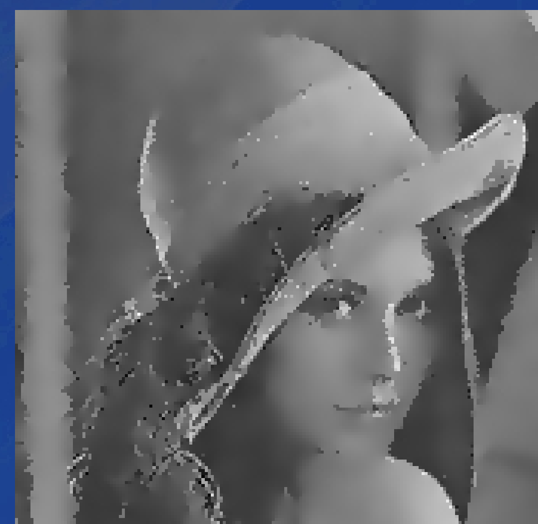
- EDP non linéaires (Perona-Malik[90], Alvarez [92], ...) :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathrm{div}\left(c(\|\nabla I\|)\ \nabla I\right) \qquad \text{avec} \quad c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Image scalaire bruitée



EDP linéaire



EDP Perona-Malik

Images scalaires

- Un grand nombre de méthodes EDP ont été proposées depuis, pour la régularisation d'images scalaires $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

(Alvarez, Aubert, Barlaud, Blanc-Feraud, Charbonnier, Chan, Cohen, Deriche, Kornprobst, Malladi, Munford, Morel, Nordström, Osher, Perona-Malik, Rudin, Sapiro, Sochen, Weickert,...)

Image scalaire bruitée $\mathbf{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

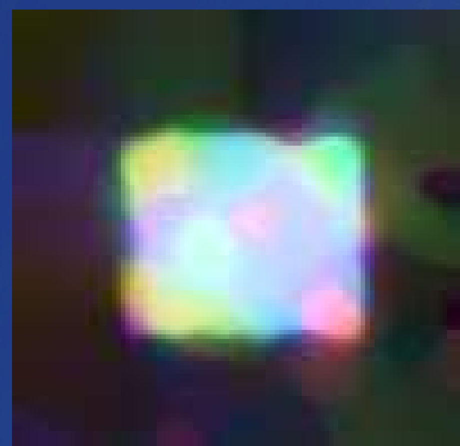
Image régularisée par EDP

Images multivaluées

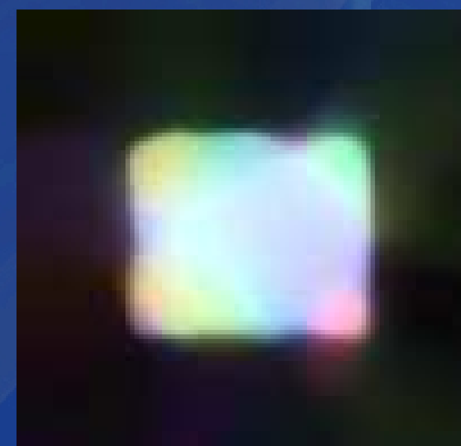
- Image $\mathbf{I} : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ de points multivalués : vecteurs, matrices, ...

(Blomgren-Chan[98], Kimmel-Malladi-Sochen[98], Sapiro-Ringach[96], Weickert[97], ...)

Image couleur ($\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$)

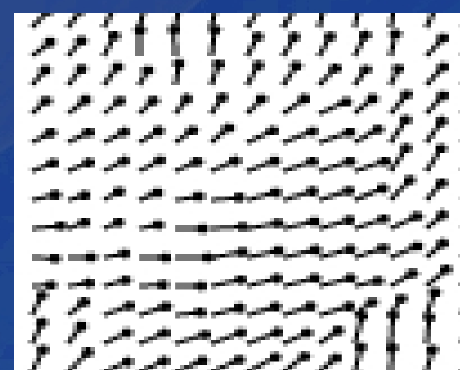


EDP scalaire, composante par composante



EDP multivaluée

Champ bruité de vecteurs 2D ($\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$)



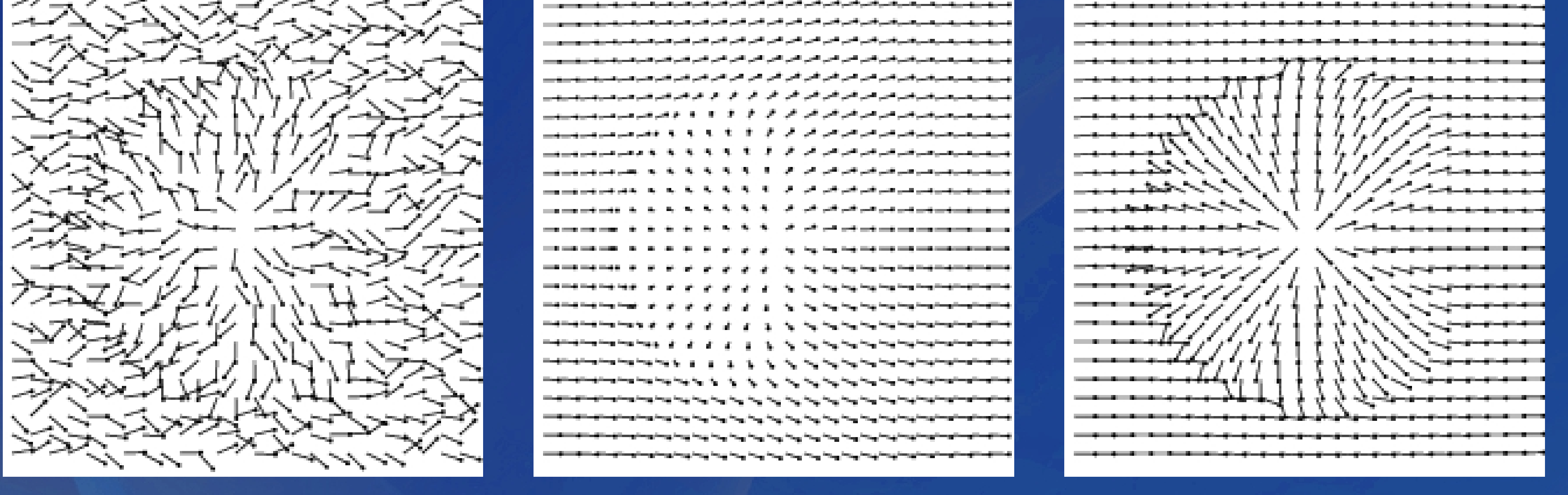
Champ régularisé

Images multivaluées contraintes

- Images multivaluées dont les pixels sont contraints.
  Ex : la contrainte de norme , $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{\Omega}, \quad \|\mathbf{I}(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \mathbf{1}.$

- Un **terme additionnel**, permettant de respecter la contrainte, s'ajoute au terme de régularisation.

(Chan-Shen[99], Kimmel-Sochen[00], Pardo-Sapiro[00], Perona[98], Tang-Sapiro-Caselles[98], ...)



Champ de direction bruité | Régularisation non contrainte | Régularisation contrainte

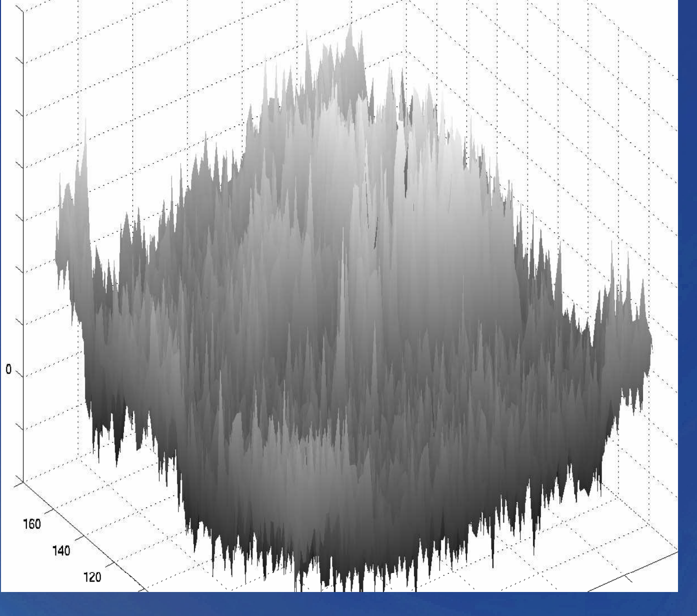
Trois aspects de la régularisation par EDP

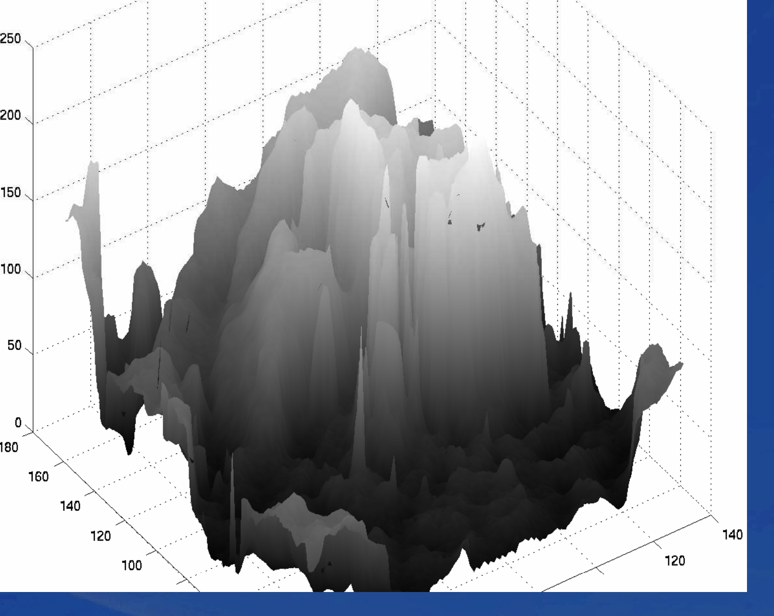
(1) Minimisation de fonctionnelles

- Minimiser les variations de l'image, exprimées par une fonctionnelle $E(I)$:

$$\min_{I:\Omega\to\mathbb{R}} E(I) = \int_\Omega \phi(\|\nabla I\|)\, d\Omega \quad \overset{\text{(E.L)}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}\nabla I\right)$$

- $E(I)$ peut être vue comme une énergie dépendante des propriétés intrinsèques de l'image (ex : l'aire de l'image vue comme une surface)
  $\Rightarrow$ **Approche globale**.





(2) Diffusion de pixels

- Les valeurs des pixels représentent des concentrations chimiques, ou des températures.

- Des équations physiques de diffusion sont utilisées pour décrire un transfert chimique ou thermique entre les pixels.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\mathbf{D}\nabla I\right)$$

- Le **tenseur de diffusion** $\mathbf{D}$ caractérise localement le processus de diffusion. Il est construit à partir de la géométrie locale de l'image (contours, coins, etc...)

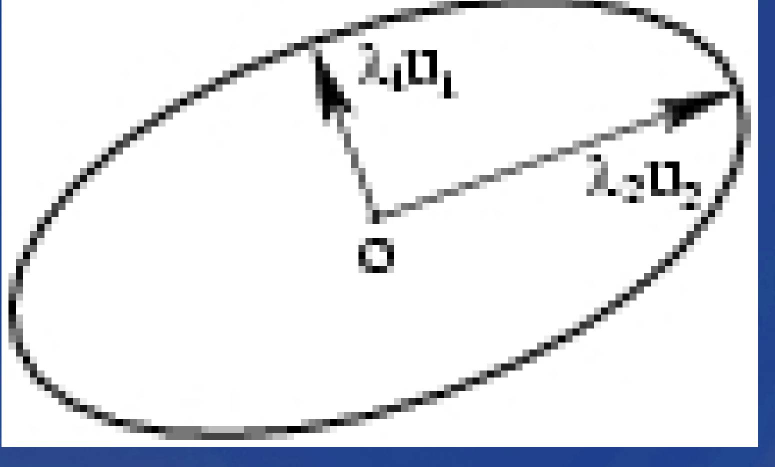
$\Rightarrow$ **Approche locale.**

Tenseur de diffusion

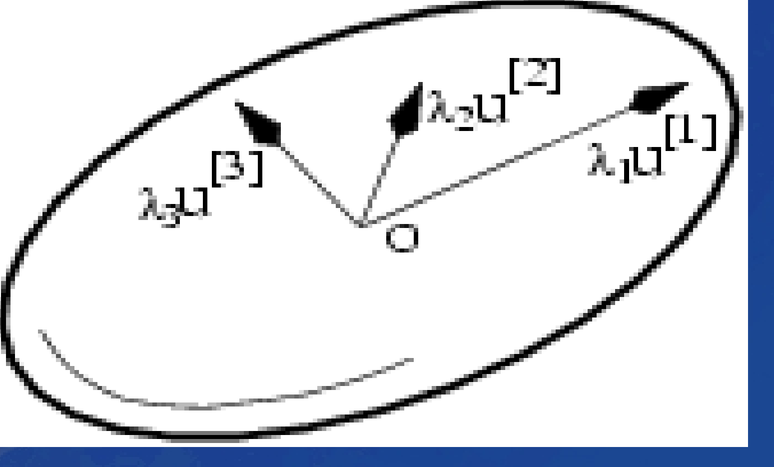
- Matrice symétrique semi-définie positive de taille $p \times p$.
  ($p = 2$ pour des images $2D$, $p = 3$ pour des volumes).

- Ses p valeurs propres $\lambda_i > 0$ représentent des quantités de diffusion suivant ses vecteurs propres $\mathbf{u}^{[i]}$ (orthogonaux et unitaires).

- Représentation par des ellipsoïdes :



Tenseur 2×2



Tenseur 3×3

(3) Laplacien 1D orientés

- Equations de la chaleur monodimensionnelles simultanées, orientées par des directions orthogonales ξ et η, et pondérées par des coefficients c_1 et $c_2 > 0$:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = c_1 I_{\xi\xi} + c_2 I_{\eta\eta}$$

- Lissage anisotrope, dans des directions qui varient spatialement.

- **Formulation alternative :**

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathrm{trace}\left(\mathbf{TH}\right)$$

où $\mathbf{H}$ est la Hessienne de I,
et $\mathbf{T}$ est le tenseur de diffusion dont les élements spectraux sont c_1, c_2 et ξ, η

$$\mathbf{T} = c_1 \xi \xi^T + c_2 \eta \eta^T$$

Lien entre les trois approches

- Pour la **régularisation d'images scalaires**, ce lien est connu :

Minimisation de fonctionnelles

$$\min_{I:\Omega\rightarrow\mathbb{R}} E(I) = \int_\Omega \phi(\|\nabla I\|)\, d\Omega$$

↓

Expression 'Divergence'

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \mathbf{t}} = \mathrm{div}\left(\frac{\phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}\|}\,\nabla \mathbf{I}\right) = \mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla\mathbf{I})$$

↓

Laplaciens orientés

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}\, I_{\xi\xi} + \phi''(\|\nabla I\|)\, I_{\eta\eta} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{TH})$$

avec $\mathbf{D} = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}\,\mathbf{Id}$ et $\mathbf{T} = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|}\,\xi\xi^T + \phi''(\|\nabla I\|)\,\eta\eta^T$ et $\xi = \nabla I/\|\nabla I\|$, $\eta \perp \xi$.

Motivations

Motivations

- **Régularisation multivaluée :**

  * Proposer un formalisme variationnel général pour la régularisation multivaluée, qui étend les équations déjà proposées.
  * Etudier ces équations par une approche géométrique locale.

- **Régularisation contrainte :**

  * Etendre les EDP préservant des contraintes multivaluées à des images plus complexes.
    Ex : des champs de tenseurs de diffusion.

Plan de l’exposé

- Régularisation par EDP : Etat de l’art & Discussion

⇒ **Régularisation d’images multivaluées**

  * Applications

- Régularisation d’images contraintes

  * Applications

- Conclusions & Perspectives

Notations préliminaires

- Une image vectorielle $\mathbf{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- La i^{eme} composante vectorielle $I_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \Omega, \mathbf{I}(x,y) = (\ I_1(x,y)\ ,\ I_2(x,y)\ ,\ \ldots\ ,\ I_n(x,y)\ )$$

- Le tenseur de structure : $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla I_i \nabla I_i^T \right)$

- Les valeurs propres (positives) $\lambda_\pm$ et les vecteurs propres (unitaires) $\theta_\pm$ de $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = \lambda_+\ \theta_+ \theta_+^T + \lambda_-\ \theta_- \theta_-^T$$

- $\mathbf{G}$ représente les variations vectorielles locales de l'image $\mathbf{I}$ (Di Zenzo[88]) :

  * $\sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}$, indicateur de contours.
  * θ_-, direction des contours vectoriels.

Rappel des méthodes de régularisation multivaluée

Les méthodes déjà proposées ont été inspirées des approches scalaires.

- **Minimisation de fonctionnelles :** Beltrami flow *(Kimmel-Sochen-Malladi)*, Color Total Variation *(Blomgren-Chan)*, Vector ϕ-functional *(Sapiro, Shah)*,...

- **Diffusion de pixels :** Coherence enhancing diffusion *(Weickert)*,...

- **Laplaciens orientés :** Color $I_{\xi\xi}$ *(Sapiro-Ringach)*,...

Méthode variationnelle proposée

- L'idée est de minimiser une ψ-**fonctionnelle de régularisation** d'images multivaluées :

$$\min_{\mathbf{I}:\Omega\rightarrow\mathbb{R}^n} \int_\Omega \psi(\lambda_+,\lambda_-)\ d\Omega \qquad \text{où} \quad \psi:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$$

qui mesure des variations multivaluées de l'image $\mathbf{I}:\Omega\rightarrow\mathbb{R}^n$.

Méthode variationnelle proposée

- L'idée est de minimiser une ψ-**fonctionnelle de régularisation** d'images multivaluées :

$$\min_{\mathbf{I}:\Omega\rightarrow\mathbb{R}^n} \int_\Omega \psi(\lambda_+,\lambda_-)\, d\Omega \qquad \text{où} \quad \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

qui mesure des variations multivaluées de l'image $\mathbf{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- **De la fonctionnelle à la divergence, par les équations d'Euler-Lagrange :**

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla I_i)$$

avec

$$\mathbf{D} = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_+}\,\theta_+\theta_+^T + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_-}\,\theta_-\theta_-^T$$

$\Rightarrow$ **Lien simple entre le tenseur de divergence D et la fonction ψ.**

Cas particuliers

- Images scalaires ($n = 1$) : Equivalence avec le formalisme des ϕ-fonctionnelles.

$$\lambda_+ = \|\nabla I\|^2 \quad \text{and} \quad \lambda_- = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_\Omega \psi(\lambda_+, \lambda_-)\, d\Omega = \int_\Omega \phi(\|\nabla I\|)\, d\Omega \quad \text{c.à.d} \quad \psi(\lambda_+, \lambda_-) = \phi\left(\sqrt{\lambda_+}\right)$$

- Images multivaluées : Des choix de fonctions ψ particulières ramènent à des méthodes connues :

  * Beltrami flow : $\psi(\lambda_+, \lambda_-) = \sqrt{(1+\lambda_+)(1+\lambda_-)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \det(\mathbf{Id}+\mathbf{G})(\mathbf{Id}+\mathbf{G})^{-1}$
  * Vector Φ-functional : $\psi(\lambda_+, \lambda_-) = \phi(\sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{G})}}\mathbf{Id}$

$\Rightarrow$ **Formalisme variationnel unificateur.**

De la divergence aux Laplaciens orientés

- Nous pouvons développer les EDP multivaluées 'divergence' $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\mathbf{D}\nabla I_i\right)$ en formulations 'Laplaciens orientés' ($\mathrm{trace}\left(\mathbf{TH}\right)$).

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{D}\nabla I_i\right) = \mathrm{trace}\left((\mathbf{D} + \mathbf{Q}^{[ii]})\mathbf{H}_i\right) + \sum_{j \neq i} \mathrm{trace}\left(\mathbf{Q}^{[ij]}\mathbf{H}_j\right)$$

- Apparition de tenseurs additionnels expliquant le comportement anisotropique des EDP.

- Apparition d'un terme de couplage de diffusion entre composantes vectorielles.

$\Rightarrow$ **Formulation très locale du processus de lissage et interprétation géométrique partielle.**

Interprétation géométrique de $\mathrm{trace}\,(\mathbf{TH})$

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{TH}_i)$$

- Si $\mathbf{T}$ est constant, la solution est une convolution par un noyau gaussien orienté $\mathbf{G}^{[\mathbf{T},t]}$:

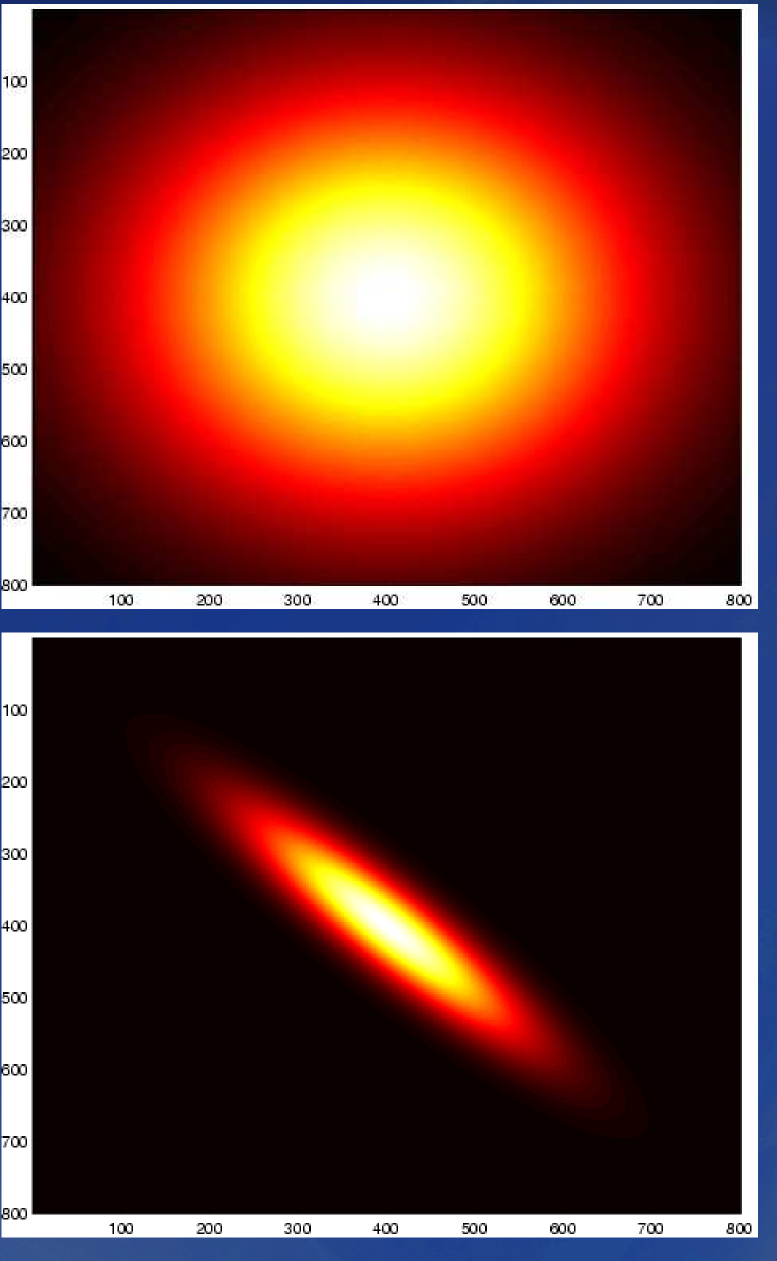
$$I_{i_{(t)}} = I_{i_{(t=0)}} \; * \; G^{[\mathbf{T},t]}$$

où $$G^{[\mathbf{T},t]}(x,y) = \frac{1}{4\pi t}\, e^{-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}}{4t}}.$$

- Si $\mathbf{T}$ n'est pas constant : Interprétation géométrique en termes de *filtrage local* avec des masques gaussiens spatialement adaptatifs.

- Lien avec le 'Bilateral Filtering' (Tomasi-Manduchi[98]) et la méthode des 'Short Time Kernels' (Sochen-Kimmel-etal[01]).

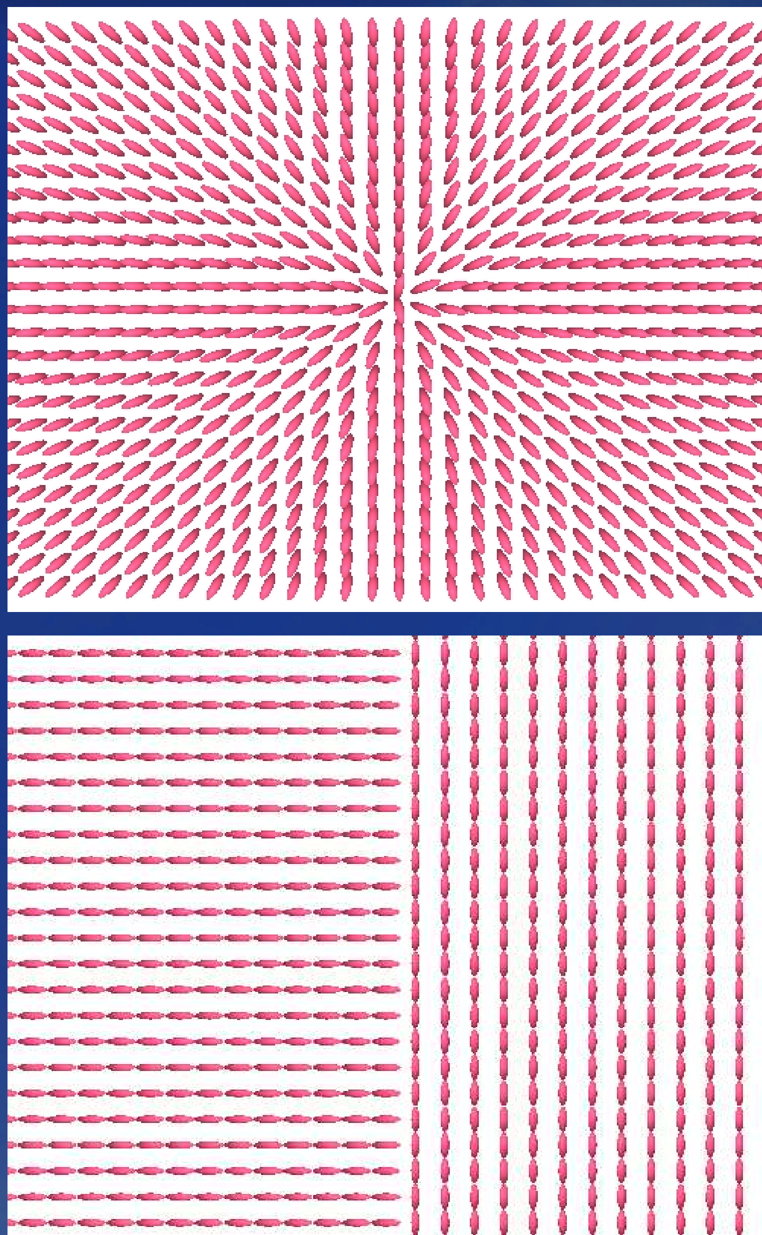
Tenseur T constant



Noyau gaussien $G^{[\mathbf{T},t]}$

Evolution de $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{T}\mathbf{H}_i)$.

Champs de tenseurs T



Champs de tenseur $\mathbf{T} : \Omega \longrightarrow \mathrm{P}(2)$

Evolution de $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{T}\mathbf{H}_i)$.

Une approche locale pour la régularisation multivaluée par EDP

Modèle considéré

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\left(\mathbf{T}\mathbf{H}_i\right)$$

- Nous proposons une nouvelle EDP, basée sur une approche de filtrage local.
- **But** : Trouver un champ de tenseurs $\mathbf{T}$ permettant de lisser l'image en respectant ses configurations géométriques locales.
- **Conditions désirées :**
  * Respect d'une géométrie multivaluée : $\mathbf{T}$ est basé sur une version lissée du tenseur de structure $\mathbf{G}_\sigma = \left(\sum_i \nabla I_i \nabla I_i^T\right) * G_\sigma$.
  * Lissage isotrope dans les régions homogènes : $\dfrac{\partial I_i}{\partial t} \simeq \mathrm{trace}\left(\mathbf{H}_i\right)$.
  * Lissage anisotrope sur les contours : $\dfrac{\partial I_i}{\partial t} \simeq \mathrm{trace}\left(\theta_- \theta_-^T \mathbf{H}_i\right)$.

Equation proposée

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \operatorname{trace}\left(\left[f_1\left(\sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}\right)\theta_+\theta_+^T + f_2\left(\sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}\right)\theta_-\theta_-^T\right]\mathbf{H}_i\right)$$

avec $\mathbf{H}_i$ = Hessien de I_i, $\lambda_\pm, \theta_\pm$, éléments spectraux de $\mathbf{G}_\sigma$

et

$$\lim_{s\to 0} f_1(s) = \lim_{s\to 0} f_2(s) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{s\to +\infty} \frac{f_1(s)}{f_2(s)} = 0$$

Par exemple :

$$f_1(s) = \frac{1}{1+s^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

- Contrôle précis du comportement local du lissage, par le choix de f_1 et f_2.
- Implémentation possible par des méthodes de filtrage adaptatif.

Plan de l'exposé

- Régularisation par EDP : Etat de l'art & Discussion
- Régularisation d'images multivaluées

  * **Applications**

- Régularisation d'images contraintes

  * Applications

- Conclusions & Perspectives

Application : Restauration d'image couleur

- Image avec bruit réel (photo numérique prise sous éclairage faible).

Image couleur bruitée

Image couleur restaurée

Application : Amélioration d'images compressées.

Image JPEG dégradée (qualité 10%)

Image améliorée

Application : Image inpainting (1)

- Les EDP de régularisation peuvent être utilisées pour remplir des zones manquantes de l'image.
- Le lissage se fait uniquement dans des masques définis par l'utilisateur.

Image originale avec texte indésirable

Après interpolation par EDP

Application : Image inpainting (2)

- Les méthodes 'Inpainting' permettent d'enlever des objets réels dans des images.

Image originale

Définition du masque

Après interpolation par EDP

Application : Image inpainting (3)

- Reconstruction cohérente d’images couleur avec des informations manquantes.

Image originale

En gardant 50% des informations

Reconstruction

⇒ **Applications possibles dans la compression d’images statiques.**

Application : Zoom d’images couleur

- Les possibilités d’interpolation des EDP, utilisées pour le zoom :

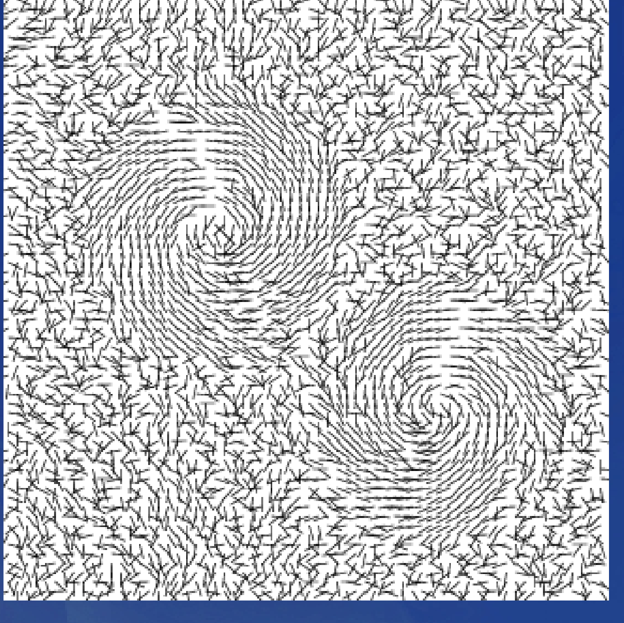
Interpolation par bloc $(\times 4)$ | Interpolation linéaire | Utilisation des EDP

Application : Visualisation de flots

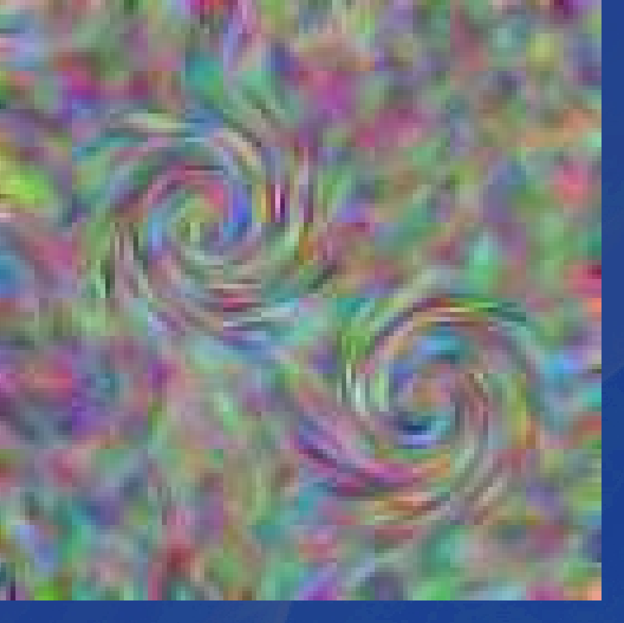
- Nos EDP sont adaptées pour visualiser des flots $\mathcal{F}$, en choisissant un champ de tenseurs $\mathbf{T}$ particulier, dépendant de $\mathcal{F}$.

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\left(\frac{1}{\|\mathcal{F}\|}\mathcal{F}\mathcal{F}^T\,\mathbf{H}_i\right),$$

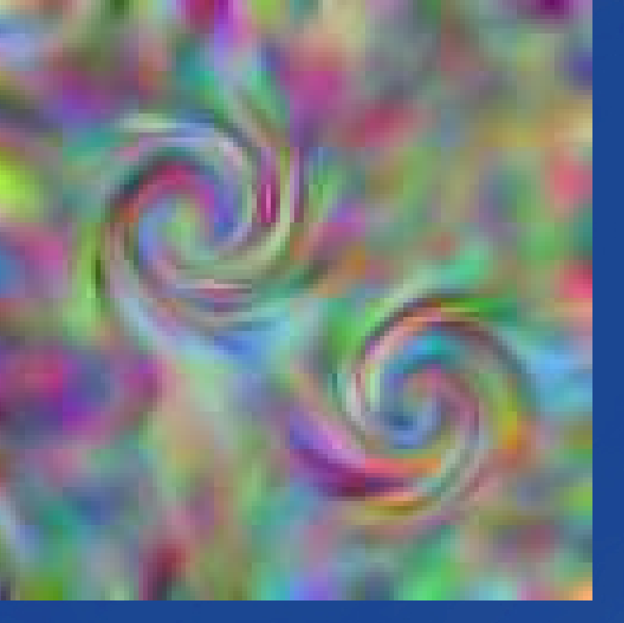
appliqué sur une image de bruit blanc.



Représentation vectorielle



Représentation avec EDP (5 it.)



Représentation avec EDP (10 it.)

Régularisation multivaluée : Résumé

- Formalisme variationnel unificateur pour la régularisation multivaluée.
- Interprétation géométrique locale partielle des équations.
- Nouvelle EDP de régularisation, basée sur une approche de filtrage adaptatif.
- Applications à de nombreux problèmes de traitement d’images.

Plan de l’exposé

- Régularisation par EDP : Etat de l’art & Discussion

- Régularisation d’images multivaluées

  * Applications

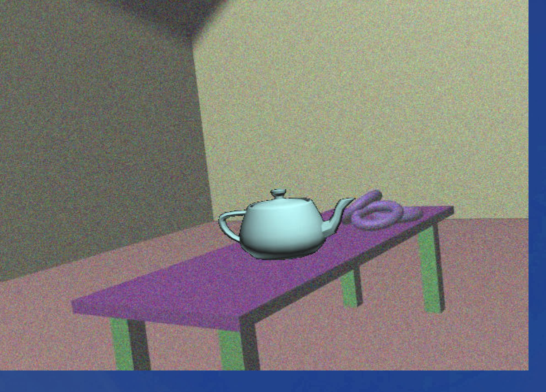
⇒ **Régularisation d’images contraintes**

  * Applications

- Conclusions & Perspectives

Notre but :

- Régulariser des images multivaluées en préservant des contraintes spécifiques (norme unitaire,...).
- Etendre les EDP de régularisation existantes pour des contraintes plus complexes (ex. matrices orthogonales)
- Applications originales visées :



Régularisation de mouvements de caméra

Régularisation d'images DT-MRI

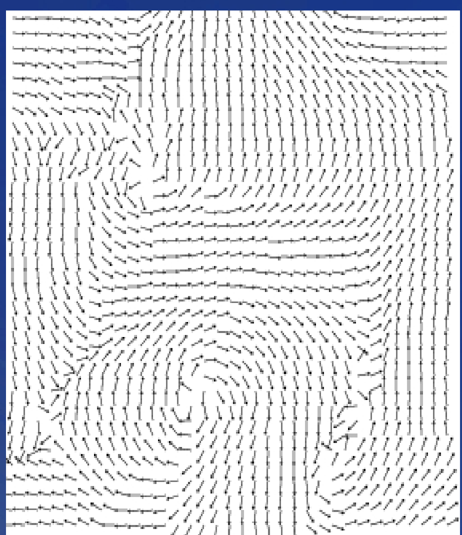
Ajouter des contraintes

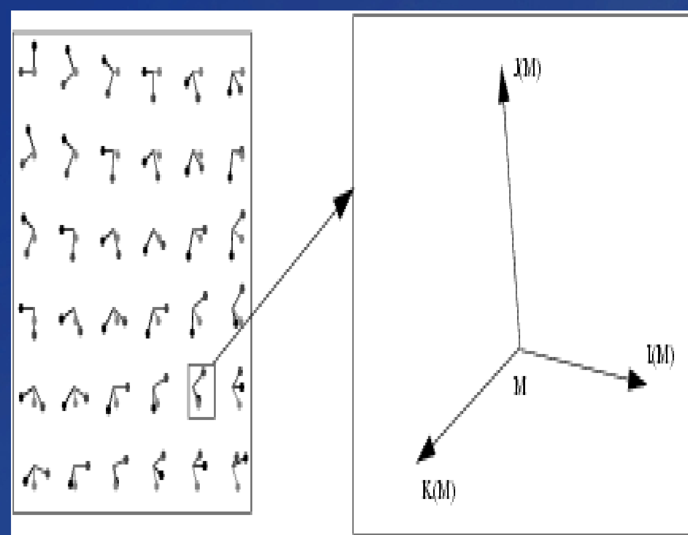
- Nous considérons des images d'**ensembles de vecteurs orthonormés** :

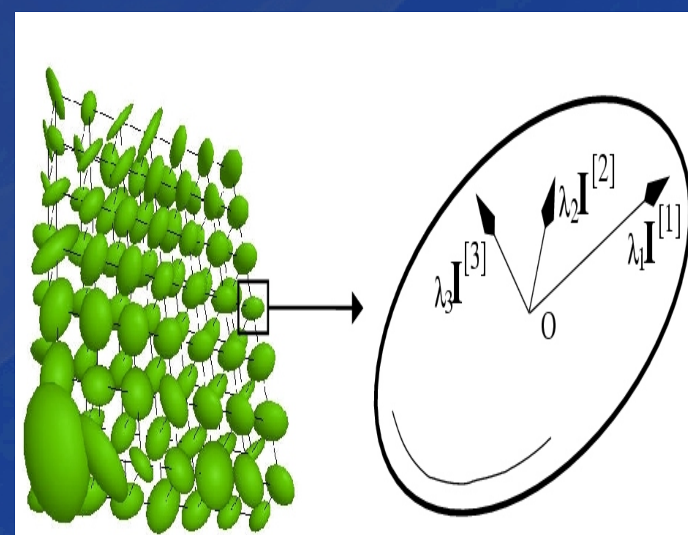
$$\mathcal{B}(M) = \{\ \mathbf{I}^{[1]}(M)\ ,\ \mathbf{I}^{[2]}(M)\ ,\ \ldots\ ,\ \mathbf{I}^{[m]}(M)\ \} \quad \text{avec} \quad \forall k, \quad \mathbf{I}^{[k]} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\forall M \in \Omega, \ \ \forall k, l, \quad \|\mathbf{I}^{[k]}(M)\| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{I}^{[k]} \perp \mathbf{I}^{[l]} \quad (k \neq l)$$

- Peuvent être utilisées pour représenter différents types de données :







Directions $(m = 1)$

Champs de rotations et d'orientation de tenseurs $(m = n)$

Une formulation variationnelle

- Nous minimisons la ψ-fonctionnelle suivante :

$$\min_{\mathcal{B}} \sum_k \int_\Omega \alpha \|\mathbf{I}^{[k]} - \mathbf{I}_0^{[k]}\| + \psi(\lambda_+^{[k]}, \lambda_-^{[k]}) \; d\Omega$$

en préservant les contraintes orthonormées :

$$\forall M \in \Omega, \qquad \mathbf{I}^{[p]}(M) \, . \, \mathbf{I}^{[q]}(M) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

- La minimisation par EDP est effectuée par une descente de gradient.
- Les contraintes sont introduites par des multiplicateurs de Lagrange.
- Ces multiplicateurs peuvent être éliminés dans l'expression finale, grâce à la forme quadratique des contraintes.

EDP préservant les contraintes orthonormées

$$\frac{\partial \mathbf{I}^{[k]}}{\partial t} = \sum_{l=1}^{m} \left(\mathcal{L}(E)^{[l]} \, . \, \mathbf{I}^{[k]} \right) \, \mathbf{I}^{[l]} - \mathcal{L}(E)^{[k]}$$

où

$$\mathcal{L}(E)_i^{[k]} = \alpha \, (I_i^{[k]} - I_{i_0}^{[k]}) - \mathrm{div} \left(\left[\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_+^{[k]}} \theta_+^{[k]} {\theta_+^{[k]}}^T + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_-^{[k]}} \theta_-^{[k]} {\theta_-^{[k]}}^T \right] \nabla I_i^{[k]} \right)$$

- EDP de régularisation agissant sur des champs d'ensembles de vecteur orthonormés.
- Interprétation physique des équations, en utilisant des moments mécaniques pour le cas de vecteurs 3D.
- Schémas numériques adaptés, évitant le problème de reprojection numérique sur l'espace contraint.

Régularisation de champs de directions

Régularisation de directions

- La régularisation de directions est **un cas particulier** de notre formalisme d'ensembles orthonormés ($m = 1$) :

$$\forall M \in \Omega, \quad \mathcal{B}(M) = \{ \quad \mathbf{I}(M) \quad \} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{I}(M)\| = 1$$

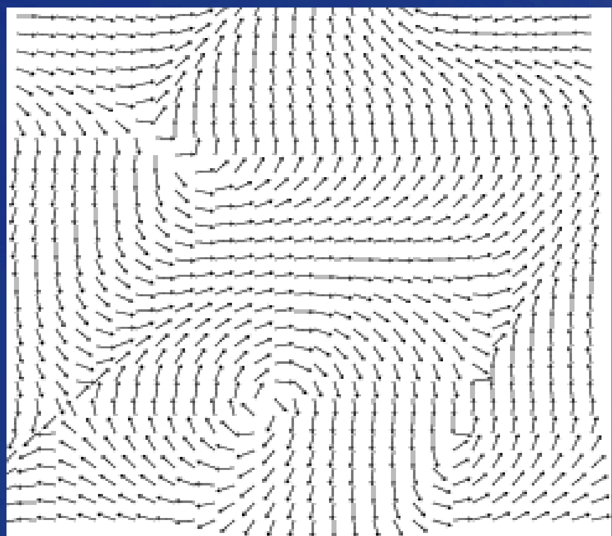
- Dans ce cas, la fonctionnelle devient : $\min_{\mathbf{I}} \int_\Omega \left[\alpha \, \|\mathbf{I} - \mathbf{I}_0\|^2 + \psi(\lambda_+, \lambda_-)\right] \, d\Omega$

- L'EDP préservant la norme unitaire est alors :

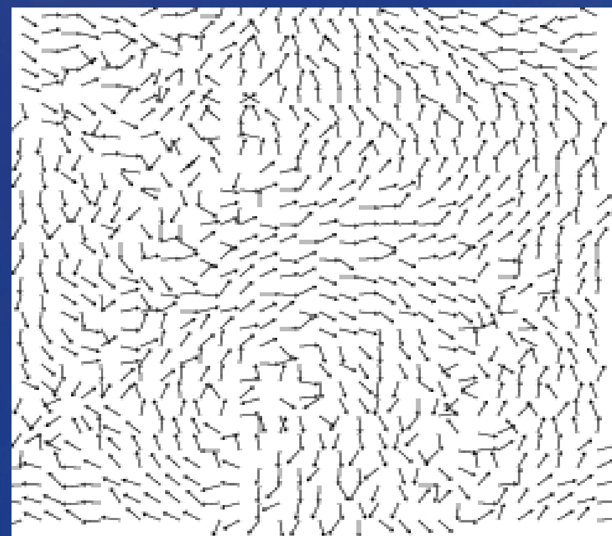
$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathcal{L}(E)_i - (\mathcal{L}(E) \, . \, \mathbf{I}) \, \mathbf{I}_i$$

$\Rightarrow$ **Extension à des Ψ-fonctionnelles générales des travaux précédents :**
(Chan-Shen *(Constrained Total Variation)*, Perona *(Polar angle diffusion)*, Tang-Sapiro-Caselles *(Harmonic map theory).)*

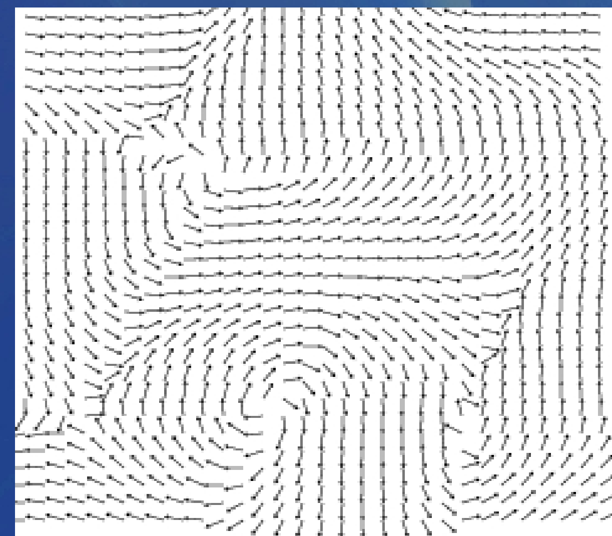
Régularisation de directions



Champ synthétique



Avec bruit angulaire



Champ restoré

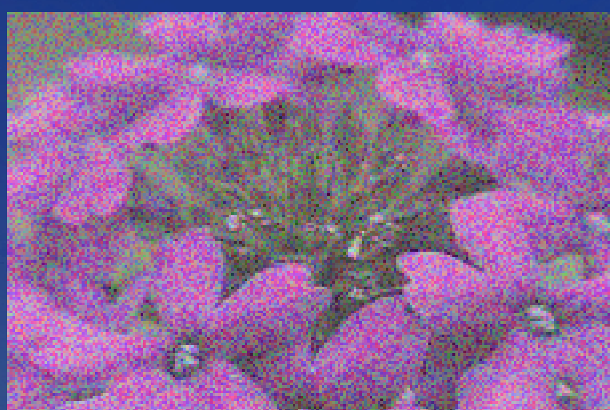
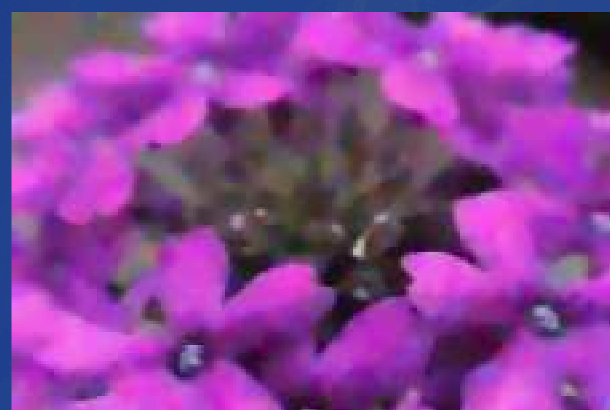


Image bruitée (chromatiquement)



avec une EDP non contrainte

avec une EDP contrainte

Régularisation de champs de matrices orthogonales

Régularisation de champs de matrices orthogonales

- Les colonnes d'une matrice orthogonale $\mathbf{R}$ forment une base de vecteurs orthonormée $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$.

$$R = \begin{pmatrix} I_1 & J_1 & K_1 \\ I_2 & J_2 & K_2 \\ I_3 & J_3 & K_3 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3) \\ \mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3) \\ \mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \end{cases}$$

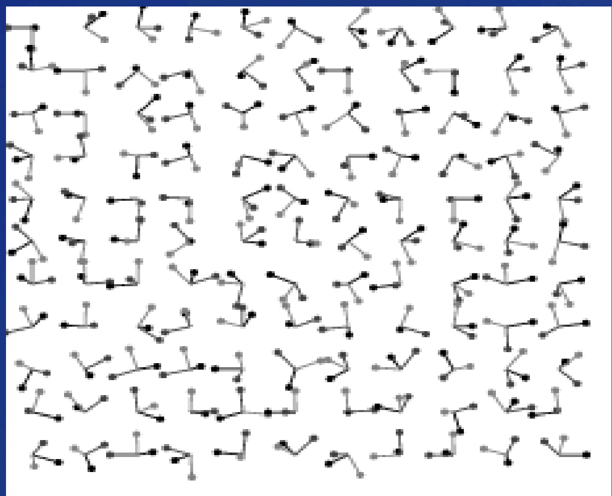
- Notre EDP préservant la contrainte orthonormale est dans le cas $m = n$:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathcal{L} - \mathbf{R}\mathcal{L}^T\mathbf{R}$$

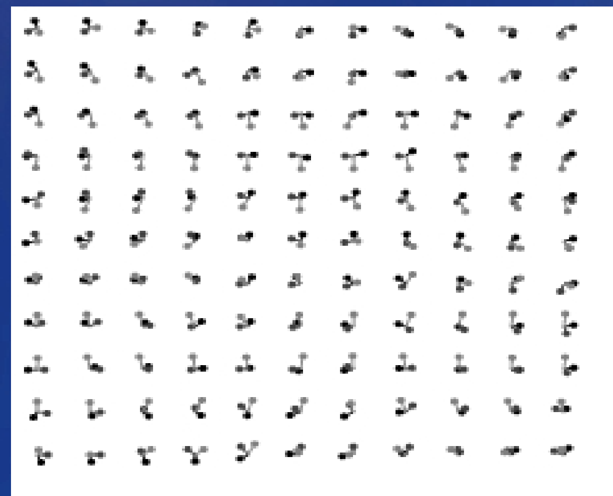
où $\mathcal{L}$ est un terme de régularisation non contraint quelconque.

$\Rightarrow$ **Possibilité de régulariser des champs de matrices de rotation.**

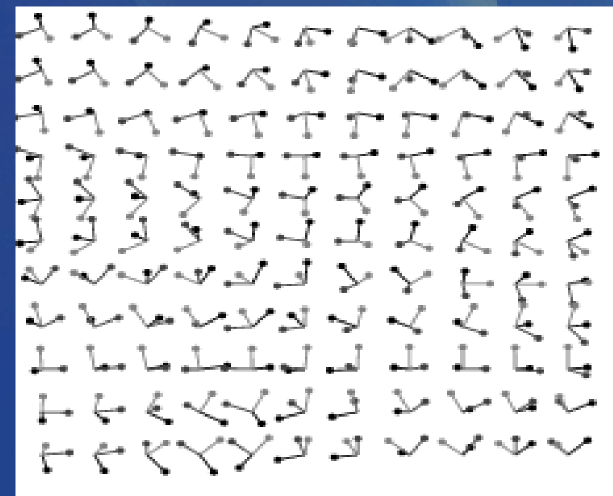
Illustration sur des matrices 3×3 orthogonales



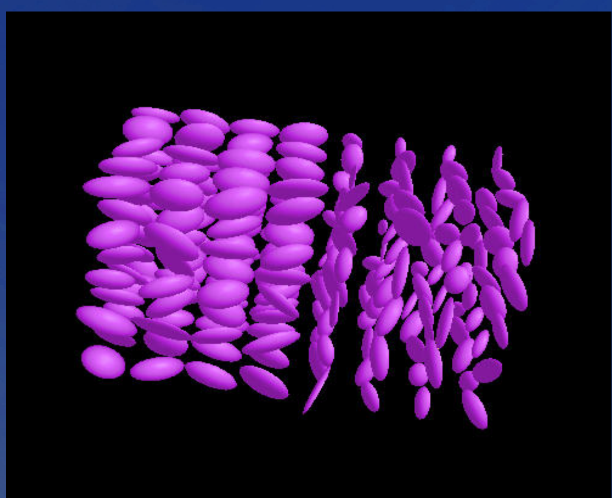
Champ bruité de rotations



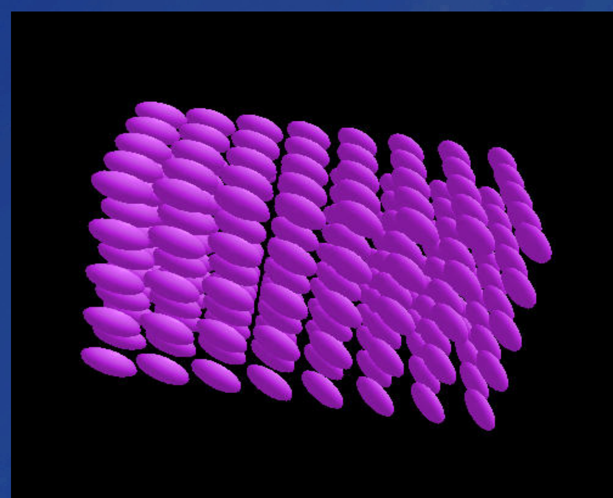
EDP non contrainte



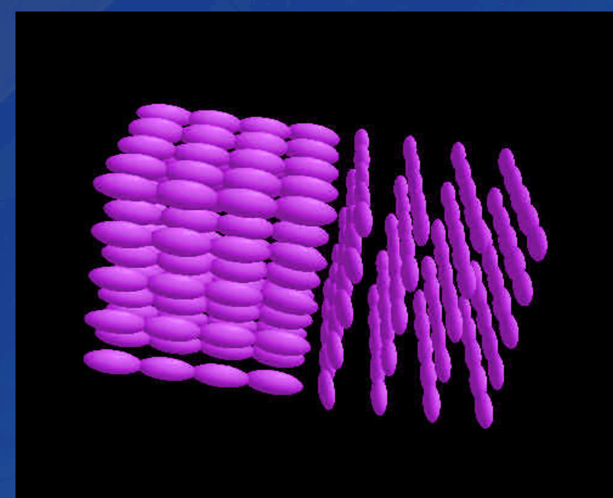
EDP avec contrainte orthonormale



Orientations de tenseurs



Régularisation isotrope



Régularisation anisotrope

Plan de l'exposé

- Régularisation par EDP : Etat de l'art & Discussion
- Régularisation d'images multivaluées

  * Applications

- Régularisation d'images contraintes

  * **Applications**

- Conclusions & Perspectives

Régularisation de mouvements de caméra

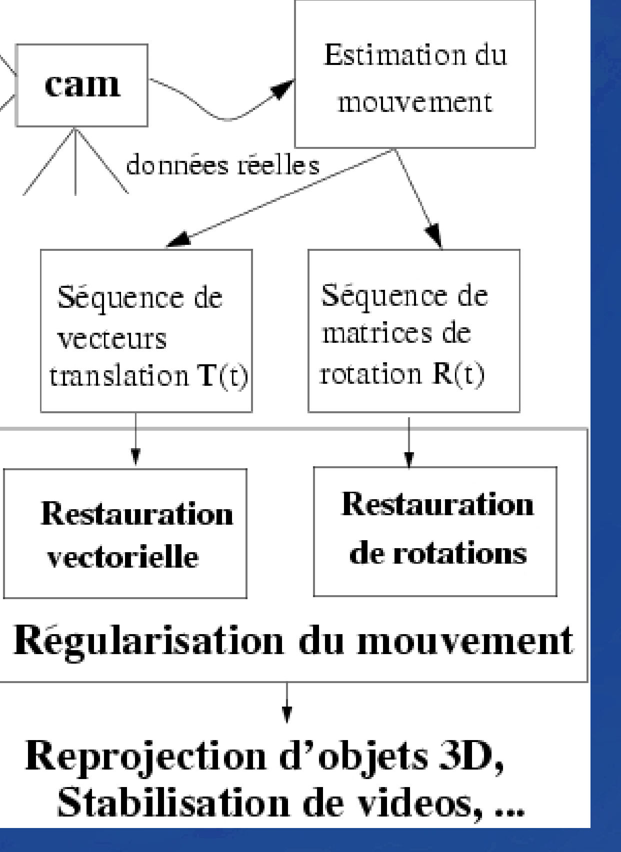
Méthode proposée

Un mouvement de caméra peut être estimé à partir d'une séquence vidéo (logiciels Realviz MatchMover par ex.).

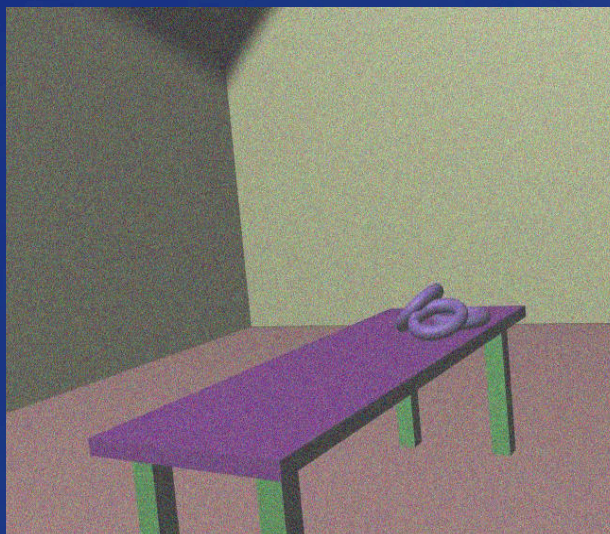
$\Rightarrow$ **Séquence de translation $\mathbf{T}(t)$, Séquence de rotation $\mathbf{R}(t)$.**

- $\mathbf{T}(t)$ est restauré par des EDP multivaluées non contraintes.
- $\mathbf{R}(t)$ est restauré par des EDP à contrainte orthonormale.

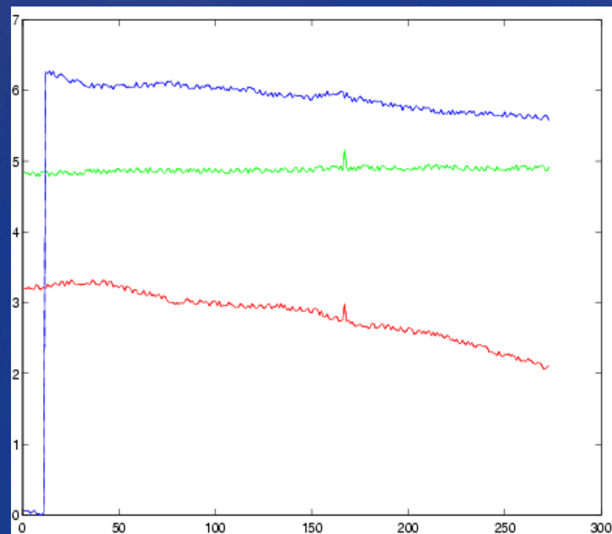
- Possibilité d'insérer des objets 3D virtuels de manière plus cohérente dans des séquences vidéos.



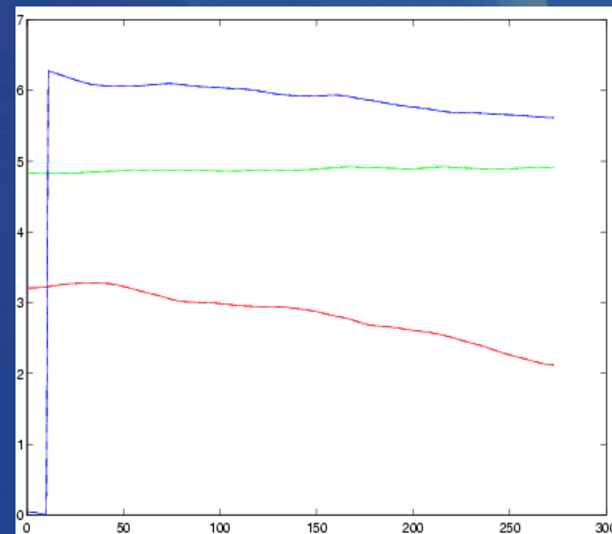
Illustration



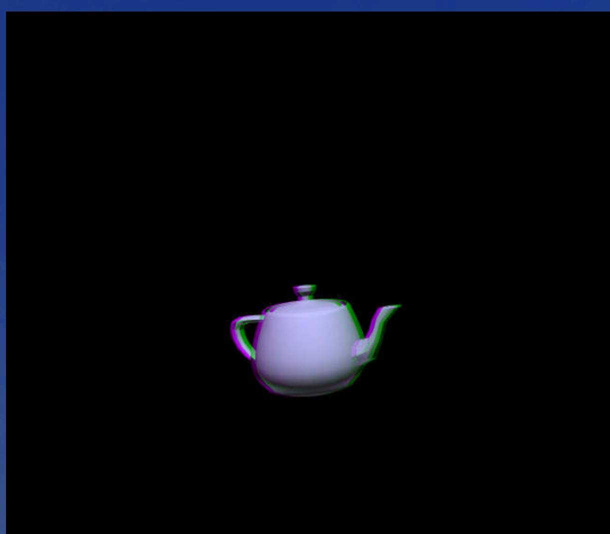
Séquence originale



Rotation estimée (angles)

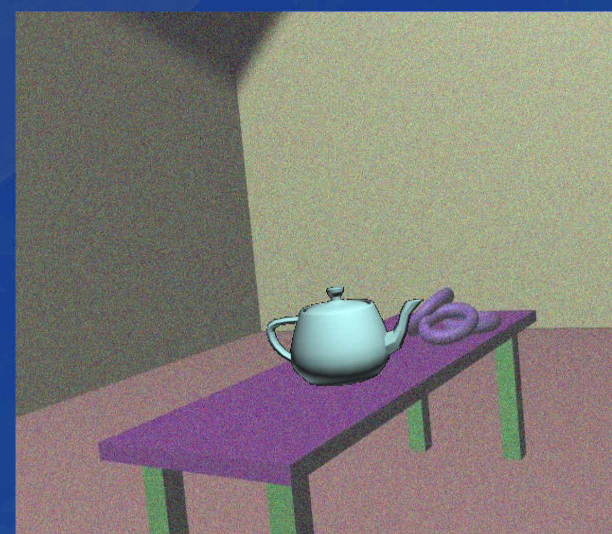


Rotation régularisée (angles)



Objet 3D virtuel

Incrustation (original)



Incrustation (restaurée)

Régularisation d'images DT-MRI

Qu'est-ce que le DT-MRI ?

- **IRM du tenseur de diffusion**. C'est une technique d'acquisition nouvelle qui permet de mesurer le mouvement des molécules d'eau dans les fibres de la matière blanche du cerveau.

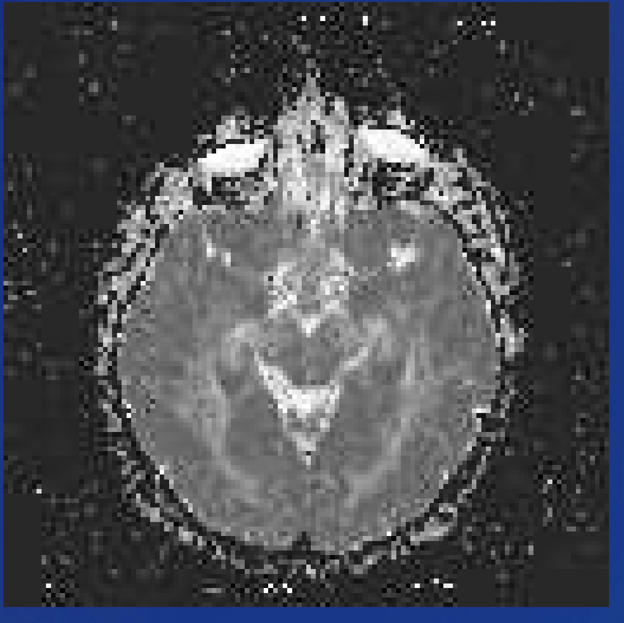
- Chaque voxel d'un volume DT-MRI est une matrice 3×3 symétrique et définie-positive $\mathbf{X}$ (un *tenseur de diffusion*).

- La décomposition spectrale de $\mathbf{X}$ donne les propriétés importantes du tenseur.

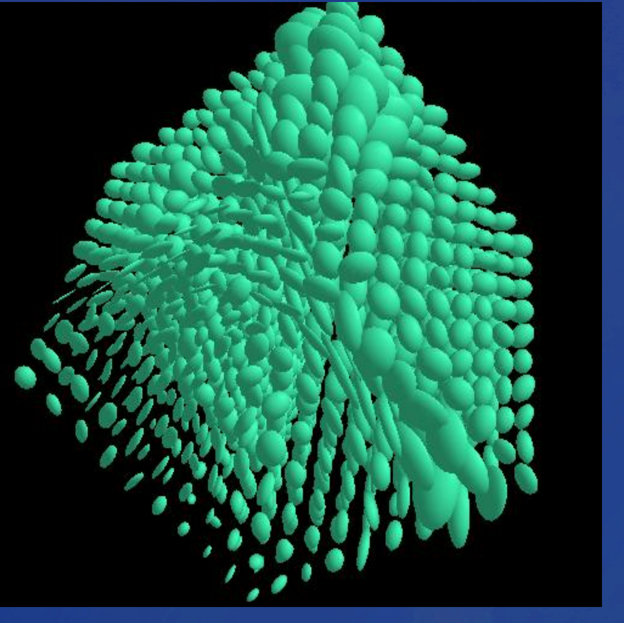
$$\mathbf{X} = \mathbf{R}\ \mathbf{D}\ \mathbf{R}^T$$

  * $\mathbf{R}$, l'orientation du tenseur (rotation).
  * $\mathbf{D}$, la diffusivité du tenseur (matrice diagonale).

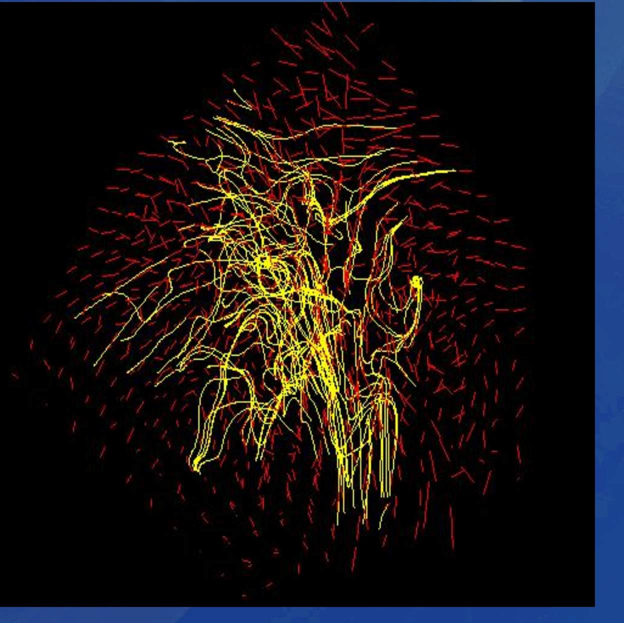
Illustration sur des données réelles



Coupe d'un volume DT-MRI
(diffusivité moyenne)



Représentation
par des ellipsoïdes



Fibres calculées

- La reconstruction des fibres est effectuée en suivant les directions principales des tenseurs.
- La régularisation DT-MRI est intéressante pour retrouver des réseaux de fibres cohérents.

Méthode de régularisation proposée

- Basée sur la régularisation séparée des orientations et des diffusivités des tenseurs.

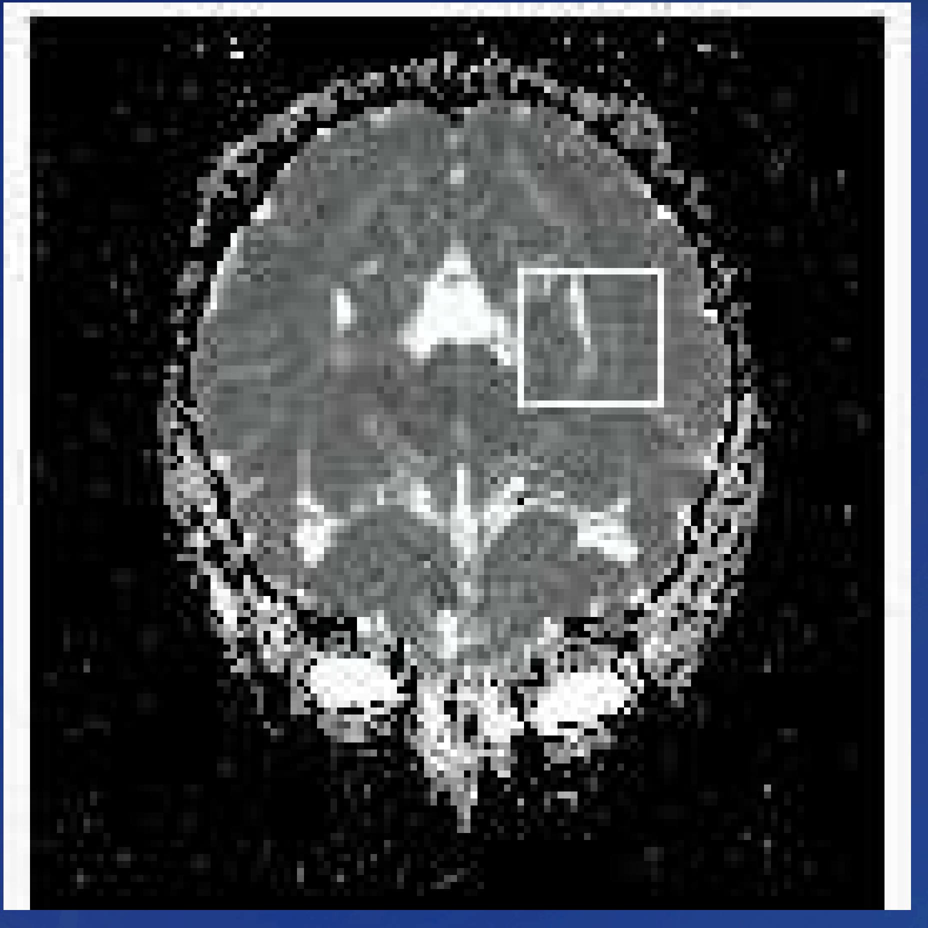
- Les diffusivités sont régularisées par notre EDP multivaluée non-contrainte.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{A}\ \mathbf{H}_{\lambda_i})$$

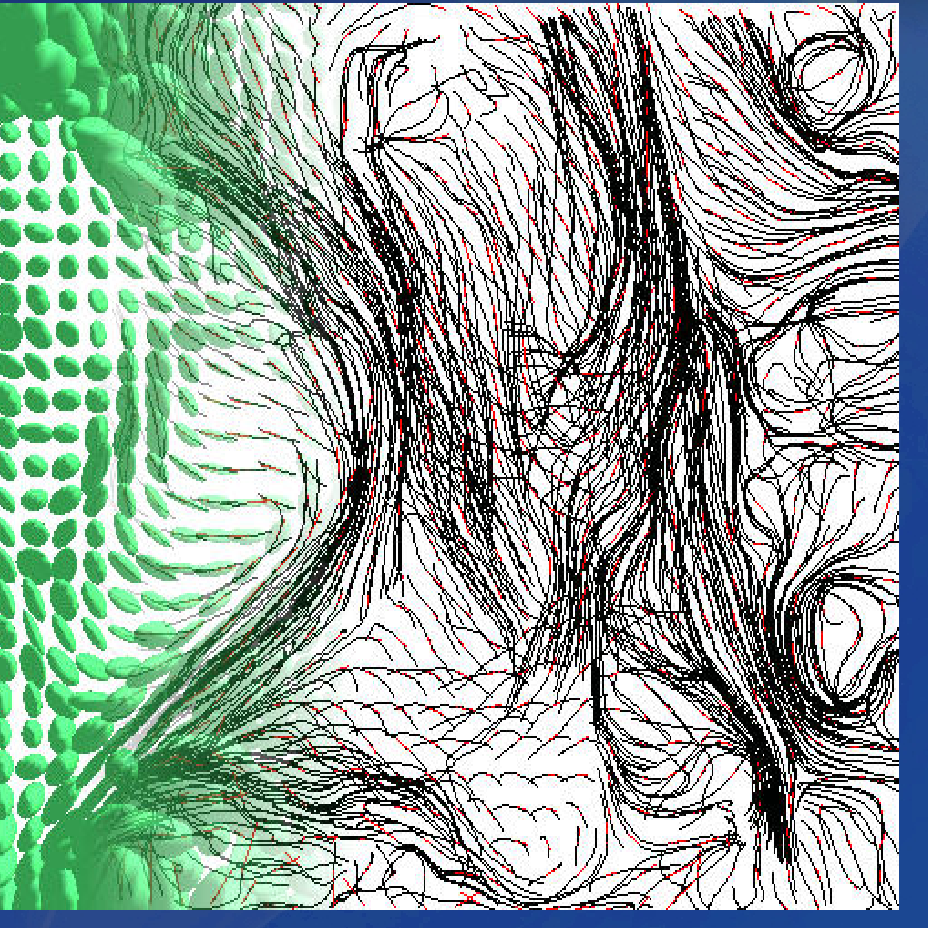
- Les orientations sont régularisées par notre EDP préservant les matrices orthogonales.

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathcal{L} - \mathbf{R}\mathcal{L}^T\mathbf{R}$$

Résultats : Données originales

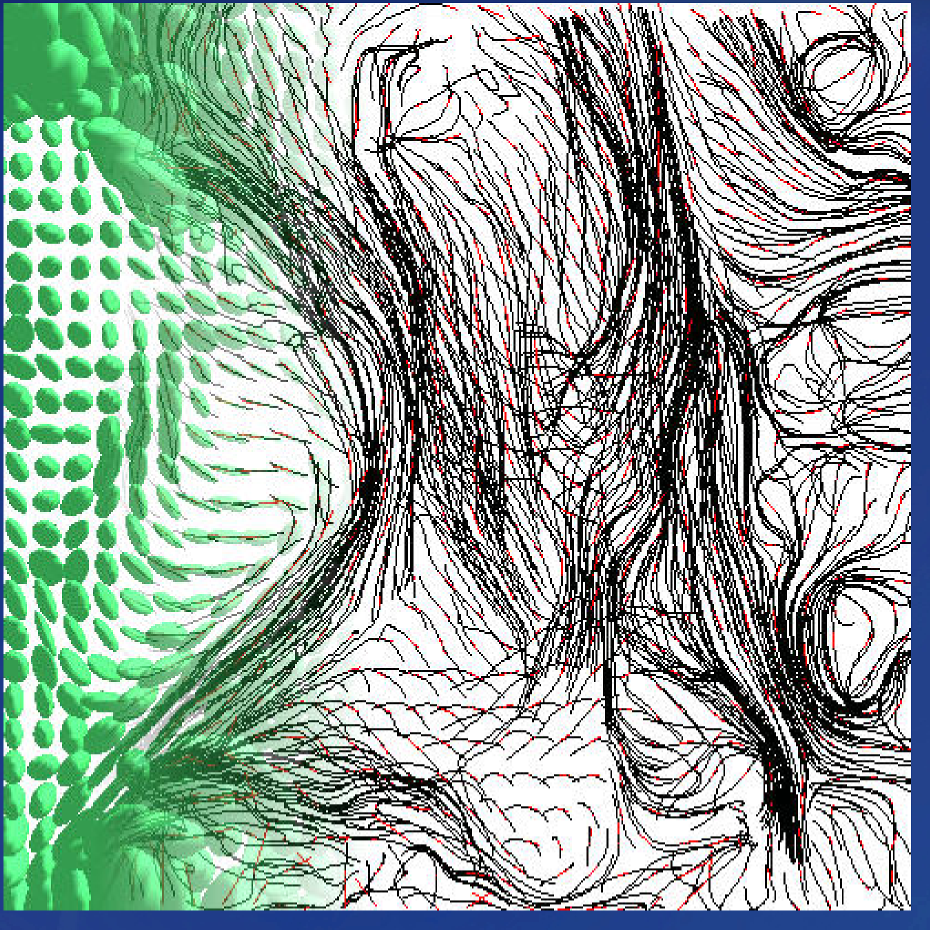


Coupe DT-MRI (diffusivité moyenne)

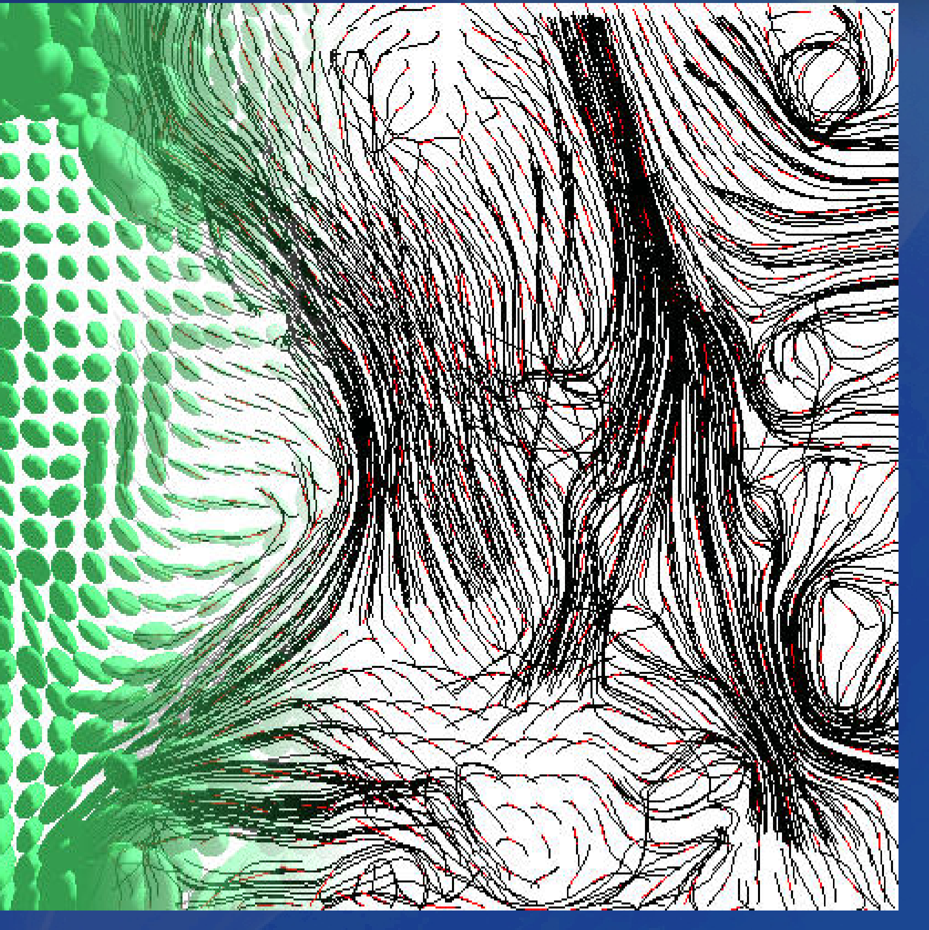


Tenseurs (à gauche) & Fibres (à droite)
(Données originales)

Résultats : Régularisation après 20 itérations

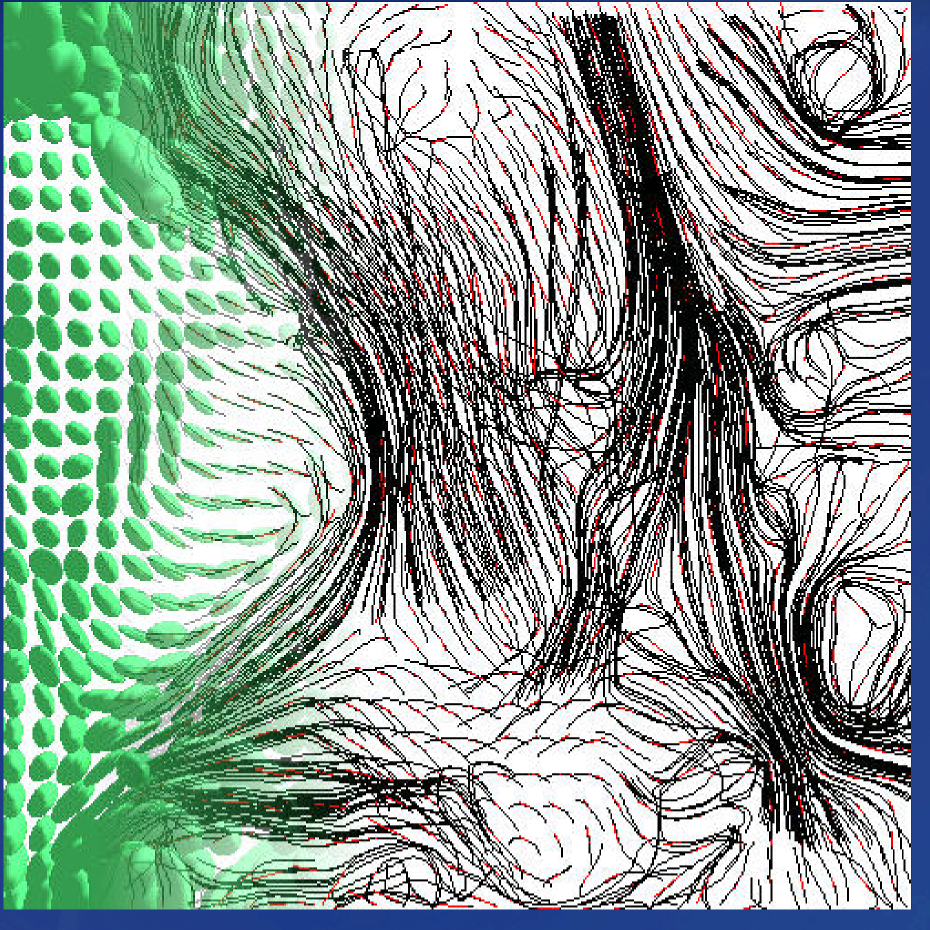


Tenseurs (à gauche) & Fibres (à droite)
(Données originales)

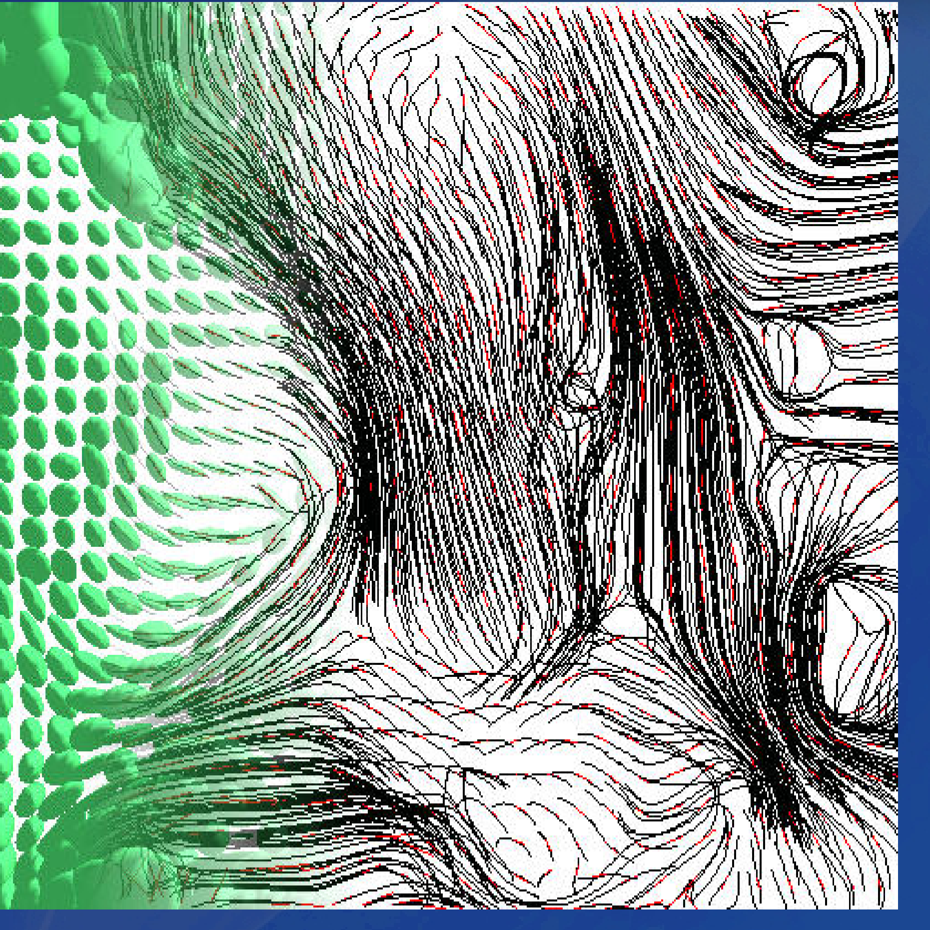


Volume régularisé (Après 20 it.)

Résultats : Régularisation après 40 itérations



Volume régularisé (Après 20 it.)



Volume régularisé (Après 40 it.)

⇒ **Modèle multi-échelle des réseaux de fibres.**

Régularisation contrainte : résumé

- Formalisme variationnel unificateur pour la régularisation contrainte de données d'orientations.

- Schéma numériques adaptés, évitant des étapes de reprojection sur l'espace contraint.

- Application sur des problèmes innovants.

- Extension récente proposée pour des contraintes matricielles (travail commun avec C. Chefd'hotel).

Plan de l'exposé

- Régularisation par EDP : Etat de l'art & Discussion
- Régularisation d'images multivaluées
  - * Applications
- Régularisation d'images contraintes
  - * Applications

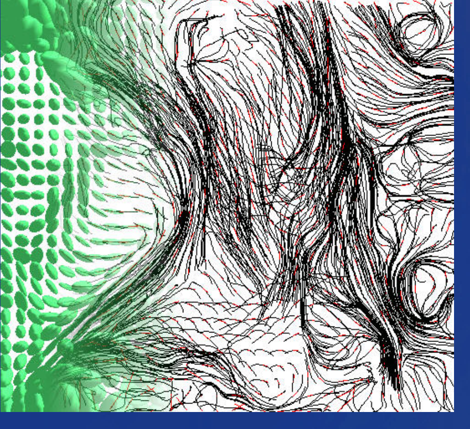
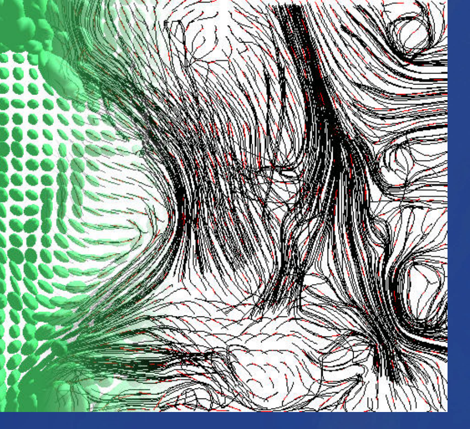
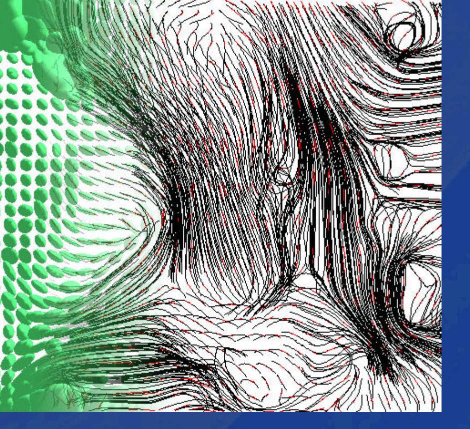
⇒ **Conclusions & Perspectives**

Conclusion

- Formalismes unificateurs pour la régularisation multivaluée contrainte et non-contrainte.
  - * Formalisme variationnel général des ψ-functionnelles.
  - * Minimisation sous contrainte orthonormale.
- Interprétation géométrique locale des méthodes, conduisant à des implémentations alternatives intéressantes.
  - * EDP vues comme des processus de filtrage local.
  - * Interprétation mécanique de la préservation des contraintes.
- Construction de nouvelles EDP, basées sur des à-priori locaux, applicables à de nombreux types d'images multivaluées.
  - * Images couleur et champs de vecteurs.
  - * Champs de directions.
  - * Champs de matrices orthogonales et images DT-MRI.

Perspectives

- Comparaison et validation des résultats de régularisation DT-MRI par la création d'une plateforme expérimentale.

- Introduction d'a priori physiologiques et anatomiques dans les EDP, pour la régularisation DT-MRI.

- Etude du lien entre tenseurs et conductivité électrique (données essentielles pour les problèmes MEG/EEG).

- Justification théorique des schémas numériques.

The end

- Merci à l'équipe Robotvis/Odyssée pour son ambiance de travail sympathique.