



HAL
open science

Dynamique et instabilités des filaments de spirales tridimensionnels dans les milieux excitable isotropes

Hervé Henry

► **To cite this version:**

Hervé Henry. Dynamique et instabilités des filaments de spirales tridimensionnels dans les milieux excitable isotropes. Biophysique [physics.bio-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2001. Français. NNT: . tel-00002491v2

HAL Id: tel-00002491

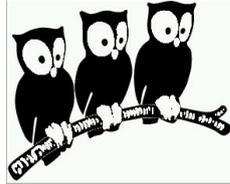
<https://theses.hal.science/tel-00002491v2>

Submitted on 4 Apr 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VII
Spécialité : Physique des liquides

présentée par
Hervé HENRY

SUJET de la thèse :

**Instabilités et dynamique
des ondes spirales tridimensionnelles
dans les milieux excitable isotropes.**

Soutenance le 17 décembre 2001 devant le jury composé de :

Dwight Barkley	Rapporteur
Hugues Chaté	Rapporteur
Yves Couder	
Vincent Hakim	Directeur
Stéphane Métens	
Stefan Müller	
Alain Pumir	

Table des matières

1	Introduction	7
2	Ondes spirales :	15
2.1	Modèles de milieux excitables :	15
2.2	Ondes unidimensionnelles :	19
2.2.1	Vitesse de propagation d'un front :	19
2.2.2	Hors des fronts :	20
2.2.3	Onde solitaire et ondes périodiques	21
2.3	Structure se propageant à deux dimensions :	22
2.3.1	Approche de fronts minces :	22
2.3.1.1	Vitesse d'avancée d'un front courbe	22
2.3.1.2	Équations des fronts avants et arrière de la spirale :	23
2.3.2	Méandre bidimensionnel :	26
2.3.2.1	Analyse de stabilité linéaire :	26
2.3.2.2	Numérique direct :	29
2.3.2.3	Explication du méandre dans un modèle de fronts minces :	29
3	Méthodes numériques	31
3.1	Choix du modèle de réaction diffusion :	31
3.2	Simulations numériques directes	32
3.2.1	Évaluation du Laplacien :	32
3.2.2	Euler explicite en temps.	33
3.3	Calcul des états stationnaires :	35
3.3.1	Position du problème	35
3.3.2	Implémentation de la méthode de Newton :	35
3.3.3	Performances de l'algorithme utilisé :	37
3.4	Analyse de stabilité linéaire :	37
3.4.1	Position du problème :	37
3.4.2	Méthode de calcul des modes propres dominants :	38

3.4.2.1	Principe de la méthode :	38
3.4.2.2	Calcul de $G(\mathcal{L})_m$ et d'une base de E	39
3.4.2.3	Choix de G :	39
3.4.2.4	Évaluation du nombre d'opérations nécessaire	40
3.4.3	Performances et vérification du code utilisé :	40
3.4.3.1	Performance :	40
3.4.3.2	Vitesse de convergence :	40
3.4.3.3	Validité des résultats :	41
4	Analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales non twistés	43
4.1	Panorama bidimensionnel :	43
4.2	Prédictions théoriques :	44
4.2.1	Comportement des modes à petite longueur d'onde :	44
4.2.2	Dérive en présence d'un champ électrique et stabilité des modes de translation :	46
4.2.2.1	Lien entre la dérive en champ d'une spirale et le comportement d'un filament de spirale courbé :	46
4.2.2.2	Dérive en champ d'une onde spirale en rotation uniforme :	47
4.3	Analyse de stabilité linéaire :	50
4.3.1	Modes de translation instables, modes de méandre se restabilisant	50
4.3.2	Modes de translation stables et modes de méandre se déstabilisant :	51
4.3.3	Modes de translation stables et modes de méandre se restabilisant :	54
4.4	Comparaison avec les résultats obtenus par la dérive dans un champ électrique :	54
4.4.1	Généricité des résultats :	56
5	Étude des instabilités des filaments de spirales en rotation uniforme :	57
5.1	Instabilité de courbure des spirales en rotation uniforme :	57
5.2	Instabilité de méandre tridimensionnel :	59
5.2.1	Description du régime transitoire	59
5.2.2	Conditions aux limites périodiques	60
5.2.3	Description de l'état restabilisé :	60
5.2.4	Conditions aux limites de type gradient-nul	63
5.3	Cas où les spirales bidimensionnelles méandrent :	65

6	Filaments de spirales twistés droits :	67
6.1	Détermination de l'état stationnaire dans le modèle de front mince :	67
6.1.1	Vitesse de propagation d'un front courbé :	68
6.1.2	Filaments de spirales twistés en rotation uniforme :	69
6.1.3	Calcul numérique de la solution :	70
6.2	Approche asymptotique à petit twist	72
6.3	Calcul des états stationnaires :	72
6.4	Analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales twistés	74
6.4.1	Petit rayon :	74
6.4.2	Grand rayon	77
7	Instabilité de <i>sproing</i>	79
7.1	Instabilité de sproing à $k_z = 0$:	80
7.1.1	Protocole numérique :	80
7.1.2	Résultats :	81
7.2	Instabilité de sproing à $k_z \neq 0$	83
7.2.1	Cas où un seul mode instable peut se développer dans la boîte de simulation :	83
7.2.2	Cas où plusieurs modes instables peuvent se développer dans la boîte de simulation :	84
7.2.3	Comparaison avec les résultats obtenus dans les milieux oscillants :	85
7.3	Modèle phénoménologique de filament :	88
7.3.1	Modèle :	88
7.3.2	Analyse de stabilité linéaire du filament droit uniformément twisté :	88
7.3.3	Application à la bifurcation de <i>sproing</i> :	92
7.3.3.1	Energie d'un filament hélicoïdal de pas B et de rayon R :	92
7.3.3.2	Stabilité du filament droit :	93
7.3.3.3	Autres positions d'équilibre :	94
7.3.4	Discussion :	96
8	Conclusion	97
A	Des ordinateurs vectoriels et de la vectorisation :	103
A.1	Principe de fonctionnement :	103
A.2	Contraintes liées à l'utilisation d'un ordinateur vectoriel :	104

B Propriétés de \mathcal{L}_{k_z}	107
B.1 Rappel des équations de stationnarité et du problème linéarisé	:107
B.2 Propriétés générales des modes propres de \mathcal{L}_{k_z} et de son adjoint	:108
B.2.1 Cas $\tau_w = 0$: 108
B.2.2 Cas $\tau_w \neq 0$: 108
B.2.3 Modes propres de l'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{L}}$: 108
B.3 Modes propres marginaux liés aux symétries du problème	: . . 111
B.3.1 Invariance par translation dans le temps, mode de rotation	: 111
B.3.2 Mode propre dû à l'invariance par translation 111
B.3.3 Mode propre dû à l'invariance par rotation tridimensionnelle 112
C Calcul de la vitesse d'un front courbe :	115
C.1 Distance d'un point à un parabolöide 115
C.2 Equation vérifiée par $u(d)$: 116
D Quelques propriétés des rubans. Application aux filaments de spirales	117
D.1 Twist, nombre de liens et Writhe d'un ruban 117
D.1.1 Twist	: 117
D.1.2 Linking number	: 117
D.1.3 Writhe	: 118
D.2 Lien entre un filament de spirale et un ruban	: 119
E Publication et prépublication	121
E.1 Publication 121
E.2 Prépublication 126

Chapitre 1

Introduction

L'une des premières observations expérimentales d'une onde d'excitation dans un système chimique a été faite par Ostwald [60] qui, en 1900, vit la propagation d'une onde d'excitation à la surface d'un fil de fer plongé dans un bain d'acide nitrique piqué par une aiguille de zinc. Cette onde d'excitation peut se propager indéfiniment le long d'un anneau et deux ondes d'excitation qui se rencontrent s'annihilent. Dans le même système, étendu à deux dimensions en entrelaçant des fils de fer selon un réseau carré, Susuki a observé la propagation d'ondes spirales (voir figure(1.1))[76]. Néanmoins, la présence de bulles dans le bain d'acide rend l'étude expérimentale des ondes de surface extrêmement difficile.

Belousov[12] a mis au point une réaction chimique où l'on peut observer¹ dans le cas où le milieu est maintenu homogène (par agitation par exemple) , des oscillations spontanées² des concentrations. Ces oscillations se traduisent visuellement par une variation de la couleur de la solution au cours du temps.

Afin d'étudier les structures qui pourraient se former dans ce milieu, on peut, moyennant un dispositif expérimental adapté, se placer dans une situation où le milieu n'est plus homogène et où le seul processus physique qui s'ajoute à la réaction est la diffusion moléculaire. On observe alors que dans un milieu quasi-bidimensionnel des fronts d'ondes se forment spontanément et peuvent aboutir à la formation d'ondes spirales[82, 88].

Dans le cas où le milieu n'est pas auto-oscillant, on observe qu'une perturbation localisée du milieu entraîne la propagation d'une onde. Alors on peut provoquer la formation d'ondes spirales. Ces ondes, visibles à l'œil nu, se propagent dans le milieu avec un mouvement de rotation autour d'un

¹si les concentrations des réactifs sont choisies de façon adéquate

² Un exemple classique de système qui présente cette caractéristique est l'oscillateur de Van der Pol.

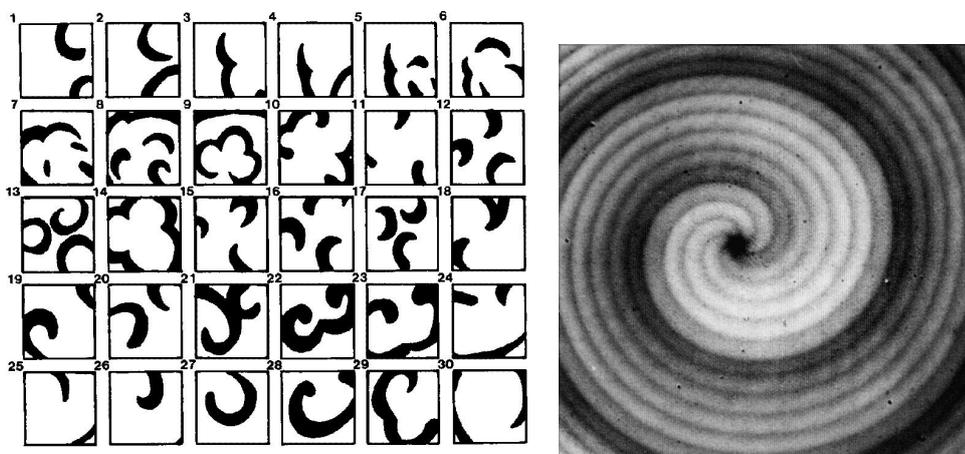


FIG. 1.1 – Gauche : Reproduction d’une figure de [76] (reproduite dans [84] page 156) Images prises de la surface d’une grille de 26×26 fils de fer plongés dans l’acide nitrique. Les parties noires correspondent à l’onde d’excitation chimique. Les images sont prises tout les $1/8$ de seconde. On distingue la propagation de plusieurs ondes spirales en rotation uniforme. Droite : Image tirée de [84] page 183. Superposition de six clichés d’une spirale en rotation dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky . Les clichés ont été pris à des intervalles de 3 secondes.

cœur immobile, ce mouvement de rotation continuant tant que les propriétés chimiques du milieu ne sont pas trop modifiées[82, 11].

Les études expérimentales des milieux excitable chimiques ont permis de mettre en évidence l’instabilité de méandre[11, 38, 73] des ondes spirales en rotation uniforme. Cette instabilité induit une modulation du rayon de rotation de la spirale et le bout de la spirale, au lieu de décrire un cercle décrit une trajectoire proche d’une epicycloïde.

Ces différents comportements des ondes se propageant dans les milieux excitable en ont fait un système modèle pour l’étude de la formation de structures[34]. En effet, les ondes d’excitation se propageant dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky furent parmi les premiers exemples d’observations expérimentales de la formation, prédite en 1952 par Turing [78], de structures par un processus de réaction-diffusion.

Cet intérêt pour les milieux excitable a été renforcé par les similitudes entre les ondes qui s’y propagent et les ondes observées dans certains systèmes biologiques tels que les fibres nerveuses où Hodgkin et Huxley[37] ont décrit la propagation d’ondes d’excitation. En particulier, la propagation de telles ondes dans le cœur et le rôle important qu’elles pourraient jouer dans

certaines arythmies a été le moteur d'un très grand nombre d'études des milieux excitables.

En effet, dans le cœur, des ondes d'excitation électriques synchronisent la contraction des muscles. En fonctionnement normal, le nœud sino-atrial envoie une onde électrique, via les fibres de Purkinje, sur l'endocarde. Cette onde se propage alors de l'endocarde vers l'épicarde sous la forme d'une onde d'excitation et déclenche la contraction des fibres musculaires. En 1913 Mines[57] observa la propagation d'ondes de contraction le long d'un anneau de muscle cardiaque de chien et suggéra que l'existence de telles ondes qui se propageraient indéfiniment dans le muscle pourrait expliquer certaines arythmies cardiaques.

Une étude récente[25] de la propagation d'ondes d'activité électrique le long d'un anneau similaire à celui utilisé par Mines a montré des fluctuations de l'intervalle de temps séparant deux passages de l'onde d'excitation. Cette instabilité est appelée alternance et apparaît en deçà d'une longueur critique de l'anneau utilisé. Cette instabilité qui correspond à une bifurcation de Hopf[17] est aussi observée lors de la propagation d'ondes d'excitation le long d'axones de calamars géants³[77, 40].

L'étude de tranches de tissus cardiaques quasi-bidimensionnelles[18] a mis en évidence la propagation d'ondes spirales en rotation. De telles ondes ont aussi été observées à la surface du cœur grâce à des colorants sensibles au potentiel[33, 29] (voir figure(1.2)). Ces résultats ont renforcé une hypothèse selon laquelle les ondes spirales pourraient jouer un rôle important dans le mécanisme de la fibrillation ventriculaire[39]. En effet, un mécanisme proposé consisterait en la succession d'une étape de tachycardie ventriculaire où des ondes spirales se propageraient parallèlement à la surface du muscle et à une fréquence plus élevée que celle du pace-maker naturel, entraînant des contractions rapides du ventricule. Ces ondes spirales se déstabiliseraient alors et entraînerait une activité désordonnée des muscles cardiaques similaire à la fibrillation ventriculaire décrite par Wiggers[81].

Bien que des mécanismes purement bidimensionnels aient été proposés pour expliquer la déstabilisation des ondes spirales et le mécanisme menant de la tachycardie à la fibrillation ventriculaire [43], l'épaisseur du cœur pourrait jouer un rôle important dans le mécanisme de la fibrillation ventriculaire[84].

Cette hypothèse a alors entraîné un grand intérêt pour l'étude des propriétés des milieux excitables tridimensionnels et donc des analogues tridimensionnels des ondes spirales que sont les filaments de spirales. Ils consistent en des ondes spirales bidimensionnelles mises les unes au dessus des autres le

³Ces fibres nerveuses ont beaucoup été utilisées expérimentalement car leur grande taille facilite les expériences

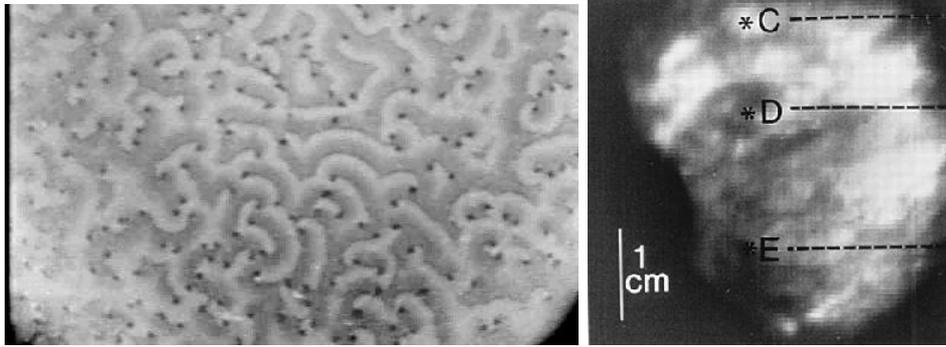


FIG. 1.2 – Gauche : photographie d’une colonie de *Dictyostelium discoideum* tirée de [71] où l’on observe la propagation d’ondes spirales. Droite : onde spirale se propageant à la surface d’un cœur de lapin observée à l’aide de colorants sensibles au potentiel[33].

long d’une ligne (appelées en anglais *scroll waves*[83]). La troisième dimension permet, outre la forme du filament, un degré de liberté supplémentaire à l’onde. En effet, on peut imposer un déphasage entre les différentes couches qui constituent le filament. Ce déphasage est appelé *twist*.

Expérimentalement, on a observé de telles structures dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky [1, 3, 79]. Cependant, jusque récemment, l’étude de la structure des ondes tridimensionnelles était difficile faute de techniques de visualisation adéquates. Dans les années 90, des techniques optiques telles que la tomographie[87] ou la reconstruction du filament à l’aide de l’analyse de l’évolution temporelle de la projection de l’onde dans deux plans orthogonaux [62] ont permis d’étudier la structure des ondes spirales dans les milieux excitables chimiques tridimensionnels. Ainsi, Mironov *et al.*[58] ont observé la déstabilisation d’un filament d’onde spirale se propageant dans un milieu présentant un gradient d’excitabilité. Ce gradient d’excitabilité, imposerait un déphasage entre les différentes couches de spirales qui constituent le milieu et le *twist* ainsi créé provoquerait la déstabilisation du filament de spirale.

L’étude de la morphogénèse de *Dictyostelium discoideum* a mis en évidence des structures qui pourraient être des ondes spirales tridimensionnelles. En effet, lors des premières étapes de la formation de *Dictyostelium discoideum* on observe des ondes spirales bidimensionnelles [51, 72] de cAMP (voir figure (1.2) qui gouvernent l’agrégation des cellules. La suite du processus de croissance de *Dictyostelium discoideum* fait alors apparaître des structures filamentaires *twistées*[75, 19] qui pourraient être expliquées par la présence d’ondes spirales tridimensionnelles.

Les résultats expérimentaux concernant la dynamique des ondes spirales

dans le cœur sont plus rares et se limitent en général à l'observation des ondes de surface[33, 29]. Les structures observées indiquent cependant que la dynamique tridimensionnelle des ondes spirales pourrait jouer un rôle important dans le mécanisme de la fibrillation ventriculaire[39].

Ces résultats expérimentaux se sont ajoutés à de nombreuses études théoriques et numériques.

Ainsi, Keener [45], en utilisant des méthodes d'analyse fonctionnelle a dérivé un modèle cinématique du filament de spirale. Dans le cadre de l'équation de Ginzburg-Landau complexe, ces prédictions ont été vérifiées en partie par Gabbay *et al.*[28]. En utilisant des méthodes similaires, Biktashev, [13] a étudié l'évolution du twist d'un filament de spirales. Dans une autre optique Margerit *et al.*[54] ont calculé la forme des filaments d'ondes spirales uniformément twistés dans un modèle d'interface fine.

Parallèlement, des études numériques ont mis en évidence différentes instabilités des filaments de spirales dans les milieux excitables isotropes. Ainsi, Biktashev [14] a mis en évidence l'instabilité de courbure des filaments d'ondes spirales et a mis les résultats numériques en parallèle avec les résultats de[45]. Cette instabilité aboutit à la formation de nouveaux filaments de spirales et à la propagation d'ondes désordonnées. Plus récemment, Aranson *et al.*[4] ont observé l'analogie tridimensionnel de l'instabilité de méandre.

A ces instabilités des filaments de spirales non twistés s'ajoutent des instabilités induites par le twist imposé à l'onde spirale. Ainsi Henze *et al.*[36] ont mis en évidence qu'au delà d'un twist critique, on observe la déstabilisation du filament droit twisté qui se restabilise sous la forme d'une hélice. Une instabilité analogue a aussi été observée lors de simulations numériques de milieux auto-oscillant modélisés par l'équation de Ginzburg-Landau complexe [67, 59, 68]. Elle a entraîné une modification du modèle de Keener pour tenir compte de l'influence du twist sur la dynamique du filament[44] et pourrait en partie expliquer la déstabilisation d'un filament de spirales dans un milieu présentant un gradient d'excitabilité[58].

Afin de mieux comprendre le mécanisme de la fibrillation ventriculaire, des simulations numériques ont été effectuées dans des modèles plus réalistes. Ainsi, afin de tenir compte de l'anisotropie des fibres musculaires du cœur et de la rotation de ces fibres dans la direction transverse du cœur[50], Fenton *et al.*[21, 22] ont effectué des simulations numériques de filaments de spirales dans un milieu présentant une anisotropie tournante en utilisant un modèle simplifié de l'activité électrique cardiaque. Ils ont alors observé la formation d'ondes de twist le long du filament. Ces ondes de façon similaire à ce qui est observé dans le cas de l'instabilité de courbure peuvent donner naissance

à une activité désordonnée du milieu. Ces travaux ont été repris récemment par Rappel[66] en utilisant des modèles plus réalistes de l'activité électrique cardiaque⁴. Les résultats obtenus montrent que selon les modèles utilisés, cette instabilité n'est pas toujours observée.

Dans un souci de réalisme accru, d'autres simulations ont été effectuées dans des systèmes reproduisant la géométrie du cœur. Les résultats obtenus montrent alors la propagation d'ondes similaires à celles observées expérimentalement[5]. Dans la même optique, différents mécanismes de défibrillation, faisant intervenir des champs électriques ont été proposés [49].

Les résultats numériques et théoriques obtenus, bien qu'abondants, ont été obtenus en utilisant différents modèles de milieux excitable et dans différents régimes de paramètres. Il en résulte que si certaines instabilités des filaments de spirales sont relativement bien comprises, aucune description satisfaisante des filaments de spirales n'est apparue.

Les travaux présentés dans cette thèse ont eu pour but de présenter un portrait complet du comportement des filaments de spirales dans un modèle déterminé de milieu excitable. Les résultats obtenus ont été mis en parallèle avec des calculs théoriques effectués soit dans la limite de faible excitabilité dans un modèle de front mince, soit par des méthodes perturbatives sur les équations aux dérivées partielles du modèle de milieu excitable utilisé.

Le manuscrit s'organise de la façon suivante. Dans le chapitre 2, je présente succinctement les résultats théoriques et numériques concernant les ondes spirales bidimensionnelles. Dans le chapitre 3, je présente les méthodes numériques utilisées pour obtenir les résultats présentés dans la suite du manuscrit. En particulier, je présente un algorithme qui a été utilisé pour calculer les modes propres dominants d'un opérateur linéaire dans un espace de grande dimension et ainsi effectuer l'analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales en rotation uniforme vis à vis de perturbations périodiques suivant l'axe du filament.

Dans les chapitres 4 et 5, je présente les résultats obtenus sur la dynamique des filaments de spirales non twistés. En particulier, je fais le lien entre les résultats de l'analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales non twistés présentée dans le chapitre 4 et la forme des instabilités observées décrites dans le chapitre 5. Les résultats obtenus montrent que selon le mode propre qui est instable, on observe deux comportements très différents du filament de spirales : si les modes de translation sont linéairement instables on observe l'apparition de structures désordonnées dans le milieu alors que si les modes de méandre est instable la bifurcation entraîne l'apparition d'un

⁴Les modèles de Beeler-Reuter[10] et de Luo-Rudy[53]

état restabilisé.

Dans les chapitres 6 et 7 je présente les résultats théoriques et numériques obtenus sur l'influence du twist sur la dynamique des filaments de spirales et sur son possible effet déstabilisant ou restabilisant sur les filaments. Ils mettent en évidence un bon accord qualitatif entre les résultats obtenus par une approche de fronts minces et ceux obtenus par un calcul des états stationnaires en utilisant la méthode de Newton décrite chapitre 3. L'analyse de stabilité linéaire montre que le twist n'a pas d'effet restabilisant sur les modes instables dans le cas où le filament non twisté est instable. Par contre, dans le cas où le filament droit est stable, elle montre que le twist induit une déstabilisation des modes de translation. Cette déstabilisation induit une instabilité de *sproing* déjà décrite dans [36]. Je décris l'état restabilisé et la bifurcation dans le chapitre 7 et présente un modèle phénoménologique de filament qui a le même comportement qualitatif sous l'influence du twist que le filament de spirales.

Chapitre 2

Ondes spirales :

Un milieu excitable est généralement défini par le fait qu'il présente un point d'équilibre stable et qu'une petite perturbation de cet état d'équilibre peut entraîner une longue excursion dans l'espace des phases[84].

Dans ce chapitre, je présente succinctement les structures se propageant dans un milieu excitable unidimensionnel puis les ondes pouvant exister dans un milieu excitable bidimensionnel ainsi qu'une instabilité des ondes spirales : le méandre.

2.1 Modèles de milieux excitables :

De bonnes approximations des milieux excitables sont des modèles de réaction-diffusion à deux variables[24] :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + D_u \epsilon \Delta u \\ \partial_t v &= g(u, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'une des variables, u a une vitesse de réaction beaucoup plus rapide que la seconde, v . Le petit paramètre ϵ exprime le rapport entre les vitesses de réaction caractéristiques des deux espèces. u est appelé propagateur et v l'inhibiteur.

Ces modèles, dont un diagramme des phases caractéristique de la partie réactive de (2.1) est représenté sur la figure (2.1), sont extrêmement simplifiés par rapport aux systèmes réels. Néanmoins, ils reproduisent fidèlement les comportements qualitatifs observés expérimentalement et permettent de mettre en évidence les mécanismes qui interviennent dans la propagation des ondes dans les milieux excitables.

L'un des premier modèles de milieu excitable est celui de Fitzhugh-Nagumo [24] qui a été introduit pour décrire de façon simplifiée le potentiel

d'action se propageant le long d'une fibre d'axone :

$$\begin{cases} f(u, v) &= 3u - u^3 - v \\ g(u, v) &= u - \delta \end{cases} \quad (2.2)$$

Des modèles similaires ont été développés soit pour décrire des milieux excitables particuliers¹ soit pour permettre des simulations numériques plus rapides. Ainsi, le modèle de Barkley :

$$\begin{cases} f(u, v) = u(u - 1)(u - \frac{v+b}{a}) \\ g(u, v) = u - v \end{cases} \quad (2.3)$$

permet des simulations rapides des milieux excitables en utilisant l'algorithme décrit dans [7](voir section 3.1).

Dans la suite de cette section je décris le comportement d'un milieu excitable homogène soumis à une perturbation d'amplitude finie et montre la forme de la longue excursion dans l'espace des phases qu'elle peut entraîner. A titre d'exemple, je me place dans le cadre du modèle de Fitzhugh-Nagumo

Dans ce modèle, le point d'équilibre correspondant à $u_0 = \delta$ et $v_0 = 3\delta - \delta^3$ est linéairement stable si $\delta < -1$ et une perturbation de l'ordre de $\delta + 1$ (c'est à dire suffisante pour amener le milieu dans la région où $f(u, v) > 0$) entraîne une longue excursion dans l'espace des phases. Dans un premier temps, u , la variable rapide, passe sur la branche C_+ afin d'annuler le terme $f(u, v)$, alors que v reste quasiment constant. Ensuite, le couple (u, v) suit la partie C_+ de la ligne de niveau ² $f(u, v) = 0$ jusqu'à atteindre son sommet. Il y a alors un saut de u pour rejoindre l'autre partie stable de la courbe $f(u, v) = 0$: C_- . Enfin couple (u, v) relaxe lentement vers le point d'équilibre en restant sur C_- . Un exemple typique d'une telle trajectoire au cours du temps, ainsi que l'exemple d'une relaxation exponentielle est représentée figure(2.2). On voit alors la différence de comportement du retour à l'équilibre en fonction de l'amplitude de la perturbation.

L'excitabilité peut alors être définie comme la capacité du milieu à présenter une telle trajectoire de retour à l'équilibre lorsqu'il est soumis à une perturbation finie.

¹ Ainsi, le modèle de l'oregonator décrit la réaction de Belousov-Zhabotinsky alors que les modèles de Luo-Rudy et de Beeler-Reuter sont des généralisation du modèle d'Hodgkin Huxley qui décrivent l'activité électrique du cœur (Ces deux modèles font intervenir bien plus de deux variables).

²la variable rapide u est éliminée adiabatiquement du fait de sa plus grande vitesse caractéristique de réaction

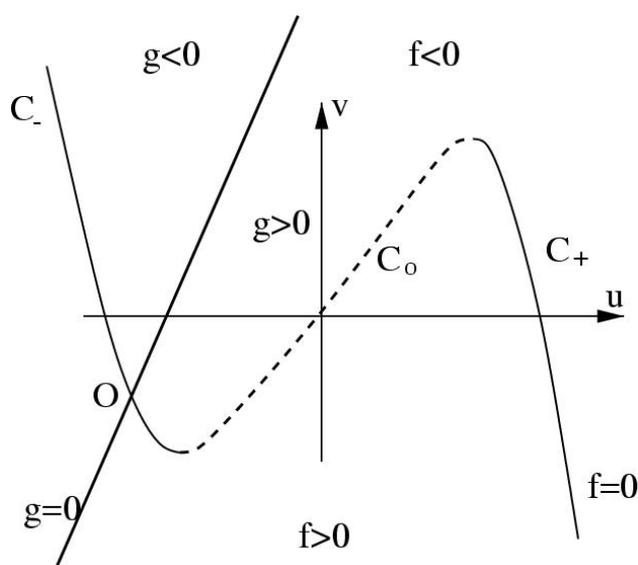


FIG. 2.1 – Exemple de diagramme des phases de la partie réactive d'un milieu excitable. Le point d'équilibre, noté O , est linéairement stable. En effet, dans les régions où $f > 0$, u tend à augmenter et dans les régions où $g > 0$, v tend à augmenter. Ainsi toute perturbation infinitésimale de l'état d'équilibre relaxe exponentiellement vers O . Par contre si la perturbation est suffisamment grande pour amener le système de l'autre côté de C_0 ou en dessous du minimum local de la courbe $f = 0$, le retour à l'équilibre se fait en décrivant une longue excursion dans l'espace des phases.

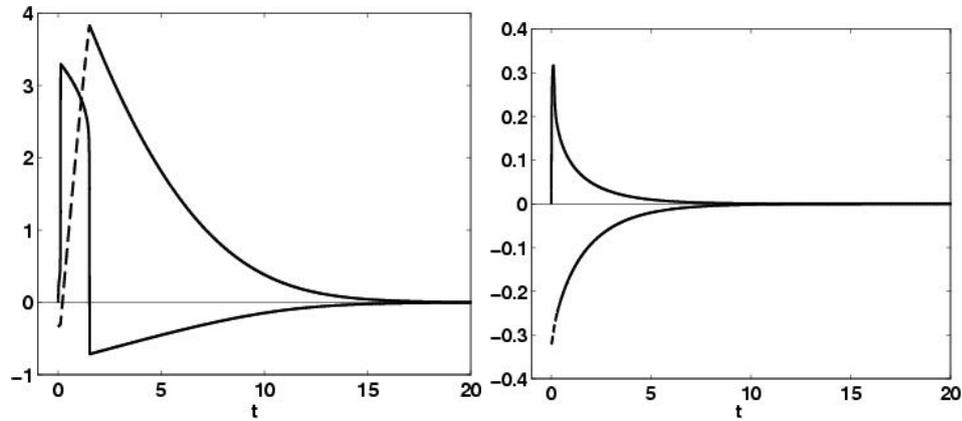


FIG. 2.2 – Exemples de trajectoires de retour à l'équilibre dans le modèle de Fitzhugh-Nagumo ($\delta = -1.3$, $\epsilon = 0.01$) pour deux perturbations de l'état d'équilibre du même ordre de grandeur. La ligne continue représente $u - u_0$, les tirets, $v - v_0$. Sur la figure de gauche la perturbation utilisée à $t = 0$ est $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0 - 0.33$, sur la figure de droite, la perturbation utilisée est $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0 - 0.32$. Les amplitudes de variation de u et v sont d'amplitudes très différentes et les temps de retour à l'équilibre diffèrent aussi sensiblement.

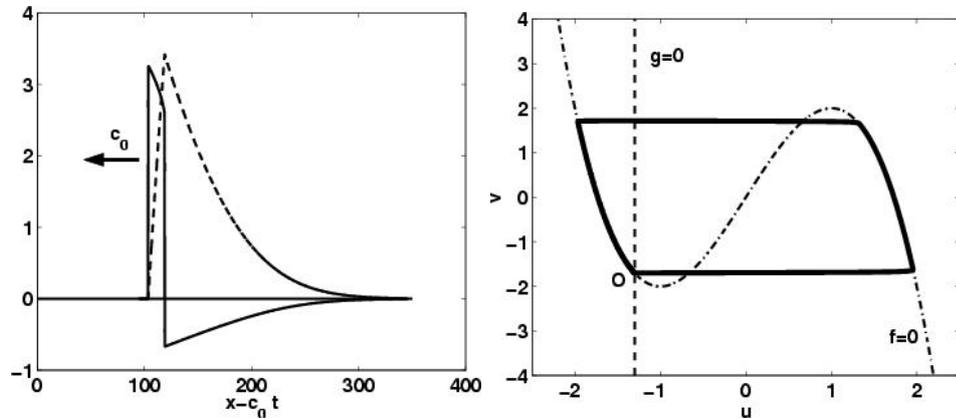


FIG. 2.3 – A droite : exemple de front d'onde se propageant dans le modèle de Fitzhugh-Nagumo pour $\epsilon = 0.01$ et $\delta = -1.3$. La ligne continue représente le champ $u - u_0$, la ligne pointillée, $v - v_0$. On remarque que les fronts avant et arrière sont très abrupts. A gauche : trait plein : trajectoire dans l'espace des phases des champs u et v en un point de l'espace traversé par ce front. On constate que hors des deux lignes horizontales qui sont parcourues très rapidement, le couple (u, v) est sur la ligne $f(u, v) = 0$ représentée par le trait mixte.

2.2 Ondes unidimensionnelles :

Dans le cas d'un milieu excitable unidimensionnel des ondes d'excitation peuvent se propager (un exemple d'onde est présenté figure (2.3)).

Dans la limite où ϵ est petit on peut utiliser la séparation des échelles caractéristiques de variation de u et v pour se ramener à un problème de dynamique de fronts et comprendre simplement la structure de l'onde solitaire. En effet, l'onde est composée d'un front avant d'excitation qui se propage dans le milieu à l'équilibre, d'une région excitée, d'un front arrière de désexcitation et d'une région de retour à l'équilibre. Dans les modèles de réaction diffusion, le front avant correspond au passage de l'état d'équilibre à la branche stable C_+ (voir (2.1)) de la courbe $f(u, v) = 0$, la région excitée à l'excursion sur cette branche, le front arrière au passage de C_+ à C_- et enfin la région de retour à l'équilibre au retour vers O en suivant cette branche.

2.2.1 Vitesse de propagation d'un front :

Dans cette section, je présente un calcul de la vitesse de propagation d'un front séparant la région désexcitée de la région excitée d'un milieu excitable. Ce calcul repose sur la séparation des échelles de variation temporelles de u et v .

Dans les régions de forte variation de u (les deux fronts), on considère que v est constant et on note \tilde{v} , sa valeur. Dans le front, u passe du zéro de $\tilde{f}_{\tilde{v}}(u) = f(u, \tilde{v})$ situé sur C_{\pm} au zéro situé sur C_{\mp} . v , étant constant, (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{\epsilon} f(u, \tilde{v}) + \epsilon \Delta u \\ v &= \tilde{v} \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans un repère se déplaçant avec le front à la vitesse c , u est invariant dans le temps. Alors (2.4) devient une équation différentielle ordinaire :

$$\epsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + c \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\epsilon} f(u, \tilde{v}), \quad (2.5)$$

L'échelle spatiale de variation de u étant d'ordre ϵ , il apparaît naturel de remplacer x par la variable $\xi = x/\epsilon$. Alors (2.5) devient :

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + c \frac{du}{d\xi} = -\tilde{f}_{\tilde{v}}(u) \quad (2.6)$$

La solution de (2.6) qui correspond au front dans ce nouveau repère admet pour limite en $\pm\infty$ les deux zéros de $\tilde{f}_{\tilde{v}}(u)$: u_- et u_+ . En utilisant une analogie mécanique, on peut montrer qu'une telle solution n'existe que pour

une valeur de c . En effet, on peut assimiler u à la position d'un point matériel, ξ au temps, c à un coefficient de frottement visqueux et $\tilde{f}(u)$ à la force qui dérive du potentiel $F_{\tilde{v}}(u) = \int \tilde{f}_{\tilde{v}}(u) du$ à laquelle est soumis le point matériel. Alors, la solution de front correspond à la situation d'un point qui, lâché sans vitesse initiale, d'un point d'équilibre instable du potentiel $F_{\tilde{v}}$ parvient à l'autre point d'équilibre instable au bout d'un temps infini. Une telle situation se produit pour une seule valeur du coefficient de frottement fluide. Ainsi, c est fixée par la forme du potentiel $F_{\tilde{v}}(u)$, donc par \tilde{v} .

En intégrant (2.6) entre $\xi = -\infty$ et $\xi = +\infty$ on obtient :

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi = - \int_{u_-}^{u_+} \tilde{f}_{\tilde{v}}(u) du \quad (2.7)$$

On montre ainsi que la vitesse d'un front dépend uniquement de la valeur de l'inhibiteur v dans le milieu dans lequel il se propage. On note cette vitesse c_v qui est indépendante de ϵ .

Numériquement, on peut calculer c_v à l'aide d'une méthode de tir. On obtient la relation entre c_v et v et la forme du front (voir figure (2.4)). On vérifie ainsi que l'hypothèse de front mince est valable pour des faibles valeurs de ϵ et qu'on peut donc faire l'hypothèse v constant à l'intérieur du front. En effet le front est d'épaisseur environ 1 en ξ , c'est à dire d'épaisseur ϵ alors que l'échelle de variation caractéristique de v dans le référentiel en mouvement avec le front est de l'ordre de $\frac{1}{c} = O(1)$.

2.2.2 Hors des fronts :

Hors des fronts, on élimine adiabatiquement le propagateur u en considérant que du fait de sa plus grande vitesse de réaction il est esclave de v . Les équations (2.1) deviennent alors :

$$\begin{cases} 0 = f(u, v) \\ \partial_t v = g(u, v) \end{cases} \quad (2.8)$$

On se ramène ainsi à une équation différentielle ordinaire pour v . Si on est sur la branche C_+ (voir (2.1)) de la courbe $f(u, v) = 0$, v croît alors que si on est sur la branche C_- de la courbe $f(u, v) = 0$, (u, v) relaxe vers la position d'équilibre.

Si le milieu est faiblement excitable, on suppose que v ne s'éloigne pas de sa valeur d'équilibre. Alors, au premier ordre en $(v - v_0)$, (2.8) devient :

$$\partial_t(v - v_0) = \frac{1}{\tau_+} \text{ dans la région excitée.} \quad (2.9)$$

$$\partial_t(v - v_0) = -\frac{1}{\tau_-}(v - v_0) \text{ dans la région de retour à l'équilibre} \quad (2.10)$$

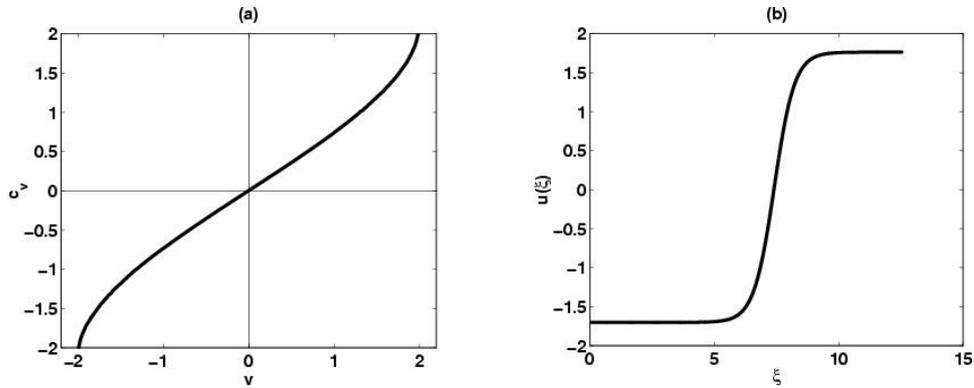


FIG. 2.4 – A gauche : vitesse de propagation d’un front plan en fonction de la concentration de l’inhibiteur calculée dans le modèle de Fitzhugh-Nagumo pour en utilisant comme variable spatiale la variable adimensionnée ξ . La vitesse du front ne dépend que de $f(u, v)$ et est donc indépendante de la valeur de δ . A droite, forme d’un front se propageant dans un milieu où $v = 0$ dans le même modèle avec $\delta = -1.7$. La variable spatiale est ξ et on voit ici que son échelle de variation est de l’ordre de $O(1)$.

où τ_+ est le temps caractéristique de réaction de v sur la branche C_+ et τ_- le temps caractéristique de retour à l’équilibre de v sur la branche C_- .

2.2.3 Onde solitaire et ondes périodiques

Dans le cas d’une onde solitaire, le front avant se propage dans le milieu à l’équilibre, sa vitesse de propagation est donc c_{v_0} . Le front arrière le suit à cette même vitesse. Cette onde stationnaire est stable.

En effet, la vitesse de propagation du front arrière est une fonction croissante de la valeur de v dans le milieu dans lequel il se propage (voir figure (2.4)) et que cette valeur de v est aussi une fonction croissante de l’intervalle de temps entre les deux fronts (fonction décroissante de la vitesse du front arrière).

Par exemple, si le front arrière est plus lent que c_{v_0} , le temps pendant lequel le milieu où il se propage a été excité augmente et par conséquent le champ v du milieu dans lequel il se propage aussi. Le front arrière accélère donc jusqu’à atteindre c_{v_0} . Inversement, s’il va plus vite que le front avant, il ralentit jusqu’à atteindre c_{v_0} .

Dans le cas des ondes périodiques, le front d’onde avant se propage dans un milieu qui n’a pas eu le temps de retourner à l’équilibre, ce qui modifie la vitesse de propagation du front (le ralentit) et peut entraîner l’apparition

d'une instabilité : l'alternance[17].

2.3 Structure se propageant à deux dimensions :

A deux dimensions dans un milieu excitable on peut observer la propagation de fronts d'ondes plans, analogues bidimensionnels des ondes solitaires se propageant dans les milieux unidimensionnels. Si le front d'onde est coupé en deux dans sa direction de propagation deux évolutions du demi front d'onde sont observées selon l'excitabilité du milieu.

Dans le cas où le milieu est faiblement excitable, on observe que le front d'onde plan devient un demi front d'onde plan animé d'un mouvement de translation uniforme en forme de doigt. Il se propage avec une vitesse dont la composante perpendiculaire au front est égale à la vitesse de propagation de l'onde plane et dont la composante parallèle au front correspond à une diminution de la longueur du front. Cette vitesse de rétraction décroît si on augmente l'excitabilité du milieu.

Au delà d'une excitabilité critique où le mouvement du doigt est orthogonal au demi front d'onde plan on observe que l'onde prend la forme d'une spirale archimédienne qui est en rotation uniforme autour d'un point fixe. Loin du centre de rotation cette onde spirale peut être vue comme un train d'ondes périodiques se propageant radialement.

On peut expliquer ces différents comportements en utilisant un modèle de propagation de fronts[35, 42, 47, 56]. Cette approche permet par ailleurs d'expliquer l'instabilité de méandre des spirales dans la limite de faible excitabilité. Les résultats ainsi obtenus sont en bon accord qualitatif et quantitatif avec les études numériques de milieux excitables[6, 41, 48, 86, 85]. Dans la suite de cette section, je présente succinctement l'approche de fronts minces pour des ondes spirales en rotation uniforme ainsi que quelques résultats numériques obtenus directement sur les équations aux dérivées partielles.

2.3.1 Approche de fronts minces :

2.3.1.1 Vitesse d'avancée d'un front courbe

Si on se place dans la limite ϵ petit, on peut réduire la dynamique d'un milieu excitable à celle de deux lignes représentant les fronts d'ondes avant et arrière de l'onde d'excitabilité. Pour cela il faut connaître la vitesse de propagation d'un front courbe. Si on considère que l'onde d'excitation est faiblement courbée, de rayon de courbure ρ et se propage avec une vitesse

normale constante c_n alors (2.1) devient en utilisant un système de coordonnées polaire dont le centre est le centre de courbure du front et en remplaçant r par $\xi = (r - \rho)/(\epsilon)$:

$$\frac{c_n}{\epsilon} \partial_\xi u = \frac{1}{\epsilon} \tilde{f}_v(u) + \frac{1}{\epsilon} \partial_{\xi\xi} u + \frac{1}{\rho + \epsilon\xi} \partial_\xi u \quad (2.11)$$

Comme le rayon de courbure est grand devant l'épaisseur du front, cette équation se ramène au premier ordre en ϵ/ρ à (2.6) en remplaçant c par $c - \epsilon/\rho$. Donc la vitesse normale de propagation d'un front de courbure $\kappa = 1/\rho$ est :

$$c(v, \kappa) = c_v - \epsilon\kappa \quad (2.12)$$

où c_v est la vitesse du front plan définie par (2.7) .

2.3.1.2 Équations des fronts avant et arrière de la spirale :

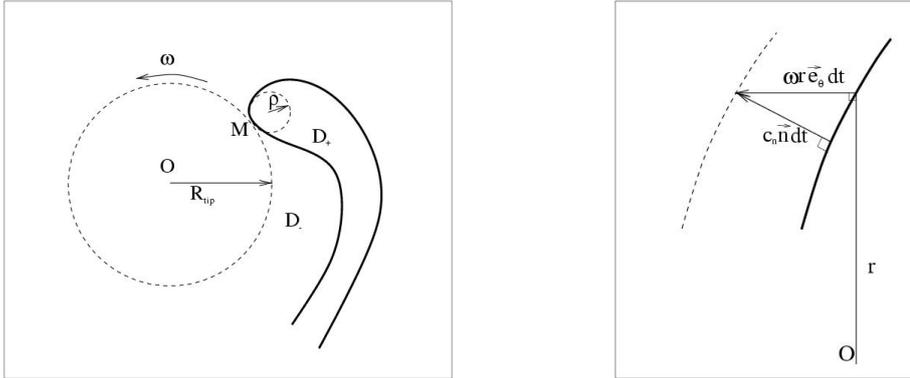


FIG. 2.5 – Droite : Vision schématique de l'onde spirale dans un modèle d'interface fine. ω est la pulsation de l'onde, R_{tip} , le rayon de rotation de l'onde et ρ est le rayon de courbure des fronts au bout de la spirale. La région où le milieu est excité est noté D_+ , la région de retour à l'équilibre est noté D_- . Gauche : schéma expliquant la relation (2.14). O est le centre de rotation de la spirale, le trait plein noir est le front (avant ou arrière) à un instant t_0 , le trait pointillé est la position de ce front à l'instant $t_0 + dt$: c'est le résultat de l'application d'une rotation de centre O et d'angle ωdt au front à l'instant dt . Pour que le front se propage à l'identique, il faut que pour tout point N du front à l'instant t_0 , il existe un point M , proche de N tel que son image par l'avancée du front pendant dt : $M' = M + c_n(M)\vec{n}(M)dt$ soit égale à l'image de N par rotation de centre O et d'angle ωdt : $N' = N + \omega r \vec{e}_\theta dt$.

On considère une onde spirale en rotation uniforme à la pulsation ω et on cherche à déterminer les équations vérifiées par ses fronts avant et arrières. Afin de simplifier le calcul on fait dans un premier temps les hypothèses suivantes :

1. On suppose que le milieu est faiblement excitable et qu'on peut utiliser l'hypothèse de faible excitabilité pour décrire l'évolution de v .
2. Le milieu a eu le temps de revenir à l'équilibre entre un passage du front arrière et le passage suivant du front avant, ce qui fait que la vitesse normale du front avant est $c_{v_0} - \epsilon\kappa$.

Dans un premier temps, on établit l'équation qui exprime que le mouvement des deux fronts qui composent la spirale est un mouvement de rotation uniforme :

$$c_n(M)\vec{n} - \omega r\vec{e}_\theta \in \mathcal{D} \quad (2.13)$$

où M est un point du front, $c_n(M)\vec{n}$, la vitesse normale du front en ce point, et \mathcal{D} , la tangente au front en M . Cette équation exprime que le mouvement normal d'un point du front doit correspondre au mouvement de rotation d'un autre point voisin du front (voir figure (2.5)). Cette équation cinématique, valable pour les fronts avant et arrière s'écrit plus formellement :

$$c_n(M) = \omega r\vec{n} \cdot \vec{e}_\theta \quad (2.14)$$

En se plaçant dans un système de coordonnées polaire³ et en utilisant (2.12) on obtient que le front avant paramétré par $\theta_+(r)$ vérifie :

$$r\omega = \left(c_{v_0} + \frac{\epsilon}{r} \partial_r \left[\frac{r^2 \partial_r \theta_+}{\sqrt{1 + (r \partial_r \theta_+)^2}} \right] \right) \sqrt{1 + (r \partial_r \theta_+)^2} \quad (2.15)$$

Entre le front avant et le front arrière, (u, v) évolue en obéissant à (2.9). Alors, comme c_v dépend linéairement de v pour v proche de v_0 : $c_v = c_{v_0}(1 - B\tau_+(v - v_0))$, (2.14) devient pour le front arrière :

$$r\omega = \left(c_{v_0} \left(1 - B \frac{\theta_- - \theta_+}{\omega} \right) + \frac{\epsilon}{r} \partial_r \left[\frac{r^2 \partial_r \theta_-}{\sqrt{1 + (r \partial_r \theta_-)^2}} \right] \right) \sqrt{1 + (r \partial_r \theta_-)^2} \quad (2.16)$$

On a ainsi établi les équations (2.15, 2.16) vérifiées par les fronts avant et arrière d'une onde spirale en rotation uniforme dans un milieu faiblement

³Le vecteur tangent à une courbe paramétrée par $\theta(r)$ est $\vec{t} = (-r\theta_r \vec{e}_r + \vec{e}_\theta) / (1 + r^2 \theta_r^2)^{1/2}$ et que la courbure vaut : $-\frac{1}{r} \partial_r \left(\frac{r^2 \partial_r \theta}{\sqrt{1 + (r \partial_r \theta)^2}} \right)$

excitable. Afin de fermer le problème, il faut encore donner la condition de raccord entre les deux fronts.

Dans le cas où le rayon de rotation de l'onde spirale est du même ordre de grandeur que la largeur de l'interface fine, l'approximation d'interface fine perd sa validité dans la région de raccord entre les fronts. Alors, une étude du système de réaction-diffusion dans la région proche du bout de la spirale, utilisant un développement en puissances ϵ montre qu'au premier ordre, les deux fronts se raccordent au centre de rotation en faisant un angle $\Delta\theta$ [42, 46, 47].

Dans le cas contraire, c'est à dire dans la limite de faible excitabilité, les fronts avant et arrière de la spirale se rejoignent en un point situé à la distance R_{tip} du centre de rotation (voir (2.5)) de la spirale. En ce point, la tangente aux fronts est orthoradiale, $\partial_r\theta_{\pm}$ y présente donc une divergence. La vitesse normale d'avancée du front y étant nulle, la courbure du front au bout de la spirale, κ_{tip} , est égale à : $c_{v0}/\epsilon = \kappa_{tip}$. Cette condition implique que $\partial_r\theta_{\pm}(r)$ se comporte comme :

$$\left(\frac{\kappa_{tip}^{-1}}{2R_{tip}(R_{tip} + \kappa_{tip}^{-1})} \right)^{1/2} (r - R_{tip})^{-1/2}, \quad (2.17)$$

au point de raccord entre les fronts avant et arrière.

Les équations (2.17,2.15,2.16) deviennent en introduisant $\psi_{\pm} = r\partial_r\theta_{\pm}$ et en utilisant les quantités adimensionnées suivantes : $\rho = \frac{c_{v0}}{\epsilon}r$, $\Omega = \frac{\epsilon}{c_{v0}^2}\omega$:

$$\Gamma_+\Omega\rho = (\Gamma_+)^{3/2} + \frac{1}{\rho}(\psi_+ + \psi_+^3) + \left(1 + \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2\right)\psi'_+ \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_-\Omega\rho &= -\left(1 - \frac{B\epsilon\theta_+ - \theta_-}{c_{v0}^2\Omega}\right)(\Gamma_-)^{3/2} + \\ &+ \frac{1}{\rho}(\psi_+ + \psi_-^3) + \left(1 + \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2\right)\psi'_- \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\psi_{\pm}(\rho \approx \rho_{tip}) = \left(\frac{\rho_{tip}}{2\rho_{tip}(\rho_{tip} + 1)} \right)^{1/2} (\rho - \rho_{tip})^{-1/2} \quad (2.20)$$

Ce système d'équation ne dépend que du paramètre $\frac{B\epsilon}{c_{v0}^2}$ et peut être résolu numériquement en utilisant une méthode de tir (voir figure2.6).

Dans la limite de faible excitabilité, on peut intégrer analytiquement ces équations [35] en utilisant le fait que $R_{tip} \gg \kappa_{tip}^{-1}$. Les résultats obtenus sous ces hypothèses mettent en évidence que le comportement de l'onde spirale dépend essentiellement de la dynamique des fronts au voisinage de la région de raccord entre les front avant et arrière. Cette partie de l'onde spirale tend

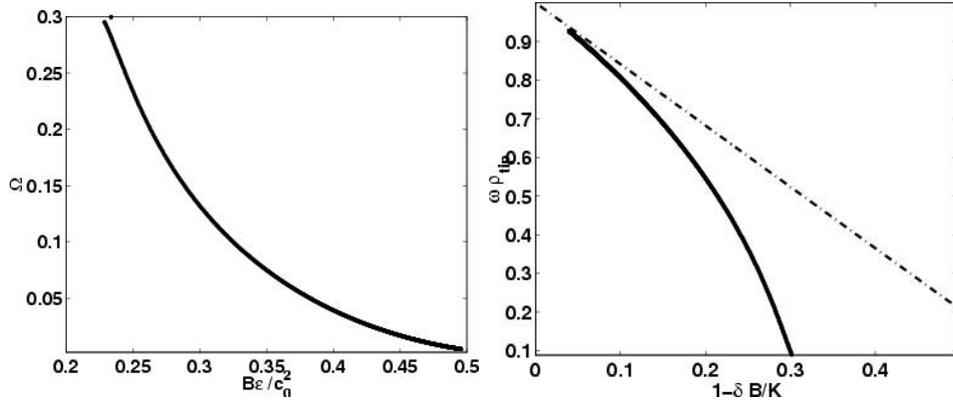


FIG. 2.6 – Gauche : Fréquence de rotation de la spirale en fonction de $\frac{B\epsilon}{c_0^2}$. Droite : Comparaison entre la valeur de la vitesse du bout de la spirale calculée numériquement par une méthode de tir et sa valeur asymptotique calculée au voisinage de la limite de propagation des ondes spirales. $\delta B = \left(\frac{B-B_c}{c_0^2}\right)\epsilon$. L'asymptote est alors $c_{tip-as} = 1 - \delta B/K$ avec $K \approx 0.63$ [35].

à prendre au point de raccord entre les fronts une vitesse tangentielle et un rayon de rotation instantanée qui dépendent uniquement de l'excitabilité du milieu dans lequel elle se propage. En particulier, on constate que le rayon de rotation de l'onde décroît quand l'excitabilité du milieu augmente.

2.3.2 Méandre bidimensionnel :

Une instabilité des ondes spirales consiste en une modulation du rayon de rotation de la spirale à une fréquence autre que sa fréquence de rotation. Cette instabilité, appelée méandre a été observée expérimentalement dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky [11] et numériquement dans de nombreuses études numériques[86, 85].

2.3.2.1 Analyse de stabilité linéaire :

Afin de développer des modèles réduits de la dynamique des ondes spirales et de mieux comprendre les mécanismes d'instabilités, on étudie la stabilité linéaire des ondes spirales en rotation uniforme dans les milieux excitable[8].

Cette onde spirale est invariante dans le temps dans le référentiel tournant à la même pulsation que la spirale. Alors en utilisant comme coordonnées r

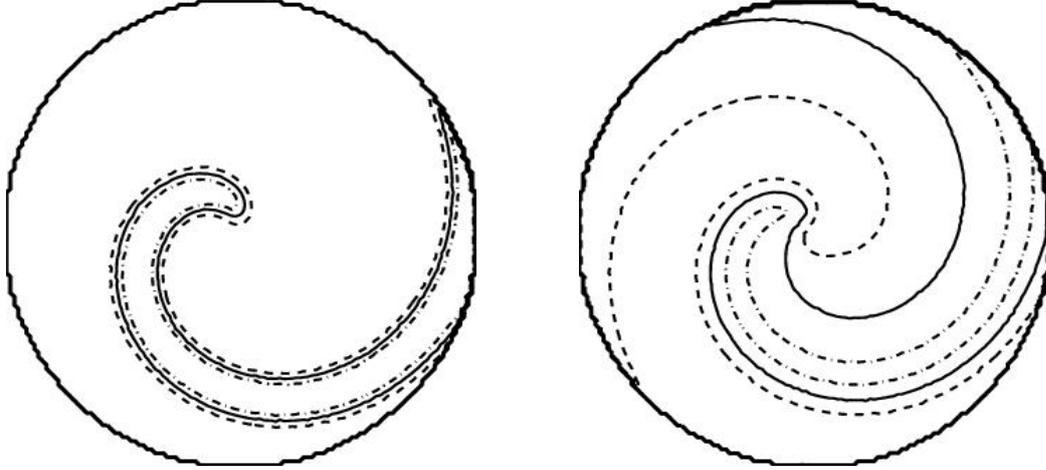


FIG. 2.7 – Ligne de niveau des champs u et v $a=0.4$ $b=0.01$ $\epsilon=0.01$ $u=0.2$ 0.5 0.8 $v=0.1$ 0.2 0.3 ; on voit bien la différence d'échelle de longueurs.

et $\phi = \theta - \omega t$, $(u(r, \phi, t), v(r, \phi, t))$ vérifient :

$$\begin{cases} 0 = \partial_t u = \omega \partial_\phi u + \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \Delta u \\ 0 = \partial_t v = \omega \partial_\phi v + g(u, v) \end{cases} \quad (2.21)$$

Alors, les champs u et v ainsi que la pulsation ω peuvent être déterminés précisément en utilisant une méthode de Newton (voir figure (2.7)) et en discrétisant les opérateurs différentiels sur une grille polaire.

Une fois la solution stationnaire (u_0, v_0, ω) calculée on linéarise l'opérateur d'évolution en temps autour de cette solution stationnaire dans le référentiel en rotation avec la spirale et on étudie la stabilité linéaire de perturbations de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(r, \phi, t) = e^{\sigma t} u_1(r, \phi) \\ \tilde{v}_1(r, \phi, t) = e^{\sigma t} v_1(r, \phi) \end{cases} \quad (2.22)$$

De telles perturbations sont solutions du problème linéarisé si elles vérifient le problème aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \sigma \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega \partial_\phi + \frac{1}{\epsilon} \partial_u f(u_0, v_0) + \Delta & \frac{1}{\epsilon} \partial_v f(u_0, v_0) \\ \partial_u g(u_0, v_0) & \omega \partial_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{L} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ce problème aux valeurs propres peut être discrétisé sur la grille polaire utilisée pour le calcul des solutions stationnaires. Comme on s'intéresse à la

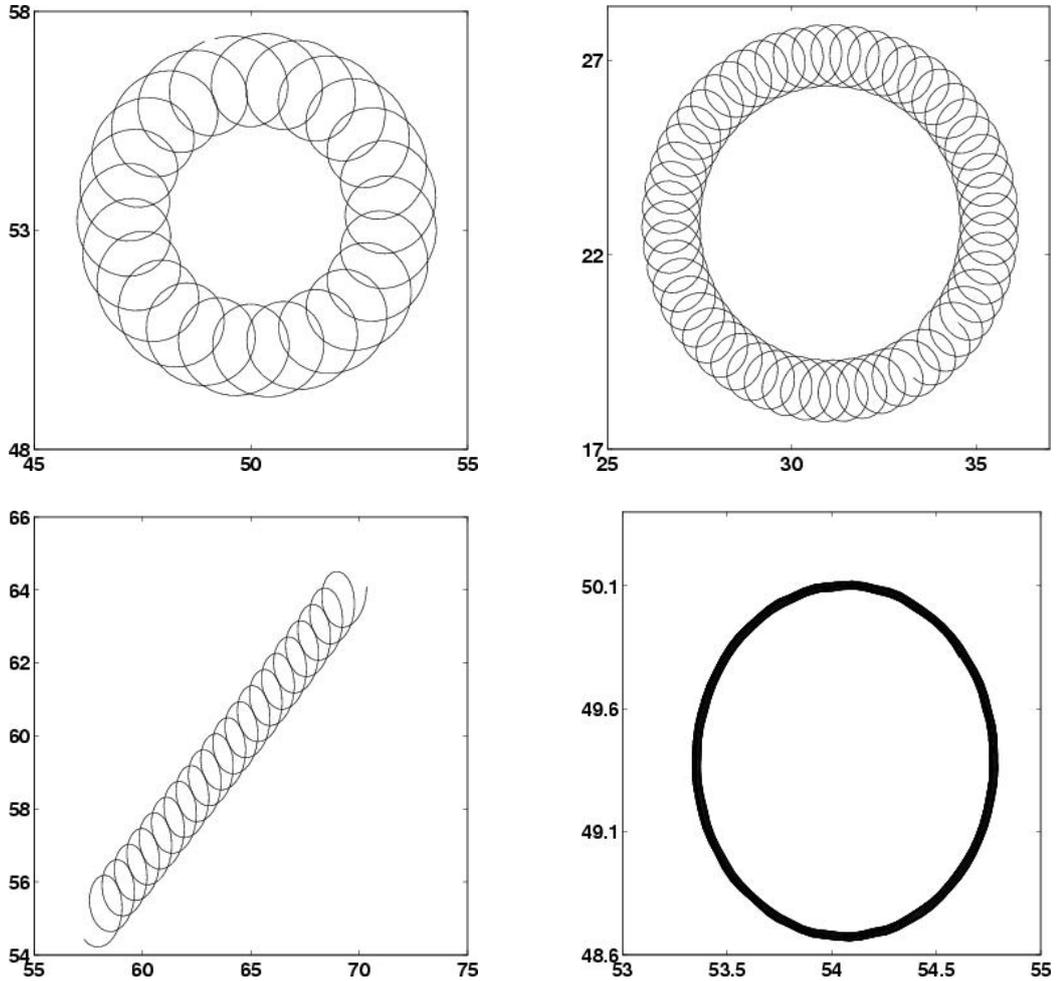


FIG. 2.8 – Trajectoire du bout de la spirale dans le modèle de Barkley pour $\epsilon = 0.025$ et $b = 0.01$ et $a = 0.528$ (haut gauche), 0.592 (haut droite), 0.57 (bas gauche), et 0.616 (bas droite).

stabilité des perturbations, il suffit de déterminer les modes propres dominants, c'est à dire ceux dont le taux de croissance, la partie réelle de σ est la plus grande. Ceci peut être fait très précisément en utilisant l'algorithme exposé section 3.4. On détermine ainsi les $n \approx 30$ modes propres de plus grands taux de croissance.

Du fait des symétries de l'équation (2.1), invariance par translation dans l'espace et dans le temps, $\partial_\phi(u_0, v_0)$, $(\partial_r + i\frac{1}{r}\partial_\phi)(u_0, v_0)$ et $(\partial_r - i\frac{1}{r}\partial_\phi)(u_0, v_0)$ sont des modes propres de \mathcal{L} avec pour valeurs propres respectives 0 , $i\omega$ et $-i\omega$ (voir annexe B).

L'analyse de stabilité linéaire conduite numériquement met en évidence

qu'outre ces trois modes propres liés aux symétries du problème deux modes propres complexes conjugués jouent un rôle important dans la dynamique des ondes spirales. Ces deux modes propres deviennent instable, c'est à dire $Re(\sigma)$ devient positif, quand le méandre apparaît. Ces deux modes sont appelés modes de méandre.

2.3.2.2 Numérique direct :

Une étude numérique directe en utilisant l'amplitude de l'oscillation du rayon de rotation de la spirale comme paramètre de la bifurcation, permet de mettre en évidence que l'instabilité de méandre dans un régime faiblement non linéaire correspond à une bifurcation de Hopf[41, 9].

Les résultats des simulations numériques directes mis en parallèle avec l'analyse de stabilité linéaire[8] montrent que la forme des pétales de la trajectoire d'une spirale qui méandre sont liés au rapport des fréquences ω de rotation de la spirale en rotation uniforme et ω_1 du mode de méandre. Si $\omega > \omega_1$ on observe des pétales à l'intérieur, si $\omega = \omega_1$ on observe une onde spirale en rotation dans un référentiel en translation uniforme.

2.3.2.3 Explication du méandre dans un modèle de fronts minces :

L'hypothèse d'une spirale se propageant dans un milieu à l'équilibre (2) qui a été utilisée pour établir (2.15, 2.16) n'est vérifiée que si $\omega_1 \tau_- \ll 1$. Dans le cas contraire, la spirale se propage dans un milieu qui n'a pas eu le temps de revenir à l'équilibre. Il faut alors tenir compte de la valeur $v_+(r)$ du champ v sur le front avant. Les équations (2.15, 2.16) deviennent alors en utilisant (2.9, 2.10) :

$$r\omega = \left(c(v_+(r)) + \frac{\epsilon}{r} \partial_r \left[\frac{r^2 \partial_r \theta_+}{\sqrt{1 + (r \partial_r \theta_+)^2}} \right] \right) \sqrt{1 + (r \partial_r \theta_+)^2} \quad (2.24)$$

$$r\omega = \left(c(v_-(r)) + \frac{\epsilon}{r} \partial_r \left[\frac{r^2 \partial_r \theta_-}{\sqrt{1 + (r \partial_r \theta_-)^2}} \right] \right) \sqrt{1 + (r \partial_r \theta_-)^2} \quad (2.25)$$

$$v_+(r) = v_0 + (v_-(r) - v_0) \exp\left(-\frac{2\pi - (\theta_+ - \theta_-)}{\tau_- \omega_1}\right) \quad (2.26)$$

$$v_-(r) = v_+(r) + \frac{\theta_+ - \theta_-}{\tau_+ \omega_1} \quad (2.27)$$

Ces équations peuvent être résolues analytiquement dans l'hypothèse de faible excitabilité ou numériquement de la même façon que (2.15, 2.16)[61]. Il vient alors que le front avant se propage dans un milieu dont l'excitabilité

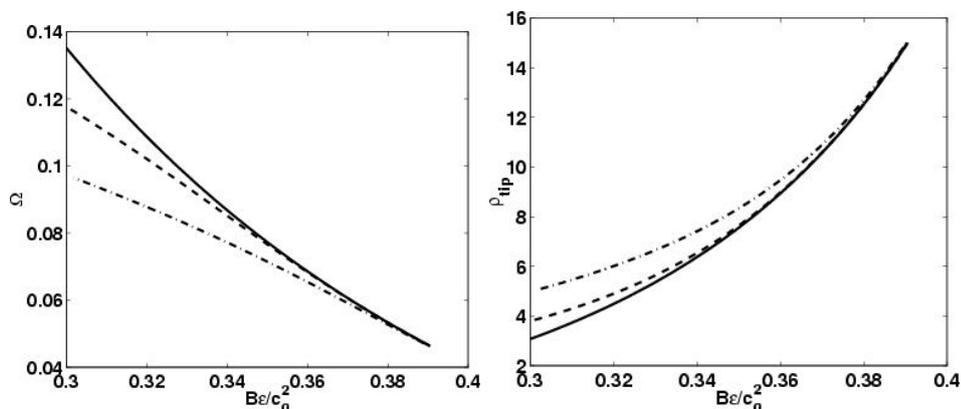


FIG. 2.9 – Ω (gauche) et ρ_{tip} (droite) en fonction de $\frac{B\epsilon}{c_0^2}$ pour différentes valeurs du temps caractéristiques de retour à l'équilibre τ_- sur la courbe C_- : en trait continu $\tau_- = 0$, le front avant se propage dans un milieu qui est à l'équilibre, en tirets $\tau_- = 10$ et en trait mixte $\tau_- = 15$. Ces courbes ont été obtenues en résolvant les équations (2.15,2.16,2.26,2.27) à l'aide de la méthode suivante. A ρ_{tip} fixé, on cherche Ω et B pour la spirale se propageant dans un milieu où l'inhibiteur à une concentration $v(r)$. A l'aide de la spirale ainsi calculée on détermine le champ v qui serait vu par le front avant et on réitère le processus avec le champ ainsi calculé jusqu'à ce que l'on atteigne un point fixe. Cet algorithme de point fixe ne converge pas pour de grandes valeurs de l'action du front arrière sur le front avant.

décroit avec le rayon (voir figure (2.9)). Ce gradient d'excitabilité au bout de la spirale permet, dans le cas où l'hypothèse d'interface fine reste valable au point de raccord entre les fronts, d'expliquer qualitativement l'instabilité de méandre[35].

En effet, si on considère un petit déplacement d du bout de la spirale vers l'extérieur, il va se propager dans un milieu moins excitable. Par conséquent son rayon de rotation va être augmenté de δR qui est fonction du gradient d'excitabilité au bout de la spirale. Si $\delta R < d$, la spirale va se restabiliser et relaxer vers son état de rotation uniforme. Par contre si $\delta R > d$, la perturbation d est amplifiée et la spirale est instable. On observe alors une modulation du rayon de rotation de la spirale au cours du temps avec une fréquence différente de la fréquence de de rotation de l'onde stationnaire et la spirale méandre.

Chapitre 3

Méthodes numériques

L'étude numérique de la dynamique des ondes spirales tridimensionnelles qui est présentée dans la suite de cette thèse s'est faite suivant deux axes. Dans un premier temps, j'ai étudié numériquement la stabilité linéaire des filaments de spirales par rapport à des perturbations périodiques le long du filament.

A cette analyse de stabilité linéaire s'est ajoutée une série de simulations numériques directes des filaments d'ondes spirales afin de d'observer l'évolution des filaments de spirales linéairement instables ainsi que l'état restabilisé quand il existait.

Ici, je présente le modèle de réaction-diffusion qui a été utilisé, les simulations numériques directes et les méthodes numériques utilisées pour l'analyse de stabilité linéaire : l'une pour le calcul des états stationnaire l'autre pour le calcul des modes propres dominants d'un opérateur linéaire de rang élevé.

3.1 Choix du modèle de réaction diffusion :

La plupart des calculs numériques effectués dans cette thèse l'ont été dans le cadre du modèle de Barkley[7] :

$$\begin{cases} f(u, v) &= u(u - 1)(u - \frac{v+b}{a}) \\ g(u, v) &= u - v \end{cases} \quad (3.1)$$

Deux raisons ont guidé ce choix. La première est qu'il a été utilisé pour de nombreuses expériences numériques, ce qui permet de tester la validité des codes. La seconde est qu'il permet d'effectuer des simulations rapides(voir section 3.2.2).

Par ailleurs, pour des raisons de commodité j'écris le système (2.1) sous

la forme alternative :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \Delta u \\ \partial_t v &= g(u, v) \end{cases} \quad (3.2)$$

ce qui correspond au changement de variables spatiales :

$$x \rightarrow x\epsilon^{-1/2}. \quad (3.3)$$

3.2 Simulations numériques directes

Les simulations numériques sont effectuées sur une grille uniforme, de pas dx , le schéma d'intégration temporelle est Euler explicite en temps. Le Laplacien en un point est évalué à l'aide d'une formule de différence finie qui utilise les plus proches voisins ainsi que les deuxièmes plus proches voisins. Cette formule réduit les effets de l'anisotropie de grille et en dépit du plus grand nombre d'opérations nécessaire à l'évaluation du Laplacien permet de prendre un plus grand pas de temps à pas de grille fixée.

3.2.1 Évaluation du Laplacien :

Dans le cas des milieux isotropes, on utilise une évaluation du Laplacien en un point utilisant les plus proches voisins ainsi que les deuxièmes plus proches voisins[20]. A deux dimensions, si on repère un point de la grille par ses coordonnées i, j , alors le Laplacien en (i, j) d'un champ u vaut :

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,j} &= -20 u_{i,j} + 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \\ &+ u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cette formule de Laplacien limite l'anisotropie de grille. En effet, l'erreur faite est à l'ordre dominant, de la forme :

$$E_{9 \text{ points}} = \frac{dx^2}{12} \nabla^4 u + O(dx^4) \quad (3.5)$$

Cette expression est invariante par rotation des axes de la grille, contrairement à l'erreur qu'on aurait en utilisant l'approximation classique du Laplacien à 5 points :

$$E_{5 \text{ points}} = \frac{dx^2}{12} (\partial_{x^4} u + \partial_{y^4} u) + O(dx^4). \quad (3.6)$$

A trois dimensions, on utilise de façon similaire une formule de Laplacien à 19 point[20] au lieu de 7 :

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{i,j,k} &= -24u_{i,j,k} \\
 &+ 2(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) \\
 &+ u_{i+1,j+1,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j,k+1} + u_{i+1,j,k-1} \\
 &+ u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1} \\
 &+ u_{i,j+1,k+1} + u_{i,j+1,k-1} + u_{i,j-1,k+1} + u_{i,j-1,k-1}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'erreur à l'ordre dominant vaut :

$$E_{19 \text{ points}} = \frac{dx^2}{12} \nabla^4 u + O(dx^4) \tag{3.8}$$

et est comme dans le cas bidimensionnel invariante par rotation.

3.2.2 Euler explicite en temps.

Les simulations numériques directes ont été effectuées en utilisant un schéma d'intégration temporelle Euler explicite en temps. Ce schéma consiste à approcher une solution de $(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t))$ de (2.1) à l'instant ndt par ses valeurs sur les points de la grille : $u_{i,j,k}(n)$ qui obéit à :

$$\begin{cases} u_{i,j,k}(n+1) = u_{i,j,k}(n) + dt \times \left(\frac{1}{\epsilon} f(u_{i,j,k}(n), v_{i,j,k}(n)) + \Delta u_{i,j,k} \right) \\ v_{i,j,k}(n+1) = v_{i,j,k}(n) + dt \times g(u_{i,j,k}(n), v_{i,j,k}(n)) \end{cases} \tag{3.9}$$

Dans le cas des formules usuelles de Laplaciens, la limite de stabilité [63] d'un schéma Euler explicite en temps est $dt_{max} = dx^2/6$ à trois dimensions. En utilisant la formule du Laplacien à 19 points, la limite de stabilité est $dt_{max} = 2.5dx^2/8$. Ce gain dans le pas de temps maximal qui peut être pris compense alors le nombre d'opérations supplémentaires requis pour effectuer l'évaluation du Laplacien.

Dans le cas du modèle de Barkley, il est possible de diminuer notablement le nombre d'opérations nécessaire à un pas en temps. En effet, dans ce modèle, l'état désexcité (qui dans les milieux excitable occupe souvent une grande partie de l'espace) correspond à $u = 0$. Alors, en faisant l'approximation que le propagateur s'il est inférieur à un seuil ζ est nul, on peut utiliser un algorithme qui réduit de façon remarquable le nombre d'opérations nécessaire à un pas en temps. Je présente dans la figure (3.1) cet algorithme dans le cas unidimensionnel où des conditions aux bords périodiques sont utilisées. On voit que dans ce cas, le nombre d'opérations nécessaires à chaque pas de temps est de 2 multiplications quand le champ u est inférieur à ζ alors que

```

c a chaque pas de temps, les valeurs de k et kp sont interverties
c (elles sont alternativement 1 et 2)
  kp=3-k
  do i=1,nx
    if(u(i).lt.zeta)then
c u<zeta
      u(i)=D*lap(k,i)
      v(i)=(unmoinsdt)*v(i)
c
      unmoinsdt=1-dt
    else
c u>zeta
      vth=bsura+unsura*v(i)
c
      vth=(b+v(i))/a sert lors
c de l'evaluation de f
c evaluation de la contribution de u(i) au laplacien de ses plus
c proches voisins au pas de temps suivant.
      lap(kp,i)=lap(kp,i)-2.*u(i)
      lap(kp,i-1)=lap(kp,i-1)+u(i)
      lap(kp,i+1)=lap(kp,i+1)+u(i)
c pas en temps euler explicite
      v(i)=v(i)+dt*g(u(i),v(i))
      u(i)=u(i)-dt*f(u(i),vth)-D*lap(k,i)
c g(u,v)=u-v
c f(u,v)=u(u-1)(u-vth)=u(vth+u(-(1+vth)+u)
c D=dt/dx**2
      endif
    enddo
    lap(kp,nx)=lap(kp,nx)+u(1)
    lap(kp,1)=lap(kp,1)+u(nx)
    lap(k,0:nx+1)=0
    k=kp

```

FIG. 3.1 – Partie d'un programme de simulation numérique directe d'un milieu excitable unidimensionnel décrit par le modèle de Barkley correspondant au pas de temps. Cet algorithme est la reproduction de celui présenté dans [7].

si $u > \zeta$ il est de $5 + 2 = 7$ multiplications et de $7 + 5$ additions. Ce gain de temps est encore augmenté dans le cas des milieux excitable bidimensionnels et tridimensionnels car l'évaluation du Laplacien demande plus d'opérations.

3.3 Calcul des états stationnaires :

3.3.1 Position du problème

Afin d'étudier la stabilité linéaire des filaments de spirales uniformément twistés en rotation uniforme autour d'un axe Oz , il faut dans un premier temps calculer les états stationnaires qui leur correspondent. Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} u(r, \theta, z, t) = \tilde{u}(r, \phi = \theta - \omega t - \tau_w z) \\ v(r, \theta, z, t) = \tilde{v}(r, \phi = \theta - \omega t - \tau_w z) \end{cases} \quad (3.10)$$

où ω est la pulsation de la spirale et τ_w , le twist qui lui est imposé. Comme (u, v) sont solutions de (2.1), (\tilde{u}, \tilde{v}) vérifient :

$$\begin{cases} 0 = \omega \partial_\phi \tilde{u} \frac{1}{\epsilon} f(\tilde{u}, \tilde{v}) + \partial_{r^2} \tilde{u} + \left(\frac{1}{r^2} + \tau_w^2\right) \partial_{\phi^2} \tilde{u} + \frac{1}{r} \partial_r \tilde{u} \\ 0 = \omega \partial_\phi \tilde{v} g(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases} \quad (3.11)$$

On discrétise ce système sur une grille polaire de $(N_R \times N_\phi + 1)$ points centrée en O , en utilisant des différences finies du second ordre pour les dérivées spatiales, et on impose qu'à la frontière $r = N_R dr$ du domaine, le gradient de u lui soit tangent. Alors, (3.11) devient un système de $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))$ équations réelles à $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1) + 1)$ inconnues. L'inconnue supplémentaire qui correspond à la valeur de ω . Afin de lever l'indétermination due à l'invariance par rotation du problème, on fixe la valeur¹ de u au point de coordonnées (N_R, N_ϕ) . On obtient ainsi un système non linéaire de $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))$ équations à $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))$ inconnues. Ces équations peuvent être résolues à l'aide d'une méthode de Newton.

3.3.2 Implémentation de la méthode de Newton :

Formellement, l'équation (3.11) s'écrit :

$$\vec{0} = \mathcal{F}(\vec{V}) \quad (3.12)$$

où \mathcal{F} est une fonction de $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))$ variables à valeurs dans $\mathbb{R}^{(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))}$ et où les $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))$ composantes de \vec{V} correspondent

¹On choisit en général de la fixer à $u=0.5$ dans le cas du modèle de Barkley afin de fixer l'intersection d'un front avec la frontière du domaine

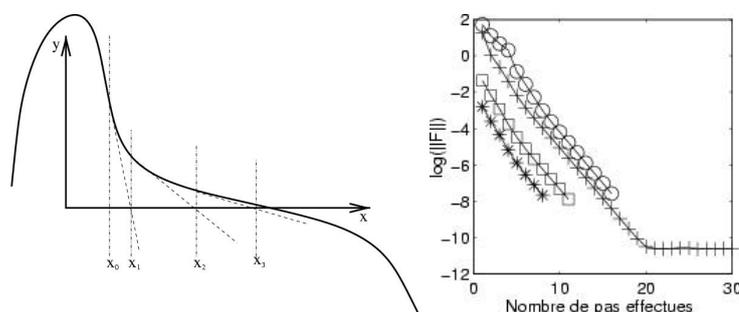


FIG. 3.2 – A gauche, principe de la méthode de Newton dans le cas d'une fonction d'une variable à valeurs dans \mathbb{R} : les x_i représentent les estimations successives du zéro de $y(x)$. A droite, $\log_{10}(\|\mathcal{F}(\vec{V}_n)\|_2)$ en fonction du pas de Newton lors de calculs de solutions stationnaires. Les courbes marquées par des o et des $+$ ont pour point de départ des résultats de simulations numériques directes, les courbes avec des $*$ et des \square ont pour point de départ des solutions stationnaires déjà calculées par une méthode de Newton. L'éloignement plus grand dans les deux premier cas provient essentiellement des points situés aux limites du domaine. La décroissance est exponentielle jusqu'à ce que l'erreur soit de l'ordre de la précision de l'ordinateur (ici on obtient une précision de l'ordre de 10^{-11} en utilisant des calculs en double précision, alors que l'erreur numérique due au manque de chiffres significatifs est de l'ordre de $\sqrt{(10^{-15})^2 \times 160 \times 80 \times 2} \approx 10^{-13}$)

aux valeurs du champ \tilde{u} sur les points de la grille de coordonnées autres que (N_R, N_ϕ) , à la valeur de ω et aux valeurs de \tilde{v} sur tous les points de la grille.

On prend pour point de départ \vec{V}_0 , a priori proche de la solution cherchée², ensuite on calcule une suite \vec{V}_n en utilisant la récurrence suivante :

$$\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_n - \lambda D\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(\vec{V}_n) \quad (3.13)$$

où $D\mathcal{F}$ est la différentielle de \mathcal{F} prise en V_n et où λ est un réel compris³ entre 0 et 1. Ceci revient à considérer que \mathcal{F} est égale à son développement limité au premier ordre en \vec{V}_n et à calculer \vec{V}_{n+1} comme solution du problème approché. Géométriquement, cela consiste à approcher la courbe d'une fonction

²C'est soit le résultat d'une simulation numérique directe sur une grille cartésienne qu'on a transposé sur la grille polaire, soit une solution stationnaire calculée par une méthode de Newton pour des valeurs des paramètres proche de ceux pour lesquels on cherche un état stationnaire.

³La méthode de Newton à proprement parler utilise $\lambda = 1$ et la convergence est alors hyper-exponentielle, ici on a utilisé $\lambda = 0.5$ pour éviter que l'algorithme ne diverge lors des premiers pas. Ce choix fait que la vitesse de convergence n'est plus qu'exponentielle, mais assure la convergence

par sa *tangente* en \vec{V}_n (3.2) . Cette méthode peut très bien ne pas converger. Néanmoins, si V_0 est *suffisamment* proche de la solution cherchée, les approximations successives de la solution convergent exponentiellement (voir figure 3.2).

La seule difficulté qu'elle présente ici est que chaque pas nécessite de résoudre un système linéaire de $(2 \times (N_R \times N_\phi + 1))$ (environ 10^4) équations, ce qui est très coûteux en temps de calcul en utilisant des méthodes classiques telles que le pivot de Gauss. On utilise donc une méthode de calcul de solution approchée itérative, telle que la méthode du gradient-biconjugué [64] ou la méthode du résidu minimum généralisée (*Generalized minimum residual method*, GMRES)[69]. En général on obtient par ces méthodes⁴ une solution approchée du système linéaire avec une précision suffisante dans l'optique d'une méthode de Newton(erreur relative de l'ordre de 10^{-4} en un nombre d'itération relativement faible (quelques dizaines d'itérations suffisent).

3.3.3 Performances de l'algorithme utilisé :

En utilisant cette méthode, on arrive à annuler l'opérateur d'évolution en temps discrétisé avec une précision de l'ordre de 10^{-10} en norme euclidienne (une simulation numérique directe aboutit, au mieux, à une précision de l'ordre de 10^{-2} sur la même grille).

Cette précision, pour une grille⁵ de $N_r \times N_\phi = 80 \times 160$ est atteinte en environ une demi heure de calcul sur une station de travail DEC alpha en partant d'une estimation produite par simulation numérique directe et en environ 10 minutes en partant d'une solution calculée pour des valeurs proches des paramètres.

3.4 Analyse de stabilité linéaire :

3.4.1 Position du problème :

Une fois un état stationnaire (u_0, v_0, ω) , calculé, on en étudie la stabilité vis à vis de petites perturbations périodiques suivant l'axe Oz du filament de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(r, \theta, z, t) &= u_1(r, \phi = \theta - \omega t - \tau_w z) e^{i(\sigma t - k_z z)} \\ \tilde{v}_1(r, \theta, z, t) &= v_1(r, \phi = \theta - \omega t - \tau_w z) e^{i(\sigma t - k_z z)} \end{cases} \quad (3.14)$$

⁴Les procédures utilisées proviennent de la bibliothèque de procédures LAPACK

⁵Expérimentalement, j'ai constaté que si le ratio N_r/N_ϕ est trop grand la méthode de Newton ne convergeait pas. Un ratio de l'ordre de 1/2 assure la convergence de l'algorithme de Newton et a toujours été utilisé.

Alors, la linéarisation de (2.1) autour de (u_0, v_0, ω) donne le problème aux valeurs propres vérifié par $\sigma(k_z)$ et $u_1(r, \phi), v_1(r, \phi)$:

$$\begin{cases} \sigma(k_z) u_1 &= (-k_z^2 + 2i\tau_w k_z \partial_\phi) u_1 + (\omega_1 \partial_\phi + \tau_w^2 \partial_\phi^2 + \nabla_{2D}^2) u_1 + \\ &+ [\partial_u f(u_0, v_0) u_1 + \partial_v f(u_0, v_0) v_1] / \epsilon \\ \sigma(k_z) v_1 &= \omega_1 \partial_\phi v_1 + [\partial_u g(u_0, v_0) u_1 + \partial_v g(u_0, v_0) v_1] \end{cases} \quad (3.15)$$

Formellement, ce problème s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{k_z} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La continuité de \mathcal{L}_{k_z} par rapport à k_z implique que les modes propres et valeurs propres de \mathcal{L}_{k_z} sont des fonctions continues de k_z , ce qui permet de définir des branches de modes et de valeurs propres. je présente dans la suite la méthode numérique qui a été utilisée pour calculer ces branches.

3.4.2 Méthode de calcul des modes propres dominants :

Le problème linéaire est discretisé sur la grille polaire en utilisant des différences finies du second ordre. On calcule alors les modes propres dominants en utilisant une méthode présentée par Goldhirsch *et al.*, dans [30] et déjà utilisée dans [6]. Elle repose sur le fait que l'exponentielle d'un opérateur linéaire \mathcal{L} a les mêmes modes propres que \mathcal{L} et que les modes propres de plus grands module de $\exp(\mathcal{L})$ sont les modes propres de plus grande partie réelle de \mathcal{L} .

3.4.2.1 Principe de la méthode :

Soit \mathcal{L} , un opérateur linéaire dans un espace de dimension N , on cherche à en calculer les modes propres dominants. On note e_1, \dots, e_N , ses modes propres, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, les valeurs propres associées avec $Re(\lambda_i) > Re(\lambda_{i+1})$.

On considère un vecteur arbitraire x_0 . Dans un premier temps, on considère $x_1 = (1 + dt\mathcal{L})^{t_0/dt} x_0$ avec dt choisi suffisamment petit pour que les composantes de x_0 suivant les modes propres de plus grands module (qui sont dans le cas étudié ici les modes propres de partie réelle la plus négative) ne soient pas amplifiés. Cette opération permet de supprimer la contribution des modes propres de partie réelle la plus négative de façon exponentielle⁶.

Dans une seconde étape on calcule la restriction $G(\mathcal{L})_m$ de $G(\mathcal{L})$ à l'espace E engendré par les x_1, \dots, x_m où $x_i = G(\mathcal{L})^{i-1} x_1$ et m un entier arbitraire. On diagonalise alors $G(\mathcal{L})_m$. Les vecteurs propres de $G(\mathcal{L})_m$ ainsi obtenus

⁶Pour dt suffisamment petit, $(1 + dt\mathcal{L})^{t_0/dt}$ est une bonne approximation de $\exp(\mathcal{L}t_0)$

sont de bonnes approximations des modes propres dominants de \mathcal{L} ainsi que le montre une vérification *a posteriori* qui permet de déterminer la valeur propre associée.

3.4.2.2 Calcul de $G(\mathcal{L})_m$ et d'une base de E

Comme, E n'est pas stable par $G(\mathcal{L})$, la restriction de $G(\mathcal{L})$ à E n'existe pas. Néanmoins on peut la définir comme la composée de $G(\mathcal{L})$ et de la projection orthogonale sur E , le produit scalaire utilisé étant une discrétisation du produit scalaire usuel de deux fonctions :

$$(u.v) = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_j j = 1^{n_\theta} u(i, j) \bar{v}(i, j) i dr^2 d\theta. \quad (3.17)$$

Le choix naturel d'une base de E serait de prendre les x_1, \dots, x_m . Ce choix, présente cependant un inconvénient majeur. En effet, les vecteurs de base ainsi obtenus sont essentiellement dirigés suivant les quelques modes propres dominants de \mathcal{L} , il en résulte une imprécision dans le calcul des vecteurs de base et de la matrice de $G(\mathcal{L})_m$. Afin de palier à cet inconvénient, on construit $(f_1 \dots f_m)$, une base orthonormée de E de la façon suivante. $f_1 = x_1$,

$$y_i = G(\mathcal{L})f_i \quad (3.18)$$

$$f_{i+1} = \frac{y_i - \sum_{k=1}^i (f_k \cdot y_i) f_k}{\|y_i - \sum_{k=1}^i (f_k \cdot y_i) f_k\|_2} \quad (3.19)$$

Alors l'expression de $G(\mathcal{L})_m$ dans $(f_1 \dots f_m)$ est du fait de la définition de la restriction utilisée ici :

$$g_{i,j} = (f_i \cdot y_j) \quad (3.20)$$

3.4.2.3 Choix de G :

Le choix naturel de G serait de prendre $G(X) = X$ afin de limiter le temps de calcul. Néanmoins, ce choix dans le problème étudié ne convient pas. En effet, les valeurs propres de \mathcal{L} de plus grand module sont de l'ordre de 10^5 . Ainsi, au bout d'un faible (4 ou 5) nombre d'itération de $G(\mathcal{L})$, la projection du bruit numérique⁷ sur les modes propres de plus grand module est suffisamment amplifiée pour empêcher le succès de la méthode.

C'est pourquoi, il apparaît judicieux de choisir G de façon à empêcher le développement des modes propres de plus grand module. J'ai choisi, d'utiliser $G(X) = (1 - dtX)^{t_1/dt} \approx \exp(-t_1X)$, t_1 étant choisi suffisamment grand pour

⁷de l'ordre de 10^{-14} en double précision

que $G(\mathcal{L})$ diffère de façon significative de l'identité et suffisamment petit pour limiter le temps de calcul (Une valeur typique de t_1 est 0.5). Ce choix, d'une part empêche le développement des modes propres de plus grand module, d'autre part réduit la contribution des modes dont le taux de croissance est le plus négatif et ainsi améliore la précision de l'algorithme.

3.4.2.4 Évaluation du nombre d'opérations nécessaire

Une fois discrétisé sur une grille polaire, \mathcal{L} est une matrice creuse dont le nombre d'éléments non nuls est d'ordre $(N_\phi \times N_r) = N_{r\phi}$. Donc chaque itération de l'opérateur $(1 + \mathit{mathcal{L}}dt)$ demande un nombre d'opération de l'ordre de $N_{r\phi}$. Si on se place à dr constant (dr ne change pas d'ordre de grandeur), le pas dt maximal qui ne soit pas instable est de l'ordre de $(drd\phi)^2 \approx N_{r\phi}$. Donc, le calcul des n modes propres dominants de \mathcal{L} demande de l'ordre de $n \times N_{r\phi} \times N_{r\phi}$ opérations en virgule flottante.

Ce résultat est à comparer avec le nombre d'opération nécessaire au calcul des modes propres d'un opérateur de rang $N_{r\phi}$ par des méthodes classiques. Elles demandent en général de l'ordre de $N_{r\phi}^3$ opérations. On voit alors que pour des petites valeurs de n par rapport à $N_{r\phi}$, cette méthode est beaucoup plus rapide que les méthodes classiques.

A cet avantage, s'ajoute le fait que vu la valeur de $N_{r\phi} \approx 1.4 \cdot 10^4$, il est envisageable, faute de mémoire suffisante, d'effectuer une réduction complète de \mathcal{L} sur une station de travail classique. En effet elle demanderait de stocker $N_{r\phi}^2 \approx 10^{8-9}$ réels, alors que l'algorithme proposé ne demande de stocker que $n \times N_{r\phi} \approx 10^{6-7}$ réels.

3.4.3 Performances et vérification du code utilisé :

3.4.3.1 Performance :

Le code développé permet de calculer les 10 premiers modes propres dominants de l'opérateur \mathcal{L}_{k_z} sur une grille $N_r \times N_\phi = 60 \times 120$ avec une précision de l'ordre de 10^{-6} en environ 10 heures de calcul sur une station de travail DEC alpha et en 1/2 heure de calcul en utilisant l'ordinateur vectoriel NECSX5 de l'IDRIS.

3.4.3.2 Vitesse de convergence :

Des tests de l'algorithme ont montré que la précision obtenue par cet algorithme augmente de façon exponentielle quand l'un des paramètres t_0 , t_1 ou m est augmenté.

3.4.3.3 Validité des résultats :

Les symétries du problèmes imposent l'existence de trois modes propres marginalement stables de l'opérateur \mathcal{L}_{k_z} . Ils (voir B) correspondent à l'invariance par rotation et translation du problème et sont des extremas de leurs branches respectives. Les résultats numériques mettent en évidence trois modes propres dont le taux de croissance est de partie réelle presque nulle. L'un est de module 10^{-8} et correspond au mode de rotation, deux autres sont complexes conjugués et ont pour taux de croissance $\pm i\omega$ pour $k_z = \mp \tau_w$ à une erreur de 10^{-4} près et correspondent aux modes de translation. La moins bonne précision obtenue pour les modes de translation peut être expliquée par le fait que la boîte sur laquelle sont effectuées les simulations numériques n'est pas infinie, ce qui fait que le problème n'est pas strictement invariant par translation. Cette hypothèse apparaît d'autant plus réaliste que les calculs de spectres effectués sur des boîtes de tailles différentes mettent en évidence une augmentation sensible de la précision obtenue quand la boîte est plus grande. Une interpolation exponentielle des résultats obtenus met en évidence que le taux de croissance des modes de translation obtenu pour une boîte de taille infinie serait égal à $\pm i\omega$ avec une erreur de l'ordre de 10^{-6} .

Chapitre 4

Analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales non twistés

Dans ce chapitre, je présente les résultats numériques obtenus sur la dynamique des filaments de spirales non twistés. Cette étude a consisté d'une part en une analyse de stabilité linéaire des filaments d'ondes spirales en rotation uniforme, d'autre part en une étude des états restabilisés qui apparaissent quand les filaments droits sont instables.

Dans une première section, je présente le comportement des ondes spirales bidimensionnelle pour ce domaine d'étude. Ensuite, je présente quelques résultats analytiques permettant de lier le comportement des ondes spirales bidimensionnelles en présence d'un champ électrique à la stabilité du filament de spirales. Enfin, je présente les résultats de l'analyse de stabilité linéaire effectuée numériquement. Dans le chapitre suivant, je décris l'évolution du filament de spirale et les états restabilisés (s'ils existent) observés quand les filaments de spirales sont instables.

4.1 Panorama bidimensionnel :

L'étude présentée ici a été faite en utilisant le modèle de Barkley (voir section 3.1) qui fait intervenir trois paramètres : a , b , ϵ . Je me suis limité à faire varier un seul des trois paramètres : a , les deux autres étant fixés. Ce choix se justifie par le fait qu'il permet d'observer une plus grande variété de comportement d'ondes spirales qu'en faisant varier b et par le fait qu'il permet de garder le pas de discrétisation spatiale constant, ce qui serait impossible en faisant varier ϵ . Quelques simulations numériques ont été effectuées pour

d'autres valeurs de b et de ϵ afin de vérifier que les résultats obtenus ne dépendent pas de la valeur de b choisie.

Pour les valeurs de b et ϵ considérées ($b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$), la nature de l'onde observée à deux dimensions dépend de a . Les différents comportements de l'onde peuvent se résumer ainsi :

- $a < 0.36$: propagation de doigts d'excitation en translation uniforme.
- $0.36 < a < 0.494$: propagation d'onde spirales en rotation uniforme. Le rayon de rotation du bout de la spirale est du même ordre de grandeur que la largeur de la région excitée.
- $0.494 < a < 0.57$: propagation d'onde spirales méandrant, les *pétales* du méandre sont dirigés vers l'extérieur
- $a = 0.57$: propagation d'une onde spirale en rotation uniforme dans un repère en translation uniforme.
- $0.57 < a < 0.615$: propagation d'onde spirales méandrant, les *pétales* du méandre sont dirigés vers l'intérieur.
- $0.615 < a < 1.0$: propagation d'onde spirales en rotation uniforme. Le rayon de rotation du bout de la spirale est petit devant la largeur de la région excitée.

4.2 Prédictions théoriques :

4.2.1 Comportement des modes à petite longueur d'onde :

Je présente ici une relation liant le comportement des branches de translation, de méandre et de rotation à grande longueur d'onde aux modes propres à gauche et droite de l'opérateur $\mathcal{L}_{k_z=0}$. Cette relation est le résultat du calcul perturbatif suivant.

Soit (u_1, v_1) , un mode propre de $\mathcal{L}_{k_z=0}$ auquel est associée la valeur propre, non dégénérée, σ_1 . Alors pour k_z faible, on s'attend à ce qu'un mode propre de \mathcal{L}_{k_z} soit de la forme $(u_1 + \delta u_1, v_1 + \delta v_1)$ et que la valeur propre associée soit de la forme $\sigma_1 + \delta \sigma_1$, où $(\delta u_1, \delta v_1)$ et $\delta \sigma_1$ sont petits. En écrivant le problème aux valeurs propres (3.15) pour $(u_1 + \delta u_1, v_1 + \delta v_1)$ et en utilisant le fait que (u_1, v_1) est mode propre de $\mathcal{L}_{k_z=0}$ on obtient à l'ordre dominant :

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} + \delta \sigma_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{k_z=0} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_z^2 u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) multipliée par le mode propre à gauche de $\mathcal{L}_{k_z=0}$ associé à la valeur propre σ_1 donne alors :

$$\delta \sigma_1 = -k_z^2 \frac{(\tilde{u}_1 \cdot u_1)}{(\tilde{u}_1 \cdot u_1) + (\tilde{v}_1 \cdot v_1)} \quad (4.2)$$

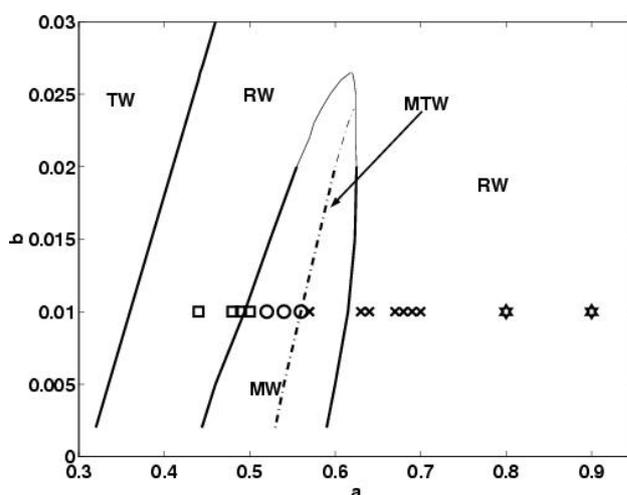


FIG. 4.1 – Diagramme de phase bidimensionnel du modèle de Barkley pour $\epsilon = 0.025$. Les lignes de transition sont indiquées par des traits pleins (gras ou fins). La région où on observe des doigts en translation uniforme est notée **TW**, la région où on observe des ondes spirales en rotation uniforme est notée **RW**, la région où les spirales méandrent est notée **MW**, la ligne mixte désignée par **MTW** correspond au régime de paramètre où l'onde spirale est en rotation dans un référentiel en translation uniforme. Les traits plus fins utilisés pour délimiter les lignes de transition indiquent que leur position dans le plan n'a pas été déterminée précisément

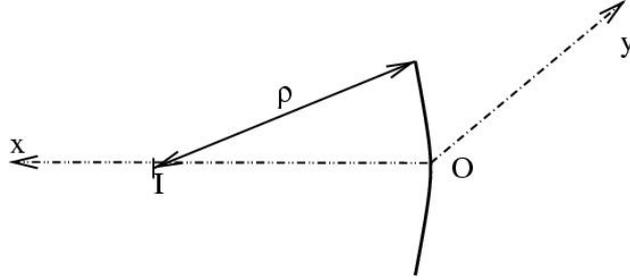


FIG. 4.2 – Repère utilisé pour l'établissement de l'équation (4.5). Le filament moyen est le trait gras, I est le centre de courbure du filament et ρ , son rayon de courbure.

Cette relation est valable pour tous les modes propres de \mathcal{L}_{k_z} , et est particulièrement intéressante dans le cas des modes de translation ainsi que le montre la section suivante.

4.2.2 Dérive en présence d'un champ électrique et stabilité des modes de translation :

4.2.2.1 Lien entre la dérive en champ d'une spirale et le comportement d'un filament de spirale courbé :

Soit un milieu excitable dans lequel le propagateur est soumis à un champ électrique \vec{E} dirigé suivant \vec{e}_x et supposé faible, les équations (2.1) deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \Delta u - E \partial_x u \\ \partial_t v &= g(u, v) \end{cases} \quad (4.3)$$

On sait que la solution de cette équation est une spirale en rotation dont le centre de de rotation se déplace à une vitesse constante [48, 65] proportionnelle¹ au champ E . On note dans la suite les coefficients de proportionnalités α_{\parallel} et α_{\perp} :

$$(v_x, v_y) = (\alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}) E. \quad (4.4)$$

Maintenant, considérons, un filament de spirale, uniformément courbé de rayon de courbure ρ . On peut *a priori* supposer que dans chaque plan perpendiculaire au filament, on observe une onde spirale en rotation et que cette onde est indépendante du plan considéré (c'est à dire de son abscisse curviligne le long du filament). Alors, en se plaçant dans le repère Oxy ,

¹Expérimentalement, ce résultat a été observé dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky [70, 74]

dont l'axe Ox est la normale principale au filament dirigée vers le centre de courbure et dont l'origine O est située sur le filament (voir figure 4.2), (2.1) devient pour $x < \rho$:

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \Delta_{2D} u - \frac{1}{\rho-x} \partial_x u \\ \partial_t v &= g(u, v) \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans le cas d'un filament faiblement courbé, il est légitime de considérer que dans la région du bout de la spirale, $\rho \gg x$. Alors, à l'ordre zéro en x/ρ , cette équation devient :

$$\begin{cases} \partial_t u &= \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \Delta u - \frac{1}{\rho} \partial_x u \\ \partial_t v &= g(u, v) \end{cases} \quad (4.6)$$

On retrouve la forme de (4.3). Il vient alors, en admettant que la dynamique de l'onde est gouvernée par celle du bout de la spirale, que si une spirale en présence d'un champ faible dérive dans le même sens que le champ, le filament va tendre à s'allonger. De façon similaire, si on considère un filament droit qui est localement perturbé, on peut s'attendre à ce que la perturbation s'amplifie. Donc dans ce cas on peut s'attendre à ce que le filament soit instable.

4.2.2.2 Dérive en champ d'une onde spirale en rotation uniforme :

La relation entre le comportement d'un filament faiblement courbé et la dérive en champ d'une onde spirale peut être appliquée quantitativement aux modes de translation dans le cas d'une spirale en rotation uniforme. En effet dans ce cas, il existe une relation entre la vitesse de dérive de l'onde spirale et le comportement des branches de translation pour les grandes longueurs d'onde (équation (4.2)) :

$$\sigma_t = i\omega - (\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp})k_z^2 + O(k_z^4). \quad (4.7)$$

Dans la suite de cette section, j'établis cette relation.

A cette fin, je réécris l'équation (4.3) dans un référentiel tournant en translation uniforme dans le laboratoire. Puis, en utilisant la même méthode que [45], je donne une condition sur la vitesse de translation pour que la solution de l'équation obtenue soit proche de la solution stationnaire dans le cas où le champ est nul.

Dans un référentiel tournant à la pulsation ω , le terme $E\partial_x u$ devient :

$$\begin{aligned} -E\partial_x u &= -E(\cos(\phi + \omega t)\partial_r u - \frac{1}{r}\sin(\phi + \omega t)\partial_{\phi} u) \\ &= -\frac{E}{2}(e^{i(\omega t + \phi)}(\partial_r + i\frac{1}{r}\partial_{\phi})u + c.c) \end{aligned} \quad (4.8)$$

**CHAPITRE 4. ANALYSE DE STABILITÉ LINÉAIRE DES
FILAMENTS DE SPIRALES NON TWISTÉS**

48

Et donc (4.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u - \omega \partial_\phi u - \Delta u - \frac{1}{\epsilon} f(u, v) &= -\frac{E}{2} (e^{i(\omega t + \phi)} (\partial_r + i \frac{1}{r} \partial_\phi) u + c.c) \\ \partial_t v - \omega \partial_\phi v - g(u, v) &= 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Si on se place dans un référentiel tournant en translation uniforme, à la vitesse (\dot{x}_0, \dot{y}_0) , le terme ∂_t obtenu dans le référentiel tournant immobile est remplacé par :

$$\partial_t - \dot{x}_0 \partial_x - \dot{y}_0 \partial_y = \partial_t - \frac{1}{2} ((\dot{x}_0 - i \dot{y}_0) e^{i(\omega t + \phi) t} (\partial_r + i \frac{1}{r} \partial_\phi) + c.c.) \quad (4.10)$$

Donc dans le référentiel en translation l'équation (4.9) devient :

$$\begin{cases} \partial_t u &= (\frac{1}{2} ((\dot{x}_0 - i \dot{y}_0) e^{i(\omega t + \phi) t} (\partial_r + i \frac{1}{r} \partial_\phi) + c.c.)) u + \\ &+ \omega \partial_\phi u + \Delta u + \frac{1}{\epsilon} f(u, v) - \\ &- \frac{E}{2} (e^{i(\omega t + \phi)} (\partial_r + i \frac{1}{r} \partial_\phi) u + c.c) \\ \partial_t v &= \frac{1}{2} ((\dot{x}_0 - i \dot{y}_0) e^{i(\omega t + \phi) t} (\partial_r + i \frac{1}{r} \partial_\phi) + c.c.)) v + \\ &+ \omega \partial_\phi v + g(u, v) \end{cases} \quad (4.11)$$

Ainsi, on a obtenu la forme de l'équation (2.1) dans un référentiel tournant en translation uniforme. On cherche maintenant à savoir à quelle condition on observe dans ce référentiel une spirale en rotation, c'est à dire à quelle condition sur (\dot{x}_0, \dot{y}_0) , la solution de (4.11) est proche d'une spirale en rotation uniforme à la pulsation ω . On écrit donc que la solution de (4.11) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(r, \phi) \\ v_0(r, \phi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta u(r, \phi, t) \\ \delta v(r, \phi, t) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

où (u_0, v_0) est la solution du problème stationnaire et où $(\delta u, \delta v)$ est du même ordre que E . Au premier ordre, l'équation (4.11) donne :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}_0 - i \dot{y}_0}{2} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} - \frac{E}{2} \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix} + c.c., \quad (4.13)$$

où, (u_t, v_t) est le mode propre de translation de \mathcal{L} associé à la valeur propre $i\omega$ (voir équation (B.12)).

Cette équation peut être multipliée à gauche par le mode propre à gauche de \mathcal{L} associé à la valeur propre $i\omega$, noté $(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t)$. Alors, comme ∂_t est auto

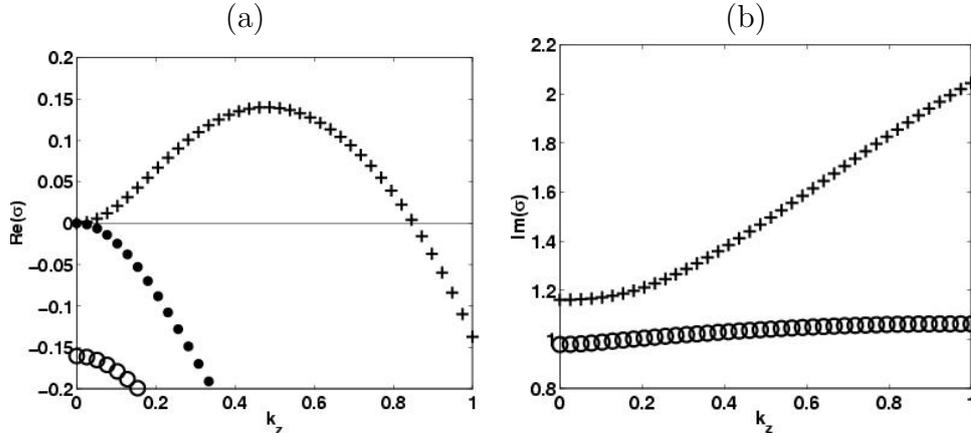


FIG. 4.3 – Parties réelles(a) et imaginaires(b) des taux de croissance des branches de rotation \bullet , translation $+$ et méandre o pour une spirale en rotation uniforme à grand rayon de rotation ($a = 0.44$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$). Les modes de translation sont linéairement instables pour des petites valeurs de k_z : $k_z \in [0, 0.84]$.

adjoint pour le produit scalaire considéré², comme $(\partial_t - \mathcal{L})(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t) = 0$, on obtient :

$$\dot{x}_0 - i\dot{y}_0 = E \frac{(\tilde{u}_t, u_t)}{(\tilde{u}_t, u_t) + (\tilde{v}_t, v_t)}. \quad (4.14)$$

On voit alors que pour de faibles valeurs de E , la vitesse de dérive est proportionnelle à E et vaut $(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (\alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp})E$, où :

$$\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp} = \frac{(\tilde{u}_t, u_t)}{(\tilde{u}_t, u_t) + (\tilde{v}_t, v_t)}. \quad (4.15)$$

Cette relation, comparée avec la relation (4.2) appliquée aux modes de translation montre que la courbure des branches de translation au voisinage de $k_z = 0$ peut être déterminée en étudiant la dérive de la spirale dans un faible champ électrique. On a pour k_z proche de 0 :

$$\sigma_t = i\omega - (\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp})k_z^2 + O(k_z^4) \quad (4.16)$$

En particulier, cette relation montre que si la spirale dérive dans le sens opposé au champ, alors pour des perturbations de grandes longueurs d'ondes les modes de translation seront linéairement instables.

²Le produit scalaire, $(u, v) = \int \int u^* v dx dy$, ne fait pas intervenir d'intégration temporelle.

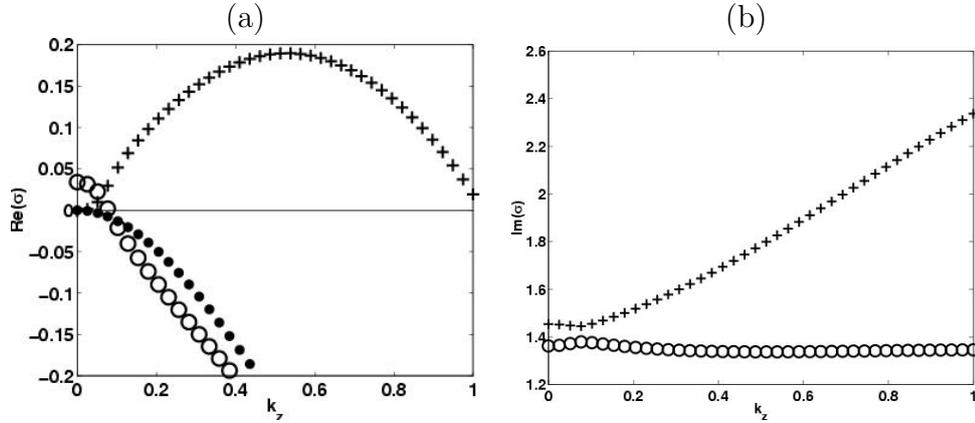


FIG. 4.4 – Parties réelles(a) et imaginaires(b) des taux de croissance des branches de rotation ●,translation + et méandre o pour une spirale en rotation uniforme à grand rayon de rotation ($a = 0.5$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$). Les modes de méandre sont instables à $k_z = 0$ et sont restabilisés à petit k_z . Les modes de translation sont linéairement instables pour des petites valeurs de k_z : $k_z \in [0.1.03]$.

4.3 Analyse de stabilité linéaire :

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire des solutions stationnaires du système d'équations aux dérivées partielles (3.11) montrent que, selon la valeur de a , trois types de comportements des branches de rotation, de translation et de méandre se dégagent. Dans un premier cas, les modes de translation sont instables pour des petites valeurs de k_z alors que les modes de méandre (stables ou instables à $k_z = 0$) se restabilisent, dans un second le scénario inverse est observé et enfin on observe que les modes de translation et les modes de méandre se restabilisent pour de petites valeurs de k_z .

Dans tous les cas, la branche de rotation présente une courbure négative en $k_z = 0$ et garde toujours une forme parabolique. Certains résultats présentés ont été obtenus en effectuant l'analyse de stabilité linéaire de solutions de l'équation des ondes spirales en rotation uniforme (3.11) qui sont instables vis à vis du méandre.

4.3.1 Modes de translation instables, modes de méandre se restabilisant

Cette situation est observée au voisinage($a \in [0.36, 0.57 \pm 0.005]$) de la limite de propagation des ondes spirales bidimensionnelles. Dans ce cas,

on observe pour de petites valeurs de k_z que les branches de translation deviennent instables et que leur partie réelle (le taux de croissance) présente une courbure positive en $k_z = 0$. Par contre, la partie réelle des branches de méandre présente une courbure négative en $k_z = 0$.

Pour de plus grandes valeurs de k_z on observe alors deux scénarios distincts.

Dans un premier cas, le taux de croissance des modes de méandre continue de décroître alors que le taux de croissance des modes de translation passe par un maximum puis décroît jusqu'à ce qu'ils deviennent stables pour une valeur finie de k_z . Ce scénario est toujours celui qui est observé dans le cas où les modes de méandre sont stables à $k_z = 0$ (voir figure (4.3)). Dans le cas où les modes de méandre sont instables, ce scénario perdure pour $a \in [0.49, 0.51]$ (voir figure(4.4)).

Dans un second cas, on observe que les modes de translation atteignent leur maximum pour une valeur de $k_z = k_{z1}$ très proche de zéro (comparé à la valeur de k_z pour laquelle le maximum est obtenu dans le cas précédent) alors que les modes de méandre atteignent un minimum local en k_{z1} puis voient leur taux de croissance augmenter. Ce scénario apparaît quand les branches de translation et les branches de méandre sont très proches l'une de l'autre dans le plan complexe et semble donc provenir d'un phénomène d'hybridation des modes propres ainsi que le montre la figure (4.5).

4.3.2 Modes de translation stables et modes de méandre se déstabilisant :

Pour $a \in [0.57, 0.79]$, on observe que les modes de translation ont une courbure négative en $k_z = 0$ alors que les modes de méandre présentent une courbure positive en $k_z = 0$. Dans ce cas, le taux de croissance des modes de translation est toujours une fonction décroissante de k_z alors que le taux de croissance des modes de méandre atteint un maximum pour une valeur finie de k_z puis décroît. Alors, on observe trois cas qui dépendent de la position des paramètres par rapport à la ligne de méandre.

Quand la spirale bidimensionnelle est instable vis à vis du méandre (figure (4.6)), la branche de méandre est instable pour $k_z \in [0, k_{zmax}]$. Quand on est suffisamment proche de la ligne de méandre ($a \in [0.616, 0.684]$), le mode de méandre est instable pour un intervalle fini de longueurs d'ondes $[k_{zmin} \neq 0, k_{zmax}]$.

Enfin au delà d'une valeur critique de a ($a_c = .684$), la branche de méandre est toujours linéairement stable.

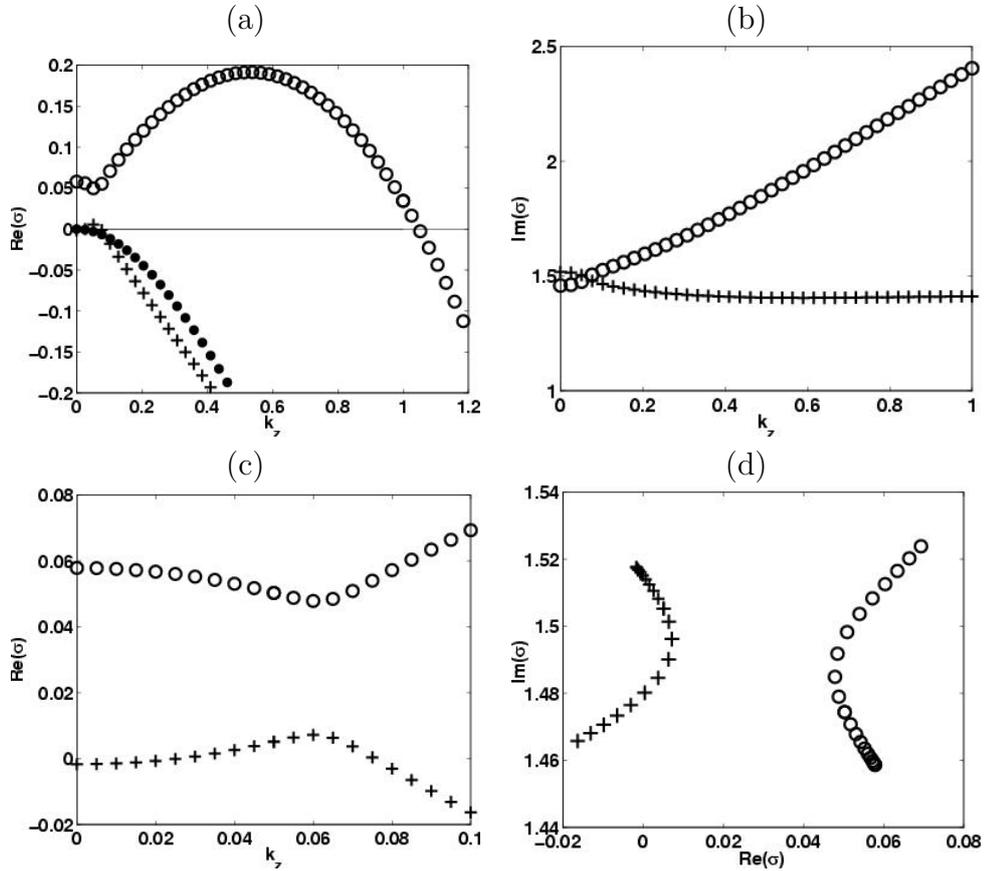


FIG. 4.5 – Parties réelles (a) et imaginaires (b) des taux de croissance des branches de translation (+), méandre (o) et rotation (•) pour $a = 0.52$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. Pour les mêmes valeurs des paramètres, (c) agrandissement de (a) au voisinage de l'origine. On voit que la courbure des modes de translation est positive au voisinage de l'origine alors que celle des modes de méandre est négative. Par contre pour de plus grandes valeurs de k_z on observe que les modes de méandre se déstabilisent alors que les modes de translation se restabilisent. La figure (d) qui représente les courbes $\sigma_t(k_z)$ et $\sigma_m(k_z)$ dans le plan complexe pour des valeurs de k_z proche de zéro indique qu'il s'agit d'un phénomène d'hybridation des modes propres de l'opérateur \mathcal{L}_{k_z}

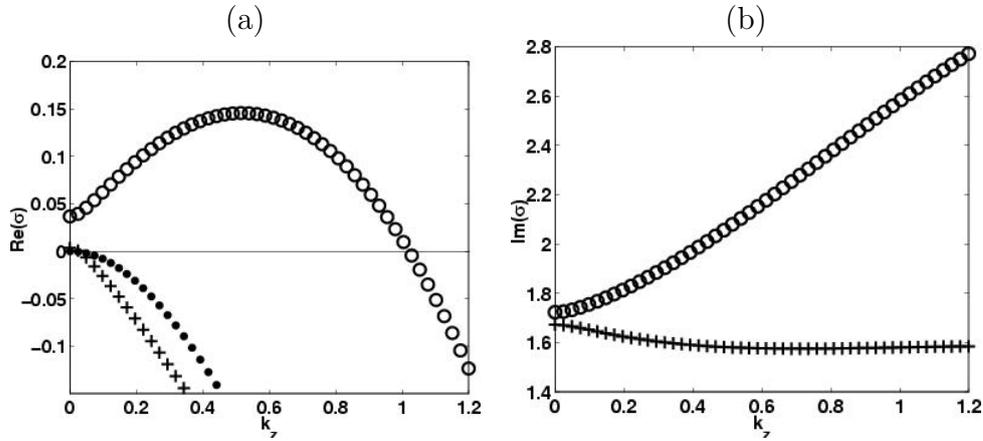


FIG. 4.6 – Parties réelles(a) et imaginaires(b) des taux de croissance des branches de rotation (●), translation (+) et méandre (○) pour une spirale en rotation uniforme à grand rayon de rotation ($a = 0.59$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$). Les modes de méandre sont instables stables à $k_z = 0$ et leur taux de croissance est croissant pour des petites valeurs de k_z et ils se restabilisent à grand k_z . Les modes de translation sont restabilisés à petit k_z .

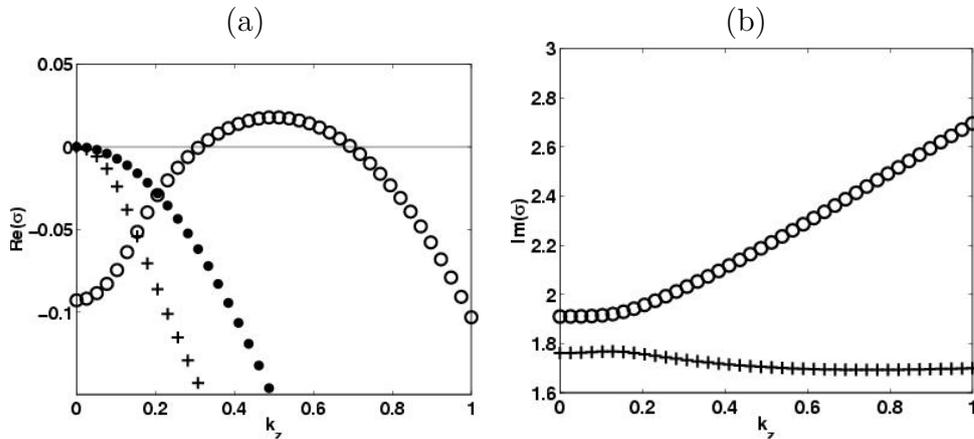


FIG. 4.7 – Parties réelles(a) et imaginaires(b) des taux de croissance des branches de rotation (●), translation (+) et méandre (○) pour une spirale en rotation uniforme à grand rayon de rotation ($a = 0.67$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$). Les modes de méandre sont stables à $k_z = 0$ et sont linéairement instables pour $k_z \in [0.31, 0.69]$ Les modes de translation sont restabilisés à petit k_z .

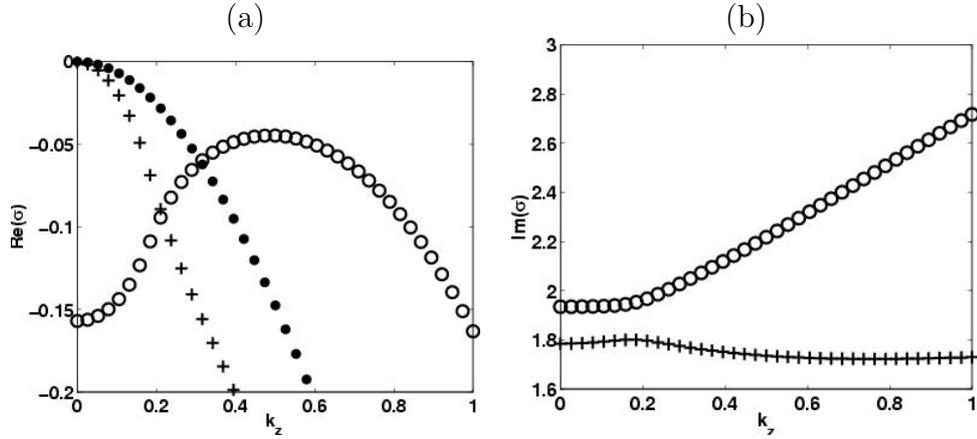


FIG. 4.8 – Parties réelles(a) et imaginaires(b) des taux de croissance des branches de rotation (\bullet), translation (+) et méandre (o) pour une spirale en rotation uniforme à grand rayon de rotation ($a = 0.7$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$). Les modes de méandre sont stables à $k_z = 0$ et, bien que leur taux de croissance soit croissant pour des petites valeurs de k_z , sont linéairement stables pour tout nombre d’onde. Les modes de translation sont restabilisés à petit k_z .

4.3.3 Modes de translation stables et modes de méandre se restabilisant :

Cette situation où la courbure des modes de méandre et des modes de translation en $k_z = 0$ est négative n’est observée que dans le cas des ondes spirales de très petit rayon situées loin de la ligne de méandre. Dans ce cas, les modes de translation et les modes de méandre sont toujours linéairement stables. Un exemple de spectres obtenus dans ce cas est présenté figure (4.9).

4.4 Comparaison avec les résultats obtenus par la dérive dans un champ électrique :

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus numériquement avec les courbures prédites en utilisant (4.16) et le taux de dérive d’une onde spirale soumise à un champ électrique constant de faible amplitude. Les résultats de cette comparaison sont présentés dans le tableau (4.1). Les données obtenues montrent un bon accord entre les courbures des modes de méandre et la vitesse de la dérive en champ. Par ailleurs, les résultats obtenus en utilisant directement (4.2) sont aussi en bon accord avec les résultats de l’analyse de

4.4. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS OBTENUS PAR LA DÉRIVE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE : 55

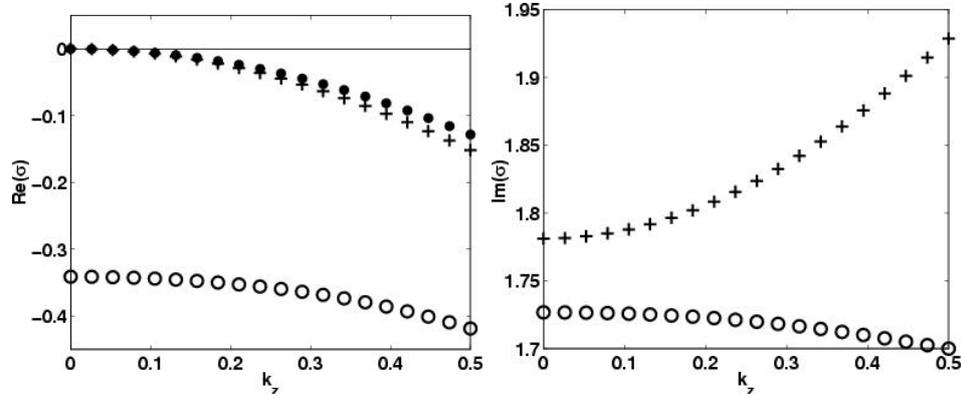


FIG. 4.9 – Parties réelles(gauche) et imaginaires(droite) des taux de croissance des branches de rotation \bullet , translation $+$ et méandre o pour une spirale en rotation uniforme à grand rayon de rotation ($a = 0.9$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$). Les modes de méandre sont stables à $k_z = 0$ et leur taux de croissance décroît avec k_z . Il en va de même pour les modes de translation

a	ω_1	a	b	$Re(\sigma_m(0))$	$Im(\sigma_m(0))$	c	d	α_{\parallel}	α_{\perp}
0.44	1.161	1.9	0.82	-0.161	0.980	-1.6	0.78	-1.97	0.84
0.48	1.377	3.2	0.44	-0.007	1.254	-3.7	1.10	-3.0	0.49
0.66	1.756	-2.41	0.75	-0.071	1.89	1.89	0.33	2.44	0.77
0.7	1.784	-1.63	0.83	-0.157	1.94	1.04	0.21	1.62	0.83
0.8	1.805	-0.87	0.70	-0.332	1.84	0.08	-0.06	0.854	0.71
0.9	1.769	-0.65	0.61	-0.341	1.72	-0.25	0.089	0.66	0.61

TAB. 4.1 – Les modes de translation au voisinage de $kz = 0$ se comportent comme $i\omega_1 + (a + ib)k_z^2$ et les modes de méandre comme $\sigma_m(0) + (c + id)k_z^2$. La spirale bidimensionnelle quand elle est soumise à un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_x$ dérive avec une vitesse $E(\alpha_{\parallel}\vec{e}_x + \alpha_{\perp}\vec{e}_y)$. On constate que la prédiction (4.16) du comportement des modes de translation est bien approchée. Par contre le lien entre le comportement des modes de méandre à petit k_z et la dérive en champ prédit par Aranson *et al.*[4] n'est pas vérifié, même qualitativement.

stabilité linéaire.

D'un point de vue plus qualitatif, on constate un accord entre le signe de la courbure des modes de translation de l'onde spirale stationnaire en rotation uniforme à l'origine et le sens de dérive de la spirale méandrant soumise à un champ électrique. Comme l'analyse de stabilité linéaire est faite sur les ondes spirales en rotation uniforme alors que le calcul de la dérive en champ se fait en soumettant l'onde spirale méandrant à un champ électrique, il n'y a, *a priori* aucune raison à cet accord qualitatif. Cependant, près de la ligne des **MTW**, le méandre peut être vu comme la superposition du mouvement de rotation uniforme de la spirale à un mouvement de translation circulaire du centre de rotation de l'onde. Dans ce cas, on pourrait s'attendre à ce que le mouvement induit par le champ \vec{E} se superpose au mouvement induit par le méandre. On s'attendrait alors à un accord quantitatif significatif entre le taux de dérive des ondes spirales méandrant et la courbure des branches de translation.

Des comparaisons quantitatives ont été effectuées et ont montré un désaccord très important entre le mouvement de translation induit par le champ et la courbure des branches de translation. En particulier le taux de dérive dans la direction transverse au champ était d'un ordre de grandeur plus petit que la courbure des parties imaginaires des branches de translation en $k_z = 0$.

4.4.1 Généricité des résultats :

Afin de vérifier que les résultats obtenus par l'analyse de stabilité linéaire (en particulier l'inversion de la courbure des modes de méandre et de translation en $k_z = 0$ quand $\omega_m(k_z = 0) = \omega_1$) ne sont pas dus au choix des paramètres, j'ai effectués quelques calculs des spectres en fonction de k_z pour d'autres valeurs de b et la même valeur de ϵ . J'ai alors pu constater que l'inversion du signe de la courbure des modes de méandre et de translation se produisait toujours quand $\omega_m(k_z = 0) \approx \omega_1$.

Chapitre 5

Etude des instabilités des filaments de spirales en rotation uniforme :

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire mettent en évidence deux situations où les filaments de spirales en rotation uniforme sont instables.

Dans le premier cas présenté ici, les modes de translation présentent une courbure négative en $k_z = 0$. Alors les simulations numériques effectuées montrent que le filament droit de spirales est instable et la bifurcation observée n'aboutit pas à un état restabilisé. Les conditions aux limites imposées au système ne jouent aucun rôle sur l'évolution du filament¹.

Dans le second cas, le mode de méandre est instable pour un intervalle de nombres d'onde fini. On observe alors que le filament de spirale est instable. La bifurcation aboutit à un état restabilisé et est, comme la bifurcation de méandre bidimensionnel, une bifurcation de Hopf. Dans ce cas, on observe que les conditions aux limites influent sur l'état final observé.

5.1 Instabilité de courbure des spirales en rotation uniforme :

Dans le cas où le mode de translation est instable pour $k_z \in [0, k_{zmax}]$, on constate que si l'on effectue des simulations numériques dans une boîte de taille supérieure à $2\pi/k_{zmax}$, le filament droit est instable.

¹Cette affirmation est vraie modulo le fait qu'une boîte de taille H au bords de laquelle on impose des conditions de type gradient nul permet à des perturbations de longueur d'onde $2H$ de se développer alors que si on impose des conditions périodiques, la longueur d'onde maximale qui peut se développer est H .

**CHAPITRE 5. ETUDE DES INSTABILITÉS DES
58 FILAMENTS DE SPIRALES EN ROTATION UNIFORME :**

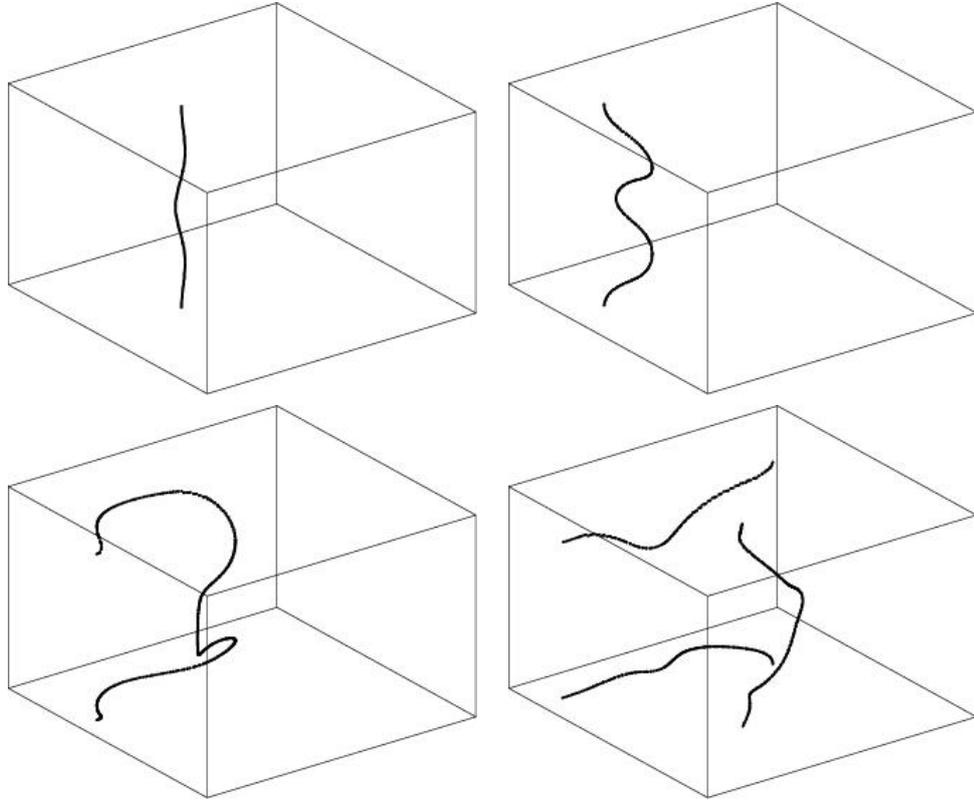


FIG. 5.1 – Filaments instantanées de spirales observés à des intervalles de temps réguliers au cours d’une simulation numérique. Les paramètres du milieu sont $a = 0.44$, $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$, ce qui correspond au spectre représenté figure (4.3). La taille de la boîte est $128 \times 128 \times 120$, le pas d’espace dx est égal à 0.2, des conditions au bords de type gradient nul sont utilisées sur les parois latérales alors que des conditions au bords périodiques sont utilisées en haut et en bas de la boîte. Un résultat relativement similaire serait obtenu dans une boîte deux fois moins haute aux parois de laquelle des conditions aux limites de gradient nul sont imposées.

On observe alors toujours le même scénario, déjà décrit par Biktashev *et al.*[14] : une petite perturbation du filament droit se courbe de plus en plus, s’allonge et grandit jusqu’à atteindre les parois latérales de la boîte de simulation numérique. Il se divise alors en deux filaments qui grandissent² et suivent la même évolution dans le temps que le filament initial. Aucune restauration n’est observée et l’état final observé est désordonné (figure(5.1)).

²Si l’un d’entre eux est trop petit, il disparaît

5.2 Instabilité de méandre tridimensionnel :

Dans cette section, je présente les résultats d'une étude systématique de l'instabilité de méandre tridimensionnel. Cette étude a consisté en deux série de simulations numériques directes des milieux excitable. L'une a été faite, pour quelques valeurs de l'excitabilité du milieu, dans des boîtes de simulation d'extension verticale variable afin de faire varier le nombre d'onde du mode instable. L'autre série a été effectuée et en faisant varier l'excitabilité du milieu dans des boites de simulation de taille constante. Ces deux séries de simulations ont permis de déterminer la nature de la bifurcation. L'influence des conditions aux limites imposées aux parois supérieures et inférieures de la boîte de simulation a aussi été étudiée : les simulations ont été effectuées en utilisant soit des conditions aux limites périodiques soit des conditions aux limites de type gradient nul.

5.2.1 Description du régime transitoire

L'état initial utilisé au cours des simulations consistait en des spirales bi-dimensionnelles mises les unes au dessus des autres et légèrement perturbées. On a observé que la nature de la perturbation utilisée avait une influence sur le régime transitoire qui amenait à l'état stationnaire final. J'ai utilisé essentiellement trois types de conditions initiales qui donnaient lieu à trois types distincts de régimes transitoires dans le cas où des conditions aux limites périodiques étaient utilisées :

1. Le premier, de la forme $u_{in}(x, y, z) = u_{2D}(x, y)(1 + \alpha \cos(k_z z))$, $v_{in}(x, y, z) = v_{2D}(x, y)(1 + \alpha \sin(k_z z))$, où α est de l'ordre de 10^{-2} résulte en un filament instantané initial en forme d'hélice de faible amplitude et de nombre d'onde k_z . Dans ce cas, on observe que l'hélice grandit à vitesse uniforme jusqu'à atteindre un état restabilisé où le filament instantané a la forme d'une hélice.
2. Le deuxième, de la forme $u_{in}(x, y, z) = u_{2D}(x, y)(1 + \alpha \cos(k_z z))$, $v_{in}(x, y, z) = v_{2D}(x, y)(1 + \alpha \cos(k_z z))$ résulte en un filament initial dont la paramétrisation est : $x(z) = x_1 \cos(k_z z)$, $y(z) = y_1 \cos(k_z z)$. Dans ce cas on observe que le filament instantané, dans un premier temps, croît en gardant sa forme en zig-zag jusqu'à ce qu'il atteigne un état apparemment stationnaire. Cet état stationnaire se déstabilise et le filament instantané restabilisé final est une hélice de même nombre d'onde que le filament en forme de zig-zag.
3. Le dernier type de condition initiale est de la forme $u_{in}(x, y, z) = u_{2D}(x, y)(1 + \alpha e^{(z-z_0)^2/L^2})$, $v_{in}(x, y, z) = v_{2D}(x, y)(1 + \beta e^{(z-z_0)^2/L^2})$.

CHAPITRE 5. ETUDE DES INSTABILITÉS DES 60 FILAMENTS DE SPIRALES EN ROTATION UNIFORME :

Dans le cas où $\alpha = \beta$, le filament instantané initial s'inscrit dans un plan et on observe alors la croissance d'un filament en forme de zig-zag qui après une instabilité secondaire prend la forme d'une hélice. Dans le cas où $\alpha \neq \beta$, le filament instantané ne s'inscrit pas dans un plan et on observe alors la croissance d'un filament hélicoïdal. Dans ces deux cas, le nombre d'onde du filament hélicoïdal final correspond au nombre d'onde du mode le plus instable linéairement qui peut se développer dans la boîte de simulation.

5.2.2 Conditions aux limites périodiques

Dans cette section, je décris l'état final observé quand des conditions aux limites périodiques sont utilisées et je présente les résultats d'une étude systématique de la bifurcation de méandre tridimensionnel.

5.2.3 Description de l'état restabilisé :

Quand on utilise des conditions aux limites périodiques, on observe que le filament instantané prend toujours une forme d'hélice dont le rayon est constant au cours du temps. L'axe de cette hélice est en rotation uniforme autour d'un axe fixe alors que, dans le référentiel du laboratoire, l'hélice est en rotation uniforme à une fréquence incommensurable avec la fréquence de rotation de son axe de symétrie. On constate par ailleurs que le rayon de l'hélice est égal à l'amplitude du méandre du bout de la spirale dans un plan horizontal. Par conséquent c'est un paramètre caractéristique de l'amplitude du méandre tridimensionnel. De façon plus quantitative, on observe que la fréquence de rotation de l'axe de l'hélice est, dans le cas d'un méandre de faible amplitude, très proche de la fréquence de rotation de la spirale stationnaire bidimensionnelle alors que la fréquence de rotation de l'hélice dans le référentiel du laboratoire est proche de la différence entre la partie imaginaire du taux de croissance du mode de méandre dont la longueur d'onde est égale au pas de l'hélice et la fréquence de rotation de la spirale bidimensionnelle stationnaire.

Afin de déterminer la nature de la bifurcation observée j'ai effectué deux études systématiques des états restabilisés. Dans la première, j'ai utilisé une boîte d'extension verticale constante, forçant ainsi le nombre d'onde de du mode instable qui peut se développer, et j'ai fait varier l'excitabilité du milieu via a . Dans la seconde, j'ai maintenu a constant et fait varier le nombre d'onde du mode instable qui peut se développer dans la boîte de simulation en variant l'extension verticale.

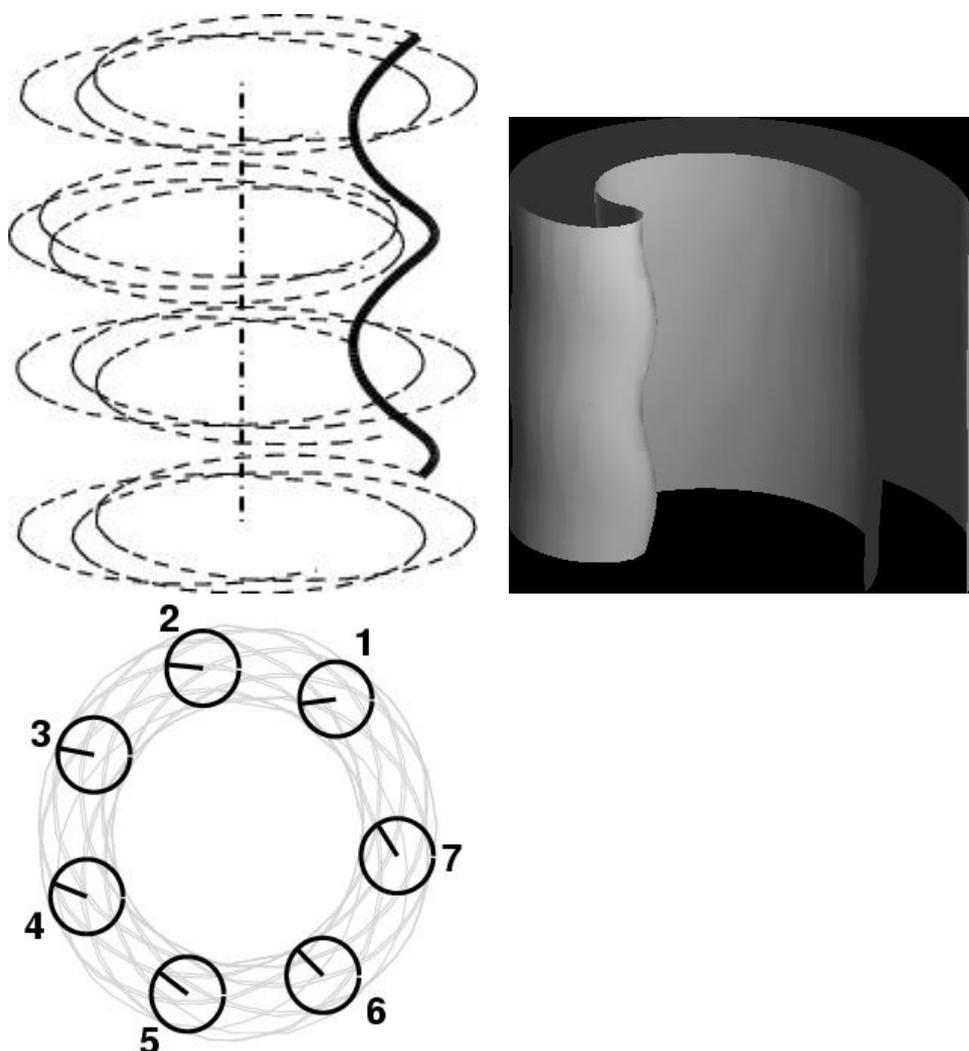


FIG. 5.2 – Etat restabilisé pour $a = 0.684$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$ dans une boîte de simulation de $0.2(128 \times 128 \times 130)$ en utilisant des conditions aux limites périodiques. Haut droite : Trait mixte : axe de symétrie, trait continu épais : filament instantané à un instant donné, traits pointillés : trajectoires du bout de la spirale dans quatre plans également espacés. Bas droite : trait grisé : vue de dessus de la trajectoire du filament instantané dans un plan horizontal, cercles en traits épais : vue de dessus du filament instantané à 7 instants successifs. Le rayon tracé en trait continu épais relie le centre de symétrie du filament instantané à sa trace dans le plan où est tracée la trajectoire du bout de la spirale. Gauche : isosurface $u = 0.5$ de l'état restabilisé.

**CHAPITRE 5. ETUDE DES INSTABILITÉS DES
62 FILAMENTS DE SPIRALES EN ROTATION UNIFORME :**

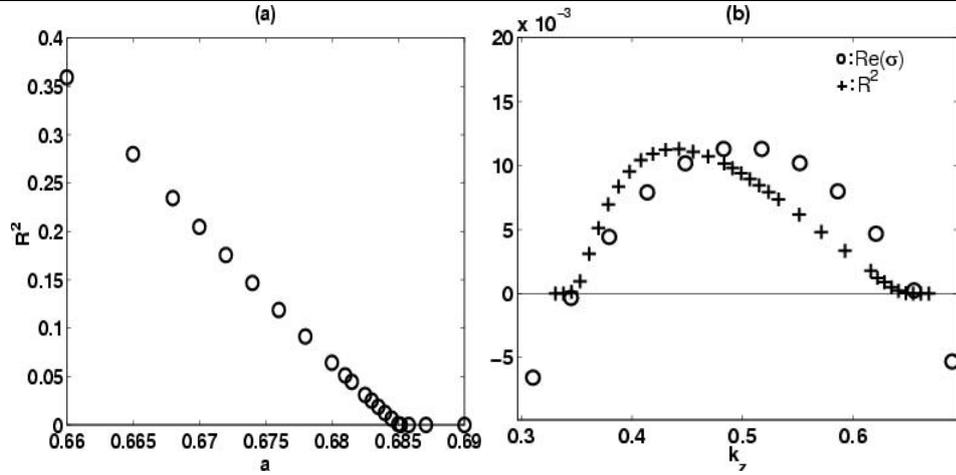


FIG. 5.3 – (a) : Carré du rayon de l’hélice formée par le filament instantané en fonction de l’excitabilité du milieu a pour des simulations numériques effectuées dans une boîte de simulation de taille $0.2(128 \times 128 \times 130)$ (2 longueurs d’onde du mode instable y sont présentes) avec $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. (b) : Pour $a = 0.684$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$: + : Carré du rayon de l’hélice formée par le filament instantané en fonction du nombre d’onde du mode de méandre déstabilisé (cette courbe a été renormalisée pour que le maximum du carré du rayon de l’hélice ait la même valeur que le maximum du taux de croissance de la branche de méandre (o)).

Les résultats obtenus par cette étude étaient en bon accord avec les résultats de l’analyse de stabilité linéaire. En effet, dans la valeur de a critique obtenue par l’analyse de stabilité linéaire en interpolant linéairement les spectres entre deux spectres calculés était de $a_{clin} = 0.684$ alors que la valeur critique de a obtenue par les simulations numériques directes était de $a_{cdir} = 0.685$. De la même façon, pour une valeur de a fixée, l’intervalle de nombres d’onde pour lesquels le filament de spirale est linéairement instable était en bon accord avec l’intervalle $[k_{zmin}, k_{zmax}]$ de nombre d’ondes pour lesquels on observe un état restabilisé où la spirale méandre à trois dimensions.

Une étude de la bifurcation montre qu’à taille de boîte fixée (c’est à dire à k_z fixé), le comportement de l’amplitude du méandre tridimensionnel se comporte au voisinage du seuil a_c comme $\sqrt{|a - a_c|}$. De façon similaire, à a fixé, au voisinage des nombres d’onde critiques minimaux et maximaux l’amplitude du méandre tridimensionnel se comporte respectivement comme $\sqrt{k_z - k_{zmin}}$ et $\sqrt{k_{zmax} - k_z}$. Ces résultats mettent en évidence que la bifurcation de méandre tridimensionnel conserve le caractère de bifurcation de

Hopf de la bifurcation de méandre tridimensionnel.

L'étude à k_z fixé a montré que le comportement de l'amplitude du méandre en $\sqrt{|a - a_c|}$ perdure pour des valeurs relativement grandes de l'écart au seuil (voir figure(5.3)).

Par contre à a fixé la comparaison des taux de croissance et du carré de l'amplitude du méandre montre qu'il y a un décalage entre le maximum du taux de croissance en fonction de k_z et le maximum de l'amplitude en fonction du nombre d'onde (voir figure(5.3)). Ce décalage s'accompagne d'une différence importante entre les pentes $R^2/(k_z - k_{zmin})$ et $R^2/(k_{zmax} - k_z)$ observées aux bornes de l'intervalle de nombre d'ondes où le filament droit est linéairement instable. Ce phénomène, dont l'origine ne peut être attribuée à une dissymétrie du spectre de stabilité linéaire, tend à disparaître pour de faibles valeurs de l'écart au seuil³.

Afin de mieux comprendre ce décalage, et d'écrire une forme normale de la bifurcation, il serait intéressant d'effectuer un étude systématique des valeurs des pentes $R^2/(k_z - k_{zmin})$ en fonction de k_{zmin} et en particulier d'en étudier le comportement pour les petites valeurs de k_{zmin} (en faisant varier a par exemple).

Cette étude, dans le régime de paramètre exploré ici, est impossible. En effet, elle demanderait de considérer des filaments très longs dans un régime de paramètre proche de la ligne de méandre bidimensionnel. Or dans ce cas, les harmoniques du mode de plus grande longueur d'onde pouvant se développer dans la boîte de simulation seraient très instables et se développeraient, empêchant ainsi l'observation de filaments restabilisés de petit nombre d'onde.

5.2.4 Conditions aux limites de type gradient-nul

Dans le cas où des conditions aux limites de type gradient nul sont utilisées, on observe dans chaque plan horizontal un mouvement de méandre classique. L'amplitude de ce mouvement de méandre est dans ce cas, fonction de z et est bien approchée par $|\cos(k_z z)|$. Ainsi dans certains plans horizontaux, le mouvement du bout de la spirale est un mouvement de rotation uniforme classique. Le filament instantané à un instant donné a une forme en zig-zag dont l'axe médian est en rotation uniforme autour d'un point fixé. Le mouvement du filament instantané autour de son axe médian

³Pour $a = 0.684$, on observe que le carré de l'amplitude du méandre tridimensionnel en fonction de k_z a une forme parabolique. Néanmoins une comparaison avec les résultats de l'analyse de stabilité linéaire est impossible car dans ce cas l'intervalle de nombre d'onde où l'onde est linéairement instable et l'intervalle où l'instabilité est observée lors des simulations numériques directes est trop important

**CHAPITRE 5. ETUDE DES INSTABILITÉS DES
64 FILAMENTS DE SPIRALES EN ROTATION UNIFORME :**

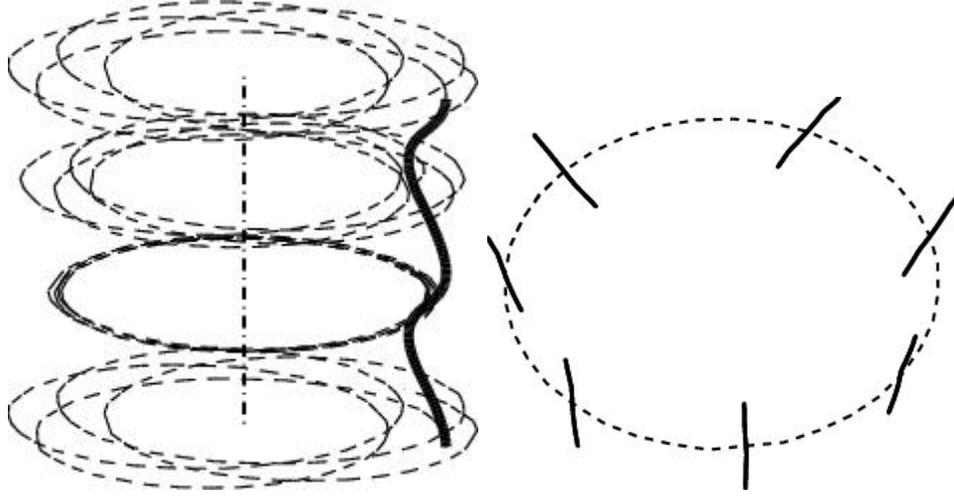


FIG. 5.4 – Pour $a = 0.684$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$ dans une boîte de simulation de taille $0.2(128 \times 128 \times 130)$ en utilisant des conditions aux limites de type gradient nul : gauche : en trait mixte : axe médian du filament instantané, en trait épais : filament instantané en forme de zig-zag, en tirets : trajectoires du bout de l'onde spirale dans quatre plans horizontaux également espacés. On voit que dans l'un des plans, le mouvement de la spirale est un mouvement de rotation uniforme. Droite : en tirets, trajectoire de l'axe du filament instantané vue de dessus, en trait plein, filament instantané vue de dessus à des instant régulièrement espacés en temps.

est un mouvement de rotation uniforme à une pulsation proche de la partie imaginaire du mode de méandre de longueur d'onde le pas du zig zag.

On peut facilement expliquer ce résultat dans le régime faiblement non linéaire. En effet, dans ce régime on peut supposer que l'état final est très bien approché dans le repère en rotation à la pulsation de l'état stationnaire par la somme de la solution stationnaire et d'une petite perturbation qui est colinéaire aux deux modes de méandre instables.

$$\begin{aligned}
 u &= u_o(r, \phi) + Au_1(r, \phi)e^{i(k_z z + \omega_1 t)} + \bar{A}\bar{u}_1(r, \phi)e^{-i(k_z z + \omega_1 t)} + \\
 &+ B\bar{u}_1(r, \phi)e^{i(k_z z - \omega_1 t)} + \bar{B}u_1(r, \phi)e^{-i(k_z z - \omega_1 t)}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 v &= v_o(r, \phi) + Av_1(r, \phi)e^{i(k_z z + \omega_1 t)} + \bar{A}\bar{v}_1(r, \phi)e^{-i(k_z z + \omega_1 t)} + \\
 &+ B\bar{v}_1(r, \phi)e^{i(k_z z - \omega_1 t)} + \bar{B}v_1(r, \phi)e^{-i(k_z z - \omega_1 t)}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

où A et B sont complexes et petits devant 1, (u_1, v_1) est le mode de méandre de l'opérateur \mathcal{L}_{k_z} de longueur d'onde k_z et de valeur propre associée $\sigma_{mr} +$

$i\omega_m$. Cette solution doit satisfaire aux conditions aux limites de type gradient nul ($\partial_z u = 0$) sur les plans $z = 0$ et $z = L = 2\pi/k_z$. On montre facilement que cette condition se traduit par $A = \bar{B}$.

Le filament instantané est l'intersection des deux isosurfaces $u = 0.5$, $v = 0.75v_{th}$. Dans le cas du filament en rotation uniforme, dans le repère tournant, sa position est constante et on la note en coordonnées polaires r_0, ϕ_0 . Dans le cas de l'état final il est alors légitime de supposer que sa position est paramétrée en coordonnées polaires par : $\phi_{tip}(z) = \phi_0 + \delta\phi(z, t)$ et $r_{tip}(z) = r_0 + \delta r(z, t)$ où $\delta\phi$ et δr sont du même ordre de grandeur que A . Ils vérifient alors le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_r u_o \delta r + \partial_\phi u_o \delta \phi + A(u_1 e^{i(k_z z + \omega_1 t)} + u_1 e^{i(-k_z z + \omega_1 t)}) + \\ &+ \bar{A}(\bar{u}_1 e^{-i(k_z z + \omega_1 t)} + \bar{u}_1 e^{i(k_z z - \omega_1 t)}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_r v_o \delta r + \partial_\phi v_o \delta \phi + A(v_1 e^{i(k_z z + \omega_1 t)} + v_1 e^{i(-k_z z + \omega_1 t)}) + \\ &+ \bar{A}(\bar{v}_1 e^{-i(k_z z + \omega_1 t)} + \bar{v}_1 e^{i(k_z z - \omega_1 t)}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

où les valeurs des champs u_0, v_0, u_1 et v_1 ainsi que de leur dérivées sont prises au point de coordonnées ϕ_0, r_0 . Alors en écrivant $A u_1(\phi_0, r_0) = a_u e^{i\phi_u}$ et $A v_1(\phi_0, r_0) = a_v e^{i\phi_v}$ et en résolvant le système linéaire on obtient :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{4}{\partial_r u_o \partial_\phi v_o - \partial_r v_o \partial_\phi u_o} \times \\ &\times (-\partial_\phi v_o a_u \cos(\omega_1 t + \phi_u) + \partial_r v_o a_v \cos(\omega_1 t + \phi_v)) \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{4}{\partial_r u_o \partial_\phi v_o - \partial_r v_o \partial_\phi u_o} \times \\ &\times (\partial_\phi u_o a_u \cos(\omega_1 t + \phi_u) - \partial_r u_o a_v \cos(\omega_1 t + \phi_v)) \cos(k_z z) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Comme a_u et a_v sont du même ordre que A , cette expression conduit à un filament instantané en forme de zig-zag en rotation uniforme dans le repère en rotation avec l'état stationnaire, ce qui est en accord avec les résultats numériques.

5.3 Cas où les spirales bidimensionnelles méandrent :

Dans le cas où les spirales bidimensionnelles méandrent, les résultats de l'analyse de stabilité linéaire ne s'appliquent pas aux filaments droits de spirales car ceux ci ne sont pas l'état stationnaire autour duquel l'analyse de stabilité linéaire a été effectuée. Donc *a priori* on ne peut étudier la dynamique des filaments de spirales qu'à l'aide de simulations numériques directes.

CHAPITRE 5. ETUDE DES INSTABILITÉS DES 66 FILAMENTS DE SPIRALES EN ROTATION UNIFORME :

Cependant, l'analogie entre la dérive en champ et l'instabilité de courbure des filaments de spirales est encore vérifiée dans ce cas. On vérifie en effet que si la spirale (méandrant) dérive dans le même sens que le champ, alors le filament de spirale est instable vis à vis de l'instabilité de courbure et on observe le même scénario que celui décrit section 5.1. On constate par ailleurs que la transition entre les filaments stables et les filaments instables vis à vis de l'instabilité de courbure se passe sur la ligne des MTW (voir figure (4.1)) et correspond au lieu dans l'espace des paramètres où les courbures des modes de translation changent de signe.

Chapitre 6

Filaments de spirales twistés droits :

L'introduction d'une troisième dimension donne un degré de liberté supplémentaire. On peut introduire un déphasage entre les spirales qui constituent le filament de spirales. Ce déphasage est appelé twist et peut être vu comme une torsion du filament de spirales.

Expérimentalement, de telles situations sont observées dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky dans des gels où on a introduit un gradient d'excitabilité entre les différents plans horizontaux qui constituent le milieu[58]. On pense aussi les observer dans les compagnies de *Dictyostelium discoideum* [19].

Dans le cœur, les filaments de spirales twistés apparaîtraient du fait de l'anisotropie tournante des fibres musculaires du cœur[21, 22].

6.1 Détermination de l'état stationnaire dans le modèle de front mince :

On cherche dans cette section à déterminer la forme du front d'onde d'un filament de spirale twisté ainsi que sa vitesse de rotation. En se plaçant dans l'approximation d'interface fine et dans la limite de faible excitabilité je détermine les équations vérifiées par les fronts d'ondes d'un filament de spirales uniformément twisté puis j'en calcule numériquement les solutions stationnaires. Un calcul similaire a été effectué analytiquement par Margerit *et al.*[54] dans un modèle d'interface fine dans la limite de forte excitabilité.



FIG. 6.1 – Image du front d’onde d’un filament de spirale twisté obtenu par une simulation numérique directe.

6.1.1 Vitesse de propagation d’un front courbé :

Dans le cas des filaments de spirales, le front n’est plus une ligne mais une surface. De façon analogue à ce qui a été fait pour les spirales bidimensionnelles, on cherche à déterminer la vitesse de propagation du front. Si les rayons de courbure principaux du front sont égaux et valent ρ , on se place dans le repère dont l’origine est le centre de courbure de la surface en coordonnées sphériques. L’équation (2.1) devient pour la variable u , après le changement de coordonnées $r = \rho + \frac{\xi}{\epsilon}$:

$$-\frac{c}{\epsilon} \partial_{\xi} u = \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \frac{1}{\epsilon} \partial_{\xi\xi} u + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{2}{\rho + \xi\epsilon} \partial_{\xi} u \right) \quad (6.1)$$

Alors dans ce cas la vitesse du front courbé est égale à :

$$c_n = c_0(v) - \epsilon \frac{2}{\rho} \quad (6.2)$$

Dans le cas où les deux rayons de courbure principaux du front ne sont pas égaux, on considère qu’au voisinage du front la valeur du champ u , ne dépend que de la distance du point au front. Alors, on obtient¹ :

$$c_n = c_0(v) - \epsilon(\kappa_1 + \kappa_2), \quad (6.3)$$

où κ_1 et κ_2 sont les deux courbures principales du front.

¹Les calculs sont détaillés dans l’annexe C

6.1.2 Filaments de spirales twistés en rotation uniforme :

De la même façon qu'au chapitre 2, si l'onde est en rotation uniforme autour de l'axe Oz , en utilisant un système de coordonnées cylindriques l'équation suivante est vérifiée en tout point M de la surface :

$$c_n(M) - \omega r \vec{e}_\theta \cdot \vec{n} = 0, \quad (6.4)$$

où \vec{n} est la normale à la surface en M .

Alors en paramétrant la surface d'onde par $\theta(r, z) = \theta(r) + z/a = \theta(r) + \tau_w z$, l'équation (6.4) s'écrit² :

$$\begin{aligned} r\omega &= c_o(v) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 + (r\theta_r)^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 + (r\theta_r)^2} \times \\ &\times \partial_r \left[\frac{r^2 \theta_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 + (r\theta_r)^2}} \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

En considérant les fronts avant et arrière paramétrés respectivement par θ_+ et θ_- , en notant $\psi_\pm = r\partial_r\theta_\pm$ et en utilisant les quantités adimensionnées suivantes : $\rho = \frac{c_o}{\varepsilon}r$, $\Omega = \frac{\varepsilon}{c_o^2}\omega$ et $\alpha = \frac{c_o}{\varepsilon}a$ (6.8) devient pour le front avant :

$$\Gamma_+ \Omega \rho = (\Gamma_+)^{3/2} + \frac{1}{\rho} (\psi_+ + \psi_+^3) + \left(1 + \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^2\right) \psi_+' \quad (6.9)$$

et pour le front arrière :

²La somme des courbures principales d'une surface paramétrée par $\theta(r, z)$ vaut :

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{-1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{r^2 \theta_z}{\sqrt{1 + r^2 \theta_z^2 + r^2 \theta_r^2}} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^2 \theta_r}{\sqrt{1 + r^2 \theta_z^2 + r^2 \theta_r^2}} \right] \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

Dans le cas d'un filament de spirale uniformément twisté, cette formule devient :

$$\kappa_1 + \kappa - 2 = -\frac{1}{r} \partial_r \left[\frac{r^2 \theta_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 + (r\theta_r)^2}} \right] \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_- \Omega \rho &= - \left(1 - \frac{B\epsilon \theta_+ - \theta_-}{c_0^2 \Omega} \right) (\Gamma_-)^{3/2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} (\psi_+ + \psi_-^3) + \left(1 + \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 \right) \psi'_- \end{aligned} \quad (6.10)$$

où

$$\Gamma_{\pm} = 1 + \left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 + \psi_{\pm}^2 \quad (6.11)$$

De la même façon qu'au chapitre 2, on peut, si le rayon de rotation de l'onde spirale est grand devant ϵ (en utilisant les variables adimensionnées, ceci revient à ce que ρ soit grand devant 1), déterminer le comportement de θ_{\pm} au point de raccordement des deux fronts en utilisant le fait qu'en ce point les vecteurs tangents au front d'onde sont dans le plan engendré par \vec{e}_{θ} et \vec{e}_z . Alors, la normale au front d'onde est portée par \vec{e}_r . On obtient donc qu'au point de raccord entre les fronts avant et arrière est $c_n(M) = 0$. Donc après renormalisation des distances on trouve qu'au voisinage du bout de la spirale :

$$\theta_{\pm}(r) = (\rho - \rho_{tip})^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\rho_{tip}(\rho_{tip} + 1)}} (1 + \rho_{tip}^2/a^2). \quad (6.12)$$

Dans le cas où cette condition n'est plus valable, Margerit et Barkley[54] ont effectué un calcul perturbatif similaire à celui fait dans [42, 46, 47] qui permet de déterminer précisément la forme du filament de spirale twisté.

6.1.3 Calcul numérique de la solution :

Ces équations (6.9, 6.10) peuvent être résolues numériquement par une méthode de tir. Dans ce cas, on obtient que le comportement de la pulsation de la spirale à $B\epsilon/c_{v_0}$ constant en fonction du twist est quadratique pour de faibles valeurs du twist et devient linéaire quand le twist est augmenté (voir figure (6.2)). Sur cette figure, on voit que la fréquence de rotation de la spirale augmente de façon sensible quand le twist est augmenté alors que le rayon de rotation diminue de façon sensible.

Il faut alors tenir compte de l'interaction du front avant de l'onde spirale avec le passage précédent du front arrière. Alors en utilisant les équations (2.26, 2.27) pour déterminer les valeurs de l'inhibiteur v sur le front avant et en utilisant la même méthode que dans la section 2.3.2.3 on peut calculer la forme de l'onde spirale twistée. Il vient alors que les comportements de ω et de ρ_{tip} sont modifiés de façon sensible(voir figure (6.3)).

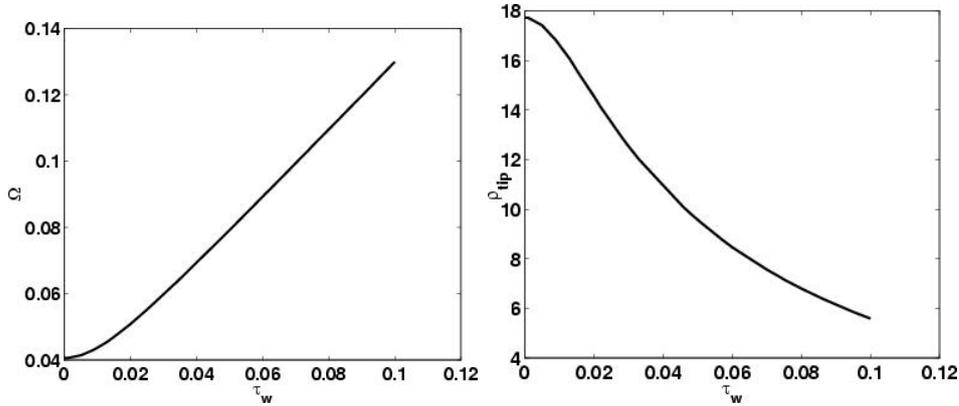


FIG. 6.2 – Pulsation de l'onde spirale twistée Ω (gauche) et rayon de l'onde spirale ρ_{tip} (droite) en fonction du twist τ_w pour une même valeur de l'excitabilité $B = 0.4$. Les valeurs de ρ_{tip} et Ω ont été calculées à l'aide d'une méthode de tir.

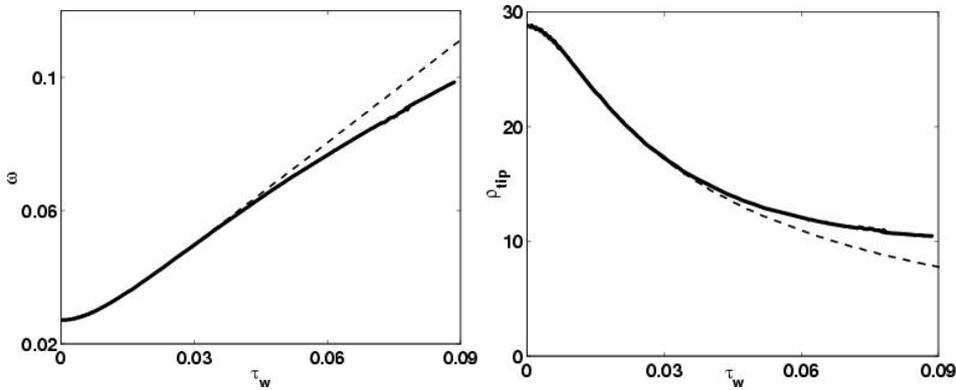


FIG. 6.3 – Pulsation de l'onde spirale twistée Ω (gauche) et rayon de l'onde spirale ρ_{tip} (droite) en fonction du twist τ_w pour une même valeur de l'excitabilité $B = 0.426$ et deux valeurs du temps caractéristique de retour à l'équilibre du milieu $\tau_- = 0$. (en tirets) et $\tau_- = 15$. en trait continu épais. Dans le premier cas, l'interaction du front avant avec le passage précédent de l'onde d'excitation est nul. On voit que lorsqu'on tient compte de l'interaction, le rayon de rotation de l'onde semble tendre vers un minimum pour une valeur du twist. Cependant, la méthode numérique utilisée pour tenir compte de l'interaction ne permet pas de calculer la forme des ondes pour de plus grandes valeurs du twist.

6.2 Approche asymptotique à petit twist

Dans cette section, ainsi que dans la suite du chapitre, on se place dans le cadre général d'un milieu excitable modélisé par les équations aux dérivées partielles (2.1).

Pour de faibles valeurs du twist imposé au filament de spirale, il est possible en utilisant le même genre de méthodes que Keener [45], basées sur l'alternative de Fredholm[15], de déterminer le comportement de ω_1 en fonction de τ_w pour de petites valeurs de τ_w . On considère $U_0(r, \theta - \omega_1 t) = (u_0, v_0)$, une solution stationnaire correspondant à une spirale bidimensionnelle en rotation uniforme. Alors pour de faibles valeurs du twist τ_w , on s'attend à ce que la solution stationnaire soit de la forme :

$$U(r, \theta, z, t) = U_0(r, \theta - \omega_1 t - \delta\omega_1 t - \tau_w z) + \delta U(r, \theta - \omega_1 t - \delta\omega_1 t - \tau_w z) \quad (6.13)$$

On injecte alors l'expression de U dans (2.1). En utilisant le fait que U_0 est solution du problème stationnaire à twist nul et en faisant un développement limité au premier ordre significatif on obtient :

$$-\delta\omega_1 \partial_\phi U_0 = \mathcal{L}\delta U + \tau_w^2 \partial_{\phi\phi} \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

d'où en multipliant à gauche par le mode adjoint de \mathcal{L} associé à l'invariance par rotation, l'expression de $\delta\omega_1$ en fonction de τ_w :

$$\delta\omega_1 = - \frac{(\tilde{u}_\phi \cdot \partial_{\phi\phi} u_0)}{(\tilde{u}_\phi \cdot \partial_\phi u_0) + (\tilde{v}_\phi \cdot \partial_\phi v_0)} \tau_w^2 \quad (6.15)$$

On s'attend donc à ce que la fréquence de rotation de la spirale augmente quadratiquement avec le twist. Ce résultat est en accord qualitatif avec les calculs effectués dans les modèles de fronts mince.

6.3 Calcul des états stationnaires :

Le calcul des états stationnaires, solutions du système d'équations aux dérivées partielles (3.11), correspondant aux filaments de spirales twistés effectué suivant la méthode décrite en (3.3) permet de déterminer l'évolution de la fréquence de rotation de la spirale et du rayon de rotation du bout de la spirale en fonction du twist (voir figure(6.4)). Ce calcul met en évidence un bon accord qualitatif entre le comportement de la fréquence de rotation calculée numériquement et la prédiction asymptotique (6.15). Par ailleurs, le comportement de $\omega_1(\tau_w)$ en fonction de τ est qualitativement très proche de

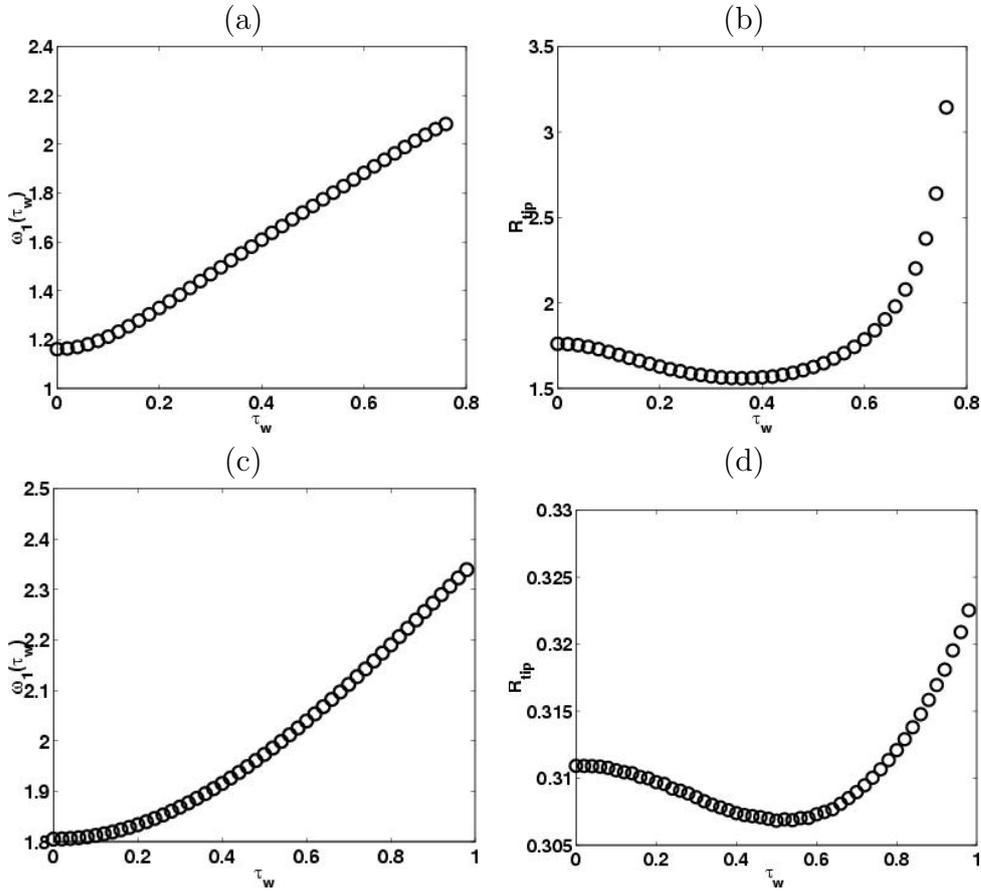


FIG. 6.4 – Pulsation(a) et rayon(b) de rotation du bout de l’onde spirale stationnaire dans un plan horizontal en fonction du twist τ_w pour $a = 0.44$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. Ces valeurs des paramètres correspondent à une onde spirale de grand rayon de rotation. Pour de petites valeurs du twist, la pulsation de la spirale est bien approchée par $\omega(\tau_w) = 1.1645 + 4.4469\tau_w^2$. Un calcul du coefficient de τ_w^2 à l’aide de (6.15) donne 4.445. Pulsation(c) et rayon(d) de rotation du bout de l’onde spirale stationnaire dans un plan horizontal en fonction du twist τ_w pour $a = 0.8$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. Ces valeurs des paramètres correspondent à une onde spirale de petit rayon de rotation. Pour de petites valeurs du twist, la pulsation de la spirale est bien approchée par $\omega(\tau_w) = 1.805336 + 0.72048\tau_w^2$. Le calcul en utilisant (6.15) donne un coefficient de τ_w^2 égal à 0.7203.

celui obtenu dans le modèle de front mince. Par contre, le rayon de rotation de la spirale calculée numériquement a un comportement qualitatif qui pour de grandes valeurs du twist est différent de celui prédit dans le modèle d'interface fine sans interaction. En effet, dans ce modèle, on observe que le rayon de rotation décroît quand le twist est augmenté alors que les spirales calculées par la méthode de Newton appliquée aux équation (2.1) voient leur rayon de rotation croître en fonction du twist au delà d'une valeur limite du twist. Ce désaccord pourrait provenir du fait que le front avant se propage dans un milieu qui n'a pas eu le temps de revenir à l'équilibre. En effet, dans le modèle de front mince, quand on tient compte du fait que le front avant se propage dans un milieu qui n'a pas eu le temps de revenir à l'équilibre, le rayon de rotation de l'onde spirale twistée semble présenter un minimum pour une valeur critique du twist imposé au filament (voir figure 6.3).

6.4 Analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales twistés

Dans cette section, je présente les résultats de l'analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales twistés. J'y distingue deux cas. Dans le premier cas j'étudie la stabilité linéaire d'une onde spirale twistée dans le régime de paramètre où le rayon de rotation de l'onde spirale est petit, dans cette situation, le filament de spirale non twisté est stable vis à vis de l'instabilité de courbure et de méandre tridimensionnelle. Dans le second, je me place dans un régime où le rayon de rotation de la spirale est du même ordre de grandeur que le rayon de courbure du bout de la spirale. Dans ce cas, le filament de spirale non twisté est instable vis à vis de l'instabilité de courbure.

6.4.1 Petit rayon :

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'effet du twist sur les filaments de spirales dans un régime de paramètre où les filaments de spirales non twistés sont stables. On se place donc dans le régime de paramètre $a > 0.684$. Afin de limiter l'interaction entre les modes de méandre et les modes de rotation on se place loin de $a = 0.684$.

Dans ce cas, on observe que du fait de l'invariance par translation B.3.2, les deux branches de translations prennent respectivement la valeur $\pm i\omega$ en $k_z = \mp i\omega$. Par ailleurs, ainsi que cela est montré en B.3.3, ces points particuliers des branches de translation continuent d'en être des maxima.

A mesure que le twist augmente, on observe qu'un maximum secondaire des branches de translation apparaît pour $\tau_w \approx 0.33$, ce maximum est situé

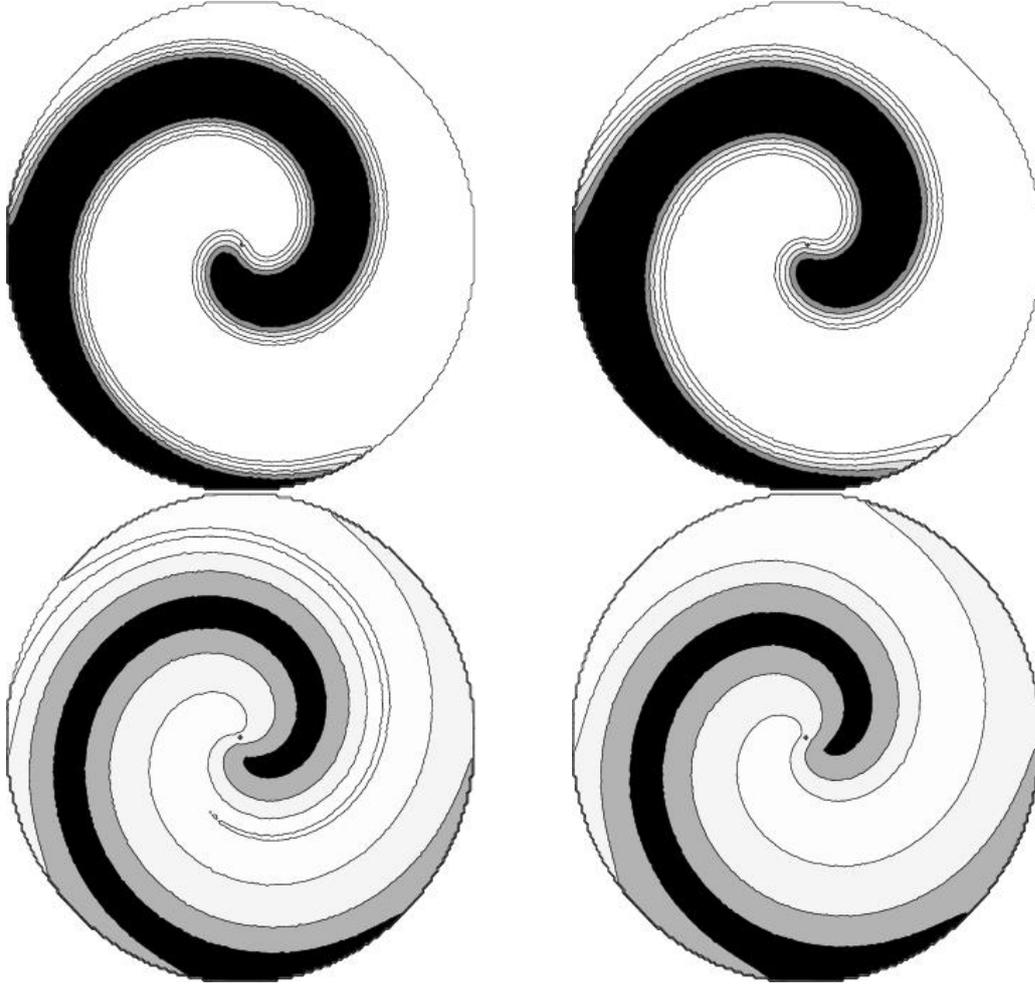


FIG. 6.5 – Lignes de niveau des champs $u = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8 (haut) et $v = 0.1, 0.2, 0.4$ et 0.6 (bas) des ondes spirales twistées solutions de (3.11) pour $a = 0.8, b = 0.01, \epsilon = 0.025$ et $\tau_w = 0$. (gauche) et $\tau_w = 0.4$ (droite). On constate que dans le plan horizontal, il y a un élargissement du front d'onde d'excitation quand le twist est augmenté et que la valeur du champ v sur le front avant de la spirale est légèrement plus élevée dans le cas du filament twisté que dans le cas du filament non twisté (sur la figure de droite la ligne de niveau $v = 0.1$ est absente alors que sur la figure de gauche elle est visible, en fait, dans le premier cas, le minimum de v est de l'ordre de 0.098 , alors que dans l'autre il est de l'ordre de 0.11).

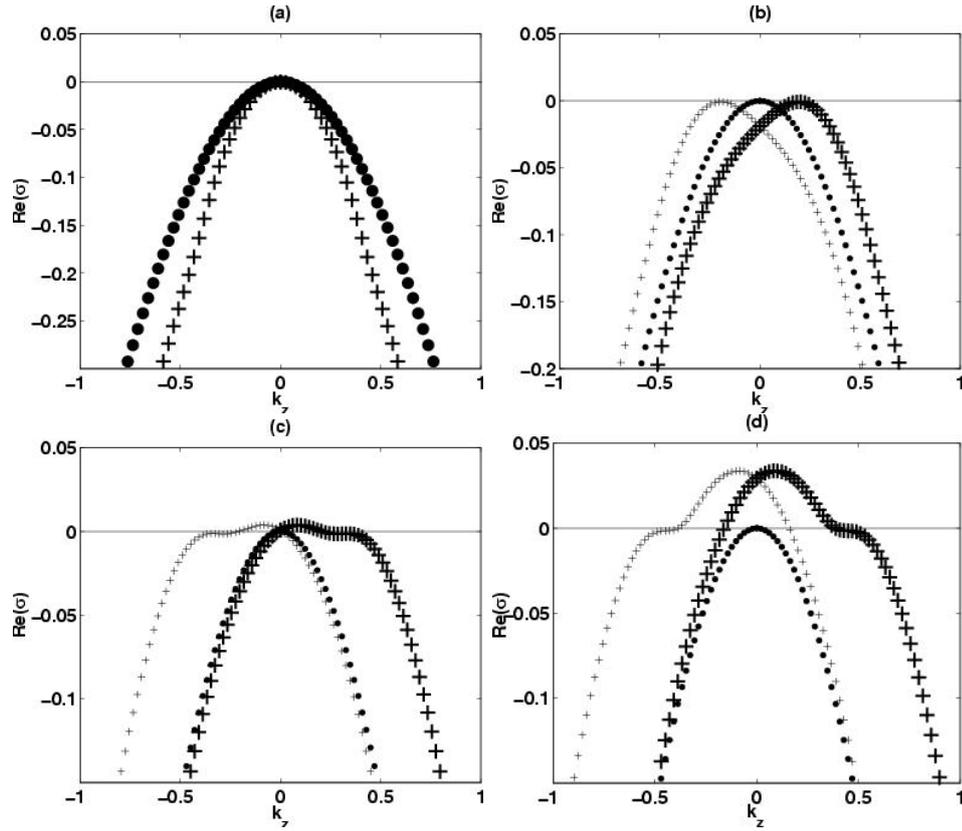


FIG. 6.6 – Partie réelle des taux de croissance des modes de rotation (\bullet), translation ($+$) et méandre (\circ) en fonction de k_z pour $a = 0.8$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$ et différentes valeurs du twist : $\tau_w = 0.0$ (a), 0.2 (b), 0.35 (c) et 0.45 (d). Les parties imaginaires ne sont pas représentées.

à distance finie de $k_z = \tau_w$ et a initialement un taux de croissance négatif. A mesure que le twist est augmenté, le taux de croissance de ce maximum secondaire augmente jusqu'à devenir positif pour une valeur critique de $\tau_w \approx 0.345$. On observe alors que pour un intervalle de nombre d'ondes, les modes de translation sont déstabilisés. La stabilité du mode de rotation et des modes de méandre n'est pas modifié de façon notable par l'accroissement du twist. (voir figure(6.6)).

Plus près de la ligne de méandre tridimensionnel, en restant dans le régime des spirales de petit rayon ($a = 0.7$), on observe sensiblement la même évolution des branches de translation, de rotation et de méandre à mesure que le twist est augmenté. En particulier, le taux de croissance maximal des modes de méandre n'est pas modifié sensiblement par le twist.

6.4.2 Grand rayon

Dans le cas où le rayon de rotation de la spirale est grand (ou du même ordre de grandeur) devant le rayon de courbure du bout de l'onde spirale, l'évolution des spectres de stabilité linéaire est sensiblement différente de ce qui est décrit plus haut.

Le spectre de stabilité linéaire à twist nul est sensiblement différent de celui observé à petit rayon. En effet, les modes de translation sont déstabilisés à petit nombre d'onde.

Lorsque le twist est augmenté, on observe que l'extremum des taux de croissance des branches de translation à $\mp i\omega$ en $k_z = \pm\tau_w$ est bien observé.

Dans le cas d'un filament faiblement twisté, le taux de croissance maximal des branches de translation est sensiblement augmenté alors que le taux de croissance maximal des modes de méandre, lui aussi, augmente sensiblement et est obtenu pour $k_z \approx \pm\tau_w$.

Quand, le taux de croissance des modes de méandre devient proche de 0 pour $k_z = \pm\tau_w$, on observe un phénomène d'hybridation des modes de translation et des modes de méandre déjà décrit en 4.3.1 (voir figure (4.5)). Ici, la courbure des branches de translation au voisinage de $k_z = \pm\tau_w$ s'inverse et leur taux de croissance présente un maximum positif et est positif pour $k_z = \mp\tau_w$ et pour $k_z = 0$. Les modes de méandre deviennent alors les modes les plus instables linéairement.

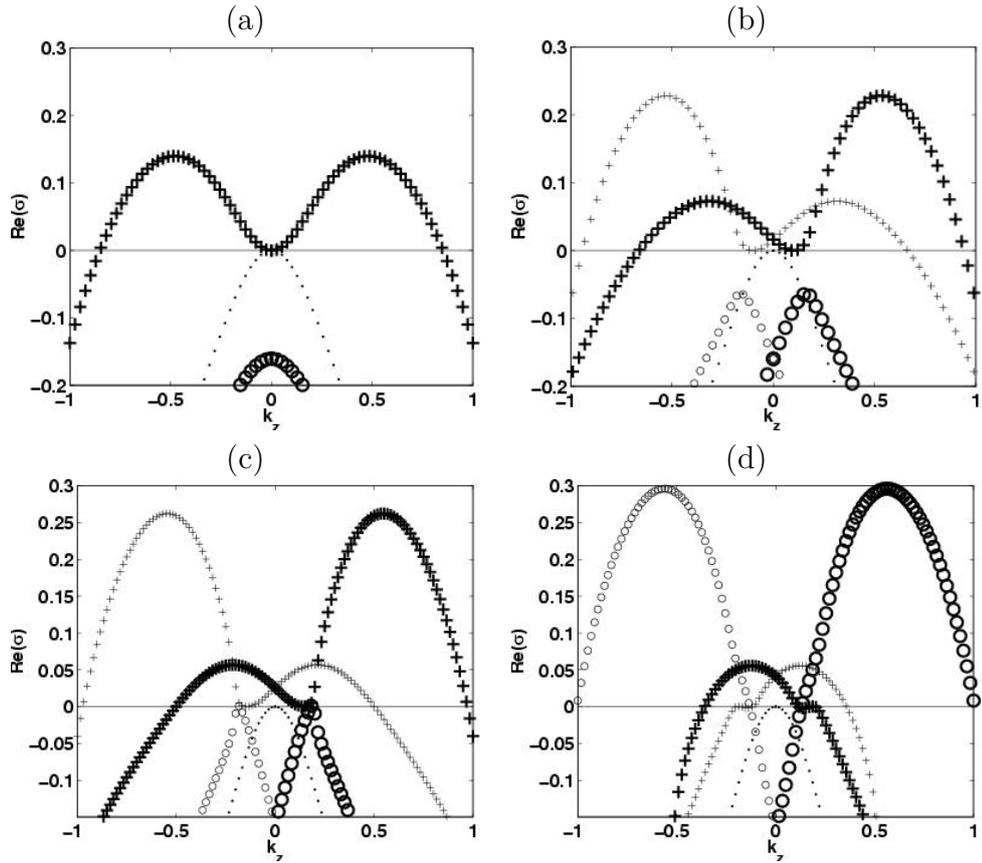


FIG. 6.7 – Partie réelle des taux de croissance des modes de rotation (●), translation (+) et méandre (o) en fonction de k_z pour $a = 0.44$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$ et différentes valeurs du twist : $\tau_w = 0.0$ (a), 0.1 (b), 0.14 (c) et 0.19 (d). Les parties imaginaires ne sont pas représentées.

Chapitre 7

Instabilité de *sproing*

Dans ce chapitre, je présente les états restabilisés observés lors de la déstabilisation d'un filament de spirale soumis au twist. Dans le cas où l'onde spirale a un grand rayon de rotation, le twist n'a pas d'effet sur l'évolution de l'onde spirale et on observe toujours l'instabilité de courbure des filaments de spirales non twistés. Par contre dans le cas d'un filament de spirale de petit rayon de rotation on observe que le filament de spirale, stable quand il est soumis à un twist nul, devient instable au delà d'un twist critique. Une instabilité analogue a été observée par Henze *et al.* [36] lors de simulations numériques de milieux excitable tridimensionnels où par Rousseau *et al.* [67] dans l'équation de Ginzburg-Landau complexe¹.

Dans une première section, je présente les résultats de simulations numériques directes effectuées avec le même dispositif expérimental que dans [36] : la longueur d'onde déstabilisée est égale au pas du twist imposé au filament de spirale.

Dans la section suivante je présente les résultats de simulations numériques effectuées dans une situation où des modes de longueur d'onde autre que le pas du twist imposé au filament peuvent se développer.

Enfin, je présente un modèle phénoménologique de filament moyen qui décrit qualitativement la bifurcation observée.

¹Cette équation modélise un milieu auto-oscillant et s'écrit : $\partial_t A = A + (1 - i\alpha)\Delta A - (1 + i\beta)|A|^2 A$.

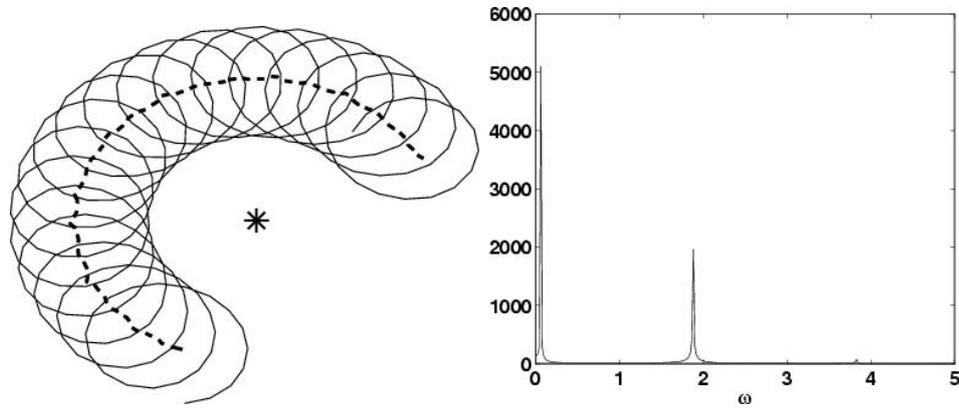


FIG. 7.1 – Gauche : trait continu : trajectoire du bout de la spirale dans un plan horizontal. Droite : transformée de Fourier temporelle de la trajectoire du bout de la spirale dans le plan. Les paramètres sont $a = 0.8$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. Le twist imposé dans la boîte de simulation est $\tau_w = 0.381$.

7.1 Instabilité de sproing à $k_z = 0$:

7.1.1 Protocole numérique :

Afin de mieux comprendre l'instabilité de sproing décrite dans [36], il est apparu nécessaire d'étudier systématiquement le comportement d'un filament de spirales soumis à un twist croissant. Ceci a été fait grâce à une série de simulations numériques directes. Ces simulations ont été effectuées dans des boîtes de simulations d'extension verticale, H , variable où un tour de twist était imposé au filament de spirales. Le twist imposé était alors $\tau_w = 2\pi/H$ et était maintenu constant au cours de la simulation grâce à l'emploi de conditions aux limites périodiques. Dans cette situation on s'attend au vu de l'analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales twistés (voir figure 6.6) à ce que le seul mode instable qui puisse se développer dans la boîte de simulation corresponde à $k_z = 0$ dans le référentiel tournant twisté, c'est à dire à une longueur d'onde de H dans le référentiel du laboratoire.

Deux types de conditions initiales ont été utilisées. D'une part j'ai utilisé une condition initiale constituée soit de spirales bidimensionnelles empilées le long de l'axe vertical. J'introduisais alors le twist en les tournant d'un angle dépendant de z autour de leur centre de rotation estimé numériquement. D'autre part, j'ai utilisé comme condition initiale le résultat d'une simulation numérique effectuée sur une grille d'extension verticale légèrement différente (une différence usuelle était de l'ordre de un à cinq pas de grille) et interpolée linéairement sur la nouvelle grille.

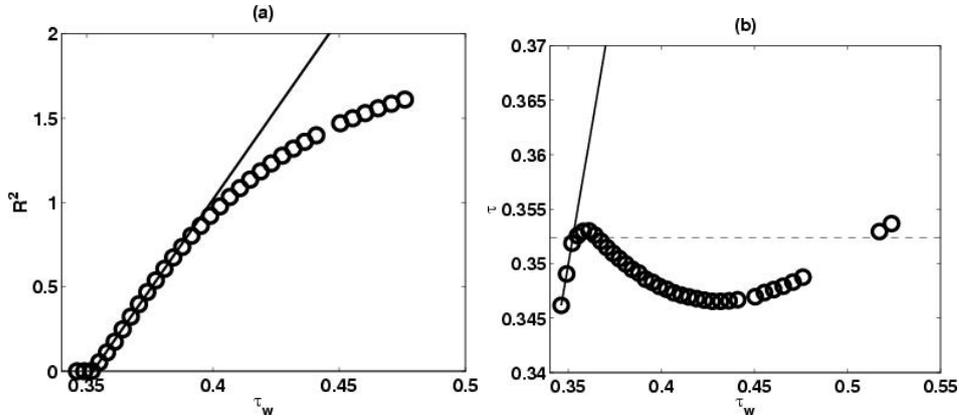


FIG. 7.2 – (a) : Carré du rayon de l’hélice formée par filament moyen en fonction du twist imposé au filament droit τ_w . Les paramètres utilisés sont ceux de la figure (6.6), à savoir $a = 0.8$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. (b) : Twist local le long du filament moyen restabilisé τ en fonction du twist imposé τ_w . La droite en trait continu est la droite d’équation $\tau = \tau_w$. La droite horizontale en pointillés est la droite d’équation $\tau = \tau_c$.

De ces deux types de conditions initiales, le premier était en général le plus éloigné de l’état stationnaire recherché, mais aboutit au même état restabilisé que la seconde².

7.1.2 Résultats :

Les résultats des simulations numériques directes obtenus sont en très bon accord avec les résultats de l’analyse de stabilité linéaire. En effet, on observe que le twist critique au delà duquel le filament de spirales est linéairement instables ($\tau_w = 0.350$) est très proche ce celui pour lequel l’état restabilisé observé n’est pas un filament de spirales droit uniformément twisté ($\tau_w = 0.352$).

Dans le cas où le filament droit est linéairement stable on observe que la vitesse de retour à l’état stationnaire se fait exponentiellement avec un taux de décroissance qui est égal à la partie réelle du mode le plus instable à $k_z = 0$. Au delà du twist critique, on observe que le filament droit se déstabilise et l’évolution temporelle aboutit à un état quasi stationnaire.

Cet état stationnaire peut être décrit, comme dans [36], comme étant un filament moyen en forme d’hélice en rotation lente de rayon constant, autour

²C’est à dire à chaque fois qu’une comparaison a été effectuée entre les deux types de condition initiale.

τ_w	ω_m	$\omega_1(\tau_w) - Im(\sigma_t(k_z = 0))$	$\omega_1(\tau_w)$	ω_s	τ	$\omega_1(\tau)$
0.50	0.053	0.049	1.973	1.91	0.353	1.892
0.45	0.061	0.059	1.943	1.88	0.347	1.889
0.40	0.066	0.066	1.916	1.88	0.347	1.889
0.355	0.063	0.063	1.891	1.88	0.349	1.890

TAB. 7.1 – Pour différentes valeurs du twist imposé au filament droit initial τ_w , pulsation du filament moyen restabilisé ω_m , différence entre la pulsation du filament droit twisté stationnaire et la partie imaginaire du mode propres de translation à $k_z = 0$, pulsation du filament droit stationnaire $\omega_1(\tau_w)$, pulsation de la spirale dans le référentiel en translation avec le filament moyen, twist le long du filament restabilisé τ et pulsation du filament droit auquel un twist τ serait imposé $\omega_1(\tau)$.

duquel tourne le filament instantanée, qui, lui aussi, est une hélice de même axe et de rayon variable au cours du temps.

En effet, dans un plan horizontal, dans le référentiel du laboratoire, la trajectoire de la spirale peut être vue comme un mouvement de rotation uniforme autour d'un point en translation circulaire lente (par rapport au mouvement de rotation du bout de la spirale) (voir figure (7.1)). Il est alors légitime de considérer que le lieu de ces points est le filament moyen. On observe alors qu'en deca du seuil, ce filament moyen est une droite alors qu'au delà il prend la forme d'une hélice dont le rayon, R varie comme $\sqrt{\tau_w - \tau_c}$ (voir figure (7.2)) et dont le pas est égal à la hauteur de la boîte de simulation.

Le filament instantanée est alors paramétré par :

$$\begin{cases} x = R_1 \cos(\omega_1 t + \tau_w z + \phi) + R \cos(\omega_m t + \tau_w z) \\ y = R_1 \sin(\omega_1 t + \tau_w z + \phi) + R \sin(\omega_m t + \tau_w z) \end{cases} \quad (7.1)$$

où R_1 et ω_1 sont proches du rayon et de la pulsation du filament de spirales twistés et où ω_m est petit devant ω_1 (voir table 7.1).

En utilisant les résultats exposés dans l'annexe D et en particulier l'équation (D.6), il est possible de calculer le twist local du filament de spirale après restabilisation :

$$\tau = \frac{2\pi}{H(1 + (2\pi R/H)^2)} = \frac{\tau_w}{1 + (R\tau_w)^2} \quad (7.2)$$

il vient alors de façon évidente que la déstabilisation du filament droit en une hélice aboutit à un relâchement de la contrainte de twist le long du filament. Une étude quantitative montre alors que pour des valeurs relativement faibles de l'écart au seuil, le twist est approximativement maintenu constant (voir

figure (7.2)) à une valeur proche de τ_c . On remarque par ailleurs que la pulsation de la spirale dans le référentiel en translation avec le filament moyen est approximativement maintenue égale à la pulsation du filament de spirale droit auquel le twist τ serait imposé.

7.2 Instabilité de sproing à $k_z \neq 0$

Dans cette section, je décris les résultats obtenus lors de simulations numériques où le nombre d'onde qui est linéairement instable et qui peut se développer dans la boîte de simulation n'est pas égal à 0 dans le référentiel tournant twisté. Dans une première sous-section je présente les résultats obtenus dans la situation où un seul mode est instable. Les résultats obtenus lors de l'analyse de stabilité linéaire imposent que l'on se place dans un régime de paramètre proche du seuil de stabilité des modes à $k_z = 0$ et donc proche du seuil de stabilité du filament twisté de longueur infinie.

Dans la deuxième sous-section, je présente les résultats de simulations numériques effectuées dans une boîte de simulation où plusieurs (5) modes instables, dont le mode à $k_z = 0$ peuvent se développer dans la boîte de simulation.

7.2.1 Cas où un seul mode instable peut se développer dans la boîte de simulation :

Dans ce cas, le même comportement qualitatif que dans la section (7.1) est observé. En effet, après un long régime transitoire³ le système atteint un état restabilisé. Cet état est analogue à celui qui a été observé dans un milieu régi par l'équation de Ginzburg-Landau Complexe [67]. Une paramétrisation du filament instantanée est alors :

$$x + iy = R_1 e^{i\omega_1 t + \tau_w z} + R_2 e^{i\omega_2 t + (\tau_w - k_z)z + \phi_2} \quad (7.3)$$

où $R_1 \approx 0.31$ et $\omega_1 = 1.85$ sont respectivement proches des rayon et pulsation du filament twisté droit et où $R_2 \approx 0.1$ et $\omega_2 = -0.047$ sont petits devant R_1 et ω_1 . Dans ce cas, le calcul du filament moyen est impossible car l'erreur dans des calculs du centre de rotation instantanée de l'onde spirale dans un plan horizontal est du même ordre de grandeur que la taille du filament moyen. Cependant, la forme de la paramétrisation du filament instantanée indique qu'on peut considérer le filament de spirales comme un filament instantanée en rotation rapide autour d'un filament moyen en forme hélice de nombre

³La durée du régime s'explique par la proximité du seuil d'instabilité

d'onde $\tau_w - k_z$ et en rotation lente à la pulsation ω_2 (ici $\omega_2 = -0.047$, alors que $\omega - \text{Im}(\sigma_t(k_z)) = -0.056$).

7.2.2 Cas où plusieurs modes instables peuvent se développer dans la boîte de simulation :

Dans cette section, je présente les résultats de simulations numériques effectuée dans le cas où plusieurs modes instables (5) peuvent se développer dans la boîte de simulation. Deux types de condition initiales ont été utilisées :

- Le premier type de condition initiale consiste en un empilement de spirales bidimensionnelles empilées les unes au dessus des autres et déphasées de façon à obtenir un filament droit auquel plusieurs (5) tours de twist sont imposés
- Le second type de condition initiale consiste en un empilement de plusieurs (5) filaments hélicoïdaux restabilisés obtenus par une simulation numérique directe où un seul tour de twist est imposé au filament droit.

Dans ce cas (pour les deux valeurs du twist imposé $\tau_w = 0.357$ et $\tau_w = 0.45$), après un régime transitoire très long (plusieurs centaines de périodes de rotation de l'onde spirale bidimensionnelle), on observe la restabilisation du filament moyen en une structure stationnaire. Cette structure est indépendante de la condition initiale utilisée et est stable (elle reste identique à elle même pendant plusieurs centaines périodes de rotation de l'onde spirale)

Cette structure stationnaire, peut être paramétrée dans chaque plan complexe par :

$$x + iy = \sum_{i=1..n} R_i e^{i\omega_i t + k_{zi} t} \quad (7.4)$$

où les R_i sont constants au cours du temps et du même ordre de grandeur que le rayon de rotation de l'onde spirale, les k_{zi} sont tous du même signe que τ_w et où les $\omega_i(k_{zi})$ sont de la forme $\omega + k_{zi}c$ (voir 7.3), avec c constante réelle. Il vient alors que la paramétrisation (7.4) peut être réécrite plus explicitement sous la forme :

$$x + iy = e^{i\omega t} f(z - ct) \quad (7.5)$$

Ainsi, le filament moyen se comporte comme une onde se propageant à la vitesse $c = -0.174$ dans un référentiel en rotation très lente (la pulsation de la rotation lente est, dans le cas présenté ici est de 0.0093). Cette vitesse de phase est très différente de la vitesse de propagation d'une onde plane qui est de l'ordre de 2.9 dans le régime de paramètre étudié ici.

Un calcul direct du twist local le long du filament montre qu'il est approximativement constant en temps et en fonction de z . Sa valeur moyenne

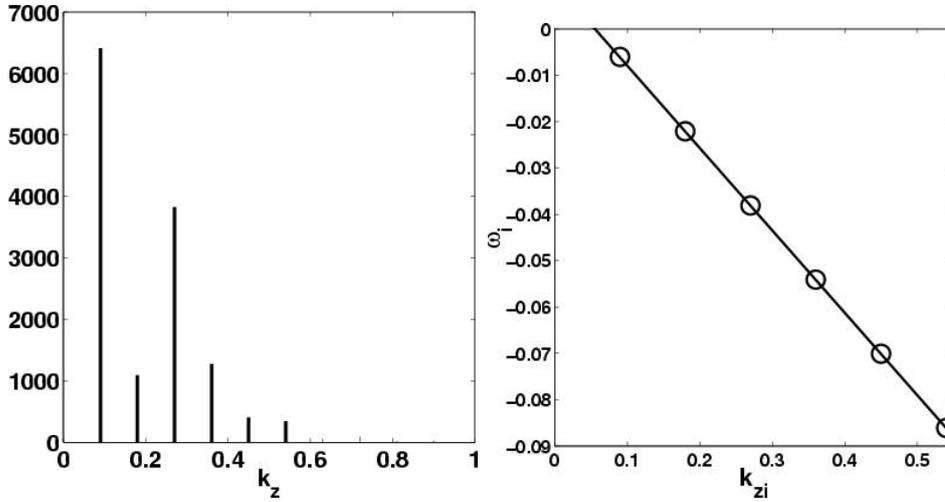


FIG. 7.3 – Gauche : transformée de Fourier spatiale du filament moyen restauré à un instant donné. Les amplitudes des modes sont constantes au cours du temps. Droite : pulsation des modes de Fourier en fonction de k_z (\circ), on voit que les ω_i sont situés sur une droite d'équation $\omega = -0.174k_z + 0.0093$.

est significativement plus faible que celle observée dans le cas où seul le mode de nombre d'onde $k_z = 0$ est instable.

7.2.3 Comparaison avec les résultats obtenus dans les milieux oscillants :

A la suite de l'étude de l'influence du twist sur la dynamique des filaments de spirales dans les milieux excitable effectuée par Henze *et al.*[36], des études ont été effectuées dans les milieux auto-oscillants. Ces études numériques ont été faites avec l'équation modèle de Ginzburg-Landau qui est utilisée pour décrire un milieu oscillant au voisinage du seuil d'oscillation. Comme le passage d'un milieu excitable à un milieu oscillant se fait par une simple variation des paramètres du modèle de réaction et comme dans les milieux oscillant on observe la propagation d'ondes spirales, il apparaît intéressant de comparer les résultats présentés ici avec ceux obtenus dans le cadre de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe.

Rousseau *et al.*[67], et Nam *et al.*[59] ont mis en évidence qu'un vortex twisté est déstabilisé au delà d'un twist critique. Cette instabilité aboutit à la formation d'un filament hélicoïdal et est une bifurcation de Hopf. Aux différences de protocole numérique près, ces résultats sont très similaires avec ceux présentés ici dans le cas où seul un mode de la branche de translation

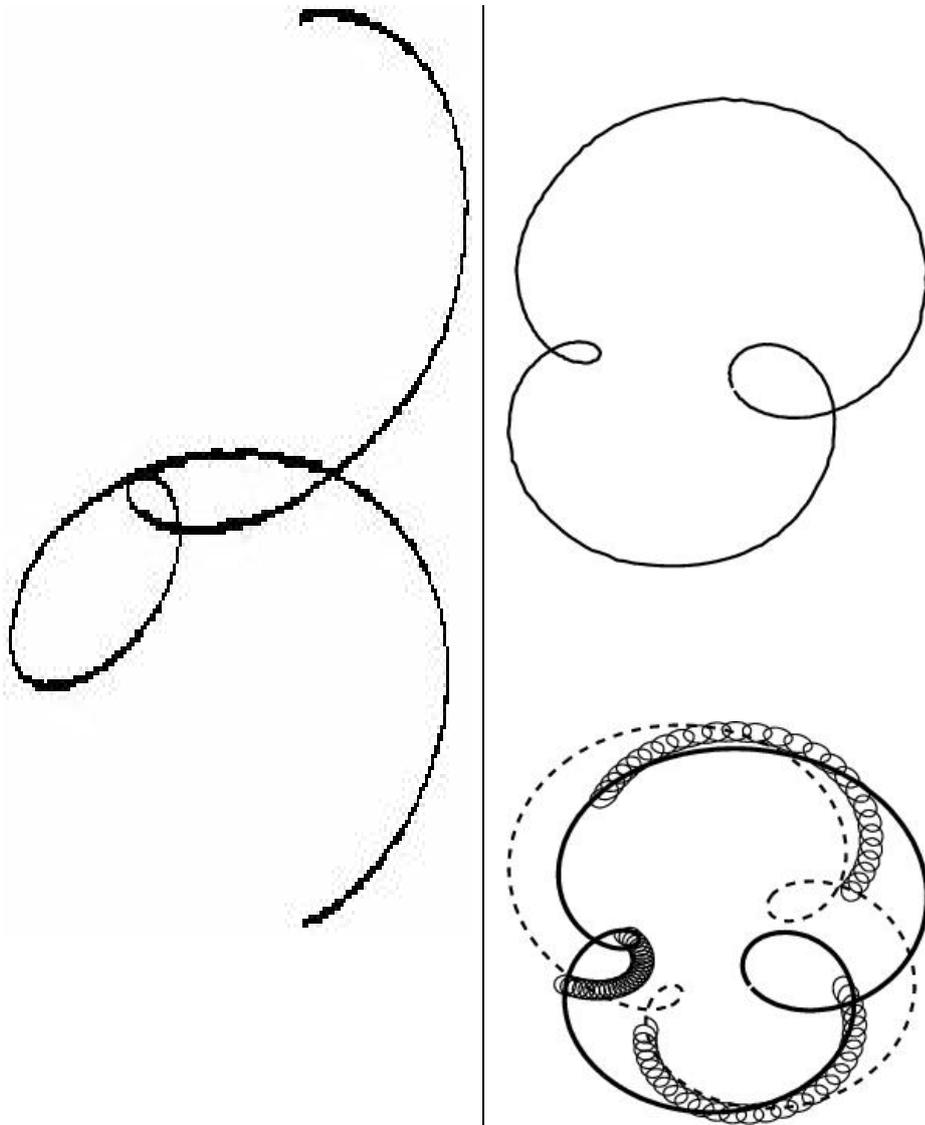


FIG. 7.4 – Gauche : vue en perspective du filament moyen obtenu lors d’une simulation numérique effectuée dans une boîte de simulation de taille $(349 \times 128 \times 128)0.2$ dans laquelle 5 tours de twist ont été imposés ($\tau_w = 0.4501$). Les paramètres sont $a = 0.8$, $b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. Dans ce régime de paramètre, 5 modes instables peuvent se développer dans la boîte de simulation. Droite : haut : Vue de dessus du filament moyen dans le même régime de paramètre. Cette forme du filament est invariante dans le temps (sur une échelle de temps de plusieurs centaines de rotation de l’onde spirale). Bas : en traits continus fins : trajectoires du bout de la spirale dans trois plans horizontaux, en traits continus et tirets épais, vue de dessus du filament instantanée respectivement au début et à la fin de l’intervalle de temps sur lequel est observé la trajectoire du bout de la spirale dans les plan horizontaux. (la forme du filament instantanée, du fait du mouvement de rotation de l’onde spirale varie légèrement).

peut se développer dans la boîte de simulation. La différence la plus remarquable qui apparaît lors de la comparaison des résultats obtenus réside dans le fait que la vitesse de phase du filament hélicoïdal observé dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau est nulle alors que dans le cas des milieux excitable elle n'est pas nulle (voir table 7.1) [59, 68]. Cette différence de comportement pourrait s'expliquer par la différence de comportement entre un filament de spirale faiblement courbé dans un milieu excitable et dans un milieu régi par l'équation de Ginzburg-Landau.

En effet, dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau Complexe, la vitesse normale d'un filament de spirale faiblement courbé est dirigée suivant la normale au filament ⁴ alors que dans un milieu excitable elle admet une composante suivant la binormale. Cette composante suivant la binormale permet alors d'expliquer le mouvement de rotation du filament hélicoïdal observé dans les milieux excitables.

Dans le cas où plusieurs modes peuvent se développer, les différences de protocole laissent plusieurs questions sans réponse. En effet, les travaux de Rousseau *et al.* [67] mettent en évidence l'existence d'une bifurcation secondaire des états restabilisés en forme d'hélice qui prennent alors la forme de *super-hélices* dont la forme est similaire la structure présentée section 7.2.2.

Néanmoins, les simulations numériques présentées ici n'ont jamais permis d'observer de filament de spirale purement hélicoïdal dans des boîtes de simulations où plusieurs modes instables peuvent se développer dans la boîte de simulation alors que Rousseau *et al.* [67] les ont observés. Cette différence pourrait s'expliquer par le fait que les simulations numériques présentées ici ont été faites à une distance finie du seuil d'instabilité et que le seuil d'instabilité secondaire est déjà dépassé. Néanmoins, cette hypothèse demanderait à être confirmée, ou infirmée, par des simulations numériques au voisinage du seuil d'instabilité dans des boîtes de simulations où plusieurs modes instables peuvent coexister.

⁴Ce résultat exposé dans [28] provient d'une étude perturbative similaire à celle effectuée par Keener [45]. Cette étude perturbative ne fait apparaître aucun couplage entre le twist et le mouvement du filament moyen alors que la bifurcation de sproing met en évidence qu'un tel couplage existe. Il est donc difficile de s'appuyer sur une telle approche. Néanmoins comme l'absence de dérive suivant la binormale au filament provient des symétries de l'équation de Ginzburg-Landau et de la forme particulière de la solution d'onde spirale, on peut supposer que cette absence de vitesse de dérive suivant la binormale continue d'exister pour de grandes valeurs du twist.

7.3 Modèle phénoménologique de filament :

La bifurcation de sproing est qualitativement très proche de l'instabilité de fil de téléphone ou du phénomène de sur-enroulement de l'ADN[55]. Ces deux derniers phénomènes sont en partie gouvernés par l'élasticité. Il est alors naturel d'essayer de décrire le comportement du filament de moyen à l'aide d'un modèle phénoménologique qui se baserait sur les modèles élastiques des fils soumis à la torsion[52, 31]. Je présente dans cette section un modèle simple de filament qui, d'un point de vue qualitatif, reproduit assez bien le comportement d'un filament de spirales soumis au twist.

7.3.1 Modèle :

Dans le cas des filaments non twistés, Biktashev[14] a évoqué une analogie entre le comportement des filaments et une ligne élastique qui aurait une élasticité négative ou positive selon que le filament est instable ou stable vis à vis de l'instabilité de courbure. L'idée directrice du modèle présenté ici est d'étendre cette analogie au cas des filaments de spirales twisté. Arbitrairement, je suppose que le filament de spirales se comporte de façon relaxationnelle et tend à minimiser l'énergie :

$$E = \int ds [E_L + E_\tau \tau^2 + E_\kappa \kappa^2] \quad (7.6)$$

où τ est le twist local du filament, κ la courbure du filament et E_L , E_τ et E_κ des grandeurs caractéristiques du milieu. E_L est soit positive soit négative selon que le filament de spirales est stable ou instable vis à vis de l'instabilité de courbure. Il indique, quand il est positif, que le filament tend à minimiser sa longueur. Le terme en E_τ indique que le filament tend à essayer de minimiser le twist qui lui est imposé. Enfin le terme en E_κ a été introduit pour éviter une déstabilisation des modes de petites longueurs d'onde.

Dans la suite de cette section, je présente quelques résultats qui peuvent être obtenus en utilisant un tel modèle et montre que ces résultats sont en accord qualitatif avec l'étude numérique qui a été effectuée ici.

7.3.2 Analyse de stabilité linéaire du filament droit uniformément twisté :

Dans cette section, on étudie la stabilité linéaire du filament droit uniformément twisté de hauteur infinie par rapport à des perturbations périodiques suivant l'axe du filament. La position du filament moyen est décrite par $(x(z, t), y(z, t))$. La position du filament instantanée est donnée par l'angle ϕ

que fait le vecteur normal au filament moyen le liant au filament instantanée projeté dans le plan horizontal avec le vecteur \vec{e}_x (voir figure(7.5)). Dans le cas où le filament est droit et uniformément twisté : $\phi_0 = \omega t + \tau_w z$ et $x = y = 0$.

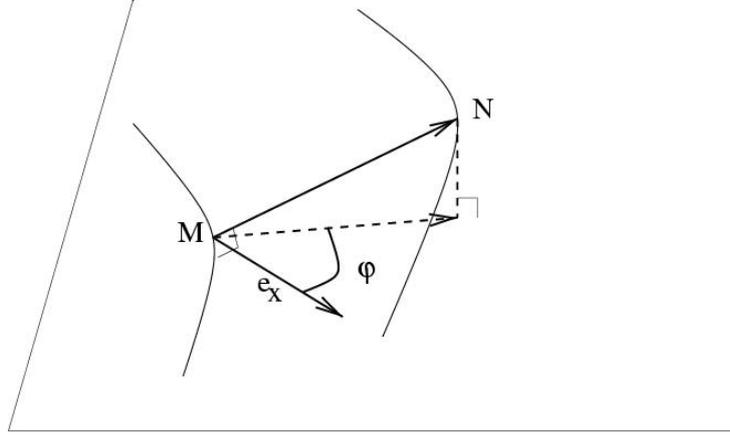


FIG. 7.5 – Le point M est un point du filament moyen, le point N est le point du filament instantanée correspondant. ϕ est l'angle que fait le projeté sur le plan horizontal du vecteur \vec{NM} avec \vec{e}_x .

Alors, le twist local du filament vaut d'après (D.1) :

$$\tau = \frac{\phi' - A/(1 + x'^2 + y'^2)}{1 + (x' \cos \phi + y' \sin \phi)^2} \quad (7.7)$$

$$A = x'x'' \sin \phi \cos \phi + x'y'' \sin^2 \phi - y'x'' \cos^2 \phi - yy'' \cos \phi \sin \phi \quad (7.8)$$

où $\partial_z(\cdot) = (\cdot)'$ et $\partial_t(\cdot) = (\cdot)_t$. Comme on s'intéresse à la stabilité linéaire du filament droit, x et y sont petits et $\phi = \phi_0 + \phi_1$ avec ϕ_1 petit. Il vient alors qu'à l'ordre dominant l'énergie du filament devient après quelques simplifications algébriques :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^H dz \left(E_L + \frac{1}{2}(E_l - \phi'^2 E_\tau)(x'^2 + y'^2) + E_\tau \phi'^2 - 2E_\tau A \phi' \right) + \\ &+ \int_0^H dz E_\kappa (x''^2 + y''^2) \\ &- \int_0^H dz \left(E_\tau \phi'^2 (x'^2 \cos 2\phi + 2y'x' \sin 2\phi - y'^2 \cos 2\phi) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$A = \frac{1}{2} [x'y'' - y'x'' + \sin 2\phi(x'x'' - y'y'') - \cos 2\phi(x''y' + x'y'')] \quad (7.10)$$

L'application du principe variationnel à cette expression de l'énergie donne alors les expressions des équations de dévolution de x , y et ϕ_1 linéarisées autour de l'état stationnaire qui est le filament droit :

$$\dot{x} = x''(E_L - \tau_w^2 E_\tau) - 2E_\tau \tau_w y^{(3)} - 2E_\kappa x^{(4)} \quad (7.11)$$

$$\dot{y} = y''(E_L - \tau_w^2 E_\tau) + 2E_\tau \tau_w x^{(3)} - 2E_\kappa y^{(4)} \quad (7.12)$$

$$\dot{\phi}_1 = E_\tau \phi_1'' \quad (7.13)$$

L'équation (7.13) est, à l'ordre linéaire, découplée de (7.11,7.12). Elle exprime que le twist tend à rester uniforme.

Les équations (7.11,7.12) sont indépendantes de la phase ϕ_0 .

On en cherche des solutions de la forme $x = a_x e^{-ik_z z + \sigma t}$, $y = a_y e^{-ik_z z + \sigma t}$. Il vient alors que :

$$a_x \sigma = -a_x (E_L - \tau_w^2 E_\tau) k_z^2 - i a_y 2E_\tau \tau_w k_z^3 - a_x 2E_\kappa k_z^4 \quad (7.14)$$

$$a_y \sigma = -a_y (E_L - \tau_w^2 E_\tau) k_z^2 + i a_x 2E_\tau \tau_w k_z^3 - a_y 2E_\kappa k_z^4 \quad (7.15)$$

On s'est ramené à un problème aux valeurs propres pour σ qui peut être résolu facilement. On obtient que les valeurs propres de ce système sont en fonction de k_z :

$$\sigma = -(E_L - \tau_w^2 E_\tau) k_z^2 - 2E_\kappa k_z^4 \mp 2E_\tau \tau_w k_z^3 \quad (7.16)$$

avec pour mode propre associé :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

A $k_z = 0$, les deux modes propres obtenus correspondent aux modes propres de translation. Le premier correspond dans le référentiel tournant twisté au mode propre obtenu pour $k_z = \tau_w$ et pour pulsation $-i\omega$. Le second au mode propre obtenu pour $k_z = -\tau_w$ et pulsation $i\omega$. Il vient alors que pour certaines valeurs de E_L , E_τ et E_κ , le spectre de stabilité linéaire obtenu correspond bien qualitativement aux spectres qui ont été obtenus au chapitre précédent. En particulier, on observe qu'à mesure que le twist est augmenté, un maximum secondaire de la branche de translation apparaît et devient instable (voir figure 7.6). Cependant ce modèle ne fait pas apparaître de variation des parties imaginaires des modes de translation et il ne permet pas d'obtenir un accord quantitatif sur la forme des spectres.

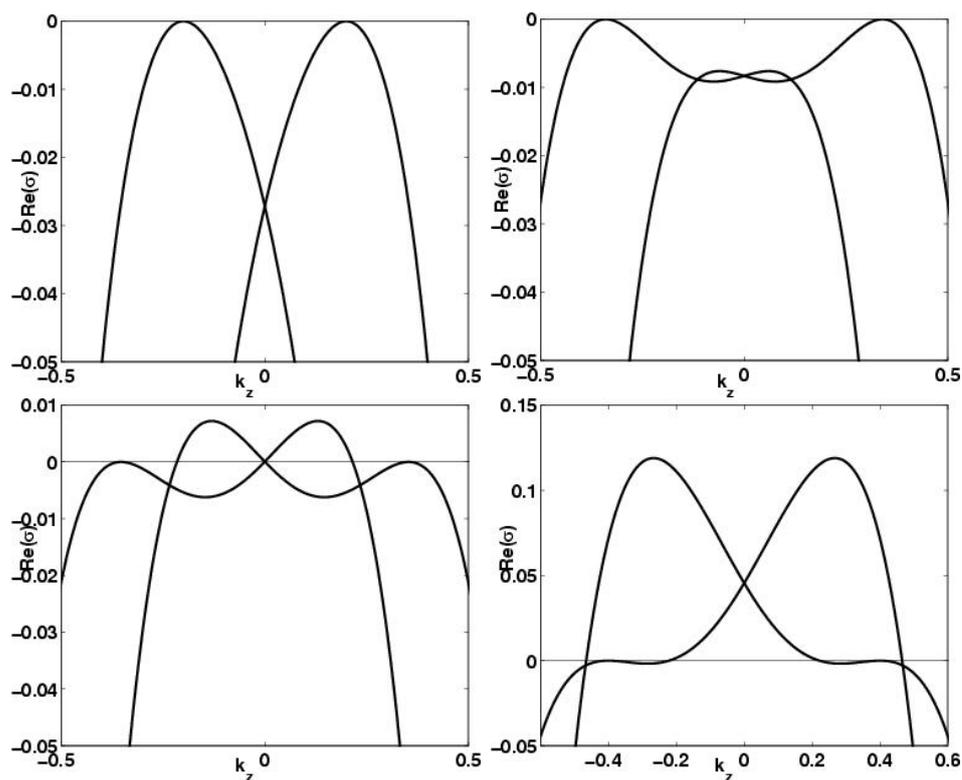


FIG. 7.6 – Partie réelle des taux de croissance des modes de translation calculés en utilisant le petit modèle de filament pour $\tau_w = 0.2$ (a), $\tau_w = 0.34$ (b), $\tau_w = 0.353$ (c), et $\tau_w = 0.4$ (d) en fonction de k_z . Les valeurs de E_L , E_τ et E_κ utilisées sont respectivement 1, 3.595 et 1.378. Ces valeurs sont les même que celles utilisées figure 7.7. D'un point de vue qualitatif, le comportement des branches de translation est proche de ce qui est observé figure 6.6.

7.3.3 Application à la bifurcation de *sproing* :

Dans cette section, je me limite à une version simplifiée du modèle décrit par (7.6). En effet, je suppose que la phase ϕ n'intervient que par sa dépendance spatiale et que le filament moyen ne peut prendre que la forme d'une hélice. En utilisant ces hypothèses simplificatrices, je détermine l'énergie d'un filament hélicoïdal de pas B et de rayon R .

Alors, en appliquant le principe relaxationnel, je détermine analytiquement la région de stabilité du filament droit et je donne une relation vérifiée par les autres hélices stationnaires. J'utilise cette relation pour déterminer, la taille des filaments hélicoïdaux de rayon non nul dont le pas est égal à la longueur d'onde du twist imposé au filament. Il vient alors que la bifurcation observée dans ce modèle simple est une bifurcation super-critique. Les résultats montrent ce modèle peut approcher quantitativement le comportement de la bifurcation de *sproing*. En particulier, sans paramètre ajustable on obtient un très bon accord entre la pente $R^2/(\tau_w - \tau_c)$ calculée numériquement et celle obtenue à l'aide du modèle.

7.3.3.1 Energie d'un filament hélicoïdal de pas B et de rayon R :

Un filament hélicoïdal de cette forme a pour longueur :

$$L = H \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{B}\right)^2} \quad (7.18)$$

et pour courbure :

$$\kappa = \frac{1}{R \left(1 + \left(\frac{B}{2\pi R}\right)^2\right)} \quad (7.19)$$

D'après (D.3) le Writhe d'une telle hélice est égal à :

$$Wr = \frac{H}{B} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R/B)^2}}\right) \quad (7.20)$$

Il vient alors en utilisant (D.4) que le twist local le long du filament vaut :

$$\tau = 2\pi \frac{n - Wr}{L} \quad (7.21)$$

7.3. MODÈLE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE FILAMENT : 93

Afin d'alléger les notations, je note $X = 2\pi R/B$. Alors :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}\tau_w - \frac{2\pi(\sqrt{1+X^2}-1)}{B\sqrt{1+X^2}} \quad (7.22)$$

$$\kappa = \frac{2\pi X}{B(1+X^2)} \quad (7.23)$$

$$L = H\sqrt{1+X^2} \quad (7.24)$$

Avec ces notations :

$$\begin{aligned} E(B, X) &= L(E_L + E_\tau\tau^2 + E_\kappa\kappa^2) \\ &= \frac{H}{\sqrt{1+X^2}} \times \left[E_L(1+X^2) + E_\tau \left(\tau_w - \frac{2\pi(\sqrt{1+X^2}-1)}{B\sqrt{1+X^2}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + E_\kappa \left(\frac{2\pi X}{B\sqrt{1+X^2}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.25)$$

En posant $U = \sqrt{1+X^2}$ on obtient :

$$E = \frac{H}{U} \left(E_L U^2 + E_\tau \left(\tau_w - \frac{2\pi(U-1)}{BU} \right)^2 + E_\kappa \frac{4\pi^2(U^2-1)}{B^2 U^2} \right) \quad (7.26)$$

Les structures correspondant à un point d'équilibre du filament sont les hélices de pas B et de rayon R qui vérifient :

$$\partial_R U \partial_U E = 0. \quad (7.27)$$

Cette équation est suffisante ici dans la mesure où B ne peut prendre que des valeurs discrètes⁵.

7.3.3.2 Stabilité du filament droit :

Comme $\partial_R U$ est toujours nul en $R = 0$, on voit immédiatement que d'après (7.27) le filament droit twisté correspond toujours à une position d'équilibre. Cette position d'équilibre est stable si :

$$\partial_{R^2} U \partial_U E(U, B) + (\partial_R U)^2 \partial_{UU} E(U, B) \quad (7.28)$$

⁵Dans le cas d'un filament de longueur infinie, il faudrait y ajouter la condition : $\partial_B E + \partial_B U \partial_U E = 0$

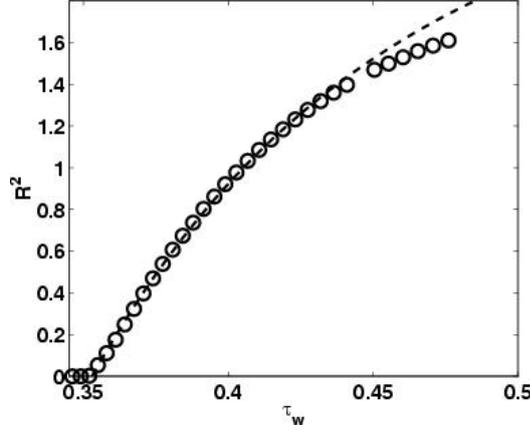


FIG. 7.7 – Carré de l’amplitude du sproing calculée lors des simulations numériques (o) et calculée en utilisant l’expression (7.36) avec $E_L = 1$, $E_\kappa = 1.3788$ et $E_\tau = 3.5952$ en fonction de τ_w .

est positif en $R = 0$. Comme en $R = 0$ $\partial_R U = 0$ et comme $\partial_{R^2} U$ est positif pour $R = 0$, cette condition se simplifie en $\partial_U E > 0$ en $U = 1$:

$$E_L - E_\tau(\tau_w^2 + \frac{4\pi}{B}\tau_w) + 2E_\kappa \frac{4\pi^2}{B^2} > 0. \quad (7.29)$$

Dans le cas d’un filament droit infini, cette condition doit être vérifiée quel que soit B . En appliquant les formule du binôme à cette inéquation, on obtient la condition de stabilité du filament droit infini :

$$(E_\tau^2 + 2E_\tau E_\kappa)\tau_w^2 - 2E_\kappa E_L < 0. \quad (7.30)$$

Dans le cas où le filament droit infini est instable, il est instable pour $2\pi/B$ variant entre :

$$k_{z\mp} = \frac{E_\tau \tau_w \mp \sqrt{E_\tau^2 \tau_w^2 - 2(E_L - E_\tau \tau_w^2)E_\kappa}}{2E_\kappa}. \quad (7.31)$$

7.3.3.3 Autres positions d’équilibre :

Equation générale : Les autres positions d’équilibre éventuelles correspondent à

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_U E(U, B) \\ 0 &= E_L U^4 - \left(E_\tau \left(\tau_w - \frac{2\pi}{B} \right)^2 + E_\kappa \left(\frac{2\pi}{B} \right)^2 \right) U^2 - \\ &- 4E_\tau \left(\left(\tau_w - \frac{2\pi}{B} \right) \left(\frac{2\pi}{B} \right) \right) U + 3(E_\tau - E_\kappa) \left(\frac{2\pi}{B} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.32)$$

7.3. MODÈLE PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE FILAMENT : 95

Cette équation du quatrième degré ne présente en général pas de solution analytique simple. Par contre dans le cas où $B = 2\pi/\tau_w$, elle se réduit à une équation bicarrée. Outre, cet intérêt technique, le cas $B = 2\pi/\tau_w$ présente pour intérêt de correspondre à la situation qui a été étudiée numériquement et dont les résultats sont présentés section 7.1. En effet, dans ce cas, on s'intéresse aux filaments hélicoïdaux dont le pas est la hauteur de la boîte de simulation et la longueur d'onde du twist qui est imposé au filament droit.

Cas $B = 2\pi/\tau_w$: Dans le cas où $B = 2\pi/\tau_w$, on voit que le terme en U de (7.32) disparaît. Cette équation s'écrit alors en utilisant pour inconnue R :

$$E_L \tau_w^4 R^4 + (2E_L - E_\kappa \tau_w^2) \tau_w^2 R^2 + 2E_\kappa \tau_w^2 + E_L - 3E_\tau \tau_w^2 = 0. \quad (7.33)$$

Le discriminant de cette équation du deuxième degré en $(R\tau_w)^2$ est :

$$\Delta = (2E_L - E_\kappa \tau_w^2)^2 - 4(E_L)(+2E_\kappa \tau_w^2 + E_L - 3E_\tau \tau_w^2) \quad (7.34)$$

Alors, en admettant que $E_\kappa \tau_w^2 < 2E_L$ (cette hypothèse est vérifiée a posteriori), cette équation n'admet de solutions qui ne soient pas imaginaires pures que si :

$$\tau_w > \sqrt{E_L / (3 * E_\tau - 2 * E_\kappa)} = \tau_c, \quad (7.35)$$

et la solution qui n'est pas imaginaire pure est :

$$\begin{aligned} (R\tau_w)^2 &= -1 + \frac{E_\kappa}{2E_L} \tau_w^2 + \sqrt{\left(1 - \frac{E_\kappa}{2E_L} \tau_w^2\right)^2 + \frac{\tau_w^2 - \tau_c^2}{\tau_c^2}} \\ R &= \frac{1}{\tau_w} \sqrt{-1 + \frac{E_\kappa}{2E_L} \tau_w^2 + \sqrt{\left(1 - \frac{E_\kappa}{2E_L} \tau_w^2\right)^2 + \frac{\tau_w^2 - \tau_c^2}{\tau_c^2}}} \quad (7.36) \end{aligned}$$

On voit que cette expression de R correspond à une bifurcation critique à $\tau = \tau_c$ et que pour des faibles valeurs de l'écart au seuil, E_κ n'intervient que par des termes en $(\tau_w - \tau_c)^{3/2}$ alors que R se comporte comme $\sqrt{\tau_w - \tau_c}$.

Un *fit* effectué sur les données présentées section 7.1.2 donne en posant $E_L = 1$: donne $\tau_c = 0.3529$ et $E_\kappa = 1.3788$. C'est à dire $E_L = 1$, $E_\kappa = 1.3788$ et $E_\tau = 3.5952$. En utilisant ces paramètres, l'amplitude du *sproing* mesurée numériquement est bien approchée par la courbe $R(\tau_w)$ (voir figure(7.7)). En particulier, la partie faiblement non-linéaire de la bifurcation (c'est à dire quand R se comporte comme la racine de l'écart au seuil) est approchée sans paramètre ajustable autre que la valeur du seuil.

7.3.4 Discussion :

J'ai développé un modèle phénoménologique de filament de spirale twisté. Bien que la dynamique relaxationnelle soit trop simpliste pour décrire de façon satisfaisante le comportement d'un filament de spirales soumis au twist, ce modèle reproduit bien certaines caractéristiques du comportement des filaments de spirales soumis au twist. Ces résultats laissent donc supposer qu'en utilisant l'analogie entre le filament de spirales et un filament élastique soumis à la torsion il sera possible de développer un modèle de filament qui approche bien le comportement des filaments de spirales.

Chapitre 8

Conclusion

Au cours de cette thèse, je me suis attaché à dresser un portrait de la dynamique des filaments d'ondes spirales dans les milieux excitables. Ce travail, limité au cas simple des filaments droits dans les milieux isotropes, a permis de mieux comprendre les différents comportements de ces filaments. Ce travail peut être divisé en deux parties distinctes : d'une part l'étude de la dynamique des filaments de spirales non twistés, d'autre part l'étude de l'influence du twist sur la dynamique des filaments.

Les filaments de spirales non twistés :

La comparaison de l'analyse de stabilité linéaire des ondes stationnaires avec les résultats de simulations numériques directes a permis de distinguer deux types d'instabilités des filaments d'ondes spirales : l'instabilité de courbure et l'instabilité de méandre tridimensionnel.

L'origine de la première instabilité est une déstabilisation des modes de translation pour les grandes longueurs d'ondes et elle conduit à un état désordonné. Le lien entre cette instabilité et la dérive en champ d'une onde spirale bidimensionnelle a été confirmé à la fois par les simulations numériques directes et par les résultats de l'analyse de stabilité linéaire.

La seconde instabilité observée dans les milieux excitables est de nature différente. En effet, elle provient d'une déstabilisation des modes de méandre tridimensionnels et aboutit à un état restabilisé qui a été caractérisé précisément. La bifurcation, ici, est une bifurcation de Hopf super critique, ce qui rejoint les résultats de l'étude de la bifurcation de méandre bidimensionnel.

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire mis en parallèle avec l'étude de la dérive d'une onde spirale bidimensionnelle dans un champ électrique et des simulations numériques directes de filaments de spirales mettent en évidence que, dans le régime de paramètre étudié, la transition entre la dé-

stabilisation et la restabilisation des modes de translation pour de petites valeurs du nombre d'onde coïncide avec la transition entre la déstabilisation et la restabilisation des modes de méandre aux grandes longueurs d'ondes. Par ailleurs, cette transition apparaît quand la pulsation des modes de méandre devient plus grande que la pulsation des modes de translation. Ce résultat laisse supposer que l'interaction entre modes de méandre et modes de translation doit jouer un rôle important dans la dynamique des filaments de spirales.

Afin de mieux comprendre ces résultats, il pourrait alors être utile d'étudier la stabilité linéaire des filaments de spirales au voisinage du point de codimension 2 du diagramme des phases qui correspond à l'intersection de la ligne de **MTW**¹ et de la ligne de méandre (voir figure 4.1). Cette étude demanderait une modification de l'algorithme utilisé pour déterminer le spectre de stabilité linéaire des filaments de spirales afin de déterminer la structure de l'opérateur d'évolution en temps pour des valeurs propres dégénérées de façon satisfaisante. Une autre approche qui pourrait amener à une explication de ce phénomène serait une étude des filaments de spirales dans un modèle d'interface fine dans la limite de faible excitabilité. En effet, dans cette limite, le méandre est bien compris, une étude de la dérive en champ d'une onde spirale dont le front avant interagit avec le passage du front arrière devrait permettre de comprendre l'inversion du sens de la dérive de l'onde spirale soumise à un champ électrique dans cette limite. Le méandre étant provoqué par l'interaction du front avant avec le passage précédent de l'onde d'excitation il est probable qu'un lien apparaisse entre le comportement des modes de méandre et de translation aux grandes longueurs d'ondes et la dérive de l'onde spirale dans un champ électrique.

Les filaments de spirales twistés :

La seconde partie de cette thèse a consisté en une étude de l'influence du twist sur la dynamique des filaments de spirales. Dans un premier temps, j'ai caractérisé les filaments de spirales twistés droits. Les calculs numériques des solutions stationnaires des équations aux dérivées partielles présentent un bon accord avec les résultats de l'approche de front mince pour de faibles valeurs du twist. Pour de plus grande valeur du twist, l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles met en évidence un comportement qui n'est pas prédit dans le modèle d'interface fine : une augmentation du rayon de rotation de l'onde spirale quand le twist imposé est accru. Ce phénomène

¹Les ondes spirales pour lesquelles l'instabilité de méandre se traduit par un mouvement de translation uniforme du centre de rotation de l'onde.

semble pouvoir être expliqué par l'interaction du front avant avec les passages précédents de l'onde d'excitation.

L'analyse de stabilité linéaire des filaments de spirales twisté soumis au twist a montré que les modes de translation des filaments d'ondes spirales, qui lorsqu'ils ne sont pas twistés sont stables, devenaient linéairement instables au delà d'une valeur critique du twist. Cette déstabilisation se produisant pour des longueurs d'ondes finies.

Des simulations numériques directes ont alors permis de caractériser l'instabilité dans le cas où seuls le mode de translation à $k_z = 0$ est instable et peut se développer dans le domaine de simulation. La bifurcation conduit à la formation d'un filament hélicoïdal, en rotation lente autour duquel l'onde spirale est en rotation rapide, ce comportement permet le relâchement de la contrainte de twist. Une étude quantitative a permis de déterminer le caractère super-critique de cette bifurcation.

Quand le domaine de simulation permet à un seul mode de nombre d'onde non nul dans le référentiel tournant twisté de se développer et que le mode de nombre d'onde nul est linéairement stable, le filament de spirale a un comportement analogue. Le filament moyen prend la forme d'une hélice en rotation lente dont la longueur d'onde est différente de la longueur caractéristique du twist. Enfin quand plusieurs modes instables peuvent se développer dans le domaine de simulation, le filament moyen prend la forme d'une onde se propageant à vitesse constante dans le milieu. La forme de cette onde diffère sensiblement d'une hélice et les résultats obtenus ne permettent pas de déterminer si cette onde est due à une instabilité secondaire ou à une compétition entre les différents modes instables lors du développement de l'instabilité primaire.

Une analogie entre cette bifurcation et le comportement d'un filament élastique soumis à la torsion a permis de développer un modèle phénoménologique de la dynamique de filament soumis au twist. Ce modèle reproduit assez bien les caractéristiques de la bifurcation de sproing et l'analyse de stabilité linéaire du filament droit dans ce modèle est en bon accord avec les résultats obtenus en utilisant les équations aux dérivées partielles. Cependant la dynamique relaxationnelle ne permet pas de bien reproduire certaines caractéristiques de la dynamique des filaments de spirales.

Le travail présenté ici a permis de classer les instabilités des filaments de spirales. En particulier, j'ai mis en évidence la différence de nature entre l'instabilité de courbure et l'instabilité de méandre tridimensionnel. L'étude des filaments de spirales twistés a mis en évidence que l'instabilité de sproing provient d'une déstabilisation des modes de translation et j'ai pu caractériser

la bifurcation observée.

Perspectives :

Plusieurs prolongements à ce travail apparaissent naturellement. Ainsi, la bifurcation de *sproing* dans le cas où plusieurs modes instables peuvent se développer dans le domaine de simulation n'est pas encore bien comprise. Des simulations numériques effectuées suivant différents protocoles² devraient permettre de déterminer si l'état final observé ici est le fruit d'une instabilité secondaire ou de la compétition entre les différents modes instables lors du développement de l'instabilité.

Une étude des modèles d'interface fine, en tenant compte du fait que le front avant ne se propage pas dans un milieu à l'équilibre devrait permettre une meilleure compréhension des interactions entre modes de méandre et de translation. Enfin, le modèle phénoménologique de la dynamique du filament de spirales soumis au twist semble pouvoir être amélioré afin de mieux reproduire les caractéristiques du filament d'ondes spirales twisté.

A ces prolongements liés à l'étude de la formation de structure dans des géométries simples s'ajoutent d'autres travaux possibles liés à l'étude de la dynamique des filaments de spirales dans le cœur. En effet, le cœur est un milieu dont la forme diffère sensiblement d'un parallélépipède. De plus l'orientation des fibres musculaires introduit dans le processus de diffusion une anisotropie dont l'orientation varie dans l'espace.

Ainsi, les effets de la géométrie du cœur sur la dynamique des filaments d'ondes spirales sont encore mal compris. La courbure des parois des muscles pourrait jouer un rôle important [16] dans le comportement des filaments d'ondes spirales. Afin de mieux comprendre ses effets, il semble profitable d'étudier la dynamique des filaments de spirales dans des domaines compris entre deux sphères.

De même, les effets de l'anisotropie sur la dynamique des ondes spirales ont été récemment étudiés. Néanmoins, aucun travail ne permet pour l'instant de comprendre les effets de l'anisotropie sur la dynamique des ondes spirales. Ainsi, l'origine des *twistons*³ observés par Fenton *et al.*[22] est encore indéterminée. Des études systématiques du comportement des filaments de spirales dans un milieu présentant une anisotropie tournante mis en parallèle avec les résultats de notre étude devrait permettre de mieux comprendre ces effets.

²Afin, par exemple d'étudier la stabilité de l'état restabilisé 'a $k_z = 0$ vis à vis de perturbations de grandes longueurs d'ondes

³Ondes de twist se propageant le long d'un filament de spirales dans un milieu anisotrope.

Enfin, j'espère que les résultats numériques présentés ici trouveront leur confirmation expérimentale dans des expériences dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky dans des gels.

Annexe A

Des ordinateurs vectoriels et de la vectorisation :

Certaines simulations numériques présentées dans cette thèse ont été effectuées sur un ordinateur vectoriel NECSX5 de l'IDRIS. Les particularités du fonctionnement de cette machine sont exposées succinctement ici (voir [2]).

A.1 Principe de fonctionnement :

Principe de fonctionnement simplifié d'un processeur *classique*

Une opération (une multiplication, une addition de réels en virgule flottante par exemple) est en général décomposée en une série d'instructions élémentaires par le processeur d'un ordinateur. Chacune de ces opérations est effectuée au cours d'un cycle d'horloge du processeur. Ainsi de façon très schématique, l'addition de deux réels se décomposera de la façon suivante :

1. égalisation des exposants des deux réels qui à l'origine sont sous la forme canonique : $0.xyz\dots \times 10^n$.
2. addition des mantisses
3. mise sous la forme canonique du résultat

chacune de ces instructions durant un cycle de l'horloge du processeur. Ainsi, une opération simple demande au processeur d'effectuer N instructions élémentaires qui prennent N cycles d'horloge.

Principe de la vectorisation : La vectorisation, consiste à remplacer le processeur effectuant chacune de ces opérations à la suite par une "chaîne"

de processeurs effectuant, chacun, une des instructions élémentaires¹. Ainsi, si on demande à la chaîne de processeur d'effectuer un grand nombre d'opérations similaires, à chaque cycle d'horloge, il effectuera une opération alors que s'il n'y avait qu'un processeur, une opération serait effectuée tous les N cycles.

Il en résulte que le nombre d'opérations similaires à effectuer est suffisamment grand pour compenser le temps de mise en place de la chaîne, une telle organisation du processeur permet un gain de temps très important dans la vitesse d'exécution des instructions. Ainsi, si on demande au processeur d'effectuer une même opération sur tous les éléments d'un même vecteur, la vectorisation de cette opération présente un intérêt remarquable dans la mesure où il permet de diviser par N le temps nécessaire à cette opération.

Ce principe se retrouve dans beaucoup d'architectures classiques. Dans le cas des ordinateurs vectoriels, elle s'accompagne d'une mise en parallèle de plusieurs "chaînes" de processeurs qui traitent chacune une partie du vecteur. Alors le temps de traitement de l'opérations à faire sur chacun des éléments du vecteur est considérablement réduite.

Autre particularité : Cette organisation du traitement des tâches ne suffirait pas à expliquer la différence de vitesse de traitement des vecteurs longs lors de l'utilisation des ordinateurs vectoriels. En effet, pour que le processeur puisse traiter les vecteurs aussi rapidement, il faut que les données lui soit acheminées suffisamment rapidement afin qu'il ne passe pas un temps trop important à les attendre.

A cette fin la mémoire des ordinateurs vectoriels est organisée de façon à ce qu'une fois que le premier élément d'un vecteur est acheminé vers le processeur, le temps de latence entre l'acheminement d'un élément du vecteur et les suivants soit très court (un cycle d'horloge du processeur). Cette organisation de la mémoire permet donc d'utiliser au maximum les capacités du processeur lors du traitement des longs vecteurs : il n'a pas à attendre l'arrivée des données à traiter.

A.2 Contraintes liées à l'utilisation d'un ordinateur vectoriel :

La première contrainte qui apparaît lors de l'utilisation d'un ordinateur vectoriel est que pour que cet ordinateur présente des performances sensi-

¹Les instructions élémentaires à effectuer sont assignées à chacun des processeurs au début de la série d'opérations

blement supérieures à celles d'un ordinateur classique, il faut avoir à traiter des vecteurs longs. En effet, mis à part lors du traitement d'un vecteur long, les performances d'un tel ordinateur sont sensiblement équivalentes à celles d'un ordinateur scalaire, alors que lors du traitement de vecteurs longs, elles sont bien meilleures. Donc le programme doit passer la plus grande partie du temps de calcul dans des opérations sur des vecteurs longs.

Par ailleurs, l'optimisation des accès mémoire nécessite que lors du traitement d'un vecteur, les éléments soient traités sans qu'il ne soit fait de saut d'indice. En effet, un saut d'indice augmente sensiblement le temps d'accès à la mémoire et donc les performances de l'ordinateur. Dans le cas du NECSX5, les sauts d'indice pairs sont particulièrement à éviter. En effet, alors que les sauts d'indice impairs multiplient le temps d'accès à la mémoire d'un facteur 2, les sauts d'indice pair peuvent le multiplier par un facteur allant jusqu'à 16 [32].

Enfin une dernière contrainte, et non des moindres, liée à l'utilisation d'un ordinateur vectoriel est que dans une boucle portant sur les indices d'un vecteur, aucune opération ne dépend du résultat d'une opération précédente. En effet, sinon, quand la boucle est vectorisée, il est fort probable que la valeur qui sera utilisée pour effectuer la seconde opération ne sera pas celle issue de la première opération mais celle stockée en mémoire avant que la première opération ne soit effectuée. Le résultat obtenu ne sera donc pas celui souhaité. Un exemple simple est fourni par la boucle :

```
do i=1,N
  a=a+x(i)*y(i)
enddo
```

Cette boucle peut être vectorisée par le compilateur et amener à un résultat faux. Afin d'éviter ce problème, il faut, via une directive de compilation, indiquer que cette boucle² ne doit pas être traitée de manière vectorielle.

²Le compilateur fournit un fichier où la façon dont les boucles sont traitées est indiquée. Il est alors possible de vérifier qu'aucun problème de ce type ne se posera.

Annexe B

Propriétés de \mathcal{L}_{k_z}

L'équation (2.1) est invariante par translation dans le temps et par toutes les isométries de l'espace. Ces propriétés imposent que pour une solution stationnaire donnée, toute perturbation qui correspond à une de ces transformations est marginalement stable, c'est à dire que c'est un mode propre de valeur propre 0 de l'opérateur d'évolution en temps linéarisé autour de la solution stationnaire.

Je présente ici les calculs qui permettent de déterminer l'expression de ces modes propres ainsi que l'expression de la valeur propre qui leur est associée dans les référentiels utilisés pour l'analyse de stabilité linéaire.

B.1 Rappel des équations de stationnarité et du problème linéarisé :

Le problème stationnaire dans le référentiel twisté est donné par l'équation (3.11)

$$\begin{cases} 0 &= \omega \partial_\phi u \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \partial_{r^2} u + (\frac{1}{r^2} + \tau_w^2) \partial_{\phi^2} u + \frac{1}{r} \partial_r u \\ 0 &= \omega \partial_\phi v g(u, v) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Une fois la solution stationnaire dans le référentiel tournant $U_0(x', y') = (u_0, v_0)$ calculée, on linéarise l'opérateur d'évolution en temps et on se ramène au problème aux valeurs propres (3.15) :

$$\begin{cases} \sigma(k_z) u_1 &= (-k_z^2 + 2i\tau_w k_z \partial_\phi) u_1 + (\omega_1 \partial_\phi + \tau_w^2 \partial_{\phi^2} + \nabla_{2D}^2) u_1 + \\ &+ [\partial_u f(u_0, v_0) u_1 + \partial_v f(u_0, v_0) v_1] / \epsilon \\ \sigma(k_z) v_1 &= \omega_1 \partial_\phi v_1 + [\partial_u g(u_0, v_0) u_1 + \partial_v g(u_0, v_0) v_1] \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

On note dans la suite $\tilde{U}_0(x, y, z, t)$ la solution stationnaire correspondant à $U_0(x', y')$ dans le référentiel du laboratoire. Il vient alors que $\tilde{U}_0(x, y, z, t) =$

$U_0(\cos(\Phi(z, t))x + \sin(\Phi(z, t))y, -\sin(\Phi(z, t))x + \cos(\Phi(z, t))y)$ avec $\Phi(z, t) = \omega t + \tau_w z$.

Formellement on écrit (B.2) : $\sigma(k_z)U_1 = \mathcal{L}_{k_z}U_1$.

B.2 Propriétés générales des modes propres de \mathcal{L}_{k_z} et de son adjoint :

B.2.1 Cas $\tau_w = 0$:

Dans ce cas, pour toute valeur de k_z , \mathcal{L}_{k_z} est un opérateur réel. Par ailleurs, $\mathcal{L}_{k_z} = \mathcal{L}_{-k_z}$. Alors on sait que si u_1 est mode propre de \mathcal{L}_{k_z} avec la valeur propre σ :

$$\mathcal{L}_{-k_z}u_1 = \sigma u_1 \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{L}_{k_z}u_1^* = \sigma^* u_1^* \quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{L}_{-k_z}u_1^* = \sigma^* u_1^* \quad (\text{B.5})$$

B.2.2 Cas $\tau_w \neq 0$:

Dans ce cas, la seule propriété remarquable de \mathcal{L}_{k_z} est que $\mathcal{L}_{k_z} = \mathcal{L}_{-k_z}^*$. La seule relation des modes et valeurs propres de \mathcal{L}_{k_z} est que si $\mathcal{L}_{k_z}u_1 = \sigma u_1$ alors :

$$\mathcal{L}_{-k_z}u_1^* = \sigma^* u_1^*. \quad (\text{B.6})$$

Cette relation permet de déduire la partie du spectre de \mathcal{L}_{k_z} , pour $k_z < 0$ de celle obtenue pour les $k_z > 0$.

B.2.3 Modes propres de l'opérateur adjoint $\tilde{\mathcal{L}}$:

Certaines relations liant la dynamique des filaments de spirales aux propriétés des spirales bidimensionnelles, font intervenir le produit scalaire de certains modes propres de \mathcal{L} avec les modes propres de son adjoint. Néanmoins, le produit scalaire utilisé est souvent mal défini et l'existence même des produits scalaires est parfois sujette à caution.

Ici, nous considérons l'adjoint de \mathcal{L} par rapport au produit scalaire défini ainsi :

$$(g, f) = \int \int g^* f dx dy \quad (\text{B.7})$$

Cette définition n'a *a priori* aucune raison d'être valide, mais les résultats numériques obtenus, montrent que dans ce cas, les modes de l'opérateur

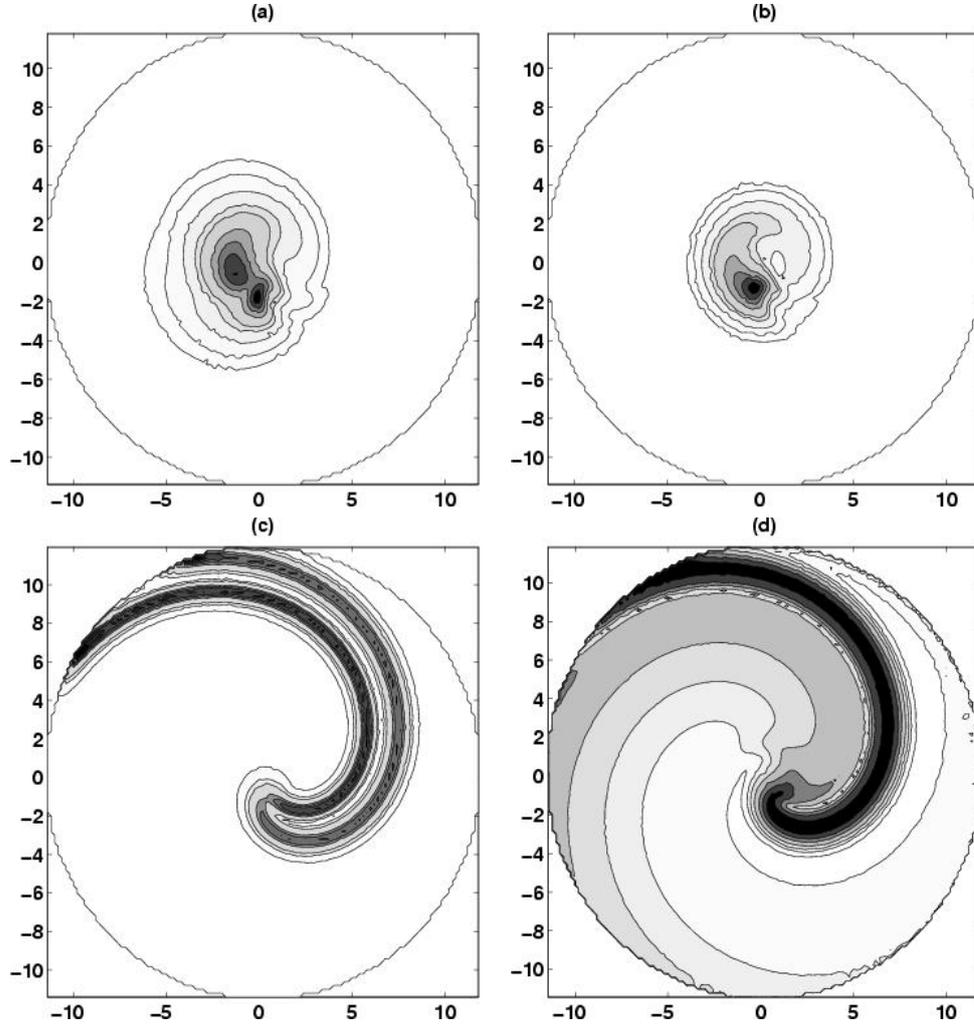


FIG. B.1 – (a), (b), (c) and (d), contour du module des champs u et v du mode adjoint de valeur propre $i\omega_1$ de l'opérateur d'évolution en temps linéarisé autour d'une solution stationnaire (a) et (b) à $k_z = 0$ et du mode propre de translation correspondant (c) et (d). Le maximum des champs est fixé à 1 et les lignes de contour sont prises pour $u, v = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ and 0.9 (a) et (b), $u = 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ and 0.7 (c) et $v = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ and 0.8 (d). Les paramètres ont pour valeur : $a = .44, b = 0.01$ et $\epsilon = 0.025$. La pulsation de l'onde spirale est $\omega = 1.1612$.

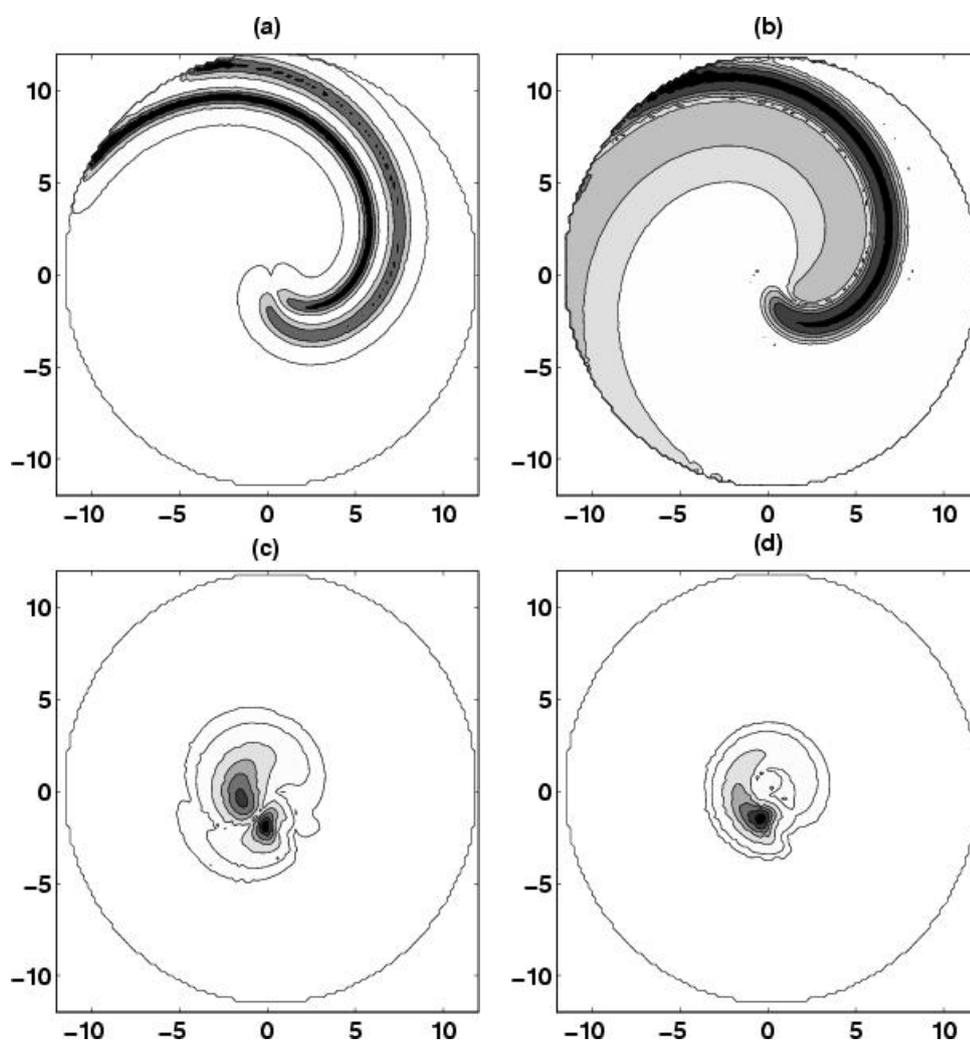


FIG. B.2 – (a), (b), (c) and (d), contour du module des champs u et v du mode adjoint de valeur propre 0 de l'opérateur d'évolution en temps linéarisé autour d'une solution stationnaire (c) et (d) à $k_z = 0$ et du mode propre de rotation correspondant (a) et (b). Le maximum des champs est fixé à 1 et les lignes de contour sont prises pour $u = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5$ et 0.7 (a), $v = 0.001, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8 (b) et $v, u = 0., 0.001, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 0.9 (c) et (d). Les valeurs des paramètres sont les mêmes que pour la figure (B.1)

adjoint sont localisés au centre de rotation (voir figures (B.2) et (B.1)) de la spirale et décroissent exponentiellement en fonction du rayon, ce qui garanti d'une part la définition de ce produit scalaire, d'autre part qu'un calcul effectué sur un domaine fini sans tenir compte des éventuels termes de bord est correct.

B.3 Modes propres marginaux liés aux symétries du problème :

B.3.1 Invariance par translation dans le temps, mode de rotation :

Si on considère une petite translation dans le temps dans le référentiel du laboratoire, la perturbation au premier ordre de l'état stationnaire s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$\tilde{U}_1(x, y, z, t) = \partial_t \tilde{U}_0 \quad (\text{B.8})$$

Il vient alors immédiatement par changement de repère que dans le référentiel tournant \tilde{U}_1 est proportionnel à :

$$U_1(r, \phi, t) = \partial_\phi U_o(r, \phi) \quad (\text{B.9})$$

qui est le mode propre associé à la valeur propre 0 de l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}_{k_z=0}$.

B.3.2 Mode propre dû à l'invariance par translation

Les modes propres associés à l'invariance par translation dans l'espace sont plus difficiles à déterminer du fait de la forme particulière du référentiel utilisé. On considère une petite translation (x_1, y_1) de l'état stationnaire dans le référentiel du laboratoire. Alors dans le référentiel tournant (dont le centre est situé en $x = 0, y = 0$), la solution correspondant à la spirale translatée devient :

$$\begin{aligned} U(x', y') &= U_0((x - x_1) \cos \Phi + (y - y_1) \sin \Phi, -(x - x_1) \sin \Phi + (y - y_1) \cos \Phi) \\ &= U_0(x' - \cos(\Phi)x_1 - \sin(\Phi)y_1, y' + \sin(\Phi)x_1 - \cos(\Phi)y_1) \\ &= U_0\left(x' - \left(\frac{x_1 - iy_1}{2}e^{i\Phi} + c.c.\right), y' + \left(i\frac{x_1 - iy_1}{2}e^{i\Phi} + c.c.\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Alors au premier ordre en (x_1, y_1) , dans le référentiel tournant :

$$\begin{aligned} U(x', y') &= U_0(x', y') + \frac{x_1 - iy_1}{2} e^{i\Phi} (\partial_{x'} + i\partial_{y'}) U_0 + c.c. \\ &= U_0(x', y') + \frac{x_1 - iy_1}{2} e^{i(\phi+\Phi)} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) U_0 + c.c. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

On vérifie alors que :

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = e^{i\phi} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) U_0 \quad (\text{B.12})$$

est mode propre de l'opérateur linéarisé \mathcal{L}_{k_z} pour $k_z = -\tau_w$ avec la valeur propre $i\omega$ alors que :

$$e^{-i\phi} (\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\phi) U_0 \quad (\text{B.13})$$

est vecteur propre de \mathcal{L}_{k_z} pour $k_z = \tau_w$ avec la valeur propre $-i\omega$.

Pour $\tau_w = 0$, les équations (B.3) impliquent que les valeurs propres $\pm i\omega$ sont des extrema des branches de translation. Par contre dans le cas où $\tau_w \neq 0$, cette propriété n'est *a priori* pas vérifiée. Dans ce cas, un calcul perturbatif montre que pour $k_z = \tau_w + \delta k_z$ la valeur propre de la branche de translation associée à la valeur propre $-i\omega$ vaut :

$$\sigma_t(\tau_w + \delta k_z) = i\omega + \frac{2\tau_w (\tilde{u}_t \cdot (1 + i\partial_\phi) u_t)}{(\tilde{u}_t \cdot u_t) + (\tilde{v}_t \cdot v_t)} \delta k_z + O(\delta k_z^2) \quad (\text{B.14})$$

où, (u_t, v_t) est le mode propre de translation de $\mathcal{L}_{k_z=\tau_w}$ et $(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t)$ est le mode propre à gauche de $\mathcal{L}_{k_z=\tau_w}$ associé à la valeur propre $-i\omega$. En effet, soit $\mathcal{L}_{k_z+\delta k_z}$, on peut écrire son mode propre situé sur la branche de translation sous la forme $U_t + \delta u$, $v_t + \delta v$, la valeur propre de ce mode propre s'écrivant alors $-i\omega + \delta\sigma$. Au premier ordre on obtient alors :

$$\delta\sigma \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} - i\omega \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = 2\delta k_z \tau_w (1 + i\partial_\phi) \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{k_z=\tau_w} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

En multipliant à gauche cette équation par $(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t)$ on obtient l'équation (B.14) .

B.3.3 Mode propre du à l'invariance par rotation tridimensionnelle

Les équations (2.1) sont invariantes par rotation tridimensionnelle, donc par un changement de repère qui correspond à une légère inclinaison de l'axe

Oz . On s'attend alors à ce que la perturbation de la solution stationnaire correspondant à ce changement de repère fasse apparaître un mode propre particulier de l'opérateur \mathcal{L}_{k_z} . Dans la suite de cette section, je calcule cette perturbation.

Considérons le changement de repère correspondant à une légère inclinaison de l'axe vertical. Dans le repère du laboratoire la matrice de passage correspondant est (au premier ordre) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\psi_1 \\ 0 & 1 & \delta\psi_2 \\ -\delta\psi_1 & -\delta\psi_2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

où $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ sont petits devant 1.

A la solution stationnaire $U(x, y, z, t)$ dans l'ancien repère correspond alors la solution $U(X + \delta\psi_1 Z, Y + \delta\psi_2 Z, Z - \delta\psi_1 X - \delta\psi_2 Y, t)$ dans le nouveau repère. En remplaçant U_0 par son équivalent dans le référentiel tournant twisté on obtient que la solution dans le nouveau repère a pour forme :

$$U = U_0((X + \delta\psi_1 Z) \cos(\Phi) + (Y + \delta\psi_2 Z) \sin(\Phi), \\ , -(X + \delta\psi_1 Z) \sin(\Phi) + (Y + \delta\psi_2 Z) \cos(\Phi)) \quad (\text{B.17})$$

$$\Phi = \omega_1 t + \tau_w Z - \tau_w(\delta\psi_1 X + \delta\psi_2 Y) \quad (\text{B.18})$$

$$= \Phi_0 - \delta\Phi \quad (\text{B.19})$$

En développant ces équations au premier ordre en $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$, on obtient :

$$U = U_0(X \cos(\Phi_0) + Y \sin(\Phi_0) + \delta\psi_1 Z \cos(\Phi_0) + \delta\psi_2 Z \sin(\Phi_0) + \\ + \delta\Phi(X \sin(\Phi_0) - Y \cos(\Phi_0)), \\ , -X \sin(\Phi_0) + Y \cos(\Phi_0) - \delta\psi_1 Z \sin(\Phi_0) + \delta\psi_2 Z \cos(\Phi_0) + \\ + \delta\Phi(X \delta\Phi \cos(\Phi_0) + Y \sin(\Phi_0))) \quad (\text{B.20})$$

Cette équation donne alors en utilisant(B.11) :

$$U = U_0(X' - \delta\Phi Y', Y' + \delta\Phi X') + \\ + \frac{-\delta\psi_1 Z + i\delta\psi_2 Z}{2} e^{i(\phi + \Phi_0)} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) U_0 + c.c. \quad (\text{B.21})$$

On obtient alors en continuant le développement :

$$U = U_0(X', Y') + \\ + \delta\Phi \partial_\phi U_0 + \\ + Z \frac{-\delta\psi_1 + i\delta\psi_2}{2} e^{i\Phi} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) U_0 + c.c. \quad (\text{B.22})$$

En écrivant alors $\delta\Phi$ en fonction de X' et Y' :

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= -\tau_w(\delta\psi_1(X' \cos(\Phi_0) - Y' \sin(\Phi_0)) + \\ &\quad + \delta\psi_2(X' \sin(\Phi_0) + Y' \cos(\Phi_0))) \\ &= +\tau_w r \left(\frac{-\delta\psi_1 + i\delta\psi_2}{2} e^{i\Phi_0} \right) + c.c.\end{aligned}\quad (\text{B.23})$$

on obtient l'expression de U dans le nouveau repère au premier ordre en $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$:

$$\begin{aligned}U &= U_0(X', Y') +, \\ &\quad + (\tau_w r \left(\frac{-\delta\psi_1 + i\delta\psi_2}{2} e^{i(\Phi_0 + \phi)} \right) + c.c.) \partial_\phi U_0 \\ &\quad + Z \frac{-\delta\psi_1 + i\delta\psi_2}{2} e^{i(\phi + \Phi_0)} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) U_0 + c.c. \\ &= U_0(X', Y') +, \\ &\quad + e^{i\Phi_0} \left(\frac{-\delta\psi_1 + i\delta\psi_2}{2} \right) (Z e^{i\phi} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) + \tau_w r e^{i\phi} \partial_\phi) U_0 + c.c.\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} u_{inc} \\ v_{inc} \end{pmatrix} = e^{i\Phi_0} (z e^{i\phi} (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) + \tau_w r e^{i\phi} \partial_\phi) U_0 = e^{i\Phi_0} \begin{pmatrix} u_{tilt} \\ v_{tilt} \end{pmatrix}\quad (\text{B.25})$$

et le complexe conjugué sont solutions des équations (2.1) linéarisées autour de l'état stationnaire :

$$\begin{cases} (\partial_t + 2\tau_w \partial_{\phi z} - \partial_{zz}) u_{inc} &= (\omega \partial_\phi + \tau_w^2 \partial_{\phi\phi} + \Delta_{2D}) u_{inc} + \partial_u f u_{inc} + \partial_v f v_{inc} \\ (\partial_t) v_{inc} &= \omega \partial_\phi v_{inc} + \partial_u g u_{inc} + \partial_v g v_{inc} \end{cases}\quad (\text{B.26})$$

B.3.3.0.1 Conséquence : L'équation (B.26) peut s'écrire en utilisant l'opérateur $\mathcal{L}_{k_z = \tau_w}$ et le vecteur (u_{tilt}, v_{tilt}) :

$$(\mathcal{L}_{k_z = -\tau} - i\omega) \begin{pmatrix} u_{tilt} \\ v_{tilt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\tau_w(1 + i\partial_\phi) u_t \\ 0 \end{pmatrix}\quad (\text{B.27})$$

où (u_t, v_t) est le mode de translation (voir équation B.12). En multipliant cette expression à gauche par le mode adjoint associé à (u_t, v_t) , on obtient alors que :

$$0 = (\tilde{u}_t \cdot -i(1 + i\partial_\phi) u_t)\quad (\text{B.28})$$

et donc d'après (B.14) que les valeurs propres $\pm i\omega$ obtenues en $k_z = \mp \tau_w$ des modes de translation continuent d'être des extrémas des branches de translation, quand le twist n'est pas nul.

Annexe C

Calcul de la vitesse d'un front courbe :

On cherche dans ce chapitre à déterminer la vitesse d'un front courbe dans l'approximation d'interface fine. Ici, l'interface est une surface, \mathcal{S} . On suppose qu'au voisinage de cette surface, la valeur du champ u en un point M ne dépend que de la distance $d(M, \mathcal{S})$ de ce point à la surface.

Localement, toute surface est approchée par le sommet d'un parabolôïde \mathcal{P} , on détermine, à l'ordre dominant, la distance d'un point proche du sommet au parabolôïde. On en déduit la forme de l'équation vérifiée par $u(d)$ et ainsi la vitesse du front.

C.1 Distance d'un point à un parabolôïde

On cherche à déterminer la distance d'un point proche du sommet d'un parabolôïde \mathcal{P} à ce parabolôïde. L'équation du parabolôïde est :

$$x = -\frac{a}{2} \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (\text{C.1})$$

Les deux courbures principales du parabolôïde au sommet ont pour valeurs $\kappa_1 = 1/\rho_1 = a/b^2$ et $\kappa_2 = 1/\rho_2 = a/c^2$. Soit M un point de coordonnées (ξ_0, η_0, ζ_0) avec $\|(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\| \ll \rho_i$. Alors, la distance de M à \mathcal{P} est la distance de M au point $N = (\xi, \eta, \zeta)$ de \mathcal{P} tel que $\vec{MN} \perp \mathcal{P}$. Les coordonnées de N vérifient donc le système d'équation :

$$0 = (\xi - \xi_0)(-a\zeta) + c^2(\zeta - \zeta_0) \quad (\text{C.2})$$

$$0 = (\xi - \xi_0)(-a\eta) + b^2(\eta - \eta_0) \quad (\text{C.3})$$

$$\xi = -\frac{a}{2} \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \right) \quad (\text{C.4})$$

Les équations (C.2,C.3) deviennent :

$$\eta = \eta_0 + (\xi - \xi_0) \frac{a\eta_0}{b^2} \quad (\text{C.5})$$

$$\zeta = \zeta_0 + (\xi - \xi_0) \frac{a\zeta_0}{c^2} \quad (\text{C.6})$$

En injectant ces résultats dans l'équation (C.4) on obtient l'équation :

$$0 = \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{a^2}{c^4} \right) (\xi - \xi_0)^2 + 2 \left(\frac{a\eta_0}{b^2} + \frac{a\zeta_0}{c^2} + \frac{1}{a} \right) (\xi - \xi_0) + \left(\frac{\zeta_0^2}{c^2} + \frac{\eta_0^2}{b^2} + \frac{2\xi_0}{a} \right) \quad (\text{C.7})$$

En ne gardant que les termes dominants :

$$\xi - \xi_0 = - \left(\xi_0 + \frac{a}{2} \left(\frac{\zeta_0^2}{c^2} + \frac{\eta_0^2}{b^2} \right) \right) \quad (\text{C.8})$$

$$\eta - \eta_0 = - \left(\xi_0 + \frac{a}{2} \left(\frac{\zeta_0^2}{c^2} + \frac{\eta_0^2}{b^2} \right) \right) \frac{a\eta_0}{b^2} \quad (\text{C.9})$$

$$\zeta - \zeta_0 = - \left(\xi_0 + \frac{a}{2} \left(\frac{\zeta_0^2}{c^2} + \frac{\eta_0^2}{b^2} \right) \right) \frac{a\zeta_0}{c^2} \quad (\text{C.10})$$

On obtient alors à l'ordre dominant :

$$d(M, f) = \xi_0 + \frac{a}{2} \left(\frac{\eta_0^2}{b^2} + \frac{\zeta_0^2}{c^2} \right) \quad (\text{C.11})$$

C.2 Equation vérifiée par $u(d)$:

Dans l'hypothèse d'interface fine, on sait que u vérifie dans la région du front l'équation :

$$-c\partial_d u = \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \epsilon \Delta u \quad (\text{C.12})$$

où c_n est la vitesse normale du front et où v est considéré comme constant. Ici, d'après (C.11), Δu vaut en ne gardant que les termes dominants :

$$\Delta u = \partial_{dd} u + \left(\frac{a}{b^2} + \frac{a}{c^2} \right) \partial_d u \quad (\text{C.13})$$

Ainsi, l'équation vérifiée par $u(d)$ devient :

$$(-c_n - \epsilon(\kappa_1 + \kappa_2))\partial_d u = \frac{1}{\epsilon} f(u, v) + \epsilon \Delta u \quad (\text{C.14})$$

Ainsi de la même façon qu'en section 2.3.1.1 on en déduit que :

$$c_n = c_0(v) - \epsilon(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (\text{C.15})$$

Annexe D

Quelques propriétés des rubans. Application aux filaments de spirales

Dans cette appendice, je définis le twist d'un ruban et je donne quelques propriétés géométriques qui permettent de le calculer dans certains cas simples. Ensuite, je montre comment on peut assimiler un filament de spirales à un ruban fermé et j'utilise les propriétés des rubans pour calculer le twist des filaments de spirales.

D.1 Twist, nombre de liens et Writhe d'un ruban

D.1.1 Twist :

Le twist d'un ruban est le taux de rotation local de l'un de ses bords autour de son axe médian. Mathématiquement si on note $\vec{r}(s)$, la position de l'axe médian en fonction de l'abscisse curviligne[27], $\vec{t}(s)$, le vecteur tangent à l'axe médian et $\vec{p}(s)$ le vecteur unitaire normal à l'axe médian dirigé vers le bord du ruban, le twist noté τ vaut :

$$\tau = \left(\frac{d}{ds} (\vec{p}) \wedge \vec{p} \right) \cdot \vec{t} \quad (\text{D.1})$$

D.1.2 Linking number :

Un autre nombre caractéristique d'un ruban est le nombre d'enlacements de ses bords, noté L_k . Il correspond au nombre de fois que l'un des bords

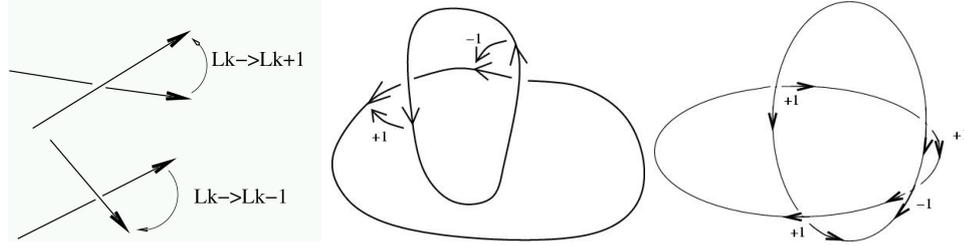


FIG. D.1 – A gauche : illustration de la méthode de calcul du Linking number en utilisant la projection sur un plan des deux bords du ruban. A droite deux exemples : dans le premier cas le linking number est égal à 0 : le deux filaments ne sont pas enlacés : on peut réduire un bord continûment à un point sans intersecter l'autre, alors que dans le second le Linking number est égal à un : chaque bord passe une fois à travers l'autre.

Il passe à travers la boucle formée par l'autre¹. Il peut être calculé de la manière suivante : on projette les deux bords sur un plan et on considère les intersections des deux bords (On ignore ici les autos-intersections d'un bord). Si le croisement est tel que pour faire coïncider le vecteur tangent au bord du *dessus* avec le vecteur tangent au bord du *dessous* on doit faire tourner ce dernier dans le sens des aiguilles d'une montre, on affecte au croisement la valeur $\epsilon = +1$, dans le cas contraire on lui affecte la valeur -1 (voir figure(D.1)). Le linking number est alors égal à la somme des ϵ divisée par 2[27, 80]. Cette définition du Linking number est dépendante du sens dans lequel on parcourt chacun des bords.

Ce nombre est un invariant topologique du ruban, il est invariant par déformation continue du ruban.

D.1.3 Writhe :

Enfin un troisième nombre caractéristique du ruban est son Writhe[26]. Ce nombre de dépend que de la géométrie de de l'axe médian du ruban et vaut :

$$W_r = \frac{1}{4\pi} \int ds \int ds' \frac{\partial_s \vec{r}(s) \wedge \partial_s \vec{r}(s') \cdot [\vec{r}(s) - \vec{r}(s')]}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (D.2)$$

Il est aisé de remarquer que dans le cas d'un ruban dont l'axe médian est dans un plan, le Writhe est nul.

¹On se limite au cas simple où chacun des bords ne forme pas de nœud.

La forme (D.2) permet de définir le writhe. Cependant sa signification géométrique n'apparaît pas immédiatement et son calcul est assez lourd. Il est néanmoins possible de calculer le Writhe à un entier pair près, comme étant la surface de la sphère unité entourée par le vecteur tangent à l'axe médian du ruban divisée par 2π .

Ainsi dans le cas d'une hélice, de pas H et de rayon r , le Writhe vaut à un entier pair près :

$$W_r = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi r/H)^2}} \quad (\text{D.3})$$

L'une des propriétés les plus remarquables des trois nombres qui ont été définis plus haut est que :

$$L_k = W_r + \frac{1}{2\pi} \int \tau ds \quad (\text{D.4})$$

Cette formule lie ainsi un invariant topologique du ruban qui est invariant par déformation continue à une propriété de l'axe médian et à l'intégrale d'une propriété locale du ruban : le twist.

D.2 Lien entre un filament de spirale et un ruban :

Il existe deux définitions du filament de spirales. dans l'une on définit le filament instantané qui est l'intersection de deux isosurfaces de u et de v . L'autre est le filament moyen qui est soit la région du milieu dont l'état varie le moins au cours d'une rotation de la spirale, soit le lieu des centres instantané de rotation. Ces deux définitions sont équivalentes dans le cas des spirales en rotation uniforme. On définit ainsi un ruban dont l'axe médian est le filament moyen et dont l'un des bord est le filament instantané. L'autre bord étant le symétrique de ce bord par rapport à l'axe médian. Alors, le twist du filament est le twist du ruban ainsi défini et les propriétés géométriques du filament sont celles du ruban.

Afin de se ramener à un ruban fermé, on complète le ruban ainsi obtenu en joignant le dessus de la boîte de simulation au dessous par un ruban dont l'axe médian est plan et qui a un twist uniformément nul. Ainsi, la partie ajoutée au ruban ne contribue ni au twist ni au writhe du ruban : elle est plane et non twistée (voir figure (D.2)).

On voit alors que lors de simulations dans une boîte avec conditions au bords périodiques, la somme de la contribution au Writhe du filament moyen

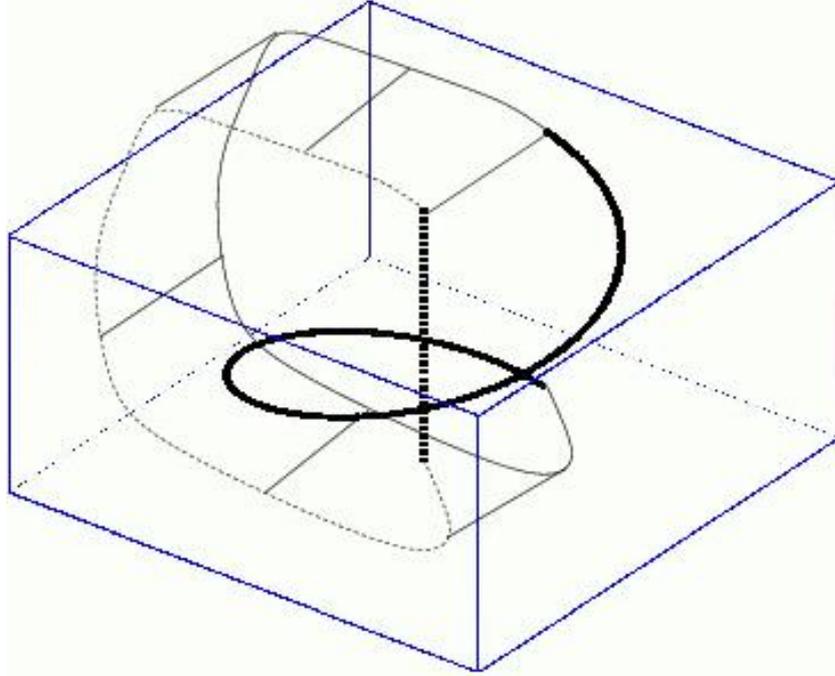


FIG. D.2 – Schéma de principe de la façon dont on peut assimiler un filament de spirales à un ruban fermé. La boîte de simulation est représentées par le parallélépipède, les filaments moyens et instantanée dans la boîte de simulation sont représentés respectivement par la droite en traits pointillés et gras et l'hélice en trait continu gras. Les lignes en traits fin pointillés et continus complètent respectivement le filament moyen et le filament instantanée. Elles forment un ruban non twisté dont la contribution au Writhe est nulle.

et du twist est conservée. Ainsi si le filament moyen reste droit, le twist moyen le long de celui ci est conservé.

De même, si initialement on considère un filament moyen initial rectiligne twisté avec un tour sur une hauteur H (Son nombre d'enlacement est égal à un) qui prend la forme d'une hélice de rayon R , Le Writhe a alors pour valeur $(1 - \cos \theta) = (1 - 1/(\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2/H^2}))$, ce qui implique que le twist total est égal à :

$$2\pi \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2/H^2}} \quad (D.5)$$

Et donc, la longueur de l'hélice étant $\sqrt{4\pi^2 R^2 + H^2}$ le twist local, est égal à :

$$\frac{2\pi}{H(1 + 4\pi^2 R^2/H^2)} \quad (D.6)$$

Annexe E

Publication et prépublication

E.1 Publication

Reproduction de l'article paru dans *Physical review Letters* volume **85** pages 5328-5331.

Dans cet article nous présentons les premiers résultats de l'analyse de stabilité linéaire des filaments des spirales twistés et non twistés qui fait l'objet des chapitres 4 et 6 de ce manuscrit.

Linear Stability of Scroll Waves

Hervé Henry and Vincent Hakim

Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
(Received 16 August 2000)

A full linear stability of a straight scroll wave in an excitable medium is presented. The five eigenmode branches which correspond to deformation in the third dimension of the five main modes of two-dimensional (2D) spiral dynamics are found to play a dominant role. For untwisted scroll waves, modulations in the third dimension have stabilizing or destabilizing effects on the different modes depending on the parameter regimes, in partial agreement with previous predictions. The influence of twist on the different branches is investigated. In particular, the sprouting instability is seen to arise from the twist-induced deformation of the translation branches above a threshold twist.

PACS numbers: 47.20.Hw, 02.60.-x, 87.19.Hh

Scroll waves are three-dimensional (3D) extensions of the familiar spirals [1] of excitable media. They have been directly observed in three-dimensional chemical reactions in gels [2] and are suspected to play a role in the slug phase of slime molds life cycle [3] and most importantly in ventricular fibrillation [4,5]. Numerous simulations of scroll waves have been performed, different instabilities have been noted [6–8], and a somewhat similar phenomenology has been found for 3D complex Ginzburg-Landau vortices [9]. However, even in the simplest case of an homogeneous and isotropic excitable medium, the mechanisms of the different instabilities, their systematics, and the influence of scroll wave twist still appear poorly understood. We attempt here to bring some clarification by performing a full linear stability analysis of straight scroll waves in various parameter regimes. In contrast to earlier stability studies [8,10], this gives access not only to the most unstable eigenmode but also to the other, stable or unstable, modes. In particular, this enables us to follow the five branches of modes which emerge from the two translation modes, the rotation zero mode and the two Hopf bifurcation meander modes of 2D spiral motion. As for spirals [11], these are found to play the dominant role in scroll wave dynamics.

The excitable medium dynamics is described in a simplified but useful way by the two-variables reaction-diffusion system

$$\partial_t u = \nabla^2 u + f(u, v)/\varepsilon, \quad (1)$$

$$\partial_t v = \delta \nabla^2 v + g(u, v). \quad (2)$$

We restrict ourselves to the singly diffusive case with $\delta = 0$ and choose for definiteness Barkley's reaction terms [12] with $f(u, v) = u(1 - u)[u - (v + b)/a]$, $g(u, v) = u - v$ which permits fast direct simulations and comparison with some previous results. Previous experience with 2D spirals leads us to expect that similar results would be obtained with a different choice of excitable kinetics. The results should also be, at least qualitatively, comparable to experiments using the Belousov-Zhabotinsky reaction [13].

Our numerical method is analogous to the one used in a previous linear stability analysis of spiral waves [11]. We introduce a rotating coordinate system twisted along the z axis where the steady scroll solution is time independent. That is, we seek u and v as functions of $r, \phi = \theta - \omega t - \tau_w z, t$ and z where (r, θ, z) are cylindrical coordinates and τ_w is the imposed twist. In these coordinates, Eqs. (1) and (2) read

$$\begin{aligned} (\partial_t + 2\tau_w \partial_{\phi z}^2 - \partial_{zz}^2)u &= (\omega \partial_{\phi} + \tau_w^2 \partial_{\phi}^2 + \nabla_{2D}^2)u \\ &\quad + f(u, v)/\varepsilon, \\ \partial_t v &= \omega \partial_{\phi} v + g(u, v). \end{aligned} \quad (3)$$

The Laplacian is two dimensional on the right-hand side (r.h.s.) of Eq. (3) [in (r, ϕ)] in contrast to the three-dimensional one in Eq. (1). The twist τ_w can be chosen at will and is not constrained by the finite size of the simulation box in the z direction as in usual direct simulations. Determining a steady scroll rotating at the frequency $\omega = \omega_1$ consists of finding $[u_0(r, \phi), v_0(r, \phi), \omega_1]$ that nullifies the r.h.s. of Eq. (3). To solve this nonlinear eigenvalue problem, the r.h.s. of Eq. (3) is discretized on a $N_r \times N_{\phi}$ finite, 2π ϕ -periodic box of radius R using finite differences of 4th order in space for the differential operators with rotationally symmetric boundary conditions imposed at the box edge, $\partial_r u_0|_{r=R} = 0$. The nonuniqueness of $u_0(r, \phi), v_0(r, \phi)$ brought by the rotational invariance of (3) is taken care of by arbitrarily setting the value of $u_0(N_r, N_{\phi})$ equal to 0.5. Therefore the discrete problem is reduced to finding the zero of a $(2 \times N_r \times N_{\phi})$ valued function of the $(2 \times N_r \times N_{\phi} - 1)$ unknown values of u_0 and v_0 and ω_1 . This is solved by Newton's method starting from an initial guess of the solution provided by a direct simulation of the evolution equations. In a box of size 60×120 , solutions of the discrete problem are obtained with an accuracy of 10^{-8} (in a L_2 norm).

Once a steady scroll wave (u_0, v_0, ω_1) is found, the time evolution equations (3) are linearized around (u_0, v_0) in the twisted rotating frame. Setting $u = u_0 + \exp[\sigma(k_z)t - ik_z z]u_1(r, \phi), v = v_0 + \exp[\sigma(k_z)t - ik_z z]v_1(r, \phi),$

leads to a linear eigenvalue problem for the growth rates $\sigma(k_z)$ as a function of the wave vector k_z ,

$$\begin{aligned}\sigma(k_z)u_1 &= (-k_z^2 + 2i\tau_w k_z \partial_\phi)u_1 \\ &\quad + (\omega_1 \partial_\phi + \tau_w^2 \partial_\phi^2 + \nabla_{2D}^2)u_1 \\ &\quad + [\partial_u f(u_0, v_0)u_1 + \partial_v f(u_0, v_0)v_1]/\varepsilon, \\ \sigma(k_z)v_1 &= \omega_1 \partial_\phi v_1 + [\partial_u g(u_0, v_0)u_1 + \partial_v g(u_0, v_0)v_1].\end{aligned}\quad (4)$$

These linear equations are discretized in the same manner as Eq. (3). We denote by \mathcal{L}_k the discrete version of the linear operator appearing on the r.h.s. of Eq. (4). Being interested in the stability of the scroll wave and in its modes of destabilization, we focus on determining the eigenvalues of \mathcal{L}_k with the largest real parts. This can be accurately done by using an iterative method fully described in [14]. First, the contributions of eigenvalues with very negative real parts are effectively suppressed by computing by iterations $x_1 = (1 + dt\mathcal{L}_k)^{i_0/dt}x_0$ for an arbitrary vector x_0 and a sufficiently large integer i_0/dt and a sufficiently small dt (in the following calculations, typical values are $i_0 = 5$ and $dt \approx 10^{-5}$). One then builds an orthonormal set of vectors that spans $\{x_1, x_2 = (1 + dt\mathcal{L}_k)^{i_1/dt}x_0, \dots, x_m = (1 + dt\mathcal{L}_k)^{i_{m-1}/dt}x_0\}$ and evaluates the restriction $\mathcal{L}_k^{(m)}$ of \mathcal{L}_k to this subspace. The integer i_1/dt should be chosen large enough to make $(1 + \mathcal{L}_k dt)^{i_1/dt}$ significantly different from the identity but small enough to limit computation time (as a typical value, $i_1 = 0.5$ is used here). One finally computes the n eigenvalues $\{\sigma_j, 1 \leq j \leq n\}$ of the largest real part $[\text{Re}(\sigma_j) > \text{Re}(\sigma_l), j < k]$ and the corresponding eigenvectors of $\mathcal{L}_k^{(m)}$. They approximate the corresponding n eigenvectors of \mathcal{L}_k with an accuracy of order $\exp[-(\sigma_n^r - \sigma_m^r)(m - n)t_0]$. With $m = 50$, we reach a precision of more than 10^{-6} , in computing eigenvectors of \mathcal{L}_k (in L_2 norm $\|[\mathcal{L}_k - \sigma(k_z)](u_1, v_1)\| < 10^{-6}$).

We have determined steady rotating scroll waves and computed their stability spectrum for several different parameters of Eqs. (1) and (2) where steady spiral waves exist and are stable. We now summarize these results beginning with the case of untwisted scroll waves.

For 2D-spiral waves, the linear stability operator has three marginally stable modes coming from the symmetries of the dynamics: the rotation eigenmode with an eigenvalue equal to zero and the two translation eigenmodes with purely imaginary eigenvalues equal to $\pm i\omega_1$, the spiral rotation frequency. For untwisted scroll waves, these correspond to eigenmodes of the linearized operator at $k_z = 0$. The computations reported in Figs. 1–3 show good agreement with these expectations. For $k_z = 0$, we find an eigenvalue of magnitude smaller than 10^{-9} which we identify with the rotation eigenmode and two eigenvalues equal to $\pm i\omega_1$ with an error of 10^{-4} which we identify with the translation eigenmodes [15].

For 2D-spiral waves, in addition to these three marginal eigenvalues, two complex conjugate eigenvalues cross the imaginary axis on the 2D meander instability line. The corresponding meander eigenmodes play an important role in spiral dynamics and belong to the untwisted scroll wave spectrum at $k_z = 0$.

The results of our computations show that in general, the eigenvalues with the largest real parts in the untwisted scroll wave spectrum belong to the five finite k_z branches of modes originating from the translation, rotation, or meander eigenmodes at $k_z = 0$. The rotation mode appears to be stabilized by finite k_z values. On the contrary, we have observed three different behaviors of the translation and meander branches as a function of k_z for different choices of the parameters a , b , and ε characterizing the reaction term $f(u, v)/\varepsilon$ in Eq. (1).

In the first case, both the translations and the meander modes are stabilized when k_z becomes non-zero, as shown in Fig. 1.

The second case is shown in Fig. 2. The translation modes now become unstable for low k_z while the meander modes are stabilized. This corresponds to the “negative filament tension” instability previously described in [7].

A third case opposite to the previous one is also observed as shown in Fig. 3. The translation modes are here stabilized when k_z becomes non-zero. On the contrary, the real part of the meander modes grows proportionally to k_z^2 at low k_z before decreasing for higher wave numbers. This qualitatively corresponds to the phenomenon reported in [8]: the scroll waves can be unstable with respect to meander at finite k_z in a parameter regime where 2D spirals are stable, as shown in Fig. 3b.

The fourth logical possibility consisting of a destabilization of both the translation and the meander modes was not observed in the present limited search.

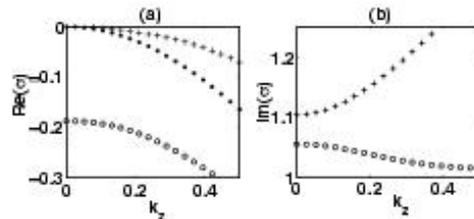


FIG. 1. (a) Real and (b) imaginary parts of the dominant eigenvalues of the spectrum as functions of k_z : translation (+), rotation (*), and meander (o) branches. The kinetics parameters are $a = 1.0$, $b = 0.01$, and $\varepsilon = 0.05$ and qualitatively give 2D spirals with small core far from the meander line. No instability is observed. The spiral rotation frequency is $\omega_1 = 1.103$ and the width of the excited zone between two $u = 0.5$ isolines far from the tip corresponds to a wave number $k_z \approx 0.90$. A fit for $k_z \ll 1$ of the translation branch gives $\sigma_z \approx 1.1i + (-0.38 + 1.31i)k_z^2$ in agreement with the independently measured drift coefficients $\alpha_3 = 0.37$, $\alpha_4 = 1.32$. A similar fit for the meander branch gives $\sigma_m \approx -0.18 + 1.05i + (-0.49 - 0.49i)k_z^2$.

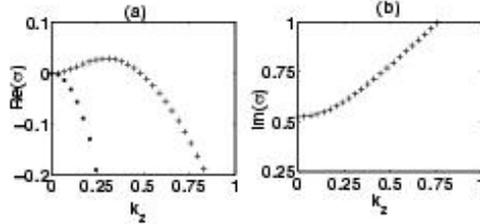


FIG. 2. (a) Real and (b) imaginary parts of the dominant eigenvalues of the spectrum as functions of k_z : translation (+) and rotation (*) branches. The kinetics parameters are $a = 0.96$, $b = 0.001$, and $v = 0.1$ and qualitatively give a weakly excitable medium with nonmeandering spirals. The meander modes are not plotted because their real parts are more negative than the values shown. The translation branches are unstable for low k_z . With the notations of Fig. 1, $\sigma_z \approx 0.52i + (0.88 + 1.26i)k_z^2$ for $k_z \ll 1$ and $\alpha_{||} = -0.87$, $\alpha_{\perp} = 1.25$. Other values are $\omega_1 = 0.521$ and $k_{\perp} = 0.95$.

We have performed some direct numerical simulations of Eqs. (1) and (2) to observe the nonlinear development of the different instabilities [12]. When the translation modes are destabilized at low k_z (Fig. 2), the filament grows and no restabilization is observed. On the contrary, a restabilization at finite amplitude is observed when the meander modes are destabilized at finite k_z . This 3D instability thus inherits the direct character of the 2D meander bifurcation. These observations corroborate previous findings [7,8]. However, a detailed characterization of the nonlinear dynamics is beyond the scope of the present Letter.

We now proceed and study the effect of a finite twist ($\tau_w \neq 0$) [16]. At a general level, we note that the spec-

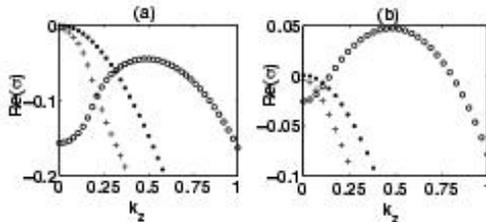


FIG. 3. Real parts of the dominant eigenvalues of the spectrum as functions of k_z : translation (+), rotation (o), and meander (*) branches. The kinetics parameters qualitatively give small cone spirals closer to the 2D meander line in (b) than in (a). (a) $a = 0.7$, $b = 0.01$, and $v = 0.025$. The values obtained are $k_{\perp} \approx 2.0$, $\omega_1 = 1.784$, and $\alpha_{||} = 1.62$, $\alpha_{\perp} = 0.83$ to be compared with $\sigma_z \approx 1.78i + (-1.63 + 0.83i)k_z^2$ and $\sigma_w \approx -0.157 + 1.94i + (1.04 + 0.21i)k_z^2$ for $k_z \ll 1.0$. (b) $a = 0.66$, $b = 0.01$, and $v = 0.025$. The values obtained are $k_{\perp} \approx 2.0$, $\omega_1 = 1.756$, and $\alpha_{||} = 2.44$, $\alpha_{\perp} = 0.77$ to be compared with $\sigma_z \approx 1.75i + (-2.41 + 0.75i)k_z^2$ and $\sigma_w \approx -0.071 + 1.89i + (1.89 + 0.33i)k_z^2$ for $k_z \ll 1$. In (b) the meander mode is stable at $k_z = 0$ but the meander branch becomes unstable at finite k_z .

tra obey $\sigma(-k_z) = \sigma^*(k_z)$ where the star denotes complex conjugation, since $\mathcal{L}_{-k_z} = \mathcal{L}_{k_z}^*$. As in the untwisted case, the symmetries of the dynamics provide three known eigenvalues, one zero eigenvalue at $k_z = 0$ for the rotation eigenmode and two complex conjugate eigenvalues for the translation eigenmodes: $i\omega_1$ at $k_z = -\tau_w$ corresponding to the eigenvector $\exp(i\phi)(\partial_r u_0 + i\partial_\phi u_0/r, \partial_r v_0 + i\partial_\phi v_0/r)$ and $-i\omega_1$ at $k_z = +\tau_w$ for the complex conjugate eigenvector. These exact results provide sensitive checks on the numerics.

We generally find that increasing the twist τ_w from zero reduces the stability of the translation branches, destabilizing them or amplifying the instability when they are already unstable. The effect of twist increase appears much less pronounced on the meander modes. We focus here on the most interesting parameter regimes such as those of Figs. 1 and 3a for which the untwisted scroll waves are stable. A representative case is shown in Fig. 4. The kinetics parameters are those of Fig. 3a. When twist is increased from zero, the zeros of $\text{Re}[\sigma(k_z)]$, which correspond to the translation eigenmodes, move away from $k_z = 0$ and stand at $k_z = \pm\tau_w$ as they should. Most importantly, the translation eigenmodes remain local maxima of $\text{Re}[\sigma(k_z)]$. Beyond a threshold twist ($\tau_w \approx 0.20$) a secondary maximum appears for k_z close to zero. One of the translation branches is shown in Fig. 4a for $\tau_w = 0.26$ when $\text{Re}[\sigma(k_z)]$ is still negative at this secondary maximum (the other translation branch can be deduced from the one shown by reflection with respect to the $k_z = 0$ axis). When the twist is increased further (past $\tau_w \approx 0.30$), $\text{Re}[\sigma(k_z)]$ becomes positive at this secondary maximum. The twisted scroll waves then become unstable for a finite range of wave numbers as shown in Fig. 4a for $\tau_w = 0.4$. The rotation and meander branches are also shown for this value of twist. One sees that the real parts of the two meander branches which are superimposed on Fig. 3a for $\tau_w = 0$ have been split by the twist. The maxima around $k_z = \pm 0.48$ for $\tau_w = 0$ have shifted around $\pm(0.48 + \tau_w)$ but their stability has not been significantly modified.

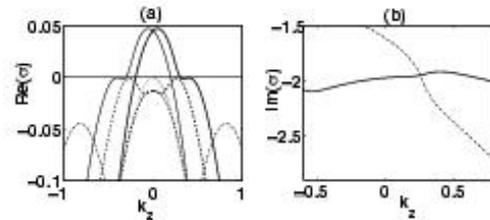


FIG. 4. (a) Real and (b) imaginary parts of the dominant eigenmodes for $a = 0.7$, $b = 0.01$, $v = 0.025$ (same as Fig. 3a) and a twist $\tau_w = 0.4$: meander (dash-dotted line), rotation (dotted line), and translation (solid line) branches. In (a) one of the translation branches (bold dashed line) is also plotted for a twist $\tau_w = 0.26$ below the instability threshold.

Direct numerical simulations show that this twist-induced instability leads to a restabilized state in which the scroll core itself acquires a helical shape. We can thus safely identify the present instability with the "sproing" instability of [6] but again a detailed study of the nonlinear state is best deferred to another publication.

Our results can be partially rationalized on the basis of previous works but also show the limitations of some previous theoretical suggestions. In the untwisted case, it was noted [17] that a weak scroll curvature κ can be transformed away by adding a term $-E \cdot \nabla u$ on the r.h.s. of Eq. (1). This relates the curvature-induced motion of a weakly curved scroll wave [7, 18] to a 2D spiral drift in an external field E and gives for the small k_z behavior of the translation branches,

$$\sigma_{\pm}(k_z) = \pm i\omega_1 + (-\alpha_{\parallel} \pm i\alpha_{\perp})k_z^2. \quad (5)$$

This relation between the translation modes small k_z curvature and the independently measured drift coefficients α_{\parallel} and α_{\perp} [19] is very well satisfied by our numerics (see the captions of Figs. 1–3). In the untwisted case, whether translation modes are stabilized or destabilized by the introduction of a third dimension is thus precisely related to a property of 2D spirals, namely, their known change of drift direction as kinetics parameters vary [20].

The analogous question for meander modes is more complex than anticipated. A simple normal form proposed in [8] extends Eq. (5) to the low k_z behavior of the two complex conjugate meander branches $\sigma_{m,\pm}(k_z) = \sigma_{m,\pm}(0) + (\alpha_{\parallel} \pm i\alpha_{\perp})k_z^2$. In contrast to Eq. (5), this relation is not obeyed by the data of Fig. 3. It even qualitatively disagrees with the data of Fig. 1a since it predicts that the low k_z curvature of the translation and meander branches real parts are of opposite signs contrary to what we find. Thus, a simple two-dimensional account of the long-wavelength dependence of the meander branch remains to be developed.

For twisted scroll waves, we have found that the mechanism of the "sproing" instability is a twist-induced deformation of the translation branches. This coupling of twist to the translation modes is not present in analytical calculations using averaging techniques [7, 18]. We will show elsewhere [21] that it can be analytically captured in the weakly excitable limit using the techniques of [17]. Nevertheless, the shape of the resulting translation branches and specially their double-peak structure shown in Fig. 4a remain to be better understood. More generally, the precise knowledge of the important linear modes and their behavior should allow the development of controlled reduced descriptions of scroll wave nonlinear dynamics. We also hope that our results and others will encourage further experimental studies of scroll wave instabilities.

We are grateful to A. Karma for very stimulating discussions on scroll waves. We also wish to thank M.E. Brachet, H. Chaté, C. Nore, and G. Rousseau for instructive discussions. Numerical computations were performed in part at IDRIS.

- [1] A. T. Winfree, *When Time Breaks Down* (Princeton University Press, Englewood Cliffs, NJ, 1987); V. S. Zykov, *Modelling of Wave Processes in Excitable Media* (Manchester University Press, Manchester, 1988).
- [2] A. M. Pertsov, R. R. Aliev, and V. Krinsky, *Nature (London)* 345, 419 (1990); S. Mironov, M. Vinson, S. Mulvey, and A. Pertsov, *J. Phys. Chem.* 100, 1975 (1996).
- [3] O. Steinbock, F. Siegert, S. C. Müller, and C. J. Weijer, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 90, 7332 (1993).
- [4] A. T. Winfree, *Science* 266, 1003 (1994).
- [5] F. Fenton and A. Karma, *Phys. Rev. Lett.* 81, 481 (1998); *Chaos* 8, 20 (1998).
- [6] C. Henze, E. Lugosi, and A. T. Winfree, *Can. J. Phys.* 68, 683 (1989).
- [7] V. N. Biktashev, A. V. Holden, and H. Zhang, *Philos. Trans. R. Soc. London A* 347, 611 (1994).
- [8] I. Aranson and I. Mitkov, *Phys. Rev. E* 58, 4556 (1998).
- [9] I. S. Aranson, A. R. Bishop, and L. Kramer, *Phys. Rev. E* 57, 5276 (1998); M. Gabbay, E. Ott, and P. Guzdar, *Physica (Amsterdam)* 118D, 371 (1998); G. Rousseau, H. Chaté, and R. Kapral, *Phys. Rev. Lett.* 80, 5671 (1998).
- [10] Z. Qu, F. Xie, and A. Garfinkel, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2668 (1999).
- [11] D. Barkley, *Phys. Rev. Lett.* 68, 2090 (1992); 72, 164 (1994).
- [12] Direct simulations were performed by adapting to 3D the EZ-spiral code of D. Barkley, *Physica (Amsterdam)* 49D, 61 (1991).
- [13] A. Belmonte and J. M. Flesselles, *J. Phys. II (France)* 7, 1425 (1997).
- [14] I. Goldhirsch, S. A. Orszag, and B. K. Maulik, *J. Sci. Comput.* 2, 33 (1987).
- [15] The lowest precision obtained for the translation eigenmodes presumably reflects the mild violation of translation invariance coming from the finite size of the computation box.
- [16] A recent analysis of steady twisted scroll waves is D. Margerie and D. Barkley (to be published).
- [17] V. Hakim and A. Karma, *Phys. Rev. Lett.* 79, 665 (1997); *Phys. Rev. E* 60, 5073 (1999).
- [18] J. P. Keener, *Physica (Amsterdam)* 31D, 269 (1988).
- [19] In a small field E the spiral center of rotation drifts at a velocity $\alpha_{\parallel}E$ along the direction of the field and $\alpha_{\perp}E$ in the perpendicular direction $\omega_1 \times E$ where ω_1 is the spiral rotation vector. This unambiguously fixes the sign of $\alpha_{\perp}E$ which depends on the spiral sense of rotation.
- [20] V. Krinsky, E. Hamm, and V. Voignier, *Phys. Rev. Lett.* 76, 3854 (1996).
- [21] V. Hakim, H. Henry, and A. Karma (to be published).

E.2 Prépublication

Article soumis à *Physical Review E*

Cet article est à quelques détails près un résumé de la majeure partie des résultats originaux présentés dans cette thèse.

Scroll waves in isotropic excitable media : linear instabilities, bifurcations and restabilized states

Hervé Henry and Vincent Hakim

Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

(December 10, 2001)

Scroll waves are three-dimensional analogs of spiral waves. The linear stability spectrum of untwisted and twisted scroll waves is computed for a two-variable reaction-diffusion model of an excitable medium. Different bands of modes are seen to be unstable in different regions of parameter space. The corresponding bifurcations and bifurcated states are characterized by performing direct numerical simulations. In addition, computations of the adjoint linear stability operator eigenmodes are also performed and serve to obtain a number of matrix elements characterizing the long-wavelength deformations of scroll waves.

PACS numbers : 47.20.Hw, 82.40.Bj, 87.22.As

I. INTRODUCTION

Depolarization waves in cardiac muscle, oxidation waves in the Belousov-Zhabotinsky (BZ) chemical medium or at the surface of certain metal catalyst and cAMP waves in colonies of slime molds are different examples of wave propagation in excitable media [1]. They can be described in similar mathematical terms although the underlying processes are of a very different nature. In a two-dimensional (2D) or quasi-two dimensional situation, the propagation of spiral waves has been observed in these three cases as well as in other excitable media [1,2]. Besides from their intrinsic scientific interest, the potential role of these remarkable waves in cardiac arrhythmias and fibrillation [3] has motivated detailed studies of their properties during the past two decades. In particular, the mechanisms of different instabilities have been intensively investigated as well as their locations determined in parameter space of simple models [4,5] and of experiments [6].

The potential relevance to cardiac dysfunction of scroll waves, the three dimensional analogs of spirals, has also been emphasized [7] but their dynamics is still less thoroughly analyzed. Visualization of the BZ reaction in 3D gels [8,9] has confirmed the existence of these complex waves. Numerical simulations have revealed that they are prone to instabilities in several parameter regimes [10–13]. In order to analyze more systematically the different possible instabilities, we report here the result of computations of the full linear stability spectrum of a straight scroll wave in a simple two-variable model of an excitable medium. This enables us to follow the different modes of deformation of a scroll wave and to investigate which type of modes become unstable in different regions of parameter space. The modes of the adjoint operator are also determined in order to compute the value of several coefficients given by matrix elements and to check proposed analytic relations. In addition, direct numerical simulations are performed to investigate the nonlinear fate of the different instabilities and to provide a detailed characterization of the restabilized bifurcated states (when they exist).

In section II, we define the studied two-variable reaction model and explain our numerical methods. Some general properties of spiral waves are also recalled. Then, we first consider in section III a straight untwisted scroll wave. It is the simplest (i.e. z -independent) extension in the third (z -) dimension of a two dimensional (xy) spiral wave. Two types of instabilities are found. They arise either from modes corresponding to z -dependent translations of the 2d spiral in the different xy -planes, the translation bands, or from the modes coming from z -deformations of the meander modes of the 2d spiral, the meander bands. In agreement with previous work, we show that the first instability [11,12] type is directly related [14] to the drift direction of a 2d spiral in an external field. We also confirm that it does not lead to a restabilized non linear state. In contrast, the second type of instability [15] is not simply related to spiral drift and generally restabilizes in a distorted scroll wave.

In section IV, we consider twisted scroll waves. A 3D steady wave is built by rotating (i.e. twisting) the 2d spiral around its rotation center as one translates it along the z -direction. We find that twist exceeding a definite threshold can lead to the appearance of unstable modes in the translation bands of the scroll wave. This "spring"

* Associé au CNRS et aux Universités Paris VI et VII.

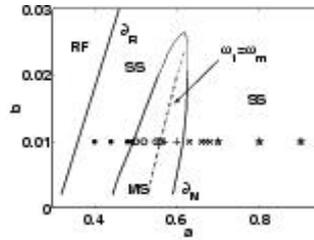


FIG. 1. Spiral bifurcation diagram for Eq. (1.2) with $\epsilon = 0.025$ and the reaction terms of ref [19]. The bold line ∂M is the meander threshold instability line and separates steadily rotating spirals (SS) from meandering spirals (MS) (above $a = 0.02$ the thin line denotes our less accurate determination of ∂M). The line ∂R marks the boundary of spiral wave existence on the left of ∂R the wave tip retracts (see e.g. ref [14]). The symbols along the line $b = 0.01$ denotes the different parameters at which scroll waves are studied in the present work. Stars represent stable scroll waves, crosses (x) and pluses(+) meander-unstable scroll waves, circles (o), and (•) translation-band-unstable scroll waves. 2D meandering spirals are represented by (+) and (o).

[10] instability is seen to take place a finite wavevector away from the scroll wave translation symmetry mode. We provide analytical arguments which show that this very generally results from 3D rotational invariance in an isotropic medium. Nonlinear development of this instability when a single unstable mode is present results in a restabilized helical wave, as previously described [10]. Properties of these nonlinear states are computed and compared with the linear characteristics (wavevector, frequency) of the spiroing instability. When several unstable modes are present in the simulation box, the scroll wave core filament takes a more complex shape which is found to travel like a nonlinear wave of constant shape in the vertical direction. Three appendices provide the details of our numerical algorithms, a derivation of a general formula for spiral drift in an external field and useful ribbon geometry formulas. A fourth one explains the relation between the present calculations and previously derived averaged equations for the motion of a weakly curved and twisted scroll wave [16,12].

The results of our linear stability analysis have previously been shortly described in [17].

II. METHODS AND GENERAL RESULTS

A. Reaction-diffusion model

Two-variable reaction diffusion systems have been shown to describe semi-quantitatively spiral waves dynamics and its "generic" features. They have been used in various contexts since their original introduction [18] as a simplification of Hodgkin-Huxley dynamics. The analysis of such a simple model appears in any case as a useful first step before going to a more complicated description if required. We thus follow this classic path and take for the excitable medium dynamics

$$\partial_t u = \nabla^2 u + f(u, v)/\epsilon \quad (1)$$

$$\partial_t v = g(u, v) \quad (2)$$

We only consider the singly diffusive case, the most relevant to cardiac physiology. For definiteness, we also choose reaction terms $f(u, v) = u(1-u)[u-(v+b)/a]$, $g(u, v) = u-v$ as proposed in [19]. This permits fast direct simulations and tests of our numerics by comparison with previous results for spiral waves. The 2d-spiral bifurcation diagram for this model is shown in Fig. 1 for variable values of the parameters a and b at a fixed value of $\epsilon = 0.025$. The meander instability line (∂M) is plotted with its "orbiting branch" (large spiral core) at smaller values of a than its "pivoting branch" (small spiral core) using the notations and terminology of [5]. The crossing line which separates meander trajectories with outward petals from those with inward petals is also drawn as well as the diverging core existence boundary of spiral waves (∂R).

In the following, the stability and dynamics of scroll waves are analyzed at several points along the line $b = 0.01$, as a varies and crosses the different boundaries.

B. Numerical strategy

In order to obtain the steady scroll waves and compute their stability spectrum, Eq. (1, 2) are written in cylindrical coordinates with u and v functions of $r, \phi = \theta - \omega t - \tau_w z, t$ and z ,

$$(\partial_t + 2\tau_w \partial_{\phi z}^2 - \partial_{zz}^2)u = (\omega \partial_{\phi} + \tau_w^2 \partial_{\phi\phi}^2 + \nabla_{2D}^2)u + f(u, v)/\epsilon \quad (3)$$

$$\partial_t v = \omega \partial_{\phi} v + g(u, v) \quad (4)$$

1. Steady states

A steady scroll wave for a given imposed twist τ_w is a time independent solution of Eq. (3, 4) with $u(r, \phi, t, z) = u_0(r, \phi)$ and $v(r, \phi, t, z) = v_0(r, \phi)$ and rotation frequency $\omega = \omega_1$,

$$(\nabla_{2D}^2 + \omega_1 \partial_{\phi} + \tau_w^2 \partial_{\phi\phi}^2)u_0 + f(u_0, v_0)/\epsilon = 0 \quad (5)$$

$$\omega_1 \partial_{\phi} v_0 + g(u_0, v_0) = 0 \quad (6)$$

This nonlinear fixed point problem for the function u_0, v_0 and nonlinear eigenvalue ω_1 is solved by using Newton's method after discretization of Eq. (5,6), as detailed in appendix A 1. It should be noted that Eq. (5, 6) are purely two-dimensional due to the scroll wave translation symmetry along the z axis in the introduced coordinates.

2. Linear stability

Once a steady scroll wave is obtained, one can linearize Eq. (3, 4) around it. Invariance of Eq. (3, 4) and of the steady state by translation along the z -direction (in the introduced twisted rotating frame) leads to seek perturbations under the form $u = u_0 + \exp[\sigma(k_z)t - ik_z z]u_1(r, \phi)$, $v = v_0 + \exp[\sigma(k_z)t - ik_z z]v_1(r, \phi)$. The linear equations obeyed by u_1, v_1 and the (complex) growth rate $\sigma(k_z)$ read,

$$\sigma u_1 = (-k_z^2 + 2i\tau_w k_z \partial_{\phi})u_1 + (\omega_1 \partial_{\phi} + \tau_w^2 \partial_{\phi\phi}^2 + \nabla_{2D}^2)u_1 + [\partial_u f(u_0, v_0)u_1 + \partial_v f(u_0, v_0)v_1]/\epsilon \quad (7)$$

$$\sigma v_1 = \omega_1 \partial_{\phi} v_1 + \partial_u g(u_0, v_0)u_1 + \partial_v g(u_0, v_0)v_1 \quad (8)$$

or symbolically,

$$\sigma(k_z) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{k_z} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

So in a second step, the (~ 10) eigenvalues of largest real parts of \mathcal{L}_{k_z} are precisely determined (for given k_z and τ_w) using an iterative algorithm [20] detailed in appendix A 2. The whole numerical procedure is quite similar to the spiral linear stability analysis of ref. [21] and extends it to 3D. It should be noted that the twist rate τ_w can be prescribed at will so the procedure is not confined to weak twist (of course, for too large a twist, a steady scroll may no longer exist and the Newton steady state finding procedure fails to converge).

Two points are worth emphasizing:

- taking a Fourier transform has eliminated the z -direction so Eq. (7, 8) are purely two-dimensional (but k_z -dependent) as the steady state equations (5, 6),
- correlatively, each mode of the 2D-spiral is replaced by a band of modes indexed by the wavevector k_z .

Some general properties of the spectrum can be noted at this stage.

For zero twist, Eq. (7, 8) depend only on k_z^2 so the spectrum bands are even functions of k_z . Moreover, \mathcal{L}_{k_z} is a real operator and its complex eigenvalues come in complex conjugate (c.c.) pairs. So, bands of complex modes also come in complex conjugate pairs.

For non-zero twist ($\tau_w \neq 0$), these symmetries non-longer hold. It only remains true that $\mathcal{L}_{k_z} = \mathcal{L}_{-k_z}^*$. So bands of complex modes can be grouped in pairs $\sigma_1(k_z), \sigma_2(k_z)$ with $\sigma_2(k_z) = \sigma_1^*(-k_z)$

3. Direct numerical simulations and instantaneous filament definition

In order to determine the bifurcation type and the fate of each instabilities, we performed direct numerical simulations of Eq. (1,2) as explained in appendix A3. In two dimensions, it is usual to define the spiral tip as the intersection point of two (somewhat arbitrary) particular level lines $u = u_{tip}, v = v_{tip}$. The spiral tip trajectory is then a convenient way to visualize the spiral dynamics and its core instabilities. Similarly in 3D, we choose here to define the instantaneous filament as the intersection line of the two particular level surfaces $u = u_{tip} = 0.5$ and $v = v_{tip} = 0.75(0.5a - b)$. It can be thought of as the line of spiral tips in the different xy -plane.

C. Special eigenmodes

In the 2D case, there are five dominant modes of spiral dynamics in the simple case described by Eq. (1, 2) [22] :

- one neutral mode with $\sigma = 0$, the rotation mode, which comes from the rotational invariance of Eq. (3, 4).
- two complex conjugate purely imaginary modes with $\sigma = \pm i\omega_1$, the translation modes, coming from the translation invariance of the starting equations (1, 2)
- two complex conjugate modes, the meander modes, corresponding to the oscillatory meander instability the real part of which crosses zero on the meander instability line.

In the following, the five bands of modes originating from these special modes are found to play the most important role in scroll wave dynamics in the sense that they have the largest real parts and that each instability of a scroll wave can be ascribed to one of these bands (i.e. the modes on a part of that particular band acquire a positive real part).

Thus, before proceeding it is worth recalling the expression of these symmetry eigenmodes for spirals [21] and their straightforward generalization for scroll waves.

The rotation mode is the simplest. Differentiation of Eq. (5, 6) directly shows that $(\partial_\phi u_0, \partial_\phi v_0)$, the rotation mode, is a solution of Eq. (7, 8) for $k_z = 0$ and $\sigma = 0$.

The eigenmodes associated to invariance under x, y -translations of the spiral rotation center are less straightforwardly obtained because the spiral is a time independent solution in a rotating frame (with (x', y') coordinates). A steady spiral rotating around the origin is given by

$$U_0[x', y'] = U_0[\cos(\omega_1 t)x + \sin(\omega_1 t)y, -\sin(\omega_1 t)x + \cos(\omega_1 t)y] \quad (10)$$

The corresponding spiral rotating around the point (x_0, y_0) is then

$$U_0[\cos(\omega_1 t)(x - x_0) + \sin(\omega_1 t)(y - y_0), -\sin(\omega_1 t)(x - x_0) + \cos(\omega_1 t)(y - y_0)].$$

Using the (x', y') rotating coordinates, this translated spiral reads,

$$\begin{aligned} U_0[x' - x_0 \cos(\omega_1 t) - y_0 \sin(\omega_1 t), y' + x_0 \sin(\omega_1 t) - y_0 \cos(\omega_1 t)] = \\ U_0[x' - (\frac{x_0 - iy_0}{2} \exp(i\omega_1 t) + c.c.), y' - (\frac{x_0 - iy_0}{2} \exp(i\omega_1 t) + c.c.)] \end{aligned} \quad (11)$$

Expansion of Eq. (11) for small x_0, y_0 gives the expression of the translation modes

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_{x'} + i\partial_{y'})u_0 \\ (\partial_{x'} + i\partial_{y'})v_0 \end{pmatrix} = \exp(i\phi) \begin{pmatrix} \partial_r u_0 + i\partial_\phi u_0/r \\ \partial_r v_0 + i\partial_\phi v_0/r \end{pmatrix} \quad (12)$$

with eigenvalue $i\omega_1$, and the complex conjugate eigenvector with eigenvalue $-i\omega_1$.

This computation immediately generalizes to untwisted scroll waves. This is also the case for twisted scroll waves but one should recall that Eq. (5, 6) are written in a referential that rotates in time but also as one moves along the z -axis. This modifies the exponential factor in Eq. (11) which becomes $\exp(i\omega_1 t + \tau_w z)$ to include the z -rotation. So, for a twisted scroll wave the translation mode (u_t, v_t) is an eigenvector of $\mathcal{L}_{k_z = -\tau_w}$ with eigenvalue $i\omega_1$. The other (complex conjugate) translation eigenvector (u_t^*, v_t^*) is associated to the eigenvalue $-i\omega_1$ of the now *different* linear operator $\mathcal{L}_{k_z = \tau_w}$.

A direct algebraic proof of these facts can be given. If ones defines the two operators

$$\begin{aligned} T &\equiv \exp(i\phi)(\partial_r + i/r\partial_\phi) \\ M &\equiv \omega_1 \partial_\phi + \tau_w^2 \partial_\phi^2 + \nabla_{2D}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

a direct computation gives the commutators

$$\begin{aligned} [T, M] &= -i\omega_1 T - \tau_w^2 (1 + 2i\partial_\phi) T \\ [T, \partial_\phi] &= -iT \end{aligned} \quad (14)$$

With these notations, the fixed point equations reads $Mu_0 + f(u_0, v_0) = 0$, $\omega_1 \partial_\phi v_0 + g(u_0, v_0) = 0$. Action of T on these two equations gives $TMu_0 + \partial_u f T u_0 + \partial_v f T v_0 = 0$, $\omega_1 T \partial_\phi v_0 + \partial_u g T u_0 + \partial_v g T v_0 = 0$. Commutations of T and M (in the first one) and T and ∂_ϕ (in the second one) using Eq. 14 directly show that $(u_1, v_1) = (T u_0, T v_0)$ satisfies Eq. (7, 8) with $\sigma = +i\omega_1$ and $k_z = -\tau_w$.

D. Left eigenvectors and scalar product

The linear stability computation can be extended to determine the left eigenvectors of \mathcal{L}_k . We have found it worth in particular to compute the left eigenvectors of the 2D spiral stability operator \mathcal{L} (i.e. $\mathcal{L}_{k_z=0}$ for $\tau_w = 0$) corresponding to the translation and rotation modes since they often appear in perturbation calculation [16,12] (for examples, see section III A 1 and appendix D).

We simply define the scalar product between a left (\tilde{u}, \tilde{v}) and right (u_r, v_r) two-component function by integration over the whole 2D space as $\langle \tilde{u}, u_r \rangle + \langle \tilde{v}, v_r \rangle$ where

$$\langle f, g \rangle \equiv \iint dr d\phi r f(r, \phi) g(r, \phi) \quad (15)$$

The left eigenmodes of \mathcal{L} thus obey,

$$\sigma \tilde{u}_1 = (-\omega_1 \partial_\phi + \nabla_{2D}^2) \tilde{u}_1 + \partial_u f(u_0, v_0) \tilde{u}_1 / \epsilon + \partial_u g(u_0, v_0) \tilde{v}_1 \quad (16)$$

$$\sigma \tilde{v}_1 = -\omega_1 \partial_\phi \tilde{v}_1 + \partial_v f(u_0, v_0) \tilde{u}_1 / \epsilon + \partial_v g(u_0, v_0) \tilde{v}_1 \quad (17)$$

The result of one such computation for the left translation eigenmode $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ (the solution $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ for $\sigma = i\omega_1$) is shown in Fig. 2. In contrast to the translation mode (u_1, v_1) , the left eigenmode $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ quickly decreases away from the spiral core as argued in [12] and explicitly obtained in the free-boundary limit [14,23] (but opposite to what is supposed in [16]). This also holds for the left rotation mode $(\tilde{u}_\phi, \tilde{v}_\phi)$ (the solution $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ for $\sigma = 0$) as shown in Fig. 3. As a consequence, the scalar product (15) between these left functions (\tilde{u}, \tilde{v}) and any right function (u_r, v_r) (even slowly increasing) is well defined¹. We do not find it useful to include a time integration in the scalar product as in [16,12].

III. UNTWISTED FILAMENTS

We begin with the simplest case of scroll waves with no twist ($\tau_w = 0$). In this case, the steady scroll equations (5, 6) are clearly identical to those of a 2d spiral. We take as an example the parameter value $a = 0.9$, $b = 0.01$ (and $\epsilon = 0.025$). A steady spiral/scroll wave is found for a rotation frequency $\omega_1 = 1.769$. The linear spectrum of modes around this steady scroll is plotted in Fig. 4 (only the upper quadrant upper $k_z > 0, Im(\sigma) > 0$ is shown since the other quadrants can be deduced by parity and complex conjugation) The five translation, rotation and meander modes of the spiral wave stand at $k_z = 0$. The steady spiral is stable as shown by the negative real parts of the meander modes. As stated above, the spectrum around the scroll wave is organized in several bands of modes which originates from the spiral modes at $k_z = 0$. Only the five less stable bands are shown in Fig. 4. At these parameter values, extension to the third dimension does not bring any instability (at least at the linear level) since as seen on Fig. 4 the real part of $\sigma(k_z)$ becomes more negative on each band as k_z increases. For other parameter values, a straight scroll wave can however be unstable while 2D-spiral are stable. This can happen in two different ways. Depending on position in parameter space, either the translation or the meander bands become unstable for $k_z \neq 0$. We examine these two cases in turn in the following two subsections.

¹The fast decay of the left eigenmodes makes the space integration converge without any additional factor. Adding one such extra factor as suggested in [16] would actually make all the scalar product vanish.

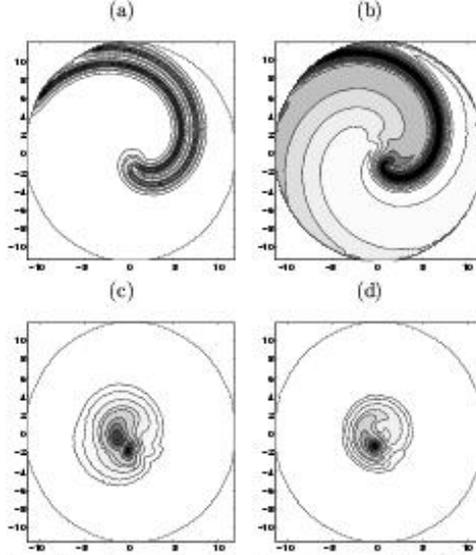


FIG. 2. Contour plots of the translation eigenmode, (a) u -component modulus, (b) v -component modulus, and of the corresponding left eigenvector, (c) u -component modulus, (d) v -component modulus. The maximum value of the fields is set independently for u and v equal to 1, and the contours are plotted for (a) $u = 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ and 0.7 , (b) $v = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ and 0.8 , (c) and (d) $u, v = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ and 0.9 . The parameter values are $a = 0.44$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$. The pulsation of the steady rotating spiral is $\omega = 1.1612$. The circles represent the limit of the simulation box.

A. Translation band instability

The translation bands can have unstable modes for $k_z \neq 0$ while the 2D spirals are stable. An example of this phenomenon is shown on Fig. 5 for $a = 0.44$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$. A qualitatively similar spectrum is obtained for all points in Fig. 1 denoted by filled dots (\bullet) near the large core spiral existence boundary ∂R . As seen on Fig. 5, the instability takes place for small k_z , as soon as k_z is non-zero. It corresponds to the "negative line tension" instability of ref. [12]. We show below that the curvature of the translation modes at $k_z = 0$ is given by the spiral drift coefficients in an external field. So, this translation band instability is directly related to the fact that 2D spiral drift opposite to an applied external field in this parameter region.

1. Long wavelength stability and 2d spiral drift in an external field

As recalled and shown in detail in appendix B, a small applied external field E induces a drift of the spiral rotation center at a velocity v such that

$$v = \alpha_{\parallel} E + \alpha_{\perp} \omega_1 \times E \quad (18)$$

where ω_1 is the spiral rotation vector. It has previously been noted [14] that a weak scroll wave curvature acts as an external field and therefore that a straight scroll wave is unstable if $\alpha_{\parallel} < 0$ since a small curvature tends to grow. More precisely, the small k_z behavior of the two translation bands is given by

$$\sigma_{\pm}(k_z) = \pm i \omega_1 + (-\alpha_{\parallel} \pm i \alpha_{\perp}) k_z^2 + O(k_z^4) \quad (19)$$

Eq. (19) is simply derived by a first-order perturbative calculation as follows. The linear eigenvalue problem (7, 8) reads

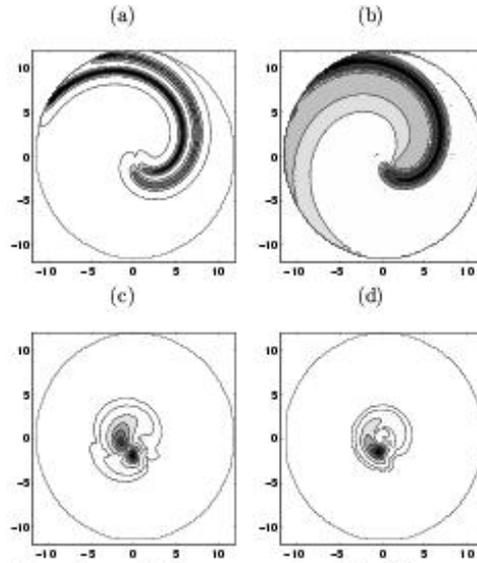


FIG. 3. Contour plots of the rotation eigenmode, (a) u -component modulus, (b) v -component modulus, and of the corresponding left eigenvector, (c) u -component modulus, (d) v -component modulus. The maximum value of the fields is set equal to 1. and the contours are plotted for (a) $u = 0.001, 0.1, 0.3, 0.5$ and 0.7 ; (b) $v = 0.001, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6$ and 0.8 , (c) and (d) $u, v = 0., 0.001, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ and 0.9 . Same parameters as in Fig. 2.

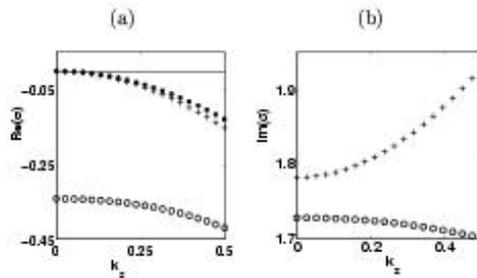


FIG. 4. (a) Real and (b) imaginary parts of the growth rate $\sigma(k_z)$ as a function of the wavenumber k_z for the translation (+), rotation (•) and meander (o) bands. The parameter values are $a = 0.9$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$. Fig. 4a shows that the meander mode at $k_z = 0$ is stable and that the growth rate decreases on the meander band with k_z . The translation mode is also restabilized for finite values of k_z . The translation and meander bands are well approximated by respectively $\sigma_t(k_z) = i1.769 + (-0.65 + i0.61)k_z^2$ and $\sigma_m(k_z) = -0.3411 + i1.720 + (-0.25 + i0.01)k_z^2$. The value of $\sigma_t(0)$ is in good agreement with the independently determined pulsation of the steady scroll wave $\omega_1 = 1.769$

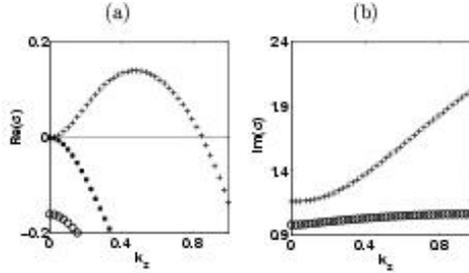


FIG. 5. (a) Real and (b) imaginary part of the growth rate $\sigma(k_z)$ as a function of the wavenumber for the parameter value $a = 0.44$, $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$. The meander mode, (o) is stable and the growth rate decreases with the wave number on the meander band. The modes of the rotation band (\bullet), are also stable. The mode of the translation band (+), are unstable for finite values of k_z .

$$\sigma(k_z) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = -k_z^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{k_z=0} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

For small k_z , the modes of the translation bands can be obtained by perturbation around the known translation modes at $k_z = 0$ (Eq. 12). For definiteness, we consider the upper band (which start at $\sigma(k_z = 0) = +i\omega_1$) and write $\sigma(k_z) = i\omega_1 + \delta\sigma$ where $\delta\sigma \ll 1$ is the sought perturbative correction,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Substitution in Eq. (20) gives

$$\delta\sigma \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + i\omega_1 \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} = -k_z^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{k_z=0} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

The first-order expression of $\delta\sigma$ is obtained in a usual way by taking the scalar product of Eq. (22) with the left eigenvector $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ of $\mathcal{L}_{k_z=0}$ for the eigenvalue $i\omega_1$ (section II D)

$$\delta\sigma = -k_z^2 \frac{\langle \tilde{u}_1, u_1 \rangle}{\langle \tilde{u}_1, u_1 \rangle + \langle \tilde{v}_1, v_1 \rangle} \quad (23)$$

Eq. (23) is equivalent to the announced formula (19) since the matrix coefficients on its r.h.s also gives the spiral drift coefficients, as shown in appendix B (see Eq. (B10)).

In Table I, the spiral drift coefficients α_1 and α_\perp are compared to the results of independent computations of the curvature of $\sigma(k_z)$ at $k_z = 0$ for the translation bands, from diagonalisations of \mathcal{L}_{k_z} at different values of k_z . The good agreement between these results is a check both of the analytic formula (19) and of our numerics. To recapitulate, the translation band instability is found to be a long wavelength instability (i.e. the band of unstable wavelength starts at $k_z = 0$) which is present in the whole domain of parameters where a 2D-spiral drifts opposite (given our sign convention in Eq. B1) to the applied field.

2. Nonlinear evolution of the instability

The nonlinear fate of this translation band instability was studied by direct dynamical simulations of Eq. (1, 2). In the parameter regime of Fig. 5 when modes of the translation bands are unstable for finite values of k_z , an initially straight scroll wave was observed to be unstable provided that the simulation box was large enough to accommodate an unstable mode. In agreement with previous observations [12], the filament was observed to increasingly depart from its straight initial configuration and its length was observed to grow in the simulation box. When the filament eventually collided with the boundaries of the simulation box, it split into two filaments. This repeated again and no

a	ω_1	$\sigma_r^N(k_z = 0)/2$	$\sigma_{im}^N(k_z = 0)/2$	$\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp}$
0.44	1.16	$1.9 + 0.82i$	$-1.6 + 0.78i$	$-1.97 - 0.84i$
0.48	1.38	$3.2 + 0.44i$	$-3.7 + 1.10i$	$-3.0 - 0.49i$
0.67	1.76	$-2.14 + 0.85i$	$1.61 + 0.25i$	$2.2 - 0.9i$
0.7	1.78	$-1.63 + 0.83i$	$1.04 + 0.21i$	$1.62 - 0.83i$
0.8	1.81	$-0.87 + 0.70i$	$0.08 - 0.06i$	$0.854 - 0.71i$
0.9	1.77	$-0.65 + 0.61i$	$-0.25 - 0.089i$	$0.66 - 0.61i$

TABLE I. The scroll wave pulsation ω_1 , the curvature $\sigma_r^N(k_z = 0)/2$ of the real and imaginary parts of the translation band around the translation mode eigenvalue $i\omega_1$, the curvature $\sigma_{im}^N(k_z = 0)/2$ of the real and imaginary parts of the meander band around the 2D meander eigenvalue of positive imaginary part and the drift coefficients of the 2D-spiral in an electric field $\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp}$ for $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$ and different values of a .

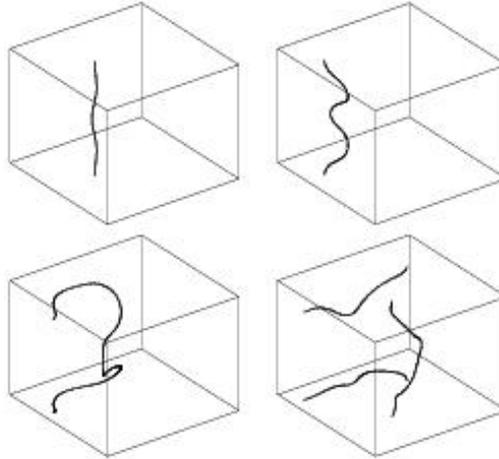


FIG. 6. Instantaneous filament evolution starting from a slightly perturbed straight scroll for equally spaced times ($t = 25$, $t = 50$, $t = 75$ and $t = 100$.) during a simulation in a simulation box of size $(128 \times 128 \times 120)$ with a space discretization step $\Delta x = 0.2$ using periodic boundary conditions. The parameters are $a = 0.44$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$ and correspond to the linear spectrum shown in Fig. 5.

restabilisation was observed. A typical evolution is shown in Fig. 6. The minimum simulation box size which allowed the instability development closely agreed with the results of the linear stability analysis. For instance, in the case $\alpha = 0.44$, $b = 0.01$, and $\epsilon = 0.025$, the maximal k_z of the unstable band is obtained to be $k_z = 0.84$ via the linear stability analysis whereas the direct numerical simulations show a minimal simulation box height corresponding to $k_z = 0.81$ ².

The choice of boundary conditions on the simulation box top and bottom faces influences the minimum box height for the instability development (but, apart from that, was not observed to qualitatively modify the instability nonlinear development). This critical size was found to be twice bigger for periodic periodic boundary condition than for no-flux boundary conditions which can accommodate linear modes of wavelength twice as long as the box height.

B. The third dimension-induced meander instability

In the region where a 2D-spiral drifts toward an applied field (i.e. $\alpha_1 > 0$), the modes of an untwisted scroll wave translation bands are stable. As pointed in [15], an untwisted scroll wave can nonetheless be unstable in a parameter region where a 2D-spiral is stable. This happens when the meander bands are destabilized by deformation in the z -direction as we study below.

1. Linear analysis

This induction of the meander instability by three-dimensional effects is shown in Fig. 7. For the parameters of Fig. 7a, all modes have negative real parts and the scroll wave is stable. However, one sees that the real part of the modes on the meander band starts by increasing as k_z increases from zero. For the parameters of Fig. 7b which stand closer to the 2D meander boundary, a finite band of modes with $k_z \neq 0$ has acquired a positive real part while the real part of 2D spiral meander mode at $k_z = 0$ is still negative. Thus, for these parameter values close to the "pivoting" side of the 2D meander instability boundary, a 3D scroll wave is unstable to meander while the steadily rotating 2D spiral is still stable as pointed out in [15]. On the "orbiting" side of the meander instability boundary,

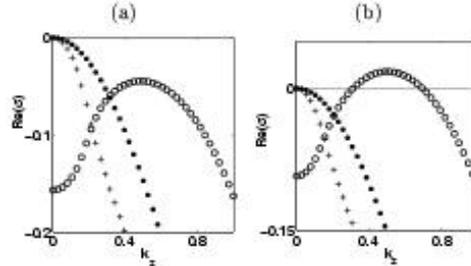


FIG. 7. The growth rate $Re[\sigma(k_z)]$ as a function of the wavenumber for the parameter value (a) $a = 0.7$ and (b) $a = 0.67$. The other parameter are $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$. The meander mode, (\circ), is stable for $k_z = 0$ both in cases (a) and (b). The growth rate increases on the meander band with k_z . In case (a), it always remains negative and there is no instability. In case (b), it becomes positive for k_z higher than 0.30 and lower than 0.69 showing the finite- k_z instability of the steady scroll wave. The rotation (\bullet) and translation bands ($+$) are stable. In the phase diagram Fig.1 the points with a spectrum similar to the (b) case are represented by crosses (\times).

three-dimensional modulations have on the contrary a stabilizing effect on the meander instability and the 2D and 3D meander instability thresholds coincide as shown on Fig 8 (note however that the translation band instability of section III A renders the scroll wave unstable for these parameters). The fact that the curvature of the translation

²For the observed largest unstable k_z , numerical simulations were not carried long enough to observe the full nonlinear development of the instability. However, it was observed with a box height increase of a single space step.

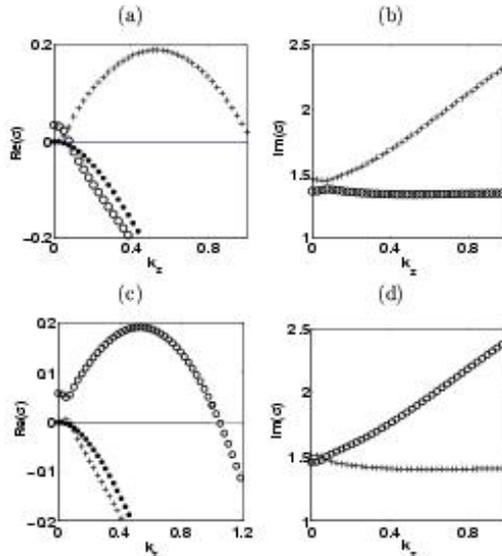


FIG. 8. Real and imaginary part of the growth rate $\sigma(k_z)$ as a function of the wavenumber for $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$. (a), (b): $a = 0.5$; (c), (d): $a = 0.52$. In both cases, the real part decreases on the meander band and increases on the translation band with k_z for small values of k_z . In the $a = 0.52$ case, hybridization of the eigenvectors of the two bands exchange these trends at slightly higher values of k_z , i.e. the real part of the meander band increases whereas the real part of the translation band decreases. In the phase diagram of Fig. 1, the points where the linear spectrum is similar to one of these cases (with both the meander and translation bands unstable at small k_z) are represented by circles (o).

and meander bands are of opposite sign in Fig. 5 and Fig. 7 may lead to think that the finite k_z behavior of the meander bands is also related to 2D spiral drift (as indeed proposed in [15]). However, a quantitative computation shows no simple relation between the meander bands curvature at $k_z = 0$ and the spiral drift coefficient as reported in table I. Moreover, even at the qualitative level, there is no general validity to the opposite sign rule between the translation and meander bands curvature at $k_z = 0$, as shown by the data of Fig. 4.

It is of some interest to see how the spectrum of Fig. 5 is transformed into the spectrum of Fig. 7 as one traverses the 2D meander unstable region. This happens through hybridization between the translation and meander bands as illustrated in Fig. 8.

2. Restabilized bifurcated states

We performed direct numerical simulations to examine the nonlinear development of the meander bands instability at $k_z \neq 0$ and to characterize the restabilized nonlinear states. For boxes of medium size in the z -direction as used in our numerical simulations, the restabilized nonlinear states strongly depend on the top and bottom boundary conditions. Two different ones were implemented (no flux boundary conditions were always implemented on the side boundaries). We used either periodic boundary conditions which permit the development of a single pair of unstable modes and are simpler to analyze or no-flux boundary conditions since they are clearly more relevant in an experimental context. We describe the results in turn.

Periodic boundary conditions.

Direct numerical simulations were performed in the parameter regime of Fig. 7. Three types of initial conditions were used which all led to a stationary restabilized scroll wave after a transient regime.

For the first one, the perturbation of the steady state was chosen to contain the unstable wavenumbers $\pm k_z$. The initial fields were chosen in the form $u(x, y, z) = u_{2D}(x, y)(1 + \alpha \cos(k_z z))$, $v(x, y, z) = v_{2D}(x, y)(1 + \alpha \sin(k_z z))$ with

the magnitude α of the 3D perturbation being of order 10^{-2} (u_{2D} and v_{2D} correspond to a steady spiral wave which is stable in 2D in this regime). This perturbation transforms the straight unperturbed instantaneous filament into an "helix" of small elliptical cross section and pitch $2\pi/k_z$. When the wavelength k_z corresponded to an unstable mode, this helix was observed to grow and to reach a helical restabilized state of periodicity k_z .

A slightly more complicated time development was observed with an initial perturbation of the straight scroll wave in the form $u(x, y, z) = u_{2D}(x, y)(1 + \alpha \cos(k_z z))$, $v(x, y, z) = v_{2D}(x, y)(1 + \alpha \cos(k_z z))$. This gives the instantaneous filament ($x_f(z)$, $y_f(z)$) a planar "zig-zag" shape of small amplitude, $x(z) = x_1 \cos(k_z z)$, $y(z) = y_1 \cos(k_z z)$. The zig-zag perturbation was first observed to grow before turning into an helical restabilized state of periodicity k_z . This type of time development is expected on general ground in system where left and right progressive wave compete (see e.g. [24]).

Finally, competition between several different unstable modes (up to 4 different k_z) was examined with initial conditions such as $u(x, y, z) = u_{2D}(x, y)[1 + \alpha \exp(-(z - z_0)^2/L_c)]$, $v(x, y, z) = v_{2D}(x, y)[1 + \beta \exp(-(z - z_0)^2/L_c)]$. (typical values are $\|(\alpha, \beta)\|_2 = 0.01$ and L_c about a few tens of space steps). In that case, it was generally observed that the most unstable wavelength compatible with the box height was selected. At a qualitative level, the transient regime was found to mainly depend of the planar or non planar character of the initial perturbed filament : When it was planar (case $\beta = \alpha$) a zig-zag filament first grew before taking an helical shape. When it was non planar, $\beta \neq \alpha$ then an helical filament grew directly.

Close to the instability threshold, the shape of the restabilized instantaneous filament is closely approximated by an helix of circular cross section, as shown in Fig. 9, and its motion can be portrayed in a way similar to the epicycle description of meander. The axis of the instantaneous filament helix rotates around a fixed vertical axis at the frequency of the steady two dimensional spiral. In the rotating frame where these two axes are fixed, the helical instantaneous filament itself rotates with a frequency close to the imaginary part of the meander linear eigenmode (i.e. the difference between these two frequencies is of order 10^{-2} in a strong meander regime and of order 10^{-3} in a weak meander regime). Thus, for periodic boundary conditions the meander amplitude is found to be independent of height (z) while the phase of the epicycle motion varies linearly with z .

We performed two different systematic studies in order to better characterize the nature of the 3D meander bifurcation. In the first one, we kept the size of the simulation box constant and varied the excitability using a . In the second one, we kept a constant and varied the size of the simulation box, that is the wavenumber of the initial perturbation.

At the linear level, the results of these direct numerical simulations are in close agreement with the predictions of the linear stability analysis, both for the the instability threshold a_c (with an accuracy of order 10^{-3}) and for the unstable wavenumber range $[k_-(a), k_+(a)]$.

The radius of the instantaneous filament helix can be taken as a measure of the 3D meander instability amplitude. As shown in Fig. 10, it is found to behave as the square root of the distance to the threshold (either $|a - a_c|$ or $|k_z - k_+(a)|$). Therefore as reported previously [15], the 3D meander bifurcation is a supercritical Hopf bifurcation, as in 2D.

However, the k_z dependence of the nonlinear term quickly becomes important away from threshold. In Fig. 10, the square of the meander amplitude R^2 is compared to the growth rate of the unstable meander mode in the whole band $[k_-(a), k_+(a)]$. A clear asymmetry of the R^2 curve is already seen, with a slope at the $k_-(a)$ -end about 3.4 times larger than the $k_+(a)$ -end slope.

No flux boundary conditions. For the box height H used in our simulation (about 2 or 3 unstable wavelengths), the boundary conditions chosen on the top and bottom boundary conditions have a strong influence on the restabilized state. For no-flux boundary conditions, the spiral wave in each horizontal xy -plane has a meandering motion. However, contrary to the case of periodic boundary conditions the meander amplitude depends on z and is well approximated by $|\cos(k_z z)|$ (see Fig. 9). This implies in particular that in some horizontal planes the meander amplitude is zero and that the corresponding spiral tip performs a simple steady rotation. In the rotating frame where these special tips are motionless, the instantaneous filament takes a planar zig-zag shape that rotates around its vertical midline at a pulsation close to the imaginary part of the unstable meander eigenmode corresponding to the wavelength of the filament. Thus, for no-flux boundary condition, the meander amplitude varies sinusoidally with height while the phase of the epicycle motion is independent of height.

This shape and motion are simply understood in a weakly nonlinear description where the restabilized state can be approximated as a sum of the unperturbed solution and the four unstable meander eigenmodes ($\sigma_m(k_z)$ and $\sigma_m^*(k_z)$ at $\pm k_z$)

$$u = u_0(r, \psi) + [Au_1(r, \psi) e^{i(k_z z + \omega_2 t)} + Bu_1(r, \psi) e^{i(-k_z z + \omega_2 t)} + c.c.] \quad (24)$$

$$v = v_0(r, \psi) + [Av_1(r, \psi) e^{i(k_z z + \omega_2 t)} + Bv_1(r, \psi) e^{i(-k_z z + \omega_2 t)} + c.c.] \quad (25)$$

with u_1, v_1 the eigenmode of eigenvalue $\sigma_m(k_z)$ and $\omega_2 = \text{Im}[\sigma_m(k_z)]$ the meander frequency. The no-flux boundary

condition, $\partial_z u = 0$, at $z = 0$ and $z = H = 2\pi/k_z$ enforces $A = B$ (i.e. for the height considered, the no-flux boundary conditions stabilize the state with symmetric upward and downward propagating deformation which was observed to be unstable with periodic boundary conditions). The instantaneous filament corresponding to the fields (25) is easily determined by remembering that it is the locus $u = u_{tip}$, $v = v_{tip}$. Its position is conveniently parameterized as $x'_{tip}(z) = x'_0 + \delta x'(z, t)$, $y'_{tip}(z) = y'_0 + \delta y'(z, t)$ using Cartesian coordinates in the rotating frame where the unperturbed filament is standing at (x'_0, y'_0) . For small $|A|$, one obtains

$$\partial_x u_0 \delta x' + \partial_y u_0 \delta y' + \cos(k_z z) [2A u_1 e^{i\omega_2 t} + c.c.] = 0 \quad (26)$$

$$\partial_x v_0 \delta x' + \partial_y v_0 \delta y' + \cos(k_z z) [2A v_1 e^{i\omega_2 t} + c.c.] = 0 \quad (27)$$

where the field u_1, v_1, u_0, v_0 and their derivatives are evaluated at the unperturbed filament position (x'_0, y'_0) . Inversion of Eq. (26, 27) gives

$$\begin{aligned} \delta x' &= \cos(k_z z) [\alpha A e^{i\omega_2 t} + c.c.] \\ \delta y' &= \cos(k_z z) [\beta A e^{i\omega_2 t} + c.c.] \end{aligned} \quad (28)$$

where α and β are complex constants which depend on u_1, v_1 and the derivatives of u_0 evaluated at the point (x_0, y_0) . This clearly shows the planar zig-zag shape of the instantaneous filament since points in different xy -planes simply differ by the real scale factor $\cos(k_z z)$. As time evolves, Eq. 28 also shows that the filament points follow scaled ellipses in different xy -planes. Our simulations show that, as for 2D meander, these ellipses are in fact almost circular³.

Finally, we briefly discuss the transition between the restabilized meander regime seen on the meander pivoting side of the phase diagram (Fig. 1) and the negative line tension dynamics which belongs to its meander orbiting side. Since scroll waves do meander in this transition region, the evolution of scroll waves as seen in direct numerical simulations is not directly linked to the linear spectrum of the steady scroll wave. For example, when the meander and translation bands are strongly hybridized, the translation bands are only unstable for small values of k_z (Fig. 8). Nonetheless, direct simulations show that the meandering scroll is unstable and that its core grows as in the negative line tension regime in simulation boxes small enough to only contain unstable modes of the meander bands with larger values of k_z . This happens on the whole small a side of the dashed $\omega_1 = \omega_2$ line of Fig. 1. This line stands very close to the line where the external field drift of meandering spiral changes sign [25] and it is difficult to distinguish the two in our simulations. So, the link between the spiral drift sign and the "negative line tension" type of instability development continues to hold for meandering scroll wave.

IV. INFLUENCE OF TWIST

As noted in several previous studies [7,8,10], twist is an important degree of freedom brought by the extension to 3D. It is well-known from classic studies of elasticity [26] (and everyday experience) that straight rods and ribbons can be destabilized by twisting them beyond a certain level. A somewhat similar instability was reported in ref. [10] in numerical simulations of excitable filaments. Beyond a threshold twist, the rotation center line of an initially straight twisted filament was observed to adopt an helical configuration. Observations of a similar 'sproing' [10] instability have since been made in the related context of the complex Ginzburg-Landau equation vortex lines [27]. The characteristics of the excitable filament sproing instability have however remained somewhat unclear. In the dynamical simulations of ref. [10], a single filament turn was imposed in a simulation box with periodic conditions, and the box height was varied. A complicating feature of this procedure is that both twist and the available wavelength range are changed at the same time. On the theoretical side, the instability fails to be captured by small twist approaches [16,12] since [12] the motion of the rotation center is not influenced by twist in this limit (see appendix D).

³An explanation can be provided by the proximity of the $\omega_2 = \omega_1$ point on the meander threshold line (as noted in a particular limit in [14]). The argument is that i) the meander modes are close to the translation modes when ω_2 is close to ω_1 ii) the ellipse should reduce to a circle for translations since the translated circular core is circular. This can be explicitly seen from Eq. (28). Namely, Eq. (28) gives $\delta x' + i\delta y' = \cos(k_z z) [A(\alpha + i\beta) \exp(i\omega_2 t) + A^*(\alpha^* + i\beta^*) \exp(-i\omega_2 t)]$. The explicit inversion of Eq. (26, 27) shows that $\alpha + i\beta$ is proportional to $(v_1 u_1 - u_1 v_1)$ and therefore vanishes when (u_1, v_1) tends toward the translation eigenmode (u_1, v_1) . In this limit, it only remains the term proportional to $\alpha^* + i\beta^*$ and $\delta x' + i\delta y'$ follows a circle.

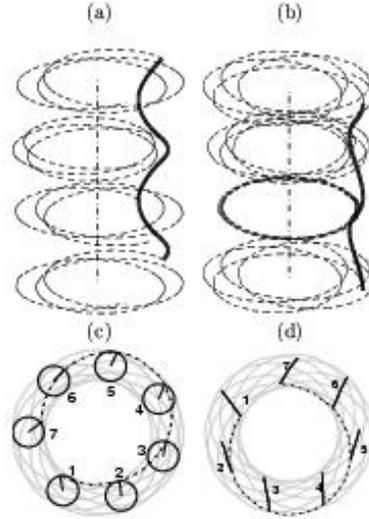


FIG. 9. (a): view of the restabilized state in the weakly non linear regime. The parameters are : $a = 0.684$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$, the size of the simulation box is $(128 \times 128) \times 130$ with $dx = 0.2$ and periodic boundary conditions are used. The dashed lines are the trajectories of the tip of the spiral in four regularly spaced horizontal planes. The bold line is the instantaneous helical filament. The dash-dotted line is the axis around which the axis of the helical filament rotates. (c): black bold circles, projections of the instantaneous filament on an horizontal plane at different times. The bold radius in each circle shows the instantaneous filament point at height $z = 0$. This point trajectory is also shown for several periods of rotation (bold dashed-dotted line: evolution between circles 1 and 7; thin gray line: evolution for some time afterwards). The pulsation of the axis of the filament is equal to $\omega_1 = 1.744$, the pulsation of the meander in the rotating frame is equal to $\omega_2 = -2.159$. These values are to be compared with results of the linear stability analysis : $\omega_1 = 1.766$ and $\omega_2 = \pm 2.194$. (b): view of the restabilized state with the same parameters and same simulation box using no flux boundary conditions. The instantaneous filament has a zig-zag shape and the amplitude of meander varies with z . (d): black bold lines, projections in an horizontal plane of the instantaneous filament at different times. The trajectory of the spiral tip in a plane where the amplitude of meander is maximal is also shown for several periods of rotation (bold dashed-dotted line: evolution between filaments 1 and 7; thin gray line: evolution for some time afterwards). Its pulsation is equal to $\omega_1 = 1.745$ whereas the pulsation of the instantaneous filament in the rotating frame is equal to $\omega_2 = -2.159$. The mean distance between the instantaneous filament points and the central (dash-dotted) axis is $R = 0.4930$ in the (a) (periodic boundary condition) figure and $R = 0.4944$ in the (b) no-flux case. The core radius of the corresponding 2D spiral is $R_0 = 0.4833$.

The present approach permits to relieve some of these problems since the twist τ_w can be varied from zero to large values and a whole range of wavelengths can be examined in the linear stability computations (k_z is simply a parameter which can be given any chosen value independently of τ_w).

We restrict ourselves here mostly to parameter values for which a straight untwisted filament is stable, that is on the large a side of the (3D) meander instability region. Fig. 11 shows the frequency and tip radius for a family of twisted scroll wave obtained by increasing τ_w from 0 to τ_w at one such parameter point ($a = 0.8$, $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$). The frequency $\omega_1(\tau_w)$ increases quadratically at small twist and almost linearly for larger twist values. The quadratic behavior at small τ_w is simply obtained by applying first order perturbation theory to Eq. (5, 6) which gives

$$\omega_1(\tau_w) = \omega_1(\tau_w = 0) - \tau_w^2 \frac{\langle \tilde{u}_\phi, \partial_{\phi\phi} \mathbf{w} \rangle}{\langle \tilde{u}_\phi, \partial_\phi u_0 \rangle + \langle \tilde{v}_\phi, \partial_\phi v_0 \rangle} + O(\tau_w^4) \quad (29)$$

The direct computation of the matrix element ratio on the r.h.s. of Eq. (29) is in good agreement with a direct fit of the $\omega_1(\tau_w)$ curve of Fig. 11 (see caption). Analytic descriptions of the $\omega_1(\tau_w)$ curve for larger twist values have recently been obtained in the free boundary limit ($\epsilon \rightarrow 0$) both for small core [28] and large core scroll waves [29].

The determination of a family of increasingly twisted steady scroll waves permits to determine the evolution of the

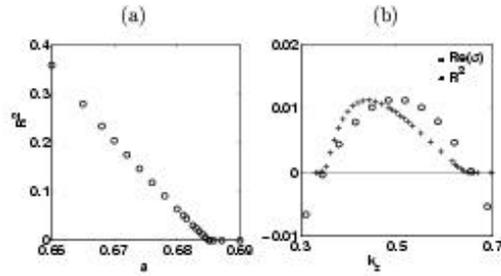


FIG. 10. (a) : square of the amplitude of the meandering restabilized state as a function of the parameter a . The parameters used are $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$. The simulation box is $(128 \times 128) \times 130$, with $dx = 0.2$ and periodic boundary conditions are used. (b) : comparison of the square of the amplitude of the meandering restabilized state R^2 multiplied by 0.035 and the growth rate of the meandering mode $Re(\sigma)$. Same parameter regime as in (a) and a is fixed to 0.68.

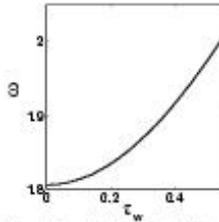


FIG. 11. Frequency ω_1 of the scroll wave as a function of the twist for $a = 0.8$, $b = 0.01$, and $\epsilon = 0.025$. The small τ_w behavior of the pulsation can be well approximated by $\omega_1(\tau_w) = \omega_1(\tau_w = 0) + 0.7205\tau_w^2$ for low values of τ_w . For higher values of τ_w , a linear behavior of ω_1 as a function of τ_w is observed. The first-order perturbation result coefficient (29) is 0.7203 using the numerically determined rotation eigenmodes of \mathcal{L} and of its adjoint.

stability spectrum with τ_w . The results of such a computation are shown in Fig. 12 for scroll waves of Fig. 11. As twist increases, the deformations of the translation bands are particularly important. As expected from general arguments (section IIB 2), for $\tau_w = 0.2$ (Fig. 11b), the translation bands $\sigma_{t,1}, \sigma_{t,2}$ are no longer even and related by complex conjugation. It only remains the lower symmetry $\sigma_{t,1}^*(k_z) = \sigma_{t,2}(-k_z)$. One can note also that the translation modes with $Re[\sigma(k_z)] = 0$ stand at $k_z = \pm\tau_w$ and no longer at $k_z = 0$, in agreement with the analytic expression given in section IIC. When twist is further increased to $\tau_w \approx 0.33$ (not shown) a second maximum of $Re[\sigma(k_z)]$ appears near $k_z = 0$. The value of $Re[\sigma(k_z)]$ is negative at first at this secondary maximum. However, it increases with τ_w and it is slightly positive at $\tau_w = 0.35$ (Fig. 11c). The twisted scroll waves are then unstable for a finite range of wavevectors near $k_z = 0$. Increasing twist further, enlarges the range of unstable wavelengths and the instability growth rate, as shown on Fig. 11d.

Dynamical simulations reported in section IVB show that this twist-induced instability of the translation bands correspond to the "sproing" instability of ref. [10]. Before describing these results, it is worth explaining why the instability does not appear around the translation modes at $k_z = \pm\tau_w$ but a finite wavevector away from them. This is a direct consequence of 3D rotational invariance: a twisted scroll wave the axis of which is tilted has the same frequency as one the axis of which is vertical. So, a small tilt perturbation should not change the translation mode eigenvalues $\pm i\omega_1$ to linear order. Therefore, they remain local extrema on the translation bands, as it is observed in Fig. (12). A direct mathematical proof (based on the same reasoning) is offered in the next section.

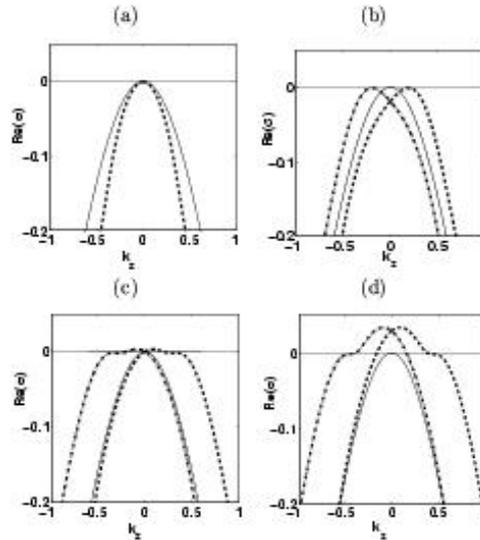


FIG. 12. Real parts of the rotation band (thin solid line) and the two translation bands (bold dashed and dash dotted lines) as a function of the wave number k_z for the same parameter values $a = 0.8$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$ and different values of twist : (a) $\tau_w = 0$, (b) $\tau_w = 0.2$, (c) $\tau_w = 0.35$ and (d) $\tau_w = 0.45$. The translation bands have maxima at $k_z = \pm\tau_w$ with a zero growth rate. A secondary maximum appears on the translation bands as the twist increases. At a threshold value of the twist it becomes unstable at a non-zero value of k_z .

Finally, we find it interesting to show in Fig. 13 the twist influence on the spectrum in the "negative line tension" parameter regime of Fig. 5, although the untwisted scroll wave is already unstable in this case. Twist modifies the spectrum in a way that is rather different from that seen in Fig. 12. It mainly amplifies the instability of the large k_z part of the spectrum.

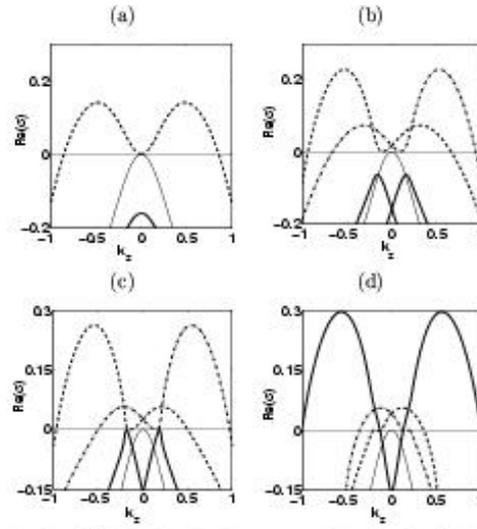


FIG. 13. Real parts of the rotation band (thin line) and the two translation bands (dashed and dashed-dotted) as a function of the wave number k_z for $a = 0.44$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$ and different values of twist : (a) $\tau_w = 0$, (b) $\tau_w = 0.1$, (c) $\tau_w = 0.14$ and (d) $\tau_w = 0.19$. The translation bands have a minimum zero growth rate for $k_z = \pm \tau_w$. The maximum growth rate of the translation bands is increased by twist. The meander modes also become less stable as twist is increased. The change in the most unstable band for τ_w close to 0.14 appears to be due to hybridization between the translation and meander bands like the one observed in Fig. 8. The results of direct numerical simulations show that twist does not qualitatively modify the development of the zero twist instability in this regime: a "negative line tension" growth of the filament is observed.

A. Helical destabilization and 3D rotational invariance

In order to demonstrate that the translation modes eigenvalues at $k_z = \pm\tau_w$ remain extrema on the translation bands, we show that

$$\left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{k_z = \pm\tau_w} = 0 \quad (30)$$

We proceed in two steps. First, perturbation theory is used to compute the eigenvalues of modes close to the translation modes on the translation bands. For definiteness, we consider modes at $k_z = -\tau_w + \delta k$, close to the translation mode (u_t, v_t) at $k_z = -\tau_w$ with $\sigma = i\omega_1$. Eq. (7, 8) can be written without approximation,

$$\sigma(k_z) \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = (-i\delta k^2 + 2\delta k \tau_w + 2i\tau_w \delta k \partial_\phi) \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{k_z = -\tau_w} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \quad (31)$$

Seeking in perturbation, $u_t = u_t + \delta u_t, v_t = v_t + \delta v_t$, one obtains to first order in δk ,

$$\delta\sigma \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + i\omega_1 \begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta v_t \end{pmatrix} = 2\delta k \tau_w (1 + i\partial_\phi) \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}_{k_z = -\tau_w} \begin{pmatrix} \delta u_t \\ \delta v_t \end{pmatrix} \quad (32)$$

Multiplying by the left eigenvector $(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t)$ of $\mathcal{L}_{k_z = -\tau_w}$ for the eigenvalue $i\omega_1$ and taking the scalar product gives,

$$\left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{k_z = \pm\tau_w} = \frac{2\tau_w}{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle + \langle \tilde{v}_t, v_t \rangle} \langle \tilde{u}_t, (1 + i\partial_\phi) u_t \rangle \quad (33)$$

Thus, the translation modes remain extrema on the translation bands, if

$$\langle \tilde{u}_t, (1 + i\partial_\phi) u_t \rangle = 0. \quad (34)$$

Eq. (34) is a consequence of 3D rotational invariance as we proceed to show. The perturbation corresponding to inclining the scroll axis can be found by expressing the inclined scroll in the vertical scroll referential, similarly to what was done to determine translation modes (Eq. (11, 12)).

One obtains,

$$\begin{pmatrix} u_{inc}^{(1)} \\ v_{inc}^{(1)} \end{pmatrix} = \exp[i(\omega_1 t + \tau_w z)] \begin{pmatrix} u_{inc} \\ v_{inc} \end{pmatrix} = \exp[i(\omega_1 t + \tau_w z)] \left[z \exp(i\phi) (\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\phi) + \tau_w r \exp(i\phi) \partial_\phi \right] \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

and the complex conjugate mode. One can directly check that $u_{inc}^{(1)}, v_{inc}^{(1)}$ obey the linearized time dependent equations. Namely,

$$(\partial_t + 2\tau_w \partial_\phi^2 - \partial_{zz}) u_{inc}^{(1)} = (\omega_1 \partial_\phi + \tau_w^2 \partial_\phi^2 + \nabla_{2D}^2) u_{inc}^{(1)} + [\partial_u f(u_0, v_0) u_{inc}^{(1)} + \partial_v f(u_0, v_0) v_{inc}^{(1)}] / \epsilon \quad (36)$$

$$\partial_t v_{inc}^{(1)} = \omega_1 \partial_\phi v_{inc}^{(1)} + \partial_u g(u_0, v_0) u_{inc}^{(1)} + \partial_v g(u_0, v_0) v_{inc}^{(1)} \quad (37)$$

Eq. 37 shows that (u_{inc}, v_{inc}) (Eq. (35)) obey

$$[\mathcal{L}_{k_z = -\tau_w} - i\omega_1] \begin{pmatrix} u_{inc} \\ v_{inc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i2\tau_w (1 + i\partial_\phi) u_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

The inhomogeneous r.h.s. of Eq. (38) comes from the fact that the ∂_z derivative terms in Eq. (37) act both on the exponential prefactor and on the intrinsic z dependence of u_{inc} (Eq. (35)), while in effect only their action on the exponential term is taken into account in Eq. (38) (through the k_z dependence of \mathcal{L}_{k_z}).

Eq. (38) directly gives the sought orthogonality relation (34) after multiplying both of its sides by the left eigenvector $(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t)$ of $\mathcal{L}_{k_z = -\tau_w}$ with eigenvalue $i\omega_1$ and taking the scalar product.

B. The sproing bifurcation

In order to study the nonlinear development of the twist-induced instability shown in the parameter regime of Fig. 12c, d, we performed direct numerical simulations of twisted scroll waves using periodic boundary conditions at the top and bottom of the simulation box.

Two kinds of initial conditions were used. The simplest one consisted of two dimensional spirals stacked along the vertical (z) axis. The twist was introduced by rotating them around this vertical axis. The main disadvantage of this type of initial conditions was that they usually are far from a stationary twisted scroll wave and from a restabilized wave when it existed. As a result, reaching the asymptotic attracting state could be very costly in computational time. In order to avoid this problem we mainly used initial conditions constructed using results of previous direct simulations on a grid with the same values of the parameters and the same horizontal size but of a different vertical extension, interpolating linearly the values of the u and v field on the new grid.

For definiteness, we describe the result for the parameters of Fig. 12.

We first focus on the case when a single turn of twist is initially imposed as in ref. [10]. This case is special for the following reasons. On one hand, the previous linear stability results (Fig. 12) show that all the potentially unstable modes correspond to $|k_z| < \tau_w$. On the other hand, in a box of height H , the only possible k_z values compatible with the imposed top and bottom periodic boundary conditions are multiple of $2\pi/H$. Therefore, for a single turn of twist $\tau_w = 2\pi/H$, there is a single potentially unstable mode in the simulation box and it stands at $k_z = 0$.

A series of dynamical simulations were performed in boxes of varying heights H . The initial twist was correspondingly varied from $\tau_w = 0.3$ to $\tau_w = 0.5$.

For low values of twist, the twisted initial state simply evolves toward a straight twisted scroll wave. The instantaneous filament has an helical shape that rotates at a fixed time independent frequency around its vertical axis. In each horizontal plane, the wave is seen as a spiral steadily rotating around the helix axis.

Beyond a threshold twist τ_c , the twisted initial state evolves toward a more complex state. The threshold twist is estimated to be $\tau_c = 0.352$ from the direct numerical simulations. It closely corresponds to the value 0.350 obtained from the linear stability analysis for the instability of the $k_z = 0$ modes (the instability threshold twist at $k_z \neq 0$ is $\tau \simeq 345$). The asymptotic scroll wave state is shown in Fig. 16 for $\tau_w = 0.381$ and it is qualitatively similar for other values $\tau_w > \tau_c$. The instantaneous filament takes an helical shape at each time. The axis of this instantaneous helical shape is independent of time but its other characteristics vary with time. The point of the instantaneous filament in a given horizontal plane (i.e. the spiral wave tip in that plane) closely follows an epicycloidal motion (Fig. 16) and the instantaneous filament global evolution can be accurately parameterized as

$$\begin{cases} x = R_1 \cos(\omega_s t + \tau_w z + \phi) + R \cos(\omega_m t + \tau_w z) \\ y = R_1 \sin(\omega_s t + \tau_w z + \phi) + R \sin(\omega_m t + \tau_w z) \end{cases} \quad (39)$$

The pulsation ω_s and the radius R_1 are close to the pulsation and radius of the stationary straight twisted scroll. The pulsation ω_m is found to be small compared to ω_s (Table II). The radius R is zero at the bifurcation threshold. It increases and become comparable to R_1 as τ_w increases past τ_c (Fig. 15). As $R\omega_m$ remains small compared to $R_1\omega_s$, the movement of the spiral tip in an horizontal plane can be described as a rapid rotation movement around a slowly moving "mean" point (Fig. 16). The bifurcation can thus be described as in ref. [10] as a transition in the shape of these slowly moving points, the "mean filament", from a straight shape to an helix of radius R (with the same axis as the instantaneous filament).

The amplitude of the sproing bifurcation can be measured by the radius R of the helical mean filament⁴. The numerical simulations results (Fig. 15) show that R behaves as $\sqrt{\tau_w - \tau_c}$ confirming the normal Hopf type of the bifurcation. The motion of a filament point in an horizontal plane is quasiperiodic with two frequencies (see Eq. 39 and Fig. 16) ω_m and ω_s . As reported in Table II, the frequency ω_m closely agrees with the difference $\omega_1 - \omega_{1,k_z=0}$ between the stationary twisted scroll pulsation (ω_1) and the imaginary part of the unstable mode at $k_z = 0$, as expected from a Hopf bifurcation in a rotating frame. The other frequency ω_s is equal to the twisted scroll pulsation ω_1 at the bifurcation point but departs from it as one moves away from it.

Some insight into the sproing bifurcation and the value of ω_s can be gained by computing the local twist of the restabilized scroll wave. The mean filament can be taken as the central curve of a ribbon, one edge of which is the instantaneous filament of length. The local twist of this ribbon is equal to (using Eq. (C2) and (C4) of appendix C)

⁴ R can be easily computed as $R = (R_{\max} + R_{\min})/2$ where R_{\max} (R_{\min}) is the maximum (minimum) distance of the instantaneous filament from its axis in an horizontal plane (R_{\min} should be counted negative value if the spiral tip trajectory encloses the axis of the helices during one rotation period).

τ_w	ω_{sc}	$\omega_1(\tau_w) - \text{Im}(\sigma_1(k_z = 0))$	$\omega_1(\tau_w)$	ω_s	τ	$\omega_1(\tau)$
0.50	0.053	0.049	1.973	1.91	0.353	1.892
0.45	0.061	0.059	1.943	1.88	0.347	1.889
0.40	0.066	0.066	1.916	1.88	0.347	1.889
0.355	0.063	0.063	1.891	1.88	0.349	1.890

TABLE II. For different values of the imposed twist τ_w , values of the pulsation of the restabilized mean filament ω_{sc} , of the difference between the pulsation of the steady scroll $\omega_1(\tau_w)$ and the imaginary part of the unstable translation mode for $k_z = 0$, the pulsation of the steady scroll $\omega_1(\tau_w)$, the pulsation of the restabilized spiral around the mean filament ω_s , the local twist τ of the restabilized state and the calculated corresponding pulsation $\omega_1(\tau)$. One notes that ω_s is close to $\omega_1(\tau)$.

$$\tau = \frac{2\pi - W\tau}{L} = \frac{\tau_w}{1 + (R\tau_w)^2} \quad (40)$$

where L is the mean filament length and $\tau_w = 2\pi/H$ is the twist imposed on the initial straight scroll wave. Eq. 40 shows that sproing decreases the twist. Moreover, when the initial twist is increased the average helix radius R also increases so as to maintain the local twist τ approximately constant, as shown in Fig. 15b. The frequency ω_s appears to remain close to the frequency of twisted straight scroll wave with this value of the local twist, as shown in Table II.

It is interesting to compare the above results with what happens when the initial condition contain n turns of twist since the modes with $k_z = j2\pi/H, j = 1, \dots, n-1$ obey both $k_z < \tau_w$ and the periodic boundary conditions. Analyzing moderate values of the imposed twist $\tau_w = n2\pi/H$ requires of course to extend the box height H proportionally to n and restricted us to $n \leq 5$.

The simplest interesting case occurs when a single unstable mode with $k_z \neq 0$ can develop in the simulation box. The linear stability results shows that this can only happen close to the instability threshold when the instability growth rate is very low, otherwise the $k_z = 0$ mode is also unstable. This is achieved, for instance, for $a = 0.8$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$ and $n = 5$ initial turns of twist in a box of height $H = 613 \times dx$ with $dx = 0.15$. The single unstable mode $k_z = 2\pi/H = 0.069$ corresponds to a wavelength equal to the box height H . With this parameter choice, a direct simulation shows that the instability develops. The asymptotic state is similar to the previously described one for a single unstable mode at $k_z = 0$. The movement of the corresponding instantaneous filament can be parameterized using polar coordinates in each horizontal plane by:

$$x + iy = R_1 e^{i\omega_1 t + \tau_w z} + R_2 e^{+i\omega_2 t + (\tau_w - k_{z2})z + \psi}, \quad (41)$$

where $R_1 \simeq 0.31$ and $\omega_1 = 1.85$ are close to the radius and pulsation of the straight twisted scroll and where $R_2 \simeq 0.1$ and $\omega_2 = -0.047$ are small compared to R_1 and ω_1 . The wavenumber $k_{z2} = 0.069$ is equal to the single unstable wavenumber that can develop in the simulation box. The computation of ω_2 shows that it is close of the difference $\omega_1(\tau_w) - \text{Im}(\sigma_1(k_{z2}))$. In contrast to the single turn of twist case, the instantaneous filament shape is slightly different from an helix since its radius varies along the vertical axis. The motion can nonetheless be interpreted in the same manner by considering that the scroll rotates uniformly around a slowly moving helical mean filament of radius R_2 and pitch $2\pi/(\tau_w - k_{z2})$.

The case where several unstable modes of the translation band can develop in the simulation box, can only be studied in a box where several turns of twist are initially imposed. The asymptotic state reached in such a case after the instability development, starting from an initially twisted straight scroll wave is shown in Fig. 16. It is significantly more complicated than in the single unstable mode case and the instantaneous filament shape is rather different from a simple helix.

In each horizontal plane, the spiral tip rotates uniformly around a slowly moving point. The positions of these slowly moving points can be numerically computed⁵ and used to construct the position of a mean filament. The motion of the mean filament is found to be well parameterized in each horizontal plane by

⁵This can be done by considering the mean filament as the mean position of the instantaneous filament over a rotation period, or by considering it as the instantaneous center of rotation of the instantaneous filament in a plane or by removing the high frequency peak in the Fourier spectrum of the instantaneous filament motion. These three methods give very similar results.

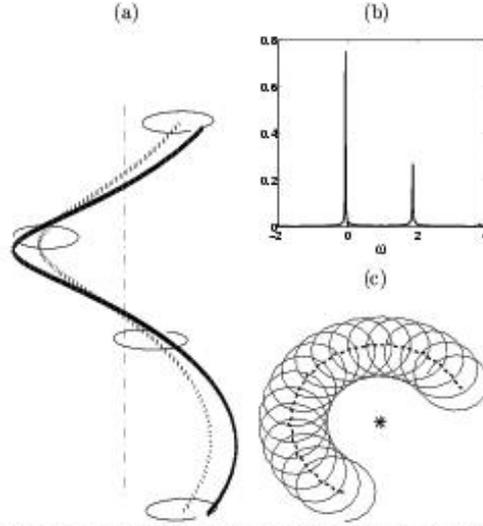


FIG. 14. (a): the bold solid line represents the helical instantaneous filament, the dotted line the mean filament and the thin solid lines the quasi-circular trajectories of the instantaneous filament in horizontal planes of equally spaced z . Parameters values are $a = 0.8$, $b = 0.01$ and $\epsilon = 0.025$, the simulation box is $(128 \times 128) \times 110$ with $dx = 0.15$, corresponding to $\tau_w = 0.381$. (b): Fourier transform of the position of the tip of the spiral in an horizontal plane for the same parameter regime. The peak at $\omega \approx -0.064$ corresponds to the slow movement of the mean filament in the plane while the peak at $\omega = 1.884$ corresponds to the rapid rotating motion of the spiral. The Fourier transform was performed using 2048 points with a time spacing of $\delta t = 0.1969$. (c): the thin solid line is the trajectory of the spiral tip in an horizontal plane and the bold dashed line is the trajectory of the mean filament in that plane. The mean filament rotates clockwise while the fast rotation of the spiral tip is counterclockwise. At a given time, the projection of the mean filament and instantaneous filaments on the horizontal plane are circles centered on the helices axis position marked by a star.

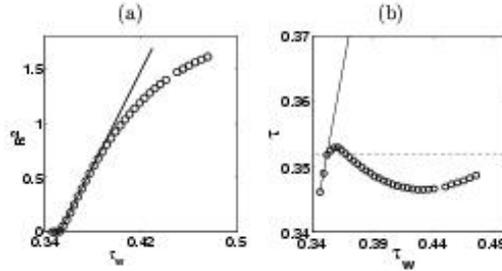


FIG. 15. (a) Radius (R) of the helical mean filament as a function of the twist τ_w , for a stationary straight twisted scroll wave and linear interpolation of R^2 for small values of $\tau_w - \tau_c$ (thin continuous line) where the computed threshold twist is $\tau_c = 0.352$. The parameters are $a = 0.8$, $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$. (b): local twist of the restabilized filament as a function of τ_w . The dashed line is the line of equation $\tau = \tau_c$, the continuous line is the line of equation $\tau = \tau_w$.

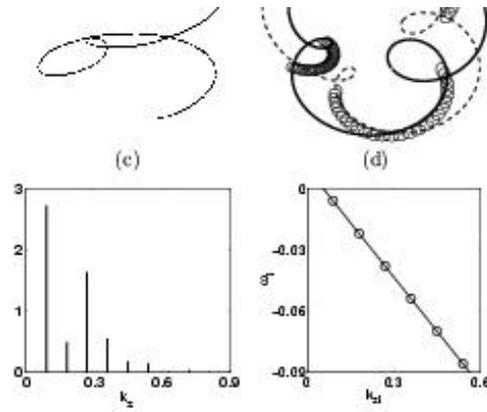


FIG. 16. $a = 0.8$, $b = 0.1$, $\epsilon = 0.025$, the simulation box size is $(128 \times 128) \times 349$, the space step is $dx = 0.2$ and five turns of twist are imposed, which corresponds to $\tau_w = 0.450$ (a). The bold solid line represents the restabilized mean filament. The instantaneous filament and the quasi circular trajectories of instantaneous filaments in horizontal planes are not shown. (b): The dashed and solid bold lines represent a top view of the instantaneous filament at two given times. The three thin solid lines are typical trajectories of the spiral tip in horizontal planes. The motion of the spiral tip in each plane is the composition of a fast counterclockwise and a slow clockwise rotations. (c): Absolute value of the space Fourier transform of the mean filament as a function of z . The amplitude of each mode is constant in time while its phase grows linearly in time with a constant pulsation $\omega(k_z)$ shown in (d). For the Fourier modes with an amplitude significantly different from zero, $\omega(k_z)$ is a linear function of k_z .

$$x + iy = \sum_{j=1 \dots n} R_j e^{i(k_z^{(j)} z + \omega_j t + \phi_j)} \quad (42)$$

where z denotes the vertical position of the plane and $k_z^{(j)}$ are the wavenumbers of the modes that have developed in the simulation box. All the observed $k_z^{(j)}$ have the same sign as τ_w . As seen from Eq. 42, the corresponding modes have an amplitude R_j which is constant in time and a phase $\omega_j t + \phi_j$ which evolves linearly in time. Moreover, the pulsations ω_j are linearly related to the $k_z^{(j)}$, $\omega_j = \omega + k_z^{(j)} c$, as shown in Fig. 16. Thus, the mean filament parameterization can be rewritten as

$$x + iy = e^{i\omega t} F(z - ct) \text{ with } F(z) = \sum_{j=1 \dots n} R_j e^{i(k_z^{(j)} z)} \quad (43)$$

This explicitly shows that the mean filament deformation propagates as a nonlinear wave of constant shape in the vertical direction. It was indeed directly checked that the mean filament shape did not noticeably change at long times in our simulation (i.e. for time intervals as long as $\Delta t = 2000$). A direct computation of the twist shows that it is almost uniform and that its mean value is significantly lower than the one obtained when only $k_z = 0$ mode can grow. In the case depicted in Fig. 16, the mean local twist of the restabilized state is 0.327 whereas in the restabilized state when only the $k_z = 0$ mode can be destabilized, the mean local twist is equal to 0.347.

The stability of the simple restabilized helices was tested in the parameter regime where the more complex state of Fig. 16 existed. To this end, a simulation was first performed with a single turn of twist in a box height chosen such that the initial twist was equal to $\tau_w = 0.45$. It produced, as already described, a restabilized helix similar to the one shown in Fig. 14. Five copies of this restabilized helix were then vertically stacked. The resulting five turn helix was used as the initial condition for a simulation analogous to the one shown in Fig. 16. It was observed to evolve toward a complex state identical to the one shown in Fig. 16. This clearly shows that the simple helices are unstable and strongly suggest that the complex state of Fig. 16 is the unique attractor in this parameter regime. We repeated this computation with an initial twist of 0.357 and again a similar complex state was produced.

Systematically varying the initial twist would permit to see whether these complex states directly appear at the instability threshold or arise from a secondary bifurcation of stable simple helical states. More generally, further studying the filament shapes in longer boxes with more unstable modes would be quite instructive. Both tasks require more computer time and power than presently available to us and should be left for other studies.

V. CONCLUSION

We have searched to gain and present a general view of scroll wave linear instabilities and of their nonlinear developments for a simple model of an isotropic excitable medium. Different types of instabilities have been shown to arise depending upon the band of modes to which they belong. These different instabilities have been found to develop along different ways and to give rise to distinctly different restabilized states that we have endeavored to characterize.

The negative line tension type of instability has been found to occur in the weakly excitable part of the phase diagram and to be strictly linked to 2D spiral drift in an external field. In this respect, it seems worth to try and better analyze the mechanisms of spiral drift change. The meandering instability is present in 3D in a larger parameter region than in 2D. On the pivoting meander side of the phase diagram, scroll wave meander in a regime where spirals are steadily rotating, as previously noted [15]. The long wavelength deformation of the meander band is however not directly related to spiral drift. The introduction of twist has been found to induce a deformation of the translation bands. Above a threshold twist, this gives rise to the sponging instability which takes place a finite wavevector away from the translation mode. This has been shown to be a general consequence of 3D rotational invariance and it explains that the sponging bifurcation is not captured by small twist approaches. The bifurcated state arising from the growth of a single unstable mode has been found to take a simple helical shape as previously described [10]. However, a more complex filament deformation has been observed to result from the growth of several unstable modes. Simulations in larger boxes appear needed to better analyze these states.

The present study appears worth extending along several other lines. It certainly is important to investigate how the present results extend to more realistic models of excitable media, specially in the cardiac physiology context. It will also be quite interesting to see how rotating anisotropy [30–33], or spatially varying properties induce the different instabilities or interact with them. Deeper insights into the behavior of these complex waves in various situations may be gained by developing and analyzing of reduced models reproducing the basic phenomenology here uncovered. We hope to be able to report progress in this direction soon. Advances in 3D visualization [9,34] appear to render

possible detailed experimental characterization of scroll wave instabilities and dynamics. We hope that the present results will also be seen as a further motivation to undertaking this challenging task.

APPENDIX A: NUMERICAL METHODS

1. Determination of the steady state

Determining the stationary scroll waves consists in solving the nonlinear eigenvalue problem (6). To this end, the equations are first discretized on a polar grid of size $(N_r \times N_\phi)$. This provides a set of $2(N_r \times N_\phi)$ equations (the values

of the r.h.s of (6) on the grid points) with $2(N_r \times N_\phi) + 1$ unknowns (the values of the field u_0, v_0 on the points of the grid and the pulsation ω). This indetermination comes from the rotational invariance of the problem and can be taken care of by setting the value of $u_0(N_r, N_\phi)$ to 0.5. One thus has to find the zeros of $2(N_r \times N_\phi)$ non linear equations of $2(N_r \times N_\phi)$ variables.

This can be done accurately using Newton's method. The linear operator involved in Newton's method is inverted using an iterative technique (biconjugate gradient [35]) and the starting point is either the result of a direct numerical simulation interpolated on the polar grid or the result of a previous computation with slightly different parameters. We found that the Newton's method always converged and that the convergence was exponential and allowed to reach accuracies of order 10^{-8} in L_2 norm⁶ in a few steps (about 10 which take about an hour using a DEC alpha PWS 500 Workstation for a grid of 80×160 points) whereas direct numerical simulations allowed only an accuracy of order unity in L_2 norm.

2. Computation of the linear stability spectrum

The eigenvectors of \mathcal{L}_{k_x} are denoted by e_1, e_2, \dots and indexed according to the real part of the corresponding eigenvalues $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$. In order to accurately compute the eigenvalues of \mathcal{L}_{k_x} of largest real parts, we have used an iterative method proposed and analyzed in [20]. It is briefly described in this appendix and some details of our implementation are provided.

The idea of the algorithm is to diagonalize a projection of \mathcal{L}_{k_x} in a subspace (approximately) spanned by the eigenvectors e_1, \dots, e_m corresponding to a given number m of eigenvalues of largest real parts.

The algorithm proceeds in three main steps.

The first step consists in creating an appropriate vector x_1 for generating the diagonalization subspace. A suitable choice is to take $x_1 = \exp(\mathcal{L}_{k_x} t) x_0$ for a generic vector x_0 . This suppresses the components of x_1 on the eigenvectors on high index [note that these eigenvectors correspond to eigenvalues of large modulus]. The end consequence is that truncation at level m produces an error of order $\exp[t(\text{Re}(\sigma_{m+1} - \sigma_i))]$ on the representation of the i -th eigenvector (for $i < m$) [20]. In practice, multiplication by the exponential is approximately achieved by computing by iterations $x_1 = (1 + dt\mathcal{L}_{k_x})^{t_0/dt} x_0$, for an arbitrary vector x_0 , a sufficiently large integer t_0/dt and a sufficiently small dt to prevent the time stepping scheme from being unstable (this means that dt is lower than $1/\max(|\lambda_i|)$, here $dt \simeq 10^{-5}$).

The second step consists in generating an appropriate subspace E for diagonalization. This is taken to be the space E spanned by $(G(\mathcal{L}_{k_x}))^n x_1$, $n = 0..m-1$ where G is an polynomial, the choice of which is discussed below. Explicitly, the computation of an orthonormal base of E and of the matrix $A = a_{ij}$ of the projection of $(G(\mathcal{L}_{k_x}))_m$ on E proceeds recursively as follows. Let x_1, \dots, x_n be the n first element of the base of E and $G(\mathcal{L}_{k_x})x_n = y_n$. Then, at the next step we compute:

$$x_{n+1} = \frac{y_n - \sum_{i=1..n} (y_n \cdot x_i) x_i}{\|y_n - \sum_{i=1..n} (y_n \cdot x_i) x_i\|_2}. \quad (\text{A1})$$

The construction ends at step m . This building of an orthonormalized base of E presents the advantage of decreasing the contribution of the first eigenmodes in the elements of higher order of the base. Otherwise, this contribution would be dominant and would result in a lower accuracy in the computation. In our case, the scalar product is defined by a discretized version of the standard scalar product (15):

⁶We define $\|u, v\|_2 = \sum (u_{ij}^2 + v_{ij}^2)$

$$(x_i, y_j) = \sum_{i_r} \sum_{i_\theta} x_i(i_r, i_\theta) y_j(i_r, i_\theta) i_r dr d\theta dr \quad (\text{A2})$$

The third step consists in the diagonalization of an appropriate truncation of $(G(\mathcal{L}_{k_s}))$. Since E is not invariant under the application of $(G(\mathcal{L}_{k_s}))$, the orthogonal projection G_m of $G(\mathcal{L}_{k_s})$ onto E is considered. Its matrix elements are:

$$g_{i,j} = (x_i, y_j), (i, j) \in \{1..m\} \times \{1..m\} \quad (\text{A3})$$

The obtained matrix is diagonalized and both its eigenvectors and its eigenvalues are computed. It is checked at the end that the leading eigenvectors of G_m are good approximations of the leading eigenvectors of \mathcal{L}_{k_s} .

The choice of the polynomial G is of some importance. Indeed, the simplest and computationally most efficient choice would be to take $G(X) = X$. This would result in the amplification of the contribution of the eigenmodes of \mathcal{L}_{k_s} of large index [i.e. corresponding to eigenvalues of large modulus] and, \mathcal{L}_{k_s} being ill-conditioned, would prevent the success of the method. We have used $G(X) = (1 + dtX)^{t_1/dt}$, with t_1 chosen large enough to make $G(\mathcal{L}_{k_s})$ differ significantly from the identity (a typical value was $t_1 = 0.5$). Despite the increase in computational cost, this choice significantly increases the accuracy of the method by decreasing the contribution of the eigenmodes of negative eigenvalues. Using $m = 50$, the 10 most unstable eigenmodes and eigenvalues are obtained with a good accuracy: $\|(\sigma - \mathcal{L}_{k_s})(u_i, v_i)\|_2 < 10^{-6}$.

3. Direct numerical simulations

Direct numerical simulations of three dimensional excitable media were performed using a forward Euler explicit timestepping scheme. The diffusion operator was evaluated using finite differences and a 19 points formula [36],

$$\begin{aligned} 6dx^2 \delta u_{i,j,k} = & -24u_{i,j,k} \\ & + 2(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1}) \\ & + u_{i+1,j+1,k} + u_{i+1,j-1,k} + u_{i+1,j,k+1} + u_{i+1,j,k-1} \\ & + u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k} + u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1} \\ & + u_{i,j+1,k+1} + u_{i,j+1,k-1} + u_{i,j-1,k+1} + u_{i,j-1,k-1} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

This method has two main advantages compared with the classical 7 points formula. First its stability limit allows greater time steps and therefore the computing time in spite of the additional operations involved in the Laplacian evaluation is found to be 1.3 times smaller. Second, the error made when evaluating the diffusion operator is isotropic at the dominant order (order dx^2), whereas with the 7 points formula it depends of the grid orientation.

No-flux boundary conditions $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} u = 0$ are imposed on the vertical sides of the box and either no-flux or periodic boundary conditions are chosen on the top and bottom boundaries.

The position of the instantaneous filament in the horizontal planes is computed as the intersection of a $u = 0.5$ and a $v = 0.75(0.5a - b)$ isosurfaces.

APPENDIX B: SPIRAL DRIFT IN AN EXTERNAL FIELD

In the presence of a small external field E , the spiral rotation center drifts at a constant velocity proportional to the field magnitude but at an angle with the field direction [37–39] as given by Eq. (18) of the main text. The drift coefficients α_{\parallel} and α_{\perp} have been computed in the free boundary limit ($\epsilon \ll 1$) both for small core [23] and large core spirals [14]. We derive here a general formula (Eq. (B10) below) for the drift coefficient $\alpha = \alpha_{\parallel} + i\alpha_{\perp}$ as a matrix element between the translation eigenvector (u_t, v_t) of \mathcal{L} and the corresponding right eigenvector $(\tilde{u}_t, \tilde{v}_t)$ of \mathcal{L} .

With an added external field E , Eq. (1, 2) read

$$\partial_t u = \nabla^2 u + f(u, v)/\epsilon - E \cdot \nabla u, \quad (\text{B1})$$

$$\partial_t v = g(u, v). \quad (\text{B2})$$

We choose a coordinate system with the x -axis along the field direction and corresponding polar coordinates (r, θ) . We analyze the motion of a counterclockwise rotating spiral which is stationary, for $E = 0$, in the rotating referential (r, ϕ) with $\phi = \theta - \omega_1 t$. Since $\partial_x = \cos(\theta)\partial_r - \sin(\theta)/r\partial_\theta$, the field term $E \cdot \nabla u$ can be written in the rotating referential

a	r.h.s of Eq. (B10)	$\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp}$
0.44	-2.05 -0.78i	-1.97 -0.84i
0.62	3.5 - 0.47i	3.4 -0.42i
0.7	1.59 - 0.80i	1.62 -0.83i

TABLE III. For $b = 0.01$, $\epsilon = 0.025$ and several values of a , the drift coefficients given by Eq. (B10) computed using the eigenmodes of \mathcal{L}_{k_s} and of its adjoint and the drift coefficients $\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp}$ measured in direct numerical simulations.

$$\begin{aligned} -E\partial_z u &= -E[\cos(\phi + \omega_1 t)\partial_r u - \sin(\phi + \omega_1 t)/r\partial_\phi u], \\ &= -E/2[\exp(i\omega_1 t)\exp(i\phi)(\partial_r u + i\partial_\phi u/r) + c.c.]. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

As will be seen below, secular terms appear when the E term on the r.h.s. of Eq. (B1) is treated in perturbation. Their origin is, of course, the induced spiral drift. Anticipating this phenomenon, we suppose that the spiral rotates steadily in the frame with coordinates (r, θ) which drifts with respect to the lab frame with coordinates (x, y) . That is,

$$x = x_0(t) + r \cos(\phi + \omega_1 t), \quad (\text{B4})$$

$$y = y_0(t) + r \sin(\phi + \omega_1 t), \quad (\text{B5})$$

and

$$\partial_t|_{r,\phi} = \partial_t|_{x,y} + \omega_1 \partial_\phi + \dot{x}_0 \partial_x + \dot{y}_0 \partial_y. \quad (\text{B6})$$

The supplementary terms proportional to \dot{x}_0 and \dot{y}_0 should be chosen to cancel the unwanted secular terms. This determines the spiral drift. Explicitly, we rewrite Eq. (B6) using the rotating coordinates as

$$\partial_t|_{x,y} = \partial_t|_{r,\phi} - \omega_1 \partial_\phi - 1/2[(\dot{x}_0 - i\dot{y}_0) \exp(i\omega_1 t) \exp(i\phi)(\partial_r + i\partial_\phi/r) + c.c.]. \quad (\text{B7})$$

Substitution of this formula in Eq. (B1,B2) and linearization under the form $u = u_0(r, \phi) + u_p \exp(i\omega_1 t) + c.c.$, $v = v_0(r, \phi) + v_p \exp(i\omega_1 t) + c.c.$ gives,

$$(i\omega_1 - \mathcal{L}) \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} - 1/2(\dot{x}_0 - i\dot{y}_0) \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = -E/2 \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B8})$$

Multiplying by the left eigenvector \mathcal{L} of eigenvalue $i\omega_1$ would show the need for secular terms if we had not introduced the drift terms. Here, however it simply determines the drift as

$$\dot{x}_0 - i\dot{y}_0 = E \frac{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle}{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle + \langle \tilde{v}_t, v_t \rangle} \quad (\text{B9})$$

Equivalently, this gives the sought formula for the drift coefficients

$$\alpha_{\parallel} - i\alpha_{\perp} = \frac{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle}{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle + \langle \tilde{v}_t, v_t \rangle} \quad (\text{B10})$$

APPENDIX C: TWIST AND WRITHE OF A RIBBON

We recall the definition of quantities associated to closed ribbons and some useful mathematical properties for analyzing the ‘‘sproing’’ bifurcation. In particular we give a mathematical definition of the twist and its value in the case of a uniformly twisted ribbon with an helical central curve.

The local twist of a ribbon is classically defined as ([26])

$$\tau = \left(\frac{d}{ds} (\vec{\beta}) \wedge \vec{\beta} \right) \cdot \vec{t} \quad (\text{C1})$$

where \vec{t} is the unit tangent vector to the mean curve of the ribbon, s is the curvilinear coordinate along the mean curve and $\vec{\beta}$, the unit vector perpendicular to that curve that directs the line intersecting one of the edges of the ribbon. The twist measures the spatial rotation rate of the edges of the ribbon around the mean curve.

For a closed ribbon, the linking number L_k is the integer which measures the entanglement of the two edges of the ribbon. L_k is a topological invariant which is constant under a continuous deformation of the ribbon (as long as it does not intersect itself).

The linking number is related to the integral of twist by a formula [40] (which has been popularized by its use in a molecular biology context)

$$L_k = W_r + \frac{1}{2\pi} \int_s \tau ds \quad (\text{C2})$$

The writhing number W_r depends only of the mean curve $\vec{r}(s)$ of the ribbon and is equal to:

$$W_r = \frac{1}{4\pi} \int ds \int ds' \frac{\partial_s \vec{r}(s) \wedge \partial_{s'} \vec{r}(s') \cdot [\vec{r}(s) - \vec{r}(s')]}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (\text{C3})$$

The tangent vector to $r(s)$ traces a closed curve on the unit sphere as $r(s)$ goes around the ribbon. The writhing number is also equal, up to an even integer, to the area enclosed on the unit sphere by this closed curve divided by 2π [41].

An example of interest is the writhing number of a single turn of an helix of radius R and pitch H (linking the two free ends by a non self intersecting planar curve to obtain a closed curve). The tangent vectors curve encloses a spherical cap on the unit sphere of normalized area equal to $(1 - \cos \theta)$ where θ is the angle made by the tangent vector with the vertical axis. This gives the writhing number (up to an even integer which is seen to be zero by using the continuity of W_r and the fact that the writhing number of a straight line is equal to zero),

$$W_r = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi R/H)^2}} \quad (\text{C4})$$

APPENDIX D: LINK WITH AVERAGED EQUATION

In ref. [16], equations were derived for the motion of the mean scroll filament and the evolution of twist for a weakly twisted and weakly curved scroll wave. It was subsequently noted [12] that many coefficients in ref. [16] original equations were identically zero and that only four non-trivial ones remained to be determined. This approach has recently been extended to take into account fiber rotation anisotropy [33].

In this appendix, we find it of some interest to explicitly relate the averaged equations of ref. [16,12] to the computations that are performed in the main part of the present paper. One coefficient in the equations of ref. [16,12] is given by the quadratic scroll rotation frequency dependence at small twist (Eq. (29)). Unsurprisingly, the three other ones are given by the curvature of the rotation and translation bands around the corresponding symmetry eigenvalues. This explicitly confirms that the spring instability cannot be captured in the limit considered to derive the averaged equations since the instability takes place a finite distance away from the translation symmetry eigenvalues on the translation bands.

We provide a simple-minded derivation of the equations ref. [16,12] using a Cartesian frame instead of the more sophisticated intrinsic mean filament coordinates used in ref. [16]. This limits us to consider a weakly inclined filament but we can proceed very similarly to the derivation of spiral drift in appendix B and the extension to non-isotropic or non-homogeneous medium is straightforward (but not considered here).

We denote the fixed Cartesian coordinates by (x, y, z) and by (r, ϕ, z) the cylindrical coordinates of a frame rotating at the 2D spiral frequency and centered on the mean filament position $(x_0(t, z), y_0(t, z))$,

$$x = x_0(t, z) + r \cos[\phi + \omega_1 t + \psi(t, z)] \quad (\text{D1})$$

$$y = y_0(t, z) + r \sin[\phi + \omega_1 t + \psi(t, z)] \quad (\text{D2})$$

The corresponding relations between the time and vertical (z) derivatives in the two referentials are thus,

$$\partial_t|_{r,\phi} = \partial_t|_{z,y} + \omega_1 \partial_\phi + \partial_t \psi \partial_\phi + \partial_t x_0 \partial_x + \partial_t y_0 \partial_y \quad (\text{D3})$$

$$\partial_z|_{r,\phi} = \partial_z|_{z,y} + \partial_z \psi \partial_\phi + \partial_z x_0 \partial_x + \partial_z y_0 \partial_y \quad (\text{D4})$$

These relations can be rewritten using $\partial_x + i\partial_y = \exp[i\phi + i\omega_1 t + i\psi(z, t)][\partial_r + i\partial_\phi/r]$ and introducing $w_0 = x_0 - iy_0$,

$$\partial_t|_{z,y} = \partial_t|_{r,\phi} - \omega_1 \partial_\phi - \partial_t \psi \partial_\phi - \frac{1}{2} [\partial_t w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_r + i\partial_\phi/r) + c.c.] \quad (D5)$$

$$\partial_z|_{z,y} = \partial_z|_{r,\phi} - \partial_z \psi \partial_\phi - \frac{1}{2} [\partial_z w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_r + i\partial_\phi/r) + c.c.] \quad (D6)$$

$$\begin{aligned} \partial_{zz}^2|_{z,y} &= \partial_{zz}^2|_{r,\phi} + (\partial_z \psi)^2 \partial_{\phi\phi}^2 - 2\partial_z \psi \partial_{\phi z}^2 - [\partial_z w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_{rz}^2 + i\partial_{\phi z}^2/r) + c.c.] \\ &\quad + \frac{1}{4} [(\partial_z w_0)^2 e^{2(i\omega_1 t+i\psi)} (e^{i\phi} (\partial_r + i\partial_\phi/r))^2 + c.c.] \\ &\quad + \frac{1}{2} |\partial_z w_0|^2 \nabla_{2D}^2 - \frac{1}{2} [\partial_{zz}^2 w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_r + i\partial_\phi/r) + c.c.] \\ &\quad - \partial_{zz}^2 \psi \partial_\phi + \partial_z \psi [\partial_z w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_{r\phi}^2 + i\partial_{\phi\phi}^2) + c.c.] \end{aligned} \quad (D7)$$

With Eq. (D5, D7), the governing reaction-diffusion equations (1,2) become

$$\begin{aligned} (\partial_t - \omega_1 \partial_\phi - \nabla_{2D}^2) u - f(u, v)/\epsilon &= \partial_t \psi \partial_\phi u + \frac{1}{2} [\partial_t w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_r u + i\partial_\phi u/r) + c.c.] + \partial_{zz}^2 u \\ &\quad + (\partial_z \psi)^2 \partial_{\phi\phi}^2 u - 2\partial_z \psi \partial_{\phi z}^2 u - [\partial_z w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_{rz}^2 u + i\partial_{\phi z}^2 u/r) + c.c.] \\ &\quad + \frac{1}{4} [(\partial_z w_0)^2 e^{2(i\omega_1 t+i\psi)} (e^{i\phi} (\partial_r + i\partial_\phi/r))^2 u + c.c.] \\ &\quad + \frac{1}{2} |\partial_z w_0|^2 \nabla_{2D}^2 u - \frac{1}{2} [\partial_{zz}^2 w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_r u + i\partial_\phi u/r) + c.c.] \\ &\quad - \partial_{zz}^2 \psi \partial_\phi u + \partial_z \psi [\partial_z w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_{r\phi}^2 u + i\partial_{\phi\phi}^2 u/r) + c.c.] \end{aligned} \quad (D8)$$

$$(\partial_t - \omega_1 \partial_\phi) v - g(u, v) = \partial_t \psi \partial_\phi v + \frac{1}{2} [\partial_t w_0 e^{i\phi+i\omega_1 t+i\psi} (\partial_r v + i\partial_\phi v/r) + c.c.] \quad (D9)$$

For a weakly curved and weakly twisted scroll wave, the r.h.s. of Eq. (D8, D9) can be treated in perturbation starting from the 2D spiral fields (u_0, v_0) . At first order, the inhomogeneous r.h.s are a superposition of time independent terms and of terms oscillating at frequencies ω_1 and $2\omega_1$. One can therefore seek (u, v) in perturbation as

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} u_1^{(2\omega_1)} \\ v_1^{(2\omega_1)} \end{pmatrix} e^{2i\omega_1 t + 2i\psi} + c.c. \right] + \left[\begin{pmatrix} u_1^{(\omega_1)} \\ v_1^{(\omega_1)} \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t + i\psi} + c.c. \right] + \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ v_1^{(0)} \end{pmatrix} \quad (D10)$$

where $(u_1^{(2\omega_1)}, v_1^{(2\omega_1)})$, $(u_1^{(\omega_1)}, v_1^{(\omega_1)})$ and $(u_1^{(0)}, v_1^{(0)})$ are time-independent functions characterizing the three different first order perturbative corrections.

The $2\omega_1$ -functions obey

$$(i2\omega_1 - \mathcal{L}) \begin{pmatrix} u_1^{(2\omega_1)} \\ v_1^{(2\omega_1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (\partial_z w_0)^2 \begin{pmatrix} (e^{i\phi} (\partial_r + i\partial_\phi/r))^2 u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (D11)$$

The operator $(i2\omega_1 - \mathcal{L})$ is invertible and the $2\omega_1$ functions $(u_1^{(2\omega_1)}, v_1^{(2\omega_1)})$ can be determined. They simply describe the inclined circular core which is viewed as elliptical in the chosen xy coordinates (these terms are absent in the filament coordinates used in ref. [16] where in effect $\partial_z w_0$ is zero).

On the contrary, the ω_1 and constant functions arise from resonant forcing and can only be determined when solvability conditions are verified.

The ω_1 functions obey,

$$(i\omega_1 - \mathcal{L}) \begin{pmatrix} u_1^{(\omega_1)} \\ v_1^{(\omega_1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \partial_t w_0 \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \partial_{zz}^2 w_0 \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix} + \partial_z \psi \partial_z w_0 \begin{pmatrix} e^{i\phi} (\partial_{r\phi}^2 u_0 + i\partial_{\phi\phi}^2 u_0/r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (D12)$$

Since (u_t, v_t) is an eigenvector of \mathcal{L} with eigenvalue $i\omega_1$, Eq. (D12) is solvable only if its r.h.s has no component on this eigenvector. More explicitly, one obtains by multiplying Eq. (D12) by the associated left eigenvector,

$$\partial_t w_0 - \partial_{zz}^2 w_0 \frac{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle}{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle + \langle \tilde{v}_t, v_t \rangle} + \partial_z \psi \partial_z w_0 \frac{\langle \tilde{u}_t, e^{i\phi} (\partial_{r\phi}^2 u_0 + i\partial_{\phi\phi}^2 u_0/r) \rangle}{\langle \tilde{u}_t, u_t \rangle + \langle \tilde{v}_t, v_t \rangle} = 0 \quad (D13)$$

The last term on the l.h.s should vanish by rotational invariance since simply inclining a twisted scroll cannot induce its drift. This explicitly follows from Eq. (34) since

$$\langle \tilde{u}_i, e^{i\phi}(\partial_{r\phi}^2 u_0 + i\partial_{\phi\phi}^2 w_0/r) \rangle = \langle \tilde{u}_i, (1 + i\partial_\phi)u_i \rangle = 0. \quad (\text{D14})$$

Eq. (D13) [without the last term] is the equation of motion for the mean filament obtained in ref. [16,12]. In the limit considered, the mean filament motion is independent of the scroll twist and only depends on the filament curvature ($\partial_{zz}^2 w_0$) with a coefficient which gives both the small k_z^2 dependence of the translation bands (Eq. (23)) and spiral drift in an external field (Eq. (B10)).

The time independent component ($u_1^{(0)}, v_1^{(0)}$) of the first 0 correction (D10) obey

$$-\mathcal{L} \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ v_1^{(0)} \end{pmatrix} = \partial_t \psi \begin{pmatrix} \partial_\phi u_0 \\ \partial_\phi v_0 \end{pmatrix} - \partial_{zz}^2 \psi \begin{pmatrix} \partial_\phi u_0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\partial_z \psi)^2 \begin{pmatrix} \partial_{\phi\phi}^2 u_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} |\partial_z w_0|^2 \begin{pmatrix} \nabla_{2D}^2 u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D15})$$

Again since the rotation mode is an eigenvector with eigenvalue zero of \mathcal{L} , this equation can be solved only if

$$\partial_t \psi - \partial_{zz}^2 \psi \frac{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle}{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle + \langle \tilde{v}_\phi, v_\phi \rangle} + (\partial_z \psi)^2 \frac{\langle \tilde{u}_\phi, \partial_{\phi\phi}^2 u_0 \rangle}{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle + \langle \tilde{v}_\phi, v_\phi \rangle} + \frac{1}{2} |\partial_z w_0|^2 \frac{\langle \tilde{u}_\phi, \nabla_{2D}^2 u_0 \rangle}{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle + \langle \tilde{v}_\phi, v_\phi \rangle} = 0 \quad (\text{D16})$$

Rotational invariance again implies that the last term on the l.h.s. of Eq. (D16) vanishes (since simply inclining a scroll wave cannot change its rotation frequency) as explicitly shown below (Eq. (D18)). The remaining Eq. (D16) is the equation obtained in ref. [16,12] for the scroll twist dynamics. The coefficient of $(\partial_z \psi)^2$ simply describes the twist dependence of steady scroll rotation frequency (Eq. (29)) while the coefficient of $\partial_{zz}^2 \psi$ governs the small k_z^2 dependence of the rotation band [Eq. (23) with the subscript t replaced by ϕ].

The computations reported in the present paper permit to explicitly evaluate the four real coefficients which appear in Eq. (D13, D16). For example, for $a = 0.8, b = 0.01, \epsilon = 0.025$, the reported results give

$$\frac{\langle \tilde{u}_i, u_i \rangle}{\langle \tilde{u}_i, u_i \rangle + \langle \tilde{v}_i, v_i \rangle} = 0.8842 - 0.662i, \quad \frac{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle}{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle + \langle \tilde{v}_\phi, v_\phi \rangle} = 0.578, \quad \frac{\langle \tilde{u}_\phi, \partial_{\phi\phi}^2 u_0 \rangle}{\langle \tilde{u}_\phi, u_\phi \rangle + \langle \tilde{v}_\phi, v_\phi \rangle} = -0.7203. \quad (\text{D17})$$

More generally, the two coefficients in Eq. (D16) do not change sign as one traverses the different regions of the phase diagram: a small twist increases the scroll rotation frequency and a small modulation in the z -direction increases the stability of the rotation band modes. The complex coefficient of Eq. (D13) is directly linked to the scroll wave line tension stability/instability and its real part change sign as 2D spiral drift.

Finally, it may be worth comparing the above derivation to that of [16]. Since the l.h.s of Eq. (D10) is a superposition of terms with different time dependences, this is also the case of its solution and many coefficients formally introduced in ref. [16] do not even appear in our derivation, as previously noted in [12] (in a slightly different formulation). On the other side, we have chosen a simple parameterization for which rotational invariance is not manifest, in contrast to ref. [12]. This forces us to explicitly show that coefficients which do not appear in ref. [12] vanish.

We conclude by showing that indeed,

$$\langle \tilde{u}_\phi, \nabla_{2D}^2 u_0 \rangle = 0. \quad (\text{D18})$$

This is a simple consequence of the transformation property of the reaction-diffusion equations (5, 6) under dilation. Namely, $(w_0(r(1+\eta), \phi), v_0(r(1+\eta), \phi))$ is a solution of (5, 6) with ∇_{2D}^2 replaced by $1/(1+\eta)^2 \nabla_{2D}^2$. Expanding for $\eta \ll 1$ gives the infinitesimal version of this transformation

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} r\partial_r w_0 \\ r\partial_r v_0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \nabla_{2D}^2 u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D19})$$

which can also be directly checked by differentiating Eq. (5, 6) with respect to r . The multiplication of Eq. (D19) on both sides by $(\tilde{u}_\phi, \tilde{v}_\phi)$, the left eigenvector of \mathcal{L} of eigenvalue zero, gives the desired identity (D18).

[1] A. T. Winfree, *When Time Breaks Down* (Princeton U. Press, N. J. 1987).

[2] V. S. Zykov, *Modelling of wave processes in excitable media* (Manchester U. Press, Manchester, 1988).

[3] See e.g. the focus issue CHAOS 8, 1 (1998).

[4] V. S. Zykov, *Biofizika* 31, 862 (1986).

- [5] A.T. Winfree, *Chaos* **1**, 303 (1991).
- [6] A. Belmonte, Q. Ouyang and J.M. Flesselles, *J. Phys. II (France)* **7**, 1425 (1997).
- [7] A.T. Winfree, *Science* **266**, 1003 (1994)
- [8] A. M. Pertsov, R. R. Aliev and V. Krinsky, *Nature* **345**, 419 (1990); S. Mironov, M. Vinson, S. Mulvey and A. Pertsov *J. Phys. Chem.* **100**, 1975 (1996).
- [9] A. T. Winfree et al, *Chaos* **6**, 617 (1996).
- [10] C. Henze, E. Lugosi and A. T. Winfree, *Can. J. Phys.* **68** 683 (1989).
- [11] A. V. Panfilov and A. N. Rudenko, *Physica D* **28**, i 215 (1987).
- [12] V. N. Biktashev, A. V. Holden and H. Zhang, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **347**, 611 (1994).
- [13] Z. Qu, F. Xie, and A. Garfinkel *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2668 (1999).
- [14] V. Hakim and A. Karma, *Phys. Rev. E* **60**, 5073 (1999).
- [15] I. Aranson and I. Mitkov, *Phys. Rev. E* **58**, 4556 (1998).
- [16] J.P. Keener, *Physica D* **31**, 269 (1988).
- [17] H. Henry and V. Hakim, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5328 (2000).
- [18] R. FitzHugh, *Biophys. J.* **1**, 445 (1961); J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, *Proc. I. R. E.* **50**, 2061 (1962).
- [19] D. Barkley, *Physica D* **49**, 61 (1991)
- [20] I. Goldhirsch, S. A. Orszag and B. K. Manlik, *J. Scient. Comp.* **2**, 33 (1987).
- [21] D. Barkley, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2090 (1992); *Phys. Rev. Lett.* **72**, 164 (1994)
- [22] Other dangerous modes and instabilities (like alternans see e.g. A. Karma, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **97**, 5687 (2000)), can arise in more complicated cases. We do not consider them here.
- [23] I. Mitkov, I. Aranson and D. A. Kessler, *Phys. Rev. E* **52**, 5974 (1995).
- [24] S. Fauve p. 446 in *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, C. Godrèche and P. Manneville editors (Cambridge U. Press, Cambridge, U.K., 1998)
- [25] V. Krinsky, E. Hamm and V. Voignier, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3854 (1996).
- [26] L. Landau and E. Lifchitz *Théorie de l'élasticité* (Mir, Moscou, 1990); A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1926) and references therein.
- [27] I. S. Aranson and A. R. Bishop *Phys. Rev. E* **57**, 5276 (1998); M. Gabbay, E. Ott, and P. Guzdar, *Physica (Amsterdam)* **118D**, 371 (1998); G. Rousseau, H. Chaté, and R. Kapral, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5671 (1998).
- [28] D. Margerit and D. Barkley, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 175 (2001).
- [29] V. Hakim, H. Henry and A. Karma (unpublished).
- [30] A. V. Panfilov and J. P. Keener, *Physica D* **84**, 545 (1995).
- [31] F. Fenton and A. Karma, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 481 (1998); *Chaos* **8**, 20 (1998).
- [32] W.-J. Rappel *Chaos* **11**, 71 (2001).
- [33] S. Setayeshgar and A. Bernoff, *Phys. Rev. Lett.*, (in press).
- [34] W. T. Baxter et al, *Biophys. J.* **80** 516 (2001).
- [35] W.H. Press et al, pp 63-82 in *Numerical Recipes in Fortran* (Cambridge University Press, U.K. 1992).
- [36] M.Dowle, R.M. Mantel and D. Barkley, *Int. J. Bif. Chaos* **7**, 2529 (1997).
- [37] K.I. Agladze and P. de Kepper, *J. Phys. Chem.* **96**, 5239 (1992).
- [38] O. Steinbock, J. Schütze and S.C. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 248 (1992).
- [39] A. Belmonte and J.M. Flesselles, *Europhys. Lett.* **32**, 267 (1995).
- [40] J.H. White, *Amer. J. of Math.* **91**, 693 (1969); W. F. Pohl, *Math. Intell.* **3**, 20 (1980) and references therein.
- [41] F.B. Fuller, *P.N.A.S.* **75**, 3557-3561 (1978).

Bibliographie

- [1] K. I. Agladze, R. A. Kocharyan et V. I. Krinsky. *Direct observation of vortex ring collapse in a chemically active medium*. Physica D **49** : 1–4, 1991.
- [2] V. Alessandrini. *Les modèles de programmation du NECSX5 : discussion critique*. Technical report, CNRS, IDRIS, 2000.
- [3] T. Amemiya, P. Kettunen, S. Kádár, T. Yamaguchi et K. Showalter. *Formation and evolution of scroll waves in photosensitive excitable media*. Chaos **8**(4) : 872–879, 1998.
- [4] I. Aranson et I. Mitkov. *Helicoidal instability of scroll vortex in three-dimensional reaction-diffusion systems*. Physical Review E **57** : 4556–4559, 1998.
- [5] A.V.Panfilov et J. Keener. *Re-entry in an anatomical model of the heart*. Chaos Solitons and Fractals **5** : 681–689, 1995.
- [6] D. Barkley. *Linear stability analysis of rotating spiral waves in excitable media*. Physical Review Letters **68**(13) : 2090–2093, 1991.
- [7] D. Barkley. *A model for fast computer simulation of waves in excitable media*. Physica D **49** : 61–70, 1991.
- [8] D. Barkley. *Euclidean symmetry and the dynamics of rotating spiral waves*. Physical Review Letters **72**(1) : 164–167, January 1994.
- [9] D. Barkley, M. Kness et L. Tuckerman. *Spiral-wave dynamic in a simple model of excitable media : the transition from simple to compound rotation*. Physical Review A **42**(4) : 2489–2492, 1990.
- [10] G. W. Beeler et H. Reuter. *Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibres*. Journal of Physiology (London) **268** : 177–210, 1977.
- [11] A. Belmonte, Q. Ouyang et J.-M. Flesselles. *Experimental survey of spiral dynamics in the Belousov-Zhabotinsky reaction*. Journal de Physique II France **7** : 1425–1468, 1997.

- [12] B. Belousov. *A periodic reaction and its mechanism*. Sbornik Referatov po Radiatsionno Meditsine (Medgiz, Moscow) 1958. Traduction anglaise dans [23] pp 605-613.
- [13] V. N. Biktashev. *Evolution of twist of an autowave vortex*. Physica D **36** : 167–172, 1989.
- [14] V. N. Biktashev, A. V. Holden et H. Zhang. *Tension of organizing filaments of scroll waves*. Philosophical Transaction Royal Society London A **347** : 611–630, 1994.
- [15] H. Brézis. *Introduction à l'analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [16] F. Chavec, R. Kapral, G. Rousseau et L. Glass. *Scroll waves in spherical shell geometries*. Chaos **11** : 757–765, 2001.
- [17] M. Courtemanche, L. Glass et J. P. Keener. *Instabilities of a propagating pulse in a ring of excitable media*. Physical Review Letters **70** : 2182–2185, 1993.
- [18] J. M. Davidenko, P. Kent et J. Jalife. *Spiral waves in normal isolated ventricular muscle*. Physica D **49** : 182–197, 1991.
- [19] D. Dorman, C. Weijer et F. Siegert. *Twisted scroll waves organize dictyostelium discoideum slugs*. Journal of Cell Science **110** : 1831–1837, 1997.
- [20] M. Dowle, R. M. Mantel et D. Barkley. *Fast simulations of waves in three-dimensional excitable media*. International Journal of Bifurcation and Chaos **11** : 2529–2546, 1997.
- [21] F. Fenton et A. Karma. *Fiber-rotation-induced vortex turbulence in thick myocardium*. Physical Review Letters **81**(2) : 481–484, 1998.
- [22] F. Fenton et A. Karma. *Vortex dynamics in three-dimensional continuous myocardium with fiber rotation : filament instability and fibrillation*. Chaos **8**(1) : 20–47, 1998.
- [23] R. J. Field et M. Burger, éditeurs. *Oscillations and travelling waves in chemical systems*. Wiley, New-York, 1985.
- [24] R. Fitzhugh. *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve propagation*. Biophysical Journal **1** : 445–466, 1961.
- [25] L. H. Frame et M. B. Simson. *Oscillations of conduction, action potential duration, and refractoriness : A mechanism for spontaneous termination of reentrant tachycardias*. Circulation **78** : 1277–1287, 1988.
- [26] F. B. Fuller. *The writhing number of a space curve*. Proceedings of the National Academy of Science U.S.A. **68** : 815–819, 1971.

- [27] F. B. Fuller. *Decomposition of the linking number of a closed ribbon : a problem for molecular biology*. Proceedings of the National Academy of Science U.S.A. **75** : 3557–3561, 1978.
- [28] M. Gabbay, E. Ott et P. Guzdar. *The dynamics of scroll wave filaments in the complex Ginzburg-Landau equation*. Physica D **118** : 371–395, 1998.
- [29] L. Glass. *Dynamic of cardiac arrhythmias*. Physics Today **49**(8) : 40–45, 1996.
- [30] I. Goldhirsch, S. A. Orszag et B. K. Maulik. *An efficient method for computing leading eigenvalues and eigenvectors of large asymmetric matrices*. Journal of Scientific Computing **2**(1) : 33–58, 1987.
- [31] A. Goriely et M. Tabor. *New amplitude equations for thin elastic rods*. Physical Review Letters **77** : 3537–3540, 1996.
- [32] G. Grasseau, P.-F. Lavallée et P. Voury. *Optimisation sur NECSX5*. Technical report, IDRIS, Février 2000.
- [33] R. A. Gray, J. Jalife, A. Panfilov, W. T. B. C. Cabo, J. M. Davidenko et A. M. Pertsov. *Non stationary vortex like reentrant activity as a mechanism of polymorphic ventricular tachycardia in the isolated rabbit heart*. Circulation **91** : 2454, 1995.
- [34] G. H. Gunaratne, Q. Ouyang et H. L. Swinney. *Pattern formation in the presence of symmetries*. Physical Review E **50** : 2802–2820, 1994.
- [35] V. Hakim et A. Karma. *Theory of spiral wave dynamics in weakly excitable media : asymptotic reduction to a kinematic model and applications*. Physical Review E **60**(5) : 5073–5105, 1999.
- [36] C. Henze, E. Lugosi et A. T. Winfree. *Helical organizing centers in excitable media*. Canadian Journal of Physics **68** : 683–710, 1989.
- [37] A. Hodgkin et A. Huxley. *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*. Journal of Physiology (London) **117** : 500, 1952.
- [38] W. Jahnke, W. E. Skaggs et A. Winfree. *Chemical vortex dynamics in the Belousov-Zhabotinsky reaction and in the two-variable Oregonator model*. Journal of Physical Chemistry **93** : 740, 1989.
- [39] J. Jalife, R. A. Gray, G. E. Morley et J. M. Davidenko. *Self organization and the dynamical nature of ventricular fibrillation*. Chaos **8** : 1054–1500, 1998.
- [40] D. T. Kaplan, T. Manning, L. Glass, M. R. Guevara et A. Shrier. *Sub-threshold dynamics in periodically stimulated squid giant axons*. Physical Review Letters **76** : 4074–4077, 1996.

- [41] A. Karma. *Meandering transition in two-dimensional excitable media*. Physical Review Letters **65**(22) : 2824–2827, 1990.
- [42] A. Karma. *Scaling regime of spiral wave propagation in single-diffusive media*. Physical Review Letters **68**(3) : 397–400, 1992.
- [43] A. Karma. *Electrical alternans and spiral wave breakup in cardiac tissue*. Chaos **4**(3) : 461–472, 1994.
- [44] J. Keener et J. Tyson. *The dynamics of helical scroll waves in excitable media*. Physica D **53**(1) : 151–161, 1991.
- [45] J. P. Keener. *The dynamics of three-dimensional scroll waves in excitable media*. Physica D **31** : 269–276, 1988.
- [46] D. Kessler, H. Levine et W. Reynolds. *Spiral core meandering in excitable media*. Physical Review A **46** : 5264–5267, 1992.
- [47] D. Kessler, H. Levine et W. Reynolds. *Theory of the spiral core in excitable media*. Physica D **70** : 115–139, 1994.
- [48] V. Krinsky, E. Hamm et V. Voignier. *Dense and sparse vortices in excitable media drift in opposite directions in electric field*. Physical Review Letters **76**(20) : 3854–57, 1996.
- [49] V. Krinsky et A. Pumir. *Models of defibrillation of cardiac tissue*. Chaos **8** : 188–203, 1998.
- [50] I. J. LeGrice, B. H. Smaill, L. Chai, S. Edgar, J. B. Gavin et P. Hunter. *Laminar structure of the heart : ventricular myocyte arrangement and connective tissue architecture in the dog*. American Journal of Physiology **269** : 571–582, 1995.
- [51] W. F. Loomis. *Dictyostelium discoideum, a developmental system*. Academic Press New York, 1975.
- [52] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, 4^eédition, 1952. Première édition en 1892.
- [53] C. H. Luo et Y. Rudy. *A model of the ventricular cardiac action potential. depolarization, repolarization, and their interaction*. Circulation Research **68** : 1501–1526, 1991.
- [54] D. Margerit et D. Barkley. *Selection of twisted scroll waves in three-dimensional excitable media*. Physical Review Letters **86**(1) : 175–178, 2001.
- [55] J. Marko et E. Siggia. *Statistical mechanics of supercoiled DNA*. Physical Review E **52**(3) : 2912–2938, 1995.
- [56] A. V. Mikhailov, V. A. Davydov et V. S. Zykov. *Complex dynamics of spiral waves and motion of curves*. Physica D **70** : 1–39, 1994.

- [57] G. R. Mines. *On circulating excitations in heart muscles and their possible relation to tachycardia and fibrillation*. Transaction of the Royal Society Canada **4** : 43–53, 1914.
- [58] S. Mironov, M. Vinson, S. Mulvey et A. Pertsov. *Destabilization of three-dimensional rotating chemical waves in an inhomogeneous BZ reaction*. Journal of Physical Chemistry **100** : 1975–1983, 1996.
- [59] K. Nam, E. Ott, P. N. Guzdar et M. Gabbay. *Stability of spiral wave vortex filaments with phase twist*. Physical review E **58** : 2580–2586, 1998.
- [60] W. Ostwald. *Periodische erscheinungen bei auflösung des chrom in säuren*. Zeit. Phys. Chem. **35** : 33–76 and 204–256, 1900.
- [61] P. Pelcé et J. Sun. *Wave front interaction in steadily rotating spirals*. Physica D **48** : 353–366, 1991.
- [62] A. Pertsov, M. Vinson et S. C. Müller. *Tree-dimensional reconstruction of organizing centers in excitable chemical media*. Physica D **63** : 233–240, 1993.
- [63] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling et B. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran*, chapitre 19.2. et 19.3, pages 838–848. Cambridge University Press, 2nd édition, 1992. Dans cette section, les auteurs donnent la définition de la limite de stabilité d’un schéma d’intégration temporelle et présentent un certain nombre de schémas d’intégration temporelles pour des problèmes diffusifs.
- [64] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling et B. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran*, chapitre 2.7, pages 63–82. Cambridge University Press, 2nd édition, 1992. Dans ce chapitre, les auteurs présentent diverses méthodes d’inversion des matrices creuses. En particulier, pages 77 à 82, ils donnent le principe de la méthode du gradient biconjugué ainsi qu’une implémentation de cet algorithme en FORTRAN 77. La routine utilisée dans les simulations numériques présentées ici est tirée de la bibliothèque LAPACK et s’appelle DSLUBC et peut être trouvée à <http://www.netlib.org>.
- [65] A. Pumir, F. Plaza et V. Krinsky. *Effect of an externally applied electric field on excitation propagation in the cardiac muscle*. Chaos **4** : 547–555, 1994.
- [66] W. J. Rappel. *Filament instability and rotational tissue anisotropy : A numerical study using detailed cardiac models*. Chaos **11** : 71–80, 2001.
- [67] G. Rousseau, H. Chaté et R. Kapra. *Coiling and supercoiling of vortex filaments in oscillatory media*. Physical Review Letters **80** : 5671–5674, 1998.

- [68] G. Rousseau, H. Chaté et R. Kapral. *Twisted vortex filaments in the three-dimensional complex Ginzburg-Landau equation*, 2001. Article en préparation.
- [69] Y. Saad et M. Schulz. *A generalized minimum residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing **7** : 856–869, 1986.
- [70] B. Schmidt et S. C. Müller. *Forced parallel drift of spiral waves in the belousov-zhabotinsky reaction*. Physical Review E **55** : 4390–4393, 1997.
- [71] F. Siegert et C. J. Weijer. *Digital image processing of optical density wave propagation in Dictyostelium discoideum and analysis of the effects of caffeine and ammonia*. Journal of Cell Science **93** : 325–335, 1989.
- [72] F. Siegert et C. J. Weijer. *Analysis of optical density wave propagation and cell movement in the cellular slime mold Dictyostelium discoideum*. Physica D **49** : 224–232, 1991.
- [73] G. S. Skinner et H. L. Swinney. *Periodic to quasiperiodic transition of chemical spiral rotation*,. Physica D **48** : 1–16, 1991.
- [74] O. Steinbock, J. Schütze et S. C. Müller. *Electric-field-induced drift and deformation of spiral waves in an excitable medium*. Physical Review Letters **68** : 248–251, 1992.
- [75] O. Steinbock, F. Siegert, S. C. Müller et C. J. Weijert. *Three dimensional waves of excitation during dictyostelium morphogenesis*. Proceedings of the National Academy of Science U.S.A **90** : 7332–7335, 1993.
- [76] R. Susuki. *Electrochemical active network*. Notes of IECE Japan Professional Group on Non-Linear Theory 1963. Article en japonais, dont est tirée la figure (1.1) qui est reprise dans [84].
- [77] N. Takahashi, Y. Hanyu, T. Musha, R. Kubo et G. Matsumoto. *Global bifurcation structure in periodically stimulated giant axons of squid*. Physica D **43** : 318–334, 1990.
- [78] A. M. Turing. *The chemical basis of morphogenesis*. Philosophical Transaction of the Royal Society B **237** : 37–72, 1952.
- [79] B. J. Welsh et J. Gomatan. *Diversity of three dimensionnal chemical waves*. Physica D **43** : 304–317, 1990.
- [80] J. H. White. *Self-linking and the gauss integral in higher dimensions*. American Journal of Mathematics **91** : 693–728, 1969.
- [81] C. J. Wiggers. *Studies of ventricular fibrillation produced by electric shock. ii. cinematographic and electrocardiographic observations of the natural process in the dog's heart. its inhibition by potassium and the*

- revival of coordinated beats by calcium.* American Heart Journal **5** : 351–365, 1930.
- [82] A. Winfree. *Spiral waves of chemical activity.* Science **175** : 634–636, 1972.
- [83] A. T. Winfree. *Scroll-shaped waves of chemical activity in three dimensions.* Science **181** : 937–939, 1973.
- [84] A. T. Winfree. *When time breaks down.* Princeton University Press, 1987.
- [85] A. T. Winfree. *Evolving perspectives during 12 years of electrical turbulence.* Chaos **8**(1) : 1–19, 1998.
- [86] A. T. Winfree. *Varieties of spiral wave behavior : an experimentalist's approach to the theory of excitable media.* Chaos **1** (3) : 303–334 , 1998.
- [87] A. T. Winfree, S. Caudle, G. Chen, P. McGuire et Z. Szilagyi. *Quantitative optical tomography of chemical waves and their organizing centers.* Chaos **6** : 617–626, 1996.
- [88] A. N. Zaikin et A. Zhabotinsky. *Concentration wave propagation in two dimensional liquid phase self oscillating system.* Nature **225** : 535–537, 1970.

Instabilities and dynamic of scroll waves in isotropic excitable media.

Hervé HENRY

Abstract : Excitable systems are characterized by the existence of a stable equilibrium point and by the fact that the return to equilibrium trajectories can be either simply exponential or long excursions in the phase space depending on the perturbation amplitude. Good approximations of excitable media are simplified reaction-diffusions systems with two variables. Typical examples of excitable media are the heart, the neural axons and the Belousov-Zhabotinsky reaction in gels. In such media the spiral and plane, excitation waves can be observed.

This thesis is devoted to the numerical study of the dynamic of possibly twisted scroll waves (spiral waves stacked along a line) in excitable media. First the stationary states are computed using a Newton's method. Second the linear stability of those states is studied, using an iterative method. Then the restabilized states when they exist are determined via direct numerical simulations.

The study of untwisted scroll waves shows two kinds of instabilities. The first one corresponds to a Hopf bifurcation and is due to the 3D destabilisation of the meander (periodic variation of the rotation radius of the spiral wave) mode. The restabilized states are studied in detail. The second one, that can be attributed to the destabilisation of the translation mode leads to a disordered state.

The study of the influence of twist shows that beyond a critical value of twist, it leads to the destabilisation of the translation modes for finite values of the wavenumber. That instability is a Hopf bifurcation that converts the twist of the scroll wave into Writhe (geometric deformation of the filament). In simple cases the restabilized state is a simple helical filament whereas in more complicated cases, the restabilized state is a stationary structure that can be seen as the sum of a few helices. An analogy with a twisted elastic rod is presented.

Key words : Excitable media. Scroll waves. Reaction-diffusion. Linear stability. Front dynamic. Belousov-Zhabotinsky. Pattern formation.

Instabilités et dynamique des ondes spirales tridimensionnelles dans les milieux excitables isotropes.

Hervé HENRY

Résumé : On caractérise les milieux excitables par le fait qu'ils présentent un point d'équilibre linéairement stable et qu'une perturbation finie peut entraîner une longue excursion dans l'espace des phases. Les comportements de tels milieux sont en général bien approchés par des modèles simplifiés de réaction-diffusion à deux variables. Des exemples de milieux excitables sont le cœur, les axones neuronaux et la réaction de Belousov-Zhabotinsky dans les gels. On peut y observer des ondes d'excitation planes et spirales.

Ce mémoire est consacré à l'étude numérique de la dynamique des filaments (ondes spirales empilées le long du filament) d'ondes spirales, éventuellement twistés, dans les milieux excitables. Dans un premier temps on calcule les états stationnaires par une méthode de Newton, puis on étudie la stabilité linéaire de ces états vis à vis de perturbations modulées suivant l'axe du filament par une méthode itérative, enfin on détermine les états restabilisés, quand ils existent, à l'aide de simulations numériques directes.

L'étude des filaments non twistés met en évidence deux instabilités distinctes. L'une due à la déstabilisation de la branche de méandre (modulation périodique du rayon de rotation de la spirale) aboutit à un état restabilisé que nous caractérisons précisément. Cette instabilité correspond à une bifurcation de Hopf. L'autre correspond à une déstabilisation des modes de translation et aboutit à un état désordonné.

L'étude de l'influence du twist sur la dynamique des filaments de spirales montre que le twist induit une déstabilisation des modes de translation à nombre d'onde fini. Cette bifurcation de Hopf correspond à la transformation du twist imposé au filament en Writhe (déformation géométrique). Le filament prend, dans les cas simples, une forme hélicoïdale. Dans des cas plus compliqués il prend une forme invariante dans le temps qui est la somme de plusieurs hélices. Une analogie avec une tige élastique soumise à la torsion est présentée.

Mots clés : Milieux excitables. Spirales. Réaction-diffusion. Stabilité linéaire. Filament. Dynamique de fronts. Belousov-Zhabotinsky. Morphogénèse.