HAL
open science

Limite semi-classique de transformées de Wigner dans des milieux périodiques ou aléatoires

Matthieu Brassart

To cite this version:

Matthieu Brassart. Limite semi-classique de transformées de Wigner dans des milieux périodiques ou aléatoires. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2002. Français. NNT : . tel-00002512

HAL Id: tel-00002512

https://theses.hal.science/tel-00002512

Submitted on 5 Mar 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences

Laboratoire de Mathématiques Jean-Alexandre Dieudonné - UMR CNRS 6621

THESE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences (Mathématiques)

de l'université de Nice Sophia Antipolis

par

Matthieu BRASSART

Limite semi-classique de transformées de Wigner dans des milieux périodiques ou aléatoires.

soutenue publiquement le 19 Décembre 2002 devant le jury composé de :

Naoufel Ben Abdallah	Professeur, MIP Toulouse	**Rapporteur**
Francois Castella	Professeur, IRMAR Rennes	**Rapporteur**
Norbert Mauser	Professeur, Vienne (Autriche)	**Examinateur**
Frédéric Poupaud	Professeur, Nice	**Directeur de thèse**
Michel Rascle	Professeur, Nice	**Président**
Alexis Vasseur	Chargé de recherche CNRS, Nice	**Examinateur**

(au laboratoire J.A.Dieudonné à 14 heures)

Remerciements.

Je tiens d'abord à remercier toute l'équipe du labo de maths de Nice de m'avoir chaudement accueilli en son sein. Mes pensées vont plus spécialement à Frédéric Poupaud qui a dirigé mes recherches tout en me laissant une grande liberté. Sa patience et sa disponibilité n'ont jamais faibli. Mais je le félicite surtout de s'être accomodé avec tant de bonne humeur de mon écriture brouillonne et de mes réticences à rédiger.

Je remercie vivement Naoufel Ben Abdallah et Francois Castella d'avoir accepté la tâche de rapporteur et je remercie Norbert Mauser et Alexis Vasseur pour leur participation au jury. Une nouvelle fois merci à Norbert pour son invitation à Vienne dont je garde un excellent souvenir.

Je tiens aussi à remercier Thierry Goudon et Grégoire Loeper pour d'imprévisibles, et d'autant plus savoureux, impromptus mathématiques ainsi que Philippe Maisonobe pour ses encouragements au moment douloureux.

Des remerciements plus confidentiels vont à Mathieu Bernard pour de bonnes parties, à Didier Auroux pour les propriétés du double vitrage, à Patrizia Bagnerini pour m'avoir sauvé la vie, à Jean-Francois Aujol entre Hörmander et Schwartz et à bien d'autres thésards du quatrième.

Je n'oublie pas les bibliothécaires Isabelle Laurent et Jean-Louis Thomin qui m'ont laissé emprunté à tour de bras sans sévir et Jeanine Lachkar qui m'a tant aidé à démêler les conflits administratifs inhérents à ma personne.

Enfin, en remontant le temps, je veux dire aussi ma reconnaissance envers des professeurs qui ont formé mon goût comme Thierry Gallouet, Mohand Moussaoui, Francis Clark, Albert Fathi, Denis Talay dont j'ai admiré les enseignements et qui sont finalement pour beaucoup dans ce travail.

à Bobby Lapointe
pour ses encouragements répétés
durant de trop longues séances de TEX

Table des matières

1 Présentation de la transformation de Wigner. 7

1.1 Cas des transformées continues. 7
1.2 Cas des transformées discrètes. 12
1.3 La transformée discrète comme périodisée de la transformée continue. . . . 14
1.4 Cas des transformées de noyaux. 16
1.5 Bibliographie. 18

2 Limite semi-classique de l'équation de Schrödinger dans un cristal. 19

2.1 Introduction. 19
2.2 Analyse de l'hamiltonien périodique. 23
2.3 Analyse du potentiel lentement variable. 34
2.4 Homogénéisation dans un niveau isolé. 63
2.5 Homogénéisation loin des croisements. 73
2.6 Le cas monodimensionnel. 78
2.7 Réindexation. 97
2.8 Homogénéisation en dimension un. 119
2.9 Certains coefficients géométriques. 130
2.10 Bibliographie. 137

3 Mesures de Wigner en milieu aléatoire. 139

3.1 Introduction. 139
3.2 Equation de Schrödinger. 142
3.2.1 Modèle et résultats. 142
3.2.2 Préliminaire sur les équations de transport. 148
3.2.3 Preuves. 150
3.2.4 Exemple de potentiel stochastique. 161
3.3 Systèmes hyperboliques linéaires à coefficients constants. 162
3.3.1 Modèle et résultat. 162
3.3.2 Formules préliminaires. 166
3.3.3 Analyse. 166
3.3.4 Preuves. 170
3.3.5 Asymptotique $T \to \infty$. 180
3.4 Systèmes hyperboliques linéaires à coefficients variables. 183
3.4.1 Modèle et résultat. 183
3.4.2 Analyse. 189
3.4.3 Preuves. 192
3.4.4 Lemmes de calcul pseudo-différentiel. 200
3.5 Bibliographie. 208

4 Limite semi-classique dans l'approximation de champ moyen. 209

4.1 Le problème, le théorème. 209
4.2 Bibliographie. 220

Résumé.

Cette thèse concerne l'homogénéisation, ou limite semi-classique, des transformées de Wigner associées à des suites bornées L^2 solutions d'une équation de Schrödinger ou d'un système hyperbolique linéaire du premier ordre. On établit diverses équations de transport satisfaites par les mesures de Wigner limites lorsque qu'un petit paramètre tend vers zéro.

Une première partie résume les propriétés générales de la transformation en rappelant son lien avec le calcul pseudo-différentiel.

Une seconde partie étudie la perturbation des hamiltoniens périodiques par des potentiels réguliers apériodiques au moyen d'estimations de commutation concernant les décompositions de Bloch.

Une troisième partie étudie sous une hypothèse de couplage faible l'homogénéisation de certains milieux aléatoires évoluant chaotiquement selon une dynamique réversible mais gouvernés en moyenne par une dynamique irréversible de type Bolztmann.

Une quatrième partie clarifie au moyen du formalisme des transformées de Wigner un résultat connu d'existence-unicité pour la hiérarchie infinie BBGKY du problème de Schrödinger à N particules, $N \to \infty$, dans l'approximation de champ moyen.

Mots-clés : Limite semi-classique, mesure de Wigner, équation de Schrödinger, équation de transport, équation de Vlasov-Boltzmann, décomposition de Bloch des hamiltoniens périodiques, calcul pseudo-différentiel, EDP.

Abstract.

This thesis is concerned with the homogenization (or semi-classical limit) of various Wigner transforms associated to L^2-bounded sequences which solve a Schrödinger equation or a first order linear hyperbolic system. Transport equations are derived for the limiting Wigner measure when a small parameter goes to zero.

A first part describes the general properties of Wigner transforms and recalls their links to pseudo-differential calculus.

A second part studies the perturbation of periodic hamiltonians by regular aperiodic potentials by means of commutation estimates concerning Bloch decompositions.

A third part studies in the weak coupling limit a class of random media which are chaotically governed by reversible dynamics but statistically governed by irreversible dynamics of Boltzmann's type.

Using the Wigner formalism a fourth part clarifies a known result of existence-unicity for the BBGKY infinite hierarchy of Schrödinger problem with N particles, $N \to \infty$, in the mean field approximation.

Key-words : Semi-classical limit, Wigner measure, Schrödinger equation, transport equation, Vlasov equation, Boltzmann equation, Bloch decomposition of periodic hamiltonians, pseudo-differential calculus, PDE.

Notations.

On trouvera en principe dans cette page l'ensemble des notations (standard) dont la définition n'est pas rappelée dans le texte.

- D : fonctions infiniment dérivables à support compact C_c^∞
- D' : distributions
- S : fonctions à décroissance rapide à tout ordre de dérivation
- S' : distributions tempérées
- $P = \{a = a(x;k)$ périodique en k tel que $x^\gamma \partial_x^\alpha \partial_k^\beta$ est borné $\forall\alpha\,\forall\beta\,\forall\gamma\}$
- P' : distributions tempérées en une variable périodiques en l'autre variable
- $\approx$: relation d'équivalence entre suites de même limite
- Négligeable : par défaut qualifie des suites de limite nulle au sens des distributions tempérées par rapport aux variables d'espace et de phase
- E : espace de Banach (ou encore espace vectoriel topologique)
- $\sigma(E;E')$: topologie faible sur E $\qquad$ $\sigma(E';E)$: topologie faible étoile sur le dual E'
- $\mathcal{F}$: transformation de Fourier $\mathcal{F}f = \hat{f} : \xi \mapsto \int_{x\in\mathbb{R}^N} f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$
- $\mathcal{F}_{\%x}$: transformation de Fourier partielle pour la seule variable x
- $\mathcal{L}_{uniform}(E)$: opérateurs linéaires continus sur E munis de la norme de la convergence uniforme dans les bornés de E
- $\mathcal{L}_{strong}(E)$: opérateurs linéaires continus sur E munis de la convergence simple
  $u_n \in \mathcal{L}_{strong}(E) \to 0 \Leftrightarrow \forall x \in E \qquad u_n(x) \in E \to 0$
- $\mathcal{L}_{weak}(E)$: opérateurs linéaires continus sur E munis de la convergence faible
  $u_n \in \mathcal{L}_{weak}(E) \to 0 \Leftrightarrow \forall x \in E \qquad u_n(x) \in \sigma(E;E') \to 0$
- $\mathcal{L}^{inv}(E)$: opérateurs linéaires continus sur E bijectifs
- $\mathcal{K}(E)$ respectivement $\mathrm{HS}(E)$ respectivement $\mathrm{TR}(E)$: opérateurs compacts respectivement d'Hilbert Schmidt respectivement à trace sur l'espace de Hilbert E
- Noyau d'un opérateur $K \in \mathcal{L}(L^2)$: la fonction (distribution) $K(x;y)$ telle que
  $\forall u \in L^2 \qquad Ku : x \mapsto \int K(x;y)u(y)dy$

- $C^0(\mathbb{R}^N)$, $C^0_b(\mathbb{R}^N)$, $C^0_c(\mathbb{R}^N)$, $C^0_0(\mathbb{R}^N)$: fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ respectivement continues bornées respectivement continues à support compact respectivement continues de limite nulle à l'infini

- $H^s(\mathbb{R}^N)$: espace de Sobolev hilbertien sur $\mathbb{R}^N$ $\qquad H^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$: version locale

- $H^s_{\#}$: espace de Sobolev hilbertien sur le tore $\mathbb{T}^N$ s'identifie aux distributions $H^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ périodiques

- $\mathcal{M}$: mesures complexes munies de la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}; C^0_c)$

- $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$: algèbre de Wiener

- $\mathcal{F}l^1$: algèbre des séries de Fourier à coefficients sommables

- $l^1(\mathbb{N})$: suites sommables

- $\mathcal{H}$: holomorphe synonyme analytique

- $\gamma \subset \mathbb{C}$ contour : lacet fermé simple orienté dans le sens direct

- ϖ_Γ : opération de périodisation selon le réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$
  par exemple pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ positif $\varpi_\Gamma f : x \mapsto \Sigma_{\gamma\in\Gamma} f(x+\gamma)$ est toujours défini

- $\mathbb{I}$: indicatrice d'un ensemble (borélien)

- diam : diamètre

- $\mathcal{O}$: grand o dans la notation de Landau

- $|...|$ ou $\#$: volume ou cardinal

- $\mathbb{U}$: complexes de module un

- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$: groupe linéaire réel des matrices 2×2 inversibles

- $\int^{\cdot}$: primitive

- $<>$: moyenne pour les applications périodiques

- $\langle\rangle$: $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ sous-multiplicatif

- $\square$: fin de preuve

1 Présentation de la transformation de Wigner.

Cette partie préliminaire est destinée à résumer les principales propriétés des transformées de Wigner continue (w^ε : section 1.1) et discrète (w_s^ε : section 1.2) associées à des familles bornées de $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ces résultats seront utilisés par la suite sans plus de référence. La présentation est celle de [GMMP]. L'extension au cas des "matrices-densités" détaillée dans [LP] est abordée dans la section 1.4 en vue d'un résultat d'interversion de limites concernant les moments.

La quantification de Weyl définit l'opérateur pseudo-différentiel $a^W(x;\varepsilon D)$ de symbole $a \in S'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ sous la forme

$$a^W(x;\varepsilon D)u : x \mapsto \int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a(\frac{x+y}{2};\varepsilon\xi)u(y)e^{+2i\pi(x-y)\cdot\xi}dyd\xi$$

Lorsque $a = a(\xi) \in S'(\mathbb{R}^N)$ est "à coefficients constants" l'opérateur pseudo-différentiel $a^{(W)}(\varepsilon D)$ obtenu consiste en une multiplication à travers l'isomorphisme de Fourier

$$a(\varepsilon D)u = \mathcal{F}^{-1}(a(\varepsilon\cdot)\mathcal{F}u) : x \mapsto \int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} a(\varepsilon\xi)u(y)e^{+2i\pi(x-y)\cdot\xi}dyd\xi$$

Le formalisme de Weyl est utilisé pour sa propriété d'adjonction formelle

$$a^W(x;\varepsilon D)^* = (\overline{a})^W(x;\varepsilon D)$$

Dans ces notations intégrales, a et u doivent être mis en dualité, par exemple :

$$\begin{cases} a \in S'(\mathbb{R}^N) \Rightarrow a(\varepsilon D) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^N) \to S'(\mathbb{R}^N)) \\ a \in C^\infty \text{ à dérivées à croissances lentes } \Rightarrow a(\varepsilon D) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{L}(S'(\mathbb{R}^N)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in S'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \Rightarrow a^W(x;\varepsilon D) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^N) \to S'(\mathbb{R}^N)) \\ a \in S(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \Rightarrow a^W(x;\varepsilon D) \in \mathcal{L}(S'(\mathbb{R}^N) \to S(\mathbb{R}^N)) \end{cases}$$

Par construction, la multiplication du symbole $a(x;\xi)$ par la variable de phase ξ correspond à la composition de l'opérateur $a^W(x;\varepsilon D)$ avec $\frac{\varepsilon\nabla}{2i\pi}$:

$$a(x;\xi) = \Sigma_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \Rightarrow a^W(x;\varepsilon D)u : x \mapsto \Sigma_{|\alpha|\leq m}(\frac{\varepsilon\nabla_y}{2i\pi})^\alpha \left[a_\alpha(\frac{x+y}{2})u(y)\right]_{y=x}$$

1.1 Cas des transformées continues.

La transformée de Wigner $S'(\mathbb{R}^N_x) \times S'(\mathbb{R}^N_x) \to S'(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ définie par

$$w^\varepsilon(f;g) : (x;\xi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x-\varepsilon v/2)\overline{g}(x+\varepsilon v/2)e^{+2i\pi v\cdot\xi}dv$$

est sesquilinéaire continue. Elle satisfait la propriété fondamentale

$$< w^\varepsilon(f;g)|a >_{S'\times S} = < \overline{g}|a^W(x;\varepsilon D)f >_{S'\times S} \qquad \forall a \in S$$

De même dans le cas vectoriel où $f;g \in S'(\mathbb{R}^N)^m$ on peut définir

$$W^\varepsilon(f;g) : (x;\xi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x-\varepsilon v/2) \otimes \overline{g}(x+\varepsilon v/2) e^{+2i\pi v\cdot\xi} dv$$

comme une matrice $m \times m$ d'éléments $\in S'(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$.

C'est alors $w^\varepsilon(f;g) := \operatorname{Tr} W^\varepsilon(f;g) \in S'(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ qui tient généralement lieu de transformée de Wigner (scalaire).

Bien sûr $w^\varepsilon(f;g) \in S'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ est d'autant plus régulière que $f;g \in S'(\mathbb{R}^N)$ sont réguliers par exemple

$$\begin{cases} f;g \in S(\mathbb{R}^N) \Rightarrow w^\varepsilon(f;g) \in S(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \\ f;g \in L^2(\mathbb{R}^N) \Rightarrow w^\varepsilon(f;g) \in C^0_b(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Par la suite les arguments f et g seront toujours des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Voici les propriétés classiques de la transformation w^ε :

(Adjonction) $w^\varepsilon(f;g) = \overline{w^\varepsilon(g;f)}$ en particulier $w^\varepsilon(f;f)$ est réelle

(Transformées de Fourier partielles)

$$\mathcal{F}_{\%x}[w^\varepsilon(f;g)] : (x';\xi) \mapsto \frac{1}{\varepsilon^N}\hat{f}(+x'/2+\xi/\varepsilon)\overline{\hat{g}}(-x'/2+\xi/\varepsilon)$$

$$\mathcal{F}_{\%\xi}[w^\varepsilon(f;g)] : (x;\xi') \mapsto f(x-\varepsilon\xi'/2)\overline{g}(x+\varepsilon\xi'/2)$$

(Symétrie des variables) $w^\varepsilon(f;g) : (x;\xi) \mapsto \frac{1}{\varepsilon^N} w^\varepsilon\left[\overline{\hat{g}}(\frac{\cdot}{\varepsilon}); \overline{\hat{f}}(\frac{\cdot}{\varepsilon})\right](\xi;x)$

(Intégrales) $f;g \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} w^\varepsilon(f;g)d\xi = f(x)\overline{g}(x) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} w^\varepsilon(f;g)dx = \frac{1}{\varepsilon^N}\hat{f}(\xi/\varepsilon)\overline{\hat{g}}(\xi/\varepsilon)$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} w^\varepsilon(f;g)dxd\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f\overline{g}$$

Remarque. Il faut comprendre ces relations en tant qu'intégrales généralisées car (à ma connaissance) $w^\varepsilon(f;g)$ n'est pas systématiquement L^1 pour tous $f;g \in L^2$. En général, si elle existe, l'intégrale de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ notée $\int_{\mathbb{R}^d} T$ est définie comme la constante vérifiant

$$\frac{1}{t^d}T(\frac{\cdot}{t}) \to (\int_{\mathbb{R}^d} T)\delta_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \text{ lorsque } t \to 0^+$$

(Bornes) Si $f^\varepsilon;g^\varepsilon \in L^2$ restent bornées alors $w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) \in S'$ reste borné.

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\%x}[w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)] \in C^0_b[\mathbb{R}^N_{x'};L^1(\mathbb{R}^N_\xi)] \text{ de norme } \leq \| f^\varepsilon \|_{L^2} \| g^\varepsilon \|_{L^2} \text{ reste borné} \\ \mathcal{F}_{\%\xi}[w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)] \in C^0_b[\mathbb{R}^N_{\xi'};L^1(\mathbb{R}^N_x)] \text{ de norme } \leq \| f^\varepsilon \|_{L^2} \| g^\varepsilon \|_{L^2} \text{ reste borné} \end{cases}$$

On peut aussi remarquer $< w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)|a >_{S'\times S} = < \overline{g^\varepsilon}|a^W(x;\varepsilon D)f^\varepsilon >_{S'\times S}$

où l'opérateur $a^W(x;\varepsilon D) \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné.

(Positivité)
Pour une famille $f^\varepsilon \in L^2$ bornée tout point d'accumulation de $w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \in S'$ est une mesure positive finie.

Definition 1.1 *On appellera mesure de Wigner $w^0[f^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ d'une famille bornée $f^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tout point d'accumulation de $w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \in S'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Il en existe toujours au moins un.*

(Localisation) Pour $\phi = \phi(x)$ continu borné $w^0[\phi f^\varepsilon] = |\phi|^2 w^0[f^\varepsilon]$.
Une mesure de Wigner d'une famille $f^\varepsilon \in L^2$ bornée n'en dépend que localement.

(Calcul symbolique) En notant $\{u;v\} = \nabla_\xi u \cdot \nabla_x v - \nabla_x u \cdot \nabla_\xi v$ le crochet de Poisson

$$w^\varepsilon(a^W(x;\varepsilon D)f^\varepsilon;g^\varepsilon) = a\, w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{4i\pi}\{a;w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)\} + \varepsilon^2 r_\varepsilon$$

où $r_\varepsilon \in S'$ reste borné lorsque $f^\varepsilon;g^\varepsilon \in L^2$ restent bornés.

Ici l'hypothèse $a \in S$ pourrait être affaiblie en une hypothèse sur la classe du symbole a. En pratique le développement limité de $w^\varepsilon(a^W(x;\varepsilon D)f^\varepsilon;g^\varepsilon)$ selon les puissances de ε ne sert que pour des symboles a à variables séparées peu réguliers :

$$\begin{cases} w^\varepsilon(\phi f^\varepsilon;g^\varepsilon) - \phi(x)w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) \overset{S'}{\to} 0 \text{ pour } \phi \in C^0_b(\mathbb{R}^N) \\ \\ w^\varepsilon(\phi(\varepsilon D)f^\varepsilon;g^\varepsilon) - \phi(\xi)w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) \overset{S'}{\to} 0 \text{ pour } \phi \in C^0_b(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}w^\varepsilon(\phi f^\varepsilon;g^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\phi(x)w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) - \nabla\phi(x).\nabla_\xi w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) \overset{S'}{\to} 0 \text{ pour } \phi;\nabla\phi \in C^0_b(\mathbb{R}^N) \\ \\ \frac{1}{\varepsilon}w^\varepsilon(\phi(\varepsilon D)f^\varepsilon;g^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\phi(\xi)w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) - \nabla\phi(\xi).\nabla_x w^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) \overset{S'}{\to} 0 \text{ pour } \phi;\nabla\phi \in C^0_b(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Exemple. Suite compacte $f^\varepsilon \overset{L^2}{\to} f$
$\Rightarrow \mathcal{F}_{\%\xi}[w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon)](x;\xi') = f^\varepsilon(x-\varepsilon\xi'/2)\overline{f^\varepsilon}(x+\varepsilon\xi'/2) \overset{S'}{\to} |f|^2(x)$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \overset{S'}{\to} |f|^2(x)\delta(\xi)$

Exemple. Suite oscillante $f^\varepsilon = f(\cdot)e^{+2i\pi<\xi_0|\cdot>/\varepsilon^m}$
$\Rightarrow \mathcal{F}_{\%\xi}[w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon)](x;\xi') = f(x-\varepsilon\xi'/2)\overline{f}(x+\varepsilon\xi'/2)e^{-2i\pi<\xi_0|\xi'>/\varepsilon^{m-1}}$
$\overset{S'}{\approx} |f|^2(x)e^{-2i\pi<\xi_0|\xi'>/\varepsilon^{m-1}}$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \overset{S'}{\to} |f|^2(x)\delta(\xi)$ si $m<1$, $\quad |f|^2(x)\delta(\xi-\xi_0)$ si $m=1$, $\quad 0$ sinon.

Exemple. Suite WKB $f^\varepsilon = fe^{+2i\pi S/\varepsilon^m}$ avec S réel presque partout différentiable
$\Rightarrow \mathcal{F}_{\%\xi}[w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon)](x;\xi') = f(x-\varepsilon\xi'/2)\overline{f}(x+\varepsilon\xi'/2)e^{-2i\pi[S(x+\varepsilon\xi'/2)-S(x-\varepsilon\xi'/2)]/\varepsilon^m}$
$\overset{S'}{\approx} |f|^2(x)e^{-2i\pi[S(x+\varepsilon\xi'/2)-S(x-\varepsilon\xi'/2)]/\varepsilon^m}$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \overset{S'}{\to} |f|^2(x)\delta(\xi)$ si $m<1$, $\quad |f|^2(x)\delta(\xi-\nabla S(x))$ si $m=1$,

et $|f|^2(x)\mathbb{I}_{[\nabla S=0]}(x)\delta(\xi)$ si $1<m<2$ et si S admet presque partout un développement limité à l'ordre deux.

Exemple. Suite ponctuelle $f^\varepsilon = \varepsilon^{-Nm/2} f(\frac{\cdot - x_0}{\varepsilon^m})$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon; f^\varepsilon)(x;\xi) = \frac{1}{\varepsilon^N} w^1(f;f)(\frac{x-x_0}{\varepsilon^m}; \frac{\xi}{\varepsilon^{1-m}})$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon; f^\varepsilon) \overset{S'}{\to} (\int |f|^2)\delta(x-x_0)\delta(\xi)$ si $0<m<1$, $\quad |f|^2(x-x_0)\delta(\xi)$ si $m=0$, et $|\hat{f}|^2(\xi)\delta(x-x_0)$ si $m=1$, $\quad$ (0 sinon).

Exemple. Suite cohérente $f^\varepsilon = \varepsilon^{-Nm/2} f(\frac{\cdot - x_0}{\varepsilon^m}) e^{+2i\pi<\xi_0|\cdot>/\varepsilon}$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon; f^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^N} w^1(f;f)(\frac{x-x_0}{\varepsilon^m}; \frac{\xi-\xi_0}{\varepsilon^{1-m}})$
$\Rightarrow w^\varepsilon(f^\varepsilon; f^\varepsilon) \overset{S'}{\to} (\int |f|^2)\delta(x-x_0)\delta(\xi-\xi_0)$ si $0<m<1$,
$|f|^2(x-x_0)\delta(\xi-\xi_0)$ si $m=0$, et $|\hat{f}|^2(\xi-\xi_0)\delta(x-x_0)$ si $m=1$, $\quad$ (0 sinon).

Point commun aux exemples : lorsque le 'scaling' arbitraire $f^\varepsilon(x-\alpha(\varepsilon)v)\overline{f^\varepsilon}(x+\beta(\varepsilon)v)$, où $\alpha(\varepsilon)=\beta(\varepsilon)=\varepsilon/2$ est défini par le paramètre d'indexation, ne correspond pas à l'ordre de grandeur des oscillations, la limite de $w^\varepsilon(f^\varepsilon; f^\varepsilon)$ devient triviale.

Remarque. Concernant l'additivité de la transformation w^0 on peut mentionner :
(Additivité par les supports)
Si les mesures de Wigner $w^0[f^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+$ et $w^0[g^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+$ sont étrangères alors $w^0[f^\varepsilon + g^\varepsilon] = w^0[f^\varepsilon] + w^0[g^\varepsilon]$.

(Additivité par produit fort faible)
Si $f^\varepsilon \overset{L^2}{\to} f$ et si $g^\varepsilon \overset{L^2}{\rightharpoonup} g$ alors $w^0[f^\varepsilon + g^\varepsilon] = w^0[f^\varepsilon] + w^0[g^\varepsilon]$.

Avant d'aborder la notion de mesure de défaut, définissons les propriétés d'oscillation à l'ordre ε et de compacité à l'infini.

Definition 1.2 *La famille bornée $f^\varepsilon \in L^2$ est dite ε-oscillante respectivement ∞-compacte lorsque*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\geq R/\varepsilon} |\widehat{\phi f^\varepsilon}|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \phi \in C_c^0$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\geq R} |f^\varepsilon|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Citons les deux principaux critères pratiques :

- *si il existe $s>0$ tel que $\varepsilon^s \partial^s f^\varepsilon \in L^2_{loc}$ est bornée alors $[f^\varepsilon]$ est ε-oscillante*
- *si il existe $\alpha>0$ tel que $|x|^\alpha f^\varepsilon(x) \in L^2$ est bornée alors $[f^\varepsilon]$ est ∞-compacte*

Remarque. Concernant la conjonction des deux propriétés,

$$[f^\varepsilon] \text{ est } \varepsilon\text{-oscillante } \infty\text{-compacte}$$

$$\Leftrightarrow \forall \phi \in C_b^0 \qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\geq R} |\phi f^\varepsilon|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\geq R/\varepsilon} |\widehat{\phi f^\varepsilon}|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\geq R} |f^\varepsilon|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\geq R/\varepsilon} |\widehat{f^\varepsilon}|^2 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque. $[f^\varepsilon]$ est ∞-compacte $\Leftrightarrow$ $|f^\varepsilon|^2$ est une famille étroitement relativement compacte de mesures positives finies ; $[f^\varepsilon]$ est ε-oscillante ∞-compacte $\Leftrightarrow$ $|f^\varepsilon|^2$ et $\frac{1}{\varepsilon^N}|\hat{f}^\varepsilon|^2(\frac{\xi}{\varepsilon})$ sont deux familles étroitement relativement compactes de mesures positives finies. Si $\frac{1}{\varepsilon^N}|\hat{f}^\varepsilon|^2(\frac{\xi}{\varepsilon})$ est une famille étroitement relativement compacte de mesures positives finies alors $[f^\varepsilon]$ est ε-oscillante ; la réciproque est fausse en général ainsi $f^\varepsilon(x) = f(x+\frac{1}{\varepsilon^N})e^{-2i\pi\frac{x}{\varepsilon^m}} \in L^2(\mathbb{R})$ est ε-oscillante sans que $\frac{1}{\varepsilon^N}|\hat{f}^\varepsilon|^2(\frac{\xi}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon^N}|\hat{f}|^2(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^m})$ soit étroitement relativement compacte lorsque $m > N = 1$.

Exemple. (Etat WKB) $f^\varepsilon = fe^{2i\pi S/\varepsilon}$ est ε-oscillante ∞-compacte pour $f \in L^2$ et $S \in H^1_{loc}$ réel. Il s'agit d'hypothèses peu restrictives sur l'enveloppe f et la phase S.

Théorème 1.1 *Supposons après extraction dans la famille bornée $f^\varepsilon \in L^2$ que*

$$\begin{cases} |f^\varepsilon|^2 \rightharpoonup \mu \text{ dans } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \\ w^\varepsilon[f^\varepsilon] \to w^0[f^\varepsilon] \text{ dans } S'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} w^0[f^\varepsilon]d\xi \leq \mu \text{ avec égalité si et seulement si } [f^\varepsilon] \text{ est } \varepsilon\text{-oscillante,}$$

$$w^0[f^\varepsilon](\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \|^2_{L^2}$$

$$\text{avec égalité si et seulement si } [f^\varepsilon] \text{ est } \varepsilon\text{-oscillante } \infty\text{-compacte,}$$

$$\text{auquel cas } w^0[f^\varepsilon](\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \|^2_{L^2} .$$

Noter l'encadrement de la limite faible $\int_{\mathbb{R}^N} w^0[f^\varepsilon]d\xi \leq \mu$ et $\mu(\mathbb{R}^N) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \|^2_{L^2}$.

Remarque. Si $f^\varepsilon \in L^2$ bornée ne possède qu'une seule mesure de Wigner notée $w^0[f^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ alors l'égalité $w^0[f^\varepsilon](\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi) = \limsup \| f^\varepsilon \|^2_{L^2}$ implique que $[f^\varepsilon]$ est ε-oscillante ∞-compacte, d'où $|f^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{M}(\mathbb{R}^N_x)}{\rightharpoonup} \int_{\mathbb{R}^N} w^0[f^\varepsilon]d\xi$.
C'est un théorème de convergence des densités.

(Mesure du défaut) Pour une famille $f^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bornée ε-oscillante ∞-compacte supposée faiblement convergente vers $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ après extraction :

$$f^\varepsilon \overset{L^2}{\to} f \Leftrightarrow w^0[f - f^\varepsilon] = 0 \Leftrightarrow w^0[f^\varepsilon] = |f|^2(x)\delta_0(\xi) = w^0[f]$$

ainsi la transformation de Wigner fournit une mesure du défaut de compacité L^2 des familles bornées ε-oscillantes ∞-compactes.

Remarque. Inversement si $\mu \geq |f|^2(x)\delta_0(\xi)$ avec $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors il existe une famille $f^\varepsilon \overset{L^2}{\rightharpoonup} f$ de masse $\lim \| f^\varepsilon \|^2_{L^2} = \mu(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ telle que $w^\varepsilon[f^\varepsilon] \to \mu$. Les mesures de Wigner des familles bornées de L^2 sont donc des mesures positives finies tout à fait arbitraires.

1.2 Cas des transformées discrètes.

Etant donné un réseau $\Gamma = \overrightarrow{a_1}\mathbb{Z}+\cdots+\overrightarrow{a_N}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^N$ de cellule unité $\Omega = \overrightarrow{a_1}(-1/2;+1/2)+\cdots+\overrightarrow{a_N}(-1/2;+1/2) \subset \mathbb{R}^N$ définissons le réseau dual comme $\Gamma^* = \overrightarrow{a_1^*}\mathbb{Z}+\cdots+\overrightarrow{a_N^*}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^N$ où $\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{a_j^*} = \delta_{i,j} \qquad 1 \leq i,j \leq N$.

La transformée de Wigner discrète $S'(\mathbb{R}_x^N) \times S'(\mathbb{R}_x^N) \to P'(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_k^N)$ définie par

$$w_s^\varepsilon(f;g) : (x;k) \mapsto \Sigma_{\gamma\in\Gamma} f(x-\varepsilon\gamma/2)\overline{g}(x+\varepsilon\gamma/2)e^{+2i\pi k\cdot\gamma}$$

est sesquilinéaire densément définie telle que

$$< w_s^\varepsilon(f;g)|a >_{P'\times P} = < \overline{g}|a^W(x;\varepsilon D)f >_{S'\times S} \qquad \forall a \in P$$

où $P = P(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_k^N)$ désigne un espace de fonctions tests régulières Γ^*-périodiques en la variable de phase

$$P = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_k^N)\ \Gamma^*\text{-périodiques en } k \,|\, x^\alpha \partial_x^\beta \partial_k^\gamma a \in L^\infty(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_k^N) \qquad \forall\alpha\forall\beta\forall\gamma\}$$

En d'autres termes $w_s^\varepsilon(f;g) \in P'$ est une distribution tempérée en espace et périodique en phase. Lorsque $f;g \in L^2$ on peut voir $w_s^\varepsilon(f;g)$ comme une série de Fourier à coefficients vectoriels dans $L^1(\mathbb{R}_x^N)$ tous bornés par $\| f \|_{L^2} \| g \|_{L^2}$. Lorsque $f \in S$ et $g \in S'$ on peut voir $w_s^\varepsilon(f;g)$ comme une série de Fourier à coefficients vectoriels dans $S'(\mathbb{R}_x^N)$ tous bornés.

L'opérateur de Weyl $a^W(x;\varepsilon D)$ de symbole $a \in P$ périodique défini précédemment ($a \in P \subset S'$) s'écrit aussi

$$a^W(x;\varepsilon D)u : x \mapsto \Sigma_{\gamma\in\Gamma} u(x+\varepsilon\gamma) \int_{\Omega^*} a(x+\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\cdot\gamma}dk$$

On en déduit

$$a \in P \Rightarrow a^W(x;\varepsilon D) \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^N)) \qquad a^W(x;\varepsilon D) \in \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^N)) \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

En particulier $w_s^\varepsilon(f;g) \in P'$ est bien défini pour $f \in S(\mathbb{R}^N)$ et $g \in S'(\mathbb{R}^N)$ respectivement pour $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ où $s \in \mathbb{R}$.

Bien sûr $w_s^\varepsilon(f;g) \in P'$ est d'autant plus régulier que $f;g \in S'(\mathbb{R}^N)$ sont réguliers par exemple

$$\begin{cases} f;g \in S(\mathbb{R}^N) \Rightarrow w_s^\varepsilon(f;g) \in P \\ f;g \in L^2(\mathbb{R}^N) \Rightarrow w_s^\varepsilon(f;g) \in C_b^0[\mathbb{R}_k^N; L^1_{loc}(\mathbb{R}_x^N)] \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Par la suite les arguments f et g seront toujours des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Voici les propriétés classiques de la transformation w_s^ε :

(Adjonction) $w_s^\varepsilon(f;g) = \overline{w_s^\varepsilon(g;f)}$ en particulier $w_s^\varepsilon(f;f)$ est réelle.

(Transformée de Fourier partielle)

$$\mathcal{F}_{\%x}[w_s^\varepsilon(f;g)] : (x';k) \mapsto \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{f}(+x'/2+k/\varepsilon+\gamma^*/\varepsilon)\overline{\hat{g}}(-x'/2+k/\varepsilon+\gamma^*/\varepsilon)$$

(Périodisation)

$$w_s^\varepsilon(f;g) = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} w^\varepsilon(f;g)(x;k+\gamma^*) = \varpi_{\Gamma^*}\, w^\varepsilon(f;g)$$

(Intégrales) $f;g \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\Omega^*} w_s^\varepsilon(f;g)dk = f(x)\overline{g}(x) \qquad \int\int_{\mathbb{R}^N\times\Omega^*} w_s^\varepsilon(f;g)dxdk = \int f\overline{g}$$

(Bornes) Si $f^\varepsilon; g^\varepsilon \in L^2$ restent bornées alors $w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) \in P'$ reste borné.
Par exemple $\mathcal{F}_{\%x}[w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)] \in C_b^0[\mathbb{R}^N_{x'};L^1(\Omega^*_k)]$ de norme $\leq \| f^\varepsilon \|_{L^2} \| g^\varepsilon \|_{L^2}$ reste borné.
On peut aussi remarquer $< w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)|a >_{P'\times P} = < \overline{g^\varepsilon}|a^W(x;\varepsilon D)f^\varepsilon >_{S'\times S}$
où l'opérateur $a^W(x;\varepsilon D) \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné.

(Positivité)
Pour une famille $f^\varepsilon \in L^2$ bornée tout point d'accumulation de $w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \in P'$ est une mesure positive.

Definition 1.3 *On appellera série de Wigner $w_s^0[f^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_k)$ d'une famille bornée $f^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tout point d'accumulation de $w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;f^\varepsilon) \in P'$. Il en existe toujours au moins un.*

(Localisation) Pour $\phi = \phi(x)$ continu borné $w_s^0[\phi f^\varepsilon] = |\phi|^2 w_s^0[f^\varepsilon]$.
Une série de Wigner d'une famille $f^\varepsilon \in L^2$ bornée n'en dépend que localement.

(Calcul symbolique) En notant $\{u;v\} = \nabla_\xi u\cdot\nabla_x v - \nabla_x u\cdot\nabla_\xi v$ le crochet de Poisson

$$w_s^\varepsilon(a^W(x;\varepsilon D)f^\varepsilon;g^\varepsilon) = a\, w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{4i\pi}\{a;w_s^\varepsilon(f^\varepsilon;g^\varepsilon)\} + \varepsilon^2 r_\varepsilon$$

où $r_\varepsilon \in P'$ reste borné lorsque $f^\varepsilon; g^\varepsilon \in L^2$ restent bornés.

Ici l'hypothèse $a \in P$ pourrait être largement affaiblie. En pratique seul servira le cas où a est une multiplication ou une dérivation périodique (condensé pour multiplicateur de Fourier de symbole périodique). La régularité à imposer sur a pour développer $w_s^\varepsilon(a^W(x;\varepsilon D)f^\varepsilon;g^\varepsilon)$ à l'ordre zéro ou à l'ordre un est celle précisée dans le cas des transformées de Wigner continues.

Théorème 1.2 *Supposons après extraction dans la famille bornée $f^\varepsilon \in L^2$ que*

$$\begin{cases} |f^\varepsilon|^2 \rightharpoonup \mu \text{ dans } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \\ w^\varepsilon[f^\varepsilon] \to w^0[f^\varepsilon] \text{ dans } P'(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Alors

$$\int_{\Omega^*} w_s^0[f^\varepsilon]dk = \mu,$$

$$w_s^0[f^\varepsilon](\mathbb{R}^N_x\times\Omega^*) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \|^2_{L^2} \text{ avec égalité si et seulement si } [f^\varepsilon] \text{ est } \infty\text{-compacte,}$$

$$\text{auquel cas } w_s^0[f^\varepsilon](\mathbb{R}^N\times\Omega^*) = \lim_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \|^2_{L^2}\ .$$

Noter l'encadrement de la limite faible $\int_{\Omega^*} w_s^0[f^\varepsilon]dk = \mu$ avec $\mu(\mathbb{R}^N) \leq \liminf \| f^\varepsilon \|_{L^2}^2$.

Remarque. Si $f^\varepsilon \in L^2$ bornée ne possède qu'une seule mesure de Wigner notée $w_s^0[f^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x^N \times \Omega^*)$ alors l'égalité $w_s^0[f^\varepsilon](\mathbb{R}_x^N \times \Omega^*) = \limsup \| f^\varepsilon \|_{L^2}^2$ implique que $[f^\varepsilon]$ est ∞-compacte, d'où $|f^\varepsilon|^2 \overset{\mathcal{M}(\mathbb{R}_x^N)}{\rightharpoonup} \int_{\Omega^*} w_s^0[f^\varepsilon]dk$.
C'est un théorème de convergence des densités.

1.3 La transformée discrète comme périodisée de la transformée continue.

A $\varepsilon > 0$ fixé la périodisation de $w^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$ donne (comme déjà dit) $w_s^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon) = \varpi_{\Gamma^*} w^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$ sans problème de convergence lorsque les arguments f^ε et g^ε sont L^2. La question

$$w_s^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon) \overset{?}{=} \varpi_{\Gamma^*} w^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$$

est plus intéressante. Il n'est pas clair que l'interversion de limites (convergence en ε et sommation en Γ^*) soit justifiée pour des familles f^ε et g^ε seulement bornées L^2.
Néanmoins :

Théorème 1.3 *Si l'une des deux familles bornées $f^\varepsilon; g^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est ε-oscillante alors*

$$w^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon) \to w^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon) \Rightarrow w_s^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon) \to \varpi_{\Gamma^*} w^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$$

Preuve. Puisque les bornés dans $\sigma(P'; P)$ sont (métrisables) relativement compacts, pour prouver la convergence de la famille bornée $w_s^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon) \in \sigma(P'; P)$, il suffit de prouver l'égalité des différentes valeurs d'adhérence.
Soit $\phi \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ alors l'hypothèse $w^\varepsilon(f^\varepsilon; g^\varepsilon) \to w^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$ implique que $w^\varepsilon(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon) \to \phi w^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon) := w^0(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon)$.
Pour tout test $a \in P$ vérifions la convergence uniforme en $0 < \varepsilon < 1$ de la série numérique

$$< w_s^\varepsilon(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon)|a >_{P' \times P} = \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \int\int_{\mathbb{R}^N \times \Omega^*} w^\varepsilon(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon)(x; k + \gamma^*) a(x; k) dx dk,$$

alors $w_s^\varepsilon(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon) \to \varpi_{\Gamma^*} w^0(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon) = \phi \varpi_{\Gamma^*} w^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$ dans $\sigma(P'; P)$ et le théorème 1.3 est prouvé car les valeurs d'adhérence $w_s^0(f^\varepsilon; g^\varepsilon)$ sont identifiées.
Etant donné $R > 0$ notons $\Gamma_R^* \subset \Gamma^*$ l'intersection (finie) de Γ^* avec la boule de rayon R centrée à l'origine.

$$\Sigma_{\gamma^* \notin \Gamma_R^*} \left| \int\int_{\mathbb{R}^N \times \Omega^*} w_s^\varepsilon(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon)(x; k + \gamma^*) a(x; k) dx dk \right|$$

$$= \Sigma_{\gamma^* \notin \Gamma_R^*} \frac{1}{\varepsilon^N} \left| \int\int_{\mathbb{R}^N \times \Omega^*} \widehat{\phi f^\varepsilon}(\frac{k}{\varepsilon} + \frac{\gamma^*}{\varepsilon} + \frac{x'}{2}) \widehat{g^\varepsilon}(\frac{k}{\varepsilon} + \frac{\gamma^*}{\varepsilon} - \frac{x'}{2}) \mathcal{F}_{\%x}^{-1} a(x'; k) dx' dk \right|$$

$$\leq \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{|\varepsilon\xi|\geq R-d-\varepsilon|x'|} |\widehat{\phi f^\varepsilon}|^2(\xi)d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{|\varepsilon\xi|\geq R-d-\varepsilon|x'|} |\widehat{g^\varepsilon}|^2(\xi)d\xi\right)^{1/2} \sup_{k\in\Omega^*} |\mathcal{F}^{-1}_{\%x}a|(x';k)dx'$$

$$\leq \| g^\varepsilon \|_{L^2} \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{|\varepsilon\xi|\geq R-d-|x'|} |\widehat{\phi f^\varepsilon}|^2(\xi)d\xi\right)^{1/2} \sup_{k\in\Omega^*} |\mathcal{F}^{-1}_{\%x}a|(x';k)dx'$$

où d majore le rayon de la cellule unité Ω^*.

En remarquant

$$\| \phi f^\varepsilon \|_{L^2} \| g^\varepsilon \|_{L^2} \sup_{k\in\Omega^*} |\mathcal{F}^{-1}_{\%x}a|(x';k) \in L^1_+(dx')$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{|\varepsilon\xi|\geq R-d-|x'|} |\widehat{\phi f^\varepsilon}|^2(\xi)d\xi \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

on obtient par convergence dominée

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma^*_R} \left| \int\int_{\mathbb{R}^N\times\Omega^*} w^\varepsilon_s(\phi f^\varepsilon; g^\varepsilon)(x;k+\gamma^*)a(x;k)dxdk \right| \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

d'où la convergence uniforme recherchée.

□

1.4 Cas des transformées de noyaux.

On sait bien que la représentation des opérateurs $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$ par leurs noyaux établit un isomorphisme d'espace hilbertien entre les opérateurs de Hilbert-Schmidt $\mathrm{HS}(L^2(\mathbb{R}^N))$ et les fonctions $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Dans cette identification l'adjonction s'écrit $K^*(x;y) = \overline{K(y;x)}$ pour tout $K \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Nous noterons $\tilde{K}$ la perturbation diagonale $\tilde{K}(x;y) = K(x - y/2; x + y/2)$.

La transformée de Wigner des noyaux définie par

$$W^1[K] : (x;\xi) \mapsto \mathcal{F}[\tilde{K}(x;\cdot)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x - y/2; x + y/2) e^{-2i\pi y\xi} dy$$

est un isomorphisme isométrique $W^1 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N))$ respectant l'adjonction et laissant la classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ invariante

$$\begin{cases} < W^1[K] | W^1[L] >_{L^2} = < \tilde{K} | \tilde{L} >_{L^2} = < K | L >_{L^2} \\ \overline{W^1[K]} = W^1[K^*] \end{cases}$$

Le changement d'échelle

$$W^\varepsilon[K](x;\xi) := \frac{1}{\varepsilon^N} W^1[K](x; \frac{\xi}{\varepsilon})$$

permet de retrouver les transformées de Wigner précédemment définies

$$w^\varepsilon(f;g) = W^\varepsilon[\overline{g} \otimes f] \qquad \forall f; g \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

Remarque. On aurait pu démarrer de la définition symétrique

$$W^1[K](x;\xi) = \mathcal{F}\left[K(x - \frac{\cdot}{2}; x + \frac{\cdot}{2})\right](\xi) = \mathcal{F}\left[\hat{K}(-\xi - \frac{\cdot}{2}; +\xi - \frac{\cdot}{2})\right](x)$$

Soit $K(x;y)$ le noyau d'un opérateur de Hilbert-Schmidt positif $K \in \mathrm{HS}^+(L^2(\mathbb{R}^N))$.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de diagonalisation

$$K = \Sigma_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \overline{e_n} \otimes e_n \qquad\qquad \lambda \in l^2_+(\mathbb{N})$$

Lorsque les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites

(i) $K \in$ TR $(L^2(\mathbb{R}^N))$

(ii) $\lambda \in l^1(\mathbb{N})$

(iii) $\tilde{K} \in C^0[\mathbb{R}^N_x; L^1(\mathbb{R}^N_y)] \cap C^0[\mathbb{R}^N_y; L^1(\mathbb{R}^N_x)]$

(iv) l'application $y \mapsto \tilde{K}(\cdot; y) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ est continue à l'origine

la valeur du noyau sur la diagonale (qu'on nomme densité) peut se définir (indépendamment de tout choix de représentant presque partout) comme la limite

$$K(x;x) = \lim_{h\to 0} K(x - h/2; x + h/2) \text{ au sens de } L^1(\mathbb{R}^N_x)$$

La valeur de l'intégrale $\int K(x;x)dx$ du noyau sur la diagonale s'interprète aussi comme une norme

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x;x)dx = \lim_{h\to 0} \| K(x-h/2;x+h/2) \|_{L^1(\mathbb{R}^N_x)} = \text{ Tr } (K) = \| \lambda \|_{l^1}$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \| \tilde{K}(\cdot;y) \|_{L^1} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \| \tilde{K}(x;\cdot) \|_{L^1}$$

et

$$W^1[K] \in C^0[\mathbb{R}^N_x;\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N_\xi)] \cap C^0[\mathbb{R}^N_\xi;\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N_x)]$$

La transformation quadratique $(f;g) \mapsto w^\varepsilon(f;g)$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ est un cas particulier de la transformation linéaire $K \mapsto W^\varepsilon[K]$ sur le cône $\mathrm{TR}^+(L^2(\mathbb{R}^N))$ des "matrices-densités".

Dans cette extension l'hypothèse "$f^\varepsilon;g^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ restent bornés" devient "Tr (K^ε) reste bornée".

Soit $\mathcal{A} = \{\mathcal{F}_{\%\xi'}\varphi | \varphi = \varphi(x;\xi') \in L^1[\mathbb{R}^N_{\xi'};C^0_0(\mathbb{R}^N_x)]\}$ l'espace de Banach obtenu en fermant $S(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ pour la norme

$$\| \mathcal{F}_{\%\xi'}\varphi \|_{\mathcal{A}} = \| \varphi \|_{L^1[\mathbb{R}^N_{\xi'};C^0_0(\mathbb{R}^N_x)]} = \int_{\xi'\in\mathbb{R}^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x;\xi')| d\xi'$$

Le dual $\mathcal{A}'$ est un espace de distributions tempérées optimal pour borner W^ε puisque

$$\| W^\varepsilon[K] \|_{\mathcal{A}'} \leq \| K \|_{TR} \text{ avec égalité lorsque } K \text{ est positif}$$

En notant $H^\varepsilon[K] = W^\varepsilon[K] * G^\varepsilon$ la transformée de Husimi définie par la convolution avec la gaussienne

$$G^\varepsilon = G^\varepsilon(x;\xi) = \frac{1}{\varepsilon^N} e^{-2\pi|x|^2/\varepsilon} e^{-2\pi|\xi|^2/\varepsilon}$$

on peut vérifier que

$$W^\varepsilon[K] - H^\varepsilon[K] \to 0 \text{ dans } \sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A}) \text{ uniformément en } K \in \mathrm{TR}(L^2) \text{ borné}$$

Par ailleurs $H^\varepsilon[K] \in L^1_+(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ est une fonction positive lorsque le noyau K est positif, d'où :

Definition 1.4 *On appellera mesure de Wigner $W^0[K^\varepsilon] \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ d'une famille $K^\varepsilon \in TR^+(L^2(\mathbb{R}^N))$ bornée tout point d'accumulation de $W^\varepsilon[K^\varepsilon] \in \sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})$. Il en existe toujours au moins un.*

Citons pour finir le théorème des moments de P.L.Lions-T.Paul [LP] :

Théorème 1.4 *Supposons après extraction dans la famille bornée $K^\varepsilon \in TR^+(L^2)$ que*

$$\begin{cases} W^\varepsilon[K^\varepsilon] \rightharpoonup W^0[K^\varepsilon] \textit{ faiblement dans } \mathcal{A}'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \\ K^\varepsilon(x;x) \rightharpoonup \mu_x \textit{ faiblement dans } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \\ \frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{K^\varepsilon}(\frac{\xi}{\varepsilon};\frac{\xi}{\varepsilon}) \rightharpoonup \mu_\xi \textit{ faiblement dans } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Automatiquement $\mu_x \geq \int_{\mathbb{R}^N} W^0[K^\varepsilon]d\xi$ *et* $\mu_\xi \geq \int_{\mathbb{R}^N} W^0[K^\varepsilon]dx$ *et* $H^\varepsilon[K^\varepsilon] \rightharpoonup W^0[K^\varepsilon]$

$$\int_{\mathbb{R}^N} H^\varepsilon[K^\varepsilon]dx \rightharpoonup \mu_\xi \qquad \int_{\mathbb{R}^N} H^\varepsilon[K^\varepsilon]d\xi \rightharpoonup \mu_x \qquad \textit{faiblement dans les mesures}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} W^\varepsilon[K^\varepsilon]dx \to \mu_\xi \qquad \int_{\mathbb{R}^N} W^\varepsilon[K^\varepsilon]d\xi \to \mu_x \qquad \textit{dans les distributions tempérées}$$

L'égalité $W^0[K^\varepsilon](\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) = \limsup\ Tr\ (K^\varepsilon)$ *est satisfaite*

si et seulement si les densités $K^\varepsilon(x;x)$ *et* $\dfrac{1}{\varepsilon^N}\widehat{K^\varepsilon}(\dfrac{\xi}{\varepsilon};\dfrac{\xi}{\varepsilon})$ *sont étroitement relativement compactes,*

auquel cas $\mu_x = \int_{\mathbb{R}^N} W^0[K^\varepsilon]d\xi$ *et* $\mu_\xi = \int_{\mathbb{R}^N} W^0[K^\varepsilon]dx$

et $\int_{\mathbb{R}^N} \mu_x dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mu_\xi d\xi = W^0[K^\varepsilon](\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) = \lim\ Tr\ (K^\varepsilon)$.

On trouve là un moyen d'intervertir limites et moments pour les transformées de Husimi respectivement pour les transformées de Wigner :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim H^\varepsilon[K^\varepsilon]dx = \lim \int_{\mathbb{R}^N} H^\varepsilon[K^\varepsilon]dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim H^\varepsilon[K^\varepsilon]d\xi = \lim \int_{\mathbb{R}^N} H^\varepsilon[K^\varepsilon]d\xi$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \lim H^\varepsilon[K^\varepsilon]dxd\xi = \lim \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} H^\varepsilon[K^\varepsilon]dxd\xi$$

où les intégrales sont classiques positives,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim W^\varepsilon[K^\varepsilon]dx = \lim \int_{\mathbb{R}^N} W^\varepsilon[K^\varepsilon]dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim W^\varepsilon[K^\varepsilon]d\xi = \lim \int_{\mathbb{R}^N} W^\varepsilon[K^\varepsilon]d\xi$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \lim W^\varepsilon[K^\varepsilon]dxd\xi = \lim \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} W^\varepsilon[K^\varepsilon]dxd\xi$$

où les intégrales s'interprètent par dualité,

dès lors que la famille bornée $K^\varepsilon \in \mathrm{TR}^+(L^2)$ est supposée ε-oscillante ∞-compacte au sens de la relative compacité étroite des densités $K^\varepsilon(x;x)$ et $\frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{K^\varepsilon}(\frac{\xi}{\varepsilon};\frac{\xi}{\varepsilon})$. Pour la cohérence du vocabulaire voir les remarques suivant la définition 1.2.

Un critère typique assurant l'ε-oscillation et l'∞-compacité est adapté de la définition 1.2 (cas $\alpha = s = 1$) il suffit que

$$\mathrm{Tr}\ (-\varepsilon^2\Delta K^\varepsilon) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 K^\varepsilon(x;x)dx \text{ restent bornés}$$

1.5 Bibliographie.

Références

[GMMP] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser, F. Poupaud. Homogenization limits and Wigner transforms. *Comm. Pure Appl. Math.*, L :323–379, **1997**.

[LP] P. L. Lions, T. Paul. Sur les mesures de Wigner. *Revista Mat. Iberoamericana*, 9 :553–618, **1993**.

2 Limite semi-classique de l'équation de Schrödinger dans un cristal.

2.1 Introduction.

On modélise traditionnellement les effets quantiques du déplacement d'un électron dans un cristal, c'est-à-dire dans un milieu solide périodique, par une fonction d'onde complexe dont les variations dans le temps sont régies par la très célèbre équation de Schrödinger de la dynamique du mouvement

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(t;x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t;x) + qv(\frac{x}{\lambda})\psi(t;x) + qV(t;x)\psi(t;x)$$

où $\hbar$ désigne la constante de Planck, q la charge et m la masse au repos de l'électron étudié. Le potentiel réel $V = V(t;x)$ décrit d'éventuelles forces extérieures subies par le cristal à une échelle macroscopique. Le potentiel réel $v = v(\frac{x}{\lambda})$ traduit à une échelle microscopique l'action quantique sur l'électron en déplacement, des ions situés aux points (fixes dans le temps) du réseau cristallin. La longueur caractéristique λ désigne le pas du réseau et $v = v(\frac{x}{\lambda})$ est une fonction λ-périodique de la position $x \in \mathbb{R}^3$.

Dans ce genre de problèmes issus de la physique du solide [AM] et de la physique des semi-conducteurs [MRS] l'approche semi-classique ou limite semi-classique consiste à considérer la constante de Planck $\hbar$ et la périodicité du cristal λ comme très petites (devant la longueur caractéristique des variations du potentiel extérieur V par exemple) d'où

$$\hbar \to 0 \qquad \lambda \to 0$$

On peut citer [PR] pour l'étude de la situation où les quantités $\hbar$ et λ ont des ordres de grandeur très différents ($\hbar \ll \lambda$ ou $\lambda \ll \hbar$) nécessitant des techniques de double échelle. Nous nous placerons dans le cas intermédiaire où les quantités $\hbar$ et λ sont comparables ($\hbar \approx \lambda$) l'équation d'évolution de la fonction d'onde prends alors la forme adimensionnée

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}(t;x) = -\varepsilon^2\Delta\psi^\varepsilon(t;x) + v(\frac{x}{\varepsilon})\psi(t;x)^\varepsilon + V(t;x)\psi^\varepsilon(t;x)$$

où $\varepsilon > 0$ est destiné à tendre vers zéro.

Lorsque, par un fait d'expérience, il n'y a pas moyen de connaitre la fonction d'onde $\psi^\varepsilon(t=0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à l'instant initial avec précision on modélise généralement l'état initial du système (l'électron) par un mélange statistique d'états purs ψ_n^ε possibles (orthonormalisés)

$$\rho^\varepsilon(t=0) = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon\overline{\psi_n^\varepsilon} \otimes \psi_n^\varepsilon$$

Les coefficients d'occupation $\lambda_n^\varepsilon \geq 0$ mesurent moralement les chances respectives de trouver le système à l'instant initial dans les états ψ_n^ε, $n \in \mathbb{N}$, d'où bien sûr $\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon = 1$. L'équation de Schrödinger est alors remplacée par l'équation de Liouville matricielle

$$i\varepsilon\frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t} = \left[-\varepsilon^2\Delta + v(\frac{x}{\varepsilon}) + V(t;x); \rho^\varepsilon\right]$$

d'inconnue, $\rho^\varepsilon(t)$, une matrice densité.

Par la suite nous considérerons le cas des états mélangés uniquement sous la condition dite "de vrai mélange" $\frac{1}{\varepsilon^3}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n^\varepsilon)^2 \leq 1$. Cette condition exclut essentiellement le cas des états purs où tous les coefficients d'occupation sont nuls sauf un. A chaque énoncé concernant les états purs correspond une version pour les états mélangés généralement plus satisfaisante et plus facile à prouver.

Homogénéiser le modèle c'est déterminer le comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0^+$ des observables physiques. La première difficulté consiste à lever l'indétermination dans la plus typique des grandeurs $|\psi^\varepsilon|^2$ la densité de probabilité de présence. Plus généralement une observable est une quantité quadratique réelle de la fonction d'onde

$$\int_{\mathbb{R}^3} a^W \psi^\varepsilon \cdot \overline{\psi^\varepsilon}$$

où a^W est l'opérateur pseudo-différentiel de Weyl de symbole a réel.

L'étude asymptotique de la transformée de Wigner

$$w^\varepsilon[\psi^\varepsilon;\psi^\varepsilon] : (x;\xi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \psi^\varepsilon(x-\varepsilon v/2)\overline{\psi^\varepsilon}(x+\varepsilon v/2)e^{+2i\pi v\cdot\xi}dv$$

définie pour que

$$\int_{\mathbb{R}^3_x} a^W \psi^\varepsilon \cdot \overline{\psi^\varepsilon} = \int\int_{\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^3_\xi} a \cdot w^\varepsilon[\psi^\varepsilon;\psi^\varepsilon]$$

est un moyen d'atteindre l'ensemble des observables limites en calculant ce qui s'appelle la mesure semi-classique

$$w^0[\psi^\varepsilon] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} w^\varepsilon[\psi^\varepsilon;\psi^\varepsilon]$$

L'introduction plus ou moins formelle d'un tel objet dans le cadre de la mécanique quantique semi-classique aux alentours des années trente revient au physicien E.Wigner [WIG]. L'approche mathématique est beaucoup plus récente. La notion de mesure semi-classique ou H-mesure ou W-mesure ou mesure de défaut (...) a été dégagée dans des travaux indépendants par différents auteurs dont principalement P.Gérard (1990) [GX][G], L.Tartar (1990) [TAR], P.L.Lions-T.Paul [LP] (1993). Elle offre une alternative aux développements limités formels de l'optique géométrique valables lorsque la fonction d'onde initiale a un profil spécial [BLP].

L'application de la théorie moderne des transformées de Wigner à l'étude du mouvement des électrons dans un cristal a fait l'objet d'une série d'articles [GX] [MMP] [PR] [GMMP] [BP] dans lesquels le passage des équations microscopiques de la mécanique quantique (Schrödinger, Liouville, Hartree ...) vers les équations macroscopiques de transport (Vlasov, Vlasov-Poisson, Boltzmann ...) de la mécanique statistique est prouvé rigoureusement en réalisant l'homogénéisation de diverses mesures de Wigner. Décrivons plus précisément ces résultats.

Les travaux [GX] [MMP] [GMMP] traitent du cas libre $V = 0$ où les forces extérieures sont négligées. L'hamiltonien périodique est réduit par l'analyse de Bloch et l'introduction des niveaux d'énergie (niveaux, bandes, modes ... sont des synonymes) dans lesquels l'état

global du système est projeté conduit à la difficulté théorique désormais bien connue des croisements de bandes. A ce sujet il faut citer un récent article [FKG] consacré à l'étude abstraite du croisement pour un opérateur différentiel modèle à deux dimensions.

Les résultats de [MMP] concernent des états mélangés seulement. On y détaille précisément les observables standard que sont l'énergie, la concentration et le courant. Les résultats de [GMMP] concernent des états purs ou mélangés mais uniquement loin des croisements ce qui se traduit sur la mesure de Wigner initiale par une hypothèse de concentration hors d'un ensemble exceptionnel.

L'article [PR] aborde pour la première fois le cas d'un potentiel extérieur $V \neq 0$ dans la situation où les paramètres $\hbar$ et λ sont très différents. L'article [B] aborde le cas d'un potentiel coulombien auto-consistant dans l'approximation de bande isolée. L'article [BP] traite de milieux stratifiés dans lesquels la périodicité est supposée dans une seule direction.

Très récemment [BMP] des résutats ont été obtenus avec un potentiel extérieur général pour des états mélangés initialement concentrés dans un niveau isolé.

La distinction états purs/états mélangés, niveau isolé/niveau quelconque se retrouvera dans les résultats présentés ici :

- Le théorème 2.9 établit l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau isolé pour des états purs sous une condition de petitesse sur $\| V \|_\infty$ qui reste pour l'instant une restriction technique.

- Le théorème 2.10 établit l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau isolé pour des états mélangés sous l'hypothèse $V \in C_0^0(\mathbb{R}^3)$ et ∇V uniformément continu borné. On retrouve essentiellement l'article déjà cité [BMP] par une méthode très différente qui repose néanmoins sur les mêmes ingrédients (estimations de commutation et hypothèse de mélange).

- Les théorèmes 2.11 et 2.12 établissent l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau quelconque pour des états purs ou mélangés mais loin des croisements. Ce résultat général analogue au théorème de [GMMP] dans le cas libre $V = 0$ est peut-être considéré comme simple (ce n'est pas mon avis) mais en tout cas n'a jamais été publié.

- Le théorème 2.20 établit l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau quelconque (présentant un nombre fini de croisements) en une dimension d'espace pour des états purs à un terme source près qui pour l'instant s'interprète mal.

- Le théorème 2.21 établit l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau quelconque (présentant un nombre fini de croisements) en une dimension d'espace pour des états mélangés de manière satisfaisante.

Ainsi présentés les théorèmes 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.20 et 2.21 apparaissent comme la motivation principale de cette partie. On peut noter que les résultats multidimensionnels sont valables en toute dimension éventuellement supérieur à trois. Les résultats monodimensionnels découlent d'une réindexation des niveaux d'énergie (et d'objets spectraux associés)

très spéciale à la dimension un. Cette réindexation fait l'objet du paragraphe 2.7.

La partie 2.2 est consacrée à la décomposition de Bloch de l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2\Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ en toute dimension. La partie 2.6 illustre certaines propriétés de cette réduction dans le cas d'une seule dimension d'espace.

La partie 2.3 (de loin la plus fastidieuse) s'intéresse aux estimations de commutation avec le potentiel extérieur V. Certains résultats (typiquement le théorème 2.8 et le lemme 2.3) sont donnés pour information et ne sont pas réutilisés par la suite. Ils répondent néanmoins de manière significative à des questions naturelles qui pourraient donner lieu (sans quoi) à de nouvelles voies de recherche. Les propositions 2.17, 2.19 et 2.20 de même que les propositions 2.9 et 2.16 qui sont des synthèses seront par contre essentielles.

Les parties 2.4, 2.5 et 2.8 établissent des équations de transport limites sur diverses transformées de Wigner. On y exploite les oscillations temporelles des solutions étudiées selon une idée désormais classique, historiquement due à [JMR], fondée sur la division par une lacune spectrale non nulle.

2.2 Analyse de l'hamiltonien périodique.

Résumé. Cette partie est consacrée à l'étude des principales propriétés de la décomposition de Bloch des hamiltoniens périodiques. Le théorème 2.6 s'apparente à une diagonalisation en base orthonormale. Le théorème 2.5 introduit l'ensemble exceptionnel hors duquel la réduction est régulière. Tous ces résultats sont connus mais plus ou moins dispersés dans la littérature. On trouvera pour finir une discussion élémentaire concernant la finitude des lacunes en dimension deux et trois.

Etant donné un réseau $\Gamma = \overrightarrow{a_1}\mathbb{Z}+\cdots+\overrightarrow{a_N}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^N$ de cellule unité $\Omega = \overrightarrow{a_1}(-1/2;+1/2)+\cdots+\overrightarrow{a_N}(-1/2;+1/2) \subset \mathbb{R}^N$ définissons le réseau dual comme $\Gamma^* = \overrightarrow{a_1^*}\mathbb{Z}+\cdots+\overrightarrow{a_N^*}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^N$ où : $\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{a_j^*} = \delta_{i,j} \qquad 1 \leq i,j \leq N$.

Pour cellule unité de Γ^* choisissons par exemple la 'zone de Brillouin' définie par

$$\Omega^* = \{ \text{ points plus proches de l'origine que d'aucun autre point de } \Gamma^* \} \subset \mathbb{R}^N$$

Pour un potentiel $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ Γ-périodique, l'hamiltonien (périodique) $H = -\Delta + v$ est autoadjoint minoré sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, au titre de perturbation bornée du laplacien autoadjoint positif. L'analyse spectrale de cet opérateur repose sur la décomposition (dite de Bloch) de l'espace $L^2(\mathbb{R}^N)$ en sous-espaces propres généralisés (dits de Floquet) stables par H. On introduit à dessein une variable continue Γ^*-périodique duale $k \in \mathbb{R}^N$.

Une application $\varphi \in H^2(\Omega)$ se prolonge par périodicité en une application $H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ lorsque la trace et la dérivée normale (sortante) sur les $2N$ faces du bord $\partial\Omega$ sont périodiques au sens

$$\varphi|_{face+} = \varphi|_{face-} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{face+} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{face-}$$

pour tout couple $(face+; face-)$ de faces opposées dans $\partial\Omega$.

De même une application $\varphi \in H^2(\Omega)$ se prolonge par k-pseudo-périodicité en une application $H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ lorsque la trace et la dérivée normale sur les $2N$ faces du bord $\partial\Omega$ sont k-pseudo-périodiques au sens

$$\varphi|_{face+} = +e^{+2i\pi k_j}\varphi|_{face-} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{face+} = -e^{+2i\pi k_j}\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{face-}$$

pour le couple $(face+; face-)$ de faces opposées une direction $1 \leq j \leq N$ quelconque.

On note $H^2_k(\Omega)$ l'espace des applications H^2_{loc} qui sont k-pseudo-périodiques.

Proposition 2.1 *Le laplacien $-\Delta_k$ de domaine $D(-\Delta_k) = H^2_k(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est autoadjoint positif à résolvante compacte sur $L^2(\Omega)$.*

Preuve. C'est un résultat classique d'analyse de Fourier sur le tore.
Voir par exemple [RS].
□

Proposition 2.2 *L'hamiltonien $H_k = -\Delta_k + v$ de domaine $D(H_k) = H^2_k(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est autoadjoint minoré (par $-\parallel v \parallel_\infty$ uniformément en k) à résolvante compacte sur $L^2(\Omega)$.*

PREUVE. Ce résultat est un cas particulier du fait général : "la perturbation d'un opérateur autoadjoint minoré à résolvante compacte par un opérateur symétrique relativement borné par zéro est un opérateur autoadjoint minoré à résolvante compacte". Voir par exemple [K] Ch.V. Para.4.

□

Une onde (de Bloch) de moment $k \in \mathbb{R}^N$ est traditionnellement une fonction propre $\psi(\cdot;k) \in H^2_k(\Omega)$ pour l'hamiltonien qui dépend (Γ^*)-périodiquement du paramètre k. La recherche des ondes de Bloch de moment fixé équivaut à la diagonalisation en base orthonormale de la résolvante $(\alpha^2 + H_k)^{-1} \in \mathcal{K}^+[L^2(\Omega)] \qquad (\alpha^2 > \| v \|_\infty)$ ou encore à la réduction spectrale de $-\Delta - 4i\pi k \cdot \nabla + 4\pi^2 k^2 + v = -(\nabla + 2i\pi k)^2 + v$ opérant sur le tore (de domaine fixe $H^2_\#$). L'équivalence de ces réductions résulte de l'isomorphisme $\varphi \in H^2_k(\Omega) \mapsto e^{-2i\pi<\cdot|k>}\varphi \in H^2_\#$.

On écrit ainsi un continuum de problèmes propres indexé par k

$$\begin{cases} H_k\psi_p(\cdot;k) = -\Delta\psi_p(\cdot;k) + v(\cdot)\psi_p(\cdot;k) = E_p(k)\psi_p(\cdot;k) \\ \psi_p(\cdot;k)e^{-2i\pi<k|\cdot>}\ \Gamma\text{-périodique} \end{cases}$$

où $E_p(k), p \in \mathbb{N}$, est la suite croissante infinie $\sigma(H_k) \subset \mathbb{R}$ des valeurs propres-spectrales répétées selon leur multiplicités (toutes finies).

EXEMPLE. $v = 0$.

Les valeurs propres-spectrales $\sigma(H_k) = 4\pi^2|k + \Gamma^*|^2 \subset \mathbb{R}^+$ sont associées aux ondes de Bloch exponentielles $e^{+2i\pi<\cdot|k+\Gamma^*>}$.

Le niveau E_p est le p^{ieme}terme du réarrangement croissant des (Γ^*)-translatées de la parabole $k \mapsto 4\pi^2|k|^2$. L'onde $\psi_p(\cdot;k)$ est l'exponentielle $e^{+2i\pi<\cdot|k+\gamma^*>}$ associée au $\gamma^* = \gamma^*(p) \in \Gamma^*$ correspondant.

La question de la dépendance mesurable des ondes de Bloch par rapport au paramètre k est résolue dans C.H.Wilcox [WIL] :

Théorème 2.5 (Wilcox) $\exists D : \{(k;\lambda) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \,|\, |\, Im\ (k)| < C^{ste}\} \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *analytique tel que*

- *les zéros réels de $D(k;\cdot)$ forment une suite croissante $E_p(k), p \in \mathbb{N}$, les multiplicités en tant que zéros du discrimant $D(k;\cdot)$ ou en tant que valeurs propres-spectrales de l'hamiltonien H_k étant égales et finies*

$$\min E_p \uparrow_{p\uparrow\infty} \infty,$$

- *les fonctions propres $\psi_p(\cdot;k) \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N), p \in \mathbb{N}$, forment pour tout k une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ noter $\psi_p(\cdot;k) \in C^0_b(\mathbb{R}^N)$ si $N = 1, 2, 3$,*

- *les applications $k \mapsto D(k;\lambda) \qquad k \mapsto E_p(k) \qquad k \mapsto \psi_p(x;k)$ sont Γ^*-périodiques,*

- *hors d'un ensemble fermé analytique $F_p \subset \mathbb{R}^N$ de dimension $\leq N-1$ donc hors d'un fermé négligeable (par convention croissant avec $p \in \mathbb{N}$) les applications $k \mapsto E_p(k)$ et $k \mapsto \psi_p(\cdot;k) \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ sont analytiques,*

- *sur chacune des composantes connexes de $\mathbb{R}^N - F_p$ (d'ailleurs en nombre fini) la multiplicité de E_p reste constante.*

REMARQUE. La multiplicité de E_p est constante hors de l'ensemble exceptionnel F_p donc l'intersection totale

$$G_\delta = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^N - F_p) \subset \{k \in \mathbb{R}^N | E_p(k) \neq E_q(k) \qquad \forall p \neq q \in \mathbb{N}\}$$

est un domaine de non-croisement des différents niveaux (d'énergie).

La régularité globale des niveaux est précisée par le principe du minimax :

Proposition 2.3 *E_p est lipschitzien périodique sur $\mathbb{R}^N$.*

PREUVE. Etant donné $\lambda \in]-\infty; -\| v \|_\infty[$ on a $E_p = \lambda - 1/\lambda_p \qquad \forall p \in \mathbb{N}$ où

$$\lambda_p(k) = \sup_{E\subset L^2, dim(E)\leq p} \inf_{\varphi\perp E} \frac{<(\lambda - H_k)^{-1}\varphi|\varphi>_{L^2}}{\| \varphi \|_{L^2}^2} \uparrow_{p\uparrow\infty} 0^-$$

est la suite croissante des valeurs propres-spectrales de l'opérateur compact $(\lambda - H_k)^{-1}$ exprimée à l'aide du principe du minimax.

Or $k \mapsto \dfrac{<(\lambda - H_k)^{-1}\varphi|\varphi>_{L^2}}{\| \varphi \|_{L^2}^2}$ est C-lipschitzien avec $C = \sup_{k\in\mathbb{R}^N} \| \dfrac{d}{dk}(\lambda - H_k)^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^2)}$ donc λ_p est lipschitzien au titre d'infsup d'applications uniformément (C)-lipschitziennes. Bien sûr $\min_{\mathbb{R}^N} |\lambda_p| > 0$ ainsi E_p est lipschitzien comme λ_p.

□

REMARQUE. Comme toujours le principe du minimax donne une formulation non triviale des différentes valeurs propres-spectrales. Par exemple on peut déduire de la preuve un contrôle asymptotique des niveaux en dérivée : $|\nabla E_p| \leq C|E_p - \lambda|^2 \leq C^{ste}(1 + E_p^2)$ ce qui précise la constante de Lipschitz de E_p.

L'asymptotique des niveaux pour les grandes valeurs est celle du laplacien :

Proposition 2.4 *$E_p(k) \sim 4\pi^2(\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} p^{2/N}$ lorsque $p \to \infty$ uniformément en $k \in \mathbb{R}^N$ où $|B|$ désigne le volume de la boule unité euclidienne.*

PREUVE. La formule du minimax permet de déterminer simplement l'équivalent asymptotique des niveaux par comparaison avec le cas du potentiel nul. Soit $(E_p^0)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des niveaux pour le laplacien $-\Delta$ qu'on voit comme un hamiltonien avec la périodicité Γ^*. Nous prouverons plus loin (proposition 2.6) le résultat pour le laplacien $E_p^0(k) \sim 4\pi^2(\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} p^{2/N}$. On en déduit $E_p(k) \sim E_p^0(k)$ grâce à la borne uniforme $|E_p(k) - E_p^0(k)| \leq \| v \|_\infty$.

□

Les fonctions de Wannier $\varphi_p = \int_{\Omega^*} \psi_p(\cdot; k)dk \in H^2(\mathbb{R}^N)$ donnent l'expression des coefficients de Fourier de $\psi_p(x;\cdot) \in L^2(\Omega^*)$ lorsque x varie (presque partout) :

$$\varphi_p(x - \gamma) = \int_{\Omega^*} \psi_p(x; k) e^{-2i\pi<k|\gamma>} dk$$

Elles jouent un rôle fondamental dans la suite pour décrire commodément les sous-espaces H-stables de la décomposition de $L^2(\mathbb{R}^N)$ suivant le :

Théorème 2.6 (Bloch-Floquet-Wannier) *$L^2(\mathbb{R}^N)$ est la somme hilbertienne des sous-espaces V_p propres généralisés définis de manière équivalente par :*

$$V_p = \{\int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk \,|\, \sigma \in L^2(\Omega^*)\} \subset L^2(\mathbb{R}^N) \text{ ou } V_p = \overset{\perp}{\oplus}_{\gamma\in\Gamma} \varphi_p(\cdot-\gamma) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$$

Notant $\Pi_p \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N)) : f \mapsto \Pi_p(f) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma} < f|\varphi_p(\cdot-\gamma) >_{L^2} \varphi_p(\cdot-\gamma)$ le projecteur orthogonal sur V_p, l'hamiltonien $H = -\Delta + v$ de domaine naturel $H^2(\mathbb{R}^N)$ commute avec $\Pi_p \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$ au sens où $\Pi_p \circ H = H \circ \Pi_p$ sur $D(H)$ donc stabilise chaque sous-espace :

$$H : V_p \subset D(H) \to V_p \text{ est l'opérateur } E_p(D) \text{ au sens où } \phi \in V_p \Rightarrow \widehat{H\phi} = E_p\hat{\phi}$$

Nous démontrerons le théorème 2.6 en même temps que les propriétés additionnelles suivantes qui seront d'un usage courant par la suite :

- $\phi \in V_p$ s'écrit de manière équivalente comme une intégrale $\phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk$ ou comme une série $\phi = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\sigma}(\gamma)\varphi_p(\cdot+\gamma)$
  où $\hat{\sigma}(\gamma)$ désigne le γ-ième coefficient de Fourier de σ périodique. On a
  $$\| \phi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \| \sigma \|_{L^2(\Omega^*)}$$
  $$\hat{\phi} = (\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\sigma}(\gamma)e^{+2i\pi<\cdot|\gamma>})\hat{\varphi}_p = \sigma\hat{\varphi}_p \in L^2(\Omega^*)\hat{\varphi}_p$$
  $$\hat{\phi} = \sigma \int_\Omega \psi_p(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx$$
- La relation d'orthonormalisation ponctuelle $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\varphi}_p(\cdot+\gamma^*)\overline{\hat{\varphi}_q}(\cdot+\gamma^*) = \delta_{p,q}$ est une conséquence de l'isométrie
  $$\| \hat{\phi} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\sigma|^2|\hat{\varphi}_p|^2 = \int_{\Omega^*} |\sigma|^2\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\hat{\varphi}_p|^2(\cdot+\gamma^*) = \| \phi \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\Omega^*} |\sigma|^2$$
  valable pour tout $\sigma \in L^2(\Omega^*)$.
- La composante périodique qui définit $\phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\sigma}(\gamma)\varphi_p(\cdot+\gamma) \in V_p$ s'obtient par périodisation $\sigma(k) = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\phi}(k+\gamma^*)\overline{\hat{\varphi}_p}(k+\gamma^*)$.
  Plus généralement $\forall\phi \in L^2$ l'expression $k \mapsto \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\phi}(k+\gamma^*)\overline{\hat{\varphi}_p}(k+\gamma^*)$ donne la composante périodique du projeté $\Pi_p(\phi) \in V_p$.
- L'action de l'hamiltonien sur $\phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\sigma}(\gamma)\varphi_p(\cdot+\gamma) \in V_p$ s'écrit $H\phi = \int_{\Omega^*} E_p(k)\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\widehat{E_p\sigma}(\gamma)\varphi_p(\cdot+\gamma) \in V_p$. On a
  $$\| H\phi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \| E_p\sigma \|_{L^2(\Omega^*)} = \| E_p\hat{\phi} \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
  $$< H\phi|\phi >_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\Omega^*} E_p|\sigma|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} E_p|\hat{\phi}|^2 \geq \min E_p \| \phi \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$
  Plus généralement $\forall\phi \in L^2$ la majoration
  $$\| \Pi_p(\phi) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \| H\phi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} / \min E_p \leq C_N^{ste}(\Gamma) \| H\phi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} / p^{2/N}$$
  résulte de la proposition 2.4.

- Si $\phi \in V_p$ alors $H\phi \overset{pp}{=} \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\epsilon_p(\gamma)\phi(\cdot+\gamma) \in V_p$
  où $\epsilon_p(\gamma)$ est le γ^{ieme}coefficient de Fourier de E_p périodique.
  Noter qu'il s'agit d'une série de termes non orthogonaux a priori non L^2-convergente.

Preuve. On peut toujours choisir les ondes de Bloch pour que $\forall k \in \Omega^*$ les applications k-pseudo-périodiques $\psi_p(\cdot;k)$ forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.Lorsque la construction se fait avec dépendance k-mesurable (une telle construction est toujours possible d'après Wilcox 2.5) on a $\psi_p \in L^2(\Omega\times\Omega^*)$.

Première étape. Vérifions l'équivalence des écritures :

$$V_p = \overset{\perp}{\oplus}_{\gamma\in\Gamma}\ \varphi_p(\cdot-\gamma) = \{\int_{\Omega^*}\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk|\sigma\in L^2(\Omega^*)\}$$

Puisque le γ^{ieme}coefficient de Fourier de $\psi_p(x;\cdot)$ respectivement de $\psi_q(x;\cdot)e^{+2i\pi<\cdot|\gamma_0>}$ vaut $\varphi_p(x-\gamma)$ respectivement $\varphi_q(x-\gamma+\gamma_0)$ on obtient par la relation d'isométrie de Parseval :
$\int_\Omega \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)\overline{\varphi_q}(x-\gamma+\gamma_0)dx = \int_\Omega < \psi_p(x;\cdot)|\psi_q(x;\cdot)e^{+2i\pi<\cdot|\gamma_0>} >_{L^2(\Omega^*)}dx$
$= \int\int_{\Omega\times\Omega^*}\psi_p(x;k)\overline{\psi_q}(x;k)e^{-2i\pi<k|\gamma_0>}dxdk = \int_{\Omega^*} < \psi_p(\cdot;k)|\psi_q(\cdot;k) >_{L^2(\Omega)}e^{-2i\pi<k|\gamma_0>}dk$
est non nul si et seulement si $p=q$ et $\gamma_0=0$,
auquel cas $\int_\Omega\Sigma_{\gamma\in\Gamma}|\varphi_p(x-\gamma)|^2dx = \| \varphi_p \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$.
Ceci montre que la famille $\{\varphi_p(\cdot+\gamma)\,|\,p\in\mathbb{N}\gamma\in\Gamma\}\subset L^2(\mathbb{R}^N)$ est orthonormale.
Etant donné $\sigma\in L^2(\Omega^*)$ de coefficients de Fourier $\hat\sigma\in l^2(\Gamma)$, l'égalité $(\forall\phi\in V_p)$
$\phi \overset{L^2}{=} \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat\sigma(\gamma)\varphi_p(\cdot+\gamma) \overset{pp}{=} \int_{\Omega^*}\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk$
traduit une nouvelle fois la relation d'isométrie de Parseval .

Seconde étape. Vérifions la totalité :

$$L^2(\mathbb{R}^N) = \overset{\perp}{\oplus}_{p\in N}\ V_p$$

Si $\varphi\perp\oplus_{p\in N}V_p$ alors $\forall\phi = \int_{\Omega^*}\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk \in V_p$ on a
$< \varphi|\phi >_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\int_\Omega\varphi(x-\gamma)\overline{\phi}(x-\gamma)dx$
$= \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\int\int_{\Omega\times\Omega^*}\overline{\sigma}(k)\overline{\psi_p}(x;k)\varphi(x-\gamma)e^{+2i\pi<k|\gamma>}dxdk$
$= \lim_{\Gamma_f\to\Gamma} < \Sigma_{\gamma\in\Gamma_f}\varphi(x-\gamma)e^{+2i\pi<k|\gamma>}|\sigma(k)\psi_p(x;k) >_{L^2(\Omega\times\Omega^*)}$
$=< \varphi(x;k)|\sigma(k)\psi_p(x;k) >_{L^2(\Omega\times\Omega^*)} = < < \varphi(x;k)|\psi_p(x;k) >_{L^2(x\in\Omega)}|\sigma(k) >_{L^2(k\in\Omega^*)} = 0.$
En effet la série $\varphi(x;k) := \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi(x-\gamma)e^{+2i\pi<k|\gamma>}$ converge dans $L^2(\Omega\times\Omega^*)$
il suffit de remarquer que pour $\Gamma_f\subset\Gamma$ partie finie

$$\| \Sigma_{\gamma\in\Gamma_f}\varphi(x-\gamma)e^{+2i\pi<k|\gamma>} \|^2_{L^2(\Omega\times\Omega^*)} = \int_\Omega\left(\int_{\Omega^*}|\Sigma_{\gamma\in\Gamma_f}\varphi(x-\gamma)e^{+2i\pi<k|\gamma>}|^2dk\right)dx$$

$$= \int_\Omega\left(\Sigma_{\gamma\in\Gamma_f}|\varphi(x-\gamma)|^2\right)dx = \int_{\bigcup_{\gamma\in\Gamma_f}(\Omega-\gamma)}|\varphi|^2$$

Ainsi $< \varphi(x;k)|\psi_p(x;k) >_{L^2(x\in\Omega)}$ est nul presque partout en $k\in\Omega^*$, puis $\varphi(x;k)$ est nul presque partout en $k\in\Omega^*$ presque partout en $x\in\Omega$, car $\psi_p(\cdot;k), p\in\mathbb{N}$, est une base

hilbertienne de $L^2(\Omega)$. On en déduit

$$\| \varphi(x;k) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi(x-\gamma)e^{+2i\pi<k|\gamma>} \|_{L^2(\Omega\times\Omega^*)} = \| \varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$$

L'orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ de la somme $\overset{\perp}{\oplus}_{p\in N} V_p$ est nul, la somme est hilbertienne.

Troisième étape. Vérifions l'effet de la transformée de Fourier :

$$\forall\phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk \in V_p \qquad \hat{\phi} = \sigma\int_{\Omega}\psi_p(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx$$

Par dualité $<\phi|\varphi>_{S'\times S} = \int\int_{\mathbb{R}^N\times\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(x;k)\varphi(x)dxdk$

$= \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\int\int_{\Omega\times\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(x-\gamma;k)\varphi(x-\gamma)dxdk$

$= \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\int\int_{\Omega\times\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(x;k)\varphi(x-\gamma)e^{-2i\pi<k|\gamma>}dxdk$

$= \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\int\int_{\Omega\times\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(x;k)\mathcal{F}[\varphi(x-\cdot)](k+\gamma^*)dxdk$

$= \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\int\int_{\Omega\times\Omega^*} \sigma(k+\gamma^*)\psi_p(x;k+\gamma^*)\mathcal{F}^{-1}\varphi(k+\gamma^*)e^{-2i\pi<x|k+\gamma^*>}dxdk$

$= \int\int_{\Omega\times\mathbb{R}^N} \sigma(\xi)\psi_p(x;\xi)\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)e^{-2i\pi<x|\xi>}dxd\xi =< \sigma\int_{\Omega}\psi_p(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx|\check{\varphi}>_{S'\times S}$

où la formule sommatoire $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\mathcal{F}(T)(k+\gamma^*) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}T(\gamma)e^{-2i\pi<k|\gamma>}$ pour T régulier permet de passer d'un réseau à son dual.

C'est une justification du calcul direct

$\hat{\varphi_p}(\xi) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\int_{\Omega}\varphi_p(x-\gamma)e^{-2i\pi<x-\gamma|\xi>}dx = \int_{\Omega}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)e^{+2i\pi<\gamma|\xi>}e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$

$= \int_{\Omega}\psi_p(x;\xi)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$ valable si $\varphi_p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Quatrième étape. Vérifions l'action hamiltonienne :

$$\forall\phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk \in V_p \qquad H\phi \overset{pp}{=} \int_{\Omega^*} E_p(k)\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk$$

Par dualité $<H\phi|\varphi>_{D'\times D} = -\int_{\mathbb{R}^N}\phi\Delta\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} v\phi\varphi$

$= \int_{\Omega^*}\sigma(k)[\int_{\mathbb{R}^N}\psi_p(\cdot;k)(-\Delta\varphi+v\varphi)]dk = \int_{\Omega^*}\sigma(k)< H\psi_p(\cdot;k)|\varphi>_{D'\times D}dk$

$= <\int_{\Omega^*}E_p(k)\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk|\varphi>_{D'\times D}$ comme attendu.

Enfin mentionons $H\phi \overset{pp}{=} \int_{\Omega^*}E_p(k)\sigma(k)\psi_p(\cdot;k)dk =< \sigma(k)\psi_p(\cdot;k)|\overline{E_p}(k)>_{L^2(k\in\Omega^*)}$

$=< \sigma(k)\hat{\psi_p}(\cdot;k)|\overline{\hat{E_p(k)}}>_{l^2(\Gamma)} = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\phi(\cdot-\gamma)\epsilon_p(-\gamma) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\epsilon_p(\gamma)\phi(\cdot+\gamma)$

encore une fois par la relation d'isométrie de Parseval .

La convergence de la série presque partout convergente $\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\epsilon_p(\gamma)\phi(\cdot+\gamma)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ équivaut à la convergence de la série $\hat{\phi}\,\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\epsilon_p(\gamma)e^{+2i\pi<\cdot|\gamma>}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Pour E_p lipschitzien on sait peu de chose sur les coefficients de Fourier $\gamma\epsilon_p(\gamma) \in l^\infty(\Gamma)$ a fortiori sur les sommes partielles de la série de Fourier.

□

La régularité globale des fonctions de Wannier est précisée par :

Proposition 2.5 *On a* $\varphi_p \in H^2(\mathbb{R}^N)$ *et* $(1+|\cdot|^2)\hat{\varphi}_p \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Plus précisément $|\hat{\varphi}_p| \leq C_N^{ste}(\Gamma)\,(1+\| v \|_\infty)\, p^{2/N}/(1+|\cdot|^2)$.

Les périodisés

$$\begin{cases} \varpi_{\Gamma^*}\,|\hat{\varphi}_p|^2 = 1 \\ \varpi_{\Gamma^*}\,|\widehat{\nabla\varphi_p}|^2 \leq (\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty) \\ \varpi_{\Gamma^*}\,|\widehat{\Delta\varphi_p}|^2 \leq (\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty)^2 \end{cases}$$

sont bornés.

Preuve. Puisque $\varphi_p(x) = \int_{\Omega^*} \psi_p(x;k)dk$ on remarque que

$$\Sigma_{\gamma\in\Gamma}|(\nabla)\varphi_p(x+\gamma)|^2 = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}|\int_{\Omega^*}(\nabla_x)\psi_p(x;k)e^{-2i\pi<k|\gamma>}dk|^2 = \int_{\Omega^*}|(\nabla_x)\psi_p(x;k)|^2dk$$

$$\text{en particulier } \| (\nabla)\varphi_p \|_{L^2}^2 = \int\int_{\Omega\times\Omega^*}|(\nabla_x)\psi_p(x;k)|^2dxdk$$

Par définition de la valeur propre E_p on remarque aussi

$$\| \Delta\varphi_p \|_{L^2}^2 = \int\int_{\Omega\times\Omega^*}|\Delta_x\psi_p(x;k)|^2dxdk = \int\int_{\Omega\times\Omega^*}|E_p(k)-v(x)|^2|\psi_p(x;k)|^2dxdk$$

$$\leq (\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty)^2\int\int_{\Omega\times\Omega^*}|\psi_p(x;k)|^2dxdk = (\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty)^2$$

On en déduit $\| \varphi_p \|_{L^2}^2 + \| \Delta\varphi_p \|_{L^2}^2 \leq 1 + (\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty)^2$ et $\varphi_p \in H^2(\mathbb{R}^N)$.
Remarque : la régularité $\varphi_p \in H^2(\mathbb{R}^N)$ est un cas particulier de l'inclusion $D(H) \subset H^2(\mathbb{R}^N)$ plus générale.

La formulation intégrale de $\hat{\varphi}_p(\xi) = \int_\Omega \psi_p(x;\xi)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$ est tout à fait analogue à celle de $\varphi_p(x) = \int_{\Omega^*}\psi_p(x;k)dk$. Cependant elle ne supporte pas vraiment le même genre d'estimation :

$$\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla\hat{\varphi}_p(\xi+\gamma^*)|^2 = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\int_\Omega(\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi_p(x;\xi)e^{-2i\pi<x|\xi>}e^{-2i\pi<x|\gamma^*>}dx|^2$$

$$= \int_\Omega|(\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi_p(x;\xi)|^2dx \ (=\infty)$$

n'est généralement pas fini même en dimension $N=1$.

Avec la régularité additionnelle $\| \nabla_\xi\psi_p \|_{L^2(\Omega\times\Omega^*)}^2 < \infty$ on obtiendrait $\hat{\varphi}_p \in H^1$ mais en général ce n'est pas le cas.

Néanmoins

$$-\widehat{\Delta\varphi_p}(\xi) = -\int_\Omega \Delta\psi_p(x;\xi)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx = \int_\Omega(E_p(\xi)-v(x))\psi_p(x;\xi)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$$

implique

$$\| (1+4\pi^2|\cdot|^2)\hat{\varphi}_p \|_{L^\infty} \leq (1+\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty)\left(\int_\Omega|\psi_p(x;\xi)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega dx\right)^{1/2}$$

$$= C_\Omega^{ste}(1+\| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty)$$

et $\hat{\varphi}_p$ tend vers zéro à l'infini au moins en inverse de carré.

La proposition 2.4 montre comment la constante $1+\parallel E_p \parallel_\infty + \parallel v \parallel_\infty$ dépend de p asymptotiquement.

On peut améliorer la décroissance à l'infini obtenue en bornant les périodisés $\varpi_{\Gamma^*}|\widehat{\Delta\varphi_p}|^2$ et $\varpi_{\Gamma^*}|\widehat{\nabla\varphi_p}|^2$ en remarquant que

$$\parallel -\Delta\phi \parallel_{L^2} \leq \parallel H\phi \parallel_{L^2} + \parallel v\phi \parallel_{L^2} \leq (\parallel E_p \parallel_\infty + \parallel v \parallel_\infty) \parallel \phi \parallel_{L^2}$$

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\xi|^4|\sigma|^2(\xi)|\hat{\varphi}_p|^2(\xi)d\xi = \int_{\Omega^*} |\sigma|^2\varpi_{\Gamma^*}|\widehat{\Delta\varphi_p}|^2 \leq (\parallel E_p \parallel_\infty + \parallel v \parallel_\infty)^2 \int_{\Omega^*} |\sigma|^2$$

de même que

$$\parallel \nabla\phi \parallel_{L^2}^2 = < -\Delta\phi|\phi >_{L^2} \leq \parallel -\Delta\phi \parallel_{L^2} \parallel \phi \parallel_{L^2} \leq (\parallel E_p \parallel_\infty + \parallel v \parallel_\infty) \parallel \phi \parallel_{L^2}^2$$

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\xi|^2|\sigma|^2(\xi)|\hat{\varphi}_p|^2(\xi)d\xi = \int_{\Omega^*} |\sigma|^2\varpi_{\Gamma^*}|\widehat{\nabla\varphi_p}|^2 \leq (\parallel E_p \parallel_\infty + \parallel v \parallel_\infty) \int_{\Omega^*} |\sigma|^2$$

pour tout $\phi \in V_p$ c'est-à-dire pour tout $\sigma \in L^2_\#$.

□

Remarque. Plus généralement $|\hat{\varphi}_p| \leq C_\Omega^{ste}(v)p^{2/N}/(1+|\cdot|^{2+s})$ lorsque $v \in W^{s,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque. On peut mentioner les identités

$$\begin{cases} \parallel \varphi_p \parallel_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int\int_{\Omega\times\Omega^*} |\psi_p(x;k)|^2 dxdk = 1 \\ \parallel \nabla\varphi_p \parallel_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int\int_{\Omega\times\Omega^*} |\nabla_x\psi_p(x;k)|^2 dxdk \\ = < -\Delta\varphi_p|\varphi_p >_{L^2(\mathbb{R}^N)} = < (H-v)\varphi_p|\varphi_p >_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} E_p|\hat{\varphi}_p|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} v|\varphi_p|^2 \\ < H\varphi_p|\varphi_p >_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \parallel \nabla\varphi_p \parallel_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} v|\varphi_p|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} E_p|\hat{\varphi}_p|^2 \\ \parallel H\varphi_p \parallel_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} E_p^2|\hat{\varphi}_p|^2 \end{cases}$$

La décomposition de Bloch associée à l'opérateur $H^\varepsilon = -\varepsilon^2\Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ se déduit de la décomposition associée à $H = H^1$ par une simple dilatation car le problème spectral n'est pas modifié par le changement d'échelle $x \leftrightarrow \frac{x}{\varepsilon}$:

$$L^2(\mathbb{R}^N) = \overset{\perp}{\oplus}_{p\in\mathbb{N}} V_p^\varepsilon$$

$$\psi_p^\varepsilon(x;k) := \frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\psi_p(\frac{x}{\varepsilon};k) \qquad \varphi_p^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\varphi_p(\frac{x}{\varepsilon})$$

$$V_p^\varepsilon \overset{def}{=} \{\int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p^\varepsilon(\cdot;k)dk|\sigma \in L^2(\Omega^*)\} = \overset{\perp}{\oplus}_{\gamma\in\Gamma} \varphi_p^\varepsilon(\cdot - \varepsilon\gamma) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\Pi_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N)) : f \mapsto \Pi_p^\varepsilon(f) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma} < f|\varphi_p^\varepsilon(\cdot - \varepsilon\gamma) >_{L^2} \varphi_p^\varepsilon(\cdot - \varepsilon\gamma)$$

$$\phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p^\varepsilon(\cdot;k)dk \in V_p^\varepsilon,\ \phi = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\sigma}(\gamma)\varphi_p^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\gamma) \in V_p^\varepsilon,\ \hat{\phi}(\xi) = \sigma(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}_p^\varepsilon(\xi) \in \hat{V}_p^\varepsilon$$

sont des écritures équivalentes

$$\sigma(k) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma} e^{+2i\pi<k|\gamma>} < \phi|\varphi_p^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\gamma)>_{L^2} = \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\phi}(\frac{k}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})\overline{\hat{\varphi}_p^\varepsilon}(\frac{k}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})$$

$$\forall\phi = \int_{\Omega^*}\sigma(k)\psi_p^\varepsilon(\cdot;k)dk \in V_p^\varepsilon \qquad H^\varepsilon\phi = \int_{\Omega^*} E_p(k)\sigma(k)\psi_p^\varepsilon(\cdot;k)dk = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\epsilon_p(\gamma)\phi(\cdot+\varepsilon\gamma) \in V_p^\varepsilon$$

$$H^\varepsilon : V_p^\varepsilon \subset D(H^\varepsilon) \to V_p^\varepsilon \text{ est l'opérateur } E_p(\varepsilon D) \text{ au sens où } \phi\in V_p^\varepsilon \Rightarrow \widehat{H^\varepsilon\phi} = E_p(\varepsilon\cdot)\hat{\phi}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\varphi}_p^\varepsilon(\frac{k}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})\overline{\hat{\varphi}_q^\varepsilon}(\frac{k}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon}) = \delta_{p,q} \text{ orthonormalité ponctuelle}$$

Comme application de la réduction de l'hamiltonien périodique citons le résultat de P.Gérard-P.A.Markovitch-N.Mauser-F.Poupaud [GMMP] :

Théorème 2.7 *On suppose que la famille $u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bornée possède une mesure de Wigner $w_I^0 = w_s^0[u_I^\varepsilon]$ unique et concentrée dans $\mathbb{R}^N \times G_\delta$ où $G_\delta = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}^N - F_p)$ est un domaine de non-croisement des différentes bandes.*

Lorsque $[u_I^\varepsilon]$ est ε-oscillante ∞-compacte, localement uniformément en temps,

$$\begin{cases} w_s^\varepsilon = w_s^\varepsilon(u^\varepsilon(t);u^\varepsilon(t)) \to w_s^0 = \Sigma_{p\in\mathbb{N}} w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u_I^\varepsilon](x - t\nabla E_p(k);k) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_k^N) \\ |u^\varepsilon|^2 \rightharpoonup \int_{\Omega^*} w_s^0 dk = \Sigma_{p\in\mathbb{N}}\int_{\Omega^*} w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u_I^\varepsilon](x - t\nabla E_p(k);dk) \text{ dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}_x^N) \\ \| u^\varepsilon \|_2^2 \to \Sigma_{p\in\mathbb{N}} w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u_I^\varepsilon](\mathbb{R}^N \times \Omega^*) \end{cases}$$

où $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t)$ est la solution de l'équation de Schrödinger périodique $i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon = H^\varepsilon u^\varepsilon$ valant initialement u_I^ε.

Remarques sur l'asymptotique spectrale du laplacien.

On sait que $-\Delta_k$ est diagonalisé par les exponentielles $(e^{+2i\pi<\cdot|k+\gamma^*>})_{\gamma^*\in\Gamma^*}$ de valeurs propres-spectrales $(4\pi^2|k+\gamma^*|^2)_{\gamma^*\in\Gamma^*}$ positives. Bien sûr pour certaines valeurs de $k\in\mathbb{R}^N$ l'équation $|k+\gamma^*|^2 = |k+\mu^*|^2$ admet une solution $(\gamma^*;\mu^*)\in\Gamma^*\times\Gamma^*$ non triviale $\gamma^*\neq\mu^*$ et la valeur propre-spectrale $4\pi^2|k+\gamma^*|^2 = 4\pi^2|k+\mu^*|^2$ est alors au moins double. Sans restriction (de généricité) sur le réseau, les multiplicités possibles ne sont pas majorées. En dimension $N=2$ pour une valeur propre-spectrale $4\pi^2|k+\gamma^*|^2 \in \sigma(-\Delta_k)$ donnée, la discussion de l'équation

$$\exists\mu^*\in\Gamma^* \ \ |k+\gamma^*|^2 = |k+\mu^*|^2 \Leftrightarrow \exists\mu^*\in\Gamma^* \ \ \mu^* \perp \mu^* + 2(k+\gamma^*)$$

aboutit aux notions de zones de Brillouin planes et droites de Bragg [YCV].

Soit $(E_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des niveaux pour le laplacien $-\Delta$ qu'on voit comme un hamiltonien avec la périodicité Γ^*.

Tant que la borne $N\in\mathbb{N}$ est fixée

$$\{k\in\mathbb{R}^2 | E_n^0(k)\in\sigma(H_k) \text{ est simple pour tout } 0\le n\le N\}$$

est un ouvert périodique dont la frontière est formée de segments de droites. En dessinant cet ensemble on se convainc rapidement de la (très) grande complexité des croisements

entre niveaux lorsque N augmente. Ainsi même dans le cas en principe simple où $v = 0$ l'ensemble exceptionnel de C.H.Wilcox 2.5 n'est pas trivial :

$$\{k \in \mathbb{R}^2 | E_n^0(k) \in \sigma(H_k) \text{ est simple pour tout } n \geq 0\}$$

est un $F_\sigma \subset \mathbb{R}^2$ périodique très petit.

Sans entrer dans les détails signalons l'exemple $\Gamma = \Gamma^* = \mathbb{Z}^2$ où $F_\sigma \subset \mathbb{R}^2$ ne contient aucun point $k = (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées rationnellement dépendantes (en particulier F_σ est d'intérieur vide). En effet si $k_1/k_2 \in \mathbb{Q}$ alors

$$\exists (p_1; p_2) \neq (q_1; q_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid (k_1; k_2) + (p_1; p_2)|^2 = |(k_1; k_2) + (q_1; q_2)|^2$$

explicitement $p_1 = \dfrac{-a+b}{2}$, $p_2 = \dfrac{-a-b}{2}$, $q_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $q_2 = \dfrac{-a+b}{2}$,

convient si par définition $(a; b) \in (2\mathbb{Z})^2$ sont tels que $k_1/k_2 = -b/a$.

Typiquement l'hypothèse de concentration loin de TOUT croisement formulée pour la mesure de Wigner initiale formulée dans [GMMP]

$(B3)$ $\quad \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N - A)$ is a nullset of the limiting initial Wigner series measure

est une vraie restriction au sens où $\mathbb{R}^N - A$ est d'intérieur vide.

En général l'analyse de Bloch du laplacien pour une périodicité Γ^* artificiellement fixée donne lieu à des problèmes de théorie des nombres (arithmétique des réseaux).

Ainsi la fonction arithmétique $N_r(k) = \#\{\gamma^* \in \Gamma^* \mid |k - \gamma^*| < r\}$ exprime le nombre de valeurs propres-spectrales $\in \sigma(-\Delta_k)$ strictement inférieures à $4\pi^2 r^2$ (c'est la répartition spectrale de $-\Delta_k$) elle satisfait par construction

$$\forall n \geq 1,\ N_r(k) \geq n \Leftrightarrow E_n^0(k) < 4\pi^2 r^2$$

étant entendu que le décompte des valeurs se fait traditionnellement en répétant selon la multiplicité (voir par exemple la définition du niveau E_n).

Proposition 2.6 (Asymptotique spectrale du laplacien)

$N_r(k) \sim \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^N$ lorsque $r \to \infty$ uniformément en $k \in \mathbb{R}^N$

$E_p(k) \sim 4\pi^2 (\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} p^{2/N}$ lorsque $p \to \infty$ uniformément en $k \in \mathbb{R}^N$

où $|B|$ désigne le volume de la boule unité euclidienne.

Preuve. Si d majore le diamètre (rayon) de la cellule unité Ω^* alors l'inclusion pour la boule $B(k; r)$ ouverte de centre k et rayon r

$$\bigcup_{|\gamma^* - k| < r - d} (\gamma^* + \overline{\Omega^*}) \subset B(k; r) \subset \bigcup_{|\gamma^* - k| < r + d} (\gamma^* + \overline{\Omega^*})$$

s'écrit en volume $\frac{|B|}{|\Omega^*|} r^N (1 - d/r)^N \leq N_r(k) \leq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^N (1 + d/r)^N$.

Sachant $N_R(k) \geq n \Leftrightarrow E_n^0(k) < 4\pi^2 R^2$ et $N_r(k) < n \Leftrightarrow E_n^0(k) \geq 4\pi^2 r^2$ on en déduit

$$\begin{cases} \frac{|B|}{|\Omega^*|} R^N (1 - d/R)^N \geq n \Rightarrow E_n^0(k) < 4\pi^2 R^2 \\ \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^N (1 + d/r)^N < n \Rightarrow E_n^0(k) \geq 4\pi^2 r^2 \end{cases}$$

d'où l'équivalent recherché $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\varepsilon$

$$4\pi^2(\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} n^{2/N}(1-\varepsilon) \leq E_n(k) \leq (1+\varepsilon)4\pi^2(\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} n^{2/N}$$

□

Préciser l'équivalent 2.6 est un problème d'arithmétique des réseaux. B.Dahlberg et E.Trubovitz ont proposé [DT] en dimension $N = 2$ les bornes

$$\begin{cases} \sup N_r \geq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^2 + C^{ste}(\Gamma) r^{1/2} \\ \inf N_r \leq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^2 - C^{ste}(\Gamma) r^{1/2} \end{cases}$$

en particulier $[\frac{|B|}{|\Omega^*|} n - C^{ste}(\Gamma) n^{1/4}; \frac{|B|}{|\Omega^*|} n + C^{ste}(\Gamma) n^{1/4}] \subset [\inf E_n; \sup E_n] \qquad \forall n \geq N(v)$ et les niveaux se chevauchent à partir d'un certain rang $\sup E_n > \inf E_{n+1} \qquad \forall n \geq N(v)$ c'est ainsi que peut se prouver la finitude des lacunes.

Leur preuve en toute dimension N donne un exposant $\sigma = \frac{N-1}{2}$ probablement non optimal tel que

$$\begin{cases} \sup N_r \geq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^N + C_N^{ste}(\Gamma) r^\sigma \\ \inf N_r \leq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^N - C_N^{ste}(\Gamma) r^\sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \inf E_p \leq 4\pi^2(\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} p^{2/N} \left[1 + \frac{\|v\|_\infty}{p^{2/N}} - \frac{C_N^{ste}(\Gamma)}{p^{1-\sigma/N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^{1+1/N}}\right)\right] \\ \sup E_p \geq 4\pi^2(\frac{|\Omega^*|}{|B|})^{2/N} p^{2/N} \left[1 - \frac{\|v\|_\infty}{p^{2/N}} + \frac{C_N^{ste}(\Gamma)}{p^{1-\sigma/N}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^{1+1/N}}\right)\right] \end{cases} \tag{1}$$

Cette information ne suffit pas à impliquer le chevauchement des niveaux lorsque $N \geq 4$. Néanmoins pour la dimension $N = 3$ et les potentiels $\| v \|_\infty < C_N^{ste}(\Gamma)$ petits ($N = 3 \Rightarrow 2/N = 1 - \sigma/N$) les inégalités (1) prouvent le chevauchement des niveaux à partir d'un certain rang.

Skriganov ([SKRI] lemma 2.2) a démontré à partir des inégalités (1) la conjecture de Bethe-Sommerfeld des années trente concernant la finitude du nombre de lacunes sans restriction sur la norme $\| v \|_\infty$. Voir aussi à ce sujet [KARP].

Bien plus ([SKRI] theorem 2.1) la multiplicité du recouvrement par les niveaux tend vers l'infini

$$\#\{p \in \mathbb{N} \,|\, E \in [\inf E_p; \sup E_p]\} \geq C_N^{ste}(\Gamma)\sqrt{E} \qquad \forall E \geq E(v)$$

Remarque. On ne peut rien en déduire concernant la multiplicité de $E_p(k) \in \sigma(H_k)$ à k fixé lorsque $p \to \infty$.

Remarque. En dimension $N = 3$ il serait intéressant de déterminer $C_\Gamma^{ste}(\omega) > 0$

$$\begin{cases} \sup_\omega N_r \geq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^3 + C_\Gamma^{ste}(\omega) r \\ \inf_\omega N_r \leq \frac{|B|}{|\Omega^*|} r^3 - C_\Gamma^{ste}(\omega) r \end{cases}$$

pour tout (petit) ouvert ω il en résulterait la multiplicité du point de vue local

$$\#\{p \in \mathbb{N} \,|\, E \in E_p(\overline{\omega})\} \geq C_\Gamma^{ste}(\omega)\sqrt{E} \qquad \forall E \geq E(v;\omega).$$

2.3 Analyse du potentiel lentement variable.

Résumé. Cette partie est consacrée à l'étude des commutations approchées du potentiel extérieur avec les projecteurs de Floquet. Les propositions 2.7 à 2.9 traitent la situation favorable du niveau isolé au moyen d'une borne exponentielle (lemme 2.1) connue. Les propositions 2.11 à 2.16 abordent le cas des niveaux quelconques. Le théorème 2.8 prouve la nécessité de demeurer loin des croisements. Les propositions 2.17 à 2.20 se détachent du reste en ce qu'elles exploitent des convergences faibles. A l'exception de la proposition 2.7 tous ces résultats sont nouveaux.

La perturbation de l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2\Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ par un potentiel (extérieur) $V = V(x)$ lentement variable détruit l'invariance des sous-espaces de Floquet $V_p^\varepsilon \subset L^2$ a priori

$$\exists \phi = \int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p^\varepsilon(\cdot;k)dk \in V_p^\varepsilon \text{ tel que } V\phi = V(\cdot)\int_{\Omega^*} \sigma(k)\psi_p^\varepsilon(\cdot;k)dk \notin V_p^\varepsilon$$

Ce défaut d'invariance est controlé lorsque $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ par une borne d'opérateurs sur le commutateur $\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ pourvu que $p \in \mathbb{N}$ indexe un niveau E_p isolé simple. C'est le théorème 2.7 essentiellement dû à F.Poupaud-C.Ringofer [PR] . Pour être précis concernant l'hypothèse d'isolation définissons :

Definition 2.5 *Le niveau E_p est dit isolé lorsque $\forall k \in \mathbb{R}^N$ $E_{p-1}(k) < E_p(k) < E_{p+1}(k)$ en d'autres termes lorsque $\forall k \in \mathbb{R}^N$ $E_p(k) \in \sigma(H_k)$ est valeur propre simple de l'hamiltonien H_k.*

Remarque. Il suffit pour cela que le niveau E_p soit séparé des autres par une lacune $\sup E_{p-1} < \inf E_p < \sup E_p < \inf E_{p+1}$ mais en dimension $N \geq 2$ cette dernière condition est bien plus forte.

Soit $K_p^\varepsilon(x;y)$ le noyau du projecteur orthogonal $\Pi_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ sur $V_p^\varepsilon \subset L^2$

$$K_p^\varepsilon(x;y) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p^\varepsilon(x-\varepsilon\gamma)\overline{\varphi_p^\varepsilon}(y-\varepsilon\gamma) = \int_{\Omega^*} \psi_p^\varepsilon(x;k)\overline{\psi_p^\varepsilon}(y;k)dk = \frac{1}{\varepsilon^N}K_p^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{y}{\varepsilon}) \qquad (2)$$

où $K_p^1(x;y) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)\overline{\varphi_p}(y-\gamma) = \displaystyle\int_{\Omega^*} \psi_p(x;k)\overline{\psi_p}(y;k)dk$
est autoadjoint $\overline{K_p^1}(y;x) = K_p^1(x;y)$ périodique $K_p^1(x+\gamma;y+\gamma) = K_p^1(x;y)\,\forall\gamma\in\Gamma$
(en d'autres termes $\Pi_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ commute avec les translations selon $\varepsilon\Gamma$)
à décroissance exponentielle $|K_p^1(x;y)| \leq A_{(p)}\exp(-B_{(p)}|x-y|)$
lorsque le niveau E_p est isolé simple d'après le :

Lemme 2.1 $|K_p^1(x;y)| = |\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)\overline{\varphi_p}(y-\gamma)| \leq A\exp(-B|x-y|)$

Preuve. Pour un niveau isolé simple on pourrait choisir l'onde de Bloch $\psi_p(\cdot;k) \in H^2(\Omega)$ analytique en k. Ce faisant il n'est pas clair que la Γ^*-périodicité puisse être réalisée en même temps que l'analycité lorsque la dimension $N \geq 2$ est quelconque. C'est pourquoi

on préférera définir l'onde de Bloch $\psi_p(\cdot;k) \in H^2(\Omega)$ comme la Γ^*-périodisation d'une détermination analytique dans la cellule Ω^*, pour remarquer ensuite que la quantité à l'évidence Γ^*-périodique $k \mapsto \psi_p(x;k)\overline{\psi_p}(y;k)$ est automatiquement analytique partout (que ψ_p le soit de fait ou pas) car il s'agit du noyau du projecteur propre de H_k associé à la valeur propre simple $E_p(k) \in \sigma(H_k)$.

L'analycité du projecteur propre associé à une valeur propre simple pour un opérateur dépendant analytiquement d'un ou plusieurs paramètres complexes est élémentaire en théorie de la perturbation [K]. Il suffit d'écrire le projecteur comme circulation de la résolvante sur un contour adéquat enlacant la valeur propre une fois directement

$$k \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\lambda - H_k)^{-1} d\lambda$$

Notant $x' = x - \gamma_x \in \Omega$ et $y' = y - \gamma_y \in \Omega$ des représentants de $x \in \mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^N$ modulo $\gamma_x \in \Gamma$ et $\gamma_y \in \Gamma$ on a

$$|\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)\overline{\varphi_p}(y-\gamma) = \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x'+\gamma_x-\gamma)\overline{\varphi_p}(y'+\gamma_y-\gamma)|$$

$$= | < \psi_p(x'+\gamma_x;k)|\psi_p(y'+\gamma_y;k) >_{L^2(k)} | = |\int_{\Omega^*} \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk|$$

car $\varphi_p(x'+\gamma_x-\gamma)$ est le γ^{ieme}coefficient de Fourier de $k \mapsto \psi_p(x'+\gamma_x;k)$ tandis que $\varphi_p(y'+\gamma_y-\gamma)$ est le γ^{ieme}coefficient de Fourier de $k \mapsto \psi_p(y'+\gamma_y;k)$.

Or par analycité et périodicité de $k \mapsto \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)$ la formule de Cauchy au voisinage de Ω^* donne

$$\int_{\Omega^*} \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk = \int_{\Omega^*} \psi_p(x';k+i\eta)\overline{\psi_p}(y';k+i\eta)e^{-2i\pi(k+i\eta)(\gamma_y-\gamma_x)}dk \quad (3)$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^N$ petit $|\eta| < r$ où $D = \{k+i\eta \in \mathbb{C}^N \mid k;\eta \in \mathbb{R}^N \ \ |\eta| < r\} \subset \mathbb{C}^N$ est un domaine d'analycité.

Donc $\left|\int_{\Omega^*} \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk\right| \leq \| \psi_p(x';\cdot)\overline{\psi_p}(y';\cdot) \|_{L^\infty(D)} \ e^{+2\pi\eta(\gamma_y-\gamma_x)}$

puis $\left|\int_{\Omega^*} \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk\right| \leq \| \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k) \|_{L^\infty(x';y';k\in D)} \ e^{-2\pi r|\gamma_y-\gamma_x|}$.

On en déduit $|\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)\overline{\varphi_p}(y-\gamma)| \leq e^{-2\pi r|x-y|}e^{+2\pi r\mathrm{diam}(\Omega^*)} \| \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k) \|_{L^\infty}$, c'est le résultat escompté.

Une alternative à la formule de Cauchy (3) sur un voisinage de $\mathbb{R}^N$ pour l'application analytique $f : k \mapsto \psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)$ consiste à intégrer l'identité

$$i\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left(f(k+i\eta)e^{-2i\pi(k+i\eta)\gamma}\right) = -\frac{\partial}{\partial k_j}\left(f(k+i\eta)e^{-2i\pi(k+i\eta)\gamma}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(k+i\eta)e^{-2i\pi(k+i\eta)\gamma}$$

dans laquelle le terme de Cauchy-Riemman $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - i\dfrac{\partial f}{\partial y_j} = 0$ est nul, d'où l'indépendance par rapport à η à savoir $\dfrac{\partial}{\partial\eta_j}\displaystyle\int_{\Omega^*} f(k+i\eta)e^{-2i\pi(k+i\eta)\gamma}dk = 0 \qquad (1 \leq j \leq N)$.

□

Proposition 2.7 *Pour $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ le commutateur $c_p^\varepsilon = i\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ de noyau $c_p^\varepsilon(x;y) = iK_p^\varepsilon(x;y)\dfrac{V(y)-V(x)}{\varepsilon}$ est autoadjoint de norme*

$$\| c_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| c_p^\varepsilon \|_{L^\infty(y\to L^1_x)\cap L^\infty(x\to L^1_y)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{y\in\mathbb{R}^N} |K_p^1(x;y)| \left| \frac{V(\varepsilon y)-V(\varepsilon x)}{\varepsilon} \right| dy$$

$$\leq \| \nabla V \|_\infty \int A| \cdot |\exp(-B|\cdot|)$$

Preuve. On utilise le contrôle de la norme uniforme $\mathcal{L}(L^2)$ de l'opérateur de noyau $K(x;y)$ par la quantité $\| K \|^{1/2}_{L^\infty(y\to L^1_x)} \| K \|^{1/2}_{L^\infty(x\to L^1_y)}$ fonction du noyau. Dans le cas symétrique cette borne se réduit à la seule norme $\| K \|_{L^\infty(x\to L^1_y)}$.

□

Remarque. De même le commutateur $i\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; a^W(x;\varepsilon D)]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ où $a \in P$, est un test régulier périodique de noyau

$$(x;y) \mapsto i\Sigma_{\gamma\in\Gamma} K_p^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma;y) \int_{\Omega^*} \frac{a(y-\varepsilon\gamma/2;k)-a(x+\varepsilon\gamma/2;k)}{\varepsilon} e^{-2i\pi k\gamma} dk$$

$$= i\Sigma_{\gamma\in\Gamma} K_p^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma;y)\left(\frac{y-x}{\varepsilon}-\gamma\right) \int_{\Omega^*}\int_0^1 \nabla_x a(x+\varepsilon\gamma/2+ty-tx-t\varepsilon\gamma;k) e^{-2i\pi k\gamma} dt dk$$

est autoadjoint de norme $\| i\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; a^W(x;\varepsilon D)]}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)}$

$$\leq \int A| \cdot |\exp(-B|\cdot|) \Sigma_{\gamma\in\Gamma} \sup_{x;y\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{\Omega^*}\int_0^1 \nabla_x a(x+\varepsilon\gamma/2+ty;k) e^{-2i\pi k\gamma} dt dk \right|$$

$$\leq C_\Gamma^{ste}(a) \int A| \cdot |\exp(-B|\cdot|)$$

Sachant que $[\Pi_p^\varepsilon; V] \in \mathcal{L}(L^2)$ est d'ordre au plus $\frac{1}{\varepsilon}$ une approximation supérieure $\frac{1}{\varepsilon^2}$ est-elle plausible ? Non, c'est la proposition 2.8. La nature des singularités présentes dans $[\Pi_p^\varepsilon; V] \in \mathcal{L}(L^2)$ y est précisée au moyen de structures sur $\mathcal{L}(L^2)$ plus faibles que la convergence uniforme.

On identifie les opérateurs et leurs noyaux.

Proposition 2.8 *Lorsque$V \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ [1] l'asymptotique du commutateur c_p^ε peut prendre diverses formes :*

- *Pour la norme d'opérateurs :*
  $c_p^\varepsilon(x;y) - iK_p^\varepsilon(x;y)\dfrac{y-x}{\varepsilon}\nabla V(x) \to 0$ *au sens de* $\mathcal{L}_{uniform}(L^2)$

[1] ∇V uniformément continu borné suffit.

- *Pour la convergence simple d'opérateurs :*
  $c_p^\varepsilon - ia_p(\frac{\cdot}{\varepsilon})\nabla V \to 0$ *au sens de* $\mathcal{L}_{strong}(L^2)$
  où $ia_p(\frac{\cdot}{\varepsilon})\nabla V \in \mathcal{L}(L^2)$ *est un opérateur de multiplication*
  avec $a_p : x \mapsto \int K_p^1(x; x+y)ydy = \int\int_{\mathbb{R}^N\times\Omega^*} \psi_p(x;k)(y-x)\overline{\psi_p}(y;k)dydk$
  fonction périodique bornée, $\| a_p \|_\infty \leq \int A| \cdot |\exp(-B|\cdot|)$,
  de moyenne $< ia_p >= 2\ Im\ (\int x\varphi_p)(\overline{\int \varphi_p}) = i\int\int \varphi_p(x)(y-x)\overline{\varphi_p}(y)dxdy \in \mathbb{R}^N$.

- *Pour la convergence faible d'opérateurs :*
  $c_p^\varepsilon \to < ia_p > \nabla V$ *au sens de* $\mathcal{L}_{weak}(L^2)$
  où $< ia_p > \nabla V \in \mathcal{L}(L^2)$ *est un opérateur de multiplication.*

Preuve. Le changement de variable trivial

$$\frac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon}u : x \mapsto \int K_p^\varepsilon(x;y)\frac{V(y)-V(x)}{\varepsilon}u(y)dy = \int K_p^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+y)\frac{V(x+\varepsilon y)-V(x)}{\varepsilon}u(x+\varepsilon y)dy$$

donne l'idée du terme principal. On a

$$\frac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon}u(x) - \int K_p^\varepsilon(x;y)\frac{y-x}{\varepsilon}\nabla V(x)u(y)dy = \int n_\varepsilon(x;y)u(y)dy$$

avec $n_\varepsilon(x;y) = K_p^\varepsilon(x;y)\dfrac{V(y)-V(x)-(y-x)\nabla V(x)}{\varepsilon}$ par définition. Or

$$\| n_\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| n_\varepsilon \|_{L^\infty(y\to L_x^1)\cap L^\infty(x\to L_y^1)}$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{y\in\mathbb{R}^N} |K_p^1(x;y)|\left|\frac{V(\varepsilon y)-V(\varepsilon x)}{\varepsilon} - (y-x)\nabla V(x)\right| dy \leq \varepsilon \| \nabla^2 V \|_\infty \int A|\cdot|^2\exp(-B|\cdot|)$$

Ainsi $c_p^\varepsilon(x;y) \approx iK_p^\varepsilon(x;y)\dfrac{y-x}{\varepsilon}\nabla V(x)$ dans $\mathcal{L}_{uniform}(L^2)$.

Passons à l'approximation au sens de $\mathcal{L}_{strong}(L^2)$.
Lorsque u est fixé dans $H^1 \subset L^2$ par exemple,

$$\left|\int K_p^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+y)y.\nabla V(x)\left(u(x+\varepsilon y)-u(x)\right)dy\right|$$

$$= \left|\varepsilon\int K_p^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+y)y.\nabla V(x)y.\int_0^1 \nabla u(x+\varepsilon ty)dtdy\right|$$

$$\leq \varepsilon \| \nabla V \|_\infty \int A|y|^2\exp(-B|y|)\int_0^1 |\nabla u|(x+\varepsilon ty)dtdy$$

d'où

$$\| \int K_p^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+y)y.\nabla V(x)u(x+\varepsilon y)dy - a_p(\frac{x}{\varepsilon}).\nabla V(x)u(x) \|_{L^2(x)}$$

$$\leq \varepsilon \| \nabla V \|_\infty \| \nabla u \|_{L^2} \int A|\cdot|^2\exp(-B|\cdot|)$$

et $\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon}u - ua_p(\frac{\cdot}{\varepsilon})\nabla V \xrightarrow{L^2} 0 \qquad \forall u \in H^1$.

Cette convergence se généralise à tout $u \in L^2$ par densité de $H^1 \subset L^2$ et par la borne d'opérateurs sur $\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ donnée par le théorème 2.7.

Ainsi $c_p^\varepsilon(x;y) \approx ia_p(\dfrac{\cdot}{\varepsilon})\nabla V$ dans $\mathcal{L}_{strong}(L^2)$.

Finissons par l'approximation au sens de $\mathcal{L}_{weak}(L^2)$.
Lorsque $f \in L^1$ est fixé, classiquement $\int ia_p(\frac{\cdot}{\varepsilon})f \to < ia_p > \int f$,
en désignant par $<>$ la moyenne des applications périodiques,
ici $c_p^\varepsilon \approx < ia_p > \nabla V$ dans $\mathcal{L}_{weak}(L^2)$.
□

Remarque. Au moins au sens de la convergence simple le commutateur se comporte comme une multiplication de norme $\| ia_p(\frac{\cdot}{\varepsilon})\nabla V \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to \| a_p \|_\infty \| \nabla V \|_\infty > 0$ (lorsque a_p n'est pas identiquement nul). On s'attend intuitivement à ce que $\| \frac{[\Pi_p^\varepsilon;V]}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \not\to 0$ en particulier $\frac{[\Pi_p^\varepsilon;V]}{\varepsilon^2} \in \mathcal{L}(L^2)$ est (grossièrement) non borné. Effectivement

$$\text{liminf}_{\varepsilon\to 0} \| \frac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \geq \sqrt{< |a_p|^2 >} \| \nabla V \|_\infty > 0 \qquad \text{car}$$

$$\frac{\| \frac{[\Pi_p^\varepsilon;V]}{\varepsilon} u \|_{L^2}^2}{\| u \|_{L^2}^2} \to \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\| a_p(\frac{\cdot}{\varepsilon})\nabla V u \|_{L^2}^2}{\| u \|_{L^2}^2} = < |a_p|^2 > \frac{\| \nabla V u \|_{L^2}^2}{\| u \|_{L^2}^2} \qquad \forall u \in L^2$$

On s'intéresse maintenant aux commutations approchées (lorsque $\varepsilon \to 0$) dans $\mathcal{L}(L^2)$ du commutateur c_p^ε lui-même avec des opérateurs de multiplication (potentiels bornés) et avec des dérivations périodiques (condensé pour multiplicateurs de Fourier de symboles Γ^*-périodiques) et avec des mélanges de ces deux cas.

Proposition 2.9 *Pour $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et ∇V uniformément continu,*
le commutateur c_p^ε commute à peu près $\| [c_p^\varepsilon; \phi] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$ avec les multiplications $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^N)$ uniformément continues et commute à peu près $\| [c_p^\varepsilon; E(\varepsilon D)] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$ avec les dérivations périodiques E continues.
Plus généralement c_p^ε commute à peu près avec tout opd $a^W(x;\varepsilon D)$ périodique (régulier au sens $a \in P$).

Remarque. Fondamentalement c_p^ε commute à peu près avec les translations selon $\varepsilon\Gamma$ puisque

$$\| [c_p^\varepsilon; \tau_{\varepsilon\gamma}] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq |\gamma| \exp(B|\gamma|) \int_{\mathbb{R}^N} A\exp(-B|x|) \| \nabla V(\cdot + \varepsilon x) - \nabla V(\cdot) \|_\infty \, dx (\to 0)$$

noter que la translation $\tau_{\varepsilon\gamma} = e^{2i\pi\varepsilon\gamma D}$ est une dérivation périodique.

Preuve. Les noyaux des opérateurs autoadjoints $i[c_p^\varepsilon; \tau_{\varepsilon\gamma}]$ respectivement $i[c_p^\varepsilon; E(\varepsilon D)]$, respectivement $i[c_p^\varepsilon; \phi]$, valent explicitement

$$\frac{V(x) + V(y) - V(x + \varepsilon\gamma) - V(y - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon} K_p^\varepsilon(x + \varepsilon\gamma; y)$$

$$= \gamma K_p^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma;y)\int_0^1[\nabla V(y-t\varepsilon\gamma)-\nabla V(x+t\varepsilon\gamma)]dt$$

$$\text{respectivement } \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{E}(\gamma)\frac{V(x)+V(y)-V(x+\varepsilon\gamma)-V(y-\varepsilon\gamma)}{\varepsilon}K_p^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma;y)$$

$$= \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\gamma\hat{E}(\gamma)K_p^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma;y)\int_0^1[\nabla V(y-t\varepsilon\gamma)-\nabla V(x+t\varepsilon\gamma)]dt$$

$$\text{respectivement } -\frac{1}{\varepsilon}K_p^\varepsilon(x;y)[V(y)-V(x)][\phi(y)-\phi(x)]$$

On en déduit aisément les bornes suivantes

$$\| [c_p^\varepsilon;\phi] \|_{\mathcal{L}(L^2)}\leq \| \nabla V \|_\infty \int_{\mathbb{R}^N}|x|A\exp(-B|x|) \| \phi(\cdot+\varepsilon x)-\phi(\cdot) \|_\infty dx(\to 0)$$

$$\| [c_p^\varepsilon;E(\varepsilon D)] \|_{\mathcal{L}(L^2)}\leq \Sigma_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{\nabla E}|(\gamma)\int_{-1}^{+1}\int_{\mathbb{R}^N}A\exp(-B|x|) \| \nabla V(\cdot+\varepsilon x+\varepsilon t\gamma)-\nabla V(\cdot) \|_\infty dxdt(\to 0)$$

$$\| [c_p^\varepsilon;\tau_{\varepsilon\gamma}] \|_{\mathcal{L}(L^2)}\leq |\gamma|\exp(B|\gamma|)\int_{\mathbb{R}^N}A\exp(-B|x|) \| \nabla V(\cdot+\varepsilon x)-\nabla V(\cdot) \|_\infty dx(\to 0)$$

Lorsque la dérivation périodique E n'a pas ses coefficients de Fourier sommables il suffit de l'approcher uniformément par des polynômes trigonométriques par exemple. Sachant que $c_p^\varepsilon\in\mathcal{L}(L^2)$ est borné, les commutateurs avec c_p^ε de ces dérivations périodiques ultrarégulières approchent $[c_p^\varepsilon;E(\varepsilon D)]$ au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ d'où la conclusion $\| [c_p^\varepsilon;E(\varepsilon D)] \|_{\mathcal{L}(L^2)}\to 0$ lorsque E est seulement périodique continu.

De même le noyau $n_\varepsilon(x;y)$ de l'opérateur autoadjoint $i[c_p^\varepsilon;a^W(x;\varepsilon D)]$ vaut

$$n_\varepsilon(x;y)=\Sigma_{\gamma\in\Gamma}K_p^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma;y)\{\frac{V(y)-V(x+\varepsilon\gamma)}{\varepsilon}\int_{\Omega^*}a(x+\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\gamma}dk$$

$$-\frac{V(y-\varepsilon\gamma)-V(x)}{\varepsilon}\int_{\Omega^*}a(y-\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\gamma}dk\}$$

Dans ce calcul on se sert de la formule donnant l'action d'un opd périodique ($\forall f\in S$)

$$a^W(x;\varepsilon D)f=\Sigma_{\gamma\in\Gamma}f(x+\varepsilon\gamma)\int_{\Omega^*}a(x+\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\gamma}dk$$

Ainsi

$$\| n_\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{y\in\mathbb{R}^N}|n_\varepsilon(x;y)|dy$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{y\in\mathbb{R}^N}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}|\frac{V(\varepsilon x+\varepsilon y+\varepsilon\gamma)-V(\varepsilon x+\varepsilon\gamma)}{\varepsilon}\int_{\Omega^*}a(\varepsilon x+\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\gamma}dk$$

$$-\frac{V(\varepsilon x+\varepsilon y)-V(\varepsilon x)}{\varepsilon}\int_{\Omega^*}a(\varepsilon x+\varepsilon y+\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\gamma}dk||K_p^1(x;x+y)|dy$$

Or

$$\left|\frac{V(\varepsilon x+\varepsilon y)-V(\varepsilon x)}{\varepsilon}\int_{\Omega^*}[a(\varepsilon x+\varepsilon y+\varepsilon\gamma/2;k)-a(\varepsilon x+\varepsilon\gamma/2;k)]e^{-2i\pi k\gamma}dk\right|$$

$$\leq \varepsilon|y|^2 \| \nabla V \|_\infty |\int_0^1\int_{\Omega^*}\nabla_x a(\varepsilon x+\varepsilon ty+\varepsilon\gamma/2;k)e^{-2i\pi k\gamma}dkdt|$$

$$\leq \varepsilon |y|^2 \parallel \nabla V \parallel_\infty \parallel \partial_x \partial_k^\alpha a \parallel_\infty / \langle \gamma \rangle^{|\alpha|}$$

et

$$\left| \frac{V(\varepsilon x + \varepsilon y + \varepsilon \gamma) - V(\varepsilon x + \varepsilon \gamma) - V(\varepsilon x + \varepsilon y) + V(\varepsilon x)}{\varepsilon} \int_{\Omega^*} a(\varepsilon x + \varepsilon \gamma/2; k) e^{-2i\pi k\gamma} dk \right|$$

$$\leq |\gamma| \parallel \nabla V(\cdot + \varepsilon y) - \nabla V(\cdot) \parallel_\infty | \int_{\Omega^*} a(\varepsilon x + \varepsilon \gamma/2; k) e^{-2i\pi k\gamma} dk|$$

$$\leq |\gamma| \parallel \nabla V(\cdot + \varepsilon y) - \nabla V(\cdot) \parallel_\infty \parallel \partial_k \partial_k^\alpha a \parallel_\infty / \langle \gamma \rangle^{|\alpha|}$$

En sommant ces deux inégalités on aboutit à une borne possible montrant la négligeabilité de n_ε en norme

$$\parallel n_\varepsilon \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon C_\Gamma^{ste}(a) \int A|x|^2 \exp(-B|x|) dx (\varepsilon \parallel \nabla V \parallel_\infty + \parallel \nabla V(\cdot + \varepsilon x) - \nabla V(\cdot) \parallel_\infty) (\to 0)$$

□

Mentionons que tout résulte depuis l'hypothèse d'isolation de la possibilité de déterminer une onde de Bloch $k \mapsto \psi_p(\cdot; k)$ périodique régulière. Ce qui précède s'adapte par exemple au cas d'un niveau non isolé dans lequel une des ondes de Bloch aurait miraculeusement la régularité C^m avec $m > N+1$ (éventuellement $m > N+2$ pour la proposition 2.8). Mais un tel critère non fondé sur la simplicité fait défaut.

Pour nous faire une idée plus nette de l'action algébrique de $c_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ observons le cas du potentiel linéaire. C'est l'objet de la proposition 2.10. Pour cela nous introduisons la distinction entre fibres et enveloppes.

A travers l'isomorphisme de Fourier

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\%x} K_p^\varepsilon(x'; y) = \hat{\varphi}_p^\varepsilon(x') \Sigma_{\gamma \in \Gamma} \overline{\varphi_p^\varepsilon}(y - \varepsilon\gamma) e^{-2i\pi\varepsilon\gamma x'} \\ \overline{\mathcal{F}}_{\%y} K_p^\varepsilon(x; y') = \overline{\hat{\varphi}_p^\varepsilon}(y') \Sigma_{\gamma \in \Gamma} \varphi_p^\varepsilon(x - \varepsilon\gamma) e^{+2i\pi\varepsilon\gamma y'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_p^\varepsilon u : x \mapsto \int K_p^\varepsilon(x; y) u(y) dy = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} < u | \varphi_p^\varepsilon(\cdot - \varepsilon\gamma) >_{L^2} \varphi_p^\varepsilon(\cdot - \varepsilon\gamma) = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} \hat{\sigma}_p^\varepsilon(\gamma) \varphi_p^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\gamma) \\ \widehat{\Pi_p^\varepsilon u} : x' \mapsto \int \mathcal{F}_{\%x} K_p^\varepsilon(x'; y) u(y) dy = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} < u | \varphi_p^\varepsilon(\cdot - \varepsilon\gamma) >_{L^2} \hat{\varphi}_p^\varepsilon(x') e^{-2i\pi\varepsilon\gamma x'} = \sigma_p^\varepsilon(\varepsilon x') \hat{\varphi}_p^\varepsilon(x') \end{cases}$$

où $\sigma_p^\varepsilon(k) = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} \hat{\sigma}_p^\varepsilon(\gamma) e^{+2i\pi k\gamma} = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} < u | \varphi_p^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\gamma) >_{L^2} e^{+2i\pi k\gamma}$ est la composante périodique qui représente la projection $\Pi_p^\varepsilon u \in V_p^\varepsilon$ sous la forme $\widehat{\Pi_p^\varepsilon u} = \sigma_p^\varepsilon(\varepsilon \cdot) \hat{\varphi}_p^\varepsilon \in \hat{V}_p^\varepsilon$.

Definition 2.6 *On nomme σ_p^ε la (p^{ieme}) fibre en référence à la décomposition $L^2(\mathbb{R}^N) = \int_{\Omega^*}^{\bigoplus} L^2(\varepsilon\Omega) dk$ en "constant fiber direct integral". C'est ce qui va contenir par la suite la dépendance en temps et les oscillations. On nomme $\hat{\varphi}_p$ la (p^{ieme}) enveloppe. C'est fixe et plus ou moins régulier selon les différents p.*

Remarque. L'égalité $L^2(\mathbb{R}^N) = \int_{\Omega^*}^{\bigoplus} L^2(\varepsilon\Omega) dk$ s'entend au sens de l'isomorphisme isométrique $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mapsto u_\# = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} u(x - \varepsilon\gamma) e^{+2i\pi k\gamma} \in L^2(\varepsilon\Omega \times \Omega^*)$. Voir [RS] Vol IV. Section XIII.16. theorems XIII.83.– XIII.88.

L'identité générale $c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon + \Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon = c_p^\varepsilon$ exhibe le commutateur comme un transfert des sous-espaces

$$\begin{cases} \bigoplus_{q \neq p} V_q^\varepsilon = \text{ Im } (1 - \Pi_p^\varepsilon) \to \text{ Im } (\Pi_p^\varepsilon) = V_p^\varepsilon \\ \text{ Im } (\Pi_p^\varepsilon) = V_p^\varepsilon \to \bigoplus_{q \neq p} V_q^\varepsilon = \text{ Im } (1 - \Pi_p^\varepsilon) \end{cases}$$

Dans le cas spécial du potentiel linéaire on dispose d'une formulation explicite du commutateur :

Proposition 2.10 *Pour un potentiel linéaire noté r*

$$\mathcal{F}(i\frac{[\Pi_p^\varepsilon; r]}{\varepsilon}u) : \xi \mapsto \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_p(\varepsilon\xi)\nabla\overline{\hat{\varphi}_p}(\varepsilon\xi+\gamma^*) + \nabla\hat{\varphi}_p(\varepsilon\xi)\overline{\hat{\varphi}_p}(\varepsilon\xi+\gamma^*)]\hat{u}(\xi+\gamma^*/\varepsilon)$$

PREUVE. On calcule pour $V = r$ linéaire

$$\mathcal{F}_{\%x}[K_p^1(x;y)(y-x)] = \mathcal{F}_{\%x}[\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\varphi_p(x-\gamma)\overline{r\varphi_p}(y-\gamma) - r\varphi_p(x-\gamma)\overline{\varphi_p}(y-\gamma)]$$

$$= \Sigma_{\gamma\in\Gamma}[\hat{\varphi}_p(x')\overline{r\varphi_p}(y-\gamma) - \widehat{r\varphi_p}(x')\overline{\varphi_p}(y-\gamma)]e^{-2i\pi\gamma x'}$$

$$= \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_p(x')\overline{r\hat{\varphi}_p}(x'+\gamma^*) - \widehat{r\varphi_p}(x')\overline{\hat{\varphi}_p}(x'+\gamma^*)]e^{-2i\pi(x'+\gamma^*)y}$$

(invoquer la formule sommatoire $\Sigma_{\gamma\in\Gamma}T(\gamma)e^{-2i\pi k\gamma} = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\mathcal{F}T(k+\gamma^*)$ où $T = r\varphi_p$)

$$= -ie^{-2i\pi x'y}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_p(x')\nabla\overline{\hat{\varphi}_p}(x'+\gamma^*) + \nabla\hat{\varphi}_p(x')\overline{\hat{\varphi}_p}(x'+\gamma^*)]e^{-2i\pi y\gamma^*}$$

On en déduit

$$\mathcal{F}_{\%x}[iK_p^\varepsilon(x;y)\frac{y-x}{\varepsilon}] = e^{-2i\pi x'y}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_p(\varepsilon x')\nabla\overline{\hat{\varphi}_p}(\varepsilon x'+\gamma^*)+\nabla\hat{\varphi}_p(\varepsilon x')\overline{\hat{\varphi}_p}(\varepsilon x'+\gamma^*)]e^{-2i\pi y\gamma^*/\varepsilon}$$

et $\mathcal{F}(i\frac{[\Pi_p^\varepsilon; r]}{\varepsilon}u) : \xi \mapsto \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_p(\varepsilon\xi)\nabla\overline{\hat{\varphi}_p}(\varepsilon\xi+\gamma^*) + \nabla\hat{\varphi}_p(\varepsilon\xi)\overline{\hat{\varphi}_p}(\varepsilon\xi+\gamma^*)]\hat{u}(\xi+\gamma^*/\varepsilon)$

□

Interprétation :

- étant donné $u \in V_q^\varepsilon$ écrit sous la forme $\hat{u} = \sigma_q^\varepsilon(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}_q^\varepsilon \in \hat{V}_q^\varepsilon$ l'opération $i\frac{[\Pi_p^\varepsilon; r]}{\varepsilon}$ est essentiellement une multiplication de la fibre σ_q^ε par le périodisé $\varpi_{\Gamma^*}(\hat{\varphi}_q\nabla\overline{\hat{\varphi}_p})$ suivie d'un transfert dans V_p^ε par échange des enveloppes φ_q^ε et φ_p^ε,

- étant donné $u \in V_p^\varepsilon$ écrit sous la forme $\hat{u} = \sigma_p^\varepsilon(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}_p^\varepsilon \in \hat{V}_p^\varepsilon$ l'élément

  $$\mathcal{F}(i\frac{[\Pi_p^\varepsilon; r]}{\varepsilon}u) = \varepsilon^{N/2}\sigma_p^\varepsilon(\varepsilon\xi)[\nabla\hat{\varphi}_p(\varepsilon\xi) + \hat{\varphi}_p(\varepsilon\xi)\varpi_{\Gamma^*}(\hat{\varphi}_p\nabla\overline{\hat{\varphi}_p})(\varepsilon\xi)]$$

  a pour projeté sur V_q^ε l'élément d'enveloppe φ_q^ε et de fibre la (q)-fibre de $\nabla\hat{\varphi}_p$ à savoir $\varpi_{\Gamma^*}(\overline{\hat{\varphi}_q}\nabla\hat{\varphi}_p)$ d'où $\mathcal{F}(\Pi_q^\varepsilon i\frac{[\Pi_p^\varepsilon; r]}{\varepsilon}u) = \varpi_{\Gamma^*}(\overline{\hat{\varphi}_q}\nabla\hat{\varphi}_p)\sigma_p^\varepsilon(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}_q^\varepsilon \in \hat{V}_q^\varepsilon$,

- les opérations $i\frac{[\Pi_p^\varepsilon; r]}{\varepsilon}$ observées $V_q^\varepsilon \to V_p^\varepsilon$ respectivement $V_p^\varepsilon \to V_q^\varepsilon$ sont adjointes.

Pour un niveau quelconque (qui n'est pas isolé simple) que devient le défaut d'invariance mesuré par le commutateur $[\Pi_n^\varepsilon; V] \in \mathcal{L}(L^2)$? L'exemple du croisement de deux niveaux en une dimension d'espace présenté comme un théorème 2.8 négatif montre qu'il y a peu d'espoir que $[\Pi_n^\varepsilon; V] \in \mathcal{L}(L^2)$ soit négligeable en dimension supérieure.

Pour un niveau non isolé la non-invariance par multiplication du sous-espace de Floquet correspondant est donc sévère :

Théorème 2.8 *Si le croisement des deux niveaux n et $n+1$ en une dimension $N=1$ d'espace a lieu alors*

$$\| [\Pi_n^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \not\to 0 \qquad \| [\Pi_{n+1}^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \not\to 0$$

PREUVE. Preliminaire. Il suffit de minorer

$$\liminf \| [\Pi_n^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \geq \liminf \| \Pi_{n+1}^\varepsilon [\Pi_n^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \liminf \| \Pi_{n+1}^\varepsilon V \Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

Quitte à approcher uniformément $V \in C_0^0(\mathbb{R})$ par des éléments $\in \mathcal{F}L_c^1(\mathbb{R})$ on suppose $\hat{V}$ à support compact.

PREMIÈRE ÉTAPE. $\| \Pi_{n+1}^\varepsilon V \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} = \| \sigma_{n+1}^\varepsilon (V \Pi_n^\varepsilon u) \|_{L^2_\#}$
avec $\sigma_{n+1}^\varepsilon (V\Pi_n^\varepsilon u) : k \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \widehat{V \Pi_n^\varepsilon u}(\dfrac{k}{\varepsilon} + \dfrac{\gamma^*}{\varepsilon}) \overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*)$
$= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi) \sigma(k - \varepsilon\xi) \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n(k + \gamma^* - \varepsilon\xi) \overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*) d\xi$
où $\sigma \in L^2_\#$ désigne la fibre de $\Pi_n^\varepsilon u \in V_n^\varepsilon \subset L^2$ telle que $\widehat{\Pi_n^\varepsilon u} = \sigma(\varepsilon \cdot) \hat{\varphi}_n^\varepsilon \in \hat{V}_n^\varepsilon \subset L^2$
(pour simplifier la notation on omet dans σ la dépendance en ε et u). Ainsi

$$\| \Pi_{n+1}^\varepsilon V \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{V}(\xi)| \, \| \sigma \|_{L^2_\#} \| S_{\varepsilon\xi} \|_\infty \, d\xi = \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{V}(\xi)| \, \| S_{\varepsilon\xi} \|_\infty \, d\xi$$

où

$$S_{\varepsilon\xi} : k \mapsto \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n(k + \gamma^* - \varepsilon\xi) \overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*)$$

$$= \int_\Omega \psi_n(x; k - \varepsilon\xi) \overline{\psi_{n+1}}(x;k) e^{+2i\pi\varepsilon x \xi} dx = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} e^{+2i\pi k\gamma} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) \overline{\varphi_{n+1}}(x+\gamma) e^{+2i\pi x \varepsilon \xi} dx$$

SECONDE ÉTAPE. L'application $S_{\varepsilon\xi}$ est périodique bornée
$\| S_{\varepsilon\xi} \|_{L^\infty_\#} \leq \| \varpi_{\Gamma^*} |\hat{\varphi}_n|^2 \|_\infty^{1/2} \| \varpi_{\Gamma^*} |\hat{\varphi}_{n+1}|^2 \|_\infty^{1/2} = 1$,
elle converge $\sigma(L^\infty_\#; L^1_\#)$ faiblement vers zéro lorsque $\varepsilon\xi \to 0$
(puisque chaque coefficient de Fourier tend individuellement vers zéro).
Les trois formulations de $S_{\varepsilon\xi}$ (périodisation, intégrale, série) sont des conséquences générales de l'isométrie de Parseval :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_n(k + \gamma^* - \varepsilon\xi) = \int_\Omega \psi_n(x; k - \varepsilon\xi) e^{-2i\pi x(k - \varepsilon\xi)} e^{-2i\pi x \gamma^*} dx \\ \hat{\varphi}_{n+1}(k+\gamma^*) = \int_\Omega \psi_{n+1}(x;k) e^{-2i\pi x k} e^{-2i\pi x\gamma^*} dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_n(x; k - \varepsilon\xi) = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} e^{+2i\pi(k - \varepsilon\xi)\gamma} \varphi_n(x - \gamma) \\ \psi_{n+1}(x;k) = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} e^{+2i\pi k\gamma} \varphi_{n+1}(x - \gamma) \end{cases}$$

Remarque. Il se trouve que la convergence $S_{\varepsilon\xi} \to 0$ est localement uniforme dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$ mais en général non uniforme sur $\mathbb{R}$, en bref $\| S_{\varepsilon\xi} \|_\infty \not\to 0$ à cause des sauts des enveloppes $\hat{\varphi}_n$ et $\hat{\varphi}_{n+1}$ aux points semi-entiers. Nous allons maintenant approfondir cette remarque en précisant les sauts d'enveloppes.

FIN DE PREUVE. Supposons que le croisement des niveaux n et $n+1$ survienne en 0 (et non en 1/2 cas similaire). D'après la partie 2.6 qui détaille(ra) la situation de la dimension un, les seuls points de croisements sont 0 et 1/2. Considérons des $u \in L^2$ tels que la fibre

$\sigma \in L^2_\#$ soit du type $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathbb{I}^\#_{(0;\alpha)} \in L^2_\#$ avec $0 < \alpha < 1/4$ à choisir, où $\mathbb{I}^\#_{(0;\alpha)}$ est l'indicatrice de l'intervalle périodique $(0;\alpha) + \Gamma^* \subset \mathbb{R}$.

Pour ε petit au sens $\varepsilon Supp(\hat{V}) \subset (-1/4; +1/4)$ étudions en détail

$$\| \Pi^\varepsilon_{n+1} V \Pi^\varepsilon_n u \|^2_{L^2} = \int_0^{+1/2} | \int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi) S_{\varepsilon\xi}(k) d\xi |^2 dk$$

$$+ \int_{-1/2}^0 | \int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi) S_{\varepsilon\xi}(k) d\xi |^2 dk \tag{4}$$

Premier terme. Si $0 < k < +1/2$ et $k - \varepsilon\xi > 0$ et $\xi \in Supp(\hat{V})$ alors nécessairement $0 < k - \varepsilon\xi < 1$ ainsi

$$\begin{cases} |\hat{\varphi}_n(k+2\gamma^* - \varepsilon\xi) - \hat{\varphi}_n(k+2\gamma^*)| \leq \varepsilon|\xi| \int_0^1 |\nabla\hat{\lambda}(k+2\gamma^* - \varepsilon t\xi)| dt \\ |\hat{\varphi}_n(k+2\gamma^* + 1 - \varepsilon\xi) - \hat{\varphi}_n(k+2\gamma^* + 1)| \leq \varepsilon|\xi| \int_0^1 |\nabla\hat{\mu}(k+2\gamma^* + 1 - \varepsilon t\xi)| dt \end{cases}$$

en notant $\hat{\lambda}$ respectivement $\hat{\mu}$ le prolongement analytique de $\hat{\varphi}_n$ respectivement $\hat{\varphi}_{n+1}$ considéré sur $(0;1)$.

On anticipe ici sur la réindexation discutée dans la partie 2.7 pour le cas spécial de $l = 2$ niveaux. Dans l'immédiat il suffit d'en retenir la construction des prolongements analytiques $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ comme l'alternance

$$\begin{cases} \hat{\lambda} \sim \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n \mathbb{I}_{(0;1)+2\gamma^*} + \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_{n+1} \mathbb{I}_{(0;1)+2\gamma^*+1} \\ \hat{\mu} \sim \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_{n+1} \mathbb{I}_{(0;1)+2\gamma^*} + \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n \mathbb{I}_{(0;1)+2\gamma^*+1} \end{cases}$$

à des phases de transition près sans importance ici.

Par la régularité de $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ au sens des périodisés bornés (voir théorème 2.15) on a

$$|S_{\varepsilon\xi}(k)| = |\Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n(k+\gamma^* - \varepsilon\xi)\overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*) - \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n(k+\gamma^*)\overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*)|$$

$$\leq \varepsilon|\xi|(\| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\lambda}|^2 \|^{1/2}_\infty \| \varpi_{\Gamma^*} |\hat{\varphi}_{n+1}|^2 \|^{1/2}_\infty + \| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\mu}|^2 \|^{1/2}_\infty \| \varpi_{\Gamma^*} |\hat{\varphi}_{n+1}|^2 \|^{1/2}_\infty)$$
$$= \varepsilon|\xi|(\| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\lambda}|^2 \|^{1/2}_\infty + \| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\mu}|^2 \|^{1/2}_\infty) < \infty$$

Il en résulte

$$\int_0^{+1/2} | \int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi) S_{\varepsilon\xi}(k) d\xi |^2 dk$$

$$\leq \varepsilon^2 \| \sigma \|^2_{L^2_\#} (\int_{\mathbb{R}} | \cdot | |\hat{V}|)^2 (\| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\lambda}|^2 \|^{1/2}_\infty + \| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\mu}|^2 \|^{1/2}_\infty)^2$$

$$= \varepsilon^2 \| \Pi^\varepsilon_n u \|^2_{L^2} \| \nabla V \|^2_{\mathcal{F}L^1} (\| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\lambda}|^2 \|^{1/2}_\infty + \| \varpi_{\Gamma^*} |\nabla\hat{\mu}|^2 \|^{1/2}_\infty)^2 \tag{5}$$

Second terme. Si $-1/2 < k < 0$ et $k - \varepsilon\xi > 0$ et $\xi \in Supp(\hat{V})$ alors nécessairement $0 < k - \varepsilon\xi < 1$ ainsi en introduisant les prolongements $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ précédents

$$\begin{cases} |\hat{\varphi}_n(k+2\gamma^* - \varepsilon\xi) - \hat{\varphi}_{n+1}(k+2\gamma^*)| \leq \varepsilon|\xi| \int_0^1 |\nabla\hat{\lambda}(k+2\gamma^* - \varepsilon t\xi)| dt \\ |\hat{\varphi}_n(k+2\gamma^* + 1 - \varepsilon\xi) - \hat{\varphi}_{n+1}(k+2\gamma^* + 1)| \leq \varepsilon|\xi| \int_0^1 |\nabla\hat{\mu}(k+2\gamma^* + 1 - \varepsilon t\xi)| dt \end{cases}$$

Par la régularité de $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ au sens des périodisés bornés (voir théorème 2.15) on a

$$|S_{\varepsilon\xi}(k) - 1| = |\Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_n(k+\gamma^* - \varepsilon\xi)\overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*) - \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\varphi}_{n+1}(k+\gamma^*)\overline{\hat{\varphi}_{n+1}}(k+\gamma^*)|$$

$$\leq \varepsilon|\xi|(\| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}|^2 \|_\infty^{1/2}\| \varpi_{\Gamma^*}|\hat{\varphi}_n|^2 \|_\infty^{1/2} + \| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\mu}|^2 \|_\infty^{1/2}\| \varpi_{\Gamma^*}|\hat{\varphi}_n|^2 \|_\infty^{1/2})$$
$$= \varepsilon|\xi|(\| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}|^2 \|_\infty^{1/2} + \| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\mu}|^2 \|_\infty^{1/2}) < \infty$$

Il en résulte

$$\int_{-1/2}^0 |\int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi)S_{\varepsilon\xi}(k)d\xi - \int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi)d\xi|^2 dk$$

$$\leq \varepsilon^2 \| \sigma \|_{L^2_\#}^2 (\int_{\mathbb{R}} |\cdot||\hat{V}|)^2(\| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}|^2 \|_\infty^{1/2} + \| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\mu}|^2 \|_\infty^{1/2})^2$$
$$= \varepsilon^2 \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2}^2 \| \nabla V \|_{\mathcal{F}L^1}^2 (\| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}|^2 \|_\infty^{1/2} + \| \varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\mu}|^2 \|_\infty^{1/2})^2 \qquad (6)$$

En assemblant les estimations (5) et (6) constituant (4) on conclut que $\| \Pi_{n+1}^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2}^2$ vaut à peu près

$$\int_{-1/2}^0 |\int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi)d\xi|^2 dk = \int_{-1/2}^0 |\int_{k/\varepsilon-\alpha/\varepsilon}^{k/\varepsilon} \hat{V}|^2 \frac{dk}{\alpha} = \int_{-1/2\alpha}^0 |\int_{\alpha k/\varepsilon-\alpha/\varepsilon}^{\alpha k/\varepsilon} \hat{V}|^2 dk$$

En particulier ($\alpha = \varepsilon$) on minore $\| \Pi_{n+1}^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}^2$ à un grand O de ε^2 près par $\int_{-1/2\varepsilon}^0 |\int_{k-1}^k \hat{V}|^2 dk$ en considérant des supports $Supp(\sigma)$ positifs et symétriquement (ce que nous ne détaillerons pas) par $\int_0^{+1/2\varepsilon} |\int_k^{k+1} \hat{V}|^2 dk$ en considérant des supports $Supp(\sigma)$ négatifs.

Comme annoncé $\liminf_{\varepsilon\to 0} \| \Pi_{n+1}^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 \geq \int_{-\infty}^0 |\int_{k-1}^k \hat{V}|^2 dk + \int_0^{+\infty} |\int_k^{k+1} \hat{V}|^2 dk > 0$, cette quantité est non nulle à moins que $\hat{V}$ soit 1-périodique à support compact c'est-à-dire nul.

Remarque. En fait pour $\hat{u}_\pm = \mathbb{I}_{\pm(0;1)} \in L^2(\mathbb{R})$ (fixe) la fibre de $\Pi_n^\varepsilon u_\pm$ est à peu près du type envisagé prédemment puisque

$$\sigma = \sigma^\varepsilon(u_\pm) : k \mapsto \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u_\pm}(\frac{k}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})\overline{\hat{\varphi}_n}(k+\gamma^*) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathbb{I}^\#_{\pm(0;\varepsilon)}(k)\varpi_{\Gamma^*}(\overline{\hat{\varphi}_n}\mathbb{I}_{\pm(0;\varepsilon)})(k)$$

ainsi $\| \Pi_{n+1}^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon u_\pm \|_{L^2}^2 \approx \int_{\mp 1/2}^0 |\int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi)\sigma(k-\varepsilon\xi)d\xi|^2 dk = \int_{\mp 1/2}^0 |\int_{k/\varepsilon-1}^{k/\varepsilon} \hat{V}(\xi)\overline{\hat{\varphi}_n}(k-\varepsilon\xi)d\xi|^2 \frac{dk}{\varepsilon}$

$$= \int_{\mp 1/2\varepsilon}^0 |\int_{k\pm 1}^k \hat{V}(\xi)\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon k-\varepsilon\xi)d\xi|^2 dk \to |\hat{\varphi}_n|^2(0\pm)\int_{\mp\infty}^0 |\int_{k\pm 1}^k \hat{V}|^2 dk$$

en particulier si $\hat{\varphi}_n(0\pm) \neq 0$ alors $\Pi_{n+1}^\varepsilon[\Pi_n^\varepsilon; V]u_\pm \not\to 0$ et a fortiori $[\Pi_n^\varepsilon; V]u_\pm \not\to 0$.

Lorsque le croisement des niveaux n et $n+1$ survient à l'origine et lorsque $\hat{\varphi}_n$ et $\hat{\varphi}_{n+1}$ ne tendent pas vers zéro à l'origine [2] on en déduit

$$\begin{cases} \text{non seulement } \| [\Pi_n^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \not\to 0 & \| [\Pi_{n+1}^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \not\to 0 \\ \text{mais encore } \exists u \in L^2 \quad [\Pi_n^\varepsilon; V]u \not\to 0 & \exists u \in L^2 \quad [\Pi_{n+1}^\varepsilon; V]u \not\to 0 \end{cases}$$

□

[2] Cette condition équivaut à l'existence d'une solution $\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E_n(0)$ de moyenne non nulle.

Remarque. La suite considérée $\hat{u}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathbb{I}^{\#}_{(0;\varepsilon)}(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}^\varepsilon_n \in \hat{V}^\varepsilon_n \subset L^2$ satisfait

$$\| [\Pi^\varepsilon_n; V]u^\varepsilon \|_{L^2} \not\to 0 \text{ avec } \| u^\varepsilon \|_{L^2} \text{ borné } \| \varepsilon\nabla u^\varepsilon \|_{L^2} \text{ borné}$$

et plus généralement $(\varepsilon\nabla)^s u^\varepsilon \in L^2$ borné pour $s \in \mathbb{N}$ d'autant plus grand que le potentiel de l'hamiltonien périodique est régulier.

En effet $\| \varepsilon\nabla u^\varepsilon \|^2_{L^2} = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}^{\#}_{(0;\varepsilon)}|\cdot|^2|\hat{\varphi}_n|^2 = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{\gamma^*}^{\gamma^*+\varepsilon} |\cdot|^2|\hat{\varphi}_n|^2$

$\leq \| (1+|\cdot|^2)\hat{\varphi}_n \|_\infty \, \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}(1+|\gamma^*|)^{-2} < \infty.$

On ne peut donc pas espérer compenser le défaut de commutation dû à l'opérateur $[\Pi^\varepsilon_n; V]$ par des oscillations d'ordre ε dans l'argument u^ε.

Pour un niveau n non isolé (quelconque) il faut se contenter de :

Proposition 2.11 *Si $\chi \in C^0_{\#}(\mathbb{R}^N)$ est supporté loin des croisements avec le niveau n alors*

$$[\Pi^\varepsilon_n; V]\chi(\varepsilon D) \to 0 \qquad \chi(\varepsilon D)[\Pi^\varepsilon_n; V] \to 0 \text{ dans } \mathcal{L}(L^2) \qquad \forall V \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$$

Avant d'attaquer la preuve, et pour illustrer que seul le commutateur avec Π^ε_n y est problématique, commencons par :

Lemme 2.2 *Pour $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla\chi \in C^0_b(\mathbb{R}^N)$ uniformément continu, respectivement pour $\nabla\chi \in \mathcal{F}l^1$ et $\nabla V \in C^0_b(\mathbb{R}^N)$ uniformément continu,*

$$i\frac{[\chi(\varepsilon D); V]}{\varepsilon} - \nabla\chi(\varepsilon D).\nabla V \to 0 \text{ dans } \mathcal{L}(L^2)$$

Preuve. Dans le premier cas de figure $\| \dfrac{[\chi(\varepsilon D); V]}{\varepsilon}u + i\nabla\chi(\varepsilon D).\nabla V u \|_{L^2}$

$$= \| \mathcal{F}^{-1}_{\%\eta}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}[\frac{\chi(\varepsilon\eta)-\chi(\varepsilon\eta-\varepsilon\xi)}{\varepsilon} - \xi.\nabla V(\varepsilon\eta)]\hat{V}(\xi)\hat{u}(\eta-\xi)d\xi \|_{L^2}$$

$$\leq \| u \|_{L^2}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\hat{V}(\xi)| \, \| \frac{\chi(\cdot)-\chi(\cdot-\varepsilon\xi)}{\varepsilon} - \xi.\nabla V(\cdot) \|_\infty \, d\xi$$

$$\leq \| u \|_{L^2}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\widehat{\nabla V}|(\xi)d\xi\int_0^1 \| \nabla\chi(\cdot-\varepsilon t\xi) - \nabla\chi(\cdot) \|_\infty \, dt$$

$$\text{d'où } \| i\frac{[\chi(\varepsilon D); V]}{\varepsilon} - \nabla\chi(\varepsilon D).\nabla V \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$$

grâce à l'hypothèse $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla\chi \in C^0_b(\mathbb{R}^N)$ uniformément continu.

Dans le second cas de figure $\| \dfrac{[\chi(\varepsilon D); V]}{\varepsilon}u + i\nabla\chi(\varepsilon D).\nabla V u \|_{L^2}$

$$= \| \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\chi}(\gamma)[\frac{V(\cdot+\varepsilon\gamma)-V(\cdot)}{\varepsilon} - \gamma.\nabla V(\cdot+\varepsilon\gamma)]u(\cdot+\varepsilon\gamma) \|_{L^2}$$

$$\leq \| u \|_{L^2} \, \Sigma_{\gamma\in\Gamma}|\hat{\chi}(\gamma)| \, \| \frac{V(\cdot+\varepsilon\gamma)-V(\cdot)}{\varepsilon} - \gamma.\nabla V(\cdot+\varepsilon\gamma) \|_\infty$$

$$\text{d'où } \| i\frac{[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon} - \nabla\chi(\varepsilon D).\nabla V \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$$

grâce à l'hypothèse $\nabla\chi \in \mathcal{F}l^1$ et $\nabla V \in C_b^0(\mathbb{R}^N)$ uniformément continu.

□

Preuve. Proposition 2.11. Preliminaire. Quitte à approcher uniformément $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ par des éléments $\in \mathcal{F}L_c^1(\mathbb{R}^N)$ et à approcher uniformément $\chi \in C_\#^0(\mathbb{R}^N)$ par des polynômes trigonométriques on suppose $\hat{V}$ à support compact et $\hat{\chi}$ à support fini.

Première étape.

$$\| \frac{[H^\varepsilon;V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_n^{ste}(\| \nabla V \|_\infty + \varepsilon \| \Delta V \|_\infty) \tag{7}$$

En effet $\frac{[H^\varepsilon;V]}{\varepsilon} = -\varepsilon\Delta V - 2\varepsilon\nabla V.\nabla$

donc $\| \frac{[H^\varepsilon;V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} \leq \varepsilon \| \Delta V \|_\infty \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} + 2 \| \nabla V \|_\infty \| \varepsilon\nabla(\Pi_n^\varepsilon u) \|_{L^2}$

$\leq (\varepsilon \| \Delta V \|_\infty + 2 \| \nabla V \|_\infty \sqrt{\| E_n \|_\infty + \| v \|_\infty}) \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2}$

car $\| \varepsilon\nabla(\Pi_n^\varepsilon u) \|_{L^2}^2 = < -\varepsilon^2\Delta\Pi_n^\varepsilon u|\Pi_n^\varepsilon u >_{L^2} = < H^\varepsilon\Pi_n^\varepsilon u|\Pi_n^\varepsilon u >_{L^2} - < v(\frac{\cdot}{\varepsilon})\Pi_n^\varepsilon u|\Pi_n^\varepsilon u >_{L^2}$

$\leq (\| E_n \|_\infty + \| v \|_\infty) \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2}^2$.

Seconde étape.

$$\| \frac{[E_n(\varepsilon D);V]}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| \nabla E_n \|_\infty \| \nabla V \|_{\mathcal{F}L^1} \tag{8}$$

En effet $\| [E_n(\varepsilon D);V]u \|_{L^2} = (\int | \int \hat{V}(\xi)\hat{u}(\eta-\xi)[E_n(\varepsilon\eta) - E_n(\varepsilon\eta - \varepsilon\xi)]d\xi|^2 d\eta)^{1/2}$

$\leq \| u \|_{L^2} \int |\hat{V}(\xi)| \| E_n(\cdot + \varepsilon\xi) - E_n(\cdot) \|_\infty d\xi \leq \varepsilon \| u \|_{L^2} \| \nabla E_n \|_\infty \| \nabla V \|_{\mathcal{F}L^1}$

où E_n est plus généralement n'importe quelle dérivation périodique lipschitzienne.

Troisième étape.

$$\| [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon C_n^{ste}(\| \nabla V \|_{\mathcal{F}L^1} + \varepsilon \| \Delta V \|_\infty) \tag{9}$$

En effet $H^\varepsilon\Pi_n^\varepsilon = E_n(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon$ donc

$\| [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi_n^\varepsilon = [H^\varepsilon;V]\Pi_n^\varepsilon - [E_n(\varepsilon D);V]\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}$

$\leq \| [H^\varepsilon;V]\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} + \| [E_n(\varepsilon D);V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon C_n^{ste}(\| \nabla V \|_{\mathcal{F}L^1} + \varepsilon \| \Delta V \|_\infty) =: \varepsilon C_n^{ste}(V)$

grâce aux estimations (7) et (8) précédentes.

Quatrième étape.

$$\| \frac{[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| \nabla\chi \|_{\mathcal{F}l^1} \| \nabla V \|_\infty \tag{10}$$

En effet $\| [\chi(\varepsilon D);V]u \|_{L^2} = \| \Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{\chi}(\gamma)[V(\cdot + \varepsilon\gamma) - V(\cdot)]u(\cdot + \varepsilon\gamma) \|_{L^2}$

$\leq \Sigma_{\gamma\in\Gamma}|\hat{\chi}(\gamma)| \parallel V(\cdot+\varepsilon\gamma)-V(\cdot)\parallel_\infty \parallel u\parallel_{L^2} \leq \varepsilon \parallel u\parallel_{L^2} \parallel \nabla\chi\parallel_{\mathcal{F}l^1} \parallel \nabla V\parallel_\infty.$

Fin de preuve. Soit $P_n^\varepsilon = \Sigma_{m\in N_n}\Pi_m^\varepsilon$ avec $N_n = \{m\in\mathbb{N} \mid \inf_{\mathbb{R}^N}|E_m-E_n|=0\}$ (cet ensemble est fini car E_n est borné et car les niveaux croissent uniformément vers l'infini).

On utilisera par la suite sans la rappeler la commutation $\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon = \Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ exacte pour tout $p\in N_n$. On a

$$\begin{aligned}
&\parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-P_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u + [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]P_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)V\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}\\
&\quad = \parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u + [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]P_n^\varepsilon[\chi(\varepsilon D);V]\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}\\
&\quad \leq \parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2} + \parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]P_n^\varepsilon[\chi(\varepsilon D);V]\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}\\
&\leq (\parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi_n^\varepsilon\parallel_{\mathcal{L}(L^2)}\parallel\chi\parallel_\infty + \varepsilon\parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]P_n^\varepsilon\parallel_{\mathcal{L}(L^2)}\parallel\nabla V\parallel_\infty\parallel\chi\parallel_{\mathcal{F}l^1})\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}\\
&\quad \leq \varepsilon C_n^{ste}(V)(\parallel\chi\parallel_\infty + \parallel\nabla\chi\parallel_{\mathcal{F}l^1})\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2} =: \varepsilon C_n^{ste}(V;\chi)\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2} \qquad (11)
\end{aligned}$$

car $\parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi_n^\varepsilon\parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon C_n^{ste}(V)$ par la borne (9)
et car $\parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]P_n^\varepsilon\parallel_{\mathcal{L}(L^2)} = \Sigma_{m\in N_n}\parallel E_m - E_n\parallel_\infty \leq C_n^{ste}$.

Etant donné $\alpha>0$ minorant $|E_m-E_n| \quad \forall m\notin N_n$ et $|E_m-E_n| \quad \forall m\in N_n-\{n\}$ sur $Supp(\chi)$, reprenons l'inégalité précédente dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 C_n^{ste}(V;\chi)^2\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2\\
&\geq \parallel [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-P_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u + [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]P_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)V\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2\\
&= \Sigma_{m\notin N_n}\int_{\Omega^*}|E_m-E_n|^2|\sigma_m^\varepsilon(V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)|^2 + \Sigma_{m\in N_n}\int_{\Omega^*\cap Supp(\chi)}|E_m-E_n|^2|\sigma_m^\varepsilon(\chi(\varepsilon D)V\Pi_n^\varepsilon u)|^2\\
&\geq \alpha^2(\parallel (1-P_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 + \parallel (P_n^\varepsilon - \Pi_n^\varepsilon)\chi(\varepsilon D)V\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2)\\
&= \alpha^2(\parallel (1-P_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 + \parallel (P_n^\varepsilon - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u + \varepsilon(P_n^\varepsilon - \Pi_n^\varepsilon)\frac{[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2)\\
&\geq \frac{\alpha^2}{2}(\parallel (1-P_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 + \parallel (P_n^\varepsilon - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 - 2\parallel \varepsilon(P_n^\varepsilon - \Pi_n^\varepsilon)\frac{[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2)\\
&\geq \frac{\alpha^2}{2}(\parallel (1-P_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 + \parallel (P_n^\varepsilon - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 - 2\varepsilon^2\parallel\nabla V\parallel_\infty\parallel\nabla\chi\parallel_{\mathcal{F}l^1}\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2)\\
&= \frac{\alpha^2}{2}(\parallel (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2}^2 - 2\varepsilon^2\parallel\nabla V\parallel_\infty\parallel\nabla\chi\parallel_{\mathcal{F}l^1}\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2}^2)
\end{aligned}$$

en invoquant au final la borne (10).

On vient de prouver

$$\parallel (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\parallel_{L^2} \leq \varepsilon(1+\frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi)\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2} \qquad (12)$$

Symétriquement on a

$$\parallel \chi(\varepsilon D)(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2} \leq \varepsilon(1+\frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi)\parallel\Pi_n^\varepsilon u\parallel_{L^2} \qquad (13)$$

Un moyen de le voir consiste à comparer ce nouveau terme avec celui déjà traité

$$\| \chi(\varepsilon D)(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon - (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \|_{L^2}$$

$$= \varepsilon \| (1-\Pi_n^\varepsilon)\frac{[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} \leq \varepsilon \| \nabla V \|_\infty \| \nabla\chi \|_{\mathcal{F}L^1} \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2} \quad \text{(etc)}$$

On conclut par adjonction :

$$[\Pi_n^\varepsilon;V]\chi(\varepsilon D) = -\{(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\} + \{(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\}^* - \Pi_n^\varepsilon[\chi(\varepsilon D);V](1-\Pi_n^\varepsilon)$$

ainsi $\| [\Pi_n^\varepsilon;V]\chi(\varepsilon D) \| \leq 2 \| (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D) \| + \| \Pi_n^\varepsilon[\chi(\varepsilon D);V](1-\Pi_n^\varepsilon) \|$
$\leq 2 \| (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D) \| + \varepsilon \| \dfrac{[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon} \|$
puis $\| [\Pi_n^\varepsilon;V]\chi(\varepsilon D) \| \leq \varepsilon(1+\dfrac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi)$ en invoquant (10) et (12).
Comme annoncé $\| [\Pi_n^\varepsilon;V]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| \chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon;V] \|_{\mathcal{L}(L^2)}$ tend vers zéro.
□

Remarque. Dans certains cas la norme désagréable $\| \nabla V \|_{\mathcal{F}L^1}$ (due seulement à la seconde étape) est superflue seule $\| \nabla V \|_\infty$ compte. Par exemple pour le potentiel $V = r$ linéaire la seconde étape est une égalité $\| \dfrac{[E(\varepsilon D);r]}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| \nabla E \|_\infty$ d'où une borne sur

$$\| \frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon;r]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon;r] \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

Proposition 2.12 *Si $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ indexent des niveaux ne se croisant pas*

$$\| \Pi_m^\varepsilon[\Pi_n^\varepsilon;V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| [\Pi_n^\varepsilon;V]\Pi_m^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0 \qquad \forall V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$$

Avec une certaine optimalité au sens du théorème négatif 2.8.

Preuve. L'estimation

$$\inf |E_m - E_n| > 0 \Rightarrow \| \Pi_m^\varepsilon[\Pi_n^\varepsilon;V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| [\Pi_n^\varepsilon;V]\Pi_m^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon C_{m,n}^{ste}$$

résulte des techniques précédentes mais une preuve simplifiée est possible.
D'abord $\| \Pi_m^\varepsilon[\Pi_n^\varepsilon;V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| \Pi_m^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}$ ensuite

$$\inf |E_m - E_n| \| \Pi_m^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| [H - E_n(\varepsilon D)]\Pi_m^\varepsilon V\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$$= \varepsilon \| \Pi_m^\varepsilon \frac{[H - E_n(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon \| \frac{[H - E_n(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

et ce terme est borné grâce aux estimations directes (7) et (8) de la preuve 2.11.
□

Proposition 2.13 *Si $\chi \in C_\#^\infty(\mathbb{R}^N)$ est supporté loin des croisements avec le niveau n alors pour tout $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ de gradient $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ la famille $\dfrac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon;V] \in \mathcal{L}(L^2)$ est bornée.*

PREUVE. Preliminaire. Régularisons V. Soit $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ uniformément approchable par des éléments $\in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ dont le gradient reste borné dans $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$. C'est le cas lorsque $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ a son gradient $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$. Par hypothèse il existe $V_\varepsilon \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $\dfrac{V - V_\varepsilon}{\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla V_\varepsilon \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ sont bornés. Soit $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), 0 \leq \theta \leq 1$, égal à 1 dans la boule de rayon 1 et égal à 0 hors de la boule de rayon 2. Alors la coupure $V_\varepsilon^c = V_\varepsilon * \dfrac{1}{\varepsilon^N}\mathcal{F}^{-1}\theta(\dot{\dfrac{}{\varepsilon}}) \in \mathcal{F}L_c^1(\mathbb{R}^N)$ de gradient borné dans $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ satisfait

$$\begin{cases} \varepsilon \parallel \Delta V_\varepsilon^c \parallel_\infty \leq \varepsilon \parallel \Delta V_\varepsilon^c \parallel_{\mathcal{F}L^1} = \int |\varepsilon\xi|\theta(\varepsilon\xi)|\widehat{\nabla V_\varepsilon}|(\xi)d\xi \leq 2 \parallel \nabla V_\varepsilon \parallel_{\mathcal{F}L^1} \\ \parallel \frac{V_\varepsilon - V_\varepsilon^c}{\varepsilon} \parallel_\infty \leq \parallel \frac{V_\varepsilon - V_\varepsilon^c}{\varepsilon} \parallel_{\mathcal{F}L^1} = \int \frac{1}{\varepsilon}(1-\theta)(\varepsilon\xi)|\widehat{V_\varepsilon}|(\xi)d\xi \leq \int |\xi||\widehat{V_\varepsilon}|(\xi)d\xi = \parallel \nabla V_\varepsilon \parallel_{\mathcal{F}L^1} \end{cases}$$

ainsi $\dfrac{V - V_\varepsilon^c}{\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est borné où $V_\varepsilon^c \in \mathcal{F}L_c^1(\mathbb{R}^N)$ rend la constante de la proposition 2.11 bornée (cette constante apparait dans (11) pour la premiere fois) :

$$\begin{cases} C_n^{ste}(V_\varepsilon^c;\chi) \sim C_n^{ste}(\parallel \chi \parallel_\infty + \parallel \nabla\chi \parallel_{\mathcal{F}L^1})(\parallel \nabla V_\varepsilon^c \parallel_{\mathcal{F}L^1} + \varepsilon \parallel \Delta V_\varepsilon^c \parallel_\infty) \text{ est bornée} \\ \parallel \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V_\varepsilon^c] \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} = \parallel \frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V_\varepsilon^c]\chi(\varepsilon D) \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \leq (1 + \frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V_\varepsilon^c;\chi) \text{ est bornée} \end{cases}$$

Maintenant par construction de la coupure la différence

$$\begin{aligned} \parallel \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V] - \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V_\varepsilon^c] \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} &= \parallel \chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; \frac{V - V_\varepsilon^c}{\varepsilon}] \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \\ &\leq 2 \parallel \chi \parallel_\infty \parallel \frac{V - V_\varepsilon^c}{\varepsilon} \parallel_\infty \end{aligned}$$

reste bornée. Il s'ensuit que $\dfrac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V]$ est borné dans $\mathcal{L}(L^2)$ comme $\dfrac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V_\varepsilon^c]$.
□

La proposition 2.11 est l'équivalent pour un niveau quelconque de la proposition 2.7 pour un niveau isolé simple. Elle affirme la négligeabilité du défaut d'invariance loin des croisements. Elle répond partiellement à la question : si V commute à peu près avec H^ε dans quelle mesure V commute à peu près avec la famille spectrale de H^ε ? En effet si $p^\varepsilon : \lambda \mapsto 1_{(-\infty;\lambda)}(H^\varepsilon)$ désigne la famille spectrale étalée sur $\mathbb{R}$ de l'opérateur autoadjoint H^ε (sans spectre ponctuel donc les intervalles figurant dans p^ε peuvent être ouverts ou fermés indifféremment) construite par le calcul fonctionnel ou par la relation plus explicite

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\in(a;b)}[(\lambda - ih - H^\varepsilon)^{-1} - (\lambda + ih - H^\varepsilon)^{-1}]d\lambda \to p^\varepsilon(b) - p^\varepsilon(a) \text{ dans } \mathcal{L}_{strong}(L^2) \text{ lorsque } h \to 0$$

alors l'accroissement $p^\varepsilon(b) - p^\varepsilon(a)$ pour $a = \min E_n < b = \max E_n$ est ni plus ni moins égal à Π_n^ε qui est le projecteur spectral correspondant à la portion $[\min E_n; \max E_n] \subset \sigma(H^\varepsilon)$ du spectre.

Les propositions 2.14 et 2.15 qui suivent sont les équivalents pour un niveau quelconque de la proposition 2.9 de commutation approchée pour un niveau isolé. Elles affirment que $\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]$ commute à peu près avec les multiplications et les dérivations périodiques modulo une troncature dont la place n'importe pas. La proposition 2.16 est une synthèse.

Proposition 2.14 *Si $\chi \in C^\infty_\#(\mathbb{R}^N)$ est supporté loin des croisements avec le niveau n alors pour $V \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ au moins*

$$\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[[\Pi^\varepsilon_n; V]; V]\chi(\varepsilon D) \to 0 \text{ dans } \mathcal{L}(L^2)$$

de même $[\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi^\varepsilon_n; V]\chi(\varepsilon D); V] \to 0$ *dans* $\mathcal{L}(L^2)$

et $\chi(\varepsilon D)[\frac{1}{\varepsilon}[\Pi^\varepsilon_n; V]\chi(\varepsilon D); V] \to 0 \qquad [\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi^\varepsilon_n; V]; V]\chi(\varepsilon D) \to 0$ *dans* $\mathcal{L}(L^2)$.

Preuve. Preliminaire. Régularisons V. Soit $V \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$ uniformément approchable par des éléments $\in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ dont le gradient reste borné dans $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$. C'est le cas lorsque $V \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$ a son gradient $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$. Reprenons la coupure V^c_ε de la preuve de la proposition 2.13 par construction $\dfrac{V - V^c_\varepsilon}{\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est borné.

Alors la différence des double-commutateurs pour le potentiel d'origine et sa coupure est négligeable

$$\| \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[[\Pi^\varepsilon_n; V]; V]\chi(\varepsilon D) - \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[[\Pi^\varepsilon_n; V^c_\varepsilon]; V^c_\varepsilon]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$$=\| \chi(\varepsilon D)[[\Pi^\varepsilon_n; V]; \frac{V - V^c_\varepsilon}{\varepsilon}]\chi(\varepsilon D) + \chi(\varepsilon D)[\frac{1}{\varepsilon}[\Pi^\varepsilon_n; V^c_\varepsilon]; V - V^c_\varepsilon]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$$\leq 2 \| \chi(\varepsilon D)[\Pi^\varepsilon_n; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| \frac{V - V^c_\varepsilon}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} + 2\varepsilon \| \chi(\varepsilon D)\frac{V - V^c_\varepsilon}{\varepsilon} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| \frac{1}{\varepsilon}[\Pi^\varepsilon_n; V^c_\varepsilon]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$$\leq 2 \| \chi \|_\infty \| \frac{V - V^c_\varepsilon}{\varepsilon} \|_\infty \left(\| \chi(\varepsilon D)[\Pi^\varepsilon_n; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} + 2\varepsilon \| \frac{1}{\varepsilon}[\Pi^\varepsilon_n; V^c_\varepsilon]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \right)$$

Le terme $\| \chi(\varepsilon D)[\Pi^\varepsilon_n; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)}$ tend vers zéro par la proposition 2.11 car $V \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$. Le terme $\| \frac{1}{\varepsilon}[\Pi^\varepsilon_n; V^c_\varepsilon]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)}$ est borné par la proposition 2.13.

Il suffit donc de vérifier $\| \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[[\Pi^\varepsilon_n; V^c_\varepsilon]; V^c_\varepsilon]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$ pour la coupure seulement. En d'autres termes, l'étape de régularisation achevée, on suppose $V \in \mathcal{F}L^1_c(\mathbb{R}^N)$.

Poursuivons par analogie dans la voie qui a précédemment mené à (12) (13) à savoir

$$\begin{cases} \| (1 - \Pi^\varepsilon_n)V\Pi^\varepsilon_n\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon(1 + \frac{1}{\alpha})C^{ste}_n(V; \chi) \\ \| \chi(\varepsilon D)(1 - \Pi^\varepsilon_n)V\Pi^\varepsilon_n \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon(1 + \frac{1}{\alpha})C^{ste}_n(V; \chi) \end{cases} \tag{14}$$

mais en itérant une fois la commutation contre V. Le cheminement sera très longtemps celui de la preuve 2.11 avec partout le commutateur simple remplacé par un double.

Première étape.

$$\| \frac{[H^\varepsilon; V]}{\varepsilon}(1 - \Pi^\varepsilon_n)V\Pi^\varepsilon_n\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon(1 + \frac{1}{\alpha})C^{ste}_n(V; \chi) \tag{15}$$

D'abord $\| [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1 - \Pi^\varepsilon_n)V\Pi^\varepsilon_n\chi(\varepsilon D)u \|_{L^2}$

$$=\| [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi^\varepsilon_n\chi(\varepsilon D)u \|_{L^2} \leq \| [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V\Pi^\varepsilon_n \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| \chi \|_\infty \| \Pi^\varepsilon_n u \|_{L^2}$$

$$\leq \varepsilon C_n^{ste}(V;\chi) \parallel \Pi_n^\varepsilon u \parallel_{L^2} \tag{16}$$

d'après l'estimation (9) de la preuve 2.11.

Ensuite $\frac{[H^\varepsilon;V]}{\varepsilon} = -\varepsilon\Delta V - 2\varepsilon\nabla V.\nabla$

donc $\parallel \frac{[H^\varepsilon;V]}{\varepsilon}(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2}$

$\leq \varepsilon \parallel \Delta V \parallel_\infty \parallel (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2} + 2 \parallel \nabla V \parallel_\infty \parallel \varepsilon\nabla(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2}$

$\leq (\varepsilon \parallel \Delta V \parallel_\infty + \parallel \nabla V \parallel_\infty)\varepsilon(1+\frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi)$

où le premier terme ($\varepsilon \parallel \Delta V \parallel_\infty$) résulte de (14) et le second ($\parallel \nabla V \parallel_\infty$) du calcul :

$$\parallel \varepsilon\nabla(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2}^2 = < -\varepsilon^2\Delta(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u|(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u >_{L^2}$$

$$= < [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u|(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u >_{L^2}$$

$$- < v(\frac{\cdot}{\varepsilon})(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u|(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u >_{L^2}$$

$$+ < E_n(\varepsilon D)(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u|(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u >_{L^2}$$

En utilisant (16) puis (14) on obtient

$$\parallel \varepsilon\nabla(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2}^2 \leq \varepsilon C_n^{ste}(V;\chi) \parallel \Pi_n^\varepsilon u \parallel_{L^2} \parallel (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2}$$

$$+(\parallel E_n \parallel_\infty + \parallel v \parallel_\infty) \parallel (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2}^2$$

$$\leq \varepsilon^2(1+\frac{1}{\alpha})^2 C_n^{ste}(V;\chi)^2 \parallel \Pi_n^\varepsilon u \parallel_{L^2}^2$$

Enfin le majorant obtenu $(\varepsilon \parallel \Delta V \parallel_\infty + \parallel \nabla V \parallel_\infty)C_n^{ste}(V;\chi)$ étant tout à fait analogue à $C_n^{ste}(V;\chi) \sim C_n^{ste}(\parallel \chi \parallel_\infty + \parallel \nabla\chi \parallel_{\mathcal{F}L^1})(\parallel \nabla V \parallel_{\mathcal{F}L^1} + \varepsilon \parallel \Delta V \parallel_\infty)$ on le note encore $C_n^{ste}(V;\chi)$ pour simplifier.

Seconde étape.

$$\parallel \frac{[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D) \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \varepsilon(1+\frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi) \tag{17}$$

En effet $\parallel \frac{[E_n(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D) \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \parallel \nabla E_n \parallel_\infty \parallel \nabla V \parallel_{\mathcal{F}L^1} \parallel (1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D) \parallel_{\mathcal{L}(L^2)}$

$\leq \varepsilon(1+\frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi)$ résulte de (14). On conclut en invoquant (15).

Troisième étape.

$$\parallel \frac{1}{\varepsilon}[[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D);V];V]\chi(\varepsilon D) \parallel_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0 \tag{18}$$

D'une part $[\frac{[H^\varepsilon;V]}{\varepsilon};V] = -2\varepsilon|\nabla V|^2$ d'autre part

$$\parallel [[E_n(\varepsilon D);V];V]\chi(\varepsilon D)u \parallel_{L^2} = \{\int |\int\int \hat{V}(\xi)\hat{V}(\xi')\hat{u}(\eta-\xi-\xi')\chi(\eta-\xi-\xi')$$

$$[E_n(\varepsilon\eta) - E_n(\varepsilon\eta-\varepsilon\xi) - E_n(\varepsilon\eta-\varepsilon\xi') + E_n(\varepsilon\eta-\varepsilon\xi-\varepsilon\xi')]d\xi d\xi'|^2 d\eta\}^{1/2}$$

$$\leq \| u \|_{L^2} \int\int |\hat{V}(\xi)||\hat{V}(\xi')| \| \chi(\cdot)[E_n(\cdot+\varepsilon\xi+\varepsilon\xi') - E_n(\cdot+\varepsilon\xi) - E_n(\cdot+\varepsilon\xi') + E_n(\cdot)] \|_\infty \, d\xi d\xi'$$

Pour $|\xi| \geq R$ ou $|\xi'| \geq R$ on majore l'intégrale par $\leq 4 \| E_n \|_\infty \| \chi \|_\infty \| V \|_{\mathcal{F}L^1} \int_{>R} |\hat{V}|$ qui est un majorant arbitrairement petit lorsque $R \to \infty$.

Pour $|\xi| < R$ et $|\xi'| < R$ on majore l'intégrale

$$\int\int_{|\xi|,|\xi'|<R} |\hat{V}(\xi)||\hat{V}(\xi')| \| \chi(\cdot)[E_n(\cdot+\varepsilon\xi+\varepsilon\xi') - E_n(\cdot+\varepsilon\xi) - E_n(\cdot+\varepsilon\xi') + E_n(\cdot)] \|_\infty \, d\xi d\xi'$$

$$\leq \varepsilon^2 \int\int_{|\xi|,|\xi'|<R} |\widehat{\nabla V}(\xi)||\widehat{\nabla V}(\xi')| \| \chi(\cdot) \int_0^1 \int_0^1 \nabla^2 E_n(\cdot + \varepsilon t\xi + \varepsilon t'\xi') dt dt' \|_\infty \, d\xi d\xi'$$

$$\leq \varepsilon^2 \| \nabla V \|^2_{\mathcal{F}L^1} \sup_{D_n} |\nabla^2 E_n|$$

lorsque εR est assez petit pour que l'ensemble des points dont la distance à $Supp(\chi)$ est inférieure à $2\varepsilon R$ soit contenu dans un domaine D_n de régularité C^2 de E_n. Ainsi $\sup_{D_n} |\nabla^2 E_n| (< \infty)$ est calculé au voisinage de $Supp(\chi)$ seulement.

Rappelons que E_n est analytique loin des croisements avec le niveau n.

On peut remarquer que l'estimation de $\| [[E_n(\varepsilon D); V]; V]u \|_{L^2}$ sans troncature par cette méthode conduirait à la borne $\varepsilon \| u \|_{L^2} \| \nabla^2 E_n \|_\infty \| \nabla V \|^2_{\mathcal{F}L^1}$ $(= \infty)$ qui ne convient pas car E_n est seulement lipschitzien en général.

On utilisera par la suite sans la rappeler la commutation $\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon = \Pi_n^\varepsilon \chi(\varepsilon D)$ exacte.

Fin de preuve. Par l'identité algébrique

$$[[\Pi_n^\varepsilon; V]; V] = \Pi_n^\varepsilon V^2 + V^2 \Pi_n^\varepsilon - 2V\Pi_n^\varepsilon V$$

$$= (1 - \Pi_n^\varepsilon)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\Pi_n^\varepsilon + \Pi_n^\varepsilon(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)(1 - \Pi_n^\varepsilon)$$
$$+2\Pi_n^\varepsilon V(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon - 2(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon V(1 - \Pi_n^\varepsilon)$$

on obtient une décomposition de $\chi(\varepsilon D)[[\Pi_n^\varepsilon; V]; V]\chi(\varepsilon D)$

$$= \left\{(1 - \Pi_n^\varepsilon)\chi(\varepsilon D)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon\right\} + \left\{(1 - \Pi_n^\varepsilon)\chi(\varepsilon D)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon\right\}^*$$

$$+2\left\{(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\right\}^* \left\{(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\right\} - 2\left\{\chi(\varepsilon D)(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\right\}\left\{\chi(\varepsilon D)(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\right\}^*$$

en deux termes augmentés de leurs adjoints.

Puisque $\frac{1}{\varepsilon}(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ et $\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)(1 - \Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon$ sont bornés d'après (14) il reste à négliger

$$\| \frac{1}{\varepsilon}(1 - \Pi_n^\varepsilon)\chi(\varepsilon D)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \| \frac{1}{\varepsilon}[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1 - \Pi_n^\varepsilon)\chi(\varepsilon D)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \tag{19}$$

Pour cela l'identité

$$[[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D); V]; V] = [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V^2 + V^2[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)] - 2V[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)]V$$

implique par composition à droite avec Π_n^ε et réarrangement

$$[[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D); V]; V]\Pi_n^\varepsilon = [H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-\Pi_n^\varepsilon)V^2\Pi_n^\varepsilon - 2V[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon$$

$$= -[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-\Pi_n^\varepsilon)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\Pi_n^\varepsilon + 2[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D); V](1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon$$

ce qui implique de même par composition à droite avec $\chi(\varepsilon D)$ et réarrangement

$$\frac{1}{\varepsilon}[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D)](1-\Pi_n^\varepsilon)(V^2 - 2V\Pi_n^\varepsilon V)\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$$

$$= 2\frac{[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D); V]}{\varepsilon}(1-\Pi_n^\varepsilon)V\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D) - \frac{1}{\varepsilon}[[H^\varepsilon - E_n(\varepsilon D); V]; V]\Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$$

Mais le premier terme est borné par $\varepsilon(1+\frac{1}{\alpha})C_n^{ste}(V;\chi)$ grâce à l'estimation (17) et le second tend vers zéro par la troisième étape (18). Ainsi (19) tend vers zéro comme annoncé.

Pour conclure tout à fait remarquons que changer la place de la troncature dans le résultat

$$\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[[\Pi_n^\varepsilon; V]; V]\chi(\varepsilon D) \to 0$$

ne produit que des termes négligeables au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ explicitement

$$\begin{cases} [\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D); V] - \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[[\Pi_n^\varepsilon; V]; V]\chi(\varepsilon D) \\ \qquad = \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V][\chi(\varepsilon D); V] + [\chi(\varepsilon D); V]\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D) \\ \\ [\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D); V] - \chi(\varepsilon D)[\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D); V] = [\chi(\varepsilon D); V]\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D) \\ \\ [\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V]; V]\chi(\varepsilon D) = \{\chi(\varepsilon D)[\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D); V]\}^* \end{cases}$$

On invoquera

$$\begin{cases} \| \frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \| \frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \text{ borné} \\ \\ \| [\chi(\varepsilon D); V] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0 \end{cases}$$

□

Proposition 2.15 *Si $\chi \in C_\#^\infty(\mathbb{R}^N)$ est supporté loin des croisements avec le niveau n alors pour $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ au moins*

$$\frac{1}{\varepsilon}[[\Pi_n^\varepsilon; V]; E(\varepsilon D)]\chi(\varepsilon D) \to 0 \text{ dans } \mathcal{L}(L^2) \qquad \forall E \in C_\#^0(\mathbb{R}^N)$$

semblablement $[\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D); E(\varepsilon D)] \to 0$ *dans* $\mathcal{L}(L^2)$.

Preuve. Preliminaire. Sachant que $\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D) \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné d'après la proposition 2.13, quitte à approcher uniformément $E \in C_\#^0(\mathbb{R}^N)$ par des éléments dérivables, on suppose $E \in C_\#^1(\mathbb{R}^N)$.

Puisque Π_n^ε commute avec $E(\varepsilon D)$ et $\nabla E(\varepsilon D)$ exactement

$$[\frac{1}{\varepsilon}[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D); E(\varepsilon D)] = \frac{1}{\varepsilon}[[\Pi_n^\varepsilon; V]; E(\varepsilon D)]\chi(\varepsilon D) = [\frac{1}{\varepsilon}[E(\varepsilon D); V]; \Pi_n^\varepsilon]\chi(\varepsilon D)$$

$$= [\frac{1}{\varepsilon}[E(\varepsilon D); V] + i\nabla E(\varepsilon D)\nabla V; \Pi_n^\varepsilon]\chi(\varepsilon D) + i\nabla E(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; \nabla V]\chi(\varepsilon D)$$

Or $[\Pi_n^\varepsilon; \nabla V]\chi(\varepsilon D) \to 0$ dans $\mathcal{L}(L^2)$ pour $\nabla V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ d'après la proposition 2.11
et $\| \frac{i}{\varepsilon}[E(\varepsilon D); V] - \nabla E(\varepsilon D)\nabla V \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$ d'après le lemme 2.2.
Donc $\frac{1}{\varepsilon}[[\Pi_n^\varepsilon; V]; E(\varepsilon D)]\chi(\varepsilon D) \to 0$ comme annoncé.
□

Proposition 2.16 *Si $\chi \in C_\#^\infty(\mathbb{R}^N)$ est supporté loin des croisements avec le niveau n alors $\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon = \Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ commute à peu près avec les multiplications (régulières) avec les dérivations (régulières) périodiques et plus généralement avec tout opd $a^W(x; \varepsilon D)$ périodique (régulier $a \in P$).*

Semblablement $\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D)$ commute à peu près avec les multiplications (régulières) avec les dérivations (régulières) périodiques et plus généralement avec tout opd $a^W(x; \varepsilon D)$ périodique (régulier $a \in P$) lorsque $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Les commutations approchées avec $\chi(\varepsilon D)\Pi_n^\varepsilon = \Pi_n^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ respectivement avec $\frac{1}{\varepsilon}\chi(\varepsilon D)[\Pi_n^\varepsilon; V]\chi(\varepsilon D)$ résultent pour l'essentiel de la proposition 2.11
respectivement des propositions 2.14 et 2.15.
□

On peut se demander si le défaut de commutation $[\Pi_n^\varepsilon; V] \not\to 0$ ne pourrait pas s'atténuer en appliquant de nouveau l'opération $[\cdot; V]$. En fait non, itérer le commutateur contre V n'améliore rien au sens de $\mathcal{L}(L^2)$:

Lemme 2.3 $[\Pi_n^\varepsilon; V] \to 0 \Leftrightarrow [[\Pi_n^\varepsilon; V]; V] \to 0 \Leftrightarrow [[[\Pi_n^\varepsilon; V]; V]; V] \to 0$

Preuve. Pour Π projecteur on a
$-\Pi[[\Pi; V]; V]\Pi + (1-\Pi)[[\Pi; V]; V](1-\Pi) = 2[\Pi; V]^2$
Sachant $i[\Pi; V]$ autoadjoint il en résulte
$2 \| [\Pi; V]^2 \|_{\mathcal{L}(L^2)} = 2 \| [\Pi; V] \|^2_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| [[\Pi; V]; V] \|_{\mathcal{L}(L^2)}$
On en déduit l'implication $[[\Pi_n^\varepsilon; V]; V] \to 0 \Rightarrow [\Pi_n^\varepsilon; V] \to 0$ et la réciproque est triviale.
Pour l'équivalence un cran au dessus nous aurons besoin d'identités intelligentes exprimant le triple commutateur à l'aide du double.
$\gamma_1 = [\Pi; V]$ $\gamma_1^2 = [\Pi; V]^2 = \Pi V \Pi V + V \Pi V \Pi - \Pi V^2 \Pi - V \Pi V$
$\gamma_2 = [[\Pi; V]; V] = \Pi V^2 + V^2 \Pi - 2V\Pi V$
$\gamma_3 = [[[\Pi; V]; V]; V]$
D'abord $\gamma_1 = \Pi\gamma_1 + \gamma_1\Pi$
Ensuite $[\gamma_1; V] = [\Pi\gamma_1 + \gamma_1\Pi; V] = \Pi[\gamma_1; V] + [\Pi; V]\gamma_1 + [\gamma_1; V]\Pi + \gamma_1[\Pi; V]$
s'écrit aussi $\gamma_2 = \Pi\gamma_2 + \gamma_2\Pi + 2\gamma_1^2$

Ensuite $[\gamma_2;V]=[\Pi\gamma_2+\gamma_2\Pi+2\gamma_1^2;V]=\Pi[\gamma_2;V]+[\Pi;V]\gamma_2+[\gamma_2;V]\Pi+\gamma_2[\Pi;V]+2[\gamma_1^2;V]$
s'écrit aussi $\gamma_3=\Pi\gamma_3+\gamma_3\Pi+2[\gamma_1^2;V]+\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_1$
où $[\gamma_1^2;V]=\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_1$ découle de la différence des deux lignes suivantes

$$\begin{cases} \gamma_1^2V=\gamma_1[\gamma_1;V]+\gamma_1V\gamma_1=+\gamma_1\gamma_2+\gamma_1V\gamma_1 \\ V\gamma_1^2=[V;\gamma_1]\gamma_1+\gamma_1V\gamma_1=-\gamma_2\gamma_1+\gamma_1V\gamma_1 \end{cases}$$

ainsi $\frac{1}{3}(\gamma_3-\Pi\gamma_3-\gamma_3\Pi)=\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_1$.
Enfin en superposant les égalités

$$\begin{cases} [\gamma_1\gamma_2;V]=\gamma_1[\gamma_2;V]+[\gamma_1;V]\gamma_2=+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2^2 \\ [\gamma_2\gamma_1;V]=\gamma_2[\gamma_1;V]+[\gamma_2;V]\gamma_1=+\gamma_3\gamma_1+\gamma_2^2 \end{cases}$$

on obtient $2\gamma_2^2=[\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_1;V]-\gamma_1\gamma_3-\gamma_3\gamma_1=\frac{1}{3}[\gamma_3-\Pi\gamma_3-\gamma_3\Pi;V]-\gamma_1\gamma_3-\gamma_3\gamma_1$
puis $2\parallel\gamma_2^2\parallel=2\parallel\gamma_2\parallel^2\leq\frac{2}{3}\parallel V\parallel\parallel\gamma_3\parallel+2\parallel\gamma_1\parallel\parallel\gamma_3\parallel$
On en déduit l'implication $[[[\Pi_n^\varepsilon;V];V];V]\to 0\Rightarrow[[\Pi_n^\varepsilon;V];V]\to 0$ et la réciproque est triviale.
□

Remarque. On aboutit au fait bizarre : bien que l'opérateur autoadjoint H^ε "triple commute" avec V exactement $[[[H^\varepsilon;V];V];V]=0$ sa famille spectrale ne "triple commute" pas avec V même approximativement $[[[\Pi_n^\varepsilon;V];V];V]\not\to 0$.

Au lieu de la norme forte $\parallel\cdot\parallel_{\mathcal{L}(L^2)}$ utilisée dans les propositions 2.11-2.16 on peut rechercher des structures plus faibles dans lesquelles le commutateur $[\Pi_n^\varepsilon;V]$ est (serait) négligeable pour tout niveau n. La proposition 2.17 propose une approximation motivée par la théorie des transformées de Wigner, dans un cadre fonctionnel L^2. On remarquera que $\varepsilon^{N/2}A_\varepsilon$ est précisément le noyau dont a est la transformée de Wigner.

Proposition 2.17 *Etant donné $a=a(x;\xi)\in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ notons $A_\varepsilon\in HS(L^2)$ l'opérateur de Hilbert Schmidt de noyau $(x;y)\mapsto\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\mathcal{F}^{-1}_{\%\xi}a(\frac{x+y}{2};\frac{y-x}{\varepsilon})$ de norme $\parallel A_\varepsilon\parallel_{HS}=\parallel a\parallel_{L^2}$ alors*

$$[\Pi_n^\varepsilon;V]A_\varepsilon\to 0 \text{ dans } HS(L^2)\qquad\forall V\in C_0^0(\mathbb{R}^N)$$

Preuve. Preliminaire. Commencons par régulariser V et a. Les applications bilinéaires $(V;a)\mapsto[\Pi_n^\varepsilon;V]A_\varepsilon$ sont (ε-équi)continues au sens où $\parallel[\Pi_n^\varepsilon;V]A_\varepsilon\parallel_{HS}\leq 2\parallel V\parallel_\infty\parallel a\parallel_{L^2}$.
Quitte à approcher uniformément $V\in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ par des éléments $\in\mathcal{F}L_c^1(\mathbb{R}^N)$ et à approcher a au sens de L^2 on suppose $\hat{V}$ à support compact et $a\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\otimes C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact à variables séparées.

Première étape. Expression symbolique de $[\Pi_n^\varepsilon;V]$ comme une série.
La n-fibre du projeté $\widehat{\Pi_n^\varepsilon u}=\sigma_n^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_n^\varepsilon\in\hat{V}_n^\varepsilon$
s'exprime via $\sigma_n^\varepsilon(k)=\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u}(\frac{k}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})\overline{\hat{\varphi}_n^\varepsilon}(k+\gamma^*)$
d'où $\widehat{\Pi_n^\varepsilon u}:\xi\mapsto\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u}(\xi+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon\xi+\gamma^*)\hat{\varphi}_n(\varepsilon\xi)$

en bref en notation symbolique $\Pi_n^\varepsilon = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\varphi}_n(\varepsilon D)\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon D+\gamma^*)e^{-2i\pi<\cdot|\gamma^*>/\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ où cette série d'opérateurs converge dans $\mathcal{L}_{strong}(L^2)$ au moins.

$$[\Pi_n^\varepsilon; V] = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_n(\varepsilon D)\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon D+\gamma^*); V]e^{-2i\pi<\cdot|\gamma^*>/\varepsilon}$$

Seconde étape. Le noyau de $[\Pi_n^\varepsilon; V]A_\varepsilon \in$ HS s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\xi)\,\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_n(\varepsilon x')\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon x'+\gamma^*)-\hat{\varphi}_n(\varepsilon x'-\varepsilon\xi)\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon x'-\varepsilon\xi+\gamma^*)]\mathcal{F}_{\%x}A_\varepsilon(x'-\xi+\frac{\gamma^*}{\varepsilon};y)d\xi$$

Il s'agit d'une superposition selon $\gamma^*\in\Gamma^*$ du calcul du noyau de $[\chi(\varepsilon D); V]K \in$ HS à savoir

$$(x;y)\mapsto \mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(\chi(\varepsilon x').\mathcal{F}_{\%x}[V(x)K(x;y)]\right) - V(x).\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(\chi(\varepsilon x')\mathcal{F}_{\%x}[K(x;y)]\right)$$

$$= \mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\xi)[\chi(\varepsilon x')-\chi(\varepsilon x'-\varepsilon\xi)]\mathcal{F}_{\%x}K(x'-\xi;y)d\xi$$

pour $V\in\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\chi\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $K\in L^2(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$ appliqué avec $\chi=\hat{\varphi}_n(\cdot)\overline{\hat{\varphi}_n}(\cdot+\gamma^*)$ et $K=K(x;y)=e^{-2i\pi<x|\gamma^*>/\varepsilon}A_\varepsilon(x;y)$ en conséquence.

Troisième étape.
En remarquant $\mathcal{F}_{\%x}A_\varepsilon(x';y)=\varepsilon^{N/2}e^{-2i\pi x'y}\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\%x}a(\cdot;-\varepsilon x'+\varepsilon\cdot/2)](y)$
on obtient le noyau de $[\Pi_n^\varepsilon; V]A_\varepsilon \in$ HS sous la forme exacte

$$(x;y)\mapsto \mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\varepsilon^{N/2}e^{-2i\pi(x'\ldots)y}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\xi)\,\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\hat{\varphi}_n(\varepsilon x')\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon x'+\gamma^*)-\hat{\varphi}_n(\varepsilon x'-\varepsilon\xi)\overline{\hat{\varphi}_n}(\varepsilon x'-\varepsilon\xi+\gamma^*)]$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}_{\%x}a(\cdot;-\varepsilon x'-\gamma^*+\varepsilon\xi+\varepsilon\cdot/2)](y)\,d\xi$$

Dans le terme $\mathcal{F}_{\%x}a(\cdot;-\varepsilon x'-\gamma^*+\varepsilon\xi+\varepsilon\cdot/2)$ (hyper)régulier "$\varepsilon\cdot/2$" est un parasite désagréable par la suite (qui fait obstacle aux relations d'inversion de Fourier). On peut l'éliminer (une fois pour toutes) en remarquant que $b_\varepsilon(x;y)=\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}[\mathcal{F}_{\%x}a(x';y-\varepsilon x'/2)]$ satisfait :

$$\begin{cases} A_\varepsilon(x;y)=\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}a(\frac{x+y}{2};\frac{y-x}{\varepsilon}) \qquad B_\varepsilon(x;y)=\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}b_\varepsilon(\frac{x+y}{2};\frac{y-x}{\varepsilon}) \\ \| [\Pi_n^\varepsilon; V]A_\varepsilon \|_{HS}\leq \| [\Pi_n^\varepsilon; V]B_\varepsilon \|_{HS} + 2 \| V \|_\infty \| A_\varepsilon - B_\varepsilon \|_{HS} \\ \| A_\varepsilon - B_\varepsilon \|_{HS}^2 = \| a - b_\varepsilon \|_{L^2}^2 = \int\int |\mathcal{F}_{\%x}a(x';y-\varepsilon x'/2)-\mathcal{F}_{\%x}a(x';y)|^2dx'dy \to 0 \end{cases}$$

Ainsi le noyau exact de $[\Pi_n^\varepsilon; V]B_\varepsilon \in$ HS donne une approximation du noyau de $[\Pi_n^\varepsilon; V]A_\varepsilon \in$ HS sous la forme simplifiée :

$$(x;y)\mapsto \mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\varepsilon^{N/2}e^{-2i\pi(x'\ldots)y}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\xi)d\xi\,\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\theta_{\gamma^*}(x')-\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)]a(y;-\varepsilon x'-\gamma^*+\varepsilon\xi)$$

$$\text{où par définition } \theta_{\gamma^*} : x'\mapsto \hat{\varphi}_n(x')\overline{\hat{\varphi}_n}(x'+\gamma^*)$$

Fin de preuve. Majorons la norme HS de ce terme :

$$\left\|\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\xi)d\xi\,\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}[\theta_{\gamma^*}(x')-\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)]a(y;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi)\right\|_{L^2(x';y)}$$

$$\leq \int_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\hat{V}|(\xi)d\xi \, \|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)-\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)| \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}\|_{L^2(x')}$$

$$= \int_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\hat{V}|(\xi)I_\varepsilon(\xi)d\xi \text{ avec } I_\varepsilon(\xi)^2 \text{ défini par}$$

$$I_\varepsilon(\xi)^2 = \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\theta_{\gamma^*}(x')-\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)| \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}\right)^2 dx'$$

$$\leq \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\theta_{\gamma^*}(x')-\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)|^2\right) \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}^2 dx'$$

$$\leq 2\int_{x'\in\mathbb{R}^N} \left(|\hat{\varphi}_n|^2(x')+|\hat{\varphi}_n|^2(x'-\varepsilon\xi)\right) \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}^2 dx'$$

$$= 2\int_{k\in\Omega^*} \left(\Sigma_{\mu^*\in\Gamma^*}|\hat{\varphi}_n|^2(k+\mu^*)+|\hat{\varphi}_n|^2(k+\mu^*-\varepsilon\xi)\right) \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} \parallel a(\cdot;-k-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}^2 dx'$$

$$= 4 \parallel a \parallel_{L^2}^2 \text{ vu } \varpi_{\Gamma^*}|\hat{\varphi}_n|^2 = 1$$

Pour vérifier que $I_\varepsilon(\xi)^2$ tend vers zéro pour (presque) tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ coupons l'intégrale définissant $I_\varepsilon(\xi)^2$ en deux :

$$\int_{|x'|\geq R} \left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\theta_{\gamma^*}(x')-\theta_{\gamma^*}(x'-\varepsilon\xi)| \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}\right)^2 dx'$$

$$\leq 2\int_{|x'|\geq R} \left(|\hat{\varphi}_n|^2(x')+|\hat{\varphi}_n|^2(x'-\varepsilon\xi)\right) \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}^2 dx'$$

$$\leq 4M^2 \int_{|\cdot|\geq R-\varepsilon|\xi|} |\hat{\varphi}_n|^2 \text{ où } M = \left\|\varpi_{\Gamma^*} \parallel a \parallel_{L^2_x}\right\|_{L^\infty_y} < \infty$$

et

$$\int_{|x'|\leq R} \left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\theta_{\gamma^*}(x')-\theta(x'-\varepsilon\xi)| \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}\right)^2 dx'$$

$$\leq \int_{|x'|\leq R} \left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*_R}|\theta_{\gamma^*}(x')-\theta(x'-\varepsilon\xi)|\right) \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} \parallel a(\cdot;-x'-\gamma^*+\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}^2 dx'$$

$$\leq M^2 \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*_R} \parallel \theta_{\gamma^*}(\cdot)-\theta_{\gamma^*}(\cdot-\varepsilon\xi) \parallel_{L^2}^2$$

où $\Gamma^*_R = \{\gamma^* \in \Gamma^* \,|\, |\gamma^*| \leq R+\varepsilon|\xi|+|Supp_\xi(a)|\} \subset \Gamma^*$ est fini puisque a est à support compact par construction préliminaire.

Lorsque $\gamma^* \in \Gamma^*$ est fixé $\theta_{\gamma^*} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a ses $\varepsilon\xi$-translatées tout près d'où

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(\xi) \leq 2M\sqrt{\int_{\geq R} |\hat{\varphi}_n|^2}$$

Puisque dans ce raisonnement R est arbitraire, on obtient la négligeabilité du terme de départ $\int_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\hat{V}|(\xi)I_\varepsilon(\xi)d\xi$ par convergence dominée.

□

Proposition 2.18 *Pour* $\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}K_\varepsilon \in HS(L^2)$ *borné* $W^\varepsilon([\Pi_n^\varepsilon;V]K_\varepsilon) \to 0$ *faiblement* $\sigma(L^2;L^2)$.

PREUVE. En effet $< W^\varepsilon(i[\Pi_n^\varepsilon;V]K_\varepsilon)|a >_{L^2} =< W^\varepsilon(i[\Pi_n^\varepsilon;V]K_\varepsilon)|W^\varepsilon(\varepsilon^{N/2}A_\varepsilon) >_{L^2}$
$= \frac{1}{\varepsilon^N} < W^1(i[\Pi_n^\varepsilon;V]K_\varepsilon)|W^1(\varepsilon^{N/2}A_\varepsilon) >_{L^2} = \frac{1}{\varepsilon^N} < i[\Pi_n^\varepsilon;V]K_\varepsilon|\varepsilon^{N/2}A_\varepsilon >_{HS}$
$=< \frac{1}{\varepsilon^{N/2}}K_\varepsilon|i[\Pi_n^\varepsilon;V]A_\varepsilon >_{HS} \to 0 \qquad \forall a \in L^2$
car $\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}K_\varepsilon \in$ HS reste borné et car $i[\Pi_n^\varepsilon;V]A_\varepsilon$ dans HS tend vers zéro fortement d'après la proposition 2.17. Ici $W^\varepsilon(K) : (x;\xi) \mapsto \frac{1}{\varepsilon^N}W^1(K)(x;\frac{\xi}{\varepsilon})$ désigne la transformée de Wigner des noyaux $K \in$ HS présentée dans la section 1.4.
□

Pour finir ce paragraphe consacré à l'étude du commutateur $[\Pi_n^\varepsilon;V]$ les propositions 2.19 et 2.20 donnent deux résultats très similaires (presque équivalents) de commutation approchée au niveau des fibres.

Proposition 2.19 *Soient* $\sigma^\varepsilon \in \mathcal{L}[L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)]$
respectivement $\tau^\varepsilon \in \mathcal{L}[L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)]$ *les opérations définies par*

$$\begin{cases} \sigma_u^\varepsilon : \xi \mapsto \frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u}(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})a_{\gamma^*}(\xi) \\ \\ \tau_u^\varepsilon : \xi \mapsto \frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u}(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})b_{\gamma^*}(\xi) \end{cases}$$

où par hypothèse

$$\begin{cases} \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla a_{\gamma^*}|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|b_{\gamma^*}|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla b_{\gamma^*}|^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Alors $\forall V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$, *uniformément en* $u;v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *bornés, uniformément en* $x' \in \mathbb{R}^N$,

$$\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) \to 0$$

faiblement dans les mesures tempérées en ξ, *en particulier la convergence vaut dans* S'.
Précisément $\forall\varphi \in C^0(\mathbb{R}^N)$ *à décroissance rapide*

$$\int_{\mathbb{R}^N}[\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)]\varphi(\xi)d\xi \to 0 \qquad (20)$$

PREUVE. Etant donné $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide, il s'agit de vérifier la convergence (20) uniformément en $x' \in \mathbb{R}^N$ et uniformément en $u,v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bornés.
Preliminaire. On va localiser φ et régulariser V.
Remarquons avant tout $|\sigma_u^\varepsilon|^2(\xi) \le \left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty}\frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\hat{u}|^2(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})$
et donc pour $X \subset \mathbb{R}^N$ borné $\int_X|\sigma_u^\varepsilon|^2 \le |\Gamma_X^*|\left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty} \| u \|_{L^2}$
où $\Gamma_X^* \subset \Gamma^*$ désigne une partie finie suffisamment étendue pour que

$$X \subset \cup_{\gamma^*\in\Gamma_X^*}(\gamma^*+\overline{\Omega}^*)$$

En notant $\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)$ sans les arguments pour simplifier l'écriture :

- $\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}\int_{\xi\in\gamma^*+\Omega^*}|\sigma^\varepsilon_{Vu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{Vv}||\varphi(\xi)|d\xi$
  $\leq 2\left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty}\parallel V\parallel_\infty\parallel u\parallel_{L^2}\parallel v\parallel_{L^2}\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}\parallel\varphi\parallel_{L^\infty(\gamma^*+\Omega^*)}$
- $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}\int_{\xi\in\gamma^*+\Omega^*}|\sigma^\varepsilon_{(V-V_c)u}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{(V-V_c)v}||\varphi(\xi)|d\xi$
  $\leq 2\left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty}\parallel V-V_c\parallel_\infty\parallel u\parallel_{L^2}\parallel v\parallel_{L^2}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\parallel\varphi\parallel_{L^\infty(\gamma^*+\Omega^*)}$
- $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}\int_{\xi\in\gamma^*+\Omega^*}|\sigma^\varepsilon_{V_cu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{V_cv}||\varphi-\varphi_c|(\xi)d\xi$
  $\leq 2|\Gamma_f^*|\left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty}\parallel V_c\parallel_\infty\parallel u\parallel_{L^2}\parallel v\parallel_{L^2}\parallel\varphi-\varphi_c\parallel_{L^\infty[\cup_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}(\gamma^*+\Omega^*)]}$

Par somme on obtient un contrôle arbitrairement petit de

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}[\sigma^\varepsilon_{Vu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{Vv}]\varphi(\xi)d\xi-\int_{\xi\in\cup_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}(\gamma^*+\Omega^*)}[\sigma^\varepsilon_{V_cu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{V_cv}]\varphi_c(\xi)d\xi$$

en choisissant successivement
- $V_c\in\mathcal{F}L^1_c$ approximation uniforme de $V\in C^0_0$,
- $\Gamma_f^*\subset\Gamma^*$ fini grand,
- $\varphi_c\in C^\infty_c$ approximation uniforme de φ dans le compact $\cup_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}(\gamma^*+\overline{\Omega}^*)$.

Cette procédure permet en régularisant V et en localisant φ de réduire le problème (20) au cas où $\varphi\in C^\infty_c$ et $V\in\mathcal{F}L^1_c$.

Première étape. (Approximation $L^1_{loc}(\xi)$ fort) On a

$$\begin{cases}\sigma^\varepsilon_{Vu}(\xi)\approx\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\sigma^\varepsilon_u(\xi-\varepsilon\eta)d\eta \text{ dans } L^2_{loc}(\xi)\\ \tau^\varepsilon_{Vu}(\xi)\approx\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\tau^\varepsilon_u(\xi-\varepsilon\eta)d\eta \text{ dans } L^2_{loc}(\xi)\end{cases}$$

En effet l'estimation $\left|\sigma^\varepsilon_{Vu}(\xi)-\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\sigma^\varepsilon_u(\xi-\varepsilon\eta)d\eta\right|$

$$=\left|\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\hat{u}(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon}-\eta)[a_{\gamma^*}(\xi)-a_{\gamma^*}(\xi-\varepsilon\eta)]d\eta\right|$$

$$\leq\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}|\hat{V}|(\eta)\left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\frac{1}{\varepsilon^N}|\hat{u}|^2(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon}-\eta)\right)^{1/2}\left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}(\xi)-a_{\gamma^*}(\xi-\varepsilon\eta)|^2\right)^{1/2}d\eta$$

$$\leq\varepsilon\parallel\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla a_{\gamma^*}|^2\parallel_{L^\infty}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}|\widehat{\nabla V}|(\eta)\left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\frac{1}{\varepsilon^N}|\hat{u}|^2(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon}-\eta)\right)^{1/2}d\eta$$

montre que pour tout $X\subset\mathbb{R}^N$ borné

$$\frac{\int_X|\sigma^\varepsilon_{Vu}-\sigma^\varepsilon_u*\frac{1}{\varepsilon^N}\hat{V}(\frac{\cdot}{\varepsilon})|^2}{\parallel u\parallel^2_{L^2}}\leq|\Gamma^*_X|\varepsilon^2\parallel\nabla V\parallel^2_{\mathcal{F}L^1}\parallel\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla a_{\gamma^*}|^2\parallel_{L^\infty}\ (\to 0)$$

Seconde étape. (Approximation $L^1_{loc}(\xi)$ faible)
Sachant par l'étape précédente qu'au sens de $L^1_{loc}(\xi)$ fort

$$\sigma^\varepsilon_{Vu}(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}^\varepsilon_v(\xi-\varepsilon x'/2)-\sigma^\varepsilon_u(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}^\varepsilon_{Vv}(\xi-\varepsilon x'/2)$$

$$\approx \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{V}(\eta)\sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2-\varepsilon\eta)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)d\eta - \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{V}(\eta)\sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2+\varepsilon\eta)d\eta$$

on a en particulier $\forall\varphi\in C_c^\infty$

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} [\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)]\varphi(\xi)d\xi$$

$$\approx \int\int \hat{V}(\eta)\sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2-\varepsilon\eta/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2+\varepsilon\eta/2)[\varphi(\xi+\varepsilon\eta/2)-\varphi(\xi-\varepsilon\eta/2)]d\xi d\eta$$

d'où une majoration du type

$$|I_\varepsilon(\varphi)| \leq \varepsilon|\Gamma_{\varphi,V}^*| \parallel \nabla\varphi \parallel_{L^\infty} \parallel \nabla V \parallel_{\mathcal{F}L^1} \parallel u \parallel_{L^2} \parallel v \parallel_{L^2} \left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|a_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty}^{1/2} \left\|\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|b_{\gamma^*}|^2\right\|_{L^\infty}^{1/2}$$

où $\Gamma_{\varphi,V}^* \subset \Gamma^*$ est une partie finie suffisamment étendue, fonction des supports bornés de φ et $\hat{V}$.

Le théorème résulte de cette borne.

□

Proposition 2.20 *Soient $\sigma^\varepsilon \in \mathcal{L}[L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)]$ respectivement $\tau^\varepsilon \in \mathcal{L}[L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)]$ les opérations définies par*

$$\begin{cases} \sigma_u^\varepsilon : \xi \mapsto \int_\Omega \left(\varepsilon^{N/2}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}u(\varepsilon x-\varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\gamma\xi}\right)\psi(x;\xi)dx \\ \tau_u^\varepsilon : \xi \mapsto \int_\Omega \left(\varepsilon^{N/2}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}u(\varepsilon x-\varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\gamma\xi}\right)\phi(x;\xi)dx \end{cases}$$

où par hypothèse $\psi;\phi \in C_b^0[\mathbb{R}_\xi^N \to L^2(\Omega_x)]$.

Alors $\forall V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$, uniformément en $u;v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bornés, uniformément en $x' \in \mathbb{R}^N$,

$$\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) \to 0$$

faiblement dans les mesures tempérées en ξ, en particulier la convergence vaut dans S'.

Précisément $\forall\varphi \in C^0(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)]\varphi(\xi)d\xi \to 0$$

Preuve. Preliminaire. Commencons par localiser φ et régulariser V.

La norme $\parallel \psi \parallel_{L^\infty[\mathbb{R}_\xi^N \to L^2(\Omega_x)]}$ sera notée brièvement $\parallel \psi \parallel$.

Remarquons avant tout $|\sigma_u^\varepsilon|^2(\xi) \leq \parallel \psi \parallel \left\|\varepsilon^{N/2}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}u(\varepsilon x-\varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\gamma\xi}\right\|_{L^2(\Omega)}^2$

et donc pour $X \subset \mathbb{R}^N$ borné $\int_X |\sigma_u^\varepsilon|^2 \leq |\Gamma_X^*| \parallel \psi \parallel \parallel u \parallel_{L^2}^2$

où $\Gamma_X^* \subset \Gamma^*$ désigne une partie finie suffisamment étendue pour que

$$X \subset \cup_{\gamma^*\in\Gamma_X^*}(\gamma^* + \overline{\Omega}^*)$$

En notant $\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)$ sans les arguments pour simplifier l'écriture :

- $\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}\int_{\xi\in\gamma^*+\Omega^*}|\sigma^\varepsilon_{Vu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{Vv}||\varphi(\xi)|d\xi$
  $\leq 2\parallel\psi\parallel\parallel\phi\parallel\parallel V\parallel_\infty\parallel u\parallel_{L^2}\parallel v\parallel_{L^2}\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}\parallel\varphi\parallel_{L^\infty(\gamma^*+\Omega^*)}$
- $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}\int_{\xi\in\gamma^*+\Omega^*}|\sigma^\varepsilon_{(V-V_c)u}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{(V-V_c)v}||\varphi(\xi)|d\xi$
  $\leq 2\parallel\psi\parallel\parallel\phi\parallel\parallel V-V_c\parallel_\infty\parallel u\parallel_{L^2}\parallel v\parallel_{L^2}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\parallel\varphi\parallel_{L^\infty(\gamma^*+\Omega^*)}$
- $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}\int_{\xi\in\gamma^*+\Omega^*}|\sigma^\varepsilon_{V_cu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{V_cv}||\varphi-\varphi_c|(\xi)d\xi$
  $\leq 2|\Gamma_f^*|\parallel\psi\parallel\parallel\phi\parallel\parallel V_c\parallel_\infty\parallel u\parallel_{L^2}\parallel v\parallel_{L^2}\parallel\varphi-\varphi_c\parallel_{L^\infty[\cup_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}(\gamma^*+\Omega^*)]}$

Par somme on obtient un contrôle arbitrairement petit de

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}[\sigma^\varepsilon_{Vu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{Vv}]\varphi(\xi)d\xi-\int_{\xi\in\cup_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}(\gamma^*+\Omega^*)}[\sigma^\varepsilon_{V_cu}\overline{\tau}^\varepsilon_v-\sigma^\varepsilon_u\overline{\tau}^\varepsilon_{V_cv}]\varphi_c(\xi)d\xi$$

en choisissant successivement
- $V_c\in\mathcal{F}L^1_c$ approximation uniforme de $V\in C^0_0$,
- $\Gamma_f^*\subset\Gamma^*$ fini grand,
- $\varphi_c\in C^\infty_c$ approximation uniforme de φ dans le compact $\cup_{\gamma^*\in\Gamma_f^*}(\gamma^*+\overline{\Omega}^*)$.

Cette étape permet en régularisant V et en localisant φ de réduire le problème au cas où $\varphi\in C^\infty_c$ et $V\in\mathcal{F}L^1_c$.

Première étape. (Approximation $L^1_{loc}(\xi)$ fort) On a

$$\begin{cases}\sigma^\varepsilon_{Vu}(\xi)\approx\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\sigma^\varepsilon_u(\xi-\varepsilon\eta)d\eta \text{ dans } L^2_{loc}(\xi)\\ \tau^\varepsilon_{Vu}(\xi)\approx\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\tau^\varepsilon_u(\xi-\varepsilon\eta)d\eta \text{ dans } L^2_{loc}(\xi)\end{cases}$$

En effet l'estimation $\left|\sigma^\varepsilon_{Vu}(\xi)-\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\sigma^\varepsilon_u(\xi-\varepsilon\eta)d\eta\right|$

$$=\left|\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{V}(\eta)\int_{x\in\Omega}\left(\varepsilon^{N/2}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}u(\varepsilon x-\varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\gamma(\xi-\varepsilon\eta)}\right)\left(\psi(x;\xi)e^{+2i\pi\varepsilon x\eta}-\psi(x;\xi-\varepsilon\eta)\right)dxd\eta\right|$$

$$\leq\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}|\hat{V}|(\eta)\left\|\varepsilon^{N/2}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}u(\varepsilon x-\varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\gamma(\xi-\varepsilon\eta)}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\psi(x;\xi)-e^{-2i\pi\varepsilon x\eta}\psi(x;\xi-\varepsilon\eta)\right\|_{L^2(\Omega)}d\eta$$

montre que pour tout $X\subset\mathbb{R}^N$ borné

$$\frac{\int_X|\sigma^\varepsilon_{Vu}-\sigma^\varepsilon_u*\frac{1}{\varepsilon^N}\hat{V}(\frac{\cdot}{\varepsilon})|^2}{\parallel u\parallel^2_{L^2}}\leq|\Gamma^*_X|\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}|\hat{V}|(\eta)\sup_{\xi\in X}\left\|\psi(x;\xi)-e^{-2i\pi\varepsilon x\eta}\psi(x;\xi-\varepsilon\eta)\right\|_{L^2(\Omega)}d\eta\right)^2$$

Cette quantité tend vers zéro par convergence dominée en effet à η fixé

$$\begin{cases}\psi(x;\xi)-e^{-2i\pi\varepsilon x\eta}\psi(x;\xi-\varepsilon\eta)\overset{L^2(\Omega)}{\to}0 \text{ localement uniformément en } \xi\\ \sup_{\xi\in X}\|\psi(x;\xi)-e^{-2i\pi\varepsilon x\eta}\psi(x;\xi-\varepsilon\eta)\|_{L^2(\Omega)}\leq 2\parallel\psi\parallel\end{cases}$$

Seconde étape. (Approximation $L^1_{loc}(\xi)$ faible)
Sachant par l'étape précédente qu'au sens de $L^1_{loc}(\xi)$ fort

$$\sigma^\varepsilon_{Vu}(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}^\varepsilon_v(\xi-\varepsilon x'/2)-\sigma^\varepsilon_u(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}^\varepsilon_{Vv}(\xi-\varepsilon x'/2)$$

$$\approx \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{V}(\eta)\sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2-\varepsilon\eta)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)d\eta - \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{V}(\eta)\sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2+\varepsilon\eta)d\eta$$

on a en particulier $\forall\varphi \in C_c^\infty$

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} [\sigma_{Vu}^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2) - \sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau}_{Vv}^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2)]\varphi(\xi)d\xi$$

$$\approx \int\int \hat{V}(\eta)\sigma_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2-\varepsilon\eta/2)\overline{\tau}_v^\varepsilon(\xi-\varepsilon x'/2+\varepsilon\eta/2)[\varphi(\xi+\varepsilon\eta/2)-\varphi(\xi-\varepsilon\eta/2)]d\xi d\eta$$

d'où une majoration du type

$$|I_\varepsilon(\varphi)| \leq \varepsilon|\Gamma^*_{\varphi,V}| \parallel \nabla\varphi \parallel_{L^\infty} \parallel \nabla V \parallel_{\mathcal{F}L^1} \parallel u \parallel_{L^2} \parallel v \parallel_{L^2} \parallel \psi \parallel \parallel \phi \parallel$$

où $\Gamma^*_{\varphi,V} \subset \Gamma^*$ est une partie finie suffisamment étendue, fonction des supports bornés de φ et $\hat{V}$. Le théorème résulte de cette borne.

$\square$

2.4 Homogénéisation dans un niveau isolé.

Résumé. Cette partie est consacrée à l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau isolé. L'énoncé obtenu concernant les états mélangés (théorème 2.10) est très satisfaisant. La version concernant les états purs repose sur une hypothèse de petitesse sur $\| V \|_\infty$ probablement purement technique car le théorème 2.9 sera démontré en dimension un sans restriction sur $\| V \|_\infty$.

Supposons que p indexe un niveau isolé simple. Projetons l'équation d'évolution de la solution globale u de l'équation de Schrödinger d'hamiltonien $H^\varepsilon + V$. On obtient une équation d'évolution pour la transformée de Wigner du niveau p :

$$i\varepsilon\partial_t u = H^\varepsilon u + Vu \Rightarrow i\varepsilon\partial_t(\Pi_p^\varepsilon u) = H^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u) + \Pi_p^\varepsilon(Vu)$$

$$i\varepsilon\partial_t w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) = w_s^\varepsilon(H^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u; H^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon(Vu);\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon(Vu))$$

Dorénavant $u = u^\varepsilon(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ dépend du temps t et du paramètre ε.

Les deux premiers termes sont facilement équivalents à $-i\varepsilon\nabla E_p(k)\nabla_x w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ par la régularité analytique (C^1 suffit) du niveau E_p. Les deux derniers termes sont (formellement) équivalents à $+i\varepsilon\nabla V(x)\nabla_k w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ moyennant des hypothèses à préciser.

Ainsi le problème de l'homogénéisation de la transformée de Wigner du niveau p se résume à la question : pourquoi les trois séries suivantes d'apparences similaires ont même limite ?

- $\frac{1}{\varepsilon}\left(w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon(Vu);\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon(Vu))\right)$
  $= \Sigma_{\gamma\in\Gamma} e^{+2i\pi k\gamma} \int\int \frac{V(y)-V(z)}{\varepsilon} K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$
- $\frac{1}{\varepsilon}\left(w_s^\varepsilon(V\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;V\Pi_p^\varepsilon u)\right)$
  $= \Sigma_{\gamma\in\Gamma} e^{+2i\pi k\gamma} \int\int \frac{V(x-\varepsilon\gamma/2)-V(x+\varepsilon\gamma/2)}{\varepsilon} K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$
- $i\nabla V(x)\nabla_k w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$
  $= \Sigma_{\gamma\in\Gamma} e^{+2i\pi k\gamma} \int\int -\gamma\nabla V(x) K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$

où le noyau K_p^ε est défini par l'expression (2).

Remarque. Dans ces formules intégrales, l'approximation du quotient différentiel de V par l'accroissement linéaire correspondant, légitime lorsque $V \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, permet d'isoler les problèmes dûs au potentiel extérieur (V) dans un (simple) facteur multiplicatif (∇V) quitte à remplacer V par le potentiel linéaire. C'est le lemme 2.4. Cette réduction au cas linéaire (qui ne trouvera d'application par la suite qu'en dimension un) prolonge la discussion de la proposition 2.10.

Lemme 2.4 *Pour $V \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ [3], le γ^{ieme} coefficient de Fourier de*
$\frac{1}{\varepsilon}\left(w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon(Vu);\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon(Vu))\right) = \frac{2i}{\varepsilon}\ Im\ w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon(Vu);\Pi_p^\varepsilon u)$
vaut à peu près $\nabla V(x)\int\int \frac{y-z}{\varepsilon}K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$
l'approximation s'entend au sens de $L^1(\mathbb{R}_x^N)$.
Le γ^{ieme} coefficient de Fourier de
$\frac{1}{\varepsilon}\left(w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon(Vu);\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon(Vu))\right) - i\nabla V(x)\nabla_k w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$
vaut à peu près $\nabla V(x)\int\int(\frac{y-z}{\varepsilon}+\gamma)K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$
l'approximation s'entend au sens de $L^1(\mathbb{R}_x^N)$.

Preuve. Introduisons le quotient différentiel

$$Q_\varepsilon^\gamma(x;y;z) = \frac{V(x-\varepsilon\gamma/2+y) - V(x+\varepsilon\gamma/2+z) - (y-z-\varepsilon\gamma)\nabla V(x)}{\varepsilon}$$

alors

$$\int\int \frac{V(y)-V(z)}{\varepsilon}K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$$

$$= \int\int Q_\varepsilon^\gamma(x;y;z)K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};x+\frac{\varepsilon\gamma}{2}+z)u(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+y)\overline{u}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2}+z)dydz$$

$$+\nabla V(x)\int\int \frac{y-z}{\varepsilon}K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$$

Le premier terme dans lequel Q_ε^γ figure est négligeable car dominé par

$$\frac{1}{\varepsilon}\parallel \nabla^2 V \parallel_\infty \int\int |y-z-\varepsilon\gamma|(|y|+|z|+|\varepsilon\gamma|)$$

$$|K_p^\varepsilon|(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+y)|K_p^\varepsilon|(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};x+\frac{\varepsilon\gamma}{2}+z)||u|(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+y)|u|(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2}+z)dydz$$

$$= \varepsilon \parallel \nabla^2 V \parallel_\infty \int\int |y-z-\gamma|(|y|+|z|+|\gamma|)$$

$$|K_p^1|(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{\gamma}{2};\frac{x}{\varepsilon}-\frac{\gamma}{2}+y)|K_p^1|(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{\gamma}{2};\frac{x}{\varepsilon}+\frac{\gamma}{2}+z)||u|(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+\varepsilon y)|u|(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2}+\varepsilon z)dydz$$

$$\leq \varepsilon \parallel \nabla^2 V \parallel_\infty \int\int(|y|+|z|+|\gamma|)^2 A\exp(-B|y|)A\exp(-B|z|)|u|(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+\varepsilon y)|u|(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2}+\varepsilon z)dydz$$

de norme $L^1(\mathbb{R}_x^N)$ majorée par

$$\varepsilon \parallel \nabla^2 V \parallel_\infty \parallel u \parallel_{L^2}^2 \int\int(|y|+|z|+|\gamma|)^2 A\exp(-B|y|)A\exp(-B|z|)dydz$$

Il suffit d'appliquer à Q_ε^γ des inégalités d'accroissements finis.

La même idée s'applique à l'identification
de $\nabla V(x)\int\int(\frac{y-z}{\varepsilon}+\gamma)K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$
avec $\int\int \frac{V(y+\frac{\varepsilon\gamma}{2})-V(z-\frac{\varepsilon\gamma}{2})}{\varepsilon}K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$

[3] ∇V uniformément continu borné suffit.

respectivement avec $\int\int \frac{V(y)-V(z-\varepsilon\gamma)}{\varepsilon} K_p^\varepsilon(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2};y)\overline{K_p^\varepsilon}(x+\frac{\varepsilon\gamma}{2};z)u(y)\overline{u}(z)dydz$

Il suffit de remarquer $|V(x+y)-V(x+z)-(y-z)\nabla V(x+\frac{y+z}{2})| \leq \frac{|y-z|^2}{2} \parallel \nabla^2 V \parallel_\infty$

respectivement $|V(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+y)-V(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2}+z)-(y-z)\nabla V(x-\frac{\varepsilon\gamma}{2})| \leq \frac{|y-z|^2}{2} \parallel \nabla^2 V \parallel_\infty$

qui sont des inégalités d'accroissements finis.

□

Nous attaquons maintenant en détail le problème :

$$\partial_t w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) + \nabla E_p(k)\nabla_x w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - \nabla V(x)\nabla_k w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) \overset{?}{\to} 0$$

en tâchant de vérifier la négligeabilité de la différence

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big(w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon(Vu);\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon(Vu))\Big) - \frac{1}{\varepsilon}\Big(w_s^\varepsilon(V\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;V\Pi_p^\varepsilon u)\Big)$$

à l'aide des hypothèses $u \in L^2$ borné, $H^\varepsilon u \in L^2$ borné, $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ et ∇V uniformément continu borné.

La limite $\varepsilon \to 0$ dans l'équation exacte :

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) + \nabla E_p(k)\nabla_x w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - \nabla V(x)\nabla_k w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)\\
&= -\frac{i}{\varepsilon}\Big(w_s^\varepsilon(H^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;H^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u)\Big) + \nabla E_p(k)\nabla_x w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)\\
&\quad -\frac{i}{\varepsilon}\Big(w_s^\varepsilon(V\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;V\Pi_p^\varepsilon u)\Big) - \nabla V(x)\nabla_k w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)\\
&\qquad -2\ \mathrm{Re}\ w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)
\end{aligned}$$

donne l'équation homogénéisée :

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_s^0(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) + \nabla E_p(k)\nabla_x w_s^0(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) - \nabla V(x)\nabla_k w_s^0(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)\\
&= -2\ \mathrm{Re}\ w_s^0(c_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) = -2\nabla V(x)\ \mathrm{Re}\ w_s^0(i\frac{[\Pi_p^\varepsilon;r]}{\varepsilon}u;\Pi_p^\varepsilon u) \qquad (21)
\end{aligned}$$

Plus précisément le symbole $w_s^0(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ sous-entend une extraction dans $\varepsilon \to 0$, moyennant quoi $w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ converge dans P' localement uniformément en temps.

L'existence d'une telle extraction résulte (du procédé diagonal et) de l'équicontinuité de la famille $\{w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) \mid 0<\varepsilon<1\} \subset C^0(\mathbb{R}_t;P')$. Cette information est contenue dans l'équation exacte sous la forme :

" $\partial_t w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) \in P'$ est borné uniformément en temps "

C'est un critère classique d'équicontinuité en temps.

Remarquons pour commencer que le terme source $-2\ \mathrm{Re}\ w_s^0(c_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ admet différentes écritures équivalentes :

Lemme 2.5 *A travers la transformée de Wigner périodique c_p^ε et Π_p^ε sont autoadjoints*

$$\begin{cases} w_s^0(c_p^\varepsilon u; v) = w_s^0(u; c_p^\varepsilon v) \\ w_s^0(\Pi_p^\varepsilon u; v) = w_s^0(u; \Pi_p^\varepsilon v) \end{cases}$$

lorsque u et v désignent des suites bornées dans L^2,
en particulier $w_s^0(c_p^\varepsilon u; u) = w_s^0(u; c_p^\varepsilon u) = \ Re\ w_s^0(c_p^\varepsilon u; u) = 2\ Re\ w_s^0(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u)$

Preuve. C'est un fait général si $c_\varepsilon = c_\varepsilon^* \in \mathcal{L}(L^2)$ commute à peu près avec les opd $a^W(x; \varepsilon D)$ périodiques réguliers alors $w_s^0(c_\varepsilon u; v) = w_s^0(u; c_\varepsilon v)$ car

$$| < w_s^\varepsilon(c_\varepsilon u; v) - w_s^\varepsilon(u; c_\varepsilon v)|a >_{P' \times P} = < \overline{v}|[a^W(x; \varepsilon D); c_\varepsilon]u >_{S' \times S} |$$

$$\leq \| u \|_{L^2} \| v \|_{L^2} \| [a^W(x; \varepsilon D); c_\varepsilon] \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0 \text{ uniformément en } u; v \in L^2 \text{ bornés}$$

Comme c_p^ε et Π_p^ε commutent à peu près avec les opd $a^W(x; \varepsilon D)$ périodiques réguliers (voir théorème 2.9) on a

$$2 \text{ Re } w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon u; c_p^\varepsilon u)$$

$$\approx w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon u; u) + w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; u) = w_s^\varepsilon((\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon + c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon)u; u) = w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon u; u)$$

Rappelons aussi l'identité algébrique $\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon + c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon = c_p^\varepsilon$.

□

Lemme 2.6 *L'opérateur $\Pi_n^\varepsilon \dfrac{[H^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné lorsque $V_\varepsilon \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ satisfait les conditions*

$$\nabla V_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ borné} \qquad \varepsilon \Delta V_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ borné}$$

Preuve. Pour $u \in H^2$ et $v \in H^2$ appliquons (7) par dualité à

$$\left| - < \Pi_n^\varepsilon \frac{[H^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon} u|v >_{L^2} = < u|\frac{[H^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon} \Pi_n^\varepsilon v >_{L^2} \right| \leq \| u \|_{L^2} \| v \|_{L^2} C_n^{ste}(\| \varepsilon \Delta V_\varepsilon \|_\infty + \| \nabla V_\varepsilon \|_\infty)$$

L'opérateur $\Pi_n^\varepsilon \dfrac{[H^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon}$ de domaine naturel $H^2 \subset L^2$ est un opérateur borné densément défini qui s'identifie à un élément de $\mathcal{L}(L^2)$ dont la norme reste bornée dans les conditions du lemme.

□

Lemme 2.7 *Lorsque $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ est lipschitzien $\varepsilon \nabla c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné.*

Preuve. Soit $V_\varepsilon = V * \rho_\varepsilon \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ l'approximation par convolution avec $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ où $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support compact dans la boule unité est normalisé $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$.

$$\| \frac{V - V_\varepsilon}{\varepsilon} \|_\infty \leq \| \nabla V \|_\infty \qquad \| \nabla V_\varepsilon \|_\infty \leq \| \nabla V \|_\infty \qquad \| \varepsilon \Delta V_\varepsilon \|_\infty \leq \| \nabla V \|_\infty \| \nabla \rho \|_{L^1}$$

Notons $\gamma_p^\varepsilon = i\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon}$ l'analogue du commutateur $c_p^\varepsilon = i\dfrac{[\Pi_p^\varepsilon; V]}{\varepsilon}$ pour le potentiel régularisé.

D'abord $\gamma_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné d'après la proposition 2.7.

Ensuite la différence

$$\varepsilon\nabla c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon - \varepsilon\nabla\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon = i\varepsilon\nabla\Pi_p^\varepsilon\frac{V-V_\varepsilon}{\varepsilon}\Pi_p^\varepsilon - i\frac{V-V_\varepsilon}{\varepsilon}\varepsilon\nabla\Pi_p^\varepsilon + i(\nabla V_\varepsilon - \nabla V)\Pi_p^\varepsilon$$

reste bornée

$$\| \varepsilon\nabla c_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon - \varepsilon\nabla\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq 2 \| \frac{V-V_\varepsilon}{\varepsilon} \|_\infty \| \varepsilon\nabla\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} + \| \nabla V_\varepsilon - \nabla V \|_\infty$$

$$\leq 2 \| \nabla V \|_\infty (1 + \| \varepsilon\nabla\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)})$$

car $\| \varepsilon\nabla\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| E_p \|_\infty + \| v \|_\infty$ reste borné d'après la première étape de la preuve de la proposition 2.11.

Enfin (par cette même idée) on a

$$\| \varepsilon\nabla\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u \|_{L^2}^2 = < -\varepsilon^2\Delta\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u | \gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u >_{L^2} \leq \| -\varepsilon^2\Delta\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u \|_{L^2} \| \gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u \|_{L^2}$$

avec

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2\Delta\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon &= (H^\varepsilon - E_p(\varepsilon D))\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon + (E_p(\varepsilon D) - v)\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon \\ &= -i\frac{[H^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon}\Pi_p^\varepsilon + i\frac{[E_p(\varepsilon D); V_\varepsilon]}{\varepsilon}\Pi_p^\varepsilon + (E_p(\varepsilon D) - v)\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon \end{aligned}$$

où $\dfrac{[H^\varepsilon; V_\varepsilon]}{\varepsilon}\Pi_p^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ est borné par (7) car $\| \varepsilon\Delta V_\varepsilon \|_\infty + \| \nabla V_\varepsilon \|_\infty \leq C^{ste} \| \nabla V \|_\infty$,

et $\dfrac{[E_p(\varepsilon D); V_\varepsilon]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ est borné par (10) car $\| E_p \|_{\mathcal{F}l^1} + \| \nabla V_\varepsilon \|_\infty \leq C^{ste} + \| \nabla V \|_\infty$.

On en déduit $\| \varepsilon\nabla c_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| \varepsilon\nabla\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} + C_p^{ste} \| \nabla V \|_\infty$
avec $\| \varepsilon\nabla\gamma_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_p^{ste}(1 + \| \nabla V \|_\infty)$, et le lemme 2.7 est prouvé.
□

Dans la source $(-2 \text{ Re })w_s^0(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u)$ décomposons $u = \Pi_p^\varepsilon u + \Sigma_{q\neq p}\Pi_q^\varepsilon u$ orthogonalement

$$w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) + \Sigma_{q\neq p} w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) \tag{22}$$

et observons les faits suivants :

- $w_s^0(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0(c_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) + \Sigma_{q\neq p} w_s^0(c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u)$
  L'interversion de limites (convergence en ε et sommation en q) est justifiée par la convergence uniforme de la série au sens faible $\sigma(P'; P)$:
  $< w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) - \Sigma_{0\leq q\leq n} w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) | a >_{P'\times P}$
  $\leq \| a^W(x; \varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| c_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| \Pi_p^\varepsilon u \|_{L^2} \sqrt{\Sigma_{q>n} \| \Pi_q^\varepsilon u \|_{L^2}^2}$
  $\leq \| a^W(x; \varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| c_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| \Pi_p^\varepsilon u \|_{L^2} \| H^\varepsilon u \|_{L^2} / \min |E_n|$
  $\leq C^{ste} / \min |E_n| \leq C^{ste}/n^{2/N}$
  On suppose ici $H^\varepsilon u \in L^2$ borné.

- $w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0(\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = 0$
  En effet que Π_p^ε est autoadjoint à travers w_s^0 fait l'objet du lemme 2.5.
  On invoque ensuite l'identité algébrique $\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon = 0$ pour annuler la transformée.

- $(E_p - E_q) w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u)$
  en tant que distribution de toutes les variables $(t; x; \xi)$ temps inclus.
  Effectivement $i\varepsilon \partial_t w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u)$
  $= w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon H^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon H^\varepsilon u)$
  $+ w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon V u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon V u)$
  $= w_s^\varepsilon(E_q(\varepsilon D) c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; E_p(\varepsilon D) \Pi_p^\varepsilon u)$
  $+ w_s^\varepsilon(V c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; V \Pi_p^\varepsilon u)$
  $+ w_s^\varepsilon([c_p^\varepsilon; E_q(\varepsilon D)] \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; [\Pi_p^\varepsilon; V]u)$
  $\approx (E_q - E_p) w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) + w_s^0([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u)$
  à un négligeable uniforme en temps près.
  L'approximation repose sur la commutation approchée $[c_p^\varepsilon; E_q(\varepsilon D)] \to 0$ de la proposition 2.9.
  Bien sûr $[\Pi_p^\varepsilon; V] = -i\varepsilon c_p^\varepsilon \to 0$ car c_p^ε est borné d'après la proposition 2.7. On en déduit

$$w_s^0([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u) \approx (E_p - E_q) w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) + i\varepsilon \partial_t w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) \tag{23}$$

  à un négligeable uniforme en temps près.

- $[\Pi_q^\varepsilon; V] \to 0 \Rightarrow w_s^0([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u) = 0$
  Cette implication résulte de l'identité élémentaire $[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V] = c_p^\varepsilon [\Pi_q^\varepsilon; V] + [c_p^\varepsilon; V] \Pi_q^\varepsilon$ dans laquelle la commutation approchée $[c_p^\varepsilon; V] \to 0$ de la proposition 2.9 fait disparaitre un terme.

Pour autant le commutateur avec un niveau q quelconque $[\Pi_q^\varepsilon; V]u \in L^2$ est-il négligeable ? A priori non, d'après le théoréme négatif 2.8. Le dernier point est donc concrêtement inapplicable.

Mais (moralement) négliger $w_s^0[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u]$ en négligeant le terme intuitivement [4] plus petit $w_s^0([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u)$ ressemble quand même à un progrès.

Poursuivons dans cette voie par itérations.

Lemme 2.8 *Notons $\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon] = [[[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]; V] \cdots ; V]$ l'itéré $n \geq 1$ fois du commutateur $\gamma = [\cdot; V] \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(L^2))$ contre $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ supposé de gradient uniformément continu borné alors :*

$$(E_p - E_q)^n w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon] u; \Pi_p^\varepsilon u)$$

en tant que distribution de toutes les variables $(t; x; \xi)$ temps inclus.

Preuve. Supposons dans un premier temps $V \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ pour simplifier.

[4] Voir néanmoins l'objection du lemme 2.3.

Par analogie avec la preuve de l'égalité $(E_p - E_q)w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0([c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V]u; \Pi_p^\varepsilon u)$ écrivons une équation d'évolution sur l'inconnue $w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u)$:

$$
\begin{aligned}
& i\varepsilon \partial_t w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) \\
&= w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]H^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon H^\varepsilon u) \\
&\quad + w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]Vu; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon Vu) \\
&= w_s^\varepsilon(E_q(\varepsilon D)\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; E_p(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u) \\
&\quad + w_s^\varepsilon(V\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; V\Pi_p^\varepsilon u) \\
&\quad + w_s^\varepsilon(\gamma^{n+1}[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; [\Pi_p^\varepsilon; V]u) \\
&\quad + w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon](H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D))u; \Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon([\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]; E_q(\varepsilon D)]u; \Pi_p^\varepsilon u) \\
&\approx (E_q - E_p)w_s^0(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) + w_s^0(\gamma^{n+1}[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon](H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D))u; \Pi_p^\varepsilon u)
\end{aligned}
$$

à un négligeable uniforme en temps près.

L'approximation repose sur la commutation approchée $[\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]; E_q(\varepsilon D)] \to 0$ au sens de $\mathcal{L}(L^2)$, conséquence de la commutativité approchée de $E_q(\varepsilon D)$ avec chacun des termes c_p^ε, Π_q^ε et V par la proposition 2.9.

Il reste à négliger

$$
\begin{aligned}
\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon](H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D)) &= \Sigma_{0\le k\le n}(-1)^k C_n^k V^k c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon V^{n-k}(H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D)) \\
&= -\Sigma_{0\le k\le n}(-1)^k C_n^k V^k c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon [H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D); V^{n-k}] \\
\approx -\varepsilon \Sigma_{0\le k\le n}(-1)^k C_n^k V^k c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon \frac{[H^\varepsilon; V^{n-k}]}{\varepsilon} &\text{ vu que } E_q(\varepsilon D) \text{ commute à peu près avec } V^{n-k}
\end{aligned}
$$

Or $\Pi_q^\varepsilon \dfrac{[H^\varepsilon; V^{n-k}]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ reste borné d'après le lemme 2.6 on aboutit ainsi à

$$
w_s^0(\gamma^{n+1}[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) \approx (E_p - E_q)w_s^0(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) + i\varepsilon \partial_t w_s^\varepsilon(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u)
$$

à un négligeable uniforme en temps près, d'où l'assertion par récurrence sur $n \ge 1$.

Abordons maintenant le cas où $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ est (seulement) lipschitzien. Considérons une approximation uniforme de V équilipschitzienne notée V_ε telle que $\varepsilon \Delta V_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ reste borné.

Notons $\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon] = [[[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V_\varepsilon]; V_\varepsilon] \cdots ; V_\varepsilon]$ l'itéré $n \ge 1$ fois du commutateur $\gamma_\varepsilon = [\cdot; V_\varepsilon] \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(L^2))$ contre V_ε. Alors $w_s^0(\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u)$

car $\gamma^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon] - \gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon] \in \mathcal{L}(L^2)$ tend vers zéro comme $\| V - V_\varepsilon \|_\infty$ par construction.

$$
\begin{aligned}
& i\varepsilon \partial_t w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) \\
&= w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]H^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon H^\varepsilon u) \\
&\quad + w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]Vu; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon Vu) \\
&= w_s^\varepsilon(E_q(\varepsilon D)\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; E_p(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u) \\
&\quad + w_s^\varepsilon(V\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; \Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon]u; V\Pi_p^\varepsilon u)
\end{aligned}
$$

$$+w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^{n+1}[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;\Pi_p^\varepsilon u) - w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;[\Pi_p^\varepsilon;V]u)$$
$$+w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon](H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D))u;\Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon([\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon];E_q(\varepsilon D)]u;\Pi_p^\varepsilon u)$$
$$+w_s^\varepsilon([\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon];V_\varepsilon - V]u;\Pi_p^\varepsilon u)$$
$$\approx (E_q - E_p)w_s^0(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;\Pi_p^\varepsilon u) + w_s^0(\gamma_\varepsilon^{n+1}[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;\Pi_p^\varepsilon u) + w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon](H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D))u;\Pi_p^\varepsilon u)$$

où $\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon](H^\varepsilon - E_q(\varepsilon D)) \in \mathcal{L}(L^2)$ s'avère négligeable comme précédemment d'après le lemme 2.6 appliquable par construction de l'approximation V_ε. On en déduit

$$w_s^0(\gamma^{n+1}[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;\Pi_p^\varepsilon u) \approx (E_p - E_q)w_s^0(\gamma^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;\Pi_p^\varepsilon u) + i\varepsilon\partial_t w_s^\varepsilon(\gamma_\varepsilon^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]u;\Pi_p^\varepsilon u)$$

à un négligeable uniforme en temps près, d'où l'assertion par récurrence sur $n \geq 1$.

□

Tous les arguments sont rassemblés pour tirer la conclusion suivante : puisque le niveau p isolé simple est séparé d'un niveau $q \neq p$ quelconque d'au moins

$$\inf|E_q - E_p| \geq \min\{\inf|E_p - E_{p-1}|;\inf|E_p - E_{p+1}|\} = \alpha > 0,$$

dans l'égalité valable pour tout $n \geq 1$

$$w_s^0(c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) = w_s^0(\frac{\gamma^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]}{(E_p - E_q)^n}u;\Pi_p^\varepsilon u)$$

on peut passer à la limite $n \to \infty$ lorsque le potentiel $\| V \|_\infty < \alpha/2$ est petit sachant qu'alors

$$\| \frac{\gamma^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon]}{(E_p - E_q)^n} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \frac{1}{\alpha^n} \| \gamma^n[c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon] \|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(L^2))} \| c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \left(\frac{2 \| V \|_\infty}{\alpha}\right)^n \| c_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$$

Il en résulte que $w_s^0(c_p^\varepsilon\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) = 0$ pour tout $q \neq p$, puis que $w_s^0(c_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) = 0$.

On vient de démontrer :

Théorème 2.9 *Homogénéisation dans un niveau isolé pour des états purs.*

Si p indexe un niveau isolé simple de l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2\Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ alors pour $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ petit au sens

$$2 \| V \|_\infty < \min\{\inf|E_p - E_{p-1}|;\inf|E_p - E_{p+1}|\}$$

avec la régularité ∇V uniformément continu borné,

la transformée de Wigner $w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon]$ dans le niveau p pour la solution u^ε

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon = (H^\varepsilon + V)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ borné } (H^\varepsilon u_I^\varepsilon \in L^2 \text{ borné }) \end{cases}$$

suit l'évolution $\partial_t w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon] + \nabla E_p(k)\nabla_x w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon] - \nabla V(x)\nabla_k w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon] = 0$.

La version concernant les états mélangés ne nécessite aucune restriction sur $\| V \|_\infty$:

Théorème 2.10 *Homogénéisation dans un niveau isolé pour des états mélangés.*

Si p indexe un niveau isolé simple de l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2\Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ alors pour $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ de gradient ∇V uniformément continu borné,

la transformée de Wigner $w_s^0[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon]$ dans le niveau p pour la solution $\rho^\varepsilon = \Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon \overline{u_i^\varepsilon} \otimes u_i^\varepsilon$ du mélange

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u_i^\varepsilon = (H^\varepsilon + V)u_i^\varepsilon \qquad \forall i \in I \\ \{u_i^\varepsilon(t=0) | i \in I\} \subset L^2(\mathbb{R}^N) \text{ orthonormale } (H^\varepsilon u_i^\varepsilon(t=0) \in L^2 \text{ borné }) \\ \Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon| \leq 1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon|^2 \text{ borné} \end{cases}$$

suit l'évolution $\partial_t w_s^0[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon] + \nabla E_p(k)\nabla_x w_s^0[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon] - \nabla V(x)\nabla_k w_s^0[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon] = 0$.

Preuve. Etant donnée $(u_i^\varepsilon)_{i\in I}$ une suite de solutions L^2-orthonormales, étant donnée une combinaison convexe $\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon| \leq 1$, la transformée de Wigner dans le niveau p pour le mélange $\rho^\varepsilon = \Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon \overline{u_i^\varepsilon} \otimes u_i^\varepsilon \in \mathrm{TR}(L^2)$ suit l'évolution

$$(\partial_t + \nabla E_p(k)\nabla_x - \nabla V(x)\nabla_k) w_s^\varepsilon[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon] \approx -2 \text{ Re } w_s^\varepsilon[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon (1-\Pi_p^\varepsilon) u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$$

L'approximation s'entend à un terme près du type $\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon N_i^\varepsilon$ avec $N_i^\varepsilon \in S'$ négligeable uniformément en temps, uniformément en $i \in I$ d'après l'étude précédente (21) appliquée à la combinaison convexe $w_s^\varepsilon[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon] = \Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon w_s^\varepsilon[\Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon; \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$. On obtient donc l'équation homogénéisée

$$(\partial_t + \nabla E_p(k)\nabla_x - \nabla V(x)\nabla_k) w_s^0[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon] = -2 \text{ Re } w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon (1-\Pi_p^\varepsilon) u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$$

Dans le terme source décomposons $1 - \Pi_p^\varepsilon = \Sigma_{q\neq p}\Pi_q^\varepsilon$ orthogonalement :

- $w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon (1-\Pi_p^\varepsilon) u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = \Sigma_{q\neq p} w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$
  On suppose ici $H^\varepsilon u_i^\varepsilon \in L^2$ borné uniformément en $i \in I$ pour justifier l'interversion de limites.

- $(E_p - E_q) w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$
  en tant que distributions de toutes les variables $(t; x; \xi)$ temps inclus.
  Précisément $i\varepsilon\partial_t w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$
  $\approx (E_q - E_p) w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] + w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$
  à un terme près du type $\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon N_i^\varepsilon$ avec $N_i^\varepsilon \in S'$ négligeable uniformément en temps, uniformément en $i \in I$. Pour plus de détails voir la justification de (23).

- $w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [\Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$
  On mentionne ici cette relation où le commutateur $[\Pi_q^\varepsilon; V]$ est isolé pour pouvoir lui appliquer la proposition 2.17. Cette simplification qui repose sur le lemme 2.5 n'est pas essentielle.

- $w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [\Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = \varpi_{\Gamma^*} w^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [\Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$
  Pour que la série de Wigner (à la limite w_s^0) s'écrive comme périodisation de la transformée de Wigner continue (à la limite w^0) il suffit d'après le théorème 1.3 qu'un des arguments soit ε-oscillant. Ici $c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon$ est ε-oscillant car $\varepsilon\nabla c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon$ est borné uniformément en temps, uniformément en $i \in I$, d'après le lemme 2.7.

On en déduit $(E_p - E_q) w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = \varpi_{\Gamma^*} w^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon [\Pi_q^\varepsilon; V] u_i^\varepsilon \otimes c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$.

Tous les arguments sont rassemblés pour conclure.
Lorsque $\frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon|^2 \leq 1$ est un vrai mélange,

$$K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes c_p^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon \in \mathrm{HS}(L^2) \text{ est borné } \| K_\varepsilon \|_{HS} \leq \| c_p^\varepsilon \|_{\mathcal{L}(L^2)} \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon|^2$$

Ainsi $w^\varepsilon([\Pi_q^\varepsilon; V]K_\varepsilon) \to 0$ faiblement $\sigma(L^2; L^2)$ en vertu de la proposition 2.18.
La division dans $(E_p - E_q) w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = 0$ est possible,
d'où $w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon \otimes \Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon] = 0$ et l'évolution sans terme source est prouvée.
$\square$

2.5 Homogénéisation loin des croisements.

Résumé. Cette partie est consacrée à l'homogénéisation des transformées de Wigner dans un niveau quelconque. L'étude est menée loin des croisements au moyen d'une troncature. On évite ainsi l'hypothèse de concentration loin des croisements pour la transformée de Wigner initiale pour la raison que cette condition ne serait pas préservée dans le temps. Le théorème 2.12 obtenu pour les états mélangés ne se généralise pas facilement au voisinage des croisements. En dimension un il faudrait qu'il reste conforme à l'homogénéisation du théorème 2.21.

Supposons que p indexe un niveau quelconque non nécessairement isolé simple.
Soit $u = u^\varepsilon(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ la solution de l'équation de Schrödinger d'hamiltonien $H^\varepsilon + V$.
Etant donné $\chi \in C^\infty_\#(\mathbb{R}^N)$ supporté loin des croisements avec le niveau p,
quelle évolution suit $w^0_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) = \chi^2 w^0_s(\Pi^\varepsilon_p u; \Pi^\varepsilon_p u)$?

Lemme 2.9 *Pour $V \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$ de gradient $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ on a*

$$\chi^2 \left(\partial_t w^0_s(\Pi^\varepsilon_p u; \Pi^\varepsilon_p u) + \nabla E_p(k) \nabla_x w^0_s(\Pi^\varepsilon_p u; \Pi^\varepsilon_p u) - \nabla V(x) \nabla_k w^0_s(\Pi^\varepsilon_p u; \Pi^\varepsilon_p u)\right)$$
$$= -2 \ Re \ w^0_s(c^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) \tag{24}$$

Preuve. La limite $\varepsilon \to 0$ dans l'équation exacte :

$$\begin{aligned}
&(\partial_t + \nabla E_p(k)\nabla_x - \nabla V(x)\nabla_k)\, w^\varepsilon_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) \\
&= -\frac{i}{\varepsilon}\left(w^\varepsilon_s(H^\varepsilon \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) - w^\varepsilon_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; H^\varepsilon \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u)\right) \\
&\qquad + \nabla E_p(k)\nabla_x w^\varepsilon_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) \\
&\quad -\frac{i}{\varepsilon}\left(w^\varepsilon_s(V \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) - w^\varepsilon_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; V \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u)\right) \\
&\qquad - \nabla V(x)\nabla_k w^\varepsilon_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) \\
&-2 \text{ Re } \left(w^\varepsilon_s(c^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) + w^\varepsilon_s(\Pi^\varepsilon_p \frac{i[\chi(\varepsilon D); V]}{\varepsilon} u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u)\right)
\end{aligned}$$

donne l'équation homogénéisée :

$$\begin{aligned}
&(\partial_t + \nabla E_p(k)\nabla_x - \nabla V(x)\nabla_k)\, w^0_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) \\
&= -2 \text{ Re } \left(w^0_s(c^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) + w^0_s(\Pi^\varepsilon_p \frac{i[\chi(\varepsilon D); V]}{\varepsilon} u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u)\right) \\
&= -\nabla \chi^2 \nabla V w^0_s(\Pi^\varepsilon_p u; \Pi^\varepsilon_p u) - 2 \text{ Re } w^0_s(c^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u)
\end{aligned}$$

qui s'identifie à (24) sachant que $w^0_s(\Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u; \Pi^\varepsilon_p \chi(\varepsilon D)u) = \chi^2 w^0_s(\Pi^\varepsilon_p u; \Pi^\varepsilon_p u)$.

Une nouvelle fois, le symbole $w_s^0(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$ sous-entend une extraction dans $\varepsilon\to 0$ moyennant quoi $w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$ converge dans P' localement uniformément en temps (voir la remarque correspondante page 65).

Le terme $\nabla E_p(k)\nabla_x w_s^0(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$ s'obtient par la régularité analytique (C^1 suffit) du niveau E_p loin des croisements au voisinage du support de χ,

le terme $\nabla V(x)\nabla_k w_s^0(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$ s'obtient par la régularité supposée $V\in C_b^0$ et $\nabla V\in C_b^0$ du potentiel extérieur,

le terme $\nabla\chi^2\nabla V w_s^0(\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ s'obtient en décomposant

$$\Pi_p^\varepsilon\frac{i[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}=\nabla\chi(\varepsilon D)\nabla V\Pi_p^\varepsilon+\chi(\varepsilon D)[\Pi_p^\varepsilon;\nabla V]+\Pi_p^\varepsilon(\frac{i[\chi(\varepsilon D);V]}{\varepsilon}-\nabla\chi(\varepsilon D)\nabla V)$$

et en invoquant la commutation approchée $\chi(\varepsilon D)[\Pi_p^\varepsilon;\nabla V]\to 0$ de la proposition 2.11 pour $\nabla V\in C_0^0$ ainsi d'ailleurs que le lemme 2.2.

Seul le terme source -2 Re $w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$ sort un peu de l'ordinaire. La définition de ce terme repose sur la proposition 2.13 qui borne $c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\in\mathcal{L}(L^2)$ pour $V\in C_0^0$ et $\nabla V\in\mathcal{F}L^1$ au moins. Au contraire $w_s^0(c_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$ serait insensé vu que $c_p^\varepsilon u\in L^2$ est généralement non borné.

□

Lemme 2.10 *A travers la transformée de Wigner périodique $c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ and $\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ sont autoadjoints*

$$\begin{cases} w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;v)=w_s^0(u;c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)v)\\ w_s^0(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;v)=w_s^0(u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)v)\end{cases}$$

lorsque u et v désignent des suites bornées dans L^2,

en particulier $w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\chi(\varepsilon D)u)=w_s^0(\chi(\varepsilon D)u;c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$
$=$ Re $w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\chi(\varepsilon D)u)=2$ Re $w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$

Preuve. Comme $c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ et $\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ commutent à peu près avec les opd $a^W(x;\varepsilon D)$ périodiques réguliers (voir la proposition 2.16) on a

2 Re $w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$
$=w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)+w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$
$\approx w_s^\varepsilon(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;u)+w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;u)$
$=w_s^\varepsilon(\chi(\varepsilon D)(\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon+c_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon)\chi(\varepsilon D)u;u)+w_s^\varepsilon([c_p^\varepsilon;\chi(\varepsilon D)]\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u;u)$
$=w_s^\varepsilon(\chi(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;u)+w_s^\varepsilon([c_p^\varepsilon;\chi(\varepsilon D)]\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u;u)\approx w_s^\varepsilon(\chi(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;u)$

□

Lemme 2.11 *Pour $V\in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ supposé de gradient $\nabla V\in\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$ l'opérateur $\varepsilon\nabla c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon\in\mathcal{L}(L^2)$ reste borné.*

Preuve. Il s'agit d'une adaptation du lemme 2.7. Le rôle essentiel de la troncature est de borner $c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\in\mathcal{L}(L^2)$ et de rendre $E_p\chi$ régulier. Nous ne détaillerons pas plus.

□

Dans la source $(-2 \text{ Re })w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$ décomposons $u = \Pi_p^\varepsilon u + \Sigma_{q\neq p}\Pi_q^\varepsilon u$ orthogonalement

$$w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) = w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)+\Sigma_{q\neq p}w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) \tag{25}$$

et observons les faits suivants :

- $w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) = w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)+\Sigma_{q\neq p}w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)$
  L'interversion de limites (convergence en ε et sommation en q) est justifiée par la convergence uniforme de la série au sens faible $\sigma(P';P)$:
  $< w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) - \Sigma_{0\leq q\leq n}w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)|a >_{P'\times P}$
  $\leq\| a^W(x;\varepsilon D)\|_{\mathcal{L}(L^2)}\| c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\|_{\mathcal{L}(L^2)}\| \Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\|_{L^2}\sqrt{\Sigma_{q>n}\| \Pi_q^\varepsilon u\|_{L^2}^2}$
  $\leq\| a^W(x;\varepsilon D)\|_{\mathcal{L}(L^2)}\| c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\|_{\mathcal{L}(L^2)}\| \Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u\|_{L^2}\| H^\varepsilon u\|_{L^2} / \min|E_n|$
  On suppose ici $H^\varepsilon u \in L^2$ borné.
  Il faut de nouveau préciser ici que $c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D) \in \mathcal{L}(L^2)$ est non trivialement borné par la proposition 2.13.

- $w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) = w_s^0(\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)$
  $= w_s^0(\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon c_p^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u;\Pi_p^\varepsilon u) = 0$
  En effet que $\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ est autoadjoint à travers w_s^0 fait l'objet du lemme 2.10.

- $(E_p - E_q)w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) = w_s^0(\chi(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)[\Pi_q^\varepsilon;V]u;\Pi_p^\varepsilon u)$
  en tant que distribution de toutes les variables.
  Pour démontrer cette relation nous exploiterons comme dans le cas d'un niveau isolé une équation d'évolution exprimant certaines oscillations en temps sous forme d'un terme $\varepsilon\partial_t$ négligeable.

$$\begin{aligned}
&i\varepsilon\partial_t w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)\\
&= w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon H^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)H^\varepsilon u)\\
&+w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon Vu;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)Vu)\\
&= w_s^\varepsilon(E_q(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;E_p(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)\\
&+w_s^\varepsilon(Vc_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) - w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;V\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)\\
&+w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)[\Pi_q^\varepsilon;V]u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)\\
&+w_s^\varepsilon([c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D);E_q(\varepsilon D)]\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) + w_s^\varepsilon([c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D);V]\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)\\
&-w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon[\chi(\varepsilon D);V]u) - \varepsilon w_s^\varepsilon(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u)\\
&\approx (E_q - E_p)w_s^0(c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u) + w_s^0(\chi(\varepsilon D)c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)[\Pi_q^\varepsilon;V]u;\Pi_p^\varepsilon u)\\
&+w_s^0(\chi(\varepsilon D)[c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D);E_q(\varepsilon D)]\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u) + w_s^0(\chi(\varepsilon D)[c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D);V]\Pi_q^\varepsilon u;\Pi_p^\varepsilon u)
\end{aligned}$$

  Les deux dernières expressions sont négligeables par la commutation approchée de $c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)$ avec les multiplications et les dérivations périodiques conformément à la proposition 2.16.

On en déduit

$$(E_p - E_q) w_s^0[c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D) u] + i\varepsilon \partial_t w_s^\varepsilon[c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D) u]$$

$$\approx w_s^0(\chi(\varepsilon D) c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)[\Pi_q^\varepsilon; V] u; \Pi_p^\varepsilon u) \tag{26}$$

à un négligeable uniforme en temps près.

- $w_s^0(\chi(\varepsilon D) c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)[\Pi_q^\varepsilon; V] u; \Pi_p^\varepsilon u)$
  est une mesure supportée (en ξ) dans l'ensemble des croisements avec le niveau q.
  C'est une conséquence de la proposition 2.11 appliquée au commutateur $[\Pi_q^\varepsilon; V]$ d'indice q.

- $w_s^0(c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D) u)$ est nul pour q grand devant p
  (par exemple dès que $\inf |E_p - E_q| > 2 \parallel V \parallel_\infty$).
  En effet la méthode par itérations employée dans le cas d'un niveau isolé pour négliger $w_s^0(c_p^\varepsilon \Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon u)$ sous l'hypothèse $2 \parallel V \parallel_\infty < \inf |E_p - E_q|$ s'adapte terme à terme en substituant $c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)$ respectivement $\Pi_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)$ à c_p^ε respectivement Π_p^ε,
  d'où $w_s^0(c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D) u) = 0$ pour $q \in \mathbb{N}$ grand.

Pour $q \in \mathbb{N}$ proche de $p \in \mathbb{N}$ la question $w_s^0(c_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u; \Pi_p^\varepsilon \chi(\varepsilon D) u) \stackrel{?}{=} 0$ reste ouverte.
On peut néanmoins énoncer ce qui précède sous la forme :

Théorème 2.11 *Homogénéisation loin des croisements pour des états purs.*
Etant donné $p \in \mathbb{N}$ un niveau quelconque de l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2 \Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ il existe un ensemble fini $N(p) \subset \mathbb{N}$ tel que la transformée de Wigner $w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon]$ dans le niveau p pour la solution u^ε

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon = (H^\varepsilon + V) u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ borné } (H^\varepsilon u_I^\varepsilon \in L^2 \text{ borné }) \end{cases}$$

suit l'évolution

$$\chi^2 \left(\partial_t w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon] + \nabla E_p(k) \nabla_x w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon] - \nabla V(x) \nabla_k w_s^0[\Pi_p^\varepsilon u^\varepsilon] \right) = 0$$

pourvu que $\chi \in C_\#^\infty$ soit supporté loin des croisements dus aux niveaux indexés par $N(p)$.
Le potentiel $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ est supposé régulier au sens $\nabla V \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^N)$.

La version pour les états mélangés est beaucoup plus satisfaisante :

Théorème 2.12 *Homogénéisation loin des croisements pour des états mélangés.*
Si p indexe un niveau quelconque de l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2 \Delta + v(\frac{x}{\varepsilon})$ alors pour $V \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ de gradient ∇V uniformément continu borné,
la transformée de Wigner $w_s^0[\Pi_p^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon]$ dans le niveau p pour la solution $\rho^\varepsilon = \Sigma_{i \in I} \lambda_i^\varepsilon \overline{u_i^\varepsilon} \otimes u_i^\varepsilon$ du mélange

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u_i^\varepsilon = (H^\varepsilon + V) u_i^\varepsilon \qquad \forall i \in I \\ \{u_i^\varepsilon(t=0) | i \in I\} \subset L^2(\mathbb{R}^N) \text{ orthonormale } (H^\varepsilon u_i^\varepsilon(t=0) \in L^2 \text{ borné }) \\ \Sigma_{i \in I} |\lambda_i^\varepsilon| \leq 1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^N} \Sigma_{i \in I} |\lambda_i^\varepsilon|^2 \text{ borné} \end{cases}$$

suit l'évolution

$$\chi^2\left(\partial_t w_s^0[\Pi_p^\varepsilon\rho^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon]+\nabla E_p(k)\nabla_x w_s^0[\Pi_p^\varepsilon\rho^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon]-\nabla V(x)\nabla_k w_s^0[\Pi_p^\varepsilon\rho^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon]\right)=0$$

pourvu que $\chi\in C_\#^\infty$ soit supporté loin des croisements avec le niveau p (seul).

PREUVE. Etant donnée $(u_i^\varepsilon)_{i\in I}$ une suite de solutions L^2-orthonormales, étant donnée une combinaison convexe $\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon|\leq 1$, la transformée de Wigner dans le niveau p pour le mélange $\rho^\varepsilon=\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon\overline{u_i^\varepsilon}\otimes u_i^\varepsilon\in \mathrm{TR}(L^2)$ suit l'évolution

$$\chi^2\cdot(\partial_t+\nabla E_p(k)\nabla_x-\nabla V(x)\nabla_k)w_s^\varepsilon[\Pi_p^\varepsilon\rho^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon]\approx -2\ \mathrm{Re}\ w_s^\varepsilon[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)(1-\Pi_p^\varepsilon)u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]$$

L'approximation s'entend à un terme près du type $\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon N_i^\varepsilon$ avec $N_i^\varepsilon\in S'$ négligeable uniformément en temps, uniformément en $i\in I$ d'après l'étude précédente (26) appliquée à la combinaison convexe $w_s^\varepsilon[\Pi_p^\varepsilon\rho^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon]=\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon w_s^\varepsilon[\Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon;\Pi_p^\varepsilon u_i^\varepsilon]$. On obtient donc l'équation homogénéisée

$$\chi^2\cdot(\partial_t+\nabla E_p(k)\nabla_x-\nabla V(x)\nabla_k)w_s^0[\Pi_p^\varepsilon\rho^\varepsilon\Pi_p^\varepsilon]=-2\ \mathrm{Re}\ w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)(1-\Pi_p^\varepsilon)u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]$$

En décomposant le terme source par la méthode du théorème 2.10 on constate :

$$w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)(1-\Pi_p^\varepsilon)u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]=\Sigma_{q\neq p}w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]$$

où grâce aux lemmes 2.10 et 2.11 le terme général d'indice q vérifie

$$(E_p-E_q)w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]=w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon[c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon;V]u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]$$

$$=w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon[\Pi_q^\varepsilon;V]u_i^\varepsilon\otimes c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]=\varpi_{\Gamma^*}w^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon[\Pi_q^\varepsilon;V]u_i^\varepsilon\otimes c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]$$

Tous les arguments sont rassemblés pour conclure.

Lorsque $\frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon|^2\leq 1$ est un vrai mélange,

$$K_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon^{N/2}}\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon u_i^\varepsilon\otimes c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon\in \mathrm{HS}(L^2)\text{ est borné}$$

$$\|\ K_\varepsilon\ \|_{HS}\leq\|\ \chi\ \|_\infty\|\ c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\ \|_{\mathcal{L}(L^2)}\ \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{i\in I}|\lambda_i^\varepsilon|^2$$

Ainsi $w^\varepsilon([\Pi_q^\varepsilon;V]K_\varepsilon)\to 0$ faiblement $\sigma(L^2;L^2)$ en vertu de la proposition 2.18.
La division dans $(E_p-E_q)w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]=0$ est possible, d'où $w_s^0[\Sigma_{i\in I}\lambda_i^\varepsilon c_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)\Pi_q^\varepsilon u_i^\varepsilon\otimes\Pi_p^\varepsilon\chi(\varepsilon D)u_i^\varepsilon]=0$ et le théorème 2.12 est prouvé.
□

2.6 Le cas monodimensionnel.

Résumé. Cette partie est consacrée à la description des niveaux d'énergie en une dimension d'espace. La théorie des équations différentielles linéaires d'ordre deux précise considérablement la décomposition de Bloch des hamiltoniens périodiques. Les propositions 2.24 à 2.27 détaillent une version (qu'on appelle ici discriminant) du déterminant de Fredholm (D) général figurant dans le théorème 2.5 de C.H.Wilcox. Les propositions 2.28 et 2.29 aboutissent au graphe des niveaux d'énergie. Les propositions 2.32 et 2.35 raffinent l'équivalent spectral général (2.4). Le théorème 2.13 est une remarque importante concernant les dérivées des niveaux au voisinage des croisements. On trouvera pour finir des exemples classiques qui illustrent la diversité possible des lacunes spectrales en une dimension. Tous ces résultats ou presque sont adaptés du livre [MW].

On note $\Gamma = \Gamma^* = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ de cellule unité $\Omega = \Omega^* =]-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}[\subset \mathbb{R}$.
Soit $v \in C^0(\mathbb{R})$ un potentiel réel 1-périodique.
Pour $k \in \mathbb{R}$ $\quad H_k = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ de domaine

$$D(H_k) = H_k^2(\Omega) = \{\phi \in H^2(\Omega) | \phi(+\frac{1}{2}) = e^{+2i\pi k}\phi(-\frac{1}{2}) \qquad \phi'(+\frac{1}{2}) = e^{+2i\pi k}\phi'(-\frac{1}{2})\} \subset L^2(\Omega)$$

définit une famille Kato-holomorphe périodique quasi-paire ($H_{-k} = C \circ H_k \circ C$ où C est la conjuguaison) d'opérateurs selfadjoints minorés (par $-\parallel v \parallel_\infty$ uniformément) à résolvantes compactes sur $L^2(\Omega)$.

La Kato-holomorphie généralise aux familles d'opérateurs non bornés dépendant d'un paramètre réel ou complexe l'holomorphie classique des opérateurs bornés définis partout, voir T.Kato [K]. Ici toutes les propriétés des familles holomorphes de type A dans sa nomenclature (domaine fixe) sont vérifiées car en notant C_k la multiplication unitaire par $e^{+2i\pi<\cdot|k>}$ l'opérateur $C_{-k} \circ H_k \circ C_{+k} = -\frac{d^2}{dx^2} - 4i\pi k\frac{d}{dx} + v(x) + 4\pi^2k^2$ a un domaine fixe à savoir $H^2_\#$.

L'analyse des opérateurs différentiels ordinaires d'ordre deux elliptiques (de type Sturm-Liouville) pour des conditions aux limites périodiques n'est pas aussi élémentaire que pour des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann. De fait deux solutions périodiques indépendantes peuvent (co)exister. Ainsi pour certaines valeurs de $E \in \mathbb{R}$ il se peut que $\dim \mathrm{Ker}(E - H_0) = 2$ ou $\dim \mathrm{Ker}(E - H_{1/2}) = 2$.

Proposition 2.21 *Les valeurs propres-spectrales $E \in \sigma(H_k)$ sont réelles paires simples si $k \notin \mathbb{Z}/2$ mais sont simples ou doubles si $k \in \mathbb{Z}/2$.*

Notant $E_p(k) \uparrow_{p\uparrow\infty} \infty$ la suite croissante infinie des valeurs propres-spectrales de H_k, par la simplicité, E_p est réelle analytique sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$.

Preuve. Soit f une solution non nulle du problème propre associé à $e^{+2i\pi k} \neq \pm 1$ sur l'intervalle (0;1) par exemple :

$$-f'' + vf = Ef \qquad f(1) = e^{+2i\pi k}f(0) \qquad f'(1) = e^{+2i\pi k}f'(0)$$

Nécessairement $\{f;\overline{f}\}$ est libre car si $\overline{f} = e^{i\theta}f$ alors d'une part $\overline{f(1)} = e^{-2i\pi k}\overline{f(0)} = e^{i\theta}e^{-2i\pi k}f(0)$ et d'autre part $\overline{f(1)} = e^{i\theta}f(1) = e^{i\theta}e^{+2i\pi k}f(0)$ semblablement pour la dérivée

d'une part $\overline{f'(1)} = e^{-2i\pi k}\overline{f'(0)} = e^{i\theta}e^{-2i\pi k}f'(0)$ et d'autre part $\overline{f'(1)} = e^{i\theta}f'(1) = e^{i\theta}e^{+2i\pi k}f'(0)$. On aurait donc $f(0) = f'(0) = 0$ ce qui est absurde par l'hypothèse f non (identiquement) nulle.

Ainsi une solution générale de l'équation différentielle satisfait les conditions au bord si et seulement si elle est proportionnelle à f.

Pour la question de la régularité, les valeurs propres simples d'opérateurs holomorphes au sens de Kato ont une dépendance holomorphe. L'hypothèse de simplicité donne à ce résultat de théorie de la perturbation un caractère élémentaire. Ainsi l'analycité de E_p sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$ peut être considérée comme triviale au vu de [K]. Au contraire l'existence d'un prolongement analytique sur tout $\mathbb{R}$ pour E_p même lorsque E_p dégénère en une valeur double sur $\mathbb{Z}/2$ est un résultat beaucoup plus profond : (T.Kato [K] Theorem 3.9 Ch.VII.) "Let $T(z)$ be a selfadjoint holomorphic family of type A with compact resolvent defined in a neighborhood of the real axis. All eigenvalues of $T(z)$ can be represented by holomorphic fonctions on the real axis." La proposition 2.37 détaillera ce point.

Pour un exposé auto-contenu de la théorie de la perturbation en dimension finie on peut consulter [K] Ch.II.

□

Notons $R_0^E \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ la résolvante à l'origine à savoir la solution de l'équation différentielle matricielle $(R_0^E)' = (A - EB)R_0^E \qquad R_0^E(0) = 1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ où

$$A := \begin{bmatrix} 0 & v \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_0^E := \begin{bmatrix} (y_2^E)' & (y_1^E)' \\ (y_2^E) & (y_1^E) \end{bmatrix}$$

- le wronskien $\det(R_0^E) = 1$ est constant car la trace du coefficient $A - EB$ est nulle,

- le discriminant $\Delta(E) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ R_0^E(1)$ donne le polynôme caractéristique $X^2 - 2\Delta(E)X + 1$ de la matrice $R_0^E(1) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, ses racines s'appelent racines discriminantes,

- les éléments de matrice de R_0^E sont formés des solutions normalisées y_1^E et y_2^E de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ définies par $y_1^E(0) = 1\ \ (y_1^E)'(0) = 0\ \ y_2^E(0) = 0\ \ (y_2^E)'(0) = 1$.

Evidemment R_0^E porte bien son nom car $-f'' + vf = Ef \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f' \\ f \end{bmatrix}(x) = R_0^E(x) \begin{bmatrix} f'(0) \\ f(0) \end{bmatrix}$.

En particulier $\forall k \in \mathbb{C}$, $e^{\pm 2i\pi k}$ sont les racines discriminantes,
si et seulement si $\cos(2\pi k)$ est le discriminant,
si et seulement si il existe une solution k-pseudo-périodique $\in \mathrm{Ker}\ -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$,
alors $k \in \mathbb{C}$ est uniquement déterminé au signe près modulo $\mathbb{Z}$.

Remarque. Puisque v est réel $k \in \mathbb{C}$ n'est pas quelconque,
en effet $\cos(2\pi k) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (k \in \mathbb{R})$ ou $(k \in \mathbb{Z}/2 + i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (e^{\pm 2i\pi k} \in \mathbb{U})$ ou $(e^{\pm 2i\pi k} \in \mathbb{R}^*)$.

En une dimension la k-pseudo-périodicité de f se traduit de manière équivalente par $f(x+1) = e^{+2i\pi k}f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ ou par $f(x) = e^{+2i\pi kx}p(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ avec p périodique. Sauf mention du contraire périodique signifiera toujours par la suite périodique de période un. La 0-pseudo-périodicité s'appelle périodicité. La 1/2-pseudo-périodicité s'appelle antipériodicité.

Proposition 2.22 (Floquet)

- *Ou bien les racines discriminantes diffèrent :*
  $e^{+2i\pi k} \neq e^{-2i\pi k} \Leftrightarrow k \notin \mathbb{Z}/2 \Leftrightarrow \cos(2\pi k) \neq \pm 1$,
  alors il existe une base de solutions du type $\{e^{+2i\pi kx}p_+(x); e^{-2i\pi kx}p_-(x)\}$ *où* $p_\pm$ *sont périodiques.*
  De plus toute solution est bornée $\Leftrightarrow e^{\pm 2i\pi k} \in \mathbb{U} \Leftrightarrow k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos(2\pi k) \in]-1;+1[$.
- *Ou bien les racines discriminantes égalent* $+1$ *:*
  $e^{+2i\pi k} = e^{-2i\pi k} = +1 \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos(2\pi k) = +1$,
  alors toute solution est bornée si et seulement si toute solution est périodique
  si et seulement si $+1$ *est valeur propre double de* $R_0^E(1)$
  si et seulement si $R_0^E(1)$ *est diagonale* $+1$.
- *Ou bien les racines discriminantes égalent* -1 *:*
  $e^{+2i\pi k} = e^{-2i\pi k} = -1 \Leftrightarrow k \in 1/2 + \mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos(2\pi k) = -1$,
  alors toute solution est bornée si et seulement si toute solution est antipériodique
  si et seulement si -1 *est valeur propre double de* $R_0^E(1)$
  si et seulement si $R_0^E(1)$ *est diagonale* -1.

Preuve. C'est une propriété classique des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. Voir par exemple [MW] ou [CD].

□

Remarque. Concernant la parité du potentiel, signalons : v est pair
$\Leftrightarrow$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ possède une solution non triviale paire
$\Leftrightarrow y_1$ est paire $\Leftrightarrow y_1'$ est impaire
$\Leftrightarrow$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ possède une solution non triviale impaire
$\Leftrightarrow y_2$ est impaire $\Leftrightarrow y_2'$ est paire.
Alors les solutions paires $\mathbb{C}y_1$ respectivement impaires $\mathbb{C}y_2$ forment une droite.
Si il existe une solution p non triviale (anti)périodique alors $p(x) + p(-x)$ respectivement $p(x) - p(-x)$ est une solution paire respectivement impaire (anti)périodique, et ces solutions avec parités spéciales ne sont pas toutes deux nulles.

On dit que $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ a la propriété de stabilité lorsque toute solution de l'équation homogène correspondante est bornée (sur $\mathbb{R}$ tout entier). Lorsque v est périodique (notre cas) la valeur du discriminant caractérise partiellement la stabilité :

Proposition 2.23 (Stabilité) $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ *a la propriété de stabilité*
si et seulement si $(-1 < \Delta(E) < +1)$ *ou* $(\Delta(E) = \pm 1$ *et* $R_0^E(1) = \pm 1)$
Lorsque v *est réel et lorsque* E *complexe non réel,*
$-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ *a un discriminant* $\Delta(E) \notin [-1;+1]$
d'où l'absence de solutions k*-pseudo-périodiques avec* $k \in \mathbb{R}$,
en particulier $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ *n'a pas la propriété de stabilité.*

Preuve. La caractérisation de la stabilité par le discriminant résulte de la classification de Floquet 2.22. Etant donné E complexe non réel, vérifions qu'aucune solution $\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ n'est k-pseudo-périodique avec $k \in \mathbb{R}$. Il y a ainsi non stabilité pour la raison que $\Delta(E) \notin [-1;+1]$.

Effectivement $-f'' + vf = Ef \Rightarrow -f''\overline{f} + f\overline{f''} = (\overline{f'}f - f'\overline{f})' = 2i|f|^2 \text{ Im } E$
implique $\overline{f'}f - f'\overline{f} = C^{ste} + 2i\int_0^{\cdot} |f|^2 \text{ Im } E$
or si f est k-pseudo-périodique avec $k \in \mathbb{R}$ alors f et f' sont bornés et $|f|^2$ est périodique, donc l'hypothèse $\text{Im } E \neq 0$ impose nécessairement que f est (identiquement) nulle.
□

Remarque. La notion de stabilité revient historiquement à Liapounov qui le premier a énoncé des critères a priori pour que $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ ait la propriété de stabilité. Citons par exemple les mystérieux :

- $v \in C^0_{\#}(\mathbb{R})$ réel $\int_0^1 v \leq 0$ $\quad \int_0^1 |v| \leq 4 \Rightarrow -\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ a la propriété de stabilité
- $v \in C^0_{\#}(\mathbb{R})$ strictement négatif $\left]\int_0^1 \sqrt{|v|} - \int_0^1 |v'/4v|; \int_0^1 \sqrt{|v|} + \int_0^1 |v'/4v|\right[\cap \pi\mathbb{Z} = \emptyset$
  $\Rightarrow -\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ a la propriété de stabilité

Pour des renseignements voir [MW] Ch.II.P46 et Ch.V.P70.

Proposition 2.24 *L'application $E \mapsto R_0^E(1)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ solution de l'équation différentielle*

$$\frac{\partial R_0^E(1)}{\partial E} + R_0^E(1)\int_0^1 R_0^E(t)^{-1} B R_0^E(t)dt = 0$$

Le discriminant $\Delta : E \mapsto \frac{1}{2}$ Tr $R_0^E(1)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ réel sur l'axe réel.

Preuve. Par une estimation de Gronwall linéaire $\| R_0^E \| \leq \| 1 \| \exp(\int_0^{\cdot} \| A - EB \|)$.
Or $(R_0^{E+h})' - (A - EB)(R_0^{E+h}) = -hBR_0^{E+h}$ avec $R_0^{E+h}(0) = 1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
impose la forme implicite $R_0^{E+h} = R_0^E - hR_0^E \int_0^{\cdot} R_0^E(t)^{-1} B R_0^{E+h}(t)dt$.
La régularité lipschitzienne de $E \mapsto R_0^E(1)$ en résulte

$$\frac{R_0^{E+h}(1) - R_0^E(1)}{h} = -R_0^E(1)\int_0^1 R_0^E(t)^{-1} B R_0^{E+h}(t)dt = -\int_0^1 R_t^E(1) B R_0^{E+h}(t)dt$$

$$\leq \int_0^1 \| 1 \| \exp(\int_t^1 \| A - EB \|) \| B \| \| 1 \| \exp(\int_0^t \| A - EB - hB \|)dt$$

$$\leq \| 1 \|^2 \| B \| \exp(\int_0^1 \| A - EB \|)(\frac{e^{|h|\|B\|} - 1}{|h| \| B \|})$$

On en déduit que $\dfrac{R_0^{E+h}(1) - R_0^E(1)}{h} + R_0^E(1)\int_0^1 R_0^E(t)^{-1} B R_0^{E+h}(t)dt = 0$
$\rightarrow \dfrac{\partial R_0^E(1)}{\partial E} + R_0^E(1)\int_0^1 R_0^E(t)^{-1} B R_0^E(t)dt = 0$
Dans ce raisonnement rien n'oblige h à être réel ainsi $E \mapsto R_0^E(1)$ est $\mathbb{C}$-dérivable.
□

Proposition 2.25 (Monotonie du discriminant) *Sur $\mathbb{R}$ le discriminant Δ est strictement monotone entre deux racines consécutives de l'équation $\Delta = \pm 1$.*

PREUVE. (Par une méthode de théorie de la perturbation) Par l'absurde si Δ n'est pas strictement monotone sur l'intervalle $]a;b[\subset \mathbb{R}$ où

$$\Delta(a) = -1 \qquad \Delta(b) = +1 \qquad \Delta(]a;b[) \subset]-1;+1[$$

alors Δ admet un extremum local $E \in]a;b[\,|\,\Delta(E) = \cos(2\pi K) \in]-1;+1[$.

Par analycité Δ ne peut pas être constant au voisinage de E.

Notant $\gamma \subset \mathbb{C}$ un contour enlacant E une fois directement

$$\frac{1}{2i\pi}\ \mathrm{Tr}\ \int_\gamma (\lambda - H_k)^{-1} d\lambda = 1 \text{ en } k = K \text{ par simplicité de la valeur propre } E$$

$$\frac{1}{2i\pi}\ \mathrm{Tr}\ \int_\gamma (\lambda - H_k)^{-1} d\lambda \geq 2 \text{ pour } k \neq K \text{ proche de sorte que } \cos(2\pi k) \text{ soit entouré par } \gamma$$

en effet $\sigma(H_k) = \Delta^{-1}(\cos(2\pi k))$ contient un élément inférieur à E et un élément supérieur à E par définition de l'extremum local.

C'est en contradiction avec la continuité de $k \mapsto \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma (\lambda - H_k)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

□

La monotonie du discriminant dans les intervalles où ses valeurs appartiennent à $(-1;+1)$ fournit une description particulièrement commode des niveaux (d'énergie).

Notant $]E_p^{min};E_p^{max}[$ la famille nécessairement dénombrable des intervalles disjoints sur lesquels $-1 < \Delta < +1$ avec $\Delta(E_p^{min}) = -\Delta(E_p^{max}) = \pm 1, E_p^{min} < E_p^{max}$, le p^{ieme}niveau $k \mapsto E_p(k)$ est le relèvement de Δ sur l'intervalle $]E_p^{min};E_p^{max}[$ à travers le cosinus $k \in]0;1/2[\mapsto \cos(2\pi k) \in]-1;+1[$ noté brièvement

$$E_p(k) = \Delta^{-1}(\cos(2\pi k))$$

En raison du caractère localement lipschitzien

$$2 = |\Delta(E_p^{max}) - \Delta(E_p^{min})| \leq \| \Delta \|_{W^{1,\infty}_{loc}} (E_p^{max} - E_p^{min})$$

le nombre des intervalles $]E_p^{min};E_p^{max}[$ est localement fini, ils sont donc présentables en ordre croissant,

$$E_p^{min} < E_p^{max} \leq E_{p+1}^{min} < E_p^{max} \qquad \forall p \in \mathbb{Z}$$

De plus, en raison de la minoration $\sigma(H_k) \subset [-\| v \|_\infty;+\infty[$ l'indexation se limite à $p \in \mathbb{N}$ avec au passage $\min E_p \uparrow_{p\uparrow\infty} \infty$.

La stricte monotonie de la proposition 2.25 n'implique pas l'absence de zéros pour la dérivée, c'est pourtant le cas grâce à la proposition nettement plus fine :

Proposition 2.26 (Variations du discriminant)

- $\Delta' \neq 0$ *est de signe strict constant sur chaque intervalle ouvert de* $\{-1 < \Delta < +1\} \subset \mathbb{R}$ *en particulier* Δ *y est strictement monotone.*

- $\Delta(E) = +1$ *et* $\Delta'(E) \leq 0 \Rightarrow \Delta' < 0$ *sur le premier intervalle ouvert de* $]E; +\infty[\cap\{\Delta > -1\} \subset \mathbb{R}$ *en particulier* Δ *y est strictement décroissant.*

- $\Delta(E) = -1$ *et* $\Delta'(E) \geq 0 \Rightarrow \Delta' > 0$ *sur le premier intervalle ouvert de* $]E; +\infty[\cap\{\Delta < +1\} \subset \mathbb{R}$ *en particulier* Δ *y est strictement croissant.*

- $\Delta > 1$ *sur* $]-\infty; E_{min}[\subset \mathbb{R}$ *avec* $E_{min} \geq \min v$ *première racine de l'équation* $\Delta = \pm 1$

Proposition 2.27 (Racines du discriminant) *Les racines de l'équation* $\Delta = \pm 1$ *sont simples ou doubles minorées par* $\min v \in \mathbb{R}$.

Preuve. Propositions 2.26 et 2.27. Voici des identités de calcul sur le discriminant permettant d'étudier ses variations. Elles vont induire les deux faits essentiels responsables des propositions 2.26 et 2.27 à savoir

$$\begin{cases} -1 < \Delta < +1 \Rightarrow \Delta' \neq 0 \\ (\Delta = \pm 1) \text{ et } (\Delta' = 0) \Rightarrow \Delta'' \lesseqgtr 0 \end{cases}$$

Par souci de clarté on omet la dépendance en E qui est donc partout sous-entendue.

$$R_0 = \begin{bmatrix} y_2' & y_1' \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix}, {R_0}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & -y_1' \\ -y_2 & y_2' \end{bmatrix}, \text{ det } (R_0) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 1$$

La proposition 2.24 exprime les dérivées par rapport au paramètre :

$$\frac{\partial R_0(1)}{\partial E} = \begin{bmatrix} y_1'(1) \int_0^1 y_2^2 - y_2'(1) \int_0^1 y_1 y_2 & y_1'(1) \int_0^1 y_1 y_2 - y_2'(1) \int_0^1 y_1^2 \\ y_1(1) \int_0^1 y_2^2 - y_2(1) \int_0^1 y_1 y_2 & y_1(1) \int_0^1 y_1 y_2 - y_2(1) \int_0^1 y_1^2 \end{bmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{cases} 2\Delta = y_1(1) + y_2'(1) \\ \Delta^2 - 1 = \frac{1}{4}[y_1(1) - y_2'(1)]^2 + y_1'(1) y_2(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\Delta' = (y_1(1) - y_2'(1)) \int_0^1 y_1 y_2 - y_2(1) \int_0^1 y_1^2 + y_1'(1) \int_0^1 y_2^2 \\ +2y_1'(1)\Delta' = \int_0^1 [y_1'(1) y_2(t) + \frac{y_1(1) - y_2'(1)}{2} y_1(t)]^2 dt + (1 - \Delta^2) \int_0^1 y_1^2 \\ -2y_2(1)\Delta' = \int_0^1 [y_2(1) y_1(t) - \frac{y_1(1) - y_2'(1)}{2} y_2(t)]^2 dt + (1 - \Delta^2) \int_0^1 y_2^2 \end{cases}$$

$$\Delta'' = \left((\int_0^1 y_1 y_2)^2 - (\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2) \right) \Delta$$

$$+ \frac{y_1(1) - y_2'(1)}{2} \int_0^1 \left(y_1^2(t) \int_0^t y_2^2 - y_2^2(t) \int_0^t y_1^2 \right) dt$$

$$+ y_1'(1) \int_0^1 \left(y_1 y_2(t) \int_0^t y_2^2 - y_2^2(t) \int_0^t y_1 y_2 \right) dt - y_2(1) \int_0^1 \left(y_1^2(t) \int_0^t y_1 y_2 - y_1 y_2(t) \int_0^t y_1^2 \right) dt$$

Si $-1 < \Delta < +1$ alors les formules donnant $+2y_1'(1)\Delta'$ et $-2y_2(1)\Delta'$ sous forme de carrés montrent que $y_1'(1)\Delta' > 0$ et $y_2(1)\Delta' < 0$ en particulier $\Delta' \neq 0$.

De même si $\Delta = \pm 1$ et $\Delta' = 0$ alors $y_1'(1) = y_2(1) = 0$ et $y_1(1) = y_2'(1) = \Delta = \pm 1$,

en particulier $\Delta'' = \left((\int_0^1 y_1 y_2)^2 - (\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2)\right)\Delta$ est non nul,
c'était toute la difficulté de la proposition.

Maintenant pourquoi les racines de $\{\Delta = \pm 1\}$ sont-elles minorées par $\min v$?

Si $E < \min v$ alors la relation $(y_1')^2 = 2\int_0^{\cdot}(v-E)y_1 y_1'$ empêche $y_1'(>0)$ de s'annuler sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

En effet initialement $y_1''(0) = (v-E)y_1(0) = (v-E)(0) > 0$ donc pour les petits temps y_1' est strictement croissant à compter de $y_1'(0) = 0$. Tant que $y_1' > 0$ nécessairement $y_1 > y_1(0) = 1$ et le premier zéro de y_1' devrait satisfaire $(y_1')^2 = 2\int_0^{\cdot}(v-E)y_1 y_1'(>0)$ ce qui est impossible donc il n'existe pas. Ainsi y_1 et y_1' sont strictement croissants sur $]0;+\infty[$ en particulier $y_1 > 1$ sur $]0;+\infty[$.

De même si $E < \min v$ alors la relation $(y_2')^2 = 2\int_0^{\cdot}(v-E)y_2 y_2'$ empêche $y_2'(>0)$ de s'annuler sur $]0;+\infty[$ ainsi y_2 et y_2' sont strictement croissants $]0;+\infty[$ en particulier $y_2' > 1$ sur $]0;+\infty[$.

On en déduit $2\Delta = y_1(1) + y_2'(1) > 2$ lorsque $E < \min v$ car $y_1 > 1$ et $y_2' > 1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ donc au point 1.

□

Proposition 2.28 (Régularité des relèvements) *Chaque relèvement est régulier $E_p \in C^\infty(\overline{I})$, extrémités ∂I comprises, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$. On a*

$$\begin{cases} \Delta'(E_p)E_p' = \pm 2\pi\sqrt{1-\Delta^2}(E_p) \\ \Delta''(E_p)E_p'^2 + 4\pi^2\Delta(E_p) + \Delta'(E_p)E_p'' = 0 \end{cases}$$

Preuve. Tant que la dérivée Δ' ne s'annule pas l'inverse Δ^{-1} est un C^∞-difféomorphisme local d'où la régularité d'un relèvement $E(k) = \Delta^{-1}(\cos(2\pi k))$.

C'est le cas tant que $-1 < \Delta < +1$ alors $E'(k) = -2\pi\sin(2\pi k)/\Delta'(E(k))$.

Si $\Delta(E) = \pm 1$ et $\Delta'(E) = 0$ alors la non-nullité $\Delta''(E) \neq 0$ cruciale (voir preuve 2.26) permet de lever l'indétermination dans le quotient

$$E'(k) = -2\pi\sin(2\pi k)/\Delta'(E(k)) \sim -\frac{2\pi}{\Delta''(E)}\frac{\sin(2\pi k)}{E(k)-E}$$

Précisément observons par exemple un relèvement $k \in]0;1/2[\mapsto E(k) \in \Delta^{-1}(\cos(2\pi k))$ autour d'une valeur $E = E(0+) \in \{\Delta = +1\} \cap \{\Delta' = 0\} \subset \{\Delta'' < 0\}$:

$$[E(k)-E]E'(k) = -2\pi\frac{\sin(2\pi k)}{\Delta'(E(k))/(E(k)-E)}$$

$$\Rightarrow E(k) - E = \left(-4\pi\int_0^k \frac{\sin(2\pi k)}{\Delta'(E(k))/E(k)-E}dk\right)^{1/2} \overset{k\to 0^+}{\sim} \frac{2\pi k}{\sqrt{-\Delta''(E)}}$$

$$\Rightarrow E'(k) = -2\pi\frac{\sin(2\pi k)}{\Delta'(E(k))} \overset{k\to 0^+}{\sim} \frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta''(E)}}$$

d'où $E \in C^1([0;1/2[)$ à dérivée strictement positive sur $[0;1/2[$.

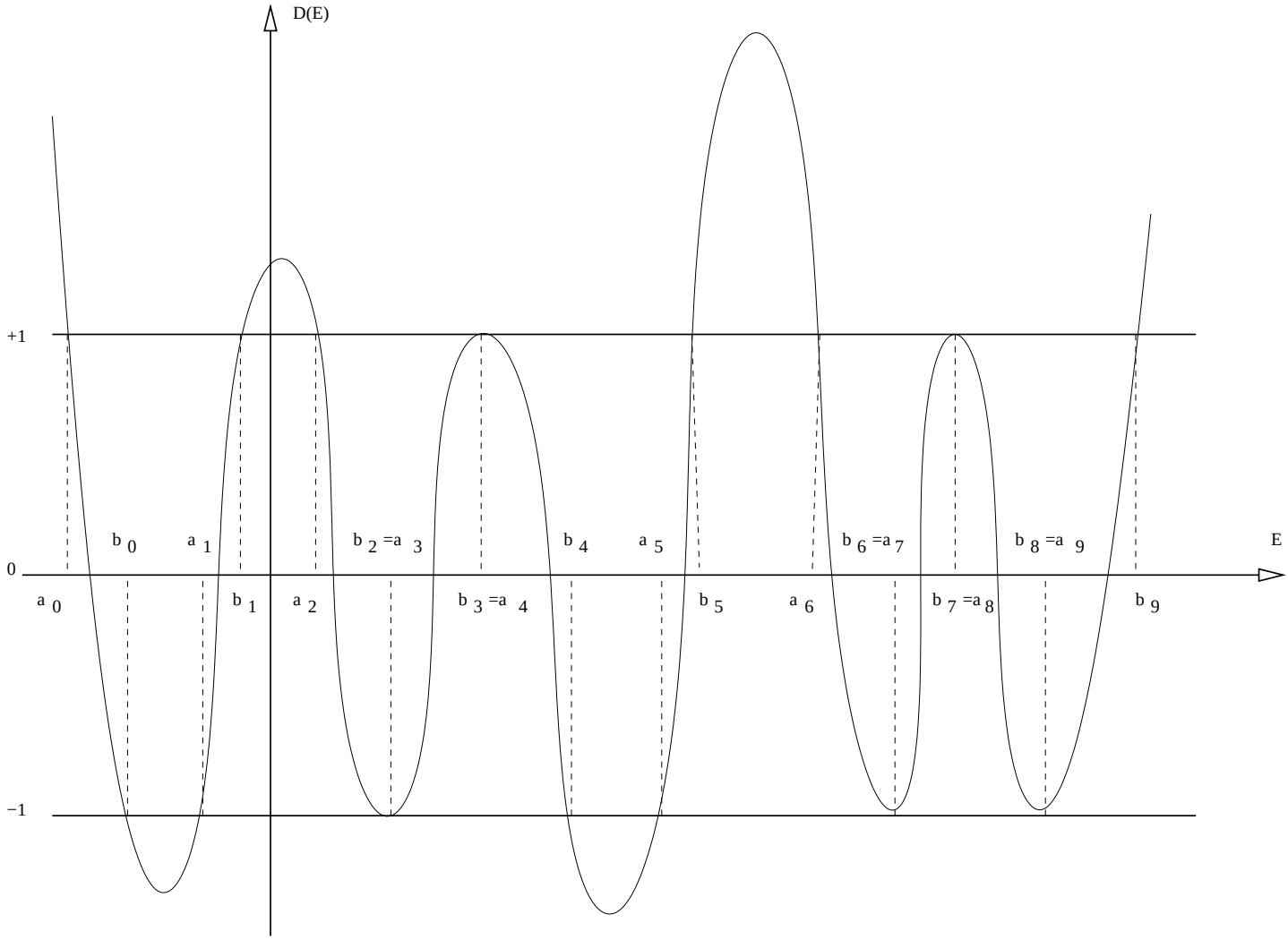

FIG. 1 – Un graphe possible pour le discriminant.

Sachant cela les dérivations successives dans le quotient

$$E'(k) = -2\pi \frac{[\sin(2\pi k)/k]}{[\Delta'(E(k))/k]}$$

sont possibles (origine incluse) d'où $E \in C^\infty([0;1/2[)$.

Enfin des relations liant les dérivées de Δ et E_p comme celles proposées dans la proposition 2.28 peuvent s'obtenir en dérivant l'identité $\Delta(E_p(k)) = 2\pi\cos(2\pi k)$ plusieurs fois.

□

REMARQUE. Pour la régularité analytique voir la proposition 2.37.

Proposition 2.29 (Monotonie des niveaux)

- *E_p est croissant sur $]0;\frac{1}{2}[$ lorsque p est pair, c'est le cas du premier niveau E_0*
- *E_p est décroissant sur $]0;\frac{1}{2}[$ lorsque p est impair, c'est le cas du second niveau E_1*

PREUVE. C'est une conséquence des propositions précédentes en particulier de 2.26 qui permet de dresser le tableau des variations du discriminant.

□

REMARQUE. On connait maintenant l'allure des différents niveaux. La figure 2 page 87 représente les premiers niveaux obtenus par relèvement dans le discriminant de la figure 1.

On sait que $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ a une solution périodique (respectivement antipériodique) lorsque $\Delta(E) = +1$ (respectivement $\Delta(E) = -1$) et seulement dans ce cas. Il est remarquable (comparer avec le résultat de C.H.Wilcox 2.5) que la multiplicité de E en tant que valeur propre-spectrale de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ avec condition (anti)périodique coincide avec la multiplicité de E en tant que zéro de $\Delta - 1$ (respectivement de $\Delta + 1$) :

Proposition 2.30 (Multiplicité) *Les zéros de $\Delta^2 - 1$ sont simples ou doubles.*
Le plus petit zéro noté E_{min} est simple $\Delta(E_{min}) = +1$ et $\Delta'(E_{min}) < 0$.
Le zéro $E \in \{\Delta = \pm 1\}$ est double $\Leftrightarrow -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ a toutes ses solutions (anti)périodiques.

PREUVE. Les identités de la preuve 2.26 montrent l'équivalence

$$\Delta = \pm 1 \text{ et } \Delta' = 0 \Leftrightarrow y_1'(1) = y_2(1) = 0 \text{ et } y_1(1) = y_2'(1) = \pm 1$$

Le premier membre traduit que le zéro de $\Delta^2 - 1$ est double. Le second membre traduit que $R_0(1) = \pm 1$ est diagonale.

Concernant le plus petit zéro $E_{min} \geq \min v$ de $\Delta^2 - 1$ la preuve 2.27 a montré que Δ est strictement supérieur à $+1$ sur l'intervalle $]-\infty; E_{min}[$ en particulier on a $\Delta(E_{min}) = +1$ et $\Delta'(E_{min}) \leq 0$. Supposons par l'absurde que $\Delta'(E_{min}) = 0$ alors l'inégalité $\Delta''(E_{min}) < 0$ stricte (voir la preuve 2.26) dans le développement limité $\Delta(E) - \Delta(E_{min}) \sim \Delta''(E_{min})(E - E_{min})^2/2$ montre que $\Delta \leq \Delta(E_{min}) = +1$ au voisinage de E_{min}, d'où une contradiction à gauche de E_{min}.

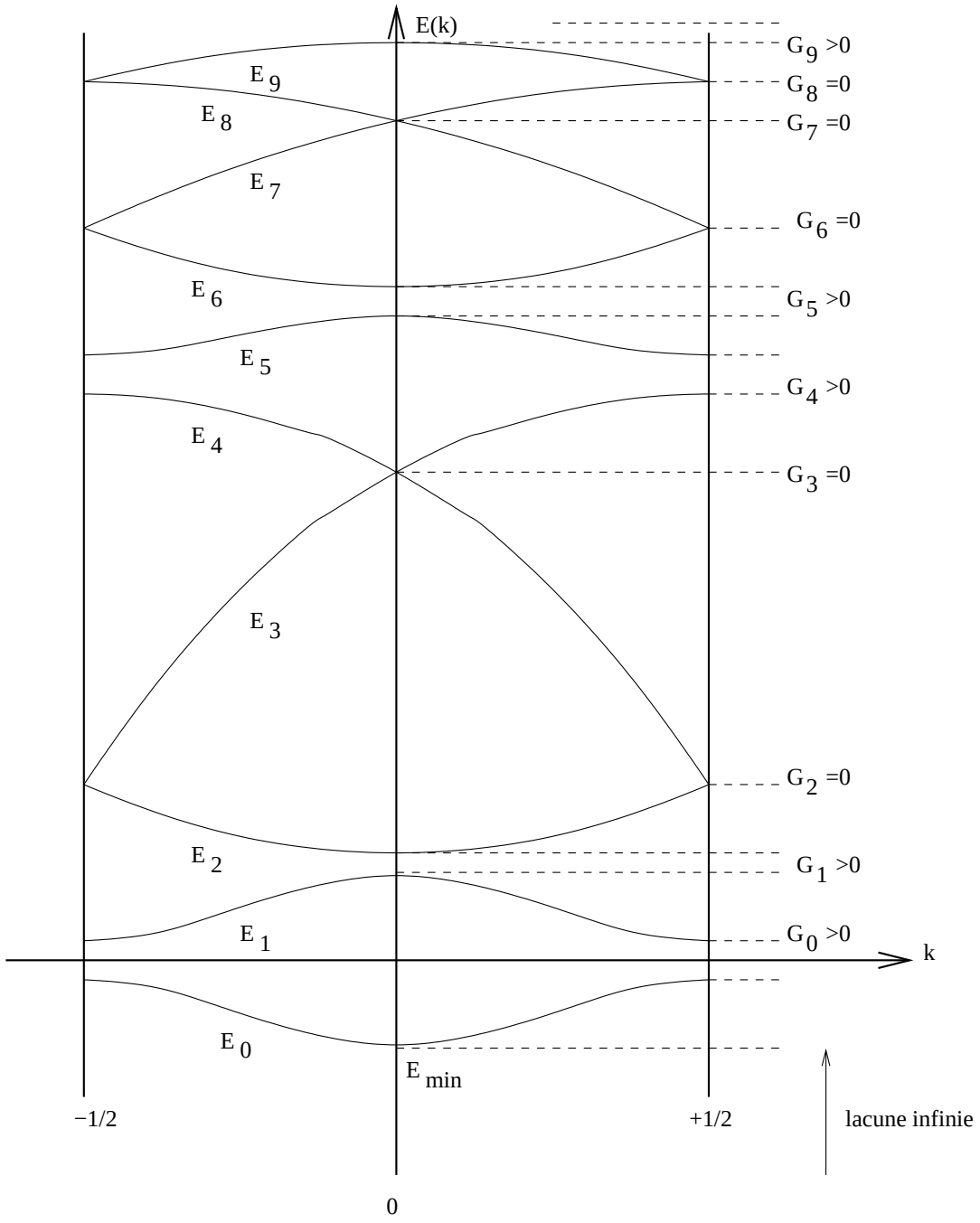

FIG. 2 – Le graphe des premiers niveaux et des premières lacunes.

□

REMARQUE. On peut donner de la première valeur propre de l'hamiltonien périodique

$$E_{min} = \inf_{\varphi \in C^1_{\#}(\mathbb{R})} \frac{\int \varphi'^2 + \int v\varphi^2}{\int \varphi^2}$$

une interprétation intéressante en termes de zéros de solutions.

Etant donné v périodique réel, on dit que $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ a la propriété d'annulation lorsque les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) toute solution réelle s'annule une infinité de fois

(ii) toute solution réelle s'annule

(iii) il existe une solution réelle s'annulant une infinité de fois

alors $-\frac{d^2}{dx^2} + v_{inf}(x)$ a la propriété d'annulation pour tout potentiel $v_{inf} \leq v$ inférieur.

On vérifie [MW] que l'objet spectral E_{min} caractérise l'annulation :

$$]E_{min}; +\infty[= \{E \in \mathbb{R} \mid -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E \text{ a la propriété d'annulation } \}$$

Application : la propriété de stabilité implique la propriété d'annulation.

REMARQUE. Il en résulte un critère d'annulation a priori, étant donné v périodique réel, $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ a la propriété d'annulation ($E_{min} < 0$) dès que le discriminant $\Delta < +1$ (mais cette condition n'est pas nécessaire il se peut que 0 soit dans une lacune $\subset \{\Delta < -1\}$).

Abordons maintenant la question de l'asymptotique du discriminant pour les grandes valeurs. Lorsque $E \in \mathbb{C}$ tend vers l'infini en module le potentiel v apparait comme une (petite) perturbation de la (grande) constante E. Les solutions $\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ à données initiales indépendantes de E sont asymptotiquement dominées par :

Proposition 2.31 (Domination asymptotique) *Pour* $x \in \mathbb{R}^+$

$$\| R_0^E(x) \| \leq \sqrt{|E|}\exp(x\sqrt{|E|})\exp(\sqrt{|E|}\int_0^x |v|) \qquad (\forall |E| \geq 1)$$

$$|y_1^E(x)| \leq \exp(x|Im\sqrt{E}|)\exp(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\int_0^x |v|)$$

$$|y_2^E(x)| \leq \exp(x|Im\sqrt{E}|)\exp(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\int_0^x |v|)$$

PREUVE. Observons $vB = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ comme perturbation de $U = \begin{bmatrix} 0 & E \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et notons

$$S_0^E(x) = \exp(-xU) = \begin{bmatrix} +\cos(x\sqrt{E}) & -\sqrt{E}\sin(x\sqrt{E}) \\ -\sin(x\sqrt{E})/\sqrt{E} & +\cos(x\sqrt{E}) \end{bmatrix}$$

la résolvante de l'équation à coefficients constants $-f'' + Ef = 0$ dont la croissance est connue $\| S_0^E(x) \| \leq \sqrt{|E|}e^{+x\sqrt{|E|}}$ (pour $|E| \geq 1$ au moins),

$$(R_0^E)' + UR_0^E = vBR_0^E \Leftrightarrow R_0^E(x) = S_0^E(x) + S_0^E(x)\int_0^x S_0^E(\tau)^{-1}v(\tau)BR_0^E(\tau)d\tau$$

Il en résulte $\| R_0^E(x) \| \leq \sqrt{|E|}\exp(x\sqrt{|E|}) + \sqrt{|E|}\int_0^x \| R_0^E(\tau) \| \exp((t-\tau)\sqrt{|E|})|v|(\tau)d\tau$

puis par une estimation de Gronwall $\| R_0^E(x) \| \leq \sqrt{|E|}\exp(x\sqrt{|E|})\exp(\sqrt{|E|}\int_0^x |v|)$.

Le facteur $\sqrt{|E|}$ tient à la formulation matricielle du problème dans laquelle solution et dérivée jouent le même rôle. On peut préciser la domination asymptotique des solutions elles-mêmes en explicitant le terme matriciel $S_0^E(x)S_0^E(\tau)^{-1}v(\tau)BR_0^E(\tau)$ ainsi

$$\begin{cases} y_1^E(t) = +\cos(t\sqrt{E}) - \int_0^t y_1^E(\tau)\frac{\sin(\sqrt{E}(t-\tau))}{\sqrt{E}}v(\tau)d\tau \\ y_2^E(t) = -\frac{\sin(t\sqrt{E})}{\sqrt{E}} - \int_0^t y_2^E(\tau)\frac{\sin(\sqrt{E}(t-\tau))}{\sqrt{E}}v(\tau)d\tau \end{cases}$$

En invoquant les inégalités $|\cos(z)| \leq \exp|\mathrm{Im}(z)|$ et $|\sin(z)| \leq \exp|\mathrm{Im}(z)|$ $(\forall z \in \mathbb{C})$ on obtient par une estimation de Gronwall semblable à la précédente

$$\begin{cases} |y_1^E(t)|\exp(-t|\mathrm{Im}\sqrt{E}|) \leq 1 + \int_0^t \frac{|v(\tau)|}{\sqrt{|E|}}|y_1^E(\tau)|\exp(-\tau|\mathrm{Im}\sqrt{E}|)d\tau \\ |y_2^E(t)|\exp(-t|\mathrm{Im}\sqrt{E}|)\sqrt{|E|} \leq 1 + \int_0^t \frac{|v(\tau)|}{\sqrt{|E|}}|y_2^E(\tau)|\exp(-\tau|\mathrm{Im}\sqrt{E}|)\sqrt{|E|}d\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y_1^E(t)| \leq \exp(t|\mathrm{Im}\sqrt{E}|)\exp(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\int_0^t |v|) \\ |y_2^E(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{|E|}}\exp(t|\mathrm{Im}\sqrt{E}|)\exp(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\int_0^t |v|) \end{cases}$$

□

En développant $2\Delta(E) = (y_1^E)(1) + (y_2^E)'(1)$ selon les puissances de $|E|$ avec un reste dominé par 2.31 on obtient l'asymptotique du discriminant avec une précision d'autant plus grande que v est régulier :

Proposition 2.32 (Asymptotique du discriminant)

$$\Delta(E) = \cos(\sqrt{E}) - \frac{\sin(\sqrt{E})}{2\sqrt{E}} < v > + \mathcal{O}_{|E|\to\infty}\left(\frac{e^{|Im\sqrt{E}|}}{|E|}\right) = \cos(\sqrt{E + < v >}) + \mathcal{O}_{|E|\to\infty}\left(\frac{e^{|Im\sqrt{E}|}}{|E|}\right)$$

$$\Delta(E) = \cos(\sqrt{E}) - \frac{\sin(\sqrt{E})}{2\sqrt{E}} < v > - \frac{\cos(\sqrt{E})}{8E} < v^2 > + \mathcal{O}_{|E|\to\infty}\left(\frac{e^{|Im\sqrt{E}|}}{|E|^{3/2}}\right) \quad \textit{lorsque } v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$$

Remarque. Dans ce genre de question la normalisation toujours possible $< v >= 0$ à une constante additive près n'est pas tout à fait innocente, elle permet de "gagner" un cran

$$|\Delta(E) - \cos(\sqrt{E + < v >})| \leq C_v^{ste}/|E| \text{ mais } |\Delta(E) - \cos(\sqrt{E})| \leq C_v^{ste}/\sqrt{|E|}$$

Proposition 2.33 *Le discriminant Δ est du genre zéro car*

$$\limsup_{|E|\to\infty} \log\log \parallel R_0^E(1) \parallel /\log|E| = \limsup_{|E|\to\infty} \log\log|\Delta(E)|/\log|E| = 1/2$$

PREUVE. La majoration par 1/2 résulte de la domination 2.31. La minoration par 1/2 résulte de l'asymptotique du discriminant 2.32 pour les valeurs négatives

$$|\Delta(E) - \mathrm{ch}(\sqrt{|E|})| \leq C^{ste}(v)\exp(|\sqrt{|E|}|)/\sqrt{|E|} \text{ lorsque } E \in \mathbb{R} \to -\infty$$

d'où l'équivalent $\Delta(E) \sim \frac{1}{2}e^{\sqrt{|E|}}$ puis $\lim \log\log|\Delta(E)|/\log|E| = 1/2$ lorsque $E \to -\infty$.
□

W.Magnus et W.Winkler [MW] invoquent le théorème de factorisation d'Hadamard (" la série entière $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ admet une infinité de zéros dès que $\limsup_{|z|\to\infty} \log\log|f(z)|/\log|z| \notin \mathbb{N}$ ") pour prouver que les zéros de $\Delta = \pm 1$ sont infinis. M.Reed et B.Simon observent l'ensemble $\{\Delta = \pm 1\}$ comme le spectre nécessairement non borné de l'opérateur selfadjoint à résolvante compacte $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ de domaine (anti)périodique. On peut vérifier que les zéros de l'équation $\Delta = \pm 1$ sont en nombre infini sans sortir beaucoup des équations différentielles linéaires d'ordre deux par le biais du résultat légèrement plus général :

Proposition 2.34 (Anecdote) *Soit $v_\lambda \in C^0_\#(\mathbb{R})$ à dépendance λ-continue convergeant uniformément vers $-\infty$ au sens $\sup_{\mathbb{R}} v_\lambda \to -\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$.*

Alors le discriminant Δ_λ de l'équation $-\frac{d^2}{dx^2} + v_\lambda(x)$ atteint les valeurs $+1$ et -1 infiniment, d'où l'existence d'une infinité de solutions (anti)périodiques.

Application à $v_\lambda = v - \lambda$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

PREUVE. Admettons une propriété classique des équations différentielles linéaires d'ordre deux. Soient deux solutions réelles $-f'' + vf = -F'' + VF = 0$ associées à des potentiels comparables $v < V$ alors entre deux zéros (consécutifs) de F on trouve un zéro de f. D'où le principe de comparaison : sur tout intervalle ouvert le nombre des zéros d'une solution $\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2}+v$ excède à peu près (± 1) le nombre des zéros d'une solution $\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2}+V$.

Soit $\rho_\lambda e^{i\varphi_\lambda} = y_1^\lambda + iy_2^\lambda$ l'écriture en coordonnées polaires des solutions normalisées de l'équation Ker $-\frac{d^2}{dx^2} + v_\lambda(x)$.

Automatiquement $\varphi_\lambda = \int_0^\cdot 1/\rho_\lambda^2$ est strictement croissant,

(l'équation différentielle $\varphi'_\lambda = 1/\rho_\lambda^2$ résulte de celle satisfaite par y_1^λ et y_2^λ) et

$$\Delta_\lambda = \frac{1}{2}(\rho_\lambda + \frac{1}{\rho_\lambda})(1)\cos\varphi_\lambda(1) + \frac{1}{2}\rho'_\lambda(1)\sin\varphi_\lambda(1) \text{ avec un coefficient } \frac{1}{2}(\rho_\lambda + \frac{1}{\rho_\lambda})(1) \geq 1$$

Si $\varphi_\lambda(1)$ atteint 0 et π modulo $2\pi\mathbb{Z}$ alors Δ_λ atteint $+1$ et -1. Vérifions que c'est le cas infiniment lorsque $\lambda \to +\infty$ sous les hypothèses de la proposition 2.34.

Si $v_\lambda \leq -m_\lambda$ avec $m_\lambda > 0$ alors par le principe de comparaison le nombre de zéros sur $]0;1[$ de toute solution réelle $\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2}+v_\lambda(x)$ excède à peu près $n_\lambda = \max \mathbb{N}\cap(0;\sqrt{m_\lambda}/\pi)$ ainsi il existe une solution avec n_λ zéros sur $]0;1[$.

Cette solution s'écrit toujours sous la forme $\rho_\lambda \cos(\varphi_\lambda + C^{ste})$.

Nécessairement $\varphi_\lambda(1) = [\varphi_\lambda]_0^1 > (n_\lambda - 1)\pi \geq \sqrt{m_\lambda} - 2\pi \to +\infty$,

ainsi $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(1)$ est à valeurs positives non bornées.

Si φ est λ-continu, et c'est le cas car la résolvante de l'équation est λ-continue (résultat facile de dépendance continue par rapport aux coefficients), alors par le théorème des valeurs intermédiaires $(2\mathbb{Z})\pi$ et $(2\mathbb{Z}+1)\pi$ sont atteints infiniment.

□

Abordons maintenant le problème inverse de l'asymptotique du discriminant, c'est-à-dire l'asymptotique des niveaux pour les grandes valeurs. Lorsque $p \to \infty$ quel est le comportement des niveaux $E_p(k)$ uniformément en k ? concrètement quel est le comportement des suites croissantes $E_p(k=0)$ et $E_p(k=1/2)$? L'asymptotique spectrale s'obtient par composition dans l'asymptotique du discriminant. Plus v est régulier plus $\Delta(E)$ est développé dans l'échelle des puissances négatives de E plus l'équivalent grossier $E_p(k) \sim 4\pi^2 p^2$ peut être précisé :

Proposition 2.35 (Asymptotique spectrale)

$$\sqrt{E_{2n}(k=0)} \in 2n\pi + \mathcal{O}(1/n)$$

$$\sqrt{E_{2n-1}(k=0)} \in 2n\pi + \mathcal{O}(1/n)$$

$$\sqrt{E_{2n-2}(k=1/2)} \in (2n-1)\pi + \mathcal{O}(1/n)$$

$$\sqrt{E_{2n-1}(k=1/2)} \in (2n-1)\pi + \mathcal{O}(1/n)$$

Preuve. Pour une justification voir [MW] de même pour les remarques :

Remarque. (Borg) L'asymptotique s'établit vite $\forall n \geq < |v| >$ (normalisé $< v >= 0$)

$$\begin{cases} |\sqrt{E_{2n}(k=0)} - 2n\pi| \leq < |v| > /4n \\ |\sqrt{E_{2n-1}(k=0)} - 2n\pi| \leq < |v| > /4n \\ |\sqrt{E_{2n-2}(k=1/2)} - (2n-1)\pi| \leq < |v| > /4n-2 \\ |\sqrt{E_{2n-1}(k=1/2)} - (2n-1)\pi| \leq < |v| > /4n-2 \end{cases}$$

Remarque. Si $v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$ alors

$$\begin{cases} E_{2n}(k=0) \in (2n)^2\pi^2 + < v > + \mathcal{O}(1/n) \\ E_{2n-1}(k=0) \in (2n)^2\pi^2 + < v > + \mathcal{O}(1/n) \\ E_{2n-2}(k=1/2) \in (2n-1)^2\pi^2 + < v > + \mathcal{O}(1/n) \\ E_{2n-1}(k=1/2) \in (2n-1)^2\pi^2 + < v > + \mathcal{O}(1/n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{E_{2n}(k=0)} \in 2n\pi + < v > /4n\pi + \mathcal{O}(1/n^2) \\ \sqrt{E_{2n-1}(k=0)} \in 2n\pi + < v > /4n\pi + \mathcal{O}(1/n^2) \\ \sqrt{E_{2n-2}(k=1/2)} \in (2n-1)\pi + < v > /4n\pi + \mathcal{O}(1/n^2) \\ \sqrt{E_{2n-1}(k=1/2)} \in (2n-1)\pi + < v > /4n\pi + \mathcal{O}(1/n^2) \end{cases}$$

Remarque. Si $v \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R})$ alors

$$\begin{cases} E_{2n}(k=0) \in (2n)^2\pi^2 + < v > + < |v - < v > |^2 > /4n^2\pi^2 + \mathcal{O}(1/n^2) \\ E_{2n-1}(k=0) \in (2n)^2\pi^2 + < v > + < |v - < v > |^2 > /4n^2\pi^2 + \mathcal{O}(1/n^2) \\ E_{2n-2}(k=1/2) \in (2n-1)^2\pi^2 + < v > + < |v - < v > |^2 > /4n^2\pi^2 + \mathcal{O}(1/n^2) \\ E_{2n-1}(k=1/2) \in (2n-1)^2\pi^2 + < v > + < |v - < v > |^2 > /4n^2\pi^2 + \mathcal{O}(1/n^2) \end{cases}$$

Exemple. Application à l'asymptotique de la longueur des lacunes :

$$\begin{cases} E_{2n}(k=0) - E_{2n-1}(k=0) \in \mathcal{O}(1/n) \text{ respectivement } \mathcal{O}(1/n^2) \\ E_{2n-1}(k=1/2) - E_{2n-2}(k=1/2) \in \mathcal{O}(1/n) \text{ respectivement } \mathcal{O}(1/n^2) \end{cases}$$

selon que $v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$ ou $v \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R})$.

Remarque. (Hochstadt [Ho]) Asymptotique de la longueur des lacunes :

$$\begin{cases} E_{2n}(k=0) - E_{2n-1}(k=0) \in \mathcal{O}(1/n^\alpha) \\ E_{2n-1}(k=1/2) - E_{2n-2}(k=1/2) \in \mathcal{O}(1/n^\alpha) \end{cases}$$

pour tout $\alpha > 0$ lorsque $v \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Proposition 2.36 (Caractérisation du cas libre) *Les lacunes sont toutes absentes* $\cup_{k\in\mathbb{R}}\sigma(H_k) = [E_{min}; \infty[\Leftrightarrow v$ *est constant* $\Leftrightarrow \Delta(E) = \cos(\sqrt{E - C^{ste}}) \Leftrightarrow E_{min} =< v >$

Preuve. La première équivalence peut se lire en détail dans [MW], les autres s'en inspirent.

□

Remarque. Dans le même genre [Bo] on peut citer
"Les racines de $\Delta = -1$ sont toutes doubles si et seulement si v est $\frac{1}{2}$-périodique".

Le discriminant $\Delta \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est qu'un reflet partiel du potentiel $v \in C^0_\#(\mathbb{R})$ de fait l'identité $\Delta_{v_1} = \Delta_{v_2}$ pour deux potentiels $v_1 \neq v_2$ est possible. Néanmoins certaines quantités comme $\int_0^1 v$ ou $\int_0^1 v^2$ sont fonctions de $\Delta_{(v)}$ c'est l'asymptotique du discriminant qui le montre.

On ne connait pas de théorème de structure énoncant un critère (nécessaire suffisant) pour qu'un élément $\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ soit un discriminant. Même en se limitant à un nombre fini de niveaux (en laissant l'asymptotique $E_n(k) \sim_{n\to\infty} 4n^2\pi^2$ s'établir d'elle-même) il ne faudrait pas croire avoir une grande lattitude pour fixer la forme respective des premiers niveaux.

Ainsi (par exemple) deux niveaux différents ne peuvent être translatés l'un de l'autre : si les potentiels v et $v + C^{ste}$ ont un niveau en commun noté E_p alors les discriminants Δ_v et $\Delta_{v+C^{ste}}$ coincident sur le segment $[E_p^{min}; E_p^{max}] \subset \mathbb{R}$ donc coincident partout par prolongement analytique. Mais d'après une remarque précédente $\Delta_v = \Delta_{v+C^{ste}}$ implique $< v >=< v + C^{ste} >$ et la constante est nulle.

Le dernier résultat de ce paragraphe concerne la géométrie (élémentaire en une dimension d'espace) des croisements de niveaux. Elle montre que s'il a lieu, le croisement est propre. Il se fait selon deux tangentes distinctes non nulles :

Théorème 2.13 (Dérivées aux croisements)
Etant donné $k \in \mathbb{Z}/2$ ou bien $E_p(k) \neq E_{p+1}(k)$ auquel cas $E'_p(k) = E'_{p+1}(k) = 0$ ou bien $E_p(k) = E_{p+1}(k)$ auquel cas $E'_p(k-) = E'_{p+1}(k+) \neq 0$ et $E'_p(k+) = E'_{p+1}(k-) \neq 0$ sont de signes opposés.

PREUVE. Dans le cas de non-croisement $E_p(k) < E_{p+1}(k)$ on a

$$\Delta(E_p(k)) = \Delta(E_{p+1}(k)) = \pm 1 \qquad \Delta'(E_p(k)) \neq 0 \qquad \Delta'(E_{p+1}(k)) \neq 0$$

d'où la nullité des dérivées $E'_p(k)$ et $E'_{p+1}(k)$ par les relations de la proposition 2.28 à savoir

$$\Delta'(E_p)E'_p = \pm 2\pi\sqrt{1-\Delta^2}(E_p) \qquad \Delta'(E_{p+1})E'_{p+1} = \pm 2\pi\sqrt{1-\Delta^2}(E_{p+1})$$

Dans le cas croisement $E_p(k) = E_{p+1}(k)$ on a

$$\Delta(E_p(k)) = \Delta(E_{p+1}(k)) \pm 1,\ \Delta'(E_p(k)) = \Delta'(E_{p+1}(k)) = 0,\ \Delta''(E_p(k)) = \Delta''(E_{p+1}(k)) \neq 0$$

d'où l'égalité en carré des dérivées $E'_p(k)$ et $E'_{p+1}(k)$ de part et d'autre de k par la relation de la proposition 2.28

$$\Delta''(E_p)E'^2_p + 4\pi^2\Delta(E_p) + \Delta'(E_p)E''_p = \Delta''(E_{p+1})E'^2_{p+1} + 4\pi^2\Delta(E_{p+1}) + \Delta'(E_{p+1})E''_{p+1} = 0$$

La différence de signe tient à la monotonie inversée de deux niveaux consécutifs sur une (demi)-période.
□

La lacune entre deux niveaux consécutifs est mesurée par

$$G_p = E^{min}_{p+1} - E^{max}_p \geq 0 \tag{27}$$

le cas de nullité correspondant au croisement des niveaux p et $p+1$.

Par la croissance-décroissance alternée des niveaux, le croisement des niveaux p et $p+1$ a lieu en $K = 0$ respectivement $K = 1/2$ (modulo $\mathbb{Z}$) selon que p est impair ou pair.

- Sous l'hypothèse d'isolation $G_p > 0$ $G_{p+1} > 0$ le niveau E_p est 1-périodique analytique par simplicité, c'est la seule propriété qui se transpose au cas multidimensionnel.

- Lorsque le croisement des niveaux p et $p+1$ n'a pas lieu les valeurs $E^{max}_p \neq E^{min}_{p+1} \in \sigma(H_k)$ sont simples, où le nombre k est entier $k \in \mathbb{Z}$ (respectivement semi-entier $k \in \mathbb{Z} + 1/2$) selon que $\Delta(E^{min}_{p+1}) = \Delta(E^{max}_p) = +1$ (respectivement -1), et les niveaux E_p et E_{p+1} sont analytiques autour de k par simplicité.

- Lorsque le croisement a lieu la valeur $E^{max}_p = E^{min}_{p+1} \in \sigma(H_k)$ est double, où le nombre k est entier $k \in \mathbb{Z}$ (respectivement semi-entier $k \in \mathbb{Z} + 1/2$) selon que $\Delta(E^{min}_{p+1}) = \Delta(E^{max}_p) = +1$ (respectivement -1), et les niveaux E_p et E_{p+1} sont seulement lipschitziens autour de k vu que leurs dérivées présentent des sauts non nuls (opposés). L'analycité est perdue à cause de l'indexation des valeurs par ordre croissant. Ce phénomène général est bien connu en théorie de la perturbation. Pour d'autres paramétrisations respectant la dérivabilité des niveaux voir par exemple [K] Ch.II. Theorems 5.2 et 5.6 et 5.7.

Definition 2.7 *La p^{ieme}lacune ($p \geq 1$) est le segment $[E_{p-1}^{max}; E_p^{min}]$ éventuellement trivial. On dit qu'une lacune est présente lorsqu'elle ne se réduit pas à un point. Par convention la 0^{ieme}lacune, $]\infty; E_{min}]$ infinie, est toujours présente.*

Par définition la p^{ieme}onde de Bloch ψ_p est un vecteur propre $\psi_p(\cdot; k)$ pour H_k associé à la valeur propre-spectrale $E_p(k) \in \sigma(H_k)$ qui dépend périodiquement de $k \in \mathbb{R}$ et analytiquement de $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$.

Remarque. Les lacunes s'appelent aussi intervalles d'instabilité au sens où $\forall E \in \mathbb{C}$,

$$-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E \text{ n'a pas la propriété de stabilité}$$

si et seulement si E appartient à une lacune non réduite à un point

Remarque. Lors du croisement des niveaux p et $p+1$ en $K \in \mathbb{Z}/2$ le prolongement analytique de $k \mapsto \psi_p(\cdot; k)$ s'effectue autour du point $K \in \mathbb{Z}/2$ par $k \mapsto \psi_{p+1}(\cdot; k)$ à un facteur de phase analytique près qui contient toute la discontinuité de passage de ψ_p à ψ_{p+1}. La proposition 2.37 détaillera ce point.

Bestiaire.

Cette page contient des exemples célèbres d'équations différentielles périodiques auxquelles sont restés attachés des noms de mathématiciens.

Hill : Si v est un polynôme trigonométrique non constant alors l'équation de Hill $-f''+vf=0$ n'a pas de solutions (anti)périodiques f qui soient des polynômes (anti)trigonométriques.

Ince : $[1+a\cos(2\pi t)]y''(t)+[b\sin(2\pi t)]y'(t)+[c+d\cos(2\pi t)]y(t)=0$ avec $-1<a<+1$
L'équation de Ince se ramène à l'équation de Hill $-f''+vf=0$ de potentiel $v=\dfrac{\alpha+\beta\cos(2\pi t)+\gamma\cos(4\pi t)}{[1+a\cos(2\pi t)]^2}$ moyennant le changement d'inconnue $f=[1+a\cos(2\pi t)]^{-\frac{b}{4\pi a}}y$.
Son importance théorique tient à ce que la plupart des exemples pour lesquels on dispose de critères a priori de présence ou d'absence de telle ou telle lacune sont des cas particuliers d'équations de Ince. En particulier ces critères ne sont pas des calculs mais des raisonnements. Tous les exemples de cette page relèvent du théorème 2.14. Voir [MW] Ch.VII.

Soient $p(X)=2\pi^2aX^2-\pi bX-d/2$ et $q(X)=2\pi^2a(X-1/2)^2-\pi b(X-1/2)-d/2$

Théorème 2.14 (Ince) *Si l'équation de Ince a toutes ses solutions périodiques (respectivement antipériodiques) alors p (respectivement q) a une racine $\in\mathbb{Z}$.*
Si $n=\max\{p=0\}\in\mathbb{N}$ respectivement $n=\max\{q=0\}\in\mathbb{N}$ (hypothèse ne concernant que a,b et d) alors il y a au plus $n+1$ valeurs de c pour lesquelles l'équation de Ince présente un espace de solutions périodiques (respectivement antipériodiques) de dimension (exactement) 1.
Si $n=\min\{p=0\}\in-\mathbb{N}^*$ respectivement $n=\min\{q=0\}\in-\mathbb{N}^*$ (hypothèse ne concernant que a,b et d) alors il y a au plus $|n|$ valeurs de c pour lesquelles l'équation de Ince présente un espace de solutions périodiques (respectivement antipériodiques) de dimension (exactement) 1.

Mathieu : $-\dfrac{d^2}{dx^2}+\varepsilon\cos(2\pi x)$ avec $\varepsilon\in\mathbb{R}^*$
Toutes les lacunes sont présentes.

Lamé : $-\dfrac{d^2}{dx^2}+4K^2k^2m(m+1)\mathrm{sn}^2(2Kx)$ avec $m\in\mathbb{R}$
en notant sn le Jacobi-sinus de module k^2 de période $2K=2\int_0^{\pi/2}dt/\sqrt{1-k^2\sin^2}$
(explicitement sn est l'inverse de $t\in[0;1]\mapsto\int_0^t dt/\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}\in[0;K]$)
Toutes les lacunes sont présentes lorsque $m\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
Si $m\in\mathbb{N}$ alors il y a au plus m lacunes. Si $m\in-\mathbb{N}^*$ il y a au plus $-m-1$ lacunes.

Whitaker : $-\dfrac{d^2}{dx^2}+4\pi km\cos(2\pi x)-2k^2\cos(4\pi x)$ avec $k\in\mathbb{R}$
Toutes les lacunes sont présentes lorsque $m\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
Si $m\in2\mathbb{Z}$ alors toutes les lacunes $]E_{2n-1}(k=0);E_{2n}(k=0)[$ sont présentes et il y a au plus $|m|$ lacunes du type $]E_{2n-1}(k=1/2);E_{2n-2}(k=1/2)[$.

Symétriquement si $m \in 2\mathbb{Z}+1$ alors toutes les lacunes $]E_{2n-1}(k=1/2); E_{2n-2}(k=1/2)[$ sont présentes et il y a au plus $|\frac{m-1}{2}|$ lacunes du type $]E_{2n-1}(k=0); E_{2n}(k=0)[$.

Winkler : $-\dfrac{d^2}{dx^2} + 4\pi km\cos(2\pi x) + 2k^2\cos(4\pi x)$ avec $k \in \mathbb{R}$
Toutes les lacunes sont présentes lorsque $m \in \mathbb{R}$.

Le modèle (Krönig-Penny) d'un potentiel $\mathbb{I}^{\#}_{(-T;+T)}(0 < T < 1/2)$ formé d'une marche d'escalier périodisée est le seul exemple à ma connaissance permettant des calculs explicites. Malgré les discontinuités du potentiel tous les résultats exceptés les asymptotiques 2.32 et 2.35 demeurent. En particulier on peut vérifier la présence de toutes les lacunes pour beaucoup de valeurs de T. On peut aussi construire aisément le croisement de deux niveaux consécutifs. Signalons :

- la coexistence de deux solutions périodiques s'écrit

$$e^{i(1-2T)\sqrt{E}} = e^{i2T\sqrt{E-1}} \in \{-1;+1\}$$

$$\text{soit } \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } E = 1 + \frac{n^2\pi^2}{4T^2} \text{ et } \left(\frac{1-2T}{2T}\right)^2 n^2 + \left(\frac{1-2T}{\pi}\right)^2 \in (n+2\mathbb{Z})^2$$

- la coexistence de deux solutions antipériodiques s'écrit

$$e^{i(1-2T)\sqrt{E}} = -e^{i2T\sqrt{E-1}} \in \{-1;+1\}$$

$$\text{soit } \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } E = 1 + \frac{n^2\pi^2}{4T^2} \text{ et } \left(\frac{1-2T}{2T}\right)^2 n^2 + \left(\frac{1-2T}{\pi}\right)^2 \in (n+2\mathbb{Z}+1)^2$$

Lorsque $0 < T < 1/2$ est fixé l'équation d'inconnue entière $n \in \mathbb{Z}$ est très difficile à résoudre. Néanmoins pour réaliser la coexistence de solutions (anti)périodiques il suffit de fixer $n \in \mathbb{Z}$ (d'où E) puis de résoudre à l'envers l'équation d'inconnue $0 < T < 1/2$ sachant qu'il y a toujours exactement une solution :

$$T \in]0;1/2[\mapsto \left(\frac{1-2T}{2T}\right)^2 n^2 + \left(\frac{1-2T}{\pi}\right)^2 \in]0;\infty[\text{ est bijectif}$$

2.7 Réindexation.

Résumé. Cette partie est consacrée au recollement régulier des niveaux d'énergie lorsqu'il y a croisement. On peut résumer l'intérêt de cette procédure aux théorèmes 2.15 et 2.16 qui seront décisifs au moment de l'homogénéisation. La réindexation permet une (ré)écriture des sous-espaces de Floquet au moyen de nouvelles enveloppes et de nouvelles fibres auxquelles on peut généraliser les estimations de commutation des niveaux isolés. C'est l'objet des propositions 2.39 à 2.42. On trouvera pour finir une discussion du cas spécial où une infinité de niveaux se croisent.

Supposons un croisement des niveaux $n+1, n+2, \cdots, n+l-1, n+l$ et pas plus.

Par hypothèse $G_n > 0$, $G_{n+1} = \cdots = G_{n+l-1} = 0$, $G_{n+l} > 0$ voir la définition (27).

Notons $K \in \mathbb{Z}/2$ le point (unique modulo $\mathbb{Z}$) de non-croisement des deux premiers niveaux $n+1$ et $n+2$. C'est un point de continuité pour ψ_{n+1}. Explicitement $K = 0$ respectivement $K = 1/2$ selon que n est impair respectivement pair. Alors $K + l/2 \in \mathbb{Z}/2$ est le point (unique modulo $\mathbb{Z}$) de non-croisement des deux derniers niveaux $n+l-1$ et $n+l$. C'est un point de continuité pour ψ_{n+l}.

Notons I l'intervalle $K + (0; 1/2) \subset \mathbb{R}$.

Nous allons réindexer les niveaux (d'énergie) E_p, les ondes de Bloch ψ_p, les enveloppes de Wannier $\hat{\varphi}_p$ et les fibres (1-périodiques) σ_p en des objets analogues E,ψ,$\hat{\lambda}$ et s plus réguliers. Cette procédure est tout à fait spéciale à la dimension un.

<u>Réindexation des niveaux.</u>

Soit $E \in C^1(\mathbb{R})$ l'application l-périodique définie par les valeurs suivantes ($E_{n+1}^{min} \leq E \leq E_{n+l}^{max}$) sur l'intervalle $K + (-l/2; +l/2) \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} E_{n+l} \text{ sur } I - l/2 \\ E_{n+l-1} \text{ sur } I - (l-1)/2 \\ \cdots \\ E_{n+2} \text{ sur } I - 2/2 \\ E_{n+1} \text{ sur } I - 1/2 \\ E_{n+1} \text{ sur } I \\ E_{n+2} \text{ sur } I + 1/2 \\ \cdots \\ E_{n+l-1} \text{ sur } I + (l-2)/2 \\ E_{n+l} \text{ sur } I + (l-1)/2 \end{cases}$$

C'est le recollement des différents niveaux naturellement (correctement) ordonnés.

<u>Réindexation des ondes de Bloch.</u>

Soit $\psi \in L^\infty[\mathbb{R} \to L^2(\Omega)]$ l'application l-périodique définie par les valeurs suivantes sur l'intervalle $K + (-l/2; +l/2) \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \exp(+i\alpha_{-l})\psi_{n+l} \text{ sur } I - l/2 \\ \exp(+i\alpha_{-l+1})\psi_{n+l-1} \text{ sur } I - (l-1)/2 \\ \cdots \\ \exp(+i\alpha_{-2})\psi_{n+2} \text{ sur } I - 2/2 \\ \exp(+i\alpha_{-1})\psi_{n+1} \text{ sur } I - 1/2 \\ \exp(+i\alpha_{0})\psi_{n+1} \text{ sur } I \\ \exp(+i\alpha_{+1})\psi_{n+2} \text{ sur } I + 1/2 \\ \cdots \\ \exp(+i\alpha_{+l-2})\psi_{n+l-1} \text{ sur } I + (l-2)/2 \\ \exp(+i\alpha_{+l-1})\psi_{n+l} \text{ sur } I + (l-1)/2 \end{cases}$$

où les phases réelles $\alpha_{-l}, \cdots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_{+1}, \cdots, \alpha_{+l-1}$ seront choisies plus tard pour réaliser $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et même ψ analytique (proposition 2.37). Notons déjà que

- $\alpha_{-1}(K) = \alpha_0(K)$ par continuité de ψ_{n+1} au point K
- $\alpha_{+l-1}(K + l/2) = \alpha_{-l}(K + l/2)$ par continuité de ψ_{n+l} au point $K + l/2$
- $(\alpha_{+1} \cdots \alpha_{+l-1})$ et $(\alpha_{-2} \cdots \alpha_{-l})$ sont destinés à corriger les discontinuités de phase entre les différents ψ naturellement (correctement) ordonnés

Remarque. De fait on pourrait supposer par la suite $\alpha_{-l} = \cdots = \alpha_{-1} = \alpha_0 = \alpha_{+1} = \cdots = \alpha_{+l-1} = 0$ quitte à incorporer les phases dans $\psi_{n+1}, \cdots, \psi_{n+l}$ eux-mêmes. Cette transformation unitaire préserve la propriété fondamentale $\psi_{n+1}(\cdot; k), \cdots, \psi_{n+l}(\cdot; k) \subset L^2(\Omega)$ est une famille orthonormale $\forall k$, mais affecte la 1-périodicité des ondes de Bloch $k \mapsto \psi_{n+j}(\cdot; k)$ pout tout $1 \leq j \leq l$. Les calculs en série de Fourier seraient alors à proscrire. Traditionnellement les ondes de Bloch sont 1-périodiques et (largement) indéterminées à une phase périodique (mesurable ! ?) près. Ici seul ψ est vraiment significatif or sa présentation se base sur $\psi_{n+1}, \cdots, \psi_{n+l}$ artificiellement 1-périodiques. Il convient de rétablir la l-périodicité au détriment de la 1-périodicité, commode pour la présentation au départ, mais cause de discontinuités.

Proposition 2.37 *E et ψ sont analytiques l-périodiques sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. (Théorie de la perturbation en dimension finie l)

Soit $\gamma \subset \mathbb{C}$ un contour enlacant $[E_{n+1}^{min}; E_{n+l}^{max}] \subset \mathbb{R}$ une fois directement en évitant les autres niveaux $\gamma \subset \mathbb{C} - (]-\infty; E_n^{max}] \cup [E_{n+l+1}^{min}; +\infty[)$.

Le projecteur total $\Pi(k) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\lambda - H_k)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}$ correspondant aux niveaux $n+1, n+2, \cdots, n+l-1, n+l$ est holomorphe de rang constant l.

D'après [K] Ch.II. Para.4, il existe (un changement de base) $U = U(k) \in \mathcal{L}^{inv}$ holomorphe rendant $k \mapsto U^{-1}(k)\Pi(k)U(k)$ constant. Il peut être pris unitaire (au sens $U^*(k) = U(\overline{k})\,\forall k$) car le projecteur est orthogonal (au sens $\Pi^*(k) = \Pi(\overline{k})\,\forall k$).

Les propriétés spectrales de la portion $\Pi(k)H_k\Pi(k) = H_k\Pi(k) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \lambda(\lambda - H_k)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}$ de l'opérateur H_k dans le sous-espace total $\operatorname{Im} \Pi(k)$ sont exactement celles de l'opérateur $a(k) = U^{-1}(k)\Pi(k)H_k\Pi(k)U(k) \in \mathcal{L}$ qui s'identifie aisément à une matrice (complexe) $l \times l$.

La question de la régularité des valeurs propres $E_{n+1}(k), \cdots, E_{n+l}(k)$ et des projecteurs propres $\Pi_{n+1}(k), \cdots, \Pi_{n+l}(k)$ associés (pour l'opérateur H_k non borné) se pose donc en dimension finie.

L'analycité de la proposition 2.37 est un cas particulier d'un résultat général de théorie de la perturbation en dimension finie. Citons T.Kato [K] Ch.II. :
"Soit a une matrice holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ (intersectant l'axe réel) telle que $a(z)$ est normale $\forall z \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Alors

Localement : au voisinage de tout point réel $x \in \Omega$ il existe des paramétrisations holomorphes dans un (petit) disque centré en x des racines du polynôme caractéristique de a ; les projecteurs propres associés sont holomorphes ; les nilpotents propres sont nuls.

Globalement : pour tout intervalle réel $I \subset \Omega$ il existe des paramétrisations holomorphes dans un (petit) voisinage ouvert de I des racines du polynôme caractéristique de a ; les projecteurs propres associés sont holomorphes ; les nilpotents propres sont nuls.

Remarque : si Ω est simplement connexe le nombre des paramétrisations est partout le même."

D'après le théorème 2.13 autour d'un point $k \in \mathbb{Z}/2$ de croisement des niveaux p et $p+1$ la continuation analytique de E_p(considéré à gauche de k) s'effectue par E_{p+1}(considéré à droite de k) et non par le prolongement 1-périodique dû à E_p(considéré à droite de k) pour la simple raison que $E'_p(k-) \neq E'_p(k+)$.

On en déduit que le projecteur orthogonal l-périodique noté p donné par les suivantes valeurs sur l'intervalle $K + (-l/2; +l/2) \subset \mathbb{R}$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \Pi_{n+l} \text{ sur } I - l/2 \\ \Pi_{n+l-1} \text{ sur } I - (l-1)/2 \\ \cdots \\ \Pi_{n+2} \text{ sur } I - 2/2 \\ \Pi_{n+1} \text{ sur } I - 1/2 \\ \Pi_{n+1} \text{ sur } I \\ \Pi_{n+2} \text{ sur } I + 1/2 \\ \cdots \\ \Pi_{n+l-1} \text{ sur } I + (l-2)/2 \\ \Pi_{n+l} \text{ sur } I + (l-1)/2 \end{cases}$$

D'après [K] Ch.II. Para. 4, pour obtenir une base orthonormale holomorphe de l'image d'un projecteur orthogonal holomorphe p il suffit de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{du}{dk} = \frac{dp}{dk} u \qquad u(0) = p(0)$$

puis de prendre $k \mapsto [u(k)e_i]_{i \in I}$ où $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthonormale fixée de l'image de $p(0)$. Si le projecteur est l-périodique la base ainsi obtenue n'est peut-être pas l-périodique. Ici p est de rang un donc la base holomorphe $k \mapsto u(k)e$ réduite à un seul vecteur noté ϕ vérifie par simplicité une relation de pseudo-périodicité du type $\phi(l) = e^{+2i\pi\varphi}\phi(0)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$. Les deux solutions $k \mapsto \phi(k)$ et $k \mapsto e^{-2i\pi\varphi}\phi(k+l)$ de l'équation différentielle $\dfrac{d\phi}{dk} = \dfrac{dp}{dk}\phi$ sont égales à l'origine donc égales partout d'où la l-périodicité de la base modifiée

$k \mapsto e^{-2i\pi\varphi k/l}\phi(k)$. En conséquence il existe ψ holomorphe et l-périodique (normalisé lorsque k est réel) vérifiant $\psi(k) \in \text{ Im } p(k) = \text{ Ker } E(k) - H_k \qquad \forall k$.

Par simplicité ψ_p est proportionnel à ψ sur l'intervalle $\{E_p = E\}$ d'où l'existence de phases analytiques réelles sur l'axe réel $\alpha_{-l}, \cdots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_{+1}, \cdots, \alpha_{+l-1}$ telles que le recollement proposé pour ψ soit l-périodique analytique.

□

Remarque. La simplicité pour obtenir une base holomorphe qui soit périodique n'est pas essentielle. Sans invoquer la simplicité $u(k) = U(k)p(0)$ où l'isomorphisme $U(k)$: $\text{ Im } p(0) \to \text{ Im } p(k)$ tel que $p(k) = U(k)p(0)U(k)^{-1}$ est solution de l'équation différentielle $U' = [p'; p]U \qquad U(0) = 1$. Par unicité de cette équation différentielle U est pseudo-périodique $U(k+l) = U(k)U(l)\,\forall k$. Si il existe un logarithme pour $U(l)$ dans le bicommutant de $U(l)$ alors $U(l) = e^{2i\pi\varphi}$ où $\varphi \in \mathcal{L}$ commute avec $p(0)$ puisque $p(0)U(l) = U(l)p(l) = U(l)p(0)$. Alors $e^{-2i\pi\varphi k/l}$ commute avec $p(0)$ donc établit un isomorphisme $\text{ Im } p(0) \to \text{ Im } p(0)$. En conséquence $k \mapsto U(k)e^{-2i\pi\varphi k/l}$ est un isomorphisme $\text{ Im } p(0) \to \text{ Im } p(k)$ holomorphe tout comme $U(k)$ mais l-périodique.

Critère : pour définir $\log U(l)$ dans le bicommutant il suffit que le spectre $\text{ Sp } U(l)$ n'enlace pas l'origine. Ici p est quasi-pair au sens $p(-k) = C \circ p(k) \circ C$ où C est la conjuguaison (ou presque lorsque $K = 1/2$ il faut translater). Automatiquement U est quasi-pair aussi en particulier $U(-l) = C \circ U(l) \circ C = U(l)^{-1}$ puis $[C \circ U(l)]^2 = 1$.

Finalement $\text{ Sp } U(l) \subset \{-1; +1\}$ n'enlace pas l'origine.

Proposition 2.38 *Lorsque $K = 0$ il existe un vecteur propre ψ L^2-normalisé analytique l-périodique sur $\mathbb{R}$ quasi-pair au sens $\overline{\psi}(x; -\xi) = \psi(x; \xi)$.*

Lorsque $K = 1/2$ il faut changer la (quasi)-parité par rapport à l'origine en une (quasi)-parité par rapport à $1/2$ car le niveau E est alors pair par rapport à $1/2$ (seulement).

Preuve. Il ne va pas de soi que les trois qualités : analycité, périodicité et quasi-parité puissent être réalisées simultanément sur le recollement normalisé ψ pour un bon choix des phases α. Nous le vérifions ici élémentairement grâce à la simplicité dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$.

D'après la proposition 2.37 soit ψ un vecteur propre normalisé analytique l-périodique sur $\mathbb{R}$.

Si C désigne la conjugaison alors $H_{-\xi} = C \circ H_\xi \circ C$ pour tout ξ réel.

Il en résulte par simplicité $\forall \xi \notin \mathbb{Z}/2 \qquad \overline{\psi}(\cdot; -\xi) = \exp(i\alpha(\xi))\psi(\cdot; \xi)$ où $\alpha(\xi)$ est nécessairement réel par la normalisation $\| \overline{\psi}(\cdot; -\xi) \|_{L^2} = \| \psi(\cdot; \xi) \|_{L^2} = 1$ supposée.

Automatiquement la détermination continue de la phase α hérite de l'analycité de ψ d'où un vecteur propre normalisé analytique

$$\varphi(x; \xi) := \psi(x; \xi)\exp(i\alpha(\xi)/2)\exp(-i\pi m\xi/l)\exp(i\pi n/2)$$

pourvu que les nombres m et n soient réels.

Par la périodicité supposée de ψ on a

$$\overline{\psi}(\cdot; -\xi - l) = \exp(i\alpha(\xi + l))\psi(\cdot; \xi) = \overline{\psi}(\cdot; -\xi) = \exp(i\alpha(\xi))\psi(\cdot; \xi)$$

donc l'application $\xi \mapsto \dfrac{\alpha(\xi + l) - \alpha(\xi)}{2\pi}$ est constante et vaut un entier noté $m \in \mathbb{Z}$.

Par involution

$$\overline{\psi}(\cdot;-\xi) = \exp(i\alpha(\xi))\psi(\cdot;\xi) = \exp(i\alpha(\xi))\exp(-i\alpha(-\xi))\overline{\psi}(\cdot;-\xi)$$

donc l'application $\xi \mapsto \dfrac{\alpha(\xi)-\alpha(-\xi)}{2\pi}$ est constante et vaut un entier noté $n \in \mathbb{Z}$.

Pour ce choix de m et n on constate que φ est analytique l-périodique quasi-pair.

□

Réindexation des enveloppes.

Partant des fonctions de Wannier pour les niveaux $n+1, n+2, \cdots, n+l-1, n+l$ considérés

$$\hat{\varphi}_{n+1} = \int_\Omega \psi_{n+1}(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx, \cdots, \hat{\varphi}_{n+l} = \int_\Omega \psi_{n+l}(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx \subset L^2(\mathbb{R})$$

définissons par analogie

$$\hat{\lambda}_j : \xi \mapsto \int_\Omega \psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx \text{ pour } 1 \leq j \leq l$$

Remarque. $\hat{\lambda}_j$ a la forme

$$\left|\begin{array}{l} (\cdots etc \cdots) \\ \exp(+i\alpha_{+l-2})\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } -l+I+(l-2)/2-j \\ \exp(+i\alpha_{+l-1})\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } -l+I+(l-1)/2-j \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \exp(+i\alpha_{-l})\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } I-l/2-j \\ \exp(+i\alpha_{-l+1})\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } I-(l-1)/2-j \\ \cdots \\ \exp(+i\alpha_{-2})\hat{\varphi}_{n+2} \text{ sur } I-2/2-j \\ \exp(+i\alpha_{-1})\hat{\varphi}_{n+1} \text{ sur } I-1/2-j \\ \exp(+i\alpha_{0})\hat{\varphi}_{n+1} \text{ sur } I-j \\ \exp(+i\alpha_{+1})\hat{\varphi}_{n+2} \text{ sur } I+1/2-j \\ \cdots \\ \exp(+i\alpha_{+l-2})\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } I+(l-2)/2-j \\ \exp(+i\alpha_{+l-1})\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } I+(l-1)/2-j \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \exp(+i\alpha_{-l})\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } +l+I-l/2-j \\ \exp(+i\alpha_{-l+1})\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } +l+I-(l-1)/2-j \\ (\cdots etc \cdots) \end{array}\right.$$

En particulier $\Sigma_{1\leq j\leq l} \parallel \hat{\lambda}_j \parallel^2_{L^2} = l$.

Théorème 2.15 (Régularité des enveloppes recollées)

L'enveloppe $\hat{\lambda}_j$ est analytique sur $\mathbb{R}$ avec une certaine décroissance par exemple

$$|\hat{\lambda}_j|(\xi) \leq C_\psi^{ste}/(1+|\xi|^2) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

plus généralement il existe $r > 0$ tel que $|\hat{\lambda}_j|(\xi) \leq C^{ste}_{r,\psi}/(1+|\xi|^2) \qquad \forall \xi \in \{|Im| < r\} \subset \mathbb{C}$.

Les périodisés $\varpi_{\Gamma^*}|\hat{\lambda}_j|^2 \in L^\infty_\#(\mathbb{R})$ et $\varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}_j|^2 \in L^\infty_\#(\mathbb{R})$ et $\varpi_{\Gamma^*}|\nabla^2\hat{\lambda}_j|^2 \in L^\infty_\#(\mathbb{R})$ sont bornés.

L'identité $\Sigma_{1\leq j\leq l}\varpi_{\Gamma^*}|\hat{\lambda}_j|^2 = l$ est une réminiscence de $\varpi_{\Gamma^*}|\hat{\varphi}_{n+j}|^2 = 1 \qquad 1 \leq j \leq l$.

Preuve. L'analycité de $\hat{\lambda}_j$ résulte de la ξ-analycité à valeurs dans $L^2(\Omega)$ énoncée dans la proposition 2.37 pour $\psi(\cdot;\xi)$.

Première étape. Sachant $\hat{\lambda}_j(\xi) = \int_\Omega \psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$ avec ψ l-périodique holomorphe sur une bande $\{|\mathrm{Im}| < r\} \subset \mathbb{C}$ à valeurs $L^2(\Omega)$, on a

$$(1+4\pi^2\xi^2)\hat{\lambda}_j(\xi) = \int_\Omega \psi(x;\xi+j)(1-\Delta)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$$

$$= \int_\Omega (1-\Delta)\psi(x;\xi+j)\, e^{-2i\pi<x|\xi>}dx = \int_\Omega [1-v(x)+E(\xi+j)]\psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$$

Ainsi

$$|1+4\pi^2\xi^2||\hat{\lambda}_j|(\xi) \leq (1+\parallel v \parallel_\infty + \parallel E \parallel_\infty)e^{+2\pi|\Omega||\mathrm{Im}(\xi)|}\sup \parallel \psi \parallel_{L^2_x} \leq C^{ste}_\psi e^{+2\pi|\mathrm{Im}(\xi)|}$$

en particulier

$$|1+4\pi^2\mathrm{Re}(\xi^2)||\hat{\lambda}_j|(\xi) \leq C^{ste}_\psi e^{+2\pi|\mathrm{Im}(\xi)|}$$

Lorsque $\xi \to \infty$ avec une partie imaginaire $\mathrm{Im}(\xi)$ bornée

$$|\xi|^2 \sim \ \mathrm{Re}(\xi^2) \text{ d'où } |\hat{\lambda}_j|(\xi) \leq C^{ste}_\psi/(1+|\xi|^2)$$

Note : l'intégration par parties $\int_\Omega \psi(x;\xi+j)\Delta e^{-2i\pi<x|\xi>}dx = \int_\Omega \Delta\psi(x;\xi+j)\, e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$ résulte de la (1)-périodicité à ξ fixé pour $x \mapsto \psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}$, équivalente à la quasi-périodicité pour $\psi(\cdot;\xi+j) \in H^2_{\xi+j} = H^2_\xi$ à ξ fixé.

Seconde étape. Sachant $\nabla\hat{\lambda}_j : \xi \mapsto \int_\Omega (\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi+j)\, e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$, on a

$$\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}_j|^2(\xi+l\gamma^*) = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\int_\Omega (\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi+j)\, e^{-2i\pi<x|\xi>}e^{-2i\pi l<x|\gamma^*>}dx|^2$$

$$\leq \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\int_\Omega (\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi+j)\, e^{-2i\pi<x|\xi>}e^{-2i\pi<x|\gamma^*>}dx|^2 = \int_\Omega |(\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi+j)|^2dx$$

$$\leq \pi^2(\int_\Omega |\psi(x;\xi+j)|^2dx + \int_\Omega |\nabla_\xi\psi(x;\xi+j)|^2dx)$$

Ainsi

$$\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}_j|^2(\xi+\gamma^*) \leq \pi^2\Sigma_{1\leq j\leq l}\int_\Omega |\psi(x;\xi+j)|^2dx + \int_\Omega |\nabla_\xi\psi(x;\xi+j)|^2dx$$

où $\psi \in W^{1,\infty}[\mathbb{R}_\xi; L^2(\Omega_x)]$ par régularité locale et périodicité globale.

De même pour les périodisés des dérivées d'ordres supérieurs.

Troisième étape. Pour établir l'identité $\Sigma_{1\leq j\leq l}\varpi_{\Gamma^*}|\hat{\lambda}_j|^2 = l$ sachant que pour tout $1 \leq j \leq l$ on a $\varpi_{\Gamma^*}|\hat{\varphi}_{n+j}|^2 = 1$, il suffit de remarquer $|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j + l\gamma^*) = |\hat{\varphi}_{n(\xi)}|^2(\xi - j + l\gamma^*)$ où $n(\xi) \in \{n+1, \cdots, n+l\}$ ne dépend que de l'intervalle $\subset \mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$ auquel ξ appartient. $\square$

Réindexation des fibres.

Etant donnés $\sigma^\varepsilon_{n+1}, \cdots, \sigma^\varepsilon_{n+l} \subset L^2_{loc}(\mathbb{R})$ les fibres 1-périodiques d'un élément $u \in L^2(\mathbb{R})$ (au sens de la définition 2.6) soit s^ε l'application l-périodique définie par les valeurs suivantes sur l'intervalle $K + (-l/2; +l/2) \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \exp(-i\alpha_{-l})\sigma^\varepsilon_{n+l} \text{ sur } I - l/2 \\ \exp(-i\alpha_{-l+1})\sigma^\varepsilon_{n+l-1} \text{ sur } I - (l-1)/2 \\ \cdots \\ \exp(-i\alpha_{-2})\sigma^\varepsilon_{n+2} \text{ sur } I - 2/2 \\ \exp(-i\alpha_{-1})\sigma^\varepsilon_{n+1} \text{ sur } I - 1/2 \\ \exp(-i\alpha_{0})\sigma^\varepsilon_{n+1} \text{ sur } I \\ \exp(-i\alpha_{+1})\sigma^\varepsilon_{n+2} \text{ sur } I + 1/2 \\ \cdots \\ \exp(-i\alpha_{+l-2})\sigma^\varepsilon_{n+l-1} \text{ sur } I + (l-2)/2 \\ \exp(-i\alpha_{+l-1})\sigma^\varepsilon_{n+l} \text{ sur } I + (l-1)/2 \end{cases}$$

Par permutation circulaire soit s^ε_j l'application l-périodique définie par $s^\varepsilon(\cdot + j)$ pour tout $1 \leq j \leq l$ (plus généralement pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par commodité). La composante s^ε est (lorsque $u \in L^2(\mathbb{R})$ varie) n'importe quelle application l-périodique $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Par contre la famille finie $\{s^\varepsilon_1, \cdots, s^\varepsilon_l\}$ est entièrement déterminée par s^ε :

$$s^\varepsilon_j(k+m) = s^\varepsilon_{j+m}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{R} \qquad \forall m \in \mathbb{Z} \qquad \forall j \in \mathbb{Z} \tag{28}$$

Remarque. Le produit $s^\varepsilon_j\hat{\lambda}_j$ a la forme

$$\left|\begin{array}{l} (\cdots etc \cdots) \\ \sigma^\varepsilon_{n+l-1}\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } -l + I + (l-2)/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+l}\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } -l + I + (l-1)/2 - j \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \sigma^\varepsilon_{n+l}\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } I - l/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+l-1}\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } I - (l-1)/2 - j \\ \cdots \\ \sigma^\varepsilon_{n+2}\hat{\varphi}_{n+2} \text{ sur } I - 2/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+1}\hat{\varphi}_{n+1} \text{ sur } I - 1/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+1}\hat{\varphi}_{n+1} \text{ sur } I - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+2}\hat{\varphi}_{n+2} \text{ sur } I + 1/2 - j \\ \cdots \\ \sigma^\varepsilon_{n+l-1}\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } I + (l-2)/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+l}\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } I + (l-1)/2 - j \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} \sigma^\varepsilon_{n+l}\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } +l + I - l/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+l-1}\hat{\varphi}_{n+l-1} \text{ sur } +l + I - (l-1)/2 - j \\ (\cdots etc \cdots) \end{array}\right.$$

En particulier $\Sigma_{1\leq j\leq l} \parallel s_j^\varepsilon \hat{\lambda}_j \parallel_{L^2}^2 = \Sigma_{1\leq j\leq l} \parallel \sigma_{n+j}^\varepsilon \hat{\varphi}_{n+j} \parallel_{L^2}^2 = \Sigma_{1\leq j\leq l} \parallel \sigma_{n+j}^\varepsilon \parallel_{L^2(\Omega^*)}^2$.

Théorème 2.16 (Représentation intégrale des fibres)

$$s^\varepsilon : \xi \mapsto \int_\Omega [\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\sqrt{\varepsilon}u(\varepsilon x - \varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\xi\gamma}]\overline{\psi}(x;\xi)dx$$

où $\psi \in C_b^0[\mathbb{R}_\xi; L^2(\Omega_x)]$ est (même) analytique.

PREUVE. Il s'agit d'une réécriture de la représentation intégrale des fibres d'origine :

$$\sigma_p^\varepsilon(k) = \int_\Omega [\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\sqrt{\varepsilon}u(\varepsilon x - \varepsilon\gamma)e^{+2i\pi k\gamma}]\overline{\psi_p}(x;k)dx \qquad n+1 \leq p \leq n+l$$

□

Pour $u^\varepsilon \in V_{n+1}^\varepsilon \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{n+l}^\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R})$ écrit sous la forme $\hat{u}^\varepsilon = \Sigma_{1\leq j\leq l}\sigma_{n+j}^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_{n+j}^\varepsilon$ avec $\sigma_{n+1}^\varepsilon, \cdots, \sigma_{n+l}^\varepsilon \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ 1-périodiques on vient de construire $s_1^\varepsilon, \cdots, s_l^\varepsilon \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ l-périodiques dépendant linéairement et injectivement de $\sigma_{n+1}^\varepsilon, \cdots, \sigma_{n+l}^\varepsilon$ telles que

$$\begin{cases} \hat{u}^\varepsilon = \Sigma_{1\leq j\leq l}\sigma_{n+j}^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_{n+j}^\varepsilon = \Sigma_{1\leq j\leq l}s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon \\ \widehat{H^\varepsilon u^\varepsilon} = \Sigma_{1\leq j\leq l}E_{n+j}(\varepsilon\cdot)\sigma_{n+j}^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_{n+j}^\varepsilon = \Sigma_{1\leq j\leq l}E(\varepsilon\cdot + j)s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon \end{cases}$$

avec bien sûr $\hat{\lambda}_j^\varepsilon : \xi \mapsto \varepsilon^{1/2}\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)$ par simple dilatation.

La régularité des enveloppes recollées 2.15 entraine certaines simplifications automatiques (analogues à des découplages) dans les transformées de Wigner 1-périodiques w_s^ε.

Théorème 2.17 *Pourvu que $u^\varepsilon \in V_{n+1}^\varepsilon \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{n+l}^\varepsilon$ reste borné dans $L^2(\mathbb{R})$, en notant $v_j^\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}[s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon] \in L^2(\mathbb{R})$ borné,*

$$w_s^0[u^\varepsilon] = w_s^0[\Sigma_{1\leq j\leq l}v_j^\varepsilon] = \Sigma_{1\leq j\leq l}w_s^0[v_j^\varepsilon] = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(\Sigma_{1\leq j\leq l}s_j^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2)\right)$$

PREUVE. On calcule

$$\mathcal{F}_{\%x}[w^\varepsilon(u^\varepsilon;u^\varepsilon)] = \frac{1}{\varepsilon^N}\hat{u}^\varepsilon(+x'/2+\xi/\varepsilon)\overline{\hat{u}^\varepsilon}(-x'/2+\xi/\varepsilon)$$

$$= \Sigma_{1\leq i;j\leq l}s_i^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s_j^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\hat{\lambda}_i(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\hat{\lambda}}_j(\xi-\varepsilon x'/2)$$

$$\overset{S'}{\approx} \Sigma_{1\leq i;j\leq l}s_i^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s_j^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\hat{\lambda}_i\overline{\hat{\lambda}}_j(\xi)$$

car chaque $\hat{\lambda}$ est régulier (continu borné suffit)

$$\mathcal{F}_{\%x}[w_s^\varepsilon(u^\varepsilon;u^\varepsilon)] = \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u}^\varepsilon(+x'/2+k/\varepsilon+\gamma^*/\varepsilon)\overline{\hat{u}^\varepsilon}(-x'/2+k/\varepsilon+\gamma^*/\varepsilon)$$

$$= \Sigma_{1\leq i;j\leq l}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}s_i^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)\hat{\lambda}_i(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{\hat{\lambda}}_j(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)$$

$$\overset{S'}{\approx} \Sigma_{1\leq i;j\leq l}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} s_i^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)\hat{\lambda}_i\overline{\hat{\lambda}}_j(k+\gamma^*) \tag{29}$$

car chaque $\hat{\lambda}$ est régulier (le périodisé $\varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}|^2$ borné suffit)

$$\Sigma_{1\leq j\leq l}\mathcal{F}_{\%x}[w_s^\varepsilon(v_j^\varepsilon;v_j^\varepsilon)] = \Sigma_{1\leq j\leq l}\frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{v}_j^\varepsilon(+x'/2+k/\varepsilon+\gamma^*/\varepsilon)\overline{\hat{v}_j^\varepsilon}(-x'/2+k/\varepsilon+\gamma^*/\varepsilon)$$

$$= \Sigma_{1\leq j\leq l}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} s_j^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)\hat{\lambda}_j(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{\hat{\lambda}}_j(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)$$

$$\overset{S'}{\approx} \Sigma_{1\leq j\leq l}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} s_j^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)|\hat{\lambda}_j|^2(k+\gamma^*) \tag{30}$$

car chaque $\hat{\lambda}$ est régulier (le périodisé $\varpi_{\Gamma^*}|\nabla\hat{\lambda}|^2$ borné suffit)

Il s'agit maintenant d'identifier (29) et (30) avec $\Sigma_{1\leq j\leq l}s_j^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2)$.

Par translations dans le groupe cyclique à l éléments on obtient d'après (28)

$$\Sigma_{1\leq i;j\leq l}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} s_i^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2+\gamma^*)\hat{\lambda}_i\overline{\hat{\lambda}}_j(k+\gamma^*)$$

$$= \Sigma_{1\leq i;j\leq l}\Sigma_{0\leq r<l} s_{i+r}^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2)\overline{s_{j+r}^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2)\Sigma_{m\in\mathbb{Z}}\hat{\lambda}_i\overline{\hat{\lambda}}_j(k+r+ml)$$

$$= \Sigma_{1\leq i;j\leq l} s_i^\varepsilon(k+\varepsilon x'/2)\overline{s_j^\varepsilon}(k-\varepsilon x'/2)\Sigma_{0\leq r<l}\Sigma_{m\in\mathbb{Z}}\hat{\lambda}_{i-r(modulo)l}\overline{\hat{\lambda}}_{j-r(modulo)l}(k+r+ml)$$

Or dans cette dernière somme seuls les termes diagonaux $i=j$ contribuent. C'est une conséquence de la relation d'orthonormalité ponctuelle suivante :

$$\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\lambda}_{i-\gamma^*(modulo)l}\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*(modulo)l}(k+\gamma^*) = \delta_{i,j} \qquad (\forall k) \tag{31}$$

En effet sur chaque intervalle ouvert de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}/2$ l'application

$$k \mapsto \hat{\lambda}_{j-r(modulo)l}(k+r+ml) = \int_\Omega \psi(x;k+j)e^{-2i\pi<x|k+r+ml>}dx$$

est, à une phase près, du type $k\mapsto\hat{\varphi}_q(k+r+ml)$ avec $n+1\leq q\leq n+l$ fonction de l'intervalle et de $1\leq j\leq l$ uniquement.

Si $|i-j|\notin l\mathbb{N}$ alors sur chaque intervalle ouvert de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}/2$ le produit

$$\hat{\lambda}_{i-r(modulo)l}\overline{\hat{\lambda}}_{j-r(modulo)l}(k+r+ml)$$

vaut à une phase près un produit $\hat{\varphi}_{p_i}\overline{\hat{\varphi}}_{q_j}(k+r+ml)$ où les deux entiers $n+1\leq p_i\neq q_j\leq n+l$ ne dépendent que de l'intervalle et de $1\leq i;j\leq l$.

Or $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{\varphi}_p(k+\gamma^*)\overline{\hat{\varphi}_q}(k+\gamma^*) = \delta_{p,q} \qquad (\forall k)$

c'est la propriété d'orthonormalité ponctuelle pour les fonctions de Wannier.

On en déduit l'égalité (31) recherchée.

□

Remarque. Il ne faudrait pas croire que les différents $w^0[v_j^\varepsilon]$, $1\leq j\leq l$, se déduisent les uns des autres par simples translations en phase $w^0[v_j^\varepsilon](x;\xi)=f(x;\xi+j)$, $1\leq j\leq l$. C'est faux dans l'exemple de la page 107 où il existe $1\leq j\leq l$ tel que $w^0[v_j^\varepsilon]=0$ car alors toutes les transformées devraient être nulles ce qui est aberrant ($w^0[u^\varepsilon]\neq 0$ sauf trivialité).

Néanmoins la seule limite $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\right)$ suffit à décrire les différentes transformées de Wigner

$$w^0[v^\varepsilon_j](x;\xi)=|\hat{\lambda}_j|^2(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2+j)\overline{s^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2+j)\right)$$

par simples translations dans les fibres à une enveloppe près.

Remarque. La procédure de réindexation des anciennes fibres (σ) en une nouvelle (s) n'est profonde qu'au voisinage de $\mathbb{Z}/2$. Loin des croisements elle présente peu d'intérêt car étant donné $k\notin\mathbb{Z}/2$ si x' reste borné alors $k\pm\varepsilon x'/2$ appartiennent pour ε petit à un même intervalle ouvert de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}/2$ d'où

$$\Sigma_{1\le j\le l}s^\varepsilon_j(k+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon_j}(k-\varepsilon x'/2)=\Sigma_{1\le j\le l}\sigma^\varepsilon_{n+j}(k+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+j}}(k-\varepsilon x'/2)$$

Au contraire si $k\in\mathbb{Z}/2$ alors, x' restant borné, $k\pm\varepsilon x'/2$ appartiennent pour ε petit aux deux intervalles ouverts adjacents de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}/2$ situés de part et d'autre de $k\in\mathbb{Z}/2$ d'où pour $\Sigma_{1\le j\le l}s^\varepsilon_j(k+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon_j}(k-\varepsilon x'/2)$ une expression (comme fonction des anciennes fibres) bien plus compliquée.

De même si $k=K$ (modulo $\mathbb{Z}$) et $x'>0$:

$$\begin{gathered}\Sigma_{1\le j\le l}s^\varepsilon_j(K+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon_j}(K-\varepsilon x'/2)=\sigma^\varepsilon_{n+1}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+1}}(K-\varepsilon x'/2)\\ +\Sigma_{0<j<l/2}\exp(+i\alpha_{2j-1}-i\alpha_{2j})\sigma^\varepsilon_{n+2j+1}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+2j}}(K-\varepsilon x'/2)\\ +\Sigma_{0<j<l/2}\exp(+i\alpha_{-2j-1}-i\alpha_{-2j})\sigma^\varepsilon_{n+2j}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+2j+1}}(K-\varepsilon x'/2)\\ \left(+\sigma^\varepsilon_{n+l}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+l}}(K-\varepsilon x'/2)\text{ si } l\text{ est pair}\right)\end{gathered}$$

Par exemple si $k=K$ (modulo $\mathbb{Z}$) et $x'<0$:

$$\begin{gathered}\Sigma_{1\le j\le l}s^\varepsilon_j(K+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon_j}(K-\varepsilon x'/2)=\sigma^\varepsilon_{n+1}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+1}}(K-\varepsilon x'/2)\\ +\Sigma_{0<j<l/2}\exp(+i\alpha_{2j}-i\alpha_{2j-1})\sigma^\varepsilon_{n+2j}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+2j+1}}(K-\varepsilon x'/2)\\ +\Sigma_{0<j<l/2}\exp(+i\alpha_{-2j}-i\alpha_{-2j-1})\sigma^\varepsilon_{n+2j+1}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+2j}}(K-\varepsilon x'/2)\\ \left(+\sigma^\varepsilon_{n+l}(K+\varepsilon x'/2)\overline{\sigma^\varepsilon_{n+l}}(K-\varepsilon x'/2)\text{ si } l\text{ est pair}\right)\end{gathered}$$

Idem autour de $k=K+1/2$ (modulo $\mathbb{Z}$).

Remarque. Evolution hamiltonienne libre dans les niveaux $n+1,n+2,\cdots,n+l-1,n+l$.

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon=H^\varepsilon u^\varepsilon\\ u^\varepsilon(t=0)\in V^\varepsilon_{n+1}\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}V^\varepsilon_{n+l}\subset L^2(\mathbb{R})\end{cases}$$

La dépendance temporelle de la solution

$$\hat{u}^\varepsilon=\Sigma_{1\le j\le l}\sigma^\varepsilon_{n+j}(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}^\varepsilon_{n+j}=\Sigma_{1\le j\le l}s^\varepsilon_j(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}^\varepsilon_j\in\hat{V}^\varepsilon_{n+1}\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}\hat{V}^\varepsilon_{n+l}\subset L^2(\mathbb{R})$$

se lit dans les fibres

$$\begin{cases} \partial_t \sigma_p^\varepsilon + i\frac{E_p}{\varepsilon}\sigma_p^\varepsilon = 0 & n+1 \le p \le n+l \\ \partial_t s^\varepsilon + i\frac{E}{\varepsilon}s^\varepsilon = 0 & \left(\partial_t s_j^\varepsilon + i\frac{E(\cdot+j)}{\varepsilon}s_j^\varepsilon = 0 \qquad 1 \le j \le l\right) \end{cases}$$

finalement

$$\begin{cases} w_s^0[u^\varepsilon] = \Sigma_{1\le j\le l} w_s^0[v_j^\varepsilon] \\ \partial_t w^0[v_j^\varepsilon] + \nabla E(\cdot + j)\nabla_x w^0[v_j^\varepsilon] = 0 \qquad 1 \le j \le l \end{cases}$$

C'est un premier pas vers le théorème d'homogénéisation 2.20 lorsque V est nul.

Exemple.

Supposons que le potentiel v 1-périodique soit en fait $\frac{1}{2}$-périodique. L'analyse 1-périodique respectivement $\frac{1}{2}$-périodique de l'hamiltonien H selon Bloch consiste à le faire agir sur $\{\phi|\phi(x+1) = \phi(x)e^{+2i\pi k(1)}\}$ pour $-1/2 < k < +1/2$ variable 1-périodique respectivement sur $\{\phi|\phi(x+1/2) = \phi(x)e^{+2i\pi k'(1/2)}\}$ pour $-1 < k' < +1$ variable 2-périodique.
Supposons par exemple que le premier niveau d'énergie dans l'analyse $\frac{1}{2}$-périodique soit isolé. Ce niveau noté E qui est réel pair 2-périodique analytique sur $\mathbb{R}$ (croissant sur $[0;1]$) correspond dans l'analyse 1-périodique à deux niveaux $E_1 \le E_2$ réels pairs 1-périodiques analytiques sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$ (E_1 croit sur $[0;1/2]$ et E_2 décroit sur $[0;1/2]$) :

$$\{E(k); E(k+1)\} = \{E_1(k); E_2(k)\} \qquad E_1(\pm\frac{1}{2}) = E_2(\pm\frac{1}{2}) = E(+\frac{1}{2}) = E(-\frac{1}{2})$$

Il suffit de remarquer que des fonctions propres u et v dans l'analyse $\frac{1}{2}$-périodique

$$\begin{cases} Hu = E(k)u & u(x+1/2) = +u(x)e^{+2i\pi k(1/2)} \\ Hv = E(k+1)v & v(x+1/2) = -v(x)e^{+2i\pi k(1/2)} \end{cases}$$

sont a fortiori des fonctions propres dans l'analyse 1-périodique

$$\begin{cases} Hu = E(k)u & u(x+1) = u(x)e^{+2i\pi k} \\ Hv = E(k+1)v & v(x+1) = v(x)e^{+2i\pi k} \end{cases}$$

Considérons des ondes de Bloch ψ relatives au niveau E dans l'analyse $\frac{1}{2}$-périodique

$$\psi(x;k+2) = \psi(x;k) \qquad \psi(x+1/2;k) = \psi(x;k)e^{+2i\pi k(1/2)} \qquad \left(\| \psi(\cdot;k) \|_{L^2(-1/4;+1/4)} = 1\right)$$

d'où la fonction de Wannier associée $\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-1/4}^{+1/4} \psi(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}dx = \int_0^{1/2} \psi(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}dx$.

Pour ondes de Bloch ψ_1 (respectivement ψ_2) relatives aux niveaux E_1 (respectivement E_2) dans l'analyse 1-périodique il suffit de considérer le 1-périodisé de $k \in (-1/2;+1/2) \mapsto \psi(\cdot;k) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ respectivement le 1-périodisé de $k \in (-1/2;+1/2) \mapsto \psi(\cdot;k+1) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

On en déduit les fonctions de Wannier associées $\hat{\varphi}_1(\xi) = \int_{-1/2}^{+1/2} \psi_1(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}dx$ respectivement $\hat{\varphi}_2(\xi) = \int_{-1/2}^{+1/2} \psi_2(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}dx$ et les sous-espaces de Floquet

$\hat{V}_1 = L^2_\#(-1/2;+1/2)\hat{\varphi}_1 \subset L^2(\mathbb{R})$ respectivement $\hat{V}_2 = L^2_\#(-1/2;+1/2)\hat{\varphi}_2 \subset L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1(\xi+n) = \int_{-1/2}^{+1/2} \psi(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}e^{-2i\pi nx}dx = [1+(-1)^n]\int_0^{1/2} \psi(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}e^{-2i\pi nx}dx \\ \hat{\varphi}_2(\xi+n) = \int_{-1/2}^{+1/2} \psi(x;\xi+1)e^{-2i\pi x\xi}e^{-2i\pi nx}dx = [1-(-1)^n]\int_0^{1/2} \psi(x;\xi+1)e^{-2i\pi x\xi}e^{-2i\pi nx}dx \end{cases}$$

Par les supports $E_1\sigma_1\hat{\varphi}_1 + E_2\sigma_2\hat{\varphi}_2 = E(\sigma_1\hat{\varphi}_1 + \sigma_2\hat{\varphi}_2) \qquad \forall \sigma_1;\sigma_2 \in L^2_{\#}(-1/2;+1/2)$ ainsi l'hamiltonien $H : V_1 + V_2 \to V_1 + V_2$ est simplement le multiplicateur de Fourier $E(D)$.
Ici $\hat{\lambda}_1 = \hat{\varphi} \qquad \hat{\lambda}_2 = 0$!
Cette simplification ne survient que dans le cas d'un potentiel $\frac{1}{2}$-périodique :

Lemme 2.12 *Dans le cas d'un croisement de $l = 2$ niveaux (seulement) E_1 et E_2, si le potentiel v n'est pas $\frac{1}{2}$-périodique, alors la somme $V_1 + V_2 \subset L^2(\mathbb{R})$ des sous-espaces de Floquet associés vérifie*

$$(V_1 + V_2) \cap \ Ker\ E(D) - H = \{0\}$$

où E désigne le recollement analytique des niveaux. Ainsi l'hamiltonien n'agit pas comme le multiplicateur de Fourier $E(D)$ sur un sous-espace de L^2 dans lequel $V_1 + V_2$ serait plongé.

Preuve. Si $\varphi \in V_1 + V_2$ satisfait $H\varphi = E(D)\varphi$ alors $\hat{\varphi} = \sigma_1\hat{\varphi}_1 + \sigma_2\hat{\varphi}_2$ avec $E_1\sigma_1\hat{\varphi}_1 + E_2\sigma_2\hat{\varphi}_2 = E\sigma_1\hat{\varphi}_1 + E\sigma_2\hat{\varphi}_2$ c'est-à-dire $\sigma_2(\xi)\hat{\varphi}_2(\xi) = \sigma_1(\xi)\hat{\varphi}_1(\xi+1) = 0$ presque partout en $\xi \in (-1/2;+1/2) + 2\mathbb{Z}$ et nécessairement $\sigma_1\varpi_{2\mathbb{Z}+1}|\hat{\varphi}_1|^2 = \sigma_2\varpi_{2\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}_2|^2 = 0$ presque partout sur $(-1/2;+1/2)$.

Si $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\hat{\varphi}_1|^2(k+2\gamma^*+1) = 0$ pour une valeur de k alors l'application 1-périodique $f : x \mapsto \psi_1(x;k)e^{-2i\pi xk}$ a tous ses coefficients de Fourier impairs nuls. Alors f et $vf = f'' + 4i\pi kf' - 4\pi^2k^2f + E_1(k)f$ étant $\frac{1}{2}$-périodiques, v est $\frac{1}{2}$-périodique.

Si $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\hat{\varphi}_2|^2(k+2\gamma^*) = 0$ pour une valeur de k alors l'application 1-périodique $g : x \mapsto \psi_2(x;k)e^{-2i\pi xk}$ a tous ses coefficients de Fourier pairs nuls. Alors g et $vg = g'' + 4i\pi kg' - 4\pi^2k^2g + E_2(k)g$ étant $\frac{1}{2}$-antipériodiques, v est $\frac{1}{2}$-périodique.

Dans le cas où v n'est pas $\frac{1}{2}$-périodique, les propriétés $\varpi_{2\mathbb{Z}+1}|\hat{\varphi}_1|^2 > 0$ et $\varpi_{2\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}_2|^2 > 0$ impliquent la nullité des fibres σ_1 et σ_2 donc φ est nul.
□

Dans les propositions 2.40 et 2.42 qui suivent, les estimations de commutation démontrées dans la section 2.3 pour un niveau isolé simple en toute dimension sont généralisées par réindexation. La possibilité de déterminer une onde de Bloch régulière est remplacée par la proposition 2.15 affirmant l'analycité du recollement ψ. Le but des lemmes 2.39 et 2.41 est d'adapter la décroissance exponentielle du lemme 2.1 dont toutes les bornes découlent.

Soit $K^\varepsilon(x;y)$ le noyau du projecteur orthogonal $\Pi^\varepsilon = \Pi^\varepsilon_{n+1} + \cdots + \Pi^\varepsilon_{n+l} \in \mathcal{L}(L^2)$
$K^\varepsilon(x;y) = \displaystyle\int_{\Omega^*} \Sigma_{n+1\le p\le n+l}\psi^\varepsilon_p(x;k)\overline{\psi^\varepsilon_p}(y;k)dk = \frac{1}{\varepsilon}K^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{y}{\varepsilon})$
où $K^1(x;y) = \displaystyle\int_{\Omega^*} \Sigma_{n+1\le p\le n+l}\psi_p(x;k)\overline{\psi_p}(y;k)dk$
est autoadjoint $\overline{K^1}(y;x) = K^1(x;y)$ périodique $K^1(x+\gamma;y+\gamma) = K^1(x;y) \qquad \forall\gamma\in\Gamma$
à décroissance exponentielle :

Proposition 2.39 $|K^1(x;y)| \le A\exp(-B|x-y|)$

Preuve. Notant $x' = x - \gamma_x \in \Omega$ et $y' = y - \gamma_y \in \Omega$ des représentants de $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ modulo $\gamma_x \in \Gamma$ et $\gamma_y \in \Gamma$, on a

$$K^1(x;y) = K^1(x'+\gamma_x;y'+\gamma_y) = \int_{\Omega^*} \Sigma_{n+1\le p\le n+l}\psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk$$

L'expression $N : k \mapsto \Sigma_{n+1\leq p\leq n+l}\psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)$ s'identifie au noyau du projecteur total

$$k \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\lambda - H_k)^{-1}d\lambda \in \mathcal{L}(L^2)$$

associé aux niveaux $n+1, n+2, \cdots, n+l-1, n+l$ étudiés,

où $\gamma \subset \mathbb{C}$ est un contour enlacant $[E^{min}_{n+1}; E^{max}_{n+l}] \subset \mathbb{R}$ une fois directement en évitant le reste du spectre $\gamma \subset \mathbb{C} - (]-\infty; E^{max}_n] \cup [E^{min}_{n+l+1}; +\infty[)$.

Ce projecteur de rang fini l est holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2)$ donc holomorphe à valeurs dans $HS(L^2)$ donc son noyau, N, est holomorphe à valeurs dans $L^2(\Omega\times\Omega)$.

Cela étant développons l'argument de niveau isolé déjà utilisé dans le lemme 2.1 : $\forall\theta \in L^2(\Omega\times\Omega)$

$$\int_{\Omega^*}\int_\Omega\int_\Omega N(x';y';k)\theta(x';y')e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dx'dy'dk$$
$$= \int_{\Omega^*}\int_\Omega\int_\Omega N(x';y';k+i\eta)\theta(x';y')e^{-2i\pi(k+i\eta)(\gamma_y-\gamma_x)}dx'dy'dk$$

pour tout $\eta \in (-r;+r)$ petit où $D = \{|\mathrm{Im}| < r\} \subset \mathbb{C}$ désigne un domaine d'holomorphie pour le noyau $k \mapsto N(x';y';k) \in L^2(x';y')$ ainsi

$$\frac{|<\int_{\Omega^*} N(x';y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk|\theta>_{L^2(x';y')}|}{\parallel\theta\parallel_{L^1(x';y')}} \leq e^{-2\pi r|\gamma_y-\gamma_x|}\parallel N\parallel_{L^\infty[D\to L^\infty(x';y')]}$$

puis

$$|\int_{\Omega^*}\Sigma_{n+1\leq p\leq n+l}\psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)e^{-2i\pi k(\gamma_y-\gamma_x)}dk| \leq e^{-2\pi r|x-y|}e^{+2\pi r|x'-y'|}\parallel N\parallel_{L^\infty[D\to L^\infty(x';y')]}$$

Pour obtenir la borne essentielle $\parallel N\parallel_{L^\infty[D\to L^\infty(x';y')]} < \infty$ il faut oublier la formulation

$$N(x';y';k) = \Sigma_{n+1\leq p\leq n+l}\psi_p(x';k)\overline{\psi_p}(y';k)$$

définie pour $k \in \mathbb{R}$ seulement. Au contraire $\psi \in \mathcal{H}[D \to L^2(\Omega)]$ permet une représentation du noyau holomorphe

$$N(x';y';k) = \Sigma_{1\leq j\leq l}\psi(x';k-j)\overline{\psi}(y';k-j)$$

au moyen de solutions $\psi(\cdot;k) \in$ Ker $H_k - E(k)(\subset H^2_k \subset C^0_b)$ bornées.

C'est la régularité (elliptique) du problème différentiel qui permet d'améliorer $\psi \in \mathcal{H}[D \to L^2(\Omega)]$ en $\psi \in \mathcal{H}[D \to H^2(\Omega)] \subset L^\infty[D \to L^\infty(\Omega)]$ d'où

$$|N(x';y';k)| \leq l\parallel\psi\parallel^2_{L^\infty[D\to L^\infty(\Omega)]} \leq lC^{ste}\parallel\psi\parallel^2_{L^\infty[D\to H^2(\Omega)]}$$

par l'injection de Sobolev $H^2_k \hookrightarrow C^0_b$ élémentaire en une dimension.

□

Proposition 2.40 *Soit $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue.*

Le commutateur $i\dfrac{[\Pi^\varepsilon; V]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ est autoadjoint de norme

$\| \, i\dfrac{[\Pi^\varepsilon; V]}{\varepsilon} \, \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \| \, \nabla V \, \|_\infty \displaystyle\int A| \cdot |\exp(-B| \cdot |)$.

Il commute à peu près au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ avec les multiplications (uniformément continues bornées) avec les dérivations périodiques (continues) et en général avec tout opd $a^W(x; \varepsilon D)$ périodique (régulier $a \in P$).

Il est à peu près égal au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ à $iK^\varepsilon(x; y)\dfrac{y-x}{\varepsilon}\nabla V(x)$.

Remarque. De même le commutateur $i\dfrac{[\Pi^\varepsilon; a^W(x; \varepsilon D)]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ où $a \in P$ est un test régulier périodique est autoadjoint de norme $\leq C^{ste}(a) \displaystyle\int A| \cdot |\exp(-B| \cdot |)$ bornée.

Preuve. Tout découle uniquement de la décroissance exponentielle du noyau $|K^1(x; y)| \leq A\exp(-B|x-y|)$ comme dans le cas d'un niveau isolé, voir le lemme 2.1. $\square$

Soit $p_j^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ l'opération qui à $u \in L^2$ associe le j^{ieme}terme $\widehat{p_j^\varepsilon u} = s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon$ dans l'écriture du projeté $\Pi^\varepsilon u$ sous la forme $\widehat{\Pi^\varepsilon u} = \Sigma_{1 \leq j \leq l} s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon$ issue de la réindexation.

Son noyau est $L_j^\varepsilon(x; y) = \dfrac{1}{\varepsilon}L_j^1(\dfrac{x}{\varepsilon}; \dfrac{y}{\varepsilon})$ où

$$L_j^1(x; y) = \frac{1}{l}\Sigma_{1 \leq J \leq l}\Sigma_{\gamma \in \Gamma} e^{+2i\pi(j-J)\gamma/l}\lambda_j(x+\gamma/l)\overline{\lambda_J}(y+\gamma/l)$$

est périodique $L_j^1(x+\gamma; y+\gamma) = L_j^1(x; y) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$ à décroissance exponentielle :

Proposition 2.41 $|L_j^1(x; y)| \leq A\exp(-B|x-y|)$

Preuve. Etant donné $u \in L^2(\mathbb{R})$ appartenant ou non à $V_{n+1}^\varepsilon \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{n+l}^\varepsilon$ les formules

$$\begin{cases} \sigma_p^\varepsilon(k) = \Sigma_{\gamma \in \Gamma} e^{+2i\pi k\gamma} < u|\varphi_p^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\gamma) >_{L^2} \\ \sigma_p^\varepsilon(k) = \frac{1}{\varepsilon}\Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*}\hat{u}(\frac{k}{\varepsilon} + \frac{\gamma^*}{\varepsilon})\overline{\hat{\varphi}_p^\varepsilon}(\frac{k}{\varepsilon} + \frac{\gamma^*}{\varepsilon}) \end{cases}$$

expriment la p^{ieme}fibre, $n+1 \leq p \leq n+l$, comme une Γ-série de Fourier respectivement une Γ^*-périodisation. En termes d'enveloppes recollées ces expressions se réécrivent

$$\begin{cases} s^\varepsilon(\xi) = \frac{1}{l}\Sigma_{\gamma \in \Gamma} e^{+2i\pi\xi\gamma/l}\Sigma_{1 \leq J \leq l} e^{-2i\pi J\gamma/l} < u|\lambda_J^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\gamma/l) >_{L^2} \\ s^\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*}\Sigma_{1 \leq J \leq l}\hat{u}(\frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{l\gamma^*}{\varepsilon} - \frac{J}{\varepsilon})\overline{\hat{\lambda}_J^\varepsilon}(\frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{l\gamma^*}{\varepsilon} - \frac{J}{\varepsilon}) \end{cases} \tag{32}$$

comme une $l\Gamma$-série de Fourier respectivement une $\dfrac{\Gamma^*}{l}$-périodisation.

On en déduit

$$p_j^\varepsilon u : x \mapsto \frac{1}{l} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ 1\le J\le l}} e^{+2i\pi(j-J)\gamma/l} < u|\lambda_J^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\gamma/l) >_{L^2} \lambda_j^\varepsilon(x+\varepsilon\gamma/l)$$

$$\widehat{p_j^\varepsilon u} : \xi \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{\gamma^*\in\Gamma^* \\ 1\le J\le l}} \hat{u}(\xi+\frac{l\gamma^*}{\varepsilon}+\frac{j-J}{\varepsilon})\overline{\hat{\lambda}_J^\varepsilon}(\xi+\frac{l\gamma^*}{\varepsilon}+\frac{j-J}{\varepsilon})\hat{\lambda}_j^\varepsilon(\xi)$$

donc le noyau $L_j^\varepsilon(x;y) = \frac{1}{\varepsilon}L_j^1(\frac{x}{\varepsilon};\frac{y}{\varepsilon})$ après dilatation s'écrit

$$L_j^1(x;y) = \frac{1}{l} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ 1\le J\le l}} e^{+2i\pi(j-J)\gamma/l}\lambda_j(x+\gamma/l)\overline{\lambda_J}(y+\gamma/l) = \Sigma_{1\le J\le l}\int_{l\Omega^*}\theta_j(x;\xi)\overline{\theta_J}(y;\xi)d\xi$$

$$\text{avec } \theta_j(x;\xi) \overset{def}{=} \frac{1}{l}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\lambda_j(x-\gamma/l)e^{-2i\pi j\gamma/l}e^{+2i\pi\xi\gamma/l} \qquad l\text{-périodique en } \xi$$

$$\text{tel que } \theta_j(x+\gamma/l;\xi) = \theta_j(x;\xi)e^{+2i\pi\xi\gamma/l}e^{-2i\pi j\gamma/l} \qquad \forall\gamma\in\Gamma$$

Notant $x' = x-\gamma_x/l \in \Omega/l$ et $y' = y-\gamma_y/l \in \Omega/l$ des représentants de $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ modulo $\gamma_x/l\in\Gamma/l$ et $\gamma_y/l\in\Gamma/l$, on a

$$L_j^1(x;y) = L_j^1(x'+\gamma_x/l;y'+\gamma_y/l) = \Sigma_{1\le J\le l}e^{-2i\pi j\gamma_x/l}e^{+2i\pi J\gamma_y/l}\int_{l\Omega^*}\theta_j(x';\xi)\overline{\theta_J}(y';\xi)e^{-2i\pi\xi(\gamma_y-\gamma_x)/l}d\xi$$

$$|L_j^1(x;y)| \le \Sigma_{1\le J\le l}|\int_{l\Omega^*}\theta_j(x';\xi)\overline{\theta_J}(y';\xi)e^{-2i\pi\xi(\gamma_y-\gamma_x)/l}d\xi|$$

Comme dans la preuve du lemme 2.1 l'estimation exponentielle recherchée $|L_j^1(x;y)| \le A\exp(-B|x-y|)$ résulte de l'holomorphie de $\xi\mapsto\theta_j(\cdot;\xi)$ effectivement :

- la série $\xi\mapsto\frac{1}{l}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\lambda_j(\cdot-\gamma/l)e^{-2i\pi j\gamma/l}e^{+2i\pi\xi\gamma/l} \in H^2_{loc}(\mathbb{R})$ définit θ_j l-périodique holomorphe sur une bande $\{|\mathrm{Im}|<r\}\subset\mathbb{C}$ par décroissance exponentielle des coefficients de Fourier
$$|\lambda_j(\cdot-\gamma/l)| \le C_\psi^{ste}e^{+2\pi r|\cdot|}e^{-2\pi r|\gamma|/l} \qquad \forall\gamma\in\Gamma$$
- la décroissance des coefficients de Fourier $|\lambda_j| \le C_\psi^{ste}e^{-2\pi r|\cdot|}$ résulte de l'holomorphie avec croissance exponentielle de la transformée de Fourier $\hat{\lambda}_j$ sur une bande (argument de type Paley-Wiener) explicitement
$$\lambda_j(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}}\hat{\lambda}_j(\xi)e^{+2i\pi x\xi}d\xi = \int_{\xi\in\mathbb{R}}\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x(\xi+i\eta)}d\xi = e^{-2\pi x\eta}\int_{\xi\in\mathbb{R}}\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x\xi}d\xi$$
$$\le e^{-2\pi x\eta}C_{r,\psi}^{ste}\int_{\xi\in\mathbb{R}}d\xi/(1+|\xi|^2) \qquad \forall\eta\in(-r;+r)$$
sachant $|\hat{\lambda}_j|(\xi) \le C_{r,\psi}^{ste}/(1+|\xi|^2) \qquad \forall\xi\in\{|\mathrm{Im}|<r\}$ vu le théorème 2.15 on en déduit
$$|\lambda_j(x)| \le C_{r,\psi}^{ste}e^{-2\pi r|x|} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Rappelons (alternative à la formule de Cauchy au voisinage de $\mathbb{R}$) que

$$i\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\int_{\xi\in\mathbb{R}}\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x(\xi+i\eta)}d\xi\right)=2\int_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{\partial\hat{\lambda}_j}{\partial\overline{z}}(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x(\xi+i\eta)}d\xi$$

$$-\int_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x(\xi+i\eta)}\right)d\xi$$

avec $\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)\to 0$ lorsque $|\xi|\to\infty$ pour tout η fixé, permet l'intégration par partie

$$\int_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x(\xi+i\eta)}\right)d\xi=0$$

d'où l'indépendance par rapport à η à savoir $\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\int_{\xi\in\mathbb{R}}\hat{\lambda}_j(\xi+i\eta)e^{+2i\pi x(\xi+i\eta)}d\xi\right)=0.$

□

Remarque. Il y a une analogie certaine entre $\hat{\varphi}_p\leftrightarrow\hat{\lambda}_j$ et $\psi_p\leftrightarrow\theta_j$ du point de vue des représentations intégrales

$$\begin{cases}\varphi_p(x)=\int_{\Omega^*}\psi_p(x;k)dk\\ \hat{\varphi}_p(\xi)=\int_{\Omega}\psi_p(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}dx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_j(x)=\int_{l\Omega^*}\theta_j(x;\xi)d\xi\\ \hat{\lambda}_j(\xi)=\int_{\Omega/l}\theta_j(x;\xi+j)e^{-2i\pi x\xi}dx=\int_{\Omega}\psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi x\xi}dx\end{cases}$$

Proposition 2.42 *Soit $V\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue.*

Le commutateur $c_j^\varepsilon=i\frac{[p_j^\varepsilon;V]}{\varepsilon}\in\mathcal{L}(L^2)$ est de norme

$\|\ i\frac{[p_j^\varepsilon;V]}{\varepsilon}\ \|_{\mathcal{L}(L^2)}\leq\|\ \nabla V\ \|_\infty\int A|\cdot|\exp(-B|\cdot|).$

Il commute à peu près au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ avec les multiplications (uniformément continues bornées) avec les dérivations périodiques (continues) et en général avec tout opd $a^W(x;\varepsilon D)$ périodique (régulier $a\in P$).

Il est à peu près égal au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ à $iL_j^\varepsilon(x;y)\frac{y-x}{\varepsilon}\nabla V(x)$.

Remarque. De même le commutateur $i\frac{[p_j^\varepsilon;a^W(x;\varepsilon D)]}{\varepsilon}\in\mathcal{L}(L^2)$ où $a\in P$ est un test régulier périodique est de norme $\leq C^{ste}(a)\int A|\cdot|\exp(-B|\cdot|)$ bornée.

Remarque. Lorsque $l\geq 2$ attention ! $p_j^\varepsilon\in\mathcal{L}(L^2)$ n'est ni un projecteur ni un opérateur symétrique, son image n'est (généralement) pas incluse dans $V_{n+1}^\varepsilon+\cdots+V_{n+l}^\varepsilon$. La représentation $p_j^\varepsilon u=\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\hat{s}(\gamma)e^{+2i\pi j\gamma/l}\lambda_j^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\gamma/l)$ avec $\hat{s}\in l^2(\Gamma)$ est (généralement) une série de termes non orthogonaux car les conditions $<\lambda_j^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\gamma/l)|\lambda_j^\varepsilon>_{L^2}=0\ \forall\gamma\in\Gamma-\{0\}$ imposent la constance du $l\Gamma^*$-périodisé de $|\hat{\lambda}_j|^2$ constance (généralement) en défaut. Ces critiques ôtent tout intérêt pratique aux opérations p_j^ε prises individuellement.

De même il ne faudrait pas croire que la régularité de la proposition 2.42 permette la commutation approchée de p_j^ε avec des dérivations l-périodiques (non 1-périodiques) de fait lorsque $l \geq 2$ en général

$$\text{il existe } E \text{ 2-périodique non 1-périodique tel que } [p_j^\varepsilon; E(\varepsilon D)] \not\to 0 \qquad (1 \leq j \leq l)$$

Nous adaptons maintenant aux opérations p_j^ε à noyaux réguliers la simplification de calcul de la proposition 2.10 valable en dimension quelconque pour un niveau isolé simple.

Lorsque le potentiel est linéaire le commutateur $c_j^\varepsilon = i\dfrac{[p_j^\varepsilon; r]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ peut s'écrire comme une série $\Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} c_j^\varepsilon(\gamma^*)$ où par définition le terme général vaut symboliquement

$$c_j^\varepsilon(\gamma^*) = [\hat{\lambda}_j(\varepsilon D)\nabla\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon D + \gamma^*) + \nabla\hat{\lambda}_j(\varepsilon D)\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon D + \gamma^*)]e^{-2i\pi<\cdot|\gamma^*>/\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2) \quad (33)$$

Dans la proposition 2.43 la convergence est prouvée au sens de $\mathcal{L}_{strong}(L^2)$. Dans la proposition 2.44 on l'améliore au sens de $\mathcal{L}_{uniform}(L^2)$ en introduisant une troncature.

Proposition 2.43 *Pour un potentiel r linéaire $\mathcal{F}(i\dfrac{[p_j^\varepsilon; r]}{\varepsilon}u)$ s'écrit*

$$\xi \mapsto \sum_{\substack{\gamma^* \in \Gamma^* \\ 1 \leq J \leq l}} [\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)\nabla\overline{\hat{\lambda}}_J(\varepsilon\xi + l\gamma^* + j - J) + \nabla\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)\overline{\hat{\lambda}}_J(\varepsilon\xi + l\gamma^* + j - J)\hat{u}(\xi + l\gamma^*/\varepsilon + j/\varepsilon - J/\varepsilon)$$

$$\mathcal{F}(i\frac{[p_j^\varepsilon; r]}{\varepsilon}u) : \xi \mapsto \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*}[\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)\nabla\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon\xi + \gamma^*) + \nabla\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon\xi + \gamma^*)]\hat{u}(\xi + \gamma^*/\varepsilon)$$

Preuve. Sachant $L_j^1(x; y) = \dfrac{1}{l}\Sigma_{\gamma \in \Gamma}\Sigma_{1 \leq J \leq l} e^{+2i\pi(j-J)\gamma/l}\lambda_j(x + \gamma/l)\overline{\lambda_J}(y + \gamma/l)$
on calcule $\mathcal{F}_{\%x}[L_j^1(x; y)(y - x)]$ sous la forme d'une Γ^*-périodisation

$$= \mathcal{F}_{\%x}\frac{1}{l}\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ 1 \leq J \leq l}} e^{-2i\pi(j-J)\gamma/l}[\lambda_j(x - \gamma/l)\overline{r\lambda_J}(y - \gamma/l) - r\lambda_j(x - \gamma/l)\overline{\lambda_J}(y - \gamma/l)]$$

$$= \frac{1}{l}\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ 1 \leq J \leq l}} e^{-2i\pi(j-J)\gamma/l}[\hat{\lambda}_j(x')\overline{r\lambda_J}(y - \gamma/l) - \widehat{r\lambda_j}(x')\overline{\lambda_J}(y - \gamma/l)]e^{-2i\pi x'\gamma/l}$$

$$= \sum_{\substack{\gamma^* \in \Gamma^* \\ 1 \leq J \leq l}} [\hat{\lambda}_j(x')\overline{\widehat{r\lambda_J}}(x' + l\gamma^* + j - J) - \widehat{r\lambda_j}(x')\overline{\hat{\lambda}}_J(x' + l\gamma^* + j - J)]e^{-2i\pi(x' + l\gamma^* + j - J)y}$$

$$= -ie^{-2i\pi(x' + j - J)y}\sum_{\substack{\gamma^* \in \Gamma^* \\ 1 \leq J \leq l}} [\hat{\lambda}_j(x')\nabla\overline{\hat{\lambda}_J}(x' + l\gamma^* + j - J) + \nabla\hat{\lambda}_j(x')\overline{\hat{\lambda}}_J(x' + l\gamma^* + j - J)]e^{-2i\pi l\gamma^* y}$$

en invoquant la formule sommatoire $\frac{1}{l}\Sigma_{\gamma\in\Gamma}T(\frac{\gamma}{l})e^{-2i\pi k\frac{\gamma}{l}} = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\mathcal{F}T(k+l\gamma^*)$

pour $T = r\lambda_J$ régulier. On en déduit $\mathcal{F}_{\%x}\left(iL_j^\varepsilon(x;y)\frac{y-x}{\varepsilon}\right)$

$$= e^{-2i\pi x'y}e^{-2i\pi(j-J)y/\varepsilon}\sum_{\substack{\gamma^*\in\Gamma^*\\ 1\leq J\leq l}}[\hat{\lambda}_j(\varepsilon x')\nabla\overline{\hat{\lambda}}_J(x'+l\gamma^*+j-J)+\nabla\hat{\lambda}_j(\varepsilon x')\overline{\hat{\lambda}}_J(\varepsilon x'+l\gamma^*+j-J)]e^{-2i\pi l\gamma^* y/\varepsilon}$$

et la proposition 2.43 à $u\in L^2$ fixé est prouvée.

□

Proposition 2.44 *Pour $\chi\in L_c^\infty(\mathbb{R})$ la série $\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon = \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)$ converge au sens de la norme $\mathcal{L}_{uniform}(L^2)$ uniformément en ε.*

Preuve. Pour $\Gamma_f^*\subset\Gamma^*$ partie finie $\| \Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)u \|_{L^2}^2$

$$\leq\| \chi \|_{L^\infty}^2\int_{\varepsilon\xi\in Supp(\chi)}|\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}[\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)\nabla\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon\xi+\gamma^*)+\nabla\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)\overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon\xi+\gamma^*)]\hat{u}(\xi+\gamma^*/\varepsilon)|^2d\xi$$

$$\leq\| \hat{\lambda}_j \|_{W^{1,\infty}}^2\int_{\varepsilon\xi\in Supp(\chi)}\left(\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}|\hat{\lambda}_{j-\gamma^*}|^2(\varepsilon\xi+\gamma^*)+|\nabla\hat{\lambda}_{j-\gamma^*}|^2(\varepsilon\xi+\gamma^*)\right)\left(\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\hat{u}|^2(\xi+\gamma^*/\varepsilon)\right)d\xi$$

$$\leq |\Gamma_{Supp(\chi)}^*|\ \| \chi \|_{L^\infty}^2\| \hat{\lambda}_j \|_{W^{1,\infty}}^2\| u \|_{L^2}^2\sup_{Supp(\chi)}\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}|\hat{\lambda}_j|^2(\cdot+\gamma^*)+|\nabla\hat{\lambda}_{j-\gamma^*}|^2(\cdot+\gamma^*)$$

où $\Gamma_{Supp(\chi)}^*\subset\Gamma^*$ est une partie finie telle que $Supp(\chi)\subset\cup_{\gamma^*\in\Gamma_{Supp(\chi)}^*}(\gamma^*+\overline{\Omega^*})$.

On en déduit

$$\| \Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*) \|_{\mathcal{L}(L^2)}^2\leq C_\chi^{ste}\| \hat{\lambda}_j \|_{W^{1,\infty}}^2\sup_{Supp(\chi)}\Sigma_{\gamma^*\notin\Gamma_f^*}|\hat{\lambda}_j|^2(\cdot+\gamma^*)+|\nabla\hat{\lambda}_{j-\gamma^*}|^2(\cdot+\gamma^*)$$

Un théorème de Dini affirme la convergence localement uniforme des séries de termes positifs continus de sommes (positives) continues.

Il s'applique à la série $\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\hat{\lambda}_j|^2(\cdot+\gamma^*)+|\nabla\hat{\lambda}_{j-\gamma^*}|^2(\cdot+\gamma^*)$ de somme

$$\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}|\int_\Omega\psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}e^{-2i\pi<x|\gamma^*>}dx|^2+|\int_\Omega(\nabla_\xi-2i\pi x)\psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}e^{-2i\pi<x|\gamma^*>}dx|^2$$

$$=\int_\Omega|\psi(x;\xi+j)|^2dx+\int_\Omega|(\nabla_\xi-2i\pi x)\psi(x;\xi+j)|^2dx$$

continue.

□

On peut résumer les constructions élaborées dans cette section sous la forme :

Definition 2.8

On dira que $N_f = \{n+1; ...; n+l\} \subset \mathbb{N}$ *est un paquet de niveaux croisés lorsque les lacunes au sens de la définition (27) s'annulent successivement* $G_{n+1} = \cdots = G_{n+l-1} = 0$ *et pas plus* $G_n > 0$ *et* $G_{n+l} > 0$. *A un paquet de niveaux croisés sont attachés :*

- *un cardinal* $l \geq 1$
- *un projecteur total* $\Pi^\varepsilon = \Pi^\varepsilon_{n+1} + \cdots + \Pi^\varepsilon_{n+l} \in \mathcal{L}(L^2)$
- *un recollement (l)-périodique analytique* E *des niveaux (1)-périodiques croisés* $\{E_{n+1}; \cdots; E_{n+l}\}$
- *des enveloppes analytiques* $(\hat{\lambda}_j)_{1 \leq j \leq l}$ *recollement des fonctions de Wannier* $\{\hat{\varphi}_{n+1}; \cdots; \hat{\varphi}_{n+l}\}$
- *enfin des opérations à noyaux réguliers* $(p^\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq l}$ *à commutateurs* $c^\varepsilon_j = i\frac{[p^\varepsilon_j; V]}{\varepsilon} \in \mathcal{L}(L^2)$ *bornés*

Les différents paquets de niveaux croisés seront indexés par un ensemble M fini ou infini selon que les lacunes présentes au sens de la définition 2.7 sont en nombre fini ou infini.

D'où les objets $l(m)$,$\Pi^\varepsilon(m)$,$E(m)$ ... attachés au m^{ieme}paquet ($m \in M$).

Le cas M fini correspond à un dernier paquet de cardinal infini ($l = \infty$) c'est le cas de la réindexation infinie que nous allons maintenant aborder.

Réindexation infinie.

Supposons un croisement de tous les niveaux à partir de $n+1$.

Par hypothèse $G_n > 0$ et $G_{n+1} = G_{n+2} = \cdots = 0$ voir la définition (27).

Notons $K \in \mathbb{Z}/2$ le point (unique modulo $\mathbb{Z}$) de non-croisement des deux premiers niveaux $n+1$ et $n+2$. C'est un point de continuité pour ψ_{n+1}. Explicitement $K = 0$ respectivement $K = 1/2$ selon que n est impair respectivement pair.

Notons I l'intervalle $K + (0; 1/2) \subset \mathbb{R}$.

Soit E l'application à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ par $E = E_{n+l}$ sur l'intervalle $I - l/2$ et par $E = E_{n+l}$ sur l'intervalle $I + (l-1)/2$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$.

Soit ψ l'application à valeurs dans $L^2(\Omega)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi = \exp(+i\alpha_{-l})\psi_{n+l}$ sur l'intervalle $I - l/2$ et par $\psi = \exp(+i\alpha_{l-1})\psi_{n+l}$ sur l'intervalle $I + (l-1)/2$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$,

où les phases réelles $\cdots, \alpha_{-l}, \cdots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_{+1}, \cdots, \alpha_{+l-1}, \cdots$ (noter $\alpha_{-1}(K) = \alpha_0(K)$) seront choisies comme dans la proposition 2.15 pour réaliser la proposition 2.18.

Soit s^ε l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $s^\varepsilon = \exp(-i\alpha_{-l})\sigma^\varepsilon_{n+l}$ sur l'intervalle $I - l/2$ et par $s^\varepsilon = \exp(-i\alpha_{l-1})\sigma^\varepsilon_{n+l}$ sur l'intervalle $I + (l-1)/2$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. Par translation soit s^ε_j l'application définie par $s^\varepsilon(\cdot + j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ ainsi la composante s^ε est n'importe quelle application $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ tandis que la famille $\{s^\varepsilon_j \,|\, j \geq 1\}$ s'en déduit :

$$s^\varepsilon_j(k+m) = s^\varepsilon_{j+m}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{R} \qquad \forall m \in \mathbb{Z} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Partant des fonctions de Wannier pour les niveaux $n+1, n+2, \cdots$ considérés

$$\hat{\varphi}_{n+1} = \int_\Omega \psi_{n+1}(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx, \cdots, \hat{\varphi}_{n+l} = \int_\Omega \psi_{n+l}(x;\cdot)e^{-2i\pi<x|\cdot>}dx, \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$$

définissons par analogie

$$\hat{\lambda}_j : \xi \mapsto \int_\Omega \psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}$$

Remarque. Le produit $s^\varepsilon_j\hat{\lambda}_j$ a la forme

$$\begin{cases} \cdots \\ \sigma^\varepsilon_{n+l}\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } I - l/2 - j \\ \cdots \\ \sigma^\varepsilon_{n+2}\hat{\varphi}_{n+2} \text{ sur } I - 2/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+1}\hat{\varphi}_{n+1} \text{ sur } I - 1/2 - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+1}\hat{\varphi}_{n+1} \text{ sur } I - j \\ \sigma^\varepsilon_{n+2}\hat{\varphi}_{n+2} \text{ sur } I + 1/2 - j \\ \cdots \\ \sigma^\varepsilon_{n+l}\hat{\varphi}_{n+l} \text{ sur } I + (l-1)/2 - j \\ \cdots \end{cases}$$

En particulier $\Sigma_{j\geq 1} \parallel s^\varepsilon_j\hat{\lambda}_j \parallel^2_{L^2} = \Sigma_{j\geq 1} \parallel \sigma^\varepsilon_{n+j}\hat{\varphi}_{n+j} \parallel^2_{L^2} = \Sigma_{j\geq 1} \parallel \sigma^\varepsilon_{n+j} \parallel^2_{L^2(\Omega^*)}$.

Théorème 2.18 (Régularité du recollement) *E et ψ et $\hat{\lambda}_j$ sont analytiques sur $\mathbb{R}$.*

Les enveloppes recollées $\hat{\lambda}_j \in L^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées.

Remarque. A la différence du cas des croisements en nombre fini $\hat{\lambda}_j$ n'a aucune décroissance à l'infini. Par ailleurs il n'est pas clair que $\nabla\hat{\lambda}_j$ soit borné sur $\mathbb{R}$.

Preuve. On a $\hat{\lambda}_j : \xi \mapsto \int_\Omega \psi(x;\xi+j)e^{-2i\pi<x|\xi>}dx$ avec $\psi \in L^\infty[\mathbb{R}_\xi \to L^2(\Omega)]$.
□

Théorème 2.19 (Représentation intégrale des fibres)

$$s^\varepsilon : \xi \mapsto \int_\Omega [\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\sqrt{\varepsilon}u(\varepsilon x - \varepsilon\gamma)e^{+2i\pi\xi\gamma}]\overline{\psi}(x;\xi)dx$$

où $\psi \in C_b^0[\mathbb{R}_\xi; L^2(\Omega_x)]$ est (même) analytique.

Preuve. Il s'agit d'une réécriture de la représentation intégrale des fibres d'origine :

$$\sigma_p^\varepsilon(k) = \int_\Omega [\Sigma_{\gamma\in\Gamma}\sqrt{\varepsilon}u(\varepsilon x - \varepsilon\gamma)e^{+2i\pi k\gamma}]\overline{\psi_p}(x;k)dx \text{ pour chaque } p \geq n+1$$

□

Pour $u^\varepsilon \in V_{n+1}^\varepsilon \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{n+l}^\varepsilon \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$ écrit sous la forme $\hat{u}^\varepsilon = \Sigma_{j\geq 1}\sigma_{n+j}^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_{n+j}^\varepsilon$ avec $\sigma_{n+1}^\varepsilon, \cdots, \sigma_{n+l}^\varepsilon, \cdots \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ 1-périodiques on vient de construire $s_1^\varepsilon, \cdots, s_l^\varepsilon, \cdots \in L^2(\mathbb{R})$ de normes $\| u^\varepsilon \|_{L^2}^2$ dépendant linéairement et injectivement de $\sigma_{n+1}^\varepsilon, \cdots, \sigma_{n+l}^\varepsilon, \cdots$ telles que

$$\begin{cases} \hat{u}^\varepsilon = \Sigma_{j\geq 1}\sigma_{n+j}^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_{n+j}^\varepsilon = \Sigma_{j\geq 1}s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon \\ \widehat{H^\varepsilon u^\varepsilon} = \Sigma_{j\geq 1}E_{n+j}(\varepsilon\cdot)\sigma_{n+j}^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}_{n+j}^\varepsilon = \Sigma_{j\geq 1}E(\varepsilon\cdot+j)s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon \end{cases}$$

avec bien sûr $\hat{\lambda}_j^\varepsilon : \xi \mapsto \varepsilon^{1/2}\hat{\lambda}_j(\varepsilon\xi)$ par simple dilatation.

Soit $p_j^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2)$ l'opération qui à $u \in L^2$ associe le j^{ieme}terme $\widehat{p_j^\varepsilon u} = s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon$ dans l'écriture du projeté $\Pi^\varepsilon u$ sous la forme $\widehat{\Pi^\varepsilon u} = \Sigma_{j\geq 1}s_j^\varepsilon(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}_j^\varepsilon$.

Proposition 2.45 *La série $\Sigma_{j\geq 1}p_j^\varepsilon u$ converge vers $\Pi^\varepsilon u$ pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$ au moins au sens de $(\mathcal{F}L^2)_{loc}(\mathbb{R})$.*

$$\| \Sigma_{j\geq J}\chi(\varepsilon D)p_j^\varepsilon u \|_{L^2} \leq C_\chi^{ste}\sqrt{\Sigma_{j>J} \| \Pi_{n+j}^\varepsilon u \|_{L^2}^2} \qquad \forall\chi \in L_c^\infty(\mathbb{R}) \qquad \forall J \text{ grand devant } Supp(\chi)$$

Preuve. Fixons $l \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand. Vue la forme du produit $s_j^\varepsilon\hat{\lambda}_j$, la série $\Sigma_{j\geq J}s_j^\varepsilon\hat{\lambda}_j$ s'écrit (pour $J \geq l/2$ au moins) sur l'intervalle $K + (-l/2; +l/2) \subset \mathbb{R}$ comme :

$$\begin{cases} \Sigma_{j\geq J}\sigma_{n-l+1+2j}^\varepsilon\hat{\varphi}_{n-l+1+2j} \text{ sur } I - l/2 \\ \cdots \\ \Sigma_{j\geq J}\sigma_{n-1+2j}^\varepsilon\hat{\varphi}_{n-1+2j} \text{ sur } I - 1 \\ \Sigma_{j\geq J}\sigma_{n+2j}^\varepsilon\hat{\varphi}_{n+2j} \text{ sur } I - 1/2 \\ \Sigma_{j\geq J}\sigma_{n+1+2j}^\varepsilon\hat{\varphi}_{n+1+2j} \text{ sur } I \\ \Sigma_{j\geq J}\sigma_{n+2+2j}^\varepsilon\hat{\varphi}_{n+2+2j} \text{ sur } I + 1/2 \\ \cdots \\ \Sigma_{j\geq J}\sigma_{n+l+2j}^\varepsilon\hat{\varphi}_{n+l+2j} \text{ sur } I + (l-1)/2 \end{cases}$$

donc

$$\| \Sigma_{j\geq J} s_j^\varepsilon \hat{\lambda}_j \|^2_{L^2[K+(-l/2;+l/2)]} = \Sigma_{-l\leq i\leq l-1} \| \Sigma_{j\geq J} \sigma^\varepsilon_{n+1+i+2j} \hat{\varphi}_{n+1+i+2j} \|^2_{L^2(I+i/2)}$$

$$\leq \Sigma_{-l\leq i\leq l-1} \| \Sigma_{j\geq J} \sigma^\varepsilon_{n+1+i+2j} \hat{\varphi}_{n+1+i+2j} \|^2_{L^2} = \Sigma_{-l\leq i\leq l-1} \Sigma_{j\geq J} \| \sigma^\varepsilon_{n+1+i+2j} \|^2_{L^2_\#}$$

$$\leq 2l \Sigma_{j>2J-l} \| \Pi^\varepsilon_{n+j} u \|^2_{L^2}$$

On en déduit

$$\| \Sigma_{j\geq J} \chi(\varepsilon D) p^\varepsilon_j u \|^2_{L^2} = \| \Sigma_{j\geq J} \chi s^\varepsilon_j \hat{\lambda}_j \|^2_{L^2} \leq \| \chi \|_{L^\infty} \| \Sigma_{j\geq J} s^\varepsilon_j \hat{\lambda}_j \|^2_{L^2(Supp(\chi))} \leq C^{ste}_\chi \Sigma_{j>J} \| \Pi^\varepsilon_{n+j} u \|^2_{L^2}$$

lorsque J est choisi assez grand par rapport à $Supp(\chi)$. Par exemple $J \geq l$ convient si $l \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand pour assurer le recouvrement $Supp(\chi) \subset K + (-l/2; +l/2)$.

□

Proposition 2.46 *Si $\chi \in L^\infty_c(\mathbb{R})$ et $V \in C^0_0(\mathbb{R})$ alors $\chi(\varepsilon D)[p^\varepsilon_j; V] \to 0$ dans $\mathcal{L}(L^2)$.*

Preuve. Quitte à approcher uniformément $V \in C^0_0(\mathbb{R})$ par des éléments $\in \mathcal{F}L^1_c(\mathbb{R})$ on suppose $\hat{V}$ à support compact.

Par la représentation intégrale des fibres du théorème 2.19 on a

$$\| \mathcal{F}([p^\varepsilon; V]u) \|_{L^2(\frac{A}{\varepsilon})} = \| s^\varepsilon_{Vu} \hat{\lambda} - \int_{\mathbb{R}} \hat{V}(\xi) s^\varepsilon_u(\cdot - \varepsilon\xi) \hat{\lambda}(\cdot - \varepsilon\xi) d\xi \|_{L^2(A)}$$

$$= \| \int_{\mathbb{R}} \int_\Omega \hat{V}(\xi) \left(\overline{\psi}(x;\cdot) e^{+2i\pi\varepsilon x\xi} \hat{\lambda}(\cdot) - \overline{\psi}(x; \cdot - \varepsilon\xi) \hat{\lambda}(\cdot - \varepsilon\xi) \right) \left(\Sigma_{\gamma\in\Gamma} \sqrt{\varepsilon} u(\varepsilon x - \varepsilon\gamma) e^{+2i\pi\gamma(\cdot - \varepsilon\xi)} \right) dx d\xi \|_{L^2(A)}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{V}(\xi)| d\xi \| \Sigma_{\gamma\in\Gamma} \sqrt{\varepsilon} u(\varepsilon x - \varepsilon\gamma) e^{+2i\pi k\gamma} \|_{L^2(\Omega)\times L^2(A-\varepsilon\xi)}$$

$$\sup_{k\in A} \| \overline{\psi}(x;k) e^{+2i\pi\varepsilon x\xi} \hat{\lambda}(k) - \overline{\psi}(x; k - \varepsilon\xi) \hat{\lambda}(k - \varepsilon\xi) \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C^{ste}_A \| u \|_{L^2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{V}(\xi)| \sup_{k\in A} \| \overline{\psi}(x;k) e^{+2i\pi\varepsilon x\xi} \hat{\lambda}(k) - \overline{\psi}(x; k - \varepsilon\xi) \hat{\lambda}(k - \varepsilon\xi) \|_{L^2(\Omega)} \, d\xi$$

pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ bornée.

Or $\psi \in C^0_b[\mathbb{R}_\xi \to L^2(\Omega_x)]$ et $\hat{\lambda} \in C^0_b(\mathbb{R})$ sont continus bornés d'après le théorème 2.18, on en déduit $\| \mathcal{F}([p^\varepsilon; V]u) \|_{L^2(\frac{A}{\varepsilon})}$ par convergence dominée, d'où la proposition 2.46.

□

Remarque. La norme totale

$$\frac{\| [p^\varepsilon_j; V]u \|_{L^2}}{\| u \|_{L^2}} \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{V}(\xi)| d\xi \sup_{k\in\Omega^*} \| \Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*} \overline{\psi}(x; k+\gamma^*) \hat{\lambda}(k+\gamma^*) - \overline{\psi}(x; k+\gamma^* - \varepsilon\xi) \hat{\lambda}(k+\gamma^* - \varepsilon\xi) \|_{L^2(\Omega)}$$

est a priori incontrolable lorsque $\hat{\lambda}$ est seulement borné et pas du tout décroissant.

2.8 Homogénéisation en dimension un.

Résumé. Cette partie est consacrée à l'homogénéisation des transformées de Wigner dans une suite finie de niveaux se croisant successivement. Si $l \geq 1$ désigne le nombre total de croisements consécutifs la limite semi-classique est établie sur une version l-périodique de la transformation de Wigner, qui reflète complètement l'information contenue dans les différentes transformées de Wigner 1-périodiques des l niveaux croisés. On obtient une équation de transport limite dans laquelle figure le recollement l-périodique analytique des niveaux. La proposition 2.21 traite favorablement du cas des états mélangés. La proposition 2.20 aboutit à un terme source "d'interaction" a priori non nul dans le cas des états purs.

Supposons que $N_f = \{n+1; n+2; \cdots; n+l-1; n+l\} \subset \mathbb{N}$ désigne un paquet de niveaux croisés de projecteur total Π^ε au sens de la définition 2.8. Projetons l'équation d'évolution de la solution globale de l'équation de Schrödinger d'hamiltonien $H^\varepsilon + V$ dans les niveaux étudiés

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon = H^\varepsilon u^\varepsilon + V u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\widehat{\Pi^\varepsilon u^\varepsilon} = \Sigma_{1\leq j\leq l}\sigma^\varepsilon_{n+j}(\varepsilon\cdot)\hat{\varphi}^\varepsilon_{n+j} = \Sigma_{1\leq j\leq l} s^\varepsilon_j(\varepsilon\cdot)\hat{\lambda}^\varepsilon_j \in \hat{V}^\varepsilon_{n+1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \hat{V}^\varepsilon_{n+l} \subset L^2(\mathbb{R})$$

La dépendance temporelle de la projection $\Pi^\varepsilon u^\varepsilon$ se lit dans la fibre l-périodique $s^\varepsilon = s^\varepsilon(u^\varepsilon)$ seule

$$i\varepsilon\partial_t s^\varepsilon(u^\varepsilon) = E s^\varepsilon(u^\varepsilon) + s^\varepsilon(V u^\varepsilon)$$

Dorénavant $u = u^\varepsilon(t) \in L^2(\mathbb{R})$ dépend du temps et du paramètre ε.

La limite $\varepsilon \to 0$ dans l'équation exacte

$$\begin{aligned} &\partial_t w^\varepsilon(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) + \nabla E(\xi + j)\nabla_x w^\varepsilon(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) - \nabla V(x)\nabla_\xi w^\varepsilon(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) \\ &= -i\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(x'.\int_{-1/2}^{+1/2}[\nabla E(\xi + j + \varepsilon s x') - \nabla E(\xi + j)]ds\, \mathcal{F}_{\%x} w^\varepsilon(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u)\right) \\ &\quad + i\mathcal{F}^{-1}_{\%\xi'}\left(\xi'.\int_{-1/2}^{+1/2}[\nabla V(x + \varepsilon s \xi') - \nabla V(x)]ds\, \mathcal{F}_{\%\xi} w^\varepsilon(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u)\right) \\ &\quad - 2 \text{ Re } w^\varepsilon(c^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) \end{aligned}$$

$$\text{où } w^\varepsilon(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) = \mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi + j + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi + j - \varepsilon x'/2)\hat{\lambda}_j(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{\hat{\lambda}_j}(\xi - \varepsilon x'/2)\right)$$

donne l'équation homogénéisée

$$\begin{aligned} &\partial_t w^0(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) + \nabla E(\xi + j)\nabla_x w^0(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) - \nabla V(x)\nabla_\xi w^0(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) \\ &\quad = -2 \text{ Re } w^0(c^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) = -2\nabla V(x) \text{ Re } w^0(i\frac{[p^\varepsilon_j; r]}{\varepsilon}u; p^\varepsilon_j u) \end{aligned}$$

$$\text{où } w^0(p^\varepsilon_j u; p^\varepsilon_j u) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi + j + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi + j - \varepsilon x'/2)\hat{\lambda}_j(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{\hat{\lambda}_j}(\xi - \varepsilon x'/2)\right)$$

Plus précisément le symbole $w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$ sous-entend une extraction dans $\varepsilon \to 0$, moyennant quoi $w^\varepsilon(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$ converge dans S' localement uniformément en temps. En effet l'équation exacte montre que $\partial_t w^\varepsilon(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$ est borné dans S' uniformément en temps, d'où l'équicontinuité en temps de la famille $w^\varepsilon(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) \subset C^0(\mathbb{R}_t; S')$.

Nous attaquons maintenant le problème :

$$\partial_t w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + \nabla E(\xi + j)\nabla_x w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - \nabla V(x)\nabla_\xi w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) \overset{?}{\to}$$

qui consiste à déterminer la limite du terme source

$$w^\varepsilon(c_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^\varepsilon(c_j^\varepsilon(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) \tag{34}$$

à l'aide des hypothèse $u \in L^2$ borné, $H^\varepsilon u \in L^2$ borné et $V \in C_0^0(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue.

Intuitivement la portion due à $(1 - \Pi^\varepsilon)u$ est proprement isolée du point de vue de l'énergie par une lacune ($G_{n+l} > 0$ et $G_n > 0$) donc ne devrait pas contribuer.

Pour motiver l'analyse technique du terme source $w^\varepsilon(c_j^\varepsilon(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) \overset{?}{\to} 0$ débutons par deux tentatives infructueuses mais instructives.

PRIMO. Que donnerait la décomposition orthogonale $1 - \Pi^\varepsilon = \Sigma_{p \notin N_f} \Pi_p^\varepsilon$ employée pour un niveau isolé (section 2.4 voir (22) plus spécifiquement) et pour l'homogénéisation loin des croisements (section 2.5 voir (25) plus spécifiquement) ?

$$\begin{aligned}
&i\varepsilon\partial_t w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) \\
&= w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon H^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon H^\varepsilon u) + w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon V u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon V u) \\
&= w^\varepsilon(E_p(\varepsilon D) c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; E(\varepsilon D + j) p_j^\varepsilon u) \\
&\quad + w^\varepsilon(V c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; V p_j^\varepsilon u) \\
&\quad + w^\varepsilon([c_j^\varepsilon; E_p(\varepsilon D)] \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^\varepsilon([c_j^\varepsilon; V] \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) \\
&\quad + w^\varepsilon(c_j^\varepsilon [\Pi_p^\varepsilon; V] u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; [p_j^\varepsilon; V] u) \\
&\approx [E_p - E(\cdot + j)] w^0(c_j^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^0([c_j^\varepsilon; E_p(\varepsilon D)] \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^0(c_j^\varepsilon [\Pi_p^\varepsilon; V] u; p_j^\varepsilon u)
\end{aligned}$$

à un négligeable uniforme en temps près, d'après les commutations approchées $[p_j^\varepsilon; V] \to 0$ et $[c_j^\varepsilon; V] \to 0$ de la proposition 2.42.

Même si E_p n'est pas très régulier (lipschitzien) la commutation $[c_j^\varepsilon; E_p(\varepsilon D)] \to 0$ est valable par la proposition 2.42 donc $w^\varepsilon([c_j^\varepsilon; E_p(\varepsilon D)] \Pi_p^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) \to 0$ n'est pas problématique. Au contraire, sauf à introduire une troncature supportée dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$, je ne sais pas négliger $w^\varepsilon(c_j^\varepsilon [\Pi_p^\varepsilon; V] u; p_j^\varepsilon u)$ lorsque $p \notin N_f$ n'indexe pas un niveau isolé simple.

SECUNDO. Que donnerait la décomposition (non orthogonale) $1 - \Pi^\varepsilon = \Sigma q^\varepsilon$ selon les opérations à noyaux réguliers (notées q^ε) construites dans chaque paquet de niveaux croisés, de la même manière que les opérations p_j^ε $(1 \leq j \leq l)$ ont été construites à partir

des projecteurs Π_p^ε $(n+1 \leq p \leq n+l)$ par réindexation (voir la définition 2.8) ? En notant F le recollement analytique périodique des niveaux correspondant au paquet de niveaux croisés auquel q^ε est associé,

$$\begin{aligned}
&i\varepsilon\partial_t w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)\\
&= w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon H^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon H^\varepsilon u) + w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon V u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon V u)\\
&= w^\varepsilon(F(\varepsilon D)c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; E(\varepsilon D + j)p_j^\varepsilon u)\\
&+w^\varepsilon(V c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; V p_j^\varepsilon u)\\
&+w^\varepsilon([c_j^\varepsilon; F(\varepsilon D)]q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^\varepsilon([c_j^\varepsilon; V]q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)\\
&+w^\varepsilon(c_j^\varepsilon[q^\varepsilon; V]u; p_j^\varepsilon u) - w^\varepsilon(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; [p_j^\varepsilon; V]u)\\
&\approx [F - E(\cdot + j)]w^0(c_j^\varepsilon q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^0([c_j^\varepsilon; F(\varepsilon D)]q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) + w^0(c_j^\varepsilon[q^\varepsilon; V]u; p_j^\varepsilon u)
\end{aligned}$$

à un négligeable uniforme en temps près, d'après les commutations approchées $[p_j^\varepsilon; V] \to 0$ et $[c_j^\varepsilon; V] \to 0$ de la proposition 2.42.

Le terme multiplicatif $w^\varepsilon(c_j^\varepsilon[q^\varepsilon; V]u; p_j^\varepsilon u) \to 0$ n'est pas problématique vue la commutation approchée $[q^\varepsilon; V] \to 0$ en fait $\frac{1}{\varepsilon}[q^\varepsilon; V] \in \mathcal{L}(L^2)$ est même borné. C'est maintenant le terme différentiel $w^\varepsilon([c_j^\varepsilon; F(\varepsilon D)]q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$ qui n'est plus a priori négligeable car c_j^ε ne commute approximativement qu'avec les dérivations 1-périodiques (voir la remarque suivant la proposition 2.42) or F a une période en général > 1.

Nous étudions maintenant en détail $w^0(c_j^\varepsilon(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) \stackrel{?}{=} 0$ pour de vrai localement par commodité technique

$$\chi w^0(c_j^\varepsilon(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) = w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) \text{ où } \chi \in C_c^0(\mathbb{R})$$

D'abord $w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) = \Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*} w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u)$ car l'interversion de limites (convergence en ε et sommation en γ^*) est justifiée par la convergence uniforme de la série $\Sigma_{\gamma^* \in \Gamma^*}\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)$ au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ d'après la proposition 2.44.

Ensuite à $\gamma^* \in \Gamma^*$ fixé, décomposons orthogonalement $1 - \Pi^\varepsilon = \Sigma_{m \in M}\Pi^\varepsilon(m)$ où $\Pi^\varepsilon(m)$ est le projecteur total associé au m^{ieme}paquet de niveaux croisés selon la définition 2.8. Ou bien M est infini en d'autres termes les lacunes sont en nombre infini, ou bien M est fini en d'autres termes les lacunes sont en nombre fini auquel cas le dernier projecteur total $\Pi^\varepsilon(\max M)$ noté dans la suite $\Pi^\varepsilon(\infty)$ est le projecteur total de la réindexation infinie.

$$w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) = \Sigma_{m \in M} w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)\Pi^\varepsilon(m)u; p_j^\varepsilon u)$$

Lorsque les lacunes sont finies la série est finie et la relation résulte de la linéarité. Lorsque les lacunes sont infinies l'interversion de limites (convergence en ε et sommation en m) est justifiée par convergence uniforme de la série $\Sigma_{m \in M}$ au sens des distributions tempérées par exemple :

$$\begin{aligned}
&< w^\varepsilon(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)(1 - \Pi^\varepsilon)u; p_j^\varepsilon u) - \Sigma_{m \in M_f} w^\varepsilon(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)\Pi^\varepsilon(m)u; p_j^\varepsilon u)|a >_{S' \times S}\\
&\leq \| a^W(x; \varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| p_j^\varepsilon u \|_{L^2} \| \chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \sqrt{\Sigma_{m \in M - M_f} \| \Pi^\varepsilon(m)u \|_{L^2}^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \| a^W(x;\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| p_j^\varepsilon u \|_{L^2} \| \chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \sqrt{\Sigma_{n>n(M_f)} \| \Pi_n^\varepsilon u \|_{L^2}^2} \\
&\leq \| a^W(x;\varepsilon D) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| p_j^\varepsilon u \|_{L^2} \| \chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) \|_{\mathcal{L}(L^2)} \| H^\varepsilon u \|_{L^2} / \min E_{n(M_f)} \\
&\leq C^{ste}/n(M_f)^2
\end{aligned}
$$

pour toute partie $M_f \subset M$ finie où l'entier $n(M_f)$ désigne l'indice du plus bas niveau figurant dans les paquets indexés par $M - M_f$. On a supposé ici $H^\varepsilon u \in L^2$ borné.

Lemme 2.13 *Dans le cas où m indexe un paquet fini :*

$$w^0(\chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) \Pi^\varepsilon(m) u; p_j^\varepsilon u) = 0$$

en tant que distribution de toutes les variables $(t;x;\xi)$ temps inclus.

Preuve. La décomposition (non orthogonale) du projecteur total du m^{ieme}paquet de niveaux croisés $\Pi^\varepsilon(m) = \Sigma q^\varepsilon$ selon les opérations à noyaux réguliers comprend un nombre fini $l(m)$ de termes égal au nombre de niveaux croisés :

$$w^0(\chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) \Pi^\varepsilon(m) u; p_j^\varepsilon u) = \Sigma w^0(\chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$$

Par la régularité des enveloppes $\hat{\lambda}^\varepsilon$ et $\nabla\hat{\lambda}^\varepsilon$ (continu borné suffit) et par conséquent du symbole $\xi \mapsto c_j'(\gamma^*)(\xi)$ défini à partir de la formule (33) par

$$c_j'(\gamma^*) = \hat{\lambda}_j(\varepsilon D) \nabla \overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon D + \gamma^*) + \nabla\hat{\lambda}_j(\varepsilon D) \overline{\hat{\lambda}}_{j-\gamma^*}(\varepsilon D + \gamma^*) \in \mathcal{L}(L^2) \tag{35}$$

on constate :

$$w^0(\chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = \chi(\xi) c_j'(\gamma^*)(\xi) w^0(e^{-2i\pi <\cdot|\gamma^*>/\varepsilon} q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$$

En désignant par s_j^ε la fibre l-périodique de $\widehat{p_j^\varepsilon u} = s_j^\varepsilon \hat{\lambda}_j^\varepsilon$ et par τ_q^ε la fibre $l(m)$-périodique de $\widehat{q^\varepsilon u} = \tau_q^\varepsilon \hat{\mu}_q^\varepsilon$ on obtient par régularité de l'enveloppe $\hat{\mu}_q^\varepsilon$ (continu borné suffit mais le théorème 2.15 dit plus) :

$$w^0(\chi(\varepsilon D) c_j^\varepsilon(\gamma^*) q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = \chi(\xi) c_j'(\gamma^*)(\xi) \hat{\mu}_q(\xi) \overline{\hat{\lambda}}_j(\xi) \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \left(\tau_q^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2 + \gamma^*) \overline{s_j^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \right)$$

Vérifions maintenant que les fibres $\xi \mapsto s_j^\varepsilon(\xi)$ et $\xi \mapsto \tau_q^\varepsilon(\xi + \gamma^*)$ respectivement notées s_u^ε et τ_u^ε pour simplifier sont orthogonales au sens

$$s_u^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \to 0$$

car proprement isolées du point de vue des énergies : en effet

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t s_u^\varepsilon = E s_u^\varepsilon + s_{Vu}^\varepsilon \\ i\varepsilon\partial_t \tau_u^\varepsilon = F \tau_u^\varepsilon + \tau_{Vu}^\varepsilon \end{cases}$$

où E et F périodiques analytiques n'ont aucune valeur commune. Or

$$i\varepsilon\partial_t [s_u^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)] = [E(\xi + \varepsilon x'/2) - F(\xi - \varepsilon x'/2)] s_u^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)$$

$$+s^\varepsilon_{Vu}(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau^\varepsilon_u}(\xi-\varepsilon x'/2) - s^\varepsilon_u(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau^\varepsilon_{Vu}}(\xi-\varepsilon x'/2)$$
$$\approx (E-F)(\xi)s^\varepsilon_u(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau^\varepsilon_u}(\xi-\varepsilon x'/2)$$

où l'approximation s'entend à un négligeable uniforme en temps près.

C'est une application de la proposition 2.20 de commutation approchée au niveau des fibres qui le dit. En effet s^ε et τ^ε sont données par des formules intégrales analogues à celles de la proposition 2.20 avec la régularité requise pour les coefficients ψ et ϕ d'après le théorème 2.16.

On peut aussi remarquer que s^ε et τ^ε sont données par des formules de périodisations analogues à celles de la proposition 2.19 avec la régularité requise pour les coefficients a^*_γ et b^*_γ d'après le théorème 2.15, en effet d'après (32)

$$s^\varepsilon : \xi \mapsto \frac{1}{\varepsilon}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\Sigma_{1\le J\le l}\hat{u}(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{l\gamma^*}{\varepsilon}-\frac{J}{\varepsilon})\overline{\hat{\lambda}^\varepsilon_J}(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{l\gamma^*}{\varepsilon}-\frac{J}{\varepsilon})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Sigma_{\gamma^*\in\Gamma^*}\hat{u}(\frac{\xi}{\varepsilon}+\frac{\gamma^*}{\varepsilon})a_{\gamma^*}(\xi) \text{ avec } a_{\gamma^*}(\xi)=\overline{\hat{\lambda}}_{-\gamma^*(modulo\ l)}(\xi+\gamma^*)$$

On en déduit l'approximation à un négligeable uniforme en temps près

$$s^\varepsilon_u(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau^\varepsilon_u}(\xi-\varepsilon x'/2)\approx\frac{i\varepsilon}{(E-F)(\xi)}\partial_t[s^\varepsilon_u(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau^\varepsilon_u}(\xi-\varepsilon x'/2)]$$

Enfin la nullité $w^0(\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)q^\varepsilon u;p^\varepsilon_j u)=0$ en tant que distribution de toutes les variables temps inclus, pour chaque q^ε, implique la nullité $w^0(\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)\Pi^\varepsilon(m)u;p^\varepsilon_j u)=0$ par somme et le lemme 2.13 est prouvé.

□

Lemme 2.14 *Dans le cas d'un paquet infini :*

$$w^0(\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)\Pi^\varepsilon(\infty)u;p^\varepsilon_j u)=0$$

en tant que distribution de toutes les variables $(t;x;\xi)$ *temps inclus.*

Preuve. La décomposition (non orthogonale) du projecteur total de la réindexation infinie $\Pi^\varepsilon(\infty)=\Sigma q^\varepsilon$ selon les opérations à noyaux réguliers comprend un nombre infini de termes. Cette série converge (au moins) au sens de la proposition 2.45.

$$w^0(\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)\Pi^\varepsilon(\infty)u;p^\varepsilon_j u)=\Sigma w^0(\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)q^\varepsilon u;p^\varepsilon_j u)$$

L'interversion de limites (convergence en ε et sommation en q) est justifiée par la convergence uniforme de la série $\Sigma\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)q^\varepsilon$ au sens de $\mathcal{L}(L^2)$ d'après la proposition 2.45 de la réindexation infinie. On suppose ici $H^\varepsilon u\in L^2$ borné.
Comme précédemment par la régularité du symbole $c'_j(\gamma^*)$ défini par (35) on a

$$w^0(\chi(\varepsilon D)c^\varepsilon_j(\gamma^*)q^\varepsilon u;p^\varepsilon_j u)=\chi(\xi)c'_j(\gamma^*)(\xi)w^0(e^{-2i\pi<\cdot|\gamma^*>/\varepsilon}q^\varepsilon u;p^\varepsilon_j u)$$

En désignant par s_j^ε la fibre l-périodique de $\widehat{p_j^\varepsilon u} = s_j^\varepsilon \hat{\lambda}_j^\varepsilon$ et par τ_q^ε la fibre (non périodique) de $\widehat{q^\varepsilon u} = \tau_q^\varepsilon \hat{\mu}_q^\varepsilon$ on obtient par régularité de l'enveloppe $\hat{\mu}_q^\varepsilon$ (continu borné en vertu du théorème 2.18 qui ne dit pas plus) :

$$w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = \chi(\xi)c_j'(\gamma^*)(\xi)\hat{\mu}_q(\xi)\overline{\hat{\lambda}}_j(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(\tau_q^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2+\gamma^*)\overline{s_j^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\right)$$

Comme précédemment les fibres $\xi \mapsto s_j^\varepsilon(\xi)$ et $\xi \mapsto \tau_q^\varepsilon(\xi+\gamma^*)$ respectivement notées s_u^ε et τ_u^ε pour simplifier sont orthogonales au sens $s_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2) \to 0$ car proprement isolées du point de vue des énergies : en effet

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t s_u^\varepsilon = E s_u^\varepsilon + s_{Vu}^\varepsilon \\ \\ i\varepsilon\partial_t \tau_u^\varepsilon = F\tau_u^\varepsilon + \tau_{Vu}^\varepsilon \end{cases}$$

$$i\varepsilon\partial_t[s_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)] \approx [E(\xi+\varepsilon x'/2)-F(\xi-\varepsilon x'/2)]s_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)$$

où E et F analytiques n'ont aucune valeur commune.

C'est une application de la proposition 2.20 de commutation approchée au niveau des fibres qui le dit. En effet s^ε et τ^ε sont données dans les théorèmes 2.16 (réindexation finie) et 2.19 (réindexation infinie) par les formules intégrales de la proposition 2.20 où les coefficients ψ et ϕ ont (tout juste) la régularité requise.

On en déduit l'approximation à un négligeable uniforme en temps près

$$s_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2) \approx \frac{i\varepsilon}{(E-F)(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})}\partial_t[s_u^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{\tau_u^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)]$$

On peut remarquer que le facteur prudent $(E-F)(\xi-\varepsilon x'/2)$ pourrait être remplacé par $(E-F)(\xi)$ au sens de S' en invoquant la croissance tempérée de F en effet $F(\xi)$ est équivalent à $C^{ste}\xi^2$ d'après l'asymptotique spectrale (proposition 2.35). C'est un détail, ce qui importe c'est que la division soit possible.

La nullité $w^0(\chi(\varepsilon D)c_j^\varepsilon(\gamma^*)q^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = 0$ est prouvée pour chaque q^ε, d'où le lemme 2.14. □

Dans la source (34) il reste $w^0(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$ à étudier.

Dans ce terme il sera pratique de supposer V linéaire. Cette réduction est rendue possible par l'approximation de la proposition 2.42 à savoir

$$c_j^\varepsilon \approx \nabla V(x) i \frac{[p_j^\varepsilon; r]}{\varepsilon} \text{ dans } \mathcal{L}(L^2)$$

d'où

$$w^0(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = \nabla V(x) w^0(i \frac{[p_j^\varepsilon; r]}{\varepsilon} \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$$

A partir de la formule de la proposition 2.43 donnant c_j^ε dans le cas du potentiel linéaire et de l'expression $\widehat{\Pi^\varepsilon u} = \Sigma_{1 \leq j \leq l} s_j^\varepsilon \hat{\lambda}_j^\varepsilon = \Sigma_{1 \leq j \leq l} s^\varepsilon(\varepsilon \cdot + j) \hat{\lambda}_j^\varepsilon$ on peut calculer explicitement

$$\mathcal{F}_{\%x} w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)(\xi - j)$$

$$= \Sigma_{1 \leq I \leq l}\, s_I^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \hat{\lambda}_j(\xi + \varepsilon x'/2 - j) \overline{\hat{\lambda}}_j(\xi - \varepsilon x'/2 - j) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J} \nabla \overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi + \varepsilon x'/2 - J)$$

$$+ s_I^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \nabla \hat{\lambda}_j(\xi + \varepsilon x'/2 - j) \overline{\hat{\lambda}}_j(\xi - \varepsilon x'/2 - j) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J} \overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi + \varepsilon x'/2 - J)$$

Grâce à la relation d'orthonormalité ponctuelle (31) figurant dans la preuve du théorème 2.17

$$\Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J} \overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi - J) = \delta_{I,0}$$

on en déduit

$$\mathcal{F}_{\%x} w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)(\xi - j) = s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \nabla \hat{\lambda}_j(\xi + \varepsilon x'/2 - j) \overline{\hat{\lambda}}_j(\xi - \varepsilon x'/2 - j)$$

$$+ \Sigma_{1 \leq I \leq l}\, s_I^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \hat{\lambda}_j(\xi + \varepsilon x'/2 - j) \overline{\hat{\lambda}}_j(\xi - \varepsilon x'/2 - j) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J} \nabla \overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi + \varepsilon x'/2 - J)$$

L'approximation à un négligeable uniforme en temps près

$$\mathcal{F}_{\%x} w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)(\xi - j) \approx s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \nabla \hat{\lambda}_j \overline{\hat{\lambda}}_j(\xi - j)$$

$$+ |\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j) \Sigma_{1 \leq I \leq l}\, s_I^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J} \nabla \overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi - J)$$

résulte alors de la régularité des enveloppes recollées $\hat{\lambda}^\varepsilon$ énoncée dans la proposition 2.15.

En prenant la partie réelle

$$\mathcal{F}_{\%x} 2 \text{ Re } w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)(\xi - j) \approx \nabla |\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j) s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)$$

$$+ |\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j) s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*} \nabla |\hat{\lambda}_J|^2(\xi - J)$$

$$+ |\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j) \Sigma_{1 \leq I \leq l-1}\, s_I^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J} \nabla \overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi - J)$$

$$+ |\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j) \Sigma_{1 \leq I \leq l-1}\, s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2) \overline{s_I^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2) \Sigma_{1 \leq J \leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\overline{\hat{\lambda}}_{I+J} \nabla \hat{\lambda}_J)(\xi - J)$$

puis

$$\mathcal{F}_{\%x} 2 \text{ Re } w^\varepsilon(c_j^\varepsilon \Pi^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)(\xi - j) \approx \nabla|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j) s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)$$

$$+|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)\Sigma_{1\leq I\leq l-1}\, s_I^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\hat{\lambda}_{I+J}\nabla\overline{\hat{\lambda}}_J)(\xi - J)$$

$$+|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)\Sigma_{1\leq I\leq l-1}\, s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s_I^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\overline{\hat{\lambda}}_{I+J}\nabla\hat{\lambda}_J)(\xi - J)$$

car le facteur l-périodique $\Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}\nabla|\hat{\lambda}_J|^2(\xi - J)$ est nul par dérivation de l'identité $\Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}|\hat{\lambda}_J|^2(\xi - J) = 1$ de nouveau grâce à la régularité de la proposition 2.15.

Dans cette ultime relation il convient de bien distinguer l'enveloppe $|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)$ décroissante sommable et les facteurs l-périodiques $\Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\overline{\hat{\lambda}}_{I+J}\nabla\hat{\lambda}_J)(\xi - J)$ réguliers,
des fibres $s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)$ qui contiennent toutes les oscillations en temps.

Par la méthode des lemmes 2.13 et 2.14 on constate la concentration des oscillations présentes dans $s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi + I - \varepsilon x'/2)$ là où la division par $E(\xi) - E(\xi + I)$ n'est pas possible. Précisément

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi + I - \varepsilon x'/2)\right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times (\mathbb{R}_\xi - \{E = E(\cdot + I)\})$$

Finalement le coefficient l-périodique continu $\gamma_I : \xi \mapsto \Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\overline{\hat{\lambda}}_{I+J}\nabla\hat{\lambda}_J)(\xi - J)$ et son conjugué n'interviennent qu'aux points de concentration. En remarquant

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{I+J}(\xi - J + l\gamma^*) = \int_\Omega \psi(x;\xi + I)e^{-2i\pi x\xi}e^{-2i\pi x(l\gamma^* - J)}dx \\ \nabla\hat{\lambda}_J(\xi - J + l\gamma^*) = \int_\Omega (\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi)e^{-2i\pi x\xi}e^{-2i\pi x(l\gamma^* - J)}dx \end{cases}$$

on calcule

$$\gamma_I : \xi \mapsto \int_\Omega \overline{\psi}(x;\xi + I)(\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi)dx = \Sigma_{1\leq J\leq l}\, \varpi_{l\Gamma^*}(\overline{\hat{\lambda}}_{I+J}\nabla\hat{\lambda}_J)(\xi - J) \tag{36}$$

et la valeur de ce coefficient purement géométrique fonction de l'hamiltonien périodique n'importe vraiment qu'aux deux points de l'ensemble l-périodique $\{E = E(\cdot + I)\} \subset \mathbb{Z}/2$ pour chaque $0 < I < l$.

Conformément à la remarque suivant la proposition 2.42, à $1 \leq j \leq l$ fixé, la transformée de Wigner $w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$ ne satisfait pas une équation d'évolution sympathique :

$$f_j := w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)(x;\xi - j) = |\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\right)$$

$$(\partial_t + \nabla E(\xi)\nabla_x - \nabla V(x)\nabla_\xi)\, f_j = -2\nabla V(x)S_j$$

avec

$$S_j := \nabla|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\right)$$

$$+|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)\Sigma_{1\leq I\leq l-1}\, \gamma_I(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(s^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi + I - \varepsilon x'/2)\right)$$

$$+|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)\Sigma_{1\leq I\leq l-1}\, \overline{\gamma}_I(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left(s^\varepsilon(\xi + I + \varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\right)$$

C'est pourquoi mieux vaut se contenter de la seule somme :

$$(\partial_t + \nabla E(\xi)\nabla_x - \nabla V(x)\nabla_\xi)\,\Sigma_{1\leq j\leq l} f_j = -2\nabla V(x) S$$

avec

$$S := \nabla[\Sigma_{1\leq j\leq l}|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)]\ \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\right)$$

$$+[\Sigma_{1\leq j\leq l}|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)]\ \Sigma_{1\leq I\leq l-1}\,\gamma_I(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi+I-\varepsilon x'/2)\right)$$

$$+[\Sigma_{1\leq j\leq l}|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)]\ \Sigma_{1\leq I\leq l-1}\,\overline{\gamma}_I(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+I+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\right)$$

où le facteur d'enveloppe $\Sigma_{1\leq j\leq l}|\hat{\lambda}_j|^2(\xi - j)$ vaut 1 après l-périodisation ($\varpi_{l\Gamma^*}$).

On vient de démontrer :

Théorème 2.20 *Homogénéisation pour des états purs.*

Soit $N_f \subset \mathbb{N}$ un paquet de l niveaux croisés au sens de la définition 2.8 pour l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2} + v(\frac{x}{\varepsilon})$. Soit $V \in C^0_0(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue.

Soit s^ε la fibre l-périodique représentant la projection dans les niveaux indexés par N_f de la solution u^ε

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon = (H^\varepsilon + V)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u^\varepsilon_I \in L^2(\mathbb{R}) \ \textit{borné}\ \ (H^\varepsilon u^\varepsilon_I \in L^2\ \textit{borné}\ ) \end{cases}$$

Alors la (pseudo) transformée de Wigner l-périodique

$$f = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\right) \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_\xi)$$

suit l'évolution

$$\partial_t f + \nabla E(\xi)\nabla_x f - \nabla V(x)\nabla_\xi f = -2\nabla V(x)\Sigma_{0<I<l} S_I$$

où la source l-périodique

$$S_I = \gamma_I(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi+I-\varepsilon x'/2)\right)$$

$$+\overline{\gamma}_I(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(s^\varepsilon(\xi+I+\varepsilon x'/2)\overline{s^\varepsilon}(\xi-\varepsilon x'/2)\right)$$

se concentre pour tout $0 < I < l$ sur les deux points de l'ensemble l-périodique

$$\{\xi\in\mathbb{R}\,|\,E(\xi) = E(\xi+I)\}\subset\mathbb{Z}/2$$

Les coefficients géométriques γ_I sont définis par (36).

Théorème 2.21 *Homogénéisation pour des états mélangés.*

Soit $N_f \subset \mathbb{N}$ un paquet de l niveaux croisés au sens de la définition 2.8 pour l'hamiltonien périodique $H^\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + v(\frac{x}{\varepsilon})$. Soit $V \in C_0^0(\mathbb{R})$ à dérivée uniformément continue.

Soit s_n^ε la fibre l-périodique représentant la projection dans les niveaux indexés par N_f de la solution u_n^ε du mélange

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u_n^\varepsilon = (H^\varepsilon + V)u_n^\varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ \{u_n^\varepsilon(t=0) | n \in \mathbb{N}\} \subset L^2(\mathbb{R}) \text{ orthonormale } (H^\varepsilon u_n^\varepsilon(t=0) \in L^2 \text{ borné }) \\ \Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon| \leq 1 \qquad \frac{1}{\varepsilon}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon|^2 \text{ borné} \end{cases}$$

Alors la (pseudo) transformée de Wigner l-périodique

$$f = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \left(\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon s_n^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s_n^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\right) \in L^2_+(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$$

suit l'évolution $\partial_t f + \nabla E(\xi)\nabla_x f - \nabla V(x)\nabla_\xi f = 0$.

Preuve. Le résultat concernant les états purs supporte une combinaison convexe $\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon$ d'où l'équation d'évolution

$$\partial_t f + \nabla E(\xi)\nabla_x f - \nabla V(x)\nabla_\xi f = -2\nabla V(x)\Sigma_{0<I<l} S_I$$

où la source l-périodique

$$S_I = \gamma_I(\xi) \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \left(\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon s_n^\varepsilon(\xi + \varepsilon x'/2)\overline{s_n^\varepsilon}(\xi + I - \varepsilon x'/2)\right)$$

$$+\overline{\gamma}_I(\xi) \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \left(\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon s_n^\varepsilon(\xi + I + \varepsilon x'/2)\overline{s_n^\varepsilon}(\xi - \varepsilon x'/2)\right)$$

se concentre pour tout $0 < I < l$ sur les deux points de l'ensemble l-périodique $\{E = E(\cdot + I)\}$.

Pour un vrai mélange $\frac{1}{\varepsilon}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon|^2 \leq 1$ la source S_I est une fonction L^2_{loc} positive. Cette fonction est presque partout nulle car supportée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2$.

□

On préfera certainement une description de f au moyen des transformées de Wigner 1-périodiques w_s^0 dans les niveaux $N_f = \{n+1; \cdots; n+l\}$ effectivement $f(x;\xi)$ est le recollement :

$$\begin{cases} w_s^0[\Pi_{n+l}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I - l/2 \\ w_s^0[\Pi_{n+l-1}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I - (l-1)/2 \\ \cdots \\ w_s^0[\Pi_{n+2}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I - 2/2 \\ w_s^0[\Pi_{n+1}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I - 1/2 \\ w_s^0[\Pi_{n+1}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I \\ w_s^0[\Pi_{n+2}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I + 1/2 \\ \cdots \\ w_s^0[\Pi_{n+l-1}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I + (l-2)/2 \\ w_s^0[\Pi_{n+l}^\varepsilon u](x;\xi) \text{ pour } \xi \in I + (l-1)/2 \end{cases}$$

où I est l'intervalle OUVERT $I = K +]0; 1/2[\subset \mathbb{R}$ de la réindexation 2.7.

Il faut bien remarquer que cette représentation de f dans le cas des états purs est a priori uniquement valable dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \mathbb{Z}/2$ c'est-à-dire loin des croisements. Concernant la mesure f, je n'ai rien dit en termes de w_s^0 au voisinage d'un point $\xi \in \mathbb{Z}/2$. Néanmoins dans le cas des états mélangés l'égalité entre f et le recollement naturel des $w_s^0[\Pi^\varepsilon \rho^\varepsilon \Pi_p^\varepsilon]$ lorsque $n+1 \leq p \leq n+l$ varie est parfaite.

Remarque. On peut se demander si f est la l-périodisation de $w^0[\Pi^\varepsilon u]$.
A priori non $f \neq \varpi_{l\Gamma^*} w^0[\Pi^\varepsilon u]$ car

$$\varpi_{l\Gamma^*}\, w^0[\Pi^\varepsilon u] : (x;\xi) \mapsto \Sigma_{1\leq j\leq l} f(x;\xi+j)\, \varpi_{\Gamma^*}\, |\hat{\lambda}_j|^2(\xi) \text{ au moins pour } \xi \notin \mathbb{Z}/2$$

Il suffit de vérifier l'orthogonalité $w^0(p_i^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = 0$ loin de $\mathbb{Z}/2$ pour $i \neq j$
alors $w^0[\Pi^\varepsilon u] = \Sigma_{1\leq j\leq l} w^0(p_j^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) = \Sigma_{1\leq j\leq l} f(x;\xi+j)|\hat{\lambda}_j|^2(\xi)$ par bilinéarité.
Or $i\varepsilon\partial_t w^\varepsilon(p_i^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u) \approx [E(\xi+i) - E(\xi+j)] w^\varepsilon(p_i^\varepsilon u; p_j^\varepsilon u)$
et il reste à diviser par $E(\xi+i) - E(\xi+j)$ lorsque c'est possible c'est-à-dire pour $\xi \notin \mathbb{Z}/2$.

Remarque. Dans le cas $l = 1$ d'un niveau isolé (simple) le théorème 2.20 donne en une dimension d'espace le théorème 2.9 sans la restriction de petitesse concernant $\| V \|_\infty$.

2.9 Certains coefficients géométriques.

Résumé. Cette partie est consacrée à l'étude des coefficients géométriques figurant dans le terme source du théorème 2.20 d'homogénéisation des états purs. Le lemme 2.16 propose une expression susceptible de vérification au moyen des solutions normalisées de l'hamiltonien périodique. La conclusion est que ces coefficients sont parfois nuls et parfois non nuls.

Etant donné $v \in C^0_{\#}(\mathbb{R})$ un potentiel réel périodique pair, supposons l'absence de $l \geq 2$ lacunes consécutives pour l'hamiltonien périodique $H = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ et pas plus.

D'après la définition (27) c'est dire $G_n > 0$ et $G_{n+1} = \cdots = G_{n+l-1} = 0$ et $G_{n+l} > 0$.

D'après la proposition 2.37 soit E le recollement analytique l-périodique sur $\mathbb{R}$ des l niveaux croisés.

D'après la proposition 2.38 soit ψ un vecteur propre analytique l-périodique sur $\mathbb{R}$ quasi-pair.

On suppose ici que le croisement des premiers niveaux a lieu modulo $\mathbb{Z}$ au point $1/2$ et non à l'origine ainsi $E(0)$ est valeur propre simple de l'hamiltonien avec domaine périodique et le graphe énergétique E est pair. Sinon il faut remplacer la (quasi)-parité par la (quasi)-parité par rapport au point $1/2$.

$$\begin{cases} H\psi(\cdot;\xi) = E(\xi)\psi(\cdot;\xi) \\ \psi(x+1;\xi) = \psi(x;\xi)e^{+2i\pi\xi} \\ \psi \text{ est dérivable} \end{cases} \qquad \overline{\psi}(x;-\xi) = \psi(x;\xi) = \psi(x;\xi+l)$$

<u>Problème :</u> étudier la (non)-nullité des coefficients géométriques

$$\gamma(\xi) = \int_{-1/2}^{+1/2} \overline{\psi}(x;-\xi)(\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi)dx \qquad \text{lorsque } \xi \in \{\frac{1}{2};\cdots;\frac{l-1}{2}\}$$

D'après la proposition 2.13 la dérivée $E'(\xi)$ est non nulle lorsque $\xi \notin l\mathbb{Z}$.

Lemme 2.15 *Lorsque $\xi \in \{\frac{1}{2};\cdots;\frac{l-1}{2}\}$ le coefficient géométrique*

$$\gamma = \gamma(\xi) = \frac{2i\pi}{E'(\xi)} \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\xi} \right) dx$$

s'interprète à une constante multiplicative non nulle près comme la moyenne de l'application périodique

$$x \mapsto \frac{\partial\psi}{\partial\xi}(x;\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x}(x;\xi) - \psi(x;\xi)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\xi}(x;\xi)$$

Remarque. La (non)-nullité des coefficients γ ne dépend pas d'un éventuel facteur supplémentaire (régulier) $\theta = \theta(\xi)$ sans zéro (dans $\mathbb{Z}/2$) devant ψ puisque

$$\frac{\partial(\theta\psi)}{\partial\xi}\frac{\partial(\theta\psi)}{\partial x} - (\theta\psi)\frac{\partial^2(\theta\psi)}{\partial x\partial\xi} = \theta^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\xi} \right)$$

Preuve. Nous noterons $\frac{\partial}{\partial x} =' $ et $\frac{\partial}{\partial\xi} = \partial$ et $\int_{-1/2}^{+1/2} dx = \int_\Omega$ brièvement.

Par la quasi-parité

$$\gamma(\xi) = \int_{-1/2}^{+1/2} \overline{\psi}(x;-\xi)(\nabla_\xi - 2i\pi x)\psi(x;\xi)dx = \int_\Omega \psi\ \partial\psi - 2i\pi x \int_\Omega \psi^2 = \frac{1}{2}\left(\partial \int_\Omega \psi^2 - 4i\pi \int_\Omega x\ \psi^2\right)$$

En dérivant l'identité $(H-E)\psi = 0$ on obtient

$$(H-E)\partial\psi = \partial E\ \psi \tag{37}$$

Multiplions d'abord (37) par $x\psi$ d'où

$$\partial E\ x\psi^2 = x\psi\ (H-E)\partial\psi = x\partial\psi\ (H-E)\psi + \partial\psi'\ \psi - \partial\psi\ \psi' + (x\ \partial\psi\ \psi' - x\ \partial\psi'\ \psi)'$$

$$\text{puis } \partial E\ \int_\Omega x\psi^2 = \int_\Omega \partial\psi'\ \psi - \partial\psi\ \psi' + [x\ \partial\psi\ \psi' - x\ \partial\psi'\ \psi]_{x=-1/2}^{x=+1/2}$$

$$= \int_\Omega \partial\psi'\ \psi - \partial\psi\ \psi' + \left(\frac{e^{+4i\pi\xi}+1}{2}\right)(\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi) \tag{38}$$

Multiplions ensuite (37) par ψ d'où

$$\partial E\ \psi^2 = \psi\ (H-E)\partial\psi = \partial\psi\ (H-E)\psi + (\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)'$$

$$\text{puis } \partial E\ \int_\Omega \psi^2 = [\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi]_{x=-1/2}^{x=+1/2} = (e^{+4i\pi\xi}-1)(\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi) \tag{39}$$

Dérivons enfin (39) d'où $\partial E\ \partial \int_\Omega \psi^2 + \partial^2 E\ \int_\Omega \psi^2$

$$= 4i\pi e^{+4i\pi\xi}(\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi) + (e^{+4i\pi\xi}-1)\partial(\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi) \tag{40}$$

Pour la simplification des termes de bord on invoquera les relations de quasi-périodicité

$$\begin{cases} \psi(+\frac{1}{2};\xi) = e^{+2i\pi\xi}\psi(-\frac{1}{2};\xi) \\ \psi'(+\frac{1}{2};\xi) = e^{+2i\pi\xi}\psi'(-\frac{1}{2};\xi) \\ \partial\psi(+\frac{1}{2};\xi) = e^{+2i\pi\xi}\partial\psi(-\frac{1}{2};\xi) + 2i\pi e^{+2i\pi\xi}\psi(-\frac{1}{2};\xi) \\ \partial\psi'(+\frac{1}{2};\xi) = e^{+2i\pi\xi}\partial\psi'(-\frac{1}{2};\xi) + 2i\pi e^{+2i\pi\xi}\psi'(-\frac{1}{2};\xi) \end{cases}$$

En sommant (38) (39) et (40) on obtient

$$\partial E\ \left(\partial \int_\Omega \psi^2 - 4i\pi \int_\Omega x\ \psi^2\right) = -4i\pi \int_\Omega \partial\psi'\ \psi - \partial\psi\ \psi'$$

$$+(e^{+4i\pi\xi}-1)\{+2i\pi(\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi)$$

$$+\partial(\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi) - \frac{\partial^2 E}{\partial E}\ (\partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi)(-\frac{1}{2};\xi)\}$$

Lorsque $\xi \in \mathbb{Z}/2$ il reste $\partial E\ \left(\partial \int_\Omega \psi^2 - 4i\pi \int_\Omega x\ \psi^2\right) = -4i\pi \int_\Omega \partial\psi'\ \psi - \partial\psi\ \psi'$ à condition que $\partial E = E'(\xi)$ soit non nul c'est-à-dire $\xi \notin l\mathbb{Z}$.

C'est le cas par hypothèse puisque $\xi \in \{\frac{1}{2};\cdots;\frac{l-1}{2}\}$.

Pour interpréter l'expression $\gamma \sim \int_\Omega \partial\psi\ \psi' - \partial\psi'\ \psi$ obtenue on peut remarquer que la relation de quasi-périodicité générale

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\xi}\right)(x+1;\xi) - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\xi}\right)(x;\xi) = (e^{+4i\pi\xi}-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\xi}\right)(x;\xi)$$

est une relation de périodicité lorsque $\xi \in \mathbb{Z}/2$.

□

Au voisinage d'un point $\xi \in \{\frac{1}{2};\cdots;\frac{l-1}{2}\}$ le graphe énergétique E est difféomorphe.

En inversant la relation $E = E(\xi) \leftrightarrow \xi = \xi(E)$ le vecteur propre ψ devient une application analytique de la variable E telle que $\psi = \psi(x;E) \in \text{Ker } -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ pour tout E.

En remarquant $\dfrac{\partial}{\partial E} = \dfrac{1}{E'(\xi)}\dfrac{\partial}{\partial\xi}$ le nombre à étudier se réécrit sous la forme

$$\gamma = \gamma(E) = 2i\pi\int_{-1/2}^{+1/2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial E}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial E}\right)dx \tag{41}$$

Lemme 2.16 *A une constante multiplicative près non nulle*

$$\gamma = \gamma(E) = C^{ste}\int_0^1\left(\frac{(y_1^E)^2}{\int_0^1(y_1^E)^2} + \frac{(y_2^E)^2}{\int_0^1(y_2^E)^2} - 2\right)\int_0^{\cdot}(y_1^E)(y_2^E)$$

où y_1^E (paire) et y_2^E (impaire) sont les solutions normalisées de $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$, toutes deux réelles (anti)périodiques lorsque $E = E(\xi)$ avec $\xi \in \{\frac{1}{2};\cdots;\frac{l-1}{2}\}$.

Preuve. D'après les identités de la proposition 2.26 les solutions normalisées y_1^E et y_2^E pour l'opérateur différentiel $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x) - E$ expriment les coefficients de matrice de la résolvante

$$R_0^E = \begin{bmatrix} (y_2^E)' & (y_1^E)' \\ (y_2^E) & (y_1^E) \end{bmatrix}, (y_1^E)(y_2^E)' - (y_1^E)'(y_2^E) = 1,\ {}^t\,\text{Com}(R_0^E - \lambda) = \begin{bmatrix} (y_1^E) - \lambda & -(y_1^E)' \\ -(y_2^E) & (y_2^E)' - \lambda \end{bmatrix},$$

où ^{t} Com désigne la transposée de la comatrice.

La formule $\dfrac{\partial R_0^E(1)}{\partial E} = -R_0^E(1)\displaystyle\int_0^1 R_0^E(t)^{-1}BR_0^E(t)dt$ de la proposition 2.24 donnant les dérivées des solutions normalisées par rapport au paramètre E à la position $x = 1$ se généralise à toute position

$$\frac{\partial R_0^E}{\partial E} = \begin{bmatrix} \partial(y_2^E)' & \partial(y_1^E)' \\ \partial(y_2^E) & \partial(y_1^E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1'\int_0^{\cdot} y_2^2 - y_2'\int_0^{\cdot} y_1y_2 & y_1'\int_0^{\cdot} y_1y_2 - y_2'\int_0^{\cdot} y_1^2 \\ y_1\int_0^{\cdot} y_2^2 - y_2\int_0^{\cdot} y_1y_2 & y_1\int_0^{\cdot} y_1y_2 - y_2\int_0^{\cdot} y_1^2 \end{bmatrix}$$

En notant $a = a(E) = \psi(x=0;E)$ et $b = b(E) = \psi'(x=0;E)$ le vecteur propre ψ s'exprime dans la base des solutions normalisées

$$\begin{cases} \psi = a\ y_1 + b\ y_2 \qquad \psi' = a\ y_1' + b\ y_2' \\ \partial\psi = \partial a\ y_1 + \partial b\ y_2 + a\ y_1\int_0^{\cdot} y_1\ y_2 - a\ y_2\int_0^{\cdot} y_1^2 + b\ y_1\int_0^{\cdot} y_2^2 - b\ y_2\int_0^{\cdot} y_1\ y_2 \\ \partial\psi' = \partial a\ y_1' + \partial b\ y_2' + a\ y_1'\int_0^{\cdot} y_1\ y_2 - a\ y_2'\int_0^{\cdot} y_1^2 + b\ y_1'\int_0^{\cdot} y_2^2 - b\ y_2'\int_0^{\cdot} y_1\ y_2 \\ \psi\ \partial\psi' - \psi'\ \partial\psi = (y_1y_2' - y_1'y_2)\,(a\ \partial b - b\ \partial a - a^2\int_0^{\cdot} y_1^2 - b^2\int_0^{\cdot} y_2^2 - 2ab\int_0^{\cdot} y_1\ y_2) \end{cases}$$

où ∂ et $'$ sont des raccourcis pour $\dfrac{\partial}{\partial E}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Notons $\lambda = \lambda(E) = e^{+2i\pi\xi}$. En dérivant la relation $\lambda(E(\xi)) = e^{+2i\pi\xi}$ on peut remarquer

$$\frac{\partial\lambda}{\lambda} = \frac{2i\pi}{E'} \qquad -\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{(E')^2} \qquad -\frac{\partial^2\lambda}{\lambda} = \frac{2i\pi E''}{(E')^3} + \frac{4\pi^2}{(E')^2} \tag{42}$$

Le vecteur propre ψ satisfait par construction $\begin{bmatrix} b^E \\ a^E \end{bmatrix} \in \text{ Ker } (R_0^E(1) - \lambda^E) \qquad \forall E.$

Lorsque E n'est pas exceptionnel ($\xi \notin \mathbb{Z}/2$) le noyau de dimension un se réalise par l'image de la transposée de la comatrice

$$\text{Ker } (R_0^E(1) - \lambda^E) = \text{ Im } {}^t\text{ Com } (R_0^E(1) - \lambda^E)$$

par conséquent, sauf valeurs exceptionnelles, ψ est un vecteur directeur de l'image de la transposée de la comatrice. Cette propriété permet une construction explicite du vecteur propre ψ au moyen des solutions normalisées.

Au voisinage d'une valeur exceptionnelle $\xi \in \{\frac{1}{2}; \cdots; \frac{l-1}{2}\}$ fixée, observons l'évolution de la base canonique. L'expression "à la limite" et le symbole correspondant $\to$ signifient dans la suite que la variable E, qui est sous-entendue dans les notations, approche la valeur spéciale $E(\xi)$ fixée.

$${}^t\text{ Com } (R_0(1) - \lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(1) - \lambda \\ -y_2(1) \end{bmatrix} \qquad {}^t\text{ Com } (R_0(1) - \lambda) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1'(1) \\ y_2'(1) - \lambda \end{bmatrix}$$

A un facteur multiplicatif θ analytique près

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou de manière équivalente } \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda - y_2'(1)}{y_1'(1)} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Il suffit de remarquer que les quotients analytiques $\dfrac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)}$ et $\dfrac{\lambda - y_2'(1)}{y_1'(1)}$ sont bien définis y compris pour les valeurs exceptionnelles de E. En effet les dénominateurs s'annulent alors seulement avec une multiplicité un :

$$\partial y_2(1) \to \pm \int_0^1 y_2^2 \neq 0 \qquad \partial y_1'(1) \to \mp \int_0^1 y_1^2 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{ Im } {}^t\text{ Com } (R_0(1) - \lambda) \to \begin{bmatrix} +\frac{\partial\lambda/\lambda - \int_0^1 y_1 y_2}{\int_0^1 y_2^2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda - y_2'(1)}{y_1'(1)} \end{bmatrix} \in \text{ Im } {}^t\text{ Com } (R_0(1) - \lambda) \to \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\partial\lambda/\lambda + \int_0^1 y_1 y_2}{\int_0^1 y_1^2} \end{bmatrix} \tag{45}$$

Ces relations sont des cas particuliers (voir (46) plus spécifiquement) d'expressions à la limite pour la résolvante et sa dérivée :

$$\lambda \to \pm 1$$

$$R_0(1) \to \pm 1$$

$$^t\,\mathrm{Com}\,(R_0(1)-\lambda) \to 0$$

$$\partial R_0(1) \to \pm \begin{bmatrix} -\int_0^1 y_1 y_2 & -\int_0^1 y_1^2 \\ +\int_0^1 y_2^2 & +\int_0^1 y_1 y_2 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\partial^2 R_0(1) \to \pm \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} A = (\int_0^1 y_1 y_2)^2 - (\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2) - \int_0^1 (y_1^2 \int_0^{\cdot} y_2^2 - y_2^2 \int_0^{\cdot} y_1^2) \\ B = 2\int_0^1 (y_1 y_2 \int_0^{\cdot} y_1^2 - y_1^2 \int_0^{\cdot} y_1 y_2) \\ C = 2\int_0^1 (y_1 y_2 \int_0^{\cdot} y_2^2 - y_2^2 \int_0^{\cdot} y_1 y_2) \\ D = (\int_0^1 y_1 y_2)^2 - (\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2) + \int_0^1 (y_1^2 \int_0^{\cdot} y_2^2 - y_2^2 \int_0^{\cdot} y_1^2) \end{cases} \tag{47}$$

Considérons par exemple dans (43) la première représentation avec $y_1^E(1)$ et $y_2^E(1)$ soit

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} \frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

alors

$$\psi\ \partial\psi' - \psi'\ \partial\psi = a\ \partial b - b\ \partial a - a^2 \int_0^{\cdot} y_1^2 - b^2 \int_0^{\cdot} y_2^2 - 2ab \int_0^{\cdot} y_1\ y_2$$

$$= \theta^2 \left\{ \partial \left[\frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \right] - \int_0^{\cdot} y_1^2 - \left[\frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \right]^2 \int_0^{\cdot} y_2^2 - 2 \left[\frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \right] \int_0^{\cdot} y_1 y_2 \right\}$$

D'après la réécriture (41) du lemme (2.16) on obtient à la limite

$$\gamma = -2i\pi \int_{-1/2}^{+1/2} \psi\ \partial\psi' - \psi'\ \partial\psi \tag{48}$$

$$= -2i\pi\theta^2 b \left\{ \frac{\partial b}{b} - 2\int_{-1/2}^{+1/2} \left(\int_0^{\cdot} y_1 y_2 \right) - \frac{1}{b} \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\int_0^{\cdot} y_1^2 \right) - b \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\int_0^{\cdot} y_2^2 \right) \right\}$$

On peut calculer $\dfrac{\partial b}{b}$ à la limite en dérivant l'identité $(R_0(1)-\lambda) \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = 0$ plusieurs fois sachant que le vecteur propre est régulier.

D'abord

$$(\partial R_0(1) - \partial\lambda) \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = -(R_0(1)-\lambda) \begin{bmatrix} \partial b \\ \partial a \end{bmatrix} \to 0$$

car à la limite la matrice $R_0(1)-\lambda$ est nulle (voir la condition de coexistence dans la classification de Floquet 2.22) donc la matrice $\partial R_0(1) - \partial\lambda$ est non inversible à la limite.

$$\frac{\partial R_0(1) - \partial\lambda}{\lambda} \to \begin{bmatrix} -\partial\lambda/\lambda - \int_0^1 y_1 y_2 & -\int_0^1 y_1^1 \\ +\int_0^1 y_2^2 & -\partial\lambda/\lambda + \int_0^1 y_1 y_2 \end{bmatrix}$$

La nullité du déterminant s'écrit

$$-\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda}\right)^2 = (\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2) - (\int_0^1 y_1 y_2)^2 \tag{49}$$

Ensuite

$$(\partial^2 R_0(1)-\partial^2\lambda)\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = -2(\partial R_0(1)-\partial\lambda)\begin{bmatrix} \partial b \\ \partial a \end{bmatrix} - (R_0(1)-\lambda)\begin{bmatrix} \partial^2 b \\ \partial^2 a \end{bmatrix} \to -2(\partial R_0(1)-\partial\lambda)\begin{bmatrix} \partial b \\ \partial a \end{bmatrix}$$

de nouveau car à la limite la matrice $R_0(1)-\lambda$ est nulle.

De l'égalité précédente

$$\begin{bmatrix} A-\partial^2\lambda/\lambda & B \\ C & D-\partial^2\lambda/\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} -\partial\lambda/\lambda - \int_0^1 y_1y_2 & -\int_0^1 y_1^2 \\ +\int_0^1 y_2^2 & -\partial\lambda/\lambda + \int_0^1 y_1y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial b \\ \partial a \end{bmatrix}$$

dans laquelle

$$a = 1 \qquad \text{et} \qquad b\int_0^1 y_2^2 = \partial\lambda/\lambda - \int_0^1 y_1y_2$$

on tire

$$4\frac{\partial b}{b}\frac{\partial\lambda}{\lambda} = A - D + \frac{B}{b} - bC$$

Dans le cas d'un potentiel pair les solutions normalisées y_1 et y_2 sont paire et impaire à la limite donc l'intégrale $\int_0^1 y_1y_2$ est nulle à la limite au titre de moyenne d'une applications périodique impaire. De même les intégrales sur $(-1/2;+1/2)$ des primitives de y_1^2 et y_2^2 figurant dans (48) sont nulles à la limite. De même l'égalité $A = D = -(\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2)$ à la limite dans (47) repose sur l'imparité de l'application $y_1^2\int_0^\cdot y_2^2 - y_2^2\int_0^\cdot y_1^2$. On en déduit quelques simplifications :

$$\partial R_0(1) \to \pm\begin{bmatrix} 0 & -\int_0^1 y_1^2 \\ +\int_0^1 y_2^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial^2 R_0(1) \to \pm\begin{bmatrix} -(\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2) & -4\int_0^1 y_1^2\int_0^\cdot y_1y_2 \\ -4\int_0^1 y_2^2\int_0^\cdot y_1y_2 & -(\int_0^1 y_1^2)(\int_0^1 y_2^2) \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda - y_1(1)}{y_2(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} +\frac{\partial\lambda/\lambda}{\int_0^1 y_2^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Grâce aux relations (50) donnant A, B, C et D grâce aux remarques précédentes concernant les simplifications de parité et grâce à l'identité (49) on aboutit finalement à

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{\int_0^1 y_1^2\int_0^\cdot y_1y_2}{\int_0^1 y_1^2} + \frac{\int_0^1 y_2^2\int_0^\cdot y_1y_2}{\int_0^1 y_2^2}$$

puis

$$\gamma = signe(E')2\pi\theta^2\left(\frac{\int_0^1 y_1^2}{\int_0^1 y_2^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\int_0^1 y_1^2\int_0^\cdot y_1y_2}{\int_0^1 y_1^2} + \frac{\int_0^1 y_2^2\int_0^\cdot y_1y_2}{\int_0^1 y_2^2} - 2\int_0^1\int_0^\cdot y_1y_2\right)$$

où le signe se déduit de (42). C'est un détail.

□

Remarque. Les vecteurs (44) et (45) sont liés à la limite à cause de la relation (49). On obtient de ce fait au moyen de (44) et (45) qu'une seule des deux solutions (anti)périodiques

$\in$ Ker $-\frac{d^2}{dx^2}+v(x)-E$ lorsque $E=E(\xi)$ avec $\xi \in \{\frac{1}{2};\cdots;\frac{l-1}{2}\}$. Néanmoins en changeant le signe de $\frac{\partial\lambda}{\lambda}$ c'est-à-dire d'après (42) en inversant la paramétrisation de E' on les obtient toutes. Cette remarque est conforme à la parité du graphe énergétique et plus précisément à la quasi-parité de l'hamiltonien $\xi \mapsto H_\xi$ avec conditions quasi-périodiques.

L'étude de la (non)-nullité des coefficients géométriques γ se réduit donc à la question (strictement) équivalente :

" Supposons que les deux solutions normalisées y_1 et y_2 de $-\frac{d^2}{dx^2}+v(x)$ soient toutes deux (anti)périodiques, le nombre réel

$$\int_0^1 \left(\frac{y_1^2}{\int_0^1 y_1^2}+\frac{y_2^2}{\int_0^1 y_2^2}-2\right)\int_0^{\cdot} y_1 y_2$$

est-il nul ? "

La réponse est (malheureusement) non dans certains cas et oui dans d'autres.

- Soit v un potentiel constant alors pour les solutions $y_1=\cos(n\pi x)$ et $y_2=\sin(n\pi x)$ évidentes
$$\frac{y_1^2}{\int_0^1 y_1^2}+\frac{y_2^2}{\int_0^1 y_2^2}-2=0$$
- Soit v le potentiel obtenu en périodisant la marche d'escalier paire $\mathbb{I}_{(-T;+T)}$ de demi-largeur $0<T<1/2$. La condition de coexistence de deux solutions (anti)périodiques pour $-\frac{d^2}{dx^2}+v(x)-E$ s'écrit
$$\text{il existe } n\in\mathbb{Z} \text{ tel que } 2T\sqrt{E-1}=n\pi \text{ et } (1-2T)\sqrt{E}=n\pi+2\pi\mathbb{Z}(+1)$$
Alors (au prix d'un calcul fastidieux !)
$$\int_0^1 \left(\frac{(y_1^E)^2}{\int_0^1 (y_1^E)^2}+\frac{(y_2^E)^2}{\int_0^1 (y_2^E)^2}-2\right)\int_0^{\cdot} y_1^E y_2^E=\frac{3T(1-2T)}{16E^2(E-1)^2}\frac{(-1)^n}{(\int_0^1 (y_1^E)^2)(\int_0^1 (y_2^E)^2)}\neq 0$$

2.10 Bibliographie.

Références

[AM] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin. Solid state physics. *Saunders, Philadelphia,* **1976**.

[B] P. Bechouche. Semiclassical limits in a crystal with a Coulombian self-consistent potential : effective mass theorems. *Asymptotic Analysis*, 19 :405-425, **1999**.

[BMP] P. Bechouche, N.J. Mauser, F. Poupaud. Semi-classical limit for the Schrödinger-Poisson equation in a crystal. *Comm. Pure Appl. Math.*, L4 :851-890, **2001**.

[Bo] . Borg. .,,**19**.

[BP] P. Bechouche, F. Poupaud. Semiclassical limit in a stratified medium. *Monatshefte für Mathematik*, 129 :281–301, **2000**.

[BLP] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou. Asymptotic analysis for periodic structures. *North Holland*, **1978**.

[CD] E.A. Coddington, N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. *McGraw-Hill, New-York*, **1955**.

[DT] B. Dahlberg, E. Trubowitz. A remark on two dimensional periodic potentials. *Comment. Math. Helvetici*, 57 :130-134, **1982**.

[EAST] M.S.P. Eastham. The Spectral Theory of Periodic Differential Equations. *Scottish Academic Press*, **1973**.

[FKG] C. Fermanian-Kammerer, P. Gérard. Mesures semi-classiques et croisements de modes. *Bull. Soc. Math. de France* , 1 :123-168, **2002**.

[G] P. Gérard. Microlocal Defect Measures. *Comm. Part. Diff. Eq.* , 16 :1761–1794, **1991**.

[GMMP] P. Gérard, P.A. Markowich, N.J. Mauser, F. Poupaud. Homogenization limits and Wigner transforms. *Comm. Pure Appl. Math.*, L :323–379, **1997**.

[GX] P. Gérard. Mesures Semi-Classiques et Ondes de Bloch. *Sem. Ecole Polytechnique*, XVI, **1990**.

[Ho] H. Hochstadt. Estimates on the Stability Intervals for Hill's equations. *Proc. Am. Math. Soc.*, 14 :930-932, **1963**.

[JMR] J.L. Joly, G. Metivier, J. Rauch. Trilinear compensated compactness and nonlinear geometric optics. *Ann. of Math.*, 142 :121-169, **1995**.

[KARP] Y.E. Karpeshina. Perturbation theory for the Schrödinger operator with a periodic potential. *Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag*, 1663, **1997**.

[K] T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. *Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York*, **1980**.

[KT] H.P. McKean, E. Trubowitz. Hill's equation and hyperelliptic function theory in presence of infinetely many branch points. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29 :143-226, **1976**.

[LP] P. L. Lions, T. Paul. Sur les mesures de Wigner. *Revista Mat. Iberoamericana*, 9 :553–618, **1993**.

[MM] P.A. Markowich, N.J. Mauser. The classical cimit of a self-consistent quantum-Vlasov equation in 3-D. *Math. Mod. and Meth. in Appl. Sciences*, 3 :109–124, **1993**.

[MMP] P.A. Markowich, N.J. Mauser and F. Poupaud. A Wigner function approach to semiclassical limits : electrons in a periodic potential. *J. Math. Phys.*, 35 :1066–1094, **1994**.

[MRS] P.A. Markowich, C.A. Ringhofer, C. Schmeiser. Semiconductor equations. *Springer, Vienna*, **1990**.

[MW] W. Magnus, W. Winkler. Hill's equation. *Wiley-Interscience, New-York* , **1966**.

[PR] F. Poupaud, C.A. Ringhofer, Semi-classical limits in a crystal with exterior potentials and effective mass theorems. *Comm. Part. Diff. Eq.*, 21 :1897–1918, **1996**.

[RS] M. Reed, B. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics IV. *Academic Press*, 4th edition, **1987**.

[SKRI] M. Skriganov. The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential. *Invent. Math.*, 80 :107-121, **1985**.

[TAR] L. Tartar. H-measures : a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 115 :193-230, **1990**.

[WIG] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, 40 :749-759, **1932**.

[WIL] C.H. Wilcox. Theory of Bloch Waves. *J. d'Analyse Mathematique*, 33 :146-167, **1978**.

[YCV] Y. Colin de Verdière. Exposé sur les singularités de Van Hove génériques. Mém. Soc. Math. France (NS), 46 :99-110, **1991**.

3 Mesures de Wigner en milieu aléatoire.

3.1 Introduction.

Cette partie étudie le comportement asymptotique de particules quantiques évoluant dans un milieu aléatoire sous l'hypothèse dite de couplage faible ('weak coupling limit')

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}(t;x) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta\psi^\varepsilon(t;x) + V(t;x)\psi^\varepsilon(t;x) + \sqrt{\varepsilon}v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\psi^\varepsilon(t;x)$$

où le potentiel aléatoire $\sqrt{\varepsilon}v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})$ est d'amplitude $\sqrt{\varepsilon}$. La fonction d'onde ψ^ε du système sera analysée lorsque $\varepsilon \to 0^+$ via sa transformée de Wigner $w^0[\psi^\varepsilon]$ limite. Les potentiels réels $V(t;x)$ et $v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})$ jouent des rôles très différents. Ainsi V désigne un potentiel déterministe modèlisant les forces macroscopiques en présence, tandis que v désigne un potentiel stochastique modèlisant l'aléatoire du milieu à une échelle microscopique. Pour des fonctions d'onde initiales $\psi^\varepsilon(t=0)$ déterministes, sous certaines hypothèses sur le comportement stochastique de v, nous établirons par exemple l'équation d'évolution satisfaite par l'espérance $f = \mathbb{E}w^0[\psi^\varepsilon]$ de la transformée de Wigner limite

$$\partial_t f[\psi^\varepsilon] + \xi.\nabla_x f[\psi^\varepsilon] - \nabla V(t;x).\nabla_\xi f[\psi^\varepsilon] = B(f[\psi^\varepsilon])$$

où B est un opérateur diffusif de collision de type Boltzmann dont la section efficace dépend fortement de l'aléatoire du milieu.

On trouve là une justification théorique du passage de la dynamique réversible de l'équation de Schrödinger à la dynamique irréversible de l'équation de Boltzmann. L'origine de l'irréversibilité est à chercher dans le caractère déterministe des données initiales.

Ce changement de dynamique est un problème général qui a motivé de nombreux travaux de physiciens et de mathématiciens. On peut citer [L] pour la justification de l'équation de Boltzmann dans le cadre des systèmes statistiques de grande taille, [GAL] pour la justification de l'équation de Boltzmann dans les gaz de Lorentz où les particules interagissent peu selon des lois de Poisson et [S] [BBS] [DP] pour des extensions. Le couplage faible a été étudié pour la première fois par [KP2] puis a été repris par [DGL] [DR] [HLW]. On peut trouver une synthèse des résultats les plus marquants dans l'article récent de L.Erdös et H.T.Yau [EY].

Dans toutes ces références les méthodes employées reposent sur une analyse technique et profonde des fonctions d'ondes elles-mêmes, au moyen d'itérations infinies de la formule de Duhamel et d'éléments de théorie des graphes. L'équation limite à prouver sur la transformée de Wigner limite est reconnue après coup.

Dans [PV] F.Poupaud et A.Vasseur proposent une méthode alternative qui aborde les équations elles-mêmes sans trop se soucier de la structure fine des solutions. L'argument clé est une propriété d'indépendance après un certain temps qui se rapproche de la propriété de mélange ('mixing property') de [KP1] [KP2]. Précisément on suppose l'existence d'un temps $T > 0$ pour lequel $v(t;x)$ et $v(\tau;x)$ sont indépendants lorsque $t > \tau + T$. Un avantage de cette approche est la généralité possible du potentiel v qui n'a pas à suivre telle ou telle

loi de probabilité ([GAL] : Poisson, [EY] : Gauss). Détaillons le principe de cette méthode.

Soit à étudier la limite de l'espérance $\mathbb{E}w^\varepsilon(t)$ des solutions de l'équation d'évolution

$$\partial_t w^\varepsilon + Aw^\varepsilon = \theta^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$ déterministe et où $\theta^\varepsilon(t)$ est un opérateur stochastique d'espérance $\mathbb{E}\theta^\varepsilon(t) = 0$ nulle. En supposant $\theta^\varepsilon(t)$ et $\theta^\varepsilon(\tau)$ indépendants pour $t > \tau + \varepsilon T$ et en supposant les données initiales $w^\varepsilon(t=0)$ déterministes, la formule de Duhamel prouve l'indépendance de $\theta^\varepsilon(t)$ et $w^\varepsilon(\tau)$ lorsque $t > \tau + \varepsilon T$. Alors

$$w^\varepsilon(t) = S(\varepsilon T)w^\varepsilon(t-\varepsilon T) + \int_{t-\varepsilon T}^t S(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)w^\varepsilon(\tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\theta^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t) &= \mathbb{E}\theta^\varepsilon(t)S(\varepsilon T)w^\varepsilon(t-\varepsilon T) + \mathbb{E}\int_{t-\varepsilon T}^t \theta^\varepsilon(t)S(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)w^\varepsilon(\tau)d\tau \\ &= \mathbb{E}\int_{t-\varepsilon T}^t \theta^\varepsilon(t)S(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)w^\varepsilon(\tau)d\tau\end{aligned}$$

En itérant (une fois seulement !) la relation de Duhamel

$$w^\varepsilon(\tau) = S(\varepsilon T)w^\varepsilon(\tau-\varepsilon T) + \int_{\tau-\varepsilon T}^\tau S(\tau-\sigma)\theta^\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

on obtient

$$\mathbb{E}\theta^\varepsilon(t)w^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \mathbb{E}\left(\sqrt{\varepsilon}\theta^\varepsilon(t)S(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta^\varepsilon(\tau)\right)d\tau\mathbb{E}w^\varepsilon(t) + R^\varepsilon(t)$$

avec

$$\begin{aligned}R^\varepsilon(t) &= \mathbb{E}\int_{t-\varepsilon T}^t\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau \theta^\varepsilon(t)S(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)S(\tau-\sigma)\theta^\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma)d\sigma d\tau \\ &- \int_{t-\varepsilon T}^t \mathbb{E}\left(\theta^\varepsilon(t)S(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)\right)\left(\mathbb{E}w^\varepsilon(t) - S(\varepsilon T)\mathbb{E}w^\varepsilon(\tau-\varepsilon T)\right)d\tau\end{aligned}$$

Il s'agit alors de calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \mathbb{E}\left(\sqrt{\varepsilon}\theta^\varepsilon(t)S(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta^\varepsilon(\tau)\right)d\tau = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^T \mathbb{E}\left(\sqrt{\varepsilon}\theta^\varepsilon(t)S(\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta^\varepsilon(t-\tau)\right)d\tau$$

et de constater

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} R^\varepsilon(t) = 0$$

On peut noter que dans ce raisonnement adapté au couplage faible l'amplitude des opérateurs θ^ε ne devra pas excéder $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

La partie 3.2 étend certains des résultats de [PV] dans le cas de caractéristiques non nécessairement linéaires, c'est-à-dire pour une équation de Schrödinger avec potentiel extérieur V non nul. On pourra comparer les théorèmes 3.22 et 3.23 (et l'asymptotique $T \to \infty$) à ceux de [PV].

La partie 3.3 étudie, au moyen de la méthode exposée ci-dessus, un système hyperbolique linéaire à coefficients constants

$$\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = p(\varepsilon D)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} a^W(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon D)u^\varepsilon$$

perturbé par un terme stochastique $\sqrt{\varepsilon} a^W(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon D)$ du type précédent traduisant l'évolution chaotique d'une partie du milieu. Les effets déterministes de l'environnement sont compris dans l'opérateur (pseudo) différentiel $p(\varepsilon D)$ antiautoadjoint.

L'origine de ce modèle théorique est abondamment discutée dans l'article de L.Ryzhik-G.Papanicolaou-J.K.Keller [RPK] (voir aussi [C]) qui précise d'un point de vue physique pourquoi ce genre de système est associé à de nombreux problèmes ondulatoires (ondes acoustiques, électromagnétiques, élastiques) dans l'approximation $\varepsilon \to 0^+$ de haute fréquence.

L'amplitude $\sqrt{\varepsilon}$ qui s'apparente à l'hypothèse de couplage faible pour l'équation de Schrödinger exprime le fait que les fluctuations aléatoires du milieu produisent un effet comparable à la dispersion occasionnée par l'environnement déterministe. La présence de termes (pseudo) différentiels dans l'opérateur de Weyl a^W s'explique simplement sur l'exemple de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \phi^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta \phi^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \mathrm{div} \left(s(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}) \nabla \phi^\varepsilon \right)$$

où $s(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon})$ est une matrice positive stochastique (purement multiplicative). La formulation vectorielle d'inconnue $u^\varepsilon = (\partial_t \phi^\varepsilon; \nabla \phi^\varepsilon)$ mêle dérivations et multiplications.

Le théorème 3.26 (dans le cas $m = 0$) est une version d'un résultat de L.Ryzhik-G.Papanicolaou-J.K.Keller [RPK] concernant des milieux dans lesquels tous les potentiels stochastiques sont stationnaires indépendants du temps. Ici la méthode de [PV] impose fortement à la perturbation $\sqrt{\varepsilon} a^W(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon D)$ de dépendre du temps afin de réaliser l'hypothèse cruciale d'indépendance après un certain temps $T > 0$ mais l'homogénéisation finale est similaire à celle de [RPK]. Elle est même identique lorsque $T \to \infty$. On retouvera dans cet article la forme compliquée des sections proposées ici (théorème 3.26), et le découplage des niveaux d'énergie loin des croisements.

La partie 3.4 tente de généraliser le théorème précédent au cas d'un système hyperbolique linéaire à coefficients variables lorsque $p(\varepsilon D)$ est remplacé par $p^W(x; \varepsilon D)$. Le théorème 3.27 est un résultat partiel dans lequel surviennent néanmoins tous les éléments caractéristiques souhaitables (essentiellement une section efficace définie au moyen de la corrélation et du groupe). L'accent est mis sur l'aspect pseudo-différentiel mais l'obstacle théorique réside dans la projection du système selon les différents niveaux d'énergie.

3.2 Equation de Schrödinger.

3.2.1 Modèle et résultats.

Etant donnés les potentiels réels V et v, considérons des solutions de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon + V(x)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{51}$$

à données initiales $\| u_I^\varepsilon \|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 1$ bornées.

Les transformées de Wigner $w^\varepsilon(t) = w^\varepsilon(u^\varepsilon(t); u^\varepsilon(t))$ sont bornées indépendamment du temps dans le dual $\mathcal{A}'$ de l'espace de Banach

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{F}_{\%\xi'}\varphi | \varphi = \varphi(x;\xi') \in L^1[\mathbb{R}^N_{\xi'}; C_0^0(\mathbb{R}^N_x)]\}$$

$$\| \mathcal{F}_{\%\xi'}\varphi \|_{\mathcal{A}} = \| \varphi \|_{L^1[\mathbb{R}^N_{\xi'}; C_0^0(\mathbb{R}^N_x)]} = \int_{\xi'\in\mathbb{R}^N} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x;\xi')| d\xi'$$

explicitement $\| w^\varepsilon(u^\varepsilon(t); u^\varepsilon(t)) \|_{\mathcal{A}'} \leq 1$ et pas beaucoup mieux.

Ainsi $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}$ et plus simplement $S' \times S$ est un cadre fonctionnel naturel pour étudier les transformées de Wigner des états purs. On estime alors l'inconnue w^ε faiblement dans $\mathcal{A}'$ et les tests φ fortement dans $\mathcal{A}$.

L'hypothèse de mélange consiste à superposer des solutions de cette équation

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u_n^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u_n^\varepsilon + V(x)u_n^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})u_n^\varepsilon \\ u_n^\varepsilon(t=0) = u_{I,n}^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{52}$$

pour des données initiales $\{u_{I,n}^\varepsilon \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset L^2$ orthonormalisées pour tout ε,

selon une combinaison convexe $\lambda^\varepsilon \in l^1_+(\mathbb{N})$ vérifiant la condition $\dfrac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n^\varepsilon)^2 \leq 1$.

Les transformées de Wigner $w^\varepsilon(t) = w^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon u_n^\varepsilon(t)\otimes u_n^\varepsilon(t)]$ sont bornées indépendamment du temps, dans L^2 cette fois,

$$\| w^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon u_n^\varepsilon(t)\otimes u_n^\varepsilon(t)] \|_{L^2}^2 = \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n^\varepsilon)^2 \| u_n^\varepsilon(t) \|_{L^2}^2 = \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n^\varepsilon)^2 \leq 1$$

Ainsi $L^2 \times L^2$ est un cadre fonctionnel naturel pour étudier les transformées de Wigner des états mélangés. On estime alors l'inconnue w^ε faiblement dans L^2 et les tests φ fortement dans L^2. C'est l'approche que nous adopterons.

Nous étudierons la limite semiclassique $\varepsilon \to 0$ du mélange (52) au travers des transformées de Wigner $w^\varepsilon(t) = w^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon u_n^\varepsilon(t)\otimes u_n^\varepsilon(t)] \in L^2$ pour les temps $t \in \mathbb{R}^+$ positifs lorsque les potentiels réels V et v satisfont les hypothèses :

- ∇V est lipschitzien $|\nabla V(x) - \nabla V(y)| \leq l|x-y| \qquad \forall x; y \in \mathbb{R}^N$
- ∇v est un processus stochastique centré $< \nabla v(t;x) >= 0$ borné $L^\infty[\mathbb{R}^+_t; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N_x)]$ à termes indépendants après un certain laps de temps $T > 0$ au sens où pour tous $t; \tau \in \mathbb{R}^+$ tels que $|t-\tau| > T$

$$\nabla v(t;\cdot) \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \nabla v(\tau;\cdot) \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ sont indépendants}$$

- $R(t-\tau;x-y) =< \nabla v(t;x) \otimes \nabla v(\tau;y) >$ où R est une matrice $N \times N$ nommée corrélation

L'espérance $\mathbb{E}$ des probabilistes sera notée comme un crochet statistique $<>$ ou moyenne. Le potentiel V, les données initiales $\{u^{\varepsilon}_{I,n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset L^2$ orthonormalisées, les coefficients d'occupation λ^{ε} sont implicitement supposés déterministes, en d'autres termes $\sqrt{\varepsilon} v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})$ est la seule source de hasard dans ce modèle.

Comme d'habitude pour les processus stochastiques on omet la dépendance en '$\omega \in \Omega$' point aléatoire de l'espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{F};p)$ de référence sur lequel est construit le processus ∇v. Par exemple

$$< \nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}) > \text{ désigne } \mathbb{E}\nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}) = \int_{\omega\in\Omega} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})|_{\omega} dp(\omega).$$

L'hypothèse d'indépendance après un certain temps peut être significativement affaiblie en supposant que le processus stochastique ∇v satisfait (seulement) l'indépendance conditionnelle

$$t > \tau + T \Rightarrow \mathbb{E}\left(\nabla v(t;x)|\mathcal{F}_{\tau}\right) = 0$$

où par hypothèse $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ désigne une filtration pour laquelle le processus stochastique ∇v est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adapté.

Typiquement on prendra la filtration par défaut $\mathcal{F}_t = \sigma\{\nabla v(\tau;x) \,|\, 0 \le \tau \le t,\ x \in \mathbb{R}^N\}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ comme la tribu engendrée par les variables aléatoires $\nabla v(\tau;x)$ lorsque $0 \le \tau \le t$ et $x \in \mathbb{R}^N$ varient.

L'hypothèse d'indépendance après un certain temps consiste à dire que $\nabla v(t;x)$ est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau}$ lorsque $t > \tau + T$. Bien sûr l'indépendance conditionnelle en découle $\mathbb{E}\left(\nabla v(t;x)|\mathcal{F}_{\tau}\right) =< \nabla v(t;x) >$ et cette moyenne est nulle lorsque le processus est centré.

L'inconnue $w^{\varepsilon}(t)$ est un processus stochastique borné dans $L^{\infty}[\mathbb{R}^+_t; L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_{\xi})]$ solution de l'équation de Liouville (voir [LP])

$$\partial_t w^{\varepsilon} + \xi.\nabla_x w^{\varepsilon} - \nabla V(x).\nabla_{\xi} w^{\varepsilon} = \int_{-1/2}^{+1/2} [\nabla V(x+\varepsilon s D_{\xi}) - \nabla V(x)] ds.\nabla_{\xi} w^{\varepsilon}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1/2}^{+1/2} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon} + s D_{\xi}) ds.\nabla_{\xi} w^{\varepsilon}$$

en particulier la moyenne $< w^{\varepsilon} >$ suit l'évolution

$$\partial_t < w^{\varepsilon} > +\xi.\nabla_x < w^{\varepsilon} > -\nabla V(x).\nabla_{\xi} < w^{\varepsilon} >= \int_{-1/2}^{+1/2} [\nabla V(x+\varepsilon s D_{\xi}) - \nabla V(x)] ds.\nabla_{\xi} < w^{\varepsilon} >$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1/2}^{+1/2} < \nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon} + s D_{\xi}).\nabla_{\xi} w^{\varepsilon} > ds$$

Avec des notations condensées

$$\begin{cases} (\partial_t + A) < w^{\varepsilon} >=< \theta_{\varepsilon} w^{\varepsilon} > +B_{\varepsilon} < w^{\varepsilon} > \\ \| w^{\varepsilon} \|_{L^{\infty}[\mathbb{R}^+_t; L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_{\xi})]} \le 1 \end{cases}$$

où

$$A = \xi.\nabla_x - \nabla V(x).\nabla_\xi$$

$$B_\varepsilon = \int_{-1/2}^{+1/2} [\nabla V(x + \varepsilon s D_\xi) - \nabla V(x)] ds.\nabla_\xi$$

$$\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1/2}^{+1/2} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon} + s D_\xi) ds.\nabla_\xi$$

Le terme $B_\varepsilon < w^\varepsilon >$ s'avérera négligeable par la suite. Etablir une équation d'évolution limite pour $< w^\varepsilon >$ en moyenne c'est donc déterminer l'asymptotique du terme a priori non borné $< \theta_\varepsilon w^\varepsilon >$. En fait à cause du crochet statistique (mais certainement pas sans) $< \theta_\varepsilon w^\varepsilon >$ a une limite.

Théorème 3.22 *Si la corrélation $\hat{R}(t;\xi) = (\xi \otimes \xi)\hat{r}(t;\xi)$ a la régularité $\hat{r} \in L^\infty[\mathbb{R}_t; L^1(\mathbb{R}^N_\xi)]$ alors après extraction la limite de la transformée de Wigner en moyenne $< w^\varepsilon >$ pour le mélange (52) suit l'équation d'évolution*

$$\partial_t f + \xi.\nabla_x f - \nabla V(x).\nabla_\xi f = \sigma[f]$$

où l'opérateur intégral $\sigma[f] = \int_{\overline{\xi} \in \mathbb{R}^N} \sigma(\xi;\overline{\xi})[f(\xi) - f(\overline{\xi})] d\overline{\xi}$ est défini par la section efficace

$$\sigma(\xi;\overline{\xi}) = \frac{1}{2}\hat{\hat{r}}(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\overline{\xi}^2}{2}; \overline{\xi} - \xi) + \frac{1}{2}\hat{\hat{r}}(\frac{\overline{\xi}^2}{2} - \frac{\xi^2}{2}; \xi - \overline{\xi}) = \ Re\ \hat{\hat{r}}(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\overline{\xi}^2}{2}; \overline{\xi} - \xi)$$

Ici $\hat{\hat{r}}(\lambda;\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{r}(t;\xi) e^{-2i\pi\lambda t} dt$ comprend exceptionnellement une transformée de Fourier en temps qui se limite à l'intervalle $(-T;+T)$ car la corrélation est nulle hors de $(-T;+T)$ par la propriété d'indépendance (conditionnelle) après un certain temps (T).

Remarque. $\hat{\hat{r}}$ est réel car $\hat{r}(-t;-\xi) = \hat{r}(t;\xi) = \overline{\hat{r}}(-t;\xi)$.

Nous traiterons (aussi) le problème apparenté formellement plus simple

$$\begin{cases} \partial_t w^\varepsilon + \xi.\nabla_x w^\varepsilon - \nabla V(x).\nabla_\xi w^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}).\nabla_\xi w^\varepsilon \\ \| w^\varepsilon \|_{L^\infty[\mathbb{R}^+_t; L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)]} \leq 1 \end{cases} \tag{53}$$

qui conduit au résultat suivant :

Théorème 3.23 *Si la corrélation est régulière $R \in L^\infty[\mathbb{R}_t; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N_x)]$ alors après extraction la limite de la transformée de Wigner en moyenne $< w^\varepsilon >$ pour le problème (53) suit l'équation d'évolution*

$$\partial_t f + \xi.\nabla_x f - \nabla V(x).\nabla_\xi f = \mathrm{div}_\xi \left(\int_0^T R(\tau;\tau\xi) d\tau \ \nabla_\xi f \right)$$

où la matrice $\int_0^T R(\tau;\tau\xi) d\tau$ est symétrique positive.

Pour les distinguer nous appelerons "contexte quantique" le cas d'origine

$$B_\varepsilon = \int_{-1/2}^{+1/2} [\nabla V(x+\varepsilon s D_\xi) - \nabla V(x)] ds.\nabla_\xi \qquad \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1/2}^{+1/2} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon} + sD_\xi) ds.\nabla_\xi$$

et "contexte classique" le cas

$$B_\varepsilon = 0 \qquad \theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}).\nabla_\xi$$

Remarquons dans les deux cas la continuité des opérateurs $B_\varepsilon^{(*)}$ et $\theta_\varepsilon^{(*)}$ de H^1 dans L^2 précisément

$$\begin{cases} \| B_\varepsilon^* \varphi \|_{L^2} \leq 2 \| \nabla V \|_\infty \| \nabla_\xi \varphi \|_{L^2} \\ \| \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi \|_{L^2} \leq \| \nabla v \|_\infty \| \nabla_\xi \varphi \|_{L^2} \end{cases} \tag{54}$$

Par construction $B_\varepsilon w^\varepsilon$ est négligeable avec ou sans moyenne :

Proposition 3.47 $B_\varepsilon w^\varepsilon \to 0$
faiblement $\sigma(H^{-2}; H^2)$ uniformément en temps.

PREUVE. Par dualité $[B_\varepsilon w^\varepsilon(t)|\varphi] = [w^\varepsilon(t)|B_\varepsilon^*\varphi] \leq \| w^\varepsilon(t) \|_{L^2} \| B_\varepsilon^* \varphi \|_{L^2}$ où

$$\| B_\varepsilon^* \varphi \|_{L^2} = \| \int_{-1/2}^{+1/2} [\nabla V(x+\varepsilon s \xi') - \nabla V(x)] ds. \widehat{\nabla_\xi \varphi}(x;\xi') \|_{L^2(x;\xi')}$$

$$\leq \int_{-1/2}^{+1/2} \varepsilon |s| l \| \xi' \widehat{\nabla_\xi \varphi}(x;\xi') \|_{L^2(x;\xi')} \leq \varepsilon l \| \varphi \|_{H^2}$$

□

Dans le paragraphe suivant nous préciserons en quel sens (voir théorème 3.25) l'opérateur A s'identifie au générateur infinitésimal d'un groupe S_A unitaire sur L^2. En anticipant sur ce résultat appliquons la formule de Duhamel pour l'évolution linéaire $\partial_t + A$ de second membre $\theta_\varepsilon w^\varepsilon + B_\varepsilon w^\varepsilon$. Pour plus de détails sur la formule de Duhamel on peut consulter le livre de A.Pazy [P]. On obtient une formulation intégrale de l'équation d'évolution :

$$w^\varepsilon(t) = S_A(\varepsilon T) w^\varepsilon(t - \varepsilon T) + \int_{t-\varepsilon T}^t S_A(t-\tau) \theta_\varepsilon(\tau) w^\varepsilon(\tau) d\tau + \int_{t-\varepsilon T}^t S_A(t-\tau) B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau) d\tau \tag{55}$$

De même :

$$w^\varepsilon(t) = S_A(t) w^\varepsilon(t=0) + \int_0^t S_A(t-\tau) \theta_\varepsilon(\tau) w^\varepsilon(\tau) d\tau + \int_0^t S_A(t-\tau) B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau) d\tau$$

Cette relation exprime l'inconnue w^ε au temps t comme une fonction des temps compris entre 0 et t (seulement) en particulier :

Lemme 3.17 *Pour toute opération S déterministe*

$$t > \tau + \varepsilon T \Rightarrow < \theta_\varepsilon(t) S w^\varepsilon(\tau) >= 0$$

PREUVE. Par la formule de Duhamel, pourvu que les données initiales soient déterministes (plus généralement $\mathcal{F}_0$-mesurable), le processus stochastique $(w^\varepsilon(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté dès lors que $(\theta_\varepsilon(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté ce qui constitue une hypothèse sur le processus ∇v. Alors pour S déterministe (plus généralement $\mathcal{F}_\tau$-mesurable) on a

$$\mathbb{E}\left(\theta_\varepsilon(t) S w^\varepsilon(\tau) | \mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{E}\left(\theta_\varepsilon(t) | \mathcal{F}_\tau\right) S w^\varepsilon(\tau)$$

car la variable aléatoire $S w^\varepsilon(\tau)$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Par hypothèse $\mathbb{E}\left(\theta_\varepsilon(t) | \mathcal{F}_\tau\right) = 0$ lorsque $t > \tau + \varepsilon T$.

On en déduit $\mathbb{E}\left(\theta_\varepsilon(t) S w_\varepsilon(\tau) | \mathcal{F}_\tau\right) = 0$ puis

$$< \mathbb{E}\left(\theta_\varepsilon(t) S w_\varepsilon(\tau) | \mathcal{F}_\tau\right) >=< \theta_\varepsilon(t) S w_\varepsilon(\tau) >= 0$$

□

En appliquant l'opération $\theta_\varepsilon(t)$ puis en moyennant (55) on obtient

$$\theta_\varepsilon(t) w^\varepsilon(t) = \theta_\varepsilon(t) S_A(\varepsilon T) w^\varepsilon(t - \varepsilon T)$$

$$+ \int_{t-\varepsilon T}^{t} \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) \theta_\varepsilon(\tau) w^\varepsilon(\tau) d\tau + \int_{t-\varepsilon T}^{t} \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau) d\tau$$

$$< \theta_\varepsilon(t) w^\varepsilon(t) >= \int_{t-\varepsilon T}^{t} < \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) \theta_\varepsilon(\tau) w^\varepsilon(\tau) > d\tau + \int_{t-\varepsilon T}^{t} < \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau) > d\tau \tag{56}$$

où la décorrélation des facteurs $\theta_\varepsilon(t)$ et $w^\varepsilon(t - \varepsilon T)$ énoncée dans le lemme 3.17 permet d'annuler le terme $< \theta_\varepsilon(t) S_A(\varepsilon T) w^\varepsilon(t - \varepsilon T) >= 0$.

On en déduit une décomposition de $< \theta^\varepsilon w^\varepsilon >$ sous la forme

$$< \theta_\varepsilon(t) w^\varepsilon(t) >= \int_{t-\varepsilon T}^{t} < \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau) > d\tau + C_\varepsilon(t) + N_\varepsilon(t)$$

$$+ \int_0^T L(\tau) \left(< w^\varepsilon(t - \varepsilon\tau) > - < w^\varepsilon(t) >\right) d\tau + \left(\int_0^T L(\tau) d\tau\right) < w^\varepsilon(t) > \tag{57}$$

avec

$$\begin{cases} C_\varepsilon(t) =< \int_{t-\varepsilon T}^{t} \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) \theta_\varepsilon(\tau) \left(w^\varepsilon(\tau) - < w^\varepsilon(\tau) >\right) d\tau > \\ N_\varepsilon(t) = \int_{t-\varepsilon T}^{t} < \theta_\varepsilon(t) S_A(t-\tau) \theta_\varepsilon(\tau) >< w^\varepsilon(\tau) > - \frac{1}{\varepsilon} L(\frac{t-\tau}{\varepsilon}) < w^\varepsilon(\tau) > d\tau \end{cases}$$

L'expression de l'opérateur limite L dépend du contexte

- dans le contexte classique

$$L^*(\tau)\varphi = \Sigma_{1\leq i;j\leq N} \partial_{\xi_i} \left\{ R_{i,j}(\tau;\tau\xi) \partial_{\xi_j} \varphi(x\xi) \right\} = \mathrm{div}_\xi \left(R(\tau;\tau\xi) \nabla\varphi(x;\xi) \right)$$

- dans le contexte quantique

$$L^*(\tau)\varphi = \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{r}(\tau;\eta)e^{+2i\pi\eta\tau}d\eta$$

$$\left(\varphi(x;\xi)e^{-2i\pi\tau\eta^2/2} + \varphi(x;\xi)e^{+2i\pi\tau\eta^2/2} - \varphi(x;\xi-\eta)e^{-2i\pi\tau\eta^2/2} - \varphi(x;\xi+\eta)e^{+2i\pi\tau\eta^2/2}\right)$$

et

$$\left(\int_0^T L^*(\tau)d\tau\right)\varphi = \frac{1}{2}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{\hat{r}}\left(\frac{(\xi-\eta)^2}{2} - \frac{(\xi)^2}{2};\eta\right)\varphi(x;\xi) + \hat{\hat{r}}\left(\frac{(\xi)^2}{2} - \frac{(\xi+\eta)^2}{2};\eta\right)\varphi(x;\xi)$$

$$-\hat{\hat{r}}\left(\frac{(\xi-\eta)^2}{2} - \frac{(\xi)^2}{2};\eta\right)\varphi(x;\xi-\eta) - \hat{\hat{r}}\left(\frac{(\xi)^2}{2} - \frac{(\xi+\eta)^2}{2};\eta\right)\varphi(x;\xi+\eta)\ \ d\eta$$

où l'intégrale en temps $\int_0^T$ est transformée en $\frac{1}{2}\int_{-T}^{+T}$ par la parité $\hat{r}(-t;-\xi) = \hat{r}(t;\xi)$.

3.2.2 Préliminaire sur les équations de transport.

Considérons l'équation hyperbolique linéaire du premier ordre sur l'intervalle de temps $I = \mathbb{R}_{(+)}$ dans l'espace $\mathbb{R}^N$ à source nulle

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}(au) + a_0 u = 0 \text{ forme conservative} \\ \partial_t u + a.\nabla u + a_0' u = 0 \text{ forme non conservative} \\ a_0' = a_0 + \mathrm{div}(a) \end{cases}$$

Les coefficients $a \in L^\infty_{loc}(I \times \mathbb{R}^N)^N$ et $a_0 \in L^\infty_{loc}(I \times \mathbb{R}^N)$ sont supposés réguliers au sens où

$$|a(t;x) - a(t;y)| \leq l(t)|x-y| \qquad \forall x; y \in \mathbb{R}^N \ \ \forall t \in I \text{ avec } l \in L^\infty_{loc}(I)$$

Pour des résultats beaucoup plus fins on pourra consulter [CB].

Le flot $(t;x;s) \mapsto X(t|x;s) = x + \int_s^t a[\tau; X(\tau|x;s)]d\tau$ est bien défini localement lipschitzien sur $I \times \mathbb{R}^N \times I$, il satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t|x;s) = a[t; X(t|x;s)] \\ \frac{\partial X}{\partial s}(t|x;s) = -a(s;x) + \int_s^t \nabla a[\tau; X(\tau|x;s)].\frac{\partial X}{\partial s}(\tau|x;s)d\tau \\ \frac{\partial X}{\partial x_i}(t|x;s) = e_i + \int_s^t \nabla a[\tau; X(\tau|x;s)].\frac{\partial X}{\partial x_i}(\tau|x;s)d\tau \end{cases} \tag{58}$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Le jacobien $j = \det \nabla X \in L^\infty_{loc}(I \times \mathbb{R}^N \times I)$ est donné par

$$j(t|x;s) = \exp \int_s^t (\mathrm{div} a)[\tau; X(\tau|x;s)]d\tau$$

Les dérivées spatiales du flot sont localement lipschitziennes en temps

$$\begin{cases} |\frac{\partial X}{\partial x_i}|(t|x;s) \leq \exp(\| \ l \ \|_{L^\infty(s;t)} \ |t-s|) \\ |\frac{\partial X}{\partial x_i}(t+h|x;s) - \frac{\partial X}{\partial x_i}(t|x;s)| \leq |h| \ \| \ l \ \|_{L^\infty(s;t\pm|h|)} \exp(\| \ l \ \|_{L^\infty(s;t\pm|h|)} \ (|t-s| + |h|)) \end{cases} \tag{59}$$

Les changements de variables inverses

$$\Theta : (t;y) \mapsto [t; X(t|y;0)] \qquad \Theta^{-1} : (t;x) \mapsto [t; X(0|x;t)]$$

sont localement (bi)lipschitziens $\Theta; \Theta^{-1} \in W^{1,\infty}_{loc}(I \times \mathbb{R}^N)$,
et même globalement (bi)lipschitziens en espace localement en temps

$$\nabla\Theta \in L^\infty_{loc}[I; L^\infty(\mathbb{R}^N)] \qquad \nabla\Theta^{-1} \in L^\infty_{loc}[I; L^\infty(\mathbb{R}^N)]$$

Le changement d'inconnue $u = v \circ \Theta^{-1} \in L^1_{loc}(I \times \mathbb{R}^N)$, $v = u \circ \Theta \in L^1_{loc}(I \times \mathbb{R}^N)$ est une transformation bijective. Les formulations faibles sur u ou sur v sont équivalentes :

$$\int\int_{I \times \mathbb{R}^N} u[-\partial_t\varphi - a.\nabla\varphi + a_0\varphi] = \int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi(0;\cdot) \qquad \forall \varphi \in C^1_c(I \times \mathbb{R}^N) \text{ ou encore } \forall \varphi \in W^{1,\infty}_c(I \times \mathbb{R}^N)$$

équivaut à

$$\int\int_{I\times\mathbb{R}^N} v[-\partial_t\varphi+(a_0'\circ\Theta)\varphi] = \int_{\mathbb{R}^N} v_0\varphi(0;\cdot) \qquad \forall\varphi\in C_c^1(I\times\mathbb{R}^N) \text{ ou encore } \forall\varphi\in W_c^{1,\infty}(I\times\mathbb{R}^N)$$

où $u_0 = v_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est une donnée initiale fixée.

Théorème 3.24 (Méthode des caractéristiques)
Il y a existence-unicité pour les solutions faibles $u \in L^1_{loc}(I\times\mathbb{R}^N)$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(au) + a_0 u = 0 \\ u(t=0) = u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ donné} \end{cases}$$

interprété sous forme variationnelle

$$\int\int_{I\times\mathbb{R}^N} u[-\partial_t\varphi - a.\nabla\varphi + a_0\varphi] = \int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi(0;\cdot) \qquad \forall\varphi\in C_c^1(I\times\mathbb{R}^N)$$

Il s'agit de la solution $u = u(t;x) = u_0[X(0|x;t)]\exp\left(-\int_0^t a_0'[\tau;X(\tau|x;t)]d\tau\right)$ donnée par la méthode des caractéristiques.

Théorème 3.25 (Groupe unitaire et générateur)
Soit $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$ lipschitzien indépendant du temps à divergence nulle (pour simplifier).

L'opérateur $Au = \operatorname{div}(au)$ est essentiellement antiautoadjoint sur $D(A) = C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$. Sa fermeture $\overline{A}u = \operatorname{div}(au)$ de domaine

$$D(\overline{A}) = D(A^*) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div}(au) \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$$

où la divergence $\operatorname{div}(au)$ est interprétée au sens des distributions,

est le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ qui est la composition par le flot

$$\begin{cases} S(t) : f(x) \in L^2(\mathbb{R}^N_x) \mapsto f(X(0|x;t)) \in L^2(\mathbb{R}^N_x) \\ S^*(t) : f(x) \in L^2(\mathbb{R}^N_x) \mapsto f(X(t|x;0)) \in L^2(\mathbb{R}^N_x) \end{cases}$$

Remarque. Lorsque la divergence $\operatorname{div}(a)$ n'est pas nulle a priori

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int |f\circ\Theta|^2 |J_\Theta| = \| f\circ\Theta.\exp(\frac{1}{2}\int \operatorname{div} a) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \neq \| f\circ\Theta \|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

l'isométrie est perdue à cause du jacobien $|J_\Theta| \neq 1$ du changement de variables.

Nous utiliserons le théorème 3.25 pour l'évolution hamiltonienne $\partial_t + \xi.\nabla_x - \nabla V(x).\nabla_\xi$ sur l'intervalle de temps $\mathbb{R}^+$ dans l'espace $\mathbb{R}^{2N} = \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi$.

Definition 3.9 *Pour $a(x;\xi) = [\xi; -\nabla V(x)] \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ le flot (hamiltonien) sera noté $X(t|x,\xi;0) = X(t|x,\xi) = [P(t|x,\xi); Q(t|x,\xi)]$ comme un couple position-vitesse défini sur $I \times \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi$ tel que*

$$\begin{cases} \partial_t P = +Q \\ \partial_t Q = -\nabla V(P) \end{cases}$$

Alors $S^*_A(t) : f(x;\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi) \mapsto f(X(t|x,\xi)) \in L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N_\xi)$ donne le groupe unitaire de générateur infinitésimal $A = \xi.\nabla_x - \nabla V(x).\nabla_\xi$ sur $L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Par la suite $C_T^{ste}(l)$ désignera diverses constantes uniquement fonction du temps $T > 0$ fixé et de la constante de lipschitz l pour le potentiel ∇V.

3.2.3 Preuves.

Les propositions 3.48, 3.50, 3.51, 3.52 de ce paragraphe sont consacrées à l'étude des termes négligeables de la décomposition (57). A chaque fois on distinguera le contexte classique du contexte quantique.

Pour différencier le crochet statistique des crochets de dualité $\sigma(H^s;H^{-s})$ on notera $[W|\varphi]$ la forme bilinéaire exprimant l'action de la distribution (tempérée) W sur le test φ. L'adjonction notée * correspond à ce crochet de dualité bilinéaire non sesquilinéaire.

Proposition 3.48 $\int_{t-\varepsilon T}^{t} < \theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau) > d\tau \to 0$
faiblement $\sigma(H^{-2};H^2)$ uniformément en temps.

Preuve. Dans le contexte classique B_ε est nul, il n'y a rien à faire. Dans le contexte quantique :

$$\begin{cases} B_\varepsilon^* = -\int_{-1/2}^{+1/2}[\nabla V(x+\varepsilon s D_\xi) - \nabla V(x)]ds.\nabla_\xi \\ \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t) = -\int_{-1/2}^{+1/2}\nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+sD_\xi)ds.\nabla_\xi \end{cases}$$

Par dualité

$$\left[\int_{t-\varepsilon T}^{t}\theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)B_\varepsilon w^\varepsilon(\tau)d\tau|\varphi\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\left[w^\varepsilon(\tau)|\sqrt{\varepsilon}B_\varepsilon^* S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)\varphi\right]d\tau$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon}\parallel B_\varepsilon^* S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi\parallel_{L^2}\sup_{(t;t-\varepsilon T)}\parallel w^\varepsilon\parallel_{L^2}\leq\sqrt{\varepsilon}\parallel B_\varepsilon^* S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi\parallel_{L^2}$$

or $\parallel B_\varepsilon^* S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi\parallel_{L^2}\leq 2\parallel\nabla V\parallel_\infty\parallel\nabla_\xi S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi\parallel_{L^2}\leq 2\parallel\nabla V\parallel_\infty$

$$\left(\parallel\partial_\xi X\parallel_\infty(t-\tau)\parallel\nabla v\parallel_{L^\infty}(\frac{t}{\varepsilon})\parallel\varphi\parallel_{H^2}+\frac{1}{\varepsilon}\parallel\partial_\xi P\parallel_\infty(t-\tau)\parallel\nabla v\parallel_{W^{1,\infty}}(\frac{t}{\varepsilon})\parallel\varphi\parallel_{H^1}\right)$$

Cette borne s'obtient en développant la dérivation ∇_ξ dans chacun des facteurs de :

$$\nabla_\xi S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi$$

$$= -\nabla_\xi\left\{\mathcal{F}_{\%\xi'}^{-1}\left(\int_{-1/2}^{+1/2}\nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}+s\xi')ds\cdot\widehat{\nabla_\xi\varphi}(P(t-\tau|x,\xi);\xi')\right)(Q(t-\tau|x,\xi))\right\}$$

Finalement en invoquant les inégalités (59) à savoir

$$\begin{cases} |\partial_\xi X|(t-\tau|x,\xi)\leq\exp(l|t-\tau|)\leq C_T^{ste}(l) \\ |\partial_\xi P|(t-\tau|x,\xi)\leq l|t-\tau|\exp(l|t-\tau|)\leq\varepsilon C_T^{ste}(l) \end{cases}$$

on en déduit

$$\parallel\nabla_\xi S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi\parallel_{L^2}\leq C_T^{ste}(l)\parallel\nabla v\parallel_{W^{1,\infty}}\parallel\varphi\parallel_{H^2} \tag{60}$$

□

Proposition 3.49 (Equicontinuité)
La famille $< w^\varepsilon > \subset C^0[\mathbb{R}_t^+;\sigma(L^2;L^2)]$ est équicontinue. Il existe dans $(< w^\varepsilon >)$ des extractions $\sigma(L^2;L^2)$-convergentes localement uniformément en temps.

PREUVE. Puisque $< w^\varepsilon > \in L^2$ est borné indépendamment de ε et $t \in \mathbb{R}^+$ pour prouver que la famille d'applications $\{< w^\varepsilon > \mid 0 < \varepsilon < 1\} \subset C^0[\mathbb{R}_t^+; \sigma(L^2; L^2)]$ est équicontinue il suffit de vérifier que la famille de nombres $\{[< w^\varepsilon > |\varphi] \mid 0 < \varepsilon < 1\} \subset C^0(\mathbb{R}^+)$ l'est pour tout φ dans une partie dense. Alors Ascoli affirme la relative compacité au sens de $C^0_{loc}[\mathbb{R}_t^+; \sigma(L^2; L^2)]$ car les valeurs prises par $< w^\varepsilon >$ appartiennent à un borné $\sigma(L^2; L^2)$ donc à un métrique compact. C'est pourquoi il existe des extractions $\sigma(L^2; L^2)$-convergentes localement uniformément en temps.

D'abord pour φ régulier $[< w^\varepsilon > |\varphi] \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+)$ est équilipschitzien (uniformément en ε) sur l'intervalle de temps $]\varepsilon T; \infty[$. En effet on a

$$\partial_t [< w^\varepsilon > |\varphi] = [\partial_t < w^\varepsilon > |\varphi] = [-A < w^\varepsilon > + < \theta_\varepsilon w^\varepsilon > + B_\varepsilon < w^\varepsilon > |\varphi],$$

et il découle de l'égalité (56) et des majorations (54) et (60) que

$$[< \theta^\varepsilon w^\varepsilon > |\varphi] =< \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^{t} \left[w^\varepsilon(\tau) | \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(\tau) S_A^*(t-\tau) \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi + \sqrt{\varepsilon} B_\varepsilon^* S_A^*(t-\tau) \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi \right] d\tau >$$

$$\leq \sup_{(t-\varepsilon T; t)} \| w^\varepsilon \|_{L^2} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^{t} \| \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(\tau) S_A^*(t-\tau) \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi + \sqrt{\varepsilon} B_\varepsilon^* S_A^*(t-\tau) \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi \|_{L^2} \, d\tau$$

$$\leq \| \nabla v \|_\infty \| \nabla_\xi S_A^*(t-\tau) \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi \|_{L^2} + 2 \| \nabla V \|_\infty \| \nabla_\xi S_A^*(t-\tau) \sqrt{\varepsilon} \theta_\varepsilon^*(t) \varphi \|_{L^2}$$

$$\leq C_T^{ste}(l)(1 + \| \nabla v \|_{W^{1,\infty}} + \| \nabla V \|_\infty)^2 \| \varphi \|_{H^2}$$

On en déduit

$$| [\partial_t < w^\varepsilon > |\varphi] | \leq \| A^* \varphi \|_{L^2} + C_T^{ste}(l)(1 + \| \nabla v \|_{W^{1,\infty}} + \| \nabla V \|_\infty)^2 \| \varphi \|_{H^2}$$

Ensuite pour φ régulier $[< w^\varepsilon > (t + \varepsilon T) - < w^\varepsilon > (t) |\varphi]$ tend vers zéro uniformément en $t \in \mathbb{R}^+$ lorsque $\varepsilon \to 0$. En effet on a

$$[< w^\varepsilon > (t + \varepsilon T) - < w^\varepsilon > (t) |\varphi] = \int_t^{t+\varepsilon T} [-A < w^\varepsilon > + < \theta^\varepsilon w^\varepsilon > + B_\varepsilon < w^\varepsilon > |\varphi]$$

$$\leq \sup_{(t-\varepsilon T; t)} \| w^\varepsilon \|_{L^2} \int_t^{t+\varepsilon T} \| -A^* \varphi + \theta_\varepsilon^* \varphi + B_\varepsilon^* \varphi \|_{L^2}$$

$$\leq \varepsilon \left(\| A^* \varphi \|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| \nabla v \|_\infty \| \nabla_\xi \varphi \|_{L^2} + 2 \| \nabla V \|_\infty \| \nabla_\xi \varphi \|_{L^2} \right)$$

d'après les majorations (54).

Enfin pour φ régulier $[< w^\varepsilon > |\varphi]$ est équicontinu sur l'intervalle de temps $\mathbb{R}^+$ au titre de limite uniforme de la famille $[< w^\varepsilon > (\cdot + \varepsilon T) |\varphi]$ équilipschitzienne.

□

Proposition 3.50 (Extraction) *Après extraction*
$\int_0^T L(\tau) \left(< w^\varepsilon(t - \varepsilon\tau) > - < w^\varepsilon(t) > \right) d\tau \to 0$
faiblement $\sigma(H^{-2}; H^2)$ *uniformément en temps.*

PREUVE. Par dualité

$$\left[\int_0^T L(\tau)\left(< w^\varepsilon(t-\varepsilon\tau) > - < w^\varepsilon(t) >\right) d\tau|\varphi\right] = \int_0^T \left[< w^\varepsilon(t-\varepsilon\tau) > - < w^\varepsilon(t) > |L^*(\tau)\varphi\right] d\tau$$

or $L^*(\tau)\varphi \in L^2$ est borné ($\forall\varphi \in H^2$) indépendamment de $\tau \in [0;T]$.

Après extraction au sens de la proposition 3.49 il y a convergence à τ fixé, d'où l'assertion par convergence dominée.

□

Proposition 3.51 *Le terme C_ε de la décomposition (57) est négligeable $C_\varepsilon \to 0$ faiblement $\sigma(H^{-2};H^2)$ uniformément en temps.*

PREUVE. Proposition 3.51 dans le contexte classique. Dans ce cas on a

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t) = -\nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}).\nabla_\xi \\ S_A^*(t) : f(x;\xi) \mapsto f\left(X(t|x,\xi)\right) \end{cases}$$

Par dualité

$$\left[\int_{t-\varepsilon T}^t \theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)\theta_\varepsilon(\tau)w^\varepsilon(\tau)d\tau|\varphi\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \left[w^\varepsilon(\tau)|\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi\right] d\tau$$

Explicitons $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi$

$$= +\nabla v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}).\nabla_\xi\left\{\nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon})\cdot\nabla_\xi\varphi(X(t-\tau|x,\xi))\right\}$$

$$= \Sigma_{1\le i;j\le N}\partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon})\nabla\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))\cdot\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi)$$

$$+\Sigma_{1\le i;j\le N}\partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\nabla\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon})\cdot\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(t-\tau|x,\xi)\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))$$

Dans les estimations qui suivront des dérivées par rapport à x et ξ porteront sur les facteurs de flot $\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi)$ et $\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(t-\tau|x,\xi)$ ce qui est problématique vu qu'a priori le flot est seulement une fois dérivable (par hypothèse ∇V est seulement lipschitzien). C'est pourquoi il convient de régulariser les facteurs de flot. Le plus simple consiste à vérifier qu'ils sont faiblement dépendants des variables (x,ξ) par exemple :

$$\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi) \approx \partial_{\xi_i}X(t=0) \qquad \frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(t-\tau|x,\xi) \approx \frac{t-\tau}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}Q(t=0)$$

Précisément les dérivées du flot satisfont d'après (58) la relation

$$\partial_{\xi_i}X(t|x,\xi) = \partial_{\xi_i}X(t=0) + \int_0^t \nabla a[X(\tau|x,\xi)]\cdot\partial_{\xi_i}X(\tau|x,\xi)d\tau$$

où pour simplifier la notation $\partial_{\xi_i}X(t=0)$ désigne le $2N$-vecteur nul sauf pour ce qui est de la composante $N+i$ qui vaut un, en particulier

$$|\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi) - \partial_{\xi_i}X(t=0)| \le l|t-\tau|\exp(l|t-\tau|) \le \varepsilon C_T^{ste}(l) \tag{61}$$

De même on a

$$\partial_{\xi_i} P(t|x,\xi) = \int_0^t \partial_{\xi_i} Q(\tau|x,\xi) d\tau$$

en particulier d'après les inégalités (59) on obtient

$$|\partial_{\xi_i} P(t-\tau|x,\xi) - (t-\tau)\partial_{\xi_i} Q(t=0)| \leq \int_0^{t-\tau} |\partial_{\xi_i} Q(\cdot|x,\xi) - \partial_{\xi_i} Q(t=0)|$$

$$\leq \int_0^{t-\tau} l| \cdot |\exp(l|\cdot|) \leq \varepsilon^2 C_T^{ste}(l) \tag{62}$$

En notant $K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi$ la régularisation de $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi$ c'est-à-dire

$$K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi = \Sigma_{1\leq i;j\leq N}\partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon})\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))$$

$$+\Sigma_{1\leq i;j\leq N}\frac{t-\tau}{\varepsilon}\partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\partial_i\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))$$

les majorations (61) et (62) précisent

$$\| \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi - K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2} \leq \| \nabla v \|_{W^{1,\infty}}^2 \varepsilon C_T^{ste}(l) \| \varphi \|_{H^2} \tag{63}$$

On vient de constater ($\forall\varphi \in H^2$) avec ou sans moyenne

$$\left[\int_{t-\varepsilon T}^t \theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)\theta_\varepsilon(\tau)w^\varepsilon(\tau)d\tau|\varphi\right] \approx \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t [K_\varepsilon(t;\tau)w^\varepsilon(\tau)|\varphi]\, d\tau$$

$$\left[\int_{t-\varepsilon T}^t \theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)\theta_\varepsilon(\tau) < w^\varepsilon(\tau) > d\tau|\varphi\right] \approx \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t [K_\varepsilon(t;\tau) < w^\varepsilon(\tau) > |\varphi]\, d\tau$$

Par différence on obtient

$$[C_\varepsilon(t)|\varphi] = \left[\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)\theta_\varepsilon(\tau)w^\varepsilon(\tau) > - < \theta_\varepsilon(t)S_A(t-\tau)\theta_\varepsilon(\tau) >< w^\varepsilon(\tau) > d\tau|\varphi\right]$$

$$\approx \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t [< K_\varepsilon(t;\tau)w^\varepsilon(\tau) > - < K_\varepsilon(t;\tau) >< w^\varepsilon(\tau) > |\varphi]\, d\tau \tag{64}$$

Pour analyser cette quantité qui serait nulle sans le positionnement des crochets nous itérons la formule de Duhamel (55)

$$w^\varepsilon(\tau) = S_A(\varepsilon T)w^\varepsilon(\tau-\varepsilon T) + \int_{\tau-\varepsilon T}^\tau S_A(\tau-\sigma)\theta_\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma)d\sigma + \int_{\tau-\varepsilon T}^\tau S_A(\tau-\sigma)B_\varepsilon w^\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

d'où

$$K_\varepsilon(t;\tau)w^\varepsilon(\tau) = K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\varepsilon T)w^\varepsilon(\tau-\varepsilon T)$$

$$+\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\tau-\sigma)\theta_\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma)d\sigma + \int_{\tau-\varepsilon T}^\tau K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\tau-\sigma)B_\varepsilon w^\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

et

$$K_\varepsilon(t;\tau) < w^\varepsilon(\tau) >= K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\varepsilon T) < w^\varepsilon > (\tau-\varepsilon T)$$

$$+\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau K_\varepsilon(t;\tau) < S_A(\tau-\sigma)\theta_\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma) > d\sigma + \int_{\tau-\varepsilon T}^\tau K_\varepsilon(t;\tau) < S_A(\tau-\sigma)B_\varepsilon w^\varepsilon(\sigma) > d\sigma$$

Par différence on obtient

$$< K_\varepsilon(t;\tau)w^\varepsilon(\tau) > - < K_\varepsilon(t;\tau) >< w^\varepsilon(\tau) > \tag{65}$$

$$= \int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} < K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\tau-\sigma)\theta_\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma) > - < K_\varepsilon(t;\tau) >< S_A(\tau-\sigma)\theta_\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma) > d\sigma$$

$$+ \int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} < K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\tau-\sigma)B_\varepsilon w^\varepsilon(\sigma) > - < K_\varepsilon(t;\tau) >< S_A(\tau-\sigma)B_\varepsilon w^\varepsilon(\sigma) > d\sigma$$

car les deux termes $< K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\varepsilon T)w^\varepsilon(\tau-\varepsilon T) >=< K_\varepsilon(t;\tau) > S_A(\varepsilon T) < w^\varepsilon > (\tau-\varepsilon T)$ se compensent grâce à la décorrélation du lemme 3.17.

Ainsi $[C_\varepsilon(t)|\varphi]$ donné par (64) est approximativement ($\forall\varphi \in H^2$) une combinaison linéaire finie de termes du type (65)

$$\sqrt{\varepsilon}\ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} d\tau \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} d\sigma \left[K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\tau-\sigma)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon(\sigma)w^\varepsilon(\sigma)|\varphi\right]$$

$$+\varepsilon\ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} d\tau \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} d\sigma \left[K_\varepsilon(t;\tau)S_A(\tau-\sigma)B_\varepsilon w^\varepsilon(\sigma)|\varphi\right]$$

dans lesquels la moyenne figure en diverses positions.

Vus les facteurs $\sqrt{\varepsilon}$ et ε apparus par itération de la formule de Duhamel, la négligeabilité $[C_\varepsilon(t)|\varphi] \to 0$ pour tout $\varphi \in H^3$ résulte du lemme 3.18 suivant. La densité $H^3 \subset H^2$ et la borne $C_\varepsilon(t) \in H^{-2}$ déduite de (64) permettent de généraliser $\varphi \in H^3$ en $\varphi \in H^2$. Ce détail technique n'est d'ailleurs pas essentiel.

Lemme 3.18 *Pour tout $\varphi \in H^3$*
la famille $B_\varepsilon^* S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \in L^2$ est bornée
la famille $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\sigma)S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \in L^2$ est bornée

Preuve. Dans le contexte classique B_ε est nul, il reste $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\sigma)S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi$

$$= -\Sigma_{1\le i;j\le N}\nabla v(\frac{\sigma}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}).\nabla_\xi\{\partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{P(\tau-\sigma|x,\xi)}{\varepsilon})\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\sigma|x,\xi)}{\varepsilon})\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\sigma|x,\xi))$$

$$+\frac{t-\tau}{\varepsilon}\partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{P(\tau-\sigma|x,\xi)}{\varepsilon})\partial_i\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\sigma|x,\xi)}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\sigma|x,\xi))\}$$

donc

$$\| \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\sigma)S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2} \le \| \nabla v \|_\infty \| \nabla_\xi S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2}$$

$$\le \| \nabla v \|_{W^{2,\infty}}^3 \| \varphi \|_{H^3} \left(\| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P(\tau-\sigma|x,\xi) \|_\infty + \| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P(t-\sigma|x,\xi) \|_\infty + \| \partial_\xi X(t-\sigma|x,\xi) \|_\infty \right)$$

Cette borne s'obtient en développant la dérivation ∇_ξ dans chaque facteur.
En invoquant les inégalités (59) précisément

$$\| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P(\tau-\sigma|x,\xi) \|_\infty \le \| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P \|_\infty (\tau-\sigma) \le C_T^{ste}(l)$$

$$\| \partial_\xi X(t-\sigma|x,\xi) \|_\infty \le \| \partial_\xi X \|_\infty (t-\sigma) \le C_T^{ste}(l)$$

et

$$\| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P(t-\sigma|x,\xi) \|_\infty \leq \| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P \|_\infty (t-\sigma) \leq C_T^{ste}(l)$$

On en déduit

$$\| \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\sigma)S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2} \leq C_T^{ste}(l) \| \nabla v \|_{W^{2,\infty}}^3 \| \varphi \|_{H^3} \tag{66}$$

□

Preuve. Proposition 3.51 dans le contexte quantique. Dans ce cas on a

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t) = -\int_{-1/2}^{+1/2} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+sD_\xi)ds.\nabla_\xi \\ S_A^*(t); f(x;\xi) \mapsto f\left(X(t|x,\xi)\right) \end{cases}$$

Comme précédemment explicitons $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \nabla v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+sD_\xi)ds$$

$$.\nabla_\xi \left\{ \mathcal{F}_{\%\eta}^{-1}\left(\int_{-1/2}^{+1/2} \nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}+s\eta)ds \cdot \widehat{\nabla_\xi\varphi}(P(t-\tau|x,\xi);\eta) \right)(Q(t-\tau|x,\xi)) \right\}$$

$$= \Sigma_{1\leq i;j\leq N} \int_{-1/2}^{+1/2} \partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+sD_\xi)ds\, \mathcal{F}_{\%\eta}^{-1}[A_{i,j}^{x,\xi}(\eta)](Q(t-\tau|x,\xi))$$

avec

$$A_{i,j}^{x,\xi}(\eta) = \int_{-1/2}^{+1/2} \partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}+s\eta)ds\widehat{\nabla\partial_{\xi_j}\varphi}(P(t-\tau|x,\xi);\eta)\cdot\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi)$$

$$+\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(t-\tau|x,\xi)\cdot\nabla\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}+s\eta)ds\widehat{\partial_{\xi_j}\varphi}(P(t-\tau|x,\xi);\eta)$$

en omettant dans la notation $A_{i,j}^{x,\xi}(\eta)$ la dépendance en ε.

Dans $A_{i,j}^{x,\xi}(\eta)$ nous régularisons les facteurs de flot comme dans le contexte classique en approchant

$$\begin{cases} |\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi) - \partial_{\xi_i}X(t=0)| \leq \varepsilon C_T^{ste}(l) \\ |\partial_{\xi_i}P(t|x,\xi) - (t-\tau)\partial_{\xi_i}Q(t=0)| \leq \varepsilon^2 C_T^{ste}(l) \end{cases}$$

d'où une régularisation $K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi$ du terme $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi$ définie par

$$K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi = \Sigma_{1\leq i;j\leq N} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \int_{-1/2}^{+1/2} \partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}+sD_\xi)ds\, \mathcal{F}_{\%\eta}^{-1}[B_{i,j}^{x,\xi}(\eta)](Q(t-\tau|x,\xi))$$

avec

$$B_{i,j}^{x,\xi}(\eta) = \int_{-1/2}^{+1/2} \partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}+s\eta)ds\widehat{\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi}(P(t-\tau|x,\xi);\eta)$$

$$+\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{t-\tau}{\varepsilon}\partial_i\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}+s\eta)ds\widehat{\partial_{\xi_j}\varphi}(P(t-\tau|x,\xi);\eta)$$

En utilisant l'isométrie de Fourier L^2 et la conservation de la norme par le changement de variables $(x;\xi) \mapsto (P;Q)(t-\tau|x,\xi)$ de jacobien unité on obtient

$$\| \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi - K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2}^2$$

$$\leq \| \nabla v \|_\infty^2 \| \mathcal{F}_{\%\eta}^{-1}[A_{i,j}^{x,\xi}(\eta) - B_{i,j}^{x,\xi}(\eta)](Q(t-\tau|x,\xi)) \|_{L^2(x;\xi)}^2$$

$$= \| \nabla v \|_\infty^2 \int_{P\in\mathbb{R}^N}\int_{Q\in\mathbb{R}^N} | \int_{-1/2}^{+1/2} \partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P}{\varepsilon}+sQ)ds\widehat{\nabla\partial_{\xi_j}\varphi}(P;Q)\cdot(\partial_{\xi_i}X(t-\tau|P;Q) - \partial_{\xi_i}X(t=0))$$

$$+\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}Q(t-\tau|P;Q) - \frac{t-\tau}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}Q(t=0)\right)\cdot\nabla\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P}{\varepsilon}+sQ)ds\widehat{\partial_{\xi_j}\varphi}(P;Q)|^2 dPdQ$$

$$\leq \varepsilon^2 C_T^{ste}(l) \| \nabla v \|_{W^{1,\infty}}^4 \| \varphi \|_{H^2}^2$$

Il en résulte l'estimation analogue de (63)

$$\| \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi - K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2} \leq \varepsilon C_T^{ste}(l) \| \nabla v \|_{W^{1,\infty}}^2 \| \varphi \|_{H^2}$$

et la proposition 3.51 dans le contexte quantique continue de se prouver par la méthode du cas classique en adaptant le lemme 3.18 :

Lemme 3.19 *Pour tout $\varphi \in H^3$*
la famille $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\sigma)S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \in L^2$ est bornée
la famille $B_\varepsilon^* S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \in L^2$ est bornée

Preuve. Remarquons d'abord

$$\| \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\sigma)S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2} \leq \| \nabla v \|_\infty \| \nabla_\xi S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2}$$

$$\| B_\varepsilon^* S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2} \leq 2 \| \nabla V \|_\infty \| \nabla_\xi S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2}$$

avec $\nabla_\xi S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi$

$$= \Sigma_{1\leq i;j\leq N}\nabla_\xi \left\{ \int_{-1/2}^{+1/2} \partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{P(\tau-\sigma|x,\xi)}{\varepsilon} + sD_\xi)ds\, \mathcal{F}_{\%\eta}^{-1}[B_{i,j}^{x,\xi}(\eta)](Q(t-\tau|x,\xi)) \right\}$$

Développons ensuite la dérivation ∇_ξ dans chaque facteur. Cette opération est formellement compliquée par la présence de la transformation de Fourier ($\mathcal{F}_{\%\eta}^{-1}$) dont il faut dériver l'argument $(Q(t-\tau|x,\xi))$ et l'intégrande $(B_{i,j}^{x,\xi}(\eta))$. Ce calcul aboutit à l'analogue de (66) à savoir

$$\| \nabla_\xi S_A^*(\tau-\sigma)K_\varepsilon^*(t;\tau)\varphi \|_{L^2}$$

$$\leq \| \nabla v \|_{W^{2,\infty}}^3 \left(\| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P \|_\infty (\tau-\sigma) + \| \frac{1}{\varepsilon}\partial_\xi P(t-\sigma|x,\xi) \|_\infty + \| \partial_\xi X(t-\sigma|x,\xi) \|_\infty \right)$$

$$\leq C_T^{ste}(l) \| \nabla v \|_{W^{2,\infty}}^3 \| \varphi \|_{H^3}$$

□

Proposition 3.52 *Le terme N_ε de la décomposition (57) est négligeable*
$N_\varepsilon \to 0$ faiblement $\sigma(H^{-2};H^2)$ uniformément en temps.

PREUVE. Proposition 3.52 dans le contexte classique.

$$< \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau)S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t) > \varphi = \mathrm{div}_\xi < \nabla v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\nabla v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon})\cdot\nabla_\xi\varphi(X(t-\tau|x,\xi)) >$$

$$= \Sigma_{1\le i;j\le N}\partial_{\xi_i}\left\{< \partial_i v(\frac{\tau}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\partial_j v(\frac{t}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)}{\varepsilon}) > \partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))\right\}$$

$$= \Sigma_{1\le i;j\le N}\partial_{\xi_i}\left\{R_{i,j}(\frac{t-\tau}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))\right\}$$

$$= \Sigma_{1\le i;j\le N}\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(t-\tau|x,\xi)\cdot\nabla R_{i,j}(\frac{t-\tau}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))$$

$$+R_{i,j}(\frac{t-\tau}{\varepsilon};\frac{P(t-\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\nabla\partial_{\xi_j}\varphi(X(t-\tau|x,\xi))\cdot\partial_{\xi_i}X(t-\tau|x,\xi)$$

égale $L_\varepsilon^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi$ où par définition

$$L_\varepsilon^*(\tau)\varphi = \Sigma_{1\le i;j\le N}\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(\varepsilon\tau|x,\xi)\cdot\nabla R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi))$$

$$+R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\nabla\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi))\cdot\partial_{\xi_i}X(\varepsilon\tau|x,\xi)$$

Par dualité

$$[N_\varepsilon(t)|\varphi] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t\left[< w^\varepsilon(\tau) > |L_\varepsilon^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi - L^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi\right]d\tau$$

$$= \int_0^T[< w^\varepsilon(t-\varepsilon\tau) > |L_\varepsilon^*(\tau)\varphi - L^*(\tau)\varphi]\,d\tau \le \int_0^T \parallel L_\varepsilon^*(\tau)\varphi - L^*(\tau)\varphi \parallel_{L^2} d\tau$$

et la négligeabilité $[N_\varepsilon(t)|\varphi] \to 0$ résulte ($\forall\varphi \in H^2$) du lemme suivant par convergence dominée :

Lemme 3.20 *Pour tout* $\varphi \in H^2$ $\quad L_\varepsilon^*(\tau)\varphi \to L^*(\tau)\varphi$
fortement dans L^2 *à* τ *fixé avec une borne* L^2 *localement uniforme en* τ.

PREUVE. Par la régularisation des facteurs de flot $\frac{1}{\varepsilon}\partial_{\xi_i}P(\varepsilon\tau|x,\xi)$ et $\partial_{\xi_i}X(\varepsilon\tau|x,\xi)$ à l'aide des inégalités (61) et (62) on démontre à la manière de la preuve de la proposition 3.51 l'approximation

$$L_\varepsilon^*(\tau)\varphi \approx \Sigma_{1\le i;j\le l}\tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi))$$

$$+R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi))$$

au sens de L^2 localement uniformément en τ, sous l'hypothèse $R_{i,j} \in L_{loc}^\infty[\mathbb{R};W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)]$ pour un test φ régulier, par exemple $\varphi \in H^2$.

Maintenant à τ fixé

$$\| \tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi)) + R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x)}{\varepsilon})\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi))$$
$$-\tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\tau\xi)\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi) - R_{i,j}(\tau;\tau\xi)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi) \|_{L^2(x;\xi)} \to 0$$

en étant borné par exemple par $(1+\tau) \| R_{i,j} \|_{W^{1,\infty}}(\tau) \| \varphi \|_{H^2}$.
En effet pour vérifier cette convergence nous distinguerons les grands ξ des petits.

Pour ξ grand on a

- $\int\int_{|\xi|\geq R} \tau^2|\partial_i R_{i,j}|^2(\tau;\tau\xi)|\partial_{\xi_j}\varphi|^2(x,\xi) + |R_{i,j}|^2(\tau;\tau\xi)|\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_i}\varphi|^2(x,\xi)dxd\xi$

$$\leq \| R_{i,j} \|^2_{W^{1,\infty}}(\tau)\int\int_{|\xi|\geq R}\tau^2|\partial_{\xi_j}\varphi|^2(x,\xi) + |\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_i}\varphi|^2(x,\xi)dxd\xi$$

- $\int\int_{|\xi|\geq R} \tau^2|\partial_i R_{i,j}|^2(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})|\partial_{\xi_j}\varphi|^2(X(\varepsilon\tau|x,\xi))$

$$+|R_{i,j}|^2(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})|\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_i}\varphi|^2(X(\varepsilon\tau|x,\xi))dxd\xi$$

$$\leq \| R_{i,j} \|^2_{W^{1,\infty}}(\tau)\int\int_{|\xi|\geq R-\varepsilon\tau\|\nabla V\|_\infty}\tau^2|\partial_{\xi_j}\varphi|^2(x,\xi) + |\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_i}\varphi|^2(x,\xi)dxd\xi$$

car $|Q(\varepsilon\tau|x,\xi)-\xi| \leq \varepsilon\tau \| \nabla V \|_\infty$ implique $|Q(\varepsilon\tau|x,\xi)| \geq |\xi| - \varepsilon\tau \| \nabla V \|_\infty$.

Pour ξ borné on a

- $\int\int_{|\xi|\leq R} \left|\tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi)) - \tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\tau\xi)\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi)\right|^2 dxd\xi$

$$= \int\int_{|\xi|\leq R}\left|\tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\tau\xi+\varepsilon f_\varepsilon)\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi+\varepsilon g_\varepsilon) - \tau\partial_i R_{i,j}(\tau;\tau\xi)\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi)\right|^2 dxd\xi$$

- $\int\int_{|\xi|\leq R} \left|R_{i,j}(\tau;\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon})\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(X(\varepsilon\tau|x,\xi)) - R_{i,j}(\tau;\tau\xi)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi)\right|^2 dxd\xi$

$$= \int\int_{|\xi|\leq R}\left|R_{i,j}(\tau;\tau\xi+\varepsilon f_\varepsilon)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi+\varepsilon g_\varepsilon) - R_{i,j}(\tau;\tau\xi)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\varphi(x,\xi)\right|^2 dxd\xi$$

où $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x;\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x}{\varepsilon} - \tau\xi\right) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon\tau} d\sigma \int_0^\sigma \nabla V[P(\cdot|x,\xi)]$

$$= -\frac{\tau}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\tau}(1-\frac{\cdot}{\varepsilon\tau})\nabla V[P(\cdot|x,\xi)] \leq \tau^2 \| \nabla V \|_\infty \tag{67}$$

et $g_\varepsilon = g_\varepsilon(x;\xi) = \frac{1}{\varepsilon}(X(\varepsilon\tau|x,\xi)-(x,\xi)) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\tau} a[X(\cdot|x,\xi)] \leq \tau(\| V \|_\infty + \| Q \|_\infty)$

$$\leq \tau(\| \nabla V \|_\infty + |\xi| + \varepsilon\tau \| \nabla V \|_\infty) \leq \tau(1+\tau) \| \nabla V \|_\infty + \tau R \tag{68}$$

On conclut par un résultat d'analyse générale exprimant la continuité des translations dans L^1 par exemple :

Lemme 3.21 $\forall f \in L^1 \qquad f(x+g_\varepsilon(x)) \overset{L^1}{\to} f(x)$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$,
si g_ε *lipschitzien tend uniformément vers zéro.*

PREUVE. Pour F régulier

$$\int |f(x+g_\varepsilon(x))-f(x)|dx \leq \| f-F \|_{L^1} + \int |f(x+g_\varepsilon(x))-F(x+g_\varepsilon(x))|dx + \| g_\varepsilon \|_\infty \| \nabla F \|_{L^1}$$

Le changement de variable bilipschitzien $x \mapsto x+g_\varepsilon(x)$ a pour jacobien un nombre de limite 1 d'où l'équivalent

$$\int |f(x+g_\varepsilon(x)) - F(x+g_\varepsilon(x))|dx \sim \int |f(x) - F(x)|dx$$

On en déduit

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int |f(x+g_\varepsilon(x)) - f(x)|dx \leq 2 \| f - F \|_{L^1}$$

□

PREUVE. Proposition 3.52 dans le contexte quantique.

Pour expliciter $< \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau) S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t) >$ à ε fixé nous reprendrons $-\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)$ sous la forme

$$\varphi \mapsto v(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon} + \frac{D_\xi}{2})\varphi - v(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon} - \frac{D_\xi}{2})\varphi$$

alors $\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau) S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t)\varphi$

$$= \Sigma_{s,s'} ss' \int_{\eta \in \mathbb{R}^N} d\eta \int_{\eta' \in \mathbb{R}^N} d\eta' \hat{v}(\frac{t}{\varepsilon}; \eta)\hat{v}(\frac{\tau}{\varepsilon}; \eta')\, e^{+2i\pi\eta'\frac{x}{\varepsilon}}\, e^{+2i\pi\eta P(t-\tau|x,\xi+s'\eta'/2)/\varepsilon}$$

$$\varphi\left(P(t-\tau|x,\xi+\frac{s'\eta'}{2}); Q(t-\tau|x,\xi+\frac{s'\eta'}{2}) + \frac{s\eta}{2}\right)$$

où s et s' décrivent indépendamment $\{-1;+1\}$ cette somme comprend quatre termes signés.

La moyenne à ε fixé fait apparaitre une intégration contre $\delta_0(\eta+\eta')d\eta d\eta'$ qui simplifie un peu les exponentielles oscillantes d'où

$$< \sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(\tau) S_A^*(t-\tau)\sqrt{\varepsilon}\theta_\varepsilon^*(t) > \varphi = \frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi$$

avec par définition $L_\varepsilon^*(\tau)\varphi$

$$= \Sigma_{s,s'} ss' \int_{\eta \in \mathbb{R}^N} \hat{r}(\tau;\eta) e^{+2i\pi\eta(P(\varepsilon\tau|x,\xi-s'\eta/2)-x)/\varepsilon} \varphi\left(P(\varepsilon\tau|x,\xi-\frac{s'\eta}{2}); Q(\varepsilon\tau|x,\xi-\frac{s'\eta}{2}) + \frac{s\eta}{2}\right) d\eta$$

Par dualité

$$[N_\varepsilon(t)|\varphi] = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \left[< w^\varepsilon(\tau) > |L_\varepsilon^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi - L^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi\right] d\tau$$

$$= \int_0^T [< w^\varepsilon(t-\varepsilon\tau) > |L_\varepsilon^*(\tau)\varphi - L^*(\tau)\varphi]\, d\tau \leq \int_0^T \| L_\varepsilon^*(\tau)\varphi - L^*(\tau)\varphi \|_{L^2}\, d\tau$$

et la négligeabilité $[N_\varepsilon(t)|\varphi] \to 0$ résulte ($\forall \varphi \in H^2$) du lemme suivant :

Lemme 3.22 *Pour tout* $\varphi \in H^2$ $\quad L^*_\varepsilon(\tau)\varphi \to L^*(\tau)\varphi$
fortement dans L^2 *à* τ *fixé avec une borne* L^2 *localement uniforme en* τ.

PREUVE. La borne $\| L^*_\varepsilon(\tau)\varphi \|_{L^2} \leq 4 \| \varphi \|_{L^2} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} |\hat{r}|(\tau;\eta)d\eta$ repose sur l'hypothèse formulée dans le théorème 3.23 à savoir $\hat{r} \in L^\infty[\mathbb{R}_t; L^1(\mathbb{R}^N)]$. Pour la convergence

$$\| L^*_\varepsilon(\tau)\varphi - L^*(\tau)\varphi \|_{L^2} \leq \Sigma_{s,s'} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} |\hat{r}|(\tau;\eta) \ \| A^\varepsilon_{s,s'}(\tau;\eta|x;\xi) \|_{L^2(x;\xi)} \ d\eta$$

avec

$$A^\varepsilon_{s,s'}(\tau;\eta|x;\xi) = e^{+2i\pi\eta(P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x)/\varepsilon}\varphi\left(P(\varepsilon\tau|x,\xi); Q(\varepsilon\tau|x,\xi) + \frac{s\eta}{2}\right) - e^{+2i\pi\eta\tau\xi}\varphi\left(x;\xi+\frac{s\eta}{2}\right)$$

nous distinguerons comme précédemment les grands ξ des petits :

- $\int\int_{|\xi|\geq R} |\varphi|^2(x;\xi+\frac{s\eta}{2})dxd\xi \leq \int\int_{|\xi|\geq R-|\eta|} |\varphi|^2(x;\xi)dxd\xi$
- $\int\int_{|\xi|\geq R} |\varphi|^2(P(\varepsilon\tau|x,\xi); Q(\varepsilon\tau|x,\xi)+\frac{s\eta}{2})dxd\xi \leq \int\int_{|\xi|\geq R-|\eta|-\varepsilon\tau\|\nabla V\|_\infty} |\varphi|^2(x;\xi)dxd\xi$

  car $|Q(\varepsilon\tau|x,\xi)-\xi| \leq \varepsilon\tau \| \nabla V \|_\infty$ implique $|Q(\varepsilon\tau|x,\xi)| \geq |\xi| - \varepsilon\tau \| \nabla V \|_\infty$
- $\int\int_{|\xi|\leq R} \left| e^{+2i\pi\eta(P(\varepsilon\tau|x,\xi)-x)/\varepsilon}\varphi\left(P(\varepsilon\tau|x,\xi); Q(\varepsilon\tau|x,\xi)+\frac{s\eta}{2}\right) - e^{+2i\pi\eta\tau\xi}\varphi\left(x;\xi+\frac{s\eta}{2}\right)\right|^2 dxd\xi$

$$= \int\int_{|\xi|\leq R} \left| e^{+2i\pi\eta\varepsilon f_\varepsilon}\varphi\left(x,\xi+\frac{s\eta}{2}+\varepsilon g_\varepsilon\right) - \varphi(x,\xi)\right|^2 dxd\xi$$

avec $|f_\varepsilon| \leq \tau^2 \| \nabla V \|_\infty$ et $|g_\varepsilon| \leq \tau(1+\tau) \| \nabla V \|_\infty + \tau R$ d'après (67) et (68).

Comme précédemment dans le contexte classique on déduit du lemme 3.21 la convergence dans $L^2(x;\xi)$ de $A^\varepsilon_{s,s'}(\tau;\eta|x;\xi)$ vers zéro à τ et η fixés, d'où l'assertion par convergence dominée.

□

3.2.4 Exemple de potentiel stochastique.

On construit ici une famille de processus stochastiques $v = v(t;x)$ satisfaisant

$$t > \tau + 1 \qquad x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbb{E}\,(v(t;x)|\mathcal{F}_\tau) = 0$$

$$< v(t;x)v(t';x') >= r(t-t';x-x')$$

où $\mathcal{F}_t = \sigma\{v(\tau;x)\,|\,\tau \leq t\ x \in \mathbb{R}^N\}$ est la filtration par défaut.

Soient $(a_t)_{t\in\mathbb{R}}$, $(A_t)_{t\in\mathbb{R}}$, $(b_x)_{x\in\mathbb{R}^N}$, $(B_x)_{x\in\mathbb{R}^N}$ quatre processus stochastiques centrés du second ordre (L^2) indépendants dans leur ensemble. On suppose $< A_t A_{t'} >= \delta_{t,t'}$ et $< B_x B_{x'} >= \delta_{x,x'}$ de tels exemples se réalisent (aisément) dans la classe des processus gaussiens alors A_t et A'_t sont automatiquement indépendants ($t \neq t'$). On suppose a_t nul lorsque $t \notin [0;1]$. Posons

$$v(t;x) = \int_{\mathbb{R}} a_\tau A_{t-\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} b_y B_{x-y} dy$$

D'abord la moyenne $< v(t;x)v(t';x') >$

$$= \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} < a_\tau a_{\tau'} >< A_{t-\tau}A_{t'-\tau'} > d\tau d\tau' \int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} < b_y b_{y'} >< B_{x-y}B_{x'-y} > dy dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}} < a_\tau a_{t'-t+\tau} > d\tau \int_{\mathbb{R}^N} < b_y b_{x'-x+y} > dy$$

est une fonction (r) des variables (séparées) $t'-t \in \mathbb{R}$ et $x'-x \in \mathbb{R}^N$.

Ensuite lorsque $t' > t+1$ l'expression $v(t';x') = \int_{[0;1]} a_\tau A_{t'-\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} b_y B_{x'-y} dy$ ne dépend de A qu'en des temps $t'-\tau\ \in]t;+\infty[$ pour lesquel $A_{t'-\tau}$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ donc $\mathbb{E}\,(v(t';x')|\mathcal{F}_t) = 0$.

On peut le vérifier rigoureusement en intervertissant les intégrations (Fubini)

$$< v(t';x')\varphi >= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N} < A_{t'-\tau}a_\tau b_y B_{x'-y}\varphi > d\tau dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N} < A_{t'-\tau} >< a_\tau b_y B_{x'-y}\varphi > d\tau dy$$

pour tout $\varphi \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ supposé $\mathcal{F}_t$-mesurable,

où la moyenne $< A_{t'-\tau}a_\tau b_y B_{x'-y}\varphi >=< A_{t'-\tau} >< a_\tau b_y B_{x'-y}\varphi >$ est scindée par indépendance.

Bien sûr la nullité de $< v(t';x')\varphi >$ pour tout $\varphi \in L^\infty(\mathcal{F}_t)$ équivaut à la nullité $\mathbb{E}\,(v(t';x')|\mathcal{F}_t) = 0$ de l'espérance conditionnelle.

La morale de cet exemple : même si $v(t;x)$ et $v(t';x')$ ne sont pas a priori indépendants lorsque $t' > t+1$ ils contiennent des facteurs centrés qui eux le sont.

Remarque. Supposant a_t nul lorsque $t \notin [0;1]$ et b_x nul lorsque $|x| \geq 1$, la construction de $v(t;x)$ par convolution montre que les trajectoires du processus v héritent de la régularité locale des trajectoires des processus a et b. Par exemple si a et b sont (presque sûrement) à trajectoires C^2 alors v est (presque sûrement) à trajectoires C^2 en bref $v \in C^2$. Exception faite de l'hypothèse de support compact (et de l'hypothèse d'indépendance) les processus a et b sont tout à fait quelconques. Leurs trajectoires peuvent être supposées régulières.

3.3 Systèmes hyperboliques linéaires à coefficients constants.

3.3.1 Modèle et résultat.

Considérons des solutions d'un système hyperbolique linéaire du premier ordre à M dimensions

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t u^\varepsilon = p(\varepsilon D)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)^M \end{cases} \tag{69}$$

à données initiales $\| u_I^\varepsilon \|_{L^2} \leq 1$ bornées.

L'inconnue $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t;x) \in \mathbb{C}^M$ est un vecteur complexe à M dimensions.

L'opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants $p = p(\xi)$ est matriciel complexe $M \times M$ antiautoadjoint $p^* = -p$ lipschitzien.

La perturbation $a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ est l'opérateur de Weyl d'un symbole matriciel complexe $M \times M$ antiautoadjoint $a^* = -a$ ayant la régularité

$$\begin{cases} \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\partial_x^\alpha a}|(t;x';\xi)}{\langle\xi\rangle^m} dx' \leq 1 \text{ pour tout } 0 \leq |\alpha| \leq 2m \\ \\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\partial_x^\alpha \partial_\xi a}|(t;x';\xi)}{\langle\xi\rangle^m} dx' \leq 1 \text{ pour tout } 0 \leq |\alpha| \leq 2m \end{cases} \tag{70}$$

où l'entier $m \in \mathbb{N}$ est moralement l'ordre de croissance polynômiale du symbole a pour la variable de phase. Ici et dans toute la suite $\hat{a}$ désigne la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{\%x}a$ en espace. L'hypothèse d'antisymétrie $a^* = -a$ n'est pas vraiment essentielle. Elle interviendra uniquement dans l'ordre d'apparition des indices attachés au terme de corrélation qui figure dans le calcul des sections efficaces du théorème 3.26.

Remarque. Pour que les inégalités (70) soient satisfaites il suffit que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a|(t;x;\xi) \leq \varphi_\alpha(x)\langle\xi\rangle^m \qquad \forall\alpha\,\forall\beta \text{ avec } \varphi_\alpha \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$$

Ce critère se rapproche des hypothèses usuelles concernant les classes de symboles.

L'aléatoire du milieu est modélisé par la perturbation $a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ comme suit.

Le symbole a est un processus stochastique centré $< a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D) >= 0$ borné au sens des inégalités (70) satisfaisant la propriété de corrélation

$$\begin{cases} < a_{i,j}(t;x;\xi)a_{k,l}(\tau;y;\eta) >= R_{i,j,k,l}(t-\tau;x-y;\xi;\eta) \\ < \hat{a}_{i,j}(t;x';\xi)\hat{a}_{k,l}(\tau;y';\eta) >= \hat{R}_{i,j,k,l}(t-\tau;x';\xi;\eta)\delta_0(x'+y') \end{cases} \tag{71}$$

où R est une matrice à M^4 entrées, de transformée de Fourier en espace $\hat{R}$,

et la propriété d'indépendance (conditionnelle) après un certain temps $T > 0$ au sens

$$t > \tau + \varepsilon T \Rightarrow \mathbb{E}\left(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)|\mathcal{F}_{\frac{\tau}{\varepsilon}}\right) = 0$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ désigne la filtration par défaut du processus a^W.

Remarque. La corrélation (71) sera uniquement invoquée sous la seconde forme, à travers la transformation Fourier.

Nous étudierons la transformée de Wigner $W^\varepsilon(t)$ matricielle des solutions du problème (69) dans le cadre fonctionnel $L^2 \times L^2$ c'est-à-dire pour un mélange

$$\begin{cases} W^\varepsilon(t) = W^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon u_n^\varepsilon(t) \otimes u_n^\varepsilon(t)] \\ \Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon| \leq 1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon|^2 \leq 1 \\ \{u_{I,n}^\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\} \subset L^2(\mathbb{R}^N)^M \text{ est orthonormale pour tout } \varepsilon \end{cases} \tag{72}$$

L'étude de $W^\varepsilon(t)$ sera limitée à $\mathbb{R}^N \times \Omega$ où $\Omega = \Omega_\xi \subset \mathbb{R}_\xi^N$ est un domaine (ouvert) de stricte hyperbolicité dans lequel $p \in L(\mathbb{C}^M)$ se diagonalise bien

$$\begin{cases} p = i\Sigma_{1\leq k\leq M}\lambda_k\Pi_k \in L(\mathbb{C}^M) \\ \Pi_k \text{ projecteur propre orthogonal } \Pi_k^2 = \Pi_k = \Pi_k^* \\ \lambda_k \text{ valeur propre réelle} \\ \lambda_k \text{ et } \Pi_k \text{ sont lipschitziens dans } \Omega \end{cases} \tag{73}$$

Le critère typique pour pouvoir diagonaliser p avec la régularité escomptée consiste à supposer la simplicité $\lambda_1 < \cdots < \lambda_M$ des valeurs propres dans Ω au moins.

Par le principe du minimax les valeurs propres λ présentées en ordre croissant et répétées selon la multiplicité héritent du caractère lipschitzien de p. Ainsi il y a un prolongement partout lipschitzien sur $\mathbb{R}^N$ de la valeur λ_k au départ définie dans le domaine Ω seulement, d'où $\nabla\lambda_k \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$.

Pour le projecteur propre Π_k on se contentera d'un prolongement par zéro hors du domaine Ω ainsi Π_k est partout défini sur $\mathbb{R}^N$, d'où $\Pi_k \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^{M\times M}$.

Tant que l'homogénéisation $\varepsilon \to 0$ est étudiée dans $\mathbb{R}^N \times \Omega$ ces prolongements ne sont pas essentiels, ils sont invisibles à la limite. On les considérera comme des commodités d'écriture.

L'opérateur $p(\varepsilon D)$, les données initiales $\{u_{I,n}^\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\} \subset L^2$ orthonormalisées, les coefficients d'occupation λ^ε sont implicitement supposés déterministes, en d'autres termes $\sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ est la seule source de hasard dans ce modèle. En particulier l'inconnue $W^\varepsilon(t=0)$ est initialement déterministe ce qui interviendra dans la validité du lemme 3.23.

Le système (69) s'analyse classiquement par projections dans les différents niveaux (d'énergie)

$$\varepsilon\partial_t\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon = i\lambda_p(\varepsilon D)\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\Pi_p(\varepsilon D)a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon \qquad (1 \leq p \leq M)$$

il en résulte

$$\partial_t W_{p,p}^\varepsilon - i\left[\frac{\lambda_p(\xi+\varepsilon D/2) - \lambda_p(\xi-\varepsilon D/2)}{\varepsilon}\right]W_{p,p}^\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}W^\varepsilon[\Pi_p(\varepsilon D)a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon] + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}W^\varepsilon[\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon;\Pi_p(\varepsilon D)a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon]$$

où $W_{p,p}^\varepsilon = W^\varepsilon[\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon;\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon]$ est par définition la transformée de Wigner matricielle dans le p^{ieme}niveau. C'est un processus stochastique borné $L^\infty[\mathbb{R}_t^+;L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)]$ dont l'évolution limite en moyenne est décrite par le :

Théorème 3.26 *Sous les hypothèses (69) (70) (71) (72) (73).*

Après extraction la transformée de Wigner en moyenne $< W^{\varepsilon}_{p,p} >$ *converge faiblement* $\sigma(L^2;L^2)$ *localement uniformément en temps pour chaque* $1 \leq p \leq M$ *vers une solution* f_p *de l'équation d'évolution limite*

$$\partial_t f_p + \nabla\lambda_p(\xi).\nabla_x f_p = 2\ Re \int_{\overline{\xi}\in\Omega} \sigma_p(\xi;\overline{\xi}) f_p(t;x;\xi) d\overline{\xi}$$

$$-2\ Re\ \Sigma_{1\leq q\leq M} \int_{\overline{\xi}\in\Omega} \sigma_{p,q}(\xi;\overline{\xi}) f_q(t;x;\overline{\xi}) d\overline{\xi} \qquad dans\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^N_x \times \Omega_\xi)$$

où $\sigma_p(\xi;\overline{\xi})$ *est l'opération de multiplication qui à la matrice* W *associe la matrice* $M \times M$ *de terme général d'indice* (i,n) *égal à*

$$\left(\Sigma_{1\leq q\leq M}[\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_q(\overline{\xi})]_{k,l}\hat{\hat{R}}_{j,k,l,m}(\lambda_p(\xi)-\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})W_{m,n}\right)_{i,n}$$

où $\sigma_{p,q}(\xi;\overline{\xi})$ *est l'opération linéaire qui à la matrice* W *associe la matrice* $M \times M$ *de terme général d'indice* (i,n) *égal à*

$$\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_p(\xi)]_{m,n}\hat{\hat{R}}_{j,k,l,m}(\lambda_p(\xi)-\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})W_{k,l}\right)_{i,n}$$

Bien sûr Re désigne ici la partie réelle matricielle $2\ \mathrm{Re}X = X + X^*$.

Les indices j,k,l,m correspondant aux produits de matrices varient de 1 à M.

La notation $\hat{\hat{R}}$ comprend exceptionnellement une transformation de Fourier en temps

$$\hat{\hat{R}}(\lambda;x';\xi;\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}(\tau;x';\xi;\eta)e^{-2i\pi\tau\lambda}d\tau$$

qui se limite à l'intervalle de temps $(-T;+T)$ car la corrélation est nulle hors de $(-T;+T)$ par la propriété d'indépendance (conditionnelle) après un certain temps (T).

Remarque. On démontrera aussi (proposition 3.57) le découplage des niveaux d'énergie en moyenne :

$$< W^{\varepsilon} > \to \Sigma_{1\leq p\leq M} f_p \text{ dans } \sigma(L^2;L^2)(\mathbb{R}^N_x \times \Omega_\xi)$$

localement uniformément en temps après extraction,

et les relations (proposition 3.59) de projections limites :

$$f_p = \Pi_p f_p \Pi_p = f_p \Pi_p = \Pi_p f_p \qquad (1 \leq p \leq M)$$

Remarque. [RPK] mentionne que l'équation d'évolution limite préserve la positivité des matrices à cause des relations

$$\begin{cases} \hat{R}_{i,j,k,l}(t;x';\xi;\eta) = \hat{R}_{k,l,i,j}(t;-x';\xi;\eta) = \overline{\hat{R}}_{j,i,l,k}(t;-x';\xi;\eta) \\ -\hat{R}_{i,j,k,l} =< \hat{a}_{i,j}\overline{\hat{a}}_{l,k} > \\ -\Sigma_{(i,j,k,l)} z_{i,j}\overline{z_{l,k}}\hat{R}_{i,j,k,l} \geq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}^{M\times M} \end{cases}$$

Exemple. L'équation des ondes $\partial_t^2\phi^\varepsilon - \Delta\phi^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\mathrm{div}\left(s(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon})\nabla\phi^\varepsilon\right)$ à données initiales déterministes $\phi^\varepsilon(t=0)\in L^2(\mathbb{R}^N)$ bornées, où s désigne une matrice $N\times N$ symétrique positive, s'écrit comme un système à $M=N+1$ dimensions d'inconnue $u^\varepsilon := (\partial_t\phi^\varepsilon;\nabla\phi^\varepsilon)$ du type (69) avec

$$p(\xi) = i\begin{bmatrix} 0 & {}^t\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix} \text{ et } a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D) = \begin{bmatrix} 0 & {}^t\varepsilon D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon}) \end{bmatrix}$$

Bien sûr a n'est pas antisymétrique car la norme $\| u^\varepsilon \|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N}|\partial_t\phi^\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi^\varepsilon|^2$ n'a aucune raison d'être conservée dans le temps. On peut aussi calculer le symbole de Weyl explicitement :

$$a(t;x;\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \left(\Sigma_{1\le i\le N} i\ \xi_i s_{i,j} + \frac{1}{2}\partial_i s_{i,j}\right)_{1\le j\le N}(t;x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}(t;x';\xi) = i\begin{bmatrix} 0 & {}^t\hat{s}(t;x')(\xi+\frac{1}{2}x') \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Néanmoins en supposant $u^\varepsilon\in L^2$ borné uniformément en temps, la méthode que nous allons développer pour démontrer le théorème 3.26 s'applique terme à terme. La seule différence réside dans la formulation des sections efficaces où il faudra parfois permuter les indices figurant dans $\hat{\hat{R}}$.

La réduction de l'opérateur des ondes p est bien connue dans $\Omega = \mathbb{R}^N - \{0\}$:

$$-ip = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 \in L(\mathbb{C}^M)$$

$$1 = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \in L(\mathbb{C}^M)$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_1(\xi) = -|\xi| & \Pi_1(\xi) \text{ est le projecteur orthogonal sur } (1;-\xi/|\xi|)\in\mathbb{C}^M \\ \lambda_2(\xi) = 0 & \Pi_2(\xi) \text{ est le projecteur orthogonal sur } (0;\xi^\perp)\subset\mathbb{C}^M \\ \lambda_3(\xi) = +|\xi| & \Pi_3(\xi) \text{ est le projecteur orthogonal sur } (1;+\xi/|\xi|)\in\mathbb{C}^M \end{cases}$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\xi}{|\xi|} \\ -\frac{\xi}{|\xi|} & \frac{\xi\otimes\xi}{|\xi|^2} \end{bmatrix} \qquad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\xi\otimes\xi}{|\xi|^2} \end{bmatrix} \qquad \Pi_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & +\frac{\xi}{|\xi|} \\ +\frac{\xi}{|\xi|} & \frac{\xi\otimes\xi}{|\xi|^2} \end{bmatrix}$$

En indexant les éléments des matrices à $M=N+1$ dimensions de 0 à N on peut remarquer que la corrélation figurant dans les sections efficaces du théorème 3.26 s'écrit aussi

$$\hat{\hat{R}}_{m,k,n,l}(\lambda_p(\xi)-\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}) = \Sigma_{1\le i;j\le N}\ \xi_i\,\overline{\xi}_j\ \hat{\hat{S}}_{i,k,j,l}(\lambda_p(\xi)-\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi})$$

$$\text{lorsque } m=n=0 \text{ et } 1\le k;l\le N \qquad \text{(et vaut zéro sinon)}$$

où $\hat{\hat{S}}$ est la transformée de Fourier spatio-temporelle de la corrélation associée au processus stochastique purement multiplicatif s, explicitement

$$\hat{\hat{S}}(\lambda;x') := \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{S}(t;x')e^{-2i\pi t\lambda}dt$$

$$< s_{i,k}(t;x')s_{j,l}(\tau;y') >= \hat{S}_{i,k,j,l}(t-\tau;x')\delta_0(x'+y')$$

3.3.2 Formules préliminaires.

Nous exprimerons par la suite l'action de l'opérateur a^W de Weyl

$$\left\{\begin{array}{l} a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u : x \mapsto \int\int a(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x+y}{2\varepsilon};\varepsilon\xi)u(y)e^{+2i\pi(x-y)\xi}dyd\xi \\ \\ \mathcal{F}\left(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u\right) : x' \mapsto \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\varepsilon x'-\eta/2)\hat{u}(x'-\eta/\varepsilon)d\eta \end{array}\right. \tag{74}$$

à travers la transformation de Wigner sous forme analytique

$$\left\{\begin{array}{l} W^\varepsilon[a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u;v] = \mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\varepsilon x'/2-\eta/2)\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon[u;v](x'-\eta/\varepsilon;\xi-\eta/2)d\eta \\ \\ W^\varepsilon[u;a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)v] = \mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon[u;v](x'-\eta/\varepsilon;\xi+\eta/2)\widehat{a^*}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\varepsilon x'/2+\eta/2)d\eta \end{array}\right. \tag{75}$$

où $\hat{a}$ désigne comme toujours la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{\%x}a$ en espace.

Le crochet de dualité des distributions (tempérées) matricielles sera noté par la suite $[W|\varphi]$ pour toute distribution matricielle W et tout test matriciel φ. Par définition le nombre $[W|\varphi]\in\mathbb{C}$ est l'intégrale de la distribution $\mathrm{Tr}\,(W\cdot\varphi)$ à support compact lorsque φ est à support compact. A l'exception du terme $a^* = -a$ l'adjonction notée * correspondra toujours au crochet bilinéaire $(W;\varphi)\mapsto[W|\varphi]$ non sesquilinéaire.

3.3.3 Analyse.

L'équation d'évolution satisfaite par la transformée de Wigner du p^{ieme}niveau à ε fixé s'écrit sous la forme

$$\partial_t W^\varepsilon_{p,p} + \nabla\lambda_p(\xi).\nabla_x W^\varepsilon_{p,p} = N^\varepsilon_p + 2\ \mathrm{Re}\ \Sigma_{1\le q\le M}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}I^\varepsilon_{p,q}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} I^\varepsilon_{p,q} = W^\varepsilon[\Pi_p(\varepsilon D)a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)\Pi_q(\varepsilon D)u^\varepsilon;\Pi_p(\varepsilon D)u^\varepsilon] \\ N^\varepsilon_p = i\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\left(x'.\int_{-1/2}^{+1/2}[\nabla\lambda_p(\xi+\varepsilon s x')-\nabla\lambda_p(\xi)]ds\,\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon_{p,p}(x';\xi)\right) \end{array}\right.$$

Nous l'étudierons en moyenne seulement

$$\partial_t < W^\varepsilon_{p,p} > +\nabla\lambda_p(\xi).\nabla_x < W^\varepsilon_{p,p} > = < N^\varepsilon_p > +2\ \mathrm{Re}\ \Sigma_{1\le q\le M}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < I^\varepsilon_{p,q} >$$

car sans la présence du crochet statistique le second membre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}I^\varepsilon_{p,q}$ n'a généralement pas de limite.

Par construction N^ε_p est négligeable avec ou sans moyenne :

Proposition 3.53 $N^\varepsilon_p \to 0$ *faiblement* $\sigma(H^{-1};H^1)$ *uniformément en temps.*

PREUVE. Par dualité $[N^\varepsilon_p|\varphi] = [\mathcal{F}_{\%x}N^\varepsilon_p|\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi]$

$$\le \int\int dx'd\xi\int_{-1/2}^{+1/2}|\nabla\lambda_p(\xi+\varepsilon s x')-\nabla\lambda_p(\xi)|ds|\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon_{p,p}|(x';\xi)|\mathcal{F}^{-1}_{\%x}(\nabla_x\varphi)|(x';\xi)dx'd\xi$$

$$\leq \| W^\varepsilon_{p,p} \|_{L^2} \left\| \mathcal{F}^{-1}_{\%x}(\nabla_x \varphi) \int_{-1/2}^{+1/2} |\nabla \lambda_p(\xi + \varepsilon s x') - \nabla \lambda_p(\xi)| ds \right\|_{L^2}$$

$$\leq \left\| \mathcal{F}^{-1}_{\%x}(\nabla_x \varphi) \int_{-1/2}^{+1/2} |\nabla \lambda_p(\xi + \varepsilon s x') - \nabla \lambda_p(\xi)| ds \right\|_{L^2}$$

$$= \left[\int_{x' \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}^{-1}_{\%x}(\nabla_x \varphi)|^2 (x'; \xi) \left| \int_{-1/2}^{+1/2} |\nabla \lambda_p(\xi + \varepsilon s x') - \nabla \lambda_p(\xi)| ds \right|^2 d\xi \right) dx' \right]^{1/2}$$

Pour un test $\varphi \in H^1$ on obtient la négligeabilité $[N^\varepsilon_p | \varphi] \to 0$ par convergence dominée (vu $\nabla \lambda_p \in L^\infty$) et par continuité des translations dans L^2_{loc}, après avoir régularisé φ.
□

Le théorème 3.26 constitue donc un calcul de la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ du seul terme problématique

$$\Sigma_{1 \leq q \leq M} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < I^\varepsilon_{p,q} > \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^N_x \times \Omega_\xi)$$

L'évolution suivie par la transformée de Wigner dans le p^{ieme}niveau est un cas particulier du plus général :

$$\partial_t W^\varepsilon_{q,p} - i \left[\frac{\lambda_q(\xi + \varepsilon D/2) - \lambda_p(\xi - \varepsilon D/2)}{\varepsilon} \right] W^\varepsilon_{q,p}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} W^\varepsilon [\Pi_q(\varepsilon D) a^W(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon D) u^\varepsilon; \Pi_p(\varepsilon D) u^\varepsilon] + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} W^\varepsilon [\Pi_q(\varepsilon D) u^\varepsilon; \Pi_p(\varepsilon D) a^W(\frac{t}{\varepsilon}; \frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon D) u^\varepsilon]$$

$$:= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} R^\varepsilon_{p,q}$$

où $W^\varepsilon_{q,p} = W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D) u^\varepsilon; \Pi_p(\varepsilon D) u^\varepsilon]$ est par définition la transformée de Wigner matricielle de l'interaction des niveaux p et q.

Avec les opérations conjuguées issues de (74) et (75)

$$\begin{cases} \theta^\varepsilon_p(t) : W \mapsto \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \int_{\eta \in \mathbb{R}^N} \Pi_p(\xi + \varepsilon x'/2) \hat{a}(\frac{t}{\varepsilon}; \eta; \xi + \varepsilon x'/2 - \eta/2) \mathcal{F}_{\%x} W(x' - \eta/\varepsilon; \xi - \eta/2) d\eta \\ \overline{\theta}^\varepsilon_p(t) : W \mapsto \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \int_{\eta \in \mathbb{R}^N} \mathcal{F}_{\%x} W(x' - \eta/\varepsilon; \xi + \eta/2) \widehat{a^*}(\frac{t}{\varepsilon}; \eta; \xi - \varepsilon x'/2 + \eta/2) \Pi_p(\xi - \varepsilon x'/2) d\eta \end{cases}$$

on exprime

$$R^\varepsilon_{p,q}(t) = \theta^\varepsilon_q(t) W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D) u] + \overline{\theta}^\varepsilon_p(t) W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D) u; u]$$

Avec le groupe unitaire $S^\varepsilon_{p,q}(t) = \exp\left(i \frac{t}{\varepsilon} \lambda_q(\xi + \varepsilon D/2) - i \frac{t}{\varepsilon} \lambda_p(\xi - \varepsilon D/2) \right) \in \mathcal{L}(L^2)$ on mesure l'effet d'une translation rétrograde $-\varepsilon T$ en temps dans l'inconnue $W^\varepsilon_{q,p}$ via la formule de Duhamel

$$W^\varepsilon_{q,p}(t) = S^\varepsilon_{p,q}(\varepsilon T) W^\varepsilon_{q,p}(t - \varepsilon T) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{t - \varepsilon T}^t S^\varepsilon_{p,q}(t - \tau) R^\varepsilon_{p,q}(\tau) d\tau$$

$$= S^\varepsilon_{p,q}(\varepsilon T) W^\varepsilon_{q,p}(t - \varepsilon T) \tag{76}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{t - \varepsilon T}^t S^\varepsilon_{p,q}(t - \tau) \theta^\varepsilon_q(\tau) W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D) u](\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{t - \varepsilon T}^t S^\varepsilon_{p,q}(t - \tau) \overline{\theta}^\varepsilon_p(\tau) W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D) u; u](\tau) d\tau$$

En appliquant l'opération $\theta_p^\varepsilon(t)$ et en moyennant (76) on obtient

$$I_{p,q}^\varepsilon(t) = \theta_p^\varepsilon(t) W_{q,p}^\varepsilon(t) = \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(\varepsilon T) W_{q,p}^\varepsilon(t-\varepsilon T) \tag{77}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{t-\varepsilon T}^t \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \theta_q^\varepsilon(\tau) W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D)u](\tau) d\tau$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{t-\varepsilon T}^t \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau) W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u; u](\tau) d\tau$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < I_{p,q}^\varepsilon(t) >= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \theta_p^\varepsilon(t) W_{q,p}^\varepsilon(t) >= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \theta_q^\varepsilon(\tau) W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D)u](\tau) > d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau) W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u; u](\tau) > d\tau \tag{78}$$

car la décorrélation des facteurs $\theta_p^\varepsilon(t)$ et $W_{q,p}^\varepsilon(t-\varepsilon T)$ annule en moyenne le terme singulier

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(\varepsilon T) W_{q,p}^\varepsilon(t-\varepsilon T)$$

Plus généralement :

Lemme 3.23 *Pour toute opération S déterministe*

$$t > \tau + \varepsilon T \Rightarrow < \theta_r^\varepsilon(t) S W_{q,p}^\varepsilon(\tau) >= 0 \qquad (1 \leq p; q; r \leq M)$$

Preuve. Il s'agit mot pour mot de l'argument 3.17 détaillé dans la partie précédente. L'hypothèse décisive est le caractère déterministe des données initiales.
□

Nous démontrerons le théorème 3.26 en décomposant

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < I_{p,q}^\varepsilon(t) >= C_{p,q}^\varepsilon(t) + < N_{p,q}^\varepsilon(t) > + E_{p,q}^\varepsilon(t) \tag{79}$$

$$+\int_0^T K_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D)u] > (t-\varepsilon\tau) d\tau + \int_0^T L_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u; u] > (t-\varepsilon\tau) d\tau$$

avec

$$C_{p,q}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \theta_q^\varepsilon(\tau) \left(W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D)u] - < W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D)u] >\right)(\tau) > d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau) \left(W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u; u] - < W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u; u] >\right)(\tau) > d\tau$$

et

$$N_{p,q}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^t \left(\theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \theta_q^\varepsilon(\tau) - K_{p,q}^\varepsilon(t;\tau)\right) < W^\varepsilon[u; \Pi_p(\varepsilon D)u] > (\tau) d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon T}^t \left(\theta_p^\varepsilon(t) S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau) \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau) - L_{p,q}^\varepsilon(t;\tau)\right) < W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u; u] > (\tau) d\tau$$

et

$$E^{\varepsilon}_{p,q} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\left(< K^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau) > -K_{p,q}(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\right) < W^{\varepsilon}[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > (\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\left(< L^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau) > -L_{p,q}(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\right) < W^{\varepsilon}[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] > (\tau)d\tau$$

où les opérations $K^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau)$ et $L^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau)$ sont définies par

$$K^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau) : W \mapsto \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} d\eta \int_{\nu\in\mathbb{R}^N} d\nu\, e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}} \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)$$

$$\Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2})\Pi_q(\xi-\eta)\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2})W(x;\xi-\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2})$$

et

$$L^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau) : W \mapsto \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} d\eta \int_{\nu\in\mathbb{R}^N} d\nu\, e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}} \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)$$

$$\Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2})W(x;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\widehat{a^*}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\nu}{2})\Pi_p(\xi)$$

où les opérations limites $K_{p,q}(\tau)$ et $L_{p,q}(\tau)$ sont définies par des intégrales portant sur le seul domaine utile Ω

$$K_{p,q}(\tau) : W \mapsto +\int_{\overline{\xi}\in\Omega} d\overline{\xi} \exp\left(i\tau\lambda_q(\overline{\xi}) - i\tau\lambda_p(\xi)\right)$$

$$\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_q(\overline{\xi})]_{k,l}\hat{R}_{j,k,l,m}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})W_{m,n}(x;\xi)\right)_{i,n}$$

et

$$L_{p,q}(\tau) : W \mapsto -\int_{\overline{\xi}\in\Omega} d\overline{\xi} \exp\left(i\tau\lambda_q(\overline{\xi}) - i\tau\lambda_p(\xi)\right)$$

$$\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_p(\xi)]_{m,n}\hat{R}_{j,k,l,m}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})W_{k,l}(x;\overline{\xi})\right)_{i,n}$$

3.3.4 Preuves.

Les propositions 3.54, 3.58 et 3.60 de ce paragraphe sont consacrées à l'étude des termes négligeables de la décomposition (79). Les expressions analytiques des opérateurs θ_p^ε et $S_{p,q}^\varepsilon$ et de leurs composés s'obtiennent en itérant les formules suivantes issues de (74) et (75) :

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_p^\varepsilon(t) : W \mapsto \mathcal{F}_{\%x'}^{-1} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \Pi_p(\xi+\varepsilon x'/2)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\varepsilon x'/2-\eta/2)\mathcal{F}_{\%x}W(x'-\eta/\varepsilon;\xi-\eta/2)d\eta \\ \\ \theta_p^\varepsilon(t)^* : W \mapsto \mathcal{F}_{\%x'} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \mathcal{F}_{\%x}^{-1}W(x'+\eta/\varepsilon;\xi+\eta/2)\Pi_p(\xi+\varepsilon x'/2+\eta)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\varepsilon x'/2+\eta/2)d\eta \end{array}\right. \tag{80}$$

$$\left\{\begin{array}{l} S_{p,q}^\varepsilon(t) : W \mapsto \mathcal{F}_{\%x'}^{-1}\left\{\exp\left(i\frac{t}{\varepsilon}\lambda_q(\xi+\varepsilon x'/2)-i\frac{t}{\varepsilon}\lambda_p(\xi-\varepsilon x'/2)\right)\mathcal{F}_{\%x}W(x';\xi)\right\} \\ \\ S_{p,q}^\varepsilon(t)^* : W \mapsto \mathcal{F}_{\%x'}\left\{\exp\left(i\frac{t}{\varepsilon}\lambda_q(\xi+\varepsilon x'/2)-i\frac{t}{\varepsilon}\lambda_p(\xi-\varepsilon x'/2)\right)\mathcal{F}_{\%x}^{-1}W(x';\xi)\right\} \end{array}\right. \tag{81}$$

Ce faisant on peut dors et déjà remarquer qu'il s'agira toujours d'équations intégrales portant sur la transformée de Wigner L^2 vue à travers l'isomorphisme $\mathcal{F}_{\%x}$ isométrique.

Proposition 3.54 *Le terme $C_{p,q}^\varepsilon$ de la décomposition (79) est négligeable $C_{p,q}^\varepsilon \to 0$ dans S' uniformément en temps.*

Preuve. Commencons par une borne :

$$\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\left(\theta_q^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\right) \tag{82}$$

$$= \int\int d\eta d\nu \mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\nu)-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\right)$$

$$\Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\eta+\nu)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu)\Pi_q(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\nu)\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2})$$

est majoré en module par

$$\int\int d\eta d\nu |\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi|(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})|\hat{a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu)|\hat{a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2})$$

$$= \int\int d\eta d\nu \frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu)}{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu\rangle^m}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{m}}a|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2})}{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle^m}$$

$$F_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu)\langle\frac{\varepsilon}{2}(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon})\rangle^{2m}\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle^{2m}|\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi|(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})$$

$$\leq \| F_\varepsilon \|_\infty \int\int d\eta d\nu \left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}\right)\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{m}}a|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}\right)$$

$$|\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\left(\langle\xi\rangle^{2m}\langle D_x\rangle^{2m}\varphi\right)|(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})$$

où

$$F_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu) = \left[\frac{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle}\right]^m\left[\frac{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle\nu\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}\rangle}\right]^m$$

est borné par la sous-multiplicativité $\langle x+y\rangle \leq \sqrt{2}\langle x\rangle\langle y\rangle \qquad \forall x;y\in\mathbb{R}^N$.

En prenant la norme $L^2(x';\xi)$ on obtient

$$\| \theta_q^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi \|_{L^2} \leq C^{ste}(a) \| \langle\xi\rangle^{2m}\langle D_x\rangle^{2m}\varphi \|_{L^2}$$

$$\text{symétriquement } \| \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi \|_{L^2} \leq C^{ste}(a) \| \langle\xi\rangle^{2m}\langle D_x\rangle^{2m}\varphi \|_{L^2}$$

$$\text{où } C^{ste}(a) = C^{ste}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(t;\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta$$

Par dualité

$$\left[C_{p,q}^\varepsilon|\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \left[W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u](\tau) - < W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > (\tau)|\theta_q^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\right] d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \left[W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u](\tau) - < W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] > (\tau)|\overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\right] d\tau$$

$$\leq 2\sup_{(t-\varepsilon T;t)} \| W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] \|_{L^2} \| \theta_q^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi \|_{L^2}$$

$$+2\sup_{(t-\varepsilon T;t)} \| W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] \|_{L^2} \| \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi \|_{L^2}$$

$$\leq 2 \| \theta_q^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi \|_{L^2} + 2 \| \overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau)^* S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi \|_{L^2}$$

$$\leq C^{ste}(a) \| \langle\xi\rangle^{2m}\langle D_x\rangle^{2m}\varphi \|_{L^2} < \infty$$

$$\text{où } C^{ste}(a) = C^{ste}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(t;\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta$$

Connaissant cette borne sur $C_{p,q}^\varepsilon$ et puisque le but est uniquement d'établir la négligeabilité $[C_{p,q}^\varepsilon|\varphi] \overset{?}{\to} 0$ on peut se permettre de régulariser a dans $C_{p,q}^\varepsilon$ par l'intermédiaire des termes θ_p^ε et θ_q^ε dans lesquels a figure pour que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{x'\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{3m}a}|(t;x';\xi)}{\langle\xi\rangle^m}dx' < \infty$$

alors dans l'identité obtenue à partir de (77) en itérant la formule de Duhamel

$$C_{p,q}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\ \Sigma_{1\leq r\leq M}\{< \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t)S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)\theta_q^\varepsilon(\tau) > \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau S_{p,r}^\varepsilon(\tau-\sigma)R_{p,r}^\varepsilon(\sigma)d\sigma d\tau >$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t)S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)\theta_q^\varepsilon(\tau) > \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau < S_{p,r}^\varepsilon(\tau-\sigma)R_{p,r}^\varepsilon(\sigma) > d\sigma d\tau\}$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\ \Sigma_{1\leq r\leq M}\{< \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t)S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau) > \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau S_{r,q}^\varepsilon(\tau-\sigma)R_{r,q}^\varepsilon(\sigma)d\sigma d\tau >$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta_p^\varepsilon(t)S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau) > \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau < S_{r,q}^\varepsilon(\tau-\sigma)R_{r,q}^\varepsilon(\sigma) > d\sigma d\tau\}$$

on reconnait en facteur de $\sqrt{\varepsilon}$ des termes du type

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}\theta_p^\varepsilon(t)S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)\theta_q^\varepsilon(\tau)S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)\theta_r^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon[\Pi_q^\dagger(\varepsilon D)u;\Pi_p^\dagger(\varepsilon D)u](\sigma)d\sigma d\tau$$

dans lesquels la moyenne figure en diverses positions. Le symbole $\dagger$ dans $\Pi(\varepsilon D)$ indique que le projecteur peut ou non figurer.

Ces termes vont tous s'avérer bornés uniformément en temps. Leur produit par $\sqrt{\varepsilon}$ tend donc vers zéro comme annoncé et la proposition 3.54 est prouvée. En effet

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}\theta_p^\varepsilon(t)S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)\theta_q^\varepsilon(\tau)S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)\theta_r^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon[\Pi_q^\dagger(\varepsilon D)u;\Pi_p^\dagger(\varepsilon D)u](\sigma)d\sigma d\tau|\varphi\right]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}d\tau\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}d\sigma\left[W^\varepsilon[\Pi_q^\dagger(\varepsilon D)u;\Pi_p^\dagger(\varepsilon D)u](\sigma)|\theta_r^\varepsilon(\sigma)^*S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)^*\theta_q^\varepsilon(\tau)^*S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\right]$$

$$\leq\sup_{(t;t-2\varepsilon T)}\parallel W^\varepsilon[\Pi_q^\dagger(\varepsilon D)u;\Pi_p^\dagger(\varepsilon D)u]\parallel_{L^2}\parallel\theta_r^\varepsilon(\sigma)^*S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)^*\theta_q^\varepsilon(\tau)^*S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\parallel_{L^2}$$

$$\leq\parallel\theta_r^\varepsilon(\sigma)^*S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)^*\theta_q^\varepsilon(\tau)^*S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\parallel_{L^2}$$

or en itérant (80) et (81) on calcule

$$\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\left(\theta_r^\varepsilon(\sigma)^*S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)^*\theta_q^\varepsilon(\tau)^*S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\right)$$

$$=\int\int\int d\eta\,d\nu\,d\lambda\,\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon}+\frac{\lambda}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2})\Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\eta+\nu+\lambda)$$

$$\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu+\lambda)\Pi_q(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\nu+\lambda)\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}+\lambda)\Pi_r(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\lambda)\hat{a}(\frac{\sigma}{\varepsilon};\lambda;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\lambda}{2})$$

$$\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\nu+\lambda)-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\right)\exp\left(i\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon}\lambda(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\lambda)-i\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon}\lambda(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\right)$$

Cette quantité est majorée en module par

$$\int\int\int d\eta\,d\nu\,d\lambda\,|\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi|(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon}+\frac{\lambda}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2})$$

$$|\hat{a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu+\lambda)|\hat{a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}+\lambda)|\hat{a}|(\frac{\sigma}{\varepsilon};\lambda;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\lambda}{2})$$

$$=\int\int\int d\eta\,d\nu\,d\lambda\,F_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu;\lambda)G_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu;\lambda)H_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu;\lambda)$$

$$\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{3m}a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu+\lambda)}{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu+\lambda\rangle^m}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}+\lambda)}{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}+\lambda\rangle^m}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{m}a}|(\frac{\sigma}{\varepsilon};\lambda;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\lambda}{2})}{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle^m}$$

$$\langle\frac{\varepsilon}{2}(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon}+\frac{\lambda}{\varepsilon})\rangle^{3m}\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle^{3m}|\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi|(x'+\frac{\eta}{\varepsilon}+\frac{\nu}{\varepsilon}+\frac{\lambda}{\varepsilon};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2})$$

où

$$F_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu;\lambda)=\left[\frac{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\nu+\lambda\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle}\right]^m$$

$$G_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu;\lambda)=\left[\frac{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2}+\lambda\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle\nu\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle}\right]^m$$

$$H_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu;\lambda)=\left[\frac{\langle\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle\nu\rangle\langle\lambda\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}\rangle}\right]^m$$

sont tous trois bornés par la sous-multiplicativité $\langle x+y\rangle\leq\sqrt{2}\langle x\rangle\langle y\rangle \qquad \forall x;y\in\mathbb{R}^N$.
En prenant la norme $L^2(x';\xi)$ on obtient

$$\parallel\theta_r^\varepsilon(\sigma)^*S_{\dots}^\varepsilon(\tau-\sigma)^*\theta_q^\varepsilon(\tau)^*S_{\dots}^\varepsilon(t-\tau)^*\theta_p^\varepsilon(t)^*\varphi\parallel_{L^2}\leq C^{ste}(a)\parallel\langle\xi\rangle^{3m}\langle D_x\rangle^{3m}\varphi\parallel_{L^2}$$

$$\text{où } C^{ste}(a)=C^{ste}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{3m}a}|(t;\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta$$

□

Proposition 3.55 $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<R_{p,q}^\varepsilon>\in S'$ *est borné uniformément en temps.*

Preuve. Vue la décomposition

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}R_{p,q}^\varepsilon=\Sigma_{1\leq r\leq M}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\theta_q^\varepsilon W_{r,p}^\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\overline{\theta}_p^\varepsilon W_{q,r}^\varepsilon$$

il suffit de borner $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\theta_r^\varepsilon W_{q,p}^\varepsilon$ symétriquement $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\overline{\theta}_r^\varepsilon W_{q,p}^\varepsilon$ en moyenne dans S' pour tous $1\leq p;q;r\leq M$. Or d'après (78) aux indices près on a

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<\theta_r^\varepsilon(t)W_{q,p}^\varepsilon(t)>=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t<\theta_r^\varepsilon(t)S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)\theta_q^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u](\tau)>d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t<\theta_r^\varepsilon(t)S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}_p^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u](\tau)>d\tau$$

où $\theta_p^\varepsilon(\tau)^*S_{p,q}^\varepsilon(t-\tau)^*\overline{\theta}_r^\varepsilon(t)^*\varphi\in L^2$ est borné $\forall\varphi\in S$ d'après le tout début de la preuve précédente.

□

Proposition 3.56 (Equicontinuité)

Pour chaque $1\leq p\leq M$ *la famille* $<W_{p,p}^\varepsilon>\subset C^0[\mathbb{R}_t^1;\sigma(L^2;L^2)]$ *est équicontinue. Il existe dans* $(<W_{p,p}^\varepsilon>)$ *des extractions* $\sigma(L^2;L^2)$*-convergentes localement uniformément en temps.*

PREUVE. C'est une redite de l'argument d'équicontinuité détaillé dans la partie précédente au moment de la proposition 3.49.
□

Proposition 3.57 (Orthogonalité en moyenne) *Lorsque* $1 \leq q \neq p \leq M$ *sont différents*

$$< W^{\varepsilon}_{q,p} > \to 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^N_x \times \Omega_\xi)$$

PREUVE. En tant que distribution de toutes les variables temps inclus :

$$i\left[\lambda_q(\xi + \varepsilon D/2) - \lambda_p(\xi - \varepsilon D/2)\right] < W^{\varepsilon}_{q,p} > = \varepsilon \partial_t < W^{\varepsilon}_{q,p} > + \varepsilon < \frac{R^{\varepsilon}_{p,q}}{\sqrt{\varepsilon}} > \to 0$$

car $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < R^{\varepsilon}_{p,q} > \in S'$ reste borné d'après la proposition 3.55,
donc $i(\lambda_q - \lambda_p)(\xi) \lim_{\varepsilon \to 0} < W^{\varepsilon}_{q,p} > = 0$ par continuité de λ_p et λ_q partout.
En restreignant à l'ouvert Ω la division par $\lambda_q - \lambda_p$ devient possible, d'où l'assertion.
□

Par construction avec ou sans moyenne :

Proposition 3.58 *Le terme* $N^{\varepsilon}_{p,q}$ *de la décomposition (79) est négligeable*
$N^{\varepsilon}_{p,q} \to 0$ *dans* S' *uniformément en temps.*

PREUVE. L'opérateur $K^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau)$, respectivement $L^{\varepsilon}_{p,q}(t;\tau)$, s'obtient en remplacant $\varepsilon x'$ par zéro dans $\theta^{\varepsilon}_p(t) S^{\varepsilon}_{p,q}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}_q(\tau)$, respectivement dans $\theta^{\varepsilon}_p(t) S^{\varepsilon}_{p,q}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}_p(\tau)$, ainsi qu'on le voit dans la formulation (82) par exemple. Le terme $N^{\varepsilon}_{p,q}$ mesure la différence entre $\theta^{\varepsilon}_p(t) S^{\varepsilon}_{p,q}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}_q(\tau)$ respectivement $\theta^{\varepsilon}_p(t) S^{\varepsilon}_{p,q}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}_p(\tau)$ et sa limite formelle. Nous l'estimerons précisément par dualité

$$\left[N^{\varepsilon}_{p,q} | \varphi\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} d\eta \int_{\mathbb{R}^N} d\nu \left[\mathcal{F}_{\%x} < W^{\varepsilon}[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > (\tau; x' - \frac{\eta}{\varepsilon} - \frac{\nu}{\varepsilon}; \xi - \frac{\eta}{2} - \frac{\nu}{2}) | \alpha^{t,\tau}_{\varepsilon}(x';\xi;\eta;\nu)\right]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^N} d\eta \int_{\mathbb{R}^N} d\nu \left[\mathcal{F}_{\%x} < W^{\varepsilon}[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] > (\tau; x' - \frac{\eta}{\varepsilon} - \frac{\nu}{\varepsilon}; \xi - \frac{\eta}{2} + \frac{\nu}{2}) | \beta^{t,\tau}_{\varepsilon}(x';\xi;\eta;\nu)\right]$$

avec

$$\alpha^{t,\tau}_{\varepsilon}(x';\xi;\eta;\nu) = \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi - \eta + \frac{\varepsilon x'}{2}) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi - \frac{\varepsilon x'}{2})\right)\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)$$

$$\Pi_p(\xi + \frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi - \eta + \frac{\varepsilon x'}{2})\Pi_q(\xi - \eta + \frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi + \frac{\varepsilon x'}{2} - \eta - \frac{\nu}{2})$$

$$-\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi - \eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)\Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta)\Pi_q(\xi-\eta)\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2})$$

et

$$\beta^{t,\tau}_{\varepsilon}(x';\xi;\eta;\nu) = \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi + \frac{\varepsilon x'}{2} - \eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi - \frac{\varepsilon x'}{2})\right)$$

$$\widehat{a^*}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\nu}{2})\Pi_p(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)\Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\frac{\varepsilon x'}{2}-\frac{\eta}{2})$$

$$-\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta)-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)\widehat{a^*}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi+\frac{\nu}{2})\Pi_p(\xi)\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)\Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2})$$

Nous allons vérifier $\int\int \parallel \alpha_\varepsilon^{t,\tau} \parallel_{L^2(x';\xi)} d\eta d\nu \to 0$ en détail. En analysant $\beta_\varepsilon^{t,\tau}$ de la même manière on aboutit ainsi à la conclusion

$$\left[N^\varepsilon_{p,q}|\varphi\right] \leq \int\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \parallel \alpha_\varepsilon^{t,\tau} \parallel_{L^2(x';\xi)} + \parallel \beta_\varepsilon^{t,\tau} \parallel_{L^2(x';\xi)} d\eta d\nu \to 0$$

et la proposition 3.58 est prouvée.

Pour cela décomposons

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\right)\mathcal{F}^{-1}_{\%x}(\nabla_x\varphi)(x';\xi)\alpha_\varepsilon^1+\alpha_\varepsilon^2$$

avec

$$\alpha_\varepsilon^1 = \int_0^1 \Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2})\partial_\xi\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2})\Pi_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2})ds$$

$$+\int_0^1 \Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2})\Pi_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})\partial_\xi\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2})ds$$

et

$$\alpha_\varepsilon^2 = \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\right)\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)$$

$$\Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta)\Pi_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2})$$

$$-\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta)-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)\Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta)\Pi_q(\xi-\eta)\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2})$$

Moralement α_ε^1 exprime l'erreur commise en remplacant $\varepsilon x'$ par zéro dans les (deux) facteurs $\hat{a}$ figurant dans α_ε tandis que α_ε^2 correspond à l'approximation dans les facteurs Π et λ.

En contrôlant les exponentielles imaginaires et les projecteurs orthogonaux par 1, α_ε^1 se majore en module par

$$|\alpha_\varepsilon^1| \leq \int_0^1 |\partial_\xi\hat{a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2})|\hat{a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2})ds$$

$$+\int_0^1 |\hat{a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2})|\partial_\xi\hat{a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2})ds$$

$$=\int_0^1 \langle\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle^{2m}\langle\xi\rangle^{2m}F_\varepsilon(sx';\xi;\eta;\nu)ds$$

$$\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}\partial_\xi a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2})}{\langle\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle^m}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^m a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2})}{\langle\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle^m}$$

$$+\int_0^1 \langle\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle^{2m}\langle\xi\rangle^{2m}F_\varepsilon(sx';\xi;\eta;\nu)ds$$

$$\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2})}{\langle\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle^m}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{m}\partial_\xi a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2})}{\langle\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle^m}$$

où

$$F_\varepsilon(x';\xi;\eta;\nu)=\left[\frac{\langle\xi-\eta+\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle}{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle\langle\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle}\right]^m\left[\frac{\langle\xi-\eta-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle}{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle\langle\nu\rangle\langle\frac{\varepsilon s x'}{2}\rangle}\right]^m$$

est borné par sous-multiplicativité.
En prenant la norme $L^2(x;\xi)$ on obtient

$$\int\int \parallel \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{F}^{-1}_{\%x}(\nabla_x\varphi)\alpha^1_\varepsilon \parallel_{L^2(x';\xi)} d\eta d\nu \leq \varepsilon C^{ste}(a) \parallel \langle\xi\rangle^{2m}\langle D_x\rangle^{2m}\nabla_x\varphi \parallel_{L^2}$$

$$C^{ste}(a)=C^{ste}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}\partial_\xi a}|(t;\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)\left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int_{\nu\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(\tau;\nu;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\nu\right)$$

Il reste à négliger α^2_ε. Pour simplifier la présentation nous ferons comme si les toutes matrices commutaient (c'est bien sûr faux en général) ainsi les exponentielles imaginaires et les projecteurs se trouvent regroupés (dans G^η_ε). Avec cet abus de notation, dont le seul but est d'éviter l'estimation facteur par facteur des produits matriciels non commutatifs, α^2_ε se majore en module par

$$F(\xi;\eta;\nu)\langle\xi\rangle^{2m}|\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi(x';\xi)||G^\eta_\varepsilon(x';\xi)|\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\eta)}{\langle\xi-\eta\rangle^m}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{m}a}|(\frac{\tau}{\varepsilon};\nu;\xi-\eta-\frac{\nu}{2})}{\langle\xi-\eta-\frac{\nu}{2}\rangle^m}$$

où

$$F(\xi;\eta;\nu)=\left[\frac{\langle\xi-\eta\rangle}{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle}\right]^m\left[\frac{\langle\xi-\eta-\frac{\nu}{2}\rangle}{\langle\xi\rangle\langle\eta\rangle\langle\nu\rangle}\right]^m \text{ est borné par sous-multiplicativité,}$$

et

$$G^\eta_\varepsilon(x';\xi)=\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi-\frac{\varepsilon x'}{2})\right)\Pi_p(\xi+\frac{\varepsilon x'}{2})\Pi_q(\xi-\eta+\frac{\varepsilon x'}{2})$$
$$-\exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta)-i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)\Pi_p(\xi)\Pi_q(\xi-\eta)$$

En prenant la norme $L^2(x';\xi)$ on obtient

$$\int\int \parallel \alpha^2_\varepsilon \parallel_{L^2(x';\xi)} d\eta d\nu \leq C^{ste}(a)\int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \parallel G^\eta_\varepsilon\,\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi \parallel_{L^2}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta$$

où

$$C^{ste}(a)=C^{ste}\left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}}\int_{\nu\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{m}a}|(\tau;\nu;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\nu\right)$$

Lorsque η est fixé $\parallel G^\eta_\varepsilon\,\mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi \parallel_{L^2}\to 0$ en restant borné par $2 \parallel \mathcal{F}^{-1}_{\%x}\varphi \parallel_{L^2}$. C'est la continuité des translations dans L^2_{loc}. Par l'hypothèse (70)

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(t;\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}\in L^1_+(\eta)$$

la convergence est dominée d'où $\int\int \parallel \alpha_\varepsilon^2 \parallel_{L^2(x';\xi)} d\eta d\nu \to 0$ ce qu'il fallait démontrer.
$\square$

Les propositions 3.54 et 3.58 prouvent l'approximation

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < I_{p,q}^\varepsilon >= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < W^\varepsilon[\Pi_p(\varepsilon D)a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)\Pi_q(\varepsilon D)u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > \tag{83}$$

$$\approx \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < K_{p,q}^\varepsilon(t;\tau) >< W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > (\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < L_{p,q}^\varepsilon(t;\tau) >< W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] > (\tau)d\tau$$

On peut alors invoquer l'hypothèse de corrélation sous la forme

$$< \hat{a}_{i,j}(t;x';\xi)\hat{a}_{k,l}(\tau;y';\eta) >= \hat{R}_{i,j,k,l}(t-\tau;x';\xi;\eta)\delta_0(x'+y')$$

appliquée au test dans la formulation duale de l'équation (83),

d'où l'intégration contre $\delta_0(\eta+\nu)d\eta d\nu$ responsable de la disparition par moyenne de l'exponentielle oscillante $e^{2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}$, en bref

$$< K_{p,q}^\varepsilon(t;\tau) >: W \mapsto \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} d\eta \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)$$

$$< \Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2})\Pi_q(\xi-\eta)\hat{a}(\frac{\tau}{\varepsilon};''\nu'';\xi-\frac{\eta}{2})W(x;\xi) >$$

$$= +\int_{\eta\in\mathbb{R}^N} d\eta \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)$$

$$\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_q(\xi-\eta)]_{k,l}\hat{R}_{j,k,l,m}(\frac{t-\tau}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2};\xi-\frac{\eta}{2})W_{m,n}(x;\xi)\right)_{i,n}$$

et

$$< L_{p,q}^\varepsilon(t;\tau) >: W \mapsto \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} d\eta \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)$$

$$< \Pi_p(\xi)\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2})W(x;\xi-\eta)\widehat{a^*}(\frac{\tau}{\varepsilon};''\nu'';\xi-\frac{\eta}{2})\Pi_p(\xi) >$$

$$= -\int_{\eta\in\mathbb{R}^N} d\eta \exp\left(i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_q(\xi-\eta) - i\frac{t-\tau}{\varepsilon}\lambda_p(\xi)\right)$$

$$\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_p(\xi)]_{m,n}\hat{R}_{j,k,l,m}(\frac{t-\tau}{\varepsilon};\eta;\xi-\frac{\eta}{2};\xi-\frac{\eta}{2})W_{k,l}(x;\xi-\eta)\right)_{i,n}$$

Rappelons que $a^* = -a$ est antiautoadjoint .

Nous allons maintenant réduire les formulations intégrales précédentes au seul domaine utile Ω en invoquant la construction du prolongement des projecteurs propres de p à l'extérieur de Ω par zéro.

Proposition 3.59 $W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] - \Pi_q(\xi)W^\varepsilon[u;u] \to 0$
faiblement $\sigma(L^2;L^2)$ uniformément en temps.

PREUVE. Par dualité

$$[W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u]-\Pi_q(\xi)W^\varepsilon[u;u]|\varphi]=\left[\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u]-\Pi_q(\xi)\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon[u;u]|\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi\right]$$

$$=\int\int\left(\Pi_q(\xi+\varepsilon x'/2)-\Pi_q(\xi)\right)\mathcal{F}_{\%x}W^\varepsilon[u;u](x';\xi)\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi(x';\xi)dx'd\xi$$

$$\leq\| W^\varepsilon \|_{L^2}\| \mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi(x';\xi)\left(\Pi_q(\xi+\varepsilon x'/2)-\Pi_q(\xi)\right)\|_{L^2(x';\xi)}$$

$$\leq\left(\int_{x'\in\mathbb{R}^N}\left(\int_{\xi\in\mathbb{R}^N}|\Pi_q(\xi+\varepsilon x'/2)-\Pi_q(\xi)|^2|\mathcal{F}_{\%x}^{-1}\varphi|^2(x';\xi)d\xi\right)dx'\right)^{1/2}$$

tend vers zéro pour φ régulier par convergence dominée et continuité des translations dans L^2_{loc}. Or $W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u]-\Pi_q(\xi)W^\varepsilon[u;u]\in L^2$ est borné uniformément en temps, d'où l'assertion.

□

Proposition 3.60 *Le terme $E^\varepsilon_{p,q}$ de la décomposition (79) est négligeable $E^\varepsilon_{p,q}\to 0$ dans S' uniformément en temps.*

PREUVE. Par construction du prolongement de Π_q par zéro à l'extérieur de Ω on a

$$<K^\varepsilon_{p,q}(t;\tau)=K_{p,q}(\frac{t-\tau}{\varepsilon})>$$

donc le terme $E^\varepsilon_{p,q}$ se réduit à la contribution due à $L^{(\varepsilon)}_{p,q}$ à savoir

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t\left(<L^\varepsilon_{p,q}(t;\tau)>-L_{p,q}(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\right)<W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u]>(\tau)d\tau|\varphi\right]$$

$$=<\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t\left[W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u](\tau)-\Pi_qW^\varepsilon[u;u](\tau)|\left(<L^\varepsilon_{p,q}(t;\tau)>-L_{p,q}(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\right)^*\varphi\right]d\tau>$$

$$=<\int_0^T\left[\left(W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u]-\Pi_qW^\varepsilon[u;u]\right)(t-\varepsilon\tau)|I(\tau)\varphi\right]d\tau> \tag{84}$$

avec

$$I(\tau)\varphi=-\mathbb{I}_{\mathbb{R}^N-\Omega}(\xi)\int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N}d\overline{\xi}\exp\left(i\tau\lambda_q(\xi)-i\tau\lambda_p(\xi+\overline{\xi})\right)$$

$$\left([\Pi_p(\xi+\overline{\xi})]_{i,j}[\Pi_p(\xi+\overline{\xi})]_{m,n}\hat{R}_{j,k,l,m}(\tau;\overline{\xi};\xi+\overline{\xi}/2;\xi+\overline{\xi}/2)[\varphi(x;\xi+\overline{\xi})]_{n,p}\right)_{k,l}$$

de norme L^2 majorée par $\| I(\tau)\varphi \|_{L^2}$

$$\leq\left\|\int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N}\langle\xi+\overline{\xi}\rangle^{2m}\| \varphi \|_{L^2(x)}(\xi+\overline{\xi})\frac{\langle\overline{\xi}\rangle^{2m}|\hat{R}|(\tau;\overline{\xi};\xi+\overline{\xi}/2;\xi+\overline{\xi}/2)}{\langle\xi+\overline{\xi}/2\rangle^{2m}}\left[\frac{\langle\xi+\overline{\xi}/2\rangle}{\langle\xi+\overline{\xi}>\langle\overline{\xi}\rangle}\right]^{2m}d\overline{\xi}\right\|_{L^2(\xi)}$$

$$\leq C^{ste}\| \langle\xi\rangle^{2m}\varphi \|_{L^2}\int_{x'\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}R}|(\tau;x';\xi;\xi)}{\langle\xi\rangle^{2m}}dx'$$

La corrélation hérite par moyenne des inégalités (70) supposées sur a précisément

$$\sup_{(\xi;\eta)\in\mathbb{R}^{2N}}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}R}|(t;x';\xi;\eta)}{\langle\xi\rangle^m\langle\eta\rangle^m}\in L^\infty[\mathbb{R}_t;L^1(\mathbb{R}^N_{x'})]$$

Par convergence dominée sur l'intervalle de temps $(0;T)$ le terme (84) tend donc vers zéro uniformément en temps (t) d'après la négligeabilité faible $\sigma(L^2;L^2)$ énoncée dans la proposition 3.59.

□

Proposition 3.61 *Dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^N \times \Omega_\xi)$ *au moins*

$$\int_0^T K_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > (t-\varepsilon\tau)d\tau \to \left(\int_0^T K_{p,q}(\tau)d\tau\right) < W^\varepsilon_{p,p}(t) >$$

$$\int_0^T L_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] > (t-\varepsilon\tau)d\tau \to \left(\int_0^T L_{p,q}(\tau)d\tau\right) < W^\varepsilon_{q,q}(t) >$$

Preuve. Dans la décomposition par linéarité

$$\int_0^T K_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon[u;\Pi_p(\varepsilon D)u] > (t-\varepsilon\tau)d\tau + \int_0^T L_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon[\Pi_q(\varepsilon D)u;u] > (t-\varepsilon\tau)d\tau$$

$$= \left(\int_0^T K_{p,q}(\tau)d\tau\right) < W^\varepsilon_{p,p}(t) > + \left(\int_0^T L_{p,q}(\tau)d\tau\right) < W^\varepsilon_{q,q}(t) >$$

$$+ \int_0^T K_{p,q}(\tau)\left(< W^\varepsilon_{p,p} > (t-\varepsilon\tau) - < W^\varepsilon_{p,p}(t) >\right)d\tau \tag{85}$$

$$+ \int_0^T L_{p,q}(\tau)\left(< W^\varepsilon_{q,q} > (t-\varepsilon\tau) - < W^\varepsilon_{q,q}(t) >\right)d\tau \tag{86}$$

$$+\Sigma_{r\neq p}\int_0^T K_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon_{r,p} > (t-\varepsilon\tau)d\tau + \int_0^T L_{p,q}(\tau) < W^\varepsilon_{q,r} > (t-\varepsilon\tau)d\tau \tag{87}$$

les termes diagonaux (85) et (86) sont négligeables dans S' localement uniformément en temps d'après l'équicontinuité de la proposition 3.56 quitte à extraire,

tandis que les termes non diagonaux (87) sont négligeables dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^N \times \Omega_\xi)$ d'après la proposition 3.57, peut-être pas localement uniformément en temps, mais ce n'est finalement pas gênant.

□

Le théorème 3.26 est prouvé en rassemblant l'analyse due aux propositions 3.54, 3.58, 3.60 et 3.61 des différents termes de la décomposition (79).

3.3.5 Asymptotique $T \to \infty$.

Si f_p désigne la limite de $< W^{\varepsilon}_{p,p} >$ pour chaque $1 \leq p \leq M$ on peut chercher dans l'évolution limite

$$\partial_t f_p + \nabla \lambda_p(\xi).\nabla_x f_p = \sigma_T[f_p]_{1\leq p\leq M}$$

$$\text{où } \sigma_T[f_p]_{1\leq p\leq M} = \Sigma_{1\leq q\leq M}\ 2 \text{ Re } \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} d\overline{\xi}$$

$$\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_q(\overline{\xi})]_{k,l}T\hat{\hat{R}}_{j,k,l,m}\left(T\lambda_p(\xi) - T\lambda_q(\overline{\xi}); \xi - \overline{\xi}; \frac{\xi+\overline{\xi}}{2}; \frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)[f_p]_{m,n}(t;x;\xi)\right)_{i,n}$$

$$-\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_p(\xi)]_{m,n}T\hat{\hat{R}}_{j,k,l,m}\left(T\lambda_p(\xi) - T\lambda_q(\overline{\xi}); \xi - \overline{\xi}; \frac{\xi+\overline{\xi}}{2}; \frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)[f_q]_{k,l}(t;x;\overline{\xi})\right)_{i,n}$$

à faire tendre vers l'infini le temps T jusqu'alors fixé.

Remarque. Cette formulation du théorème 3.26 où T apparait dans la section efficace $\sigma_T[f_p]_{1\leq p\leq M}$ correspond au scaling du problème 69 de départ sous la forme

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t u^\varepsilon = p(\varepsilon D)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon T}; \frac{x}{\varepsilon}; \varepsilon D)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u^\varepsilon_I \in L^2(\mathbb{R}^N)^M \end{cases}$$

où le temps après lequel il y a décorrélation est normalisé

$$t > \tau + 1 \Rightarrow \mathbb{E}\left(a^W(t;x;\varepsilon D)|\mathcal{F}_\tau\right) = 0$$

Le but de ce paragraphe est de proposer certaines hypothèses sur les valeurs propres et la corrélation autorisant le passage à la limite $T \to \infty$.

Supposons les valeurs propres de p radiales croissantes sur $\Omega = \mathbb{R}^N - \{0\}$ précisément

$$\lambda_k : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R} \qquad \lambda'_k > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^*_+ \qquad (1 \leq k \leq M)$$

Supposons une croissance à l'infini

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \lambda_k(r) \geq r^\alpha \text{ lorsque } r \to \infty$$

et une régularité en temps de la corrélation en conséquence

$$\exists n > \frac{N}{2} \text{ tel que } \langle\omega\rangle^{n/\alpha} \sup_{(\xi;\eta)\in\mathbb{R}^{2N}} \frac{\langle x'\rangle^{2m}|\hat{\hat{R}}|(\omega;x';\xi;\eta)}{\langle\xi\rangle^m\langle\eta\rangle^m} \in L^1_+[\mathbb{R}_\omega; L^\infty(\mathbb{R}^N_{x'})]$$

Remarque. Il s'agit d'une restriction supplémentaire à la régularité du même genre héritée des hypothèses (70) par moyenne

$$\sup_{(\xi;\eta)\in\mathbb{R}^{2N}} \frac{\langle x'\rangle^{2m}|\hat{R}|(t;x';\xi;\eta)}{\langle\xi\rangle^m\langle\eta\rangle^m} \in L^\infty[\mathbb{R}_t; L^1(\mathbb{R}^N_{x'})]$$

Alors :

Proposition 3.62 *$\sigma_T[f] \to \sigma_\infty[f]$ faiblement $\sigma(L^2;L^2)$ lorsque $T \to \infty$,*

$$\text{où } \sigma_\infty[f_p]_{1\le p\le M} = \Sigma_{1\le q\le M}\ 2\ \mathrm{Re}\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{\mathbb{S}^{N-1}} du\, \frac{|\xi|^{N-1}}{\lambda_p'(|\xi|)}$$

$$+\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_q(\overline{\xi})]_{k,l}\hat{\hat{R}}_{j,k,l,m}\left(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)[f_p]_{m,n}(t;x;\xi)\right)_{i,n}$$

$$-\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_p(\xi)]_{m,n}\hat{\hat{R}}_{j,k,l,m}\left(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)[f_q]_{k,l}(t;x;\overline{\xi})\right)_{i,n}$$

où le symbole $\overline{\xi}$ vaut pour $\lambda_q^{-1}(\lambda_p(\xi))\,u$ partout où il figure.

Mentionnons une autre manière (condensée) de noter cet opérateur intégral :

$$\sigma_\infty[f_p]_{1\le p\le M} = \Sigma_{1\le q\le M}\ 2\ \mathrm{Re}\ \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} d\overline{\xi}\, \frac{|\xi|^{N-1}}{\lambda_p'(|\xi|)}$$

$$+\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_q(\overline{\xi})]_{k,l}\hat{R}_{j,k,l,m}\left(0;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)[f_p]_{m,n}(t;x;\xi)\,\delta_0\left(\lambda_p(\xi)=\lambda_q(\overline{\xi})\right)\right)_{i,n}$$

$$-\left([\Pi_p(\xi)]_{i,j}[\Pi_p(\xi)]_{m,n}\hat{R}_{j,k,l,m}\left(0;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)[f_q]_{k,l}(t;x;\overline{\xi})\,\delta_0\left(\lambda_p(\xi)=\lambda_q(\overline{\xi})\right)\right)_{i,n}$$

Preuve. Nous étudierons la convergence dans $L^2 = L^2(\overline{\xi})$ du terme modèle

$$\sigma_T : \overline{\xi} \mapsto \int_{\xi\in\mathbb{R}^N} \varphi(\xi)\Pi(\xi)\Pi(\xi)T\hat{\hat{R}}\left(T\lambda_p(\xi)-T\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)d\xi$$

lorsque $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N-\{0\})$ est fixé.

Par le changement de variables radial $\xi = ru \leftrightarrow d\xi = r^{N-1}drdu$ on a

$$\sigma_T : \overline{\xi} \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} du \int_0^\infty dr\, \varphi(\xi)\Pi(\xi)\Pi(\xi)T\hat{\hat{R}}\left(T\lambda_p(r)-T\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)r^{N-1}$$

Par le changement de variables $r = \lambda_p^{-1}\left(\frac{\omega}{T}+\lambda_q(\overline{\xi})\right) \leftrightarrow Tdr = \frac{d\omega}{\lambda_p'(r)}$ on a

$$\sigma_T : \overline{\xi} \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} du \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \varphi(\xi)\Pi(\xi)\Pi(\xi)\hat{\hat{R}}\left(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)\frac{r^{N-1}}{\lambda_p'(r)}\mathbb{I}_{\{\lambda_p(r)-\lambda_q(\overline{\xi})\}}(\frac{\omega}{T})$$

La limite formelle $T\to\infty$ dans cette intégrale est justifiable par convergence dominée

$$\left|\varphi(\xi)\Pi(\xi)\Pi(\xi)\hat{\hat{R}}\left(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)\frac{r^{N-1}}{\lambda_p'(r)}\mathbb{I}_{\{\lambda_p(r)-\lambda_q(\overline{\xi})\}}(\frac{\omega}{T})\right| \le F(\xi;\overline{\xi})G_p(r)H(\overline{\xi};\omega)\frac{\rho(\omega)}{\langle\overline{\xi}\rangle^n}$$

avec

$$\rho(\omega) = \langle\omega\rangle^{n/\alpha}\sup_{(x';\xi;\eta)\in\mathbb{R}^{3N}}\frac{\langle x'\rangle^{2m}|\hat{\hat{R}}|(\omega;x';\xi;\eta)}{\langle\xi\rangle^m\langle\eta\rangle^m} \text{ sommable par hypothèse}$$

$$F(\xi;\overline{\xi}) = \left[\frac{\langle\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\rangle}{\langle\xi-\overline{\xi}\rangle\langle\xi\rangle}\right]^{2m} \text{ borné par sous-multiplicativité}$$

$$G_p(r) = \frac{\langle r\rangle^{2m} r^{N-1}}{\lambda_p'(r)}\varphi(\xi) \text{ borné par le support compact du test}$$

$$H(\overline{\xi};\omega) = \left[\frac{\langle\overline{\xi}\rangle}{\langle\omega\rangle^{1/\alpha}}\right]^n$$

Par la relation $\omega = T\lambda_p(r) - T\lambda_q(\overline{\xi})$ c'est-à-dire $\overline{\xi} = \lambda_q^{-1}\left(-\frac{\omega}{T} + \lambda_p(r)\right)$ où r est borné par le support du test, on sait que

$$\langle\overline{\xi}\rangle \leq C_{p,q}^{ste}(\varphi)\langle\omega\rangle^{1/\alpha} \text{ (bien sûr lorsque } T \geq 1 \text{ est minoré)}$$

vue la croissance supposée des valeurs propres à l'infini,

en d'autres termes H est borné dans les conditions de l'intégration.

Finalement :

$$\left|\varphi(\xi)\Pi(\xi)\Pi(\xi)\hat{\hat{R}}\left(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)\frac{r^{N-1}}{\lambda_p'(r)}\mathbb{I}_{\{\lambda_p(r)-\lambda_q(\overline{\xi})\}}(\frac{\omega}{T})\right| \leq C_{p,q}^{ste}(\varphi)\frac{\rho(\omega)}{\langle\overline{\xi}\rangle^n}$$

Lorsque $T \to \infty$ la convergence éventuelle de σ_T dans $L^2 = L^2(\overline{\xi})$ est donc dominée par $\langle\overline{\xi}\rangle^{-n}C_{p,q}^{ste}(\varphi)\int_{\mathbb{R}}\rho \in L_+^2(\overline{\xi})$. Maintenant à $\overline{\xi}$ fixé l'intégrale sur $\mathbb{S}^{N-1}\times\mathbb{R}$ définissant $\sigma_T(\overline{\xi})$ tombe aussi sous le coup du théorème de convergence dominée car $\langle\overline{\xi}\rangle^{-n}C_{p,q}^{ste}(\varphi)\rho(\omega) \in L_+^1(\omega;u)$.

La limite formelle $T \to \infty$ se trouve ainsi justifiée :

$$\sigma_T(\overline{\xi}) \to \sigma_\infty(\overline{\xi}) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} du \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \varphi(\xi)\Pi(\xi)\Pi(\xi)\hat{\hat{R}}(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})\frac{|\xi|^{N-1}}{\lambda_p'(|\xi|)}\mathbb{I}_{\lambda_q(\overline{\xi})=\lambda_q(\xi)}$$

où le symbole ξ vaut pour $\lambda_p^{-1}\left(\lambda_q(\overline{\xi})\right)u$ partout où il figure.

Pour le terme positif dans $\sigma_T[f_p]_{1\leq p\leq M}$ il faudrait aussi étudier en toute rigueur la convergence dans $L^2 = L^2(\xi)$ du terme modèle correspondant

$$\sigma_T : \overline{\xi} \mapsto \varphi(\xi)\int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N}\Pi(\xi)\Pi(\overline{\xi})T\hat{\hat{R}}\left(T\lambda_p(\xi)-T\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)d\overline{\xi}$$

c'est-à-dire la convergence de l'intégrale numérique

$$\int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N}\Pi(\xi)\Pi(\overline{\xi})T\hat{\hat{R}}\left(T\lambda_p(\xi)-T\lambda_q(\overline{\xi});\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2}\right)d\overline{\xi}$$

$$\to \int_{\mathbb{S}^{N-1}} du \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \Pi(\xi)\Pi(\overline{\xi})\hat{\hat{R}}(\omega;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})\frac{|\xi|^{N-1}}{\lambda_p'(|\xi|)}\mathbb{I}_{\lambda_q(\overline{\xi})=\lambda_q(\xi)}$$

où le symbole $\overline{\xi}$ vaut pour $\lambda_q^{-1}\left(\lambda_p(\xi)\right)u$ partout où il figure. L'analyse est similaire.

□

3.4 Systèmes hyperboliques linéaires à coefficients variables.

3.4.1 Modèle et résultat.

Considérons la généralisation du système hyperbolique linéaire précédent

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t u^\varepsilon = p(\varepsilon D)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)^M \end{cases}$$

au cas des coefficients variables

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t u^\varepsilon = p^W(x;\varepsilon D)u^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(t=0) = u_I^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)^M \end{cases} \tag{88}$$

L'inconnue $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t;x) \in \mathbb{C}^M$ est un vecteur complexe à M dimensions initialement borné dans $L^2(\mathbb{R}^N)^M$ indépendamment de $\varepsilon > 0$.

L'opérateur pseudo-différentiel à coefficients non constants $p^W(x;\varepsilon D)$ est l'opérateur de Weyl d'un symbole matriciel complexe $M \times M$ antiautoadjoint $p^* = -p$ satisfaisant

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p|(x;\xi) \leq C_{\alpha,\beta}^{ste}\langle\xi\rangle^m \qquad \forall\alpha\forall\beta \tag{89}$$

La seule antisymétrie symbolique n'implique pas que l'opérateur $p^W(x;\varepsilon D)$ de domaine $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ soit essentiellement antiautoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ ce que nous devrons donc supposer

$$p^W(x;\varepsilon D)^* = -p^W(x;\varepsilon D) \text{ est essentiellement antiautoadjoint} \tag{90}$$

On peut citer le critère proposé dans [GMMP] il suffit qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p|(x;\xi) \leq C_{\alpha,\beta}^{ste}\langle\xi\rangle^{\sigma-|\beta|} \qquad \forall\alpha\forall\beta \\ |\det p|(x;\xi) \geq C^{ste}\langle\xi\rangle^{N\sigma} \text{ lorsque } |\xi| \to \infty \end{cases}$$

La perturbation $a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ est l'opérateur de Weyl d'un symbole $a^* = -a$ matriciel complexe $M \times M$ antiautoadjoint ayant la régularité

$$\begin{cases} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\partial_x^\alpha a}|(t;x';\xi)}{\langle\xi\rangle^m} dx' \leq 1 \text{ pour tout } 0 \leq |\alpha| \leq 2m \\ \\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a}|(t;x';\xi)}{\langle\xi\rangle^m} dx' \leq 1 \text{ pour tout } 0 \leq |\alpha| \leq 2m \text{ et tout } \beta \end{cases} \tag{91}$$

où l'entier $m \in \mathbb{N}$ est moralement l'ordre de croissance polynômiale du symbole a pour la variable de phase. Ici et dans toute la suite $\hat{a}$ désigne la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{\%x}a$ en espace.

Remarque. Seul un nombre fini de β dans (91) serviront (par l'intermédiaire des lemmes 3.25, 3.26, 3.27 et 3.28). On ne restreint donc pas la généralité en normalisant à 1 toutes les constantes.

Comme précedemment l'aléatoire du milieu est modélisé par la perturbation $a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ en supposant que le symbole a est un processus stochastique centré $< a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D) >= 0$ borné au sens des inégalités (91) satisfaisant la propriété de corrélation

$$\begin{cases} < a_{i,j}(t;x;\xi)a_{k,l}(\tau;y;\eta) >= R_{i,j,k,l}(t-\tau;x-y;\xi;\eta) \\ < \hat{a}_{i,j}(t;x';\xi)\hat{a}_{k,l}(\tau;y';\eta) >= \hat{R}_{i,j,k,l}(t-\tau;x';\xi;\eta)\delta_0(x'+y') \end{cases} \tag{92}$$

où R est une matrice à M^4 entrées, de transformée de Fourier en espace $\hat{R}$,
et la propriété d'indépendance (conditionnelle) après un certain temps

$$t > \tau + \varepsilon T \Rightarrow \mathbb{E}\left(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)|\mathcal{F}_{\frac{\tau}{\varepsilon}}\right) = 0$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ désigne la filtration par défaut du processus a^W.

Nous étudierons la transformée de Wigner $W^\varepsilon(t)$ matricielle des solutions du problème (88) dans le cadre fonctionnel $L^2 \times L^2$ c'est-à-dire pour un mélange

$$\begin{cases} W^\varepsilon(t) = W^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon u_n^\varepsilon(t)\otimes u_n^\varepsilon(t)] \\ \Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon| \leq 1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^N}\Sigma_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n^\varepsilon|^2 \leq 1 \\ \{u_{I,n}^\varepsilon \mid n\in\mathbb{N}\} \subset L^2(\mathbb{R}^N)^M \text{ est orthonormale pour tout } \varepsilon \end{cases} \tag{93}$$

en nous limitant à un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N$ (ouvert) dans lequel $p \in L(\mathbb{C}^M)$ se diagonalise bien

$$\begin{cases} p = i\Sigma_{1\leq k\leq M}\lambda_k\Pi_k \in L(\mathbb{C}^M) \\ \Pi_k \text{ projecteur propre orthogonal } \Pi_k^2 = \Pi_k = \Pi_k^* \\ \lambda_k \text{ valeur propre réelle} \\ \lambda_k \text{ et } \Pi_k \text{ sont localement lipschitziens dans } \Omega \end{cases} \tag{94}$$

Comme précédemment l'opérateur $p^W(x;\varepsilon D)$, les données initiales $\{u_{I,n}^\varepsilon \mid n\in\mathbb{N}\} \subset L^2$ orthonormalisées, les coefficients d'occupation λ^ε sont implicitement supposés déterministes, en d'autres termes $\sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ est la seule source de hasard dans ce modèle. En particulier l'inconnue $W^\varepsilon(t=0)$ est initialement déterministe.

Contrairement au cas des coefficients constants l'hypothèse (90) sur p ne suffira pas, nous utiliserons une propriété additionnelle d'ellipticité

$$\text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \parallel p^W(x;\varepsilon D)u \parallel_{L^2} \geq \alpha \parallel \langle\varepsilon D\rangle^m u \parallel_{L^2} \qquad \forall u \in S(\mathbb{R}^N) \tag{95}$$

où $m \in \mathbb{N}$ est l'entier figurant dans (91) alors :

Proposition 3.63 (Conservation de la norme pour les groupes unitaires)
$p^W(x;\varepsilon D) + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ est essentiellement antiautoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ d'où

$$\parallel u^\varepsilon(t) \parallel_{L^2} = \parallel u^\varepsilon(t=0) \parallel_{L^2}$$

$$\parallel \left(p^W(x;\varepsilon D) + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)\right)u^\varepsilon(t) \parallel_{L^2} = \parallel \left(p^W(x;\varepsilon D) + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)\right)u^\varepsilon(t=0) \parallel_{L^2}$$

PREUVE. D'après [K] Ch. V. Para. 4. la perturbation d'un opérateur (essentiellement) autoadjoint par un opérateur symétrique relativement borné par 1 strictement est un opérateur (essentiellement) autoadjoint .

Ici $ip^W(x;\varepsilon D)$ est (essentiellement) autoadjoint par hypothèse et $i\sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ est symétrique par la symétrie symbolique $(ia)^* = (ia)$.

Pour ε petit la borne relative de $i\sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ par rapport à $ip^W(x;\varepsilon D)$ devient inférieure à 1 par l'ellipticité supposée de p car

$$\| \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u \|_{L^2} \leq \sqrt{\varepsilon}C^{ste}(a) \| \langle \varepsilon D\rangle^m u \|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}C^{ste}(a)}{\alpha} \| p^W(x;\varepsilon D)u \|_{L^2}$$

où $C^{ste}(a) := C^{ste} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^m a}|(t;\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m} d\eta$ en vertu du lemme :

Lemme 3.24 $\| a^W(\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u \|_{L^2} \leq C^{ste} \| (1-\varepsilon^2\Delta)^{m/2}u \|_{L^2} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^m a}|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m} d\eta$

PREUVE. En effet

$$a^W(\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u = \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \hat{a}(\eta;\varepsilon x' - \eta/2)\hat{u}(x'-\eta/\varepsilon)d\eta$$

$$= \mathcal{F}^{-1}_{\%x'} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \frac{\widehat{\langle D_x\rangle^m a}(\eta;\varepsilon x'-\eta/2)}{\langle \varepsilon x' - \eta/2\rangle^m} F_\varepsilon(x';\eta)(\langle\varepsilon\cdot\rangle^m\hat{u})(x'-\eta/\varepsilon)d\eta$$

où $F_\varepsilon(x';\eta) = \left[\frac{\langle\varepsilon(x'-\eta/\varepsilon)+\eta/2\rangle}{\langle\varepsilon(x'-\eta/\varepsilon)\rangle\langle\eta\rangle}\right]^m$ est borné par sous-multiplicativité.

On en déduit

$$|\mathcal{F}\left(a^W(\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u\right)| \leq C^{ste} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} |\langle\varepsilon\cdot\rangle^m\hat{u}|(x'-\eta/\varepsilon) \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^m a}|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m} d\eta$$

puis

$$\| a^W(\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u \|_{L^2} \leq C^{ste} \| \langle\varepsilon D\rangle^m u \|_{L^2} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^m a}|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m} d\eta$$

□

Proposition 3.64 (Estimation a priori)

$$\| a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon(t) \|_{L^2} \leq C^{ste}_\alpha(a) \| p^W(x;\varepsilon D)u^\varepsilon_I \|_{L^2}$$

PREUVE. En effet

$$\alpha \| \langle\varepsilon D\rangle^m u^\varepsilon(t) \|_{L^2} \leq \| p^W(x;\varepsilon D)u^\varepsilon(t) \|_{L^2}$$

$$\leq \| \left(p^W(x;\varepsilon D) + \sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)\right) u^\varepsilon(t) \|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon} \| a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon(t) \|_{L^2}$$

$$=\| \left(p^W(x;\varepsilon D)+\sqrt{\varepsilon}a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)\right)u_I^\varepsilon \|_{L^2}+\sqrt{\varepsilon}\| a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$$

$$\leq\| p^W(x;\varepsilon D)u_I^\varepsilon \|_{L^2}+\sqrt{\varepsilon}\| a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u_I^\varepsilon \|_{L^2}+\sqrt{\varepsilon}\| a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$$

$$\leq\| p^W(x;\varepsilon D)u_I^\varepsilon \|_{L^2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}C^{ste}(a)}{\alpha}\| p^W(x;\varepsilon D)u_I^\varepsilon \|_{L^2}+\sqrt{\varepsilon}C^{ste}(a)\| \langle\varepsilon D\rangle^m u^\varepsilon(t)\|_{L^2}$$

donne

$$\| a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon(t)\|_{L^2}\leq C^{ste}(a)\| \langle\varepsilon D\rangle^m u^\varepsilon(t)\|_{L^2}\leq\frac{C^{ste}(a)}{\alpha}\frac{\alpha+\sqrt{\varepsilon}C^{ste}(a)}{\alpha-\sqrt{\varepsilon}C^{ste}(a)}\| p^W(x;\varepsilon D)u_I^\varepsilon \|_{L^2}$$

□

Dans le cas des coefficients variables la projection du système (88) dans les différents niveaux (d'énergie) n'est pas facile. En notant $\{a;b\}=\nabla_\xi a.\nabla_x b-\nabla_x a.\nabla_\xi b$ le crochet de Poisson matriciel on peut citer [GMMP]

- $[W^\varepsilon;p]=-\varepsilon\partial_t W^\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon}\ \mathrm{Re}\ W^\varepsilon(a_\varepsilon^W u^\varepsilon;u^\varepsilon)$
  $+\left(W^\varepsilon(p^W u^\varepsilon;u^\varepsilon)-pW^\varepsilon(u^\varepsilon;u^\varepsilon)\right)+\left(W^\varepsilon(u^\varepsilon;p^W u^\varepsilon)-W^\varepsilon(u^\varepsilon;u^\varepsilon)p^*\right)$
  $\to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_\xi^N)$
  ainsi toute valeur d'adhérence $L^\infty[\mathbb{R}_t;L^2(\mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_\xi^N)]$-faible étoile pour la famille bornée $W^\varepsilon\in L^\infty[\mathbb{R}_t;L^2(\mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_\xi^N)]$ commute avec p.

- $\partial_t W^\varepsilon=\dfrac{W^\varepsilon(p^W(x;\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon)+W^\varepsilon(u^\varepsilon;p^W(x;\varepsilon D)u^\varepsilon)}{\varepsilon}+2\ \mathrm{Re}\ \dfrac{W^\varepsilon(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$
  $=\dfrac{pW^\varepsilon-W^\varepsilon p}{\varepsilon}+\dfrac{\{p;W^\varepsilon\}-\{W^\varepsilon;p\}}{2i}+2\ \mathrm{Re}\ \dfrac{W^\varepsilon(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}+R^\varepsilon$
  où $R^\varepsilon\in S'(\mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_\xi^N)$ est négligeable uniformément en temps.

- $\partial_t\Pi W^\varepsilon\Pi=\dfrac{\Pi(\{p;W^\varepsilon\}-\{W^\varepsilon;p\})\Pi}{2i}+2\ \mathrm{Re}\ \Pi\dfrac{W^\varepsilon(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\Pi+\Pi R^\varepsilon\Pi$
  dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t\times\Omega)$ au moins,
  où Π est un des projecteurs propres (94) de valeur propre associée λ.
  On remarquera l'annulation du terme singulier $\dfrac{1}{\varepsilon}\Pi\,(pW^\varepsilon-W^\varepsilon p)\,\Pi$ par produit avec le projecteur Π car $\Pi p=p\Pi=\lambda\Pi$ où λ est diagonal.

- Tous calculs faits :

$$\frac{\Pi(\{p;W^\varepsilon\}-\{W^\varepsilon;p\})\Pi}{2i}=\{\lambda;\Pi W^\varepsilon\Pi\}+[\Pi W^\varepsilon\Pi;\{\lambda;\Pi\}\Pi-\Pi\{\lambda;\Pi\}]$$
$$+\left[\Pi W^\varepsilon\Pi;\frac{1}{2}\Sigma_{1\leq k\leq M}\lambda_k(-1)^{(\Pi=\Pi_k)}\Pi\{\Pi_k;\Pi_k\}\Pi\right]+S^\varepsilon$$
$$\text{avec } (-1)^{(\Pi=\Pi_k)}=-1 \text{ si } \Pi=\Pi_k \text{ et } (-1)^{(\Pi=\Pi_k)}=+1 \text{ si } \Pi\neq\Pi_k$$

où S^ε est une fonction linéaire continue des commutateurs $[W^\varepsilon;\Pi_k], 1 \leq k \leq M$,

$$S^\varepsilon = [W^\varepsilon;\Pi]\,\{\lambda;\Pi\}\Pi - \Pi\{\lambda;\Pi\}\,[W^\varepsilon;\Pi]$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma_{1\leq k\leq M}\lambda_k(\ \Pi\,\nabla_x\Pi\,[W^\varepsilon;\Pi_k]\,\nabla_\xi\Pi\,\Pi - \Pi\,\nabla_\xi\Pi\,[W^\varepsilon;\Pi_k]\,\nabla_x\Pi\,\Pi$$

$$+\Pi\{\Pi_k;[W^\varepsilon;\Pi]\}\Pi + \Pi\{[W^\varepsilon;\Pi]\,;\Pi_k\}\Pi\ )$$

D'après une remarque précédente W^ε commute à peu près avec p lorsque $\varepsilon \to 0$ donc aussi avec les projecteurs propres. Les commutations approchées $[W^\varepsilon;\Pi_k] \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$ rendent S^ε négligeable dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$. Le calcul explicite de S^ε montre que la régularité localement lipschitzienne des projecteurs propres dans Ω suffit lorsque $W^\varepsilon \in L^2$ est borné uniformément en temps.

- Il en résulte :

$$\partial_t\Pi W^\varepsilon\Pi - \{\lambda;\Pi W^\varepsilon\Pi\} - 2\ \mathrm{Re}\ \Pi\frac{W^\varepsilon(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\Pi - C(\Pi W^\varepsilon\Pi)$$

$$\to 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega) \tag{96}$$

$$\text{où } C(\Pi W^\varepsilon\Pi) := \left[\Pi W^\varepsilon\Pi;\{\lambda;\Pi\}\Pi - \Pi\{\lambda;\Pi\} + \frac{1}{2}\Sigma_{1\leq k\leq M}\lambda_k(-1)^{(\Pi=\Pi_k)}\Pi\{\Pi_k;\Pi_k\}\Pi\right]$$

Théorème 3.27 *Sous les hypothèses (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95).*

La transformée de Wigner en moyenne $< W^\varepsilon >$ des solutions du mélange (93) déterminé par des données initiales orthonormalisées $(u^\varepsilon_{I,n})$ telles que $\| p^W(x;\varepsilon D)u^\varepsilon_{I,n} \|_{L^2} \leq 1$ satisfait l'équation d'évolution

$$\partial_t < \Pi W^\varepsilon\Pi > -\{\lambda;< \Pi W^\varepsilon\Pi >\} - C(< \Pi W^\varepsilon\Pi >) - \Pi N^\varepsilon\Pi = 2\ Re$$

$$\Pi\ \left(\int_0^T d\tau \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} \hat{R}_{i,j,k,l}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})[e^{+\tau p}(x;\xi)]_{j,k}[e^{-\tau p}(x;\overline{\xi})]_{m,n} < W^\varepsilon >_{l,m}(t;x;\xi)d\overline{\xi}\right)_{i,n}\Pi$$

$$-\Pi\ \left(\int_0^T d\tau \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} \hat{R}_{i,j,l,m}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})[e^{+\tau p}(x;\xi)]_{j,k}[e^{-\tau p}(x;\overline{\xi})]_{m,n} < W^\varepsilon >_{k,l}(t;x;\overline{\xi})d\overline{\xi}\right)_{i,n}\Pi$$

$$\textit{avec } \Pi N^\varepsilon\Pi \to 0 \textit{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$$

où Π désigne un des projecteurs propres (94) de valeur propre associée λ.

Après extraction $< W^\varepsilon >$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$ vers une solution f du problème

$$\partial_t\Pi f\Pi - \{\lambda;\Pi f\Pi\} - C(\Pi f\Pi) = 2\ Re$$

$$\Pi\ \left(\int_0^T d\tau \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} \hat{R}_{i,j,k,l}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})[e^{+\tau p}(x;\xi)]_{j,k}[e^{-\tau p}(x;\overline{\xi})]_{m,n}f_{l,m}(t;x;\xi)d\overline{\xi}\right)_{i,n}\Pi$$

$$-\Pi\ \left(\int_0^T d\tau \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} \hat{R}_{i,j,l,m}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})[e^{+\tau p}(x;\xi)]_{j,k}[e^{-\tau p}(x;\overline{\xi})]_{m,n}f_{k,l}(t;x;\overline{\xi})d\overline{\xi}\right)_{i,n}\Pi$$

où $f\Pi = \Pi f = \Pi f\Pi$ et $f = \Sigma_{1\leq k\leq M}\Pi_k f\Pi_k$.

D'après l'approximation (96) le théorème 3.27 constitue un calcul de la limite en moyenne du terme singulier $\Pi \frac{W^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u_n^\varepsilon \otimes u_n^\varepsilon]}{\sqrt{\varepsilon}}\Pi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$.

Pour simplifier l'écriture nous omettrons dans toute la suite la répétition de la combinaison convexe $\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon$ correspondant au mélange. Par exemple il faut comprendre

$$W^\varepsilon[a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon] \text{ comme } W^\varepsilon[\Sigma_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n^\varepsilon a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u_n^\varepsilon \otimes u_n^\varepsilon]$$

Remarque. La famille $< \Pi W^\varepsilon \Pi >$ bornée dans $L^2(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)$ uniformément en temps est équicontinue dans $C^0[\mathbb{R}_t;\mathcal{D}'(\Omega)]$ d'après l'équation d'évolution du théorème 3.27. Elle est donc équicontinue dans $C^0[\mathbb{R}_t;\sigma(L^2;L^2)(\Omega)]$.

Après extraction $< \Pi W^\varepsilon \Pi > \in \sigma(L^2;L^2)(\Omega)$ converge localement uniformément en temps et la limite est continue en temps à valeurs dans $\sigma(L^2;L^2)(\Omega)$. Par contre, même après extraction, la matrice globale $< W^\varepsilon >$ ne converge (a priori) pas localement uniformément en temps mais seulement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$.

3.4.2 Analyse.

Pour étudier $\Pi\dfrac{W^\varepsilon(a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)u^\varepsilon;u^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\Pi$ en moyenne nous utiliserons le groupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ de générateur infinitésimal $p^W(x;\varepsilon D)$ antiautoadjoint par hypothèse (90).

Ce groupe noté $t\in\mathbb{R}\mapsto S^\varepsilon(t)\in\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))$ sera appelé groupe exact au sens où il mesure précisément l'effet d'une translation rétrograde $-\varepsilon T$ en temps dans l'inconnue $W^\varepsilon(t)$ via la formule de Duhamel

$$W^\varepsilon(t)=S^\varepsilon(\varepsilon T)W^\varepsilon(t-\varepsilon T) \tag{97}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t-\varepsilon T}^{t}S^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon(\tau)d\tau+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t-\varepsilon T}^{t}S^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon(\tau)d\tau$$

où par définition

$$\theta^\varepsilon(t):W\mapsto\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi+\varepsilon x'/2-\eta/2)\mathcal{F}_{\%x}W(x'-\eta/\varepsilon;\xi-\eta/2)d\eta$$

$$\overline{\theta}^\varepsilon(t):W\mapsto\mathcal{F}^{-1}_{\%x'}\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\mathcal{F}_{\%x}W(x'-\eta/\varepsilon;\xi+\eta/2)\widehat{a^*}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi-\varepsilon x'/2+\eta/2)d\eta$$

$S^\varepsilon(t-\tau)$ est l'opération linéaire qui à $W^\varepsilon[u;v]$ associe $W^\varepsilon[S^\varepsilon(t-\tau)u;S^\varepsilon(t-\tau)v]$

Autant dans le cas des coefficients constants $p^W(x;\varepsilon D)=p^{(W)}(\varepsilon D)$ il est possible (et facile) de donner du groupe exact une réalisation symbolique $S^\varepsilon(t)=(e^{\frac{t}{\varepsilon}p})^W(\varepsilon D)$, autant dans le cas des coefficients variables il est peu pratique d'envisager $e^{\frac{t}{\varepsilon}p}$ comme un symbole. L'obstacle majeur est que chaque ξ-dérivation augmente la ξ-croissance

$$\partial_\xi^n(e^{\frac{t}{\varepsilon}p})\overset{|\xi|\to\infty}{\sim}e^{\frac{t}{\varepsilon}p}(\frac{t}{\varepsilon}\partial_\xi p)^n$$

C'est pourquoi nous considérerons au lieu du groupe exact une approximation symbolique $e^W_\chi(\frac{t}{\varepsilon};x;\varepsilon D)$ par convolution

$$e_\chi(\frac{t}{\varepsilon})=\chi*e^{\frac{t}{\varepsilon}p}$$

où $\chi=\chi(x;\xi)=\dfrac{1}{r^{2N}}\chi_0(\dfrac{x}{r};\dfrac{\xi}{r})$ avec $\chi_0\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)$ fixé d'intégrale 1 de sorte que

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta e_\chi(\frac{t}{\varepsilon})|\leq\|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\chi\|_{L^1}\qquad\forall\alpha\,\forall\beta \tag{98}$$

Lorsque $r\to0^+$ on dira que χ approche l'unité.

Pour simplifier $e^W_\chi(\dfrac{t-\tau}{\varepsilon};x;\varepsilon D)=(\chi*e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}p})^W(x;\varepsilon D)$ sera noté $e^W_\chi(t-\tau)$ par la suite.

De même $(ep)^W_\chi(\dfrac{t-\tau}{\varepsilon};x;\varepsilon D)=(\chi*e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}p}p)^W(x;\varepsilon D)$ sera noté $(ep)^W_\chi(t-\tau)$ où la lettre e seule désigne le groupe matriciel $t\in\mathbb{R}\mapsto e^{tp}\in L(\mathbb{C}^M)$.

Les notations a_ε^W et a_ε seront des raccourcis pour $a^W(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\varepsilon D)$ et $a(\frac{t}{\varepsilon};\frac{x}{\varepsilon};\xi)$.

En intégrant l'évolution

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{d}{d\tau}\left\{W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]\right\}\\
&=\sqrt{\varepsilon}W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]\\
&+\sqrt{\varepsilon}W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau)]\\
&+W^\varepsilon[\left(e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W\right)(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]\\
&+W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);\left(e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W\right)(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]
\end{aligned}$$

on obtient l'effet d'une translation rétrograde $-\varepsilon T$ en temps à l'aide de l'approximation symbolique e_χ^W au prix de termes parasites

$$\begin{aligned}
W^\varepsilon(t)&=W^\varepsilon[e_\chi^W(\varepsilon T)u^\varepsilon(t-\varepsilon T);e_\chi^W(\varepsilon T)u^\varepsilon(t-\varepsilon T)] \qquad (99)\\
&+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t-\varepsilon T}^t W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]d\tau\\
&+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t-\varepsilon T}^t W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau)]d\tau\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t W^\varepsilon[\left(e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W\right)(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]d\tau\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);\left(e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W\right)(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]d\tau
\end{aligned}$$

dus au défaut de calcul symbolique généralement non nul

$$e_\chi(t-\tau)\#p-(ep)_\chi(t-\tau)=(\chi*e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}p})\#p-\chi*(e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}p}p)$$

Par l'analogue de la proposition 3.23 de la partie précédente, l'hypothèse d'indépendance conditionnelle après un certain temps implique que $\theta^\varepsilon(t)$ et $W^\varepsilon(t-\varepsilon T)$ sont décorrélés d'où

$$<\theta^\varepsilon(t)W^\varepsilon[e_\chi^W(\varepsilon T)u^\varepsilon(t-\varepsilon T);e_\chi^W(\varepsilon T)u^\varepsilon(t-\varepsilon T)]>=0$$

En moyennant l'identité obtenue en appliquant $\theta^\varepsilon(t)$ à (99) on en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{<\theta^\varepsilon(t)W^\varepsilon(t)>}{\sqrt{\varepsilon}}&=\frac{<W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)u^\varepsilon(t);u^\varepsilon(t)]>}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (100)\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t <W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]>d\tau\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t <W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau)]>d\tau\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t <W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\frac{e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]>d\tau
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} < W^{\varepsilon}[a_{\varepsilon}^{W}(t)e_{\chi}^{W}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau); \frac{e_{\chi}^{W}p^{W}-(ep)_{\chi}^{W}}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau)] > d\tau$$

D'où le programme en perspective :

- négliger le défaut de calcul symbolique

$$\begin{cases} W^{\varepsilon}[a_{\varepsilon}^{W}(t)\frac{e_{\chi}^{W}p^{W}-(ep)_{\chi}^{W}}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau); e_{\chi}^{W}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau)] \overset{?}{\to} 0 \\ \\ W^{\varepsilon}[a_{\varepsilon}^{W}(t)e_{\chi}^{W}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau); \frac{e_{\chi}^{W}p^{W}-(ep)_{\chi}^{W}}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau)] \overset{?}{\to} 0 \end{cases}$$

- scinder la moyenne dans les termes dominants

$$\begin{cases} < W^{\varepsilon}[a_{\varepsilon}^{W}(t)e_{\chi}^{W}(t-\tau)a_{\varepsilon}^{W}(\tau)u^{\varepsilon}(\tau); e_{\chi}^{W}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau)] > \\ \\ < W^{\varepsilon}[a_{\varepsilon}^{W}(t)e_{\chi}^{W}(t-\tau)u^{\varepsilon}(\tau); e_{\chi}^{W}(t-\tau)a_{\varepsilon}^{W}(\tau)u^{\varepsilon}(\tau)] > \end{cases}$$

- déterminer l'asymptotique de la moyenne $\frac{< \theta^{\varepsilon}(t)W^{\varepsilon}(t) >}{\sqrt{\varepsilon}}$ à l'aide d'un opérateur intégral issu de la corrélation R appliqué à $< W^{\varepsilon} >$

3.4.3 Preuves.

Dans les propositions 3.65 et 3.66 qui suivent les estimations techniques permettant de boner dans L^2 la composition itérée des symboles sont toutes regroupées dans des lemmes 3.25, 3.26, 3.27 et 3.28 qui seront démontrés plus tard dans la partie 3.4.4.

La composition des symboles se note classiquement par un # dièse ainsi le symbole $a\#b$ composé des symboles a et b pour la quantification de Weyl vérifie

$$(a\#b)^W(x;\varepsilon D) = a^W(x;\varepsilon D)\circ b^W(x;\varepsilon D)$$

Il existe une multitude de formulations intégrales pour $a\#b$ qui sont plus ou moins bien adaptées selon la régularité des facteurs a et b. Citons par exemple $(\forall a; b \in S)$

$$a\#b(x;\xi) = \int\int \mathcal{F}_{\%x\%\xi}a(x';\xi')b(x+\varepsilon\xi'/2;\xi-\varepsilon x'/2)e^{+2i\pi xx'}e^{+2i\pi\xi\xi'}dx'd\xi'$$

$$a\#b(x;\xi) = \int\int a(x-\varepsilon\xi'/2;\xi+\varepsilon x'/2)\mathcal{F}_{\%x\%\xi}b(x';\xi')e^{+2i\pi xx'}e^{+2i\pi\xi\xi'}dx'd\xi'$$

$$a\#b(x;\xi) = \int\int \hat{a}(\nu;\xi+\varepsilon\eta/2)\hat{b}(\eta;\xi-\varepsilon\nu/2)e^{+2i\pi x(\eta+\nu)}d\eta d\nu$$

$$a\#b(x;\xi) = \int\int\int\int a(x+y;\xi+\varepsilon\eta/2)b(x+z;\xi-\varepsilon\nu/2)e^{-2i\pi y\nu}e^{-2i\pi z\eta}dydzd\eta d\nu$$

<u>Etudions d'abord le défaut de calcul symbolique :</u>

Proposition 3.65 *Uniformément en temps*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left[< W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\frac{e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)] > |\varphi\right]$$
$$\leq rC_\alpha^{ste}(p;a)\parallel\langle\xi\rangle^{2m}\varphi\parallel_{L^2}\parallel p^W u_I^\varepsilon\parallel_{L^2}$$
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left[< W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);\frac{e_\chi^W p^W-(ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)] > |\varphi\right]$$
$$\leq rC_\alpha^{ste}(p;a)\parallel\langle\xi\rangle^{2m}\varphi\parallel_{L^2}\parallel p^W u^\varepsilon\parallel_{L^2}$$

Preuve. Lorsque $\varepsilon\to 0^+$ le symbole $\dfrac{e_\chi\#p-(ep)_\chi}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)$ comprend une partie négligeable $\dfrac{e_\chi\#p-e_\chi.p}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)$ et une singularité $\dfrac{e_\chi.p-(ep)_\chi}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)$ non bornée à χ fixé.

La partie négligeable avec ou sans moyenne n'est guère problématique :

$$\left[W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\frac{e_\chi^W p^W-(e_\chi p)^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^\varepsilon(\tau);e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)]|\varphi\right]$$
$$=\left[W^\varepsilon(\tau)|e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\frac{e_\chi\#p-e_\chi.p}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)\right]$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon} \sup_{(t;t-\varepsilon T)} \| W^\varepsilon \|_{L^2} \| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\frac{e_\chi\#p - e_\chi.p}{\varepsilon}(t-\tau) \|_{L^2}$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon} \| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\frac{e_\chi\#p - e_\chi.p}{\varepsilon}(t-\tau) \|_{L^2}$$

tend vers zéro car $e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\frac{e_\chi\#p - e_\chi.p}{\varepsilon}(t-\tau) \in L^2$ est borné d'après le lemme 3.28 suite à la remarque (98).

Pour estimer la contribution de la singularité nous utiliserons le groupe exact et une itération de la formule de Duhamel.

Par l'hypothèse d'indépendance conditionnelle après un certain temps on sait que $\theta^\varepsilon(t)$ et $W^\varepsilon(t-\varepsilon T)$ sont décorrélés d'où

$$< \theta^\varepsilon(t) W^\varepsilon[\frac{(e_\chi p)^W - (ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)S^\varepsilon(\varepsilon T)u^\varepsilon(\tau-\varepsilon T); e_\chi^W(t-\tau)S^\varepsilon(\varepsilon T)u^\varepsilon(\tau-\varepsilon T)] >= 0$$

A la formule de Duhamel du groupe exact (97) réécrite avec d'autres temps

$$W^\varepsilon(\tau) = S^\varepsilon(\varepsilon T)W^\varepsilon(\tau-\varepsilon T) \tag{101}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} S^\varepsilon(\tau-\sigma)\theta^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon(\sigma)d\sigma + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} S^\varepsilon(\tau-\sigma)\overline{\theta}^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

appliquons successivement $\theta^\varepsilon(t)$ et $\frac{(e_\chi p)^W - (ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)$ et $e_\chi^W(t-\tau)$ on en déduit en moyenne

$$< W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\frac{(e_\chi p)^W - (ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^\varepsilon(\tau); e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)] >$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} < W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\left((e_\chi p)^W - (ep)_\chi^W\right)(t-\tau)S^\varepsilon(\tau-\sigma)a_\varepsilon^W(\sigma)u^\varepsilon(\sigma); e_\chi^W(t-\tau)S^\varepsilon(\tau-\sigma)u^\varepsilon(\sigma)] > d\sigma$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} < W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\left((e_\chi p)^W - (ep)_\chi^W\right)(t-\tau)S^\varepsilon(\tau-\sigma)u^\varepsilon(\sigma); e_\chi(t-\tau)S^\varepsilon(\tau-\sigma)a_\varepsilon^W(\sigma)u^\varepsilon(\sigma)] > d\sigma$$

Par dualité

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} < W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)\frac{(e_\chi p)^W - (ep)_\chi^W}{\sqrt{\varepsilon}}(t-\tau)u^\varepsilon(\tau); e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)] > d\tau|\varphi\right]$$

$$=< \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} d\tau \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} d\sigma[W^\varepsilon[S^\varepsilon(\tau-\sigma)a_\varepsilon^W(\sigma)u^\varepsilon(\sigma); S^\varepsilon(\tau-\sigma)u^\varepsilon(\sigma)]$$

$$| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi.p - (ep)_\chi\right)(t-\tau)] >$$

$$+ < \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} d\tau \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau} d\sigma[W^\varepsilon[S^\varepsilon(\tau-\sigma)u^\varepsilon(\sigma); S^\varepsilon(\tau-\sigma)a_\varepsilon^W(\sigma)u^\varepsilon(\sigma)]$$

$$| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi.p - (ep)_\chi\right)(t-\tau)] >$$

$$\leq 2 \sup_{(t-2\varepsilon T;t)} \| W^\varepsilon[S^\varepsilon(\tau-\sigma)a_\varepsilon^W(\sigma)u^\varepsilon(\sigma); S^\varepsilon(\tau-\sigma)u^\varepsilon(\sigma)] \|_{L^2}$$

$$\| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi.p-(ep)_\chi\right)(t-\tau) \|_{L^2}$$

$$\leq 2 \| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi.p-(ep)_\chi\right)(t-\tau) \|_{L^2} \sup_{(t-2\varepsilon T;t)} \| a_\varepsilon^W u^\varepsilon \|_{L^2}$$

D'après l'estimation a priori de la proposition 3.64 $a_\varepsilon^W u^\varepsilon \in L^2$ est borné uniformément en temps par $p^W u_I^\varepsilon \in L^2$.

Il s'agit maintenant de vérifier que la différence $e_\chi.p-(ep)_\chi$ non négligeable à χ fixé lorsque $\varepsilon \to 0$ est (arbitrairement) petite uniformément en ε lorsque χ approche l'unité

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi.p-(ep)_\chi\right)(t-\tau) \|_{L^2} \leq rC^{ste}(p;a) \| \langle\xi\rangle^{2m}\varphi \|_{L^2}$$

En remarquant que $f = e_\chi.p-(ep)_\chi$ hérite de la régularité (89) supposée pour p à savoir

$$\frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x;\xi)}{\langle\xi\rangle^m} \in L^\infty(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N) \qquad \forall\alpha\forall\beta$$

on peut appliquer le lemme 3.27 dans lequel la borne proposée

$$\| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f}{\langle\xi\rangle^m} \|_{L^\infty} \leq C_{\alpha,\beta}^{ste}(p) \| \chi \|_{W^{\alpha+\beta,1}}$$

est finie. Il en résulte l'approximation au sens de L^2 fort :

$$e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi.p-(ep)_\chi\right)(t-\tau)$$

$$\approx \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} e_\chi^*(t-\tau;x;\xi+\frac{\eta}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi)\left(e_\chi.p-(ep)_\chi\right)(t-\tau;x;\xi-\frac{\eta}{2})e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta$$

où par construction

$$\left(e_\chi.p-(ep)_\chi\right)(t-\tau;x;\xi) = \int\int \chi_0(y;\nu)e(t-\tau;x-ry;\xi-r\nu)\left(p(x;\xi)-p(x-ry;\xi-r\nu)\right)dyd\nu$$

En particulier on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi p-(ep)_\chi\right)(t-\tau) \|_{L^2}$$

$$= \limsup_{\varepsilon\to 0} \| \int\int\int dyd\nu\, e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}\, d\eta\, e_\chi^*(t-\tau;x;\xi+\frac{\eta}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi)\chi_0(y;\nu)$$

$$e(t-\tau;x-ry;\xi-\frac{\eta}{2}-r\nu)\left(p(x;\xi-\frac{\eta}{2})-p(x-ry;\xi-\frac{\eta}{2}-r\nu)\right) \|_{L^2(x;\xi)}$$

$$= r\limsup_{\varepsilon\to 0} \| \int\int\int dyd\nu\, e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}\, d\eta\, e_\chi^*(t-\tau;x;\xi+\frac{\eta}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2})\hat{a}(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi)\chi_0(y;\nu)$$

$$e(t-\tau;x-ry;\xi-\frac{\eta}{2}-r\nu)\int_0^1 (y.\nabla_x+\nu.\nabla_\xi)p(x-rsy;\xi-\frac{\eta}{2}-rs\nu)ds \|_{L^2(x;\xi)}$$

$$\leq r \| \int\int\int \langle\xi+\frac{\eta}{2}\rangle^{2m}|\varphi|(x;\xi+\frac{\eta}{2})\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(\frac{t}{\varepsilon};\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}\langle\nu\rangle^m|\chi_0(y;\nu)|\left|\int_0^1 F_sG_sds\right|dyd\nu d\eta \|_{L^2(x;\xi)}$$

où

$$F_s = \frac{\langle \xi - \frac{\eta}{2} - rs\nu\rangle^m \langle \xi\rangle^m}{\langle \xi + \frac{\eta}{2}\rangle^{2m}\langle \eta\rangle^{2m}\langle \nu\rangle^m} \text{ est borné par sous-multiplicativité}$$

$$G_s = \frac{(y.\nabla_x + \nu.\nabla_\xi)p(x - rsy; \xi - \frac{\eta}{2} - rs\nu)}{\langle \xi - \frac{\eta}{2} - rs\nu\rangle^m} \text{ est borné par } \langle y\rangle\langle \nu\rangle \sup_{(x;\xi)\in\mathbb{R}^{2N}} |\frac{\nabla p(x;\xi)}{\langle \xi\rangle^m}|$$

On en déduit

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \| e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#\left(e_\chi p - (ep)_\chi\right)(t-\tau) \|_{L^2}$$

$$\leq r \| \langle \xi\rangle^{2m}\varphi \|_{L^2} \| \langle x\rangle\langle \xi\rangle^{m+1}\chi_0 \|_{L^1} \left(\sup_{(x;\xi)\in\mathbb{R}^{2N}} |\frac{\nabla p(x;\xi)}{\langle \xi\rangle^m}|\right) \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}a}|(t;\eta;\xi)}{\langle \xi\rangle^m} d\eta\right)$$

□

Etudions ensuite la scission de la moyenne.

Lorsque $\varepsilon \to 0$ la moyenne $< W^\varepsilon[a_\varepsilon^W(t)e_\chi^W(t-\tau)a_\varepsilon^W(\tau)u^\varepsilon(\tau); e_\chi^W(t-\tau)u^\varepsilon(\tau)] >$ dépend approximativement de $< W^\varepsilon > (\tau)$ seule. En d'autres termes dans une factorisation la position du crochet statistique $<>$ importe peu.

Notons $E_\chi^\varepsilon(t-\tau)$ l'opération linéaire qui à $W^\varepsilon[u;v]$ associe $W^\varepsilon[e_\chi^W(t-\tau)u; e_\chi^W(t-\tau)v]$.

Proposition 3.66 *Uniformément en temps au sens de S' on a*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon(\tau) > - < \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau) >< W^\varepsilon(\tau) > d\tau \to 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t < \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon(\tau) > - < \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}^\varepsilon(\tau) >< W^\varepsilon(\tau) > d\tau \to 0$$

Preuve. Appliquons $\theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)$ à l'identité (101) éventuellement moyennée, on obtient

$$\theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)W^\varepsilon(\tau) = \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)S^\varepsilon(\varepsilon T)W^\varepsilon(\tau-\varepsilon T)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)S^\varepsilon(\tau-\sigma)\theta^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon(\sigma)d\sigma$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t-\varepsilon T}^t \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)S^\varepsilon(\tau-\sigma)\overline{\theta}^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

et

$$\theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau) < W^\varepsilon > (\tau) = \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau)S^\varepsilon(\varepsilon T) < W^\varepsilon > (\tau-\varepsilon T)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^\tau \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau) < S^\varepsilon(\tau-\sigma)\theta^\varepsilon(\sigma)W^\varepsilon(\sigma) > d\sigma$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)<S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)>d\sigma$$

Par différence les termes

$$<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\varepsilon T)W^{\varepsilon}(\tau-\varepsilon T)>=<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)>S^{\varepsilon}(\varepsilon T)<W^{\varepsilon}>(\tau-\varepsilon T)$$

se compensent :

$$<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)W^{\varepsilon}(\tau)>-<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)><W^{\varepsilon}(\tau)>$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\theta^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)>d\sigma$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)><S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\theta^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)>d\sigma$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)>d\sigma$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)><S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)>d\sigma$$

Pour négliger cette quantité intégrée de $\tau=t-\varepsilon T$ à $\tau=t$ il suffit de borner le terme typique

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\theta^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)d\sigma d\tau$$

Or

$$\left[\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\theta^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\theta^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)|\varphi\right]$$

$$=\left[W^{\varepsilon}[S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)a_{\varepsilon}^{W}(\sigma)u^{\varepsilon}(\sigma);S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)u^{\varepsilon}(\sigma)]|e_{\chi}^{*}(t-\tau)\#\varphi\#a_{\varepsilon}(t)\#e_{\chi}(t-\tau)\#a_{\varepsilon}(\tau)\right]$$

$$\leq\| e_{\chi}^{*}(t-\tau)\#\varphi\#a_{\varepsilon}(t)\#e_{\chi}(t-\tau)\#a_{\varepsilon}(\tau)\|_{L^2}\sup_{(t-2\varepsilon T;t)}\| a_{\varepsilon}^{W}u^{\varepsilon}\|_{L^2}$$

$$\leq C^{ste}(a)\|\chi\|_{W^{10N+10m,1}}\|\langle\xi\rangle^{2m}\partial_{x,\xi}^{10N+10m}\varphi\|_{L^2}\sup_{(t-2\varepsilon T;t)}\| a_{\varepsilon}^{W}u^{\varepsilon}\|_{L^2}$$

est borné d'après la preuve du lemme 3.25 suite à la remarque (98).

De même pour l'opération symétrique $\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\tau)$ on exprime

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\tau)W^{\varepsilon}(\tau)>-<\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\tau)><W^{\varepsilon}(\tau)>d\tau$$

au facteur $\sqrt{\varepsilon}$ près comme une combinaison linéaire de termes du type

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau-\varepsilon T}^{\tau}\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\theta^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)d\sigma d\tau$$

Or

$$\left[\theta^{\varepsilon}(t)E_{\chi}^{\varepsilon}(t-\tau)\overline{\theta}^{\varepsilon}(\tau)S^{\varepsilon}(\tau-\sigma)\theta^{\varepsilon}(\sigma)W^{\varepsilon}(\sigma)|\varphi\right]$$

$$= \Big[W^\varepsilon[S^\varepsilon(\tau-\sigma)a_\varepsilon^W(\sigma)u^\varepsilon(\sigma); S^\varepsilon(\tau-\sigma)u^\varepsilon(\sigma)]|a_\varepsilon^*(\tau)\#e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau)\Big]$$

$$\leq \| \, a_\varepsilon^*(\tau)\#e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau) \, \|_{L^2} \sup_{(t-2\varepsilon T;t)} \| \, a_\varepsilon^W u^\varepsilon \, \|_{L^2}$$

$$\leq C^{ste}(a) \, \| \, \chi \, \|_{W^{10N+10m,1}} \| \, \langle\xi\rangle^{2m}\partial_{x,\xi}^{10N+10m}\varphi \, \|_{L^2} \sup_{(t-2\varepsilon T;t)} \| \, a_\varepsilon^W u^\varepsilon \, \|_{L^2}$$

est borné d'après la preuve du lemme 3.26 suite à la remarque (98).

La proposition 3.66 est prouvée en invoquant l'estimation a priori de la proposition 3.64.

□

Etudions l'asymptotique finale :

Introduisons

$$K(\tau) : W \mapsto + \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} \hat{R}_{i,j,k,l}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})[e^{+\tau p}(x;\overline{\xi})]_{j,k}[e^{-\tau p}(x;\xi)]_{m,n}W_{l,m}(x;\xi)d\overline{\xi}$$

et

$$L(\tau) : W \mapsto - \int_{\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N} \hat{R}_{i,j,l,m}(\tau;\xi-\overline{\xi};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2};\frac{\xi+\overline{\xi}}{2})[e^{+\tau p}(x;\overline{\xi})]_{j,k}[e^{-\tau p}(x;\xi)]_{m,n}W_{k,l}(x;\overline{\xi})d\overline{\xi}$$

Proposition 3.67 *Uniformément en temps*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \Big(< \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau) > -K(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\Big) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau|\varphi\Big]$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \Big(< \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\overline{\theta}^\varepsilon(\tau) > -L(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\Big) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau|\varphi\Big]$$

tendent vers zéro lorsque χ approche l'unité pour tout $\varphi \in S$.

Preuve. Par dualité

$$\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \Big(< \theta^\varepsilon(t)E_\chi^\varepsilon(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau) > -K(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\Big) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau|\varphi\Big]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \Big[< W^\varepsilon > (\tau)| < e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau)\#a_\varepsilon(\tau) > -K^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi\Big] \, d\tau$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t \| < e_\chi^*(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau)\#a_\varepsilon(\tau) > -K^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi \, \|_{L^2} \, d\tau$$

$$\leq \varepsilon C^{ste}(a) \, \| \, \chi \, \|_{W^{10N+10m,1}} \| \, \langle\xi\rangle^{2m}\partial_{x,\xi}^{10N+10m}\varphi \, \|_{L^2}$$

$$+ \int_0^T \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \Big\| |\hat{R}|(\tau;\eta;\xi-\eta/2;\xi-\eta/2)|e^{-\tau p} - \chi * e^{-\tau p}|(x;\xi)|\varphi|(x;\xi)\Big\|_{L^2(x;\xi)} d\eta d\tau$$

$$+ \int_0^T \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \Big\| |\hat{R}|(\tau;\eta;\xi-\eta/2;\xi-\eta/2)|e^{+\tau p} - \chi * e^{+\tau p}|(x;\xi-\eta)|\varphi|(x;\xi)\Big\|_{L^2(x;\xi)} d\eta d\tau$$

en effet

$$\|< e^*_\chi(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau)\#a_\varepsilon(\tau) > -K^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi \|_{L^2}$$

$$\leq < \| e^*_\chi(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau)\#a_\varepsilon(\tau)$$

$$-\int\int e^*_\chi(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2})e_\chi(x;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2})e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu \|_{L^2} >$$

$$+\| < \int\int e^*_\chi(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2})e_\chi(x;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2})e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu$$

$$-\int\int e^*(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2})e(x;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2})e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu \ > \|_{L^2}$$

le premier terme est borné par le lemme 3.25 d'où le majorant en $\varepsilon C^{ste}_\chi(a) \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{10N+10m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2}$, le second terme est simplifié par la propriété de corrélation (92) qui fait apparaitre une intégration contre $\delta_0(\eta+\nu)d\eta d\nu$ responsable de la diparition par moyenne de l'intégrale oscillante $e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}$.

On en déduit

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\left(< \theta^\varepsilon(t)E^\varepsilon_\chi(t-\tau)\theta^\varepsilon(\tau) > -K(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\right) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau|\varphi\right]$$

$$\leq \int_0^T\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}R}|(\tau;\eta;\xi;\xi)}{\langle\xi\rangle^{2m}}\right) \| \, |e^{-\tau p}-\chi * e^{-\tau p}|(x;\xi)\langle\xi\rangle^m|\varphi|(x;\xi) \|_{L^2(x;\xi)} \, d\eta d\tau$$

$$+\int_0^T\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}R}|(\tau;\eta;\xi;\xi)}{\langle\xi\rangle^{2m}}\right) \| \, |e^{+\tau p}-\chi * e^{+\tau p}|(x;\xi-\eta)\langle\xi\rangle^m|\varphi|(x;\xi) \|_{L^2(x;\xi)} \, d\eta d\tau$$

Lorsque χ approche l'unité $e^{\pm\tau p}-\chi * e^{\pm\tau p} \to 0$ en restant borné. On conclut par convergence dominée en remarquant

$$\langle\xi\rangle^{2m}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}^N\xi) \text{ et } \sup_{(\xi;\eta)\in\mathbb{R}^{2N}}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}R}|(\tau;\eta;\xi;\xi)}{\langle\xi\rangle^{2m}} \in L^\infty[\mathbb{R}_\tau;L^1(\mathbb{R}^N_\eta)]$$

De même pour l'opération symétrique $\theta^\varepsilon(t)E^\varepsilon_\chi(t-\tau)\overline{\theta}^\varepsilon(\tau)$ on trouve

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t}\left(< \theta^\varepsilon(t)E^\varepsilon_\chi(t-\tau)\overline{\theta}^\varepsilon(\tau) > -L(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\right) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau|\varphi\right]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^{t} \|< a^*_\varepsilon(\tau)\#e^*_\chi(t-\tau)\#\varphi\#a_\varepsilon(t)\#e_\chi(t-\tau) > -L^*(\frac{t-\tau}{\varepsilon})\varphi \|_{L^2} \, d\tau$$

$$\leq \varepsilon C^{ste}(a) \| \chi \|_{W^{10N+10m,1}} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{10N+10m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2}$$

$$+\int_0^T\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\left\| |\hat{R}|(\tau;\eta;\xi-\eta/2;\xi-\eta/2)|e^{-\tau p}-\chi * e^{-\tau p}|(x;\xi+\eta)|\varphi|(x;\xi+\eta)\right\|_{L^2(x;\xi)} d\eta d\tau$$

$$+\int_0^T \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} \left\| |\hat{R}|(\tau;\eta;\xi-\eta/2;\xi-\eta/2)|e^{+\tau p}-\chi * e^{+\tau p}|(x;\xi)|\varphi|(x;\xi+\eta)\right\|_{L^2(x;\xi)} d\eta d\tau$$

où le majorant $\varepsilon C^{ste}(a) \parallel \chi \parallel_{W^{10N+10m,1}} \parallel \langle\xi\rangle^{2m}\partial_{x,\xi}^{10N+10m}\varphi \parallel_{L^2}$ résulte du lemme 3.26.

□

Dans les relations précédentes la présence du temps $\tau \in (t-\varepsilon T;t)$ au lieu de t importe peu :

Proposition 3.68 *Dans $L^\infty[\mathbb{R}_t; S'(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_\xi^N)]$-faible étoile*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t K(\frac{t-\tau}{\varepsilon}) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau - \left(\int_0^T K(\tau)d\tau\right) < W^\varepsilon > (t) \to 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon T}^t L(\frac{t-\tau}{\varepsilon}) < W^\varepsilon > (\tau)d\tau - \left(\int_0^T L(\tau)d\tau\right) < W^\varepsilon > (t) \to 0$$

Preuve. Il s'agit de la continuité faible des translations en temps sachant que les deux quantités étudiées

$$\left[\int_0^T K \text{ ou } L(\tau)(< W^\varepsilon > (t-\varepsilon\tau) - < W^\varepsilon > (t))d\tau|\varphi\right]$$

sont bornées dans S' uniformément en temps par exemple car

$$|\left[\int_0^T K \text{ ou } L(\tau)(< W^\varepsilon > (t-\varepsilon\tau) - < W^\varepsilon > (t))d\tau|\varphi\right]| \leq 2\int_0^T \parallel K^* \text{ ou } L^*(\tau)\varphi \parallel_{L^2} d\tau$$

$$\leq 2 \parallel \langle\xi\rangle^{2m}\varphi \parallel_{L^2} \int_0^T \int_{x'\in\mathbb{R}^N} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \frac{\langle x'\rangle^{2m}|\hat{R}|(\tau;x';\xi\xi)}{\langle\xi\rangle^{2m}} dx'd\tau < \infty$$

□

3.4.4 Lemmes de calcul pseudo-différentiel.

On justifie ici les bornes L^2 concernant la composition des symboles $a_\varepsilon^{(*)}$ et $e_\chi^{(*)}$ contre le test (hyper)régulier $\varphi \in S$. Les estimations proposées évitent toute hypothèse de décroissance sur $e_{(\chi)} \in W^{\infty,\infty}$ mais utilisent comme compensation la régularité (91) sur $\hat{a}$.

Lemme 3.25

$$\| e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon(x;\xi)$$
$$-\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\int_{\nu\in\mathbb{R}^N} e^*(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2})e(x;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2})e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu \|_{L^2(x;\xi)}$$
$$\leq \varepsilon C^{ste} \| e \|^2_{W^{10N+10m,\infty}(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{10N+10m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)}$$
$$\max_{|\alpha|\leq 10N}\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle\partial_x\rangle^{2m}\partial^\alpha_\xi a}|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)^2$$

Lemme 3.26

$$\| a^*_\varepsilon\#e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e(x;\xi)$$
$$-\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\int_{\nu\in\mathbb{R}^N} \widehat{a^*}(\nu;\xi+\frac{\eta}{2})e^*(x;\xi+\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2})\hat{a}(\eta;\xi-\frac{\nu}{2})e(x;\xi-\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2})e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu \|_{L^2(x;\xi)}$$
$$\leq \varepsilon C^{ste} \| e \|^2_{W^{10N+10m,\infty}(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{10N+10m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)}$$
$$\max_{|\alpha|\leq 10N}\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle\partial_x\rangle^{2m}\partial^\alpha_\xi a}|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)^2$$

Remarque. Les exposants ($10N+10m$...) proposés (largement non optimaux) n'ont aucune importance. Seules comptent les $2m$ dérivations spatiales dans a voir l'hypothèse (91).

Preuve. Lemmes 3.25 et 3.26.
En itérant la définition du # dièse on calcule

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU}dudUe^{-2i\pi vV}dvdVe^{-2i\pi yY}dydYe^{-2i\pi zZ}dzdZ$$

$$e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+V-\frac{Y}{2}+\frac{Z}{2})\varphi(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-u+V-\frac{Y}{2}+\frac{Z}{2})a(\frac{x}{\varepsilon}-y;\xi-u+\frac{Z}{2})$$
$$e(x-\frac{\varepsilon v}{2}-\varepsilon y+\varepsilon z;\xi-u+\frac{Y}{2}+\frac{Z}{2})a(\frac{x}{\varepsilon}+z;\xi-u+\frac{Y}{2})$$

et

$$a^*_\varepsilon\#e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU}dudUe^{-2i\pi vV}dvdVe^{-2i\pi yY}dydYe^{-2i\pi zZ}dzdZ$$

$$a^*(\frac{x}{\varepsilon}+\frac{U}{2};\xi+V+\frac{Z}{2})e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-u+V+\frac{Z}{2})\varphi(x+\frac{\varepsilon v}{2}-\frac{\varepsilon y}{2};\xi-u+\frac{Z}{2})$$
$$a(\frac{x}{\varepsilon}+z;\xi-u+Y)e(x+\frac{\varepsilon y}{2}+\varepsilon z;\xi-u+Y-\frac{Z}{2})$$

En introduisant $\hat{a} = \mathcal{F}_{\%x} a$ on obtient les formulations desquelles les lemmes 3.25 et 3.26 découleront

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU} dudU e^{-2i\pi vV} dvdV e^{-2i\pi wW} dwdW e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}} d\eta d\nu$$

$$e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+V+\varepsilon w)\varphi(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2})$$

$$\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2}-u)e(x-\frac{\varepsilon U}{2}-\frac{\varepsilon v}{2}+W;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u-\frac{\varepsilon w}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon w)$$

et

$$a_\varepsilon^*\#e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU} dudU e^{-2i\pi vV} dvdV e^{-2i\pi wW} dwdW e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}} d\eta d\nu$$

$$\widehat{a^*}(\nu;\xi+\frac{\eta}{2}-u+V)e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\varepsilon v+W;\xi+\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2}-u+V-\frac{\varepsilon w}{2})\varphi(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\varepsilon v;\xi+\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2}-u+\frac{V}{2}-\frac{\varepsilon w}{2})$$

$$\hat{a}(\eta;\xi-\frac{\nu}{2}-u)e(x-\frac{\varepsilon U}{2};\xi-\frac{\eta}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{V}{2})$$

Nous nous contenterons de borner $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon$ car la version symétrique $a_\varepsilon^*\#e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e$ s'analyse de même.

Dans l'intégrale oscillante donnant $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon$ nous ferons jouer aux couples de variables $(u;U)$, $(v;V)$, $(w;W)$ et $(\eta;\nu)$ des rôles différents. Soit $n > N$ un entier excèdant la dimension.

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon(x;\xi)$$

$$= \int e^{-2i\pi uU} dudU e^{-2i\pi vV} dvdV e^{-2i\pi wW} dwdW e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}} d\eta d\nu I_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu)$$

avec $I_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu) = e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+V+\varepsilon w)\varphi(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2})$

$$\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2}-u)e(x-\frac{\varepsilon U}{2}-\frac{\varepsilon v}{2}+W;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u-\frac{\varepsilon w}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon w)$$

En convertissant les multiplications $\frac{1}{\langle u\rangle^n}$, $\frac{1}{\langle v\rangle^n}$, $\frac{1}{\langle w\rangle^{n+2m}}$ en dérivations

$$\langle\partial_U\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi uU}}{\langle u\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi uU}, \langle\partial_V\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi vV}}{\langle v\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi vV}, \langle\partial_W\rangle^{n+2m}\left(\frac{e^{-2i\pi wW}}{\langle w\rangle^{n+2m}}\right) = e^{-2i\pi wW},$$

on obtient $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon(x;\xi)$

$$= \int \frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n}\frac{e^{+2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi wW}dwdW}{\langle w\rangle^{n+2m}} e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}} d\eta d\nu J_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu)$$

$$\text{avec } J_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu) = \langle\partial_U\rangle^n\langle\partial_V\rangle^n\langle\partial_W\rangle^{n+2m} I_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu).$$

En convertissant les multiplications $\frac{1}{\langle U\rangle^n}$, $\frac{1}{\langle V\rangle^{n+2m}}$, $\frac{1}{\langle W\rangle^n}$ en dérivations

$$\langle\partial_u\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi uU}}{\langle U\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi uU}, \langle\partial_v\rangle^{n+2m}\left(\frac{e^{-2i\pi vV}}{\langle V\rangle^{n+2m}}\right) = e^{-2i\pi vV}, \langle\partial_w\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi wW}}{\langle W\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi wW},$$

on obtient $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon(x;\xi)$

$$= \int \frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n\langle U\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n\langle V\rangle^{n+2m}}\frac{e^{-2i\pi wW}dwdW}{\langle w\rangle^{n+2m}\langle W\rangle^n}e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu K_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu)$$

avec $K_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu) = \left(\langle u\rangle^n\langle v\rangle^n\langle w\rangle^{n+2m}\right)\langle\partial_u\rangle^n\langle\partial_v\rangle^{n+2m}\langle\partial_w\rangle^n\left(\frac{J_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu)}{\langle u\rangle^n\langle v\rangle^n\langle w\rangle^{n+2m}}\right)$.

Dans $\frac{J_\varepsilon(uU;vV;wW;\eta\nu)}{\langle u\rangle^n\langle v\rangle^n\langle w\rangle^{n+2m}}$ les dérivations $\partial_u,\partial_v,\partial_w$ portant sur le dénominateur ne font qu'améliorer la sommabilité en u,v,w précisément $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon$ est en définitive une combinaison finie de termes du type

$$\int \frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n\langle U\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n\langle V\rangle^{n+2m}}\frac{e^{-2i\pi wW}dwdW}{\langle w\rangle^{n+2m}\langle W\rangle^n}e^{+2i\pi x\frac{\eta+\nu}{\varepsilon}}d\eta d\nu L_\varepsilon^\infty(uU;vV;wW;\eta\nu)$$

$$\partial_{x,\xi}^{3n}e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+V+\varepsilon w)\partial_{x,\xi}^{5n+2m}\varphi(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2})\partial_\xi^n\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2}-u)$$

$$\partial_{x,\xi}^{5n+4m}e(x-\frac{\varepsilon U}{2}-\frac{\varepsilon v}{2}+W;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u-\frac{\varepsilon w}{2})\partial_\xi^{2n}\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon w)$$

où $\partial_{x,\xi}^n$ désigne à chaque fois une dérivation dans les deux variables de poids total $\leq n$, où $L_\varepsilon^\infty(uU;vV;wW;\eta\nu)$ désigne un facteur borné.

Il en résulte

$$|e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon|(x;\xi) \leq C^{ste}\parallel e\parallel^2_{W^{5n+4m,\infty}}\int F_\varepsilon\ \frac{du}{\langle u\rangle^n}\frac{dU}{\langle U\rangle^n}\frac{dv}{\langle v\rangle^n}\frac{dV}{\langle V\rangle^n}\frac{dw}{\langle w\rangle^n}\frac{dW}{\langle W\rangle^n}d\eta d\nu$$

$$\frac{|\partial_\xi^n\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\eta;\xi+\frac{\nu}{2}-u)}{\langle\xi+\frac{\nu}{2}-u\rangle^m}\frac{|\partial_\xi^{2n}\widehat{\langle D_x\rangle^m}a|(\nu;\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon w)}{\langle\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon w\rangle^m}$$

$$|\langle\xi\rangle^{2m}\partial_{x,\xi}^{5n+2m}\varphi|(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2})$$

où

$$F_\varepsilon = \left[\frac{\langle\xi+\frac{\nu}{2}-u\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2}\rangle\langle w\rangle\langle V\rangle\langle\eta\rangle}\right]^m\left[\frac{\langle\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon w\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2}\rangle\langle w\rangle\langle V\rangle\langle\eta\rangle\langle\nu\rangle}\right]^m$$

est borné par sous-multiplicativité.

On en déduit

$$|e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon|(x;\xi) \leq C^{ste}\parallel e\parallel^2_{W^{5n+4m,\infty}}\int\frac{du}{\langle u\rangle^n}\frac{dU}{\langle U\rangle^n}\frac{dv}{\langle v\rangle^n}\frac{dV}{\langle V\rangle^n}\frac{dw}{\langle w\rangle^n}\frac{dW}{\langle W\rangle^n}d\eta d\nu$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\partial_\xi^n\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\partial_\xi^{2n}\widehat{\langle D_x\rangle^m}a|(\nu;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}\left|\langle\xi\rangle^{2m}\partial_{x,\xi}^{5n+2m}\varphi\right|(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon w}{2})$$

Reste à prendre la norme L^2.

$$\| e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon \|_{L^2} \leq C^{ste} \| e \|^2_{W^{5n+4m,\infty}} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{5n+2m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2}$$

$$\max_{|\alpha|\leq 2n}\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\partial^\alpha_\xi\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)^2$$

L'essentiel du lemme 3.25 est acquis. En appliquant la borne précédente au développement limité

$$\frac{I_\varepsilon - I_0}{\varepsilon} = \int_0^1 \frac{d}{ds}[e^*(x+\frac{\varepsilon sU}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}+V+\varepsilon sw)\varphi(x+\frac{\varepsilon sU}{2}+\frac{\varepsilon sv}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u+V+\frac{\varepsilon sw}{2})$$

$$\partial^n_\xi\hat{a}(\eta;\xi+\frac{\nu}{2}-u)e(x-\frac{\varepsilon sU}{2}-\frac{\varepsilon sv}{2}+W;\xi-\frac{\eta}{2}+\frac{\nu}{2}-u-\frac{\varepsilon sw}{2})\hat{a}(\nu;\xi-\frac{\eta}{2}-u-\varepsilon sw)]\frac{ds}{\varepsilon}$$

de forme tout à fait analogue à I_ε après dérivation dans les facteurs e^* et φ (et $\hat{a}$) on obtient le premier terme du développement limité de $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon$ au sens de L^2 :

$$\| e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon-(e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#e\#a_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \|_{L^2} \leq \varepsilon C^{ste} \| e \|^2_{W^{5n+4m+1,\infty}} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{5n+2m+1}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2}$$

$$\max_{|\alpha|\leq 2n+1}\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\partial^\alpha_\xi\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)^2$$

□

Lemme 3.27

$$\| e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi) - \int_{\eta\in\mathbb{R}^N} e^*(x;\xi+\frac{\eta}{2})\varphi(x;\xi+\frac{\eta}{2})\hat{a}(\eta;\xi)f(x;\xi-\frac{\eta}{2})e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta \|_{L^2(x;\xi)}$$

$$\leq \varepsilon C^{ste} \| e \|_{W^{10N,\infty}} \| \frac{\partial^{10N+10m}_{x,\xi}f}{\langle\xi\rangle^m} \|_{L^\infty} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{10N+10m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2} \max_{|\alpha|\leq 10N}\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\partial^\alpha_\xi\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)$$

Lemme 3.28

$$\| e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#(e\#p - e.p) \|_{L^2(x;\xi)}$$

$$\leq \varepsilon C^{ste} \| e \|^2_{W^{10N+10m,\infty}(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)} \| \frac{\partial^{10N+10m}_{x,\xi}p}{\langle\xi\rangle^m} \|_{L^\infty} \| \langle\xi\rangle^{2m}\partial^{10N+10m}_{x,\xi}\varphi \|_{L^2(\mathbb{R}^N_x\times\mathbb{R}^N_\xi)}$$

$$\max_{|\alpha|\leq 10N}\left(\int_{\eta\in\mathbb{R}^N}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\partial^\alpha_\xi\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}}a|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}d\eta\right)$$

Preuve. Lemme 3.27.
En itérant la définition du # dièse on calcule

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU}dudUe^{-2i\pi vV}dvdVe^{-2i\pi yY}dydYe^{-2i\pi zZ}dzdZ$$

$$e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+V-\frac{Y}{2}+\frac{Z}{2})\varphi(x+\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-u+V-\frac{Y}{2}+\frac{Z}{2})a(\frac{x}{\varepsilon}-y;\xi-u+\frac{Z}{2})f(x+\varepsilon z;\xi-u+\frac{Y}{2})$$

En introduisant $\hat{a} = \mathcal{F}_{\%x}a$ (et aussi par conséquent $\hat{\varphi} = \mathcal{F}_{\%x}\varphi$ pour compenser) on obtient les formulations desquelles le lemme 3.27 découlera

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU}dudUe^{-2i\pi vV}dvdVe^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta e^{-2i\pi xx'}dx'$$

$$e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+V+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{\varphi}(x';\xi+\frac{\eta}{2}-u-V)\hat{a}(\eta;\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2})f(x-\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-\frac{\eta}{2}-u-V-\frac{\varepsilon x'}{2})$$

Dans l'intégrale oscillante donnant $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f$ nous ferons jouer aux couples de variables $(u;U)$, $(v;V)$ et $(\eta;x')$ des rôles différents. Soit $n > N$ un entier excèdant la dimension.

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi) = \int e^{-2i\pi uU}dudUe^{-2i\pi vV}dvdVe^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta e^{-2i\pi xx'}dx'I_\varepsilon(uU;vV;\eta x')$$

$$\text{avec } I_\varepsilon(uU;vV;\eta x') = e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+V+\frac{\varepsilon x'}{2})\hat{\varphi}(x';\xi+\frac{\eta}{2}-u-V)$$
$$\hat{a}(\eta;\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2})f(x-\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-\frac{\eta}{2}-u-V-\frac{\varepsilon x'}{2})$$

En convertissant les multiplications $\frac{1}{\langle u\rangle^n}$ et $\frac{1}{\langle v\rangle^n}$ en dérivations

$$\langle\partial_U\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi uU}}{\langle u\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi uU}, \langle\partial_V\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi vV}}{\langle v\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi vV},$$

on obtient

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi) = \int \frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n}e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta e^{-2i\pi xx'}dx'J_\varepsilon(uU;vV;\eta x')$$

$$\text{avec } J_\varepsilon(uU;vV;\eta x') = \langle\partial_U\rangle^n\langle\partial_V\rangle^n I_\varepsilon(uU;vV;\eta x').$$

En convertissant les multiplications $\frac{1}{\langle U\rangle^n}$ et $\frac{1}{\langle V\rangle^{n+m}}$ en dérivations

$$\langle\partial_u\rangle^n\left(\frac{e^{-2i\pi uU}}{\langle U\rangle^n}\right) = e^{-2i\pi uU}, \langle\partial_v\rangle^{n+m}\left(\frac{e^{-2i\pi vV}}{\langle V\rangle^{n+m}}\right) = e^{-2i\pi vV},$$

on obtient

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi) = \int \frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n\langle U\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n\langle V\rangle^{n+m}}e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta e^{-2i\pi xx'}dx'K_\varepsilon(uU;vV;\eta x')$$

$$\text{avec } K_\varepsilon(uU;vV;\eta x') = (\langle u\rangle^n\langle v\rangle^n)\langle\partial_u\rangle^n\langle\partial_v\rangle^{n+m}\left(\frac{J_\varepsilon(uU;vV;\eta x')}{\langle u\rangle^n\langle v\rangle^n}\right)$$

Dans $\dfrac{J_\varepsilon(uU;vV;\eta x')}{\langle u\rangle^n\langle v\rangle^n}$ les dérivations ∂_u,∂_v portant sur le dénominateur ne font qu'améliorer la sommabilité en u,v précisément $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f$ est en définitive une combinaison finie de termes du type

$$\int \frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n\langle U\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n\langle V\rangle^{n+m}}e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta e^{-2i\pi xx'}dx'L_\varepsilon^\infty(uU;vV)\ \partial_{x,\xi}^{2n}e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+V+\frac{\varepsilon x'}{2})$$

$$\partial_{x,\xi}^{2n}\hat\varphi(x';\xi+\frac{\eta}{2}-u-V)\partial_\xi^n\hat a(\eta;\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2})\partial_{x,\xi}^{4n+m}f(x-\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-\frac{\eta}{2}-u-V-\frac{\varepsilon x'}{2})$$

où $\partial_{x,\xi}^n$ désigne à chaque fois une dérivation dans les deux variables de poids total $\leq n$, où $L_\varepsilon^\infty(uU;vV)$ désigne un facteur borné.

A ce stade le plus simple pour voir $e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f$ dans L^2 consiste encore à séparer les variables $(x;x')$ duales afin d'invoquer l'inversion de Fourier $L^2(\mathbb{R}_x^N)$.

Ainsi en changeant V en $V-\frac{\varepsilon x'}{2}$:

$$e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f(x;\xi)\sim\int\frac{e^{-2i\pi uU}dudU}{\langle u\rangle^n\langle U\rangle^n}\frac{e^{-2i\pi vV}dvdV}{\langle v\rangle^n\langle V\rangle^n}e^{+2i\pi x\eta/\varepsilon}d\eta L_\varepsilon^\infty(uU;vV)$$

$$\partial_{x,\xi}^{2n}e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+V)\left(\int_{x'\in\mathbb{R}^N}T(uU;vV;\eta\xi;x')e^{-2i\pi xx'}dx'\right)\left(\frac{\partial_{x,\xi}^{4n+m}f}{\langle\xi\rangle^m}\right)(x-\frac{\varepsilon U}{2}+\frac{\varepsilon v}{2};\xi-\frac{\eta}{2}-u-V)$$

avec

$$T(uU;vV;\eta\xi;x')=\partial_\xi^{2n}\hat\varphi(x';\xi+\frac{\eta}{2}-u-V+\frac{\varepsilon x'}{2})\partial_\xi^n\hat a(\eta;\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2})\frac{\langle V\rangle^n}{\langle V-\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle^{n+m}}\frac{e^{+i\pi v\varepsilon x'}}{\langle\xi-\frac{\eta}{2}-u-V\rangle^m}$$

On peut majorer T en module par

$$|T|\leq F_\varepsilon G_\varepsilon H_\varepsilon\langle\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle^{n+2m}\left|\langle\xi\rangle^{2m}\partial_\xi^{2n}\hat\varphi\right|(x';\xi+\frac{\eta}{2}-u-V+\frac{\varepsilon x'}{2})\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}\partial_\xi^n a}|(\eta;\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2})}{\langle\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle^m}$$

$$\leq C^{ste}\left|\langle\xi\rangle^{2m}\widehat{\langle\partial_x\rangle^{n+2m}\partial_\xi^{2n}\varphi}\right|(x';\xi+\frac{\eta}{2}-u-V+\frac{\varepsilon x'}{2})\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N}\frac{|\widehat{\langle D_x\rangle^{2m}\partial_\xi^n a}|(\eta;\xi)}{\langle\xi\rangle^m}$$

où

$$F_\varepsilon=\left[\frac{\langle V\rangle}{\langle V-\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle}\right]^n$$

$$G_\varepsilon=\left[\frac{\langle\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}-u-V+\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle V-\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle}\right]^m$$

$$H_\varepsilon=\left[\frac{\langle\xi-\frac{\eta}{2}-u-V\rangle}{\langle\xi+\frac{\eta}{2}-u-V+\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle\langle\eta\rangle\langle\frac{\varepsilon x'}{2}\rangle}\right]^m$$

sont tous trois bornés par sous-multiplicativité.

Reste à prendre la norme L^2.

$$\|\ e^*\#\varphi\#a_\varepsilon\#f\ \|_{L^2}$$

$$\leq C^{ste} \parallel e \parallel_{W^{2n,\infty}} \parallel \frac{\partial^{4n+m}_{x,\xi} f}{\langle \xi \rangle^m} \parallel_{L^\infty} \int \frac{du}{\langle u \rangle^n} \frac{dU}{\langle U \rangle^n} \frac{dv}{\langle v \rangle^n} \frac{dV}{\langle V \rangle^n} d\eta \parallel T(uU; vV; \eta\xi; x') \parallel_{L^2(x';\xi)}$$

$$\leq C^{ste} \parallel e \parallel_{W^{2n,\infty}} \parallel \frac{\partial^{4n+m}_{x,\xi} f}{\langle \xi \rangle^m} \parallel_{L^\infty} \parallel \langle \xi \rangle^{2m} \partial^{3n+2m}_{x,\xi} \varphi \parallel_{L^2} \max_{|\alpha| \leq n} \left(\int_{\eta \in \mathbb{R}^N} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \frac{|\widehat{\langle D_x \rangle^{2m} \partial^\alpha_\xi} a|(\eta; \xi)}{\langle \xi \rangle^m} d\eta \right)$$

L'essentiel du lemme 3.27 est acquis. En appliquant la borne précédente au développement limité

$$\frac{I_\varepsilon - I_0}{\varepsilon} = \int_0^1 \frac{d}{ds} [e^*(x + \frac{\varepsilon s U}{2}; \xi + \frac{\eta}{2} + V + \frac{\varepsilon s x'}{2}) \hat{\varphi}(x'; \xi + \frac{\eta}{2} - u - V) \hat{a}(\eta; \xi - u - \frac{\varepsilon s x'}{2})$$

$$f(x - \frac{\varepsilon s U}{2} + \frac{\varepsilon s v}{2}; \xi - \frac{\eta}{2} - u - V - \frac{\varepsilon s x'}{2})] \frac{ds}{\varepsilon}$$

de forme tout à fait analogue à I_ε après dérivation dans les facteurs e^* et f (et $\hat{a}$) on obtient le premier terme du développement limité de $e^* \# \varphi \# a_\varepsilon \# f$ au sens de L^2 :

$$\parallel e^* \# \varphi \# a_\varepsilon \# f - (e^* \# \varphi \# a_\varepsilon \# f)|_{\varepsilon=0} \parallel_{L^2} \leq \varepsilon C^{ste} \parallel e \parallel_{W^{2n+1,\infty}} \parallel \frac{\partial^{4n+m+1}_{x,\xi} f}{\langle \xi \rangle^m} \parallel_{L^\infty} \parallel \langle \xi \rangle^{2m} \partial^{3n+2m+1}_{x,\xi} \varphi \parallel_{L^2}$$

$$\max_{|\alpha| \leq n+1} \left(\int_{\eta \in \mathbb{R}^N} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \frac{|\partial^\alpha_\xi \widehat{\langle D_x \rangle^{2m}} a|(\eta; \xi)}{\langle \xi \rangle^m} d\eta \right)$$

□

Preuve. Lemme 3.28.

En retranchant à la formulation intégrale du 4-dièse des lemmes 3.25 et 3.26 la fomulation intégrale du 3-dièse du lemme 3.27 on obtient

$$e^* \# \varphi \# a_\varepsilon \# (e \# p - e.p)(x; \xi) = \int e^{-2i\pi u U} du dU e^{-2i\pi v V} dv dV e^{-2i\pi y Y} dy dY e^{-2i\pi z Z} dz dZ$$

$$e^*(x + \frac{\varepsilon U}{2}; \xi - \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2}) \varphi(x + \frac{\varepsilon U}{2} - \varepsilon y + \frac{\varepsilon v}{2}; \xi - u - \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2}) a(\frac{x}{\varepsilon} - y; \xi - u + \frac{\varepsilon Z}{2})$$

$$e(x - \frac{\varepsilon v}{2} + z; \xi - u + V + \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2})[p(x + z; \xi - u + V + \frac{Y}{2}) - p(x + z - \frac{\varepsilon v}{2}; \xi - u + V + \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2})]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 ds \int e^{-2i\pi u U} du dU e^{-2i\pi v V} dv dV e^{-2i\pi y Y} dy dY e^{-2i\pi z Z} dz dZ$$

$$e^*(x + \frac{\varepsilon U}{2}; \xi - \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2}) \varphi(x + \frac{\varepsilon U}{2} - \varepsilon y + \frac{\varepsilon v}{2}; \xi - u - \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2}) a(\frac{x}{\varepsilon} - y; \xi - u + \frac{\varepsilon Z}{2})$$

$$e(x - \frac{\varepsilon v}{2} + z; \xi - u + V + \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon Z}{2})(v.\nabla_x - Z.\nabla_\xi) p(x + z - \frac{\varepsilon s v}{2}; \xi - u + V + \frac{Y}{2} + \frac{\varepsilon s Z}{2})$$

En introduisant $\hat{a} = \mathcal{F}_{\%x} a$ (et aussi par conséquent $\hat{\varphi}$) on obtient finalement

$$e^* \# \varphi \# a_\varepsilon \# (e \# p - e.p)(x; \xi)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 ds \int e^{-2i\pi uU} dudU e^{-2i\pi vV} dvdV e^{-2i\pi wW} dwdW e^{+2i\pi\eta x} d\eta e^{+2i\pi xx'} dx'$$

$$e^*(x+\frac{\varepsilon U}{2};\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{x'}{2}+\frac{\varepsilon W}{2})\hat{\varphi}(x';\xi+\frac{\eta}{2}+\frac{(1-\varepsilon)x'}{2}-u+\frac{\varepsilon W}{2})\hat{a}(\eta;\xi-u-\frac{\varepsilon x'}{2}+\frac{\varepsilon W}{2})$$

$$e(x-\frac{\varepsilon v}{2}+w;\xi-\frac{\eta}{2}-\frac{x'}{2}-u+V+\frac{\varepsilon W}{2})(v.\nabla_x-W.\nabla_\xi)p(x+w-\frac{\varepsilon sv}{2};\xi-\frac{\eta}{2}-\frac{x'}{2}-u+V+\frac{\varepsilon sW}{2})$$

Le lemme 3.28 découle de cette formulation par la méthode du lemme précédent.
□

3.5 Bibliographie.

Références

[BBS] C. Boldrighini, L.A. Bunimovich, Y.G.Sinai. On the Boltzmann equation for the Lorentz gas. *J. Stat. Phys.* 32 :477-501, **1983**.

[C] S. Chandrasekhar. Radiative transfer. *Dover, New-York*, **1960**.

[CB] C. Bardos. *Ann. Ec. Norm. Sup.* Vol3, No4, 185-233, **1970**.

[DGL] D. Durr, S. Goldstein, J.L. Lebowitz. Asymptotic motion of a classical particle in a random potential in two dimensions. *Comm. Math. Phys.* 113 :209-230, **1987**.

[DP] L. Desvillettes, M. Pulvirenti. The linear Boltzmann equation for long-range forces : a derivation from particle systems. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 9 :1123-1145, **1999**.

[DR] L. Desvillettes, V. Ricci. A rigorous derivation of a linear kinetic equation of Fokker-Planck type in the limit of grazing collisions. *J. Stat. Phys.* to appear.

[EY] L. Erdös, H.T. Yau. Linear Boltzmann equation as the weak coupling limit of a random Schrödinger equation. *Comm. Pure Appl. Math.* LIII :667-735, **2000**.

[GAL] G. Galavotti. Rigorous theory of the Boltzmann equation in the Lorentz gas. *Nota interna n. 358, Istiuto di Fisica, Universitá di Roma*, **1973**.

[HLW] T.G. Ho, L.J. Landau, A.J. Wilkins. On the weak coupling limit for a Fermi gas in a random potential. *Rev. Math. Phys.* 65 :97-128, **1979**.

[KP1] H. Kesten, G.C. Papanicolaou. A limit theorem for turbulent diffusion. *Comm. Math. Phys.* 65 :97-128, **1979**.

[KP2] H. Kesten, G.C. Papanicolaou. A limit theorem for stochastic acceleration. *Comm. Math. Phys.* 78 :19-63, **1980**.

[L] O. Lanford. Time evolution of large classical systems. *Lecture notes in physics, Springer-Verlag*, 38 :1-111, **1975**.

[P] A. Pazy. Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations. *Springer-Verlag*, **1983**.

[PV] F. Poupaud, A. Vasseur. *J. Math. Pure Appl.* (to appear) **2003**.

[RPK] L. Ryzhik, G. Papanicolaou, J.K. Keller. Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave motion* , 24 :327-370, **1996**.

[S] H. Spohn. The Lorentz process converges to a random flight process. *Comm. Math. Phys.* 60 :277-290, **1978**.

4 Limite semi-classique dans l'approximation de champ moyen.

Résumé. Cette partie développe, à l'aide des résultats de [LP] sur les transformées de Wigner des noyaux, une remarque de H.Narnhofer et G.L.Sewell concernant l'unicité de la hiérarchie infinie (BBGKY) obtenue comme limite du problème de Schrödinger à N particules lorsque $N \to \infty$. Dans l'approximation de champ moyen le potentiel est d'amplitude approximative N. Dans l'approximation semi-classique la constante de Planck $\varepsilon \to 0$ tend vers zéro. Ici (théorème 4.28) aucune relation n'est supposée entre ces deux paramètres. L'existence pour un potentiel peu régulier découle du théorème des moments énoncé à la fin de la section 1.4. L'unicité pour un potentiel très régulier (et plus précisément la majoration du lemme 4.35) est présentée succintement en appendice dans [NS].

4.1 Le problème, le théorème.

Dans l'espace à $d = 3$ dimensions nous noterons les N-uplets de variables d'espace et de phase sous la forme

$$x = x^N = (x_1 \cdots x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N \qquad \xi = \xi^N = (\xi_1 \cdots \xi_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$$

Pour alléger l'écriture la copie N fois de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sera notée $L^2(\mathbb{R}^d)^N$.

Soit $\psi^\varepsilon \in C^0[\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^d)^N]$ solution du problème de Schrödinger à N particules avec condition initiale factorisée :

$$\begin{cases} \psi^\varepsilon = \psi^\varepsilon(t; x_1 \cdots x_N) \in \mathbb{C} \text{ où } x_1 \in \mathbb{R}^d \cdots x_N \in \mathbb{R}^d \text{ et } t \in \mathbb{R}_{(+)} \\ \psi^\varepsilon(t=0) = \phi_1^\varepsilon \otimes \cdots \otimes \phi_N^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d)^N \text{ où } \{\phi_1^\varepsilon, \cdots, \phi_N^\varepsilon\} \subset L^2(\mathbb{R}^d) \text{ est une famille orthonormale} \\ i\varepsilon\partial_t\psi^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta\psi^\varepsilon + V\psi^\varepsilon \end{cases}$$

où le laplacien $\Delta = \Delta_{x_1} + \cdots + \Delta_{x_N}$ est somme de Nd dérivées partielles.

Par hypothèse $V = \dfrac{1}{N}\Sigma_{1 \le i \ne j \le N} v(x_i - x_j)$ est somme de $N(N-1)$ potentiels obtenus à partir de $v \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ supposé réel pair. En particulier V est réel borné symétrique.

Soit $w^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$ la transformée de Wigner usuelle dans l'espace à dN dimensions

$$w^\varepsilon[\psi^\varepsilon] : (x_1 \cdots x_N; \xi_1 \cdots \xi_N) \mapsto \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \psi^\varepsilon(x - \varepsilon v/2)\overline{\psi^\varepsilon}(x + \varepsilon v/2) e^{+2i\pi v.\xi} dv$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \psi^\varepsilon(x_1 - \varepsilon v_1/2 \cdots x_N - \varepsilon v_N/2)\overline{\psi^\varepsilon}(x_1 + \varepsilon v_1/2 \cdots x_N + \varepsilon v_N/2) e^{+2i\pi(v_1.\xi_1 + \cdots + v_N.\xi_N)} dv_1 \cdots dv_N$$

et soit $w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$ sa symétrisation sous le groupe S_N des permutations

$$w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} w^\varepsilon[\psi^\varepsilon]_\sigma = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon] = W^\varepsilon[\rho^\varepsilon]$$

$$\rho^\varepsilon = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} \overline{\psi_\sigma^\varepsilon} \otimes \psi_\sigma^\varepsilon$$

où classiquement f_σ désigne l'application $(u_1 \cdots u_N) \mapsto f(u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(N)})$ obtenue par la permutation $\sigma \in S_N$ des variables dans l'application f. La notation W^ε désigne la transformation de Wigner des noyaux définie dans la section 1.4.

Remarque. Initialement

$$w^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)] = W^\varepsilon[\phi_1^\varepsilon] \otimes \cdots \otimes W^\varepsilon[\phi_N^\varepsilon]$$

$$w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)] = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} W^\varepsilon[\phi_{\sigma(1)}^\varepsilon] \otimes \cdots \otimes W^\varepsilon[\phi_{\sigma(N)}^\varepsilon]$$

Pour tout $1 \leq K \leq N$ définissons sur l'espace à dK dimensions la transformée de Wigner symétrisée partielle

$$w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] : (x_1 \cdots x_K; \xi_1 \cdots \xi_K) \mapsto \int\int_{(\mathbb{R}^d)^{N-K} \times (\mathbb{R}^d)^{N-K}} w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] dx_{>K} d\xi_{>K}$$

$$= \int\int_{(\mathbb{R}^d)^{N-K} \times (\mathbb{R}^d)^{N-K}} w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon](x_1 \cdots x_N; \xi_1 \cdots \xi_N) dx_{K+1} \cdots dx_N d\xi_{K+1} \cdots d\xi_N$$

C'est encore la transformée de Wigner usuelle $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = W^\varepsilon[\rho_K^\varepsilon]$ du noyau symétrisé partiel

$$\rho_K^\varepsilon(x_1 \cdots x_K; y_1 \cdots y_K) = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} \int\int_{(\mathbb{R}^d)^{N-K} \times (\mathbb{R}^d)^{N-K}} \overline{\psi_\sigma^\varepsilon} \otimes \psi_\sigma^\varepsilon d(x_{K+1} = y_{K+1}) \cdots d(x_N = y_N)$$

$$= \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} \int_{(\mathbb{R}^d)^{N-K}} \overline{\psi_\sigma^\varepsilon}(x_1 \cdots x_K; z_{K+1} \cdots z_N) \psi_\sigma^\varepsilon(y_1 \cdots y_K; z_{K+1} \cdots z_N) dz_{K+1} \cdots dz_N$$

Remarque. Initialement

$$w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)] = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} W^\varepsilon[\phi_{\sigma(1)}^\varepsilon] \otimes \cdots \otimes W^\varepsilon[\phi_{\sigma(K)}^\varepsilon]$$

$$= \frac{N-K!}{N!}\Sigma_{1 \leq i_1 \neq \cdots \neq i_K \leq N} W^\varepsilon[\phi_{i_1}^\varepsilon] \otimes \cdots \otimes W^\varepsilon[\phi_{i_K}^\varepsilon]$$

$$\rho_K^\varepsilon(t=0)(x_1 \cdots x_K; y_1 \cdots y_K) = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma \in S_N} \overline{\phi_{\sigma(1)}^\varepsilon} \otimes \phi_{\sigma(1)}^\varepsilon(x_1; y_1) \cdots \overline{\phi_{\sigma(K)}^\varepsilon} \otimes \phi_{\sigma(K)}^\varepsilon(x_K; y_K)$$

$$= \frac{N-K!}{N!}\Sigma_{1 \leq i_1 \neq \cdots \neq i_K \leq N} \overline{\phi_{i_1}^\varepsilon} \otimes \phi_{i_1}^\varepsilon(x_1; y_1) \cdots \overline{\phi_{i_K}^\varepsilon} \otimes \phi_{i_K}^\varepsilon(x_K; y_K)$$

Théorème 4.28 *Supposons les données initiales orthonormalisées ε-oscillantes ∞-compactes au sens où*

$$\begin{cases} \varepsilon\nabla\phi_1^\varepsilon, \cdots, \varepsilon\nabla\phi_N^\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R}^d) \text{ restent bornés indépendamment de } \varepsilon \text{ et } N \\ |\cdot|\phi_1^\varepsilon, \cdots, |\cdot|\phi_N^\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R}^d) \text{ restent bornés indépendamment de } \varepsilon \text{ et } N \end{cases}$$

Supposons $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ lipschitzien.

Après extraction dans $(\varepsilon; N) \to (0; \infty)$ la transformée de Wigner symétrisée partielle $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$ converge pour chaque $K \geq 1$ dans $\sigma(\mathcal{A}'; \mathcal{A})$ localement uniformément en temps lorsque $(\varepsilon; N) \to (0; \infty)$ vers une mesure de probabilité f_K solution de la hiérarchie infinie avec donnée initiale factorisée :

$$f_K \in C^0[\mathbb{R}_t; \mathcal{M}_S^+((\mathbb{R}^d)^K \times (\mathbb{R}^d)^K)]$$

$$f_K(t=0) = \bigotimes_{1 \leq k \leq K} f_1(t=0)$$

$$\int\int_{(\mathbb{R}^d)^K \times (\mathbb{R}^d)^K} f_K = 1$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f_{K+1} dx_{K+1} d\xi_{K+1} = f_K$$

$$\partial_t f_K + \xi^K.\nabla_x f_K = 2\Sigma_{1 \leq k \leq K} \int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla v(x_k - y).\nabla_{\xi_k} f_{K+1}(x^K; y|\xi^K; \eta) dy d\eta \qquad (102)$$

où $\mathcal{M}_S^+((\mathbb{R}^d)^K \times (\mathbb{R}^d)^K)$ est le cône des mesures positives symétriques par rapport aux couples de variables $(x_1; \xi_1) \cdots (x_K; \xi_K)$.

Lorsque v est plus régulier, $\hat{v} \in L_c^1(\mathbb{R}^d)$, par unicité de la hiérarchie infinie f_K est factorisée pour tout temps :

$$f_K(t) = \bigotimes_{1 \leq k \leq K} f_1(t)$$

où f_1 résout l'équation de Vlasov

$$\partial_t f_1 + \xi.\nabla_x f_1 = 2\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla v(x-y) f_1(y; \eta) dy d\eta.\nabla_\xi f_1$$

Remarque. L'hypothèse $\hat{v}$ à support compact est un critère agréable pour contrôler la croissance des dérivées

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \| \partial^n v \|_{L^\infty} < \infty$$

Je pense que le théorème reste valable sous cette condition moins mais néanmoins très restrictive.

Remarque. La propriété d'unicité pour la hiérachie infinie sans effet différentiel (c'est-à-dire lorsque $\nabla v.\nabla_\xi$ est remplacé par v) a été largement étudiée même pour des potentiels non bornés. Voir par exemple [BGM] et [EY]. Lorsque la factorisation à l'instant initial se transmet à tout temps on parle parfois de " propagation du chaos ".

Commencons par préciser ce que deviennent les propriétés de la transformée de Wigner usuelle après symétrisation et intégration partielle.

Lemme 4.29

$$\int\int_{(\mathbb{R}^d)^N\times(\mathbb{R}^d)^N} w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = 1$$

$$\int\int_{(\mathbb{R}^d)^N\times(\mathbb{R}^d)^N} |w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|^2 = \frac{1}{N!\varepsilon^{dN}}$$

$$\partial_t w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] + \xi.\nabla_x w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = \frac{i}{\varepsilon}[V(x+\varepsilon D_\xi/2) - V(x-\varepsilon D_\xi/2)]w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$$

$$\partial_t w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] + \xi^K.\nabla_x w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = \frac{K}{N}\frac{i}{\varepsilon}[V_{(K)}(x+\varepsilon D_\xi/2) - V_{(K)}(x-\varepsilon D_\xi/2)]w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$$

$$+2(1-\frac{K}{N})\frac{i}{\varepsilon}\Sigma_{1\le k\le K}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}[v(x_k-y+\varepsilon D_{\xi_k}/2)-v(x_k-y-\varepsilon D_{\xi_k}/2)]w_{K+1}^\varepsilon[\psi^\varepsilon](x^K;y|\xi^K;\eta)dyd\eta$$

PREUVE. Les moments d'ordre un et deux des transformées de Wigner se calculent exactement en fonction des noyaux :

$$\int\int w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = \int\int W^\varepsilon[\rho^\varepsilon] = \text{ Tr } \rho^\varepsilon = 1$$

car $\text{ Tr } \rho^\varepsilon = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N}\int|\psi_\sigma^\varepsilon|^2 = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N}\int|\psi_\sigma^\varepsilon(t=0)|^2 = \text{ Tr } \rho^\varepsilon(t=0)$,

$$\int\int|w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|^2 = \| W^\varepsilon[\rho^\varepsilon] \|_{L^2}^2 = \frac{1}{\varepsilon^{dN}} \| W^1[\rho^\varepsilon] \|_{L^2}^2 = \frac{1}{\varepsilon^{dN}} \| \rho^\varepsilon \|_{L^2}^2 = \frac{1}{N!\varepsilon^{dN}}$$

car $\| \rho^\varepsilon \|_{L^2}^2 = \frac{1}{N!^2}\Sigma_{\sigma;\tau\in S_N}| < \psi_\sigma^\varepsilon|\psi_\tau^\varepsilon >_{L^2} |^2 = \frac{1}{N!^2}\Sigma_{\sigma;\tau\in S_N}| < \psi_\sigma^\varepsilon(t=0)|\psi_\tau^\varepsilon(t=0) >_{L^2} |^2$
$= \| \rho^\varepsilon(t=0) \|_{L^2}^2 = \frac{1}{N!^2}\Sigma_{\sigma;\tau\in S_N}| < \phi_{\sigma(1)}^\varepsilon|\phi_{\tau(1)}^\varepsilon >_{L^2} |^2\cdots| < \phi_{\sigma(N)}^\varepsilon|\phi_{\tau(N)}^\varepsilon >_{L^2} |^2 = \frac{1}{N!}$.

Il est bien connu que la transformée de Wigner assure le passage de l'équation de Schrödinger à l'équation de Liouville [LP]. De $i\varepsilon\partial_t\psi^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta\psi^\varepsilon + V\psi^\varepsilon$ on déduit d'abord $i\varepsilon\partial_t\psi_\sigma^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta\psi_\sigma^\varepsilon + V\psi_\sigma^\varepsilon$ par invariance de l'équation de Schrödinger sous le groupe S_N c'est-à-dire par symétrie du potentiel V puis

$$\partial_t w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon] + \xi.\nabla_x w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon] = \frac{i}{\varepsilon}\mathcal{F}_{\%\xi'}^{-1}([V(x+\varepsilon\xi'/2) - V(x-\varepsilon\xi'/2)]\mathcal{F}_{\%\xi}w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon](x;\xi'))$$

Ce terme se note aussi $\frac{i}{\varepsilon}[V(x+\varepsilon D_\xi/2) - V(x-\varepsilon D_\xi/2)]w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon]$
ou encore $\int_{-1/2}^{+1/2}\nabla V(x+\varepsilon s D_\xi)ds.\nabla_\xi w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon]$.

Il suffit de sommer selon $\sigma\in S_N$ pour obtenir l'évolution de $w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon] = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N}w^\varepsilon[\psi_\sigma^\varepsilon]$.

Dans l'équation d'évolution satisfaite par $w_S^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$, l'intégration partielle $\int\int dx_{>K}d\xi_{>K}$ par rapport aux variables $(x_{K+1}\cdots x_N)\in(\mathbb{R}^d)^{N-K}$ et $(\xi_{K+1}\cdots\xi_N)\in(\mathbb{R}^d)^{N-K}$ peut se justifier rigoureusement par dualité, on aboutit ainsi à l'équation d'évolution satisfaite par $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$. Nous ne détaillerons pas cette procédure classique.
□

Précisons maintenant comment se traduisent les hypothèses initiales d'ε-oscillation et d'∞-compacité sur le noyau partiel ρ_K^ε en tout temps.

Lemme 4.30 *Le noyau* $\rho_K^\varepsilon \in TR^+[L^2(\mathbb{R}^d)^K]$ *représente un opérateur positif sur* L^2 *à trace tel que*

$$Tr\ \rho_K^\varepsilon = 1$$

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^K} |x|^2 \rho_K^\varepsilon(x;x)dx = \frac{K}{N} \parallel |\cdot|\psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2 \leq KC^{ste}(1+|t|)$$

$$Tr\ (-\varepsilon^2 \Delta \rho_K^\varepsilon) = \frac{K}{N} \parallel \varepsilon \nabla \psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2 \leq KC^{ste}$$

Preuve. Les invariants physiques du problème de Schrödinger sont célèbres :

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^N} |\psi^\varepsilon|^2 = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} |\psi^\varepsilon(t=0)|^2 \qquad \text{propriété de groupe unitaire}$$

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^N} \frac{1}{2}|\varepsilon\nabla\psi^\varepsilon|^2 + V|\psi^\varepsilon|^2 = C^{ste} \qquad \text{conservation de l'énergie}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{(\mathbb{R}^d)^N} |\cdot|^2|\psi^\varepsilon|^2 = 2\varepsilon\ \mathrm{Im} \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \overline{\psi^\varepsilon}(x)x.\nabla\psi^\varepsilon(x)dx \qquad \text{propriété du viriel}$$

$$\frac{d}{dt} \parallel |\cdot|\psi^\varepsilon \parallel_{L^2(\mathbb{R}^d)^N} \leq \parallel \varepsilon\nabla\psi^\varepsilon \parallel_{L^2(\mathbb{R}^d)^N}$$

Les bornes initiales

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon\nabla\phi_1^\varepsilon|^2, \cdots, \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon\nabla\phi_N^\varepsilon|^2 \leq C^{ste} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} |\cdot|^2|\phi_1^\varepsilon|^2, \cdots, \int_{\mathbb{R}^d} |\cdot|^2|\phi_N^\varepsilon|^2 \leq C^{ste}$$

qui impliquent

$$\frac{1}{N} \parallel \varepsilon\nabla\psi^\varepsilon(t=0) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^d)^N}^2 \leq C^{ste} \text{ et } \frac{1}{N} \parallel |\cdot|\psi^\varepsilon(t=0) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^d)^N}^2 \leq C^{ste}$$

se généralisent à tout temps $t \in \mathbb{R}$ sous la forme

$$\frac{1}{N} \parallel \varepsilon\nabla\psi^\varepsilon(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^d)^N}^2 \leq C^{ste} \text{ et } \frac{1}{N} \parallel |\cdot|\psi^\varepsilon(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R}^d)^N}^2 \leq C^{ste}(1+|t|)$$

En effet d'une part

$$\int |\varepsilon\nabla\psi^\varepsilon|^2 = \int |\varepsilon\nabla\psi^\varepsilon(t=0)|^2 + 2\int V|\psi(t=0)^\varepsilon|^2 - 2\int V|\psi^\varepsilon|^2$$

$$\leq \int |\varepsilon\nabla\psi^\varepsilon(t=0)|^2 + 4 \parallel V \parallel_\infty \leq \int |\varepsilon\nabla\psi^\varepsilon(t=0)|^2 + 4N \parallel v \parallel_\infty$$

et d'autre part

$$\parallel |\cdot|\psi^\varepsilon \parallel_{L^2} \leq \parallel |\cdot|\psi^\varepsilon(t=0) \parallel_{L^2} + \int_0^t \parallel \varepsilon\nabla\psi^\varepsilon \parallel_{L^2} \leq \parallel |\cdot|\psi^\varepsilon(t=0) \parallel_{L^2} + \sqrt{N}C^{ste}t$$

Enfin les traces $\int_{(\mathbb{R}^d)^K} |x|^2\rho_K^\varepsilon(x;x)dx$ et $\mathrm{Tr}\ (-\varepsilon^2\Delta\rho_K^\varepsilon)$ se calculent explicitement à l'aide de la fonction d'onde

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^K} |x|^2\rho_K^\varepsilon(x;x)dx = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N} \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \Sigma_{1\leq k\leq K}|x_k|^2|\psi_\sigma^\varepsilon|^2(x)dx$$

$$= \frac{1}{N!}\Sigma_{1\leq k\leq K}\Sigma_{\sigma\in S_N}\int_{(\mathbb{R}^d)^N}|x_{\sigma(k)}|^2|\psi^\varepsilon|^2 = \frac{1}{N!}\Sigma_{1\leq k\leq K}\Sigma_{\sigma\in S_N}\int_{(\mathbb{R}^d)^N}|x_{\sigma(1)}|^2|\psi^\varepsilon|^2$$

$$= \frac{K}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N}\int_{(\mathbb{R}^d)^N}|x_{\sigma(1)}|^2|\psi^\varepsilon|^2 = \frac{K}{N}\Sigma_{1\leq k\leq N}\int_{(\mathbb{R}^d)^N}|x_k|^2|\psi^\varepsilon|^2$$

et

$$\mathrm{Tr}\ (-\varepsilon^2\Delta\rho_K^\varepsilon) = \frac{1}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N}\Sigma_{1\leq k\leq K}\parallel \varepsilon\nabla_{x_k}\psi_\sigma^\varepsilon \parallel_{L^2}^2$$

$$= \frac{1}{N!}\Sigma_{1\leq k\leq K}\Sigma_{\sigma\in S_N}\parallel \varepsilon\nabla_{\sigma(k)}\psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2 = \frac{1}{N!}\Sigma_{1\leq k\leq K}\Sigma_{\sigma\in S_N}\parallel \varepsilon\nabla_{\sigma(1)}\psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2$$

$$= \frac{K}{N!}\Sigma_{\sigma\in S_N}\parallel \varepsilon\nabla_{\sigma(1)}\psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2 = \frac{K}{N}\Sigma_{1\leq k\leq N}\parallel \varepsilon\nabla_{x_k}\psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2$$

□

Lemme 4.31 *La famille* $\{w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]\} \subset C^0[\mathbb{R}_t;\sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})]$ *est équicontinue donc relativement compacte dans* $C^0_{loc}[\mathbb{R}_t;\sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})]$.

Preuve. On sait que $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t)] \in \mathcal{A}'$ est borné indépendamment de $(\varepsilon;N)$ et $t\in\mathbb{R}$ par la propriété de trace $\mathrm{Tr}\ \rho_K^\varepsilon(t) = 1$ bornée. Ainsi $\{w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]\} \subset C^0[\mathbb{R}_t;\sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})]$ est équicontinu pourvu que $\{< w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\varphi >\} \subset C^0(\mathbb{R}_t)$ le soit pour tout φ dans une partie dense de $\mathcal{A}$. Alors Ascoli affirme la relative compacité au sens de $C^0_{loc}[\mathbb{R}_t;\sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})]$ car les valeurs prises par $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$ appartiennent à un borné $\subset \sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})$ donc à un métrique compact. C'est pourquoi il existe des extractions $\sigma(\mathcal{A}';\mathcal{A})$-convergentes localement uniformément en temps.

Or $< w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\varphi > \in L^\infty(\mathbb{R}_t)$ est équilipschitzien pour φ régulier car

$$\partial_t < w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\varphi > = < \partial_t w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\varphi > = < w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\xi^K.\nabla_x\varphi > + \frac{i}{\varepsilon} < Op|\varphi > \in L^\infty(\mathbb{R}_t)$$

reste borné, où

$$Op := \frac{K}{N}[V_{(K)}(x+\varepsilon D_\xi/2) - V_{(K)}(x-\varepsilon D_\xi/2)]w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$$

$$+2(1-\frac{K}{N})\Sigma_{1\leq k\leq K}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}[v(x_k-y+\varepsilon D_{\xi_k}/2)-v(x_k-y-\varepsilon D_{\xi_k}/2)]w_{K+1}^\varepsilon[\psi^\varepsilon](x^K;y|\xi^K;\eta)dyd\eta$$

Cette borne est la seule propriété restant à vérifier pour obtenir l'équicontinuité du lemme 4.31. On suppose à cette fin $\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi \in C_c^\infty$.

D'abord $| < w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\xi^K.\nabla_x\varphi > | \leq \parallel w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] \parallel_{\mathcal{A}'} \parallel \xi.\nabla_x\varphi \parallel_{\mathcal{A}}$ est borné.

Ensuite $K\frac{i}{\varepsilon} < [V_{(K)}(x+\varepsilon D_\xi/2) - V_{(K)}(x-\varepsilon D_\xi/2)]w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]|\varphi >$

$$= \frac{i}{\varepsilon}\Sigma_{1\leq i\neq j\leq K}\int\int[v(x_i-x_j+\varepsilon\xi_i'/2-\varepsilon\xi_j'/2)-v(x_i-x_j-\varepsilon\xi_i'/2+\varepsilon\xi_j'/2)]\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi(x;\xi')\tilde{\rho}_K^\varepsilon(x;-\varepsilon\xi')dxd\xi'$$

$$\leq \Sigma_{1\leq i\neq j\leq K}\parallel \nabla v \parallel_\infty \int\int|\xi_i'-\xi_j'||\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi|(x;\xi')|\tilde{\rho}_K^\varepsilon|(x;-\varepsilon\xi')dxd\xi'$$

$$\leq C^{ste} \parallel \tilde{\rho}_K^\varepsilon \parallel_{C_b^0[\xi' \to L_x^1]} \parallel \nabla v \parallel_\infty \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{A}} \text{ diam } Supp(\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi) \qquad \text{est borné.}$$

Enfin $< \frac{i}{\varepsilon} \int\int [v(x_k - y + \varepsilon D_{\xi_k}/2) - v(x_k - y - \varepsilon D_{\xi_k}/2)] w_{K+1}^\varepsilon[\psi^\varepsilon](x^K; y|\xi^K; \eta) dy d\eta | \varphi >$

$$= \frac{i}{\varepsilon} \int [v(x_k - y + \varepsilon D_k/2) - v(x_k - y - \varepsilon D_k/2)] \mathcal{F}_{\%\xi^K} w_{K+1}^\varepsilon[\psi^\varepsilon](x^K; y|D^K; \eta) \mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi(x^K; D^K) dx^K dD^K dy d\eta$$

$$= \frac{i}{\varepsilon} \int [v(x_k - y + \varepsilon D_k/2) - v(x_k - y - \varepsilon D_k/2)] \tilde{\rho}_{K+1}^\varepsilon(x^K; y| - \varepsilon D^K; 0) \mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi(x^K; D^K) dx^K dD^K dy$$

$$\leq \parallel \nabla v \parallel_\infty \parallel \tilde{\rho}_{K+1}^\varepsilon \parallel_{C_b^0[\xi' \to L_x^1]} \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{A}} \text{ rayon } Supp(\mathcal{F}_{\%\xi}^{-1}\varphi) \qquad \text{est borné.}$$

Rappelons que $\tilde{\rho}$ désigne la perturbation diagonale $\tilde{\rho}(x; y) = \rho(x - y/2; x + y/2)$ et que $\parallel \tilde{\rho} \parallel_{C_b^0[y \to L_x^1]} = \parallel \tilde{\rho} \parallel_{C_b^0[x \to L_y^1]} = \text{ Tr } (\rho)$ pour tout noyau ρ positif (voir section 1.4). □

En fait le détail de la preuve de l'équicontinuité conduit aussi à l'équation limite

$$< \partial_t w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] + \xi^K . \nabla_x w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon] | \varphi > = \frac{i}{\varepsilon} < Op | \varphi >$$

$$\to < \partial_t f_K + \xi^K . \nabla_x f_K | \varphi > = 2 < \Sigma_{1 \leq k \leq K} \int\int \nabla v(x_k - y) . \nabla_{\xi_k} f_{K+1}(x^K; y|\xi^K; \eta) dy d\eta | \varphi >$$

Au lieu d'établir des bornes il suffit de vérifier les convergence correspondantes. On obtient ainsi l'équation d'évolution (102) après extraction faible $\sigma(\mathcal{A}'; \mathcal{A})$ dans $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon]$ localement uniformément en temps. La limite f_K est continue à valeurs $\sigma(\mathcal{A}'; \mathcal{A})$ bornée dans les mesures donc continue pour la topologie faible des mesures.

Lemme 4.32 *Après extraction dans $(\varepsilon; N) \to (0; \infty)$, la limite $f_K(t)$ en tout temps des transformées de Wigner symétrisées partielles $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t)]$ vérifie les égalités de moments :*

$$\int\int_{(\mathbb{R}^d)^K \times (\mathbb{R}^d)^K} f_K = 1$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f_{K+1} dx_{K+1} d\xi_{K+1} = f_K$$

Preuve. En tout temps le noyau partiel ρ_K^ε est ε-oscillant ∞-compact grâce aux bornes

$$\text{Tr } (-\varepsilon^2 \Delta \rho_K^\varepsilon) = \frac{K}{N} \parallel \varepsilon \nabla \psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2 \leq K C^{ste}$$

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^K} |x|^2 \rho_K^\varepsilon(x; x) dx = \frac{K}{N} \parallel |\cdot| \psi^\varepsilon \parallel_{L^2}^2 \leq K C^{ste}(1 + |t|)$$

Donc le théorème des moments de P.L.Lions-T.Paul (voir section 1.4) concernant la limite des moments et les moments de la limite s'applique en tout temps :

$$\int\int w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t)] = \int\int W^\varepsilon[\rho_K^\varepsilon(t)] = 1 \to \int\int W^0[\rho_K^\varepsilon(t)] = \int\int f_K(t) = 1$$

$$\int\int w_{K+1}^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t)] dx_{K+1} d\xi_{K+1} = \int\int W^\varepsilon[\rho_{K+1}^\varepsilon(t)] dx_{K+1} d\xi_{K+1} = w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t)]$$

$$\to \int\int f_{K+1}(t) dx_{K+1} d\xi_{K+1} = f_K(t)$$

Plus précisément, pour cette dernière convergence qui concerne les moments partiels, on peut :

– soit appliquer le théorème des moments 1.4 en considérant le temps t et les variables $(x_1;\xi_1)\cdots(x_K;\xi_K)$ comme des paramètres (vu que le critère d'ε-oscillation et d'∞-compacité global implique le critère d'ε-oscillation et d'∞-compacité pour les variables $(x_{K+1};\xi_{K+1})$ partielles)

– soit remarquer l'inégalité de convergence faible entre mesures positives

$$\int\int f_{K+1}dx_{K+1}d\xi_{K+1} \leq f_K$$

qui est en fait une égalité car les masses totales des deux membres sont égales (à un).
□

Lemme 4.33 *Après extraction lorsque $(\varepsilon;N)\to(0;\infty)$, la limite $f_K(t=0)$ au temps initial des transformées de Wigner symétrisées partielles $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]$ est factorisée :*

$$f_K(t=0)=\bigotimes_{1\leq k\leq K} f_1(t=0)$$

Preuve. Par définition de l'extraction, $f_K(t=0)$ est la limite de $w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]$ lorsque $\varepsilon\to 0$ et $N\to\infty$ sans condition en particulier

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]=f_K(t=0)$$

Il s'avère que $\lim\limits_{N\to\infty} w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]=\bigotimes\limits_{1\leq k\leq K} w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]$ est factorisée, d'où l'assertion.

En effet de proche en proche

$$w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]=\frac{1}{N}\Sigma_{1\leq k\leq N}W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon]$$

$$w_2^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]=\frac{1}{N(N-1)}\Sigma_{1\leq i\neq j\leq N}W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon](x_1;\xi_1)W^\varepsilon[\phi_j^\varepsilon](x_2;\xi_2)$$

$$=\frac{N}{N-1}w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]\otimes w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]-\frac{1}{N(N-1)}\Sigma_{1\leq k\leq N}W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon]$$

$$w_3^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]=\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\Sigma_{1\leq i\neq j\neq k\leq N}W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon](x_1;\xi_1)W^\varepsilon[\phi_j^\varepsilon](x_2;\xi_2)W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon](x_3;\xi_3)$$

$$=\frac{N^3}{N(N-1)(N-2)}w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]\otimes w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]\otimes w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]$$

$$+\frac{1}{N(N-1)(N-2)}\{\Sigma_{1\leq k\leq N}W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_k^\varepsilon]-\Sigma_{1\leq i\neq j\leq N}W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_j^\varepsilon]$$

$$+W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_j^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon]+W^\varepsilon[\phi_j^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon]\otimes W^\varepsilon[\phi_i^\varepsilon]\}$$

Plus généralement à K fixé on observe pour des raisons de combinatoire élémentaire la convergence au sens de $\mathcal{A}'$ fort uniformément en ε :

$$w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]-\bigotimes_{1\leq k\leq K} w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)]\to 0 \text{ lorsque } N\to\infty$$

En effet la différence

$$w_K^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)] - \frac{N-K!}{N!}N^K \bigotimes_{1\le k\le K} w_1^\varepsilon[\psi^\varepsilon(t=0)] = -\frac{N-K!}{N!}\,\Sigma\, W^\varepsilon[\phi_{i_1}^\varepsilon]\otimes\cdots\otimes W^\varepsilon[\phi_{i_K}^\varepsilon]$$

est définie comme une somme portant sur les K-uplets $1\le i_1,\cdots,i_K\le N$ non injectifs,

donc tend vers zéro comme $N^K\dfrac{N-K!}{N!}-1$ lorsque $N\to\infty$ à K fixé, puisque les termes sommés sont bornés dans $\mathcal{A}'$ fort.

□

Nous abordons maintenant la question de l'unicité de la hiérarchie infinie du théorème 4.28 sous l'hypothèse $\hat{v}\in L_c^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $r>0$ une borne du support compact de $\hat{v}$.

Introduisons le groupe de translations de générateur infinitésimal $\xi.\nabla_x$

$$S(t): f(x;\xi)\mapsto f(x-t\xi;\xi)$$

et l'opérateur $K(t;\tau)=S(t-\tau)A$ défini par le second membre de (102)

$$A=A_{(K+1)}: f(x^{K+1};\xi^{K+1})\mapsto \Sigma_{1\le k\le K}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\nabla v(x_k-y).\nabla_{\xi_k}f(x^K;y|\xi^K;\eta)dyd\eta$$

La formule de Duhamel [5] donne la solution (inhomogène) de l'évolution linéaire $\partial_t+\xi.\nabla_x$ de second membre Af_{K+1} sous la forme

$$f_K(t)=S(t)f_K(0)+\int_0^t S(t-\tau)Af_{K+1}(\tau)d\tau = S(t)f_K(0)+\int_0^t K(t;\tau)f_{K+1}(\tau)d\tau$$

Après m itérations $f_K(t)$ est fonction des valeurs initiales $f_K(0)\cdots f_{K+m-1}(0)$ augmentée d'un reste égal à

$$\int K(t;t_1)K(t_1;t_2)\cdots K(t_{m-1};t_m)f_{K+m}(t_m)dt_1\cdots dt_m \tag{103}$$

où l'intégration porte sur le volume de temps $\{0\le t_m\le t_{m-1}\le\cdots\le t_2\le t_1\le t\}$ de mesure $t^m/m!$.

Si ce reste tend vers zéro la hiérarchie possède par linéarité la propriété d'unicité :

$$f_K(t=0)=0 \qquad \forall K\Rightarrow f_K(t)=0 \qquad \forall K \qquad \forall t$$

Le lemme 4.35 qui suit propose une estimation (subtile !) du reste dans laquelle les itérations sont compensées, à un facteur géométrique près, par le volume de temps $t^m/m!$.

L'itération un grand nombre m de fois de l'action de K à savoir

$$K(t;\tau)f_{K+1}(\tau):(x^K;\xi^K)\mapsto \Sigma_{1\le k\le K}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\nabla v[x_k-y-(t-\tau)\xi_k]$$

[5] Pour plus de détails sur la formule de Duhamel on peut consulter le livre de A.Pazy [P].

$$.\nabla_{\xi_k} f_{K+1}\left(\tau|x^K-(t-\tau)\xi^K;y|\xi^K;\eta\right)dyd\eta$$

$$=\Sigma_{1\leq k\leq K}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\widehat{\nabla v}(y)e^{+2i\pi[x_k-(t-\tau)\xi_k].y}\mathcal{F}_{\%x_{K+1}}(\nabla_{\xi_k}f_{K+1})\left(\tau|x^K-(t-\tau)\xi^K;y|\xi^K;\eta\right)dyd\eta$$

engendre un grand nombre de dérivées dans tous les sens sur f_{K+m}.

On opte pour une représentation de l'opérateur K à travers l'isomorphisme $\mathcal{F}$ de Fourier (global c'est-à-dire en toutes les variables d'espace et de phase) de sorte que les itérations engendrent dans cette représentation un grand nombre de multiplications. Pour simplifier on gardera les mêmes notations pour les variables duales du côté Fourier.

$$\mathcal{F}[K(t;\tau)f_{K+1}(\tau)]:(x^K;\xi^K)\mapsto\Sigma_{1\leq k\leq K}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\nabla v}(y).[\xi_k+(t-\tau)x_k]$$
$$\mathcal{F}f_{K+1}\left(\tau|x^K-y\delta_k;y|\xi^K+(t-\tau)x^K;0\right)dy$$

sera noté avec la simplification d'écriture $\xi_{K+1}:=-(t-\tau)x_{K+1}$ sous la forme

$$\mathcal{F}[K(t;\tau)f_{K+1}(\tau)]=\Sigma_{1\leq k\leq K}\int_{\mathbb{R}^d}dx_{K+1}\widehat{\nabla v}(x_{K+1}).[\xi^{K+1}+(t-\tau)x^{K+1}]_k$$
$$\mathcal{F}f_{K+1}\left(\tau|x^{K+1}-\delta_k x_{K+1}|\xi^{K+1}+(t-\tau)x^{K+1}\right)$$

où $(\delta_k)_{1\leq k\leq K}$ est la base canonique de $(\mathbb{R}^d)^K$ vu comme $\mathbb{R}^d$-module.

Lemme 4.34 (Calcul des itérations.)

$$\mathcal{F}[K(t;t_1)\cdots K(t_{m-1};t_m)f_{K+m}(t_m)]=$$
$$\Sigma_{1\leq k_1\leq K}\,dx_{K+1}\widehat{\nabla v}(x_{K+1}).[\xi^{K+1}+(t-t_1)x^{K+1}]_{k_1}$$
$$\Sigma_{1\leq k_2\leq K+1}\,dx_{K+2}\widehat{\nabla v}(x_{K+2}).[\xi^{K+2}+(t-t_2)x^{K+2}-(t_1-t_2)\delta_{k_1}x_{K+1}]_{k_2}$$
$$\Sigma_{1\leq k_3\leq K+2}\,dx_{K+3}\widehat{\nabla v}(x_{K+3}).[\xi^{K+3}+(t-t_3)x^{K+3}-(t_1-t_3)\delta_{k_1}x_{K+1}-(t_2-t_3)\delta_{k_2}x_{K+2}]_{k_3}$$
$$\cdots$$
$$\Sigma_{1\leq k_m\leq K+m-1}\,dx_{K+m}\widehat{\nabla v}(x_{K+m}).[\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}-\Sigma_{1\leq l<m}(t_l-t_m)\delta_{k_l}x_{K+l}]_{k_m}$$
$$\mathcal{F}f_{K+m}\left(t_m;x^{K+m}-\Sigma_{1\leq l\leq m}\delta_{k_l}x_{K+l};\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}-\Sigma_{1\leq l<m}(t_l-t_m)\delta_{k_l}x_{K+l}\right)$$

avec la simplification d'écriture $\xi_{K+m}:=-(t-t_m)x_{K+m}$ *pour tout* $m\geq 1$.

Lemme 4.35 (Majoration des itérations.)

$$\left|\mathcal{F}\int K(t;t_1)\cdots K(t_{m-1};t_m)f_{K+m}(t_m)dt_1\cdots dt_m\right|(t;x^K;\xi^K)\leq\frac{t^m}{m!}\parallel\widehat{\nabla v}\parallel_{L^1}^m$$

$$sup\ \Sigma|[\xi^{K+1}+(t-t_1)x^{K+1}]_{k_1}|\cdots|[\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}-\Sigma_{1\leq l<m}(t_l-t_m)\delta_{k_l}x_{K+l}]_{k_m}|$$

où le sup porte sur $x_{k+1}\in Supp(\hat{v})\cdots x_{k+m}\in Supp(\hat{v})$,
où la somme Σ *discrète porte sur* $1\leq k_1\leq K\cdots 1\leq k_m\leq K+m-1$,
avec le sous-entendu des temps $0\leq t_m\leq\cdots\leq t_1\leq t$.

$$\left|\mathcal{F}\int K(t;t_1)\cdots K(t_{m-1};t_m)f_{K+m}(t_m)dt_1\cdots dt_m\right|(t;x^K;\xi^K)\leq C_K^{ste}(4t)^m\parallel\widehat{\nabla v}\parallel_{L^1}^m[|\xi^K|+t|x^K|+rt]^m$$

PREUVE. En effet la majoration

$$\left|[\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}-\Sigma_{1\leq l<m}(t_l-t_m)\delta_{k_l}x_{K+l}]_{k_m}\right| \leq |\xi^K|+t|x^K|+rt+\Sigma_{1\leq l<m}rt\delta_{k_l=k_m}$$

$$\leq [|\xi^K|+t|x^K|+rt](1+\Sigma_{1\leq l<m}\delta_{k_l=k_m})$$

résulte d'une part de $|t_l-t_m|\leq t$, $|\delta_{k_l}|\leq 1$, $|x_{K+l}|\leq r$,

et d'autre part de

$$\begin{cases} 1\leq k_m\leq K \Rightarrow [\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}]_{k_m}=[\xi^K+(t-t_m)x^K]_{k_m}\leq |\xi^K|+t|x^K| \\ K+1\leq k_m\leq K+m-1 \Rightarrow [\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}]_{k_m}=(t_{k_m-K}-t_m)x_{k_m}\leq rt \end{cases}$$

On en déduit

$$\Sigma|[\xi^{K+1}+(t-t_1)x^{K+1}]_{k_1}|\cdots|[\xi^{K+m}+(t-t_m)x^{K+m}-\Sigma_{1\leq l<m}(t_l-t_m)\delta_{k_l}x_{K+l}]_{k_m}|$$

$$\leq [|\xi^K|+t|x^K|+rt]^m\Sigma(1)(1+\delta_{k_1=k_2})(1+\delta_{k_1=k_3}+\delta_{k_2=k_3})\cdots(1+\delta_{k_1=k_m}+\cdots+\delta_{k_{m-1}=k_m})$$

$$=[|\xi^K|+t|x^K|+rt]^m 2^m\Gamma(m+K/2)/\Gamma(K/2)$$

où la somme Σ discrète porte sur $1\leq k_1\leq K\cdots 1\leq k_m\leq K+m-1$.

L'égalité combinatoire

$$\Sigma(1)(1+\delta_{k_1=k_2})(1+\delta_{k_1=k_3}+\delta_{k_2=k_3})\cdots(1+\delta_{k_1=k_m}+\cdots+\delta_{k_{m-1}=k_m})$$

$$=2^m\Gamma(m+K/2)/\Gamma(K/2)=\prod_{0\leq k<m}(K+2k)$$

se vérifie élémentairement par récurrence sur $m\geq 1$.

Or $2^m\Gamma(m+K/2)/\Gamma(K/2)\overset{m\to\infty}{\sim} m!m^{K/2-1}2^m/\Gamma(K/2)$ est asymptotiquement majorée par $C_K^{ste}m!4^m$.

Le contrôle des itérations énoncé dans le lemme 4.35 résulte de cette majoration et de la propriété des solutions étudiées

$$\| \mathcal{F}f_{K+m}\|_\infty=\int\int f_{K+m}dx^{K+m}d\xi^{K+m}=1$$

□

Contre un test $\varphi\in S$ tel que $\mathcal{F}^{-1}\varphi\in C_c^\infty$ le reste (103) tend vers zéro lorsque $m\to\infty$ pour les petits temps :

$$\left|<\int K(t;t_1)K(t_1;t_2)\cdots K(t_{m-1};t_m)f_{K+m}(t_m)dt_1\cdots dt_m|\varphi>\right|$$

$$=\left|<\mathcal{F}\int K(t;t_1)\cdots K(t_{m-1};t_m)f_{K+m}(t_m)dt_1\cdots dt_m|\mathcal{F}^{-1}\varphi>\right|$$

$$\leq C_K^{ste}(4t)^m\|\widehat{\nabla v}\|_{L^1}^m\int\int[|\xi^K|+t|x^K|+rt]^m|\mathcal{F}^{-1}\varphi|(x^K;\xi^K)dx^Kd\xi^K$$

$$\leq C_K^{ste}[4t\|\widehat{\nabla v}\|_{L^1}(1+t)(r+r_\varphi)]^m\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_{L^1}$$

où $r_\varphi>0$ borne le support compact de $\mathcal{F}^{-1}\varphi$.

Ainsi la nullité de tous les f_K à l'instant initial se propage dans le temps :

$$< f_K(t=0)|\varphi >= 0 \qquad \forall K \Rightarrow < f_K(t)\varphi >= 0 \qquad \forall \varphi \qquad \forall t \in [0; T_v(\varphi)]$$

où $T_v(\varphi) > 0$ vérifie $4T_v(\varphi) \parallel \widehat{\nabla v} \parallel_{L^1} (1 + T_v(\varphi))(r + r_\varphi) < 1$.

Quitte à déplacer l'origine des temps, on obtient en itérant le raisonnement la nullité des f_K en tout temps à partir de la nullité au temps initial.

4.2 Bibliographie.

Références

[NS] H. Narnhofer, G.L. Sewell. Vlasov hydrodynamics of a quantum mechanical model. *Comm. Math. Phys.*, 79 :9-24, **1981**.

[BGM] C. Bardos, F. Golse, N.J. Mauser. Weak coupling limit of the N-particle Schrödinger equation. *Mathematical Analysis and Applications*, 2 :275-293, **2000**.

[EY] L. Erdös, H.T. Yau. Derivation of the nonlinear Schrödinger equation with Coulomb potential. *(to appear).*

Résumé.

Cette thèse concerne l'homogénéisation, ou limite semi-classique, des transformées de Wigner associées à des suites bornées L^2 solutions d'une équation de Schrödinger ou d'un système hyperbolique linéaire du premier ordre. On établit diverses équations de transport satisfaites par les mesures de Wigner limites lorsque qu'un petit paramètre tend vers zéro.

Une première partie résume les propriétés générales de la transformation en rappelant son lien avec le calcul pseudo-différentiel.

Une seconde partie étudie la perturbation des hamiltoniens périodiques par des potentiels réguliers apériodiques au moyen d'estimations de commutation concernant les décompositions de Bloch.

Une troisième partie étudie sous une hypothèse de couplage faible l'homogénéisation de certains milieux aléatoires évoluant chaotiquement selon une dynamique réversible mais gouvernés en moyenne par une dynamique irréversible de type Bolztmann.

Une quatrième partie clarifie au moyen du formalisme des transformées de Wigner un résultat connu d'existence-unicité pour la hiérarchie infinie BBGKY du problème de Schrödinger à N particules, $N \to \infty$, dans l'approximation de champ moyen.

Mots-clés : Limite semi-classique, mesure de Wigner, équation de Schrödinger, équation de transport, équation de Vlasov-Boltzmann, décomposition de Bloch des hamiltoniens périodiques, calcul pseudo-différentiel, EDP.

Abstract.

This thesis is concerned with the homogenization (or semi-classical limit) of various Wigner transforms associated to L^2-bounded sequences which solve a Schrödinger equation or a first order linear hyperbolic system. Transport equations are derived for the limiting Wigner measure when a small parameter goes to zero.

A first part describes the general properties of Wigner transforms and recalls their links to pseudo-differential calculus.

A second part studies the perturbation of periodic hamiltonians by regular aperiodic potentials by means of commutation estimates concerning Bloch decompositions.

A third part studies in the weak coupling limit a class of random media which are chaotically governed by reversible dynamics but statistically governed by irreversible dynamics of Boltzmann's type.

Using the Wigner formalism a fourth part clarifies a known result of existence-unicity for the BBGKY infinite hierarchy of Schrödinger problem with N particles, $N \to \infty$, in the mean field approximation.

Key-words : Semi-classical limit, Wigner measure, Schrödinger equation, transport equation, Vlasov-Boltzmann equation, Bloch decomposition of periodic hamiltonians, pseudo-differential calculus, PDE.

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, UMR CNRS 6621
UNSA Parc Valrose 06108 NICE Cedex 2