



**HAL**  
open science

# Contribution à l'analyse et à l'approximation des problèmes d'identification, de reconstruction et des systèmes d'équations elliptiques non linéaires

Abdeljalil Nachaoui

► **To cite this version:**

Abdeljalil Nachaoui. Contribution à l'analyse et à l'approximation des problèmes d'identification, de reconstruction et des systèmes d'équations elliptiques non linéaires. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2002. tel-00002635

**HAL Id: tel-00002635**

**<https://theses.hal.science/tel-00002635>**

Submitted on 26 Mar 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

---

**Contribution à l'analyse et à l'approximation  
des problèmes d'identification, de reconstruction et  
des systèmes d'équations elliptiques non linéaires**

---

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**  
ÉCOLE DOCTORALE STIM  
Spécialité : **Mathématiques**

*présentée*  
*et soutenue publiquement par*

**Abdeljalil NACHAOUI**

*le 12 juin 2002*  
*devant le jury ci-dessous*

<i>Président</i>	Michel PIERRE	Professeur • ENS-Cachan
<i>Rapporteurs</i>	Michel FORTIN	Professeur • Université de Laval (Québec)
	Peter MARKOWICH	Professeur • Université de Vienne (Autriche)
	Mohand MOUSSAOUI	Professeur • École Centrale de Lyon
<i>Examineurs</i>	Jean-François CIAVALDINI	Professeur • Université de Nantes
	François MURAT	Directeur de Recherche CNRS • Université de Paris VI
	Serge NICAISE	Professeur • Université de Valenciennes
	Didier ROBERT	Professeur • Université de Nantes

# Remerciements

---

Je suis heureux et honoré que ce jury soit présidé par Monsieur **M. Pierre**, professeur à l'ENS-Cachan. Je tiens à le remercier très sincèrement.

Mes vifs remerciements vont à Messieurs **M. Fortin**, professeur à Université de Laval (Québec), **P. Markowich** professeur à l'Université de Vienne (Autriche) et **M. Moussaoui**, professeur à l'École Centrale de Lyon d'avoir bien voulu examiner ces travaux, tâche généralement peu agréable, tout en soulignant que Monsieur **M. Fortin** a accepté, malgré ses multiples obligations, de faire partie du jury.

Monsieur **J. F. Ciavaldini**, professeur à l'Université de Nantes, qui m'a initié aux joies de l'analyse numérique a bien voulu, lui aussi, faire partie du jury et je tiens à l'en remercier.

Je suis très sensible à la présence de Messieurs **F. Murat**, directeur de recherche au CNRS à l'Université de Paris VI et **S. NICAISE**, professeur à l'Université de Valenciennes. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à cette thèse en acceptant de participer au jury.

Il m'est particulièrement agréable que Monsieur **D. Robert**, professeur à l'Université de Nantes et directeur du laboratoire de mathématique Jean Leray, soit membre du jury. Qu'il trouve ici, ainsi que tous les membres de l'UMR 6629 et du département de mathématiques, l'expression de ma gratitude et de ma sympathie.

Monsieur **N. Nassif**, professeur à l'Université de Reims, d'abord en tant qu'enseignant à l'université de Rennes, puis directeur de thèse et enfin collaborateur scientifique m'a fait profiter de son expérience et m'a toujours exprimé son soutien et ses encouragements bienveillants. Qu'il reçoive ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Enfin ce travail de recherche est le fruit de nombreuses collaborations. Que toutes les personnes, chercheurs débutants ou confirmés, citées dans ce document, avec lesquelles j'ai travaillé durant ces années, sachent que je les remercie pour ce qu'elles m'ont apporté.

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation des travaux</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Convergences des systèmes discrets de dérive-diffusion . . . . .	4
1.2.1	Résultats de convergence . . . . .	5
1.2.2	Application : discrétisation par éléments finis . . . . .	7
1.2.3	Remarques et autres résultats . . . . .	9
1.3	Méthodes itératives pour le problème de Cauchy . . . . .	10
1.3.1	Problème non linéaire . . . . .	10
1.3.2	Le problème linéaire . . . . .	11
1.3.3	Description de l'algorithme . . . . .	11
1.3.4	Étude de la convergence . . . . .	12
1.3.5	Approximation . . . . .	13
1.3.6	Formulation en équation intégrale . . . . .	13
1.3.7	Implémentation . . . . .	14
1.3.8	Résultats numériques . . . . .	15
1.4	Identification de la zone de Dépletion dans les MESFET . . . . .	16
1.4.1	Formulation . . . . .	16
1.4.2	Existence et unicité pour le problème d'optimisation de forme . . . . .	17
1.4.3	Remarques et autres résultats . . . . .	18
1.5	Étude d'un problème d'identification de frontière dans les jonctions <i>pn</i> . . . . .	19
1.5.1	Paramétrisation et formulation du problème . . . . .	20
1.5.2	Description des méthodes de résolution . . . . .	21
1.5.3	Résultats numériques . . . . .	23
1.6	Une nouvelle formulation du problème de la digue non homogène . . . . .	25
1.6.1	Existence du domaine optimal . . . . .	27
1.6.2	Remarques et autres résultats . . . . .	28
1.6.3	Quelques résultats numériques . . . . .	30
1.7	Une approche du problème d'écoulement non stationnaire dans une digue homogène . . . . .	30
1.7.1	Existence du domaine optimal . . . . .	33
1.7.2	Quelques résultats numériques . . . . .	34

<b>A</b>	<b>Liste des publications</b>	<b>39</b>
A.1	Liste des publications Mai 2002 . . . . .	41
A.1.1	Articles parus/à paraître dans des revues internationales . . . . .	41
A.1.2	Articles dans des congrés internationaux avec actes et comité de lecture . . . . .	42
A.1.3	Colloques internationaux sans actes ou avec actes à diffusion restreinte . . . . .	43
A.1.4	Rapports de Recherche/articles soumis . . . . .	44
<b>B</b>	<b>Les publications jointes (document annexe)</b>	<b>45</b>

## Chapitre 1

# Présentation des travaux



## 1.1 Introduction

Ce travail est divisé en deux axes de recherches. Le premier axe concerne l'étude de quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires issus de la modélisation macroscopique des composants semi-conducteurs. Le deuxième axe de recherche est consacré à l'étude de quelques problèmes d'identification. Nous nous intéressons en particulier à deux types de problèmes d'identification. Le premier concerne la reconstruction des données sur le bord pour des problèmes elliptiques. Le deuxième type de problèmes auquel nous nous sommes intéressés est celui de l'identification des frontières dans des problèmes gouvernés par des équations elliptiques.

La recherche menée pendant plusieurs années dans l'étude des systèmes d'équations modélisant les semi-conducteurs nous a conduis à la rédaction d'une théorie sur les conditions suffisantes pour la convergence des systèmes discrets de dérive-diffusion [54]. Dans ce travail nous discutons la construction de solutions approchées. En particulier, la construction de suites  $\{u^{(m)}\}_m$  par un processus du type Gummel :

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla u^{(m)} = F(u^{(m-1)}).$$

Nous présentons des critères de stabilité et de consistance pour vérifier la convergence de ces suites dans le cas de l'unicité de la solution du système dérive-diffusion [56]. Dans les mêmes conditions, nous montrons un théorème permettant l'obtention des estimations d'erreurs.

Comme la théorie présentée dans la première partie de ce travail réduit l'analyse de la convergence d'un schéma d'approximation à l'analyse de la convergence des méthodes de discrétisation des équations découplées, nous appliquons ces résultats dans le cas où les équations sont approchées par la méthode des éléments finis. Nous montrons l'existence d'une solution discrète et nous construisons des estimations des solutions indépendamment du paramètre de discrétisation. En particulier nous montrons que les approximations du potentiel restent uniformément bornées. Des estimations d'erreurs en sont alors déduites. Vue la régularité de la solution [33], celles-ci sont de l'ordre de  $h^{\frac{1}{2}-\delta}$ .

Un des problèmes d'identification des données sur le bord auquel nous nous sommes intéressés est le problème de Cauchy pour des équations elliptiques. Il s'agit de reconstruire des données sur une partie  $\Gamma_0$  de la frontière  $\Gamma$  de l'ouvert  $\Omega$  afin d'obtenir la trace observée sur une autre partie  $\Gamma_2$  de  $\Gamma$ . Étant données les fonctions  $v_d$  sur  $\Gamma_1$  et  $g$  sur  $\Gamma_3$  appartenant respectivement à  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$  et  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ , et  $f$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ . On cherche  $\psi \in H^1(\Omega)$  solution du problème aux limites [25] :

$$(P) \begin{cases} -\nabla K(\psi) \nabla \psi & = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} & = g & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ \psi & = v_d & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{cases}$$

La méthode que nous présentons est basée sur des résultats de Kozlov-Mazyra-Fomin [41]. C'est une méthode itérative permettant une construction de la solution via la résolution d'une suite de problèmes aux limites bien posés. Après la présentation d'une transformation permettant la réduction du problème non linéaire en un problème linéaire, auquel on peut appliquer l'algorithme itératif [36], et une suite d'équations non linéaires scalaires [25], nous montrons un



résultat de convergence de cet algorithme [35] et nous présentons une formulation en équations intégrales des problèmes que nous avons à résoudre, ainsi que leurs approximations par des éléments de frontière [36]. Ce travail se termine par une étude de l'implémentation de cet algorithme tenant compte des propriétés des systèmes obtenus après discrétisation [49].

Notre travail sur les problèmes de frontières libres a démarré par l'étude du problème de l'identification de la zone de déplétion d'un semi-conducteur de type MESFET en utilisant les techniques des inéquations variationnelles [55]. Nous approchons ce problème par des techniques d'optimisation de forme permettant de déterminer la frontière libre séparant la zone de déplétion et la région de neutralité de charges, ainsi que les autres paramètres physiques notamment le potentiel et la densité de charges électriques [2].

Le problème de l'identification de la zone de déplétion se pose d'une façon générale dans la modélisation des jonction  $pn$ . Après avoir reformulé ce problème sous forme d'une inéquation variationnelle, nous proposons son écriture selon les techniques du contrôle et nous utilisons la méthode des éléments finis pour approcher ce problème. L'originalité de ce travail consiste en l'utilisation des nœuds sur la frontière libre comme inconnus, ce qui donne lieu à un système algébrique non-linéaire. Pour résoudre ce système, nous proposons deux algorithmes [22].

Un autre travail entrant dans le cadre de l'étude des problèmes d'identification concerne l'étude théorique et l'approximation numérique du problème d'écoulement stationnaire à travers une digue rectangulaire en milieu poreux non homogène [18]. L'objet est de déterminer la zone mouillée ainsi que la vitesse de filtration du liquide à l'intérieur de la digue. Nous utilisons une paramétrisation du domaine, un choix de régularité minimale sur la fonction paramétrisante permet de montrer l'équivalence avec un autre problème. Nous proposons alors une nouvelle formulation de ce dernier, basée sur la méthode d'optimisation de forme, permettant l'étude de l'existence de la solution avec moins d'hypothèses de régularité sur le coefficient de perméabilité que dans les travaux antérieurs, ensuite nous étudions l'approximation du problème par la méthode des éléments finis [16].

Nous terminons ce document par la présentation d'une nouvelle méthode d'approximation numérique du problème d'écoulement non stationnaire à travers une digue en milieu poreux homogène [17]. Une discrétisation temporelle de l'équation du mouvement de la frontière libre permet d'étudier un problème stationnaire à chaque instant. Ce dernier est reformulé en un problème d'optimisation de forme. Nous étudions l'existence d'une forme optimale et nous présentons quelques résultats numériques.

Nous donnons maintenant un peu plus de détails concernant ces travaux

## 1.2 Convergences des systèmes discrets de dérive-diffusion

Considérons le système de Van Roosbroeck, modélisant le comportement électrique d'un semi-conducteur à l'état stationnaire, qui consiste à chercher le triplet  $\{u, n, p\}$  tel que :

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla u = q(n - p - N) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot (D_n \nabla n - \mu_n n \nabla u) = R \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot (D_p \nabla p + \mu_p p \nabla u) = R \quad (1.3)$$

avec  $u, n, p$  satisfaisant les conditions aux limites mixtes suivantes :

$$\nu \cdot \nabla u = \nu \cdot \nabla n = \nu \cdot \nabla p = 0 \quad x \in \Gamma_N \quad (1.4)$$

$$u = u_d, n = n_d, p = p_d \quad u_d, n_d, p_d \text{ données pour } x \in \Gamma_D, \quad (1.5)$$

où  $\nu$  est le vecteur normal sortant. Nous considérons des choix de la frontière  $\Gamma_D$ , supportant les conditions de Dirichlet, tels que les solutions du système (1.1)-(1.5) ne sont pas suffisamment régulières. Pour le cas où l'intersection de  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  se fait à angles plats, il est connu [33] que  $\{u, n, p\} \in [W^{1,4-\delta}(\Omega)]^3$ ,  $0 < \delta \ll 1$  mais pas dans  $[H^2(\Omega)]^3$

### 1.2.1 Résultats de convergence

Dans ce qui suit nous nous restreignons au cas où  $R = 0$ . Après une renormalisation et en introduisant les variables Slotboom,  $\eta, \rho$  définies par :

$$n = \eta e^u, \quad p = \rho e^{-u}, \quad (1.6)$$

le problème s'écrit. Trouver  $(u, \eta, \rho) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tels que :

$$\nabla \cdot \varepsilon \nabla u = \eta e^u - \rho e^{-u} - N \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mu_n(e^u \nabla \eta) = 0, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mu_p(e^{-u} \nabla \rho) = 0. \quad (1.9)$$

avec les conditions aux limites

$$u = u_d, \eta = \eta_d, \rho = \rho_d \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (1.10)$$

$$\nu \cdot \nabla u = \nu \cdot \nabla \eta = \nu \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{on } \Gamma_N. \quad (1.11)$$

Ce problème admet la formulation variationnelle suivante : Trouver  $(u, \eta, \rho) \in \{u_d, \eta_d, \rho_d\} \oplus (H_D^1)^3$  tel que

$$\left. \begin{aligned} \langle \varepsilon \nabla u, \nabla v \rangle + \langle \eta e^u, v \rangle - \langle \rho e^{-u}, v \rangle &= \langle N, v \rangle \\ \langle \mu_n e^u \nabla \eta, \nabla \varphi \rangle &= 0 \\ \langle \mu_p e^{-u} \nabla \rho, \nabla \psi \rangle &= 0. \end{aligned} \right\} \forall (v, \varphi, \psi) \in (H_D^1)^3 \quad (1.12)$$

où  $H_D^1 = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$

La principale contribution de ce travail est de démontrer sous des conditions moins restrictives que celles considérées dans [47] et [48], qu'une suite d'approximation du système (1.12) peut être utilisée pour obtenir l'existence de solutions du problème (1.7)-(1.9). En plus cette méthode nous permet d'analyser la convergence des approximations indépendamment du type de discrétisation utilisée [54].

La méthode procède comme suite. Nous considérons une suite  $\{u_m, n_m, p_m\}_{m \geq 1}$ , de solution approchant le système de Van Roosbroeck. Basé sur  $\{u_m, n_m, p_m\}$ , nous définissons

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} = \tilde{u}_m &\in H_D^1 \oplus u_d, \\ \langle \varepsilon \nabla \tilde{u}, \nabla v \rangle &= \langle q(n_m - p_m - N), v \rangle, \forall v \in H_D^1(\Omega), \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n} &= \tilde{n}_m \in H_D^1 \oplus n_d, \\ \langle (D_n \nabla \tilde{n}, \nabla v) - \langle \mu_n \tilde{n} \nabla u_m, \nabla v \rangle &= 0, \forall v \in H_D^1(\Omega), \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= \tilde{p}_m \in H_D^1 \oplus p_d, \\ \langle (D_p \nabla \tilde{p}, \nabla v) + \langle \mu_p \tilde{p} \nabla u_m, \nabla v \rangle &= 0, \forall v \in H_D^1(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Il est clair que (1.13), (1.14) et (1.15) est une version découplée du système dérive-diffusion (1.12). Chaque équation est à résoudre par rapport à une variable (continue) principale, les autres étant fixées dans leurs formes discrètes. Nous avons alors

**Théorème 1.2.1** *Si  $(u_m, n_m, p_m)$  est tel que  $(\tilde{u}_m, \tilde{n}_m, \tilde{p}_m) \in [W^{1,p}]^3$ ,  $p < 4$ , ( $p = 4 - \delta$ ), avec  $\{u_m\}_m$  uniformément bornée dans  $L_\infty(\Omega)$  et*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - \tilde{u}_m\|_{1,2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|n_m - \tilde{n}_m\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|p_m - \tilde{p}_m\| = 0,$$

*alors une sous suite de  $\{u_m, n_m, p_m\}$  converge dans  $H^1(\Omega)$ . La limite est une solution du système (1.1)-(1.5).*

**Remarque 1.2.1**

1. *La suite  $\{u_m\}_m$  converge vers  $u$  si la solution est unique.*
2. *Le théorème 1.2.1 implique qu'une sous-suite d'une approximation donnée  $(u_m, n_m, p_m)$  converge vers une solution du problème du semi-conducteur si :*
  - (a) *les approximations  $n_m$  et  $p_m$  approchent respectivement les solutions  $n(u_m)$  et  $p(u_m)$  des équations de continuité écrites en fonction de  $u_m$ .*
  - (b) *L'approximation  $u_m$  du potentiel est proche de la solution  $\tilde{u}_m$  de l'équation de Poisson avec les  $n_m$  et  $p_m$  données.*
3. *L'analyse de la convergence d'un schéma de discrétisation est donc réduite à l'analyse de la convergence des méthodes de discrétisation des équations découplées.*

Nous allons maintenant énoncer un théorème sur lequel seront basés nos résultats d'estimations d'erreurs.

**Théorème 1.2.2** *Sous les conditions du théorème 1.2.1 et si le semi-conducteur est proche de l'équilibre thermique (i.e. unicité de la solution [56]) alors*

1. *La suite  $(u_m, n_m, p_m)$  converge dans  $H^1$  vers la solution du système (1.1)-(1.5).*
2. *Il existe une constante  $C$  tel que*

$$\|u - u_m\|_{1,2} \leq C [\|\tilde{u}_m - u_m\|_{1,2} + \|n_m - \tilde{n}_m\| + \|p_m - \tilde{p}_m\|] \quad (1.16)$$

Soient  $u, n, p, \eta, \rho$  des fonctions associées à une solution exacte du système (1.1)-(1.5). Étant donnée une approximation  $u'$ , on désigne par  $n(u'), p(u')$  les densités d'électrons et de trous obtenus par la résolution des équations de continuité avec ce potentiel  $u'$ .

Soit  $r(u) = q[n(u) - p(u) - N]$  et soient  $L, L^{-1}$  les opérateurs définis par :

$$\xi \xrightarrow{L} f, \quad f \xrightarrow{L^{-1}} \xi, \quad \text{respectivement où}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \xi) = f, \quad x \in \Omega; \quad \xi(x) = u_d(x), \quad x \in \Gamma_D; \quad \nu \cdot \nabla \xi = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

La démonstration du théorème 1.2.1 est une conséquence du lemme suivant avec quelques estimations élémentaires :

**Lemme 1.2.1** Soit  $\{u_m\}_m$  une suite de fonctions continues, telle que  $\|u_m\|_\infty \leq b$ , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_m - L^{-1}r(u_m)\|_{1,2} = 0, \quad (1.17)$$

alors il existe une sous-suite de  $\{u_m\}_m$  telle que  $(u_m, n(u_m), p(u_m))$  converge dans  $H^1$  vers une solution du système (1.1)-(1.5).

Ce lemme utilise quelques estimations a priori, en particulier nous montrons que

**Lemme 1.2.2** Si  $\varphi \in H^1(\Omega)$  alors  $e^\varphi \in L_p, 1 \leq p < \infty$ . De plus il existe une constante  $c_p$  dépendante de  $p$  telle que

$$\|e^\varphi\|_p^p \leq C e^{c_p \|\varphi\|_{1,2}^2} \quad (1.18)$$

Une clé de la démonstration du lemme 1.2.1 est le résultat, sur la continuité  $H^1$ , suivant

**Lemme 1.2.3 (Continuité  $H^1$ )** Soient  $u, u'$  deux potentiels électrique tels que  $\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty \leq b$ , et  $\eta, \rho, \eta', \rho'$  les fonctions solutions des équations de continuité associées. Alors  $\eta, \rho, \eta', \rho'$  vérifient :

$$\|\nabla(\eta - \eta')\| + \|\nabla(\rho - \rho')\| \leq C \|\nabla(u - u')\| (\|\nabla\rho\|_3 + \|\nabla\eta\|_3) \quad (1.19)$$

où  $C$  dépend de  $b$ .

Ce lemme, les relations exprimant la dépendance continue des densités  $n$  et  $p$  du potentiel électrostatique associé et le résultat de Quasi-Monotonie suivant permettent de montrer le théorème 1.2.2.

**Lemme 1.2.4** Supposons que la fonction  $N(x)$  est uniformément bornée et que  $\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty \leq b$ . Les solutions des équations de continuité  $\eta, \eta', \rho, \rho'$  vérifient l'inéquation suivante

$$\langle u - u', \eta e^u - \eta' e^{u'} - \rho e^{-u} + \rho' e^{-u'} \rangle \geq -C_0 C_1 \|\nabla(u - u')\|^2 \quad (1.20)$$

où  $C_1 = C(\|\nabla\rho\|_3 + \|\nabla\eta\|_3)$ , avec  $C$  une constante dépendante de  $b$ , et  $C_0$  dépendante du domaine  $\Omega$

## 1.2.2 Application : discrétisation par éléments finis

Nous présentons l'étude de l'existence et les estimations d'erreurs pour une discrétisation par éléments finis sur les équations du modèle dérive-diffusion. Un résultat du principe du maximum discret est la clé de l'étude de l'existence. Les résultats précédents et le théorème 1.2.2 en particulier, constituent le point de départ de l'analyse des erreurs d'approximation.

Considérons une triangulation régulière  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  où les triangles  $T$  sont supposés non dégénérés. Soit  $V_h$  un sous espace d'éléments finis de  $H_D^1$  et  $u_{dh}, \eta_{dh}$  et  $\rho_{dh}$  les interpolés des données sur le bord. Le problème discrétisé correspondant au problème (1.12) est alors le suivant :

Trouver  $(u_h, \eta_h, \rho_h) \in (u_{dh}, \eta_{dh}, \rho_{dh}) \oplus (V_h)^3$  tel que

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \nabla u_h, \nabla v_h \rangle + \langle \eta_h e^{u_h}, v_h \rangle + \langle \rho_h e^{-u_h}, v_h \rangle &= \langle N, v_h \rangle \\ \langle e^{u_h} \nabla \eta_h, \nabla \varphi_h \rangle &= 0 \quad \forall (v_h, \varphi_h, \psi_h) \in (V_h)^3 \\ \langle e^{-u_h} \nabla \rho_h, \nabla \psi_h \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

L'existence d'une solution du problème discrétisé (1.21) est montrée en utilisant la théorie de degré topologique dans les espaces de dimensions finies, où il suffit de démontrer que la solution est bornée pour que l'existence en découle (La borne ne doit pas obligatoirement être indépendante de  $h$ ). En travaillant sur les équations de continuité, nous montrons, en utilisant un résultat du principe du maximum discret, (cf. [19]), que  $u_h$ ,  $\eta_h$ ,  $\rho_h$ ,  $n_h$  et  $p_h$  sont uniformément bornées.

Considérons l'opérateur  $F_t$  défini par :

$$\begin{aligned} F_t : X_h &\longrightarrow X_h \\ u_{0h} &\longrightarrow u_h \end{aligned}$$

où  $u_h$  est calculé comme suit : Nous cherchons  $\eta_h, \rho_h \in (\eta_{dh}, \rho_{dh}) \oplus (V_h)^2$  solutions de

$$\langle e^{u_{0h}} \nabla \eta_h, \nabla \varphi_h \rangle = 0, \quad \forall (\varphi_h, \psi_h) \in (V_h)^2 \quad (1.22)$$

$$\langle e^{-u_{0h}} \nabla \rho_h, \nabla \psi_h \rangle = 0, \quad (1.23)$$

puis  $u_h$  est calculée comme solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in u_{dh} \oplus V_h \\ \langle \varepsilon \nabla u_h, \nabla v_h \rangle - t \langle \eta_h e^{u_h}, v_h \rangle + t \langle \rho_h e^{-u_h}, v_h \rangle = t \langle N, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Nous avons alors

**Lemme 1.2.5** *Si la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est telle que pour tout  $T \in \mathcal{T}_h$  les angles de  $T$  sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ , alors tout point fixe de  $F_t$  est tel que*

$$(i) \quad \|\eta_h\|_\infty \leq \|\eta_d\|_{L_\infty}, \quad \|\rho_h\|_\infty \leq \|\rho_d\|_{L_\infty}$$

$$(ii) \quad \|\nabla u_h\| \leq C$$

(iii)  $\|n_h\|_p, \|p_h\|_p \leq C_{(p)}$ , où  $C$  et  $C_{(p)}$  sont indépendantes de  $h$  et  $C_{(p)}$  dépend de  $p$  pour tout  $1 \leq p < \infty$

Ce lemme permet l'utilisation de la théorie du degré topologique pour montrer la première assertion du Théorème suivant :

**Théorème 1.2.3** *Sous les hypothèses du lemme 1.2.5 nous avons*

1. le problème discrétisé (1.21) admet une solution  $\{u_h, \eta_h, \rho_h\}, \forall h$ ,
2. La suite  $\{u_h, \eta_h, \rho_h\}_h$  admet une sous suite qui converge vers une solution  $\{u, \eta, \rho\}$  du système (1.12)
3. Si le semi-conducteur est proche de l'équilibre thermique alors la suite  $\{u_h, n_h, p_h\}_h$  converge vers  $\{u, n, p\}$ , la solution unique du système (1.1)-(1.5) avec les estimations d'erreurs suivantes :

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq C\sqrt{h} \quad (1.25)$$

$$\|\eta - \eta_h\|_{1,2} \leq Ch^{\frac{1}{2}-\delta} \quad (1.26)$$

$$\|\rho - \rho_h\|_{1,2} \leq Ch^{\frac{1}{2}-\delta} \quad (1.27)$$

$$\|n - n_h\| \leq C\sqrt{h} \quad (1.28)$$

$$\|p - p_h\| \leq C\sqrt{h} \quad (1.29)$$

La démonstration de la deuxième assertion de ce théorème est basée sur les résultats du théorème 1.2.2 concernant la convergence des approximations. Ces résultats nécessitent que les approximations soient bornées uniformément. Nous montrons alors qu'il existe  $C$  indépendant de  $h$  tel que  $\|u_h\|_\infty \leq C$ .

La dernière partie du théorème est obtenue en choisissant  $u_m = u_h$ ,  $n_m = n_h = e^{u_h} \eta_h$ ,  $p_m = p_h = e^{-u_h} \rho_h$  dans le théorème 1.2.2 et en estimant  $\|\tilde{u}_h - u_h\|_{1,2}$ ,  $\|n(u_h) - n_h\|$  et  $\|p(u_h) - p_h\|$ , où  $\tilde{u}_h = L^{-1}(n_h - p_h - N)$ .

### 1.2.3 Remarques et autres résultats

Notons que notre analyse est suffisamment générale pour être utilisée pour d'autres méthodes d'approximations. Une application à une méthode d'approximation par des éléments finis mixtes avec estimations d'erreurs est faite dans [51].

Un intérêt de l'analyse précédente est que si on connaît, dans le cas où le taux de recombinaison  $R$  est nul, des résultats de convergence des méthodes d'approximation de chaque équation du système de dérive-diffusion, on peut montrer un résultat de convergence globale et montrer ainsi l'existence d'une solution du système.

Nous avons montré, en utilisant la théorie du degré de Leray-Schauder, un autre résultat d'existence dans le cas où  $R \neq 0$  (voir [33]). Récemment, nous avons généralisé ce résultat au cas du modèle dérive-diffusion avec terme d'avalanche dans  $R$  et mobilité non constante s'écrivant sous la forme : Trouver  $(u, \eta, \rho)$  solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) + q n_i \left( e^{u/U_T} \eta - e^{-u/U_T} \rho \right) = q N & \text{dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot \left( \mu_n U_T e^{u/U_T} \nabla \eta \right) = -Q(u, \eta, \rho)(\eta \rho - 1) + g & \text{dans } \Omega, \\ -\nabla \cdot \left( \mu_p U_T e^{-u/U_T} \nabla \rho \right) = -Q(u, \eta, \rho)(\eta \rho - 1) + g & \text{dans } \Omega, \\ u = u_d, \rho = \rho_d, \eta = \eta_d \text{ sur } \Gamma_D, \nu \cdot \nabla u = \nu \cdot \nabla \eta = \nu \cdot \nabla \rho = 0 \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1.30)$$

Nous avons montré qu'une solution de ce système peut s'obtenir comme un point fixe d'un opérateur  $S$  défini sur un convexe construit à l'aide de quelques résultats d'estimation a priori sur  $(u, \eta, \rho)$ . L'existence du point fixe est obtenue par le théorème de Schauder dont les hypothèses sont vérifiées en utilisant quelques résultats d'analyse convexe (voir [23]). Dans le cas où certains changements de conditions aux limites se font à angles plats, nous démontrons (voir [21]) que le système (1.30) admet une solution unique. Ce résultat généralise ceux obtenus dans [56, 65].

Il est à noter que les variables de Slotboom  $(u, \eta, \rho)$  ont l'avantage de garantir la positivité des densités de charge même si on tient compte de la présence d'erreurs numériques. Leur avantage principal est que chaque équation est formellement monotone et auto-adjointe par rapport à la variable associée (les autres variables étant considérées comme données). Cependant, l'approche numérique avec les variables de Slotboom est considérée comme non pratique à cause des problèmes de dépassement de capacité (underflow-overflow) dus à la présence de l'exponentiel ( $e^{-u_h}$  et  $e^{u_h}$ ). Nous avons montré que ces difficultés peuvent être contournées en utilisant une technique "d'échelonnement" [50]. Une autre difficulté concerne le choix du schéma pour résoudre l'équation de Poisson non linéaire. Nous avons analysé et comparé différentes méthodes de type quasi-Newton dans [52, 53, 50].

## 1.3 Méthodes itératives pour le problème de Cauchy

### 1.3.1 Problème non linéaire

Nous allons étudier le problème non linéaire  $(P_1)$  qui est posé dans un ouvert  $\Omega$  dont le bord est continu et  $C^1$  par morceaux est partitionné en quatre parties  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  de mesures positives. Nous avons deux données sur la frontière  $\Gamma_2$  (Dirichlet et Neumann) étant donnée une fonction  $f_1$  appartenant à  $L^2(\Omega)$   $\phi_i$  appartenant à  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$  et  $\psi_i$  appartenant à  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ . On s'intéresse donc à déterminer la fonction  $u$  appartenant à  $H^1(\Omega)$  solution du problème  $(P_1)$

$$(P_1) \begin{cases} -\nabla \cdot K(u) \nabla u & = f_1 \quad \text{sur } \Omega \\ u & = \phi_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ u & = \phi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ K(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} & = \psi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ K(u) \frac{\partial u}{\partial \nu} & = \psi_3 \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

L'utilisation du changement de variable suivant :

$$\omega(u) = \int^u K(t) dt. \quad (1.31)$$

conduit à la recherche d'un  $\omega(u)$ , solution de :

$$(P_2) \begin{cases} -\Delta \omega(u) & = f_1 \quad \text{dans } \Omega \\ \omega(u) & = \int^{\phi_1} K(t) dt. \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \omega(u) & = \int^{\phi_2} K(t) dt. \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \omega(u)}{\partial \nu} & = \psi_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \omega(u)}{\partial \nu} & = \psi_3 \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

Le problème est donc ramené à un problème de Cauchy pour des équations elliptiques linéaires. Une fois que la solution du problème  $(P_2)$  est calculée on obtient  $\omega(u(X_i))$  pour tout point  $X_i$  du domaine  $\Omega$ . Alors pour obtenir la solution de notre problème initial  $(P_1)$ , il suffit de résoudre une suite d'équations non linéaires scalaires :

$$\omega(u(X_i)) - \int^{u(X_i)} K(t) dt = 0. \quad (1.32)$$

Nous pouvons dès maintenant distinguer deux cas possibles :

1. Cas où une primitive  $G$  de la fonction  $K$  est connue, le problème (1.32) devient alors : trouver  $Y_i$  solution de

$$\omega(u(X_i)) - G(Y_i) = 0. \quad (1.33)$$

Cette solution peut être calculée en utilisant les méthodes de résolution des équations non linéaires scalaires (Newton, quasi-Newton).

2. Cas où on ne peut pas obtenir une expression analytique de la primitive de la fonction  $K$  : on approche d'abord l'intégrale  $\int^u K(t)dt$  par une expression  $G_h$  en utilisant une méthode d'intégration numérique (Trapèzes, Simpson...), puis on cherche une solution  $Y_i$  de l'équation non linéaire scalaire

$$\omega(u(X_i)) - G_h(Y_i) = 0, . \quad (1.34)$$

### 1.3.2 Le problème linéaire

Revenons maintenant au problème de Cauchy ( $P_2$ ), qui a suscité la curiosité de beaucoup de chercheurs sur le plan théorique et numérique [44, 57, 58, 39, 36]. Il existe deux grands groupes d'approches pour ce type de problèmes. Le premier comprend les méthodes basées sur sa réduction à une classe de problèmes bien posés au sens de Tikhonov [43, 44] et les méthodes utilisant des fonctions paramétriques [61, 62]. L'autre groupe consiste en les méthodes itératives [40, 41, 37, 36] qui ont l'avantage de ne pas nécessiter de sélection de paramètre comme dans le premier groupe. Un des inconvénients de ce dernier groupe est l'éventuelle nombre important d'itérations nécessaire pour la convergence. La relaxation de la donnée sur le bord nous a permis la construction d'un algorithme très rapide comparé à celui proposé par Kozlov et al. [41].

Considérons donc le problème de Cauchy, écrit sous la forme suivante : Trouver  $u$  solution de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u|_{\Gamma_1} = v_1, \quad u|_{\Gamma_2} = v_2, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_2} = g_2, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_3} = g_3, \quad (1.35)$$

où  $f$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $g_2$  et  $g_3$  sont données. Nous supposons que ces données assurent l'existence d'une solution  $u$  dans  $\Omega$ .

### 1.3.3 Description de l'algorithme

Nous construisons une suite d'approximation de la solution du problème (1.35) par le schéma itératif suivant : Étant donnée  $v_0$ , une approximation initiale de la solution  $u$  sur  $\Gamma_0$  qui doit être bien évidemment compatible avec les autres données, nous calculons  $u^{(2n)}$ , pour  $n \geq 0$ , comme solution du problème

$$-\Delta u^{(2n)} = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\Gamma_0}^{(2n)} = v^{(n)}, \quad u|_{\Gamma_1}^{(2n)} = v_1, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_2}^{(2n)} = g_2, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_3}^{(2n)} = g_3, \quad (1.36)$$

avec  $v^{(0)} = v_0$  et

$$v^{(n)} = \theta u|_{\Gamma_0}^{(2n-1)} + (1 - \theta)v^{(n-1)} \quad \text{for } n \geq 1. \quad (1.37)$$

$u^{(2n+1)}$  est alors obtenue comme solution de :

$$-\Delta u^{(2n+1)} = f \text{ dans } \Omega, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_0}^{(2n+1)} = \partial_\nu u|_{\Gamma_0}^{(2n)}, \quad u|_{\Gamma_1}^{(2n+1)} = v_1, \quad u|_{\Gamma_2}^{(2n+1)} = v_2, \quad \partial_\nu u|_{\Gamma_3}^{(2n+1)} = g_3. \quad (1.38)$$

Dans l'équation (1.37),  $\theta$  est un paramètre positif qui doit être ajusté pour assurer et accélérer la convergence du schéma itératif. Notons qu'on retrouve un schéma similaire à celui proposé dans [41] en prenant  $\theta = 1$ .



### 1.3.4 Étude de la convergence

Dans le théorème suivant nous présentons les conditions sous lesquelles l'algorithme (1.36)-(1.38) converge.

**Théorème 1.3.1** *Il existe une constante positive  $\theta^* \in (1, 2]$  telle que, pour tout  $\theta \in (0, \theta^*]$  la suite  $u^{(n)}$  définie par (1.36)-(1.38) converge vers la solution du système (1.35) indépendamment de la valeur initiale  $v_0$ .*

L'argument clé de la démonstration du résultat précédent tient au fait qu'on ramène le problème de la convergence au bord  $\Gamma_0$  pour tout  $\theta \in (0, \theta^*]$ . Ceci est résumé dans le lemme 1.3.1. Avant de présenter ce résultat donnons quelques définitions et notations. En premier lieu, nous introduisons l'espace de Hilbert suivant :

$$H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma_0), \exists w \in H^1(\Omega), w = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ and } w = v \text{ sur } \Gamma_0\}$$

et la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire  $\ll \cdot, \cdot \gg$ , défini sur  $H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1)$  par

$$\ll \varphi, \psi \gg = \int_{\Omega} \nabla R\varphi \cdot \nabla R\psi dx, \quad \forall \varphi, \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1), \quad (1.39)$$

où l'opérateur  $R$  est défini par :  $\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1)$ ,  $R\psi$  est la solution de

$$-\Delta \xi = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \xi|_{\Gamma_0} = \psi, \quad \xi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \partial_\nu \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \quad (1.40)$$

Nous montrons que

**Lemme 1.3.1** *Pour  $\theta > 0$ , si la suite  $\{u_{|\Gamma_0}^{(2n)}\}$  converge dans  $H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1)$ , alors la suite  $\{u^{(n)}\}$  converge dans  $H^1(\Omega)$  vers la solution de (1.35).*

Nous introduisons maintenant l'opérateur qui nous permet de ramener l'étude de la convergence de  $\{u^{(n)}\}$  à la convergence de  $\{u_{|\Gamma_0}^{(2n)}\}$  sur le bord  $\Gamma_0$ . Soit  $T$  l'opérateur défini sur  $H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1)$  par

$$\psi \in H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1) \longmapsto T\psi = \omega|_{\Gamma_0},$$

où  $\omega$  est la solution de

$$-\Delta \xi = 0, \quad \partial_\nu \xi|_{\Gamma_0} = \partial_\nu R\psi|_{\Gamma_0}, \quad \xi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \xi|_{\Gamma_2} = 0, \quad \partial_\nu \xi|_{\Gamma_3} = 0. \quad (1.41)$$

Cet opérateur satisfait les propriétés données dans le lemme suivant :

**Lemme 1.3.2** *Supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné de frontière Lipschitzienne alors*

- (i) *L'opérateur  $T$  est inversible.*
- (ii)  $\exists \alpha \geq 1, \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1), \quad \|T\psi\| \leq \|\psi\| \leq \alpha \|T\psi\|.$

Nous définissons alors  $T_\theta$ , notre opérateur de transfert sur le bord  $\Gamma_0$ , par

$$\begin{aligned} T_\theta : H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1) &\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1) \\ \psi &\longmapsto T_\theta \psi = \theta T\psi + (1 - \theta)\psi. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Posons maintenant

$$\alpha = \inf\{\beta \geq 1, \|\psi\| \leq \beta \|T\psi\|, \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1)\} \quad (1.43)$$

et désignons par  $\sigma(T_\theta)$  l'ensemble des valeurs propres de  $T_\theta$ , alors

**Lemme 1.3.3** *l'opérateur  $T_\theta$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $T_\theta$  est symétrique pour tout  $\theta$ ,
- (ii)  $T_\theta$  définie positif pour  $\theta$  tel que  $0 \leq \theta \leq \alpha^2/(\alpha^2 - 1)$  si  $\alpha > 1$ ,
- (iii)  $\forall \psi \in H^{1/2}(\Gamma_0, \Gamma_1)$ ,  $\|T_\theta \psi\| \leq \|\psi\|$  pour  $0 \leq \theta \leq 2$ ,
- (iv) si  $\theta \neq 0$  alors  $1 \notin \sigma(T_\theta)$ .

Ces résultats et le résultat de convergence des approximations successives définies à partir des opérateurs linéaires symétriques et définis positifs, voir Krasnosel'skii et al. [42] page 66, nous permettent de montrer le lemme 1.3.1. Nous montrons aussi que  $\theta^* = \min\{2, \alpha^2/(\alpha^2 - 1)\}$ .

**Remarque 1.3.1**

- Comme nous montrons que  $\theta^* > 1$ , nous prouvons en même temps, mais d'une façon différente de celle de Kozlov et al. [41], que l'algorithme proposé dans [41] est convergent.
- Dans l'équation (1.37) le paramètre de relaxation peut varier à chaque itération on remplace le calcul de  $v^{(n)}$  par

$$v^{(n)} = \theta^{(n)} u_{|\Gamma_0}^{(2n-1)} + (1 - \theta^{(n)}) v_{|\Gamma_0}^{(n-1)} \quad \text{for } n \geq 1. \quad (1.44)$$

Afin d'accélérer la convergence (voir résultats numériques) nous avons proposé dans notre article [36], un calcul automatique d'un paramètre optimal à chaque itération. Ce paramètre  $\theta = \theta_d^{(n+1)}$  est défini par

$$\theta_d^{(n+1)} = \frac{\langle e^{(2n)}, e^{(2n)} - e^{(2n+1)} \rangle}{\|e^{(2n+1)} - e^{(2n)}\|_{L^2(\Gamma_0)}^2}, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.45)$$

$\theta^{(1)}$  peut être choisi arbitrairement dans  $]0, \theta^*]$ .

### 1.3.5 Approximation

Il est important de faire remarquer ici que

1. Résoudre le problème (1.38) nécessite la connaissance de  $\partial_\nu u^{(2n)}$  sur  $\Gamma_0$ .
2. Le calcul de  $\theta_d^{(n+1)}$  nécessite uniquement la connaissance de la restriction de la solution sur le bord  $\Gamma_0$ .
3. Les problèmes aux limites (1.36) et (1.38) sont du même type et peuvent être reformulés en équations intégrales qu'on peut discrétiser en utilisant la méthode des éléments frontières (BEM).
4. La méthode BEM utilise les informations sur le bord et réduit ainsi la dimension du problème de un. Elle permet aussi l'obtention simultanée du potentiel et de la densité de courant sur le bord, ce qui évite l'utilisation d'une approximation supplémentaire de la dérivée normale de  $u$ .

### 1.3.6 Formulation en équation intégrale

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \Gamma_D, \\ \partial_\nu u = g & \text{on } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1.46)$$

Le principe de la méthode des équations intégrales est basé sur la recherche d'une solution élémentaire, ou fonction de Green, de l'opérateur de Laplace. En dimension 2, nous avons

$$\int_{\Gamma} \{u(y)\partial_{\nu_y} \log|x-y|\} ds_y - \partial_{\nu_y} u(y) \log|x-y| ds_y = \begin{cases} 2\pi u(x), & x \in \Omega \\ \omega(x)u(x), & x \in \Gamma \\ 0, & x \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1.47)$$

où  $\omega(x)$  est l'angle solide. En séparant les parties connues des parties inconnues dans la formule précédente nous donnons une représentation intégrale du problème (1.46) de la forme

$$\mathcal{A}\psi(x) = F(x), \quad x \in \Gamma \quad (1.48)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A} : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$  est défini par

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \begin{cases} \omega(x)\varphi(x) - \int_{\Gamma_N} \varphi(y)\partial_{\nu_y} \log|x-y| ds_y + \int_{\Gamma_D} \varphi(y) \log|x-y| ds_y, & x \in \Gamma_N, \\ - \int_{\Gamma_N} \varphi(y)\partial_{\nu_y} \log|x-y| ds_y + \int_{\Gamma_D} \varphi(y) \log|x-y| ds_y, & x \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (1.49)$$

le second membre  $F(x)$  est défini pour tout  $x \in \Gamma$  par

$$F(x) = \begin{cases} - \int_{\Gamma_N} g(y) \log|x-y| ds_y + \int_{\Gamma_D} f(y)\partial_{\nu_y} \log|x-y| ds_y, & x \in \Gamma_N, \\ - \int_{\Gamma_N} g(y) \log|x-y| ds_y + \int_{\Gamma_D} f(y)\partial_{\nu_y} \log|x-y| ds_y - \omega(x)f(x), & x \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (1.50)$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Gamma_N, \\ \partial_{\nu} u(x) & x \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (1.51)$$

L'application de la représentation (1.48) à chacun des problèmes (1.36) et (1.38) conduit à la résolution alternative des deux systèmes suivants :

$$\mathcal{A}_2\psi^{(2n)}(x) = F^{(2n)}(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.52)$$

$$\mathcal{A}_1\psi^{(2n+1)}(x) = F^{(2n+1)}(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.53)$$

où les opérateurs  $\mathcal{A}_i, i = 1, 2$ , les fonctions  $F^{(n)}$  et  $\psi^{(n)}$  sont définies en fonction des conditions aux limites associées à chacun des problèmes (1.36) et (1.38).

En inversant les équations intégrales (1.52) et (1.53) nous obtenons  $\psi^{(2n)}$  et  $\psi^{(2n+1)}$ . Ainsi nous avons pour tout  $n > 0$ ,  $u^{(n)}(x)$  et  $\partial_{\nu} u^{(n)}(x)$ ,  $\forall x \in \Gamma$ . La substitution de ces valeurs dans l'équation (1.47) donne  $u^{(n)}(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

### 1.3.7 Implémentation

Notons que les opérateurs  $\mathcal{A}_i, i = 1, 2$  dépendent uniquement du type et non des valeurs des conditions aux limites. Nous utilisons cette remarque pour construire une méthode de résolution très rapide des systèmes discrets associés à (1.52) et (1.53). La subdivision du bord en  $m$  éléments  $\partial\Omega_i$  et l'approximation de  $u$  et de sa dérivée normale  $q = \partial u / \partial \nu$  par des constantes prenant la

valeur  $u_i$  et  $q_i$  au milieu  $x_i$ , de chaque  $\partial\Omega_i$ , mènent à une version discrète de (1.47) sur chaque noeud  $k$  de la forme

$$\sum_{l=1}^m H_{kl}u_k = \sum_{l=1}^m G_{kl}q_k. \quad (1.54)$$

Nous obtenons donc une version discrète de (1.36) et (1.38) de la forme :

$$A_1 U^{(2k)} = b_1^{(k)} \quad (1.55)$$

$$A_2 U^{(2k+1)} = b_2^{(k)}. \quad (1.56)$$

Les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont factorisées, à la première itération, sous la forme  $A_1 = L_1 R_1$ ,  $A_2 = L_2 R_2$  où  $L_1, L_2$  sont des matrices triangulaires inférieures et  $R_1, R_2$  sont matrices triangulaires supérieures. Seuls les seconds membres  $b_1^{(k)}$  et  $b_2^{(k)}$  sont recalculés pour  $k > 1$ . Les approximations  $U^{(2k)}$  et  $U^{(2k+1)}$  sont obtenues par descente-remonté qui nécessite uniquement  $m^2$  opérations au lieu de  $(m^3 + 3m^2 - m)/3$  pour la méthode de Gausse (traditionnellement utilisée pour ce type de matrices [30, 38]). En considérant le rapport des nombres d'opérations, nous définissons le taux théorique d'accélération  $S_{ut}$  par

$$S_{ut} = \frac{k(m^3 + 3m^2 - m)}{m^3 + 3km^2 - m}$$

qui est de l'ordre de  $k$  lorsque  $m$  est assez grand et  $k$  très petit devant  $m$ .

### 1.3.8 Résultats numériques

Soit  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  avec  $\Gamma_0 = \{0\} \times (0, 1)$ ,  $\Gamma_2 = \{1\} \times (0, 1)$ ,  $\Gamma_3 = (0, 1) \times \{0\} \cup (0, 1) \times \{1\}$  et  $\Gamma_1 = \emptyset$ . Nous considérons le problème

$$\begin{cases} \nabla \cdot \exp(T(x, y)) \nabla T(x, y) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ T(x, y) & = \ln(3 - y^2) & \text{sur } \Gamma_2 \\ \exp(T(x, y)) \partial_\nu T(x, y) & = 2 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \exp(T(x, y)) \partial_\nu T(x, y) & = g(x, y) & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

où  $g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ -2 & \text{si } y = 1 \end{cases}$ . La solution exacte de ce problème est  $T(x, y) = \ln(2 + x^2 - y^2)$ .

Les tableaux suivants montrent l'efficacité de la méthode itérative (1.36)-(1.38) ainsi que l'efficacité de l'implémentation proposée. D'autres résultats numériques comprenant une étude comparative de différents solveurs ainsi qu'une étude de l'application de l'algorithme (1.36)-(1.38) dans différentes configurations peuvent être consultés dans [36, 25, 49]

Dans les deux tableaux,  $CPU_1$  représente le temps CPU nécessaire pour atteindre la convergence en résolvant les systèmes linéaires par une méthode directe,  $CPU_2$  celui qui utilise l'implémentation décrite ci-dessus.

D'après le tableau 1.2, nous remarquons que, pour une précision donnée, l'influence du nombre d'éléments sur le nombre d'itérations est négligeable (ce qui n'est pas le cas pour  $\theta = 1$ ). Nous remarquons aussi que l'implémentation proposée de notre algorithme avec  $\theta$  calculé d'une

N	$CPU_1$	$CPU_2$	$iter_1$	$iter_2$	$S_u$	$S_{ut}$
160	10.626669	1.019920	509	509	10.42	49.17
320	359.87070	7.797264	556	556	46.15	90.38
640	7941.743	49.65107	605	605	159.95	158.45
1280	83403.59	365.9648	665	665	227.90	260.51

TAB. 1.1 – Temps CPU pour  $\theta = 1$

N	$CPU_1$	$CPU_2$	$k_1$	$k_2$	$s_u$	$s_{ut}$
160	0.2147200	6.2439995E-02	8	8	3.44	7.08
320	5.600288	0.708	8	8	7.91	7.51
640	86.55	10.39	8	8	8.33	7.74
1280	946.4974	118.37	7	8	7.99	7.87

TAB. 1.2 – Temps CPU pour  $\theta$  calculé dynamiquement par (1.45)

façon dynamique est pratiquement  $k$  fois plus rapide que l'utilisation brute d'une méthode directe. Dans ce cas le taux théorique  $S_{ut}$  prédit le taux réel  $S_u = CPU_1/CPU_2$  (sauf pour  $m = 160$  où  $m$  n'est pas assez grand. Dans le cas où  $\theta = 1$ , les deux taux  $S_{ut}$  et  $S_u$  sont très proches pour les grands systèmes. D'autres résultats peuvent être consultés dans [49, 25]

## 1.4 Identification de la zone de Dépletion dans les MESFET

Le comportement électrique d'un semi-conducteur de type MESFET peut être décrit par le problème de frontière libre suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = -\zeta \chi_D & \text{dans } \Omega \\ u = u_d \text{ sur } \Gamma_D, \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (1.57)$$

$$u < \omega \text{ dans } D \text{ et } u = \omega \text{ dans } C \quad (1.58)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (e^{\beta(u-\omega)} \nabla \omega) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega = \omega_d \text{ sur } \Gamma_D, \partial_\nu \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (1.59)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  simplement connexe de frontière assez régulière.  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont telles que  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . Les fonctions données  $u_d$  et  $\omega_d \geq 0$  sont assez régulières.  $\zeta$  et  $\beta$  sont des constantes strictement positives.

Les inconnues à déterminer sont le potentiel  $u$ , le quasi-potentiel  $\omega$ , un ouvert  $C$  de  $\Omega$  et  $D$  tel que  $D = \Omega - \bar{C}$ .

### 1.4.1 Formulation

Considérons la fonctionnelle coût  $\mathcal{J}_\omega$  définie, pour tout  $\omega \in L^\infty(\Omega)$ , par :

$$\mathcal{J}_\omega(C) = \int_{\Omega} ((u - \omega)^+)^2 + \int_C (u - \omega)^2, \quad \forall C \in \mathcal{U}_{ad}, \quad (1.60)$$

où  $v^+(x) = \max(0, v(x))$  et  $u$  est la solution du problème (1.57) associé à  $C$ .

Une formulation du problème (1.57)-(1.59) comme un problème d'optimisation de forme s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \omega, C) \text{ tel que :} \\ (u, C) \text{ est solution du problème (1.62),} \\ \omega \text{ est solution du problème (1.59),} \end{cases} \quad (1.61)$$

où le problème (1.62) est défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, C) \text{ tel que :} \\ \mathcal{J}_\omega(C) = \inf_{C^* \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}_\omega(C^*) \\ s/c : u \text{ est solution du problème (1.57),} \end{cases} \quad (1.62)$$

avec  $\mathcal{U}_{ad}$  l'ensemble des parties mesurables de  $\Omega$ .

Nous avons alors

**Proposition 1.4.1** *Le problème d'optimisation de forme (1.61) et le système (1.57)-(1.59) sont équivalents*

Nous nous intéressons dans la section suivante à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de ce problème.

## 1.4.2 Existence et unicité pour le problème d'optimisation de forme

Considérons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} U &= \{u \in H^1(\Omega) / u = u_d \text{ sur } \Gamma_D\}, \\ W &= \{\omega \in H^1(\Omega) / \omega = \omega_d \text{ sur } \Gamma_D\}, \\ H_D^1 &= \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}. \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur  $\mathcal{T}$  qui à  $\omega \in \mathcal{D}$  fait correspondre  $\mathcal{T}(\omega)$  solution du problème (1.59) associée à  $u$  telle que  $(u, C)$  est une solution du problème (1.62). Alors tout point fixe  $\omega$  de  $\mathcal{T}$  est tel que  $(u, \omega, C)$  est une solution du problème (1.61). Il suffit donc de montrer que  $\mathcal{T}$  admet un point fixe. Considérons l'ensemble  $\mathcal{D}$  défini par :

$$\mathcal{D} = \{\omega \in W, 0 \leq \omega \leq \gamma \text{ et } \|\omega\|_{1,\Omega} \leq \alpha\}$$

avec  $\gamma = \max(\omega_d)$  et  $\alpha$  est tel que  $\forall \omega \in \mathcal{D} \|\mathcal{T}(\omega)\|_{1,\Omega} \leq \alpha$  (l'existence de  $\alpha$  est démontrée dans [54]).

Il est facile de voir que  $\mathcal{D}$  est un ensemble convexe fermé borné de  $H^1(\Omega)$  et que  $\mathcal{T}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ . En montrant que les solutions  $(u, C)$  et  $\mathcal{T}(\omega)$  existent et sont uniques dans  $U \times \mathcal{U}_{ad}$  et  $W$  respectivement nous prouvons que

**Lemme 1.4.1** *L'opérateur  $\mathcal{T}$  est bien défini.*

Nous avons muni l'ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  de la topologie définie par :

$$C_n \longrightarrow C \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \text{ ssi } \chi_{C_n} \longrightarrow \chi_C \text{ dans } \mathcal{H} \quad (1.63)$$

où  $\mathcal{H} = \{\chi_C \in L^2(\Omega), C \subset \Omega\}$ , qui est un fermé borné dans  $L^2(\Omega)$ .  
 Soit  $\Omega_\delta = \{y \in \mathbb{R}^2 / \inf_{x \in \Omega} |x - y| < \delta\}$ , alors pour tout  $\chi_C \in \mathcal{H}$  on a :

$$\int_{\Omega - \bar{G}} |\chi_C|^2 \leq \mu(\Omega - \bar{G}), \quad \forall \bar{G} \subset \Omega, \quad (1.64)$$

$$\int_{\Omega} [\chi_C(x+h) - \chi_C(x)]^2 \leq \mu(\Omega_\delta - \bar{\Omega}), \quad \forall \delta > 0, \quad (1.65)$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. L'utilisation du théorème suivant qu'on peut consulter dans [3] :

**Théorème 1.4.1** *Soit  $1 \leq p < \infty$ , un ensemble  $K \subset L^p(\Omega)$  est un précompact dans  $L^p(\Omega)$  ssi  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$  et  $\bar{G} \subset \Omega$  tel que  $\forall u \in K, \forall h \in \mathbb{R}^n / |h| \leq \delta$*

$$\int_{\Omega - \bar{G}} |u(x)|^p \leq \varepsilon^p \quad (1.66)$$

$$\int_{\Omega} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p \leq \varepsilon^p \quad (1.67)$$

où  $\tilde{u}(x) = u(x)$  si  $x \in \Omega$ ,  $\tilde{u}(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$ .

nous permet de montrer que  $\mathcal{H}$  est un précompact de  $L^2(\Omega)$ . Nous avons alors

**Lemme 1.4.2**  *$\mathcal{U}_{ad}$  est un compact pour la topologie définie par (1.63).*

En utilisant ce résultat et le théorème d'Egorov [10], nous démontrons que

**Lemme 1.4.3** *L'opérateur  $\mathcal{T}$  est compact dans  $\mathcal{D}$ .*

Les hypothèses du principe de Schauder étant vérifiées, on conclut que  $\mathcal{T}$  admet un point fixe dans  $\mathcal{D}$  ce qui prouve l'existence d'une solution du problème d'optimisation de forme (1.61).

En utilisant ce dernier lemme et le fait que la fonctionnelle coût  $\mathcal{J}$  est continue par rapport à toutes ces variables, nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 1.4.2** *Le problème d'optimisation de forme (1.61) admet une solution unique  $(u, \omega, C)$  dans  $U \times W \times \mathcal{U}_{ad}$ .*

### 1.4.3 Remarques et autres résultats

Des résultats numériques incluant une étude comparative de la formulation en optimisation de forme (1.61) et d'une écriture du problème sous forme d'inéquation variationnelle, sont faits dans [2].

Sous certaines hypothèses simplificatrices, le comportement d'un transistor à effet de champ (TEC) peut être décrit par le problème à frontière libre :

$$\Delta u = -\xi \chi_D \text{ dans } \Omega, \quad (1.68)$$

$$u = u_d \text{ sur } \Gamma_D, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N \cup \Gamma, \quad (1.69)$$

où  $\Gamma_D$  est une partie de la frontière  $\partial\Omega$  (contactes électriques),  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ ,  $u_d$  est une fonction régulière donnée,  $\xi > 0$  est une fonction régulière donnée,  $D$  est la région de déplétion,  $C = \Omega \setminus \bar{D}$  est la région de neutralité de charge et  $\Gamma = \bar{C} \cap \bar{D}$  est une frontière libre à déterminer.

En considérant les espaces suivants :  $H_D^1(\mathcal{O}) = \{v \in H^1(\mathcal{O}), v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \cup \Gamma_D\}$  et  $U(\mathcal{O}) = u_d + H_D^1(\mathcal{O})$ , avec  $\mathcal{O}$  peut être  $C$  ou  $D$  et  $H^1(\mathcal{O})$  est l'espace de Sobolev muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,\mathcal{O}}$  et en définissant  $\Theta_{ad} = \{\varphi \in C^1([0, L]; [0, l]), |\varphi'| \leq c\}$  et  $\mathcal{U}_{ad} = \{\Gamma(\varphi), \varphi \in \Theta_{ad}\}$ , nous associons à ce problème un problème d'optimisation de forme, qui consiste à trouver  $(u^*, \tilde{u}^*, \Gamma^*) \in U(D) \times U(C) \times \mathcal{U}_{ad}$  :

$$(SO) \begin{cases} \mathcal{J}(\Gamma^*) = \min_{\Gamma \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(\Gamma), \\ (u^*, \tilde{u}^*) \text{ est la solution de (1.70)-(1.71).} \end{cases}$$

où la fonctionnelle coût  $\mathcal{J}$  est :

$$\mathcal{J}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} y(u - \tilde{u})^2 d\sigma$$

et les problèmes (1.70)-(1.71) sont donnés par trouver  $(u, \tilde{u}) \in U(D) \times U(C)$  :

$$\int_D \nabla u \nabla v dx = \int_D \xi v dx, \forall v \in H_D^1(D), \quad (1.70)$$

$$\int_C \nabla \tilde{u} \nabla v dx = 0, \forall v \in H_D^1(C). \quad (1.71)$$

En utilisant des résultats a priori sur la régularité de la frontière libre nous montrons que le problème (SO) est équivalent au problème (1.68)-(1.69). Nous montrons aussi que

- L'ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  est compact ;
- L'application  $\mathcal{J}$  est semi-continue inférieurement.

Ceci nous permet de conclure que

**Théorème 1.4.3** *Le problème d'optimisation de forme (SO) admet une solution dans  $\mathcal{U}_{ad}$ .*

Le calcul du gradient de forme ainsi que l'approximation du problème (SO) en utilisant les éléments frontières sont faits dans [1].

## 1.5 Étude d'un problème d'identification de frontière dans les jonctions $pn$

L'objectif de ce travail est l'étude du problème suivant, modélisant le comportement électrique d'une jonction  $PN$ ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u & = N \quad \text{dans } \Omega, \\ \Delta u & = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \\ \Delta u & = 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ u & = V_1 \quad \text{dans } \Omega_1, \\ u & = V_2 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ u & = V_1 \quad \text{sur } \Gamma_{D_1}, \\ u & = V_2 \quad \text{sur } \Gamma_{D_2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (1.72)$$



dont les inconnues sont le potentiel électrique  $u$  et les deux frontières bilatérales  $\Gamma_1, \Gamma_2$  délimitant la zone de déplétion  $\Omega$ . Nous montrons que ce problème admet une solution en le reformulant en un problème d'inéquation variationnelle. Il est facile de voir que le potentiel  $u$  est solution d'un problème à double obstacle  $V_1$  et  $V_2$ .

Soit  $D = \Omega_1 \cup \Omega \cup \Omega_2$  et  $U = \{v \in H^1(D), v = V_1 \text{ sur } \Gamma_{D_1} \text{ et } v = V_2 \text{ sur } \Gamma_{D_2}\}$ . Considérons le convexe  $K$  défini par

$$K = \{v \in U, V_2 \leq v \leq V_1\}.$$

Nous écrivons alors le problème (1.72) sous la forme de l'inéquation variationnelle suivante [2] :

trouver  $u \in K$  telle que

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_D N(v - u) dx \quad \forall v \in K. \quad (1.73)$$

Nous montrons alors en utilisant les résultats de Lions-Stampacchia [45] que

**Théorème 1.5.1** *Pour  $N \in L^\infty$  le problème (1.73) admet une solution unique.*

Dans cette formulation les frontières libres n'apparaissent plus comme inconnues, elles sont obtenues implicitement par la comparaison de la solution à  $V_1$  et  $V_2$ . Nous l'approchons en utilisant la méthode des éléments finis qui permet de ramener le problème discret à un problème de programmation quadratique dans  $\mathbb{R}^{n_h}$  [29], où  $n_h$  est le nombre d'inconnues (degré de liberté).

L'avantage des inéquations variationnelles est de travailler sur un domaine fixe et donc un maillage fixe ce qui nécessite un seul stockage de la matrice  $A_h$ . Un inconvénient majeur de l'utilisation des inéquations variationnelles est que la frontière libre n'est pas déterminée directement, nous ne pouvons pas la déterminer d'une façon très précise. Le moyen le plus simple pour la déterminer ici est la comparaison avec les obstacles. Comme la zone de déplétion est petite par rapport au domaine fixe, un maillage très fin est nécessaire pour identifier les frontières libres, ceci est un autre inconvénient. Pour éviter ce problème, nous proposons dans ce qui suit des méthodes qui permettent d'identifier directement la frontière libre même avec des maillages grossiers. Nous nous intéressons désormais à l'identification des frontières libres  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  du problème suivant, équivalent au problème (1.72) (voir [22]),

$$-\Delta u = N \text{ dans } \Omega, u = V_1 \text{ sur } \Gamma_1, u = V_2 \text{ sur } \Gamma_2, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.74)$$

### 1.5.1 Paramétrisation et formulation du problème

Nous considérons la paramétrisation suivante du domaine  $\Omega$

$$\Omega(\alpha, \beta) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, \alpha(y) < x < \beta(y) \quad \text{pour tout } y \in [0, 1] \right\}.$$

Notons  $\Gamma(\alpha, \beta)$  la frontière du domaine  $\Omega(\alpha, \beta)$  et

$$\Gamma_1(\alpha) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha(y), 0 \leq y \leq 1 \right\} \subset \Gamma(\alpha, \beta),$$

$$\Gamma_2(\beta) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \beta(y), 0 \leq y \leq 1 \right\} \subset \Gamma(\alpha, \beta)$$

où les fonctions paramétrisantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont des éléments de l'ensemble des fonctions admissibles noté  $\mathcal{U}_{ad}$  défini de la façon suivante

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ (\alpha, \beta) \in (C^{0,1}[0, 1])^2, \quad a_1 \leq \alpha(y) \leq a_2 < a_3 \leq \beta(y) \leq a_4 \quad \forall y \in [0, 1], \right. \\ \left. \int_{\Omega(\alpha, \beta)} N(x, y) dx dy = 0, \quad |\alpha(y) - \alpha(\bar{y})| \leq a_5 |y - \bar{y}|, \right. \\ \left. |\beta(y) - \beta(\bar{y})| \leq a_6 |y - \bar{y}| \quad \forall y, \bar{y} \in [0, 1] \right\}$$

où  $a_1, \dots, a_6$  sont des constantes données. Le problème (1.74) s'écrit

$$-\Delta u = N \text{ dans } \Omega(\alpha, \beta), u = V_1 \text{ sur } \Gamma_1(\alpha), u = V_2 \text{ sur } \Gamma_2(\beta), \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma(\alpha, \beta). \quad (1.75)$$

Notons que les inconnues de ce problème sont le potentiel  $u$  et les deux frontières  $\Gamma_1(\alpha)$  et  $\Gamma_2(\beta)$ . Une formulation faible du problème (1.75) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(\alpha, \beta)} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega(\alpha, \beta)} N v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega(\alpha, \beta)), \\ u = V_1 \text{ sur } \Gamma_1(\alpha), \quad u = V_2 \text{ sur } \Gamma_2(\beta). \end{array} \right. \quad (1.76)$$

L'approximation du problème (1.76) par la méthode des éléments finis, mène au problème approché suivant :

trouver  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})^T$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m+1})^T \in \mathbb{R}^{m+1}$  et  $u = (u_1, \dots, u_{n(h)})^T \in \mathbb{R}^{n(h)}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n(h)} u_j \int_{\Omega_h(\alpha, \beta)} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_l dx dy = \int_{\Omega_h(\alpha, \beta)} N \phi_l dx dy \quad l = 1, \dots, n(h), \quad (1.77 \text{ i}) \\ \sum_{j=1}^{n(h)} u_j \phi_j(\alpha_l) = V_1 \quad l = 1, \dots, m+1, \quad (1.77 \text{ ii}) \\ \sum_{j=1}^{n(h)} u_j \phi_j(\beta_l) = V_2 \quad l = 1, \dots, m+1. \quad (1.77 \text{ iii}) \end{array} \right. \quad (1.77)$$

où  $\alpha_j = \alpha_h(y_j)$  et  $\beta_j = \beta_h(y_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m(h)$ , les fonctions  $\alpha_h, \beta_h \in C^0(0, 1)$  sont polynômiales par morceaux de degré 1 et la famille  $(\phi_1, \dots, \phi_{n(h)})$  est une base d'élément fini.

Comme les vecteurs  $\alpha$  et  $\beta$  font partie des inconnus, le système algébrique (1.77) est non-linéaire.

### 1.5.2 Description des méthodes de résolution

Nous exposons, dans ce qui suit, deux méthodes de résolution du problème (1.77). Une première méthode consiste à écrire (1.77) sous la forme  $F(U) = 0$  où  $U = (u, \alpha, \beta)^T$ . En se

donnant un vecteur initial  $U^0 = (u^0, \alpha^0, \beta^0)^T$ , nous pouvons calculer une approximation  $U^k$  en utilisant des méthodes de type Quasi-Newton. Le test d'arrêt le plus naturel est  $|U^{k+1} - U^k|_\infty < \delta$ , où  $\delta$  est la précision désirée. Comme notre but principal est de calculer  $\alpha$  et  $\beta$ , nous adoptons le test d'arrêt suivant

$$|\alpha^{k+1} - \alpha^k|_\infty + |\beta^{k+1} - \beta^k|_\infty < \delta, \quad (1.78)$$

où  $|\alpha|_\infty = \max_{1 \leq j \leq M+1} |\alpha_j|$ . Nous montrons numériquement que ce test est suffisant. La première méthode est donnée dans l'algorithme suivant

**Algorithme 1.5.1**

1.  $u^0, \alpha^0, \beta^0$  données,  $k = 0$
2. Trouver  $(u^k, \alpha^k, \beta^k)$  solution de (1.77 i)-(1.77 iii)
3. Si le test (1.78) est satisfait, aller à 5
4.  $k = k + 1$  aller à 2
5. Trouver  $u^k$  solution de (1.77 i) dans  $\Omega(\alpha^k, \beta^k)$ .

La deuxième méthode est basée sur le découplage de la partie du système algébrique (1.77) contenant les valeurs du potentiel (1.77 i) de la partie contenant les nœuds de la frontière libre (1.77 ii) et (1.77 iii) qui peut s'écrire sous la forme  $G(\alpha, \beta) = 0$ . Ceci ramène le problème à la résolution d'une façon alternative d'un problème linéaire et d'un problème non-linéaire dont la dimension est très inférieure à celle du problème de départ. Ce découplage introduit une difficulté : la matrice jacobienne ne peut être calculée directement puisque le système ne s'écrit qu'implicitement en fonction des inconnues. L'algorithme correspondant à cette méthode est le suivant.

**Algorithme 1.5.2**

1.  $\alpha^0, \beta^0$  données,  $k = 0$
2. Trouver  $u^k$  solution de (1.77 i) dans  $\Omega(\alpha^k, \beta^k)$
3. Trouver  $(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1})$  solution de (1.77 ii)-(1.77 iii)
4. Si le test (1.78) est satisfait fin
5.  $k = k + 1$  aller à 2

**Remarque 1.5.1** Pour la première méthode  $F(U) = 0$ , la méthode de Newton peut être utilisée car la matrice jacobienne peut être calculée tandis que dans la seconde méthode, nous ne pouvons pas calculer cette matrice puisque  $G(\alpha, \beta)$  est déterminée implicitement par la résolution d'un système linéaire.

Nous comparons le résultat de la méthode de Broyden [12] avec une variante de l'algorithme proposé par Eirola et Nevanlinna [20] que nous décrivons dans l'algorithme suivant :

**Algorithme 1.5.3 Méthode EN (MEN)**

Initialisation :  $u_0, H_0$  arbitraires,

Pour  $k = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\begin{aligned} p_k &= -H_k F(u_k), \\ q_k &= F(u_k + p_k) - F(u_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_k &= H_k^T p_k, \\
H_{k+1} &= H_k + \frac{(p_k - H_k q_k) f_k^T}{f_k^T q_k}, \\
\tilde{p}_k &= -H_{k+1} F(u_k), \\
u_{k+1} &= u_k + \tilde{p}_k,
\end{aligned}$$

*fin.*

L'utilisation de l'algorithme 1.5.2 revient à l'approximation de l'équation de Poisson assujettie à l'une des conditions aux limites sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  (condition de Neumann dans l'algorithme 1.5.2), et la condition de Neumann sur le reste du bord suivi par la résolution d'un problème non-linéaire écrit en fonction de l'autre condition aux limites sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  où les inconnues sont les nœuds des frontières libres. La résolution du système non-linéaire nécessite uniquement la valeur de  $u$  ou de sa dérivée normale sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et non les valeurs de  $u$  à l'intérieur de  $\Omega$ . Nous pouvons obtenir ces valeurs en utilisant une formulation en équations intégrales et une approximation par éléments frontières. Nous exposons, dans la section suivante, des résultats numériques en utilisant les formulations décrites auparavant, d'autres résultats peuvent être consultés dans [22].

### 1.5.3 Résultats numériques

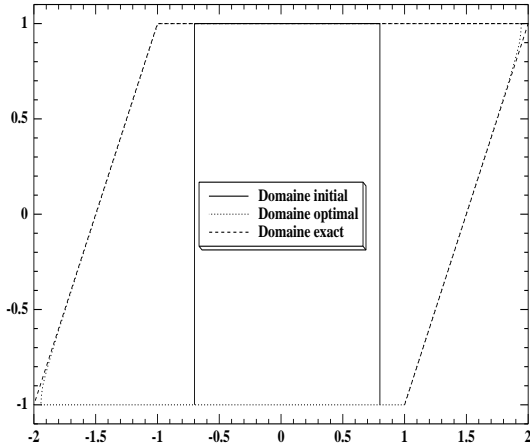


FIG. 1.1 – Forme du domaine.

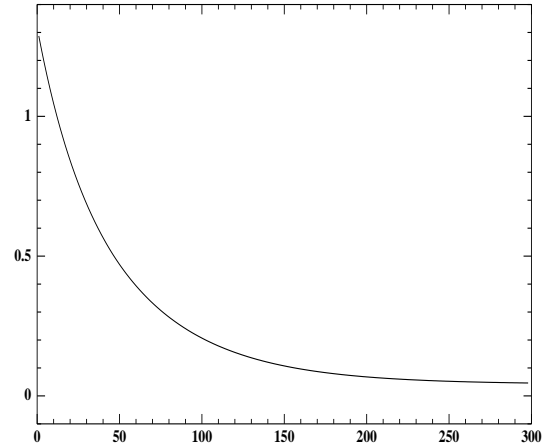


FIG. 1.2 – Erreur sur les frontières libres.

Considérons le problème

$$-\Delta u = N \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ sur } \partial\Omega, \quad u = g_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad u = g_2 \text{ sur } \Gamma_2$$

où le domaine  $\Omega$  est donné par  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 1 \quad \alpha(y) < x < \beta(y)\}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions qui seront définies sur  $[-1, 1]$  pour chaque test que nous allons présenter.

Les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_1$  sont données par

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, x = \alpha(y)\}, \quad \Gamma_1 = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, x = \beta(y)\}$$

et

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{(x, -1) : \alpha(-1) \leq x \leq \beta(-1)\} \cup \{(x, 1) : \alpha(1) \leq x \leq \beta(1)\}.$$

Posons  $N = 0$  et considérons  $u_{ex}(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $h(x, y) = \frac{\partial u_{ex}}{\partial \nu}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \partial\Omega$ ,  $g_1(x, y) = u_{ex}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma_1$ , et  $g_2(x, y) = u_{ex}(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma_2$ .

Dans le premier exemple, nous nous intéressons à reconstruire les deux frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  pour  $\alpha$  et  $\beta$  définies sur  $[-1, 1]$  par

$$\alpha(y) = \frac{y+3}{2}, \quad \beta(y) = -\frac{y+3}{2}.$$

Les formes du domaine sont représentées dans la Figure 1.1. La Figure 1.2 montre la décroissance de l'erreur absolue  $\|\Gamma_1 - \Gamma_1^{iter}\|_\infty + \|\Gamma_2 - \Gamma_2^{iter}\|_\infty$  où  $\Gamma_1^{iter}$  et  $\Gamma_2^{iter}$  sont les nouvelles frontières calculées à chaque itération.

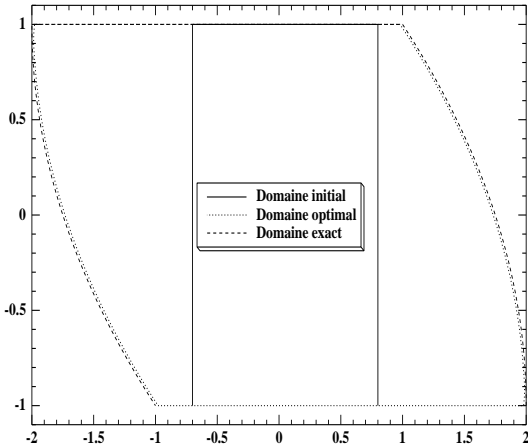


FIG. 1.3 – Forme du domaine.

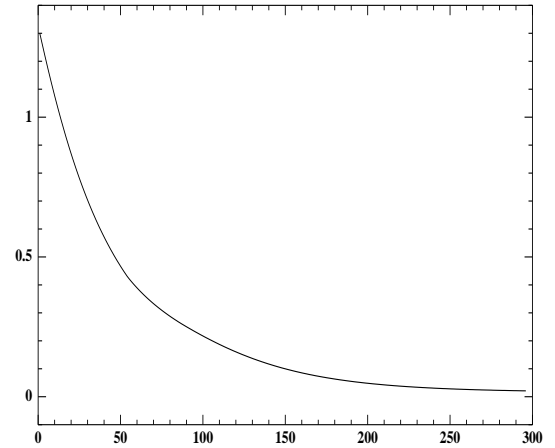


FIG. 1.4 – Erreur sur les frontières libres.

Dans le deuxième exemple, nous considérons que

$$\alpha(y) = \frac{(y+1)^2 - 8}{4} \text{ et } \beta(y) = \frac{8 - (y+1)^2}{4}.$$

Dans la Figure 1.3, nous reconstruisons les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui délimitent le domaine optimal. La Figure 1.4 montre la décroissance de l'erreur absolue des frontières libres en fonction du nombre d'itérations. Nous remarquons que dans les deux exemples, l'algorithme converge indépendamment du domaine initial. L'identification des frontières est excellente. Une étude de différents type de jonction  $pn$  à une dimension est faite dans [24]. Une analyse complète des algorithmes présentés dans cette section, incluant plusieurs exemples à deux dimensions, est faite dans [22].

## 1.6 Une nouvelle formulation du problème de la digue non homogène

Nous considérons le problème d'écoulement permanent à travers une digue rectangulaire en milieu poreux non homogène. La digue sépare deux bassins de niveaux  $H_1$  et  $H_2$  (voir figure 1.5).

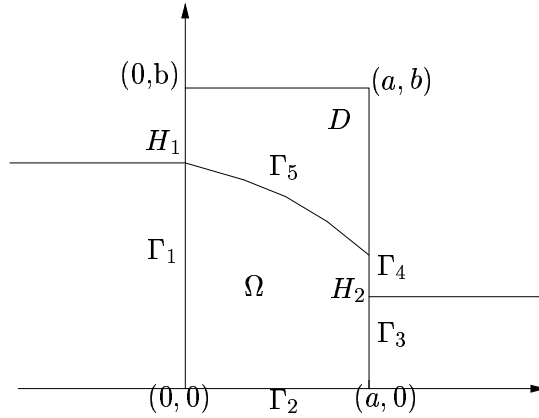


FIG. 1.5 – Digue en milieu poreux

Le problème consiste à déterminer la charge hydraulique  $u$  et la zone mouillée  $\Omega$  de la digue  $D$  (voir [59]).

$$(P) \begin{cases} \text{trouver } (u, \Omega) \text{ solution de} \\ \nabla \cdot (K \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = H_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad u = H_2 \text{ sur } \Gamma_3, \quad u = y \text{ sur } \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \\ K \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_5 \end{cases}$$

où  $K = K(x, y)$  désigne le coefficient de perméabilité.

Des études du problème  $(P)$  utilisant les techniques des inégalités variationnelles et quasi-variationnelles ont été faites (voir [4], [5], [27] et [46]). Une approche duale en optimisation de forme du problème  $(P)$  utilisant une formulation primale et une autre duale de l'équation d'état a été faite dans [31]. Cette approche permet de tenir compte d'une condition supplémentaire sur la ligne d'immersion  $\Gamma_4$  dans le cas d'une digue non rectangulaire.

Friedman et Huang [27] ont montré que, si le coefficient de perméabilité  $K$  est une fonction dans  $L^\infty(D)$  vérifiant l'hypothèse  $(H)$  :

$$(H) \quad \int_D K(x, y) \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} dx dy \leq 0 \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(D) \quad \Psi \geq 0,$$

la frontière libre est définie par une fonction continue ( $y = \Phi(x)$ ). Dans la même référence, ils ont justifié que l'hypothèse  $(H)$  est vérifiée pour tout coefficient  $K$  dans  $L^\infty(D)$ , croissant par rapport à la deuxième variable. La décroissance de la frontière libre a été montrée, pour différentes régularités du coefficient  $K$  (voir [6], [9] et [14]).

Une formulation du problème  $(P)$  en optimisation de forme s'écrit :

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \Omega^* \in \Theta_{ad} \text{ solution de } J(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \Theta_{ad}} J(\Omega) \\ \text{où } J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_5} (u_\Omega(x, y) - y)^2 d\sigma \text{ et } u_\Omega \text{ est solution de} \\ (PE) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (K \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = H_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad u = H_2 \text{ sur } \Gamma_3, \quad u = y \text{ sur } \Gamma_4 \\ K \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Une approche numérique du problème  $(P1)$  dans le cas d'une digue homogène ( $K$  constante) a été faite par Begis et Glowinski([8]).

L'étude de l'existence de la solution de ce problème nécessite la construction d'une topologie adéquate sur la famille de domaines  $\Theta_{ad}$ , qui assure la compacité de cette dernière ainsi que la continuité de la fonctionnelle  $J$  sur  $\Theta_{ad}$  (voir [32]). La continuité de ce type de fonctionnelle  $J$  nécessite une classe de domaines dont la frontière libre est paramétrisée par une fonction très régulière, au moins  $C^{1,1}$  (voir [7]). Cependant, cette régularité n'est pas toujours vérifiée dans le cas où le coefficient  $K$  est dans  $L^\infty(D)$  et vérifie l'hypothèse  $(H)$ , et par conséquent  $(P1)$  ne permet pas de mieux approcher  $(P)$ . Pour pallier à ce problème, nous introduisons une autre fonctionnelle qui permet d'étudier le problème d'optimisation de forme avec moins d'hypothèse de régularité sur la frontière libre.

Définissons l'espace  $U_{ad}$  et la famille de domaines  $\Theta_{ad}$  par

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{ \varphi \in C([0, a]) / |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq C_0 |x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, a] \\ &\quad \varphi(0) = H_1, \quad \varphi(a) \geq H_2 \text{ et } \varphi \text{ est décroissante sur } [0, a] \} \\ \Theta_{ad} &= \{ \Omega(\varphi) / \varphi \in U_{ad} \} \end{aligned}$$

où  $C_0 > 0$  donnée.

Pour un domaine  $\Omega(\varphi) \in \Theta_{ad}$ , nous montrons, en utilisant le fait que  $\forall \varphi \in U_{ad}, |\varphi'| \leq C_0$  p.p. (voir [26]), que le problème  $(P)$  est équivalent au problème  $(P')$  suivant :

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u, \Omega(\varphi)) \text{ solution de} \\ \nabla \cdot (K \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega(\varphi) \\ u = H_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad u = H_2 \text{ sur } \Gamma_3, \quad u = y \text{ sur } \Gamma_4, \quad u(x, \varphi(x)) = \varphi(x) \text{ sur } [0, a] \\ K \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_5 \end{array} \right.$$

Ceci nous permet de prendre comme formulation en optimisation de forme le problème

$$(PO) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(\Omega(\varphi)) \text{ pour tout } \Omega(\varphi) \in \Theta_{ad} \\ \text{où } J(\Omega(\varphi)) = \frac{1}{2} \int_0^a (u_\Omega(x, \varphi(x)) - \varphi(x))^2 dx \\ \text{et } u_\Omega \text{ est solution de} \\ (PE) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (K \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega(\varphi) \\ u = H_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad u = H_2 \text{ sur } \Gamma_3, \quad u = y \text{ sur } \Gamma_4 \\ K \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'équivalence entre  $(P)$  et  $(PO)$  est obtenue, sous certaines hypothèses de régularité supplémentaires sur  $K$ . Dans le cas échéant la formulation  $(PO)$  représente un moyen efficace d'approximation de  $(P)$ .

**Proposition 1.6.1** *On suppose que  $K(x, y) = K(x) \quad \forall (x, y) \in D$  et que  $K \in C^{2,\alpha}([0, a]) \quad \alpha > 0$*

*alors le problème (P) est équivalent à (PO).*

### 1.6.1 Existence du domaine optimal

Soit  $U^0 \in H^1(D)$  vérifiant :  $U^0 = H_1$  sur  $\Gamma_1$ ,  $U^0 = H_2$  sur  $\Gamma_3$  et  $U^0 = y$  sur  $\{a\} \times [H_2, b]$ .  
On définit  $V_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0\}$  et on considère la formulation faible :

$$(PV) \begin{cases} \text{trouver } \omega \in V_0(\Omega) \\ \int_{\Omega} K \nabla \omega \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} K \nabla U^0 \cdot \nabla v \, dx \end{cases} \quad \forall v \in V_0(\Omega)$$

Notons que  $u = \omega + U^0$  est solution de (PE) pour tout  $\omega$  solution de (PV).

Soit  $\mathcal{F}$  l'espace suivant :

$$\mathcal{F} = \{(\Omega, \omega(\Omega)) / \Omega \in \Theta_{ad} \text{ et } \omega(\Omega) \text{ est la solution de (PV) sur } \Omega\}.$$

Le problème d'optimisation de forme (PO) peut s'écrire :

$$(PO) \quad \text{Minimiser } J(\Omega, \omega(\Omega)) \quad \text{pour tout } (\Omega, \omega(\Omega)) \in \mathcal{F}$$

Notons  $\tilde{\psi}$  un prolongement dans  $H^1(D)$  de  $\psi \in H^1(\Omega)$ ,  $\Omega_n = \Omega(\varphi_n)$ ,  $\Omega = \Omega(\varphi)$ ,  $\omega_n = \omega(\Omega_n)$  et  $\omega = \omega(\Omega)$ . Nous définissons la convergence de  $\Omega_n$  vers  $\Omega$  par

$$\Omega_n \longrightarrow \Omega \iff \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ uniformément sur } [0, a] \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

Nous considérons alors sur  $\mathcal{F}$  la topologie définie par la convergence suivante :

$$(\Omega_n, \omega(\Omega_n)) \longrightarrow (\Omega, \omega(\Omega)) \iff \begin{cases} \Omega_n \longrightarrow \Omega \\ \tilde{\omega}(\Omega_n) \rightharpoonup \tilde{\omega}(\Omega) \text{ faiblement dans } H^1(D) \end{cases} \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty \quad (1.79)$$

Pour montrer l'existence d'une solution du problème (PO), nous démontrons d'abord le lemme suivant :

**Lemme 1.6.1** *Pour toute suite  $((\Omega_n, \omega_n))_n$  dans  $\mathcal{F}$ , les assertions suivantes sont vérifiées*

- (i) *il existe une sous-suite de  $(\Omega_n)_n$  dans  $\Theta_{ad}$ , notée encore  $(\Omega_n)_n$  et  $\Omega$  un élément de  $\Theta_{ad}$  tels que  $\Omega_n \longrightarrow \Omega$*
- (ii) *il existe  $c > 0$  indépendante de  $n$  telle que*

$$\|\omega_n\|_{1, \Omega_n} \leq c \|\omega_n\|_{1, \Omega_n} \quad (1.80)$$

- (iii) *il existe  $(\tilde{\omega}_n)_n$  une suite de prolongement de  $(\omega_n)_n$  dans  $H^1(D)$ , qui converge faiblement dans  $H^1(D)$  vers une limite notée  $W$*

- (iv) *la restriction de  $W$  à  $\Omega$  est solution du problème (PV) sur  $\Omega$ .*

Ce qui nous permet de prouver que

**Lemme 1.6.2** *L'espace  $\mathcal{F}$  est compact pour la topologie définie par (1.79).*



Pour conclure nous montrons que  $J$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{F}$ . Nous avons alors le résultat suivant

**Théorème 1.6.1** *On suppose que  $K \in L^\infty(D)$  et qu'il existe  $\beta > 0$  tel que  $K(x, y) \geq \beta$  p.p  $(x, y) \in D$*

*alors le problème (PO) est bien posé et admet au moins une solution dans  $\mathcal{F}$*

### 1.6.2 Remarques et autres résultats

Dans l'étude précédente, nous avons considéré le cas où le coefficient  $K$  est dans  $L^\infty(D)$  et vérifie l'hypothèse (H). Lorsque cette dernière n'est pas vérifiée, la frontière libre peut être une courbe qui n'est pas le graphe d'une fonction  $y = \Phi(x)$ . La formulation et l'étude précédentes sont-elles toujours valables pour cette classe de digues? Cette question nous été adressée par le Professeur J. Haslinger, après la lecture de notre article [18], qui nous a orientés vers son article [31] où cette situation est illustrée dans l'exemple 6-2. En utilisant des résultats de Caffarelli et Friedman [13] qui ont montré que, dans ce type de situation, la frontière libre est définie par une fonction  $x = \Phi(y)$ , nous avons montré que l'approche que nous proposons reste valable, quitte à faire un bon choix de l'espace des fonctions admissibles [16]. En effet, si nous notons par  $(a, L)$  le point d'intersection de  $\Gamma_4$  et  $\Gamma_5$ , nous pouvons définir  $\Gamma_5$  par :

$$\Gamma_5 = \{(x, y) / x = \psi(y) \quad y \in [L, H_1]\}$$

et donc 
$$\Omega = \Omega(L, \psi) = ]0, a[ \times ]0, L] \cup \{(x, y) / 0 < x < \psi(y), L < y < H_1\}.$$

Définissons alors l'ensemble des fonctions admissibles  $U_{ad}^2$  par

$$U_{ad}^2 = \left\{ \psi \in C([H_2, H_1]) / |\psi(y) - \psi(y')| \leq C_0 |y - y'| \quad \forall y, y' \in [H_2, H_1] \right. \\ \left. \psi(H_1) = 0, \quad \psi \leq a \quad \text{et} \quad \psi|_{[H_2, L]} = a \right\},$$

où  $C_0$  est une constante, strictement positive, donnée. La famille des domaines admissibles  $\Theta_{ad}^2$  sera définie, dans ce cas par

$$\Theta_{ad}^2 = \{\Omega(L, \psi) / (L, \psi) \in \mathcal{U}_{ad}^2\}$$

avec

$$\mathcal{U}_{ad}^2 = \{(L, \psi) / H_2 \leq L \leq C_1 < H_1 \quad \text{and} \quad \psi \in U_{ad}^2\}$$

où  $C_1$  est une constante, strictement positive, donnée. Ceci nous permet de prendre comme formulation en optimisation de forme le problème suivant :

$$(PO2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J_2(\Omega(L, \psi)) \quad \text{pour tout } \Omega(L, \psi) \in \Theta_{ad}^2 \\ \text{où } J_2(\Omega(L, \psi)) = \frac{1}{2} \int_L^{H_1} (u_\Omega(\psi(y), y) - y)^2 dy \\ \text{et } u_\Omega \text{ est solution de} \\ \begin{array}{l} (PE) \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (K \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega(L, \psi) \\ u = H_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = H_2 & \text{sur } \Gamma_3 \\ u = y & \text{sur } \Gamma_4 \\ K \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_5. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La topologie que nous considérons sur  $\Theta_{ad}^2$  est construite à partir de la convergence uniforme des fonctions paramétrisantes des domaines  $\Theta_{ad}^2$  et de la convergence des hauteurs  $L$  dans  $\mathbb{R}$ . La convergence de  $\Omega_n = \Omega(L_n, \varphi_n)$  vers  $\Omega = \Omega(L, \varphi)$  est définie dans ce cas par

$$\Omega_n \longrightarrow \Omega \iff \begin{cases} \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ uniformément sur } [0, a] \\ L_n \longrightarrow L \text{ dans } [H_2, C_1]. \end{cases}$$

Définissons maintenant l'espace

$$\mathcal{F}_2 = \{(\Omega, \omega(\Omega)) / \Omega \in \Theta_{ad}^2 \text{ and } \omega(\Omega) \text{ est la solution de (PV) sur } \Omega\}.$$

Le problème d'optimisation de forme (PO2) peut s'écrire

$$\text{Minimiser } J_2(\Omega, \omega(\Omega)) \text{ pour tout } (\Omega, \omega(\Omega)) \in \mathcal{F}_2. \quad (1.81)$$

Nous considérons alors sur  $\mathcal{F}_2$  la topologie définie par la convergence suivante :

$$(\Omega_n, \omega_n) \longrightarrow (\Omega, \omega) \iff \begin{cases} \Omega_n \longrightarrow \Omega \\ \tilde{\omega}_n \rightharpoonup \tilde{\omega} \text{ faiblement dans } H^1(D). \end{cases} \quad (1.82)$$

La preuve de l'existence d'une solution de (1.81) est comme précédemment réduite à montrer la compacité de  $\mathcal{F}_2$  pour la topologie définie (1.82) et que  $J_2$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{F}_2$ .

La compacité de  $\mathcal{F}_2$  utilise les mêmes arguments que dans la section précédente. La démonstration de l'assertion (ii) du lemme 1.6.1 n'est plus valable puisqu'elle se base sur la décroissance de la frontière libre qui n'est plus assurée dans ce cas. Nous montrons ce résultat d'une autre façon en utilisant le fait que dans ce cas la frontière libre est le graphe d'une fonction  $x = \psi(y)$  et nous avons

**Lemme 1.6.3** *Pour tout  $\omega \in H_D(\Omega)$  l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\|\omega\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1+a^2} |\omega|_{1,\Omega}.$$

Pour la continuité, notons que l'intégration dans la fonctionnelle coût

$$J_2(L, \varphi) = \frac{1}{2} \int_L^{H_1} (u(\varphi(y), y) - y)^2 dy.$$

est prise sur un intervalle variable dépendant de  $L$ . Par conséquent la continuité de  $J_2$  ne peut être obtenue directement à partir des résultats de [34] comme pour le cas précédent. Pour contourner ceci, nous écrivons  $J_2$  dans une autre forme plus adaptée. En effet, comme  $u(a, y) = y \forall y \in [H_2, L]$  et  $\varphi(x) = a \forall x \in [H_2, L]$ , nous avons

$$J_2(L, \varphi) = j(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{H_2}^{H_1} (u(\varphi(y), y) - y)^2 dy.$$

Par conséquent les résultats de [34] peuvent être utilisés à la fonctionnelle  $j$ .

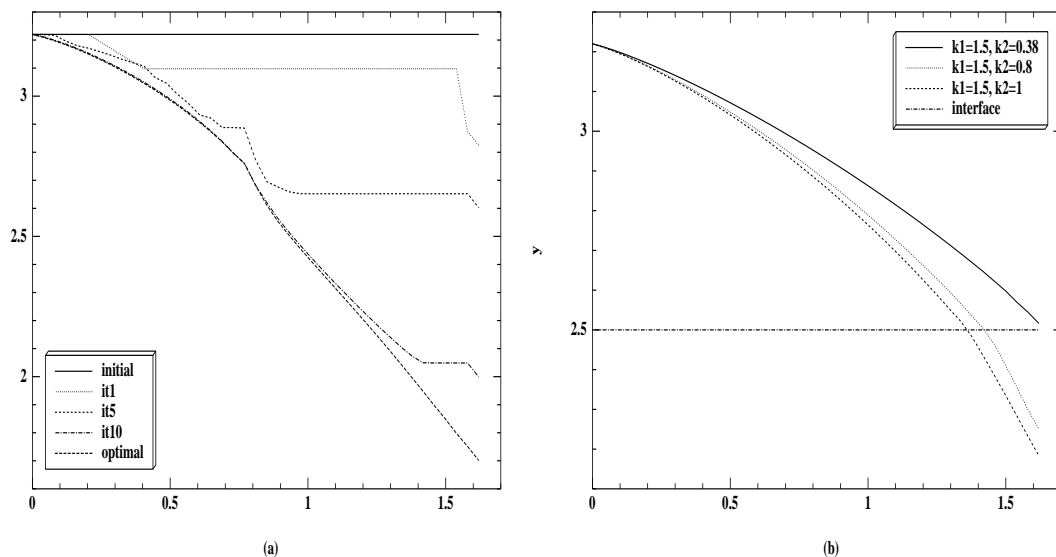


FIG. 1.6 –

### 1.6.3 Quelques résultats numériques

Nous présentons ici quelques résultats numériques, d'autres résultats incluant une étude de la convergence des approximations ainsi que des résultats de comparaison avec la méthode des inéquations variationnelles sont présentés dans [16]. Le problème d'optimisation de forme est approché par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . Le problème discret correspondant est résolu par une méthode du gradient avec projection.

Données géométriques :  $H_1 = 3.22$ ,  $H_2 = 0.84$  et  $a = 1.62$ .

Dans la figure 2a nous avons tracé les formes successives correspondantes au cas d'une digue formée de deux couches verticales de perméabilités constantes  $K = 0.7$  sur  $[0, 0.8] \times [0, H_1]$  et  $K = 1.5$  sur  $[0.8, a] \times [0, H_1]$ . La frontière optimale est atteinte au bout de 20 itérations avec un coût égal à  $6.6510^{-6}$ . On remarque que la frontière optimale n'est pas régulière sur l'interface.

Dans la figure 2b nous avons tracé les formes optimales correspondantes au cas d'une digue formée de deux couches horizontales de perméabilités  $K = 1.5$  sur  $[0, a] \times [2.5, H_1]$  et pour trois différentes valeurs de  $K$  sur  $[0, a] \times [0, 2.5]$ .

## 1.7 Une approche du problème d'écoulement non stationnaire dans une digue homogène

Nous considérons le problème d'écoulement non stationnaire à travers une digue rectangulaire en milieu poreux homogène. La digue sépare deux bassins de niveaux  $H_1(t)$  et  $H_2(t)$ ,  $t \in [0, T]$   $T > 0$ , tels que  $H_1(t) < H_2(t) \leq b \forall t \in [0, T]$  (voir figure 1.7). Nous notons par  $\Omega(t)$  la zone mouillée de la digue  $D = ]0, a[ \times ]0, b[$  et par  $\Sigma_i = \Gamma_i \times ]0, T[$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , les limites géométriques

du domaine  $\Omega \times ]0, T[$ . Notons que la frontière libre  $\Sigma_5$ , qui sépare la zone mouillée et la zone sèche de la digue, est a priori inconnue. Sachant que la frontière libre  $\Sigma_5$  est le graphe d'une

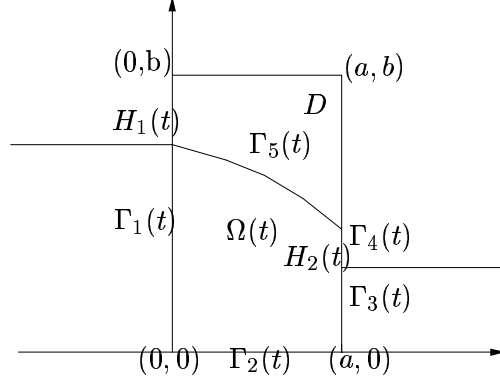


FIG. 1.7 – Digue en milieu poreux à l'instant  $t$ .

fonction  $\varphi(x, t)$  et qu'elle est soumise à des conditions de déplacement qui permettent d'établir l'équation du mouvement (1.83), dite équation de Lagrange (cf. [59])

$$\frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{sur } \Sigma_5, \quad (1.83)$$

le problème consiste à déterminer la charge hydraulique  $u$  de l'eau à l'intérieur de la digue  $D$  ainsi que la fonction  $\varphi$ , solution du problème :

$$(P_t) \begin{cases} \Delta u(x, y, t) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \text{ dans } [0, a], \quad u(x, y, t) = H_1(t) \text{ sur } \Sigma_1, \\ u(x, y, t) = H_2(t) \text{ sur } \Sigma_3, \quad u(x, y, t) = y \text{ sur } \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \quad \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ sur } \Sigma_5 \end{cases}$$

Des études de l'existence et de l'unicité de la solution de ce problème, utilisant les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, ont été faites dans [15, 28, 64]. Une approche numérique du problème basée sur une quasi-linéarisation de l'équation du mouvement de la frontière libre a été aussi faite dans [63]. Récemment, Sweilam a fait une étude du problème, utilisant une approche en contrôle optimal (cf. [60]). Notre travail est une extension des résultats obtenus dans [18, 16], pour l'étude de l'écoulement non stationnaire. Nous proposons une nouvelle méthode d'approximation numérique du problème, basée sur une discrétisation temporelle de l'équation du mouvement de la frontière libre.

Considérons  $(t_n)_n$  une partition uniforme de l'intervalle  $[0, T]$  telle que  $t_n = n\Delta t$  pour  $n = 1, \dots, N$ . Nous utilisons le schéma d'Euler implicite suivant pour la discrétisation de l'équation du mouvement de la frontière libre :

$$\frac{\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)}{\Delta t} = \frac{K}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial x} \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} \right) \quad \text{sur } \Gamma_{5, n+1} \quad (1.84)$$

où  $\varphi_i(x) = \varphi(x, t_i)$  et  $u_i(x, y) = u(x, y, t_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$  et  $\Gamma_{5, n+1}$  est la frontière libre à l'instant  $t_{n+1}$ . Définissons la fonction  $g_n$  sur  $D$  par  $g_n(x, y) = y - \varphi_n(x)$  et posons  $\mu = \frac{K \Delta t}{\varepsilon}$ .

En utilisant des calculs élémentaires nous obtenons :

$$\frac{-g_n}{\sqrt{1 + (\varphi'_{n+1})^2}} = \mu \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu_{n+1}} \quad \text{sur } \Gamma_{5,n+1} \quad (1.85)$$

où  $\nu_{n+1}$  est la normale extérieure à  $\Gamma_{5,n+1}$ . Maintenant, si on pose  $G_{n+1} = \frac{g_n}{\sqrt{1 + (\varphi'_{n+1})^2}}$  sur  $D$ , le problème devient : étant donnée  $\varphi_0$ , trouver  $(u_{n+1}, \varphi_{n+1})$  solution du problème  $(P_{n+1})$  à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u_{n+1}, \varphi_{n+1}) \text{ tel que } \Delta u_{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_{n+1} \\ u_{n+1} = H_{1,n+1} \text{ sur } \Gamma_{1,n+1}, \quad u_{n+1} = H_{2,n+1} \text{ sur } \Gamma_{3,n+1}, \\ u_{n+1} = y \text{ sur } \Gamma_{4,n+1} \cup \Gamma_{5,n+1} \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_{2,n+1}, \quad \mu \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu} = -G_{n+1} \text{ sur } \Gamma_{5,n+1}. \end{array} \right. \quad (1.86)$$

Dans la suite, nous allons omettre l'indice  $n + 1$ .

**Remarque 1.7.1** *Les techniques utilisées dans [5, 11, 46] pour étudier le problème d'écoulement en régime stationnaire et qui ont permis de ramener l'étude à un problème avec inéquations variationnelles et quasi-variationnelles sur un domaine fixe, ne sont plus applicables pour le problème (1.86); puisque la condition de Neumann sur  $\Gamma_5$  est non homogène et de plus son second membre dépend explicitement de la frontière libre  $\Gamma_5$ . Nous allons alors reformuler (1.86) en un problème d'optimisation de forme.*

Définissons l'espace  $U_{ad}$  des fonctions admissibles et la famille de domaines  $\Theta_{ad}$  par

$$U_{ad} = \left\{ \varphi \in C([0, a]) \mid |\varphi(x) - \varphi(x')| \leq C_0 |x - x'| \quad \forall x, x' \in [0, a] \right. \\ \left. \varphi(0) = H_1 \leq b, \quad \varphi(a) \geq H_2 \text{ et } \varphi \text{ est décroissante sur } [0, a] \right\}$$

$$\Theta_{ad} = \{ \Omega(\varphi) \mid \varphi \in U_{ad} \}$$

En utilisant les mêmes techniques que dans [16], nous pouvons reformuler (1.86) en un problème d'optimisation de forme de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in U_{ad} \\ \text{où } J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^a (u_\varphi(x, \varphi(x)) - \varphi(x))^2 dx \text{ et } u_\varphi \text{ est solution de} \\ (PE) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega(\varphi), \quad u = H_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad u = H_2 \text{ sur } \Gamma_3, \quad u = y \text{ sur } \Gamma_4 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = -G(\varphi) \text{ sur } \Gamma_5 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.87)$$

**Remarque 1.7.2** *De la même façon que dans la preuve de la proposition 1.6.1, l'équivalence entre (1.86) et (1.87) peut être obtenue sous condition que le problème (P) admet une solution  $(u, \varphi)$  avec  $\varphi \in U_{ad}$ . Dans le cas échéant, le problème (1.87) représente un moyen d'approximation de (1.86).*

### 1.7.1 Existence du domaine optimal

Soit  $U^0 \in H^1(D)$  vérifiant :  $U^0 = H_1$  sur  $\Gamma_1$ ,  $U^0 = H_2$  sur  $\Gamma_3$  et  $U^0 = y$  sur  $\{a\} \times [H_2, b]$ . On définit  $H_D(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0\}$  et on considère le problème suivant :

$$(PV) \begin{cases} \text{trouver } \omega \in H_D(\Omega) \\ \mu \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma_5} G(\varphi) v \, d\sigma - \mu \int_{\Omega} \nabla U^0 \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_D(\Omega) \end{cases}$$

Notons que  $u = \omega + U^0$  est solution de (PE) pour tout  $\omega$  solution de (PV). Soit  $\mathcal{F}$  l'espace suivant :

$$\mathcal{F} = \{(\Omega, \omega(\Omega)) / \Omega \in \Theta_{ad} \text{ et } \omega(\Omega) \text{ est la solution de (PV) sur } \Omega\}.$$

Le problème d'optimisation de forme (1.87) peut s'écrire :

$$\text{Minimiser } J(\Omega, \omega(\Omega)) \quad \text{pour tout } (\Omega, \omega(\Omega)) \in \mathcal{F}. \quad (1.88)$$

L'espace  $\mathcal{F}$  sera muni de la topologie définie par la convergence suivante :

si  $((\Omega_n, \omega_n))_n$  est une suite de  $\mathcal{F}$  et  $(\Omega, \omega) \in \mathcal{F}$ , tel que  $\Omega_n = \Omega(\varphi_n)$  et  $\Omega = \Omega(\varphi)$  nous avons

$$(\Omega_n, \omega_n) \longrightarrow (\Omega, \omega) \iff \varphi_n \longrightarrow \varphi \text{ uniformément sur } [0, a] \text{ et } \tilde{\omega}_n \rightharpoonup \tilde{\omega} \text{ faiblement dans } H^1(D) \quad (1.89)$$

où  $\tilde{\omega}_n$  et  $\tilde{\omega}$  sont respectivement des prolongements dans  $H^1(D)$  de  $\omega_n$  et  $\omega$ .

L'existence d'une solution de (1.88) est obtenue d'une façon analogue à l'étude du problème d'écoulement stationnaire. Il faut tenir compte ici du terme  $G(\varphi)$  qui intervient dans le second membre de l'équation d'état et qui dépend explicitement de la frontière libre. Ceci nécessite l'utilisation du lemme suivant.

**Lemme 1.7.1** (i) Soit  $((\Omega_n, \omega_n))_n$  une suite minimisante de  $J$  sur  $\mathcal{F}$ , il existe une constante  $c$ , indépendante de  $n$ , telle que

$$|\omega_n|_{1, \Omega_n} \leq c \quad (1.90)$$

(ii) Soit  $((\omega_n, \Omega_n))_n$  une suite qui converge vers  $(\omega, \Omega)$  dans  $\mathcal{F}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{5,n}} G(\varphi_n) v \, d\sigma = \int_{\Gamma_5} G(\varphi) v \, d\sigma \quad \forall v \in H^1(D) \quad (1.91)$$

En se basant sur ce lemme et le lemme 1.6.1, nous montrons le résultat suivant.

**Lemme 1.7.2** Les deux assertions suivantes sont vérifiées

(i)  $J$  est semicontinue inférieurement sur  $\mathcal{F}$ .

(ii) Si  $((\omega_n, \Omega_n))_n$  une suite minimisante de  $J$  sur  $\mathcal{F}$  alors il existe une sous suite notée encore  $((\omega_n, \Omega_n))_n$  et un élément  $(\omega, \Omega)$  de  $\mathcal{F}$  tels que  $(\omega_n, \Omega_n) \longrightarrow (\omega, \Omega)$ .

Ceci nous permet de prouver le résultat d'existence suivant :

**Théorème 1.7.1** Le problème (1.88) est bien posé et admet au moins une solution dans  $\mathcal{F}$

### 1.7.2 Quelques résultats numériques

Pour  $t_n$  donnée, le problème d'optimisation de forme est approché par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . Le problème discret correspondant est résolu par la méthode du gradient avec projection d'Uzawa. Pour tester la faibilté de l'algorithme, nous avons traité deux exemples qui présentent l'évolution de la frontière libre du régime statique jusqu'au régime permanent, dont le premier a été traité par [63].

Dans la figure 2(a), on remarque que le régime stationnaire est atteint au bout de 4 itérations, pour les données physiques et géométriques suivantes :  $H_1 = 1.$ ,  $H_2 = 0.167$ ,  $a = 0.667$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $K = 1.$ ,  $T = 4.$  et  $\Delta t = 0.4$ .

Dans la figure 2(b), le régime stationnaire est atteint au bout de 7 itérations, pour les données physiques et géométriques suivantes :  $H_1 = 3.22$ ,  $H_2 = 0.84$ ,  $a = 1.62$ ,  $\varepsilon = 0.02$ ,  $K = 0.1$ ,  $T = 4.$  et  $\Delta t = 0.2$ .

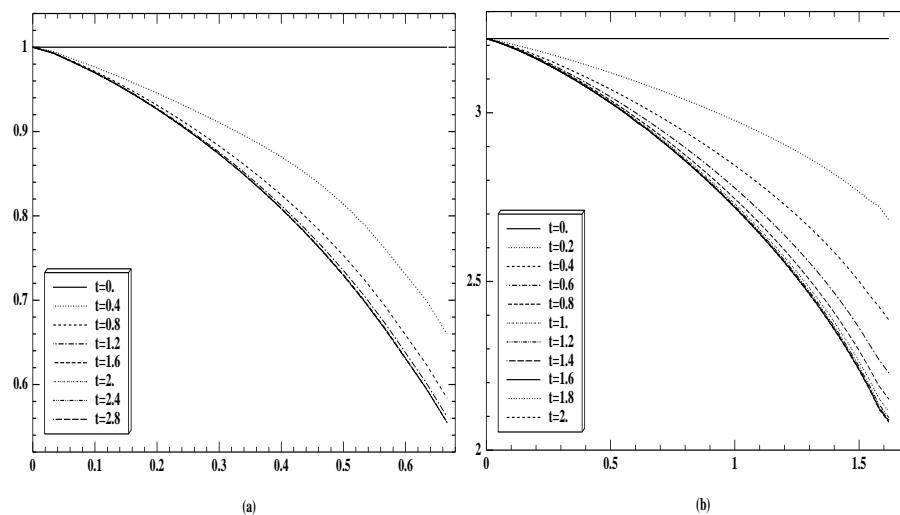


FIG. 1.8 – Résultats numériques.

# Bibliographie

- [1] J. Abouchabaka, R. Aboulaïch, A. Nachaoui, A. Souissi, Shape optimization for a simulation of a semiconductor. *Math. Comput. Simulation* **56**, **1**, 1-16 (2001).
- [2] J. Abouchabaka, R. Aboulaïch, A. Nachaoui, A. Souissi, Quasi-variational inequality and shape optimization for solution of a free boundary problem. *COMPEL*, **18**, **2**, 143-164 (1999).
- [3] R. A. Adams, *Sobolev spaces*. Acad. Press (1975).
- [4] C. Baiocchi, Problèmes à frontière libre en hydraulique milieux non homogène, *Annali della scuola Norm. Sup. di Pisa*. **28**, 429-453 (1977).
- [5] C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes, G.A. Pozzi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : Existence and Uniqueness Theorems. *Ann. Mat. Pura Appl.* **96**, 1-82 (1973).
- [6] C. Baiocchi, A. Friedman, A filtration problem in porous medium with variable permeability, *Ann. Math. Pura Appl.*, **IV**, **114**, 377-394 (1977).
- [7] D.M. Bedivan, A Boundary functional for optimal shape design problems, *Appl. Math. Lett.*, **9**, **1**, 9-14 (1996).
- [8] D. Begis et R. Glowinski, Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés, *Applied Mathematics and Optimization*. **2**, **2** (1975).
- [9] V. Benci, On a filtration problem through a porous medium, *Ann. Math. Pura Appl.*, **4**, **100**, 191-209 (1974).
- [10] H. Brezis : *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Application*. Masson (1983).
- [11] H. Brezis, D. Kinderlehrer and G. Stampacchia , Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue *C.R.Acd.Sci. Paris, série A*, **287**, 711-714 (1978).
- [12] C. Broyden, A new method of solving nonlinear simultaneous equations, *Computer J.*, **12**, 94-99 (1969).
- [13] L. A. Caffarelli and A. Friedman, The dam problem with two layers, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **68**, 125-154 (1978).
- [14] L. A. Caffarelli and G. Gilardi, Monotonicity of the free boundary in the two dimensional dam problem, *Ann. Scuola. Norm. sup. Pisa*, **7**, 523-537 (1986).
- [15] J. Carrillo, On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **22**, **5**, 573-607 (1994).
- [16] A. Chakib, T. Ghemires, A. Nachaoui, An optimal shape design formulation for inhomogeneous dam problems. *Math. Methods Appl. Sci.* Vol. **25**, No. **6**, 473-489 (2002).



- [17] A. Chakib, T. Ghemires, A. Nachaoui, Une approche du problème d'écoulement non stationnaire dans une digue par la méthode de l'optimisation de forme. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.* **331**, No.12, 1005-1010 (2000).
- [18] A. Chakib, T. Ghemires, A. Nachaoui, Une nouvelle formulation du problème de la digue non homogène. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329**, **10**, 933-938 (1999).
- [19] P. G. Ciarlet, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, in *Finite element Method (Part 1)*, *Handbook of numerical analysis*, Vol II, P. G. Ciarlet and J. L. Lions. Editors (1991).
- [20] T. Eirola, O. Nevanlinna, "Accelerating with rank-one updates" *Lin. Alg. and its Appl.*, **121**, 511-520 (1989).
- [21] A. Ellabib, A. Nachaoui Unicité des solutions stationnaires des modèles dérive-diffusion avec génération d'avalanche. Soumis (2001).
- [22] A. Ellabib, A. Nachaoui "On the numerical solution of a free boundary identification problem II" *Inverse Problems in Engineering*. Vol. **9**, 235-260 (2001).
- [23] A. Ellabib, A. Nachaoui. Existence de solutions pour le modèle dérive-diffusion avec terme d'avalanche. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, **332**, **4**, 305-310 (2001).
- [24] A. Ellabib, A. Nachaoui, On the numerical solution of a free boundary identification problem I. *Dynamic Systems Identification & Inverse Problems*, **1**, 135-143, Mosco May (1998).
- [25] M. Essaouini, A. Nachaoui, S. El Hajji, Numerical method for solving a classe of nonlinear elliptic inverse problems. Soumis (2001).
- [26] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*. Holt, Reinhart and Winston, New York (1970).
- [27] A. Friedman and S.-Y. Huang, The inhomogeneous dam problem with discontinuous permeability, *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa*, **14**, **4**, 49-77 (1987).
- [28] G. Gilardi, A new approach to evolution free boundary problems, *Communs Partial Diff. Eqns.*, **4** 1099-1123 (1979).
- [29] R. Glowinski, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Méthodes Mathématiques de l'Informatique, **5**, Dunod, Paris (1976).
- [30] Dinh Nho Hào, D. Lesnic, The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method. *IMA J. Appl. Math.* **65**, No.2, 199-217 (2000).
- [31] J. Haslinger, K.-H. Hoffmann and R.A.E. Makinen, Optimal control / dual approach for the numerical solution of the dam problem, *Adv. Math. sci. Appl.*, **2**, 1189-213 (1993).
- [32] J. Haslinger and P. Neittaanmaki, *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design. Theory and Applications*, John Wiley & Sons (1988).
- [33] N. Hayeck, A. Nachaoui, N. R. Nassif, Existence and Regularity for Van-Roosbroek systems with general mixed boundary conditions, *COMPEL*, **9**, No.4, 217-228, (1990).
- [34] I. Hlaváček and F. Nečas, Optimization of the Domain in Elliptic Unilateral Boundary Value Problems by Finite Element Method, *RAIRO, Analyse Numérique/Numerical Analysis*. **16**, No.4, 351-373 (1982).
- [35] M. Jourhmane, A. Nachaoui, Convergence of an alternating method to solve Cauchy problem for Poisson's equation. *Appl. Analysis*. Accépté (2001).
- [36] M. Jourhmane and A. Nachaoui, An alternating method for an inverse Cauchy problem, *Numer. Algorithms*, **21**, 247-260, (1999).

- [37] M. Jourhmane and A. Nachaoui, A relaxation algorithm for solving a Cauchy problem *Inverse Problems in Engineering Theory and Practice*. Engineering Foundation, **2**, 192-199, (1996).
- [38] K. Kobayashi, K. Onishi, Y. Ohura, On identifying Dirichlet condition for 2D Laplace equation by BEM. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **17**, 223-230 (1996).
- [39] M. Kobo,  $L^2$ - Conditional stability estimate for the Cauchy problem for the Laplace equation, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, **2**, No.3, 253-261 (1994) .
- [40] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, Iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve the differential equations. *Leningrad Math. J.*, **1**, No.5, 1207-1228 (1990).
- [41] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, A.V. Fomin, An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Comput. Maths. Phys.*, **31**, No.1, 45-52 (1991).
- [42] M. A. Krasnosel'skii, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, Y. B. Rutitskii and V. Y. Stetsenko, *Approximate solution of operator equations*, Wolters-Noordhoff Publishing (1972).
- [43] M.M. Lavrent'ev, *Some ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Izd. Sibirsk. Otd. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, (1962).
- [44] M. M. Lavrent'ev, V.G Romanov and V.G. Vsil'ev, *Multidimensional Inverse Problems for differential Equations*, Izdat. Nauka Sibirsk Otdel., Novosibirsk, (1969).
- [45] J.L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.*, **20**, 493-51 (1967).
- [46] A. Lyaghfour, The inhomogeneous dam with linear Darcy's law and Dirichlet boundary conditions, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **6**, No.8, 1051-1077 (1996).
- [47] Markowich, P., *The stationary semiconductor equations*, Springer (1986).
- [48] M.S. Mock, *Analysis of mathematical models of semiconductor devices*. Boole Press Advances in Numerical Computation Series, **3**. Dublin : Boole Press. (1983).
- [49] A. Nachaoui, Numerical linear algebra for reconstruction inverse problems. *J. Comput. Appl. Math.* Accépté (2002).
- [50] A. Nachaoui, Iterative solution of the Drift-diffusion equations *Numer. Algorithms*, **21**, 323-341 (1999).
- [51] A. Nachaoui, *Étude de quelques modèles macroscopiques de composants semi-conducteurs* Doctorat d'État Université mohammed V, École Mohammadia d'ingénieurs, Rabat, Maroc mars (1999).
- [52] A. Nachaoui, "Single rank quasi Newton method to solve nonlinear semiconductor equations" *CIMASI'96*, **1**, 65-70, (1996).
- [53] A. Nachaoui, A. Ellabib, Solution itérative d'un problème mixte pour le potentiel électrostatique dans les semi-conducteurs, *Lebanese scientific research reports*, **3**, **2**, 307-321, (1998).
- [54] A. Nachaoui, N. R. Nassif, Sufficient conditions for converging drift-diffusion discrete systems : Application to the finite element method, *Math. Meth. Appl. Sci.* **19**, 33-51 (1996).
- [55] Nachaoui A., Nassif N., Numerical approximation to an obstacle problem in MESFET analysis. **IFIP Conférence on Numerical Ananalysis and Optimization**. (1993).

- [56] A. Nachaoui, N. R. Nassif, On the Uniqueness of the Solution to the Drift-Diffusion model in Semiconductor Analysis, *COMPEL*, **II, 3**, 377-390, (1992).
- [57] L.E. Payne, Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation, *Arch. rat. Mech. Analysis*, **5**, 35-45 (1960) .
- [58] L.E. Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations*, Regional Conference Series in Applied Mathematics **22**, Philadelphia, Pa. : SIAM (1975).
- [59] G. Schneebeli, *Hydraulique souterraine*, Collection de la direction des études et recherche d'électricité de France (1977).
- [60] N. H. Sweilam, On the optimal control of parabolic variational inequalities, the evolution dam problem, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, **18**, 843-855 (1997).
- [61] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Solution of ill-posed problems*, John Wiley & Sons (1977).
- [62] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems*, Nauka, Moscow (1986).
- [63] M. Todsén, On the solution of transient free-surface flow problems in porous media by finite-difference methods, *Journal of Hydrology*, **12**, (1971).
- [64] A. Torelli, On a free boundary value problem connected with a non steady filtration phenomenon, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, **4**, 33-59 (1977).
- [65] Y. Wang, J. Fan, On existence, uniqueness and regularity of steady state solutions to the basic semiconductor equations, *Acta Mathematica Scientia*, **15**, No.2, 180-188 (1995) .

## **Annexe A**

# **Liste des publications**



## A.1 Liste des publications Mai 2002

### A.1.1 Articles parus/à paraître dans des revues internationales

1. Nachaoui A.,  
Numerical linear algebra for reconstruction inverse problems. *J. Comput. Appl. Math.* Accépté (2002).
2. Jourhmane M., Nachaoui A.  
Convergence of an alternating method to solve Cauchy problem for Poisson's equation. *Appl. Analysis*. Vol. **81** (2002). A paraître.
3. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
An optimal shape design formulation for inhomogenous dam problems. *Math. Meth. Appl. Sci.* Vol. **25**, No. **6**, 473-489 (2002).
4. Abouchabaka, J.; Aboulaïch, R.; Nachaoui, A.; Souissi, A.  
The study of a drift-diffusion model. *IEEE Cat.* No. **01EX481**, 54-58 (2001).
5. Ellabib A., Nachaoui A.  
On the numerical solution of a free boundary identification problem. *Inverse Problems in Engineering*. Vol. **9**, 235-260 (2001).
6. Abouchabaka J., Aboulaïch R., Guennoun, O., Nachaoui A., Souissi A.  
Shape optimization for a simulation of a semiconductor. *Math. Comput. Simulation* Vol. **56**, No. **1**, 1-16 (2001).
7. Ellabib A., Nachaoui A.  
Existence de solutions pour le modèle dérive-diffusion avec terme d'avalanche. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.* **332**, No.4, 305-310 (2001).
8. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
Une approche du problème d'écoulement non stationnaire dans une digue par la méthode de l'optimisation de forme. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.* **331**, No.12, 1005-1010 (2000).
9. Abouchabaka J., Aboulaïch R. Nachaoui A. Souissi A.  
Etude d'un probleme d'optimisation de forme. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.* **330**, No.1, 25-28 (2000).
10. Abouchabaka J., Aboulaïch R. Nachaoui A. Souissi A.  
Quasi-variational inequality and shape optimization for solution of a free boundary problem. *COMPEL* **18**, No.2, 143-164 (1999).
11. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
Une nouvelle formulation du probleme de la digue non homogene. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.* **329**, No.10, 933-938 (1999).
12. Jourhmane M. Nachaoui A.  
An alternating method for an inverse Cauchy problem. *Numer. Algorithms* **21**, No.1-4, 247-260 (1999).

13. Nachaoui A.  
Iterative solution of the drift-diffusion equations. *Numer. Algorithms* **21**, No.1-4, 323-341 (1999).
14. Nachaoui A., Nassif N. R.  
Sufficient conditions for converging drift-diffusion discrete systems. Application to the finite element method. *Math. Methods Appl. Sci.* **19**, No.1, 33-51 (1996).
15. Nachaoui A., Nassif N. R.  
On the uniqueness of the solution to the drift-diffusion model in semiconductor analysis. *COMPEL* Vol. **11**, No.3, 377-390 (1992).
16. Hayeck N., Nachaoui A., Nassif N. R.  
Existence and regularity for Van Roosbroeck systems with general mixed boundary conditions. *COMPEL* **9**, No.4, 217-228 (1990).

### **A.1.2 Articles dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture**

17. Nachaoui A.  
Numerical linear algebra for reconstruction inverse problems. *ALA2001, Algèbre Linéaire et Arithmétique : Calcul Numérique, Symbolique et Parallèle*, Vol. **1**, 215-220, mai (2001).
18. Essaouini M., Nachaoui A., El Hajji S.  
Numerical stability in non linear ill-posed problems. *ALA2001, Algèbre Linéaire et Arithmétique : calcul numérique, symbolique et parallèle*, 243-250, Rabat, mai (2001).
19. Abouchabaka J., Aboulaïch R., Guennoun O., Nachaoui A., Souissi A.  
Shape Optimization for a simulation of a semiconductor problem. *EHTAP, CIMASI'2000*, 23-25 Octobre 2000 (6 pages).
20. Chakib A. Ghemires T. and Nachaoui A.,  
An optimal shape design approach for the numerical solution of the nonhomogeneous dam problem (II). *EHTAP, CIMASI'2000*, 23-25 Octobre 2000 (6 pages).
21. Abouchabaka J., Aboulaïch R., Guennoun O., Nachaoui A., Souissi A.  
Semiconductor problem simulation using shape optimization techniques. *MTNS2000 Mathematical Theory of Network and Systems*, June 19-23, 2000-Perpignan, France (9 pages).  
[www.univ-perp.fr/mtns2000/articles/SI24\\_8.pdf](http://www.univ-perp.fr/mtns2000/articles/SI24_8.pdf)
22. Chakib A., Ghemires T. and Nachaoui A.,  
An optimal shape design approach for the numerical solution of the nonhomogeneous dam problem (I), *the International Conference on Scientific Computing and Mathematical Modeling*, *IMACS 2000*, May 25-27, 2000-Milwaukee, Wisconsin, USA (4 pages).
23. Nachaoui A.  
"Un résultat d'existence pour une inéquation quasi-variationnelle" Second International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences, *CIMASI'98*, Vol., **2**, 168-173 October (1998).

24. Ellabib A. , Nachaoui A.  
On the numerical solution of a free boundary identification problem. *Dynamic Systems Identification and Inverse Problems*, Vol. 1, 135-143, Mosco May (1998).
25. Nachaoui A., Ellabib A.  
Solution iterative d'un problème mixte pour le potentiel électro-statique dans les semi-conducteurs. *Lebanese scientific research reports*, Vol. 3, No., 2, 307-321, (1998).
26. Nachaoui A.  
Single rank quasi Newton method to solve nonlinear semiconductor equations. *CIMASI'96*. ENSEM Ed., Vol. 1, 65-70, (1996).
27. Jourhmane M., Nachaoui A.  
A relaxation algorithm for solving a Cauchy problem. *Inverse Problems in Engineering Theory and Practice*. Engineering Foundation, Vol. 2, 192-199, (1996).
28. Nachaoui A.  
Une méthode d'éléments finis hybrides pour une inéquation quasi-variationnelle modélisant un semi-conducteur. *Premières Journées de Mathématiques Appliquées*, E.M.I. Rabat, Maroc, Vol. 1, 352-357 July (1992).

### A.1.3 Colloques internationaux sans actes ou avec actes à diffusion restreinte

1. Abouchabaka J., Aboulaïch R. Nachaoui A. Souissi A.  
"The study of a drift-diffusion model" **ICM'2001 The Thirteenth International Conference On Microelectronics** October 29-31, 2001.
2. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
Résolution du problème de la digue en écoulement non permanent par la méthode d'optimisation de forme, **JANO6 Les sixièmes Journées d'Analyse Numérique et d'Optimisation** , 8-10 Mars Ain Chok. Casablanca, 2000.
3. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
**CTAC99 Computational Techniques and Applications Conference and Workshops**. The Australian National University Canberra, ACT, Australia, September 20-24, 1999.
4. Nachaoui A.,  
Simulation of the Stationary Behavior of a MESFET Using a Quasi-Variational Inequality Model, **ApplMath99 Applied Mathematics and Computation** Inter-University Center, Dubrovnik, Croatia 13-18. September 1999.
5. Nachaoui A.,  
**ICCAM'98 International Congress on Computational and Applied Mathematics**. Leuven july, 27-August 1, 1998.
6. Nachaoui A. (Invitation)  
**Premier colloque sur la modélisation mathématique et numérique dans les sciences de l'ingénieur**. Beyrouth, Liban (Avril 1997).



7. Nachaoui A. (**Invitation**)  
**Journées d'Analyse Numérique et Optimisation** Université Moulay Ismaïl, Meknes Maroc, (Avril 1996).
8. Nachaoui A. (**Invitation**)  
**Troisièmes Journées d'Analyse Non linéaire** Université Cadi Ayyad Marrakech, Maroc, (Avril 1995).
9. Abouchabaka J., Aboulaïch R., Nachaoui A., Souissi A.  
MESFET, Quasi-variational inequality and shape optimization. **Fourth AMU, PAN-  
AFRICAN Congress of Mathematics**. September 1995.
10. Nachaoui A., Nassif N. (**Invitation**)  
Numerical approximation to an obstacle problem in MESFET analysis. **IFIP Conférence  
on Numerical Analysis and Optimization**. (1993).
11. Nachaoui A.  
*Résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le modèle dérive-diffusion dans les  
semi-conducteurs*. 22<sup>eme</sup> **Congrès d'Analyse Numérique**. Loctudy Mai 1990.

#### A.1.4 Rapports de Recherche/articles soumis

1. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
Study of numerical approach for a transient flow problem in porous media Rapport de  
recherche 01/12-2 CNRS UMR6629.
2. Chakib A., Ghemires T., Nachaoui A.  
A numerical study of filtration problems in inhomogenous dam with discontinuous per-  
meability. *Appl. Num. Math.* soumis (2001).
3. Ellabib A., Nachaoui A.  
Unicité des solutions stationnaires des modèles dérive-diffusion avec génération d'ava-  
lanche. *Extracta Mathematicae*. Soumis (2002).
4. Essaouini M., Nachaoui A., El Hajji S.  
Numerical method for solving a classe of nonlinear elliptic inverse problems. *J. Comput.  
Appl. Math.* Soumis (2001).
5. Nachaoui A., An improved implementation of an iterative method in boundary identifica-  
tion problems. *Numer. Algorithms* Soumis (2001).

## Annexe B

# Les publications jointes (document annexe)

1. A. Nachaoui, N. R. Nassif, Sufficient conditions for converging drift-diffusion discrete systems : Application to the finite element method, *Math. Meth. Appl. Sci.* **19**, 33-51 (1996).
2. A. Nachaoui, Iterative solution of the Drift-diffusion equations *Numer. Algorithms*, **21**, 323-341 (1999).
3. A. Ellabib, A. Nachaoui. Existence de solutions pour le modèle dérive-diffusion avec terme d'avalanche. *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, **332**, **4**, 305-310 (2001).
4. M. Jourhmane, A. Nachaoui, Convergence of an alternating method to solve Cauchy problem for Poisson's equation. *Appl. Analysis*. Accépté (2001).
5. A. Nachaoui, Numerical linear algebra for reconstruction inverse problems, *J. Comput. Appl. Math.* Accépté (2002),
6. J. Abouchabaka, R. Aboulaïch, A. Nachaoui, A. Souissi, Quasi-variational inequality and shape optimization for solution of a free boundary problem. *COMPEL*, **18**, **2**, 143-164 (1999).
7. A. Ellabib, A. Nachaoui "On the numerical solution of a free boundary identification problem II" *Inverse Problems in Engineering*. Vol. **9**, 235-260 (2001).
8. A. Chakib, T. Ghemires, A. Nachaoui, An optimal shape design formulation for inhomogenous dam problems. *Math. Methods Appl. Sci.* Vol. **25**. No. **6**, 473-489 (2002).