HAL
open science

Les singularités des polynômes à l'infini et les compactifications toriques

David Alessandrini

To cite this version:

David Alessandrini. Les singularités des polynômes à l'infini et les compactifications toriques. Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2002. Français. NNT : . tel-00002671v1

HAL Id: tel-00002671

https://theses.hal.science/tel-00002671v1

Submitted on 2 Apr 2003 (v1), last revised 15 Mar 2007 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Table des matières

Evolution et présentation du problème **2**

Principaux résultats **4**

1 Préliminaires **5**
1.1 Rappels sur le lemme de sélection d'une courbe 5
1.2 Rappels sur le champ de vecteurs de Kuo-Paunescu 6
1.3 Notions sur les champs de vecteurs stratifiés 8
1.3.1 Les différentes conditions de contrôle 8
1.3.2 Intégration d'un champ de vecteurs sur un compact à bord . . 9
1.4 Notions sur les variétés toriques 10
1.4.1 Construction des variétés toriques 10
1.4.2 Action du tore, orbites et diviseurs 12
1.5 Compactification torique des fibres d'un polynôme 13
1.5.1 L'équation du diviseur à l'infini 14
1.5.2 Propriétés de l'adhérence du graphe d'un polynôme 15
1.5.3 Situation locale et globale 17

2 Les théorèmes de trivialité d'un polynôme : cas homogène par poids **19**
2.1 La trivialité affine d'un polynôme 19
2.2 Les différentes propriétés locales à l'infini 24
2.2.1 Le champ de vecteurs contrôlé 24
2.2.2 La condition non-caractéristique 27
2.2.3 La trivialité locale en dehors du diviseur 30

3 Les cycles évanescents **32**
3.1 Généralités 32
3.2 Les cycles évanescents et la condition non-caractéristique 34
3.3 L'absence des cycles évanescents et la trivialité topologique 37

4 Généralisation des résultats dans le cas d'un polyèdre **41**
4.1 la fonction de contrôle et les fonctions compensatrices associées 41
4.2 La stabilité du polyèdre 42
4.3 Le cas global 45
4.4 Le cas local 46

Conclusion **48**

Bibliographie **49**

Evolution et présentation du problème

Nous allons présenter dans ce paragraphe les raisons qui ont motivé l'étude des polynômes et expliquer comment le sujet de cette thèse s'inscrit dans l'évolution du problème. On fera pour cela une historique de l'étude topologique des polynômes en rapport avec le sujet.

Soit $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme. Dans [31] et [38], Malgrange et Pham étudient respectivement le comportement asymptotique (quand $\tau \to 0$) d'intégrales de la forme suivante :

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)}\omega$$

où w est une $(n+1)$- forme algébrique sur $\mathbb{C}^n$. Pour cela, il est utile de connaître la variation de la topologie de la famille d'hypersurfaces $\{f^{-1}(c),\, c \in \mathbb{C}\}$, c'est-à-dire la topologie des différentes fibres de f. On dispose pour cette étude du théorème suivant :

Théorème 0.0.1. *([9] chap.1 sect.4, [38], ou [46]). Il existe un sous-ensemble fini $B_f \subset \mathbb{C}$ tel que :*

$$f\colon \mathbb{C}^n \backslash f^{-1}(B_f) \to \mathbb{C}\backslash B_f$$

soit une fibration localement triviale.

L'ensemble B_f vérifiant cette propriété est appelé ensemble des points de bifurcation de f. Les points de cet ensemble sont aussi appelés valeurs atypiques. Les fibres au-dessus de B_f sont atypiques, soit en raison de leurs singularités dans l'espace affine $\mathbb{C}^n$, soit à cause du comportement asymptotique à l'infini du polynôme f. Donc, même si f ne possède pas de points critiques dans $\mathbb{C}^n$, il se peut que f ne définisse pas une fibration localement triviale. Ceci est dû au fait que pour $n > 1$, f n'est pas propre et donc on ne peut pas appliquer le théorème de fibration d'Ehresmann.

Dans [15], Hà et Lê étudient le cas de la dimension 2 (cas des courbes) et donne un critère à l'aide de la caractéristique d'Euler permettant de dire si une fibre est atypique. On peut donner d'autres définitions de la notion de "singularités à l'infini" et dans le cas des courbes, elles sont équivalentes (voir [10]). On peut donner par exemple une définition sur le comportement asymptotique du gradient de f.

Soit t_0 une valeur régulière de f. Il existe plusieurs définitions qui permettent de contrôler asymptotiquement le gradient de f. Par exemple la condition donnée par Fedorjuk (voir [11]) dans la définition suivante : (voir aussi [5] et [6])

Définition 0.0.2. *On dit que le polynôme f est modéré (tame en anglais) à l'infini au-dessus de t_0, si $||\mathrm{grad} f(z)||$ est minoré pour tout z dans un voisinage de l'infini (c'est-à-dire en dehors d'un certain compact de $\mathbb{C}^n$) et $f(z)$ dans un voisinage de t_0.*

On peut donner une définition plus faible exprimée par Pham dans [39] et appelée condition de Malgrange par Parusiński dans [34] :

Définition 0.0.3. *On dit que le polynôme f vérifie la condition de Malgrange-Paunescu à l'infini au-dessus de t_0, si $||z||.||\mathrm{grad} f(z)||$ est minoré pour tout z dans un voisinage de l'infini.*

Ces deux dernières conditions impliquent la trivialité topologique de f au-dessus de t_0. De plus, elles sont équivalentes dans le cas de la dimension 2 (voir [14] ou [24]).

Afin de comprendre ces valeurs atypiques, on peut utiliser les deux méthodes suivantes :

1) Soit on travaille dans l'espace affine $\mathbb{C}^n$ et on trivialise f en construisant puis en intégrant un champ de vecteurs grâce aux hypothèses 0.0.3 et 0.0.2 de modération sur ce champ.
2) Soit on travaille avec une compactification des fibres de f, afin d'obtenir une extension propre de f. On étudie ensuite les singularités qui apparaissent à l'infini.

Dans [34], Parusiński utilise une compactification projective des fibres de f. Explicitons ce cas particulier. Soit G_f le graphe de f, on peut identifier f avec la deuxième projection et on note t cette application. Soit $\overline{G}_f$ l'adhérence du graphe dans $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$ où $\mathbb{P}^n$ représente la compactification projective de $\mathbb{C}^n$. On note alors $\bar{t}$ l'extension propre de t, c'est-à-dire de f. En général $\overline{G}_f$ n'est pas lisse. On peut alors fixer une stratification de Whitney de cet espace et déduire du premier lemme d'isotopie de Thom le théorème 0.0.1 (voir Dimca [9] chap.1 sect.4 ou bien Hà-Lê [15]).

Pour $n > 2$, Parusiński a étudié dans [34] le cas particulier où les fibres possèdent uniquement des singularités isolées à l'infini. Cette hypothèse permet de généraliser le résultat de Hà et Lê dans [15] en dimension quelconque. Il obtient ainsi quatre propriétés équivalentes pour expliquer cette notion de "singularités à l'infini", dont notamment l'équivalence entre la condition de Malgrange 0.0.3 et la constance de la caractéristique d'Euler des fibres de f, au-dessus d'un point t_0.

Dans [35], Parusiński relie la condition asymptotique de Malgrange 0.0.3 à la notion d'absence de cycles évanescents de $\bar{t}$, l'extension propre de t. Ceci est rendu possible grâce au théorème des articles [4] et [25] qui explique la correspondance entre les cycles évanescents et les propriétés des espaces conormaux relatifs. Cette correspondance a aussi été étudiée par Siersma et Tibar dans [41] où la condition non-caractéristique est dénommée : condition de t-régularité.

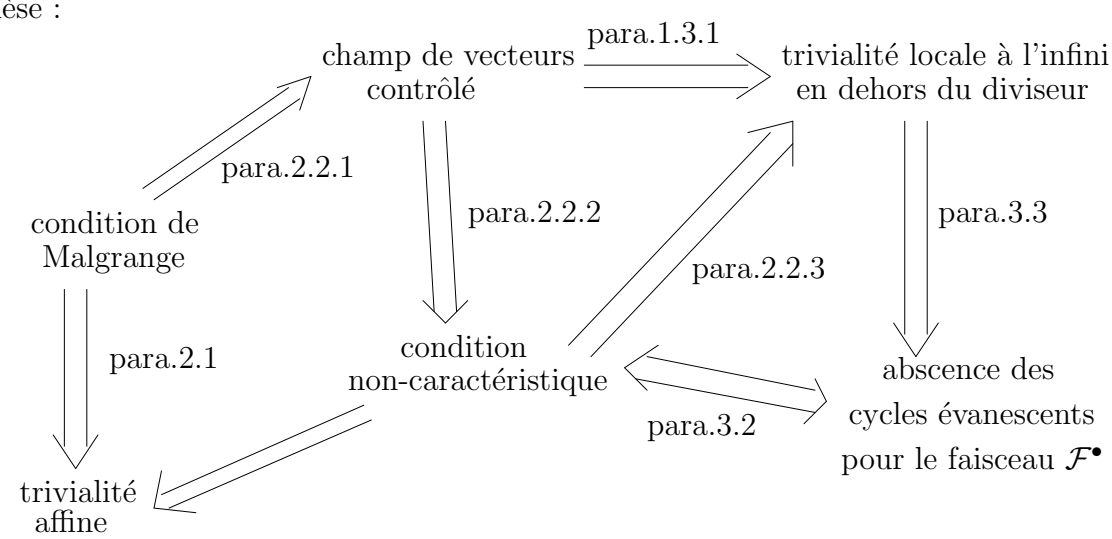
Le but de cette thèse est d'étudier dans quelles mesures ces différentes notions (conditions asymptotiques sur le gradient, trivialité affine, absence de cycles évanescents, trivialité locale à l'infini) sont reliées entre elles dans le cas d'une compactification torique quelconque de $\mathbb{C}^n$ (non nécessairement lisse). On étudie d'abord le cas d'une compactification torique de $\mathbb{C}^n$ par poids puis celui plus général d'une compactification torique quelconque associé à un polyèdre.

Nous présentons dans le prochain paragraphe les résultats obtenus sous la forme d'un diagramme.

Principaux résultats

Soit X défini comme dans le paragraphe 1.5, c'est-à-dire que X représente localement la compactification des fibres de f dans une variété torique. Définissons à présent le faisceau qui sera utilisé dans la description schématique des résultats. Soit $i\colon X \to \mathbb{C}^k$ l'inclusion, $g\colon X \to \mathbb{C}$ (l'application dont le lieu des zéros donne localement l'équation du diviseur à l'infini) telle que $U = X \backslash g^{-1}(0) = X \backslash Y$ soit lisse, $j\colon U \to X$ l'inclusion et le faisceau suivant $\mathcal{F}^\bullet = i_* j_! \mathbb{C}_U$. $\mathbb{C}_U$ représentant le faisceau constant sur U de fibre $\mathbb{C}$ et $j_!\mathbb{C}_U$ son prolongement par zéro.

Pour la définition de la condition non-caractéristique et de l'espace conormal relatif, on se reportera au paragraphe 2.2.2. Pour celle concernant les cycles évanescents, on se reportera au paragraphe 3.1. Le schéma suivant résume les résultats de cette thèse :



Donnons maintenant quelques remarques sur le schéma ci-dessus.

1) Dans le cas d'une compactification torique par poids, les résultats schématisés sont développés dans le chapitre 2 et 3. Leur généralisation dans le cas d'une compactification torique associée à un polyèdre est donnée dans le chapitre 4.
2) L'ensemble des résultats sont exacts si le corps de base est $\mathbb{C}$. Sur le corps $\mathbb{R}$, la flèche d'équivalence entre la condition non-caractéristique et l'absence des cycles évanescents n'est pas correcte.
3) Le résultat principal obtenu dans cette thèse est celui qui donne à partir de l'hypothèse de Malgrange la condition non-caractéristique. Les autres résultats sont des adaptations à notre problème de travaux existants déjà.
4) Pour trouver une démonstration de l'implication ayant pour hypothèse la condition non-caractéristique et pour conclusion la trivialité affine, on pourra se référer aux travaux suivants : A. Parusiński dans [35] ou bien H. A. Hamm dans [19].

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est d'exposer la situation étudiée et de préciser les différentes techniques utilisées de façon systématique dans toute la suite. Les objets et notions évoqués seront : les différentes versions du lemme des petits chemins, les champs de vecteurs et les stratifications, les variétés toriques.

Pour simplifier les notations, on adoptera les conventions suivantes : Soit f et g deux fonctions positives sur $\mathbb{C}^n$. $f \sim g$ signifie qu'il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que : $k_1 g(z) \leqslant f(z) \leqslant k_2 g(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ dans un voisinage autour d'un point ou bien dans un voisinage de l'infini (c'est à dire en dehors d'un certain compact de $\mathbb{C}^n$). De même, $f \lesssim g$ signifie qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $f(z) \leqslant kg(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ dans le voisinage considéré.

1.1 Rappels sur le lemme de sélection d'une courbe

On va donner dans ce paragraphe deux versions d'un même lemme appelé lemme des petits chemins ou bien lemme de sélection d'une courbe. La version algébrique de ce lemme a été démontrée par Milnor (voir [32]). Nous énoncerons ici la version analytique (voir [20]). Le premier lemme décrit la version locale et le second la version à l'infini (voir [33]). L'intérêt de ces deux lemmes est de pouvoir réduire un problème à plusieurs variables en un problème à une seule variable.

Lemme 1.1.1. *Soit S un ensemble analytique réel de $\mathbb{R}^n$, tel que 0 appartienne à S, et tel que S soit défini par :*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0\}$$

où $f_1, \dots, f_k$ sont des fonctions analytiques réelles. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}$$

où $g_1, \dots, g_l$ sont des fonctions analytiques réelles. De plus, supposons que le semi-algébrique $U \cap S$ contienne des points arbitrairement proches de l'origine, c'est-à-dire $0 \in \overline{U \cap S}$. Alors il existe une courbe (chemin) analytique $c : [0, \beta[\to \mathbb{R}^n$ tel que :

$$c(0) = 0 \text{ et } c(t) \in U \cap S \text{ pour tout } t \in]0, \beta[.$$

Lemme 1.1.2. *Soit S et U définis comme dans le lemme précédent mais avec des polynômes réels et non des fonctions analytiques réelles. Soit $h_1, \dots, h_r$ des polynômes réels.*

Supposons qu'il existe une suite $\{x_k\} \subseteq S \cap U$ telle que $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$ et pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, $\lim_{k\to\infty} h_j(x_k) = 0$. Alors il existe une courbe analytique réelle $c : [0, \beta[\to S \cap U$ avec $\lim_{t\to 0} \|c(t)\| = \infty$ et $\lim_{t\to 0} h_j(c(t)) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$. Donc de la forme :

$$c(t) = \mathbf{a_0} t^{\alpha} + \mathbf{a_1} t^{\alpha+1} + \cdots$$

avec $\mathbf{a_0} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $\alpha < 0$.

En fait, pour une inégalité donnée, il sera suffisant de la vérifier le long de toute courbe analytique. Dans le corollaire suivant, on voit bien comment il est possible de ramener un problème à plusieurs variables en un problème à une seule variable en effectuant un calcul de valuation.

Corollaire 1.1.3. (corollaire du lemme 1.1.1) *Soit f et g deux fonctions analytiques définies dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Si pour chaque courbe analytique réelle $c : [0, \beta[\to \mathbb{R}^n$ avec $c(0) = 0$, on a : $Val_t f(c(t)) \geqslant Val_t g(c(t))$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que $|g(x)| \geqslant K|f(x)|$ dans un voisinage de 0. C'est à dire par convention on notera $|g(x)| \gtrsim |f(x)|$.*

On peut aussi donner une version à l'infini de ce corollaire.

1.2 Rappels sur le champ de vecteurs de Kuo-Paunescu

Dans ce paragraphe, on rappelle la construction du champ de vecteurs de Kuo puis la condition de stratification qui permet de contrôler ce champ de vecteurs afin de trivialiser un famille d'applications. On retrouve cette condition de stratification chez différents auteurs comme Verdier pour la condition de stratification relative (w) (voir [46]) ou bien la condition (c) de Teissier (voir [42]). Cette construction a été initialement effectuée par Kuo pour étudier, en rapport avec le nombre de Łojasiewicz, la notion de suffisance de jets du point de vue topologique. La norme du gradient définissant le nombre de Łojasiewicz possède alors une structure homogène. Afin d'améliorer cette dernière notion Paunescu définira dans [37] une norme homogène par poids (ou quasi-homogène). Puis O.M. Abderrahmane donnera dans sa thèse de Doctorat la généralisation des deux cas précédents pour une norme définie par une filtration quelconque. Les notions pour un polyèdre quelconque seront rappelées au chapitre 4. On adaptera au cas complexe, l'ensemble de ces techniques initialement étudiées sur $\mathbb{R}$. Donnons maintenant les explications qui nous seront nécessaires.

On peut définir dans $\mathbb{C}^n$ une fonction de contrôle quasi-homogène de la même manière que Paunescu (voir [37]). Pour des poids $(w_1, \dots, w_n)$ cette fonction s'écrit :

$$\rho(z) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i} \Big)^{\frac{1}{2p}}, \tag{1.1}$$

où $p_i = \dfrac{p}{w_i}$, avec $p \in \mathbb{R}_+^*$. ρ est ainsi une forme de degré 1 de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$. On lui associe des fonctions coordonnées (on dit aussi compensatrices) :

$$\rho_j(z) = (\rho(z))^{w_j} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i}\Big)^{\frac{w_j}{2p}} \quad , \forall\, j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Sur $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, on considère la métrique hermitienne par poids suivante :

$$\langle\, \rho_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \rho_j \frac{\partial}{\partial z_j} \,\rangle_W = \delta_{ij}. \tag{1.3}$$

Elle nous permet de calculer les expressions suivantes :
Soit $F \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z,t) \mapsto F(z,t)$ différentiable au sens complexe, on a :

$$\operatorname{grad}_W F(z) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(z) \overline{\frac{\partial F}{\partial z_i}}(z) \rho_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

et

$$||\operatorname{grad}_W F||_W^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\rho_i \big|\frac{\partial F}{\partial z_i}\big|\Big)^2.$$

Soit $\mathbf{V}$ le champ de vecteurs local suivant, défini par Kuo-Paunescu (voir [23, 37]) :

$$\mathbf{V}(z,t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \rho_i \overline{\frac{\partial F}{\partial z_i}} \rho_i}{||\operatorname{grad}_W F||_W^2} \frac{\partial}{\partial z_i} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} & \text{si} \quad z = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

C'est un champ de vecteurs analytique réel tangent aux hypersurfaces de niveau $F = c$. Il est construit en projetant le vecteur unité de l'axe t sur l'espace tangent aux hypersurfaces de niveau $F = c$, puis en normalisant le vecteur projeté afin d'obtenir une composante selon l'axe t égale à 1.

Donnons à présent la condition de stratification et de contrôle associés au champ ainsi construit. On a :

$$\frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}} = V_i = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{||\operatorname{grad}_W F||_W} \times \frac{\rho_i \overline{\frac{\partial F}{\partial z_i}}}{||\operatorname{grad}_W F||_W} \times \rho_i. \tag{1.5}$$

La condition de stratification locale de Kuo-Paunescu est donnée par l'inégalité :

$$\big|\frac{\partial F}{\partial t}\big| \lesssim ||\operatorname{grad}_W F||_W.$$

Sous cette hypothèse, on obtient que :

$$\big|\frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}}\big| \lesssim |\rho_i|,$$

car les deux premiers termes du produit (1.5) sont alors bornés. Le calcul suivant donne alors la condition de contrôle pour le champ de vecteurs $\mathbf{V}$:

$$\big|\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{V}}\big| = \big|\sum_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}}\big| \leqslant \sum_i |V_i| \big|\frac{\partial \rho}{\partial z_i}\big| \leqslant \sum_i |\rho_i| \big|\frac{\partial \rho}{\partial z_i}\big| \lesssim |\rho|. \tag{1.6}$$

En effet, il est démontré dans [37] que :

$$|\rho_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i}| \lesssim |\rho|, \text{ pour tout } i.$$

Les courbes intégrales de ce champ trivialisent la famille F. C'est un cas particulier des propositions 1.3.4 et 1.3.5, [p.9]. En effet, on suppose ici que F est à singularités isolées pour chaque valeur de t, c'est-à-dire que l'hypersurface d'équation $F = 0$ a pour lieu singulier l'axe t.

1.3 Notions sur les champs de vecteurs stratifiés

Nous allons dans ce paragraphe expliquer plus en détails la condition de contrôle (1.6) et donner une condition de stratification plus forte. Un outil important pour prouver la trivialité d'une variété ou d'une application est l'intégration d'un champ de vecteurs adéquat. La condition standard pour prouver l'intégrabilité d'un champ de vecteurs est donnée par la condition de Lipschitz. Ici, nous utiliserons des conditions plus générales qui permettront de contrôler un champ de vecteurs stratifié. Nous rappelerons donc quelques notions sur l'intégrabilité d'un champ de vecteurs stratifié par rapport à une fonction de contrôle, ainsi que la théorie de Thom-Mather qui consiste à construire une stratification, puis à intégrer un champ de vecteurs lisse et contrôlé, sur chaque strate.

Soit $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ une stratification de $X \subset \mathbb{C}^k$ ensemble algébrique ou analytique. Un champ de vecteurs stratifié $\mathbf{V}$ est une union $\mathbf{V}_\alpha$ de champs de vecteurs lisses tangents à chaque strate S_α de $\mathcal{S}$. Chaque $\mathbf{V}_\alpha$ est localement intégrable, mais pour prouver l'intégrabilité de $\mathbf{V}$, on doit montrer l'unicité des courbes intégrales. Pour cela on doit s'assurer que chaque courbe intégrable reste contenue dans une strate. On impose donc pour cela des conditions supplémentaires que l'on appelle conditions de contrôle.

1.3.1 Les différentes conditions de contrôle

Soit $S \in \mathcal{S}$ une strate. Un voisinage tubulaire dans la terminologie de Thom-Mather est un triplé (T, π, ρ), avec T un voisinage de S dans X, $\pi\colon T \to S$ une rétraction lisse, et $\rho\colon T \to \mathbb{R}^+$ une fonction de contrôle (distance) telle que $\rho(S) = 0$. On dit que ce champ de vecteurs est contrôlé si :

i) Pour chaque $S_\alpha \in \mathcal{S}$, $\mathbf{V}_{/S_\alpha \cap U}$ relève $\mathbf{V}_{/S}$ au-dessus de π.

ii) $\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{V}} = 0$ sur $S_\alpha \cap T$.

On peut donner une condition de contrôle plus faible pour ρ qui correspond à la condition (1.6) (voir Damon [7]) :

ii') Pour chaque point $p \in S$, il existe un voisinage U_p de p dans $\mathbb{C}^k$ et une constante $C_p > 0$ tel que pour tout $x \in U_p \cap X$:

$$|\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{V}}(x)| < C_p \rho(x).$$

Précisons le point *i*) avec la définition suivante :

Définition 1.3.1. *Soit $h\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ une application différentiable et $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ deux champs de vecteurs respectivement tangents aux variétés différentiables $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. On dit que $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ relève $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ au-dessus de h si pour tous $x \in M$: $T_x h(\overrightarrow{\mathbf{v}}_x) = \overrightarrow{\mathbf{w}}_x$.*

Définition 1.3.2. *Soit $h\colon M \to N$ surjective et $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux stratifications respectives de M et N. On dit que h est une submersion stratifiée, si elle vérifie :*

i) h envoie toute strate de $\mathcal{S}$ dans une strate de $\mathcal{S}'$.

ii) Soit S une strate de $\mathcal{S}$ telle que $h(S) \subset S' \in \mathcal{S}'$ alors $h_{/S}\colon S \to S'$ est une submersion.

Donnons maintenant les deux énoncés principaux qui nous serviront dans la suite.

Proposition 1.3.3. *(K.Bekka [3]) Si $h\colon M \to N$ est une submersion stratifiée alors tout champ de vecteurs sur N peut-être relevé en un champ continu tangent aux variétés de niveau des fonctions de contrôle. La continuité donne l'existence des courbes intégrales et l'unicité est dûe au fait que ce champ ne quitte pas les strates. On obtient le premier théorème d'isotopie en intégrant ce champ de vecteurs.*

Proposition 1.3.4. *(A.Du Plessis and T.Wall [45] Chap.2 p.35-36) Soit $\mathcal{S}$ une stratification de $X \subset \mathbb{C}^k$ et $\mathbf{V}$ un champ de vecteurs stratifié sur X qui vérifie la condition ii′) pour une fonction de contrôle ρ relative à la strate S. Alors pour toute autre strate S_α, aucune courbe intégrale de $\mathbf{V}$ appartenant à S_α ne peut tendre vers S en un temps fini.*

De plus si π est une rétraction et $\mathbf{V}$ vérifie i) alors le flot local sur $S \cup S_\alpha$ obtenu en intégrant $\mathbf{V}$ est continu.

Corollaire 1.3.5. *(A.Du Plessis and T.Wall [45] Chap.2 p.35-36) Supponsons qu'en chaque point $p \in S$, où S est une strate de $\mathcal{S}$, on peut trouver une fonction de contrôle ρ et une rétraction π telles que $\mathbf{V}$ vérifie i) et ii′). Alors les courbes intégrales de $\mathbf{V}$ sont uniques et donnent un flot sur X, c'est à dire que $\mathbf{V}$ est localement intégrable.*

1.3.2 Intégration d'un champ de vecteurs sur un compact à bord

Si on souhaite trivialiser une application vérifiant les hypothèses de la proposition 1.3.3 à l'aide d'un champ de vecteurs, il faut que l'application soit de plus propre (c'est-à-dire que l'image réciproque de tout ensemble compact est un ensemble compact). Dans la pratique, on intégrera un champ de vecteurs sur un ensemble qui est déjà compact. Il faudra alors s'assurer que les courbes intégrales ne quittent pas cet ensemble compact. Ceci est l'objet de ce paragraphe.

Proposition 1.3.6. *Soit N une variété différentiable compacte à bord, $h\colon N \to \mathbb{C}$ une application différentiable et $\mathbf{V}$ un champ de vecteurs continu partout non-nul sur N. S'il existe un voisinage U de $t_0 \in \mathbb{C}$ tel que $h^{-1}(t)$ soit transverse à $\mathbf{V}$ pour tout $t \in U$ et $h^{-1}(t)$ soit transverse à ∂N, bord de N, pour tout $t \in U$ alors il existe ϵ tel que $h^{-1}(\mathring{D}_\epsilon) \xrightarrow{h} \mathring{D}_\epsilon$ soit une fibration topologiquement triviale. $\mathring{D}_\epsilon$ étant un disque ouvert de centre t_0 et de rayon ϵ.*

démonstration. On procédera en deux étapes. Dans la première, on modifiera le champ de vecteurs sur ∂N pour qu'il devienne tangent à ce bord afin que les courbes intégrales ne quittent pas N. On utilisera alors une partition de l'unité pour recoller les deux champs. Dans la deuxième étape, on se servira de la propreté de h pour

prouver l'existence de ϵ.

1^{re}étape : Le problème est de définir la fibration au voisinage de $\partial(h^{-1}(t_0))$. En effet, en un point de ∂N, les courbes intégrales de $\mathbf{V}$ ne restent pas forcément dans ∂N. On modifie donc le champ $\mathbf{V}$ en le projetant sur l'espace tangent à ∂N. Or, d'après les hypothèses de transversalité des fibres avec le bord, on peut projeter $\mathbf{V}$ sur l'espace tangent à ∂N en un champ de vecteurs non-nul. La condition de transversalité s'étend par continuité à un voisinage de ∂N. On recouvre alors la fibre $h^{-1}(t_0)$ avec un recouvrement du voisinage de $\partial(h^{-1}(t_0))$ et un recouvrement du complémentaire de ce voisinage.

On recolle ensuite les deux champs, $\mathbf{V}$ et son projeté, à l'aide d'une partition de l'unité afin d'obtenir un nouveau champ $\mathbf{V}'$ dont les courbes intégrales sont toujours transverses à $h^{-1}(t_0)$.

2^{e}étape : Pour tout point $p \in h^{-1}(t_0)$ on a une courbe intégrale $\Theta\colon]-1,1[\to h^{-1}(U)$ avec $\Theta_p(0) = p$ et $\Theta_p(]-1,1[)$ transverse à $h^{-1}(t_0)$ en p. Soit $h^{-1}(t_0) = \bigcup_i U_i$ un recouvrement ouvert de la fibre en t_0. En intégrant le champ de vecteurs partout non-nul construit dans la première étape, on obtient le difféomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} U_i \times]-1,1[& \longrightarrow & W_i \\ (p,t) & \longrightarrow & \Theta_p(t), \end{array}$$

où W_i est un voisinage de p dans $h^{-1}(U)$.

Comme $h^{-1}(t_0)$ est compact, on peut extraire de son recouvrement un sous-recouvrement fini $h^{-1}(t_0) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$. On choisit alors ϵ tel que $\mathring{D}_\epsilon \subset \bigcap_{i=1}^{k} h(W_i)$. Les courbes intégrales se recollent bien sur $W_i \cap W_j$ car on intègre le même champ de vecteurs $\mathbf{V}'$ avec les mêmes conditions initiales $\Theta_p(0) = p \in h^{-1}(t_0)$. $\square$

1.4 Notions sur les variétés toriques

On souhaite utiliser des compactifications de l'espace $\mathbb{C}^n$ plus générales que les espaces projectifs classiques. On aura recours pour cela à des modifications toriques. On rappelle donc dans ce paragraphe quelques notions sur les variétés toriques. On retrouvera ces notions classiques, ainsi que les démonstrations des propositions 1.4.1 et 1.4.2, dans [13][chap.6] ou bien dans [12].

1.4.1 Construction des variétés toriques

Soit N un réseau fixé (module libre de rang n), $N \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Avec le $\mathbb{Z}$-module $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$, on a un produit $\mathbb{Z}$-bilinéaire canonique : $\langle \quad , \quad \rangle\colon M \times N \to \mathbb{Z}$. Par extension des scalaires au corps $\mathbb{R}$, on a des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ avec un produit $\mathbb{R}$-bilinéaire canonique : $\langle \quad , \quad \rangle\colon M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. On considérera par la suite le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

On appelle cône rationnel polyédral fortement convexe un sous-ensemble σ de $N_{\mathbb{R}}$ tel qu'il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \dots, a_n$ dans N avec

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbb{R}_{\geqslant 0} a_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geqslant 0} a_n \\ &= \{\, \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \forall\, i,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i \geqslant 0 \,\}\end{aligned}$$

et $\sigma \cap (-\sigma) = 0$ (notion de fortement convexe).
Le cône dans $M_{\mathbb{R}}$ dual de σ est défini par :

$$\sigma^\vee = \{\, x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, y\rangle \geqslant 0,\ \forall\, y \in \sigma \,\}.$$

On utilisera la propriété suivante de dualité :

Proposition 1.4.1. *Si σ est un cône polyédral convexe alors $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.*

Soit $S_\sigma = M \cap \sigma^\vee = \{\, a \in M \mid \langle a, y\rangle \geqslant 0,\ \forall\, y \in \sigma \,\}$, c'est un sous semi-groupe de M qui a la propriété d'être engendré par un nombre fini d'éléments, c'est à dire :

$$\begin{aligned}S_\sigma &= \mathbb{Z}_{\geqslant 0} a_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geqslant 0} a_l \\ &= \{\, \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_l a_l \mid \forall\, i,\ \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \alpha_i \geqslant 0 \,\}.\end{aligned}$$

On associe à S_σ une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, puis une variété algébrique affine de la manière suivante :

Soit $S_\sigma =< a_1, \dots, a_l >$ engendré par $a_1, \dots, a_l$ et $\mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_l}]$ l'algèbre de type fini engendrée par $u_1 = z^{a_1}, \dots, u_l = z^{a_l}$ où u_i sont les variables toriques et z_i les coordonnées affines dans $(\mathbb{C}^*)^n$ avec $z^{a_i} = z_1^{a_{i1}} \times \cdots \times z_n^{a_{in}}$. On a alors la variété algébrique affine suivante :

$$T_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[u_1, \dots, u_l] = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_l}]. \tag{1.7}$$

Dans la suite, on va étudier la sous-variété qui réalise la variété abstraite T_σ définie en (1.7) dans un espace affine $\mathbb{C}^l$ en introduisant les coordonnées $u_1, \dots, u_l$. Ces coordonnées seront donc une représentation de T_σ. Ceci dépend bien sûr du choix des générateurs du semi-groupe S_σ.

Un éventail dans N est une collection Δ de cônes rationnels polyédraux fortement convexes de $N_{\mathbb{R}}$ satisfaisant les conditions suivantes :

i) Chaque face de tout cône $\sigma \in \Delta$ est contenue dans Δ.

ii) Pour chaque σ, $\sigma' \in \Delta$, l'intersection $\sigma \cap \sigma'$ est à la fois une face de σ et de σ'.

$|\Delta| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ est appelé le support de Δ.

On va maintenant décrire la variété algébrique associée à un éventail :
Chaque $\sigma \in |\Delta|$ donne une variété torique affine T_σ et on peut montrer que si τ est une face de σ alors il y a un plongement naturel $T_\tau \to T_\sigma$ comme sous-espace ouvert de Zariski. Ceci permet de donner la construction suivante :
Soit Δ un éventail dans N, $T(\Delta)$ est la variété obtenue en recollant ensemble les variétés affines T_σ associées à $\sigma \in |\Delta|$, le long des sous-espaces ouverts communs $T_{\sigma\cap\tau}$ pour tout σ, $\tau \in |\Delta|$.

1.4.2 Action du tore, orbites et diviseurs

Le tore $\mathbf{T} = (\mathbb{C}^*)^{\mathbf{n}}$ est un groupe qui agit sur lui-même par multiplication. Soit $S_\sigma =< a_1, \dots, a_l >$ un système de générateurs du semi-groupe S_σ et soit un vecteur $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{T}$. L'action du tore sur chaque variété torique affine T_σ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T} \times T_\sigma & \longrightarrow & T_\sigma \\ (t, u_1, \dots, u_l) & \longmapsto & (t^{a_1} u_1, \dots, t^{a_l} u_l), \end{array}$$

où $t^{a_i} = t_1^{a_{i1}} \cdots t_n^{a_{in}}$. Les recollements définis précédemment dans la construction d'une variété torique sont compatibles avec l'action du tore. Ceci donne une action globale de $\mathbf{T}$ sur $T(\Delta)$. Donc une variété torique est union disjointe de ces orbites sous l'action du tore. La proposition suivante précise la notion d'orbite.

Proposition 1.4.2. *Soit Δ un éventail de $\mathbb{R}^n$, à chaque cône $\sigma \in \Delta$, on peut associer un point distingué $x_\sigma \in T_\sigma \subset T(\Delta)$ et l'orbite $O_\sigma \subset T_\sigma$ de x_σ satisfait :*

1) $T_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} O_\tau$ (union disjointe).

2) Si V_τ est l'adhérence de O_τ, alors $V_\tau = \coprod_{\tau \prec \sigma} O_\sigma$.

$\tau \prec \sigma$ signifiant que τ est une face de σ.

Décrivons maintenant la notion de diviseur vu comme adhérence de l'orbite. Si τ est une face du cône σ alors l'ensemble $V_\tau = \overline{O}_\tau$ dans une représentation de T_σ peut être déterminé de la manière suivante :
Soit $S_\sigma =< a_1, \dots, a_l >$ et soit I l'ensemble d'indices $1 \leqslant i \leqslant l$ tels que : $a_i \notin \tau^\perp$. Alors, avec les coordonnées $u_i = z^{a_i}$, $V_\tau \subset T_\sigma$ est définie dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^l$ par $u_i = 0$, si $i \in I$. Ce sont les équations dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^l$ du diviseur V_τ.

Remarque 1.4.3. *Si $\dim_{\mathbb{R}} \tau = k$ et $\dim_{\mathbb{R}} \Delta = n$ alors $O_\tau \cong (\mathbb{C}^*)^{n-k}$. Donc si τ est une arête (cône de dimension 1) alors V_τ est une sous-variété de $T(\Delta)$ de codimension 1. On a ainsi une bijection entre l'ensemble des arêtes de Δ et l'ensemble des diviseurs équivariants de $T(\Delta)$.*

Remarque 1.4.4. *Si $\tau \prec \sigma$ et si τ est une arête alors V_τ est une sous-variété de codimension 1 dans la variété torique T_σ dont la dimension est n. On peut donc écrire V_τ de la manière suivante :*

$$V_\tau = T_\sigma \cap \{(u_1, \dots u_l) \in \mathbb{C}^l \mid u_1 = 0\},$$

de sorte que V_τ n'est ici décrit que par une équation.

Remarque 1.4.5. *Si un point $p \in V_\tau$ alors les coordonnées ambiantes décrivant V_τ au voisinage de p sont bornées dans ce voisinage.*

Donnons un exemple pour illustrer cette notion d'orbite et de diviseur :

Exemple 1.4.6. *Dans $\mathbb{R}^2$, considérons le cône σ engendré par les vecteurs $2e_1 - e_2$ et e_2. Le semi-groupe S_σ est donc engendré par $\{a_1 = e_1^*, a_2 = e_1^* + e_2^*, a_3 = e_1^* + 2e_2^*\}$. On obtient alors la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[z_1, z_1 z_2, z_1 z_2^2]$ qui est isomorphe à :*

$$\mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]/(u_1 u_3 - u_2^2),$$

où $(u_1u_3 - u_2^2)$ est l'idéal engendré par la relation $u_1u_3 = u_2^2$. La relation additive $a_1 + a_3 = 2a_2$ donne la relation $u_1u_3 = u_2^2$ entre les coordonnées toriques. La variété torique affine correspondant au cône σ est donc représentée par le cône quadratique suivant :

$$T_\sigma = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 \,|\, u_1u_3 = u_2^2\}.$$

Cette variété torique affine possède une singularité isolée à l'origine de $\mathbb{C}^3$.

Décrivons à présent les diviseurs et les orbites de cette variété T_σ.

Considérons l'arête τ_1 engendrée par e_2 alors $i \in I$ si et seulement si $\langle a_i, e_2\rangle \neq 0$ et donc $I = \{2, 3\}$. L'équation de V_{τ_1} dans l'espace ambiant est donnée par $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ ou bien par $\{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 \,|\, u_2 = 0\} \cap T_\sigma$. Dans $\mathbb{C}^3$, on a donc que $V_{\tau_1} = \mathbb{C}_{u_1} \times \{0\} \times \{0\}$.
On procède de manière identique pour la deuxième arête τ_2 engendrée par $2e_1 - e_2$. $i \in I$ si et seulement si $\langle a_i, 2e_1 - e_2\rangle \neq 0$ et donc $I = \{1, 2\}$. L'équation de V_{τ_2} dans l'espace ambiant est donnée par $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ ou bien par

$$\{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 \,|\, u_2 = 0\} \cap T_\sigma.$$

Dans $\mathbb{C}^3$, on a donc que $V_{\tau_1} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}_{u_3}$.
Enfin, le cône lui-même peut être considéré comme une face et donc pour cette face particulière, on a $I = \{1, 2, 3\}$ et alors V_σ est donnée par $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Ainsi $V_\sigma = O_\sigma$ est l'origine $(0, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$.
On peut maintenant donner la liste des quatre orbites de cet exemple :

1) $O_\sigma = \{(0, 0, 0)\}$

2) $O_{\tau_1} = \mathbb{C}^*_{u_1} \times \{0\} \times \{0\}$, orbite du point distingué $x_{\tau_1} = (1, 0, 0)$.

3) $O_{\tau_2} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}^*_{u_1}$, orbite du point distingué $x_{\tau_2} = (0, 0, 1)$.

4) $O_{\{0\}} = (\mathbb{C}^*)^2$, orbite du point distingué $x_{\{0\}} = (1, 1, 1)$.

1.5 Compactification torique des fibres d'un polynôme

Soit $E = \{a^j\}$ un ensemble fini de points de l'espace $\mathbb{Z}^n_+$,

$\Gamma_-(E) =$ enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^n$ de l'ensemble $\{a^j + \mathbb{R}^n_- \,|\, j = 1, \ldots, m\}$,

et $\Gamma_- = \Gamma_-(E) \cap \mathbb{Z}^n_+$. Soit $T(\Delta_{\Gamma_-})$ la variété torique associée à Γ_-. Cette variété est construite par dualité : les arêtes (cône de dimension 1) définissant $|\Delta_{\Gamma_-}|$ sont les vecteurs orthogonaux aux faces F de Γ_- de dimension $n - 1$. Si on ne tient pas compte des vecteurs de la base canonique, ces vecteurs subdivisent donc le quadrant négatif $\mathbb{Z}^n_-$.

On note $\tilde{w}^F \in \mathbb{Z}^n_-$, le vecteur primitif orthogonal à F distinct des vecteurs de la base canonique. Soit σ un cône de dimension n appartenant à $|\Delta_{\Gamma_-}|$. D'après la proposition 1.4.1, à $\sigma^\vee$ correspond un sommet du polyèdre Γ_- avec les mêmes faces

adjacentes que celles de $\sigma^\vee$. Pour une bonne compréhension, nous allons détailler les différentes possibilités selon la position du sommet de Γ_-. Hormis le cône correspondant à l'espace affine engendré par les vecteurs de la base canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$, le cône σ est donné par l'ensemble de vecteurs suivant :

1) si on prend un cône de $|\Delta_{\Gamma_-}|$ dont le sommet correspondant dans Γ_- se situe sur un axe de coordonnées, alors ce cône σ est du type $\{\tilde{w}^{F_i}, e_1, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n\}$, $\tilde{w}^{F_i}$ appartenant au cadrant négatif $\mathbb{Z}^n_-$.
2) si le sommet de Γ_- est sur un plan de dimension $n-k$ et d'équation :

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0$$

alors le cône σ est du type $\{\tilde{w}^{F_{k+1}}, \dots, \tilde{w}^{F_n}, e_1, \dots, e_k\}$, où $\tilde{w}^{F_i} \in \mathbb{Z}^n_-$ pour tout $i = k+1, \dots, n$. Ceci est un exemple, on peut faire de même avec toute combinaison sur l'ensemble des coordonnées $\{z_1, \dots, z_n\}$.
3) sinon, si le sommet dans Γ_- n'est pas sur un hyperplan de coordonnées alors le cône est du type $\{\tilde{w}^{F_1}, \dots, \tilde{w}^{F_n}\}$, avec $\tilde{w}^{F_i} \in \mathbb{Z}^n_-$ pour tout i. C'est une situation particulière du cas 2).

Remarque 1.5.1. *Dans le cas homogène par poids, seulement les cas* 1 *et* 3 *interviendront.*

1.5.1 L'équation du diviseur à l'infini

Les diviseurs à l'infini correspondent aux arêtes dans σ données par $\tilde{w}^{F_i}$ d'après la remarque 1.4.3. Par le paragraphe 1.4.2, l'équation du diviseur correspondant à l'arête donnée par $\tilde{w}^{F_i}$ est donnée par la coordonnée correspondant à l'unique vecteur de $\sigma^\vee$ qui n'est pas orthogonal à $\tilde{w}^{F_i}$ mais orthogonal aux autres vecteurs de σ. Ce vecteur de $\sigma^\vee$ se reporte sur une arête correspondante de Γ_-. Donnons maintenant l'équation du diviseur à l'infini dans chaque cas :

1) si σ est de type 1) alors l'équation du diviseur n'est donnée que par une seule variable u_i, car $-e_i \in \sigma^\vee$ et $\langle -e_i, e_j \rangle = 0$ pour $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ et $\langle -e_i, \tilde{w}^{F_1} \rangle \geqslant 0$ car $\tilde{w}^{F_1} \in \mathbb{Z}^n_-$. Le diviseur sera donc donné par :

$$\{u \in \mathbb{C}^l \,|\, u_i = 0\} \cap T_\sigma.$$

2) si σ est de type 2) alors à chaque arête $\tilde{w}^{F_i}$ de σ correspond un diviseur à l'infini donné par : $\{u \in \mathbb{C}^l \,|\, u_i = 0\} \cap T_\sigma$, pour tout $i = k+1, \dots, n$. Donc l'ensemble du diviseur à l'infini est donné par :

$$\{u \in \mathbb{C}^l \,|\, u_{k+1} \times \cdots \times u_n = 0\} \cap T_\sigma.$$

3) si σ est de type 3) alors à chaque arête $\tilde{w}^{F_i}$ de σ correspond un diviseur à l'infini donné par : $\{u \in \mathbb{C}^l \,|\, u_i = 0\} \cap T_\sigma$. Donc l'ensemble du diviseur à l'infini est donné par :

$$\{u \in \mathbb{C}^l \,|\, u_1 \times \cdots \times u_n = 0\} \cap T_\sigma.$$

1.5.2 Propriétés de l'adhérence du graphe d'un polynôme

Soit $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme noté $f(z) = \sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$. On définit son support par :

$$\mathrm{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid c_\alpha \neq 0\}.$$

Remarque importante : le polyèdre Γ_- construit au début du paragraphe 1.5 n'a aucun rapport avec le polyèdre de Newton de f, c'est-à-dire le polyèdre éventuel qui pourrait être construit à partir du support de f. Mais on suppose quand même dans la suite que supp$(f) \subset \Gamma_-$.

Lemme 1.5.2. *On fixe dans ce lemme un cône $\sigma \in |\Delta_{\Gamma_-}|$.*

1) si σ est de type 1) alors il existe $p_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_i^{p_i} f(z)$ soit constituée de monômes dont la puissance appartient à $\sigma^\vee$. On peut donc écrire

$$u_i^{p_i} f(z) = \overline{f}(u).$$

2) si σ est de type 2) ou 3) alors il existe $(p_{k+1}, \dots, p_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-k}$ tel que

$$u_{k+1}^{p_{k+1}} \times \cdots \times u_n^{p_n} f(z)$$

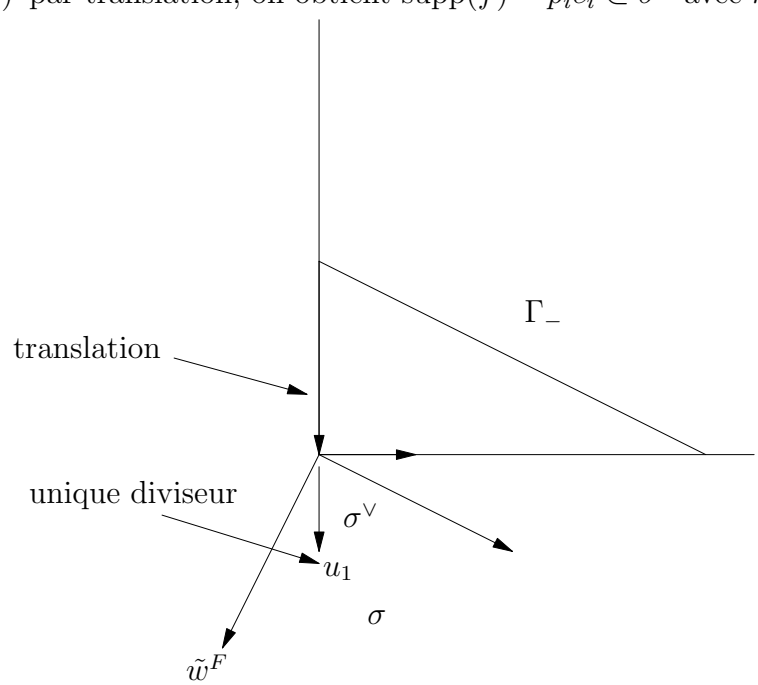
soit constituée de monômes dont la puissance appartient à $\sigma^\vee$. On peut donc écrire :

$$u_{k+1}^{p_{k+1}} \times \cdots \times u_n^{p_n} f(z) = \overline{f}(u),$$

où $\overline{f}\colon \mathbb{C}^l \to \mathbb{C}$ est dans les deux cas un polynôme.

démonstration. D'après la proposition 1.4.1, à $\sigma^\vee$ correspond un sommet du polyèdre Γ_- avec les mêmes faces adjacentes que celles de $\sigma^\vee$. Or $\sigma^\vee$ a pour sommet l'origine du repère, donc si on choisit Γ_- tel que supp$(f) \subset \Gamma_-$, après une translation, tous les points inclus dans supp(f) se retrouvent inclus dans $\sigma^\vee$. Maintenant, les trois cas précédents se présentent, illustrés respectivement par un dessin en dimension 2 pour les cas 1), 3) et en dimension 3 pour le cas 2) :

1) par translation, on obtient supp$(f) - p_i e_i \subset \sigma^\vee$ avec $k_i \in \mathbb{N}^*$.



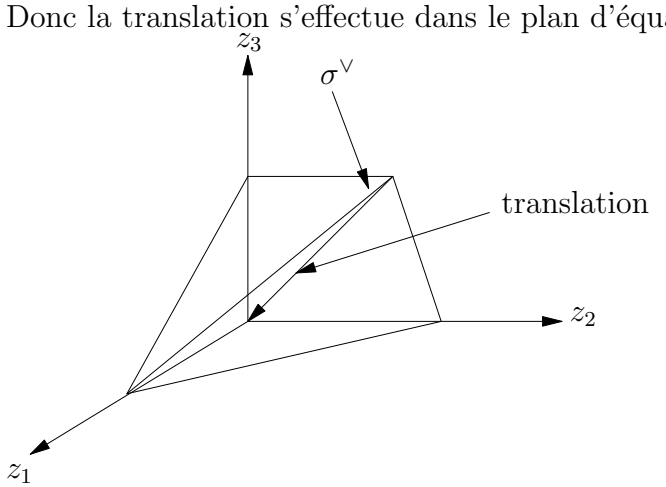
2) ici, sur le dessin, on a $\sigma = \{\tilde{w}^{F_2}, \tilde{w}^{F_3}, e_1\}$ et donc :

$$\mathrm{supp}(f) - \big(p_2(\tilde{w}^{F_2})^* + p_3(\tilde{w}^{F_3})^*\big) \subset \sigma^\vee,$$

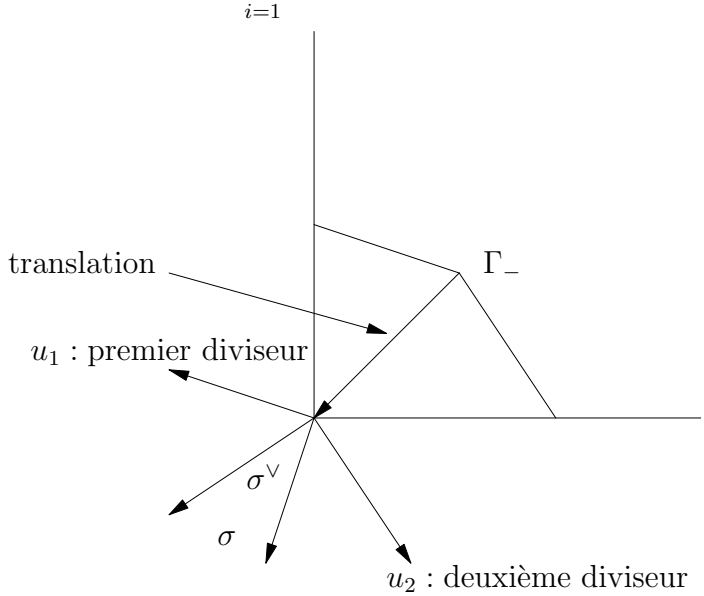
avec $p_i \in \mathbb{N}^*$. Où $(\tilde{w}^{F_i})^*$ est par notation, le vecteur de $(\mathbb{R}^n)^*$ tel que :

$$\langle (\tilde{w}^{F_i})^*, \tilde{w}^{F_i} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (\tilde{w}^{F_i})^*, x \rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \sigma.$$

Donc la translation s'effectue dans le plan d'équation $z_1 = 0$.



3) on a $\mathrm{supp}(f) - \sum_{i=1}^{n} p_i(\tilde{w}^{F_i})^* \subset \sigma^\vee$ avec $p_i \in \mathbb{N}^*$, pour tout i.



□

On considère à présent un cône de type 1), 2) ou 3). On définit alors la fonction $\overline{F}$ et l'ensemble X comme suit :

$$u_{k+1}^{p_{k+1}} \times \cdots \times u_n^{p_n}[f(z) - t] = \overline{f}(u) - t u_{k+1}^{p_{k+1}} \times \cdots \times u_n^{p_n} = \overline{F}(u,t), \tag{1.8}$$

$$X = \{(u,t) \in \mathbb{C}^{l+1} \,|\, \overline{F}(u,t) = 0\} \cap (T_\sigma \times \mathbb{C}). \tag{1.9}$$

Soit Y le lieu à l'infini de X. Il s'écrit donc :

$$Y = \{(u,t) \in \mathbb{C}^{l+1} \,|\, u_{k+1} \times \cdots \times u_n = 0\} \cap X. \tag{1.10}$$

Lemme 1.5.3. *Y est un ensemble qui ne dépend pas de t.*

démonstration. $T_\sigma \times \mathbb{C}$ ne dépend bien sûr pas de t et d'après (1.8) et (1.10) si u appartient au diviseur à l'infini alors $\overline{F}(u,t) = \overline{f}(u)$. Donc Y défini en (1.10) ne dépend pas de t. □

Lemme 1.5.4. *$X \backslash Y$ est lisse (non-singulier).*

démonstration. Un vecteur normal à $T_\sigma \times \mathbb{C}$ en un point n'appartenant pas au diviseur à l'infini (point lisse), a une composante nulle selon t.
Or, $\mathrm{grad}_t \overline{F} = -u_{k+1}^{p_{k+1}} \times \cdots \times u_n^{p_n} \neq 0$ en dehors du diviseur à l'infini. Donc

$$X = \{(u,t) \in \mathbb{C}^{l+1} \mid \overline{F}(u,t) = 0\} \cap (T_\sigma \times \mathbb{C})$$

est lisse sur $X \backslash Y$. En effet, le vecteur normal à $T_\sigma \times \mathbb{C}$ et le vecteur $\mathrm{grad}\,\overline{F}$ ne peuvent être colinéaires sur $X \backslash Y$. □

1.5.3 Situation locale et globale

On peut maintenant préciser la notion de compactification des fibres d'un polynôme. Le travail que l'on va entreprendre dans les chapitres suivants aura :

1) Soit la propriété d'être local et dans ce cas l'étude se fera au voisinage d'un point du diviseur à l'infini, c'est à dire que l'on choisira pour l'étude un cône de la variété torique contenant ce point et représentant la modification torique de l'espace affine $\mathbb{C}^n$. X est défini en (1.9), $\mathbb{C}^l$ est l'espace de plongement de T_σ à l'aide des variables toriques u_i, la fonction $g(u) = u_{k+1} \times \cdots \times u_n$ donne l'équation locale du diviseur à l'infini et pr_2 la projection sur le deuxième facteur.

   Localement, en un point à l'infini, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, hook] \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\bar{t}"'] & T_\sigma \times \mathbb{C} \arrow[r, hook] \arrow[dl, "pr_2"] & \mathbb{C}^l \times \mathbb{C} \arrow[dll, "pr_2"] \\
\mathbb{C} & \mathbb{C} & &
\end{tikzcd}$$

2) Soit la propriété d'être global, c'est-à-dire que l'étude se fera sur l'ensemble de la variété torique T représentant la modification torique de l'espace affine $\mathbb{C}^n$. G_f représente le graphe de f, $\overline{G}_f$ son adhérence dans $T \times \mathbb{C}$ et pr_2 la projection sur le deuxième facteur.

   On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{G}_f \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\bar{t}"'] & T \times \mathbb{C} \arrow[d, "pr_2"] & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "pr_2"] & G_f \arrow[l, hook'] \arrow[dll, "t"] \\
 & \mathbb{C} & &
\end{tikzcd}$$

Etant donné les deux diagrammes précédents, on voit que X représente bien localement l'adhérence du graphe de f, $\overline{G}_f$, dans la variété $T_\sigma \times \mathbb{C}$. Sur G_f on a $f - t = 0$, soit $f = t$. Précisons la signification de l'application $\bar{t}$.

Lemme 1.5.5. *$\bar{t}$ est induite par pr_2 et sa fibre, $\bar{t}^{-1}(t_0)$ représente l'adhérence de $t^{-1}(t_0)$ dans X ou bien $\overline{G}_f$ pour tout t_0.*

démonstration. L'équation de X est donnée par $\overline{F} = \overline{f} - tg = 0$ et donc l'adhérence de $t^{-1}(t_0)$ vérifie :

$$\overline{t^{-1}(t_0)} \backslash t^{-1}(t_0) \subset g^{-1}(0) \subset \overline{f}^{-1}(0).$$

Comme l'ensemble que l'on rajoute à l'infini ne dépend pas de t, on peut prolonger l'équation de X en $\overline{F} = \overline{f} - \bar{t}g = 0$ afin d'avoir la commutativité des deux diagrammes ci-dessus. $\square$

Chapitre 2

Les théorèmes de trivialité d'un polynôme : cas homogène par poids

Dans ce chapitre, on étudie la trivialité affine d'un polynôme, c'est à dire la trivialité en dehors du diviseur à l'infini d'une compactification torique de l'espace affine $\mathbb{C}^n$. Ceci sera fait de deux façons différentes. Une première méthode consiste à faire l'étude globalement sur tout l'espace affine $\mathbb{C}^n$ en intégrant un champ de vecteurs contrôlé adéquat (au sens de ii') du paragraphe 1.3.1). Dans la deuxième méthode, on étudiera les propriétés du même champ de vecteurs mais cette fois-ci localement, c'est-à-dire au voisinage d'un point appartenant au diviseur à l'infini. Pour cela, on effectuera l'étude dans une variété torique contenant ce voisinage sans désingulariser cette variété. On exprimera donc les calculs dans des coordonnées toriques. On démontrera que ce champ est aussi contrôlé (au sens de ii') du paragraphe 1.3.1) par la fonction décrivant l'équation du diviseur à l'infini.

A partir du résultat local, on démontre une condition de stratification plus forte : la condition non-caractéristique. Cette condition est l'objet central de cette étude.

2.1 La trivialité affine d'un polynôme

On considère dans ce paragraphe un polynôme $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, G_f : le graphe de f, T : une compactification torique de l'espace affine $\mathbb{C}^n$ et $\overline{G}_f$: l'adhérence de G_f dans $T \times \mathbb{C}$. C'est à dire que l'on se place dans la situation 2) du paragraphe 1.5.3.

On va utiliser pour trivialiser la famille particulière $F(z,t) = f(z) - t$, le même champ de vecteurs que dans le chapitre 1.2. Mais ici la stratification sera différente car les singularités à l'infini de $\overline{G}_f$ peuvent être de dimension strictement supérieure à 1. De plus, il faudra modifier la fonction de contrôle (1.1). Il suffira de l'inverser pour l'adapter au problème de trivialisation d'un polynôme à l'infini, en effet la fonction de contrôle doit s'annuler sur les strates qui se situent à l'infini, c'est-à-dire les strates appartenant à l'ensemble : $(T \times \mathbb{C})\backslash(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})$.

Définition 2.1.1. *On dit que le polynôme f est trivial à l'infini au-dessus de t_0 s'il existe un compact $K \subset \mathbb{C}^n$ et $\mathring{D} \subset \mathbb{C}$ un petit voisinage ouvert de t_0 tels que $(\mathbb{C}^n\backslash K)\times\mathbb{C}\cap t^{-1}(\mathring{D}) \xrightarrow{t} \mathring{D}$ soit une une fibration triviale, t étant la fonction définie au paragraphe 1.5.3.*

Remarque 2.1.2. *On peut donner une définition équivalente avec la fonction f car sur le graphe de f, G_f, on a $f = t$.*

Définissons maintenant une condition de modération sur le comportement asymptotique du gradient de f à l'infini.

Définition 2.1.3. *On dit que le polynôme f vérifie la condition de Malgrange-Paunescu à l'infini au-dessus de t_0, si $||\mathrm{grad}_W f(z)||_W \gtrsim 1$ pour tout z dans un voisinage de l'infini (c'est à dire en dehors d'un certain compact de $\mathbb{C}^n$) et $f(z)$ dans un voisinage de t_0.*

Remarque 2.1.4. *Dans le cas homogène, c'est-à-dire si :*

$$w = (w_1, \dots, w_n) = (1, \dots, 1),$$

on retrouve la condition de Malgrange :

$$||z||.||\mathrm{grad} f(z)|| \gtrsim 1.$$

Théorème 2.1.5. *Si la condition de la définition 2.1.3, $||\mathrm{grad}_W f(z)||_W \gtrsim 1$, est vérifiée alors le polynôme f est trivial à l'inifini au-dessus d'un voisinage de t_0.*

démonstration. La démonstration sera faite en deux étapes. Dans la première, on prouvera l'existence d'un champ de vecteurs dont les courbes intégrales restent en dehors du diviseur à l'infini. Dans la deuxième étape, on résout le problème du bord de la variété sur laquelle on intégre.

1^{re}étape : Soit $\mathbf{V}$ le champ de vecteurs défini, comme en (1.4), globalement sur tout $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ pour la famille particulière $F(z,t) = f(z) - t$. On obtient alors succesivement, en suivant le même processus que celui du chapitre 1.2 :

$$\mathbf{V}(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i \overline{\frac{\partial f}{\partial z_i}} \rho_i}{||\,\mathrm{grad}_W f\,||_W^2} \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{pour } \|z\| \text{ grand}, \tag{2.1}$$

c'est à dire :

$$\mathbf{V}(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathrm{grad}_W f}{||\,\mathrm{grad}_W f\,||_W^2} \quad \text{pour } \|z\| \text{ grand}, \tag{2.2}$$

et donc

$$\frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}} = V_i = \frac{\rho_i \overline{\frac{\partial f}{\partial z_i}}}{||\,\mathrm{grad}_W f\,||_W} \times \frac{\rho_i}{||\,\mathrm{grad}_W f\,||_W}. \tag{2.3}$$

Le premier terme du produit (2.3) est toujours inférieur à 1 et par hypothèse le deuxième terme est majoré par ρ_i donc $|V_i| = |\frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim |\rho_i|$ avec ρ_i la fonction coordonnée définie en (1.2).

Par dérivation des fonctions composées, on obtient le calcul suivant :

$$|\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial \mathbf{V}}| = |\sum_i \frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}}| = \frac{1}{\rho^2}|\sum_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim \frac{1}{\rho^2} \sum_i |V_i||\frac{\partial \rho}{\partial z_i}| \lesssim \frac{1}{\rho^2} \sum_i |\rho_i||\frac{\partial \rho}{\partial z_i}|.$$

Pour obtenir l'inégalité suivante, il est suffisant d'avoir :

$$|\rho_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i}| \lesssim |\rho|, \quad \text{pour tout } i. \tag{2.4}$$

On obtient alors la condition de contrôle recherchée :

$$|\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim \frac{1}{\rho^2}|\rho| = \frac{1}{|\rho|}. \tag{2.5}$$

On trivialise ensuite à l'aide de ce champ de vecteurs $\mathbf{V}$ la variété $f(z) - t = 0$. Les courbes intégrales de ce champ vont nous permettrent d'obtenir le théorème de trivialisation affine pour la famille particulière des fibres d'un polynôme complexe. En effet, d'après les propositions du paragraphe 1.3.1, ces courbes intégrales ne peuvent atteindre le diviseur à l'infini. Pour trivialiser la famille, il suffira en général de vérifier l'inégalité de l'équation (2.4).

2^{e}étape : On va dans cette étape construire un champ de vecteurs tangent au graphe de f et tangent aux sphères définies par la métrique $\langle\, , \rangle_W$. Pour cela, on procède ainsi :

Dans [34], Parusiński construit, dans le cas homogène, un champ de vecteurs en projetant le gradient $\text{grad}_W f$ pour $w = (1, \dots, 1)$, sur les sphères puis en renormalisant le champ projeté afin que le champ obtenu soit tangent au graphe de f. On obtient ainsi dans le cas homogène par poids :

$$\mathbf{w_1} = \text{grad}_W f - \frac{\overline{\langle x, \text{grad}_W f\rangle_W}}{\|x\|_W^2} x, \quad \mathbf{w_2} = \frac{\mathbf{w_1}}{\langle \mathbf{w_1}, \text{grad}_W f\rangle_W}.$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w_2}} = 1$$

et donc

$$\frac{\partial(f-t)}{\partial(\mathbf{w_2} + \frac{\partial}{\partial t})} = 0.$$

Ce qui prouve que le champ $\mathbf{w_2} + \frac{\partial}{\partial t}$ est tangent au graphe de f. Il reste à prouver que l'on peut effectivement construire ce champ en démontrant que la projection du gradient est non-nulle, c'est-à-dire que $\mathbf{w_1}(\mathbf{x}) \neq 0$ pour des valeurs suffisamment grande de $\|x\|$ et $f(x)$ proche de t_0.

Lemme 2.1.6. *On peut projeter en un champ de vecteurs non-nul, le champ de gradient* $\text{grad}_W f$ *sur* $S_{R,W}$*, où* $S_{R,W} = \{z \,|\, \langle z, z\rangle_W = R\}$.

démonstration. Par la version à l'infini du lemme des petits chemins 1.1.2, il suffit de le montrer le long de toute courbe analytique. Soit $c(s)$ une telle courbe donnée par :

$$c(s) = s^\alpha(\mathbf{a_0} + \mathbf{a_1} s + \cdots), \quad \mathbf{a_0} \neq 0,\ \mathbf{a_0} \in \mathbb{C}^n.$$

On peut aussi écrire :

$$c(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i(s) \frac{\partial}{\partial z_i},$$

où

$$c_i(s) = s^{\alpha_i}(a_{i,0} + a_{i,1}s + \cdots), \quad a_{i,0} \neq 0.$$

Le gradient dans la métrique associée au poids w s'écrit conformément au paragraphe 1.2 :

$$\mathrm{grad}_W f(z) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(z) \overline{\frac{\partial f}{\partial z_i}}(z) \rho_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i},$$

et on notera :

$$\mathrm{grad}_W f(c(s)) = \sum_{i=1}^{n} s^{\beta_i}(b_{i,0} + b_{i,1}s + \cdots) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad b_{i,0} \neq 0. \tag{2.6}$$

On écrit aussi :

$$\mathrm{grad}_W f(c(s)) = s^{\beta}(\mathbf{b_0} + \mathbf{b_1}s + \cdots), \quad \mathbf{b_0} \neq 0, \ \mathbf{b_0} \in \mathbb{C}^n.$$

Supposons que $\langle \mathbf{a_0}, \mathbf{b_0} \rangle_W \neq 0$. On veut à présent regarder les différentes valuations dans le but d'obtenir une contradiction. Comparons pour cela les valuations des expressions $\frac{d}{ds} f(c(s))$ et $\|\mathrm{grad}_W f(c(s))\|_W^2$.

Cherchons d'abord à déterminer la valuation de $\|\mathrm{grad}_W f(c(s))\|_W^2$ le long de la courbe $c(s)$. On suppose que cette courbe appartient à la variété torique σ_1. Soit σ_r un cône de la variété torique projective $T(\Delta_w)$ donné par les vecteurs $\{e_1, \cdots, e_{r-1}, -w, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$. Soit u_i les fonctions coordonnées associées à la variété torique T_{σ_r}. On a donc $u_i = z^{a_i} = z_1^{a_{i1}} \times \cdots \times z_n^{a_{in}}$ où les a_i sont les générateurs du semi-groupe S_{σ_r}. Par définition de $\sigma_r^\vee$, on a : $\langle a_i, -w \rangle \geqslant 0$ et $\langle a_i, e_k \rangle = a_{ik} \geqslant 0, \quad \forall\, k = 1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n$. On suppose ici que le cône est donné par $\sigma_1 = \{-w, e_2, \cdots, e_n\}$ et donc que la variable $u_1 = \frac{1}{z_1}$ donne l'équation du diviseur.

Lemme 2.1.7. *Dans la variété torique associée au cône $\sigma_1 = \{-w, e_2, \cdots, e_n\}$, on a : $\tilde{\rho} \sim |z_1|^{w_2 \cdots w_n}$ où*

$$\tilde{\rho} = \rho^{w_1 \cdots w_n} \sim |z_1|^{w_2 \cdots w_n} + \cdots + |z_p|^{w_1 \cdots w_{p-1} w_{p+1} \cdots w_n} + \cdots + |z_n|^{w_1 \cdots w_{n-1}}. \tag{2.7}$$

démonstration. En factorisant par la variable correspondant au diviseur, on obtient :

$$\tilde{\rho} = |z_1|^{w_2 \cdots w_n} \Big(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{|z_k|^{\tilde{w}_k}}{|z_1|^{\tilde{w}_1}}\Big). \tag{2.8}$$

Il reste à vérifier que les termes de la somme sont majorés. Ceci est démontré par le fait que le vecteur puissance $v_k = (-\tilde{w}_1, 0, \cdots, 0, \tilde{w}_k, \cdots, 0)$ appartient bien à $\sigma_1^\vee$. En effet : $\langle v_k, e_i \rangle \geqslant 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $\langle v_k, -w \rangle = 0$. On en déduit le résultat grâce à la remarque 1.4.5. $\square$

On obtient donc que dans la variété torique associée au cône σ_1 :

$$\rho_i(z) \sim |z_1|^{\frac{w_i}{w_1}}$$

et donc le long de la courbe $c(s)$, on obtient :

$$\rho_i(c(s)) \sim |c_1(s)|^{\frac{w_i}{w_1}} = |s|^{\alpha_i \frac{w_i}{w_1}} |(a_{i,0} + a_{i,1}s \cdots)|^{\frac{w_i}{w_1}}.$$

Or :

$$\|\mathrm{grad}_W f\|_W^2 = \langle \mathrm{grad}_W f, \mathrm{grad}_W f \rangle_W.$$

Si on utilise la décomposition (2.6) de $\mathrm{grad}_W f(c(s))$ suivant les coordonnées, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathrm{grad}_W f(c(s))\|_W^2 &= \sum_{i=1}^{n} |b_{i,0}|^2 \langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \rangle_W s^{2\beta_i} + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n} |b_{i,0}|^2 \frac{1}{\rho_i^2} s^{2\beta_i} + \cdots . \end{aligned}$$

On a, en utilisant le lemme 2.1.7 :

$$Val_t(\|\mathrm{grad}_W f(c(s))\|_W^2) = \min_{i=1,\dots,n} 2(\beta_i - \frac{w_i}{w_1}\alpha_1) = 2(\beta_{i_0} - \frac{w_{i_0}}{w_1}\alpha_1).$$

Et la condition de Malgrange-Paunescu impose une condition sur cette dernière valuation : $\beta_{i_0} - \frac{w_{i_0}}{w_1}\alpha_1 < 0$. Or, comme $c(s)$ appartient à σ_1, on obtient que $\alpha_1 < 0$ et donc que $\beta_{i_0} < 0$. Ainsi $\alpha + \beta < 0$, car $\beta < \beta_{i_0} < 0$ et $\alpha < \alpha_1 < 0$.

De plus, comme$f(c(s))$ est borné (car on s'interesse à l'ensemble des fibres au-dessus du voisinage d'un point), $f(c(s))$ est une fonction analytique de s en 0, de même que $\frac{d}{ds}f(c(s))$. On en déduit forcément que $Val_s(\frac{d}{ds}f(c(s))) \geqslant 0$. On remarquera que par définition de la métrique $\langle\ ,\ \rangle_W$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}f(c(s)) &= \langle \frac{d}{ds}c(s), \mathrm{grad}_W f \rangle_W. \\ &= s^{\alpha+\beta-1}(\langle \mathbf{a_0}, \mathbf{b_0} \rangle + \cdots). \end{aligned}$$

On en déduit que : $\alpha + \beta - 1 \geqslant 0$, d'où une contradiction. Donc $\langle \mathbf{a_0}, \mathbf{b_0} \rangle_W = 0$, c'est à dire que les deux vecteurs deviennent asymptotiquement orthogonaux pour la métrique $\langle\ ,\ \rangle_W$. □

On recolle ensuite le champ de Kuo-Paunescu et ce dernier champ projeté de la même manière que dans la démonstration de la proposition 1.3.6 afin d'obtenir le théorème de trivialisation. □

Remarque 2.1.8. *Il est possible d'obtenir le théorème de trivialisation en utilisant directement le champ de vecteurs construit dans la deuxième étape sans utiliser le champ de Kuo-Paunescu.*

Remarque 2.1.9. *Contrairement au champ local, le champ construit en* (2.2) *ne dépend pas de t. Mais on ne sait pas comment le prolonger sur le diviseur à l'infini. On ne peut donc pas espérer obtenir une trivialisation projective d'une compactification des fibres d'un polynôme à l'aide de ce champ* $\mathbf{V}$.

2.2 Les différentes propriétés locales à l'infini

On décrit dans ce paragraphe les différentes propriétés locales à l'infini du champ de vecteurs étudié au paragraphe précédent. On démontre que ce champ est contrôlé (au sens de ii') du paragraphe 1.3.1) par la fonction décrivant le diviseur à l'infini. On en déduit la condition de contrôle au sens de ii) du paragraphe 1.3.1, qui est équivalente à la notion de non-caractéristique. Enfin, on prouve que cette dernière condition est suffisante pour obtenir une trivialité locale en dehors du lieu à l'infini Y de la variété obtenue en compactifiant les fibres d'un polynôme.

On traitera seulement le cas quasi-projectif par poids. La généralisation pour un polyèdre quelconque sera donnée dans le chapitre 4. On se place dans le contexte de la situation locale décrite au paragraphe 1.5.3. Rappelons les quelques notations qui seront utilisées dans les deux paragraphes suivants. On fixe : un système de poids positifs $w = (w_1, \dots, w_n)$, $T(\Delta_w)$ la variété torique projective par poids définie par les vecteurs $\{e_1, \dots, e_n, -w\}$ et u_i pour $i = 1, \dots, l$ les fonctions coordonnées associées à la variété torique T_σ pour $\sigma \in |\Delta_w|$. On choisit aussi de prendre la convention suivante : on notera $g(u) = u_1 = 0$ l'équation du diviseur à l'infini de $T(\Delta_w)$ dans une représentation de T_σ par les coordonnées $u_1, \dots, u_l$.

2.2.1 Le champ de vecteurs contrôlé

Le but de la proposition suivante est de démontrer qu'avec l'hypothèse de modération asymptotique sur le gradient, on peut contrôler (au sens de ii') du paragraphe 1.3.1) le flot du champ de vecteurs correspondant par rapport au diviseur à l'infini.

Proposition 2.2.1. *Si f vérifie la condition $||\mathrm{grad}_W f(z)||_W \gtrsim 1$ (condition affine de 2.1.5) alors si $g(u) = u_1 = 0$ est l'équation du diviseur correspondant à l'arête $-w$ (diviseur à l'infini), on a au voisinage de tout point appartenant à ce diviseur et à la variété torique T_σ les propriétés suivantes :*

$$|\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}| \sim |u_1|, \quad |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim 1 \ \textit{pour } i = 2, \dots, l \quad \textit{et} \quad \frac{\partial t}{\partial \mathbf{V}} = 1,$$

ceci pour chaque cône de la variété torique projective $T(\Delta_w)$ contenant l'arête $-w$, $\mathbf{V}$ étant le champ de vecteurs analytique réel tangent à $X \backslash Y$ défini au paragraphe 2.1.

démonstration. Par construction du champ de vecteurs $\mathbf{V}$, on a bien que : $\frac{\partial t}{\partial \mathbf{V}} = 1$. Soit σ_r un cône de la variété torique projective $T(\Delta_w)$ donné par les vecteurs $\{e_1, \dots, e_{r-1}, -w, e_{r+1}, \dots, e_n\}$. Par définition :

$$\sigma_r^\vee = \{v \in (\mathbb{R}^n)^* \,|\, \langle v, -w \rangle \geqslant 0, \langle v, e_k \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n\}.$$

Soit u_i les fonctions coordonnées associées à la variété torique T_{σ_r}. On a donc :

$$u_i = z^{a_i} = z_1^{a_{i1}} \times \cdots \times z_n^{a_{in}},$$

où les a_i sont les générateurs du semi-groupe S_{σ_r}.

On a par hypothèse que $|\frac{\partial z_j}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim \rho_j$, pour tout j (voir la démonstration du théorème 2.1.5). Par dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$|\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| = |\sum_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial \mathbf{V}}| \leqslant \sum_j |\frac{\partial u_i}{\partial z_j}|\rho_j, \tag{2.9}$$

où ρ_j sont les fonctions coordonnées définies en (1.2) pour les poids $w = (w_1, \dots, w_n)$. D'après (2.9), il suffit de montrer que : $\rho_j|\frac{\partial u_i}{\partial z_j}|$ est borné. C'est aussi équivalent à démontrer que : $\rho_j^{2p}|\frac{\partial u_i}{\partial z_j}|^{2p}$ est borné. Il suffit alors de démontrer que :

$$\rho_j^{2p}|\frac{\partial u_i}{\partial z_j}|^{2p} \in \mathbb{C}[|u_1|^{q_1}, \dots, |u_l|^{q_l}], \quad \forall\ i, j \quad \text{avec} \quad q_i \in \mathbb{Q}_+, \tag{2.10}$$

pour que $\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}$ soient bornés pour $i = 2, \dots, l$. En effet, d'après la remarque 1.4.5 les coordonnées u_i sont bornées au voisinage d'un point du diviseur. Pour cela, on va prouver afin de simplifier les calculs, le lemme suivant :

Lemme 2.2.2.

$$\rho_j^{2p} = \Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^{\frac{2p}{w_i}}\Big)^{w_j} \sim (|z_1|^{2p\frac{w_j}{w_1}} + \dots + |z_j|^{2p} + \dots + |z_n|^{2p\frac{w_j}{w_n}}), \tag{2.11}$$

pour tout $j = 1, \dots, n$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^n$.

démonstration. En effet, on a pour tout $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^{\frac{2p}{w_i}}\Big)^{w_j} &\leqslant n^{w_j}\Big(\max_{i=1,\dots,n}\{|z_1|^{\frac{2p}{w_1}}, \dots, |z_i|^{\frac{2p}{w_i}}, \dots, |z_n|^{\frac{2p}{w_n}}\}\Big)^{w_j} \\
&\leqslant n^{w_j}\max_{i=1,\dots,n}\{|z_1|^{\frac{2pw_j}{w_1}}, \dots, |z_i|^{\frac{2pw_j}{w_i}}, \dots, |z_n|^{\frac{2pw_j}{w_n}}\} \\
&\leqslant n^{w_j}\sum_{i=1}^n |z_i|^{\frac{2pw_j}{w_i}} \\
&\lesssim \sum_{i=1}^n |z_i|^{\frac{2pw_j}{w_i}}.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$:

$$\Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^{\frac{2p}{w_i}}\Big)^{w_j} \geqslant (|z_1|^{2p\frac{w_j}{w_1}} + \dots + |z_j|^{2p} + \dots + |z_n|^{2p\frac{w_j}{w_n}})$$

On obtient ainsi le résultat voulu. □

Reprenons la démonstration principale. On obtient grâce au lemme précédent que l'expression $\rho_j^{2p}|\frac{\partial u_i}{\partial z_j}|^{2p}$ est équivalente à :

$$(|z_1|^{2p\frac{w_j}{w_1}} + \dots + |z_j|^{2p} + \dots + |z_n|^{2p\frac{w_j}{w_n}})(|z_1|^{2pa_{i1}} \dots |z_j|^{2p(a_{ij}-1)} \dots |z_n|^{2pa_{in}}).$$

En développant l'expression précédente, les deux cas suivants se présentent en ne tenant pas compte de la puissance $2p$:

1) Si $k \neq j$

$$|z_k|^{\frac{w_j}{w_k}}(|z_1|^{a_{i1}} \cdots |z_k|^{a_{ik}} \cdots |z_j|^{a_{ij}-1} \cdots |z_n|^{a_{in}}) =$$
$$|z_1|^{a_{i1}} \cdots |z_k|^{a_{ik}+\frac{w_j}{w_k}} \cdots |z_j|^{a_{ij}-1} \cdots |z_n|^{a_{in}}.$$

Il suffit alors de démontrer que le vecteur puissance possède la propriété suivante :

$$a = (a_{i1}, \dots, a_{ik} + \frac{w_j}{w_k}, \dots, a_{ij} - 1, \dots, a_{in}) \in \sigma_r^\vee.$$

Or on a $\langle a, -w\rangle = \langle a_i, -w\rangle \geqslant 0$. Il reste donc à vérifier que pour tout

$$m \in \{1, \dots, r-1, r+1, \dots, n\}$$

on a $\langle a, e_m\rangle \geqslant 0$. De nouveau, deux cas se présentent :

(a) Si $m = k$, on a : $a_{ik} + \frac{w_j}{w_k} \geqslant a_{ik} \geqslant 0$, car par hypothèse $a_i \in S_{\sigma_r}$.

(b) Si $m = j$, par hypothèse $a_{ij} \geqslant 0$, de plus dans la dérivée $\frac{\partial u_i}{\partial z_j}$ on peut supposer que $a_{ij} \geqslant 1$, car sinon la dérivée du monôme $z_1^{a_{i1}} \cdots z_j^{a_{ij}} \cdots z_n^{a_{in}}$ s'annule. On a donc bien $a_{ij} - 1 \geqslant 0$.

2) Si $k = j$, on obtient directement le monôme $u_i = z^{a_i} = z_1^{a_{i1}} \times \cdots \times z_n^{a_{in}}$.

Il reste à démonter que : $|\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}| \sim |u_1|$. Si on suppose que l'équation du diviseur s'écrit $u_1 = 0$, on a donc $u_1 = \frac{1}{z_1}$. On reprend les mêmes arguments que ci-dessus, c'est à dire par dérivation on obtient :

$$|\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}| = \frac{1}{|z_1|^2}\rho_1.$$

Or, grâce à (2.11), on a :

$$\Big(\frac{1}{|z_1|^2}\rho_1\Big)^{2p} \sim \frac{1}{|z_1|^{2p}}\Big(1 + \sum_{i=2}^{n} |z_1|^{-2p}|z_i|^{2p\frac{w_1}{w_i}}\Big), \tag{2.12}$$

Puis, pour les mêmes raisons que précédemment, il suffit de vérifier que tous les monômes de la somme de (2.12) appartiennent à $\mathbb{C}[|u_1|^{m_1}, \dots, |u_l|^{m_l}]$, avec $m_i \in \mathbb{Q}_+$, pour que cette somme soit bornée. Et on vérifie, toujours modulo la puissance $2p$, que :

$$\langle(-1, 0, \dots, 0, \frac{w_1}{w_i}, 0, \dots, 0), -w)\rangle = 0 \geq 0, \quad \forall\ i = 2, \dots, n$$

et

$$\langle(-1, 0, \dots, 0, \frac{w_1}{w_i}, 0, \dots, 0), e_m)\rangle \geq 0, \quad \forall\ i = 2, \dots, n \text{ et } \forall\ m \neq 1.$$

On a donc bien : $\frac{1}{|z_1|^2}\rho_1 = |\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}| \sim |u_1|$.

□

2.2.2 La condition non-caractéristique

On se situe dans le même contexte que pour le paragraphe 2.2.1. On démontre que le résultat de la proposition 2.2.1 sur le champ de vecteurs controlé permet d'obtenir la condition non-caractéristique. On détaille cette démonstration à l'aide du lemme des petits chemins.

Commençons par définir la condition non-caractéristique en introduisant ci-dessous la notion d'espace conormal relatif $T^*_{g/X}$.

Définition 2.2.3. *On a par définition, en prenant l'adhérence de l'ensemble suivant :*

$$T^*_{g/X} = \overline{\{(x,\xi) \in T^*(\mathbb{C}^l \times \mathbb{C}) \,|\, x = \pi(x,\xi) \text{ et } \xi(v) = 0 \ \forall v,\ v \in T_x(g_{/X})^{-1}(g(x))\}}$$

où $\pi : T^*(\mathbb{C}^l \times \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}$ est la projection sur le premier facteur et $T_x(g_{/X})^{-1}(g(x))$ l'espace tangent au point $x \in X \backslash Y$ à la fibre de $g_{/X}$ au-dessus de $g(x)$. On notera aussi :

$$W_g = T^*_{g/X} \cap (g^{-1}(0) \times (\mathbb{C}^l \times \mathbb{C})^*).$$

Définition 2.2.4. *On dit que l'axe t est non-caractéristique par rapport au diviseur d'équation $g = 0$ si pour un point p appartenant à ce diviseur $(p, dt) \notin W_g$, où dt représente la différentielle de la fonction t.*

Le lemme suivant nous donne la condition de contrôle *ii*) définie dans le paragraphe 1.3.1 des préliminaires.

Lemme 2.2.5. *S'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{V}$ analytique réel tangent à $X \backslash Y$ qui vérifie les propriétés de la proposition 2.2.1, c'est-à-dire :*

$$|\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim |u_1|, \quad |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim 1 \quad \text{pour } i = 2, \dots, l \quad \text{et} \quad \frac{\partial t}{\partial \mathbf{V}} = 1$$

au voisinage d'un point p du diviseur, défini par $g(u) = u_1 = 0$, alors il existe un champ de vecteurs analytique réel $\mathbf{W}$ tangent à $X \backslash Y$ qui vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{W}} = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{W}} = 0, \quad |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}| \lesssim 1 \quad \text{pour } i = 2, \dots, l \quad \text{et} \quad \frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}} = 1. \tag{2.13}$$

dans un voisinage de p.

démonstration. On procédera en deux étapes. Dans la première on montrera l'existence d'un tel champ de vecteurs point par point par une démonstration non-constructive. Dans la deuxième étape on construira explicitement ce champ par projection pour obtenir son analycité.

1re étape : On va faire la démonstration par l'absurde. Soit p le point du diviseur, $B_\epsilon(p)$ la boule de centre p de rayon ϵ et $T(X \backslash Y)$ le fibré tangent à $X \backslash Y$. On définit par S l'ensemble semi-algébrique suivant :

$$S = \{((u,t), \mathbf{W}, K, \epsilon) \in (\mathbb{C}^{l+1})^2 \times (\mathbb{R}^*_+)^2 \,|\, (u,t) \in X \backslash Y \cap B_\epsilon(p), \mathbf{W} \in T_{(u,t)}(X \backslash Y), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{W}}(u,t) = 0, |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(u,t)|^2 \leqslant K, \frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(u,t) = 1\}.$$

C'est bien un ensemble semi-algébrique car $X\backslash Y$ est défini par des équations et inéquations algébriques ainsi que son fibré tangent $T(X\backslash Y)$. Comme on raisonne par l'absurde, la contraposée de cette conclusion sera :

$$\forall\, K, \forall\, \epsilon, \exists\, (u,t), \forall\, \mathbf{W} \ : (u,t) \in B_\epsilon(p) \,\text{et}\, ((u,t), \mathbf{W}, K, \epsilon) \in \mathcal{C}S. \tag{2.14}$$

Où $\mathcal{C}S$ représentent le complémentaire de S, donc est aussi un ensemble semi-algébrique. Par la propriété (2.14) et le lemme des petits chemins 1.1.1 (version semi-algébrique locale), il existe une courbe analytique

$$c(s) = ((u(s), t(s)), K(s)) :]0, \beta[\to \mathcal{C}S$$

telle que $((u(s), t(s)), K(s)) \in \mathcal{C}S$ pour tout $s \in]0, \beta[$ et $(u(0), t(0), K(0)) = (p, \infty)$, c'est à dire que $c(0) = (p, \infty) \in \overline{\mathcal{C}S}$.

Or si on choisit le champ de vecteurs particulier suivant :

$$\mathbf{W}(c(s)) = \mathbf{V}(c(s)) + h(s)\mathbf{U}(c(s)) \tag{2.15}$$

avec $\mathbf{U}(c(s)) = sc'(s) \in T_{c(s)}(X\backslash Y)$ et

$$h(s) = -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}(c(s))}{\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{U}}(c(s))}, \quad \text{de sorte que :} \ \ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) \equiv 0. \tag{2.16}$$

On a alors :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) = \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}(c(s)) + h(s)\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{U}}(c(s))$$

et

$$\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{V}}(c(s)) + h(s)\frac{\partial t}{\partial \mathbf{U}}(c(s)).$$

Or $\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{U}}(c(s)) \sim u_1(c(s))$, car $u_1 \to 0$. De plus, par la proposition 2.2.1, on a :

$$|\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{V}}(c(s))| \lesssim |u_1(c(s))|,$$

et donc $|h(s)| \lesssim 1$. On en déduit que : $|\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(c(s))| \lesssim 1$ car les coordonnées u_i sont bornées au voisinage d'un point du diviseur d'après la remarque 1.4.5. De même $\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) \to 1$ quand $s \to 0$ car $\frac{\partial t}{\partial \mathbf{U}}(c(s)) \sim t(c(s))$, si on suppose que $t \to 0$, c'est-à-dire si on suppose que l'étude se fait au voisinage de la fibre au-dessus de zéro. On obtient donc une contradiction avec (2.14).

2e étape : On a obtenu seulement l'existence d'un champ de vecteurs point par point. On va à présent construire ce champ pour prouver son analycité. Soit $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ le champ de vecteurs projeté du champ $\mathbf{V}$ sur les espaces tangents :

$$T(X \cap \{(u,t) \in \mathbb{C}^{l+1} \,|\, g(u) = u_1 = cte \neq 0\}).$$

Cette projection donnera bien un champ de vecteurs analytique. Il reste alors à démontrer que ce champ projeté $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ vérifie bien les propriétés de 2.13. Il suffira,

d'après la conséquence directe 1.1.3 du lemme des petits chemins (version semi-analytique), de le démontrer le long de toute courbe analytique $c(s)$. Par construction de la projection sur les niveaux de la fonction g, on a bien que pour toute courbe :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{P}(\mathbf{V})}(c(s)) = 0.$$

De plus d'après la construction de $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$ dans la première étape et les propriétés d'une projection, on obtient :

$$\|\mathbf{W}(c(s)) - \mathbf{V}(c(s))\| \geqslant \|\mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s)) - \mathbf{V}(c(s))\|,$$

car $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ est une projection et $\mathbf{W} \in T(X \cap \{(u,t) \in \mathbb{C}^{l+1} \,|\, g(u) = u_1 = cte \neq 0\})$. Donc par (2.15), on a :

$$\|h(s)\mathbf{U}(\mathbf{c}(\mathbf{s}))\| \geqslant \|\mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s)) - \mathbf{V}(c(s))\| \geqslant |\, \|\mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s))\| - \|\mathbf{V}(c(s))\| \,|.$$

Or, on vient de démontrer dans la première étape que $\|h(s)\mathbf{U}(\mathbf{c}(\mathbf{s}))\|$ est bornée. Par hypothèse $\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}$ est bornée pour tout $i \neq 1$ donc $\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{P}(\mathbf{V})}$ est bornée pour tout $i \neq 1$. □

On peut donner à présent le rapport entre la nouvelle condition de contrôle et la condition non-caractéristique.

Lemme 2.2.6. *Les deux points suivants sont équivalents :*

i) $(p, dt) \notin W_g$ *, c'est à dire que* dt *n'est pas caractéristique au point* p *pour* W_g *où* $g(u) = u_1$ *et* p *est un point du diviseur.*

ii) Il existe un champ de vecteurs $\mathbf{W}$ *tangent à* $X \backslash Y$ *tel que :*

$$|\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}| \gtrsim \sum_i |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}| \quad et \quad \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{W}} = 0$$

dans un voisinage de p.

démonstration. On peut démontrer ce lemme en utilisant la contraposée des deux affirmations. Le contraire de l'affirmation $i)$ signifie que pour tout champ de vecteurs $\frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|}$ tangent à $X \backslash Y$, par définition de W_g comme limite de vecteurs cotangents, on a :

$$|dt_x(\frac{\mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|})| = \frac{|\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(x)|}{\sum_{i=2}^{l} |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(x)| + |\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(x)|} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \longrightarrow p.$$

Soit

$$\frac{|\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(x)|}{\sum_{i=2}^{l} |\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(x)|} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \longrightarrow p.$$

Ce qui donne bien le contraire de l'affirmation $ii)$. □

On peut alors déduire des deux lemmes précédents 2.2.5, 2.2.6 et de la proposition 2.2.1, le théorème suivant :

Théorème 2.2.7. *Si* f *vérifie la condition asymptotique sur le gradient de Malgrange-Paunescu,* $||\mathrm{grad}_W f(z)||_W \gtrsim 1$ *(condition 2.1.3) , alors en chaque point du diviseur à l'infini, la direction de l'axe* t *n'est pas caractéristique par rapport à l'équation de ce diviseur.*

2.2.3 La trivialité locale en dehors du diviseur

En utilisant le résultat du lemme 2.2.6 et le rappel sur l'intégration d'un champ de vecteurs du paragraphe 1.3, on peut conclure à propos de la trivialité locale de la compactification torique des fibres d'un polynôme en dehors du diviseur à l'infini.

On suppose dans ce paragraphe que les hypothèses du lemme 2.2.6 sont satisfaites. Pour localiser dans un voisinage, par exemple une boule, le champ de vecteurs, il faut que le flot de ce champ ne quitte pas cette boule. C'est le cas si ce champ est tangent à une sphère de rayon suffisamment petit. On utilisera comme outil pour démontrer cela, la condition relative (a_g) de Thom. Pour l'existence d'une telle stratification, on pourra se référer à l'article de Hamm-Lê [16] dans le cas d'une application sur un espace lisse et à celui d'Hironaka [21] dans le cas d'une application sur un espace singulier.

Le but ici est de pouvoir relever le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ à la fois sur l'espace tangent aux niveaux de g et sur l'espace tangent à la sphère. On donne pour cela le lemme de transversalité suivant :

Lemme 2.2.8. *Soit L_0 l'hyperplan donné par $t = 0$ et L_δ l'hyperplan d'équation $t = \delta$. Si la condition non-caractéristique de 2.2.6 est vérifiée alors il existe ϵ, α, δ avec $0 < \alpha \ll \epsilon$ et $0 < \delta \ll \epsilon$, tels que L_δ soit transverse à $S_\epsilon \cap g^{-1}(g(z))$ pour tout $z \in S_\epsilon \cap t^{-1}(D_\delta) \cap g^{-1}(D^*_\alpha)$, g étant considérée comme une fonction sur X.*

démonstration. On va démontrer ce lemme par l'absurde. Supposons donc que la conclusion ne soit pas vraie, il existe alors une suite de points :

$$p_i \in S_\epsilon \cap t^{-1}(D_\delta) \cap g^{-1}(D^*_\alpha) \subset X \backslash g^{-1}(0)$$

tels que $p_i \to p \in S_\epsilon \cap L_0 \cap g^{-1}(0)$ et tels que

$$T_{p_i} t^{-1}(t(p_i)) \cap T_{p_i} g^{-1}(g(p_i)) \subset T_{p_i}(S_\epsilon \cap X) \subset T_{p_i}(S_\epsilon).$$

Par passage à la limite, en supposant qu'elles existent, on obtient l'inclusion suivante :

$$L_0 \cap T_p g^{-1}(g(p)) \subset T_p(S_\epsilon).$$

L'inclusion est conservée après passage à la limite car d'après l'hypothèse non-caractéristique L_δ est transverse à $g^{-1}(g(x))$ pour tout x dans un voisinage V de p, avec $g(x) \neq 0$. On peut alors choisir ϵ suffisamment petit pour que $S_\epsilon \subset V$.

Il faut maintenant utiliser une stratification $\mathcal{S}$ de X, vérifiant la condition (a_g), afin d'avoir si $p \in S \in \mathcal{S}$ une strate, avec $S \subset g^{-1}(0)$:

$$T_p S \subset T_p g^{-1}(g(p)).$$

On obtient alors :

$$L_0 \cap T_p S \subset T_p(S_\epsilon). \tag{2.17}$$

On peut munir $L_0 \cap X$ de la stratification induite par $\mathcal{S}$ et donc, si ϵ est suffisamment petit, S_ϵ est transverse à cette stratification. D'où une contradiction avec (2.17).

□

On peut à présent trivialiser localement l'ensemble $X\backslash Y$ à l'aide de l'application t. On donne pour cela la proposition suivante :

Proposition 2.2.9. *Supposons que la condition non-caractéristique du lemme 2.2.6 soit vérifiée, alors pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit et δ tel que $0 < \delta \ll \epsilon$, on a que*

$$t\colon B_\epsilon \cap t^{-1}(D_\delta) \cap (X\backslash g^{-1}(0)) \to D_\delta$$

est une fibration topologiquement triviale.

démonstration. Grâce au lemme de transversalité 2.2.8, on peut relever par l'application t, le champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ dans l'espace tangent aux fibres de g en un champ de vecteurs non-nul qui de plus est continu d'après la proposition 1.3.3. Pour intégrer ensuite ce champ, on utilise les mêmes techniques qu'au paragraphe 1.3.6. On modifie donc ce champ au voisinage de $S_\epsilon \cap t^{-1}(D_\delta)$ afin qu'il soit tangent à $S_\epsilon \cap g^{-1}(g(z))$. Ceci est possible grâce au lemme 2.2.8 de transversalité. On recolle ensuite ces deux champs à l'aide d'une partition de l'unité. □

Remarque 2.2.10. *On retrouve le même genre d'arguments dans l'article [44], mais ici on ne fait pas d'hypothèse sur le comportement des strates qui se situent dans le lieu des zéros de la fonction g, c'est à dire la partie à l'infini. En effet, notre préoccupation est de trivialiser en dehors de l'infini.*

Remarque 2.2.11. *Si on souhaite trivialiser localement, non pas $X\backslash g^{-1}(0)$ mais toute la variété X, il faut pouvoir prolonger sur le diviseur à l'infini un champ de vecteurs défini sur $X\backslash g^{-1}(0)$. Ceci est possible si les singularités de X à l'infini sont de dimension 1 (c'est le cas des courbes). Sinon, on ne sait pas à priori prolonger un champ de vecteurs sur le lieu à l'infini.*

Chapitre 3

Les cycles évanescents

Dans ce chapitre, on souhaite relier la notion non-caractéristique étudiée au chapitre précédent aux notions d'absence de cycles évanescents et de trivialité topologique. On démontre que ces trois notions sont équivalentes. Ceci est possible car on souhaite seulement obtenir une propriété topologique faible : trivialiser en dehors du diviseur à l'infini.

Ce chapitre permet de faire le lien entre une vision de nature topologique et une vision de nature algébrique d'une même propriété : la condition non-caractéristique. Contrairement aux autres chapitres, les résultats de ce chapitre ne sont valables que sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$. En effet, le théorème 3.2.10 portant sur le calcul de l'indice n'est valable que sur le corps des complexes.

3.1 Généralités

Donnons d'abord des définitions dans un contexte général. Dans tout le chapitre, l'ensemble des notions développées seront étudiées localement et $B_\epsilon \subset \mathbb{C}^k$ représentera la boule fermée de centre p, de rayon ϵ. Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux constructible sur un espace analytique complexe $X \subset \mathbb{C}^k$ de dimension s et $l\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ une fonction lisse. On note respectivement le faisceau des cycles proches et évanescents de $\mathcal{F}^\bullet$ le long de l par $\Psi_l\mathcal{F}^\bullet$ et $\Phi_l\mathcal{F}^\bullet$. Pour une définition détaillée de ces deux derniers faisceaux, on pourra se reporter à Massey [29], appendice B ou bien à Deligne [8] pour un définition du foncteur ϕ_l. Avant de préciser la définition du cycle caractéristique associé à un faisceau, commençons par donner des définitions préliminaires.

Définition 3.1.1. *$Im\, dl$ est le cycle défini dans $T^*_p\mathbb{C}^k$ par :*

$$Im\, dl = \{(p,\xi) \in T^*_p\mathbb{C}^k \,|\, d_p l = \xi\}.$$

C'est-à-dire que $Im\, dl$ est le graphe de dl.

Définition 3.1.2. *(voir [43]) On dit qu'un point p est une singularité de Morse si l'intersection de $Im\, dl$ et $\bigcup_\alpha T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k$ est une intersection transverse d'espace non-singulier au point (p, dl).*

La définition précédente implique que si S_α est la strate contenant p alors $(p, d_p l) \notin \overline{T^*_{S_\beta}\mathbb{C}^k}$ pour $S_\alpha \neq S_\beta$.

Définition 3.1.3. *(voir [28], chap.10) Soit $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ une stratification de Whitney de X pour laquelle $\mathcal{F}^\bullet$ est constructible. Le cycle caractéristique $Char(\mathcal{F}^\bullet)$ est défini dans $T^*\mathbb{C}^k$ par la combinaison linéaire suivante :*

$$Char(\mathcal{F}^\bullet) = \sum_\alpha m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet)\overline{T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k}.$$

où $\overline{T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k}$ représente l'adhérence du fibré conormal à S_α dans $T^*\mathbb{C}^k$. Les coefficients $m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet)$ sont des entiers donnés par :

$$m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet) = (-1)^{s-1}\chi(\Phi_{l_{/X}}\mathcal{F}^\bullet)_p.$$

pour tout point p appartenant à la strate S_α. Si $dimS_\alpha > 0$, on définit l comme en 3.1.2, et si $dimS_\alpha = 0$, on peut prendre l : forme linéaire générique.

Remarque 3.1.4. *On peut donner une définition différente en se ramenant au cas d'un point par la formule suivante :*

$$m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet) = (-1)^{s-1}\chi(\Phi_{l_{/X}}\mathcal{F}^\bullet)_p = (-1)^{s-d-1}\chi(\Phi_{l_{/N}}\mathcal{F}^\bullet{}_{/N})_p,$$

où N est une normale à S_α en p (c'est à dire un sous-espace linéaire de dimension complémentaire à celle de S_α et transverse à S_α) et $l\colon (\mathbb{C}^k, p) \to (\mathbb{C}, 0)$ une forme linéaire générique. Les dimensions sont données par : $dimS_\alpha = d$ et $dimX = s$.

Définition 3.1.5. *Le support singulier associé à $\mathcal{F}^\bullet$ est défini de manière ensembliste par :*

$$SS(\mathcal{F}^\bullet) = \bigcup_{m_\alpha \neq 0} \overline{T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k}.$$

Remarque 3.1.6. *(sur le théorème de l'indice) Pour p et l définis comme en 3.1.2, $(p, d_p l)$ est un point lisse de $Char(\mathcal{F}^\bullet)$ et un calcul d'intersection donne :*

$$(Char(\mathcal{F}^\bullet).Im\, dl)_{(p,d_pl)} = \left(m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet)\overline{T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k}.Im\, df\right)_{(p,d_pl)} = m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet).$$

En effet, comme $l_{/S_\alpha}$ est de Morse, on a :

$$(\overline{T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k}.Im\, dl)_{(p,d_pl)} = \left(T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k.Im\, dl\right)_{(p,d_pl)} = 1.$$

Ainsi, en un point lisse $(p, \xi) \in Char(\mathcal{F}^\bullet)$, si l est de Morse relativement à la stratification $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ avec $l(p) = 0$ et $d_p l = \xi$, on obtient :

$$(-1)^{s-1}\chi(\Phi_l\mathcal{F}^\bullet)_p = (Char(\mathcal{F}^\bullet).Im\, dl)_{(p,d_pl)}. \tag{3.1}$$

Considérons maintenant le cas où $\mathcal{F}^\bullet$ est un faisceau pervers. $Char(\mathcal{F}^\bullet)$ est alors un cycle non-négatif et $m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet)$ est donné par :

$$m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet) = dim\, H^{s-1}(\Phi_l\mathcal{F}^\bullet)_p.$$

Dans ce cas, la formule d'indice 3.1 reste valable pour tout point $(p, \xi) \in Char(\mathcal{F}^\bullet)$ et pour tout h (non nécesairement générique) tel que $h(p) = 0$, $d_p h = \xi$, et (p, ξ) soit un point isolé dans l'intersection $Char(\mathcal{F}^\bullet) \cap Im\, dh$. (voir par exemple [40]).

Remarque 3.1.7. *(cas d'un point) Le coefficient de $T_p^*\mathbb{C}^k$ dans $Char\mathcal{F}^\bullet$ est donné à l'aide de l'égalité suivante où $\delta \ll \epsilon$ et l est générique :*

$$\chi(\Phi_l\mathcal{F}^\bullet)_p = \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap l^{-1}(\delta); \mathcal{F}^\bullet))_p - \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap l^{-1}(0); \mathcal{F}^\bullet))_p.$$

Remarque 3.1.8. *$Char(\mathcal{F}^\bullet)$ et $SS(\mathcal{F}^\bullet)$ sont bien définis, c'est-à-dire indépendants des choix effectués dans les définitions respectives (voir par exemple [22], Chap.9).*

Remarque 3.1.9. *(cas d'un point) Si $\mathcal{F}^\bullet$ est pervers, $T_p^*\mathbb{C}^k$ apparaît dans $SS(\mathcal{F}^\bullet)$, si pour toute forme linéaire générique l et tous $\delta \ll \epsilon$, on obtient que :*

$$\mathbb{H}^*(B_\epsilon, l^{-1}(\delta) \cap B_\epsilon; \mathcal{F}^\bullet)$$

est non triviale.

Remarque 3.1.10. *Le support singulier des trois cycles caractéristiques $Char(\mathcal{F}^\bullet)$, $Char(\Psi_l\mathcal{F}^\bullet)$ et $Char(\Phi_l\mathcal{F}^\bullet)$ est identique. De plus, si la composante $\overline{T^*_{S_\alpha}\mathbb{C}^k}$ apparait dans ce support singulier, il existe alors une relation entre les multiplicités des trois faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$, $\Psi_l\mathcal{F}^\bullet$, $\Phi_l\mathcal{F}^\bullet$ donnée par :*

$$m_\alpha(\mathcal{F}^\bullet) = m_\alpha(\Psi_l\mathcal{F}^\bullet) + m_\alpha(\Phi_l\mathcal{F}^\bullet)$$

Une démonstration de cette affirmation est donnée dans [4] ou bien [28] pour le cas singulier, sinon pour le cas lisse, on peut se référer à [25]. Nous nous intéresserons dans les deux paragraphes suivants seulement au support singulier.

3.2 Les cycles évanescents et la condition non-caractéristique

Le but de ce paragraphe est de relier la condition non-caractéristique du paragraphe 2.2.6 à la notion d'absence de cycles évanescents en dehors du diviseur. On regarde maintenant, dans les deux prochains paragraphes, la situation particulière qui correspond au problème à l'infini que l'on étudie. Soit $i\colon X \to \mathbb{C}^k$ l'inclusion, $g\colon X \to \mathbb{C}$ (l'application dont le lieu des zéros donne l'équation du diviseur à l'infini) telle que $U = X\backslash g^{-1}(0) = X\backslash Y$ soit lisse, $j\colon U \to X$ l'inclusion et le faisceau suivant $\mathcal{F}^\bullet = i_*j_!\mathbb{C}_U$. $\mathbb{C}_U$ représente le faisceau constant sur U de fibre $\mathbb{C}$ et $j_!\mathbb{C}_U$ son prolongement par zéro.

Le théorème suivant décrit le cycle caractéristique du faisceau $\mathcal{F}^\bullet = i_*j_!\mathbb{C}_U$ associé au lieu des zéros de la fonction g par la géométrie de cette hypersurface. La description de cette géométrie sera donnée par des limites aux points singuliers de X d'espaces cotangents aux fibres de g. On rappellera les principales étapes de la démonstration. Celle-ci sera donnée dans un cadre topologique dans le même esprit que Lê-Mebkhout (Voir [25]), c'est à dire que l'on utilisera principalement la théorie de Morse classique et les variétés polaires.

Théorème 3.2.1. *$SS(\mathcal{F}^\bullet) = T_X^*\mathbb{C}^k \cup W_g$, W_g étant défini comme en 2.2.3 par : $W_g = T^*_{g/X} \cap (g^{-1}(0) \times (\mathbb{C}^k)^*)$.*

Remarque 3.2.2. *$W_g = T^*_{g/X} \cap (g^{-1}(0) \times (\mathbb{C}^k)^*)$ est une sous-variété Lagrangienne conique de $T^*\mathbb{C}^k$, donc chaque composante irréductible de W_g est le conormal à sa*

projection sur X et donc s'écrit :

$$W_g = \bigcup_{\alpha} T^*_{X_\alpha}\mathbb{C}^k,$$

où les Z_α sont les composantes irréductibles telles que : $\pi(Z_\alpha) = X_\alpha$ avec π la projection sur le deuxième facteur définie en 2.2.3.

démonstration. Commençons par expliquer comment on peut effectivement ramener le problème au cas d'un point. Avec l'aide de la définition 3.1.3, une strate S_α appartient à $SS(\mathcal{F}^\bullet)$ si et seulement si $S_\alpha \cap N$ appartient à $SS(\mathcal{F}^\bullet_{/N})$. On peut donc simplement étudier le cas d'un point. C'est-à-dire supposer que X est à singularité isolée en un point p. Soit $p \in g^{-1}(0) \cap X$ le point singulier isolé de X, on va montrer que :

$$T^*_p\mathbb{C}^k \in SS(\mathcal{F}^\bullet) \Longleftrightarrow T^*_p\mathbb{C}^k \in W_g.$$

Plus précisément, on est donc amené à montrer qu'en un point $(p, dl) \in T^*_p\mathbb{C}^k$ générique :

$$(p, dl) \in SS(\mathcal{F}^\bullet) \Longleftrightarrow (p, dl) \in W_g.$$

C'est suffisant puisque $SS(\mathcal{F}^\bullet)$ et W_g sont fermés par définition. Le sens générique est donné par les deux lemmes suivants en plus du sens déjà imposé par la définition 3.1.3 :

Lemme 3.2.3. *[27] Soit $X \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ analytique avec $X \backslash g^{-1}(0)$ par hypothèse lisse, soit $\zeta \colon X \to \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (g(x), l(x))$. Si $p \in g^{-1}(0)$ alors il existe un ouvert dense de Zariski Ω_1 de la grassmanienne des hyperplans de $\mathbb{C}^k$ passant par p tel que si $l = 0$ appartient Ω_1, l'ensemble des points critiques Γ de la restriction de ζ à $X \backslash g^{-1}(0)$ est soit vide, soit une courbe lisse (courbe polaire) dans un voisinage de p.*

Lemme 3.2.4. *[16] Il existe un ouvert Ω_2 dense de Zariski de la grassmanienne des hyperplans de $\mathbb{C}^k$ tel que si $l \in \Omega_2$ alors il existe $\epsilon_l > 0$ tel que pour chaque ϵ vérifiant $0 < \epsilon < \epsilon_l$, les strates de $\mathcal{S} \cap \mathring{B}_\epsilon$ de dimension supérieure ou égale à 1 soient transverses à l.*

Utilisons et expliquons maintenant les idées principales de l'article [18] qui donnent une version locale forte des théorèmes de Lefschetz-Zariski s'adaptant à notre problème.

Décrivons d'abord les hypothèses : On a une stratification $\mathcal{S}$ de X telle que :

1) $X \backslash Y$ soit non-singulier de dimension m.
2) Y soit une réunion de strates.
3) $X \backslash Y$ soit une strate.
4) La stratification $\mathcal{S}$ satisfasse la condition de Whitney et la condition de Thom relative à φ (condition a_φ), avec $\varphi = \varphi_{0/X}$ et $\varphi_0(z) = |g(z)|^2$.
5) l est transverse à chaque strate de dimension supérieure ou égale à 1 de la stratification $\mathcal{S}$ de X et on supposera donc dans la suite que $l \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Théorème 3.2.5. *(théorème principal de Hamm-Lê [16] et [18]) Avec les hypothèses précédentes, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout ϵ, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, il existe τ_0 tel que pour chaque $\delta \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < |\delta| < \tau_\epsilon$, la paire d'espaces topologiques :*

$$(B_\epsilon \cap (X \backslash Y), B_\epsilon \cap (X \backslash Y) \cap l^{-1}(\delta))$$

soit $(m-1)$ connexe, où m est la dimension de la strate $X\backslash Y$. Plus précisément, l'espace $B_\epsilon \cap (X\backslash Y)$ est obtenu à partir de l'espace $B_\epsilon \cap (X\backslash Y) \cap l^{-1}(\delta)$ en attachant à ce dernier des cellules de dimension m.

Pour le calcul de l'indice, on pourra se référer à [18] ou bien [35]. Ce théorème est une généralisation de Hamm-Lê [16]. Au lieu de considérer le complément local d'une hypersurface dans un espace lisse, l'article de Hamm-Lê [18] considère le complément d'un sous-ensemble analytique d'un espace analytique complexe réduit avec l'hypothèse 1). Les étapes de la démonstration de ces deux résultats suivent un schéma semblable et seront décrites simplement par un enchainement d'idées avec des énoncés suivis de commentaires.

Pour démontrer le théorème, on utilise la théorie de Morse classique sur les variétés différentiables à bord (voir l'appendice de [16] et [17]). On applique la théorie de Morse précisément sur l'espace :

$$X_{\epsilon,\beta} = B_\epsilon \cap (X\backslash \mathring{T}_\beta(Y))$$

avec

$$\mathring{T}_\beta(Y) = \{z \in X \mid \varphi(z) < \beta\}, \quad \text{pour } \beta \text{ suffisamment petit.}$$

On considère la fonction $Log|l-\delta|$ sur $X_{\epsilon,\beta}\backslash l^{-1}(\delta)$ avec $0 < |\delta| \ll \epsilon$ et $0 < \beta \ll \|\delta|$. Hamm et Lê dans [18] calculent une estimation de l'indice de la restriction de $Log|l-\delta|$ sur $\mathring{B}_\epsilon \cap \partial T_\beta(Y)$ où $\partial T_\beta(Y)$ est le bord du tube fermé $T_\beta(Y)$.

Notation : $V_\alpha(l^{-1}(0)) = \{z \in U\,;\, |l(z)| \leqslant \alpha\}$.

Soit Γ la courbe polaire définie en 3.2.3, c'est à dire l'ensemble des points z de $X \cap \mathring{B}_\epsilon\backslash Y$ où $l^{-1}(l(z)) \cap X$ et $\partial T_{\varphi(z)}$ sont tangents. Grâce à l'hypothèse 5), on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.2.6. $\Gamma \cap Y = \Gamma \cap l^{-1}(0) = \{0\}$.

L'espace $V_\alpha(l^{-1}(0)) \cap (X\backslash Y) \cap B_\epsilon$ est une variété à coins. Par intégration d'un champ de vecteurs adéquat, on obtient :

Lemme 3.2.7. *Pour tout α suffisamment petit, $V_\alpha(l^{-1}(0)) \cap (X\backslash Y) \cap B_\epsilon$ est homéomorphe à $X \cap B_\epsilon\backslash Y$.*

Lemme 3.2.8. *Pour tous δ et β suffisamments petits, la variété $S_\epsilon \cap \partial T(Y)$ est transverse dans S_ϵ à la variété $S_\epsilon \cap (l^{-1}(\delta)\backslash Y)$.*

Ce dernier lemme se démontre grâce à l'hypothèse 5) sur la stratification $\mathcal{S}$ vérifiant la condition de Thom relative à φ.

Lemme 3.2.9. *Pour tout β suffisamment petit, l'espace :*

$$(X\backslash \mathring{T}_\beta(Y)) \cap B_\epsilon \cap V_\alpha(l^{-1}(0))$$

est une variété à coins qui est de plus un retract par déformation de

$$(X\backslash Y) \cap B_\epsilon \cap V_\alpha(l^{-1}(0)).$$

On peut avec les lemmes précédents reformuler le théorème principal, en effet l'inclusion :

$$(X\backslash \mathring{T}_\beta(Y)) \cap B_\epsilon \cap V_\alpha(l^{-1}(0)) \subset (X\backslash Y) \cap B_\epsilon$$

est une équivalence d'homotopie, on obtient alors si on note :

$$M = (X\backslash \mathring{T}_\beta(Y)) \cap B_\epsilon \cap V_\alpha(l^{-1}(0)).$$

Théorème 3.2.10. *La paire* $(M, M \cap l^{-1}(\delta))$ *est* $(m-1)$ *connexe. Plus précisément, l'espace* M *est obtenu à partir de l'espace* $M \cap l^{-1}(\delta)$ *en attachant à ce dernier des cellules de dimension* m.

démonstration. Dans [16] et [18], Hamm et Lê construisent une fonction de Morse θ afin de calculer l'indice de ces points critiques. Il faut donc pour prouver le théorème précédent, démontrer que les indices des points critiques de θ sont égaux à m. La fonction θ est donnée par : $\theta = Log(\sigma \circ (l - \delta))$ sur $M \backslash l^{-1}(\delta)$ où $\sigma \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui rend θ de Morse aux points critiques appartenant à la courbe polaire.

Regardons maintenant sur quel ensemble se trouvent les points critiques. La fonction θ n'a pas de points critiques à l'intérieur de $M \backslash l^{-1}(\delta)$, de même que sa restriction à $S_\epsilon \cap (M \backslash l^{-1}(\delta))$ et sur les coins $\partial T_\beta(Y)) \cap S_\epsilon \cap (M \backslash l^{-1}(\delta))$ n'a pas non plus de points critiques. Les seuls points critiques à considérer sont les points de la restriction de θ à $\partial T_\beta(Y)) \cap (M \backslash l^{-1}(t))$ appartenant à la polaire Γ. Puis, en ne prenant en compte que les points critiques de

$$\partial T_\beta(Y)) \cap S_\epsilon \cap (M \backslash l^{-1}(\delta)) \cap \Gamma$$

où le gradient est rentrant dans la variété M, Hamm et Lê dans [16] et [18] obtiennent par le calcul du Hessien de θ, l'indice du point critique égal à m. □

Reprenons la démonstration du théorème 3.2.1. Par la remarque 3.1.9 et le théorème 3.2.5, on a pour $\delta \ll \epsilon$:

$$(p, dl) \in SS(\mathcal{F}^\bullet) \Longleftrightarrow H^*(B_\epsilon \cap (X \backslash Y), B_\epsilon \cap (X \backslash Y) \cap l^{-1}(\delta), \mathbb{C}_U) \neq 0.$$

En effet, si on choisit $\mathcal{F}^\bullet = i_* j_! \mathbb{C}_U$, on obtient bien que :

$$H^*(B_\epsilon, l^{-1}(\delta) \cap B_\epsilon; \mathcal{F}^\bullet) = H^*(B_\epsilon \cap (X \backslash Y), B_\epsilon \cap (X \backslash Y) \cap l^{-1}(\delta), \mathbb{C}_U).$$

Ceci pour l générique et pour tout $\delta \neq 0$ suffisamment petit. Or, d'après ce qui précède, ce groupe d'homologie relatif est non nul si et seulement si la polaire de l relativement à g est non vide. Donc $(p, dl) \in SS(\mathcal{F}^\bullet) \Longleftrightarrow \Gamma(g, l)$ est non vide au voisinage de p. $\Gamma(g, l)$ est non vide au voisinage de $p \Longleftrightarrow (p, dl) \in W_g$.

□

3.3 L'absence des cycles évanescents et la trivialité topologique

On choisit de prendre les notations suivantes : p est un point du diviseur à l'infini et dt signifie la différentielle de t. Dans le paragraphe 2.2.3, on démontre que la condition non-caractéristique entraine la trivialité de l'application t en dehors du diviseur à l'infini. C'est à dire que l'absence des cycles évanescents pour le faisceau $\mathcal{F}^\bullet = i_* j_! \mathbb{C}_U$ et l'application t donnne cette trivialité. On cherche maintenant à prouver la réciproque par la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Si l'application* t *trivialise localement* $X \backslash Y$ *en un point* p *appartenant au diviseur à l'infini alors* $(p, dt) \notin Char(i_* j_! \mathbb{C}_U)$.

démonstration. Le problème vient du fait que l'application t n'est pas a priori générique et on ne peut donc directement appliquer les définitions du paragraphe 3.2. On va ainsi suivre la preuve générale donnée dans l'article de Parusiński [35]. Donnons pour cela les deux lemmes préparatoires suivants.

Lemme 3.3.2. *Si on suppose que $sing(X) \subset g^{-1}(0)$ où $sing(X)$ est l'ensemble des singularités de X alors $T^*_X\mathbb{C}^k \cap (g^{-1}(0) \times (\mathbb{C}^k)^*) \subseteq W_g$.*

démonstration. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X\backslash g^{-1}(0)$ telle que $p_n \to p \in g^{-1}(0)$. Comme $X\backslash g^{-1}(0)$ est lisse, on peut écrire :

$$\begin{aligned} T^*_{g/X}\mathbb{C}^k &= \overline{\{(x,\xi) \in T^*\mathbb{C}^k \mid x \in X\backslash g^{-1}(0),\, \xi(ker\, d_x(g_{/X})) = 0\}} \\ &= \overline{\{(x,\xi) \in T^*\mathbb{C}^k \mid x \in X,\, \xi(T_xX \cap ker\, d_xg) = 0\}}, \end{aligned}$$

et on a alors $(T^*_X\mathbb{C}^k)_{p_n} \subset (T^*_{g/X}\mathbb{C}^k)_{p_n}$, car si $(p_n,\xi) \in (T^*_X\mathbb{C}^k)_{p_n}$ alors $\xi(T_{p_n}X) = 0$ et donc aussi $\xi(T_{p_n}X \cap ker\, d_{p_n}g) = 0$. En passant à la limite, on obtient le résultat voulu. □

Lemme 3.3.3. *(voir [35]) $(p, dt) \notin Char(i_*\mathbb{C}_X)$ si et seulement si $(p, dt) \notin W_g$.*

démonstration. On a la formule additive suivante au niveau des cycles caractéristiques :

$$Char(i_*\mathbb{C}_X) = Char(i_*j_!\mathbb{C}_U) + Char(\mathbb{C}_Y).$$

Il a été démontré au théorème 3.2.1 que :

$$Char(i_*j_!\mathbb{C}_U) = T^*_X\mathbb{C}^k \cup W_g.$$

Et le lemme 3.3.2 prouve l'inclusion : $T^*_X\mathbb{C}^k \subset W_g$. On obtient donc que :

$$Char(i_*j_!\mathbb{C}_U) = W_g.$$

De plus, on sait que Y est un produit le long de l'axe t donc $(p, dt) \notin Char(\mathbb{C}_Y)$. En conclusion :

$$(p, dt) \notin Char(i_*\mathbb{C}_X) \quad \text{si et seulement si} \quad (p, dt) \notin Char(i_*j_!\mathbb{C}_U) = W_g.$$

□

On donne à présent la proposition suivante, en explicitant d'abord ce que l'on entend par support d'un faisceau :

Définition 3.3.4. *Le support du faisceau $\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_*\mathbb{C}_X)$ que l'on note :*

$$\mathrm{supp}(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_*\mathbb{C}_X))$$

est l'ensemble fermé des points p où $(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_*\mathbb{C}_X))_p \neq 0$.

Proposition 3.3.5. *(voir [22] chap.8, [30] ou bien [35]) On suppose que $\bar{t}(p) = t_0$. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) $(p, dt) \notin SS(i_*\mathbb{C}_X)$.

ii) $p \notin \mathrm{supp}(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_*\mathbb{C}_X))$.

Remarque 3.3.6. *Comme le remarque Parusiński dans l'article [35], on obtient la même proposition en remplaçant le faisceau $i_*\mathbb{C}_X$ par tout faisceau pervers $\mathcal{F}$. Par exemple la proposition reste valable si on prend $\mathcal{F} = i_*j_!\mathbb{C}_U$. En effet, $\mathcal{F} = i_*j_!\mathbb{C}_U$ est pervers car le faisceau constant sur U, $\mathbb{C}_U$, est pervers (voir [2]). Et le faisceau constant $\mathbb{C}_U$ est pervers car U est un espace lisse de dimension pure $n-1$.*

A l'aide de cette proposition, on peut à présent finir la démonstration de la proposition 3.3.1.

Fin de démonstration. On donne les deux méthodes suivantes :

1re méthode : Si on suppose que l'application t trivialise $X\backslash Y$ en un point $p \in Y$ (c'est-à-dire que t est une fibration topologiquement triviale dans un voisinage de p) alors on obtient par définition de $\Phi_t\mathcal{F}^\bullet$ et pour $\delta \ll \epsilon$ suffisamments petits :

$$\begin{aligned}\chi(\Phi_t\mathcal{F}^\bullet)_p &= \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap t^{-1}(\delta); \mathcal{F}^\bullet))_p - \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap t^{-1}(0); \mathcal{F}^\bullet))_p = 0 \\ &= \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap \bar{t}^{-1}(\delta); i_*\mathbb{C}_X))_p - \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap \bar{t}^{-1}(0); i_*\mathbb{C}_X))_p,\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}^\bullet = i_*j_!\mathbb{C}_U$. En effet, Y ne dépend pas de t, il n'y a donc pas de variation de la caractéristique d'Euler sur les fibres de l'application $\bar{t}$ restreinte à Y. On déduit ensuite de ce qui précéde que :

$$\chi(\Phi_{\bar{t}}(i_*\mathbb{C}_X))_p = \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap \bar{t}^{-1}(\delta); i_*\mathbb{C}_X))_p - \chi(\mathbb{H}(B_\epsilon \cap \bar{t}^{-1}(0); i_*\mathbb{C}_X))_p = 0.$$

Donc $p \notin \mathrm{supp}(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_*\mathbb{C}_X))$ (ici on a choisi arbitrairement $t_0 = 0$). Grâce à la proposition 3.3.5, on a que : $(p, dt) \notin Char(i_*\mathbb{C}_X)$ et donc d'après le lemme 3.3.3, $(p, dt) \notin W_g$, c'est à dire (p, dt) est non-caractéristique. □

D'après la formule de l'indice d'intersection, on obtient :

$$(Char(i_*\mathbb{C}_X).\{dt\})_{(p,dt)} = (-1)^{(s-1)}\chi(\Phi_{\bar{t}}(i_*\mathbb{C}_X))_p,$$

où $\{dt\}$ représente le cycle algébrique : $\{dt\} = \{(p, dt) \,|\, p \in \mathbb{C}^l\} \subset T^*\mathbb{C}^l$.

2e méthode : Si on suppose que l'application t trivialise $X\backslash Y$ en un point $p \in Y$ (c'est-à-dire que t est une fibration topologiquement triviale dans un voisinage B_ϵ de p) alors on obtient que : $B_\epsilon \cap X\backslash Y \cap t^{-1}(\delta)$ est topologiquement isomorphe à $B_\epsilon \cap X\backslash Y \cap t^{-1}(0)$. On peut aussi exprimer ce résultat de manière plus abstraite par : le morphisme canonique entre $\mathbb{C}_U$ restreint à $t^{-1}(0)$ et $R\Psi_t(\mathbb{C}_U)$ est un quasi-isomorphisme. Rappelons que la cohomologie de $R\Psi_t(\mathbb{C}_U)$ en un point p de $t^{-1}(0)$ est la cohomologie de la fibre de Milnor locale en p de la restriction de t à $U = X\backslash Y$. Par définition de $\Phi_t(j_!\mathbb{C}_U)$, on a donc que la fibre au-dessus de p de ce complexe de faisceaux d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}_U$ s'annule. C'est à dire que :

$$(\Phi_t(j_!\mathbb{C}_U))_p = 0.$$

Autrement dit :

$$p \notin \mathrm{supp}(\Phi_t(j_!\mathbb{C}_U)).$$

Et donc par la proposition 3.3.5 appliquée au faisceau $\mathcal{F} = i_*j_!\mathbb{C}_U$, on obtient que :

$$(p, dt) \notin SS(i_*j_!\mathbb{C}_U).$$

Et par le théorème 3.2.1 et le lemme 3.3.2, on en déduit que t n'est pas caractéristique. On peut dire aussi que $\bar{t}$ ne crée pas de cycles évanescents sur $i_* j_! \mathbb{C}_U$. Rappelons que :

$$(\Phi_{\bar{t}}^{k}(i_* j_! \mathbb{C}_U))_p \simeq H^k(B_\epsilon \cap X \backslash Y, B_\epsilon \cap X \backslash Y \cap t^{-1}(\delta); \mathbb{C}).$$

De même,

$$(\Psi_{\bar{t}}^{k}(i_* j_! \mathbb{C}_U))_p \simeq H^k(B_\epsilon \cap X \backslash Y \cap t^{-1}(\delta); \mathbb{C}).$$

$\square$

Chapitre 4

Généralisation des résultats dans le cas d'un polyèdre

Le but dans ce paragraphe est de donner une généralisation des résultats 2.1.5 et 2.2.1. Pour cela on utilise à la place d'une compactification torique projective par poids de l'espace affine $\mathbb{C}^n$, une compactification torique associée à un polyèdre. Ce polyèdre n'est pas tout à fait quelconque, on impose aux vecteurs orthogonaux aux faces F, $\tilde{w}^F$, d'appartenir au quadrant négatifs $\mathbb{Z}^n_-$. Ce chapitre est possible grâce aux fonctions compensatrices ρ_i construites par O.M.Abderrahmane dans [1] pour le cas polyédral quelconque. Ces fonctions généralisent les fonctions coordonnées du cas homogène par poids de Paunescu dans [37]. Elles sont construites pour compenser une dérivation afin de rendre stable le polyèdre par l'opérateur $\rho_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.

4.1 la fonction de contrôle et les fonctions compensatrices associées

Commençons par rappeler quelques notations. Soit $E = \{a^j\}$ un ensemble fini de points de l'espace $\mathbb{Z}^n_+$.

$$\Gamma_-(E) = \text{enveloppe convexe dans } \mathbb{R}^n \text{ de l'ensemble } \{a^j + \mathbb{R}^n_-\}$$

et $\Gamma_- = \Gamma_-(E) \cap \mathbb{R}^n_+$. Notons Γ^*_- l'ensemble des sommets de $\Gamma_- \backslash \{0\}$, avec :

$$\Gamma^*_- = \{a^j \mid a^j \neq 0,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Si p est un nombre réel positif, on note : $p^j_i = pa^j_i$ et $p^j = pa^j$ où a^j_i pour $i = 1, \dots, n$ sont les coordonnées du point $a^j \in \Gamma^*_-$. On introduit alors comme dans [1] la fonction de contrôle relative au polyèdre Γ^*_-, de la manière suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\rho(z) = \Big(\sum_{j=1}^{m} |z|^{2p^j}\Big)^{\frac{1}{2p}} = \Big(\sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} |z_i|^{2p^j_i}\Big)^{\frac{1}{2p}}$$

C'est-à-dire que les monômes $|z|^{2p^j}$ correspondent aux sommets a^j de Γ^*_-.

Rappelons maintenant la définition des fonctions compensatrices associées à ρ. On suppose que $a^1, \dots, a^n$ sont les sommets appartenants respectivement aux axes

$z_1, \dots, z_n$. Soit F une face de dimension $n-1$ du polyèdre Γ_- et soit w^F l'unique vecteur de $\mathbb{Q}^n_-$ tel que pour tout $x \in F$, $\langle x, w^F \rangle = -1$. On définit alors $\alpha(i)$ par :

$$\alpha(i) = \inf_{F \in \mathbf{F}} \{|w_i^F|\} = |\max_{F \in \mathbf{F}} \{w_i^F\}|.$$

On introduit alors les fonctions compensatrices de la même manière que O.M. Abderrahmane dans [1], c'est à dire comme suit :

$$\rho_i(z) = \Big(|z_i|^{\frac{2p}{\alpha(i)}} + \sum_{k \neq i} |z_k|^{2pa_k^k} \Big)^{\frac{\alpha(i)}{2p}} \sim |z_i| + \sum_{k \neq i} |z_k|^{\alpha(i) a_k^k} \tag{4.1}$$

pour $i = 1, \dots, n$. Les ρ_i sont construites pour être des formes de degré $\alpha(i)$ avec le système de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$ où $w_k = \frac{1}{a_k^k}$ pour $k \neq i$ et $w_i = \alpha(i)$. On choisira dans notre cas la deuxième expression de (4.1), car $\alpha(i)$ peut éventuellement être nul.

Aux fonctions compensatrices ρ_i, on associe comme dans (1.3), une métrique hermitienne relative au polyèdre :

$$\langle \rho_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \rho_j \frac{\partial}{\partial z_j} \rangle_\Gamma = \delta_{ij}, \tag{4.2}$$

ainsi qu'un champ de vecteurs identique à celui défini dans le paragraphe 1.2.

4.2 La stabilité du polyèdre

Voici deux lemmes qui nous seront utiles simultanément pour la démonstration des deux théorèmes généralisés des deux paragraphes suivants. Dans le premier lemme, on étudie la stabilité du polyèdre Γ_- par les opérateurs $\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}$.

Lemme 4.2.1. *Pour tout $\alpha \in \Gamma_- \cap \mathbb{Q}^n_+$ et pour tout $j = 1, \dots, n$, l'expression :*

$$\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$$

est constituée de monôme dont la puissance appartient à $\Gamma_- \cap \mathbb{Q}^n_+$.

démonstration. Il faut donc vérifier que pour tout α tel que :

$$\langle \alpha, e_i \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \langle \alpha, -w^F \rangle \leqslant 1$$

alors $\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$ soit constitué de monôme z^β tel que :

$$\langle \beta, e_i \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \langle \beta, -w^F \rangle \leqslant 1. \tag{4.3}$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha) &= \alpha_j z_1^{\alpha_1} \cdots z_j^{\alpha_j - 1} \cdots z_n^{\alpha_n} \Big(z_j + \sum_{k \neq j} z_k^{\alpha(j) a_k^k} \Big) \\ &= \alpha_j z^\alpha + \alpha_j \sum_{k \neq j} z_1^{\alpha_1} \cdots z_j^{\alpha_j - 1} \cdots z_k^{\alpha(j) a_k^k + \alpha_k} \cdots z_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les monômes de la somme remplissent les conditions de (4.3). On note $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha(j)a_k^k, \dots, \alpha_n)$ le vecteur puissance. On a bien que $\langle \beta, e_i \rangle = \alpha_i \geqslant 0$ si $i \neq j$ et $i \neq k$. De plus, $\langle \beta, e_k \rangle = \alpha(j)a_k^k \geqslant 0$ par définition et $\langle \beta, e_j \rangle = \alpha_j - 1 \geqslant 0$ car $\alpha_j \geqslant 1$ sinon $\frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$ serait nulle.

Il reste à prouver que pour toute face F : $\langle \beta, -w^F \rangle \leqslant 1$. Un calcul donne :

$$\begin{aligned} \langle \beta, -w^F \rangle &= -[\alpha_1 w_1^F + \cdots + \alpha_j w_j^F - w_j^F + \cdots + \alpha_k w_k^F + \alpha(j)a_k^k w_k^F + \cdots + \alpha_n w_n^F] \\ &= \langle \alpha, -w^F \rangle + w_j^F - \alpha(j)a_k^k w_k^F \end{aligned}$$

Soit à prouver que pour toute face F :

$$|w_j^F| \geqslant \alpha(j)a_k^k |w_k^F|. \tag{4.4}$$

Soit $x \in F$, par convexité de Γ_-, on a $\langle a^k - x, -w^F \rangle \leqslant 0$ et donc :

$$a_k^k |w_k^F| = \langle a^k, -w^F \rangle \leqslant \langle x, -w^F \rangle = 1.$$

On en déduit que :

$$a_k^k |w_k^F| \leqslant 1 \leqslant \frac{|w_j^F|}{\alpha(j)},$$

par définition de $\alpha(j)$ si celui-ci est non-nul. Si $\alpha(j)$ est nul, l'inégalité (4.4) est évidente. □

Le corollaire suivant nous permet de prouver, en se ramenant à l'origine, que $\sigma^\vee$ possède la même propriété de stabilité par les opérateurs que Γ_-. Pour cela, donnons la définition suivante qui précise la notion de stabilité :

Définition 4.2.2. *Soit S un ensemble convexe de $\mathbb{Z}_-^n$, on dit que S est stable si pour tout $\alpha \in S \cap \mathbb{Q}_+^n$ et pour tout $j = 1, \dots, n$, l'expression :*

$$\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$$

est constituée de monômes dont la puissance appartient à $S \cap \mathbb{Q}_+^n$.

Corollaire 4.2.3. *$\sigma^\vee$ est stable.*

démonstration. Soit $\mathbf{s}$ le vecteur sommet du polyèdre Γ_- qui correspond à $\sigma^\vee$. Si σ s'écrit comme dans le cas 2) et 3) du paragraphe 1.5.2, c'est-à-dire si σ est du type $\{\tilde{w}^{F_{k+1}}, \dots, \tilde{w}^{F_n}, e_1, \dots, e_k\}$, on a alors :

$$\langle \mathbf{s}, e_i \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{s}, -w^F \rangle = 1.$$

Posons $\alpha = \mathbf{s} + \alpha'$, où $\alpha' \in \sigma^\vee$. On a donc pour tout α' :

$$\langle \alpha, e_i \rangle = \langle \mathbf{s} + \alpha', e_i \rangle = \langle \alpha', e_i \rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots k,$$

et

$$\langle \alpha, -w^F \rangle = \langle \mathbf{s} + \alpha', -w^F \rangle = 1 + \langle \alpha', -w^F \rangle \geqslant 1,$$

pour toute face F telle que $w^F \in \{w^{F_{k+1}}, \dots, w^{F_n}\}$. En conclusion, si α appartient à Γ_- alors α' appartient à $\sigma^\vee$.

On peut à présent affirmer que pour tout α vérifiant la propriété de stabilité relative à Γ_- du lemme 4.2.1 alors $\alpha' = \alpha - \mathbf{s}$ vérifie la même propriété de stabilité relative à $\sigma^\vee$. En effet, si l'on dérive par exemple par rapport à j, on obtient que la j-ième puissance du monôme dérivé z^α s'écrit :

$$\alpha'_j - 1 = (\alpha_j - 1) - \mathbf{s_j}$$

ainsi que :

$$\beta'_j - 1 = (\beta_j - 1) - \mathbf{s_j}$$

en supposant toujours que $\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$ soit constitué de monôme z^β.

□

On peut supposer maintenant que le sommet du polyèdre Γ_- se situe à l'origine du repère, c'est à dire étudier les propriétés de stabilité de $\sigma^\vee$ au travers d'une filtration. Dans le lemme suivant, on étudie les conditions pour que le polyèdre reste stable par les mêmes opérateurs après une translation afin de généraliser le lemme précédent. Pour énoncer ce lemme, on se place dans le cas 2) et 3) du paragraphe 1.5.2.

Lemme 4.2.4. *Soit l'ensemble convexe translaté de* $\mathbf{v}$ *:* $\sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n_+ + \mathbf{v}$*. Alors les deux cas suivants se présentent :*

1) si $\mathbf{v}$ *appartient au plan engendré par* $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ *alors* $\sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n_+ + \mathbf{v}$ *est stable.*

2) sinon, si $\mathbf{v}$ *n'appartient pas à ce plan alors* $\sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n_+ + \mathbf{v}$ *n'est pas stable. Mais pour tout* $\alpha \in \sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n_+ + \mathbf{v}$ *et pour tout* $j = 1, \dots, n$*, l'expression :*

$$\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$$

est constituée de monômes dont la puissance appartient à $\sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n_+$*.*

démonstration. Posons $\alpha = \alpha' + \mathbf{v}$ avec $\alpha \in \sigma^\vee \cap \mathbb{Q}^n_+ + \mathbf{v}$, ce qui implique que $\alpha' \in \sigma^\vee$ car on suppose que $\mathbf{v} \in \sigma^\vee$. Considérons à présent les deux cas.

1) Pour le premier cas la démonstration est identique à celle du lemme précédent. La seule différence est que le degré de filtration n'est pas identique. Redonnons cette démonstration en détail. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur appartenant au plan engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Si σ s'écrit comme dans le cas 2) et 3) du paragraphe 1.5.2, c'est-à-dire si σ est du type $\{\tilde{w}^{F_{k+1}}, \dots, \tilde{w}^{F_n}, e_1, \dots, e_k\}$, on a alors :

$$\langle \mathbf{v}, e_i \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{v}, -w^F \rangle \text{ représentant le degré de la filtration.}$$

Comme $\alpha = \mathbf{v} + \alpha'$, où α' appartient à $\sigma^\vee$. On a donc pour tout α' :

$$\langle \alpha, e_i \rangle = \langle \mathbf{v} + \alpha', e_i \rangle = \langle \alpha', e_i \rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, k,$$

et

$$\langle \alpha, -w^F \rangle = \langle \mathbf{v} + \alpha', -w^F \rangle = \langle \mathbf{v}, -w^F \rangle + \langle \alpha', -w^F \rangle \geqslant \langle \mathbf{v}, -w^F \rangle,$$

et donc

$$\langle \alpha - \mathbf{v}, -w^F \rangle \geqslant 0,$$

pour tout face F telle que $w^F \in \{w^{F_{k+1}}, \dots, w^{F_n}\}$. En conclusion, si α appartient à $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ alors α' appartient à $\sigma^\vee$ et réciproquement.

On peut à présent affirmer que pour tout α' vérifiant la propriété de stabilité relative à $\sigma^\vee$ alors $\alpha = \alpha' + \mathbf{v}$ vérifie la propriété de stabilité relative à $\sigma^\vee + \mathbf{v}$. En effet, si l'on dérive par exemple par rapport à j, on obtient que la j-ième puissance du monôme dérivé z^α s'écrit :

$$\alpha'_j - 1 = (\alpha_j - 1) - \mathbf{v_j}$$

ainsi que :

$$\beta'_j - 1 = (\beta_j - 1) - \mathbf{v_j}$$

en supposant toujours que $\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$ soit constitué de monômes z^β.

2) Si $\mathbf{v}$ possède un monôme où il existe un élément $z_j^{v_j}$ pour un indice $j = 1, \dots, k$ où $v_j \neq 0$ alors $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ n'est pas stable. En effet, si on prend le sommet de l'ensemble convexe $\sigma^\vee + \mathbf{v}$, c'est à dire $\mathbf{v}$, alors $\langle e_j, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v_j} > 0$ pour un indice $j = 1, \dots, k$. Et après application de l'opérateur correspondant $\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ à $z^\mathbf{v}$ on obtient des monômes z^β qui vérifie $\langle e_j, z^\beta \rangle < \mathbf{v_j}$. Donnons quelques explications :

$$\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\mathbf{v}) = \Big(|z_i| + \sum_{k \neq i} |z_k|^{\alpha(i) a_k^k} \Big) \Big(z_1^{\mathbf{v_1}} \cdots z_j^{\mathbf{v_j} - 1} \cdots z_n^{\mathbf{v_n}} \Big).$$

En développant le terme droit de l'équalité, on obtient un premier monôme $|z_j|$ qui ne pose pas de problème, mais pour les autres monômes de la forme z^β, on obtient que $\langle \beta, e_j \rangle = \mathbf{v_j} - 1 < \mathbf{v_j}$ et donc $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ n'est pas stable.

Mais on obtient après l'application des opérateurs $\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$ que les puissances demeurent dans $\sigma^\vee$, car ce dernier est stable.

□

4.3 Le cas global

On va donner dans ce paragraphe la généralisation du théorème 2.1.5.

Théorème 4.3.1. *Si la condition de la définition 2.1.3 relative au polyèdre :*

$$||\mathrm{grad}_\Gamma f(z)||_\Gamma \gtrsim 1$$

est vérifiée alors le polynôme f est globalement trivial au-dessus d'un voisinage de t_0.

Le produit scalaire est défini comme dans le cas homogène par poids, c'est-à-dire à l'aide des fonctions compensatrices, par : $\langle \rho_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \rho_j \frac{\partial}{\partial z_j} \rangle = \delta_{i,j}$.

démonstration. La démonstration est analogue au cas projectif. D'après celle-ci, il suffit de démontrer que :

Lemme 4.3.2. $|\rho_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i}| \lesssim |\rho|$ *pour tout* i *et pour* $\|z\|$ *grand.*

démonstration. On va faire la démonstration sur le même principe que O.M. Abderrahmane dans [1].

On peut élever $\rho_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i}$ et ρ à une même puissance entière q afin d'obtenir des expressions équivalentes à un polynôme ayant pour variable $|z_i|^2$. Notons alors $(\rho_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i})^q \sim P(|z_1|^2, \dots, |z_i|^2, \dots, |z_n|^2)$ et $\rho^q \sim Q(|z_1|^2, \dots, |z_i|^2, \dots, |z_n|^2)$. L'ensemble $\mathcal{S}$ donné par $P(|z_1|^2, \dots, |z_i|^2, \dots, |z_n|^2) \lesssim Q(|z_1|^2, \dots, |z_i|^2, \dots, |z_n|^2)$ est alors un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{2n}$. En utilisant la version 1.1.2 du lemme des petits chemins, il suffit de vérifier l'inégalité entre les deux polynômes le long de toutes courbes analytiques réelles appartenant à l'ensemble $\mathcal{S}$. Soit $c\colon]0, \beta[\to \mathbb{R}^{2n} \cap \mathcal{S}$ une telle courbe. On peut écrire que $|z_i|^2 = a_i t^{\alpha_i} + \cdots$ avec $a_i \neq 0$ pour tout i. Il suffira ensuite de regarder les valuations respectives en t des deux polyômes :

$$P(a_1 t^{\alpha_1} + \cdots, \dots, a_i t^{\alpha_i} + \cdots, \dots, a_n t^{\alpha_n} + \cdots)$$

et

$$Q(a_1 t^{\alpha_1} + \cdots, \dots, a_i t^{\alpha_i} + \cdots, \dots, a_n t^{\alpha_n} + \cdots).$$

Le polyèdre de ρ^q s'obtient à partir du polyèdre de ρ, Γ_-, par une homothétie ayant pour centre l'origine.

Or, si $Q(z) = \sum_\gamma c_\gamma (|z_i|^2)^\gamma$ alors sa valuation le long de $c(t)$ est égale à :

$$Val_t Q(c(t)) = \min_\gamma \langle \alpha, \gamma \rangle = \min_{\gamma \in \Gamma_-} \langle \alpha, \gamma \rangle$$

Or d'après le lemme 4.2.1, le polyèdre de P est inclu dans celui de Q. On obtient donc le résultat voulu, c'est à dire :

$$Val_t Q(c(t)) \leqslant Val_t P(c(t)).$$

□

Pour le reste de la démonstration, il suffit de remplacer la métrique par poids par la métrique associée au polyèdre. □

4.4 Le cas local

On va donner dans ce paragraphe la généralisation du théorème 2.2.1. La démonstration se fait sur le même principe en utilisant essentiellement le lemme 4.2.4.

Théorème 4.4.1. *Si* f *vérifie la condition affine* $||\mathrm{grad}_\Gamma f(z)||_\Gamma \gtrsim 1$ *alors pour tout cône* σ *de la variété torique associée* $T(\Delta_\Gamma)$*, deux cas se présentent comme dans le paragraphe 1.5 :*

1) *dans le cas où l'équation du diviseur dans le cône* σ *n'est donnée que par une seule variable, le résultat est identique à celui de la proposition 2.2.1.*
2) *dans l'autre cas, si* $g = u_{k+1} \times \cdots \times u_n = 0$ *est l'équation du diviseur, on a au voisinage d'un point de ce diviseur les propriétés suivantes :*
   i) $|\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim |u_i|$ *pour* $i = k+1, \dots, n$.

ii) $|\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim 1$ *pour toutes les autres coordonnées toriques qui ne font pas partie du plan engendré par* $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

iii) $\frac{\partial t}{\partial \mathbf{V}} = 1$.

On en déduit que :

$$|\frac{\partial g}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim |g|,$$

$\mathbf{V}$ *étant le champ de vecteurs analytique réel tangent à* X *associé à la métrique donnée en* (4.2).

démonstration. On suppose dans cette démonstration que le sommet de l'ensemble convexe considéré se situe à l'origine du repère. Soit $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ une translation de $\sigma^\vee$ d'un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n_-$.

Soit $\sigma \in T(\Delta_\Gamma)$ et u_i une variable torique associée à un générateur a_i du semi-groupe S_σ, c'est-à-dire $u_i = z^{a_i}$. On choisit alors $\mathbf{v} = a_i$. Par différentiation, on obtient comme dans (2.9) :

$$|\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| = |\sum_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial \mathbf{V}}| \leqslant \sum_j |\frac{\partial u_i}{\partial z_j}|\rho_j = \sum_j |\frac{\partial}{\partial z_j}(z^{a_i})|\rho_j.$$

On a alors deux cas comme dans le lemme 4.2.4 :

1) On a la propriété suivante qui est une conséquence directe du lemme 4.2.4 : Pour tout $\alpha \in \sigma^\vee + \mathbf{v}$ et pour tout $j = 1, \dots, n$, l'expression :

$$\rho_j \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha)$$

est constituée de monômes dont la puissance appartient à $\sigma^\vee + \mathbf{v}$. On obtient donc, comme cas particulier où α est le sommet du l'ensemble convexe, $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ le résultat :

$$|\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}| \lesssim |u_i|.$$

2) Dans l'autre cas, si la coordonnée torique $u_i = z^{a_i}$ n'appartient pas au plan engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ alors toujours d'après le lemme 4.2.4, $\sigma^\vee + \mathbf{a_i}$ n'est pas stable mais les monômes obtenus dans l'expression :

$$\frac{\partial u_i}{\partial z_j}\rho_j = \sum_j |\frac{\partial}{\partial z_j}(z^{a_i})|\rho_j,$$

sont des puissances rationnelles des coordonnées toriques u_i. On obtient donc que $\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}$ est bornée.

□

Conclusion

Donnons pour conclure quelques remarques sur les résultats obtenus. Elles expriment des questions naturelles qui se posent dans la continuité de cette thèse.

1) Il est raisonnable de penser que l'on aurait pu écrire exactement les mêmes théorèmes dans une version locale. En considérant une famille de germes analytiques du type $F(z,t) = f(z) + tg(z)$ et en prenant comme hypothèse la version locale de la condition sur le gradient de Kuo-Paunescu-Abderrahmane, on aurait ainsi obtenu la même condition non-caractéristique par rapport au diviseur exceptionnel, après un éclatement torique.

2) Les résultats montrent que dans le cas d'une compactification non-projective, la condition non-caractéristique est une condition de trivialisation meilleure pour un polynôme que la condition de modération sur le gradient de Paunescu-Abderrahmane. En effet, ces deux conditions entrainent la trivialité affine et la condition sur le gradient implique la condition non-caractéristique. Dans le cas projectif, il y a équivalence entre ces deux conditions comme l'a démontré A. Parusiński. Mais dans le cas homogène par poids ou dans le cas d'une compactification quelconque, il ne semble pas y avoir d'équivalence entre ces deux conditions. Si on suppose que la première remarque est correcte, l'amélioration décrite précédemment reste valable dans le cadre de cette première remarque.

Bibliographie

[1] O. M. Abderrahmane, *Polyèdre de Newton et trivialité en famille,* Mathematical Society of Japan, J.Math.Soc.Japan Vol.54, No.2 (2002).

[2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers 1, Faisceaux pervers p.106* Astérisque 100.

[3] K. Bekka, *C-regularité et trivialité topologique*, Singularity Theory and its Applications, eds. D. Mond, J. Montaldi, Warwick 1989 ; Lect. Notes in Math **1462** (1991), 42-62.

[4] J. Briançon, P. Maisonobe, et M. Merle, *Localisation de systèmes différentiels, stratification de Whitney et condition de Thom,* Inventiones math. **117**, 531-550 (1994).

[5] S. A. Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 40 (1983), Part 1.

[6] S. A. Broughton, *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces,* Inventiones Math. **92**, 217-241, 1988.

[7] J. Damon, *Finite Determinacy and Topological Triviality I*, Inventiones math. **62**, 299-324 (1980).

[8] P. Deligne, N. Katz, *Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique,* S.G.A 7, volume 340 of Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1973.

[9] A. Dimca, *Singularities and Topology of hypersurfaces,* Universitext, Springer-Verlag, New-York, 1992.

[10] A. H. Durfee, *Five Definitions of Critical Point at Infinity,* Progress in Mathematics, Vol. 162, (1998) Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland.

[11] M. V. Fedoryuk, *The asymptotics of the Fourier transform of the exponential function of a polynomial,* Dokl. Akad. Nauk. 227 (1976), 580-583 (Russian) ; English transl. in Soviet Math. Dokl. (2) 17 (1976), 486-490.

[12] W. Fulton, *Introduction to Toric Variety*, Princeton University Press.

[13] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[14] H. V. Hà, *On the Irregularity at Infinity of Algebraic Plane Curves,* University of Hanoi preprint 91/4, 1991.

[15] H. V. Hà, D. T. Lê, *Sur la topologie des polynômes complexes,* Acta Math. Vietnamica 9 (1984), 21-32.

[16] H. A. Hamm et D. T. Lê, *Un théorème de Zariski du type de Lefschetz,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 317-366.

[17] H. A. Hamm et D. T. Lê, *Lefschetz theorems on quasi-projective varieties,* Bull. Soc. math. France, **113**, 1985, p. 123-142.

[18] H. A. Hamm and D. T. Lê, *Local generalizations of Lefschetz-Zariski theorems,* J.reine angew. Math. **389** (1988), 157-189.

[19] H. A. Hamm, *La cohomologie des fibres d'une application polynomiale,* prépublication.

[20] H. Hironaka, *Subanalytic sets, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra,* in honor of Y.Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 453-493.

[21] H. Hironaka, *Stratification and Flatness,* Nordic Summer School/NAVF Symposium in Mathematics Oslo, August 5-25, 1976.

[22] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grund. math. Wiss. 292, Springer-Verlag, 1990.

[23] T. -C. Kuo, *On C^0-sufficiency of jets of potential functions,* Topology **8** (1969), 167–171.

[24] T. -C. Kuo, A. Parusinski, *Newton polygon relative to an arc,* Real and complex singularities (São Carlos, 1998), 76-93 Chapman and Hall/CRC Res. Notes Math, 412, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

[25] D. T. Lê et Z. Mebkhout, *Variétés caractéristiques et variétés polaires,* Géométrie Analytique, Note au C.R.Acad.Sc.Paris, t.**296** (17 janvier 1983) Série I-129.

[26] D. T. Lê and Z. Mebkhout, *Introduction to Linear Differential Systems,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 40 (1983), Part 2.

[27] Lê Dũng Tráng, *Some remarks on relative monodromy,* Nordic Summer School/NAVF Symposium in Mathematics Oslo, August 5-25, 1976.

[28] D. Massey, *Lê Cycles and Hypersurfaces Singularities,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1615, Springer-Verlag, 1995.

[29] D. Massey, *Numerical Control over Complex Analytic Singularities*, manuscrit sur www.massey.math.neu.edu.

[30] D. Massey, *Critical points of functions on singular spaces*, Topology and its Applications 103 (2000) 55-93.

[31] B. Malgrange, *Méthodes de la Phase Stationnaire et Sommation de Borel,* in Complex Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory. (Lect. Notes Phys., vol. 126) Berlin Heidelberg New York : Springer 1980, pp. 170-177.

[32] J. Milnor, *Singular points of Complex Hypersurfaces,* Ann. of Math. Studies **61**, Princeton Univ. Press 1968.

[33] A. Némethi and A. Zaharia, *Milnor fibration at infinity,* Indag. Mathem., N.S.,**3**(3), 323-335 Sept 21, 1992.

[34] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity* Compositio Mathematica **97** (1995), 369-384.

[35] A. Parusiński, *A note on singularities at infinity of complex polynomials* Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields, Banach Center Publications, Volume 39, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa 1997.

[36] A. Parusiński, P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles,* J. Algebraic Geom. 10(2001), no.1, 63-79.

[37] L. Paunescu, *A weighted version of the Kuiper-Kuo-Bochnak-Łojasiewicz theorem,* J.Algebraic Geometry.**2** (1993) 69-79.

[38] F. Pham, *Vanishing Homologies and the n-Variable Saddlepoint Method.,* Proceedings of the Symposia in Pure and Applied math., Vol. 40, Part 2, Am. Math. Soc. 1983, pp. 319-334.

[39] F. Pham, *La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin,* in Systèmes différentiels et singularités, Juin-Juillet (1983), 11-47.

[40] C. Sabbah, *Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux*, Astérisque 130 (1985), 161-192.

[41] D. Siersma, M. Tibar, *Singularities at infinity and their vanishing cycles*, Duke Math. J. 80, 771-783 (1995).

[42] B. Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, Nordic Summer School, Symposium in Mathematics, Oslo, August 5-25, 1976.

[43] B. Teissier, *A bouquet of bouquets for a birthday*, Topological Methods in Modern Mathematics.

[44] M. Tibar, *Topology at infinity of polynomial mappings and Thom regularity condition*, Compositio Mathematica **111** (1998), no.1, 89-109.

[45] A. Du Plessis and T. Wall, *The Geometry of Topological Stability,* London Mathematical Society Monographs, New Series **9**, Oxford Science Publications.

[46] J. L. Verdier, *Stratification de Whitney et théorème de Bertini-Sard,* Invent.Math. **36** (1976), 295-312.