



HAL
open science

**Modélisation des écoulements gravitaires
catastrophiques par une approche objet dynamique :
Erosion - Transport - Depot**

Alexandre Hugot

► **To cite this version:**

Alexandre Hugot. Modélisation des écoulements gravitaires catastrophiques par une approche objet dynamique : Erosion - Transport - Depot. Modélisation et simulation. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT : . tel-00002677

HAL Id: tel-00002677

<https://theses.hal.science/tel-00002677>

Submitted on 3 Apr 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée à
l'Institut Français du Pétrole
pour l'obtention du
Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie

par

Alexandre Hugot

Modélisation des écoulements gravitaires catastrophiques par une approche objet dynamique : Érosion – Transport – Dépôt

Soutenue publiquement le 2 Février 2000 devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	G. de Marsily	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
<i>Rapporteurs :</i>	P. Allemand	Professeur à l'Université Claude Bernard (Lyon 1)
	M. Naaim	Chargé de recherche au CEMAGREF
<i>Examineurs :</i>	P. Joseph	Ingénieur IFP
	B. Savoye	Ingénieur IFREMER
	S. Zaleski	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

THÈSE

Présentée à
l'Institut Français du Pétrole
pour l'obtention du
Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie

par

Alexandre Hugot

Modélisation des écoulements gravitaires catastrophiques par une approche objet dynamique : Érosion – Transport – Dépôt

Soutenue publiquement le 2 Février 2000 devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	G. de Marsily	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
<i>Rapporteurs :</i>	P. Allemand	Professeur à l'Université Claude Bernard (Lyon 1)
	M. Naaim	Chargé de recherche au CEMAGREF
<i>Examineurs :</i>	P. Joseph	Ingénieur IFP
	B. Savoye	Ingénieur IFREMER
	S. Zaleski	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à remercier ceux qui m'ont soutenu au cours de ces trois années de thèse.

En premier lieu, j'aimerais remercier Philippe JOSEPH pour m'avoir fait part de ses nombreuses connaissances et d'avoir été mon « Maître » en matière de géologie. Ce mémoire n'a pris forme que grâce aux remarques et suggestions pertinentes qu'il m'a prodiguées. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour la collaboration fructueuse que nous avons eue tout au long de ces trois années.

Je tiens à remercier Stéphane ZALESKI pour avoir dirigé ce travail avec souplesse. La pertinence de ses remarques, ainsi que le pragmatisme de ses conseils, m'ont été précieux tout au long de cette thèse.

J'aimerais également remercier Ghislain DE MARSILY de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être le Président du jury de cette thèse.

Ensuite, mes remerciements vont vers mes deux rapporteurs, Pascal ALLEMAND qui a rendu son avis sur cette thèse avec une grande diligence, ainsi que Mohamed NAAIM qui a jugé ce travail avec une grande application et m'a aussi fait bénéficier de son savoir sur la modélisation des avalanches de neige aérosols lors de mes séjours au CEMAGREF. Je suis touché de la qualité de leurs rapports.

Je remercie vivement Bruno SAVOYE pour ses nombreux conseils et remarques, ainsi que pour le temps qu'il m'a accordé lorsqu'il m'a accueilli à l'IFREMER pour l'étude de l'effondrement de Nice. Son savoir dans le domaine des géosciences m'a été d'un grand secours. Je suis fier de sa présence dans mon jury en tant qu'examinateur.

Je rends également hommage à Pierre-Yves LAGRÉE du LMM pour les nombreuses discussions ainsi que les judicieux conseils qu'il a su me donner sur la théorie de la couche limite.

Je tiens à remercier Dominique GUÉRILLOT de m'avoir accueilli dans la division géologie-géochimie.

Je tiens à assurer à Rémi ESCHARD ma gratitude, pour m'avoir accepté pendant plus de trois années au sein de son projet.

Que ceux qui de près ou de loin ont apporté quelque chose à cette thèse soient remerciés. Je pense entre autre aux membres de la division géologie avec qui j'ai partagé d'intenses moments de travail et d'agréables moments de détente. Je citerais plus particulièrement Yolande Calot-Martin et Nadia Doizelet (pour leur gentillesse et leur collaboration à la compréhension de la métaphysique des imprimantes), Brigitte Doligez (pour les morceaux choisis par e-mail), Guy Desaubliaux (pour sa bonne humeur), Tristan Euzen (pour le « squat » de son MAC), Remy Deschamps et Fabrice Gaumet (les inséparables), Didier Granjeon (l'homme le plus rapide de la division, pour mes multiples dérangements), François Guillocheau (pour mon éducation au « dur métier de géologue » dont certains cotés auraient pu m'échapper), Olivier Lerat (pour m'avoir laissé enfumer son bureau), Christian Ravenne (pour la découverte de « ses » grès d'Annot) et Arlette (pour ses 1560 cafés) et ceux qui m'en voudront à tout jamais de les avoir oubliés ...

Je tiens également à saluer Jean-Marie Quemener (petit thésard deviendra grand), Marina Rabineau (merci pour la découverte de Brest by night) et Jobel Pinheiro qui va aborder le délicieux moment de la soutenance de thèse.

À présent mes pensées vont vers mes « ex-colocataires » du J/062, Romain Debarre et Laurent Pianelo (*substine et abstine*) qui ont du me supporter et à qui je témoigne mon amitié; à tous deux bon courage!

Je pense aussi à mes compagnons *cosinus* FredLaFouine, CedSoft et TaO (pour la hotline par mail), à flostyle (for poster design under photoshop), à Julien (pour l'initiation à la géométrie Riemannienne), à Ladgy (pour les soirées au « café noir ») et bien-sûr aux Jedis Obi-wan, Luke et Princesse Leia (pour La force).

Enfin, je ne saurais oublier mes parents, ma sœur et mon frère, et ma grand mère qui m'ont soutenu, encouragé, relu et ont toujours su m'aider à surmonter les périodes de doute durant ces trois années.

Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xvii
Introduction générale	1

Partie I Sur la sédimentation gravitaire	3
---	----------

Chapitre 1	
Classification des processus de sédimentation en eaux profondes	5
1.1 Processus de resédimentation	9
1.2 Glissements de terrain	11
1.3 Écoulements à débris	11
1.4 Coulées de boue	18
1.5 Écoulements en grains	18
1.6 Écoulements fluidisés	18
1.7 Courants turbiditiques	18
1.8 Classification hydromécanique	23
1.9 Conclusion	24
Chapitre 2	
Une petite histoire de la modélisation	25
2.1 Premiers pas	26
2.2 Modèles instationnaires à une dimension	33
2.3 Les apports de l'hydrodynamique	35
2.4 1990–1999 : Les années Navier–Stokes	40
2.5 L'approche directe : des modèles hors de prix	49
2.6 Résumé, conclusions et position du problème	50
Bibliographie	53

Partie II L'objet-écoulement : un modèle pour les écoulements gravitaires finis **61**

Chapitre 3	Un modèle phénoménologique en couche mince : l'objet-écoulement	63
-------------------	--	-----------

3.1	Choix de la géométrie de l'écoulement	64
3.2	Hypothèses supplémentaires et définitions	65
3.3	Mouvement de l'objet	67
3.4	Déformation de l'objet	67
3.5	Volume de l'objet	68
3.6	Transferts de particules	70
3.7	Conclusion et formulation du modèle P	72

Chapitre 4	Compléments théoriques au modèle de l'objet-écoulement	75
-------------------	---	-----------

4.1	Position du problème	76
4.2	Traitement turbulent	81
4.3	Théorie de la couche limite	83
4.4	Dérivation des équations d'ondes longues couplées	89
4.5	Équations d'ondes longues couplées	93
4.6	Discussion	98
4.7	Décomposition et intégration des équations d'ondes longues	99
4.8	Équations intégrées	101
4.9	Conclusion et formulation du modèle T	103

Chapitre 5	Fermetures du modèle	107
-------------------	-----------------------------	------------

5.1	Viscosité d'une suspension diluée de particules	108
5.2	Vitesse de sédimentation des particules	108
5.3	Friction turbulente	113
5.4	Transferts de particules	117
5.5	Incorporation de fluide	124
5.6	Modèle T fermé	127

Bibliographie	129
----------------------	------------

Partie III Sur le comportement qualitatif du modèle **133**

Chapitre 6	Propriétés du système dynamique et exemples de solutions analytiques	135
-------------------	---	------------

6.1	Préliminaires	136
6.2	Exemple du glissement de terrain indéformable	137
6.3	Exemple d'un écoulement de densité non-miscible	138

6.4	Écoulements de densité miscible	141
6.5	Suspensions (système complet)	144
6.6	Conclusions	151

Chapitre 7		
Sur les aspects qualitatifs du modèle		155

7.1	Préliminaires	155
7.2	Sensibilité aux paramètres	157
7.3	Sensibilité aux conditions initiales	164
7.4	Sensibilité aux « processus de contrôle »	169
7.5	Conclusions	173

Bibliographie		175
----------------------	--	------------

Partie IV Mise en œuvre d'une méthode inverse pour l'identification des paramètres et le test de scénarios **177**

Chapitre 8		
Application d'une méthode inverse à des modèles réduits expérimentaux bi-dimensionnels		179

8.1	Préliminaires	180
8.2	Expériences en canal de Beghin (1979)	181
8.3	Expériences du CEMAGREF (1998)	186
8.4	Expériences en canal de Laval (1988)	189
8.5	Conclusions	210

Chapitre 9		
L'effondrement de Nice, 1979		213

9.1	Contexte géologique	215
9.2	Description de l'événement et Points de contrainte	215
9.3	Paramètres de la modélisation	222
9.4	Mise en œuvre	225
9.5	Étude complémentaire	237
9.6	Conclusions	239

Bibliographie		243
----------------------	--	------------

Conclusion générale	245
----------------------------	------------

Résumé	249
---------------	------------

Abstract	249
-----------------	------------

Annexe A	
Dépôts et caractéristiques des dépôts	251
A.1 Contrôle des processus de dépôt	251
A.2 Caractéristiques des dépôts	255
A.3 Conclusion	266
Annexe B	
Compétence	267
B.1 Modèle de Rodine et Johnson 1976	267
B.2 Modèle de Hampton 1975	268
B.3 Modèle de Hampton 1979	269
Annexe C	
Granulométrie	271
Annexe D	
Axiomes de Reynolds	273
Annexe E	
Étude dimensionnelle des équations du mouvement sous les hypothèses de la couche limite	275
E.1 Continuité	275
E.2 Quantité de mouvement	276
E.3 Conservation de la fraction volumique	279
Annexe F	
Conditions de similitude	283
F.1 Équation de continuité	283
F.2 Équation de quantité de mouvement	284
F.3 Équation de la fraction volumique	284
Annexe G	
Intégration transversale des équations du mouvement	287
G.1 Intégration des équations du mouvement	288
G.2 Choix des profils	289
G.3 Évaluation des intégrales	291
Annexe H	
Décomposition et intégration des équations d'ondes longues	295
H.1 Décomposition	295
H.2 Intégration longitudinale des équations d'ondes longues décomposées	299
Annexe I	
Mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique	309
I.1 Structure du programme	309
I.2 Réalisation du maillage	310
I.3 Construction de l'objet-écoulement	310
I.4 Formation du dépôt	312
I.5 Résolution numérique des équations différentielles	312
I.6 Conclusions	317

Annexe J	
Exemple de Fichier de données du programme	319
Annexe K	
Méthodes d'analyse locale	325
K.1 Analyse des points critiques	325
K.2 Recherche de solutions asymptotiques	326
Annexe L	
Application d'une méthode inverse : identification des paramètres et des conditions initiales	327
L.1 Position du problème	328
L.2 Méthode du recuit simulé	329
L.3 Problème des minima locaux	331
L.4 Données synthétiques	336
L.5 Inversion partielle	337
L.6 Inversion totale	341
L.7 Conclusions	344
Annexe M	
Sur les incertitudes et incompatibilités entre les protocoles expérimentaux numériques et analogiques	347
M.1 Turbulence?	347
M.2 Incertitudes sur les conditions initiales	348
M.3 Incompatibilité des conditions aux limites	348
Annexe N	
Description des carottes	351
N.1 Campagne NICASAR	351
N.2 Campagne PRENICE	352
N.3 Campagne CASANICE	352
N.4 Campagne MONICYA	353
N.5 Campagne SAME	353
N.6 Campagne ESSAM2	354
Annexe O	
Impact de la topographie sur les résultats de modélisation : cas de l'effondrement de Nice	355
O.1 Maillages utilisés	355
O.2 Données de la modélisation	356
O.3 Sensibilité au temps de calcul	358
O.4 Résultats	358
O.5 Détermination de la précision imposée par le maillage fin (MF)	361
O.6 Conclusion	363
Bibliographie	365
Glossaire	369
Nomenclature	375
Index des Auteurs	383

Table des figures

1.1	Les trois groupes de processus opérant en milieu marin profond	6
1.2	Interaction et continuité des processus opérant en eaux profondes, en relation avec leur principal dépôt sédimentaire	9
1.3	Diagramme de comportement, permettant une définition des courants gravitaires	11
1.4	Profil idéalisé d'un écoulement à débris rapide surmonté d'un nuage en suspension turbulente	13
1.5	Profil idéalisé d'un écoulement à débris, suivant la rhéologie de Bingham	13
1.6	Transformation d'un écoulement à débris sous l'influence du gradient de pente	15
1.7	Positionnement de la rhéologie des écoulements à débris	15
1.8	Le tremblement de terre de Grand Banks, le 18 Novembre 1929, et les ruptures de câbles qui en suivirent	19
1.9	Modèle conceptuel du courant turbiditique catastrophique, résultant d'une rupture de pente	20
1.10	Illustration de la couche néphéloïde de fond	21
1.11	Coupe longitudinale simplifiée d'un écoulement turbiditique.	22
2.1	Modèle énergétique de Bagnold	31
2.2	Diagramme conceptuel expliquant l'auto-suspension	32
2.3	Courant turbiditique traité comme une couche limite turbulente	36
2.4	Exemple de simulation monodimensionnelle d'écoulement gravitaire par la méthodes des « ondes longues »	40
2.5	Exemple de simulation en deux dimensions par une méthode « Navier–Stokes »	48
3.1	Profil numérique d'un courant gravitaire de volume fini.	64
3.2	Géométrie et variables de l'objet écoulement	65
3.3	Étalement de l'objet écoulement sous les forces de pression	68
3.4	Incorporation du fluide ambiant le long de l'interface supérieure de l'objet écoulement . .	70
3.5	Sédimentation et érosion le long de l'interface inférieure de l'objet	70
3.6	Épaisseur déposée, δ , associée à l'objet écoulement	72
4.1	Formulation du problème complet sur un domaine fermé	76
4.2	Problème hydrostatique	78
4.3	Illustration du mouvement dû à la turbulence	80
4.4	Sédimentation et diffusion des sédiments	83
4.5	Profil de vitesse réel simplifié d'un écoulement gravitaire	84
4.6	Profils théoriques d'écoulements classiques en mécanique des fluides	84
4.7	Profil de vitesse réel simplifié dans le cas d'une profondeur d'eau infinie	85
4.8	Épaisseurs caractéristiques associées aux profils de vitesse et de concentration	86
4.9	Illustration des échelles de longueurs caractéristiques associées à l'écoulement	87
4.10	Illustration de la condition de flux nul dans une section	95
4.11	Décomposition du mouvement principal	100
4.12	Décomposition du champ de vitesse au sein de l'objet écoulement	101
4.13	Signification physique du paramètre a	102

5.1	Comparaison des vitesses de chute libre, v_{s0}	111
5.2	Variation du nombre de Reynolds des particules Re_p	112
5.3	Variation du paramètre n (correction de la vitesse de sédimentation)	113
5.4	Influence de la fraction volumique sur la vitesse de sédimentation	114
5.5	Profil de vitesse réel simplifié	115
5.6	Variation de la fraction volumique proche du lit	122
5.7	Profil de fraction volumique réel simplifié	123
5.8	Taux d'entraînement du fluide ambiant	125
5.9	Fonction d'entraînement, fonction de la pente, définie par Beghin (1979)	126
6.1	Solutions numériques, exactes et asymptotiques pour le cas d'un glissement indéformable soumis à une force de friction quadratique sur pente constante	139
6.2	Solutions numériques et asymptotiques pour le cas d'un écoulement de densité non-miscible sur pente constante	142
6.3	Solutions numériques et asymptotiques pour les vitesses dans le cas d'un écoulement de densité miscible sur pente constante	143
6.4	Solutions numériques et asymptotiques pour la hauteur et la longueur dans le cas d'un écoulement de densité miscible sur pente constante	143
6.5	Solutions numériques et asymptotiques pour la fraction volumique dans le cas d'un écoulement de densité miscible sur pente constante	144
6.6	Solutions numériques et asymptotiques pour les vitesses dans le cas d'une suspension	151
6.7	Solutions numériques et asymptotiques pour la hauteur et la longueur dans le cas d'une suspension	152
6.8	Solutions numériques et asymptotiques pour la fraction volumique dans le cas d'une suspension	152
6.9	Volume de particules déposées par seconde et par unité de largeur prédit par le modèle T	153
7.1	Protocole expérimental des expériences numériques.	156
7.2	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Vitesse du front en fonction de la position du front.	157
7.3	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	157
7.4	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Hauteur en fonction de la position du front.	157
7.5	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Longueur en fonction de la position du front.	158
7.6	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	158
7.7	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Fraction volumique en fonction de la position du front.	158
7.8	Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	158
7.9	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Vitesse du front en fonction de la position du front.	159
7.10	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	159
7.11	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Hauteur en fonction de la position du front.	159
7.12	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Longueur en fonction de la position du front.	159
7.13	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	160
7.14	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Fraction volumique en fonction de la position du front.	160
7.15	Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	160
7.16	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Vitesse du front en fonction de la position du front.	161

7.17	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	161
7.18	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Hauteur en fonction de la position du front.	161
7.19	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Longueur en fonction de la position du front.	161
7.20	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	161
7.21	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Fraction volumique en fonction de la position du front.	162
7.22	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	162
7.23	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Vitesse du front en fonction de la position du front.	162
7.24	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	163
7.25	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Hauteur en fonction de la position du front.	163
7.26	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Longueur en fonction de la position du front.	163
7.27	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	163
7.28	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Fraction volumique en fonction de la position du front.	163
7.29	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	164
7.30	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Vitesse du front en fonction de la position du front.	164
7.31	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	164
7.32	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Hauteur en fonction de la position du front.	164
7.33	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Longueur en fonction de la position du front.	165
7.34	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	165
7.35	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Fraction volumique en fonction de la position du front.	165
7.36	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	165
7.37	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Vitesse du front en fonction de la position du front.	166
7.38	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	166
7.39	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Hauteur en fonction de la position du front.	166
7.40	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Longueur en fonction de la position du front.	166
7.41	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	167
7.42	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Fraction volumique en fonction de la position du front.	167
7.43	Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	167
7.44	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Vitesse du front en fonction de la position du front.	167
7.45	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	168
7.46	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Hauteur en fonction de la position du front.	168
7.47	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Longueur en fonction de la position du front.	168
7.48	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.	168
7.49	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Fraction volumique en fonction de la position du front.	168
7.50	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	169

7.51	Sensibilité à la pente. Vitesse du front en fonction de la position du front.	169
7.52	Sensibilité à la pente. Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front. . .	169
7.53	Sensibilité à la pente. Hauteur en fonction de la position du front.	169
7.54	Sensibilité à la pente. Longueur en fonction de la position du front.	170
7.55	Sensibilité à la pente. Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front. . . .	170
7.56	Sensibilité à la pente. Fraction volumique en fonction de la position du front.	170
7.57	Sensibilité à la pente. Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	170
7.58	Sensibilité à la granulométrie. Vitesse du front en fonction de la position du front.	171
7.59	Sensibilité à la granulométrie. Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.	171
7.60	Sensibilité à la granulométrie. Hauteur en fonction de la position du front.	171
7.61	Sensibilité à la granulométrie. Longueur en fonction de la position du front.	171
7.62	Sensibilité à la granulométrie. Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front	172
7.63	Sensibilité à la granulométrie. Fraction volumique en fonction de la position du front. . . .	172
7.64	Sensibilité à la granulométrie. Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).	172
7.65	Mélange de deux tailles de particules (500 μm et 100 μm). Vitesse en fonction de la position du front (à gauche). Hauteur en fonction de la position (à droite)	173
7.66	Évolution de la fraction volumique en fonction de la position. À gauche : particules fines. À droite : particules grossières	174
7.67	Histogramme de répartition du sable. À gauche : particules fines. À droite : particules grossières	174
8.1	Schéma du canal expérimental utilisé par Beghin	181
8.2	Exemple d'évaluation par Beghin de la hauteur H et de la longueur L d'une bouffée à partir de son profil réel obtenu sur photographie	182
8.3	Vitesse du front en fonction de la position du front : données de Beghin [1979].	183
8.4	Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front : données de Beghin.	184
8.5	Inversion totale. Vitesse du front en fonction de la position du front : données de Beghin. .	185
8.6	Position du front en fonction du temps : données du CEMAGREF.	187
8.7	Inversion partielle sur les conditions initiales. Position du front en fonction du temps : données du CEMAGREF.	187
8.8	Inversion totale. Position du front en fonction du temps : données du CEMAGREF.	188
8.9	Inversion totale. Répartition des valeurs des coefficients pour les six expériences du CEMAGREF.	189
8.10	Canal et système d'agitation utilisés par Laval	190
8.11	Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable de 56 μm à 142 μm (données de Laval [1988]).	191
8.12	Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable de 1° à 5° (données de Laval [1988]).	192
8.13	Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable de 300 g à 650 g (données de Laval [1988]).	192
8.14	Tests préliminaires sur l'influence de la fraction volumique initiale et la hauteur initiale .	193
8.15	Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	194
8.16	Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	194

8.17	Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).	195
8.18	Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).	196
8.19	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	197
8.20	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	198
8.21	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).	199
8.22	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).	200
8.23	Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	201
8.24	Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	202
8.25	Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).	203
8.26	Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).	204
8.27	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	205
8.28	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).	206
8.29	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).	207
8.30	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).	208
8.31	Inversion totale. Répartition des valeurs des coefficients pour les huit expériences de Laval [1988].	209
9.1	Contexte géographique, montrant la morphologie du cône sous-marin	214
9.2	Localisation de l'effondrement et du chenal emprunté	216
9.3	Localisation des carottages effectuées par l'IFREMER. • : carottes retenues; ⊗ : carottes incertaines; × autres carottes.	218
9.4	Profil reconstitué de la hauteur de sédiments déposés, estimée d'après les carottes IFREMER	219
9.5	Profil reconstitué de la hauteur de la ride sédimentaire du Var	222
9.6	Estimations des vitesses données par les précédentes modélisations	223

9.7	Localisation du trajet emprunté par l'effondrement (trajet <i>a</i> , qui correspond au chenal Sud). Le trajet <i>b</i> correspond en partie au chenal Nord. Localisation des ruptures de câbles d'après Piper et Savoye [1993]: en pointillés les câbles rompus, en traits pleins, les câbles non rompus.	224
9.8	Profil bathymétrique reconstitué de la vallée du Var, le long d'une section 2D. Les maillages (MF) et (MG) sont superposés.	225
9.9	Inversion partielle contrainte par la dynamique (rupture des câbles). Position du front en fonction du temps (à gauche); Vitesse en fonction de la position (à droite)	227
9.10	Inversion partielle contrainte par la dynamique (rupture des câbles). À gauche: Hauteur en fonction de la position, les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var. À droite: Épaisseurs déposées.	227
9.11	Inversion partielle contrainte par le dépôt. Épaisseur déposée.	229
9.12	Inversion partielle contrainte par le dépôt. Position du front en fonction du temps à gauche et vitesse en fonction de la position du front à droite	229
9.13	Inversion totale contrainte par la dynamique. Position du front en fonction du temps (à gauche). Vitesse en fonction de la position (à droite).	231
9.14	Inversion totale contrainte par la dynamique. Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var (à gauche). Épaisseurs déposées (à droite).	231
9.15	Inversion totale contrainte par le dépôt. Épaisseur déposée.	233
9.16	Inversion totale contrainte par le dépôt. Position du front en fonction du temps (à gauche). Vitesse en fonction de la position (à droite).	234
9.17	Inversion totale contrainte par le dépôt. Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var.	234
9.18	Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Position du front en fonction du temps (à gauche). Épaisseur déposée (à droite).	236
9.19	Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Hauteur en fonction de la position, les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var (à gauche). Vitesse en fonction de la position (à droite).	236
9.20	Correspondance entre la hauteur de l'écoulement et les profils de fraction volumique ϕ et de vitesse U	236
9.21	Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Nombre de Richardson en fonction de la position (à gauche). Nombre de Reynolds en fonction de la position (à droite).	237
9.22	Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Profil de dépôt obtenu (à gauche). Évolution de la fraction volumique (à droite).	238
9.23	Profil bathymétrique associé au trajet <i>b</i>	238
9.24	Trajet <i>b</i> . Position du front en fonction du temps (à gauche). Vitesse en fonction de la position du front (à droite)	238
9.25	Trajet <i>b</i> . Épaisseur déposée.	239
9.26	Trajet <i>b</i> . Hauteur en fonction de la position (à gauche). Nombre de Richardson en fonction de la position (à droite).	239
1	Exemple de géométrie d'objets: à gauche exemple d'objet asymétrique; à droite exemple d'objet à trois dimensions.	247
A.1	Croquis schématique soulignant la variété des processus physiques contrôlant la sédimentation en eaux profondes	252
A.2	Liaison entre niveau de la mer et développement des courants turbiditiques	253
A.3	Paramètres régissant les variations eustatiques	254
A.4	Schéma des plus grandes unités tectoniques et morphologiques de la croûte terrestre	255
A.5	Modèle de faciès resédimenté pour une débrite	257
A.6	Modèle conceptuel pour les écoulements à débris proximaux et distaux	257
A.7	Profil théorique du nez d'un dépôt de débris flow	258
A.8	Modèle de faciès resédimenté pour un écoulement en grain	259

A.9	Modèle de faciès resédimenté pour un écoulement fluidisé	259
A.10	Modèle de faciès resédimenté pour une turbidite à haute concentration (séquence de Lowe)	261
A.11	Origine de la couche de « tapis de traction »	262
A.12	Séquence virtuelle de dépôt, résultant d'une succession d'écoulements.	263
A.13	Modèle de faciès resédimenté pour une turbidite classique (Séquence de Bouma)	264
A.14	Diagramme montrant les changements d'organisation dans une turbidite	264
A.15	Diagramme schématique représentant l'interprétation d'une séquence de Bouma en fonction de la distance à travers le bassin, et du déclin de l'écoulement	265
A.16	Modèle de faciès resédimenté pour une Turbidite de faible concentration (Séquence de Stow)	265
B.1	Simplification du calcul de la flottabilité d'une sphère	268
G.1	Graphe d'une fonction « chapeau »	291
G.2	Exemple de profils analytiques adimensionnels de vitesse et de concentration	291
G.3	Évaluation des facteurs de forme	292
H.1	Autre exemple de champ de vitesse décomposé au sein de l'objet écoulement	297
I.1	Structure du programme	311
I.2	Exemple d'une méthode Runge-Kutta (2,2) et d'une méthode d'Euler	314
L.1	Approximation linéaire des résultats du modèle direct entre deux pas de temps n et $n + 1$	328
L.2	Mouvement du simplex (exemple monodimensionnel)	331
L.3	Schéma montrant l'influence des conditions initiales de l'algorithme d'optimisation	332
L.4	Schéma montrant le problème des échelles de la fonction de coût en lien avec les températures critiques	334
L.5	Exemple de fonction de recuit pour $T_0 = 1$	335
L.6	Données synthétiques	337
L.7	Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération: exemple de minima locaux lors d'une inversion partielle.	338
L.8	Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération: inversion partielle sur les paramètres	339
L.9	Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération: inversion partielle sur les conditions initiales.	341
L.10	Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération: exemples de minima locaux d'une inversion totale.	342
L.11	Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération: inversion totale.	343
M.1	Exemple de quantification des effets visqueux pour les expériences de Laval	348
O.1	Profil bathymétrique reconstitué de la vallée du Var, le long d'une section 2D. Profils de topographie fine (MF), grossière (MG) et lisse (ML).	356
O.2	Profils de topographie fine (MF) grossière (MG) et lisse (ML), grossissement.	357
O.3	Profils de topographie fine (MF), grossière (MG) et lisse (ML), grossissement.	357
O.4	Position du front en fonction du temps	359
O.5	Vitesse en fonction de la position du front	359
O.6	Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent le hauteur de la ride sédimentaire du Var.	360
O.7	Épaisseur déposée.	360
O.8	Position du front en fonction du temps	362
O.9	Vitesse en fonction de la position du front	362
O.10	Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var.	362
O.11	Épaisseur déposée.	362

O.12	À gauche: Profils de topographie fine (MF), grossière (MG) et lisse (ML), grossissement au voisinage du kilomètre 20. À droite: Vitesse du front en fonction de la position.	363
1	Les origines de la couche de « carpettes de traction »	370
2	Comparaison entre les profils de vitesse laminaires et turbulents	371

Liste des tableaux

1.1	Classification et définition des processus de dépôt en eaux profondes	7
5.1	Ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé aux classes de particules	112
5.2	Paramètre de Shields (contrainte critique adimensionnelle).	120
5.3	Valeurs expérimentales de la fonction d'entraînement définie par Beghin (1979)	126
6.1	Facteur de controle, fonction de la pente, pour le cas d'un écoulement de densité non-miscible	141
6.2	Facteur de contrôle, fonction de la pente, pour le cas d'un écoulement de densité miscible	142
6.3	Comportement asymptotique pour le cas d'une suspension	150
6.4	Paramètres utilisés pour calculer les facteurs de contrôle pour le cas d'une suspension . .	150
7.1	Conditions initiales par défaut des expériences numériques	155
7.2	Paramètres par défaut des expériences numériques	156
7.3	Valeurs du coefficient de friction ($D =$ valeur par défaut du modèle).	157
7.4	Valeurs du coefficient d'incorporation de fluide ambiant ($D \approx$ valeur par défaut du modèle).	159
7.5	Valeurs du coefficient de fraction volumique basale C_3	160
7.6	Valeurs du coefficient de diffusivité C_4 ($D =$ valeur par défaut du modèle).	162
7.7	Valeurs du facteur de forme h_0/l_0	164
7.8	Valeurs du rapport U_0/U_0^*	165
7.9	Valeurs de la fraction volumique initiale Φ_0	167
7.10	Valeurs de l'angle de pente	169
7.11	Valeurs de la granulométrie	171
8.1	Paramètres physiques.	180
8.2	Conditions initiales expérimentales des expériences réalisées par Beghin	183
8.3	La pente est le paramètre variable de ces essais de Beghin.	183
8.4	Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : données de Beghin.	184
8.5	Inversion totale. Conditions initiales des reconstructions : Données de Beghin.	185
8.6	Inversion totale. Paramètres physiques des reconstructions : Données de Beghin.	185
8.7	Conditions initiales expérimentales des expériences réalisées au CEMAGREF.	186
8.8	Caractéristiques des expériences réalisées au CEMAGREF.	186
8.9	Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : Données du CEMAGREF.	187
8.10	Inversion totale. Conditions initiales des reconstructions : Données du CEMAGREF.	188
8.11	Inversion totale. Paramètres physiques des reconstructions : Données du CEMAGREF. . . .	188
8.12	Conditions initiales expérimentales communes des expériences réalisées par Laval	191
8.13	Conditions initiales expérimentales des expériences réalisées par Laval	191
8.14	Conditions initiales des tests préliminaires.	193
8.15	Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	195

8.16	Inversion partielle sur les conditions initiales. Coûts des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	195
8.17	Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	196
8.18	Inversion partielle sur les conditions initiales. Coûts des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	196
8.19	Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	197
8.20	Inversion partielle sur les conditions initiales. Coûts des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	197
8.21	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Coûts des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	198
8.22	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	198
8.23	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	199
8.24	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Coûts des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	199
8.25	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	200
8.26	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	200
8.27	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Coûts des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	200
8.28	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	200
8.29	Inversion sur les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	201
8.30	Inversion sur les données de vitesse. Coût des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	202
8.31	Inversion sur les données de vitesse. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	202
8.32	Inversion sur les données de vitesse. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	202
8.33	Inversion sur les données de vitesse. Coût des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	203
8.34	Inversion sur les données de vitesse. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	203
8.35	Inversion sur les données de vitesse. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	204
8.36	Inversion sur les données de vitesse. Coût des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	204
8.37	Inversion sur les données de vitesse. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	204
8.38	Inversion sur les données de vitesse. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	204
8.39	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Coût des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	206
8.40	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	206
8.41	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).	206

8.42	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Coût des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	207
8.43	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	207
8.44	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).	208
8.45	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Coût des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	208
8.46	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	208
8.47	Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).	209
9.1	Estimation de la position des ruptures de câbles	217
9.4	Situation des carottes et interprétation des épaisseurs sédimentées.	220
9.2	Hauteur de sédiments déposés estimée d'après les carottes et considérée comme possible-ment résultantes de l'effondrement	221
9.5	Estimation des valeurs du volume de sédiments dans l'effondrement	224
9.6	Inversion partielle: paramètres physiques (non inversés).	226
9.7	Inversion partielle sur la dynamique: conditions initiales	226
9.8	Inversion partielle sur la dynamique: coût	227
9.9	Inversion partielle sur le dépôt: conditions initiales	229
9.10	Inversion totale sur la dynamique: paramètres physiques.	230
9.11	Inversion totale sur la dynamique: conditions initiales	231
9.12	Inversion totale sur la dynamique: coût	232
9.13	Inversion totale sur le dépôt: paramètres physiques.	232
9.14	Inversion totale sur le dépôt: conditions initiales	233
9.15	Inversion totale sur le dépôt: coût	233
9.16	Inversion totale sur la dynamique et le dépôt: paramètres physiques.	235
9.17	Inversion totale sur la dynamique et le dépôt: conditions initiales	235
9.18	Synthèse des temps de rupture des câbles et des épaisseurs déposées des différents scénarios testés	241
C.1	Échelle granulométrique en mm	271
H.1	Propriétés de symétrie des facteurs de forme	303
I.1	Paramètres des méthodes de Runge–Kutta (5,6) et (4,6) utilisées	316
L.1	Conditions initiales et paramètres physiques des données synthétiques.	336
L.2	Paramètres de l'inversion partielle.	337
L.3	Paramètres physiques lors d'inversion partielle: exemples de minima locaux	338
L.4	Valeur des fonctions de coût des minima locaux	338
L.5	Paramètres physiques: inversion partielle sur les paramètres.	339
L.6	Valeur des fonctions de coût	340
L.7	Conditions initiales. Les paramètres initiaux sont ceux utilisés pour générer les données synthétiques.	340
L.8	Valeur des fonctions de coût.	341
L.9	Paramètres de l'inversion totale	341
L.10	Paramètres physiques obtenus lors d'inversion totale: exemples de minima locaux	342
L.11	Conditions initiales obtenues lors d'inversion totale: exemples de minima locaux	342
L.12	Valeur des fonctions de coût des minima locaux	343
L.13	Paramètres physiques. Les paramètres initiaux sont ceux utilisés pour générer les données synthétiques.	343

L.14	Conditions initiales. Les paramètres initiaux sont ceux utilisés pour générer les données synthétiques. Les erreurs relatives sont indiquées entre parenthèses.	344
L.15	Valeur des fonctions de coût : inversion totale	344
O.1	Constitution des maillages	356
O.2	Paramètres et conditions initiales de la modélisation	357
O.3	Temps CPU des simulations sur maillage fin et grossier.	358
O.4	Nombre de pas de temps accepté et nombre de pas de temps repris pour conserver la précision sur l'erreur de troncature et sur le maillage.	358
O.5	Nombre de pas de temps accepté et nombre de pas de temps repris pour conserver la précision.	361

Introduction générale

Les exemples de mouvements induits par la gravité sont nombreux et se rencontrent dans des phénomènes naturels aussi variés que les avalanches de neige [Hermann, Issler et Keller, 1993; Hopfinger, 1983; Naaim, 1995; Sampl, 1993], les nuées ardentes [Delinger, 1987; Valentine et Wohletz, 1989] et les écoulements gravitaires sous-marins [Benjamin, 1968; Laval, Cremer, Beghin et Ravenne, 1988; Middleton et Hampton, 1976; Mulder, Savoye, Piper et Syvitski, 1998; Ravenne et Beghin, 1983].

En bordure des plate-formes continentales, les accumulations de sédiments peuvent être déstabilisées lors d'épisodes catastrophiques. L'excès de masse, dû à la présence des sédiments, constitue la force motrice du mouvement. Ce mouvement peut être décomposé en trois phases :

La phase I est celle de l'initiation de l'écoulement et de son accélération. Elle est caractérisée par un taux de sédiments érodés supérieur à celui de sédiments déposés.

La phase II peut être une période durant laquelle l'érosion et le dépôt des sédiments sont égaux. L'écoulement se dilue et les sédiments sont maintenus en suspension par la turbulence.

La phase III est celle de la décélération de l'écoulement. La sédimentation domine l'érosion. Lorsque l'écoulement atteint les plaines sous-marines son arrêt est dû principalement : ① à la perte d'excès de masse par incorporation de fluide ambiant et la chute de particules ; ② à son étalement ; ③ à la dissipation de la turbulence.

Ces phénomènes aboutissent donc à l'accumulation, sur les plaines sous-marines, de nombreuses couches de sédiments appelées « turbidites ». Ces dépôts sont à l'origine de nombreux réservoirs pétroliers pour une grande part récemment découverts. C'est pourquoi l'étude des processus régissant leur mise en place suscite actuellement un intérêt grandissant, en particulier, dans le domaine de la simulation numérique.

Cette thèse propose deux axes de travail :

1. développer des méthodes numériques de simulation adaptées à la sédimentation des dépôts gravitaires au sens large (et non uniquement turbiditiques).
2. mettre au point une méthode de calage des résultats du modèle sur des données réelles et expérimentales. L'identification des conditions initiales et des paramètres physiques qui en découle permet alors de tester des scénarios d'écoulements.

La modélisation des processus gravitaires contribue à une meilleure compréhension de la dynamique de ces processus et permet de quantifier l'impact des paramètres externes, tels que la morphologie du bassin, la nature et la quantité des apports de sédiments, sur la géométrie et l'extension des dépôts.

Cette thèse comporte quatre parties :

La première partie présente une revue bibliographique complète pour l'essentiel, mais non exhaustive, de la sédimentation gravitaire.

Le premier chapitre est consacré à la description des phénomènes gravitaires naturels sous-marins. Ce chapitre témoigne de la complexité et la grande variabilité des phénomènes en jeu. La classification proposée nous a conduit à limiter nos travaux à l'étude des suspensions turbulentes.

Au chapitre 2, nous montrerons comment au « fil du temps », les modélisations mécaniques se sont enrichies et complexifiées, depuis les approches les plus « rustiques » (stationnaires et sans dimensions) jusqu'aux derniers développements rendus possible par les progrès de la modélisation numérique.

Dans la deuxième partie nous proposons une formulation simple des équations du mouvement des écoulements gravitaires ; approche que nous avons nommée « objet-écoulement ». L'argument principal de la formulation est issu d'observations expérimentales : l'écoulement est assimilé à un objet géométrique déformable, paramétré par des grandeurs caractéristiques liées à l'écoulement (vitesse moyenne de l'objet, dimensions de l'objet, fraction volumique des sédiments). Pour caractériser l'évolution temporelle de ces variables, nous avons considéré que l'écoulement gravitaire d'un volume fini de mélange de particules était le reflet du bilan entre les forces extérieures, l'étalement dû aux forces de pression d'une part ; l'incorporation du fluide ambiant et le dépôt et/ou l'érosion des particules d'autre part.

Le modèle **P**, issu, lui, de considérations phénoménologiques, est présenté au chapitre 3.

Une formulation en relation plus étroite avec les équations de la mécanique des fluides est exposée au chapitre 4. Elle repose sur une méthode de décomposition du champ de vitesse (translation-déformation) et apporte des corrections à la formulation **P**. Elle constitue le modèle **T**.

Le chapitre 5 traite du problème des fermetures du modèle (conditions aux limites). Il s'appuie sur la signification physique des phénomènes mis en jeu (érosion, incorporation de fluide ...).

La troisième partie est consacrée à l'étude des solutions associées aux modèles développés dans la seconde partie.

L'étude analytique des systèmes différentiels, à l'aide de solutions asymptotiques du temps, fait l'objet du chapitre 6. Elle montre l'évolution des solutions pour des temps longs et la cohérence des solutions numériques obtenues.

L'expérimentation numérique, présentée au chapitre 7, montre le bon comportement quantitatif du modèle. Elle permet également de déterminer les principaux paramètres (conditions initiales, paramètres physiques et paramètres de contrôle) qui gouvernent le développement dynamique des écoulements ainsi que la formation des dépôts (profil et extension).

La dernière partie a pour but de valider notre démarche à l'aide d'une méthode inverse, elle présente des applications à des cas réels.

Dans le chapitre 8, nous recherchons, à l'aide d'expériences sur des modèles réduits en canal immergé, les paramètres physiques et/ou les conditions initiales associés au modèle.

Enfin, au chapitre 9, l'étude de l'effondrement de terrain de Nice 1979 permet de tester et de proposer divers scénarios d'écoulements et de valider certaines hypothèses.

Bonne lecture!

Première partie

Sur la sédimentation gravitaire

Les phénomènes de sédimentation sous l'action de la gravité sont complexes et font appel à deux grandes disciplines : la mécanique des fluides et la géologie. Ils ont été étudiés tant par des ingénieurs et des hydrodynamiciens que par des géologues. L'étude de ces phénomènes a engendré une réelle communication interdisciplinaire.

La littérature de chacune de ces disciplines contient de nombreuses références à des articles d'autres disciplines. Cependant le nombre important de publications ainsi que la diversité des approches conduit à une certaine confusion dans les définitions. C'est ainsi que, bien que de nombreuses classifications soient proposées pour les phénomènes agissants en eaux profondes, celles-ci ne sont pas toujours très cohérentes.

Pour cette raison, le premier chapitre reprend quelques notions de base sur les processus sédimentaires en milieu marin profond. Il sera consacré à la description des mécanismes de transport et de support des sédiments. À l'issue de cette première étape, faisant le point sur la terminologie des phénomènes, nous serons en mesure de définir une classification générale des écoulements gravitaires.

Le chapitre 2 présentera une revue non exhaustive des différentes approches utilisées en mécanique pour modéliser les écoulements gravitaires et leurs dépôts.

*La matière est toujours pareille,
mais le mouvement la modèle sans cesse différemment.*
San-Antonio.

Chapitre 1

Classification des processus de sédimentation en eaux profondes

Les différents matériaux et écoulements se combinent en plusieurs classes de mouvement de masse. Une revue des publications révèle qu'il existe une grande variété de classifications des processus et des mécanismes associés. Nous proposons de détailler ici les caractéristiques de ces écoulements.

La description de la structure et des caractéristiques des dépôts des écoulements est reportée à l'annexe A page 251. Elle permet de mieux comprendre l'imbrication entre les processus gravitaires et les dépôts qui en résultent.

Sommaire

1.1	Processus de resédimentation	9
1.2	Glissements de terrain	11
1.3	Écoulements à débris	11
1.3.1	Source	12
1.3.2	Composition	12
1.3.3	Profil	12
1.3.4	Vitesse	14
1.3.5	Pente	14
1.3.6	Mécanismes de support des particules	14
1.4	Coulées de boue	18
1.5	Écoulements en grains	18
1.6	Écoulements fluidisés	18
1.7	Courants turbiditiques	18
1.7.1	Source	19
1.7.2	Profil	21
1.7.3	Vitesse	22
1.7.4	Dimension caractéristique	22
1.8	Classification hydromécanique	23
1.8.1	Suspensions de sédiments	23
1.8.2	Écoulements hyperconcentrés	23
1.8.3	Écoulements granulaires	23
1.9	Conclusion	24

On peut classer en trois grands groupes les phénomènes capables d'éroder, de transporter et de déposer des matériaux en eaux profondes :

1. Les processus de resédimentation ;

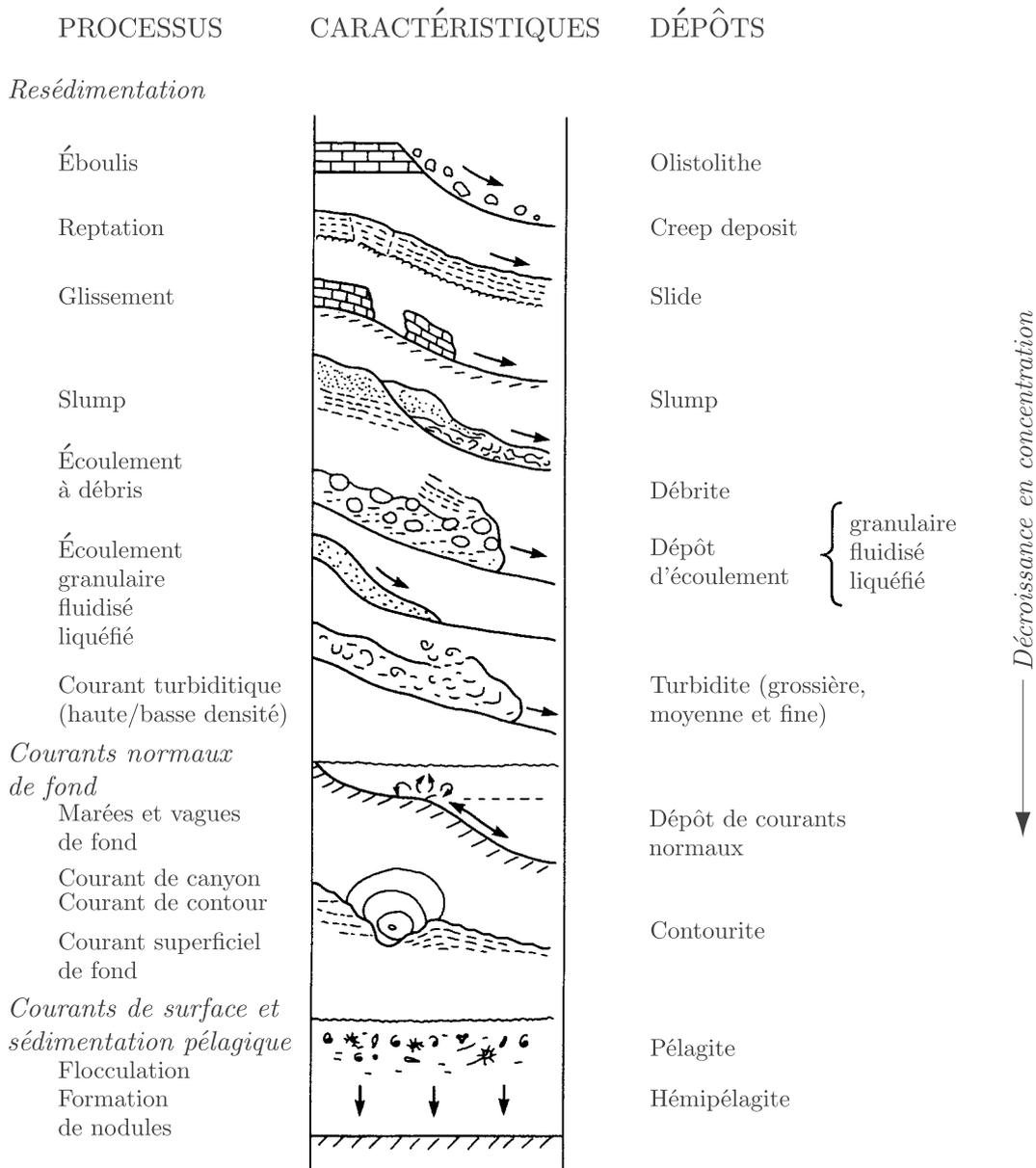


FIG. 1.1 – Les trois groupes de processus opérant en milieu marin profond (d'après Stow [1986]).

Tab. 1.1 – Classification et définition des processus de dépôt en eaux profondes ; Estimation de leurs caractéristiques physiques. (Traduit d'après Stow [1986]).

Processus de dépôt	Mécanisme de transport et de support des sédiments	Pente	Dimensions	Concentrations	Vitesse en cm/s (km/h)	Durée	Distance de transport (km)	Taux de sédimentation moyen
Resédimentation¹								
Elastique²								
Chute de pierres (Rock fall)	Chute libre et éboulement de blocs et de clastes, pas de déformation inertielle des fragments	Pente très raide	Fragments > 10 m	Solide	Chute libre	? min à h	<0.5	Elevé
Reptation des sols (Sediment creep)	Lente déformation et mouvement de pente le long d'une zone de décollement dû à la contrainte induite par la charge avec faible déformation inertielle	Pente modérée	20-80 m d'épaisseur	« Solide »	Très lent (imperceptible)	Semi-continu	? <0.5	Comme pour le milieu
Glissement ou Slide (Slide)	Fracture de cisaillement le long de plans de cisaillement discrets, avec faible déformation inertielle	> environ 1°	Max. 300 km ² 500 m d'épaisseur	Presque solide	?	? h	0.001-?100	Elevé
Slump	Fracture de cisaillement accompagnée de rotation le long de surfaces discrètes de cisaillement	> environ 1°	Idem ci-dessus	Presque solide	?	? h	0.001-?100	Elevé
Plastique²								
Écoulement à débris (Debris flow)	Cisaillement distribué partout dans la masse des sédiments, écoulement plastique lent, supporté par la flottabilité des clastes, et la rigidité de la matrice	> environ 1°	Jusqu'à qq. dizaines de m d'épaisseur	Boue dense	? 1-20 (0.72)	? h	? Max. 350	Modéré à élevé
Fluide visqueux²								
Écoulement granulaire (Grain flow)	Écoulement quasi-visco-plastique de grains non-cohésifs, supporté par la pression de dispersion, et des événements locaux de petite échelle	> 18°	Jusqu'à qq. cm d'épaisseur	Peu de données disponibles	Peu de données disponibles	? min à h	? <0.1	N'opère pas habituellement comme un processus indépendant
Écoulement fluidisé (Fluidized flow)	Écoulement hautement visqueux de grains durés, supporté par le mouvement ascendant de l'eau interstitielle	> 3°	< 10 cm d'épaisseur	Peu de données disponibles	Peu de données disponibles	? min à h	? <0.1	N'opère pas habituellement comme un processus indépendant
Écoulement liquéfié (Liquefied flow)	Sédiment non-cohésif, supporté par l'échappement ascendant de l'eau interstitielle lorsque le courant ralentit et gèle. Très faible vie	> environ 0.5°	— d'épaisseur	Peu de données disponibles	Peu de données disponibles	? min à h	? <0.05	N'opère pas habituellement comme un processus indépendant

suite à la page suivante

1. Resédimentation (= Transport de masse gravitaire)
2. Comportement mécanique

Processus de dépôt	Mécanisme de transport et de support des sédiments	Pente	Dimensions	Concentrations	Vitesse en cm/s (km/h)	Durée	Distance de transport (km)	Taux de sédimentation moyen
Courant de turbidité (haute densité) Turbidity current (high density)	Écoulement faiblement visqueux de différents types de grains supportés par la turbulence du fluide	> environ 0.5°	Longueur et largeur jusqu'à des dizaines de km, épaisseur jusqu'à des centaines de mètres	50-250 g/l	Max. 250 (9)	? h à 1 jour	Jusqu'à environ 1000	5 cm à 5 m par 1000 ans
Courant de turbidité (basse densité) Turbidity current (low density)	Écoulement très faiblement visqueux de différents types de grains supportés par la turbulence du fluide	Presque aucune pente	Idem	0.025-3 g/l	Moyenne 10-30 (0.36-1)	? h à qq. jours	Jusqu'à plusieurs milliers	5 cm à 5 m par 1000 ans
Normal bottom currents ³	Fluide visqueux ⁴							
Marées et vagues internes (Internal tides and waves)	Sédiments suspendus par la turbulence du fluide créée par des oscillations de moyenne à grande échelle aux discontinuités de densité dans les quelques mètres supérieurs d'une colonne d'eau.	Aucune pente	Jusqu'à qq. dizaines de m d'amplitude	?	5-300 (0.18-10.8)	Courants semi-continus, avec périodicité marquée	?	Très faible
Courants normaux de canyon (Normal canyon currents)	Essentiellement écoulement d'eau limpide, vers le haut et le bas de pente des canyons et des chenaux, périodicité de marée ou plus élevée, suspension de petits sédiments par la turbulence du fluide	Vers la haut et le bas de pente < qq.°	Jusqu'à qq. dizaines de m d'épaisseur	? < 0.3 mg/l	0-30 (1)	Courants semi-continus, avec périodicité marquée	Jusqu'à plusieurs centaines	Faible
Courants de fond (contour) (Bottom contour currents)	Écoulement profond, lent, et essentiellement d'eau limpide, conduit par la circulation thermique des eaux marines, peut être associée à la couche néphéloïde basse	Aucune pente ou pente modérée	Largeur jusqu'à qq. dizaines de km, épaisseur jusqu'à des centaines de m	0.025-0.25 mg/l	Max. 200 (7.2) Moyenne 10 (0.36)	Courants semi-continus, avec périodicité marquée	Jusqu'à plusieurs milliers	< 10 cm par 1000 ans
Courants profonds (Deep surface currents)	Écoulement profond, lent, essentiellement d'eau limpide qui sont la partie profonde des courants océaniques de surface conduits par le vent	Aucune pente ou pente modérée	Idem	? Idem	? Idem	Courants semi-continus, avec périodicité marquée	? Idem	? Idem
Pelagic settling	Fluide visqueux ⁴							
Sédimentation pélagique (Pelagic settling)	Sédimentation verticale de grains, flocons et granules individuels à travers une colonne d'eau	—	dépôt à travers des colonnes d'eau de centaines à milliers de m	Extrêmement faible	Taux de sédimentation = 0.002-0.005 (ou plus si flocculation)	Semi-continus	Pas de transport horizontal	En moyenne < 1 cm par 1000 ans

3. Normal bottom currents (= Courants de fond semi-permanents).

4. Comportement mécanique

2. les courants de fond semi-permanents ;
3. les courants superficiels avec décantation pélagique. (cf. Figure 1.1 page 6).

Cette classification est basée sur le comportement mécanique de l'écoulement (variant d'élastique à fluide visqueux en passant par plastique), les mécanismes de transport et de support des sédiments. (cf. Tableau 1.1 page 7).

Il ne faut toutefois pas perdre de vue que les différents processus listés dans cette classification ne constituent en fait qu'une partie des phénomènes réels. Dans la réalité, les différents processus de transport et de dépôt peuvent opérer simultanément, successivement ou individuellement comme l'ont montré expérimentalement Middleton [1966a,b, 1967] et Ravenne et Beghin [1983] (cf. figure 1.2). Ainsi un

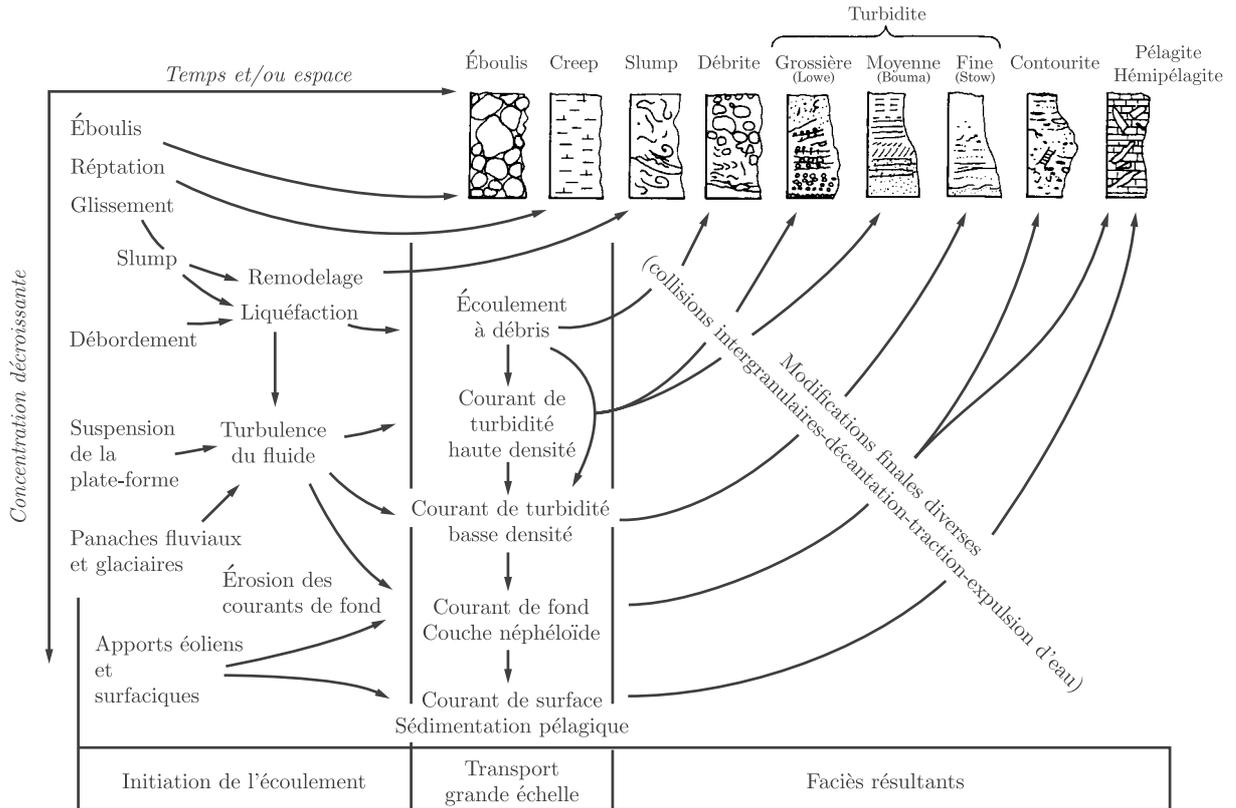


FIG. 1.2 – Interaction et continuité des processus opérant en eaux profondes, en relation avec leur principal dépôt sédimentaire (cf. annexe A page 251). L'échelle horizontale correspond au temps et/ou à la distance de la source, l'échelle verticale descendante à la concentration de l'écoulement. Les faciès idéalisés qui résultent du dépôt des différents événements sont également indiqués (d'après Pickering et al. [1986]).

changement de l'état physique de la masse des sédiments par rupture de la cohésion des grains et par une importante incorporation d'eau, entraînera une transition d'un écoulement par glissements (*slides*) à un processus de courants gravitaires. La transition de l'écoulement à débris (*debris-flow*) en un écoulement liquéfié ou fluidisé et en un courant turbiditique se fait par plusieurs remodelages et dilutions du courant.

Enfin pour de très faibles concentrations et de très faibles vitesses, un courant turbiditique peut être dévié de sa trajectoire par la force de Coriolis. À ce stade l'écoulement peut être classé dans les courants de fond ou courants de contour qui sont plutôt gouvernés par la circulation thermique des eaux marines profondes que par les effets gravitaires de leur charge en sédiments.

1.1 Processus de resédimentation

Dans l'appellation « processus de resédimentation », on inclut donc tous les processus qui déplacent par des forces gravitationnelles, vers le bas, sur le fond de la mer, des sédiments d'une eau peu profonde à une eau plus profonde. Parmi ces processus de resédimentation, la plupart présentent des analogies

avec les processus de pente sur le continent, les avalanches de neige [Hermann *et al.*, 1993; Naaim, 1995], et avec les processus pyroclastiques des éruptions volcaniques explosives [Delinger, 1987; Valentine et Wohletz, 1989]. Ces derniers ont été abondamment étudiés par les géomorphologues, les vulcanologues, ainsi que par les sédimentologues. On notera toutefois qu'à la différence des courants océaniques et des fleuves, où le transport des particules est assuré par les masses d'eau, dans les écoulements sédimentaires gravitaires c'est l'excès de charge dû aux sédiments en suspension qui, sous l'influence de la pesanteur, engendre l'écoulement et déplace les masses d'eau dans lesquelles ces sédiments sont dispersés. L'eau est dans ce cas un partenaire passif dans le mélange.

Ces processus de resédimentation ont été étudiés sous différents aspects : des expériences en laboratoire, quelques observations directes d'événements, des simulations numériques et des analyses des dépôts résultants. Il est évident que dans la nature, les processus de resédimentation sont extrêmement complexes, et ne sont pas facile à modéliser mathématiquement. Cependant quelques propriétés importantes se dégagent :

Le comportement mécanique : Les mouvements de masse (*mass-flows*) comme les éboulis rocheux, les glissements de terrain, sont caractérisés par un comportement général élastique. Les coulées de débris boueux (*debris-flows*) se comportent de manière plastique. Les courants gravitaires, incluant les écoulements granulaires (*grain-flows*), les écoulements liquéfiés (*liquefied-flows*), les écoulements fluidisés (*fluidized-flows*) et les courants turbiditiques (*turbidity currents*) relèvent d'un comportement proche du fluide visqueux avec toutefois des viscosités très variables.

La cohésion ou non-cohésion des matériaux impliqués : Dans la nature, les matériaux impliqués dans ces phénomènes sont granulaires, non cohésifs (ex. sable, gravier) ou à dominante cohésive (ex. argile, boue). Cela influence le type de mouvement et de comportement. Les sédiments boueux ont tendance au glissement plutôt qu'à l'éboulement. En ce qui concerne les phénomènes non cohésifs, comme par exemple les debris-flows sableux, deux paramètres supplémentaires interviennent : les forces de frottement et les collisions entre les grains (mécanisme de support). Ces derniers couleront donc moins loin que les debris-flows boueux, qui eux sont cohésifs. Là encore, la plupart des écoulements naturels ont un comportement mixte : granulaire-cohésif.

Les mécanismes de support des sédiments : L'écoulement du mélange eau-sédiments continue tant que la contrainte de cisaillement générée par le mouvement est supérieure à la résistance de frottement de l'écoulement, et tant que la chute des grains ou des clastes est empêchée par un des mécanismes de support [Pickering, Hiscott et Hein, 1989]. Ces mécanismes peuvent être :

- La turbulence du fluide, à grand nombre de Reynolds et nombre de Froude densimétrique (inverse de la racine carrée du nombre de Richardson) plus grand que l'unité ;
- Le flottement des clastes induit par la matrice haute densité du courant ;
- La pression de dispersion produite par les collisions inter-granulaires ;
- Le mouvement du fluide créé par la surpression due au liquide interstitiel, prisonnier ou s'échappant des pores ;
- Les forces internes, de friction ou de cohésion de la masse des sédiments en mouvement.

Lors des premières définitions des courants sédimentaires gravitaires, la distinction était faite entre quatre processus : les écoulement à débris, les écoulements liquéfiés (originellement appelés écoulements fluidisés), les écoulements en grains et les courants turbiditiques [Middleton et Hampton, 1973]. On peut également trouver des définitions basées sur la nature rhéologique, la composition et la concentration des écoulements (cf. figure 1.3 page ci-contre). Dans ces publications les termes *mudflows* et *debris flows* sont parfois employés indifféremment.

Nous allons maintenant détailler les caractéristiques des processus de resédimentation listés dans le tableau 1.1 page 7. Nous nous attarderons plus particulièrement sur les écoulements à débris et les courants turbiditiques qui bien qu'imbriqués et passant par les états d'écoulements liquéfiés et d'écoulements en grains apparaissent être les seuls écoulements capables de transport sur de longues distances et de faibles pentes. Ils présentent donc un intérêt majeur du point de vue géologique.

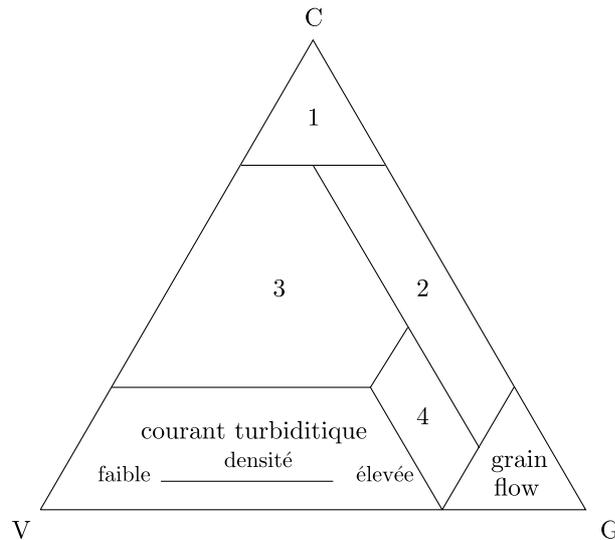


FIG. 1.3 – Diagramme de définition des courants sédimentaires gravitaires : écoulement à débris (1, 2, 3, 4 ; cf. section 1.3), Grain-flow, Courant turbiditique. Comportement : C= cohésif-plastique, V= visqueux-fluide, G= granulaire-collisionnel. L'écoulement s'approche du pôle C par augmentation de son contenu en argiles, du pôle V par augmentation de son contenu en eau, du pôle G par augmentation de son contenu en clastes, et du taux de cisaillement (d'après Shultz [1984]).

1.2 Glissements de terrain (slides)

Ce sont des « écoulements » rocheux constitués par le mouvement de matériaux relativement non consolidés, avec de différentes sortes de fragments de roche de taille variable. L'écoulement est caractérisé par des fractures de cisaillement le long de plans de cisaillement discrets avec de faibles déformations inertielles.

1.3 Écoulements à débris (debris flows)

Normalement, le terme « débris-flow » indique la présence de fragments dont la taille présente une grande variation allant de fins à grossiers.

Les écoulements à débris sont des dispersions de sédiments hautement concentrés, fortement visqueux dans lesquels des éléments hétérogènes (sables, graviers, galets et blocs) sont maintenus en suspension par une matrice argileuse.

Le cisaillement est distribué partout dans la masse ; ces écoulements possèdent une limite de rigidité et ont un comportement d'écoulement plastique [Hampton, 1972]. Les écoulements à débris subaquatiques présentent de nombreuses analogies avec les processus de pente sur le continent, avec les avalanches de neige lourde [Sampl, 1993], et avec les processus pyroclastiques des éruptions volcaniques explosives [Battaglia, 1993; Delinger, 1987].

Les écoulements à débris sont le résultat d'un certain type de rupture de pente. Hampton [1972] a montré qu'ils constituaient le lien logique entre les *slides* de haute densité ($1,5\text{--}2,4\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$) et les courants turbiditiques de basse densité ($1,03\text{--}1,12\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$).

En effet, lorsque les débris parcourent la pente sous forme de glissements (*slides*), ils accumulent de l'eau, puis se liquéfient ou se dilatent, augmentant ainsi la mobilité de l'écoulement. On passe alors de l'écoulement nommé « avalanche à débris » (*debris avalanches*) à l'écoulement nommé « écoulement à

débris ». Lorsque la boue et les débris sont confinés entre deux parois latérales et se déplacent dans un chenal par pulsations régulières, l'écoulement est parfois nommé *debris torrent*.

On pourra se référer à la classification effectuée par Shultz [1984]. On distingue sur le diagramme de la figure 1.3 page précédente qu'il existe quatre types d'écoulement à débris :

1. L'écoulement à débris plastique : écoulement laminaire avec une rigidité élevée et des interactions visqueuses ;
2. L'écoulement à débris riche en fragments de roches : écoulement laminaire avec une rigidité élevée et des collisions ;
3. L'écoulement à débris pseudo-plastique à charge visqueuse : écoulement laminaire ou turbulent avec une faible rigidité et des interactions visqueuses (quantité de fluide importante) ;
4. L'écoulement à débris pseudo-plastique à charge inertielle : écoulement laminaire ou turbulent avec une faible rigidité et des collisions (quantité de clastes importante).

1.3.1 Source

L'apparition des écoulements nécessite au départ un important apport de boue non consolidée et de fragments rocheux. Bien que les écoulements à débris soient le résultat de rupture de pente, leur source directe est souvent soit les *Slides*, soit les *Slumps* [Mulder, Savoye, Syvitski et Cochonnat, 1996; Shanmugam, Lehtonen, Straume, Syvertsen, Hodgkinson et Skibeli, 1994]. Les mécanismes à l'origine de ces ruptures peuvent être, par exemple, des tremblements de terre [Takahashi, 1981].

1.3.2 Composition

De nombreuses études des pentes marines ont montré l'importante capacité des écoulements à débris à transporter de grands volumes de matériaux sur de longues distances et des pentes faibles. La plupart de ces écoulements sont mieux connus dans le cadre sub-aérien [Pierson, 1981; Takahashi, 1981], où ils ont des densités entre $2-2,5 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et sont capables de transporter des rochers de plus de $2,7 \times 10^6 \text{ kg}$. La compétence (*competence*) de ces écoulements augmente avec la densité de la matrice, mais également avec la concentration en éléments grossiers (cf. section 1.3.6.3 page 17 et [Hampton, 1979]).

Dans la nature, les écoulements à débris, étant des écoulements diphasiques contenant des éléments hétérogènes, ont des compositions très variables. La taille des particules varie des matériaux les plus fins jusqu'aux très gros blocs, supportés dans une matrice de fines particules dispersées.

1.3.3 Profil

Les écoulements à débris ont une manière caractéristique de se déplacer. L'écoulement est constitué d'une succession de lames avec une partie frontale raide chargée de gros blocs. Hampton [1972] a réalisé des expériences pour simuler les écoulements à débris en environnement sous-marin. D'après ces travaux, on peut idéalement définir trois régions, de l'avant vers l'arrière de l'écoulement :

- La première région, la « tête » ou le « museau » est bombée, constituée de fragments rocheux non triés, souvent classés de façon inverse (*inverse grading*). Takahashi [1981] suggère que ce renflement résulte du chargement en particules grossières de cette tête qui a tendance à ralentir et à augmenter en volume. Sa hauteur dépend de la pente du chenal ou du cône sous-marin sur lequel le écoulements à débris se déplace.
- La seconde région est une zone d'eau boueuse au mouvement complexe, contenant des galets et des petits blocs.
- Enfin la région finale est de l'eau à concentration élevée en boue avec du sable et des galets.

Il peut exister de plus, à vitesse élevée ou à fort gradient de pente, une zone de cisaillement inverse, créant une zone hautement turbulente. En effet, une fine couche à la surface de la tête est cisailée dans une direction opposée à celle de l'écoulement. Les régions médianes et finales de l'écoulement à débris sont alors recouvertes par un épais « manteau » de nuage turbulent (cf. figure 1.4 page ci-contre). Ce manteau turbulent s'apparente à un courant turbiditique.

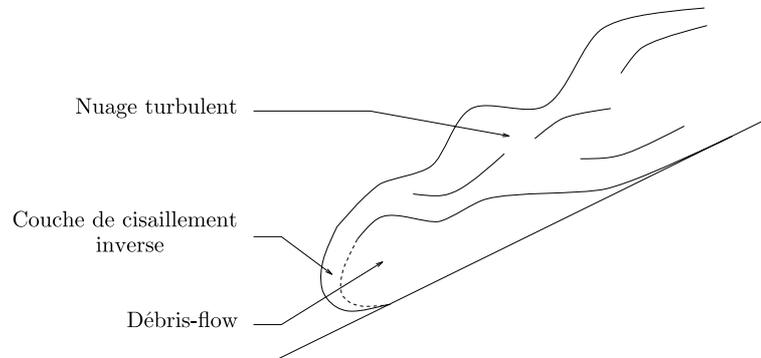


FIG. 1.4 – Profil idéalisé d'un débris flow rapide surmonté d'un nuage en suspension turbulente (d'après Hampton [1972]).

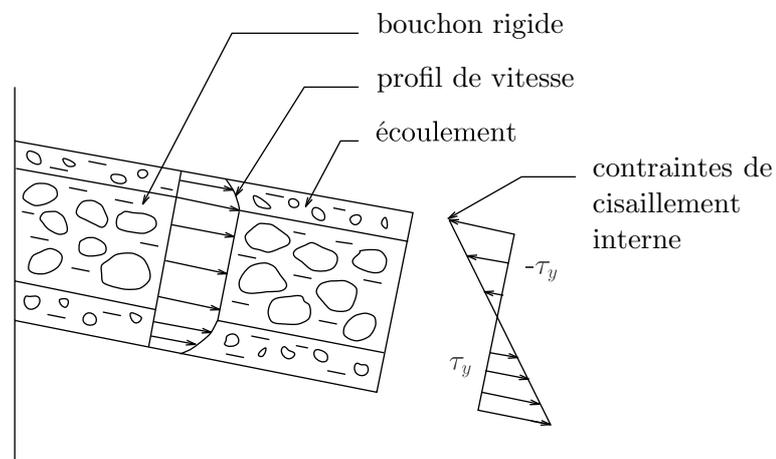


FIG. 1.5 – Profil idéalisé d'un écoulement à débris, suivant la rhéologie de Bingham. A gauche : coupe longitudinale de l'écoulement montrant le « bouchon rigide », les zones d'écoulement, le profil des vitesses. A droite : distribution des contraintes de cisaillement interne. Ici, l'écoulement est soumis à des contraintes de cisaillement significatives à son interface supérieure (générées par la résistance de friction du fluide sus-jacent) contrairement aux écoulements à débris sub-aériens. Le « bouchon rigide » flotte dans le courant avec des zones de cisaillement au-dessus et en dessous (d'après Stow [1986]).

Une coupe de la partie dense d'un écoulement à débris est souvent idéalement représentée par la présence de deux zones. Lorsque les écoulements à débris se mettent en mouvement, la contrainte de rigidité limite est dépassée, les déformations (*i.e.* l'écoulement) commencent dans la zone basale où la contrainte de cisaillement est la plus élevée (cf. figure 1.5 page précédente). A cet endroit on rencontre un écoulement complexe avec des mouvements de glissement, de roulement, de rebond. Plus haut dans l'écoulement, où les contraintes de cisaillement sont faibles, le matériau est transporté sous forme d'un « bouchon rigide » (*rigid plug*) ; Le dépôt a lieu par épaissement vers le bas de ce bouchon, jusqu'à ce que la masse se « gèle » entièrement.

1.3.4 Vitesse

Des écoulements à débris ont été observés à des vitesses comprises entre 0,5 et 20 m/s (1.8–72 km/h). Cette plage étendue est due en particulier :

- Au triage ;
- À la géométrie du chenal (incluant la sinuosité) ;
- À la pente ;
- À la taille du courant.

Ces vitesses élevées pourraient être caractéristiques d'écoulement turbulent. Cependant, il existe peu de références à la turbulence dans les écoulements à débris.

Bagnold [1954, p. 60] indique que la présence de particules argileuses tend à dissiper les tourbillons.

Ceci est également souligné par Johnson [1970, p. 442] dans l'étude de boues de kaolin-eau. Dans ses observations d'écoulements à débris, Johnson suppose que les oscillations de l'interface écoulement–fluide ambiant présentes dans de nombreux *mudflows* sont le résultat de cisaillements turbulents. Mais dans la plupart des cas, la turbulence est atténuée par la présence des argiles et des silts suspendus. Enos [1977] dans son étude des écoulements à débris comme matériaux de Bingham, a tenté d'expliquer la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent, mais ses observations paraissent manquer d'indications concluantes. Des écoulements turbulents ont aussi été observés dans le cadre subaérien par Pierson [1981] sur les pentes du Mont Thomas.

En conclusion, il ne semble pas qu'il existe de critère approprié permettant de définir la limite entre le régime laminaire et le régime turbulent dans les écoulements à débris.

1.3.5 Pente

Bien que les écoulements à débris se produisent essentiellement sur des pentes fortes, il est important de noter qu'ils ont aussi la capacité de s'écouler sur des pentes faibles, supérieures à seulement 0,5° [Rodine et Johnson, 1976].

En effet, même sur de faibles pentes, il ne faut qu'une petite quantité (environ 5%) de matrice interstitielle (ex. boue ou eau) pour permettre aux écoulements à débris de s'écouler [Hampton, 1975, 1979].

1.3.6 Mécanismes de support des particules

Le mouvement des écoulements à débris est délicat à modéliser. Dans la nature, la gamme de propriétés rhéologiques des écoulements à débris est très large. Par exemple, si le gradient de pente est fort, l'écoulement va avoir tendance à mincir et à glisser puis à redonner naissance à un écoulement à débris plus rapide avec un nuage turbulent en suspension (cf. figure 1.6 page ci-contre).

Leur comportement se situe donc dans une zone fluide viscoélastoplastique (cf. figure 1.7 page suivante), étant plus ou moins cohésif-plastique, visqueux-fluide et granulaire-collisionnel [Shultz, 1984 et Pickering *et al.*, 1989, p28].

Du fait de la nature non Newtonienne des écoulements à débris, il est difficile de trouver des lois valables pour tous les régimes, car les écoulements à débris présentent une grande variabilité de constituants et donc de propriétés fluides.

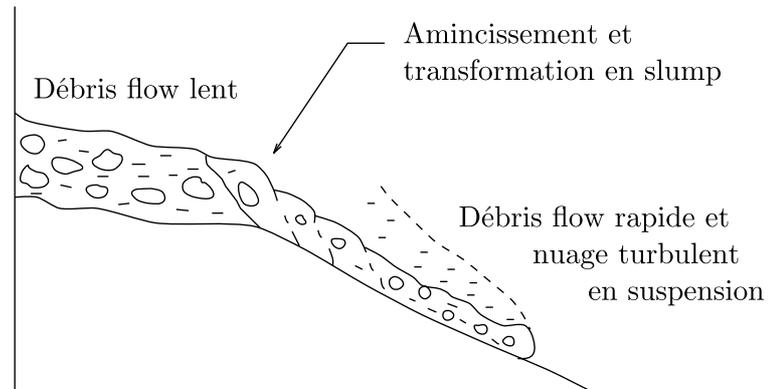


FIG. 1.6 – Écoulement à débris mouvant sur une faible pente, et qui, sous augmentation du gradient de pente donne naissance à un slump mince, qui à son tour se transforme en écoulement à débris rapide surmonté d'un nuage en suspension turbulente (d'après Stow [1986]).

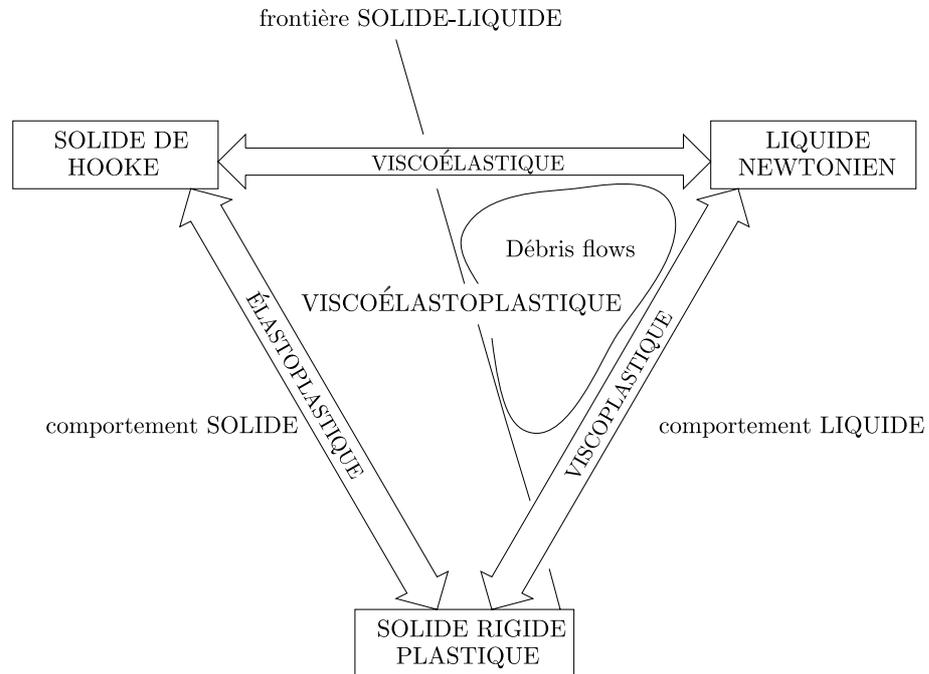


FIG. 1.7 – Positionnement de la rhéologie des écoulements à débris.

Pour rendre compte des observations expérimentales plusieurs mécanismes de support de particules ont été proposés :

- La pression de dispersion produite par les collisions inter-granulaires ;
- La rigidité de la matrice due à la cohésion de la masse des sédiments en mouvement ;
- Les forces de friction et de flottabilité induites par la matrice haute densité du courant ;
- La turbulence à grand nombre de Reynolds ($Re = \frac{\rho u l}{\eta}$ où η est la viscosité dynamique) et nombre de Froude densimétrique ($Fr = \sqrt{\frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{u^2}{gh}}$ inverse de la racine carrée du nombre de Richardson) plus grand que l'unité, pour certains courants importants [Pickering *et al.*, 1989].

1.3.6.1 Pression de dispersion

La plupart des mécanismes qui se cachent derrière la dynamique des écoulements à débris étaient inexpliqués jusqu'à ce que le concept de pression de dispersion (*dispersive stress*) soit proposé par Bagnold [1954]. A partir d'expériences sur des particules soumises à un cisaillement dans un cylindre en rotation, il définit deux régimes :

- Visqueux ;
- Inertiel.

Dans le régime inertiel (cf. section 1.8.3 page 23), les contraintes sont engendrées par les collisions des particules lorsqu'une couche bouge pour dépasser l'autre couche adjacente. La contrainte normale générée par ce processus est la pression de dispersion.

Par une analyse semblable à celle de la théorie cinétique des gaz, Bagnold montre que cette contrainte normale est proportionnelle au carré des taux de déformation et au carré du diamètre des particules [Bagnold, 1954; Hugot, 1997].

Cependant d'après les observations d'écoulements à débris actuels, il paraît certain que la pression de dispersion ne constitue pas le seul mécanisme impliqué dans le support des particules de sédiments. En effet, des débris ont été observés flottant alors même que l'écoulement était statique, indiquant par là la présence d'un autre mécanisme de support.

1.3.6.2 Rigidité de la matrice

Le fait que des particules dans un écoulement stationnaire n'aient tendance ni à chuter, ni à remonter à la surface implique, comme l'a observé Johnson [1970], qu'il existe un mécanisme de support en plus des forces de dispersion, que Johnson appelle « rigidité de la matrice » (*matrix strength*). L'origine exacte de cette rigidité n'est pas très claire.

D'après Hampton [1975], le réseau de particules d'argiles floculées présent dans tout le fluide serait responsable de cette rigidité. La floculation est le résultat de forces attractions existant entre deux particules d'argiles. La force minimale requise pour casser ce réseau de particules floculées a été définie comme étant la rigidité de la matrice. Une des implications inhérentes à cette théorie est qu'elle rend nécessaire la présence d'argiles pour qu'il existe une rigidité dans l'écoulement.

Hampton [1979] a également montré que cette rigidité est entre autre fonction de la minéralogie des argiles ainsi et du taux de cisaillement. En effet, d'après ses expériences sur la compétence des boues, il trouve que cette dernière décroît après cisaillement de la suspension. Il en déduit qu'il y a présence d'une rigidité de la matrice dans les débris flows. Celle-ci est en partie fonction du taux de cisaillement, puisqu'elle décroît et persiste quand le cisaillement cesse.

Davies [1986] ne partage pas ce point de vue, et soutient que lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est la structure ferme du mélange qui transmet l'excès de poids des particules au lit. Cependant par définition, lorsque l'écoulement commence, la limite de rigidité a été dépassée, et il n'existe donc plus de matrice qui puisse transférer les contraintes au sol. Tout excès de poids se traduit par une augmentation du taux de cisaillement de l'écoulement.

1.3.6.3 Flottabilité et compétence

Parmi tous les mécanismes de support des particules, la flottabilité apparaît constituer le mécanisme le plus évident [Hampton, 1975, 1979; Johnson, 1970; Middleton et Hampton, 1976; Pierson, 1981; Rodine et Johnson, 1976]. Dans la théorie généralement acceptée, la matrice est composée d'un mélange homogène d'argiles, d'eau et de silts fins. Les clastes présents dans l'écoulement sont dispersés dans ce fluide. La flottabilité (dans le sens Archimédien) est le poids du fluide déplacé. Rodine et Johnson [1976] supposent néanmoins que la flottabilité est déterminée par le déplacement total du matériau qui inclut la matrice et les particules de taille inférieure aux clastes en question.

Il existe plusieurs formules exprimant la compétence des écoulements à débris. Pour éviter toute confusion, on définit la « compétence transportée » (*transport competence* [Pierson, 1981]) comme étant la taille moyenne des plus grosses particules qui peuvent être transportées par l'écoulement et la « compétence suspendue » (*suspended competence* [Hampton, 1975]) comme la taille maximale des particules qui puissent être suspendues dans le mélange de débris. Les différentes formulations sont détaillées dans l'annexe B page 267.

Une des faiblesses de ces analyses réside dans la non prise en compte de la contribution de la pression de dispersion. On peut, de plus, se demander si le fait que la pression du fluide interstitiel soit supérieure à la pression hydrostatique peut augmenter la flottabilité. En effet, même si la pression interstitielle met de 20 minutes à plusieurs heures pour se dissiper dans un dépôt [Pierson, 1981], un milieu en déformation continue où les pores sont continuellement cassés et reformés, risque fort de dissiper très rapidement tout excès de pression interstitielle (cf. section 1.8.3 page 23). Le fluide et les grains s'ajusteront aux excès de pression.

1.3.6.4 Classement inverse

L'étude de la tête des écoulements à débris montre que les plus grosses particules ont tendance à se déplacer latéralement et verticalement, produisant ainsi un classement inverse (*reverse* ou *inverse grading*) des particules dans l'écoulement [Middleton et Hampton, 1976; Takahashi, Nakagawa, Harada et Yamashiki, 1992]. Ce phénomène de migration des clastes sur les bords de l'écoulement est parfois appelé « ségrégation ». En outre, dans certains dépôts, il a été observé des séquences où le classement des particules était de fin à la base à grossier au sommet [Fisher et Mattison, 1968; Naylor, 1980]. Il existe peu d'analyses qualitatives pour expliquer les mécanismes qui se cachent derrière le classement inverse.

On a pensé que la pression de dispersion de Bagnold [1954] était un des principaux mécanismes responsables de la ségrégation. En effet, l'expression de la pression de dispersion (composante normale) montre qu'elle est directement proportionnelle au carré du diamètre des particules et du gradient des vitesses. Ainsi une augmentation du diamètre des particules implique une augmentation de la pression de dispersion. De même, une augmentation du gradient de vitesse (ou du taux de déformation) implique également une augmentation de la pression de dispersion. Par conséquent, près du lit de l'écoulement, où les gradients de vitesse sont élevés, la pression de dispersion est élevée et provoque un mouvement ascendant des particules.

Fisher et Mattison [1968], en se basant sur le principe de Bernoulli, expliquent le granoclassement inverse comme étant le résultat du mouvement des particules, à partir d'une région de haute pression, au bas de l'écoulement, vers une région de basse pression, en haut de l'écoulement.

Une autre explication avancée repose sur le principe du tamisage cinétique (*kinetic sieving*): les particules les plus fines se déplacent entre les particules les plus grosses et les transportent donc vers le haut.

Il existe peu de publications qui approchent de manière analytique la ségrégation [Savage et Lun, 1988; Takahashi, 1980, 1993]. Citons néanmoins, Takahashi [1980, 1993] qui tente d'expliquer ce phénomène par le modèle de fluide dilatant de Bagnold [Hugot, 1997].

1.4 Coulées de boue (*mudflows*)

Comme le terme l'indique, les *mudflows* représentent des écoulements de matériaux fins et cohésifs. Ils se différencient des écoulements à débris par la taille des particules en suspension qui, dans ce cas, ne présente pas de grandes variations. Les *mudflows* sont en effet caractérisés par la présence d'au moins 50% de particules de la taille des sables, silts, et argiles.

Ces écoulements ont été essentiellement observés dans le cadre subaérien. La première référence aux *mudflows* (coulées de boue) est due à Mc Gee [1897], ils étaient alors appelés *sheet floods* (littéralement : inondations en nappes, résultat du débordement des fleuves dans les plaines d'inondation).

1.5 Écoulements en grains (*grain flows*)

Ces écoulements aussi appelés *grain flows* sont des mélanges quasi-viscoplastiques de grains non cohésifs, où la pression de dispersion et les interactions granulaires assurent la dispersion des particules et engendrent la mobilité du mélange. Le profil des vitesses est pratiquement parabolique avec la présence d'un scellement de grains non cisailés se déplaçant passivement au-dessus d'un plan actif de cisaillement. La présence d'une pente relativement importante est nécessaire pour que le mouvement soit auto-entretenu ; dès que celle-ci diminue, l'énergie potentielle et cinétique de l'écoulement devient inférieure à l'énergie dissipée par les frottements et la turbulence ; l'écoulement cesse alors rapidement [Lowe, 1976a].

Il y a donc nécessité d'une pente importante (supérieure à 17–22°, *i.e.* supérieure à l'angle de repos) pour engendrer et maintenir ces phénomènes, ce qui explique leur extension limitée.

1.6 Écoulements fluidisés (*fluidized flows*)

Les écoulements fluidisés ou *fluidized flows* sont caractérisés par le fait que les particules non-cohésives (sables ou silts) sont maintenues en suspension par la surpression due au fluide interstitiel. Cette surpression est créée par le mouvement ascendant de la phase fluide qui s'échappe à travers la fraction solide ; l'écoulement a, alors, un comportement semblable à celui d'un fluide hautement visqueux [Lowe, 1976b]. Les seuls sédiments susceptibles d'être transportés par ce processus sont des sables ou des silts faiblement compactés.

Ce type d'écoulement peut être déclenché par un ébranlement qui provoque une rupture de la cohésion, une perte de contact entre les grains et un effondrement de l'empilement. Dès lors, l'écoulement apparaît, et cela même sur des pentes relativement faibles (supérieures à 2–3°). L'écoulement s'arrête de bas en haut, lorsque la surpression baisse, c'est à dire lorsque le fluide interstitiel s'échappe. C'est un processus qui ne se produit pas habituellement de manière indépendante.

1.7 Courants turbiditiques (*turbidity currents*)

Le courant turbiditique est un type de courant de densité ou de courant gravitaire [Simpson, 1982] dans lequel le fluide le plus dense est une suspension turbulente de sédiments relativement diluée. Beaucoup d'autres types de courants de densité existent dans la nature, les panaches d'eau chargée en boue à l'embouchure des fleuves [Mulder *et al.*, 1996], les tempêtes de poussières, les fronts des brises marines, les avalanches de neiges poudreuses [Hermann *et al.*, 1993; Naaïm, 1995], les nuées ardentes causées par les éruptions volcaniques [Delinger, 1987; Valentine et Wohletz, 1989], et les courants verticaux de densité causés par les panaches de cendres volcaniques tombant à travers l'atmosphère et les océans.

Les courants de turbidité sont le type principal de transport des sédiments dans les océans, mers et lacs, les plus importants et peut-être les mieux connus des processus de resédimentation. Ils ont été très étudiés en laboratoire et en théorie.

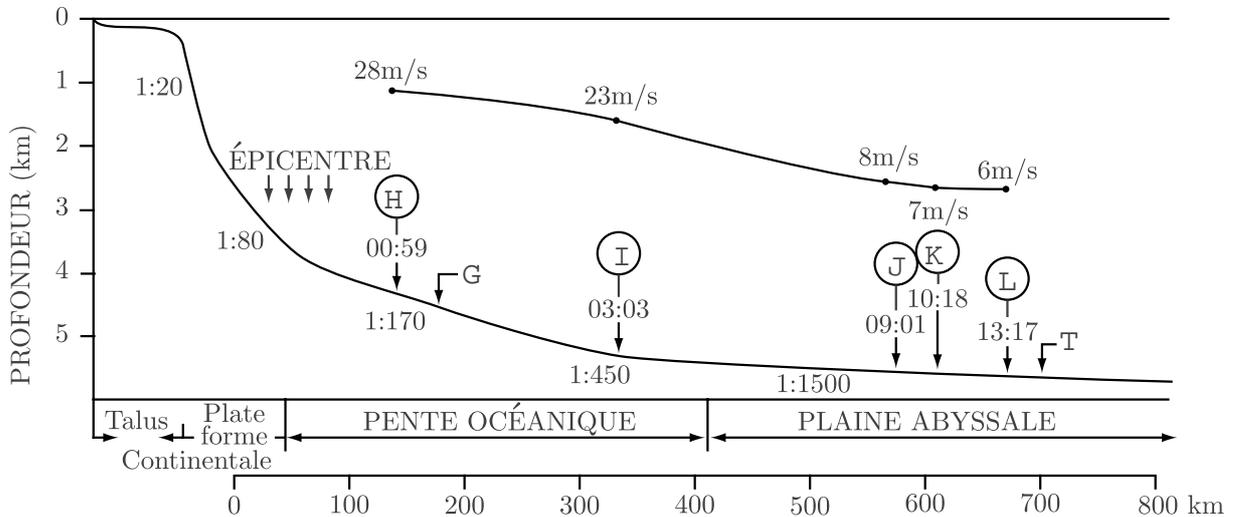


FIG. 1.8 – Le tremblement de terre de Grand Banks, le 18 Novembre 1929, et les ruptures de câbles qui en suivirent. Les flèches indiquent la position ou la projection de la position des ruptures de câbles sur le profil longitudinal du fond marin, le long du passage supposé emprunté par l'écoulement. Les rapports (p. ex. 1:20) indiquent les gradients de pente. Les temps (p. ex. 00:59) indiquent la durée écoulée entre le tremblement de terre et les ruptures de câbles. La vitesse du courant (calculée d'après les ruptures) est indiquée par le diagramme supérieur. Les lettres G et T correspondent respectivement aux dépôts de gravier (à la base du talus continental) et aux turbidites (sur la plaine abyssale) (d'après Hsü [1989]).

L'observation de courants de densité dans les lacs, de petits courants turbiditiques dilués naissant à la tête des canyons [Daly, 1936] et de la rupture soudaine, imprévue mais séquentielle, des câbles télégraphiques sous-marins [cf. [Heezen, Ericson et Ewing, 1954; Heezen et Ewing, 1952] et figure 1.8], sont autant de témoignages de l'existence et de l'importance des courants turbiditiques. De plus, l'omniprésence de leurs dépôts caractéristiques, appelés turbidites, démontre qu'ils ont fréquemment lieu dans tous les milieux marins profonds.

1.7.1 Source

L'initiation de l'écoulement se produit de l'une des quatre façons suivantes :

1. Par la transformation des *slides*, des *slumps* ou des *debris flows* à l'occasion par exemple d'un ressaut hydraulique (*hydraulic jump*) par mélange avec l'eau de mer [Allen, 1971; Komar, 1971; Mulder, 1993; Ravenne et Beghin, 1983];
2. Par l'instabilité de masses importantes de sables apportés par les courants à la tête des canyons sous-marins [Mulder *et al.*, 1996; Pickering *et al.*, 1989] (cf. figure 1.9 page suivante) ;
3. Par les tempêtes remuant les couches de sédiments non-consolidés et la constitution d'une couche marine profonde avec de la boue en suspension concentrée (*bottom nepheloid layer*) (cf. figure 1.10 page 21) ;
4. Directement par les sédiments en suspension apportés dans la mer par les rivières ou l'eau de fonte des glaciers. Dans ce dernier cas, on a l'exemple d'un courant hyperpycnal, qui est un courant turbulent généré à l'embouchure d'un fleuve lorsque la charge solide en suspension est suffisante pour que la densité de l'ensemble eau douce-sédiments en suspension excède la densité de l'eau de mer. Dès lors, le flux turbide plonge, suit le fond, l'érode et s'auto-entretient pour former un courant de turbidité [Piper et Savoye, 1993].

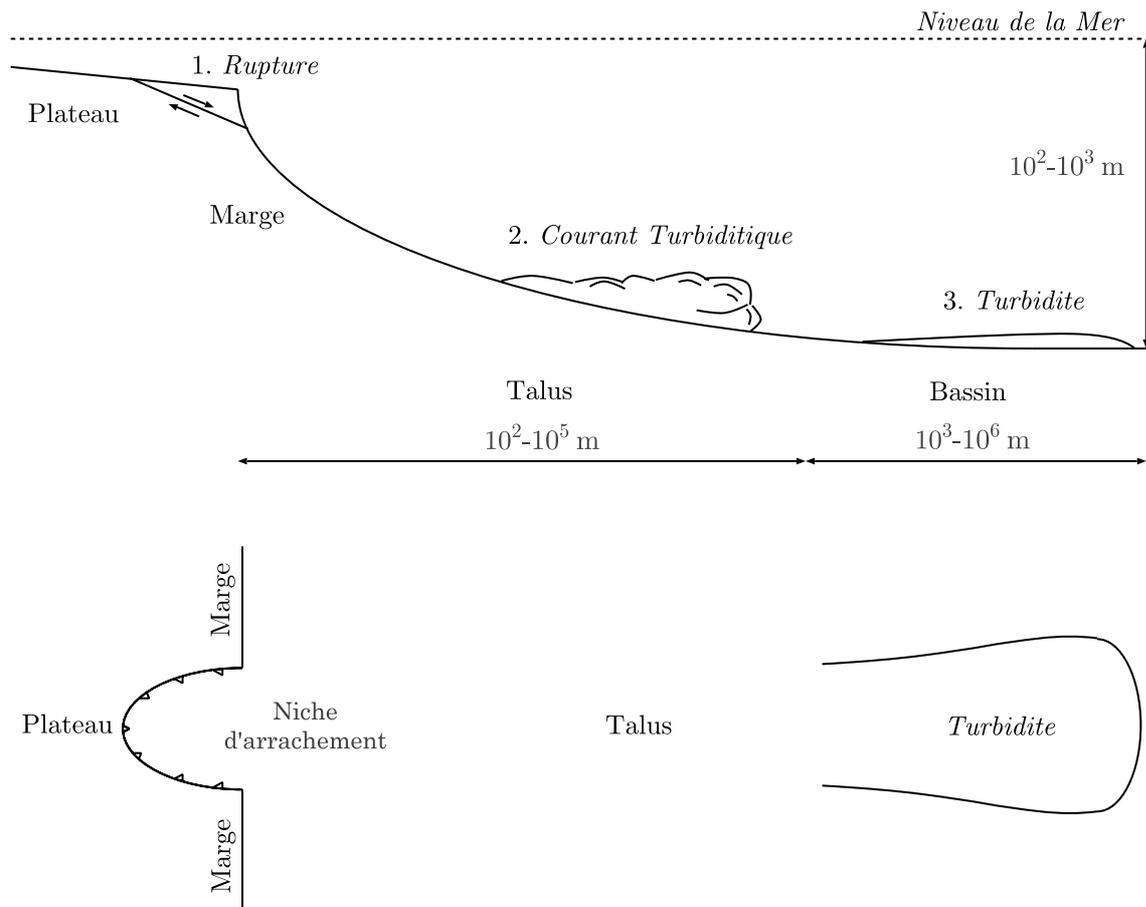


FIG. 1.9 – Modèle conceptuel du courant turbiditique catastrophique, résultant d'une rupture de pente. En haut: Profil du bassin, illustrant les principaux éléments géomorphologiques et les principaux processus liés au courant gravitaire. En bas: Vue de dessus du système (d'après Rothman et al. [1994a]).

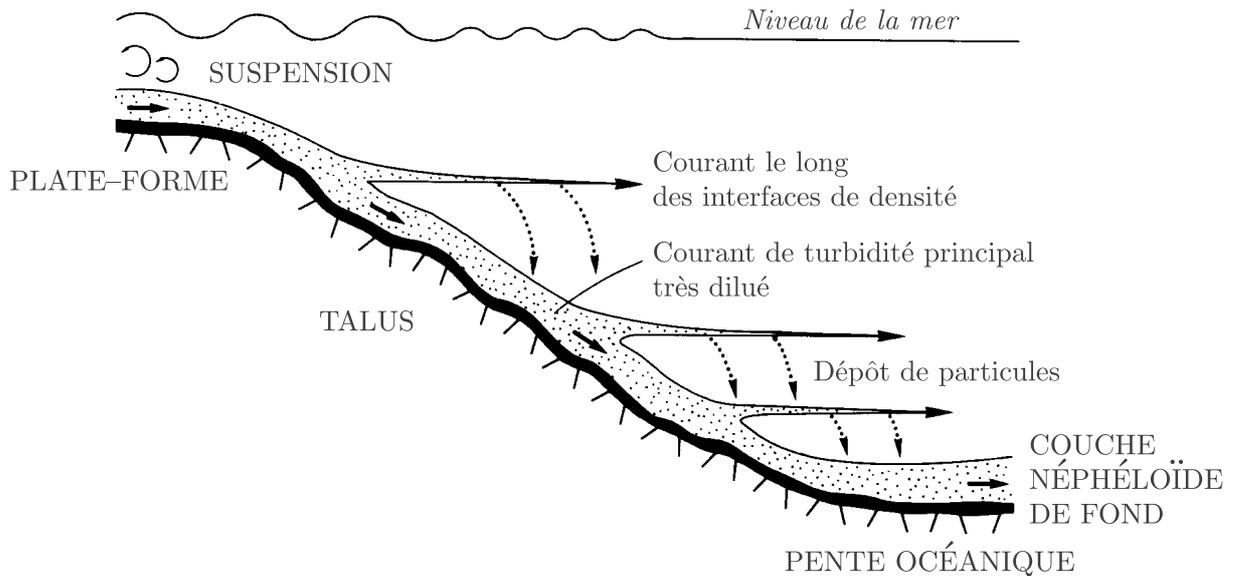


FIG. 1.10 – Illustration de la couche néphéloïde de fond : Les tempêtes, remuant les sédiments non consolidés, créent des courants turbiditiques très dilués (*lutite flows*) qui se déplacent sur le fond des océans ou le long des interfaces de densité. De plus, ils sont parfois conduits par l'eau froide cascadeant le long de la pente. L'amincissement des flèches, en largeur, indique une baisse de la concentration (d'après Pickering et al. [1989]).

Selon la manière dont l'écoulement est initié et selon l'apport en sédiments, deux types majeurs de courants de turbidité peuvent être différenciés [Ravenne et Beghin, 1983] :

1. Les courants de vie relativement longue (du type courant turbide), ce dernier type d'écoulement pouvant être stationnaire ou uniforme.
2. Les courants de vie relativement courte (du type bouffée turbide)

Parker [1982], en utilisant l'analyse dans le plan de phase, montre théoriquement que ces deux types de courants correspondent à deux états « d'équilibre » :

1. Un état à basse densité et faible vitesse ;
2. Un état à haute densité et haute vitesse, appelé « catastrophique », ayant assez de puissance pour générer des canyons sous-marins.

Cette distinction se rencontre également pour le mouvement des avalanches. L'état catastrophique correspond aux avalanches lourdes ou de plaques, alors que l'état de faible vitesse correspond aux avalanches poudreuses [Hopfinger, 1983].

1.7.2 Profil

Les observations des courants de densité atmosphériques et pyroclastiques [Delinger, 1987; Hermann et al., 1993; Hopfinger, 1983; Sampl, 1993; Valentine et Wohletz, 1989] ainsi que les expériences sur les bouffées de densité subaquatiques [Benjamin, 1968; Laval, 1988; Laval et al., 1988; Middleton et Hampton, 1976; Ravenne et Beghin, 1982, 1984] ont montré que les courants turbiditiques développaient une structure longitudinale caractéristique (cf. figure 1.11 page suivante) avec une tête (*head*), un cou (*neck*), un corps (*body*) et une queue (*tail*).

La tête des courants de turbidité a une forme particulière et est soumise à un écoulement particulier. Dans le plan parallèle à l'écoulement, la tête apparaît lobée, avec des divergences locales par rapport à la direction principale de l'écoulement, et avec un arrangement dans le sens de la largeur de lobes et de fentes régulièrement espacées [Allen, 1971; Simpson, 1972]. A l'intérieur de la tête, il existe un écoulement

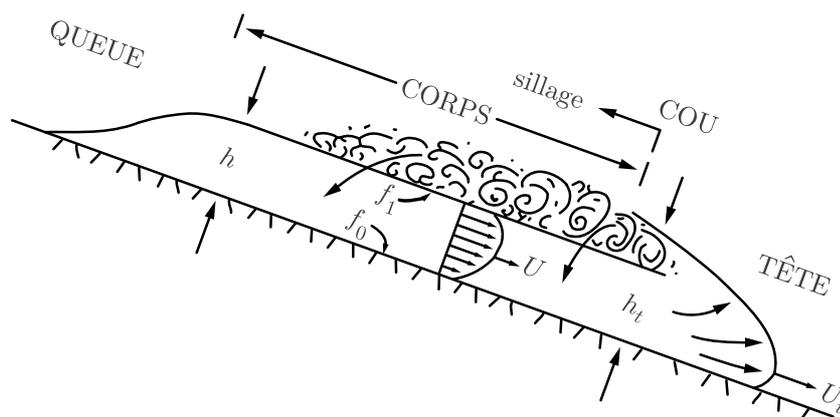


FIG. 1.11 – Coupe longitudinale simplifiée d'un écoulement turbiditique, faisant apparaître les quatre régions caractéristiques : tête, cou, corps, queue (d'après Pickering et al. [1989]).

de type circulaire vers l'avant et vers le haut. Les plus gros grains tendent à se concentrer dans cette région.

Le corps correspond à la partie derrière la tête, où l'écoulement est toujours uniforme en épaisseur. Des phénomènes de dépôt ont lieu dans le corps lorsque la tête érode le sol. Sur des pentes supérieures à $1,24^\circ$, la tête est plus épaisse que le corps, alors que sur des pentes inférieures, le corps est plus épais que la tête [Komar, 1971]. Cette observation est importante puisqu'elle détermine le type de sédiment qui va déborder dans les environnements chenalés.

Enfin, la queue est la partie où l'écoulement s'amincit rapidement et devient très dilué.

Le mélange entre l'écoulement et l'eau ambiante à l'interface supérieure produit une couche d'entraînement diluée. Ce mélange, ainsi que la sédimentation et la séparation de parties de la suspension au niveau du cou ralentissent et éventuellement, arrêtent l'écoulement turbiditique. Pour un courant turbiditique moyen, les plus gros sédiments sont déposés dans un intervalle de temps de quelques heures, alors que la sédimentation complète de la queue contenant des grains fins prend une semaine [Kuenen, 1967]. Les courants turbiditiques sont donc des événements rares et de courte durée à l'échelle géologique.

1.7.3 Vitesse

Les courants turbiditiques qui apparaissent dans les océans sont d'échelle supérieure de plusieurs ordres de grandeur à ceux réalisés dans les laboratoires. Aussi, le champ sur lequel ces résultats expérimentaux peut être appliqué est problématique. Dans la nature, les ruptures séquentielles de câbles télégraphiques sous-marins sont le signe de passage des courants turbiditiques à forte concentration et constituent une source d'information importante.

L'exemple classique est celui du tremblement de terre du Grand Banks en 1929 (cf. figure 1.8 page 19) qui déclencha un énorme effondrement, suivi d'un courant turbiditique qui parcourut plusieurs centaines de kilomètres sur la plaine abyssale de Sohm [Heezen et Ewing, 1952]. La vitesse maximale atteinte par ce courant était d'environ 25 m/s (90 km/h) [Kirwan, Doyle, Bowles et Brooks, 1986; Kuenen, 1952]. De même en France, un glissement sous-marin se produisit à l'aplomb de l'aéroport de Nice en 1979, produisant un courant turbiditique de haute densité atteignant des vitesses supérieures à 20 m/s (72 km/h). Au pied du talus continental (à environ 50 km) ces vitesses se stabilisent à moins de 5 m/s (18 km/h) [Bowen, Normark et Piper, 1984; Mulder, 1993; Mulder *et al.*, 1996; Piper et Savoye, 1993; Stow et Bowen, 1980]; l'écoulement est alors dilué.

1.7.4 Dimension caractéristique

Une idée de la largeur et de l'épaisseur des courants turbiditiques, de la distance qu'ils parcourent peut être déduite de la topographie des dépôts résultants. Les levées naturelles des chenaux sous-marins

sont dues (c'est l'hypothèse la plus probable) au débordement des courants turbiditiques chenalisés. De tels écoulements doivent donc être épais de plusieurs dizaines à plusieurs centaines de mètres [Komar, 1969; Stow et Bowen, 1980]. Les tentatives faites pour estimer les caractéristiques physiques des courants turbiditiques de faible densité par Bowen *et al.* [1984]; Stow et Bowen [1980] montrent qu'ils varient en épaisseur de quelques mètres jusqu'à plus de 800 m dans le cas d'écoulements complètement chenalisés.

La longueur des chenaux en eaux profondes et l'étendue des plaines abyssales indiquent toutes deux la capacité des courants turbiditiques à se déplacer sur des distances allant jusqu'à 4000–5000 km [Chough et Hesse, 1976; Piper, Stow et Normark, 1984].

1.8 Classification hydromécanique

Comme nous l'avons vu précédemment, les différents matériaux et écoulements se combinent en plusieurs classes de mouvement de masse. Ces différents processus vont être classifiés de manière à ce que le comportement mécanique sous-jacent à chacun d'eux puisse être identifié.

Les courants gravitaires seront séparés en trois groupes majeurs :

- Les suspensions de sédiments ;
- Les écoulements hyperconcentrés (*hyperconcentrated flows*) ;
- Les écoulements granulaires (*granular flows*).

Toutes les formes d'écoulements impliquant de l'eau et des sédiments peuvent être incluses dans un de ces groupes. Pour bien appréhender cette classification, il est essentiel de bien connaître les caractéristiques de ces écoulements.

1.8.1 Suspensions de sédiments

Pour de faibles concentrations, ces écoulements se comportent essentiellement comme un fluide Newtonien laminaire ou turbulent. Lorsque la concentration augmente, les interactions particulières augmentent et déjà, le comportement de l'écoulement s'écarte de celui d'un fluide Newtonien. Si des argiles sont présentes dans l'écoulement, elles commencent, par la présence de forces électro-chimiques, à former des flocons. Ces derniers tendent à donner une rigidité à l'écoulement avec une limite de rigidité (*yield strength*). Une déformation du fluide n'est alors possible que si les contraintes appliquées permettent de rompre ces liaisons électro-chimiques (fluide à seuil ou fluide de Bingham). Ce concept de limite de rigidité nous amène à considérer une autre classe d'écoulement.

1.8.2 Écoulements hyperconcentrés (*hyperconcentrated flows*)

Ces écoulements sont principalement caractérisés par des concentrations massiques en solides (argiles) comprises entre 40 et 80%, et par une limite de rigidité (cf. section 1.8.1). Cette rigidité initiale est typique de nombreux fluides non-Newtoniens. La concentration pour laquelle cette rigidité existe dépend du type de minéralogie des argiles, ainsi que de la distribution en taille des particules. Cependant, il a été relevé des limites de rigidité dans des expériences sur des suspensions de smectites où les concentrations étaient inférieures à 3% [Hampton, 1972]. Pour d'autres minéraux argileux, elles étaient plus élevées.

Certains auteurs, considérant que les hautes concentrations impliquent forcément la présence d'une limite de rigidité, incluent les écoulements à débris (argileux) dans les écoulements hyperconcentrés [O'Brien et Julien, 1985]. On trouve donc parfois regroupée sous ce nom des écoulements comme les *mud flood* ou *non cohesive mudflow*.

1.8.3 Écoulements granulaires (*granular flows*)

Ce sont des écoulements à haute concentration solide, associés aux matériaux granulaires (sables) où la densité du fluide interstitiel est faible et où l'écoulement principal est gouverné par les forces interparticulaires, les collisions et les frictions. Ces écoulements sont soumis à des processus de déformation

continue. Le fluide interstitiel maintient une pression équivalente à la pression hydrostatique à travers l'écoulement. Un excès de pression se dissipe immédiatement, car l'eau interstitielle peut s'écouler librement.

Savage [1984], propose une classification des écoulements granulaires qui est une extension de la classification de Bagnold [1954]. C'est ainsi qu'il définit trois régimes d'écoulements :

- **Quasi-statique** : le régime quasi-statique est l'état naissant de l'écoulement, où le comportement est à prédominance plastique. Lorsque les contraintes appliquées au milieu granulaire sont telles que les liaisons de friction sont rompues, la masse commence à se déplacer. Cet écoulement, principalement confiné par des liaisons de cisaillement le long de plans de cisaillement, met en jeu des blocs (composés de multiples particules) en mouvement les uns par rapport aux autres. Ce sont ces déformations lentes, maintenues pendant une longue période de temps, qui définissent ce régime.
- **Visqueux** : Lorsque la concentration en particules ainsi que les taux de déformations sont plus faibles, et que le fluide interstitiel joue un rôle dominant dans la détermination de la viscosité de l'écoulement, on parle alors de régime visqueux [Bagnold, 1954]. Des auteurs, comme Davies [1986], considèrent que certains types d'écoulements à débris (sableux) entrent dans cette catégorie d'écoulements granulaires.
- **Inertiel** : Le régime inertiel est caractérisé par l'écoulement rapide de matériaux granulaires où les interactions particulières dominent dans les transferts de quantité de mouvement de l'écoulement, le fluide interstitiel jouant un rôle mineur.

Plusieurs auteurs supposent que les écoulements à débris, ainsi que les *debris slides* sont des écoulements inertiels [Bagnold, 1954; Takahashi, 1981]. D'autres écoulements très inertiels tels que les avalanches de pierres appelées *Sturzstroms* [Hsü, 1975] sont caractéristiques de ce régime. Du fait de leur grande inertie, ces écoulements sont capables de remonter les flancs des vallées sous-marines.

1.9 Conclusion

Ce premier chapitre a montré la grande variabilité et diversité des « écoulements » associés au transport des sédiments par resédimentation.

Les propriétés des écoulements sont très fortement liées à la nature des matériaux mis en jeu. Ces derniers peuvent être des sables ou des graviers qui sont des sédiments non cohésifs, ou au contraire des boues ou des argiles qui sont des sédiments cohésifs.

Les concentrations en sédiments jouent également un rôle prépondérant dans la détermination du type de mouvement. Dans la nature, on rencontre aussi bien de faibles concentrations, comme dans les courants turbiditiques, que des concentrations très élevées, comme dans les écoulements à débris.

Le comportement de l'écoulement est fonction des mécanismes de support des particules dont les plus importants sont :

- la rigidité de la matrice ;
- les collisions ou frictions inter-granulaires ;
- la turbulence.

Enfin, il est important de remarquer la grande variabilité des échelles associées aux phénomènes, ce qui peut être problématique pour une modélisation. En effet, les échelles de temps associées aux mécanismes de support sont de l'ordre de la seconde. Les événements durent, eux, plusieurs heures ou plusieurs jours. Enfin, entre les événements, il peut s'écouler plusieurs années ou milliers d'années. Les échelles d'espace sont également variées. Celles associées aux mécanismes de support sont de l'ordre du millimètre, du centimètre ou du mètre, alors que celles associées aux événements sont décimétriques ou kilométriques.

Ce chapitre a permis de mieux comprendre les différents mécanismes de transport gravitaire en eaux profondes. Les courants turbiditiques, ainsi que les écoulements à débris, semblent être les processus de sédimentation gravitaire majoritairement responsables des dépôts marins profonds, fait qui est confirmé par l'étude des dépôts et de leurs caractéristiques (cf. annexe A page 251). En effet, ce sont les seuls capables de transporter les sédiments sur de longues distances et de faibles pentes.

Dans les chapitres suivants nous nous limiterons à l'étude des suspensions turbulentes de sables (sédiments non-cohésifs).

*S'il n'y avait que le temps,
les choses ne pourraient exister que successivement.
S'il n'y avait que l'espace,
les choses ne pourraient exister que simultanément.
La matière unit la fuite inconstante du temps
et la rigoureuse immobilité de l'espace.
Schopenhauer.*

Chapitre 2

Une petite histoire de la modélisation

Ce chapitre présente une revue bibliographique de la modélisation mécanique des écoulements gravitaires sub-aquatiques.

On peut différencier essentiellement quatre approches pour la modélisation déterministe des écoulements contenant des particules :

L'approche empirique ou phénoménologique : Les modélisations effectuées selon cette approche sont fondées, non seulement sur la théorie, mais également sur l'expérience. Une étude de sensibilité permet de sélectionner les paramètres dont l'influence sur les résultats de la modélisation physique est la plus importante. Ces paramètres sont ensuite combinés par analyse dimensionnelle. Les formules obtenues contiennent des constantes qui sont ajustées par les résultats des expériences.

L'approche mécanique des milieux continus : On suppose que les propriétés matérielles d'un ensemble de particules peuvent être représentées par des fonctions continues et, que le milieu peut être divisé indéfiniment sans perdre ses propriétés définissantes. Dans cette approche la notion de particules ou de granules discrets n'est pas conservée.

L'approche discrète : On considère dans ce cas un ensemble de particules de taille finie (idéalement des sphères rigides ou élastiques) et on tente de déduire les lois gouvernant le comportement mécanique de l'ensemble complet. On a alors recours à des fonctions statistiques telles que la fonction de probabilité de présence d'une particule ou d'un grain.

L'approche particulière : On considère, ici encore, un ensemble de particules de taille finie (idéalement des sphères rigides ou élastiques) mais, cette fois, on simule directement la quantité de mouvement de chaque particule.

Nous montrerons, comment au « fil du temps », les modélisations mécaniques se sont enrichies et complexifiées, depuis les approches les plus « rustiques » (stationnaires et sans dimensions) jusqu'aux derniers développements permis par la modélisation numérique.

Sommaire

2.1 Premiers pas	26
2.1.1 Modélisation stationnaire et uniforme de la vitesse en une dimension	26

2.1.2	L'approche énergétique	30
2.2	Modèles instationnaires à une dimension	33
2.2.1	Variation du volume de l'écoulement	33
2.2.2	Modélisation instationnaire de la vitesse en une dimension	34
2.2.3	Sédimentation	34
2.2.4	Conclusions	35
2.3	Les apports de l'hydrodynamique	35
2.3.1	Théorie de la couche limite – Écoulement quasi-parallèle	36
2.3.2	Méthodes intégrales	36
2.3.3	Modèles stationnaires non-uniformes	37
2.3.4	Équations d'ondes longues – modèle de Saint Venant	39
2.4	1990–1999 : Les années Navier–Stokes	40
2.4.1	Traitement avec deux phases dissociées (modèle à deux fluides)	41
2.4.2	Le fluide composite	42
2.4.3	Conclusions sur les modèles	47
2.5	L'approche directe : des modèles hors de prix	49
2.5.1	Une description fine des phénomènes	49
2.5.2	Application aux écoulements gravitaires	49
2.6	Résumé, conclusions et position du problème	50

Dans le cas des événements catastrophiques on peut discerner trois phases séquentielles d'écoulement : La Phase 1 comprend l'initiation de l'écoulement et son accélération. Durant cette phase, l'érosion domine la sédimentation ;
 La Phase 2 constitue la phase d'écoulement proprement dit, qui peut être à vitesse constante si la pente est uniforme. Durant cette phase, l'érosion et la sédimentation interviennent de façon à peu près égale ;
 La Phase 3 correspond à une décélération de l'écoulement. Durant cette phase, la sédimentation l'emporte sur l'érosion.

2.1 Premiers pas

Les premières modélisations des courants turbiditiques tentèrent de répondre à trois questions essentielles :

1. Quelles vitesses atteignent-ils ?
2. Quelle est leur densité ?
3. Quelle est leur concentration ?

La plupart des travaux de recherche expérimentaux et théoriques effectués par des ingénieurs dans les années 60-70 ont été consacrés à une classe restreinte de courants gravitaires : Ceux de la phase 2 dont la vitesse est constante et qui sont composés de suspensions diluées à grains fins [Middleton, 1966c]. Comme la plupart de ces études n'ont pas pris en considération les effets d'érosion / sédimentation, elles ont reçu peu d'attention de la part des géologues. Néanmoins, la section suivante se propose de préciser l'esprit de ces travaux.

2.1.1 Modélisation stationnaire et uniforme de la vitesse en une dimension

Daly postula, en 1936, l'existence de courants turbiditiques dans les océans afin d'expliquer la présence des canyons sous-marins. Il supposa en effet, que ces canyons étaient le résultat du pouvoir érosif de ces courants.

2.1.1.1 Un modèle dérivé de l'équation de Chézy

Considérons l'équation semi-empirique de Chézy donnant la vitesse moyenne de l'écoulement dans un chenal fluvial :

$$U = C\sqrt{rs} \quad (2.1)$$

où U est la vitesse moyenne de l'écoulement ; r le rayon hydraulique (\sim profondeur du chenal) ; s la pente et C une constante empirique. Cette équation est valable pour des écoulements de fluide en canal ouvert (c'est à dire applicable aux rivières et aux torrents par exemple).

En intégrant le fait que la masse volumique apparente d'un objet dans l'eau est $\Delta\rho = \rho - \rho_f$, Daly [1936] développa une formule reliant la vitesse à la densité de l'écoulement, la profondeur du courant, et la pente :

$$U = C\sqrt{h s d} \quad (2.2)$$

où h est l'épaisseur moyenne de l'écoulement et d le contraste de densité entre l'écoulement et le fluide ambiant.

Kuenen [1952] obtint expérimentalement, pour la constante C , une valeur d'environ $140 \text{ cm}^{1/2}\cdot\text{s}^{-1}$ pour des écoulements turbiditiques. Par ailleurs, la constante C peut être calculée en fonction du coefficient de friction adimensionnel de Darcy-Weisbach, f :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (2.3)$$

où g est l'accélération de la gravité.

La formule de Daly (équation (2.2)) n'est pas réellement applicable lorsque les densités des deux fluides (du mélange et du fluide ambiant) sont du même ordre de grandeur, ce qui est précisément le cas des écoulements turbiditiques peu denses. De plus, sur de très faibles pentes, elle conduit à des valeurs de vitesse pratiquement nulles, alors que le courant peut posséder une vitesse appréciable.

La prise en compte de la friction à l'interface entre le courant et le fluide ambiant permet d'améliorer le modèle.

2.1.1.2 Prise en compte de la friction interfaciale

En considérant qu'une rivière est une forme de courant de densité dans lequel la différence de masse volumique, $\Delta\rho = \rho - \rho_f$, entre l'écoulement et le fluide ambiant (air) est grande, et dans lequel il y a très peu de résistance de friction à l'interface supérieure, Middleton [1966c] détermine, à l'aide de la définition (2.3) du coefficient de Darcy-Weisbach, la vitesse d'un courant de densité par une formule analogue à celle de Daly :

$$U = \sqrt{\frac{8g'}{f(1+a)}} \cdot hs \quad (2.4)$$

où g' est l'accélération apparente de la gravité ($g\Delta\rho/\rho$) et a un coefficient de friction fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Froude.

Cette équation est obtenue en écrivant simplement l'équilibre entre le poids apparent et la résistance de friction stationnaire donnée par l'équation de Darcy-Weisbach :

$$\underbrace{\Delta\rho h l L g \sin \theta}_{\text{Poids apparent}} = \underbrace{\frac{f}{4}(1+a)\rho \frac{U^2}{2} (L+2h)l}_{\substack{\text{Force de friction de Darcy-Weisbach} \\ \text{tenant compte de la friction} \\ \text{à l'interface supérieure}}}$$

où θ est l'angle de pente ; L la largeur moyenne de l'écoulement et l sa longueur moyenne.

Apparaît alors le rapport $\frac{hL}{L+2h}$, appelé rayon hydraulique, qui peut être approximé par h moyennant l'hypothèse $L \gg h$ (on suppose alors que le canyon est beaucoup plus large que haut).

Le coefficient a est introduit pour prendre en compte la friction à l'interface supérieure de l'écoulement. De nombreux auteurs ont repris cette formule (e.g. [Bowen *et al.*, 1984; Komar, 1971, 1977]), d'autres (e.g. [Pickering *et al.*, 1989, p. 16]) ont tenté de séparer le coefficient de friction total en deux parties :

- f_0 attribué à la friction basale (et latérale dans le cas d'écoulements chenalisés) ;
- f_1 attribué à la friction sur l'interface supérieure.

Tous les auteurs sont d'accord sur le fait que les variations de f_0 sont les mêmes que dans un écoulement en canal ouvert. Pour un sol hydrodynamiquement rugueux, f_0 est indépendant du nombre de Reynolds ($Re = U_h/\nu$ où ν est la viscosité cinématique du sous-écoulement), mais dépend du rapport de la taille des éléments rugueux à l'épaisseur de l'écoulement. Il peut être calculé par la formule :

$$f_0 = \frac{1}{33} \left(\log_{10} \left(\frac{33\beta h}{h_r} \right) \right)^{-2} \quad (2.5)$$

où h_r est l'échelle verticale caractéristique des éléments rugueux et β un coefficient empirique $\sim 0,1$.

En revanche, les facteurs contrôlant la valeur de f_1 sont plus incertains. Certains auteurs ont trouvé que f_1 dépendait du nombre de Froude densimétrique ($Fr = U/\sqrt{g'h}$, inverse de la racine carrée du nombre de Richardson Ri) et était indépendant du nombre de Reynolds. D'autres ont conclu qu'il dépendait non seulement du nombre de Froude, mais aussi du nombre de Reynolds (dans ce cas f_1 diminue quand le nombre de Reynolds augmente). Toutefois l'effet du nombre de Reynolds, s'il y en a un, semble être du second ordre.

Pour de petites valeurs du nombre de Froude, le mélange à l'interface entre le fluide ambiant et le sous-écoulement est très faible, cela même si l'écoulement est turbulent ; la résistance est donc relativement faible. Inversement, pour des nombres de Froude plus grands que l'unité, le mélange devient important, la résistance à l'interface augmente [Ellisson et Turner, 1959].

L'équation (2.4) a été vérifiée expérimentalement pour des écoulements composés de suspensions d'argile, et pour des solutions d'eau salée, où le contraste de densité était peu important ($\Delta\rho < 0.1$) et où la pente était faible ($s < 0.3$). Il apparaît que l'écoulement devient rapidement super-critique ($Fr > 1$) lorsque la pente s augmente. L'hypothèse d'un courant uniforme et stationnaire n'est plus possible. En effet, à cause du mélange important à l'interface supérieure, la densité du courant décroît et son épaisseur s'accroît.

2.1.1.3 Évolution de la vitesse de la tête

En remarquant que le nombre de Froude peut être écrit, en utilisant l'équation (2.4), sous la forme :

$$Fr = \sqrt{\frac{8s}{f(1+a)}}$$

Middleton vérifia expérimentalement que la vitesse de la tête du courant, U_t , suivait la loi⁵ :

$$U_t = C_t \sqrt{g'h_t} \quad (2.6)$$

où h_t est l'épaisseur moyenne de la tête de l'écoulement et C_t un coefficient de friction dont la valeur est estimée à 0.74 par Benjamin [1968] et 0.71 par Keulegan [1946].

Il étudia les positions relatives de la tête et du corps par la relation :

$$\frac{U_t}{U} = C_t \sqrt{\frac{h_t}{h}} \frac{1}{Fr} \quad (2.7)$$

5. On remarquera que la relation (2.6) est indépendante de la pente ; La tête du courant n'est pas en mouvement du fait de la composante de gravité agissant dans le sens de la pente, mais du fait de la pression piézométrique plus élevée dans le courant que dans le fluide ambiant [Benjamin, 1968].

Pour de grandes valeurs du nombre de Froude, le corps du courant se déplace plus vite que la tête, $u_t/U < 1$, et cette dernière devient plus épaisse que le corps de l'écoulement. Le flux de sédiment arrivant dans la tête est relevé à l'intérieur de celle-ci et renvoyé dans le corps par l'intermédiaire des vagues générées immédiatement derrière la tête. Ce type d'écoulement, à nombre de Froude élevé, se rencontre dans les canyons sous-marins, qui ont des pentes importantes. Lorsque le nombre de Froude diminue, le rapport u_t/U augmente, la tête se déplace plus vite que le corps. Dans ce cas, le courant de turbidité ne peut être stable [Komar, 1971], il doit y avoir compensation de la baisse du nombre de Froude par augmentation du rapport h_t/h afin de maintenir le corps et la tête à la même vitesse.

2.1.1.4 Prise en compte de l'érosion

Pour tenir compte du fait que la concentration varie dans le courant, Johnson [1966] a l'idée d'introduire dans son équation la vitesse de chute des particules d'une certaine taille, transportées par le courant :

$$U = C_1 \sqrt{shg' \left(1 - \frac{W}{sU}\right)} \quad (2.8)$$

où W est la vitesse moyenne de sédimentation et C_1 une constante empirique.

Par l'intermédiaire du facteur $(1 - W/sU)$, lorsque la vitesse moyenne de chute des particules, W , est plus petite que la composante verticale de la vitesse sU , ces dernières fournissent de l'énergie au courant proportionnellement au produit : $(sU - W)$ fois la concentration des particules. Johnson modélisa donc les phénomènes d'érosion / dépôt de façon implicite :

$$\begin{aligned} W = sU &\Rightarrow \text{Transport} \\ W > sU &\Rightarrow \text{Dépôt} \\ W < sU &\Rightarrow \text{Érosion} \end{aligned}$$

2.1.1.5 Une théorie plus complète

Les formules décrivant les courants turbiditiques stationnaires uniformes (équations (2.2), (2.4), et (2.8)) étant peu satisfaisantes, certains auteurs ont développé des modèles plus complexes [Bowen *et al.*, 1984; Lüthi, 1980].

Comme pour les jets fluides, la hauteur des courants turbiditiques évolue en fonction de la distance qu'ils parcourent. Ils incorporent de l'eau au niveau de l'interface supérieure (cf. section 4.4.4 page 92). Lüthi [1980] propose ainsi, pour tenir compte de ce phénomène, la formule :

$$E + \frac{f}{8}(1+a) = \frac{1}{Fr^2} \left(\tan \theta - \frac{W}{U} \right) \quad (2.9)$$

où E est le taux d'entraînement de fluide ambiant (dh/dx). Par la suite, grâce à ses travaux expérimentaux, Lüthi [1981] montre que la hauteur du courant augmente linéairement sur une pente nulle⁶.

On remarquera que les formules (2.2), (2.4), et (2.8) ne sont en fait que des cas particuliers de cette équation plus générale. En effet, si l'on néglige la sédimentation des particules, et si l'on suppose que le taux d'entraînement du fluide ambiant est implicitement pris en compte dans le terme $f(1+a)$, on retrouve la formule (2.4) développée par Middleton [1966c]. De même, si l'on néglige le taux d'entraînement du fluide ambiant à l'interface supérieure, on retrouve la formule (2.8) proposée par Johnson [1966].

2.1.1.6 L'étalement du courant : Une seconde dimension

Les formules précédentes ne considérant qu'une seule dimension, ne sont applicables qu'à un type particulier de courants turbiditiques : ceux qui sont chenalisés.

6. Le résultat $h \sim x$ est un résultat conforme à la théorie de similitude des jets (cf. section 4.4.1 page 90).

En remarquant que l'épaisseur du courant diminuait lorsque celui-ci s'élargissait, Johnson [1966] a développé, à l'aide d'un bilan d'énergie, une formule empirique pour la composante latérale de la vitesse V :

$$V = \sqrt{\frac{1}{2}g'h} \quad (2.10)$$

ce qui permet une modélisation de la vitesse des courants turbiditiques en deux dimensions, et un élargissement de la théorie à une classe plus large de courants.

2.1.1.7 Bilan de ces approches

Toutes ces méthodes sont basées sur l'équation (2.1) de Chézy. Bien que la validité de cette équation soit bien établie pour les écoulements de rivière, sa capacité à représenter réellement les processus physiques des courants turbiditiques est limitée.

Les principaux points faibles de ces méthodes résident dans le fait qu'elles ne prennent pas en compte :

- Les variations de densité et de concentration dans l'écoulement ; la densité est, par exemple, prise constante à une valeur comprise entre 1.05–2.0 g/cm³ selon les cas ;
- La vitesse du courant sur des pentes nulles (U^2 est proportionnelle à la pente s) ;
- Les variations de vitesse dans les autres directions ;
- Le caractère souvent hautement instationnaire et non uniforme de ces écoulements.

Enfin, elles ne renseignent pas sur le type de dépôt obtenu.

Néanmoins, bien que ces méthodes soient basées sur l'hypothèse peu réaliste [Siegenthaler et Buhler, 1985] de courant stationnaire et uniforme (*i.e.* U est invariant suivant x et dans le temps t), elles permettent en fait de déterminer quelques caractéristiques des courants gravitaires :

- Soit la distance parcourue par un courant pour une densité donnée ;
- Soit, par méthode inverse, la densité probable de l'écoulement pour une distance parcourue.

Les constantes empiriques sont obtenues par calage sur des expériences ou sur des cas réels (e.g. l'événement de Grand Banks, cf. figure 1.8 page 19). Le calage des valeurs de la vitesse sur les points de rupture de câbles sous-marins est incertain ; ces derniers pouvant avoir été sectionnés, non pas par le début de l'écoulement, mais par usure progressive due au passage de l'écoulement entier.

En outre, un autre atout de ces modèles est leur forme analytique simple dont la résolution est instantanée. Il est donc possible de les appliquer de façon économique en matière de temps calcul.

2.1.2 L'approche énergétique

En 1962, Bagnold proposa une approche radicalement différente de celle dérivée de Chézy. Dans son analyse, il n'essaie nullement de déterminer les équations du mouvement de la dynamique du fluide, mais s'intéresse aux bilans d'énergie.

2.1.2.1 Le critère d'auto-suspension de Bagnold

Le modèle proposé par Bagnold [1956, 1962, 1963] (cf. figure 2.1 page suivante) consiste en une suspension de solides glissants, pour le mouvement moyen desquels il écrit l'équation de conservation de l'énergie. De cette équation, il déduit un critère pour prédire si un courant turbiditique sera capable ou non de mouvement soutenu.

Ainsi, en définissant la puissance gravitationnelle⁷ disponible ω d'un courant turbiditique par :

$$\omega = (\rho_s - \rho_w) g \phi h U \sin \theta \quad (2.11)$$

(où ρ_s et ρ_w sont respectivement la masse volumique de la phase solide et de la phase fluide et ϕ la fraction volumique solide en suspension), la puissance nécessaire ω_n pour maintenir la charge en suspension :

$$\omega_n = (\rho_s - \rho_w) g \phi h W \quad (2.12)$$

7. par unité d'air.

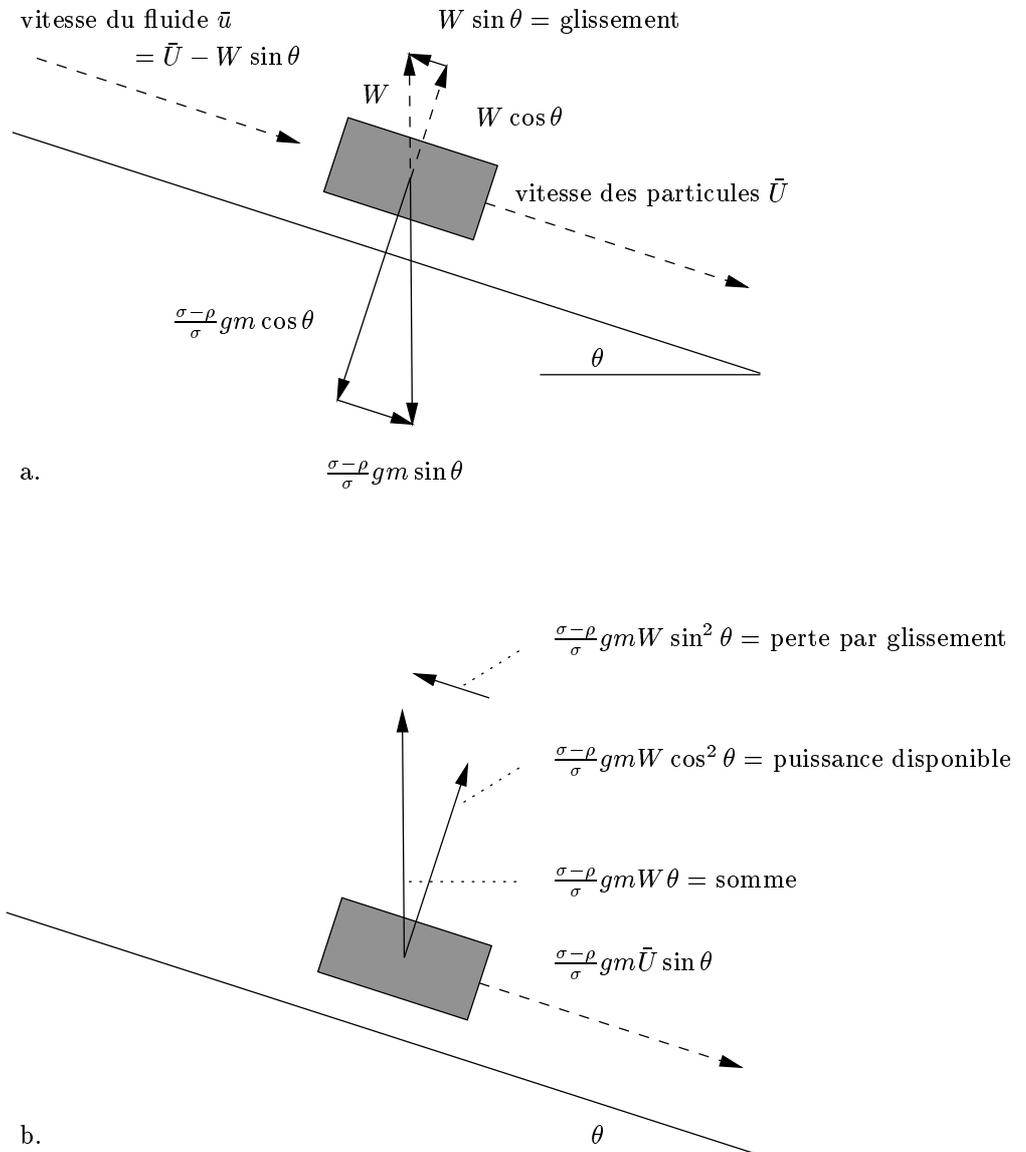


FIG. 2.1 – Modèle énergétique de Bagnold. a. Forces et vitesses relatives agissant sur le mouvement moyen de la suspension : m masse totale de tous les sédiments suspendus ; σ densité des sédiments par unité d'air ; ρ densité du fluide ; θ angle de pente ; \bar{U} vitesse moyenne de transport des particules ; \bar{u} vitesse moyenne de l'écoulement ; W vitesse constante de sédimentation des grains. b. Puissances impliquées (d'après Bagnold [1962]).

(où W est la vitesse de sédimentation) et enfin la puissance dissipée ω_τ par la friction basale τ_b (il n'est pas tenu compte de la friction à l'interface supérieure) :

$$\omega_\tau = U\tau_b \quad (2.13)$$

il déduit la condition sur la puissance suivante (modifiée d'après [Bagnold, 1956]) :

$$\omega \geq \omega_n + \omega_\tau \quad (2.14)$$

Ce critère est appelé « critère d'auto-suspension ». Dans tous les courants turbiditiques, le mécanisme qui maintient les particules de sédiments en suspension provient de la composante verticale ascendante de la turbulence du fluide, qui est principalement produite par la friction à l'interface entre l'écoulement et le sol, d'une part, et le fluide ambiant, d'autre part. Bagnold a ainsi montré que les courants turbiditiques pouvaient se maintenir sous forme d'auto-suspension, dans le sens où les sédiments n'ont besoin de dépenser qu'une partie de l'énergie du fluide ambiant, et sont, à la fois, la cause du mouvement de l'écoulement et maintenus en suspension par le mouvement qu'ils ont provoqué.

2.1.2.2 Définition de l'auto-suspension

L'auto-suspension est un processus où l'écoulement s'auto-entretient, et où il atteint un état d'équilibre dynamique dans lequel :

1. L'excès de densité de sédiments en suspension conduit l'écoulement ;
2. L'écoulement génère la friction et la turbulence du fluide ;
3. La turbulence maintient les particules en suspension et ainsi de suite (cf. figure 2.2).

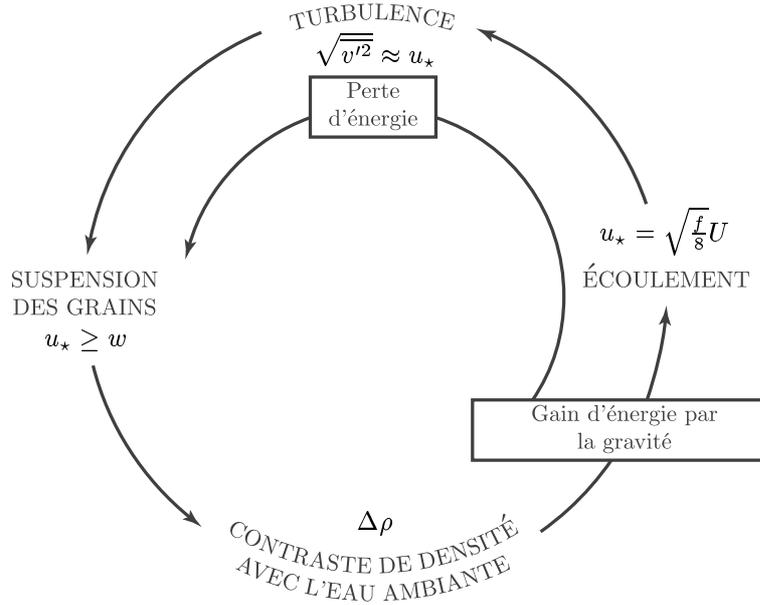


FIG. 2.2 – Diagramme conceptuel expliquant l'auto-suspension. Quand le gain en énergie gravitationnelle est égal à la perte d'énergie, l'écoulement est auto-entretenu. Les grains ayant pour vitesse de sédimentation w sont maintenus en suspension par les fluctuations de vitesse verticale d'intensité moyenne $\sqrt{v'^2}$ approximées par u_* (d'après Middleton [1976]). u_* est relié à la vitesse du corps U , qui est définie par la relation (2.4) (d'après Pickering et al. [1989]).

La seule condition pour garder la boucle intacte est que la perte d'énergie par la friction soit compensée par un gain en énergie gravitationnelle lorsque le courant descend la pente. Avec ce modèle théorique, les courants turbiditiques peuvent se déplacer sur de longues distances sans érosion ni dépôt appréciable, tant que le gradient de pente reste constant.

2.1.2.3 Conclusions et révision du critère de Bagnold

Le critère d'auto-suspension de Bagnold (équation (2.14)) a été discuté par plusieurs auteurs (e.g. [Middleton, 1966c; Pantin, 1979]). En effet, il semble que l'auto-suspension véritable ne soit pas courante dans la nature, elle ne se produirait que pour les écoulements turbiditiques épais, de faible concentration, transportant des particules fines sur des pentes faibles [Middleton, 1966c]. Pour les autres types de courants turbiditiques, une partie de la charge en suspension se dépose.

Pantin [1979], remarquant que les rivières étaient capables de maintenir une charge en suspension même lorsqu'il n'y avait plus d'excès d'énergie gravitationnelle, estima que l'énergie nécessaire à maintenir la charge en suspension provenait indirectement de l'énergie dépensée contre la friction basale.

Il a ainsi redéfini un nouveau critère d'auto-suspension :

$$\omega \geq \omega_\tau \quad (2.15a)$$

$$e_x \omega_\tau \geq \omega_n \quad (2.15b)$$

avec e_x un facteur efficace reliant la puissance dépensée contre la friction basale à la puissance disponible pour maintenir les sédiments en suspension (~ 0.01) [Pantin, 1979].

Ce faisant, il corrige la surestimation de l'énergie disponible faite par Bagnold, en tenant compte du fait que seul une petite partie de l'énergie de l'écoulement est disponible pour supporter les sédiments (env. 2% d'après [Pickering *et al.*, 1989]) ; le reste étant dépensé pour surmonter la friction aux interfaces supérieures et inférieures, pour produire la turbulence ainsi que de la chaleur. La plus grande partie de l'énergie disponible ne contribue donc pas à suspendre les grains. Pantin [1979] arrive à des conclusions proches de celles de Middleton [1966c] : La densité de l'écoulement est la principale variable qui gouverne l'apparition ou la pérennité de l'auto-suspension. En dessous d'une densité critique, qui varie en fonction de la pente, de l'épaisseur du courant, de la taille des grains, et du coefficient de friction, l'écoulement va s'affaïsser et déposer ses sédiments. Au-dessus de cette densité critique, le courant va exploser, croître en densité et en vitesse, et atteindre l'auto-suspension. Cette dernière situation ne se rencontre que pour les sédiments plus petits que le sable fin. Le nouveau critère d'auto-suspension (équations (2.15a) et (2.15b)) constitue donc une condition nécessaire mais non suffisante.

Ainsi, il apparaît donc que les conclusions de certains auteurs, comme Komar [1977], sur l'évolution des vitesses et des concentrations, sont discutables, puisqu'elles supposent la validité du critère d'auto-suspension de Bagnold (équation (2.14)).

2.2 Modèles instationnaires à une dimension

Comme on l'a dit plus haut, les écoulements gravitaires sont des phénomènes instationnaires. Les propriétés de l'écoulement, tel que sa vitesse, ses dimensions (longueur et hauteur), ne sont pas constantes dans le temps.

Pour obtenir un modèle purement instationnaire⁸, ces approches supposent, qu'à un instant particulier donné, il n'existe pas de variation horizontale des propriétés de l'écoulement.

Beghin [1979], en se basant sur ses observations expérimentales et en reprenant les études des bouffées « thermiques » atmosphériques, fut le premier à utiliser cette approche pour les mélanges particules-fluide⁹.

2.2.1 Variation du volume de l'écoulement

La différence fondamentale qui existe entre le déplacement d'un écoulement gravitaire fini et celui d'un corps solide dans le même fluide ambiant, réside dans le phénomène d'entraînement qui prend naissance à l'interface de l'écoulement [Beghin, 1979]. L'écoulement, au fur et à mesure de son mouvement, entraîne

8. Dont les variables ne dépendent que du temps

9. Le champ d'application des études de Beghin concerne les avalanches de neige, où les particules sont des particules de neige et le fluide de l'air. Néanmoins, ses études théoriques et expérimentales sont réalisées, pour des questions d'échelle, sur des écoulements sub-aquatiques. Ces résultats sont donc en lien direct avec notre problème.

une certaine quantité de fluide ambiant qui se mélange au fluide interne : le volume total de l'écoulement croît, tandis que sa densité tend vers celle du fluide ambiant.

Le volume par unité de surface A de l'écoulement évolue selon l'équation suivante :

$$\frac{dA}{dt} = U_e l \quad (2.16)$$

avec l la longueur de l'écoulement et U_e , la vitesse d'entraînement

La forme exacte de la vitesse d'entraînement est variable d'un modèle à l'autre. Elle est, en général, reliée à la pente, et via, la diffusion turbulente, à la vitesse moyenne de l'écoulement. Elle peut être, ou non, fonction du rapport des densités du mélange et du fluide ambiant¹⁰.

Pour s'affranchir des variations longitudinales, et relier la hauteur et la longueur de l'écoulement, il faut supposer que l'écoulement conserve sa géométrie durant le mouvement, c'est-à-dire que le rapport h/l est constant, h représentant la hauteur de l'écoulement, l sa longueur [Beghin, 1979; Dade, Lister et Huppert, 1994].

On retrouve ici, comme dans l'approche de Lüthi [1980] (cf. équation (2.9) page 29), le fait que la hauteur de l'écoulement croît en fonction de la distance parcourue.

2.2.2 Modélisation instationnaire de la vitesse en une dimension

La formulation de l'évolution de la quantité de mouvement résulte de la seconde loi de Newton [Beghin, 1979; Cannon et Savage, 1988, 1990; Dade *et al.*, 1994; Erlichson, 1990; Hungr, 1990] : la variation de la quantité de mouvement du volume de fluide est égale à la somme des forces extérieures appliquées à ce volume. Ici encore, le bilan est différent de celui d'un corps solide¹¹. Le volume de l'écoulement n'étant pas constant dans le temps, il faut en tenir compte dans l'expression de la quantité de mouvement¹².

D'une manière générale, les forces en jeu sont :

- La composante motrice de la gravité; approche de Beghin [1979], où la force de friction turbulente au sol est supposée négligeable devant la force de traînée due à l'entraînement du fluide ambiant à l'intérieur de l'écoulement, et ce, dès que la pente dépasse quelques degrés.
- La friction turbulente le long du sol; approche de Dade *et al.* [1994].
- Une combinaison de forces linéaires (forces visqueuses, forces de Coriolis) et non-linéaires (friction turbulente); approche de Kirwan *et al.* [1986]).

La variation de quantité de mouvement de l'écoulement est donnée par :

$$\frac{d}{dt} ((1 + k_v)AU) = g' A \sin \theta - C_f U^2 l \quad (2.17)$$

où U est la vitesse moyenne de l'écoulement ; k_v le coefficient de masse virtuelle ; g' l'accélération apparente de la gravité ($g\Delta\rho/\rho$) ; θ la pente et C_f le coefficient de friction.

Le coefficient de masse virtuelle, k_v , qui permet de prendre en compte la quantité de mouvement associée au mouvement du fluide ambiant, lors du passage de l'écoulement, peut, dans le cas d'un cylindre elliptique, être approximé par h/l [Dade *et al.*, 1994]. Dans le cas limite où $h/l \ll 1$, k_v est négligeable. Dans le cas où l'accélération (terme de gauche) est négligeable, on retrouve une forme modifiée de l'équation de Chézy (cf. équation (2.4)).

2.2.3 Sédimentation

Quelques unes des ces approches tiennent compte des variations de la fraction volumique en particules, ϕ , au sein de l'écoulement [Beghin et Olagne, 1991; Dade *et al.*, 1994; Pantin, 1979]. Elles permettent

10. On reviendra plus en détail sur le phénomène d'entraînement ou d'incorporation d'eau dans les sections 4.4.4 page 92 et 5.5 page 124 de la partie suivante.

11. Pour un solide, tel par exemple une aile d'avion, il y a présence d'un sillage, qui ici est négligeable : L'écoulement de fluide ambiant autour de la suspension peut se décomposer, à un instant donné, en un écoulement autour d'un corps solide de même forme que l'écoulement gravitaire et en un flux de fluide ambiant à travers l'interface de celui-ci. La couche limite créée ne peut subsister ; elle est immédiatement « absorbée » par l'écoulement.

12. La traînée de l'écoulement proprement dit est négligeable, mais celle qui correspond à l'accélération du fluide ambiant lors de son incorporation dans l'écoulement ou de son mouvement autour de celui-ci ne l'est pas forcément.

d'inclure les changements continus de la force motrice de gravité, lors du dépôt des particules.

L'hypothèse clé consiste à supposer que la turbulence est suffisante pour maintenir, dans tout l'écoulement, une distribution uniforme de la fraction volumique des particules. Les particules chutant à la vitesse de sédimentation V_s , le bilan de fraction volumique ϕ s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(A\phi) = -V_s\phi l \quad (2.18)$$

2.2.4 Conclusions

Ces méthodes, bien que demeurant fort simples, donnent de meilleurs résultats que les approches précédentes. La raison en est simple, elles prennent en compte l'essentiel des processus physiques du phénomène gravitaire :

- La variation du volume due à l'incorporation d'eau ;
- La variation de la quantité de mouvement sous les forces motrices de gravité et de friction ;
- La perte progressive du moteur gravitaire par la sédimentation.

Un autre avantage de ces approches est que l'évolution de l'écoulement est entièrement décrit par des équations différentielles. On peut par intégration directe, trouver la solution analytique de problèmes simplifiés :

1. phase d'accélération : sous la force motrice de gravité [Beghin, 1979] ;
2. phase de conservation : où la vitesse de sédimentation est négligeable [Dade *et al.*, 1994] ;
3. phase de décélération : où la gravité a perdu son pouvoir moteur par incorporation du fluide ambiant [Beghin, 1979] ou par sédimentation des particules en suspension [Dade *et al.*, 1994].

Pour les cas plus complexes, il est possible de trouver une forme dimensionnelle correcte des solutions [Dade et Huppert, 1995; Huppert, 1998]. L'expression des solutions obtenues est le plus souvent analytique, le calcul est rapide.

La fait de ne pas tenir compte des variations spatiales régnant dans l'écoulement constitue une des principales limitations de cette approche.

Remarque 1

Ces études ont montré que la vitesse du front suivait une loi décroissante en fonction de la position du front :

$$U_f \sim x_f^{-\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Comme le remarque Beghin [1979], dans le cas particulier où la pente est très faible ou nulle, l'effet d'étalement par gravité¹³ devient prépondérant et les équations précédentes ne sont plus valables. Cette phase particulière de l'écoulement sur pente nulle a été étudiée tant expérimentalement que théoriquement par Benjamin [1968]; Huppert [1982]; Huppert et Simpson [1980]; Simpson et Britter [1978]. Il apparaît néanmoins que la loi de décroissance de la vitesse reste identique à celle de l'équation (2.19). Il semble donc difficile de faire la distinction entre les deux types de mouvement [Communication personnelle de B. Dade, 1999].

2.3 Les apports de l'hydrodynamique

En 1960, Plapp et Mitchell, ainsi que Hinze [1960] développèrent des modèles originaux, basés sur la théorie de la couche limite turbulente et les méthodes intégrales, inspirés des travaux réalisés sur les transferts de chaleur en convection libre. Ils furent ainsi les premiers à considérer l'hydrodynamique des courants turbiditiques à l'aide des équations stationnaires de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Leur représentation des écoulements gravitaires prend en compte les variations horizontales des propriétés de l'écoulement, mais suppose toujours qu'il n'existe pas de variations verticales. En effet, l'écoulement est

13. Effondrement de la suspension sous son propre poids.

supposé avoir une intensité suffisante pour maintenir une distribution verticale uniforme de ses propriétés. Les deux sections suivantes présentent succinctement le cadre général de la théorie de la couche limite et des méthodes intégrales. Les sections 2.3.3 page ci-contre et 2.3.4 page 39 présentent respectivement les versions stationnaires et instationnaires des modèles dérivés de ces méthodes.

2.3.1 Théorie de la couche limite – Écoulement quasi-parallèle

Cette théorie, qui sera reprise en détail dans la section 4.3 page 83, est utilisée de façon courante en aéronautique et en hydrodynamique. Elle permet, moyennant quelques hypothèses importantes, de simplifier considérablement les équations d'évolution de l'écoulement. Les simplifications de la théorie de

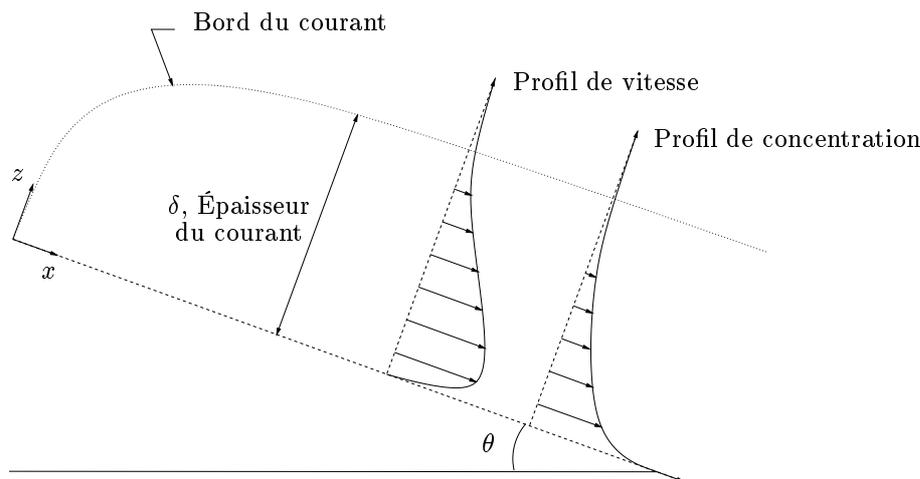


FIG. 2.3 – Courant turbiditique traité comme une couche limite turbulente d'épaisseur δ . Les profils de vitesse et de densité sont indiqués, ils sont utiles au traitement théorique (d'après [Plapp et Mitchell, 1960]).

la couche limite ne sont applicables que dans le cas où les gradients transversaux, $\partial/\partial z$, sont négligeables devant les gradients longitudinaux, $\partial/\partial x$.

L'échelle de vitesse caractéristique v normale à la paroi est alors beaucoup plus petite que l'échelle de vitesse caractéristique u parallèle à cette paroi. On a donc :

$$v \ll u \quad (2.20)$$

Cette relation entre les composantes de la vitesse est une conséquence de l'équation de continuité et de la faible valeur de l'épaisseur, h , qui correspond à l'échelle de longueur caractéristique verticale du courant, devant la longueur caractéristique, l , dans la direction longitudinale, x , de l'écoulement. Comme l'écoulement est mince, il est clair que le mouvement se fera principalement parallèlement au sol. Il est alors possible de négliger l'accélération verticale de l'écoulement.

2.3.2 Méthodes intégrales

Les méthodes intégrales constituent le deuxième outil permettant une grande simplification du problème. L'intégration verticale des équations du mouvement réduit le nombre de variables. On supprime en effet toute variation verticale dans l'écoulement.

2.3.2.1 Hypothèses de similarité

Une des hypothèses permettant de mener à bien l'intégration verticale des équations de conservation est que les variables (u , la vitesse et ϕ , la fraction volumique) maintiennent des profils similaires dans la

direction, x , de l'écoulement. Il est alors possible de définir une variable de similitude η , tel que :

$$u(x, z, t) = U(x, t)\zeta_u(\eta) \quad (2.21a)$$

$$\phi(x, z, t) = \Phi(x, t)\zeta_\phi(\eta) \quad (2.21b)$$

$$\text{avec } \eta = \frac{z}{h(x, t)} \quad (2.21c)$$

Les fonctions ζ_u et ζ_ϕ sont supposées être des fonctions de η seul. L'intégration verticale des variables, u et ϕ , est effectuée suivant z entre $z = 0$ et $z = \infty$. Les nouvelles variables $U(x, t)$, $\Phi(x, t)$ et $h(x, t)$, qui sont les grandeurs moyennées sur la verticale, sont définies par les intégrales (moments) suivantes :

$$U(x, t)h(x, t) = \int_0^\infty u \, dz \quad \left(\int_0^\infty \zeta_u \, d\eta = 1 \right) \quad (2.22a)$$

$$U(x, t)\Phi(x, t)h(x, t) = \int_0^\infty u\phi \, dz \quad \left(\int_0^\infty \zeta_u \zeta_\phi \, d\eta = 1 \right) \quad (2.22b)$$

$$U^2(x, t)h(x, t) = \int_0^\infty u^2 \, dz \quad \left(\int_0^\infty \zeta_u^2 \, d\eta = 1 \right) \quad (2.22c)$$

2.3.2.2 Facteur de forme

Comme on peut le voir, les intégrations précédentes sont conditionnées par la valeur d'intégrales du type $\int_0^\infty \zeta(\eta) \, d\eta$.

Ces intégrales sont appelées « facteurs de forme ». A priori, elles nécessitent des données expérimentales pour être calculées. Une approximation grossière, mais très utilisée, consiste à considérer la fonction ζ sous la forme¹⁴ :

$$\zeta(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \eta \leq 1, \\ 0 & \text{si } \eta > 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Les intégrales $\int_0^\infty \zeta(\eta) \, d\eta$ sont alors égales à 1.

2.3.3 Modèles stationnaires non-uniformes

Cette approche a essentiellement été développée durant les années 80. Outre les deux pionniers Hinze [1960]; Plapp et Mitchell [1960] précédemment cités, de nombreux auteurs ont travaillé tant théoriquement, qu'expérimentalement sur cette méthode, citons : Akiyama et Stephan [1985, 1988]; Chu, Pilkey et Pilkey [1979]; Fukushima, Parker et Pantin [1985]; Parker [1982]; Parker, Fukushima et Pantin [1986]; Parker, Garcia, Fukushima et Yu [1987]; Siegenthaler et Buhler [1985].

Le fait que ces approches soient stationnaires¹⁵, les destine plus particulièrement au traitement des écoulements gravitaires continus (écoulements hyperpycnaux).

2.3.3.1 Équations d'évolution

Les équations d'évolution considérées dans cette approche résultent de l'intégration transversale des équations stationnaires de la mécanique des fluides (c'est-à-dire les équations de conservation de la masse,

14. Ce modèle de fonctions nommées *top-hat* par Turner [1973] ou *slab* par Pantin [1979], correspond à des fonctions de Heaviside modifiées et semble donner de bons résultats.

15. Cette approche qui ne considère que des variations spatiales mais non temporelles, peut être vue comme un « complément » de l'approche précédente (section 2.2 page 33) qui ne considérait que des variations temporelles mais non spatiales.

de la quantité de mouvement et d'un scalaire passif, la fraction volumique).

Sous les hypothèses de la couche limite turbulente¹⁶ et à l'aide des hypothèses de similitude et des hypothèses sur les profils de vitesse et de concentration énoncées précédemment, ces équations s'écrivent :

Conservation de la masse

$$\frac{d}{dx}(Uh) = U_e \quad (2.24)$$

où U_e est la vitesse d'entraînement et h la hauteur de l'écoulement.

On retrouve ici, au second membre, le terme d'incorporation d'eau à l'interface entre l'écoulement et le fluide ambiant.

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dx}(U^2h) = -\frac{1}{2}g' \frac{d}{dx}(\Phi h^2) + g' \sin \theta \Phi h - u_*^2 \quad (2.25)$$

avec Φ la fraction volumique moyenne des sédiments et u_* la friction turbulente.

Le premier terme, $\frac{d}{dx}(U^2h)$, correspond à la variation de quantité de mouvement du volume hdx dans la direction x . Le premier terme, dans le membre de droite de l'équation, représente les efforts de pression agissant sur une colonne de fluide. Ce sont ces forces qui tendent à rendre l'interface plane. Le terme, $g' \sin \theta \Phi h$, est le terme classique de gravité, moteur de l'écoulement. Enfin, le dernier terme du membre de droite, correspond aux forces de friction turbulente (tenseur de Reynolds).

Dans le cas où l'écoulement est uniforme, les termes de dérivée en x sont nuls, et on retrouve le résultat de Middleton [1966c], à savoir, une forme modifiée de l'équation de Chézy (cf. équation (2.4)).

On peut remarquer que Plapp et Mitchell [1960] utilisent pour la modélisation des contraintes de cisaillement sur la paroi inférieure dans l'équation (2.25), la formule de Von Kàrmàn [1921] pour le cisaillement dans un écoulement turbulent sur une paroi lisse et plane. Or celle-ci n'est valable que pour des nombres de Reynolds (basés sur l'épaisseur du courant et la vitesse maximale) inférieurs à 10^5 . Pour de plus grands nombres de Reynolds (allant jusqu'à 10^9 dans le cas du courant turbiditique de Grand Banks en 1929), le cisaillement est vraisemblablement sous estimé.

Conservation de la fraction volumique

$$\frac{d}{dx}(U\Phi h) = E_T - \phi_b V_s \quad (2.26)$$

où E_T est le taux d'entraînement des sédiments; ϕ_b la fraction volumique des sédiments au bas de l'écoulement, en $z = b$ et V_s la vitesse de sédimentation.

Cette équation quantifie les changements du taux de sédiments dans la suspension. Les termes du second membre représentent le flux de sédiments à travers le lit :

$$\begin{cases} \text{si } (E_T - \phi_b V_s) > 0 & \Rightarrow \text{érosion,} \\ \text{si } (E_T - \phi_b V_s) = 0 & \Rightarrow \text{préservation,} \\ \text{si } (E_T - \phi_b V_s) < 0 & \Rightarrow \text{dépôt.} \end{cases}$$

Le terme E_T correspond à l'entraînement des sédiments par la turbulence, qui ayant la dimension d'une vitesse $[\frac{L}{T}]$, est souvent modélisé par un terme de la forme $V_s E_T^*$, où E_T^* est un taux adimensionnel d'entraînement. On trouvera une discussion sur la modélisation de ce terme dans la partie suivante, à la section 5.4 page 117.

En réalité, la plupart des études théoriques sont effectuées en supposant E_T^* nul ou constant [Chu *et al.*, 1979; Parker, 1982; Parker *et al.*, 1986].

¹⁶. On peut se référer à la partie suivante et à la section 4.3 page 83 et aux suivantes pour les détails concernant la simplification de ces équations.

L'approche de Plapp et Mitchell [1960] est semble-t-il incomplète. Le flux de sédiments est modélisé comme étant log-linéairement dépendant des contraintes basales. En effet les auteurs écrivent p. 987 : *... one would expect that for a given bottom material the rate of pick-up of sediment would increase with increasing shear.* Cette supposition, où « rate of pick-up » est pris dans le sens « taux de sédiments arrachés du lit », ne tient pas compte de la tendance des sédiments en suspension à chuter.

Les variations du flux de sédiments doivent dépendre en fait du taux net de sédiments arrachés, *i.e.* du taux de sédiments arrachés du lit moins le taux de chute des sédiments déjà en suspension.

2.3.3.2 Conclusion

Les équations, (2.24), (2.25) et (2.26) peuvent être combinées en un système différentiel sur U, h et Φ , puisque les variables ne sont fonction que de la variable spatiale x . Comme précédemment, la résolution de ce types d'équations est relativement aisée : on peut obtenir les solutions exactes de problèmes simplifiés, ou les solutions numériques pour des problèmes plus complexes où de nombreux paramètres sont variables.

À noter que la forme des équations est conditionnée par la donnée et le choix des profils de vitesse et de concentration (Par exemple, Plapp et Mitchell [1960] se basent sur des profils qui sont des versions modifiées des profils de vitesse et de température pour les transferts de chaleur turbulent en convection libre, tels que ceux proposés par Eckert et Drake [1959, §2, chap. 11]). Les travaux expérimentaux de Parker *et al.* [1987] montrent que l'approximation du *top-hat* donne des résultats satisfaisants avec une erreur de moins de 25%.

À noter que la plupart des modèles ignorent l'étalement latéral (c'est-à-dire transverse par rapport à la direction de l'écoulement), qui dans les courants réels non confinés, mène à une dissipation plus rapide de l'énergie cinétique.

Bien entendu, la faiblesse majeure de ces méthodes réside dans l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, ce qui n'est pas toujours réaliste et conduit à des concentrations élevées. Comme remarqué précédemment, ces modèles stationnaires, sont plus particulièrement destinés au calcul des écoulements gravitaires générés à l'embouchure d'un fleuve (courants hyperpycnaux). Les conditions à la limite du modèle sont directement reliées au débit du fleuve, qui peut ne pas être stationnaire.

2.3.4 Équations d'ondes longues – modèle de Saint Venant

Avec le développement continu des moyens et des méthodes informatiques, il a été possible, à la fin des années 80, de faire réapparaître la variable temps t , qui, pour des raisons de complexité et de coût de calcul, avait été négligée dans les modèles précédents. On obtient alors les équations de Saint Venant ou équations d'ondes longues¹⁷ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) = U_e \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Uh) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2h) = -\frac{1}{2}g' \frac{\partial}{\partial x}(\Phi h^2) + g'\Phi h \sin \theta - u_*^2 \quad (2.27b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi h) + \frac{\partial}{\partial x}(U\Phi h) = E_T - \phi_b V_s \quad (2.27c)$$

La différence entre le système (2.27) et les équations (2.24),(2.25) et (2.26) du système stationnaire réside dans la présence, au premier membre, des variations temporelles du volume (équation (2.27a) : $\partial h/\partial t$), des variations temporelles du flux de quantité de mouvement (équation (2.27b) : $\partial/\partial t(Uh)$), des variations temporelles du volume de sédiments (équation (2.27c) : $\partial/\partial t(\Phi h)$).

2.3.4.1 Conclusion

Il ne faut pas perdre de vue que, comme pour le modèle stationnaire présenté à la section 2.3.3 page 37, les résultats des modèles « ondes longues » sont conditionnés par le choix judicieux des profils de vitesse et de concentration.

17. Cette terminologie d'« ondes longues » tient du fait de la similarité de ces équations avec les équations du mouvement des grandes ondes de gravitation [Landau et Lifchitz, 1971, §13, chap. I].

Les modèles d'« ondes longues » permettent d'obtenir une description, à la fois spatiale et temporelle, des propriétés de l'écoulement [Bonnecaze, Hallworth, Huppert et Lister, 1995; Bonnecaze, Huppert et Lister, 1993; Huppert, 1998; Sparks, Bonnecaze, Huppert, Lister, Hallworth, Mader et Phillips, 1993] et cf. figure 2.4). Les méthodes de résolutions numériques sont un peu plus complexes puisqu'elles néces-

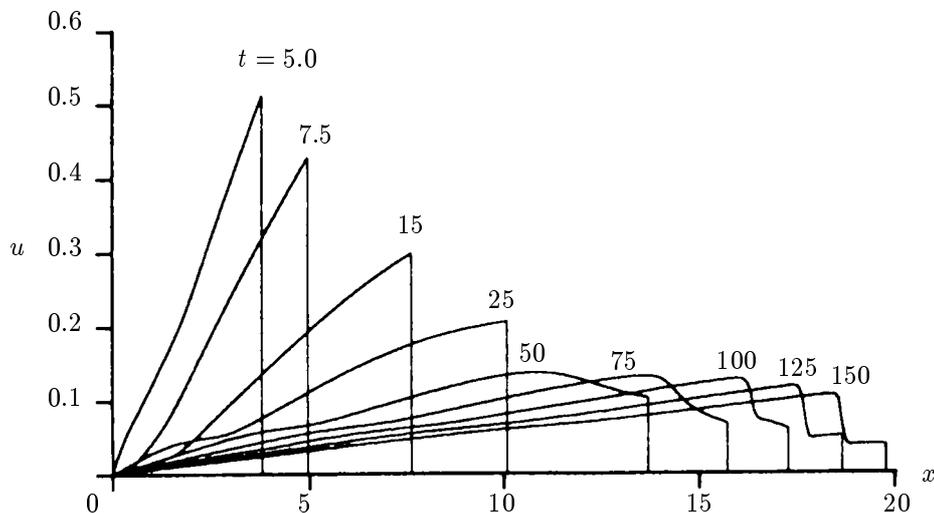


FIG. 2.4 – Exemple de simulation monodimensionnelle d'écoulement gravitaire par la méthode des « ondes longues ». La figure montre les profils, $u(x,t)$, déterminés numériquement à différents temps adimensionnels, pour l'effondrement d'une suspension de particules sur pente nulle (d'après [Bonnecaze et al., 1993]).

sitent la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles (e.g. méthodes des caractéristiques et [Bonnecaze et al., 1993; Lin et w. Shen, 1984])

Les temps de calcul sont en conséquence plus longs : à titre d'exemple pour le modèle bidimensionnel « ondes longues » développé conjointement à l'IPG et au CEA par Heinrich, Mangeney et Boudon [1998, 1999] pour les écoulements pyroclastiques, les simulations durent pendant environ deux jours pour un événement comme l'éruption du Montserrat sur une grille de 500×500 points¹⁸ et avec une station de travail actuelle [Communications personnelles de A. Mangeney et P. Heinrich, 1999].

Ces temps de calcul importants constituent une des limites de ces méthodes pour les applications géologiques, où les séquences de dépôt sont formées de plusieurs milliers d'événements s'étendant sur des dizaines de kilomètres, sur des échelles de temps de l'ordre de la dizaine de milliers d'années.

Néanmoins, ces modèles rendent possible la représentation verticale des propriétés des dépôts tel que le classement granulométrique. À ce titre, notons que le modèle développé à Stanford par [Zeng et Lowe, 1997], en réintroduisant des variations verticales des propriétés des colonnes de fluide par un modèle de sédimentation multi-couche¹⁹ permet ce type de prédiction. Ces modèles sont donc très utiles pour les prédictions sur un événement.

2.4 1990–1999 : Les années Navier–Stokes

Pour étudier les transports sédimentaires dans les rivières, l'hypothèse de mélange passif permet de déterminer les profils de vitesse et de concentration en sédiments indépendamment du système des équations du mouvement. Dans les travaux sur les écoulements gravitaires cités précédemment, la présence des sédiments a été supposée sans effet sur la dynamique du courant, sinon dans le terme de gravité de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (cf. par exemple équation (2.27b)). Or, comme Plapp et Mitchell [1960] le remarquèrent, les courants turbiditiques sont des courants convectifs naturels,

18. Une maille correspondant à 10 mètres, la distance totale parcourue n'excède pas 5 km.

19. Ce modèle tient compte, entre autre, de la présence de différentes tailles de grains de sédiments. Ce qui fait que les particules les plus grosses « voient » la suspension comme un mélange dont la viscosité effective tient compte de la présence des plus petites particules [Zeng et Lowe, 1992]

où la présence des sédiments en suspension a un effet majeur sur la dynamique de l'écoulement [Chu *et al.*, 1979]. On a vu par exemple que les particules sont mises en suspension dans l'écoulement par la turbulence générée par celui-ci, et la turbulence est entretenue par la vitesse de sédimentation des particules et la friction basale (cf. section 2.1.2 page 30 sur l'auto-suspension).

Les équations précédentes sont donc quelque peu incomplètes. Conceptuellement, si l'on s'intéresse à la dynamique de la sédimentation, le mouvement des particules solides et du fluide ne peut être considéré comme l'écoulement d'un fluide à constituant unique.

Les équations élémentaires du mouvement sont écrites pour chaque constituant (cf. section 2.4.1), c'est-à-dire pour la phase fluide et la phase solide des particules de sédiments. Elles sont ensuite combinées pour donner les équations correspondant au fluide composite (cf. 2.4.2 page suivante). En réalité, la plupart des approches considèrent les courants gravitaires comme des fluides à deux composants ; c'est-à-dire les particules de sédiments (solides) sont traitées comme un constituant fluide avec une fraction volumique, ϕ .

2.4.1 Traitement avec deux phases dissociées (modèle à deux fluides)

On considère la fraction volumique en particules (ou grains de sédiments), ϕ , définie comme étant le rapport entre le volume occupé par ces grains V_p et le volume total :

$$\phi = \frac{V_p}{V_p + V_f} \quad (2.28)$$

avec V_f volume de fluide.

La fraction volumique du fluide est définie par :

$$\phi_f = 1 - \phi \quad (2.29)$$

Le traitement statistique des équations de conservation phasiques est traité dans divers ouvrages [Monin et Yaglom, 1971; Simonin, 1991a].

2.4.1.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse pour un volume infinitésimal d'eau s'écrit (avec la convention d'Einstein de sommation sur l'indice muet) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f (1 - \phi)) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_f (1 - \phi) u_{fi}) = 0 \quad (2.30)$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide ; ϕ la fraction volumique des particules ($1 - \phi = \phi_f$) et u_{fi} la i^e composante de la vitesse du fluide.

Pour les particules solides, l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_p \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_p \phi u_{pi}) = 0 \quad (2.31)$$

avec ρ_p la masse volumique des sédiments ; ϕ la fraction volumique des particules et u_{pi} la i^e composante de la vitesse des particules.

Ces deux équations, (2.30) et (2.31), peuvent être utilisées directement (e.g. [Herard et Simonin, 1990; Simonin, 1991a; Valentine et Wohletz, 1989]) ; elles permettent une résolution complète des équations de conservation de la masse pour un mélange diphasique, compressible. Concernant les techniques mathématiques et numériques de résolution de ces équations pour les fluides multiphasiques, le lecteur pourra consulter [Ha-Minh-Hiêu, 1996; Stewart et Wendroff, 1984].

2.4.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

L'approche la plus complète pour la modélisation du mouvement d'écoulement chargé en particules, est celle de Herard et Simonin [1990]; Simonin [1991a]; Valentine et Wohletz [1989]. Même si ces modèles

ne sont pas destinés à être appliqués aux écoulements gravitaires sous-marins, ils peuvent néanmoins servir à les décrire²⁰.

La conservation de la quantité de mouvement est appliquée à chaque phase :

- la phase fluide :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f (1 - \phi) u_{fi}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_f (1 - \phi) u_{fi} u_{fj}) = (1 - \phi) \left(\rho_f B_i - \frac{\partial p_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^f + F_f [u_{fi} - u_{pi}] \quad (2.32)$$

avec p_f la pression de la phase fluide, B_i la i^e composante des forces volumiques (e.g. gravitation, Coriolis), τ_{ij}^f la composante ij du tenseur des contraintes du fluide, F_f la force d'interface, fonction de la vitesse de glissement $[u_{fi} - u_{pi}]$.

- la phase solide :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_p \phi u_{pi}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_p \phi u_{pi} u_{pj}) = \phi \left(\rho_p B_i - \frac{\partial p_p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^p + F_p [u_{fi} - u_{pi}] \quad (2.33)$$

L'indice p remplace l'indice f et indique les variables liées aux particules.

Les modèles définis par les équations (2.30), (2.31), (2.32) et (2.33) sont extrêmement lourds à résoudre. C'est pourquoi on travaille le plus souvent sur des grandeurs moyennes de l'écoulement : on obtient ainsi le modèle dit du « fluide composite » exposé dans la section suivante.

2.4.2 Le fluide composite

Les équations d'évolution considérées sont les équations classiques de la mécanique des fluides, c'est-à-dire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et d'un scalaire passif, la fraction volumique, écrites pour les grandeurs moyennes définissant le mélange.

2.4.2.1 Définitions de grandeurs moyennes au sein du mélange

Masse volumique moyenne La densité moyenne du mélange, ρ , aussi appelée densité moyenne de ρ_f et ρ_p pondérée par les volumes respectifs de chaque phase est définie par [Monin et Yaglom, 1971] :

$$\rho = \rho_f (1 - \phi) + \rho_p \phi \quad (2.34)$$

Dans le cas d'un mélange à n constituants, la formule précédente, est généralisée par :

$$\rho = \sum_n \rho_n \phi_n$$

Vitesse massique moyenne du mélange v_i , la i^e composante de la vitesse massique moyenne, est défini comme étant la moyenne pondérée de u_{pi} et u_{fi} par les fractions massiques, soit :

$$\rho v_i = \frac{\rho_f}{\rho} (1 - \phi) u_{fi} + \frac{\rho_p}{\rho} \phi u_{pi} \quad (2.35)$$

De même dans le cas où n constituants sont présents, la formule précédente est généralisée à :

$$\rho v_i = \sum_n \rho_n \phi_n u_{ni}$$

Vitesse volumique moyenne du mélange La définition de la vitesse volumique moyenne du mélange, u_i , est parfois utilisée :

$$u_i = (1 - \phi) u_{fi} + \phi u_{pi} \quad (2.36)$$

Sa généralisation à n espèces, est :

$$u_i = \sum_n \phi_n u_{ni}$$

²⁰. Le modèle de Valentine et Wohletz [1989] est appliqué aux écoulements pyroclastiques ; les articles de Herard et Simonin [1990]; Simonin [1991a] présentent des modèles génériques pour les écoulements multi-phasiques.

2.4.2.2 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse totale du mélange est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (2.37)$$

Cette équation est une combinaison linéaire des deux équations phasiques (2.30) et (2.31) dans lesquelles on a substitué les définitions de la masse volumique moyenne (équation (2.34)) et de la vitesse massique moyenne (équation (2.35)).

Remarque sur l'hypothèse d'incompressibilité On peut supposer que chacune des phases est incompressible, ce qui s'exprime par :

$$\rho_f = \text{cte} \quad \rho_p = \text{cte}$$

Les équations phasiques (2.30) et (2.31) se simplifient alors en :

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} ((1 - \phi) u_{fi}) = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi u_{pi}) = 0 \quad (2.39)$$

La combinaison linéaire de ces deux équations mène à :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi u_{pi} + (1 - \phi) u_{fi}) = 0$$

soit en utilisant la définition (2.36) de la vitesse volumique moyenne :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

La divergence de la vitesse volumique moyenne est alors nulle. D'un point de vue des méthodes de résolutions numériques, le fait qu'il n'existe plus de dépendance en temps, pose problème pour un traitement implicite de l'équation. Il faut donc considérer que l'une des phases est compressible, par exemple celle du fluide ambiant [Séminaire EDF, 1997].

2.4.2.3 Modélisation de la vitesse de la phase solide

Une approche classique, pour modéliser le fluide composite, consiste à simplifier le bilan de quantité de mouvement de la phase solide (cf. (2.33) page précédente). On remplace ce bilan de quantité de mouvement par une modélisation de la vitesse des grains de sédiments, afin de n'avoir plus qu'une équation de quantité de mouvement à résoudre. La vitesse des grains de sédiments peut être modélisée principalement par trois approches :

1. les deux phases ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre [Sampl, 1993] :

$$u_p = u_f = v \quad (2.40)$$

Ceci est peu réaliste, puisque la vitesse de chute des particules n'est pas toujours négligeable (par exemple lorsque le fluide décélère).

2. le mouvement des grains ne diffère de celui du fluide moyen porteur que par la composante de chute verticale w [Chu *et al.*, 1979; Hermann *et al.*, 1993] :

$$u_p = v + w \quad (2.41)$$

Bien que plus réaliste, cette approche ne tient pas compte des gradients de concentration qui se développent dans le courant, et qui, pour des particules de petite taille (e.g. argile), tendent à s'uniformiser (e.g. sous l'effet de l'agitation thermique des molécules du fluide).

3. le mouvement des grains diffère de celui du fluide porteur par la composante de chute verticale et une composante diffusive :

$$u_p = v + w - \frac{D}{\phi} \nabla \phi \quad (2.42)$$

où D est le coefficient de diffusion des particules. Cette modélisation peut être justifiée de façon théorique par un bilan simplifié des forces agissant sur les particules (cf. annexe 5.2 page 108). Intuitivement, on comprend que les particules suivent le mouvement de l'écoulement, avec toutefois, un glissement vertical dû à la chute des particules dans l'eau et un gradient de concentration tendant à uniformiser cette dernière (ce gradient est en fait souvent négligeable).

On notera en outre que les équations (2.40), (2.41) et (2.42) ne sont valables que dans le cas où l'inertie des particules est négligeable (lorsque les lignes de courants sont peu courbées), ce qui n'est pas toujours exact pour les courants gravitaires qui comportent des zones de haute vorticité.

2.4.2.4 Modélisation de la conservation de la fraction volumique

On suppose les particules incompressibles :

$$\rho_p = \text{cte} \quad (2.43)$$

Les modèles de vitesse des particules permettent de simplifier l'équation (2.31) de conservation de la masse.

1. Dans le cas où les deux phases ne se déplacent pas l'une par rapport à l'autre, en substituant l'équation (2.40) dans l'équation (2.31), on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi v_i) = 0 \quad (2.44)$$

2. S'il est tenu compte de la vitesse de chute des grains de sédiments sous la forme de l'équation (2.41), on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi w_i) \quad (2.45)$$

3. En reportant le modèle de vitesse (2.42) dans l'équation de conservation de la masse des particules (2.31), on obtient [Naaim, 1995; Zhiming, 1995] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi v_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi w_i) \quad (2.46)$$

2.4.2.5 Modélisation de la quantité de mouvement du fluide composite

En ayant défini des grandeurs moyennes telles que la masse volumique et la vitesse, il est possible d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide composite [Naaim, 1995; Sampl, 1993; Zhiming, 1995] :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \quad (2.47)$$

où p est la pression; B_i la i^e composante des forces volumiques (e.g. gravitation, Coriolis) et τ_{ij} la composante ij du tenseur des contraintes.

Cette équation est obtenue par addition des deux équations de quantité de mouvement phasique (2.32) et (2.33), avec l'hypothèse (2.40) sur les vitesses des phases. Les quantités moyennes telles que la pression et les contraintes sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= (1 - \phi) \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \phi \frac{\partial p_p}{\partial x_i} \\ \tau_{ij} &= \tau_{ij}^f + \tau_{ij}^p \\ F_f [u_{fi} - u_{pi}] &= -F_p [u_{fi} - u_{pi}] \end{aligned}$$

Dans le cas où l'on souhaite prendre en compte les influences de la sédimentation sur la dynamique du fluide composite, on utilise l'hypothèse (2.41) sur la vitesse de la phase solide et on obtient (version modifiée de Hermann *et al.* [1993]) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho B_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{\phi}{1-\phi} w_i w_j \right) \quad (2.48)$$

2.4.2.6 Quelques mots sur les contraintes visqueuses du mélange

Concernant la modélisation des contraintes du mélange, la plupart des auteurs supposent que la concentration en particules de sédiment est suffisamment faible pour que le fluide composite se comporte de manière Newtonienne [Hermann *et al.*, 1993; Naaïm, 1995; Sampl, 1993; Skogseth, 1999; Zhiming, 1995]. Les contraintes sont alors des fonctions linéaires des gradients de vitesse, ce qui implique que la viscosité dynamique est indépendante des gradients de vitesse.

Les contraintes prennent ainsi la forme classique donnée par la loi de comportement d'un fluide visqueux de viscosité dynamique μ [Landau et Lifchitz, 1971; Sampl, 1993; Zhiming, 1995] :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.49)$$

Pour un mélange incompressible, la divergence du champ de vitesse $\frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ est nulle, le dernier terme de l'équation (2.49) l'est donc aussi.

En considérant le cas extrême où le couplage entre les grains de sédiments et le fluide ambiant est très important, c'est à dire le cas où seule la diffusion turbulente cause un mouvement relatif entre les grains, d'autres auteurs [Hermann *et al.*, 1993; Naaïm, 1995] estiment que les termes de diffusion moléculaire sont très faibles devant les termes de diffusion turbulente, et de ce fait, ils les négligent. Il n'y a alors pas dans ce cas de prise en compte des contraintes visqueuses du mélange lorsque l'on tient compte de la turbulence.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue que le comportement dynamique d'une suspension concentrée est différent de celui d'un fluide visqueux classique [Goodman et Cowin, 1971], dans la mesure où, à l'équilibre, et contrairement aux fluides classiques, ce mélange peut supporter des contraintes de cisaillement. Il a donc un comportement intermédiaire entre celui des solides (il supporte des contraintes de cisaillement à l'équilibre) et celui des fluides (il s'écoule, c'est à dire qu'il n'a pas de configuration de référence privilégiée). Ce cas peut être traité par des modèles rhéologiques du type de « fluide de Bingham » ou « fluide à seuil » [Assier-Rzadkiewicz, 1997; Hugot, 1997; Rzadkiewicz, Heinrich, Savoye et Bourillet, 1998].

2.4.2.7 Forces extérieures volumiques

Les forces extérieures se résument le plus souvent à :

- La gravité :

$$\rho \vec{B} = \rho \vec{g} \quad (2.50)$$

- La force de Coriolis. Souvent considérée comme étant du second ordre, elle peut tout de même avoir une influence sur le développement de courants relativement continus [Kirwan *et al.*, 1986]. La contribution de la force de Coriolis aux forces volumiques est donnée par :

$$\rho \vec{B} = \rho \Omega \vec{v} \quad (2.51)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \rho & \text{masse volumique du fluide composite} \\ \Omega & \text{tenseur de Coriolis} \\ v & \text{vitesse moyenne massique} \end{cases}$$

Le tenseur de Coriolis est défini par :

$$\Omega_{3D} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega \sin \beta & -2\omega \sin \beta \\ -2\omega \sin \beta & 0 & 0 \\ -2\omega \cos \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \omega & \text{vitesse angulaire de rotation de la planète} \\ \beta & \text{latitude} \end{cases}$$

La contribution $2D$ à $\rho \vec{B}$ est donc :

$$\rho \vec{B} = \begin{pmatrix} 2\omega \sin \beta v_z \\ -2\omega \sin \beta v_x \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

2.4.2.8 Quelques mots sur la turbulence

De nombreux écoulements gravitaires sont turbulents. Pour prendre en compte les effets de la turbulence, on a recours à la théorie statistique de la turbulence. La première méthode statistique fut proposée par Reynolds [1894]. Il supposa que les écoulements turbulents pouvaient être décrits par des moyennes d'ensembles, sans considérer les détails de chaque réalisation de l'écoulement. Ainsi le champ de vitesse, v , est décomposé en une partie moyenne \bar{v} et une partie fluctuante v' . Cette décomposition, dont les axiomes sont rappelés dans l'annexe D page 273, est appelée « décomposition de Reynolds ». Les champs décomposés sont les suivants :

$$\begin{aligned} v &= \bar{v} + v' & \phi &= \bar{\phi} + \phi' \\ p &= \bar{p} + p' & \rho &= \bar{\rho} + \rho' \end{aligned} \quad (2.54)$$

(Les fluctuations de masse volumique sont reliées à celles de la fraction volumique par $\rho = \rho_f + \phi(\rho_p - \rho_f)$). Ces décompositions sont reportées dans les équations du mouvement dont on prend la moyenne. Le traitement de ces équations est repris dans la section 4.2 page 81. Les équations moyennes régissant l'évolution des quantités moyennes intervenant dans l'écoulement, sont :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} v_i) = 0 \quad (2.55a)$$

Conservation de la fraction volumique :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\phi} v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\phi} w_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} - \overline{\phi' v'_i} \right) \quad (2.55b)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} v_i v_j) = \bar{\rho} B_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho' v'_i v'_j}) \quad (2.55c)$$

Du fait de la non-linéarité des équations (termes du type $\partial/\partial x_j (v_i v_j)$), des termes supplémentaires du type $\overline{\phi' v'_i}$ et $\overline{v'_i v'_j}$ apparaissent dans les équations de conservation de la fraction volumique (2.55b) et de conservation de la quantité de mouvement (2.55c). Ces termes, corrélations d'ordre deux, représentent des flux turbulents, et sont en fait dépendant de corrélations triples, du type $\overline{v' v' v'}$, qui à leur tour sont fonctions de corrélations d'ordre quatre etc ... Il y a alors un problème de fermeture : Il y a plus d'inconnues que d'équations. Il faut alors trouver des équations complémentaires pour fermer le système.

Ce qui est obtenu moyennant une hypothèse sur les corrélations d'ordre plus élevé, que l'on exprime en terme de corrélations d'ordre moins élevé [Larchevêque, 1995; Zaleski, 1995].

Le fait de transformer les corrélations d'ordre deux en contraintes, et de les regrouper avec les autres contraintes moyennes existantes préconditionne déjà la forme de la modélisation. L'idée est de suivre la même démarche que celle adoptée lors de la formulation de la loi de comportement Newtonienne. L'écoulement turbulent serait donc analogue à celui d'un fluide de viscosité ν_T . On obtient alors la loi dite de Boussinesq, appelée aussi loi de viscosité tourbillonnaire.

La turbulence joue un rôle essentiel dans les processus de sédimentation dont on est loin, aujourd'hui encore, de maîtriser tous les effets. Elle peut, en effet, aussi bien remettre les sédiments en suspension et retarder leur chute, que les accélérer vers le sol et conduire à un dépôt plus rapide [Deutsch et Simonin, 1991; Hoyal, Depinto, Atkinson et Taylor, 1995; Simonin, 1991b; Simonin, Viollet et Méchitoua, 1990]. C'est pourquoi la conception d'un modèle de turbulence adapté au traitement des suspensions est actuellement un sujet faisant l'objet de nombreux travaux de recherche.

Seuls quelques uns des modèles d'écoulements gravitaires présentés plus haut peuvent prendre en compte des écoulements turbulents [Felix, 1998; Hermann *et al.*, 1993; Naaïm, 1995; Sampl, 1993; Skogseth, 1999; Zhiming, 1995].

Pour un modèle à 1 équation, on a recours à l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, $k = \overline{v'_i v'_i} / 2$, qui est la partie diagonale du tenseur de Reynolds [Hugot, 1996] :

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{dérivée particulière}} + \underbrace{\overline{v'_j v'_i} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}}_{\text{création-destruction d'énergie par le tenseur de Reynolds noté } P_k} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\overline{p' v'_i}}{\overline{\rho}} + \frac{\overline{v_j'^2}}{2} v'_i - \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right)}_{\substack{\text{diffusion moléculaire} \\ \text{ou} \\ \text{transport par les fluctuations} \\ \text{noté } J_i}} = - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2}_{\substack{\text{dissipation} \\ \text{d'énergie} \\ \text{noté } \varepsilon}} + \underbrace{\frac{\Delta \rho}{\rho} \overline{v'_i \phi'} g_i}_{\substack{\text{terme} \\ \text{source} \\ \text{gravitaire}}} \quad (2.56)$$

Il est néanmoins nécessaire d'ajouter au système d'équations, une relation empirique sur une longueur caractéristique associée à la turbulence pour relier l'énergie cinétique turbulente à la viscosité turbulente²¹.

Pour un modèle à 2 équations [Hermann *et al.*, 1993; Sampl, 1993], on peut avoir recours, comme précédemment, à l'équation de transport (2.56) sur l'énergie cinétique turbulente, k , et à une équation sur le taux de dissipation, ε , c'est le fameux modèle $k-\varepsilon$. Hermann *et al.* [1993] utilisent des équations légèrement modifiées par rapport au modèle classique pour tenir compte de la présence des forces gravitaires et de la vitesse de sédimentation (pour plus de détails cf. également [Hugot, 1996]). D'autres modèles à 2 équations existent, à titre d'exemple citons le modèle de Mellor–Yamada appliqué par [Felix, 1998] et le modèle RNG²² utilisé par [Skogseth, 1999]. Ainsi, la représentation adéquate des processus turbulents des écoulements gravitaires permet de rendre compte de phénomènes complexes comme par exemple les instabilités de Kelvin–Helmholtz qui se créent à la surface de l'écoulement [Furnes, 1999; Skogseth, 1999]

2.4.3 Conclusions sur les modèles

Les modèles précédents conduisent à un système d'au moins trois équations aux dérivées partielles (s'il n'est pas tenu compte de la turbulence), qui déterminent l'évolution de trois variables: la masse volumique moyenne ρ , la vitesse moyenne, v et la fraction volumique ϕ . Ce sont des modèles à au moins deux dimensions (direction de l'écoulement et direction verticale). La prise en compte de cette seconde dimension rend possible la représentation verticale (cf. figure 2.5 page suivante) des propriétés de l'écoulement (distribution des particules, composante verticale de la vitesse) qui est essentielle pour la simulation

21. Cette longueur caractéristique, l , est habituellement déterminée par une relation empirique simple, analogue à celle utilisée pour la longueur de mélange, notion introduite par Prandtl [1925]. D'une manière générale, les modèles à 1 équation donnent des résultats assez bons pour les couches de cisaillement simple; ces méthodes sont donc utilisées avec succès pour les calculs de couches limites de parois. Néanmoins, pour les écoulements plus complexes, l n'est plus aussi facile à déterminer. Plusieurs auteurs ont tenté de développer des formules pour le calcul de l dans des cas généraux. Elles sont évaluées dans un article de Rodi [1980] qui conclut que ces formules sont complexes et gourmandes en temps de calcul. Il est donc préférable d'utiliser une seconde équation qui détermine l . On utilise alors des modèles du type $k-l$ énergie cinétique et longueur de mélange [Speziale, 1987].

22. *ReNormalization Group based k-ε model*

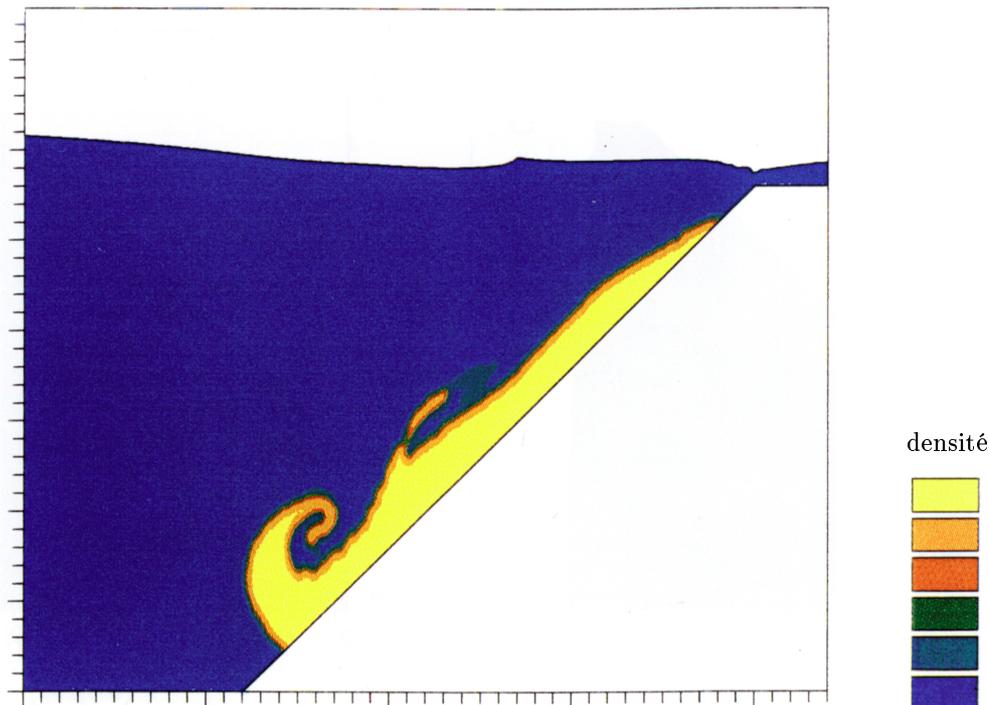


FIG. 2.5 – Exemple de simulation en deux dimensions par une méthode « Navier–Stokes » (d’après Assier-Rzadkiewicz [1997]).

de la fraction volumique (ou de la concentration) dans le courant, et le classement dans les dépôts. D’un point de vue géologique, c’est là l’apport majeur de ces modèles.

Il est évident que ces systèmes sont très lourds à résoudre numériquement, principalement parce qu’ils nécessitent de mailler tout l’espace et de simuler en chacun des points du maillage. Pour exemple, le modèle NASAVOF modifié par Assier-Rzadkiewicz [1997] nécessite pratiquement une semaine de temps calcul²³ pour simuler des grilles de 200000 cellules environ, correspondant à seulement une dizaine de kilomètres [Communication personnelle de S. Assier, 1999 et Assier-Rzadkiewicz, Mariotti et Heinrich [1997]; Rzadkiewicz *et al.* [1998]]. Les temps de calculs sont du même ordre de grandeur pour le code développé à Stanford par Felix [1998] [Communication personnelle de M. Felix, 1999].

Du point de vue de la modélisation proprement dite, il est nécessaire de rappeler certaines hypothèses de ces modèles :

- Les phénomènes d’érosion–sédimentation, qui influent de manière importante sur la dynamique de l’écoulement, sont rarement intégrés dans les modèles (seul le modèle de Naaim [1995] traite de l’érosion). Or, sous certaines conditions, la neige du couloir d’avalanche ou les sédiments du lit d’un canyon sous-marin sont entraînés par l’écoulement augmentant ainsi considérablement sa masse, sa vitesse et donc sa distance de dépôt.
- Les concentrations ou les fractions volumiques en particules sont supposées être très faibles ; ces modèles ne sont donc applicables qu’à une gamme réduite d’écoulements, ceux avec une concentration peu élevée.

Il faut cependant noter que toutes les modélisations citées ci-dessus n’ont pas pour but de simuler les écoulements gravitaires sous marins.

23. Sur une plate forme DEC-Alpha.

Ainsi seuls les modèles de Zhiming [1995], Assier-Rzadkiewicz [1997], Felix [1998] et Skogseth [1999] modélisent ce type d'écoulement. Pour leur part, Delinger [1987] et Valentine et Wohletz [1989] traitent le cas des écoulements pyroclastiques (donc avec en plus des transferts de chaleur). Quand à Sampl [1993], Hermann *et al.* [1993] et Naaim [1995], ils étudient les avalanches de neige aérosols.

Les types d'écoulements simulés n'ont pas les mêmes caractéristiques physiques, et ne sont donc pas traités dans la même optique :

- Ces écoulements, bien que hautement turbulents (turbulence développée), ont des nombres de Reynolds différents, en moyenne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \geq 10^5 & \text{pour les écoulements sub-aquatiques} \\ \geq 10^8 & \text{pour les avalanches poudreuses} \\ \geq 10^{10} & \text{pour les écoulements pyroclastiques} \end{array} \right.$$

- Pour les écoulements sous-marins du type turbiditique, la différence de densité entre le fluide ambiant et le mélange est faible, contrairement aux écoulements subaériens où cette différence est élevée.
- D'un point de vue géologique, l'intérêt majeur d'un modèle pour les écoulements gravitaires sous-marins, réside dans la prédiction des dépôts sédimentaires, en incorporant la présence de différentes lithologies et leur répartition au sein du dépôt. La modélisation des avalanches poudreuses a un autre but : celui de l'étude des dommages qu'elles peuvent causer ; l'attention est donc centrée sur la prédiction de la vitesse et de la pression.

2.5 L'approche directe : des modèles hors de prix

Cette approche est essentiellement utilisée pour l'analyse des écoulements dont la concentration est élevée [Campbell, 1998], pour lesquels l'approche de la section 2.4 page 40 n'est pas complètement satisfaisante. On simule directement la quantité de mouvement de chaque particule.

2.5.1 Une description fine des phénomènes

An niveau microscopique, les grains, dont la distribution est non uniforme, subissent des collisions inélastiques, perdant ainsi leur énergie à chaque contact, et interagissent constamment avec la matrice fluide en échangeant leurs quantités de mouvement. Du fait de ces interactions indirectes entre les particules produites par le fluide ambiant (interactions hydrodynamiques), le mouvement des particules est chaotique. Ce mouvement se caractérise par des fluctuations par rapport à la vitesse moyenne. Contrairement à la turbulence dans les fluides monophasiques, ces fluctuations de la vitesse des particules existent même si l'écoulement est lent. Elles induisent également des fluctuations dans la phase ambiante à cause des conditions aux limites sur les vitesses aux interfaces.

Le degré de ces interactions varie avec la concentration en particules du mélange. Lorsqu'un grain en approche un autre, il y a augmentation locale de la pression du fluide et expulsion dans les interstices adjacents. Lors de son expulsion, le fluide dissipe de l'énergie et, en même temps, amortit les collisions des particules, tout en perdant encore de l'énergie par transfert de quantité de mouvement. Lors de la collision de deux particules, Davies, Serayssol et Hinch [1986] montrèrent que lorsque les deux sphères s'approchent l'une de l'autre, le fluide inter-particulaire est expulsé et la pression s'accroît violemment, il en résulte une répulsion élastique des particules. Ces résultats montrent que les particules approchent un état d'équilibre gouverné par les effets de la viscosité, et qu'une pression fluide négative se développe lorsque les particules s'écartent.

2.5.2 Application aux écoulements gravitaires

La modélisation des écoulements granulaires nécessite une extension de ce comportement microscopique à celui de collisions multiples comme on en rencontre dans les écoulements gravitaires.

La description microscopique de la dynamique des particules, combinée avec les approximations statistiques, a été une des approches utilisées pour tenter de modéliser les écoulements granulaires. Ces essais ont été principalement réalisés dans le cas des écoulements granulaires secs [Lun, Savage, Jeffery et Chepur, 1984; Mc Elwaine, Nishimura et Nohguchi, 1998; Straub et Valentine, 1998; Zheng et Hill, 1996]. L'approche est semblable à celle utilisée pour la dynamique des gaz [Gatignol et Dudeck, 1995] où l'écoulement est représenté par un système de sphères élastiques interagissant fortement (collisions). Ces théories des micro-structures analysent en détail la dynamique des collisions de particules individuelles. Ensuite, à l'aide des moyennes statistiques, il est possible de déterminer les propriétés continues des écoulements. Toutefois, cette technique est actuellement controversée [Coussot, 1999], puisqu'il semblerait que le comportement dynamique de ces écoulements concentrés soit en grande partie déterminé par les conditions aux limites (conditions de drainage . . .) et non par les conditions d'équilibre locales.

Un des problèmes majeurs de l'application directe de ces théories aux écoulements gravitaires réside dans l'hypothèse de l'écoulement sec. En effet, dans ce cas, il n'y a pas à prendre en compte les interactions fluide-particules, ce qui simplifie le problème²⁴.

La théorie de Bagnold [1954] constitue une première analyse de ces écoulements. Bagnold raisonne sur des sphères de flottabilité nulle ; et, comme il ne considère que les conditions géométriques et cinétiques, les interactions du fluide et des particules n'apparaissent pas dans ses équations.

Ackermann et Shen [1982] [et Shen et Ackermann [1982]] proposent une théorie où ils tiennent non seulement compte des collisions inélastiques et de la friction de surface des particules, mais également de la dissipation visqueuse dans le fluide interstitiel sous la forme d'une traînée lorsque les grains se déplacent à travers le fluide les contenant [Hugot, 1997].

D'après ce qui précède, il apparaît que l'approche directe permet une analyse détaillée des écoulements. Il en résulte que pour qu'un modèle de la dynamique des écoulements gravitaires soit complet, il doit prendre en compte sa nature frictionnelle, collisionnelle et visqueuse, ainsi que les interactions fluide-sédiments.

Avec le développement des moyens informatiques, des super-calculateurs et du calcul parallèle, ces approches qui simulent le mouvement de chaque particule de l'écoulement, seront de plus en plus accessibles.

2.6 Résumé, conclusions et position du problème

Lors de l'élaboration de modèles numériques pour le comportement dynamique des écoulements gravitaires, la variété des domaines d'application et par conséquent des paramètres à prendre en compte nécessite des approches spécifiques.

Dans le cas des courants gravitaires sous-marins, les modèles existants permettent une bonne compréhension de la mécanique de transport de l'écoulement et des processus de dépôts. Le comportement dynamique des écoulements gravitaires a en effet été étudié tant à partir de modèles stationnaires et uniformes, relativement simples, qu'à partir de modélisations plus complexes permettant de décrire finement la phénoménologie de ces écoulements.

L'approche basée sur des modèles uniformes et stationnaires du type de celui de Middleton [1966c] s'avère rapidement insuffisante. En effet, cette approche ne permet pas de prévoir des dépôts caractéristiques résultant des écoulements : elle ne décrit que le comportement d'un point dans un écoulement stationnaire de hauteur constante et horizontalement infini. De plus les modèles associés à cette approche sont souvent monodimensionnels, ne tiennent compte ni des variations spatiales, ni des variations temporelles qui se développent au sein de l'écoulement.

L'approche « instationnaire pure », qui, elle non plus, ne considère pas les variations spatiales de l'écoulement, lui semble préférable, car les processus physiques principaux peuvent lui être incorporés. Elle permet de rendre compte de manière satisfaisante des trois phases de la dynamique de l'écoulement : la phase d'accélération-érosion, la phase de transport-conservation et la phase de décélération-dépôt.

L'approche du type « couche limite stationnaire », qui élimine les variations verticales de la distribution des sédiments et des propriétés de l'écoulement, permet cependant de modéliser les gradients de

24. Le fluide interstitiel est de l'air et on peut donc utiliser l'hypothèse $\rho_f \ll \rho_s$, ce qui simplifie grandement les calculs.

densité et les gradients de hauteur qui se développent longitudinalement du fait de la sédimentation et de l'entraînement du fluide ambiant à l'interface supérieure. Elle constitue en cela une alternative intéressante à celles précédemment citées.

La prise en compte du temps mène aux modèles du type « ondes longues ». Comme pour l'approche « couche limite », les propriétés de l'écoulement sont intégrées sur la hauteur. Ces modèles constituent donc la simplification, par une approximation bi-dimensionnelle de ce qui est en réalité un processus tridimensionnel complexe. Il faut donc ne pas sous-estimer leurs limitations. Ils rendent compte néanmoins de manière très satisfaisante de la dynamique des écoulements gravitaires.

Dans les trois types de modèles précédents, la description de la turbulence de l'écoulement est souvent grossière. Cette dernière joue pourtant, comme on l'a vu, un rôle majeur dans le transport des particules et doit être modélisée de façon satisfaisante comme c'est le cas dans les approches du type « Navier-Stokes ». Selon cette approche, les variables décrivant le mouvement de l'écoulement sont des fonctions du temps et des trois dimensions de l'espace.

Il est ainsi possible de rendre compte de la présence de concentrations élevées à la base de l'écoulement et de la formation d'une suspension de faible densité au-dessus de cet écoulement basal dense. Dans le cas de suspensions multicomposants (multi-granulométrique) il est tout à fait imaginable que celles-ci puissent, grâce à la turbulence, franchir un obstacle ou déborder d'un canyon sous-marin, se séparant ainsi de la partie dense contenant les grains grossiers.

Cependant, les séquences de dépôts gravitaires sont généralement déposées par une série d'écoulements gravitaires de différentes magnitudes et durées. Les classements répétés dans les séquences d'épaisseur substantielle, comme on en observe dans les affleurements, indiquent clairement une succession d'écoulements. En raison de leurs temps de calculs numériques excessifs, les approches « ondes longues » et « Navier-Stokes » semblent donc peu adaptées à la simulation de courants gravitaires en géologie où il existe de longues périodes de temps et/ou des grandes échelles spatiales.

Il va de soi que la complexification des modélisations en vue de décrire de plus en plus finement les écoulements va de pair avec une augmentation des temps de calculs requis.

Cette revue bibliographique a montré que pratiquement toutes les techniques mathématiques et mécaniques de modélisation ont été utilisées à un moment ou un autre pour prédire les propriétés des écoulements gravitaires et les dépôts qui en résultent²⁵.

Toutes ces considérations montrent l'intérêt de trouver un juste compromis entre les méthodes « couche limite stationnaire » et les méthodes « instationnaires pures » qui semblent plus adaptées à la simulation des écoulements gravitaires sur des échelles géologiques, que les méthodes « ondes longues » et « Navier-Stokes ».

L'objectif est donc de construire une nouvelle approche pour aboutir à un modèle d'écoulements gravitaires ayant des applications potentielles en géologie. Ce modèle devra permettre la prédiction de certaines caractéristiques des dépôts gravitaires telles que l'épaisseur et la géométrie du dépôt en fonction de la forme du bassin.

Enfin, il semble que, quelque soit l'approche considérée, un effort soit à entreprendre pour modéliser les phénomènes d'érosion-sédimentation, phénomènes encore mal compris et rarement modélisés. C'est pourquoi, notre modèle s'attachera tout spécialement à définir des conditions aux limites permettant de tenir compte de ces phénomènes.

25. À titre anecdotique, on peut citer aussi l'approche fractale utilisée par Rothman *et al.* [1994a] (cf. aussi [Hiscott et Firth, 1994; Rothman, Grotzinger et Flemings, 1994b; Turcotte, 1989]), les automates cellulaires [Avolio, Gregorio, Mantovani, Passuto, Rongo, Silvano et Spataro, 1999; Crisci, Francia, Gregorio, Rongo et Spataro, 1999; Masselot et Chopard, 1998; Miyamoto et Sasaki, 1997], la logique floue [Nordlund, 1996; Nordlund et Hern, 1999].

Bibliographie

Cette bibliographie regroupe les références « géologiques » et « mécaniques » sur la sédimentation gravitaire. En particulier, les thèmes suivants sont abordés :

- Approche naturaliste des phénomènes de resédimentation ;
- Modèles mécaniques (modèles d'ondes longues, Navier-Stokes, particuliers ...).

- ACKERMANN, N. L. et H. SHEN [1982]. Stresses in rapidly sheared fluid-solid mixture. *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE* **vol. 108**, pages 95–123.
- AKIYAMA, J. et H. STEPHAN [1985]. Turbidity current with erosion and deposition. *Jour. Hydraulic Eng., ASCE* **vol. 111**, no. 12, pages 1473–1496.
- AKIYAMA, J. et H. STEPHAN [1988]. Turbidity current simulation in a diverging channel. *Water Resour. Res.* **vol. 24**, no. 4, pages 579–587.
- ALLEN, J. R. L. [1971]. Mixing at turbidity currents heads, and its geological implications. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 41**, pages 97–113.
- ASSIER-RZADKIEWICZ, S. [1997]. *Etude numérique et expérimentale d'un glissement de sédiments le long d'une pente sous-marine et des vagues générées*. Thèse de doctorat, Univ. de Montpellier II. 326 p.
- ASSIER-RZADKIEWICZ, S., C. MARIOTTI et P. HEINRICH [1997]. Numerical simulation of submarine landslides and their hydraulic effects. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.* **vol. 123**, no. 4, pages 149–157.
- AVOLIO, M. V., S. D. GREGORIO, F. MANTOVANI, A. PASSUTO, R. RONGO, S. SILVANO et W. SPATARO [1999]. Hexagonal cellular automaton simulation of the 1992 tessina landslide. Dans : *Proceedings of the 5th annual conference of the International Association for Mathematical Geology* (Edité par S. J. LIPPARD, A. NÆSS et R. SINDING-LARSEN), vol. 1, pages 291–297.
- BAGNOLD, R. A. [1954]. Experiments in a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. *Proc. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 225**, pages 49–63.
- BAGNOLD, R. A. [1956]. The flow of cohesionless grains in fluids. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 249**, pages 235–297.
- BAGNOLD, R. A. [1962]. Auto-suspension of transported sediment ; turbidity currents. *Proc. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 265**, pages 315–319.
- BAGNOLD, R. A. [1963]. Beach and nearshore processes ; part 1, mechanics of marine sedimentation. Dans : *The Sea* (Edité par M. N. HILL), vol. 3. The earth beneath the sea. History, pages 507–528. John Wiley, New York.
- BATTAGLIA, M. [1993]. On pyroclastic flow emplacement. *Jour. Geophys. Res. B.* **vol. 98**, pages 22,269–22,272.
- BEGHIN, P. [1979]. *Etude des bouffées bidimensionnelles de densité en écoulement sur pente avec application aux avalanches de neige poudreuse*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble. 120 p.
- BEGHIN, P. et X. OLAGNE [1991]. Experimental and theoretical study of the dynamics of powder snow avalanches. *Cold Regions Science and Technology* **vol. 19**, pages 317–326.

- BENJAMIN, T. B. [1968]. Gravity currents and related phenomena. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 31**, pages 209–248.
- BONNECAZE, R. T., M. A. HALLWORTH, H. E. HUPPERT et J. R. LISTER [1995]. Axisymmetric particle-driven gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 294**, pages 93–121.
- BONNECAZE, R. T., H. E. HUPPERT et J. R. LISTER [1993]. Particle-driven gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 250**, pages 339–369.
- BOWEN, A. J., W. R. NORMARK et D. J. W. PIPER [1984]. Modelling of turbidity currents on Navy Submarine Fan, California Continental Borderland. *Sedimentology* **vol. 31**, pages 169–185.
- CAMPBELL, C. S. [1998]. Granular flows: a somewhat personal perspective. Dans: *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 19. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- CANNON, S. H. et W. Z. SAVAGE [1988]. A mass-change model for the estimation of debris-flow runout. *Jour. Geol.* **vol. 96**, pages 221–227.
- CANNON, S. H. et W. Z. SAVAGE [1990]. A mass-change model for the estimation of debris-flow runout: a reply. *Jour. Geol.* **vol. 98**, pages 792–794. Cf. [Hungry, 1990].
- CHOUGH, S. et R. HESSE [1976]. Submarine meandering thalweg and turbidity currents flowing for 4000 km in Northwest Atlantic Mid-Ocean Channel, Labrador Sea. *Geology* **vol. 4**, pages 529–533.
- CHU, F. H., W. D. PILKEY et O. H. PILKEY [1979]. An analytical study of turbidity current steady flow. *Mar. Geol.* **vol. 33**, pages 205–220.
- COUSSOT, P. [1999]. Rhéophysique des pâtes et des suspensions. Séminaire interne IFP.
- CRISCI, G. M., A. D. FRANCA, S. D. GREGORIO, R. RONGO et W. SPATARO [1999]. An improved cellular automaton model for lava flow simulation. Dans: *Proceedings of the 5th annual conference of the International Association for Mathematical Geology* (Edité par S. J. LIPPARD, A. NÆSS et R. SINDING-LARSEN), vol. 1, pages 317–323.
- DADE, W. B. et H. E. HUPPERT [1995]. A box model for non-entraining, suspension-driven gravity surges on horizontal surfaces. *Sedimentology* **vol. 42**, pages 453–471.
- DADE, W. B., J. R. LISTER et H. E. HUPPERT [1994]. Fine-sediment deposition from gravity surges on uniform slopes. *J. Sed. Res.* **vol. A64**, no. 3, pages 423–432.
- DALY, R. A. [1936]. Origin of submarine canyons. *Am. Jour. Sci. Ser. 5* **vol. 31**, pages 401–420.
- DAVIES, R. H. [1986]. Large debris flow: a macroviscous phenomenon. *Acta Mechanica* **vol. 63**, pages 161–178.
- DAVIES, R. H., J.-M. SERAYSSOL et E. J. HINCH [1986]. The elastohydrodynamic collision of two spheres. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 163**, pages 479–497.
- DELINGER, R. P. [1987]. A model for generation of ash clouds by pyroclastic flows, with application to the 1980 eruptions at mount St. Helens, Washington. *Jour. Geophys. Res. B.* **vol. 92**, pages 10,284–10,298.
- DEUTSCH, E. et O. SIMONIN [1991]. Large eddy simulation applied to the motion of particles in stationary homogeneous fluid turbulence. Dans: *4th International Symposium on Gas-Fluid Flows, Portland*, page 12.
- ECKERT, E. R. G. et R. M. DRAKE [1959]. *Heat and mass transfer*. Series in mechanical engineering. Mc Graw-Hill. 530 p.
- ELLISSON, T. H. et J. S. TURNER [1959]. Turbulent entrainment in stratified flows. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 6**, pages 423–448.
- ENOS, P. [1977]. Flow regime in debris flow. *Sedimentology* **vol. 24**, pages 133–142.
- ERLICHSON, H. [1990]. A mass-change model for the estimation of debris-flow runout, a second discussion: conditions for the application of rocket equation. *Jour. Geol.* **vol. 99**, pages 633–634. Cf. [Cannon et Savage, 1990].
- FELIX, M. [1998]. Numerical model of turbidity current of non-cohesive material. Dans: *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 25. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.

-
- FISHER, R. V. et J. M. MATTISON [1968]. Wheeler-George turbidite conglomerate series, California; inverse grading. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 38**, no. 4, pages 1013–1023.
- FUKUSHIMA, Y., G. PARKER et H. M. PANTIN [1985]. Prediction of ignitive turbidity currents in Scripps Submarine Canyon. *Mar. Geol.* **vol. 67**, pages 55–81.
- FURNES, G. [1999]. Turbidites modeling – the Norsk Hydro experience. Présentation interne IFP.
- GATIGNOL, R. et DUDECK [1995]. Dynamique des gaz raréfiés. (cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- GOODMAN, M. A. et S. C. COWIN [1971]. Two problems in the gravity flow of granular materials. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 45**, pages 321–339.
- HA-MINH-HIËU [1996]. Mécanique des fluides numérique. (cours à l'ENSEEIH-INT).
- HAMPTON, M. [1972]. The role of subaqueous sediment flow in the generation of turbidity currents. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 42**, pages 775–793.
- HAMPTON, M. [1975]. Competence of fine-grained debris flows. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 45**, pages 834–844.
- HAMPTON, M. [1979]. Buoyancy in debris flows. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 49**, pages 753–758.
- HEEZEN, B. C., D. B. ERICSON et M. EWING [1954]. Further evidence for a turbidity current following the 1929 Grand Banks earthquake. *Deep-Sea Res.* **vol. 1**, pages 193–202.
- HEEZEN, B. C. et M. EWING [1952]. Turbidity currents and submarine slumps and the 1929 Grand Banks earthquakes. *Am. Jour. Sci.* **vol. 250**, pages 849–873.
- HEINRICH, P., A. MANGENEY et G. BOUDON [1998]. Simulation of water waves generated by a debris avalanche in Montserrat, Lesser Antilles. Dans: *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 71. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- HEINRICH, P., A. MANGENEY et G. BOUDON [1999]. Modéliser un raz de marée créé par un volcan: L'éruption à Montserrat le 26 décembre 1997. *La Recherche* **vol. 318**, pages 66–71.
- HERARD, J. M. et O. SIMONIN [1990]. *Numerical modelling of turbulent two phase flows. Rapport technique ART:T36E4T*, Electricité de France.
- HERMANN, F., D. ISSLER et S. KELLER [1993]. Numerical simulations of powder-snow avalanches and laboratory experiments on turbidity currents. Dans: « Pierre Beghin » *international workshop on rapid gravitational mass movements*. CEMAGREF, Grenoble.
- HINZE, J. O. [1960]. On the hydrodynamics of turbidity currents. *Geologie en Mijnbouw* **vol. 39**, pages 18–25.
- HISCOTT, R. N. et J. V. FIRTH [1994]. Scaling in turbidite deposition – discussion. *J. Sed. Res.* **vol. A64**, no. 4, pages 933. Cf. [Rothman *et al.*, 1994a].
- HOPFINGER, E. J. [1983]. Snow avalanche motion and related phenomena. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **vol. 15**, pages 47–76.
- HOYAL, D. C. J. D., J. V. DEPINTO, J. F. ATKINSON et S. W. TAYLOR [1995]. The effect of turbulence on sediment deposition. *J. Hydraul. Res.* **vol. 33**, pages 349–360.
- HSÜ, K. J. [1975]. Catastrophic debris streams (sturzstroms) generated by rockfalls. *Bull. Geol. Soc. Am.* **vol. 86**, pages 129–140.
- HSÜ, K. J. [1989]. *Physical principles of sedimentology*. Springer-Verlag, Berlin. 233 p.
- HUGOT, A. [1996]. *Modélisation des processus de sédimentation gravitaire —Revue bibliographique et analyse*. Referenced report :, Université Pierre et Marie Curie – Institut Français du Pétrole. 131 p.
- HUGOT, A. [1997]. *Modélisation des processus de sédimentation gravitaire —Rhéologie des débris-flows. Referenced report: 43 716*, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison. 85 p.
- HUNGR, O. [1990]. A mass-change model for the estimation of debris-flow runout : a discussion. *Jour. Geol.* **vol. 98**, pages 791. Cf. [Cannon et Savage, 1988].
- HUPPERT, H. E. [1982]. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 121**, pages 43–58.

- HUPPERT, H. E. [1998]. Quantitative modelling of granular suspension flows. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 356**, pages 2471–2496.
- HUPPERT, H. E. et J. E. SIMPSON [1980]. The slumping of gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 99**, no. 4, pages 785–799.
- JOHNSON, A. M. [1966]. Application of theory to an turbidity-current path. *Sedimentology* **vol. 7**, pages 117–129.
- JOHNSON, A. M. [1970]. *Physical Processes in Geology*. Freeman, Cooper & Company. 577 p.
- KIRWAN, A. D. T., L. J. DOYLE, W. D. BOWLES et G. R. BROOKS [1986]. Time-dependent hydrodynamic models of turbidity currents analyzed with data from Grand Banks and Orleansville events. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 56**, pages 379–386.
- KOMAR, P. D. [1969]. The channelized flow of turbidity currents with application to Monterey deep sea fan channel. *Jour. Geophys. Res. B.* **vol. 74**, pages 4,544–4,558.
- KOMAR, P. D. [1971]. Hydraulic jumps in turbidity currents. *Bull. Geol. Soc. Am.* **vol. 82**, pages 1477–1488.
- KOMAR, P. D. [1977]. Computer simulation of turbidity current flow and the study of deep-sea channels and fan sedimentation. Dans : *The Sea* (Edité par E. D. GOLDBERG, I. N. McCAVE, J. J. O'BRIEN et J. H. STEELE), vol. 6, Marine Modelling, pages 603–621. John Wiley, New York.
- KUENEN, P. H. [1952]. Estimated size of the Grand Banks turbidity currents. *Am. Jour. Sci.* **vol. 250**, pages 874–884.
- KUENEN, P. H. [1967]. Emplacement of flysch-type sand beds. *Sedimentology* **vol. 9**, pages 203–243.
- LANDAU, L. et E. LIFCHITZ [1971]. *Mécanique des fluides*, vol. VI de *Physique théorique*. MIR, Moscou. 669 p.
- LARCHEVÈQUE, M. [1995]. Turbulence développée homogène incompressible. (cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- LAVAL, A. [1988]. *Modélisation d'écoulements de type bouffée de densité ; Application à l'interprétation des dépôts turbiditiques*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France. 262 p.
- LAVAL, A., M. CREMER, P. BEGHIN et C. RAVENNE [1988]. Density surges : Two-dimensional experiments. *Sedimentology* **vol. 35**, pages 73–84.
- LIN, P.-N. et H. W. SHEN [1984]. Two-d flow with sediment by characteristics method. *Jour. Hydraulic Eng., ASCE* **vol. 110**, no. 4, pages 615–626.
- LOWE, D. R. [1976a]. Grain flow and grain flow deposits. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 46**, pages 188–199.
- LOWE, D. R. [1976b]. Subaqueous liquefied and fluidized sediment flows and their deposits. *Sedimentology* **vol. 23**, pages 285–308.
- LUN, C. K. K., S. B. SAVAGE, D. J. JEFFERY et N. CHEPURNIY [1984]. Kinetic theories for granular flow : inelastic particles in Couette and slightly inelastic particles in general flowfield. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 140**, pages 223–256.
- LÜTHI, S. [1980]. Some new aspects of two dimensional turbidity currents. *Sedimentology* **vol. 28**, pages 97–105.
- LÜTHI, S. [1981]. Experiments on non channelized turbidity currents and their deposits. *Mar. Geol.* **vol. 40**, pages M59–M68.
- MASSELOT, A. et B. CHOPARD [1998]. Cellular automata modeling of snow transport by wind. Parallel Computing Group - CUI, University of Geneva. 7 p.
- MC ELWAIN, J., K. NISHIMURA et Y. NOHGUCHI [1998]. Ping-pong ball avalanches : experiments and simulations. Dans : *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 37. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- MC GEE, W. J. [1897]. Sheet flood erosion. *Bull. Geol. Soc. Am.* **vol. 8**, pages 87–112.
- MIDDLETON, G. V. [1966a]. Experiments on density and turbidity currents: I. motion of the head. *Can. Jour. Earth Sci.* **vol. 3**, pages 523–546.

-
- MIDDLETON, G. V. [1966b]. Experiments on density and turbidity currents : II. uniform flow of density currents. *Can. Jour. Earth Sci.* **vol. 3**, pages 627–637.
- MIDDLETON, G. V. [1966c]. Small scales models of turbidity currents and the criterion for auto-suspension. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 36**, pages 202–208.
- MIDDLETON, G. V. [1967]. Experiments on density and turbidity currents : III. deposition of sediment. *Can. Jour. Earth Sci.* **vol. 4**, pages 475–505.
- MIDDLETON, G. V. [1976]. Hydraulic interpretation of sand size distributions. *Jour. Geol.* **vol. 84**, pages 405–426.
- MIDDLETON, G. V. et M. A. HAMPTON [1973]. Sediments gravity flows : Mechanics of flow and deposition. Dans : *Turbidity and Deep Water Sedimentation* (Edité par G. V. MIDDLETON et A. H. BOUMA), pages 1–38. Pacific Section S.E.P.M.
- MIDDLETON, G. V. et M. A. HAMPTON [1976]. Subaqueous sediment transport and deposition by sediment gravity flows. Dans : *Marine Sediment Transport and Environmental Management* (Edité par D. J. STANLEY et J. P. SWIFT), pages 197–218. John Wiley, New York.
- MIYAMOTO, H. et S. SASAKI [1997]. Simulating lava flows by an improved cellular automata method. *Computers and Geosciences* **vol. 23**, no. 3, pages 283–292.
- MONIN, A. S. et A. M. YAGLOM [1971]. *Statistical fluid mechanics*. M.I.T. press, Cambridge. 769 p.
- MULDER, T. [1993]. La vitesse du courant de turbidité de 1979 à Nice : apports de la modélisation. *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIa* **vol. 317**, pages 1449–1455.
- MULDER, T., B. SAVOYE, D. J. W. PIPER et J. P. M. SYVITSKI [1998]. The Var submarine sedimentary system : understanding Holocene sediment processes and their importance to the geological record. Dans : *Geological processes on continental margins : Sedimentation, mass-wasting and stability* (Edité par M. S. EVANS et A. CRAMPS), numéro 129, pages 145–166. Geological Society, London, Special publications.
- MULDER, T., B. SAVOYE, J. P. M. SYVITSKI et P. COCHONNAT [1996]. Origine des courants de turbidité enregistrés à l'embouchure du Var en 1971. *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIa* **vol. 322**, pages 301–307.
- NAAIM, M. [1995]. Modélisation numérique des avalanches aérosols. *La Houille Blanche* **vol. 6**, no. 5, pages 56–62.
- NAYLOR, M. A. [1980]. The origin of inverse grading in muddy debris flow deposits – A review. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 50**, no. 4, pages 1111–1116.
- NORLUND, U. [1996]. Formalizing geological knowledge—with an example of modeling stratigraphy using fuzzy logic. *J. Sed. Res.* **vol. 6**, no. 4, pages 689–698.
- NORLUND, U. et C. HERN [1999]. Examples of forward stratigraphic models produced using fuzzy systems. Dans : *Proceedings of the 5th annual conference of the International Association for Mathematical Geology* (Edité par S. J. LIPPARD, A. NÆSS et R. SINDING-LARSEN), vol. 2, pages 545–550.
- O'BRIEN, J. S. et P. Y. JULIEN [1985]. Physical properties and mechanics of hyperconcentrated sediment flows. Dans : *Proceedings of the Specialty Conference on Delineation of Landslide, Flash Flood and Debris Flow Hazard in Utah*, pages 260–279. Utah State University.
- PANTIN, H. M. [1979]. Interaction between velocity and effective density in turbidity flow : phase plan analysis, with criteria for auto suspension. *Mar. Geol.* **vol. 31**, pages 59–99.
- PARKER, G. [1982]. Conditions for the ignition of catastrophically erosive turbidity currents. *Mar. Geol.* **vol. 46**, pages 307–327.
- PARKER, G., Y. FUKUSHIMA et H. M. PANTIN [1986]. Self-accelerating turbidity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 171**, pages 145–181.
- PARKER, G., M. GARCIA, Y. FUKUSHIMA et W. YU [1987]. Experiments on turbidity currents over an erodible bed. *J. Hydraul. Res.* **vol. 25**, no. 1, pages 123–147.
- PICKERING, K. T., R. N. HISCOTT et F. J. HEIN [1989]. *Deep Marine Environments : Clastic Sedimentation and Tectonic*. Unwin Hyman, London. 416 p.

- PICKERING, K. T., D. A. V. STOW, M. P. WATSON et R. N. HISCOTT [1986]. Deep water facies, processes and models: a review and classification scheme for modern and ancient sediments. *Earth-Sci. Rev.* **vol. 23**, pages 75–174.
- PIERSON, T. C. [1981]. Dominant particle support mechanism in debris flow at Mt. Thomas, New Zealand, and implications for flow mobility. *Sedimentology* **vol. 28**, pages 49–60.
- PIPER, D. J. W. et B. SAVOYE [1993]. Processes of late Quaternary turbidity current flow and deposition on the Var deep-sea fan, north-west Mediterranean Sea. *Sedimentology* **vol. 40**, pages 557–582.
- PIPER, D. J. W., D. A. V. STOW et W. R. NORMARK [1984]. The Laurentian Fan: Sohm Abyssal Plain. *Geo-Mar. Lett.* **vol. 3**, pages 141–146.
- PLAPP, J. E. et J. P. MITCHELL [1960]. A hydrodynamic theory of turbidity currents. *Jour. Geophys. Res. B.* **vol. 65**, no. 3, pages 983–992.
- PRANDTL, L. [1925]. Über die ausgebildete turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.* **vol. 5**, pages 136–139.
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1982]. *Apport des expériences en canal à l'interprétation sédimentologique des dépôts de cônes détritiques sous-marins. Referenced report: 30 367*, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison.
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1983]. Apport des expériences en canal à l'interprétation sédimentologique des dépôts de cônes détritiques sous-marins. *Revue de l'Institut Français du Pétrole* **vol. 42**, no. 5, pages 529–553.
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1984]. *Modélisation tridimensionnelle des écoulements turbides. Referenced report: 32 665*, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison.
- REYNOLDS, O. [1894]. On the dynamical theory of incompressible and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 186**, pages 123–164.
- RODI, W. [1980]. *Turbulence models and their application in hydraulics*. Book Publication of the International Association for Hydraulic Research (IAHR), Delft, the Netherlands.
- RODINE, J. D. et A. M. JOHNSON [1976]. The ability of debris, heavily freighted with coarse clastic materials, to flow on gentle slopes. *Sedimentology* **vol. 23**, pages 213–234.
- ROTHMAN, D. H., J. P. GROTZINGER et P. FLEMINGS [1994a]. Scaling in turbidite deposition. *J. Sed. Res.* **vol. A64**, no. 1, pages 59–67.
- ROTHMAN, D. H., J. P. GROTZINGER et P. FLEMINGS [1994b]. Scaling in turbidite deposition – reply. *J. Sed. Res.* **vol. A64**, no. 4, pages 934. Cf. [Hiscott et Firth, 1994].
- RZADKIEWICZ, S., P. HEINRICH, B. SAVOYE et J. F. BOURILLET [1998]. Numerical and experimental simulations of a submarine avalanche - the Nice 1979 event (French Riviera). Dans: *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 48. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- SAMPL, P. [1993]. Current status of the AVL avalanche simulation model - Numerical simulation of dry snow avalanches. Dans: « Pierre Beghin » *international workshop on rapid gravitational mass movements*. CEMAGREF, Grenoble.
- SAVAGE, S. B. [1984]. The mechanics of rapid granular flows. *Advances in Applied Mechanics* **vol. 24**, pages 289–366.
- SAVAGE, S. B. et C. K. K. LUN [1988]. Particule size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 189**, pages 311–335.
- SHANMUGAM, G., L. R. LEHTONEN, T. STRAUME, S. E. SYVERTSEN, R. J. HODGKINSON et M. SKIBELI [1994]. Slump and debris flow dominated upper slope facies in Cretaceous of Norwegian and northern North Seas (61–67° N): implications for sand distribution. *AAPG Bulletin* **vol. 78**, no. 6, pages 910–937.
- SHEN, H. et N. L. ACKERMANN [1982]. Constitutive relations for fluid-solid mixture. *Jour. Eng. Mech. Div., ASCE* **vol. 108**, pages 748–763.
- SHULTZ, A. W. [1984]. Subaerial debris flow deposition in the upper Palaeozoic cutler formation, western Colorado. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 54**, pages 759–772.
- SIEGENTHALER, C. et J. BUHLER [1985]. The kinematics of turbulent suspension currents (turbidity currents) on inclined boundaries. *Mar. Geology* **vol. 64**, pages 19–40.

-
- SIMONIN, O. [1991a]. Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées. Ecole de Printemps de mécanique des fluides numériques, Aussois.
- SIMONIN, O. [1991b]. Prediction of the dispersed phase turbulence in particle-laden jets. Dans : *4th International Symposium on Gas-Solid Flows, Portland*, page 16.
- SIMONIN, O., P. L. VIOLLET et N. MÉCHITOUA [1990]. The modelling of turbulent recirculating high temperature flows loaded with particles. Dans : *Int. Workshop on Plasma Jet in the Development of New Materials Technology, Frunze USSR*, page 14.
- SIMPSON, J. E. [1972]. Effects of the lower boundary on the head of a gravity current. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 53**, pages 759–768.
- SIMPSON, J. E. [1982]. Gravity currents in the laboratory atmosphere and ocean. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **vol. 14**, pages 213–234.
- SIMPSON, J. E. et R. E. BRITTER [1978]. The dynamics of the head of gravity current advancing over a horizontal surface. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 94**, pages 477–495.
- SKOGSETH, R. [1999]. Turbiditetsstraumar langs eit skrått plan. Universitetet i Bergen & Norsk Hydro. 101 p.
- SPARKS, R. S. J., R. T. BONNECAZE, H. E. HUPPERT, J. R. LISTER, M. A. HALLWORTH, H. MADER et J. PHILLIPS [1993]. Sediment-laden gravity currents with reversing buoyancy. *Earth and Planetary Science Letters* **vol. 114**, pages 243–257.
- SPEZIALE, C. G. [1987]. On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 178**, pages 459–475.
- STEWART, H. B. et B. WENDROFF [1984]. Two-phase flow : Models and methods. *J. Comput. Phys.* **vol. 56**, pages 363–409.
- STOW, D. A. V. [1986]. Deep clastic seas. Dans : *Sedimentary Environments and Facies* (Edité par H. G. READING), pages 398–444. Blackwell Scientific Publications, Oxford.
- STOW, D. A. V. et A. J. BOWEN [1980]. A physical model for the transport and sorting of fine-grained sediments by turbidity currents. *Sedimentology* **vol. 27**, pages 31–46.
- STRAUB, S. et G. VALENTINE [1998]. 3-d modelling of rapid granular flows and its application to high-concentration pyroclastic flows. Dans : *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 51. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- TAKAHASHI, T. [1980]. Debris flow on prismatic open channels. *Jour. of Hydraulic Div., ASCE* **vol. 106**, pages 381–396.
- TAKAHASHI, T. [1981]. Debris flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **vol. 13**, pages 57–77.
- TAKAHASHI, T. [1993]. Fluid mechanical modelling the viscous debris flow. Dans : « *Pierre Beghin* » *international workshop on rapid gravitational mass movements*. CEMAGREF, Grenoble.
- TAKAHASHI, T., H. NAKAGAWA, T. HARADA et Y. YAMASHIKI [1992]. Routing debris flows with particle segregation. *Jour. Hydraulic Eng., ASCE* **vol. 118**, no. 11, pages 1490–1507.
- TURCOTTE, D. L. [1989]. Fractals in geology and geophysics. Dans : *Fractals in geophysics* (Edité par C. H. SHOLZ et B. B. MANDELBROT), pages 171–196. Reprint from : Pure and applied geophysics, vol. 131, 1/2.
- TURNER, J. S. [1973]. *Buoyancy effects of fluids*. Cambridge University Press. 367 p.
- VALENTINE, G. A. et K. H. WOHLTZ [1989]. Numerical models of Pliinian eruption columns and pyroclastic flows. *Jour. Geophys. Res. B.* **vol. 94**, pages 1867–1887.
- VON KÄRMÄN, T. [1921]. Über laminare und turbulente reibung. *Z. Angew. Math. Mech.* **vol. 1**, pages 233–252.
- ZALESKI, S. [1995]. Introduction aux modèles de turbulence. (cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris. 66 p.
- ZENG, J. et D. R. LOWE [1992]. A numerical model for sedimentation from highly-concentrated multi-sized suspensions. *Math. Geol.* **vol. 24**, no. 4, pages 393–415.
- ZENG, J. et D. R. LOWE [1997]. Numerical simulation of turbidity current flow and sedimentation : I. theory. *Sedimentology* **vol. 44**, pages 67–84.

- ZHENG, X. M. et J. M. HILL [1996]. Molecular dynamics modeling of granular chute flow: density and velocity profiles. *Powder Technology* **vol. 86**, pages 219–227.
- ZHIMING, L. [1995]. *A three-Dimensional computer simulation program for turbidity flows*. Mémoire de DEA, Stanford Univ. 110 p.

Deuxième partie

L'objet-écoulement : un modèle pour les écoulements gravitaires finis

La partie précédente a montré combien il était difficile de prendre en compte simultanément les variations temporelles et spatiales des propriétés physiques d'un événement. Dans cette partie, motivés par la réduction des temps calculs qui est indispensable pour une application géologique d'une modélisation numérique, nous proposons une formulation simple des équations régissant les écoulements gravitaires de volume fini : l'objet-écoulement.

Le chapitre 3, propose un modèle dont la dérivation est basée sur des arguments phénoménologiques et physiques (modèle **P**).

Le chapitre 4 revient en détail sur des phénomènes physiques relativement bien connus à l'échelle de la mécanique des milieux continus et du point de vue de la mécanique des fluides en particulier, pour les intégrer au niveau « moyen » de l'événement et de l'objet-écoulement. À cette occasion des précisions et des corrections sont apportées à la formulation du modèle **P** proposé au chapitre 3. Le modèle obtenu par intégration des équations d'ondes longues et à l'aide d'une méthode de décomposition du champ de vitesse, constituera le modèle **T**.

Le chapitre 5 traite du problème des fermetures du modèle. En effet, il apparaît dans les équations du modèle, en plus des inconnues recherchées, mais déterminées par les équations, de nouveaux paramètres inconnus résultant principalement des conditions aux limites. Le problème de fermeture est de relier ces nouvelles inconnues introduites aux inconnues du problème.

Un soin particulier est apporté à énoncer distinctement les hypothèses et les processus pris en compte, en se basant tant sur des arguments théoriques que sur l'expérimentation des phénomènes.

Chapitre 3

Un modèle phénoménologique en couche mince : l'objet-écoulement

Le modèle présenté ici est dérivé de celui exposé dans [Hugot, Zaleski et Joseph, 1999a], repris et modifié dans [Hugot, Zaleski et Joseph, 1999b].

La démarche que nous avons adoptée pour obtenir un modèle mathématique simple pour les écoulements gravitaires turbulents et dilués est la suivante :

1. L'argument principal du modèle est issu d'observations expérimentales : l'écoulement peut être assimilé à une forme géométrique simple, paramétrée par deux longueurs (en deux dimensions).
2. On considère que l'écoulement gravitaire d'un volume fini constitué d'un mélange de particules reflète l'équilibre entre :
 - la force motrice de gravité ;
 - la friction turbulente ;
 - les forces de pression ;
 - l'entraînement du fluide ambiant ;
 - le dépôt ou l'érosion des sédiments.
3. L'évolution de l'objet écoulement peut alors être décrit quantitativement en terme de variations temporelles de :
 - la vitesse moyenne U ,
 - la vitesse d'étalement U_l ,
 - la hauteur h ,
 - la longueur l ,
 - et la fraction volumique des particules en suspension ϕ .

Sommaire

3.1	Choix de la géométrie de l'écoulement	64
3.2	Hypothèses supplémentaires et définitions	65
3.2.1	Hypothèses	65
3.2.2	Définitions	66
3.3	Mouvement de l'objet	67
3.4	Déformation de l'objet	67
3.5	Volume de l'objet	68
3.5.1	Préliminaires : Argument dimensionnel	68
3.5.2	Variation du volume de l'objet	69

3.5.3	Entraînement de l'eau	70
3.6	Transferts de particules	70
3.6.1	La sédimentation	71
3.6.2	L'érosion	71
3.6.3	Équation de transferts des sédiments	71
3.6.4	Aggradation et dénudation du lit	72
3.7	Conclusion et formulation du modèle P	72
3.7.1	Discussion	73
3.7.2	Mise en défaut et modification du modèle P	73

3.1 Choix de la géométrie de l'écoulement

Les observations expérimentales [Beghin, 1979; Benjamin, 1968; Hopfinger, 1983; Hopfinger et Tochon-Danguy, 1977; Laval, 1988; Laval, Cremer, Beghin et Ravenne, 1988; Middleton et Hampton, 1976; Ravenne et Beghin, 1983, 1984] montrent que les écoulements gravitaires d'un volume fini de sédiments développent une structure longitudinale caractéristique (cf. figure 1.11 page 22 et section 1.7 sur la description des écoulements gravitaires dilués — courants turbiditiques). Cette structure se retrouve également lors des simulations numériques fines bidimensionnelles, en x et en z , du type Navier–Stokes (cf. figure 3.1 et [Assier-Rzadkiewicz, 1997; Furnes, 1999; Skogseth, 1999])

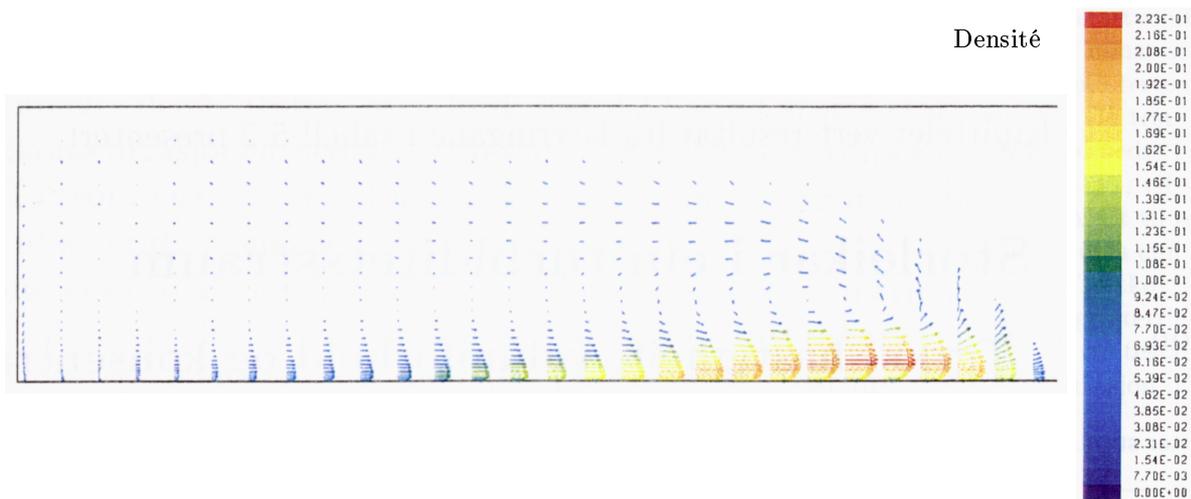


FIG. 3.1 – Profil numérique d'un courant gravitaire de volume fini. Les flèches indiquent la direction et la valeur du vecteur vitesse, les codes couleurs correspondent à la valeur de la fraction volumique (d'après Skogseth [1999]).

Ces considérations conduisent à l'idée que l'on peut aboutir à un modèle fort simple en supposant que l'écoulement est un objet géométrique déformable, ayant une morphologie imposée, paramétrée par deux variables :

- $h(x)$, sa hauteur ;
- $l(z)$, sa longueur.

Le fait de définir la géométrie de l'écoulement permet de donner une expression analytique de $h(x)$ et $l(z)$. On suppose donc :

Hypothèse 1

La forme géométrique de l'écoulement, en deux dimensions, est supposée semblable à celle d'une demi-ellipse (cf. figure 3.2 page suivante).

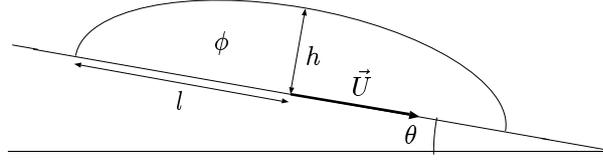


FIG. 3.2 – Géométrie et variables de l'objet écoulement, représentée ici en deux dimensions sous forme d'une semi-ellipse.

Ce choix, certes arbitraire, a cependant été motivé par la simplicité et la symétrie de cette forme géométrique. Il n'est ainsi nécessaire de quantifier qu'une des deux longueurs caractéristiques de l'objet. La pertinence de ce choix a de plus été confirmée par les travaux expérimentaux de Beghin [1979], Hopfinger [1983] et Laval [1988] et les travaux théoriques de Huppert et Simpson [1980] ou Didden et Maxworthy [1982].

L'équation de la surface de l'objet est donnée par :

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1 \quad (3.1)$$

En $x = l$, c'est-à-dire aux extrémités de l'ellipse, la hauteur est nulle, $z = 0$. Au centre de l'ellipse, en $x = 0$, la hauteur de l'écoulement est $z = h$.

En trois dimensions l'écoulement a la forme d'un demi-ellipsoïde.

3.2 Hypothèses supplémentaires et définitions

Nous exposons ici les définitions et les hypothèses physiques nécessaires à la dérivation du modèle. Les hypothèses seront reprises plus en détails dans le chapitre suivant.

3.2.1 Hypothèses

Hypothèse 2 (Couche mince)

La hauteur de l'écoulement, h —échelle de longueur caractéristique verticale du courant— est petite devant la longueur de l'écoulement, l —échelle de longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement :

$$l \gg h \quad (3.2)$$

Cette hypothèse correspond à l'hypothèse de la couche limite. Elle implique que le mouvement se fera principalement parallèlement au sol. Pour plus de détails, on se reportera au chapitre suivant page 85.

Hypothèse 3 (Turbulence)

Le nombre de Reynolds, Re , est grand. Le fluide, au sein de la suspension, est turbulent. Les termes visqueux sont négligeables exceptée la dissipation visqueuse due à la turbulence.

La transition entre les régimes laminaires et turbulents est caractérisée par le nombre de Reynolds, Re :

$$Re = \frac{\rho U h}{\mu}$$

Il quantifie le rapport des efforts inertiels aux efforts visqueux. Il est probable que très rapidement, après le déclenchement de l'écoulement, les forces de friction, d'abord visqueuses ou visco-plastiques, deviennent turbulente (Inversement, à la fin de la phase III, lorsque l'écoulement a ralenti, la force de friction n'est plus turbulente mais visqueuse).

Hypothèse 4 (Boussinesq)

La suspension est supposée suffisamment diluée, pour justifier l'utilisation de l'approximation dite de « Boussinesq » :

$$\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \phi \ll 1 \quad (3.3)$$

Les variations de densité due à la présence des particules sont négligeables sauf dans les termes facteurs de la gravité.

En effet, lorsque la grandeur $(\rho_p - \rho_f)\phi$ est petite devant la grandeur ρ_f , il est possible de négliger $(\rho_p - \rho_f)\phi$ dans les termes d'inertie, tout en le conservant dans les termes de gravité (cf. page 78 du chapitre suivant pour plus de détails).

Hypothèse 5 (Uniformité et homogénéité)

La densité du fluide ambiant est uniforme :

$$\rho_f = Cte. \quad (3.4)$$

Le fluide ambiant et le fluide de l'écoulement sont miscibles en toutes proportions et la répartition des densités dans la suspension est homogène (les processus de mélange entre le fluide ambiant et le fluide de la suspension sont isobares . . . et adiabatiques).

Hypothèse 6 (Vitesse des particules)

La vitesse des particules U_p (phase solide) au sein de l'écoulement est supposés égale à la somme de la vitesse du fluide U et de la vitesse de chute des particules v_s :

$$U_p = U + v_s \quad (3.5)$$

3.2.2 Définitions

D'après le choix de la géométrie, le volume de l'écoulement par unité de largeur V est défini par :

$$V = Clh \quad (3.6)$$

avec le facteur géométrique :

$$C = \frac{\pi}{2} \quad (3.7)$$

La surface de contact écoulement–substrat, par unité de largeur, est donnée par :

$$\partial V_i = 2l \quad (3.8)$$

La surface de l'interface écoulement–fluide ambiant, par unité de largeur, est :

$$\partial V_s = C(h + l) \quad (3.9)$$

On rappelle que la fraction volumique des particules, ϕ , est définie par :

$$\phi = \frac{V_p}{V} \quad (3.10)$$

où V_p est le volume de particules.

3.3 Mouvement de l'objet

La variation de la quantité de mouvement de la bouffée, en deux dimensions, sous l'hypothèse de Boussinesq (hypothèse 4) est :

$$\frac{d}{dt}((1 + C_A)VU) = \frac{\Delta\rho}{\rho_f}\phi V g \sin\theta + \frac{1}{\rho_f}\tau_t\partial V \quad (3.11)$$

où C_A est le coefficient de masse ajouté, θ l'angle de pente et τ_t la friction turbulente.

La variation temporelle de quantité de mouvement est égale à la somme de la composante longitudinale de la gravité effective et de la force de friction turbulente le long de la surface de l'écoulement. Cette équation est équivalente à la seconde loi de Newton pour un système ouvert.

C_A , le coefficient de masse ajoutée, correspond à une masse virtuelle de fluide autour de l'écoulement entraînée par l'accélération de ce dernier [Turner, 1973, p. 191]. Dans le cas d'un cylindre elliptique, C_A peut être approximé par :

$$C_A = \frac{2h}{l} \quad (3.12)$$

Pour les écoulements minces comme ceux que l'on considère, c'est-à-dire vérifiant l'hypothèse 2 ($h \ll l$), le coefficient C_A peut être négligé. C_A peut, également, être négligé lorsque la densité de l'écoulement est nettement supérieure à celle du fluide ambiant ou lorsque les vitesses sont faibles (phase de décélération) [Beghin, 1979].

L'analyse dimensionnelle de l'équation (3.11) permet de déduire la dimension de la friction τ_t :

$$[\tau_t] = \left[\frac{M}{LT^2} \right]$$

soit :

$$[\tau_t] = \left[\frac{M}{L^3} \right] \left[U^2 \right] \quad (3.13)$$

τ_t peut donc a priori être supposé de la forme²⁶ :

$$\tau_t = -\rho_f C_D |U| U \quad (3.14)$$

Les frottements turbulents sont proportionnels au carré de la vitesse moyenne de l'écoulement.

On remarque que les gradients de pression sont absents de l'équation (3.11). Ceci est dû à la géométrie symétrique de l'« objet écoulement » (cf. figure 3.2 et hypothèse 1). En effet, ils n'ont pas d'effets dissymétriques sur le mouvement moyen de la bouffée. Une des conséquences d'un tel modèle pour la quantité de mouvement est qu'il ne peut y avoir de mouvement moyen soutenu sur des surfaces parfaitement horizontales ($\theta = 0^\circ$).

Enfin on notera que la vitesse, U , détermine la position X du barycentre de l'objet à chaque temps, t , par :

$$\frac{dU}{dt} = X \quad (3.15)$$

3.4 Déformation de l'objet

La vitesse d'étalement U_l de la suspension suit l'équation d'évolution :

$$\frac{d}{dt}((1 + C_A)VU_l) = \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \phi h^2 g \cos\theta + \frac{1}{\rho_f} \tau_{tl} \partial V \quad (3.16)$$

²⁶. On verra dans la section 3.7 que cette forme n'est pas satisfaisante.

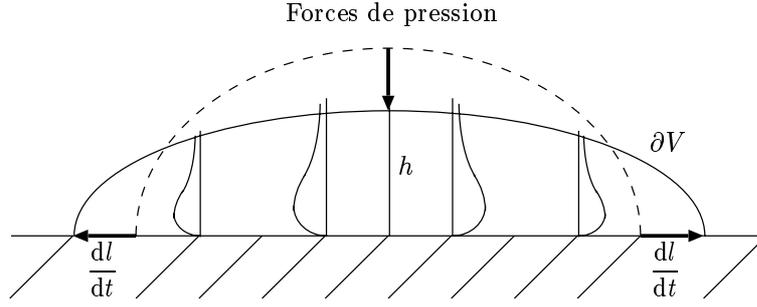


FIG. 3.3 – Étalement de l'objet écoulement sous les forces de pression. U_l correspond à la vitesse d'étalement, dont les profils sont antisymétriques. Les traits pointillés indiquent la géométrie initiale de l'écoulement, les traits pleins la géométrie de l'écoulement après un temps fini, lors d'un mouvement à volume constant, sous l'influence de la pression.

La variation temporelle de la quantité de mouvement associée au champ de vitesse des déformations est égale à la somme de la composante longitudinale des efforts de pression et de la force de friction turbulente le long de la surface de l'objet.

τ_{ul} , la friction turbulente du mouvement d'étalement est supposée de la forme (cf. argument dimensionnel (3.13)) :

$$\tau_{ul} = \rho_f C_D |U_l| U_l \quad (3.17)$$

L'écoulement s'allonge à la vitesse, U_l :

$$\frac{dl}{dt} = U_l \quad (3.18)$$

Les inconnues liées au front peuvent être déterminées d'après les équations (3.15) et (3.18) par :

– la vitesse du front, U_f :

$$U_f = U + \frac{dl}{dt} = U + U_l \quad (3.19)$$

– la position du front, X_f :

$$X_f = X + l \quad (3.20)$$

3.5 Volume de l'objet

3.5.1 Préliminaires : Argument dimensionnel

Les transferts de masse peuvent, d'une manière générale, être quantifiés par une équation de bilan contenant un terme de flux du type :

$$\frac{dM}{dt} = Q \partial V \quad (3.21)$$

où Q est une flux de masse par unité d'aire et ∂V la surface traversée par ce flux.

L'analyse dimensionnelle du flux de masse Q , de l'équation 3.21, montre que :

$$[Q] = \left[\frac{M}{L^2 T} \right]$$

que l'on peut réécrire sous la forme plus évocatrice suivante :

$$[Q] = \left[\frac{M}{L^3} \right] \left[\frac{L}{T} \right] \quad (3.22)$$

Le premier crochet, dans le membre de droite, a la dimension d'une masse volumique, le second, la dimension d'une vitesse. Il s'agit donc pour chaque phénomène de transfert de masse de trouver :

- une masse volumique caractéristique du phénomène,
- une vitesse caractéristique associée au phénomène.

3.5.2 Variation du volume de l'objet

Le volume d'eau est :

$$V_f = (1 - \phi)V$$

Le volume de particules :

$$V_p = \phi V$$

La masse totale de l'écoulement est définie par :

$$M = \rho_f V_f + \rho_p V_p \quad (3.23)$$

L'équation 3.23 peut être réécrite, en utilisant la définition (3.10) de la fraction volumique :

$$\begin{aligned} M &= \rho_f (1 - \phi)V + \rho_p \phi V \\ &= \rho_f V + \phi(\rho_p - \rho_f)V \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de Boussinesq (hypothèse 4), la grandeur $(\rho_p - \rho_f)\phi$ est petite devant la grandeur ρ_f . La variation de la masse de l'écoulement est donc conditionnée par la variation de la masse de fluide.

Le rapport des volumes de particules et de fluide est donné par :

$$\frac{V_p}{V_f} = \frac{\phi}{1 - \phi}$$

que l'on peut écrire dans le cadre de l'approximation de Boussinesq :

$$\frac{V_p}{V_f} \sim \phi$$

Sous les hypothèses de Boussinesq, la variation du volume de l'écoulement est donc principalement due aux variations du volume d'eau de l'écoulement, le volume de particules, lui, étant négligeable.

Le fluide ambiant s'incorpore à l'écoulement par sa surface supérieure ∂V_s , comme le montre la figure 3.4, il n'intervient donc qu'un flux d'eau :

- E_f : Flux correspondant à l'entraînement et à l'incorporation de l'eau à l'interface supérieure de l'écoulement.

La variation du volume de l'écoulement est alors déterminée par :

$$\frac{dV}{dt} = E_f \partial V_s \quad (3.24)$$

La variation temporelle du volume est égale au taux d'entraînement du fluide ambiant le long de l'interface supérieure. Cette équation est donc une simplification de l'équation de bilan de la masse totale (équation de continuité) sous l'hypothèse 4.

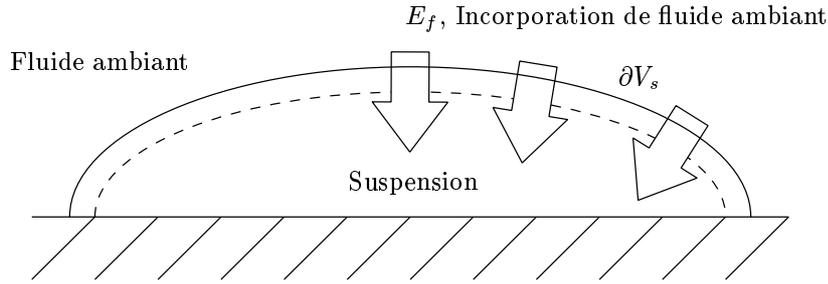


FIG. 3.4 – Incorporation du fluide ambiant le long de l'interface supérieure de l'objet écoulement. Les traits pointillés indiquent la géométrie initiale de l'objet écoulement, les traits pleins la géométrie de l'objet après incorporation de fluide ambiant. Les flèches représentent les flux entrants de fluide.

3.5.3 Entraînement de l'eau

En se basant sur l'argument dimensionnel (3.22), on a :

$$E_f = \left[\frac{L}{T} \right]$$

En considérant comme caractéristique du phénomène la vitesse moyenne de l'écoulement U , le taux d'entraînement de fluide ambiant, E_f , le long de l'interface supérieure, ∂V_s , peut s'écrire :

$$E_f = U E_f^* \quad (3.25)$$

où E_f^* est un taux adimensionnel d'entraînement. Ce taux est fonction du nombre de Richardson, Ri , comme on le précise à la section 5.5 du chapitre sur les fermetures du modèle.

L'équation (3.24) d'évolution du volume de l'objet écoulement peut donc s'écrire :

$$\frac{dV}{dt} = U E_f^* \partial V_s \quad (3.26)$$

3.6 Transferts de particules

L'écoulement échange des particules avec l'extérieur. Il faut ici considérer deux effets séparément :

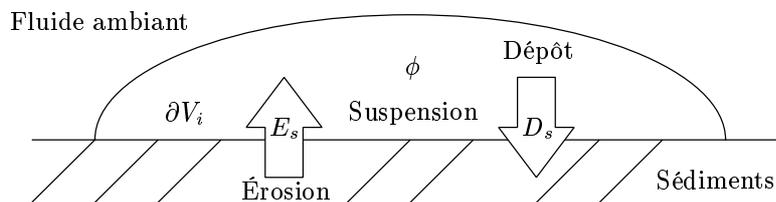


FIG. 3.5 – Sédimentation et érosion le long de l'interface inférieure de l'objet. Les flèches indiquent les flux de particules. Le flux entrant correspond à l'érosion, le flux sortant à la sédimentation.

- La sédimentation ;
- L'érosion.

Néanmoins ces deux effets sont pris en compte dans une seule équation. Comme le montre la figure 3.5, deux flux de particules interviennent essentiellement entre l'objet et le substrat :

- D_s : flux sortant correspondant à la chute des sédiments hors de l'écoulement (sédimentation) ;

– E_s : flux entrant correspondant à l'arrachement des sédiments du sol (érosion).

La variation du volume des particules est donnée par :

$$\frac{d}{dt}(\phi V) = (E_p - D_p)\partial V_i \quad (3.27)$$

où ∂V_i est la surface inférieure de l'écoulement. La variation temporelle du volume de particules est égale au bilan des taux d'entraînement et de sédimentation le long du lit.

Le second membre de l'équation (3.27) correspond aux flux de particules à travers la surface ∂V_i et détermine si l'objet écoulement dépose ou érode des particules. On note, F , ce flux :

$$F = (E_p - D_p) \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \text{si } F < 0 & \Rightarrow \text{il y a dépôt,} \\ \text{si } F = 0 & \Rightarrow \text{il y a préservation,} \\ \text{si } F > 0 & \Rightarrow \text{il y a érosion.} \end{cases} \quad (3.29)$$

La dimension de ce flux est celle d'une vitesse :

$$F = \left[\frac{L}{T} \right] \quad (3.30)$$

3.6.1 La sédimentation

Les sédiments en suspension chutent, hors de l'écoulement, par effet gravitationnel, essentiellement lors de la phase de décélération (phase III) de ce dernier. Le taux de sédimentation, D_p , intervenant dans le bilan de volume des particules, est donc être supposé fonction de :

- la vitesse de sédimentation v_s (effet gravitationnel), fonction ou non de la présence d'autres particules, *i.e.* de la fraction volumique ;
- la fraction volumique ϕ_b de l'écoulement immédiatement au dessus du lit.

Le flux D_p peut être modélisé, d'après l'argument dimensionnel (3.30), par :

$$D_p = v_s \phi_b \quad (3.31)$$

Les termes sont, en effet, évalués juste au dessus du lit pour éviter les comportements singuliers. Ainsi, b est une distance très proche du lit tel que : $b \ll h$.

3.6.2 L'érosion

Comme nous l'avons souligné plus haut, un écoulement, essentiellement dans sa phase d'accélération (phase I), est capable d'éroder, le long de sa surface inférieure ∂V_i , les sédiments présents sur sa trajectoire.

Intuitivement, on sent que l'érosion est fonction de la différence entre la friction basale et une contrainte critique qui détermine si des sédiments d'une certaine taille peuvent être ou non érodés. L'érosion semble donc être, par l'intermédiaire de la contrainte basale, une fonction de la vitesse de l'écoulement.

En se basant sur l'argument dimensionnel 3.30, le taux d'entraînement des sédiments E_p peut se décomposer de la manière suivante :

$$E_p = U E_p^* \quad (3.32)$$

où E_p^* est un taux adimensionnel d'entraînement des sédiments.

3.6.3 Équation de transferts des sédiments

D'après les équations (3.31) et (3.32), la conservation du volume de particules s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\phi V) = (U E_p^* - v_s \phi_b)\partial V_i \quad (3.33)$$

3.6.4 Aggradation et dénudation du lit

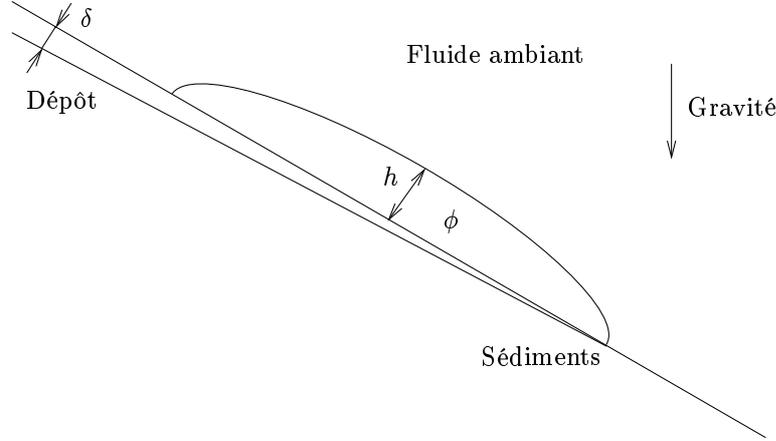


FIG. 3.6 – Épaisseur déposée, δ , associée à l'objet écoulement représenté ici sous forme ellipsoïdale.

On note δ l'épaisseur du dépôt. La variation du volume de particules, ϕV , de l'objet écoulement définie le volume déposé V_d :

$$\begin{aligned} V_d &= -\frac{1}{1-\lambda} \frac{d}{dt}(\phi V) \\ &= -\frac{1}{1-\lambda} F \\ &= -\frac{1}{1-\lambda} (UE_p^* - v_s \phi_b) \partial V_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

où λ est la porosité. Les conditions de dépôt sont déterminées par les trois cas suivant :

$$\begin{cases} \text{érosion} & \text{si } F < 0 \\ \text{conservation} & \text{si } F = 0 \\ \text{aggradation} & \text{si } F > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

La figure 3.6 illustre le cas d'un écoulement en dépôt.

3.7 Conclusion et formulation du modèle P

Le modèle obtenu, que nous dénommerons « modèle **P** » est le suivant [Hugot *et al.*, 1999a] :

$$\text{Mouvement de l'objet :} \quad \frac{d}{dt}(VU) = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} g \phi V \sin \theta - k_t U^2 \partial V \quad (3.36a)$$

$$\text{Étalement de l'objet :} \quad \frac{d}{dt}(VU_l) = \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho_f} g \phi h^2 \cos \theta - k_t U_l^2 \partial V \quad (3.36b)$$

$$\text{Incorporation de fluide :} \quad \frac{dV}{dt} = UE_f^* \partial V_s \quad (3.36c)$$

$$\text{Érosion \& Sédimentation :} \quad \frac{d}{dt}(\phi V) = (UE_p^* - v_s \phi_b) \partial V_i \quad (3.36d)$$

$$\frac{dX}{dt} = U, \quad \frac{dl}{dt} = U_l \quad (3.36e)$$

Ce modèle est valable sous les hypothèses énoncées à la section 3.2.1, c'est-à-dire pour des écoulements gravitaires finis (hypothèse 1), dilués (hypothèse 4) et turbulents (hypothèse 3).

3.7.1 Discussion

Le système constitué des équations (3.36a) (en considérant la friction turbulente $\tau_t = \rho_f C_D |U|U$ nulle) et (3.36c), est celui considéré par Beghin [1979].

Le système constitué des équations (3.36a), (3.36c), (3.36d) est celui considéré par Dade, Lister et Huppert [1994], mais augmenté du flux associé à l'érosion–diffusivité (terme UE_p^*).

La caractéristique essentielle du modèle **P** est d'introduire deux nouveaux phénomènes :

1. Comme le remarque [Beghin, 1979], dans le cas où la pente est faible ou nulle, l'effet d'étalement par gravité —effondrement de la suspension sous son propre poids— devient prépondérant :

$$g \sin \theta \ll g \cos \theta \quad (3.37)$$

Cet effet négligé dans les deux approches citées précédemment, est ici pris en compte dans l'équation (3.36b), qui quantifie les déformations dues à l'effondrement de la suspension sous les forces de pression hydrostatique.

2. Enfin, les transferts de particules dus à l'érosion et/ou la réduction de la sédimentation par la diffusivité turbulente sont pris en compte par le terme UE_p^* présent dans l'équation (3.36d)

3.7.2 Mise en défaut et modification du modèle **P**

Le modèle précédent n'est, en réalité, pas complètement satisfaisant. Il peut être très simplement mis en défaut en considérant la cas d'une pente nulle ($\theta = 0$), cas étudié tant expérimentalement que théoriquement par Benjamin [1968]; Huppert [1982]; Huppert et Simpson [1980]; Simpson et Britter [1978]

Le fait que la pente soit nulle implique que l'équation (3.36a) est identiquement nulle si la vitesse initiale $U(t = 0)$ est nulle. Il n'y a donc pas de mouvement moyen de l'objet, son barycentre ne se déplace pas.

Tous les termes contenant la vitesse U sont nuls. En particulier, l'équation d'évolution du volume devient :

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

Ce qui signifie que le mouvement a lieu à volume constant. Ce fait semble peu probable. En effet, la conservation du volume n'est pas conforme aux expérimentations de Beghin [1979]; Laval [1988], ni aux modèles de Bonnetaze, Huppert et Lister [1993]; Huppert [1982]; Huppert et Simpson [1980] développés pour des expériences du type *dam-break*.

De plus, la conservation du volume de sédiments s'écrit, dans le cas d'un mouvement moyen nul :

$$\frac{d}{dt}(\phi V) = -v_s \phi_b \partial V_i$$

Ceci signifie que la suspension est uniquement en sédimentation, et que la diffusion turbulente n'a plus d'effet sur la mise en suspension des particules. Or, même s'il n'y a pas de mouvement moyen, le champ de vitesse associé à l'étalement peut être turbulent et peut suffire à empêcher les sédiments de chuter.

Cependant, le front de l'écoulement est en mouvement à la vitesse U_l . C'est pourquoi, il semble nécessaire d'introduire dans le modèle **P** des corrections relatives au champ de vitesse.

Pour les deux raisons évoquées plus haut, le modèle **P** peut être reformulé de la manière suivante [Hugot *et al.*, 1999b] :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(VU) &= \frac{\Delta\rho}{\rho_f}\phi Vg \sin\theta - k_t(U + U_l)U\partial V \\ \frac{d}{dt}(VU_l) &= \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho_f}\phi h^2g \cos\theta - k_t(U + U_l)U_l \\ \frac{dV}{dt} &= (U + U_l)E_f^*\partial V_s \\ \frac{d}{dt}(\phi V) &= ((U + U_l)E_p^* - v_s\phi_b)\partial V_i\end{aligned}$$

La vitesse caractéristique du mouvement n'est plus U , mais la somme $U + U_l$. Les termes, comme le flux volumique d'eau E_f (équation (3.25)), le taux d'érosion E_p (équation (3.32)), qui ne contenaient que la vitesse U en facteur, sont maintenant associés à la vitesse caractéristique $U + U_l$, c'est-à-dire à la somme de la vitesse moyenne et de la vitesse d'étalement -déformation. Dans le cas d'une vitesse moyenne U nulle, le modèle est alors capable d'incorporer le fluide ambiant le long de son interface supérieure proportionnellement à U_l , et de maintenir les particules en suspension.

On voit ici les limites de l'approche phénoménologique. En effet, il n'est pas certain que la correction proposée prennent réellement en compte toute la réalité du phénomène. C'est pourquoi, le chapitre suivant propose une base théorique plus directe au modèle « objet-écoulement ».

*La science comporte un risque d'erreur, mais s'applique à la réalité.
Les mathématiques sont nécessairement justes, mais cette certitude ne
s'applique qu'aux mathématiques, et non à l'usage que l'on peut en faire.*
Ivan Ikeland.

Chapitre 4

Compléments théoriques au modèle de l'objet-écoulement

On propose ici une base théorique plus solide pour le modèle objet. La démarche suivie est simple et naturelle. La formulation classique des milieux continus pour le couplage de deux fluides ne permet d'obtenir des résultats numériques de dépôts qu'au prix de calculs numériques longs [e.g. Assier-Rzadkiewicz [1997]; Felix [1998]; Naaïm [1995]; Skogseth [1999]; Zhiming [1995]].

Néanmoins, à partir de cette formulation que nous appellerons « problème complet », nous appliquerons la première simplification qui s'appuie sur la théorie de la couche limite, les profils semblables et les méthodes intégrales. Elle permet d'aboutir au modèle dit d'« ondes longues » pour le problème de deux fluides couplés.

Encore coûteux à résoudre [e.g. Bonnecaze *et al.* [1993]; Zeng et Lowe [1997]], puisque contenant des termes de dérivées spatiales et temporelles, on propose ensuite de simplifier ce problème en intégrant les équations sur la longueur. On impose, pour cela, une géométrie simple mais variable à l'écoulement (hypothèse 1 page 64). À l'aide d'une décomposition du mouvement, on obtient alors une formulation simple en dérivées temporelles décrivant l'évolution de cet objet géométrique et de ses propriétés physiques.

La méthode utilisée repose donc essentiellement sur trois considérations :

- un argument théorique : celui de la théorie de la couche limite, des profils semblables et des méthodes intégrales.
- un argument issu d'observations expérimentales : l'écoulement peut être assimilé à une forme géométrique simple, paramétrée par deux longueurs, comme cela a été exposé à la section 3.1 page 64.
- un argument théorique, issu de la théorie aérodynamique des profils minces [Darrozes et François, 1982, Chap. VI] : sous certaines conditions le mouvement peut être décomposé en deux parties : une partie symétrique et une partie antisymétrique.

Sommaire

4.1	Position du problème	76
4.1.1	Pression hydrostatique	77
4.1.2	Hypothèse de Boussinesq	78
4.1.3	Influence du fluide interstitiel	79
4.2	Traitement turbulent	81
4.2.1	Continuité	81
4.2.2	Quantité de mouvement	82
4.2.3	Fraction volumique	82
4.3	Théorie de la couche limite	83

4.3.1	Préliminaires	83
4.3.2	Échelles caractéristiques	86
4.3.3	Simplification des équations du mouvement	88
4.3.4	Pression à l'interface	89
4.4	Dérivation des équations d'ondes longues couplées	89
4.4.1	Constats préliminaires	90
4.4.2	Paramètre de similitude	90
4.4.3	Profils semblables	90
4.4.4	Vitesse transversale et Développement du concept d'entraînement	92
4.4.5	Intégration transversale des équations du mouvement	93
4.5	Équations d'ondes longues couplées	93
4.5.1	Équation d'onde longue combinée et consorts	94
4.5.2	Cas limite d'une profondeur infinie	96
4.5.3	Fluide interstitiel = Fluide ambiant	98
4.6	Discussion	98
4.7	Décomposition et intégration des équations d'ondes longues	99
4.7.1	Préliminaires	99
4.7.2	Changement de référentiel	99
4.7.3	Décomposition et intégration	101
4.8	Équations intégrées	101
4.9	Conclusion et formulation du modèle T	103
4.9.1	Approximation pour le cas d'une hauteur d'eau infinie (modèle T)	103
4.9.2	Cas du mouvement global positif	104
4.9.3	Cas de l'étalement pur	105

4.1 Position du problème

On considère le problème défini par la figure 4.1. Le système de coordonnées est choisi avec l'axe $x_1(x)$ le long du sol dans le sens de la pente et l'axe $x_3(z)$ est dirigé normalement au lit, vers le haut. Les domaines considérés sont les suivants :

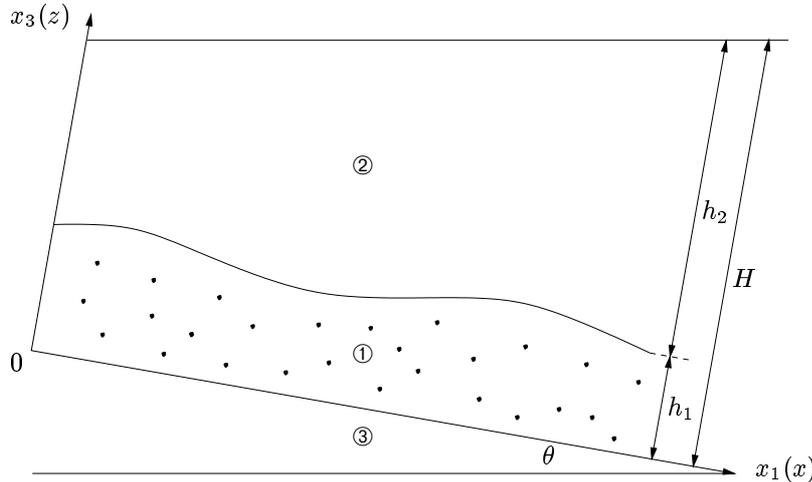


FIG. 4.1 – Formulation du problème complet sur un domaine fermé

- Le domaine ① est constitué par la suspension de sédiments étudiée qui est en mouvement ; sa hauteur est h_1 ;
- Le domaine ②, qui est composé d'eau « pure », représente la mer ; son épaisseur est h_2 . L'épaisseur totale des milieux ① et ② est H , qui est constante ou non. Si l'on néglige les couplages avec l'air, H n'est fonction que de x (il n'y a pas de raz de marée) ;

- Le domaine ③ correspond au lit de sédiments et forme la topographie du fond marin. Sa déviation par rapport à l'horizontale est notée θ .

Lorsque l'écoulement de la suspension a lieu sous une faible profondeur d'eau, il n'est pas correct de négliger le mouvement du fluide supérieur dans le milieu ②. Nous nous proposons de traiter ici ce cas.

Le problème à résoudre est donc celui du couplage de deux fluides incompressibles, soumis à la gravité g , à un champ de pression p^* , et avec les contraintes τ , dont on suppose pour le moment qu'elles sont newtoniennes. On ne précise pas plus à ce stade la forme du tenseur des contraintes, on peut seulement supposer une loi de comportement du type Newtonien :

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

c'est-à-dire que les contraintes sont des fonctions linéaires des gradients de vitesse. La prise en compte de la présence des particules dans l'expression de la viscosité sera discutée dans la section 5.1 page 108 sur les fermetures. Les lois de comportement pour les écoulements concentrés sont présentées dans [Hugot, 1997].

Les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi v_s \delta_{j3}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (4.1c)$$

avec les conditions limites :

$$u = v = 0 \text{ en } z = 0 \quad u = 0 \text{ en } z = H \quad (4.2)$$

L'équation (4.1c) correspond à l'équation de transport d'un scalaire passif avec un terme source. L'analogie avec les transferts thermiques est ici complète [Schlichting, 1979, chap. XII].

4.1.1 Pression hydrostatique

Le problème statique permet classiquement de faire apparaître des termes de pression hydrostatique, c'est-à-dire les termes de pression qui équilibrent les fluides au repos, qui seront ensuite retranchés au problème complet. En effet, intuitivement il est clair qu'une partie de la pression exercée par l'eau ambiante sur notre suspension provient du poids de cette colonne d'eau.

Pour un domaine au repos dans le champ de pesanteur uniforme, l'équation de bilan local de quantité de mouvement se réduit à :

$$\rho g_i = \frac{\partial p_s}{\partial x_i} \quad (4.3)$$

où ρ est la masse volumique du milieu considéré et p_s la pression hydrostatique. En considérant le milieu ②, en notant ρ_2 la masse volumique du milieu ② et en écrivant la pression p^* de l'équation (4.1b) sous la forme $p_s + p$, où p est la pression résiduelle, on obtient :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} = \rho_2 g_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.4)$$

l'équation de quantité de mouvement (4.1b) s'écrit alors :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho} \right) g_i \quad (4.5)$$

On écrit maintenant les équations pour chacun des fluides ① et ②. On note ρ_1 la masse volumique du fluide ①.

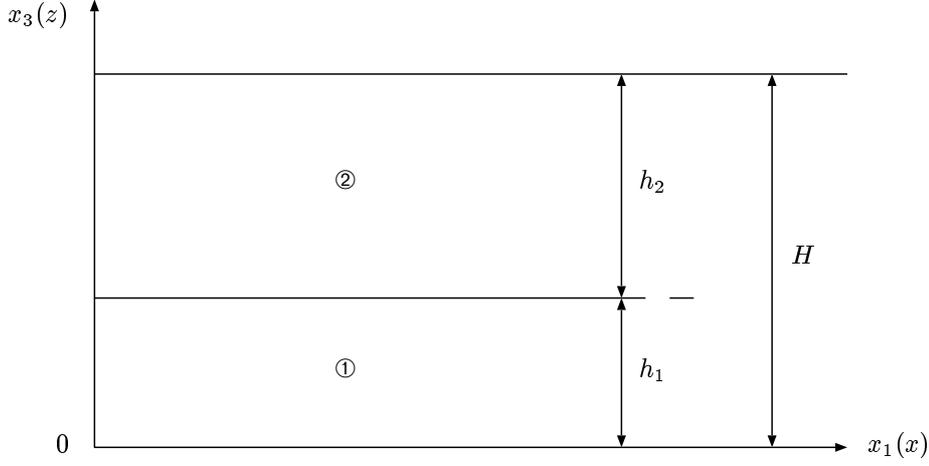


FIG. 4.2 – Problème hydrostatique. Les deux fluides sont en équilibre, la pression exercée par le milieu ② sur le milieu ① est égale au poids de la colonne d'eau.

Problème dans le milieu ②

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau_{2ij}}{\partial x_j} \quad (4.6b)$$

Problème dans le milieu ①

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.7a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{1ij}}{\partial x_j} + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) g_i \quad (4.7b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi v_s \delta_{j3}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (4.7c)$$

4.1.2 Hypothèse de Boussinesq

Par analogie avec les transferts thermiques, on peut faire l'approximation de « Boussinesq » dans le fluide composite (le mélange).

Hypothèse 7

Les variations de densité dues à la présence des particules, sont négligeables sauf dans les termes facteurs de la gravité g . Les propriétés du fluide, telles que la viscosité, la masse volumique, les propriétés thermiques, restent inchangées²⁷ [Eckert et Drake, 1959, p. 8] et [Schlichting, 1979].

L'hypothèse de Boussinesq est une hypothèse issue des transferts thermiques. C'est ici, l'excès de masse qui joue le rôle d'excès de température. L'approximation est valable, en thermique, pour :

$$\alpha(T - T_0) \ll 1$$

L'analogie du coefficient de dilatation :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$$

²⁷. On verra dans la section 5.1 page 108 que l'on peut améliorer cette représentation, en définissant la viscosité comme une fonction de la fraction volumique.

est ici :

$$\rho = \rho_i \left(1 + \phi \frac{\rho_p - \rho_i}{\rho_i} \right)$$

L'approximation est donc ici valable pour :

$$\phi \frac{\rho_p - \rho_i}{\rho_i} \ll 1$$

ce que l'on traduit par :

$$\phi \ll 1$$

le terme $\frac{\rho_p - \rho_i}{\rho_i}$ étant d'ordre 1.

On constate donc que l'excès de masse intervient par l'intermédiaire de la fraction volumique, ϕ . Pour $\phi = 0$, il n'y pas d'excès de masse, c'est-à-dire pas de sédiments (c'est le cas du milieu ②). En pratique, l'approximation de Boussinesq est valable pour $\phi < 0,1$.

On note ρ_i la densité du fluide interstitiel et ρ_p celle des particules. Par définition :

$$\rho_1 = \rho_i + (\rho_p - \rho_i)\phi \quad (4.8)$$

Sous l'hypothèse 7 page précédente, on considère donc que $\rho_1 \sim \rho_i$ dans les termes autres que la gravité.

L'équation (4.7b) se simplifie en :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau_{1ij}}{\partial x_j} + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_i} \right) g_i \quad (4.9)$$

4.1.3 Influence du fluide interstitiel

Le fluide interstitiel et le fluide ambiant contribuent à réduire la gravité. Dans le cas où il y a mélange entre le fluide ② (fluide ambiant) et le fluide ① (suspension), cette différence de densité apparaîtra également au niveau du flux d'incorporation de fluide ambiant. On note ρ_a , ρ_i et ρ_p la densité de fluide ambiant, du fluide interstitiel et des particules. Par définition :

$$\rho_1 = \rho_i + (\rho_p - \rho_i)\phi \quad (4.10a)$$

$$\rho_2 = \rho_a \quad (4.10b)$$

soit :

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_2 &= (\rho_p - \rho_i)\phi + (\rho_i - \rho_a) \\ &= (\rho_p - \rho_i)\phi [1 - \gamma] \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec la contribution, γ :

$$\gamma = \frac{(\rho_a - \rho_i)}{(\rho_p - \rho_i)\phi} \quad (4.12)$$

On pose :

$$\bar{g}' = \bar{g} \frac{\rho_p - \rho_i}{\rho_i} \quad (4.13)$$

L'équation de quantité de mouvement (4.9) se met sous la forme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau_{1ij}}{\partial x_j} + \bar{g}' \phi [1 - \gamma] \quad (4.14)$$

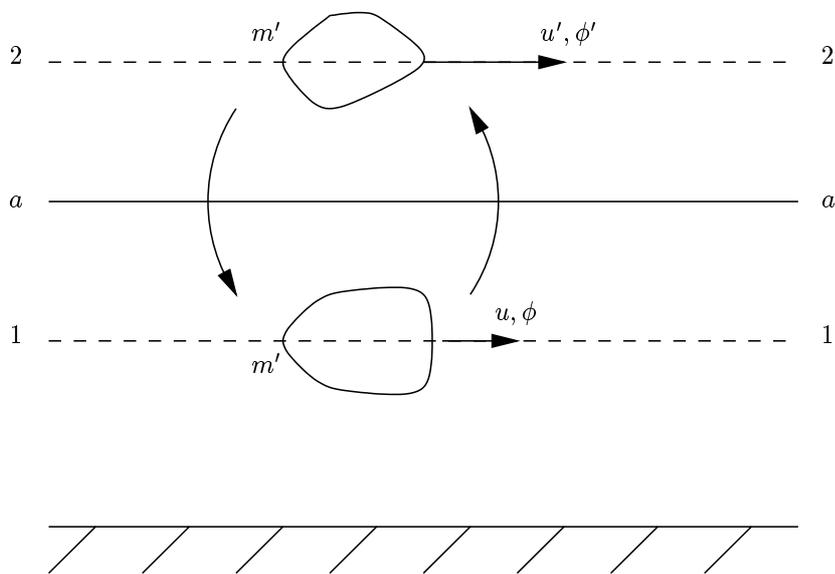


FIG. 4.3 – Illustration du mouvement dû à la turbulence. À cause du mouvement de mélange turbulent, les particules fluides sont constamment transportées à travers le plan $a-a$: La masse m' traversant le plan $a-a$, par unité de temps et d'aire, dans le direction ascendante, provient du plan 1—1, où la vitesse est u et la fraction volumique est ϕ et est transportée jusqu'au plan 2—2. Pour un écoulement stationnaire, la même quantité de masse m' doit être transportée du plan 2—2, où la vitesse est u' , et la fraction volumique ϕ' , au plan 1—1 (d'après Eckert et Drake [1959]).

4.2 Traitement turbulent

Les écoulements considérés dans les applications pratiques sont le plus souvent turbulents [Schlichting, 1979]. Le mot « Turbulent » signifie qu'il existe, dans le mouvement, des fluctuations irrégulières et aléatoires (mouvement des tourbillons ou de mélange) qui se superposent au mouvement principal (cf. figure 4.3 page ci-contre). Par exemple, la vitesse, en un point fixe de l'espace, ne reste pas constante avec le temps, mais suit des fluctuations hautes fréquences, très irrégulières. Contrairement à la théorie cinétique des gaz, ce ne sont pas ici des molécules individuelles, mais véritablement des « poches de fluide » de différentes tailles qui subissent ces fluctuations. La taille de ces poches de fluide, qui s'agrègent et se désagrègent continuellement, détermine les « échelles de la turbulence » ; leur taille est déterminée par des conditions externes associées à l'écoulement. On peut voir la taille de ces structures, par exemple, dans les vents qui balayent un champ, sur les images satellite de la terre . . .

Ces fluctuations sont extrêmement complexes et difficiles à traiter mathématiquement. Il faut retenir que ces fluctuations, même si elles ne dépassent pas quelques pour cents, influent néanmoins, de manière importante, sur l'évolution de l'écoulement et sur l'équilibre des forces²⁸. En effet, les fluctuations de vitesse influencent le mouvement moyen d'une manière telle que celui-ci semble présenter une augmentation de résistance à la déformation. En d'autres mots, la présence de fluctuations se manifeste comme si la viscosité était augmentée d'un facteur cent, mille, ou même plus [Schlichting, 1979, part D]. Cette augmentation de la « viscosité apparente » de l'écoulement est le concept central de toutes les considérations théoriques sur le mouvement turbulent.

Comme dans la plupart des cas, on considère donc que la turbulence est pleinement développée. En conséquence, on se restreint à l'étude des grandeurs moyennes du mouvement turbulent, puisque, de par la complexité des fluctuations turbulentes, une formulation complète est pratiquement impossible.

Pour pouvoir décrire un mouvement turbulent en termes mathématique, il est commode de le décomposer en « mouvement moyen » et « mouvement fluctuant » ou « tourbillonnaire ». Cette décomposition a été proposée en premier par [Reynolds, 1894]. On note a , la moyenne d'ensemble d'un champ \tilde{a} , et a' sa partie fluctuante. On obtient donc les relations suivantes pour les champs de vitesse et de pression :

$$\tilde{u}_i = u_i + u'_i \quad \tilde{p} = p + p' \quad (4.15)$$

de même, pour le fraction volumique :

$$\tilde{\phi} = \phi + \phi' \quad (4.16)$$

Les fluctuations de la masse volumique du mélange sont reliées aux fluctuations de fraction volumique par la relation :

$$\rho_1 = \rho_i + (\rho_p - \rho_i)\phi \quad (4.17)$$

où ρ_i la densité du fluide interstitiel et ρ_p celle des particules de la suspension.

Les propriétés de calcul sur les grandeurs moyennes et fluctuantes sont rappelées dans l'annexe D page 273 sur les axiomes de Reynolds, la plus importante de ces propriétés étant que la moyenne d'une grandeur décrivant une fluctuation est nulle.

Nous allons maintenant rechercher les équations du mouvement que satisfont les moyennes d'ensemble de la vitesse, de la pression et de la fraction volumique.

4.2.1 Continuité

En introduisant les décompositions moyennes-fluctuations (4.15) dans l'équation (4.7a), et en en prenant la moyenne d'ensemble²⁹, on obtient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.18)$$

28. C'est ce mouvement de mélange qui est responsable des forces de traînée agissant sur les bateaux ou les avions, mais également des fortes pressions sur les ailes d'avions . . . sans elles les avions ne pourraient pas voler.

29. On prend ici des moyennes d'ensemble, car prendre des moyennes temporelles n'aurait pas beaucoup de sens dans le cas instationnaire qui nous intéresse !

et on en déduit :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.19)$$

Les valeurs moyennes des composantes de la vitesse et les composantes fluctuantes de la vitesse satisfont à l'équation de continuité incompressible.

4.2.2 Quantité de mouvement

De la même manière, en introduisant les hypothèses (4.15) dans l'équation (4.14), et en prenant la moyenne, on obtient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau_{1ij}}{\partial x_j} + g'_i \phi [1 - \gamma] - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (4.20)$$

Les termes linéaires des composantes fluctuantes tels que $\partial u'/\partial t$ et $\partial^2 u'/\partial x^2$, de même que les termes mixtes $u \cdot u'$, s'annulent (cf. propriétés de la décomposition de Reynolds dans l'annexe D page 273). Par contre, les termes quadratiques du type $u' \cdot u'$ subsistent dans les équations, on trouve une interprétation physique de ce qu'ils représentent dans [Schlichting, 1979, p. 560].

On voit ici, que l'équation (4.14) page 79 ne diffère, de l'équation ci-dessus, que par des corrélations doubles du type $\overline{u'_i u'_j}$ regroupées au second membre. Les composantes de la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent vérifient donc la même équation que les composantes de la vitesse d'un écoulement laminaire, sous réserve que le tenseur des contraintes laminares soit augmenté d'un terme de contrainte supplémentaire, que l'on note :

$$\tau'_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (4.21)$$

Ce tenseur de contraintes supplémentaires est appelé « tenseur des contraintes de Reynolds » [Tennekes et Lumley, 1972]. Ces contraintes sont dues aux fluctuations turbulentes. Puisque ces termes s'ajoutent aux termes visqueux classiques et ont une influence similaire sur l'écoulement, on dit souvent qu'ils sont dus à la « viscosité turbulente ». On verra même dans la section 5.3 page 113 sur les fermetures que ce concept de viscosité turbulente est à la base des premiers modèles de fermeture pour le tenseur de Reynolds ...

4.2.3 Fraction volumique

Enfin, en utilisant les décompositions (4.16) et (4.15), l'équation de transport de la fraction volumique (4.7c) devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi v_s \delta_{j3}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{\phi' u'_j}}{\partial x_j} \quad (4.22)$$

Ici encore on note que l'équation (4.7c) page 78 ne diffère de cette équation que par la présence, au second membre, de corrélation double du type $\overline{\phi' u'_j}$. La fraction volumique moyenne d'un écoulement turbulent —comme d'ailleurs n'importe quel autre constituant passif tel que la chaleur, les espèces chimiques— vérifie donc la même équation que la fraction volumique d'un écoulement laminaire, sous réserve que le flux de masse volumique soit augmenté d'un terme supplémentaire que l'on note :

$$F'_j = -\rho \overline{\phi' u'_j} \quad (4.23)$$

Le flux de masse est ici la somme du mouvement moléculaire, du mouvement gravitaire et du mouvement turbulent (cf. figure 4.4 page ci-contre).

Dans la mesure où ces termes s'ajoutent aux termes de diffusion moléculaires classiques et ont une influence similaire, on dit qu'ils sont dus à la « diffusivité turbulente ». Ici encore ce concept de diffusivité turbulente sera à la base des premiers modèles de fermeture (cf. section 5.4.2.2 page 122).

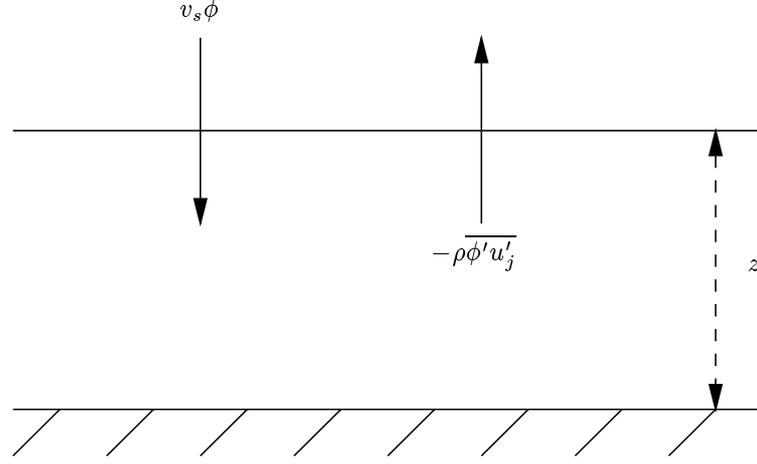


FIG. 4.4 – Sédimentation et diffusion des sédiments.

L'analogie entre les équations (4.21) et (4.23) est frappante, tout laisse à penser que les particules sont transportées par la turbulence de la même manière que l'est la quantité de mouvement.

Les résultats obtenus pour le milieu ② sont identiques :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.24a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau_{2ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \quad (4.24b)$$

4.3 Théorie de la couche limite

La théorie de la couche limite permet, par analyse dimensionnelle des équations du mouvement, de réduire le nombre de termes de ces dernières, en ne conservant que ceux qui sont dominants.

4.3.1 Préliminaires

Le profil de vitesse de l'écoulement étudié (cf. figure 4.5 page suivante) présente des parties similaires à celles rencontrées dans des profils d'écoulements bien connus théoriquement (cf. figure 4.6 page suivante). Lorsque le fluide s'écoule le long de la paroi son profil s'apparente à celui d'une « couche limite » (cf. figure 4.6 page suivante, partie A.). Dans la partie centrale, entre les fluides ① et ②, la distribution de vitesse correspond à celle d'une « couche de cisaillement » ou d'une « couche de mélange » (cf. figure 4.6 page suivante, partie B.). Enfin, loin de la paroi, le fluide ②, mis en mouvement par le fluide ①, acquiert un profil semblable à celui d'un « jet libre » (cf. figure 4.6 page suivante, partie C.). Le jet et la couche de mélange appartiennent à ce qu'on nomme les écoulements « libres », ils ne sont contraints par aucune paroi !

Si la profondeur de fluide est grande, le profil sera, de façon simplifiée, celui d'un « jet de paroi » (cf. figure 4.7 page 85). La recirculation du fluide ② est alors négligeable. D'un côté le fluide s'écoule le long d'une paroi, son profil est celui d'une couche limite, alors que de l'autre côté de l'écoulement, le fluide ① se mélange avec un fluide ambiant au repos, ce qui correspond à un « jet libre ». La distribution de vitesse acquise est donc celle d'une couche limite le long de la paroi (cf. figure 4.6 page suivante, partie A.), et celle d'un jet libre (cf. figure 4.6 page suivante) à une certaine distance de cette dernière.

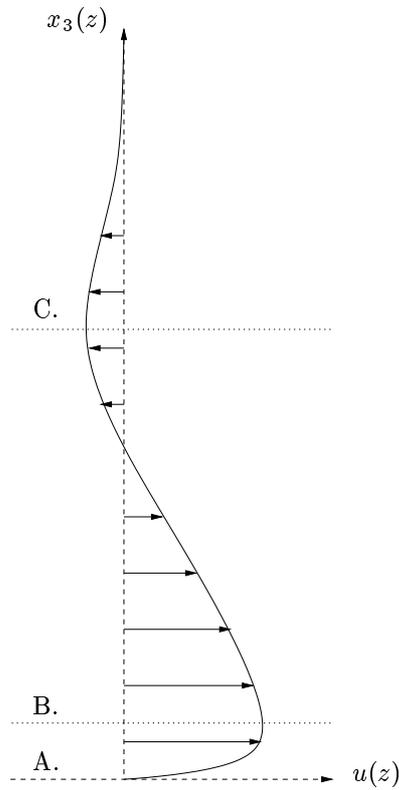


FIG. 4.5 – Profil de vitesse réel simplifié d'un écoulement gravitaire.

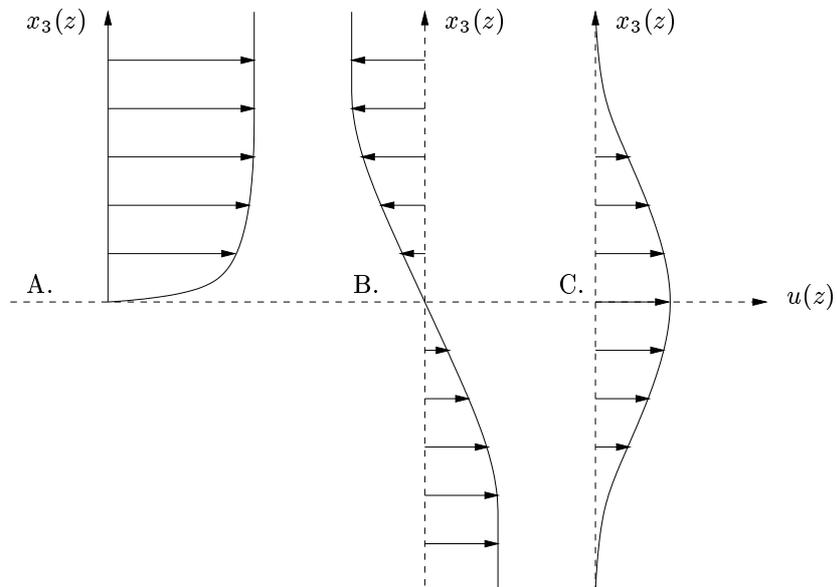


FIG. 4.6 – Profils théoriques d'écoulements classiques en mécanique des fluides. A. Couche limite. B. Couche de cisaillement. C. Jet libre.

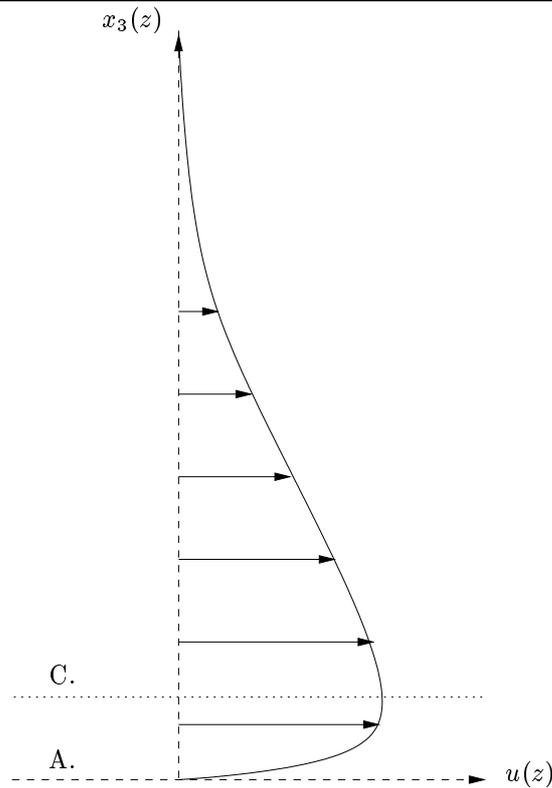


FIG. 4.7 – Profil de vitesse réel simplifié dans le cas d'une profondeur d'eau infinie.

Les écoulements turbulents libres sont plus faciles à traiter mathématiquement que les écoulements turbulents de paroi. En effet, bien souvent, la friction turbulente est beaucoup plus grande que la friction laminaire et ce dans tout l'écoulement. On peut, en conséquence, négliger complètement cette dernière dans les problèmes d'écoulements libres turbulents, ce qui n'est pas le cas dans les écoulements de paroi où il faut prendre en compte le voisinage immédiat de la paroi, *i. e.* la sous-couche visqueuse.

Les hypothèses de la couche limite sont les suivantes :

Hypothèse 8

L'épaisseur, δ , de la couche limite est petite par rapport à une dimension L de l'écoulement :

$$\delta \ll L \quad (4.25)$$

Les gradients transversaux sont donc beaucoup plus importants que les gradient longitudinaux :

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.26)$$

À priori la longueur L , correspond à la longueur de l'écoulement, et δ , l'épaisseur de la couche limite, correspond à sa hauteur. En adimensionnel, L est choisi tel que $\partial u / \partial x$ soit d'ordre 1. En fait, toutes les autres grandeurs sont supposées d'ordre 1, jusqu'à preuve du contraire ...

En fait, bien que les écoulements libres diffèrent des écoulements de paroi, comme on vient de le voir, on peut les traiter dans le cadre de la couche limite [Tennekes et Lumley, 1972, chap. 4]. Ils sont tels que les gradients transversaux sont plus importants que les gradients longitudinaux. On applique donc les hypothèses de la couche limite à l'ensemble du domaine considéré.

Remarque 2

Nous n'avons considéré qu'une seule échelle verticale de longueur δ . En réalité il existe au moins deux longueurs caractéristiques verticales : l'une est associée à la vitesse ou à la quantité de mouvement, que

l'on note δ_u , et l'autre est associée à la fraction volumique, notée, δ_ϕ . Et il n'y a, a priori, pas de raisons, dans le cas général de fluides miscibles, que δ_u et δ_ϕ soient égales ! En effet les profils de vitesses et de

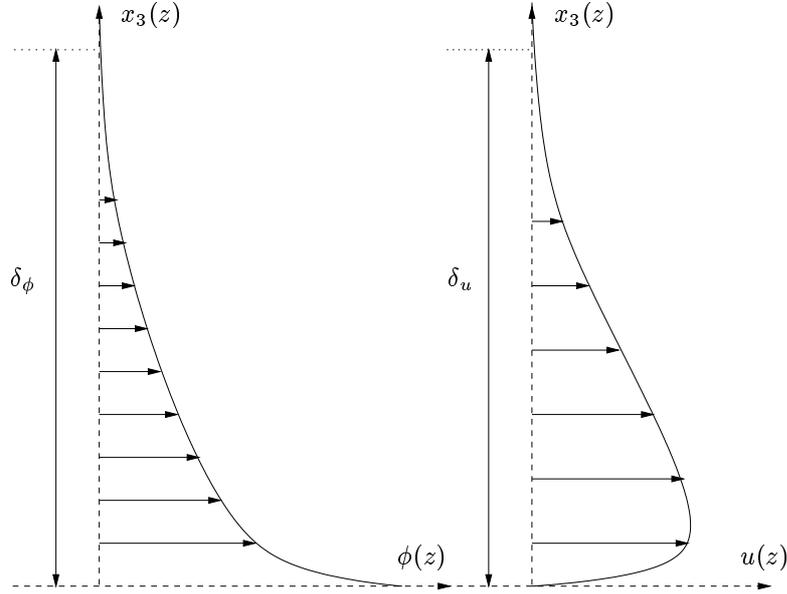


FIG. 4.8 – Épaisseurs caractéristiques associées aux profils de vitesse et de concentration théoriques simplifiés.

concentrations (cf. figure 4.8) peuvent ne pas coïncider [Eckert et Drake, 1959, p. 174], et alors $\delta_\phi \neq \delta_u$. Ce résultat peut être visualisé via des modélisations analogiques ou des modélisations numériques basées sur des modèles du type Navier–Stokes.

En pratique, on suppose, $\delta_u = \beta\delta_\phi$ où β est une constante, et on pose même $\delta_\phi \approx \delta_u$ pour simplifier les calculs [Eckert et Drake, 1959, p. 312]. Tout se passe alors comme si les fluides n'étaient pas miscibles. On ne rend pas compte des variations de la hauteur δ_ϕ : diminution liée à la chute des sédiments, lorsque l'écoulement est très ralenti ; augmentation par diffusion turbulente ...

4.3.2 Échelles caractéristiques

On note U_0 , l'échelle de vitesse dans la direction principale x de l'écoulement et V_0 , l'échelle de vitesse dans la direction transversale z .

La présence des termes turbulents nécessite d'introduire une échelle supplémentaire qui correspond à l'échelle des fluctuations de vitesses. On note u_\star cette échelle, et on suppose qu'elle est la même dans chaque direction, on a donc :

$$\overline{u'u'} \sim \overline{u'v'} \sim \overline{v'v'} \sim u_\star^2 \quad (4.27)$$

Nous avons supposé que l'échelle associée aux fluctuations de vitesse est la même dans chaque direction (équation (4.27)). Ceci implique, via l'équation (4.19) de continuité sur les fluctuations, qu'il existe une échelle de longueur, λ , associée à la turbulence, qui est la même dans chaque direction (cf. figure 4.9 page suivante). La turbulence est isotrope.

La présence de particules au sein de l'écoulement introduit deux échelles : celle associée à la fraction volumique moyenne ϕ , que l'on note Φ_0 , et celle associée aux fluctuations notée ϕ_\star .

La gravité introduit deux nouvelles échelles, ses deux composantes que l'on note g'_x , composante suivant x , et g'_z , composante suivant z . La composante longitudinale, g'_x , est définie par :

$$g'_x = g' \sin \theta$$

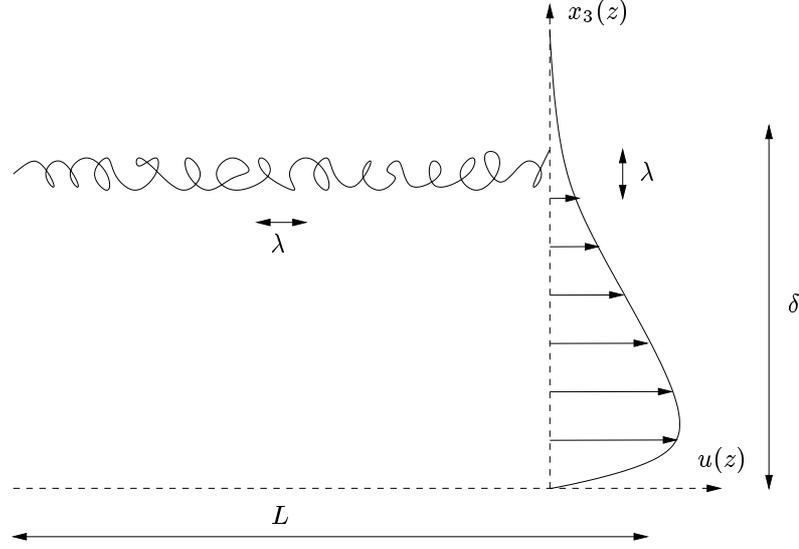


FIG. 4.9 – Illustration des échelles de longueurs caractéristiques associées à l'écoulement.

La composante transversale g'_z est définie par :

$$g'_z = g' \cos \theta$$

Ces deux grandeurs sont reliées par :

$$\frac{g'_x}{g'_z} = \tan \theta \quad (4.28)$$

Dans le cas où l'écoulement a lieu sur une pente faible, on a au premier ordre :

$$\theta \ll 1, \quad \sin \theta \sim \theta, \quad \cos \theta \sim 1$$

Les composantes de la gravité vérifient alors :

$$g'_x \sim g' \theta \quad (4.29)$$

et :

$$g'_z \sim g'$$

leur rapport est :

$$\frac{g'_x}{g'_z} \sim \theta \quad (4.30)$$

Enfin, pour analyser les termes de dérivée temporelle, on introduit une échelle caractéristique de temps, t_0 (elle correspond au temps caractéristique des termes d'inertie et est donc d'ordre L/U_0 , cf. annexe E page 275 pour plus de détails).

L'analyse dimensionnelle du système turbulent, constitué des équations (4.18), (4.20) et (4.22), permet de définir, sous les hypothèses de la couche limite, l'ordre de grandeur des rapports caractéristiques suivants (cf. annexe E page 275 pour plus de détails) :

$$V_0 = \mathcal{O} \left(U_0 \frac{\delta}{L} \right) \quad (4.31)$$

Le rapport δ/L étant très petit devant 1, on a $v \ll u$, le mouvement a lieu principalement suivant x .

$$\frac{U_0}{u_*} = \mathcal{O} \left(\frac{L}{\delta} \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

L'intensité de la turbulence est d'un demi-ordre de grandeur, mesuré en termes de δ/L , moindre que la vitesse dans l'écoulement.

$$\text{Re} = \mathcal{O} \left(\frac{L}{\delta} \right)^{3/2} \quad (4.33)$$

La viscosité n'a alors pas d'effet sur l'écoulement et peut être négligée.

La pente est alors reliée aux dimensions caractéristiques de l'écoulement par :

$$\theta = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right) \quad (4.34)$$

$$\frac{\Phi_0}{\phi_*} = \mathcal{O} \left(\frac{L}{\delta} \right)^{1/2} \quad (4.35)$$

L'intensité des fluctuations de fractions volumiques, ϕ_* , est donc d'un demi ordre de grandeur, mesuré en terme de δ/L moindre que la fraction volumique dans l'écoulement.

$$\frac{V_s}{u_*} = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right)^{1/2} \quad (4.36)$$

La vitesse de chute des particules doit donc être d'un demi ordre de grandeur, mesuré en terme de δ/L , moindre que l'intensité de la turbulence.

$$\frac{V_s}{U_0} = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right) \quad (4.37)$$

La vitesse de chute des particules est donc d'un ordre de grandeur, mesuré en terme de δ/L , moindre que la vitesse dans l'écoulement.

$$Ri_g = \mathcal{O}(1) \quad (4.38)$$

Le nombre de Richardson reste donc borné. Si ce n'était pas le cas (par exemple lorsque $\theta \rightarrow 0$, pente nulle), il ne pourrait pas y avoir de mouvement turbulent soutenu.

4.3.3 Simplification des équations du mouvement

On note u_1 et v_1 les composantes de la vitesse dans le milieu ①, —les mêmes lettres sont utilisées dans le milieu ②, mais avec un indice 2— et on utilise la notation (4.21) page 82 pour le tenseur de Reynolds. Le problème à résoudre devient (cf. annexe E page 275 pour plus de détails) :

Pour le milieu ① :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \quad (4.39a)$$

$$\text{sur } z : -g'_z \phi [1 - \gamma] = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.39b)$$

$$\text{sur } x : \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau'_{1xz}}{\partial z} + g'_x \phi [1 - \gamma] \quad (4.39c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial z} = \frac{\partial \phi v_s}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \phi' v' \quad (4.39d)$$

Pour le milieu ② :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0 \quad (4.40a)$$

$$\text{sur } z : \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (4.40b)$$

$$\text{sur } x : \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2 v_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau'_{2xz}}{\partial z} \quad (4.40c)$$

La théorie de la couche limite a permis de réduire le nombre de termes dans les équations en ne conservant que ceux dont l'ordre de grandeur est le plus élevé.

4.3.4 Pression à l'interface

L'équation (4.40b) indique que la pression³⁰ p est indépendante de z dans le milieu ②. On prend par exemple $p = p(z = h_1)$ que l'on note p_0 , qui n'est fonction que de x ; on reporte dans (4.40c) qui devient :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2 v_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tau'_{2xz}}{\partial z} \quad (4.41)$$

On peut déduire, en intégrant (4.39b) entre z et h_1 , la forme de la pression dans le milieu ① :

$$p(z) = p(z = h_1) + \rho_i g'_z \int_z^{h_1} \phi [1 - \gamma] dz \quad (4.42)$$

Par raccord³¹ des pressions entre les milieux ① et ②, on a $p(z = h_1) = p_0$, où p_0 est la pression à l'interface.

En reportant (4.42) dans (4.39c), l'équation de quantité de mouvement pour le milieu ① devient :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{dp_0}{dx} - g'_z \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{h_1} \phi [1 - \gamma] dz + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau'_{1xz}}{\partial z} + g'_x \phi [1 - \gamma] \quad (4.43)$$

4.4 Dérivation des équations d'ondes longues couplées

Pour aller un peu plus loin, et pour obtenir un modèle plus simple, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires (assez fortes!). On suppose ainsi que, non seulement les profils de vitesse et de fraction volumique sont semblables, mais encore on choisit ces derniers de façon à pouvoir intégrer les équations du mouvement sur la hauteur. Les variables de l'écoulement ne seront ainsi plus des variables de z , mais des grandeurs moyennées sur la « hauteur » de l'écoulement.

30. pression résiduelle, cf. équation (4.4)

31. Les pressions se raccordent à l'interface entre les fluides ① et ② si l'on considère qu'il n'y a pas de pression surfacique, et la pression $p(z = h_1)$ est la pression, p_0 , à l'interface.

4.4.1 Constats préliminaires

Nous avons vu (équation (4.32) page 88) que les deux échelles de vitesses, U_0 et u_* , étaient reliées par :

$$\frac{U_0^2}{u_*^2} = \mathcal{O}\left(\frac{L}{\delta}\right)$$

Il est nécessaire que le rapport U_0/u_* soit constant pour qu'il y ait similarité. Si les ordres de grandeurs de la turbulence et du mouvement moyen changeaient constamment, l'écoulement ne pourrait pas être similaire. La turbulence doit conserver la même importance relative lorsque l'écoulement évolue.

Le fait que U_0/u_* soit constant, implique via (4.32) que le rapport L/δ l'est aussi. Le fait que les échelles caractéristiques de vitesse longitudinale, U_0 , et transversale V_0 soient reliées par l'équation (4.31), implique que les variations de vitesse longitudinale et transversale suivent la même loi. La vitesse transversale à l'infini ou entre les deux fluides, n'est donc pas nulle. Nous verrons plus loin que cette constatation est la clef du concept de vitesse d'entraînement.

4.4.2 Paramètre de similitude

Dans l'étude des équations du mouvement sous les hypothèses de la couche limite, nous avons supposé que l'évolution du mouvement était déterminé par des échelles locales (de longueurs, de vitesses ...). Pour un paramètre adimensionnel A , on peut donc écrire :

$$A = f\left(\frac{z}{\delta}, \frac{\delta u_*}{\nu}, \frac{\delta u_*}{k} \dots\right) \quad (4.44)$$

Les approximations développées précédemment sont valables pour :

$$\frac{\delta u_*}{\nu} \rightarrow \infty \quad ; \quad \frac{\delta u_*}{k} \rightarrow \infty$$

Dans ce cas limite, la dépendance, supposée monotone, de f par rapport à $\delta u_*/\nu$ et $\delta u_*/k$ disparaît, puisqu'une fonction monotone ne peut pas rester finie, si elle ne devient pas asymptotiquement indépendante de paramètres très petits ou très grands. La seule échelle significative restante est donc δ , et toute quantité adimensionnelle peut être exprimée en fonction du paramètre z/δ , appelé paramètre de similitude et noté η .

$$A = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{z}{\delta} \quad (4.45)$$

Lorsqu'il est exprimé en fonction de l'échelle δ , le paramètre adimensionnel A est alors invariant par rapport à x .

4.4.3 Profils semblables

Les résultats précédents sont appliqués aux paramètres u et ϕ qui sont supposés maintenir en première approximation des profils semblables dans la direction $x_3(z)$, quand ils évoluent dans le temps ou dans la direction de la pente $x_1(x)$. On écrit :

$$u(x, z, t) = U(x, t)F\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (4.46a)$$

$$\phi(x, z, t) = \Phi(x, t)G\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (4.46b)$$

Comme le montre l'équation (4.32) page 88, l'échelle des fluctuations de vitesse, et donc le tenseur de Reynolds, sont proportionnels à l'échelle de vitesse longitudinale. On peut alors aussi bien choisir u_* que U comme échelle de vitesse caractéristique. On écrit :

$$-\overline{u'v'} = U^2(x, t)F_*\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (4.47)$$

Il faut garder à l'esprit que $\max(F_\star) \neq 1$, mais plutôt $\max(F_\star) = \mathcal{O}(\delta/L)$, d'après la relation (4.32).

De même, le terme de diffusion turbulente des fluctuations de fraction volumique peut être exprimé par :

$$-\overline{\phi'v'} = U(x, t)\Phi(x, t)G_\star\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (4.48)$$

Ici encore $\max(G_\star) \neq 1$, mais est un $\mathcal{O}(\delta/L)$ d'après les relations (4.32) et (4.35).

La longueur caractéristique δ est définie par :

$$\delta(x, t) = \frac{\int_0^\delta u(x, z, t) dy}{U \int_0^1 F(\eta) d\eta} \quad (4.49)$$

Le fait de n'avoir qu'une seule longueur caractéristique pour les échelles verticales (cf. remarque 2 page 85), entraîne que l'on a également :

$$\delta = \frac{\int_0^\delta \phi dy}{\Phi \int_0^1 G d\eta}$$

Le fait de supposer les variables u et ϕ similaires impose des conditions sur les grandeurs moyennes U , Φ et δ . Ces conditions sont obtenues en remplaçant les équations (4.46a), (4.46b), (4.47) et (4.48) dans les équations de continuité, de quantité de mouvement et de la fraction volumique, et en utilisant le changement de variable :

$$\eta = \frac{z}{\delta} \quad d\eta = \frac{1}{\delta} dz \quad (4.50)$$

avec :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\delta} \quad (4.51)$$

Les conditions de similitudes ainsi que les substitutions sont effectuées dans l'annexe F page 283.

En utilisant la condition limite $v(z = 0) = 0$, l'équation de continuité, intégrée entre $z = 0$ et z , s'écrit³² :

$$v(z, t) = - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz' = -\delta \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\eta F(s) ds + U \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^\eta sF'(s) ds \quad (4.52)$$

où la dérivée $\partial F/\partial \eta$ est notée F' .

32. On utilise les résultats de dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre : Soient α et β des fonctions numériques dérivables, alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x) dt$$

est continûment dérivable et, pour tout point x_0 ,

$$g'(x_0) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt + \beta'(x_0)f(\beta(x_0), (x_0)) - \alpha'(x_0)f(\alpha(x_0), (x_0))$$

4.4.4 Vitesse transversale et Développement du concept d'entraînement

Comme nous l'avons dit plus haut, le fait que le rapport δ/L soit constant implique, via l'équation (4.52), que la vitesse transversale, à l'infini ou entre les deux fluides, n'est pas nulle, puisque l'on obtient, par intégration de l'équation de continuité :

$$v(\infty, t) = -\frac{\partial \delta U}{\partial x} \int_0^\infty F \, d\eta$$

Nous ne sommes pas ici dans un cas où $\delta/L \rightarrow 0$, (ce qui est le cas par exemple dans un sillage). Il faut donc spécifier la forme de la vitesse $v(x, z, t)$ pour fermer le problème. On suppose la vitesse v , semblable, on peut donc écrire :

$$v(x, z, t) = V(x, t)K(\eta)$$

Le fait que δ/L soit constant entraîne via l'équation (4.31) sur les échelles de vitesse, que :

$$\frac{V(x, t)}{U(x, t)} = C_1$$

où C_1 est une constante dont on peut même préciser qu'elle est d'ordre δ/L .

On remarque donc qu'il est possible de choisir pour la loi V , des fonctions proportionnelles à U .

Le second terme de l'équation (F.6) indique que U est également proportionnelle à $\partial \delta / \partial t$, via une constante d'ordre δ/L (le temps caractéristique du mouvement est d'ordre L/U_0 , d'après l'équation (E.8) page 277).

On peut donc dire que V est également proportionnelle à $\partial \delta / \partial t$ via une constante d'ordre 1. On écrit alors pour V :

$$V(x, t) \sim CU(x, t) + C' \frac{\partial \delta}{\partial t} \tag{4.53}$$

où :

$$C = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{L}\right) \tag{4.54}$$

, et

$$C' = \mathcal{O}(1)$$

Tout ceci a un caractère très heuristique !

Remarque 3

La démarche suivie ici (arguments de similitude et dimensionnels) est similaire à celle utilisée pour l'étude des jets pariétaux et les panaches stationnaires par Ellisson et Turner [1959]; Morton [1959]; Turner [1986].

Dans le cas stationnaire des jets plans et des couches de mélange, on trouve le rapport δ/L constant et respectivement $U \sim x^{-1/2}$ et $U \sim \text{cte}$ [Tennekes et Lumley, 1972, p. 134]; V suivant la même loi. On peut alors écrire :

$$V(x, t) \sim \frac{\delta}{L} U(x, t) = V_e$$

et expérimentalement le rapport δ/L est trouvé de l'ordre de 6×10^{-2} [Tennekes et Lumley, 1972, p. 127].

La vitesse, V_e , proportionnelle à la vitesse longitudinale au sein du jet, est appelée vitesse d'entraînement puisqu'elle correspond bien à un flux entrant, à une incorporation d'eau, dans le jet ...

4.4.5 Intégration transversale des équations du mouvement

La démarche classique en mécanique des fluides consiste à résoudre les équations précédentes pour déterminer les profils universels F, F_*, G et G_* , en fonction de x et de t , ceci en supposant les coefficients A, B, C, D_i et E_i constants.

C'est un travail ardu dans la mesure où les intégrales liées à la quantité de mouvement et à la masse ajoutée ne sont pas constantes (problème de fermeture). En effet, la quantité de mouvement n'est pas conservée puisque l'énergie potentielle représentée par les termes de flottabilité est convertie en énergie cinétique, impliquant une augmentation continue de la quantité de mouvement. La masse de sédiment n'est, elle non plus, pas conservée, à moins de supposer un équilibre local, au bas de l'écoulement, entre les termes de diffusion turbulente et les termes de sédimentation (cas d'écoulements conservatifs).

La démarche adoptée par la suite est un peu différente. Dans notre approche, nous allons plutôt rechercher les propriétés et les équations vérifiées par les grandeurs moyennes U, Φ et δ . Nous allons donc :

1. dans un premier temps, intégrer les équations de continuité (4.39a) et (4.40a), de quantité de mouvement (4.43) et (4.41) et l'équation (4.39d) de la fraction volumique sur la hauteur.

Contrairement au cas où l'on considère le fluide supérieur au repos, ou du moins où l'on connaît la forme de son écoulement, on ne peut pas, ici, effectuer de raccord asymptotique avec $\delta \rightarrow \infty$ [technique classique en hydrodynamique, cf. Schlichting, 1979, p. 159]. En effet, les intégrales ne s'annulent pas au delà de δ !

Le problème dans le milieu ① sera donc intégré de $z = 0$ à $z = h_1$, et le problème dans le milieu ② de $z = h_1$ à $z = H$.

La variable de similitude dans le milieu ① est η_1 , telle que :

$$\eta_1(z) = \frac{z}{h_1(x, t)} \quad ; \quad \eta_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \eta_1(h_1) = 1 \quad (4.55)$$

h_1 étant défini identiquement à δ par l'équation (4.49) page 91.

On suppose les profils de vitesse et de concentration semblables. D'après l'équation (4.46a), on peut écrire dans chaque fluide :

$$u_i(x, z, t) = U_i(x, t)F_i(\eta_i) \quad i = 1, 2$$

Le profil de concentration vérifie l'équation (4.46b) :

$$\phi(x, z, t) = \Phi(x, t)G\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

2. dans un second temps, choisir des profils de vitesse et de concentration en accord avec les résultats expérimentaux (cf. page 289) : nous utiliserons l'hypothèse de profil la plus simple appelée *top-hat* par Turner [1973] ou *slab* par Pantin [1979]. Ce sont des profils du type « fonction de Heaviside ».

Le détail de la méthode est reporté à l'annexe G page 287. L'intégration des équations est présentée page 288. Les conditions aux limites sont spécifiées page 289. Les profils utilisés sont page 290.

L'intégration mène aux équations d'ondes longues, qui font l'objet de la section suivante.

4.5 Équations d'ondes longues couplées

Les équations de conservation de la masse sont :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1) = -v_{e1} \quad (4.56a)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2) = v_{e2} \quad (4.56b)$$

Les équations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) &= -\frac{h_1}{\rho_i} \frac{dp_0}{dx} - \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 \Phi [1 - \gamma]) \\ &\quad + g'_x h_1 \Phi [1 - \gamma] + U_1^2 (F_{1*}(1) - F_{1*}(0)) \end{aligned} \quad (4.56c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_2 U_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2^2) = -\frac{h_2}{\rho_2} \frac{dp_0}{dx} + U_2^2 (F_{2*}(1) - F_{2*}(0)) \quad (4.56d)$$

L'équation de conservation de la fraction volumique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi h_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi h_1 U_1) = -v_s \Phi G(0) - U_1 \Phi G_*(0) \quad (4.56e)$$

L'utilisation des méthodes de similitude, de l'analyse dimensionnelle et des méthodes intégrales ont donc permis de passer d'une formulation où les variables étaient fonctions de x , z et t à une formulation où les variables ne sont plus fonctions QUE de x et t ! Ce qui constitue une avancée appréciable ! Du point de vue purement numérique, il n'est plus nécessaire de mailler et de résoudre suivant la hauteur z , on gagne donc en temps de calcul. On a par contre perdu toutes les informations sur les variations verticales des variables.

4.5.1 Équation d'onde longue combinée et consorts

Le système, tel qu'il est défini par (4.56), est encore lourd à résoudre, puisqu'il porte sur chaque milieu. On peut, en fait, astucieusement combiner les équations. Les propriétés du fluide ambiant (vitesse et profondeur) peuvent, en effet s'exprimer en fonction des variables de la suspension. Si l'on néglige les couplages avec l'air, qu'il n'y a pas de raz de marée — c'est-à-dire que la surface du fluide ambiant reste plane — la profondeur d'eau totale ne varie pas en fonction du temps :

$$h_1(t, x) + h_2(t, x) = H(x) \quad (4.57)$$

Il est alors possible, d'après les équations (4.56a) et (4.56b) d'écrire, avec la condition limite (G.29) :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1 + h_2 U_2) = 0$$

soit :

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 = f(t)$$

où $f(t)$ est uniquement une fonction du temps. Le domaine étant fermé, pour tout temps t , il n'y a pas de flux en $x = 0$, car on n'« ajoute » pas de fluide. Les vitesses vérifient donc la condition limite³³ :

$$U_1(t, x = 0) = U_2(t, x = 0) = 0 \quad \forall t$$

on déduit :

$$h_1(t, x) U_1(t, x) + h_2(t, x) U_2(t, x) = 0 \quad (4.58)$$

ce qui signifie que le flux dans une section est toujours nul. Les surfaces définies par les $U_i h_i$ sont opposées (cf. figure 4.10 page suivante).

33. Dans le cas d'un flux constant le résultat n'est pas tout à fait le même. On a :

$$h_1 U_1 = \text{cte} \quad h_2 U_2 = 0 \quad \forall t$$

soit :

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 = h_0 U_0 \quad \forall t$$

on aura bien de même :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1 + h_2 U_2) = 0$$

mais on récupère par le biais de $h_2 U_2^2$ des termes en $h_0 U_0^2$ et en $h_0 U_0 U_1$ dans l'équation de quantité de mouvement.

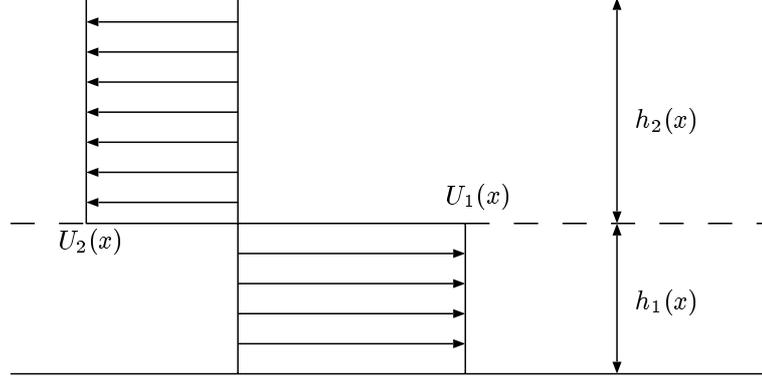


FIG. 4.10 – Illustration de la condition de flux nul dans une section (équation (4.58)).

On peut maintenant simplifier les équations de quantité de mouvement du système (4.56). En ajoutant une combinaison linéaire³⁴ de (4.56c) et (4.56d), et en utilisant (4.57) et (4.58), sous la forme $h_2 = H - h_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1 + h_2 U_2) + \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) \\
 = -h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_2}\right) \frac{\partial p_0}{\partial x} \\
 - \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 \Phi[1 - \gamma]) + h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) g'_x \Phi[1 - \gamma] \\
 - \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2^2) \\
 + \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) U_1^2 (F_{1\star}(1) - F_{1\star}(0)) - \frac{h_1}{H} U_2^2 (F_{2\star}(1) - F_{2\star}(0))
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que les contraintes entre les deux fluides, ou de part et d'autre de l'interface, ne subissent pas de discontinuité (condition limite (G.15) sur les contraintes en h_1), on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) = -h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{\rho_2 - \rho_i}{\rho_i \rho_2} \frac{\partial p_0}{\partial x} \\
 - \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 \Phi[1 - \gamma]) + h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) g'_x \Phi[1 - \gamma] \\
 - \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2^2) \\
 - \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) U_1^2 F_{1\star}(0) - \frac{h_1}{H} U_2^2 F_{2\star}(1) + \left(1 - \frac{h_1}{H} \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_2}\right)\right) U_1^2 F_{1\star}(1)
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Remarque 4

Si une fois de plus, on utilise l'hypothèse de Boussinesq (cf. section 4.1.2 page 78), mais en considérant cette fois-ci que ce sont les variations de densité entre le fluide ambiant et le fluide interstitiel qui sont négligeables (sauf dans les termes de gravité), les termes de pressions sont nuls, puisque $\rho_i = \rho_2$. L'équation

34. On multiplie (4.56c) par h_2 et on lui retranche (4.56d) multiplié par h_1 .

(4.59) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) = & - \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 \Phi[1 - \gamma]) + h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) g'_x \Phi[1 - \gamma] \\ & - \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2^2) \\ & - \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) U_1^2 F_{1\star}(0) - \frac{h_1}{H} U_2^2 F_{2\star}(1) + \left(1 - \frac{h_1}{H}\right) U_1^2 F_{1\star}(1) \end{aligned}$$

4.5.2 Cas limite d'une profondeur infinie

Une simplification importante consiste à considérer le cas où la suspension se déplace sous une profondeur d'eau infinie. Cette approximation est justifiée lorsque, par exemple, l'écoulement atteint les plaines sous-marines qui sont à des profondeurs supérieures au millier de mètres. Le profil de vitesse réel dans le fluide, $u(z)$, est alors de celui de la forme de la figure 4.7 page 85 plutôt que de celui donné par la figure 4.5 page 84. Ces simplifications sont obtenues par l'analyse dimensionnelle de l'équation (4.59). Utilisons l'équation (4.58) sous la forme :

$$h_2 U_2 = -h_1 U_1$$

soit :

$$U_2 = -\frac{h_1}{h_2} U_1$$

On a donc :

$$h_2 U_2^2 = \frac{h_1}{h_2} h_1 U_1^2 \quad (4.60a)$$

et :

$$U_2^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 U_1^2 \quad (4.60b)$$

Les termes inertiels de l'équation (4.59) s'écrivent alors, d'après l'équation (4.60a) :

$$\left(1 - \frac{h_1}{H}\right) \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) + \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2^2) = \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) - \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[h_1 U_1^2 \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \right]$$

en utilisant la définition (4.57) de H :

$$= \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) - \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[h_1 U_1^2 \left(\frac{1 - 2(h_1/H)}{1 - h_1/H} \right) \right]$$

Dans le cas où la suspension se déplace sous une hauteur d'eau infinie, les hauteurs vérifient la condition :

$$H \gg h_1 \quad (4.61)$$

Cette condition peut être déterminée expérimentalement. Elle est estimée, par exemple, à environ 10% ($h_1/H \leq 0,075$) par Bonnacaze *et al.* [1993]; Britter et Linden [1980]; Britter et Simpson [1978]; Huppert [1998]; Huppert et Simpson [1980]; Rottman et Simpson [1983].

Le terme inertiel, en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ au second ordre pour $|x| \ll 1$, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) - \frac{h_1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left[h_1 U_1^2 \left(1 - \frac{h_1}{H} - \left(\frac{h_1}{H}\right)^2 \right) \right]$$

Le terme de friction turbulente en $\eta_2 = 1$ ($z = H$), d'après l'équation (4.60b) est au plus égal à :

$$\frac{h_1}{H} U_2^2 F_{2*}(1) = \left(\frac{h_1}{H} \right)^3 \frac{1}{1 - h_1/H} U_1^2 F_{2*}(1)$$

soit en utilisant le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ au premier ordre :

$$= \left(\frac{h_1}{H} \right)^3 U_1^2 F_{2*}(1) \quad (4.62)$$

Le terme de friction turbulente à la surface de l'eau est donc d'ordre trois en h_1/H .

L'équation d'ondes longues combinées (4.59) peut donc s'écrire en première approximation, en négligeant les termes en $(h_1/H)^2$, comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) &= -h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) \frac{\rho_2 - \rho_i}{\rho_i \rho_2} \frac{\partial p_0}{\partial x} \\ &\quad - \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 \Phi [1 - \gamma]) + h_1 \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) g'_x \Phi [1 - \gamma] \\ &\quad - \left(1 - \frac{h_1}{H} \right) U_1^2 F_{1*}(0) + \left(1 - \frac{h_1}{H} \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_2} \right) \right) U_1^2 F_{1*}(1) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Le terme d'inertie, ainsi que les termes de friction turbulente surfacique, du fluide ②, présents dans l'équation (4.59) sont négligeables.

En seconde approximation, puisque $h_1/H \ll 1$, les facteurs $(1 - h_1/H)$ peuvent être considérés d'ordre 1. L'équation (4.59) peut être approximée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) &= -h_1 \frac{\rho_2 - \rho_i}{\rho_i \rho_2} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h_1^2 \Phi [1 - \gamma]) + h_1 g'_x \Phi [1 - \gamma] \\ &\quad + U_1^2 (F_{1*}(1) - F_{1*}(0)) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Le couplage « inertiel » avec le fluide supérieur est alors complètement négligé, tout se passe comme s'il était immobile. Le courant crée une perturbation qui, du fait de la grandeur du domaine du fluide supérieur, reste négligeable. Le seul couplage subsistant provient du terme de pression du milieu ② : le flux de quantité de mouvement est « conditionné » par la hauteur totale d'eau pour vérifier la condition à la limite (4.58). Les vitesses moyennes U_1 et U_2 vérifient alors :

$$\frac{U_2}{U_1} \sim \frac{h_1}{H}$$

soit d'après (4.61) :

$$\frac{U_2}{U_1} \ll 1$$

La vitesse du milieu ② peut être considérée comme nulle, en moyenne, ou, du moins, comme n'ayant pas d'effet sur la dynamique de l'écoulement suspensif. l'équation de quantité de mouvement du milieu ② se réduit à un équilibre de pression.

Le fluide dans le milieu ② est alors traité comme étant le sillage du fluide ①. On est alors dans le cas où $h_2/L \rightarrow 0$, l'épaisseur du sillage diminue jusqu'à devenir négligeable par rapport à h_1 qui elle croît. On peut retrouver le résultat de l'équation (4.64) en se plaçant dans le cadre de la théorie de la couche limite classique [Schlichting, 1979] :

- Lors de l'étape d'intégration de 0 à h_1 de l'équation (4.43), on peut prendre la limite $h_1 \rightarrow \infty$, car dans toutes les intégrales, l'intégrande s'annule hors de la couche définie par h_1 ; le champ de vitesse est nul pour $z > h_1$.
- La résolution est d'autant plus triviale : Le domaine d'intégration est fixe. Les signes intégrales et dérivations peuvent être directement permutés.

4.5.3 Fluide interstitiel = Fluide ambiant

Du fait du mélange permanent entre le fluide ambiant et la suspension, on peut considérer le cas limite où $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 1$ et où, γ , défini par l'équation (4.12) tend vers 0.

On obtient alors la forme la plus simple, des équations d'ondes longues ou de Saint Venant :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) = -\frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (\Phi h_1^2) + h_1 g'_x \Phi + U_1^2 (F_{1*}(1) - F_{1*}(0)) \quad (4.65)$$

En réalité, cette situation se rencontre rarement. Le fluide interstitiel de la suspension provient d'une eau peu profonde (et moins salée). Lorsque l'écoulement suspensif atteint les plaines sous marines, le fluide ambiant a souvent une densité différente de celle des eaux de surface qui constitue le fluide interstitiel.

4.6 Discussion

Le modèle d'ondes longues à deux fluides, tel qu'il est posé par (4.56), ou encore le modèle d'ondes longues combinées défini par (4.59), bien que déjà très simplifié, semblent conduire à des résultats remarquables (cf. section 2.3.4 page 39).

Ils sont basés sur les méthodes intégrales qui sont directement issues de l'aérodynamique³⁵.

Ils rendent compte de l'essentiel de la physique du phénomène. Les étapes cruciales dans leur formulations sont :

- L'analogie forte entre les transferts thermiques et les transferts de masse (cf. section 4.1, 4.1.2 et 4.2.3);
- Le choix des profils de vitesses et de concentrations (cf. section 4.4.3 et annexe G.2);
- Le choix des conditions aux limites (cf. section 4.4.4 et annexe G.2.1).

Les systèmes complets, non-stationnaires, non-uniformes, restent cependant lourds à résoudre numériquement (cf. section 2.3.4 page 39). Il est donc nécessaire de simplifier encore plus les modèles précédents.

Dans ce but on se propose d'intégrer les équations du mouvement longitudinalement, ceci afin de supprimer la dépendance des variables par rapport à x , et afin d'obtenir une formulation uniquement fonction du temps t .

La démarche proposée est la suivante :

1. En se basant sur des observations expérimentales et des résultats de simulations numériques du type Navier–Stokes, il apparaît que l'écoulement s'inscrit dans une forme géométrique simple. On peut caractériser cette dernière par deux échelles de longueurs : h , échelle caractéristique transversale, représentant la hauteur de la suspension et l , échelle caractéristique horizontale, représentant la longueur de la suspension. On considère donc, comme indiqué dans la section 3.1 page 64, que l'écoulement a lieu à géométrie imposée et variable (cf. hypothèse 1 page 64).
2. La différence de vitesse entre la « tête » et la « queue » de la suspension, qui permet de caractériser l'évolution des déformations via l'évolution de la longueur caractéristique l , est prise en compte en décomposant le champ de vitesse U en :
 - un champ correspondant à la translation de la géométrie dans le repère global;
 - un champ, asymétrique dans le repère lié au barycentre de la géométrie, correspondant aux déformations dans ce repère.

Cette décomposition de vitesse, utilisée dans la théorie aérodynamique des profils minces [Darrozes et François, 1982, Chap. VI] apparaît naturellement lors de l'écriture des équations du mouvement dans le repère lié au barycentre de l'objet.

3. L'intégration des équations du mouvement (des équations d'ondes longues en particulier) sur la longueur caractéristique de l'écoulement permet de s'affranchir des variations longitudinales des propriétés de l'écoulement en supprimant la dépendance de ces variables par rapport à x . On obtient ainsi une formulation du problème en temps sur U , Φ et h .

³⁵. les avions sur lesquels nous volons sont passés à la moulinette des méthodes intégrales à un moment ou à un autre de leur conception [Lagrée, 1999].

4. L'intégration du champ de vitesse dans le repère lié à l'objet permet de quantifier les variations de la longueur caractéristique.

Nous nous proposons de mettre en œuvre cette démarche dans la section suivante.

4.7 Décomposition et intégration des équations d'ondes longues

L'intégration des équations d'ondes longues par rapport à x doit être effectuée entre $X - l$ et $X + l$, où X est la position du barycentre géométrique de l'objet-écoulement. Pour pouvoir utiliser simplement les propriétés de symétrie de l'objet, les équations du mouvement seront écrites dans le repère lié au barycentre géométrique de l'objet. L'intégration sera alors effectuée entre $-l$ et $+l$.

On propose ici une méthode de décomposition du problème par une formulation translation-déformation, en faisant apparaître des propriétés de symétrie et d'antisymétrie du champ de vitesse.

4.7.1 Préliminaires

La vitesse relative entre la queue et la tête de l'écoulement suspensif n'est pas nulle : elle caractérise l'évolution de la longueur de l'objet. Les forces extérieures appliquées à l'objet sont la gravité, les frottements (visqueux ou turbulents), la pression. Intuitivement, on sent que la gravité (motrice) va induire un déplacement global de l'objet ; les variations de gravité entre le tête et la queue sont négligeables, g est constant. La force de pression, symétrique sur la surface de l'objet, puisqu'on a choisi un objet symétrique, via la gravité (pression hydrostatique), va induire un effondrement symétrique de l'objet.

Les deux cas limites suivants illustrent parfaitement ce phénomène :

- Dans le cas où la pente est égale à $\pi/2$, l'axe \bar{x} est orienté suivant la verticale descendante. La gravité se projette entièrement suivant cet axe. La résultante de la gravité suivant \bar{z} est nulle, ce qui entraîne l'annulation des forces de pression.
- Dans le cas limite où la pente est nulle, la force motrice de gravité suivant \bar{x} est également nulle. Il n'y a pas de mouvement global de l'objet, mais uniquement un étalement dû aux forces de pression (cf. figure 2.4 page 40).

L'idée consiste donc à décomposer le mouvement principal selon deux mouvements (cf. figure 4.11 page suivante). On considère le repère \mathcal{R}^* en mouvement, à la vitesse du barycentre géométrique de l'objet, par rapport à \mathcal{R} .

Hypothèse 9

Le mouvement principal de la suspension peut se décomposer en :

1. un mouvement de corps rigide, ici une translation dans le repère global \mathcal{R} , qui correspond au mouvement du barycentre géométrique de l'objet sous la résultante des forces gravitaires ;
2. un mouvement de déformation dans \mathcal{R}^* , qui est dû aux forces de pression, et qui comme nous le verrons, a une influence indirecte sur le mouvement du barycentre (choix d'un objet symétrique).

4.7.2 Changement de référentiel

Le changement de référentiel est défini par :

$$t = t^* \quad \bar{x} = \bar{Q} \bar{x}^* + \bar{c}(t) \tag{4.66}$$

avec la matrice de rotation³⁶ :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{Q} \bar{Q}^t = \bar{I} \tag{4.67}$$

36. Rotation d'angle π d'axe z . Dans le cas bidimensionnel, c'est une réflexion.

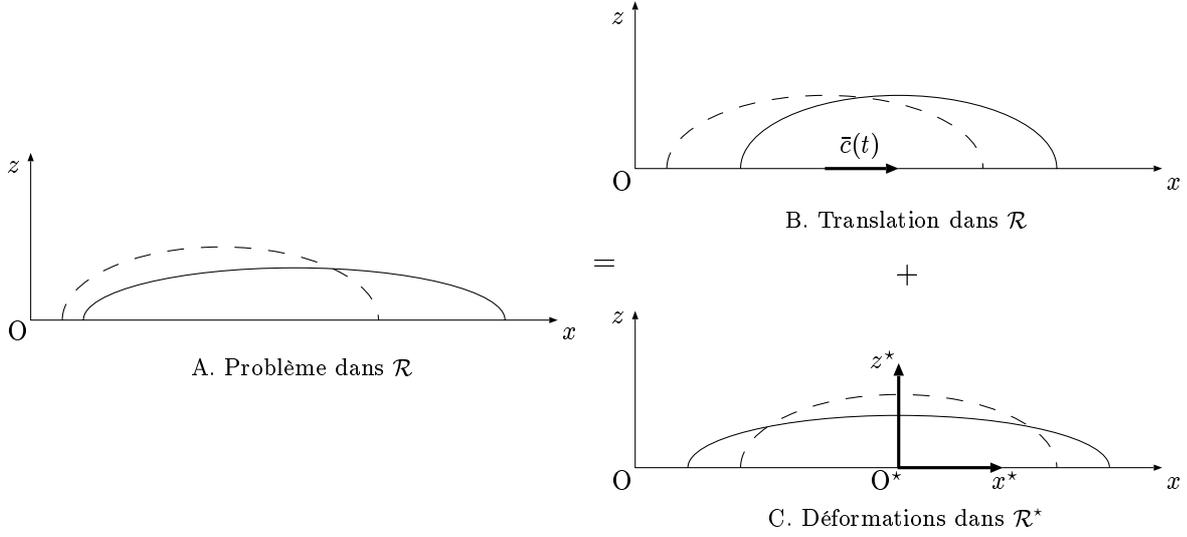


FIG. 4.11 – Décomposition du mouvement dans \mathcal{R} (A), en un mouvement de corps rigide (translation) dans \mathcal{R} (B) et un mouvement de déformation dans \mathcal{R}^* en mouvement par rapport à \mathcal{R} (C). En pointillés, la configuration avant la transformation, en traits pleins, la position après la transformation.

Le vecteur $\bar{c}(t)$, définissant la translation, sera défini par la suite. D'après (4.66), les vitesses sont liées par :

$$\bar{U} = \bar{Q} \bar{U}^* + \dot{\bar{c}}(t) \quad (4.68)$$

L'introduction de la matrice \bar{Q} permet aisément d'identifier les termes d'entraînement, liés à $\dot{\bar{c}}(t)$, et les termes de mouvement relatif dans \mathcal{R}^* , liés à \bar{U}^* . On définit la vitesse de la translation, qui n'est fonction que du temps, par :

$$\bar{U}^T = \dot{\bar{c}}(t) \quad (4.69)$$

L'équation (4.68) s'écrit alors :

$$\bar{U} = \bar{Q} \bar{U}^* + \bar{U}^T \quad (4.70)$$

D'après l'équation (4.66) on peut relier les dérivées spatiales par :

$$\frac{\partial x^*}{\partial x} = \bar{Q}^t \quad (4.71)$$

Les propriétés des champs de vitesse sont les suivantes (cf. figure 4.12 page suivante) :

– Le champ de vitesse U^T , lié à la translation est indépendant de x^* . Il vérifie donc :

$$U^T = \frac{1}{2} (U(x^*) + U(-x^*))$$

$$U^T(-x^*) = U^T(x^*) \quad (4.72)$$

– Le champ de vitesse U^* , asymétrique par rapport à z^* , est tel que :

$$U^* = \frac{1}{2} (U(x^*) - U(-x^*))$$

et :

$$U^*(-x^*) = -U^*(x^*) \quad (4.73)$$

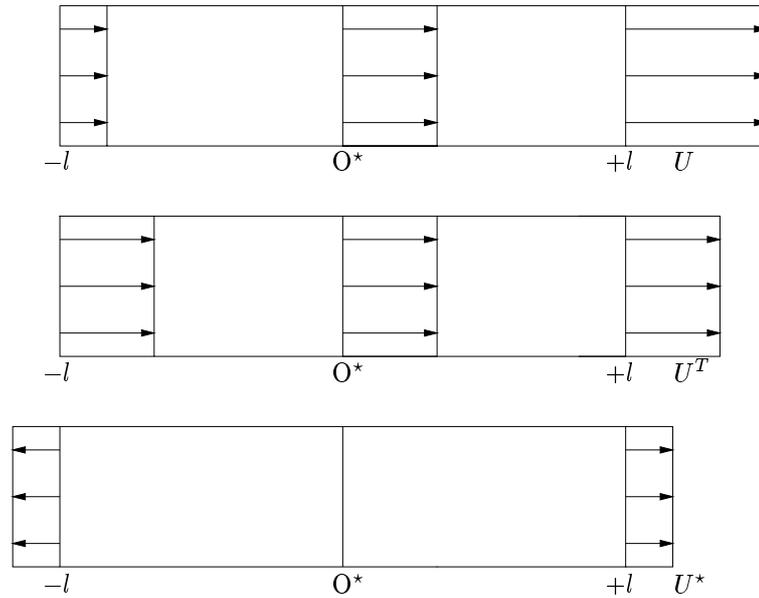


FIG. 4.12 – Décomposition du champ de vitesse au sein de l'objet écoulement. Cas où $U^T > U^*(-l)$, c'est-à-dire où tous les points de l'objet se déplacent positivement suivant x^* .

La hauteur de l'écoulement, puisque l'objet est symétrique par rapport à z^* , vérifie :

$$h(-x^*) = h(x^*) \quad (4.74)$$

La fraction volumique est supposée uniformément répartie :

$$\Phi(-x^*) = \Phi(x^*) \quad (4.75)$$

On suppose les fonctionnelles (lois d'entraînement, comportement etc ...), ainsi que les autres scalaires objectifs³⁷.

4.7.3 Décomposition et intégration

Le détail de la méthode de décomposition des équations est reporté à l'annexe H page 295.

La section H.2 page 299 présente l'intégration du système décomposé. Elle est effectuée à l'aide :

1. de la théorie de similitude exposée précédemment dans les sections 4.4.1 page 90 et 4.4.5 page 93 ;
2. de la spécification de profils en accord avec les observations d'écoulement. (cf. annexe H.2.2 page 302)

4.8 Équations intégrées

Nous exposons ici les résultats de l'intégration effectuée dans l'annexe H page 295.

On rappelle la définition du paramètre a , qui correspond à l'abscisse adimensionnelle pour laquelle $|U^*\xi + U^T|$ s'annule (cf. figure 4.13 page suivante) :

$$a = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq \frac{U^T}{U^*} \\ 1 & \text{si } 1 \leq -\frac{U^T}{U^*} \\ -\frac{U^T}{U^*} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.76)$$

37. C'est-à-dire que le changement de repère ne change pas leur forme [cf. Gatignol [1996] pour plus de détails].

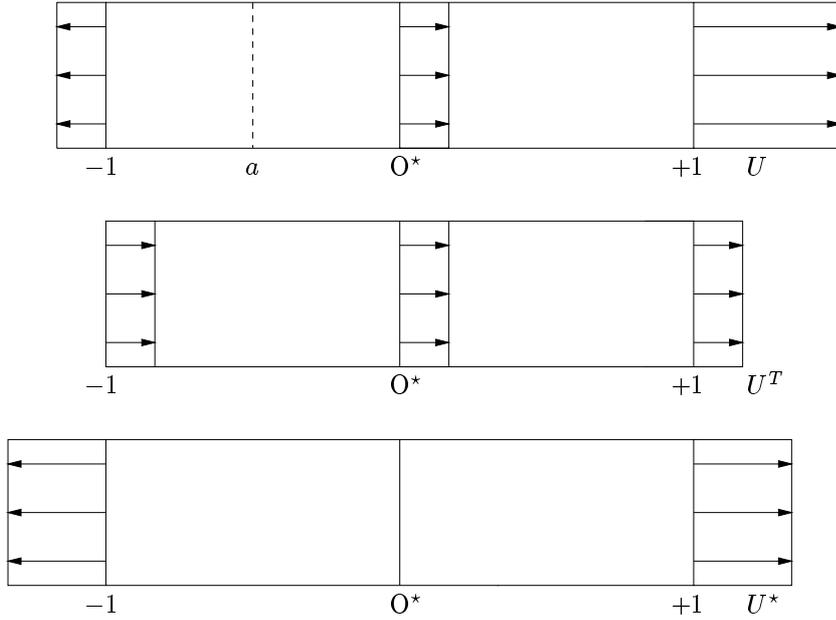


FIG. 4.13 – Signification physique du paramètre a . Exemple de champ de vitesse décomposé au sein de l'objet écoulement. Ici la vitesse U s'annule en une abscisse a entre la « tête » et la « queue » de l'objet, causant un recul du point $\xi = -1$, puisque $U^*(-1) > U^T$, soit $U(-1) < 0$.

Problème sur $h(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dlh}{dt} = Cl (U^* - a^2 U^* - 2a U^T) \quad (4.77)$$

Problème sur $\Phi(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{d\Phi h}{dt} = -2v_s l \Phi G(0) - l \Phi G_*(0) (U^* - a^2 U^* - 2a U^T) \quad (4.78)$$

Problème sur $U^T(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{dU^T h l}{dt} - \frac{4}{3} \frac{h^2}{H} U^T U^* &= \frac{\pi}{2} h l g'_x \Phi [1 - \gamma] + l (F_*(1) - F_*(0)) \\ &\left[2U^* U^T \left\{ 1 - a^2 - \frac{h}{H} \frac{2}{3} (1 - a^2)^{3/2} \right\} \right. \\ &+ U^{*2} \left\{ -\frac{2}{3} a^3 - \frac{h}{H} \left(-\frac{1}{4} \arcsin a + \frac{1}{2} a (1 - a^2)^{3/2} - \frac{1}{4} a (1 - a^2)^{1/2} \right) \right\} \\ &\left. + U^{T2} \left\{ -2a - \frac{h}{H} \left(-\arcsin a - a (1 - a^2)^{1/2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Problème sur $U^*(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{dU^*lh}{dt} - hU^{T2} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{H} U^{T2} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{Hl} U^{*2} &= \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi[1 - \gamma] - \frac{1}{3} g'_z \frac{h^3}{H} \Phi[1 - \gamma] + l(F_*(1) - F_*(0)) \\ &\left[2U^*U^T \left\{ \frac{1}{2} a^2 - \frac{h}{H} \left(-\frac{1}{3} (1 - a^2)^{3/2} + \frac{1}{3} \right) \right\} \right. \\ &+ U^{*2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} a^3 - \frac{h}{H} \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \arcsin a + \frac{1}{8} a (1 - a^2)^{1/2} - \frac{1}{4} a (1 - a^2)^{3/2} \right) \right\} \\ &\left. + U^{T2} \left\{ 1 + a - \frac{h}{H} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{1}{2} a (1 - a^2)^{1/2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

4.9 Conclusion et formulation du modèle **T**

Nous proposons d'étudier dans cette section les simplifications des équations intégrées précédentes pour des cas particuliers d'écoulement. Le modèle **T** est formulé en considérant l'approximation d'une hauteur d'eau infinie $h/H \ll 1$. Nous comparerons la forme du modèle obtenu au modèle **P** proposé dans la section 3.7 page 72.

4.9.1 Approximation pour le cas d'une hauteur d'eau infinie (modèle **T**)

On se place ici dans le cas où $h/H \ll 1$. Les équations (4.77) sur $h(t)$ et (4.78) sur $\Phi(t)$ sont inchangées :

Problème sur $h(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dlh}{dt} = Cl (U^*(1 - a^2) - 2aU^T) \quad (4.79)$$

Problème sur $\Phi(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{d\Phi lh}{dt} = -2v_s l \Phi G(0) - l \Phi G_*(0) (U^*(1 - a^2) - 2aU^T) \quad (4.80)$$

Les équations de quantité de mouvement se simplifient en :

Problème sur $U^T(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dU^T hl}{dt} = \frac{\pi}{2} h l g'_x \Phi[1 - \gamma] + 2l (F_*(1) - F_*(0)) \left[(1 - a^2) U^* U^T - \frac{1}{3} a^3 U^{*2} - a U^{T2} \right] \quad (4.81)$$

Problème sur $U^*(t)$:

$$\frac{1}{3} \frac{dU^*lh}{dt} - hU^{T2} = \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi[1 - \gamma] + l(F_*(1) - F_*(0)) \left[a^2 U^* U^T + \frac{1}{3} (1 + a^3) U^{*2} + (1 + a) U^{T2} \right] \quad (4.82)$$

Ce modèle sera référencé par la suite comme étant le modèle **T**. Sa différence essentielle avec le modèle **P** dérivé à la section 3.7 page 72, provient de l'introduction de termes mixtes, fonctions de U^* et U^T , définissant un couplage entre le mouvement de translation et le mouvement de déformation (étalement).

Dans les équations (4.79) et (4.80) la vitesse caractéristique est définie par le terme mixte: $(U^*(1 - a^2) - 2aU^T)$. L'incorporation d'eau et la diffusion de particules dans l'objet sont proportionnelles à cette vitesse, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2aU^T & \text{si } a = \pm 1 \\ U^* & \text{si } a = 0 \\ U^* \left(1 + \left(\frac{U^T}{U^*} \right)^2 \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.83)$$

4.9.2 Cas du mouvement global positif

Ceci correspond au cas où $U^T \geq U^*$, tous les points de l'objet se déplacent positivement. Le paramètre a est alors égal à -1 dans les équations puisqu'en effet les intégrales étaient évaluées sur l'intervalle $[-1, 1]$ (cf. équation (4.76)).

Problème sur $h(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dh}{dt} = C2lU^T$$

L'incorporation d'eau est proportionnelle à la vitesse globale de l'objet : l'incorporation plus élevée de U sur la partie aval de l'objet est compensée par une incorporation moins élevée de U sur la partie amont. La résultante est $2U^T$. Ce résultat correspond à celui trouvé pour le modèle **P** lors de la dérivation de la conservation du volume (équation (3.36c) pour un volume $V = \frac{\pi}{2}lh$).

Problème sur $\Phi(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{d\Phi lh}{dt} = -2v_s l \Phi G(0) - 2l \Phi G_*(0) U^T$$

Dans ce cas particulier, la vitesse caractéristique associée à la diffusivité des sédiments est U^T . Ce résultat est conforme à celui trouvé pour le modèle **P** lors de la dérivation de la conservation de la fraction volumique (équation (3.36d) pour un volume $V = \frac{\pi}{2}lh$).

Problème sur $U^T(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dU^T hl}{dt} - \frac{4}{3} \frac{h^2}{H} U^T U^* = \frac{\pi}{2} h l g'_x \Phi [1 - \gamma] + l (F_*(1) - F_*(0)) \left[U^{*2} \left(\frac{2}{3} - \frac{h}{H} \frac{\pi}{8} \right) + U^{T2} \left(2 - \frac{h}{H} \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.84)$$

Le cas où $h/H \ll 1$ mène à :

$$\frac{\pi}{2} \frac{dU^T hl}{dt} = \frac{\pi}{2} h l g'_x \Phi [1 - \gamma] + l (F_*(1) - F_*(0)) \left[\frac{2}{3} U^{*2} + 2U^{T2} \right] \quad (4.85)$$

La formulation du modèle **T** introduit, dans les termes de friction turbulente de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la vitesse moyenne U^T , des termes de couplages avec le mouvement de déformation U^* . Ces termes n'étaient pas pris en compte dans le modèle **P**. Ces derniers ne sont négligeables que dans le cas où $U^T \gg U^*$.

Problème sur $U^*(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{dU^* lh}{dt} - hU^{T2} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{H} U^{T2} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{Hl} U^{*2} &= \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi [1 - \gamma] - \frac{1}{3} g'_z \frac{h^3}{H} \Phi [1 - \gamma] \\ &+ l (F_*(1) - F_*(0)) \left[2U^* U^T \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{H} \frac{1}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.86)$$

Le cas où $h/H \ll 1$ mène à :

$$\frac{1}{3} \frac{dU^* lh}{dt} - hU^{T2} = \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi [1 - \gamma] + l (F_*(1) - F_*(0)) (U^* U^T) \quad (4.87)$$

La formulation du modèle **T** est différente de celle du modèle **P** pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement associée à la vitesse de déformation U^* . La formulation introduit des couplages avec le mouvement par l'intermédiaire de termes inertiels (U^{T2}). La friction turbulente est définie par un terme mixte $U^* U^T$. Ces termes n'étaient pas ceux pris en compte dans le modèle **P**.

4.9.3 Cas de l'étalement pur

Ce cas correspond à $U^T = 0$ et $a = 0$ (cf. équation (4.76)). Il n'y a pas de mouvement global de l'objet. Ce cas particulier, qui correspond à une pente nulle, avait permis de mettre en défaut la formulation du modèle **P** (cf. section 3.7.2 page 73).

Problème sur $h(t)$

$$\frac{\pi}{2} \frac{dh}{dt} = CU^*$$

L'incorporation d'eau se fait proportionnellement à la vitesse de déformation de l'objet (vitesse d'étalement). Ce phénomène n'était pas pris en compte par le modèle **P**.

Problème sur $\Phi(t)$

$$\frac{\pi}{2} \frac{d\Phi h}{dt} = -2v_s l \Phi G(0) - l \Phi G_*(0) U^*$$

La vitesse caractéristique associée à la diffusion des particules est U^* , résultats que le modèle **P** n'était pas en mesure de retranscrire.

Problème sur $U^*(t)$

$$\frac{1}{3} \frac{dU^* l h}{dt} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{H l} U^{*2} = \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi [1 - \gamma] - \frac{1}{3} g'_z \frac{h^3}{H} \Phi [1 - \gamma] + l (F_*(1) - F_*(0)) U^{*2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \frac{h}{H} \right) \quad (4.88)$$

Dans le cas où $h/H \ll 1$, l'équation se simplifie en :

$$\frac{1}{3} \frac{dU^* l h}{dt} = \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi [1 - \gamma] + l (F_*(1) - F_*(0)) \frac{1}{3} U^{*2} \quad (4.89)$$

On retrouve ici une forme classique de la friction turbulente qui est proportionnelle à la vitesse au carré.

Le modèle **T** retranscrit donc de façon satisfaisante la dynamique de l'écoulement dans le cas particulier d'une pente nulle.

La formulation du modèle **T** est donc plus générale que celle du modèle **P** et contient, en partie, la formulation de ce dernier. Le modèle **P** constitue en effet une approximation du mouvement de l'objet pour le cas particulier d'un mouvement global positif $U^T \gg U^*$, lorsque les forces de pression sont négligeables.

*Ainsi se dessinait comme en pointillé le grand réseau
du savoir empirique : celui des ordres non quantitatifs*
M. Foucault.

Chapitre 5

Fermetures du modèle

Lorsque l'on cherche à déterminer l'écoulement via le système d'équations développé dans les chapitres précédents, on fait apparaître en plus des inconnues du problème un certain nombre de paramètres, résultant principalement des conditions aux limites, eux aussi inconnus a priori.

Alors que les inconnues du problème sont déterminées via le système d'équations du modèle puisqu'on a autant d'inconnues que d'équations, il n'en est pas de même des paramètres introduits en spécifiant les conditions aux limites.

Afin de lever cette indétermination et de résoudre ce que l'on appelle le problème de la fermeture du modèle, il est nécessaire de relier les paramètres inconnus aux inconnues du modèle.

Les termes modèle représentant les inconnues doivent avoir la dimension physique (et les propriétés tensorielles) du terme inconnu qu'ils remplacent. Ils doivent également respecter les propriétés de conservation et d'invariance particulière de ce terme (par exemple la condition d'incompressibilité). La formulation est guidée intuitivement par la signification physique des mécanismes mis en jeu, nécessaire pour faire un choix entre les diverses approximations possibles³⁸.

Sommaire

5.1	Viscosité d'une suspension diluée de particules	108
5.2	Vitesse de sédimentation des particules	108
5.2.1	Calcul de v_{s0}	108
5.2.2	Calcul de v_s	111
5.3	Friction turbulente	113
5.3.1	Viscosité turbulente et modèle à 0-équation	114
5.3.2	Connexion à notre problème	115
5.3.3	Spécification de la longueur de mélange et de la viscosité turbulente	116
5.4	Transferts de particules	117
5.4.1	Distribution verticale des sédiments	117
5.4.2	Retour et application à notre problème	122
5.5	Incorporation de fluide	124
5.5.1	Préliminaires	124
5.5.2	Application à notre problème	126
5.6	Modèle T fermé	127

³⁸. Lumley [1978] a systématisé cette approche, sous le nom de « modélisation invariante », en introduisant un ensemble de principes et d'hypothèses qui permettent d'engendrer systématiquement des approximations cohérentes des paramètres inconnus. La « modélisation invariante » introduit de nombreuses constantes numériques qu'il n'est pas toujours possible de caler sur des expériences. En pratique, des simplifications peuvent généralement être amenées par l'intuition physique des phénomènes agissants, ce qui permet de ne retenir que les termes dominants. On suppose que les moments d'ordre élevé ont une influence moindre que les moments d'ordre inférieur. On obtient alors des formulations analogues à celles proposées plus anciennement sur des bases intuitives.

5.1 Viscosité d'une suspension diluée de particules

Un des facteurs les plus importants dans la détermination de la viscosité d'une suspension de sédiments, qu'elle soit « lourde » ou « légère », est la fraction volumique (concentration en particules). En effet, la viscosité de l'écoulement change durant son mouvement à cause, notamment, de la sédimentation, de l'érosion et de l'incorporation de fluide ambiant.

Beaucoup de recherches ont été effectuées sur les relations viscosité–concentration des suspensions. Il existe des lois logarithmiques [Mooney, 1951] et des lois en puissances [Einstein, 1956; Krieger et Dougherty, 1959; Lee, 1969].

La relation la plus importante est la formule théorique d'Einstein [1956] pour les sphères rigides uniformes :

$$\mu_* = 1 + B\phi \quad (5.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mu_* = \mu/\mu_f & \text{viscosité relative où } \begin{cases} \mu & \text{viscosité de la suspension} \\ \mu_f & \text{viscosité du fluide interstitiel} \end{cases} \\ B & \text{viscosité « intrinsèque » = 2,5} \\ \phi & \text{fraction volumique en sédiments} \end{cases}$$

Il a été montré que l'équation (5.1) n'était valide que dans le cas des suspensions diluées de sphères sans interactions particulières ($\phi \approx 0,05$), ce qui correspond à la gamme d'écoulements à laquelle nous nous intéressons.

Des extensions, qui tiennent compte des variations de taille et de forme, ont été proposées pour des concentrations plus élevées que celles étudiées par Einstein. Elles sont présentées dans [Hugot, 1997] qui traite des écoulements concentrés.

5.2 Vitesse de sédimentation des particules

La vitesse de sédimentation d'une particule est fonction de sa taille, de sa forme, de sa densité, ainsi que des propriétés du fluide ambiant, telles que sa viscosité et sa densité.

De plus, dans une suspension, dès que la concentration dépasse un certain seuil, la vitesse de chute d'une particule est influencée par la présence des autres particules. A titre d'exemple, deux phénomènes peuvent se produire [Mirza et Richardson, 1979; Patwardhan et Tein, 1985; Richardson et Meikle, 1961; Zeng et Lowe, 1992] :

- Les grains, en chutant, créent un mouvement ascendant de fluide ambiant, qui peut entraver la chute d'autres grains, voir même pour les particules très fines, les faire s'élever .
- Les grains grossiers chutent plus vite que les grains fins. La suspension apparaît donc, pour les grains grossiers, plus visqueuse que le fluide pur.

La vitesse de sédimentation est donc déterminée en deux étapes : après avoir défini la vitesse de sédimentation v_{s0} d'une particule seule dans un fluide pur infini (vitesse de chute libre ou *free fall velocity*), la vitesse de sédimentation v_s , sera calculée en tenant compte de la présence des autres particules par l'introduction de la fraction volumique.

5.2.1 Calcul de v_{s0}

5.2.1.1 Méthode de Stokes

La vitesse de sédimentation v_{s0} peut être trouvée, en première approximation grâce à un bilan simple des forces agissant sur une particule.

Cas général. On considère une particule solide sphérique isolée de diamètre d et de masse volumique ρ_p , lâchée sans vitesse initiale dans un fluide au repos de masse volumique ρ_f et de viscosité dynamique μ et en mouvement sous l'effet de la gravité g . La vitesse de la particule n'a qu'une seule composante u_p suivant l'axe vertical. Cette particule matérielle est soumise, en simplifiant, à son poids et aux forces de frottement exercées sur elle par le fluide. C'est à dire essentiellement à la poussée d'Archimède et à une force de friction fonction de la vitesse relative entre la particule et le fluide.

Pour la forme de la force de résistance subie par une boule en mouvement lent dans un fluide visqueux, on se référera à l'ouvrage de Landau et Lifchitz [1971, pp. 81-86]. On fait l'hypothèse que le nombre de Reynolds est petit, *i.e.* que les efforts dominants sont visqueux.

En négligeant l'accélération de la particule, on peut écrire pour une sphère de diamètre d :

$$\underbrace{\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_p g}_{\text{Poids}} - \underbrace{\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_f g}_{\text{Archimède}} - \underbrace{3\pi \mu d (u_p - u_f)}_{\text{Friction}} = 0$$

En réarrangeant, la vitesse de sédimentation $v_{s0} = u_p - u_f$ peut se mettre sous la forme :

$$v_{s0} = \frac{1}{18} \frac{\rho_p - \rho_f}{\mu} g d^2 = \frac{1}{18} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} g \frac{d^2}{\nu} \quad (5.2)$$

où v_{s0} est appelée vitesse relative de sédimentation ; $\nu = \mu/\rho_f$ étant la viscosité cinématique. Cette forme de la vitesse de sédimentation est valable pour des particules de diamètre inférieure à $100\mu\text{m}$ (intervalle de Stokes). On gardera également à l'esprit les limitations de cette formule qui n'est valable que pour des mélanges dilués à faible nombre de Reynolds ($\text{Re}_p \ll 1$)³⁹.

Cas de particules de petite taille. Dans le cas de particules de petite taille (e.g. argiles), ce bilan simplifié n'est plus valable. En effet, ces dernières se maintiennent en suspension en dépit de la gravité. Le phénomène physique responsable de ce maintien est l'agitation thermique des molécules du fluide qui entrent sans cesse en collision avec la particule suspendue [Lhuillier, 1995]. Sur les petites particules, ces chocs incessants suffisent à contrecarrer l'effet de la gravité. Le bilan des forces est alors modifié. Dans le cas d'un mélange dilué, les vitesses concernant une particule isolée sont remplacées par les vitesses moyennes, et s'il y a n_p particules par unité de volume du mélange, on peut écrire :

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi a^3 (\rho_p - \rho_f) g}_{\text{Poids / Archimède}} - \underbrace{6\pi \mu a (u_p - v)}_{\text{Résistance}} - \underbrace{k_B T \frac{\nabla n_p}{n_p}}_{\text{Agitation thermique}} = 0$$

où a est le rayon équivalent de la particule ; k_B la constante de Boltzmann ; T la température du fluide ; v sa vitesse moyenne. soit par analogie entre le nombre de particules et la fraction volumique, en passant à la limite :

$$u_p = v + \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (\rho_p - \rho_f) g - \frac{D}{\phi} \nabla \phi$$

Et en tenant compte de l'équation (5.2), on a :

$$u_p = v + v_{s0} - \frac{D}{\phi} \nabla \phi \quad (5.3)$$

5.2.1.2 Méthode de Van Rijn

Van Rijn [1984] propose une extension de la formule de Stokes :

$$v_{s0} = 10 \frac{\nu}{d} \left\{ \left[1 + 0.01 \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{d^3}{\nu^2} g \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad (5.4)$$

³⁹. même si ce n'est pas le cas pour les courants turbiditiques, cette formule est souvent utilisée pour leur modélisation.

- Pour des particules dont le diamètre est compris entre 100–1000 μm , le second terme du crochet est petit devant 1. La vitesse de sédimentation peut être approximée par :

$$v_{s0} = \frac{1}{20} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{d^2}{\nu} g \quad (5.5)$$

cette forme de la vitesse de sédimentation est très proche de celle proposée par Stokes (équation (5.2)).

- Pour des particules dont le diamètre est supérieur à 1000 μm , le second terme du crochet est très grand devant 1, on obtient la forme simplifiée :

$$v_{s0} = 1.1 \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} g d \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

5.2.1.3 Méthode de De Dietrich

Dietrich [1982] a développé une équation empirique à partir de données sur la sédimentation de particules naturelles de forme arbitraire :

$$v_{s0} = \left(\left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right) g \nu W_\star \right)^{1/3} \quad (5.7)$$

où W_\star suit la loi :

$$\ln W_\star = -3.7617 + 1.92944 \times (\ln D_\star) - 0.09815 \times (\ln D_\star)^2 - 0.00575 \times (\ln D_\star)^3 + 0.00056 \times (\ln D_\star)^4$$

le paramètre de similitude, D_\star (diamètre adimensionnel), est donné par :

$$D_\star = \frac{1}{8} \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right) g \frac{d^3}{\nu^2}$$

5.2.1.4 Influence de la turbulence

Les effets de la turbulence sur la sédimentation des particules sont liés aux interactions de ces particules avec les structures locales de l'écoulement. La turbulence joue donc un rôle essentiel dans le processus de sédimentation. Elle peut aussi bien remettre les sédiments en suspension et retarder leur chute, que les accélérer vers le sol et mener à un dépôt plus rapide [Deutsch et Simonin, 1991; Hoyal, Depinto, Atkinson et Taylor, 1995; Simonin, 1991; Simonin, Viollet et Méchitoua, 1990]. Les modèles traitant des couplages fluides turbulents–particules sont relativement complexes et ne seront pas présentés. Cependant, comme pour la méthode de Stokes, il est possible de prendre en compte la turbulence en simplifiant le bilan de quantité de mouvement d'une particule. Le problème revient ici à prescrire une force de friction non-linéaire dépendant du nombre de Reynolds des particules. Un modèle fréquemment utilisé [Burnage et Moon, 1990; Lhuillier, Saintlos, Karl et Burnage, 1996a,b; Wang et Maxey, 1993] est celui dérivé du modèle de Odar et Hamilton [1964], basé sur les équations de Basset–Boussinesq–Oseen (ici simplifiées) :

$$\frac{\pi}{6} d^3 (\rho_p + C_a \rho_f) \frac{du_p}{dt} = -\frac{1}{2} C_d \rho_f \frac{\pi}{4} d^2 |u_p - u_f| (u_p - u_f) + \frac{1}{6} d^3 (\rho_p - \rho_f) g$$

où C_a est le nombre d'accélération ; C_d le coefficient de friction. Le cas stationnaire conduit à :

$$v_{s0} = \sqrt{\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{d}{C_d} g} \quad (5.8)$$

Le coefficient C_d est donné par une relation empirique fonction de la valeur instantanée du nombre de Reynolds des particules [Clift, Grace et Weber, 1978, p. 111] :

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0,15\text{Re}_p)^{0,687} & \text{si } \text{Re}_p \leq 1000 \\ 0,44 & \text{si } \text{Re}_p \geq 1000 \end{cases}$$

5.2.1.5 Comparaison

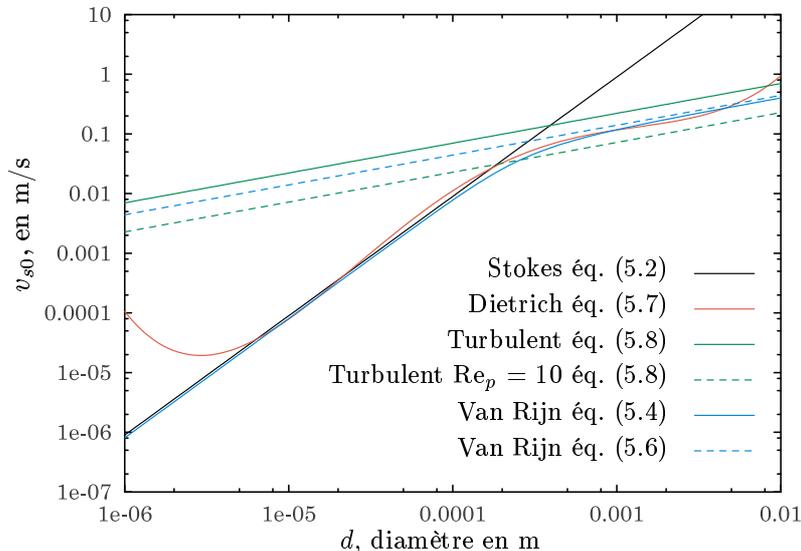


FIG. 5.1 – Comparaison des vitesses de chute libre, v_{s0} (en $m \cdot s^{-1}$), en fonction du diamètre de la particule, d (en m), par les formules de Stokes (équation (5.2)), de Dietrich (équation (5.7)) et de Van Rijn (équation (5.4) et (5.6)).

La figure 5.1 donne une comparaison des vitesses de chute libre prédites par les formules de Stokes (équation (5.2)), de Dietrich (équation (5.7)) et de Van Rijn (équation (5.4) et (5.6)), pour un large éventail de particules de diamètre d , allant de $1\mu m$ (argiles) à 1 cm (graviers)⁴⁰.

Pour des particules plus petites que les silts ($d \leq 4\mu m$), les formules de Stokes et de Van Rijn sont consistantes et fonction du carré du diamètre. La formule de Dietrich prédit, elle, une augmentation de la vitesse de chute libre, qui peut être interprétée comme résultante du phénomène de floculation.

Les formules de Van Rijn (5.4) et de Dietrich (5.7) sont consistantes avec la formule de Stokes pour des particules d'un diamètre supérieur à $4\mu m$ (silts), et ce, jusqu'à des diamètres inférieurs à 0.2 mm (sables fins) : ces formules suivent pratiquement la même loi de puissance, la vitesse de sédimentation est proportionnelle au carré du diamètre des particules.

Au delà d'un diamètre de 0.2 mm, la formule de Stokes prédit des vitesses trop élevées. Les formules de Dietrich et de Van Rijn restent consistantes jusqu'à des diamètres de 5 mm. Les lois de sédimentation sont alors des fonctions de la racine carrée du diamètre des particules.

On voit ici que l'équation (5.6) proposée par Van Rijn [1984] est dérivée de l'équation (5.8) pour $C_d^{-1} = 1.1$, soit un nombre de Reynolds proche de 100.

Les lois (5.4) et (5.7) sont pratiquement équivalentes sur le domaine de diamètres de particules qui nous intéresse.

5.2.2 Calcul de v_s

Après avoir adopté une des deux lois (5.4) ou (5.7) pour la vitesse de sédimentation d'une particule isolée dans un fluide pur, il faut maintenant tenir compte de l'influence de la présence d'autres particules dans le voisinage immédiat de la particule en sédimentation.

5.2.2.1 Cas général

Les expériences de Richardson et Zaki [1954] ont montré que, pour des suspensions monomériques mettant en jeux des populations de particules de taille unique, la vitesse de chute des grains pouvait être

40. cf. annexe C page 271 pour les classifications granulométriques.

exprimée en fonction de leur fraction volumique ϕ dans le mélange, par la loi :

$$v_* = \frac{v_s}{v_{s0}} = (1 - \phi)^n \quad (5.9)$$

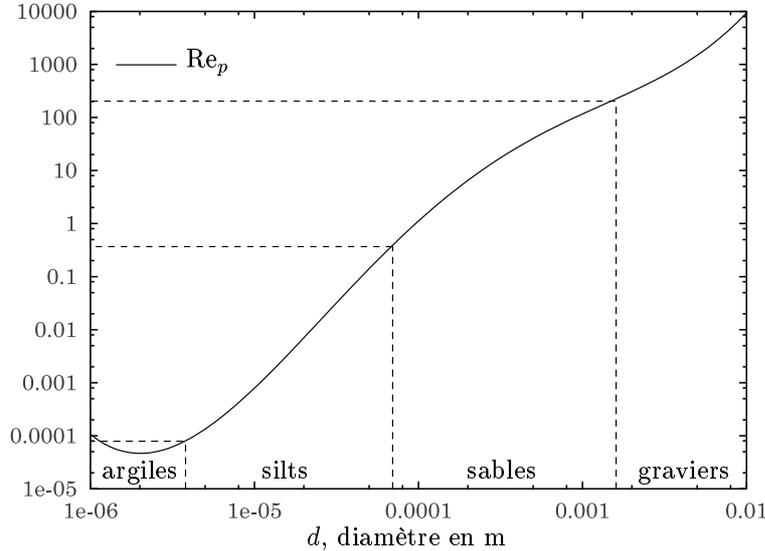


FIG. 5.2 – Variation du nombre de Reynolds des particules Re_p , en fonction du diamètre des particules, d . La vitesse de sédimentation est prise en compte suivant la formule de Dietrich. Les lignes de tirets séparent les classes granulométriques (cf. tableau 5.1).

L'exposant n a été établi par analyse dimensionnelle et confirmé expérimentalement par Richardson et Zaki [1954] et Richardson et Meikle [1961]. Le dispositif expérimental consistait en un tube dans lequel sédimentait une suspension de particules. L'exposant n est une fonction :

- du rapport du diamètre des grains, d , au diamètre du tube, D ;
- du nombre de Reynolds des particules dans un fluide de viscosité μ :

$$Re_p = \frac{\rho_f v_{s0} d}{\mu} \quad (5.10)$$

La variation du nombre de Reynolds des particules, Re_p , en fonction du diamètre des particules est donnée par la figure 5.2. Le tableau, de la présente page, indique les valeurs typiques du nombre de Reynolds des particules associées à chaque classe granulométrique définie dans l'annexe C page 271.

Classe	Diamètre (μm)	Nombre de Reynolds des particules
Argiles	≤ 4	$Re_p \leq 10^{-4}$
Silts	$4 \leq d \leq 63$	$10^{-4} \leq Re_p \leq 0.29$
Sables	$63 \leq d \leq 2000$	$0.29 \leq Re_p \leq 302$
Graviers	≥ 2000	$Re_p \geq 302$

TAB. 5.1 – Ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé aux classes de particules.

Pour des particules sphériques, les valeurs de n , déterminées expérimentalement, sont les suivantes :

$$n = \begin{cases} 4, 65 + 19, 5 \frac{d}{D} & \text{pour } Re_p < 0, 2 \\ (4, 36 + 17, 6 \frac{d}{D}) Re_p^{-0,03} & \text{pour } 0, 2 \leq Re_p < 1 \\ 4, 45 Re_p^{-0,1} & \text{pour } 1 \leq Re_p < 500 \\ 2, 39 & \text{pour } 500 \leq Re_p \end{cases}$$

Les valeurs critiques du nombre de Reynolds des particules ne coïncident pas avec les valeurs des classes granulométriques.

5.2.2.2 Simplification

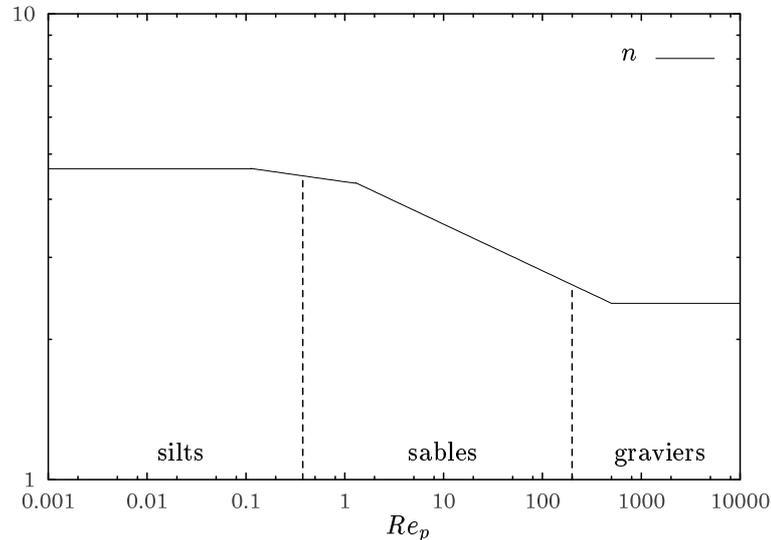


FIG. 5.3 – Variation du paramètre n (correction de la vitesse de sédimentation) prédit par la loi de Richardson, en fonction du nombre de Reynolds des particules. Les lignes de tirets séparent les classes granulométriques (cf. tableau 5.1 page ci-contre).

Dans notre cas —où on ne considère pas un tube mais un écoulement— le diamètre D s'apparente à la section basale du courant de gravité, qui a pour dimension l (cf. notation de la figure 3.2 page 65, par exemple). Il est vraisemblable que le rapport $\frac{d}{l}$ soit très petit et puisse être négligé. L'exposant n peut, alors, être considéré comme étant seulement fonction du nombre de Reynolds des particules. Le paramètre n suit alors la définition suivante :

$$n = \begin{cases} 4,65 & \text{pour } Re_p < 0,2 \\ 4,36Re_p^{-0,03} & \text{pour } 0,2 \leq Re_p < 1 \\ 4,45Re_p^{-0,1} & \text{pour } 1 \leq Re_p < 500 \\ 2,39 & \text{pour } 500 \leq Re_p \end{cases} \quad (5.11)$$

La figure 5.4 page suivante montre l'influence de la fraction volumique ϕ sur la vitesse de sédimentation calculée par la méthode de Dietrich.

Pour les très faibles concentrations, inférieures à 0.05, la vitesse de sédimentation n'est pas modifiée. Dès que les concentrations sont de l'ordre de 0.1 (10%), il faut tenir compte d'une correction. Par exemple, comme l'indique la figure 5.4 page suivante, pour une fraction volumique de 0.2, la vitesse de sédimentation est réduite de plus de 50% (pour des particules de diamètre $d = 100\mu\text{m}$, $Re_p = 1.117$, $n = 4.4$ et $v_* = 0.37$).

5.3 Friction turbulente

Il ne s'agit pas, ici, d'effectuer à proprement parler une fermeture turbulente. En effet, toutes les grandeurs turbulentes ont déjà été spécifiées par l'analyse dimensionnelle, puisque nous n'avions qu'une seule échelle de vitesse, U_0 , et une seule échelle de longueur, h . Il s'agit en fait de relier la fonction F_* , introduite par l'équation (4.47) page 90, à des paramètres plus « classiques » de la turbulence.

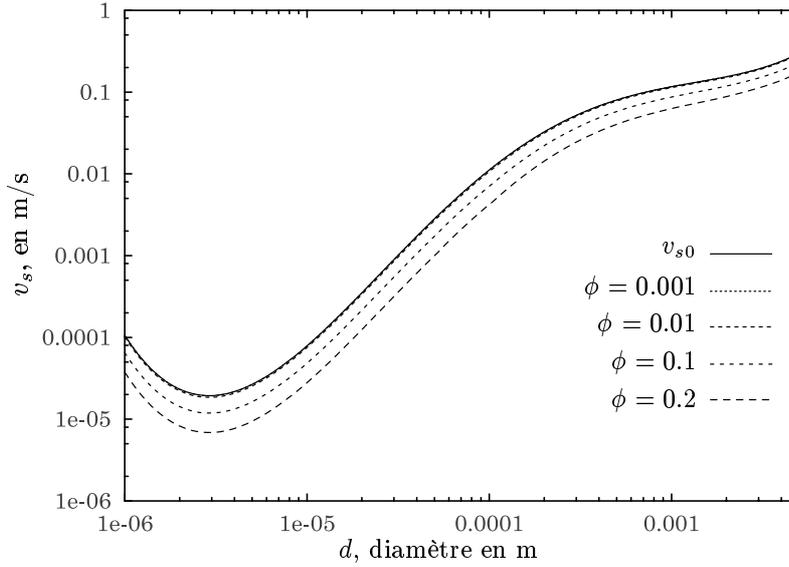


FIG. 5.4 – Influence de la fraction volumique, ϕ , sur la vitesse de sédimentation de Dietrich, prédite avec la correction de Richardson (cf. équations (5.9) et (5.7)) en fonction du diamètre des particules.

5.3.1 Viscosité turbulente et modèle à 0-équation

Pour un modèle à 0-équation, aucune équation de transport n'est résolue pour calculer les quantités turbulentes, le tenseur de Reynolds est directement rattaché aux grandeurs moyennes de l'écoulement. Le problème des fermetures pour les lois sur la turbulence est souvent traité comme celui de la détermination des lois de comportement d'un fluide turbulent : Les contraintes de Reynolds, sous l'hypothèse de la viscosité turbulente de Boussinesq, s'écrivent sous la forme :

$$\tau'_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.12)$$

où ν_T est la viscosité turbulente (qui n'est pas une propriété du fluide). Cette dernière est donnée par :

$$\nu_T = \frac{l_0^2}{t_0} \quad (5.13)$$

l_0 étant une échelle de longueur de la turbulence et t_0 une échelle de temps de la turbulence. Le formalisme de la viscosité turbulente s'est avéré très utile, mais ne traduit pas toujours fidèlement l'essence physique des phénomènes en jeu. En effet, l_0 et t_0 doivent être spécifiés empiriquement. Les lois pour l'échelle de longueur de la turbulence et l'échelle de temps de la turbulence ne sont pas des fonctions universelles, mais dépendent des configurations d'écoulement considérées. Les milieux turbulents ne peuvent être traités comme des milieux continus non Newtoniens, car ils ne satisfont pas nécessairement au principe d'indifférence matérielle [lum70] et l'énergie turbulente ne peut être maintenue que par un apport extérieur d'énergie ; mais l'on s'écarte ici de notre problème, qui est relativement plus simple . . .

Le premier modèle à 0-équation, basé sur l'hypothèse de la viscosité turbulente a été formulé par Prandtl [1925]. Il repose sur la théorie de la longueur de mélange qui porte son nom. La viscosité turbulente est spécifiée par :

$$\nu_T = l_0^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (5.14)$$

où $l_0 = \kappa y$ est la longueur de mélange, κ est la constante de Von Kármán et y est la distance normale à la paroi solide [cf. par ex. Schlichting [1979, chap. XIX] pour plus de détails]. Ce modèle n'est formellement

valable que dans le cas d'écoulements turbulents cisailés minces –et près de la paroi– et lorsque la vitesse moyenne est unidirectionnelle [Speziale, 1996].

5.3.2 Connexion à notre problème

La fonction F_\star nous a permis de relier le tenseur de Reynolds $-\overline{u'v'}$ à la vitesse moyenne de l'écoulement $U(x, t)$ par la relation :

$$-\overline{u'v'} = U^2(x, t) F_\star(\eta)$$

D'après les équations (5.12) et (5.14), on peut définir F_\star par :

$$F_\star = \frac{\nu_T}{U^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \left(\frac{l_0}{U} \right)^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (5.15)$$

Grâce aux hypothèses de la viscosité turbulente et de la longueur de mélange, la fonction F_\star est reliée aux gradients de vitesse de l'écoulement.

On comprend maintenant pourquoi $F_\star(\eta = 1)$ est souvent négligeable. Les gradients de vitesse au sommet de l'écoulement sont très faibles (cf. figure 5.5).

Pour la fermeture de notre problème, nous considérerons que :

$$F_\star(1) = 0 \quad (5.16)$$

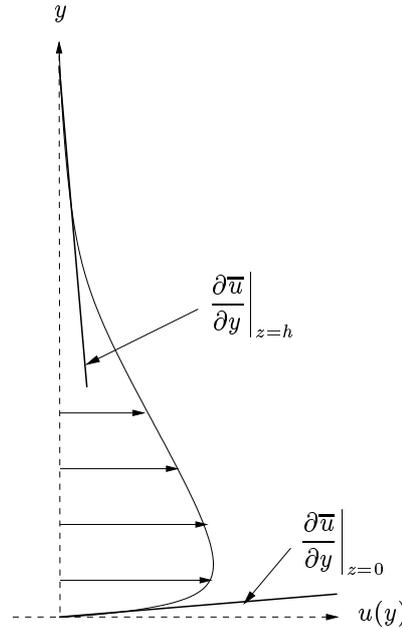


FIG. 5.5 – Profil de vitesse réel simplifié.

Les valeurs maximales du gradient sont obtenues au bas de l'écoulement. On suppose :

$$F_\star(0) = \max F_\star \quad (5.17)$$

L'étude des ordres de grandeur de la vitesse u et des fluctuations de vitesse u' (équation (4.32) page 88) montre que :

$$\max F_\star = \mathcal{O} \left(\frac{h}{L} \right) \quad (5.18)$$

L étant l'échelle caractéristique de longueur dans la direction principale, h l'échelle caractéristique de longueur dans la direction transversale.

Pour notre problème nous considérons donc, d'après les équations (5.17) et (5.18), que $F_*(0)$ est une constante d'ordre h/L , soit :

$$F_*(0) = C_0 \quad (5.19)$$

où C_0 est un $\mathcal{O}(h/L)$

Remarque 5

C_0 peut être rapproché du coefficient de friction turbulent k_t défini par :

$$u_*^2 = k_t U^2$$

Ce coefficient de friction turbulent peut être décomposé en deux parties k_{t1} et k_{t2} :

1. k_{t1} , qui correspond à la friction de paroi de l'écoulement homogène :

$$k_{t1} = \frac{\tau_b}{\rho U^2}$$

où τ_b est le cisaillement basal dans un jet de paroi. Les mesures effectuées sur ces écoulements par Schwarz et Cosart [1961] fournissent :

$$C_f = \frac{\tau_b}{\frac{1}{2}\rho u_{\max}^2} = 0,01109$$

Soit :

$$k_{t1} = \left(\frac{u_{\max}}{U}\right)^2 \frac{C_f}{2}$$

Le rapport $\frac{u_{\max}}{U}$ étant typiquement égal à deux, on peut considérer que :

$$k_{t1} \sim 2C_f \quad (5.20)$$

2. k_{t2} , qui correspond aux effets des sédiments sur le profil de vitesse (chute, stratification etc.). Ce coefficient peut être une fonction :

- du nombre de Richardson Ri (défini par l'équation (5.45)) ;
- du rapport $\frac{v_s}{u_*}$.

Certains auteurs, comme Akiyama et Stephan [1985, 1988], proposent la relation suivante :

$$k_{t2} = CRi \frac{v_s}{u_*} \quad (5.21)$$

Cette relation est relativement peu satisfaisante dans la mesure où elle introduit des singularités : lorsque $u_* \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque l'écoulement ralentit, le coefficient $k_{t2} \rightarrow \infty$.

5.3.3 Spécification de la longueur de mélange et de la viscosité turbulente

Dans notre étude, nous avons défini la vitesse $u(x, z, t)$ par $U(x, t)F(\eta)$ (équation (4.46a) page 90). On peut définir $F_*(0)$ par :

$$F_*(0) = \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 \Big|_{\eta=0}$$

Le choix d'un profil simplifié pour F effectué à la section G.2 page 289, conduit à :

$$F_*(0) = \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \quad (5.22)$$

On déduit des équations (5.22) et (5.18) l'ordre de grandeur de la longueur de mélange associé à notre problème :

$$l_0 = \mathcal{O} \left(\left(\frac{h}{L} \right)^{1/2} h \right)$$

la longueur de mélange est d'un demi ordre de grandeur, mesuré en terme de h/L , moindre que la hauteur de l'écoulement. L'ordre de grandeur de la viscosité turbulente peut être donné par :

$$\nu_T = \max F_* \mathcal{O}(Uh) = \mathcal{O} \left(h^2 \frac{U}{L} \right) \quad (5.23)$$

5.4 Transferts de particules

Il s'agit de relier les fonctions G , liée au profil de la fraction volumique (équation (4.46b)) et G_* , liée au profil de diffusion de la fraction volumique par la turbulence (équation (4.48)), aux autres paramètres connus de l'écoulement, pour pouvoir, par la suite, fixer les conditions à la limite en $z = 0$ (équations (G.18) et (G.19) page 290).

Comme nous l'avons souligné (cf. 2 page 25 page 26), un écoulement, essentiellement dans sa phase d'accélération (phase I), est capable d'éroder les sédiments présents sur sa trajectoire. Lors de la phase III, sa décélération conduit au dépôt progressif de la suspension.

La spécification des conditions aux limites sur la fraction volumique dans un écoulement turbulent est une étape critique pour représenter le transport des sédiments et consitue un axe de recherche actif, qui semble ne pas avoir rencontré de solutions complètement satisfaisantes, même dans le cas simple d'écoulements stationnaires [Fredsoe et Deigaard, 1992]. La majorité des études est basée sur le transport des sédiments par des écoulements en canal qui s'apparentent à des écoulements du domaine fluvial. Nous utiliserons ces résultats.

Dans le cas général, les sédiments peuvent, soit chuter, soit être érodés suivant les contraintes à la base de l'écoulement, la distribution, le type et la taille des particules, et leur aptitude à être érodés [Olsen, 1997]. Intuitivement, on sent que la différence entre la friction basale —dépendant de l'écoulement— et la contrainte critique —dépendant du type de sédiments— doit déterminer si oui ou non des sédiments d'une certaine taille peuvent être érodés. L'entraînement a lieu lorsque la contrainte basale est supérieure à la contrainte critique des sédiments. Le taux d'entraînement est alors proportionnel à la contrainte en excès. Si la contrainte basale est inférieure à la contrainte critique, il y a dépôt.

5.4.1 Distribution verticale des sédiments

Il convient d'abord d'étudier la distribution des sédiments au sein de l'écoulement. L'évolution de la fraction volumique au sein de l'écoulement est déterminée par l'équation (4.39d) page 89. À l'équilibre —stationnarité et uniformité de l'écoulement—, on peut écrire :

$$\frac{\partial \phi v_s}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\phi' v'} = 0$$

ou :

$$\phi v_s - \overline{\phi' v'} = 0 \quad (5.24)$$

avec les conditions limites $\phi(\infty) = 0$ et $\overline{\phi' v'}(\infty) = 0$ (cf. section G.2.1 page ??). La sédimentation est égale au dépôt.

5.4.1.1 Diffusivité turbulente

La diffusivité turbulente caractérise le transport des particules par le mouvement turbulent. La première étape, dans la fermeture du problème, est de spécifier une fermeture pour le flux turbulent de

fraction volumique. Par analogie au concept de viscosité turbulente, ce terme peut être considéré comme étant dû à la « diffusivité turbulente » ϵ_T (section 4.2.3, page 83) :

$$\overline{\phi'v'} = -\epsilon_T \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (5.25)$$

La fermeture porte maintenant sur ϵ_T . Classiquement, par analogie avec les transferts thermiques (analogie de Reynolds [Schlichting, 1979, XII f.3.]), la diffusivité peut être reliée à la viscosité turbulente par la définition du nombre de Schmidt turbulent :

$$\text{Sc}_T = \frac{\nu_T}{\epsilon_T} \quad (5.26)$$

La valeur du nombre de Schmidt turbulent rend compte de la différence de transport entre les particules de sédiments et les « particules » de fluide (structures cohérentes de fluide ou tourbillons) par les fluctuations turbulentes. Il n'est pas constant et n'est pas a priori égal à 1. Les raisons pour lesquelles Sc_T dévie de l'unité sont exposées dans [Fredsoe et Deigaard, 1992, pp. 230–234].

Sa diminution peut être due à la sédimentation des particules, à une relaxation due au temps que met une particule à atteindre la vitesse du fluide [Simonin, 1991].

Son augmentation peut être due aux forces centrifuges qui ont plus d'effet sur les particules (dont la densité est supérieure à celle du fluide) que sur les « particules » de fluide elle-même [Simonin, 1991; Van Rijn, 1984; Wang et Maxey, 1993]. Csanady [1963] relie le temps caractéristique des tourbillons, τ_t , au temps caractéristique du mouvement turbulent « vu » par les particules, τ_p , dans la direction normale au mouvement moyen, par la relation (ici simplifiée) :

$$\frac{\tau_p}{\tau_t} = \left(1 + 4C_\beta \left(\frac{v_s}{u_*} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

L'inverse du nombre de Schmidt turbulent peut alors être approximé, au premier ordre, par :

$$\text{Sc}_T^{-1} = 1 + 2C_\beta \left(\frac{v_s}{u_*} \right)^2 \quad (5.27)$$

Cette forme correspond à celle retrouvée par Van Rijn [1984] pour laquelle le calage sur les travaux expérimentaux de Coleman [1981], donne pour $0.1 \leq v_s/u_* \leq 1$, une valeur de C_β égale à 1. La diffusivité des sédiments est alors toujours plus élevée que celle du fluide.

Van Rijn [1984] inclue également, dans les processus modifiant le nombre de Schmidt turbulent, des effets d'amortissement de la turbulence du fluide dus à la présence des particules (modification de la constante de Von Kármán), en particulier à concentration élevée.

D'après la définition (5.26) du nombre de Schmidt turbulent, l'équation (5.24) se met sous la forme :

$$\phi v_s + \text{Sc}_T^{-1} \nu_T \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.28)$$

5.4.1.2 Distribution de Vanoni (distribution à l'équilibre)

La forme de la viscosité turbulente précisée par l'équation (5.14) n'est valable, nous l'avons vu, que près de la paroi. Elle permet d'écrire la friction turbulente basale de l'écoulement sous la forme (loi logarithmique de vitesse) :

$$u_* = \kappa y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (5.29)$$

On suppose que la distribution des contraintes turbulentes dans l'écoulement peut être exprimée par (écoulement stationnaire en canal) :

$$\tau' = \tau'_b \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad (5.30)$$

où τ'_b représente la friction basale et est égale à u_*^2 , h étant la hauteur totale de l'écoulement. En substituant les équations (5.29) et (5.30) dans l'expression de la viscosité turbulente (5.14), l'équation d'équilibre de la fraction volumique (5.28) s'écrit :

$$\phi v_s + \text{Sc}_T^{-1} \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{h}\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.31)$$

Supposons, dans un premier temps, que la vitesse de sédimentation est une constante, que le nombre de Schmidt turbulent est constant et égale à 1 (en effet, la spécification du nombre de Schmidt en fonction d'autres paramètres de l'écoulement, comme la fraction volumique, rendrait obligatoire l'intégration numérique). Le choix de $\text{Sc}_T = 1$ est arbitraire, il signifie que les particules de sédiments sont diffusées, par la turbulence, comme les tourbillons, ce qui constitue une approximation grossière. Avec ces hypothèses, l'équation (5.31) s'intègre pour donner :

$$\frac{\phi_b}{\phi_{be}} = \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \frac{\eta_b}{1 - \eta_b} \right)^Z \quad (5.32)$$

Cette distribution est appelée distribution de Vanoni (ou de Rouse), le paramètre $Z = v_s / \kappa u_*$ est le nombre de Rouse [1938]. La fraction volumique ϕ_b est une concentration de référence à une distance b au dessus du sol (cf. équation (G.16) page 290). La forme de la distribution est très sensible au choix du niveau de référence b , à la fraction volumique, ϕ_{be} , associée à ce niveau et aux variations du nombre de Rouse [Fredsoe et Deigaard, 1992; Van Rijn, 1984].

5.4.1.3 Utilisation de la fraction volumique basale à l'équilibre

La méthode, fréquemment utilisée pour les écoulements en canal ouvert et qui a donné lieu à de nombreuses publications, est de spécifier la concentration basale de l'écoulement à l'équilibre, ϕ_{be} .

ϕ_{be} est souvent exprimée, par des lois semi-empiriques, sous forme d'une loi de puissance de la friction turbulente basale τ'_b (ou de la vitesse de friction basale u_*^2 , cf. équation (5.30) et (5.29)), c'est-à-dire par une formule du type :

$$\phi_{be} \sim \tau_b'^p \sim u_*^{2p} \quad (5.33)$$

où p est un exposant qui varie entre 1 et 15 suivant les formules considérées. On peut trouver une revue bibliographique de ces méthodes dans [Garcia et Parker, 1991]. Cette formulation n'est valide que dans le cas où les sédiments couvrant le lit sont identiques à ceux de la suspension.

Il existe deux théories qui s'affrontent quand à l'utilisation de la fraction volumique à l'équilibre pour calculer les paramètres de la suspension hors équilibre :

1. utilisation de ϕ_{be} pour la spécification d'une condition à la limite sur la fraction volumique à la base de l'écoulement hors équilibre ;
2. utilisation de ϕ_{be} pour la définition du flux turbulent (condition limite de gradient).

Théorie 1 : Utilisation de ϕ_{be} pour la spécification d'une condition à la limite sur la fraction volumique à la base de l'écoulement hors équilibre :

$$\phi_b = \phi_{be} \quad (5.34)$$

Il est donc supposé que ϕ_b est la même fonction dans des conditions d'écoulement que dans le cas d'équilibre. Pour exemple Van Rijn [1984] propose une formule (ici simplifiée) dérivée de l'étude la couche de saltation :

$$\phi_b = 0.015 \frac{d T_*^{3/2}}{b D_*} \quad (5.35)$$

$$\text{avec } \begin{cases} T_{\star} = \frac{u_{\star}'^2 - u_{\star \text{cr}}^2}{u_{\star \text{cr}}^2} & \text{paramètre de transport} \\ u_{\star}' & \text{vitesse de friction basale liée aux grains } (\neq u_{\star}) \\ u_{\star \text{cr}} & \text{vitesse de friction basale critique} \\ D_{\star} = d \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{g}{\nu} \right)^{1/3} & \text{diamètre adimensionnel des particules} \end{cases}$$

La vitesse de friction basale critique, $u_{\star \text{cr}}$, est reliée à la contrainte critique basale définie par Shields :

$$u_{\star \text{cr}} = \frac{\tau_c}{\rho_p - \rho_f} = \theta' g d$$

où θ' est le paramètre de Shields [[Shields, 1936] in : [Cao et Lerche, 1994; Van Rijn, 1984]], fonction du diamètre des grains et dont les valeurs sont données dans le tableau 5.2.

Type de lithologie	Taille des grains (mm)	Valeur de θ'
Galet	> 4,000	$\sim 0,05$
Granule	2,000 – 4,000	$\sim 1,040$
Sable très grossier	1,000 – 2,000	$\sim 0,040$
Sable grossier	0,500 – 1,000	$\sim 0,035$
Sable moyen	0,250 – 0,500	$\sim 0,030$
Sable fin	0,125 – 0,250	$\sim 0,040$
Sable très fin	0,062 – 0,125	$\sim 0,060$
Silt grossière	0,020 – 0,062	$\sim 0,15$
Silt fine	0,004 – 0,020	$\sim 0,500$
Argile	< 0,004	$\sim 1,000$

TAB. 5.2 – Paramètre de Shields (contrainte critique adimensionnelle).

La comparaison de la contrainte basale τ_b , et de la contrainte critique τ_c , permet de définir les critères d'érosion-dépôt :

$$\begin{cases} \text{si } \tau_b > \tau_c & \Rightarrow \text{érosion,} \\ \text{si } \tau_b = \tau_c & \Rightarrow \text{préservation,} \\ \text{si } \tau_b < \tau_c & \Rightarrow \text{dépôt.} \end{cases}$$

Il est également possible, par une formule du type (5.32), de calculer la distribution des sédiments $\phi(z)$. La définition de la distribution de particules permet de dériver les conditions à la limite sur les flux de particules au bas de l'écoulement. Une équation de la forme (5.25), sous couvert de la formulation de la diffusivité turbulente, ϵ_T , permet de calculer le flux turbulent de fraction volumique. Cette méthode est employée par Fredsøe et Deigaard [1992]; Smith et McLean [1977]; Van Rijn [1984].

Théorie 2 : Utilisation de ϕ_{be} pour la définition du flux turbulent (condition limite de gradient). Cette méthode développée originalement par Parker [1978] et repris par Parker [1982] pour les écoulements turbiditiques repose sur les arguments suivants : le flux de sédiments, F , est défini par :

$$F(y) = \phi v_s - \overline{\phi'v'} \tag{5.36}$$

À l'équilibre, le flux de sédiments, $F(b)$, à la base de l'écoulement est nul (équation (5.24)) :

$$F(b) = \phi v_s|_b - \overline{\phi'v'}|_b = 0$$

En définissant un taux adimensionnel d'entraînement des sédiments, E_s , dans la suspension par la turbulence par ⁴¹ :

$$v_s E_s = \overline{\phi' v'}|_b \quad (5.37)$$

l'équilibre de la suspension, en reportant l'équation (5.37) dans $F(0)$, entraîne :

$$E_s = \phi_{be} \quad (5.38)$$

C'est ici la forme de E_s qui est supposée être la même hors ou à l'équilibre. E_s est fonction de la friction basale, et du nombre de Reynolds des particules suivant :

$$R_p = \frac{(\frac{\Delta\rho}{\rho} g d)^{1/2} d}{\nu}$$

où ν est la viscosité cinématique de l'eau, et d est le diamètre des particules du lit.

À titre d'exemple Parker, Fukushima et Pantin [1986] ont proposé la fonction semi-empirique suivante pour le taux adimensionnel d'entraînement des sédiments de diamètre allant 0,06–1,00 mm :

$$E_s = \begin{cases} 0,3 & \text{si } Z > Z_m; \\ 3 \times 10^{-12} Z^{10} \left(1 - \frac{Z_c}{Z}\right) & \text{si } Z_m > Z > Z_c; \\ 0 & \text{si } Z_c > Z. \end{cases} \quad (5.39)$$

avec

$$Z_m = 13,2 \quad Z_c = 5 \quad Z = R_p^{1/2} \psi$$

où

$$\psi = \frac{u_*}{v_s}$$

La fonction $E_p(Z)$ est très raide. Ceci qui indique que l'érosion a un comportement assez « explosif ». Le terme $v_s \phi|_b$ contenant la fraction volumique basale hors équilibre ϕ_b , est estimé par le rapport $r = \phi_b/\bar{\phi}$, où $\bar{\phi}$ est la fraction volumique moyennée sur la hauteur (cf. par ex. section 4.4.1 page 90 sur la théorie des profils similaires). D'après la distribution de Vanoni, r est défini par :

$$r = \frac{1}{\int_{\eta_b}^1 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \frac{\eta_b}{1-\eta_b}\right)^Z d\eta} \quad (5.40)$$

En pratique r est souvent approximé par des relations semi-empiriques.

$$r = \left[1 + 31,5 \left(\frac{u_*}{v_s}\right)^{-1,46} \right] \quad (5.41)$$

Les tests expérimentaux effectués sur cette formule ont montré qu'elle était valable sur un intervalle tel que $5 < u_*/v_s < 50$ [Parker *et al.*, 1986]. Cette formule, développée pour les écoulements à surface libre, doit être modifiée pour tenir compte de la différence de profil de concentration entre les écoulements à surface libre (fluviaux) et les courants gravitaires. De façon plus simple, r peut être approximé par une constante [Parker, 1982] comprise entre environ 1,6 [Parker *et al.*, 1986] et 2 [Parker, Garcia, Fukushima et Yu, 1987].

La méthode du gradient a été utilisées par Akiyama et Stephan [1985, 1988]; Fukushima, Parker et Pantin [1985]; Parker *et al.* [1986, 1987]

41. Ce choix peut sembler artificiel dans la mesure où de simples arguments phénoménologiques tendent plutôt à associer la vitesse de l'écoulement (la contrainte basale en particulier), plutôt que la vitesse de sédimentation, au phénomène d'érosion (cf. section 3.6.2 page 71).

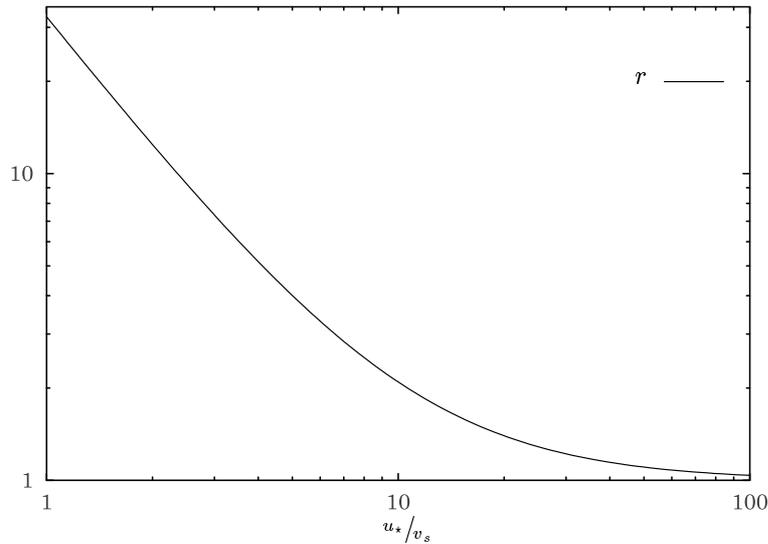


FIG. 5.6 – Variation de la fraction volumique proche du lit

L'intérêt principal de ces deux méthodes réside dans le fait que les conditions d'équilibre, et ϕ_{be} en particulier, fournissent une moyenne pour l'évaluation de la fraction volumique basale ϕ_b ou pour l'évaluation du coefficient d'entraînement E_s . On suppose donc que la même relation reste applicable dans le cas des suspensions hors équilibre. Dans ce cas $\phi_b \neq \phi_{be}$ (ou $E_s \neq \phi_{be}$, dans les méthodes de gradient) et est évalué comme une fonction des paramètres de l'écoulement par la relation d'équilibre. Le flux de sédiments est alors différent de zéro et est donné par une relation (5.24) ou (5.36) dans les méthodes de gradient.

5.4.2 Retour et application à notre problème

Pour ce qui est de notre problème, nous supposons que les sédiments sont rendus disponibles par leur mobilisation dans la couche de saltation et nous n'introduisons pas de contrainte critique.

5.4.2.1 Fraction volumique basale

La fonction G a été introduite par l'équation (4.46b) page 90. La valeur $\Phi(t)G(0)$ spécifie, dans notre modèle, la valeur de la fraction volumique au bas de l'écoulement.

En se basant sur la distribution de Vanoni (équation (5.32)) et les résultats dérivés par Parker [1982] (équation (5.41)), puis confirmés expérimentalement par [Parker *et al.*, 1986, 1987], on suppose que la fraction volumique basale peut être approximée comme étant une part constante de la fraction volumique moyenne. On écrira :

$$\frac{\Phi_b}{\Phi} = G(0) = C_3 \quad (5.42)$$

où C_3 est une constante d'ordre 1.

5.4.2.2 Diffusion turbulente des particules

Il s'agit de relier la fonction G_* , introduite par l'équation (4.48) dans la théorie de similitude, aux autres paramètres de l'écoulement. La fonction G_* relie le terme de diffusion turbulente des particules, à la vitesse moyenne et à la fraction volumique moyenne par :

$$-\overline{\phi'v'} = U(x, t)\Phi(x, t)G_*(\eta)$$

Par analogie avec le concept de viscosité turbulente (équation (5.25)) et grâce à l'analogie de Reynolds permettant de définir le nombre de Schmidt turbulent Sc_T (équation (5.26)), on définit G_* par :

$$G_* = \frac{Sc_T^{-1} \nu_T}{U \Phi} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Compte tenu de la définition de la viscosité turbulente (5.14), on peut aussi écrire :

$$G_* = \frac{Sc_T^{-1} l_0^2}{U \Phi} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

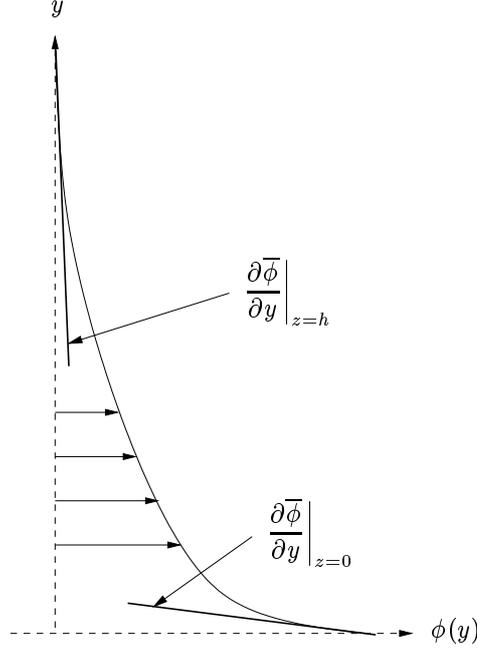


FIG. 5.7 – Profil de fraction volumique réel simplifié.

Les valeurs maximales du gradient de fraction volumique et de vitesse sont obtenues au bas de l'écoulement (cf. figure 5.7 et 5.5 page 115). On suppose donc :

$$G_*(0) = \max G_*$$

Dans notre étude, la fraction volumique $\phi(x, z, t)$ a été définie par $\Phi(x, t)G(\eta)$ (équation (4.46b) page 90). Compte tenu de l'estimation (5.23) de ν_T , on obtient pour $G_*(0)$:

$$G_*(0) = Sc_T^{-1} \max F_* \left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$$

Le choix de profil simplifié pour G , effectué à la section G.2 page 289, mène à :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -1$$

soit :

$$G_*(0) = -Sc_T^{-1} \max F_*$$

L'équation (5.27) permet de déterminer l'ordre de grandeur du nombre de Schmidt turbulent. L'ordre de grandeur du terme v_s/u_* est donné par l'équation (4.36), c'est un $\mathcal{O}(h/L)^{1/2}$. Le nombre de Schmidt

turbulent est donc de la forme :

$$Sc_T^{-1} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right)$$

On suppose pour notre problème de fermeture que :

$$Sc_T^{-1} = C_4 \tag{5.43}$$

où C_4 est une constante d'ordre 1.

$G_\star(0)$ est donc du même ordre que $\max F_\star$, c'est-à-dire :

$$G_\star(0) = \mathcal{O}\left(\frac{h}{L}\right)$$

La fermeture sur $G_\star(0)$ est la suivante :

$$G_\star(0) = -C_0 C_4 \tag{5.44}$$

où C_0 est défini par l'équation (5.19).

5.5 Incorporation de fluide

L'entraînement du fluide ambiant par l'écoulement est une propriété importante, qui distingue les écoulements gravitaires des écoulements fluviaux. Cet effet d'entraînement d'eau a pour conséquence d'augmenter le volume de l'écoulement et de réduire la concentration en particules dans l'écoulement.

5.5.1 Préliminaires

Le concept de l'entraînement a été exposé à la section 4.4.4 page 92 et utilisé pour la modélisation des équations d'ondes longues (cf. section G.3.2 page 293). Il est basé sur des considérations dimensionnelles et des arguments de similitude. Il s'agit ici de déterminer le facteur C reliant la vitesse d'entraînement à la vitesse moyenne du fluide (cf. équation (4.53) page 92). On présente également un complément d'étude permettant de définir les paramètres influant sur ce phénomène.

Dans les courants gravitaires, la composante de la gravité suivant la normale à la pente a un effet inhibiteur sur le mélange de la suspension avec le fluide ambiant [Hopfinger, 1983; Turner, 1986]. On suppose donc que C n'est plus une constante d'ordre h/L , mais une fonction, que l'on notera E , dépendant du nombre de Richardson généralisé, comme défini par Ellisson et Turner [1959] :

$$Ri = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{gh \cos \theta}{U^2} \tag{5.45}$$

Ce nombre caractérise les effets stabilisants de la différence de densité entre l'écoulement suspensif et le fluide ambiant sur l'« interface » par l'importance relative des forces gravitaires (numérateur) et inertielles (dénominateur). Lorsque le nombre de Richardson dépasse une valeur critique, qui est proche de l'unité, l'écoulement est dénommé subcritique. L'entraînement devient faible.

Ellisson et Turner [1959] et Turner [1986] montrent que E est une fonction « forte » de Ri et peut être représentée par :

$$E = \frac{E_0 - 0.1Ri}{1 + 5Ri} \tag{5.46}$$

Lorsque $Ri \rightarrow 0$, E atteint la valeur constante E_0 égale à 0.08 [Turner, 1986]. E_0 représente la valeur de l'entraînement pour un fluide pur. Les mesures expérimentales semblent également bien concorder avec une relation exponentielle du type :

$$E = E_0 e^{-kRi} \tag{5.47}$$

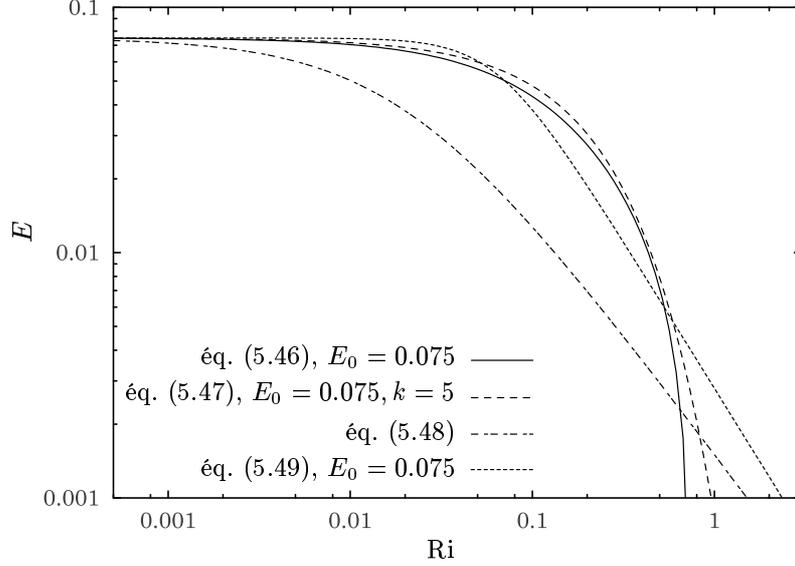


FIG. 5.8 – Taux d'entraînement du fluide ambiant.

où $E_0 = 0.08$, et k est une constante.

Ces relations ont été calibrées sur des travaux expérimentaux, pour des valeurs de Ri inférieures à 0.4 [Ellisson et Turner, 1959].

On trouve dans la littérature d'autres formules empiriques pour déterminer l'entraînement de l'eau le long de l'interface supérieure. À titre d'exemple, dans :

– Fukushima *et al.* [1985]; Parker *et al.* [1986] :

$$E = \frac{0,00153}{0,0204 + Ri} \quad (5.48)$$

D'après l'équation (5.48), lorsque Ri approche zéro, E atteint une valeur constante de 0,075 (elle correspond aux E_0 des autres formules). Lorsque Ri tend vers l'infini, l'entraînement prédit par l'équation (5.48) décroît comme Ri^{-1} .

– Parker *et al.* [1987] :

$$E = \frac{E_0}{\left(1 + 718Ri^{12/5}\right)^{1/2}} \quad (5.49)$$

Lorsque Ri tend vers zéro, E est égale à E_0 . E_0 est estimée à 0,075 [Parker *et al.*, 1987]. Lorsque Ri est grand, E peut être approchée par [in : Parker *et al.* [1987]] :

$$E = 2.8 \cdot 10^{-3} Ri^{-6/5} \quad (5.50)$$

Ces formules sont calibrées expérimentalement jusqu'à des nombres de Richardson égaux à 100, elles reproduisent également de façon satisfaisante les données expérimentales de Ellisson et Turner [1959]. Ces différentes formules sont représentées sur la figure 5.8.

La variation de l'entraînement en fonction d'autres paramètres de l'écoulement, comme le nombre de Reynolds en particulier, n'a pas été clairement établie. Ce dernier semble être sans effet sur E [Ellisson et Turner, 1959].

Enfin, citons la loi dérivée expérimentalement par Beghin [1979] pour des particules dont le diamètre est de $10\mu\text{m}$:

$$E = 10^{-2}\theta + 0,2 \quad (5.51)$$

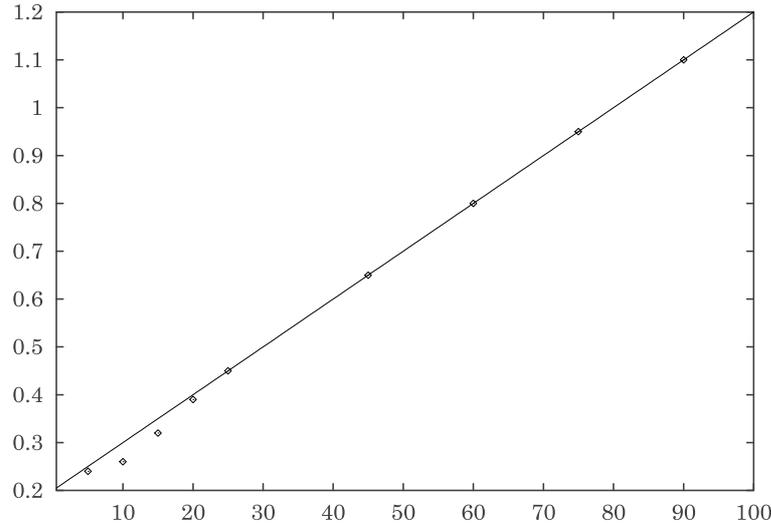


FIG. 5.9 – Points expérimentaux et fonction d'entraînement définie par Beghin [1979] en fonction de la pente.

Pente	5°	10°	15°	20°	25°	45°	60°	75°	90°
E	0.24	0.26	0.32	0.39	0.45	0.65	0.8	0.95	1.1

TAB. 5.3 – Valeurs expérimentales de la fonction d'entraînement définie par Beghin [1979] en fonction de la pente.

où θ est l'angle de pente en degrés. Cette loi a été calibrée d'après les valeurs reportées dans le tableau 5.3. Elle est représentée sur la figure 5.9. À noter que cette loi n'est pas de l'ordre de grandeur estimée par la théorie de similitude sur les jets, pour lesquels on trouve $E_0 \approx 0.075$, mais est de l'ordre de deux à trois fois plus élevée. En effet, elle est calculée à partir de la variation de volume de la tête d'un écoulement (cf. figure 8.2 page 182), dont les échelles caractéristiques ne sont pas celle de la théorie de similitude. Elle n'est pas fonction de la granulométrie, ni des paramètres dynamiques, mais est une fonction directe de la pente.

5.5.2 Application à notre problème

Les formules développées pour quantifier l'entraînement ou l'incorporation du fluide ambiant sont nombreuses et de formes diverses : lois de puissances ou lois exponentielles. Elles ont cependant en commun le fait d'être des fonctions du nombre de Richardson :

- Lorsque Ri tend vers zéro (régime supercritique), les efforts gravitationnels sont négligeables dans le processus de stabilisation, le coefficient d'entraînement tend vers une valeur constante qui est définie pour le fluide pur.
- Lorsque Ri devient grand ou tend vers l'infini (régime subcritique), les efforts gravitationnels sont dominants par rapport aux efforts inertiels dans le processus de stabilisation, résultant en une diminution du coefficient d'entraînement.

On adoptera simplement la relation suivante qui rend compte de manière satisfaisante des deux caractéristiques exposées précédemment :

$$E = \frac{C_1}{C_2 + Ri_*} \quad (5.52)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes et Ri_* est la nombre de Richardson modifié défini par :

$$\text{Ri}_* = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{gh \cos \theta}{(U^T + U^*)^2} \quad (5.53)$$

Lorsque Ri_* est très grand, l'incorporation est proportionnelle à $C_1 \text{Ri}_*^{-1}$. Lorsque le nombre de Richardson tend vers zéro, l'entraînement est constant et tend vers le rapport C_1/C_2 qui est d'ordre h/L .

5.6 Modèle **T** fermé

On rappelle la définition du paramètre a (cf. équation 4.76 page 101) :

$$a = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq \frac{U^T}{U^*} \\ 1 & \text{si } 1 \leq -\frac{U^T}{U^*} \\ -\frac{U^T}{U^*} & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème sur la hauteur $h(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dh}{dt} = \frac{C_1}{C_2 + \text{Ri}} ((1 - a^2)U^* - 2aU^T) l$$

Problème sur la fraction volumique $\Phi(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{d\Phi h}{dt} = \Phi l (C_0 C_4 ((1 - a^2)U^* - 2aU^T) - 2v_s C_3)$$

Problème sur la vitesse du barycentre $U^T(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \frac{dU^T h l}{dt} = \frac{\pi}{2} h l g'_x \Phi [1 - \gamma] - 2l C_0 \left((1 - a^2) U^* U^T - \frac{1}{3} a^3 U^{*2} - a U^{T2} \right)$$

Problème sur la vitesse de déformation $U^*(t)$:

$$\frac{1}{3} \frac{dU^* h l}{dt} - h U^{T2} = \frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi [1 - \gamma] - l C_0 \left(a^2 U^* U^T + \frac{1}{3} (1 + a^3) U^{*2} + (1 + a) U^{T2} \right)$$

Sous forme développée, le système s'écrit :

$$\dot{h} = -\frac{h}{l} U^* + \frac{E}{C} (U^* (1 - a^2) - 2aU^T) \quad (5.54a)$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{\Phi}{Ch} [(U^* (1 - a^2) - 2aU^T) (C_0 C_4 - E) - 2C_3 v_s] \quad (5.54b)$$

$$\dot{U}^T = g'_x \Phi [1 - \gamma] - \frac{1}{Ch} (1 - a^2) (2C_0 + E) U^* U^T + \frac{2a}{Ch} (C_0 + E) U^{T2} + \frac{2}{3} \frac{C_0}{Ch} a^3 U^{*2} \quad (5.54c)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^* &= \frac{3}{2} g'_z \frac{h}{l} \Phi [1 - \gamma] + \frac{a}{Ch} (2E - 3CC_0 a) U^* U^T + \frac{3}{h} \left(\frac{h}{l} - C_0 (1 + a) \right) U^{T2} \\ &\quad - \frac{1}{Ch} (E (1 - a^2) + CC_0 (1 + a^3)) U^{*2} \end{aligned} \quad (5.54d)$$

$$\dot{i} = U^*, \quad \dot{X} = U^T \quad (5.54e)$$

avec le coefficient E :

$$E = \frac{C_1}{C_2 + \text{Ri}}$$

et $C = \pi/2$, un facteur de forme géométrique.

Bibliographie

Cette bibliographie regroupe les références traitant de la modélisation mécanique des écoulements gravitaires. En particulier, les thèmes suivants sont abordés :

- Écoulements turbulents ;
- Théorie de la couche limite ;
- Équations d'ondes longues ;
- Entraînement du fluide ambiant ;
- Dispersion des particules ;
- Vitesse de sédimentation ;
- Modèles réduits expérimentaux.

- AKIYAMA, J. et H. STEPHAN [1985]. Turbidity current with erosion and deposition. *Jour. Hydraulic Eng.*, ASCE **vol. 111**, no. 12, pages 1473–1496.
- AKIYAMA, J. et H. STEPHAN [1988]. Turbidity current simulation in a diverging channel. *Water Resour. Res.* **vol. 24**, no. 4, pages 579–587.
- ASSIER-RZADKIEWICZ, S. [1997]. *Etude numérique et expérimentale d'un glissement de sédiments le long d'une pente sous-marine et des vagues générées*. Thèse de doctorat, Univ. de Montpellier II. 326 p.
- BEGHIN, P. [1979]. *Etude des bouffées bidimensionnelles de densité en écoulement sur pente avec application aux avalanches de neige poudreuse*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble. 120 p.
- BENJAMIN, T. B. [1968]. Gravity currents and related phenomena. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 31**, pages 209–248.
- BONNECAZE, R. T., H. E. HUPPERT et J. R. LISTER [1993]. Particle-driven gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 250**, pages 339–369.
- BRITTER, R. E. et P. F. LINDEN [1980]. The motion of the front of a gravity current travelling down an incline. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 99**, pages 531–543.
- BRITTER, R. E. et J. E. SIMPSON [1978]. Experiments on the dynamics of a gravity current head. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 88**, pages 223–240.
- BURNAGE, H. et S. MOON [1990]. Prédétermination de la dispersion de particules matérielles dans un écoulement turbulent. *C. R. Acad. Sci. Paris, série II* **vol. 310**, pages 1595–1600.
- CAO, S. et I. LERCHE [1994]. A quantitative model of dynamical sediment deposition and erosion in three dimensions. *Computers and Geosciences* **vol. 20**, no. 4, pages 635–663.
- CLIFT, R., J. R. GRACE et M. E. WEBER [1978]. *Bubble, Drops, and Particles*. Academic Press, New York.
- COLEMAN, N. L. [1981]. Velocity profiles with suspended sediments. *J. Hydraul. Res.* **vol. 19**, no. 3, pages 211–229.
- CSANADY, G. T. [1963]. Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere. *J. Atm. Sc.* **vol. 20**, pages 201–208.
- DADE, W. B., J. R. LISTER et H. E. HUPPERT [1994]. Fine-sediment deposition from gravity surges on uniform slopes. *J. Sed. Res.* **vol. A64**, no. 3, pages 423–432.

- DARROZES, J. S. et C. FRANÇOIS [1982]. Mécanique des fluides incompressibles. Dans : *Lecture notes in physics* (Edité par H. ARAKI, J. EHLERS, K. HEPP, R. KIPPENHAHN, H. A. WEIDENMÜLLER et J. ZITTARTZ), vol. 163, page 461 p. Springer-Verlag.
- DEUTSCH, E. et O. SIMONIN [1991]. Large eddy simulation applied to the motion of particles in stationary homogeneous fluid turbulence. Dans : *4th International Symposium on Gas-Fluid Flows, Portland*, page 12.
- DIDDEN, N. et T. MAXWORTHY [1982]. The viscous spreading of plane and axisymmetric gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* vol. 121, pages 27–42.
- DIETRICH, E. W. [1982]. The settling velocity of natural particles. *Water Resour. Res.* vol. 18, pages 1615–1626.
- ECKERT, E. R. G. et R. M. DRAKE [1959]. *Heat and mass transfer*. Series in mechanical engineering. Mc Graw-Hill. 530 p.
- EINSTEIN, A. [1956]. *Investigations on the Theory of Brownian Movement*. Dover, New York.
- ELLISSON, T. H. et J. S. TURNER [1959]. Turbulent entrainment in stratified flows. *Jour. Fluid Mech.* vol. 6, pages 423–448.
- FELIX, M. [1998]. Numerical model of turbidity current of non-cohesive material. Dans : *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 25. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- FREDSØE, J. et R. DEIGAARD [1992]. *Mechanics of coastal sediment transport*, vol. 6 de *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific.
- FUKUSHIMA, Y., G. PARKER et H. M. PANTIN [1985]. Prediction of ignitive turbidity currents in Scripps Submarine Canyon. *Mar. Geol.* vol. 67, pages 55–81.
- FURNES, G. [1999]. Turbidites modeling – the Norsk Hydro experience. Présentation interne IFP.
- GARCIA, M. et G. PARKER [1991]. Entrainment of bed sediment into suspension. *Jour. Hydraulic Eng.*, ASCE vol. 117, no. 4, pages 414–435.
- GATIGNOL, R. [1996]. *Thermomécanique des Milieux Continus*. (cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- HOPFINGER, E. J. [1983]. Snow avalanche motion and related phenomena. *Annu. Rev. Fluid Mech.* vol. 15, pages 47–76.
- HOPFINGER, E. J. et J. C. TOCHON-DANGUY [1977]. A model of powder-snow avalanches. *J. Glaciol.* vol. 19, pages 343–356.
- HOYAL, D. C. J. D., J. V. DEPINTO, J. F. ATKINSON et S. W. TAYLOR [1995]. The effect of turbulence on sediment deposition. *J. Hydraul. Res.* vol. 33, pages 349–360.
- HUGOT, A. [1997]. *Modélisation des processus de sédimentation gravitaire — Rhéologie des débris-flows*. Referenced report : 43 716, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison. 85 p.
- HUGOT, A., S. ZALESKI et P. JOSEPH [1999a]. Dilute gravity flows : a phenomenological model in thin layer theory. *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIB* vol. 327, pages 457–462.
- HUGOT, A., S. ZALESKI et P. JOSEPH [1999b]. Simulation of gravity flows using a dynamic object approach. Dans : *Proceedings of the 5th annual conference of the International Association for Mathematical Geology* (Edité par S. J. LIPPARD, A. NÆSS et R. SINDING-LARSEN), vol. 2, pages 527–532.
- HUPPERT, H. E. [1982]. The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *Jour. Fluid Mech.* vol. 121, pages 43–58.
- HUPPERT, H. E. [1998]. Quantitative modelling of granular suspension flows. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* vol. 356, pages 2471–2496.
- HUPPERT, H. E. et J. E. SIMPSON [1980]. The slumping of gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* vol. 99, no. 4, pages 785–799.
- KRIEGER, I. M. et T. J. DOUGHTERY [1959]. A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Trans. Soc. Rheology* vol. 3, pages 137–152.
- LAGRÉE, P.-Y. [1999]. *Avalanche sous marine : « turbidité »*. TD à l'ENSTA. Université Pierre et Marie Curie, Paris.

-
- LANDAU, L. et E. LIFCHITZ [1971]. *Mécanique des fluides*, vol. VI de *Physique théorique*. MIR, Moscou. 669 p.
- LAVAL, A. [1988]. *Modélisation d'écoulements de type bouffée de densité; Application à l'interprétation des dépôts turbiditiques*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France. 262 p.
- LAVAL, A., M. CREMER, P. BEGHIN et C. RAVENNE [1988]. Density surges: Two-dimensional experiments. *Sedimentology* **vol. 35**, pages 73–84.
- LEE, D. I. [1969]. The viscosity of concentrated suspension. *Trans. Soc. Rheology* **vol. 13**, pages 273–288.
- LHULLIER, D. [1995]. The macroscopic modelling of multi-phase mixtures. (complément aux cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- LHULLIER, D., S. SAINTLOS, J.-J. KARL et H. BURNAGE [1996a]. The effect of inertia and gravity on turbulent dispersion of heavy particles. Dans: *8th workshop on two-phase flow prediction*.
- LHULLIER, D., S. SAINTLOS, J.-J. KARL et H. BURNAGE [1996b]. Numerical modelling of the turbulent dispersion of heavy particles: inertia and gravity effects on turbulent diffusivity. Dans: *3rd International symposium on engineering turbulence modelling and measurements*.
- LUMLEY, J. L. [1978]. Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.* **vol. 18**, pages 123–176.
- MIDDLETON, G. V. et M. A. HAMPTON [1976]. Subaqueous sediment transport and deposition by sediment gravity flows. Dans: *Marine Sediment Transport and Environmental Management* (Edité par D. J. STANLEY et J. P. SWIFT), pages 197–218. John Wiley, New York.
- MIRZA, S. et J. F. RICHARDSON [1979]. Sedimentation of suspensions of particles of two or more sizes. *Chem. Engng Sci.* **vol. 34**, pages 447–454.
- MOONEY, M. [1951]. The viscosity of a concentrated suspension of spherical particles. *J. of colloid Sci.* **vol. 6**, pages 162–170.
- MORTON, B. R. [1959]. Forced plumes. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 5**, pages 151–163.
- NAAIM, M. [1995]. Modélisation numérique des avalanches aérosols. *La Houille Blanche* **vol. 6**, no. 5, pages 56–62.
- ODAR, F. et W. S. HAMILTON [1964]. Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 18**, pages 302–314.
- OLSEN, N. R. B. [1997]. Computational fluid dynamics in hydraulic and sedimentation engineering (class notes). <http://www.ntnu.no>, Division of hydraulic and environmental engineering, The Norwegian University of Science and Technology (NTNU).
- PANTIN, H. M. [1979]. Interaction between velocity and effective density in turbidity flow: phase plan analysis, with criteria for auto suspension. *Mar. Geol.* **vol. 31**, pages 59–99.
- PARKER, G. [1978]. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part I. the sand-silt river. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 89**, pages 109–125.
- PARKER, G. [1982]. Conditions for the ignition of catastrophically erosive turbidity currents. *Mar. Geol.* **vol. 46**, pages 307–327.
- PARKER, G., Y. FUKUSHIMA et H. M. PANTIN [1986]. Self-accelerating turbidity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 171**, pages 145–181.
- PARKER, G., M. GARCIA, Y. FUKUSHIMA et W. YU [1987]. Experiments on turbidity currents over an erodible bed. *J. Hydraul. Res.* **vol. 25**, no. 1, pages 123–147.
- PATWARDHAN, V. S. et C. TEIN [1985]. Sedimentation and liquid fluidization of solid particles of different sizes and densities. *Chem. Engng Sci.* **vol. 40**, no. 7, pages 1051–1060.
- PRANDTL, L. [1925]. Über die ausgebildete turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.* **vol. 5**, pages 136–139.
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1983]. Apport des expériences en canal à l'interprétation sédimentologique des dépôts de cônes détritiques sous-marins. *Revue de l'Institut Français du Pétrole* **vol. 42**, no. 5, pages 529–553.
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1984]. *Modélisation tridimensionnelle des écoulements turbides. Rapport sous référence: 32 665*, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison.

- REYNOLDS, O. [1894]. On the dynamical theory of incompressible and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 186**, pages 123–164.
- RICHARDSON, J. F. et R. A. MEIKLE [1961]. Sedimentation and fluidisation part III. the sedimentation of uniform fine particles and two-component mixtures of solids. *Trans. Instn Chem. Engrs* **vol. 39**, pages 348–356.
- RICHARDSON, J. F. et W. N. ZAKI [1954]. Sedimentation and fluidisation part I. *Trans. Instn Chem. Engrs* **vol. 32**, pages 35–53.
- ROTTMAN, J. W. et J. E. SIMPSON [1983]. The initial development of gravity currents from fixed volume releases of heavy fluids. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 135**, pages 95–110.
- ROUSE, H. [1938]. Modern conceptions of the mechanics of fluid turbulence. *Trans. ASCE* **vol. 102**, pages 463–543.
- SCHLICHTING, H. [1979]. *Boundary-layer theory*. Series in mechanical engineering. Mc Graw-Hill, seventh (english) édition. 817 p.
- SCHWARZ, W. H. et W. P. COSART [1961]. The two-dimensional wall jet. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 10**, pages 481–495.
- SHIELDS, A. [1936]. *Anwendung der Ähnlichkeitmechanik und der Turbulenz Forchung auf die Geschiebe Bewegung*, Mitt. des Preuss. Versuchsanst. für Wasserbau und Schiffbau. Heft 26, Berlin.
- SIMONIN, O. [1991]. Prediction of the dispersed phase turbulence in particle-laden jets. Dans : *4th International Symposium on Gaz-Solid Flows, Portland*, page 16.
- SIMONIN, O., P. L. VIOLETT et N. MÉCHITOUA [1990]. The modelling of turbulent recirculating high temperature flows loaded with particles. Dans : *Int. Workshop on Plasma Jet in the Development of New Materials Technology, Frunze USSR*, page 14.
- SIMPSON, J. E. et R. E. BRITTER [1978]. The dynamics of the head of gravity current advancing over a horizontal surface. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 94**, pages 477–495.
- SKOGSETH, R. [1999]. Turbiditetsstraumar langs eit skrått plan. Universitetet i Bergen & Norsk Hydro. 101 p.
- SMITH, J. D. et S. R. MCLEAN [1977]. Spatially averaged flow over a wavy surface. *Jour. Geophys. Res. B.* **vol. 82**, no. 12, pages 1735–1746.
- SPEZIALE, C. G. [1996]. Modeling of turbulent transport equations. Dans : *Simulation and modeling of turbulent flows* (Edité par T. B. GATSKI, M. Y. HUSSAINI et J. L. LUMLEY), Series in computational science and engineering, pages 185–243. Oxford University press.
- TENNEKES, H. et J. L. LUMLEY [1972]. *A First Course in Turbulence*. MIT Press. 300 p.
- TURNER, J. S. [1973]. *Buoyancy effects of fluids*. Cambridge University Press. 367 p.
- TURNER, J. S. [1986]. Turbulent entrainment : the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 173**, pages 431–471.
- VAN RIJN, L. C. [1984]. Sediment transport ; part II : Suspended load transport. *Jour. Hydraulic Eng., ASCE* **vol. 110**, no. 11, pages 1613–1641.
- WANG, L.-P. et M. R. MAXEY [1993]. Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 256**, pages 27–68.
- ZENG, J. et D. R. LOWE [1992]. A numerical model for sedimentation from highly-concentrated multi-sized suspensions. *Math. Geol.* **vol. 24**, no. 4, pages 393–415.
- ZENG, J. et D. R. LOWE [1997]. Numerical simulation of turbidity current flow and sedimentation : I. theory. *Sedimentology* **vol. 44**, pages 67–84.
- ZHIMING, L. [1995]. *A three-Dimensional computer simulation program for turbidity flows*. Mémoire de DEA, Stanford Univ. 110 p.

Troisième partie

Sur le comportement qualitatif du modèle

Le modèle établi dans la partie précédente est constitué d'un système d'équations différentielles et d'un ensemble de relations algébriques. Les variables du système sont des fonctions du temps. Dans le cas général d'un écoulement réel, les solutions exactes de ce système ne sont pas accessibles analytiquement.

Il est cependant possible, pour ce type de système, de trouver analytiquement des solutions exactes ou du moins des solutions asymptotiques du temps ($t \rightarrow \infty$), qui permettent en sus de tester la consistance du modèle numérique (présenté à l'annexe I) sur les temps longs. Ce point fera l'objet du chapitre 6. Ces solutions ne renseignent cependant pas sur les phases transitoires de l'évolution de l'écoulement.

L'accès à l'expérimentation numérique permet de tester la réponse du modèle théorique par rapport aux différents paramètres, dont notamment les conditions initiales. Le chapitre 7 montre le bon comportement quantitatif et permet de déterminer les paramètres les plus influents du modèle.

*La matière est indifférente au repos ou au mouvement,
autrement dit elle n'est originalement portée ni vers l'un ni vers l'autre.*
Schopenhauer.

Chapitre 6

Propriétés du système dynamique et exemples de solutions analytiques

Nous présentons dans ce chapitre une étude analytique des modèles **P** et **T** représentés par des systèmes d'équations différentielles non-linéaires. Pour cette étude, nous ferons appel le plus souvent à des techniques classiques d'analyse locale, qui permettent :

- d'obtenir une image qualitative globale des solutions du système non-linéaire, par l'analyse des points critiques.
- de trouver la forme de solutions asymptotiques du temps ($t \rightarrow \infty$), par des arguments de « balance dominante ».

L'étude est accomplie sur différents types d'écoulements et montre l'évolution des solutions lorsque l'on prend en compte de nouveaux phénomènes.

Sommaire

6.1	Préliminaires	136
6.2	Exemple du glissement de terrain indéformable	137
6.2.1	Points critiques	137
6.2.2	Linéarisation	137
6.2.3	Solutions asymptotiques sur pentes variables	138
6.2.4	Solution exacte	138
6.3	Exemple d'un écoulement de densité non-miscible	138
6.3.1	Points critiques	139
6.3.2	Linéarisation au voisinage du point critique	140
6.3.3	Solutions asymptotiques sur pentes variables	140
6.4	Écoulements de densité miscible	141
6.4.1	Points critiques	142
6.4.2	Solutions asymptotiques sur pentes variables	142
6.5	Suspensions (système complet)	144
6.5.1	Points critiques	144
6.5.2	Étude du système linéarisé	145
6.5.3	Solutions asymptotiques sur pentes variables	149
6.6	Conclusions	151

6.1 Préliminaires

On rappelle le modèle **T** :

hauteur :

$$\dot{h} = -\frac{h}{l}U^* + \frac{E}{C}(U^*(1-a^2) - 2aU^T) \quad (6.1a)$$

fraction volumique :

$$\dot{\Phi} = \frac{\Phi}{Ch} [(U^*(1-a^2) - 2aU^T)(C_0C_4 - E) - 2C_3v_s] \quad (6.1b)$$

vitesse moyenne :

$$\dot{U}^T = g'_x \Phi [1 - \gamma] - \frac{1}{Ch}(1-a^2)(2C_0 + E)U^*U^T + \frac{2a}{Ch}(C_0 + E)U^{T2} + \frac{2}{3} \frac{C_0}{Ch} a^3 U^{*2} \quad (6.1c)$$

vitesse d'étalement :

$$\begin{aligned} \dot{U}^* = \frac{3}{2} g'_z \frac{h}{l} \Phi [1 - \gamma] + \frac{a}{Ch} (2E - 3CC_0a) U^*U^T + \frac{3}{h} \left(\frac{h}{l} - C_0(1+a) \right) U^{T2} \\ - \frac{1}{Ch} (E(1-a^2) + CC_0(1+a^3)) U^{*2} \end{aligned} \quad (6.1d)$$

$$\dot{l} = U^*, \quad \dot{X} = U^T \quad (6.1e)$$

Le coefficient d'entraînement E est donné par :

$$E = \frac{C_1}{C_2 + \text{Ri}}$$

, les paramètres C_0, C_3 et C_4 sont respectivement les coefficients de friction, de fraction volumique basale, de Schmidt turbulent. Le paramètre a est défini par :

$$a = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq \frac{U^T}{U^*} \\ 1 & \text{si } 1 \leq -\frac{U^T}{U^*} \\ -\frac{U^T}{U^*} & \text{sinon} \end{cases}$$

La constante $C = \pi/2$ est un facteur de forme géométrique.

Le système modélisant l'écoulement peut donc être mis sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.2)$$

où \mathbf{x} est un vecteur formé des inconnues h, Φ, U^T, U^*, l et X :

$$\mathbf{x} = (h, \Phi, U^T, U^*, l, X)^t$$

C'est un système dit autonome: La variable de dérivation n'apparaît pas explicitement dans le second membre de l'équation. Le système est donc invariant par translation $t \rightarrow t + a$. L'espace formé des variables h, Φ, U^T, U^*, l et X est appelé espace des phases. La fonction f présente des singularités pour $h_0 = l_0 = 0$.

Nous avons utilisé deux méthodes d'analyse locale [Bender et Orszag, 1978] :

1. l'analyse des points critiques ;
2. la recherche de solutions asymptotiques.

Les principaux éléments de ces méthodes sont reportés en annexe K page 325.

6.2 Exemple du glissement de terrain indéformable

Le premier cas physique que nous nous proposons de traiter peut s'apparenter à un glissement de terrain indéformable, sans transfert de masse, soumis à une force de friction quadratique. Le solide n'incorporant pas d'eau :

$$E = 0 \quad (C_1 = 0)$$

Étant indéformable et n'échangeant pas de particules avec le support ($C_3 = C_4 = 0$) :

$$h \equiv h_0, \quad l \equiv l_0, \quad \Phi \equiv \Phi_0$$

La vitesse d'étalement est par définition identiquement nulle :

$$U^* \equiv 0$$

et d'après l'équation (H.15), pour $U^T \geq 0$ on a $a \equiv -1$. Le système (6.1) se réduit à l'unique équation (6.1c) qui peut être mise sous la forme⁴² :

$$\dot{U}^T = G - KU^{T2} \quad (6.3)$$

avec $G = g'_x \Phi [1 - \gamma]$ et $K = 2C_0/C_h$, tous deux positifs.

6.2.1 Points critiques

Sur des pentes non nulles ($G > 0$), il existe un point critique :

$$U_+ = \sqrt{G/K}$$

Ce point critique, U_+ , correspond à la vitesse stationnaire définie par Middleton [1966] (cf. équation (2.4) page 27).

Remarque 6

Sur des pentes décroissantes, $G \rightarrow 0$ et $U_+ = 0$.

6.2.2 Linéarisation

La linéarisation au voisinage du point critique, U_+ , consiste à effectuer la substitution $U^T \rightarrow U_+ + \varepsilon$, où $\varepsilon \rightarrow 0$. L'équation (6.3) linéarisée s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = -2KU_+\varepsilon$$

La solution est de la forme :

$$\varepsilon = Ae^{-2KU_+t}$$

La valeur propre associée à la solution est $\lambda_+ = -2KU_+$, et $\lambda_+ \in \mathbb{R}_-^*$. Le point critique U_+ est un point critique stable pour le système linéarisé (théorème 1 de l'annexe K page 325) et pour le système non-linéaire (théorème 2).

On pose $U^T(t_0) = U_0$. Les conclusions sur le comportement global de la solution sont les suivantes :

- Si $U_0 > U_+$, alors $U^T(t) \rightarrow U_+$ lorsque $t \rightarrow \infty$,
- Si $U_0 = U_+$, alors $U^T(t) = U_+$ pour tout t ,
- Si $0 \leq U_0 < U_+$, alors $U^T(t) \rightarrow U_+$ lorsque $t \rightarrow \infty$,

L'analyse des points critiques a permis de voir la façon dont la condition initiale U_0 affecte le comportement de $U^T(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Pour connaître le vitesse à laquelle $U^T(t)$ tend vers l'infini ou vers U_+ , il faut utiliser d'autres méthodes d'analyse locale.

42. L'étude est la même pour les modèles **P** et **T**.

6.2.3 Solutions asymptotiques sur pentes variables

Pour affiner l'analyse locale, on étudie le comportement des solutions sur des pentes ($\sin \theta$) variant comme X^ϑ , où $\vartheta \leq 0$ (pentes décroissantes ou constantes). On recherche, lorsque $t \rightarrow \infty$, l'exposant α du premier terme de solutions de la forme de séries de Frobenius [Bender et Orszag, 1978, Chap. Three] :

$$\mathbf{x} = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n} \quad (6.4)$$

Comme $\dot{X} = U^T$, on a la relation suivante :

$$\alpha_X - 1 = \alpha_U$$

La pente suit donc la loi :

$$\sin \theta \sim t^{\vartheta(\alpha_U + 1)} \quad (6.5)$$

En reportant cette forme dans l'équation (6.3), on obtient (équilibre de G et K) :

$$U^T \sim t^{\frac{-\vartheta}{\vartheta-2}} \quad (6.6)$$

Sur des pentes décroissantes ($\vartheta < 0$), quelles que soient les conditions initiales, la vitesse de l'écoulement décroît comme une puissance du temps lorsque $t \rightarrow \infty$. Sur des pentes constantes ($\vartheta = 0$), le comportement asymptotique de U^T est indépendant du temps et est constant. Cette constante est U_+ .

6.2.4 Solution exacte

Enfin, il est possible de trouver une solution analytique de l'équation (6.3). Cette équation est du type de Riccati⁴³, dont la solution générale est :

$$W = \frac{-1}{2U_+} + C e^{2KU_+t}$$

La solution générale de l'équation (6.3) est donc :

$$U^T = U_+ + \frac{2U_+}{2CU_+e^{2KU_+t} - 1}$$

La constante C est spécifiée par les conditions initiales $U^T(t_0) = U_0$, et mène à la solution :

$$U^T = U_+ - \frac{2U_+(U_0 - U_+)e^{-2KU_+t}}{(U_0 - U_+)e^{-2KU_+t} - (U_0 + U_+)e^{-2KU_+t_0}}$$

Cette solution est reportée sur la figure 6.1 page suivante, ainsi que le comportement asymptotique (6.6) et des solutions numériques.

6.3 Exemple d'un écoulement de densité non-miscible

Le cas physique que nous proposons de traiter ici peut s'apparenter à un écoulement de densité turbulent non-miscible. Il n'y a donc pas d'incorporation d'eau :

$$E = 0 \quad (C_1 = 0)$$

et pas de transfert de particules :

$$\Phi \equiv \Phi_0 \quad (C_3 = C_4 = 0)$$

43. Équation de la forme: $\dot{X} = AX^2 + BX + C$.

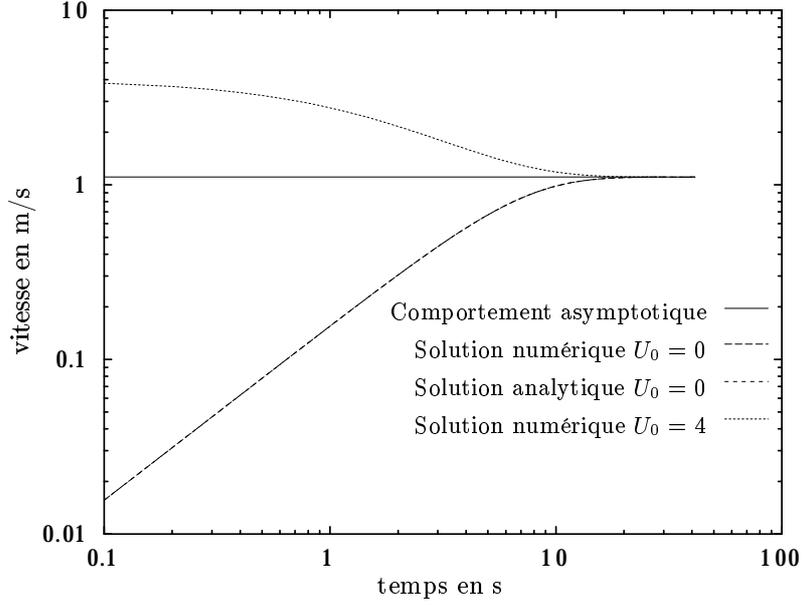


FIG. 6.1 – Solutions numériques, exactes et asymptotiques pour le cas d'un glissement indéformable soumis à une force de friction quadratique sur pente constante ($\vartheta = 0$). Les solutions U^T sont des fonctions du temps t . Les solutions numériques et exactes pour $U_0 = 0$ sont confondues.

Le volume étant constant, la relation suivante s'applique :

$$(hl)' = 0$$

La forme du système est la suivante :

$$\dot{h}l + h\dot{l} = 0 \quad (6.7a)$$

$$\dot{U}^T = g'_x \Phi[1 - \gamma] - 2 \frac{C_0}{Ch} (1 - a^2) U^* U^T + 2 \frac{C_0}{Ch} a U^{T2} + \frac{2}{3} \frac{C_0}{Ch} a^3 U^{*2} \quad (6.7b)$$

$$\dot{U}^* = \frac{3}{2} g'_z \frac{h}{l} \Phi[1 - \gamma] - 3a^2 \frac{C_0}{h} U^* U^T + 3 \frac{1}{h} \left(\frac{h}{l} - C_0 (1 + a) \right) U^{T2} - \frac{C_0}{Ch} (1 + a^3) U^{*2} \quad (6.7c)$$

$$\dot{l} = U^*, \quad \dot{X} = U^T \quad (6.7d)$$

Ce système vérifie les conditions de Cauchy-Lipschitz lorsque $h \neq 0$ et $l \neq 0$.

6.3.1 Points critiques

Le système sous la forme (6.7) n'admet pas de points critiques, puisqu'en effet pour $h \neq 0$ et $l \neq 0$ les seconds membres de (6.7b) et (6.7c) ne sont jamais nuls⁴⁴.

Le système doit être repris sous sa forme originale qui est :

$$\dot{h}l + h\dot{l} = 0$$

$$hl\dot{U}^T = hl g'_x \Phi[1 - \gamma] - 2 \frac{C_0}{C} l (1 - a^2) U^* U^T + 2 \frac{C_0}{C} a l U^{T2} + \frac{2}{3} \frac{C_0}{C} a^3 l U^{*2}$$

$$hl\dot{U}^* = \frac{3}{2} g'_z h^2 \Phi[1 - \gamma] - 3a^2 l C_0 U^* U^T + 3 (h - C_0 l (1 + a)) U^{T2} - \frac{C_0}{C} l (1 + a^3) U^{*2}$$

$$\dot{l} = U^*, \quad \dot{X} = U$$

44. Il existe des points critiques sans les équations (6.7d), c'est-à-dire pour $U^* \neq 0$ et $U^T \neq 0$. Ces points ne rendent stationnaires ni la position, ni la longueur. Ce sont des points à vitesses constantes.

Les points critiques sont tels que $U^* = 0$ et $U^T = 0$ (équation (6.7d) page précédente). Le système vérifié par les points critiques se simplifie en :

$$\begin{aligned} 0 &= G'_x h l \\ 0 &= \frac{3}{2} G'_z h^2 \end{aligned}$$

où $G'_x = g'_x \Phi[1 - \gamma]$ et $G'_z = g'_z \Phi[1 - \gamma]$. Le point critique est : ($l = l_\infty, h = 0, U^T = 0, U^* = 0$), où la notation \cdot_∞ correspond à une valeur quelconque de la variable lorsque $t \rightarrow \infty$.

6.3.2 Linéarisation au voisinage du point critique

On effectue la substitution :

$$\begin{aligned} l &\rightarrow l_\infty + \varepsilon_l \\ h &\rightarrow \varepsilon_h \\ U^T &\rightarrow \varepsilon_U \\ U^* &\rightarrow \varepsilon_{U^*} \end{aligned}$$

Nous choisissons le paramètre $a = -1$, en supposant que $\frac{\varepsilon_U}{\varepsilon_{U^*}} \rightarrow c$, $c \geq 1$, c'est-à-dire que les vitesses tendent vers zéro à la même « vitesse » ou du moins de façon telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} U^T \geq \lim_{t \rightarrow \infty} U^*$.

Pour $l_\infty \neq 0$, le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_h (l_\infty + \varepsilon_l) + \dot{\varepsilon}_l \varepsilon_h &= 0 \\ \varepsilon_h \dot{\varepsilon}_U &= G'_x \varepsilon_h - 2 \frac{C_0}{C} \varepsilon_U^2 - \frac{2}{3} \frac{C_0}{C} \varepsilon_{U^*}^2 \\ \varepsilon_h (l_\infty + \varepsilon_l) \dot{\varepsilon}_{U^*} &= \frac{3}{2} \varepsilon_h^2 G'_z - 3 (l_\infty + \varepsilon_l) C_0 \varepsilon_U \varepsilon_{U^*} + 3 \varepsilon_h \varepsilon_U^2 \\ \dot{\varepsilon}_l &= \varepsilon_{U^*}, \quad \dot{\varepsilon}_X = \varepsilon_U \end{aligned}$$

Au voisinage du point critique, en négligeant les termes d'ordre supérieur, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_h &= 0 \\ \varepsilon_h \dot{\varepsilon}_U &= G'_x \varepsilon_h - 2 \frac{C_0}{C} \varepsilon_U^2 - \frac{2}{3} \frac{C_0}{C} \varepsilon_{U^*}^2 \\ \varepsilon_h l_\infty \dot{\varepsilon}_{U^*} &= \frac{3}{2} \varepsilon_h^2 G'_z - 3 l_\infty C_0 \varepsilon_U \varepsilon_{U^*} \\ \dot{\varepsilon}_l &= \varepsilon_{U^*}, \quad \dot{\varepsilon}_X = \varepsilon_U \end{aligned}$$

Ce système n'est pas linéarisable. Il faut donc avoir recours à une autre méthode pour connaître le comportement du système au voisinage du point critique.

6.3.3 Solutions asymptotiques sur pentes variables

Nous cherchons ici encore des solutions de la forme de série (équation (6.4)) sur des pentes variant comme X^ϑ ($\vartheta \leq 0$). La pente suit la loi du temps (6.5).

Lorsque $t \rightarrow \infty$, le point critique peut être approché de deux façons :

1. soit tel que $U^T \geq U^*$ et $a = -1$;
2. soit tel que $U^T < U^*$ et $a = -\frac{U^T}{U^*}$.

Nous traiterons ici le cas où $a = -1$. L'équation (6.7a) (conservation du volume) implique la relation suivante entre les exposants de h et de l :

$$\alpha_h = -\alpha_l$$

L'équation (6.7d) conduit à :

$$\alpha_{U^*} = \alpha_l - 1 = -\alpha_h - 1$$

Il existe différents régimes d'écoulement, qui correspondent à l'importance relative des différents termes des équations (6.7b) et (6.7c). On note :

$$\underbrace{\dot{U}^T}_{\text{inertie (i)}} = \underbrace{g'_x \Phi[1 - \gamma]}_{\text{gravité (ii)}} - 2 \underbrace{\frac{C_0}{Ch} U^{T2}}_{\text{friction (iii)}} - \underbrace{\frac{2}{3} \frac{C_0}{Ch} U^{*2}}_{\text{friction (iv)}} \quad (6.12a)$$

$$\underbrace{\dot{U}^*}_{\text{inertie (i)}} = \underbrace{\frac{3}{2} g'_z \frac{h}{l} \Phi[1 - \gamma]}_{\text{gravité (ii)}} - 3 \underbrace{\frac{C_0}{h} U^* U^T}_{\text{friction (iii)}} + \underbrace{3 \frac{1}{l} U^{T2}}_{\text{friction (iv)}} \quad (6.12b)$$

Il s'agit d'étudier tous les cas d'équilibre entre les différents termes. Seuls les cas résumés dans le tableau 6.1 vérifient les arguments de balance dominante, sous l'hypothèse $U^T \geq U^*$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Balance Dominante	Pente (ϑ)	α_U	α_X	α_h	α_l	α_{U^*}
(6.12a)–(ii)–(iii) et (6.12b)–(ii)–(iii)–(iv)	$\vartheta = 0$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$
(6.12a)–(ii)–(iii) et (6.12b)–(ii)–(iii)	$-\frac{1}{2} \leq \vartheta$	$\frac{1-4\vartheta}{-7+4\vartheta}$	$\frac{-6}{-7+4\vartheta}$	$\frac{2-2\vartheta}{-7+4\vartheta}$	$\frac{-2+2\vartheta}{-7+4\vartheta}$	$\frac{5-2\vartheta}{-7+4\vartheta}$
(6.12a)–(ii)–(iii) et (6.12b)–(i)–(iii)	$-1 \leq \vartheta \leq -\frac{1}{2}$	$\frac{-\vartheta}{\vartheta-1}$	$\frac{-1}{\vartheta-1}$	$\frac{-\vartheta}{\vartheta-1}$	$\frac{\vartheta}{\vartheta-1}$	$\frac{1}{\vartheta-1}$
(6.12a)–(ii)–(iii) et (6.12b)–(i)–(ii)	$-3 \leq \vartheta \leq -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \frac{3\vartheta-1}{2-\vartheta}$	$\frac{1}{3} \frac{5}{2-\vartheta}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
(6.12a)–(iii)–(iv) et (6.12b)–(i)–(iii)	$\vartheta \leq -1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
(6.12a)–(iii)–(iv) et (6.12b)–(i)–(ii)	$\vartheta \leq -3$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

TAB. 6.1 – Facteur de contrôle, fonction de la pente ϑ , pour le cas d'un écoulement de densité non-miscible.

Cette étude succincte montre donc l'importance de la pente sur le comportement qualitatif de l'écoulement. Suivant le profil de cette dernière, les comportements asymptotiques sont ou non fonction de ϑ . On peut distinguer trois configurations d'écoulement :

1. Pour des pentes constantes ($\vartheta = 0$) et pour des pentes faiblement décroissantes ($\vartheta \leq \frac{1}{2}$), le mouvement est dominé par un équilibre gravité–friction ;
2. Pour des pentes dont la décroissance est modérée, le mouvement moyen est dominé par un équilibre gravité–friction, et le mouvement d'étalement soit par un équilibre inertie–friction, soit par un équilibre inertie–gravité ;
3. Pour des pentes dont la décroissance est forte, le mouvement moyen est dominé par un équilibre friction–friction, et le mouvement d'étalement soit par un équilibre inertie–friction, soit par un équilibre inertie–gravité.

Le comportement asymptotique sur pente constante ($\vartheta = 0$ et $\theta = 3^\circ$), ainsi que les solutions numériques associées, sont reportés sur la figure 6.2 page suivante⁴⁵.

6.4 Écoulements de densité miscible

Ce cas correspond physiquement à une bouffée de densité ou une suspension pour laquelle il n'y a pas de sédimentation⁴⁶. Les écoulements sont tels que :

$$E \neq 0 \quad (C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0)$$

45. Les conditions initiales sont les suivantes : $h_0 = 0.2$, $V_0 = 0.1$, $U_0^T = U_0^* = 0.01$, $\phi_0 = 0.03$, $C_0 = 0.01$, $\theta = 5^\circ$.

46. Par exemple sur des pentes trop importantes pour que les sédiments restent en place.

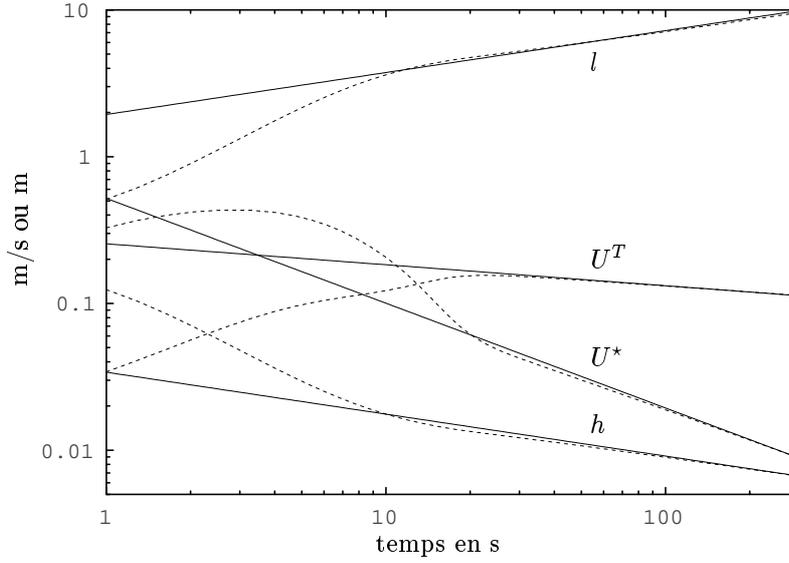


FIG. 6.2 – Solutions numériques et asymptotiques pour le cas d'un écoulement de densité non-miscible sur pente constante ($\vartheta = 0$). Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillés sont les solutions numériques et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cf. tableau 6.1 page précédente pour $\vartheta = 0$).

Il n'y a pas de transfert de particules avec le sol :

$$C_3 = C_4 = 0$$

La fraction volumique, Φ , n'est cependant pas constante, mais vérifie l'équation :

$$(\phi h l)' = 0$$

6.4.1 Points critiques

Le seul point critique est $(U^*, U^T, l, h, \phi) = (0, 0, l_\infty, h_\infty, 0)$. Le système n'est pas linéarisable au voisinage de ce point.

6.4.2 Solutions asymptotiques sur pentes variables

Les termes du premier ordre des solutions du système \mathbf{P} , sous la forme de séries (6.4) et sur des pentes variant comme X^ϑ ($\vartheta \leq 0$) sont reportés dans le tableau 6.2.

α_U	α_X	α_h	α_l	α_{U^*}	α_Φ
$\frac{-3+4\vartheta}{9-4\vartheta}$	$\frac{6-2\vartheta}{9-4\vartheta}$	$\frac{6}{9-4\vartheta}$	$\frac{6-2\vartheta}{9-4\vartheta}$	$\frac{-3+2\vartheta}{9-4\vartheta}$	$2\frac{-6+\vartheta}{9-4\vartheta}$

TAB. 6.2 – Facteur de contrôle, fonction de la pente ϑ , pour le cas d'un écoulement de densité miscible (d'après [Hugot et al., 1998, 1999]).

Sur des pentes décroissantes ou constantes, l'écoulement est en expansion volumique et décélère en se diluant. Ces comportements asymptotiques sont retrouvés dans le cas du modèle \mathbf{T} .

Le comportement asymptotique sur pente constante ($\vartheta = 0$ et $\theta = 3^\circ$), ainsi que les solutions numériques associées au modèle \mathbf{T} (cas $a = -1$), sont reportées sur les figures 6.3, 6.4 et 6.5 page 144⁴⁷.

⁴⁷. Les conditions initiales sont les suivantes : $h_0 = 0.1$, $V_0 = 0.1$, $U_0^T = 0.1$, $U_0^* = 0.2$, $\phi_0 = 0.2$, $C_0 = 0.005$, $C_1 = 0.001$, $C_2 = 0.02$, $\theta = 5^\circ$.

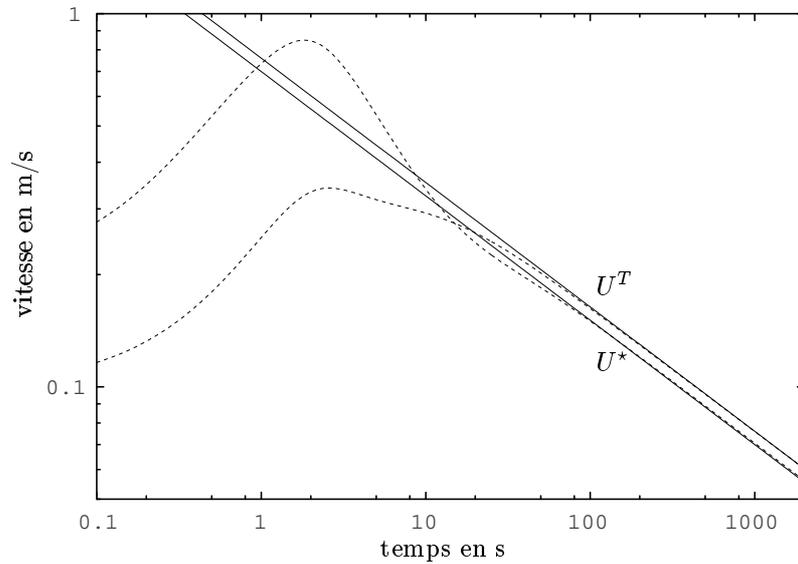


FIG. 6.3 – Solutions numériques et asymptotiques pour les vitesses dans le cas d'un écoulement de densité miscible sur pente constante ($\vartheta = 0$). Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillées sont les solutions numériques du modèle \mathbf{T} (cas $a = -1$) et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cf. tableau 6.2 page précédente pour $\vartheta = 0$).

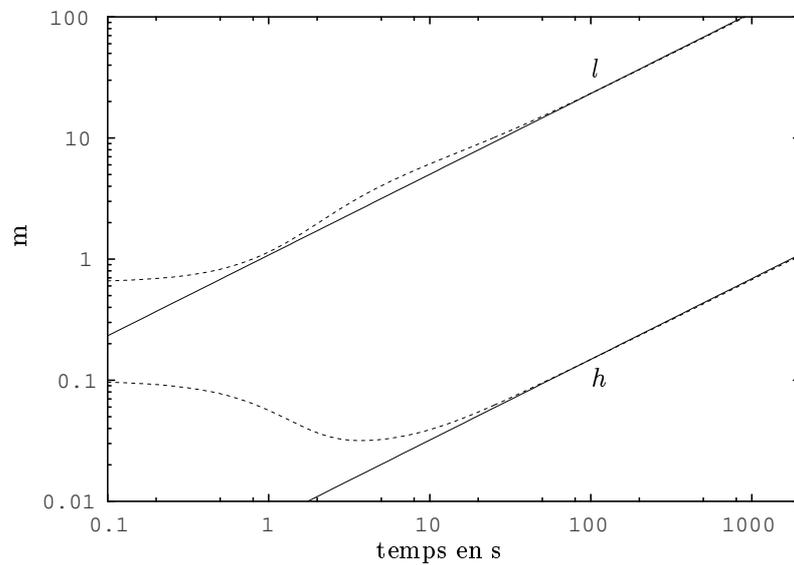


FIG. 6.4 – Solutions numériques et asymptotiques pour la hauteur et la longueur dans le cas d'un écoulement de densité miscible sur pente constante ($\vartheta = 0$). Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillées sont les solutions numériques du modèle \mathbf{T} (cas $a = -1$) et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cf. tableau 6.2 page ci-contre pour $\vartheta = 0$).

La figure 6.4 page précédente montre le comportement de h et l . On retrouve ici, au début du mouvement, une très courte phase à volume constant (*slumping* d'après Huppert et Simpson [1980]) où l'écoulement n'incorpore pratiquement pas de fluide. Les exposants vérifient $\alpha_h = -\alpha_l$. Cependant très rapidement l'incorporation de fluide devient dominante, et l'écoulement est en expansion volumique.

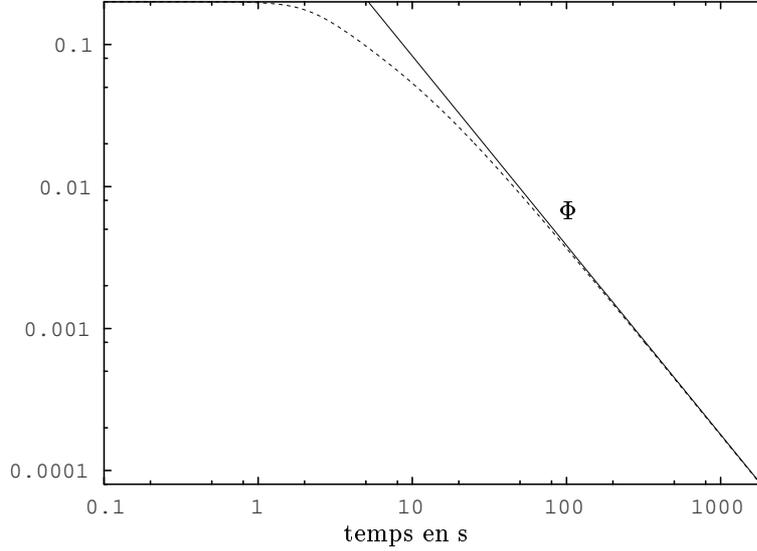


FIG. 6.5 – Solutions numériques et asymptotiques pour la fraction volumique dans le cas d'un écoulement de densité miscible sur pente constante ($\vartheta = 0$). Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillées sont les solutions numériques du modèle \mathbf{T} (cas $a = -1$) et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cf. tableau 6.2 page 142 pour $\vartheta = 0$).

La fraction volumique diminue sous les effets de dilution de l'écoulement avec le fluide ambiant.

6.5 Suspensions (système complet)

Le système sous sa forme complète permet de simuler le comportement d'une suspension turbulente de particules. Les coefficients C_i sont alors tous différents de zéro.

6.5.1 Points critiques

Les points critiques sont recherchés sur le système (6.1). En étudiant cette forme du système, les conditions de Cauchy-Lipschitz imposent $l \neq 0$ et $h \neq 0$ ⁴⁸

Les équations (6.1e) imposent :

$$U^T = 0, \quad U^* = 0$$

En reportant dans les seconds membres de (6.1e), le système vérifié par les points critiques devient :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \frac{\Phi}{C_h} C_3 v_s \\ 0 &= g'_x \Phi [1 - \gamma] \\ 0 &= \frac{3}{2} g'_z \frac{h}{l} \Phi [1 - \gamma] \end{aligned}$$

48. L'étude des cas $l = 0$ et $h = 0$ est peu intéressante, ils correspondent à des écoulements sans hauteur ou sans longueur !

Le système n'admet qu'un seul point critique :

$$- P_1 : (U^* = 0, U^T = 0, h = h_\infty, l = l_\infty, \Phi = 0)$$

Il est cependant intéressant de remarquer qu'il existe une combinaison de vitesses U^T et U^* qui annule le second membre de l'équation de conservation de la fraction volumique (6.1b) :

$$U^* (1 - a^2) - 2aU^T = \frac{2C_3}{C_0C_4 - E} v_s$$

Pour le cas $a = -1$ on a :

$$U^T = \frac{C_3}{C_0C_4 - E} v_s$$

Cette vitesse illustre un écoulement sans perte ni gain de particules, elle est à rapprocher au critère d'« auto-suspension ». Elle ne correspond pas à un point critique du système, et ne peut donc pas se maintenir.

6.5.2 Étude du système linéarisé

On effectue alors la substitution suivante :

$$\begin{aligned} l &\rightarrow l_\infty + \varepsilon_l \\ h &\rightarrow h_\infty + \varepsilon_h \\ U^T &\rightarrow \varepsilon_U \\ U^* &\rightarrow \varepsilon_{U^*} \\ \Phi &\rightarrow \varepsilon_\Phi \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps, comme dans la section 6.3.2 page 140, que $\frac{\varepsilon_U}{\varepsilon_{U^*}} \rightarrow c$, $c \geq 1$. Le paramètre a est alors égal à -1 .

6.5.2.1 Linéarisation au voisinage de P_1

Pour $l_\infty \neq 0$ et $h_\infty \neq 0$, le système devient :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_h &= -\frac{h_\infty + \varepsilon_h}{l_\infty + \varepsilon_l} \varepsilon_{U^*} + 2\frac{E}{C} \varepsilon_U \\ \dot{\varepsilon}_\Phi &= \frac{2}{C} \frac{\varepsilon_\Phi}{h_\infty + \varepsilon_h} [\varepsilon_U (C_0C_4 - E) - C_3v_s] \\ \dot{\varepsilon}_U &= g'_x [1 - \gamma] \varepsilon_\Phi - \frac{2}{C} (C_0 + E) \frac{\varepsilon_U^2}{h_\infty + \varepsilon_h} - \frac{2}{3} \frac{C_0}{C} \frac{\varepsilon_{U^*}^2}{h_\infty + \varepsilon_h} \\ \dot{\varepsilon}_{U^*} &= \frac{3}{2} g'_z [1 - \gamma] \frac{h_\infty + \varepsilon_h}{l_\infty + \varepsilon_l} \varepsilon_\Phi - \frac{1}{C} (2E + 3CC_0) \frac{\varepsilon_U \varepsilon_{U^*}}{h_\infty + \varepsilon_h} + 3 \frac{\varepsilon_U^2}{l_\infty + \varepsilon_l} \\ \dot{\varepsilon}_l &= \varepsilon_{U^*}, \quad \dot{\varepsilon}_X = \varepsilon_U \end{aligned}$$

La linéarisation du système au voisinage de P_1 est :

$$\dot{\varepsilon}_h = -\frac{h_\infty}{l_\infty} \varepsilon_{U^*} + 2\frac{E}{C} \varepsilon_U \quad (6.15a)$$

$$\dot{\varepsilon}_\Phi = -2\frac{C_3}{C} \frac{v_s}{h_\infty} \varepsilon_\Phi \quad (6.15b)$$

$$\dot{\varepsilon}_U = g'_x [1 - \gamma] \varepsilon_\Phi \quad (6.15c)$$

$$\dot{\varepsilon}_{U^*} = \frac{3}{2} g'_z [1 - \gamma] \frac{h_\infty}{l_\infty} \varepsilon_\Phi \quad (6.15d)$$

$$\dot{\varepsilon}_l = \varepsilon_{U^*}, \quad \dot{\varepsilon}_X = \varepsilon_U \quad (6.15e)$$

On note le vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_{U^*}, \varepsilon_U, \varepsilon_h, \varepsilon_l, \varepsilon_\Phi, \varepsilon_X)^T$. Le système précédent se met sous la forme :

$$\dot{\varepsilon} = M\varepsilon \quad (6.16)$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_\infty}{t_\infty} G'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G'_x & 0 \\ -\frac{h_\infty}{t_\infty} & 2\frac{E}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{V_s}{h_\infty} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

et

$$G'_z = \frac{3}{2}g'_z[1 - \gamma], \quad G'_x = g'_x[1 - \gamma] \text{ et } V_s = 2\frac{C_3}{C}v_s \quad (6.18)$$

6.5.2.2 Valeurs propres associées à P_1

Pour étudier le comportement du système linéarisé au voisinage de P_1 , il est nécessaire de déterminer les vecteurs propres de M :

$$\det(M - \lambda I) = -\lambda^5 \left(-\frac{V_s}{h_\infty} - \lambda \right) = 0$$

Les valeurs propres de M sont notées :

- $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, 5$ (ordre 5) ;
- $\lambda_6 = -\frac{V_s}{h_\infty}$ (ordre 1).

La solution de (6.16) est :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^5 P_i(t) + e^{\lambda_6 t} P_6(t)$$

où les $P(t)$ sont des colonnes de polynômes.

On est dans le cas (c) du théorème 1 : $\lambda_6 \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda_i = 0$. Pour conclure sur la stabilité du point critique, il est nécessaire de rechercher les vecteurs propres de M .

6.5.2.3 Vecteurs propres associés à P_1

Recherche des vecteurs propres associés à $\lambda = 0$. On cherche V vérifiant $(M - \lambda I)V = MV = 0$

$$MV = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{U^*} = 0, \quad \varepsilon_U = 0, \quad \varepsilon_\Phi = 0$$

On choisit les trois vecteurs :

$$V_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \quad V_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T, \quad V_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$$

La dimension de l'espace propre associé à $\ker(M - \lambda I)$ est de 3. Cette dimension est inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 0$ qui est elle égale à 5. Le sous-espace propre ne génère donc pas 5 solutions distinctes. Le point critique est instable pour le système linéarisé.

Il faut rechercher $V \in \ker(M - \lambda I)^2$, c'est-à-dire tel que $(M - \lambda I)^2 V = 0$.

$$(M - \lambda I)^2 V = M^2 V = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_\Phi = 0$$

On choisit les vecteurs :

$$V_4 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad V_5 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$$

Recherche du vecteur propre associé à $\lambda = -\frac{V_s}{h_\infty}$. On recherche ici V vérifiant $(M - \lambda_6 I)V = 0$

$$(M - \lambda_6 I)V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_{U^*} &= -G'_z \frac{h_\infty}{l_\infty} \frac{h_\infty}{V_s} \varepsilon_\Phi \\ \varepsilon_U &= -G'_x \frac{h_\infty}{V_s} \varepsilon_\Phi \\ \varepsilon_h &= \left(2 \frac{E}{C} G'_x - \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2} G'_z \right) \frac{h_\infty^2}{V_s^2} \varepsilon_\Phi \\ \varepsilon_l &= G'_z \frac{h_\infty}{l_\infty} \frac{h_\infty^2}{V_s^2} \varepsilon_\Phi \\ \varepsilon_X &= G'_x \frac{h_\infty^2}{V_s^2} \varepsilon_\Phi \end{cases}$$

On choisit pour ε_Φ le rapport adimensionnel $\frac{V_s^2}{g' h_\infty}$, on obtient le vecteur :

$$V_6 = - \left(\frac{G'_z}{g'} \frac{h_\infty}{l_\infty} V_s, -\frac{G'_x}{g'} V_s, \left(2 \frac{E}{C} \frac{G'_x}{g'} - \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2} \frac{G'_z}{g'} \right) h_\infty, \frac{G'_z}{g'} \frac{h_\infty}{l_\infty} h_\infty, \frac{V_s^2}{g' h_\infty}, \frac{G'_x}{g'} h_\infty \right) \quad (6.19)$$

6.5.2.4 Solutions et Conclusions

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres a permis de trouver 6 solutions linéairement indépendantes. Les solutions générales sont générées par les vecteurs⁴⁹ :

$$\begin{aligned} X_1 &= V_1 e^{\lambda_1 t} = V_1 \\ X_2 &= V_2 \\ X_3 &= V_3 \\ X_4 &= (V_4 + (M - \lambda_4 I) t V_4) e^{\lambda_4 t} = V_4 + M t V_4 \\ X_5 &= V_5 + M t V_5 \\ X_6 &= V_6 e^{\lambda_6 t} \end{aligned}$$

Comme on l'a vu à la page précédente, lors de la recherche des vecteurs propres, le point critique est instable pour le système linéarisé puisque la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est inférieure à l'ordre de multiplicité de cette dernière (cf. théorème 1 page 325). Le fait que $\lambda_6 \in \mathbb{R}_-$ indique que le point est stable dans la direction de V_6 . Les trajectoires de phase approchent le point critique dans la direction V_6 , mais l'on ne sait pas ce qui se passe dans les autres directions.

Le signe des composantes du vecteur V_6 (cf. équation (6.19)) permet de préciser que pour le système linéarisé et dans la direction de V_6 , le point critique est approché :

- Par valeurs inférieures pour U^T et U^* ;
- Par valeurs inférieures ou supérieures suivant le signe de $\left(2 \frac{E}{C} \frac{G'_x}{g'} - \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2} \frac{G'_z}{g'} \right)$ pour h ;
- Par valeurs supérieures pour les autres variables.

En considérant l'approximation :

$$\frac{G'_z}{g'} \approx \cos \theta, \quad \text{et} \quad \frac{G'_x}{g'} \approx \sin \theta$$

, le vecteur V_6 se réécrit :

$$V_6 = \left(-\frac{h_\infty}{l_\infty} V_s \cos \theta, -V_s \sin \theta, \left(2 \frac{E}{C} \sin \theta - \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2} \cos \theta \right) h_\infty, \frac{h_\infty}{l_\infty} h_\infty \cos \theta, \frac{V_s^2}{g' h_\infty}, h_\infty \sin \theta \right)$$

L'analyse des deux premières coordonnées du vecteur montre que la vitesse de phase suivant U^T et U^* ne peut être du même ordre de grandeur que si la condition suivante est respectée :

$$\frac{h_\infty}{l_\infty} \sim \tan \theta \quad (6.20)$$

49. La base formée des vecteurs V_i n'est pas orientée, une base orientée serait $(V_4, V_5, V_1, V_2, -V_6, V_3)$.

Cette condition n'est pas sans rappeler l'équation (4.34) obtenue lors de l'analyse dimensionnelle des équations de Navier-Stokes à la section E.2 page 88.

Si cette condition n'est pas remplie lors du mouvement —une diminution de la pente doit être compensée, soit par une diminution de la hauteur, soit par une augmentation de la longueur—, on se trouve soit dans un cas où le mouvement global (gravité) est dominant et la vitesse de phase selon U^T plus élevée, soit dans un cas où le mouvement d'étalement (pression) est dominant et la vitesse de phase selon U^* plus élevée.

La condition (6.20) et cette différence de type de mouvement influent également sur les vitesses de phase associées à la position du centre de gravité X , à la longueur l et à la hauteur h .

Sous la condition (6.20), les vitesses de phase suivant X et l sont du même ordre. Le mouvement à dominante « gravité » donne une vitesse de phase plus élevée suivant X que suivant l . Inversement le mouvement à dominante « pression » a une vitesse de phase plus élevée suivant l que suivant X .

La vitesse de phase suivant h changera, elle, de signe suivant le signe de :

$$2\frac{E}{C}\sin\theta - \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2}\cos\theta \quad (6.21)$$

L'analyse dimensionnelle découlant du concept d'entraînement ((4.54) section 4.4.4 page 92) avait permis de relier E aux dimensions caractéristiques h et L , par $E \sim \frac{h}{L}$. Dans le cas de l'équation (6.20), la vitesse de phase associée à la hauteur est très faible et possiblement nulle⁵⁰. Dans le cas d'un mouvement à dominante « gravitaire », la vitesse de phase est ici positive $\left(2\frac{E}{C}\sin\theta \geq \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2}\cos\theta\right)$, contrairement au cas d'un mouvement dominé par l'étalement où la vitesse de phase change de signe $\left(2\frac{E}{C}\sin\theta \leq \frac{h_\infty^2}{l_\infty^2}\cos\theta\right)$ et est négative.

Il n'est pas possible de conclure sur la nature du point critique pour le système complet non-linéaire, il faut ici encore employer d'autres méthodes d'analyse locale.

Ces résultats auraient pu être trouvés également en intégrant directement le système linéaire (6.15). L'intégration de (6.15b) mène à :

$$\varepsilon_\Phi = Ae^{-\frac{V_s}{h_\infty}t}$$

où A est une constante. En considérant la condition initiale $\Phi_0 = \frac{V_s^2}{g'h_\infty}$ à $t = 0$, on obtient :

$$\varepsilon_\Phi = \frac{V_s^2}{g'h_\infty}e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t}$$

Puisque $\varepsilon_\Phi \geq 0$, les équations (6.15c) et (6.15d) montrent que ε_U et ε_{U^*} sont des fonctions croissantes des temps. On retrouve ici le fait que le point critique est instable. Une perturbation autour du point critique est donc amplifiée dans les direction de U^T et U^* .

On trouve par intégration des autres équations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{U^*} &= U_0^* + \frac{G'_z}{g'}\frac{h_\infty}{l_\infty}V_s \left(1 - e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t}\right) \\ \varepsilon_U &= U_0 + \frac{G'_x}{g'}V_s \left(1 - e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t}\right) \\ \varepsilon_h &= h_0 + 2\frac{E}{C} \left[\left(U_0 + \frac{G'_x}{g'}V_s\right)t + \frac{G'_x}{g'}h_\infty \left(e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t} - 1\right) \right] - \frac{h_\infty}{l_\infty} \left[\left(U_0^* + \frac{G'_z}{g'}\frac{h_\infty}{l_\infty}V_s\right)t \right. \\ &\quad \left. + \frac{G'_z}{g'}\frac{h_\infty}{l_\infty}h_\infty \left(e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t} - 1\right) \right] \\ \varepsilon_l &= l_0 + \left(U_0^* + \frac{G'_z}{g'}\frac{h_\infty}{l_\infty}V_s\right)t + \frac{G'_z}{g'}\frac{h_\infty}{l_\infty}h_\infty \left(e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t} - 1\right) \\ \varepsilon_X &= X_0 + \left(U_0 + \frac{G'_x}{g'}V_s\right)t + \frac{G'_x}{g'}h_\infty \left(e^{-\frac{V_s}{h_\infty}t} - 1\right) \end{aligned}$$

50. Une vitesse de phase, associée à h , nulle, signifie que h demeure constant.

Pour conclure, cette étude de cas inclue également le cas théorique d'une suspension où la diffusivité est nulle ou négligeable ($C_4 = 0$), puisqu'en effet ce paramètre n'intervient que dans des termes non-linéaires.

6.5.3 Solutions asymptotiques sur pentes variables

Les études de Hugot *et al.* [1998, 1999] ont montré le changement radical du comportement de la fraction volumique Φ , lors de la présence d'un terme de sédimentation dans le modèle **P**. En effet, le terme de contrôle des variations de cette variable est une exponentielle.

6.5.3.1 Exemple

Étudions le cas simplifié du modèle **T** lorsque $C_4 = 0$ et $a \ll -1$. Ce cas correspond à un écoulement où l'étalement est dominant et où la diffusivité des sédiments est faible.

$$\underbrace{\dot{h}}_{(i)} = - \underbrace{\frac{h}{l} U^*}_{(ii)} + \underbrace{\frac{E}{C} U^*}_{(iii)} \quad (6.22a)$$

$$\dot{\Phi} = - \frac{\Phi}{Ch} [U^* E + 2C_3 v_s] \quad (6.22b)$$

$$\underbrace{\dot{U}^T}_{(i)} = \underbrace{g'_x \Phi [1 - \gamma]}_{(ii)} - \underbrace{\frac{1}{Ch} (2C_0 + E) U^* U^T}_{(iii)} \quad (6.22c)$$

$$\underbrace{\dot{U}^*}_{(i)} = \underbrace{\frac{3}{2} g'_z \frac{h}{l} \Phi [1 - \gamma]}_{(ii)} + \underbrace{\frac{3}{h} \left(\frac{h}{l} - C_0 \right) U^{T2}}_{(iii)} - \underbrace{\frac{1}{Ch} (E + CC_0) U^{*2}}_{(iv)} \quad (6.22d)$$

$$\dot{l} = U^*, \quad \dot{X} = U^T \quad (6.22e)$$

Les équations (6.22e) impliquent comme dans les autres études :

$$\alpha_{U^*} = \alpha_l - 1, \quad \alpha_U = \alpha_X - 1$$

Les arguments de balance dominante appliqués à l'équation (6.22a) de conservation du volume imposent :

$$\alpha_h = \alpha_l \quad (6.23)$$

Ces mêmes arguments appliqués à (6.22d) montrent que (6.22d)-(i) \sim (6.22d)-(iii) \sim (6.22d)-(iv), soit :

$$\alpha_U = \alpha_h - 1 \quad (6.24)$$

L'équation (6.22c) est, elle, vérifiée pour (6.22c)-(i) \sim (6.22c)-(iii), mais elle n'apporte pas d'indication supplémentaire sur les α_i . Intuitivement, on sent que les forces gravitaires vont devenir plus faibles du fait de la perte de charge de l'écoulement. L'équation (6.22b), reste, elle indéterminée.

Pour connaître la forme des α_i il est nécessaire de raisonner également sur les « amplitudes » des solutions, en considérant des formes de solutions :

$$\mathbf{x} = A_{\mathbf{x}} t^{\alpha_{\mathbf{x}}} \quad (6.25)$$

L'équation (6.22a) permet de déterminer :

$$\frac{A_{U^*}}{A_h} = \frac{C(\alpha_h + \alpha_l)}{E} \quad (6.26)$$

et l'équation (6.22c) :

$$\frac{A_{U^*}}{A_h} = - \frac{C(\alpha_h + \alpha_l + \alpha_U)}{2C_0}$$

La résolution, en considérant les équations (6.24) et (6.23), mène à :

$$\alpha = \alpha_h = \frac{1}{3 + \frac{4C_0}{E}} \quad (6.27)$$

et $0 \leq \alpha \leq 1/3$. Les comportements asymptotiques sont maintenant des fonctions des paramètres du modèle.

La solution pour Φ ne doit plus, elle, être cherchée sous la forme de la série (6.4), mais sous la forme⁵¹ :

$$\Phi \sim e^{s(t)}, \quad \dot{\Phi} \sim s'(t)e^{s(t)} \quad (6.28)$$

où $s(t)$ est une fonction de t . En reportant les formes de solution (6.25) et en utilisant la relation (6.26) entre les amplitudes, l'équation (6.22b) de la fraction volumique s'écrit :

$$\dot{\Phi} + \Phi \left[2\alpha t^{-1} + \frac{2C_3}{C} \frac{v_s}{A_h} t^{-\alpha} \right] = 0$$

En reportant la solution Φ sous la forme de (6.28), on obtient :

$$s'(t) \sim -2\alpha t^{-1} - \frac{2C_3}{C} \frac{v_s}{A_h} t^{-\alpha}$$

soit :

$$s(t) \sim -2\alpha \ln t - \frac{2C_3}{C} \frac{v_s}{A_h} \frac{1}{-\alpha + 1} t^{-\alpha + 1}$$

Le comportement asymptotique de Φ est donc :

$$\Phi \sim t^{-2\alpha} e^{-\frac{2C_3}{C} \frac{v_s}{A_h} \frac{1}{-\alpha + 1} t^{-\alpha + 1}} \quad (6.29)$$

Les résultats sont synthétisés dans le tableau 6.3 pour des solutions de la forme $Y = e^{s_Y(t)}$.

s_U	s_X	s_h	s_l	s_{U^*}	s_Φ
$(\alpha - 1) \ln t$	$\alpha \ln t$	$\alpha \ln t$	$\alpha \ln t$	$(\alpha - 1) \ln t$	$-2\alpha \ln t - \frac{2C_3}{C} \frac{v_s}{A_h} \frac{1}{-\alpha + 1} t^{-\alpha + 1}$

TAB. 6.3 – Comportement asymptotique pour le cas d'une suspension pour le modèle **T** (cas $a = 0$). Le paramètre α est égal à $\frac{1}{3 + \frac{4C_0}{E}}$.

6.5.3.2 Application

Le comportement asymptotique sur pente constante ($\vartheta = 0$ et $\theta = 3^\circ$), ainsi que les solutions numériques associées au modèle **T** (cas $a = 0$), sont reportés sur les figures 6.6, 6.7 et 6.8 page 152⁵². La valeur des paramètres utilisés est donnée dans le tableau 6.4.

C_0	C_1	C_2	C_3	α
0.005	0.001	0.02	0.5	$\frac{5}{17}$

TAB. 6.4 – Paramètres utilisés pour calculer les facteurs de contrôle (cf. tableau 6.3) pour le cas d'une suspension.

51. Cette forme est en fait la forme générale sous laquelle toutes les solutions doivent être recherchées. Le cas de recherche de solutions de la forme t^α , n'est que le cas particulier où $s(t) \sim \alpha \ln t$.

52. Les conditions initiales sont les suivantes : $h_0 = 0.1$, $V_0 = 0.1$, $U_0^T = 0.5$, $U_0^* = 0$, $\phi_0 = 0.2$, $\theta = 5^\circ$.

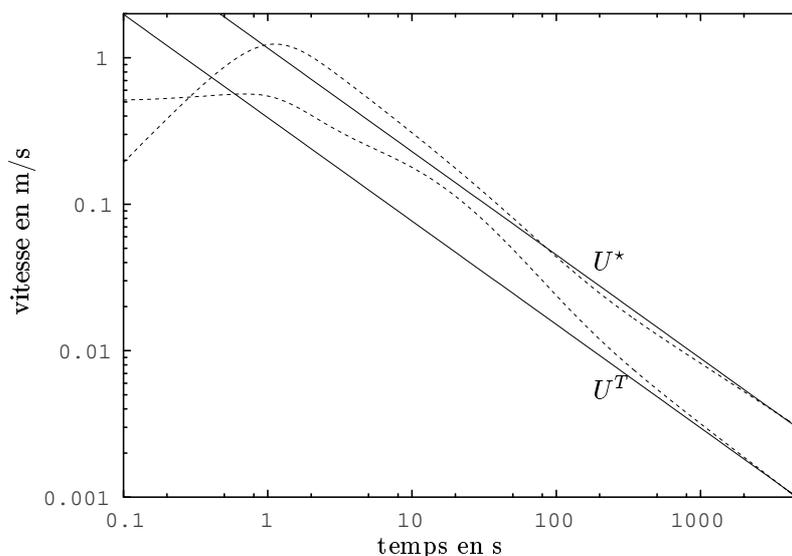


FIG. 6.6 – Solutions numériques et asymptotiques pour les vitesses dans le cas d’une suspension. Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillées sont les solutions numériques du modèle \mathbf{T} et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cas $a = 0$) (cf. tableau 6.3 page précédente).

Les solutions numériques atteignent relativement lentement les solutions asymptotiques. Ces dernières ont été calculées dans le cas particulier où $a \leq -1$. Les solutions numériques sont calculées pour $-1 \leq a \leq 0$. On voit ici l’importance des termes du second ordre ($a \neq 0$). Ces termes n’apparaissent pas dans le modèle \mathbf{P} .

La figure 6.7 page suivante montre le comportement de h et l . On retrouve ici encore la très courte phase à volume constant où l’écoulement s’effondre et n’incorpore pratiquement pas de fluide (phase du mouvement (6.22a)–(i) \sim (6.22a)–(ii)). Très rapidement l’incorporation de fluide devient dominante, et l’écoulement est en expansion volumique.

On remarque que le décroissance de la fraction volumique est exponentielle ($-\frac{2C_3}{C} \frac{v_s}{A_h} \frac{1}{-\alpha+1} \leq 0$).

Il existe une phase de transition ($\lesssim 10$ s), où l’écoulement s’étale (cf. figure 6.7 page suivante) et accélère (cf. figure 6.6) avec un rapport de forme non constant. L’écoulement commence ensuite à ralentir et gonfle. Les comportements asymptotiques de U^T , U^* , h et l ne sont atteints que beaucoup plus tardivement, lorsque la fraction volumique est devenue très petite et que toutes les particules ont chutées hors de l’écoulement.

Cette phase de transition est de plus grand intérêt pour les géologues, puisque l’essentiel du dépôt a lieu pendant cette période (cf. figure 6.9 page 153).

6.6 Conclusions

L’étude analytique conduite dans ce chapitre a permis d’appréhender le bon comportement qualitatif des modèles \mathbf{P} et \mathbf{T} dans des cas particuliers d’écoulements. Elle a également permis de montrer la consistance du modèle numérique associé sur les temps longs à l’aide des solutions asymptotiques.

Le système \mathbf{T} exhibe une beaucoup plus grande variété de comportements au voisinage des points critiques que le système \mathbf{P} étudié dans Hugot *et al.* [1998, 1999]. Ces comportements sont essentiellement conditionnés par :

- La valeur des constantes C_i , qui par annulation permettent de simuler des types particuliers d’écoulements gravitaires [Hugot *et al.*, 1998, 1999],
- Le profil de pente, c’est-à-dire la forme de fonction $\sin \theta$ [Hugot *et al.*, 1998, 1999],
- L’importance relative de la vitesse moyenne de l’objet U^T par rapport à la vitesse d’étalement U^* , c’est-à-dire la valeur du paramètre a .

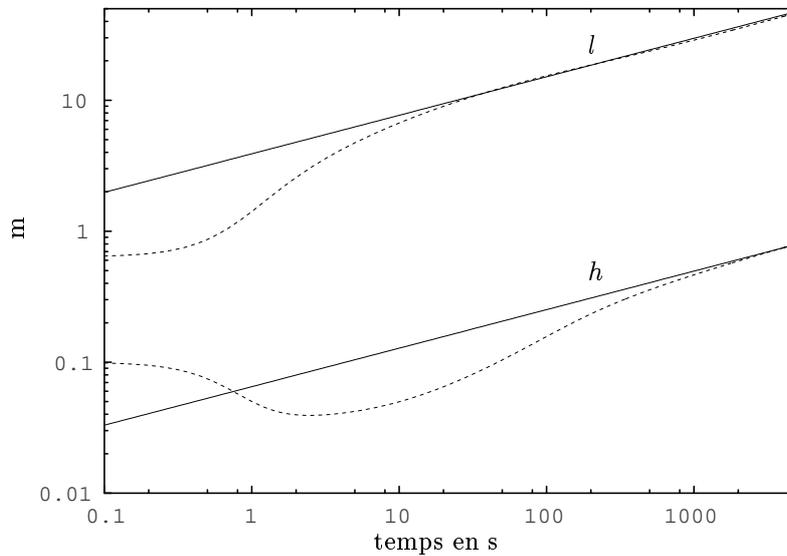


FIG. 6.7 – Solutions numériques et asymptotiques pour pour la hauteur et la longueur dans le cas d'une suspension. Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillées sont les solutions numériques du modèle \mathbf{T} et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cas $a = 0$) (cf. tableau 6.3 page 150).

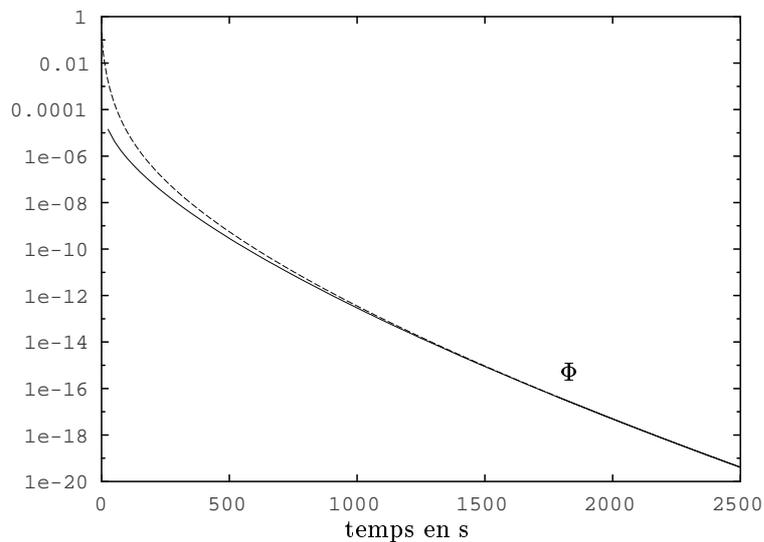


FIG. 6.8 – Solutions numériques et asymptotiques pour la fraction volumique dans le cas d'une suspension. Les solutions sont des fonctions du temps t . Les lignes pointillées sont les solutions numériques du modèle \mathbf{T} et les lignes pleines les solutions asymptotiques du temps (cas $a = 0$) (cf. tableau 6.3 page 150).

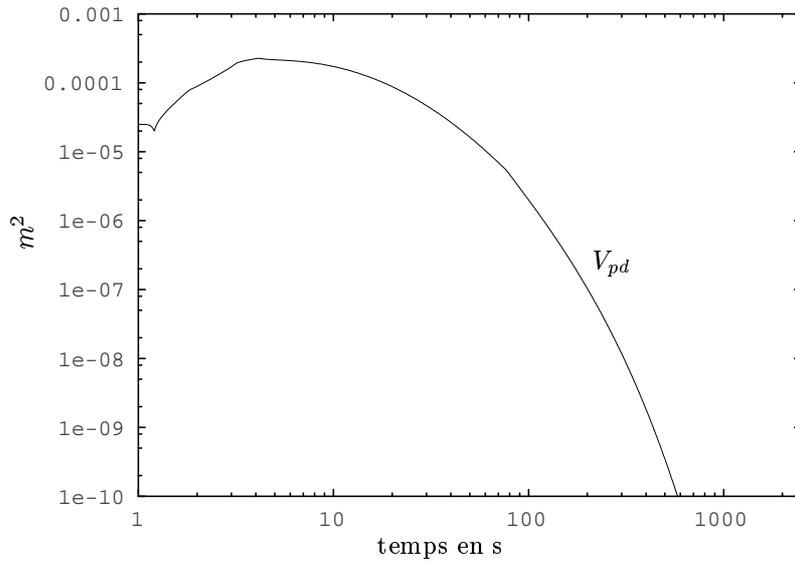


FIG. 6.9 – Volume de particules déposées par seconde et par unité de largeur prédit par le modèle **T**.

Le modèle **T** introduit des termes correctifs importants lorsque $U^T \leq U^*$. Ces termes étaient négligés dans le modèle **P**.

De plus, cette étude a mis en évidence l'importance du soin qu'il faut apporter à la modélisation de la partie transitoire des écoulements.

En effet, la fraction volumique est une fonction exponentielle décroissante du temps contrairement aux autres variables qui ont un comportement en puissance du temps. Les comportements asymptotiques de U^T , U^* , h et l sont donc atteints beaucoup plus tardivement, lorsque la fraction volumique est devenue très petite et que toutes les particules ont chutées hors de l'écoulement.

*Nous avons trouvé une étrange empreinte sur les rivages de l'inconnu.
L'une après l'autre, nous avons élaboré de profondes théories, pour
rendre compte de son origine. Finalement, nous avons réussi à
reconstituer la créature qui a déposé cette empreinte.
Et voilà ! c'était la nôtre.
A. S. Eddington.*

Chapitre 7

Sur les aspects qualitatifs du modèle

Nous effectuons ici des expériences numériques avec le modèle **T**. Ces expériences mettent en évidence l'influence de chacun des paramètres, ou de chacune des conditions initiales, sur l'évolution des écoulements.

Sommaire

7.1	Préliminaires	155
7.2	Sensibilité aux paramètres	157
7.2.1	Sensibilité au coefficient de friction C_0	157
7.2.2	Sensibilité au coefficient d'incorporation de fluide C_1	159
7.2.3	Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3	160
7.2.4	Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4	162
7.3	Sensibilité aux conditions initiales	164
7.3.1	Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0	164
7.3.2	Sensibilité au rapport U_0/U_0^*	165
7.3.3	Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0	167
7.4	Sensibilité aux « processus de contrôle »	169
7.4.1	Sensibilité à la pente	169
7.4.2	Sensibilité à la granulométrie	171
7.5	Conclusions	173

7.1 Préliminaires

Nous avons choisi d'effectuer les expériences numériques sur des plans inclinés dont la pente est constante et de 5° . Cette pente relativement faible correspond à la limite de pente inférieure pour laquelle le mouvement d'étalement ne peut plus être négligé. Le protocole expérimental est donné par la figure 7.1 page suivante.

granulométrie	pente	volume	hauteur	longueur	vit. moy.	vit. ét.	fraction vol.
d	θ	V_0	h_0	l_0	U_0	U_0^*	ϕ_0
90 μm	5°	$2\pi \times 10^{-2}$	0.1	0.4	0.0	0.0	0.05

TAB. 7.1 – Conditions initiales par défaut des expériences numériques

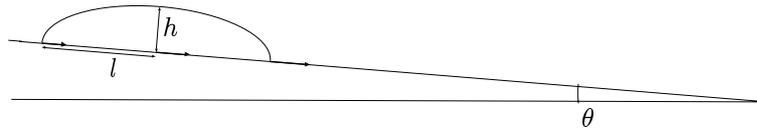


FIG. 7.1 – Protocole expérimental des expériences numériques.

Le tableau 7.1 page précédente donne les conditions initiales des expériences.

	coefficient de			
friction	incorporation d'eau	fraction volumique	Schmidt turbulent	
C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
0.01	0.00153	0.0204	1.	1.

TAB. 7.2 – Paramètres par défaut des expériences numériques

Le tableau 7.1 page précédente donne les paramètres du modèle. Les valeurs de C_1 et C_2 sont les valeurs bibliographiques d'après Fukushima, Parker et Pantin [1985]; Parker, Fukushima et Pantin [1986] (cf. section 5.5 page 124).

7.2 Sensibilité aux paramètres

Nous évaluons d'abord la sensibilité du modèle vis à vis des paramètres.

7.2.1 Sensibilité au coefficient de friction C_0

Le paramètre C_0 correspond au coefficient de friction turbulente. Il intervient dans trois équations d'évolution : celle de U , celle de U^* et celle de Φ (terme de diffusivité). Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de C_0 (cf. tableau 7.3).

	$E1$	$E2(D)$	$E3$	$E4$
C_0	0,05	0,01	0,005	0,001

TAB. 7.3 – Valeurs du coefficient de friction ($D =$ valeur par défaut du modèle).

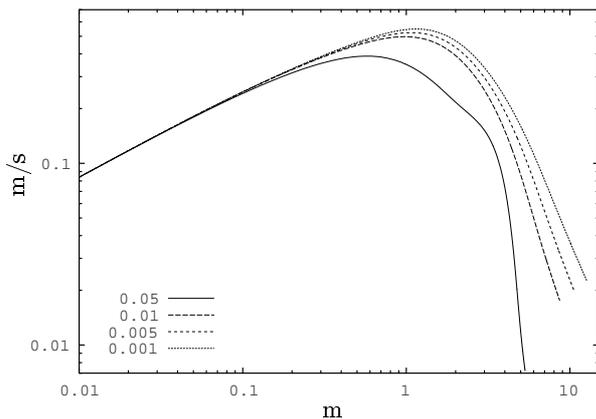


FIG. 7.2 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Vitesse du front en fonction de la position du front.

La figure 7.2 montre l'évolution de la vitesse du front en fonction de la position du front. Une augmentation du coefficient de friction entraîne une baisse de la vitesse. La dépendance de la vitesse du front à ce paramètre n'est pas linéaire. En effet, la vitesse du front est composée de la somme de la vitesse moyenne U et de la vitesse d'étalement U^* . Comme le montre la figure 7.3 la partition des vitesses évolue également avec ce coefficient à cause du couplage des deux équations de quantité de mouvement.

Les coefficients de friction élevés entraînent un mouvement à dominante de translation, alors qu'au contraire, les faibles coefficients de friction entraînent un mouvement à dominante d'étalement.

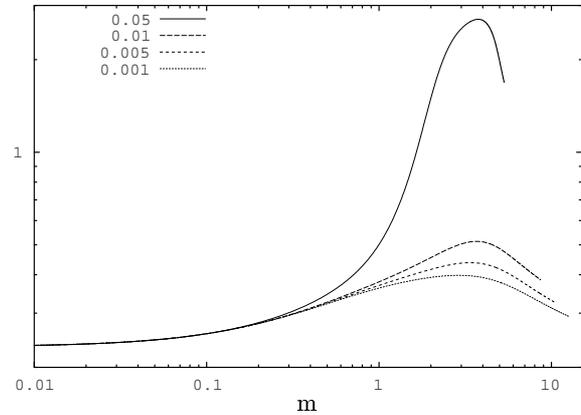


FIG. 7.3 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

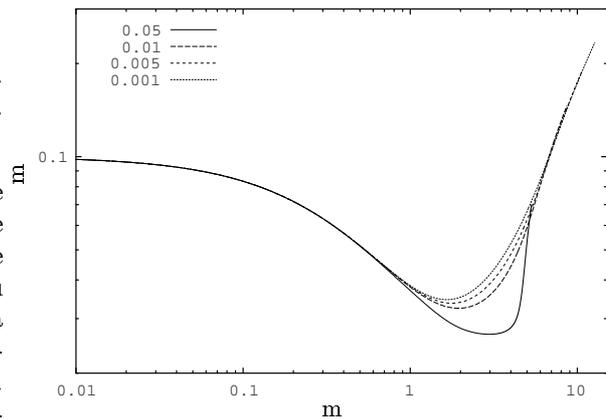


FIG. 7.4 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Hauteur en fonction de la position du front.

L'augmentation du coefficient de friction entraîne dans un premier temps un effondrement plus important de l'écoulement (cf. figure 7.4 page précédente). La croissance est cependant plus importante après, lorsque $X_f \geq 4$.

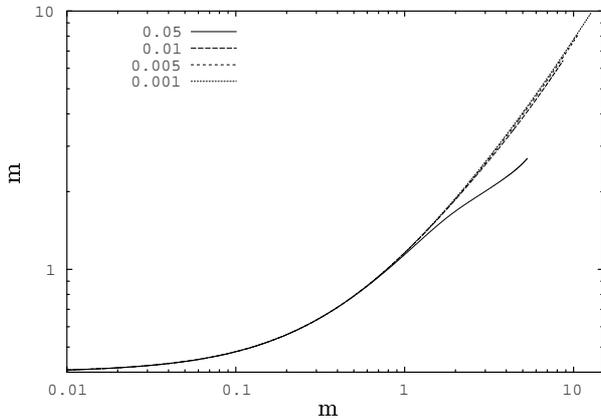


FIG. 7.5 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Longueur en fonction de la position du front.

Comme remarqué plus haut, l'augmentation de la friction réduit la vitesse d'étalement (cf. figure 7.3 page précédente). En conséquence la longueur croît moins rapidement (cf. figure 7.5).

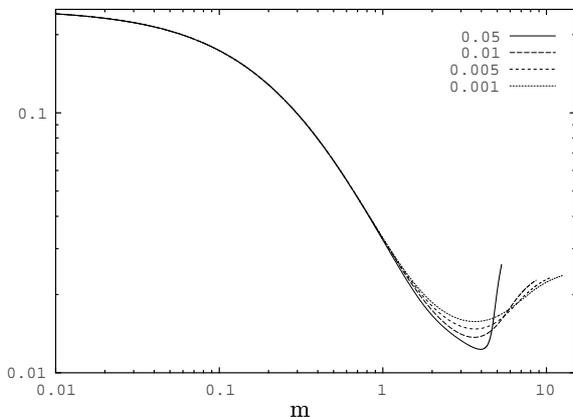


FIG. 7.6 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.

On retrouve sur la figure 7.6 l'effondrement plus important de l'écoulement, puis la croissance plus rapide de la hauteur que de la longueur.

Les valeurs élevées du coefficient de friction permettent, dans un premier temps, en augmentant la diffusivité des particules, de garder une fraction volumique plus élevée (cf. figure 7.7). Cette dernière

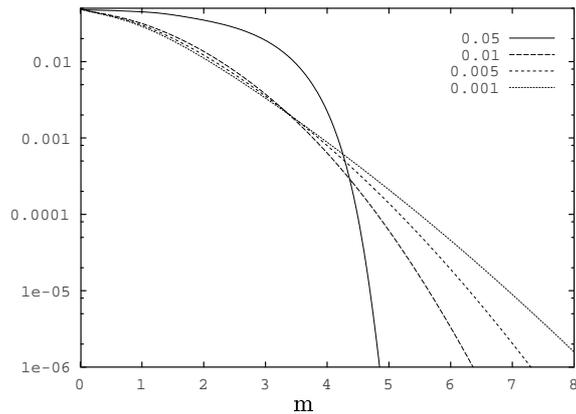


FIG. 7.7 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Fraction volumique en fonction de la position du front.

chute cependant plus brutalement à la fin du mouvement, puisque les vitesses décroissent beaucoup plus rapidement (cf. figure 7.2 page précédente).

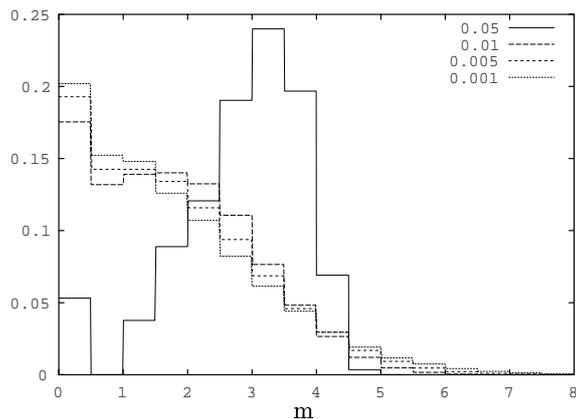


FIG. 7.8 – Sensibilité au coefficient de friction C_0 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

L'augmentation du coefficient de friction ralentit (et peut même inhiber) la sédimentation. Cette dernière est cependant plus brutale lorsqu'elle a commencé. Les faibles valeurs de la friction mènent à des dépôts plus allongés.

En conclusion, les variations du coefficient de friction se répercutent plus sur les variables dynamiques telles que les vitesses U et U^* et sur la fraction volumique ϕ , que sur les variables géométriques telles que h et l . L'augmentation du coefficient de friction mène à des dépôt nettement plus « trapus ».

7.2.2 Sensibilité au coefficient d'incorporation de fluide C_1

Le paramètre C_1 correspond à l'un des deux coefficients d'incorporation de fluide ambiant ($E = C_1/(C_2+Ri)$). Il intervient dans toutes les équations d'évolution. Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de C_1 (cf. tableau 7.4).

	$E1$	$E2(D)$	$E3$	$E4$
C_1	0,005	0,001	0,0005	0,0001

TAB. 7.4 – Valeurs du coefficient d'incorporation de fluide ambiant ($D \approx$ valeur par défaut du modèle).

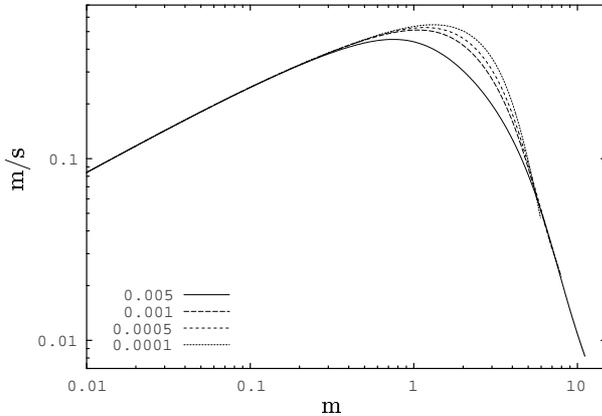


FIG. 7.9 – Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Vitesse du front en fonction de la position du front.

L'augmentation du coefficient d'incorporation de fluide réduit sensiblement la vitesse du front dans un premier temps (cf. figure 7.9). Cette tendance s'inverse lorsque le front est à une distance de plus de 6 m.

La diminution de ce coefficient entraîne un mouvement avec une dominante de translation un peu plus importante (cf. figure 7.10).

Lorsque l'incorporation de fluide est plus importante la hauteur croît plus rapidement (cf. figure 7.11).

La longueur de l'écoulement n'est pas sensible au coefficient d'incorporation de fluide. L'évolution de l est dominée par l'étalement (cf. figure 7.12).

Le rapport h/l chute beaucoup plus rapidement pour les coefficients d'incorporation de fluide faibles (cf. figure 7.13 page suivante). Le rapport de forme peut être croissant pour les coefficients élevés.

Les coefficients d'incorporation de fluide élevés entraînent une sédimentation plus douce (cf. figu-

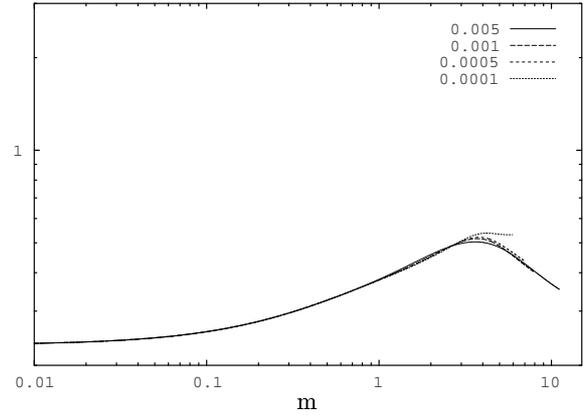


FIG. 7.10 – Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

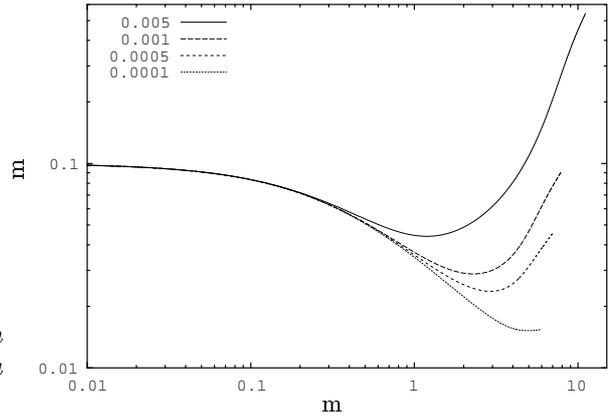


FIG. 7.11 – Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Hauteur en fonction de la position du front.

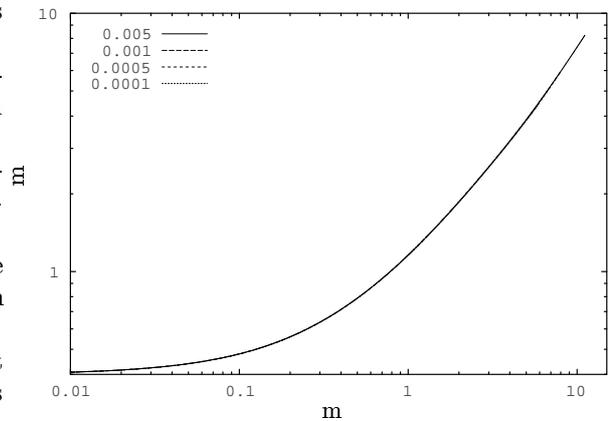


FIG. 7.12 – Sensibilité au coefficient d'incorporation C_1 . Longueur en fonction de la position du front.

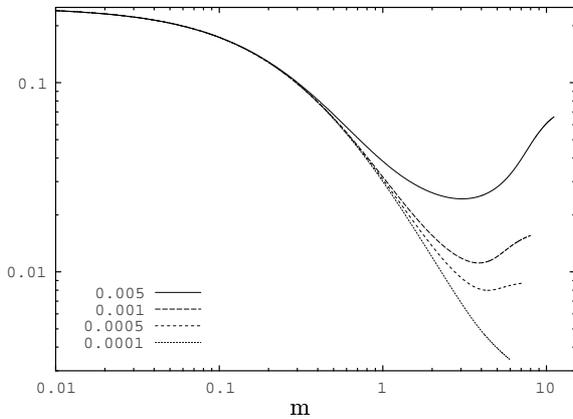


FIG. 7.13 – Sensibilité au coefficient d’incorporation C_1 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.

re 7.14). Les profils de dépôt associés sont plus étalés (cf figure 7.15).

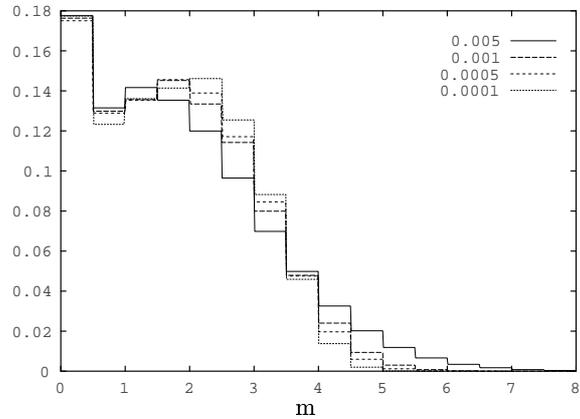


FIG. 7.15 – Sensibilité au coefficient d’incorporation C_1 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

En conclusion, les variations du coefficient d’incorporation d’eau ont principalement un effet géométrique, notamment sur la hauteur de l’écoulement h . Les profils de dépôt sont peu ou pas sensibles aux variations de ce paramètre.

7.2.3 Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3

Le paramètre C_3 correspond à la partition de fraction volumique basale. Il intervient exclusivement dans l’équation d’évolution de la fraction volumique Φ (terme de sédimentation $C_3 v_s$). Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de C_3 (cf. tableau 7.5). Les valeurs élevées de la fraction volu-

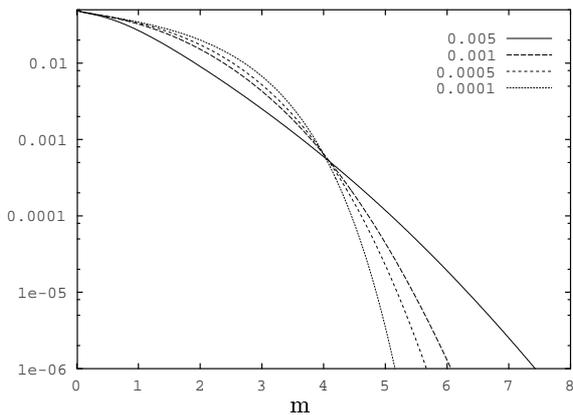


FIG. 7.14 – Sensibilité au coefficient d’incorporation C_1 . Fraction volumique en fonction de la position du front.

	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$
C_3	5	2	0,5	0,2

TAB. 7.5 – Valeurs du coefficient de fraction volumique basale C_3

mique basale mènent à des écoulements plus lents qui s’arrêtent plus rapidement (cf. figure 7.16 page ci-contre). La force motrice de gravité « s’essoufle » plus rapidement.

La diminution de ce coefficient engendre des écoulements plus rapides pour lesquels la composante de translation peut être importante et dominante (cf. figure 7.17 page suivante).

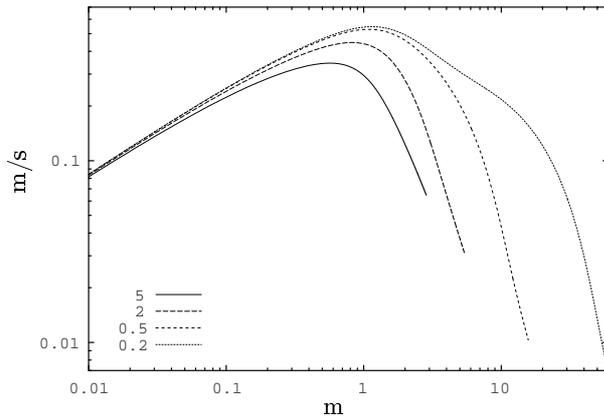


FIG. 7.16 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Vitesse du front en fonction de la position du front.

Les faibles valeurs de la fraction basale entraînent des écoulements qui, dans un premier temps, s'effondrent de façon plus importante (cf. figure 7.18).

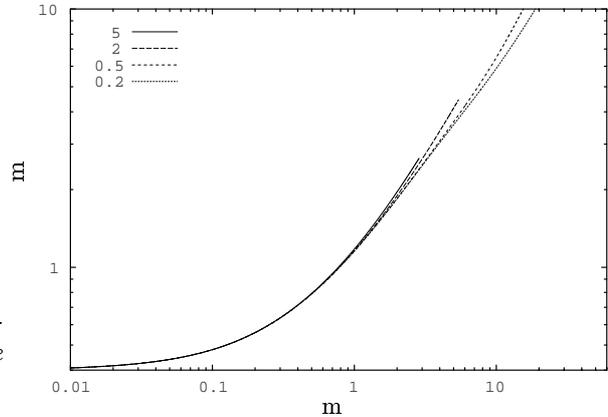


FIG. 7.19 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Longueur en fonction de la position du front.

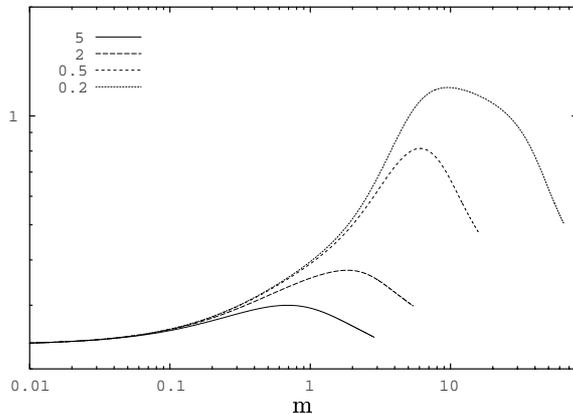


FIG. 7.17 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

La longueur des écoulements est peu sensible aux variations de la fraction volumique basale (cf. figure 7.19).

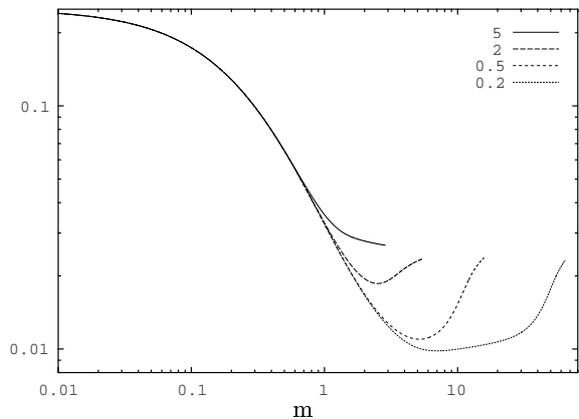


FIG. 7.20 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.

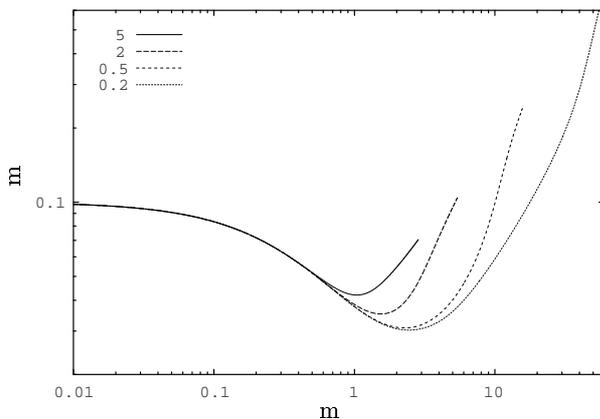


FIG. 7.18 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Hauteur en fonction de la position du front.

Les valeurs élevées de la fraction volumique basale engendrent des facteurs de forme décroissants (cf. figure 7.20). Pour des valeurs plus modérées, le facteur de forme peut devenir croissant. À noter que des valeurs très faibles peuvent engendrer des facteurs de forme pratiquement constants en fonction de la position.

La fraction volumique est très sensible aux variations de la fraction volumique basale. Les faibles valeurs entraînent une diminution très douce de la

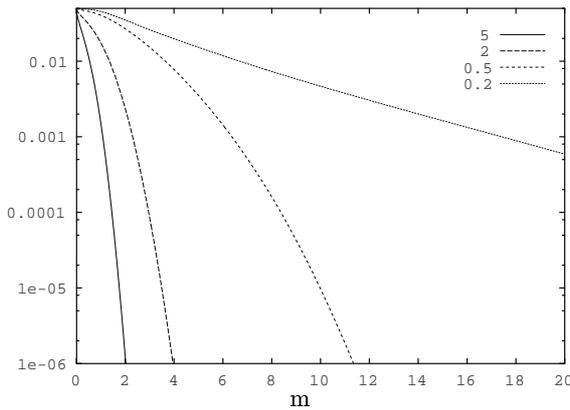


FIG. 7.21 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Fraction volumique en fonction de la position du front.

fraction volumique, les valeurs élevées, une diminution très abrupte (cf. figure 7.21).

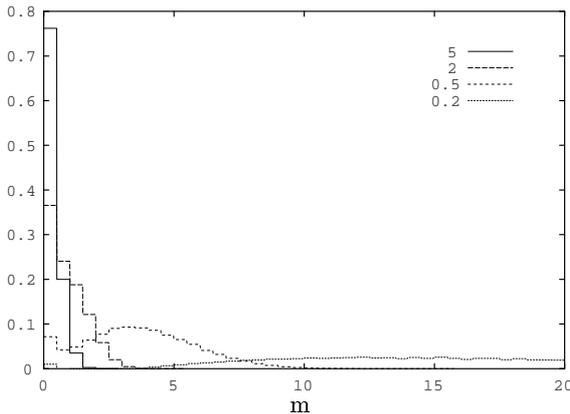


FIG. 7.22 – Sensibilité au coefficient de fraction volumique basale C_3 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

Les profils de dépôt sont très sensibles aux variations de la fraction volumique basale. Les faibles valeurs engendrent des dépôts très étendus, la sédimentation pouvant même être inhibée. Les valeurs élevées engendrent des dépôts « trapus » (cf. figure 7.22).

En conclusion, les variations du coefficient de fraction volumique basale se répercutent de façon importante sur toutes les variables de l'écoulement, aussi bien géométriques, que dynamiques et cela bien que ce coefficient n'intervienne directement que dans une équation d'évolution, celle de la fraction volumique Φ . Les profils de dépôt obtenus sont sen-

sibles aux variations de ce coefficient puisqu'il intervient dans le facteur de contrôle de la fraction volumique (cf. équation (6.29) page 150).

Il joue un rôle déterminant dans la formation du dépôt.

7.2.4 Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4

Le paramètre C_4 est l'analogie de l'inverse du nombre de Schmidt turbulent. Il quantifie le rapport de la diffusivité turbulente des particules à la viscosité turbulente du fluide. Il intervient exclusivement dans l'équation d'évolution de la fraction volumique Φ (terme d'érosion). Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de C_4 (cf. tableau 7.6). Les va-

	$E1$	$E2(D)$	$E3$	$E4$
C_4	5	1	0,5	0,1

TAB. 7.6 – Valeurs du coefficient de diffusivité C_4 ($D =$ valeur par défaut du modèle).

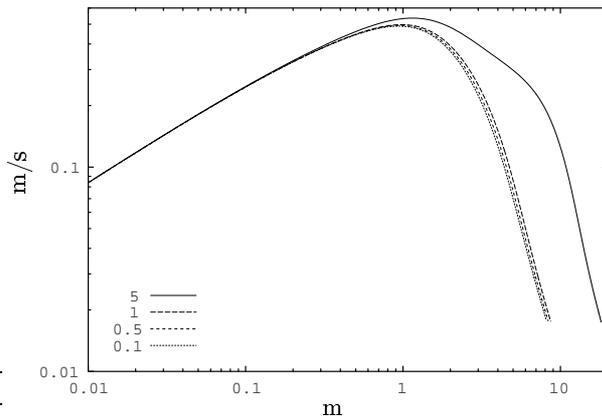


FIG. 7.23 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Vitesse du front en fonction de la position du front.

leurs élevées de la diffusivité augmentent la distance parcourue par les écoulements (cf. figure 7.23).

Les fortes valeurs peuvent entraîner une dominante de mouvement de translation (cf. figure 7.24 page ci-contre).

Les diffusivités élevées entraînent un effondrement de la hauteur un peu plus important (cf. figure 7.25 page suivante).

Les diffusivités élevées réduisent l'étalement des écoulements dans une faible proportion (cf. figure 7.26 page ci-contre).

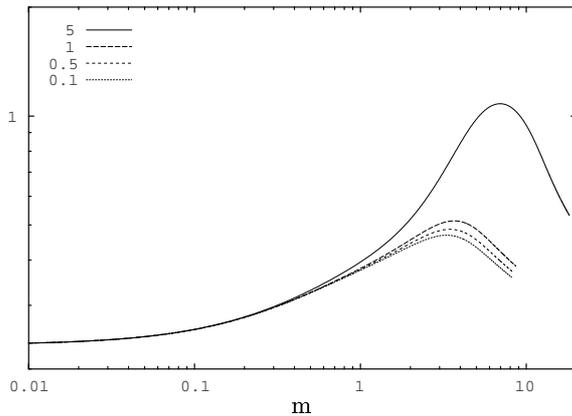


FIG. 7.24 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

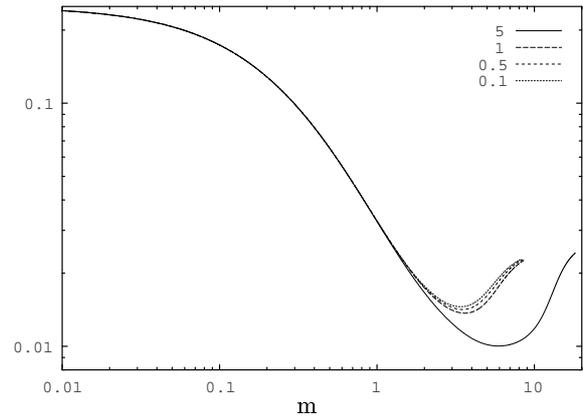


FIG. 7.27 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Rapport adimensionnel h/h_i en fonction de la position du front.

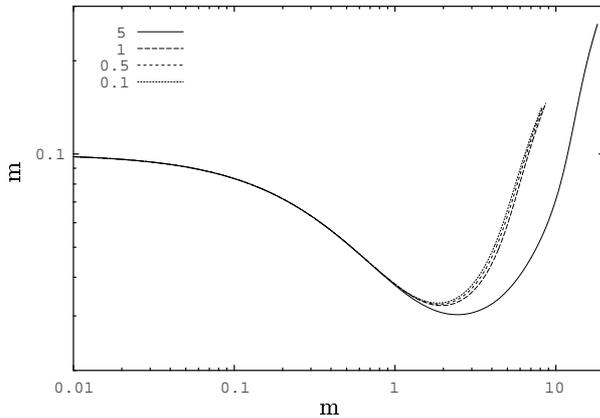


FIG. 7.25 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Hauteur en fonction de la position du front.

Le facteur de forme diminue de façon plus importante pour les diffusivités élevées (cf. figure 7.27).

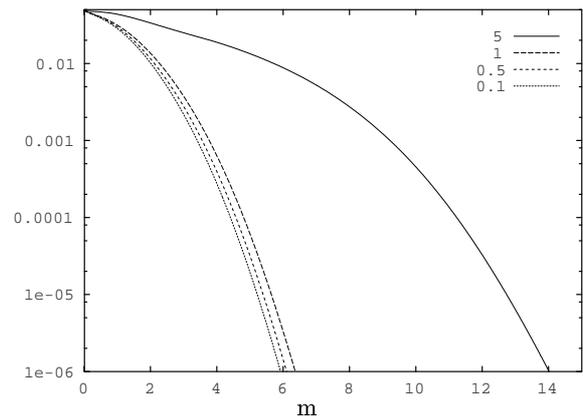


FIG. 7.28 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Fraction volumique en fonction de la position du front.

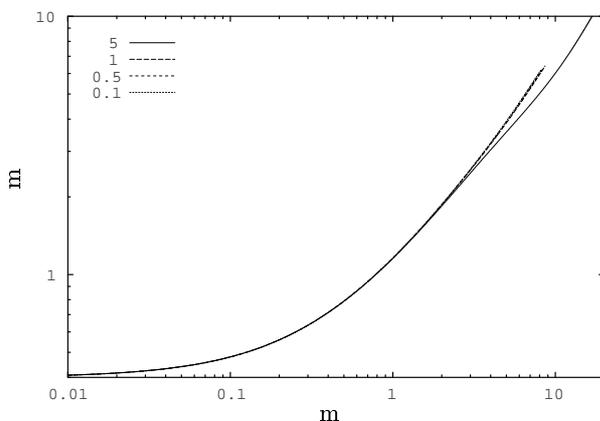


FIG. 7.26 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Longueur en fonction de la position du front.

Une diffusivité élevée augmente la distance de transport de la fraction volumique, la décroissance de celle-ci étant plus douce (cf. figure 7.28).

L'augmentation de la diffusivité engendre des dépôts plus allongés. La sédimentation peut être inhibée.

En conclusion, comme pour la fraction volumique basale, la diffusivité est un paramètre important du transport des sédiments par les écoulements. Les variations sont répercutées sur l'évolution de toutes les variables de l'écoulement, bien que ce paramètre n'intervienne que dans l'équation de conservation la fraction volumique. Les profils de dépôt sont sensibles aux variations de ce paramètre.

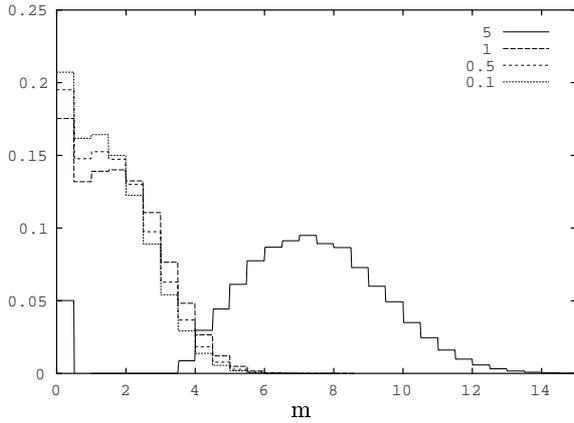


FIG. 7.29 – Sensibilité au coefficient de diffusivité C_4 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

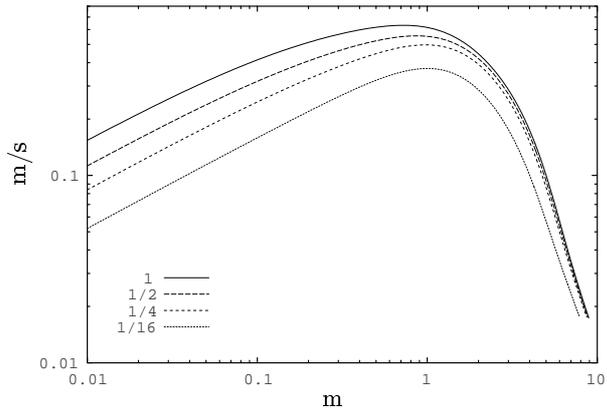


FIG. 7.30 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Vitesse du front en fonction de la position du front.

7.3 Sensibilité aux conditions initiales

Nous testons ici la sensibilité du modèle vis à vis des conditions initiales.

7.3.1 Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0

Le paramètre h_0/l_0 quantifie la forme de l'objet géométrique. Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de h_0/l_0 (cf. tableau 7.7).

	E1	E2	E3	E4
$\frac{h_0}{l_0}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

TAB. 7.7 – Valeurs du facteur de forme h_0/l_0 .

La vitesse du front est sensible quantitativement au facteur de forme. Les rapports les plus élevés donnent les vitesses les plus élevées (cf. figure 7.30).

Les valeurs faibles du facteur de forme peuvent engendrer des écoulements à dominante de translation (cf. figure 7.31).

La valeur minimale de la hauteur est la même quelque soit le facteur de forme (cf. figure 7.32). Après l'effondrement la croissance est également la même.

Les hauteurs sont croissantes et tendent à suivre la même loi (cf. figure 7.33 page suivante).

La valeur minimale du rapport h/l est obtenue pour le rapport h_0/l_0 maximum (cf. figure 7.34 page ci-contre).

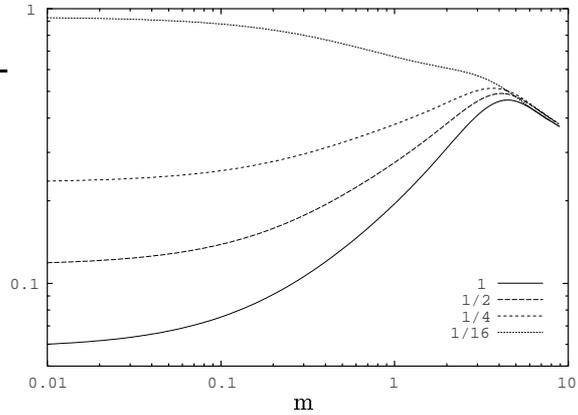


FIG. 7.31 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

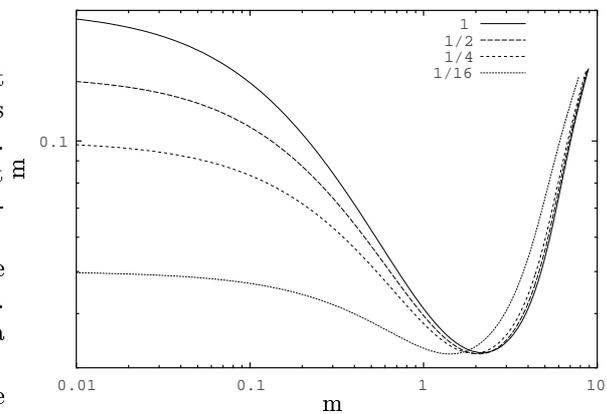


FIG. 7.32 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Hauteur en fonction de la position du front.

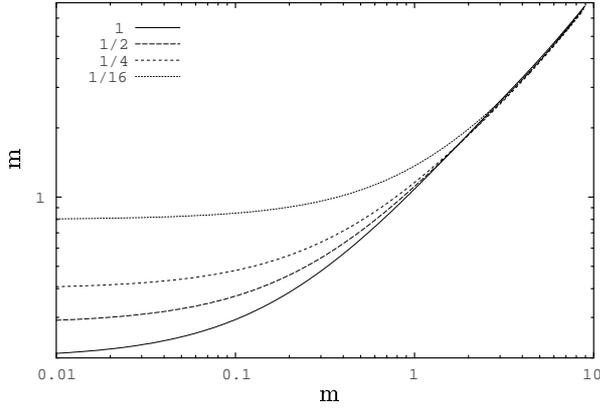


FIG. 7.33 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Longueur en fonction de la position du front.

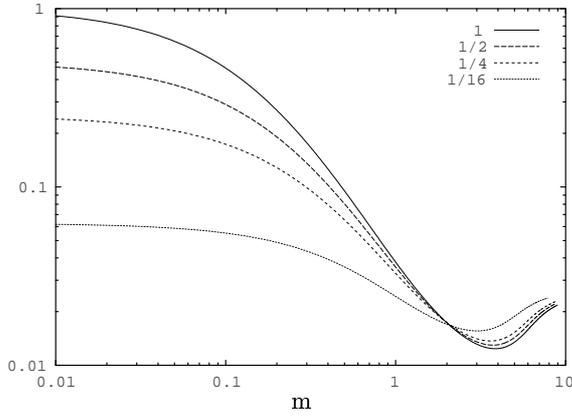


FIG. 7.34 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Rapport adimensionnel h_i en fonction de la position du front.

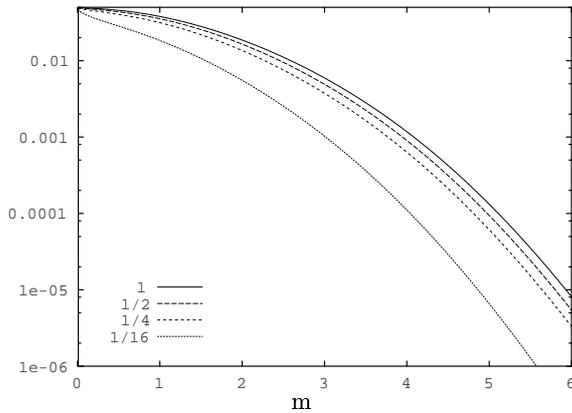


FIG. 7.35 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Fraction volumique en fonction de la position du front.

La fraction volumique diminue plus rapidement pour les écoulements à faible facteur de forme (cf. figure 7.35).

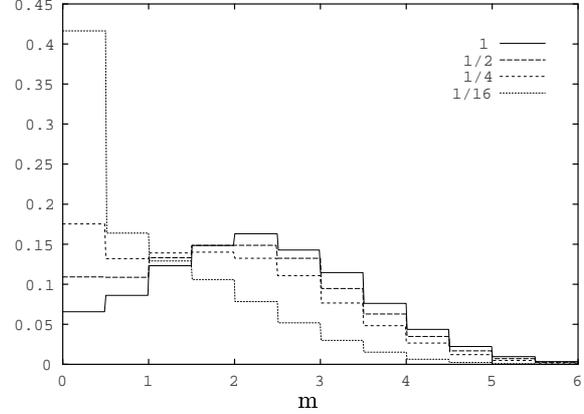


FIG. 7.36 – Sensibilité au facteur de forme h_0/l_0 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

Les faibles valeurs du facteur de forme induisent des dépôts plus précoces et « trapus ». Les valeurs élevées engendrent des dépôts plus allongés (cf. figure 7.36).

En conclusion, le facteur de forme h_0/l_0 n'engendre pas de variations qualitatives des solutions. Les variations sur les variables sont asymptotiquement faibles. Seul le profil de dépôt semble être modifié pour les facteurs de forme faibles.

7.3.2 Sensibilité au rapport U_0/U_0^*

Le paramètre U_0/U_0^* quantifie l'importance relative de la composante « translation » par rapport à la composante « étalement ». Nous avons étalonné les essais avec trois valeurs de U_0/U_0^* (cf. tableau 7.8). Nous avons cependant gardé la vitesse initiale du front constante: $U_0 + U_0^* = 0,11$.

	E1	E2	E3
U_0	0,055	0,01	0,1
U_0^*	0,055	0,1	0,01
$\frac{U_0}{U_0^*}$	1	$\frac{1}{10}$	10

TAB. 7.8 – Valeurs du rapport U_0/U_0^* .

D'une façon générale, les résultats ne sont pas modifiés quantitativement. Les vitesses de front les plus importantes sont atteintes par les écoulements à dominante de translation (cf. figure 7.37 page suivante).

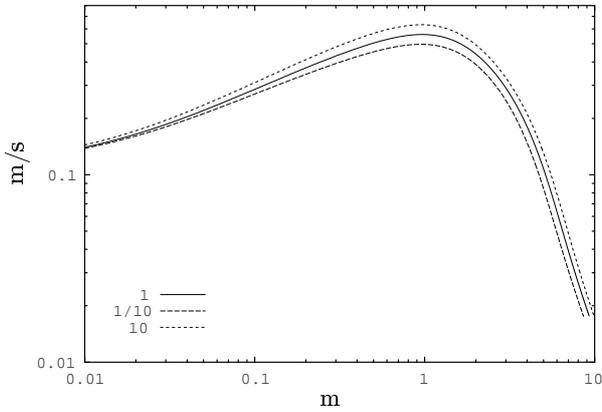


FIG. 7.37 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Vitesse du front en fonction de la position du front.

Après une distance transitoire, l'écoulement se rééquilibre pour atteindre sensiblement la même valeur du rapport U/U^* (cf. figure 7.38).

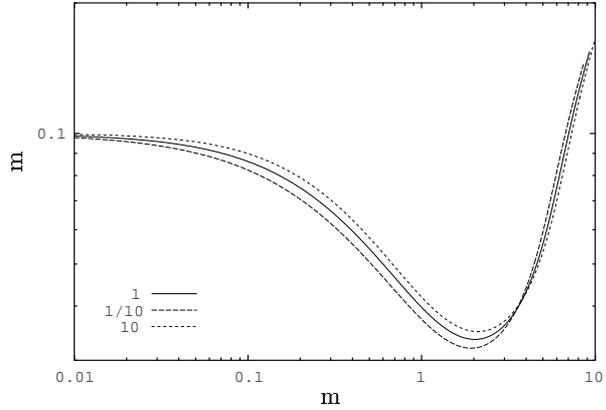


FIG. 7.39 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Hauteur en fonction de la position du front.

Les écoulements à dominante de translation ont un effondrement légèrement plus limité (cf. figure 7.39).

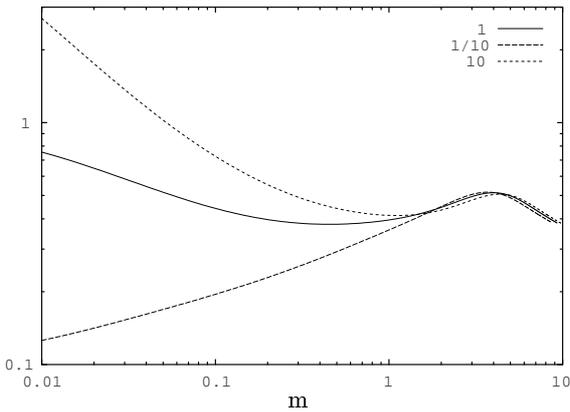


FIG. 7.38 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

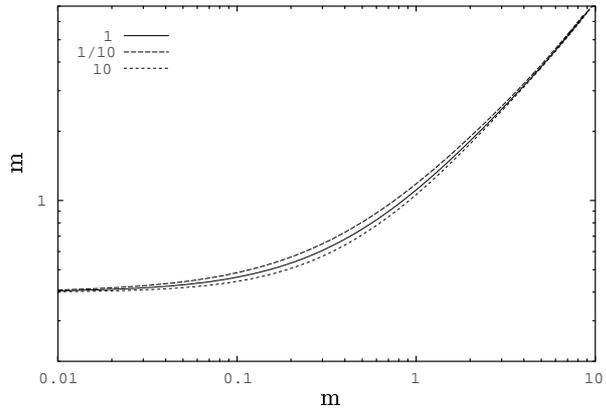


FIG. 7.40 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Longueur en fonction de la position du front.

L'évolution de la longueur est peu affectée par les variations du rapport U_0/U_0^* (cf. figure 7.40).

Le facteur de forme h/l suit pratiquement la même loi (cf. figure 7.41 page ci-contre).

L'évolution de la fraction volumique Φ n'est qualitativement pas modifiée par les variations du rapport U_0/U_0^* (cf. figure 7.42 page suivante).

Les profils de dépôt sont peu modifiés (cf. figure 7.43 page ci-contre). Un rapport U_0/U_0^* élevé implique un profil de dépôt un peu plus étalé (la distance de transport est en effet légèrement plus importante).

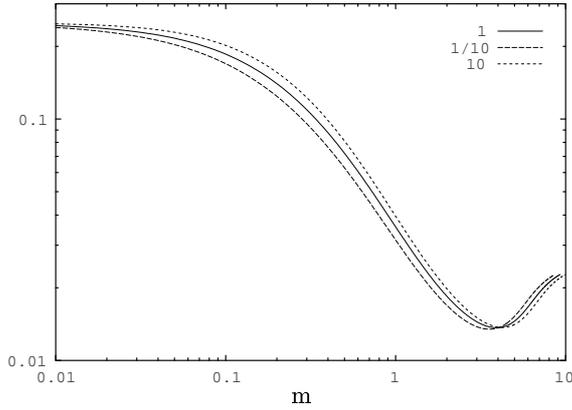


FIG. 7.41 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front

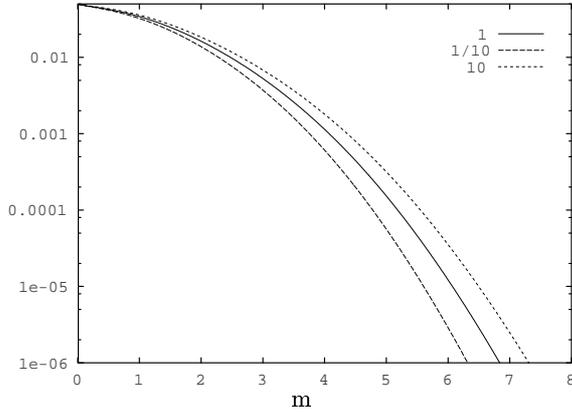


FIG. 7.42 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Fraction volumique en fonction de la position du front.

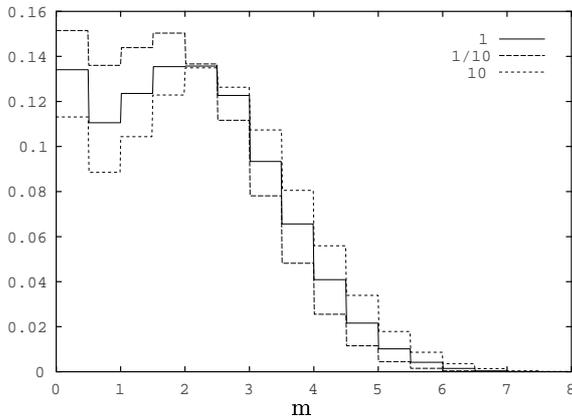


FIG. 7.43 – Sensibilité au rapport U_0/U_0^* . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

En conclusion, le rapport U_0/U_0^* est sans influence importante sur le comportement des variables et sur le profil de dépôt.

7.3.3 Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0

Le paramètre Φ_0 permet de quantifier le volume initial de particules (concentration). Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de Φ_0 (cf. tableau 7.9).

	E1	E2	E3	E4
Φ_0	0,00625	0,0125	0,025	0,05

TAB. 7.9 – Valeurs de la fraction volumique initiale Φ_0 .

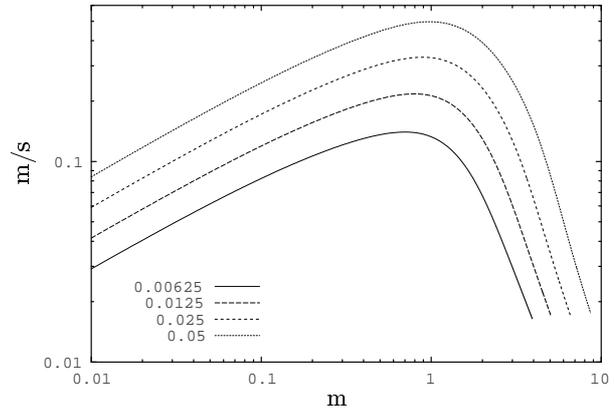


FIG. 7.44 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Vitesse du front en fonction de la position du front.

L'évolution qualitative de la vitesse de front n'est pas affectée par la fraction volumique initiale (cf. figure 7.44). Cependant, d'un point de vue quantitatif, les variations sont très importantes du fait de la différence de la force motrice gravitaire. Les valeurs de vitesse les plus élevées sont atteintes par les écoulements les plus concentrés. Ce comportement est confirmé par les observations expérimentales [Laval, 1988; Laval, Cremer, Beghin et Ravenne, 1988].

Ce sont également les écoulements concentrés qui ont une dominante de translation maximale (cf. figure 7.45 page suivante).

Les écoulements dilués s'effondrent moins que les écoulements concentrés (cf. figure 7.46 page suivante).

La longueur est une variable peu sensible à la fraction volumique initiale (cf. figure 7.47).

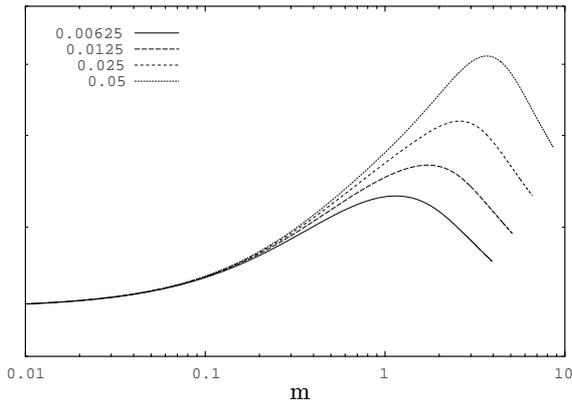


FIG. 7.45 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

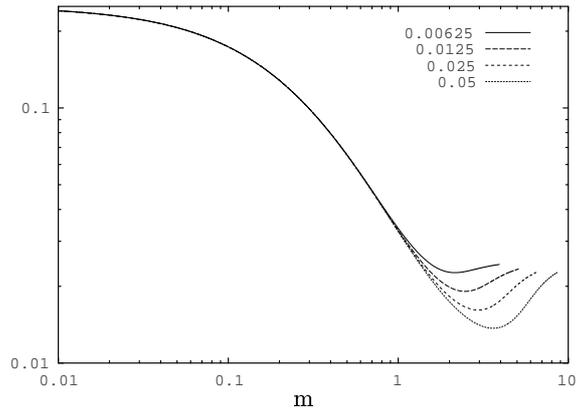


FIG. 7.48 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Rapport adimensionnel h/l en fonction de la position du front.

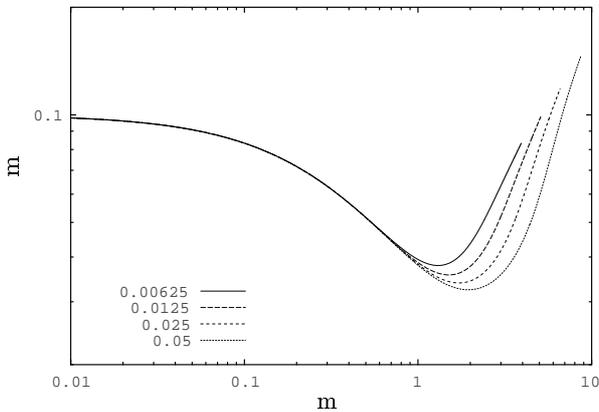


FIG. 7.46 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Hauteur en fonction de la position du front.

Les écoulements concentrés atteignent des facteurs de forme plus faibles (cf. figure 7.48).

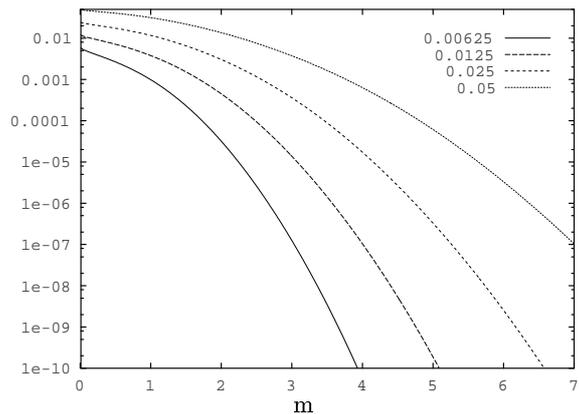


FIG. 7.49 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Fraction volumique en fonction de la position du front.

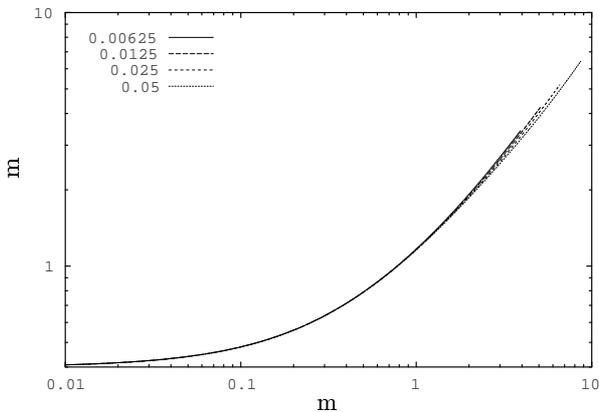


FIG. 7.47 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Longueur en fonction de la position du front.

La diminution de la fraction volumique est plus rapide pour les écoulements dilués (cf. figure 7.49), ceux-ci ont en effet une vitesse plus faible.

Les écoulements dilués sédimentent plus rapidement que les écoulements concentrés (cf. figure 7.50 page ci-contre). Les dépôts sont plus allongés pour les écoulements concentrés. Ce résultat est conforme aux observations expérimentales [Laval, 1988; Laval *et al.*, 1988].

En conclusion, la fraction volumique initiale a une faible influence qualitative sur l'évolution des variables, sauf sur le profil de dépôt. Les variations quantitatives sont cependant très importantes.

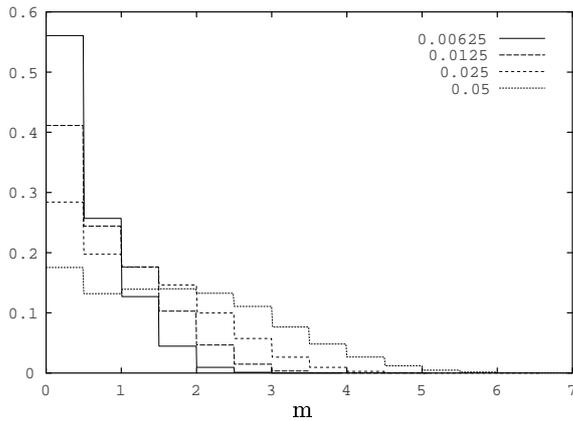


FIG. 7.50 – Sensibilité à la fraction volumique initiale Φ_0 . Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

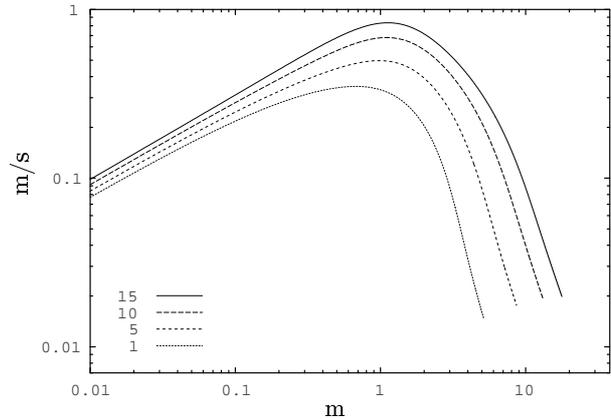


FIG. 7.51 – Sensibilité à la pente. Vitesse du front en fonction de la position du front.

7.4 Sensibilité aux « processus de contrôle »

Nous testons ici la sensibilité du modèle vis à vis de facteurs externes à l’écoulement (cf. section A.1 page 251 sur les processus de contrôle).

7.4.1 Sensibilité à la pente

Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs d’angle de pente (cf. tableau 7.10).

	E1	E2	E3	E4
θ	15°	10°	5°	1°

TAB. 7.10 – Valeurs de l’angle de pente

La pente ne semble pas introduire de modification du comportement qualitatif de la vitesse du front (cf. figure 7.51). Les vitesses les plus élevées sont atteintes sur les pentes les plus fortes.

Plus la pente est forte, plus le mouvement de l’écoulement tend à devenir translationnel (cf. figure 7.52).

L’effondrement des hauteurs est plus important sur les pentes faibles (cf. figure 7.53). En effet, la composante de pression qui en est responsable est plus importante.

La croissance de la longueur est plus importante sur les pentes faibles que sur les pentes fortes. En effet, l’étalement est dominant sur les pentes faibles (cf. figure 7.54).

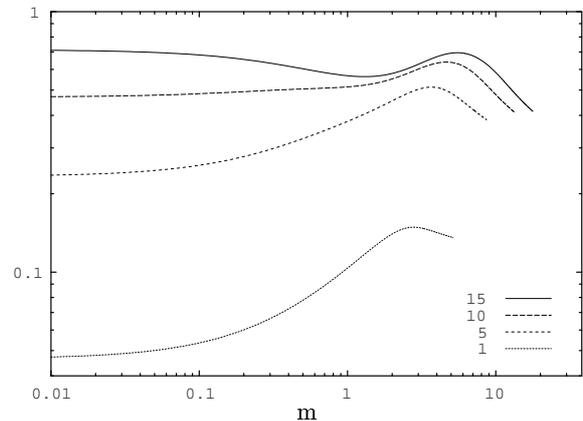


FIG. 7.52 – Sensibilité à la pente. Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

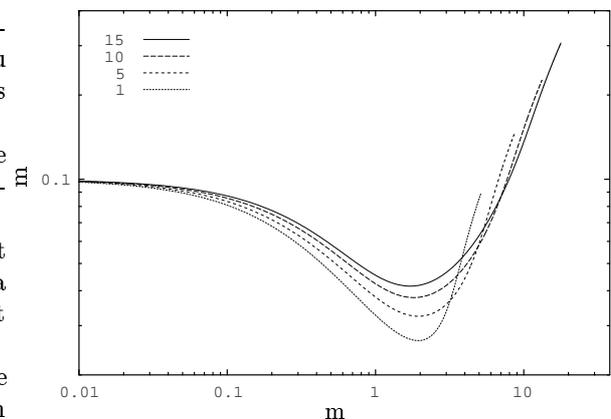


FIG. 7.53 – Sensibilité à la pente. Hauteur en fonction de la position du front.

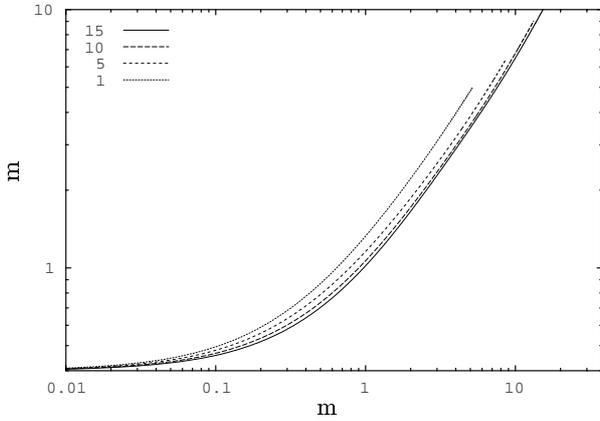


FIG. 7.54 – Sensibilité à la pente. Longueur en fonction de la position du front.

Sur les pentes fortes, les écoulements ont des facteurs de forme moins élevés que sur les pentes faibles (cf. figure 7.55).

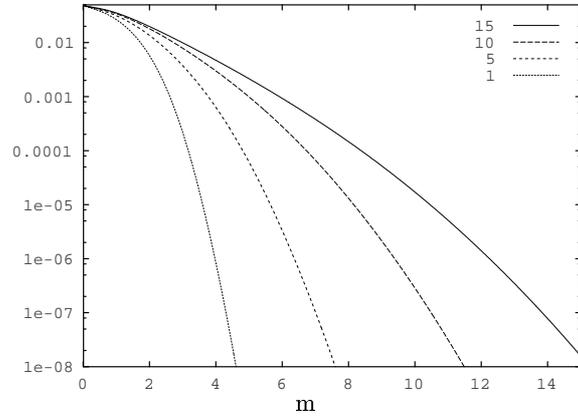


FIG. 7.56 – Sensibilité à la pente. Fraction volumique en fonction de la position du front.

L'évolution de la fraction volumique est plus douce sur les pentes fortes (cf. figure 7.56). En effet, les vitesses étant plus élevées, les particules sont maintenues plus longtemps en suspension.

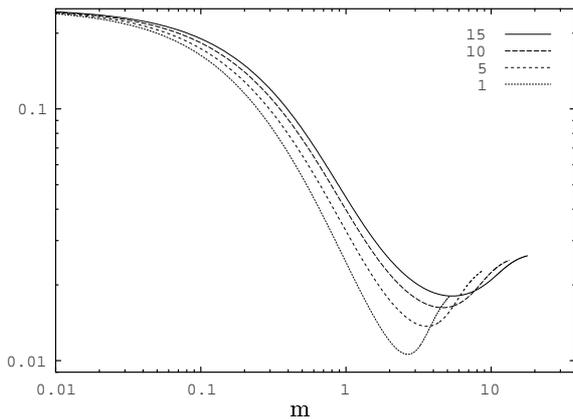


FIG. 7.55 – Sensibilité à la pente. Rapport adimensionnel h_i en fonction de la position du front.

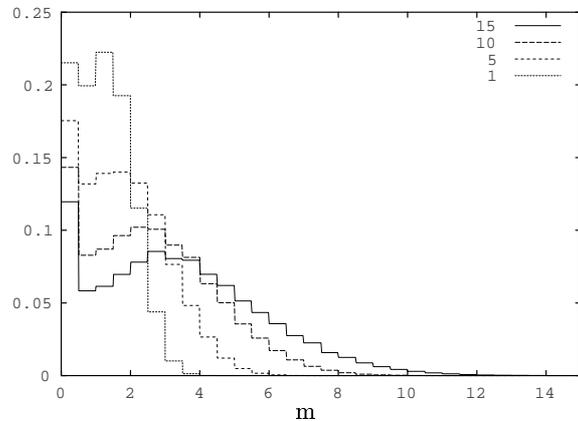


FIG. 7.57 – Sensibilité à la pente. Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

Les dépôts sont plus « trapus » sur les pentes faibles et plus étendus sur les pentes fortes (cf. figure 7.57).

En conclusion, la pente n'introduit pas de modification qualitative dans l'évolution des variables. Son influence majeure s'exerce sur le profil de dépôt et sur l'évolution de la longueur de l'écoulement. Son influence quantitative est importante.

7.4.2 Sensibilité à la granulométrie

Nous avons étalonné les essais avec quatre valeurs de granulométrie (cf. tableau 7.11).

	<i>E1</i>	<i>E2</i>	<i>E3</i>	<i>E4</i>
<i>d</i>	50 μm	100 μm	500 μm	1000 μm

TAB. 7.11 – Valeurs de la granulométrie

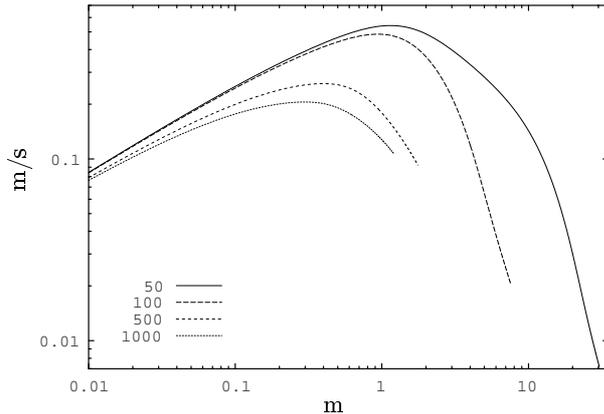


FIG. 7.58 – Sensibilité à la granulométrie. Vitesse du front en fonction de la position du front.

Le modèle rend bien compte du fait que les sédiments les plus fins sont transportés sur des distances plus importantes (cf. figure 7.58). Les écoulements de sédiments plus fins atteignent également des vitesses plus élevées, puisque l’excès de charge est maintenu sur de plus grandes distances. Ce comportement est en accord avec les observations expérimentales [Laval, 1988; Laval *et al.*, 1988].

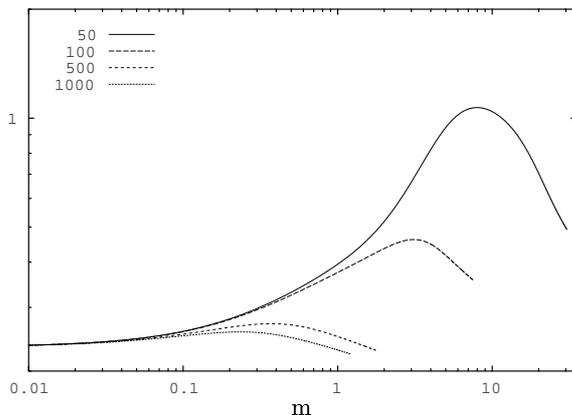


FIG. 7.59 – Sensibilité à la granulométrie. Rapport adimensionnel U/U^* en fonction de la position du front.

Les écoulements de sédiments les plus fins peuvent atteindre des mouvements à dominante de translation (cf. figure 7.59).

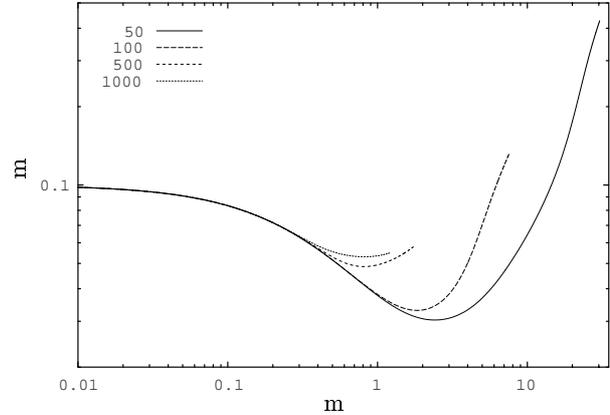


FIG. 7.60 – Sensibilité à la granulométrie. Hauteur en fonction de la position du front.

Les écoulements chargés en sédiments plus grossiers s’effondrent moins que ceux chargés en sédiments fins (cf. figure 7.60). La hauteur de la suspension est plus importante pour les écoulements de sédiments fins.

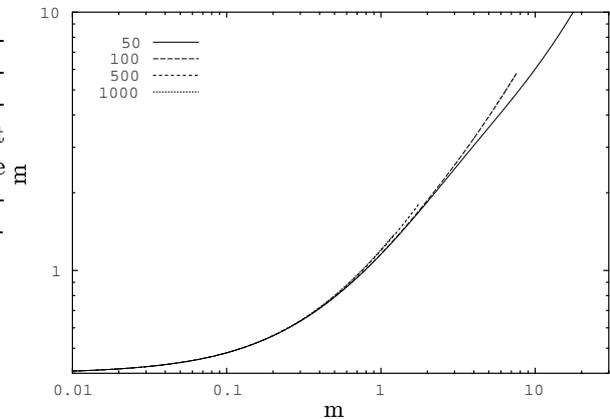


FIG. 7.61 – Sensibilité à la granulométrie. Longueur en fonction de la position du front.

La longueur est relativement peu sensible à la taille des sédiments (cf. figure 7.61).

Les écoulements contenant des particules fines ont des facteurs de forme moins élevés (cf. figure 7.62 page suivante).

L’évolution de la fraction volumique est très variable et nettement plus douce pour les écoulements de sédiments fins (cf. figure 7.63 page suivante). Comme nous l’avons vu précédemment le comporte-

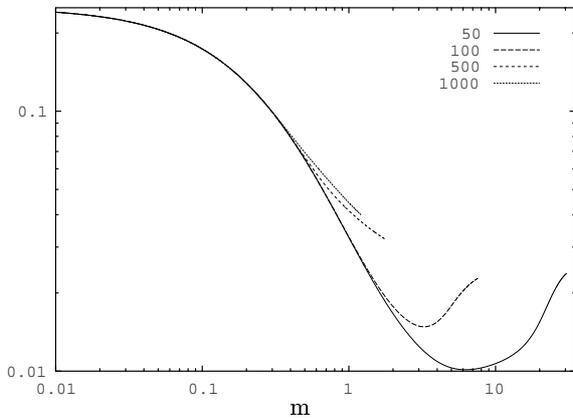


FIG. 7.62 – Sensibilité à la granulométrie. Rapport adimensionnel h_i en fonction de la position du front

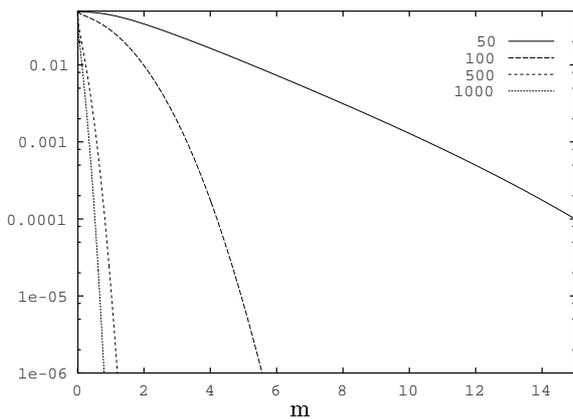


FIG. 7.63 – Sensibilité à la granulométrie. Fraction volumique en fonction de la position du front.

ment asymptotique de ϕ est fonction de la vitesse de sédimentation v_s (cf. équation (6.29) page 150).

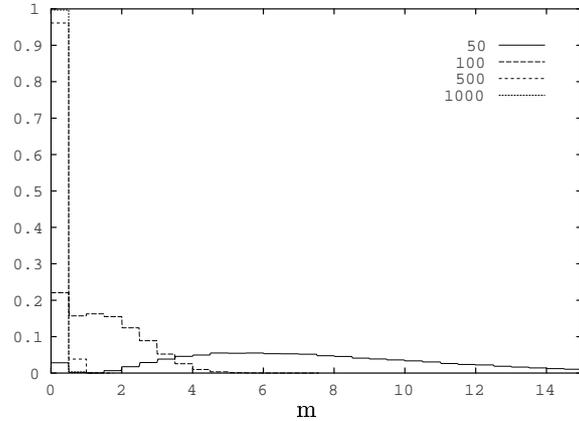


FIG. 7.64 – Sensibilité à la granulométrie. Rapport adimensionnel du volume de particules déposées au volume initial de particules (sections de 50 cm).

Les profils de dépôt sont très sensibles à la taille des particules. La sédimentation est instantanée pour les particules les plus grossières (cf. figure 7.64). Pour les particules fines le dépôt est très allongé. Ce comportement est conforme aux observations expérimentales [Laval, 1988; Laval *et al.*, 1988].

En conclusion, la taille des particules est un paramètre de contrôle des plus importants. Conditionnant le facteur de contrôle de la fraction volumique par l'intermédiaire de la vitesse de sédimentation (cf. équation (6.29) page 150), il joue un rôle déterminant dans la formation du dépôt. Son rôle est également prépondérant pour l'évolution des autres variables.

7.5 Conclusions

Cette étude a permis de mieux appréhender la physique du modèle à partir de son comportement qualitatif.

Les tests effectués ont montré la cohérence et la bonne réponse physique du modèle aux différents paramètres. Les comportements du modèle sont en accord avec les observations expérimentales [Laval, 1988; Laval *et al.*, 1988].

Les paramètres physiques contrôlent le comportement qualitatif des écoulements. Leur valeur influe tant sur la dynamique que sur la géométrie et l'extension des dépôts.

Les conditions initiales, telles que le facteur de forme (h_0/l_0), l'importance relative des vitesses (U_0/U_0^*) et la fraction volumique initiale Φ_0 , n'engendrent pas de modifications fondamentales du comportement qualitatif des écoulements. Les variations quantitatives peuvent cependant être très importantes.

La pente apparaît être un facteur de contrôle quantitatif important. Mais c'est la granulométrie qui semble être le facteur de contrôle le plus important. Son influence sur la dynamique de l'écoulement, la géométrie et l'extension des dépôts est tant qualitative que quantitative.

Nous présentons à ce titre des résultats préliminaires pour un mélange de deux tailles de particules (500 μm et 100 μm). Une équation de transport de la fraction volumique est écrite pour chaque type de particules. Le calcul des vitesses de sédimentation est inspiré des modèles théoriques de sédimentation stationnaire de Mirza et Richardson [1979]; Richardson et Meikle [1961]; Zeng et Lowe [1992], pour les suspensions multi-composantes. Les particules les plus grosses « voient » la suspension comme un mélange dont la viscosité effective tient compte de la présence des plus petites particules.

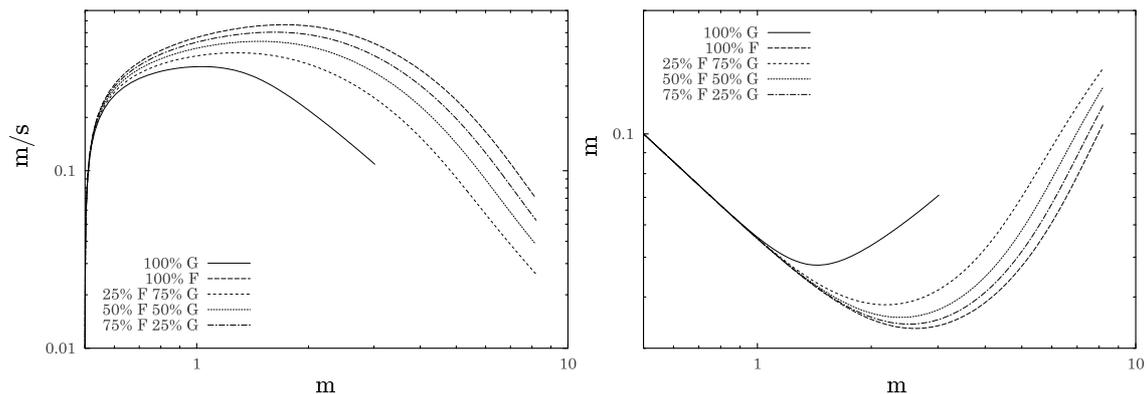


FIG. 7.65 – Mélange de deux tailles de particules. % G = pourcentage de particules de 500 μm , % F = pourcentage de particules de 100 μm . Vitesse en fonction de la position du front (à gauche). Hauteur en fonction de la position (à droite).

Les essais sont effectués avec les paramètres par défaut du modèle. Divers pourcentages respectifs de particules sont testés pour une fraction volumique totale de 0,05. Nous retrouvons ici, le fait que l'addition d'un faible pourcentage de particules fines augmente la distance de transport (cf. figure 7.65 à gauche). Ceci est en accord avec les travaux expérimentaux de Gladstone, Phillips et Sparks [1998].

Si les écoulements contenant plus de particules fines s'effondrent de façon plus importante, leur croissance volumique est, elle aussi, plus importante (cf. figure 7.65 à droite).

Nous retrouvons également le phénomène d'augmentation de la distance de transport des particules grossières lors de la présence de particules fines dans la suspension (cf. figure 7.66 page suivante à droite) : la sédimentation des particules grossières est inhibée.

Ceci se retrouve sur les histogrammes de dépôt (cf. figure 7.67 page suivante) conformément aux expériences de Gladstone *et al.* [1998].

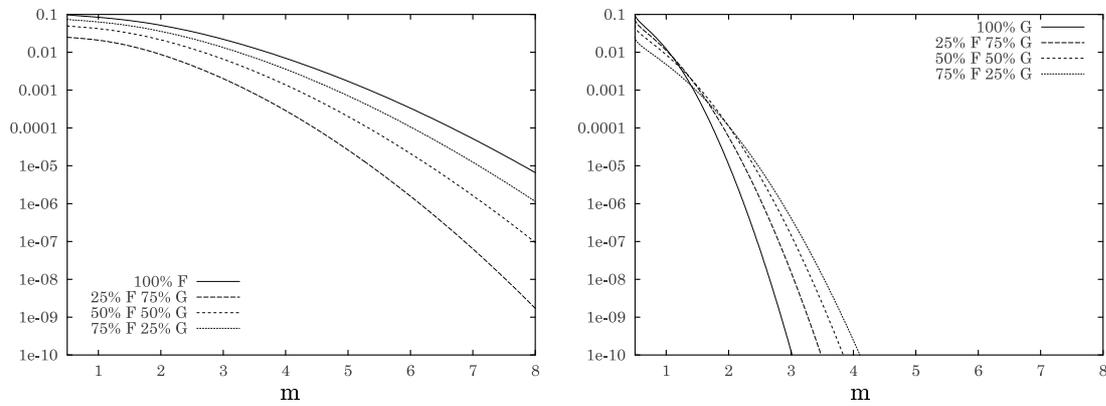


FIG. 7.66 – % G = pourcentage de particules de $500 \mu\text{m}$, % F = pourcentage de particules de $100 \mu\text{m}$. Évolution de la fraction volumique en fonction de la position. À gauche : particules fines. À droite : particules grossières.

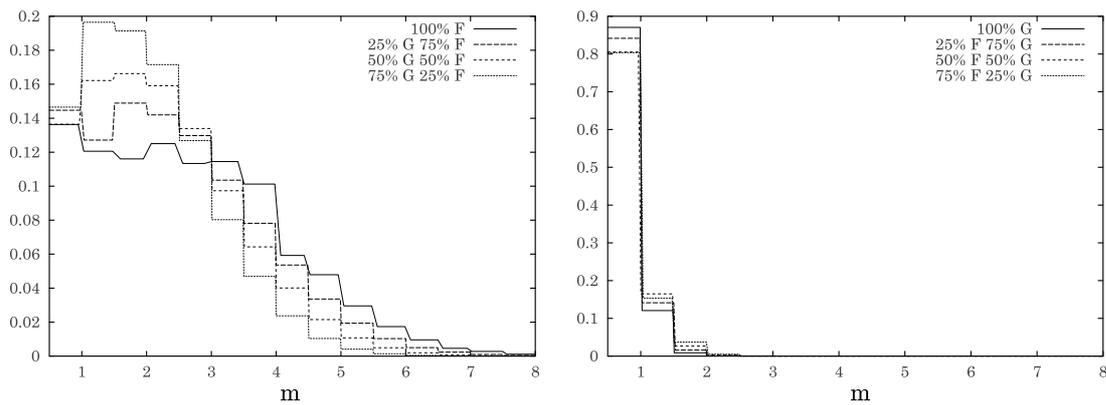


FIG. 7.67 – % G = pourcentage de particules de $500 \mu\text{m}$, % F = pourcentage de particules de $100 \mu\text{m}$. Histogramme de répartition du sable. À gauche : particules fines. À droite : particules grossières.

Bibliographie

Cette bibliographie regroupe les références traitant :

- des solutions mathématiques des systèmes différentiels ;
- de l'étude expérimentale des suspensions.

- BENDER, C. M. et S. A. ORSZAG [1978]. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. International Series in Pure and Applied Mathematics. Mc Graw-Hill. 593 p.
- FUKUSHIMA, Y., G. PARKER et H. M. PANTIN [1985]. Prediction of ignitive turbidity currents in Scripps Submarine Canyon. *Mar. Geol.* **vol. 67**, pages 55–81.
- GLADSTONE, C., J. C. PHILLIPS et R. S. J. SPARKS [1998]. Experiments on bidisperse, constant-volume gravity currents : propagation and sediment deposition. *Sedimentology* **vol. 45**, pages 833–843.
- HUGOT, A., S. ZALESKI et P. JOSEPH [1998]. Modeling of catastrophic dilute gravity flows. Dans : *Submit in: Recent Advances in Basin and Reservoir Modelling. The IFP Experience* (Edité par D. GUÉRILLOT), page 25 p. Technip.
- HUGOT, A., S. ZALESKI et P. JOSEPH [1999]. Dilute gravity flows : a phenomenological model in thin layer theory. *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIb* **vol. 327**, pages 457–462.
- HUPPERT, H. E. et J. E. SIMPSON [1980]. The slumping of gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 99**, no. 4, pages 785–799.
- LAVAL, A. [1988]. *Modélisation d'écoulements de type bouffée de densité ; Application à l'interprétation des dépôts turbiditiques*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France. 262 p.
- LAVAL, A., M. CREMER, P. BEGHIN et C. RAVENNE [1988]. Density surges : Two-dimensional experiments. *Sedimentology* **vol. 35**, pages 73–84.
- MIDDLETON, G. V. [1966]. Small scales models of turbidity currents and the criterion for auto-suspension. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 36**, pages 202–208.
- MIRZA, S. et J. F. RICHARDSON [1979]. Sedimentation of suspensions of particles of two or more sizes. *Chem. Engng Sci.* **vol. 34**, pages 447–454.
- PARKER, G., Y. FUKUSHIMA et H. M. PANTIN [1986]. Self-accelerating turbidity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 171**, pages 145–181.
- RICHARDSON, J. F. et R. A. MEIKLE [1961]. Sedimentation and fluidisation part III. the sedimentation of uniform fine particles and two-component mixtures of solids. *Trans. Instn Chem. Engrs* **vol. 39**, pages 348–356.
- ZENG, J. et D. R. LOWE [1992]. A numerical model for sedimentation from highly-concentrated multi-sized suspensions. *Math. Geol.* **vol. 24**, no. 4, pages 393–415.

Quatrième partie

Mise en œuvre d'une méthode inverse pour l'identification des paramètres et le test de scénarios

Lors de la construction d'un modèle, il faut répondre à deux questions [Fullana, 1997]:

1. Parmi l'éventail des modèles possibles, il faut trouver une forme fonctionnelle générale du modèle. Ce point a été l'objet de la seconde partie.
2. Il faut ensuite, pour une forme donnée du modèle, déterminer les paramètres (C_i).

Ces paramètres physiques ont été introduits par les fermetures. Pour un certain nombre de raisons, ces derniers peuvent prendre des valeurs très différentes. Ce ne sont pas dans notre cas des paramètres universels.

Dans cette optique, une méthode inverse est développée (cf. annexe L page 327) pour pouvoir caractériser les paramètres associés à un écoulement. Cette méthode permet également l'estimation des conditions initiales, ces dernières constituant une des incertitudes majeures des modélisations en géosciences.

La méthode inverse est appliquée à des expériences sur des modèles réduits en canal immergé au chapitre 8. Elle permet une estimation des paramètres physiques et/ou des conditions initiales associées au modèle.

Le dernier chapitre présentera une application du modèle à un analogue réel: l'effondrement de terrain consécutif aux travaux de remblais de l'aéroport de Nice, en 1979. À l'aide de la méthode inverse, nous serons en mesure de tester divers scénarios d'écoulement et de valider certaines hypothèses.

L'esprit humain est naturellement porté à supposer dans les choses plus d'ordre et de ressemblance qu'il n'y en trouve ; et tandis que la nature est pleine d'exceptions et de différences, l'esprit voit partout harmonie, accord et similitude.

F. Bacon.

Chapitre 8

Application d'une méthode inverse à des modèles réduits expérimentaux bi-dimensionnels

Alors que le comportement qualitatif du modèle théorique a été étudié et est physiquement correct, nous proposons maintenant de tester son comportement quantitatif.

Nous appliquons dans ce chapitre la méthode d'inversion, exposée dans l'annexe L page 327, à des données de modèles réduits analogiques provenant de trois sources :

- Expériences à pente variable (données de Beghin [1979]) ;
- Expériences à granulométrie variable sur pente nulle (données du CEMAGREF) ;
- Expériences à pente variable, granulométrie variable et masse variable (données de Laval [1988]).

Les modèles réduits analogiques présentés modélisent des écoulements gravitaires dont la densité est supérieure à celle du milieu ambiant homogène (eau pure). Ce sont des écoulements dilués⁵³.

Les tests sont effectués suivant deux axes :

1. Inversion partielle des conditions initiales ;
2. Inversion totale des conditions initiales et des paramètres physiques.

L'optimisation partielle des paramètres physiques n'est pas présentée, car elle donne une vision assez pauvre de la réalité physique. En effet, le modèle numérique direct ne tient pas compte des phénomènes physiques associés aux conditions aux limites et aux conditions initiales. La discussion de cette incompatibilité est effectuée en annexe M page 347.

De plus, les expériences de Laval [1988] fournissent deux jeux de données :

- la vitesse du front en fonction de la position du front ;
- l'histogrammes de dépôt.

Nous comparerons donc les résultats obtenus dans le cadre d'inversion unique (données de vitesses uniquement ou données de dépôts uniquement) aux résultats de l'inversion simultanée des données de vitesses et de dépôts.

Pour un modèle donné (système d'équations \mathbf{T}), nous recherchons donc les conditions initiales et/ou les paramètres qui engendrent les données (solutions numériques du modèle) les plus proches possibles des données expérimentales.

⁵³. Comme le précise Beghin [1979], il est difficile d'obtenir des fluides de forte densité miscibles à l'eau pure et de viscosité suffisamment réduite pour respecter l'hypothèse d'un nombre de Reynolds élevé.

Sommaire

8.1 Préliminaires 180
 8.1.1 Inversion partielle sur les conditions initiales 180
 8.1.2 Inversion totale 181
8.2 Expériences en canal de Beghin (1979) 181
 8.2.1 Présentation des expériences 181
 8.2.2 Caractéristiques des essais sélectionnés 182
 8.2.3 Inversion partielle sur les conditions initiales 183
 8.2.4 Inversion totale 185
 8.2.5 Conclusions 186
8.3 Expériences du CEMAGREF (1998) 186
 8.3.1 Caractéristiques des essais sélectionnés 186
 8.3.2 Inversion partielle sur les conditions initiales 186
 8.3.3 Inversion totale 188
 8.3.4 Conclusions 189
8.4 Expériences en canal de Laval (1988) 189
 8.4.1 Présentation des expériences 189
 8.4.2 Caractéristiques des essais sélectionnés 190
 8.4.3 Inversion partielle sur les conditions initiales 193
 8.4.4 Inversion totale 197
8.5 Conclusions 210

8.1 Préliminaires

Nous rappelons ici les caractéristiques des inversions partielles et totales.

8.1.1 Inversion partielle sur les conditions initiales

Nous appliquons ici la méthode d'inversion partielle exposée et testée à l'annexe L.5.3 page 340. Le but est de trouver des conditions initiales optimales pour le modèle. En effet, dans les problèmes réels, les valeurs des observations sont entachées d'une erreur expérimentale inévitable, ce qui fait que les valeurs initiales des variables du système peuvent être prises aussi comme inconnues du problème. Se superpose à ce problème une incompatibilité du modèle numérique et du protocole expérimental (cette question est détaillée dans l'annexe M page 347).

Nous introduisons donc les conditions initiales dans le problème d'identification. C'est-à-dire que nous proposons ici de rechercher une origine « virtuelle » du mouvement, compatible avec le modèle théorique. Les paramètres physiques du modèle sont fixés (cf. tableau 8.1).

friction	fraction volumique	coefficient de		Schmidt turbulent
		incorporation d'eau	C_2	
C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
0.004	1	0.00153	0.0204	1

TAB. 8.1 – Paramètres physiques.

On inverse sur quatre conditions initiales h_0, U_0, U_0^* et ϕ_0 , le volume restant fixé. L'espace de recherche des modèles contient au moins $(10^3)^4 = 10^{12}$ modèles, si l'on considère que l'on veut une précision de 10^3 sur les conditions initiales.

8.1.2 Inversion totale

La technique de la section précédente permet de retrouver les conditions initiales compatibles avec le modèle en gardant les valeurs par défaut pour les paramètres physiques du modèle.

Ces paramètres physiques ne peuvent être raisonnablement gardés identiques pour toutes les expériences :

- Les profils de vitesse sont, entre autres, des fonctions de la pente; le coefficient de friction C_0 ne peut rester constant.
- Les profils de fraction volumique sont des fonctions de la granulométrie et de la pente, la fraction volumique basale C_3 ne peut rester constante;
- La diffusivité des particules est fonction de leur granulométrie, par l'intermédiaire de la vitesse de sédimentation (cf. par ex. équation (5.27) page 118).

L'inversion porte maintenant sur neuf paramètres. En considérant que l'on cherche à échantillonner au moins 1000 valeurs par intervalle pour ces neuf paramètres, l'espace de recherche des modèles contient au moins $(10^3)^9 = 10^{27}$ modèles, soit 10^{12} fois plus de modèles que lors des inversions partielles.

8.2 Expériences en canal de Beghin (1979)

Les expériences réalisées par Beghin ont pour application l'étude des avalanches de neige poudreuses. Pour des raisons de dimensionnement des expériences, les essais sont effectués en canal noyé et le rapport de densité $\Delta\rho/\rho$ n'est pas respecté. Cependant, la valeur du nombre de Froude densimétrique, qui est un paramètre important à respecter pour une similitude, est conservée [Beghin, 1979].

8.2.1 Présentation des expériences

8.2.1.1 Dispositif expérimental

Le canal utilisé par Beghin [1979] est schématisé sur la figure 8.1. Ce canal fermé avait été précédemment utilisé par Tochon-Danguy et Hopfinger [*in* : [Beghin, 1979], et [Hopfinger et Tochon-Danguy, 1977]].

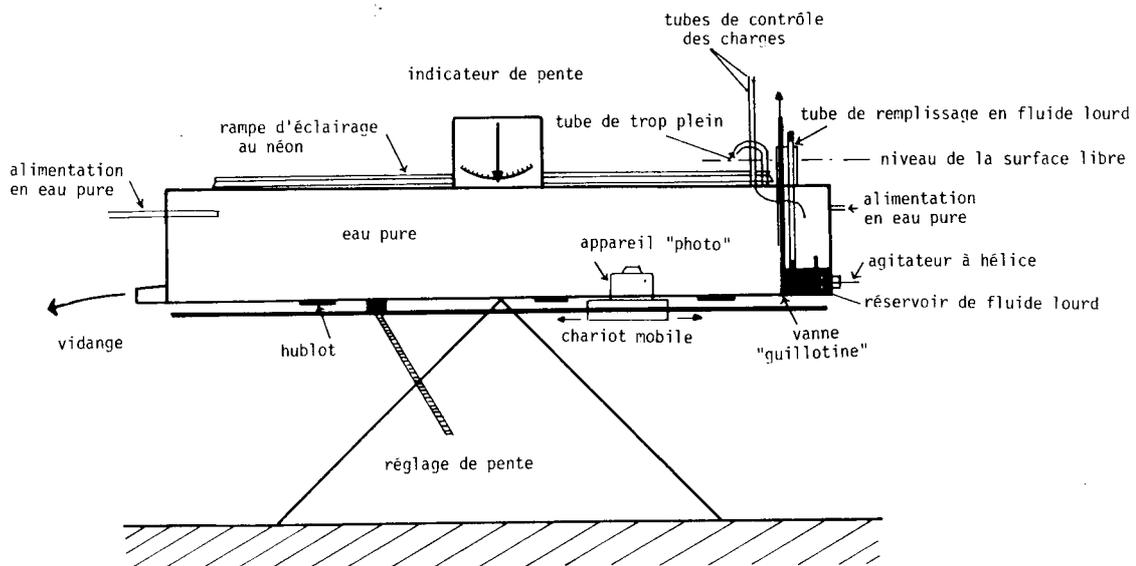


FIG. 8.1 – Schéma du canal expérimental utilisé par Beghin (d'après Beghin [1979])

Le canal est en plexiglas, et permet de visualiser tous les phénomènes. Ses dimensions générales sont :

- 30 cm de largeur ;
- 50 cm de profondeur ;
- 300 cm de longueur.

L'inclinaison est réglable jusqu'à des pentes de 40° .

La suspension est préparée dans une petite section séparée de la section d'essai par une vanne « guillotine ». Cette vanne en plexiglas isole les deux sections sur toute la hauteur du canal. Ce modèle de vanne présente sur d'autres l'avantage de déplacer très peu de fluide à l'ouverture [Beghin, 1979].

La section de préparation est divisée horizontalement en deux parties qui communiquent entre elles :

1. La partie supérieure est remplie d'eau pure afin d'égaliser les pressions de part et d'autre de la vanne. Des tubes de trop plein sont également installés pour éviter toute surpression dans le canal lors du remplissage.
2. La partie inférieure est remplie de fluide lourd. Sa contenance est relativement faible : la section est de 230 cm^2 , soit 11,5 cm de hauteur et 20 cm de longueur (la largeur du réservoir étant la même que celle du canal d'essai).

Enfin un système d'agitateurs à hélice permet, pour les fluides lourds composés de solides en suspension dans l'eau, un brassage efficace de fluide afin de limiter le phénomène de sédimentation durant la période de préparation de l'expérience. Cependant, l'agitation est supprimée 1 à 2 minutes avant le déclenchement de l'écoulement afin de n'avoir dans le canal que des fluides au repos.

8.2.1.2 Mesures

Beghin s'est intéressé à l'évolution globale de la bouffée (hauteur, longueur, vitesse du front) d'un point de vue quantitatif. Les mesures sont effectuées par analyse de clichés photographiques de l'écoulement.

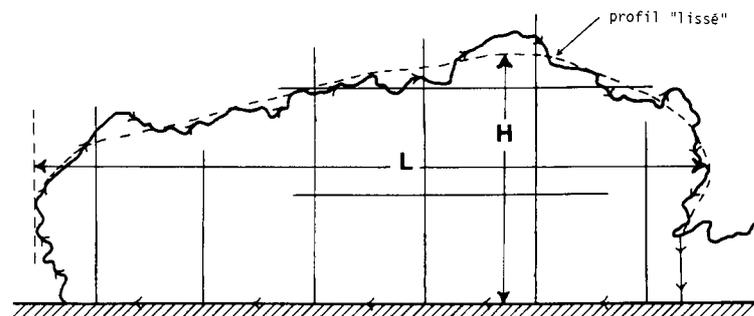


FIG. 8.2 – Exemple d'évaluation par Beghin de la hauteur H et de la longueur L d'une bouffée à partir de son profil réel obtenu sur photographie (d'après Beghin [1979]).

En traçant le contour de chaque bouffée, il évalue sa hauteur et sa longueur, en ayant recours, parfois, à un lissage lorsque l'interface est très irrégulière et présente des excroissances marquées (cf. figure 8.2).

La vitesse du front de la bouffée est obtenue par interpolation à partir de deux photos successives en repérant la position du front. La fréquence de prise de vue (1 ou 2 photos à la seconde) permet de suivre l'écoulement pendant une quinzaine de secondes, c'est-à-dire sur des distances d'environ 150 à 200 cm [Beghin, 1979].

8.2.2 Caractéristiques des essais sélectionnés

Beghin utilise trois types de fluides lourds. Nous n'en avons retenu qu'un, celui qui correspond à des suspensions de sable, pour lequel les phénomènes de sédimentation sont présents. Le sable utilisé a une granulométrie moyenne de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ (silts).

Les densités sont de l'ordre de 1,02 et cela ne semble pas augmenter la viscosité des suspensions [Beghin, 1979]. Les écoulements sont donc dans le régime dit de « Boussinesq » (cf. section 4.1.2 page 78). La fraction volumique associée est $\phi_0 \approx 0.01212$.

Les fluides étant au repos, la vitesse initiale peut être considérée comme nulle. Les essais sélectionnés

d (μm)	ρ	V_0	h_0	l_0	U_0	ϕ_0
10	1.02	0.023	0.115	0.2	0	0.01212

TAB. 8.2 – Conditions initiales expérimentales des expériences réalisées par Beghin. V_0 est le volume par unité de largeur.

ont donc tous les mêmes caractéristiques physiques (cf. tableau 8.2). Le paramètre variable est la pente,

N°Expérience	Ep0	Ep7,5	Ep10	Ep15	Ep20	Ep25
pente	0°	7.5°	10°	15°	20°	25°

TAB. 8.3 – La pente est le paramètre variable de ces essais de Beghin.

qui prend des valeurs comprises entre 0° et 25°. Les caractéristiques des essais sont résumées dans le tableau 8.3.

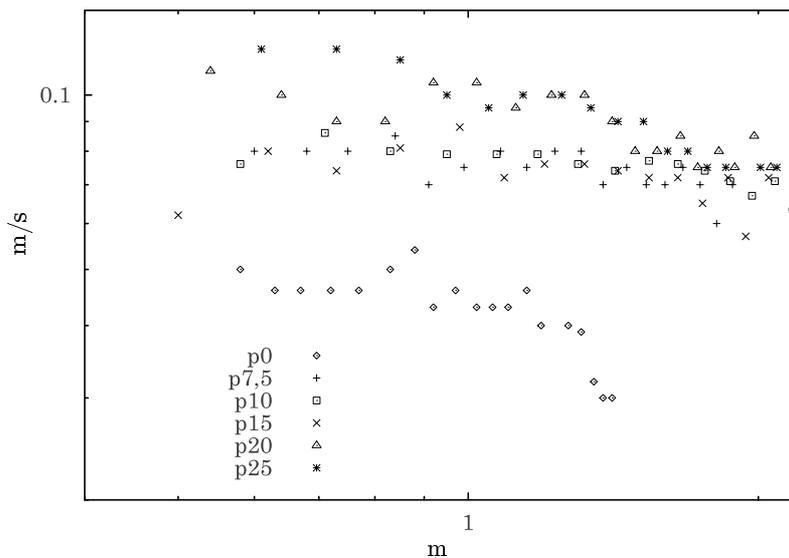


FIG. 8.3 – Vitesse du front en fonction de la position du front : données de Beghin [1979].

Les valeurs expérimentales de la vitesse du front en fonction de la position du front sont représentées sur la figure 8.3.

On remarque une faible dispersion des résultats pour les pentes comprises entre 7,5° et 15°. De même les courbes pour 20° et 25° sont chevauchantes à partir de 1 m. Le comportement de l'écoulement sur une pente nulle est bien différencié.

8.2.3 Inversion partielle sur les conditions initiales

Nous cherchons ici les conditions initiales optimales des essais de Beghin [1979]. Les reconstructions de la dynamique sont représentées sur la figure 8.4 page suivante.

Les conditions initiales optimisées sont données dans le tableau 8.4 page suivante. Les courbes sont bien ordonnées, mais dans l'intervalle de recherche que nous nous sommes spécifié, nous ne trouvons pas

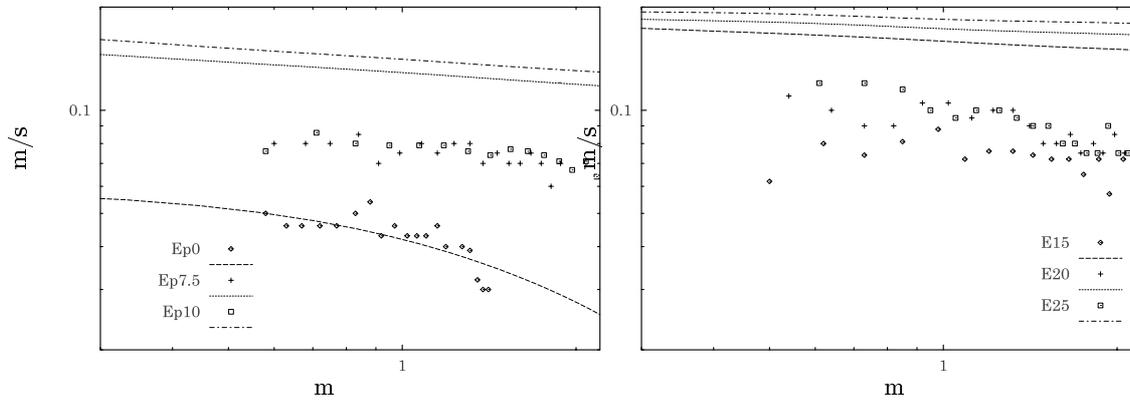


FIG. 8.4 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front : données de Beghin.

Exp. N	penne	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	coût
		0.01 – 0.2	0 – 0.2	0 – 0.2	0.01 – 0.01212	
Ep0	0°	0.0100015	9.20145e – 06	0.0594399	0.0100013	0.00924026
Ep7.5	7.5°	0.01	8.47679e – 07	0.173075	0.01	0.498137
Ep10	10°	0.0100001	2.54365e – 09	0.19997	0.0100002	0.684063
Ep15	15°	0.01	4.52644e – 07	0.199988	0.01	1.42619
Ep20	20°	0.01	8.89335e – 08	0.199996	0.01	0.899213
Ep25	25°	0.01	4.24092e – 09	0.199997	0.01	1.11307

TAB. 8.4 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : données de Beghin.

de solutions quantitativement satisfaisantes (sauf pour le cas de la pente nulle) : les bornes des intervalles de recherche sont atteintes. Deux hypothèses peuvent être avancées :

- L'intervalle de recherche est trop restreint (vitesse U_0^* et ϕ_0), la fraction volumique pouvant peut-être être plus faible, vu le temps de repos des suspensions (1 à 2 minutes d'après Beghin [1979]) ;
- Les paramètres physiques ne sont pas appropriés. C'est ce que nous testerons avec l'inversion totale.

8.2.4 Inversion totale

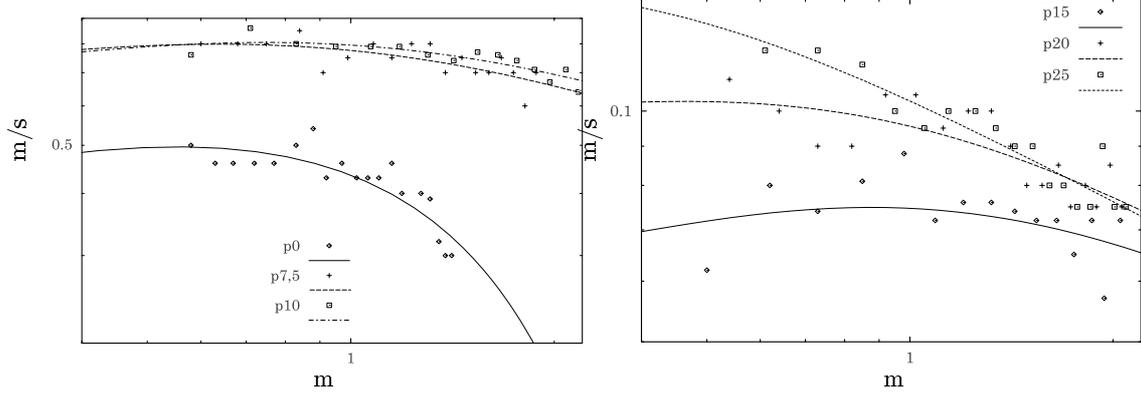


FIG. 8.5 – Inversion totale. Vitesse du front en fonction de la position du front : données de Beghin.

Les reconstructions de la dynamique sont représentées sur la figure 8.5. Elles sont plus satisfaisantes.

Exp. N	pente	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	coût
		0.01 – 0.2	0 – 0.2	0 – 0.2	0.01 – 0.01212	
Ep0	0°	0.0167223	0.0141182	0.000537024	0.0100648	0.0056886
Ep7.5	7.5°	0.0212493	0.0167562	0.0031736	0.0113362	0.00337393
Ep10	10°	0.020228	0.00664605	0.000147234	0.0115446	0.00113907
Ep15	15°	0.017784	0.00640913	0.00157676	0.0114513	0.00749722
Ep20	20°	0.0320016	0.00538109	0.0206913	0.0101975	0.00506541
Ep25	25°	0.0552437	0.08649	0.00640086	0.0108819	0.00292053

TAB. 8.5 – Inversion totale. Conditions initiales des reconstructions : Données de Beghin.

Les conditions initiales des reconstructions, ainsi que l'erreur relative moyenne, sont indiquées dans le tableau 8.5. Les hauteurs initiales sont relativement classées de façon croissante en fonction de la pente.

Exp. N	pente	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 10	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
Ep0	0°	0.00929503	9.7507	0.000126956	0.786517	2.95926
Ep7.5	7.5°	0.00667552	7.15184	0.379487	0.99947	0.958652
Ep10	10°	0.0341069	2.34327	0.401776	0.995232	2.23261
Ep15	15°	0.00679486	8.10644	0.749612	0.970846	2.37235
Ep20	20°	0.0908345	8.51691	0.346096	0.91746	0.10014
Ep25	25°	0.0264586	5.47774	1.10513	0.97792	2.94868

TAB. 8.6 – Inversion totale. Paramètres physiques des reconstructions : Données de Beghin.

Les paramètres physiques optimisés sont reportés dans le tableau 8.6.

Certaines valeurs des paramètres atteignent les bornes de l'intervalle de recherche. Il n'y a pas de classement apparent des résultats.

Certaines valeurs des paramètres sont peu réalistes :

- Le coefficient de friction C_0 pour les expériences Ep20 et Ep25 est compris entre 0,025 et 0,09.
- Le rapport des coefficients d'incorporation d'eau C_1 et C_2 varie entre 0.37 et 1.10, alors qu'il est spécifié expérimentalement, pour des écoulements stationnaires, à 0.075.

On peut avancer trois hypothèses pour expliquer ce fait :

1. Les données étant très bruitées, il n'est pas sûr que le minimum trouvé corresponde au jeu de données réelles, le minimum réel étant « caché » par le bruit.
2. Les données contraignent trop peu le modèle ;
3. Le nombre de minima est trop élevé, et la méthode inverse n'est plus efficace.

8.2.5 Conclusions

Les inversions partielles sur les conditions initiales ont montré la capacité du modèle à reconstruire qualitativement les données dynamiques (courbes bien ordonnées).

L'inversion totale, rendant possible la recherche des paramètres, permet des reconstructions quantitatives plus satisfaisantes. Le manque de données, ou le bruit, ne permet cependant pas de contraindre suffisamment les paramètres pour les identifier clairement.

8.3 Expériences du CEMAGREF (1998)

Nous avons à notre disposition un jeu de données sur des expériences en canal sur pente nulle réalisées au CEMAGREF et fournies aimablement par Mohamed Naaim.

8.3.1 Caractéristiques des essais sélectionnés

Les conditions expérimentales sont les mêmes pour chacun des essais (cf. tableau 8.7). La longueur et

pente	ρ	V_0	h_0	l_0	U_0	ϕ_0
0°	1.02	0.09	0.3	0.3	0	0.01212

TAB. 8.7 – Conditions initiales expérimentales des expériences réalisées au CEMAGREF.

la hauteur du réservoir sont de 30 cm. Le volume par unité de largeur du réservoir est de 900 cm³.

N° Exp.	Mb22	S23	S32	Mb34	Mb62	S70
d (μm)	0-50 = 22	23	32	30-40 = 34	40-70 = 62	70

TAB. 8.8 – Caractéristiques des expériences réalisées au CEMAGREF. BV indique que le matériau utilisé est des billes de verre, S indique que le matériau est du sable.

Les caractéristiques de ces essais sont résumées dans le tableau 8.8.

La figure 8.6 page suivante représente les données de la position du front en fonction du temps.

Les suspensions de sables sont plus rapides que les suspensions de micro-billes, et cela pour une granulométrie identique (cf. figure 8.6 page ci-contre à gauche). Ces expériences mettent en évidence l'importance de la friction fluide-grain qui intervient par l'intermédiaire de la vitesse de sédimentation.

8.3.2 Inversion partielle sur les conditions initiales

Nous cherchons les conditions initiales optimales des essais.

Les reconstructions de la dynamique sont représentées sur la figure 8.7 page suivante. L'accord est très bon.

Les conditions initiales optimisées sont données dans le tableau 8.9 page ci-contre. Les suspensions de micro-billes ont une hauteur initiale plus faible que les suspensions de sable, à granulométrie équivalente.

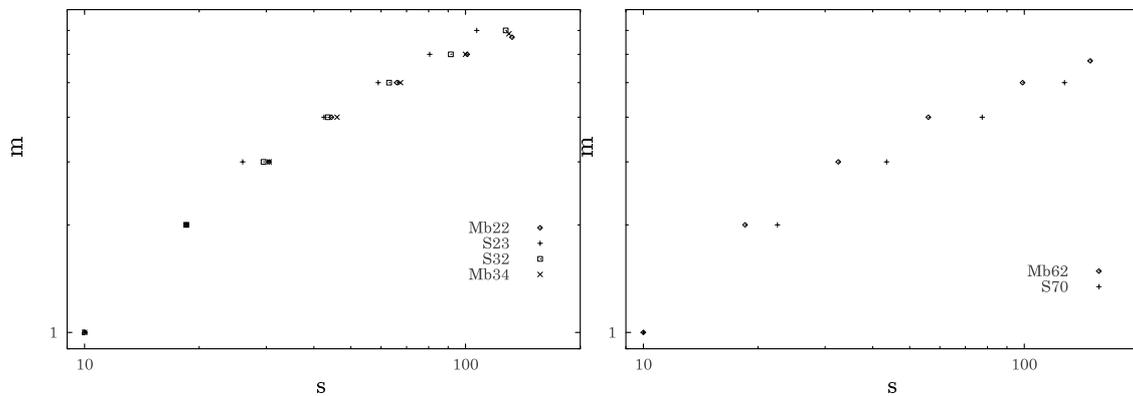


FIG. 8.6 – Position du front en fonction du temps : données du CEMAGREF.

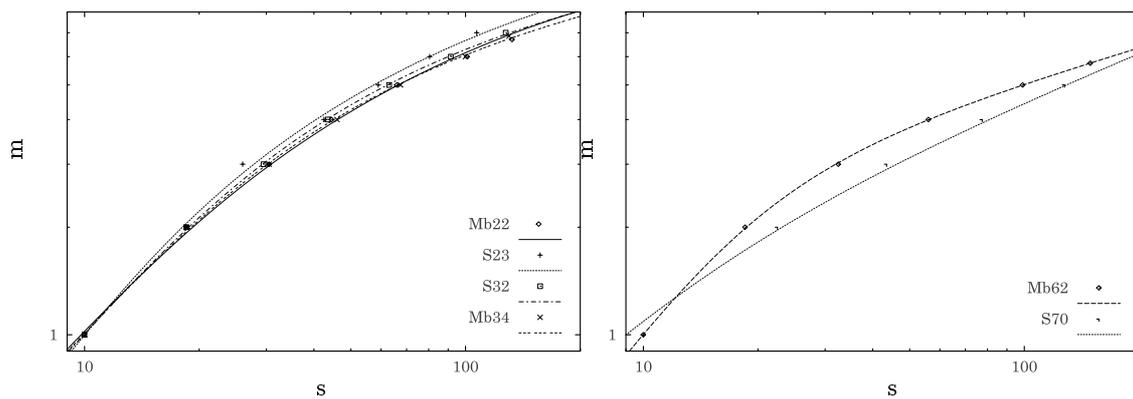


FIG. 8.7 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Position du front en fonction du temps : données du CEMAGREF.

Exp. N	Gran.	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	coût
		0.01 – 0.3	0 – 0.2	0 – 0.2	0.01 – 0.01212	
Mb22	0-50 = 22	0.0499369	$1.09454e - 06$	0.075694	0.0100011	0.000692401
S23	23	0.0704105	0.00490816	0.0320298	0.0100316	0.000778687
S32	32	0.0321123	0.0556435	0.0158392	0.010007	6.79119e-05
Mb34	30-40 = 34	0.0293494	0.0602198	0.0154668	0.010018	0.00022852
Mb62	40-70 = 62	0.0522732	0.0427394	0.000605346	0.011433	3.01818e-05
S70	70	0.0193574	0.117465	$1.6062e - 05$	0.0100018	0.00180894

TAB. 8.9 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : Données du CEMAGREF.

8.3.3 Inversion totale

Nous recherchons ici les paramètres physiques et les conditions initiales optimaux.

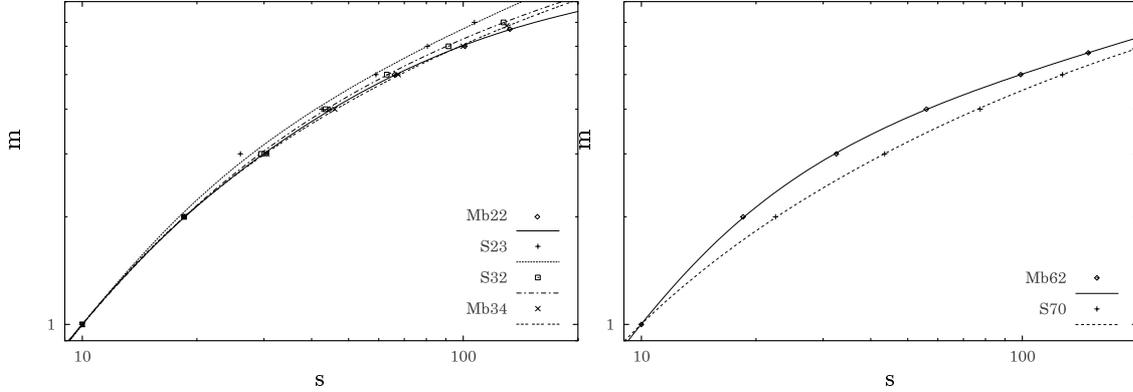


FIG. 8.8 – Inversion totale. Position du front en fonction du temps : données du CEMAGREF.

Les reconstructions de la dynamique sont tracées sur la figure 8.8. Elles sont satisfaisantes.

Exp. N	Gran.	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	coût
		0.01 – 0.3	0 – 0.2	0 – 0.2	0.01 – 0.01212	
Mb22	0-50 = 22	0.0631604	0.030346	0.00323462	0.0103673	6.41558e-05
S23	23	0.0634125	0.0261502	0.00636112	0.0102247	0.000686504
S32	32	0.0551037	0.0302691	0.018536	0.0101666	1.30782e-05
Mb34	30-40 = 34	0.0854307	0.00314485	0.00465976	0.0101792	3.1888e-05
Mb62	40-70 = 62	0.0926745	0.000814694	0.00125782	0.0100013	1.35664e-05
S70	70	0.085675	0.0151735	0.000638824	0.0117882	1.70823e-05

TAB. 8.10 – Inversion totale. Conditions initiales des reconstructions : Données du CEMAGREF.

Le tableau 8.10 contient les conditions initiales optimisées. Les hauteurs initiales sont approximativement classées en fonction de la granulométrie.

L'erreur relative moyenne est faible, indiquant une bonne reconstruction des données.

Exp. N	Gran.	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 0.1	0.1 – 10
Mb22	0-50 = 22	0.0087441	4.20102	0.00686378	0.0785333	4.63492
S23	23	0.0072585	0.938685	0.0031063	0.0994796	4.43864
S32	32	0.00324116	1.0749	0.00511325	0.0716374	2.52982
Mb34	30-40 = 34	0.00287456	0.700163	0.00650588	0.0583585	0.476028
Mb62	40-70 = 62	0.00115122	0.798617	0.00282074	0.0425335	2.64702
S70	70	0.00181977	0.563085	0.0433166	0.0719752	0.105285

TAB. 8.11 – Inversion totale. Paramètres physiques des reconstructions : Données du CEMAGREF.

Les paramètres physiques reconstruits sont reportés dans le tableau 8.11. La figure 8.9 page ci-contre représente la répartition des valeurs des coefficients pour les six expériences.

Les variations de valeur les plus importantes sont sur la diffusivité des particules C_4 . Le coefficient de friction C_0 est relativement bien contraint dans un intervalle vraisemblable sur toutes les données. Les coefficients d'incorporation de fluide (C_1 et C_2) sont d'un ordre de grandeur raisonnable sauf pour l'expérience S70. La fraction basale C_3 est relativement bien contrainte sauf pour l'expérience Mb22.

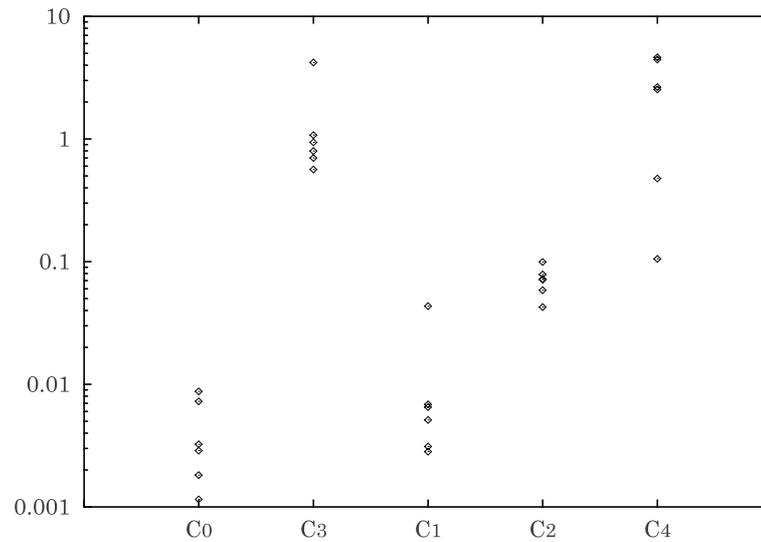


FIG. 8.9 – Inversion totale. Répartition des valeurs des coefficients pour les six expériences du CEMAGREF.

8.3.4 Conclusions

Ici encore, les inversions partielles ont permis une reconstruction qualitative satisfaisante, par la recherche de conditions initiales compatibles avec le modèle théorique.

L'inversion totale a permis une reconstruction quantitative correcte des données. Les données étant moins bruitées que pour les expériences de Beghin [1979], les paramètres physiques sont ici mieux contraints (cf. figure 8.9).

8.4 Expériences en canal de Laval (1988)

Laval [1988] a entrepris de modéliser des écoulements de type « bouffée turbide » afin de mieux comprendre les phénomènes qui régissent la mise en place des séries turbiditiques et l'édification des éventails subaquatiques profonds. Ses travaux sont dans la lignée de ceux effectués par Beghin [1979] et Ravenne et Beghin [1983].

8.4.1 Présentation des expériences

8.4.1.1 Dispositif expérimental

Les expériences se déroulent dans un bassin rempli d'eau, dont un des côtés est en plexiglas pour permettre les observations. Le modèle réduit est immergé dans ce bassin. Il se compose d'un grand canal en plexiglas dont les dimensions sont :

- 20 cm de largeur ;
- 35 cm de hauteur ;
- 400 cm de longueur.

L'inclinaison de ce canal permet de reproduire des pentes comprises entre 0° et 10° .

Un réservoir, destiné à recevoir le fluide dense et d'une capacité maximale de 11 litres, est fixé à l'une des extrémités du canal. L'autre extrémité du canal est laissée libre (cf. figure 8.10 page suivante).

Le fluide dense est libéré dans le canal par une vanne « guillotine » étanche. Enfin, deux agitateurs verticaux assurent la mise en suspension des particules de sable.

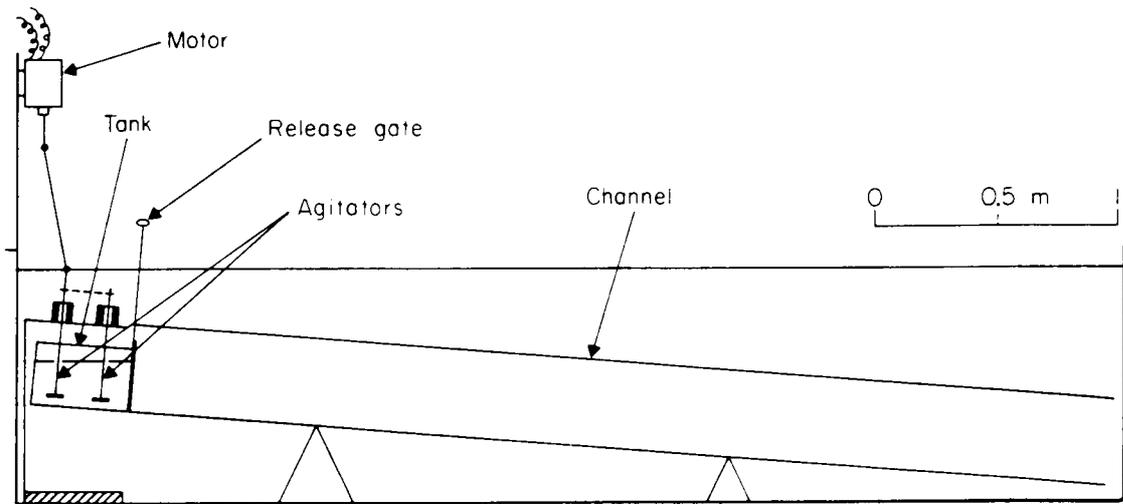


FIG. 8.10 – Canal et système d'agitation, immergés dans le canal, utilisés par Laval (d'après Laval [1988]).

8.4.1.2 Mesures

Les essais réalisés par Laval permettent l'étude de la répartition du sable déposé dans le canal (sédimentation).

Après chaque écoulement le sable déposé est récupéré dans chacun des huit secteurs de 50 cm définis sur toute la longueur du canal, ainsi que dans le réservoir. La mesure des quantités de sable recueilli dans chaque secteur permet de déterminer le pourcentage de sable récupéré dans le canal et dans le réservoir par rapport à la masse totale de sable initialement injectée.

Il est alors possible :

- de calculer la masse de sable transportée au delà des limites du canal (différence entre la masse initiale et la masse déposée dans le canal et le réservoir) ;
- de calculer la densité de l'écoulement à la sortie du réservoir (différence entre la masse initiale et la masse déposée dans le réservoir) ;
- de tracer les courbes de répartition des dépôts dans le canal. Ces courbes correspondent au lissage de l'histogramme de répartition du sable dans les huit secteurs du canal.

8.4.2 Caractéristiques des essais sélectionnés

Plusieurs types de suspensions ont été utilisés par Laval. Nous n'avons retenu que les essais avec du sable en suspension dans de l'eau pure, et dont l'excès de densité par rapport au fluide ambiant est uniquement dû au sable (suspensions pures). Les essais de sable en suspension dans une eau salée (suspensions mixtes) n'ont pas été utilisés.

Le sable est un sable naturel, essentiellement quartzueux, de densité $2,6 \text{ g/cm}^3$.

Parmi les nombreux essais de Laval, nous n'avons retenu que les essais pour lesquels les mesures de la vitesse et l'histogramme de répartition du sable étaient disponibles. Ces essais permettent de quantifier :

- l'influence de la taille des grains ;
- l'influence de la pente ;
- l'influence de la masse initiale.

Pour tous ces essais le volume initial de la suspension est de 8 litres.

Les essais ont tous en commun les conditions initiales données par le tableau 8.12 page suivante.

Les caractéristiques spécifiques des essais sont résumées dans le tableau 8.13 page ci-contre.

V_0	h_0	l_0	U_0	ϕ_0
0.04	0.12	0.33	0	0.03125

TAB. 8.12 – Conditions initiales expérimentales communes des expériences réalisées par Laval. V_0 est le volume par unité de largeur.

Caractéristique	N°Exp.	d (μm)	pente	masse de sable (g)	ϕ_0	ϕ_{0s}
<i>granulométrie</i>	E41	56	1°	650	0.03125	0.0275
	E48	71	1°	650	0.03125	0.0225
	E39	90	1°	650	0.03125	0.02375
	E47	112	1°	650	0.03125	0.018125
	E46	142	1°	650	0.03125	0.00875
<i>pente</i>	E39	90	1°	650	0.03125	0.02375
	E34	90	3°	650	0.03125	0.02375
	E37	90	5°	650	0.03125	0.024375
<i>masse</i>	E39	90	1°	650	0.03125	0.02375
	E57	90	1°	300	0.014375	0.0075

TAB. 8.13 – Conditions initiales expérimentales des expériences réalisées par Laval. ϕ_{0s} est la fraction volumique en sortie de réservoir calculée à partir de la masse déposée dans le réservoir.

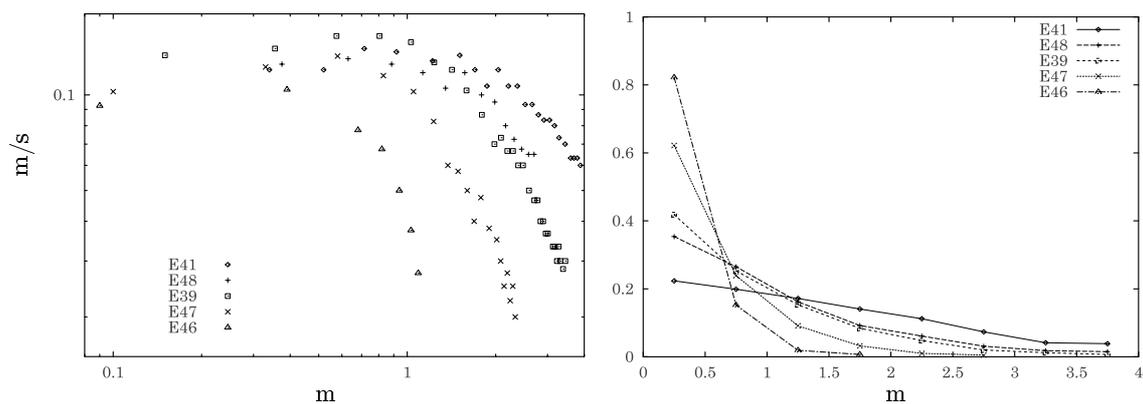


FIG. 8.11 – Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite): Expériences à granulométrie variable de 56 μm à 142 μm (données de Laval [1988]).

La figure 8.11 page précédente représente les données de la vitesse du front en fonction de la position (à gauche) et le lissage de l'histogramme de répartition du dépôt de sable (à droite) pour les expériences à granulométrie variable.

Les comportements asymptotiques sont bien marqués et différenciés au delà de 1,5 m. Sur le premier mètre, les courbes sont peu ordonnées, ce qui reflète la variabilité des conditions initiales, comme le souligne les mesures de fraction volumique effectuées par [Laval, 1988] à la sortie du réservoir (cf. tableau 8.13 page précédente).

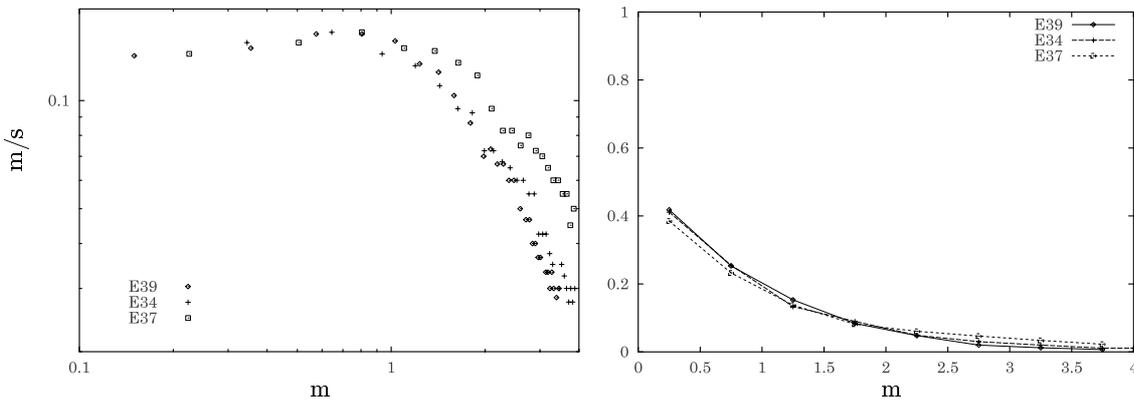


FIG. 8.12 – Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable de 1° à 5° (données de Laval [1988]).

La figure 8.12 représente les données de la vitesse du front en fonction de la position (à gauche) et le lissage de l'histogramme de répartition du dépôt de sable (à droite) pour les expériences à pente variable.

Les comportements asymptotiques sont relativement similaires. La différence de vitesse plus marquée quantitativement pour la pente de 5° peut être expliquée, ici encore, par une faible variation de la fraction volumique.

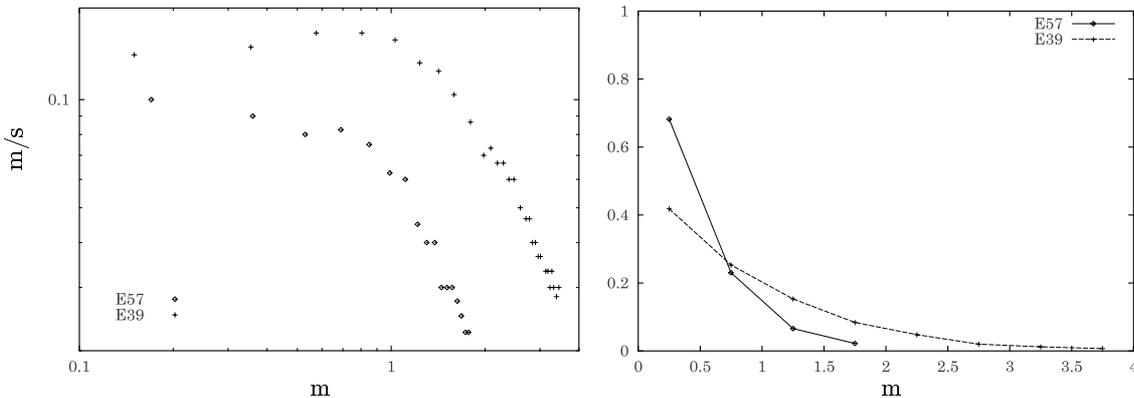


FIG. 8.13 – Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable de 300 g à 650 g (données de Laval [1988]).

La figure 8.13 représente les données de la vitesse du front en fonction de la position (à gauche) et le lissage de l'histogramme de répartition du dépôt de sable (à droite) pour les expériences à masse initiale variable. Les comportements asymptotiques sont similaires.

Enfin, notons que ces résultats sont qualitativement tout à fait cohérents avec les expériences numériques du chapitre précédent.

8.4.3 Inversion partielle sur les conditions initiales

8.4.3.1 Préliminaires

Comme nous l'avons souligné précédemment, le modèle numérique n'est pas compatible avec le protocole expérimental du fait de la forme parallélépipédique du réservoir, fermé sur l'arrière. De plus, les paramètres initiaux, entachés d'incertitudes, jouent un rôle essentiel sur le développement quantitatif de l'écoulement.

Dans les expériences, l'arrêt des agitateurs introduit une incertitude sur la fraction volumique initiale ϕ_0 . Laval [1988] a, lors de ses expériences, calculé la fraction volumique ϕ_{0s} des écoulements à la sortie du réservoir.

La fraction volumique initiale réelle ϕ_{0r} de l'écoulement est donc comprise entre ϕ_0 et ϕ_{0s} .

	ϕ_{0r}	h_0
E39t	0.03125 (ϕ_0)	0.12
E39s	0.02375 (ϕ_{0s})	0.12
E39sh	0.02375 (ϕ_{0s})	0.8
E46t	0.03125 (ϕ_0)	0.12
E46s	0.00875 (ϕ_{0s})	0.12
E46sh	0.00875 (ϕ_{0s})	0.11

TAB. 8.14 – Conditions initiales des tests préliminaires.

Le tableau 8.14 contient les valeurs de ϕ_{0r} et h_0 des trois tests effectués pour les deux essais E39 et E46 (les autres conditions initiales sont celles données par les tableaux 8.13 page 191 et 8.12 page 191, les paramètres physiques sont ceux par défaut du modèle donné par le tableau 8.1 page 180) :

1. On teste d'abord les conditions initiales théoriques (E39t et E46t) ;
2. On considère les fractions volumiques de sortie du réservoir comme conditions initiales (E39s et E46s) ;
3. Enfin, on considère que l'on peut superposer une correction de la hauteur initiale (E39sh et E46sh), telle que les écoulements à grains fins et concentrés s'effondrent de façon plus importante (cf. section 7 page 155 sur le comportement qualitatif des écoulements).

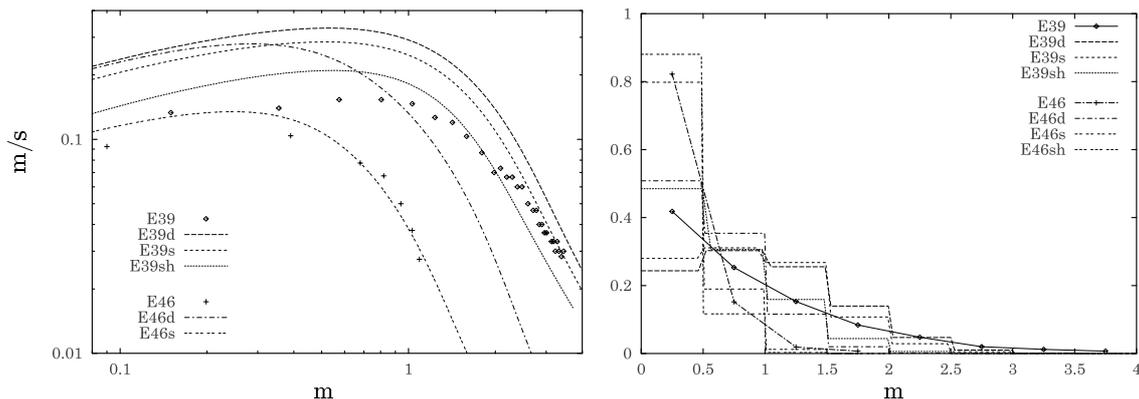


FIG. 8.14 – Tests préliminaires sur l'influence de la fraction volumique initiale et la hauteur initiale : vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite). cf. tableau 8.14 pour la définition des paramètres.

Comme le montre la figure 8.14, les deux valeurs extrêmes de la fraction volumique engendrent des variations de comportement quantitatif importantes sur la dynamique et le dépôt de l'écoulement. Une fraction volumique plus faible, induite par une sédimentation prématurée dans le réservoir, semble plus appropriée comme condition initiale (E39s-sh et E46s-sh).

Les plus gros écarts apparaissent au début de la reconstruction. La sensibilité du modèle par rapports aux variations des conditions initiales est importante. Les conditions initiales ont donc un impact quantitatif très important sur la dynamique de l'écoulement.

À noter le bon accord des comportements asymptotiques expérimentaux et numériques. Les paramètres physiques du modèle théorique peuvent cependant être ajustés pour un accord parfait.

Nous cherchons les conditions initiales optimales des essais à l'aide des données dynamiques et des histogrammes de dépôt.

8.4.3.2 Expériences à granulométrie variable

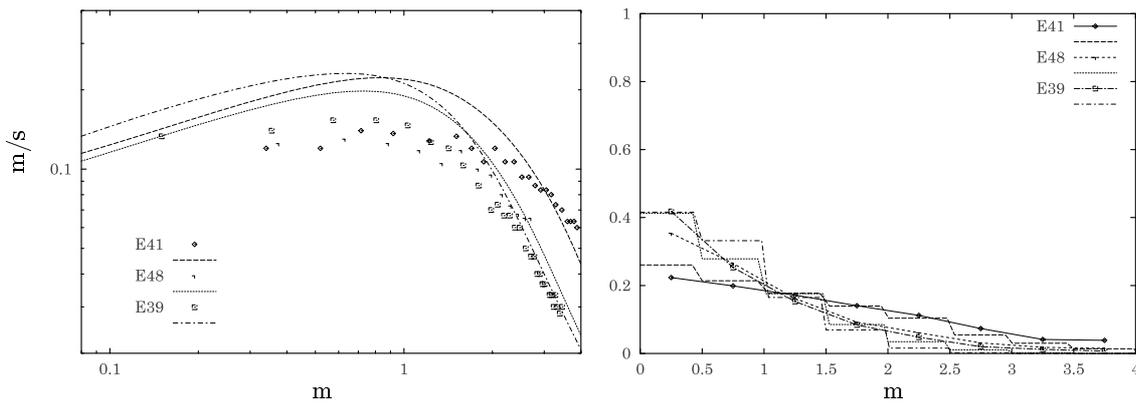


FIG. 8.15 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

Les reconstructions sont satisfaisantes tant pour la dynamique que pour l'histogramme de dépôt. Les courbes se croisent au même point (cf. figure 8.15) et respectent les différences de granulométrie.

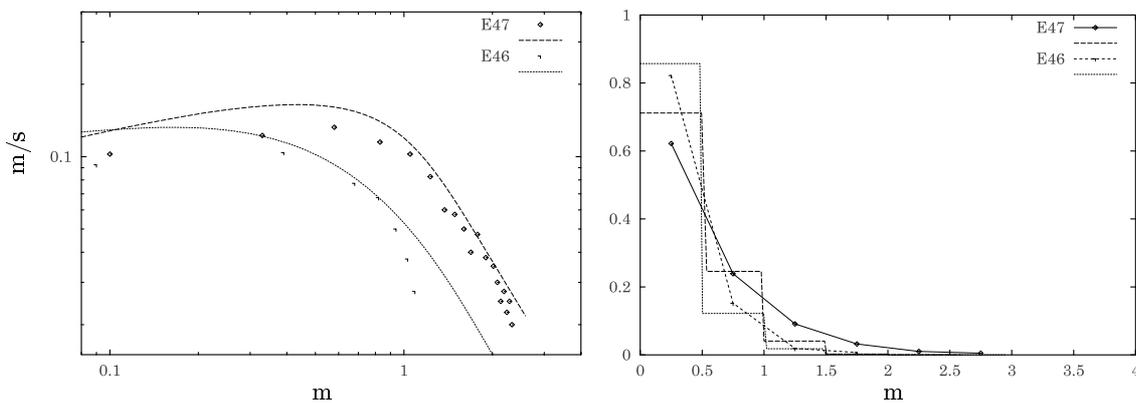


FIG. 8.16 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

Pour les granulométries plus fortes, les reconstructions sont également satisfaisantes (cf. figure 8.16).

Les conditions initiales optimisées sont donnés dans le tableau 8.15 page suivante. D'une façon générale, les fractions volumiques ϕ_{0s} de sortie du réservoir, calculées par Laval, sont retrouvées.

Les coûts des reconstructions (erreurs relatives moyennes) sont donnés dans le tableau 8.16. Elle est généralement plus importante par rapport aux données de dépôt que par rapport aux données de vitesses.

Exp. N	Gran.	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E41	56	0.0416297	0.0459388	0.016588	0.0275001	0.0275
E48	71	0.045538	0.0433825	0.0100282	0.0225	0.0225
E39	90	0.0688808	0.0326815	0.00638918	0.0237502	0.02375
E47	112	0.0703163	$1.05334e - 07$	0.0641818	0.018125	0.018125
E46	142	0.038048	0.1	0.00380032	0.00875007	0.00875

TAB. 8.15 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E41	0.12998	0.0744209	0.1022
E48	0.11864	0.293766	0.206203
E39	0.0721724	0.416926	0.240141
E47	0.0427459	0.534956	0.288851
E46	0.114801	0.112675	0.113738

TAB. 8.16 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Coûts des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

8.4.3.3 Expériences à pente variable

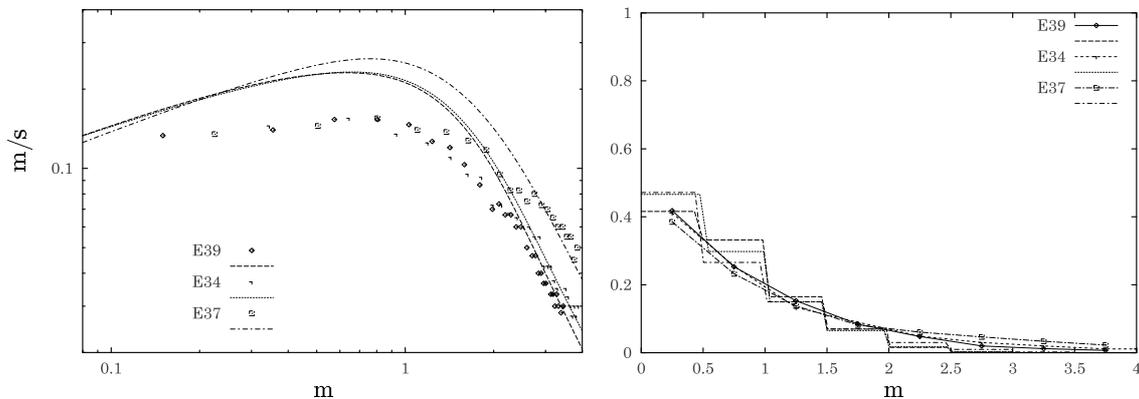


FIG. 8.17 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) et lissage de l’histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).

Les reconstructions sont satisfaisantes tant pour la dynamique que pour l’histogramme de dépôt (cf. figure 8.17).

Les conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.17 page suivante. Les fractions volumiques ϕ_{0s} de sortie du réservoir sont retrouvées. À noter les conditions initiales très proches pour les essais E39 et E34. La différence de comportement de l’essai E37 est du, plus qu’à la pente, à des conditions initiales (fraction volumique, vitesse de front ...) sensiblement différentes de celles des autres essais.

Les coûts des reconstructions (erreurs relatives moyennes) sont données dans le tableau 8.18. Ici, encore l’erreur relative est plus importante par rapport aux données de dépôt.

Exp. N	pente	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	1°	0.0688808	0.0326815	0.00638918	0.0237502	0.02375
E34	3°	0.0682102	0.00311035	0.0413778	0.0237501	0.02375
E37	5°	0.0598572	0.000884278	0.0217054	0.024375	0.024375

TAB. 8.17 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.0721724	0.416926	0.240141
E34	0.0821506	0.477862	0.280006
E37	0.131656	0.351176	0.241416

TAB. 8.18 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Coûts des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

8.4.3.4 Expériences à masse variable

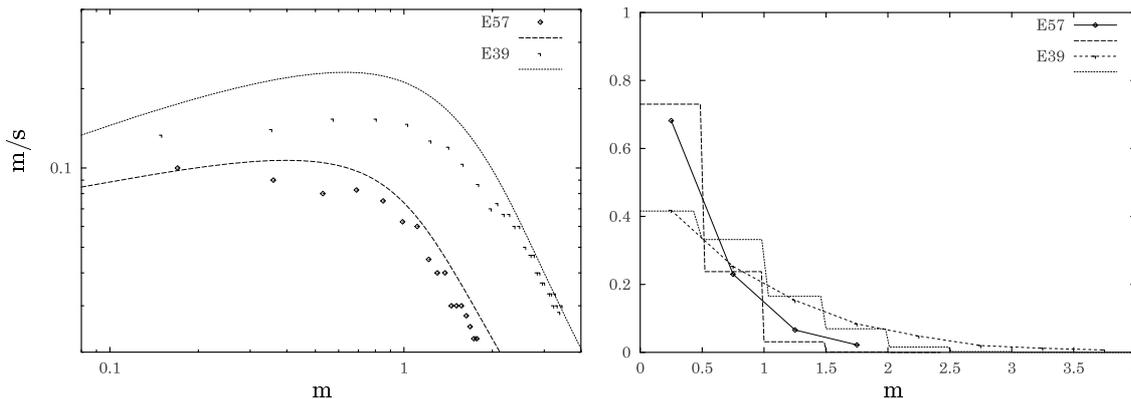


FIG. 8.18 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) et lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).

La figure 8.18 montre les données reconstruites pour les expériences à masse variable. L'accord est satisfaisant.

Les fractions volumiques initiales (cf. tableau 8.19 page suivante) correspondent aux fractions volumiques de sortie de réservoir calculées par Laval.

Les coûts des reconstructions (erreurs relatives moyennes) sont donnés par le tableau 8.20 page ci-contre. L'erreur relative moyenne est plus importante par rapport aux données de dépôt que par rapport aux données de vitesses.

8.4.3.5 Conclusions

La recherche de conditions initiales compatibles avec le modèle théorique permet de reconstruire d'une façon qualitativement satisfaisante les données de vitesse et les histogrammes de dépôt.

Exp. N	mass	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	650	0.0688808	0.0326815	0.00638918	0.0237502	0.02375
E57	300	0.0651664	$2.20557e-07$	0.0581487	0.00750001	0.0075

TAB. 8.19 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.0721724	0.416926	0.240141
E57	0.0570893	0.296091	0.176589

TAB. 8.20 – Inversion partielle sur les conditions initiales. Coûts des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

8.4.4 Inversion totale

La question qui se pose naturellement est de savoir si la performance des inversions totales des expériences de Beghin [1979] et du CEMAGREF est due au grand nombre de paramètres libres, ou si c'est bien la dynamique du système qui a été retrouvée.

Les expériences réalisées par Laval [1988] fournissent deux jeux de données : un sur la vitesse du front, un sur l'histogramme de répartition des dépôts.

Nous nous intéresserons dans un premier temps à l'inversion totale sur :

- le dépôt seul;
- la dynamique seul.

Les inversions sur la dynamique seule permettent de tester des reconstructions dans les mêmes conditions que les expériences précédentes.

Dans un second temps, nous comparerons ces résultats à l'inversion simultanée des données de vitesse et de dépôt.

8.4.4.1 Inversion sur les histogrammes de dépôt

Expériences à granulométrie variable La figure 8.19 représente les reconstructions. Les histo-

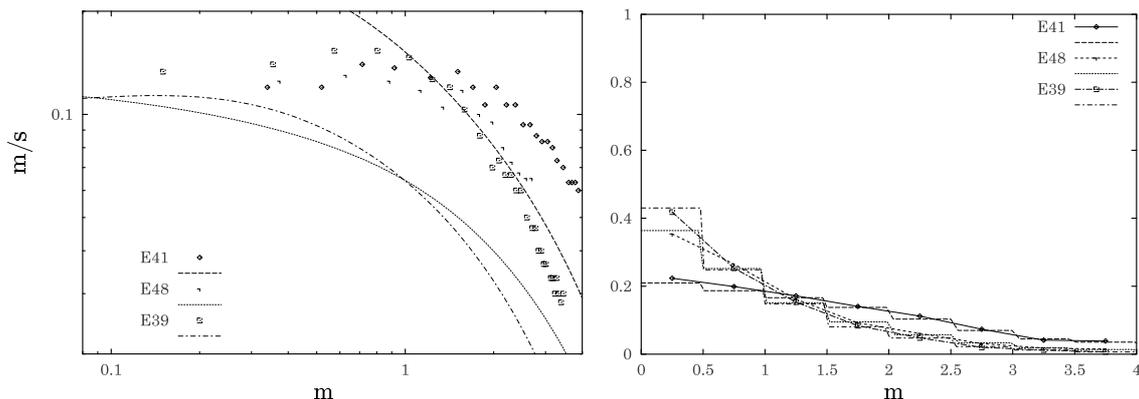


FIG. 8.19 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

grammes de dépôt (données inversées, à droite) sont reconstruits de façon satisfaisante. La reconstruction des vitesses n'est, elle, pas satisfaisante.

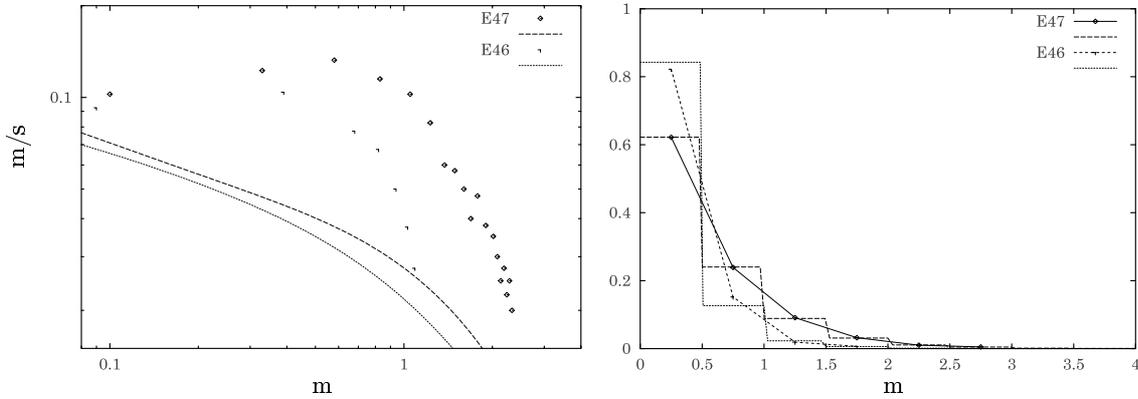


FIG. 8.20 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite): Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

La même remarque que précédemment s'applique aux granulométries plus fortes (cf. figure 8.20).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E41	0.208716	0.00396111	0.106338
E48	0.256229	0.00321802	0.129724
E39	0.28602	0.00255748	0.144289
E47	0.374164	0.0023252	0.188245
E46	0.254794	0.0208403	0.137817

TAB. 8.21 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Coûts des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Les coûts des reconstructions sont reportés dans le tableau 8.21. Si l'erreur relative par rapport aux données de dépôt est faible, elle est cependant très élevée pour la dynamique.

Exp. N	Gran.	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E41	56	0.075135	0.0836652	0.0125098	0.0305005	0.0275
E48	71	0.0175162	0.0255705	0.0990124	0.0265557	0.0225
E39	90	0.0363854	0.000703746	0.0983237	0.0238341	0.02375
E47	112	0.0102184	0.0847634	0.0801825	0.0252603	0.018125
E46	142	0.0103524	0.0921751	0.0223731	0.00876912	0.00875

TAB. 8.22 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Les conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.22. Les hauteurs initiales ne sont pas classées. Les fractions volumiques initiales sont supérieures aux fractions volumiques de sortie du réservoir mesurées par Laval.

Le tableau 8.23 page suivante contient les paramètres physiques optimisés. Les coefficients de friction restent bornés à des valeurs vraisemblables. Les histogrammes de dépôt ne semblent pas bien contraindre les paramètres.

Exp. N	Gran.	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E41	56	0.00677792	1.9641	0.0791532	0.0999924	0.408396
E48	71	0.00755473	0.41265	0.0476927	0.23101	1.35174
E39	90	0.00411752	0.489316	0.0772558	0.0514843	1.18132
E47	112	0.0180915	0.27701	0.0982285	0.105387	1.45021
E46	142	0.00100905	0.223401	0.0236927	0.0744117	2.32268

TAB. 8.23 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Expériences à pente variable Les données inversées sont très bien reproduites (cf. figure 8.21, à

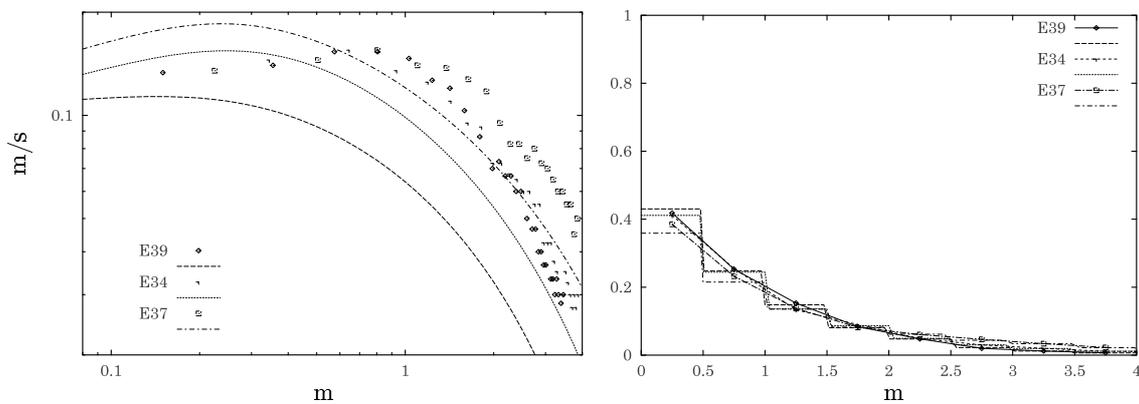


FIG. 8.21 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) et lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).

droite). Les reconstructions de la dynamique ne sont pas satisfaisantes (cf. figure 8.21, à gauche).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.28602	0.00255748	0.144289
E34	0.0837176	0.000496422	0.042107
E37	0.0886796	0.00175098	0.0452153

TAB. 8.24 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Coûts des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

La tableau 8.24 indique l'erreur relative moyenne des reconstructions. Elle est faible par rapport au données de dépôt, mais élevée par rapport aux données dynamiques.

Les conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.25 page suivante. Les hauteurs sont classées.

Les paramètres physiques optimisés sont reportés sur le tableau 8.26 page suivante. Ces paramètres sont relativement tous classés, sauf C_2 .

Expériences à masse variable La figure 8.22 représente la reconstruction des données inversées uniquement sur l'histogramme de dépôt. La restitution des vitesses est qualitativement satisfaisante.

Les coûts des reconstructions sont reportés dans le tableau 8.27 page suivante. La minimisation unique de l'erreur relative par rapport au dépôt ne permet pas de minimiser l'erreur relative par rapport à la dynamique.

Exp. N	pente	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	1°	0.0363854	0.000703746	0.0983237	0.0238341	0.02375
E34	3°	0.0503514	0.00951511	0.0751758	0.0266034	0.02375
E37	5°	0.0579812	0.00103597	0.0874691	0.0307241	0.024375

TAB. 8.25 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	pente	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E39	1°	0.00411752	0.489316	0.0772558	0.0514843	1.18132
E34	3°	0.00643828	0.752026	0.0846235	0.136214	0.696908
E37	5°	0.00940663	0.852022	0.0904278	0.0501975	0.287066

TAB. 8.26 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

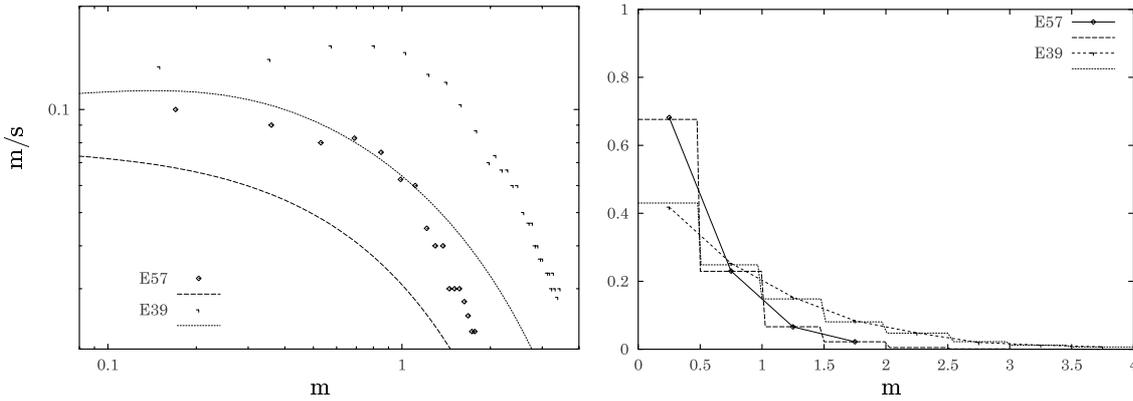


FIG. 8.22 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.28602	0.00255748	0.144289
E57	0.171172	2.08219e-05	0.0855965

TAB. 8.27 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Coûts des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	mass	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	650	0.0363854	0.000703746	0.0983237	0.0238341	0.02375
E57	300	0.0205674	0.0276121	0.0502514	0.0141938	0.0075

TAB. 8.28 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Le tableau 8.28 page ci-contre donne la valeur des conditions initiales optimisées.

Exp. N	mass	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E39	650	0.00411752	0.489316	0.0772558	0.0514843	1.18132
E57	300	0.0105639	0.450679	0.0772544	0.2321	1.99712

TAB. 8.29 – Inversion sur les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Le tableau 8.29 donne la valeur des paramètres physiques optimisés.

Conclusion En conclusion, l'inversion unique sur l'histogramme de dépôt permet de restaurer une image qualitative satisfaisante de la dynamique.

Elle ne permet cependant pas de reconstruire l'évolution en vitesse des écoulements de façon quantitativement satisfaisante.

8.4.4.2 Inversion sur les données de vitesse

Expériences à granulométrie variable La figure 8.23 représente les reconstructions. Les vitesses

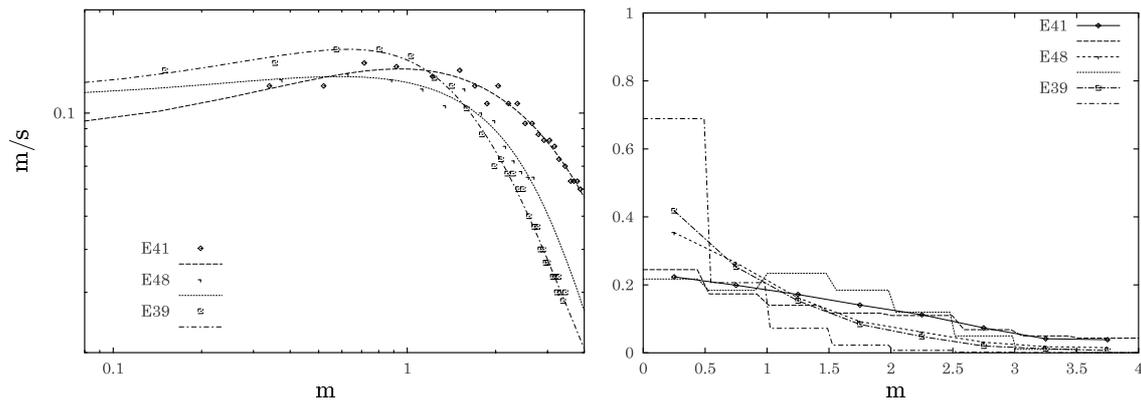


FIG. 8.23 – Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

(à gauche), données inversées, sont reconstruites de façon très satisfaisante. Si pour les expériences E41 et E48, les dépôts sont corrects, il n'en va pas de même pour l'essai E39.

La figure 8.24 page suivante présente les reconstructions pour les granulométries plus importantes. Les reconstructions de vitesse sont très correctes. Le profil de dépôt est correct pour l'essai E47, mais non pour l'essai E46.

Le tableau 8.30 page suivante donne le coût des reconstructions (erreur relative moyenne). La valeur très élevée de la reconstruction du profil de dépôt pour l'essai E46 est en partie due au fait qu'il n'y a pas de calage sur tous les points. D'une façon générale l'erreur est plus importante par rapport au dépôt que par rapport à la dynamique.

Les conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.31 page suivante. Les hauteurs initiales sont classées. Les fractions volumiques sont différentes des fractions volumiques de sortie du réservoir.

Le tableau 8.32 page suivante donne les paramètres physiques optimisés. Il n'existe pas de classement apparent. Le coefficient de friction C_0 semble être classé, mais atteint des valeurs aberrantes pour l'essai E46. Les paramètres de la reconstruction de l'essai E41 sont proches des valeurs par défaut du modèle.

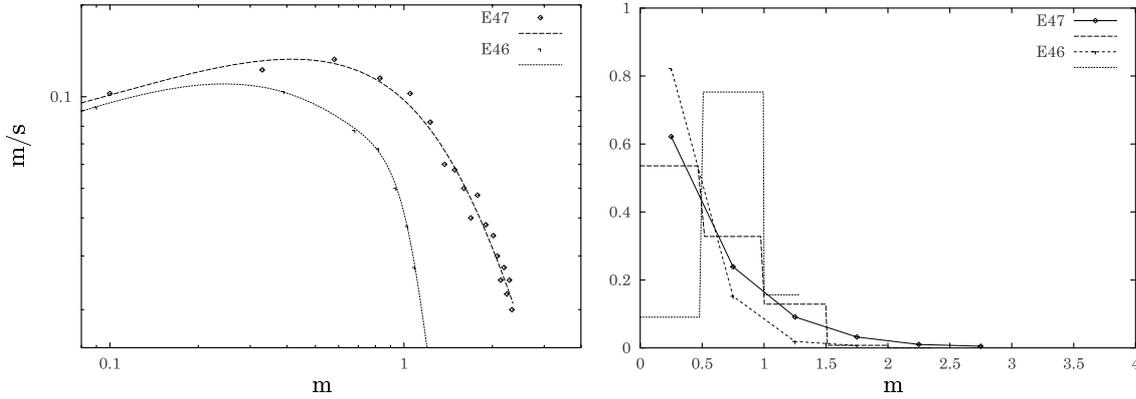


FIG. 8.24 – Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite): Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E41	0.00148466	0.0187623	0.0101235
E48	0.00235142	0.477242	0.239797
E39	0.00204794	0.586048	0.294048
E47	0.00620839	0.486376	0.246292
E46	0.000196392	17.4306	8.71539

TAB. 8.30 – Inversion sur les données de vitesse. Coût des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	Gran.	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E41	56	0.0143585	0.0370432	0.0457365	0.0282206	0.0275
E48	71	0.0128836	0.0634561	0.0453181	0.0307774	0.0225
E39	90	0.0147896	0.0672427	0.0438521	0.0242904	0.02375
E47	112	0.0386823	0.0566964	0.00156029	0.0182562	0.018125
E46	142	0.0471847	0.00050264	0.0319889	0.0282971	0.00875

TAB. 8.31 – Inversion sur les données de vitesse. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	Gran.	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E41	56	0.00408683	0.289372	0.000920683	0.0304323	0.840285
E48	71	0.00765683	0.510604	0.00310927	0.827304	3.66079
E39	90	0.0010157	0.438505	0.000406825	0.00491159	1.08065
E47	112	0.0240474	0.941598	0.0178259	0.846215	4.83875
E46	142	0.0998859	0.983187	0.000217478	0.0422714	4.99624

TAB. 8.32 – Inversion sur les données de vitesse. Paramètres physiques des reconstructions: Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Expériences à pente variable La figure 8.25 donne les reconstructions des essais sur pente variable.

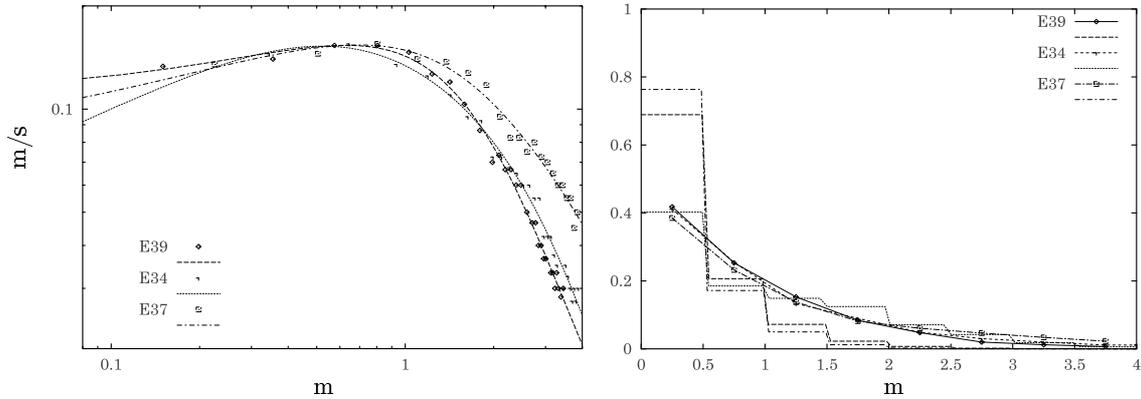


FIG. 8.25 – *Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) et lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite): Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).*

Les reconstructions dynamiques sont satisfaisantes (à gauche). La reconstruction des dépôts n'est correcte que pour l'essai E34.

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.00204794	0.586048	0.294048
E34	0.00362987	0.132987	0.0683084
E37	0.00296042	0.759332	0.381146

TAB. 8.33 – *Inversion sur les données de vitesse. Coût des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).*

Le tableau 8.33 indique le coût des reconstructions. Seul l'essai E34 a une faible valeur relative moyenne.

Exp. N	pente	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	1°	0.0147896	0.0672427	0.0438521	0.0242904	0.02375
E34	3°	0.0383915	0.00151462	0.0278451	0.0259246	0.02375
E37	5°	0.0122424	0.00908559	0.0739724	0.0243781	0.024375

TAB. 8.34 – *Inversion sur les données de vitesse. Conditions initiales des reconstructions: Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).*

Les valeurs des conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.34.

Le tableau 8.35 page suivante contient les valeurs des paramètres physiques optimisés. Les valeurs de C_3 sont proches pour les trois essais.

Expériences à masse variable La figure 8.26 page suivante représente les reconstructions pour les expériences à masse variable. La dynamique de l'écoulement est reproduite de façon satisfaisante. Si le profil de dépôt est bon qualitativement, il ne l'est pas du point de vue quantitatif.

Le tableau 8.36 page suivante indique le coût des reconstructions. L'erreur relative par rapport à la dynamique est minimisée de façon satisfaisante. Ce n'est pas le cas de l'erreur par rapport au dépôt.

Le tableau 8.37 page suivante donne les conditions initiales optimisées des reconstructions. Les fractions volumiques respectent le rapport de masse.

Exp. N	pente	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E39	1°	0.0010157	0.438505	0.000406825	0.00491159	1.08065
E34	3°	0.0145636	0.579059	0.0197553	0.245761	2.41031
E37	5°	0.00296843	0.497491	0.000100017	0.0135666	4.99646

TAB. 8.35 – Inversion sur les données de vitesse. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

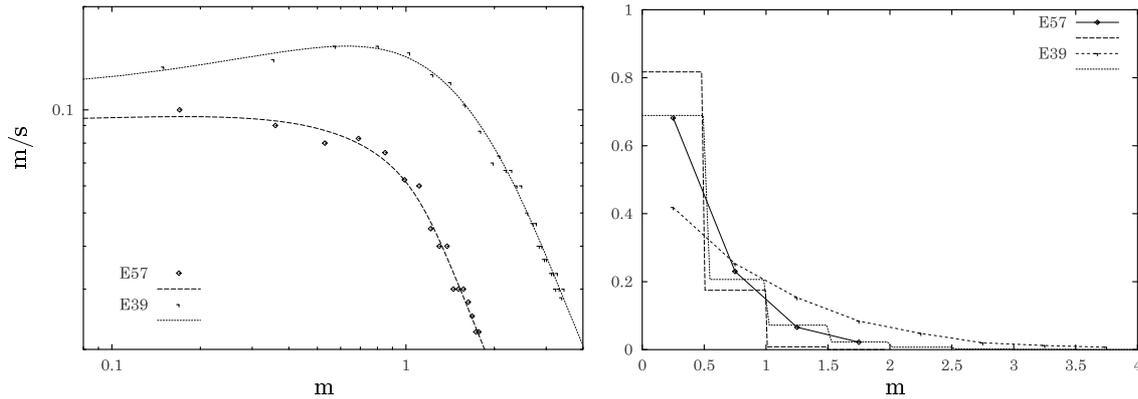


FIG. 8.26 – Inversion sur les données de vitesse. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.00204794	0.586048	0.294048
E57	0.0031965	0.46526	0.234228

TAB. 8.36 – Inversion sur les données de vitesse. Coût des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	mass	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	650	0.0147896	0.0672427	0.0438521	0.0242904	0.02375
E57	300	0.0180365	0.000139127	0.0914509	0.0143606	0.0075

TAB. 8.37 – Inversion sur les données de vitesse. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	mass	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E39	650	0.0010157	0.438505	0.000406825	0.00491159	1.08065
E57	300	0.00760343	0.651924	0.000100075	0.00384073	4.81459

TAB. 8.38 – Inversion sur les données de vitesse. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Les valeurs des paramètres optimisés sont données dans le tableau 8.38 page ci-contre. Si les ordres de grandeur de certains paramètres sont voisins, il n'apparaît pas de lien évident en fonction de la masse initiale.

8.4.4.3 Conclusions

Nous avons ici testé l'inversion totale (inversion des paramètres physiques et des conditions initiales).

L'inversion sur l'histogramme de dépôt, si elle permet de donner une image qualitative satisfaisante de la dynamique des écoulements, ne permet pas de reproduire quantitativement les évolutions de vitesse. Les données de l'histogramme du dépôt sont des données « pauvres » (cf. section L.5 page 337). Ce sont des données moyennées sur des sections de 50 cm. De plus, ce ne sont pas des variables directes de la résolution du modèle direct.

De la même façon, si l'inversion sur les vitesses conserve un bon agencement qualitatif des dépôts, elle ne permet pas de reproduire quantitativement ces derniers.

Il se pose vraisemblablement un problème de manque de contraintes. Les solutions trouvées (probablement des minima locaux de l'optimisation) qui reproduisent quantitativement la dynamique, ne respectent pas les profils de dépôt, inversement les solutions qui reproduisent les dépôts ne respectent pas les données dynamiques.

À la lumière de ces résultats, on peut remettre en question les inversions sur les données de Beghin [1979] et du CEMAGREF, qui ne sont effectuées que sur des données dynamiques. Les profils de dépôt obtenus respecteraient-ils les données expérimentales ?

8.4.4.4 Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt

Expériences à granulométrie variable La figure 8.27 représente les reconstructions pour les ex-

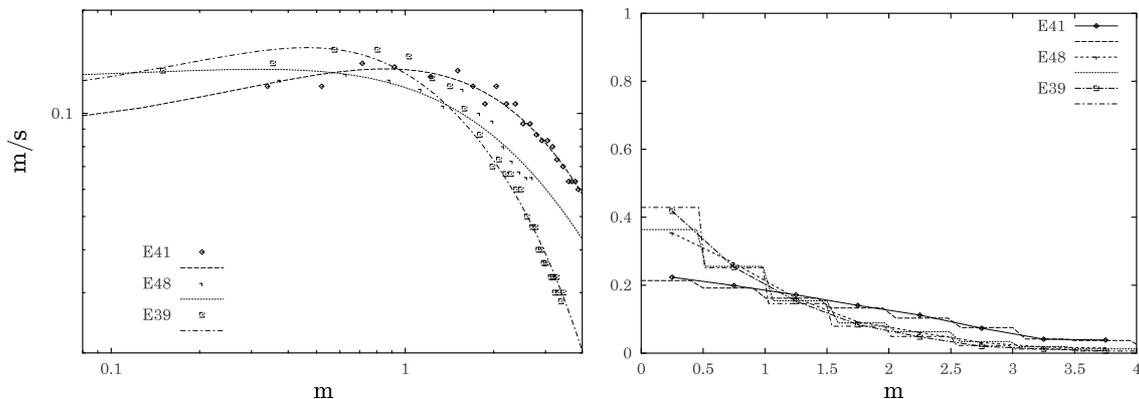


FIG. 8.27 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

périences à granulométrie variable. Elles respectent qualitativement et quantitativement les données de façon très satisfaisante.

Le figure 8.28 page suivante représente les reconstructions pour les expériences à granulométrie plus grossière. Ici encore, la concordance entre les données et les reconstructions est bonne.

Le tableau 8.39 page suivante indique l'erreur relative moyenne des reconstructions. Elle est sensiblement la même par rapport aux données dynamiques et aux données de dépôt, ce qui montre que la minimisation est homogène par rapport aux deux jeux d'observations.

Les conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.40 page suivante. Elles sont relativement homogènes.

Les paramètres physiques optimisés sont donnés dans le tableau 8.41 page suivante. Seul les coefficients d'incorporation (C_1 et C_2) semblent être mal contraints. L'ordre de grandeur des autres paramètres est

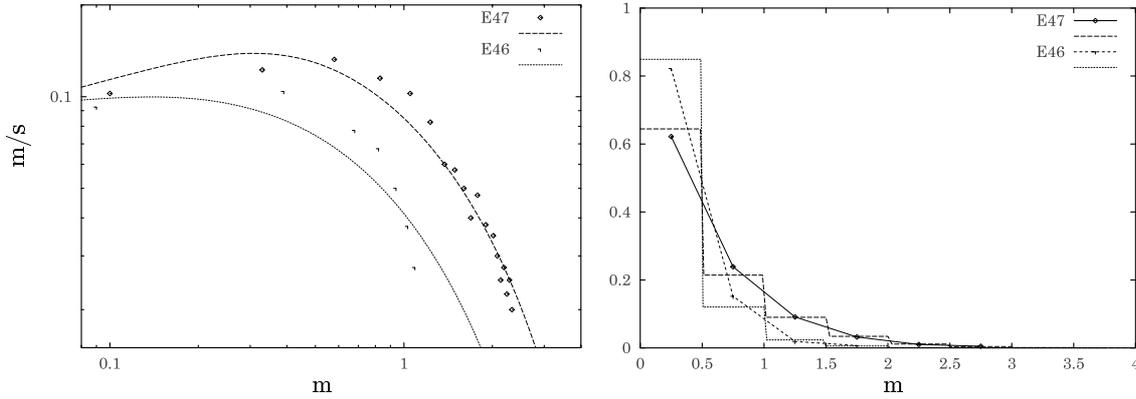


FIG. 8.28 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) et lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à granulométrie variable (données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E41	0.00168507	0.00218106	0.00193306
E48	0.00477669	0.00591286	0.00534477
E39	0.00492185	0.00506672	0.00499429
E47	0.0139815	0.0133732	0.0136773
E46	0.0404692	0.0358719	0.0381705

TAB. 8.39 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Coût des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	Gran.	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E41	56	0.0187975	$7.70827e - 05$	0.084511	0.0302626	0.0275
E48	71	0.0168179	0.0603857	0.0647241	0.0276895	0.0225
E39	90	0.0255066	0.0572306	0.0488197	0.0247997	0.02375
E47	112	0.0339194	0.0573671	0.00930482	0.0298902	0.018125
E46	142	0.0226777	0.0672904	0.0147787	0.0305735	0.00875

TAB. 8.40 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	Gran.	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E41	56	0.00311222	0.383601	0.0033775	0.242084	2.0498
E48	71	0.00279783	0.43317	0.0197943	0.674154	2.12088
E39	90	0.00148021	0.406198	0.00570002	0.00968049	1.22763
E47	112	0.00193269	0.614329	0.0282571	0.0131652	2.70871
E46	142	0.00100569	0.481447	0.0389401	0.00873097	1.99831

TAB. 8.41 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à granulométrie variable (Données de Laval [1988]).

relativement le même. Le coefficient de friction C_0 est relativement bien contraint entre 0.001 et 0.003. La fraction volumique basale, C_3 , reste voisine de 0.5. Le rapport des diffusivités, C_4 , est de l'ordre de 2.

Expériences à pente variable La figure 8.29 représente les reconstructions pour les expériences à

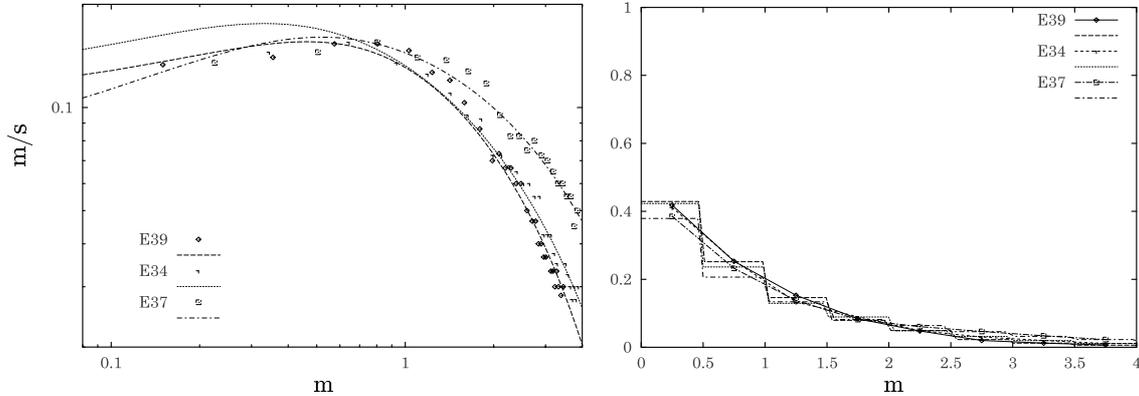


FIG. 8.29 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à pente variable (données de Laval [1988]).

pente variable. Les reconstructions sont très satisfaisantes quelque soit la pente.

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E34	0.00616253	0.00108971	0.00362612
E37	0.0040421	0.00236376	0.00320293
E39	0.00492185	0.00506672	0.00499429

TAB. 8.42 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Coût des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

Le tableau 8.42 indique l'erreur relative moyenne de chacune des reconstructions.

Exp. N	pente	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	1°	0.0255066	0.0572306	0.0488197	0.0247997	0.02375
E34	3°	0.031322	0.0615674	0.0568007	0.0289951	0.02375
E37	5°	0.026408	0.00151053	0.0642536	0.0258842	0.024375

TAB. 8.43 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

Les conditions initiales optimisées sont reportées dans le tableau 8.43.

Les paramètres physiques des reconstructions sont donnés par le tableau 8.44 page suivante. Les ordres de grandeur sont moins homogènes. Le coefficient d'incorporation de fluide C_1 est mal contraint. La diffusivité C_4 est plus faible que pour les données précédentes. Le paramètre C_3 reste cependant voisin de 0,5.

Expériences à masse variable Les reconstructions pour les expériences à masse variable sont représentées sur la figure 8.30 page suivante. La restitution est quantitativement excellente. Le coût (erreur

Exp. N	pente	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E39	1°	0.00148021	0.406198	0.00570002	0.00968049	1.22763
E34	3°	0.0060331	0.615311	0.0181813	0.0213137	0.35707
E37	5°	0.0125746	0.352085	0.00925127	0.0888649	0.433529

TAB. 8.44 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Paramètres physiques des reconstructions : Expériences à pente variable (Données de Laval [1988]).

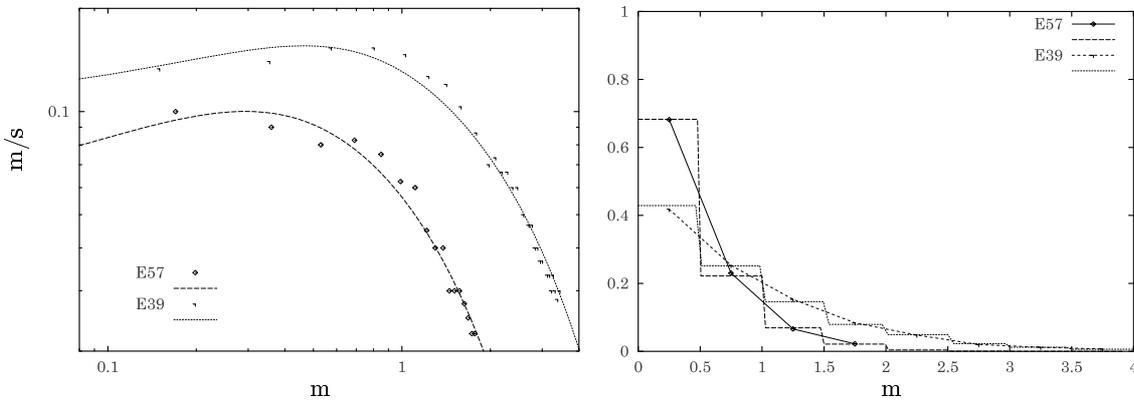


FIG. 8.30 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Vitesse du front en fonction de la position du front (à gauche) & lissage de l'histogramme de répartition du sable (à droite) : Expériences à masse variable (données de Laval [1988]).

Exp. N°	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
E39	0.00492185	0.00506672	0.00499429
E57	0.00689368	0.00106977	0.00398172

TAB. 8.45 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Coût des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Exp. N	mass	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0	ϕ_{0s}
		0.01 – 0.2	0 – 0.1	0 – 0.1	$\phi_{0s} - 0.03125$	
E39	650	0.0255066	0.0572306	0.0488197	0.0247997	0.02375
E57	300	0.0365825	0.0452938	0.00477619	0.013961	0.0075

TAB. 8.46 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

relative moyenne) des reconstructions est très faible aussi bien par rapport aux données dynamiques que par rapport aux données de dépôt (cf. tableau 8.45 page ci-contre).

Les conditions initiales optimisées sont données dans le tableau 8.46 page précédente. On retrouve ici le fait que les suspension les plus diluées s'effondrent moins vite (cf. section 7.3.3 page 167 sur les tests de sensibilité à ϕ_0).

Exp. N	mass	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
		0.001 – 0.1	0.2 – 5	0.0001 – 2	0.001 – 1	0.1 – 10
E39	650	0.00148021	0.406198	0.00570002	0.00968049	1.22763
E57	300	0.00828632	0.827591	0.0259406	0.0313473	2.28323

TAB. 8.47 – Inversion simultanée sur les données de vitesse et les histogrammes de dépôt. Conditions initiales des reconstructions : Expériences à masse variable (Données de Laval [1988]).

Le tableau 8.47 contient les paramètres physiques optimisés des reconstructions. Si les paramètres C_3 et C_4 ont sensiblement la même valeur que pour les expériences précédentes, les valeurs du coefficient d'incorporation d'eau ou de friction sont relativement différentes.

8.4.4.5 Conclusions

La méthode d'inversion totale simultanée permet la reconstruction des données de vitesses et des histogrammes de dépôt de façon très correcte.

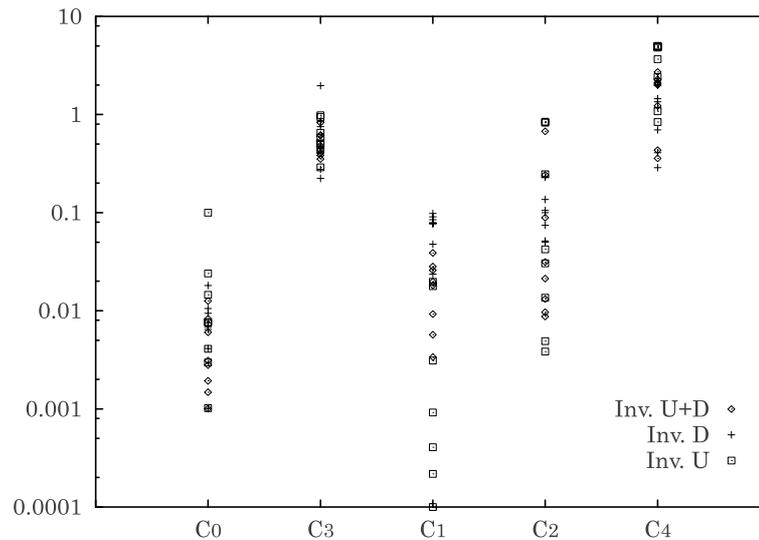


FIG. 8.31 – Inversion totale. Répartition des valeurs des coefficients pour les huit expériences de Laval [1988].

La figure 8.31 représente la répartition des valeurs des coefficients pour les huit expériences. L'inversion simultanée sur les données de vitesse et de profils de dépôt a permis de mieux contraindre les valeurs des paramètres qui sont alors moins dispersées.

8.5 Conclusions

L'inversion partielle sur les conditions initiales (recherche de conditions initiales compatibles avec le modèle) a permis de montrer le bon comportement qualitatif du modèle sur un grand nombre de modèles expérimentaux dont les caractéristiques variables sont :

- la pente [Beghin, 1979; Laval, 1988];
- la granulométrie [Laval [1988] et données CEMAGREF];
- la masse initiale [Laval, 1988].

Dans le cas de conditions initiales compatibles, le comportement quantitatif du modèle est satisfaisant, les vitesses restent cependant légèrement surestimées au début du mouvement. Ce fait peut, semble-t-il, être expliqué :

- par le mouvement du fluide supérieur qui est négligé dans le modèle ; c'est un problème courant des modèles simples [Bonnecaze, Huppert et Lister, 1993; Huppert, 1998].
- par un problème plus général d'incompatibilité des protocoles expérimentaux et numériques (cf. annexe M page 347).

L'inversion totale (conditions initiales et paramètres physiques) permet une reconstruction qualitative très correcte des données. Les caractéristiques asymptotiques des données expérimentales sont bien reproduites.

Cette méthode appliquée uniquement à des données dynamiques (vitesse du front en fonction de la position du front ou position du front en fonction du temps) ou uniquement à des données d'histogrammes de dépôt ne permet pas d'identifier les paramètres des écoulements. En outre, il est apparu que :

- Des jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très satisfaisante la dynamique des écoulements (position–temps ou vitesse–position) sans pour autant reproduire la géométrie et l'extension des dépôts ;
- Inversement, des jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très satisfaisante les profils de dépôt sans que la reconstruction dynamique soit satisfaisante.

L'inversion simultanée, dépôt—dynamique, est donc apparu essentielle :

- pour une reconstruction satisfaisante à la fois des données dynamiques et des données d'histogrammes de dépôt.
- pour une meilleure estimation des paramètres physiques. En effet, l'espace des modèles admissibles (modèle direct + conditions initiales + paramètres physiques) est plus restreint, et l'on réduit donc le nombre de solutions du problème d'optimisation : les paramètres peuvent être mieux évalués.

La réussite de l'inversion dépend donc en grande partie de la qualité et de la quantité des observations dont on dispose. En effet, plus celles-ci sont nombreuses, meilleure est la qualité de l'estimation des paramètres et de la reconstruction.

Soulignons également trois points :

1. Les données plus bruitées ont été plus difficiles à reconstruire car :
 - il existe, semble-t-il, plus de minima locaux ;
 - le vrai minimum global peut être « caché » par le bruit.
2. L'espace de recherche des paramètres est très grand. Des progrès sensibles peuvent être effectués :
 - par restriction de l'espace de recherche des paramètres dont les bornes sont maintenant mieux estimées ;
 - par la mise en œuvre d'une inversion contrainte (par exemple, telle que le rapport $C_1/C_2 = E_0$, cf. section 5.5 page 124).
3. L'inversion simultanée nécessite une mise en œuvre plus complexe. Nous l'avons traitée de façon triviale par la somme des deux fonctions de coût (somme des erreurs relatives moyennes de chaque reconstruction par rapport aux données).

Enfin, du point de vue du modèle théorique, il apparaît que la valeur de la fraction volumique basale C_3 est souvent proche de 0,5. Les sédiments ne sont donc pas répartis uniformément sur toute la longueur et la hauteur (*i.e.* sur tout le volume) de l'objet mais sur la moitié de son volume. La valeur souvent supérieure à 1 de l'inverse du nombre de Schmidt turbulent C_4 va dans ce sens. On entrevoit ici les limitations dues

à la forme géométrique de l'objet qui ne prend pas en compte les variations longitudinales des variables physiques (il serait préférable d'avoir deux longueurs caractéristiques : une pour la tête (plus concentrée), une pour la queue (plus diluée)).

Chapitre 9

L'effondrement de Nice, 1979

L'effondrement de Nice a eu lieu lors des travaux de remblais pour l'extension de l'aéroport. C'est le type même d'événement catastrophique. L'Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer (IFREMER) a contribué à l'étude de cet événement en effectuant des campagnes océanographiques sur cette zone avec en particulier des carottages, des plongées et des études numériques. L'abondance des données disponibles sur cet événement nous a conduit à l'utiliser dans le cadre de cette thèse.

Tout en permettant de tester et valider le modèle théorique, cette partie propose différents scénarios d'écoulement et tente d'apporter des réponses sur la nature de l'écoulement.

Sommaire

9.1	Contexte géologique	215
9.2	Description de l'événement et Points de contrainte	215
9.2.1	Estimation du volume et des matériaux impliqués	215
9.2.2	Estimation de la position en fonction du temps d'après les ruptures de câbles	217
9.2.3	Estimation des épaisseurs sédimentées d'après les carottes	217
9.2.4	Estimation de l'érosion d'après les plongées	221
9.2.5	Estimation de la hauteur de l'écoulement	221
9.2.6	Estimation des modélisations antérieures	222
9.3	Paramètres de la modélisation	222
9.3.1	Profils bathymétriques	223
9.3.2	Volume initial de sédiments	223
9.4	Mise en œuvre	225
9.4.1	Inversion partielle contrainte par la dynamique (rupture des câbles): Estimation des conditions initiales	226
9.4.2	Inversion partielle contrainte par le dépôt: Estimation des conditions initiales	228
9.4.3	Inversion totale contrainte par la dynamique	230
9.4.4	Inversion totale contrainte par le dépôt	232
9.4.5	Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt	235
9.5	Étude complémentaire	237
9.6	Conclusions	239

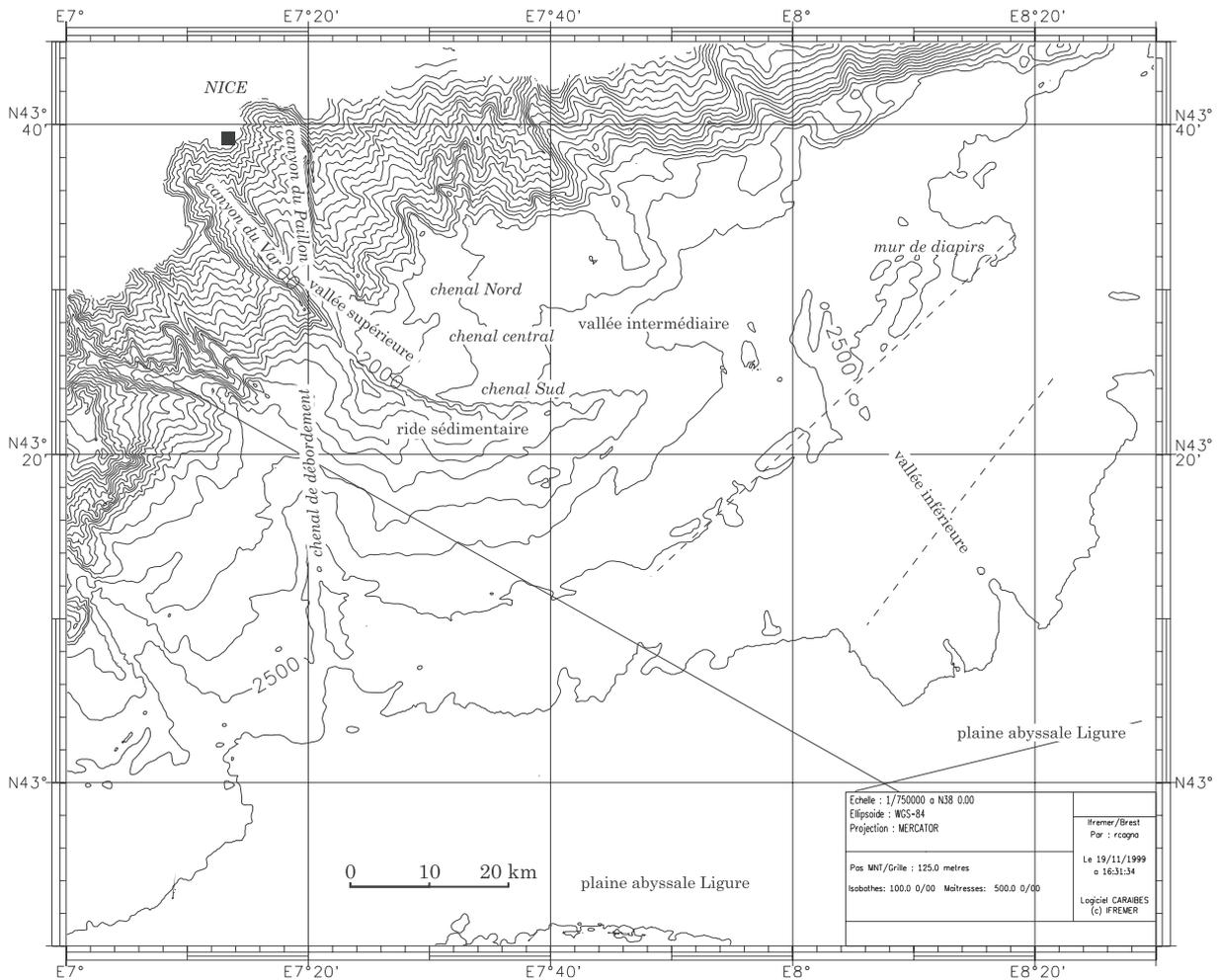


FIG. 9.1 – Contexte géographique, montrant la morphologie du cône sous-marin. Localisation des ruptures de câbles d'après Piper et Savoye [1993]: en pointillés les câbles rompus, en traits pleins, les câbles non rompus. Le ■ indique la localisation de l'effondrement.

9.1 Contexte géologique

Le système du cône sous-marin du Var est composé d'une longue vallée qui aboutit à la plaine abyssale Ligure. Le plateau continental est très étroit le long de la Côte d'Azur et est pratiquement absent au large de Nice. Douze canyons entaillent le talus continental et se rejoignent à une profondeur de 1650 m pour former la vallée sous-marine du Var. Le canyon du Var est le plus important, il est directement relié à la rivière du même nom.

La vallée sous-marine se décompose en trois parties (cf. figure 9.1 page précédente) :

- La vallée supérieure (*upper fan valley*) est orientée vers le Sud-Est sur 12 km à partir de la confluence du canyon du Var et du canyon du Paillon jusqu'au début du talus continental, à environ 2000 m de profondeur.
- La vallée intermédiaire (*middle fan valley*) s'étend vers l'Est sur 50 km jusqu'à un mur de diapir de sel. Elle s'oriente alors vers le Sud-Sud-Ouest. Sa morphologie est complexe. À la base du talus continental, la vallée n'est plus confinée sur sa partie gauche (Est). Elle se divise alors en deux sous-chenaux (chenal Sud et chenal central) séparés par la ride médiane⁵⁴. La levée Nord est peu élevée et discontinue. Elle est entaillée, plus bas, par un troisième chenal (chenal Nord), qui rejoint le chenal central vers 2200 m.

La ride sédimentaire du Var borde le Sud de la vallée intermédiaire. Sa hauteur décroît de 350 à 50 m.

- La vallée inférieure (*lower fan valley*) traverse la partie Sud du mur de diapir et alimente un petit lobe dans la partie extrême Nord de la plaine abyssale Ligure. Le long de la vallée inférieure, les levées formant la ride sédimentaire du Var ne dépassent pas 20 m.

9.2 Description de l'événement et Points de contrainte

Un effondrement de terrain a eu lieu le 16 Octobre 1979, au large de l'aéroport de Nice. Les causes exactes du déclenchement de l'effondrement ne sont pas encore bien déterminées. Il semble que ce soit la conjonction de la présence de sédiments sous-consolidés et de l'action humaine lors des travaux de remblais de l'aéroport [Mulder, Savoye, Piper et Syvitski, 1998a].

9.2.1 Estimation du volume et des matériaux impliqués

L'effondrement est constitué de sédiments silteux et argileux sous-consolidés. S'ajoutent à cela les divers matériaux de remblais de l'aéroport (sables et silts), dont l'épaisseur atteint 20-25 m par endroit.

Le volume total impliqué dans l'effondrement semble être d'au moins $8 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ [Genesseaux, Mauffret et Pautot, 1980; Habib, 1994].

Le haut des séquences Pléistocène est situé, à cet endroit, à 80 m en dessous du fond sous-marin. La profondeur de l'effondrement (loupe d'arrachement) a été estimée à 30-50 m par Habib [1994]. Le glissement est donc vraisemblablement constitué essentiellement de sédiments Holocènes⁵⁵.

L'effondrement n'est pas situé directement à l'embouchure du Var, mais à quelques kilomètres à l'Est. Il a emprunté dans un premier temps un canyon secondaire (cf figure 9.2 page suivante) qui rejoint le canyon du Var à une profondeur de 1000–1100 m [Mulder, Syvitski et Skene, 1998b]. La distance à la source est alors comprise entre 5,8 km et 6,7 km. Ce canyon est incisé sur une profondeur comprise entre 25 et 40 m, sa largeur est de 150–300 m [Mulder, Savoye et Syvitski, 1997].

Après le déclenchement, le glissement, dont la densité initiale était élevée, s'est rapidement étalé, désagrégé et a incorporé de l'eau de mer. La concentration est devenue suffisamment faible pour qu'il y ait écoulement à proprement parler [Mulder *et al.*, 1997].

⁵⁴. La nature de cette ride n'est pas claire. Elle peut être due à des dépôts en un point où les écoulements divergent, ou à des restes érosionnels [Piper et Savoye, 1993].

⁵⁵. Mulder [1993] a lui estimé que les sédiments impliqués sont Pliocène et Quaternaire (Pléistocène et Holocène) et sur une épaisseur de 20 m.

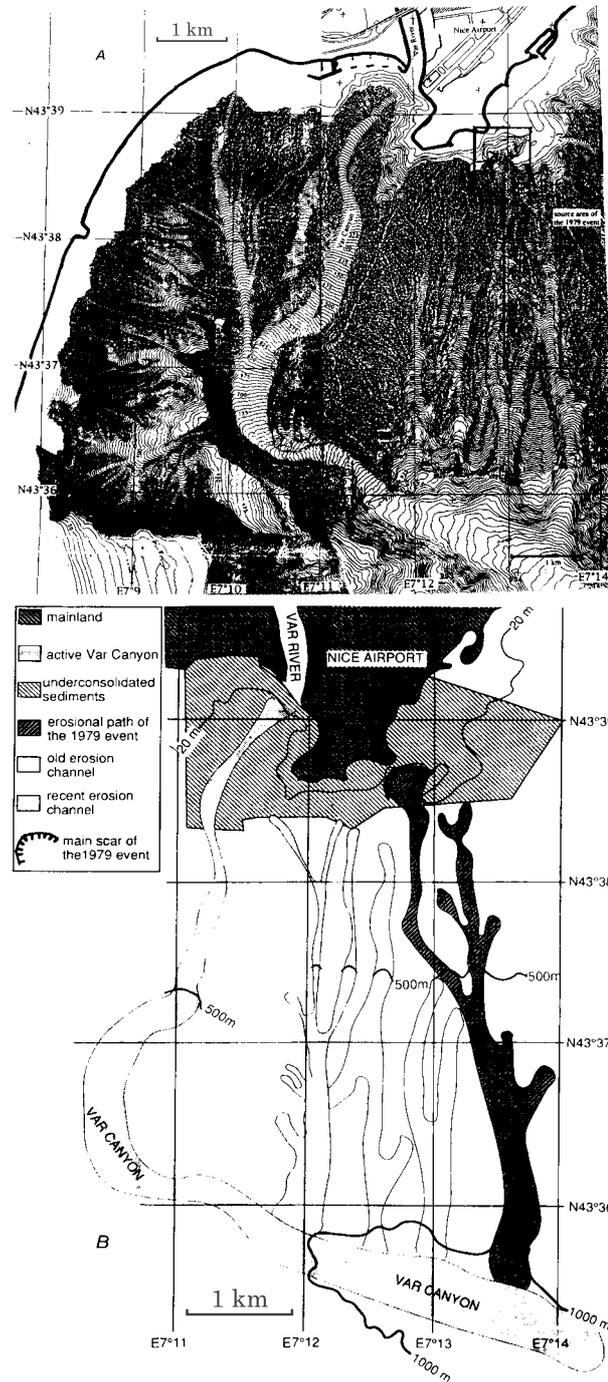


FIG. 9.2 – Localisation de l'effondrement et du chenal emprunté (d'après Mulder et al. [1998a]).

9.2.2 Estimation de la position en fonction du temps d'après les ruptures de câbles

Le courant gravitaire a sectionné deux câbles de télécommunications lors de son passage dans la vallée inférieure. Le premier câble a été sectionné 3 h 45 après le déclenchement, le second 8 heures après. Le câble situé le long du flanc Sud de la ride sédimentaire du Var n'a pas été sectionné. L'effondrement a également engendré un raz de marée sur la côte (tsunami).

Les positions des câbles peuvent être estimées d'après leur profondeur respective (cf. figure 9.1 page 214 et tableau 9.1).

	Câble 1	Câble 2
heure de rupture	3h45	8h
profondeur (m)	2480-2545	≈2600
	position estimée (km)	
Mulder [1993]	80	110
Piper et Savoye [1993]	95	122,5
Mulder <i>et al.</i> [1997]	100	120
Savoye ^a	90,65	114,04

TAB. 9.1 – Estimation de la position des ruptures de câbles

^a Communication personnelle, 1999.

La rupture du câble 1 n'a pas eu lieu exactement dans l'axe du chenal du Var, mais plus à l'Ouest de 5-6 km [documents IFREMER], à une latitude Nord de 43°21'.05 et une longitude Est de 8°01'. La bathymétrie est comprise entre 2480 et 2545 m [cartes isobathes 20 m IFREMER]. La distance à la source est alors comprise entre 83,3 et 87,3 km. Ces données diffèrent peu des données de Mulder [1993] : 80 km, de Piper et Savoye [1993] : 95 km et Mulder *et al.* [1997] : 100 km.

Le second câble semble avoir été sectionné à une profondeur proche de 2600 m. La distance à la source est de 112 km. Cette valeur est proche de celle estimée par Mulder [1993] (110 km) ou par Mulder *et al.* [1997] (120 km). Sa position a été récemment recalculée à partir des nouvelles compilations bathymétriques et de la détermination du trajet supposé de l'effondrement. Elle est de 114,04 km.

Les gradients de pente à cet endroit sont très faibles (<0.002), ce qui peut expliquer les imprécisions sur la distance à la source.

La différence des temps de rupture (4 h 15) et la distance entre les deux câbles (21 km) permet de donner une estimation de la vitesse moyenne du courant entre les deux câbles. Elle est de l'ordre de 5 km/h. Cette valeur est faible. Elle semble de plus associée à de faibles valeurs de la fraction volumique (<0.015 d'après Piper et Savoye [1993]). Il est vraisemblable que la rupture n'ait eu pas lieu exactement à l'arrivée de l'écoulement, mais après une action prolongée de l'écoulement ayant causé son déplacement et son étirement, comme le suggère le rapport de réparation [Communication personnelle de B. Savoye, 1999].

La différence entre l'heure de rupture du premier câble et l'heure du déclenchement, permet de donner une estimation de la vitesse moyenne de l'écoulement dans la partie amont de la vallée du Var. La vitesse est de l'ordre de 23 km/h. Cette vitesse est relativement peu significative, puisque dans cette partie de la vallée, l'écoulement est très instationnaire et atteint vraisemblablement des vitesses instantanées plus élevées.

9.2.3 Estimation des épaisseurs sédimentées d'après les carottes

Les nombreuses études réalisées par l'IFREMER ont permis de prélever un grand nombre de carottes (cf. figure 9.3 page suivante) durant les campagnes de mer NICASAR, PRENICE, CASANICE, MONICYA, SAME et ESSAM2.

L'analyse de ces carottes et la recherche d'une possible signature sédimentaire associée à l'effondrement de Nice est détaillée dans l'annexe N page 351. Le tableau 9.4 page 220 synthétise les résultats.

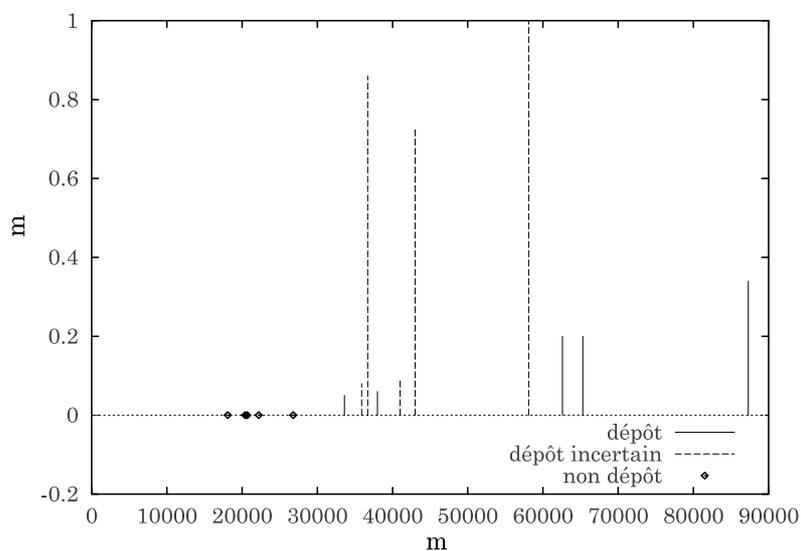


FIG. 9.4 – Profil reconstitué de la hauteur de sédiments déposés, estimée d'après les carottes IFREMER. Les points indiquent un endroit où l'écoulement était vraisemblablement érosif. Les traits pointillés indiquent des épaisseurs sédimentées qu'il n'est pas certain de pouvoir associer à l'événement de Nice. Les traits pleins sont considérés comme des dépôts résultants de l'effondrement.

Campagne	N° carotte	latitude N	longitude E	bathy. (m)	longueur (m)	granulométrie	épaisseur estimée (m)	position (km)
NICASAR	KNI27	43°22'.17	07°54'.94	2380	3.5	Sa F	<0.2	65,3
	KNI26	43°21'.79	07°55'.01	2365	11.41	Sa TF	<0.2	62,6
	KNI24	43°21'.41	07°55'.94	2420	11.085	Sa TF-F	?	72,5
PRENICE	PKS10	43°29'.04	7°21'.41	1820	1.92	-	E?	22,2
	PKS11	43°29'.66	07°21'.20	1760	1.99	-	E?	20,4
	PKS14	43°27'.42	07°55'.60	2390	1.99	?	?	67,1
CASANICE	KCA1	43°31'.258	07°18'.478	1650	2.90	-	E?	18,1
	KCA2	43°27'.714	07°34'.00	2160	2	Sa F	0.06	LN 38
	KCA3	43°24'.86	07°20'.33	2025	4.4	-	-	RV
	KCA4	43°32'.32	07°32'.27	2110	4.98	-	-	Nord CN
MONICYA	KCA5	43°25'.88	07°38'.10	2226	4	Sa F	0.73?	RM 43
	KCA7	43°21'.500	08°14'.825	2505	0.48	Sa TF	0.34	87,3
	KCA20	43°25'.12	07°28'.39	2075	0.78	Sa F	0.05	RM 33,6
	KM02	43°33'.22	07°15'.89	1405	5.37	?	?	?
	KM07	43°32'.213	07°38'.36	2210	4.44	-	-	Nord CN
	KS3	43°25'.31	07°55'.59	2340	3.48	Sa F-M	3.48?	58,1
	KS4	43°25'.00	07°33'.30	2150	2.62	B-Ar	-	RM 37,5
ESSAM2	KS11	43°29'.29	07°20'.58	1770	5.30	-	E?	20,7
	KS12	43°26'.43	07°23'.38	1930	4.55	-	E?	26,8
	KS6	43°23'.48	07°25'.00	1655	4.45	-	-	RV
	EMG2-5	43°.	07°.	2207	0.93	B-Ar	0.09?	RM 41
KSE03	KSE03	43°.	07°.	2135	1.45	B-Sa	0.86?	36,7
	KSE04	43°.	07°.	2120	2.38	B-Ar-Si	0.08?	RM 35,9

TAB. 9.4 – Situation des carottes et interprétation des épaisseurs sédimentées. Si = silts; Ar = argiles; B = Boue; Sa = sables; M = moyens; F = fins; TF = très fins; LN = levée Nord; RV = ride sédimentaire du Var; CN = chemin Nord; RM = ride médiane; E = érosion; D = dépôt

Les épaisseurs sédimentées considérées comme résultantes de l'effondrement de Nice, sont représentées en fonction de la distance à la source sur la figure 9.4 page 219 et reportées dans le tableau 9.2.

N°carotte	épaisseur estimée (m)	position (km)
KCA20	0.05	33,6
KCA2	0.06	38
KNI26	<0.2	62,6
KNI27	<0.2	65,3
KCA7	0.34	87,3

TAB. 9.2 – Hauteur de sédiments déposés estimée d'après les carottes et considérée comme possiblement résultantes de l'effondrement

9.2.4 Estimation de l'érosion d'après les plongées

L'érosion de la base des flancs du canyon du Var a fourni une importante masse supplémentaire de sédiments. Ces phénomènes ont été observés directement lors des plongées réalisées par l'IFREMER. On trouve parfois des sur-creusements, se manifestant par des encorbellements de quelques mètres [communication personnelle de Savoye, 1999 et [Pautot, 1988, plongée 12]].

À cette érosion directe, se superposent les effondrements de blocs, centimétriques à métriques, subséquents au passage de l'écoulement [communication personnelle de Savoye, 1999 et [Pautot, 1988, plongée 7, 9, 11, 12 et 14]].

Les plongées 8 et 13, effectuées dans le canyon emprunté par l'effondrement de Nice, montrent que celui-ci est entaillé dans de la vase récente. Il est également comblé d'un chaos de blocs de vase, instables et anguleux.

Enfin, on note la présence de blocs constitués de calcaire clair qui ne proviennent pas des parois, qui sont constituées, elles, de marnes bleues.

9.2.5 Estimation de la hauteur de l'écoulement

Les observations effectuées lors des plongées dans le bas du canyon du Var et dans la vallée supérieure du Var, six mois après l'effondrement de Nice, indiquent une limite abrupte de l'érosion des flancs à une hauteur de 50 m [communication personnelle de Savoye, 1999 et [Pautot, 1988, plongée 12]]. Sur les flancs du canyon, on trouve des petits cailloux plaqués sur une hauteur de près de 30 m [Savoye, Cochonat, Bourillet et Cayocca, 1997]. On retrouve de la bioturbation à des hauteurs de 60–90 m [communication personnelle de Savoye, 1999 et [Pautot, 1988, plongées 6, 9 et 11]]. Ces hauteurs donnent une estimation de la hauteur « érosive » du courant.

Enfin, lors de ces plongées sous marines, une pièce de métal, probablement une partie d'un bulldozer transportée par l'écoulement, a été retrouvée dans le canyon du Var, à une profondeur de 1500 m, sur une terrasse dont la hauteur par rapport au fond du canyon est de l'ordre de 25 m [Communication personnelle de Cochonat, Savoye, 1999 et Pautot [1988, plongées 17]]. Cette pièce est située à 15 km de la zone d'effondrement. On peut donc supposer que l'écoulement avait une hauteur d'au moins 30 m.

L'analyse des carottes (KCA3, KS6, KMO9 ...) situées sur la partie Ouest de la ride sédimentaire du Var semble indiquer que l'événement n'a pas débordé [Piper et Savoye, 1993]. La hauteur de la ride fournit donc la limite supérieure de hauteur que l'écoulement peut atteindre. Le profil de hauteur de la ride a été grossièrement reconstitué d'après des cartes bathymétriques de l'IFREMER et les articles de Mulder *et al.* [1997]; Piper et Savoye [1993], il est schématisé sur la figure 9.5 page suivante.

Dans les parties dépressives de la ride, à l'Est de la longitude E7°42' (55,4 km), Piper et Savoye [1993] ont noté des surfaces d'érosion et de possibles dépôts de sable. Elles indiquent un débordement limité.

Enfin le mur de diapir de sel, situé à la longitude E8°05' (\approx 92 km), et dont la hauteur est comprise entre 30 et 60 m, ne semble pas avoir été affecté par un dépôt récent [analyses sismiques de Piper et Savoye [1993]]. Ce dernier est cependant situé latéralement plus à l'Est par rapport à la vallée principale.

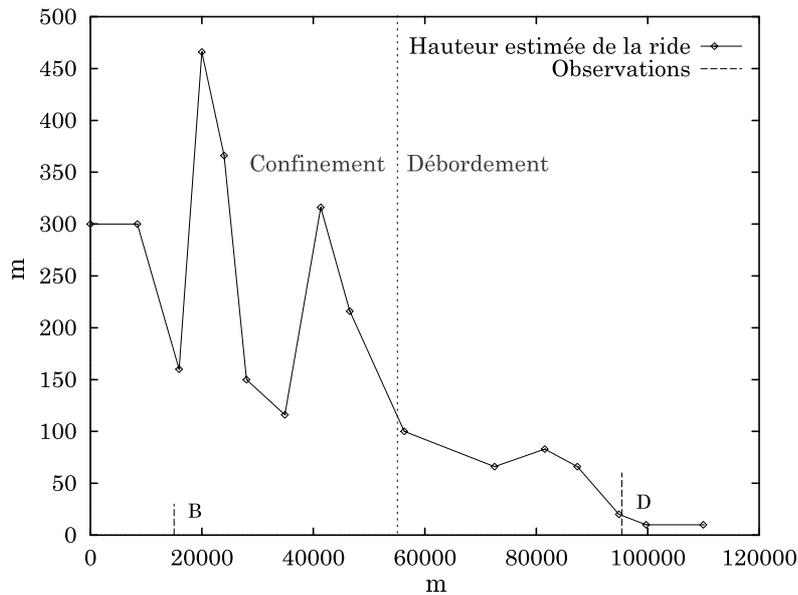


FIG. 9.5 – Profil reconstitué de la hauteur de la ride sédimentaire du Var. Observation: B = Bulldozer; D = Diapir

9.2.6 Estimation des modélisations antérieures

Plusieurs études, incluant des modélisations numériques, ont été appliquées à l'effondrement de Nice. Elles ont permis de tester différents scénarios et différents paramètres associés à l'écoulement.

La première estimation des vitesses de l'écoulement a été faite par Genesseeux *et al.* [1980], d'après les temps de rupture des câbles (cf. figure 9.6 page suivante).

Les estimations de vitesses faites par Mulder [1993] en utilisant une approche visco-plastique sont également reportées sur la figure 9.6 page ci-contre. Ces vitesses sont associées à des hauteurs constantes d'écoulement comprises entre 11 et 18 m.

Le modèle de Piper et Savoye [1993] est basé sur l'équation de Chezy (cf. équation (2.4) 2.4 page 27). En se basant sur les estimations de hauteurs et de concentrations dérivées des observations, ils peuvent ainsi déduire les vitesses en plusieurs points de la vallée.

Enfin, des modèles plus complexes existent. Le modèle de Mulder *et al.* [1997] combine l'approche visco-plastique et l'approche de Chezy⁵⁶. En imposant une hauteur variable à l'écoulement, plusieurs paramètres de l'écoulement, comme la vitesse (cf. figure 9.6 page ci-contre), le dépôt et l'érosion, peuvent être reconstruits. L'épaisseur érodée est ainsi estimée être maximale à environ 17,5 km de la source, avec des valeurs comprises entre 7 et 11,5 mètres. Suivant les cas testés, l'épaisseur maximale déposée, qui coïncide avec la hauteur maximale de l'écoulement, est comprise entre 2 et 6 mètres.

9.3 Paramètres de la modélisation

La figure 9.7 page 224 donne une localisation du trajet emprunté par l'effondrement (trajet *a*, qui correspond au chenal Sud). Le trajet *b* sera utilisé à la section 9.5 page 237, il correspond au chenal Nord.

⁵⁶ cf. l'article original pour plus de détails sur le modèle utilisé.

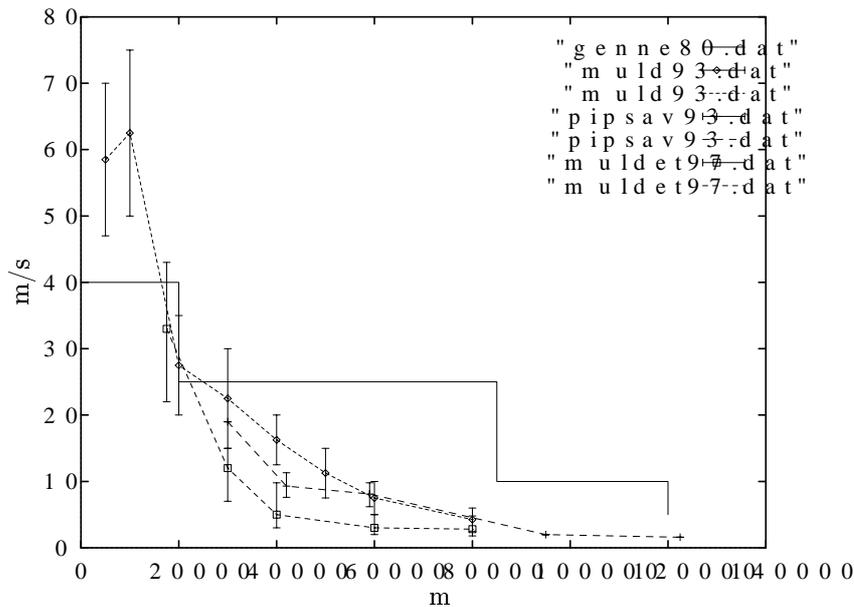


FIG. 9.6 – Estimations des vitesses données par les précédentes modélisations (cf. texte et [Genesseaux et al., 1980; Mulder, 1993; Mulder et al., 1997; Piper et Savoye, 1993] pour plus de détails). Les barres d'erreurs correspondent aux valeurs minimales et maximales des différents scénarios testés.

9.3.1 Profils bathymétriques

Nous avons à notre disposition deux profils bathymétriques :

- un profil bathymétrique discrétisé par pas d'espace fixe de 25 m à partir de la source [IFREMER et Assier, 1999], soit un maillage d'environ 7000 points. Un maillage lissé (ML) de 44 points en a été extrait.
- un profil bathymétrique fin (MF), fourni par l'IFREMER, dont le pas d'espace est de 100 m (1201 points).

Les deux profils sont représentés sur le figure 9.8 page 225, ainsi qu'un autre maillage grossier (MG) ayant servi aux tests numériques (cf. Annexe O page 355).

Des tests numériques ont été effectués sur ces maillages (cf. Annexe O page 355).

Les résultats des modélisations (cf. Annexe O page 355) sont quantitativement sensibles aux données de maillage. Pour des questions de temps calcul⁵⁷, nous avons effectué les simulations sur le maillage lissé (ML), qui cependant respecte les gradients moyens de pentes.

Le talus continental est abrupt avec une pente comprise entre 6 et 11°. À la confluence du canyon du Var et du canyon du Paillon, la pente n'est plus que de 2°. Dans la vallée inférieure elle est de l'ordre de 0,1°[Piper et Savoye, 1993].

9.3.2 Volume initial de sédiments

Le volume initial de l'effondrement a été estimé à au moins $8 \cdot 10^6$ m³ par Genesseaux *et al.* [1980]; Habib [1994].

Dans le cadre de notre modélisation, pour des questions de validité du modèle (lois de comportement liée aux fortes concentrations, turbulence) nous ne nous plaçons pas au point exact de départ de l'effondrement. Le volume de l'écoulement est donc supérieur à la valeur donnée par Genesseaux *et al.* [1980]; Habib [1994], qui est, elle, considérée comme un volume minimum.

⁵⁷. L'algorithme utilisé impose, lors de la résolution numérique, de « passer » au moins une fois dans chaque maille pour conserver la précision. Il peut s'en suivre une réduction inutile du pas de temps, lorsque, par exemple les gradients entre deux mailles successives sont pratiquement constants.

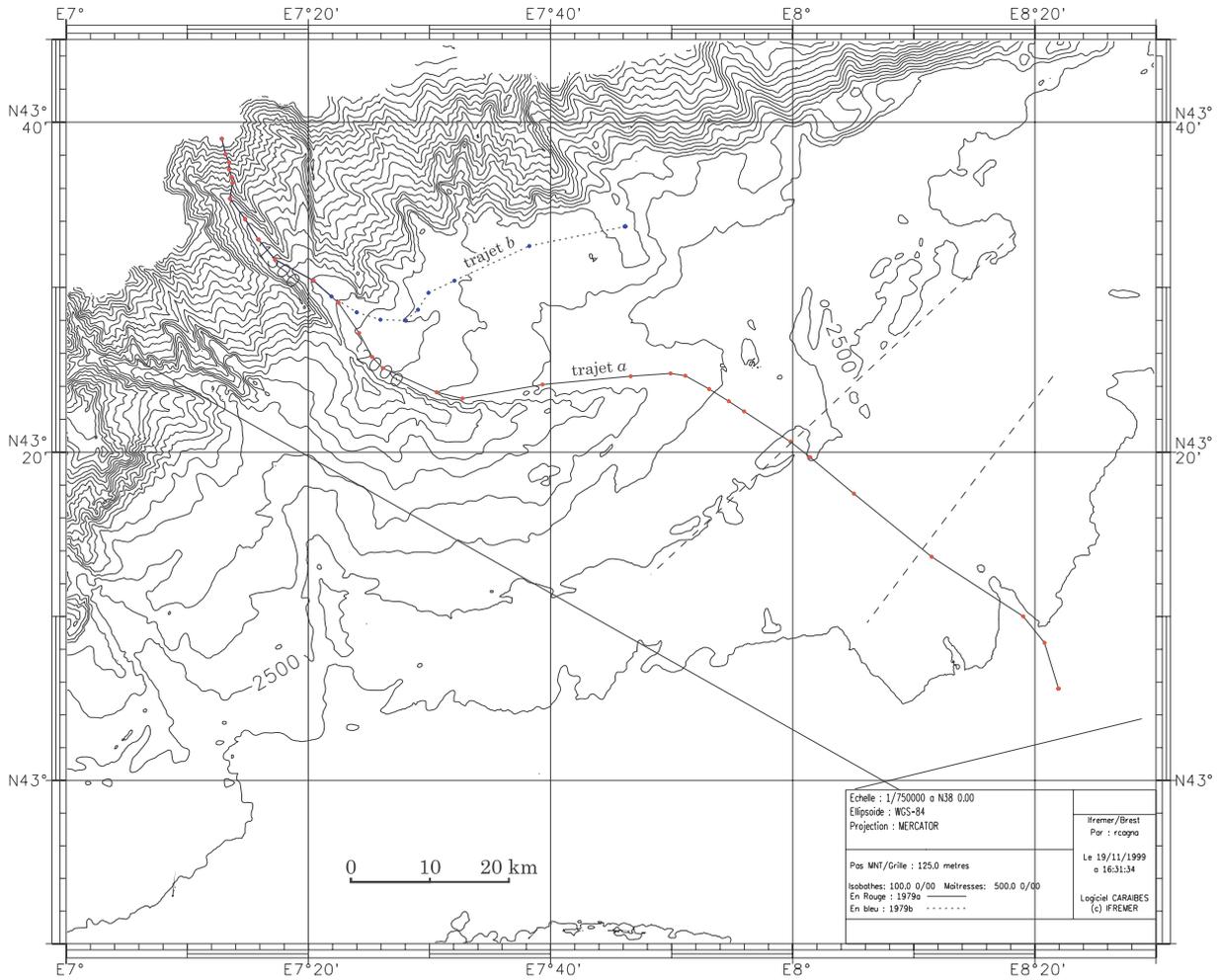


FIG. 9.7 – Localisation du trajet emprunté par l'effondrement (trajet a, qui correspond au chenal Sud). Le trajet b correspond en partie au chenal Nord. Localisation des ruptures de câbles d'après Piper et Savoye [1993]: en pointillés les câbles rompus, en traits pleins, les câbles non rompus.

Volume estimé de sédiments		
dans l'effondrement initial	à la confluence Paillon-Var	déposés
$8 \times 10^6 \text{ m}^3$	$3-10 \times 10^7 \text{ m}^3$	$15 \times 10^8 \text{ m}^3$

TAB. 9.5 – Estimation des valeurs du volume de sédiments dans l'effondrement

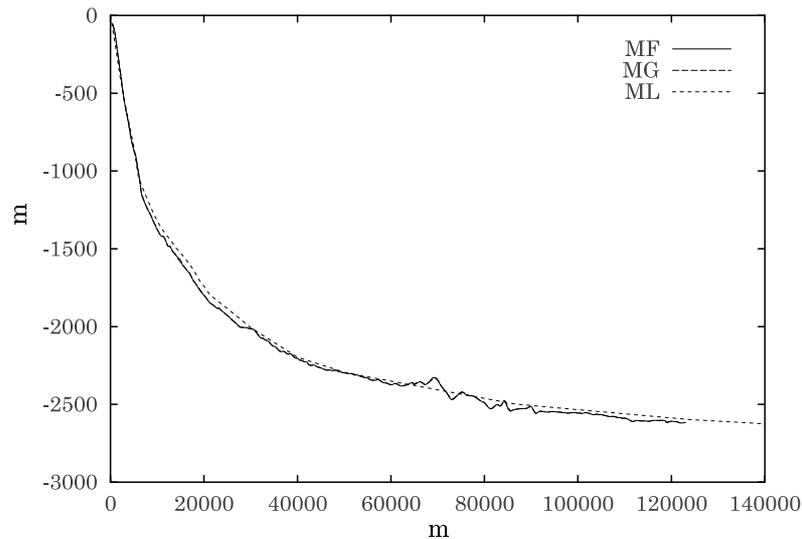


FIG. 9.8 – Profil bathymétrique reconstitué de la vallée du Var, le long d’une section 2D. Les maillages (MF) et (MG) sont superposés.

Si l’on prend en compte les observations faites dans le canyon secondaire (cf. section 9.2.1 page 215), on peut estimer que s’ajoute à cela un volume de sédiments compris entre $20\text{--}90 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, dû à l’érosion du canyon. Ce volume ajouté, augmente le volume de sédiments dans l’écoulement à $3\text{--}10 \cdot 10^7 \text{ m}^3$.

Le volume maximum de sédiments impliqués dans l’écoulement (volume estimé de sédiments déposés) peut être calculé d’après les observations de Piper et Savoye [1993]. Mulder *et al.* [1997] considère que l’événement a déposé en moyenne une couche de sable de 10 cm sur les 120 premiers kilomètres de la vallée, soit sur une surface de 1500 km^2 . Le volume de sédiments impliqué est de $15 \cdot 10^7 \text{ m}^3$. Le sable ne constituant qu’une fraction du matériel transporté par le courant (env. 10%), le volume impliqué réel est plus proche de $15 \cdot 10^8 \text{ m}^3$ [Mulder *et al.*, 1997].

9.4 Mise en œuvre

Les études précédentes se sont attachées à trouver des conditions initiales et des paramètres d’écoulement permettant de reconstruire de façon satisfaisante la dynamique de l’effondrement et en particulier de respecter les temps de rupture des câbles.

Les principales questions auxquelles nous tenterons de répondre sont :

- La reconstruction de la dynamique est-elle suffisante pour pouvoir reproduire de façon satisfaisante les épaisseurs sédimentées ?
- Les temps de ruptures des câbles peuvent-ils être réellement pris comme points de contrainte pour la position de la tête ?
- Les épaisseurs de sédiments observées dans les carottes sont-elles bien associées à l’effondrement de Nice ?

Nous testerons ces différentes hypothèses en imposant différentes contraintes aux modélisations de l’écoulement.

Nous effectuerons ainsi :

1. des inversions partielles : estimation des conditions initiales. En effet, les études des sections précédentes ont montré, que, bien qu’un très grand nombre d’observations ait été effectué, le choix de conditions initiales pour l’effondrement reste problématique car incertain.
2. des inversions totales. Elles permettent à la fois une estimation des paramètres physiques du modèle et des conditions initiales.

9.4.1 Inversion partielle contrainte par la dynamique (rupture des câbles) : Estimation des conditions initiales

Nous proposons ici de rechercher les conditions initiales (volume, hauteur, vitesses) associées à l'effondrement en imposant comme contrainte le respect des temps de rupture des câbles. Nous appliquons la méthode d'inversion partielle telle qu'elle est définie à l'annexe L.5 page 337.

friction C_0	fraction volumique C_3	coefficient de incorporation d'eau		Schmidt turbulent C_4
		C_1	C_2	
0.004	1.	0.00153	0.0204	1.

TAB. 9.6 – Inversion partielle : paramètres physiques (non inversés).

Les paramètres physiques du modèle sont rappelés dans le tableau 9.6. La valeur du coefficient de friction (C_0) correspond à la valeur de référence des précédentes études [Bowen, Normark et Piper, 1984; Komar, 1969; Mulder *et al.*, 1997; Piper et Savoye, 1993; Zeng, Lowe, Prior, Wiseman et Bornhold, 1991] et [Hsü, 1989, p. 96]. Les coefficients d'incorporation d'eau (C_1 et C_2) proviennent de la littérature [Fukushima, Parker et Pantin, 1985; Parker, Fukushima et Pantin, 1986]. Les valeurs de C_3 et C_4 sont celles estimées aux sections 5.4.2.1 page 122 et 5.4.2.2 page 122.

Nous avons testé trois scénarios d'estimation de la position de rupture des câbles correspondant aux estimations du tableau 9.1 page 217.

– Estimation inférieure :

	câble 1	câble 2
position (m)	80000	106000

– Estimation intermédiaire :

	câble 1	câble 2
position (m)	90650	114040

– Estimation supérieure :

	câble 1	câble 2
position (m)	100000	120000

Ces tests permettent de définir un encadrement des conditions initiales.

position des câbles	volume V_0	hauteur h	vit. moy. U	vit. ét. U_l
inf.	40363.7	5.16682	3.71343	3.48752
int.	66480.1	91.6573	0.547196	3.68483
sup.	79004.4	89.5009	0.716612	3.31155

TAB. 9.7 – Inversion partielle sur la dynamique : conditions initiales

Le tableau 9.7 donne les conditions initiales des reconstructions. Les volumes et les hauteurs sont classées : Les positions de câbles les plus proximales imposent un volume et une hauteur d'écoulement plus faibles que les positions de rupture plus distales.

Les volumes initiaux de sédiments associés à ces écoulements sont compris entre ⁵⁸ $1,6 \times 10^7$ et $3,2 \times 10^7$ m³. Ils sont en bon accord avec les estimations de la borne inférieure du tableau 9.5 page 224.

La reconstruction des données dynamiques est satisfaisante (cf. figure 9.9 page suivante à gauche et erreur relative du tableau 9.8 page ci-contre). Le comportement asymptotique défini par les paramètres physiques du tableau 9.6 est en accord parfait avec l'estimation inférieure de la position de rupture des câbles. Les couples de points des estimations intermédiaires et supérieures ne correspondent pas au

⁵⁸ Le volume de sédiments est relié au volume de l'écoulement par $V_{0s} = L\phi_0 V_0 = 400V_0$, où $L = 2000$ m est la largeur, ϕ_0 est la fraction volumique, V_0 est le volume de l'écoulement par unité de largeur et V_{0s} est le volume 3D de sédiments.

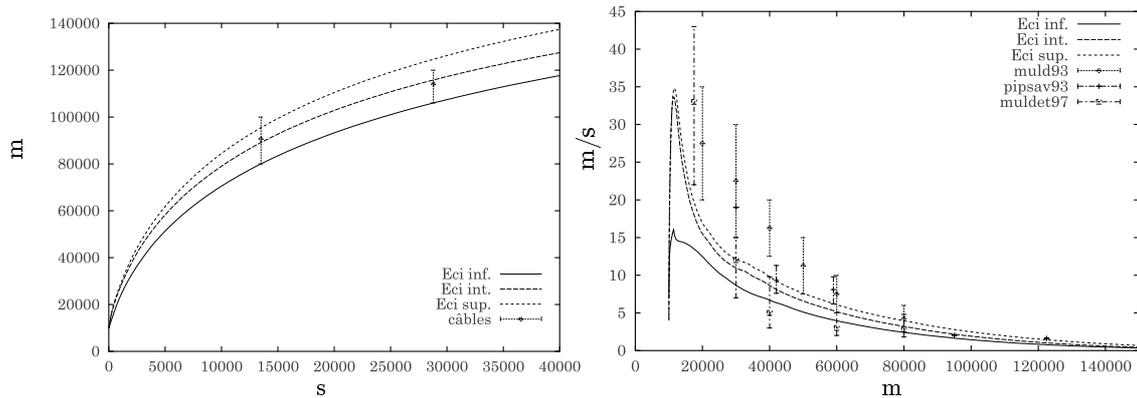


FIG. 9.9 – Inversion partielle contrainte par la dynamique (rupture des câbles). Position du front en fonction du temps (à gauche); Vitesse en fonction de la position (à droite)

position des câbles	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
inf.	1.08299e-13	5.77622	2.88811
int.	0.000267021	20.4958	10.248
sup.	0.00179596	29.6456	14.8237

TAB. 9.8 – Inversion partielle sur la dynamique : coût

comportement asymptotique défini par le jeu de paramètres physiques du tableau 9.6 page ci-contre. Une recherche des paramètres physiques est ici nécessaire pour affiner la reconstruction.

Les vitesses reconstruites sont, dans la partie distale, du même ordre de grandeur que les prédictions des modèles antérieurs (cf. figure 9.9, à droite).

Les positions de rupture de câbles plus distales (int. et sup.) impliquent des vitesses plus élevées (vitesses instantanées maximales de l'ordre de 35 m/s) que pour les positions de rupture proximales (vitesses instantanées de l'ordre de 17 m/s).

L'essai effectué avec l'estimation de position proximale donne des vitesses en très bon accord avec les estimations de Mulder *et al.* [1997] dans la partie distale de la vallée du Var.

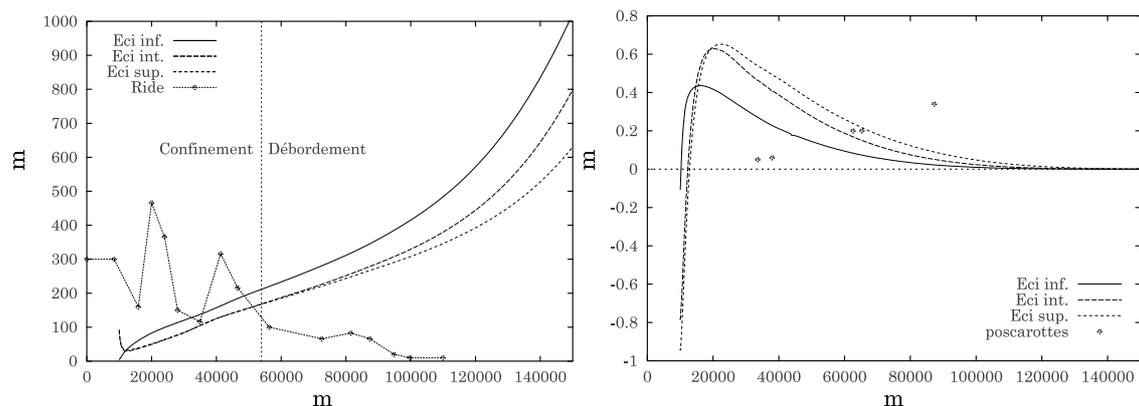


FIG. 9.10 – Inversion partielle contrainte par la dynamique (rupture des câbles). À gauche: Hauteur en fonction de la position, les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var. À droite: Épaisseurs déposées.

Les hauteurs d'écoulement prédites (cf. figure 9.10 page précédente à gauche) montrent que l'écoulement reste bien confiné par la ride sédimentaire du Var sur les 50 premiers kilomètres. Il déborde largement au delà de 55 km. Ce fait est conforme aux observations de Piper et Savoye [1993].

Les profils de dépôt prédits par les trois modèles sont semblables (cf. figure 9.10 page précédente à droite). Pour les modèles avec estimations des points de rupture intermédiaires et supérieures, l'épaisseur maximale déposée est de 60 cm. Pour le modèle calé sur les estimations inférieures des points de rupture, l'épaisseur maximale déposée est proche de 40 cm.

Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les estimations faites d'après certaines carottes (cf. figure 9.10 page précédente à droite). Elles sont quantitativement plus proches des valeurs des carottes KCA5 et KSE3 (autour de 0.8 m, cf. tableau 9.4 page 220 et figure 9.4 page 219).

Elles sont, par contre, beaucoup plus faibles que les valeurs prédites par le modèle de Mulder *et al.* [1997], dont le maximum d'érosion est compris entre 7,5 et 11,5 m. Le maximum de dépôt est estimé entre 2 et 6 m à 60 km de la source.

Les valeurs de dépôt prédites par notre modèle ne coïncident cependant pas, du point de vue des positions, avec les épaisseurs estimées d'après les carottes les plus certaines (cf. erreur relative sur le dépôt dans le tableau 9.8 page précédente). On propose trois hypothèses pour expliquer ce fait :

- Les épaisseurs estimées d'après les carottes ne sont pas à attribuer à l'effondrement de Nice.
- Les points de contrainte imposés par les ruptures de câbles ne sont pas corrects et ne doivent pas être attribués au passage du front.
- Les paramètres physiques par défaut ne correspondent pas à cet écoulement.

Nous essaierons d'examiner la validité de ces hypothèses dans la suite de l'analyse.

Conclusion Nous avons testé ici trois scénarios de position de rupture des câbles et recherché les conditions initiales respectant ces données.

Les conditions initiales estimées permettent de reconstruire les contraintes dynamiques de façon très satisfaisante, et cela avec les paramètres physiques estimés et utilisés dans la littérature. Ces conditions initiales sont en très bon accord avec les observations et les études précédentes, mais elles varient tout de même d'un facteur deux en fonction de la position estimée des ruptures des câbles. Les estimations précises du volume ou de la hauteur initiale basées uniquement sur les points de rupture sont donc pour le moins hasardeuses.

De plus, la prédiction des épaisseurs déposées, bien quelle soit du même ordre de grandeur, ne coïncide pas avec les mesures relevées sur les carottes.

La prochaine section propose de rechercher les conditions initiales associées à l'écoulement pour que celui-ci respecte les épaisseurs sédimentées.

9.4.2 Inversion partielle contrainte par le dépôt : Estimation des conditions initiales

Nous recherchons ici les conditions initiales (volume, hauteur, vitesses) associées à l'effondrement en imposant comme contrainte le respect des hauteurs sédimentées estimées à la section 9.2.3 page 217. Les paramètres physiques du modèle sont fixés (cf. tableau 9.6 page 226).

Nous avons testé trois scénarios d'estimation des épaisseurs sédimentées :

- prise en compte des 5 points estimés.
- prise en compte de 3 points : Les doublets sont retirés. Ce test, en éliminant les doublets, évite d'imposer un poids double sur ces points.
- prise en compte de 2 points : Le dernier point est retiré. Ce test permet de quantifier l'influence du point distal sur la reconstruction.

Le tableau 9.9 page ci-contre donne les conditions initiales des reconstructions qui sont représentées sur la figure 9.11 page suivante. Les conditions initiales sont très proches. Le volume de sédiments associé est proche de $1,6 \times 10^8$ m³. Il est en accord avec les estimations du tableau 9.5 page 224, mais correspond cette fois-ci à la borne supérieure.

L'inversion à 2 points montre que, pour l'inversion à 5 points, l'épaisseur de dépôt la plus distale contraint faiblement la reconstruction, celle-ci étant essentiellement contrainte par les 4 premiers points.

dépôt	V_0	h	U	U_l
5 points	417405	5.00001	0.171782	4.9182
3 points	411191	5.00001	1.48103	4.99713
2 points	418217	5	0.562268	4.94125

TAB. 9.9 – Inversion partielle sur le dépôt : conditions initiales

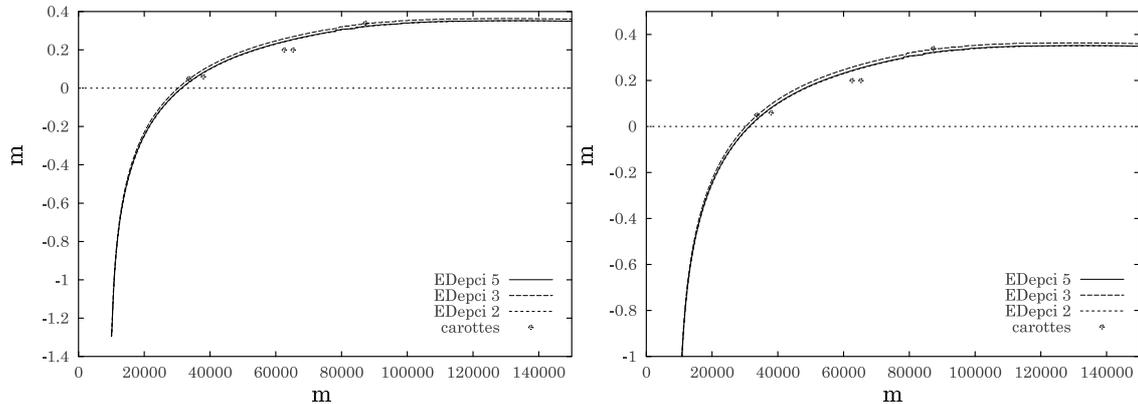


FIG. 9.11 – Inversion partielle contrainte par le dépôt. Épaisseur déposée.

L'essai à 3 points, en imposant un poids équivalent sur toutes les épaisseurs déposées, modifie peu le profil de dépôt.

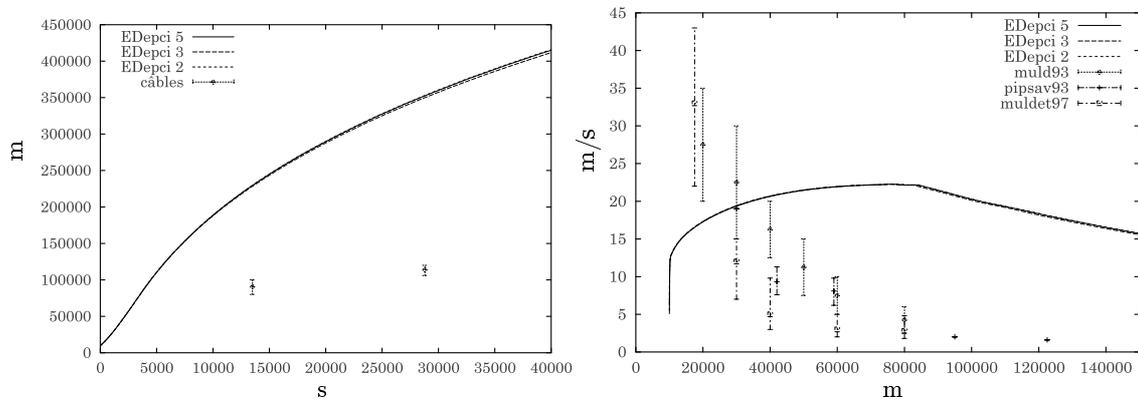


FIG. 9.12 – Inversion partielle contrainte par le dépôt. Position du front en fonction du temps à gauche et vitesse en fonction de la position du front à droite

La figure 9.12 représente les reconstructions de la dynamique de l'écoulement.

La rupture du câble 1, basée sur la position du front, a lieu alors que celui-ci a déjà parcouru 125 km, soit environ deux heures quinze après son passage (cf. 9.12 à gauche). Ces reconstructions ne sont pas satisfaisantes.

La vitesse du front est largement surestimée, par rapport aux estimations bibliographiques, en partie distale de la vallée du Var (cf. 9.12 à droite).

Nous proposons deux explications de ce phénomène :

1. La vitesse nécessaire pour rendre compte des dépôts est une vitesse locale au bas de l'écoulement. C'est elle qui conditionne le mode de dépôt. Cette vitesse est ici plus élevée que la vitesse moyenne de l'écoulement. Cette différence de vitesse, peut être due à la zone proche du lit où les propriétés de

l'écoulement ne sont pas celle définie par les propriétés moyennes des modèles [Branney et Kokelaar, 1998].

2. Les paramètres physiques, ici fixés, ne sont pas adaptés à cet écoulement.

Conclusion Nous avons testé des scénarios imposant le respect des hauteurs sédimentées et recherché les conditions initiales respectant ces données.

Les volumes de sédiments estimés sont plus importants, mais encore en accord avec les estimations de la littérature.

Si les conditions initiales estimées permettent de reproduire qualitativement et quantitativement de façon correcte les profils de dépôt, les contraintes dynamiques ne sont, elles, plus respectées. La rupture du câble 1 a lieu alors que le front a déjà dépassé celui-ci de 125 km.

Afin d'expliquer cet écart, nous proposons, dans les sections suivantes, de rechercher les paramètres physiques associés à l'effondrement.

Nous introduisons donc, en plus des conditions initiales, ces inconnues dans le problème d'optimisation.

Remarque 7

L'inversion partielle des conditions initiales sur des données simultanées de positions de rupture des câbles et d'épaisseurs sédimentées aboutit à une solution mathématique peu satisfaisante : Il n'y a pas de solution mathématique réaliste pour les paramètres physiques imposés. Les résultats ne sont pas présentés ici. Il montrent la complexité du problème de l'inversion simultanée des données qui est étroitement dépendant de la forme de la fonction de coût.

9.4.3 Inversion totale contrainte par la dynamique

Nous appliquons la méthode d'inversion totale telle qu'elle est définie à l'annexe L.6 page 341. Nous recherchons simultanément les conditions initiales et les paramètres physiques des écoulements. Nous reprenons les trois scénarios de position de rupture des câbles de la section 9.4.1 page 226.

position des câbles	coefficient de				
	friction C_0	fraction volumique C_3	incorporation d'eau C_1	C_2	Schmidt turbulent C_4
inf.	0.00438277	4.92716	0.00383679	0.00437233	1.15281
int.	0.00392785	3.38918	0.0001057	0.0014115	1.01757
sup.	0.00511242	4.47436	0.00160652	0.0809908	1.9982

TAB. 9.10 – Inversion totale sur la dynamique : paramètres physiques.

Les paramètres optimisés sont reportés dans le tableau 9.10. La valeur du coefficient de friction C_0 est comprise entre 0,004 et 0,005 pour une valeur de référence de 0,004 lors de précédentes études [Bowen *et al.*, 1984; Komar, 1969; Mulder *et al.*, 1997; Piper et Savoye, 1993; Zeng *et al.*, 1991] et [Hsü, 1989, p. 96]. Le coefficient de fraction volumique basale C_3 atteint des valeurs comprises entre 3,4 et 5 indiquant des écoulements très concentrés à leur base. Les coefficients d'incorporation d'eau C_1 et C_2 sont moins bien contraints. L'essai avec les estimations inférieures de la position de rupture donne un rapport C_1/C_2 égal à 0,87 pour 0,075 dans les cas stationnaires référencés dans la bibliographie. Les essais avec les estimations intermédiaires et supérieures donnent respectivement 0,0748 et 0,0198. Le coefficient C_4 est compris entre 1 et 2.

Les conditions initiales optimisées sont indiquées dans le tableau 9.11 page suivante. Elles ne sont pas classées. Le volume initial de sédiments est respectivement pour chaque essai de 1×10^8 , $2,5 \times 10^8$ et $3,3 \times 10^7$ m³. Ces volumes sont raisonnablement proches des volumes estimés dans le tableau 9.5 page 224.

Les reconstructions de la dynamique sont très satisfaisantes et respectent très correctement les points de contrainte (cf. figure 9.13 page suivante à gauche). Les estimations de vitesses sont du même ordre de grandeur que les prédictions des modèles antérieurs (cf. figure 9.13 page ci-contre à droite). Les prédictions basées sur les estimations inférieures de la position de rupture des câbles sont en accord avec les prédictions de Mulder *et al.* [1997], sauf en partie proximale. Les estimations basées sur les positions

position des câbles	volume V_0	hauteur h	vit. moy. U	vit. ét. U_l
inf.	258102	10.7148	2.18114	0.737448
int.	620166	5.52794	0.400489	1.53555
sup.	83555.2	10.027	4.19329	1.24565

TAB. 9.11 – Inversion totale sur la dynamique : conditions initiales

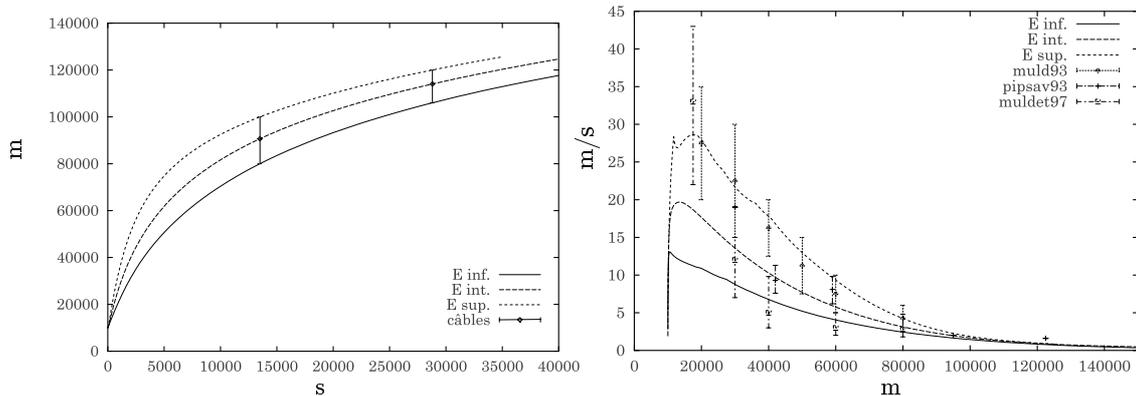


FIG. 9.13 – Inversion totale contrainte par la dynamique. Position du front en fonction du temps (à gauche). Vitesse en fonction de la position (à droite).

intermédiaires sont plus en accord avec les prédictions de Piper et Savoye [1993]. Les estimations basées sur les positions supérieures sont, elles, plus en accord avec les prédictions de Mulder [1993].

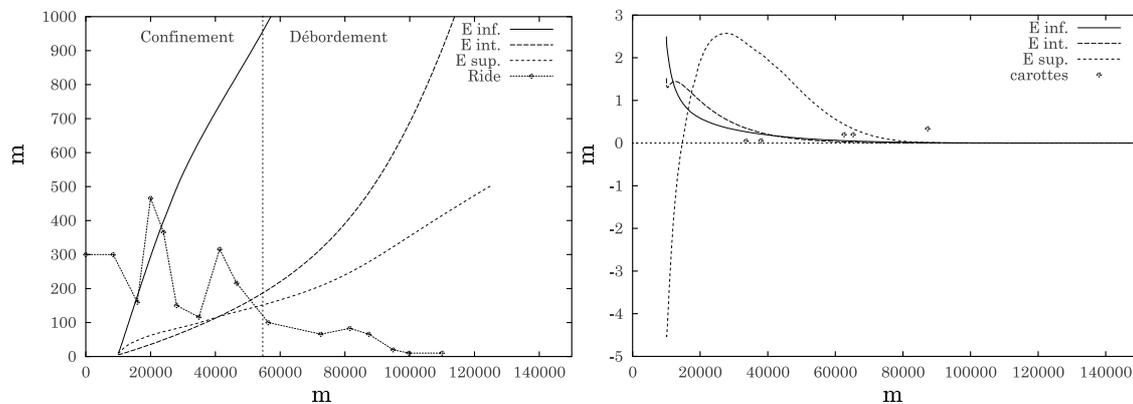


FIG. 9.14 – Inversion totale contrainte par la dynamique. Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var (à gauche). Épaisseurs déposées (à droite).

Bien que la dynamique des écoulements soit tout à fait satisfaisante, l'évolution des hauteurs de l'écoulement (cf. figure 9.14 à gauche) et les profils de dépôt (cf. figure 9.14 à droite) exhibent une très grande variabilité et sont peu conformes aux observations. En particulier, l'essai basé sur les positions de rupture inférieures prédit un débordement immédiat de l'écoulement à partir du 20^e kilomètre. Pour les deux autres essais, l'écoulement reste confiné par la ride sédimentaire du Var sur les 50–60 premiers kilomètres.

Les épaisseurs déposées atteignent des valeurs plus importantes que lors de l'inversion partielle. Les maxima de dépôt sont compris entre 1.5 et 2.5 mètres. Ces valeurs correspondent à la borne inférieure des estimations du modèle de Mulder *et al.* [1997]. Cependant, les profils de dépôt ne sont pas du tout en

position des câbles	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
inf.	1.0779e-13	5.36236	2.68118
int.	1.07071e-14	9.47002	4.73501
sup.	6.35858e-13	648.856	324.428

TAB. 9.12 – Inversion totale sur la dynamique : coût

accord avec les estimations faites à partir des carottes comme le montrent les valeurs de l'erreur relative du tableau 9.12. Ils ne coïncident pas non plus avec les estimations d'érosion aux alentours de 20 km.

Il est donc possible de reproduire les contraintes dynamiques sans reproduire les épaisseurs sédimentées. Nous retrouvons, ici, un fait rencontré précédemment à deux reprises :

- lors du développement de la méthode d'inversion (cf. section L.7 page 344) ;
- lors de l'application de cette méthode à des expériences sur des modèles réduits (cf. section 8.5 page 210).

Conclusion En conclusion, nous avons testé ici les trois scénarii de position de rupture des câbles et recherché à la fois les conditions initiales et les paramètres physiques respectant ces données.

Si la recherche des paramètres physiques a permis de reconstruire précisément les positions de rupture des câbles et notamment les comportements asymptotiques, les résultats des inversions montrent qu'il existe alors plusieurs combinaisons de volume initial–hauteur initiale–vitesse initiale qui reproduisent les données de façon satisfaisante.

L'incertitude sur la position de rupture des câbles ne semble donc pas constituer une contrainte suffisante pour l'estimation des conditions initiales. Ce fait est confirmé par la diversité des profils de dépôt obtenus pour les trois reconstructions. Ces profils ne coïncident pas avec les observations d'épaisseurs sédimentées déduites des carottes.

Les estimations des propriétés des écoulements basées uniquement sur les points de rupture sont donc sujettes à caution.

9.4.4 Inversion totale contrainte par le dépôt

Nous nous intéressons ici à l'inversion totale sur les données de dépôt. Nous reprenons les trois scénarios d'estimation des épaisseurs sédimentées (cf. section 9.4.2 page 228).

dépôt	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
5 points	0.0158818	0.200001	0.00516767	0.00801326	0.284233
3 points	0.0079981	3.09067	0.0447543	0.0883515	3.26716
2 points	0.01426	0.306757	0.00866824	0.0468711	0.344153

TAB. 9.13 – Inversion totale sur le dépôt : paramètres physiques.

Le tableau 9.13 donne les paramètres physiques optimisés. Ils varient peu pour les inversions sur 5 et 2 points, montrant ainsi la faible influence du dernier point lors des inversions sur 5 points. L'inversion sur 3 points, en imposant un poids équivalent sur toutes les épaisseurs déposées, modifie les valeurs des paramètres. Les valeurs de C_0 sont dans des bornes raisonnables. Les autres paramètres varient d'un ordre de grandeur.

Le tableau 9.14 page ci-contre indique les conditions initiales optimisées. Le volume est plus important pour les inversions sur 2 et 3 points. Le volume initial de sédiments est compris entre $4,3 \times 10^7 \text{ m}^3$ (inv. à 5 points) et $1,17 \times 10^8 \text{ m}^3$ (inv. à 3 points). Ces volumes sont dans l'intervalle des volumes estimés dans le tableau 9.5 page 224.

La reconstruction du profil de dépôt est satisfaisante pour les trois essais. La suppression des doublets (inv. à 3 points) rehausse sensiblement le profil de dépôt par rapport à l'inversion à 5 points.

dépôt	V_0	h	U	U_l
5 points	108100	5.0482	4.37153	3.18806
3 points	292495	5.24024	3.71525	4.1852
2 points	187780	7.63435	3.84415	3.65152

TAB. 9.14 – Inversion totale sur le dépôt : conditions initiales

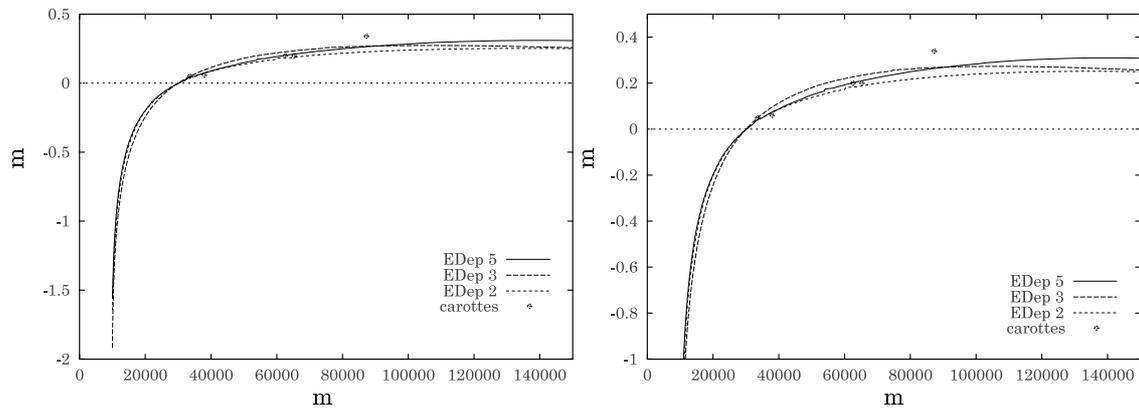


FIG. 9.15 – Inversion totale contrainte par le dépôt. Épaisseur déposée.

dépôt contraint	erreur relative moyenne		
	/dynamique	/dépôt	/moyenne
5 points	0.055592	0.0276835	0.0416388
3 points	0.462537	0.0208134	0.241675
2 points	0.152343	0.0187958	0.0855703

TAB. 9.15 – Inversion totale sur le dépôt : coût

Les coûts globaux des modèles $((\text{cot dynamique} + \text{cot dpt})/2)$ sont beaucoup plus faibles que lors des inversions précédentes sur la dynamique (cf. tableau 9.12 page 232).

L'épaisseur de dépôt est ici une variable qui contraint mieux l'ensemble des paramètres et des variables physiques de l'écoulement que les temps de passage aux câbles. Elle permet de respecter plus d'observations.

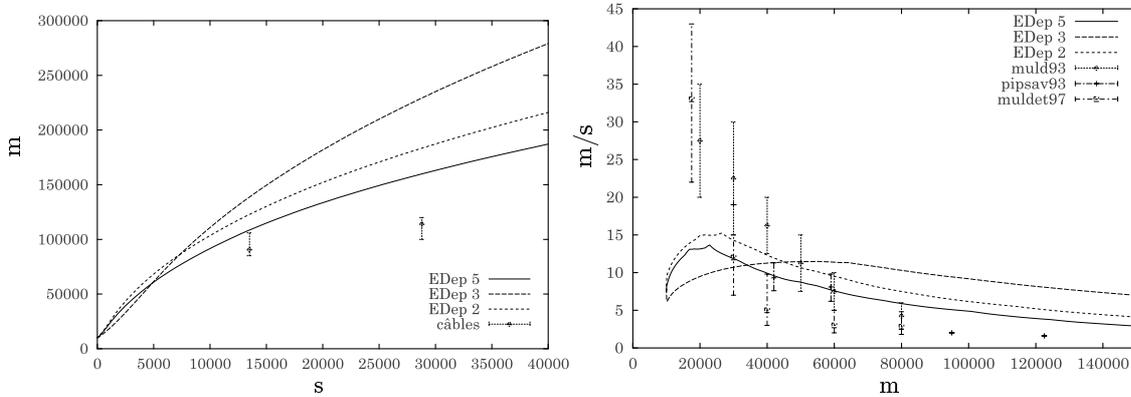


FIG. 9.16 – Inversion totale contrainte par le dépôt. Position du front en fonction du temps (à gauche). Vitesse en fonction de la position (à droite).

Cependant, comme précédemment, la donnée unique des épaisseurs de dépôt ne permet pas de reconstruire de façon satisfaisante les observations dynamiques (cf. figure 9.16, à gauche). La rupture du câble 1 a lieu entre 10 minutes et 1 heure après le passage du front qui est alors à une distance de 20 kilomètres du câble (cf. figure 9.16 à gauche). La rupture du câble 2 a lieu 4 heures après le passage du front, ce dernier est alors à une distance comprise entre 30 et 100 kilomètres du câble (cf. figure 9.16 à gauche).

Les vitesses prédites sont en accord avec les estimations des études précédentes sur les 60 premiers kilomètres. Elles sont ensuite supérieures (cf. figure 9.16, à droite).

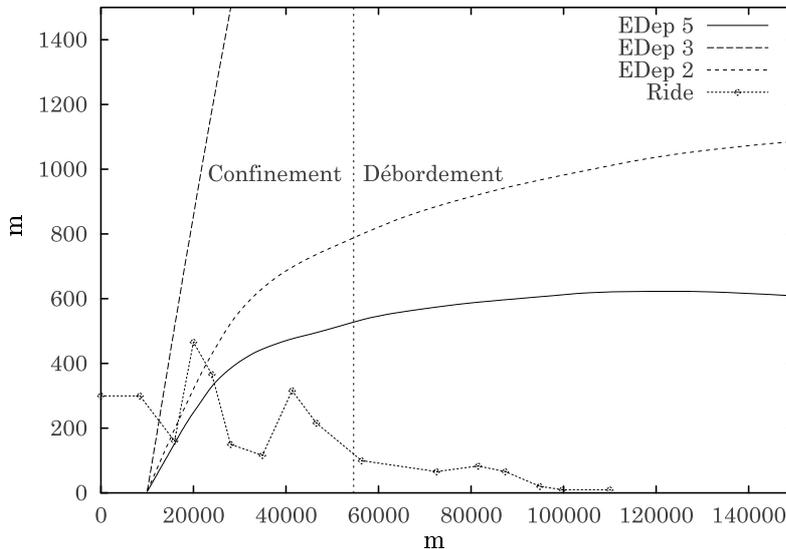


FIG. 9.17 – Inversion totale contrainte par le dépôt. Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var.

L'évolution de la hauteur prédite par l'inversion sur cinq points est peu vraisemblable et cause un débordement immédiat de l'écoulement (cf. figure 9.17).

Conclusion Nous avons testé les trois scénarios imposant le respect des hauteurs sédimentées dans le cadre de l'inversion totale (recherche des conditions initiales et des paramètres physiques respectant ces données).

Les volumes initiaux de sédiments estimés sont en très bon accord avec les estimations faites dans le tableau 9.5 page 224. Cependant, si les inversions sont mieux contraintes, les prédictions sur la position du front semblent encore peu satisfaisantes. Ceci nous conduit donc à effectuer des inversions totales simultanées sur les données de temps de rupture des câbles et des données de dépôt.

9.4.5 Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt

L'inversion totale est ici réalisée en imposant de respecter les contraintes sur la dynamique et le dépôt. Les contraintes sur la vitesse sont imposées par les barres d'erreur suivantes :

	câble 1	câble 2
position	80–100 km	106–120 km

Les contraintes sur le dépôt sont constituées par les 5 points d'épaisseurs de sédiments relevés sur les carottes.

friction	fraction volumique	coefficient de		Schmidt turbulent
C_0	C_3	incorporation d'eau		
		C_1	C_2	C_4
0.032841	0.203134	0.0129835	0.00111847	0.200005

TAB. 9.16 – Inversion totale sur la dynamique et le dépôt : paramètres physiques.

Les paramètres physiques optimisés sont donnés dans le tableau 9.16. La valeur élevée du coefficient de friction peut s'expliquer par une rugosité importante associée au fond. Les valeurs des coefficients d'incorporation d'eau sont élevées. La faible valeur de la fraction volumique basale C_3 indique une répartition peu homogène de la fraction volumique dans l'écoulement.

volume	hauteur	vit. moy.	vit. ét.
V_0	h	U	U_l
71571.6	5.00026	3.51874	4.31302

TAB. 9.17 – Inversion totale sur la dynamique et le dépôt : conditions initiales

Les conditions initiales sont reportées dans le tableau 9.17. Le volume initial de sédiments associé est de $2,9 \times 10^7$ m³. Cette valeur correspond à la borne inférieure de la valeur du volume estimée dans le tableau 9.5 page 224.

La figure 9.18 page suivante représente les reconstructions de la position du front en fonction du temps (à gauche) et la hauteur sédimentée (à droite). L'accord avec les données est satisfaisant. Le dernier point de dépôt est moins bien respecté. Ceci peut être expliqué par les positions très proches des autres points de contrainte qui ont, alors, un poids double (comme nous l'avons vu aux sections 9.4.2 page 228 et 9.4.4 page 232).

La hauteur de l'écoulement croît très vite, causant vraisemblablement un débordement à partir du 25^e kilomètre.

La quantification de ce débordement est difficile à estimer dans la mesure où, comme le montre la figure 9.20 page suivante, la hauteur de l'écoulement h est associée à des valeurs très faibles de la fraction volumique. Une hauteur plus caractéristique, et causant le débordement d'une masse de sédiments plus significative, serait par exemple la hauteur h' de la figure 9.20 page suivante. Elle reste cependant à déterminer théoriquement.

Les vitesses sont, sur les premiers 30 kilomètres, beaucoup plus faibles que les estimations faites lors des précédentes études (cf. figure 9.19 page suivante à droite). La décélération de l'écoulement est

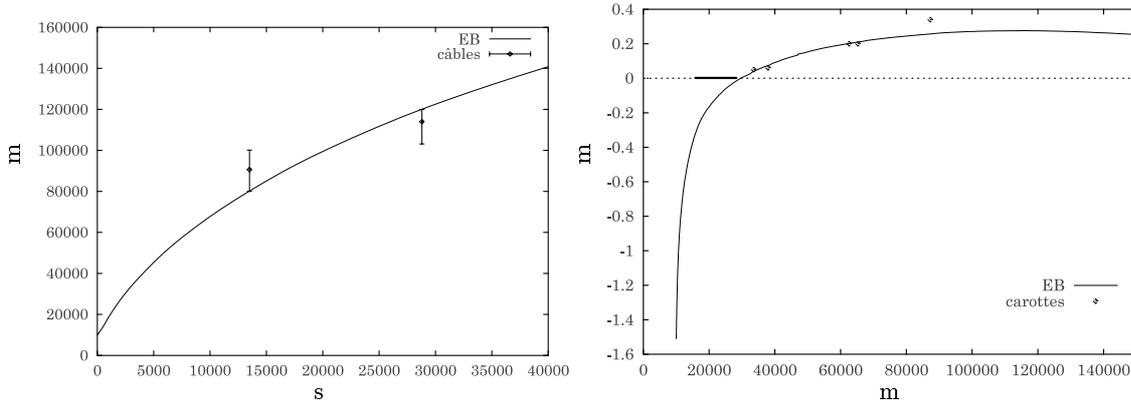


FIG. 9.18 – Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Position du front en fonction du temps (à gauche). Épaisseur déposée (à droite).

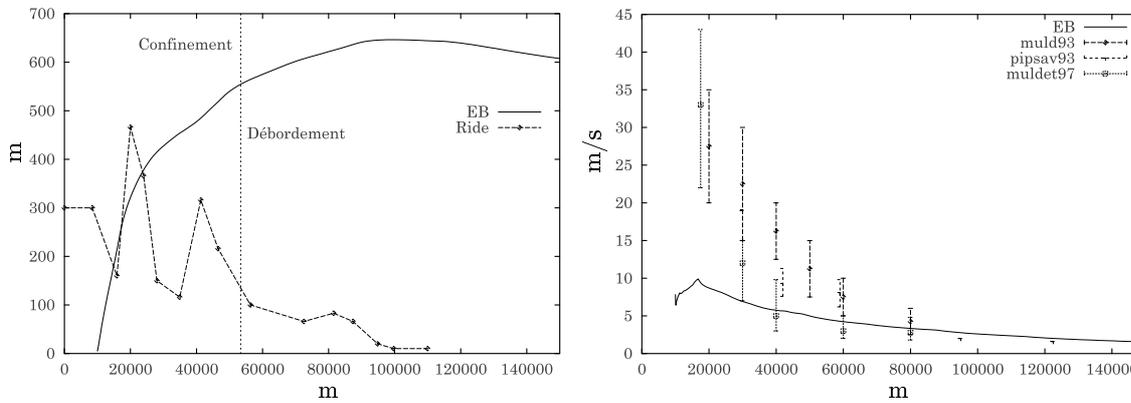
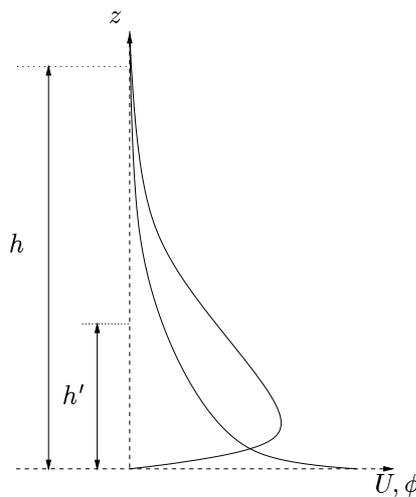


FIG. 9.19 – Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Hauteur en fonction de la position, les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var (à gauche). Vitesse en fonction de la position (à droite).



cependant moins rapide à cause, en partie, du gain de sédiments par érosion, phénomène qui n'était pas pris en compte dans certaines des approches précédentes. Les vitesses sont en accord avec les prédictions de Mulder *et al.* [1997] entre le 30^e et le 80^e kilomètres. Elles sont supérieures aux prédictions de Piper et Savoye [1993] au niveau des points de rupture des câbles.

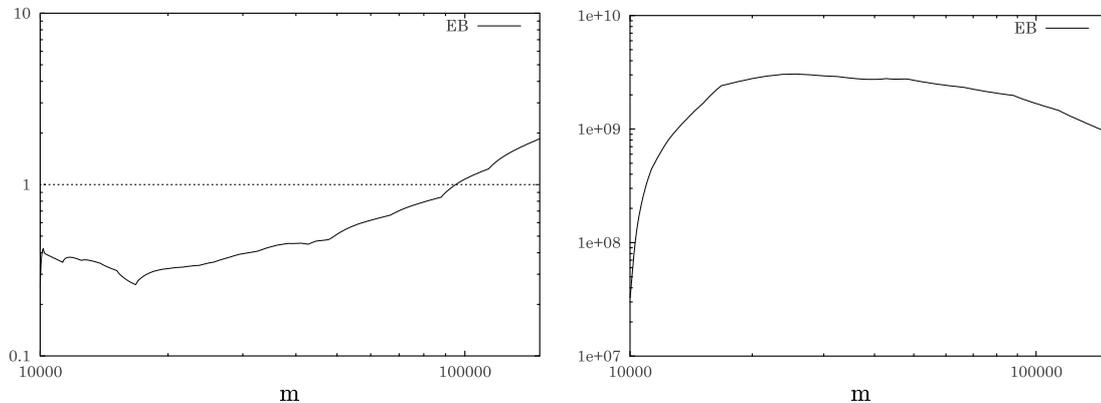


FIG. 9.21 – Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Nombre de Richardson en fonction de la position (à gauche). Nombre de Reynolds en fonction de la position (à droite).

L'évolution du nombre de Richardson (cf. figure 9.21 à gauche), indique que l'écoulement est supercritique sur les 90 premiers kilomètres : il incorpore de l'eau de façon relativement constante. Au delà l'incorporation d'eau diminue et l'écoulement devient subcritique.

Les nombres de Reynolds, basés sur la hauteur du courant, prédits par le modèle sont compris entre 1×10^9 et 2×10^9 (cf. figure 9.21 à droite). Ces valeurs sont très supérieures aux valeurs prédites par Mulder *et al.* [1997] (vraisemblablement publié avec une erreur). Il sont du même ordre de grandeur que ceux de l'effondrement de Grand Banks.

Conclusion En conclusion, une reconstruction satisfaisante des données n'a été possible que par l'inversion totale (paramètres physiques + conditions initiales). L'inversion simultanée sur les données de position du front en fonction du temps et les données de hauteurs sédimentées apparaît être nécessaire pour contraindre suffisamment ces paramètres.

Les résultats sont en bon accord avec les points de rupture des câbles. Les vitesses instantanées sont plus faibles que celles estimées lors des précédentes études. Leur décroissance est cependant moins rapide : les vitesses estimées dans la partie distale de la vallée du Var sont alors supérieures aux estimations précédentes.

Les épaisseurs de sédiments observées dans les carottes peuvent être attribuées à l'effondrement. Le profil de dépôt complet est représenté sur la figure 9.22 page suivante.

Le volume de sédiments impliqué dans l'écoulement à la confluence du canyon du Paillon et du canyon du Var est estimé à $2,9 \times 10^7 \text{ m}^3$, indiquant qu'un volume de sédiments d'environ $2 \times 10^7 \text{ m}^3$ avait été érodé dans le chenal distributaire.

9.5 Étude complémentaire

Une partie de la masse principale de l'effondrement a semble-t-il été déviée de la vallée principale du Var pour emprunter une vallée située plus au Nord [Communication personnelle de B. Savoye, 1999]. Le trajet *b* est représenté sur la figure 9.8 page 225. Le profil bathymétrique correspondant est donné par la figure 9.23 page suivante. Nous proposons de déterminer l'évolution d'une masse correspondant à une fraction de la masse principale déterminée à la section précédente. Les fractions étudiées sont $1/2$, $1/3$ et $1/4$.

Les positions atteintes par le front sont sensiblement les mêmes quelque soit la fraction de la masse initiale (cf. figure 9.24 page suivante à gauche).

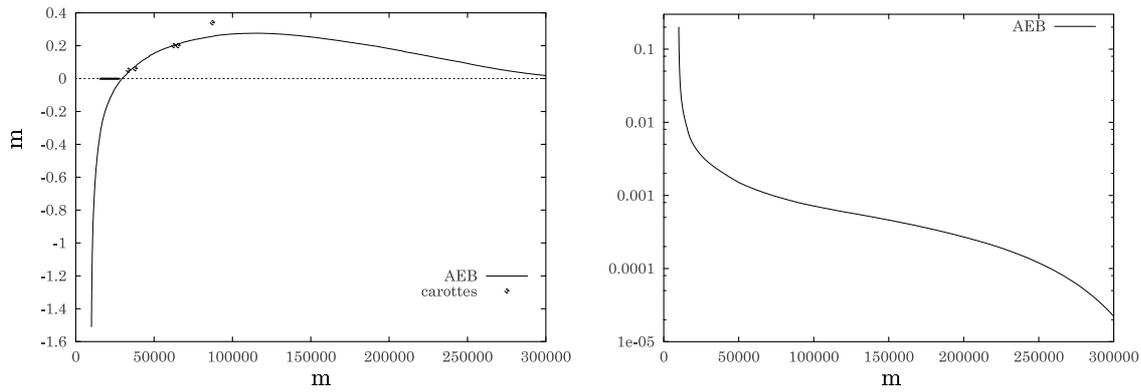


FIG. 9.22 – Inversion totale contrainte par la dynamique et le dépôt. Profil de dépôt obtenu (à gauche). Évolution de la fraction volumique (à droite).

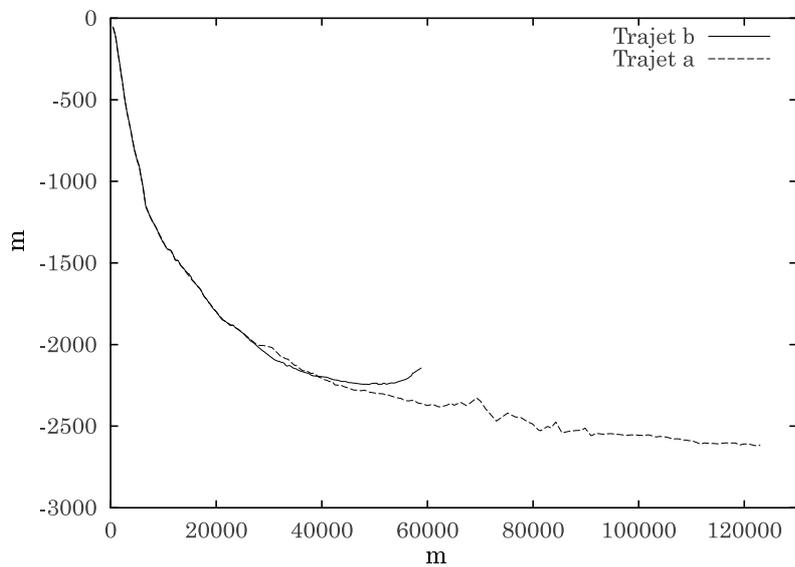


FIG. 9.23 – Profil bathymétrique associé au trajet b. Le profil en pointillé est donné à titre indicatif, il correspond à celui de la vallée du Var.

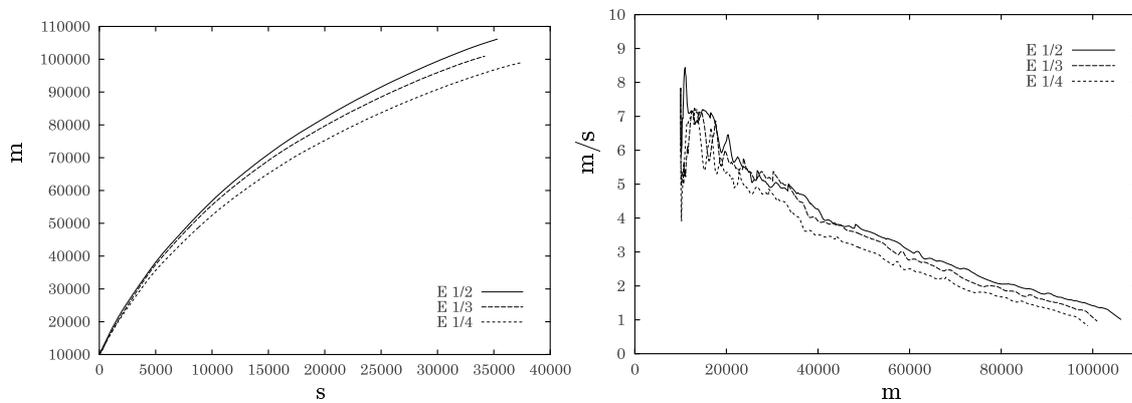


FIG. 9.24 – Trajet b. Position du front en fonction du temps (à gauche). Vitesse en fonction de la position du front (à droite)

Les vitesses suivent la même évolution (cf. figure 9.24 page ci-contre à droite), avec des vitesses maximales instantanées de l'ordre de $8,5 \text{ m/s}$. Notons que le centre de gravité s'arrête, pour les trois simulations, au 49^e kilomètre. L'écoulement ne parvient pas à remonter la pente, fait en accord avec l'étude des données de dépôt et de sismique de Piper et Savoye [1993].

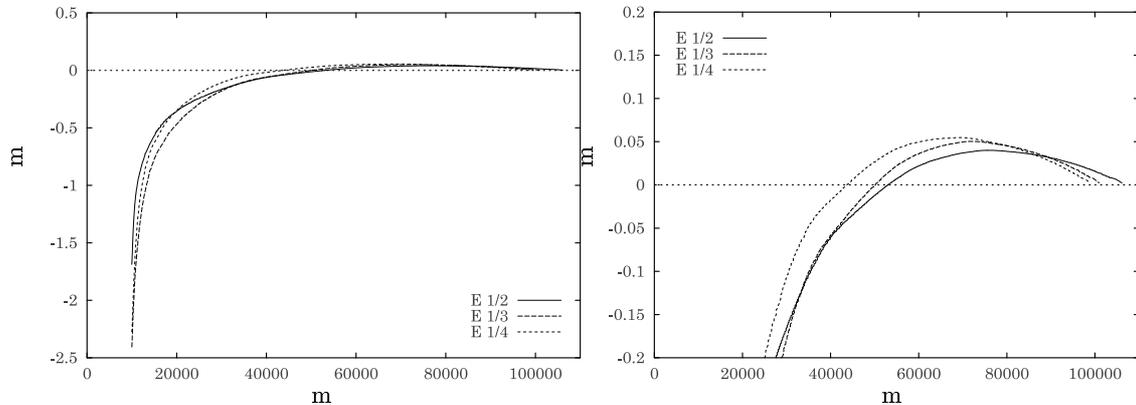


FIG. 9.25 – Trajet b. Épaisseur déposée.

Les épaisseurs déposées sont de l'ordre de 5 cm (cf. figure 9.25). Pour la fraction de masse la plus faible ($1/4$), le dépôt est plus trapu. Bien que le centre de gravité de l'écoulement s'arrête, la distance excessive de dépôt est due à la non prise en compte de la pente au niveau local de l'avant de l'objet-écoulement. Cependant, le profil de dépôt obtenu est à mettre en correspondance avec celui que l'on obtiendrait si l'écoulement était dévié vers la plus grande pente.

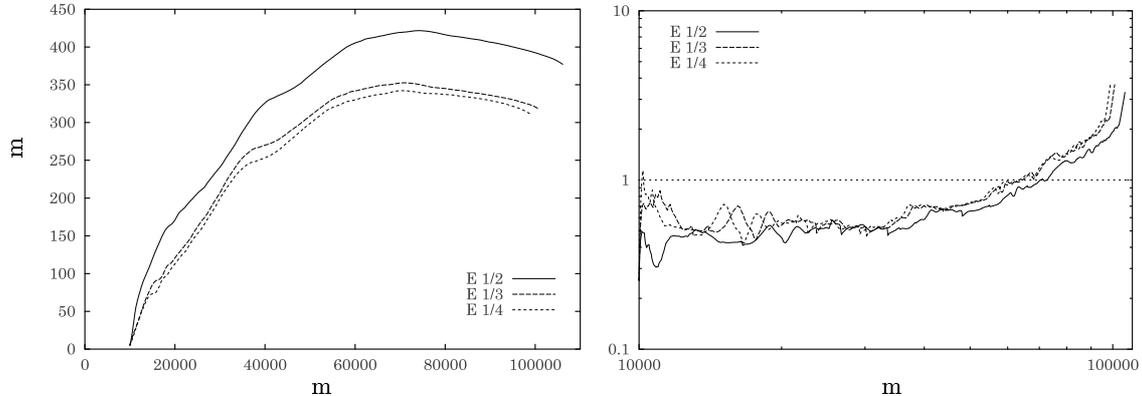


FIG. 9.26 – Trajet b. Hauteur en fonction de la position (à gauche). Nombre de Richardson en fonction de la position (à droite).

La figure 9.26 indique que l'écoulement devient très rapidement supercritique, causant une augmentation rapide de la hauteur de l'écoulement (cf. figure 9.26). Au delà du 70^e kilomètre l'écoulement devient subcritique. N'incorporant plus d'eau, sa hauteur s'effondre lentement par étalement.

9.6 Conclusions

Le test des différents scénarios d'écoulement ont montré l'importante variabilité des résultats obtenus. Ils sont principalement fonction :

- de la discrétisation du profil bathymétrique (cf. annexe O page 355) ;
- de la position des points de rupture des câbles ;

- du nombre de carottes utilisées comme points de contrainte pour le dépôt.

Il apparaît clairement qu'une reconstruction satisfaisante de la dynamique n'est pas suffisante pour reproduire de façon correcte les épaisseurs sédimentées.

Inversement, le respect des épaisseurs sédimentées n'implique pas non plus une reconstruction satisfaisante de la dynamique, et en particulier, ne permet pas de respecter les temps de passage sur les câbles, même si ceux-ci sont incertains.

La reconstruction la plus satisfaisante a été obtenue par l'inversion totale (estimation des paramètres physiques et des conditions initiales) sur des données simultanées d'épaisseur de dépôt et des positions de point de rupture des câbles. L'estimation des épaisseurs sédimentées a permis d'utiliser les positions de point de rupture des câbles comme des contraintes faibles, à l'aide de barres d'erreur.

L'inversion simultanée sur des données de position du front en fonction du temps (données dynamiques) et des données de dépôt apparaît être indispensable pour une bonne estimation des paramètres physiques et des conditions initiales.

Les épaisseurs sédimentées relevées dans les carottes sont reproduites de façon satisfaisante avec des paramètres physiques et des conditions initiales d'écoulement réalistes. Elles apparaissent donc être la résultante de l'effondrement de 1979. Les autres carottes, répertoriées comme « incertaines », nécessiteraient vraisemblablement des volumes de sédiments trop importants ainsi que des vitesses trop élevées pour respecter les temps de rupture des câbles. Des tests complémentaires doivent être effectués.

Ces résultats sont cependant à prendre en compte avec certaines précautions, si l'on tient compte :

1. des limitations du modèle qui sont principalement :
 - la bi-dimensionalité ;
 - l'hypothèse de faibles concentrations.
2. des incertitudes liées aux données de dépôt. Les carottes sont d'ailleurs situées selon des positions assez diverses : fond de chenal, dordure latérale, levée centrale, vallée distale).
3. du fait que les valeurs des paramètres physiques ne sont que des valeurs moyennes sur toute la reconstruction (ils sont indépendants du temps). Ces derniers sont en réalité des variables de la pente, de la granulométrie, etc. (cf. remarque page 181)

Enfin, le modèle théorique a montré sa capacité à reproduire des événements catastrophiques importants menant à des dépôts significatifs. Nous l'avons également utilisé comme « outil » prédictif pour estimer les caractéristiques de l'évolution d'une fraction de masse de l'effondrement suivant un autre trajet. Les résultats obtenus sont en accord avec les observations bibliographiques de Piper et Savoye [1993].

	IPci Dynamique			IPci Dépôt			IT Dynamique			IT Dépôt			IT Simultané	observée
	inf.	int.	sup.	5 pts	3 pts	2 pts	inf.	int.	sup.	5 pts	3 pts	2 pts		
Position														
du front (km)	80	89.1	95.4	229.6	228.4	229.8	80	90.6	100	108.5	138.7	122.8	80.2	80-100
	106	115.8	124.7	352.5	350	353	106	114	120	159.9	229.3	183.4	120	106-120
Dépôt														
(m)	0.27	0.46	0.54	0.03	0.05	0.03	0.26	0.35	2.34	0.04	0.05	0.04	0.04	0.05
	0.23	0.41	0.49	0.08	0.1	0.08	0.21	0.24	2.09	0.07	0.10	0.07	0.07	0.06
	0.08	0.17	0.24	0.24	0.26	0.24	0.06	0.03	0.44	0.20	0.23	0.18	0.20	<0.2
	0.07	0.15	0.22	0.25	0.27	0.25	0.05	0.02	0.33	0.21	0.23	0.19	0.21	<0.2
	0.02	0.05	0.09	0.32	0.34	0.32	0.01	-	0.01	0.26	0.27	0.23	0.26	0.34

TAB. 9.18 – Synthèse des temps de rupture des câbles et des épaisseurs déposées des différents scénarios testés. IPci = Inversion partielle sur les conditions initiales. IT = Inversion totale (paramètres physiques + conditions initiales). Les épaisseurs déposées sont arrondies au centimètre près, les positions à la centaine de mètres près.

Bibliographie

Cette bibliographie regroupe les références traitant :

- de l'étude expérimentale des suspensions en canal noyé ;
- de l'effondrement de Nice, 1979.

- BEGHIN, P. [1979]. *Etude des bouffées bidimensionnelles de densité en écoulement sur pente avec application aux avalanches de neige poudreuse*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble. 120 p.
- BONNECAZE, R. T., H. E. HUPPERT et J. R. LISTER [1993]. Particle-driven gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* vol. **250**, pages 339–369.
- BOWEN, A. J., W. R. NORMARK et D. J. W. PIPER [1984]. Modelling of turbidity currents on Navy Submarine Fan, California Continental Borderland. *Sedimentology* vol. **31**, pages 169–185.
- BRANNEY, M. J. et P. KOKELAAR [1998]. Flow–boundary zone processes: towards understanding the link between flow parameters and deposit characteristics. Dans: *Sediment transport and deposition by particulate gravity currents, programme and abstract volume*, page 16. University of Leeds, <http://earth.leeds.ac.uk/turbconf>.
- FUKUSHIMA, Y., G. PARKER et H. M. PANTIN [1985]. Prediction of ignitive turbidity currents in Scripps Submarine Canyon. *Mar. Geol.* vol. **67**, pages 55–81.
- FULLANA, J. M. [1997]. *Identification d'équations modèles décrivant un écoulement de Bénard-von Kármán*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie. 136 p.
- GENNESSEAUX, M., A. MAUFFRET et G. PAUTOT [1980]. Les glissements sous-marins de la pente continentale niçoise et la rupture de câbles en mer Ligure (Méditerranée Occidentale). *C. R. Acad. Sci. Paris, série d* vol. **290**, pages 959–962.
- HABIB, P. [1994]. Aspects géotechniques de l'accident du nouveau port de Nice. *Revue Française de Géotechnique* vol. **65**, pages 3–15.
- HOPFINGER, E. J. et J. C. TOCHON-DANGUY [1977]. A model of powder-snow avalanches. *J. Glaciol.* vol. **19**, pages 343–356.
- Hsü, K. J. [1989]. *Physical principles of sedimentology*. Springer-Verlag, Berlin. 233 p.
- HUPPERT, H. E. [1998]. Quantitative modelling of granular suspension flows. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* vol. **356**, pages 2471–2496.
- KOMAR, P. D. [1969]. The channelized flow of turbidity currents with application to Monterey deep sea fan channel. *Jour. Geophys. Res. B.* vol. **74**, pages 4,544–4,558.
- LAVAL, A. [1988]. *Modélisation d'écoulements de type bouffée de densité ; Application à l'interprétation des dépôts turbiditiques*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France. 262 p.
- MULDER, T. [1993]. La vitesse du courant de turbidité de 1979 à Nice : apports de la modélisation. *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIa* vol. **317**, pages 1449–1455.
- MULDER, T., B. SAVOYE, D. J. W. PIPER et J. P. M. SYVITSKI [1998a]. The Var submarine sedimentary system : understanding Holocene sediment processes and their importance to the geological record. Dans : *Geological processes on continental margins : Sedimentation, mass-wasting and stability* (Edité par M. S. EVANS et A. CRAMPS), numéro 129, pages 145–166. Geological Society, London, Special publications.

- MULDER, T., B. SAVOYE et J. P. M. SYVITSKI [1997]. Numerical modelling of a mid-sized gravity flow: the 1979 Nice turbidity current (dynamics, processes, sediment budget and seafloor impact). *Sedimentology* vol. 44, no. 305-326.
- MULDER, T., J. P. M. SYVITSKI et K. I. SKENE [1998b]. Modeling of erosion and deposition by turbidity currents generated at river mouths. *J. Sed. Res.* vol. 68, no. 1, pages 124-137.
- PARKER, G., Y. FUKUSHIMA et H. M. PANTIN [1986]. Self-accelerating turbidity currents. *Jour. Fluid Mech.* vol. 171, pages 145-181.
- PAUTOT, G. [1988]. *Rapport de mission ESCYANICE. Rapport confidentiel*, IFREMER.
- PIPER, D. J. W. et B. SAVOYE [1993]. Processes of late Quaternary turbidity current flow and deposition on the Var deep-sea fan, north-west Mediterranean Sea. *Sedimentology* vol. 40, pages 557-582.
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1983]. Apport des expériences en canal à l'interprétation sédimentologique des dépôts de cônes détritiques sous-marins. *Revue de l'Institut Français du Pétrole* vol. 42, no. 5, pages 529-553.
- SAVOYE, B., P. COCHONAT, J. BOURILLET et F. CAYOCCA [1997]. Les avalanches sous-marines. vol. 2404 de *Cols Bleus*. <http://www.ifremer.fr/drogm/Realisation/Poster/Avalanches/avalf2.html>.
- TOCHON-DANGUY, J. C. et E. J. HOPFINGER [1977]. *Étude des courants de gravité sur forte pente avec application aux avalanches poudreuses*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- ZENG, J., D. R. LOWE, D. B. PRIOR, W. J. WISEMAN et B. D. BORNHOLD [1991]. Flow properties of turbidity currents in Bute Inlet, British Columbia. *Sedimentology* vol. 38, pages 975-996.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans cette thèse une méthode originale pour la simulation des écoulements gravitaires catastrophiques dilués. Le développement conjoint d'une méthode inverse a montré l'application potentielle de cette approche sur des cas réels. Ce document comporte de quatre parties dont nous donnons ci-dessous les conclusions respectives.

Partie I

Au **premier chapitre**, nous avons décrit les écoulements associés au transport des sédiments en domaine marin profond. Ces écoulements sont complexes et exhibent une très grande variété de comportements qui sont principalement fonction des mécanismes de support des particules dont les plus importants sont :

- la rigidité de la matrice ;
- les collisions ou frictions inter-granulaires ;
- la turbulence.

Sur la base de la classification que nous avons proposée en fin de chapitre, nous avons limité nos travaux à l'étude des suspensions turbulentes.

Le **second chapitre** a consisté en une étude bibliographique des modèles mécaniques appliqués à la sédimentation gravitaire, qui par ordre de complexité croissante sont :

- L'approche uniforme et stationnaire ;
- L'approche instationnaire pure ;
- L'approche du type « couche limite stationnaire » ;
- L'approche du type « ondes longues » ;
- L'approche du type « Navier-Stokes » ;

Ce chapitre a montré la nécessité de trouver un juste compromis entre les méthodes « couche limite stationnaire » et les modèles « instationnaires purs » qui semblent plus adaptées à la simulation des écoulements gravitaires sur des échelles de temps géologiques, que les méthodes « ondes longues » et « Navier–Stokes » qui restent encore trop coûteuses en temps de calcul.

Partie II

Dans le **troisième chapitre**, nous avons construit, sur la base d'un raisonnement phénoménologique, un modèle mathématique simple (système d'équations différentielles) pour les écoulements gravitaires (modèle **P**). L'originalité de ce travail réside dans le traitement de l'écoulement sous la forme d'un objet géométrique déformable. Le modèle obtenu intègre principalement deux nouveaux phénomènes :

1. l'effet d'étalement par gravité (effondrement de la suspension sous son propre poids) qui devient prépondérant sur pentes faibles ou nulles,
2. les transferts de particules dus à l'érosion et/ou la réduction de la sédimentation par la diffusivité turbulente.

Une nouvelle approche théorique, présentée au **quatrième chapitre**, a permis une formulation d'un modèle plus complet, **T**, en lien direct avec les équations du type ondes longues. Elle repose essentiellement sur deux considérations :

1. un premier argument théorique, celui de la théorie de la couche limite, des profils semblables et des méthodes intégrales.
2. un second argument théorique, inspiré de la théorie aérodynamique des profils minces, qui permet de décomposer le mouvement en :
 - un mouvement de translation de la géométrie dans le repère global ;
 - un mouvement de déformation dans le repère lié au barycentre de la géométrie.

Cette formulation, qui demeure relativement générale, permet l'intégration aisée dans le modèle de phénomènes connus au niveau des équations générales de la mécanique des fluides.

L'intérêt de ce chapitre est double :

- il montre dans quelle mesure des hypothèses simplificatrices peuvent conduire à des modèles et quels phénomènes physiques, liés aux écoulements gravitaires, ceux-ci représentent ;
- il apporte corrections et généralisation au modèle **P**.

Les fermetures du modèle ont été présentées au **cinquième chapitre**. Elles sont formulées à l'aide d'arguments dimensionnels et en référence aux inconnues classiques de la mécanique des fluides (viscosité turbulente, nombre de Schmidt turbulent...).

Partie III

Le **sixième chapitre** a été dédié à l'étude analytique des solutions asymptotiques du système d'équations différentielles, associées à différents types d'écoulements sur des pentes variables. Elle a permis d'appréhender le bon comportement qualitatif des modèles et a montré :

- que l'introduction d'un nouvel élément (couplage des vitesses du modèle **T**) apporte une augmentation de généralité par une plus grande variété de comportements ;
- le bon comportement du code numérique sur les temps longs ;
- la nécessité d'une résolution instationnaire complète de l'historique de l'écoulement, puisqu'une grande part des sédiments est déposée durant une phase transitoire pour laquelle les comportements asymptotiques des variables dynamiques (vitesses) et géométriques (hauteur et longueur) ne sont pas atteints.

Au **septième chapitre**, à l'aide de tests numériques, nous montrons le bon comportement qualitatif et la cohérence du modèle. Ces tests ont également permis une hiérarchisation du rôle des conditions initiales, des paramètres physiques et des paramètres de contrôle par rapport au développement qualitatif et quantitatif des écoulements, à la géométrie et à l'extension des dépôts résultants. Ces types de tests, qui doivent être étendus, peuvent aider à la compréhension de la mise en place des dépôts.

Partie IV

Dans le **huitième chapitre**, la mise en œuvre d'une méthode inverse nous a permis d'identifier les paramètres physiques de modèles réduits expérimentaux à partir de la donnée simultanée d'observations de vitesse et de volume de sédiments déposés. Nous avons ainsi montré la capacité du modèle à reproduire quantitativement des expériences en canal immergé.

Par ailleurs, nous avons montré l'existence de jeux de paramètres permettant une reconstruction très satisfaisante de la dynamique des écoulements (position-temps ou vitesse-position) mais ne permettant pas la restitution de la géométrie et l'extension des dépôts. Inversement, d'autres jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très correcte les profils de dépôt sans que, pour autant, la reconstruction dynamique soit satisfaisante.

Dans le **dernier chapitre** nous avons traité du cas de la reconstruction des données d'un cas réel à partir d'observations : l'effondrement de Nice en 1979. C'était un problème inverse délicat à résoudre dans la mesure où de nombreux paramètres (paramètres physiques et conditions initiales) sont inconnus et, où l'érosion et le dépôt des sédiments influencent fortement la dynamique du mouvement. Ici encore,

seule la donnée simultanée de contraintes sur la dynamique (position des points de ruptures de câbles) et les dépôts (épaisseurs sédimentées estimées d'après les carottes) permet une bonne reconstruction.

Outre l'aide à l'interprétation des dépôts par la validation d'hypothèses sur l'origine de certaines séquences, nous avons utilisé le modèle comme outil prédictif (profil de dépôt dans un chenal latéral).

En guise de conclusion, malgré quelques limitations, dues à la simplification géométrique de l'écoulement, ce modèle constitue une bonne approximation des phénomènes gravitaires instationnaires. Grâce à ses temps de calcul réduits, il est envisageable de simuler des séries d'événements —même plusieurs événements en parallèle— et ainsi, de former des séquences de dépôts multi-événementielles.

Simple et complet, il constitue un premier pas vers la compréhension quantitative de l'impact des paramètres externes —tels que la nature et la quantité des apports en sédiments, la géométrie du bassin— sur la dynamique des courants gravitaires et l'organisation des séquences de dépôt. Il peut être utilisé pour reconstruire les processus de sédimentation et les dépôts qui en résultent.

Perspectives

À la vue des résultats encourageants du modèle, des études complémentaires pour une meilleur compréhension des processus gravitaires sous-marins pourraient être orientées selon les grands axes suivants :

1. Le passage à des écoulements concentrés (cohésion entre les particules ; interactions visqueuses entre les particules de sédiments et le fluide les englobant ; collisions entre les particules), en intégrant les résultats d'une étude bibliographique des lois de comportement de ce type d'écoulement [Hugot, 1997]⁵⁹ ;

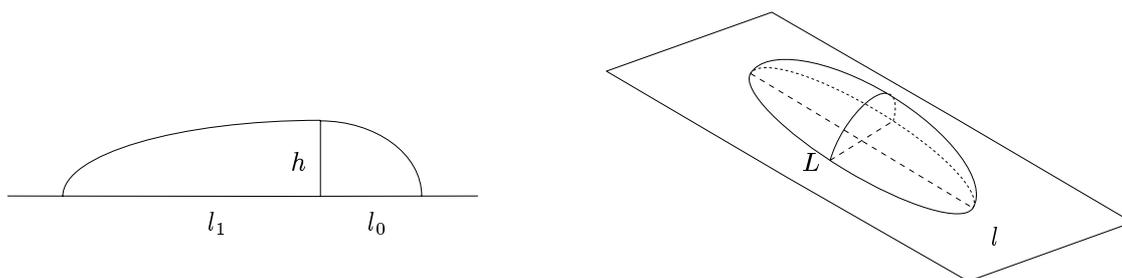


FIG. 1 – Exemple de géométrie d'objets : à gauche exemple d'objet asymétrique ; à droite exemple d'objet à trois dimensions.

2. La formulation du modèle pour d'autres types d'objets géométriques dont des objets tridimensionnels (cf. figure 1) ;
3. Le passage à des écoulements comportant plusieurs granulométries, dont les résultats préliminaires présentés à la section 7.5 page 173 sont encourageant.

⁵⁹. À partir de la démarche de développement du modèle théorique, l'intégration de ces lois est relativement aisée puisqu'en lien direct avec la mécanique des fluides classiques.

Résumé

Nous proposons dans cette thèse un modèle mathématique simple adapté à la sédimentation des dépôts gravitaires en eaux profondes. L'écoulement est traité comme un objet géométrique déformable. Les principaux mécanismes physiques pris en compte par le modèle sont : 1. La turbulence ; 2. L'étalement dû aux forces de pression ; 3. L'incorporation de fluide le long de l'interface suspension–fluide ambiant ; 4. La sédimentation de particules ; 5. L'érosion de particules.

Les solutions analytiques asymptotiques du système différentiel non-linéaire montrent la consistance des solutions numériques sur les temps longs. Les tests numériques permettent de quantifier l'impact qualitatif et quantitatif des paramètres physiques du modèle, des conditions initiales et des paramètres de contrôle (pente, granulométrie).

Une méthode d'inversion est mise en œuvre pour l'identification des conditions initiales et/ou des paramètres du modèle. L'inversion partielle (détermination des conditions initiales) appliquée à des modèles réduits expérimentaux montre le bon comportement qualitatif du modèle et cela même hors du domaine de validité strict de ce dernier. L'inversion totale (identification des paramètres physiques et détermination des conditions initiales) montre le bon comportement du modèle d'un point de vue quantitatif au niveau des vitesses de l'écoulement et des épaisseurs déposées. La méthode d'inversion est appliquée à l'effondrement de l'aéroport de Nice en 1979 pour tester des scénarios d'écoulement. Contrainte par les ruptures de câbles et/ou les épaisseurs déposées, elle permet, par exemple, d'estimer le volume initial ou les paramètres physiques de l'effondrement (coefficient de friction, nombre de Schmidt turbulent modifié, etc.).

Malgré quelques limitations, principalement dues aux simplifications géométriques de l'écoulement, ce modèle complet constitue un premier pas vers la compréhension quantitative de l'impact des paramètres externes —tels que la nature et la quantité des apports en sédiments, la géométrie du bassin— sur la dynamique des courants turbiditiques et l'organisation des séquences de dépôts qui en résultent. Grâce à ses faibles temps de calcul sur micro-ordinateur, il est envisageable de simuler des séries d'événements et de former ainsi des séquences de dépôt multi-événementielles. Il peut être utilisé pour reconstruire les processus de sédimentation et les dépôts résultants.

Mots-clés: écoulement gravitaire catastrophique / objet écoulement / équations différentielles / inversion / modèles réduits / analogue réel / turbidites.

Abstract

In this thesis, we propose a simple mathematical model for the sedimentation of gravity deposits in deep water. The flow is considered as a deformable geometrical object. Main physical features of the model include : 1. Turbulence; 2. Spreading due to pressure forces; 3. Water incorporation at the suspension–ambient fluid interface; 4. Particles settling; 5. Particles erosion.

Asymptotic analytical solutions of the non-linear differential system show the consistency of long times numerical solutions. Numerical tests allow the quantification of the impact of physical parameters, initial conditions and controlling parameters (slope, granulometry).

An inverse method is developed in order to identify initial conditions and/or model parameters. Partial inversion (initial conditions identification) applied to small-scaled models, shows the good qualitative behaviour of the model, even out of its validity range. Total inversion (physical parameters and initial conditions identification) shows the good quantitative behaviour of the model on velocities and deposit thicknesses. Application of the inverse method to the Nice 1979 gravity flow (south–France), constrained by cable breaks and/or deposit thicknesses, leads, for example, to initial volume estimation or flow physical parameters (friction coefficient, modified turbulent Schmidt number, etc.).

Despite some limitations, due to the geometrical simplification of the flow, this complete model constitutes a first step towards quantitative comprehension of the impact of external parameters on catastrophic gravity flow dynamics and on the organization of subsequent deposits. Due to its very short computational times, it is foreseeable to simulate series of events and therefore to form multi-event depositional sequences. It can be used to reconstruct the sedimentation processes and the resulting architecture of deep-water reservoirs.

Keywords: catastrophic gravity flow / flow object / differential equations / inversion / small-scaled model / real analogue / turbidites.

Annexe A

Dépôts et caractéristiques des dépôts

Notre discussion est centrée sur la description des mécanismes de transport des sédiments sur de longues distances en eaux profondes. Bien que la structure des sédiments déposés dépende pour une grande part de ces processus, elle dépend également du mode final de dépôt, des déformations post-dépôt et d'un certain nombre de facteurs externes à l'écoulement regroupés sous l'appellation « processus de contrôle ». C'est pourquoi, dans cette section, nous allons nous intéresser à la nature des dépôts des sédiments dans les milieux marins profonds, modernes et anciens, et aux enseignements que l'on peut tirer des processus finals de dépôt.

Sommaire

A.1	Contrôle des processus de dépôt	251
A.1.1	L'apport et le type de sédiments	253
A.1.2	L'eustatisme et le changement local du niveau de la mer	253
A.1.3	La tectonique des plaques et le tectono-eustatisme	254
A.1.4	La taille et la géométrie du bassin	255
A.2	Caractéristiques des dépôts	255
A.2.1	Débrites ou dépôts d'écoulements à débris	256
A.2.2	Dépôts d'écoulements en grains	258
A.2.3	Dépôts d'écoulements fluidisés	260
A.2.4	Turbidites ou dépôts de courants turbiditiques	260
A.3	Conclusion	266

A.1 Contrôle des processus de dépôt

Il existe différentes variables interagissantes qui contrôlent les processus, les modes et les taux de sédimentation en eau profonde. Ainsi la stabilité des sédiments déposés dépend de l'angle de pente, du taux de sédimentation, des contraintes répétées (causées par exemple par les séismes). Mais elle est aussi influencée par des facteurs océanographiques tels que les courants et les vagues internes, le fort taux de carbone organique présent dans le sédiment (dû à l'eau profonde anoxique), la génération de gaz dans le sédiment causé par la décomposition des organismes.

On peut effectuer une classification de ces variables. Les plus importantes sont :

- L'apport et le type de sédiments ;
- La taille et la géométrie du bassin ;
- L'eustatisme et le changement local du niveau de la mer ;
- La tectonique des plaques et le tectono-eustatisme ;
- La circulation océanique ;

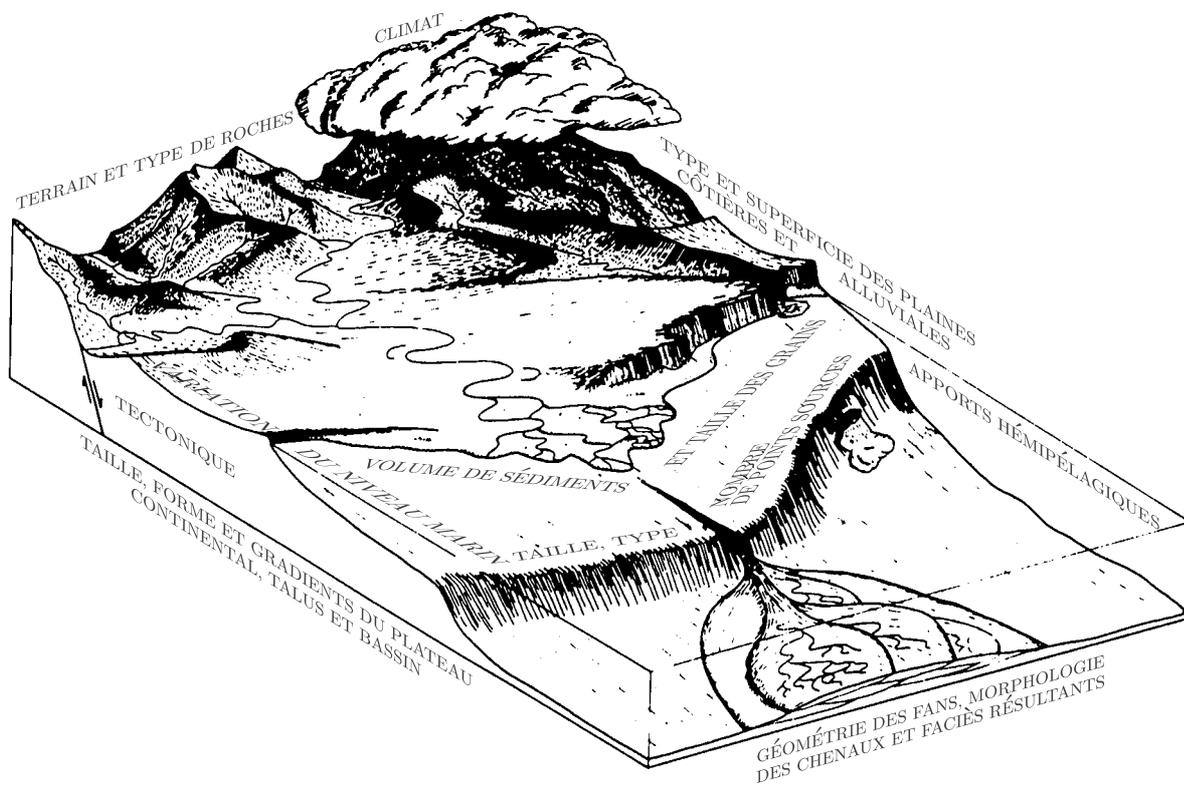


FIG. A.1 – Croquis schématique soulignant la variété des processus physiques contrôlant la sédimentation en eaux profondes (d'après Stow et al. [1985]).

– La chimie de l'eau de mer.

D'autres phénomènes à échelle plus importante peuvent intervenir comme le climat global, les taux relatifs de génération et de destruction de la croûte océanique. On trouve un résumé sur les contrôles de la sédimentation en haute mer dans Bouma, Normark et Barnes [1985]; Stow *et al.* [1985] et Pickering, Hiscott et Hein [1989, pp. 69-87]. La présente section dressera un bref rappel des variables de contrôle ayant une influence majeure sur les données de la modélisation de courants gravitaires à savoir l'apport et le type de sédiments, le changement local du niveau de la mer (eustatisme) et la tectonique.

A.1.1 L'apport et le type de sédiments

Les matériaux terrigènes sont les plus abondants dans le monde, avec respectivement deux et dix fois plus de boues que de sables et de graviers en volume. Ils constituent également le principal type de sédiments redéposés [Pickering *et al.*, 1989, p. 70]. La granulométrie (cf. annexe C) ainsi que le volume et le taux d'alimentation en sédiments (la quantité de sédiments disponibles) affectent le processus et la distance de transport et donc, la géométrie des dépôts (architecture des faciès et la taille des dépôts sous-marins).

Ainsi, les systèmes deltaïques fluviaux de grande taille comme le Gange, l'Indus, le Bengale et le Mississippi apportent rapidement une grande quantité de sédiments sur le plateau continental [Reading et Richards, 1994]. La disponibilité de ces matériaux pour la resédimentation de bas de pente dépend de la hauteur de la mer et de la largeur du plateau.

Les cônes de déjection (fans) allongés qui sont développés à la suite d'un apport, moyen à élevé, de sédiments de faibles tailles, constituent un autre exemple de l'influence fondamentale de la taille des grains et du volume de sédiments sur l'architecture des faciès et la taille des dépôts. Les cônes radiaux résultent, eux, d'un apport de sédiments plus faible, contenant plus de sable que de boue [Stow *et al.*, 1985].

Enfin, le nombre et l'espacement des points sources pour une marge donnée déterminent si un cône de déjection simple ou isolé se développe, si un système de fans chevauchants est produit, si le bassin est complètement ou partiellement rempli [Reading et Richards, 1994].

A.1.2 L'eustatisme et le changement local du niveau de la mer

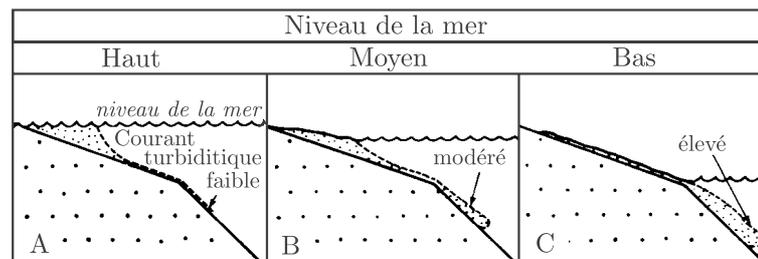


FIG. A.2 – Liaison entre niveau de la mer et développement des courants turbiditiques (d'après Shanmugam *et al.* [1985]).

Les fluctuations du niveau de la mer n'affectent pas seulement la sédimentation dans les environnements continentaux et marins peu profonds, mais influencent aussi véritablement les structures des dépôts en eaux profondes [Ravenne et Ponsot-Jacquin, 1993]. Les sources côtières, telles que les rivières ou les courants littoraux, peuvent avoir, durant les périodes de bas niveau marin, accès direct aux pentes du bassin (cf. figure A.2 C de la présente page), ou au contraire, un accès indirect pendant les périodes de haut niveau marin (cf. figure A.2 A) [Shanmugam *et al.*, 1985]).

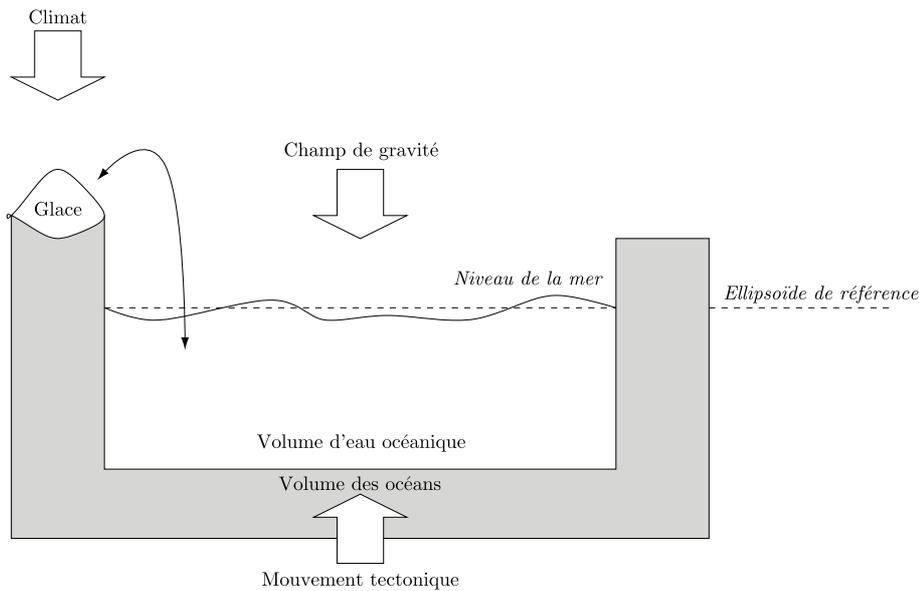


FIG. A.3 – Paramètres régissant les variations eustatiques (d'après Granjeon [1996]).

Les changements de niveau marin peuvent être globaux (on parle alors d'eustatisme, cf. figure A.3), ou locaux. Les fluctuations eustatiques apparaissent lorsque que l'un des trois paramètres géométriques suivants varie [Granjeon, 1996; Morner, 1976] :

1. Le volume total des bassins océaniques ;
2. Le volume d'eau dans les océans ;
3. La forme de la surface de la mer.

Toutefois, les fluctuations régionales résultant des mouvements tectoniques locaux et des corrections ou des anomalies isostatiques, ont un effet plus important et donc localement plus significatif que les changements eustatiques.

A.1.3 La tectonique des plaques et le tectono-eustatisme

Le cadre tectonique principal dans lequel a lieu la sédimentation marine comprend (cf. figure A.4 page ci-contre) :

- Les marges matures passives ;
- Les marges de rifts actifs ;
- Les marges convergentes avec ou sans systèmes d'arc ;
- Les marges transformantes ;
- Les mers marginales et les bassins d'arrière-arc ;
- Les bassins océaniques et intracratoniques.

Ces éléments exercent un contrôle du premier ordre sur la nature et le type de sédiments en affectant les taux de remontée et de dénudation, le réseau de drainage, la plaine côtière, la largeur et l'inclinaison de la marge continentale, la réserve en sédiments grossiers, la morphologie des bassins, et les variations locales du niveau marin. Les paramètres tectoniques spécifiques ont une influence importante sur la taille et la géométrie interne du bassin (*i.e.* l'espace disponible pour accueillir les sédiments), en incluant la pente de la base de la marge et du plancher du bassin. Ils déterminent donc, indirectement, le profil de dépôt initial du bassin récepteur [Ravenne et Ponsot-Jacquín, 1993].

Le type et la fréquence de l'activité sismique et des failles, à la fois dans les zones sources originales et les zones de transfert, sont aussi de première importance, dans la mesure où ils influencent la fréquence et le volume des écoulements gravitaires. Ils conditionnent également le remplissage et l'agencement

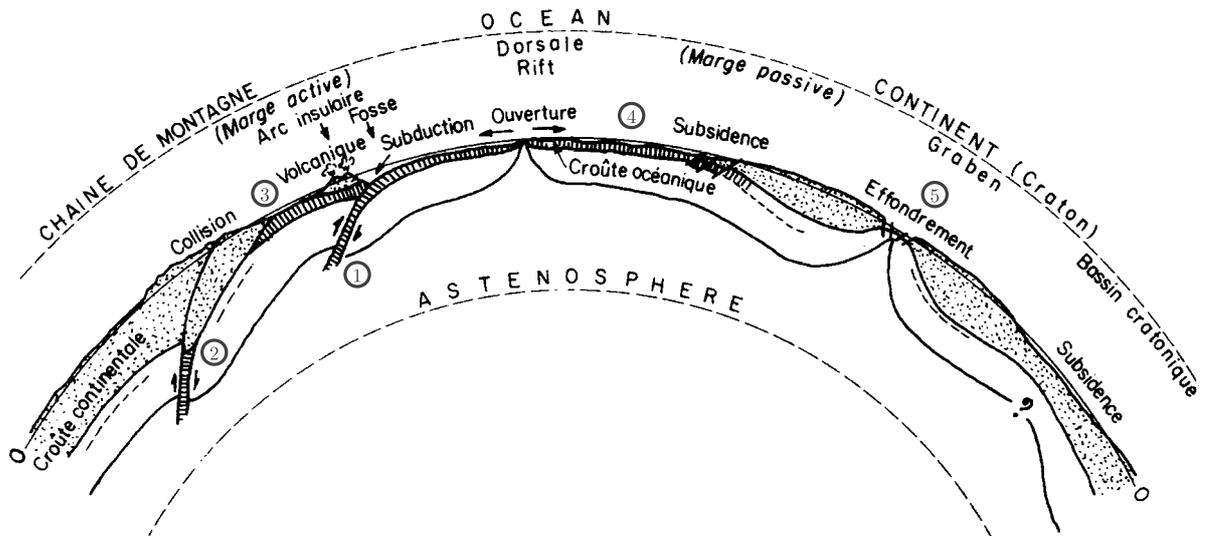


FIG. A.4 – Schéma des plus grandes unités tectoniques et morphologiques de la croûte terrestre. On peut distinguer : Les marges convergentes avec (1) ou sans (2) systèmes d'arc ; (3) Les bassins d'arrière-arc ; (4) Les bassins océaniques ; (5) les bassins intracratoniques (d'après Guillemot [1986, ch. 4.6]).

séquentiel dans le bassin [Ravenne et Beghin, 1983]. Par exemple, dans les marges matures passives, les tremblements de terre, bien que peu fréquents mais de grande échelle, produisent d'importants slumps qui engendrent à leur tour des débris-flows et des courants turbiditiques. Inversement, les tremblements de terre sont fréquents dans les marges actives, et par là même ne permettent pas une accumulation sédimentaire importante dans la zone de transfert. Il n'en résulte que des écoulements, certes nombreux, mais de faible volume.

A.1.4 La taille et la géométrie du bassin

La géométrie et la taille du bassin recevant les sédiments constituent également des variables importantes, puisqu'elles imposent la forme du système de dépôt, et donc la distribution en trois dimensions des faciès et séquences. La morphologie des zones de transfert ne doit pas non plus être négligée. En effet, le profil d'équilibre et ses ruptures potentielles dépendent de la largeur et du gradient de la plate-forme, ainsi que du gradient de pente du bassin récepteur [Ravenne et Ponsot-Jacquín, 1993].

Les bassins de faible pente, ayant un apport de sédiments élevé, vont avoir tendance à être suralimentés, et en conséquence à déborder dans les bassins voisins. Les cônes sous-marin qu'ils contiennent sont morphologiquement peu développés.

Cependant, les bassins les plus courants sont de type sous-alimenté, bien qu'avec le temps ils tendent à se remplir complètement. Les plaines abyssales, ainsi que les grandes étendues des talus continentaux et pentes océaniques, demeurent sous-alimentées. Les grands fans, morphologiquement bien développés, de type radiaux à allongés, sont caractéristiques de ces bassins [Reading et Richards, 1994].

A.2 Caractéristiques des dépôts

Il existe dans la littérature scientifique plusieurs centaines d'articles décrivant à travers le monde des sédiments marins profonds de tous âges et de tous modes d'agencement. Une analyse des structures sédimentaires par carottage etaffleurement permet de reconstituer les processus à l'origine des dépôts. Une synthèse de ces données, basée sur une série de modèles de faciès, constitue l'approche la plus efficace. On s'attache ici à décrire précisément les dépôts d'écoulements à débris (débrites) et les dépôts

d'écoulements turbiditiques (turbidites). Il est également intéressant d'examiner les dépôts laissés par les écoulements de type granulaire, fluidisé.

A.2.1 Débrites ou dépôts d'écoulements à débris

Il existe de nombreux points de vue sur la manière dont l'écoulement cesse dans l'environnement sous-marins après son initiation.

Par exemple, Terzaghi suppose que le matériau granulaire se dépose et expulse l'eau interstitielle, ce qui implique un écoulement de courte durée. À l'opposé pour Hampton [1975, 1979] la présence des argiles accroît la rigidité de la matrice qui supporte les grains (ce qui entraîne une vitesse de sédimentation plus faible) et empêche donc le fluide interstitiel de s'échapper. L'écoulement se poursuit avant que l'eau interstitielle en soit expulsée. L'écoulement à débris dure donc plus longtemps.

Le dépôt des écoulements à débris a lieu principalement dans deux situations lorsque lors de son déplacement l'écoulement atteint soit des pentes de plus faibles gradients, soit des aires moins confinées que le chenal dans lequel il s'écoulait. Dans chacun des cas, les composantes horizontales du poids tendent à s'équilibrer avec les frictions internes et externes. Dans les écoulements à débris, les sédiments et l'eau forment un milieu hétérogène. Dans la phase de dépôt, lorsque le cisaillement continu s'arrête, c'est l'écoulement tout entier qui ralentit, le fluide dissipe graduellement la pression interstitielle qu'il développe: À partir d'un certain point, les solides chutent dans l'écoulement. Ce processus de sédimentation est différent de celui rencontré dans les rivières, où la sédimentation est causée par la dissipation de la turbulence qui suspendait les particules.

Les débrites (dépôts d'écoulements à débris, ou olistostromes, blocs géants plurimétriques à pluridécamétriques) sont de composition très variable dans la nature. Elles peuvent être à dominante boueuse avec uniquement des galets et des gros blocs éparpillés, aussi bien qu'à dominante clastique avec une matrice boueuse inférieure à 5%.

L'épaisseur du dépôt peut atteindre plusieurs dizaines de mètres, et paraît être positivement corrélée avec la taille maximale des débris.

La présence de particules grossières peu classées au sein de la matrice argileuse indique avec certitude que l'on se trouve en présence d'un dépôt résultant d'un écoulement à débris.

Dans la nature, on peut trouver une séquence simple avec grano-classement inverse puis normal (cf. figure A.5), ce qui indique le dépôt d'un seul événement.

Dans les débrites, les éléments sont généralement répartis au hasard dans la matrice [Laval, 1988], ou bien organisés suivant toute ou une partie de la séquence standard illustrée dans le modèle (cf. figure A.5) :

- I Laminations de cisaillement ;
- II Déformations faillées, slumpées, convolutées ;
- III Matrice riche en débris avec ou sans figures d'échappement d'eau.

Ces divisions reflètent la dynamique complexe des écoulements à débris :

- En bas de l'écoulement, un mécanisme de glissement entraîne un cisaillement basal (I).
- L'avancement continu du courant, alors qu'il est en phase de dépôt à la base, produit une zone de propagation de plis et de failles dans la couche située immédiatement au-dessus de la zone de cisaillement (II).
- Enfin la dernière division (III) représente le « bouchon rigide » qui a été transporté vers le bas de pente. Son dépôt rapide entraîne un échappement de l'eau interstitielle vers le haut et le développement de tubes d'échappement d'eau pratiquement verticaux.

Dans certains dépôts anciens, il est possible de trouver des rochers isolés de très grande taille étrangement situés. Cette forme de signature est assez caractéristique des écoulements à débris. Parfois, dans les dépôts, les particules allongées sont alignées dans la direction de l'écoulement [Fisher, 1971]. Ceci a été interprété comme une indication sur la nature laminaire des écoulements à débris [Enos, 1977]. Certaines débrites ont été décrites comme étant couplées à la fois verticalement et horizontalement avec une turbidite les coiffant ([Einsele, 1991; Guillocheau, 1996] et cf. figure A.6 page suivante).

Enfin, à partir de l'épaisseur des différentes structures et de leur composition, on peut déterminer la distance du dépôt à la source. Les séquences les plus épaisses, contenant les éléments les plus grossiers, se trouvent proches de la source. Elles sont appelées « débrites proximales ». Les séquences les plus fines,

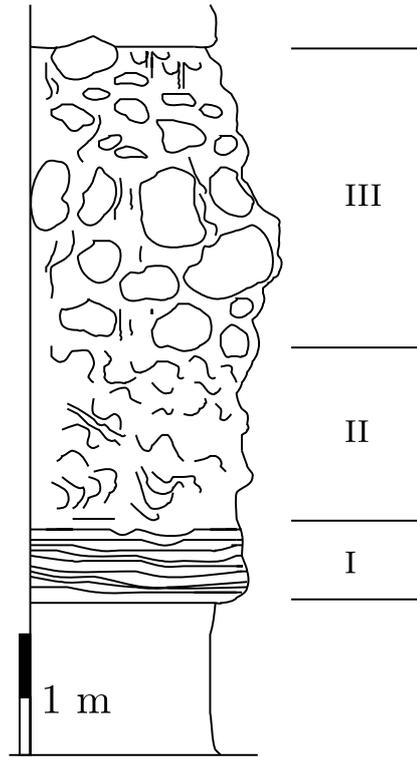


FIG. A.5 – Modèle de faciès resédimenté pour une débrite, montrant les séquences de structures types. La taille des grains croît de gauche à droite. Les barres d'échelle ne donnent qu'une indication de l'épaisseur d'une unité typique, qui en pratique peut varier considérablement (d'après Stow [1986]).

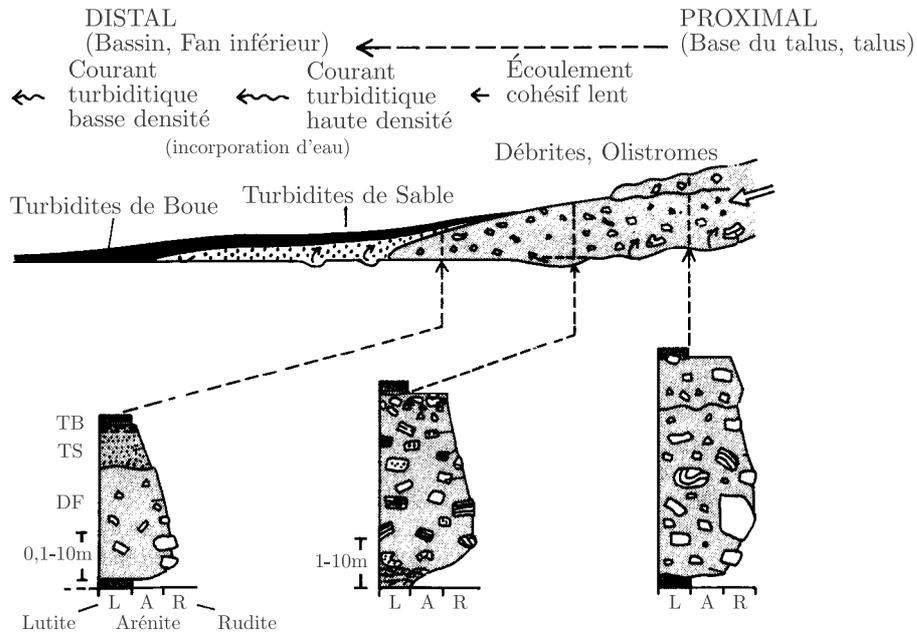


FIG. A.6 – Modèle conceptuel pour les écoulements à débris proximaux et distaux, évoluant en un courant turbiditique de haute puis basse densité (d'après Einsele [1991]).

composées de grains fins et souvent surmontées d'une turbidite, sont les plus éloignées de la source. Elles sont appelées « débris distales » (cf. figure A.6 page précédente).

Un profil longitudinal théorique de la fin distale du dépôt d'un écoulement à débris a été proposé par Johnson [Johnson, 1970, p. 453]. En supposant que l'écoulement à débris soit une simple substance plastique avec une limite élastique de cisaillement τ_y et une densité apparente γ_d , il obtient :

$$x = -\frac{2\tau_y}{\gamma_d} \ln \left(\cos \frac{\gamma_d}{2\tau_y} y \right) \quad (\text{A.1})$$

Ce profil est donné, sous forme adimensionnelle, à la figure A.7. On retrouve une forme « en bulbe » qui

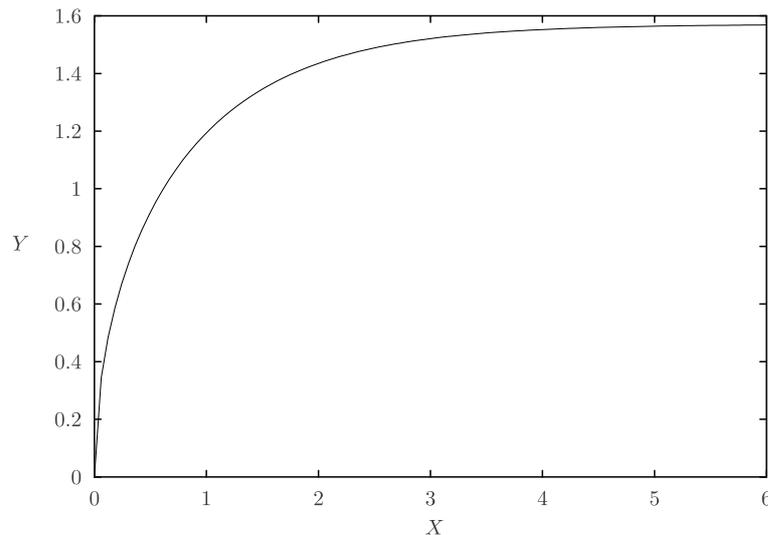


FIG. A.7 – Profil théorique du nez d'un dépôt d'écoulement à débris, avec $X = \frac{\gamma_d}{2\tau_y} x$ et $Y = \frac{\gamma_d}{2\tau_y} y$ (d'après Johnson [1970]).

est très proche des profils du nez de nombreux dépôts d'écoulements à débris, d'écoulements de laves solidifiées et de certains *landslides* [Johnson, 1970].

A.2.2 Dépôts d'écoulements en grains

Majoritairement composés de sable, les dépôts résultant de ce type d'écoulement sont uniformes, massifs, à sommet plat, et non granoclassés si ce n'est parfois à la base [Lowe, 1976].

On peut distinguer les différentes étapes qui ont lieu durant le dépôt (cf. figure A.8 page ci-contre) :

1. Le grano-classement inverse dû aux collisions inter-granulaires et/ou à la pression de dispersion ;
2. Le dépôt rapide en masse dû à l'accroissement de la friction inter granulaire.

Quand la concentration en particules est élevée, les particules sont plus proches les unes des autres, les collisions entre les particules sont plus fréquentes, et les mouvements sous l'influence des forces gravitationnelles et des forces du fluide sont inhibés, il en résulte alors un faible classement.

Toutefois, dans le cas d'écoulements en grains à densité modifiée, *i.e.* dont la densité du fluide interstitiel est plus élevée que celle du fluide ambiant (à cause, par exemple, de la présence de plus petits grains), les dépôts résultants peuvent être très différents [Lowe, 1976]. Ils s'apparentent alors plus aux séquences basales (R_1 – R_2) des turbidites de haute densité du modèle de Lowe (cf. section A.2.4 page 260 et [Lowe, 1982]).

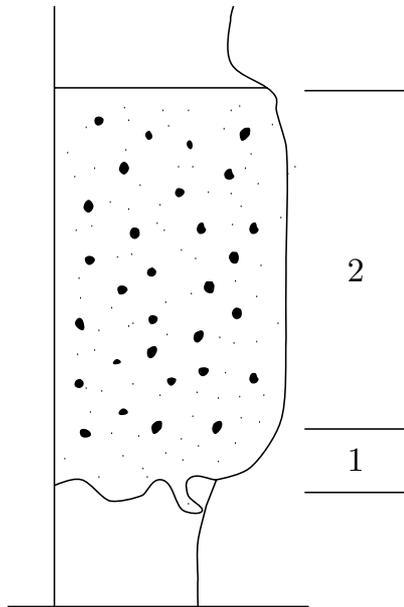


FIG. A.8 – Modèle de faciès resédimenté pour un écoulement en grain, montrant les séquences de structures types. La taille des grains croît de gauche à droite (d'après Middleton et Hampton [1976]).

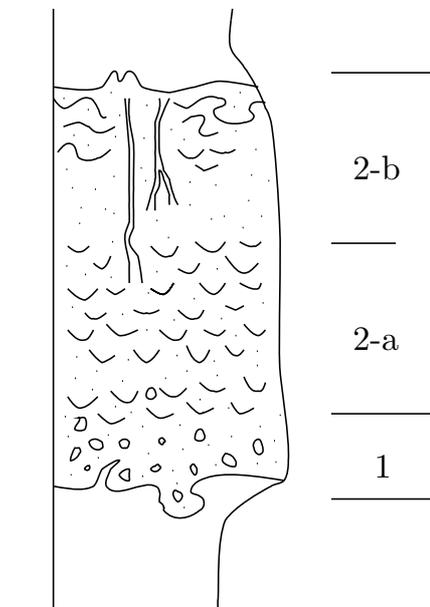


FIG. A.9 – Modèle de faciès resédimenté pour un écoulement fluidisé, montrant les séquences de structures types. La taille des grains croît de gauche à droite. (d'après Middleton et Hampton [1976]).

A.2.3 Dépôts d'écoulements fluidisés

On suppose que la séquence de structures types de dépôt des écoulements fluidisés résulte de (cf. figure A.9 page précédente) :

1. La décélération de l'écoulement due à une baisse de la surpression du fluide interstitiel, conduisant à un dépôt massif faiblement classé ;
2. L'échappement du fluide interstitiel pendant et/ou après le dépôt, entraînant la formation :
 - 2-a. de structures en coupelles (*dish structures*),
 - 2-b. de convolutions et de figures d'échappement d'eau se terminant par des petits volcans de sable au sommet de la séquence.

A.2.4 Turbidites ou dépôts de courants turbiditiques

Trois modèles distincts de turbidites, chacun possédant sa propre séquence standard de structures, ont été identifiés comme étant le résultat du dépôt d'un courant turbiditique unique, avec dans certains cas modification de l'écoulement dans son dernier stade. Les séquences des turbidites à gros grains, à grains moyens, à grains fins seront décrites à partir des figures A.10 page suivante, A.13 page 264, et A.16 page 265. Les séquences complètes illustrées par ces figures sont rarement rencontrées dans la nature. On trouve plutôt des séquences partielles où le haut, le milieu ou la base sont absents [Reineck et Singh, 1980, pp. 466-481]. Le grano-classement normal est commun [Siegenthaler et Buhler, 1985], avec toutefois un grano-classement inverse fréquent à la base des turbidites épaisses à gros grains et à concentration élevée, et un classement séquentiel entre les straticules de silts dans les turbidites à grains fins.

A.2.4.1 Turbidites grossières (séquence de Lowe)

De nombreux auteurs ont proposé des séquences de structures pour les turbidites contenant des graviers et du sable grossier (e.g. [Hein, 1982; Lowe, 1982]). On ne présente ici que l'arrangement proposé par Lowe [1982] (cf. figure A.10 page ci-contre). On remarque tout d'abord une subdivision en deux classes granulométriques, avec à chaque fois couche de traction, tapis (*carpet*), et dépôt de la suspension :

- Graviers ($R_1-R_2-R_3$) ;
- Sables grossiers ($S_1-S_2-S_3$).

Ainsi on peut distinguer pour la structure ($R_1-R_2-R_3$) :

1. Un dépôt rapide dit « en masse » dû à l'accroissement de la friction inter granulaire ;
2. Un grano-classement inverse dû aux collisions des grains (la concentration est élevée) et/ou à la pression de dispersion ;
et/ou
Un développement et une sédimentation successive de « tapis de traction » (*traction carpet* et cf. figure A.11 page 262), produites par le cisaillement du fluide les surmontant (structure R_2) ;
3. Un dépôt de la suspension grain à grain (structure R_3).

Pour la structure ($S_1-S_2-S_3$) :

1. Un léger transport par traction (structure S_1) ;
2. La formation de stratification irrégulière par alternance du dépôt de la charge de fond et de la charge en suspension (« tapis de traction » : structure S_2) ;
3. L'échappement du fluide interstitiel pendant et/ou après le dépôt de la suspension, formant des tubes, des cuvettes et d'autres figures d'échappement (structure S_3).

Cette séquence de structures types incorpore parfois, à son sommet, une phase de basse densité composée de sables fins : T_t (traction)- T_d - T_e (dépôt). On trouve, en réalité, le plus souvent dans les séquences observées des successions multiples du type $S_1-S_2-S_3-S_2-S_3-S_3-S_3-T_t$ [cf. figure A.12 page 263 et [Lowe, 1982]].

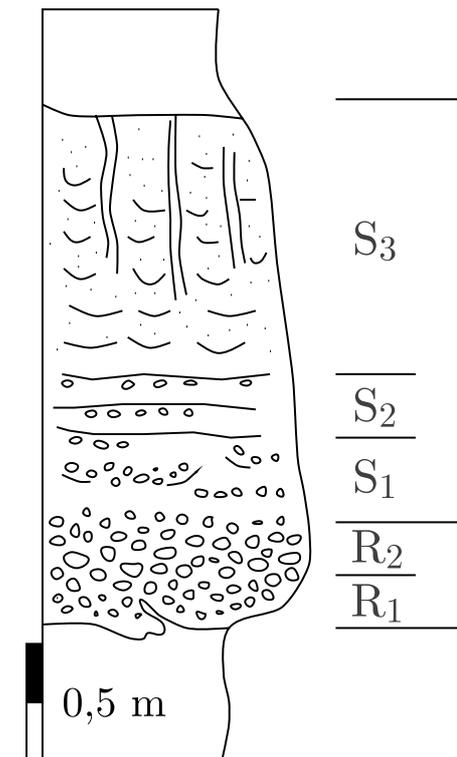


FIG. A.10 – Modèle de faciès resédimenté pour une turbidite à haute concentration (Séquence de Lowe), montrant les séquences de structures types. La taille des grains croît de gauche à droite. Les barres d'échelle ne donnent qu'une indication de l'épaisseur d'une unité typique qui, en pratique, peut varier considérablement (d'après Lowe [1982]).

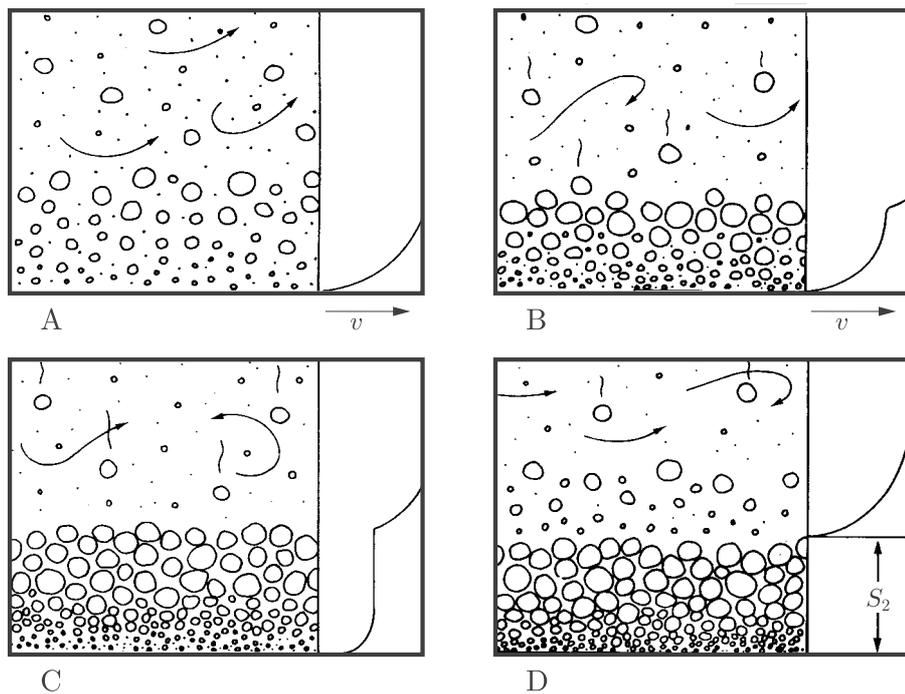


FIG. A.11 – Origine de la couche de « tapis de traction ». (A) Les interactions granulaires à la base d'un courant turbiditique de concentration élevée, produisent un grano-classement inverse dans l'écoulement. (B) La sédimentation continue de la suspension produit un tapis de traction dense qui est soutenue par la pression de dispersion et cisailée par l'écoulement supérieur. (C) La partie supérieure du tapis de traction se fige (segment vertical sur le profil de vitesse), le cisaillement étant concentré à la base du tapis. (D) La zone de cisaillement cesse entièrement de bouger et devient soudée au lit. La répétition de ces processus conduit à des divisions de stratifications à grano-classement inverse (croquis d'après Lowe [1982], explications basées sur Hiscott et Middleton [1980]).

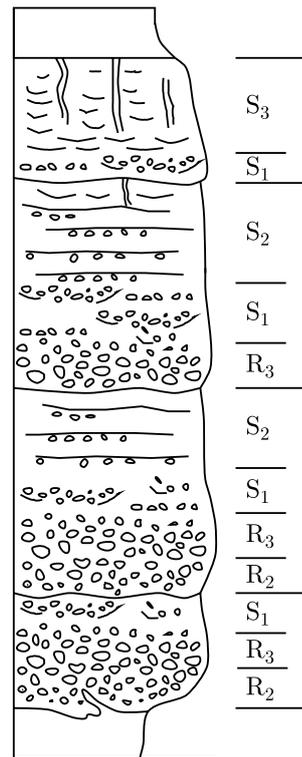


FIG. A.12 – Séquence virtuelle de dépôt, résultant d'une succession d'écoulements.

A.2.4.2 Turbidites moyennes (séquence de Bouma)

Les écoulements turbiditiques de concentration moyenne transportant du sable et de la boue mènent à un dépôt un peu différent de celui d'une turbidite de haute concentration. Ils sont donc le résultat de processus de dépôts différents [Pickering *et al.*, 1989, p. 21].

Bouma [1962] est le premier à proposer la séquence qui est maintenant devenu le modèle classique des turbidites à grains moyens (cf. figure A.13 page suivante). Cette séquence peut être interprétée comme le résultat de la décélération d'un courant turbiditique de relativement faible concentration avec un dépôt rapide granoclassé A, suivi des divisions B : laminations parallèles à grains moyens (sable), C : laminations de rides, D : laminations parallèles à grains fins (silt), représentant les dépôts sédimentés durant les hauts à faibles régimes de l'écoulement [Lüthi, 1980]. La dernière division, E, (boue fine) est due au dépôt de la queue du courant turbiditique mélangée avec la sédimentation pélagique et hémipélagique. L'absence de division avec des mégarides (*i.e.* rides supérieures à 0.5 m) entre les divisions B et C a été discutée par de nombreux auteurs, on peut consulter un résumé dans Pickering *et al.* [1989, p. 20].

Cette séquence est parfois considérée comme étant l'équivalente des structures S_3 - T_t - T_d - T_e du modèle de turbidite de haute densité de Lowe (cf. figure A.14 page suivante), avec $S_3 = A$, $T_t = B-C$, $T_d = D$ et $T_e = E$.

Près de la source, toutes les structures sont présentes, contrairement à l'aval où les intervalles inférieurs sont manquants (cf. figure A.15 page 265). Les structures supérieures peuvent également être supprimées par l'érosion, due aux passages d'autres courants gravitaires ou due aux courants de fonds. Un autre dépôt peut alors se produire. Les séquences résultantes présentent alors des intervalles manquants : ceux du haut, ou à la fois, ceux du haut et du milieu [Macdonald, 1986].

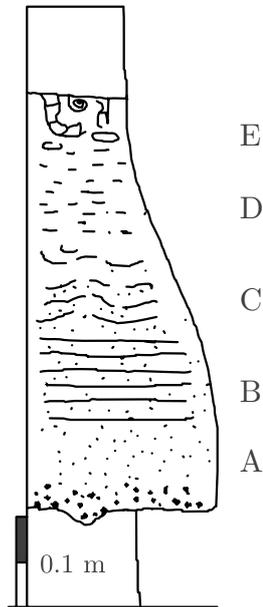


FIG. A.13 – Modèle de faciès resédimenté pour une Turbidite classique (Séquence de Bouma), montrant les séquences de structures types. La taille des grains croît de gauche à droite. Les barres d'échelle ne donnent qu'une indication de l'épaisseur d'une unité typique qui, en pratique, peut varier considérablement (d'après Stow [1986]).

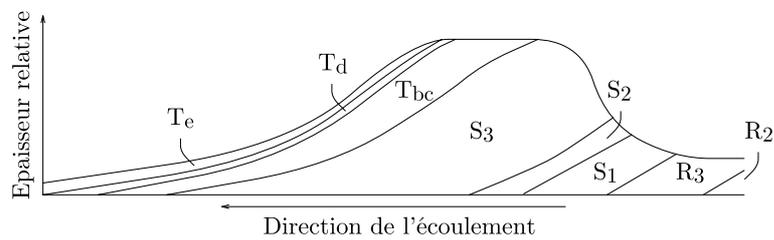


FIG. A.14 – Diagramme montrant les changements d'organisation dans une turbidite (d'après Lowe [1982]).

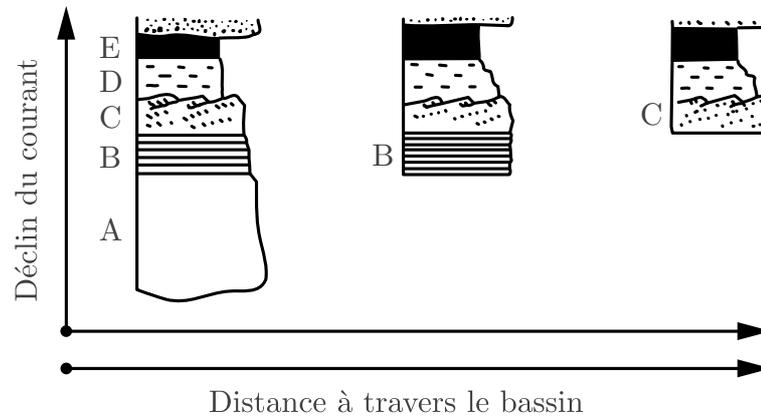


FIG. A.15 – Diagramme schématique représentant l'interprétation d'une séquence de Bouma en fonction de la distance à travers le bassin, et du déclin de l'écoulement. Les turbidites commençant avec les divisions B et C représentent le dépôt de courants progressivement plus lents, ce qui peut être dû à une augmentation de la distance parcourue à travers le bassin (d'après Reineck et Singh [1980]).

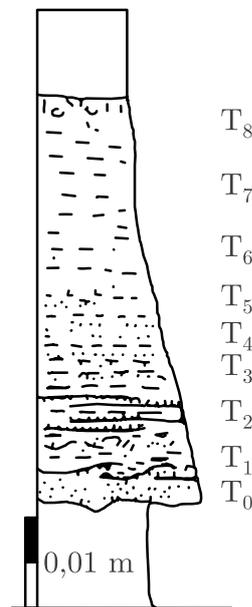


FIG. A.16 – Modèle de faciès resédimenté pour une turbidite de faible concentration (Séquence de Stow), montrant les séquences de structures types. La taille des grains croît de gauche à droite. Les barres d'échelle ne donnent qu'une indication de l'épaisseur d'une unité typique qui, en pratique, peut varier considérablement (d'après Stow [1986]).

A.2.4.3 Turbidites fines (séquence de Stow)

Les écoulements faiblement concentrés, transportant principalement des matériaux de la taille des silts et des argiles, déposent également des séquences régulières lorsque leurs vitesses décroissent [Stow et Bowen, 1980]. Le modèle théorique (cf. figure A.16 page précédente) est supposé être le résultat de la chute et de la traction de la suspension (T0-T2), d'un tri par le cisaillement des grains de silts et des flocons d'argile dans la couche limite basale (T3-T5), de la retombée de la suspension (T6-T8). Beaucoup de turbidites à grains fins ne développent que partiellement cette séquence [Piper et Stow, 1991]. Celles qui sont boueuses et excessivement épaisses présentent une séquence plus complexe avec une répétition multiple de certaines divisions.

Remarque 8

Les séquences complètes de ces figures (A.5, A.8, A.9, A.10, A.13 et A.16) sont rarement rencontrées dans la nature. On trouve plutôt des séquences partielles où, le haut, le milieu ou la base sont absents [cf. figure A.14 page 264 et [Reineck et Singh, 1980, pp. 466-481]].

A.3 Conclusion

L'approche géologique, par l'analyse des dépôts anciens (organisation verticale des faciès, évolution amont-aval), nous a renseigné sur le mode final de dépôt de ces écoulements.

Il est ainsi apparu que la concentration a un effet majeur sur le type de dépôt obtenu [Middleton, 1967].

Les dépôts sédimentaires formés par les dispersions de faible concentration, où les particules sont à de grandes distances les unes des autres, sont généralement bien ordonnés, et développent des structures internes à stratifications planes ou entrecroisées dues à l'importance des processus tractifs sur le fond.

A l'inverse, quand la concentration en particules est élevée, les particules sont plus proches les unes des autres, les collisions entre les particules sont plus fréquentes, et les mouvements sous l'influence des forces gravitationnelles et des forces du fluide sont inhibés, ce qui se traduit par un faible classement dans le dépôt.

Compétence

B.1 Modèle de Rodine et Johnson 1976

En supposant qu'un bloc est approximativement ellipsoïdal, son volume total est :

$$V = \frac{4}{3}\pi(abD)$$

où a , b et D sont les trois axes principaux (demi-longueur, demi-largeur et demi-hauteur). Soit ρ_c la masse volumique du clast, son poids total est :

$$\vec{P} = \frac{4}{3}\pi\rho_c(abD)\vec{g}$$

D'après le principe d'Archimède, la force de flottabilité agissant sur un bloc est égale au poids du volume de matériau déplacé. Soit n la portion de volume submergée du clast et ρ_{df} la masse volumique du débris flow, la flottabilité est :

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi\rho_{df}(nabD)\vec{g}$$

La force exercée par la matrice sur le clast est calculée d'après les résultats obtenus pour le cas d'une sphère [Johnson, 1970, p. 464] (cf. figure B.1.A). La pression exercée par un matériau plastique sur la partie submergée d'une sphère peut être calculée approximativement en ignorant cette partie, comme si la sphère avait un côté plat (cf. figure B.1.B). Enfin, la pression solution, exercée par la matrice sur un cylindre lisse et plat avec une section circulaire, peut être utilisée pour calculer la pression exercée par le matériau plastique sur la sphère (cf. figure B.1.C). L'aire de la partie plate est :

$$A = \pi r^2 = \pi(R^2 - y^2)$$

(d'après les notations de la figure B.1.D), la force verticale exercée par le matériau sur la sphère est :

$$R = \pi r^2 \sigma_{yy}$$

Pour un clast ellipsoïdal on obtient donc :

$$R = \pi(ab)\sigma_{yy}$$

Les contraintes exercées par le matériau plastique sur un cylindre lisse et plat sont données par [Johnson, 1970, p. 479] :

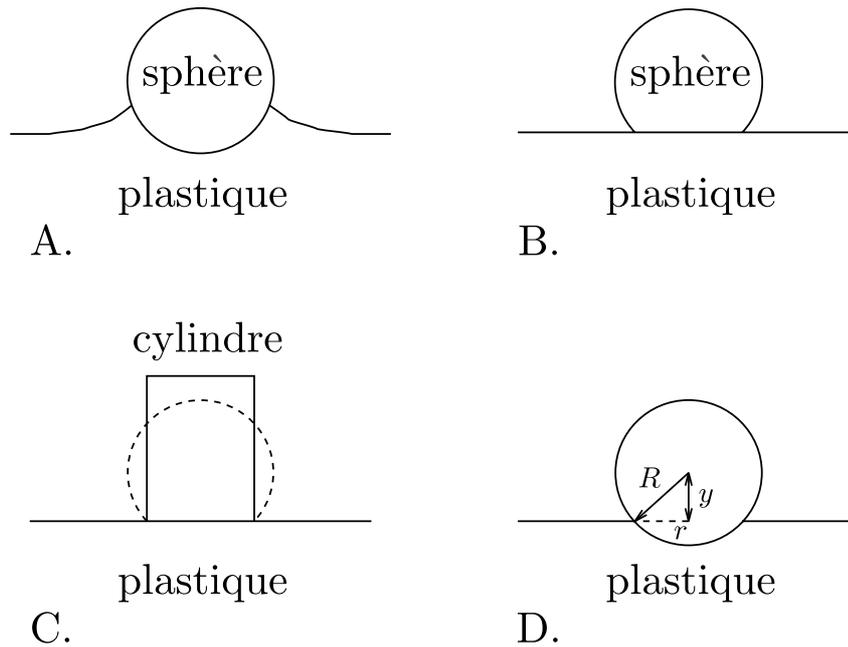


FIG. B.1 – Simplification du calcul de la flottabilité d'une sphère (d'après Johnson [1970]).

$$\sigma_{yy} = -(2 + \pi)k$$

où k est la rigidité de la matrice.

On peut donc réécrire R sous la forme [Johnson, 1970, p. 481] :

$$R = -\pi(ab)(2 + \pi)k$$

ou encore Rodine et Johnson [1976] :

$$R = -\pi(ab)cf(\phi)$$

où c est la cohésion et $f(\phi)$ est fonction de l'angle apparent de friction, ϕ , et qui varie de 6,1 pour $\phi = 0^\circ$, à 62,0 pour $\phi = 30^\circ$ [Rodine et Johnson, 1976].

En équilibrant le poids avec la flottabilité et la rigidité de la matrice, on obtient :

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi g \rho_c (abD)}_{\text{poids}} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi g \rho_{df} (nabD)}_{\text{flottabilité}} + \underbrace{\pi(ab)cf(\phi)}_{\text{rigidité}}$$

En isolant D , on obtient la hauteur maximale des clastes qui peuvent être supportés :

$$D = \frac{3}{4} \frac{cf(\phi)}{(\rho_c - n\rho_{df})g} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Modèle de Hampton 1975

Le volume d'une sphère est :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Le poids d'un clast sphérique est donc :

$$\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c \vec{g}$$

D'après le principe d'Archimède, l'expression exacte de la flottabilité est égale au poids du volume de la matrice fluide déplacé, soit :

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m \vec{g}$$

La force exercée par la rigidité de la matrice sur le clast est obtenue, comme pour le modèle de Rodine et Johnson, par la théorie de la plasticité appliquée à un cylindre posé sur un demi plan infini de plastique [Johnson, 1970, p. 464]. D'après Hampton [1975], la formule suivante est une bonne approximation pour calculer la force supportant des grains de sable submergés dans un mélange d'eau et d'argile :

$$R = -11.2k\pi R^2$$

L'équilibre des forces s'écrit donc :

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c g}_{\text{poids}} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m g}_{\text{flottabilité}} + \underbrace{11.2k\pi R^2}_{\text{rigidité}}$$

En effectuant une résolution sur D , on obtient la compétence du mélange (compétence suspendue), c'est-à-dire la taille des plus gros grains qui puissent être supportés par un mélange d'eau et d'argile :

$$D_{max} = \frac{8,8k}{(\rho_c - \rho_m) g} \quad (\text{B.2})$$

B.3 Modèle de Hampton 1979

Plus tard en 1979, le concept de compétence est étendu par Hampton pour inclure les effets de l'excès de pression interstitielle sur le support des particules dans la matrice. Il suppose en effet que la pression totale peut être séparée en deux composantes : la première composante est similaire à celle des fluides Newtoniens, c'est à dire à la pression hydrostatique ; la seconde, qui représente l'excès de pression interstitielle est due au chargement non drainé d'eau par les argiles et les fragments grossiers. Cette composante additionnelle de pression accroît le gradient de pression, ce qui se traduit par une augmentation en flottabilité et en compétence. Ceci entraîne que lorsque la concentration en particules grossières croît, la flottabilité croît également.

Le poids d'un grain sphérique est donné par la relation :

$$\vec{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g \vec{g}$$

La force d'Archimède est égale au poids du volume de fluide déplacé. En considérant que ce fluide est composé essentiellement d'eau et de particules d'argiles en concentration volumique C_a (*i.e.* la concentration en clast est négligeable), sa masse volumique est :

$$\rho_m = (1 - C_a) \rho_f + C_a \rho_a$$

La force de flottabilité est donc :

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi (1 - C_a) \rho_f R^3 \vec{g} - \frac{4}{3}\pi C_a \rho_a R^3 \vec{g}$$

que l'on peut réécrire :

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m \vec{g}$$

La force exercée par la rigidité de la matrice garde la forme :

$$R = -(cte)k\pi R^2$$

En équilibrant les forces on obtient :

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g g}_{\text{poids}} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m g}_{\text{flottabilité}} + \underbrace{(cte)k\pi R^2}_{\text{rigidité}}$$

qui donne :

$$D_m = \frac{(cte)k}{(\rho_g - \rho_m)g} \quad (\text{B.3})$$

Hampton appelle D_m la compétence fondamentale. Son expression est similaire à celle donnée par l'équation (B.2), exception faite de ρ_m qui est différent.

Une extension de l'équation (B.3) pour un mélange de plusieurs particules avec une concentration volumique de grain grossiers C_g est :

$$D_d = \frac{(cte)k}{(\rho_g - \rho_{df})g} \quad (\text{B.4})$$

où $\rho_{df} = C_g(\rho_g - \rho_m) + \rho_m$. Le terme $C_g(\rho_g - \rho_m)$ tient compte du poids des grains transférés dans la matrice qui vont augmenter la pression de l'eau interstitielle. L'expression de D_d est très proche de l'expression donnée par Rodine et Johnson [1976] (cf. équation (B.1)).

Le rapport D_d/D_m donne :

$$\frac{D_d}{D_m} = \frac{1}{1 - C_g} \quad (\text{B.5})$$

Ce qui implique qu'il est théoriquement possible d'accroître la flottabilité d'un mélange en accroissant la charge en particules grossières, revenant à augmenter la compétence.

Granulométrie

TAB. C.1 – Échelle granulométrique en mm. $\phi = -\log_2(d/d_0)$ est la transformation logarithmique sans dimension de cette échelle, avec d diamètre du grain en mm, d_0 la taille de grain standard de 1 mm Mc Manus [1963].

Taille		ϕ	Classification de Wentworth (1922)	Classification de Friedman & Sanders (1978)	
mm	μm				
				Très gros blocs	
2048		-11		Gros blocs	
1024		-10		Blocs moyens	
512		-9	Galets	Petits Blocs	
256		-8		Gros galets	R
128		-7		Petits Galets	U
64		-6			D
				Très gros cailloux	I
32		-5		Gros cailloux	T
16		-4	Cailloux	Cailloux moyens	E
8		-3		Cailloux fins	S
4		-2			
			Gravillons	Cailloux très fins	
2		-1			
2		-1			
			Sables très grossiers	Sables très grossiers	
1	1000	0			A
			Sables grossiers	Sables grossiers	R
0.5	500	1			E
			Sables moyens	Sables moyens	N

suite à la page suivante

<i>suite de la page précédente</i>					
Taille			Classification de	Classification de	
mm	μm	ϕ	Wentworth (1922)	Friedman & Sanders (1978)	
0.25	250	2	Sables fins	Sables fins	I
					T
0.125	125	3	Sables très fins	Sables très fins	E
					S
0.063	63	4			
				Silts très grossières	
0.031	31	5			
				Silts grossières	
0.016	16	6	Silts	Silts moyennes	L
					U
0.008	8	7			T
				Silts fines	I
0.004	4	8			T
				Silts très fines	E
0.002	2	9	Argiles	Argiles	S

Annexe D

Axiomes de Reynolds

Les grandeurs physiques liées à un écoulement turbulent fluctuent rapidement dans le temps et dans l'espace. Elles peuvent être considérées comme des fonctions aléatoires du temps et de l'espace sur un ensemble de N réalisations de l'écoulement turbulent, toutes soumises aux mêmes conditions initiales et aux limites.

Pour toute variable aléatoire f , qui prend la valeur f_i au point x et à l'instant t dans la i^e réalisation, on définit la *moyenne d'ensemble* par :

$$\langle f(x, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x, t) \right] \quad (\text{D.1})$$

On peut aussi définir la *moyenne temporelle* (d'avantage utilisé en pratique) sur une fenêtre de durée 2τ par :

$$\bar{f}(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x, t + \theta) d\theta \right] \quad (\text{D.2})$$

Travaillant dans le cas d'écoulements turbulents développés, on supposera que les systèmes sont ergodiques, c'est à dire que les deux moyennes coïncident.

Les deux opérateurs de moyenne définis ci-dessus vérifient les propriétés suivantes, aussi appelées axiomes de Reynolds :

Propriété 1 Soient deux processus aléatoires f et g et une constante λ fixée, l'opérateur moyenne $\langle \rangle$ est linéaire :

$$\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \quad (\text{D.3})$$

$$\langle \lambda f \rangle = \lambda \langle f \rangle \quad (\text{D.4})$$

Propriété 2 Si f est constant alors :

$$\langle f \rangle = f \quad (\text{D.5})$$

Propriété 3 L'opérateur de moyenne $\langle \rangle$ commute avec les opérations de dérivation partielle spatiale et temporelle (ou de manière équivalente avec la limite et l'intégration), c'est à dire que :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle \quad (\text{D.6})$$

et que pour toute direction i :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle f \rangle \quad (\text{D.7})$$

Propriété 4 Pour deux processus aléatoires f et g on a :

$$\langle\langle f \rangle g\rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (\text{projectivité}) \quad (\text{D.8})$$

Ces axiomes de moyenne suffisent à justifier la plupart des calculs de moyenne effectués sur les équations de la mécanique des fluides et de Navier Stokes en particulier. Il en résulte immédiatement que si l'on pose :

$$f' = f - \langle f \rangle \quad (\text{D.9})$$

alors :

i.

$$\langle\langle f \rangle\rangle = \langle f \rangle \quad (\text{D.10})$$

ii.

$$\langle f' \rangle = \langle f - \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle - \langle\langle f \rangle\rangle = 0 \quad (\text{D.11})$$

iii.

$$\langle\langle f \rangle \langle g \rangle\rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (\text{D.12})$$

iv.

$$\langle\langle g \rangle f' \rangle = 0 \quad (\text{D.13})$$

Par la suite on utilisera le plus souvent les moyennes d'ensemble, qui pour alléger les notations seront notées avec une barre.

(d'après Larchevêque, 1995 ; Zaleski, 1995)

*Le demandeur a besoin de se figurer deux conditions.
D'abord qu'il s'avoue : « Je me trompe. En dehors de ce que je dis, il y a
d'autres choses. »
Ensuite qu'il pense : « Il y a une autre parole et une autre sagesse,
meilleures et supérieures que je ne connais pas. »
Donc, nous savons que la question est la moitié de la science.
Djalâl-ud-Dîn Rûmî, Fîhi-mâ-fîhi.*

Annexe E

Étude dimensionnelle des équations du mouvement sous les hypothèses de la couche limite

On cherche à simplifier les équations du mouvement sous l'hypothèse $\delta \ll L$.

Sommaire

E.1	Continuité	275
E.2	Quantité de mouvement	276
	E.2.1 Projection sur x	276
	E.2.2 Projection sur z	278
E.3	Conservation de la fraction volumique	279

E.1 Continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{E.1}$$

Le terme $\partial u / \partial x$ est d'ordre U_0/L , et $\partial v / \partial z$ étant d'ordre $1/\delta$, pour que les deux termes de l'équation de continuité (E.1) soient du même ordre de grandeur (principe de moindre dégénérescence ou de balance dominante [Zaleski, 1995]), il faut imposer :

$$V_0 = \mathcal{O}\left(U_0 \frac{\delta}{L}\right) \tag{E.2}$$

Le rapport δ/L étant très petit devant 1, on a $v \ll u$, le mouvement a donc lieu principalement suivant x .

Si l'on note u_1 et v_1 les composantes de la vitesse dans le milieu ①, —les mêmes lettres sont utilisées dans le milieu ②, mais avec un indice 2— les équations de continuité sont alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \tag{E.3a}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0 \tag{E.3b}$$

E.2 Quantité de mouvement

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau_{1ij}}{\partial x_j} + g'_i \phi [1 - \gamma] - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (\text{E.4})$$

E.2.1 Projection sur x

En projection sur x l'équation (E.4) s'écrit⁶⁰ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial z} + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g'_x \phi [1 - \gamma] \quad (\text{E.5})$$

On va maintenant étudier les ordres de grandeur des différents termes de cette équation. En utilisant les deux échelles u_* (équation (4.27)) et $g'_x \sim g'\theta$ (équation (4.29) page 87), on peut écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \left[\frac{1}{t_0} \frac{\delta}{u_*} \frac{U_0}{u_*} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6a})$$

$$\frac{\partial uu}{\partial x} \sim \left[\frac{U_0^2}{u_*^2} \frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6b})$$

$$\frac{\partial uv}{\partial z} \sim \left[\frac{U_0^2}{u_*^2} \frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6c})$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \left[\frac{p}{u_*^2} \frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6d})$$

$$\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} \sim \left[\frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6e})$$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial z} \sim \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6f})$$

$$\nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \left[\frac{\nu}{\delta u_*} \frac{U_0}{u_*} \frac{\delta^2}{L^2} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6g})$$

$$\nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim \left[\frac{\nu}{\delta u_*} \frac{U_0}{u_*} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6h})$$

$$g'_x \phi [1 - \gamma] \sim \left[\frac{\theta g \Phi_0}{\delta} \frac{\delta^2}{u_*^2} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.6i})$$

L'ordre du terme turbulent (E.6e) par rapport au terme turbulent (E.6f) est :

$$\mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right)$$

Dans le cadre des hypothèses de la couche limite $\delta/L \ll 1$, ce terme de contraintes normales de Reynolds est donc négligeable par rapport au terme de cisaillement turbulent (E.6f).

Pour qu'il y ait un écoulement principal dans la direction x , il faut que les termes d'inertie (E.6b) et (E.6c) soient, au moins, du même ordre que le plus grand des termes turbulents (E.6e). Il faut donc imposer :

$$\frac{U_0}{u_*} = \mathcal{O} \left(\frac{L}{\delta} \right)^{1/2} \quad (\text{E.7})$$

60. Pour alléger les notations on a supprimé l'indice 1 pour les composantes de la vitesse

L'intensité de la turbulence est donc d'un demi-ordre de grandeur, mesuré en termes de δ/L , moindre que la vitesse dans l'écoulement.

Pour que l'on puisse quantifier les variations temporelles de quantité de mouvement, le terme (E.6a) doit être du même ordre que les termes turbulents, et donc que les termes d'inertie. Le temps caractéristique est donc tel que :

$$t_0 = \mathcal{O}\left(\frac{\delta U_0}{u_* u_*}\right) = \mathcal{O}\left(\left[\frac{\delta}{L}\left(\frac{U_0}{u_*}\right)^2\right]\frac{L}{U_0}\right)$$

Comme le montre l'équation (E.7) le rapport entre crochets est d'ordre 1, donc :

$$t_0 = \mathcal{O}\left(\frac{L}{U_0}\right) \quad (\text{E.8})$$

Pour que les efforts gravitaires soient effectivement moteurs de l'écoulement, il faut qu'ils soient également du même ordre de grandeur que le plus grand des termes turbulents ou que les termes d'inertie. Il faut donc imposer que :

$$\theta g \Phi_0 = \mathcal{O}\left(\frac{u_*^2}{\delta}\right) \quad (\text{E.9})$$

ou d'après l'équation (E.7) :

$$\theta g \Phi_0 = \mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{L}\right)$$

En utilisant l'équation (E.7), on trouve que le terme d'effort visqueux (E.6g) est d'ordre $\nu/\delta u_*$ par rapport au plus grand des termes turbulents. L'inverse de ce rapport définit le nombre de Reynolds de la turbulence :

$$\text{Re} = \frac{\delta u_*}{\nu} \quad (\text{E.10})$$

Si l'écoulement est turbulent en tout point, le nombre de Reynolds est grand, $\delta u_*/\nu \rightarrow \infty$, le terme visqueux (E.6g) est alors négligeable.

L'ordre du second terme visqueux (E.6h) est, en utilisant l'équation (E.7) :

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{L}{\delta}\right)^{1/2}\right)$$

Pour que ce terme soit négligeable, et soit de l'ordre de grandeur, δ/L , du plus grand des autres termes négligés (E.6e), il faut que l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds soit :

$$\text{Re} = \mathcal{O}\left(\frac{L}{\delta}\right)^{3/2} \quad (\text{E.11})$$

La viscosité n'a alors pas d'effet sur l'écoulement et peut être négligée. Il existe cependant une échelle de longueur ν/u où cette approximation n'est plus valable. Cette longueur, ν/u , est petite devant δ .

Si la condition (E.10) n'est pas vérifiée, le terme de cisaillement visqueux (E.6h) doit être conservé dans l'équation (E.4).

On ne précise pas pour le moment l'ordre de grandeur du terme de pression, il sera déterminé par la suite.

E.2.2 Projection sur z

En projection sur z , l'équation (E.4) s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vv}{\partial z} + \frac{\partial uv}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - g'_z \phi [1 - \gamma] \quad (\text{E.12})$$

On étudie les ordres de grandeur des différents termes.

On utilise la relation (E.8) pour l'estimation du temps caractéristique t_0 :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{V_0}{t_0} = \left[\frac{\delta^2 U_0^2}{L^2 u_*^2} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13a})$$

$$\frac{\partial vv}{\partial z} \sim \left[\frac{\delta^2 U_0^2}{L^2 u_*^2} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13b})$$

$$\frac{\partial uv}{\partial x} \sim \left[\frac{\delta^2 U_0^2}{L^2 u_*^2} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13c})$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial z} \sim \left[\frac{p}{u_*^2} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13d})$$

$$\frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial z} \sim \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13e})$$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} \sim \left[\frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13f})$$

$$\nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \sim \left[\frac{\nu U_0 \delta}{\delta u_* u_* L} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13g})$$

$$\nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \left[\frac{\nu U_0 \delta^3}{\delta u_* u_* L^3} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13h})$$

On utilise les relations (E.9) et $\frac{g'_z}{g'_z} \sim \theta$ (équation (4.30) page 87) pour l'estimation de l'ordre de la gravité :

$$g'_z \phi [1 - \gamma] \sim g'_z \Phi_0 \sim \left[\frac{1}{\theta} \right] \frac{u_*^2}{\delta} \quad (\text{E.13i})$$

On a supposé que la pente était faible, c'est-à-dire que $\theta \ll 1$. Alors, $1/\theta \gg 1$ et le terme gravitaire (E.13i) est plus grand que le plus grand des deux termes turbulents (E.13e). Il doit exister un terme pour l'équilibrer. Le seul terme dont le choix reste libre, est le terme de pression. Il faut donc imposer :

$$\frac{p}{u_*^2} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\theta} \right)$$

Si l'on reporte maintenant ce résultat dans l'équation (E.6d) page 276, il faut imposer :

$$\frac{\delta}{L} \frac{1}{\theta} = \mathcal{O}(1)$$

pour que les termes de pression soient de l'ordre des termes les plus grands. La pente est alors reliée aux dimensions caractéristiques de l'écoulement par :

$$\theta = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right) \quad (\text{E.14})$$

On suppose que la condition (E.7) est vérifiée. On peut donc écrire indifféremment U_0^2/L ou u_*^2/δ .

Les termes d'inertie (E.13a), (E.13b) et (E.13c) sont négligeables devant le terme gravitaire (E.13i), puisque le terme entre crochet est d'ordre δ/L . Le terme turbulent (E.13e) se raccorde au second ordre avec les restes des termes de pression—gravité du premier ordre (raccord asymptotique en posant $p = p_0 + \varepsilon p_1$, cf. [Bender et Orszag, 1978; Gatignol, 1995; Levy, 1996]).

Enfin, il est possible d'estimer l'ordre de grandeur du nombre gradient de Richardson (*gradient Richardson number*) défini par :

$$Ri_g = g_z \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2}$$

L'ordre de grandeur de R_g est :

$$\mathcal{O} \left(g'_z \frac{\Phi_0 \delta}{U_0^2} [1 - \gamma] \right)$$

soit d'après (E.9)

$$Ri_g = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\theta} \frac{u_x^2}{U_0^2} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\theta} \frac{\delta}{L} \right)$$

D'après l'estimation de l'ordre de grandeur de θ par l'équation (E.14), on obtient :

$$Ri_g = \mathcal{O}(1)$$

Le nombre de Richardson reste donc borné. Si ce n'était pas le cas (par exemple lorsque $\theta \rightarrow 0$, pente nulle), il ne pourrait pas y avoir de mouvement turbulent soutenu.

Si $Ri_g > 0$, le gradient de densité est stabilisant [Tennekes et Lumley, 1972, p. 98; Drazin et Reid, 1997, p. 323 ou Triton, 1977, p. 287]. Les instabilités entre les fluides ① et ② sont des instabilités du type de Kelvin–Helmoltz [Furnes, 1999; Skogseth, 1999], mais auquel on superposé un champ de gravité. Dans le cas où $\rho_2 > \rho_1$, l'analyse des modes propres de vibration montre que la « surface » séparant les deux fluides est oscillante mais stable [Drazin et Reid, 1997, chap. 4,23,29,44].

Les termes visqueux, sous la condition (E.10) sur le nombre de Reynolds, sont également négligeables. Au premier ordre on a donc les deux équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x} + g'_x \phi [1 - \gamma] \quad (\text{E.15a})$$

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial z} = g'_z \phi [1 - \gamma] \quad (\text{E.15b})$$

E.3 Conservation de la fraction volumique

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi v_s \delta_{j3}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{\phi' u'_j}}{\partial x_j} \quad (\text{E.16})$$

On étudie les ordres de grandeur des différents termes de l'équation (E.16) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \sim \left[\frac{1}{t_0} \frac{\delta}{u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17a})$$

$$\frac{\partial \phi u}{\partial x} \sim \left[\frac{U_0}{u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17b})$$

$$\frac{\partial \phi v}{\partial z} \sim \left[\frac{U_0}{u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17c})$$

$$\frac{\partial \phi v_s}{\partial z} \sim \left[\frac{V_s}{u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17d})$$

$$k \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \sim \left[\frac{k}{\delta u_*} \frac{\delta^2}{L^2} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17e})$$

$$k \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 z} \sim \left[\frac{k}{\delta u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17f})$$

$$\frac{\partial \overline{\phi' u'}}{\partial x} \sim \left[\frac{\delta}{L} \right] \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17g})$$

$$\frac{\partial \overline{\phi' v'}}{\partial z} \sim \frac{u_*}{\delta} \phi_* \quad (\text{E.17h})$$

Le terme turbulent (E.17g) est négligeable devant le terme turbulent (E.17f) lorsque $\delta/L \ll 1$.

Pour que les termes d'inertie (E.17a), (E.17b) et (E.17c) soient du même ordre de grandeur que le plus grand des termes turbulents (E.17h) il faut imposer :

$$\frac{U_0}{u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \frac{\delta}{L} = \mathcal{O}(1)$$

en utilisant le résultat (E.7) page 276, on obtient :

$$\frac{\Phi_0}{\phi_*} = \mathcal{O} \left(\frac{L}{\delta} \right)^{1/2} \quad (\text{E.18})$$

ou

$$\frac{\Phi_0}{\phi_*} = \mathcal{O} \left(\frac{U_0}{u_*} \right)$$

L'intensité des fluctuations de fractions volumiques, ϕ_* , est donc d'un demi ordre de grandeur, mesuré en terme de δ/L moindre que la fraction volumique dans l'écoulement.

Pour que les termes de diffusivité moléculaire soient négligeables, il faut qu'ils soient du même ordre de grandeur que le plus grand des termes négligés, à savoir le terme turbulent (E.17g) :

$$\frac{k}{\delta u_*} \frac{\Phi_0}{\phi_*} = \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right) \quad (\text{E.19})$$

On définit le nombre de Schmidt par :

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{k} \quad (\text{E.20})$$

en utilisant également la définition du nombre de Reynolds (E.10), et en reportant dans (E.19) :

$$\text{Sc} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\Phi_0}{\phi_*} \frac{L}{\delta} \right)$$

Compte tenu de l'estimation de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds (E.11) et de l'équation (E.18), l'ordre de grandeur du nombre de Schmidt est donné par :

$$\text{Sc} = \mathcal{O}(1) \quad (\text{E.21})$$

Enfin pour que le terme de sédimentation (E.17d) soit présent dans les équations, il faut imposer :

$$\frac{V_s \Phi_0}{u_* \phi_*} = \mathcal{O}(1)$$

soit :

$$\frac{V_s}{u_*} = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{L}\right)^{1/2} \quad (\text{E.22})$$

La vitesse de chute des particules doit donc être d'un demi ordre de grandeur, mesuré en terme de δ/L , moindre que l'intensité de la turbulence.

A l'aide de (E.7), on peut estimer les ordres relatifs de la vitesse de chute des particules et de la vitesse au sein de l'écoulement :

$$\frac{V_s}{U_0} = \mathcal{O}\left(\frac{\delta}{L}\right) \quad (\text{E.23})$$

La vitesse de chute des particules est donc d'un ordre de grandeur, mesuré en terme de δ/L , moindre que la vitesse dans l'écoulement.

Sous les hypothèses de la couche limite l'équation de fraction volumique s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u}{\partial x} + \frac{\partial \phi v}{\partial z} = \frac{\partial \phi v_s}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\phi' v'} \quad (\text{E.24})$$

*Les sciences sont des langues bien faites, dans la mesure même où les
langues sont des sciences en friche.*
M. Foucault.

Annexe F

Conditions de similitude

Le fait de supposer les variables u et ϕ similaires impose des conditions sur les grandeurs moyennes U , Φ et δ .

Sommaire

F.1	Équation de continuité	283
F.2	Équation de quantité de mouvement	284
F.3	Équation de la fraction volumique	284

Ces conditions sont obtenues en remplaçant les équations (4.46a), (4.46b), (4.47) et (4.48) dans les équations de continuité, de quantité de mouvement et de la fraction volumique, et en utilisant le changement de variable :

$$\eta = \frac{z}{\delta} \quad d\eta = \frac{1}{\delta} dz \tag{F.1}$$

avec :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\delta} \tag{F.2}$$

F.1 Équation de continuité

En utilisant la condition limite $v(z = 0) = 0$, l'équation de continuité, intégrée entre $z = 0$ et z , s'écrit ⁶¹ :

$$v(z, t) = - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz' = -\delta \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\eta F(s) ds + U \frac{\partial \delta}{\partial x} \int_0^\eta s F'(s) ds \tag{F.3}$$

où la dérivée $\partial F / \partial \eta$ est notée F' .

⁶¹. On utilise les résultats de dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre : Soient α et β des fonctions numériques dérivables, alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t, x) dt$$

est continûment dérivable et, pour tout point x_0 ,

$$g'(x_0) = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt + \beta'(x_0) f(\beta(x_0), (x_0)) - \alpha'(x_0) f(\alpha(x_0), (x_0))$$

F.2 Équation de quantité de mouvement

En reportant le résultat précédent dans l'équation de quantité de mouvement (4.43) page 89, on peut évaluer les différents termes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} \eta F' + F \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial uu}{\partial x} &= -\frac{U^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} 2\eta F F' + F^2 \frac{\partial U^2}{\partial x} \\ \frac{\partial uv}{\partial z} &= -U \frac{\partial U}{\partial x} \left(F^2 + F' \int_0^\eta F d\eta \right) + \frac{U^2}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} \left(\eta F F' + F' \int_0^\eta \eta F' d\eta \right) \\ &\quad - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial z} = \frac{U^2}{\delta} F'_* \\ g'_z \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\delta \phi [1 - \gamma] dz &= g'_z [1 - \gamma] \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} \int_\eta^1 G d\eta + g'_z [1 - \gamma] \Phi \frac{\partial \delta}{\partial x} \eta G \\ g'_x \phi [1 - \gamma] &= g'_x [1 - \gamma] \Phi G\end{aligned}$$

L'équation de quantité de mouvement suivant x s'écrit :

$$\begin{aligned}F \frac{\delta}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t} - \eta F' \frac{1}{U} \frac{\partial \delta}{\partial t} + F^2 \frac{\delta}{U} \frac{\partial U}{\partial x} - \eta F F' \frac{\partial \delta}{\partial x} - F' \int_0^\eta F d\eta \frac{\delta}{U} \frac{\partial U}{\partial x} + F' \int_0^\eta \eta F' d\eta \frac{\partial \delta}{\partial x} \\ = F'_* - \frac{1}{\rho_i} \frac{\delta}{U^2} \frac{dp_0}{dx} + G g'_x \frac{\Phi \delta}{U^2} [1 - \gamma] + \int_\eta^1 G d\eta g'_z \frac{\delta}{U^2} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} [1 - \gamma] + \eta G g'_z \frac{\delta \Phi}{U^2} \frac{\partial \delta}{\partial x} [1 - \gamma]\end{aligned}\quad (\text{F.5})$$

Pour que les profils F, F_* et G soient universels, c'est-à-dire que les profils soient les mêmes en tout point x , il faut que les coefficients de ces fonctions universelles soient constants. Les coefficients non répétitifs sont :

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = A \quad ; \quad \frac{1}{U} \frac{\partial \delta}{\partial t} = B \quad ; \quad \frac{\delta}{U} \frac{\partial U}{\partial x} = C \quad ; \quad \frac{\delta}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t} = D \quad ; \quad g'_x \frac{\Phi \delta}{U^2} [1 - \gamma] = E \quad ; \quad \frac{\delta}{U^2} \frac{dp_0}{dx} = E_1 \dots \quad (\text{F.6})$$

où A, B, C, D et E sont des constantes. La première condition n'est pas surprenante, elle confirme ce que nous avons déjà supposé, à savoir que δ/L est constant (soit $\delta \sim x$). Le dernier terme contient le nombre de Richardson qui doit donc être constant, ce qui est bien compatible avec l'équation (4.38). On peut même ajouter que la constante E est de l'ordre de δ/L .

F.3 Équation de la fraction volumique

En reportant le résultat (4.52) dans l'équation de conservation de la fraction volumique (4.39d) page 89, on peut évaluer les différents termes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{\Phi}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} \eta G' + G \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi u}{\partial x} &= -\frac{\Phi U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} \eta (FG)' + FG \frac{\partial \Phi U}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi v}{\partial z} &= -\Phi \frac{\partial U}{\partial x} \left(FG + G' \int_0^\eta F d\eta \right) + \frac{\Phi U}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial x} \left(\eta G F' + G' \int_0^\eta \eta F' d\eta \right) \\ &\quad - \frac{\partial \overline{\phi'v'}}{\partial z} = \frac{\Phi U}{\delta} G'_* \\ \frac{\partial \phi v_s}{\partial z} &= \frac{\Phi v_s}{\delta} G'\end{aligned}$$

L'équation de conservation de la fraction volumique s'écrit alors :

$$\frac{\delta}{U\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} G - \frac{1}{U} \frac{\partial \delta}{\partial t} \eta G' + \frac{\delta}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} FG - \frac{\partial \delta}{\partial x} \eta FG' - \frac{\delta}{U} \frac{\partial U}{\partial x} G' \int_0^\eta F d\eta + \frac{\partial \delta}{\partial x} G' \int_0^\eta \eta F' d\eta = G'_* + \frac{v_s}{U} G' \quad (\text{F.8})$$

Pour que les profils F , G et G_* soient universels, il faut que les coefficients non répétitifs soient constants, soit :

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = A \quad ; \quad \frac{1}{U} \frac{\partial \delta}{\partial t} = B \quad ; \quad \frac{\delta}{U} \frac{\partial U}{\partial x} = C \quad ; \quad \frac{\delta}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = D_1 \quad ; \quad \frac{\delta}{U\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D_2 \quad ; \quad \frac{v_s}{U} = E_1 \quad \dots \quad (\text{F.9})$$

Les trois premières conditions étaient déjà imposées par l'équation de quantité de mouvement. La dernière condition est bien compatible avec l'équation (4.37) page 88, reliant les ordres de grandeur de la vitesse de chute des particules et de la vitesse moyenne de l'écoulement. On peut ajouter que la constante E_1 est de l'ordre de δ/L .

*Pour l'efficacité, les hypothèses sous-tendant un système doivent être :
 (1) découvertes, (2) testées, (3) éventuellement contestées, (4)
 éventuellement rejetées, et (5), il faut construire un système débarrassé
 des postulats qui pourraient avoir été mis en cause.*

A. Korzybski.

Annexe G

Intégration transversale des équations du mouvement

Contrairement au cas où l'on considère le fluide supérieur au repos, ou du moins où l'on connaît la forme de son écoulement, on ne peut pas, ici, effectuer de raccord asymptotique avec $\delta \rightarrow \infty$ [technique classique en hydrodynamique, cf. Schlichting, 1979, p. 159]. En effet, les intégrandes ne s'annulent pas au delà de δ !

Pour que les intégrales aient un sens, on choisit les échelles caractéristiques δ correspondants aux hauteurs respectives de fluide, h_1 et h_2 .

Le problème dans le milieu ① sera donc intégré de $z = 0$ à $z = h_1$, et le problème dans le milieu ② de $z = h_1$ à $z = H$.

La variable de similitude dans le milieu ① est η_1 , telle que :

$$\eta_1(z) = \frac{z}{h_1(x,t)} \quad ; \quad \eta_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \eta_1(h_1) = 1 \quad (\text{G.1})$$

h_1 étant défini identiquement à δ par l'équation (4.49) page 91.

Dans le milieu ②, la variable de similitude est définie par :

$$\eta_2(z) = \frac{z - h_1(x,t)}{h_2(x,t)} \quad ; \quad \eta_2(h_1) = 0 \quad \text{et} \quad \eta_2(H) = 1 \quad (\text{G.2})$$

h_2 étant défini par :

$$h_2 = \frac{\int_{h_1}^H u_2 dz}{U_2 \int_0^1 F_2(\eta) d\eta}$$

On suppose les profils de vitesse et de concentration semblables. D'après l'équation (4.46a), on peut écrire dans chaque fluide :

$$u_i(x, z, t) = U_i(x, t) F_i(\eta_i) \quad i = 1, 2 \quad (\text{G.3})$$

Le profil de concentration vérifie l'équation (4.46b).

Sommaire

G.1 Intégration des équations du mouvement	288
G.1.1 Intégration de l'équation de continuité	288
G.1.2 Intégration de la quantité de mouvement	288
G.1.3 Intégration de l'équation de conservation de la fraction volumique	289
G.2 Choix des profils	289
G.2.1 Traitement des conditions limites	289
G.2.2 Profils	290
G.3 Évaluation des intégrales	291
G.3.1 Simplification des équations de continuité	293
G.3.2 Utilisation du concept d'entraînement	293
G.3.3 Simplification des équations de quantité de mouvement	294
G.3.4 Simplification de l'équation de conservation de la fraction volumique	294

G.1 Intégration des équations du mouvement

G.1.1 Intégration de l'équation de continuité

Dans le milieu ①, il faut donc évaluer l'intégrale :

$$\int_0^{h_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) dz = 0$$

qui d'après l'équation (4.52) et en utilisant le changement de variable défini par (4.50), est :

$$v_1(h_1) - v_1(0) = -h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \int_0^1 F_1 d\eta + U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 \eta F_1' d\eta$$

soit avec la condition limite $v_1(z=0) = 0$:

$$v_1(h_1) = -h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \int_0^1 F_1 d\eta + U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 \eta F_1' d\eta \quad (\text{G.4})$$

De même, dans le milieu ②, avec la condition limite $v_2(H) = 0$ on obtient :

$$-v_2(h_1) = -h_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \int_0^1 F_2 d\eta + U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_0^1 \eta F_2' d\eta \quad (\text{G.5})$$

G.1.2 Intégration de la quantité de mouvement

L'équation (F.5), intégrée dans le milieu ① en tenant compte du fait que $dz = h_1 d\eta$, s'écrit :

$$\begin{aligned} & -U_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \int_0^1 \eta F_1' d\eta + h_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} \int_0^1 F_1 d\eta + h_1 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \int_0^1 F_1^2 d\eta - U_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 \eta F_1 F_1' d\eta \\ & - h_1 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \int_0^1 F_1' \int_0^\eta F_1 ds d\eta + U_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 F_1' \int_0^\eta s F_1' ds d\eta = U_1^2 \int_0^1 F_{1*}' d\eta \\ & - \frac{h_1}{\rho_i} \frac{dp_0}{dx} + g'_x \Phi h_1 [1 - \gamma] \int_0^1 G d\eta + g'_z [1 - \gamma] h_1 \frac{\partial h_1 \Phi}{\partial x} \int_0^1 \int_0^1 G ds d\eta \\ & + g'_z [1 - \gamma] \Phi h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 \eta G d\eta \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Pour le milieu ②, on obtient de façon similaire :

$$\begin{aligned}
 & -U_2 \frac{\partial h_2}{\partial t} \int_0^1 \eta F_2' d\eta + h_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} \int_0^1 F_2 d\eta + h_2 U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \int_0^1 F_2' d\eta - U_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_0^1 \eta F_2 F_2' d\eta \\
 & \quad - h_2 U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \int_0^1 F_2' \int_0^\eta F_2 ds d\eta + U_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \int_0^1 F_2' \int_0^\eta s F_2' ds d\eta \\
 & = U_2^2 \int_0^1 F_{1*}' d\eta - \frac{h_2}{\rho_2} \frac{dp_0}{dx}
 \end{aligned} \tag{G.7}$$

G.1.3 Intégration de l'équation de conservation de la fraction volumique

En utilisant le résultat (F.8), l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \int_0^1 G d\eta - \Phi \frac{\partial h_1}{\partial t} \int_0^1 \eta G' d\eta + U_1 h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \int_0^1 FG d\eta - U_1 \Phi \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 \eta F G' d\eta \\
 & \quad - \Phi h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \int_0^1 G' \int_0^\eta F ds d\eta + U_1 \Phi \frac{\partial h_1}{\partial x} \int_0^1 G' \int_0^\eta s F' ds d\eta \\
 & = U_1 \Phi \int_0^1 G_*' d\eta + v_s \Phi \int_0^1 G' d\eta
 \end{aligned} \tag{G.8}$$

G.2 Choix des profils

Comme nous l'avons exposé plus haut, les inconnues du problème ne sont pas pour nous les profils universels F_i et G , mais les grandeurs moyennes h_i, U_i et Φ . Pour accéder aux équations d'évolution de ces grandeurs, il faut pouvoir calculer les intégrales des fonctions F_i et G , également appelées facteurs de forme. Il est donc nécessaire de connaître la forme exacte de ces fonctions. Ceci conduit à choisir des profils de vitesse dans les milieux ① et ② (fonctions F_i) et un profil de concentration dans le milieu ① (fonction G).

G.2.1 Traitement des conditions limites

G.2.1.1 Conditions limites sur la vitesse

Dans le milieu ①, (cf. figure 4.5 page 84), la vitesse, u_1 , doit vérifier les conditions limites :

$$u_1(z=0) = u_1(z=h_1) = 0 \tag{G.9}$$

ce qui implique que F_1 vérifie les conditions limites :

$$F_1(\eta_1=0) = F_1(\eta_1=1) = 0 \tag{G.10}$$

Dans le milieu ②, les conditions limites sur u_2 , sont :

$$u_2(z=h_1) = u_2(z=H) = 0 \tag{G.11}$$

ce qui implique que F_2 vérifie les conditions limites :

$$F_2(\eta_2=0) = F_2(\eta_2=1) = 0 \tag{G.12}$$

G.2.1.2 Conditions limites sur les contraintes

Les profils F_{i*} ne seront pas définis analytiquement, leur forme exacte sera précisée dans la section 5.3 page 113.

Cependant, on peut remarquer que le terme $\tau'_{1xz}(0)$ correspond aux frottements le long du sol. Bien que

l'on ait imposé l'adhérence à la paroi ($u(z=0) = 0$), ce terme n'est pas nul! Il faut donc imposer la condition suivante sur $F_{1\star}$:

$$F_{1\star}(\eta_1 = 0) \neq 0 \quad (\text{G.13})$$

Le terme $\tau'_{1xz}(h_1)$ (ou $U_1^2 F_{1\star}(\eta_1 = 1)$) correspond à la friction entre les milieux ① et ②, qui la plupart du temps est négligeable devant le terme de friction au sol, $\tau'_{1xz}(0)$, mais n'est cependant pas nulle. La continuité des contraintes entre les deux fluides (on suppose qu'il n'y a pas de tensions superficielles à l'interface) implique :

$$\tau'_{2xz}(h_1) = \tau'_{1xz}(h_1) \quad (\text{G.14})$$

soit :

$$\rho_2 U_2^2 F_{2\star}(\eta_2 = 0) = \rho_1 U_1^2 F_{1\star}(\eta_1 = 1) \quad (\text{G.15})$$

La surface en $\eta_2 = 1$ ($z = H$) est une surface libre.

G.2.1.3 Conditions limites sur la fraction volumique

Les termes de la fraction volumique en $z = 0$ sont en fait évalués juste au dessus du sol en b , comme les contraintes. Ceci permet d'éviter des comportements singuliers pouvant découler du fait d'avoir négligé la diffusion moléculaire. La fraction volumique n'est donc pas nulle en $z = 0$ (cf. figure 4.8 page 86). Pour que l'approximation soit valable, il faut que :

$$b \ll h_1 \quad (\text{G.16})$$

La fraction volumique vérifie :

$$\phi(z=0) \neq 0 \quad \phi(z=h_1) = 0 \quad (\text{G.17})$$

Le profil G vérifie donc :

$$G(\eta_1 = 0) \neq 0 \quad G(\eta_1 = 1) = 0 \quad (\text{G.18})$$

Le terme turbulent $\overline{\phi'v'}(h_1)$ est supposé nul puisqu'au delà de $z = h_1$ il n'y a plus de particules, donc plus de fluctuations associées à la fraction volumique. À la base de l'écoulement, on se place, une fois de plus, en $z = b$ pour éviter tout comportement singulier. Le terme $\overline{\phi'v'}(0)$ n'est pas nul. On peut donc écrire les conditions aux limites sur G_\star sous la forme :

$$G_\star(\eta_1 = 0) \neq 0 \quad G_\star(\eta_1 = 1) = 0 \quad (\text{G.19})$$

G.2.2 Profils

L'hypothèse de profil la plus simple appelée *top-hat* par Turner [1973] ou *slab* par Pantin [1979] consiste à choisir des profils du type « fonction de Heaviside » modifiée (cf. figure G.1 page suivante).

On nomme cette fonction « fonction chapeau ». Elle est notée Ξ et est définie par :

$$\Xi_{[a,b]}(\eta) \begin{cases} 1 & \text{si } a < \eta \leq b \\ 0 & \text{si } \eta \leq a \text{ ou } \eta > b \end{cases} \quad (\text{G.20})$$

Remarque 9

On peut choisir des profils plus complexes (cf. figure G.2 page ci-contre), mais toujours en accord avec les données expérimentales. Par exemple, Plapp et Mitchell [1960] proposent pour la vitesse, le profil $F(\eta) = 1.69\eta^{1/7}(1-\eta)^2$, qui peut être approximé près de la paroi par $F(\eta) = 1.69\eta^{1/7}$, et pour la concentration, la profil $G(\eta) = 1 - \eta^{1/7}$. Ces profils sont conformes aux profils en convection libre turbulente qui sont : $F(\eta) = 1.86\eta^{1/7}(1-\eta)^4$ et $G(\eta) = 1 - \eta^{1/7}$ [Eckert et Drake, 1959, p. 324].

Hinze [1960] a pour sa part, effectué des calculs avec les trois profils de concentrations suivants : $G(\eta) = 1 - \eta$, $G(\eta) = e^{-4\eta}$, $G(\eta) = e^{-4\eta^2}$.

Il apparaît cependant que le *top-hat* est une très bonne approximation dans presque tous les cas d'écoulements [Parker, Garcia, Fukushima et Yu, 1987].

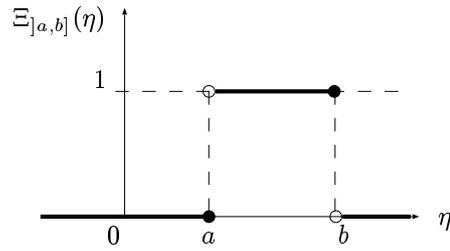


FIG. G.1 – Graphe d'une fonction « chapeau » (top-hat ou slab). Le symbole bullet indique que la fonction prend cette valeur à la discontinuité.

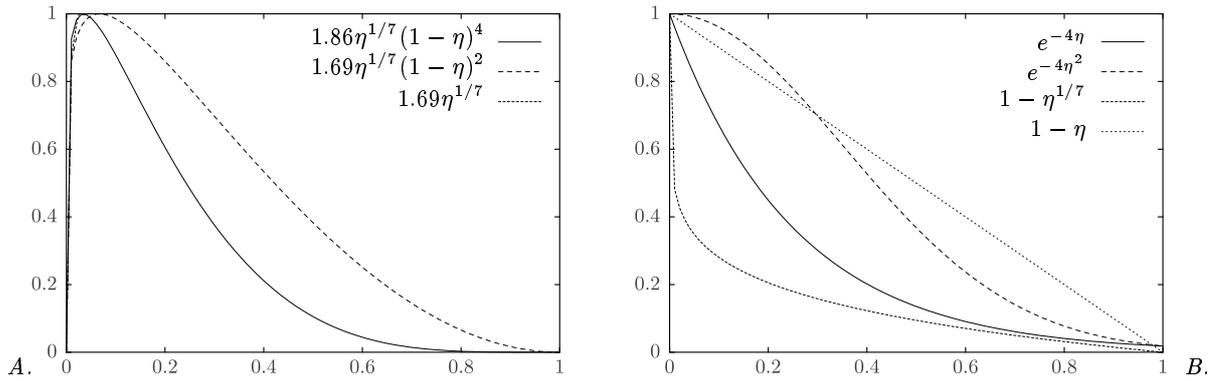


FIG. G.2 – Exemple de profils analytiques adimensionnels de vitesse (A.) et de concentration (B.).

Les fonctions F_1, G et F_2 sont donc définies par :

$$F_1(\eta_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq \eta_1 \\ 1 & \text{si } 0 < \eta_1 < 1 \\ 0 & \text{si } \eta_1 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{G.21})$$

$$G(\eta_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq \eta_1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq \eta_1 < 1 \\ 0 & \text{si } \eta_1 < 0 \end{cases} \quad (\text{G.22})$$

$$F_2(\eta_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq \eta_2 \\ 1 & \text{si } 0 < \eta_2 < 1 \\ 0 & \text{si } \eta_2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{G.23})$$

G.3 Évaluation des intégrales

Les fonctions F_1, g et F_2 sont des fonctions discontinues. Elles présentent des singularités en 0 ou 1. On rappelle que la dérivée d'une fonction de Heaviside est la masse de dirac⁶² δ , au point de discontinuité. La fonction $\eta F_1'(\eta)$ est donc égale à $-\delta_1$ (cf. figure G.3 page suivante). Les intégrales (ou facteurs de formes) ont les valeurs suivantes :

62. A ne pas confondre avec les notations précédentes où δ représentait l'épaisseur de la couche limite.

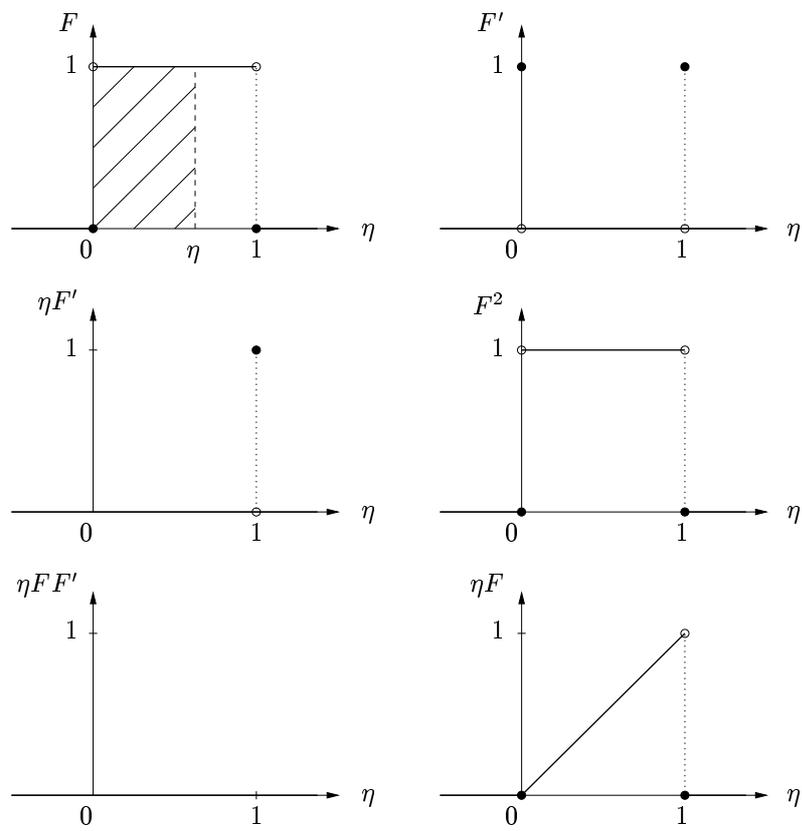


FIG. G.3 – Évaluation des facteurs de forme.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\eta F(s) ds &= \eta & \int_0^1 F d\eta &= 1 \\
 \int_0^1 \eta F' d\eta &= -\int_0^1 \delta_1 d\eta = -1 & \int_0^1 F^2 d\eta &= 1 \\
 \int_0^1 \eta F F' d\eta &= 0 & \int_0^1 F' \int_0^\eta F ds d\eta &= \int_0^1 \eta F' d\eta = -1 \\
 \int_0^\eta s F'(s) ds &= \eta F - \eta & \int_0^1 F' \int_0^\eta s F' ds d\eta &= -\int_0^1 \eta F' d\eta = 1 \\
 \int_\eta^1 F(s) ds &= 1 - \eta & \int_0^1 \int_\eta^1 F ds d\eta &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \eta F d\eta = \frac{1}{2}$$

La fonction F dans les intégrales précédentes peut être remplacée par les fonctions F_1, G et F_2 sauf pour :

$$\int_0^1 G' d\eta = -G(0)$$

Les grandeurs moyennes sont alors définies par :

$$U_1 h_1 = \int_0^{h_1} u_1 dz \quad \text{et} \quad \int_0^1 F_1(\eta) d\eta = 1 \quad (\text{G.24a})$$

$$\Phi(x) h_1 = \int_0^{h_1} \phi dz \quad \text{et} \quad \int_0^1 G(\eta) d\eta = 1 \quad (\text{G.24b})$$

$$U_2 h_2 = \int_{h_1}^H u_2 dz \quad \text{et} \quad \int_0^1 F_2(\eta) d\eta = 1 \quad (\text{G.24c})$$

G.3.1 Simplification des équations de continuité

En remplaçant dans les équations de continuité (G.4) et (G.5), on obtient :

$$v_1(h_1) = -h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1) \quad (\text{G.25})$$

De même, dans le milieu ②, avec la condition limite $v_2(H) = 0$ on obtient :

$$-v_2(h_1) = -\frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2) \quad (\text{G.26})$$

G.3.2 Utilisation du concept d'entraînement

En utilisant les résultats de la section 4.4.4 page 92 et, en particulier, l'équation (4.53), on peut définir les vitesses $v_1(h_1)$ et $v_2(h_1)$:

$$v_1(h_1) = \frac{\partial h_1}{\partial t} + v_{e1} \quad (\text{G.27})$$

où la vitesse d'entraînement v_{e1} est une fonction de la vitesse moyenne du fluide, de la forme CU_1 . En remarquant que $\frac{\partial h_2}{\partial t}$ varie en sens opposé de $v_2(h_1)$ on a :

$$v_2(h_1) = -\frac{\partial h_2}{\partial t} + v_{e2} \quad (\text{G.28})$$

Les vitesses d'entraînement vérifient :

$$v_{e1} = v_{e2} \quad (\text{G.29})$$

Les équations de continuité (G.25) et (G.26) peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1) = -v_{e1}$$

De même, dans le milieu $\textcircled{2}$, avec la condition limite $v_2(H) = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2) = v_{e2}$$

G.3.3 Simplification des équations de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement (G.6) se simplifie en :

$$\begin{aligned} U_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + h_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} + h_1 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + h_1 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = U_1^2 \int_0^1 F'_{1\star} d\eta - \frac{h_1}{\rho_i} \frac{dp_0}{dx} + g'_x \Phi h_1 [1 - \gamma] \\ + g'_z [1 - \gamma] h_1 \frac{1}{2} \frac{\partial h_1 \Phi}{\partial x} + g'_z [1 - \gamma] \frac{1}{2} \Phi h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1 U_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 U_1^2) = U_1^2 (F_{1\star}(1) - F_{1\star}(0)) - \frac{h_1}{\rho_i} \frac{dp_0}{dx} + g'_z [1 - \gamma] \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi h_1^2) + g'_x \Phi h_1 [1 - \gamma]$$

De même, dans le milieu $\textcircled{2}$, l'équation (G.7) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_2 U_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 U_2^2) = U_2^2 (F_{2\star}(1) - F_{2\star}(0)) - \frac{h_2}{\rho_2} \frac{dp_0}{dx}$$

G.3.4 Simplification de l'équation de conservation de la fraction volumique

En reportant les valeurs de facteurs de forme dans l'équation (G.8), on obtient :

$$h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial h_1}{\partial t} + U_1 h_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi h_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \Phi \frac{\partial h_1}{\partial x} = U_1 \Phi \int_0^1 G'_\star d\eta - v_s \Phi G(0)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi h_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi h_1 U_1) = -U_1 \Phi G_\star(0) - v_s \Phi G(0)$$

*Ce que nous faisons n'est jamais compris et n'est toujours accueilli que
par les louanges ou la critique.
Nietzsche.*

Annexe H

Décomposition et intégration des équations d'ondes longues

La section H.1 présente la méthode de décomposition des équations d'ondes longues à l'aide du changement de référentiel exposé à la section 4.7.2 page 99.

La section H.2 page 299 présente l'intégration du système décomposé. Elle est effectuée à l'aide de la théorie de similitude exposée précédemment dans les sections 4.4.1 page 90 et 4.4.5 page 93.

Sommaire

H.1 Décomposition	295
H.1.1 Décomposition de la continuité	295
H.1.2 Décomposition de la conservation des particules	296
H.1.3 Décomposition de la quantité de mouvement	296
H.1.4 En résumé	298
H.2 Intégration longitudinale des équations d'ondes longues décomposées 299	
H.2.1 Similarité	300
H.2.2 Choix des profils & symétries	302
H.2.3 Intégration	303

H.1 Décomposition

Nous effectuons ici la décomposition des équations d'ondes longues à l'aide du changement de référentiel exposé à la section 4.7.2 page 99.

H.1.1 Décomposition de la continuité

L'équation de continuité en « ondes longues » est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU) = v_{e1}(|U|)$$

Quelque soit le sens de l'écoulement, il y a bien incorporation d'eau en fonction de la valeur absolue de la vitesse. On suppose donc que la vitesse d'entraînement, v_{e1} , est une fonction linéaire de $|U|$. On utilisera la forme suivante pour la vitesse d'entraînement : $v_{e1} = C|U|$ (cf. section 4.4.4 page 92), où C est une constante positive que l'on définira par la suite dans la section 5.5 page 124.

En substituant la décomposition de vitesse (4.70) et en utilisant l'équation (4.71), on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQU^*) + U^T Q^t \frac{\partial h}{\partial x^*} = C |QU^* + U^T| \tag{H.1}$$

H.1.2 Décomposition de la conservation des particules

L'équation de conservation des particules en « ondes longues » est :

$$\frac{\partial \Phi h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi h U) = -v_s \Phi G(0) - |U| \Phi G_*(0)$$

Comme pour l'équation de continuité, le terme de fluctuation de la fraction volumique a été modifié pour des raisons évidentes de signe. On reviendra sur ce point dans la section 5.4.2.2 page 122 sur les fermetures. L'équation précédente se réécrit :

$$\frac{\partial \Phi h}{\partial t} + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (\Phi h Q U^*) + U^T Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (\Phi h) = -v_s \Phi G(0) - |Q U^* + U^T| \Phi G_*(0) \quad (\text{H.2})$$

H.1.3 Décomposition de la quantité de mouvement

On repart de l'équation (4.63) de la page 97, qui est une première approximation de l'équation d'ondes longues dans le cas d'une grande profondeur. On considère que les variations de densité entre le fluide ambiant et interstitiel sont négligeables sauf dans les termes de gravité (cas de l'approximation de Bousinesq, cf. remarque 4 page 95). L'équation de conservation de la quantité de mouvement en « ondes longues » est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hU) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) = & - \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h^2 \Phi [1 - \gamma]) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) |U| U (F_*(1) - F_*(0)) \\ & + h g'_x \Phi [1 - \gamma] \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Ici encore, pour des raisons évidentes de signe, le terme de friction turbulente U^2 a été modifié en $|U|U$. On reviendra sur ce point dans la section 5.3 page 113.

Le terme de dérivée temporelle se décompose trivialement en :

$$\frac{\partial}{\partial t} (hU) = \frac{\partial}{\partial t} (hU^T) + \frac{\partial}{\partial t} (hQU^*)$$

Le terme d'inertie en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) &= \frac{\partial}{\partial x} (hU^T U) + \frac{\partial}{\partial x} (hQU^* U) \\ &= U^T \left(U^T Q^t \frac{\partial h}{\partial x^*} + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQU^*) \right) + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQU^* QU^*) + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQU^* U^T) \\ &= 2U^T Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQU^*) + U^T U^T Q^t \frac{\partial h}{\partial x^*} + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQQU^* U^*) \end{aligned}$$

Il est ici nécessaire d'étudier le signe de $|U|U$ sur l'intervalle $[-l, l]$, car il peut exister une abscisse où $U^* + U^T$, c'est-à-dire U , s'annule, comme le montre le figure H.1 page suivante. Le mouvement du point de « queue » n'est plus dans le sens positif, l'arrière de l'écoulement « recule ».

Soit a^* l'abscisse négative où $U = U^* + U^T$ s'annule⁶³ :

$$|U^* + U^T| = \begin{cases} -U^* - U^T & \text{si } x^* \leq a^* \\ U^* + U^T & \text{si } x^* \geq a^* \end{cases} \quad (\text{H.4})$$

Le cas particulier où $a^* \leq -l$ (resp. $a^* \geq l$) implique que $|U^* + U^T|$ est positif (resp. négatif) sur tout l'intervalle $[-l, +l]$. Il sera simplement obtenu en faisant $a^* = -l$ (resp. $a^* = +l$).

Le terme turbulent de l'équation (H.3) s'écrit donc différemment sur les intervalles $[-l, a^*]$ et $[a^*, l]$. On étudie trois cas :

- Cas 1 : $x^* \leq a^*$, la somme $U^* + U^T$ est négative, le terme turbulent s'écrit :

$$-U^{*2} - U^{T2} - 2U^* U^T$$

⁶³. Les résultats seraient les mêmes pour $a^* \geq 0$, mais le cas $a^* \leq 0$ est plus naturel, puisque comme on le verra par la suite, il correspond à un mouvement du barycentre de l'objet dans le sens positif des x^* (cf. page 101)

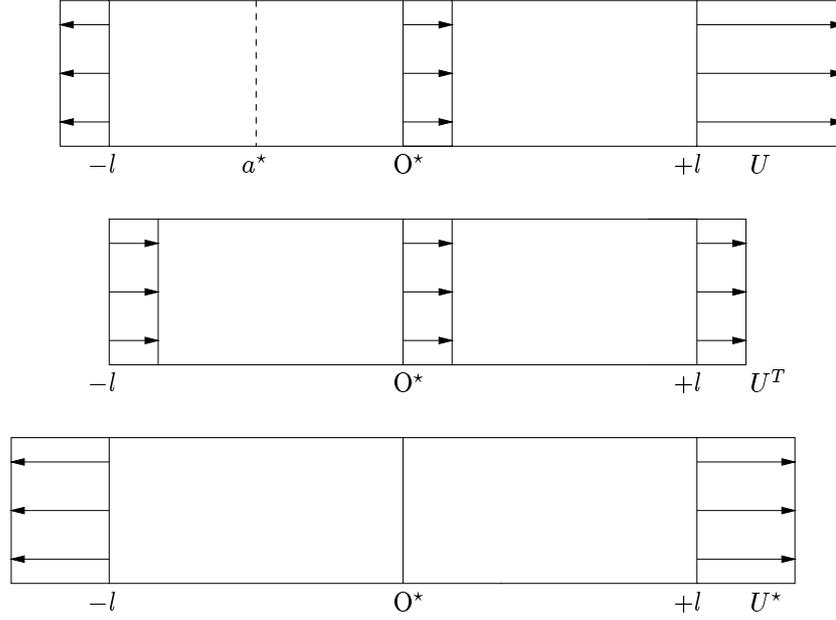


FIG. H.1 – Autre exemple de champ de vitesse décomposé au sein de l'objet écoulement. Ici la vitesse U s'annule en une abscisse a^* entre la « tête » et la « queue » de l'objet, causant un recul du point $x^* = -l$, puisque $U^*(-l) > U^T$, soit $U(-l) < 0$.

Le terme transformé par Q , mais pour $x^* \geq -a$ (Q est une réflexion, l'image de $[-l, a^*]$ est $[-a^*, l]$), est :

$$-QQU^{*2} - U^{T2} - 2QU^*U^T$$

- Cas 2 : $a^* \leq x^* \leq -a^*$, la somme $U^* + U^T$ est toujours négative, le terme turbulent s'écrit également :

$$U^{*2} + U^{T2} + 2U^*U^T$$

Le terme transformé est :

$$QQU^{*2} + U^{T2} + 2QU^*U^T$$

- Cas 3 : $-a^* \leq x^*$, la somme $U^* + U^T$ est positive, le terme turbulent s'écrit :

$$U^{*2} + U^{T2} + 2U^*U^T$$

Le terme transformé par Q , pour $x^* \leq a^*$, est :

$$QQU^{*2} + U^{T2} + 2QU^*U^T$$

On reporte les résultats précédents dans l'équation (H.3), la décomposition des autres termes du second membre étant triviale, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (hU^T) + \frac{\partial}{\partial t} (hQU^*) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left(2U^T Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQU^*) + U^T U^T Q^t \frac{\partial h}{\partial x^*} + Q^t \frac{\partial}{\partial x^*} (hQQU^*U^*)\right) \\ &= -Q^t \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x^*} (h^2 \Phi [1 - \gamma]) + h g'_x \Phi [1 - \gamma] \\ &+ \left(1 - \frac{h}{H}\right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} QQU^{*2} + U^{T2} + 2QU^*U^T & \text{pour } x^* \leq a^* \\ QQU^{*2} + U^{T2} + 2QU^*U^T & \text{pour } a^* \leq x^* \leq -a^* \\ -QQU^{*2} - U^{T2} - 2QU^*U^T & \text{pour } -a^* \leq x^* \end{cases} \quad (\text{H.5}) \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'une partie de cette équation présente une symétrie matérielle.

Soit \mathcal{S} cette symétrie, il existe $\mathcal{M}(\mathcal{S})$, un groupe de matrices $\bar{\bar{M}}$, tel que cette partie de la loi (H.5) reste inchangée lorsqu'elle est composée par $\bar{\bar{M}}$. La matrice $\bar{\bar{Q}}$ appartient à ce groupe.

On note la partie symétrique de la loi (H.5) par $\mathcal{A}(x^*)$. D'après la définition (4.67) de Q et les équations (4.72) et (4.73), $\mathcal{A}(x^*)$ vérifie :

$$\mathcal{A}(-x^*) = \mathcal{A}(x^*) \quad (\text{H.6})$$

$\mathcal{A}(x^*)$ comprend tous les termes qui ne changent pas de signe par la transformation. Ces termes sont les termes composés un nombre pair de fois par Q et/ou Q^t , sauf pour les termes turbulents, lorsque $|x^*| \geq -a^*$, où ce sont les termes composés un nombre impair de fois qui ne changent pas de signe.

On note par $\mathcal{B}(x^*)$ la partie antisymétrique. $\mathcal{B}(x^*)$ vérifie :

$$\mathcal{B}(-x^*) = -\mathcal{B}(x^*) \quad (\text{H.7})$$

$\mathcal{B}(x^*)$ comprend tous les termes qui changent de signe par la transformation. Ces termes sont les termes composés un nombre impair de fois par Q et/ou Q^t , sauf dans les termes turbulents, lorsque $|x^*| \geq -a^*$, où ce sont les termes composés un nombre pair de fois qui changent de signe. Leur contribution volumique est nulle, ils vont donc s'annuler lors de l'intégration longitudinale.

D'après (H.7), l'équation (H.5), suivant x^* (ou x), peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*) = 0 \quad \forall x^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}(x^*) - \mathcal{B}(x^*) = 0 \quad \forall x^*$$

Soit :

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{A}(x^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(x^*) = 0 \quad \forall x^* \quad (\text{H.8})$$

L'équation de quantité de mouvement se décompose donc en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hU^T) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) 2U^T \frac{\partial}{\partial x^*} (hU^*) &= hg'_x \Phi [1 - \gamma] \\ &+ \left(1 - \frac{h}{H}\right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} -2U^*U^T & \text{pour } x^* \leq a^* \\ U^{*2} + U^{T2} & \text{pour } a^* \leq x^* \leq -a^* \\ 2U^*U^T & \text{pour } -a^* \leq x^* \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.9a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hU^*) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left(U^T U^T \frac{\partial h}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (hU^*U^*) \right) &= - \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x^*} (h^2 \Phi [1 - \gamma]) \\ &+ \left(1 - \frac{h}{H}\right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} -U^{*2} - U^{T2} & \text{pour } x^* \leq a^* \\ 2U^*U^T & \text{pour } a^* \leq x^* \leq -a^* \\ U^{*2} + U^{T2} & \text{pour } -a^* \leq x^* \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.9b})$$

H.1.4 En résumé

On a tenté de montrer qu'il y avait équivalence entre le problème ondes longues sur h, U et Φ défini par :

Problème sur h :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU) = C |U| \quad (\text{H.10a})$$

Problème sur Φ :

$$\frac{\partial \Phi h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi h U) = -v_s \Phi G(0) - |U| \Phi G_*(0) \quad (\text{H.10b})$$

Problème sur U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hU) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) = & - \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x} (h^2 \Phi [1 - \gamma]) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) |U| U (F_*(1) - F_*(0)) \\ & + h g'_x \Phi [1 - \gamma] \end{aligned} \quad (\text{H.10c})$$

et le problème décomposé sur h, U^T, U^* et Φ , défini par :

Problème sur h :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^*} (hU^*) + U^T \frac{\partial h}{\partial x^*} = C |U^* + U^T| \quad (\text{H.11a})$$

Problème sur Φ :

$$\frac{\partial \Phi h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^*} (\Phi h U^*) + U^T \frac{\partial}{\partial x^*} (\Phi h) = -v_s \Phi G(0) - |U^* + U^T| \Phi G_*(0) \quad (\text{H.11b})$$

Problème sur U^T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hU^T) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) 2U^T \frac{\partial}{\partial x^*} (hU^*) = & h g'_x \Phi [1 - \gamma] \\ & + \left(1 - \frac{h}{H}\right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} -2U^*U^T & \text{pour } x^* \leq a^* \\ U^{*2} + U^{T2} & \text{pour } a^* \leq x^* \leq -a^* \\ 2U^*U^T & \text{pour } -a^* \leq x^* \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.11c})$$

Problème sur U^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (hU^*) + \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left(U^T U^T \frac{\partial h}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (hU^*U^*) \right) = & - \left(1 - \frac{h}{H}\right) \frac{1}{2} g'_z \frac{\partial}{\partial x^*} (h^2 \Phi [1 - \gamma]) \\ & + \left(1 - \frac{h}{H}\right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} -U^{*2} - U^{T2} & \text{pour } x^* \leq a^* \\ 2U^*U^T & \text{pour } a^* \leq x^* \leq -a^* \\ U^{*2} + U^{T2} & \text{pour } -a^* \leq x^* \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.11d})$$

avec $U = U^* + U^T$.

H.2 Intégration longitudinale des équations d'ondes longues décomposées

L'intégration du système (H.11) sera effectuée à l'aide de la théorie de similitude exposée précédemment dans les sections 4.4.1 page 90 et 4.4.5 page 93.

Dans un premier temps, on va donc spécifier une variable de similitude. Les profils seront ensuite supposés semblables et l'on donnera leur expression ainsi que les conditions aux limites qu'ils doivent vérifier. Le problème pourra alors être intégré et les intégrales calculées.

H.2.1 Similarité

La méthode est la même que celle exposée dans la section 4.4.1 page 90. Les variables du problème (H.11) sont notées avec un $\tilde{\cdot}$.

H.2.1.1 Variable de similitude

L'échelle significative restante est l qui a été introduite par le choix de la forme géométrique de l'écoulement. Toute quantité adimensionnelle peut donc être exprimée en fonction du paramètre x^*/l , paramètre de similitude, noté ξ :

$$\xi = \frac{x^*(t)}{l(t)} \quad (\text{H.12})$$

On utilisera le changement de variable :

$$x^* = l\xi \quad d\xi = \frac{1}{l} dx^* \quad (\text{H.13})$$

et :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x^*} = \frac{1}{l} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\xi}{l} \frac{dl}{dt} + \frac{1}{l} \frac{dx^*}{dt} \quad (\text{H.14})$$

et on note a l'abscisse où $|\tilde{U}^* + \tilde{U}^T|$ s'annule :

$$a = a^*/l, \quad -1 \leq a \leq 0 \quad (\text{H.15})$$

H.2.1.2 Profils semblables

Les paramètres \tilde{h} , $\tilde{\Phi}$, \tilde{U}^T et \tilde{U}^* sont supposés maintenir approximativement des profils semblables suivant x^* , quand ils changent dans le temps. On écrit donc :

$$\tilde{h}(x^*, t) = h(t)\mathcal{H}(\xi) \quad (\text{H.16a})$$

$$\tilde{\Phi}(x^*, t) = \Phi(t)\mathcal{F}(\xi) \quad (\text{H.16b})$$

$$\tilde{U}^T(x^*, t) = U^T(t)\mathcal{J}(\xi) \quad (\text{H.16c})$$

$$\tilde{U}^*(x^*, t) = U^*(t)\mathcal{G}(\xi) \quad (\text{H.16d})$$

H.2.1.3 Problème intégré sur $h(t)$

L'équation (H.11a), en utilisant le changement de variable (H.13) et les définitions (H.16), se réécrit :

$$\mathcal{H} \frac{dh}{dt} - \frac{h}{l} \frac{dl}{dt} \xi \mathcal{H}' + \frac{h}{l} \frac{dx^*}{dt} \mathcal{H}' + \frac{h}{l} U^* (\mathcal{H}\mathcal{G})' + \frac{h}{l} U^T \mathcal{H}' = C |U^*\mathcal{G} + U^T| \quad (\text{H.17})$$

Les conditions de similitude sont données par :

$$\frac{h}{l} \frac{dl/dt}{dh/dt} = A_1 \quad \frac{h}{l} \frac{dx^*/dt}{dh/dt} = A_2 \quad (\text{H.18})$$

$$\frac{h}{l} \frac{U^*}{dh/dt} = B_1 \quad \frac{h}{l} \frac{U^T}{dh/dt} = B_2 \quad (\text{H.19})$$

$$\frac{|U^*\mathcal{G} + U^T|}{dh/dt} = B_3 \quad (\text{H.20})$$

où les A_i et B_i sont de constantes.

L'équation intégrée entre -1 ($x^* = -l$) et $+1$ ($x^* = +l$) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} l \frac{dh}{dt} \int_{-1}^{+1} \mathcal{H} d\xi - h \frac{dl}{dt} \int_{-1}^{+1} \xi \mathcal{H}' d\xi + h \frac{dx^*}{dt} \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}' d\xi + hU^* \int_{-1}^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{G})' d\xi + hU^T \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}' d\xi \\ = Cl \left(\int_{-1}^a (-U^*\mathcal{G} - U^T) d\xi + \int_a^{+1} (U^*\mathcal{G} + U^T) d\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

H.2.1.4 Problème intégré sur $\Phi(t)$

D'après l'équation (H.11b) et en utilisant les équations (H.16), le problème sur Φ devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi h}{dt} \mathcal{H}\mathcal{F} - \frac{h}{l} \Phi \frac{dl}{dt} \xi (\mathcal{H}\mathcal{F})' + \frac{h}{l} \Phi \frac{dx^*}{dt} (\mathcal{H}\mathcal{F})' + \frac{h}{l} \Phi U^* (\mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{G})' + \frac{h}{l} \Phi U^T (\mathcal{H}\mathcal{F})' \\ = -\Phi G_*(0) |U^*\mathcal{G} + U^T| \mathcal{F} - v_s \Phi G(0) \mathcal{F} \end{aligned} \quad (\text{H.22})$$

L'équation intégrée entre -1 et $+1$ est :

$$\begin{aligned} l \frac{d\Phi h}{dt} \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}\mathcal{F} d\xi - h\Phi \frac{dl}{dt} \int_{-1}^{+1} \xi (\mathcal{H}\mathcal{F})' d\xi + h\Phi \frac{dx^*}{dt} \int_{-1}^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{F})' d\xi + h\Phi U^* \int_{-1}^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{G})' d\xi \\ + h\Phi U^T \int_{-1}^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{F})' d\xi = -v_s l \Phi G(0) \int_{-1}^{+1} \mathcal{F} d\xi \\ - l \Phi G_*(0) \left(\int_{-1}^a (-U^*\mathcal{G} - U^T) \mathcal{F} d\xi + \int_a^{+1} (U^*\mathcal{G} + U^T) \mathcal{F} d\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

H.2.1.5 Problème intégré sur $U^T(t)$

D'après le système (H.16), l'équation (H.11c) peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dU^T h}{dt} \mathcal{H} - \frac{h}{l} U^T \frac{dl}{dt} \xi \mathcal{H}' + \frac{h}{l} U^T \frac{dx^*}{dt} \mathcal{H}' + 2 \frac{h}{l} U^T U^* (\mathcal{H}\mathcal{G})' - 2 \frac{h^2}{Hl} U^T U^* \mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G})' = hg'_x \Phi [1 - \gamma] \mathcal{H}\mathcal{F} \\ + \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H} \right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} -2U^*\mathcal{G}U^T & \text{pour } \xi \leq a \\ U^{*2}\mathcal{G}^2 + U^{T2} & \text{pour } a \leq \xi \leq -a \\ 2U^*\mathcal{G}U^T & \text{pour } -a \leq \xi \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.24})$$

L'équation intégrée entre -1 et $+1$ est :

$$\begin{aligned} l \frac{dU^T h}{dt} \int_{-1}^{+1} \mathcal{H} d\xi - hU^T \frac{dl}{dt} \int_{-1}^{+1} \xi \mathcal{H}' d\xi + hU^T \frac{dx^*}{dt} \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}' d\xi + 2hU^T U^* \int_{-1}^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{G})' d\xi \\ - 2 \frac{h^2}{H} U^T U^* \int_{-1}^{+1} \mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G})' d\xi = hl g'_x \Phi [1 - \gamma] \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}\mathcal{F} d\xi \\ + l (F_*(1) - F_*(0)) \left(-2U^*U^T \int_{-1}^a \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H} \right) \mathcal{G} d\xi + U^{*2} \int_a^{-a} \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H} \right) \mathcal{G}^2 d\xi \right. \\ \left. + U^{T2} \int_a^{-a} \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H} \right) d\xi + 2U^*U^T \int_{-a}^1 \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H} \right) \mathcal{G} d\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

H.2.1.6 Problème intégré sur $U^*(t)$

Enfin, en utilisant les équations (H.16), l'équation (H.11d) se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{dU^*h}{dt} \mathcal{H}\mathcal{G} - \frac{h}{l} U^* \frac{dl}{dt} \xi (\mathcal{H}\mathcal{G})' + \frac{h}{l} U^* \frac{dx^*}{dt} (\mathcal{H}\mathcal{G})' + \frac{h}{l} U^{T2} \mathcal{H}' - \frac{h^2}{Hl} U^{T2} \mathcal{H}\mathcal{H}' + \frac{h}{l} U^{*2} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)' - \frac{h^2}{Hl} U^{*2} \mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)' \\ = -\frac{1}{2} g'_z \frac{h^2}{l} \Phi[1 - \gamma] (\mathcal{H}^2 \mathcal{F})' + \frac{1}{2} g'_z \frac{h^3}{Hl} \Phi[1 - \gamma] \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 \mathcal{F})' \\ + \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H}\right) (F_*(1) - F_*(0)) \begin{cases} -U^{*2} \mathcal{G}^2 - U^{T2} & \text{pour } \xi \leq a \\ 2U^* \mathcal{G} U^T & \text{pour } a \leq \xi \leq -a \\ U^{*2} \mathcal{G}^2 + U^{T2} & \text{pour } -a \leq \xi \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

Comme on l'a vu, lors d'une intégration longitudinale, le choix d'un objet symétrique a pour effet d'annuler les contributions extérieures symétriques, comme par exemple les forces de pression qui se répartissent sur la surface de l'objet. L'intégration de la loi antisymétrique n'est effectuée que sur un demi-objet, de 0 à +1 ($x = +l$), ceci de façon à récupérer un effet volumique qui aurait disparu si l'intégration avait porté sur tout l'objet.

Comme $a \leq 0$, les intégrales sur les termes turbulents sont coupées en $-a \geq 0$.

$$\begin{aligned} l \frac{dU^*h}{dt} \int_0^{+1} \mathcal{H}\mathcal{G} \, d\xi - hU^* \frac{dl}{dt} \int_0^{+1} \xi (\mathcal{H}\mathcal{G})' \, d\xi + hU^* \frac{dx^*}{dt} \int_0^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{G})' \, d\xi + hU^{T2} \int_0^{+1} \mathcal{H}' \, d\xi \\ - \frac{h^2}{H} U^{T2} \int_0^{+1} \mathcal{H}\mathcal{H}' \, d\xi + hU^{*2} \int_0^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)' \, d\xi - \frac{h^2}{H} U^{*2} \int_0^{+1} \mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)' \, d\xi \\ = -\frac{1}{2} g'_z h^2 \Phi[1 - \gamma] \int_0^{+1} (\mathcal{H}^2 \mathcal{F})' \, d\xi + \frac{1}{2} g'_z \frac{h^3}{H} \Phi[1 - \gamma] \int_0^{+1} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2 \mathcal{F})' \, d\xi \\ + l (F_*(1) - F_*(0)) \left(2U^* U^T \int_0^{-a} \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H}\right) \mathcal{G} \, d\xi + U^{*2} \int_{-a}^1 \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H}\right) \mathcal{G}^2 \, d\xi \right. \\ \left. + U^{T2} \int_{-a}^1 \left(1 - \frac{h\mathcal{H}}{H}\right) \, d\xi \right) \end{aligned} \quad (\text{H.27})$$

H.2.2 Choix des profils & symétries

Il faut maintenant spécifier les profils \mathcal{H} , \mathcal{F} , \mathcal{J} et \mathcal{G} pour calculer les équations intégrales d'évolution de $h(t)$, $\Phi(t)$, $U^T(t)$ et $U^*(t)$.

Le profil \mathcal{H} doit être choisi en accord avec les observations de la section 3.1 page 64 sur les profils d'écoulement. Il correspond à l'équation adimensionnelle de la surface de l'objet écoulement, c'est-à-dire au demi-cercle :

$$\mathcal{H} = (1 - \xi^2)^{1/2} \quad (\text{H.28})$$

Ce profil est symétrique et est une fonction paire de ξ .

Le profil \mathcal{F} , associé à la fraction volumique, est choisit sous la forme d'une fonction « chapeau » entre -1 et $+1$:

$$\mathcal{F} = \Xi_{[-1,1]}(\xi) \quad (\text{H.29})$$

(cf. figure G.1 page 291, pour $a = -1, b = +1$). Cette fonction est paire. Le fait de choisir une fonction paire assure que le centre de gravité et le barycentre géométrique de l'objet écoulement coïncident. Il n'y a pas de déplacement de masse entre l'avant et l'arrière de l'objet, la masse est uniformément répartie au sein de l'objet sous les effets du mélange turbulent.

Le profil \mathcal{J} , associé à la vitesse symétrique, est choisi égal à 1, entre -1 et $+1$, puisque \tilde{U}^T , n'est fonction que de t . La vitesse U^T est uniforme dans \mathcal{R}^* .

Le profil \mathcal{G} , associé au champ de vitesse antisymétrique (déformation ou étalement) dans le repère lié à l'objet, doit être antisymétrique. Il doit, également, être nul en zéro (cf. figure 4.12 page 101), ce qui correspond à un point d'arrêt [cf. par exemple écoulement de Hiemenz dans Schlichting [1979, p. 95]]. On choisit dans un but de simplicité :

$$\mathcal{G} = \xi \tag{H.30}$$

Ce profil est impair et compatible avec les conditions aux limites spécifiées par l'équation (4.73) de la section 4.7.2 page 99 (antisymétrie). De plus, comme le montre la figure 2.4 page 40, il correspond relativement bien aux profils de vitesses obtenus par des simulations « ondes longues ».

On peut maintenant évaluer la valeur du paramètre a pour laquelle $|U^*\xi + U^T|$ s'annule :

$$a = -\frac{U^T}{U^*}$$

Le paramètre adimensionnel U^* est toujours positif. Le signe de a est donc déterminé par U^T . Pour $U^T \geq 0$ (translation positive de l'objet), a est négatif, comme on l'avait arbitrairement choisi dans la section H.1.3 page 296. On peut donc définir a par :

$$a = \begin{cases} -1 & \text{si } 1 \leq \frac{U^T}{U^*} \\ 1 & \text{si } 1 \leq -\frac{U^T}{U^*} \\ -\frac{U^T}{U^*} & \text{sinon} \end{cases}$$

H.2.3 Intégration

A partir des formes explicites des profils, il est possible de calculer les intégrales des équations (H.21), (H.23), (H.25) et (H.27).

On rappelle que :

- la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire) ;
- le produit d'une fonction paire par une fonction impaire est une fonction impaire ;
- l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en zéro est nulle ;
- l'intégrale d'une fonction paire sur un intervalle centré en zéro est égale à deux fois la valeur de l'intégrale sur un demi intervalle.

Les propriétés des facteurs de forme sont données dans le tableau H.1.

TAB. H.1 – Propriétés de symétrie des facteurs de forme. Seules les fonctions dont on calcule effectivement l'intégrale sont données explicitement.

Fonction	paire	impaire	Valeur	Équation(s)
\mathcal{H}	•		$(1 - \xi^2)^{1/2}$	(H.21), (H.27) & (H.25)
\mathcal{F}	•		1	(H.23)
\mathcal{G}		•	ξ	(H.21), (H.25) & (H.27)
\mathcal{H}'		•		(H.21), (H.25) & (H.27)
$\xi\mathcal{H}'$	•		$-\xi^2 (1 - \xi^2)^{-1/2}$	(H.21) & (H.25)
$\mathcal{H}\mathcal{H}'$		•	$-\xi$	(H.27)
$\mathcal{H}\mathcal{F}$	•		$(1 - \xi^2)^{1/2}$	(H.23) & (H.25)
$\mathcal{H}\mathcal{G}$		•	$\xi (1 - \xi^2)^{1/2}$	(H.25) & (H.27)
$\mathcal{G}\mathcal{F}$		•		(H.23)
\mathcal{G}^2	•		ξ^2	(H.25) & (H.27)

suite à la page suivante

suite de la page précédente				
Fonction	paire	impaire	Valeur	Équation(s)
$\mathcal{H}\mathcal{G}^2$	•		$\xi^2 (1 - \xi^2)^{1/2}$	(H.25) & (H.27)
$(\mathcal{H}\mathcal{F})'$		•		(H.23)
$(\mathcal{H}\mathcal{G})'$	•			(H.21), (H.25) & (H.27)
$\xi (\mathcal{H}\mathcal{F})'$	•		$-\xi^2 (1 - \xi^2)^{-1/2}$	(H.23)
$\xi (\mathcal{H}\mathcal{G})'$		•		(H.27)
$(\mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{G})'$	•			(H.23)
$(\mathcal{F}\mathcal{H}^2)'$		•		(H.27)
$(\mathcal{H}\mathcal{G}^2)'$		•		(H.27)
$\mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G})'$	•		$1 - 2\xi^2$	(H.25)
$\mathcal{H} (\mathcal{F}\mathcal{H}^2)'$		•	$-2\xi (1 - \xi^2)^{1/2}$	(H.27)
$\mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)'$		•	$2\xi - 3\xi^3$	(H.27)

Il n'est nécessaire que de calculer les intégrales paires pour les problèmes sur h , Φ et U^T ; tandis que le problème sur U^* requière le calcul des intégrales paires et impaires. On utilise le changement de variable :

$$\xi = \sin \alpha \quad d\xi = \cos \alpha \, d\alpha \quad \text{et} \quad \begin{cases} \xi = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \xi = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \\ \xi = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Les formules :

$$\sin(2 \arcsin \alpha) = 2\alpha (1 - \alpha^2)^{1/2} \quad \cos \arcsin \alpha = (1 - \alpha^2)^{1/2}$$

et les résultats sur les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \alpha \, d\alpha = \int_0^{\pi/2} \sin^n \alpha \, d\alpha$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(2!)^2} \frac{\pi}{2} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p)!}{(2p+1)!}$$

soit :

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \quad I_3 = \frac{2}{3} \quad I_4 = \frac{3}{16}\pi$$

On obtient pour les intégrales :

- dans l'équation sur h :

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{H} \, d\xi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi \mathcal{H}' \, d\xi = \int_{-1}^{+1} -\xi^2 (1 - \xi^2)^{-1/2} \, d\xi = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \, d\alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{G})' \, d\xi = 2 [\mathcal{H}\mathcal{G}]_0^1 = 2 \left[\xi (1 - \xi^2)^{1/2} \right]_0^1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{+1} |U^* \mathcal{G} + U^T| \, d\xi &= \int_{-1}^a (-U^* \mathcal{G} - U^T) \, d\xi + \int_a^{+1} (U^* \mathcal{G} + U^T) \, d\xi \\
 &= \int_{-1}^a (-U^* \mathcal{G} - U^T) \, d\xi + \int_a^{-a} (U^* \mathcal{G} + U^T) \, d\xi + \int_{-a}^{+1} (U^* \mathcal{G} + U^T) \, d\xi \\
 &= -U^* \int_{-1}^a \mathcal{G} \, d\xi + U^T \int_a^{-a} d\xi + U^* \int_{-a}^{+1} \mathcal{G} \, d\xi \\
 &= 2U^T \int_0^{-a} d\xi + 2U^* \int_{-a}^{+1} \mathcal{G} \, d\xi \\
 &= U^* - a^2 U^* - 2aU^T
 \end{aligned}$$

- dans l'équation sur ϕ :

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{H} \mathcal{F} \, d\xi = \int_{-1}^{+1} \mathcal{H} \, d\xi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi \mathcal{H} \mathcal{F}' \, d\xi = \int_{-1}^{+1} \xi \mathcal{H}' \, d\xi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} (\mathcal{H} \mathcal{F} \mathcal{G})' \, d\xi = \int_{-1}^{+1} (\mathcal{H} \mathcal{G})' \, d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{F} \, d\xi = 2 \int_0^{+1} d\xi = 2$$

$$\int_{-1}^{+1} |U^* \mathcal{G} + U^T| \mathcal{F} \, d\xi = U^* - a^2 U^* - 2aU^T$$

- dans l'équation sur U^T :

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{H} (\mathcal{H} \mathcal{G})' \, d\xi = 2 \int_0^{+1} (1 - 2\xi^2) \, d\xi = \frac{2}{3}$$

$$\int_a^{-a} d\xi = -2a$$

$$\begin{aligned}
 \int_a^{-a} \mathcal{H} \, d\xi &= 2 \int_0^{-a} (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi = 2 \int_0^{-\arcsin a} \cos^2 \alpha \, d\alpha = \int_0^{-\arcsin a} (1 - \cos 2\alpha) \, d\alpha \\
 &= \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_0^{-\arcsin a} = -\arcsin a + \frac{1}{2} \sin(-2 \arcsin a) = -\arcsin a - a(1 - a^2)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\int_a^{-a} \mathcal{G}^2 \, d\xi = 2 \int_0^{-a} \xi^2 \, d\xi = -\frac{2}{3} a^3$$

$$\begin{aligned}
 \int_a^{-a} \mathcal{H} \mathcal{G}^2 \, d\xi &= 2 \int_0^{-a} \xi^2 (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi = 2 \int_0^{-\arcsin a} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha \\
 &= -\frac{1}{2} [\sin \alpha \cos^3 \alpha]_0^{-\arcsin a} + \frac{1}{4} [\alpha]_0^{-\arcsin a} + \frac{1}{8} [\sin 2\alpha]_0^{-\arcsin a} \\
 &= \frac{1}{2} \sin \arcsin a \cos^3 \arcsin a - \frac{1}{4} \arcsin a - \frac{1}{8} \sin 2 \arcsin a \\
 &= -\frac{1}{4} \arcsin a + \frac{1}{2} a (1 - a^2)^{3/2} - \frac{1}{4} a (1 - a^2)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^1 \mathcal{G} \, d\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^1 \mathcal{H}\mathcal{G} \, d\xi &= \int_{-a}^1 \xi (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi = \int_{-\arcsin a}^{\pi/2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha = -\frac{1}{3} [\cos^3 \alpha]_{-\arcsin a}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{3} \cos^3(-\arcsin a) = \frac{1}{3} (1 - a^2)^{3/2} \end{aligned}$$

- dans l'équation sur U^* :

$$\int_0^{+1} \mathcal{H}\mathcal{G} \, d\xi = \frac{1}{3}$$

(équation précédente pour $a = 0$)

$$\int_0^{+1} \xi (\mathcal{H}\mathcal{G})' \, d\xi = \int_0^{+1} \xi (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi - \int_0^{+1} \xi^3 (1 - \xi^2)^{-1/2} \, d\xi = \frac{1}{3} - \int_0^{\pi/2} \sin^3 \alpha \, d\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\int_0^{+1} \mathcal{H}' \, d\xi = [\mathcal{H}]_0^1 = -1$$

$$\int_0^{+1} \mathcal{H}\mathcal{H}' \, d\xi = -\int_0^{+1} \xi \, d\xi = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+1} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)' \, d\xi = [\mathcal{H}\mathcal{G}^2]_0^1 = 0$$

$$\int_0^{+1} \mathcal{H} (\mathcal{H}\mathcal{G}^2)' \, d\xi = \int_0^{+1} 2\xi - 3\xi^3 \, d\xi = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{+1} (\mathcal{H}^2\mathcal{F})' \, d\xi = [\mathcal{H}^2]_0^1 = -1$$

$$\int_0^{+1} \mathcal{H} (\mathcal{H}^2\mathcal{F})' \, d\xi = -2 \int_0^{+1} \xi (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi = -2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{-a} \mathcal{G} \, d\xi = \frac{1}{2}a^2$$

$$\begin{aligned} \int_0^{-a} \mathcal{H}\mathcal{G} \, d\xi &= \int_0^{-a} \xi (1 - \xi^2)^{1/2} \, d\xi = \int_0^{-\arcsin a} \sin \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha = -\frac{1}{3} [\cos^3 \alpha]_0^{-\arcsin a} \\ &= -\frac{1}{3} (\cos^3 \arcsin a - 1) = -\frac{1}{3} (1 - a^2)^{3/2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^1 \mathcal{G}^2 \, d\xi = \int_{-a}^1 \xi^2 \, d\xi = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}a^3$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^1 \mathcal{H} \mathcal{G}^2 d\xi &= \int_{-a}^1 \xi^2 (1 - \xi^2)^{1/2} d\xi = \int_{-\arcsin a}^1 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha \\
 &= -\frac{1}{4} [\sin \alpha \cos^3 \alpha]_{-\arcsin a}^{\pi/2} + \frac{1}{8} [\alpha]_{-\arcsin a}^{\pi/2} + \frac{1}{16} [\sin 2\alpha]_{-\arcsin a}^{\pi/2} \\
 &= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \arcsin a + \frac{1}{8} a (1 - a^2)^{1/2} - \frac{1}{4} a (1 - a^2)^{3/2}
 \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^1 d\xi = 1 + a$$

$$\int_{-a}^1 \mathcal{H} d\xi = \frac{1}{2} \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_{-\arcsin a}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{1}{2} a (1 - a^2)^{1/2}$$

Ces résultats sont reportés dans les équations (H.21), (H.23), (H.25) et (H.27). La forme obtenue est donnée dans la section 4.8 page 101.

Annexe I

Mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique

Le modèle est constitué d'un système d'équations différentielles non linéaires et de relations algébriques qui évoluent dans le temps. Bien que, dans des cas fort simples, il existe des solutions qui soient accessibles par le calcul analytique (c'est ce que nous verrons au chapitre 6 page 135), la résolution nécessite la plupart du temps la mise en œuvre d'une méthode numérique qui permet de trouver une solution approchée dans pratiquement tous les cas.

Sommaire

I.1	Structure du programme	309
I.2	Réalisation du maillage	310
I.3	Construction de l'objet-écoulement	310
I.4	Formation du dépôt	312
I.5	Résolution numérique des équations différentielles	312
I.5.1	Les méthodes de Runge-Kutta	312
I.5.2	Principes	313
I.5.3	Contrôle de la taille du pas	315
I.6	Conclusions	317

I.1 Structure du programme

Le programme est développé en C++, et repose sur la notion d'objet et de classe [Masini, Napoli, Colnet, Léonard et Tombre, 1990]. La classe est l'entité conceptuelle qui décrit l'objet. Sa définition sert de modèle pour construire ses représentants physiques appelés instances. Une instance est un objet particulier qui est créé en respectant les plans de construction donnés par sa classe. Celle-ci joue donc le rôle de moule permettant de reproduire autant d'exemplaires que nécessaire.

Deux sables de différentes granulométries sont, par exemple, deux instances d'un même objet « particule ».

Une classe permet la description d'une famille d'objets ayant même structure et même comportement. Elle regroupe un ensemble de données et un ensemble de procédure ou de fonctions. Chaque classe possède donc une double composante :

- Une composante statique : les données, qui sont des champs nommés, ou attributs, possédant une valeur. Les champs caractérisent l'état des objets pendant l'exécution du programme.
- Une composante dynamique : les procédures, appelées méthodes, qui représentent le comportement commun des objets appartenant à la classe. Les méthodes manipulent les champs des objets et caractérisent les actions pouvant être effectuées par les objets.

A l'instar de ce modèle, la définition d'une classe comprend deux parties :

1. la définition des champs d'une part,
2. la définition des méthodes d'autre part.

La méthode objet présente donc entre autre l'avantage de créer des composants flexibles et réutilisables de part en part dans le code. Le choix du C++ a été motivé par le fait que ce langage supporte à la fois le paradigme orienté objet —bien qu'il ne soit pas très strict— sans compromettre l'efficacité numérique, cette dernière découlant du C.

La figure I.1 page suivante donne une vision globale de la structure du programme avec les relations entre les différentes classes.

Il existe quatre grandes parties distinctes :

1. Une partie « maillage », qui est construite à partir de la donnée d'un fichier de topographie cartésienne x, z non régulier. Elle permet de construire un maillage curviligne constitué de segments de différentes longueurs.
2. Une partie « objet-écoulement », qui regroupe les objets tels que la géométrie de l'objet-écoulement, le fluide et le type de particules le constituant, ainsi que les données dynamiques. C'est sur ces données que porte la résolution.
3. Une partie « dépôt », qui peut être vue comme un des résultats du programme.
4. Une partie « résolution », qui sera détaillée dans la section I.5.1 page 312. Elle permet le lien entre l'objet-écoulement, le maillage et le dépôt.

L'ensemble est initialisé par un fichier de données reporté dans l'annexe J page 319.

I.2 Réalisation du maillage

Un langage à objet constitue le cadre idéal pour la réalisation d'un maillage [Müller, 1994; Sylvain, 1996]. On construit un ensemble de classes dont la fonction est le remplissage et la manipulation des informations géométriques qui définissent le maillage.

La donnée d'entrée est une liste de points de coordonnées cartésiennes (x, z) . Le point constitue l'entité géométrique de base. Deux objets points permettent de construire un segment, qui contient en plus une information sur la distance entre les deux points, l'angle qu'il forme avec l'horizontale (pente de la maille)

...

En deux dimensions, le maillage proprement dit est constitué d'une liste des segments. Il contient en plus des informations sur sa longueur totale (somme de la longueur des segments le constituant).

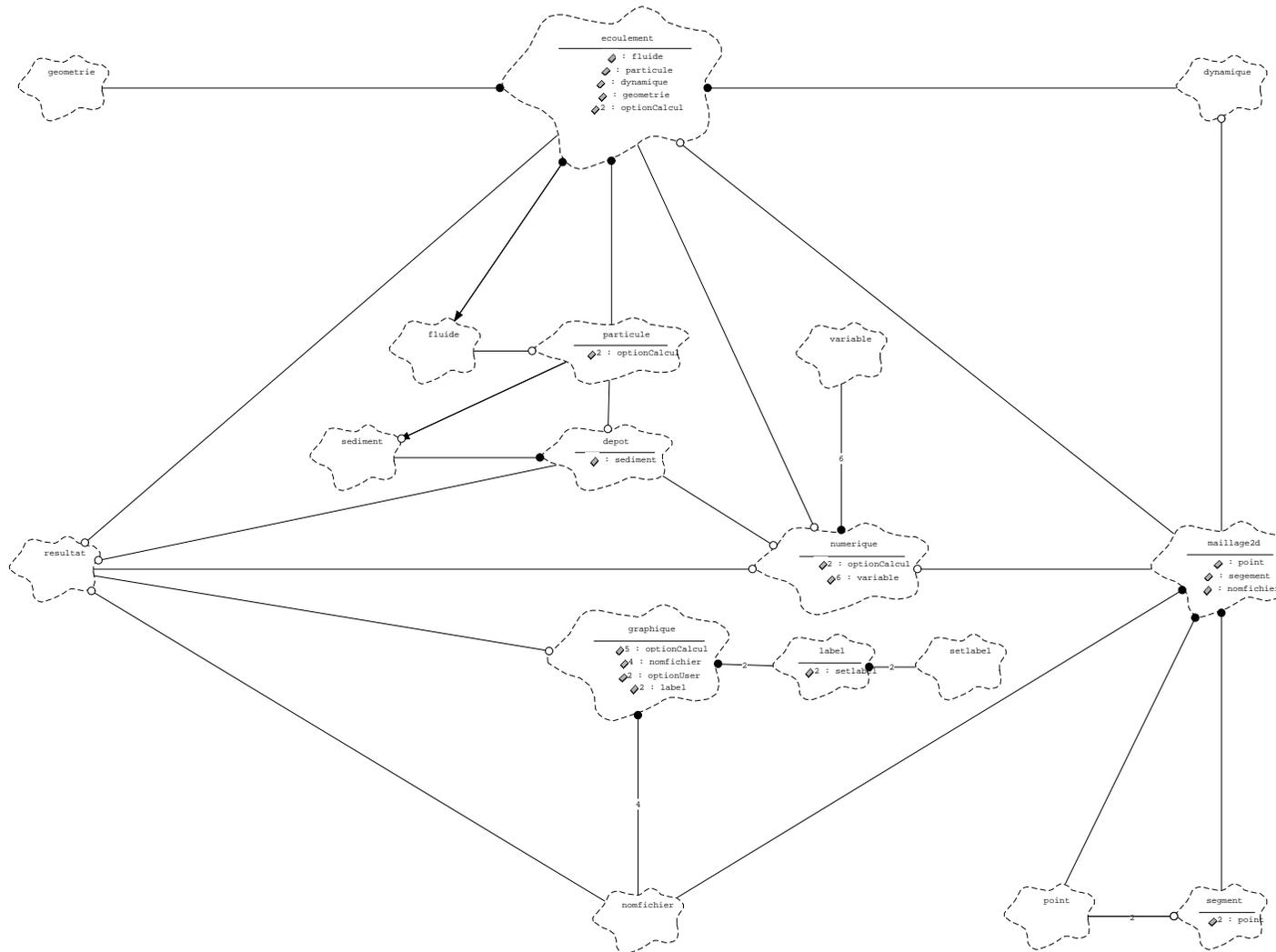
Le maillage a ainsi un caractère très générique, il ne contient aucune information autre que géométrique.

I.3 Construction de l'objet-écoulement

L'objet-écoulement est l'objet qui regroupe les données physiques du modèle. Il est constitué de quatre objets :

- un objet « fluide », qui contient les données relatives au fluide ambiant (viscosité, masse volumique ...).
- un objet « particule » qui dérive de l'objet « sédiment ». Cet objet contient, en plus des informations contenues dans « sédiments », des données telles que la vitesse de chute libre et un ensemble d'options de calcul.
- un objet « géométrie » qui contient les informations sur la géométrie de l'objet comme sa hauteur, sa longueur, ainsi que sa surface et la longueur des différentes interfaces ...
- un objet « mouvement » qui regroupe les données telles que la position et la vitesse.

Un ensemble de méthodes permet d'accéder aux paramètres physiques tels que le nombre de Reynolds, le nombre de Richardson.



File: /home/irsun41_1/hugota/dev/TOO/utils/toorose3b.mdl Tue May 26 16:47:45 1998 Class Diagram: Logical View / Main Page 1

I-4. Formation du dépôt

FIG. I.1 – Structure du programme

I.4 Formation du dépôt

Le dépôt est un objet construit par la résolution, comme la perte ou le gain de particule de l'objet écoulement. Il est cependant complètement indépendant de l'objet-écoulement. Il est constitué d'un objet « sédiment ».

I.5 Résolution numérique des équations différentielles

Cette partie constitue le lien entre l'objet-écoulement, le maillage et le dépôt. C'est avant tout un solveur d'équations différentielles. Elle permet d'obtenir un ensemble discret de valeur x_n (variables de l'objet-écoulement) qui correspond à un ensemble discret de valeur t_n . Cette ensemble est une approximation de la valeur continue $x(t)$.

En effet, le système étudié est un système d'équations différentielles non linéaires du premier ordre (la dérivée d'ordre la plus élevée est première) de la forme :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x})$$

Le problème n'est cependant pas complètement spécifié tant que les conditions à la limite ne sont pas spécifiées. Les conditions à la limite sont des conditions algébriques sur les valeurs des fonctions x_i . Elles peuvent simplement retranscrire le fait que certaines variables prennent certaines valeurs numériques ou bien, de façon plus complexe, spécifier des relations (linéaires ou non linéaires) entre les variables.

C'est généralement la nature des conditions à la limite qui détermine si telle ou telle méthode numérique est appropriée à la résolution du système d'équations différentielles.

Les différents types de conditions à la limite peuvent être divisés en deux catégories :

- Les problèmes à valeur initiale, où tous les x_i sont spécifiés à une valeur de départ t_0 , et où on souhaite trouver \mathbf{x} à un point t_f final, ou en un nombre fini de points discrets intermédiaires.
- Les problèmes à deux points, où les conditions à la limite sont spécifiées en plus d'un point t . En général, certaines des conditions sont spécifiées en t_0 et les autres en t_f

Notre problème est un problème à valeur initiale. On fixe les conditions de « départ » (vitesse, position, hauteur, longueur) de l'écoulement :

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Pour résoudre numériquement un problème à valeur initiale, il est nécessaire de récrire les termes de dérivée, dx/dt , de façon discrète, c'est-à-dire pour des pas finis Δx et Δt , et de multiplier les équations par Δt . On obtient alors des formules algébriques pour la variation de la fonction x_i lorsque la variable indépendante t est « avancée » d'un pas de taille Δt . Dans le cas limite où $\Delta t \rightarrow 0$, ou du moins où Δ est très petit, on obtient une bonne approximation de la solution de l'équation différentielle. L'application littérale de cette procédure conduit à la méthode d'Euler. Les méthodes plus sophistiquées sont néanmoins basées sur la même idée : ajouter des petits incréments à la fonction correspondant à la dérivée (membre de droite des équations) multipliée par le pas.

I.5.1 Les méthodes de Runge-Kutta

La méthode de résolution choisie appartient à la classe des méthodes de Runge Kutta. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas poser de problème d'initialisation d'algorithme, d'être précises et relativement simples à mettre en œuvre [Romanelli, 1965]. Elle est une adaptation de la méthode présentée dans [Press, Teukolsky, Vetterling et Flannery, 1992, Chap. 16]. Suivant les recommandations de cet ouvrage, la résolution numérique est composée de trois parties :

1. Une partie de résolution proprement dite, qui est l'implémentation numérique de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour une valeur de départ donnée, elle donne la valeur itérée $\mathbf{x}(t_n + h)$.
2. Une partie de contrôle de la qualité du résultat. Elle détermine si le résultat est acceptable ou non. Dans ce dernier cas elle spécifie une taille de pas plus petite et relance la résolution jusqu'à l'obtention d'un résultat compatible avec le critère de précision.

3. Une partie interface, qui coordonne les deux parties précédentes entre elles et avec le reste du code numérique.

I.5.2 Principes

Comme nous l'avons brièvement vue, la méthode d'Euler est une méthode à un pas, pour laquelle les valeurs (t_{n+1}, x_{n+1}) sont obtenues en ne connaissant que (t_n, x_n) . Le problème est de rechercher une valeur approchée de $\mathbf{x}(t_n + h)$ où h est l'accroissement.

Runge a été le premier à montrer qu'il était possible d'éviter les différenciations successives des séries de Taylor tout en conservant la précision. La méthode de Runge-Kutta est un algorithme établi pour approcher la somme de la série de Taylor :

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hx'(t_n) + \frac{h^2}{2!}x''(t_n) + \dots$$

Mais à l'opposé de cette somme formelle, la méthode ne fait pas appel à la définition explicite, non plus qu'au calcul, des dérivées d'ordre supérieurs à un. On obtient la formule approchée à l'aide de plusieurs évaluations des dérivées premières entre t_n et $t_n + h$ [Romanelli, 1965].

L'idée sous-jacente est d'utiliser des évaluations de la fonction f dans l'intervalle (t_n, x_n) et (t_{n+1}, x_{n+1}) . L'évaluation des dérivées de la série de Taylor est contournée en évaluant f un certain nombre de fois supplémentaire dans l'intervalle. Le problème revient alors à déterminer un ensemble de paramètres pour obtenir un résultat d'ordre aussi élevé que possible.

Les méthodes de Runge-Kutta propagent donc la solution sur un intervalle en combinant l'information de plusieurs pas de type Euler et ne font donc pas appel au calcul de dérivées d'ordre supérieur à un.

La forme générale de la méthode est donc :

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^v w_i k_i \tag{I.1}$$

où les w_i sont des poids à déterminer, v est le nombre d'évaluations de la fonction $f(t, x)$ et les k_i vérifient les équations explicites :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \\ k_2 &= hf(t_n + c_2 h, x_n + a_{21} k_1) \\ k_3 &= hf(t_n + c_3 h, x_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

qui peut être mis sous la forme :

$$k_i = hf \left(t_n + c_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \quad c_1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, v \tag{I.2}$$

On remarque tout de suite que lorsque $v = 1$, seul k_1 intervient et la formule (I.1) mène à la formule d'Euler.

La recherche des paramètres inconnus se fait en développant, x_{n+1} , en puissance de h et en identifiant ces puissances au développement en série de Taylor de la solution recherchée.

Pour les méthodes explicites les paramètres w_i, c_i et a_{ij} vérifient en plus les relations [Lapidus et Seinfeld, 1971, Chap. 2] :

$$\sum_{i=1}^v w_i = 1 \tag{I.3}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad i \neq 1, \quad i = 2, \dots, v \tag{I.4}$$

Classiquement, on introduit une représentation simplifiée des coefficients sous la forme d'un tableau :

$$\frac{\mathbf{c} \mid \mathbf{A}_L}{\mathbf{w}^T}$$

où \mathbf{A}_L est la matrice triangulaire inférieure formée des multiplicateurs a_{ij} , le vecteur \mathbf{c} contient les incréments c_i , et le vecteur transposé \mathbf{w}^T , les v valeurs des poids.

Enfin, pour chaque valeur de v (nombre d'évaluation de f), il existe un p maximal qui correspond à l'ordre⁶⁴ maximal de la méthode pour lequel le système de paramètre inconnu admet des solutions. Si l'on note $N(v)$ cette valeur [Lapidus et Seinfeld, 1971, Chap. 2] :

$$N(v) = v, \quad 1 \leq v \leq 4 \tag{I.5}$$

et

$$N(5) = 4, \quad N(6) = 5, \quad N(7) = 6 \tag{I.6}$$

$$N(8) = 6, \quad N(9) = 7 \tag{I.7}$$

En d'autres termes, des formules d'ordre 1 à 4 peuvent être obtenues avec un nombre d'évaluations de f égal à l'ordre, mais lorsque l'on souhaite un ordre plus élevé, cela demande plus d'évaluations, dont le nombre est borné par $v + 2$ [Press *et al.*, 1992, Chap. 16]. Les méthodes de Runge-Kutta sont souvent spécifiées par le couple (p, v) .

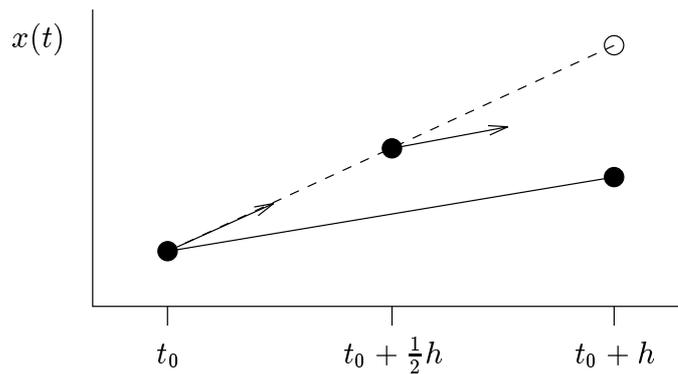


FIG. I.2 – Exemple d'une méthode Runge-Kutta (2,2) et d'une méthode d'Euler. La méthode (2,2) est précise au second ordre et nécessite deux évaluations de la dérivée : la dérivée au point de départ, qui permet de calculer le point intermédiaire, puis la dérivée au point intermédiaire qui est utilisée pour le calcul sur tout l'intervalle. Le point vide représente la valeur obtenue par la méthode d'Euler.

Par exemple, pour une méthode (2,2),

on utilise la valeur de f au point intermédiaire pour calculer sur l'intervalle complet (cf. figure I.2).

La méthode utilisée le plus fréquemment est (4,4) [Ha-Minh-Hiêu, 1996, Chap. IX]. Dans cette méthode, il faut réaliser 4 évaluations des dérivées premières pour obtenir une valeur approchée à l'ordre h^4 de la somme de la série de Taylor. Par exemple, la forme de Runge est :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3) \end{aligned}$$

64. Une méthode est appelée d'ordre p si son erreur est un $\mathcal{O}(h^{p+1})$.

et

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

I.5.3 Contrôle de la taille du pas

Pour qu'une méthode d'intégration soit efficace, elle nécessite de changer la taille du pas h , pour optimiser le temps de calcul tout en conservant la précision.

En effet, dans bien des cas, le pas ne peut rester constant lors de la résolution. Le choix d'un grand pas de calcul, lorsque la solution varie très rapidement, mène à des instabilités de l'algorithme ou à une erreur trop grande [Ha-Minh-Hiêu, 1996, Chap. IX]. Inversement, le choix d'un petit pas peut s'avérer être très pénalisant en temps de calcul, lorsque la solution varie très lentement. Les gains résultants de l'implémentation d'une méthode à pas variable, ne se comptent pas en dizaines de pourcent ou en facteur deux, mais parfois en facteur dix, cent ou plus [Press *et al.*, 1992, Chap. 16].

La gestion de la taille du pas se fait généralement par le biais de l'estimation de l'erreur de troncature⁶⁵.

La méthode classique consiste à doubler les pas. Chaque pas est pris deux fois :

- une fois comme un pas complet, on avance de t à $t + 2h$ par un pas de longueur $2h$;
- une fois comme deux demis pas, on avance de t à $t + 2h$ par deux pas successifs de longueur h .

Le sur-coût de cette double évaluation est un facteur 1,375 [Press *et al.*, 1992, Chap. 16]. La comparaison des deux solutions (développements limités) donne une estimation de l'erreur de troncature. C'est sur cette dernière que l'on effectue un contrôle en vérifiant qu'elle n'est ni trop grande (pas de résolution trop grand), ni trop petite (pas de résolution trop petit).

Pour notre part, nous avons préféré à cette méthode, les méthodes dites *embedded Runge-Kutta formulas* (méthodes que nous nommerons « encapsulées »), qui sont souvent deux fois plus efficaces.

Comme nous l'avons vu, au delà de l'ordre 4, les méthodes de Runge-Kutta demandent un nombre d'évaluations de fonctions, plus élevé que l'ordre désiré. Cependant, l'idée des méthodes « encapsulées » est que lorsque l'on cherche la valeur x_{n+1} par un processus nécessitant $v, v \geq 4$ évaluations, il est possible de construire également, grâce aux mêmes évaluations de f (aux mêmes k_i) et donc sans sur-coût supplémentaire, des méthodes d'ordre inférieur [Lapidus et Seinfeld, 1971, Chap. 2].

Nous utilisons ici, une méthode (5,6), pour laquelle il existe une autre combinaison des six fonctions évaluées qui donne une méthode d'ordre 4, donc une méthode (4,6). La différence entre les deux estimations de $x(t+h)$ peut être utilisée comme estimateur de l'erreur de troncature et servir à ajuster la taille du pas. Le sur-coût est de seulement deux évaluations de f .

La forme générale d'une méthode de Runge-Kutta (5,6) est, d'après les équations (I.1) et (I.2) :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \\ k_2 &= hf(t_n + c_2h, x_n + a_{21}k_1) \\ &\vdots \\ k_6 &= hf(t_n + c_6h, x_n + a_{61}k_1 + \dots + a_{65}k_5) \end{aligned}$$

et

$$x_{n+1} = x_n + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 + w_5k_5 + w_6k_6 + \mathcal{O}(h^6) \quad (\text{I.8})$$

La forme de la méthode « encapsulée » (4,6) est :

$$x_{n+1}^* = x_n^* + w_1^*k_1 + w_2^*k_2 + w_3^*k_3 + w_4^*k_4 + w_5^*k_5 + w_6^*k_6 + \mathcal{O}(h^5) \quad (\text{I.9})$$

L'estimateur d'erreur est :

$$\Delta \equiv x_{n+1} - x_{n+1}^* = \sum_{v=1}^6 (w_v - w_v^*) k_v \quad (\text{I.10})$$

0						
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			
1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		
$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	
w	$\frac{37}{378}$	0	$\frac{250}{621}$	$\frac{125}{594}$	0	$\frac{512}{1771}$
w*	$\frac{2825}{27648}$	0	$\frac{18575}{48384}$	$\frac{13525}{55296}$	$\frac{277}{14336}$	$\frac{1}{4}$

TAB. I.1 – Paramètres des méthodes de Runge-Kutta (5,6) et (4,6) utilisées (d'après Press et al. [1992, Chap. 16]).

Les valeurs des constantes sont données dans le tableau I.1.

L'étape suivante consiste à conserver l'erreur estimée par la relation I.10 page précédente entre les bornes désirées. D'après les développements (I.8) et (I.9), l'erreur Δ est de l'ordre de h^5 . Si l'on prend un pas h_1 qui conduit à une erreur Δ_1 , alors le pas h_0 qui aurait conduit à l'erreur Δ_0 désirée est estimé par :

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{5}} \quad (\text{I.11})$$

Cette équation peut donc être utilisée de deux façons :

- Si Δ_1 est plus grand que Δ_0 , l'équation (I.11) indique comment décroître la taille du pas qui a échoué, avant de le recommencer ;
- Si Δ_1 est plus petit que Δ_0 , l'équation permet d'augmenter en toute sécurité la taille du pas pour le prochain pas calculé.

Le fait que la résolution porte sur un vecteur \mathbf{x} , implique que l'on ait autant de calculs d'erreur que de variables de résolutions, mais pour un seul pas h . Le choix du pas est donc conditionné par le calcul de la variable dont l'erreur est la plus restrictive.

I.5.3.1 Erreur locale

Du fait des différents ordres de grandeur des variables de résolution, il est nécessaire de calculer des erreurs relatives. En effet, une variable comme la fraction volumique ϕ , reste toujours inférieure à un, tandis que, par exemple, la position peut être de l'ordre du millier de mètres. Il est donc utile d'introduire une échelle associée à chaque variable. Celle-ci est choisie de la forme :

$$\Delta_0 = \varepsilon |x_n| \quad (\text{I.12})$$

L'erreur est donc redimensionnée par rapport à la valeur de départ de la variable⁶⁵. Il est alors possible d'imposer une valeur constante de l'erreur relative.

I.5.3.2 Erreur globale

La forme (I.12) ne borne que l'erreur faite sur chaque pas individuellement.

Il est également nécessaire de diminuer l'erreur globale qui apparaît par accumulation des erreurs, entre le début et la fin de l'intégration, lorsque celles-ci sont toujours de même signe. On choisit la forme suivante :

$$\Delta_0 = \varepsilon |hf(t_n, x_n)| \quad (\text{I.13})$$

65. Termes non calculés du développement en série de Taylor.

66. Pour éviter les comportements singuliers qui peuvent apparaître près de zéro, il est nécessaire d'ajouter également un zéro numérique de l'ordre de 10^{-30} . on peut ainsi simuler des écoulements avec une vitesse initiale nulle.

Le fait de choisir Δ_0 proportionnel à h , implique que plus on va faire de pas, plus l'erreur devra être petite.

L'équation (I.11) doit alors être modifiée puisque $\Delta_0 \sim h$. L'exposant est alors de $\frac{1}{4}$:

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{4}} \quad (\text{I.14})$$

I.5.3.3 Erreur globale

L'estimateur d'erreur de la résolution est donc la combinaison des équations (I.12) et (I.13) :

$$\Delta_0 = \varepsilon (|x_n| + |hf(t_n, x_n)|) \quad (\text{I.15})$$

Le choix du pas h_0 qui réalise l'erreur Δ_0 est effectué suivant le critère le plus restrictif des deux équations (I.11) et (I.14) :

$$h_0 = \begin{cases} Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{5}} & \text{si } \Delta_0 \geq \Delta_1 \text{ (détente)} \\ Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{4}} & \text{si } \Delta_0 < \Delta_1 \text{ (compression)} \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

I.5.3.4 Compléments

Le contrôle de la taille du pas a été effectué pour assurer la précision de la discrétisation des équations différentielles et de la méthode de résolution. Une autre imprécision peut provenir de la discrétisation du support (maillage). Un trop grand pas h peut parfois faire que la résolution saute des mailles. On introduit donc une contrainte supplémentaire qui impose à la résolution de « passer » au moins une fois dans chaque maille.

Enfin, il est possible de faire de l'extrapolation locale. La valeur x_{n+1} est précise au cinquième ordre, c'est-à-dire un ordre plus élevé que la valeur au quatrième ordre x_{n+1}^* . L'extrapolation locale consiste à accepter x_{n+1} , bien que le calcul de l'erreur ne concerne que la valeur au quatrième ordre⁶⁷.

I.6 Conclusions

Le programme informatique a été réalisé en C++. Ce langage orienté objet offre un maximum de possibilités de réutilisation du code et un maximum de flexibilité : des parties de codes peuvent être modifiées indépendamment. Ce langage étant normalisé, la portabilité entre plate-formes et compilateurs est maximale⁶⁸.

Le système différentiel est résolu numériquement par une méthode de Runge-Kutta d'ordre (4,6). Cette méthode simple et fiable permet une estimation de l'erreur de troncature et un contrôle du pas d'intégration par l'adjonction d'une forme de Runge-Kutta encapsulée d'ordre (5,6). L'intégration est donc réalisée par pas variable (compression-détente) en assurant la précision relative choisie de chacune des variables.

Le système peut être résolu pour un grand nombre de problèmes, dont la complexité empêchait toute résolution manuelle.

67. Un ordre plus élevé ne signifie pas toujours une plus grande précision.

68. Le code a été compilé sur les plate-formes suivantes :

- mips-sgi-irix5.3, compilateurs : MIPSpro Compilers: Version 7.2.1 et MIPSpro Compilers: Version 7.30
- i386-redhat-linux, compilateur : gcc version egcs-2.90.29 980515 (egcs-1.0.3 release)
- sparc-sun-solaris2.5.1, compilateurs : CC: Workshop Compilers 4.2 30 Oct 1996 C++ 4.2 et gcc version 2.7.2.2

*[...] l'ordinateur ne possédant en lui aucun génie propre spontanément
inventif, tout doit lui être dit.*
J.-G. Ganascia

Annexe J

Exemple de Fichier de données du programme

```
#$HEADER
#-----
#
#   Copyright   : Institut Francais du Petrole - 1996-1998
#   Project     : Ecoulements Gravitaires
#               Objet Ecoulement
#
#   Author      : Alexandre Hugot
#   Language    : ascii
#-----
#
#   File        : $RCSfile: FichierDonneType.don,v $
#   Revision    : $Revision: 3.1.2.1 $
#   Date        : $Date: 1998/11/18 00:46:57 $
#   Description : FICHER DE DONNEES TYPE.
#-----
#
#$END
#-----
#
#               FICHER DE DONNEES TYPE
#
#   le caractere '#' permet les commentaires
#
#               MAIS :
#
#   !! NE PAS CHANGER L'ORDRE DES VARIABLES      !!
#   !! NE PAS LAISSER DE LIGNES BLANCHES        !!
#-----
#
# FICHER DE MAILLAGE
#
```

```
# Fichier de maillage cartésien
TopographieType.don
#
#-----
#
# FICHIERS DE RESULTAT
#
# Fichier de resultats
ResultatsType.dat
#
#-----
#
# GEOMETRIE DE L'ECOULEMENT
#
# Demi Ellipse :
#
# demi grand axe (longueur -> m)
1.
#
# demi petit axe (largeur -> m)
0.1
#
# hauteur (m)
0.1
#
#-----
#
# PARAMETRES INITIAUX
#
# temps initial (temps -> s)
0.
#
# position suivant x (longueur -> m)
0.
#
# vitesse suivant x (vitesse -> m / s)
0.
#
# vitesse d'etatement suivant x (vitesse -> m / s)
0.
#
#-----
#
# FLUIDE AMBIANT
#
# masse volumique (rho -> kg / m3)
1000.
#
# viscosite dynamique (mu -> kg / m s)
0.001
#
#-----
#
# Nombre de TYPE DE PARTICULES
```

```

#
1
#-----
#
# PARTICULES
#
# masse volumique (rho -> kg / m3)
2600.
#
# diametre (longueur -> m)
0.0005
#
# fraction volumique initiale (ss dim)
0.03
#
# angle critique de repos (angle -> degres)
30.
#
# PARAMETRE DU DEPOT
#
# porosite dans le depot (ss dim)
0.44
#
# Possibilite d'Erosion : (O)ui ou (N)on
0
#
# Possibilite de Sedimentation : (O)ui ou (N)on
0
#
# Methode Vitesse de sedimentation : (S)tokes ou (D)ietrich
D
#
#-----
#
# PARAMETRES ECOULEMENT
#
# coefficient de friction (ss dim)
0.008
#
# coefficient de friction Up/Down (ss dim)
0.
#
# Fraction basale C3 * phi (ss dim) 1.6
1.6
#
# Entrainement du fluide Ambient : (O)ui ou (N)on (c1/(c2+Ri))
0
#
# C1    0.00153
0.00153
#

```

```
# C2      0.0204
0.0204
#
# Diffusivite des particules (ss dim)
# C4      1.
1.
#
#-----
#
# PARAMETRES DE LA RESOLUTION NUMERIQUE
#
# Variation de h : (O)ui ou (N)on.
0
#
# Variation de l : (O)ui ou (N)on.
0
#
# pas de temps (temps -> s)
# (donner une estimation, il est ajuste automatiquement)
0.1
#
# parametre de convergence sur phi (1.e-8)
1.e-8
#
# parametre de CV (precision de l'integration) de RK
# Pour des ecoulement tres instationnaire (U = 0),
# mettre une petite valeur
# Plus il est petit plus les resultats sont precis
1.e-8
#
# Pas de temps minimal autorize (peut etre = 0.) 1.e-20
1.e-32
#
#-----
#
# OPTIONS GRAPHIQUES
#
# Generation de fichiers graphiques : (O)ui ou (N)on
0
#
# Visualisation directe des resultats : (O)ui ou (N)on.
0
#
# TYPE DE SORTIE GNUPLOT :
# Type Postscript : (O)ui ou (N)on.
0
#
# Type LaTeX : (O)ui ou (N)on.
0
#
# Type Gif : (O)ui ou (N)on.
0
#
```

Reference Experimentale : (O)ui ou (N)on.

N

#

Nom du fichier experimental :

ExperienceType.dat

#

#

#----- FIN -----

@

Annexe K

Méthodes d'analyse locale

On considère le système autonome :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{K.1})$$

Nous avons utilisé deux méthodes d'analyse locale :

1. l'analyse des points critiques ;
2. la recherche de solutions asymptotiques.

Nous rappelons ici les principaux éléments de cours auxquels nous ferons appel.

K.1 Analyse des points critiques

Nous avons suivi la méthode générale d'étude des systèmes non-linéaires autonomes, qui repose sur l'analyse des points critiques. Elle se décompose en trois étapes :

1. Trouver les points critiques du système, c'est-à-dire les points qui annulent le second membre de l'équation (K.1) ;
2. Effectuer une analyse locale du système au voisinage des points critiques :
 - Dans de nombreux cas, le système exact peut être approximé par un système linéaire au voisinage du point critique :

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (\text{K.2})$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

où les λ_i sont les différentes valeurs propres de la matrice A avec m_i l'ordre de multiplicité associé et $P_i(t)$ une colonne de polynôme de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$.

- Des méthodes matricielles permettent d'identifier la nature des points critiques du système linéarisé. Elles reposent sur deux théorèmes. Le premier concernant le système linéarisé⁶⁹ :

Théorème 1

(a) Si $\forall \lambda_i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow$ Le point critique est asymptotiquement stable pour le système linéarisé (système (K.2)).

69. La notation Re signifie partie réelle.

(b) Si $\exists \lambda_{i_0}, \operatorname{Re}(\lambda_{i_0}) > 0 \Rightarrow$ Le point critique est instable pour le système linéarisé.

(c) Si $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ et si $\exists i_0, \operatorname{Re}(\lambda_{i_0}) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} \text{si } \dim E_{\lambda_{i_0}} = m_{i_0}, & \text{le point critique est asymptotiquement stable pour le système} \\ & \text{linéarisé.} \\ \text{si } \dim E_{\lambda_{i_0}} < m_{i_0}, & \text{le point critique est instable pour le système linéarisé.} \end{cases}$
 (E_{λ_i} est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i ;
 m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i).

Les valeurs propres donnent une image qualitative de l'expansion ou de la contraction de l'espace des phases. Les valeurs propres négatives indiquent un comportement stable, tandis que les valeurs propres positives donnent une idée de la sensibilité aux conditions initiales. En effet, deux trajectoires de phase générées par deux conditions initiales proches $\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{10} - \mathbf{x}_{20}$ s'écartent comme $\delta \mathbf{x}(t) \sim \delta \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$.

Le second théorème utilisé concerne la validité de la linéarisation :

Théorème 2 (Théorème de Liapounov)

(a) Si $\forall \lambda_i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow$ Le point critique est asymptotiquement stable pour le système non-linéaire (système (K.1)).

(b) Si $\exists \lambda_{i_0}, \operatorname{Re}(\lambda_{i_0}) > 0 \Rightarrow$ Le point critique est instable pour le système non-linéaire.

(c) Si $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ et si $\exists i_0, \operatorname{Re}(\lambda_{i_0}) = 0 \Rightarrow$ On ne peut pas conclure pour le système non-linéaire.

3. Assembler les résultats de l'analyse locale pour obtenir une image qualitative globale des solutions du système non-linéaire.

K.2 Recherche de solutions asymptotiques

La technique consiste ici à présupposer la forme des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$. Généralement nous supposons que la solution peut être approximée asymptotiquement par une série de la forme [Bender et Orszag, 1978, Chap. Three] :

$$\mathbf{x} \sim t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n}$$

Nous chercherons à déterminer l'exposant α en supposant $a_0 \neq 0$. Nous ferons alors appel aux arguments de « balance dominante », qui permettent d'identifier les termes qui sont négligeables à la limite asymptotique. Les étapes de la méthode sont :

1. Éliminer tous les termes qui sont négligeables et remplacer l'équation exacte par une relation asymptotique ;
2. Remplacer la relation asymptotique par une équation en remplaçant le symbole \sim par un symbole $=$ et résoudre l'équation résultante. La solution de cette équation satisfait la relation asymptotique, mais ce n'est cependant sûrement pas la seule fonction qui le fasse ;
3. Vérifier que la solution obtenue est cohérente avec l'approximation faite en 1 ;
4. Enfin montrer que l'équation obtenue en factorisant la solution de 2 a des solutions qui varient moins rapidement que cette dernière.

On peut alors conclure que le facteur de contrôle⁷⁰, mais non le comportement dominant⁷¹ obtenu par la relation de balance dominante, est le même que celui de la solution exacte.

⁷⁰. Le facteur de contrôle (*controlling factor*) est la composante changeant le plus rapidement dans le comportement dominant.

⁷¹. Le comportement dominant (*leading behavior*) est le comportement asymptotique du premier terme de la série infinie représentant le comportement local de la solution.

Annexe L

Application d'une méthode inverse : identification des paramètres et des conditions initiales

Nous proposons de traiter ici du problème de l'identification de paramètres à partir de données expérimentales ou réelles (méthode inverse). À partir de ces données expérimentales ou réelles et du modèle que nous avons développé, nous cherchons le vecteur de paramètres qui permet de représenter au mieux ces données. Cette méthode a déjà été utilisée avec succès dans de nombreux domaines comme la géophysique, la mécanique des fluides et la statistique.

Ce chapitre présente la méthode utilisée et son application à des données synthétiques.

Sommaire

L.1	Position du problème	328
L.1.1	Fonction de coût	328
L.1.2	Problèmes linéaires et non-linéaires	329
L.2	Méthode du recuit simulé	329
L.2.1	Algorithme de Métropolis	329
L.2.2	Couplage à la méthode du simplex	330
L.3	Problème des minima locaux	331
L.3.1	Le problème de la température initiale	332
L.3.2	Échelle des températures critiques	333
L.3.3	Choix de la fonction de recuit	333
L.4	Données synthétiques	336
L.5	Inversion partielle	337
L.5.1	Minima locaux et couplage	337
L.5.2	Inversion partielle sur les paramètres	339
L.5.3	Inversion partielle sur les conditions initiales	340
L.6	Inversion totale	341
L.6.1	Minima locaux et couplage	341
L.6.2	Résultats de l'inversion totale	343
L.7	Conclusions	344

L.1 Position du problème

L'inversion de données d consiste à déterminer, à partir de ces dernières, et parmi une collection de modèles dépendant d'un ensemble de coefficients α , le jeu de coefficients qui optimise une certaine fonction de coût J . Cette fonction définit la distance entre les données et les prédictions d'un modèle. On recherche donc son minimum global (s'il existe).

L'inversion de données nécessite donc [Fullana, 1997] :

1. un ensemble de données d . Elles peuvent être d'origine expérimentale ou réelle, ce sont alors des observations. Elles peuvent être d'origine numérique, on parle alors de données synthétiques ;
2. un ensemble de modèles donné par la fonctionnelle F du modèle et par les variations des paramètres $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$;
3. une fonction de coût J fonction des paramètres α_i ;
4. une procédure pour obtenir le jeu optimal de coefficients α_{op} qui minimise la fonction de coût.

La solution de ce problème est appelée minimum global.

L.1.1 Fonction de coût

La fonction de coût définit la distance entre les données et les prédictions du modèle. Le critère le plus utilisé pour mesurer l'écart entre une prédiction et la valeur observée correspondante est celui des moindres carrés. Ce critère repose sur l'hypothèse de normalité de la distribution des erreurs expérimentales [Tarantola, 1987]. Il est défini par :

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^m (d_i - F_i(\alpha))^2 \quad (\text{L.1})$$

où m est le nombre de données sur lequel l'identification est effectuée, d_i représente la valeur de l'observation i , la fonctionnelle F_i correspond à la valeur du modèle direct au point i .

Pour notre part, nous avons utilisé le critère suivant

$$\mathcal{J} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i - F_i(\alpha)}{d_i} \right)^2 \quad (\text{L.2})$$

Nous reconnaissons dans la définition (L.2) le critère classique des moindres carrés (L.1). Le fait de diviser par la valeur d_i , fait que l'on minimise l'erreur relative sur chaque point d_i .

La fonction de coût peut être interprétée comme suit :

$\mathcal{J} = 0$ lorsque la prédiction $F_i(\alpha)$ est égale à la donnée d_i .

$\mathcal{J} = 1$ lorsque la prédiction $F_i(\alpha)$ est égale en moyenne au double de la donnée.

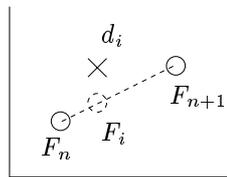


FIG. L.1 – Approximation linéaire des résultats du modèle direct entre deux pas de temps n et $n + 1$.

Ne disposant pas d'échantillonnage numérique fixe (la méthode de résolution du modèle direct est à pas de temps variable) et les données expérimentales ou réelles étant rarement uniformément réparties spatialement ou temporellement, nous utilisons une approximation linéaire des résultats entre deux pas de temps, pour obtenir la valeur numérique coïncidant avec les observations (cf. figure L.1).

Si le modèle mathématique est linéaire par rapport aux coefficients α , la fonction de coût \mathcal{J} est quadratique et la convergence des méthodes gradients est assurée.

Cependant, la recherche du minimum de la fonction de coût admet très rarement une solution analytique. On fait le plus souvent appel à des procédés itératifs : à partir de la valeur initiale α^0 , on construit une suite $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^k, \dots$.

L.1.2 Problèmes linéaires et non-linéaires

Si le modèle n'est pas linéaire par rapport aux paramètres α , l'analyse de la solution n'est pas directe. Les problèmes d'optimisation peuvent être grossièrement classés en deux catégories :

- Les problèmes avec un minimum, appelés problèmes linéaires, puisque la solution est obtenue par linéarisation du problème.

Les méthodes d'optimisation linéaire sont presque toutes basées sur la condition d'optimalité, qui peut se réduire, dans le cas d'optimisation sans contrainte, à $\nabla \mathcal{J} = 0$. La valeur α^{k+1} est souvent définie à partir de la valeur α^k et d'un pas et d'une direction de descente de façon à ce que : $\mathcal{J}(\alpha^{k+1}) \leq \mathcal{J}(\alpha^k)$.

Les problèmes faiblement non-linéaires d'inversion sont habituellement résolus à l'aide de techniques de linéarisation qui dépendent fortement de la précision des estimations initiales des paramètres du modèle [Rothman, 1985]. La fonction de coût peut alors être minimisée efficacement, mais le risque de trouver un minimum local plutôt que global peut être élevé.

Dans le cas où l'on n'a pas ou peu de contraintes sur la valeur des paramètres initiaux cette méthode a donc de fortes chances d'échouer.

- Les problèmes avec plus d'un minimum, qui ne peuvent être résolus de la manière précédente sans l'adjonction d'hypothèses importantes. En effet, pour un modèle très non-linéaire, la seule connaissance du modèle linéarisé, ne donne aucune connaissance a posteriori dans l'espace des paramètres, il n'est pas certain que l'on puisse trouver un minimum global. Il est alors nécessaire de faire de l'inversion non-linéaire.

Enfin, l'exploration de l'espace des paramètres peut être effectuée de deux façons :

Méthodes systématiques : On définit une grille sur l'espace des modèles, et l'on calcule les modèles en chaque point de la grille. On a souvent recourt à une linéarisation du problème.

Méthodes de Monte Carlo : L'espace des modèles est exploré de façon aléatoire⁷², sans avoir recourt à une linéarisation du problème.

La taille de l'espace des paramètres croît comme N^p où p est le nombre de paramètres à inverser et N le nombre de valeurs que peuvent prendre les paramètres. L'optimisation systématique est donc souvent numériquement irréalisable à cause de la taille trop importante de l'espace des paramètres⁷³ [Tarantola, 1987].

L.2 Méthode du recuit simulé

Nous utilisons ici une approche non-linéaire : l'optimisation est réalisée en utilisant une méthode issue de la famille du recuit simulé (*simulated annealing*).

L.2.1 Algorithme de Métropolis

La méthode du recuit simulé est une méthode de Monte Carlo qui a été utilisée initialement pour optimiser les circuits de puce d'ordinateurs et résoudre le problème du *traveling salesman* par Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi [1983]. Elle est basée sur l'algorithme de Métropolis utilisé en mécanique statistique pour

72. La génération de nombres aléatoires sur micro-ordinateur (machine déterministe!) est à utiliser avec précaution. Les « moteurs » aléatoires sont souvent basés sur des méthodes de congruence : modulo un entier. Sur certaines implémentations de compilateur, le modulo du « moteurs » standart n'est que de 32767. Il n'est alors pas possible de générer de longue suite de nombres aléatoires ayant les propriétés statistiques nécessaires pour les méthodes de Monte Carlo. Le générateur de nombres aléatoires doit donc être programmé. À ce sujet on peut lire [Press *et al.*, 1992, Chap. 7].

73. Pour fixer les idées, supposons un modèle dont la résolution nécessite 1 seconde. On souhaite inverser 5 paramètres (p) pouvant prendre 100 valeurs (N). Le nombre de simulations à réaliser par une méthode systématique est de 10^{10} . Le temps calcul nécessaire à la résolution du problème est de 317 années!

simuler les systèmes atomiques à l'équilibre (équation d'état) [Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller et Teller, 1953] :

À chaque pas de cet algorithme, les positions des atomes sont perturbées de façon aléatoire. Le changement d'énergie ΔE du système est calculé et deux cas peuvent se présenter :

1. Si $\Delta E \leq 0$, la perturbation est acceptée et la configuration avec le déplacement est utilisée comme point de départ pour le prochain pas.
2. Si $\Delta E > 0$, le cas est traité de façon probabiliste : La probabilité que le déplacement soit accepté est :

$$P(\Delta E) = e^{\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right)} \quad (\text{L.3})$$

où k_B est la constante de Boltzman et T la température. Cette condition est implémentée en choisissant un nombre aléatoire a uniformément distribué entre 0 et 1. Si $a \leq P(\Delta E)$, la perturbation est acceptée, sinon la configuration originale est conservée comme point de départ du prochain pas.

Le processus de recuit simulé consiste à [Kirkpatrick *et al.*, 1983] :

- faire « fondre » (*melting*) : à haute température les molécules se déplacent librement les unes par rapport aux autres et l'on détruit la structure du système ;
- puis refroidir : l'agitation thermique des molécules diminue, elles perdent leur mobilité.

Si le refroidissement est suffisamment lent et si les conditions d'équilibre sont maintenues (temps de recuit), le système atteint l'état de cristal pur, qui correspond à l'état d'énergie minimale du système. Par un refroidissement trop brusque (trempe ou *quenching*), le système atteint un état métastable avec une énergie plus élevée.

La connexion aux problèmes inverses est directe : la fonction de coût \mathcal{J} est utilisée à la place de l'énergie E .

La caractéristique essentielle de cet algorithme est de pouvoir « s'échapper » de minima locaux.

Cette méthode, ainsi que des variantes, a été utilisée avec succès dans de nombreux domaines comme la géophysique [Rothman, 1985, 1986], les mathématiques combinatoires, l'analyse de données, le traitement d'image, l'apprentissage des réseaux de neurones, la biologie, la physique, la finance [Ingber, 1993].

Les principaux avantages de la méthode sont :

- De pouvoir traiter des fonctions de coût possédant des non-linéarités et des discontinuités (la méthode ne nécessite pas d'évaluation du gradient de la fonction de coût) ;
- De pouvoir imposer des conditions aux limites et des contraintes sur la fonction de coût ;
- De se mettre en œuvre numériquement de façon simple par rapport aux autres algorithmes d'optimisation non-linéaires ;
- De garantir statistiquement de trouver la solution optimale (ergodicité).

Nous ne traiterons pas ici des propriétés statistiques de la méthode, le lecteur intéressé peut consulter [Ingber, 1993; Rothman, 1985, 1986; Tarantola, 1987]⁷⁴

La méthode présente cependant quelques faiblesses, elle peut :

- être très gourmande en temps de calcul, surtout si l'on utilise la méthode standard (le refroidissement doit être très lent) ;
- perdre sa propriété d'ergodicité lors de l'utilisation d'algorithmes de refroidissement trop brusques (*quenching*), pour lesquels il n'y a pas de garantie statistique de trouver la solution optimale [Ingber, 1993].

L.2.2 Couplage à la méthode du simplexe

La variante du recuit simulé que nous avons utilisée est celle présentée dans [Press *et al.*, 1992]. Elle allie à la méthode du recuit, la méthode de « descente du simplexe » (*downhill simplex*) due à Nelder et Mead [1965]⁷⁵. Elle permet ainsi une convergence efficace au voisinage du minimum.

⁷⁴. Nous n'avons pas d'estimation d'erreur sur les paramètres prédits, c'est à dire pas de réponse à la question : « Quelle est la probabilité que le jeux de paramètres sélectionnés soit correct ? » (*likelihood of the parameters given the data*). La méthode des moindres carrés assure ce maximum de vraisemblance, si les erreurs mesurées sont indépendantes et distribuées normalement avec une déviation standard constante.

⁷⁵. À ne pas confondre avec la méthode du simplexe utilisée en programmation linéaire.

Le simplexe est une figure géométrique qui est constituée, en dimension N , de $N + 1$ points. En deux dimensions le simplexe est un triangle. Si un point du simplexe non-dégénéré⁷⁶ est pris comme origine, alors les N autres points définissent des vecteurs qui génèrent un espace vectoriel de dimension N .

L'algorithme du simplexe consiste simplement à déplacer les points associés à une valeur élevée de la fonction de coût vers les points où la fonction de coût est plus basse.

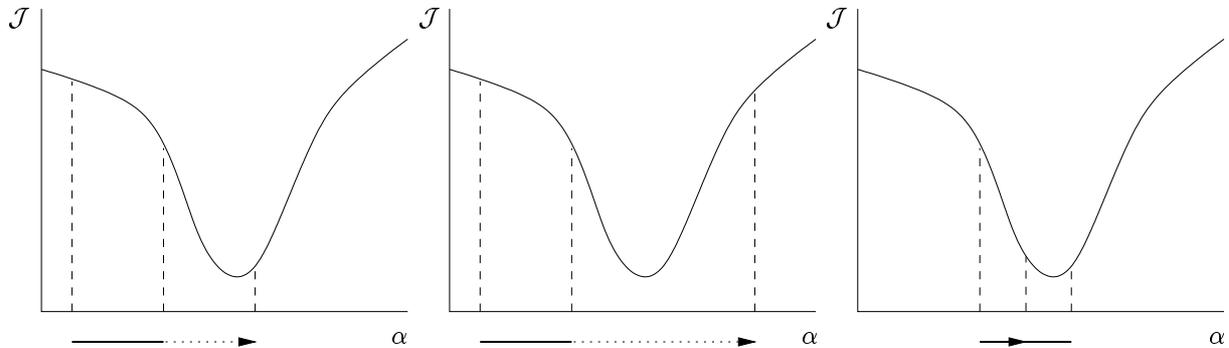


FIG. L.2 – *Mouvement du simplexe (exemple monodimensionnel). En abscisse la valeur du paramètre, en ordonnée la valeur de la fonction de coût associée. À gauche : réflexion ; au centre : expansion ; à droite : contraction. Le bout de la flèche indique la position après déplacement.*

Trois types de transformations sont utilisées (cf. figure L.2) :

1. La réflexion ;
2. Si la réflexion est possible, l'expansion ;
3. La contraction.

L'algorithme du simplexe déplace donc ses points sur la topographie de dimension N jusqu'à rencontrer un minimum (au moins local).

La mise en œuvre dans l'algorithme du recuit simulé est la suivante :

1. à une température de recuit T donnée, on ajoute une variable aléatoire qui suit une distribution logarithmique, à chacune des fonctions de coût associée aux points du simplexe ;
2. on soustrait une variable aléatoire similaire à la fonction de coût du point qui est déplacé par la méthode du simplexe.

Comme l'algorithme de Métropolis, cette méthode accepte toujours une descente (fonctions de coût de valeur moindre), et parfois accepte une remontée associée à des fonctions de coût de valeur plus élevée.

À une valeur donnée de température, le simplexe s'étend sur une échelle qui a approximativement la taille de la région qui peut être atteinte à cette température, il est ensuite perturbé, et rééchantillonne de nouveaux points de façon approximativement aléatoire.

Lorsque $T \rightarrow 0$ lentement, il est hautement probable que le simplexe « tombe » dans une région contenant le plus bas minimum relatif rencontré.

Pour $T = 0$, la méthode se réduit à la méthode du simplexe.

L.3 Problème des minima locaux

Le fait de ne trouver qu'un minimum local est principalement dû :

1. au choix des paramètres numériques de l'algorithme d'inversion (nombre de simulations, paramètres de convergence ...) ;
2. au choix de la valeur initiale et des bornes de l'intervalle de recherche des paramètres d'inversion ;
3. au manque d'observations (manque de contraintes).

76. Qui contient un N -volume fini.

Il faut souligner la différence entre les définitions de la valeur initiale α^0 du jeu de paramètres et les conditions initiales dans l'intégration d'un système d'équations : dans un problème d'optimisation, la valeur initiale d'un jeu de paramètres est ce qui permet de démarrer l'algorithme d'optimisation [Fullana, 1997]. Cette valeur est très importante car le minimum d'une fonction de coût peut en dépendre.

Le succès de la méthode dépend donc d'une bonne initialisation.

L.3.1 Le problème de la température initiale

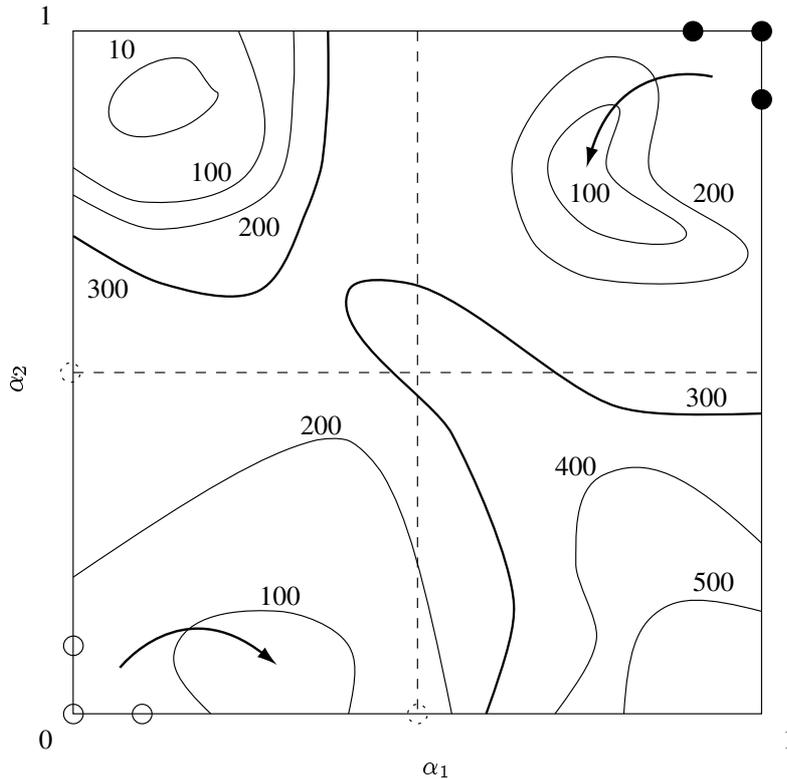


FIG. L.3 – Schéma montrant l'influence des conditions initiales de l'algorithme d'optimisation. Les lignes représentent les isovaleurs de la fonction de coût dans le plan formé de deux paramètres d'inversion. À faible température initiale, les initialisations dans le quart supérieur droit (•) risquent de mener invariablement au minimum local de cette zone, tandis que les initialisations effectuées dans le quart inférieur gauche (◦) mènent au minimum local situé dans cette zone.

La figure L.3 montre un cas fictif de distribution de la fonction de coût en fonction de deux paramètres.

La recherche du minimum va être très fortement liée aux conditions initiales de l'algorithme d'optimisation lorsque la température initiale est très faible. Les fluctuations d'énergie associées aux points du simplex seront également très faible. La figure montre le cas de deux initialisations différentes, qui ont de grandes chances d'échouer à faible température⁷⁷. L'initialisation • mènera au minimum local situé dans le quart supérieur droit de la figure. L'initialisation ◦ a, elle, de fortes chances de mener au minimum local situé dans le quart inférieur gauche.

Pour remédier à ces problèmes, on peut envisager trois solutions :

1. Le fait de choisir une distribution des valeurs du simplex plus large (cercles pointillés) peut également améliorer les résultats, puisque l'on explore d'emblée une zone plus vaste de l'espace des paramètres, mais elle n'assure pas la réussite de la recherche. Dans notre méthode, les paramètres initiaux sont construits à partir des bornes supérieures et inférieures de l'intervalle de recherche.

⁷⁷. Dans le cas d'une méthode gradient cette initialisation échouerait à coup sûr.

2. En augmentant le nombre d'itérations à température constante (temps de recuit), la recherche peut être plus fructueuse, puisque le simplex explorera une plus grande partie de l'espace des paramètres.
3. Mais la façon la plus satisfaisante demeure le choix d'une température initiale plus élevée, qui permettra de « remonter » les forts gradients d'énergie. Le simplex pourra ainsi se déplacer, dans le coin supérieur gauche.

L.3.2 Échelle des températures critiques

Comme l'a montré Rothman [1985, 1986], il existe une température critique pour laquelle l'algorithme du recuit simulé commence à converger beaucoup plus rapidement. Comme le remarque l'auteur, un grand nombre d'itérations (évaluations de la fonction de coût) doit être passé au voisinage de cette température.

Supposons que l'algorithme ait démarré sur la figure L.3 page ci-contre, la température initiale étant suffisamment élevée pour permettre de localiser la zone de plus basse énergie, en haut à gauche. Effectuons un grossissement de la zone en question et supposons qu'elle puisse être schématisée par la figure L.4 page suivante. Cette dernière montre un exemple schématique de problème où il peut exister plusieurs températures critiques.

Les deux paramètres ont des températures critiques différentes, qui sont fonction de la courbure de la fonction de coût au voisinage des minima locaux. À une température donnée, le temps de recuit pour chacun des deux paramètres n'est donc pas le même.

L'algorithme doit passer suffisamment d'itérations autour d'une température critique qui doit permettre de passer à gauche ou à droite de l'énergie dont la valeur est 100 (trait gras). La valeur de la température doit donc ici être élevée et en tous les cas supérieure à 1. Une fois la zone délimitée par les traits gras identifiée, la température peut baisser.

Pour déterminer convenablement quelle « poche » dont l'énergie est inférieure à 1, contient le minimum global, il faut à nouveau passer suffisamment d'itérations à une température proche de 1, pour permettre de sauter de l'une de ces poches à l'autre. Cette température correspond à une seconde température critique.

Ce schéma met en évidence la sensibilité de la fonction de coût aux différents paramètres. Ici, des bornes convenables pour le paramètre 1 peuvent être (et doivent être!) déterminées à haute énergie et haute température. Inversement, les bornes du paramètre 2, ne peuvent être convenablement déterminées qu'à basse température et basse énergie.

De plus, le nombre de températures critiques a de fortes chances d'augmenter comme le nombre de termes de la fonction de coût.

Ces considérations nous conduisent directement au problème de la forme de la fonction de recuit.

L.3.3 Choix de la fonction de recuit

La recherche de la forme de la fonction de recuit est une étape délicate et essentielle de la méthode. C'est elle qui en grande partie assure la convergence de la méthode, puisqu'elle permet de laisser un temps suffisant pour redistribuer les paramètres (temps de recuit).

Pour des baisses modestes de la température, c'est à dire des fonctions de coût variant faiblement, la forme logarithmique suivante assure l'ergodicité et le succès de la méthode [Ingber, 1993; Rothman, 1985] :

$$T(k) = \frac{T_0}{\ln k} \quad (\text{L.4})$$

où k est le nombre de perturbations, et T_0 la température initiale qui doit être suffisamment élevée. Cette forme a été utilisée par Rothman [1985, 1986] pour des fonctions de coût dont la différence était de l'ordre de 11%.

L'auteur insiste sur le fait que la température initiale et la température critique doivent être déterminées avec précautions. Pour cela, on a souvent recours à quelques tests.

Les techniques de *quenching* utilisent des fonctions dont la décroissance est plus rapide.

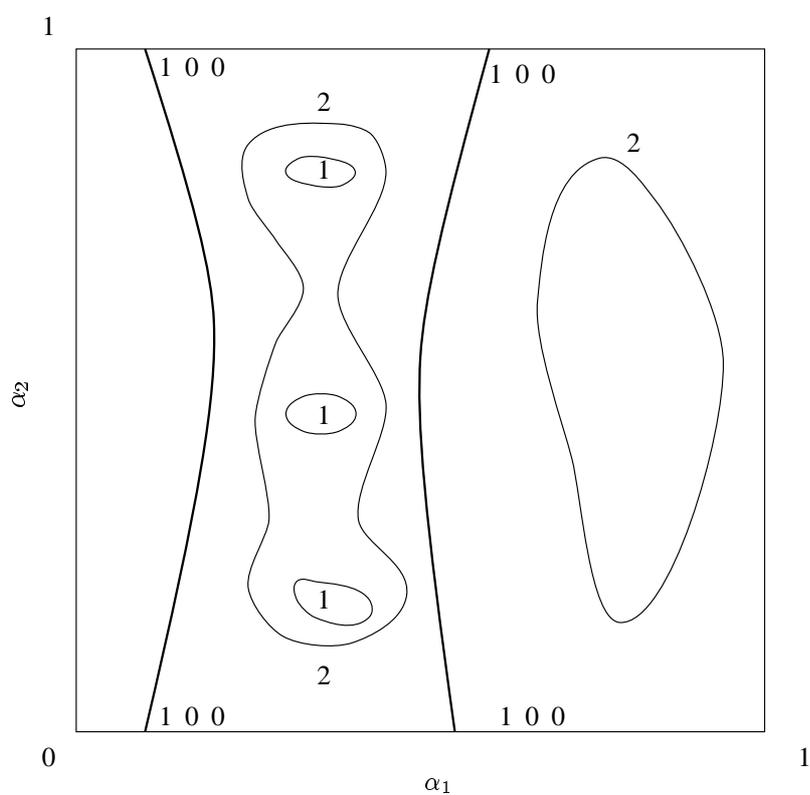


FIG. L.4 – Schéma montrant le problème des échelles de la fonction de coût en lien avec les températures critiques (cf. texte pour les explications).

La forme peut être soit exponentielle :

$$T(k) = T_0 e^{(c-1)k}, \quad 0 < c < 1 \quad (\text{L.5})$$

soit :

$$T(k) = cT(k-1), \quad 0.5 < c < 0.9 \quad (\text{L.6})$$

Press *et al.* [1992] proposent de nombreuses formes pour la fonction de recuit, comme par exemple :

$$T(k) = T_0 \left(1 - \frac{k}{k_m}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{L.7})$$

où k_m est le nombre total d'itérations que l'on s'est fixé.

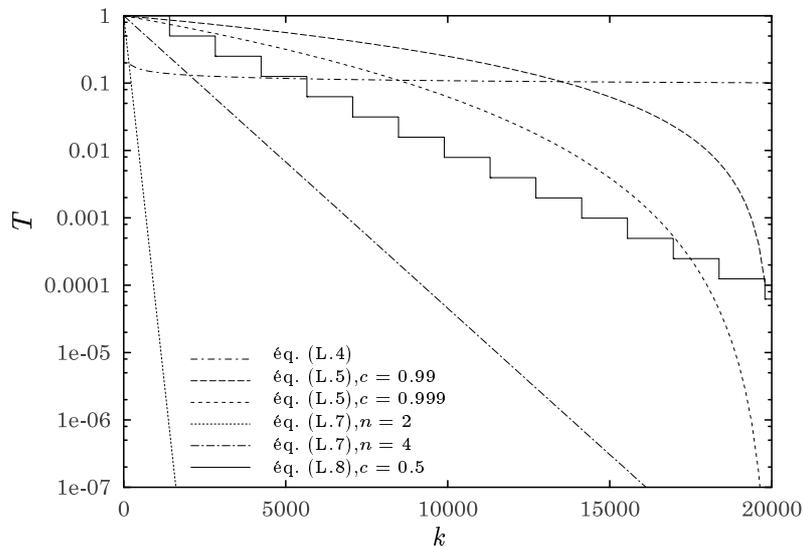


FIG. L.5 – Exemple de fonction de recuit pour $T_0 = 1$.

Ces différentes fonctions sont tracées sur la figure L.5.

Pour notre part, nous avons considéré les paramètres du modèle comme de véritables inconnues, pour lesquelles nous ne tentons pas de donner d'estimations. Les minima locaux semblent être très nombreux. Il est donc nécessaire de commencer les simulations avec des températures élevées. L'estimation de la fonction de coût doit cependant être précise, puisque des variations importantes des paramètres n'entraînent parfois que de petites variations de la fonction de coût. Il est nécessaire de simuler des basses températures. Nous avons, après de nombreux tests, opté pour une technique de *quenching* douce :

$$T(k) = c^n T_0, \quad 0.5 < c < 0.9 \quad (\text{L.8})$$

et n est défini par :

$$nk_0 \leq k < (n+1)k_0, \quad \text{où } k_0 \text{ correspond au temps de recuit.} \quad (\text{L.9})$$

La fonction de recuit choisie, bien que fort simple, présente entre autres avantages :

1. de simuler à des températures à la fois très élevées et très basses, les simulations à basse température permettant une estimation précise des paramètres,
2. de rendre la méthode relativement générale, et de ne pas demander de calage propre à chaque expérience.

Ce n'est certes pas la fonction la plus économique !

L.4 Données synthétiques

Les données synthétiques sont des données engendrées par la simulation numérique d'un modèle mathématique (modèle direct) dont on connaît les coefficients α .

Leur construction vise à mimer des expériences. C'est une étape importante du point de vue de la méthodologie dans le mesure où l'on peut :

- ajuster et tester la convergence de la méthode d'inversion ;
- déterminer approximativement si le nombre d'observations est suffisant pour contraindre un telle méthode.

La première étape dans le mise en œuvre d'une méthode d'inversion est de vérifier que cet algorithme d'inversion « tend » bien à sélectionner un modèle qui permet de reproduire de façon satisfaisante les données expérimentales (cela sans tenir compte de la valeur des paramètres d'inversion). Il s'agit donc ici de vérifier uniquement que l'écart entre les valeurs observées et les valeurs générées par le modèle est « très petit ». On obtient alors un jeu de paramètres qui, sur tous les jeux testés, minimise la fonction de coût.

Cela n'est cependant pas suffisant, rien n'assure que ce minimum soit global : il peut être local. La seconde étape de validation permet en partie de lever cette incertitude.

Pour tester la convergence de la méthode d'inversion vers la sélection d'un modèle qui minimise globalement la fonction de coût, il faut connaître la valeur des paramètres d'inversion (paramètres du modèle). L'idée est donc de se donner un jeu de paramètres d'inversion α_i^d (paramètres synthétiques recherchés), de réaliser une simulation avec le modèle direct pour générer des observations (données synthétiques).

On cherche alors, comme pour la première étape, parmi n modèles, le modèle qui reproduit au mieux ces données synthétiques. On peut s'assurer que le minimum obtenu est le minimum recherché puisque l'on connaît les paramètres d'inversion. Le minimum est bien global lorsque le jeu de paramètres d'inversion trouvé est identique au jeu de paramètres synthétique α_i^d .

Le tableau L.1 regroupe un exemple de conditions initiales du modèle et les valeurs des paramètres ayant servis à générer des données synthétiques. Nous travaillerons sur cet exemple. Les données ne sont pas bruitées. Ces derniers permettent de synthétiser un ensemble de 140 points d'observation⁷⁸ sur les

	V_0	h_0	U_0	U_0^*	ϕ_0
val. initiale	0.05	0.14	0.01	0.01	0.03125

	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
val. initiale	0.004	1	0.00153	0.0204	1

TAB. L.1 – Conditions initiales et paramètres physiques des données synthétiques.

variables du modèle telles que la vitesse, la position, le volume déposé ...

Nous avons sélectionné trois jeux de d'observation (cf. figure L.6 page ci-contre) :

OBSERVATIONS 1: 33 points sur la position du front en fonction du temps, soit moins d'un quart des points,

OBSERVATIONS 2: 10 points sur le volume déposé en fonction de la position (moins d'un quart des points),

OBSERVATIONS 3: 33 points sur la position du front en fonction du temps et 10 points sur le volume déposé en fonction de la position.

Le nombre de points pour les observations 1 est largement supérieur au nombre d'observations expérimentales ou réelles.

Les données 1 permettent de tester des contraintes imposées directement sur la dynamique.

78. Les paramètres numériques du solveur (modèle direct) utilisés pour générer les données synthétiques sont :

Pas de temps initial	Cv sur ϕ	Précision de l'intégration
0.1	10^{-8}	10^{-8}

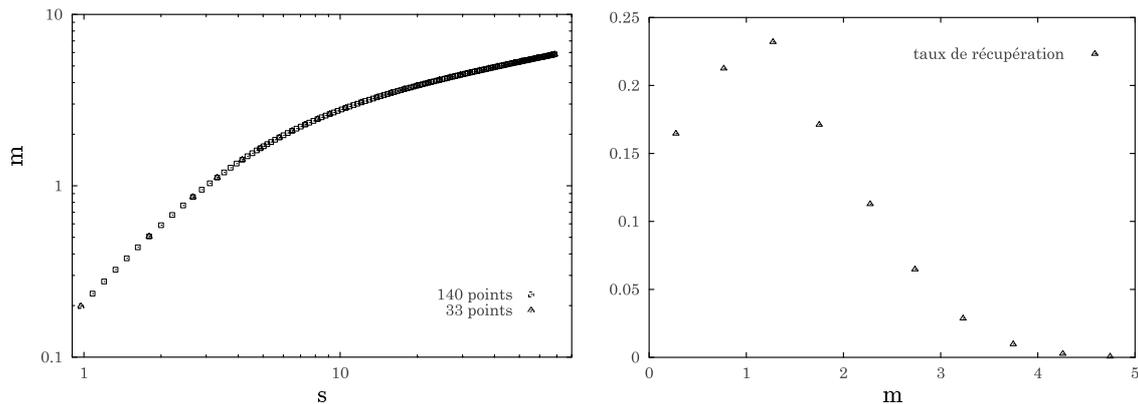


FIG. L.6 – Données synthétiques sur la position du front en fonction du temps (à gauche). Les points doubles représentent les points sélectionnés. À droite points sélectionnés pour le taux de récupération (volume de particules déposé/volume initial de particules) sur des sections de 50 cm.

Pour les données 2, les contraintes sont imposées sur le dépôt (taux de récupération). Le nombre de points de contraintes est faible.

Enfin, les données 3 ajoutent aux données 1 des contraintes sur d'autres variables de l'écoulement : les volumes déposés. On testera leur influence sur la convergence de la méthode.

L.5 Inversion partielle

Nous effectuons ici des tests d'inversion partielle. Nous discutons dans un premier temps du problème des minima et de la contrainte du modèle.

Dans un second temps, nous appliquerons la méthode d'inversion non-linéaire dans le cadre de l'inversion partielle :

- sur les cinq paramètres C_i du modèle ;
- puis sur les quatre conditions initiales h_0, U_0, U_0^* et ϕ_0 .

Les conditions initiales de la méthode d'inversion sont reportées dans le tableau L.2. Le nombre d'éva-

Nombre de simulation	Température initiale	Temps de recuit (en itérations)	Tolérance sur la fonction de coût
2×10^4	0.01	$1,5 \times 10^3$	10^{-10}

TAB. L.2 – Paramètres de l'inversion partielle.

luations (nombre de modèles simulés) est fixé à 2×10^4 (≈ 20 minutes de temps CPU). Dans certains cas (conditions initiales de la méthode d'inversion mieux estimées) la convergence est plus rapide, et le nombre d'évaluations peut être réduit à 10^4 .

L.5.1 Minima locaux et couplage

Comme nous l'avons vu, les inversions sont sensibles à la façon dont est initialisée la méthode inverse. Des minima locaux, très fortement associés aux conditions initiales, peuvent être très simplement mis en évidence à l'aide de l'algorithme du simplex pour une température nulle. Le tableau L.3 page suivante donne un exemple de paramètres obtenus lors d'une telle inversion sur les trois jeux d'observations.

La figure L.7 page suivante, montre les reconstructions sur la dynamique et le dépôt.

La première remarque est que les allures des courbes sont très satisfaisantes, et que la méthode d'inversion linéaire du simplex rétablit très facilement un comportement qualitatif satisfaisant. Les comportements asymptotiques sur la position du front en fonction du temps sont retrouvés.

	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
vrai	0.004	1	0.00153	0.0204	1
int. de rech.	0.001–0.1	0.2–5	0.0001–0.1	0.001–0.1	0.1–10
inv. O1	0.00788784	0.744542	0.00144141	0.033693	0.238708
inv. O2	0.00923051	1.16859	0.00934111	0.0245899	1.95895
inv. O3	0.00348952	1.01351	0.00106499	0.00550012	1.1115

TAB. L.3 – Paramètres physiques lors d'inversion partielle : exemples de minima locaux

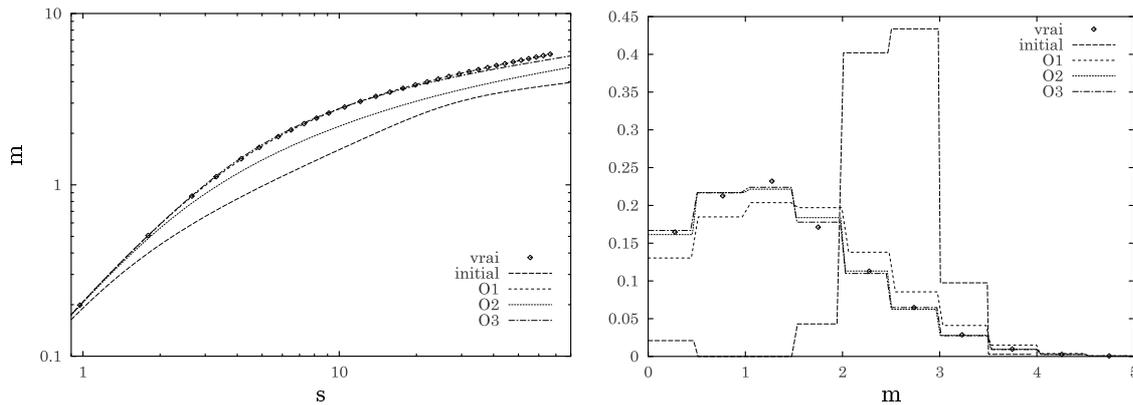


FIG. L.7 – Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération : exemple de minima locaux lors d'une inversion partielle.

	coût dynamique ($\bar{X} = f(t)$)	coût dépôt (% de récupération)	moyenne
inv. O1	1.45651e-05	0.161921	0.0809605
inv. O2	0.0349032	0.0845239	0.0597136
inv. O3	0.00111705	0.000985687	0.00104357

TAB. L.4 – Valeur des fonctions de coût des minima locaux

La seconde remarque concerne le couplage des contraintes [Pianelo, 1999]. Par la donnée simultanée d'observations de vitesse et de dépôt, la forme de la fonction de coût est modifiée, et elle permet de sélectionner un meilleur modèle (cf. tableau L.4 page ci-contre), et ce, bien que les données de dépôt soient « pauvres »⁷⁹.

Nous insistons ici sur ce fait, puisque tout au long de la phase de test de la méthode d'inversion, il est apparu que :

- Des jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très satisfaisante la dynamique des écoulements (position–temps) sans pour autant reproduire la géométrie et l'extension des dépôts ;
- Inversement, des jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très satisfaisante les profils de dépôt sans que la reconstruction dynamique soit satisfaisante.

La double contrainte, dépôt—dynamique, apparaît donc être essentielle à une reconstruction satisfaisante des paramètres.

L.5.2 Inversion partielle sur les paramètres

L'inversion partielle sur les paramètres permet d'identifier les paramètres physiques C_i (friction, diffusivité . . .) d'un écoulement.

En considérant que l'on cherche à échantillonner au moins 1000 valeurs par intervalle pour les cinq paramètres, l'espace de recherche des modèles contient au moins $(10^3)^5 = 10^{15}$ modèles.

	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
vrai	0.004	1	0.00153	0.0204	1
int. de rech.	0.001–0.1	0.2–5	0.0001–0.1	0.001–0.1	0.1–10
inv. O1	0.00399347	0.99974	0.00153072	0.0203777	0.997039
inv. O2	0.00751676	0.981876	0.00605638	0.0599915	0.575092
inv. O3	0.0040001	0.999993	0.00153002	0.0204003	0.999894

TAB. L.5 – Paramètres physiques : inversion partielle sur les paramètres.

Les reconstructions sont satisfaisantes sauf sur le jeux de données O2 (cf. tableau L.5). Nous sommes ici en présence d'un minimum local. Les simulations ne sont pas assez longues (*quenching*), les temps de recuit, le nombre d'itérations ne sont pas adaptés pour ce type de données (manque de contraintes).

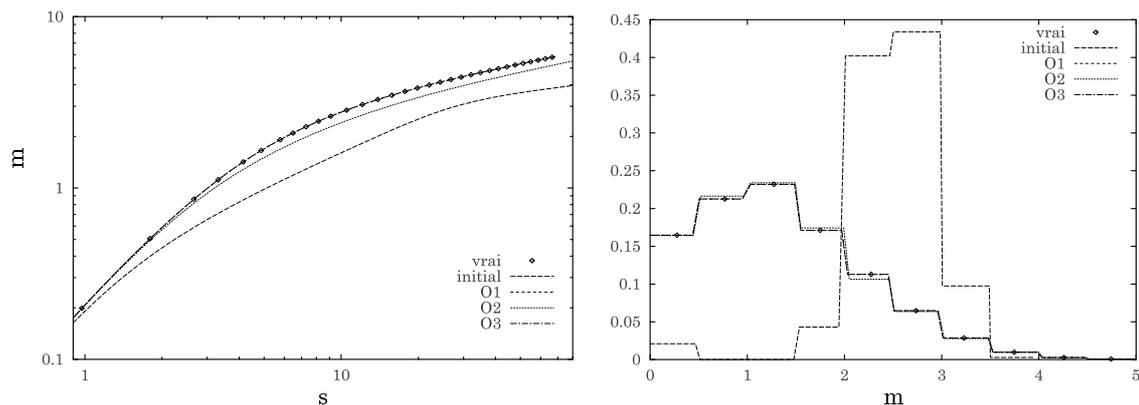


FIG. L.8 – Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération : inversion partielle sur les paramètres

⁷⁹ Ici, le taux de récupération n'est pas une variable directe de la résolution du modèle : il est calculé à partir de la somme du volume déposé sur des sections de 50 cm, de la position et de la longueur de l'objet. L'information n'est qu'une information « moyenne ».

Nous retrouvons ici le fait que les données de dépôt sont des contraintes faibles sur les paramètres dynamiques de l'écoulement, sauf sur C_3 dont la valeur est satisfaisante. Le profil de dépôt est reconstruit de façon très satisfaisante (cd. figure L.8 page précédente), bien que les valeurs des autres paramètres ne soient pas les bonnes. Le paramètre C_3 est celui qui est le mieux contraint par les données de dépôt, puisqu'en effet, il intervient directement dans l'équation de conservation de la fraction volumique.

	coût dynamique ($X = f(t)$)	coût dépôt (% de récupération)	moyenne
inv. O1	5.1132e-11	8.67636e-07	4.33843e-07
inv. O2	0.0122979	0.000592246	0.00644508
inv. O3	3.79162e-12	0	4.82319e-09

TAB. L.6 – Valeur des fonctions de coût

L'inversion simultanée O3 sur les données dynamiques et de dépôt donne ici encore des résultats sensiblement meilleurs (cf. tableau L.6).

Les paramètres C_i induisent des variations de comportements qualitatifs importants (cf. section 7.2 page 157), générant des profils de courbes variés. L'algorithme d'inversion permet de sélectionner des jeux de paramètres qui reproduisent bien le comportement asymptotique.

L.5.3 Inversion partielle sur les conditions initiales

Dans les problèmes réels, les valeurs des observations ont une erreur expérimentale inévitable, ce qui fait que les valeurs initiales des variables du système peuvent également être considérées comme des inconnues du problème [Fullana, 1997].

Nous avons donc également choisi de tester la méthode sur le problème d'inversion partielle des conditions initiales.

Cette méthode permet en effet d'estimer les conditions initiales d'un écoulement pour un jeu de paramètres physiques C_i , donné et fixé. Elle constitue un outil essentiel pour les géosciences, où les données initiales sont rarement connues.

L'inversion est effectuée sur la hauteur initiale, le volume restant fixé, la longueur initiale associée est donnée par $l_0 = V_0/h_0$ (c'est-à-dire que nous inversons le rapport de forme), la vitesse moyenne U_0 , la vitesse d'étalement U_0^* et la fraction volumique ϕ_0 . Le modèle direct est très fortement non-linéaire par rapport à ces paramètres. De petites variations des conditions initiales entraînent des variations quantitatives importantes (cf. section 7.3 page 164).

L'espace de recherche des modèles contient au moins $(10^3)^4 = 10^{12}$ modèles, si l'on considère que l'on veut une précision de 10^3 sur les conditions initiales.

	hauteur	vitesse moy	vitesse étal.	ϕ
vrai	0.14	0.01	0.01	0.03125
int. de rech.	0.02–0.2	0–0.1	0–0.1	0.025–0.035
inv. O1	0.139991	0.00999001	0.0100133	0.0312537
inv. O2	0.136822	0.0116187	0.0219061	0.0312912
inv. O3	0.139999	0.0100038	0.0100319	0.0312532

TAB. L.7 – Conditions initiales. Les paramètres initiaux sont ceux utilisés pour générer les données synthétiques.

Le tableau L.7 donne la valeur des conditions initiales obtenues pour l'inversion partielle sur trois jeux de données. Les vraies conditions initiales sont retrouvées.

Les reconstructions sur la dynamique et le dépôt sont très satisfaisantes (cf. figure L.9 page suivante) et les fonctions de coût ont des valeurs très faibles et voisines (cf. figure L.8 page ci-contre).

La méthode permet retrouver de façon satisfaisante les conditions initiales, les paramètres du modèle étant fixés.

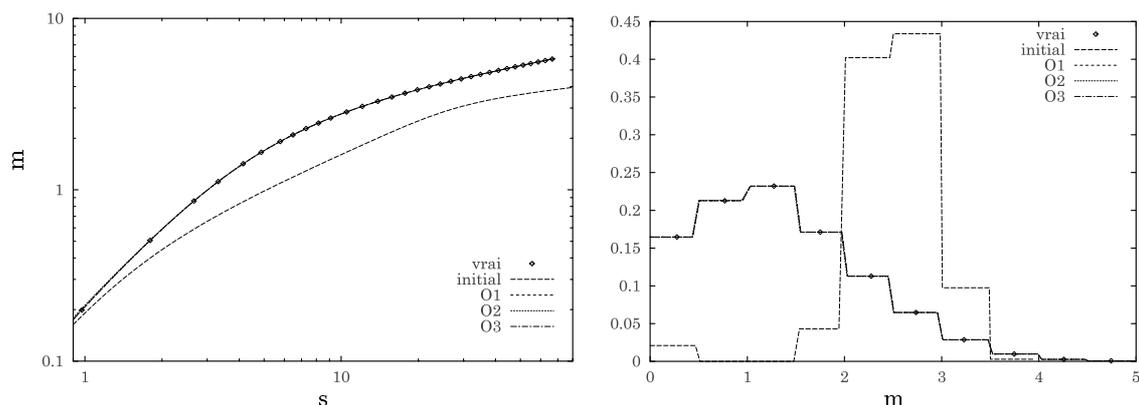


FIG. L.9 – Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération : inversion partielle sur les conditions initiales.

	coût dynamique ($X = f(t)$)	coût dépôt (% de récupération)	moyenne
inv. O1	7.66736e-12	5.00278e-08	2.50177e-08
inv. O2	1.72336e-05	1.52321e-06	9.37841e-06
inv. O3	4.21526e-09	2.26474e-08	1.34313e-08

TAB. L.8 – Valeur des fonctions de coût.

L.6 Inversion totale

Nous effectuons ici des tests d'inversion totale. Nous recherchons simultanément les cinq paramètres C_i et les quatre conditions initiales h_0, U_0, U_0^* et ϕ_0 qui permettent de reproduire les données synthétiques de façon optimale.

Comme à la section précédente, nous commencerons notre discussion par la mise en évidence de minima locaux.

Nous commenterons ensuite les résultats de la méthode d'inversion totale appliquée aux trois jeux de données synthétiques.

L'inversion porte maintenant sur neuf paramètres. En considérant que l'on cherche à échantillonner au moins 1000 valeurs par intervalle pour ces neuf paramètres, l'espace de recherche des modèles contient au moins $(10^3)^9 = 10^{27}$ modèles, soit 10^{12} fois plus de modèles que lors des inversions partielles !

Nombre de simulation	Température initiale	Temps de recuit (en itération)	Tolérance sur la fonction de coût
6×10^4	0.1	4×10^3	10^{-10}

TAB. L.9 – Paramètres de l'inversion totale

Le nombre de simulations a donc été augmenté ainsi que le temps de recuit (cf. tableau L.9). Le temps CPU est d'approximativement 60 minutes. La température initiale a été choisie plus élevée pour permettre un meilleur échantillonnage de l'espace des paramètres.

L.6.1 Minima locaux et couplage

La méthode de mise en évidence de minima locaux est la même que celle utilisée à la section L.5.1 page 337.

Le tableau L.10 page suivante donne un exemple de paramètres obtenus lors d'une telle inversion sur les trois jeux d'observations. Les conditions initiales sont reportées dans le tableau L.11 page suivante.

	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
vrai	0.004	1	0.00153	0.0204	1
int. de rech.	0.001–0.1	0.2–5	0.0001–0.1	0.001–0.1	0.1–10
inv. O1	0.00100145	1.3548	0.00207254	0.0138488	0.308115
inv. O2	0.0138483	1.73769	0.0220842	0.0338598	1.49676
inv. O3	0.017216	1.82154	0.0294873	0.0234385	1.79458

TAB. L.10 – Paramètres physiques obtenus lors d'inversion totale : exemples de minima locaux

	hauteur h_0	vitesse moy U_0	vitesse étal. U_0^*	ϕ ϕ_0
vrai	0.14	0.01	0.01	0.03125
int. de rech.	0.02–0.2	0–0.1	0–0.1	0.025–0.035
inv. O1	0.0808288	0.0806776	0.0197512	0.0332244
inv. O2	0.15397	0.0777174	0.086761	0.0332322
inv. O3	0.143389	0.0781288	0.0787599	0.0336602

TAB. L.11 – Conditions initiales obtenues lors d'inversion totale : exemples de minima locaux

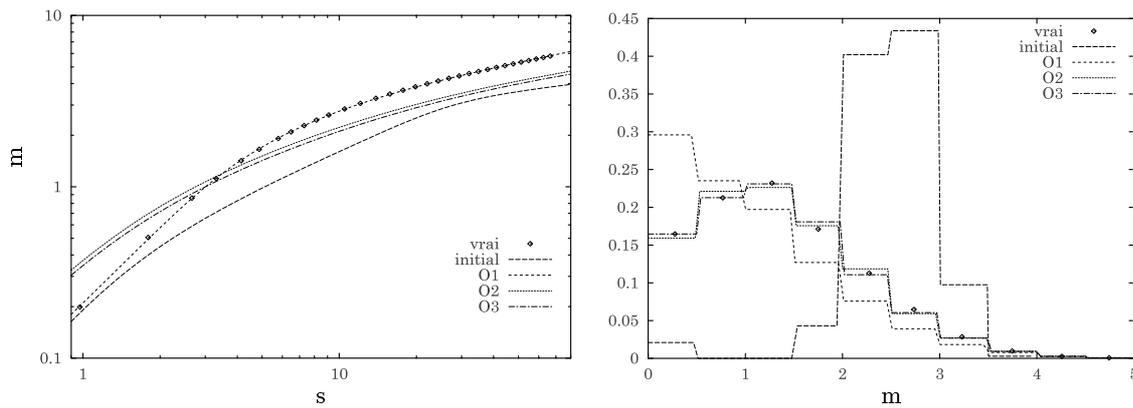


FIG. L.10 – Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération : exemples de minima locaux d'une inversion totale.

La dynamique est reconstruite de façon très satisfaisante pour les observations O1 (cf. figure L.10 page précédente), mais les paramètres (paramètres physiques et conditions initiales) ne sont pas les bons (cf. tableaux L.10 et L.11). Le profil de dépôt obtenu n'est pas satisfaisant. On retrouve ici le problème d'essais dont la dynamique est satisfaisante sans pour autant reconstruire la dynamique.

Si le profil de dépôt est très correct pour les observations O2 et O3, la dynamique n'est pas, elle, reconstruite de façon satisfaisante.

	coût dynamique ($X = f(t)$)	coût dépôt (% de récupération)	moyenne
inv. O1	3.69575e-05	0.588871	0.294454
inv. O2	0.0603819	0.0850108	0.0726964
inv. O3	0.0659524	0.0851145	0.075533

TAB. L.12 – Valeur des fonctions de coût des minima locaux

Le tableau L.12 donne le coût des trois reconstructions.

L.6.2 Résultats de l'inversion totale

Les reconstructions dynamiques sont ici encore très satisfaisantes pour les données O1 et O3 (cf. figure L.11). Les paramètres obtenus sont proches des valeurs réelles.

Néanmoins, la reconstruction du dépôt pour les données O1 est moins bonne qu'avec les données O3. Les données O2 ne contraignent pas suffisamment les paramètres et la reconstruction dynamique s'en

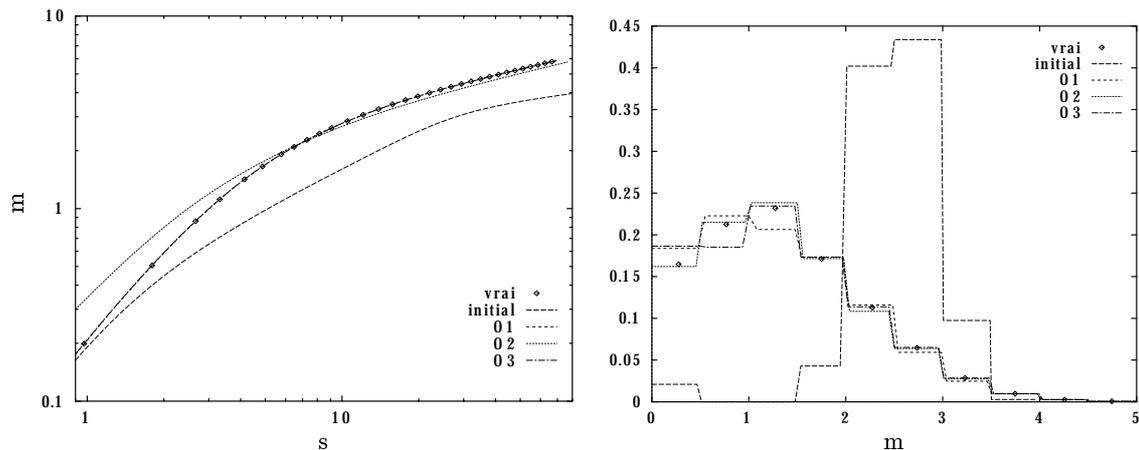


FIG. L.11 – Reconstruction de la position du front en fonction du temps et du taux de récupération : inversion totale.

trouve moins satisfaisante.

Seule la donnée simultanée de contraintes sur la dynamique et le dépôt permettent une reconstruction satisfaisante.

	C_0	C_3	C_1	C_2	C_4
vrai	0.004	1	0.00153	0.0204	1
int. de rech.	0.001–0.1	0.2–5	0.0001–0.1	0.001–0.1	0.1–10
inv. O1	0.00385718 (3,5%)	1.00577 (0,5%)	0.00160115 (4,6%)	0.0208635 (2,3%)	1.02633 (2,6%)
inv. O2	0.00516746 (29%)	1.46209 (46%)	0.00609 (298%)	0.0482364 (136%)	2.10283 (110%)
inv. O3	0.00427806 (6,9%)	0.96553 (3,4%)	0.00152429 (0,3%)	0.0210726 (3,3%)	0.448785 (55%)

TAB. L.13 – Paramètres physiques. Les paramètres initiaux sont ceux utilisés pour générer les données synthétiques.

	hauteur h_0	vitesse moy U_0	vitesse étal. U_0^*	ϕ ϕ_0
vrai	0.14	0	0	0.03125
int. de rech.	0.02–0.15	0–0.1	0–0.1	0.025–0.035
inv. O1	0.134421 (4%)	0.00138685 (86%)	0.0176313 (76%)	0.0343334 (9,8%)
inv. O2	0.142555 (1,8%)	0.0626827 (526%)	0.0942357 (842%)	0.0321593 (2,9%)
inv. O3	0.141163 (0,8%)	0.010483 (4,8%)	0.008526 (14%)	0.0310991 (0,5%)

TAB. L.14 – Conditions initiales. Les paramètres initiaux sont ceux utilisés pour générer les données synthétiques. Les erreurs relatives sont indiquées entre parenthèses.

Les tableaux L.13 et L.14 donnent les valeurs des paramètres et des conditions initiales des inversions totales sur les trois jeux d'observations.

La plupart des paramètres sont retrouvés sans grand écart par rapport aux paramètres synthétiques. Le paramètre le moins bien contraint est C_4 . À noter que, même si la vitesse initiale moyenne U_0 et la vitesse initiale d'étalement U_0^* ne sont pas très bien respectées pour les données O1, la somme des deux composantes (*i. e.* la vitesse du front), elle, l'est. En effet, comme nous l'avons vu à la section 7.3 page 164, la valeur relative initiale est sans grand effet sur le développement de l'écoulement.

Nous voyons ici que, lorsque le nombre de paramètres à déterminer est élevé, il y a risque de surdétermination (*overfit*). Dans le cas précédent d'inversion partielle, le minimum global était facile à déterminer, car les minima locaux étaient moins nombreux. Toute valeur d'initialisation des paramètres α^0 conduisait au même résultat. Ici, la précision des paramètres obtenus est plus sensible à l'initialisation. Le temps de recuit, ainsi que le nombre total de simulations, devrait être sensiblement augmenté pour éviter tout effet de *quenching*.

	coût dynamique ($X = f(t)$)	coût dépôt (% de récupération)	moyenne
inv. O1	7.36524e-10	0.00671677	0.00335838
inv. O2	0.024156	0.00061798	0.012387
inv. O3	3.74829e-06	0.00287217	0.00143796

TAB. L.15 – Valeur des fonctions de coût : inversion totale

Le tableau L.15 donne la valeur de la fonction de coût pour chaque reconstruction.

L.7 Conclusions

La méthode d'inversion non-linéaire développée permet une estimation des paramètres et/ou des conditions initiales d'un écoulement.

L'optimisation des conditions initiales ouvre la voie pour l'application de la méthode à des cas réels.

La concordance entre la reconstruction et les données synthétiques est pour le moins surprenante à la vue du grand nombre de minima, et cela, bien que les paramètres initiaux ne soient pas estimés (valeurs non physiques) et peu contraints (grand intervalle de recherche).

Les données d'observation de vitesses permettent de reconstruire l'évolution dynamique des écoulements de façon satisfaisante. Toutefois, pour les contraintes d'inversion que nous nous sommes imposées (temps calcul et non-estimation des paramètres initiaux), les profils de dépôt reconstruits ne sont pas toujours satisfaisants.

En effet, il est apparu que :

- Des jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très satisfaisante la dynamique des écoulements (position–temps) sans pour autant reproduire la géométrie et l'extension des dépôts ;
- Inversement, des jeux de paramètres permettent de reproduire de façon très satisfaisante les profils de dépôt sans que la reconstruction dynamique soit satisfaisante.

Il existe donc un risque, non exclu, de trouver un minimum local.

L'adjonction de données sur le dépôt, même moyennées, a permis de s'affranchir de cette difficulté et de proposer une reconstruction satisfaisante de la dynamique et du dépôt. Les paramètres et les conditions initiales sont alors mieux respectés.

La double contrainte, dépôt—dynamique, apparaît donc être essentielle pour une reconstruction satisfaisante des données.

Enfin, notons que d'un point de vue purement numérique, la méthode d'inversion montre la robustesse du modèle numérique de résolution du modèle **T** qui est capable d'encaisser la simulation d'écoulement très divers et parfois non physiques.

*Une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres
n'est une maison.
Poincaré.*

Annexe M

Sur les incertitudes et incompatibilités entre les protocoles expérimentaux numériques et analogiques

D'après ce qui précède, le modèle numérique ne constitue qu'une première approche pour la prise en compte de la complexité des phénomènes physiques expérimentaux et réels.
Nous présentons ici les différents points d'incompatibilité.

Sommaire

M.1 Turbulence?	347
M.2 Incertitudes sur les conditions initiales	348
M.3 Incompatibilité des conditions aux limites	348
M.3.1 Rapport h/H	349
M.3.2 Effet « couvercle »	349
M.3.3 Effet « paroi »	349

M.1 Turbulence?

Les nombres de Reynolds, basés sur la hauteur et la vitesse du front, sont compris entre 5000, au début du canal expérimental, et 10000, en fin du canal. Ces valeurs sont relativement faibles. Une version du modèle, incorporant les frottements visqueux⁸⁰, a été testée, et montre que ces derniers sont sans

80. Il faut alors ajouter une force visqueuse dont la forme est :

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

L'intégration, pour le passage aux équations d'ondes longues fournit :

$$-\nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

dont l'ordre de grandeur est :

$$-\nu \frac{U}{h}$$

La décomposition du mouvement en translation-déformation est simple puisque la force est linéaire. Dans l'équation du mouvement moyen, il faut ajouter :

$$-\nu \pi \frac{l}{h} U^T$$

effets notables sur la dynamique de la suspension (cf. figure M.1), dans le cas des essais en canal. En effet, les écoulements sont plutôt dans une phase gravité–inertie, la friction entrant peu en compte.

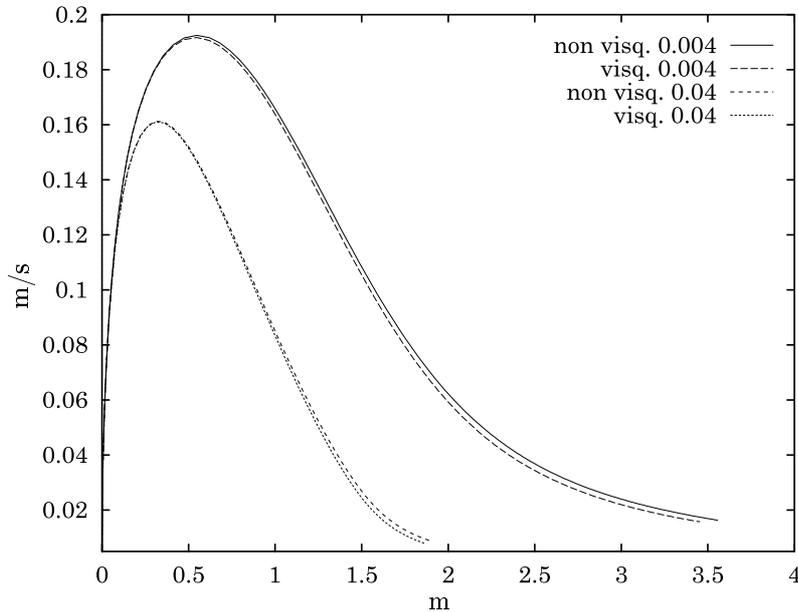


FIG. M.1 – Exemple de quantification des effets visqueux pour les expériences de Laval (L39, EX1 $C_0 = 0.004$, $h_0 = 0.07$, EX2 $C_0 = 0.04$, $h_0 = 0.07$)

M.2 Incertitudes sur les conditions initiales

Dans ces expériences, les sédiments sont mis en suspension par des agitateurs. Ces derniers créent un mouvement turbulent dans le réservoir. Ce dernier permet aux sédiments d’être maintenus en suspension. L’énergie turbulente de la suspension n’est donc pas nulle. Ce fait peut être pris en compte en considérant des vitesses initiales non nulles.

Dans certaines expériences, les agitateurs sont arrêtés une à deux minutes avant l’ouverture de la vanne pour que les fluides soient au repos [Beghin, 1979, p 25]. Dans ce cas, un phénomène de sédimentation se produit. La fraction volumique initiale π_0 dans la suspension est différente de la fraction volumique à l’ouverture de la vanne ϕ_{0s} , comme l’a mesuré expérimentalement Laval [1988]. Il est probable qu’une diminution de la hauteur se superpose à cet effet.

Les conditions initiales sur la fraction volumique sont donc incertaines.

M.3 Incompatibilité des conditions aux limites

Il existe trois points essentiels sur lesquels les modèles réduits expérimentaux et le modèle numérique ne sont pas compatibles du point de vue des conditions aux limites.

où π est le facteur de forme associé. Dans l’équation des déformations :

$$-\nu \frac{l}{h} U^*$$

M.3.1 Rapport h/H

Comme l'ont soulignées de nombreuses études (cf. section 4.5 page 93 et [Bonnecaze, Huppert et Lister, 1993; Britter et Linden, 1980; Britter et Simpson, 1978; Huppert, 1998; Huppert et Simpson, 1980; Rottman et Simpson, 1983]), le rapport h/H , où h est la hauteur de l'écoulement et H la profondeur d'eau, conditionne de façon importante l'évolution des écoulements. La condition pour laquelle l'écoulement (courant de retour) du fluide supérieur peut être négligé est déterminée expérimentalement par :

$$\frac{h}{H} \leq 0,075 \quad (\text{M.1})$$

Les valeurs du rapport h/H pour les expériences sont en :

- Expériences de Beghin [1979] : $h/H = 0.1$ (sortie de réservoir) à 0.3 (fin du canal).
- Expériences de Laval [1988] : $h/H = 0.23$ (sortie de réservoir) à $0.15-0.25$ (fin du canal) suivant la pente.

Il semble donc que les hauteurs des écoulements atteignent rapidement des valeurs où elles sont conditionnées par la profondeur du canal.

M.3.2 Effet « couvercle »

L'effet de la présence d'un couvercle, au dessus du réservoir, sur le développement de la suspension a été quantifié par Laval [1988, p. 95]. Lors des essais effectués avec couvercle, les vitesses atteintes par la suspension sont plus faibles sur les deux premiers mètres du bassin d'essai. Cet écart de vitesse est de l'ordre de 10%.

il y a recirculation de fluide pur, sous le couvercle (courant de retour, [Laval, 1988, p. 95]). Ce courant a pour effet de détacher la queue du fond du réservoir. On peut imaginer, que pour respecter cette condition, la vitesse moyenne initiale de la suspension soit non nulle.

Sur les deux premiers mètres, il y a donc un phénomène physique, dû au montage expérimental, qui n'est pas pris en compte par le modèle numérique.

Il existe deux méthodes pour traiter ce problème :

1. Soit on « retire » les points expérimentaux.
2. Soit on introduit une « pénalité » dans la fonction de coût. Cette pénalité doit être décroissante, et s'annuler lorsque l'on est suffisamment loin du réservoir d'injection. Typiquement pour les expériences de Laval, l'« effet couvercle » introduit des différences de vitesses jusqu'à deux mètres du réservoir. On peut donc introduire, pour les points dont l'abscisse est inférieure à deux mètres, une pénalité linéaire de la forme :

$$\lambda = -0,15 * X/2 + 1,15 \quad (\text{M.2})$$

M.3.3 Effet « paroi »

Dans le modèle numérique, il n'est pas tenu compte de la paroi gauche du réservoir. La suspension numérique s'étale « librement » des deux cotés. L'étalement de la suspension dans les essais expérimentaux, est contrainte par cette paroi.

Laval : fiabilité de la pesée du sable : $600/8$ sections = 75 g de sable par section de 50 cm.

Annexe N

Description des carottes

L'effondrement de Nice est l'événement catastrophique le plus récent de la vallée du Var. Sa signature sédimentaire, si elle est présente, doit être recherchée dans les sommets des séries sédimentaires. Il est à noter que durant l'année 1994 a eu lieu une crue exceptionnelle du Var. Cette crue peut également avoir laissé, par la formation d'un courant dense (hyperpycnal), un enregistrement sédimentaire significatif.

Enfin, les études géologiques montrent que les dépôts fluviaux Pléistocène du Var sont plus grossiers que les dépôts modernes. La décharge du Var était sans doute plus importante durant cette période. Les dépôts Holocène plus vieux de 4 ka sont, par contre, de granulométrie plus fine que les dépôts modernes [Piper et Savoye, 1993].

Sommaire

N.1	Campagne NICASAR	351
N.2	Campagne PRENICE	352
N.3	Campagne CASANICE	352
N.4	Campagne MONICYA	353
N.5	Campagne SAME	353
N.6	Campagne ESSAM2	354

Les carottes sont décrites de haut en bas. La couleur des sédiments donne une estimation de la datation :

- Glaciaire = gris-vert
- Holocène = brun

Les phénomènes gravitaires sont des phénomènes de resédimentation, leur datation est donc problématique.

N.1 Campagne NICASAR

Les interprétations sont basées sur les fiches de liaison lithothèque de Savoye [1996], les rapports de Zanella [1995] et Migeon [1997], les interprétations sont personnelles et n'engagent que l'auteur...

KN1 27: Flanc amont d'une dune.

- 0 à 20 cm, sables fins à débris coquilliers.
- 20 à 95 cm, présence de bancs d'argiles, plus ou moins sableux, épais en moyenne de 5 cm. Ces derniers alternent avec des bancs de sables fins dont les limites inférieures et supérieures ne sont pas très nettes.

La séquence 20-95, par l'alternance grès-argile, semble être caractéristique d'une succession de petits événements (courant hyperpycnal?). La signature sédimentaire de l'effondrement de Nice, si elle est présente, ne peut être que le banc supérieur de sables fins.

KNI 26 : Flanc aval, près de la crête de la même dune.

- 0 à 20 cm, petits niveaux sableux de forme lenticulaire à grains très fins. Présence également d'argiles, dont la couleur est plus brunâtre que celle des argiles du reste de la carotte qui elles sont dans les couleurs grisées.
- 20 à 280 cm, sables très fins, en bancs ne dépassant pas 2 à 3 cm, au milieu d'argiles. Coquilles de Ptéropodes.

Comme pour la carotte KNI 27, les bancs de sables très fins intercalés dans les argiles, indiquent une succession d'événements. Seul le banc supérieur de sables très fins peut être associé à l'effondrement de Nice.

KNI 24 : Flanc aval de la même dune.

- 0 à 30 cm, argiles brunes à passées sableuses. De 24 à 30 cm, le banc d'argile contient des coquilles de Ptéropodes.
- 30 à 140 cm, bancs de sables bien délimités, peu nombreux et d'épaisseur moyenne de 2 cm.

Pas d'évidence de l'événement.

N.2 Campagne PRENICE

Les carottes PKSxx ont été datées, elles appartiennent au Pléistocène supérieur [analyse biostratigraphique de Muller [1989]]. Il n'y a pas d'évidence de dépôt récent. La carotte PKS10 est dans le chenal. Les carottes PKS11, PKS12 et PKS13 ont été prélevées dans les flancs du chenal. La carotte PKS14 est localisée dans la plaine en dehors de l'éventail sous marin. Pas de données sur les carottes PKS15 et PKS16.

N.3 Campagne CASANICE

Les interprétations sont basées sur le rapport d'exploitation de la campagne CASANICE de Guillaume et Savoye [1990] et les datations du nanoplancton effectuées par Muller [1991]. Les carottes appartiennent au Pléistocène supérieur.

KCA01 : Prélevé sur le prisme sédimentaire central à l'extrémité Sud (confluence du canyon du Paillon et du canyon du Var).

- 0 à 43 cm, silts fins plastiques clairs.
- 43 à 247 cm, silts fins plastiques de la même couleur, mais nettement moins gorgés d'eau et de plus en plus denses.

Il n'y a pas d'évidence de dépôt.

KCA02 : Ride sédimentaire, limite septentrionale de la vallée.

- 0 à 6 cm, sables fins sans grano-classement apparent, reposant par une base franche sur un niveau de vase beige brune.
- 6 à 53 cm, vase beige brune avec injection et lentilles de sable. Présence de petits bancs sableux à base franche.
- 53 à 81 cm, sables granoclassés positifs, avec de nombreux graviers de 1 à 1.5 cm de diamètre à la base et au sommet.

La séquence 53–81 indique le dépôt d'un événement massif à base érosive. Il est peu probable que ce soit l'effondrement de Nice. La carotte est située à l'Ouest du Cirque Marcel. Cette zone est également alimentée par d'autres canyons (cf. carte 9.3 page 218) qui sont vraisemblablement à l'origine de cet événement. La seule signature sédimentaire possible de l'effondrement de Nice est le banc de 6 cm de sables fins au sommet de la séquence. En effet, ce banc est séparé du reste de la séquence par une zone de sédimentation normale hémipélagique d'âge Holocène [Muller, 1991].

KCA04 : Pente continentale au large de Monaco.

- 0 à 47 cm, silts bariolés bruns à beiges, avec des passées silteuses plus grossières.

- 47 à 121 cm, silts fins plastiques.
- 121 à 164 cm, silt fins avec laminations texturales finement sableuses au sommet. Granoclasement positif de sables grossiers très coquillier à la base.

La séquence 121–164 confirme l'alimentation par le Cirque de Marcel d'un événement massif, déjà rencontré dans la carotte KCA02? Pas d'évidence de dépôt de l'événement du Var.

KCA05 : Vallée sous-marine du Var, extrémité orientale de la ride médiane.

- 0 à 73 cm, sables fins légèrement silteux.
- au delà de 73 cm, il semble que la carotte ait été remaniée.

Le sommet de la séquence indique la présence d'un événement sableux unique, est-ce dû à l'effondrement de Nice? Une corrélation peut être possible avec les événements massifs provenant du Cirque de Marcel?

KCA07 : Ride sédimentaire du Var, à la limite entre le glacis et la plaine abyssale (rive gauche de la vallée sous-marine du Var)

- 0 à 34 cm, sables fins micacés sans granoclasement apparent, contenant, près de sa base, des galets mous et centimétriques d'argile.
- 34 à 39 cm, argiles. Présence d'une lentille silteuse.

Le banc 0–34 indique la présence d'un événement sableux ayant érodé en amont des argiles et formé des galets mous, qui peut être attribué à l'événement de 1979.

KCA20 : Vallée sous-marine du Var, bordure méridionale de la ride sédimentaire médiane (près de KS04).

- 0 à 5 cm, sables fins sans granoclasement apparent.
- 5 à 13 cm, alternance sables et argiles organisées en un réseau de laminations fines et complexes (présence de poches de sables fins?).
- 13 à 23 cm, sédiments argileux avec poches de silts.

Évidence d'un événement sableux de 5 cm au sommet, avec injection dans le banc inférieur?

KCA03 : Située sur la Ride sédimentaire du Var, cette carotte confirme qu'il n'y a pas eu de débordement de l'événement de 1979 sur cette partie de la levée.

N.4 Campagne MONICYA

Les interprétations sont basées sur le rapport d'exploitation de Savoye et Guillaume [1990] et les datations effectuées par Muller [1991].

KMO2 : Baies des Anges. Terrasse située sur la rive gauche du canyon du Var.

- pas de sous ensembles délimités.

Pas d'information sur l'effondrement.

KMO7 : Glacis au pied de la pente continentale au large de Menton, au Nord de la vallée sous-marine du Var.

- 0 à 96 cm, sables très fins avec des silts au sommet. Base franche.
- 96 à 101 cm, silts bruns foncés puis vase beige brune claire.

Situé relativement loin du chenal distributaire du Var, et en pied de pente, il est peu probable (fait corroboré par les datations) que le banc 0–96 soit dû à l'effondrement de Nice. Cette carotte est de plus, vraisemblablement, située dans une zone sous l'influence directe d'un autre canyon.

N.5 Campagne SAME

Les interprétations sont basées sur le rapport de Auffret, Kerbrat et Muller [1988].

KS3 : Vallée à l'aval du Var, sur une ride.

- 0 à 348 cm, unique unité de sables fins à moyens (granoclasement). à la base du dépôt, à partir de 310 cm, on trouve des galets mous d'ordre centimétrique, constitués de boue marneuse. Présence de cheminée d'échappement de fluide.

Les galets mous semblent provenir de l'érosion d'un dépôt sédimentaire daté du Pléistocène supérieur. Il y a des doutes sur la qualité du carottage. Est-ce la trace de l'effondrement ?

KS4 : Levée interne du canyon de Var.

- 0 à 20 cm, boue marneuse
- 20 à 32 cm, boue gravelo-sableuse.
- 32 à 46 cm, boue marneuse à nanofossiles.

le banc 32–46 est daté de l'Holocène. La trace de l'effondrement doit, a priori, être recherchée au dessus de cette unité? Pas d'évidence de l'événement.

KS11 : Terrasse au pied du flanc Est de la ride du Var.

- 0 à 530 cm, sédiments couleur brun jaunâtre. Laminations.

Il n'y a pas d'évidence de dépôt.

KS12 : Terrasse au pied du flanc Est de la ride du Var.

- 0 à 110 cm, boue marneuse de couleur brun jaunâtre. Laminations perturbées par des déformations synsédimentaires.

Pas d'évidence de dépôt.

KS6 : Située au sommet de la ride sédimentaire du Var, elle ne présente pas d'évidence de dépôt d'un événement récent. Il semble qu'il n'y ait pas de débordement de l'événement de 1979.

N.6 Campagne ESSAM2

EMG2-5 : Vallée sous-marine du Var, bordure méridionale de la ride sédimentaire médiane (près de KS04).

- 0 à 9 cm, vase argileuse et débris coquilliers. Oxydation ocre.
- 9 à 30 cm, silts avec deux niveaux centimétriques de sables fins gris. Présence de laminations sableuses importantes.

Pas d'évidence de l'événement de Nice? Doute sur l'orientation de la carotte.

KSE03 : Vallée sous-marine du Var (près de KS04).

- 0 à 86 cm, vase mélangée à du sable. Marques d'oxydation olive, rouge, gris, brun...
- 86 à 95 cm, sables grossiers gris sombre.
- 95 à 107 cm, silts fins.

Carotte très perturbée, contenant beaucoup d'eau (pistonée?).

KSE04 : Vallée sous-marine du Var (près de KS04).

- 0 à 8 cm, vase argilo-silteuse.
- 8 à 37 cm, silts fins, de teintes variables, avec poches et passées (1 cm, 0,5 cm) de sable grossier de couleur gris-rouge.
- 37 à 46 cm, ensemble essentiellement silteux.

Pas d'évidence de l'événement.

*Il n'y a rien d'accablant comme de voir déjà de l'endroit que l'on quitte,
celui qu'on atteindra le soir ou le lendemain*
T. Monod.

Annexe O

Comparaison des résultats de modélisation sur maillages topographiques fins, grossiers et lissés : cas de l'effondrement de Nice

Il s'agit ici de mieux appréhender l'impact de la précision de données naturelles, telles que la topographie sur les résultats. Nous examinerons à cette occasion la relation entre le maillage et le temps CPU consommé par le modèle numérique.

Sommaire

O.1	Maillages utilisés	355
O.2	Données de la modélisation	356
O.3	Sensibilité au temps de calcul	358
O.4	Résultats	358
O.5	Détermination de la précision imposée par le maillage fin (MF)	361
O.6	Conclusion	363

O.1 Maillages utilisés

Nous présentons ici un exemple de modélisation de l'effondrement de Nice sur différentes discrétisations de la topographie. Nous avons à notre disposition :

1. un profil bathymétrique fin, fourni par l'IFREMER, dont le pas d'espace est de 100 m.
2. un profil bathymétrique calculé par pas d'espace fixe de 25 m, à partir de la source [IFREMER et Assier, 1999].

Nous avons extrait de ces données trois maillages tests (cf. figure O.1 page suivante) :

MF : Le maillage fin correspond à la topographie fine 1, sans traitement.

MG : Le maillage grossier a été construit à partir des minima et des maxima locaux de la topographie fine. Son pas d'espace est compris entre 500 m et 2 km. Le dépliage de ce maillage montre que sa longueur est identique à celle du maillage (MF) : $\Delta(L_{MF} - L_{MG}) \leq 7m$, puisqu'en effet les gradients de pentes sont très faibles.

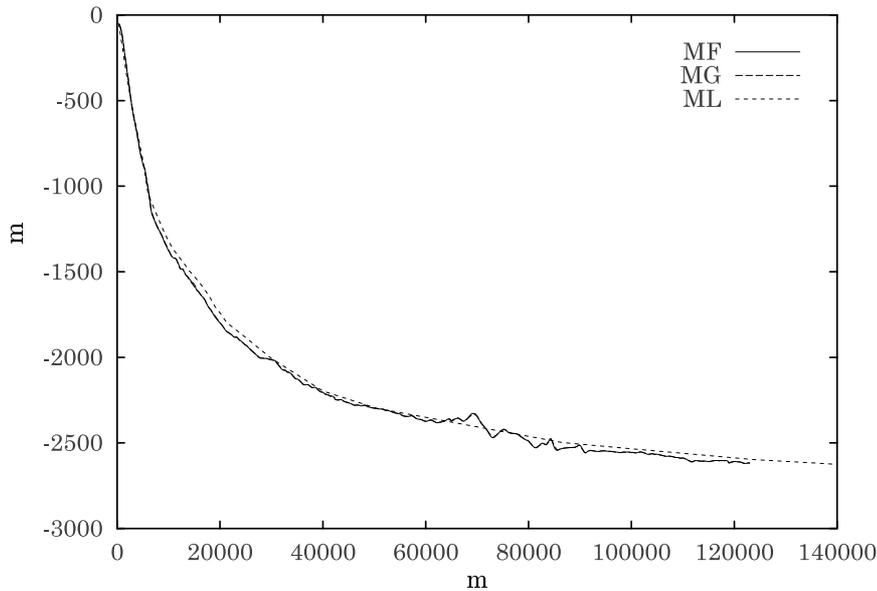


FIG. O.1 – Profil bathymétrique reconstitué de la vallée du Var, le long d'une section 2D. Profils de topographie fine (MF), grossière (MG) et lisse (ML).

ML : Le maillage lisse est extrait⁸¹ du profil bathymétrique 2. Son pas varie entre 1 km —lorsqu'il y a de forts gradients de pente— et 10 km —lorsqu'il y a de faibles gradients de pente. Il est d'un point de vue des gradients de pente en tous points identique au profil 2.

Les différences entre les profils (MF) et (MG) sont peu visibles à l'œil nu (cf. figure O.1). Le maillage (ML) reproduit les gradients de pente de façon satisfaisante.

Le maillage grossier n'est constitué que d'approximativement 12,8% des éléments du maillage fin (cf. tableau O.1). Le maillage lisse n'est, lui, constitué que de 44 éléments, ce qui ne représente qu'environ 3,7% du nombre de mailles du maillage fin.

Maillage Fin	Maillage Grossier	Maillage Lisse
1201 éléments	154 éléments	44 éléments

TAB. O.1 – Constitution des maillages

Dans les zones où le gradient de pente varie peu avec l'espace, le maillage grossier (MG) constitue une approximation satisfaisante du maillage (MF) (cf. figure O.2 page suivante). Le maillage (ML) restitue correctement le gradient de pente.

Cependant, à une échelle fine, le maillage fin (MF) contient parfois des variations hautes fréquences qui sont moins bien restituées par le maillage grossier (MG) et ignorées par le maillage (ML) (cf. figure O.3 page ci-contre).

O.2 Données de la modélisation

Les paramètres et les conditions initiales de la modélisation sont reportés dans le tableau O.2 page suivante. Ils sont proches des paramètres par défaut du modèle (cf. annexe J page 319).

81. C'est en fait l'inverse, le profil bathymétrique 2 avait, semble-t-il, été construit en discrétisant de très grands éléments.

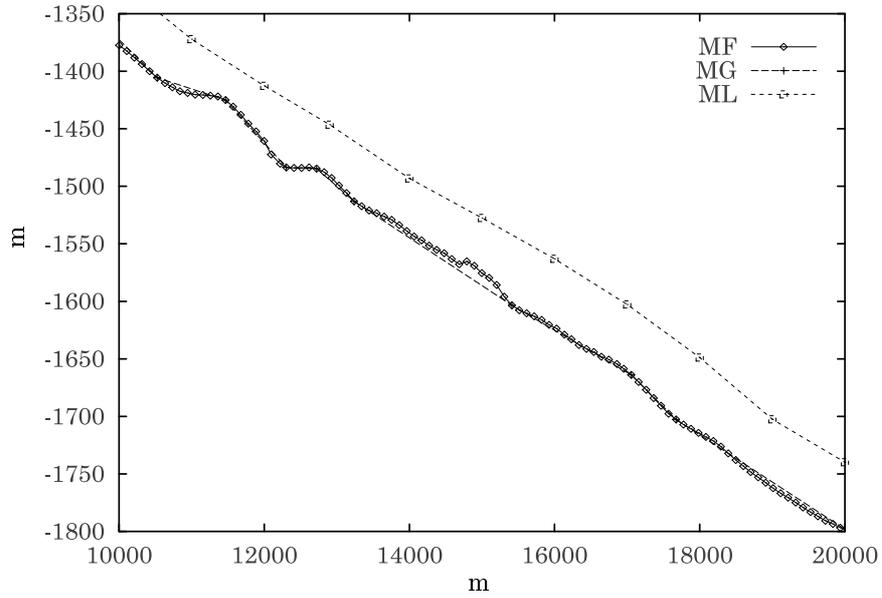


FIG. O.2 – Profils de topographie fine (MF) grossière (MG) et lisse (ML), grossissement.

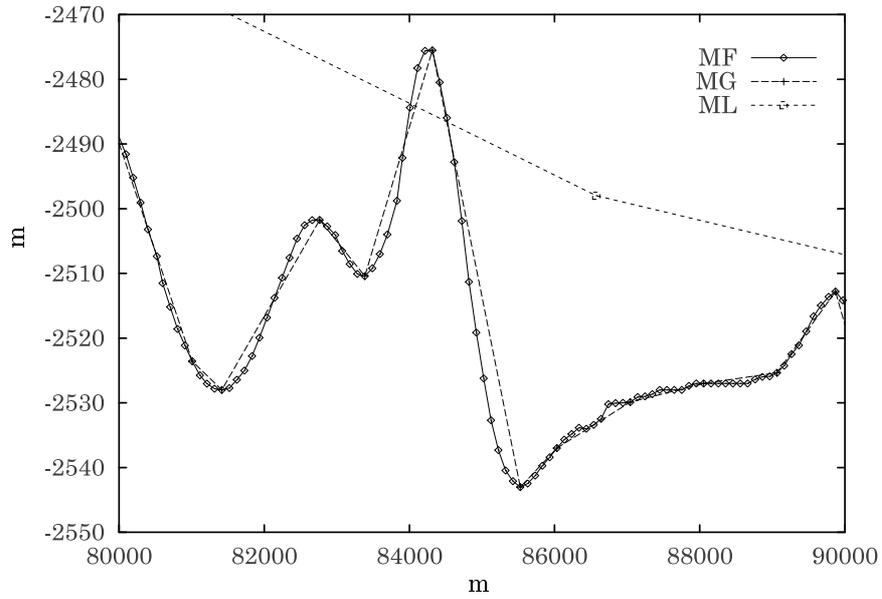


FIG. O.3 – Profils de topographie fine (MF), grossière (MG) et lisse (ML), grossissement.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
0.008	0.00153	0.0204	1.	1.

V_0	h_0	U_0	U_0^*	Φ_0	d
10^4	21	0.41	0.41	0.2	200 μm

TAB. O.2 – Paramètres et conditions initiales de la modélisation

O.3 Sensibilité au temps de calcul

La précision de l'intégration est fixée à 10^{-6} pour les trois calculs.

Maillage Fin (MF)	Maillage Grossier (MG)	Maillage Lisse (ML)
11.81	1.21	0.92

TAB. O.3 – Temps CPU des simulations sur maillage fin et grossier.

Les temps de calcul (utilisateur) sont reportés dans le tableau O.3. Le temps CPU sur maillage grossier ne représente que 10,24% du temps CPU sur maillage fin. Sur le maillage lisse, le gain est un peu plus important, puisque ce temps ne représente plus que 7,79% du temps sur maillage fin et 76,03% du temps sur maillage grossier.

Nb. de pas de temps	Maillage Fin	Maillage Grossier	Maillage Lisse
Accepté	391	133	118
Repris	728	36	9
% R/A	186%	27%	7,5%

TAB. O.4 – Nombre de pas de temps accepté et nombre de pas de temps repris pour conserver la précision sur l'erreur de troncature et sur le maillage.

Comme le montre le tableau O.4, pour un maillage fin le pas de temps est fréquemment réduit (plus de deux fois sur une) pour imposer à l'algorithme de « visiter » toutes les mailles. Le choix que nous avons fait sur l'algorithme peut donc s'avérer pénalisant. Il peut s'en suivre une réduction inutile du pas de temps lorsque, par exemple, les gradients entre deux mailles successives sont pratiquement constants. Cette méthode permet néanmoins de conserver la précision des résultats vis à vis du support⁸². Pour le maillage lisse, les pas de temps repris ne sont pas dus au maillage mais à l'erreur de troncature (cf. section I.5.3 page 315).

O.4 Résultats

Comme nous l'avons vu à la section 7.4.1 page 169, la topographie est un des facteurs de contrôle les plus importants dans le développement de l'écoulement.

Les simplifications effectuées sur le maillage (MG), bien que respectant les minima et les maxima de gradients, se font ressentir de façon importante sur la dynamique de l'écoulement⁸³. De très faibles différences de gradients engendrent des différences significatives sur l'évolution de la position du front en fonction du temps (cf. figure O.4 page suivante).

Ces différences sont également ressenties dans le calcul de la vitesse du front en fonction de la position (cf. figure O.5 page ci-contre). Les variations de vitesses, bien qu'en phase, n'ont pas la même amplitude (cf. kilomètre 20, figure O.5 page suivante).

Les grandeurs géométriques sont également affectées par cette simplification dans la partie distale (cf. figure O.6 page 360).

Enfin, le profil de dépôt n'est pas, lui non plus, insensible à ce changement de taille des mailles (cf. figure O.7 page 360).

82. La simulation sur maillage grossier peut être vue comme une simulation où il n'y aurait pas de condition imposant une réduction du pas de temps en fonction du maillage.

83. Il ne s'agit pas ici de problèmes de précision du modèle numérique de résolution des équations différentielles.

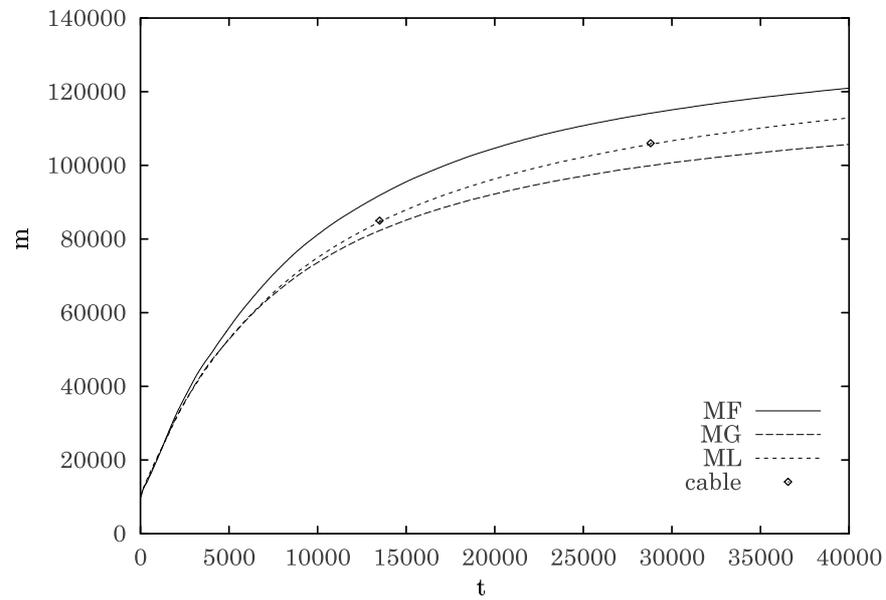


FIG. O.4 – Position du front en fonction du temps

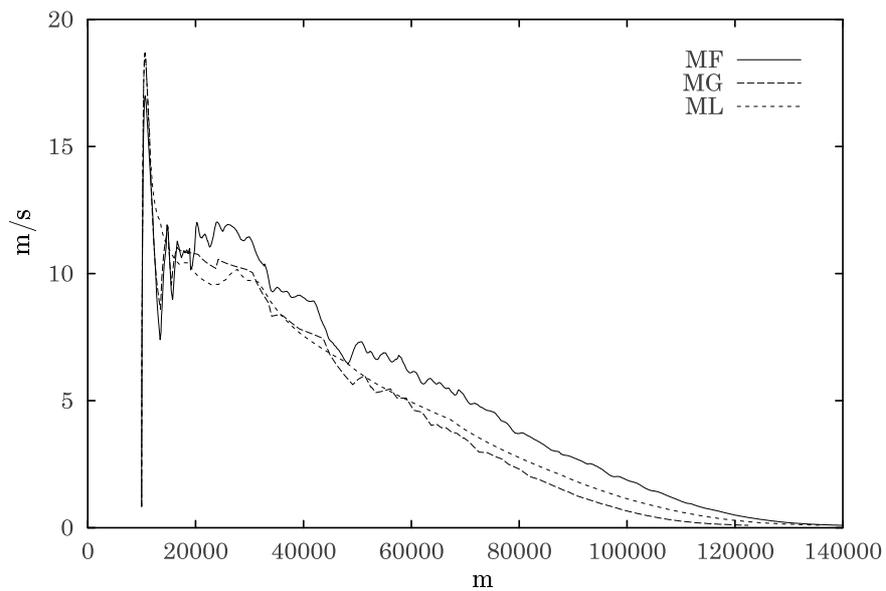


FIG. O.5 – Vitesse en fonction de la position du front

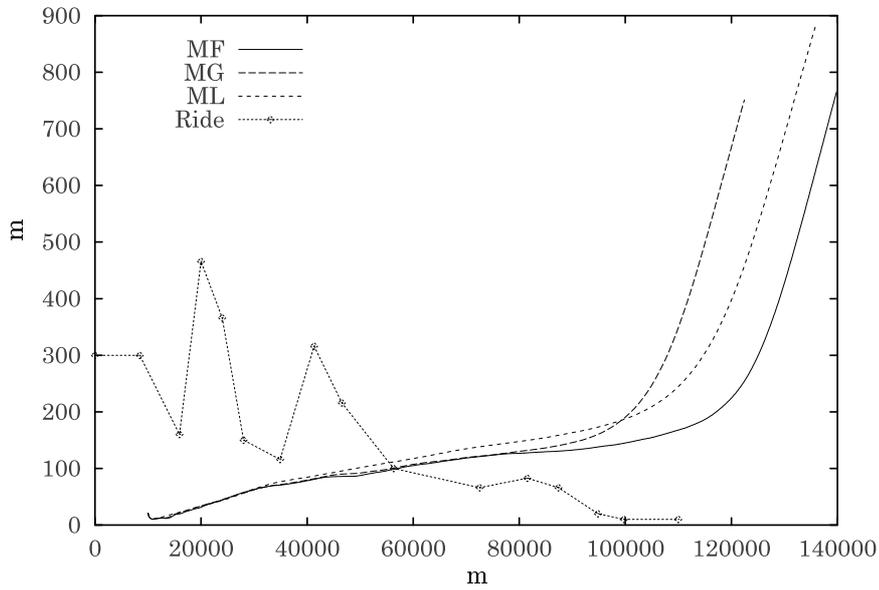


FIG. O.6 – Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent le hauteur de la ride sédimentaire du Var.

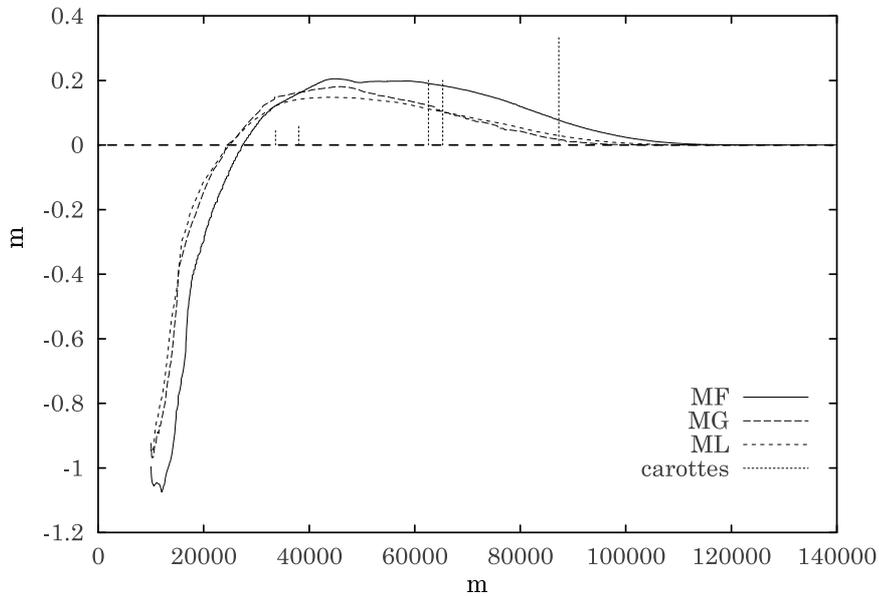


FIG. O.7 – Épaisseur déposée.

O.5 Détermination de la précision imposée par le maillage fin (MF)

Les précisions relatives, ainsi que les temps CPU et les nombres de pas de temps associés, sont reportés dans le tableau O.5

Précision	Temps CPU	Nb. de pas de temps		% R/A
		Accepté	Repris	
10^{-2}	12.03	345	781	226%
10^{-4}	12.04	359	778	216%
10^{-8}	11.54	542	569	104%
10^{-10}	14.29	958	353	36%

TAB. O.5 – Nombre de pas de temps accepté et nombre de pas de temps repris pour conserver la précision.

La discrétisation très fine du maillage (MF) impose d'elle-même une précision supérieure à 10^{-8} ! Les figures page suivante montrent la relative insensibilité des résultats à la précision imposée.

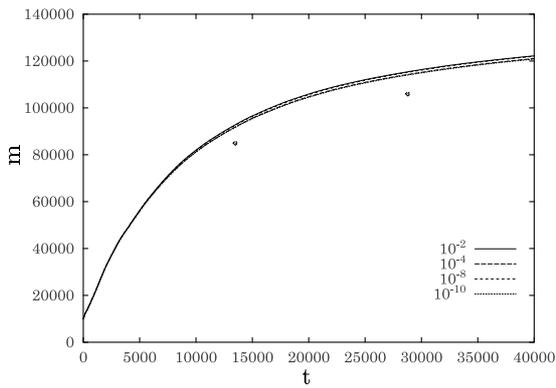


FIG. O.8 – Position du front en fonction du temps

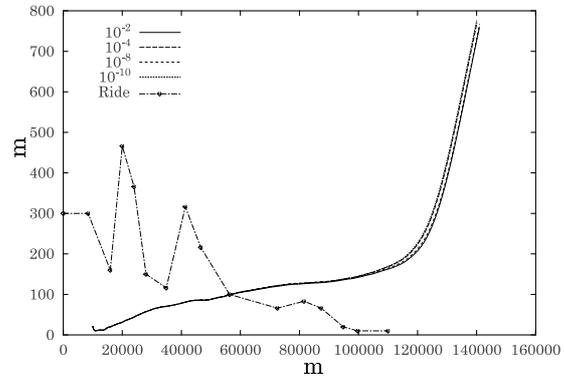


FIG. O.10 – Hauteur en fonction de la position. Les pointillés représentent la hauteur de la ride sédimentaire du Var.

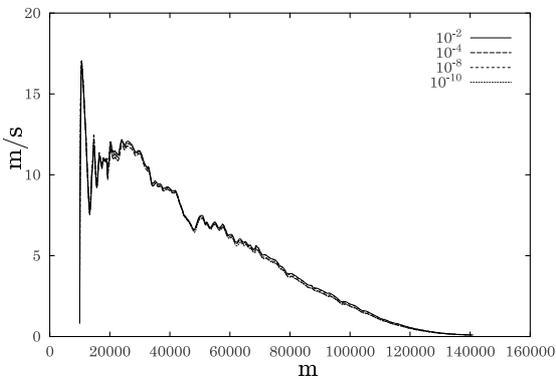


FIG. O.9 – Vitesse en fonction de la position du front

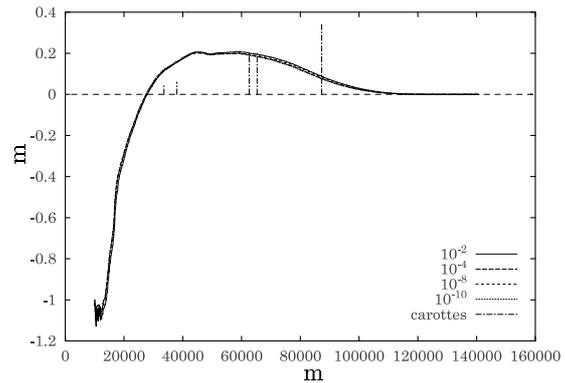


FIG. O.11 – Épaisseur déposée.

O.6 Conclusion

Comme nous avons pu le constater sur un cas réel, le profil bathymétrique est un facteur de contrôle important. Ses variations à haute fréquence ont un impact non négligeable sur la dynamique et la géométrie de l'écoulement, ainsi que sur l'extension et la géométrie des dépôts résultants.

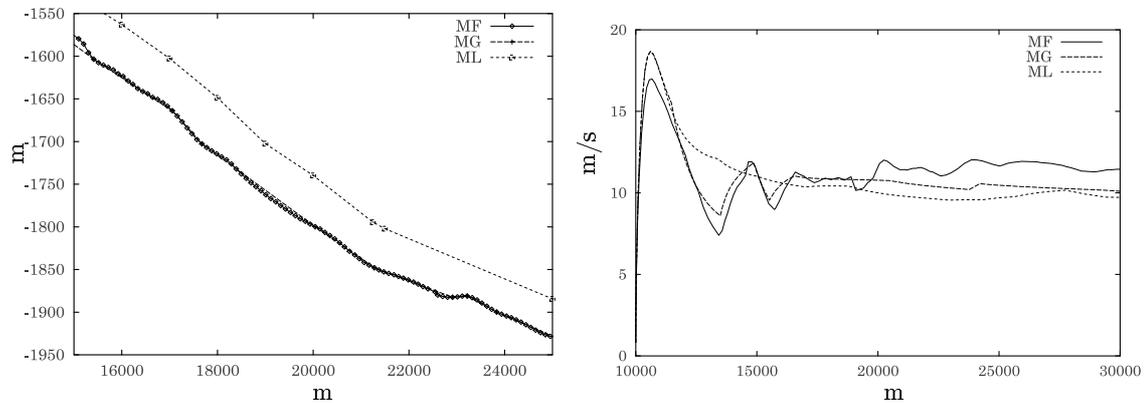


FIG. O.12 – À gauche : Profils de topographie fine (MF), grossière (MG) et lisse (ML), grossissement au voisinage du kilomètre 20. À droite : Vitesse du front en fonction de la position.

De très faibles changements de profils de pente (cf. figure O.12), sans engendrer de différences qualitatives, peuvent conduire à des différences quantitatives importantes sur la dynamique et le profil de dépôt.

En privilégiant la précision des résultats, l'algorithme est pénalisé sur les topographies dont les variations doivent être représentées finement. Sur les topographies relativement uniformes, un gain de temps de calcul important peut être obtenu en simplifiant le maillage⁸⁴.

Enfin, l'intérêt d'utiliser une topographie fine (MF) est discutable si l'on considère les incertitudes sur d'autres paramètres, tels que le trajet exact de l'écoulement ou la taille des particules. Les erreurs relatives entre les trois simulations sont inférieures à 20 %. Les résultats restent voisins.

Ces considérations nous ont conduit à choisir la topographie lisse (ML) pour les tests d'inversion. Cette dernière restitue de façon satisfaisante les gradients de la vallée du Var.

⁸⁴. Une simulation sur une seule maille ou sur cent mailles représentant cette maille donne exactement le même résultat, mais le temps calcul n'est cependant pas le même !

Bibliographie

Cette bibliographie regroupe les références traitant des :

- Modèles de faciès associés aux écoulements gravitaires ;
- Équations de la couche limite ;
- Méthodes intégrales ;
- Modèles mécaniques « ondes longues » ;
- Méthodes numériques de résolution des équations différentielles ;
- Méthodes inverses.

- AUFFRET, G. A., R. KERBRAT et C. MULLER [1988]. *Étude lithostratigraphique des carottes de la mission SAME. Rapport technique DERO/GM 88-24*, IFREMER.
- BEGHIN, P. [1979]. *Etude des bouffées bidimensionnelles de densité en écoulement sur pente avec application aux avalanches de neige poudreuse*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et Institut National Polytechnique de Grenoble. 120 p.
- BENDER, C. M. et S. A. ORSZAG [1978]. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. International Series in Pure and Applied Mathematics. Mc Graw-Hill. 593 p.
- BONNECAZE, R. T., H. E. HUPPERT et J. R. LISTER [1993]. Particle-driven gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 250**, pages 339–369.
- BOUMA, A. H. [1962]. *Sedimentology of some flysch deposits : a graphic approach to faciès interpretation*. Elsevier, Amsterdam. 168 p.
- BOUMA, A. H., W. R. NORMARK et N. E. BARNES [1985]. *Sedimentary, Tectonic, and Sea-level Controls*. Springer-Verlag, New York. 315 p.
- BRITTER, R. E. et P. F. LINDEN [1980]. The motion of the front of a gravity current travelling down an incline. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 99**, pages 531–543.
- BRITTER, R. E. et J. E. SIMPSON [1978]. Experiments on the dynamics of a gravity current head. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 88**, pages 223–240.
- DRAZIN, P. G. et W. H. REID [1997]. *Hydrodynamic stability*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge university press. 527 p.
- ECKERT, E. R. G. et R. M. DRAKE [1959]. *Heat and mass transfer*. Series in mechanical engineering. Mc Graw-Hill. 530 p.
- EINSELE, G. [1991]. Submarine mass flow deposits and turbidites. Dans : *Cycles and Events in Stratigraphy* (Edité par G. EINSELE, W. RICKEN et A. SEILACHER), pages 313–339. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edn.
- ENOS, P. [1977]. Flow regime in debris flow. *Sedimentology* **vol. 24**, pages 133–142.
- FISHER, R. V. [1971]. Features of coarse-grained, high concentration fluids and their deposits. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 41**, no. 4, pages 916–927.
- FULLANA, J. M. [1997]. *Identification d'équations modèles décrivant un écoulement de Bénard-von Kármán*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie. 136 p.
- FURNES, G. [1999]. Turbidites modeling – the Norsk Hydro experience. Présentation interne IFP.
- GATIGNOL, R. [1995]. Mécanique des Milieux Continus II. (cours à la maîtrise de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris.

- GRANJEON, D. [1996]. *Modélisation stratigraphique déterministe ; Conception et application d'un modèle diffusif 3D multilithologique*. Thèse de doctorat, Univ. Rennes 1. 193 p.
- GUILLAUME, J. et B. SAVOYE [1990]. *Carottes CASANICE : rapport d'exploitation (description, photographies, mesures physico-chimiques,...)*. Rapport technique DRO/GM-90 07, IFREMER.
- GUILLEMOT, J. [1986]. *Éléments de géologie*. TECHNIP, quatrième édition. 200 p.
- GUILLOCHEAU, F. [1996]. Sédimentologie – argilo-gréseux –. (cours à l'École Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs).
- HA-MINH-HIËU [1996]. Mécanique des fluides numérique. (cours à l'ENSEEIH-INT).
- HAMPTON, M. [1975]. Competence of fine-grained debris flows. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 45**, pages 834–844.
- HAMPTON, M. [1979]. Buoyancy in debris flows. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 49**, pages 753–758.
- HEIN, F. J. [1982]. Depositional mechanisms of deep-sea coarse clastic sediments, Cap Enragé Formation, Quebec. *Can. Jour. Earth Sci.* **vol. 19**, pages 267–287.
- HINZE, J. O. [1960]. On the hydrodynamics of turbidity currents. *Geologie en Mijnbouw* **vol. 39**, pages 18–25.
- HISCOTT, R. N. et G. V. MIDDLETON [1980]. Fabric of coarse deep-water sandstones, Tourelle Formation, Quebec, Canada. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 50**, pages 703–722.
- HUGOT, A. [1997]. *Modélisation des processus de sédimentation gravitaire — Rhéologie des débris-flows*. Referenced report : 43 716, Institut Français du Pétrole, Rueil-Malmaison. 85 p.
- HUPPERT, H. E. [1998]. Quantitative modelling of granular suspension flows. *Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A* **vol. 356**, pages 2471–2496.
- HUPPERT, H. E. et J. E. SIMPSON [1980]. The slumping of gravity currents. *Jour. Fluid Mech.* **vol. 99**, no. 4, pages 785–799.
- INGBER, L. [1993]. Simulated annealing: practice versus theory. *Math. Comput. Modelling* **vol. 18**, no. 11, pages 29–57.
- JOHNSON, A. M. [1970]. *Physical Processes in Geology*. Freeman, Cooper & Company. 577 p.
- KIRKPATRICK, S., C. D. GELATT et M. P. VECCHI [1983]. Optimization by simulated annealing. *Science* **vol. 220**, no. 4598, pages 671–680.
- LAPIDUS, L. et J. H. SEINFELD [1971]. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, vol. 74 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New-York and London. 295 p.
- LAVAL, A. [1988]. *Modélisation d'écoulements de type bouffée de densité ; Application à l'interprétation des dépôts turbiditiques*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France. 262 p.
- LEVY, T. [1996]. Introduction aux méthodes asymptotiques. (cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- LOWE, D. R. [1976]. Grain flow and grain flow deposits. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 46**, pages 188–199.
- LOWE, D. R. [1982]. Sediment gravity flows: II. depositional models with special reference to the deposits of high density turbidity currents. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 52**, pages 279–297.
- LÜTHI, S. [1980]. Some new aspects of two dimensional turbidity currents. *Sedimentology* **vol. 28**, pages 97–105.
- MACDONALD, D. I. M. [1986]. Proximal to distal sedimentological variation in a linear turbidite trough: implications for the fan model. *Sedimentology* **vol. 33**, pages 243–259.
- MASINI, G., A. NAPOLI, D. COLNET, D. LÉONARD et K. TOMBRE [1990]. *Les langages à objets : Langages de classes, langages de frames, langages d'acteurs*. InterEditions. 584 p.
- MC MANUS, D. A. [1963]. A criticism of certain usage of the phi notation. *Jour. Sediment. Petrol.* **vol. 35**, pages 792–112.
- METROPOLIS, N., A. W. ROSENBLUTH, M. N. ROSENBLUTH, A. H. TELLER et E. TELLER [1953]. Equation of state calculations by fast computing machines. *Jour. of Chem. Physics* **vol. 21**, no. 6, pages 1087–1092.
- MIDDLETON, G. V. [1967]. Experiments on density and turbidity currents: III. deposition of sediment. *Can. Jour. Earth Sci.* **vol. 4**, pages 475–505.

-
- MIDDLETON, G. V. et M. A. HAMPTON [1976]. Subaqueous sediment transport and deposition by sediment gravity flows. Dans : *Marine Sediment Transport and Environmental Management* (Edité par D. J. STANLEY et J. P. SWIFT), pages 197–218. John Wiley, New York.
- MIGEON, S. [1997]. *Les dunes sédimentaires géantes de la levée turbiditique du Var (Mer Ligure, France) : Faciès, géométrie et processus de mise en place*. Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.
- MORNER, N.-A. [1976]. Eustasy and geoid changes. *Jour. Geol.* vol. **84**, pages 123–151.
- MULLER, C. [1989]. *Résultats de l'étude biostratigraphique des carottes provenant de l'éventail sous-marin du Var. Rapport technique*, Institut Français du Pétrole.
- MULLER, C. [1991]. *L'étude du nanoplancton des carottes des campagnes CASANICE et MONICYA. Rapport technique*, IFP.
- MÜLLER, J.-D. [1994]. *Grid generation – The advancing front method and the delaunay triangulation. A review with a look at data structures, vertex generation and grid quality*. Lecture Series 1994-02. von Kármán Institute for Fluid Dynamics and Univ. Michigan, USA.
- NELDER, J. A. et R. MEAD [1965]. ? *Computer Journal* .
- PANTIN, H. M. [1979]. Interaction between velocity and effective density in turbidity flow : phase plan analysis, with criteria for auto suspension. *Mar. Geol.* vol. **31**, pages 59–99.
- PARKER, G., M. GARCIA, Y. FUKUSHIMA et W. YU [1987]. Experiments on turbidity currents over an erodible bed. *J. Hydraul. Res.* vol. **25**, no. 1, pages 123–147.
- PIANELO, L. [1999]. *Modélisation géologique contrainte par l'inversion simultanée des données dynamiques et sismiques. Rapport sous référence : 45 652*, Institut Français du Pétrole. 18 p.
- PICKERING, K. T., R. N. HISCOTT et F. J. HEIN [1989]. *Deep Marine Environments : Clastic Sedimentation and Tectonic*. Unwin Hyman, London. 416 p.
- PIPER, D. J. W. et B. SAVOYE [1993]. Processes of late Quaternary turbidity current flow and deposition on the Var deep-sea fan, north-west Mediterranean Sea. *Sedimentology* vol. **40**, pages 557–582.
- PIPER, D. J. W. et D. A. V. STOW [1991]. Fine-grained turbidites. Dans : *Cycles and Events in Stratigraphy* (Edité par W. R. G. EINSELE et A. SEILACHER), pages 360–376. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edn.
- PLAPP, J. E. et J. P. MITCHELL [1960]. A hydrodynamic theory of turbidity currents. *Jour. Geophys. Res. B.* vol. **65**, no. 3, pages 983–992.
- PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY [1992]. *Numerical Recipes in C, the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edn., <http://www.nr.com/>
- RAVENNE, C. et P. BEGHIN [1983]. Apport des expériences en canal à l'interprétation sédimentologique des dépôts de cônes détritiques sous-marins. *Revue de l'Institut Français du Pétrole* vol. **42**, no. 5, pages 529–553.
- RAVENNE, C. et C. PONSOT-JACQUIN [1993]. Gravitational mass movements and resedimentation in applied and fundamental geology. Dans : « *Pierre Beghin* » *international workshop on rapid gravitational mass movements*. CEMAGREF, Grenoble.
- READING, H. G. et M. RICHARDS [1994]. Turbidite systems in deep-water basin margins classified by grain size and feeder system. *AAPG Bulletin* vol. **78**, pages 792–822.
- REINECK, H. E. et I. B. SINGH [1980]. *Depositional Sedimentary Environments*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edn. 549 p.
- RODINE, J. D. et A. M. JOHNSON [1976]. The ability of debris, heavily freighted with coarse clastic materials, to flow on gentle slopes. *Sedimentology* vol. **23**, pages 213–234.
- ROMANELLI, M. J. [1965]. Intégration numérique des équations différentielles ordinaires par la méthode de runge-kutta. Dans : *Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques* (Edité par A. RALSTON et H. S. WILF), pages 179–198. Dunod, Paris.
- ROTHMAN, D. H. [1985]. Nonlinear inversion, statistical mechanics and residual statics estimation. *Geophysics* vol. **50**, no. 12, pages 2784–2796.

- ROTHMAN, D. H. [1986]. Automatic estimation of large residual statics corrections. *Geophysics* vol. 51, no. 2, pages 332–346.
- ROTTMAN, J. W. et J. E. SIMPSON [1983]. The initial developpment of gravity currents from fixed volume releases of heavy fluids. *Jour. Fluid Mech.* vol. 135, pages 95–110.
- SAVOYE, B. [1996]. Fiche de liaison lithothèque, campagne NICASAR. IFREMER.
- SAVOYE, B. et J. GUILLAUME [1990]. *Carottes MONICYA : rapport d'exploitation (description, photographies, mesures physico-chimiques,...)*. Rapport technique DRO/GM-90 08, IFREMER.
- SCHLICHTING, H. [1979]. *Boundary-layer theory*. Series in mechanical engineering. Mc Graw-Hill, seventh (english) édition. 817 p.
- SHANMUGAM, G., R. J. MOIOLA et J. E. DAMUTH [1985]. Eustatic control of submarine fan development. Dans : *Submarine Fans and Related Turbidite Systems* (Edité par A. H. BOUMA, W. R. NORMARK et N. E. BARNES), pages 23–28. Springer-Verlag, New York.
- SIEGENTHALER, C. et J. BUHLER [1985]. The kinematics of turbulent suspension currents (turbidity currents) on inclined boundaries. *Mar. Geology* vol. 64, pages 19–40.
- SKOGSETH, R. [1999]. Turbiditetsstraumar langs eit skrått plan. Universitetet i Bergen & Norsk Hydro. 101 p.
- STOW, D. A. V. [1986]. Deep clastic seas. Dans : *Sedimentary Environments and Facies* (Edité par H. G. READING), pages 398–444. Blackwell Scientific Pulications, Oxford.
- STOW, D. A. V. et A. J. BOWEN [1980]. A physical model for the transport and sorting of fine-grained sediments by turbidity currents. *Sedimentology* vol. 27, pages 31–46.
- STOW, D. A. V., D. G. HOWELL et C. H. NELSON [1985]. Sedimentary, tectonic, and sea-level controls. Dans : *Submarine Fans and Related Turbidite Systems* (Edité par A. H. BOUMA, W. R. NORMARK et N. E. BARNES), pages 15–22. Springer-Verlag, New York.
- SYLVAIN, B. [1996]. MEFOO : un framework c++ pour la mise en œuvre de la MEF. Rapport de recherche.
- TARANTOLA, A. [1987]. *Inverse problem theory (methods for data fitting and model parameter estimation)*. Elsevier. 613 p.
- TENNEKES, H. et J. L. LUMLEY [1972]. *A First Course in Turbulence*. MIT Press. 300 p.
- TRITON [1977]. *Physical Fluid Dynamics*. Van Nostrand Reinhold Company. 362 p.
- TURNER, J. S. [1973]. *Buoyancy effects of fluids*. Cambridge University Press. 367 p.
- ZALESKI, S. [1995]. Introduction aux modèles de turbulence. (cours au DEA de mécanique). Université Pierre et Marie Curie, Paris. 66 p.
- ZANELLA, E. [1995]. *Étude des dunes géantes de la ride sédimentaire du Var (Mer Ligure, France)*. Rapport technique DRO/GM-95-01, IFREMER.

Glossaire

On trouve ici des définitions de termes géologiques et mécaniques.

Affleurement : Partie d'un terrain visible à la surface de la terre.

Anoxique : (eau) Absence d'oxygène libre utilisable par les êtres vivants. L'anoxie d'un milieu marin s'explique généralement par une stagnation des eaux; la matière organique y fermente alors, en condition anaérobies, et peut s'accumuler dans les sédiments.

Argile : Terme désignant soit un minéral (= minéral argileux), soit une roche composée pour l'essentiel de ces minéraux.

1. Minéraux argileux (cf. Annexe C) : Phyllosilicates hydratés, se présentant en très petits cristaux (quelques μm , en plaquettes hexagonales ou parfois en fibres). Ces minéraux sont très nombreux avec principalement : la kaolinite, l'illite.
2. Roches argileuses : Roches sédimentaire à grain très fin (classe des lutites), contenant au moins 50% de minéraux argileux, auxquels peuvent s'ajouter d'autres minéraux très divers.

Bassin océanique : Les bassins océaniques occupent l'espace situé entre les dorsales et les marges continentales. En s'approchant d'un continent, deux cas peuvent se présenter :

1. Celui-ci est bordé par une fosse océanique, sillon large de quelque 100 km et profond de 8 à 11 km (cas des marges actives, avec subduction). Cette fosse reçoit les apports terrigènes, qui s'y sédimentent et ne vont pas plus au large dans l'océan.
2. Il n'est pas bordé par une fosse océanique (cas des marges continentales passives) et les apports terrigènes, qui transitent par les canyons sous-marins, s'étalent sur le glacis continental en delta sous-marins, et s'avancent assez loin dans le bassin océanique en formant les plaines abyssales. (cf. marge continentale).

Bingham : (fluide de) cf. Non Newtonien.

Carpette de traction : Les origines de la couche de « carpette de traction » d'après la figure page suivante.

- A : Les interactions granulaires à la base d'un courant turbiditique de concentration élevée, produisent un grano-classement inverse dans l'écoulement.
- B : La sédimentation continue de la suspension produit une carpette de traction dense qui est soutenue par la pression de dispersion et cisailée par l'écoulement supérieur.
- C : La partie supérieure de la carpette de traction se fige (segment vertical sur le profil de vitesse), le cisaillement étant concentré à la base de la carpette.
- D : La zone de cisaillement cesse entièrement de bouger et devient soudé au lit. La répétition de ces processus conduit à des divisions de stratifications à grano-classement inverse tel la structure S_2 de la trubidite de Lowe (cf. § A.2.4).

Cisaillement : (contraintes de, plan de ...)

1. En tectonique : plan de cassure, et déplacement suivant ce plan, dans une masse rocheuse.
2. En physique : Composante de la contrainte dans le plan de la surface d'application (aussi appelée contrainte tangentielle).

Clast : Fragment de cristal, de fossile, ou de roche inclus dans une roche.

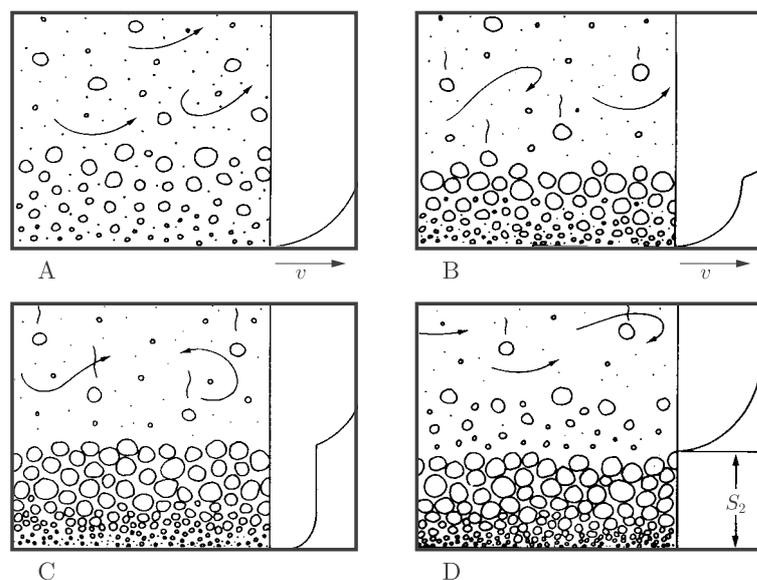


FIG. 1 – Les origines de la couche de « carpe de traction »

Compaction : Création d'un état compact par l'action naturelle du tassement des roches au cours du temps.

Cône de déjection : Accumulation, en éventail élargi vers le bas, des matériaux transportés par un torrent, là où il perd sa vitesse et où sa compétence diminue.

Cône sous-marin : Accumulation sous-marine, en éventail élargi vers le bas, sur le glacis continental et jusque dans la plaine abyssale (là où ils perdent leur vitesse et où leur compétence diminue), de sédiments terrigènes transportés par des courants de gravité descendus par des canyons sous-marins.

Continuité : (équation de) Équation de conservation de la masse.

Coriolis : (force) Force qui s'exerce sur les corps en mouvement à la surface de la Terre et par rapport à elle du fait de leur inertie et de la rotation du Globe autour de son axe.

Débrites : Dépôt de debris-flow cf. § A.2.1

Déformation : 1. Élastique: Déformation réversible (susceptible de retour à l'état initial) qui disparaît complètement quand la pression cesse d'exercer son action.

2. Plastique: Déformation permanente et proportionnelle à la pression.

3. Visqueuse: Déformation permanente et fonction du temps, qui peut avoir lieu même si la contrainte est relativement faible.

Distal : Éloigné d'un lieu pris comme référence. Par exemple, turbidites distales: déposées loin des sources d'apports terrigènes. Ant. proximal.

Élastique : cf. déformation.

Énergie : (potentielle et cinétique) C'est la capacité de fournir du travail. L'énergie potentielle est l'énergie résultant de la position d'un corps par rapport à un autre ou de deux parties relatives d'un même corps. L'énergie cinétique est l'énergie due au mouvement. Sa variation au cours du mouvement est égale au travail des forces appliquées (conservatives ou non).

Eustatisme : Changement d'ensemble du niveau des mers dû à la formation ou fusion des calottes glaciaires, ce qui modifie le volume des océans, à l'écrasement des fosses marines, ou au changement d'accrétion des fonds océaniques, ces phénomènes modifiant la forme et la capacité des bassins océaniques.

Floculation : Agrégation de particules dans l'eau, due à des forces attractives interparticulaires.

Fluctuation : (de vitesse) Pour un écoulement turbulent, on définit u la vitesse instantanée, U la vitesse moyenne sur une période de temps suffisamment longue pour intégrer un grand nombre de

fluctuations. La vitesse instantanée des fluctuations est u' , défini par :

$$u' = u - U$$

Ce sont ces vitesses fluctuantes qui sont importantes pour les phénomènes de dissipation de l'énergie, de transfert de masse et de chaleur dans la turbulence.

Fluidisé : (écoulement) cf. § 1.6.

Friction : (vitesse de) Vitesse permettant de présenter de manière non dimensionnelle le profil des vitesses moyennes pour les écoulements turbulents.

Froude : (nombre de) Nombre caractérisant le rapport des forces inertielles aux forces gravitationnelles :

$$Fr = \sqrt{\frac{u^2}{h}}$$

Pour les écoulements diphasiques, on utilise d'avantage le nombre de Froude densimétrique :

$$Fr = \sqrt{\frac{\rho u^2}{\Delta \rho g h}}$$

On distingue deux états d'écoulement :

1. subcritique avec $Fr < 1$;
2. supercritique avec $Fr > 1$.

Granoclassement ou grano-classement : (*graded bedding*) A l'intérieur d'un sédiment détritique, classement des grains selon une taille décroissant du bas vers le haut.

Granulométrie : Classement des sédiments selon la proportion des grains de différentes dimensions (cf. Annexe C).

Hémipélagique : Se dit d'un dépôt sédimentaire marin formé par la lente accumulation sur le fond d'organismes pélagiques et de fines particules détritiques. Ce type de dépôt est souvent intercalé entre les turbidites.

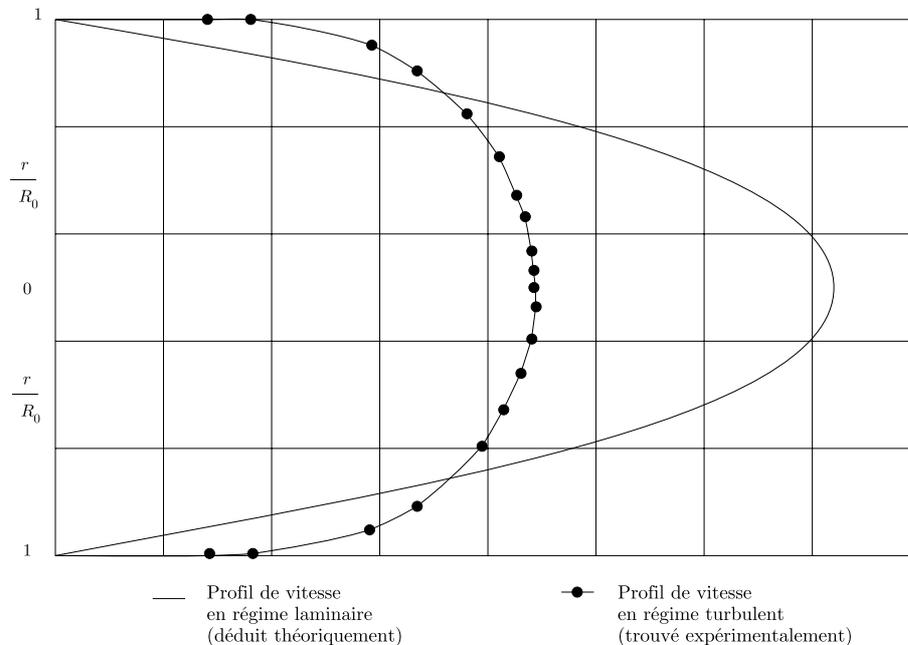


FIG. 2 – Comparaison entre les profils de vitesse laminaires et turbulents dans un tube

Laminaire : (écoulement) Écoulement caractérisé par le glissement des couches de fluide les unes sur les autres. Le régime laminaire est opposé au régime turbulent.

En régime laminaire, le rapport entre la vitesse maximale et la vitesse moyenne vaut 2, alors qu'en régime turbulent ce rapport prend des valeurs considérablement plus basses, variables suivant la vitesse moyenne (cf. figure page précédente).

Lamination : Disposition des constituants d'un sédiment en fines lames (env. 1 mm). Elles peuvent être dues à l'action des courants sur le fond sous-marin, et s'observent notamment dans les turbidites, surtout distales (intervalles B, C et D de Bouma).

Longueur de mélange : Longueur l sur laquelle les tourbillons macroscopiques de vitesse u' conservent leur vitesse. Elle permet, dans la théorie de Prandtl, de déterminer la viscosité turbulente :

$$\nu_T = u'l$$

Marge continentale : Région immergée de la bordure d'un continent faisant le raccord avec les fond océaniques. On distingue les marges continentales passives, où le passage de la croûte continentale à la croûte océanique se fait au sein de la même plaque lithosphérique, et les marges continentales actives, où la croûte océanique s'enfonce par subduction sous la croûte continentale. Une marge passive comprend de l'intérieur à l'extérieur (*i.e.* en s'éloignant du rivage) :

1. Le plateau continental, zone plane, légèrement inclinée vers la mer, large en moyenne de 80 km, profond de 200 m tout au plus ;
2. La pente continentale (ou talus continental), large de 45 km en moyenne et dont la profondeur va de 200 à 4000 m (pente: 5°), entamée çà et là par des canyons sous-marins ;
3. Le glaciaire continental à pente très faible (moins de 1°) qui va de 4000 à 5000 m et se raccorde aux bassins océaniques.

Dans une marge active, le glaciaire continental est remplacé par une fosse marginale large de 80 à 100 km et dont la profondeur atteint 11 km (zones les plus profondes des océans). Ce type de marge est marqué par une activité sismique importante. Un cas plus complexe de marge active est celui où, entre la pente continentale et la fosse marginale, existe un arc insulaire, de nature également continentale, qui ménage, entre lui et la côte, un bassin marginal (= mer marginale).

Matrice : Dans une roche présentant des éléments de grande taille, c'est la partie qui englobe ces derniers, et qui peut être composée d'éléments plus petits ou d'une masse indifférenciée.

Newtonien : (fluide) Fluide dont la viscosité est constante quel que soit le gradient de vitesse, et dont la loi de comportement s'écrit :

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

Non Newtonien : (fluide) La plupart des liquides à structure moléculaire complexe ont un comportement non Newtonien. La loi la plus simple rencontrée dans le cas des liquides viscoplastiques est celle du fluide de Bingham dont le comportement est Newtonien au-delà d'une contrainte seuil τ_y , de telle sorte que la loi de comportement s'écrit :

$$\tau = \tau_y + \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

Pélagique : 1. Se dit d'un animal ou d'un végétal marin qui ne vit pas sur le fond, mais qui nage (necton) ou qui flotte (plancton).

2. Par extension, s'applique aussi à des roches sédimentaires qui ne contiennent que des fossiles pélagiques.

Perméabilité : Aptitude d'un milieu à se laisser traverser par un fluide. La loi de Darcy relie le volume de l'écoulement par unité de temps q , à la section A d'un échantillon, au coefficient de perméabilité k et au gradient hydraulique i :

$$q = kAi$$

k est calculé par la relation :

$$k = \frac{\eta q l}{A (P_1 - P_0)}$$

avec l longueur de l'échantillon, P_1 pression d'entrée, P_0 pression de sortie.

Plastique : cf. Déformation.

Porosité : La porosité d'un sédiment est définie comme le rapport du volume des pores au volume total du sédiment, exprimée comme un pourcentage.

Proximal : Proche d'un lieu pris comme référence. Par exemple turbidites proximales, car déposées près des sources d'apports terrigènes. Ant. distal.

Pyroclastique : S'applique aux débris de roches magmatiques éjectés par les volcans.

Reynolds : (nombre de) Nombre caractérisant le rapport des forces inertielles aux forces visqueuses.

$$Re = \frac{\rho u l}{\eta}$$

Cette quantité est non dimensionnelle, et permet de distinguer deux états d'écoulement :

- quand Re est faible l'écoulement est laminaire
- quand Re est fort l'écoulement est turbulent.

Rhéologie : Étude des déformations et des vitesses de déformation des matériaux qui sont soumis à des contraintes.

Richardson : (nombre de) Inverse du carré du nombre de Froude.

Rigidité : cf. § 1.3.6.2.

Solide de Hooke : Solide qui se déforme linéairement avec les contraintes.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Cette loi traduit le comportement des matériaux élastiques isotropes, elle est connue sous le nom de loi de Hooke. Les coefficients λ et μ sont les coefficient de Lamé.

Silt : Mot anglais désignant les sédiments détritiques meubles dont le grain est compris entre 1/256 mm (3.9 μm) et 1/16 mm (62.4 μm) (classe des lutites, cf. Annexe C) ; Il désigne aussi fréquemment les roches sédimentaires plus ou moins consolidées qui en dérivent.

Stationnaire : (écoulement) Écoulement dont les caractéristiques ne varient pas dans le temps.

Subcritique : (écoulement) Écoulement caractérisé par une surface libre lisse et plate et sur laquelle les vagues générées par un quelconque processus sont rapidement amorties ($Fr < 1$).

Supercritique : (écoulement) Écoulement pour lequel les forces gravitationnelles sont insuffisantes à stabiliser la surface ($Fr > 1$).

Surpression : Pression supérieure à la pression hydrostatique devant régner normalement à une profondeur donnée, due à des effets ajoutés à ceux de la gravité, tels que la compaction des couches argileuses.

Terrigène : (On devrait dire terrigénique ou terrigénétique) Se dit de tout élément figuré (fragment de roche, minéral, ...) qui a été arraché à une terre émergée par l'érosion, ainsi qu'aux sédiments qui en sont constitués.

Turbidite : cf. § A.2.4.

Turbiditique : (courant) cf. § 1.7.

Turbulence : Aspect macroscopiquement désordonné du mouvement d'un fluide, cf. Laminaire.

Uniforme : (écoulement) Écoulement dont les caractéristiques ne varient pas dans l'espace.

Viscosité : Caractéristique d'un corps dont le mouvement des molécules est soumis à des forces de frottement intermoléculaires, qui se traduit par la résistance que ce corps, déformable de façon permanente, oppose aux forces qui lui sont appliquées. Elle entraîne au sein d'un fluide en mouvement un déperdition d'énergie. La viscosité dynamique ou absolue est notée η . On utilise également la viscosité cinématique définie par :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Visqueux : cf. Déformation.

Vorticité : La turbulence est toujours associée à un caractère localement tourbillonnaire appelé encore champ aléatoire de vorticité ω où :

$$\omega = \nabla \times u$$

Nomenclature

Les notations sont données par ordre alphabétique et par chapitre. Les crochets indiquent la dimension de la variable ; Les numéros d'équation et de page renvoient à la première apparition de la variable dans le chapitre.

Chapitre 1

Fr	nombre de Froude densimétrique $\left(\sqrt{\frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{u^2}{gh}}\right)$	page 16
Re	nombre de Reynolds $\left(\frac{\rho ul}{\eta}\right)$	page 16

Chapitre 2

-	partie moyenne de ·	éq. (2.54) page 46
·'	partie fluctuante de ·	éq. (2.54) page 46
<i>a</i>	coefficient de friction fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Froude	éq. (2.4) page 27
<i>d</i>	contraste de densité entre l'écoulement et le fluide ambiant	éq. (2.2) page 27
e_x	facteur efficace (~ 0.01)	éq. (2.15b) page 33
<i>f</i>	coefficient de friction adimensionnel de Darcy–Weisbach	éq. (2.3) page 27
f_0	coefficient de friction attribué à la friction basale (et latérale dans le cas d'écoulements chena- lisés)	éq. (2.5) page 28
f_1	coefficient de friction attribué à la friction à l'interface supérieure	page 28
<i>g</i>	accélération de la gravité [LT^{-2}]	éq. (2.3) page 27
g'	accélération apparente de la gravité ($g\Delta\rho/\rho$) [LT^{-2}]	éq. (2.4) page 27
<i>h</i>	épaisseur moyenne de l'écoulement [L]	éq. (2.2) page 27
h_r	échelle verticale caractéristique des éléments rugueux [L]	éq. (2.5) page 28
h_t	épaisseur moyenne de la tête de l'écoulement [L]	éq. (2.6) page 28
<i>k</i>	énergie cinétique turbulente (partie diagonale du tenseur de Reynolds) [L^2T^{-2}]	éq. (2.56) page 47
k_v	coefficient de masse virtuelle	éq. (2.17) page 34
<i>l</i>	longueur moyenne de l'écoulement [L]	page 27
<i>p</i>	pression du mélange [$ML^{-1}T^{-2}$]	éq. (2.47) page 44
p_f	pression de la phase fluide [$ML^{-1}T^{-2}$]	éq. (2.32) page 42
<i>r</i>	rayon hydraulique (\sim profondeur du chenal) [L]	éq. (2.1) page 27
<i>s</i>	pente	éq. (2.1) page 27
u_i	i^e composante de la vitesse volumique moyenne du mélange [LT^{-1}]	éq. (2.36) page 42

u_x	vitesse de friction turbulente $[LT^{-1}]$	éq. (2.25) page 38
u_{fi}	i^e composante de la vitesse du fluide $[LT^{-1}]$	éq. (2.30) page 41
u_{pi}	i^e composante de la vitesse des particules $[LT^{-1}]$	éq. (2.31) page 41
v_i	i^e composante de la vitesse massique moyenne du mélange $[LT^{-1}]$	éq. (2.35) page 42
A	volume par unité de surface de l'écoulement $[L^2]$	éq. (2.16) page 34
B_i	i^e composante des forces volumiques $[LT^{-2}]$	éq. (2.32) page 42
C	constante empirique $[L^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$	éq. (2.1) page 27
C_1	constante empirique	éq. (2.8) page 29
C_f	coefficient de friction	éq. (2.17) page 34
C_t	coefficient de friction de la tête de l'écoulement (0.74 d'après Benjamin [1968] et 0.71 d'après Keulegan [1946])	éq. (2.6) page 28
D	coefficient de diffusion des particules $[L^2T^{-1}]$	éq. (2.42) page 44
E	taux d'entraînement de fluide ambiant	éq. (2.9) page 29
E_T	taux d'entraînement des sédiments	éq. (2.26) page 38
F_f	force d'interface $[ML^{-2}T^{-2}]$	éq. (2.32) page 42
J_i	diffusion moléculaire ou transport par les fluctuations $[L^3T^{-3}]$	éq. (2.56) page 47
L	largeur moyenne de l'écoulement $[L]$	page 27
P_k	création–destruction d'énergie par le tenseur de Reynolds $[L^2T^{-3}]$	éq. (2.56) page 47
U	vitesse moyenne de l'écoulement $[LT^{-1}]$	éq. (2.1) page 27
U_e	vitesse d'entraînement $[LT^{-1}]$	éq. (2.16) page 34
U_f	vitesse du front $[LT^{-1}]$	éq. (2.19) page 35
U_t	vitesse de la tête du courant $[LT^{-1}]$	éq. (2.6) page 28
V	composante latérale de la vitesse $[LT^{-1}]$	éq. (2.10) page 30
V_f	volume de fluide $[L^3]$	éq. (2.28) page 41
V_p	volume occupé par les particules $[L^3]$	éq. (2.28) page 41
V_s	vitesse de sédimentation $[LT^{-1}]$	éq. (2.18) page 35
W	vitesse moyenne de sédimentation $[LT^{-1}]$	éq. (2.8) page 29
β	coefficient empirique $\sim 0,1$	éq. (2.5) page 28
ε	dissipation d'énergie $[L^2T^{-3}]$	éq. (2.56) page 47
η	variable de similitude	éq. (2.21) page 37
ζ	fonction de similitude (facteurs de forme)	éq. (2.23) page 37
θ	angle de pente	page 27
μ	viscosité dynamique $[ML^{-1}T^{-1}]$	éq. (2.49) page 45
ρ	masse volumique moyenne du mélange $[ML^{-3}]$	éq. (2.34) page 42
ρ_f	masse volumique du fluide $[ML^{-3}]$	éq. (2.30) page 41
ρ_p	masse volumique des particules $[ML^{-3}]$	éq. (2.31) page 41
ρ_s	masse volumique de la phase solide $[ML^{-3}]$	éq. (2.11) page 30
ρ_w	masse volumique de la phase fluide $[ML^{-3}]$	éq. (2.11) page 30
τ_{ij}	la composante ij du tenseur des contraintes du mélange $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (2.47) page 44
τ_b	friction basale $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (2.13) page 32
τ_{ij}^f	composante ij du tenseur des contraintes du fluide $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (2.32) page 42
ϕ	fraction volumique solide en suspension (cf. page 41)	éq. (2.11) page 30
ϕ_b	la fraction volumique des sédiments au bas de l'écoulement en $z = b$	éq. (2.26) page 38

ϕ_f	fraction volumique du fluide	éq. (2.29)	page 41
ω	puissance gravitationnelle disponible par unité d'aire $[MT^{-3}]$	éq. (2.11)	page 30
ω_n	puissance nécessaire pour maintenir la charge en suspension par unité d'aire $[MT^{-3}]$	éq. (2.12)	page 30
ω_τ	puissance par unité d'aire dissipée par la friction basale $[MT^{-3}]$	éq. (2.13)	page 32
Φ	fraction volumique moyenne des sédiments	éq. (2.25)	page 38
Ω	tenseur de Coriolis	éq. (2.51)	page 45

Chapitre 3

h	hauteur de l'objet $[L]$	page 64
l	longueur de l'objet $[L]$	page 64
v_s	vitesse de chute des particules $[LT^{-1}]$	éq. (3.5) page 66
C	facteur géométrique	éq. (3.7) page 66
C_A	coefficient de masse ajouté	éq. (3.11) page 67
C_D	coefficient de friction turbulent	éq. (3.14) page 67
D_s	flux sortant correspondant à la chute des sédiments hors de l'écoulement (sédimentation) $[LT^{-1}]$	éq. (3.27) page 71
E_f	flux correspondant à l'entraînement et à l'incorporation de l'eau à l'interface supérieure de l'écoulement $[LT^{-1}]$	éq. (3.24) page 69
E_s	flux entrant correspondant à l'arrachement des sédiments du sol (érosion) $[LT^{-1}]$	éq. (3.27) page 71
E_f^*	taux adimensionnel d'entraînement	éq. (3.25) page 70
E_p^*	taux adimensionnel d'entraînement des sédiments	éq. (3.32) page 71
F	flux de particules $[LT^{-1}]$	éq. (3.28) page 71
M	masse totale de l'écoulement $[M]$	éq. (3.23) page 69
U	vitesse moyenne (phase fluide) $[LT^{-1}]$	éq. (3.5) page 66
U_f	vitesse du front $[LT^{-1}]$	éq. (3.19) page 68
U_l	vitesse d'étalement $[LT^{-1}]$	éq. (3.16) page 67
U_p	vitesse des particules (phase solide) au sein de l'écoulement $[LT^{-1}]$	éq. (3.5) page 66
V	volume de l'écoulement par unité de largeur $[L^2]$	éq. (3.6) page 66
V_d	volume déposé $[L^2]$	éq. (3.34) page 72
V_f	volume de fluide $[L^2]$	éq. (3.5.2) page 69
V_p	volume de particules $[L^2]$	page 69
∂V_i	surface de contact écoulement–substrat par unité de largeur $[L]$	éq. (3.8) page 66
∂V_s	surface de l'interface écoulement–fluide ambiant par unité de largeur $[L]$	éq. (3.9) page 66
X_f	position du front $[L]$	éq. (3.20) page 68
δ	épaisseur du dépôt $[L]$	éq. (3.34) page 72
λ	porosité	éq. (3.34) page 72
τ_t	la friction turbulente $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (3.11) page 67
ϕ_b	fraction volumique de l'écoulement immédiatement au dessus du lit	éq. (3.31) page 71

Chapitre 4

a	abscisse adimensionnelle pour laquelle $ U^*\xi + U^T $ s'annule	éq. (4.76)	page 101
$h(x, t)$	hauteur de la suspension $[L]$		page 98
$h(t)$	hauteur de l'objet-écoulement $[L]$	à partir de la section 4.8	page 101
h_1	hauteur de la suspension de sédiments (domaine ①) $[L]$		page 76
h_2	hauteur de fluide ambiant (domaine ②) $[L]$		page 76
\bar{g}'	gravité réduite $[LT^{-2}]$	éq. (4.13)	page 79
p	pression résiduelle $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (4.4)	page 77
p_0	pression en $z = h_1$ (interface)	éq. (4.42)	page 89
p_s	pression hydrostatique $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (4.3)	page 77
p^*	champ de pression $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (4.1)	page 77
u	champ de vitesse moyen $[LT^{-1}]$	éq. (4.15)	page 81
u_*	échelle des fluctuations de vitesses $[LT^{-1}]$	éq. (4.27)	page 86
\tilde{u}	champ de vitesse instantané $[LT^{-1}]$	éq. (4.15)	page 81
u'	champ de vitesse fluctuant $[LT^{-1}]$	éq. (4.15)	page 81
C	constante	éq. (4.53)	page 92
C'	constante	éq. (4.53)	page 92
F	fonction de similitude associée à la vitesse	éq. (4.46)	page 90
F_*	fonction de similitude associée aux fluctuations de vitesse	éq. (4.47)	page 90
G	fonction de similitude associée à la fraction volumique	éq. (4.46)	page 90
G_*	fonction de similitude associée à la diffusion turbulente des fluctuations de fraction volumique	éq. (4.48)	page 91
H	épaisseur totale des milieux ① et ② $[L]$		page 76
L	échelle de longueur de l'écoulement $[L]$	éq. (4.25)	page 85
\mathcal{R}	repère global		page 99
\mathcal{R}^*	repère en mouvement à la vitesse du barycentre géométrique de l'objet		page 99
$U(x, t)$	vitesse moyenne (sur la hauteur) $[LT^{-1}]$	éq. (4.46)	page 90
U_0	échelle de vitesse dans la direction principale x $[LT^{-1}]$		page 86
$U^T(t)$	vitesse de la translation de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$	éq. (4.69)	page 100
$U^*(x, t)$	champ vitesse de déformation de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$	éq. (4.68)	page 100
$U^*(t)$	vitesse de déformation de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$	à partir de la section 4.8	page 101
V_0	échelle de vitesse dans la direction transversale z $[LT^{-1}]$		page 86
γ	contribution à la réduction de la gravité	éq. (4.12)	page 79
δ	épaisseur de la couche limite $[L]$	éq. (4.25)	page 85
η	paramètre de similitude (z/δ)	éq. (4.45)	page 90
λ	échelle de longueur associée à la turbulence $[L]$		page 87
ρ_1	masse volumique du milieu ① $[ML^{-3}]$	éq. (4.10)	page 79
ρ_2	masse volumique du milieu ② $[ML^{-3}]$	éq. (4.10)	page 79
ρ_a	masse volumique du fluide ambiant $[ML^{-3}]$	éq. (4.10)	page 79
ρ_i	masse volumique du fluide interstitiel $[ML^{-3}]$	éq. (4.10)	page 79
ρ_p	masse volumique des particules $[ML^{-3}]$	éq. (4.10)	page 79
τ	champ de contraintes $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (4.1)	page 77
τ'_{ij}	tenseur des contraintes de Reynolds $[ML^{-1}T^{-2}]$	éq. (4.21)	page 82

ϕ	fraction volumique moyenne $[LT^{-1}]$	éq. (4.15) page 81
$\tilde{\phi}$	fraction volumique instantanée $[LT^{-1}]$	éq. (4.15) page 81
ϕ'	fluctuation de fraction volumique $[LT^{-1}]$	éq. (4.15) page 81
ϕ_*	échelle associée aux fluctuations de fraction volumique	éq. (4.35) page 88
$\Phi(x, t)$	fraction volumique moyenne (sur la hauteur)	éq. (4.46) page 90
$\Phi(t)$	fraction volumique moyenne des particules dans l'objet-écoulement	à partir de la section 4.8 page 101
Φ_0	échelle associée à la fraction volumique moyenne	éq. (4.35) page 88

Chapitre 5

$\bar{\cdot}$	partie moyenne de \cdot	éq. (5.12) page 114
\cdot'	partie fluctuante de \cdot	éq. (5.12) page 114
d	diamètre des particules $[L]$	éq. (5.2) page 109
l_0	échelle de longueur de la turbulence $[L]$	éq. (5.13) page 114
t_0	échelle de temps de la turbulence $[T]$	éq. (5.13) page 114
v_s	vitesse de sédimentation tenant compte de la présence d'autres particules $[LT^{-1}]$..	page 108
v_{s0}	vitesse de sédimentation d'une particule seule $[LT^{-1}]$	page 108
B	viscosité « intrinsèque » ($= 2, 5$)	éq. (5.1) page 108
C	coefficient géométrique	éq. (5.54) page 127
C_0	coefficient de friction turbulente	éq. (5.19) page 116
C_1	constante d'incorporation de fluide ambiant	éq. (5.52) page 126
C_2	constante d'incorporation de fluide ambiant	éq. (5.52) page 126
C_3	coefficient de fraction volumique basale	éq. (5.42) page 122
C_4	analogue de l'inverse du nombre de Schmidt turbulent	éq. (5.43) page 124
E	fonction d'incorporation de fluide ambiant	page 124
F_*	fonction de similitude associée aux fluctuations de vitesse (chapitre précédent)	éq. (4.47) page 90
G	fonction de similitude associée à la fraction volumique (chapitre précédent)	éq. (4.46) page 90
G_*	fonction de similitude associée à la diffusion turbulente des fluctuations de fraction volumique (chapitre précédent)	éq. (4.48) page 91
Re_p	nombre de Reynolds des particules $\left(\frac{\rho_f v_{s0} d}{\mu}\right)$	éq. (5.10) page 112
Ri	nombre de Richardson généralisé	éq. (5.45) page 124
Sc_T	nombre de Schmidt turbulent	éq. (5.26) page 118
U_0	échelle de vitesse dans la direction principale x $[LT^{-1}]$ (chapitre précédent)	page 86
Z	nombre de Rouse $\left(\frac{v_s}{\kappa u_*}\right)$	éq. (5.32) page 119
ϵ_T	diffusivité turbulente $[L^2 T^{-1}]$	éq. (5.25) page 118
κ	constante de Von Kármán	éq. (5.14) page 114
μ	viscosité dynamique de la suspension $[ML^{-1}T^{-1}]$	éq. (5.1) page 108
μ_f	viscosité dynamique du fluide interstitiel $[ML^{-1}T^{-1}]$	éq. (5.1) page 108
μ_*	viscosité dynamique relative $\left(\frac{\mu}{\mu_f}\right)$	éq. (5.1) page 108

ν	viscosité cinématique $\left(\frac{\mu}{\rho_f}\right) [L^2T^{-1}]$ éq. (5.2) page 109
ν_T	viscosité turbulente $[L^2T^{-1}]$ éq. (5.12) page 114
ϕ_b	concentration de référence à une distance b au dessus du sol éq. (5.32) page 119
ϕ_{be}	concentration basale de l'écoulement à l'équilibre éq. (5.32) page 119

Chapitre 6

\cdot_0	valeur initiale de \cdot (à $t = 0$)
\cdot_∞	valeur finale de \cdot (lorsque $t \rightarrow \infty$)
a	abscisse adimensionnelle pour laquelle $ U^*\xi + U^T $ s'annule éq. (6.1) page 136
$f(\mathbf{x})$	fonctionnelle du système différentiel éq. (6.2) page 136
g'	gravité réduite $[LT^{-2}]$ éq. (6.1) page 136
h	hauteur de l'objet-écoulement $[L]$ éq. (6.1) page 136
l	longueur de l'objet-écoulement $[L]$ éq. (6.1) page 136
\mathbf{x}	vecteur formé des inconnues h, Φ, U^T, U^*, l et X éq. (6.2) page 136
C	constante géométrique éq. (6.1) page 136
C_0	coefficient de friction éq. (6.1) page 136
C_1	coefficient d'incorporation d'eau éq. (6.1) page 136
C_2	coefficient d'incorporation d'eau éq. (6.1) page 136
C_3	coefficient de fraction volumique éq. (6.1) page 136
C_4	coefficient inverse de Schmidt turbulent éq. (6.1) page 136
E	coefficient d'entraînement éq. (6.1) page 136
Ri	nombre de Richardson éq. (6.1) page 136
U^T	vitesse moyenne de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$ éq. (6.1) page 136
U^*	vitesse d'étalement de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$ éq. (6.1) page 136
α	exposant du premier terme de solutions de la forme de séries de Frobenius éq. (6.4) page 138
γ	contribution à la réduction de la gravité éq. (6.1) page 136
ε	vecteur propre $(\varepsilon_{U^*}, \varepsilon_U, \varepsilon_h, \varepsilon_l, \varepsilon_\Phi, \varepsilon_X)^T$ page 146
λ	valeur propre page 137
ϑ	exposant de variation de la pente ($\vartheta \leq 0$, pentes décroissantes ou constantes) page 138
Φ	fraction volumique de l'objet-écoulement éq. (6.1) page 136

Chapitre 7

Les notations sont celles utilisées dans le système (6.1) page 136 (chapitre 6)

d	diamètre des particules $[L]$ page 155
h_0	hauteur initiale de l'objet-écoulement $[L]$ page 155
l_0	longueur initiale de l'objet-écoulement $[L]$ page 155
C_0	coefficient de friction page 156
C_1	coefficient d'incorporation d'eau page 156

C_2	coefficient d'incorporation d'eau	page 156
C_3	coefficient de fraction volumique	page 156
C_4	coefficient inverse de Schmidt turbulent	page 156
U_0	vitesse moyenne initiale de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$	page 155
U_0^*	vitesse d'étalement initiale de l'objet-écoulement $[LT^{-1}]$	page 155
V_0	volume initial par unité de largeur de l'objet-écoulement (Ch_0l_0) $[L^2]$	page 155
θ	angle de pente	page 155
ϕ_0	fraction volumique initiale de l'objet-écoulement	page 155

Chapitre 8

Les notations sont celles utilisées dans le système (6.1) page 136 (chapitre 6)

\cdot_0	valeur initiale de \cdot (à $t = 0$)	
ρ	masse volumique de la suspension $[ML^{-3}]$	page 183
ϕ_{0r}	fraction volumique initiale réelle	page 193
ϕ_{0s}	fraction volumique en sortie de réservoir calculée à partir de la masse déposée dans le réservoir	page 191

Chapitre 9

Les notations sont celles utilisées dans le système (6.1) page 136 (chapitre 6)

\cdot_0	valeur initiale de \cdot (à $t = 0$)	
V_{0s}	volume initial de sédiments $(L\phi_0V_0)$ $[L^3]$	page 226

Index des Auteurs

Cet index renvoie aux citations des publications dans le texte.

- Ackermann et Shen [1982] : 50, 53
Akiyama et Stephan [1985] : 37, 53, 116, 121, 129
Akiyama et Stephan [1988] : 37, 53, 116, 121, 129
Allen [1971] : 19, 21, 53
Assier-Rzadkiewicz *et al.* [1997] : 48, 53
Assier-Rzadkiewicz [1997] : 45, 48, 49, 53, 64, 75, 129
Auffret *et al.* [1988] : 353, 365
Avolio *et al.* [1999] : 51, 53
Bagnold [1954] : 14, 16, 17, 24, 50, 53
Bagnold [1956] : 30, 32, 53
Bagnold [1962] : 30, 31, 53
Bagnold [1963] : 30, 53
Battaglia [1993] : 11, 53
Beghin et Olagne [1991] : 34, 53
Beghin [1979] : 33–35, 53, 64, 65, 67, 73, 125, 126, 129, 179, 181–183, 185, 189, 197, 205, 210, 243, 348, 349, 365
Bender et Orszag [1978] : 136, 138, 175, 279, 326, 365
Benjamin [1968] : 1, 21, 28, 35, 53, 64, 73, 129
Bonnecaze *et al.* [1993] : 40, 54, 73, 75, 96, 129, 210, 243, 349, 365
Bonnecaze *et al.* [1995] : 40, 54
Bouma *et al.* [1985] : 253, 365
Bouma [1962] : 263, 365
Bowen *et al.* [1984] : 22, 23, 28, 29, 54, 226, 230, 243
Branney et Kokelaar [1998] : 230, 243
Britter et Linden [1980] : 96, 129, 349, 365
Britter et Simpson [1978] : 96, 129, 349, 365
Burnage et Moon [1990] : 110, 129
Campbell [1998] : 49, 54
Cannon et Savage [1988] : 34, 54, 55
Cannon et Savage [1990] : 34, 54
Cao et Lerche [1994] : 120, 129
Chough et Hesse [1976] : 23, 54
Chu *et al.* [1979] : 37, 38, 41, 43, 54
Clift *et al.* [1978] : 110, 129
Coleman [1981] : 118, 129
Coussot [1999] : 50, 54
Crisci *et al.* [1999] : 51, 54
Csanady [1963] : 118, 129
Dade *et al.* [1994] : 34, 35, 54, 73, 129
Dade et Huppert [1995] : 35, 54
Daly [1936] : 19, 26, 27, 54
Darrozes et François [1982] : 75, 98, 129
Davies *et al.* [1986] : 49, 54
Davies [1986] : 16, 24, 54
Delinger [1987] : 1, 10, 11, 18, 21, 49, 54
Deutsch et Simonin [1991] : 47, 54, 110, 130
Didden et Maxworthy [1982] : 65, 130
Dietrich [1982] : 110, 130
Drazin et Reid [1997] : 279, 365
Eckert et Drake [1959] : 39, 54, 78, 80, 86, 130, 290, 365
Einsele [1991] : 256, 257, 365
Einstein [1956] : 108, 130
Ellisson et Turner [1959] : 28, 54, 92, 124, 125, 130
Enos [1977] : 14, 54, 256, 365
Erlichson [1990] : 34, 54
Felix [1998] : 47–49, 54, 75, 130
Fisher et Mattison [1968] : 17, 54
Fisher [1971] : 256, 365
Fredsoe et Deigaard [1992] : 117–120, 130
Fukushima *et al.* [1985] : 37, 55, 121, 125, 130, 156, 175, 226, 243
Fullana [1997] : 177, 243, 328, 332, 340, 365
Furnes [1999] : 47, 55, 64, 130, 279, 365
Garcia et Parker [1991] : 119, 130
Gatignol et Dudeck [1995] : 50, 55
Gatignol [1995] : 279, 365
Gatignol [1996] : 101, 130
Genesseeaux *et al.* [1980] : 215, 222, 223, 243
Gladstone *et al.* [1998] : 173, 175
Goodman et Cowin [1971] : 45, 55
Granjeon [1996] : 254, 365
Guillaume et Savoye [1990] : 352, 366
Guillemot [1986] : 255, 366
Guillocheau [1996] : 256, 366
Ha-Minh-Hiêu [1996] : 41, 55, 314, 315, 366
Habib [1994] : 215, 223, 243
Hampton [1972] : 11–13, 23, 55
Hampton [1975] : 14, 16, 17, 55, 256, 269, 366
Hampton [1979] : 12, 14, 16, 17, 55, 256, 269, 366

- Heezen *et al.* [1954]: 19, 55
Heezen et Ewing [1952]: 19, 22, 55
Heinrich *et al.* [1998]: 40, 55
Heinrich *et al.* [1999]: 40, 55
Hein [1982]: 260, 366
Herard et Simonin [1990]: 41, 42, 55
Hermann *et al.* [1993]: 1, 10, 18, 21, 43, 45, 47, 49, 55
Hinze [1960]: 35, 37, 55, 290, 366
Hiscott et Firth [1994]: 51, 55, 58
Hiscott et Middleton [1980]: 262, 366
Hopfinger et Tochon-Danguy [1977]: 64, 130, 181, 243
Hopfinger [1983]: 1, 21, 55, 64, 65, 124, 130
Hoyal *et al.* [1995]: 47, 55, 110, 130
Hsü [1975]: 24, 55
Hsü [1989]: 19, 55, 226, 230, 243
Hugot *et al.* [1998]: 142, 149, 151, 175
Hugot *et al.* [1999]: 142, 149, 151, 175
Hugot *et al.* [1999a]: 63, 72, 130
Hugot *et al.* [1999b]: 63, 74, 130
Hugot [1996]: 47, 55
Hugot [1997]: 16, 17, 45, 50, 55, 77, 108, 130, 247, 366
Hungr [1990]: 34, 54, 55
Huppert et Simpson [1980]: 35, 56, 65, 73, 96, 130, 144, 175, 349, 366
Huppert [1982]: 35, 55, 73, 130
Huppert [1998]: 35, 40, 55, 96, 130, 210, 243, 349, 366
Ingber [1993]: 330, 333, 366
Johnson [1966]: 29, 30, 56
Johnson [1970]: 14, 16, 17, 56, 258, 267–269, 366
Kirkpatrick *et al.* [1983]: 329, 330, 366
Kirwan *et al.* [1986]: 22, 34, 45, 56
Komar [1969]: 23, 56, 226, 230, 243
Komar [1971]: 19, 22, 28, 29, 56
Komar [1977]: 28, 33, 56
Krieger et Dougherty [1959]: 108, 130
Kuenen [1952]: 22, 27, 56
Kuenen [1967]: 22, 56
Lüthi [1980]: 29, 34, 56, 263, 366
Lüthi [1981]: 29, 56
Lagrée [1999]: 98, 130
Landau et Lifchitz [1971]: 39, 45, 56, 109, 130
Lapidus et Seinfeld [1971]: 313–315, 366
Larchevêque [1995]: 47, 56
Laval *et al.* [1988]: 1, 21, 56, 64, 131, 167, 168, 171–173, 175
Laval [1988]: 21, 56, 64, 65, 73, 131, 167, 168, 171–173, 175, 179, 189–210, 243, 256, 348, 349, 366
Lee [1969]: 108, 131
Levy [1996]: 279, 366
Lhuillier *et al.* [1996a]: 110, 131
Lhuillier *et al.* [1996b]: 110, 131
Lhuillier [1995]: 109, 131
Lin et w. Shen [1984]: 40, 56
Lowe [1976]: 258, 366
Lowe [1976a]: 18, 56
Lowe [1976b]: 18, 56
Lowe [1982]: 258, 260–262, 264, 366
Lumley [1978]: 107, 131
Lun *et al.* [1984]: 50, 56
Müller [1994]: 310, 367
Macdonald [1986]: 263, 366
Masini *et al.* [1990]: 309, 366
Masselot et Chopard [1998]: 51, 56
Mc Elwaine *et al.* [1998]: 50, 56
Mc Gee [1897]: 18, 56
Mc Manus [1963]: 271, 366
Metropolis *et al.* [1953]: 330, 366
Middleton et Hampton [1973]: 10, 57
Middleton et Hampton [1976]: 1, 17, 21, 57, 64, 131, 259, 366
Middleton [1966]: 137, 175
Middleton [1966a]: 9, 56
Middleton [1966b]: 9, 56
Middleton [1966c]: 26, 27, 29, 33, 38, 50, 57
Middleton [1967]: 9, 57, 266, 366
Middleton [1976]: 32, 57
Migeon [1997]: 351, 367
Mirza et Richardson [1979]: 108, 131, 173, 175
Miyamoto et Sasaki [1997]: 51, 57
Monin et Yaglom [1971]: 41, 42, 57
Mooney [1951]: 108, 131
Morner [1976]: 254, 367
Morton [1959]: 92, 131
Mulder *et al.* [1996]: 12, 18, 19, 22, 57
Mulder *et al.* [1997]: 215, 217, 221–223, 225–228, 230, 231, 237, 243
Mulder *et al.* [1998]: 1, 57
Mulder *et al.* [1998a]: 215, 216, 243
Mulder *et al.* [1998b]: 215, 244
Mulder [1993]: 19, 22, 57, 215, 217, 222, 223, 231, 243
Muller [1989]: 352, 367
Muller [1991]: 352, 353, 367
Naaim [1995]: 1, 10, 18, 44, 45, 47–49, 57, 75, 131
Naylor [1980]: 17, 57
Nelder et Mead [1965]: 330, 367
Nordlund et Hern [1999]: 51, 57
Nordlund [1996]: 51, 57
O'Brien et Julien [1985]: 23, 57
Odar et Hamilton [1964]: 110, 131
Olsen [1997]: 117, 131
Pantin [1979]: 33, 34, 37, 57, 93, 131, 290, 367

-
- Parker *et al.* [1986]: 37, 38, 57, 121, 122, 125, 131, 156, 175, 226, 244
- Parker *et al.* [1987]: 37, 39, 57, 121, 122, 125, 131, 290, 367
- Parker [1978]: 120, 131
- Parker [1982]: 21, 37, 38, 57, 120–122, 131
- Patwardhan et Tein [1985]: 108, 131
- Pautot [1988]: 221, 244
- Pianelo [1999]: 339, 367
- Pickering *et al.* [1986]: 9, 57
- Pickering *et al.* [1989]: 10, 14, 16, 19, 21, 22, 28, 32, 33, 57, 253, 263, 367
- Pierson [1981]: 12, 14, 17, 58
- Piper *et al.* [1984]: 23, 58
- Piper et Savoye [1993]: 19, 22, 58, 214, 215, 217, 221–226, 228, 230, 231, 237, 239, 240, 244, 351, 367
- Piper et Stow [1991]: 266, 367
- Plapp et Mitchell [1960]: 35–40, 58, 290, 367
- Prandtl [1925]: 47, 58, 114, 131
- Press *et al.* [1992]: 312, 314–316, 329, 330, 335, 367
- Ravenne et Beghin [1982]: 21, 58
- Ravenne et Beghin [1983]: 1, 9, 19, 21, 58, 64, 131, 189, 244, 255, 367
- Ravenne et Beghin [1984]: 21, 58, 64, 131
- Ravenne et Ponsot-Jacquín [1993]: 253–255, 367
- Reading et Richards [1994]: 253, 255, 367
- Reineck et Singh [1980]: 260, 265, 266, 367
- Reynolds [1894]: 46, 58, 81, 131
- Richardson et Meikle [1961]: 108, 112, 132, 173, 175
- Richardson et Zaki [1954]: 111, 112, 132
- Rodine et Johnson [1976]: 14, 17, 58, 268, 270, 367
- Rodi [1980]: 47, 58
- Romanelli [1965]: 312, 313, 367
- Rothman *et al.* [1994a]: 20, 51, 55, 58
- Rothman *et al.* [1994b]: 51, 58
- Rothman [1985]: 329, 330, 333, 367
- Rothman [1986]: 330, 333, 367
- Rottman et Simpson [1983]: 96, 132, 349, 368
- Rouse [1938]: 119, 132
- Rzadkiewicz *et al.* [1998]: 45, 48, 58
- Sampl [1993]: 1, 11, 21, 43–45, 47, 49, 58
- Savage et Lun [1988]: 17, 58
- Savage [1984]: 24, 58
- Savoye *et al.* [1997]: 221, 244
- Savoye et Guillaume [1990]: 353, 368
- Savoye [1996]: 351, 368
- Schlichting [1979]: 77, 78, 81, 82, 93, 97, 114, 118, 132, 287, 303, 368
- Schwarz et Cosart [1961]: 116, 132
- Shanmugam *et al.* [1985]: 253, 368
- Shanmugam *et al.* [1994]: 12, 58
- Shen et Ackermann [1982]: 50, 58
- Shields [1936]: 120, 132
- Shultz [1984]: 11, 12, 14, 58
- Siegenthaler et Buhler [1985]: 30, 37, 58, 260, 368
- Simonin *et al.* [1990]: 47, 59, 110, 132
- Simonin [1991]: 110, 118, 132
- Simonin [1991a]: 41, 42, 58
- Simonin [1991b]: 47, 59
- Simpson et Britter [1978]: 35, 59, 73, 132
- Simpson [1972]: 21, 59
- Simpson [1982]: 18, 59
- Skogseth [1999]: 45, 47, 49, 59, 64, 75, 132, 279, 368
- Smith et McLean [1977]: 120, 132
- Sparks *et al.* [1993]: 40, 59
- Speziale [1987]: 47, 59
- Speziale [1996]: 115, 132
- Stewart et Wendroff [1984]: 41, 59
- Stow *et al.* [1985]: 252, 253, 368
- Stow et Bowen [1980]: 22, 23, 59, 266, 368
- Stow [1986]: 6, 7, 13, 15, 59, 257, 264, 265, 368
- Straub et Valentine [1998]: 50, 59
- Sylvain [1996]: 310, 368
- Takahashi *et al.* [1992]: 17, 59
- Takahashi [1980]: 17, 59
- Takahashi [1981]: 12, 24, 59
- Takahashi [1993]: 17, 59
- Tarantola [1987]: 328–330, 368
- Tennekes et Lumley [1972]: 82, 85, 92, 132, 279, 368
- Tochon-Danguy et Hopfinger [1977]: 181, 244
- Triton [1977]: 279, 368
- Turcotte [1989]: 51, 59
- Turner [1973]: 37, 59, 67, 93, 132, 290, 368
- Turner [1986]: 92, 124, 132
- Valentine et Wohletz [1989]: 1, 10, 18, 21, 41, 42, 49, 59
- Van Rijn [1984]: 109, 111, 118–120, 132
- Von Kàrmàn [1921]: 38, 59
- Wang et Maxey [1993]: 110, 118, 132
- Zaleski [1995]: 47, 59, 275, 368
- Zanella [1995]: 351, 368
- Zeng *et al.* [1991]: 226, 230, 244
- Zeng et Lowe [1992]: 40, 59, 108, 132, 173, 175
- Zeng et Lowe [1997]: 40, 59, 75, 132
- Zheng et Hill [1996]: 50, 59
- Zhiming [1995]: 44, 45, 47, 49, 60, 75, 132



Résumé

Nous proposons dans cette thèse un modèle mathématique simple adapté à la sédimentation des dépôts gravitaires en eaux profondes. L'écoulement est traité comme un objet géométrique déformable. Les principaux mécanismes physiques pris en compte par le modèle sont : 1. La turbulence ; 2. L'étalement dû aux forces de pression ; 3. L'incorporation de fluide le long de l'interface suspension–fluide ambiant ; 4. La sédimentation de particules ; 5. L'érosion de particules.

Les solutions analytiques asymptotiques du système différentiel non-linéaire montrent la consistance des solutions numériques sur les temps longs. Les tests numériques permettent de quantifier l'impact qualitatif et quantitatif des paramètres physiques du modèle, des conditions initiales et des paramètres de contrôle (pente, granulométrie).

Une méthode d'inversion est mise en œuvre pour l'identification des conditions initiales et/ou des paramètres du modèle. L'inversion partielle (détermination des conditions initiales) appliquée à des modèles réduits expérimentaux montre le bon comportement qualitatif du modèle et cela même hors du domaine de validité strict de ce dernier. L'inversion totale (identification des paramètres physiques et détermination des conditions initiales) montre le bon comportement du modèle d'un point de vue quantitatif au niveau des vitesses de l'écoulement et des épaisseurs déposées. La méthode d'inversion est appliquée à l'effondrement de l'aéroport de Nice en 1979 pour tester des scénarios d'écoulement. Contrainte par les ruptures de câbles et/ou les épaisseurs déposées, elle permet, par exemple, d'estimer le volume initial ou les paramètres physiques de l'effondrement (coefficient de friction, nombre de Schmidt turbulent modifié, etc.).

Malgré quelques limitations, principalement dues aux simplifications géométriques de l'écoulement, ce modèle complet constitue un premier pas vers la compréhension quantitative de l'impact des paramètres externes —tels que la nature et la quantité des apports en sédiments, la géométrie du bassin— sur la dynamique des courants turbiditiques et l'organisation des séquences de dépôts qui en résultent. Grâce à ses faibles temps de calcul sur micro-ordinateur, il est envisageable de simuler des séries d'événements et de former ainsi des séquences de dépôt multi-événementielles. Il peut être utilisé pour reconstruire les processus de sédimentation et les dépôts résultants.

Mots-clés: écoulement gravitaire catastrophique / objet écoulement / équations différentielles / inversion / modèles réduits / analogue réel / turbidites.

Abstract

In this thesis, we propose a simple mathematical model for the sedimentation of gravity deposits in deep water. The flow is considered as a deformable geometrical object. Main physical features of the model include : 1. Turbulence; 2. Spreading due to pressure forces; 3. Water incorporation at the suspension–ambient fluid interface; 4. Particles settling; 5. Particles erosion.

Asymptotic analytical solutions of the non-linear differential system show the consistency of long times numerical solutions. Numerical tests allow the quantification of the impact of physical parameters, initial conditions and controlling parameters (slope, granulometry).

An inverse method is developed in order to identify initial conditions and/or model parameters. Partial inversion (initial conditions identification) applied to small-scaled models, shows the good qualitative behaviour of the model, even out of its validity range. Total inversion (physical parameters and initial conditions identification) shows the good quantitative behaviour of the model on velocities and deposit thicknesses. Application of the inverse method to the Nice 1979 gravity flow (south–France), constrained by cable breaks and/or deposit thicknesses, leads, for example, to initial volume estimation or flow physical parameters (friction coefficient, modified turbulent Schmidt number, etc.).

Despite some limitations, due to the geometrical simplification of the flow, this complete model constitutes a first step towards quantitative comprehension of the impact of external parameters on catastrophic gravity flow dynamics and on the organization of subsequent deposits. Due to its very short computational times, it is foreseeable to simulate series of events and therefore to form multi-event depositional sequences. It can be used to reconstruct the sedimentation processes and the resulting architecture of deep-water reservoirs.

Keywords: catastrophic gravity flow / flow object / differential equations / inversion / small-scaled model / real analogue / turbidites.