

Sur les courbes intégrales du champ de gradient

19 décembre 2001

Topologie modérée (Whitney, Thom, Łojasiewicz, Gabrielov, Hironaka,...) :

- Étude des propriétés géométriques des ensembles semi-algébriques, semi-analytiques,...
- Étude du comportement des fonctions semi-algébriques, semi-analytiques, sous-analytiques,...

“Bonnes” propriétés de finitude :

- croissance monotone des fonctions d’une variable réelle
- décomposition cellulaire
- triangulation
- stratification
- fibration
- ...

Khovanskii : Étude de la transcendance des solutions de certaines équations.

Problème de Tarski : Construction d'une catégorie géométrique contenant les ensembles semi-algébriques et la fonction exponentielle, possédant des propriétés analogues à celles des semi-algébriques.

Wilkie : Réponse positive. C'est la structure o-minimale \mathbb{R}_{exp} .

Structures o-minimales sur \mathbb{R} (van den Dries, Miller, Wilkie,...) $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

\mathcal{M}_n collection de sous-ensembles de \mathbb{R}^n
tels que :

1. \mathcal{M}_n algèbre booléenne (stable par \cap , \cup , complémentaire),
2. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}$,
3. $A \in \mathcal{M}_{n+p} \Rightarrow \pi_n(A) \in \mathcal{M}_n$,
4. \mathcal{M} contient les semi-algébriques,
5. Tout sous-ensemble de \mathcal{M}_1 est réunion finie d'intervalles et de points
(o-minimalité).

Vocabulaire :

Ensemble définissable dans \mathcal{M} .

Application f définissable au sens : $\Gamma(f)$
est définissable.

Exemples : \mathbb{R}_{exp} , $\mathbb{R}_{\text{an}}^{\mathbb{R}}$, ens. glob. sous-analytiques.

Soit $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme.

Théorème (Thom) :

Il existe un ensemble fini $\Delta \subset \mathbb{C}$ tel que :

$$p : \mathbb{C}^n \setminus p^{-1}(\Delta) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta$$

est une fibration localement triviale.

Condition de Malgrange en $t \in \mathbb{C}$:

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $|x|$ “suffisamment grand” et $p(x) \in V_t$:

$$(M) \quad |x| \cdot |\nabla p(x)| \geq C,$$

où V_t un voisinage ouvert de t .

Théorème (Parusiński) :

Si t n'est pas une valeur critique de p , alors la condition (M) est une condition suffisante de trivialisatation au dessus de V_t .

Cas o-minimal :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dfn, C^1 .
Quelles sont les valeurs de f où la condition de Malgrange (M) est vérifiée ?

Définition (Valeurs critiques asymptotiques) :

$$K_\infty(f) = \{c \in \mathbb{R} : (\text{M}) \text{ n'est pas vérifiée en } c\}$$

Théorème 1. *Si f est définissable et de classe C^1 , alors $K_\infty(f)$ est fini.*

De plus si f est C^2 et si $K_0(f)$ désigne l'ensemble des valeurs critiques de f , alors :

Théorème 2 (Fibration).

La fonction f réalise une fibration triviale au dessus de chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus (K_0(f) \cup K_\infty(f))$.

Soit f une fonction dfn, C^2 sur \mathbb{R}^n . Supposons que la fonction f vérifie :

- $0 \in K_\infty(f) \setminus K_0(f)$
- pour un $t < 0$, l'intervalle : $[t, 0[$ ne contient ni valeur critique, ni valeur critique asymptotique.

Théorème 3 (Plongement).

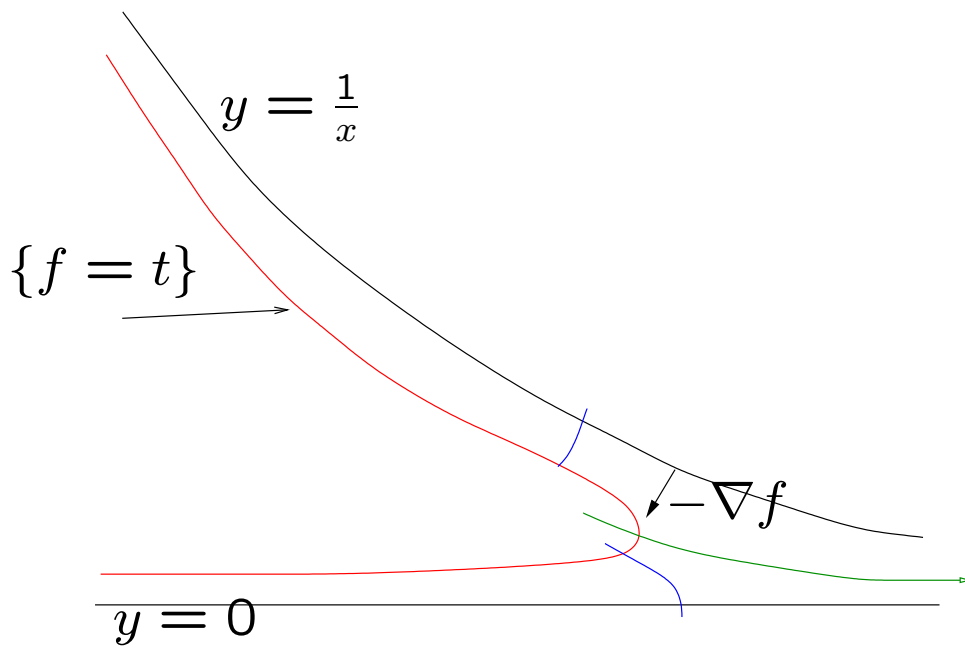
Il existe une immersion injective ouverte $\varphi_t : f^{-1}(0) \rightarrow f^{-1}(t)$ qui plonge chaque composante connexe de $f^{-1}(0)$ dans une composante connexe de $f^{-1}(t)$.

Corollaire 4.

Soient p un polynôme complexe lisse, t une valeur typique et c une valeur critique asymptotique. Alors il existe une immersion injective ouverte

$$\varphi_{c,t} : p^{-1}(c) \rightarrow p^{-1}(t)$$

Exemple (Broughton) :



$$f(x, y) = y(xy - 1)$$

Longueur des Courbes Intégrales de ∇f

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dfn, C^2 sur un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$.

Soit γ une trajectoire de ∇f dans U .

Problèmes : estimer $\text{long}(\gamma)$ au voisinage d'une :

- singularité ($\nabla f(x_0) = 0$),
- singularité au bord de U
($\nabla f(x) \rightarrow 0$ qd. $x \rightarrow x_1 \in \partial U$).

Théorème (Kurdyka) Il existe $M > 0$ t. q. pour toute trajectoire γ de ∇f ,

$$\text{long}(\gamma) \leq M$$

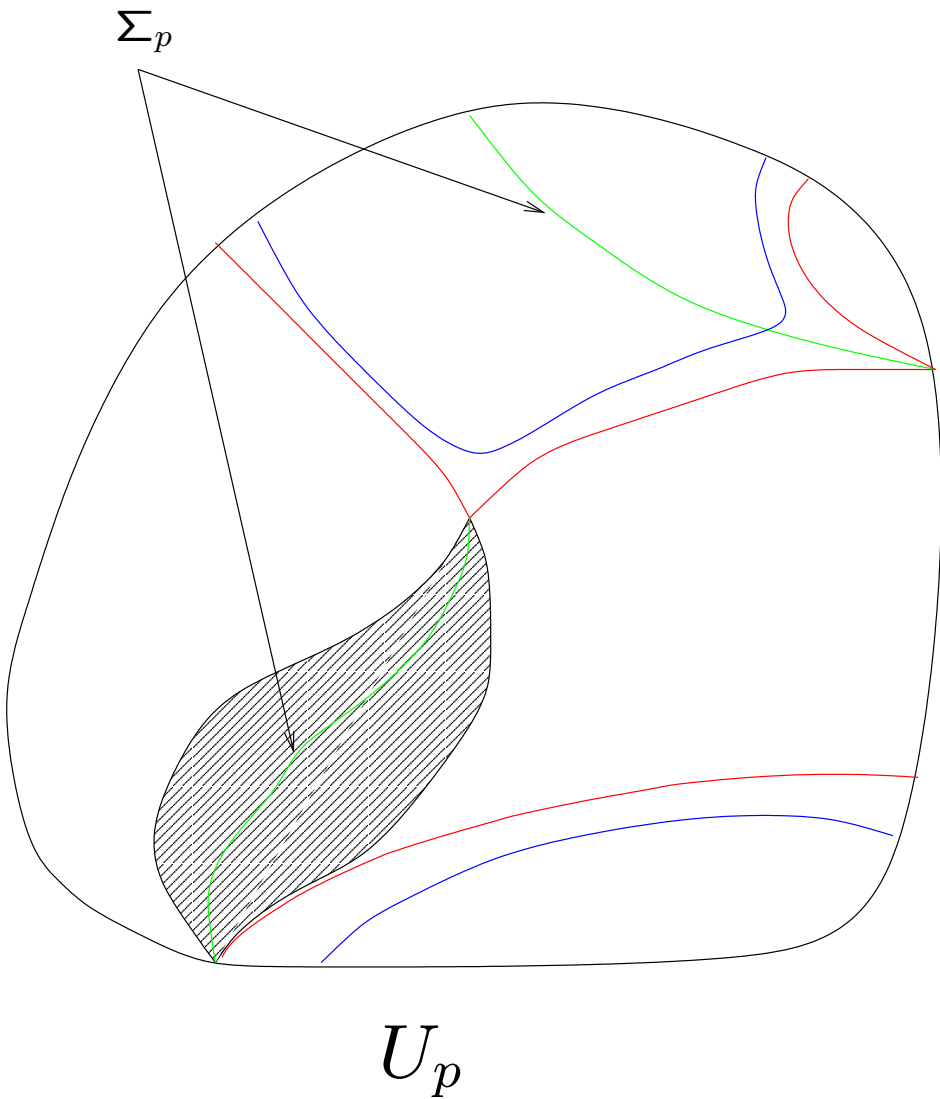
Cas d'une famille définissable de fonctions

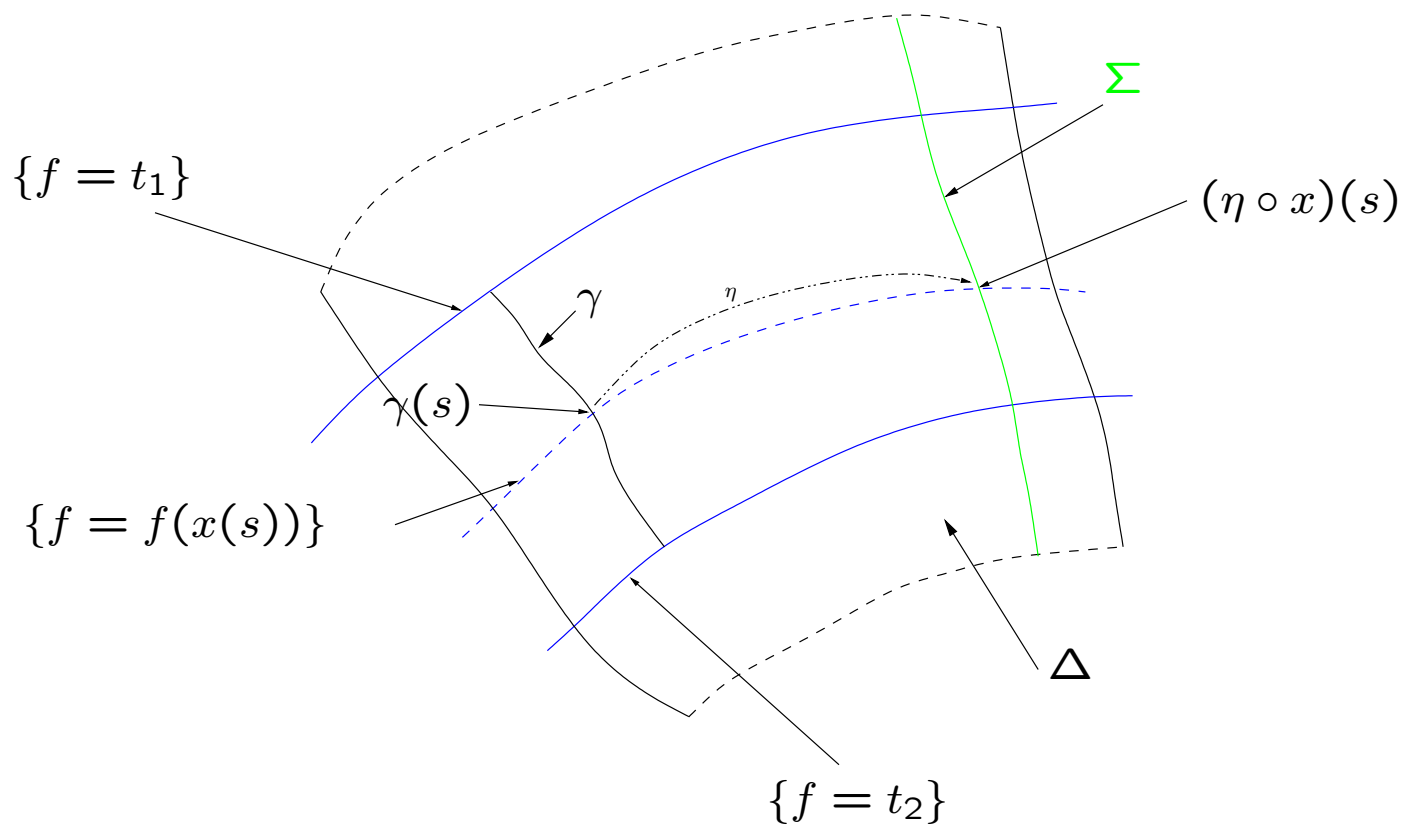
Soit $\mathcal{F} = \{f_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in \mathcal{P}}$ une famille dfn de fonctions C^2 , telle que $\forall p \in \mathcal{P}, U_p \subset K$ compact de \mathbb{R}^n .

Théorème 5 (Borne uniforme).

Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $f_p \in \mathcal{F}$ et toute trajectoire γ_p de ∇f_p :

$$\text{long}(\gamma_p) \leq M$$





1. $\text{long}(\gamma) \leq 2\text{long}(\Sigma)$
2. Formule de Cauchy-Crofton + Théorème de finitude Uniforme

$$\Rightarrow \text{long}(\Sigma) \leq M$$

Corollaire 6.

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme de degré d
et γ une courbe intégrale de ∇f dans \mathbb{B}^n .
Alors

$$\text{long}(\gamma) \leq M(n, d)$$

Estimation de la constante

Problème : Choix explicite de Σ

Pour “presque” tout polynôme de degré $\leq d$

$$\Sigma = \inf\{|\nabla f(x)| : f(x) = C^{te}, x \in \overline{\mathbb{B}^n}\}$$

est réunion finie de courbes algébriques.

Pour un polynôme f “générique”

$$\text{long}(\gamma) \leq A(n, d) \text{ et :}$$

$$A(n, d) = 2V(n)((3d - 4)^{n-1} + 2(3d)^{n-2})$$