



HAL
open science

Modélisation, analyse mathématique et applications numériques de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires

Paul Metier

► **To cite this version:**

Paul Metier. Modélisation, analyse mathématique et applications numériques de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT: . tel-00002900

HAL Id: tel-00002900

<https://theses.hal.science/tel-00002900>

Submitted on 27 May 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation, analyse mathématique et applications numériques de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le Lundi 24 Mars 2003

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie – Paris 6
(Spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Paul MÉTIER

Composition du jury

<i>Président :</i>	Olivier PIRONNEAU	
<i>Rapporteurs :</i>	Luca FORMAGGIA Marius TUCSNAK	
<i>Examineurs :</i>	Yves ACHDOU Frédéric HECHT Yvon MADAY Bertrand MAURY	Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Mes premières pensées se tournent vers mon directeur de thèse, Yvon Maday. Je lui adresse toute ma gratitude pour ces quatre années sous sa direction. Du stage de DEA jusqu'à la réalisation de ce mémoire, son encadrement a été beaucoup plus qu'une formation par la recherche. Je le remercie tout d'abord pour le temps qu'il a su m'accorder entre tous ses changements quotidiens de casquettes professionnelles : directeur de thèses, directeur de l'ASCI, directeur du laboratoire Jacques-Louis Lions, directeur de l'UFR, directeur de l'école Doctorale... Par ailleurs, je lui suis gré de toutes les qualités pédagogiques, humaines et relationnelles apprises à son contact. Je souhaite aussi souligner sa patience, son soutien moral et son optimisme contagieux permanent. Je n'oublie pas bien sûr la formation à la recherche qu'il a su me dispenser, les sujets passionnants vers lesquels il m'a dirigé, et les personnes qu'il m'a fait rencontrer. C'est avec sincérité et joint que je lui dis "Merci!".

Je suis reconnaissant envers mes rapporteurs, Marius Tucsnak¹ et Luca Formaggia² d'avoir accepté de rapporter cette thèse, et je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce travail. J'en profite pour adresser ma gratitude à Marius Tucsnak pour les discussions que nous avons échangées et les conseils qu'il m'a adressés.

Je remercie Olivier Pironneau pour sa confiance tout au long de ma thèse, et pour avoir accepté d'être dans mon jury. J'adresse mes remerciements à Frédéric Hecht pour nos discussions, notamment et encore plus pour FREEFEM++ ; je lui suis par ailleurs gré d'être dans mon jury.

Je remercie le Laboratoire Jacques-Louis Lions (anciennement Laboratoire d'Analyse Numérique) pour son accueil en son sein. J'adresse en particulier ma gratitude au groupe de travail "Méthodes Numériques" à travers ses organisateurs : Yves Achdou, Christine Bernardi, Albert Cohen et Yvon Maday. Je les remercie pour la confiance qu'ils m'ont accordée d'être pendant trois ans secrétaire de ce groupe. J'ai beaucoup apprécié l'atmosphère de ces séances de travail qui ont ouvert mes connaissances vers de nombreux sujets. J'en profite pour remercier tout particulièrement Yves Achdou pour avoir accepté d'être membre de mon jury de thèse.

Je remercie vivement Bertrand Maury qui m'a initié à la programmation. Il a par ailleurs su aiguïser mon esprit critique pour le confronter pragmatiquement aux sujets de recherche. Je tiens à lui adresser toute ma gratitude pour le temps qu'il a pris pour me transmettre, avec patience, de nombreuses connaissances, tant théoriques que d'applications, notamment lors du CEMRACS'99. Je lui suis gré aussi de ses réponses détaillées à mes diverses questions.

Je remercie Céline Grandmont pour le temps qu'elle a passé à me donner ses connaissances théoriques, pour sa rigueur, son exigence et pour ses coups de crayon (et de pattes de tigre) sur mes feuilles de travail.

Viennent ensuite les remerciements (non moins sincères) à ceux qui ont partagé mon quotidien de thésard au laboratoire. Je commence par Stéphane *GNU/Debian* Delpinix qui m'a fait découvrir Linux et les logiciels libres, et m'a appris à m'en servir. Sans sa patience à chacune de mes (+)++ questions, je n'aurais pas autant avancé... tant pratiquement qu'en autonomie (merci *man delpinix*). Un grand merci aussi à Pascal *Hydre* Have^{MP1} qui a réparé (+)++ fois mes scripts, mes films et mes boulettes : merci au galopin Pascal pour sa disponibilité abusive et son incapacité à dire non (dites

¹Université Henri Poincaré - Nancy 1

²MOX, Politecnico di Milano, Italie

plutôt “Nan-gnan-gnan” en agitant en parallèle les poings serrés fermés ;-). Je remercie mes nombreux compagnons de bureaux (des générations de thésards, pensez donc !) : Basarab *Jpeg* Matéï pour ses discussions culturelles et ses cafés, et dans un désordre alphabétique : Augusto *philosophico* Ponce, Karim *swimming* Trabelsi, Louis $H^{5/6\text{ ans}}$ (*Fac*) Dupaigne, Nicolas *GNU/optimisation* Di Cesare, Christophe *Debian* Prud’homme (pour ses analyses pertinentes), Marwan *structure-fluide* Moubachir (pour nos développements et discussions), Daad *simulation numériq* Abou Saleh, Martin *thé-café-bonbon-chocolat* Campos-Pinto, Frédéric *Ni-diffusif-Ni-dissipatif* Lagouttière (pour ses précieuses relectures de cette thèse et ses regards inquiets « Alors... ?ça va ? » :-), Mohammed *GTMN Eℓ* Rhabi, Mourad *Fat guy* Ismail, Pascal *Schrödinger* Bégout, Nicolas « *Je peux utiliser votre Mac ?* » Bacaer, David *Mdk* Ramos, Simona *tiramisu* Mancini, Philippe *Nissa-gruik-gruik* Hoche, Olivier *Coque* Pantz, Hervé *cyclo* Maillot, Siavash *Stephan* Vaziri, Vincent *español* Millot, David $/_{16^{30}}$ Chiron, Gabriel *chimiste* Turincci, Cécile *Mac* Dobrzynski, Marjolaine *thé* Puel, Igor *contrainté* Ciril, Delphine *simple et polie* Salort, Luis-Manuel $\mathcal{P}_{\text{Venezuela}}$ Hernandez, Alexandra *Immersed Boundary (and sometimes crying)* Franchitti (pour sa vivacité joviale quotidienne et pour les débogages partagés), Jérôme *Boule-de-feu* Coville, Jérôme *contact* Mbala, Francesca *Maxwella* Rappetti, Leonardo *Air/Fluid-structure* Baffico, Julien *quantique* Salomon, Hamdi *Cinézorro* Zorgati, Marcella *géo-diff* Szopos, Sever *Hirstoaga*, Saïma *functional* Khenissy, Sara *italiano* Monsurro, Christinel et Sorin *elastic brothers* Mardare, Dimitrios , Anne *Asymptotique* Roquefort, éric *Système-D* Sorosina, Marius « *Il est là Basarab ?* » Païcu, et (selon la formule consacrée répandue dans les thèses des doctorants) les *joyeux thésards* ; et les plus anciens : Georgiana *evangelista* Andreoiu, Valentina Busuïoc, Julia Matos, Tahar Boulmezaoud, et Daniel Coutand.

Je remercie les différents secrétariats : au laboratoire, Mesdames Boulic et Ruprecht, pour leur convivialité et leurs explications administratives simplifiées ; et Monsieur Ortells ; à la bibliothèque du labo, Madame Legras ; à l’école Doctorale et à la commission des thèses Madame Loriller pour son attention particulière ; au DEA, Madame Lacrampe et Mademoiselle Barbelenet ; et aussi Madame Guglielmetti, notamment pour le GdR “Fluides-structures en interaction”. Je remercie Messieurs Legendre et Portès pour l’administration du réseau informatique.

J’adresse ma gratitude à Monsieur David pour ses accueils souriants, sa disponibilité et sa serviabilité ; je le remercie pour l’impression de cet ouvrage, pour le rayon fournitures et pour le rayon “bricolage” pratique pour solutions rapides.

Enfin, et c’est parce qu’eux seuls auront eu la patience de lire tout ça jusqu’au bout, je remercie mes amis hors-fac et leurs questions bouwersifiantes, leurs soutiens, leurs échanges et surtout leurs bouffées d’air. Sans eux, impossible d’avancer. Un grand merci à la famille d’Hélène, et encore plus à mon épouse, qui a su porter et supporter avec beaucoup d’amour son Paul. Merci enfin pour tout à Annie, et pour son impulsion jusqu’en thèse.

[v.20030527-1635]

à Annie,
à Hélène,

Table des matières

Table des figures	xi
-------------------	----

Introduction générale. Motivation de la thèse	1
---	---

1	Modélisation	5
1.1	Modèles de fluides	6
1.2	Modèles de structures	7
1.3	Couplage d'un fluide et d'une structure	8
1.4	Modélisation d'un ventricule artificiel	9
2	Analyse mathématique	10
2.1	Bilan d'énergie. Découplage	11
2.2	Sous-système structure	12
2.3	Sous-systèmes découplés. Système couplé	12
3	Applications numériques	13
3.1	Méthodes numériques générales	13
3.2	Méthodes spécifiques à l'interaction fluide-structure et au contrôle	14
4	Plan de la thèse	15

Partie I Modélisation et analyse d'un problème d'élasticité en grands déplacements et petites déformations	17
--	----

Introduction à la partie élasticité	19
Chapitre 1	
Modélisation d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations	21
1.0.1 Espace de Sobolev. Traces	22
1.1 Décomposition de la déformation	22
1.1.1 Unicité de la décomposition du mouvement	22
1.1.2 Une autre démarche pour la décomposition du mouvement	24
1.1.3 Cadre fonctionnel. Mouvements infinitésimaux	26
1.1.4 Différentielle de la déformation suivant les composantes du mouvement	26
1.2 Équations du mouvement (formulation faible)	28
1.3 Estimations d'énergie pour le problème continu	30
1.4 Dynamique de la translation, de la rotation, de la perturbation	32
1.5 Approximation modale	34
Chapitre 2	
Existence et unicité de la solution	37
2.1 Résultats principaux	38
2.1.1 Existence d'une unique solution pour le problème en translation, rotation, et perturbation	38
2.1.2 Existence d'une unique solution pour le problème en déplacement	38
2.2 Existence d'une solution	39
2.2.1 Existence de solution pour le problème en dimension finie	39
2.2.2 Une estimation d'énergie supplémentaire	41
2.2.3 Existence d'une solution pour le problème continu en translation, rotation et perturbation	47
2.2.4 Existence d'une solution pour le problème continu en déplacement	49
2.3 Unicité de la solution	51
2.3.1 Étape 1. Réécriture du système d'équations.	52
2.3.2 Étape 2. Estimations des termes de \mathcal{R}	53
2.3.3 Étape 3. Estimations des termes liés aux forces extérieures.	55
2.3.4 Étape 4. Unicité de la solution régulière.	56
2.3.5 Étape 5. Unicité de la solution.	57

Chapitre 3**Approche numérique par méthode modale****61**

3.1	Rappel du modèle continu	62
3.2	Discrétisation spatiale du système	64
3.3	Condition d'inversibilité du système de dimension finie	64
3.4	Analyse modale	66
3.4.1	Choix d'une base d'approximation. Analyse modale	66
3.4.2	Exemples illustratifs de quelques modes propres	68
3.5	Algorithme de mise en œuvre	69
3.5.1	Calculs préliminaires	69
3.5.2	Semi-discrétisation en temps : schéma d'Euler	73
3.5.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	73
3.5.4	Algorithme général	74

Partie II Interaction fluide-structure**77**

Introduction à la partie de couplage fluide-structure**79****Chapitre 1****Solution régulière pour le couplage d'un fluide et d'une structure élastique****81**

1.1	Présentation du modèle	83
1.1.1	Modélisation	83
1.1.2	Estimation d'énergie	85
1.1.3	Écriture du système fluide en variables lagrangiennes	87
1.1.4	Condition de compatibilité sur la perturbation	88
1.1.5	Approximation modale pour la perturbation de la déformation structure	89
1.2	Résultat principal	90
1.3	Existence de solution au problème couplé	91
1.3.1	Stratégie de la démonstration. Présentation des problèmes (\mathcal{F}) et (\mathcal{S})	91
1.3.2	Existence de solution pour le problème (\mathcal{F})	93
1.3.3	Existence de solution pour le problème (\mathcal{S}) sous contrainte	96
1.3.4	Procédure de recouplage	100

Chapitre 2	
Analyse et simulation de couplages de fluides potentiels et d'une structure élastique	115

2.1	Introduction	116
2.1.1	Modélisation 1 : ventricule artificiel	116
2.1.2	Modélisation 2 : couplage d'un fluide potentiel et d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations	116
2.2	Modélisation d'un ventricule d'un cœur artificiel	116
2.2.1	Structure	117
2.2.2	Fluides potentiels	117
2.2.3	Tenseur des contraintes	119
2.2.4	Synthèse des éléments de couplage	119
2.2.5	Autre modélisation possible	119
2.3	Estimations d'énergie pour le système du ventricule artificiel	120
2.3.1	Estimations d'énergie des systèmes découplés	120
2.3.2	Estimation d'énergie du système couplé global à deux cavités	121
2.4	Algorithme et résultats numériques de la simulation du ventricule artificiel	123
2.4.1	Discrétisation des équations	123
2.4.2	Résultats numériques	127
2.5	Modélisation du couplage d'un fluide potentiel et d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations	128

Chapitre 3	
Simulation du couplage fluide-structure de fluides visqueux et d'une structure élastique	131

3.1	Modélisation à l'aide de la méthode de la frontière immergée	133
3.1.1	Généralités. Cadre hémodynamique	133
3.1.2	Méthode de la frontière immergée	135
3.1.3	Choix de la fonction de forces structure	136
3.1.4	Approximations numériques de la mesure de Dirac	139
3.1.5	Contrainte supplémentaire de conservation de volume	142
3.2	Simulation Numérique Directe	145
3.2.1	Algorithme	145
3.2.2	Maillages	146
3.2.3	Paramètres σ_b , σ_s et σ_c	147

3.2.4	1er test : observation de la membrane collant à la paroi	150
3.2.5	2ème test : observation d'un cycle cardiaque	151
3.3	Simplification du modèle fluide-structure guidé par la conservation volumique	155
3.3.1	Motivation d'un modèle simplifié	155
3.3.2	Modèle simplifié	156
3.3.3	Condition de conservation volumique	157
3.3.4	Expression des forces structure et de leurs différentielles	157
3.3.5	Algorithme synthétique de simulation numérique directe	160
3.4	Une démarche de contrôle par feedback	160
3.4.1	Motivations	160
3.4.2	Objectif principal du contrôle du système	161
3.4.3	Système des perturbations	162
3.4.4	Système linéarisé des perturbations. Problème de contrôle	164
3.4.5	Semi-discrétisation temporelle du système linéarisé des perturbations	164
3.4.6	Discrétisation totale du système linéarisé des perturbations	165
3.4.7	Formulation Linéaire-Quadratique du problème de contrôle	167
3.4.8	Contrôle par feedback	170
3.4.9	Algorithme de calculs des matrices de gain de Kalman	171
3.4.10	Mise en œuvre du contrôle sur le système en vitesse-pression	176
3.5	Résultats numériques du contrôle par feedback du modèle fluide-structure simplifié	176
3.5.1	Cadre applicatif général des tests	176
3.5.2	Triplet (k_1, k_2, k_3) des différents tests	180
3.5.3	Algorithme de parallélisation du calcul des vecteurs de Kalman	180
3.5.4	Variantes d'application du contrôle	183
3.6	Conclusion. Perspectives	186

Annexes	187
----------------	------------

Annexe A Formulaire et rappels accessoires	187
A.1 Rappels de calcul vectoriel	187
A.2 Intégrales particulières	188
A.3 Rappels de calcul matriciel	188
A.4 Un aparté de calcul différentiel et de notations particulières	189

Annexe B Principes introductifs à la méthode ALE. Application aux équations de Navier-Stokes	191
B.1 Description lagrangienne	191
B.2 Description eulérienne	192

B.3	Équivalence des descriptions lagrangienne et eulérienne	193
B.4	Formulation ALE : <i>Arbitrary Lagrangian-Eulerian</i>	193
B.4.1	Point de vue théorique formel	193
B.4.2	Un point de vue numérique appliqué aux équations de Navier-Stokes . . .	195
B.4.3	Utilisation de ces méthodes dans la thèse	196
	Index	197
	Bibliographie	199

Table des figures

1	a. Illustration de la portance autour d'une aile d'avion. b. Coupe schématique tridimensionnelle d'un pont (tablier et piles). Écoulements de fluides autour du pont. . .	3
2	a. Déformation élastique de la paroi veineuse (dont la configuration de référence est cylindrique) en interaction avec le flux sanguin. b. et c. Écoulement particulaire constitué de globules rouges baignés dans le sang, à l'intérieur d'une cavité veineuse proche d'une bifurcation. b. Vue bidimensionnelle du dessus indiquant l'axe de la section d'observation et l'angle de vue. c. Vue en profondeur selon la section d'observation et à partir de l'angle de vue.	4
3	Anatomie du cœur suivant une coupe où les quatre cavités sont visibles (figure issue de [Dec97]).	9
1.1	Configuration de référence $\bar{\Omega}$ et configuration déformée $\phi(\bar{\Omega})$, déformation ϕ et déplacement \mathbf{u}	22
1.2	Décomposition de la déformation : 1. Application de la perturbation \mathbf{d} . 2. Composition avec la rotation de centre G et d'angle θ . 3. Composition avec la translation de vecteur τ	23
1.3	Rotation $\xi \mapsto RG\xi$ d'angle θ et de centre G , et rotation infinitésimale $\xi \mapsto \theta' e_z \wedge G\xi$ d'angle θ' et de centre G	26
3.1	Seconde translation infinitésimale et rotation infinitésimale de la structure elliptique pour $N = 58$ points de discrétisation.	69
3.2	Comparaison des 4-ième et 7-ième modes propres de la structure elliptique pour $N = 156$ points et $N = 1526$ points de discrétisation spatiale.	70
3.3	Les 999-ième et 1524-ième modes propres de la structure elliptique pour $N = 1526$ points de discrétisation.	71
1.1	Configuration des domaines fluide et structure à deux instants t_1 et t_2 différents (tels que $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ par exemple).	83
2.1	Cavité remplie par deux fluides potentiels séparés par une membrane élastique.	117
2.2	Maillage et vitesses au temps $t=3$	125
2.3	Vitesses aux temps $t=8$ et $t=13$	125
2.4	Isovaleurs de la pression au temps $t=8$	126
2.5	Évolution de la seconde composante du point milieu de la membrane avec et sans déplacement initial (avec la longueur d'un côté de la cavité égal à 1).	126
2.6	Configuration du modèle simplifié pour un problème d'interaction fluide-structure avec un fluide potentiel et une structure élastique en grands déplacements et petites déformations.	128

3.1	Géométrie de la configuration. Les portes Γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sont chacune exclusivement soit ouverte, soit fermée.	133
3.2	Configurations des phases 1 et 2.	134
3.3	Injection orientée de fluide d'un angle θ par rapport à la normale.	135
3.4	Constitution de la structure élastique en une suite de fibres.	136
3.5	Lien entre de fibres pour $1 \leq i \leq N - 1$. Paramètre de longueur r_i , et angle θ_i	136
3.6	Fonction Φ définie sur les différents intervalles.	142
3.7	a. Maillage structuré ($5 \times 19 = 95$ sommets) autour de la membrane. b. Maillage fluide non-structuré (932 sommets), et maillage autour de la membrane.	146
3.8	Vitesse fluide au temps $t = 90 \times 0.01 = 0.9$ (avec $\sigma_b = 70$, $\sigma_s = 80$).	148
3.9	Positions de la membrane aux temps $t = 0.92$ et $t = 1.43$ pour différentes valeurs de σ_s ($\sigma_s = 0, 10, 50, 100, 500$, ou 1000), les autres paramètres σ_b, σ_c étant nuls.	148
3.10	Positions de la membrane aux temps $t = 0.92$ et $t = 1.29$ pour différentes valeurs de σ_b ($\sigma_s = 0, 10, 50, 100, 500, 1000$ ou 5000), les autres paramètres σ_s, σ_c étant nuls.	149
3.11	Évolution temporelle (croissante) de la membrane sur l'intervalle $[0.1; 1.6]$. Positions pour $t = 10 \times 0.01 \times m$ avec $m = 1, \dots, 16$. Les paramètres : $\sigma_b = 70$ et $\sigma_s = 80$	150
3.12	Évolution temporelle du coefficient α^{n+1} , et de sa part relative de correction. Intervalle de temps : $[0.1; 1.8]$. Pour $N = 59$. Les paramètres : $\sigma_b = 70$ et $\sigma_s = 80$	151
3.13	Évolution en temps sur $[0; 24.0]$ des positions des points X_5, X_{10} et X_{13} . Paramètres : $\sigma_b = 80, \sigma_s = 90, N = 19$	152
3.14	Évolution temporelle (croissante) de la membrane sur les intervalles $[0.1; 1.3]$ (phase 1) et $[1.4; 11.6]$ (phase 2). Les paramètres : $\sigma_b = 80, \sigma_s = 90, N = 19$	153
3.15	Évolutions temporelles des flux et du coefficient relatif de correction de volume lié à l'incompressibilité du fluide. Les paramètres : $\sigma_b = 80, \sigma_s = 90, N = 19$	153
3.16	Évolution temporelle d'un coefficient indicateur de la proportion de déplacement selon la normale à la membrane. Les paramètres : $\sigma_b = 80, \sigma_s = 90, N = 19$	154
3.17	Schéma pour les indiçages qui réfèrent principalement soit à un point (X_i, d_i, e_i), soit à une différence entre deux points (F_i, a_i, b_i), soit à une différence entre deux points séparés par un voisin (f_i, g_i).	159
3.18	La fonction Φ et sa dérivée.	175
3.19	Maillage structuré ($5 \times 30 = 150$ sommets) autour de la membrane. Maillage fluide non-structuré (161 sommets).	178
3.20	Fonctions d'injection de fluide, sans et avec contrôle.	179
3.21	Tableau de paramètres des tests.	180
3.22	Tableau des temps de calculs, effectués sur : (–) des <i>Pentium III, 800MHz</i> , sauf (★) effectués sur des <i>Pentium III, 1.266GHz</i>	181
3.23	Évolutions en temps de la norme euclidienne $\ \mathcal{K}^n\ $ du vecteur de KALMAN, et du pourcentage de la contribution $ K_3^n $ par rapport à $\ \mathcal{K}^n\ $	182
3.24	Évolutions en temps des erreurs relatives $\ \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\ /\ \bar{\mathbf{u}}\ $ sur la vitesse fluide, et $ \gamma - \bar{\gamma} / \bar{\gamma} $ sur la position structure.	182
3.25	Configurations de la vitesse et de la pression du fluide à différents instants : $t = -10 \Delta t$ (initial) ; $t = 4 \Delta t$ (premières perturbations, avec du contrôle) ; $t = 26 \Delta t$ $t = 76 \Delta t$ (contrôle des perturbations).	184
3.26	Évolution en temps des erreurs relatives $\ \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\ /\ \bar{\mathbf{u}}\ $ sur la vitesse fluide (zoom). Évolution en temps des amplitudes de la perturbation et des différents contrôles.	185
B.1	Déformation du domaine $\Omega(t)$ entre les instants t_0 et t_1 . Caractéristique $t \mapsto C(\mathbf{x}, t, t_0)$ issue du point $\mathbf{x} \in \Omega(t_0)$	194

Introduction générale. Motivation de la thèse

Le couplage d'un fluide et d'une structure est un phénomène naturel qui traduit les effets de deux milieux continus de natures différentes en action réciproque l'un sur l'autre. Pour autant qu'elle fait intervenir des connaissances de l'élasticité et de la mécanique des fluides (qui sont porteurs de problèmes largement ouverts³), l'interaction fluide-structure n'en est pas moins un domaine à part entière de la physique et des mathématiques appliquées. Plus particulièrement étudié dans la seconde moitié du XX^{ème} siècle, aussi bien dans l'industrie que dans les laboratoires publics, ce sujet reste d'intérêt essentiel dans les avancées scientifiques et pratiques contemporaines.

Parmi les défis présents et futurs, l'aérodynamique et l'hémodynamique⁴ sont à nos yeux deux des sujets fondamentaux. L'interaction fluide-structure est dans ces domaines l'un des éléments-clés.

En aérodynamique, l'aviation civile par exemple, tout autant que l'aviation militaire, souhaite améliorer la portance⁵ de ses appareils, en réduire la traînée⁶, tout en augmentant les capacités de ces avions. Toujours en aérodynamique, mais cette fois-ci appliqué aux ouvrages d'art, les ingénieurs désirent éprouver les tabliers des ponts face à des vents violents, ou les piles des ponts devant des courants fluviaux extrêmes (voir la Figure 1.b). Devant la réalisabilité, la complexité et le coût de tests expérimentaux, la simulation numérique de ces systèmes physiques de couplage fluide-structure est indispensable.

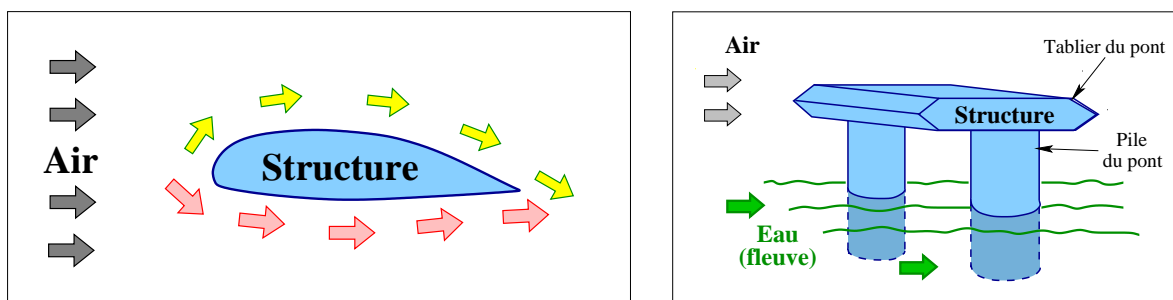


FIG. 1 – a. Illustration de la portance autour d'une aile d'avion. b. Coupe schématique tridimensionnelle d'un pont (tablier et piles). Écoulements de fluides autour du pont.

³Le problème des équations de NAVIER-STOKES (régissant certains écoulements liquides) et de la régularité de leurs solutions n'a toujours pas été pleinement résolu à ce jour (de Septembre 2002). Il est d'ailleurs considéré comme un problème fondamental à l'aube du XXI^{ème} siècle, et rapporterait 1.000.000 \$ aux personnes qui le résoudraient : cf <http://www.claymath.org/prizeproblems/index.htm>.

⁴Étude des écoulements sanguins.

⁵La portance est la dépression des écoulements d'air entre l'extrados (dessus) et l'intrados (dessous) d'une aile d'avion ; de manière naïve, c'est la force qui *porte* l'avion, lui permettant de voler. Voir la Figure 1.a.

⁶La traînée d'un avion est sa résistance à l'air. Elle est fonction de la surface exposée à la direction de l'écoulement.

- En hémodynamique, l'interaction fluide-structure apparaît là aussi de façon incontournable lors :
- de l'écoulement fluide-paroi du sang dans des artères plus ou moins élastiques et perméables (cf Figure 2.a) ;
 - dans les écoulements particulières des hématies (globules rouges) dans les veines (cf Figure 2.b et c) ;
 - lors des échanges sanguins au niveau de la pompe cardiaque ;
 - lorsque les veines collabent⁷,...

Tous ces phénomènes font intervenir des couplages mécaniques entre un liquide non-newtonien et des structures élastiques en mouvement. De plus, lorsqu'un des constituants est défaillant, comme lors d'une malformation cardiaque, ou quand une artériole s'obstrue, il est parfois possible d'intervenir de manière invasive : mise en place d'un ventricule cardiaque artificiel ; pause d'un stent⁸. Que ce soit avant comme après une telle intervention, il est intéressant d'étudier ces systèmes pour mieux cibler les pathologies, et d'apporter des simulations numériques permettant d'en prévoir les comportements.

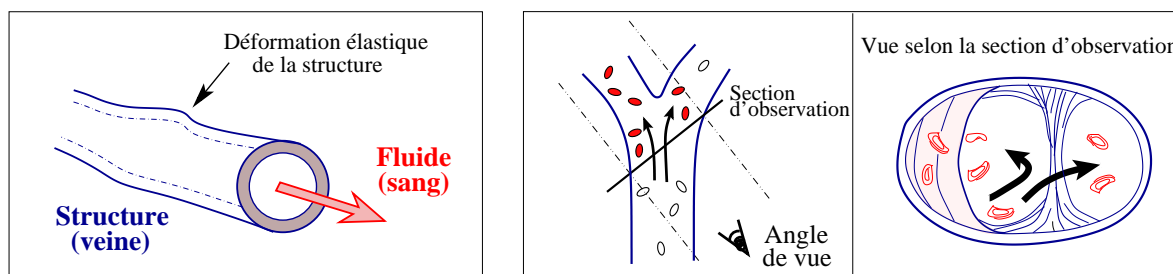


FIG. 2 – a. Déformation élastique de la paroi veineuse (dont la configuration de référence est cylindrique) en interaction avec le flux sanguin. b. et c. Écoulement particulière constitué de globules rouges baignés dans le sang, à l'intérieur d'une cavité veineuse proche d'une bifurcation. b. Vue bidimensionnelle du dessus indiquant l'axe de la section d'observation et l'angle de vue. c. Vue en profondeur selon la section d'observation et à partir de l'angle de vue.

Tous ces exemples de systèmes physiques passent par une simulation numérique afin d'essayer de prévoir, de comprendre et d'améliorer la qualité ou le rendement de ces phénomènes physiques lorsque le coût (temporel, humain, ou financier) des essais « grandeur nature » n'est plus raisonnable. Pour atteindre cet objectif, une phase de **modélisation** de ces systèmes physiques est nécessaire. Certains sont modélisés à l'aide par exemple de systèmes d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP ; voir par exemple [DL87]), comme on les rencontre le plus souvent dans les domaines présentés précédemment. D'autres systèmes physiques sont modélisés à l'aide de systèmes d'Équations Différentielles Stochastiques (EDS), comme par exemple pour la lecture des signaux radars en hydrodynamique sous-marine où les résultats sont exposés à du bruit brownien. D'autres types de modélisation sont encore possibles. C'est néanmoins la pertinence d'approche et la consistance avec le système physique de départ qui permettra de choisir le modèle le plus adapté. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de considérer des systèmes modélisés par des systèmes d'EDP.

Un modèle, même simplifié, doit permettre d'approcher qualitativement le système physique qu'il est sensé représenter. Pour cela, des choix *ad hoc* sont évidemment nécessaires :

- d'une part pour le fluide : qu'il soit newtonien ou non ; visqueux ou parfait ; compressible ou incompressible,...

⁷Autrement dit, les parois de la veine se rapprochent jusqu'à se toucher, empêchant ainsi le passage du sang.

⁸Petit ressort de faible diamètre, qui, placé dans une artériole, permet de la rigidifier artificiellement, et ainsi éviter qu'elle ne collabe.

- et d'autre part pour la structure : qu'elle soit rigide, élastique, ou hyperélastique ; mono-, bi- ou tri-dimensionnelle ; que ce soit une poutre, une plaque ou une coque,...

Vient ensuite la partie de couplage entre ces modèles : l'interaction doit permettre la traduction des échanges des efforts et de la cinétique du système global.

Ce couplage est alors sanctionné par un bilan d'énergie du système couplé. Nous sommes là au début de l'**analyse mathématique** du modèle. Il est ensuite intéressant de connaître les conditions d'existence de solutions (s'il en existe ou non), et le cas échéant, leur unicité ou multiplicité, puis leurs propriétés éventuelles : comportement asymptotique en temps long ; observabilité des solutions par rapport à l'espace balayé par les forces extérieures ; contrôlabilité (exacte, approchée ou optimale) du système. Ces études éventuelles peuvent permettre d'affiner la compréhension des systèmes considérés, afin de mieux confondre les résultats des **simulations numériques**. Ces dernières font appel à des méthodes numériques générales variées (comme les éléments finis ; les méthodes itératives de gradients ; la décomposition de domaines), et aussi parfois à des méthodes très spécifiques (méthode Arbitraire Lagrangien-Eulérien (ALE)). Une analyse numérique des systèmes ainsi discrétisés permet de connaître les limites de validité des applications numériques : stabilité des schémas en temps, consistance d'approximation, vitesse de convergence des solutions approchées. En retour, les simulations numériques peuvent évidemment éclairer des pistes de recherche dans les branches plus théoriques. Ceci est d'autant plus vrai que l'ingénierie industrielle et la médecine n'ont pas attendu la validation théorique de leurs modèles pour la mise en pratique (comme par exemple en chirurgie pour la pose de stent dans les coronaires pour soulager les voies collabées).

Nous allons par conséquent distinguer trois points fondamentaux pour notre étude de problèmes de couplage fluide-structure instationnaires : tout d'abord la modélisation, puis l'analyse mathématique, et enfin les applications numériques.

1 Modélisation

*« Prenant en compte les comportements divers des milieux continus, elle [la mécanique des milieux continus] englobe l'hydrodynamique, la dynamique des gaz, l'élasticité, la plasticité et d'autres types de comportements. Elle est la clé de ce que l'on appelle aujourd'hui **la modélisation**, qui n'est autre que l'art d'analyser un phénomène physique et de le décrire en termes mathématiques, ce qui permet de l'étudier avec la rigueur propre à cette discipline. On peut alors espérer obtenir par le calcul les grandeurs mises en jeu dans le phénomène considéré et les comparer aux observations expérimentales. »*

G.DUVAUT, issu de [Duv90].

La description mathématique d'un milieu continu se fait en donnant une loi qui lie le tenseur des contraintes T à d'autres variables cinématiques ou thermodynamiques. Cette loi, appelée *loi de comportement*, définit le type de milieu (fluide, élastique, ...). Avec les lois universelles (conservation de la quantité de mouvement, conservation de la masse, conservation de l'énergie, symétrie du tenseur T), une caractérisation complète du milieu continu est possible.

Nous allons particulariser fortement nos choix, que ce soit pour les fluides, autant que pour les structures. Quant à la partie de couplage, nous en indiquerons les trois points essentiels.

1.1 Modèles de fluides

Du général au particulier

L'étude et la classification des fluides reposent essentiellement sur la loi choisie pour le tenseur des contraintes T modélisé de manière très générale par :

$$T = -pI + F(D)$$

avec p la pression eulérienne, I l'opérateur identité, F une fonction tensorielle, $D = (\nabla\phi + \nabla\phi^T)/2$ le tenseur taux de déformation, et ϕ la déformation du milieu continu. Lorsque F est une application linéaire de D , le fluide est dit *newtonien*; dans les autres cas, le fluide est dit *non-newtonien*. Dans ce second cas de figure, il est encore possible de distinguer au moins quatre sous-catégories : les fluides indépendants du temps (exemple : fluide de BINGHAM), les fluides dépendants du temps (exemple : fluide thixotropique), les fluides viscoélastiques (exemple : bitume), et les fluides différentiels de complexité $n \in \mathbb{N}$ (exemple : sang).

Bien que nous nous intéressions à des systèmes physiques faisant intervenir des fluides non-newtoniens, nous avons choisi de simplifier l'approche de modélisation, en ne considérant que des fluides newtoniens. La loi de comportement du tenseur T s'écrit alors :

$$T = -pI + 2\nu D,$$

avec ν la viscosité du fluide. L'équation de conservation de la quantité de mouvement nous amène à :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}, \quad (1)$$

avec ρ la densité du fluide, \mathbf{F} les forces extérieures et \mathbf{u} (respectivement p) la vitesse (resp. pression) eulérienne du fluide. L'équation (1) ci-dessus est appelée⁹ équation de NAVIER-STOKES si $\nu > 0$ (cas d'un fluide visqueux), ou équation d'EULER si $\nu = 0$ (cas d'un fluide parfait). Nous aborderons dans cette thèse les deux types de modèles.

Suivant que la densité ρ dépend de l'espace et du temps, ou non, il est possible de distinguer les fluides compressibles (les gaz), et respectivement incompressibles (les liquides). Nous ne considérerons dans cette thèse que des fluides incompressibles. L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Nous mettons de côté les échanges thermodynamiques et nous considérons que la température est constante (indépendante du temps et de l'espace).

Par la suite, nous distinguerons des cas où l'écoulement est turbulent, avec le système des équations de NAVIER-STOKES incompressibles (*cf* **Chapitre 1** et **Chapitre 3** de la **Partie II**); et des cas où l'écoulement est irrotationnel, dans le cadre des fluides potentiels, autrement dit des fluides parfaits incompressibles homogènes et irrotationnels (*cf* **Chapitre 2** de la **Partie II**).

Conditions de bord

Dans tout ce qui suit, le domaine fluide Ω est borné, et son bord $\partial\Omega$ est suffisamment régulier. Nous le considérons de plus bidimensionnel (mais ceci n'est pas restrictif, et ce qui est présenté ci-après peut être adapté aisément à des dimensions supérieures). Selon le système physique que nous cherchons à modéliser, le fluide peut se comporter sur tout ou partie du bord du domaine, $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, de

⁹Pour des fluides de type plus général (intégrant le cadre des fluides newtoniens), FOSDICK et RAJAGOPAL ont montré la restriction suivante : $\nu \geq 0$; voir [Raj92] et la bibliographie s'y rapportant.

manières complètement différentes. Il s'agit alors de traduire correctement en termes mathématiques ces comportements. Nous présentons quelques exemples de situation que nous allons exploiter dans cette thèse. Nous rappelons que nous considérons des fluides dont la vitesse eulérienne \mathbf{u} est régie par un système prenant en compte l'équation (1) comme équation de conservation de la quantité de mouvement.

Nous abordons tout d'abord des conditions de type DIRICHLET, c'est-à-dire portant uniquement sur les différentielles en espace d'ordre 0 de \mathbf{u} :

- $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ sur Γ , avec \mathbf{w} une fonction vectorielle définie sur le bord.

Cette condition traduit le fait que le fluide avance à la vitesse \mathbf{w} sur le bord. Il s'agit d'une condition d'adhérence (ou non-glissement) à la paroi Γ , qui est de plus tout particulièrement adaptée dans le cadre d'une paroi mobile.

- $\mathbf{u} \cdot (R_\theta \mathbf{n}) = g$ sur Γ , avec R_θ une matrice de rotation d'angle θ , \mathbf{n} la normale extérieure au domaine Ω , et g une fonction scalaire.

Cette condition est l'expression d'un flux orienté suivant un angle θ par rapport à la normale : le fluide s'écoule donc à travers la partie Γ correspondante du bord.

Si $\theta = \pi/2[\pi]$, le flux est alors tangentiel.

Si $\theta = 0[\pi]$ et $g \equiv 0$, il s'agit alors d'un flux nul selon la normale, autrement dit, la paroi est imperméable.

Voyons à présent une condition de type NEUMANN, c'est-à-dire portant sur le gradient de \mathbf{u} , et plus précisément ici portant sur le tenseur des contraintes fluides :

$$\left[-pI + \frac{\nu}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] \mathbf{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma .$$

Cette égalité indique qu'il n'y a pas de réaction normale sur le bord ; autrement dit, le fluide n'est pas contraint sur Γ , il y est donc *libre* (d'entrer ou de sortir du domaine Ω).

Nous pouvons effectuer une partition du bord du domaine fluide et choisir des conditions *ad hoc* sur chacun de ses éléments (voir en particulier les **Chapitre 2** et **Chapitre 3** de la **Partie II**).

1.2 Modèles de structures

Du général au particulier

Nous considérons un domaine structure Ω de référence, borné, et dont le bord $\partial\Omega$ est suffisamment régulier ; il pourra être mono- ou bi-dimensionnel. Tout comme pour les fluides, c'est le choix du tenseur des contraintes qui permet de classer les types de structures. Nous commençons par nous restreindre à l'étude d'un matériau hyperélastique, homogène, isotrope, dont la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est un état naturel, et qui satisfait le principe de l'indifférence matérielle.

Nous nous plaçons de plus dans le cadre de petites déformations. Nous pouvons considérer un matériau de SAINT VENANT-KIRCHHOFF. Se donner le tenseur T des contraintes revient à se donner la densité \check{W} d'énergie ; pour un déplacement $\mathbf{U} = \phi - \text{Id}$ fixé, celle-ci est donnée par (voir par exemple [Cia88], Théorème 4.4.3 page 155) :

$$\check{W}(\mathbf{E}(\mathbf{U})) = \frac{\lambda}{2} [\text{Tr}(\mathbf{E}(\mathbf{U}))]^2 + \mu \text{Tr}[\mathbf{E}(\mathbf{U})]^2$$

où λ et μ sont les constantes de LAMÉ du matériau, et \mathbf{E} est le tenseur des déformations de GREEN-SAINTE VENANT :

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T + \nabla \mathbf{U}^T \nabla \mathbf{U}) \quad ,$$

et $\text{Tr}(\cdot)$ l'opérateur matriciel de trace. Nous présentons dans le **Chapitre 1** de la **Partie I** l'obtention d'un système en grands déplacements et petites déformations, à partir des équations de LAGRANGE

(cf [Arn89]). Ce modèle fait apparaître un couplage entre une EDO et un système d'EDP non-linéaires, où intervient une équation des ondes modifiée.

Nous en remarquons deux cas particuliers :

- dans le cas où les perturbations élastiques sont nulles, nous retrouvons le cas d'un solide en translation et en rotation.
- dans le cas où la structure possède au moins une extrémité fixe, les degrés de liberté de la translation et de la rotation sont imposés; seules les perturbations élastiques jouent un rôle. Dans le cadre de l'élasticité linéarisée, en considérant uniquement une structure en flexion, nous pouvons nous ramener à une équation d'ondes linéaire. Nous utilisons ce type de modèle simplifié au **Chapitre 2** de la **Partie II**.

Conditions de bord

En ce qui concerne les structures, les conditions de bord sont primordiales; chacune d'entre elles agit sur un élément $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ de la partition du bord. Il s'agit schématiquement de choisir entre :

- des *conditions aux limites de déplacement* : $\phi = \phi_0$ sur Γ , avec ϕ_0 une déformation donnée.

C'est une condition de type Dirichlet.

En particulier $\phi_0 \equiv 0$ traduit un encastrement de la structure sur Γ .

- des *conditions aux limites de traction* : $T \mathbf{n} = \mathbf{g}$, avec \mathbf{g} une fonction vectorielle.

C'est une condition de type Neumann, portant sur le tenseur T des contraintes.

D'autres types de conditions au bord sont néanmoins envisageables, comme des conditions aux limites unilatérales. Ce cadre est utilisable dans le cas de conditions portant sur une des composantes de la déformation, pour modéliser par exemple une non-interpénétration avec un autre corps (exemple : un ballon de baudruche qui tombe sur le sol sans pouvoir le pénétrer).

Pour les structures considérées par la suite, nous n'utiliserons que des conditions aux limites de déplacement (voir les **Chapitre 2** et **Chapitre 3** de la **Partie II**) ou de traction (voir la **Partie I** et plus précisément la Remarque 2 du **Chapitre 1**).

1.3 Couplage d'un fluide et d'une structure

Ayant choisi un modèle pour le fluide et un modèle pour la structure, il s'agit de préciser l'interaction entre ces deux systèmes. Ce couplage s'effectue en trois points (voir par exemple [GM98a], [GM00b]) :

1. la **coïncidence des interfaces fluide et structure**. Nous notons $\Gamma(t)$ cette interface¹⁰.

L'interface est toujours constituée de particules de fluide et de structure. En particulier, c'est le lieu de rencontre entre le formalisme lagrangien¹¹ de la structure et le formalisme eulérien¹¹ du fluide. En effet, le système structure est écrit avec des coordonnées dépendant d'une configuration de référence (formalisme lagrangien), tandis que le système fluide est écrit dans un repère qui suit le mouvement des particules (formalisme eulérien). À chaque instant, les interfaces fluide et structure doivent correspondre. Pour que ceci soit possible, il faut donc préciser avec précaution l'application qui permet de passer d'un type de coordonnée à l'autre.

2. le **principe d'action-réaction** à l'interface.

Celui-ci doit traduire le bilan des contraintes normales à l'interface : la différence des tenseurs fluide et structure appliquée à la normale \mathbf{n} est le vecteur nul sur $\Gamma(t)$.

¹⁰Nous rappelons que nous considérons des problèmes instationnaires pour lesquels les bords des domaines dépendent éventuellement du temps.

¹¹ Voir l'Annexe B page 191.

3. la **condition cinématique** à l'interface.

Le fluide « collant » à la paroi structure, nous pouvons en déduire une relation entre les vitesses des deux milieux.

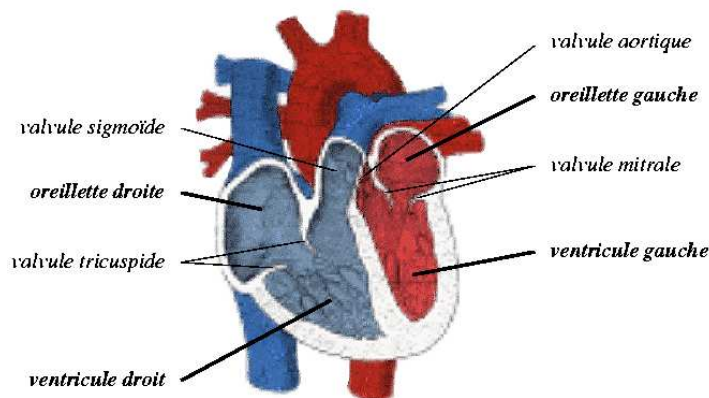
L'expression des deux dernières relations tient pleinement à la nature des milieux. La condition cinématique est par exemple différente suivant le cas où le fluide est visqueux (continuité des vecteurs vitesses), ou au contraire parfait (continuité des vitesses normales et des pressions); voir [Hue94] par exemple.

Nous précisons donc lors des étapes de couplage les véritables relations à prendre en compte.

1.4 Modélisation d'un ventricule artificiel

Pour des problèmes issus de la physique, il s'agit, avant de passer à la description mathématique d'un phénomène, de représenter le système réel existant. Nous nous intéressons, dans la seconde partie de cette thèse, à un problème faisant intervenir un modèle de ventricule artificiel d'un coeur. Nous indiquons ici la motivation de cette étude.

De nos jours, les maladies cardio-vasculaires constituent la première cause de décès dans les pays occidentaux. La cause de mortalité la plus fréquente est plus précisément l'insuffisance cardiaque¹². Face à ce problème, de nombreux essais ont été conduits dans la seconde moitié du XX^{ème} siècle, pour remplacer le muscle cardiaque par un substitut mécanique, sans pour autant trouver de réponses pleinement satisfaisantes. De nombreuses études mathématiques et numériques ont dans le même temps été développées en hémodynamique (*cf* [Pes77], [RPP97], et [FNQV99] par exemple). Nous souhaitons effectuer un travail sur ce sujet en modélisant un ventricule artificiel et en contrôlant activement l'injection dans un certain sens à préciser. Pour cela, nous avons besoin d'introduire le contexte dans lequel nous nous plaçons.



(a) Anatomie du cœur.

FIG. 3 – Anatomie du cœur suivant une coupe où les quatre cavités sont visibles (figure issue de [Dec97]).

Le cœur (*cf* Figure 3) est un organe vital essentiellement constitué d'un muscle creux (le myocarde), dont le rôle est d'assurer la circulation du sang dans l'organisme. Celle-ci est effectuée simultanément

¹²Incapacité du cœur à fournir une circulation sanguine suffisante pour alimenter les organes en oxygène.

selon un double circuit. La partie droite du cœur assure la circulation du sang veineux (c'est-à-dire faiblement oxygéné et chargé en gaz carbonique) recueilli par les veines caves vers l'artère pulmonaire. La partie gauche du cœur assure quant à elle la circulation du sang oxygéné recueilli par les veines pulmonaires vers l'artère aorte. Ainsi le cœur est constitué de deux pompes (respectivement droite et gauche). À l'intérieur de chacune d'elles, le sang transite exclusivement dans une seule direction, allant de l'oreillette (réceptionnant le sang) au ventricule (éjectant le sang dans l'organisme). De là, nous voyons le rôle primordial du ventricule gauche, chargé de fournir le sang oxygéné aux organes.

Les substituts artificiels (ventricules ou cœurs totaux) ont précisément pour principal but de soutenir ou de remplacer le ventricule gauche. De nombreux essais chirurgicaux ont été tentés sur les animaux puis sur l'homme. En ce qui concerne les ventricules artificiels d'assistance cardiaque, les premiers essais sur l'homme ont été effectués dès 1966 aux États-Unis, et en France à partir de 1986 (Pr. Carpentier). À titre d'information, nous citons deux types de famille de ces ventricules artificiels, distingués suivant le type d'énergie utilisé : les pneumatiques (Thoratec, TCI) ou les électro-mécaniques (Novacor). D'autre part, les premières tentatives de placement de cœurs artificiels totaux sur l'homme ont été réalisées aux États-Unis en 1969 à titre provisoire (en attente de greffe), et en 1982 à titre définitif (cœur artificiel *Jarvik 7*). En France, les premières implantations ont été effectuées à partir de 1986 (Pr. Cabrol), et sont aujourd'hui de l'ordre de 300 par an.

Dans le monde, quelques milliers de substituts artificiels cardiaques ont été implantés à titre temporaire ou définitif. La vie de certains patients a pu ainsi être prolongée de plusieurs années. Néanmoins, même si l'opération est maintenant maîtrisée au niveau chirurgical, de nombreux problèmes restent en suspens : traitement contraignant (anticoagulant), encombrement de la prothèse, dérangements liés au bruit, source énergétique du substitut (batteries à recharger), équilibre des circulations droite et gauche. De nombreuses études, notamment à l'aide de simulations numériques, doivent donc encore être menées, en particulier pour comprendre les échanges sanguins à l'intérieur même d'un ventricule : par exemple pour cibler les zones de recirculation (conduisant à la formation de plaques sur les parois), éviter les hémolyses (destruction des globules rouges), ou réguler un débit sanguin déréglé.

Nous renvoyons à la **Partie II** de cette thèse pour deux modélisations mathématiques différentes d'un ventricule artificiel : l'une au **Chapitre 2** page 115 à l'aide de fluides potentiels ; l'autre au **Chapitre 3** page 131 à l'aide de fluide visqueux newtoniens.

2 Analyse mathématique

L'analyse mathématique vise à cerner les difficultés du problème abordé, afin de choisir convenablement les outils nécessaires à leur étude. Au regard de la modélisation d'un phénomène physique, parmi les questions d'intérêts, la recherche d'*existence* d'une éventuelle solution au système est primordiale. Sans cette étape (ou sans une conjecture), il n'est pas raisonnable de penser que le modèle est consistant avec l'observation. En supposant alors que le système possède une solution, il est tout à fait légitime de chercher si elle est unique. L'*unicité* permet de caractériser entièrement le phénomène physique observé. Au contraire, la *multiplicité* des solutions indique un manque dans la spécification du phénomène : il faut aller plus loin dans la compréhension du système physique et particulariser sa définition pour écarter des solutions et en marginaliser d'autres.

Une étude méthodique s'attache ensuite, pour une solution donnée, à distinguer ses *propriétés* éventuelles. Parmi les plus classiques, sans pour autant être exhaustif, nous énonçons :

- le *comportement asymptotique* en temps long.

La preuve de l'existence d'une solution en temps long apporte un élément supplémentaire sur la consistance du modèle, et permet de ne pas fixer de limite en temps à la validité du modèle.

Au contraire, si la solution est instable et «explose» en temps fini, une direction de recherche

peut être la stabilisation ou la contrôlabilité du système.

- l'*observabilité* des solutions par rapport à l'espace balayé par les forces extérieures, ou des données initiales.

Cette notion est particulièrement intéressante pour savoir si un état est atteignable ou non.

Il est ensuite possible de s'attacher à approcher une configuration donnée du système physique (là encore, étude de contrôlabilité).

- la *contrôlabilité* de la solution du système.

Celle-ci se présente sous de multiples formes. D'une manière générale, le contrôle optimal permet à partir d'une certaine solution d'approcher une solution-cible prédéterminée (et licite). Pour cela, une fonction (voire un paramètre) de commande agit sur le système (par le biais de forces distribuées dans le domaine ou de conditions au bord). Le contrôle est optimal dans le sens où il minimise une certaine fonctionnelle de coût. Le contrôle est dit approché si la solution du système tend vers la solution-cible dans une certaine topologie. Le contrôle est dit exact si la solution-cible est effectivement atteinte exactement.

Le contrôle peut s'effectuer de manières différentes : soit en «*boucle fermée*» (ou *feedback*) si le contrôle est calculé à chaque instant en fonction de la solution instantanée elle-même ; soit en «*boucle ouverte*», où la fonction de contrôle a été prédéterminée (en fonctions des forces, des données initiales et de la solution-cible).

Toutes les considérations précédentes sont valables pour un modèle physique quelconque. En ce qui concerne plus précisément les systèmes couplés, une voie possible de l'étude du phénomène global est un choix de découplage. En effet, il peut sembler cohérent de voir si chacun des sous-systèmes mis en cause possède ou non les qualités nécessaires. Cette approche a l'avantage de mettre à profit la méthodologie et la littérature dans les domaines respectifs en considération, et plus particulièrement ici la mécanique des milieux continus.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des phénomènes d'interaction fluide-structure ; notre principal résultat théorique sur ce sujet est l'existence de solution pour une structure en grands déplacements et petites déformations qui évolue dans un fluide (*cf* **Chapitre 1** de la **Partie II**). Dans un premier temps, nous séparons les sous-systèmes fluide et structure. Nous exploitons d'une part des résultats déjà institués concernant le fluide. Puis, d'autre part, nous établissons des résultats d'existence et d'unicité de la solution (*cf* **Chapitre 2** de la **Partie I**) pour le modèle structure (construit au **Chapitre 1** de la **Partie I**). Enfin, la procédure de recouplage analyse les difficultés supplémentaires liées aux échanges entre les systèmes fluide et structure (et qui nécessitent une étude plus poussée des sous-systèmes complétés de nouvelles contraintes inhérentes au couplage). Nous présentons ci-dessous les outils utilisés pour obtenir ces résultats.

2.1 Bilan d'énergie. Découplage

Pour commencer, un préliminaire indispensable est un bilan d'énergie *a priori* du système, afin de s'assurer que le modèle est cohérent avec le système physique. Dans les problèmes d'interaction fluide-structure, il faut notamment vérifier que les éléments du couplage sont consistants. Il faut par exemple tenir compte de la mobilité des domaines (voir par exemple la formule de REYNOLDS de dérivation par rapport au temps d'une intégrale sur un domaine dépendant du temps). Ce premier bilan permet de plus d'identifier les espaces fonctionnels dans lesquels les solutions éventuelles peuvent être recherchées.

Il s'agit ensuite de découpler convenablement les systèmes fluide et structure, dans le sens où l'interaction réciproque impose des conditions de compatibilités ou des contraintes supplémentaires. Par exemple, la contrainte d'incompressibilité du fluide se traduit sur la structure élastique par la contrainte

de conservation de son volume. Ainsi, lors du découplage, nécessité par l'analyse mathématique ou la simulation numérique, le système structure doit être étudié en tenant compte de cette contrainte supplémentaire extérieure.

2.2 Sous-système structure

(Ce paragraphe concerne le **Chapitre 2** de la **Partie I**.)

Nous nous intéressons maintenant plus précisément à l'existence d'une solution au problème d'élasticité précédemment mentionné (obtenu au **Chapitre 1** de la **Partie I**). Le système en question, sous forme faible, fait intervenir des fonctions-tests dépendant de la solution inconnue elle-même. Ce problème est fortement non-linéaire et nécessite donc de choisir un espace de décomposition adéquat : il s'agit de l'espace des vitesses. Ce dernier est identifié grâce à une méthode modale : il est engendré par les fonctions propres de l'opérateur de l'élasticité linéarisée. Une fois réécrit le système de départ, nous utilisons une méthode de GALERKIN pour montrer l'existence d'une solution au problème de l'élasticité.

Pour montrer l'unicité de la solution, nous employons une méthode classique. Nous effectuons la différence entre les systèmes différentiels de deux solutions éventuelles ; puis après avoir obtenu les inégalités *ad hoc*, nous appliquons le lemme de GRONWALL pour conclure. Néanmoins, comme les fonctions-tests des deux systèmes différentiels dépendent des solutions respectives, la difficulté réside dans leur choix.

2.3 Sous-systèmes découplés. Système couplé

(Ce paragraphe concerne le **Chapitre 1** de la **Partie II**.)

Nous considérons effectuées les études sur chacun des sous-systèmes structure et fluide (nous rappelons que nous utilisons des résultats préexistants dans la littérature concernant le fluide). Des considérations sur les espaces fonctionnels des solutions ainsi que sur les éléments du couplage font apparaître un défaut de régularité pour réunir les deux sous-systèmes. Nous nous restreignons donc à un nombre fini de modes propres dans l'approximation modale de la structure élastique.

Avant de continuer avec le système couplé, il faut considérer les sous-systèmes découplés. Précisons-le à nouveau, les sous-systèmes découplés font intervenir des contraintes supplémentaires sur les sous-systèmes en question. Notamment pour le système structure, la contrainte supplémentaire de conservation de volume introduit un multiplicateur de LAGRANGE assimilable à une pression. Afin d'exploiter cette information, nous utilisons le théorème des fonctions implicites pour établir une relation entre les coefficients de la décomposition modale. Ramenés à un système d'EDO de dimension finie, nous obtenons l'existence d'une solution au système structure découplé. Par un argument de *bootstrap*, nous entendons les espaces de régularité en question.

Concernant le sous-système fluide découplé, pour lequel des résultats préexistaient dans la littérature (*cf* [All87], [Bea81], [Sol77], [Sol88b], [GM00a]), l'idée principale consiste à réécrire le système de NAVIER-STOKES en coordonnées lagrangiennes, et à appliquer le théorème de point fixe de PICARD.

La stratégie pour l'existence d'une solution au problème couplé global est la suivante. À un déplacement structure \mathbf{D}_1 , nous associons un couple vitesse-pression par la résolution du sous-système fluide découplé. Puis nous calculons les efforts fluides, et la résolution du sous-système structure découplé nous donne un nouveau déplacement \mathbf{D}_2 . Nous appliquons alors une procédure de point fixe sur l'application $S : \mathbf{D}_1 \mapsto \mathbf{D}_2$ (à nouveau par le théorème de PICARD).

Pour d'autres techniques d'approche de systèmes couplés fluide-structure, nous renvoyons à l'introduction de la partie de couplage fluide-structure (**Partie II**), page 79.

3 Applications numériques

Les applications numériques ont pour objet d'apporter une illustration aux systèmes d'EDP modélisant les problèmes physiques. Elles autorisent une confrontation avec les observations des systèmes physiques réels grâce à des tests cohérents et incisifs. Les domaines de validité des modèles sont alors mieux cernés. Suivant leur pertinence, des tests numériques plus poussés peuvent ensuite permettre de mieux comprendre les phénomènes physiques.

Avant de passer à la programmation, la mise en œuvre numérique nécessite une discrétisation consistante et un algorithme adapté au problème. Des méthodes de natures différentes donnent alors des outils indispensables pour effectuer ces étapes convenablement. Nous distinguons les méthodes numériques générales et celles plus spécifiques à l'interaction fluide-structure et au contrôle. Nous indiquons celles que nous utilisons pour les applications numériques présentées dans cette thèse.

3.1 Méthodes numériques générales

Discrétisation en temps

La méthode de discrétisation en temps que nous utilisons est celle des différences finies. Nous utilisons d'une part le schéma d'EULER d'ordre 1 :

- pour le système de l'élasticité en grands déplacements et petites perturbations (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie I**) ;
- et pour le système fluide dans le problème d'interaction fluide-structure du ventricule artificiel (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie II**).

Nous utilisons d'autre part le schéma de NEWMARK d'ordre 2 pour l'équation des ondes modifiée, dans le problème de couplage avec les fluides potentiels (*cf* **Chapitre 2** de la **Partie II**).

Méthode des Éléments Finis

Nous employons la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace de certaines quantités. Nous utilisons des éléments P_1 pour les potentiels fluides dans le problème d'interaction avec une membrane monodimensionnelle (*cf* **Chapitre 2** de la **Partie II**). Nous utilisons :

- des éléments P_2 pour la construction des matrices de masse et de raideur généralisées dans le problème de recherche des éléments propres généralisés d'une structure élastique (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie I**) ;
- des éléments P_2/P_1 en vitesse-pression (éléments finis de TAYLOR-HOOD) dans les équations de NAVIER-STOKES dans le problème d'interaction fluide-structure du ventricule artificiel (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie II**).

Décomposition modale

Bien que des analyses modales soient envisageables directement sur des problèmes couplés d'interaction fluide-structure (*cf* [Sch92]), nous utilisons quant à nous la décomposition modale uniquement pour les structures. Plus précisément, nous utilisons :

- les modes propres du laplacien monodimensionnel pour l'équation des ondes dans le couplage avec des fluides potentiels (*cf* **Chapitre 2** de la **Partie II**) ;
- les modes propres de l'opérateur de l'élasticité linéarisée (avec condition de NEUMANN homogène) pour la structure en grands déplacements et petites déformations (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie I**).

L'avantage de cette méthode de décomposition réside dans le fait qu'un petit nombre de modes propres est suffisant pour avoir une base d'approximation raisonnable et approcher convenablement les quantités en question.

3.2 Méthodes spécifiques à l'interaction fluide-structure et au contrôle

Méthode ALE : Arbitrairement Lagrangien-Eulérien

Le principe de cette méthode est exposé à l'Annexe B page 191.

Cette méthode est d'un intérêt capital pour les problèmes où un domaine en déformation intervient, et s'applique tout naturellement aux problèmes d'interaction fluide-structure. Elle permet de redresser localement en temps (pour fixer les idées) un domaine espace-temps non-cylindrique pour en faire un domaine cylindrique droit ; ceci s'obtient en réécrivant les opérateurs de dérivées temporelles en fonction de la convection du domaine.

Nous en adoptons le principe pour le déplacement de maillage dans le problème des fluides potentiels en interaction avec une membrane élastique (*cf* **Chapitre 2** de la **Partie II**). Nous utilisons par ailleurs la méthode des caractéristiques pour la résolution des équations de NAVIER-STOKES dans le système du ventricule artificiel (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie II**).

Méthode de la frontière immergée

Cette méthode est spécifique aux problèmes d'interaction fluide-structure et a été introduite par PESKIN (*cf* [Pes77], [PM89a], [PM89b]) pour la simulation numérique d'un cœur. L'idée principale est la suivante. La structure est considérée comme baignant dans le fluide. Plutôt que de résoudre un système pour la faire évoluer, on considère que la structure agit sur le fluide par l'intermédiaire d'une force portée le long de l'interface. Ainsi, seul le système fluide est à résoudre (avec un terme de forces supplémentaire). La méthode a pour intérêt de réduire le coût des calculs. Bien qu'elle soit habituellement utilisée sur des maillages structurés et des lattices diadiques (pour exploiter en plus une Transformée de Fourier Rapide (FFT en anglais)), nous l'implémentons ici sur un maillage non-structuré. Par ailleurs, les difficultés de la méthode résident dans une approximation consistante des Diracs portés sur l'interface. Nous utilisons un modèle différent de celui présenté par PESKIN (dans [PM89a]-[PM89b]), et nous employons un maillage artificiel autour de l'interface (voir aussi la «*Fat Boundary Method*» de MAURY, *cf* [Mau01]). Nous mettons en œuvre la méthode de la frontière immergée dans le problème simplifié du comportement d'un ventricule artificiel (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie II**).

Contrôle par *feedback*

Nous utilisons cette méthode afin de contrôler le système simplifié du ventricule artificiel grâce à l'amplitude d'injection de fluide (*cf* **Chapitre 3** de la **Partie II**). Pour cela, nous ramenons le problème au contrôle optimal de perturbations. Nous semi-discrétisons alors en temps les équations du système en question, et nous écrivons l'équation d'état sous forme linéaire. Par ailleurs, nous considérons une fonctionnelle quadratique en la variable d'état et en le paramètre de contrôle. Nous obtenons ainsi un système *Linéaire-Quadratique*, pour lequel un contrôle existe sous forme d'un *feedback*, c'est-à-dire un contrôle dépendant directement de la variable d'état. Pour construire un tel contrôle, nous avons à résoudre un système d'équations de RICCATI (rétrograde en temps) et à calculer les matrices de gain de KALMAN. Cette étape s'effectuant préalablement, nous appliquons ensuite directement le contrôle (obtenu pour le système linéarisé) sur le système non-linéaire.

4 Plan de la thèse

Dans une première partie, nous abordons un problème d'élasticité en grands déplacements et petites déformations. Nous dérivons le système d'équations du modèle à partir des équations de LAGRANGE (cf **Chapitre 1** de la **Partie I**). Nous montrons ensuite l'existence de solution pour ce modèle par une méthode de type GALERKIN, puis l'unicité de cette solution (cf **Chapitre 2** de la **Partie I**); une des difficultés du problème est la dépendance des fonctions-tests vis-à-vis de la solution dans la formulation variationnelle. Puis, en vue d'une application numérique, nous employons une méthode modale pour nous ramener à un système de dimension finie, et nous étudions l'inversibilité de ce dernier; nous discutons enfin les tests d'une simulation numérique (cf **Chapitre 3** de la **Partie I**).

Dans la seconde partie de cette thèse, nous abordons des problèmes d'interaction fluide-structure. Le premier chapitre concerne un problème théorique : nous montrons l'existence de solution pour le problème couplé des équations de NAVIER-STOKES avec une structure élastique en grands déplacements et petites déformations selon un nombre fini de modes propres (cf **Chapitre 1** de la **Partie II**); nous utilisons pour cela le modèle obtenu dans la première partie. Les chapitres suivants concernent des applications numériques pour des modèles d'un ventricule cardiaque artificiel. Dans le **Chapitre 2** de la **Partie II**, nous établissons un modèle d'interaction fluide-structure entre deux fluides potentiels et une membrane en flexion, et nous présentons les tests d'une simulation numérique utilisant une méthode ALE simplifiée. Dans le **Chapitre 3** de la **Partie II**, nous couplons les équations de NAVIER-STOKES incompressible avec une membrane élastique et discutons les tests d'applications numériques utilisant la méthode de la frontière immergée. Dans un second temps, nous effectuons une démarche de contrôle par *feedback* sur un système simplifié, et présentons des résultats numériques.

Première partie

Modélisation et analyse d'un problème d'élasticité en grands déplacements et petites déformations

Introduction à la partie élasticité

Dans cette partie, nous considérons un problème d'élasticité instationnaire bidimensionnel. Notre motivation est issue d'un problème d'interaction fluide-structure dans le plan. Nous souhaitons tout d'abord modéliser un système physique couplant un fluide visqueux et une structure élastique faiblement déformable qui se déplace dans le fluide en suivant un mouvement non-négligeable de translation et de rotation. Puis dans un second temps, nous voulons montrer l'existence de solution à ce système. Nous commençons donc par aborder la modélisation des équations du mouvement du corps élastique en grands déplacements et petites déformations dans un cadre bidimensionnel.

Adoptant la décomposition du mouvement de la structure en un mouvement rigide et une perturbation élastique, nous obtenons tout d'abord l'unicité de la décomposition à partir d'un problème de minimisation et sous certaines hypothèses. Nous rappelons à ce propos une approche similaire, effectuée par FRAEIJIS DE VEUBEKE (*cf* [FDV76]). À partir des équations de LAGRANGE, nous établissons ensuite les équations du mouvement. Celles-ci sont non-linéaires et les fonctions-tests de la formulation faible du problème dépendent de la solution éventuelle elle-même. Pour contourner cette difficulté, nous réécrivons, de manière équivalente, les équations de dynamique de la structure suivant chacune des composantes du mouvement (c'est-à-dire suivant la translation, la rotation, et la perturbation élastique) : ceci est notamment rendu possible grâce à la décomposition modale de l'espace de travail des vitesses.

Ensuite, nous obtenons des estimations d'énergie *a priori* sur d'éventuelles solutions aux équations du mouvement. Suivant une méthode de GALERKIN, nous nous ramenons à un système de dimension finie, et passons à la limite par compacité en utilisant les estimations précédentes, ainsi que d'autres plus poussées (notamment sur les dérivées secondes en temps de l'angle de rotation). Nous obtenons alors l'existence d'une solution (pour des données petites ou pour un temps petit) aux équations du système continu en les composantes de translation, rotation et perturbation élastique du mouvement. Nous montrons que ceci est équivalent à dire que le système en le déplacement admet une solution (toujours sous les hypothèses de petitesse des données ou du temps). Nous donnons de plus une condition d'existence en temps long. Nous nous attachons ensuite à montrer l'unicité de la solution. Nous suivons pour cela une démarche classique, avec néanmoins une légère complication liée au choix particulier des fonctions-tests.

D'un autre côté, nous nous attachons à l'illustration numérique de notre modèle. De nombreux essais ont été effectués en ingénierie pour des problèmes de corps en grands déplacements et petites déformations (notamment en aérodynamique, en automatique et en robotique : par exemple pour des déploiements de bras articulés ou de satellite). Une méthode souvent utilisée est la formulation corotationnelle du problème ; celle-ci a été plus particulièrement étudiée dans un cadre d'éléments finis. Il s'agit de considérer un repère en déplacement (translation et rotation) et de déformer les éléments du

maillage suivant les contraintes élastiques locales. Cette stratégie a été tout d'abord employée pour des structures allongées (de type poutre), puis plus récemment sur des corps bi- et tri-dimensionnels (cf [CM96a]-[CM96b]). Nous proposons ici une approche différente basée sur une décomposition modale, ceci dans la suite directe et naturelle de l'étude théorique précédente. Notre approche est donc globale en espace, plutôt que locale. La principale difficulté tient à la construction numérique effective d'un espace discret d'approximation (dont les fonctions doivent être L^2 -orthogonales aux mouvements infinitésimaux). Pour répondre à ce problème, la manière la plus naturelle consiste à effectuer la décomposition modale de la solution qui, tronquée selon un nombre fini de modes propres, nous ramène à un problème aux valeurs propres généralisées (qui peut être solutionné préliminairement à la résolution du système d'équations du mouvement). Le cadre de travail en espace est alors fixé, et il ne reste plus qu'à résoudre un système d'EDO de dimension finie en les coefficients de la décomposition modale (qui ne dépendent ainsi plus que du temps).

Le plan de cette **Partie I** est le suivant. Dans le **Chapitre 1**, nous effectuons la modélisation d'une structure en grands déplacements et petites déformations : nous présentons d'une part une justification à la décomposition du mouvement, et nous établissons d'autre part les équations instationnaires du mouvement. Dans le **Chapitre 2**, nous commençons par énoncer les principaux résultats théoriques de cette **Partie I**, puis nous démontrons l'existence et l'unicité de solution pour le système modélisé. Le **Chapitre 3** aborde quant à lui la mise en œuvre numérique du modèle.

Chapitre 1

Modélisation d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations

Sommaire

1.0.1	Espace de Sobolev. Traces	22
1.1	Décomposition de la déformation	22
1.1.1	Unicité de la décomposition du mouvement	22
1.1.2	Une autre démarche pour la décomposition du mouvement	24
1.1.3	Cadre fonctionnel. Mouvements infinitésimaux	26
1.1.4	Différentielle de la déformation suivant les composantes du mouvement	26
1.2	Équations du mouvement (formulation faible)	28
1.3	Estimations d'énergie pour le problème continu	30
1.4	Dynamique de la translation, de la rotation, de la perturbation	32
1.5	Approximation modale	34

1.0.1 Espace de Sobolev. Traces

Soient n un entier non nul et Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n . Nous désignons par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω . Soit m un entier non nul, nous définissons l'espace de SOBOLEV $H^m(\Omega)$ d'ordre m comme le sous-espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m sont des éléments de $L^2(\Omega)$ (cf [LM68] page 3). Par interpolation des espaces de SOBOLEV d'ordres entiers (cf [LM68] page 45), nous définissons les espaces $H^s(\Omega)$ pour $s \geq 0$ réel. Enfin, pour Ω borné et de frontière Γ assez régulière, nous rappelons le résultat suivant (cf [LM68] page 47) : Pour $s \geq 0$ et μ le plus grand entier tel que $\mu < s - 1/2$, l'application : $\mathbf{u} \mapsto \left\{ \frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial n^j} ; j = 0, \dots, \mu \right\}$, définie sur $H^s(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$, est une application linéaire continue ; de plus, elle est surjective (avec existence d'un relèvement continu).

1.1 Décomposition de la déformation

1.1.1 Unicité de la décomposition du mouvement

Soit Ω un ouvert borné connexe Lipschitz de \mathbb{R}^2 , on suppose que $\bar{\Omega}$ désigne la surface occupée par une structure non déformée, considérée comme la configuration de référence. On note $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et on appelle classiquement déformation l'application, qui par hypothèse est régulière et injective, et qui associe à $\xi \in \bar{\Omega}$ le point image \mathbf{x} dans la configuration déformée $\phi(\bar{\Omega})$. On appelle alors $\mathbf{u} = \phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ le déplacement (cf Figure 1.1).

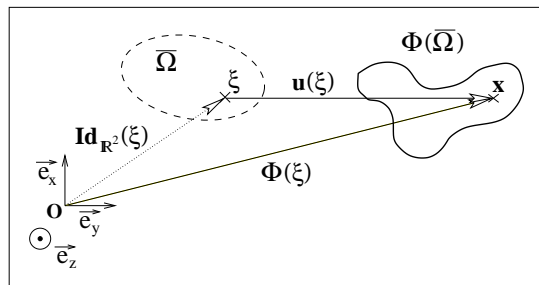


FIG. 1.1 – Configuration de référence $\bar{\Omega}$ et configuration déformée $\phi(\bar{\Omega})$, déformation ϕ et déplacement \mathbf{u} .

On cherche ici un modèle qui permette de décrire le mouvement d'un matériau élastique en grands déplacements et petites déformations. Pour cela, on considère que la déformation du solide Ω est la composée des trois applications suivantes (cf Figure 1.2) :

1. une application \mathcal{P}_ϕ relative à une déformation élastique : $\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ où \mathbf{d} est une application régulière de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^2 qui sera supposée petite, et qu'on appellera *perturbation*.
 $\xi \mapsto \xi + \mathbf{d}(\xi)$
2. une rotation \mathcal{R}_ϕ d'angle θ autour du centre de gravité G du solide¹³ : $\xi = \overrightarrow{O\xi} \mapsto R\overrightarrow{G\xi} = R\overrightarrow{O\xi} - R\overrightarrow{OG}$ où $R = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
3. une translation \mathcal{T}_ϕ de vecteur τ : $\xi \mapsto \xi + \tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}^2$.

¹³Le point G est le centre de gravité du solide dans la configuration de référence Ω .

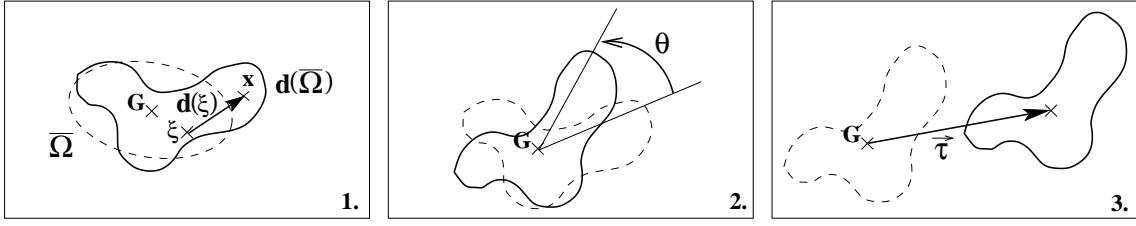


FIG. 1.2 – Décomposition de la déformation : 1. Application de la perturbation \mathbf{d} . 2. Composition avec la rotation de centre G et d'angle θ . 3. Composition avec la translation de vecteur τ .

La déformation s'écrit ainsi $\phi = \mathcal{T}_\phi \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{P}_\phi$. On a donc :

$$\forall \xi \in \overline{\Omega}, \phi(\xi) = \mathcal{T}_\phi \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{P}_\phi(\xi) = \mathcal{T}_\phi \circ \mathcal{R}_\phi(\xi + \mathbf{d}(\xi)) = \mathcal{T}_\phi(R(\xi + \mathbf{d}(\xi) - G)) = \tau + R(\xi + \mathbf{d}(\xi) - G),$$

soit encore :

$$\forall \xi \in \overline{\Omega}, \quad \phi(\xi) = \tau + R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}(\xi)) \quad . \quad (1.1)$$

En plongeant \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 , la rotation R peut être vue comme une rotation d'axe $\overrightarrow{e_z}$, où $\overrightarrow{e_z}$ désigne un vecteur unitaire perpendiculaire au plan du mouvement, et d'angle θ .

On remarque que pour tout ϕ appartenant à $L^2(\Omega)$, quel que soit le vecteur de translation $\tau \in \mathbb{R}^2$, et quel que soit l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ de la rotation, la perturbation \mathbf{d} est définie de manière unique grâce à (1.1) par $\mathbf{d} = R^T(\phi - \tau) - \overrightarrow{G\xi}$ et ainsi \mathbf{d} est un élément de $L^2(\Omega)$. On va maintenant donner un critère pour que, connaissant ϕ dans $L^2(\Omega)$, on puisse lui associer un *unique* triplet $(\tau, \theta, \mathbf{d})$. On considère l'application suivante, qui, pour ϕ donné, exprime la norme de \mathbf{d} dans $L^2(\Omega)$:

$$K_\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\tau, \theta) \longmapsto K_\phi(\tau, \theta) = \| R^T(\phi - \tau) - \overrightarrow{G\xi} \|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\phi - \tau\|^2 - 2 \int_{\Omega} \phi \cdot R \overrightarrow{G\xi} + \|\overrightarrow{G\xi}\|^2$$

et on cherche le couple (τ, θ) solution du problème de minimisation :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{\substack{\theta \in [0, 2\pi[\\ \tau \in \mathbb{R}^2}} K_\phi(\tau, \theta) \quad .$$

Ce problème admet au moins une solution car $K_\phi(\tau, \theta) = k_1(\tau) + k_2(\theta)$, où $k_1(\tau) = \|\phi - \tau\|^2 + \|\overrightarrow{G\xi}\|^2$ est continue strictement convexe en τ et tend vers l'infini à l'infini¹⁴, et $k_2 = -2 \int_{\Omega} \phi \cdot R_\theta \overrightarrow{G\xi}$ est continue en θ et 2π -périodique. Les conditions d'optimalité du premier et du deuxième ordres sont :

$$\frac{\partial K_\phi}{\partial \tau}(\tau, \theta) = 0, \quad \frac{\partial^2 K_\phi}{\partial \tau^2}(\tau, \theta) > 0 \text{ au sens des matrices symétriques,} \\ \frac{\partial K_\phi}{\partial \theta}(\tau, \theta) = 0, \quad \frac{\partial^2 K_\phi}{\partial \theta^2}(\tau, \theta) \geq 0. \quad (1.2)$$

Or, on a d'une part :

$$\forall \overline{\tau} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial K_\phi}{\partial \tau}(\tau, \theta) \cdot \overline{\tau} = -2 \int_{\Omega} (\phi - \tau) \cdot \overline{\tau}, \\ \forall \overline{\tau}, \overline{\overline{\tau}} \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 K_\phi}{\partial \tau^2}(\tau, \theta) \cdot \overline{\tau} \cdot \overline{\overline{\tau}} = 2 \int_{\Omega} (I_2 \overline{\tau}) \cdot \overline{\overline{\tau}},$$

¹⁴Autrement dit, $\lim_{|\tau| \rightarrow +\infty} k_1(\tau) = +\infty$.

avec I_2 la matrice identité de \mathbb{R}^2 , et d'autre part :

$$\begin{aligned} \forall \bar{\theta} \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial K_\phi}{\partial \theta}(\tau, \theta) \cdot \bar{\theta} &= 2\bar{\theta} \int_{\Omega} \phi \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \overrightarrow{G\xi} = 2\bar{\theta} \int_{\Omega} \phi \wedge R_\theta \overrightarrow{G\xi}, \\ \forall \bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 K_\phi}{\partial \theta^2}(\tau, \theta) \cdot \bar{\theta} \cdot \bar{\bar{\theta}} &= 2\bar{\theta} \bar{\bar{\theta}} \int_{\Omega} \phi \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \overrightarrow{G\xi} = 2\bar{\theta} \bar{\bar{\theta}} \int_{\Omega} \phi \cdot R_\theta \overrightarrow{G\xi}. \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité précédentes sont donc équivalentes à :

$$\tau = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi, \quad \int_{\Omega} \phi \wedge R \overrightarrow{G\xi} = 0, \quad \int_{\Omega} \phi \cdot R \overrightarrow{G\xi} \geq 0. \quad (1.3)$$

La première condition $\tau = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi$ permet de retrouver τ en fonction de ϕ . En réécrivant les deux autres conditions :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \wedge R \overrightarrow{G\xi} &= \left(\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right) \cos \theta + \left(\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right) \sin \theta = 0, \\ \int_{\Omega} \phi \cdot R \overrightarrow{G\xi} &= - \left(\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right) \sin \theta + \left(\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right) \cos \theta \geq 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

il apparaît que si $\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \neq 0$ ou $\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \neq 0$, on peut définir l'angle θ de façon unique dans $[0, 2\pi[$. On associe alors à cette unique solution du problème de minimisation la perturbation donnée par : $\forall \xi \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{d}(\xi) = R_\theta^T(\phi - \tau) - \overrightarrow{G\xi}$. On remarque tout d'abord, d'après la première condition de (1.3), que \mathbf{d} est à moyenne nulle sur Ω . D'autre part, les conditions de (1.4) peuvent être réécrites sous la forme :

$$\int_{\Omega} \phi \wedge R \overrightarrow{G\xi} = \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \phi \cdot R \overrightarrow{G\xi} = \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0. \quad (1.5)$$

On a ainsi établi la proposition :

Proposition 1. *Pour toute application $\phi \in L^2(\Omega)$ telle que :*

$$\left(\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right)^2 + \left(\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right)^2 \neq 0, \quad (1.6)$$

il existe un unique triplet $(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[\times L^2(\Omega)$ tel que $\phi = \tau + R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d})$ et tel que \mathbf{d} satisfait :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d} = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} (\mathbf{d} + \overrightarrow{G\xi}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0. \quad (1.7)$$

En particulier, (τ, θ) est l'unique solution du problème de minimisation (\mathcal{P}) , et $\mathbf{d} = R^T(\phi - \tau) - \overrightarrow{G\xi}$.

On supposera dans la suite que ϕ satisfait (1.6), ce qui est justifié car on s'intéresse à des déformations proches de déformations rigides, et dans le cas de mouvement rigide, on a $\mathbf{d} \equiv 0$ et donc $\int_{\Omega} \phi \cdot R \overrightarrow{G\xi} = \int_{\Omega} |\overrightarrow{G\xi}|^2 > 0$.

1.1.2 Une autre démarche pour la décomposition du mouvement

On mentionne dans ce paragraphe un article développant une approche similaire au travail présenté au paragraphe précédent. Après avoir introduit la méthode en question, on s'applique à mettre en parallèle les deux démarches.

Dans un article de 1976, voir [FDV76], FRAEIJIS DE VEUBEKE cherche à obtenir les équations du mouvement d'un corps «flexible» dans un cadre tridimensionnel. Il identifie différents termes de ces équations selon une étude heuristique. Pour cela, il décompose le mouvement du corps en un mouvement rigide moyen et en un mouvement relatif¹⁵ de déformations élastiques.

Dans un premier temps, l'auteur considère d'une part un repère fixe (dit *inertiel*), et d'autre part un repère dynamique qui suit un mouvement de translation de vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ et un mouvement de rotation de matrice $U \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$. En se plaçant dans ce second repère, il observe le déplacement relatif $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_{\vec{a},U}$, et étudie deux problèmes de minimisation le concernant : l'un pour minimiser l'énergie cinétique de ces perturbations relatives $\tilde{\mathbf{u}}$, l'autre pour minimiser la norme de $\tilde{\mathbf{u}}$. Cette seconde approche fait l'objet d'une investigation plus poussée : il s'agit de déterminer le «meilleur» repère, en identifiant \vec{a} et U , de telle sorte que $\|\tilde{\mathbf{u}}\|$ soit minimale. FRAEIJIS DE VEUBEKE montre que ce problème se ramène à un problème aux valeurs propres dans \mathbb{R}^4 :

$$\begin{pmatrix} \hat{M} & \hat{m} \\ \hat{m}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \beta \end{pmatrix}$$

avec $\hat{M} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $\hat{m} \in \mathbb{R}^3$ des données, et avec $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur instantané de la rotation du repère, $\beta \in \mathbb{R}$ l'angle instantané de rotation du repère¹⁶, et λ une valeur propre ; «la» plus petite des quatre valeurs propres du problème, notée λ_{min} , renvoie le vecteur propre qui permet de minimiser $\|\tilde{\mathbf{u}}\|$. Les cas de non-unicité éventuelle pour la matrice U (et donc pour la décomposition du mouvement) sont liés à l'ordre de multiplicité de λ_{min} . Un exemple de non-unicité est exhibé dans le cas tridimensionnel impliquant de grandes déformations élastiques.

Dans la sous-section 1.1.1 précédente, on a suivi une démarche similaire dans un cadre bidimensionnel. En présupposant la forme de la décomposition de la déformation ϕ , autrement dit $\phi = \tau + R_\theta(\vec{G}\xi + \mathbf{d})$, on a cherché à minimiser la norme de la perturbation élastique \mathbf{d} en fonction de l'angle θ et de la translation τ (de la déformation elle-même). On n'a par ailleurs pas eu besoin d'un référentiel dynamique. De plus, on a montré une réciproque à cette étude, à savoir que pour $(\tau, \theta, \mathbf{d})$ vérifiant certaines hypothèses, on construit une déformation ϕ acceptable suivant certaines propriétés (*cf* Proposition 1).

Pour effectuer maintenant un lien avec la méthode de FRAEIJIS DE VEUBEKE, on considère le problème bidimensionnel de la sous-section 1.1.1 plongé dans l'espace \mathbb{R}^3 , et on identifie aisément $\mathbf{b} = \vec{e}_z$ comme axe instantané de rotation. Avec la notation de l'angle $\beta = \theta$, le problème aux valeurs propres proposé par FRAEIJIS DE VEUBEKE est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \hat{M} & \hat{m} \\ \hat{m}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_z \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{M}\vec{e}_z + \theta\hat{m} \\ \hat{m}^T\vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\vec{e}_z \\ \lambda\theta \end{pmatrix}.$$

On précise maintenant le vecteur $\hat{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ et la troisième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$ de \hat{M} , avec $r = \int_{\Omega} \vec{G}\xi \wedge \phi(\xi)$

¹⁵Le mouvement rigide moyen permet de définir un repère dynamique suivant ce mouvement. La déformation élastique est alors observée à partir de ce nouveau repère ; d'où le qualificatif de *relatif* pour son mouvement. Voir ci-dessous pour de plus amples explications.

¹⁶Le couple (\mathbf{b}, β) détermine entièrement la matrice $U \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ de rotation grâce à la représentation de RODRIGUES-HAMILTON :

$$U = I_3 + 2\beta[\mathbf{b}] + 2[\mathbf{b}][\mathbf{b}]$$

où $[\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, de telle sorte qu'on a l'écriture : $\forall X \in \mathbb{R}^3, [\mathbf{b}]X = \mathbf{b} \wedge X$.

et $s = \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \cdot \phi(\xi)$. Ainsi, il ne reste que deux équations scalaire d'inconnues λ et θ :

$$\begin{cases} s + r\theta &= \lambda \\ r &= \lambda\theta. \end{cases}$$

On retrouve que le cas $r^2 + s^2 = 0$ est exclu, car il ne permet pas d'identifier θ . Par ailleurs, dans le cas $r^2 + s^2 \neq 0$, une condition supplémentaire (liée aux grands déplacements) est visiblement nécessaire pour identifier λ et θ .

1.1.3 Cadre fonctionnel. Mouvements infinitésimaux

Suite à l'obtention de la Proposition 1, on peut maintenant préciser les ensembles dans lesquels on va travailler :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \left\{ \phi \in L^2(\Omega); \left(\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right)^2 + \left(\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right)^2 \neq 0 \right\}, \\ \mathcal{E}_0 &= \left\{ \mathbf{d} \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{d} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \right\}, \\ \mathbf{Y}_0 &= \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{E}_0; \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0 \right\}, \\ \mathbf{Z}_0 &= \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[\times \mathbf{Y}_0, \end{aligned}$$

et on peut noter que \mathcal{E}_0 est le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ dont les éléments sont orthogonaux (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$) aux translations infinitésimales et aux rotations infinitésimales $\xi \mapsto \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{G\xi}$ (cf Figure 1.3).

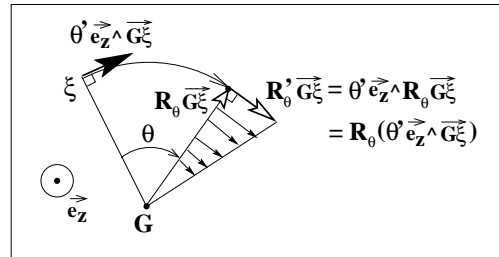


FIG. 1.3 – Rotation $\xi \mapsto R_G \xi$ d'angle θ et de centre G , et rotation infinitésimale $\xi \mapsto \theta' e_z \wedge G\xi$ d'angle θ' et de centre G .

1.1.4 Différentielle de la déformation suivant les composantes du mouvement

On considère maintenant l'application :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (\tau, \theta, \mathbf{d}) &\longmapsto \phi = \tau + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}). \end{aligned}$$

On a montré comment, pour tout élément ϕ de \mathbf{X}_0 , on peut exhiber un unique triplet $(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbf{Z}_0$ tel que :

$$\phi = \tau + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \quad . \quad (1.8)$$

Par ailleurs, si $(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbf{Z}_0$ alors $\phi = H(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbf{X}_0$. En effet, à partir des conditions de (1.5), on montre que :

$$\int_{\Omega} \phi \wedge R\vec{G\xi} = \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \vec{G\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \phi \cdot R\vec{G\xi} = \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \vec{G\xi} > 0 \quad ,$$

et donc nécessairement, d'après (1.4), que $\phi \in \mathbf{X}_0$.

L'application H est donc bijective de \mathbf{Z}_0 sur \mathbf{X}_0 . On va montrer que c'est un C^1 -difféomorphisme et étudier sa différentielle, ainsi que celle de $F = H^{-1}$.

L'application H est en fait de classe C^∞ , et on a en particulier :

$$\forall (\bar{\tau}, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{d}}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}_0, \quad DH(\tau, \theta, \mathbf{d})(\bar{\tau}, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{d}}) = \bar{\tau} + \bar{\theta} \vec{e}_z \wedge R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + R_\theta \bar{\mathbf{d}} \quad . \quad (1.9)$$

Or, la définition de \mathcal{E}_0 conduit à la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(\Omega) = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle \oplus \langle \vec{e}_z \wedge \vec{G\xi} \rangle \oplus \mathcal{E}_0 \quad .$$

Alors, pour $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque, on peut écrire la décomposition équivalente :

$$L^2(\Omega) = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle \oplus \langle \vec{e}_z \wedge R_\theta \vec{G\xi} \rangle \oplus \langle R_\theta \bar{\mathbf{d}}; \bar{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_0 \rangle \quad , \quad (1.10)$$

en appliquant la rotation R_θ à chaque élément de la décomposition orthogonale, puis en remplaçant légitimement $\langle R_\theta \vec{e}_x, R_\theta \vec{e}_y \rangle$ à nouveau par $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$. En prenant ensuite une perturbation $\mathbf{d} \in L^2(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \vec{G\xi} \neq 0$, c'est-à-dire qu'en particulier $\vec{e}_z \wedge \vec{G\xi}$ et $\vec{e}_z \wedge (\vec{G\xi} + \mathbf{d})$ ne sont pas orthogonaux, on déduit de (1.10) une autre somme directe :

$$L^2(\Omega) = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle \oplus \langle \vec{e}_z \wedge R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \rangle \oplus \langle R_\theta \bar{\mathbf{d}}; \bar{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_0 \rangle \quad . \quad (1.11)$$

Ainsi, pour un élément $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, il existe un unique triplet :

$$f(\mathbf{v}) = (\bar{\tau}(\mathbf{v}), \bar{\theta}(\mathbf{v}), \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{v})) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}_0 \quad (1.12)$$

tel que :

$$\mathbf{v} = \bar{\tau}(\mathbf{v}) + \bar{\theta}(\mathbf{v}) \vec{e}_z \wedge R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + R_\theta \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) \quad . \quad (1.13)$$

De plus, on a facilement :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v} \quad , \\ \bar{\theta}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \vec{G\xi}} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\vec{e}_z \wedge R_\theta \vec{G\xi}) \quad , \end{aligned} \quad (1.14)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) &= R_\theta^T (\mathbf{v} - \bar{\tau}(\mathbf{v}) - \bar{\theta}(\mathbf{v}) \vec{e}_z \wedge R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d})) \\ &= R_\theta^T \left(\mathbf{v} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v} - \frac{1}{\int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \vec{G\xi}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\vec{e}_z \wedge R_\theta \vec{G\xi}) \right) \vec{e}_z \wedge R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \right) \quad . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Par conséquent, pour tout $(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbf{Z}_0$, $DH(\tau, \theta, \mathbf{d})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}_0$ dans $L^2(\Omega)$.

On s'intéresse maintenant à la bijection réciproque $F : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{Z}_0$ de H . Pour un triplet $(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbf{Z}_0$ donné, et pour tout $(\bar{\tau}, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{d}}) \in \mathbf{Z}_0$, on utilise d'une part que $D(F \circ H) = \text{Id}_{\mathbf{Z}_0}$, et d'autre part (1.9); on a alors, en notant $\phi = H(\tau, \theta, \mathbf{d})$:

$$DF(\phi) \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{d\tau}{d\phi}(\phi), \quad \frac{d\theta}{d\phi}(\phi), \quad \frac{d\mathbf{d}}{d\phi}(\phi) \right]^T \cdot (\bar{\tau} + \bar{\theta} \bar{e}_z \wedge R_\theta(\bar{G}\xi + \mathbf{d}) + R_\theta \bar{\mathbf{d}}) = [\bar{\tau}, \bar{\theta}, \bar{\mathbf{d}}]^T \quad .$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2. *L'application*

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (\tau, \theta, \mathbf{d}) &\longmapsto \phi = \tau + R_\theta(\bar{G}\xi + \mathbf{d}) \end{aligned}$$

est un C^1 -difféomorphisme de \mathbf{Z}_0 sur \mathbf{X}_0 . La différentielle DF de sa réciproque $F = H^{-1}$ est la restriction de f (définie en (1.12)-(1.14)-(1.15)) de \mathbf{X}_0 dans \mathbf{Z}_0 .

Remarque 1. *En se plaçant dans les ensembles $\mathbf{X}_s = \mathbf{X}_0 \cap H^s(\Omega)$, $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_0 \cap H^s(\Omega)$, $\mathbf{Y}_s = \mathbf{Y}_0 \cap H^s(\Omega)$, et $\mathbf{Z}_s = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbf{Y}_s$, définis pour tout réel $s > 0$, les résultats précédents persistent. Ainsi, F est un C^1 -difféomorphisme de \mathbf{X}_s dans \mathbf{Z}_s , dont les expressions des composantes de la différentielle en un point $\phi \in \mathbf{X}_s$ sont données par (1.14)-(1.15).*

1.2 Équations du mouvement (formulation faible)

On s'intéresse à un matériau hyperélastique, homogène, isotrope, dont la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est un état naturel, et satisfaisant le principe de l'indifférence matérielle. On souhaite établir les équations du mouvement de la structure dans un cadre instationnaire. On commence par introduire quelques notations dans un cadre général.

Dans le cadre de petites déformations, où on se place, on peut considérer un matériau de SAINT VENANT-KIRCHHOFF. Sa densité d'énergie pour un déplacement \mathbf{u} fixé est donnée par (cf, par exemple, [Cia88], Théorème 4.4.3 page 155) :

$$\check{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) = \frac{\lambda}{2} [\text{Tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))]^2 + \mu \text{Tr}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]^2$$

où λ et μ sont les constantes de LAMÉ du matériau, et \mathbf{E} est le tenseur des déformations de GREEN-SAINTE VENANT :

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \quad .$$

Par ailleurs, pour un déplacement \mathbf{u} associé à un triplet $(\tau, \theta, \mathbf{d})$, on remarque que $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(\mathbf{d})$ (en effet le tenseur des déformations ne dépend pas des mouvements rigides). On particularise notre déformation en ajoutant l'hypothèse que $\nabla \mathbf{d}$ est petit, et on linéarise $\mathbf{E}(\mathbf{d})$ au premier ordre en $\nabla \mathbf{d}$ en considérant :

$$\ddagger(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T) \quad .$$

On définit finalement la densité \hat{W} d'énergie mécanique par :

$$\hat{W}(\mathbf{d}) = \frac{\lambda}{2} [\text{Tr}(\ddagger(\mathbf{d}))]^2 + \mu \text{Tr}[\ddagger(\mathbf{d})]^2 \quad . \tag{1.16}$$

On se place maintenant dans un cadre instationnaire. Soit $T > 0$, alors pour un temps $t \in [0, T]$, on décompose la déformation $\phi(\cdot, t)$ à chaque instant t suivant (1.1) :

$$\forall \xi \in \bar{\Omega}, \quad \phi(\xi, t) = \tau(t) + R_{\theta(t)}(\bar{G}\xi + \mathbf{d}(\xi, t)) \quad .$$

Pour obtenir le système d'équations satisfait par le déplacement $\mathbf{u} = \phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, on utilise les équations de LAGRANGE (pour lesquelles on réfère à [CTDL73] ou [Arn89]). Pour cela, on note $\dot{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{u}$ la vitesse de déplacement, et on choisit \mathbf{u} (respectivement $\dot{\mathbf{u}}$) comme coordonnée (resp. vitesse) généralisée¹⁷. On introduit la puissance instantanée $T(\cdot, \cdot)$ des forces extérieures surfaciques \mathbf{f} et linéiques \mathbf{g} , qui n'est fonction que de \mathbf{u} , par :

$$T(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \quad (1.17)$$

Pour la perturbation \mathbf{d} , on définit la densité $\hat{\mathcal{W}}$ d'énergie mécanique par (1.16), et l'énergie mécanique instantanée W du déplacement \mathbf{u} par :

$$W(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathcal{W}(\mathbf{d}) = \int_{\Omega} \hat{\mathcal{W}}(\mathbf{d}) \quad .$$

Enfin, on note $E_C = \rho_S \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}})^2 / 2$ l'énergie cinétique instantanée, où ρ_S est la densité de masse surfacique de la structure, et $\mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = E_C + T - W$ le lagrangien du système physique. L'équation de LAGRANGE¹⁸ s'écrit alors formellement :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}(\cdot, t=0) = \mathbf{v}(\cdot, t=T) = \partial_t \mathbf{v}(\cdot, t=0) = \partial_t \mathbf{v}(\cdot, t=T) \equiv 0, \\ \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \partial_t \mathbf{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} \right) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pour \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, \mathbf{v} et $\dot{\mathbf{v}}$ quelconques, on a facilement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_C}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} &= 0, & \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} &= \rho_S \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}, \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} &= 0, & \frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{u}}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, rappelant que $\mathbf{u} = \phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ où la déformation ϕ est associée à la perturbation \mathbf{d} , on a :

$$\forall \mathbf{v}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} D_{\mathbf{d}} \hat{\mathcal{W}}(\mathbf{d}) \cdot [D_{\phi} \mathbf{d}(\phi) \cdot (D_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v})] = \int_{\Omega} D_{\mathbf{d}} \hat{\mathcal{W}}(\mathbf{d}) \cdot \bar{\mathbf{d}}$$

où $\bar{\mathbf{d}}$ associé à \mathbf{v} est défini par (1.15), et où on a utilisé l'égalité $D_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u}) = \text{Id}$. En outre, puisque :

$$D_{\mathbf{d}} \hat{\mathcal{W}}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} = \lambda \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{d})) \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{b})) + 2\mu \text{Tr}[\mathbb{f}(\mathbf{d}) \mathbb{f}(\mathbf{b})] \quad ,$$

avec $\bar{\sigma}(\mathbf{d}) = \lambda \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{d})) I_2 + 2\mu \mathbb{f}(\mathbf{d})$, I_2 désignant la matrice identité de \mathbb{R}^2 , on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \mathbb{f}(\bar{\mathbf{d}}) \quad ,$$

où on a utilisé la notation du produit contracté $A : B = \text{Tr}(B^T A)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

¹⁷Voir [CTDL73] ou [Arn89] pour ce vocable.

¹⁸Il n'y a qu'une seule équation de LAGRANGE, car \mathbf{u} est la seule coordonnée généralisée.

Ainsi, en insérant les expressions précédentes dans (1.18), pour un \mathbf{v} régulier tel que $\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}(\cdot, T) \equiv 0$ et $\partial_t \mathbf{v}(\cdot, 0) = \partial_t \mathbf{v}(\cdot, T) \equiv 0$, on a, avec $\bar{\mathbf{d}}$ défini à partir de \mathbf{v} par (1.15) et $\dot{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{u}$:

$$\int_0^T \left(\rho_S \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}) : \mathbb{f}(\bar{\mathbf{d}}) \right) = 0 \quad .$$

On en déduit la formulation faible suivante du système d'équations modélisant le comportement du déplacement \mathbf{u} associé à la perturbation \mathbf{d} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \text{ suffisamment régulière, avec } \bar{\mathbf{d}} \text{ défini par (1.15) de façon unique,} \\ \rho_S \int_{\Omega} (\partial_{tt} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}) : \mathbb{f}(\bar{\mathbf{d}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad \text{au sens des distributions dans } \mathcal{D}'(0, T). \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Ce système est bien entendu complété par la donnée de conditions initiales :

$$\mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad \partial_t \mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_1 \quad .$$

1.3 Estimations d'énergie pour le problème continu

On suppose qu'il existe un déplacement \mathbf{u} solution du problème (1.19). Dans un premier temps, on établit un bilan formel de conservation d'énergie pour le système global, puis on recherche des estimations d'énergie formelles pour chacune des composantes du mouvement.

On prend $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u} = \dot{\tau} + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge R_{\theta}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}) + R_{\theta} \partial_t \mathbf{d}$ comme fonction test dans (1.19). Il s'agit de la décomposition vue en (1.13) avec ici $\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = \partial_t \mathbf{d}$. Le premier terme permet de retrouver l'énergie cinétique de la structure. D'autre part, en posant :

$$\begin{aligned} ((\mathbf{d}, \mathbf{b})) &= \int_{\Omega} (\lambda \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{d})) \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{b})) + 2\mu \mathbb{f}(\mathbf{d}) : \mathbb{f}(\mathbf{b})) \quad , \\ \text{et} \quad ||| \mathbf{b} |||^2 &= ((\mathbf{b}, \mathbf{b})) \quad , \end{aligned}$$

et en remarquant que $||| \mathbf{d} |||^2 = 2\mathcal{W}(\mathbf{d})$, on obtient finalement le bilan d'énergie suivant :

$$\frac{\rho_S}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\partial_t \mathbf{u}|^2 \right) + \frac{d}{dt} [\mathcal{W}(\mathbf{d})] = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \partial_t \mathbf{u} \quad . \quad (1.20)$$

On va maintenant rechercher des estimations d'énergie *a priori*. Pour $t \in (0, T)$, on écrit :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \partial_t \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \right) - \int_{\partial\Omega} \partial_t \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \quad ,$$

et on note :

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_S ||| \partial_t \mathbf{u}(t) |||_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} ||| \mathbf{d}(t) |||^2 \quad .$$

De cette façon, en intégrant (1.20) sur $(0, t)$, on a :

$$E(t) = E(0) - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(0) \cdot \mathbf{u}(0) + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f}(s) \cdot \partial_t \mathbf{u}(s) ds + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{u}(t) - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \partial_t \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{u}(s) ds.$$

On aboutit à la majoration suivante :

$$\begin{aligned} E(t) \leq a_0 + \left(\frac{1}{4\rho_S} ||| \mathbf{f} |||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^t E(s) ds \right) + a_1 ||| \mathbf{g}(t) |||_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} ||| \mathbf{u}(t) |||_{H^1(\Omega)} \\ + a_1 \int_0^t ||| \partial_t \mathbf{g}(s) |||_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} ||| \mathbf{u}(s) |||_{H^1(\Omega)} ds \quad , \quad (1.21) \end{aligned}$$

où $a_0 = E(0) + \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(0) \cdot \mathbf{u}(0) \right|$ est une constante qui ne dépend que des données initiales, et a_1 une constante telle que pour tout $\mathbf{b} \in H^1(\Omega)$ on ait (cf 1.0.1 page 22) :

$$\|\mathbf{b}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq a_1 \|\mathbf{b}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.22)$$

On rappelle tout d'abord que $\mathbf{u} = \tau + R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) - \overrightarrow{O\xi}$; on a ainsi :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 3 \left(\|\tau\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|R\overrightarrow{G\xi} - \overrightarrow{O\xi}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{d}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \quad (1.23)$$

D'une part, il est clair que, pour toute rotation R on a une majoration uniforme :

$$\|R\overrightarrow{G\xi} - \overrightarrow{O\xi}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a_2$$

où a_2 est une constante qui dépend de Ω , et par ailleurs que :

$$\begin{aligned} \|\tau\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \mathbf{u} \right)^2 = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(s) ds + \tau(0)|\Omega| \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\|\tau(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t \int_0^t \|\partial_t \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \\ &\leq 2 \left(\|\tau(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \int_0^t E(s) ds \right). \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le fait que $\mathbf{b} \mapsto \|\mathbf{b}\|$ est une norme sur \mathcal{E}_1 équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ (cf [DL72]), on note $C_1^\#$ une constante telle que :

$$\forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1, \quad \|\mathbf{b}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1^\# \|\mathbf{b}\|^2. \quad (1.24)$$

Alors on déduit de (1.23) la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq 3 \left(2 \left(\|\tau(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \int_0^t E(s) ds \right) + a_2 + C_1^\# \|\mathbf{d}\|^2 \right) \\ &\leq a_3 + 6T \int_0^t E(s) ds + 3C_1^\# E(t) \end{aligned}$$

avec a_3 une constante. De cette manière, on obtient dans (1.21) :

$$\begin{aligned} E(t) &\leq a_0 + \frac{1}{4\rho_S} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^t E(s) ds + \frac{a_1}{2} \left(\gamma \|\mathbf{g}(t)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{a_1}{2} \left(\|\partial_t \mathbf{g}(s)\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right) \\ &\leq A(T) + B(T) \int_0^t E(s) ds + C(T) \int_0^t \int_0^s E(r) dr ds \end{aligned}$$

avec d'une part $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$ à prendre assez grand tel que $1 - \frac{3a_1 C_1^\#}{2\gamma} > 0$, et avec d'autre part $A(T)$ une constante (qui dépend de T), $B = (1 + 3a_1(T + C_1^\#/2))/(1 - 3a_1 C_1^\#/(2\gamma)) > 0$ et $C = 3a_1 T / (1 - 3a_1 C_1^\#/(2\gamma))$. En appliquant le lemme de GRONWALL avec la fonction $t \mapsto E(t) + \frac{C}{B} \int_0^t E(s) ds$, on obtient que si :

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \mathbf{g} \in H^1(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)) \quad ,$$

alors on a : $\partial_t \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{d} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. À partir de ces régularités, et en supposant que, pour presque tout $t \in (0, T)$, $\mathbf{d}(t, \cdot)$ appartient à l'ensemble :

$$\mathbf{Y}_1^\delta = \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{E}_1; \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} \geq \delta > 0 \right\} \quad (1.25)$$

pour un réel $\delta > 0$ fixé, on a par (1.4) que $\theta \in L^\infty(0, T)$. Puis, on utilise les expressions de (1.14) et (1.15) avec la vitesse $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$ pour en déduire que $\dot{\tau}$, $\dot{\theta}$, $\partial_t \mathbf{d}$ sont bornés respectivement dans $L^\infty(0, T)$, $L^\infty(0, T)$, et $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, et ainsi finalement que τ , θ et \mathbf{d} sont bornés respectivement dans $W^{1,\infty}(0, T)$, $W^{1,\infty}(0, T)$ et $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Remarque 2. En notant $\mathcal{P}_{\mathbf{u}} : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ l'opérateur linéaire qui associe à \mathbf{v} l'élément $\overline{\mathbf{d}}$ défini par (1.15), on reprend la formulation faible (1.19), et on transpose les opérateurs agissant sur \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \rho_S \int_{\Omega} (\partial_{tt} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \overline{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla(\mathcal{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) \\ &= - \int_{\Omega} \mathcal{P}_{\mathbf{u}}^T[\text{div}(\overline{\sigma}(\mathbf{d}))] \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} [\mathcal{P}_{\mathbf{u}}^T \overline{\sigma}(\mathbf{d}) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

et finalement, en utilisant des fonctions \mathbf{v} assez régulières, on obtient le système suivant, au sens des distributions :

$$\begin{cases} \rho_S \partial_{tt} \mathbf{u} - \mathcal{P}_{\mathbf{u}}^T[\text{div}(\overline{\sigma}(\mathbf{d}))] = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathcal{P}_{\mathbf{u}}^T \overline{\sigma}(\mathbf{d}) \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1.26)$$

qui est non-linéaire puisque $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$ dépend de la solution.

1.4 Dynamique de la translation, de la rotation, de la perturbation

On va maintenant écrire des équations équivalentes à (1.19) en effectuant un choix particulier de fonctions-tests.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{d} \in \mathbf{Y}_1$ fixés, en suivant (1.11), on remarque que $H^1(\Omega)$ se décompose de la façon suivante¹⁹ :

$$H^1(\Omega) = \langle \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y \rangle \oplus \langle \overrightarrow{e}_z \wedge R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \rangle \oplus \langle R_\theta \overline{\mathbf{d}}; \overline{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_1 \rangle \quad (1.27)$$

On obtient alors les équations correspondant aux termes de chacun des sous-espaces de la somme directe en prenant respectivement pour fonction-test dans (1.19) $\mathbf{v} \in \langle \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y \rangle$, $\mathbf{v} \in \langle \overrightarrow{e}_z \wedge (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \rangle$ et $\mathbf{v} = R \overline{\mathbf{d}}$ pour $\overline{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_1$:

– selon les translations (infinitésimales²⁰), on obtient, en posant pour la masse de la structure $m = \rho_S |\Omega|$:

$$m \ddot{\tau} = \rho_S \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \quad (1.28)$$

en rappelant que $\mathbf{u} = \tau + R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) - \overrightarrow{O\xi}$.

– en choisissant des fonctions-tests du type $\overrightarrow{e}_z \wedge R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d})$ dans (1.19), on obtient :

$$\rho_S \int_{\Omega} R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \partial_{tt} \mathbf{u} = \int_{\Omega} R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g} \quad (1.29)$$

¹⁹On rappelle que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \cap H^1(\Omega)$.

²⁰La décomposition (1.27) correspond à la décomposition de l'espace des vitesses. Nous distinguons donc les translations *infinitésimales* (au sens de la mécanique, qui ne sont que des translations dans le sens mathématique du terme), les rotations *infinitésimales*, et les termes en $R_\theta \overline{\mathbf{d}}$ avec $\overline{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_1$.

On écrit tout d'abord que :

$$\partial_{tt}\mathbf{u} - \ddot{\tau} = \ddot{R}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + 2\dot{R}\partial_t\mathbf{d} + R\partial_{tt}\mathbf{d} \quad , \quad (1.30)$$

avec les opérateurs $\dot{R} = \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R$, et $\ddot{R} = \ddot{\theta}\vec{e}_z \wedge R + \theta\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R)$. Ceci donne une première contribution :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \ddot{R}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) &= \int_{\Omega} R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \left[\ddot{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})) \right] \\ &= \ddot{\theta} \frac{J(t)}{\rho_S} \vec{e}_z + (\dot{\theta})^2 R \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge (\vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge (\vec{G\xi} + \mathbf{d}))) = \ddot{\theta} \frac{J(t)}{\rho_S} \vec{e}_z \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\vec{G\xi} + \mathbf{d}$ et $\vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge (\vec{G\xi} + \mathbf{d}))$ sont colinéaires, et où on a noté $J(t) = \rho_S \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d})^2$ le moment d'inertie de la structure à l'instant t . On obtient comme terme suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \dot{R}(\partial_t\mathbf{d}) &= \dot{\theta} R \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge (\vec{e}_z \wedge \partial_t\mathbf{d}) = \dot{\theta} \left(\int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \partial_t\mathbf{d} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{\dot{\theta}}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{J(t)}{\rho_S} \right) \vec{e}_z . \end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu d'après (1.30) et en rappelant que τ est orthogonal à $\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})$:

$$\rho_S \int_{\Omega} R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \partial_{tt}\mathbf{u} = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}J) \vec{e}_z + \rho_S R \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \partial_{tt}\mathbf{d} \quad .$$

Enfin, puisque \mathbf{d} est aussi orthogonal aux rotations infinitésimales $\xi \mapsto \vec{e}_z \wedge \vec{G\xi}$, on a donc d'après (1.29) :

$$\frac{d}{dt} (\dot{\theta}J) + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt}\mathbf{d} = \int_{\Omega} R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g} \quad (1.31)$$

où le produit vectoriel est ici dans \mathbb{R}^2 .

– finalement, pour obtenir l'équation sur la perturbation \mathbf{d} , on prend $\mathbf{v} = R\bar{\mathbf{d}}$ comme fonction-test dans (1.19), avec $\bar{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_1$:

$$\rho_S \int_{\Omega} \partial_{tt}\mathbf{u} \cdot R\bar{\mathbf{d}} + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \sharp(\bar{\mathbf{d}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R\bar{\mathbf{d}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R\bar{\mathbf{d}} \quad .$$

À nouveau à partir de (1.30) et en utilisant que $\bar{\mathbf{d}}$ est orthogonal aux translations, on a :

$$\int_{\Omega} \partial_{tt}\mathbf{u} \cdot R\bar{\mathbf{d}} = \int_{\Omega} \left(\ddot{R}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + 2\dot{R}\partial_t\mathbf{d} + R\partial_{tt}\mathbf{d} \right) \cdot R\bar{\mathbf{d}} \quad .$$

Or, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \ddot{R}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot R\bar{\mathbf{d}} &= \int_{\Omega} \left[\ddot{\theta}\vec{e}_z \wedge (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge (\vec{G\xi} + \mathbf{d})) \right] \cdot \bar{\mathbf{d}} \\ &= \ddot{\theta}\vec{e}_z \cdot \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \bar{\mathbf{d}} - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \bar{\mathbf{d}} \end{aligned}$$

car $\bar{\mathbf{d}}$ est orthogonal aux rotations infinitésimales, et d'autre part :

$$\int_{\Omega} \dot{R}\partial_t\mathbf{d} \cdot R\bar{\mathbf{d}} = \dot{\theta} \int_{\Omega} (\vec{e}_z \wedge \partial_t\mathbf{d}) \cdot \bar{\mathbf{d}} = \dot{\theta} \left(\int_{\Omega} \partial_t\mathbf{d} \wedge \bar{\mathbf{d}} \right) \cdot \vec{e}_z \quad .$$

On obtient donc :

$$\forall \bar{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_1, \quad \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \bar{\mathbf{d}} + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \bar{\mathbf{d}} + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \bar{\mathbf{d}} - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \bar{\mathbf{d}} \right) + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}) : \nabla \bar{\mathbf{d}} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R\bar{\mathbf{d}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R\bar{\mathbf{d}} \quad . \quad (1.32)$$

Le problème (1.28)-(1.31)-(1.32) est complété par la donnée de conditions initiales :

$$\begin{cases} \tau(0) = \tau_0, & \theta(0) = \theta_0, & \mathbf{d}(\cdot, t=0) = \mathbf{d}_0, & \text{avec } \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_0) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0, \\ \dot{\tau}(0) = \tau_1, & \dot{\theta}(0) = \theta_1, & \partial_t \mathbf{d}(\cdot, t=0) = \mathbf{d}_1, \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} \tau_0 + R_{\theta_0}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_0) - \overrightarrow{O\xi} & := \mathbf{u}_0, \\ \tau_1 + R_{\theta_0} \mathbf{d}_1 + \theta_1 \vec{e}_z \wedge R_{\theta_0}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_0) & := \mathbf{u}_1. \end{cases}$$

Remarque 3. La formulation variationnelle (1.32) correspond à celle des équations du mouvement d'un solide élastique en rotation autour de l'axe \vec{e}_z à la vitesse $\dot{\theta}$ écrites dans le référentiel tournant.

Remarque 4. Les équations (1.28), (1.31), (1.32) peuvent tout aussi bien être obtenues en considérant le lagrangien avec $q_1 = \tau$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \mathbf{d}$ comme coordonnées généralisées; ainsi $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ et $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ permet de retrouver dans cet ordre (1.28), (1.31), et (1.32).

1.5 Approximation modale

Afin d'étudier le problème (1.28)-(1.31)-(1.32), on propose d'utiliser une méthode de GALERKIN, on peut se demander alors sur quel type de base il est préférable de décomposer les perturbations de l'espace \mathcal{E}_1 . Puisqu'on a considéré la modélisation d'un matériau hyperélastique dont on a linéarisé les expressions du tenseur des déformations au premier ordre en $\nabla \mathbf{d}$, les fonctions propres de l'opérateur $\overline{\Sigma}$ de l'élasticité linéarisée associées aux valeurs propres strictement positives sont une base naturelle de \mathcal{E}_1 .

D'autre part, \mathcal{E}_1 est l'espace des éléments de $H^1(\Omega)$ orthogonaux aux mouvements rigides infinitésimaux, qui forment précisément le noyau de $\overline{\Sigma}$, ce qui fournit une seconde justification à ce choix.

Il apparaît finalement que cette méthode de GALERKIN, introduite ici pour l'analyse du modèle, peut aussi être utilisée pour l'approximation du mouvement solide. C'est cette démarche qui est en particulier suivie dans le problème d'existence d'une solution au problème d'interaction fluide-structure présenté au Chapitre 1 de la Partie II, où la structure est modélisée en grands déplacements et petites perturbations.

À partir de là, on considère l'opérateur $\overline{\Sigma}$ de l'élasticité linéarisée avec condition de NEUMANN homogène; il est autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et possède un inverse borné compact de \mathcal{E}_0 dans \mathcal{E}_0 , et ses fonctions propres ψ_i , $i \in \mathbb{N}$, satisfont à :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\psi_i)) & = \lambda_i \psi_i & \text{dans } \Omega, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\psi_i) \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.33)$$

La famille $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme une base de $H^1(\Omega)$ qu'on choisit ici orthonormée dans $L^2(\Omega)$. On note $\psi_{0,1} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \frac{\vec{e}_x}{\|\vec{e}_x\|}$, $\psi_{0,2} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \frac{\vec{e}_y}{\|\vec{e}_y\|}$, et $\psi_{0,3} = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{G\xi} / \|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}$ les fonctions propres associées à la

valeur propre triple nulle, et engendrant $\text{Ker}(\bar{\Sigma})$. Par conséquent, on a $\mathcal{E}_1 = \langle \psi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}^*}$, et on choisit d'approcher \mathbf{d} par une combinaison d'un nombre fini $N \in \mathbb{N}^*$ de modes propres :

$$\mathbf{d}_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \psi_j$$

avec pour coefficients α_j des fonctions régulières qui ne dépendent que du temps.

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution

Sommaire

2.1	Résultats principaux	38
2.1.1	Existence d'une unique solution pour le problème en translation, rotation, et perturbation	38
2.1.2	Existence d'une unique solution pour le problème en déplacement	38
2.2	Existence d'une solution	39
2.2.1	Existence de solution pour le problème en dimension finie	39
2.2.2	Une estimation d'énergie supplémentaire	41
2.2.3	Existence d'une solution pour le problème continu en translation, rotation et perturbation	47
2.2.4	Existence d'une solution pour le problème continu en déplacement	49
2.3	Unicité de la solution	51
2.3.1	Étape 1. Réécriture du système d'équations.	52
2.3.2	Étape 2. Estimations des termes de \mathcal{R}	53
2.3.3	Étape 3. Estimations des termes liés aux forces extérieures.	55
2.3.4	Étape 4. Unicité de la solution régulière.	56
2.3.5	Étape 5. Unicité de la solution.	57

2.1 Résultats principaux

2.1.1 Existence d'une unique solution pour le problème en translation, rotation, et perturbation

On rappelle les définitions présentées au Chapitre 1, d'une part du sous-espace \mathcal{E}_k , pour $k = 0, 1$:

$$\mathcal{E}_k = \left\{ \mathbf{d} \in H^k(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{d} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \right\},$$

d'autre part du sous-ensemble ouvert \mathbf{Y}_k , pour $k = 0, 1$:

$$\mathbf{Y}_k = \left\{ \mathbf{d} \in H^k(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{d} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0, \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0 \right\} \subset \mathcal{E}_k.$$

Théorème 1. Soient τ_0, τ_1 des vecteurs de \mathbb{R}^2 , θ_0, θ_1 des réels, $\mathbf{d}_0 \in \mathbf{Y}_1$, $\mathbf{d}_1 \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in H^1(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)) \cap L^2(0, T; L^1(\partial\Omega))$. Si ces données sont assez petites ou si le temps T est assez petit, alors il existe une unique solution $(\tau, \theta, \mathbf{d})$ au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tau \in H^2(0, T), \theta \in H^2(0, T), \\ \text{et } \mathbf{d} \in H^2(0, T; (H^1(\Omega))' \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))) \\ \text{tels que pour presque tout } t \in (0, T), \mathbf{d}(\cdot, t) \in \mathbf{Y}_0 \text{ vérifiant :} \\ m\ddot{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \quad \text{dans } (0, T) \\ \frac{d}{dt} \left(J\theta \overrightarrow{e_z} + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right) = \int_{\Omega} R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \\ \rho_S \left((H^1(\Omega))' \langle \partial_{tt} \mathbf{d}, \mathbf{b} \rangle_{H^1(\Omega)} + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} \right) \\ + \int_{\Omega} \overline{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_\theta \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_\theta \mathbf{b} \quad \text{dans } L^1(0, T) \text{ faible, } \forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec les données initiales $\tau(0) = \tau_0$, $\dot{\tau}(0) = \tau_1$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \theta_1$, $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0$ et $\partial_t \mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_1$.

Théorème 2. Sous les hypothèses du théorème précédent, si de plus $\mathbf{f} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in H^1(0, \infty; H^{-1/2}(\partial\Omega)) \cap L^2(0, \infty; L^1(\partial\Omega))$, alors la solution $(\tau, \theta, \mathbf{d})$ du problème (2.1) existe pour tout $T > 0$ tel que $\mathbf{d}(\cdot, t) \in \mathbf{Y}_0$ pour presque tout $t \in (0, T)$.

2.1.2 Existence d'une unique solution pour le problème en déplacement

On rappelle la définition présentée au Chapitre 1 du sous-ensemble ouvert \mathbf{X}_1 :

$$\mathbf{X}_1 = \left\{ \phi \in H^1(\Omega); \left(\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right)^2 + \left(\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right)^2 \neq 0 \right\}.$$

Théorème 3. Soient les données initiales $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\mathbf{u}_0 + \overrightarrow{O\xi} \in \mathbf{X}_1$ et $\mathbf{u}_1 \in L^2(\Omega)$, et soient les forces $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in H^1(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)) \cap L^2(0, T; L^1(\partial\Omega))$. Si ces données sont assez petites ou si le temps T est assez petit, alors il existe une unique solution :

$$\mathbf{u} \in H^2(0, T; (H^1(\Omega))' \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)))$$

où l'indice N caractérise la dépendance des composantes $\tau_N, \theta_N, \mathbf{d}_N$ du déplacement \mathbf{u}_N par rapport au nombre fini $N \in \mathbb{N}^*$ de modes propres. Ce système en dimension finie est complété par des conditions initiales :

$$\begin{cases} \tau_N(0) = \tau_0, & \theta_N(0) = \theta_0, & \mathbf{d}_N(\cdot, t=0) = \mathbf{d}_{N0}, \\ \dot{\tau}_N(0) = \tau_1, & \dot{\theta}_N(0) = \theta_1, & \partial_t \mathbf{d}_N(\cdot, t=0) = \mathbf{d}_{N1}, \end{cases}$$

où \mathbf{d}_{N0} (respectivement \mathbf{d}_{N1}) est la projection L^2 de \mathbf{d}_0 (resp. \mathbf{d}_1) sur l'espace $\mathcal{E}^N = \langle \psi_i; 1 \leq i \leq N \rangle$. On note $\Pi_{\mathcal{E}^N}^{L^2(\Omega)}$ la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur \mathcal{E}^N . Puisque $\langle \psi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $(\mathcal{E}_1, ((\cdot, \cdot)))$ et de $(L^2(\Omega), \int_{\Omega} \cdot \cdot)$, on a :

$$\mathbf{d}_{N0} \longrightarrow \mathbf{d}_0 \text{ dans } H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_{N1} \longrightarrow \mathbf{d}_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (2.3)$$

L'équation de la translation τ_N est en fait découplée du reste du système et indépendante de N . On obtient aisément une unique solution $\tau_N = \tau \in H^2(0, T)$ dès que les données vérifient $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^1(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^1(\partial\Omega))$ et pour des données initiales $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}^2$.

Par ailleurs, les autres équations du système (2.2) forment un système différentiel ordinaire non-linéaire du second ordre du type :

$$A(X)\ddot{X} = h(t, X, \dot{X}) \quad (2.4)$$

où $X^T = [\theta, \alpha_1, \dots, \alpha_N] \in \mathbb{R}^{N+1}$, et dont on explicite facilement la matrice $A(X) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ symétrique :

$$A(X) = \begin{pmatrix} J_N(t) & \left(\rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \psi_i \right)_{1 \leq i \leq N}^T \\ \left(\rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \psi_i \right)_{1 \leq i \leq N} & (\rho_S \delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N} \end{pmatrix}$$

où on a utilisé le fait que la famille (ψ_i) est orthonormée dans $L^2(\Omega)$. Par ailleurs, pour $B^T = (\beta, \beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, on note $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i$, et on a :

$$\begin{aligned} B^T \cdot AB &= J_N(t)\beta^2 + 2\rho_S\beta \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \mathbf{b} + \rho_S \int_{\Omega} |\mathbf{b}|^2 \\ &= \rho_S \int_{\Omega} \left[\beta \vec{e}_z \wedge R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \right]^2 + 2\rho_S \int_{\Omega} \left[\beta \vec{e}_z \wedge R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \right] \cdot R_{\theta_N} \mathbf{b} + \rho_S \int_{\Omega} |R_{\theta_N} \mathbf{b}|^2 \\ &= \rho_S \left\| \beta \vec{e}_z \wedge R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) + R_{\theta_N} \mathbf{b} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ainsi, rappelant la décomposition (1.11) autour de \mathbf{d}_N , on en déduit que $A(X)$ est une matrice définie positive tant que $\int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \cdot \vec{G}\xi \neq 0$. En appliquant maintenant le théorème de CARATHÉODORY (cf [CL55] page 43) dans $\mathcal{U}_{\delta} \times \mathbb{R}^{N+1}$ où²¹ :

$$\mathcal{U}_{\delta} = \left\{ (\theta, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i \in \mathbf{Y}_0^{\delta} \right\},$$

sur lequel $(t, X, Y) \longmapsto A^{-1}(X)h(t, X, Y)$ est continue pour presque tout $t \in (0, T)$, alors le système (2.4) possède une solution locale maximale unique $X = (\theta, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in [W^{2,2}(0, T_N)]^{N+1}$ pour un temps $T_N \leq T$. En particulier, $\mathbf{d}_N(\cdot, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \psi_i(\cdot) \in \mathbf{Y}_0^{\delta}$ pour presque tout $t \in (0, T_N)$.

²¹On rappelle que \mathbf{Y}_0^{δ} est défini en (1.25) page 32.

On souhaite maintenant montrer que \mathbf{d}_N existe dans \mathbf{Y}_0^δ sur un intervalle de temps indépendant de N , et que cet intervalle est $(0, T)$. En effet, comme \mathbf{d}_N existe sur $(0, T_N)$, si on a $T_N < T$, alors nécessairement :

- ou bien la norme euclidienne de $X(t)$ dans \mathbb{R}^{N+1} explose $\left(\lim_{t \rightarrow T_N} |X(t)| = \infty \right)$,
- ou bien \mathbf{d}_N sort de \mathbf{Y}_0^δ .

La sortie de \mathbf{d}_N hors de \mathbf{Y}_0^δ tient uniquement à ce que la condition $\int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0$ ne reste pas satisfaite ; celle-ci peut être néanmoins assurée de manière suffisante si $|X(t)|$ est assez petit. Ainsi, si on montre d'une part que $|X(t)|$ est borné indépendamment de N et de t , et reste suffisamment petit, et d'autre part qu'il existe un temps $0 < T^* < T_N$ indépendant de N tel que $\mathbf{d}_N \in \mathbf{Y}_0^\delta$ pour presque tout $t \in (0, T^*)$, alors on aura que $X(t)$ est en fait une solution globale sur $(0, T^*)$. En repartant de (1.31) et (1.32), de la même façon que pour le problème continu, on obtient des estimations *a priori* avec $\partial_t \mathbf{u}_N$ borné dans $L^\infty(0, T_N; L^2(\Omega))$ et :

$$\| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, T_N; H^1(\Omega))} \leq C_1^* = C(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \partial_t \mathbf{g}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \theta_0, \theta_1, \lambda, \mu, \rho_S) \quad (2.6)$$

indépendamment de N . Puisque $\mathbf{d}_N(t)$ reste dans \mathbf{Y}_0^δ pour presque tout $t \leq T_N$, on en déduit, comme pour les estimations d'énergie pour le système continu, que τ_N , θ_N et \mathbf{d}_N sont bornés indépendamment de N respectivement dans $W^{1, \infty}(0, T_N)$, $W^{1, \infty}(0, T_N)$ et $W^{1, \infty}(0, T_N; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T_N; H^1(\Omega))$, avec en particulier :

$$\| (\theta_N, \mathbf{d}_N) \|_{W^{1, \infty}(0, T_N) \times (W^{1, \infty}(0, T_N; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T_N; H^1(\Omega)))} \leq C_2^* \quad (2.7)$$

où la constante $C_2^* = C(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \partial_t \mathbf{g}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \theta_0, \theta_1, \lambda, \mu, \rho_S, \delta)$ explose comme δ^{-1} . Or, en rappelant que $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in H^1(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))$, on a que C_1^* et C_2^* sont $L^2(0, T)$, et donc que X est borné dans tout $L^2(0, t)$ en norme euclidienne, pour $t \leq T$, indépendamment de N . Par ailleurs, on a pour tout²² $t \in (0, T_N)$:

$$\| \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \mathbf{d}_0 \|_{L^2(\Omega)} + t \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \| \mathbf{d}_0 \|_{L^2(\Omega)} + t C_2^*.$$

Par conséquent, il existe $0 < T^* \leq T_N$ indépendant de N tel que $\mathbf{d}_N \in \mathbf{Y}_0^\delta$ pour presque tout $t \in (0, T^*)$. Ainsi le temps d'existence de θ_N et \mathbf{d}_N est indépendant du nombre de modes propres. De plus, si T est assez petit ou si les données sont assez petites pour que \mathbf{d}_N reste dans \mathbf{Y}_0^δ sur $(0, T)$, alors $T^* = T$. En particulier $\mathbf{d}_N(t)$ reste dans \mathbf{Y}_1^δ pour presque tout $t \leq T$.

Remarque 5. *Puisque pour presque tout $t \in (0, T_N)$ on a $\mathbf{d}_N(t) \in \mathbf{Y}_1^\delta$ et à partir de (1.14) et (1.15), on obtient de retour dans (2.5) que :*

$$B^T \cdot AB = \rho_S \left\| \beta \overrightarrow{e_z} \wedge R_{\theta_N}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) + R_{\theta_N} \mathbf{b} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha(\delta) |B|_{\mathbb{R}^{N+1}}^2 \quad (2.8)$$

où $|\cdot|_{\mathbb{R}^{N+1}}$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^{N+1} . Ainsi la matrice $A(X)$ est \mathbb{R}^{N+1} -elliptique avec une constante d'ellipticité $\alpha(\delta) > 0$ qui est de l'ordre de δ .

2.2.2 Une estimation d'énergie supplémentaire

Les estimations précédentes sont insuffisantes pour passer à la limite quand $N \rightarrow \infty$ dans les termes non-linéaires. On cherche donc des majorations uniformes en N sur les accélérations $\ddot{\theta}_N$ de l'angle de rotation et $\partial_{tt} \mathbf{d}_N$ des perturbations, pour pouvoir ensuite appliquer une méthode de compacité lors de ce passage à la limite.

²²La solution du système (2.4) est continue en temps sur $(0, T_N)$.

On considère un entier $N_0 \in \mathbb{N}^*$ qu'on précisera ultérieurement, et $N \geq N_0$. On décompose à présent la perturbation \mathbf{d}_N par :

$$\mathbf{d}_N = \beta_N + \omega_N \quad \text{où} \quad \beta_N = \sum_{i=1}^{N_0-1} \alpha_i \psi_i \quad \text{et} \quad \omega_N = \sum_{i=N_0}^N \alpha_i \psi_i;$$

β_N (resp. ω_N) représente la partie «basses fréquences» (resp. «hautes fréquences») de cette décomposition. On note $Hf^{N_0} = \langle \psi_i; i \in \mathbb{N}, i \geq N_0 \rangle$ le sous-espace de \mathcal{E}_1 composé des hautes fréquences. On cherche maintenant des estimations séparément sur ces deux termes β_N et ω_N .

Estimation sur les hautes fréquences

De manière générale, soient \mathbf{b} un élément de $H^1(\Omega)$ et $\mathbf{b}_N = \Pi_{\mathcal{E}_N}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{b})$, alors on peut écrire à partir de (2.2) :

$$\begin{aligned} \rho_S \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \mathbf{b}_N &= -\rho_S \left(2\dot{\theta}_N \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N \wedge \mathbf{b}_N + \ddot{\theta}_N \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \mathbf{b}_N - (\dot{\theta}_N)^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \mathbf{b}_N \right) \\ &\quad - ((\mathbf{d}_N, \mathbf{b}_N)) + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta_N} \mathbf{b}_N + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta_N} \mathbf{b}_N \quad . \end{aligned}$$

De là, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \mathbf{b}_N \right| &\leq \left[2|\dot{\theta}_N| \|\partial_t \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} + |\ddot{\theta}_N| \|\mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} + |\dot{\theta}_N|^2 \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_S} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)} + \frac{a_1}{\rho_S} \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|\mathbf{b}_N\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\rho_S} \|\mathbf{d}_N\| \|\mathbf{b}_N\|, \quad (2.9) \end{aligned}$$

avec a_1 la constante présentée en (1.22).

On utilise tout d'abord :

$$\|\mathbf{b}_N\|^2 \leq C_2^\# \|\mathbf{b}_N\|_{H^1(\Omega)}^2 = C_2^\# \|\Pi_{\mathcal{E}_N}^{H^1(\Omega)}(\mathbf{b})\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2^\# \|\mathbf{b}\|_{H^1(\Omega)}^2$$

par équivalence des deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sur \mathcal{E}_1 , et parce que $\Pi_{\mathcal{E}_N}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{b}) = \Pi_{\mathcal{E}_N}^{H^1(\Omega)}(\mathbf{b})$ pour $\mathbf{b} \in H^1(\Omega)$.

Par ailleurs, pour $\mathbf{b} = \sum_{i=N_0}^{+\infty} \gamma_i \psi_i \in Hf^{N_0}$, on a :

$$\|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_2^\#}{\lambda_{N_0}} \|\mathbf{b}\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2.10)$$

En effet, puisque la famille $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormée dans $L^2(\Omega)$ et que $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante positive, on a en premier lieu :

$$\|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=N_0}^{+\infty} \gamma_i^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N_0}} \sum_{i=N_0}^{+\infty} \lambda_i \gamma_i^2.$$

Puis, comme pour i et j quelconques on a $((\psi_i, \psi_j)) = \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\bar{\sigma}(\psi_i)) \cdot \psi_j = \lambda_i \int_{\Omega} \psi_i \cdot \psi_j = \lambda_i \delta_{ij}$, on a, à nouveau grâce à l'équivalence de $||| \cdot |||$ et $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ sur \mathcal{E}_1 :

$$\sum_{i=N_0}^{+\infty} \lambda_i \gamma_i^2 = \left\| \left\| \sum_{i=N_0}^{+\infty} \lambda_i \psi_i \right\| \right\|^2 = ||| \mathbf{b} |||^2 \leq C_2^\# \| \mathbf{b} \|_{H^1(\Omega)}^2.$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on aboutit à (2.10).

On introduit maintenant la projection $\Pi_{\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}}^{L^2(\Omega)}(\cdot)$ de $L^2(\Omega)$ sur $\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}$, et on précise que :

$$\forall \mathbf{b} \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \Pi_{\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{b}) = \int_{\Omega} \partial_{tt} \Pi_{\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{d}_N) \cdot \mathbf{b} = \int_{\Omega} \partial_{tt} \omega_N \cdot \mathbf{b}. \quad (2.11)$$

On définit d'autre part la norme de ω_N dans $(H^1(\Omega))'$:

$$\| \omega_N \|_{(H^1(\Omega))'} = \sup_{\mathbf{b} \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\int_{\Omega} \omega_N \cdot \mathbf{b}|}{\| \mathbf{b} \|_{H^1(\Omega)}}. \quad (2.12)$$

De retour dans (2.9), on prend à présent $\mathbf{b}_N = \Pi_{\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{b})$ comme fonction-test particulière avec $\mathbf{b} \in H^1(\Omega)$. De là, grâce à (2.10) et au fait que :

$$\forall \mathbf{b} \in H^1(\Omega), \quad \| \Pi_{\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{b}) \|_{H^1(\Omega)} = \| \Pi_{\mathcal{E}^N \cap Hf^{N_0}}^{H^1(\Omega)}(\mathbf{b}) \|_{H^1(\Omega)} \leq \| \mathbf{b} \|_{H^1(\Omega)},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \mathbf{b}_N \right| &\leq \left[2|\dot{\theta}_N| \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} + |\ddot{\theta}_N| \| \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} + |\dot{\theta}_N|^2 \| \vec{G}\xi + \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_S} \| \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)} \right] \sqrt{\frac{C_2^\#}{\lambda_{N_0}}} \| \mathbf{b} \|_{H^1(\Omega)} + \left[\frac{a_1}{\rho_S} \| \mathbf{g} \|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + \frac{C_2^\#}{\rho_S} \| \mathbf{d}_N \|_{H^1(\Omega)} \right] \| \mathbf{b} \|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (2.11), la définition (2.12), et en appliquant la norme $L^2(0, T)$ en temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \| \partial_{tt} \omega_N \|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} &\leq \sqrt{\frac{C_2^\#}{\lambda_{N_0}}} \left[2 \| \dot{\theta}_N \|_{L^\infty(0, T)} \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \| \ddot{\theta}_N \|_{L^2(0, T)} \| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \| \dot{\theta}_N \|_{L^\infty(0, T)}^2 \| \vec{G}\xi + \mathbf{d}_N \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_S} \| \mathbf{f} \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right] + \frac{a_1}{\rho_S} \| \mathbf{g} \|_{L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))} + \frac{C_2^\#}{\rho_S} \| \mathbf{d}_N \|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Or, d'après (2.7), \mathbf{d}_N et θ_N sont respectivement bornés dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ et $W^{1, \infty}(0, T)$ indépendamment de N , on a donc :

$$\| \partial_{tt} \omega_N \|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \leq C_3^* + \sqrt{\frac{C_2^\#}{\lambda_{N_0}}} \| \ddot{\theta}_N \|_{L^2(0, T)} \| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \quad (2.13)$$

où $C_3^* = C(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \theta_0, \theta_1, \lambda, \mu, \rho_S, \delta, \Omega)$ est une constante indépendante du temps, qui est affine en $1/\sqrt{\lambda_{N_0}}$.

Estimation sur les basses fréquences

On s'intéresse maintenant à la partie β_N des basses fréquences de \mathbf{d}_N . Pour cela, on multiplie d'une part l'équation de la rotation infinitésimale de (2.2) par $\ddot{\theta}_N$, et on utilise d'autre part $\partial_{tt}\beta_N$ comme fonction-test dans le système des perturbations issu de (2.2), et on somme membre à membre ces deux égalités pour obtenir :

$$\begin{aligned} J_N(\ddot{\theta}_N)^2 + 2\rho_S\ddot{\theta}_N \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\beta_N + \rho_S \int_{\Omega} |\partial_{tt}\beta_N|^2 \\ = \ddot{\theta}_N \left(\int_{\Omega} R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g} - \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\omega_N \right. \\ \left. - 2\rho_S\dot{\theta}_N \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \cdot \partial_t \mathbf{d}_N \right) + \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta_N} \partial_{tt}\beta_N + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta_N} \partial_{tt}\beta_N \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}_N) : \nabla \partial_{tt}\beta_N + \rho_S(\dot{\theta}_N)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \cdot \partial_{tt}\beta_N - 2\rho_S\dot{\theta}_N \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\beta_N \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le membre de gauche de (2.14) se réécrit grâce à (2.5) sous la forme :

$$J_N(\ddot{\theta}_N)^2 + 2\rho_S\ddot{\theta}_N \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\beta_N + \rho_S \int_{\Omega} |\partial_{tt}\beta_N|^2 = \rho_S \left\| \ddot{\theta}_N \vec{e}_z \wedge R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) + R_{\theta_N} \partial_{tt}\beta_N \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.15)$$

Or, pour $\mathbf{v} = \vec{e}_z \wedge R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) + R_{\theta_N} \bar{\mathbf{d}} \in L^2(\Omega)$, on a d'après (1.14) :

$$|\bar{\theta}| \leq \frac{1}{\delta} \|\vec{G}\xi\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)},$$

car $\mathbf{d}_N \in \mathbf{Y}_0^\delta$, et on a d'après (1.15) :

$$\|\bar{\mathbf{d}}\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbf{v} - \vec{e}_z \wedge R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N)\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{C}{\delta}\right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)},$$

car $\mathbf{d}_N \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, avec C qui dépend des majorations de \mathbf{d}_N dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. On en déduit que :

$$C_1^o |\bar{\theta}|^2 + C_2^o \|\bar{\mathbf{d}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.16)$$

avec $C_1^o = \delta^2/2 \|\vec{G}\xi\|_{L^2(\Omega)}^2$ et $C_2^o = \delta^2/2(C + \delta)^2$.

On majore à présent le membre de droite de (2.14) en tenant compte pour le membre de gauche de (2.15) et (2.16). Ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_S C_1^o |\ddot{\theta}_N|^2 + \rho_S C_2^o \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq |\ddot{\theta}_N| \left(\rho_S \|\mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)} \|\partial_{tt}\omega_N\|_{(H^1(\Omega))'} \right. \\ \left. + \|\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)} \left[\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + a_1 \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + 2\rho_S |\dot{\theta}_N| \|\partial_t \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \right] \right) \\ + \left(\left[\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \rho_S |\dot{\theta}_N|^2 \|\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} + 2\rho_S |\dot{\theta}_N| \|\partial_t \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ \left. + \left[a_1 \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + C_2^\# \|\mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)} \right] \|\partial_{tt}\beta_N\|_{H^1(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

où on a utilisé :

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\omega_N \right| = \left| \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}_N \cdot \partial_{tt}\omega_N \right| \leq \|\mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)} \|\partial_{tt}\omega_N\|_{(H^1(\Omega))'}.$$

On tient compte alors de l'inégalité inverse $\|\partial_{tt}\beta_N\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{\lambda_{N_0}} C_1^\# \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(\Omega)}$ valable pour les basses fréquences, puis on intègre (2.17) sur $(0, T)$:

$$\begin{aligned} & \rho_S C_1^o \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \rho_S C_2^o \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ & \leq \rho_S \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \|\partial_{tt}\omega_N\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \\ & \quad + \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)} \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + a_1 \|\mathbf{g}\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))} \right. \\ & \quad \left. + 2\rho_S \|\dot{\theta}_N\|_{L^\infty(0,T)} \|\partial_t \mathbf{d}_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) + \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right. \\ & \quad \left. + \rho_S \|\dot{\theta}_N\|_{L^4(0,T)}^2 \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + 2\rho_S \|\partial_t \mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\dot{\theta}_N\|_{L^\infty(0,T)} \right. \\ & \quad \left. + \left[\|\mathbf{g}\|_{L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))} + C_2^\# \|\mathbf{d}_N\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \right] C_1^\# \sqrt{\lambda_{N_0}} \right) \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Grâce à (2.7), on en déduit :

$$\begin{aligned} & \rho_S C_1^o \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \rho_S C_2^o \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_4(\sqrt{\lambda_{N_0}}) \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \quad + \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)} \left(\rho_S \|\partial_{tt}\omega_N\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + C_5 \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Synthèse des majorations

On introduit la majoration (2.13) sur les hautes fréquences dans l'inégalité (2.18) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \rho_S C_1^o \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \rho_S C_2^o \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_4(\sqrt{\lambda_{N_0}}) \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ & \quad + \frac{\rho_S C_4^*}{\sqrt{\lambda_{N_0}}} \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \rho_S C_6 \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}, \end{aligned}$$

où C_4^* est une majoration de $\sqrt{C_2^\#} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$ indépendante de N . De là, en appliquant l'inégalité de YOUNG, on a :

$$\begin{aligned} & C_6 \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{C_1^o}{2} \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{C_6^2}{2C_1^o}, \\ \text{et} \quad & C_4(\sqrt{\lambda_{N_0}}) \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \frac{\rho_S C_2^o}{2} \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{C_4^2}{2\rho_S C_2^o} \end{aligned}$$

si λ_{N_0} est assez grand. On obtient ainsi en posant $C_5^* = C_1^o/2 - C_4^*/\sqrt{\lambda_{N_0}}$:

$$\rho_S C_5^* \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\rho_S C_2^o}{2} \|\partial_{tt}\beta_N\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{C_6^2}{2C_1^o} + \frac{C_4^2}{2\rho_S C_2^o}.$$

En choisissant maintenant l'indice N_0 suffisamment grand, afin que $C_5^* > 0$, alors on a que l'accélération de la rotation $\ddot{\theta}_N$ est majorée dans $L^2(0, T)$ et que l'accélération $\partial_{tt}\beta_N$ des basses fréquences est majorée dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ indépendamment de N . Puis, par (2.13), on a que l'accélération des hautes fréquences $\partial_{tt}\omega_N$ l'est aussi dans $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$.

Cas particulier de données petites

Dans le cas de données petites, la preuve peut être simplifiée en ne distinguant pas les parties hautes et basses fréquences. En repartant de (2.9) et en utilisant que $\int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{d}_N \cdot \mathbf{b}_N = \int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{d}_N \cdot \mathbf{b}$ car

$\partial_{tt}\mathbf{d}_N \in \mathcal{E}^N$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{(H^1(\Omega))'} &\leq 2|\dot{\theta}_N| \|\partial_t\mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} + |\ddot{\theta}_N| \|\mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} + |\dot{\theta}_N|^2 \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{\rho_S} (\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + a_1 \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}) + \frac{C_2^\#}{\rho_S} \|\mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En appliquant la norme de $L^2(0, T)$ et en utilisant les majorations sur \mathbf{d}_N et θ_N présentées en (2.7), on obtient :

$$\|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \leq C_6^* + \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0, T)} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \quad (2.19)$$

où $C_6^* = C(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \theta_0, \theta_1, \lambda, \mu, \rho_S, \delta, \Omega)$ est une constante indépendante du temps.

On recherche maintenant des majorations analogues pour la deuxième équation de (2.2) qu'on réécrit :

$$\begin{aligned} J_N(t)\ddot{\theta}_N &= \int_{\Omega} R_{\theta_N}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta_N}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g} \\ &\quad - 2\rho_S \dot{\theta}_N \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \partial_t\mathbf{d}_N + \rho_S \int_{\Omega} \partial_{tt}\mathbf{d}_N \wedge \mathbf{d}_N. \end{aligned}$$

Or, pour presque tout $t \in (0, T)$, on a $\mathbf{d}_N(t) \in \mathbf{Y}_0^\delta$, et donc :

$$0 < \sqrt{\rho_S\delta} \leq \sqrt{\rho_S} \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \overrightarrow{G\xi} \leq \sqrt{\rho_S} \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{J_N(t)} \|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)},$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |\ddot{\theta}_N| &\leq (J_N)^{-1} \left(\left[\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + 2\rho_S |\dot{\theta}_N| \|\partial_t\mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + a_1 \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)} + \rho_S \|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{(H^1(\Omega))'} \|\mathbf{d}_N\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

avec a_1 la constante présentée en (1.22). En appliquant la norme $L^2(0, T)$ à cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0, T)} &\leq \frac{\|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\rho_S\delta^2} \left(\left[\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + a_1 \|\mathbf{g}\|_{L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\rho_S \|\dot{\theta}_N\|_{L^\infty(0, T)} \|\partial_t\mathbf{d}_N\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right] \|\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \\ &\quad \left. + \rho_S \|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \right), \end{aligned}$$

et finalement :

$$\|\ddot{\theta}_N\|_{L^2(0, T)} \leq C_7^* + \frac{\|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\delta^2} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \quad (2.20)$$

où $C_7^* = C(C_1^*, C_2^*) = C(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \theta_0, \theta_1, \lambda, \mu, \rho_S, \delta, \Omega)$ est indépendant de N .

Ainsi, en combinant (2.19) et (2.20), on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} &\leq C_6^* \\ &\quad + \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \left(C_7^* + \frac{\|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\delta^2} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \|\partial_{tt}\mathbf{d}_N\|_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))')} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

On utilise l'inégalité (2.6) pour obtenir :

$$(1 - C_8^*) \|\partial_{tt} \mathbf{d}_N\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')} \leq C_6^* + C_1^* C_7^*$$

où $C_8^* = \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \|\vec{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2 / \delta^2$. De plus, si $\mathbf{f} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in H^1(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega))$, alors C_1^* , C_2^* , C_6^* , C_7^* et C_8^* sont bornées. Finalement, si $C_8^* < 1$, c'est-à-dire si les données sont assez petites, alors on a que $\partial_{tt} \mathbf{d}_N$ est borné indépendamment de N dans $L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$, et dans un second temps, grâce à (2.20), que $\dot{\theta}$ l'est dans $L^2(0,T)$.

Remarque 6. La constante C_8^* ci-dessus joue un rôle comparable à celui de la constante C_5^* obtenue dans la preuve du cadre général, puisque :

$$C_5^* = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\|\vec{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2} - \frac{C_2^\# \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}}{\sqrt{\lambda_{N_0}}} = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\|\vec{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2} \left(1 - 2 \frac{C_2^\# C_8^*}{\sqrt{\lambda_{N_0}}} \right).$$

Dans le cas général, lorsque les données ne sont pas nécessairement petites, ce sont finalement les hautes fréquences qui permettent de contrôler C_8^* (grâce au facteur $1/\sqrt{\lambda_{N_0}}$).

2.2.3 Existence d'une solution pour le problème continu en translation, rotation et perturbation

On souhaite passer à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans le système (2.2). Les informations dont on dispose sont les suivantes : $\tau_N = \tau$ est indépendant de N , et les suites (θ_N) et (\mathbf{d}_N) sont respectivement bornées dans $W^{2,2}(0,T)$ et $W^{2,2}(0,T;(H^1(\Omega))') \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.

- Comme pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\tau_N = \tau$, on a directement :

$$m\ddot{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \quad (2.22)$$

qui possède une unique solution $\tau \in W^{2,2}(0,T)$ (pour des données initiales fixées).

- On réécrit la seconde équation de (2.2) :

$$\frac{d}{dt} \left(J_N \dot{\theta}_N + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \right) = \int_{\Omega} R_{\theta_N} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta_N} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g} \quad . \quad (2.23)$$

Comme \mathbf{d}_N est borné dans $W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, et que :

$$W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \subset H^1((0,T) \times \Omega) \xrightarrow{c} L^2((0,T) \times \Omega),$$

avec cette dernière injection qui est compacte, il existe donc une sous-suite²³ $(\mathbf{d}_\eta)_\eta$ de $(\mathbf{d}_N)_N$ qui converge vers \mathbf{d} dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ fort. De plus, $\dot{\theta}_N$ étant borné dans $H^1(0,T)$, il existe une sous-suite telle que $\dot{\theta}_\eta \rightarrow \dot{\theta}$ dans $L^\infty(0,T)$ fort. De là, puisque $J_\eta \rightarrow J$ dans $L^1(0,T)$:

$$J_\eta \dot{\theta}_\eta \rightarrow J \dot{\theta} \quad \text{dans } L^1(0,T) \quad .$$

Par ailleurs, on a $\partial_t \mathbf{d}_\eta \rightharpoonup \partial_t \mathbf{d}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ faible, et $\mathbf{d}_\eta \rightarrow \mathbf{d}$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ fort, donc :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}_\eta \wedge \partial_t \mathbf{d}_\eta \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \quad \text{dans } L^1(0,T) \quad \text{faible.}$$

²³Pour la commodité de l'exposé, on indicera toutes les sous-suites par η , ainsi que les sous-suites extraites de ces sous-suites.

Enfin, $\theta \mapsto R_\theta$ est de classe C^∞ et θ_η étant borné dans $H^1(0, T) \xrightarrow{c} C^0([0, T])$, on a $R_{\theta_\eta} \rightarrow R_\theta$ uniformément dans $[0, T]$. De plus, on a d'une part, $\mathbf{d}_\eta \rightarrow \mathbf{d}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fort, et d'autre part $\mathbf{d}_\eta \rightharpoonup \mathbf{d}$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ faible et donc dans $L^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega))$ faible, par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R_{\theta_\eta}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}_\eta) \wedge \mathbf{f} &\longrightarrow \int_{\Omega} R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ fort,} \\ \int_{\partial\Omega} R_{\theta_\eta}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}_\eta) \wedge \mathbf{g} &\rightharpoonup \int_{\partial\Omega} R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g} \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ faible.} \end{aligned}$$

Finalement, on passe à la limite dans l'équation (2.23) pour obtenir :

$$\frac{d}{dt} \left(J\dot{\theta} + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right) = \int_{\Omega} R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_\theta(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T). \quad (2.24)$$

• Pour $1 \leq i \leq N$ fixé, on va passer à la limite dans les équations restantes de (2.2). Puisque \mathbf{d}_N est borné dans $W^{2,2}(0, T; (H^1(\Omega))') \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, on passe facilement à la limite dans les termes linéaires :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_\eta \cdot \psi_i &\rightharpoonup \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \psi_i \\ \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}_\eta) : \nabla \psi_i &\rightharpoonup \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \psi_i \end{aligned} \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ faible} \quad .$$

D'autre part, puisque $\dot{\theta}_\eta \rightarrow \dot{\theta}$ dans $L^\infty(0, T)$ fort et $\partial_t \mathbf{d}_\eta \rightharpoonup \partial_t \mathbf{d}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ faible, on a :

$$\dot{\theta}_\eta \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_\eta \wedge \psi_i \rightharpoonup \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \psi_i \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ faible.}$$

Par ailleurs, comme $\ddot{\theta}_N$ est borné dans $L^2(0, T)$, alors $\ddot{\theta}_\eta \rightharpoonup \ddot{\theta}$ dans $L^2(0, T)$ faible; donc, puisque $\mathbf{d}_\eta \rightarrow \mathbf{d}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fort, on a :

$$\ddot{\theta}_\eta \int_{\Omega} \mathbf{d}_\eta \wedge \psi_i \rightharpoonup \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \psi_i \quad \text{dans } L^1(0, T) \text{ faible} \quad .$$

De même, comme on a toujours $\dot{\theta}_\eta \rightarrow \dot{\theta}$ dans $L^\infty(0, T)$ fort et $\mathbf{d}_\eta \rightarrow \mathbf{d}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fort, alors :

$$(\dot{\theta}_\eta)^2 \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_\eta) \cdot \psi_i \longrightarrow (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \psi_i \quad \text{dans } L^2(0, T) \text{ fort.}$$

Enfin, par un raisonnement analogue à un précédent, on a sans peine :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R_{\theta_\eta} \psi_i \cdot \mathbf{f} &\longrightarrow \int_{\Omega} R_\theta \psi_i \cdot \mathbf{f} \\ \int_{\partial\Omega} R_{\theta_\eta} \psi_i \cdot \mathbf{g} &\longrightarrow \int_{\partial\Omega} R_\theta \psi_i \cdot \mathbf{g} \end{aligned} \quad \text{dans } C^0([0, T]) \quad .$$

Finalement, on est passé à la limite dans (2.2), et ainsi, pour i fixé, on a :

$$\begin{aligned} \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \psi_i + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \psi_i + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \psi_i - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \psi_i \right) \\ + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \psi_i = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_\theta \psi_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_\theta \psi_i \end{aligned} \quad \text{dans } L^1(0, T) \quad . \quad (2.25)$$

Ceci étant vrai quelque soit i , et comme $\mathcal{E}_1 = \langle \psi_i \rangle = Vect(\psi_i)$, le résultat reste vrai en remplaçant ψ_i par n'importe quelle fonction $\mathbf{b} \in \mathcal{E}_1$.

Remarque 7. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour presque tout $t \in (0, T)$, $\mathbf{d}_N(t)$ appartient à \mathbf{Y}_1^δ , donc en particulier $\int_\Omega \mathbf{d}_N = 0$, $\int_\Omega \mathbf{d}_N \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0$ et $\int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \overrightarrow{G\xi} \geq \delta > 0$. Or, puisque $\mathbf{d}_N \rightarrow \mathbf{d}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fort, on a :

$$\text{p.p. } t \in (0, T), \quad \int_\Omega \mathbf{d} = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} \geq \delta > 0,$$

c'est-à-dire que $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{Y}_1^\delta$ pour presque tout $t \in (0, T)$. En particulier, pour presque tout $t \in (0, T)$, on a $(\tau(t), \theta(t), \mathbf{d}(t)) \in \mathbf{Z}_1$. Par ailleurs, on montre facilement que $\partial_t \mathbf{d} \in \mathcal{E}_0$ et qu'au sens des distributions, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \partial_t \mathbf{d} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \partial_t \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T).$$

Remarque 8. Concernant les conditions initiales, puisque θ_N est borné dans $W^{2,\infty}(0, T) \hookrightarrow C^1([0, T])$, les éléments $\theta_N(0)$ et $\dot{\theta}_N(0)$ ont bien un sens. En particulier, comme $\dot{\theta}_\eta \rightarrow \dot{\theta}$ dans $L^2(0, T)$ faible, on a $\dot{\theta}_\eta(0) = \dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{\theta}(0)$ et $\theta_\eta(0) = \theta_0 \rightarrow \theta(0)$. De même, puisque \mathbf{d}_N est borné dans $H^2(0, T; (H^1(\Omega))') \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, on a (cf [Lio69], Lemme 1.2 page 7) d'une part $\mathbf{d}_N \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ et d'autre part $\partial_t \mathbf{d}_N \in C^0([0, T]; (H^1(\Omega))')$. Ainsi $\mathbf{d}_N(0)$ et $\partial_t \mathbf{d}_N(0)$ ont un sens respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $(H^1(\Omega))'$; on a par ailleurs $\mathbf{d}_\eta(0) \rightarrow \mathbf{d}(0)$ dans $L^2(\Omega)$ et $\partial_t \mathbf{d}_\eta(0) \rightarrow \partial_t \mathbf{d}(0)$ dans $(H^1(\Omega))'$. Enfin, en utilisant (2.3), on a $\mathbf{d}_\eta(0) = \mathbf{d}_{\eta_0} \rightarrow \mathbf{d}_0$ dans $H^1(\Omega)$ et $\partial_t \mathbf{d}_\eta(0) = \mathbf{d}_{\eta_1} \rightarrow \mathbf{d}_1$ dans $L^2(\Omega)$, et donc on a les égalités $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0$ dans $H^1(\Omega)$ et $\partial_t \mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_1$ dans $L^2(\Omega)$.

Nous avons ainsi terminé la preuve de l'existence d'une solution au problème en translation, rotation et perturbation. Ce résultat est présenté au Théorème 1 page 38.

2.2.4 Existence d'une solution pour le problème continu en déplacement

À partir du système d'EDP (2.1) page 38 satisfait par la translation, la rotation et la perturbation, et grâce à leurs régularités, on va construire un déplacement et obtenir le système vérifié par celui-ci.

Soit un triplet :

$$(\tau, \theta, \mathbf{d}) \in H^2(0, T) \times H^2(0, T) \times H^2(0, T; (H^1(\Omega))') \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$$

solution du système (2.1) page 38, alors d'après la Remarque 7 et le paragraphe 1.1, on peut lui associer une unique déformation ϕ telle que pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$\phi(\cdot, t) = \tau(t) + R_{\theta(t)}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}(\cdot, t)) \in \mathbf{X}_1 \quad \text{avec} \quad R_{\theta(t)} = R = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}.$$

On définit le déplacement $\mathbf{u} = \phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ qui appartient à $H^2(0, T; (H^1(\Omega))') \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

- Prenant la première équation de (2.1) page 38, on a pour tout $\overline{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^2$:

$$m\overline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} = \rho_S \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \partial_t \mathbf{u} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} \right) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \quad (2.26)$$

car $\mathbf{d} \in \mathbf{Y}_0^\delta$ et $\partial_t \mathbf{d} \in \mathcal{E}_0$, et parce qu'on a pris $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))$.

- On considère maintenant la deuxième équation du système (2.1) page 38. Or on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_S} \left(J\dot{\theta} \overrightarrow{e_z} + \rho_S \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right) &= \dot{\theta} \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d})^2 \overrightarrow{e_z} + \left(\int_\Omega \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right) R \overrightarrow{e_z} \\ &= \int_\Omega R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \left[\dot{\theta} \overrightarrow{e_z} \wedge R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \right] + \int_\Omega R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge R \partial_t \mathbf{d} \quad \text{car } \partial_t \mathbf{d} \in \mathcal{E}_0 \\ &= \int_\Omega R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \left[\dot{\tau} + \dot{\theta} \overrightarrow{e_z} \wedge R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) + R \partial_t \mathbf{d} \right] \quad \text{car } \mathbf{d} \in \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Alors, en rappelant que $\mathbf{u} = \tau + R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) - \vec{O\xi}$ et $\dot{R} = \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R$, on obtient, dans la deuxième équation de (2.1) page 38, que pour tout $\bar{\theta} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \rho_S \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} [\bar{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})] \cdot \partial_t \mathbf{u} \right) \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot [\bar{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})] + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot [\bar{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})] \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T). \end{aligned} \quad (2.27)$$

• On s'intéresse enfin à la troisième équation de (2.1) page 38. On a tout d'abord, pour tout $\mathbf{b} \in \mathcal{E}_1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot R\mathbf{b} &= \int_{\Omega} (\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + R\partial_t \mathbf{d}) \cdot R\mathbf{b} = \dot{\theta}\vec{e}_z \cdot \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \cdot \mathbf{b}, \\ \text{et } \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot R\mathbf{b} \right) &= \ddot{\theta}\vec{e}_z \cdot \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \dot{\theta}\vec{e}_z \cdot \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a facilement :

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \dot{R}\mathbf{b} = \int_{\Omega} [\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + R\partial_t \mathbf{d}] \cdot (\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge R\mathbf{b}) = (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} - \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \mathbf{b}.$$

Ainsi, on en déduit que la troisième équation de (2.1) page 38 s'écrit :

$$\forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1, \quad \rho_S \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot R\mathbf{b} \right) - \rho_S \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \dot{R}\mathbf{b} + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R\mathbf{b} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R\mathbf{b}. \quad (2.28)$$

• Finalement, en prenant $\mathbf{v} = \bar{\tau} + \bar{\theta}\vec{e}_z \wedge R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) + R\mathbf{b}$ avec $\bar{\tau} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{\theta} \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{E}_1$ quelconques, et en sommant membre à membre les équations de (2.26)-(2.27)-(2.28), on obtient :

$$\rho_S \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) - \rho_S \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad (2.29)$$

car $\partial_t \mathbf{v} = \bar{\theta}\vec{e}_z \wedge \partial_t [R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})] + \dot{R}\mathbf{b}$ et :

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot (\bar{\theta}\vec{e}_z \wedge \partial_t [R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})]) = \bar{\theta}\vec{e}_z \cdot \int_{\Omega} \partial_t [R(\vec{G\xi} + \mathbf{d})] \wedge \partial_t [\tau + R(\vec{G\xi} + \mathbf{d}) - \vec{O\xi}] = 0 \quad .$$

Par ailleurs, comme pour presque tout $t \in (0, T)$, $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{Y}_1^\delta$, on a en particulier la décomposition (1.27) page 32 de $H^1(\Omega)$. Ainsi, on en déduit dans (2.29) que le système satisfait par le déplacement \mathbf{u} est le suivant :

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \rho_S \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T)$$

avec \mathbf{b} obtenu à partir de \mathbf{v} grâce à (1.15) page 27, et en ajoutant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\cdot, t=0) = \mathbf{u}_0 & \stackrel{\text{déf}}{:=} \tau(0) + R_{\theta(0)}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}(\cdot, t=0)) - \vec{O\xi} = \tau_0 + R_{\theta_0}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}_0) - \vec{O\xi}, \\ \partial_t \mathbf{u}(\cdot, t=0) = \mathbf{u}_1 & \stackrel{\text{déf}}{:=} \dot{\tau}(0) + \partial_t [R_{\theta}(\vec{G\xi} + \mathbf{d})]_{|t=0} = \tau_1 + R_{\theta_0} \mathbf{d}_1 + \theta_1 \vec{e}_z \wedge R_{\theta_0}(\vec{G\xi} + \mathbf{d}_0). \end{cases}$$

Nous avons ainsi terminé la preuve de l'existence d'une solution au problème en déplacement. Ce résultat est présenté au Théorème 3 page 38.

Collaboration et publication

Ce travail a été effectué en collaboration avec Céline GRANDMONT et Yvon MADAY, et a fait l'objet d'une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, *cf* [GMM02].

2.3 Unicité de la solution

Soient \mathbf{f} , \mathbf{g} les forces extérieures données, et $\bar{\mathbf{u}}_0$ et $\bar{\mathbf{u}}_1$ les données initiales. On suppose qu'il existe deux déplacements \mathbf{u}_i , $i = 1, 2$, solutions du système en déplacement (rappelé ci-dessous). On indice par i les quantités associées à \mathbf{u}_i , telles que l'angle de rotation θ_i , la rotation $R_i = R_{\theta_i}$ elle-même, ainsi que la perturbation élastique \mathbf{d}_i . Le système satisfait par \mathbf{u}_i est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad \rho_S \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} \right) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}_i) : \nabla \mathbf{b}_i = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \\ \text{avec } \mathbf{b}_i \text{ obtenu à partir de } \mathbf{v} \text{ grâce à (1.15) page 27,} \\ \mathbf{u}_i(\cdot, t=0) = \bar{\mathbf{u}}_0, \quad \partial_t \mathbf{u}_i(\cdot, t=0) = \bar{\mathbf{u}}_1, \end{array} \right. \quad (2.30)$$

tel que $\phi_i(\cdot, t) = \mathbf{u}_i(\cdot, t) + \text{Id}_{\mathbb{R}^2} \in \mathbf{X}_1$ pour presque tout $t \in (0, T)$, et avec \mathbf{d}_i défini dans la Proposition 2 page 28. On remarque que la fonction-test \mathbf{b}_i dépend du déplacement \mathbf{u}_i par le biais de la relation (1.15).

De plus, grâce à la Proposition 2, on peut décomposer $\mathbf{u}_i(\xi, t) = \tau_i(t) + R_i(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_i(\xi, t)) - \xi$ pour presque tout $t \in (0, T)$ avec $(\tau_i, \theta_i, \mathbf{d}_i) \in \mathbf{Z}_1$. Ainsi, le système précédent peut être réécrit de manière équivalente en le vecteur de translation τ_i :

$$m\ddot{\tau}_i = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \quad \text{dans } (0, T),$$

ainsi qu'en l'angle de rotation θ_i et en la perturbation \mathbf{d}_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(J_i \dot{\theta}_i) + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_i \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_i = \int_{\Omega} R_i(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_i) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_i(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_i) \wedge \mathbf{g} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T), \\ \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{b} + 2\dot{\theta}_i \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_i \wedge \mathbf{b} + \ddot{\theta}_i \int_{\Omega} \mathbf{d}_i \wedge \mathbf{b} - (\dot{\theta}_i)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{b} \right) \\ \quad + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}_i) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_i \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_i \mathbf{b} \quad \text{dans } L^1(0, T) \text{ faible, } \forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1. \end{array} \right.$$

où on a noté $J_i = \rho_S \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_i)^2$ le moment d'inertie associé au déplacement \mathbf{u}_i .

De cette formulation, il est clair que, pour les données initiales $\tau_i(0)$ et $\dot{\tau}_i(0)$ issues de $\bar{\mathbf{u}}_0$ et $\bar{\mathbf{u}}_1$, l'équation en la translation a une unique solution dans $H^2(0, T)$ pourvu que $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^1(\Omega))$ et $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^1(\partial\Omega))$. On obtient alors $\tau_1 = \tau_2$.

On s'intéresse maintenant au reste du système. Pour démontrer l'unicité de l'angle de rotation et de la perturbation, on divise la preuve en cinq étapes. Les quatre premières sont effectuées de manière formelle en supposant que $\partial_t \mathbf{d}$ est dans $L^\infty(0, T; \mathcal{E}_1)$. Dans la première étape, on réécrit le système d'équations comme une égalité (*cf* (2.36)) en $\theta = \theta_2 - \theta_1$ et $\mathbf{d} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$, grâce au choix de fonctions-tests adéquates et licites. On estime ensuite dans un second temps le terme de droite de cette égalité, et plus précisément les termes des forces extérieures dans une troisième étape. On applique alors le lemme de GRONWALL pour conclure (dans le cas régulier) lors d'une quatrième étape. Enfin, la cinquième partie de la preuve traite du cas général (où $\partial_t \mathbf{d}$ est seulement dans $L^2(\Omega)$) grâce à un argument de régularisation.

2.3.1 Étape 1. Réécriture du système d'équations.

On pose pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$y(t) = \rho_S \left\| \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge R_1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_1) + R_1 \partial_t \mathbf{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = |\dot{\theta}|^2 J_1 + 2\rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \int_{\Omega} |\partial_t \mathbf{d}|^2 \quad (2.31)$$

d'après (2.5) page 40. La quantité suivante sera en particulier utilisée :

$$\frac{\dot{y}(t)}{2} = \ddot{\theta} J_1 + |\dot{\theta}|^2 \frac{J_1}{2} + \rho_S \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d} + \rho_S \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \cdot \partial_{tt} \mathbf{d}.$$

D'une part, on soustrait les équations concernant les angles θ_2 et θ_1 , et on multiplie la nouvelle équation par $\dot{\theta}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_2 J_2 - \dot{\theta}_1 J_1) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} (\mathbf{d}_2 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_1) \\ = \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[R_2(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) - R_1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_1) \right] \wedge \mathbf{f} + \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} \left[R_2(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) - R_1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_1) \right] \wedge \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Puis, en faisant apparaître les différences $\mathbf{d} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$ et $\theta = \theta_2 - \theta_1$, on arrive à :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_2 (J_2 - J_1) + \dot{\theta}_1 J_1) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d} \\ = \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{f} + \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{g}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

D'autre part, on soustrait les équations concernant les perturbations \mathbf{d}_2 et \mathbf{d}_1 , et on a pour tout $\mathbf{b} \in \mathcal{E}_1$:

$$\begin{aligned} \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{b} + 2\dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{b} + \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \right. \\ \left. + \mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{b}) - \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \mathbf{b}) \right) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{b}, \quad (2.33) \end{aligned}$$

où on a posé $\mathcal{T}(\theta, \mathbf{d}, \mathbf{b}) = (\theta)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b}$.

Afin de faciliter la présentation de la preuve, on montre tout d'abord le résultat d'unicité de manière formelle. On suppose que $\partial_t \mathbf{d}$ est assez régulier, c'est-à-dire : $\partial_t \mathbf{d} \in \mathcal{E}_1$ pour presque tout $t \in (0, T)$. À la fin de la preuve, on utilise un argument de régularisation (cf Étape 5).

Utilisant l'hypothèse précédente, il est maintenant licite de prendre $\mathbf{b} = \partial_t \mathbf{d}$ dans l'égalité (2.33) :

$$\begin{aligned} \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d} + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right. \\ \left. + \mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \partial_t \mathbf{d}) - \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \partial_t \mathbf{d}) \right) + ((\mathbf{d}, \partial_t \mathbf{d})) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}. \quad (2.34) \end{aligned}$$

On définit maintenant $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{f}} + \mathcal{F}_{\mathbf{g}}$ qui contient les termes des forces extérieures (provenant de (2.32) et (2.34)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{f}} &= \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{f} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d} \\ \mathcal{F}_{\mathbf{g}} &= \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{g} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}. \end{aligned}$$

En additionnant terme à terme (2.32) et (2.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \left[\dot{\theta} \frac{d}{dt} (\dot{\theta} J_1) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d} + \rho_S \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} \right] \\ & + \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_2 (J_2 - J_1)) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \\ & + \rho_S \mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \partial_t \mathbf{d}) - \rho_S \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \partial_t \mathbf{d}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{d}, \mathbf{d})), \quad (2.35) \end{aligned}$$

Les termes entre crochets issus de la première ligne de (2.35) sont égaux à $\frac{\dot{y}(t)}{2} + (\dot{\theta})^2 \frac{\dot{J}_1}{2}$. On en déduit ainsi que :

$$\frac{\dot{y}(t)}{2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{d}, \mathbf{d})) = \mathcal{F} - \mathcal{R}, \quad (2.36)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & (\dot{\theta})^2 \frac{\dot{J}_1}{2} + \dot{\theta} \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_2 (J_2 - J_1)) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 \\ & + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} + \rho_S \mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \partial_t \mathbf{d}) - \rho_S \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \partial_t \mathbf{d}). \quad (2.37) \end{aligned}$$

De plus, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \partial_t \mathbf{d}) - \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \partial_t \mathbf{d}) &= (\dot{\theta}_1)^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1) \cdot \partial_t \mathbf{d} - (\dot{\theta}_2)^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_2) \cdot \partial_t \mathbf{d} \\ &= -\dot{\theta} \int_{\Omega} \left[\dot{\theta}_1 (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1) + \dot{\theta}_2 (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_2) \right] \cdot \partial_t \mathbf{d} - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d} \end{aligned}$$

en ayant utilisé, $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a = a_2 - a_1$, $b = b_2 - b_1$:

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2 &= a_1 b_1 (a_1 - a_2) + a_1 a_2 b_1 - a_2 b_2 (a_2 - a_1) - a_2 b_2 a_1 \\ &= -a (a_1 b_1 + a_2 b_2) - a_1 a_2 b. \end{aligned}$$

De cette façon, \mathcal{R} peut être réécrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & (\dot{\theta})^2 \frac{\dot{J}_1}{2} + \dot{\theta} \ddot{\theta}_2 (J_2 - J_1) + \dot{\theta} \dot{\theta}_2 (\dot{J}_2 - \dot{J}_1) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} \\ & + \rho_S \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} - \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[\dot{\theta}_1 (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1) + \dot{\theta}_2 (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_2) \right] \cdot \partial_t \mathbf{d} - \rho_S \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}. \end{aligned}$$

2.3.2 Étape 2. Estimations des termes de \mathcal{R} .

On commence tout d'abord avec les termes qui n'impliquent ni $\ddot{\theta}_2$, ni $\partial_{tt} \mathbf{d}_2$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\dot{\theta})^2 \dot{J}_1}{2} \right| &= \rho_S |\dot{\theta}|^2 \left| \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1) \cdot \partial_t \mathbf{d}_1 \right| \\ &\leq \rho_S \| \overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1 \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \| \partial_t \mathbf{d}_1 \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} |\dot{\theta}|^2 \leq C |\dot{\theta}|^2, \end{aligned}$$

avec une constante C indépendante du temps car $\mathbf{d}_1 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$. De la même manière, on obtient :

$$\left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d} \right| \leq |\dot{\theta}| \|\partial_t \mathbf{d}_1\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\dot{\theta}| \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On considère en plus que $\dot{\theta}_2 \in L^\infty(0, T)$, et $\partial_t \mathbf{d}_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, on a alors :

$$\left| \dot{\theta} \dot{\theta}_2 (j_2 - j_1) \right| = 2\rho_S |\dot{\theta}| |\dot{\theta}_2| \left| \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}_2 + \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1) \cdot \partial_t \mathbf{d} \right| \leq C |\dot{\theta}| \left(\|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

De plus, puisque $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in L^\infty(0, T)$, on a aussi :

$$\left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[\dot{\theta}_1 (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_1) + \dot{\theta}_2 (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_2) \right] \cdot \partial_t \mathbf{d} \right| \leq C |\dot{\theta}| \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)},$$

et :

$$\left| \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d} \right| \leq C \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On traite maintenant les termes qui nécessitent une régularité supplémentaire sur les dérivées secondes en temps :

$$\left| \ddot{\theta}_2 (J_2 - J_1) \right| = \rho_S |\ddot{\theta}| |\ddot{\theta}_2| \left| \int_{\Omega} (2\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{d} \right| \leq C_1(t) |\ddot{\theta}| \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}$$

avec $C_1(\cdot) \in L^2(0, T)$ car $\ddot{\theta}_2 \in L^2(0, T)$. De la même manière, il vient :

$$\left| \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right| \leq |\ddot{\theta}_2| \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(t) \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, pour le dernier terme de \mathcal{R} n'ayant pas encore été traité, on a :

$$\left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 \right| \leq |\dot{\theta}| \|\partial_{tt} \mathbf{d}_2\|_{(H^1(\Omega))'} \|\mathbf{d}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2(t) |\dot{\theta}| \|\mathbf{d}\|_{H^1(\Omega)}.$$

avec $C_2(\cdot) \in L^2(0, T)$ car $\partial_{tt} \mathbf{d}_2 \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$.

En ce qui concerne le terme \mathcal{R} , on obtient finalement l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\leq C \left[|\dot{\theta}|^2 + |\dot{\theta}| \left(\|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \right) + \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\quad + C_1(t) \|\mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)} (|\dot{\theta}| + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}) + C_2(t) |\dot{\theta}| \|\mathbf{d}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C(t) \left[|\dot{\theta}|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{d}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right] \text{ grâce à l'inégalité de YOUNG} \\ &\leq C(t) \left[|\dot{\theta}|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1^\# \|\mathbf{d}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right], \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec toujours $C(\cdot) \in L^2(0, T)$, et en ayant utilisé (1.24) page 31 qu'on rappelle ici :

$$\forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1, \quad \|\mathbf{b}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1^\# \|\mathbf{b}\|^2. \tag{2.39}$$

2.3.3 Étape 3. Estimations des termes liés aux forces extérieures.

On peut estimer les termes des forces extérieures surfaciques par :

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\mathbf{f}}| &\leq \left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{f} \right| + \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d} \right| \\ &\leq \| \mathbf{f} \|_{L^2(\Omega)} \left[C |\dot{\theta}| (|R_2 - R_1| + \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)}) + |R_2 - R_1| \| \partial_t \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

car $\mathbf{d}_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. En rappelant que sinus et cosinus sont des applications lipschitziennes, on a $|R_2 - R_1| \leq C|\theta_2 - \theta_1|$ et ainsi :

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{\mathbf{f}}| &\leq C(t) \left(|\dot{\theta}| |\theta| + |\dot{\theta}| \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} + |\theta| \| \partial_t \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C(t) \left(|\theta|^2 + |\dot{\theta}|^2 + \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \partial_t \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

avec $C(\cdot) \in L^2(0, T)$ car $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Concernant les forces extérieures agissant sur le bord, le premier terme de $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}$ est facilement majoré comme précédemment par :

$$\begin{aligned} &\left| \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{g} \right| \\ &\leq |\dot{\theta}| \| \mathbf{g} \|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \left(|R_2 - R_1| \| \vec{G}\xi + \mathbf{d}_2 \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + C \| \mathbf{d} \|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \\ &\leq C |\dot{\theta}| \left(|\theta_2 - \theta_1| + a_1 \| \mathbf{d} \|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(|\theta|^2 + |\dot{\theta}|^2 + C_1^\# \| \mathbf{d} \|^2 \right) \end{aligned}$$

car $\mathbf{g} \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Omega))$, $\mathbf{d}_2 \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, et avec les constantes a_1 issue de (1.22) page 31 et $C_1^\#$ issue de (2.39). On traite maintenant séparément²⁴ le second terme de $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}$ par :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d} &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \right) - \int_{\partial\Omega} \partial_t \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \left(\dot{\theta}_2 \vec{e}_z \wedge R_2 - \dot{\theta}_1 \vec{e}_z \wedge R_1 \right) \mathbf{d} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \right) - \int_{\partial\Omega} \partial_t \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \left(\dot{\theta} \vec{e}_z \wedge R_2 + \dot{\theta}_1 \vec{e}_z \wedge (R_2 - R_1) \right) \mathbf{d}. \end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$\left| \int_{\partial\Omega} \partial_t \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \right| \leq C a_1 \| \partial_t \mathbf{g} \|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} |\theta| \| \mathbf{d} \|_{H^1(\Omega)} \leq C(t) |\theta| \| \mathbf{d} \|$$

avec $C(\cdot) \in L^2(0, T)$ (dépendant de $C_1^\#$) car $\partial_t \mathbf{g} \in L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \left(\dot{\theta} \vec{e}_z \wedge R_2 + \dot{\theta}_1 \vec{e}_z \wedge (R_2 - R_1) \right) \mathbf{d} \right| &\leq C a_1 \| \mathbf{g} \|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \left(|\dot{\theta}| + |\dot{\theta}_1| \right) \| \mathbf{d} \|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(|\theta|^2 + |\dot{\theta}|^2 + \| \mathbf{d} \|^2 \right) \end{aligned}$$

²⁴Considérer $\left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d} \right| \leq C |\theta| \| \mathbf{d} \|_{H^1(\Omega)}$ (puisque $\partial_t \mathbf{d} \in \mathcal{E}_1$) amènerait un terme de la forme $\| \mathbf{d} \|$ qui n'apparaît pas dans le membre de gauche de (2.36).

avec C dépendant elle aussi de $C_1^\#$, et parce que $\dot{\theta}_1 \in L^\infty(0, T)$.

Ainsi, pour les termes des forces extérieures, on obtient finalement :

$$\mathcal{F} \leq C(t) \left(|\theta|^2 + |\dot{\theta}|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{d}\|^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \right) \quad (2.40)$$

avec $C(\cdot) \in L^2(0, T)$.

2.3.4 Étape 4. Unicité de la solution régulière.

En introduisant les majorations (2.38) et (2.40) dans (2.36), on obtient une première inégalité :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(y(t) + \|\mathbf{d}\|^2 \right) \leq C(t) \left(|\theta|^2 + |\dot{\theta}|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{d}\|^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d} \right).$$

En fixant maintenant $t_0 \in]0, T[$, on intègre l'inégalité précédente en temps sur l'intervalle $(0, t) \subset (0, t_0)$:

$$y(t) + \|\mathbf{d}\|^2 \leq \int_0^t C(s) \left(|\theta(s)|^2 + |\dot{\theta}(s)|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{d}(s)\|^2 \right) ds + h(t) \quad (2.41)$$

avec $h(t) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(t) \cdot (R_2(t) - R_1(t)) \mathbf{d}(t)$, grâce à $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, $\mathbf{d}(0) = \partial_t \mathbf{d}(0) \equiv 0$, $y(0) = 0$, et à $R_1(0) = R_2(0) = I_2$. De plus, par le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$\forall t \in [0, T], \quad |\theta(t)| \leq t \max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|. \quad (2.42)$$

En rappelant que $\left(\max_{0 \leq s \leq t} |f(s)| \right)^2 = \max_{0 \leq s \leq t} (|f(s)|^2)$ quelle que soit $f \in C^0([0, T])$, on a donc $|\theta(t)|^2 \leq t^2 \max_{0 \leq s \leq t} (|\dot{\theta}(s)|^2)$. Ainsi (2.41) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} y(t) + \|\mathbf{d}\|^2 &\leq \int_0^t C(s) \left(s^2 \max_{0 \leq \sigma \leq s} |\dot{\theta}(\sigma)|^2 + |\dot{\theta}(s)|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{d}(s)\|^2 \right) ds + h(t) \\ &\leq \int_0^t C(s) \left((1 + T^2) \max_{0 \leq \sigma \leq s} |\dot{\theta}(\sigma)|^2 + \|\|\partial_t \mathbf{d}(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\|_{L^\infty(0,s)} \right. \\ &\quad \left. + \|\|\mathbf{d}(\cdot)\|^2\|_{L^\infty(0,s)} \right) ds + h(t). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour la fonction h , on a :

$$|h(t)| \leq C \|\mathbf{g}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \|\theta\| \|\mathbf{d}\| \leq C_3 t_0 \max_{0 \leq s \leq t} (|\dot{\theta}(s)|) \|\mathbf{d}(t)\| \quad (2.44)$$

à nouveau grâce à (2.42) et avec C_3 dépendant seulement de a_1 , $C_1^\#$, et $\mathbf{g} \in L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))$.

Par ailleurs, puisque la décomposition $L^2(\Omega) = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle \oplus \langle \vec{e}_z \wedge \vec{G}\xi \rangle \oplus \mathcal{E}_0$ est équivalente à celle de $L^2(\Omega)$ présentée dans (1.11) page 27 autour de \mathbf{d}_1 , car $\forall t \in [0, T], \mathbf{d}_1(\cdot, t) \in \mathbf{Y}_0$, il existe donc $C_0 > 0$ telle que :

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_0, \quad |\beta|^2 + \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \rho_S C_0 \left\| \beta \vec{e}_z \wedge R_1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_1) + R_1 \mathbf{b} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On obtient finalement dans (2.43) (en rappelant l'expression (2.31) de $y(t)$) :

$$\begin{aligned} & \min(1, C_0) \left(\max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(0,t;\mathcal{E}_1)}^2 \right) \\ & \leq C_0 \int_0^t C(s) \left(\max_{0 \leq \sigma \leq s} |\dot{\theta}(\sigma)|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(0,s;\mathcal{E}_1)}^2 \right) ds \\ & \quad + C_0 C_3 t_0 \left(\max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|^2 + \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(0,t;\mathcal{E}_1)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

On choisit alors $t_0 \in]0, T[$ assez petit tel que $0 < \gamma_0 = \min(1, C_0) - C_0 C_3 t_0$, et en posant :

$$z(t) = \max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|^2 + \|\partial_t \mathbf{d}\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{d}\|_{L^\infty(0,t;\mathcal{E}_1)}^2,$$

on a :

$$\gamma_0 z(t) \leq \int_0^t C(s) z(s) ds,$$

avec $C(\cdot) \in L^2(0, T)$. D'après le lemme de GRONWALL, on obtient $z(t) \equiv 0$ dans $(0, t_0)$. La longueur t_0 de cet intervalle étant indépendante du choix de l'origine, on déduit de ce qui précède que $z \equiv 0$ dans $(t_0, 2t_0)$, et ainsi de suite dans $(0, T)$. Ainsi $z(t) \equiv 0$ dans $(0, T)$, et finalement on a $\theta_1 \equiv \theta_2$ et $\mathbf{d}_1 \equiv \mathbf{d}_2$ (car $\theta(0) = 0$). La conclusion en est que $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$ et qu'il y a unicité du déplacement solution (dans le cas régulier où $\partial_t \mathbf{d} \in \mathcal{E}_1$ pour presque tout $t \in (0, T)$).

2.3.5 Étape 5. Unicité de la solution.

Nous adaptons maintenant la preuve précédente au cas où $\partial_t \mathbf{d}$ n'est plus nécessairement dans \mathcal{E}_1 , mais seulement dans $L^2(\Omega)$. On explicite pour cela les principales différences avec le cas régulier, tout en gardant les notations précédentes, et en posant $\mathbf{d}_N = \Pi_{\mathcal{E}_N}^{L^2(\Omega)}(\mathbf{d})$ projection orthogonale²⁵ de $L^2(\Omega)$ sur \mathcal{E}^N de la différence $\mathbf{d} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$. Alors \mathbf{d}_N mais aussi $\partial_t \mathbf{d}_N$ sont dans \mathcal{E}_1 , et il est légitime de prendre $\mathbf{b} = \partial_t \mathbf{d}_N$ comme fonction-test dans (2.33) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}_N + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d}_N + 2\dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \right. \\ & \quad \left. + \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N + \mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \partial_t \mathbf{d}_N) - \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \partial_t \mathbf{d}_N) \right) + ((\mathbf{d}, \partial_t \mathbf{d}_N)) \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}_N + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}_N. \end{aligned} \quad (2.46)$$

On pose $y_N(t) = \rho_S \left\| \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge R_1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_1) + R_1 \partial_t \mathbf{d}_N \right\|_{L^2(\Omega)}^2$ pour presque tout $t \in (0, T)$. On remarque que $\varepsilon_1 \langle \partial_{tt} \mathbf{d}, \partial_t \mathbf{d}_N \rangle_{\mathcal{E}_1} = \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}_N = \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \partial_t \mathbf{d}_N$ et que $((\mathbf{d}, \partial_t \mathbf{d}_N)) = ((\mathbf{d}_N, \partial_t \mathbf{d}_N))$ de par les définitions de \mathbf{d}_N et de \mathcal{E}^N . Alors, en additionnant ensemble (2.32) et (2.46), on a comme pour (2.36) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(y_N + \|\mathbf{d}_N\|^2 \right) = \mathcal{F}^N - \mathcal{R}^N, \quad (2.47)$$

²⁵Il n'y a pas de confusion possible entre \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 et \mathbf{d}_N en supposant que $N \geq 3$ (ce qui est raisonnable puisqu'on veut passer à la limite $N \rightarrow \infty$).

avec les forces $\mathcal{F}^N = \mathcal{F}_{\mathbf{f}}^N + \mathcal{F}_{\mathbf{g}}^N$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbf{f}}^N &= \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G\xi} + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{f} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}_N \\ \mathcal{F}_{\mathbf{g}}^N &= \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} \left[(R_2 - R_1)(\vec{G\xi} + \mathbf{d}_2) + R_1 \mathbf{d} \right] \wedge \mathbf{g} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}_N,\end{aligned}$$

et avec pour les autres termes :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^N &= \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge (\partial_{tt} \mathbf{d} - \partial_{tt} \mathbf{d}_N) + (\dot{\theta})^2 \frac{J_1}{2} + \dot{\theta} \ddot{\theta}_2 (J_2 - J_1) + \dot{\theta} \dot{\theta}_2 (\dot{J}_2 - \dot{J}_1) + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 \\ &\quad + \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d}_N + \rho_S \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N + 2\rho_S \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \\ &\quad - \rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[\dot{\theta}_1 (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_1) + \dot{\theta}_2 (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_2) \right] \cdot \partial_t \mathbf{d}_N - \rho_S \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}_N.\end{aligned}$$

On indique ici les deux différences principales entre les expressions de \mathcal{R} (voir (2.37) page 53) et de \mathcal{R}^N . On peut tout d'abord noter le premier terme supplémentaire $\rho_S \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge (\partial_{tt} \mathbf{d} - \partial_{tt} \mathbf{d}_N)$; celui-ci provient de (2.32) et de $\dot{y}_N/2$ (de par la définition de $\dot{y}_N/2$). En effet, à la différence de l'expression de $\dot{y}/2$, le terme $\dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}$ n'apparaît pas dans l'expression de $\dot{y}_N/2$; il est remplacé par le terme $\dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_N$; on doit donc à présent en tenir compte. De plus, $2\rho_S \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N$ est lui aussi un terme supplémentaire dans \mathcal{R}^N , mais qui disparaît lorsque N tend vers l'infini (et donc n'apparaît pas dans \mathcal{R}). Enfin, on rappelle que les deux derniers termes dans l'expression de \mathcal{R}^N proviennent de l'expression $\mathcal{T}(\dot{\theta}_1, \mathbf{d}_1, \partial_t \mathbf{d}_N) - \mathcal{T}(\dot{\theta}_2, \mathbf{d}_2, \partial_t \mathbf{d}_N)$ explicitée lors de l'Étape 1.

Afin de traiter (2.47), on rappelle les estimations sur les différents termes de \mathcal{R}^N obtenues directement de ce qui précède dans le cas régulier (cf Étape 2) :

$$\begin{aligned}\left| (\dot{\theta})^2 \frac{J_1}{2} \right| &\leq C |\dot{\theta}|^2, & |\dot{\theta} \ddot{\theta}_2 (J_2 - J_1)| &\leq C(t) |\dot{\theta}| \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_1 \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \right| &\leq C |\dot{\theta}| \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}, & \left| \ddot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \right| &\leq C(t) \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \left[\dot{\theta}_1 (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_1) + \dot{\theta}_2 (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_2) \right] \cdot \partial_t \mathbf{d}_N \right| &\leq C |\dot{\theta}| \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}_N \right| &\leq C \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

On traite maintenant les termes de \mathcal{R}^N qui nécessitent des majorations plus fines :

$$\begin{aligned}\left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \wedge (\partial_{tt} \mathbf{d} - \partial_{tt} \mathbf{d}_N) \right| &\leq C |\dot{\theta}| \| \partial_{tt} \mathbf{d} - \partial_{tt} \mathbf{d}_N \|_{(H^1(\Omega))'}, \\ \left| \dot{\theta} \dot{\theta}_2 (J_2 - J_1) \right| &= 2\rho_S |\dot{\theta}| |\dot{\theta}_2| \left| \int_{\Omega} \mathbf{d} \cdot \partial_t \mathbf{d}_2 + \int_{\Omega} (\vec{G\xi} + \mathbf{d}_1) \cdot (\partial_t \mathbf{d}_N - \partial_t \mathbf{d}_N + \partial_t \mathbf{d}) \right| \\ &\leq C |\dot{\theta}| (\| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} + \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} + \| \partial_t \mathbf{d} - \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}), \\ \left| \dot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_2 \right| &\leq C(t) |\dot{\theta}| (\| \mathbf{d} - \mathbf{d}_N \| + \| \mathbf{d}_N \|), \\ \left| \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \right| &= \left| \dot{\theta}_2 \int_{\Omega} (\partial_t \mathbf{d} - \partial_t \mathbf{d}_N) \wedge \partial_t \mathbf{d}_N \right| \\ &\leq C \| \partial_t \mathbf{d} - \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

avec $C(\cdot) \in L^2(0, T)$. Pour les termes de forces, on a directement :

$$|\mathcal{F}_{\mathbf{f}}^N| \leq C(t) \left(|\dot{\theta}| |\theta| + |\dot{\theta}| \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)} + |\theta| \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)} \right)$$

avec $C(\cdot) \in L^2(0, T)$. On doit traiter $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}^N$, avec tout d'abord comme précédemment :

$$\begin{aligned} \left| \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} [(R_2 - R_1)(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_2)] \wedge \mathbf{g} \right| &\leq C|\theta| |\dot{\theta}|, \\ \text{et } \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \partial_t \mathbf{d}_N &\leq \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d}_N \right) + C(t)(|\dot{\theta}| + |\theta|) \| \mathbf{d}_N \|, \end{aligned}$$

mais aussi avec, de manière un peu plus fine :

$$\begin{aligned} \left| \dot{\theta} \int_{\partial\Omega} R_1 \mathbf{d} \wedge \mathbf{g} \right| &\leq |\dot{\theta}| \left(\left| \int_{\partial\Omega} R_1 (\mathbf{d} - \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g} \right| + \left| \int_{\partial\Omega} R_1 \mathbf{d}_N \wedge \mathbf{g} \right| \right) \\ &\leq C|\dot{\theta}| (\| \mathbf{d} - \mathbf{d}_N \| + \| \mathbf{d}_N \|). \end{aligned}$$

En utilisant toutes les inégalités précédentes, on arrive dans (2.47) à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(y_N + \| \mathbf{d}_N \| \right)^2 &\leq C(t) \left(|\theta|^2 + |\dot{\theta}|^2 + \| \mathbf{d}_N \| \right)^2 + \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \partial_t \mathbf{d} - \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \partial_{tt} \mathbf{d} - \partial_{tt} \mathbf{d}_N \|_{(H^1(\Omega))'}^2 \\ &\quad + \| \mathbf{d} - \mathbf{d}_N \| \right) + \frac{d}{dt} \left(\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (R_2 - R_1) \mathbf{d}_N \right). \end{aligned}$$

On fixe $t_0 \in]0, T[$ et on intègre l'inégalité précédente en temps sur l'intervalle $(0, t) \subset (0, t_0)$. À partir de (2.42), de $\| \mathbf{d} \|_{L^2(\Omega)}^2 = \| \mathbf{d} - \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{d}_N \|_{L^2(\Omega)}^2$, et de (2.44), on obtient facilement une inégalité analogue à celle de (2.45) :

$$\begin{aligned} &\min(1, C_0) \left(\max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|^2 + \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, t; L^2(\Omega))}^2 + \| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, t; \mathcal{E}_1)}^2 \right) \\ &\leq C_0 \int_0^t C(s) \left(\max_{0 \leq \sigma \leq s} |\dot{\theta}(\sigma)|^2 + \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, s; L^2(\Omega))}^2 + \| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, s; \mathcal{E}_1)}^2 \right) ds \\ &\quad + C_0 C_3 t_0 \left(\max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|^2 + \| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, t; \mathcal{E}_1)}^2 \right) + w_N(t) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} w_N(t) = C_0 \int_0^t C(s) \left(\| (\mathbf{d} - \mathbf{d}_N)(s) \| \right)^2 + \| (\partial_t \mathbf{d} - \partial_t \mathbf{d}_N)(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \| (\partial_{tt} \mathbf{d} - \partial_{tt} \mathbf{d}_N)(s) \|_{(H^1(\Omega))'}^2 \right) ds. \end{aligned}$$

On pose :

$$z_N(t) = \max_{0 \leq s \leq t} |\dot{\theta}(s)|^2 + \| \partial_t \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, t; L^2(\Omega))}^2 + \| \mathbf{d}_N \|_{L^\infty(0, t; \mathcal{E}_1)}^2,$$

et en prenant maintenant $t_0 \in]0, T[$ assez petit de telle sorte que $0 < \gamma_0 = \min(1, C_0) - C_0 C_3 t_0$, on a alors :

$$\gamma_0 z_N(t) \leq \int_0^t C(s) z_N(s) ds + w_N(t).$$

De là, en appliquant le lemme de GRONWALL, on déduit :

$$\gamma_0 z_N(t) \leq w_N(t) \exp \left(\int_0^t C(s) ds \right) .$$

De plus, comme $\mathbf{d} - \mathbf{d}_N$ converge fortement dans $H^2(0, T; (H^1(\Omega))') \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathcal{E}_1)$, on a $\lim_{N \rightarrow \infty} w_N(t) = 0$ pour presque tout $t \in (0, t_0)$. Ainsi $\lim_{N \rightarrow \infty} z_N(t) = 0$ implique $\theta \equiv 0$ (car $\theta(0) = 0$) et :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, t; \mathcal{E}_1)}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\partial_t \mathbf{d}_N\|_{L^\infty(0, t; L^2(\Omega))}^2 = 0,$$

ce qui signifie que $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{d}_N = \mathbf{d} \equiv 0$. On a alors terminé la preuve de l'unicité de l'angle de rotation et de la perturbation, et par conséquent on a montré l'unicité du déplacement solution du système initial.

Collaboration et publication

Ce travail a été effectué en collaboration avec Céline GRANDMONT et Yvon MADAY.

Perspectives

On s'intéressera dans un prochain travail à l'extension du modèle et des résultats à la dimension 3.

Chapitre 3

Approche numérique par méthode modale

Sommaire

3.1	Rappel du modèle continu	62
3.2	Discrétisation spatiale du système	64
3.3	Condition d'inversibilité du système de dimension finie	64
3.4	Analyse modale	66
3.4.1	Choix d'une base d'approximation. Analyse modale	66
3.4.2	Exemples illustratifs de quelques modes propres	68
3.5	Algorithme de mise en œuvre	69
3.5.1	Calculs préliminaires	69
3.5.2	Semi-discrétisation en temps : schéma d'Euler	73
3.5.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	73
3.5.4	Algorithme général	74

Introduction

Dans les domaines de la robotique et de l'aérodynamique, de nombreux accessoires (bras articulé flexible, ailes d'avion; fuselage de navette) sont mis en mouvement dans de grands déplacements. Dans le cadre de ces manœuvres, il est nécessaire de connaître précisément les positions de chacun des éléments. Leurs mouvements sont en fait décomposables suivant d'une part un mouvement rigide en grandes translation et rotation, et suivant d'autre part un mouvement élastique significatif.

Ces types de mouvements hautement non-linéaires ont été étudiés et mis en œuvre numériquement. Une méthode fréquemment utilisée est la formulation corotationnelle du problème; celle-ci a été plus particulièrement étudiée dans un cadre d'éléments finis. Il s'agit de considérer un repère en déplacement (translation et rotation) et de dilater les éléments du maillage suivant les contraintes élastiques locales. Cette stratégie a été tout d'abord employée pour des structures allongées (de type poutre), puis plus récemment sur des corps bi- et tri-dimensionnels (voir par exemple [CM96a]-[CM96b] pour des structures, et [FPD01] pour une application en fluide-structure dans le domaine de l'aérodynamique).

Nous proposons ici une approche différente basée sur une décomposition modale, ceci dans la suite directe et naturelle de l'étude théorique précédente. Nous considérons pour cela un problème d'élasticité instationnaire en grands déplacements et petites perturbations pour un corps non-encastré en dimension 2. Nous adoptons la modélisation présentée au Chapitre 1 (voir aussi [GMM02]) qui permet de se ramener à la dynamique de la translation, de la rotation et de la perturbation associées à la déformation du corps élastique. La principale difficulté tient alors à la construction numérique effective d'un espace discret d'approximation (dont les fonctions doivent être L^2 -orthogonales aux mouvements infinitésimaux). Pour répondre à ce problème, la manière la plus naturelle consiste à effectuer la décomposition modale de la solution qui, tronquée selon un nombre fini de modes propres, nous ramène à un problème aux valeurs propres généralisées (qui peut être solutionné préliminairement à la résolution du système d'équations du mouvement). Notre approche est donc globale en espace, plutôt que locale (comme la méthode du corotationnel). Le cadre de travail en espace est alors fixé, et il ne reste plus qu'à résoudre un système d'EDO de dimension finie en les coefficients de la décomposition modale (qui ne dépendent ainsi plus que du temps). Nous proposons un algorithme de mise en œuvre numérique pour cette résolution.

3.1 Rappel du modèle continu

Nous considérons un problème d'élasticité instationnaire en grands déplacements et petites perturbations pour un corps non-encastré en dimension 2. La configuration de référence de ce solide déformable est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière lipschitzienne, noté Ω ; son centre de gravité est noté G . La déformation ϕ du corps est écrite sous la forme $\phi = \tau + R_\theta(\vec{G}\mathbf{x} + \mathbf{d}(\mathbf{x}))$ pour $\mathbf{x} \in \Omega$, où τ est une translation de \mathbb{R}^2 , $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, et \mathbf{d} est une application de Ω dans \mathbb{R}^2 appelée perturbation. Nous référons au Chapitre 1 (*cf* aussi [GMM02]) pour la justification de cette écriture et l'unicité de cette décomposition dans des ensembles à préciser. Nous avons par ailleurs vu que le système décrivant l'évolution spatio-temporelle de la déformation est équivalent à la dynamique de la translation, de la rotation et de la perturbation associées à la

déformation du corps élastique. Ce système s'écrit sur $(0, T)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}, \\ \frac{d}{dt} \left(J\dot{\theta} + \rho \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right) = \int_{\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g}, \\ \forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1, \quad \rho \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} \right) \\ \quad + \int_{\Omega} \overline{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta} \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta} \mathbf{b} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec \mathcal{E}_1 l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \mathbf{b} \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{b} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{b} \wedge \overrightarrow{G\mathbf{x}} = 0 \right\}.$$

L'espace \mathcal{E}_1 est constitué des éléments de $H^1(\Omega)$ orthogonaux (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$) aux translations infinitésimales et aux rotations infinitésimales (cf Figure 1.3 page 26), et dont nous rappelons les définitions par la suite. Nous précisons à présent les notations employées dans le système précédent. Nous avons noté \mathbf{f} les forces surfaciques appliquées à Ω , \mathbf{g} les forces appliquées sur le bord $\partial\Omega$ de Ω , ρ la densité surfacique du solide, $m = \rho|\Omega|$ sa masse, et $J = \rho \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d})^2$ son moment d'inertie à chaque instant t . La dérivation totale en temps est notée par un point, la dérivation partielle par ∂_t . Le produit vectoriel \wedge est celui des vecteurs de \mathbb{R}^2 . Nous plongeons néanmoins le plan $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$ du mouvement dans $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \rangle$ afin de voir R_{θ} comme une rotation d'axe \vec{e}_z et d'angle θ , où \vec{e}_z désigne un vecteur unitaire perpendiculaire au plan du mouvement. Ce plongement nous permettra aussi par la suite d'utiliser l'opérateur $\vec{e}_z \wedge \cdot$ (où \wedge est vu comme le produit vectoriel de \mathbb{R}^3), agissant sur $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et à valeur dans $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$. Nous désignons par $\overline{\sigma}(\mathbf{b}) = \lambda \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{b}))I_2 + 2\mu \mathbb{f}(\mathbf{b})$

le tenseur des contraintes de l'élasticité linéarisée, avec $\mathbb{f}(\mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b})^T)/2$ le tenseur du gradient symétrisé, et (λ, μ) les constantes de LAMÉ du matériau constituant le solide élastique. Enfin, pour A matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous notons $\text{Tr}(A)$ la trace de A , et $A : B = \text{Tr}(B^T A)$, le produit contracté de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Au système (3.1) sont associées des conditions initiales qui assurent l'existence d'une solution (cf Chapitre 2 ou [GMM02]), ainsi que son unicité (cf Chapitre 2); nous les préciserons ultérieurement.

Remarque 9. *L'équation (en fait, l'EDO) en la translation est découplée du système et possède avec des conditions initiales ad hoc une unique solution. En effet, pour une donnée initiale τ_0 et une vitesse initiale τ_1 , nous avons explicitement :*

$$\forall t \in (0, T), \quad \tau(t) = \tau_0 + \tau_1 t + \frac{1}{m} \int_0^t \int_0^s \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \right) (\theta) d\theta ds$$

qui vérifie $\tau(0) = \tau_0$ et $\dot{\tau}(0) = \tau_1$. Cette partie sera traitée séparément dans ce qui suit.

Les équations en la rotation et la perturbation sont quant à elles couplées, et constituent par la suite l'essentiel de notre étude.

Remarque 10. *Le système décrivant l'évolution du corps peut être présenté en fonction du déplacement $\mathbf{u} = \phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, mais à ce moment-là, les fonctions-tests intervenant dans le nouveau système dépendent elles-mêmes de la solution (voir le système présenté au Théorème 3 page 38). La formulation en translation-rotation-perturbation permet de lever cette difficulté. Néanmoins, du point de vue de la discrétisation, il reste à construire un espace discret approximant \mathcal{E}_1 de façon correcte.*

3.2 Discrétisation spatiale du système

Nous utilisons une méthode de GALERKIN pour approximer l'espace $H^1(\Omega)$ par des espaces de dimension finie $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$. Pour cela, nous définissons :

$$\mathbf{Y}_1 = \left\{ \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1; \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{b}) \cdot \overrightarrow{G\mathbf{x}} > 0 \right\}.$$

À partir de la définition de \mathcal{E}_1 , pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{d} \in \mathbf{Y}_1$ fixés, nous avons (cf (1.27) page 32) :

$$H^1(\Omega) = \langle \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y} \rangle \oplus \left\langle \overrightarrow{e_z} \wedge R_{\theta}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}) \right\rangle \oplus \langle R_{\theta}\mathbf{b}; \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1 \rangle.$$

Nous approximos l'espace $H^1(\Omega)$ par $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V_p$, où V_p est une approximation de dimension $p = N - 3 \in \mathbb{N}^*$ du sous-espace \mathcal{E}_1 . Pour V_p fixé, nous notons $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de cet espace, et nous indiquons par p l'approximation \mathbf{d}_p de la perturbation \mathbf{d} projetée sur V_p , ainsi que le moment d'inertie $J_p = \rho \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p)^2$. D'après la Remarque 9, l'angle θ dépend lui aussi de l'entier p , mais nous n'indiquerons pas cette dépendance pour alléger les notations.

Ainsi le système en l'angle θ et la perturbation \mathbf{d} projeté sur l'espace $\mathbb{R} \times V_p$ se réécrit :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} J_p + \rho \int_{\Omega} \mathbf{d}_p \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_p = H_0 \\ 1 \leq i \leq p, \quad \rho \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d}_p \wedge \mathbf{v}_i + \rho \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_p \cdot \mathbf{v}_i = H_i \end{cases} \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{cases} H_0 = F_0 + G_0 - \dot{\theta} \dot{J}_p \\ 1 \leq i \leq p, \quad H_i = F_i + G_i - \rho \left(2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_p \wedge \mathbf{v}_i - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p) \cdot \mathbf{v}_i \right) - \int_{\Omega} \overline{\sigma}(\mathbf{d}_p) : \nabla \mathbf{v}_i \end{cases}$$

et avec pour les coefficients où interviennent les forces :

$$\begin{cases} F_0 = \int_{\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p) \wedge \mathbf{f}, & G_0 = \int_{\partial\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p) \wedge \mathbf{g}, \\ 1 \leq i \leq p \quad F_i = \int_{\Omega} R_{\theta} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{f}, & G_i = \int_{\partial\Omega} R_{\theta} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{g}. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3 Condition d'inversibilité du système de dimension finie

En décomposant maintenant $\mathbf{d}_p(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(t) \mathbf{v}_i(\mathbf{x})$, avec α_i des fonctions dépendant uniquement du temps, nous pouvons réécrire le système (3.2) sous forme matricielle :

$$\rho \mathcal{B}(X) \ddot{X} = \mathcal{H}(t, X, \dot{X}) \quad (3.4)$$

avec les matrices :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & \beta^T \\ \beta & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M = \left(\int_{\Omega} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \right)_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),$$

les vecteurs :

$$\beta = \beta(X) = \left(\int_{\Omega} \mathbf{d}_p \wedge \mathbf{v}_i \right)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = (H_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{R}^{p+1},$$

le scalaire $\mathcal{J} = \int_{\Omega} (\overrightarrow{G}\mathbf{x} + \mathbf{d}_p)^2 = J_p/\rho$, et le vecteur d'inconnues :

$$X = \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}.$$

Lemme 1. i. Si $\mathcal{J} \neq 0$, alors $\det(\mathcal{B}) = \det(M) (\mathcal{J} - \beta^T M^{-1} \beta)$.

ii. Si $\mathcal{J} \neq 0$ et $\mathcal{J} \neq \beta^T M^{-1} \beta$, alors la matrice \mathcal{B} est inversible et :

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{J} - \beta \cdot M^{-1} \beta} \begin{pmatrix} 1 & -(M^{-1} \beta)^T \\ -M^{-1} \beta & (M^{-1} \beta)(M^{-1} \beta)^T + (\mathcal{J} - \beta \cdot M^{-1} \beta) M^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La matrice M est symétrique définie positive, et peut être alors écrite $M = LL^T$ par la décomposition de CHOLESKY avec L matrice triangulaire inférieure inversible. En posant $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mathcal{J}})^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$, nous sommes ramenés à :

$$\mathcal{C} = \mathcal{Q} \mathcal{B} \mathcal{Q}^T = \begin{pmatrix} 1 & c^T \\ c & I_p \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c = (\sqrt{\mathcal{J}} L)^{-1} \beta \in \mathbb{R}^p$$

et I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{B}) &= \det(\mathcal{Q}^{-1}) \det(\mathcal{C}) \det(\mathcal{Q}^{-T}) = \det(\mathcal{Q}^{-1} \mathcal{Q}^{-T}) \det(\mathcal{C}) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{J}} & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{J}} & 0 \\ 0 & L^T \end{pmatrix} \right) \det(\mathcal{C}) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{J} & 0 \\ 0 & LL^T \end{pmatrix} \det(\mathcal{C}) = \mathcal{J} \det(M) \det(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

De plus, $\det(\mathcal{C}) = 1 - |c|^2$. Cette égalité se montre en développant le déterminant par rapport à la première ligne de \mathcal{C} :

$$\det(\mathcal{C}) = \det(I_p) + \sum_{k=1}^p (-1)^k c_k \det(\Delta^k)$$

avec, pour $1 \leq k \leq p$, la matrice $\Delta^k = (\Delta_{ij}^k)_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par : pour sa première colonne, $\Delta_{i1}^k = c_i$, pour $1 \leq i \leq p$; et pour les autres colonnes $2 \leq j \leq p$, $\Delta_{ij}^k = \delta_{i, j-1}$ si $i < k$, $\Delta_{ij}^k = 0$ si $i = k$, et $\Delta_{ij}^k = \delta_{i, j}$ si $i > k$. Nous avons alors facilement $\det(\Delta^k) = (-1)^{k+1} c_k$, puis le résultat escompté pour le déterminant de \mathcal{C} .

Nous en déduisons que $\det(\mathcal{B}) = \mathcal{J} \det(M) (1 - |c|^2)$. Or :

$$|c|^2 = (\sqrt{\mathcal{J}} L)^{-1} \beta \cdot (\sqrt{\mathcal{J}} L)^{-1} \beta = \beta \cdot (\mathcal{J} L L^T)^{-1} \beta = \beta \cdot (\mathcal{J} M)^{-1} \beta,$$

et nous avons alors $\det(\mathcal{B}) = \det(M) (\mathcal{J} - \beta \cdot M^{-1} \beta)$.

Nous définissons maintenant :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & -c^T \\ -c & cc^T + (1 - |c|^2) I_p \end{pmatrix}$$

Ainsi nous avons $\mathcal{CD} = (1 - |c|^2)I_{p+1}$, car $c^T(cc^T) = (c^T c)c^T = |c|^2 c^T$. Donc, si $|c|^2 \neq 1$, ou ce qui est encore équivalent, si $\beta^T M^{-1} \beta \neq \mathcal{J}$, alors $(1 - |c|^2)^{-1} \mathcal{D}$ est l'inverse de \mathcal{C} . Sous cette même hypothèse, nous avons alors aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{Q}^T \mathcal{C}^{-1} \mathcal{Q} = \frac{1}{1 - |c|^2} \begin{pmatrix} \mathcal{J}^{-1} & -c^T (\sqrt{\mathcal{J}}L)^{-1} \\ -(\sqrt{\mathcal{J}}L)^{-T} c & L^{-T} c c^T L^{-1} + (1 - |c|^2) L^{-T} L^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mathcal{J} - \beta \cdot M^{-1} \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\mathcal{J}} c^T L^{-1} \\ -\sqrt{\mathcal{J}} L^{-T} c & (\sqrt{\mathcal{J}} L^{-T} c)(\sqrt{\mathcal{J}} c^T L^{-1}) + (\mathcal{J} - \beta \cdot M^{-1} \beta)(LL^T)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en tenant compte des calculs précédents. Enfin comme $\sqrt{\mathcal{J}}L^{-T}c = M^{-1}\beta$, nous obtenons le résultat de l'énoncé. \square

Remarque 11. Au Chapitre 2, nous utilisons une méthode de GALERKIN pour montrer l'existence d'une solution au système (3.1). Lors de la résolution du système de dimension finie (2.4) page 40, la condition suffisante d'existence d'une solution au problème continu est $\int_{\Omega} (\overrightarrow{G}\mathbf{x} + \mathbf{d}_p) \cdot \overrightarrow{G}\mathbf{x} \neq 0$ (voir l'inégalité (2.5) page 40 et la discussion qui la suit), c'est-à-dire une condition affine en les α_i .

Ici, pour le système discret, suivant la donnée initiale $X_0 = X(t = 0)$, le déterminant $\det(\mathcal{B})$ doit rester de signe constant au cours du temps (de par sa continuité en temps). Supposons-le positif pour fixer les idées, alors la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité du système, $\mathcal{J} - \beta^T M^{-1} \beta > 0$, est a priori une condition non-linéaire quadratique en les α_i .

3.4 Analyse modale

3.4.1 Choix d'une base d'approximation. Analyse modale

Le choix de la base $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq p}$ de V_p peut permettre d'inverser plus ou moins rapidement la matrice \mathcal{B} du système (3.2) suivant que M est plus ou moins facilement inversible. De plus, comme la matrice de masse M est indépendante du temps et de la variable X (puisque nous travaillons dans la configuration de référence de la structure), l'inversion de M est un pré-calcul effectué avant l'algorithme de résolution en temps du système (3.2). Il est néanmoins important que M^{-1} soit relativement creuse, afin de limiter à chaque pas de temps les calculs concernant \mathcal{B}^{-1} (même si cette matrice ne sera pas nécessairement assemblée). Il suffit pour cela de prendre la base $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq p}$ orthonormée dans $L^2(\Omega)$; de cette façon $M = M^{-1} = I_p$.

Par ailleurs, il faut construire un espace V_p qui approxime l'espace \mathcal{E}_1 des fonctions de $H^1(\Omega)$ orthogonales aux translations infinitésimales et aux rotations infinitésimales. Les éléments \mathbf{v}_i , $1 \leq i \leq p$, doivent donc satisfaire à ces contraintes.

Nous allons maintenant présenter une base naturelle au problème qui répond à ces deux attentes.

Nous considérons les éléments propres (λ, ψ) de l'opérateur $\overline{\Sigma}$ de l'élasticité linéarisée avec condition de NEUMANN homogène :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\overline{\sigma}(\psi)) &= \lambda \psi & \text{dans } \Omega, \\ \overline{\sigma}(\psi) \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au bord de Ω . Nous pouvons encore caractériser ces éléments par :

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \quad a(\psi, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \overline{\sigma}(\psi) : \nabla \mathbf{v} = \lambda \int_{\Omega} \psi \cdot \mathbf{v}. \quad (3.5)$$

L'opérateur $\overline{\Sigma}$ est autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et possède un inverse borné compact de :

$$\left\{ \mathbf{b} \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{b} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{b} \wedge \overrightarrow{G}\mathbf{x} = 0 \right\}$$

dans lui-même. Par conséquent la famille $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des fonctions propres de $\overline{\Sigma}$ forme une base de $H^1(\Omega)$, qu'on choisit ici orthonormée dans $L^2(\Omega)$.

Plus précisément, le noyau de $\overline{\Sigma}$ est par définition l'espace des fonctions propres associées à la valeur propre triple nulle. En fait, nous identifions facilement qu'il est constitué de l'espace des translations infinitésimales, engendré par $\psi_{0,1} = \vec{e}_x / (|\Omega|^{1/2} |\vec{e}_x|_{\mathbb{R}^2})$ et $\psi_{0,2} = \vec{e}_y / (|\Omega|^{1/2} |\vec{e}_y|_{\mathbb{R}^2})$, et de l'espace des rotations infinitésimales, engendré par $\psi_{0,3} = \vec{e}_z \wedge \vec{Gx} / \|\vec{Gx}\|_{L^2(\Omega)}$.

De plus, \mathcal{E}_1 est isomorphe à $\text{Im}(\overline{\Sigma})$, dont nous notons encore ψ_i , $i \in \mathbb{N}^*$, les éléments. Un espace naturel pour l'approximation de \mathcal{E}_1 est donc $V_p = \langle \psi_i \rangle_{1 \leq i \leq p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, et $W_N = \langle \psi_{0,1}, \psi_{0,2} \rangle \oplus \langle \psi_{0,3} \rangle \oplus V_p$ est un espace naturel pour l'approximation de $H^1(\Omega)$.

Nous rappelons enfin que la famille des valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forment une suite croissante de réels strictement positifs qui tend vers l'infini.

Le problème aux valeurs propres (3.5) projeté sur le sous-espace $W_N = \langle w_i \rangle_{1 \leq i \leq N}$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \pi) \text{ tel que} \\ \forall W \in \mathbb{R}^N, \quad W^T \mathcal{A} \pi = \lambda W^T \mathcal{M} \pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (a(w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq N} && \text{la matrice de rigidité généralisée} \\ \text{et } \mathcal{M} &= \left(\int_{\Omega} w_i \cdot w_j \right)_{1 \leq i, j \leq N} && \text{la matrice de masse généralisée.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous sommes finalement ramenés à un problème aux valeurs propres généralisées :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \pi) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ tel que} \\ \mathcal{A} \pi = \lambda \mathcal{M} \pi. \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous rappelons les propriétés d'orthogonalité de ces modes propres (cf [RT92] Th.6.4.1 page 144 par exemple) :

Lemme 2. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, avec A et B symétriques, et B définie positive. Soient (λ_i, X_i) , $1 \leq i \leq N$ les éléments propres généralisés du problème $AX = \lambda BX$, alors :

$$\forall 1 \leq i, j \leq N, \quad X_i \cdot BX_j = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad X_i \cdot AX_j = \lambda_j \delta_{ij}.$$

Démonstration. La matrice B est symétrique définie positive, et peut être alors écrite $B = LL^T$ par la décomposition de CHOLESKY avec L matrice triangulaire inférieure inversible. Rechercher les éléments propres généralisés (λ, X) associés au couple de matrices (A, B) est alors équivalent à rechercher les éléments propres (λ, y) de $Cy = \lambda y$ avec $y = L^T X$ et $C = L^{-1}AL^{-T}$. Comme C est symétrique réelle, il existe $Q \in \mathcal{O}_N(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ diagonale telles que $C = QDQ^{-1}$. Nous avons $y_j = (Q_{ij})_{1 \leq i \leq N}$, et donc $X_j = L^{-T} y_j$, $1 \leq j \leq N$. Nous en déduisons facilement que :

$$1 \leq i, j \leq N, \quad X_i \cdot BX_j = X_i \cdot LL^T X_j = L^T X_i \cdot L^T X_j = y_i \cdot y_j = \delta_{ij}$$

car Q est une matrice orthogonale, puis que $X_i \cdot AX_j = X_i \cdot \lambda_j BX_j = \lambda_j \delta_{ij}$. \square

Appliquant ce lemme au problème (3.7), nous avons que les vecteurs propres π_i , $1 \leq i \leq N$, sont orthogonaux pour le produit scalaire (de \mathbb{R}^N) associé à la matrice de masse généralisée \mathcal{M} , autrement dit $(\pi_i \cdot \mathcal{M} \pi_j)_{1 \leq i, j \leq N} = I_N$, et de la même façon que $(\pi_i \cdot \mathcal{A} \pi_j)_{1 \leq i, j \leq N} = \text{diag}(0, 0, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$. De plus, soit \mathcal{L} matrice triangulaire inférieure inversible associée à la décomposition de CHOLESKY de la matrice \mathcal{M} (symétrique définie positive), c'est-à-dire telle que $\mathcal{M} = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$, et soit d'autre part Q matrice orthogonale telle que $Q^{-1}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{L}^{-T}Q$ soit diagonale, alors d'après la preuve du lemme précédent, $P = \mathcal{L}^{-T}Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice des vecteurs propres π_i , $1 \leq i \leq N$.

Lemme 3. Les fonctions propres $\psi_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} w_i$, $0 \leq j \leq p$, sont orthogonales pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, et $a(\psi_i, \psi_j) = \lambda_j \delta_{ij}$. En particulier, les ψ_j , $1 \leq j \leq p$ sont orthogonales aux translations infinitésimales et aux rotations infinitésimales pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

De même, les vecteurs π_j , $1 \leq j \leq N$ sont orthogonaux au sens du produit scalaire de \mathbb{R}^N associé à la matrice \mathcal{M} , noté $\cdot_{\mathcal{M}}$. En particulier, les vecteurs propres généralisés π_j associés aux valeurs propres non nulles sont orthogonaux pour $\cdot_{\mathcal{M}}$ aux vecteurs discrets des translations et rotations infinitésimales.

Démonstration. En reprenant les notations de la preuve du lemme précédent, nous avons que la j -ième colonne $q_j = (Q_{ij})_{1 \leq i \leq N}$ de Q correspond aux coordonnées de y_j dans la base des fonctions w_i ; par conséquent, comme $q_j = L^T X_j$, la j -ième colonne $\pi_j = (P_{ij})_{1 \leq i \leq N}$ de $P = L^{-T} Q$ correspond aux coordonnées de X_j dans la base des fonctions w_i . Nous avons donc bien $\psi_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} w_i$, $0 \leq j \leq p$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad \int_{\Omega} \psi_i \cdot \psi_j &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^N P_{ki} w_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^N P_{lj} w_l \right) = \pi_i \cdot \mathcal{M} \pi_j = \delta_{ij} \\ \text{et} \quad a(\psi_i, \psi_j) &= a \left(\left(\sum_{k=1}^N P_{ki} w_k \right), \left(\sum_{l=1}^N P_{lj} w_l \right) \right) = \pi_i \cdot \mathcal{A} \pi_j = \lambda_j \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ceci est en particulier vrai en prenant ψ_j , $1 \leq j \leq p$ et l'une des trois fonctions infinitésimales $\psi_{0,1}$, $\psi_{0,2}$ ou $\psi_{0,3}$. \square

Ainsi, en choisissant $\langle \psi_i \rangle_{1 \leq i \leq p}$ comme base de V_p , nous avons pour la matrice \mathcal{B} du système (3.4) :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & \beta^T \\ \beta & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J} & \beta^T \\ \beta & I_p \end{pmatrix}$$

et d'après le Lemme 1, son inverse s'écrit :

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{J} - |\beta|^2} \begin{pmatrix} 1 & -\beta^T \\ -\beta & \beta\beta^T + (\mathcal{J} - |\beta|^2)I_p \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Ainsi, tant que $|\beta|^2 \neq \mathcal{J}$, la résolution du système (3.4) équivaut à celle de :

$$\ddot{X} = \varphi(t, X, \dot{X}) := \frac{1}{\rho} \mathcal{B}^{-1}(X) \mathcal{H}(t, X, \dot{X}). \quad (3.9)$$

3.4.2 Exemples illustratifs de quelques modes propres

Nous présentons dans ce paragraphe quelques illustrations concernant les modes propres d'une structure élastique. Nous considérons pour cela une ellipse dont les axes principaux sont de taille respective 2×0.7 (petit axe) et 2×1.0 (grand axe). Comme matériau constitutif de la structure homogène, nous choisissons l'acier : avec comme module d'YOUNG $E = 21.10^5 \text{ kg/cm}^2$ et comme coefficient de POISSON $\nu = 0.28$ (ce qui correspond aux coefficients de LAMÉ $\lambda = 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\mu = 8.10^5 \text{ kg/cm}^2$), cf [Cia86].

À la Figure 3.1, nous exhibons deux des trois modes propres infinitésimaux de la structure : une translation infinitésimale (cf Figure 3.1(a)) et la rotation infinitésimale $\vec{e}_z \wedge \vec{G}\mathbf{x}$ (cf Figure 3.1(b)). Ces modes propres ont été obtenus avec $N = 58$ points de discrétisation de la structure.

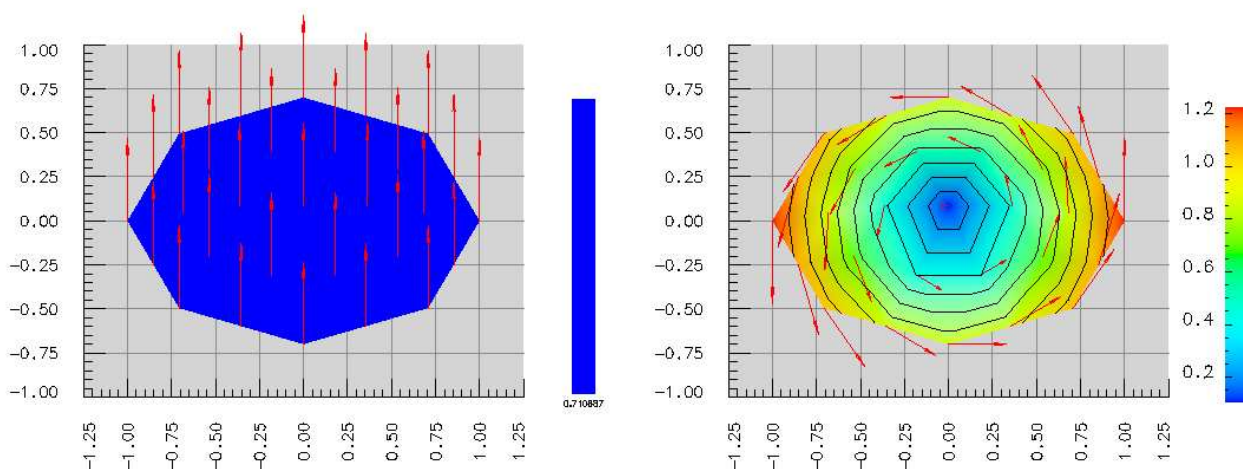
(a) Translation infinitésimale ($N = 58$ points).(b) Rotation infinitésimale ($N = 58$ points).

FIG. 3.1 – Seconde translation infinitésimale et rotation infinitésimale de la structure elliptique pour $N = 58$ points de discrétisation.

À la Figure 3.2, nous présentons les quatrième (Figures 3.2(a) et 3.2(b)) et dixième (Figures 3.2(c) et 3.2(d)) modes propres de la structure pour $N = 156$ points et $N = 1526$ points de discrétisation.

Enfin, à la Figure 3.3, nous illustrons des modes propres «hautes fréquences» réalisés avec $N = 1526$ points de discrétisation de l'ellipse : nous exhibons les 999-ième (Figure 3.3(a)) et 1524-ième (Figure 3.3(b)) modes propres.

Implémentation

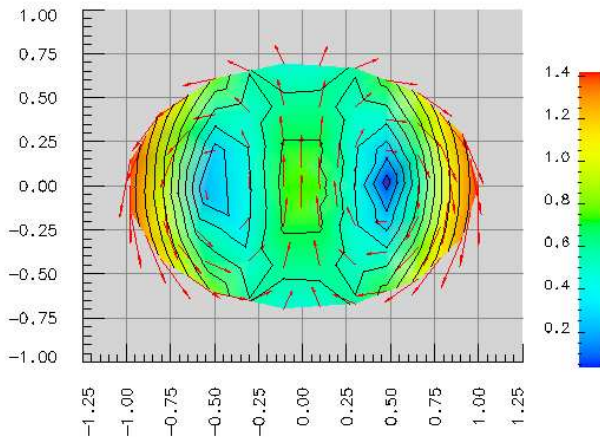
Les illustrations précédentes ont été obtenues en résolvant le problème aux valeurs propres généralisées (3.7). Les matrices \mathcal{A} et \mathcal{M} ont été assemblées et calculées à partir d'éléments finis \mathcal{P}_2 à l'aide du logiciel libre FREEFEM++ (dans sa version 1.13) : voir <http://www.freefem.org> ou <http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/freefem++.htm>. Les éléments propres généralisés ont ensuite été calculés à l'aide de routines issues des bibliothèques Fortran BLAS (voir <http://www.netlib.org/blas>) et LAPACK (voir <http://www.netlib.org/lapack>).

La visualisation est effectuée avec le logiciel libre OPENDX (voir <http://www.opendx.org>).

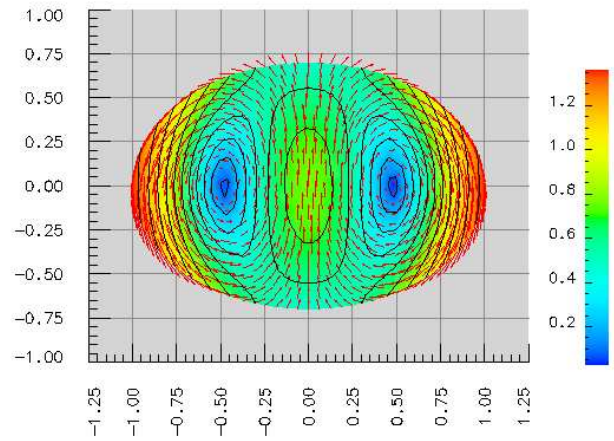
3.5 Algorithme de mise en œuvre

3.5.1 Calculs préliminaires

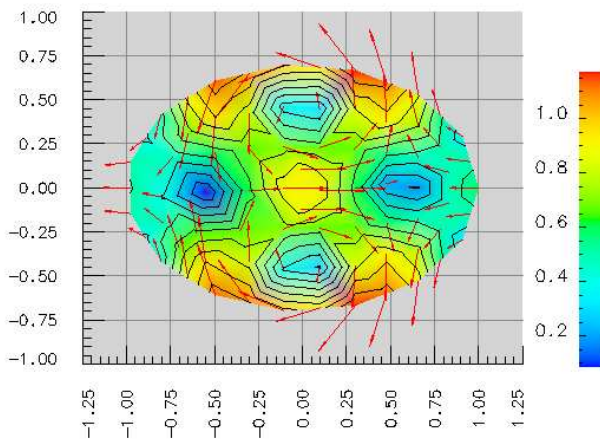
Nous effectuons quelques simplifications dans les calculs des coefficients du système (3.9) afin de synthétiser de manière effective l'algorithme de mise en œuvre numérique.



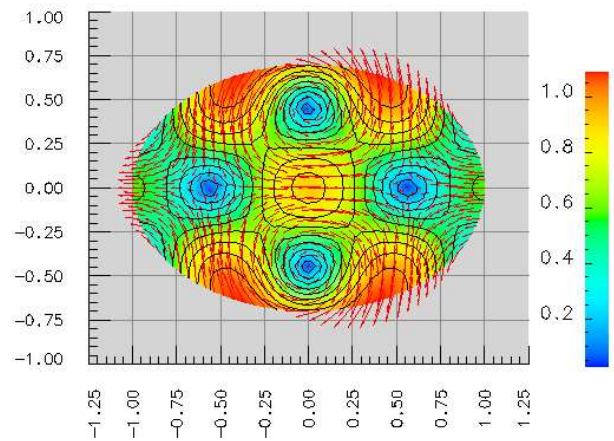
(a) 4-ième mode propre ($N = 156$ points)



(b) 4-ième mode propre ($N = 1526$ points)

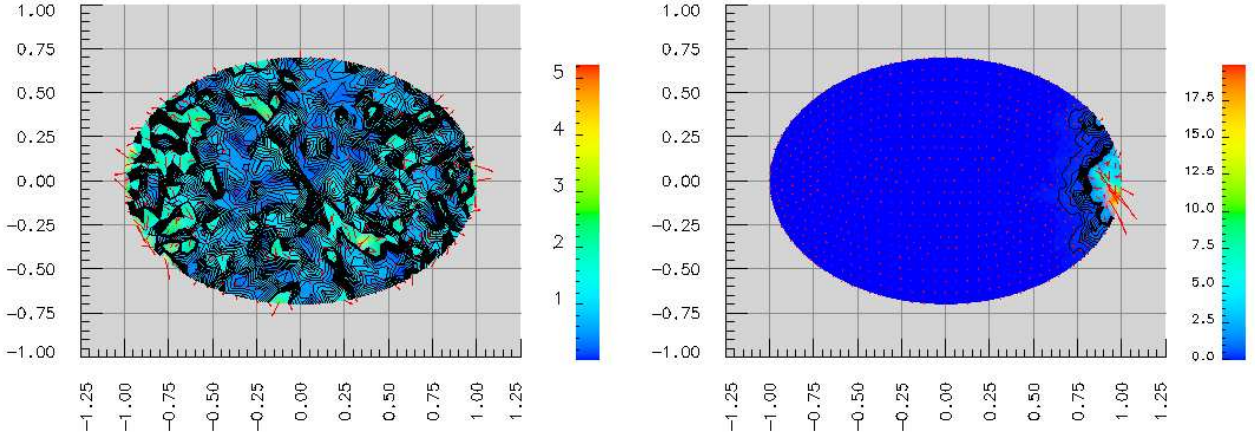


(c) 7-ième mode propre ($N = 156$ points)



(d) 7-ième mode propre ($N = 1526$ points)

FIG. 3.2 – Comparaison des 4-ième et 7-ième modes propres de la structure elliptique pour $N = 156$ points et $N = 1526$ points de discrétisation spatiale.


 (a) 999-ième mode propre ($N = 1526$ points).

 (b) 1524-ième mode propre ($N = 1526$ points).

 FIG. 3.3 – Les 999-ième et 1524-ième modes propres de la structure elliptique pour $N = 1526$ points de discrétisation.

Avec $V_p = \langle \psi_i \rangle_{1 \leq i \leq p}$, nous avons $\mathbf{d}_p = \sum_{i=1}^p \alpha_i \psi_i$ et :

$$\begin{cases} H_0 = F_0 + G_0 - 2\rho\dot{\theta} \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p) \cdot \partial_t \mathbf{d}_p \\ 1 \leq i \leq p, \quad H_i = F_i + G_i - 2\rho\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_p \wedge \psi_i + \rho(\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p) \cdot \psi_i - a(\mathbf{d}_p, \psi_i). \end{cases} \quad (3.10)$$

• Nous nous intéressons tout d'abord aux termes liés aux forces extérieures. Pour cela, tenant compte des relations :

$$\forall U, V \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} (R_{\theta}U) \wedge V = (U \wedge V) \cos \theta - (U \cdot V) \sin \theta, \\ (R_{\theta}U) \cdot V = (U \cdot V) \cos \theta + (U \wedge V) \sin \theta, \end{cases} \quad (3.11)$$

nous obtenons dans (3.3), pour les termes où les forces surfaciques interviennent :

$$F_0 = \int_{\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p) \wedge \mathbf{f} = \left[\int_{\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \wedge \mathbf{f} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{\Omega} \psi_j \wedge \mathbf{f} \right] \cos \theta - \left[\int_{\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{\Omega} \psi_j \cdot \mathbf{f} \right] \sin \theta$$

et pour $1 \leq i \leq p$:

$$F_i = \int_{\Omega} R_{\theta} \psi_i \cdot \mathbf{f} = \left[\int_{\Omega} \psi_i \cdot \mathbf{f} \right] \cos \theta + \left[\int_{\Omega} \psi_i \wedge \mathbf{f} \right] \sin \theta.$$

Le même type de relations est obtenu pour le calcul des G_i , $0 \leq i \leq p$, avec des intégrales monodimensionnelles sur $\partial\Omega$.

• D'autre part, nous introduisons les notations :

$$\forall 1 \leq i, j, k \leq p, \quad \gamma_i = \int_{\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \cdot \psi_i \quad \text{et} \quad \eta_{jk} = \int_{\Omega} \psi_j \wedge \psi_k.$$

En tenant maintenant compte de $\mathbf{d}_p = \sum_{i=1}^p \alpha_i \psi_i$ et des relations d'orthogonalité des ψ_j , $1 \leq j \leq p$, d'après le Lemme 3, nous obtenons dans (3.10) :

$$H_0 = F_0 + G_0 - 2\rho\dot{\theta} \sum_{i=1}^p \dot{\alpha}_i(\gamma_i + \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta_{ji}) = F_0 + G_0 - 2\rho\dot{\theta} \sum_{i=1}^p \dot{\alpha}_i(\gamma_i + \alpha_i)$$

et pour $1 \leq i \leq p$:

$$\begin{aligned} H_i &= F_i + G_i - 2\rho\dot{\theta} \sum_{j=1}^p \dot{\alpha}_j \eta_{ji} + \rho(\dot{\theta})^2(\gamma_i + \sum_{j=1}^p \alpha_j \delta_{ji}) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j \delta_{ji} \\ &= F_i + G_i - 2\rho\dot{\theta} \sum_{j=1}^p \dot{\alpha}_j \eta_{ji} + \rho(\dot{\theta})^2(\gamma_i + \alpha_i) - \lambda_i \alpha_i. \end{aligned}$$

• Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement au produit $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}$ du système (3.9). En notant $H = (H_i)_{1 \leq i \leq p}$, nous avons :

$$\rho(\mathcal{J} - |\beta|^2)\varphi(t, X, \dot{X}) = \begin{pmatrix} 1 & & -\beta^T \\ -\beta & \beta\beta^T + (\mathcal{J} - |\beta|^2)I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 - \beta \cdot H \\ -H_0\beta + (\beta\beta^T)H + (\mathcal{J} - |\beta|^2)H \end{pmatrix}.$$

Or, puisque $(\beta\beta^T)H = \beta(\beta^T H) = \beta(\beta \cdot H)$, nous obtenons :

$$\varphi(t, X, \dot{X}) = \frac{1}{\rho(\mathcal{J} - |\beta|^2)} \begin{pmatrix} H_0 - \beta \cdot H \\ -(H_0 - \beta \cdot H)\beta + (\mathcal{J} - |\beta|^2)H \end{pmatrix}.$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p)^2 = \int_{\Omega} |\overrightarrow{G\mathbf{x}}|^2 + 2 \int_{\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \cdot \mathbf{d}_p + \int_{\Omega} |\mathbf{d}_p|^2 \\ &= \|\overrightarrow{G\mathbf{x}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_i + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i \alpha_j \delta_{ij} = \|\overrightarrow{G\mathbf{x}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (2\gamma_i + \alpha_i) \end{aligned}$$

en tenant compte à nouveau des relations d'orthogonalité des ψ_i , $1 \leq i \leq p$, et d'autre part $|\beta|^2 = \sum_{j=1}^p (\beta_j)^2$ avec :

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad \beta_j = \int_{\Omega} \mathbf{d}_p \wedge \psi_j = \sum_{i=1}^p \alpha_i \eta_{ij}.$$

• Nous sommes maintenant à même d'ordonner les étapes des calculs de $\varphi(t, X, \dot{X})$:

- 1] Pré-calcul des coefficients γ_i et η_{ij} pour $1 \leq i, j \leq p$.
- 2] Calcul des termes de forces extérieures : F_i, G_i pour $0 \leq i, j \leq p$.
- 2bis] Calcul du scalaire \mathcal{J} .
- 2ter] Calcul du vecteur β et de sa norme au carré $|\beta|^2$.
- 3] Calcul du vecteur \mathcal{H} : les H_i pour $0 \leq i \leq p$.
- 4] Calcul du scalaire $(H_0 - \beta \cdot H)/(\mathcal{J} - |\beta|^2)$.
- 5] Calcul de $\varphi(t, X, \dot{X})$.

Les étapes comportant le même numéro peuvent être effectuées en même temps indépendamment les unes des autres. Il n'est pas non plus nécessaire d'assembler chacun de ses éléments (gain de stockage et de calculs).

3.5.2 Semi-discrétisation en temps : schéma d'Euler

Le système d'EDO $\ddot{X} = \varphi(t, X, \dot{X})$ du second ordre en temps peut être ramené à un système du premier ordre par :

$$\begin{cases} \dot{X} &= V \\ \dot{V} &= \varphi(t, X, V), \end{cases}$$

Nous employons alors le schéma d'EULER explicite pour la semi-discrétisation en temps en utilisant une subdivision $t^0 = 0 < t^1 = \delta t < \dots < t^n = n\delta t < \dots < t^S = T$ de l'intervalle $(0, T)$ avec un pas constant $\delta t = T/S$ et $S \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, nous obtenons²⁶ :

$$\text{pour } 0 \leq n \leq S-1, \quad \begin{cases} \frac{X^{n+1} - X^n}{\delta t} &= V^{n+1} \\ \frac{V^{n+1} - V^n}{\delta t} &= \varphi(t^n, X^n, V^n), \end{cases}$$

avec $X^0 = X(t=0)$ et $V^0 = \dot{X}(t=0)$ données.

En ce qui concerne la translation τ de la décomposition de la déformation, l'EDO $m\ddot{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}$ est aussi du second ordre. Nous la traitons donc de la même manière par la discrétisation suivante :

$$\text{pour } 1 \leq n \leq S-1, \quad m \frac{\tau^{n+1} - 2\tau^n + \tau^{n-1}}{\delta t^2} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \right)^n,$$

soit encore :

$$\text{pour } 1 \leq n \leq S-1, \quad \tau^{n+1} = \frac{\delta t^2}{m} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \right)^n + 2\tau^n - \tau^{n-1},$$

avec $\tau^0 = \tau(t=0)$ et $\tau^1 = \delta t \dot{\tau}(t=0) + \tau^0$ données.

3.5.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Nous souhaitons construire l'espace V_p discret d'approximation de l'espace \mathcal{E}_1 de dimension infinie, avec V_p composé des projetés sur \mathbb{R}^N des p premières fonctions propres de l'opérateur $\bar{\Sigma}$ associées à des valeurs propres non nulles. Nous ne construisons pas directement une base de V_p , mais nous passons par le problème aux valeurs propres généralisées introduit dans un paragraphe précédent.

Dans un premier temps nous approchons l'opérateur $\bar{\Sigma}$ de l'élasticité linéarisée par une méthode d'éléments finis, ici \mathcal{P}_2 dans notre cas. Nous supposons que $N = 2M$ avec $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Nous considérons $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \vec{\xi}_M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$, M points distincts de $\bar{\Omega}$ (supposé polyédrique pour simplifier), et un maillage dont les sommets sont les points $\vec{\xi}_i$, $1 \leq i \leq M$. Nous considérons (par exemple) la base des fonctions chapeaux de \mathcal{P}_2 suivante :

$$\forall 1 \leq i, j \leq M, \quad w_{2i-1}(\vec{\xi}_j) = \delta_{ij} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad w_{2i}(\vec{\xi}_j) = \delta_{ij} \vec{e}_y.$$

De là, l'espace $W_N = \langle w_i \rangle_{1 \leq i \leq 2M}$ est une approximation de dimension $N = 2M$ de l'espace $H^1(\Omega)$.

²⁶Ceci est équivalent à discrétiser directement $\ddot{X} = \varphi(t, X, \dot{X})$ par :

$$\text{pour } 1 \leq n \leq S-1, \quad \frac{X^{n+1} - 2X^n + X^{n-1}}{\delta t^2} = \varphi \left(t^n, X^n, \frac{X^n + X^{n-1}}{\delta t} \right),$$

avec $X^0 = X(t=0)$ et $X^1 = \delta t \dot{X}(t=0) + X^0$ données.

Nous construisons alors les matrices de masse $\mathcal{M} = \left(\int_{\Omega} w_i \cdot w_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}$ et de rigidité $\mathcal{A} = (a(w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq N}$ introduites en (3.6), et nous recherchons (par une procédure numérique) les éléments propres généralisés associées à ces deux matrices, solutions du problème (3.7). Nous obtenons alors pour $1 \leq j \leq N$ les vecteurs propres $\pi_j = (P_{ij})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ associés à leur valeur propre respective $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$. Il suffit alors d'écarter les trois vecteurs propres «infinitésimaux» associés à la valeur propre triple nulle, noté ici π_1, π_2, π_3 , pour obtenir une base de V_p . En effet, $V_p = \langle \pi_i \rangle_{4 \leq i \leq N}$ est constitué de $p = N - 3$ vecteurs qui sont orthogonaux entre eux d'une part, et avec les vecteurs propres «infinitésimaux» d'autre part, pour le produit scalaire $\cdot_{\mathcal{M}}$ de \mathbb{R}^N associé à la matrice de masse \mathcal{M} .

Nous sommes ainsi ramenés au problème (3.9) avec la matrice \mathcal{B}^{-1} donnée par (3.8). À chaque étape $n \in \{1, \dots, S\}$ de résolution en temps de ce problème semi-discrétisé au paragraphe précédent, on reconstruit aisément :

- l'angle de rotation instantané $\theta^n = X_0^n = (X^n)_0$;
- la perturbation $\mathbf{d}_p^n = \sum_{j=1}^p X_j^n \pi_{3+j} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p X_j^n P_{i,3+j} \right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$.

Pour obtenir la déformation, il faut avoir résolu l'EDO en la translation. Nous avons alors :

$$\forall 0 \leq n \leq S, \quad \phi^n = \tau^n + R_{\theta^n}(\overrightarrow{G\mathbf{x}} + \mathbf{d}_p^n).$$

Remarque 12. La base des modes propres, ordonnée suivant les valeurs propres croissantes, n'est définie de manière unique qu'au choix d'une base du noyau près.

En effet, soit ψ un vecteur propre non nul associé à une valeur propre $\lambda \geq 0$, et soit $k \in \text{Ker}(A) \setminus \{0\}$, alors $A\psi = A(\psi + k) = \lambda B\psi + 0Bk$ est différent de $\lambda B(\psi + k)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$. Ainsi, les éléments du noyau ne perturbent pas la base des vecteurs propres de $\text{Im}(A)$. Par contre, $\text{Ker}(A)$, sous-espace vectoriel de dimension 3 (non dégénéré associé à la valeur propre triple nulle) n'a pas de base fixée.

Cette remarque apparaît lors de la résolution numérique du problème aux valeurs propres généralisées. Les vecteurs propres orthonormés associés à des valeurs propres non nulles sont définis de manière unique, alors que ceux du noyau, notés k_1, k_2, k_3 , sont définis à un changement de base de \mathbb{R}^3 près. L'algorithme de résolution numérique du problème aux valeurs propres généralisées choisit lui-même une base de $\text{Ker}(A)$ qui n'est pas nécessairement celle que nous souhaitons. Pour lever ce problème, nous imposons directement que k_1 (resp. k_2, k_3) soit le projeté de $\vec{e}_x / \sqrt{|\Omega|}$ (resp. $\vec{e}_y / \sqrt{|\Omega|}$, $\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{G\mathbf{x}} / \|\overrightarrow{G\mathbf{x}}\|_{L^2(\Omega)}$) sur la base des éléments finis choisie.

3.5.4 Algorithme général

1ère Étape : Pré-calculs en rapport avec les éléments finis

- Entrées : $\Omega, N, \mathbf{f}, \mathbf{g}$.
- Sorties :
 - matrices de masse $\mathcal{M} = \left(\int_{\Omega} w_i \cdot w_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}$, de rigidité $\mathcal{A} = (a(w_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq N}$, et des produits vectoriels des fonctions chapeaux $\left(\int_{\Omega} w_i \wedge w_j \right)_{1 \leq i, j \leq N}$;
 - coefficients $\int_{\Omega} |\overrightarrow{G\mathbf{x}}|^2$ et $\int_{\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \cdot w_i$, pour $1 \leq i \leq N$;
 - et pour chaque temps $1 \leq n \leq S$, coefficients du type $\int_{\Omega} w_i \wedge \mathbf{f}$, $\int_{\Omega} w_i \cdot \mathbf{f}$, $\int_{\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \wedge \mathbf{f}$, $\int_{\Omega} \mathbf{f}$, $\int_{\partial\Omega} w_i \wedge \mathbf{g}$, $\int_{\partial\Omega} w_i \cdot \mathbf{g}$, $\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{G\mathbf{x}} \wedge \mathbf{g}$, $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}$.

2ème Étape : Pré-calculs en rapport avec les éléments propres

- 1) Recherche des éléments propres généralisés $(\lambda_i, \pi_i)_{1 \leq i \leq N}$ associés aux matrices \mathcal{M} et \mathcal{A} , ordonnés suivant les valeurs propres croissantes, et tel que π_3 est la rotation infinitésimale $\vec{e}_z \wedge \vec{G}\mathbf{x} / \|\vec{G}\mathbf{x}\|_{L^2(\Omega)}$. On note $P = (\pi_1, \dots, \pi_N) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- 2) Calculs des coefficients γ_j et η_{jk} pour $1 \leq j, k \leq p$.
- 3) Calculs des coefficients des forces (comme par exemple $\int_{\Omega} \psi_i \wedge \mathbf{f}$ pour $0 \leq j \leq p$).

3ème Étape : Boucle en temps

Pour chaque pas de temps $n \in \{1, \dots, S\}$:

- 1) Calculs de F_i et G_i pour $0 \leq i \leq p$.
- 1bis) Calcul de l'équivalent \mathcal{J} du moment d'inertie.
- 1ter) Calcul du vecteur β et de sa norme au carré $|\beta|^2$.
- 2) Test :
$$\left[\begin{array}{l} \text{si } (\mathcal{J} - |\beta|^2)^n (\mathcal{J} - |\beta|^2)^0 > 0, \\ \text{alors la simulation reste dans le domaine de validité} \\ \text{(et la boucle en temps continue),} \\ \text{sinon arrêt de la boucle en temps} \\ \text{(car sortie du domaine de validité).} \end{array} \right.$$
- 3) Calcul du vecteur \mathcal{H} .
- 4) Calcul du scalaire $(H_0 - \beta \cdot H)$.
- 5) Calcul de $\varphi(t^n, X^n, \dot{X}^n)$.
- 6) Calcul de X^{n+1}, V^{n+1} par le schéma d'Euler.
- 6bis) Calcul de τ^{n+1} .
- 7) Assemblage de la déformation ϕ^{n+1} .

Deuxième partie

Interaction fluide-structure

Introduction à la partie de couplage fluide-structure

Dans cette partie, nous abordons des problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires en dimension 2 d'espace. Il s'agit de considérer des systèmes physiques où interviennent d'une part des fluides (et plus particulièrement dans nos exemples des liquides), et d'autre part des corps élastiques. Dans ces problèmes, ces deux types de milieux continus (fluide et structure) interagissent les uns avec les autres, et ce phénomène fait partie intégrante de la modélisation.

En nous plaçant dans des domaines fluides bornés, nous pouvons classer les problèmes auxquels nous nous intéressons selon deux types de topologie de configuration : d'une part le cas d'un corps élastique évoluant librement dans un fluide, et d'autre part, le cas d'une membrane encastrée à ses extrémités et découpant le domaine fluide en deux sous-parties.

Pour le premier type de problèmes (voir **Chapitre 1** de cette **Partie II**), nous utilisons le système des équations de NAVIER-STOKES incompressibles, pour modéliser un fluide visqueux. À l'intérieur du domaine fluide, nous considérons un corps élastique en grands déplacements (de translation et rotation) avec de petites perturbations élastiques. Nous utilisons pour cela le modèle analysé dans la **Partie I** de cette thèse. Le couplage est effectué selon deux conditions au niveau de l'interface entre le fluide et la structure : d'une part grâce au bilan des tenseurs des forces selon la normale ; et d'autre part, par une condition de non-glissement (car le fluide est visqueux) qui est traduite, dans notre modèle, par l'égalité des vitesses fluide et structure (sur l'interface).

Nous nous intéressons à l'existence de solutions régulières pour ce système couplé. Nous adoptons pour cela une méthode modale pour décomposer les perturbations élastiques de la structure selon un nombre fini de modes propres. Nous montrons l'existence de solutions pour ce système couplé. Dans [GM00a], GRANDMONT et MADAY ont prouvé l'existence de solutions pour le même type de problème, mais avec une structure rigide indéformable. Nous reprenons ici cette étude pour l'adapter à notre cas en suivant une méthode de découplage. Pour cela, nous découplons temporairement les systèmes fluide et structure pour les considérer séparément, et montrer des résultats d'existence et de régularité des solutions de ces sous-systèmes. Concernant la partie fluide, nous utilisons des arguments présentés dans [GM00a]. Concernant la structure, nous avons à prendre en compte une condition supplémentaire non-linéaire portant sur les coefficients de la décomposition modale, et qui provient de l'incompressibilité du fluide (issue du découplage momentané) ; nous exploitons cette condition grâce au théorème des fonctions implicites. Le recouplage est ensuite effectué à l'aide du théorème de point fixe de PICARD.

Toujours dans ce type de configuration, nous proposons un modèle simplifié pour le couplage d'un

corps élastique en grands déplacements et petites déformations plongé dans un fluide potentiel (voir la fin du **Chapitre 2** de la **Partie II**).

Nous abordons dans un second temps (voir **Chapitre 2** et **Chapitre 3** de la **Partie II**), un autre type de géométrie de problèmes couplés fluide-structure. Nous considérons une enceinte rigide séparée en deux cavités hermétiques à l'aide d'une membrane élastique ; chaque cavité est remplie de fluide. Dans cette configuration, et dans le but d'élaborer des applications numériques, nous distinguons à nouveau deux types de modélisation.

Pour une première modélisation, nous considérons des fluides parfaits dans chacune des deux cavités. Ces fluides sont modélisés par les équations d'EULER, et sont de plus supposés incompressibles et irrotationnels. Nous sommes alors ramenés au cas de fluides potentiels. En ce qui concerne la structure monodimensionnelle, nous utilisons une équation des ondes modifiée pour modéliser un comportement élastique en flexion. Le couplage est effectué à l'interface par l'égalité des composantes normales des vitesses et par le bilan des tenseurs projeté sur la normale. Ce dernier point fait intervenir les pressions des fluides que nous obtenons à partir de la formule de BERNOULLI. De façon synthétique, notre problème est alors ramené à la résolution d'un laplacien dans un domaine mobile. Nous utilisons une méthode *Arbitraire Euler Lagrange* (*ALE* en anglais) simplifiée pour mettre en œuvre une simulation numérique.

Pour une seconde modélisation dans le même type de configuration (c'est-à-dire une enceinte à deux cavités séparées par une membrane élastique), nous considérons des fluides visqueux régis par les équations de NAVIER-STOKES incompressibles. Nous utilisons par ailleurs la méthode de la frontière immergée (*cf* [Pes72]-[Pes77]) pour modéliser la structure. L'idée principale consiste à baigner la structure dans le fluide, et à modéliser les effets de cette structure sous forme d'une force appliquée sur le fluide, et agissant suivant un Dirac porté par la structure. Nous détaillons les points délicats de la construction de la force et du Dirac, et nous présentons les tests d'une simulation numérique directe. Nous nous intéressons ensuite à un problème de contrôle frontière par injection de fluide. Il s'agit d'un système de contrôle optimal sur la trajectoire de la vitesse fluide, que nous ramenons à un problème de type *Linéaire-Quadratique*²⁷ (*LQ*). Nous utilisons alors un algorithme de résolution de ce type de système (*cf* [Lew86]) : le contrôle est écrit sous forme d'un *feedback*, et est obtenu grâce à des matrices de gain de KALMAN et grâce à la résolution d'équations de RICCATI.

Le plan de cette **Partie II** est le suivant. Dans le **Chapitre 1**, nous montrons l'existence de solutions à un problème couplant un fluide visqueux et une structure en grands déplacements et petites déformations élastiques (suivant une décomposition selon un nombre fini de modes propres). Dans le **Chapitre 2**, nous présentons un système de fluides potentiels en interaction avec une membrane élastique en flexion, et nous l'illustrons par des simulations numériques. Enfin, dans le **Chapitre 3**, nous considérons, grâce à la méthode de la frontière immergée, le système d'une structure élastique baignant dans des fluides visqueux ; nous effectuons sur le problème couplé une démarche de contrôle optimal par *feedback*.

²⁷L'équation d'état du système semi-discrétisé en temps se ramène à une équation *Linéaire*, et par ailleurs, la fonctionnelle de contrôle est écrite sous forme *Quadratique* en la variable d'état et en le contrôle.

Chapitre 1

Solution régulière pour le couplage d'un fluide et d'une structure élastique

Sommaire

1.1	Présentation du modèle	83
1.1.1	Modélisation	83
1.1.2	Estimation d'énergie	85
1.1.3	Écriture du système fluide en variables lagrangiennes	87
1.1.4	Condition de compatibilité sur la perturbation	88
1.1.5	Approximation modale pour la perturbation de la déformation structure	89
1.2	Résultat principal	90
1.3	Existence de solution au problème couplé	91
1.3.1	Stratégie de la démonstration. Présentation des problèmes (\mathcal{F}) et (\mathcal{S})	91
1.3.2	Existence de solution pour le problème (\mathcal{F})	93
1.3.3	Existence de solution pour le problème (\mathcal{S}) sous contrainte	96
1.3.4	Procédure de recouplage	100

Introduction

Nous nous intéressons à un problème de couplage fluide-structure instationnaire en dimension 2 pour lequel nous montrons l'existence d'une solution régulière. Nous considérons une cavité rigide bi-dimensionnelle occupée par un fluide dans lequel un corps déformable est immergé. Le fluide visqueux et incompressible est régi par les équations de NAVIER-STOKES. La structure élastique supposée homogène et isotrope, est modélisée en grands déplacements et petites déformations par un mouvement rigide et une perturbation (supposée petite) décomposée suivant un nombre fini de modes propres de l'opérateur de l'élasticité linéarisée. Le couplage s'effectue à l'interface par l'égalité des vitesses fluide et structure, et par le principe d'action-réaction. En particulier, les domaines fluide et structure dépendent du temps et le problème est non-linéaire. Nous montrons l'existence d'une solution régulière par des arguments de points fixes.

Avant d'entrer pleinement dans le cadre de notre problème, nous rappelons différents types de résultats théoriques présents dans la littérature sur le couplage de structures en déplacement dans un fluide.

Quelques résultats d'existence présents dans la littérature

Nous présentons succinctement quelques références pour des problèmes d'interaction fluide-structure couplant un ou plusieurs mobiles en déplacement dans un fluide. Nous pouvons distinguer deux cas suivant que la structure est rigide ou élastique.

Concernant les mobiles rigides, de nombreux résultats ont été obtenus ces dernières années par des méthodes très variées, que ce soit en domaines bornés : [CSMT99]-[CSMT00], [DE99]-[DE00], [HS99]-[HS00], [GLS00], [GM00a], [TT02a], [Tuc02]-[SMST02]; comme en domaines non-bornés : [Jud74], [Ser87], [TT02b].

Dans des articles tels que [DE99], [CSMT99], et [GLS00], les auteurs montrent l'existence de solutions faibles à leur problème d'interaction fluide-structure respectifs. Ils se placent pour cela dans des domaines spatio-temporels cylindriques (du type $\Omega \times (0, T)$). Ainsi, pour passer à la limite dans les formulations faibles, il est possible d'utiliser des injections de SOBOLEV et des théorèmes de compacité usuels (c'est-à-dire dans des espaces définis sur des domaines cylindriques). Dans [CSMT99] par exemple, les auteurs ont choisi un système de coordonnées particulier à leur problème (qui se déplace avec la structure), et ont pris pour domaine un ensemble incluant l'union des configurations physiques acceptables. Dans [DE99] et [GLS00] par ailleurs, les auteurs ont utilisé le fait que le bord extérieur du domaine fluide n'est pas déformé, et ont pu alors se ramener à un domaine cylindrique en espace-temps en utilisant une formulation globale 'réunifiant' les équations de la partie fluide et de la partie structure.

Dans [GM00a], GRANDMONT et MADAY montrent des résultats d'existence (locale en temps) de solutions fortes, sous une hypothèse de densité de structure assez grande. Les auteurs reprennent la démarche de SOLONNIKOV (voir [Sol77], [Sol88a], [Sol88b]), BEALE (voir [Bea81]), et ALLAIN (voir [All83] et [All87]), et réécrivent les équations fluides en lagrangien (dans le domaine initial). De cette façon, le domaine $\omega(0) \times (0, T)$ est cylindrique. Néanmoins, la réécriture du système fluide en coordonnées lagrangiennes modifie les opérateurs différentiels en espace. C'est ce point de vue 'tout lagrangien' (les systèmes fluides et structures sont écrits en coordonnées lagrangiennes) que nous adoptons par la suite dans la formulation de notre problème.

Dans [TT02a], les auteurs montrent l'existence et l'unicité d'une solution forte à leur problème. Ils s'appuient sur un changement de variable du type de celui utilisé dans [IW77] (qui permet de conserver en un sens l'écriture de l'opérateur de divergence). L'un des principaux arguments employés suit alors une méthode de semi-groupes.

Pour un mobile élastique en déplacement dans un domaine borné, [DEGLT01] présente l'existence de solutions faibles dans le cas où le déplacement de la structure est décomposé selon un nombre fini de modes propres élastiques. Nous utilisons cette dernière démarche pour le mouvement élastique, en considérant de plus le mouvement couplé rigide de la structure (à partir du modèle présenté dans la Partie I de cette thèse).

Nous citons à présent un cas d'existence et d'unicité de solution pour un couplage d'un système fluide linéaire et d'une structure élastique de plaque. Dans [FO99a]-[FO99b], les auteurs utilisent une technique de démonstration particulière en travaillant dans des espaces qui dépendent du temps instantané (comme par exemple $L^2(0, T; H^1(\Omega(t)))$). Ils appliquent ensuite un théorème de point fixe de KAKUTANI.

1.1 Présentation du modèle

1.1.1 Modélisation

Nous nous intéressons à un problème d'interaction fluide-structure. Nous considérons une cavité rigide bidimensionnelle régulière simplement connexe non-vide remplie par un fluide visqueux incompressible dans lequel un corps déformable est immergé. Soit $T > 0$. Pour $t \in (0, T)$, nous notons $\Omega_F(t)$ (respectivement $\Omega_S(t)$) le domaine régulier fluide (resp. structure) et $\Gamma(t)$ l'interface entre les deux domaines à l'instant t . Nous désignons par $\Gamma_0 = \partial\Omega_F(t) \setminus \Gamma(t)$ la frontière extérieure fixe du domaine fluide. La Figure 1.1 présente des configurations admissibles à deux instants $0 \leq t_1 \leq T$ et $0 \leq t_2 \leq T$ différents.

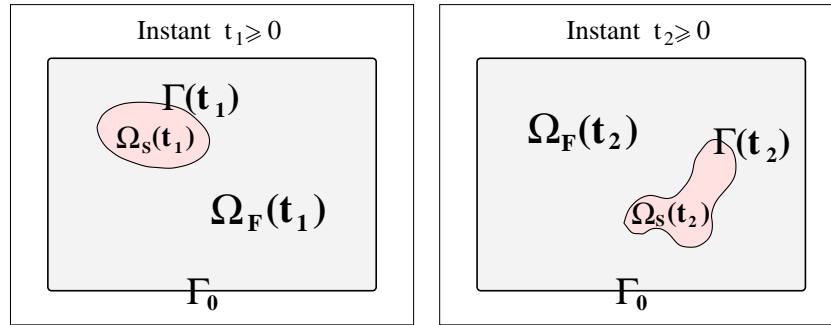


FIG. 1.1 – Configuration des domaines fluide et structure à deux instants t_1 et t_2 différents (tels que $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ par exemple).

Le fluide est régi par les équations de NAVIER-STOKES :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega_F(t) \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega_F(0), \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où \mathbf{u} désigne la vitesse du fluide, \mathbf{u}_0 sa vitesse initiale, p sa pression, ρ_F sa densité, ν sa viscosité, et \mathbf{F} les forces extérieures surfaciques s'exerçant sur le fluide. Nous précisons la condition de bord vérifiée par \mathbf{u} sur l'interface $\Gamma(t)$ lorsque nous aborderons le couplage.

La structure élastique est homogène et isotrope, et satisfait le principe de l'indifférence matérielle. Nous considérons que la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est un état naturel. Par la suite, nous notons

G le centre de gravité du domaine Ω . Nous supposons que la déformation ϕ de la structure vérifie l'hypothèse²⁸ :

$$\left(\int_{\Omega} \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right)^2 + \left(\int_{\Omega} \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right)^2 \neq 0. \quad (1.2)$$

Cette hypothèse est en particulier raisonnable pour une déformation proche d'une déformation rigide ; en effet, soit $\psi = \tau + R\overrightarrow{G\xi}$ une déformation rigide avec $\tau \in \mathbb{R}^2$ et $R \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$, alors $(\int_{\Omega} \psi \wedge \overrightarrow{G\xi})^2 + (\int_{\Omega} \psi \cdot \overrightarrow{G\xi})^2 = \int_{\Omega} |\overrightarrow{G\xi}|^2 > 0$. Ainsi, d'après les résultats du Chapitre 1 de la Partie I (ou encore [GMM02]), nous pouvons décomposer la déformation ϕ de la structure de façon unique selon une translation de vecteur $\tau \in \mathbb{R}^2$, une rotation $R = R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ autour du centre de

gravité G , et une perturbation relative à la déformation élastique du corps : $\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ où
 $\xi \longmapsto \xi + \mathbf{d}(\xi, t)$

$\mathbf{d}(\cdot, t)$ est une application qui sera supposée petite, et qui vérifie :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d} = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \text{ et } \int_{\Omega} (\mathbf{d} + \overrightarrow{G\xi}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0. \quad (1.3)$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\forall t \in (0, T), \forall \xi \in \Omega, \quad \phi(\xi, t) = \tau(t) + R_{\theta(t)}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}(\xi, t)).$$

Nous adoptons la modélisation suivante en grands déplacements et petites perturbations, qui a été présentée et analysée dans la Partie I de cette thèse (ou encore dans [GMM02]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \quad \text{dans } (0, T) \\ \frac{d}{dt} \left(J\dot{\theta} + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \partial_t \mathbf{d} \right) = \int_{\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0, T) \\ \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} + 2\dot{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} + \ddot{\theta} \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} - (\dot{\theta})^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} \right) \\ \quad + \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{d}) : \nabla \mathbf{b} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta} \mathbf{b} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta} \mathbf{b} \quad \text{dans } L^1(0, T) \text{ faible, } \forall \mathbf{b} \in \mathcal{E}_1 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

et dont nous allons préciser les notations. En ce qui concerne les paramètres liés intrinsèquement à la structure, nous avons noté ρ_S sa densité, $m = \rho_S |\Omega|$ sa masse, $J(t) = \rho_S \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d})^2$ son moment d'inertie à l'instant t . Les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} désignent respectivement les forces surfaciques et les forces appliquées au bord s'exerçant sur la structure. Nous dénotons par \wedge le produit vectoriel pour les vecteurs de \mathbb{R}^2 . En ce qui concerne les opérateurs, la dérivée ordinaire (resp. partielle) en temps est indiquée par un point (resp. par ∂_t). Nous définissons pour $s \geq 0$ l'espace vectoriel \mathcal{E}_s de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_s = \left\{ \mathbf{d} \in H^s(\Omega); \int_{\Omega} \mathbf{d} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \right\}.$$

Nous précisons qu'en plongeant $\mathbb{R}^2 = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$ dans \mathbb{R}^3 pour en adopter le formalisme, toute rotation dans le plan peut être vue comme une rotation d'axe \vec{e}_z où \vec{e}_z désigne un vecteur unitaire perpendiculaire au plan $\langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle$ du mouvement. Les rotations infinitésimales autour de G s'écrivent alors sous la forme $\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{G\xi}$ (cf Figure 1.3 page 26). Nous avons ainsi pour $\mathbf{b} \in \mathcal{E}_s$ pour tout $s \geq 0$:

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2, \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \vec{a} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{b} \right) \cdot \vec{a} = 0, \quad \text{et} \quad \forall c \in \mathbb{R}, \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (c\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{G\xi}) = c\vec{e}_z \cdot \left(\int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \wedge \mathbf{b} \right) = 0.$$

²⁸Voir la condition (1.6) page 24 de la modélisation de la structure élastique.

De là, nous pouvons remarquer que \mathcal{E}_s est le sous-espace vectoriel de $H^s(\Omega)$ dont les éléments sont orthogonaux (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$) aux translations infinitésimales et aux rotations infinitésimales. Nous précisons maintenant, pour $\mathbf{b} \in H^1(\Omega)$ les définitions des tenseurs : $\bar{\sigma}(\mathbf{b}) = \lambda \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{b}))I_2 + 2\mu\mathbb{f}(\mathbf{b})$ désigne le tenseur de l'élasticité linéarisée, $\mathbb{f}(\mathbf{b}) = (\nabla\mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b})^T)/2$ le tenseur des déformations linéarisé et I_2 la matrice identité de \mathbb{R}^2 ; de plus, $A : B = \text{Tr}(B^T A)$ est le produit contracté pour des matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et (λ, μ) le couple des constantes de LAMÉ du matériau. Nous posons par ailleurs :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{d}, \mathbf{b} \in H^1(\Omega), \quad ((\mathbf{d}, \mathbf{b})) &= \int_{\Omega} (\lambda \text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{d}))\text{Tr}(\mathbb{f}(\mathbf{b})) + 2\mu\mathbb{f}(\mathbf{d}) : \mathbb{f}(\mathbf{b})), \\ \text{et} \quad \forall \mathbf{b} \in H^1(\Omega), \quad \|\mathbf{b}\|_{\mathcal{E}_1}^2 &= ((\mathbf{b}, \mathbf{b})). \end{aligned}$$

Nous rappelons que $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_1}$ est une norme sur \mathcal{E}_1 équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ (cf [DL72]). Nous ajoutons enfin au système (1.4) les données initiales suivantes : $\tau(0) = \tau_0$, $\dot{\tau}(0) = \tau_1$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \theta_1$, et $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0$ et $\partial_t \mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_1$ dans Ω .

Remarque 13. *La déformation et en particulier la perturbation sont définies sur le domaine Ω de référence. D'autre part, le domaine structure initial $\Omega_S(0)$ est éventuellement différent de Ω , mais nous supposons qu'il existe une déformation η fixée admissible qui permet de passer de $\Omega_S(0)$ dans Ω (de façon bijective). L'application η dépend des données et forces initiales structures qui doivent être compatibles avec les forces initiales fluides. Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons que $\Omega_S(0) = \Omega$ et $\eta = \text{Id}_{\bar{\Omega}}$. Tout particulièrement, comme $\Omega_S(0) = \phi(\Omega, t=0) = \tau(0) + R_{\theta(0)}(G + \Omega + \mathbf{d}(\Omega, 0))$, nous supposons que $\mathbf{d}(\xi, t=0) \equiv 0$, $\theta(t=0) = 0$ et $\tau(0) = -G$. Le fait qu'il n'y ait pas de déformation initiale doit être cohérent avec le fait $\bar{\Omega}$ est un état naturel de la structure.*

Nous abordons maintenant le couplage des systèmes fluide et structure. Pour cela, nous rappelons que $\Gamma(0) = \partial\Omega_F(0) = \partial\Omega_S(0) = \partial\Omega$ et nous introduisons une application $\chi(\cdot, t) : \Omega \cup \Omega_F(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, régulière de Ω dans \mathbb{R}^2 , bijective de $\Omega_F(0)$ sur $\Omega_F(t)$ et de $\partial\Omega$ sur $\Gamma(t)$, et définie pour presque tout $t \in (0, T)$. Nous supposons en plus qu'elle satisfait la propriété $\det(\nabla\chi) = 1$ dans $\Omega_F(0)$. Nous en précisons la définition ultérieurement. Le couplage s'effectue à l'interface selon deux principes :

– l'égalité des vitesses fluide et structure à l'interface :

$$\mathbf{u}(\chi(\xi, t), t) = \partial_t \phi(\xi, t) = \dot{\tau}(t) + \partial_t \left[R(\vec{G}\xi + \mathbf{d}(\xi, t)) \right] \quad \text{sur } \Gamma(0) \times (0, T); \quad (1.5)$$

– le principe d'action-réaction, qui traduit le bilan des tenseurs des contraintes normales fluide et structure à l'interface :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\xi, t) = [p(\chi(\xi, t), t) I_2 - \nu(\text{cof}(\nabla_{\xi}\chi)\nabla_{\xi}\mathbf{u}(\chi(\xi, t), t) \\ + [\text{cof}(\nabla_{\xi}\chi)\nabla_{\xi}\mathbf{u}(\chi(\xi, t), t)]^T)] \mathbf{n}(\chi(\xi, t), t) \quad \text{sur } \Gamma(0) \times (0, T), \quad (1.6) \end{aligned}$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{n}_t$ désigne la normale unitaire extérieure au domaine fluide $\Omega_F(t)$ et qui dépend donc du temps ; $\text{cof}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; et ∇_{ξ} est le gradient en ξ (exceptionnellement indicé ici par sa variable pour éviter les confusions).

1.1.2 Estimation d'énergie

Nous effectuons tout d'abord un bilan d'énergie pour chacun des milieux, puis pour le système couplé. Pour le fluide, en appliquant le produit scalaire $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ à l'équation du système (1.1) avec \mathbf{u} comme fonction-test à chaque instant t , nous obtenons classiquement (cf [GM98a]

par exemple) :

$$\frac{\rho_F}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{u}^2 + \nu \int_{\Omega_F(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \int_{\Gamma(t)} (pI_2 - \nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.7)$$

Pour la structure, en multipliant la première (resp. deuxième) équation de (1.4) par $\dot{\tau}$ (resp. $\dot{\theta}$), et en choisissant $\mathbf{b} = R\partial_t \mathbf{d}$ dans la troisième équation de (1.4), nous sommes ces contributions membre à membre, et nous obtenons (en suivant les calculs du paragraphe 1.3 page 30) :

$$\frac{\rho_S}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\partial_t \phi|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{E}_1}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \phi + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \partial_t \phi. \quad (1.8)$$

Pour le système couplé, nous sommes alors les contributions des bilans d'énergie fluide et structure pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_F}{2} \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{u}^2 + \frac{\rho_S}{2} \int_{\Omega} |\partial_t \phi|^2 \right) + \nu \int_{\Omega_F(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{E}_1}^2 \\ = \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \phi + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g} - [(pI_2 - \nu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T))\mathbf{n}] \circ \chi) \cdot \partial_t \phi, \end{aligned} \quad (1.9)$$

où nous avons effectué un changement de variable à l'aide de l'application χ pour ramener l'intégrale sur $\Gamma(t)$ issue de (1.7) à une intégrale sur $\partial\Omega = \Gamma(0)$ et en utilisant l'égalité (1.5) des vitesses à l'interface. Nous notons $E_C(t) = \frac{\rho_F}{2} \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{u}^2 + \frac{\rho_S}{2} \int_{\Omega} |\partial_t \phi|^2$ l'énergie cinétique instantanée du système couplé, $E_E(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{d}\|_{\mathcal{E}_1}^2$ l'énergie mécanique instantanée liée à l'élasticité de la structure, et $E_V(t) = \nu \int_0^t \int_{\Omega_F(t)} |\nabla \mathbf{u}|^2$ l'énergie de dissipation visqueuse. Alors, en utilisant maintenant (1.6) et en intégrant sur $(0, t)$, nous obtenons le bilan d'énergie suivant pour le système couplé :

$$E_C(t) + E_E(t) + E_V(t) = E_C(0) + E_E(0) + \int_0^t \int_{\Omega_F(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \phi.$$

Si $\mathbf{F} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_F(t)))$ et $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, nous obtenons classiquement par GRONWALL que la vitesse fluide est bornée dans :

$$L^\infty(0, T; L^2(\Omega_F(t))) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega_F(t))),$$

et pour la structure, dans un premier temps que :

$$\phi \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } \mathbf{d} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)).$$

À partir de ces régularités, et en supposant que, pour presque tout $t \in (0, T)$, $\mathbf{d}(t, \cdot)$ appartient à \mathbf{Y}_1^δ , où l'ensemble \mathbf{Y}_s^δ est défini pour $s \geq 0$ par :

$$\mathbf{Y}_s^\delta = \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{E}_s; \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} \geq \delta > 0 \right\} \quad (1.10)$$

avec $\delta > 0$ un réel fixé, nous obtenons dans un second temps, en suivant la démarche du paragraphe 1.3 page 30, que τ , θ et \mathbf{d} sont bornés respectivement dans $W^{1,\infty}(0, T)$, $W^{1,\infty}(0, T)$ et $W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Remarque 14. Si T est assez petit, ou si les données initiales et les forces sont assez petites avec $\mathbf{d}_0 \in \mathbf{Y}_1$ où l'ensemble \mathbf{Y}_s est défini pour $s \geq 0$ par :

$$\mathbf{Y}_s = \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{E}_s; \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0 \right\},$$

alors, s'il existe, $\mathbf{d}(\cdot, t)$ reste dans \mathbf{Y}_1 pour presque tout $t \in (0, T)$.

1.1.3 Écriture du système fluide en variables lagrangiennes

Le système fluide (1.1) est écrit en coordonnées eulériennes dans le domaine $\Omega_F(t)$. Nous allons le réécrire en coordonnées lagrangiennes dans le domaine $\Omega_F(0)$ afin d'avoir un domaine espace-temps cylindrique. Nous notons \mathbf{v} (resp. q) la vitesse (resp. la pression) lagrangienne définie sur $\Omega_F(0)$. Il s'agit maintenant de préciser l'application χ dans le domaine $\Omega_F(0)$. Nous la choisissons de telle sorte que :

$$\text{pour } \xi \in \Omega_F(0), \begin{cases} \frac{d\chi}{dt}(\xi, t) = \mathbf{v}(\xi, t) & \text{dans } (0, T), \\ \chi(\xi, 0) = \xi, \end{cases} \quad (1.11)$$

c'est-à-dire tangente aux lignes de courant à chaque instant. De cette façon, nous avons pour $t \in (0, T)$:

$$\chi(\xi, t) = \xi + \int_0^t \mathbf{v}(\xi, s) ds \quad \text{dans } \Omega_F(0),$$

qui est bien une bijection de $\Omega_F(0)$ sur $\Omega_F(t)$ qui satisfait $\det(\nabla\chi) = 1$ dans $\Omega_F(0)$, dû à l'incompressibilité du fluide et à (voir [Sol88a] pour cette égalité) :

$$\partial_t \det \nabla \chi = (\operatorname{div} \mathbf{u} \circ \chi) \det(\nabla \chi).$$

Nous avons aussi, en notant $\mathbf{x} = \chi(\xi, t)$, que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\xi, t)$ et $p(\mathbf{x}, t) = q(\xi, t)$.

Par la suite, nous aurons besoin d'étudier plus spécifiquement la dépendance de χ par rapport à la vitesse lagrangienne \mathbf{v} , c'est pourquoi nous notons parfois $\chi_{\mathbf{v}}$ cette application. Nous désignons par $\nabla_{\mathbf{v}}$ l'opérateur $\operatorname{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\nabla$ (multiplication de la matrice $\operatorname{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})$ par l'opérateur différentiel ∇ du gradient par rapport à la variable ξ) qui joue essentiellement le rôle d'un gradient et qui satisfait la formule de GREEN suivante :

$$\int_{\Omega_F(0)} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} d\xi = \int_{\Omega_F(0)} (\operatorname{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\nabla) \cdot \mathbf{v} d\xi = \int_{\partial\Omega_F(0)} \mathbf{v} \cdot (\operatorname{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0) dS. \quad (1.12)$$

Nous effectuons maintenant formellement le changement de variable dans le système fluide (1.1) et nous obtenons ²⁹ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \partial_t \mathbf{v} - \nu (\nabla_{\mathbf{v}})^2 \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} q = \mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{v}} & \text{dans } \Omega_F(0) \times (0, T) \\ \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega_F(0) \times (0, T) \\ \mathbf{v}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega_F(0) \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \mathbf{v} = \dot{\tau}(t) + \partial_t \left[R(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}(\xi, t)) \right] & \text{sur } \Gamma(0) \times (0, T) \end{array} \right. \quad (1.13)$$

en ayant utilisé le fait que :

$$\partial_t \mathbf{v}(\xi, t) = (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})(\chi_{\mathbf{v}}(\xi, t), t).$$

²⁹Voir l'analogie de ce système dans [GM00a] pour le cas d'un mouvement structure purement rigide.

1.1.4 Condition de compatibilité sur la perturbation

La contrainte locale d'incompressibilité du fluide :

$$\nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega_F(0) \times (0, T)$$

induit une condition de compatibilité sur la déformation de la structure. En effet, d'après la formule de GREEN (1.12), nous avons :

$$0 = \int_{\Omega_F(0)} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \int_{\Gamma(0)} \mathbf{v} \cdot (\text{cof}(\nabla \chi_{\mathbf{v}}) \mathbf{n}_0) \quad \text{dans } (0, T), \quad (1.14)$$

puisque $\mathbf{v} = 0$ sur Γ_0 . À l'aide de la condition (1.5) d'égalité des vitesses fluide et structure à l'interface, nous allons traduire cette expression en terme de déformation de la structure.

En premier lieu, par la définition (1.11) de χ dans $\Omega_F(0)$, (1.14) se réécrit :

$$\int_{\Gamma(0)} \frac{\partial \chi}{\partial t} \Big|_{\Gamma(0)} \cdot \text{cof}(\nabla \chi) \mathbf{n}_0 = 0. \quad (1.15)$$

Nous choisissons à présent de définir χ dans Ω de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \chi(\cdot, t) = \chi^\phi(\cdot, t) : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{dans } (0, T). \\ \xi &\longmapsto \phi(\xi, t) \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\Omega_S(t) = \{\phi(\xi, t); \xi \in \Omega\}$, nous avons pour $t \in (0, T)$, $\chi(\partial\Omega, t) = \partial\Omega_S(t) = \Gamma(t)$. Nous avons aussi $\frac{d\chi}{dt}(\xi, t) = \partial_t \phi(\xi, t) = \mathbf{v}(\xi, t)$ sur $\Gamma(0) \times (0, T)$.

Nous rappelons maintenant le théorème suivant (cf [Cia88], théorème 2.7 – 1 page 83 dans un cadre tridimensionnel) :

Théorème 5. *Nous nous plaçons dans un cadre n -dimensionnel, où $n = 2$ ou 3 . Soient $\pi \in \mathbb{R}$ donné, Ω un domaine régulier de \mathbb{R}^n de bord Γ , de normale extérieure unitaire \mathbf{n}_0 , et soit \mathcal{G} la fonctionnelle suivante :*

$$\mathcal{G}(\psi) = -\frac{\pi}{n} \int_{\Gamma} \{\text{cof}(\nabla \psi) \mathbf{n}_0\} \cdot \psi \, dS$$

pour des applications $\psi : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ assez régulières. Alors on a :

$$\mathcal{G}(\psi) = -\pi \int_{\Omega} \det(\nabla \psi) \, dx \quad ,$$

et la dérivée au sens de GÂTEAUX de la fonctionnelle \mathcal{G} est donnée par :

$$D\mathcal{G}(\varphi) \theta = -\pi \int_{\Gamma} \{\text{cof}(\nabla \varphi) \mathbf{n}_0\} \cdot \theta \, dS \quad .$$

Preuve : La démonstration de ce théorème dans un cadre tridimensionnel est présentée dans [Cia88] page 84. Nous exhibons ici une preuve dans le cadre bidimensionnel. Nous supposons $\pi = -1$. Soient $\varphi, \theta : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ assez régulières. Dans le cadre de la preuve, nous notons $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, et $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}$ les différentes composantes. Alors en développant la fonctionnelle \mathcal{H} bilinéaire suivante, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varphi, \theta) &= \int_{\Gamma} \{\text{cof}(\nabla \varphi) \mathbf{n}_0\} \cdot \theta = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \partial_2 \varphi_2 n_1 - \partial_1 \varphi_2 n_2 \\ -\partial_2 \varphi_1 n_1 + \partial_1 \varphi_1 n_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \int_{\Gamma} [(\theta_1 \partial_2 \varphi_2 - \theta_2 \partial_2 \varphi_1) n_1 + (\theta_2 \partial_1 \varphi_1 - \theta_1 \partial_1 \varphi_2) n_2] \\ &= \int_{\Omega} [\partial_1 (\theta_1 \partial_2 \varphi_2 - \theta_2 \partial_2 \varphi_1) + \partial_2 (\theta_2 \partial_1 \varphi_1 - \theta_1 \partial_1 \varphi_2)] \quad \text{par la formule de GREEN usuelle,} \\ &= \int_{\Omega} (\partial_1 \theta_1 \partial_2 \varphi_2 - \partial_1 \theta_2 \partial_2 \varphi_1 + \partial_2 \theta_2 \partial_1 \varphi_1 - \partial_2 \theta_1 \partial_1 \varphi_2) . \end{aligned}$$

Nous en déduisons que \mathcal{H} est symétrique et que :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\varphi) &= \frac{1}{2}\mathcal{H}(\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} (\partial_1\varphi_1\partial_2\varphi_2 - \partial_1\varphi_2\partial_2\varphi_1) = \int_{\Omega} \det(\nabla\varphi), \\ D\mathcal{G}(\varphi)\theta &= \frac{1}{2}(\mathcal{H}(\theta, \varphi) + \mathcal{H}(\varphi, \theta)) = \mathcal{H}(\varphi, \theta).\end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré dans le cas $n = 2$. \square

Dans notre cas ici, $n = 2$, $\pi = -1$, $\Gamma = \Gamma(0)$, $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_0$ et $\psi = \chi$. Ainsi d'après (1.15), nous avons :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{G}(\chi)) = D\mathcal{G}(\chi) \frac{\partial\chi}{\partial t} = \int_{\Gamma(0)} \frac{\partial\chi}{\partial t} \Big|_{\Gamma(0)} \cdot \text{cof}(\nabla\chi)\mathbf{n}_0 = 0 \quad \text{dans } (0, T).$$

Nous en déduisons que :

$$\mathcal{G}(\chi)(t) = \mathcal{G}(\chi)(t = 0) \quad \text{dans } (0, T). \quad (1.16)$$

Or, nous avons dans Ω :

$$\det(\nabla\chi) = \det(R\nabla(\vec{G}\xi + \mathbf{d})) = \det(\nabla(\xi + \mathbf{d}))$$

car d'une part $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et d'autre part $\det(R) \equiv 1$. Nous en déduisons de par les expressions de \mathcal{G} que la condition de compatibilité s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \mathcal{G}(\chi) = \mathcal{G}(\tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma(0)} \tilde{\chi} \cdot \text{cof}(\nabla\tilde{\chi})\mathbf{n}_0 = \mathcal{G}(\xi + \mathbf{d}_0) & \text{dans } (0, T), \\ \text{où } \tilde{\chi} = \xi + \mathbf{d} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.17)$$

avec $\mathcal{G}(\xi + \mathbf{d}_0) = \mathcal{G}(\tilde{\chi})(t = 0) = \int_{\Omega} \det(I_2 + \nabla\mathbf{d}_0)$ une constante.

Remarque 15. La condition (1.16) exprime la conservation au cours du temps de la surface du domaine structure. D'après l'expression (1.17), c'est une contrainte exclusivement sur la perturbation élastique. En particulier, nous en déduisons que pour une déformation rigide $\psi = \tau + R\vec{G}\xi$, cette contrainte est automatiquement satisfaite, puisqu'alors $\mathcal{G}(\chi^\psi) = \mathcal{G}(\xi) \equiv |\Omega|$.

1.1.5 Approximation modale pour la perturbation de la déformation structure

Pour des problèmes liés à la régularité des domaines fluide et structure d'une part, et à la régularité des solutions obtenues par la procédure employée pour «résoudre le problème fluide» d'autre part³⁰, nous allons effectuer une approximation de la perturbation de la déformation structure.

La modélisation de la déformation structure que nous avons choisie correspond à un matériau hyperélastique dont nous avons linéarisé les expressions du tenseur des déformations au premier ordre en $\nabla\mathbf{d}$ (cf Chapitre 1 de la Partie I pour la modélisation de la structure, ou encore [GMM02]). Ainsi, les fonctions propres de l'opérateur $\overline{\Sigma}$ de l'élasticité linéarisée forment une base privilégiée pour la décomposition que nous visons.

Par ailleurs, la perturbation \mathbf{d} vérifie en particulier les conditions (1.3). Elle est en particulier orthogonale aux translations infinitésimales et aux rotations infinitésimales, qui forment précisément

³⁰Voir notamment le paragraphe 1.3.1 page 91 pour la stratégie de la démonstration, et le paragraphe 1.3.2 page 93 où les espaces de régularités sont explicités. Nous utilisons ultérieurement une vitesse v_b fluide sur l'interface, de régularité au moins $H^{r/2+1}(0, T; H^\ell(\Gamma))$ avec $\ell > r + 1/2$ et $1 < r < 3/2$. Ceci requière un déplacement de la structure au moins $H^{r/2+2}(0, T; H^k(\Omega_S(0)))$ avec $k > r + 1$. Or, pour obtenir une telle régularité en espace-temps pour la solution de notre modèle structure, il faudrait des forces fluides \mathbf{g} au bord très régulières, du type $H^{r/2+1}(0, T; H^{k+1/2}(\partial\Omega_S(0)))$, et notamment une pression fluide sur le bord $\partial\Omega_S(0)$ dans le même espace. Ceci ne permet pas de «boucler» les procédures découplées fluide et structure pour des problèmes de régularité.

le noyau de $\overline{\Sigma}$. Ceci apporte une seconde justification à l'emploi des fonctions propres de $\overline{\Sigma}$ associées aux valeurs propres non nulles.

À partir de là, nous considérons l'opérateur $\overline{\Sigma}$ de l'élasticité linéarisée avec condition de NEUMANN homogène ; il est autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et possède un inverse borné compact de \mathcal{E}_0 dans \mathcal{E}_0 , et ses fonctions propres ψ_i , $i \in \mathbb{N}$, satisfont :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\overline{\sigma}(\psi_i)) &= \lambda_i \psi_i & \text{dans } \Omega, \\ \overline{\sigma}(\psi_i) \mathbf{n}_0 &= \overline{\mathbf{0}} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où \mathbf{n}_0 désigne la normale extérieure unitaire à Ω ⁽³¹⁾. La famille $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ forme une base de $H^1(\Omega)$ que nous choisissons ici orthonormée dans $L^2(\Omega)$. Nous notons $\psi_{0,1} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \frac{\vec{e}_x}{\|\vec{e}_x\|}$, $\psi_{0,2} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \frac{\vec{e}_y}{\|\vec{e}_y\|}$, et $\psi_{0,3} = \frac{\vec{e}_z \wedge \overline{G\xi}}{\|\overline{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}}$ les fonctions propres associées à la valeur propre triple nulle, et engendrant $\operatorname{Ker}(\overline{\Sigma})$. Par conséquent, nous avons $\mathcal{E}_1 = \langle \psi_i \rangle_{i \in \mathbb{N}^*}$, et nous choisissons d'approcher \mathbf{d} par une combinaison

d'un nombre fini $N \in \mathbb{N}^*$ de modes propres $\mathbf{d}_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \psi_j$ avec pour coefficients α_j des fonctions régulières qui ne dépendent que du temps. Nous rappelons par ailleurs que la suite des valeurs propres est croissante et tend vers l'infini, et que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i > 0$.

Nous substituons cette expression dans (1.4), et nous choisissons successivement $\mathbf{b} = \psi_i$, pour $1 \leq i \leq N$, dans la dernière équation. Nous obtenons alors le système suivant de dimension finie :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\tau}_N = \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} (J_N \dot{\theta}_N) + \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_N = \int_{\Omega} R_{\theta_N}(\overline{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta_N}(\overline{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g} \\ 1 \leq i \leq N, \quad \rho_S \left(\int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \psi_i + 2\dot{\theta}_N \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N \wedge \psi_i + \ddot{\theta}_N \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \psi_i - (\dot{\theta}_N)^2 \int_{\Omega} (\overline{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \psi_i \right) \\ \quad + \int_{\Omega} \overline{\sigma}(\mathbf{d}_N) : \nabla \psi_i = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta_N} \psi_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta_N} \psi_i \end{array} \right. \quad (1.18)$$

où l'indice N caractérise la dépendance des composantes $\tau_N, \theta_N, \mathbf{d}_N$ de la déformation ϕ_N par rapport au nombre fini $N \in \mathbb{N}^*$ de modes propres. Ce système en dimension finie est complété par des conditions initiales :

$$\begin{cases} \tau_N(0) = \tau_0 = -G, & \theta_N(0) = 0, & \mathbf{d}_N(\cdot, t=0) = \mathbf{d}_{N0} = 0, \\ \dot{\tau}_N(0) = \tau_1, & \dot{\theta}_N(0) = \theta_1, & \partial_t \mathbf{d}_N(\cdot, t=0) = \mathbf{d}_{N1}, \end{cases} \quad (1.19)$$

où \mathbf{d}_{N0} (respectivement \mathbf{d}_{N1}) est la projection L^2 de \mathbf{d}_0 (resp. \mathbf{d}_1) sur l'espace $\mathcal{E}^N = \langle \psi_i ; 1 \leq i \leq N \rangle$.

1.2 Résultat principal

Théorème 6. Soient les indices de régularité $1 < r < 3/2$ et $\ell \geq r + 3/2$, et le temps $T^\# > 0$.

Soient les forces $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T^\#; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{F} \in C^\infty([0, T^\#] \times \Omega_F(0))$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ tel qu'il existe un indice :

$$\mathbf{i}_0 \in \{1, \dots, N\} \quad \text{tel que} \quad \int_{\Gamma(0)} \psi_{\mathbf{i}_0} \cdot \mathbf{n}_0 \neq 0.$$

³¹Nous précisons qu'à l'interface entre Ω et $\Omega_F(0)$, nous avons $\mathbf{n}_0 = -\mathbf{n}_{t=0} = -\mathbf{n}_0$. Le vecteur \mathbf{n}_0 , avec l'indice zéro en gras, est la normale extérieure au domaine Ω de référence structure ; tandis que le vecteur \mathbf{n}_0 , avec l'indice zéro non en gras, est la normale extérieure au domaine $\Omega_F(0)$ fluide (tout comme \mathbf{n}_t est la normale extérieure au domaine $\Omega_F(t)$ à l'instant t).

Soient la donnée initiale fluide $\mathbf{u}_0 \in H^{r+1}(\Omega_F(0))$ telle que $\operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = 0$ dans $\Omega_F(0)$, $\mathbf{u}_0 = 0$ sur Γ_0 , et soient les données initiales $\tau_1 \in \mathbb{R}^2$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{d}_1 \in H^\ell(\Omega)$ et \mathbf{d}_{N1} sa projection L^2 sur \mathcal{E}^N vérifiant $\int_{\partial\Omega} \mathbf{d}_{N1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$, telles que la condition de compatibilité suivante soit satisfaite : $\mathbf{u}_0|_{\Gamma(0)} = \tau_1 + \theta_1 \vec{e}_z \wedge \vec{G\xi} + \mathbf{d}_{N1}|_{\Gamma(0)}$.

Si nous supposons que la densité ρ_S de la structure est suffisamment grande, alors il existe un temps :

$$T = T(\Omega, \mathbf{u}_0, \tau_1, \theta_1, \mathbf{d}_{N1}, \mathbf{F}, \mathbf{f}) \quad \text{vérifiant} \quad 0 < T \leq T^\#,$$

et il existe³² :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in K_T^{r+2}(\Omega_F(0)), \quad \nabla q \in K_T^r(\Omega_F(0)), \\ \tau &\in H^{r+2}(0, T), \quad \theta \in H^{r+2}(0, T), \quad \alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq N} \in H^{r+2}(0, T), \end{aligned}$$

tels que (\mathbf{v}, q) et (τ, θ, α) sont solutions du problème fluide-structure instationnaire (1.6)-(1.13)-(1.18)-(1.19).

1.3 Existence de solution au problème couplé

1.3.1 Stratégie de la démonstration. Présentation des problèmes (\mathcal{F}) et (\mathcal{S})

Pour montrer l'existence d'une solution au problème fluide-structure (1.6)-(1.13)-(1.18)-(1.19), nous adoptons une stratégie de découplage que nous allons ici détailler (sans préciser pour l'instant les espaces de régularité).

Soit une application v_b donnée sur $\Gamma(0) \times (0, T)$. Nous considérons le problème (\mathcal{F}) suivant :

$$(\mathcal{F}) : \text{ Pour } v_b \text{ donnée, trouver une solution } (\mathbf{v}, q) \text{ au système :}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F \partial_t \mathbf{v} - \nu (\nabla_{\mathbf{v}})^2 \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} q = \mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{v}} & \text{dans } \Omega_F(0) \times (0, T) \\ \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{dans } \Omega_F(0) \times (0, T) \\ \mathbf{v}(\cdot, t=0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega_F(0) \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \mathbf{v} = v_b & \text{sur } \Gamma(0) \times (0, T). \end{array} \right.$$

D'autre part, soient $h_{0,1}, h_{0,2}, h_1, \dots, h_N$ des applications définies sur $(0, T)$. Nous considérons le problème (\mathcal{S}) suivant :

$$(\mathcal{S}) : \text{ Pour } h_{0,1}, h_{0,2}, h_1, \dots, h_N \text{ données, trouver une solution } (\tau_N, \theta_N, \mathbf{d}_N, c_N) \text{ au système :}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \ddot{\tau}_N = h_{0,1} & \text{dans } (0, T) \\ J_0 \ddot{\theta}_N = h_{0,2} & \text{dans } (0, T) \\ 1 \leq i \leq N, \rho_S \int_{\Omega} \partial_{tt} \mathbf{d}_N \cdot \psi_i + \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{d}_N) : \nabla \psi_i - c_N(t) \int_{\partial\Omega} \operatorname{cof}(\nabla \tilde{\chi}_N) \mathbf{n}_0 \cdot \psi_i = h_i & \text{dans } (0, T) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales (1.19),

tel que $\mathbf{d}_N(\cdot, t)$ reste dans \mathbf{Y}_1 pour presque tout $t \in (0, T)$, et sous la contrainte :

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \tilde{\chi}_N \cdot \operatorname{cof}(\nabla \tilde{\chi}_N) = \mathcal{G}(\xi + \mathbf{d}_{N0}), \quad (1.20)$$

où $\tilde{\chi}_N = \xi + \mathbf{d}_N$, et $J_0 = \rho_S \| \vec{G\xi} \|_{L^2(\Omega)}^2$. L'application $c_N(\cdot)$ est le multiplicateur de LAGRANGE associé à la contrainte (1.20). Cette contrainte provient de l'incompressibilité du fluide à laquelle est associé

³²Voir le paragraphe 1.3.2 page 93 pour la définition des espaces du type $K_T^r(\Omega_F(0))$.

par ailleurs le multiplicateur de LAGRANGE q qu'est la pression (dans le domaine fluide). Nous en déduisons que $c_N(\cdot)$ lui-même est assimilable à une pression. De plus, comme (1.20) est une intégrale en espace, le multiplicateur $c_N(\cdot)$ ne dépend que du temps.

Pour les besoins de l'explication des étapes de la démonstration, nous supposons dans ce paragraphe que (\mathcal{F}) et (\mathcal{S}) possèdent des solutions. Soient maintenant $\tau_N, \theta_N, \mathbf{d}_N$ donnés. Nous posons $v_b = \dot{\tau}_N + \partial_t[R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N)]$. La résolution du problème (\mathcal{F}) lui associe un couple (\mathbf{v}, q) . À partir de là, nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [qI_2 - \nu(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T)]\text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ h_{0,1} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}, \\ h_{0,2} &= \int_{\Omega} R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g} \\ &\quad - \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N - \frac{d}{dt}((J_N(t) - J_0)\dot{\theta}_N), \end{aligned} \quad (1.21)$$

et pour $1 \leq i \leq N$:

$$\begin{aligned} h_i &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta_N}\psi_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta_N}\psi_i \\ &\quad - \rho_S \left(2\dot{\theta}_N \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N \wedge \psi_i + \ddot{\theta}_N \int_{\Omega} \mathbf{d}_N \wedge \psi_i - (\dot{\theta}_N)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \cdot \psi_i \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nous pouvons résoudre le problème (\mathcal{S}) avec ces données et obtenir ainsi un triplet $(\bar{\tau}_N, \bar{\theta}_N, \bar{\mathbf{d}}_N)$. C'est sur une application du type $S : (\tau_N, \theta_N, \mathbf{d}_N) \mapsto (\bar{\tau}_N, \bar{\theta}_N, \bar{\mathbf{d}}_N)$ que nous allons effectuer une procédure de point fixe³³ et ainsi obtenir une solution au problème fluide-structure (1.6)-(1.13)-(1.18)-(1.19).

Remarque 16. Dans la procédure découplée de résolution du problème (\mathcal{S}) , les efforts fluide s'écrivent $[(q + c_N)I_2 - \nu(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T)]\text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0$ sur $\partial\Omega$. Il est intéressant de noter sur quelles composantes de la déformation le multiplicateur de LAGRANGE c_N , assimilé à une pression, a un effet. D'une part nous avons :

$$\int_{\Gamma(0)} \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 = \int_{\Gamma(t)} \mathbf{n}_t = \vec{0}.$$

D'autre part, et grâce à cette égalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(0)} R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \wedge \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 &= \int_{\Gamma(0)} (\tau_N + R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N)) \wedge \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 \\ &= \int_{\Gamma(0)} (\xi + \int_0^t \partial_t \phi_N) \wedge \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 \quad \text{car } \phi_N = \tau_N + R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \text{ et } \phi_N(\xi, t=0) = \xi, \\ &= \int_{\Gamma(0)} \chi_{\mathbf{v}} \wedge \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 \quad \text{par définition de } \chi_{\mathbf{v}}, \\ &= \int_{\Gamma(t)} \mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{n}_t = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, comme c_N ne dépend que du temps, nous avons :

$$\int_{\partial\Omega} c_N \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 = \vec{0} \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} c_N R_{\theta_N}(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N) \wedge \text{cof}(\nabla\chi_{\mathbf{v}})\mathbf{n}_0 = 0.$$

Nous en déduisons que c_N n'a aucun rôle dans les efforts fluides appliqués à la translation τ_N et à l'angle de la rotation θ_N . Nous verrons par ailleurs dans la résolution du problème (\mathcal{S}) que c_N a un effet sur au moins un coefficient α_i (et de là sur tous).

³³Pour que la procédure soit licite, il faudra en particulier montrer que le temps d'existence des solutions du problème (\mathcal{F}) est indépendant de certains paramètres.

1.3.2 Existence de solution pour le problème (\mathcal{F})

L'objet de ce paragraphe est de montrer l'existence de solution au problème (\mathcal{F}) . Le résultat est présenté par GRANDMONT et MADAY dans [GM00a]. Nous ne faisons que reprendre la démonstration issue de cet article en détaillant les points nécessaires pour la partie de recouplage.

Hypothèses. Notations

Dans cette partie concernant uniquement l'existence de solution au problème (\mathcal{F}) , nous notons $\Omega = \Omega_F(0)$ et $\Gamma = \Gamma(0)$ pour alléger les notations.

Soient $T > 0$, $r > 0$ et $\ell > r + 1/2$. Nous définissons les espaces fonctionnels suivants : d'une part :

$$\begin{aligned} V_T^{r,\ell} &= H^{r/2+1}(0, T; H^\ell(\Gamma)), \\ K_T^r(\Omega) &= H^{r/2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^r(\Omega)). \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_T^{r,\ell} &= \left\{ (w, q); \quad w \in K_T^{r+2}(\Omega), \nabla q \in K_T^r(\Omega), \int_{\Omega} q = 0, w|_{\Gamma} \in V_T^{r,\ell}, w|_{\Gamma_0} = 0 \right\}, \\ \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell} &= \left\{ (w, q) \in \mathbf{X}_T^{r,\ell}; \quad w(0) = \partial_t w(0) = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad q(0) = 0 \right\}, \\ \hat{K}_T^r(\Omega) &= L^2(0, T; H^{r+1}(\Omega)) \cap H^{1+r/2}(0, T; (H^1(\Omega))'), \\ \mathbf{Y}_T^{r,\ell} &= \left\{ (\mathbf{g}, \rho, v_b, \mathbf{u}_0); \quad \mathbf{g} \in K_T^r(\Omega), \rho \in \hat{K}_T^r(\Omega), v_b \in V_T^{r,\ell}, \mathbf{u}_0 \in H^{r+1}(\Omega), \right. \\ &\quad \left. \int_{\Gamma} v_b \cdot \mathbf{n}_0 = \int_{\Omega} \rho, \operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = \rho(t=0)_{\text{dans } \Omega}, \mathbf{u}_0|_{\Gamma_0} = 0, \mathbf{u}_0|_{\Gamma} = v_b(t=0) \right\}, \\ \mathbf{Y}_{T,0}^{r,\ell} &= \left\{ (\mathbf{g}, \rho, 0, 0) \in \mathbf{Y}_T^{r,\ell}; \quad \mathbf{g}(0) = 0, \quad \rho(t=0) = \partial_t \rho(t=0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

À partir de maintenant, nous considérons un temps $T_0 > 0$ et des indices $1 < r < 3/2$ et $\ell \geq r + 3/2$. Soit $v_b \in V_{T_0}^{r,\ell}$ satisfaisant la condition $\int_{\Gamma} v_b \cdot \operatorname{cof}(\nabla[\xi + \int_0^t v_b]) \mathbf{n}_0 = 0$ pour $t \in (0, T_0)$. Soient enfin $\mathbf{u}_0 \in H^{r+1}(\Omega)$ telle que $\operatorname{div}(\mathbf{u}_0) = 0$ dans Ω , $\mathbf{u}_0 = 0$ sur Γ_0 , $\mathbf{u}_0|_{\Gamma} \in H^\ell(\Gamma)$, et une application \mathbf{F} assez régulière ($C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T_0])$ par exemple).

Existence de solution au problème (\mathcal{F})

Nous énonçons le résultat d'existence suivant (cf [GM00a], Théorème 2) :

Théorème 7. *Sous les hypothèses précédentes, il existe $T_1 = T_1(\Omega, \|\mathbf{u}_0\|_{H^{r+1}(\Omega)}, \mathbf{u}_0|_{\Gamma}, \|v_b\|_{V_{T_0}^{r,\ell}}, \mathbf{F})$, vérifiant $0 < T_1 \leq T_0$, et tel que le problème (\mathcal{F}) possède une solution $\mathbf{v} \in K_{T_1}^{r+2}(\Omega)$, $\nabla q \in K_{T_1}^r(\Omega)$.*

Pour la démonstration complète de ce résultat, nous renvoyons à [GM00a]. Nous n'en présentons ici que le plan, ainsi que les points nécessaires à la compréhension de notre démarche pour le recouplage. La démonstration est composée de trois étapes. La première consiste en la preuve d'existence de solution régulière pour le système de (\mathcal{F}) linéarisé en le couple (\mathbf{v}, q) autour de $(0, 0)$. La deuxième étape porte sur l'estimation des termes non-linéaires. Enfin, la troisième étape utilise un théorème de point fixe pour montrer l'existence d'une solution au problème (\mathcal{F}) .

Pour la suite, nous considérons un temps $0 < T \leq T_0$.

Nous avons alors le lemme suivant (Lemmes 7, 8 et 9 de [GM2000]) sur l'estimation des termes non-linéaires :

Lemme 4. *Soient $1 < r < 3/2$ et $\ell \geq r + 3/2$. Pour $T > 0$ fixé, nous avons les inclusions suivantes : $\forall (\mathbf{w}, q) \in \mathbf{X}_T^{r,\ell}$, $\alpha_1(\mathbf{w}, q) \in K_T^r(\Omega)$ et $\alpha_2(\mathbf{w}) \in \hat{K}_T^r(\Omega)$ d'une part, et $\forall \mathbf{v} \in K_T^{r+2}(\Omega)$, $\mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{v}} \in K_T^r(\Omega)$ d'autre part.*

Par ailleurs, soient $i \in \{1, 2\}$ et $(\mathbf{v}_0^i, p_0) = (\bar{\mathbf{v}}_0 + \underline{\mathbf{v}}_0^i, p_0) \in \mathbf{X}_{T_0}^{r,\ell}$ définis comme précédemment avec v_b^i donnés sur $(0, T_0)$. Nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \forall R > 0, \quad & \exists C_1, C_2, \eta_{12} \quad \text{dépendant uniquement de } R, r, \text{ et } \|(\mathbf{v}_0^i, p_0)\|_{\mathbf{X}_{T_0}^{r,\ell}}; \\ & \exists C_3, C_4, \eta_{34} \quad \text{dépendant uniquement de } R, r, \| \mathbf{v}_0^i \|_{K_{T_0}^{r+2}(\Omega)} \text{ et } \| \mathbf{v}_0^i \|_{V_{T_0}^{r,\ell}}; \\ & \exists C_5, \eta_5 \quad \text{dépendant uniquement de } R, r, \text{ et } \| \mathbf{v}_0^i \|_{K_{T_0}^{r+2}(\Omega)}; \\ \text{telles que } \forall T \leq T_0, \quad & \forall i \in \{1, 2\}, \quad \forall (\mathbf{w}_i, p_i) \in \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell}, \quad \|(\mathbf{w}_i, p_i)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} \leq R, \end{aligned}$$

nous avons d'une part les estimations en normes suivantes :

$$\begin{aligned} \| \alpha_1(\mathbf{w}_i + \mathbf{v}_0^i, p_i + q_0) \|_{K_T^r(\Omega)} & \leq C_1 T^{\eta_{12}}, \\ \| \alpha_2(\mathbf{w}_i + \mathbf{v}_0^i) - \alpha_2(\mathbf{v}_0^i) \|_{\hat{K}_T^r(\Omega)} & \leq C_3 T^{\eta_{34}}, \\ \| \mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{w}_i + \mathbf{v}_0^i} - \mathbf{F}(0) \|_{K_T^r(\Omega)} & \leq C_5 T^{\eta_5}; \end{aligned}$$

et d'autre part les estimations d'applications lipschitziennes suivantes :

$$\begin{aligned} \| \alpha_1(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0^1, p_1 + q_0) - \alpha_1(\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_0^2, p_2 + q_0) \|_{K_T^r(\Omega)} & \leq C_2 T^{\eta_{12}} \|(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0^1, p_1) - (\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_0^2, p_2)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} \\ \| \alpha_2(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0^1) - \alpha_2(\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_0^2) \|_{\hat{K}_T^r(\Omega)} & \leq C_4 T^{\eta_{34}} \left(\|(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0^1) - (\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_0^2)\|_{K_T^{r+2}(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|v_b^1 - v_b^2\|_{V_T^{r,\ell}} \right), \\ \| \mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0^1} - \mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_0^2} \|_{K_T^r(\Omega)} & \leq C_5 T^{\eta_5} \|(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0^1) - (\mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_0^2)\|_{K_T^{r+2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Étape 3. Soit $(\mathbf{w}_1, p_1) \in \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell}$, nous définissons $(\mathbf{w}_2, p_2) \in \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_2, p_2) = & L^{-1}(\mathbf{F} \circ \chi_{\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0} - \mathbf{F}(0) + \alpha_1(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0, p_1 + q_0), \alpha_2(\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_0) - (\nabla - \nabla_{\mathbf{v}_0})\mathbf{v}_0, 0, 0) \\ & + L^{-1}(-\rho_F \partial_t \underline{\mathbf{v}}_0 + \nu \Delta \underline{\mathbf{v}}_0, -\nabla_{\mathbf{v}_0} \cdot \mathbf{v}_0, 0, 0), \end{aligned}$$

ainsi que l'application $S_1 : (\mathbf{w}_1, p_1) \in \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell} \mapsto (\mathbf{w}_2, p_2) \in \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell}$. Soient $R_1 > 0$ et la boule \mathcal{B}_1 de $\mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell}$ définie par :

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ (\mathbf{w}, q) \in \mathbf{X}_{T,0}^{r,\ell}; \quad \|(\mathbf{w}, q) - L^{-1}(-\rho_F \partial_t \underline{\mathbf{v}}_0 + \nu \Delta \underline{\mathbf{v}}_0, \rho_0, 0, 0)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} \leq R_1 \right\},$$

en ayant noté $\rho_0 = -\operatorname{div}(\mathbf{v}_0) + \operatorname{cof}\left(\int_0^t \nabla \mathbf{v}_0 : \nabla \mathbf{v}_0\right)$. Pour $R_1 > 0$ fixé, il existe un temps $0 < T_1 \leq T_0$ (dépendant continûment de R_1 , $\|\mathbf{u}_0\|_{H^{r+1}(\Omega)}$, $\|v_b\|_{V_T^{r,\ell}}$ et \mathbf{F})³⁶ tel que, pour tout $T \leq T_1$, S_1 est bien définie et, par application du théorème de point fixe de PICARD, possède un point fixe $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q}) \in \mathcal{B}_1$, unique solution de (1.26) dans la boule \mathcal{B}_1 . Ainsi $(\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_0, \tilde{q} + q_0) = (\mathbf{v}, q)$ est solution du problème (\mathcal{F}) dans les espaces *ad hoc* recherchés.

³⁶Il est important que le temps T_1 dépende continûment de la norme $\|v_b\|_{V_T^{r,\ell}}$; ainsi, si l'on considère une boule de $V_T^{r,\ell}$ de rayon M , alors pour tous les v_b de cette boule, il existe un temps $T_M > 0$ uniforme en v_b tel que $T_M < T_1(v_b)$ et que les solutions $(\mathbf{v}, q)_{(v_b)}$ existent sur $(0, T_M)$. Ce point sera utilisé dans la procédure de recouplage.

1.3.3 Existence de solution pour le problème (S) sous contrainte

L'objet de ce paragraphe est de montrer l'existence d'une solution au problème (S) (voir le paragraphe 1.3.1 page 91). Après l'introduction de notations et des hypothèses sous lesquelles nous nous plaçons, nous utilisons le théorème des fonctions implicites pour exploiter la contrainte sur le déplacement et pour découpler les équations entre elles. Enfin nous montrons l'existence d'une solution en temps petit au problème (S).

Hypothèses. Notations

Nous commençons par présenter un lemme.

Lemme 5. *Il existe une infinité dénombrable de modes propres ψ_i , $i \in \mathbb{N}^*$, tels que $\int_{\partial\Omega} \psi_i \cdot \mathbf{n}_0 \neq 0$.*

Preuve : soit R une matrice de rotation du plan d'angle $\theta \neq \pi/2[\pi]$. La définition de \mathcal{E}_1 conduit à la décomposition orthogonale suivante :

$$H^1(\Omega) = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle \oplus \langle \vec{e}_z \wedge \vec{G}\xi \rangle \oplus \mathcal{E}_1 .$$

Or, comme $\int_{\Omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{G}\xi) \cdot (\vec{e}_z \wedge R\vec{G}\xi) = \cos\theta \int_{\Omega} |\vec{G}\xi|^2 \neq 0$, nous pouvons écrire la décomposition équivalente $H^1(\Omega) = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y \rangle \oplus \langle \vec{e}_z \wedge R\vec{G}\xi \rangle \oplus \mathcal{E}_1$. Par ailleurs, $\xi \mapsto R\vec{G}\xi$ est une application de $H^1(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \vec{e}_x \cdot R\vec{G}\xi = \int_{\Omega} \vec{e}_y \cdot R\vec{G}\xi = \int_{\Omega} (\vec{e}_z \wedge R\vec{G}\xi) \cdot R\vec{G}\xi = 0$. Il existe donc un mode propre ψ_i tel que $\int_{\Omega} \psi_i \cdot R\vec{G}\xi \neq 0$. Or :

$$\lambda_i \int_{\Omega} \psi_i \cdot R\vec{G}\xi = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\sigma}(\psi_i)) \cdot R\vec{G}\xi = \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\psi_i) : R - \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}(\psi_i) \mathbf{n}_0 \cdot R\vec{G}\xi .$$

De plus, nous avons d'une part $\bar{\sigma}(\psi_i) : R = 2(\lambda + \mu) \cos\theta \operatorname{Tr}(\xi(\psi_i))$ en développant l'expression de $\bar{\sigma}$, et d'autre part $\bar{\sigma}(\psi_i) \mathbf{n}_0 = \vec{0}$. Nous en déduisons, en tenant compte de $\operatorname{Tr}(\xi(\psi_i)) = \operatorname{div}(\psi_i)$, que :

$$\lambda_i \int_{\Omega} \psi_i \cdot R\vec{G}\xi = 2(\lambda + \mu) \cos\theta \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi_i) = -2(\lambda + \mu) \cos\theta \int_{\partial\Omega} \psi_i \cdot \mathbf{n}_0 .$$

Par conséquent, $\int_{\partial\Omega} \psi_i \cdot \mathbf{n}_0 \neq 0$.

Enfin, nous vérifions facilement que la rotation $\xi \mapsto R\vec{G}\xi$ n'est pas une combinaison finie de modes propres (en utilisant par exemple $\bar{\sigma}(R\vec{G}\xi) = 2(\lambda + \mu)(\cos\theta)I_2$ et sa divergence dans Ω ou les conditions de bord sur $\partial\Omega$). Il existe donc un nombre infini dénombrable de modes propres ψ_i de l'élasticité linéarisée tels que $\int_{\partial\Omega} \psi_i \cdot \mathbf{n}_0 \neq 0$. \square

Nous pouvons maintenant présenter les notations et les hypothèses de cette partie. Soient $r \geq 0$, $T_0^* > 0$, et $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ assez grand. Soient $h_{0,1}, h_{0,2}, h_1, \dots, h_N$ des applications de $H^{r/2}(0, T_0^*)$. Nous notons $\psi_{\mathbf{i}_0}$ un mode propre, indicé par $\mathbf{i}_0 \in \{1, \dots, N\}$, associé à une valeur propre non nulle, tel que :

$$\int_{\partial\Omega} \psi_{\mathbf{i}_0} \cdot \mathbf{n}_0 \neq 0 . \tag{1.27}$$

Nous notons \bar{I} l'ensemble des indices entre 1 et N différents de \mathbf{i}_0 , et d'une façon générale $\bar{x} = (x_i)_{i \in \bar{I}}$ les vecteurs de taille $N - 1$. Nous définissons :

$$\begin{aligned} \gamma : \{1, \dots, N\} \times \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (j ; \bar{x}, x_{\mathbf{i}_0}) &\longmapsto \int_{\partial\Omega} \left(\operatorname{cof} \left(\nabla \left[\xi + \sum_{k=1}^N x_k \psi_k(\xi) \right] \right) \mathbf{n}_0 \right) \cdot \psi_j \, d\xi . \end{aligned}$$

D'après le Théorème 5 page 88, nous remarquons que :

$$\gamma(j; \bar{x}, x_{\mathbf{i}_0}) = D\mathcal{G}(\tilde{\chi}_N) \cdot \psi_j = \partial_{x_j} [\mathcal{G}(\tilde{\chi}_N)] \quad (1.28)$$

en rappelant que $\tilde{\chi}_N = \xi + \mathbf{d}_N = \xi + \sum_{k=1}^N x_k \psi_k(\xi)$. Pour une certaine fonction Φ que nous précisons ultérieurement, nous notons, pour $1 \leq j \leq N$:

$$\bar{\gamma}(j; \bar{x}) = \gamma(j; \bar{x}, \Phi(\bar{x})) \quad \text{et} \quad \varphi_j(\bar{x}) = \frac{\bar{\gamma}(j; \bar{x})}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; \bar{x})}$$

pour \bar{x} dans le domaine de définition de Φ , et pourvu que $\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; \bar{x}) \neq 0$.

Démonstration

Le problème (\mathcal{S}) que nous considérons peut être réécrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} m\ddot{\tau}_N = h_{0,1} & \text{dans } (0, T_0^*) \\ J_0\ddot{\theta}_N = h_{0,2} & \text{dans } (0, T_0^*) \\ 1 \leq i \leq N, \quad [E_i]: \quad \rho S\ddot{\alpha}_i + \lambda_i\alpha_i - c_N\gamma(i; \bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0}) = h_i & \text{dans } (0, T_0^*) \\ \mathcal{G}(\tilde{\chi}_N) = |\Omega| & \text{dans } (0, T_0^*) \end{array} \right. \quad (1.29)$$

en ayant utilisé $\mathbf{d}_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i$ et tenu compte des propriétés d'orthonormalité des fonctions propres ψ_i .

Ce système est complété par les conditions initiales présentées en (1.19) qui se traduisent en particulier sur les coefficients de la perturbation par $\alpha_i(0) = \int_{\Omega} \mathbf{d}_{N0} \cdot \psi_i = 0$ et $\dot{\alpha}_i(0) = \int_{\Omega} \mathbf{d}_{N1} \cdot \psi_i$.

L'EDO en τ_N (resp. θ_N) est linéaire et découplée du reste du système; nous en déduisons l'unique solution $\tau_N \in H^{r/2+2}(0, T_0^*)$ (resp. $\theta_N \in H^{r/2+2}(0, T_0^*)$). Nous rappelons que $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et que $H^{r/2+2}(0, T_0^*)$ est une algèbre. Alors, en développant les coefficients $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en séries entières (normalement convergentes), nous obtenons que $R \in H^{r/2+2}(0, T_0^*)$.

Nous nous intéressons maintenant au reste du système, dont nous découpons l'étude en plusieurs étapes.

Étape 1. Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites pour exploiter la condition de contrainte. Nous définissons pour cela la fonctionnelle :

$$f : [L^\infty(0, T_0^*)]^{N-1} \times L^\infty(0, T_0^*) \longrightarrow L^\infty(0, T_0^*) \\ (\bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0}) \longmapsto \mathcal{G}(\tilde{\chi}_N) - |\Omega|,$$

et nous nous plaçons dans un ouvert \mathcal{U} de $[L^\infty(0, T_0^*)]^N$ que nous précisons par la suite. Nous avons $f(0, 0) = 0$ puisque $\mathcal{G}(\xi) = |\Omega|$. De plus, en appliquant le Théorème 5, nous avons d'après (1.28) :

$$\forall 1 \leq j \leq N, \quad \partial_{\alpha_j} f(\bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0}) = \gamma(j; \bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0}).$$

Or $\gamma(\mathbf{i}_0; 0, 0) = \int_{\partial\Omega} \psi_{\mathbf{i}_0} \cdot \mathbf{n}_0 \neq 0$ par hypothèse. Par le théorème des fonctions implicites (cf [Kav93] page 55 par exemple), il s'en suit qu'il existe un voisinage connexe $\underline{\mathcal{U}}$ de 0 dans $[L^\infty(0, T_0^*)]^{N-1}$ et une

unique application $\Phi \in C^1(\underline{\mathcal{U}}; L^\infty(0, T_0^*))$ tels que $\Phi(0) = 0$ et $\forall \bar{\alpha} \in \underline{\mathcal{U}}, f(\bar{\alpha}, \Phi(\bar{\alpha})) = 0$. De plus, si $\bar{\alpha} \in \underline{\mathcal{U}}$ et $f(\bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0}) = 0$, alors $\alpha_{\mathbf{i}_0} = \Phi(\bar{\alpha})$. La différentielle $D\Phi$ est donnée par :

$$D\Phi(\bar{\alpha}) = - \left(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0}} f(\bar{\alpha}, \Phi(\bar{\alpha})) \right)^{-1} \circ (\partial_{\bar{\alpha}} f(\bar{\alpha}, \Phi(\bar{\alpha}))) = - \left(\frac{\bar{\gamma}(i; \bar{\alpha})}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; \bar{\alpha})} \right)_{i \in \bar{I}} = - (\varphi_i(\bar{\alpha}))_{i \in \bar{I}} \quad (1.30)$$

avec les notations introduites auparavant. En particulier :

$$\forall \bar{\alpha} \in \underline{\mathcal{U}}, \quad \gamma(\mathbf{i}_0; \bar{\alpha}, \Phi(\bar{\alpha})) \neq 0.$$

Puisque f est polynomiale (quadratique) en les α_i , nous avons que $D\Phi$ est une fraction rationnelle définie et de classe C^∞ sur $\underline{\mathcal{U}}$. Soit alors $\underline{B} = \underline{B}_{T_0^*}$ une boule incluse dans $\underline{\mathcal{U}}$ et soit $M_{\underline{B}}$ un majorant de Φ sur \underline{B} . Nous pouvons maintenant préciser le voisinage $\mathcal{U} = \underline{B} \times B(0, M_{\underline{B}})$ dans lequel nous avons appliqué le théorème des fonctions implicites, où $B(0, M_{\underline{B}})$ est la boule de $L^\infty(0, T_0^*)$ centrée en 0 et de rayon $M_{\underline{B}}$. Quitte à restreindre encore ce voisinage, on peut supposer que pour $\eta > 0$ fixé, on a :

$$\forall \bar{\alpha} \in \underline{B}, \quad \mathbf{b} = \sum_{i \in \bar{I}} \alpha_i \psi_i + \Phi(\bar{\alpha}) \psi_{\mathbf{i}_0} \in \mathbf{Y}_0^\eta.$$

Étape 2. À partir de l'équation $[E_{\mathbf{i}_0}]$ du système (1.29) associée au coefficient $\alpha_{\mathbf{i}_0}$, nous obtenons l'expression du multiplicateur de LAGRANGE :

$$c_N(t) = \frac{\rho_S \ddot{\alpha}_{\mathbf{i}_0}(t) + \lambda_{\mathbf{i}_0} \alpha_{\mathbf{i}_0}(t) - h_{\mathbf{i}_0}(t)}{\gamma(\mathbf{i}_0; \bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0})}. \quad (1.31)$$

Puisque $\alpha_{\mathbf{i}_0} = \Phi(\bar{\alpha})$, nous avons $\ddot{\alpha}_{\mathbf{i}_0} = (D\Phi(\bar{\alpha})(\bar{\alpha}'))' = D\Phi(\bar{\alpha})(\bar{\alpha}'') + D^2\Phi(\bar{\alpha}')^2$, et le multiplicateur c_N peut être réécrit uniquement en fonction de $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'$ et $\bar{\alpha}''$:

$$c_N = \frac{\rho_S D\Phi(\bar{\alpha})(\bar{\alpha}'') + \rho_S D^2\Phi(\bar{\alpha}')^2 + \lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi(\bar{\alpha}) - h_{\mathbf{i}_0}}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; \bar{\alpha})}.$$

En réinjectant cette expression dans les équations $[E_i]$ pour $i \in \bar{I}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall i \in \bar{I}, \quad \rho_S \ddot{\alpha}_i + \lambda_i \alpha_i - h_i &= c_N \gamma(i; \bar{\alpha}, \alpha_{\mathbf{i}_0}) = c_N \bar{\gamma}(i; \bar{\alpha}) \\ &= (\rho_S D\Phi(\bar{\alpha})\bar{\alpha}'' + \rho_S D^2\Phi(\bar{\alpha}')^2 + \lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi(\bar{\alpha}) - h_{\mathbf{i}_0}) \varphi_i(\bar{\alpha}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous avons en particulier :

$$D\Phi(\bar{\alpha}) \cdot \bar{\alpha}'' = \sum_{j \in \bar{I}} \partial_{\alpha_j} \Phi(\bar{\alpha}) \ddot{\alpha}_j = - \sum_{j \in \bar{I}} \varphi_j(\bar{\alpha}) \ddot{\alpha}_j.$$

Nous définissons par ailleurs la matrice \overline{M} par : $\forall i, j \in \bar{I}, \overline{M}_{ij}(\bar{\alpha}) = \delta_{ij} + \varphi_i(\bar{\alpha}) \varphi_j(\bar{\alpha})$; et les vecteurs $\overline{H} = (h_i)_{i \in \bar{I}}$, \overline{D} et \overline{K} suivant :

$$\forall i \in \bar{I}, \quad \overline{D}_i(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}') = \varphi_i(\bar{\alpha}) D^2\Phi(\bar{\alpha})(\bar{\alpha}')^2, \quad \overline{K}_i(\bar{\alpha}) = \varphi_i(\bar{\alpha}) (\lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi(\bar{\alpha}) - h_{\mathbf{i}_0}) - \lambda_i \alpha_i.$$

Les applications \overline{M} , \overline{D} et \overline{K} sont de classe C^∞ sur $\underline{\mathcal{U}}$ (car Φ l'est). Sous forme vectorielle, le système (1.32) s'écrit donc :

$$\rho_S \overline{M}(\bar{\alpha}) \bar{\alpha}'' = \rho_S \overline{D}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}') + \overline{H} + \overline{K}(\bar{\alpha}). \quad (1.33)$$

Nous allons maintenant montrer que la matrice \overline{M} est inversible pour tout $\overline{\alpha} \in \underline{\mathcal{U}}$. De l'expression de \overline{M} , nous déduisons que $\overline{M} - I_{N-1}$ est une matrice de rang 1, et donc que 1 est valeur propre d'ordre $N - 2$ de la matrice \overline{M} . Sa trace :

$$\text{Tr}(\overline{M}(\overline{\alpha})) = (N - 1) + \sum_{k \in \overline{I}}^N (\varphi_k(\overline{\alpha}))^2$$

nous donne sa dernière valeur propre, qui est $1 + \sum_{k \in \overline{I}}^N (\varphi_k(\overline{\alpha}))^2$, et qui est aussi finalement égale au déterminant strictement positif de $\overline{M}(\overline{\alpha})$. Nous en déduisons que $\overline{M}(\overline{\alpha})$ est inversible, et, à partir de (1.33), nous pouvons écrire :

$$\overline{\alpha}'' = F(t, \overline{\alpha}, \overline{\alpha}') = [\overline{M}(\overline{\alpha})]^{-1} \overline{D}(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}') + \frac{1}{\rho_S} [\overline{M}(\overline{\alpha})]^{-1} (\overline{H} + \overline{K}(\overline{\alpha})) . \quad (1.34)$$

Le champ de vecteurs F est C^∞ en ses variables d'espace (comme composée de fonctions C^∞) et est mesurable et borné en sa variable de temps. Par le théorème de CARATHÉODORY (cf [CL55]), il existe une solution locale maximale $\overline{\alpha}$ dans un intervalle $(0, T_1^*)$ avec $0 < T_1^* \leq T_0^*$, pour les données initiales $\overline{\alpha}(0) = 0$ et $\overline{\alpha}'(0) = (\dot{\alpha}_i(0))_{i \in \overline{I}}$. De par le champ F et l'équation (1.34), nous en déduisons que $\overline{\alpha}'' \in L^\infty(0, T_1^*)$ et ainsi que $\overline{\alpha} \in W^{2, \infty}(0, T_1^*)$.

Étape 3. Nous nous intéressons maintenant au temps d'existence de cette solution. Si $T_1^* < T_0^*$, alors nécessairement $\|\overline{\alpha}(t)\|_{L^\infty(0,t)} \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow T_1^*$ pour $t < T_1^*$. C'est pourquoi, si nous montrons que $\|\overline{\alpha}(t)\|_{L^\infty(0,t)}$ est borné³⁷ indépendamment de T_1^* , alors $T_1^* = T_0^*$ et $\overline{\alpha}$ est une solution globale en temps. Pour montrer cela, nous reprenons les équations en les coefficients de la perturbation issues du système (1.29) :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq N, & [E_i] : \quad \rho_S \ddot{\alpha}_i + \lambda_i \alpha_i = h_i + c_N \partial_{\alpha_i} [\mathcal{G}(\tilde{\chi}_N)] \\ & \mathcal{G}(\tilde{\chi}_N) = |\Omega| \end{cases}$$

en tenant compte de (1.28). En multipliant $[E_i]$ par $\dot{\alpha}_i$ et en sommant pour $i = 1, \dots, N$ ces équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_S}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N |\dot{\alpha}_i|^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{2} |\alpha_i|^2 \right) &= \sum_{i=1}^N h_i \dot{\alpha}_i + c_N \sum_{i=1}^N \partial_{\alpha_i} [\mathcal{G}(\tilde{\chi}_N)] \dot{\alpha}_i \\ &= \sum_{i=1}^N h_i \dot{\alpha}_i + c_N \frac{d}{dt} [\mathcal{G}(\tilde{\chi}_N)] = \sum_{i=1}^N h_i \dot{\alpha}_i, \end{aligned}$$

car $\mathcal{G}(\tilde{\chi}_N) = |\Omega|$ est une constante. Puis nous intégrons en temps sur $(0, t)$ avec $t \in (0, T_1^*)$. Ainsi :

$$\rho_S \sum_{i=1}^N |\dot{\alpha}_i(t)|^2 + \sum_{i=1}^N \lambda_i |\alpha_i(t)|^2 = \rho_S \|\mathbf{d}_{N1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^N h_i \dot{\alpha}_i \quad (1.35)$$

en tenant compte des conditions initiales. Or, nous avons, en notant $H = (h_i)_{1 \leq i \leq N}$ et $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$:

$$\begin{aligned} 2 \|H \cdot \dot{\alpha}\|_{L^1(0,t)} &\leq 2 \|H\|_{L^2(0,t)} \|\dot{\alpha}\|_{L^2(0,t)} \\ &\leq \frac{2T_1^*}{2} \|H\|_{L^2(0,t)}^2 + \frac{\rho_S}{2T_1^*} \|\dot{\alpha}\|_{L^2(0,t)}^2 \quad \text{par YOUNG} \\ &\leq \frac{2T_0^*}{\rho_S} \|H\|_{L^2(0,t)}^2 + \frac{\rho_S}{2} \|\dot{\alpha}\|_{L^\infty(0,T_1^*)}^2 . \end{aligned}$$

³⁷Il s'agit bien de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(0,t)}$: voir pour cela [CL55], ou [GR79] page 162 pour une preuve du même type que celle présentée ici.

De là, nous obtenons dans (1.35) :

$$\rho_S |\dot{\alpha}(t)|_{\mathbb{R}^N}^2 + \sum_{i=1}^N \lambda_i |\alpha_i(t)|^2 \leq \rho_S \| \mathbf{d}_{N1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2T_0^*}{\rho_S} \| H \|_{L^2(0,t)}^2 + \frac{\rho_S}{2} \| \dot{\alpha} \|_{L^\infty(0,T_1^*)}^2.$$

Nous en déduisons³⁸ que :

$$\forall T_1^* \leq T_0^*, \quad \frac{\rho_S}{2} \| \dot{\alpha} \|_{L^\infty(0,T_1^*)}^2 + \lambda_1 \| \alpha \|_{L^\infty(0,T_1^*)}^2 \leq \rho_S \| \mathbf{d}_1 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2T_0^*}{\rho_S} \| H \|_{L^2(0,T_0^*)}^2,$$

et donc que $\bar{\alpha}$, solution de (1.34), est bornée en norme $L^\infty(0,t)$ indépendamment de N pour tout $t \leq T_0^*$. Nous en concluons que $T_1^* = T_0^*$ et ainsi que $\bar{\alpha} \in W^{2,\infty}(0,T_0^*)$.

Étape 4. Nous nous intéressons maintenant à la régularité de la solution $\bar{\alpha}$. D'après les régularités de \bar{M} , \bar{D} et \bar{K} , nous avons $[\bar{M}(\bar{\alpha})]^{-1}(\bar{D}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}') + \bar{K}(\bar{\alpha})/\rho_S) \in W^{1,\infty}(0,T_0^*)$ d'une part, et $[\bar{M}(\bar{\alpha})]^{-1}\bar{H}$ qui possède la régularité minimale « entre $W^{2,\infty}(0,T_0^*)$ et $H^{r/2}(0,T_0^*)$ ». En supposant par exemple $r \leq 2$, comme $W^{2,\infty}(0,T_0^*)$ est un espace multiplicateur de $H^{r/2}(0,T_0^*)$, nous avons alors grâce à (1.34) que $\bar{\alpha}'' \in H^{r/2}(0,T_0^*)$ et $\bar{\alpha} \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$. Par un argument de *bootstrap*, nous obtenons le cas général : pour $r \geq 0$ quelconque, si $H \in H^{r/2}(0,T_0^*)$ alors $\bar{\alpha} \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$ et par conséquent $\alpha_{\mathbf{i}_0}$ aussi. Enfin, l'expression (1.31) du multiplicateur de LAGRANGE permet d'affirmer que $c_N \in H^{r/2}(0,T_0^*)$.

Conclusion Il existe une solution $\tau_N \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$, $\theta_N \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$, $c_N \in H^{r/2}(0,T_0^*)$ et $\alpha_i \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$ pour $i = 1, \dots, N$ au système (1.29) pour les données initiales que nous avons traitées.

Il en résulte la proposition suivante :

Proposition 4. Soient $r \geq 0$, $T_0^* > 0$, et $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Soient $h_{0,1}, h_{0,2}, h_1, \dots, h_N$ des applications de $H^{r/2}(0,T_0^*)$. Soit un mode propre $\psi_{\mathbf{i}_0}$ vérifiant la condition (1.27). Alors il existe une solution $\tau_N \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$, $\theta_N \in H^{r/2+2}(0,T_0^*)$, $c_N \in H^{r/2}(0,T_0^*)$ et $\mathbf{d}_N \in H^{r/2+2}(0,T_0^*; C^\infty(\Omega))$ au problème (S) (voir le paragraphe 1.3.1 page 91), tel que $\mathbf{d}_N(\cdot, t) \in \mathbf{Y}_0$ pour presque tout $t \in (0, T_0^*)$.

De plus, si $h_{0,1}, h_{0,2}, h_1, \dots, h_N$ sont dans $H^{r/2}(0, \infty) \cap L^\infty(0, \infty)$, alors la solution existe sur l'intervalle $[0, T_2^*[$ avec $T_2^* = \sup\{t > 0; \mathbf{d}_N(\cdot, t) \in \mathbf{Y}_0\}$.

1.3.4 Procédure de recouplage

Résultats préliminaires

Nous rappelons des lemmes dont des preuves sont présentées dans [GM00a]; les lettres X, Y et Z désignent ici des espaces de HILBERT.

Lemme 6. Opérateur de prolongement en temps.

- i) Pour $s \geq 0$, il existe un opérateur borné de prolongement de $H^s(0, T; X)$ sur $H^s(0, \infty; X)$.
- ii) Pour $0 \leq s < 7/2$, $s - 1/2$ non entier, il existe un opérateur de prolongement de l'espace :

$$\left\{ v \in H^s(0, T; X); \partial_t^k v(0) = 0 \text{ pour } 0 \leq k < s - 1/2 \right\}$$

sur $H^s(0, \infty; X)$ avec une norme bornée indépendamment du temps T .

³⁸Nous rappelons que $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de réels strictement positifs, et par ailleurs que \mathbf{d}_{N1} est la projection $L^2(\Omega)$ de \mathbf{d}_1 sur \mathcal{E}^N .

Lemme 7. Espaces multiplicateurs.

- i) Nous désignons par $X.Y$ l'espace des produits d'un élément de X par un élément de Y . Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, les injections suivantes sont continues : $1 < r$ et $0 \leq s \leq r$, $H^r(\Omega).H^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$.
 ii) Soit $m : X \times Y \rightarrow Z$ une application bilinéaire continue entre des espaces de HILBERT, alors, pour $s > 1/2$, $v \in H^s(0, T; X)$, et $w \in H^s(0, T; Y)$, on a $m(v, w) \in H^s(0, T; Z)$, et :

$$\| m(v, w) \|_{H^s(0, T; Z)} \leq C \| v \|_{H^s(0, T; X)} \| w \|_{H^s(0, T; Y)},$$

avec C qui dépend du temps. Cette constante peut être rendue indépendante du temps si $s < 7/2$ et si de plus v et w vérifient les conditions $\partial_t^k v(0) = \partial_t^k w(0) = 0$ pour $0 \leq k < s - 1/2$ et $s - 1/2$ non entier.

Lemme 8. Soient $T_0 > 0$ et $0 < T \leq T_0$. Pour $v \in L^2(0, T; X)$, on définit $V \in H^1(0, T; X)$ par :

$$V(t) = \int_0^t v(s) ds \quad .$$

- i) Pour $0 \leq s < 1/2$ et $0 \leq \varepsilon \leq 1$, l'opérateur $v \mapsto V$ est borné de $H^s(0, T; X)$ dans $H^{s+1-\varepsilon}(0, T; X)$ et vérifie :

$$\| V \|_{H^{s+1-\varepsilon}(0, T; X)} \leq C_0 T^\varepsilon \| v \|_{H^s(0, T; X)} \quad ,$$

avec la constante C_0 indépendante de $T \leq T_0$.

- ii) Pour $1/2 < s \leq 1$, si $v(0) = 0$, l'estimation précédente est encore satisfaite.

Démonstration du résultat principal

Nous présentons dans cette partie la preuve de l'existence d'une solution au problème couplé (1.6)-(1.13)-(1.18)-(1.19). Elle s'articule selon le découplage présenté au paragraphe 1.3.1 autour des problèmes (\mathcal{F}) et (\mathcal{S}). Nous découpons la démonstration en cinq étapes.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$, le nombre de modes propres, et $1 < r < 3/2$ et $\ell \geq r + 3/2$ des indices de régularité. Soient $0 < T \leq T^\#$ des temps avec $T^\#$ arbitraire et T que nous préciserons ultérieurement. Soit la fonction $\mathbf{f} \in W^{1, \infty}(0, T^\#; L^2(\Omega))$. Par la suite, nous considérons l'application $\Phi : \underline{B}_{T^\#} \rightarrow B(0, M_B)$ définie au paragraphe 1.3.3. Nous supposons par ailleurs toujours que $\tau_0 = -G$, $\theta_0 = 0$ et $\mathbf{d}_0 \equiv 0$. Dans cette partie de recouplage, nous rappelons que $\Omega = \Omega_S(0)$ et $\partial\Omega = \Gamma(0)$.

Étape 1. Définition de l'élément $(\tau_c, \theta_c, \alpha_c)$ et de la boule \mathcal{B}_2 . Nous définissons l'application :

$$\mathbf{g}_0 = [q_0(0)I_2 - \nu(\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0^T)] \mathbf{n}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où q_0 est la pression obtenue dans le système (1.25). Soient τ_c et θ_c les solutions dans $H^{r/2+2}(0, T^\#)$ des systèmes d'EDO respectifs suivants :

$$\begin{cases} m \ddot{\tau}_c &= \int_\Omega \mathbf{f}(0) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_0 \\ \tau_c(0) &= \tau_0 \\ \dot{\tau}_c(0) &= \tau_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} J_0 \ddot{\theta}_c &= \int_\Omega \overrightarrow{G\xi} \wedge \mathbf{f}(0) + \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{G\xi} \wedge \mathbf{g}_0 - 2\rho_S \theta_1 \int_\Omega \overrightarrow{G\xi} \cdot \mathbf{d}_{N1} \\ \theta_c(0) &= 0 \\ \dot{\theta}_c(0) &= \theta_1. \end{cases} \quad (1.36)$$

Nous définissons $\mathbf{d}_c = \sum_{i=1}^N \alpha_{c,i} \psi_i$ et $\alpha_c = (\alpha_{c,i})_{1 \leq i \leq N}$ comme solution dans $(0, T^\#)$ de :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq N, \quad [E_{c,i}] : \quad \rho_S \ddot{\alpha}_{c,i} + \lambda_i \alpha_{c,i} - c_c \bar{\gamma}(i; 0) = h_i(0) \quad \text{dans } (0, T^\#) \\ \int_{\partial\Omega} \mathbf{d}_c \cdot \mathbf{n}_0 = \sigma \quad \text{dans } (0, T^\#) \\ \mathbf{d}_c(t=0) = 0 \\ \partial_t \mathbf{d}_c(t=0) = \mathbf{d}_{N1} \end{array} \right.$$

où σ est une fonction scalaire qui ne dépend que du temps, régulière à l'origine $t = 0$, et telle que $\sigma(0) = \dot{\sigma}(0) = 0$ et $\ddot{\sigma}(0) = \mathcal{G}(\mathbf{u}_0)$ (nous précisons l'obtention de ces conditions dans la Remarque 17 qui suit). L'application $t \mapsto c_c(t)$ est le multiplicateur de LAGRANGE associé à la contrainte linéaire $\int_{\partial\Omega} \mathbf{d}_c \cdot \mathbf{n}_0 = \sigma$. Cette dernière condition traduit la conservation de la surface $|\Omega|$ au voisinage de $t = 0$. À partir de son expression, en posant $\bar{\alpha}_c = (\alpha_{c,i})_{i \in \bar{I}}$, nous définissons (en rappelant que $\int_{\partial\Omega} \psi_{\mathbf{i}_0} \cdot \mathbf{n}_0 = \bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; 0) \neq 0$) :

$$\Phi_c(\bar{\alpha}_c) = \alpha_{c, \mathbf{i}_0} = \frac{\sigma - \sum_{i \in \bar{I}} \alpha_{c,i} \bar{\gamma}(i; 0)}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; 0)} = \frac{\sigma}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; 0)} - \sum_{i \in \bar{I}} \alpha_{c,i} \varphi_i(0).$$

Nous en déduisons que $D\Phi_c(\bar{\alpha}_c) = -(\varphi_i(0))_{i \in \bar{I}}$ et que $D^2\Phi_c(\bar{\alpha}_c) = 0$. À partir de $[E_{c, \mathbf{i}_0}]$, nous avons par ailleurs :

$$c_c = \frac{\rho_S \ddot{\alpha}_{c, \mathbf{i}_0} + \lambda_{\mathbf{i}_0} \alpha_{c, \mathbf{i}_0} - h_{\mathbf{i}_0}(0)}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; 0)} = \frac{\rho_S D\Phi_c(\bar{\alpha}_c)(\bar{\alpha}_c'') + \lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi_c(\bar{\alpha}_c) - h_{\mathbf{i}_0}(0)}{\bar{\gamma}(\mathbf{i}_0; 0)}.$$

En réinjectant cette expression dans les équations $[E_{c,i}]$ pour $i \in \bar{I}$, nous obtenons :

$$\forall i \in \bar{I}, \quad \rho_S \ddot{\alpha}_{c,i} + \lambda_i \alpha_{c,i} - h_i(0) = c_c \bar{\gamma}(i; 0) = (\rho_S D\Phi_c(\bar{\alpha}_c) \bar{\alpha}_c'' + \lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi_c(\bar{\alpha}_c) - h_{\mathbf{i}_0}(0)) \varphi_i(0).$$

Sous forme vectorielle, ce système s'écrit alors :

$$\rho_S \bar{M}(0) \bar{\alpha}_c'' = \bar{H}(t=0) + \bar{K}_c(\bar{\alpha}_c),$$

avec $\bar{K}_c(\bar{\alpha}_c) = (k_i)_{i \in \bar{I}}$ et $k_i = \varphi_i(0)(\lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi_c(\bar{\alpha}_c) - h_{\mathbf{i}_0}(0))$. Puisque $\bar{M}(0) = I_{N-1}$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}_c'' = (\bar{H}(0) + \bar{K}_c(\bar{\alpha}_c)) / \rho_S \\ \bar{\alpha}_c(0) = 0 \\ \bar{\alpha}_c'(0) = (\int_{\Omega} \mathbf{d}_{N1} \cdot \psi_i)_{i \in \bar{I}}, \end{array} \right.$$

et donc $\bar{\alpha}_c \in H^{r/2+2}(0, T^\#)$.

Remarque 17. Les conditions imposées sur σ se justifient de la manière suivante. Nous demandons $\sigma(0) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{d}_c(t=0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$, et $\dot{\sigma}(0) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{d}_{N1} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ qui est vérifiée par hypothèse sur \mathbf{d}_{N1} . Cette condition provient du fait que $\text{div}(\mathbf{u}_0) = 0$ dans $\Omega_F(t)$ et en particulier en $t = 0$. Enfin, nous imposons une dernière condition de compatibilité à σ en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}(0) &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{d}_c''(t=0) \cdot \mathbf{n}_0 = \int_{\Gamma(0)} \partial_t \mathbf{v}_0|_{t=0} \cdot \mathbf{n}_0 = \int_{\Gamma(0)} \partial_t \bar{\mathbf{v}}_0|_{t=0} \cdot \mathbf{n}_0 \quad \text{car } \partial_t \mathbf{v}_0(0) = 0 \\ &= - \int_{\Omega_F(0)} \nabla \cdot \partial_t \bar{\mathbf{v}}_0|_{t=0} = - \int_{\Omega_F(0)} \partial_t \sigma_0(t=0) \end{aligned}$$

d'après la construction de $\bar{\mathbf{v}}_0$ au système (1.25). Or, $\partial_t \sigma_0(0) = ((\nabla \mathbf{u}_0)^{-T} \nabla) \cdot \mathbf{u}_0 = (\text{cof}(\nabla \mathbf{u}_0) \nabla) \cdot \mathbf{u}_0$ par construction (d'après la discussion précédent le système (1.25)), donc :

$$\ddot{\sigma}(0) = - \int_{\Omega_F(0)} (\text{cof}(\nabla \mathbf{u}_0) \nabla) \cdot \mathbf{u}_0 = \int_{\Gamma(0)} \mathbf{u}_0 \cdot \text{cof}(\nabla \mathbf{u}_0) \mathbf{n}_0 = \mathcal{G}(\mathbf{u}_0)$$

car $\mathbf{u}_0 = 0$ sur Γ_0 , et d'après les notations du Théorème 5 (avec toujours $\pi = -1$).

Étape 2. Définition de l'application S_2 .

- Soit l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{V}_T = \left\{ (\tau, \theta, \bar{\alpha}); \quad \tau, \theta, \bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \bar{I}} \in H^{r/2+2}(0, T), \right. \\ \left. \text{tels que } \tau(0) = \dot{\tau}(0) = 0, \quad \theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0, \quad \text{et } \forall i \in \bar{I}, \alpha_i(0) = \dot{\alpha}_i(0) = 0 \right\}$$

muni de la norme :

$$\| (\tau, \theta, \bar{\alpha}) \|_{\mathcal{V}_T} = \left(\| \tau \|_{H^{r/2+2}(0, T)}^2 + \| \theta \|_{H^{r/2+2}(0, T)}^2 + \sum_{i \in \bar{I}} \| \alpha_i \|_{H^{r/2+2}(0, T)}^2 \right)^{1/2}.$$

Nous définissons la boule \mathcal{B}_2 par :

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ (\tau, \theta, \bar{\alpha}); \quad \tau, \theta, \bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \bar{I}} \in H^{r/2+2}(0, T), \right. \\ \left. \text{tels que } (\tau, \theta, \bar{\alpha}) - (\tau_c, \theta_c, \bar{\alpha}_c) \in \mathcal{V}_T \quad \text{et} \quad \| (\tau, \theta, \bar{\alpha}) - (\tau_c, \theta_c, \bar{\alpha}_c) \|_{\mathcal{V}_T} \leq R_2 \right\},$$

avec $R_2 > 0$ tel que :

$$\| \bar{\alpha}_c \|_{L^\infty(0, T^\#)} + R_2 \leq \text{rayon}(\underline{B})$$

où $\text{rayon}(\underline{B})$ est le rayon de la boule $\underline{B} = \underline{B}_{T^\#}$ introduite au paragraphe 1.3.3. Cette condition requière la petitesse de la quantité suivante :

$$\| \mathbf{d}_{N1} \|_{L^2(\Omega)} + |\theta_1| + \frac{1}{\rho_S} \left(\| \mathbf{f}(0) \|_{L^2(\Omega)} + \| \mathbf{u}_0 \|_{H^{r+1}(\Omega_F(0))} + \| \mathbf{F}(0) \|_{H^r(\Omega_F(0))} \right). \quad (1.37)$$

Nous remarquons que la condition de petitesse sur $\mathbf{f}(0)$, \mathbf{u}_0 , et $\mathbf{F}(0)$ peut être relaxée en prenant ρ_S suffisamment grand.

- Soient maintenant $(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1) \in \mathcal{B}_2$ tel que :

$$\begin{aligned} \tau^1(0) &= \tau_c(0), & \dot{\tau}^1(0) &= \dot{\tau}_c(0), & \ddot{\tau}^1(0) &= \ddot{\tau}_c(0), \\ \theta^1(0) &= \theta_c(0), & \dot{\theta}^1(0) &= \dot{\theta}_c(0), & \ddot{\theta}^1(0) &= \ddot{\theta}_c(0), \\ \bar{\alpha}^1(0) &= \bar{\alpha}_c(0), & \bar{\alpha}^{1'}(0) &= \bar{\alpha}_c'(0), & \bar{\alpha}^{1''}(0) &= \bar{\alpha}_c''(0). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Nous définissons $\alpha_i^1 = \Phi(\bar{\alpha}^1) \in B(0, M_{\underline{B}})$. Nous commençons par prolonger ces éléments sur l'intervalle de temps $(0, T^\#)$. Pour cela, grâce aux conditions initiales (1.38), nous utilisons le Lemme 6-ii). Il existe $\tau^\#$ extension de $\tau^1 - \tau_c$ dans $H^{r/2+2}(0, T^\#)$ telle que :

$$\| \tau^\# \|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} \leq C \| \tau^1 - \tau_c \|_{H^{r/2+2}(0, T)}$$

avec C indépendante de T . De là, comme τ_c existe sur $(0, T^\#)$, $\tau^\# + \tau_c$ est une extension de τ^1 avec :

$$\begin{aligned} \| \tau^\# + \tau_c \|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} &\leq \| \tau_c \|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} + C \| \tau^1 - \tau_c \|_{H^{r/2+2}(0, T)} \\ &\leq \| \tau_c \|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} + C R_2 \\ &\leq R_0 = R_0(T^\#, R_2, \mathbf{u}_0, \tau_1, \theta_1, \mathbf{d}_{N1}, \mathbf{f}(0), \mathbf{F}(0), \Omega) \end{aligned}$$

avec R_0 indépendant de T . Nous notons encore τ^1 ce prolongement. Nous effectuons la même démarche pour θ^1 d'une part, et pour chaque α_i^1 , $i \in \bar{I}$, d'autre part, et nous notons encore θ^1 , resp. α_i^1 , ces prolongements qui vérifient :

$$\| \theta^1 \|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} \leq R_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \bar{I}, \| \alpha_i^1 \|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} \leq R_0.$$

De par la définition de $\alpha_{\mathbf{i}_0}^1 = \Phi(\bar{\alpha}^1)$, nous obtenons directement³⁹ le prolongement et une estimation du même type dans $H^{r/2+2}(0, T^\#)$.

- Nous définissons maintenant une nouvelle vitesse au bord $\Gamma(0)$ par :

$$v_b(\xi, t) = \dot{\tau}^1 + \partial_t[R^1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^1)] \in H^{r/2+1}(0, T^\#; C^\infty(\Gamma(0))),$$

grâce à la propriété d'algèbre de cet espace, et en ayant noté $R^1 = R_{\theta^1}$ et $\mathbf{d}_N^1 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^1 \psi_i$. En particulier, $v_b \in V_{T^\#}^{r,k}$ pour tout $k \in \mathbb{R}^+$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|v_b\|_{V_{T^\#}^{r,\ell}} &\leq \|\tau^1\|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} + \|R^1(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^1)\|_{H^{r/2+1}(0, T^\#; H^\ell(\Gamma(0)))} \\ &\leq \|\tau^1\|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} + C\|\theta^1\|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} \left(1 + \|\bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)} + \|\Phi(\bar{\alpha}^1)\|_{H^{r/2+2}(0, T^\#)}\right) \\ &\leq C = C(R_0, (\psi_i)_{1 \leq i \leq N}) \end{aligned}$$

grâce aux estimations précédemment obtenues sur les prolongements de τ^1 , θ^1 et $\alpha^1 = (\alpha_i^1)_{1 \leq i \leq N}$.

- Par la procédure de résolution du problème (\mathcal{F}) , nous associons maintenant à v_b le couple $(\mathbf{v}, q) = (\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_0^b, \tilde{q} + q_0)$. Nous notons par un exposant b les éléments qui dépendent de v_b , comme \mathbf{v}_0^b et S_1^b . Le couple $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q})$ est le point fixe de l'application S_1^b associée à v_b , défini sur $(0, T_1^b)$ avec $T_1^b \leq T^\#$ et T_1^b dépendant de $R_1, T^\#, \|v_b\|_{V_{T^\#}^{r,\ell}}$, et $\|\mathbf{u}_0\|_{H^{r+1}(\Omega_F(0))}$. D'autre part, nous rappelons que (\mathbf{v}_0^b, q_0) est le couple qui permet de relever la donnée initiale \mathbf{u}_0 et la vitesse au bord v_b (cf paragraphe 1.3.2). Toutefois T_1^b peut être pris de façon homogène par rapport à toutes les applications S_1^b . Comme T_1^b dépend continûment de $\|v_b\|_{V_{T^\#}^{r,\ell}}$, et qu'ici, puisque $(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1) \in \mathcal{B}_2$, nous avons montré que v_b est borné par une constante dépendant uniquement de R_0 (et indépendante de T), alors il existe un temps uniforme en v_b , noté T_1 , tel que $0 < T_1 = T_1(R_0) \leq T_1^b \leq T^\#$. Nous pouvons par ailleurs dès à présent préciser le choix du temps T du début de ce paragraphe : nous prenons $T = T_1$.

La procédure associée au problème (\mathcal{F}) permet ainsi d'associer à v_b un couple vitesse-pression (\mathbf{v}, q) tel que $\mathbf{v} \in K_T^{r+2}(\Omega_F(0))$ et $\nabla q \in K_T^r(\Omega_F(0))$. Par (1.21) et (1.22), nous définissons alors \mathbf{g} , puis $h_{0,1}$, $h_{0,2}$, et $(h_i)_{1 \leq i \leq N}$. Nous pouvons estimer leurs régularités. Comme $\nabla q \in K_T^r(\Omega_F(0))$, nous obtenons pour le terme en pression $q \in H^{r/2}(0, T; H^1(\Omega_F(0)))$. Pour les termes en vitesse, comme $\mathbf{v} \in K_T^{r+2}(\Omega_F(0)) \subset L^2(0, T; H^{r+2}(\Omega_F(0)))$, nous en déduisons facilement la régularité de $\chi_{\mathbf{v}} = \xi + \int_0^t \mathbf{v} \in H^1(0, T; H^{r+2}(\Omega_F(0)))$ et ainsi celle de :

$$\nabla \chi_{\mathbf{v}}, \text{cof}(\nabla \chi_{\mathbf{v}}) \in H^1(0, T; H^{r+1}(\Omega_F(0))),$$

dû au caractère d'algèbre de ce dernier espace (cf Lemme 7). Par ailleurs, $\mathbf{v} \in L^2(0, T; H^{r+2}(\Omega_F(0))) \cap H^{r/2+1}(0, T; L^2(\Omega_F(0)))$, et par interpolation, nous avons donc :

$$\forall \theta \in [0, 1], \quad \mathbf{v} \in H^{\theta(r+2)/2}(0, T; H^{(1-\theta)(r+2)}(\Omega_F(0))).$$

Nous en déduisons que le gradient $\nabla \mathbf{v}$ appartient à $H^{r/2}(0, T; H^1(\Omega_F(0)))$ en ayant pris $\theta = r/(r+2)$. Finalement en appliquant le Lemme 7 sur les espaces multiplicateurs, nous obtenons tout d'abord :

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \text{cof}(\nabla \chi_{\mathbf{v}}) \nabla \mathbf{v} \in H^{r/2}(0, T; H^1(\Omega_F(0))),$$

puis $\mathbf{g} \in H^{r/2}(0, T; H^{1/2}(\Gamma(0)))$, et par conséquent directement que $h_{0,1}$, et les premiers termes de $h_{0,2}$ et des h_i sont dans $H^{r/2}(0, T)$. Pour les autres termes, nous utilisons le fait que $H^{r/2+1}(0, T)$ est une algèbre, et que le produit d'un élément de $H^{r/2}(0, T)$ par un élément de $H^{r/2+2}(0, T)$ est dans $H^{r/2}(0, T)$. Nous en concluons que les applications $h_{0,1}$, $h_{0,2}$, et $(h_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont dans $H^{r/2}(0, T)$.

³⁹Sans appliquer le Lemme 6.

Remarque 18. Dans les calculs de régularité précédents, il faut préciser la dépendance en temps des constantes de continuité des applications de multiplication entre éléments d'espace de SOBOLEV en temps à valeurs vectorielles. En reprenant les notations du Lemme 7, nous avons dans les calculs précédents :

$$\| m(v, w) \|_{\mathbf{H}^s(0,T;Z)} \leq C(T) \| v \|_{\mathbf{H}^s(0,T;X)} \| w \|_{\mathbf{H}^s(0,T;Y)}$$

avec la constante $C(T)$ qui dépend du temps T (car nous n'avons pas nécessairement les conditions remplies sur les dérivées premières en temps à l'instant initial). Il est donc important de rappeler que $T = T_1$ (temps d'existence de la solution du problème (\mathcal{F}) associé au problème fluide) ne dépend que de $T^\#$ et de R_0 .

• Nous construisons à présent un triplet $(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2)$. Soient τ^2 et θ^2 les solutions dans $H^{r/2+2}(0, T)$ des systèmes d'EDO respectifs suivants :

$$\begin{cases} m\ddot{\tau}^2 &= h_{0,1} \\ \tau^2(0) &= \tau_0 \\ \dot{\tau}^2(0) &= \tau_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} J_0\ddot{\theta}^2 &= h_{0,2} \\ \theta^2(0) &= 0 \\ \dot{\theta}^2(0) &= \theta_1 \end{cases} . \quad (1.39)$$

Nous considérons d'autre part $\bar{\alpha}^2 = (\alpha_i^2)_{i \in \bar{I}}$ solution de (par analogie avec (1.34)) :

$$\bar{\alpha}^{2''} = F(t, \bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^{1'}) = [\bar{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \bar{D}(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^{1'}) + \frac{1}{\rho_S} [\bar{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} (\bar{H} + \bar{K}(\bar{\alpha}^1)) ,$$

avec les conditions initiales $\bar{\alpha}^2(0) = 0$ et $\bar{\alpha}^{2'}(0) = (\int_{\Omega} \mathbf{d}_{N1} \cdot \psi_i)_{i \in \bar{I}}$, et qui est dans $H^{r/2+2}(0, T)$ (car dans notre cas le second membre est dans $H^{r/2}(0, T)$).

Nous définissons maintenant l'application S_2 suivante sur laquelle va porter la procédure de point fixe du problème couplé :

$$S_2 : (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1) \in \mathcal{B}_2 \longmapsto (\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) \quad \text{avec} \quad \tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2 \quad \text{dans} \quad H^{r/2+2}(0, T) .$$

De par la construction que nous avons effectuée, l'application S_2 est bien définie.

Étape 3. Stabilité de S_2 dans la boule \mathcal{B}_2 .

• Nous commençons par préciser une inégalité qui sera utile pour la suite. Pour $0 < T \leq T^\#$, et pour $V \in H^{r/2+1}(0, T)$ tel que $V(0) = 0$, nous avons (par le Lemme 8-*i*), avec $s = 0$ et $\varepsilon = 1 - r/2$) :

$$\| V \|_{H^{r/2}(0,T)} \leq CT^\eta \| V' \|_{L^2(0,T)} \leq CT^\eta \| V' \|_{H^{r/2}(0,T)} \quad (1.40)$$

avec $\eta = 1 - r/2$, et C indépendante de $T \leq T^\#$. Nous en déduisons que pour $V \in H^{r/2+2}(0, T)$ tel que $V(0) = V'(0) = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \| V \|_{H^{r/2+2}(0,T)}^2 &= \| V \|_{H^{r/2}(0,T)}^2 + \| V' \|_{H^{r/2}(0,T)}^2 + \| V'' \|_{H^{r/2}(0,T)}^2 \\ &\leq (CT^{2\eta}(CT^{2\eta} + 1) + 1) \| V'' \|_{H^{r/2}(0,T)}^2 \end{aligned}$$

et donc que :

$$\| V \|_{H^{r/2+2}(0,T)} \leq C(T^\#) \| V'' \|_{H^{r/2}(0,T)} , \quad (1.41)$$

avec $C(T^\#)$ une constante indépendante de $T \leq T^\#$ et de V .

• Nous introduisons à présent un lemme lié à la procédure de résolution du problème (\mathcal{F}) :

Lemme 9. Soient $(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1) \in \mathcal{B}_2$ et (\mathbf{v}, q) le couple vitesse-pression introduit lors de la définition de $S_2(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)$, alors :

$$\forall 0 < T \leq T_1, \quad \|\mathbf{v}\|_{K_T^{r+2}(\Omega_F(0))} + \|q\|_{K_T^r(\Omega_F(0))} \leq C$$

avec $C = C(R_1, R_2, \tau_1, \theta_1, \mathbf{d}_{N1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{F})$.

Ce lemme tient d'une part à l'écriture $(\mathbf{v}, q) = (\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_0^b + \bar{\mathbf{v}}_0, \tilde{q} + q_0)$ et aux définitions de chacune de ses composantes, et d'autre part aux estimations du Lemme 4. Une preuve en est présentée dans [GM00a] page 633.

• Soient maintenant $(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1) \in \mathcal{B}_2$ satisfaisant aux conditions initiales (1.38), et $(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) = S_2(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)$, alors, par (1.41) :

$$\|\tau^2 - \tau_c\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \leq C(T^\#) \|\ddot{\tau}^2 - \ddot{\tau}_c\|_{H^{r/2}(0,T)}. \quad (1.42)$$

D'autre part, en soustrayant les EDO satisfaites par τ^2 et τ_c , nous avons :

$$m(\ddot{\tau}^2 - \ddot{\tau}_c) = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{f}(0)) + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g} - \mathbf{g}_0)$$

en rappelant que $\mathbf{g} = [qI_2 - \nu(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T)]\text{cof}(\nabla_{\chi_{\mathbf{v}}})\mathbf{n}_0$. Alors, d'après le Lemme 9 et le fait que $\mathbf{f} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$, nous obtenons :

$$m\|\ddot{\tau}^2 - \ddot{\tau}_c\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C_1^\# = C(R_1, R_2, \mathbf{u}_0, \tau_1, \theta_1, \mathbf{d}_{N1}, \mathbf{F}, \mathbf{f}).$$

De là, en tenant compte de (1.42), et en rappelant que $m = \rho_S|\Omega|$, nous avons :

$$\rho_S|\Omega|\|\tau^2 - \tau_c\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \leq C_2^\# = C(T^\#, R_1, R_2, \mathbf{u}_0, \tau_1, \theta_1, \mathbf{d}_{N1}, \mathbf{F}, \mathbf{f}). \quad (1.43)$$

• À présent, nous soustrayons les EDO satisfaites par θ^2 et θ_c pour obtenir :

$$\begin{aligned} J_0(\ddot{\theta}^2 - \ddot{\theta}_c) &= \int_{\Omega} R^1(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \wedge \mathbf{f} - \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \wedge \mathbf{f}(0) + \int_{\partial\Omega} R^1(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \wedge \mathbf{g} - \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{G\xi} \wedge \mathbf{g}_0 \\ &\quad - \rho_S \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N^1 - \frac{d}{dt}[(J_N^1 - J_0)\dot{\theta}^1] + 2\rho_S\theta_1 \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \cdot \mathbf{d}_{N1}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

avec $\mathbf{d}_N^1 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^1 \psi_i$, $R^1 = R_{\theta^1}$ et $J_N^1 = \rho_S \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1)^2$. Les membres de droite sur la première ligne se majorent en norme $H^{r/2}(0, T)$ de la même manière que précédemment par $C_1^\#$. Par ailleurs, nous avons d'une part, pour $\eta = 1 - r/2 > 0$:

$$\left\| \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N^1 \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq CT^\eta.$$

En effet, nous rappelons que $\mathbf{d}_N^1 = \sum_{i \in \bar{I}} \alpha_i^1 \psi_i + \Phi(\bar{\alpha}^1) \psi_{\mathbf{i}_0}$, et que, comme $\alpha_{\mathbf{i}_0}^1 = \Phi(\bar{\alpha}^1) \in H^{r/2+2}(0, T)$ et $\Phi \in C^\infty$, nous avons $\|\alpha_{\mathbf{i}_0}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \leq C(T^\#, M_{\underline{B}}, R_2)$. Ainsi, par le Lemme 8, nous avons (puisque $\bar{\alpha}^1(0) = 0$) :

$$\begin{aligned} \forall T \leq T^\#, \quad \left\| \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N^1 \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C \|\bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \|\bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ &\leq CT^\eta \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \end{aligned}$$

avec C indépendante de $T \leq T^\#$. Par ailleurs, nous avons à traiter les termes liés au moment d'inertie :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_S} \frac{d}{dt} [(J_N^1 - J_0) \dot{\theta}^1] - 2\theta_1 \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \cdot \mathbf{d}_{N1} \\ &= \ddot{\theta}^1 \int_{\Omega} (2\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \cdot \mathbf{d}_N^1 + 2\dot{\theta}^1 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \cdot \partial_t \mathbf{d}_N^1 - 2\theta_1 \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \cdot \mathbf{d}_{N1} \\ &= \ddot{\theta}^1 \int_{\Omega} (2\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \cdot \mathbf{d}_N^1 + 2\dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \cdot \partial_t \mathbf{d}_N^1 + 2 \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \cdot (\dot{\theta}^1 \partial_t \mathbf{d}_N^1 - \theta^1 \mathbf{d}_{N1}). \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que précédemment, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} \left\| \ddot{\theta}^1 \int_{\Omega} (2\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \cdot \mathbf{d}_N^1 + 2\dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \cdot \partial_t \mathbf{d}_N^1 \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C \|\bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ &\leq C T^\eta \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \quad \text{par (1.40),} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} \overrightarrow{G\xi} \cdot (\dot{\theta}^1 \partial_t \mathbf{d}_N^1 - \theta^1 \mathbf{d}_{N1}) \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ &\leq C \left(\left\| (\dot{\theta}^1 - \theta_1) \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N^1 \right\|_{H^{r/2}(0,T)} + \left\| \theta_1 \int_{\Omega} (\partial_t \mathbf{d}_N^1 - \mathbf{d}_{N1}) \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \\ &\leq C \left(\|\dot{\theta}^1 - \theta_1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \left\| \bar{\alpha}^{1'} - \left(\int_{\Omega} \mathbf{d}_{N1} \cdot \psi_i \right)_{i \in \bar{I}} \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \\ &\leq C T^\eta (\|\ddot{\theta}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)}) \leq C T^\eta, \end{aligned}$$

pour le même $\eta = 1 - r/2 > 0$ et avec C indépendante de $T \leq T^\#$ et de ρ_S .

Finalement, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \rho_S \|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\theta^2 - \theta_c\|_{H^{r/2+2}(0,T)} &\leq J_0 C(T^\#) \|\ddot{\theta}^2 - \ddot{\theta}_c\|_{H^{r/2}(0,T)} \quad \text{à l'aide de (1.41),} \\ &\leq C_2^\# + \rho_S C T^\eta, \end{aligned} \quad (1.45)$$

grâce à l'équation (1.44) et aux majorations de chacun de ses termes que nous avons présentées.

• Concernant les perturbations, l'EDO satisfaite par $\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_c$ est la suivante :

$$\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}_c'' = [\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{D}(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^{1'}) + \frac{1}{\rho_S} ([\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{K}(\bar{\alpha}^1) - \overline{K}_c(\bar{\alpha}_c) + [\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{H} - \overline{H}(0)). \quad (1.46)$$

Comme Φ est C^∞ sur $\underline{B}_{T^\#}$, \overline{D} est lipschitzienne en sa première variable, et Φ et \overline{M}^{-1} sont bornées, d'où :

$$\|[\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{D}(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^{1'})\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C \|\bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C T^\eta \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)}.$$

Les termes fluides issus de $[\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{K}(\bar{\alpha}^1) - \overline{K}_c(\bar{\alpha}_c)$ sont bornés comme auparavant par $C_2^\#$. Nous allons maintenant traiter les derniers termes de (1.46) par une même approche. Nous utilisons pour cela la décomposition suivante :

$$[\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{H} - \overline{H}(0) = ([\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} - I_{N-1}) \overline{H}(0) + [\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} (\overline{H} - \overline{H}(0)). \quad (1.47)$$

Une décomposition analogue de $[\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{K}(\bar{\alpha}^1) - \overline{K}_c(\bar{\alpha}_c)$, ainsi que le fait que Φ et ses premières dérivées sont lipschitziennes, permettent de nous ramener aux termes de l'étude de (1.47). Nous avons alors comme \overline{M}^{-1} est lipschitzienne et que $\overline{M}(0)^{-1} = I_{N-1}$:

$$\|[\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} - I_{N-1}\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C \|\bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C T^\eta \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)}.$$

D'autre part, pour $i \in \bar{I}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (\bar{H} - \bar{H}(0))_i &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R^1 \psi_i - \int_{\Omega} \mathbf{f}(0) \cdot \psi_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R^1 \psi_i - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}_0 \cdot \psi_i - \rho_S \left(2\dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N^1 \wedge \psi_i \right. \\ &\quad \left. - 2\theta_1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_{N1} \wedge \psi_i + \dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \wedge \psi_i - (\dot{\theta}^1)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^1) \cdot \psi_i + (\theta_1)^2 \int_{\Omega} \vec{G}\xi \cdot \psi_i \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Les termes des forces extérieures sont bornés par $C_2^\#$, et par ailleurs, à nouveau en faisant apparaître les différences de termes croisés et en appliquant l'estimation (1.40), nous obtenons aisément :

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N^1 \wedge \psi_i - \theta_1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_{N1} \wedge \psi_i \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C T^\eta (\|\dot{\theta}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)}) \leq C T^\eta; \\ \left\| \dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \wedge \psi_i \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C T^\eta \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C T^\eta; \\ \left\| (\dot{\theta}^1)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^1) \cdot \psi_i - (\theta_1)^2 \int_{\Omega} \vec{G}\xi \cdot \psi_i \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C T^\eta (\|\dot{\theta}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)}) \leq C T^\eta. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous déduisons de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_c\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C(T^\#) \|\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}_c''\|_{H^{r/2}(0,T)} \quad \text{par (1.41),} \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho_S} + T^\eta \right) C. \end{aligned} \quad (1.49)$$

• Finalement, à partir des inégalités (1.43) sur les translations, (1.45) sur les angles de rotation, et (1.49) sur les perturbations, si ρ_S est assez grand et T choisi assez petit, alors :

$$\|S_2(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1) - (\tau_c, \theta_c, \bar{\alpha}_c)\|_{\mathcal{V}_T} \leq R_2,$$

et donc $S_2(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_2$.

Étape 4. Contraction de S_2 dans la boule \mathcal{B}_2 .

• Soient $(\tau^j, \theta^j, \bar{\alpha}^j)$, $j \in \{1, 2\}$, deux éléments de la boule \mathcal{B}_2 satisfaisant chacun aux conditions initiales (1.38). Nous introduisons les vitesses \mathbf{v}^j et les pressions q^j associées aux vitesses au bord v_b^j obtenues à partir des $(\tau^j, \theta^j, \bar{\alpha}^j)$. Plus précisément, $(\mathbf{v}^j, q^j) = (\tilde{\mathbf{v}}^j + \mathbf{v}_0^j, \tilde{q}^j + q_0)$ avec $\mathbf{v}_0^j = \underline{\mathbf{v}}_0^j + \bar{\mathbf{v}}_0$ où $\underline{\mathbf{v}}_0^j$ relève v_b^j et $(\bar{\mathbf{v}}_0, q_0)$ relève \mathbf{u}_0 . Nous introduisons aussi $R^j = R_{\theta^j}$, et plus généralement, nous dénotons avec un exposant j les quantités qui dépendent de $(\tau^j, \theta^j, \bar{\alpha}^j)$. Nous notons par ailleurs $(\tau^{j+2}, \theta^{j+2}, \bar{\alpha}^{j+2}) = S_2(\tau^j, \theta^j, \bar{\alpha}^j)$.

Nous introduisons à présent un lemme lié à la procédure de résolution du problème (\mathcal{F}) :

Lemme 10. *Il existe une constante C telle que pour $(\tilde{\mathbf{v}}^j, \tilde{q}^j)$, $j \in \{1, 2\}$, les couples vitesses-pressions introduits précédemment, nous ayons :*

$$\|(\tilde{\mathbf{v}}^2, \tilde{q}^2) - (\tilde{\mathbf{v}}^1, \tilde{q}^1)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} \leq C \|v_b^2 - v_b^1\|_{\mathcal{V}_T^{r,\ell}}.$$

Ce lemme tient d'une part aux définitions de $(\tilde{\mathbf{v}}^j, \tilde{q}^j)$ et de $\underline{\mathbf{v}}_0^j$, et d'autre part aux estimations d'applications lipschitziennes du Lemme 4. Une preuve en est présentée dans [GM00a] page 634 (inégalité (59)).

Par ailleurs, nous utiliserons aussi l'estimation suivante :

$$\|v_b^2 - v_b^1\|_{\mathcal{V}_T^{r,\ell}} \leq C \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T}. \quad (1.50)$$

En effet, comme $v_b^j = \dot{\tau}^j + \partial_t(R^j(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^j))$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|v_b^2 - v_b^1\|_{V_T^{r,\ell}} &\leq \|\dot{\tau}^2 - \dot{\tau}^1\|_{H^{r/2+1}(0,T)} + \|(\dot{R}^2 - \dot{R}^1)\overrightarrow{G\xi} + \partial_t(R^2\mathbf{d}_N^2 - R^1\mathbf{d}_N^1)\|_{V_T^{r,\ell}} \\
 &\leq \|\dot{\tau}^2 - \dot{\tau}^1\|_{H^{r/2+1}(0,T)} + C \left(\|\dot{R}^2 - \dot{R}^1\|_{H^{r/2+1}(0,T)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\partial_t\mathbf{d}_N^2 - \partial_t\mathbf{d}_N^1\|_{V_T^{r,\ell}} + \|R^2 - R^1\|_{H^{r/2+1}(0,T)} + \|\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1\|_{V_T^{r,\ell}} \right) \\
 &\leq \|\tau^2 - \tau^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \\
 &\quad + C \left(\|R^2 - R^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} + \|\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1\|_{H^{r/2+2}(0,T;H^\ell(\Gamma))} \right).
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Nous renvoyons à [GM00a] page 635 pour l'inégalité suivante :

$$\|R^2 - R^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \leq C(T^\#, R_2) \|\theta^2 - \theta^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)}, \tag{1.52}$$

qui provient du développement en séries entières de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. De plus, Φ est C^∞ sur \underline{B} , et donc lipschitzienne, d'où :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1\|_{H^{r/2+2}(0,T;H^\ell(\Gamma))} &\leq C \left(\|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} + \|\Phi(\bar{\alpha}^2) - \Phi(\bar{\alpha}^1)\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \right) \\
 &\leq C \|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)}.
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Grâce à (1.52) et (1.53), nous en déduisons alors de (1.51) l'estimation (1.50).

- Par une nouvelle application de (1.41), nous avons :

$$\|\tau^4 - \tau^3\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \leq C(T^\#) \|\ddot{\tau}^4 - \ddot{\tau}^3\|_{H^{r/2}(0,T)}. \tag{1.54}$$

De plus, nous considérons l'EDO satisfaite par $\tau^4 - \tau^3$:

$$m(\ddot{\tau}^4 - \ddot{\tau}^3) = h_{0,1}^2 - h_{0,1}^1 = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^1).$$

En utilisant d'une part le Lemme 10, et d'autre part la définition des \mathbf{v}_0^j , nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
 \rho_S |\Omega| \|\ddot{\tau}^4 - \ddot{\tau}^3\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C \left(\|(\tilde{\mathbf{v}}^2, \tilde{q}^2) - (\tilde{\mathbf{v}}^1, \tilde{q}^1)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} + \|\mathbf{v}_0^2 - \mathbf{v}_0^1\|_{K_{T_0}^{r+2}(\Omega_F(0))} \right) \\
 &\leq C \|v_b^2 - v_b^1\|_{V_T^{r,\ell}}.
 \end{aligned}$$

À l'aide de l'inégalité (1.50), nous en déduisons de (1.54) que :

$$\rho_S |\Omega| \|\ddot{\tau}^4 - \ddot{\tau}^3\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{V_T}. \tag{1.55}$$

- Concernant les angles de rotation, nous avons l'EDO suivante :

$$\begin{aligned}
 J_0(\ddot{\theta}^4 - \ddot{\theta}^3) &= h_{0,2}^2 - h_{0,2}^1 \\
 &= \int_{\Omega} [R^2(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^2) - R^1(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1)] \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R^2(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^2) \wedge \mathbf{g}^2 - \int_{\partial\Omega} R^1(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^1) \wedge \mathbf{g}^1 \\
 &\quad - \rho_S \int_{\Omega} (\mathbf{d}_N^2 \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1 \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N^1) - \frac{d}{dt} \left((J_N^2 - J_0)\dot{\theta}^2 - (J_N^1 - J_0)\dot{\theta}^1 \right).
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Les termes concernant les forces extérieures sont traités de la même manière que pour la translation, en utilisant le fait que $(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1), (\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) \in \mathcal{B}_2$. D'autre part, en faisant apparaître les différences du type $\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} (\mathbf{d}_N^2 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1 \wedge \partial_{tt} \mathbf{d}_N^1) \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ & \leq C \left(\|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \|\bar{\alpha}^{2''}\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)} \|\bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \\ & \leq CT^\eta \left(\|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \|\bar{\alpha}^{2''}\|_{H^{r/2}(0,T)} \right. \\ & \quad \left. + \|\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)} \|\bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \quad \text{d'après (1.40),} \\ & \leq CT^\eta \|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

D'un autre côté, nous avons à traiter :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((J_N^2 - J_0) \dot{\theta}^2 - (J_N^1 - J_0) \dot{\theta}^1 \right) &= (J_N^2 - J_N^1) \dot{\theta}^2 - J_N^1 (\dot{\theta}^1 - \dot{\theta}^2) \\ & \quad + (J_N^2 - J_N^1) \ddot{\theta}^2 + (J_N^1 - J_0) (\ddot{\theta}^2 - \ddot{\theta}^1). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho_S} (J_N^2 - J_N^1) &= \int_{\Omega} \left[(\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^2) \partial_t \mathbf{d}_N^2 - (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^1) \partial_t \mathbf{d}_N^1 \right] \\ &= \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^2) \partial_t (\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1) + \int_{\Omega} (\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1) \partial_t \mathbf{d}_N^1 \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho_S} \|J_N^2 - J_N^1\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C \left(\|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \\ &\leq CT^\eta \left(\|\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \\ &\leq CT^\eta \|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)}. \end{aligned}$$

De plus, comme en (1.40), nous avons :

$$\|\dot{\theta}^1 - \dot{\theta}^2\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq CT^\eta \|\ddot{\theta}^1 - \ddot{\theta}^2\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq CT^\eta \|\theta^1 - \theta^2\|_{H^{r/2+2}(0,T)}.$$

De la même façon, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_S} \|J_N^2 - J_N^1\|_{H^{r/2}(0,T)} &= \left\| \int_{\Omega} (2\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^2 + \mathbf{d}_N^1) \cdot (\mathbf{d}_N^2 - \mathbf{d}_N^1) \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ &\leq CT^\eta \|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)}, \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_S} \|J_N^1 - J_0\|_{H^{r/2}(0,T)} &= \left\| \int_{\Omega} (2\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^2) \cdot \mathbf{d}_N^2 \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq C \|\bar{\alpha}^2\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ &\leq CT^\eta \|\bar{\alpha}^{2'}\|_{H^{r/2}(0,T)}. \end{aligned}$$

Donc, nous avons finalement la majoration suivante des termes de (1.58) :

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{dt} \left((J_N^2 - J_0) \dot{\theta}^2 - (J_N^1 - J_0) \dot{\theta}^1 \right) \right\|_{H^{r/2}(0,T)} \\ & \leq \rho_S CT^\eta \left(\|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} + \|\theta^2 - \theta^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \right). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Nous avons ainsi traités tous les termes issus de (1.56). Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
 \rho_S \|\overrightarrow{G\xi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\theta^4 - \theta^3\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq J_0 C \|\ddot{\theta}^4 - \ddot{\theta}^3\|_{H^{r/2}(0,T)} \quad \text{en appliquant (1.41),} \\
 &\leq C \left[\|(\tilde{\mathbf{v}}^2, q^2) - (\tilde{\mathbf{v}}^1, q^1)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} + \|\mathbf{v}_0^2 - \mathbf{v}_0^1\|_{K_{T_0}^{r+2}(\Omega_F(0))} \right. \\
 &\quad \left. + \rho_S T^\eta \left(\|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} + \|\theta^2 - \theta^1\|_{H^{r/2+2}(0,T)} \right) \right] \\
 &\leq C (1 + \rho_S T^\eta) \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T},
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

grâce au Lemme 10 et aux inégalités (1.50), (1.57) et (1.59).

• Nous nous occupons maintenant des termes concernant les coefficients de perturbations. Nous rappelons tout d'abord les EDO satisfaites par $\bar{\alpha}^3$ et $\bar{\alpha}^4$. Pour $j \in \{1, 2\}$, nous avons :

$$\bar{\alpha}^{j+2''} = F^j(t, \bar{\alpha}^j, \bar{\alpha}^{j'}) = [\overline{M}(\bar{\alpha}^j)]^{-1} \overline{D}(\bar{\alpha}^j, \bar{\alpha}^{j'}) + \frac{1}{\rho_S} [\overline{M}(\bar{\alpha}^j)]^{-1} \left(\overline{H}^j + \overline{K}^j(\bar{\alpha}^j) \right),$$

ainsi que les expressions, pour $i, k \in \overline{I}$, $\overline{M}_{ik}(\bar{\alpha}^j) = \delta_{ik} + \varphi_i(\bar{\alpha}^j) \varphi_k(\bar{\alpha}^j)$ pour la matrice, et $\overline{H}_i^j = h_i^j$, $\overline{D}_i(\bar{\alpha}^j, \bar{\alpha}^{j'}) = \varphi_i(\bar{\alpha}^j) D^2 \Phi(\bar{\alpha}^j)(\bar{\alpha}^{j'})^2$, et $\overline{K}_i^j(\bar{\alpha}^j) = \varphi_i(\bar{\alpha}^j) (\lambda_{\mathbf{i}_0} \Phi(\bar{\alpha}^j) + h_{\mathbf{i}_0}^j) - \lambda_i \alpha_i^j$ pour les vecteurs, avec :

$$h_i^j = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot R_{\theta^j} \psi_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}^j \cdot R_{\theta^j} \psi_i - \rho_S \left(2\dot{\theta}^j \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N^j \wedge \psi_i + \ddot{\theta}^j \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^j \wedge \psi_i - (\dot{\theta}^j)^2 \int_{\Omega} (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N^j) \cdot \psi_i \right).$$

Vu que Φ est une fraction rationnelle C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\underline{B}_{T^\#}$, il en est de même pour les φ_i , et *a fortiori* pour les \overline{M}_{ik} et \overline{D}_i , qui sont donc lipschitziennes. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
 &\| [\overline{M}(\bar{\alpha}^2)]^{-1} \overline{D}(\bar{\alpha}^2, \bar{\alpha}^{2'}) - [\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} \overline{D}(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^{1'}) \|_{H^{r/2}(0,T)} \\
 &\leq C \left(\|\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} \right) \\
 &\leq C T^\eta \left(\|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)} \right).
 \end{aligned}$$

De plus, en développant les termes suivants de l'EDO satisfaite par $\bar{\alpha}^4 - \bar{\alpha}^3$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_0 &= [\overline{M}(\bar{\alpha}^2)]^{-1} (\overline{H}^2 + \overline{K}^2(\bar{\alpha}^2)) - [\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1} (\overline{H}^1 + \overline{K}^1(\bar{\alpha}^1)) \\
 &= ([\overline{M}(\bar{\alpha}^2)]^{-1} - [\overline{M}(\bar{\alpha}^1)]^{-1}) (\overline{H}^1 + \overline{K}^1(\bar{\alpha}^1)) + [\overline{M}(\bar{\alpha}^2)]^{-1} (\overline{K}^2(\bar{\alpha}^2) - \overline{K}^1(\bar{\alpha}^1) + \overline{H}^2 - \overline{H}^1).
 \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que précédemment, il est clair que l'étude du terme \mathcal{D}_0 se ramène à celle des éléments $h_i^2 - h_i^1$ pour $1 \leq i \leq N$ que nous allons détailler. Les termes liés aux forces extérieures s'écrivent :

$$\mathcal{D}_1 = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (R^2 - R^1) \psi_i + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}^2 \cdot (R^2 - R^1) \psi_i + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^1) \cdot R^1 \psi_i.$$

Or, nous avons d'une part une inégalité semblable à (1.52), et d'autre part le Lemme 10 et la définition des \mathbf{v}_0^j pour traiter $\mathbf{g}^2 - \mathbf{g}^1$. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{D}_1\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C \left(\|\theta^2 - \theta^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|(\tilde{\mathbf{v}}^2, q^2) - (\tilde{\mathbf{v}}^1, q^1)\|_{\mathbf{X}_T^{r,\ell}} + \|\mathbf{v}_0^2 - \mathbf{v}_0^1\|_{K_{T_0}^{r+2}(\Omega_F(0))} \right) \\
 &\leq C \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T}.
 \end{aligned}$$

Les autres termes de $h_i^2 - h_i^1$ présents dans l'EDO satisfaite par $\bar{\alpha}^4 - \bar{\alpha}^3$ ne sont quant à eux pas contrôlables par la densité ρ_S , et il est nécessaire de les traiter différemment. À nouveau en faisant apparaître

les différences de termes croisés et en appliquant l'estimation (1.40), nous obtenons aisément :

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\theta}^2 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N^2 \wedge \psi_i - \dot{\theta}^1 \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{d}_N^1 \wedge \psi_i \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C T^\eta (\|\ddot{\theta}^2 - \ddot{\theta}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2''} - \bar{\alpha}^{1''}\|_{H^{r/2}(0,T)}); \\ \left\| \ddot{\theta}^2 \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^2 \wedge \psi_i - \ddot{\theta}^1 \int_{\Omega} \mathbf{d}_N^1 \wedge \psi_i \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C T^\eta (\|\ddot{\theta}^2 - \ddot{\theta}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)}); \\ \left\| (\dot{\theta}^2)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^2) \cdot \psi_i - (\dot{\theta}^1)^2 \int_{\Omega} (\vec{G}\xi + \mathbf{d}_N^1) \cdot \psi_i \right\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C T^\eta (\|\ddot{\theta}^2 - \ddot{\theta}^1\|_{H^{r/2}(0,T)} + \|\bar{\alpha}^{2'} - \bar{\alpha}^{1'}\|_{H^{r/2}(0,T)}). \end{aligned}$$

Nous avons finalement obtenu que :

$$\|\mathcal{D}_0\|_{H^{r/2}(0,T)} \leq (1 + \rho_S T^\eta) C \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T}.$$

De là, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \|\bar{\alpha}^4 - \bar{\alpha}^3\|_{H^{r/2}(0,T)} &\leq C(T^\#) \|\bar{\alpha}^{4''} - \bar{\alpha}^{3''}\|_{H^{r/2}(0,T)} \quad \text{par (1.41)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho_S} + T^\eta\right) C \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

• Finalement, à partir des inégalités (1.55) sur les translations, (1.60) sur les angles de rotation, et (1.61) sur les perturbations, si ρ_S est assez grand et T choisi assez petit, alors :

$$\|S_2(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - S_2(\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T} \leq C_L \|(\tau^2, \theta^2, \bar{\alpha}^2) - (\tau^1, \theta^1, \bar{\alpha}^1)\|_{\mathcal{V}_T},$$

avec une constante de LIPSCHITZ C_L strictement inférieure à 1. Nous en déduisons que S_2 restreinte à la boule \mathcal{B}_2 est une application contractante.

Étape 5. Procédure de point fixe.

Les hypothèses du théorème de PICARD sont satisfaites : S_2 est une application stable et contractante dans la boule \mathcal{B}_2 . Nous en concluons que S_2 possède un unique point fixe $(\tau_N, \theta_N, \bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \bar{I}})$ dans la boule \mathcal{B}_2 . Nous avons donc montré l'existence d'une solution au problème couplé fluide-structure (1.6)-(1.13)-(1.18)-(1.19). Cette solution est telle que la déformation ϕ de la structure s'écrit :

$$\phi(\xi, t) = \tau_N(t) + R_{\theta_N}(t) \left[\vec{G}\xi + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \psi_i(\xi) \right] \quad (1.62)$$

avec $\alpha_{\mathbf{i}_0} = \Phi(\bar{\alpha})$. D'autre part, le couple vitesse-pression du fluide réécrit en lagrangien, $(\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_0, \tilde{q} + q_0) = (\mathbf{v}, q)$, est l'unique solution du problème (\mathcal{F}) telle que $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q}) \in \mathcal{B}_1$ est le point fixe de S_1 , et (\mathbf{v}_0, q_0) est associé au relèvement de \mathbf{u}_0 et $v_b = \partial_t \phi$.

Ceci termine la démonstration du Théorème 6 page 90.

Remarque 19. Dans cette procédure de recouplage, nous n'utilisons pas de multiplicateur de LAGRANGE tel qu'il en était question dans la résolution du problème (\mathcal{S}) . Cela se justifie car de par l'algorithme de recouplage, nous avons $\alpha_{\mathbf{i}_0} = \Phi(\bar{\alpha})$. Par conséquent $f(\bar{\alpha}, \Phi(\bar{\alpha})) = 0$, soit encore $\mathcal{G}(\bar{\alpha}) = |\Omega|$: autrement dit, la condition de compatibilité (1.17) sur la déformation de la structure issue de l'incompressibilité fluide est automatiquement vérifiée par construction.

Remarque 20. La condition de temps petit est lié au contrôle de termes en déformation et en vitesse de déformation de la structure, tandis que la condition de densité ρ_S grande est utile pour contrôler les termes en accélérations de la structure.

Remarque 21. *Un bon exemple d'application pratique et culinaire est la préparation de la pâte à pizza du pizzaiolo. En effet, lorsque ce dernier a aplani la pâte, il la lance au-dessus de lui pour la «détendre». Si nous considérons que la pâte (élastique) reste dans un même plan (échappant quelques instants à la gravité) inclu dans la cuisine, et que le pizzaiolo lui donne une vitesse de translation et rotation initiale raisonnable⁴⁰, alors nous avons montré que le système physique n'explose pas et possède une solution pendant un certain temps (petit).*

Collaboration

Ce travail a été effectué en collaboration avec Céline GRANDMONT et Yvon MADAY.

⁴⁰Afin que (1.37) page 103 soit satisfaite.

Chapitre 2

Analyse et simulation de couplages de fluides potentiels et d'une structure élastique

Sommaire

2.1	Introduction	116
2.1.1	Modélisation 1 : ventricule artificiel	116
2.1.2	Modélisation 2 : couplage d'un fluide potentiel et d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations	116
2.2	Modélisation d'un ventricule d'un cœur artificiel	116
2.2.1	Structure	117
2.2.2	Fluides potentiels	117
2.2.3	Tenseur des contraintes	119
2.2.4	Synthèse des éléments de couplage	119
2.2.5	Autre modélisation possible	119
2.3	Estimations d'énergie pour le système du ventricule artificiel	120
2.3.1	Estimations d'énergie des systèmes découplés	120
2.3.2	Estimation d'énergie du système couplé global à deux cavités	121
2.4	Algorithme et résultats numériques de la simulation du ventricule artificiel	123
2.4.1	Discrétisation des équations	123
2.4.2	Résultats numériques	127
2.5	Modélisation du couplage d'un fluide potentiel et d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations	128

2.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à deux modélisations de systèmes fluide-structure instationnaires dans un cadre bidimensionnel. Dans ces deux problèmes de couplage, nous utilisons des fluides potentiels, qui sont parmi les modèles les plus simples de fluide.

Quant aux structures élastiques, nous différencions deux cas. Dans le premier, la structure est monodimensionnelle et encastrée à ses deux extrémités ; nous utilisons alors une équation de type ondes. Dans le second cas au contraire, la structure est bidimensionnelle, non-encastrée, et a la possibilité de se mouvoir en grands déplacements tout en n'effectuant que de petites déformations élastiques ; le modèle utilisé est présenté au Chapitre 1 de la Partie I.

2.1.1 Modélisation 1 : ventricule artificiel

Nous considérons un problème d'interaction fluide-structure instationnaire dans un domaine bidimensionnel. Le bord de la cavité, remplie par les fluides, est formé d'une partie rigide et d'une partie élastique sur laquelle on considère une équation d'ondes (pour modéliser de petits déplacements transversaux de la membrane). Les fluides sont supposés parfaits, incompressibles, homogènes et irrotationnels. Les conditions de transmissions traduisent la continuité des vitesses normales et le principe d'action-réaction à l'interface. Nous avons ainsi le modèle simplifié d'un ventricule artificiel.

Après l'obtention des estimations d'énergie qui valident en un sens le modèle, nous présentons une simulation utilisant des formulations ALE pour les fluides, et une méthode spectrale pour le déplacement membranaire transverse.

2.1.2 Modélisation 2 : couplage d'un fluide potentiel et d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations

Nous considérons un problème d'interaction fluide-structure instationnaire dans un domaine bidimensionnel. Une structure élastique en grands déplacements et petites déformations (voir la modélisation au Chapitre 1 de la Partie I) baigne dans un fluide potentiel qui remplit un domaine borné. Ce modèle simplifié est par exemple utilisé pour les calculs d'écoulements dans une tuyère ou les calculs de la portance d'un profil d'aile d'avion (*cf* [Pir88] et [DiC00]). Nous donnons les éléments d'interaction entre le fluide et la structure, ainsi que le bilan de conservation d'énergie du système physique.

2.2 Modélisation d'un ventricule d'un cœur artificiel

Nous nous intéressons à la modélisation bidimensionnelle d'un ventricule d'un cœur artificiel. Ce ventricule est constitué de deux poches rigides, chacune remplie par un fluide, et séparées par une paroi élastique. La première poche, remplie par un fluide assimilable à une huile, possède une entrée qui permet une injection de fluide, et une sortie libre. La seconde cavité, remplie de sang, possède un système d'entrée-sortie libres : une entrée par laquelle le sang veineux non-oxygéné (respectivement le sang oxygéné) pénètre dans la cavité du ventricule droit (respectivement gauche), et une sortie qui assure la circulation du sang vers l'artère pulmonaire (respectivement qui alimente l'aorte en sang oxygéné). Ces portes ne sont par ailleurs jamais ouvertes en même temps.

Pour modéliser ce système en première approximation, nous considérons une cavité bidimensionnelle rigide remplie par deux fluides potentiels homogènes séparés par une membrane élastique (voir Figure 2.1). Ainsi le caractère non newtonien du sang, et la viscosité du fluide assimilé à une huile ne sont pas pris en compte. Le problème reste néanmoins instationnaire et non-linéaire (dû à la mobilité des domaines fluides et structure). Par ailleurs, dans la seconde cavité, l'alternance de l'ouverture

d'une des deux portes, ainsi que la modélisation par une même condition au bord, permettent de ne considérer physiquement qu'une seule porte. Enfin, seuls les déplacements transverses de la membrane sont modélisés.

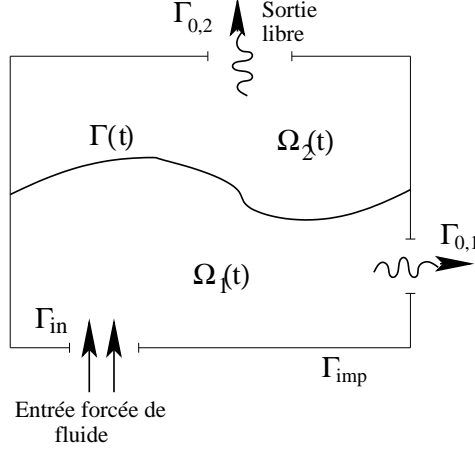


FIG. 2.1 – Cavité remplie par deux fluides potentiels s epar es par une membrane élastique.

2.2.1 Structure

Pour la structure monodimensionnelle, le déplacement transverse d (composante du déplacement selon \mathbf{e}_y pour fixer les idées) est mod elis e par une équation du type visco-élastique, ce qui se traduit en coordonnées lagrangiennes par le système suivant sur l'intervalle $\gamma =]0, L[$:

$$\begin{cases} \rho_s \partial_t^2 d - \sigma \partial_x^2 d - K \partial_x^2 \partial_t d = (\mathbf{T}_{\text{FL}} \mathbf{n}_0)_y & \text{dans } \gamma \times]0, T[\\ d(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\gamma \times]0, T[\\ [d(x, 0), \partial_t d(x, 0)] = [d_0, d_1] & \text{dans } \gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

où ∂_t (resp. ∂_x) désigne l'opérateur de la dérivée partielle en temps (resp. selon la variable d'espace $x \in \gamma$) ; (ρ_s, σ, K) est le triplet de constantes caractéristique de la membrane ; $(\mathbf{T}_{\text{FL}} \mathbf{n}_0)_y$ est la seconde composante du tenseur des contraintes fluides appliqué à la normale à la paroi γ , et récrit en coordonnées lagrangiennes ; d_0 et d_1 sont respectivement la position et la vitesse initiales données. Pour $t \in [0, T]$, nous posons :

$$\begin{aligned} \chi(\cdot, t) : \quad \gamma &\rightarrow \Gamma(t) \\ \xi &\mapsto (\xi, d(\xi, t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

C'est une bijection qui permet de passer aisément des coordonnées lagrangiennes (sur γ) aux coordonnées eulériennes (sur $\Gamma(t)$).

2.2.2 Fluides potentiels

Nous considérons d'autre part un fluide parfait incompressible homogène et irrotationnel dans chacune des deux cavités $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$. Puisque notre étude se place dans un cadre bidimensionnel, la vitesse eulérienne \mathbf{u}_i du fluide dans $\Omega_i(t)$, pour $i \in \{1, 2\}$, s'écrit $\mathbf{u}_i = \nabla \phi_i$, où ϕ_i est une fonction à valeurs scalaires dépendant de l'espace et du temps. Les équations vérifiées par les deux potentiels

sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\phi_i = 0 & \text{dans } \Omega_i(t) \times]0, T[; \quad i \in \{1, 2\} \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{imp} \times]0, T[; \quad i \in \{1, 2\}, \quad \text{Paroi imperméable} \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = (-1)^{i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_t d(\chi^{-1}, t) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_{t1} & \text{sur } \Gamma(t) \times]0, T[; \quad i \in \{1, 2\}, \quad \text{Interface mobile} \\ \phi_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{0,i} \times]0, T[; \quad i \in \{1, 2\}, \quad \text{Sortie libre} \\ \frac{\partial\phi_j}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_{in} \times]0, T[; \quad j = 1, \quad \text{Flux (d'entrée)} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où \mathbf{n}_{t1} désigne la normale unitaire à la paroi mobile $\Gamma(t)$ extérieure à $\Omega_1(t)$ et dépendant du temps ; g est une fonction scalaire qui modélise une injection forcée de fluide dans $\Omega_1(t)$, et dont l'apport d'énergie au système sera abordé plus loin.

Remarque 22. *Les problèmes vérifiés par les potentiels sont elliptiques, et aucun opérateur différentiel en temps n'agit sur ϕ_i . La dépendance en temps de ϕ_i tient uniquement à trois points : le flux g , la condition limite sur l'interface, et évidemment la mobilité du domaine.*

Enfin, on retrouve la pression (eulérienne) P_i dans chacune des cavités grâce à la formule de BERNOULLI pour un fluide parfait homogène incompressible irrotationnel :

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi_i|^2}{2} + \frac{P_i}{\rho_i} = \frac{\beta_i(t)}{\rho_i} \quad (2.4)$$

où ρ_i est la masse volumique du fluide $i \in \{1, 2\}$, et $\beta_i(t)$ désigne une fonction constante en espace qui ne dépend que du temps.

Remarque 23. *La formule de BERNOULLI est obtenue en intégrant (en espace) l'équation d'EULER :*

$$\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla\mathbf{u}_i + \frac{\nabla P_i}{\rho_i} = 0$$

(régissant l'écoulement d'un fluide parfait), en réécrivant :

$$\mathbf{u}_i \cdot \nabla\mathbf{u}_i = \nabla \left(\frac{|\mathbf{u}_i|^2}{2} \right) + (\text{rot } \mathbf{u}_i) \wedge \mathbf{u}_i \quad ,$$

et en utilisant le caractère irrotationnel et l'écriture sous forme de potentiel $\mathbf{u}_i = \nabla\phi_i$. De là, grâce à l'homogénéité du fluide, on obtient :

$$0 = \frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla\mathbf{u}_i + \frac{\nabla P_i}{\rho_i} = \nabla \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi_i|^2}{2} + \frac{P_i}{\rho_i} \right) .$$

Ainsi on a la formule suivante en chaque point M du domaine fluide $\Omega_i(t)$ (simplement connexe) :

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(M, t) + \frac{|\nabla\phi_i(M, t)|^2}{2} + \frac{P_i(M, t)}{\rho_i} = \frac{\beta_i(t)}{\rho_i}$$

où la fonction $\beta_i(t)$ est une constante en espace égale à :

$$\beta_i(t) = \beta_i(N, t) = \rho_i \frac{\partial\phi_i}{\partial t}(N, t) + \rho_i \frac{|\nabla\phi_i(N, t)|^2}{2} + P_i(N, t)$$

pour un point N quelconque fixé dans la i -ème cavité. Elle est assimilable à une pression de référence pour une mise à l'échelle de la pression dans chaque cavité. Dans le cas présent, chaque cavité possède une sortie libre, et nous pouvons considérer que le fluide passant par la paroi $\Gamma_{0,i}$ rejoint un réservoir \mathcal{R}_i annexe. Nous pouvons alors choisir N situé dans \mathcal{R}_i . On peut même aller jusqu'à prendre $\beta_i \equiv 0$ pour $i = 1$ et 2 , mais la liberté de ces paramètres est exploitable par la suite.

2.2.3 Tenseur des contraintes

Pour un fluide parfait (donc non visqueux), le tenseur des contraintes fluides est restreint à l'expression de la pression. Dans le cas présent, c'est la différence de pression qui apparaît, et son expression réécrite en coordonnées lagrangiennes est :

$$\mathbf{T}_{\text{FL}} = -([\beta_1 - P_1] - [\beta_2 - P_2]) \circ \chi \text{ Id} \quad ,$$

où χ est la fonction introduite en (2.2) qui permet de passer de la position lagrangienne γ de l'interface à sa position eulérienne $\Gamma(t)$, et Id est la matrice identité.

En notant Σ_S le tenseur des contraintes de la structure, le principe d'action-réaction se traduit par l'égalité des contraintes normales à l'interface, c'est-à-dire :

$$\Sigma_S \mathbf{n}_0 = \mathbf{T}_{\text{FL}} \mathbf{n}_0 = -([\beta_1 - P_1] - [\beta_2 - P_2]) \circ \chi \mathbf{n}_0 .$$

2.2.4 Synthèse des éléments de couplage

Coïncidence des interfaces	L'interface lagrangienne γ de référence et l'interface eulérienne $\Gamma(t)$ déformée sont en bijection à chaque instant.	$\chi(\cdot, t) : \gamma \leftrightarrow \Gamma(t)$
Continuité des vitesses normales à l'interface	C'est une condition de type Dirichlet sur la vitesse \mathbf{u} qui se traduit sur les potentiels par une condition de Neumann.	$\nabla \phi_1 \cdot \mathbf{n}_{t1} = -\nabla \phi_2 \cdot \mathbf{n}_{t1}$ $= (\partial_t d \circ \chi^{-1})(\mathbf{n}_{t1})_y$
Bilan des contraintes à l'interface	Egalité du tenseur des contraintes normales des fluides et de celui de la structure à l'interface.	$\Sigma_S \mathbf{n}_0 = \mathbf{T}_{\text{FL}} \mathbf{n}_0 = ([P_1 - P_2] \circ \chi - [\beta_1 - \beta_2]) \mathbf{n}_0$

2.2.5 Autre modélisation possible

Plutôt que de prendre $\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = g$ sur Γ_{in} , on pourrait aussi prendre une condition entrante de Dirichlet homogène : $\phi_1 = 0$ sur Γ_{in} .

À partir de là, on a dans la cavité numéro 1 deux entrées-sorties libres, une en $\Gamma_{0,1}$ et une en Γ_{in} . En reprenant les idées de la remarque 23, on peut alors jouer sur la fonction $\beta_1(t)$ de la formule de BERNOULLI, pour créer des dépressions (et “aspirer la membrane”), ou des surpressions (et “gonfler” la membrane). Pour effectuer le bilan énergétique, il suffirait de considérer les estimations avec $g \equiv 0$ (ainsi le terme $\int_{\Gamma_{in}} g \partial_t \phi_1$ disparaîtrait), mais comme on ne considérerait plus $\beta_1 \equiv 0$, on traiterai les termes associés provenant de la formule BERNOULLI.

Remarque 24. *Par ce biais, on peut remplacer le flux d'entrée g , qui peut être vu comme une fonction de contrôle en espace et en temps (de $\Gamma_{in} \times (0, T)$), par la variation de β_1 , c'est-à-dire un contrôle qui est une fonction scalaire dépendant uniquement du temps (dans $(0, T)$). Par exemple dans le milieu cardiaque, diastole et systole sont réalisées par des variations de pression, et non par un flux de sang imposé en entrée.*

2.3 Estimations d'énergie pour le système du ventricule artificiel

2.3.1 Estimations d'énergie des systèmes découplés

Fonctions tests

Pour obtenir des estimations d'énergie pour chacun des deux systèmes ainsi que pour le système couplé, il faut passer par une étape purement formelle. On intègre par parties les intégrales des équations des systèmes découplés contre des fonctions régulières *ad hoc*.

Pour la membrane, on multiplie (2.1) par une fonction-test b définie sur $\gamma \times (0, T)$, et vérifiant les conditions de Dirichlet homogènes $b(x, t) = 0$ sur $\partial\gamma \times (0, T)$; on intègre alors sur γ . Il vient par intégration par parties :

$$\rho_s \int_{\gamma} (\partial_t^2 d) b + K \int_{\gamma} \partial_x(\partial_t d) \partial_x b + \sigma \int_{\gamma} \partial_x d \partial_x b = \int_{\gamma} (\mathbf{T}_{\text{FL}} \mathbf{n}_0)_y b \quad \text{pour presque tout } t \in]0, T[.$$

Pour chacun des deux fluides, on multiplie l'équation de LAPLACE du système (2.3) par une fonction-test ψ_i définie sur $\Omega_i(t)$, appartenant à un espace vectoriel de fonctions suffisamment régulières, et telle que $\psi_i = 0$ sur $\Gamma_{0,i}$, et on intègre par parties. Il vient :

$$0 = \int_{\Omega_1(t)} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \psi_1 - \int_{\Gamma(t)} \partial_t d(\chi^{-1}, t) (\mathbf{n}_{t1})_y \psi_1 - \int_{\Gamma_{in}} g \psi \quad \text{pour presque tout } t \in]0, T[, \quad (2.5)$$

$$0 = \int_{\Omega_2(t)} \nabla \phi_2 \cdot \nabla \psi_2 + \int_{\Gamma(t)} \partial_t d(\chi^{-1}, t) (\mathbf{n}_{t1})_y \psi_2 \quad \text{pour presque tout } t \in]0, T[. \quad (2.6)$$

Fonctions-tests pour les fluides

On choisit $\psi_i = \partial_t \phi_i$ comme fonction test. Afin de traiter le premier terme de (2.5) ou (2.6), nous rappelons la formule de REYNOLDS dans un cadre régulier (cf [Duv90] pages 25-26) :

Soient le domaine $\Omega(t)$ de normale extérieure unitaire \mathbf{n} et \mathbf{w} la vitesse de la frontière $\partial\Omega(t)$; pour une fonction α donnée, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \alpha(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} (\partial_t \alpha)(x, t) dx + \int_{\partial\Omega(t)} \alpha(y, t) \mathbf{w}(y, t) \cdot \mathbf{n} dy .$$

Utilisons cette formule avec $\alpha(x, t) = \frac{|\nabla \phi_i|^2}{2}$ dans le domaine $\Omega_i(t)$, il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i(t)} \nabla \phi_i \cdot \nabla (\partial_t \phi_i) dx &= \int_{\Omega_i(t)} \partial_t \left(\frac{|\nabla \phi_i|^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i(t)} \frac{|\nabla \phi_i|^2}{2} dx + (-1)^i \int_{\Gamma(t)} \frac{|\nabla \phi_i|^2}{2} (\partial_t d(\chi^{-1}(\xi, t), t)) (\mathbf{n}_{t1})_y d\xi \end{aligned} \quad (2.7)$$

car la vitesse du bord du domaine est nulle sur $\partial\Omega_i(t) - \Gamma(t)$, et uniquement transversale sur $\Gamma(t)$ et égale à $(0, \partial_t d(\chi^{-1}, t))$.

Remarque 25. La vitesse normale de convection du bord du domaine $\Omega_i(t)$ à l'interface,

$$(-1)^{i+1} (\partial_t d \circ \chi^{-1})(\mathbf{n}_{t1})_y, \text{ est précisément égale à } \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{t1} \text{ avec } \mathbf{n}_{t1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x d)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x d \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Traisons maintenant à l'aide de la formule de BERNOULLI le second terme commun à (2.5) et (2.6) :

$$\int_{\Gamma(t)} \partial_t d(\chi^{-1}, t) (\mathbf{n}_{t1})_y (-\partial_t \phi_i) = \int_{\Gamma(t)} \partial_t d(\chi^{-1}, t) (\mathbf{n}_{t1})_y \left(\frac{|\nabla \phi_i|^2}{2} + \frac{P_i - \beta_i}{\rho_i} \right) \quad (2.8)$$

Ainsi finalement, grâce à (2.7) et (2.8), les égalités (2.5) et (2.6) s'écrivent respectivement :

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_1(t)} |\nabla \phi_1|^2 \right) - \int_{\Gamma(t)} \partial_t d(\chi^{-1}, t) (\mathbf{n}_{t1})_y \left[\frac{\beta_1 - P_1}{\rho_1} \right] - \int_{\Gamma_{in}} g(\partial_t \phi_1) \quad (2.9)$$

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_2(t)} |\nabla \phi_2|^2 \right) + \int_{\Gamma(t)} \partial_t d(\chi^{-1}, t) (\mathbf{n}_{t1})_y \left[\frac{\beta_2 - P_2}{\rho_2} \right] \quad (2.10)$$

On a ainsi un bilan d'énergie pour chaque fluide séparément.

Fonction-test pour la structure

On prend simplement $b = \partial_t d(\cdot, t)$ comme fonction-test, qui est classique et légitime puisque $d(x, t) = 0$ au bord $\partial\gamma$ implique $\partial_t d(x, t) = 0$. On obtient l'estimation d'énergie pour la membrane seule :

$$\underbrace{\frac{\rho_s}{2} \frac{d}{dt} \int_{\gamma} |\partial_t d|^2}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{K \int_{\gamma} |\partial_t(\partial_x d)|^2}_{\text{Dissipation d'énergie (par visco-élasticité)}} + \underbrace{\frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\gamma} |\partial_x d|^2}_{\text{Énergie potentielle (par élongation de la membrane)}} = \int_{\gamma} (\mathbf{T}_{FL} \mathbf{n}_0)_y (\partial_t d) \quad (2.11)$$

2.3.2 Estimation d'énergie du système couplé global à deux cavités

On somme les bilans d'énergies de la membrane (2.11), du premier fluide (2.9), et du second fluide (2.10) :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_s}{2} \frac{d}{dt} \int_{\gamma} |\partial_t d|^2 + K \int_{\gamma} |\partial_t(\partial_x d)|^2 + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\gamma} |\partial_x d|^2 \\ & + \frac{1}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_1(t)} |\nabla \phi_1|^2 \right) + \frac{1}{2} \rho_2 \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_2(t)} |\nabla \phi_2|^2 \right) \\ & = \rho_1 \int_{\Gamma_{in}} g(\partial_t \phi_1) + \int_{\gamma} [(\mathbf{T}_{FL} \mathbf{n}_0)_y + ((\beta_1 - P_1) - (\beta_2 - P_2)) \circ \chi] (\mathbf{n}_0)_y (\partial_t d) \end{aligned} \quad (2.12)$$

en ayant réécrit en coordonnées lagrangiennes sur γ l'intégrale de bord sur l'interface $\Gamma(t)$. En tenant compte de la condition de couplage pour l'égalité des tenseurs des contraintes sur l'interface, cette dernière intégrale disparaît.

À partir de là, on définit l'énergie totale E_{Syst} du système pour tout $t \in [0, T]$:

$$E_{Syst}(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \rho_i \|\nabla \phi_i(t)\|_{L^2(\Omega_i(t))}^2}_{\text{Énergies cinétiques des fluides 1 et 2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho_s \|\partial_t d\|_{L^2(\gamma)}^2}_{\text{Énergie cinétique de la membrane}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma \|\partial_x d\|_{L^2(\gamma)}^2}_{\text{Énergie potentielle membranaire élastique}}$$

D'après ce qui précède, celle-ci vérifie l'égalité suivante :

$$\forall \tau \in [0, T], \quad \underbrace{\frac{d}{dt} E_{Syst}(\tau)}_{\text{Variation Énergie Totale}} = \underbrace{\rho_1 \int_{\Gamma_{in}} g(\partial_t \phi_1)}_{\text{Apport d'énergie}} - \underbrace{K \int_{\gamma} |\partial_x(\partial_t d)|^2}_{\text{Dissipation}}. \quad (2.13)$$

Remarque 26. Pour un système isolé, c'est-à-dire sans entrée de fluide ($g \equiv 0$), l'énergie totale $E_{Syst}(t)$ du système à chaque instant t est décroissante (strictement par exemple, dès que la vitesse initiale est non-nulle). Notons par ailleurs que le terme $K \int_{\gamma} |\partial_x(\partial_t d)|^2$ fait intervenir la raideur de la membrane : plus K est élevé, plus l'énergie se dissipe rapidement.

Si on intègre cette variation d'énergie totale entre $[t_0, t_1] \subset [0, T]$, on obtient :

$$E_{Syst}(t_1) = E_{Syst}(t_0) + \rho_1 \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} g \partial_t \phi_1 - K \int_{t_0}^{t_1} \int_{\gamma} |\partial_x(\partial_t d)|^2.$$

On peut exprimer le terme lié à l'injection de fluide de différentes façons :

1) soit par intégration par parties en temps :

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\partial_t \phi_1) = - \int_{t_0}^{t_1} (\partial_t g) \phi_1 + (g(t_1) \phi_1(t_1) - g(t_0) \phi_1(t_0)) \quad (2.14)$$

et en supposant qu'aux temps t_0 et t_1 il n'y a pas d'injection de fluide, $g(t_0) = g(t_1) = 0$ sur Γ_{in} , c'est alors la variation $\partial_t g$ du flux en entrée qui est mise en valeur.

2) soit en utilisant la formule de BERNOULLI sur Γ_{in} :

$$\int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} g \partial_t \phi_1 = \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} g \left(-\frac{|\nabla \phi_1|^2}{2} + \frac{\beta_1 - P_1}{\rho_1} \right);$$

si on fixe la fonction $\beta_1(t)$ telle que $(\beta_1 - P_1) < 0$ (par exemple avec une pression en aval plus faible dans le réservoir \mathcal{R}_1 par lequel s'échappe le fluide), puisque le flux g est lui aussi négatif (pour une entrée de fluide selon la normale extérieure), on voit que ce terme est positif, et apporte donc de l'énergie au système global. En effet, $\int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} g \left(\frac{\beta_1 - P_1}{\rho_1} \right)$ s'assimile à un travail de la pression entre l'entrée et la sortie de la cavité, tandis que $\int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} g \left(-\frac{|\nabla \phi_1|^2}{2} \right)$ est comparable au terme $\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma_{in}} \mathbf{u}^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$, issu des estimations d'énergie des équations de Navier-Stokes dans un cadre similaire, et qui s'interprète comme un flux d'énergie cinétique.

Finalement on obtient un encadrement de l'énergie totale du système à l'instant t_1 :

$$E_{Syst}(t_0) - K \int_{t_0}^{t_1} \int_{\gamma} |\partial_x(\partial_t d)|^2 \leq E_{Syst}(t_1) \leq E_{Syst}(t_0) + \rho_1 \int_{\Gamma_{in}} \int_{t_0}^{t_1} g(\partial_t \phi_1).$$

On constate ainsi que si g est nulle sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$, c'est-à-dire si le système est isolé, alors l'énergie est bornée uniformément sur $[t_0, t_1]$, ce qui est une étape préliminaire qui peut être exploitable pour montrer l'existence d'une solution au problème théorique.

Remarque 27. On possède une information supplémentaire sur g : le flux est conservatif. En effet, le fluide étant incompressible, on intègre les relations d'incompressibilité sur les vitesses $\text{div } \mathbf{u}_1 = 0$ sur $\Omega_1(t)$ et $\text{div } \mathbf{u}_2 = 0$ sur $\Omega_2(t)$ que l'on somme après intégrations par parties et ainsi à chaque instant :

$$\int_{\Gamma_{in}} (-g) = \int_{\Gamma_{0,1}} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \int_{\Gamma_{0,2}} \frac{\partial \phi_2}{\partial n}.$$

Tout le fluide entrant par Γ_{in} à chaque instant est égal à la somme des flux entrant et sortant par $\Gamma_{0,1}$ et $\Gamma_{0,2}$, et il n'y a pas de modification du volume global des fluides à l'intérieur de la cavité.

2.4 Algorithme et résultats numériques de la simulation du ventricule artificiel

2.4.1 Discrétisation des équations

Synthèse modale pour la structure

Le déplacement transversal de la membrane est régi par le système (2.1). Pour la discrétisation en espace, on utilise les N premiers vecteurs propres ψ_j de l'opérateur stationnaire de l'élasticité linéaire associé à notre problème, avec des conditions au bord de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 \psi_j = \lambda_j \psi_j & \text{dans } \gamma \\ \psi_j = 0 & \text{sur } \partial\gamma \end{cases} .$$

Ce qui, dans notre cas 1d, est facilement explicité (en notant $|\gamma|$ la longueur de γ) :

$$(\lambda_j, \psi_j(\xi)) = \left(\left(\frac{j\pi}{|\gamma|} \right)^2, \sin \left(\frac{j\pi\xi}{|\gamma|} \right) \right) .$$

En fait, numériquement, quelques modes propres suffisent ($N = 5$ par exemple) pour prendre en compte les basses fréquences et obtenir une simulation raisonnable de la membrane.

Pour la discrétisation en temps, on utilise un schéma aux différences finies stable de NEWMARK d'ordre 2.

Formulation ALE et éléments finis pour chaque fluide

La procédure principale est la même pour chacun des deux fluides. Seule la prise en compte des conditions aux bords change (par exemple à l'interface). De façon synthétique, nous avons donc à résoudre un laplacien avec différentes conditions aux limites sur un domaine $\Omega_n \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega(t_n)$ qui évolue en temps. Pour un temps t_n fixé, nous approchons le laplacien par une méthode d'éléments finis (P_1) sur une triangulation du domaine Ω_n donnant un maillage structuré.

Comme le domaine fluide est mobile, nous utilisons une formulation ALE (voir par exemple [Mau96] ou [MP96]) simplifiée. En effet, comme aucun opérateur en temps n'agit sur le potentiel dans le système (2.3), on n'a pas besoin de réécrire le système sur un domaine spatial différent, ni de faire intervenir la convection du domaine dans le système discrétisé. Il suffit de résoudre un laplacien à chaque instant dans un domaine fixé (Ω_n), domaine qui lui est convecté dans une autre étape du calcul.

Le maillage est mis à jour de la manière suivante. À partir du déplacement transversal de la membrane, un laplacien monodimensionnel dans la direction transverse est résolu pour déformer de manière répartie les points dans chaque "colonne" respective du maillage structuré (*cf* Figure 2.2). Ainsi l'élongation des mailles d'une même colonne est proportionnellement plus importante près de l'interface structure déformée que sur les bords rigides immobiles opposés.

Nous construisons la matrice éléments finis M du laplacien à partir du maillage déformé. La matrice obtenue est symétrique; elle est définie pourvu qu'il y ait au moins un sommet parmi les points du maillage qui rende compte d'une condition de type Dirichlet. Par ailleurs, les conditions de Dirichlet au bord sont imposées par une méthode de pénalisation des coefficients *ad hoc*. Pour inverser la matrice

M , nous employons une factorisation de CHOLESKY (en utilisant la structure de matrice-bande pour obtenir des gains de stockage).

Une fois obtenu le potentiel $\phi(\cdot, t_n)$, nous retrouvons la vitesse $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ de façon variationnelle. Pour cela, on note w_i la fonction chapeau scalaire (élément fini P_1 ici) associée au i -ième sommet du maillage ; et pour chaque couple (i, j) de sommets, on pose $\mathbf{W}_{ij} = w_i \mathbf{e}_x + w_j \mathbf{e}_y$, et on note \mathcal{W} la base formée par l'ensemble de ces fonctions vectorielles. On écrit alors :

$$\int_{\Omega_n} \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} = \int_{\Omega_n} \nabla \phi \cdot \mathbf{W}$$

avec \mathbf{W} un élément de $Vect(\mathcal{W})$ (l'espace vectoriel engendré par \mathcal{W}). En décomposant \mathbf{u} sur la base \mathcal{W} , on obtient pour le membre de gauche la matrice identité sur le maillage déformé. Tandis que pour le membre de droite, en décomposant $\nabla \phi$, on aura à calculer la matrice (en séparant les coordonnées en x et y) :

$$\left(\begin{array}{c|c} \int_{\Omega_n} (\nabla \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_k & 0 \\ \hline 0 & \int_{\Omega_n} (\nabla \mathbf{w}_j) \mathbf{w}_l \end{array} \right).$$

Une fois retrouvée la vitesse $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$, on calcule la pression $P(\cdot, t_n)$ à partir de l'identité de BERNOULLI, par l'équation scalaire discrétisée suivante :

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \frac{P^{n+1}}{\rho_i} + \frac{(\mathbf{u}^{n+1})^2}{2} = C(t_n) \quad \text{dans } \Omega_n$$

où l'on peut faire varier $C(t_n)$ pour créer des dépressions (cf Remarque 23 page 118 et Remarque 24 page 119).

Algorithme de couplage

Nous adoptons un algorithme de couplage dit *faible*, ou *décalé*, au sens où le problème des fluides et le problème de la structure sont résolus tour à tour à chaque itération en temps (et non simultanément).

Algorithme de résolution du système couplé

On note d^n le déplacement au temps t_n ; \mathcal{M}_i^n le maillage \mathcal{M}_i , ϕ_i^n le potentiel ϕ_i , P_i^n la pression P_i de la cavité $i \in \{1, 2\}$ au temps t_n . Voici l'algorithme que nous avons adopté :

1. d^{n-1} , d^n , \mathcal{M}_i^n , ϕ_i^n , P_i^n donnés au temps t_n .
2. Résolution de la structure : $\longrightarrow d^{n+1}$.
3. Calcul de la vitesse de déplacement de l'interface.
4. Mise à jour des maillages (par formulation ALE) : $\longrightarrow \mathcal{M}_i^{n+1}$.
5. Calculs des matrices de rigidité pour les laplaciens.
6. Résolution des potentiels avec les conditions aux bords : $\longrightarrow \phi_i^{n+1}$.
7. Calcul des pressions : $\longrightarrow P_i^{n+1}$.
8. Calcul des contraintes fluides au temps t_{n+1} .
9. $n := n + 1$, itération suivante (aller en (1)).

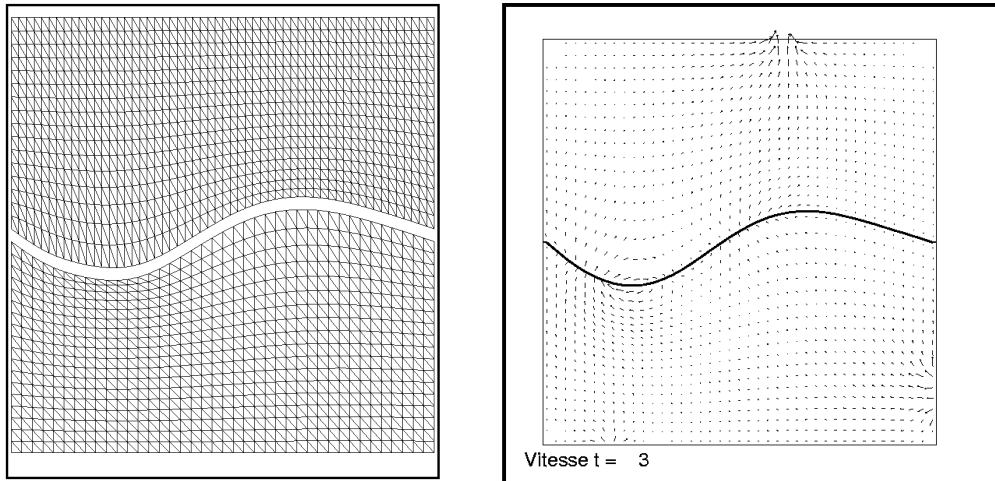


FIG. 2.2 – Maillage et vitesses au temps $t=3$.

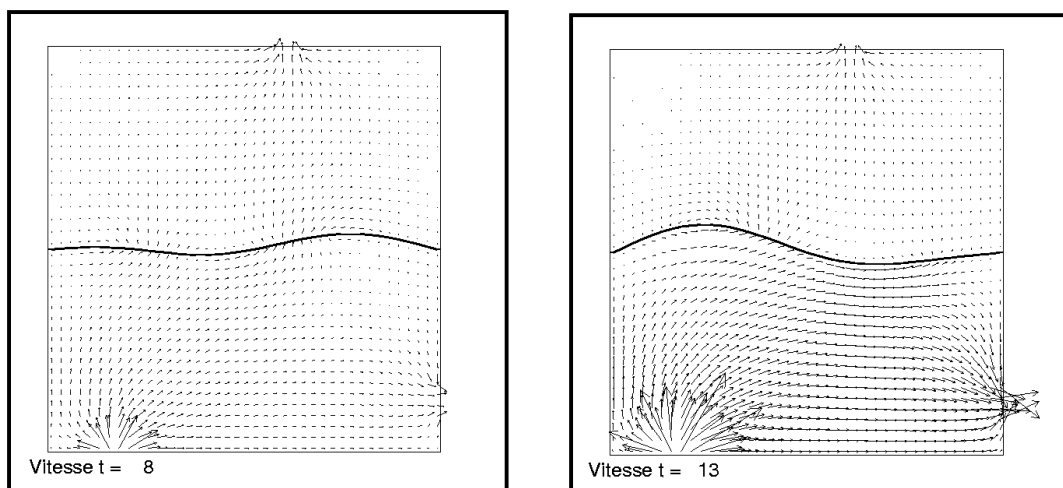


FIG. 2.3 – Vitesses aux temps $t=8$ et $t=13$.

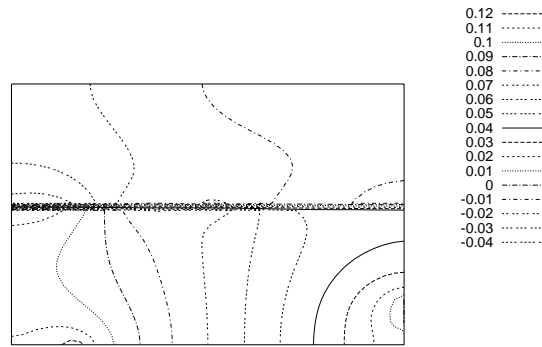


FIG. 2.4 – Isovaleurs de la pression au temps $t=8$.

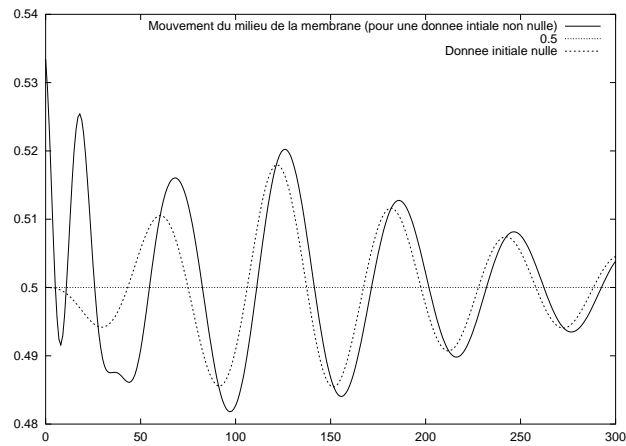


FIG. 2.5 – Évolution de la seconde composante du point milieu de la membrane avec et sans déplacement initial (avec la longueur d'un côté de la cavité égal à 1).

2.4.2 Résultats numériques

Nous considérons maintenant les figures 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 qui se rapportent au même cas test, avec en entrée de fluide une fonction de profil parabolique en espace et sinusoïdal en temps et qui s'annule pour $t \geq 150$. Les déplacements sont de l'ordre du vingtième des longueurs caractéristiques de la cavité.

Les figures 2.2 et 2.3 présentent des photographies du champ des vitesses à trois instants différents. La première (*cf* Figure 2.2), au temps $t = 3$, présente une injection de fluide dans la cavité 1 par l'ouverture libre $\Gamma_{0,1}$ due à la réaction de la membrane élastique par rapport à son état initial (déplacement non nul, mais vitesse initiale nulle); le fluide 1 commence à rentrer par Γ_{in} de façon forcée; le fluide 2 sort librement par $\Gamma_{0,2}$. Au temps $t = 8$ (*cf* Figure 2.3.a), l'injection est plus importante, si bien qu'elle implique la sortie du fluide par $\Gamma_{0,1}$; par ailleurs, la membrane répond à cette différence de pression et continue aussi de réagir par rapport à son écart initial à sa position d'équilibre. Au temps $t = 13$ (*cf* Figure 2.3.b), le fluide 1 est toujours dans sa phase d'injection (par Γ_{in}), et la membrane subit des efforts plus importants; la vitesse dans le fluide 1 continue d'augmenter (en particulier en sortie $\Gamma_{0,1}$); celle du fluide 2 reste sensiblement la même, car seules les vitesses normales sont "échangées" à l'interface $\Gamma(t)$.

La figure 2.4 représente les isovaleurs des pressions dans les deux cavités fluides à l'instant $t = 8$, coïncidant avec la figure 2.3.a des vitesses au même instant. Enfin, la figure 2.5 représente l'évolution en temps de l'écart (en ordonnée) du point milieu de la membrane par rapport à son niveau d'équilibre dans deux cas : avec ou sans déplacement initial. En particulier, la déformation suit bien la forme sinusoïdale qu'on impose en entrée pour le flux. Par ailleurs, le cas où la position initiale de la membrane n'est pas nulle "recolle" à celui où la position initiale est nulle après un certain temps à un décalage de phase près. Juste après l'arrêt de l'injection de fluide ($t \geq 150$), on observe une décroissance de la position de la membrane et asymptotiquement un retour à la position d'équilibre (qui est ici la position plane dans notre cas où l'on n'a pas créé de différence de pression entre les deux cavités et où l'on a pris les fonctions $\beta_i(t) \equiv 0$).

Paramètres numériques : les densités des fluides $:\rho_1 = \rho_2 = 1$; le triplet de constantes caractéristique de la membrane $(\rho_s, \sigma, K) = (10, 1.1, 0.15)$; le pas de temps $\Delta t = 0.1$; le nombre de modes propres $N_{mod} = 10$; la longueur et la largeur de la cavité $L = 1$; les fonctions $\beta_i \equiv 0$; les nombres de points pour les maillages des cavités fluides (qui peuvent être différents) : 779 et 697; l'amplitude de la fonction d'entrée est environ 2.

Collaboration

Ce travail sur le ventricule artificiel a été effectué en collaboration avec Yvon MADAY et Bertrand MAURY, et a fait l'objet d'un Proceeding ([MMM01]).

2.5 Modélisation du couplage d'un fluide potentiel et d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations

La déformation d'une structure élastique en grands déplacements et petites déformations apparaît dans de nombreux problèmes d'ingénierie tels qu'en automatisme (déplacements de bras mécaniques articulés), en aérodynamique (vol d'un avion en looping par exemple), ou encore en aérospatial (lancement de navettes avec leurs réservoirs de carburants). Dans ces deux derniers domaines en particulier, l'interaction avec le fluide extérieur (ici l'air) est une partie importante pour une modélisation réaliste du système physique.

On propose ci-dessous un modèle simplifié d'interaction fluide-structure couplant le modèle élastique en grands déplacements et petites déformations présenté auparavant avec un fluide potentiel (c'est-à-dire un fluide parfait modélisé par les équations d'EULER incompressibles, avec l'hypothèse supplémentaire que le fluide est irrotationnel). On renvoie au paragraphe 2.2.2 page 117 pour une discussion sur les fluides potentiels.

On présente le modèle simplifié suivant (*cf* Figure 2.6) avec ϕ le potentiel du fluide (*cf* paragraphe 2.2.2 page 117) dépendant du temps et du point \mathbf{x} du domaine fluide instationnaire $\Omega_F(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega_F(t) \times]0, T[; \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{imp} \times]0, T[; \quad \text{Paroi imperméable} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = (\partial_t \mathbf{u}) \circ \chi^{-1} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma(t) \times]0, T[; \quad \text{Interface mobile} \\ \phi = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[; \quad \text{Sortie libre} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = h & \text{sur } \Gamma_{in} \times]0, T[; \quad \text{Flux d'entrée} \end{array} \right.$$

avec \mathbf{u} le déplacement de la structure élastique qui est solution du système d'EDP présenté au Théorème 3 page 38, qu'on suppose suffisamment régulier, et par ailleurs avec $\chi(\xi, t) = \xi + \mathbf{u}(\xi, t)$ la déformation de la structure. L'application χ est une carte bijective permettant de passer de la configuration lagrangienne Ω (supposée aussi initiale) à la configuration $\Omega(t)$ de la structure à l'instant t . On ajoute la condition d'égalité des contraintes à l'interface mobile $\Gamma(t)$ suivante, écrite ici en coordonnées lagrangiennes :

$$\mathbf{g} = - \left[\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \partial_t\phi \right) \mathbf{n} \right] \circ \chi \quad \text{sur } \Gamma(0) \times (0, T). \quad (2.15)$$

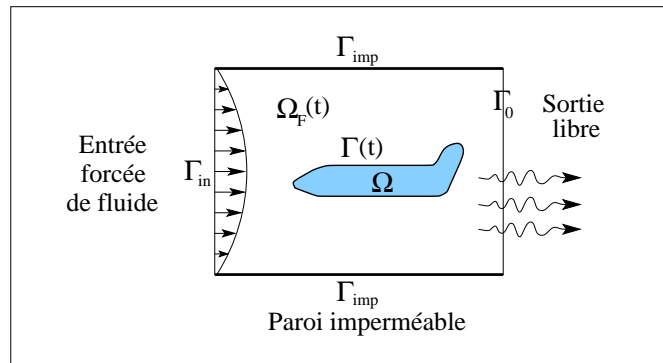


FIG. 2.6 – Configuration du modèle simplifié pour un problème d'interaction fluide-structure avec un fluide potentiel et une structure élastique en grands déplacements et petites déformations.

À l'aide des calculs détaillés au paragraphe 2.3.1 page 2.3.1, on obtient le bilan d'énergie suivant pour le fluide :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_F(t)} |\nabla \phi|^2 \right) = \int_{\Gamma_{in}} h \cdot \partial_t \phi + \int_{\Gamma(t)} \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \partial_t \phi \right).$$

De même pour la structure, on a d'après les estimations d'énergie sur le système en déplacement (cf (1.20) page 30) :

$$\frac{\rho_S}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\partial_t \mathbf{u}|^2 \right) + \frac{d}{dt} [\mathcal{W}(\mathbf{d})] = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} \mathbf{g} \cdot \partial_t \mathbf{u},$$

où on rappelle que \mathcal{W} est la densité d'énergie mécanique élastique, et \mathbf{f} les forces surfaciques extérieures (telles ici que la gravité : $\mathbf{f} = -9.81 \vec{e}_y$ par exemple), et \mathbf{g} les forces appliquées au bord dont l'expression est donnée en (2.15).

Pour le système global, on a donc, en sommant les bilans précédents :

$$\frac{\rho_S}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\partial_t \mathbf{u}|^2 \right) + \frac{d}{dt} [\mathcal{W}(\mathbf{d})] + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_F(t)} |\nabla \phi|^2 \right) = \int_{\Gamma_{in}} h \cdot \partial_t \phi + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}$$

et en ayant tenu compte de l'égalité des vitesses normales à l'interface ainsi que de l'égalité des contraintes à l'interface (cf (2.15)). Autrement dit, les variations des énergies cinétiques (du fluide et de la structure) et de l'énergie mécanique élastique interne à la structure sont égales aux travaux des forces extérieures (ici la gravité et la force d'injection de fluide).

Ce système présente donc un modèle simplifié raisonnable d'interaction fluide-structure faisant intervenir la déformation de la structure en grands déplacements et petites déformations.

Chapitre 3

Simulation du couplage fluide-structure de fluides visqueux et d'une structure élastique

Sommaire

3.1	Modélisation à l'aide de la méthode de la frontière immergée	133
3.1.1	Généralités. Cadre hémodynamique	133
3.1.2	Méthode de la frontière immergée	135
3.1.3	Choix de la fonction de forces structure	136
3.1.4	Approximations numériques de la mesure de Dirac	139
3.1.5	Contrainte supplémentaire de conservation de volume	142
3.2	Simulation Numérique Directe	145
3.2.1	Algorithme	145
3.2.2	Maillages	146
3.2.3	Paramètres σ_b , σ_s et σ_c	147
3.2.4	1er test : observation de la membrane collant à la paroi	150
3.2.5	2ème test : observation d'un cycle cardiaque	151
3.3	Simplification du modèle fluide-structure guidé par la conservation volumique	155
3.3.1	Motivation d'un modèle simplifié	155
3.3.2	Modèle simplifié	156
3.3.3	Condition de conservation volumique	157
3.3.4	Expression des forces structure et de leurs différentielles	157
3.3.5	Algorithme synthétique de simulation numérique directe	160
3.4	Une démarche de contrôle par feedback	160
3.4.1	Motivations	160
3.4.2	Objectif principal du contrôle du système	161
3.4.3	Système des perturbations	162
3.4.4	Système linéarisé des perturbations. Problème de contrôle	164
3.4.5	Semi-discrétisation temporelle du système linéarisé des perturbations	164
3.4.6	Discrétisation totale du système linéarisé des perturbations	165
3.4.7	Formulation Linéaire-Quadratique du problème de contrôle	167
3.4.8	Contrôle par feedback	170
3.4.9	Algorithme de calculs des matrices de gain de Kalman	171

3.4.10	Mise en œuvre du contrôle sur le système en vitesse-pression	176
3.5	Résultats numériques du contrôle par feedback du modèle fluide-structure simplifié	176
3.5.1	Cadre applicatif général des tests	176
3.5.2	Triplet (k_1, k_2, k_3) des différents tests	180
3.5.3	Algorithme de parallélisation du calcul des vecteurs de Kalman	180
3.5.4	Variantes d'application du contrôle	183
3.6	Conclusion. Perspectives	186

Introduction

Nous nous intéressons à un problème d'interaction fluide-structure appliqué à l'hémodynamique, et plus précisément concernant un ventricule artificiel. Notre approche est effectuée dans un cadre bidimensionnel. Nous modélisons le couplage fluide-structure à l'aide de la méthode de la frontière immergée. L'idée principale consiste à baigner la structure dans le fluide, et à modéliser les effets de cette structure sous forme d'une force appliquée sur le fluide, et agissant suivant un Dirac porté par la structure. Nous avons pour cela à détailler les termes de cette force, ainsi que des fonctions régularisées approchant le Dirac (utiles pour les calculs sur une interface discrète). Nous présentons ensuite des simulations numériques se rapportant à notre modèle. Dans un troisième temps, nous effectuons une démarche de contrôle optimal par injection de fluide : nous utilisons en particulier pour cela une technique de feedback.

3.1 Modélisation à l'aide de la méthode de la frontière immergée

3.1.1 Généralités. Cadre hémodynamique

Nous nous intéressons à un problème d'interaction fluide-structure bidimensionnel appliqué à l'hémodynamique, et plus précisément concernant un ventricule artificiel. Ce dernier, d'enveloppe extérieure indéformable, est constitué de deux cavités (dont les géométries dépendent du temps) hermétiquement séparées par une membrane élastique (*cf* Figure 3.1). Nous dénotons par Ω l'ouvert borné constituant l'intérieur du ventricule, et par $\Omega_i(t)$, $i = 1, 2$, chacune des cavités dépendant du temps. L'interface élastique entre les deux cavités est notée $\Gamma(t)$. Nous avons ainsi à chaque instant $t \in (0, T)$ l'égalité ensembliste : $\Omega = \Omega_1(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_2(t)$. La première cavité $\Omega_1(t)$ contient un fluide huileux accessoire dont l'injection forcée permet d'agir sur la pression et le volume de ce premier domaine (dépendant du temps). La seconde cavité $\Omega_2(t)$ contient quant à elle du sang, qui peut éventuellement s'écouler librement hors de la poche à travers une porte (exclusivement ouverte ou fermée) ; ce fluide est néanmoins esclave du premier (huileux) dans le sens où son volume est lié à celui de la première cavité (*cf* Figure 3.1).

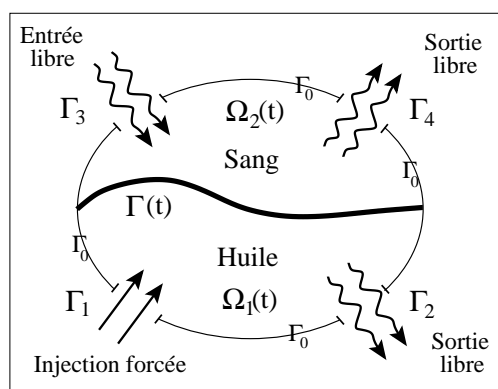


FIG. 3.1 – Géométrie de la configuration. Les portes Γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sont chacune exclusivement soit ouverte, soit fermée.

En première approximation, les deux fluides (huile et sang) sont modélisés par un seul et même

fluide⁴¹ visqueux newtonien régi par les équations de NAVIER-STOKES incompressibles :

$$\begin{cases} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \times (0, T) \end{cases}$$

avec \mathbf{u} la vitesse du fluide, p sa pression, ρ_F sa densité volumique, et ν sa viscosité ; les forces extérieures sont notées \mathbf{F} .

Le bord Γ_0 est imperméable, c'est pourquoi nous considérons :

$$\mathbf{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T).$$

Quant aux quatre portes, Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , et Γ_4 , elles sont activées au choix en position exclusivement ouverte ou fermée, de manière cyclique ou suivant un seuil de pression. Nous distinguons deux phases dans l'activité ventriculaire, et par conséquent, nous les modélisons de deux manières différentes : cf Figure 3.2.

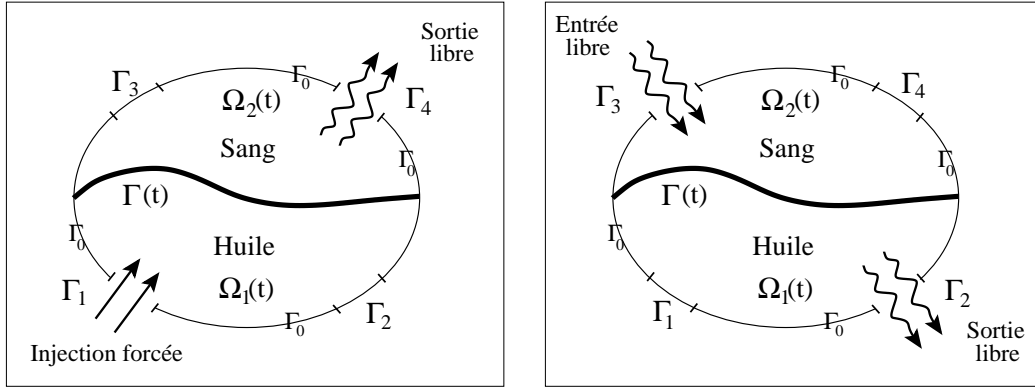


FIG. 3.2 – Configurations des phases 1 et 2.

- Pour la première phase, nous prenons :

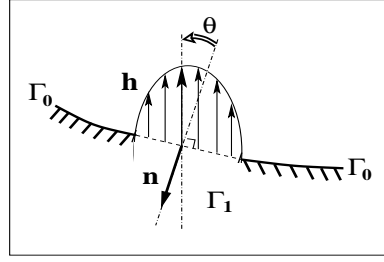
$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_1 \text{ porte ouverte :} & \text{injection forcée de fluide (huile)} \\ & \mathbf{u} = \mathbf{h} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \Gamma_2 \text{ et } \Gamma_3 \text{ portes fermées :} & \text{imperméabilité} \\ & \mathbf{u} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \times (0, T) \\ \Gamma_4 \text{ porte ouverte :} & \text{sortie libre du fluide (sang)} \\ & \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_4 \times (0, T) \end{array} \right.$$

avec \mathbf{h} l'injection de fluide orientée suivant un angle θ commandable par rapport à la normale unitaire extérieure \mathbf{n} (cf Figure 3.3). Autrement dit, nous avons l'expression suivante :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = -|\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)| R_{\theta(t)} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T)$$

avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation d'angle θ (dépendant du temps).

⁴¹Dans le ventricule artificiel que nous considérons, les densités du sang et de l'huile en question sont sensiblement les mêmes en pratique. L'hypothèse sur les densités que nous effectuons semble donc assez raisonnable.


 FIG. 3.3 – Injection orientée de fluide d'un angle θ par rapport à la normale.

- Pour la seconde phase, nous prenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_4 \text{ portes fermées : } \text{imperméabilité} \\ \Gamma_2 \text{ porte ouverte : } \text{sortie libre du fluide (huile)} \\ \Gamma_3 \text{ porte ouverte : } \text{entrée libre de fluide (sang)} \\ \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p\mathbf{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \times (0, T). \end{array} \right. \quad \mathbf{u} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4 \times (0, T)$$

Il ne reste maintenant plus qu'à modéliser la structure élastique ainsi que les conditions de couplage entre les fluides et la structure. Nous détaillons ceci dans les paragraphes suivants introduisant la méthode de la frontière immergée pour notre problème.

Remarque 28. *Le bilan des tenseurs des contraintes selon la normale à la paroi justifie l'identité :*

$$\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p\mathbf{n} = (\nu \nabla \mathbf{u} - pI_2)\mathbf{n} = \vec{0}$$

choisie pour modéliser les conditions d'entrée ou de sortie libre. En effet, le tenseur des contraintes fluides $\mathbf{T} = (\nu \nabla \mathbf{u} - pI_2)$ n'a aucune opposition extérieure. Le principe d'action-réaction impose donc la condition $\mathbf{T}\mathbf{n} = \vec{0}$ sur le bord en question.

3.1.2 Méthode de la frontière immergée

La méthode de la frontière immergée a été introduite par PESKIN au début des années 1970 (cf [Pes72], [Pes77]) pour des problèmes d'interaction fluide-structure en hémodynamique. L'auteur a développé cette méthode afin de faciliter la mise en œuvre des simulations numériques directes d'un cœur dans son ensemble, tout d'abord de façon bidimensionnelle (cf [Pes77]), puis tridimensionnelle (cf [PM89a], [PM89b]). Depuis, cette méthode a été employée dans des domaines variés, comme par exemple l'industrie papetière (cf [SG98]) pour la simulation du mouvement des fibres de pulpe du bois dans la confection du papier.

La méthode de la frontière immergée est utilisée lors de la modélisation de problèmes d'interaction fluide-structure. L'idée principale consiste à baigner la structure dans le fluide, et à modéliser les effets de cette structure sous forme d'une force appliquée \mathbf{F} sur le fluide, et agissant suivant un Dirac porté par la structure. Les équations de fluide sont alors résolues dans le domaine fluide dans son ensemble ainsi que dans la structure : dans notre cas, dans $\Omega_1(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_2(t) \times (0, T)$.

Ainsi, la méthode ne fait pas intervenir la résolution classique d'équations pour la structure ; il s'agit de calculer des forces induites par la structure et par ailleurs de mettre à jour la position de l'interface. Ces calculs étant d'un coût moindre à celui des résolutions classiques de certains systèmes structure, un des intérêts de la méthode est un gain important de calculs dans les simulations numériques. Les

difficultés résident néanmoins d'une part dans un choix adapté de la fonction de forces \mathbf{F} , et d'autre part dans une approximation numérique consistante des Diracs.

3.1.3 Choix de la fonction de forces structure

Les forces de la structure agissant sur le fluide s'écrivent de la manière suivante sous forme intégrale, pour $\mathbf{x} \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$ et $t \in (0, T)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma(t)} \mathbf{f}(s, t) \delta(\mathbf{x} - X(s, t)) ds, \quad (3.1)$$

où s est une paramétrisation de la structure $\Gamma(t)$, dont la position est donnée à l'instant t par $X(s, t)$; nous dénotons la mesure de Dirac par :

$$\delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\mathbf{y} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{y} = \vec{0}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par \mathbf{f} la densité de la force structure dont nous allons détailler l'expression.

Nous considérons que la structure élastique est constituée de $N \in \mathbb{N}^*$ fibres (cf Figure 3.4), notées F_i , $1 \leq i \leq N$, avec $N \geq 10$ pour fixer les idées. Chaque fibre F_i , $i = 1, \dots, N$, peut être consi-

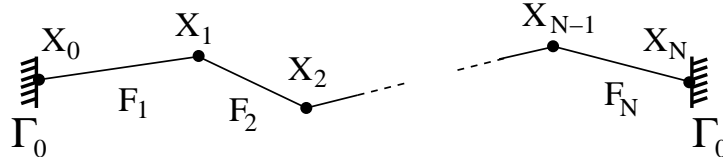


FIG. 3.4 – Constitution de la structure élastique en une suite de fibres.

dérée comme un ressort représenté par un segment de longueur r_i dans sa configuration au repos sans contraintes, et qui joint deux points X_{i-1} et X_i . Pour $i = 2, \dots, N - 1$, une fibre F_i peut effectuer librement avec sa voisine immédiate F_{i-1} (respectivement F_{i+1}) une rotation d'angle $\theta_{i-1} = \text{angle}(\overrightarrow{X_{i-2}X_{i-1}}, \overrightarrow{X_{i-1}X_i})$ autour du point X_{i-1} (resp. une rotation d'angle $\theta_i = \text{angle}(\overrightarrow{X_{i-1}X_i}, \overrightarrow{X_iX_{i+1}})$ autour du point X_i); nous considérons un angle ω_i de référence entre les fibres F_i et F_{i+1} (cf Figure 3.5). La fibre F_1 (resp. F_N) possède quant à elle une extrémité fixe X_0 (resp. X_N) reliée à Γ_0 , autour de laquelle elle peut néanmoins tourner. Les fibres sont non-pesantes et considérées comme neutres du point de vue de la flottaison (autrement dit, la densité de la structure est égale à celle du fluide).

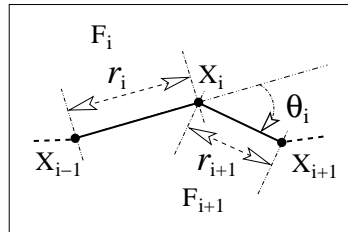


FIG. 3.5 – Lien entre de fibres pour $1 \leq i \leq N - 1$. Paramètre de longueur r_i , et angle θ_i .

Nous pouvons à présent donner les différents termes de l'expression de la densité de force \mathbf{f} , dont chacune des composantes est issue d'un potentiel.

Composante liée à l'élongation de chaque fibre F_i

Cette contribution tend à ramener chaque fibre F_i de longueur instantanée $|F_i| = |X_i - X_{i-1}|$ à sa longueur de référence r_i sans contraintes. Le potentiel de la force d'élongation est le suivant :

$$\mathcal{P}_s = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{i=1}^N (|F_i| - r_i)^2$$

avec σ_s le coefficient de rigidité d'élongation (*stretching stiffness* en anglais). La densité de force $\mathbf{f}_{s,\ell}$ de résistance «élastique» en chaque point X_ℓ est donnée par :

$$\forall 0 \leq \ell \leq N, \quad \mathbf{f}_{s,\ell} = -\frac{\partial \mathcal{P}_s}{\partial X_\ell}.$$

Pour le cas $1 \leq \ell \leq N - 1$, nous avons en particulier :

$$\mathbf{f}_{s,\ell} = -\frac{\sigma_s}{2} \frac{\partial}{\partial X_\ell} \left[(|F_\ell| - r_\ell)^2 + (|F_{\ell+1}| - r_{\ell+1})^2 \right];$$

et par ailleurs :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq \ell \leq N, \quad \frac{\partial}{\partial X_\ell} (|F_\ell|) &= \frac{\partial}{\partial X_\ell} (|X_\ell - X_{\ell-1}|) = \frac{X_\ell - X_{\ell-1}}{|F_\ell|} \\ \text{et } \forall 0 \leq \ell \leq N - 1, \quad \frac{\partial}{\partial X_\ell} (|F_{\ell+1}|) &= \frac{\partial}{\partial X_\ell} (|X_{\ell+1} - X_\ell|) = -\frac{X_{\ell+1} - X_\ell}{|F_{\ell+1}|}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons aisément l'expression suivante :

$$\mathbf{f}_{s,\ell} = \begin{cases} -\sigma_s (|F_1| - r_1) \frac{X_0 - X_1}{|F_1|} & \text{si } \ell = 0, \\ \sigma_s (|F_\ell| - r_\ell) \frac{X_{\ell-1} - X_\ell}{|F_\ell|} - \sigma_s (|F_{\ell+1}| - r_{\ell+1}) \frac{X_\ell - X_{\ell+1}}{|F_{\ell+1}|} & \text{si } 1 \leq \ell \leq N - 1, \\ \sigma_s (|F_N| - r_N) \frac{X_{N-1} - X_N}{|F_N|} & \text{si } \ell = N. \end{cases}$$

Composante liée à la torsion entre deux fibres

De la même manière que précédemment, nous considérons une force qui tend à ramener l'angle instantané $\theta_i = \text{angle}(F_i, F_{i+1})$ vers l'angle d'équilibre ω_i de référence. Pour les vecteurs de \mathbb{R}^2 , nous notons \wedge le produit vectoriel et nous définissons l'opérateur $^\perp$ par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Nous avons en particulier les relations suivantes :

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}^\perp \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\perp.$$

Nous introduisons d'autre part les quantités scalaires suivantes :

$$\forall 1 \leq i \leq N - 1, \quad B_i = B_i(X_{i-1}, X_i, X_{i+1}) = (X_i - X_{i-1}) \wedge (X_{i+1} - X_i) - r_i r_{i+1} \sin \omega_i;$$

chacune d'entre elles mesure en quelque sorte les défauts de rotation et d'élongation dus à la torsion au point X_i ; la quantité $\sin \omega_i / r_i$ est d'ailleurs liée à la courbure. Par exemple, le cas $\forall i, \omega_i = 0$ traduit le modèle d'une corde raide.

Ainsi, le potentiel de force de torsion (*bending* en anglais) est le suivant :

$$\mathcal{P}_b = \frac{\sigma_b}{2} \sum_{i=1}^{N-1} [(X_i - X_{i-1}) \wedge (X_{i+1} - X_i) - r_i r_{i+1} \sin \omega_i]^2 = \frac{\sigma_b}{2} \sum_{i=1}^{N-1} B_i^2,$$

avec σ_b un coefficient strictement positif. La densité de force $\mathbf{f}_{b,\ell}$ de résistance à la torsion en chaque point X_ℓ est donnée par :

$$\mathbf{f}_{b,\ell} = -\frac{\partial \mathcal{P}_b}{\partial X_\ell}.$$

Or nous avons aisément pour $1 \leq \ell \leq N-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\ell}{\partial X_{\ell-1}} &= (X_{\ell+1} - X_\ell)^\perp, \\ \frac{\partial B_\ell}{\partial X_\ell} &= -(X_\ell - X_{\ell-1})^\perp - (X_{\ell+1} - X_\ell)^\perp = (X_{\ell-1} - X_{\ell+1})^\perp, \\ \frac{\partial B_\ell}{\partial X_{\ell+1}} &= (X_\ell - X_{\ell-1})^\perp. \end{aligned}$$

Nous présentons ainsi les expressions détaillées de la densité de force, en distinguant $\ell = 0$ ou 1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{b,0} &= -\frac{\sigma_b}{2} \frac{\partial B_1^2}{\partial X_0} = -\sigma_b B_1 (X_2 - X_1)^\perp \\ \mathbf{f}_{b,1} &= -\frac{\sigma_b}{2} \left(\frac{\partial B_1^2}{\partial X_1} + \frac{\partial B_2^2}{\partial X_1} \right) = -\sigma_b B_1 (X_0 - X_2)^\perp - \sigma_b B_2 (X_3 - X_2)^\perp, \end{aligned}$$

puis pour $2 \leq \ell \leq N-2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{b,\ell} &= -\frac{\sigma_b}{2} \left(\frac{\partial B_{\ell-1}^2}{\partial X_\ell} + \frac{\partial B_\ell^2}{\partial X_\ell} + \frac{\partial B_{\ell+1}^2}{\partial X_\ell} \right) \\ &= -\sigma_b B_{\ell-1} (X_{\ell-1} - X_{\ell-2})^\perp - \sigma_b B_\ell (X_{\ell-1} - X_{\ell+1})^\perp - \sigma_b B_{\ell+1} (X_{\ell+2} - X_{\ell+1})^\perp, \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{b,N-1} &= -\frac{\sigma_b}{2} \left(\frac{\partial B_{N-2}^2}{\partial X_{N-1}} + \frac{\partial B_{N-1}^2}{\partial X_{N-1}} \right) = -\sigma_b B_{N-2} (X_{N-2} - X_{N-3})^\perp - \sigma_b B_{N-1} (X_{N-2} - X_N)^\perp \\ \mathbf{f}_{b,N} &= -\frac{\sigma_b}{2} \frac{\partial B_{N-1}^2}{\partial X_N} = -\sigma_b B_{N-1} (X_{N-1} - X_{N-2})^\perp. \end{aligned}$$

Composante liée aux extrémités encastrees de la membrane

Nous introduisons enfin une densité de force liée à l'encastrement des points X_0 et X_N . Nous considérons leurs positions de référence et initiales respectives $X_0(t=0)$ et $X_N(t=0)$ fixées. Le potentiel d'encastrement (*clamp* en anglais) est le suivant :

$$\mathcal{P}_c = \frac{\sigma_c}{2} [(X_0 - X_0(t=0))^2 + (X_N - X_N(t=0))^2],$$

avec $\sigma_c > 0$ un paramètre. La force d'encastrement $\mathbf{f}_{c,\ell}$ au point X_ℓ , $0 \leq \ell \leq N$, est obtenue par :

$$\mathbf{f}_{c,\ell} = -\frac{\partial \mathcal{P}_c}{\partial X_\ell} = \begin{cases} \sigma_c (X_0(t=0) - X_0) & \text{si } \ell = 0, \\ \vec{0} & \text{si } \ell \notin \{0, N\}, \\ \sigma_c (X_N(t=0) - X_N) & \text{si } \ell = N. \end{cases}$$

Expression de la densité de force structure

Finalement, la densité de force structure \mathbf{f} est définie de manière discrète en donnant sa valeur en chaque sommet X_ℓ , et s'écrit comme la somme des trois contributions précédentes :

$$\forall 0 \leq \ell \leq N, \quad \mathbf{f}(X_\ell) = \mathbf{f}_\ell = \mathbf{f}_{s,\ell} + \mathbf{f}_{b,\ell} + \mathbf{f}_{c,\ell}.$$

3.1.4 Approximations numériques de la mesure de Dirac

Utilisations de la mesure de Dirac

La mesure de Dirac intervient essentiellement dans deux étapes distinctes de l'algorithme de mise en œuvre :

1. dans l'expression des forces structure exercées sur le fluide.
Au niveau des dimensions des variables d'espace : passage du 0d (la densité de force structure est définie de manière discrète suivant $N + 1$ points) au 2d (le domaine fluide est bidimensionnel).
2. dans le déplacement de la membrane à partir de la vitesse fluide.
Au niveau des dimensions des variables d'espace : passage du 2d (la vitesse fluide est définie sur un domaine bidimensionnel) au 1d (l'interface est filiforme).

La première de ces étapes traduit le bilan d'action-réaction à l'interface, et doit imposer la conservation des forces. La seconde traduit la condition cinématique : la membrane baignant dans le fluide, elle doit se déplacer à la même vitesse que celui-ci (continuité des vitesses de part et d'autre de l'interface, et égalité avec celle de l'interface membranaire).

Modèle de discrétisation issue de la méthode de la frontière immergée

La méthode de la frontière immergée est habituellement utilisée sur un maillage structuré cartésien carré (en 2d) ou cubique (en 3d) tensorisé selon les directions de l'espace. La méthode des différences finies (pour la discrétisation en espace) y est alors implémentable de manière naturelle⁴². Il est alors possible d'utiliser une seule formule pour la fonction régularisée approximant la mesure de Dirac discrète, notée δ_h , avec h un paramètre de discrétisation spatiale (de l'ordre de la longueur d'une maille d'un élément fini)⁴³, pour les deux étapes précédemment identifiées (bilans cinématique et d'action-réaction).

Dans la méthode de la frontière immergée, PESKIN propose une construction de δ_h qui doit satisfaire à plusieurs conditions :

1. la continuité de la fonction d'approximation : pour éviter les sauts au niveau de la vitesse de la fibre, ou dans les forces structures ;
2. un support compact de cette même fonction : pour limiter le coût des calculs ;
3. l'interpolation exacte des applications linéaires : pour conserver entre autres le premier moment et le moment angulaire dans le bilan des forces sur l'interface ;
4. limiter l'interaction de chaque point de la membrane vis-à-vis d'un point adjacent par rapport à sa propre interaction avec lui-même ;

⁴²L'utilisation d'un maillage structuré permet de plus d'employer une méthode de Transformée de Fourier Rapide (*FFT* en anglais) dans le but de diminuer encore les calculs.

⁴³Dans un maillage structuré, h est égal à la longueur d'une maille. Dans notre cas, où le maillage est non-structuré, h est un paramètre local en espace ; δ_h est une notation générique pour le Dirac discret. Notons que dans ce cas, le Dirac discret autour du point X_i^n est en général différent de celui construit autour du point X_j^n , $0 \leq i \neq j \leq N$ (les supports étant généralement différents).

5. que l'action d'un point de la structure soit indépendant de sa position dans le maillage fluide.

Ces conditions permettent sur un maillage structuré d'assurer certains points de consistance dans la discrétisation (d'une part pour le couplage lui-même, et d'autre part, par rapport à la discrétisation de certains opérateurs du système fluide). L'ensemble des conditions précédentes permet par ailleurs, lorsque δ_h est construit de façon tensorisée suivant les directions de l'espace, de déterminer δ_h de façon unique à partir d'une fonction à une variable monodimensionnelle.

De plus, c'est le même Dirac δ_h qui est utilisé lors de la discrétisation des vitesses et des forces. Nous employons quant à nous deux méthodes différentes, et surtout sur un maillage non-structuré.

Discrétisation utilisée

• **Emploi d'un maillage non-structuré** Lorsque PESKIN a mis au point la méthode de la frontière immergée au début des années 1970, les ordinateurs étaient limités par la taille-mémoire ainsi que par le temps d'exécution des tâches. L'utilisation d'un maillage cartésien, et celle de la méthode des différences finies (pour la discrétisation en espace), combinées à une FFT, étaient alors nécessaires pour l'obtention de résultats raisonnables en temps de calculs et en espace-mémoire.

De nos jours⁴⁴, les ordinateurs n'imposent plus ces mêmes contraintes, et ces choix d'origine historique peuvent être remis en question.

Par ailleurs, afin de traiter les problèmes dans des géométries complexes, l'emploi d'un maillage structuré semble plus adapté. Dans notre cas, l'enveloppe extérieure elliptique de la cavité du ventricule artificiel n'a pas besoin d'être immergée dans le fluide : il est donc plus pratique de la mailler indépendamment d'un maillage cartésien. De plus, seule l'interface mobile baignée entre les deux cavités fluide est traitée par la méthode de la frontière immergée.

Ainsi, nous avons finalement choisi de discrétiser le problème fluide continu par une méthode d'éléments finis P_2 sur un maillage non-structuré.

Nous introduisons à présent les deux types de discrétisation que nous utilisons pour les fonctions Diracs régularisées : l'un pour la condition cinématique, l'autre pour la condition d'action-réaction.

• **Choix du Dirac discrétisé pour la condition cinématique** Nous abordons la discrétisation de la condition continue de non-glisement :

$$\frac{dX}{dt} = \mathbf{u}(X, t) = \int_{\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - X) d\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

qui traduit la continuité du champs des vitesses à travers la frontière immergée. En effet, la structure étant immergée dans le fluide (et neutre du point de vue de la flottaison), le bilan cinématique à l'interface avec le fluide visqueux se traduit par l'égalité des vitesses de ces deux milieux. Dans [Pes77], l'auteur propose la discrétisation naturelle suivante :

$$\forall 0 \leq \ell \leq N, \quad \frac{dX_\ell}{dt} = \sum_{i,j} h^2 \mathbf{u}_{i,j}(t) \delta_h^{(i,j)}(X_\ell),$$

somme $\sum_{i,j}$ sur les sommets du maillage cartésien avec $\mathbf{u}_{i,j}$ la vitesse fluide au sommet (i, j) , et avec le noyau régularisé $\delta_h^{(i,j)}(X_\ell)$ correspondant à une approximation de $\delta(\mathbf{x} - X_\ell)$, et qui est pris au sommet (i, j) . De façon discrète, il s'agit d'une somme finie des vitesses fluides pondérées (par un poids proportionnel à la distance à X_ℓ , poids qui dépend aussi de l'aire h^2 d'un élément, et du choix de

⁴⁴En Octobre 2002.

la discrétisation du noyau $\delta_h^{(i,j)}(X_\ell)$ prises au sommet du maillage fluide⁴⁵. Dans notre cas, pour X_ℓ fixé, nous supposons le support du noyau associé assez petit pour que $\mathbf{u}(X_\ell, t)$, vitesse fluide interpolée au point X_ℓ , soit une bonne approximation des vitesses fluides des éléments dans le support du noyau. Ainsi, nous sommes ramenés à :

$$\frac{dX_\ell}{dt} = \mathbf{u}(X_\ell, t),$$

sans avoir à utiliser de fonction de Dirac régularisée. En notant maintenant $X_\ell^n = X_\ell(t^n)$ et $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+1})$, nous semi-discrétisons la relation précédente par :

$$\forall 0 \leq \ell \leq N, \quad \frac{X_\ell^{n+1} - X_\ell^n}{\Delta t} = \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n). \quad (3.3)$$

• **Choix du Dirac discrétisé pour la condition d'action-réaction** Les forces structures \mathbf{F} agissant sur le fluide, dont l'expression en continue est donnée par (3.1) page 136, sont discrétisées suivant les sommets des fibres de la membrane. Dans [Pes77], l'expression naturelle de la discrétisation est (avec les notations introduites précédemment) à un sommet (i, j) du maillage cartésien :

$$\mathbf{F}_{i,j} = \frac{|\Gamma(0)|}{N} \sum_{\ell=0}^N \mathbf{f}_\ell \delta_h^{(i,j)}(X_\ell). \quad (3.4)$$

Nous adaptons cette formule dans notre cadre de maillage non-structuré en suivant la démarche de PESKIN. Néanmoins, notre implémentation numérique avec le logiciel⁴⁶ FREEFEM++ demande une adaptation particulière supplémentaire pour éviter un certain surcoût de calculs (notamment lié aux sommes du type de celle présentée en (3.4)). Les fonctions éléments finis sont définies sur le maillage non-structuré fluide (voir un exemple à la Figure 3.7.b page 146), et la somme⁴⁷ de telles fonctions est coûteuse dans le sens où même pour des fonctions à support (petit) localisé, les opérations sont effectuées sur la totalité du maillage. Afin de diminuer le nombre d'opérations, nous utilisons un maillage structuré local autour de la structure (cf Figure 3.7.a page 146), noté \mathcal{M}_{loc} , et nous créons un nouvel espace fonctionnel d'éléments finis \mathcal{F}_{loc} sur ce maillage structuré restreint \mathcal{M}_{loc} : les opérations sur les nouvelles fonctions sont alors nettement moins nombreuses que pour les fonctions définies sur le maillage fluide (non-structuré) global. Par ailleurs, comme la position de la membrane dépend du temps, nous imposons que ce maillage \mathcal{M}_{loc} se déforme en suivant le mouvement de la membrane⁴⁸. Nous devons donc à chaque instant t^n reconstruire l'espace \mathcal{F}_{loc} pour calculer les nouvelles forces issues de la structure (la construction de \mathcal{F}_{loc} au temps t^n étant d'un coût marginal). Une fois les opérations effectuées dans \mathcal{F}_{loc} , les fonctions résultantes sont interpolées sur le maillage global en prolongeant de plus par 0 hors de la bande décrite par le maillage \mathcal{M}_{loc} .

De retour au calcul des forces structures, et à l'application de la méthode de la frontière immergée, nous fixons l'instant t^n , le maillage local \mathcal{M}_{loc} autour de la structure et l'espace fonctionnel \mathcal{F}_{loc} ad

⁴⁵La somme des pondérations est nécessairement égale à 1, par construction du Dirac de façon tensorisée suivant les directions de l'espace : voir plus loin la construction de la fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (qui est d'intégrale égale à 1 sur \mathbb{R}).

⁴⁶Pour le logiciel FREEFEM++, voir <http://www.freefem.org> ou <http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/freefem++.htm>. En particulier, FREEFEM++ est un logiciel libre dont le code-source est accessible, et téléchargeable gratuitement sur internet.

⁴⁷Dans le langage FREEFEM++, une fonction éléments finis \mathbf{f} est entièrement définie par le tableau $\mathbf{f}[]$ de ses valeurs aux degrés de liberté (comme dans la théorie des éléments finis). La fonction \mathbf{f} est construite à partir de $\mathbf{f}[]$ par un algorithme d'interpolation ; ainsi la somme de fonctions $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ est plus "coûteuse" que la somme des tableaux $\mathbf{f}[] + \mathbf{g}[]$. Nous choisissons évidemment la solution la moins "chère", mais nous gardons le langage fonctionnel pour simplifier l'exposé.

⁴⁸Les lignes du maillage structuré \mathcal{M}_{loc} sont des translattées de la ligne brisée que forme la membrane discrète.

hoc. Nous adaptons la formule (3.4) à notre cas :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{|\Gamma(0)|}{N} \sum_{\ell=0}^N \mathbf{f}_\ell \delta_h^\ell(X_\ell - \mathbf{x}), \quad (3.5)$$

avec δ_h^ℓ le noyau discret associé au Dirac, dont nous allons préciser l'expression. Nous considérons $\tilde{\delta}_h$, une fonction tensorisée suivant les directions de l'espace, définie par :

$$\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\delta}_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^2} \Phi\left(\frac{x}{h}\right) \Phi\left(\frac{y}{h}\right).$$

Nous employons la fonction de forme Φ (cf Figure 3.6) prescrite par PESKIN pour une approximation régulière du Dirac (pour satisfaire les conditions précédemment citées au début de cette sous-section 3.1.4) :

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right) & \text{si } |r| \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \Phi(2 - |r|) & \text{si } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < |r|. \end{cases} \quad (3.6)$$

Néanmoins⁴⁹, la fonction $\tilde{\delta}_h$ n'étant pas d'intégrale 1 sur \mathbb{R}^2 , nous avons besoin de la normaliser

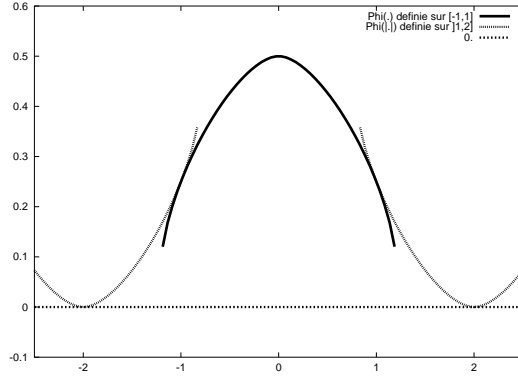


FIG. 3.6 – Fonction Φ définie sur les différents intervalles.

«autour du point X_ℓ où elle est centrée», afin d'utiliser un noyau régularisé du Dirac dont le poids total est 1 :

$$\forall X_\ell = \begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_h^\ell(X_\ell - \mathbf{x}) = \frac{\tilde{\delta}_h(X_\ell - \mathbf{x})}{\int_{\mathcal{M}_{loc}} \tilde{\delta}_h(X_\ell - \mathbf{x}) d\mathbf{x}} = \frac{\Phi\left(\frac{x_\ell - x}{h}\right) \Phi\left(\frac{y_\ell - y}{h}\right)}{\int_{\mathcal{M}_{loc}} \Phi\left(\frac{x_\ell - x}{h}\right) \Phi\left(\frac{y_\ell - y}{h}\right) dx dy}. \quad (3.7)$$

3.1.5 Contrainte supplémentaire de conservation de volume

Une condition relaxée lors de la modélisation

Lors de la présentation générale de notre modèle (cf sous-section 3.1.1 page 133), nous avons assimilé les fluides (l'huile et le sang) à des fluides visqueux incompressibles régis par les équations

⁴⁹Dans le cadre d'un maillage cartésien de pas h de discrétisation, la fonction $\tilde{\delta}_h$ est d'intégrale 1 sur \mathbb{R}^2 . L'emploi d'un maillage non-structuré ne permet pas de garder cette propriété.

de NAVIER-STOKES. En particulier, la contrainte de divergence $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ doit être satisfaite à chaque instant $t \in (0, T)$ et dans chacun des domaines $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$. En utilisant la méthode de la frontière immergée, nous avons relaxée cette condition en imposant $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans $\Omega \times (0, T)$. Afin d'approfondir ce point, nous rappelons que :

$$\forall t \in (0, T), \quad \Omega = \Omega_1(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_2(t). \quad (3.8)$$

Dans le domaine structure $\Gamma(t)$, la condition divergentielle sur le fluide est raisonnable si la structure garde un volume constant⁵⁰ : notre cas où la structure est longiligne, le domaine est monodimensionnel et négligeable par rapport à $\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$, et la question ne se pose pas. Nous sommes donc ramenés à $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans $\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \times (0, T)$. Ainsi, si pour un temps $t \in (0, T)$ fixé, nous assurons cette condition de manière forte, alors nous avons :

$$0 = \int_{\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)} \nabla \cdot \mathbf{u} = \int_{\partial\Omega_1(t)} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \int_{\partial\Omega_2(t)} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_1,$$

en indiquant la vitesse \mathbf{u} et la normale \mathbf{n} par le numéro de la cavité à laquelle elles se rapportent. En prenant en compte l'égalité des vitesses \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 de chaque côté de l'interface $\Gamma(t)$, il ne reste que :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

c'est-à-dire uniquement la conservation du flux sur le bord du domaine Ω . Afin de tenir compte de l'incompressibilité de chacun des fluides dans notre modélisation, il suffit donc d'imposer par exemple :

$$\int_{\partial\Omega_1(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.9)$$

et alors $\int_{\partial\Omega_2(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sera satisfaite.

Contrainte de volume

Nous choisissons d'appliquer la contrainte (3.9) sur le flux d'une manière équivalente portant sur le volume. Ceci permet de transformer plus aisément la condition sur le fluide en une condition sur la structure. À partir de l'égalité ensembliste (3.8), nous pouvons obtenir une relation liant les volumes des cavités $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ à chaque instant $t \in (0, T)$. Nous considérons pour cela que le volume de l'interface $\Gamma(t)$ est constant indépendant du temps, et égal à $V_{\Gamma(0)}$. Par ailleurs, le volume global V_G de fluide contenu dans le ventricule décrit par le domaine Ω est constant. En notant $V_j(t)$, $j = 1, 2$, le volume de fluide de la cavité j dépendant du temps, nous avons la relation suivante :

$$\forall t \in (0, T), \quad V_G = V_1(t) + V_{\Gamma(0)} + V_2(t).$$

Cette relation traduit en particulier, au niveau de la modélisation, l'herméticité des cavités. Nous devons par conséquent la conserver dans la discrétisation numérique pour ne pas faire passer artificiellement numériquement un fluide d'une cavité à l'autre. Nous l'effectuons de la manière suivante :

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad V_G = V_1^{n+1} + V_{\Gamma(0)} + V_2^{n+1}. \quad (3.10)$$

⁵⁰Dans [Pes02], PESKIN montre comment obtenir la formulation de la méthode de la frontière immergée à partir des équations du mouvement d'un matériau élastique incompressible.

De plus, nous devons tenir compte des entrées et sorties de fluide sur les bords $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 . Pour cela, il suffit par exemple d'assurer :

$$V_1^{n+1} = V_1^n + \Delta t \phi_1^n$$

avec $\phi_1^n = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \mathbf{u}_1^n \cdot (-\mathbf{n})$ le flux⁵¹ passant à travers les portes Γ_1 et Γ_2 à l'instant t^n . Nous en déduisons ensuite la valeur de V_2^{n+1} par $V_2^{n+1} = V_2^n - V_1^{n+1} + V_1^n$. La conservation globale du flux impose alors directement (sans calcul supplémentaire) : $V_2^{n+1} = V_2^n + \Delta t \phi_3^n$ avec $\phi_3^n = \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \mathbf{u}_2^n \cdot (-\mathbf{n}) = -\phi_1^n$.

Expression du volume

Le volume V_1 de la première cavité peut se décomposer de la manière suivante : $V_1 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2(X_0, \dots, X_N)$, avec \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 des aires algébriques que nous allons préciser. Pour fixer les idées, nous considérons que $X_0(t=0)$ et $X_N(t=0)$ ont leurs secondes composantes en espace nulles. Nous définissons alors \mathcal{A}_1 comme l'aire du domaine Ω sous l'axe des abscisses, indépendante du temps (et qu'il n'est pas nécessaire de calculer), et \mathcal{A}_2 l'aire du domaine Ω compris entre l'axe des abscisses et la membrane, et dépendant des X_i pour $i = 0, \dots, N$. En notant $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ les coordonnées des points de la membrane, son expression est donnée par⁵² :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (y_i + y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2} \left(y_N x_N - y_0 x_0 + \sum_{i=1}^N (x_i y_{i-1} - y_i x_{i-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(y_N x_N - y_0 x_0 + \sum_{i=1}^N X_i \wedge X_{i-1} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'identité (3.10) à satisfaire est donc ramenée à :

$$\mathcal{A}_2^{n+1} := \mathcal{A}_2(X_0^{n+1}, \dots, X_N^{n+1}) = \mathcal{A}_2(X_0^n, \dots, X_N^n) + \Delta t \phi_1^n, \quad (3.12)$$

qui est une condition quadratique en les X_i^{n+1} , $i = 0, \dots, N$.

Implémentation de la contrainte volumique

Afin d'assurer de manière exacte (à la précision-machine près) la conservation de volume dans la première cavité, nous réécrivons la formule (3.3) de mise à jour du déplacement des points de la membrane :

$$X_\ell^{n+1} = X_\ell^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n)$$

en introduisant une étape fractionnaire :

$$\begin{cases} X_\ell^{n+1/2} &= X_\ell^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n) \\ X_\ell^{n+1} &= X_\ell^{n+1/2} + \alpha^{n+1} \mathbf{n}_1 \end{cases} \quad (3.13)$$

⁵¹Pour être comptabilisé positivement lors d'une injection de fluide, le flux est calculé avec $-\mathbf{n}$, la normale unitaire intérieure au domaine Ω .

⁵²La membrane étant considérée comme rectiligne entre deux sommets, nous calculons l'aire à l'aide de la formule des trapèzes sur chaque sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

avec \mathbf{n}_1 la normale extérieure à $\Omega_1(t^{n+1/2})$, et α^{n+1} un scalaire (ne dépendant que du temps) permettant de satisfaire :

$$\mathcal{A}_2^{n+1}(\alpha^{n+1}) = \mathcal{A}_2^n + \Delta t \phi_1^n, \quad (3.14)$$

qui est une condition quadratique en α^{n+1} .

L'équation de (3.13) transgresse néanmoins la condition d'égalité des vitesses à l'interface dont elle était issue. Notre correction est donc sujète à un certain domaine de validité, c'est-à-dire pour une correction relative $\|\alpha^{n+1}\mathbf{n}_1\|/\|\Delta t\mathbf{u}^{n+1}\|$ assez petite.

Remarque 29. *Suivant la démarche de la méthode de la frontière immergée, on peut imaginer imposer une force de conservation de volume dérivant d'un potentiel du type $\frac{\sigma_i}{2} (V_1^{n+1} - V_1^n - \Delta t \phi_1^n)^2$, avec σ_i un paramètre de pondération. Néanmoins cette condition ne peut à elle seule permettre de remplir la condition (3.10) de manière exacte à chaque instant, mais uniquement de façon optimale. Par conséquent ce type d'implémentation ne peut être employée sans une autre correction.*

3.2 Simulation Numérique Directe

3.2.1 Algorithme

Nous présentons l'algorithme de résolution numérique pour la mise en œuvre de notre problème discrétisé.

Algorithme de résolution numérique du problème discrétisé

Première partie : Initialisation

1. Définition de la géométrie du domaine du ventricule avec ses portes.
2. Génération d'un maillage triangulaire conforme non-structuré Ω_h de tout le domaine fluide.
3. Initialisation de la vitesse fluide : \mathbf{u}^0 dans Ω_h .
4. Définition de la membrane : longueurs r_i ($1 \leq i \leq N$) et angles ω_i ($1 \leq i \leq N-1$) de la configuration sans contrainte. Positions initiales : $X_0^0, X_1^0, \dots, X_N^0$.
5. Création d'un maillage local triangulaire conforme structuré \mathcal{M}_{loc}^0 autour de la membrane dans sa position initiale.
6. Définition de la fonction de forme Φ d'approximation du Dirac scalaire (défini dans \mathbb{R}).

Seconde partie : Boucle en temps pour $n \geq 0$

• Étape 1. Calcul des forces.

1. Calcul des coefficients scalaires des forces de densité $\mathbf{f}_{s,\ell}$, $\mathbf{f}_{b,\ell}$ et $\mathbf{f}_{c,\ell}$ en chaque point X_ℓ^n pour $0 \leq \ell \leq N$; puis calcul du coefficient $\mathbf{f}(X_\ell^n) = \mathbf{f}_{s,\ell} + \mathbf{f}_{b,\ell} + \mathbf{f}_{c,\ell}$ associé.
2. Construction de l'espace fonctionnel \mathcal{F}_{loc}^n des éléments finis (prédéfinis au choix \mathcal{P}_1 ou \mathcal{P}_2) sur le maillage \mathcal{M}_{loc}^n autour de la membrane dans sa position à l'instant t^n .
3. Construction de la fonction $\mathbf{f}(X_\ell^n)\delta_h^\ell(X_\ell^n - \mathbf{x}) \in \mathcal{F}_{loc}^n$.
4. Calcul de la fonction :

$$\mathbf{F}_{loc}^n(\mathbf{x}) = \frac{|\Gamma(0)|}{N} \sum_{\ell=0}^N \mathbf{f}(X_\ell^n)\delta_h^\ell(X_\ell^n - \mathbf{x}) \in \mathcal{F}_{loc}^n.$$

5. Distribution de la densité de forces structure sur le domaine fluide : interpolation de \mathbf{F}_{loc}^n en \mathbf{F}^n sur le maillage fluide Ω_h , avec $\mathbf{F}^n = 0$ en dehors de la bande décrite par le maillage \mathcal{M}_{loc}^n .

- **Étape 2.** Résolution des équations de NAVIER-STOKES dans Ω_h : calcul de \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} .
- **Étape 3.** Mise à jour de la membrane.

1. Calcul des points intermédiaires :

$$X_\ell^{n+1/2} = X_\ell^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n)$$

(la vitesse \mathbf{u}^{n+1} étant interpolée aux points X_ℓ^n , $0 \leq \ell \leq N$.)

2. Calcul du coefficient α^{n+1} correctif de la conservation du volume fluide dans la cavité $\Omega_1(t^{n+1/2})$ pour l'instant t^{n+1} .

3. Calcul des points de la membrane au temps t^{n+1} par :

$$X_\ell^{n+1} = X_\ell^{n+1/2} + \alpha^{n+1} \mathbf{n}_1.$$

4. Déplacement du maillage \mathcal{M}_{loc}^n en fonction des $X_\ell^{n+1} - X_\ell^n$, $0 \leq \ell \leq N$, pour obtenir le maillage \mathcal{M}_{loc}^{n+1} autour de la membrane dans sa position à l'instant t^{n+1} .

- **Étape 4.** Incrémentation : $n := n + 1$.
-

3.2.2 Maillages

Nous utilisons des triangulations conformes pour construire les maillages. Nous présentons dans la Figure 3.7 ci-contre d'une part un exemple de maillage non-structuré (932 sommets) dans tout le domaine fluide, et d'autre part un exemple de maillage structuré qui sert pour le calcul des forces autour de la membrane (5 lignes \times 19 colonnes).

Le maillage fluide est indépendant du temps. Quant au second maillage, il est constitué de N colonnes et 5 lignes (les sommets de la troisième ligne coïncidant avec les points X_i de la membrane), et il est mobile : il suit à chaque instant le mouvement de la structure. Ceci permet de calculer les forces provenant de la structure sur ce maillage intermédiaire (plutôt que sur le maillage fluide plus important), avant de les interpoler ensuite sur le maillage fluide fixe.

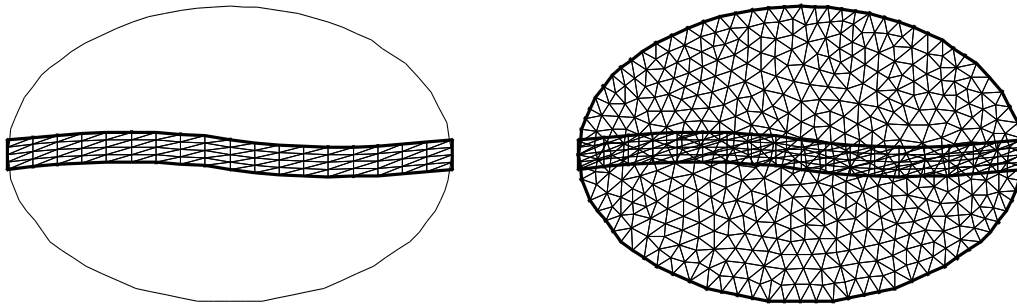


FIG. 3.7 – a. Maillage structuré ($5 \times 19 = 95$ sommets) autour de la membrane. b. Maillage fluide non-structuré (932 sommets), et maillage autour de la membrane.

3.2.3 Paramètres σ_b , σ_s et σ_c

Nous discutons ici du choix des paramètres σ_b , σ_s et σ_c , en traitant succinctement le cas de σ_c , pour nous intéresser plus précisément aux choix des valeurs à prendre pour σ_b et σ_s . Afin de focaliser notre attention sur ces paramètres, nous ne prenons pas en compte ici la correction volumique liée à l'incompressibilité du fluide dans chacune des cavités Ω_1 et Ω_2 .

- Les termes de forces liés aux extrémités encastrées de la membrane ne jouent pas un rôle fondamental dans l'expression globale des forces \mathbf{F} , puisque leur action est restreinte à une zone négligeable bien déterminée du domaine fluide (autour de X_0 et X_N).

Par ailleurs, nous imposons des conditions de Dirichlet homogènes⁵³ sur le bord Γ_0 , si bien que les vitesses $\mathbf{u}^n(X_0)$ et $\mathbf{u}^n(X_N)$ sont nulles (à la précision-machine près). De là, lors de la mise à jour du déplacement de la membrane, les points X_0 et X_N restent immobiles. Le rôle du coefficient σ_c est donc marginal dans notre problème. Néanmoins, le choix de très grandes valeurs de σ_c peut être néfaste si le support de la fonction Dirac discrète est trop grand : en effet, si numériquement $\mathbf{f}_{c,0}$ et $\mathbf{f}_{c,N}$ sont démesurés par rapport aux autres termes $\mathbf{f}_{b,\ell}$ et $\mathbf{f}_{s,\ell}$, alors, dans une zone (de diffusion des forces) locale autour de X_0 et X_N , la vitesse et la pression seront erronées.

Devant le rôle très restreint des termes d'encastrement des bords membranaires, nous fixons $\sigma_c = 0$ pour la suite.

- Les paramètres σ_b et σ_s font l'objet d'une étude heuristique. Concernant leurs interprétations physiques, nous pouvons considérer que σ_b joue le rôle d'un coefficient de résistance à la torsion, et σ_s celui d'un coefficient de résistance à l'élongation. Nous pouvons donc *in fine* nous rattacher de loin à des échelles de valeurs comparatives comme par exemple l'éventail des valeurs des constantes de LAMÉ λ et μ ; en effet (cf [Cia86], pages 61-62), μ est le module de cisaillement, et $(3\lambda + 2\mu)/3$ est le module de compressibilité du matériau.

- Nous présentons à présent un cas-test qui nous permettra d'effectuer différents essais. Nous considérons la situation physique introduite dans la sous-section 3.1.1 page 133 et plus généralement dans la section 3.1. Nous nous plaçons lors de la première phase, c'est-à-dire, lorsque les portes Γ_2 et Γ_3 sont fermées, tandis que l'injection est forcée en Γ_1 et la sortie est libre en Γ_4 .

Concernant la géométrie du domaine : l'enveloppe de la cavité est ellipsoïdale : la longueur du demi-grand axe est 1.5, et la longueur du demi-petit axe est 1. ; les extrémités des portes sont disposées sur le bord suivant des multiples entiers de $\pi/10$. L'injection de fluide sur Γ_1 est $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = -|\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)| R_{\theta(t)} \mathbf{n}(\mathbf{x})$ avec :

$$|\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)| = \begin{cases} 2.9 \sin(6t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0.26 \\ 2.9 & \text{si } 0.26 < t \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta(t) = 0.22 \sin(2t);$$

ainsi l'injection est continue et oscille périodiquement d'environ 12° autour de la normale. Les autres paramètres sont les suivants :

$$\rho_F = 1., \quad \nu = 1/100, \quad \Delta t = 0.01, \quad N = 19.$$

La position initiale de la membrane est donnée à la Figure 3.7. Nous prenons de manière uniforme les angles de référence $\omega_i = 0$ pour $i = 1, \dots, N-1$, et les longueurs au repos $r_i = |\Gamma(0)|/N$ pour $i = 1, \dots, N$. Une illustration de l'ensemble de cette configuration est donné à la Figure 3.8 ci-contre. Enfin, pour les considérations des maillages, nous prenons $h_{maxfluide} = \frac{\text{demi-petit-axe}}{10}$ la longueur maximale d'une arête du maillage fluide ; $h_{Dirac} = h_{maxfluide}$ le demi-rayon du disque constituant le support de la fonction Dirac δ_h définie à partir de $\Phi\left(\frac{\cdot}{h}\right)$; $h_{maillage,structure} = 1.10 h_{Dirac}$ la hauteur d'une couche

⁵³Nous utilisons une méthode de pénalisation pour imposer les conditions de Dirichlet.

du maillage "structure" autour de la membrane (c'est-à-dire la demi-hauteur du maillage \mathcal{M}_{loc} à 5 couches).

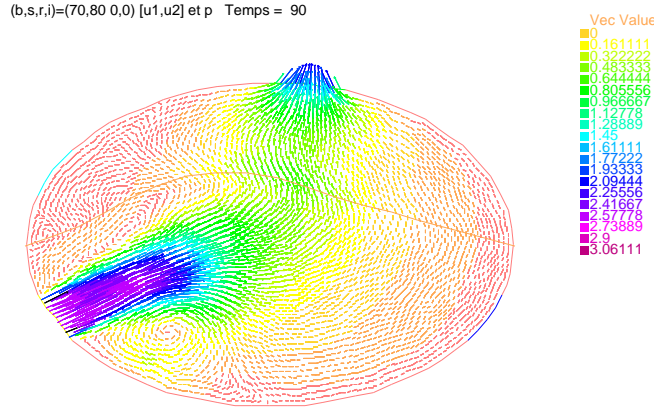
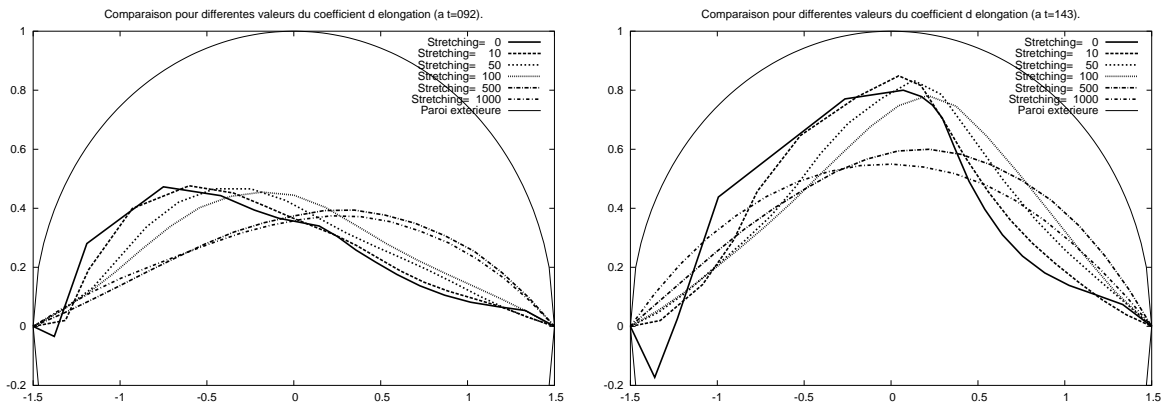


FIG. 3.8 – Vitesse fluide au temps $t = 90 \times 0.01 = 0.9$ (avec $\sigma_b = 70$, $\sigma_s = 80$).

• En premier lieu, pour $\sigma_b = 0$ fixé, nous effectuons ce cas-test pour différents choix de σ_s (cf Figure 3.9) : avec $\sigma_s = 0, 10, 50, 100, 500$, ou 1000 .

Le cas $\sigma_s = 0$ (avec $\sigma_b = \sigma_c = 0$) est très particulier puisqu'alors $\mathbf{F} \equiv 0$: nous sommes ramenés à résoudre les équations de NAVIER-STOKES sans force extérieure, mais avec une injection forcée et une sortie libre. La membrane ne joue aucun rôle ; elle est juste convectée à la vitesse du fluide. Nous constatons sur la Figure 3.9 que la membrane suit naturellement la direction de l'injection au centre de la cavité, mais qu'en dehors du couloir décrit par les portes d'entrée-sortie ($\Gamma_1 - \Gamma_4$), la vitesse fluide est faible, et la membrane reste proche de sa position initiale. Le pic entrant à l'extrême gauche de la membrane est dû à une zone tourbillonnaire du fluide liée à la forte injection.



(a) Positions de la membrane au temps $t = 0.92$.

(b) Positions de la membrane au temps $t = 1.43$.

FIG. 3.9 – Positions de la membrane aux temps $t = 0.92$ et $t = 1.43$ pour différentes valeurs de σ_s ($\sigma_s = 0, 10, 50, 100, 500$, ou 1000), les autres paramètres σ_b, σ_c étant nuls.

Nous examinons à présent les cas où $\sigma_s \neq 0$, c'est-à-dire les cas qui nous intéressent plus particulièrement où les forces de la structure interviennent. Pour $\sigma_s = 500$ ou 1000 , nous constatons que la membrane est nettement moins élastique et déformable que précédemment : elle est bombée extérieurement à la cavité 1, avec un rayon de courbure relativement grand (comparativement aux autres). Il s'agit d'un cas typique où la conservation du volume de la première cavité serait difficilement assurée. Nous rappelons néanmoins que nous n'assurons pas pour l'instant cette contrainte de modélisation. Notre cas illustre plutôt ici une membrane résistant fortement au fluide, mais en laissant passer à travers elle une partie.

Les cas $\sigma_s = 10, 50$ et 100 sont des cas intermédiaires qui interpolent en un sens les deux cas précédents. Le cas $\sigma_s = 10$ présente déjà un comportement légèrement différent de celui $\sigma_s = 0$; notamment pour de larges déplacements (à $t = 1.43$ par exemple), une faible résistance à l'élongation est observable. Pour les valeurs $\sigma_s = 50$ ou 100 , la courbe décrite par la membrane est relativement lisse, tout en présentant une résistance suffisante au fluide. Dans les cas $\sigma_s = 10$ ou 50 , lorsque les tests continuent, la structure n'est pas assez résistante au flux près de la porte Γ_4 de sortie libre de fluide : en conséquence, la membrane sort assez rapidement hors de la cavité. Cette observation est aussi réalisable pour les cas $\sigma_s = 100, 500$ et 1000 , mais avec une inertie plus importante de la membrane.

Ainsi, dans le cas où $\sigma_b = 0$, il est raisonnable (dans le cas d'un ventricule artificiel que nous souhaitons illustré) de prendre σ_s aux environs de 100 (pour avoir un comportement membranaire assez souple).

- Nous effectuons maintenant le même type de test avec cette fois-ci $\sigma_s = 0$ fixé et le coefficient σ_b de résistance à la torsion prenant les valeurs $0, 10, 50, 100, 500, 1000$ et 5000 . Nous présentons les résultats sur la Figure 3.10 à deux instants $t = 0.92$ et $t = 1.29$.

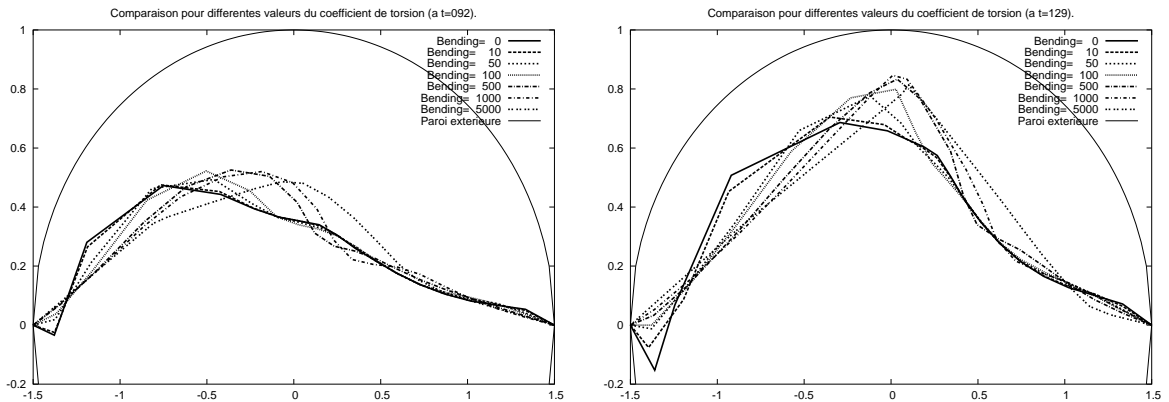


FIG. 3.10 – Positions de la membrane aux temps $t = 0.92$ et $t = 1.29$ pour différentes valeurs de σ_b ($\sigma_s = 0, 10, 50, 100, 500, 1000$ ou 5000), les autres paramètres σ_s, σ_c étant nuls.

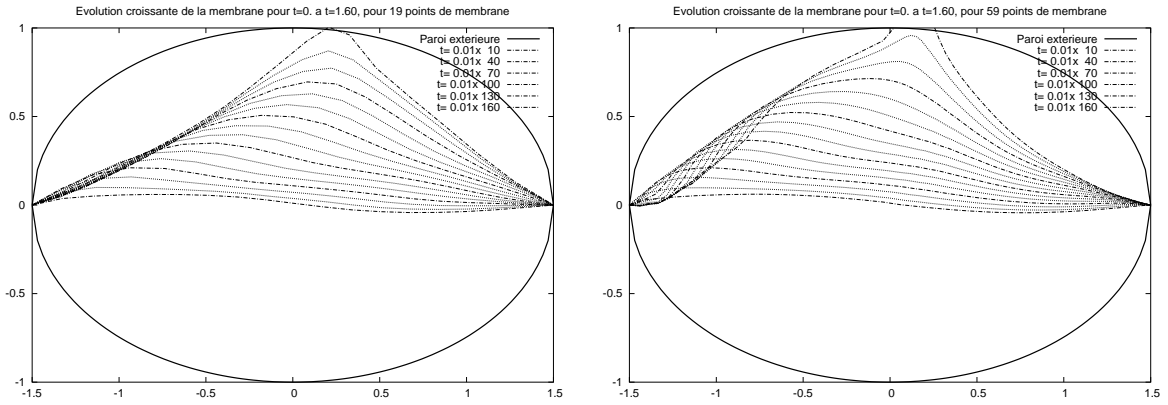
Le cas $(\sigma_s, \sigma_b) = (0, 0)$ a déjà été commenté précédemment pour illustrer le cas sans force structure ($\mathbf{F} \equiv 0$) et sert de référence de comparaison pour une membrane infiniment relaxée d'un point de vue élastique.

Le cas $\sigma_b = 1000$ impose une contrainte sur les angles θ_i ($1 \leq i \leq N - 1$) relativement forte afin qu'ils restent proches de $\omega_i = 0$. Pour $\sigma_b = 5000$, nous constatons à $t = 1.29$ que le point culminant du pic de la membrane ainsi que les extrémités de la membrane forment un triangle quasiment isocèle (un peu comme un élastique que l'on pincerait du doigt) : les contraintes sur les angles sont beaucoup trop fortes et sclérosent le mouvement ; le flux de fluide glisse alors transversalement le long de la membrane.

Ainsi, pour $\sigma_s = 0$, des valeurs de σ_b proches de 100 semblent là encore raisonnables par rapport à nos attentes.

3.2.4 1er test : observation de la membrane collant à la paroi

Nous utilisons le même cas-test que précédemment en prenant pour les paramètres $\sigma_b = 70$ et $\sigma_s = 80$, et nous présentons à la Figure 3.11 l'évolution de la membrane au cours du temps (avec $N = 19$ point de discrétisation de la membrane, Figure 3.11(a) ; et $N = 59$, Figure 3.11(b)). Nous constatons



(a) Évolution pour $N = 19$ points (de discrétisation de la membrane).

(b) Évolution pour $N = 59$ points (de discrétisation de la membrane).

FIG. 3.11 – Évolution temporelle (croissante) de la membrane sur l'intervalle $[0.1; 1.6]$. Positions pour $t = 10 \times 0.01 \times m$ avec $m = 1, \dots, 16$. Les paramètres : $\sigma_b = 70$ et $\sigma_s = 80$.

que la membrane se gonfle petit à petit en réponse à l'injection continue de fluide. À $t = 1.6$, nous observons là un cas où la structure collabre effectivement avec la paroi : la membrane colle à la porte Γ_4 , si bien que notre modèle n'est plus valide. Nous remarquons par ailleurs que le cas $N = 19$ présente une souplesse différente du cas $N = 59$: il suffit pour cela d'observer par exemple l'enveloppe convexe des positions. Le cas $N = 59$ développe une réponse élastique moins ferme pour un mouvement plus "onctueux". Ceci est dû au fait que, lorsque N tend vers l'infini, le modèle tend vers un modèle continu de type poutre.

Nous prenons à présent en compte la correction volumique introduite au paragraphe 3.1.5 page 142, selon sa seconde forme, c'est-à-dire en corrigeant l'évolution membranaire par :

$$X_\ell^{n+1} = X_\ell^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n) + \alpha^{n+1} \mathbf{n}_1$$

avec \mathbf{n}_1 la normale extérieure au domaine intermédiaire $\Omega_1(t^{n+1/2})$, et α^{n+1} un scalaire ne dépendant que du temps. Pour la correction, seuls les points X_ℓ , $\ell = 1, \dots, N - 1$, sont utilisés, puisque les points X_0 et X_N n'interviennent pas dans la correction volumique (ou à un ordre négligeable). Nous observons à la Figure 3.12(a) l'évolution du coefficient α^{n+1} en fonction du temps pour $N = 59$ points de discrétisation de la membrane, dans le même cas-test que précédemment (correspondant aussi à la Figure 3.11(b)). Nous rappelons que la relation $X_\ell^{n+1} = X_\ell^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n)$ traduit au niveau discret la condition d'égalité des vitesses fluide et structure à l'interface. Il est donc nécessaire que le coefficient α^{n+1} reste relativement petit par rapport au déplacement instantané $\Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n)$

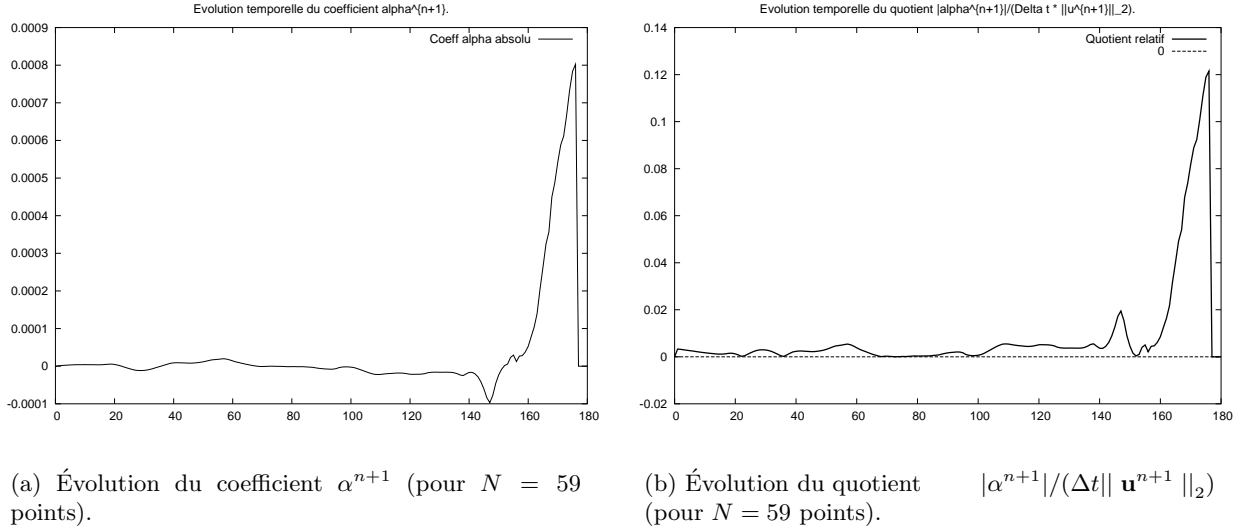


FIG. 3.12 – Évolution temporelle du coefficient α^{n+1} , et de sa part relative de correction. Intervalle de temps : $[0.1; 1.8]$. Pour $N = 59$. Les paramètres : $\sigma_b = 70$ et $\sigma_s = 80$.

de l'ensemble des points. De cette manière, la condition de couplage pourra être considérée comme raisonnablement approchée. Le quotient relatif à considérer est donc :

$$\frac{\|\alpha^{n+1} \mathbf{n}_1\|_{\mathbb{R}^2}}{\|\Delta t \mathbf{u}^{n+1}\|_2} = \frac{|\alpha^{n+1}|}{\Delta t \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2}$$

avec par exemple $\|\mathbf{u}^{n+1}\|_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \|\mathbf{u}^{n+1}(X_k^n)\|_{\mathbb{R}^2}$ la moyenne arithmétique des modules des

vitesse aux points de la membrane (sur lesquels la correction volumique agit) au temps t^{n+1} . Les résultats sont présentés à la Figure 3.12(b). Nous constatons que l'erreur commise est inférieure au centième (et même à 0.005) sur l'intervalle de temps $[0, 1.4]$, ce qui est satisfaisant. La membrane collant à la porte Γ_4 à partir de $t = 1.60$ (cf Figure 3.11(b)), l'intervalle $[1.4, 1.6]$ est une zone de transition où la membrane est aspirée vers l'extérieur de la seconde cavité, et nous avons un pic indiquant une correction relative d'environ 2 pourcents, ce qui reste encore raisonnable.

Ainsi, la conservation volumique effectuée au niveau de la condition de couplage d'égalité des vitesses à l'interface est raisonnablement assurée.

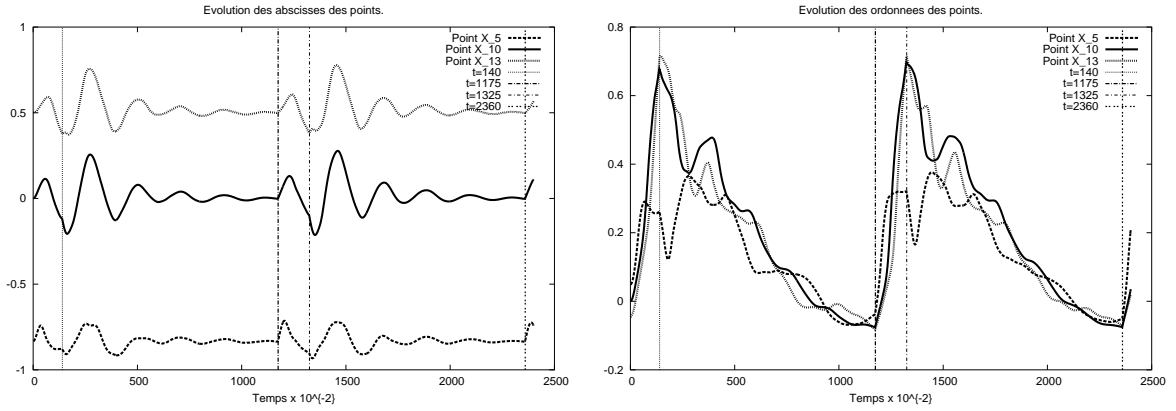
3.2.5 2ème test : observation d'un cycle cardiaque

• **Description du test** Nous nous plaçons dans le cadre précédent en distinguant maintenant deux phases dans l'activité ventriculaire : pendant la phase 1, il y a injection forcée de fluide (selon le profil d'entrée présenté auparavant) à travers la porte Γ_1 , la porte Γ_4 étant ouverte; puis, pendant la phase 2, le système est laissé libre, avec les portes Γ_2 et Γ_3 ouvertes (voir une illustration à la Figure 3.2 page 134). Ces deux phases forment un cycle, et nous effectuons un test sur un peu plus de deux cycles. Les temps des changements de phase sont imposés de la manière suivante :

Temps	Phase
$0.00 \leq t \leq 1.40$	1 : injection forcée
$1.40 \leq t \leq 11.80$	2 : système libre
$11.80 \leq t \leq 13.20$	1 : injection forcée
$13.20 \leq t \leq 23.60$	2 : système libre
$23.60 \leq t \leq 24.00$	1 : injection forcée

Comme paramètres, nous prenons $\sigma_b = 80$, $\sigma_s = 90$ (et toujours $\sigma_c = 0$), et $N = 19$ points de discrétisation pour la membrane.

• **Observation des positions de la membrane** Nous observons en premier lieu les évolutions temporelle des points X_5 (au premier quart de la membrane), X_{10} (au milieu de la membrane) et X_{13} (au deux tiers de la membrane); les résultats sont présentés à la Figure 3.13 en séparant les abscisses et les ordonnées. Nous constatons comme attendu, une allure cyclique des positions de ces points au



(a) Évolutions temporelles des abscisses des points X_5 , X_{10} et X_{13} .

(b) Évolutions temporelles des ordonnées des points X_5 , X_{10} et X_{13} .

FIG. 3.13 – Évolution en temps sur $[0; 24.0]$ des positions des points X_5 , X_{10} et X_{13} . Paramètres : $\sigma_b = 80$, $\sigma_s = 90$, $N = 19$.

cours du temps. Plus particulièrement, le point X_5 s'éloigne comparativement peu de son abscisse d'origine, mais largement en ordonnée; nous constatons de plus une chute en ordonnée juste après le début de la seconde phase : ceci est dû à l'arrêt d'injection de fluide et aux propriétés "élastiques" de résistance à l'élongation. Les points X_{10} et X_{13} ont ce même type de réponse, mais avec un retard dû au temps de propagation de l'information. Nous présentons à la Figure 3.14 les positions de la membrane suivant les phases du premier cycle.

• **Flux et correction de volume** Nous nous intéressons maintenant aux flux $\phi_i^{n+1} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot (-\mathbf{n})$ au niveau de la porte Γ_i pour $i = 1, 2, 3, 4$. Le flux global étant conservatif, nous avons $\phi_1^{n+1} + \phi_4^{n+1} = 0$ à la phase 1 (puisque $\phi_2^{n+1} = \phi_3^{n+1} = 0$) et $\phi_2^{n+1} + \phi_3^{n+1} = 0$ à la phase 2 (puisque $\phi_1^{n+1} = \phi_4^{n+1} = 0$), ce que nous observons effectivement sur la Figure 3.15(a). Par ailleurs, nous constatons que pendant la phase 2 où le système est libre, les flux sont environ cinq fois moins importants que pendant la phase 1 d'injection forcée. Les temps $t = 11.80$ et $t = 23.60$ de passage de la phase 2 à la phase 1 correspondent

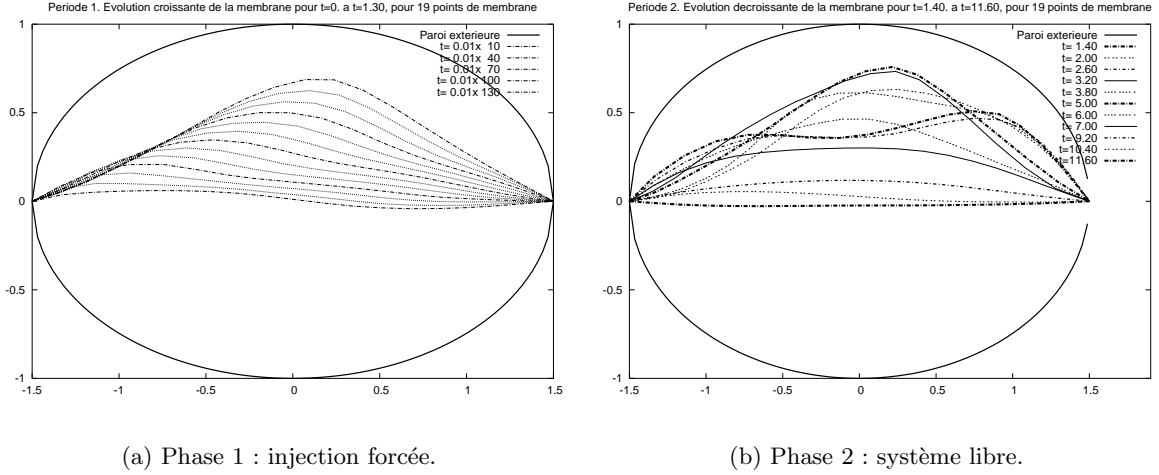


FIG. 3.14 – Évolution temporelle (croissante) de la membrane sur les intervalles $[0.1; 1.3]$ (phase 1) et $[1.4; 11.6]$ (phase 2). Les paramètres : $\sigma_b = 80$, $\sigma_s = 90$, $N = 19$.

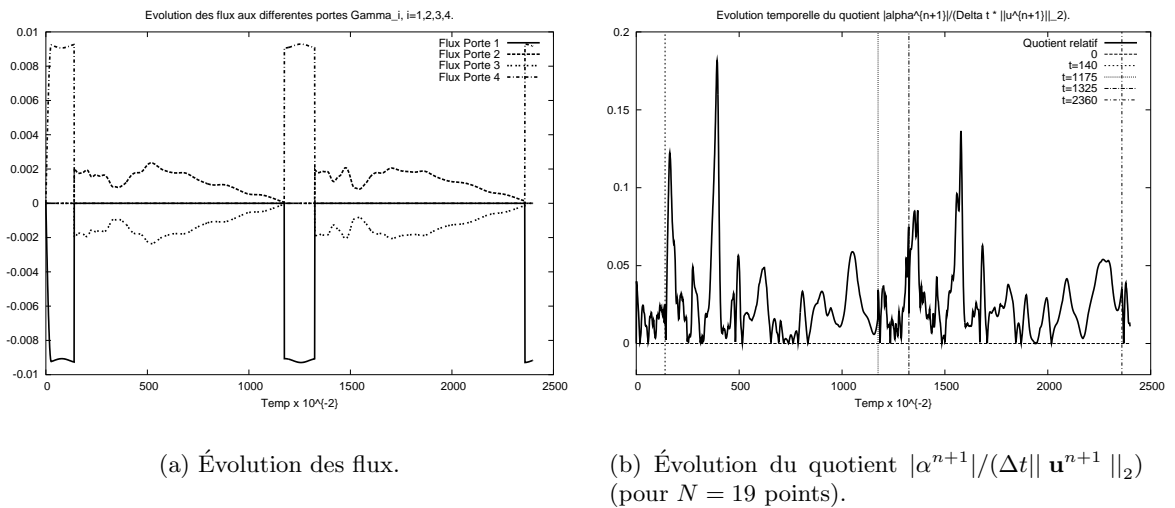


FIG. 3.15 – Évolutions temporelles des flux et du coefficient relatif de correction de volume lié à l'incompressibilité du fluide. Les paramètres : $\sigma_b = 80$, $\sigma_s = 90$, $N = 19$.

à un flux d'éjection quasiment nul, mais néanmoins positif; autrement dit, les changements de phase interviennent avant que le sang ne ressorte⁵⁴ par la porte Γ_3 .

D'autre part, nous présentons à la Figure 3.15(b) l'évolution temporelle de $|\alpha^{n+1}|/(\Delta t \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2)$, le quotient lié à la correction de volume pour la préservation de l'incompressibilité du fluide dans la première cavité. Comme discuté précédemment, ce coefficient illustre l'erreur relative du déplacement issu de la correction volumique par rapport au déplacement sans correction. Là encore, l'erreur reste généralement inférieure à 0.03 (soit 3 pourcents d'erreur), mais augmente jusqu'à environ 0.15 (soit 15 pourcents d'erreur sans la correction) lors de deux sursauts à chaque cycle juste après le début de la phase 2.

• **Domaine de validité** Le système physique que nous souhaitons simuler est schématiquement réductible à une pompe : nous injectons du fluide dans la cavité 1; la membrane doit répondre aux efforts normaux par un déplacement et se gonfler; ceci contraint finalement le fluide dans la cavité 2 à s'éjecter. Un comportement analogue s'effectue ensuite dans le cadre relaxé de la phase 2. Dans ces deux configurations, les fluides de part et d'autre de l'interface ont des vitesses normales égales; cette égalité provient de la condition de non-glissement des fluides le long de la membrane. Les vitesses tangentielles ne sont quant à elles pas conservées d'un côté à l'autre de la membrane, sinon cela traduirait un flux à travers la structure (supposée imperméable). Or, la méthode de la frontière

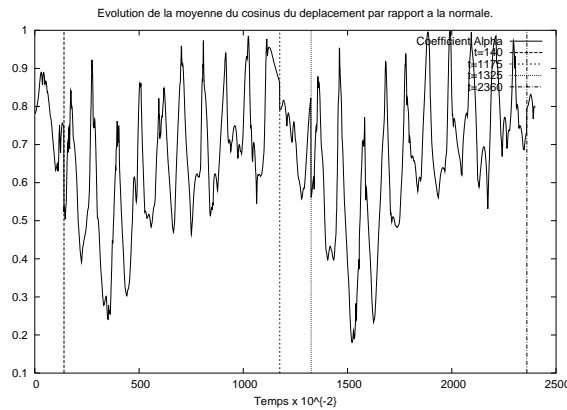


FIG. 3.16 – Évolution temporelle d'un coefficient indicateur de la proportion de déplacement selon la normale à la membrane. Les paramètres : $\sigma_b = 80$, $\sigma_s = 90$, $N = 19$.

immergée ne peut imposer cette non-conservation que si les forces structure agissent suffisamment sur les fluides au niveau de l'interface. Dans notre cas, nous avons $N = 19$, et ainsi une distance d'environ $2 \times (\text{demi-grand-axe}) / (N - 1) = 1/6 = 0.16$ à l'état initial, et par ailleurs un support des Diracs des forces structure de l'ordre de $2h_{Dirac} = 1/5 = 0.2$. Lorsque les déformations sont importantes, les distances entre les sommets des points de la membrane sont supérieures à 0.2, si bien qu'il existe une zone fluide le long de l'interface où la structure n'agit plus : le fluide peut alors librement passer (artificiellement) d'une cavité à l'autre.

D'autre part, la membrane doit se déplacer en chaque point dans le sens de sa normale en ce point. Nous présentons à la Figure 3.16 un indicateur de la validité effective de cette condition. Il s'agit d'observer la proportion de la vitesse normale de la membrane relativement au déplacement, soit en

⁵⁴Si le sang sorti du ventricule par la porte Γ_3 rentre à nouveau par cette même porte, nous avons un phénomène correspondant à une valve mitrale qui ne remplit pas son rôle.

chaque point X_ℓ le coefficient :

$$c_\ell = \frac{\left(\Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n) + \alpha^{n+1} \mathbf{n}_1(X_\ell^{n+1/2}) \right) \cdot \mathbf{n}_1(X_\ell^{n+1/2})}{\| \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(X_\ell^n) + \alpha^{n+1} \mathbf{n}_1(X_\ell^{n+1/2}) \|_{\mathbb{R}^2}}$$

qui correspond (puisque \mathbf{n}_1 est unitaire) au cosinus de l'angle entre la normale et le déplacement au point X_ℓ . Pour figurer de façon globale l'évolution de ces coefficients, nous regardons à chaque instant la moyenne arithmétique de leurs valeurs absolues : $\left(\sum_{\ell=1}^N |c_\ell| \right) / (N - 1)$. Nous présentons l'évolution temporelle de cette moyenne à la Figure 3.16. Nous constatons que cette moyenne oscille en temps aux alentours de 0.7 sur un panel moyen entre 0.5 et 1, ce qui fait que, *grosso modo*, pour un point X_ℓ à un instant donné, le déplacement normal forme un angle (en valeur absolue) aux alentours de $\arccos(0.7) \simeq \pi/4$ avec un panel allant de $-\arccos(0.5) \simeq -\pi/3$ à $\pi/3$. Ainsi, nous en déduisons que le déplacement membranaire (provenant de la vitesse fluide) possède une part non-négligeable de déplacement transversal ; au niveau de la modélisation, ceci indique une mauvaise contrainte sur la vitesse fluide à l'interface ; des tourbillons à cheval entre les deux cavités sont même observables alors qu'irréalisables dans le cadre physique d'une membrane imperméable. Ce comportement est lié notamment au nombre insuffisant de points de discrétisation de la membrane.

Remarque 30. Dans [SG98], les auteurs utilisent un rapport $h_{Dirac} / \frac{|\Gamma(0)|}{N-1}$ d'environ 6.25, tandis que dans le test précédent, nous avons environ $\frac{1}{10} / \frac{3}{18} \simeq 0.6$, soit un rapport 10 fois moins important ; il faudrait donc utiliser environs 10 fois plus de point, soit près de 190 points de discrétisation de la membrane.

3.3 Simplification du modèle fluide-structure guidé par la conservation volumique

3.3.1 Motivation d'un modèle simplifié

Le système introduit à la section 3.1 page 133 modélise, à l'aide de la méthode de la frontière immergée, la dynamique de deux fluides séparés par une structure dans un ventricule artificiel. Nous nous intéressons à présent à une démarche de contrôle sur ce système couplé. Lors de notre démarche, nous allons être amenés à calculer la différentielle $D\mathbf{F}$ des forces structure \mathbf{F} en fonction de la variable X de la position instantanée de l'interface. Nous rappelons que les forces structure apparaissent au second membre des équations de NAVIER-STOKES sous la forme suivante (donnée en (3.1) page 136), pour $t \in (0, T)$:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma(t)} \mathbf{f}(s, t) \delta(\mathbf{x} - X(s, t)) ds,$$

avec s une paramétrisation de $\Gamma(t)$. Par ailleurs, X est solution de (cf (3.2) page 140) :

$$\frac{dX}{dt} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - X) d\mathbf{x},$$

traduisant l'égalité des vitesses fluide et structure à l'interface. Ainsi, les calculs de \mathbf{F} et de sa différentielle $D\mathbf{F}$ présentent ainsi dans le cas général une certaine complexité. L'obtention de leurs expressions explicites étant non-triviale, nous nous proposons, dans ce travail préliminaire, de simplifier le système que nous avons jusqu'ici étudié. Nous allons considérer que la position de la structure ne dépend plus

que d'un seul paramètre réel γ , qui correspond à l'amplitude instantanée de la position de l'interface. Pour cela, nous supposons que la membrane ne varie que verticalement, en fonction de γ qui ne dépend que du temps. De cette façon, la différentielle $D\mathbf{F}$ est ramenée à une dérivée $\frac{d\mathbf{F}}{d\gamma}$ plus aisément calculable explicitement. D'un autre côté, nous demandons au degré de liberté γ de satisfaire à la condition de conservation du volume de fluide (3.12) dans la première cavité.

À partir de là, nous changeons la nature du système que nous avons jusqu'ici considéré. En effet, nous rappelons que le couplage fluide-structure tient aux deux propriétés suivantes : d'une part au bilan des tenseurs des forces selon la normale à l'interface ; et d'autre part, à la condition cinématique à l'interface. En ce qui concerne la première condition, les forces structure "élastiques" (calculées à partir de la position instantanée liée à γ) sont toujours appliquées de la même manière : le bilan tensoriel selon la normale à l'interface reste inchangé. Par contre, nous abandonnons la *condition cinématique classique* : la position structure n'est plus mise à jour à partir de la vitesse du fluide. Cependant, le système reste couplé par la condition de conservation volumique : dans ce cadre simplifié, le scalaire γ dépend de manière affine de l'injection instantanée. Le système garde de plus son caractère non-linéaire. Par suite, le système simplifié, que nous allons plus amplement détailler par la suite, perd une partie de la signification physique recherchée lors de la modélisation⁵⁵.

Conscients de ces défauts de modélisation, nous sommes néanmoins intéressés par la démarche de contrôle de ce système couplé qui fait l'objet de toute notre attention dans ce travail préliminaire.

3.3.2 Modèle simplifié

En notant L la longueur du grand axe de l'ellipse constituant la cavité, nous fixons les abscisses $x_0 = -L/2$ et $x_i = x_0 + i\frac{L}{N}$ pour $1 \leq i \leq N$ des points X_i de la membrane. Soit une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée telle que $g(x_0) = g(x_N) = 0$; pour fixer les idées, nous prenons la parabole :

$$g(x) = \frac{4}{L^2}(x - x_0)(x_N - x).$$

Au temps t^n fixé, nous considérons alors la membrane constituée des segments reliant les $N + 1$ sommets :

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad X_i^n = \begin{pmatrix} x_i^n \\ y_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ \gamma^n g(x_i) \end{pmatrix}.$$

Seul le coefficient γ^n dépend du temps. Ainsi, la structure possède à chaque instant t^{n+1} un unique degré de liberté γ^{n+1} auquel nous demandons de satisfaire l'équation :

$$\mathcal{A}_2^{n+1} := \mathcal{A}_2(X_0^{n+1}, \dots, X_N^{n+1}) = \mathcal{A}_2(\gamma^{n+1}) = \mathcal{A}_2(\gamma^n) + \Delta t \phi_1^n$$

de conservation du volume de fluide dans la première cavité (voir (3.12) page 144 pour les définitions de ces expressions).

Remarque 31. *Il est possible d'étendre ce modèle en décomposant le mouvement de la membrane*

⁵⁵Il est possible de prendre en compte différemment la condition cinématique classique : on peut imaginer un terme complémentaire aux forces structure. Celui-ci jouerait le rôle d'un ressort, en forçant les particules structure à suivre les particules fluide au voisinage de l'interface. À titre d'exemple, on peut considérer un terme supplémentaire du type $k(\mathbf{x}_S^n - (\mathbf{x}_F^n + \Delta t \mathbf{u}^n))$ dans la densité de force structure, avec k la raideur du ressort fictif, \mathbf{x}_S^n la position de la structure obtenue par conservation volumique, et \mathbf{x}_F^n la position des particules du fluide.

suivant plusieurs fonctions de forme $g_k(\cdot)$, $1 \leq k \leq N_f$, de telle sorte que :

$$\forall 0 \leq i \leq N, \quad X_i^n = \begin{pmatrix} x_i \\ \sum_{k=1}^{N_f} \gamma_k^n g_k(x_i) \end{pmatrix},$$

avec les N_f degrés de liberté γ_k de la membrane, qui seront fixés par les conditions cinématiques à l'interface et par la condition de conservation de volume.

3.3.3 Condition de conservation volumique

En adaptant l'expression (3.11) page 144 de l'aire \mathcal{A}_2 à notre cas, nous avons :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N X_i \wedge X_{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} x_i \\ \gamma g(x_i) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ \gamma g(x_{i-1}) \end{pmatrix},$$

en ayant tenu compte de $y_0 = g(x_0) = y_N = g(x_N) = 0$. Nous définissons la quantité \mathcal{A}_g suivante qui ne dépend que de g et de $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$:

$$\mathcal{A}_g := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i g(x_{i-1}) - x_{i-1} g(x_i)).$$

La condition (3.12) page 144 de conservation du volume de la première cavité est ramenée alors à :

$$\mathcal{A}_2^{n+1} = \gamma^{n+1} \mathcal{A}_g = \mathcal{A}^n + \Delta t \phi_1^n = \gamma^n \mathcal{A}_g + \Delta t \phi_1^n,$$

soit finalement :

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_g} \phi_1^n, \quad (3.15)$$

en rappelant que ϕ_1^n est la quantité scalaire opposée du flux passant à travers les portes Γ_1 et Γ_2 à l'instant t^n .

Remarque 32. La condition (3.15) de conservation volumique est ici une condition affine (tandis qu'elle était quadratique dans la formulation (3.14) page 145).

3.3.4 Expression des forces structure et de leurs différentielles

En ce qui concerne les forces structure, leur expression est grandement simplifiée et ne dépend que du paramètre γ . Nous allons exhiber les coefficients $\mathbf{f}_{s,i}$ et $\mathbf{f}_{b,i}$, et par conséquent obtenir l'expression discrétisée de \mathbf{F} donnée en (3.5) page 142.

Remarque 33. La modélisation que nous adoptons ici permet de lever deux problèmes. Le premier est la conservation du volume de fluide dans la première cavité en fonction de l'injection de fluide : cette difficulté est annihilée par la construction même du paramètre γ . Le second problème concerne l'immobilité des extrémités de la membrane : ce point est réglé par les valeurs $g(x_0)$ et $g(x_N)$; celles-ci étant nulles, nous garantissons le non-déplacement des bords membranaires. Ainsi, notre modélisation ramène les forces structure uniquement aux forces de résistance à l'élongation et à la torsion.

Tout d'abord, nous notons :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad a_i = x_i - x_{i-1}, \quad b_i = g(x_i) - g(x_{i-1}), \quad \text{et} \quad c_i = \frac{r_i b_i^2}{|F_i|^3},$$

en rappelant l'expression de la longueur d'une fibre F_i :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad |F_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \gamma^2 (g(x_i) - g(x_{i-1}))^2} = \sqrt{a_i^2 + \gamma^2 b_i^2}.$$

D'une part, nous obtenons dans les expressions des forces $\mathbf{f}_{s,i}$ de résistance à l'élongation données au paragraphe 3.1.3 page 136 :

$$\mathbf{f}_{s,i} = \begin{cases} \sigma_s \left(1 - \frac{r_1}{|F_1|}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \gamma b_1 \end{pmatrix} & \text{si } i = 0, \\ -\sigma_s \left(1 - \frac{r_i}{|F_i|}\right) \begin{pmatrix} a_i \\ \gamma b_i \end{pmatrix} + \sigma_s \left(1 - \frac{r_{i+1}}{|F_{i+1}|}\right) \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ \gamma b_{i+1} \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq i \leq N-1, \\ -\sigma_s \left(1 - \frac{r_N}{|F_N|}\right) \begin{pmatrix} a_N \\ \gamma b_N \end{pmatrix} & \text{si } i = N. \end{cases}$$

Puis, en notant que :

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{1}{|F_i|} \right) = \frac{-b_i^2 \gamma}{(a_i^2 + \gamma^2 b_i^2)^{3/2}} = -\frac{c_i}{r_i} \gamma,$$

nous en déduisons la différentielle (par rapport au paramètre γ) :

$$\frac{d}{d\gamma} (\mathbf{f}_{s,i}) = \begin{cases} \sigma_s \begin{pmatrix} a_1 c_1 \gamma \\ b_1 \left(c_1 \gamma^2 + 1 - \frac{r_1}{|F_1|} \right) \end{pmatrix} & \text{si } i = 0, \\ \sigma_s \begin{pmatrix} (a_{i+1} c_{i+1} - a_i c_i) \gamma \\ b_{i+1} \left(c_{i+1} \gamma^2 + 1 - \frac{r_{i+1}}{|F_{i+1}|} \right) - b_i \left(c_i \gamma^2 + 1 - \frac{r_i}{|F_i|} \right) \end{pmatrix} & \text{si } 1 \leq i \leq N-1, \\ \sigma_s \begin{pmatrix} -a_N c_N \gamma \\ -b_N \left(c_N \gamma^2 + 1 - \frac{r_N}{|F_N|} \right) \end{pmatrix} & \text{si } i = N. \end{cases}$$

En ce qui concerne maintenant les termes de résistance à la torsion (présentés eux aussi au paragraphe 3.1.3 page 136), nous avons tout d'abord :

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad B_i = \begin{pmatrix} a_i \\ \gamma b_i \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ \gamma b_{i+1} \end{pmatrix} - r_i r_{i+1} \sin \omega_i = d_i \gamma + e_i$$

en ayant noté :

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad d_i = a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i \quad \text{et} \quad e_i = -r_i r_{i+1} \sin \omega_i.$$

En posant par ailleurs :

$$\forall 1 \leq i \leq N-1, \quad f_i = x_{i+1} - x_{i-1} \quad \text{et} \quad g_i = g(x_{i+1}) - g(x_{i-1}),$$

Ainsi, pour un paramètre γ fixé, nous sommes à même de calculer les $\mathbf{f}(X_i)$, et donc la force structure $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\gamma)$. Nous renvoyons pour cela à l'expression discrétisée de \mathbf{F} donnée en (3.5) page 142. Par ailleurs, pour $\bar{\gamma}$ fixé, nous avons exhibé les termes nécessaires au calcul de $\frac{d\mathbf{F}}{d\gamma}(\bar{\gamma})$.

Remarque 34. Les coefficients a_i, b_i, d_i, e_i, f_i et g_i sont indépendants de γ et du temps, et sont calculés une fois pour toute. Seuls les coefficients c_i dépendent de γ par la longueur $|F_i|$, et sont à calculer à chaque pas de temps. Dans notre cas, nous avons plus précisément :

$$a_i \equiv \frac{L}{N}, \quad g(x_i) = \frac{4i(N-i)}{N^2}, \quad b_i = \frac{4(N-2i+1)}{N^2}, \quad d_i \equiv -\frac{8L}{N^3}, \quad f_i \equiv \frac{2L}{N}, \quad g_i = \frac{8(N-2i)}{N^2}.$$

3.3.5 Algorithme synthétique de simulation numérique directe

Une fois l'initialisation effectuée à l'aide de \mathbf{u}_0 , nous avons une position initiale de la membrane selon la fonction de forme g et un paramètre γ_0 . Nous pouvons alors effectuer la :

Boucle en temps à chaque instant $t^n, n \geq 0$

1. Calcul des forces structure \mathbf{F}^{n+1} à partir de γ^n .
 2. Application de \mathbf{F}^{n+1} au second membre des équations de Navier-Stokes . Leur résolution donne \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} .
 3. Avec le flux ϕ_1^n de la première cavité, calcul de γ^{n+1} pour satisfaire à la contrainte de volume.
 4. Mise à jour de la position de la membrane : $\forall 0 \leq i \leq N, X_i^{n+1} = \begin{pmatrix} x_i \\ \gamma^{n+1}g(x_i) \end{pmatrix}$.
 5. Calcul du flux ϕ_1^{n+1} à partir de \mathbf{u}^{n+1} .
-
-

3.4 Une démarche de contrôle par feedback

Nous considérons le modèle simplifié introduit précédemment couplant deux fluides visqueux et une membrane immergée. Nous présentons un problème de contrôle par feedback sur ce système à partir d'une injection de fluide.

3.4.1 Motivations

Pour préciser les motivations de la démarche de contrôle, nous considérons dans ce paragraphe le système physique réel d'origine : un modèle de ventricule cardiaque artificiel (présenté succinctement au paragraphe 3.1.1 page 133). Son rôle est de pallier aux faiblesses du muscle cardiaque déficient : fatigue, arythmie pathologique, ou perméabilité des fermetures des valves par exemple. Nous indiquons ci-dessous des problèmes d'importance concernant la régulation du rythme cardiaque.

Nous rappelons tout d'abord le rôle vital du ventricule gauche : celui-ci doit alimenter les organes en sang oxygéné, de manière périodique et avec un rythme adapté. L'oxygénation étant réalisée au niveau pulmonaire, l'objectif du ventricule artificiel est donc d'**assurer le flux sanguin en sortie** : quantité et rythme. Le patient a en effet besoin d'un régime adapté à ses besoins (repos, activité quotidienne, effort sportif).

Dans notre modèle de ventricule, cette régulation est commandable par l'injection d'huile dans la cavité basse (cavité 1, voir Figure 3.1.1 page 133). Suivant le remplissage, et la vitesse de remplissage

par l'huile, le système est à même d'envoyer le sang en quantité demandée avec le débit requis. Les paramètres naturels de contrôle peuvent donc être l'injection $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ sur $\Gamma_1 \times (0, T)$, ainsi que sa vitesse $\partial_t \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$. On peut aussi penser à orienter l'injection d'huile suivant un certain angle $\theta(t)$ (par rapport à la normale), afin de «laver» les cavités basses et hautes, c'est-à-dire pour éviter les zones de recirculation et l'accumulation de particules fluides en des plaques.

Mise à part la régulation du flux de manière quasi-instantanée, les médecins soulèvent une question d'ordre à long terme. À partir d'un certain âge, le muscle cardiaque d'un patient s'affaiblit de façon naturelle au fur et à mesure des années ; de même, l'élasticité et la résistance des artères et des artéριοles diminuent. On peut alors s'interroger sur les effets à long terme (pendant dix ans par exemple) d'une pompe artificielle qui, pour un régime donné, ne diminuerait pas sa puissance. Les tissus physiologiques pourraient être détériorés par une usure prématurée. Des simulations numériques avec un contrôle suivant un horizon temporel infini pourraient apporter des éléments de réponses à cette interrogation.

Par ailleurs, le système a besoin d'être contrôlé de manière quasi-instantanée, et en fonction de l'historique récent de l'activité (augmentation du rythme, insuffisance de la régulation). Il est donc raisonnable de penser à utiliser un paramètre de *feedback*, c'est-à-dire une variable d'action sur le système qui est une fonction de l'observation réelle de ce qui se passe dans le ventricule.

Dans ce qui suit, nous allons nous attacher à une étude de faisabilité pour l'application numérique d'un contrôle par feedback dans notre modèle introduit précédemment. L'objectif recherché est l'approche d'un comportement connu du ventricule, ceci dans des situations où le système est perturbé. Nous appliquons pour cela un feedback suivant l'amplitude de l'injection d'huile dans la cavité basse du ventricule.

3.4.2 Objectif principal du contrôle du système

Nous rappelons que Ω désigne le domaine ventriculaire dans son ensemble. Comme la structure membranaire baigne dans le fluide, et que nous considérons que le fluide remplit entièrement le ventricule, il est classiquement admis dans le cadre de la méthode de la frontière immergée d'effectuer l'abus de notation suivant, qui consiste à dénoter Ω le domaine fluide dans son ensemble⁵⁷.

Par ailleurs, nous nous plaçons dans le cadre de la première phase ventriculaire, c'est-à-dire lors d'une injection forcée de fluide à travers la paroi Γ_1 , avec une sortie libre en Γ_4 , et le reste du bord $\Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ étant imperméable. Pour simplifier les notations, nous considérons que $\Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ne constitue qu'un seul bord dénoté Γ_0 .

Nous considérons le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F}(\gamma) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{j}} & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - p \mathbf{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_4 \times (0, T) \\ \mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \tilde{\mathbf{u}}_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.16)$$

avec les conditions de compatibilités suivantes :

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0 = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \text{et} \quad \int_{\Gamma_1} \tilde{\mathbf{j}}(\cdot, t = 0) \cdot \mathbf{n}, = - \int_{\Gamma_4} \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{n}. \end{array}$$

⁵⁷Autrement dit, les équations du fluide sont résolues à chaque instant $t \in (0, T)$ dans $\Omega = \Omega_1(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_2(t)$, y compris dans $\Gamma(t)$.

Nous rappelons que la condition de type DIRICHLET $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{j}}$ sur $\Gamma_1 \times (0, T)$ traduit une injection forcée de fluide. Le terme de forces $\mathbf{F}(\gamma) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \gamma)$ exprime de façon concise le fait que les forces structure ne dépendent que de la position instantanée de la membrane et du point $\mathbf{x} \in \Omega$. Leur expression, issue de (3.5) page 142, est donnée par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \gamma) = \frac{|\Gamma(0)|}{N} \sum_{\ell=0}^N \mathbf{f}_\ell(\gamma) \delta_h^\ell(X_\ell(\gamma) - \mathbf{x}), \quad (3.17)$$

avec $\mathbf{f}_\ell(\gamma) = \mathbf{f}_{b,\ell}(\gamma) + \mathbf{f}_{s,\ell}(\gamma)$ dont les formules sont données à la sous-section 3.3.4 page 157.

Dans notre cadre simplifié, nous avons de plus γ dépendant de \mathbf{u} par son flux dans la cavité 1 de la manière suivante (par analogie avec (3.15) page 157) :

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \frac{1}{\mathcal{A}_g} \int_0^t \phi_1(s) ds = \gamma(0) + \frac{1}{\mathcal{A}_g} \int_0^t \left(\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \mathbf{u}(s) \cdot (-\mathbf{n}) \right) ds, \quad (3.18)$$

ou encore :

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_g} \phi_1(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_g} \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{u}(t) \cdot (-\mathbf{n}) \right), \quad (3.19)$$

puisque \mathbf{u} est nul sur le bord Γ_2 .

Remarque 35. Dans notre cadre simplifié, nous ne traitons plus explicitement de condition d'égalité des vitesses fluide et structure à l'interface (telle que (3.2) page 140). Le déplacement de la structure ne répond ici qu'à l'injection de fluide dans la cavité 1. Néanmoins, les forces structure imposent (en traduisant le principe d'action-réaction à la normale à l'interface) le fait que le fluide doit aller à la même vitesse que la structure.

L'objet de notre démarche de contrôle est de permettre à (\mathbf{u}, p, γ) de se rapprocher (dans un sens à préciser) de la trajectoire $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma})$ solution d'un système de NAVIER-STOKES du même type :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F(\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = \mathbf{F}(\bar{\gamma}) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \bar{\mathbf{u}} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{j}} & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \nu \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial n} - \bar{p} \mathbf{n} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_4 \times (0, T) \\ \bar{\mathbf{u}}(\cdot, t=0) = \bar{\mathbf{u}}_0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3.20)$$

avec une injection $\bar{\mathbf{j}}$ et une donnée initiale $\bar{\mathbf{u}}_0$ satisfaisant les conditions de compatibilité *ad hoc*. Le coefficient $\bar{\gamma}$ indicatif de la position instantanée de l'interface est donné par :

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt}(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_g} \left(\int_{\Gamma_1} \bar{\mathbf{u}}(t) \cdot (-\mathbf{n}) \right). \quad (3.21)$$

Par ailleurs, l'injection $\bar{\mathbf{j}}$ n'est *a priori* pas connue, et il s'agit de la retrouver en modifiant l'injection $\tilde{\mathbf{j}}$ grâce à une correction qui provient de l'observation d'une partie du système.

3.4.3 Système des perturbations

Nous notons $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ la perturbation de la vitesse fluide, $\pi = p - \bar{p}$ la perturbation de la pression, et $d = \gamma - \bar{\gamma}$ la perturbation du coefficient indicatif de la position membranaire. Toutes ces perturbations sont à considérer relativement à l'état $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma})$. Nous constatons que ramener (\mathbf{u}, p, γ)

à $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma})$ est équivalent à ramener (\mathbf{y}, π, d) à $(\vec{0}, 0, 0)$. Notre nouvel objectif est donc de contrôler le système des perturbations en (\mathbf{y}, π, d) pour qu'il soit proche de $(\vec{0}, 0, 0)$. Pour cela, nous allons appliquer un contrôle par injection de fluide à travers le bord Γ_1 . En d'autres termes, nous effectuons une démarche de contrôle optimal dans le sens où nous allons minimiser une certaine fonctionnelle, avec comme paramètre un contrôle frontière.

Puisque nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} &= (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \\ &= \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{y}, \end{aligned}$$

le système vérifié par les perturbations (\mathbf{y}, π) est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_F (\partial_t \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{y}) - \nu \Delta \mathbf{y} + \nabla \pi &= \mathbf{F}(\gamma) - \mathbf{F}(\bar{\gamma}) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \mathbf{y} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{y} &= \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{j}} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \nu \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial n} - \pi \mathbf{n} &= \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_4 \times (0, T) \\ \mathbf{y}(\cdot, t = 0) &= \mathbf{y}_0 = \tilde{\mathbf{u}}_0 - \bar{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

avec les conditions de compatibilité *ad hoc* automatiquement satisfaites grâce à celles vérifiées par $\tilde{\mathbf{j}}$, $\tilde{\mathbf{u}}_0$ et $\bar{\mathbf{u}}$. Nous avons de plus :

$$\frac{dd}{dt}(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_g} \left(\int_{\Gamma_1} \mathbf{y}(t) \cdot (-\mathbf{n}) \right).$$

Le terme de forces $\mathbf{F}(\gamma) - \mathbf{F}(\bar{\gamma})$ peut s'écrire au premier ordre en d :

$$\mathbf{F}(\gamma) - \mathbf{F}(\bar{\gamma}) = \frac{d\mathbf{F}}{d\gamma}(\bar{\gamma}) \cdot (\gamma - \bar{\gamma}) + o(|\gamma - \bar{\gamma}|) = D\mathbf{F}(\bar{\gamma}) \cdot (d) + o(|d|)$$

avec $D\mathbf{F}(\bar{\gamma})$ la différentielle de \mathbf{F} par rapport à sa variable γ et appliquée au point $\bar{\gamma}$. Alors, en utilisant cette approximation au premier ordre, nous écrivons le système non-linéaire des perturbations sous forme faible de la manière suivante⁵⁸ :

$$\forall \mathbf{z} \in H^1(\Omega), \mathbf{z} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

$$\begin{aligned} \rho_F \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \rho_F \int_{\Omega} (\mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{z} \\ - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{z}) \pi + \int_{\partial\Omega} \left(\pi \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial n} \right) \cdot \mathbf{z} = d \int_{\Omega} (D\mathbf{F}(\bar{\gamma})) \cdot \mathbf{z} \quad \text{sur } (0, T). \end{aligned}$$

En utilisant maintenant les conditions de bord, nous avons :

$$\int_{\partial\Omega} \left(\pi \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial n} \right) \cdot \mathbf{z} = 0$$

car d'une part $\mathbf{z} = \vec{0}$ sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, et d'autre part $\pi \mathbf{n} - \nu \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial n} = \vec{0}$ sur $\Gamma_4 \times (0, T)$.

Nous avons par ailleurs la condition de divergence nulle :

$$\forall q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q (\nabla \cdot \mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } (0, T),$$

la condition initiale $\mathbf{y}(\cdot, t = 0) = \mathbf{y}_0$, et la condition de DIRICHLET sur le bord Γ_1 : $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{j}}$ sur l'intervalle $(0, T)$.

⁵⁸En particulier, le couple (\mathbf{u}, p) n'apparaît plus dans les expressions.

3.4.4 Système linéarisé des perturbations. Problème de contrôle

Pour pouvoir agir et contrôler le système des perturbations (\mathbf{y}, π, d) , nous allons linéariser ce système (écrit sous forme faible) autour de $(\vec{0}, 0, 0)$, et chercher un contrôle sur le système linéarisé. Nous écrivons :

$$(\mathbf{y}, \pi, d) = (\vec{0}, 0, 0) + (\delta\mathbf{y}, \delta\pi, \delta d) + o(\|(\delta\mathbf{y}, \delta\pi, \delta d)\|).$$

Le système linéarisé des perturbations s'écrit alors (sous forme faible) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall \mathbf{z} \in H^1(\Omega), \mathbf{z} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \rho_F \int_{\Omega} \partial_t \delta\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \rho_F \int_{\Omega} (\delta\mathbf{y} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \delta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} \\ \quad + \nu \int_{\Omega} \nabla \delta\mathbf{y} : \nabla \mathbf{z} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{z}) \delta\pi = \delta d \int_{\Omega} (D\mathbf{F}(\bar{\gamma})) \cdot \mathbf{z} \quad \text{sur } (0, T), \\ \bullet \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \delta\mathbf{y}) = 0 \quad \text{sur } (0, T), \\ \bullet \quad \delta\mathbf{y} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \bullet \quad \delta\mathbf{y}(\cdot, t = 0) = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.22)$$

avec de plus la condition sur le coefficient δd :

$$\frac{d\delta d}{dt}(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_g} \left(\int_{\Gamma_1} \delta\mathbf{y}(t) \cdot (-\mathbf{n}) \right). \quad (3.23)$$

Pour agir sur ce système, nous effectuons une injection de fluide à travers le bord Γ_1 :

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{j} = \mu\varphi \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.24)$$

avec $\varphi : \xi \mapsto \varphi(\xi)$ une fonction de forme définie sur Γ_1 , fixée, et indépendante du temps; et avec $\mu : t \mapsto \mu(t)$ une fonction scalaire ne dépendant que du temps, et influant linéairement sur le module d'injection associé φ . Pour k_1, k_2 et k_3 trois réels non nuls, nous considérons alors la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mu) = & \frac{1}{2} \int_0^T [\mu(t)]^2 dt + \frac{k_1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} ([\delta\mathbf{y}_{\mu}(t)]^2 + [\delta\pi_{\mu}(t)]^2 + k_3 [\delta d_{\mu}(t)]^2) dt \\ & + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} ([\delta\mathbf{y}_{\mu}(T)]^2 + [\delta\pi_{\mu}(T)]^2 + k_3 [\delta d_{\mu}(T)]^2), \end{aligned}$$

où $(\delta\mathbf{y}_{\mu}, \delta\pi_{\mu}, \delta d_{\mu})$ est le couple solution du système (3.22)-(3.24) précédent associé à la fonction μ . Nous sommes maintenant à même d'exprimer le problème de contrôle par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } \mu^* \in L^2(0, T) \text{ telle que :} \\ \quad \forall \mu \in L^2(0, T), \mathcal{J}(\mu^*) \leq \mathcal{J}(\mu) \\ \text{avec } (\delta\mathbf{y}_{\mu}, \delta\pi_{\mu}, \delta d_{\mu}) \text{ solution de (3.22)-(3.24) associée à } \mu. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

3.4.5 Semi-discrétisation temporelle du système linéarisé des perturbations

Soit $t^0 = 0 < t^1 < \dots < t^N = T$ une subdivision de $(0, T)$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous-intervalles de longueur uniforme $\Delta t : \forall n \in \{0, \dots, N-1\}, t^{n+1} = t^n + \Delta t = n\Delta t$. Nous notons $\delta\mathbf{y}^n$ (resp. $\delta\pi^n, \delta d^n$ et \mathbf{j}^n) une approximation de $\delta\mathbf{y}$ (resp. $\delta\pi, \delta d$ et \mathbf{j}) au temps t^n .

Nous adoptons la semi-discrétisation temporelle explicite suivante pour le système linéarisé des perturbations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \star n = 0, \\ \star \forall n = 0, \dots, N-1, \\ \quad \bullet \forall \mathbf{z} \in H^1(\Omega), \mathbf{z} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \quad \rho_F \int_{\Omega} \frac{\delta \mathbf{y}^{n+1} - \delta \mathbf{y}^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{z} + \rho_F \int_{\Omega} (\delta \mathbf{y}^n \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^n + \bar{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \delta \mathbf{y}^n) \cdot \mathbf{z} \\ \quad \quad \quad + \nu \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{y}^n : \nabla \mathbf{z} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{z}) \delta \pi^{n+1} = \delta l^n \int_{\Omega} (D\mathbf{F}(\bar{\gamma}^n)) \cdot \mathbf{z}, \\ \quad \bullet \forall q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \delta \mathbf{y}^{n+1}) = 0, \\ \quad \bullet \delta \mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{j}^n \text{ sur } \Gamma_1. \end{array} \right. \quad \delta \mathbf{y}^0 = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

Nous discrétisons l'identité (3.23) sur la position membranaire par :

$$\delta l^{n+1} = \delta l^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_g} \left(\int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{y}^n \cdot (-\mathbf{n}) \right).$$

Remarque 36. *Nous avons choisi un schéma d'EULER explicite pour éviter des complications non-triviales par la suite. En particulier, la condition de contrôle est elle aussi explicite : $\delta \mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{j}^n$. Lors de la discrétisation totale en temps, ceci nous permettra d'avoir une écriture matricielle sous forme d'un système linéaire explicite. Nous suivons en particulier [HGMP98] dans cette démarche.*

3.4.6 Discrétisation totale du système linéarisé des perturbations

Espaces d'approximation éléments Finis

Nous adoptons une discrétisation spatiale par éléments finis. Nous notons h un paramètre générique significatif du raffinement de cette discrétisation, et qui est destiné à tendre vers 0. Pour la méthode des éléments finis, nous pouvons considérer pour fixer les idées que h est la longueur maximale d'une arête du maillage.

Soit Ω_h un maillage triangulaire conforme du domaine Ω , dont nous notons Γ_0^h , resp. Γ_1^h et Γ_4^h , les bords correspondant aux discrétisés des bords Γ_0 , resp. Γ_1 et Γ_4 . Pour les «espaces des vitesses fluides», nous considérons des éléments finis \mathcal{P}_2 , et nous définissons :

$$X_h = \{ \mathbf{z} \in C^0(\overline{\Omega_h}); \mathbf{z}|_T \in \mathcal{P}_2, \forall T \in \Omega_h \}$$

l'espace d'approximation de $H^1(\Omega)$; nous notons $2N_1 = \dim(X_h)$ sa dimension⁵⁹. Soit :

$$X_{0h} = \{ \mathbf{z} \in X_h; \mathbf{z} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_0^h \cup \Gamma_1^h \}$$

l'espace d'approximation des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui supportent sur les bords $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ des conditions de DIRICHLET homogènes; nous notons $2N_0 = \dim(X_{0h}) \leq 2N_1$ sa dimension. Pour l'«espace des pressions», nous considérons des éléments finis \mathcal{P}_1 et nous définissons :

$$M_h = \{ q \in C^0(\overline{\Omega_h}); q|_T \in \mathcal{P}_1, \forall T \in \Omega_h \}$$

une approximation de $L^2(\Omega)$, dont nous notons $N_2 = \dim(M_h)$ la dimension.

⁵⁹Les fonctions étant à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^2 , la dimension de X_h dans \mathbb{R} est nécessairement paire.

Soient d'une part $I_1 = \{1, \dots, 2N_1\}$ et $(\mathbf{z}_i)_{i \in I_1}$ une base de X_h , et d'autre part le sous-ensemble $I_0 \subset I_1$ des indices des fonctions correspondant aux éléments de X_{0h} de telle sorte que $(\mathbf{z}_i)_{i \in I_0}$ soit une base de X_{0h} ; en particulier, $\text{card}(I_0) = 2N_0$. Soit par ailleurs $(q_j)_{j=1}^{N_2}$ une base de M_h .

Nous précisons encore :

1. ξ_i , $i = 1, \dots, N_2$, les N_2 sommets du maillage Ω_h ;
2. q_j , $j = 1, \dots, N_2$, les fonctions chapeaux \mathcal{P}_1 à valeurs scalaires correspondant aux ξ_i , et affines par éléments :

$$q_j : \Omega_h \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi_i \longmapsto \delta_{ij}.$$

3. w_i , $i = 1, \dots, N_1$, les fonctions chapeaux \mathcal{P}_2 à valeurs scalaires correspondant aux ξ_i et aux milieux des arêtes, et quadratiques par éléments.

Pour fixer les idées, nous prenons :

$$z_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, z_{N_1} = \begin{pmatrix} w_{N_1} \\ 0 \end{pmatrix}, z_{N_1+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_1 \end{pmatrix}, \dots, z_{2N_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ w_{N_1} \end{pmatrix}$$

comme base de X_h .

Nous pouvons ainsi décomposer $\delta\mathbf{y}$ de la manière suivante :

$$\delta\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{2N_1} \delta\mathbf{y}_i \mathbf{z}_i = \sum_{i \in I_0} \delta\mathbf{y}_i \mathbf{z}_i + \sum_{i \in I_1 \setminus I_0} \delta\mathbf{y}_i \mathbf{z}_i$$

avec pour $i = 1, \dots, 2N_1$, $\delta\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}$, et le second terme du membre de droite représente la contribution des éléments de $\Gamma_0^h \cup \Gamma_1^h$. En ce qui concerne les pressions, nous écrivons $\delta\pi = \sum_{j=1}^{N_2} \delta\pi_j q_j$, avec pour $j = 1, \dots, N_2$, $\delta\pi_j \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, nous considérons un opérateur discret R_h de relèvement des conditions de DIRICHLET non-homogènes définies sur le bord Γ_1^h . À partir d'une fonction \mathbf{j} éléments finis donnée uniquement sur les noeuds du maillage de Γ_1^h , nous définissons $R_h \mathbf{j}$ l'élément de X_h valant $\vec{0}$ partout dans Ω_h , sauf sur Γ_1^h où $R_h \mathbf{j}|_{\Gamma_1^h} = \mathbf{j}$. Ainsi, nous avons :

$$R_h \mathbf{j} = \sum_{i \in I_0} 0 \mathbf{z}_i + \sum_{i \in I_1 \setminus I_0} \mathbf{j}_i \mathbf{z}_i \in X_h.$$

Schéma de la discrétisation totale

Nous sommes maintenant à même de présenter le schéma de la discrétisation totale (c'est-à-dire spatiale et temporelle) du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \star n = 0, \quad \delta\mathbf{y}^0 = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega_h, \\ \star \forall n = 0, \dots, N-1, \\ \quad \bullet \forall i = 1, \dots, 2N_0, \\ \quad \quad \rho_F \int_{\Omega_h} \frac{\delta\mathbf{y}^{n+1} - \delta\mathbf{y}^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{z}_i + \rho_F \int_{\Omega_h} (\delta\mathbf{y}^n \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^n + \bar{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \delta\mathbf{y}^n) \cdot \mathbf{z}_i \\ \quad \quad \quad + \nu \int_{\Omega_h} \nabla \delta\mathbf{y}^n : \nabla \mathbf{z}_i - \int_{\Omega_h} (\nabla \cdot \mathbf{z}_i) \delta\pi^{n+1} = \delta\alpha^n \int_{\Omega_h} (D\mathbf{F}(\bar{\boldsymbol{\gamma}}^n)) \cdot \mathbf{z}_i, \\ \quad \bullet \forall j = 1, \dots, N_2, \quad \int_{\Omega_h} q_j (\nabla \cdot \delta\mathbf{y}^{n+1}) = 0, \\ \quad \bullet \quad \delta\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{j}^n \quad \text{sur } \Gamma_1^h, \end{array} \right.$$

avec :

$$\delta l^{n+1} = \delta l^n + \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_g} \left(\int_{\Gamma_1^h} \delta \mathbf{y}^n \cdot (-\mathbf{n}) \right).$$

3.4.7 Formulation Linéaire-Quadratique du problème de contrôle

Écriture sous forme matricielle

Afin d'écrire le système précédent sous forme matricielle, nous introduisons de nouvelles notations. Soient la matrice de masse :

$$M = \left(\int_{\Omega_h} \mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_j \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R});$$

la matrice rectangulaire de la divergence :

$$B = \left(\int_{\Omega_h} (\nabla \cdot \mathbf{z}_i) q_j \right)_{1 \leq i \leq 2N_1, 1 \leq j \leq N_2} \in \mathcal{M}_{2N_1, N_2}(\mathbb{R});$$

la matrice carrée (agissant «de X_h dans X_h ») du relèvement R_h :

$$J = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R}), \quad J_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \in I_1 \setminus I_0 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

la matrice carrée de la dissipation liée à la viscosité :

$$L_\nu = \left(\nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{z}_i : \nabla \mathbf{z}_j \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R});$$

et le vecteur-ligne lié au flux d'injection :

$$W = \left(\frac{\Delta t}{\mathcal{A}_g} \int_{\Gamma_1^h} \mathbf{z}_j \cdot (-\mathbf{n}) \right)_{1 \leq j \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{1, 2N_1}(\mathbb{R}).$$

Nous définissons maintenant les matrices et les vecteurs qui dépendent du temps (uniquement à partir de $\bar{\mathbf{u}}^n$ ou de $\bar{\gamma}^n$). Soient la matrice liée à la convection :

$$\forall n = 0, \dots, N, \quad L_c^n = \left(\rho_F \int_{\Omega_h} (\bar{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \mathbf{z}_j + \mathbf{z}_j \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^n) \cdot \mathbf{z}_i \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R}),$$

et le vecteur des forces structure :

$$\forall n = 0, \dots, N, \quad V^n = \left(\int_{\Omega_h} (D\mathbf{F}(\bar{\gamma}^n)) \cdot \mathbf{z}_i \right)_{1 \leq i \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{1, 2N_1}(\mathbb{R}).$$

Par abus de notation, nous écrivons aussi $\delta \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{y}_{2N_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_1}$ et $\delta \pi = \begin{pmatrix} \delta \pi_1 \\ \vdots \\ \delta \pi_{N_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_2}$. Enfin, nous écrivons le contrôle :

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad \mathbf{j}^n = \mu^n \varphi$$

avec φ une fonction de forme définie sur Γ_1^h fixée, et μ^n un réel influant linéairement sur le module d'injection associé φ .

Pour écrire le système sous forme matricielle, nous utilisons une méthode de pénalisation⁶⁰ pour imposer les conditions de DIRICHLET ; nous choisissons pour cela un réel α très grand. Ainsi, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \star \quad n = 0, \\ \star \quad \forall n = 0, \dots, N-1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \delta \mathbf{y}^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega_h, \\ \frac{\rho_F}{\Delta t} M (\delta \mathbf{y}^{n+1} - \delta \mathbf{y}^n) \\ + (L_\nu + L_c^n) \delta \mathbf{y}^n - B \delta \pi^{n+1} = \alpha J(R_h \mathbf{j}^n - \delta \mathbf{y}^{n+1}) + \delta l^n V^n \\ B^T \delta \mathbf{y}^{n+1} = 0 \\ \delta l^{n+1} = \delta l^n + W \cdot \delta \mathbf{y}^n ; \end{array}$$

soit encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \star \quad n = 0, \\ \star \quad \forall n = 0, \dots, N-1, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}^0 \\ \delta \pi^0 \\ \delta l^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_h, \\ \begin{pmatrix} A & -B & 0 \\ -B^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}^{n+1} \\ \delta \pi^{n+1} \\ \delta l^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^n & 0 & V^n \\ 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}^n \\ \delta \pi^n \\ \delta l^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mu^n, \end{array} \quad (3.26)$$

en ayant noté d'une part $\beta = \alpha J(R_h \varphi) \in X_h$, et d'autre part $A = \frac{\rho_F}{\Delta t} M + \alpha J$ et $G^n = \frac{\rho_F}{\Delta t} M - (L_\nu + L_c^n)$ des éléments de $\mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R})$.

Remarque 37. La pression étant résolue de manière implicite, la valeur de $\delta \pi^0$ n'a aucune utilité. Néanmoins ici, comme $\delta \pi$ exprime une perturbation de pression proche de 0, nous avons pris $\delta \pi^0 = 0$ (sans conséquence pour la suite).

Pour inverser la matrice du membre de gauche du système (3.26), nous utilisons un lemme :

Lemme 11. Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, et $B \in \mathcal{M}_{2N_1, N_2}(\mathbb{R})$ une matrice rectangulaire telle que $\text{Ker}(B) = \{0\}$, alors la matrice carrée $B^T A^{-1} B \in \mathcal{M}_{N_2, N_2}(\mathbb{R})$ est symétrique inversible et la matrice :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} A & -B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_1+N_2, 2N_1+N_2}(\mathbb{R}) \quad \text{est inversible et} \quad \mathcal{M}_1^{-1} = \begin{pmatrix} C & D \\ D^T & E \end{pmatrix},$$

avec $E = -[B^T A^{-1} B]^{-1} \in \mathcal{M}_{N_2, N_2}(\mathbb{R})$ symétrique, $D = A^{-1} B E \in \mathcal{M}_{2N_1, N_2}(\mathbb{R})$ et $C = A^{-1} (I_{2N_1} + B D^T) \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R})$ symétrique elle aussi.

Preuve: • Comme A est définie, son inverse A^{-1} l'est aussi, et ainsi :

$$\begin{aligned} (\forall X \in \mathbb{R}^{N_2}, X^T (B^T A^{-1} B) X = (B X)^T A^{-1} (B X) = 0 &\implies X = 0) \\ &\iff \\ (\forall X \in \mathbb{R}^{N_2}, B X = 0 &\implies X = 0) \\ &\iff \\ (\text{Ker}(B) = \{0\}), & \end{aligned}$$

⁶⁰De manière totalement indépendante de notre démarche, le logiciel FREEFEM++, que nous utilisons dans ce chapitre pour la résolution des systèmes d'EDP, utilise, dans sa version 1.26, un algorithme de pénalisation pour la prise en compte des conditions de DIRICHLET homogènes et non-homogènes.

et donc $B^T A^{-1} B$, par hypothèse, est elle aussi définie, donc inversible. Par suite, E existe et est symétrique car A l'est.

• Par ailleurs, nous avons :

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^{-1} = \begin{pmatrix} AC - BD^T & AD - BE \\ -B^T C & -B^T D \end{pmatrix}.$$

Or, $AD = BE$ par définition de D ; $B^T D = (B^T A^{-1} B)E = -I_{N_2}$ par définition de D et E ; $AC = I_{2N_1} + BD^T$ par définition de C implique $AC - BD^T = I_{2N_1}$. De plus, puisque :

$$\begin{aligned} B^T C &= B^T A^{-1} + B^T A^{-1} B D^T && \text{par définition de } C, \\ &= B^T A^{-1} + (B^T A^{-1} B) E B^T A^{-1} && \text{par définition de } D, \\ &= B^T A^{-1} - B^T A^{-1} && \text{par définition de } E, \end{aligned}$$

nous avons finalement $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_{2N_1} & 0 \\ 0 & I_{N_2} \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $C = A^{-1} + A^{-1} B E B^T A^{-1}$ est symétrique, car A^{-1} et E le sont. \square

Remarque 38. La matrice \mathcal{M}_1 du lemme est la matrice d'un système écrit sous forme mixte. Le lemme précédent correspond simplement à la reformulation des conditions inf-sup discrètes sur les matrices A et B . Or, dans notre cas, la matrice A est symétrique et définie; l'inversion de \mathcal{M}_1 est donc équivalente à la condition $\text{Ker}(B) = \{0\}$.

Par ailleurs, nous utilisons une discrétisation $\mathcal{P}_2(T) \times \mathcal{P}_1(T)$ par élément fini T en vitesse-pressure, c'est-à-dire un élément fini de TAYLOR-HOOD; la condition inf-sup est donc satisfaite. La matrice $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ du système (3.26) est donc inversible puisque les hypothèses du lemme sont vérifiées.

Nous adoptons les notations du lemme avec $D = -A^{-1} B [B^T A^{-1} B]^{-1} \in \mathcal{M}_{2N_1, N_2}(\mathbb{R})$ et $C = A^{-1} (I_{2N_1} + BD^T) \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R})$. Nous définissons la matrice :

$$\mathcal{A}^n = \begin{pmatrix} C & D & 0 \\ D^T & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^n & 0 & V^n \\ 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CG^n & 0 & CV^n \\ D^T G^n & 0 & D^T V^n \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_1 + N_2 + 1, 2N_1 + N_2 + 1}(\mathbb{R}),$$

et le vecteur indépendant du temps :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} C & D & 0 \\ D^T & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\beta \\ D^T \beta \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_1 + N_2 + 1, 1}(\mathbb{R}).$$

Nous notons le vecteur $Y^n = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}^n \\ \delta \pi^n \\ \delta t^n \end{pmatrix}$. Ainsi, en appliquant le lemme à un bloc d'une matrice du système matriciel (3.26) précédent, le système des perturbations s'écrit finalement :

$$\begin{cases} \star & n = 0, & Y^0 & = 0 & \text{dans } \Omega_h, \\ \star & \forall n = 0, \dots, N-1, & Y^{n+1} & = \mathcal{A}^n Y^n + \mathcal{B} \mu^n. \end{cases}$$

Fonctionnelle discrète de contrôle

Nous suivons une démarche de contrôle optimal pour laquelle nous présentons maintenant la fonctionnelle qui porte sur les variables Y^n , $n = 0, \dots, N-1$. Nous définissons alors les matrices :

$$\overline{M} = \left(\int_{\Omega_h} q_i q_j \right)_{1 \leq i, j \leq N_2} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & \overline{M} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2N_1 + N_2 + 1, 2N_1 + N_2 + 1}(\mathbb{R})$$

et les matrices \mathcal{R}^N et \mathcal{Q} symétriques définies positives par :

$$\mathcal{R}^N = k_2 \overline{\overline{M}} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = k_1 \Delta t \overline{\overline{M}}.$$

Nous définissons la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \forall \mu = \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \vdots \\ \mu^{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathcal{J}_h(\mu, Y) &= \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (\mu^n)^2 + \frac{k_1}{2} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} (Y^n)^T \overline{\overline{M}} Y^n + \frac{k_2}{2} (Y^N)^T \overline{\overline{M}} Y^N \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta t (\mu^n)^2 + (Y^n)^T \mathcal{Q} Y^n) + \frac{1}{2} (Y^N)^T \mathcal{R}^N Y^N. \end{aligned}$$

Formulation Linéaire-Quadratique

Notre problème de contrôle s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le vecteur } \mu^* = (\mu^n)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que :} \\ \mu^* \text{ minimise la fonctionnelle } \mathbf{quadratique} \mathcal{J}_h \text{ au sens suivant :} \\ \quad \forall v = (v^n)_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N, \mathcal{J}_h(\mu^*, Y_{\mu^*}) \leq \mathcal{J}_h(v, Y_v) \\ \text{avec } Y_v \text{ solution du problème } \mathbf{linéaire} : \\ Y_v^0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n = 0, \dots, N-1, \quad Y_v^{n+1} = \mathcal{A}^n Y_v^n + \mathcal{B} v^n. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

3.4.8 Contrôle par feedback

Le problème de contrôle (3.27) est écrit sous forme Linéaire-Quadratique, dont le type de formulation a déjà été bien étudié dans la littérature. Ainsi, il existe une solution au problème de contrôle sous forme d'un feedback. Nous référons à [Lew86] pour ce résultat, ainsi que pour son algorithme de résolution pratique ci-dessous (cf [Lew86], page 53, (2.2 – 62) et Table 2.2 – 1). Le contrôle est donné sous la forme :

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad \mu^n = -\mathcal{K}^n Y^n,$$

avec $\mathcal{K}^n \in \mathcal{M}_{1, 2N_1+N_2+1}(\mathbb{R})$ la *matrice de gain de KALMAN*, dépendant du temps, et dont l'expression est donnée par :

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad \mathcal{K}^n = \mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{A}^n / (\Delta t + \mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{B}), \quad (3.28)$$

avec $\mathcal{R}^{n+1} \in \mathcal{M}_{2N_1+N_2+1, 2N_1+N_2+1}(\mathbb{R})$ la *matrice de RICCATI* obtenue de façon rétrograde par :

$$\forall n = N-1, \dots, 0, \quad \mathcal{R}^n = (\mathcal{A}^n - \mathcal{B} \mathcal{K}^n)^T \mathcal{R}^{n+1} (\mathcal{A}^n - \mathcal{B} \mathcal{K}^n) + \Delta t (\mathcal{K}^n)^T \mathcal{K}^n + \mathcal{Q}, \quad (3.29)$$

et en tenant compte de la condition *finale* \mathcal{R}^N donnée précédemment dans l'expression de la fonctionnelle \mathcal{J}_h . Cette dernière formule (3.29) correspond à la *version stabilisée de JOSEPH* de l'équation de RICCATI. Elle permet par ailleurs de remarquer que \mathcal{R}^n est une matrice symétrique (qui reste définie si Δt est assez petit).

Remarque 39. Dans le cadre Linéaire-Quadratique du problème de contrôle, nous utilisons un contrôle $\mu^n \in \mathbb{R}$ monodimensionnel à chaque pas de temps. Ceci apporte de nombreuses simplifications dans l'algorithme de résolution que nous mentionnons ci-après. En particulier, la matrice \mathcal{B} est restreinte à un vecteur-colonne de $\mathbb{R}^{2N_1+N_2+1}$, ce qui fait que la matrice $(\Delta t I_1 + \mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{B})$ est un réel trivialement inversible. D'autre part, la matrice de gain de KALMAN est restreinte à un vecteur-ligne de $\mathbb{R}^{2N_1+N_2+1}$.

Remarque 40. Au niveau de la programmation, les matrices \mathcal{R}^n et \mathcal{K}^n peuvent être calculées off-line, c'est-à-dire avant la résolution du système en vitesse-pression (\mathbf{u}, p, γ) . De plus, il n'est pas nécessaire de garder en mémoire les matrices \mathcal{R}^n , qui servent uniquement au calcul de \mathcal{K}^n .

Néanmoins, le contrôle μ^n sera calculé on-line, c'est-à-dire à partir de Y^n lors de la résolution effective du système des perturbations linéarisé, ou bien à partir de $(\mathbf{u}^n, p^n, \gamma^n)$ lors de la résolution du système fluide en vitesse-pression. Pour cela, il suffit de garder au plus en mémoire les N vecteurs $\mathcal{K}^0, \dots, \mathcal{K}^{N-1}$.

3.4.9 Algorithme de calculs des matrices de gain de Kalman

Avant de présenter un algorithme de calcul des matrices de gain de KALMAN, nous simplifions certaines expressions en exploitant la disposition par blocs creuse des matrices \mathcal{A}^n .

Lemme 12. Pour $n = 0, \dots, N - 1$, nous avons :

$$\mathcal{K}^n = (K_1^n \quad 0 \quad K_3^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^n = \begin{pmatrix} R_1^n & 0 & R_4^n \\ 0 & R_2 & 0 \\ (R_4^n)^T & 0 & R_3^n \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

avec d'une part :

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &= CR_1^{n+1}C + DR_2D^T \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R}) \\ \underline{d}^n &= \Delta t + \beta^T Z^{n+1}\beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et avec d'autre part les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} K_1^n &= (\beta^T Z^{n+1}G^n + \beta^T CR_4^{n+1}W)/\underline{d}^n && \in \mathcal{M}_{1, 2N_1}(\mathbb{R}) \\ K_3^n &= (\beta^T Z^{n+1}V^n + \beta^T CR_4^{n+1})/\underline{d}^n && \in \mathbb{R} \\ H^n &= G^n - \beta K_1^n && \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R}) \\ P^n &= V^n - \beta K_3^n && \in \mathcal{M}_{2N_1, 1}(\mathbb{R}) \\ R_1^n &= (H^n)^T Z^{n+1}H^n + (H^n)^T CR_4^{n+1}W + W^T (R_4^{n+1})^T CH^n \\ &\quad + W^T R_3^{n+1}W + \Delta t (K_1^n)^T K_1^n + k_1 \Delta t M && \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R}) \\ R_2 &= k_1 \Delta t \bar{M} && \in \mathcal{M}_{N_2, N_2}(\mathbb{R}) \\ R_3^n &= (P^n)^T Z^{n+1}P^n + 2(P^n)^T CR_4^{n+1} \\ &\quad + R_3^{n+1} + \Delta t (K_3^n)^2 + k_1 k_3 \Delta t && \in \mathbb{R} \\ R_4^n &= (H^n)^T Z^{n+1}P^n + (H^n)^T CR_4^{n+1} \\ &\quad + (R_3^{n+1} + (R_4^{n+1})^T CP^n)W^T + \Delta t (K_1^n)^T K_3^n && \in \mathcal{M}_{2N_1, 1}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

De plus, les matrices Z^{n+1} , R_1^{n+1} et R_2 sont symétriques.

Preuve: Nous prouvons ce lemme par une récurrence décroissante allant de $N - 1$ à 0.

• Nous rappelons que de par son expression (3.29) obtenue dans la version stabilisée de JOSEPH, la matrice de RICCATI \mathcal{R}^n (obtenue de manière rétrograde) est symétrique car \mathcal{R}^N l'est.

• Pour $n = N$, nous avons la matrice $\mathcal{R}^N = \begin{pmatrix} k_2 M & 0 & 0 \\ 0 & k_2 \bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 k_3 \end{pmatrix}$ qui (même si elle ne vérifie pas la propriété de récurrence au rang N) a la décomposition en blocs présentée en (3.30) pour les matrices \mathcal{R}^m pour $m = N - 1, \dots, 0$.

• Nous fixons $n \in \{0, \dots, N - 1\}$. Nous supposons que \mathcal{R}^{n+1} possède la décomposition en blocs présentée dans l'énoncé en (3.30). Nous obtenons tout d'abord \mathcal{K}^n par son expression (3.28) : $\mathcal{K}^n = (\underline{d}^n)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{A}^n$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{d}^n - \Delta t &= ((C\beta)^T \quad (D^T\beta)^T \quad 0) \begin{pmatrix} R_1^{n+1} & 0 & R_4^{n+1} \\ 0 & R_2 & 0 \\ (R_4^{n+1})^T & 0 & R_3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\beta \\ D^T\beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\beta^T C R_1^{n+1} \quad \beta^T D R_2 \quad \beta^T C R_4^{n+1}) \begin{pmatrix} C\beta \\ D^T\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \beta^T (C R_1^{n+1} C + D R_2 D^T) \beta = \beta^T Z^{n+1} \beta. \end{aligned}$$

Comme $\underline{d}^n = (\Delta t + \mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{B})$ est un scalaire, nous nous intéressons plus précisément à la quantité $\mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{A}^n$. Nous avons par hypothèse sur \mathcal{R}^{n+1} , et en utilisant que C est symétrique :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^T \mathcal{R}^{n+1} \mathcal{A}^n &= ((C\beta)^T \quad (D^T\beta)^T \quad 0) \begin{pmatrix} R_1^{n+1} & 0 & R_4^{n+1} \\ 0 & R_2 & 0 \\ (R_4^{n+1})^T & 0 & R_3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C G^n & 0 & C V^n \\ D^T G^n & 0 & D^T V^n \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= ((C\beta)^T \quad (D^T\beta)^T \quad 0) \begin{pmatrix} R_1^{n+1} C G^n + R_4^{n+1} W & 0 & R_1^{n+1} C V^n + R_4^{n+1} \\ R_2 D^T G^n & 0 & R_2 D^T V^n \\ (R_4^{n+1})^T C G^n + R_3^{n+1} W & 0 & (R_4^{n+1})^T C V^n + R_3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= (\beta^T (C R_1^{n+1} C + D R_2 D^T) G^n + \beta^T C R_4^{n+1} W \quad 0 \quad \beta^T (C R_1^{n+1} C + D R_2 D^T) V^n + \beta^T C R_4^{n+1}) \\ &= (\beta^T Z^{n+1} G^n + \beta^T C R_4^{n+1} W \quad 0 \quad \beta^T Z^{n+1} V^n + \beta^T C R_4^{n+1}) \end{aligned}$$

d'où les expressions de K_1^n , K_3^n et \mathcal{K}^n .

• Nous fixons à nouveau $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Nous supposons que \mathcal{R}^{n+1} et \mathcal{K}^n s'écrivent de la même forme qu'en (3.30). Nous considérons maintenant l'expression (3.29) pour le calcul de \mathcal{R}^n . Nous avons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \Delta t (\mathcal{K}^n)^T \mathcal{K}^n + \mathcal{Q} &= \Delta t \begin{pmatrix} (K_1^n)^T K_1^n & 0 & (K_1^n)^T K_3^n \\ 0 & 0 & 0 \\ K_3^n K_1^n & 0 & (K_3^n)^2 \end{pmatrix} + k_1 \Delta t \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \\ &= \Delta t \begin{pmatrix} (K_1^n)^T K_1^n + k_1 M & 0 & (K_1^n)^T K_3^n \\ 0 & k_1 \bar{M} & 0 \\ K_3^n K_1^n & 0 & (K_3^n)^2 + k_1 k_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme :

$$\mathcal{B} \mathcal{K}^n = \begin{pmatrix} C\beta \\ D^T\beta \\ 0 \end{pmatrix} (K_1^n \quad 0 \quad K_3^n) = \begin{pmatrix} C\beta K_1^n & 0 & C\beta K_3^n \\ D^T\beta K_1^n & 0 & D^T\beta K_3^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il vient :

$$\mathcal{A}^n - \mathcal{B} \mathcal{K}^n = \begin{pmatrix} C(G^n - \beta K_1^n) & 0 & C(V^n - \beta K_3^n) \\ D^T(G^n - \beta K_1^n) & 0 & D^T(V^n - \beta K_3^n) \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C H^n & 0 & C P^n \\ D^T H^n & 0 & D^T P^n \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

nous avons alors :

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}^n - \mathcal{B} \mathcal{K}^n)^T \mathcal{R}^{n+1} (\mathcal{A}^n - \mathcal{B} \mathcal{K}^n) \\ &= \begin{pmatrix} (H^n)^T C & (H^n)^T D & W^T \\ 0 & 0 & 0 \\ (P^n)^T C & (P^n)^T D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{n+1} & 0 & R_4^{n+1} \\ 0 & R_2 & 0 \\ (R_4^{n+1})^T & 0 & R_3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C H^n & 0 & C P^n \\ D^T H^n & 0 & D^T P^n \\ W & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (H^n)^T C & (H^n)^T D & W^T \\ 0 & 0 & 0 \\ (P^n)^T C & (P^n)^T D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{n+1} C H^n + R_4^{n+1} W & 0 & R_1^{n+1} C P^n + R_4^{n+1} \\ R_2 D^T H^n & 0 & R_2 D^T P^n \\ (R_4^{n+1})^T C H^n + R_3^{n+1} W & 0 & (R_4^{n+1})^T C P^n + R_3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (H^n)^T Z^{n+1} H^n + (H^n)^T C R_4^{n+1} W & 0 & (H^n)^T Z^{n+1} P^n + (H^n)^T C R_4^{n+1} \\ + W^T (R_4^{n+1})^T C H^n + W^T R_3^{n+1} W & 0 & + W^T (R_4^{n+1})^T C P^n + W^T R_3^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ (P^n)^T Z^{n+1} H^n + (P^n)^T C R_4^{n+1} W & 0 & (P^n)^T Z^{n+1} P^n + (P^n)^T C R_4^{n+1} \\ + (R_4^{n+1})^T C H^n + R_3^{n+1} W & 0 & + (R_4^{n+1})^T C P^n + R_3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De ce qui précède, et de par l'expression (3.29) de \mathcal{R}^n , nous en déduisons :

$$\mathcal{R}^n = \begin{pmatrix} (H^n)^T Z^{n+1} H^n & & (H^n)^T Z^{n+1} P^n \\ +(H^n)^T C R_4^{n+1} W + W^T (R_4^{n+1})^T C H^n & 0 & +(H^n)^T C R_4^{n+1} + W^T (R_4^{n+1})^T C P^n \\ +W^T R_3^{n+1} W + \Delta t (K_1^n)^T K_1^n + \Delta t k_1 M & & +W^T R_3^{n+1} + \Delta t (K_1^n)^T K_3^n \\ 0 & k_1 \Delta t \bar{M} & 0 \\ (P^n)^T Z^{n+1} H^n & & (P^n)^T Z^{n+1} P^n \\ +(P^n)^T C R_4^{n+1} W + (R_4^{n+1})^T C H^n & 0 & +(P^n)^T C R_4^{n+1} + (R_4^{n+1})^T C P^n \\ +R_3^{n+1} W + \Delta t K_3^n K_1^n & & +R_3^{n+1} + \Delta t (K_3^n)^2 + k_1 k_3 \Delta t \end{pmatrix}$$

et ainsi les formules de R_1^n , R_2 , R_3^n , et R_4^n présentées dans l'énoncé du lemme. \square

Nous explicitons maintenant les expressions de certaines matrices, afin de mieux détailler ensuite leurs calculs. Nous rappelons tout d'abord que :

$$D = -(A^{-1}B) [B^T(A^{-1}B)]^{-1} \quad \text{et} \quad C = A^{-1} (I_{2N_1} + BD^T).$$

Nous avons par ailleurs la matrice liée à la dissipation visqueuse, indépendante du temps :

$$\begin{aligned} L_\nu &= \left(\nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{z}_i : \nabla \mathbf{z}_j \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \\ &= \left(\nu \int_{\Omega_h} [\partial_1(\mathbf{z}_i)_1 \partial_1(\mathbf{z}_j)_1 + \partial_2(\mathbf{z}_i)_1 \partial_2(\mathbf{z}_j)_1 + \partial_1(\mathbf{z}_i)_2 \partial_1(\mathbf{z}_j)_2 + \partial_2(\mathbf{z}_i)_2 \partial_2(\mathbf{z}_j)_2] \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1}; \end{aligned}$$

d'où $L_\nu = \begin{pmatrix} L_{\nu 1} & 0 \\ 0 & L_{\nu 1} \end{pmatrix}$ avec : $L_{\nu 1} = \left(\nu \int_{\Omega_h} (\partial_1 w_i \partial_1 w_j + \partial_2 w_i \partial_2 w_j) \right)_{1 \leq i, j \leq N_1}$, où ∂_1 (resp. ∂_2) indique la dérivée partielle selon la première (resp. seconde) composante en espace, et l'indice 1 (resp. 2) indique la première (resp. seconde) composante en espace. Nous avons ensuite les matrices qui dépendent du temps à travers $\bar{\mathbf{u}}^n$, et notamment les L_c^n , que nous écrivons :

$$L_c^n = L_{cc}^n + L_{cg}^n$$

avec L_{cc}^n faisant intervenir la convection à la vitesse $\bar{\mathbf{u}}^n$ et L_{cg}^n faisant intervenir le gradient $\nabla \bar{\mathbf{u}}^n$, et dont nous allons détailler les expressions. Tout d'abord, nous considérons les matrices de convection à la vitesse $\bar{\mathbf{u}}^n$ en posant :

$$\begin{aligned} L_{cc}^n &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} (\bar{\mathbf{u}}^n \cdot \nabla \mathbf{z}_j) \cdot \mathbf{z}_i \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \\ &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} ([\bar{\mathbf{u}}_1^n \partial_1(\mathbf{z}_j)_1 + \bar{\mathbf{u}}_2^n \partial_2(\mathbf{z}_j)_1](\mathbf{z}_i)_1 + [\bar{\mathbf{u}}_1^n \partial_1(\mathbf{z}_j)_2 + \bar{\mathbf{u}}_2^n \partial_2(\mathbf{z}_j)_2](\mathbf{z}_i)_2) \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1}; \end{aligned}$$

d'où $L_{cc}^n = \rho_F \begin{pmatrix} L_{cc1}^n & 0 \\ 0 & L_{cc1}^n \end{pmatrix}$ avec : $L_{cc1}^n = \left(\int_{\Omega_h} [\bar{\mathbf{u}}_1^n (\partial_1 w_j) w_i + \bar{\mathbf{u}}_2^n (\partial_2 w_j) w_i] \right)_{1 \leq i, j \leq N_1}$, où $\bar{\mathbf{u}}_1^n$ (resp. $\bar{\mathbf{u}}_2^n$) indique la première (resp. seconde) composante en espace de $\bar{\mathbf{u}}^n$. D'autre part, il reste les autres termes de convection liés au gradient de $\bar{\mathbf{u}}^n$:

$$\begin{aligned} L_{cg}^n &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} (\mathbf{z}_j \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}^n) \cdot \mathbf{z}_i \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1} \\ &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} ([(\mathbf{z}_j)_1 \partial_1 \bar{\mathbf{u}}_1^n + (\mathbf{z}_j)_2 \partial_2 \bar{\mathbf{u}}_1^n](\mathbf{z}_i)_1 + [(\mathbf{z}_j)_1 \partial_1 \bar{\mathbf{u}}_2^n + (\mathbf{z}_j)_2 \partial_2 \bar{\mathbf{u}}_2^n](\mathbf{z}_i)_2) \right)_{1 \leq i, j \leq 2N_1}. \end{aligned}$$

Celle-ci s'écrit par blocs : $L_{cg}^n = \begin{pmatrix} L_{cg1}^n & L_{cg2}^n \\ L_{cg3}^n & L_{cg4}^n \end{pmatrix}$ avec :

$$\begin{aligned} L_{cg1}^n &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} w_j (\partial_1 \bar{\mathbf{u}}_1^n) w_i \right)_{1 \leq i, j \leq N_1} & L_{cg2}^n &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} w_j (\partial_2 \bar{\mathbf{u}}_1^n) w_i \right)_{1 \leq i, j \leq N_1} \\ L_{cg3}^n &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} w_j (\partial_1 \bar{\mathbf{u}}_2^n) w_i \right)_{1 \leq i, j \leq N_1} & L_{cg4}^n &= \left(\rho_F \int_{\Omega_h} w_j (\partial_2 \bar{\mathbf{u}}_2^n) w_i \right)_{1 \leq i, j \leq N_1} . \end{aligned}$$

Enfin, pour les vecteurs $V^n = \left(\int_{\Omega_h} (D\mathbf{F}(\bar{\gamma}^n)) \cdot \mathbf{z}_i \right)_{1 \leq i \leq 2N_1}$ des forces, nous avons $D\mathbf{F}(\bar{\gamma}^n) \in \mathbb{R}^2$ défini en différentiant la formule (3.17) page 162 par rapport au paramètre réel γ par :

$$D_\gamma \mathbf{F}(\gamma) = \frac{|\Gamma(0)|}{N} \sum_{\ell=0}^N \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\mathbf{f}_\ell(\gamma) \delta_h^\ell(X_\ell(\gamma) - \mathbf{x}) \right]$$

avec :

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\mathbf{f}_\ell(\gamma) \delta_h^\ell(X_\ell(\gamma) - \mathbf{x}) \right] = \frac{d}{d\gamma} (\mathbf{f}_\ell) \delta_h^\ell(X_\ell(\gamma) - \mathbf{x}) + \mathbf{f}_\ell(\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\delta_h^\ell(X_\ell(\gamma) - \mathbf{x}) \right] .$$

Pour le premier terme, nous avons établi les formules pour $\frac{d}{d\gamma} (\mathbf{f}_\ell) = \frac{d}{d\gamma} (\mathbf{f}_{b,\ell} + \mathbf{f}_{s,\ell})$ à la sous-section 3.3.4 page 157. D'autre part, pour le second terme, nous avons en tenant compte de l'expression de X_ℓ en fonction de γ et d'après la définition de δ_h^ℓ en (3.7) page 142 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\delta_h^\ell(X_\ell - \mathbf{x}) \right) &= \frac{\frac{g(x_\ell)}{h} \Phi \left(\frac{x_\ell - x}{h} \right)}{[\eta^\ell(X_\ell)]^2} \left[\Phi' \left(\frac{\gamma g(x_\ell) - y}{h} \right) \eta^\ell(X_\ell) \right. \\ &\quad \left. - \Phi \left(\frac{\gamma g(x_\ell) - y}{h} \right) \int_{\mathcal{M}_{loc}} \Phi \left(\frac{x_\ell - x}{h} \right) \Phi' \left(\frac{\gamma g(x_\ell) - y}{h} \right) dx dy \right] \end{aligned}$$

avec le coefficient de normalisation :

$$\eta^\ell(X_\ell) = \int_{\mathcal{M}_{loc}} \Phi \left(\frac{x_\ell - x}{h} \right) \Phi \left(\frac{\gamma g(x_\ell) - y}{h} \right) dx dy$$

et avec la dérivée impaire Φ' de la fonction Φ régularisée du Dirac donnée par (cf Figure 3.18 et (3.6)) :

$$\Phi'(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1-2r}{\sqrt{1+4r-4r^2}} \right) & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ \Phi'(2-r) & \text{si } 1 < r \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < r \\ -\Phi'(-r) & \text{si } r < 0 . \end{cases}$$

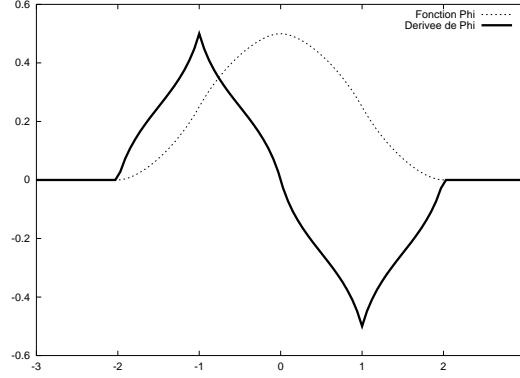
À partir de là, nous avons tous les termes utiles pour assembler les vecteurs V^n .

Nous présentons maintenant un algorithme d'implémentation des matrices de gain de KALMAN.

Algorithme d'implémentation des matrices de gain de KALMAN

Étape 1. Calculs préliminaires.

1. Assembler et garder $R_1^N = k_2 M$, $R_2^N = k_2 \bar{M}$, $R_2 = k_1 \Delta t \bar{M}$, $R_3^N = k_2 k_3$ et $R_4^N = 0$.


 FIG. 3.18 – La fonction Φ et sa dérivée.

2. Assembler $\rho_F M / \Delta t$, J , et calculer $A^{-1} = (\rho_F M / \Delta t + \alpha J)^{-1}$; garder en mémoire $\rho_F M / \Delta t$, J et A^{-1} .
3. Calculer $R_h \varphi$, puis $\beta = \alpha J(R_h \varphi)$; garder β , détruire J .
4. Calculer et garder W .
5. Assembler B , calculer $A^{-1}B$ puis $D^T = -[B^T(A^{-1}B)]^{-1}(A^{-1}B)^T$; garder D^T et B .
6. Calculer $C = A^{-1}(I_{2N_1} + BD^T)$; garder C ; détruire B et A^{-1} .
7. Calculer et garder DR_2D^T ; détruire R_2 .
8. Calculer et garder $L_{\nu 1} \in \mathcal{M}_{N_1, N_1}(\mathbb{R})$.

Étape 2. Première boucle; pour $n = 0, \dots, N - 1$:

1. Calculer et garder $\bar{\mathbf{u}}^n \in \mathbb{R}^{2N_1}$ et $\bar{\gamma}^n \in \mathbb{R}$.
2. Calculer et garder $V^n = \left(\int_{\Omega_h} D\mathbf{F}(\bar{\gamma}^n) \cdot \mathbf{z}_i \right)_{1 \leq i \leq 2N_1} \in \mathcal{M}_{2N_1, 1}(\mathbb{R})$.
3. Calculer et garder $L_{cc1}^n, L_{cg1}^n, L_{cg2}^n, L_{cg3}^n, L_{cg4}^n \in \mathcal{M}_{N_1, N_1}(\mathbb{R})$; détruire $\bar{\gamma}^n$.
4. Calculer $L_c^n = L_{cc}^n + L_{cg}^n$, puis $G^n = \rho_F M / \Delta t - (L_\nu + L_c^n)$; garder $G^n \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R})$; détruire L_c^n .

Étape 3.

1. Détruire $L_{\nu 1}$.
2. Calculer et garder $(k_1 \Delta t)M$ à partir de $\rho_F M / \Delta t$.

Étape 4. Seconde boucle (rétrograde); pour $n = N - 1, \dots, 0$:

1. Calculer $CR_1^{n+1}C \in \mathcal{M}_{2N_1, 2N_1}(\mathbb{R})$, puis $Z^{n+1} = DR_2D^T + CR_1^{n+1}C$; garder Z^{n+1} .
2. Calculer et garder le vecteur CR_4^{n+1} , le réel $\beta^T(CR_4^{n+1})$, le vecteur $\beta^T Z^{n+1}$, et le dénominateur $\underline{d}^n = \Delta t + (\beta^T Z^{n+1})\beta$.
3. Calculer et garder le vecteur de gain $K_1^n = ((\beta^T Z^{n+1})G^n + (\beta^T CR_4^{n+1})W) / \underline{d}^n$ et $K_3^n = ((\beta^T Z^{n+1})V^n + (\beta^T CR_4^{n+1})) / \underline{d}^n$; détruire \underline{d}^n , $(\beta^T Z^{n+1})$.
4. Calculer et garder la matrice $H^n = G^n - \beta K_1^n$, le vecteur-colonne $\tilde{H}^n = (H^n)^T(CR_4^{n+1}) \in \mathcal{M}_{2N_1, 1}(\mathbb{R})$, le vecteur $P^n = V^n - \beta K_3^n$ et le réel $\tilde{P}^n = (P^n)^T(CR_4^{n+1})$; détruire G^n et V^n .
5. Si $n > 0$, alors : calculer et garder :
 - * $R_1^n = (H^n)^T Z^{n+1} H^n + \tilde{H}^n W + (\tilde{H}^n W)^T + R_3^{n+1}(W^T W) + \Delta t(K_1^n)^T K_1^n + k_1 \Delta t M$,

- * $R_4^n = (H^n)^T Z^{n+1} P^n + \tilde{H}^n + (R_3^{n+1} + \tilde{P}^n) W^T + \Delta t K_3^n (K_1^n)^T$,
- * $R_3^n = (P^n)^T Z^{n+1} P^n + 2\tilde{P}^n + R_3^{n+1} + \Delta t (K_3^n)^2 + k_1 k_3 \Delta t$;
- détruire $H^n, \tilde{H}^n, P^n, \tilde{P}^n, (\beta^T C R_4^{n+1})$ et Z^{n+1} .

Étape 5. Destruction des données inutiles

1. Détruire $C, DR_2 D^T, (k_1 \Delta t)M, \beta$.
-

À la fin de cet algorithme, il ne reste plus en mémoire que les N vecteurs K_1^0, \dots, K_1^{N-1} et les N réels K_3^0, \dots, K_3^{N-1} qui constituent les vecteurs de KALMAN.

3.4.10 Mise en œuvre du contrôle sur le système en vitesse-pression

Les matrices-lignes de gain de KALMAN ont été calculées pour le système linéarisé des perturbations afin de ramener $(\delta \mathbf{y}, \delta \pi)$ à $(\vec{0}, 0)$ par :

$$\begin{aligned} \forall n = 0, \dots, N-1, \\ \delta \mathbf{y}^{n+1} = \mu^n \varphi \quad \text{sur } \Gamma_1^h \\ \text{avec } \mu^n = -\mathcal{K}^n Y^n = -(K_1^n \quad 0 \quad K_3^n) \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y}^n \\ \delta \pi^n \\ \delta l^n \end{pmatrix} = -K_1^n \delta \mathbf{y}^n - K_3^n \delta l^n. \end{aligned}$$

Nous appliquons néanmoins ce même contrôle par feedback sur le système des perturbations non-linéarisé :

$$\mathbf{y}^{n+1} = (\tilde{\mathbf{j}}^n - \bar{\mathbf{j}}^n) + \mu^n \varphi \quad \text{sur } \Gamma_1^h \quad \text{avec } \mu^n = -K_1^n \mathbf{y}^n - K_3^n (\gamma^n - \bar{\gamma}^n),$$

et donc directement :

$$\mathbf{u}^{n+1} = (\bar{\mathbf{u}}^{n+1} - \bar{\mathbf{j}}^n) + \tilde{\mathbf{j}}^n - [K_1^n (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n) + K_3^n (\gamma^n - \bar{\gamma}^n)] \varphi \quad \text{sur } \Gamma_1^h,$$

soit enfin :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{j}}^n - [K_1^n (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n) + K_3^n (\gamma^n - \bar{\gamma}^n)] \varphi \quad \text{sur } \Gamma_1^h.$$

3.5 Résultats numériques du contrôle par feedback du modèle fluide-structure simplifié

Nous présentons dans cette section les résultats numériques associés au contrôle par feedback du problème d'interaction fluide-structure simplifié introduit à la section 3.3 page 155.

Nous commençons par présenter le cadre général des tests qui ont été effectués, puis les tests eux-mêmes avec leurs particularités propres. Nous présentons ensuite un procédé de parallélisation de l'algorithme de calcul des matrices de RICCATI et des vecteurs de gain de KALMAN. Par ailleurs, nous indiquons des variantes relatives à l'application du contrôle. Nous comparons enfin différents tests entre eux : pour différentes valeurs du triplet (k_1, k_2, k_3) de paramètres de la fonctionnelle de coût \mathcal{J} ; pour les démarches séquentielle et parallélisée ; et enfin pour les variantes d'application du contrôle.

3.5.1 Cadre applicatif général des tests

Le cadre théorique ayant été présenté auparavant, nous indiquons ici les valeurs numériques choisies pour les différents paramètres et fonctions.

Paramètres du temps

Pas de temps	$\Delta t =$	0.001
Indice du début des temps	$N_D =$	-10
Indice du début du contrôle	$N_C =$	0
Indice de la fin des temps	$N_F =$	100
Intervalle global de résolution	$[N_D\Delta t; N_F\Delta t] =$	$[-10\Delta t; 100\Delta t]$
Intervalle d'application de la perturbation		$[-10\Delta t; 100\Delta t]$
Intervalle d'application du contrôle	$[N_C\Delta t; N_F\Delta t] =$	$[0\Delta t; 100\Delta t]$

Le pas de temps est choisi suffisamment petit afin que les matrices de RICCATI restent monotones et définies pendant toute la durée de l'algorithme (*cf* [HGMP98] et [Lew86]).

Paramètres liés au fluide

Demi-grand axe de la cavité elliptique	$L_{dga} =$	1.5
Demi-petit axe de la cavité elliptique	$L_{dpa} =$	1.
Longueur du grand axe de la cavité elliptique	$L = 2L_{dga} =$	3.
Viscosité	$\nu =$	0.1
Densité	$\rho_F =$	1.
Coefficient de pénalisation pour condition de DIRICHLET	$\alpha =$	10^{28}
Longueur minimale d'une arête du maillage fluide	$h_{min,fluide} =$	$0.2L_{dpa} = 0.2$
Nombre de points du maillage fluide		161
Dimension de l'espace X_h (éléments \mathcal{P}_2) des vitesses	$\dim(X_h) = 2N_1 =$	$2 \times 597 = 1194$
Dimension de l'espace M_h (éléments \mathcal{P}_1) des pressions	$\dim(M_h) = N_2 =$	161

Nous donnons à présent l'expression de la fonction de forme φ d'injection forcée de fluide à travers la porte Γ_1 . Pour cela, nous notons A et B les extrémités du segment Γ_1 , et nous prenons φ de type parabolique par :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 = [A, B] \subset \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\vec{Ax} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \left(1 - \frac{\vec{Ax} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2} \right) \frac{4\vec{AB}^\perp}{\|\vec{AB}\|}.$$

Paramètres de la membrane

Indice maximum des points de discrétisation	$N =$	29
Coefficient lié à l'élongation	$\sigma_s =$	1.10^4
Coefficient lié à la torsion et à la courbure	$\sigma_b =$	3.10^4
Position initiale (à $t = N_D\Delta t$) du point $X_0 =$	$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -L/2 \\ 0. \end{pmatrix}$
Position initiale (à $t = N_D\Delta t$) du point $X_N =$	$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} L/2 \\ 0. \end{pmatrix}$
Position initiale (à $t = N_D\Delta t$) de la membrane donnée par γ	$\gamma(t = N_D\Delta t) =$	-0.2

Nous donnons à présent l'expression de la fonction de forme g de la membrane :

$$g(x) = \frac{4}{L^2}(x - x_0)(x_N - x) \quad \text{sur } [-L/2, L/2].$$

Aire sous la courbe de g	$\mathcal{A}_g =$	1.99762
Nombre de points du maillage \mathcal{M}_{loc} autour de la structure	$5 \times (N + 1) =$	150
Pas h du Dirac régularisé autour d'un point de la structure	$h = 0.3h_{min,fluide} =$	0.06
Diamètre du support du disque du Dirac régularisé	$2h =$	0.12
Hauteur du maillage autour de la structure	$1.8h =$	0.108
Dimension de l'espace \mathcal{F}_{loc} (éléments \mathcal{P}_1) pour le calcul des forces structure		150

Le maillage fluide et le maillage autour de la structure sont représentés à la Figure 3.19.

Maillage fluide et maillage autour de la structure

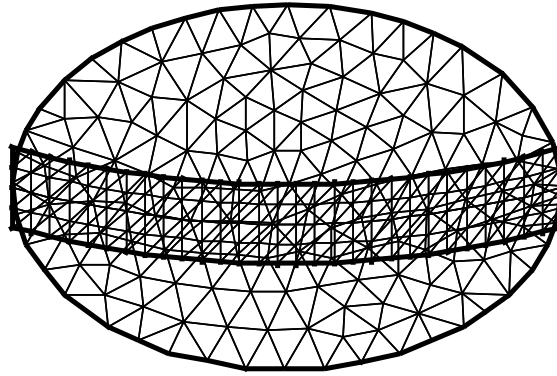


FIG. 3.19 – Maillage structuré ($5 \times 30 = 150$ sommets) autour de la membrane. Maillage fluide non-structuré (161 sommets).

Fonctions d'injection de fluide

La solution-cible $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma})$ est liée à l'injection de fluide $\bar{\mathbf{j}}$ donnée par (cf Figure 3.20(a)) :

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = f(t) \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (N_D \Delta t, N_F \Delta t),$$

avec :

$$f(t) = 2.4 + \sin\left(\frac{\pi t}{200 \Delta t}\right).$$

À présent, nous nous plaçons dans le cadre du système perturbé, dont la solution \mathbf{u} est *proche* de $\bar{\mathbf{u}}$, dans le sens de la norme $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (par exemple). Nous restons volontairement vagues sur la «proximité» des deux trajectoires correspondantes; en effet, l'algorithme de *feedback* que nous appliquons est relativement robuste et permet de corriger certaines trajectoires éloignées de $\bar{\mathbf{u}}$. Notre démarche est de contrôler les trajectoires perturbées, dans le sens du contrôle optimal défini à l'aide de la fonctionnelle \mathcal{J} (voir (3.25) page 164).

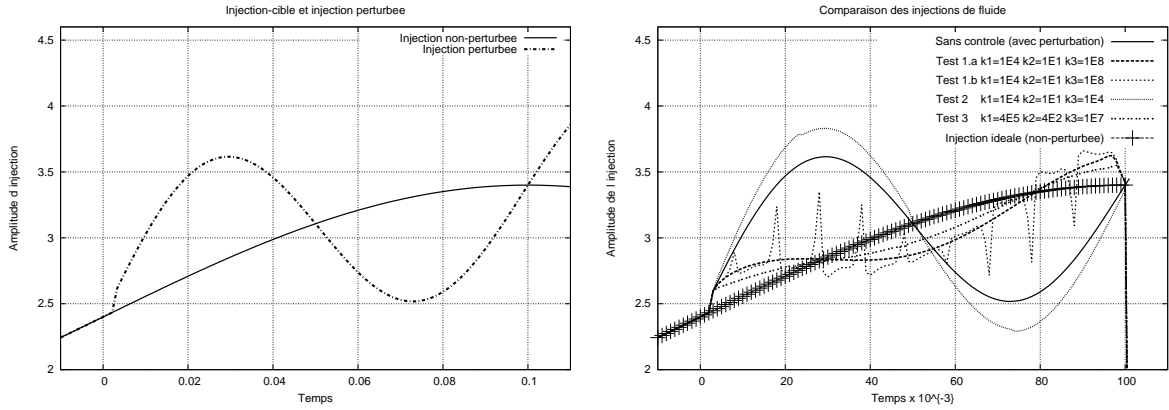
Une fois la trajectoire-cible $(t, \bar{\mathbf{u}}(\cdot, t), \bar{p}(\cdot, t), \bar{\gamma}(t))_{t \in (0, T)}$ fixée, nous pouvons calculer les vecteurs $\mathcal{K}^n(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma}) = (K_1^m \quad 0 \quad K_3^m)$, $N_C \leq m \leq N_F$. À l'aide de ces derniers, le contrôle par feedback pourra être appliqué à n'importe quelle perturbation du système-cible.

Nous considérons maintenant une solution $\mathbf{u}(\cdot, t = 0)$ pour initier la démarche de contrôle à $t = 0$. Celle-ci est obtenue comme solution du système de NAVIER-STOKES avec une injection de fluide associée à $\tilde{\mathbf{j}}(0)$. En entrée, nous appliquons :

$$\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) + k(t) \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [-10\Delta t; 100\Delta t]$$

sur l'intervalle de temps $[-10\Delta t; 100\Delta t] = [-0.01; 0.1]$ avec $k(\cdot)$ une fonction du temps qui induit la perturbation. Nous prenons comme perturbation temporelle une fonction nulle avant un certain temps, puis, au-delà de ce temps, sinusoïdale de fréquence plus élevée que l'injection-cible :

$$k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3\Delta t, \\ 0.8 \sin\left(\frac{\pi t}{50\Delta t}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$



(a) Injection-cible et injection perturbée.

(b) Injections avec et sans contrôle.

FIG. 3.20 – Fonctions d'injection de fluide, sans et avec contrôle.

Application du contrôle par injection

Le contrôle est appliqué sous la forme $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mu(t)\varphi(\mathbf{x})$, avec $\mu(t)$ obtenu par l'algorithme de feedback. La correction d'injection est appliquée par : $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{j}}^n - \mathbf{j}^n = \tilde{\mathbf{j}}^n - [K_1^n(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n) + K_3^n(\gamma^n - \bar{\gamma}^n)] \varphi$ sur Γ_1 pour $n = N_C = 0, \dots, N_F = 100$.

Remarque 41. Nous n'imposons pas de condition restrictive sur la norme du contrôle ni sur le fait que l'injection de fluide au niveau de la porte Γ_1 reste positive. Néanmoins, afin que le système reste cohérent et n'explose pas à cause d'une énergie fictive due à l'injection de fluide (ou à un défaut dans la mise en application de la méthode des caractéristiques), nous nous arrangeons pour que les perturbations appliquées n'induisent pas d'absorption de liquide par la porte Γ_1 .

Remarque 42. Nous rappelons qu'une fois $\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma}$ donnés sur tout l'intervalle de temps où le contrôle doit être appliqué, les vecteurs de KALMAN $\mathcal{K}^n = \mathcal{K}^n(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma})$ sont calculés une fois pour toute, et servent uniformément aux calculs des contrôles pour de nombreuses perturbations.

Type de tests	k_1	k_2	k_3	$k_1 k_3$	$k_2 k_3$	Particularité
Test 1.a (séquentiel)	10^4	10	10^8	10^{12}	10^9	1 démarche de 100 pas de temps
Test 1.b (parallélisé)	10^4	10	10^8	10^{12}	10^9	10 démarches de 11 pas de temps
Test 2 (parallélisé)	10^4	10	10^4	10^8	10^5	4 démarches de 27 pas de temps
Test 3 (parallélisé)	4.10^5	400	10^7	4.10^{12}	4.10^9	4 démarches de 27 pas de temps

FIG. 3.21 – Tableau de paramètres des tests.

3.5.2 Triplet (k_1, k_2, k_3) des différents tests

Nous présentons ici les différents types de tests que nous classons dans un premier temps suivant le triplet (k_1, k_2, k_3) de paramètres de la fonctionnelle de coût \mathcal{J} . Nous rappelons que :

- * k_1 est le coefficient lié à la pénalisation spatio-temporelle $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ de la perturbation de la vitesse fluide ;
- * $k_1 k_3$ est le coefficient lié à la pénalisation temporelle $L^2(0, T)$ de la perturbation de la position de la structure ;
- * k_2 est coefficient lié à la pénalisation spatiale $L^2(\Omega)$ de la perturbation de la vitesse fluide au dernier temps ;
- * $k_2 k_3$ est le coefficient lié à la pénalisation de la perturbation de la position de la structure au dernier temps.

Les valeurs sont données au tableau de la Figure 3.21. Nous avons choisi de prendre le paramètre $k_2 = \Delta t k_1$ de façon à ce que le dernier temps ne joue pas de rôle particulier par rapport aux autres temps ; ainsi la fonctionnelle de coût \mathcal{J}_h discrète s'écrit :

$$\forall \mu = \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \vdots \\ \mu^{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathcal{J}_h(\mu, Y) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N_F-1} (\mu^n)^2 + k_1 \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N_F} (Y^n)^T \overline{\overline{M}} Y^n.$$

3.5.3 Algorithme de parallélisation du calcul des vecteurs de Kalman

Le calcul des vecteurs de gain de KALMAN s'effectue de manière naturelle de façon séquentielle : il s'agit de résoudre un algorithme rétrograde sur un certain intervalle de temps (ici sur $[0.; 0.1]$ avec 101 pas de temps t^0, \dots, t^{100}). Au regard du tableau de la Figure 3.22, rapportant les temps de calculs des différentes étapes, il est légitime de s'interroger sur l'adaptation de l'algorithme à une quelconque parallélisation. De toute évidence, il est possible d'effectuer plusieurs sous-démarches de contrôle par feedback sur de petits intervalles de temps successifs disjoints, plutôt que sur un intervalle d'un seul tenant ; par exemple, pour notre cas en considérant 4 sous-démarches sur les intervalles $[0.; 0.025]$, $[0.026; 0.050]$, $[0.051; 0.075]$ et $[0.076; 0.1]$ plutôt qu'une seule démarche sur $[0.; 0.1]$. Néanmoins, cette méthode possède un inconvénient important. En effet, prenant le Test 1.a et regardant de manière rétrograde (de $t = 0.1$ à 0.) l'évolution temporelle de la norme euclidienne du vecteur de KALMAN $\mathcal{K}^n = (K_1^n \ 0 \ K_3^n)$ (cf Figure 3.23), nous constatons que celle-ci se fixe autour d'une valeur moyenne après les tous premiers pas de temps ($t = N_F \Delta t$, $t = (N_F - 1) \Delta t$, $t = (N_F - 2) \Delta t$). Ce comportement s'explique entre autres par la relativement mauvaise condition initiale $R_4^{N_F} = 0$ (liée à la matrice \mathcal{R}^{N_F} de la fonctionnelle \mathcal{J}_h) de l'algorithme rétrograde : celle-ci a une influence non-négligeable notamment sur les calculs de $K_1^{N_F-1}$, $K_3^{N_F-1}$ et $R_4^{N_F-1}$ (alors que la contribution de R_4^n devient rapidement importante). L'inconvénient de la méthode de découpage proposée est donc la mauvaise prise en compte des conditions initiales lors du passage d'une sous-démarche à une autre. Or, puisque ces erreurs sont amorties après

		Temps CPU (en heures,minutes)
Calcul de $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\gamma})$ et $D\mathbf{F}(\bar{\gamma})$	Résolution de NAVIER-STOKES	23m (★)
Prétraitement des données	Assemblage de $L_\nu, L_c^n, \bar{M}, J, \dots$	08m (★)
	Assemblage des matrices C et DR_2D^T	38m (★)
Calcul des vecteurs de KALMAN (hors assemblage des matrices C et DR_2D^T)	<i>Test 1.a</i> 1 démarche séquentielle (de 101 pas de temps)	\approx 8h 34m (★)
	<i>Test 1.b</i> 10 démarches parallèles (de 11 pas de temps)	10× \approx 2h 00m (–)
	<i>Test 2.</i> 4 démarches parallèles (de 27 pas de temps)	2× \approx 2h 20m (★) 2× \approx 4h 45m (–)
	<i>Test 3.</i> 4 démarches parallèles (de 27 pas de temps)	1× \approx 2h 25m (★) 3× \approx 4h 52m (–)
Application du contrôle	(Tests 1, Test 2 ou Test 3)	23m (★)

FIG. 3.22 – Tableau des temps de calculs, effectués sur : (–) des *Pentium III*, 800MHz, sauf (★) effectués sur des *Pentium III*, 1.266GHz.

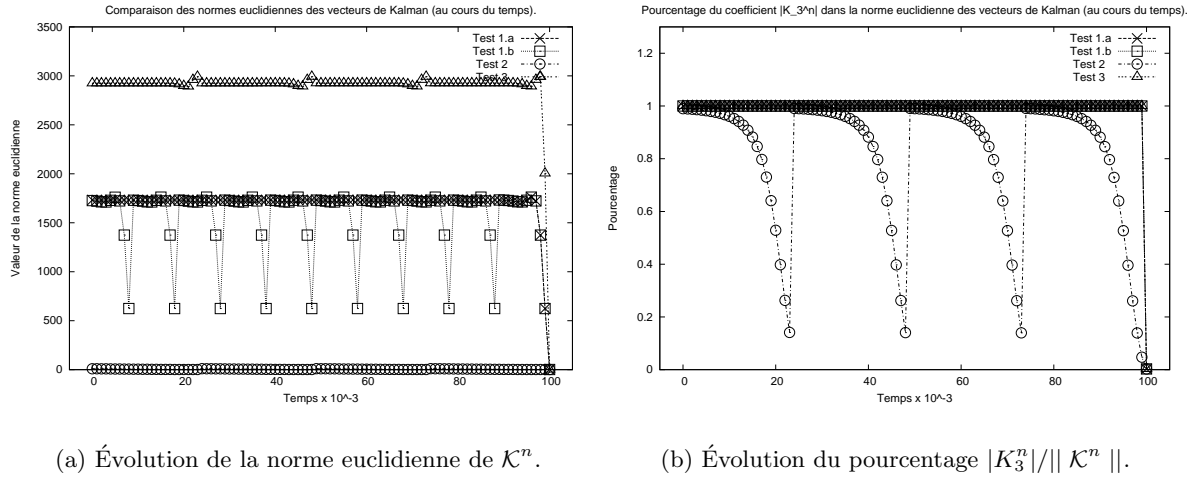
quelques pas de temps, il suffit de faire se recouvrir les différents intervalles et de garder les vecteurs de KALMAN associés aux procédures plus avancées. Ainsi, les *Test 2* et *Test 3* sont réalisés avec 4 sous-démarches en parallèle sur les intervalles de temps $[0; 0.025]$, $[0.024; 0.050]$, $[0.049; 0.075]$ et $[0.074; 0.1]$, ces intervalles se recouvrant avec leurs voisins immédiats de 2 pas de temps. Le *Test 1.b* a quant à lui été réalisé avec 10 sous-démarches en parallèle sur les intervalles de temps $[0; 0.009]$, $[0.009; 0.019]$, $[0.019; 0.029]$, $[0.029; 0.039]$, ..., $[0.069; 0.079]$, $[0.079; 0.089]$ et $[0.089; 0.100]$, ces intervalles se recouvrant avec leurs voisins immédiats d'1 pas de temps. À la vue du tableau de la Figure 3.22 pour les *Tests 1.b*, *2*, et *3*, les temps de calculs des vecteurs de gain de KALMAN sont :

- divisés environ par 4 (en comparant sur le même type de machines : *Pentium III*, 1.266GHz), pour les *Tests 2* et *3* avec 4 sous-démarches ;
- divisés environ par 8 (en ramenant la comparaison pour des machines de mémoires différentes sur les capacités des plus performantes), pour le *Test 1.b* avec 10 sous-démarches effectuées en parallèle ;

ceci ne prenant pas en compte environ 20m CPU pour la lecture des matrices C et DR_2D^T .

Nous renvoyons à [Hei00] pour d'autres types de décompositions temporelles pour des problèmes linéaires-quadratiques.

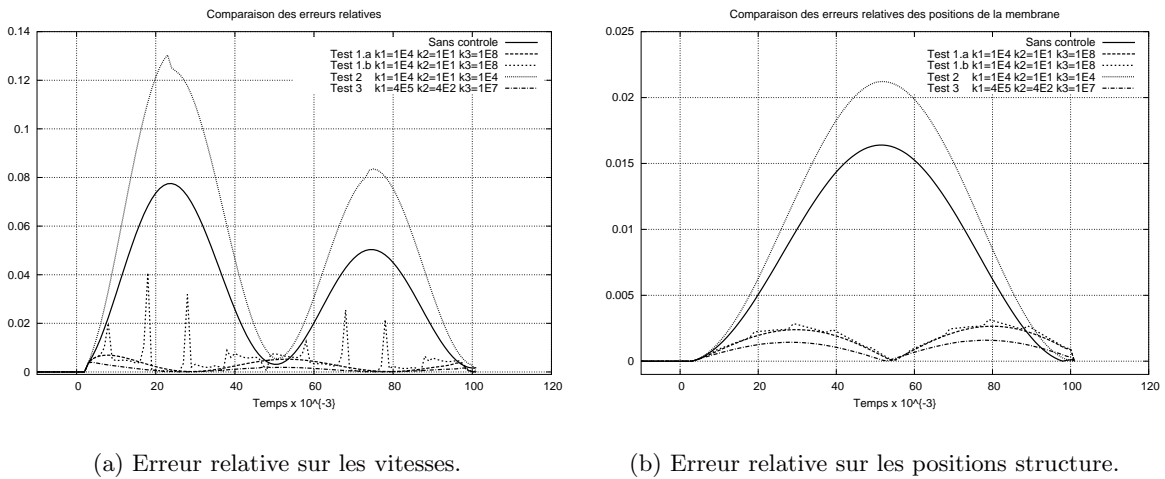
Hormis les temps de calcul, nous prolongeons la comparaison entre les *Test 1.a* (séquentiel) et *Test 1.b* (parallélisé). Nous observons clairement à la Figure 3.23(a) que les normes euclidiennes des \mathcal{K}^n sont tout à fait semblables sauf au voisinage des extrémités des intervalles des sous-démarches pendant environ 2 pas de temps. Ce défaut se répercute sur les erreurs relatives $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|/\|\bar{\mathbf{u}}\|$ sur la vitesse fluide, et $|\gamma - \bar{\gamma}|/|\bar{\gamma}|$ sur la position structure (cf Figure 3.24). D'une part, le *Test 1.a* (séquentiel) obtient des résultats plus précis avec une erreur relative sur la vitesse fluide qui ne dépasse pas les 1%, tandis que *Test 1.b* (parallélisé avec recouvrement d'1 pas de temps seulement) n'amortit l'erreur que de moitié en général (voire l'augmente même légèrement lorsque la perturbation agit moins intensément). D'autre part, l'erreur relative de 1.5% effectuée sur la position de la membrane, dans le cas avec perturbation mais sans contrôle, est ramenée à 0.25% avec des comportements similaires pour les *Tests 1.a* et *1.b*. Enfin, on peut comparer les amplitudes μ^n d'injection en fonction du temps à la



(a) Évolution de la norme euclidienne de \mathcal{K}^n .

(b) Évolution du pourcentage $|K_3^n| / \|\mathcal{K}^n\|$.

FIG. 3.23 – Évolutions en temps de la norme euclidienne $\|\mathcal{K}^n\|$ du vecteur de KALMAN, et du pourcentage de la contribution $|K_3^n|$ par rapport à $\|\mathcal{K}^n\|$.



(a) Erreur relative sur les vitesses.

(b) Erreur relative sur les positions structure.

FIG. 3.24 – Évolutions en temps des erreurs relatives $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\| / \|\bar{\mathbf{u}}\|$ sur la vitesse fluide, et $|\gamma - \bar{\gamma}| / |\bar{\gamma}|$ sur la position structure.

Figure 3.26 page 185. Les remarques précédentes s'appliquent encore ici, avec les sauts au niveau des différentes sous-démarches de contrôle. D'autre part, les contrôles sont bien en opposition de phase par rapport à la perturbation d'injection en entrée à travers Γ_1^h , avec tout de même un certain retard de phase observable : alors que la perturbation s'annule en $t = 50\Delta t$, les contrôles pour les cas-Tests 1.a et 1.b ne s'annulent tous deux qu'en $t = 55\Delta t$.

Par ailleurs, le Test 2 montre une insuffisance marquée dans la prise en compte des perturbations de la position structure. En effet, pour la même observation des vitesses et pressions fluide que pour les Tests 1 ($k_1 = 10^4$ et $k_2 = 10$), les erreurs relatives (cf Figure 3.24(a) et Figure 3.24(b)) sont augmentées par rapport au cas sans contrôle ! À voir le contrôle mis en œuvre pour ce cas-là à la Figure 3.26 page 185, nous constatons que le contrôle va dans le sens de la perturbation et augmente l'erreur d'amplitude de l'injection. De plus, la Figure 3.23(b) indique que le facteur K_3^n n'est pas suffisamment grand par comparaison avec les autres tests où il joue 99% du rôle de l'observation. Dans ce cas-là, c'est le comportement non-linéaire du système provenant des équations fluide de NAVIER-STOKES qui fait augmenter les perturbations. Ce point va nous amener à considérer de manière plus prépondérante l'observation de la position structure.

Quant au Test 3, nous remarquons que pour des coefficients k_1 , k_2 et k_3 au moins 4 fois plus élevés que dans les Tests 1, les erreurs relatives sont encore plus faibles (cf Figure 3.24(a) et Figure 3.24(b)), et les perturbations d'injection sont mieux amorties (voir les injections contrôlées sur la Figure 3.20(b) page 179).

Nous présentons à la Figure 3.25 des illustrations pour le cas Test 1.a à différents pas de temps. Au temps $t = 0$, le contrôle agit pour la première fois mais les perturbations sont encore nulles. Elles commencent à agir à $t = 3\Delta t$ si bien que le contrôle (appliqué de manière explicite selon les perturbations au pas de temps précédent) ne débute qu'à $t = 4\Delta t$ (cf Figure 3.25(b)). Au temps $t = 26\Delta t$, les vitesses fluide ont déjà récupéré la forme de l'écoulement cible $\bar{\mathbf{u}}$; les pressions sont maintenant plus faibles. Au temps $t = 76\Delta t$, l'état du système est proche de l'état visé, et l'écoulement présente une forme homogène.

3.5.4 Variantes d'application du contrôle

Première variante : observation de la perturbation de la position structure

Nous avons déjà remarqué d'une part que le coefficient K_3^n du vecteur de KALMAN est prépondérant dans la valeur de la norme euclidienne de \mathcal{K}^n , et d'autre part que l'observation de la perturbation de la position structure joue un rôle plus important que l'observation des perturbations fluide qui ont tendance, de par la non-linéarité du problème, à augmenter les erreurs. Il est donc intéressant de se demander ce que l'observation seule de la perturbation de la position structure peut induire comme type de contrôle.

C'est l'objet du Test 1.c, effectué dans les conditions du Test 1.a, c'est-à-dire avec les vecteurs de KALMAN calculés de manière séquentielle. Nous appliquons la correction d'injection μ^n donnée par :

$$\forall n = 0, \dots, N - 1, \quad \mu^n = -K_3^n \delta l^n.$$

Nous appliquons ce contrôle par feedback sur le système des perturbations non-linéarisé au niveau de la porte Γ_1^h :

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{j}}^n - [K_3^n (\gamma^n - \bar{\gamma}^n)] \varphi \quad \text{sur } \Gamma_1^h.$$

Les erreurs relatives commises sur la position de la membrane ne sont pas distinguables à l'oeil nu par rapport au cas du Test 1.a (cf Figure 3.24(b)). Concernant les erreurs relatives aux vitesses fluide, elles sont présentées à la Figure 3.26(a) : le graphe présente un comportement sous-optimal par rapport au Test 1.a tout en donnant des résultats très similaires. À la Figure 3.26(b), les amplitudes

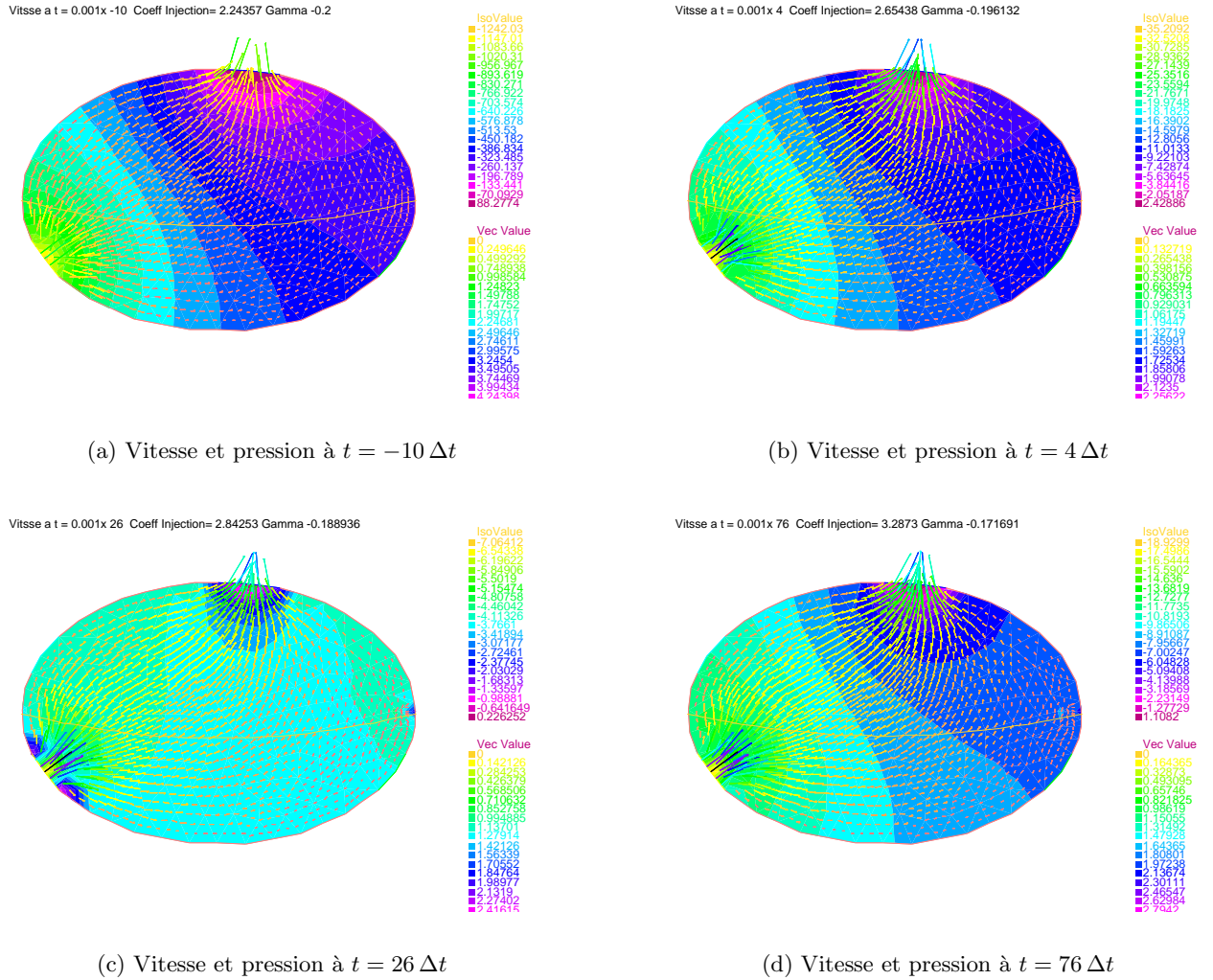


FIG. 3.25 – Configurations de la vitesse et de la pression du fluide à différents instants : $t = -10 \Delta t$ (initial) ; $t = 4 \Delta t$ (premières perturbations, avec du contrôle) ; $t = 26 \Delta t$; $t = 76 \Delta t$ (contrôle des perturbations).

des contrôles sont d'ailleurs quasiment confondues. Ceci confirme le rôle prépondérant de l'observation de la position structure dans notre démarche de contrôle par feedback du problème d'interaction fluide-structure simplifié.

Seconde variante : application du contrôle suivant une injection extrapolée

Jusqu'à présent, le contrôle $\mu^n \varphi$ a été appliqué sur l'injection $\tilde{\mathbf{j}}^n$ à chaque instant t^n . Néanmoins, la démarche de contrôle a été effectuée pour une trajectoire proche de la trajectoire-cible, et demande à ce que $\tilde{\mathbf{j}}^n$ soit assez proche de $\bar{\mathbf{j}}^n$. Plutôt que d'appliquer le contrôle sur $\mathbf{j}^n = \bar{\mathbf{j}}^n + k^n \varphi$ avec k^n la perturbation au temps t^n , nous proposons de l'appliquer sur une injection perturbée \mathbf{j}_\star qui est contrôlée au fur et à mesure du processus, et que nous allons préciser.

Nous considérons un paramètre $\rho_\star \in [0, 1[$ de relaxation de l'injection de fluide. Pour les temps antérieurs au début de l'action du contrôle (c'est-à-dire avant le pas de temps $N_C = 0$), nous prenons l'injection perturbée :

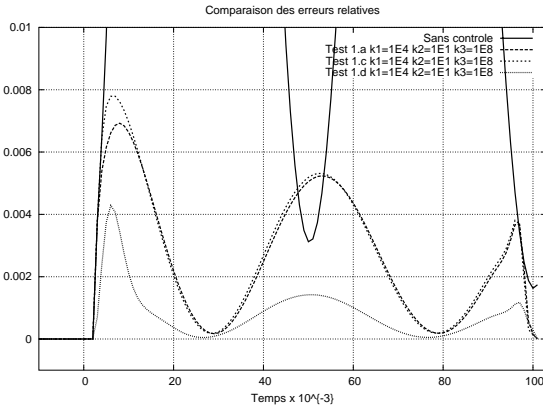
$$\forall n \leq N_C, \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{j}_\star^n := \tilde{\mathbf{j}}^n.$$

En effet, pour le temps $t = N_C \Delta t$, la démarche de contrôle débute, mais étant traité de manière explicite, son action ne commence qu'à $t = (N_C + 1) \Delta t$. Nous indiquons maintenant les injections à partir du moment où le contrôle rentre effectivement en action :

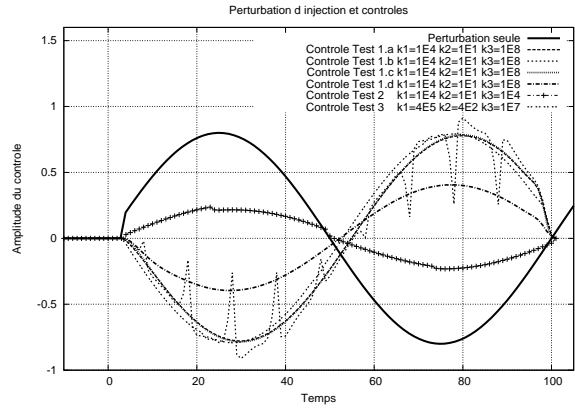
$$\forall n > N_C, \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{j}_\star^n := (1 - \rho_\star) \tilde{\mathbf{j}}^n + \rho_\star \mathbf{j}_\star^{n-1},$$

avec encore $\mu^n = -\mathcal{K}^n \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n \\ p^n - \bar{p}^n \\ \gamma^n - \bar{\gamma}^n \end{pmatrix}$. De cette manière, le contrôle est appliqué de manière à prendre en compte d'une part l'injection perturbée, et d'autre part l'injection perturbée pré-contrôlée antérieure.

Nous avons réalisé le *Test 1.d* avec le paramètre $\rho_\star = 0.5$, et dans les conditions du *Test 1.a*, c'est-à-dire avec les vecteurs de KALMAN calculés de manière séquentielle. Nous constatons à la Figure 3.26(a)



(a) Erreur relative sur les vitesses.



(b) Amplitudes de la perturbation et des différents contrôles.

FIG. 3.26 – Évolution en temps des erreurs relatives $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\| / \|\bar{\mathbf{u}}\|$ sur la vitesse fluide (zoom). Évolution en temps des amplitudes de la perturbation et des différents contrôles.

que l'erreur relative commise sur la vitesse fluide est encore plus diminuée qu'au *Test 1.a*. De plus,

l'amplitude du contrôle (*cf* Figure 3.26(b)) est diminuée environ de moitié par rapport au *Test 1.a*. Par ailleurs il y a un léger retard de phase observé dans les deux graphes précédents présentés à la Figure 3.26 ; celui-ci est lié au paramètre de relaxation qui apporte une certaine inertie dans l'injection (en faisant intervenir les injections corrigées précédentes). Néanmoins, ce retard est moins important que dans les *Test 1.a* et *1.b*.

3.6 Conclusion. Perspectives

Dans un premier temps, nous avons modélisé l'évolution d'un ventricule artificiel par un système fluide-structure en utilisant la méthode de la frontière immergée (*cf* section 3.1 page 133). Nous avons ensuite présenté les tests d'une simulation numérique directe s'y rapportant (*cf* section 3.2 page 145).

Dans un second temps, nous avons obtenu des résultats sur le contrôle par feedback du système couplé simplifié introduit à la section 3.3 page 155. Néanmoins, comme nous l'avons indiqué à la sous-section 3.3.1 page 155, le système n'a plus la signification physique du système fluide-structure d'origine. En effet, nous rappelons que la condition cinématique issue du couplage fluide-structure n'est plus assurée au sens suivant : la position structure donnée par le paramètre γ ne répond plus au déplacement lié à la vitesse instantanée du fluide, mais répond uniquement à l'injection de fluide dans la première cavité (qui est liée à la conservation volumique dans la première cavité).

Les résultats de contrôle obtenus sur ce système couplé non-linéaire sont néanmoins encourageants. Après cette étape préliminaire, nous nous intéresserons dans un prochain travail à étendre les résultats obtenus précédemment au système couplé fluide-structure présenté à la section 3.1.

Annexe A

Formulaire et rappels accessoires

A.1 Rappels de calcul vectoriel

Nous introduisons tout d'abord des notations liées à l'utilisation calculatoire du produit vectoriel. On définit le tenseur $(\varepsilon_{ijk})_{1 \leq i, j, k \leq 3}$ par les propriétés suivantes : ε_{ijk} est antisymétrique par rapport à tout couple d'indices, et $\varepsilon_{123} = 1$. On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} de \mathbb{R}^3 s'écrit, selon la i -ème composante ($1 \leq i \leq 3$) :

$$(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{U}_j \mathbf{V}_k$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés. Nous présentons maintenant des formules usuelles utilisant le produit vectoriel.

Double produit vectoriel

$$\forall \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{U} \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{W}) \mathbf{V} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{W}$$

Produit mixte

$$\forall \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) = \det(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{W} \wedge \mathbf{U})$$

Nous rappelons maintenant le Lemme suivant sur la rotation du produit vectoriel de deux vecteurs :

Lemme 13.

$$\forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^3, \forall Q \in SO_3(\mathbb{R}), \quad Q\mathbf{U} \wedge Q\mathbf{V} = Q(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})$$

Preuve: Soit $Q \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque, nous étudions le vecteur $Q^T(Q\mathbf{U} \wedge Q\mathbf{V})$ et plus précisément sa i -ème composante ($1 \leq i \leq 3$) :

$$[Q^T(Q\mathbf{U} \wedge Q\mathbf{V})]_i = Q_{ki}(Q\mathbf{U} \wedge Q\mathbf{V})_k = Q_{ki}\varepsilon_{kjl}Q_{jm}\mathbf{U}_mQ_{lr}\mathbf{V}_r$$

Or, $\varepsilon_{kjl}Q_{ki}Q_{jm}Q_{lr} = \varepsilon_{imr} \det(Q)$ (cf [Duv90] page 270), d'où $[Q^T(Q\mathbf{U} \wedge Q\mathbf{V})]_i = \varepsilon_{imr} \det(Q)\mathbf{U}_m\mathbf{V}_r = \det(Q)(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V})_i$. Ici, nous prenons plus particulièrement Q matrice orthogonale $Q^{-1} = Q^T$ de déterminant $+1$, et on en déduit alors la formule du lemme. \square

A.2 Intégrales particulières

Nous rappelons les formules suivantes :

Lemme 14. Soit $n = 2$ ou 3 . Soit un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n de normale \mathbf{n} , alors :

$$\int_{\Omega} \mathbf{n} = \vec{0} \quad \int_{\Omega} \vec{O\xi} \wedge \mathbf{n} = \vec{0} \quad .$$

Preuve: nous effectuons la preuve en dimension 3 ; le cas bidimensionnel en découlant. La première égalité se montre par la formule de GREEN (pour la composante suivant \mathbf{e}_x par exemple) :

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{e}_x = \int_{\Omega} \nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial\Omega} n_x \quad .$$

La seconde, de la même façon (pour la composante suivant \mathbf{e}_z par exemple) :

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot (x\mathbf{e}_y) - \int_{\Omega} \nabla \cdot (y\mathbf{e}_x) = \int_{\partial\Omega} (\vec{O\xi} \wedge \mathbf{n})_z \quad .$$

□

Lemme 15. Soit $n \geq 2$ un entier. Soit un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n et de normale \mathbf{n} ; soient une matrice $A = (A_{ij})$ quelconque de $M_n(\mathbb{R})$ et $\vec{b} = (b_i)$ une fonction à valeur vectorielle dans \mathbb{R}^n telles que les intégrales qui suivent soient correctement définies, alors :

$$\int_{\Omega} (A\nabla) \cdot \vec{b} = \int_{\partial\Omega} (A\mathbf{n}) \cdot \vec{b} \quad ,$$

où $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $A : B = \text{Tr}(AB^T) = \text{Tr}([A_{il}B_{jl}]_{ij}) = A_{il}B_{il}$ en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés.

Preuve: il suffit d'expliciter formellement le calcul (à l'aide de la formule de GREEN usuelle) :

$$\int_{\Omega} (A\nabla) \cdot \vec{b} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (A^T \vec{b}) = - \int_{\Omega} (\nabla 1) : (A^T \vec{b}) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (A^T \vec{b}) = \int_{\partial\Omega} A\mathbf{n} \cdot \vec{b} \quad .$$

□

Ce lemme permet de montrer la formule de GREEN présentée en (1.12) page 87.

A.3 Rappels de calcul matriciel

Lemme 16. Soient $n \geq 2$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\text{cof}(AB) = \text{cof}(A) \text{cof}(B)$$

Preuve: on montre d'abord cette propriété pour les matrices inversibles en utilisant la formule $\text{cof}(A) = (\det(A)) (A^{-1})^T$, et l'on passe par densité dans $M_n(\mathbb{R})$.

□

Lemme 17. Soit $n \geq 2$. Soit Q un élément de $SO_n(\mathbb{R})$, alors $\text{cof}(Q) = Q$.

Preuve: on utilise $\text{cof}(Q) = (\det(Q)) (Q^{-1})^T$, $\det(Q) = +1$, et $Q^{-1} = Q^T$.

□

A.4 Un aparté de calcul différentiel et de notations particulières

De par sa définition par le théorème des fonctions implicites (voir la définition implicite de Φ page 98), l'application Φ est telle que :

$$\Phi : \underline{\mathcal{U}} \subset [L^\infty(0, T_0^*)]^{N-1} \longrightarrow L^\infty(0, T_0^*) \quad .$$

Nous rappelons la notation que nous avons adopté pour sa variable :

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathbf{i}_0-1}, \alpha_{\mathbf{i}_0+1}, \dots, \alpha_N)$$

et qui est susceptible de prêter à confusion puisque l'indice \mathbf{i}_0 a été ôté.

La différentielle première de cette application est une matrice-vecteur ligne telle que :

$$D\Phi(\bar{\alpha}) = (\partial_{\alpha_1}\Phi(\bar{\alpha}), \dots, \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}\Phi(\bar{\alpha}), \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}\Phi(\bar{\alpha}), \dots, \partial_{\alpha_N}\Phi(\bar{\alpha})) ,$$

si bien qu'on a le produit scalaire suivant dans \mathbb{R}^{N-1} :

$$D\Phi(\bar{\alpha}) \cdot \bar{\alpha}' = \sum_{j=1, j \neq \mathbf{i}_0}^N \partial_{\alpha_j}\Phi(\bar{\alpha}) \alpha'_j \quad .$$

La différentielle seconde est une matrice carrée d'ordre $(N-1)$ telle que :

$$D^2\Phi(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \partial_{\alpha_1}(\partial_{\alpha_1}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}(\partial_{\alpha_1}\Phi)(\bar{\alpha}) & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}(\partial_{\alpha_1}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_N}(\partial_{\alpha_1}\Phi)(\bar{\alpha}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{\alpha_1}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}\Phi)(\bar{\alpha}) & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_N}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}\Phi)(\bar{\alpha}) \\ \partial_{\alpha_1}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}\Phi)(\bar{\alpha}) & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_N}(\partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}\Phi)(\bar{\alpha}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{\alpha_1}(\partial_{\alpha_N}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0-1}}(\partial_{\alpha_N}\Phi)(\bar{\alpha}) & \partial_{\alpha_{\mathbf{i}_0+1}}(\partial_{\alpha_N}\Phi)(\bar{\alpha}) & \dots & \partial_{\alpha_N}(\partial_{\alpha_N}\Phi)(\bar{\alpha}) \end{pmatrix}$$

Précisons à nouveau bien le type de notation employée : $D^2\Phi(\bar{\alpha}) = ([D^2\Phi(\bar{\alpha})]_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, \mathbf{i}_0-1, \mathbf{i}_0+1, \dots, N\}}$.
On a ainsi le produit scalaire suivant :

$$[D^2\Phi(\bar{\alpha}) \bar{\alpha}'] \cdot \bar{\alpha}' = D^2\Phi(\bar{\alpha})(\bar{\alpha}')^2 = \sum_{j=1, j \neq \mathbf{i}_0}^N \alpha'_j \left(\sum_{k=1, k \neq \mathbf{i}_0}^N \partial_{\alpha_k}[(\partial_{\alpha_j}\Phi)](\bar{\alpha}) \alpha'_k \right) .$$

Annexe B

Principes introductifs à la méthode ALE. Application aux équations de Navier-Stokes

Si nous considérons un milieu continu en mouvement, plusieurs méthodes sont utilisables pour l'observer et le décrire. En mécanique du solide ou en élasticité, le formalisme lagrangien est le plus employé. Il s'agit de se donner un domaine de référence $\bar{\Omega}$ du milieu continu, puis de décrire l'évolution de chaque particule $\xi \in \bar{\Omega}$ en fonction du temps $t \in (0, T)$. En mécanique des fluides, le formalisme eulérien est le plus utilisé. Il s'agit de décrire l'évolution du domaine $\Omega(t)$ à l'instant t dans un repère qui suit le mouvement des particules $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ (et change donc à chaque instant).

Lorsqu'un système physique fait intervenir des structures et des fluides, les deux formalismes (lagrangien et eulérien) sont naturellement amenés à se rencontrer. Il apparaît alors nécessaire de pouvoir passer aisément de l'un à l'autre. La méthode ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*), c'est-à-dire Arbitraire Euler-Lagrange, est une méthode permettant de le faire. Il est par ailleurs remarquable que cette méthode possède un intérêt dans les problèmes tout autant théoriques que numériques. Nous référons à [HLZ81], [DGH82], [Mau96], [MP96] pour des exemples d'applications numériques.

Dans ce qui suit, nous rappelons les formalismes lagrangien et eulérien avant d'introduire la méthode ALE.

B.1 Description lagrangienne

Nous considérons l'ouvert $\Omega(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) à l'instant initial $t = 0$, et nous repérons⁶¹ chaque particule M par sa position $\xi \in \Omega(0)$. Le point de vue lagrangien consiste à suivre cette particule au cours du temps, et à identifier sa nouvelle position $\mathbf{x}(t)$ dans le domaine $\Omega(t)$ à l'instant $t \in (0, T)$ grâce au difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, t) : \Omega(0) &\longrightarrow \Omega(t) && \text{bijection de } \Omega(0) \text{ sur } \Omega(t), \\ \xi &\longmapsto \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

de telle sorte que $(\phi(\xi, t))_{t \in (0, T)}$ ne décrit rien d'autre que la trajectoire de la particule ξ .

Le domaine espace-temps $\Omega(0) \times (0, T)$ étant un cylindre droit, la variation par rapport au temps d'un champ lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\xi, t)$ défini sur $\Omega(0)$ s'écrit : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\xi, t)$. En particulier, le champ \mathbf{v} des

⁶¹Pour simplifier la présentation, la configuration de référence est ici confondue avec la configuration initiale (mais ceci n'est nullement obligatoire).

vitesses lagrangiennes s'écrit pour tout $t \in (0, T)$:

$$\mathbf{v}(\xi, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\phi(\xi, t + \tau) - \phi(\xi, t)}{\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, t);$$

autrement dit comme la limite de la variation infinitésimale de la position de la particule M entre deux instants t et $t + \tau$.

De plus, si \mathbf{v} est connue, alors en résolvant le système différentiel ordinaire suivant, pour $\xi \in \Omega(0)$ fixé :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, s) = \mathbf{v}(\xi, s) & \text{pour } s \in (0, T) \\ \phi(\xi, 0) = \xi \end{cases}$$

nous avons la trajectoire de la particule, et ainsi :

$$\underbrace{\mathbf{x}(t)}_{\substack{\text{Coordonnée} \\ \text{eulérienne}}} = \phi(\xi, t) = \underbrace{\xi}_{\substack{\text{Coordonnée} \\ \text{lagrangienne}}} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{v}(\xi, s) ds}_{\substack{\text{Somme intégrale des} \\ \text{vitesses lagrangiennes instantanées}}}. \quad (\text{B.1})$$

B.2 Description eulérienne

Le point de vue eulérien consiste à fixer un point géométrique dans $\Omega(t)$, de position $\mathbf{x}(t)$, et à regarder les particules étant passées ou passant par ce point au fil du temps (dans l'intervalle $(0, T)$). Nous supposons que le domaine $\Omega(t)$ est mobile et est convecté à la vitesse $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ à chaque instant t . Le domaine espace-temps $\Omega(t) \times (0, T)$ n'est plus cylindrique. Par conséquent, la variation par rapport au temps d'un champ eulérien $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$, défini sur $\Omega(t)$, s'écrit :

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathcal{E} \right) (\mathbf{x}, t).$$

L'opérateur $\frac{D}{Dt}$ est l'opérateur de la dérivée totale en temps. Nous remarquons que la connaissance de la trajectoire des particules n'est plus nécessaire, mais en revanche que la vitesse de convection de domaine est indispensable.

Remarque 43. Pour un fluide régi par les équations de NAVIER-STOKES, en notant \mathbf{u} la vitesse eulérienne du fluide, la dérivée totale suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

intervient dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, puisque le domaine $\Omega(t)$ est convecté à la vitesse \mathbf{u} du fluide. Lors des estimations d'énergie, il est possible d'écrire :

$$\int_{\Omega(t)} (\partial_t \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega(t)} \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}|^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} |\mathbf{u}|^2 \right) - \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega(t)} |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$$

grâce à la formule de REYNOLDS (et en supposant que tout le bord du domaine se déplace à la vitesse du fluide). Si de plus le fluide est incompressible, il vient aisément :

$$\int_{\Omega(t)} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega(t)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{u}|^2$$

Nous retrouvons alors dans le bilan d'énergie la dérivée de l'énergie cinétique instantanée du fluide :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} |\mathbf{u}|^2 \right).$$

Ceci souligne l'importance du terme de convection présent dans les équations de NAVIER-STOKES pour l'obtention d'estimation d'énergie dans des espaces du type $L^2(0, T; \Omega(t))$, dans le cas d'un domaine fluide qui dépend du temps. Nous référons à [EEM94] pour une illustration dans un problème de couplage fluide-structure.

B.3 Équivalence des descriptions lagrangienne et eulérienne

L'identité (B.1) exhibe cette équivalence. Ainsi, pour deux champs lagrangien \mathcal{L} et eulérien \mathcal{E} décrivant le même champ de vecteurs, nous avons :

$$\mathcal{L}(\xi, t) = \mathcal{E}(\phi(\xi, t), t) = \mathcal{E}(\mathbf{x}(t), t),$$

et puisque ϕ est une bijection, de même : $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathcal{L}(\xi, t)$.

B.4 Formulation ALE : Arbitrary Lagrangian-Eulerian

Dans les problèmes d'interaction fluide-structure où le domaine fluide varie, il est légitime de s'interroger sur le choix du type de coordonnées à utiliser. Pour les applications numériques, cette question prend tout son sens. En effet, lors de trop grands mouvements de fluide, un maillage lagrangien suivant des particules pourrait rapidement dégénérer (des mailles pourraient se croiser), ou bien nécessiterait un remaillage fréquent et couteux. Un maillage fixe eulérien ne prendrait quant à lui pas bien en compte la sensibilité des déformations de surface, et sa finesse devrait dépendre de la vitesse caractéristique de l'écoulement (une des inconnues du problème), ce qui demanderait des hypothèses très strictes sur la condition CFL, et par conséquent un coût numérique là aussi important.

D'un point de vue numérique, la formulation ALE permet de pallier à certains de ces problèmes en calculant à chaque pas de temps une évolution «régulière» du maillage sans demander un coût trop important. La clé en est l'indépendance du maillage à l'intérieur du domaine par rapport à la vitesse du fluide. Par ailleurs, cette méthode est consistante vis-à-vis de la discrétisation des équations de conservation (ce qui est fondamental dans un problème où un fluide incompressible intervient).

B.4.1 Point de vue théorique formel

Nous décrivons maintenant de façon formelle les bases de la formulation ALE. Celles-ci reposent sur la notion de vitesse de domaine et sur la notion de caractéristiques. Soit un temps t_0 fixé dans $(0, T)$, et soit le domaine espace-temps $(\Omega(t) \times \{t\})_{t \in (0, t_0)}$.

1. Nous considérons $\Omega(t_0)$ comme le nouveau domaine spatial de référence, et nous supposons connue la vitesse instantanée c_{t_0} du bord du domaine $\partial\Omega(t_0)$ à l'instant t_0 . Les composantes de la célérité c_{t_0} peuvent être celles de la vitesse du fluide sur le bord.
2. Nous cherchons à définir la vitesse du domaine à l'intérieur de celui-ci. Pour cela, nous pouvons par exemple résoudre un problème de LAPLACE non-homogène :

$$\begin{cases} \Delta\psi(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \Omega(t_0) \\ \psi(\mathbf{x}) = c_{t_0}(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega(t_0) \end{cases}$$

et prendre $c_{t_0}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega(t_0)$. D'autres définitions de ψ sont possibles, notamment avec d'autres opérateurs différentiels ou de relèvement. Celle proposée ici a l'avantage d'imposer une certaine régularité du déplacement à l'intérieur du domaine (puisqu'elle minimise le coût de la fonctionnelle d'énergie $\psi \mapsto \int_{\Omega(t_0)} |\nabla \psi|^2$ sur l'espace des fonctions ψ telles que $\psi|_{\partial\Omega(t_0)} = c_{t_0}$).

Par ailleurs, l'inversion d'un laplacien est aisée numériquement, d'autant plus si la matrice de cet opérateur est calculée lors de la résolution des équations de NAVIER-STOKES (le terme de viscosité est $\nu \Delta \mathbf{u}$) ou des équations d'un fluide potentiel ($\Delta \phi = 0$).

3. Nous définissons les courbes caractéristiques (à l'ordre 1) issues de chaque point $\mathbf{x} \in \Omega(t_0)$ par (voir Figure B.1) :

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt}(\mathbf{x}, t_1, t_0) = c_{t_0}(C(\mathbf{x}, t_1, t_0)) & \text{pour } t_1 \in (t_0, T) \\ C(\mathbf{x}, t_0, t_0) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Ainsi $C(\mathbf{x}, \cdot, t_0)$ est la courbe caractéristique issue de $\mathbf{x} \in \Omega(t_0)$ à l'instant t_0 , et $C(\mathbf{x}, t_1, t_0)$ est sa position dans $\Omega(t_1)$ à l'instant t_1 . L'application $C(\cdot, t, t_0)$ est un isomorphisme entre $\Omega(t_0)$ et $\Omega(t)$ pour $t \in (t_0, T)$.

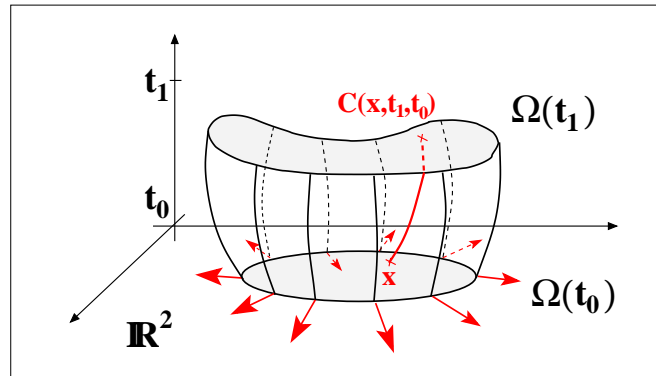


FIG. B.1 – Déformation du domaine $\Omega(t)$ entre les instants t_0 et t_1 . Caractéristique $t \mapsto C(\mathbf{x}, t, t_0)$ issue du point $\mathbf{x} \in \Omega(t_0)$.

4. Nous définissons les variables ALE :

– la vitesse ALE du fluide :

$$\mathbf{u}_{t_0}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(C(\mathbf{x}, t, t_0), t) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega(t_0), C(\mathbf{x}, t, t_0) \in \Omega(t).$$

– de manière générale un champ ALE de $\Omega(t_0)$:

$$\mathcal{L}_{t_0}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(C(\mathbf{x}, t, t_0), t) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega(t_0), C(\mathbf{x}, t, t_0) \in \Omega(t),$$

comme par exemple la pression ALE du fluide.

– la dérivée temporelle d'un champ \mathcal{L} sur $\Omega(t_0)$ au temps $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(C(\mathbf{x}, t, t_0), t)|_{t=t_0} &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{t_0}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t, t_0) \cdot \nabla \mathcal{L}_{t_0}(\mathbf{x}, t) \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{t_0}}{\partial t} + c_{t_0} \cdot \nabla \mathcal{L}_{t_0} \right) (\mathbf{x}, t_0). \end{aligned}$$

5. Nous transposons enfin le système d'équations en les variables ALE. Pour les équations de NAVIER-STOKES incompressible, on obtient à $t = t_0$:

$$(NS_{ALE}) \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_{t_0}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{t_0} - c_{t_0}) \cdot \nabla \mathbf{u}_{t_0} - \nu \Delta \mathbf{u}_{t_0} + \nabla p_{t_0} = \mathbf{f}_{t_0} & \text{dans } \Omega(t_0) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{t_0} = 0 & \text{dans } \Omega(t_0). \end{cases}$$

Pour considérer ce système à un temps ultérieur, il faudrait prendre en compte la modification des opérateurs de différentiation en tenant compte de la jacobienne de l'isomorphisme $C(\mathbf{x}, t, t_0)$:

$$\nabla_{t_0} = (\text{cof} [\nabla C(\cdot, t, t_0)]) \nabla \quad \text{et} \quad \Delta_{t_0} = \nabla_{t_0} \cdot \nabla_{t_0} = (\nabla_{t_0})^2$$

avec ∇_{t_0} le nouvel opérateur gradient (défini sur $\Omega(t_0)$), c'est-à-dire la réécriture du gradient ∇ (défini sur $\Omega(t)$) en les variables de $\Omega(t_0)$. Ainsi par exemple, en prenant $t_0 = 0$ et $t \in (0, T)$ quelconque, nous retrouvons le système de NAVIER-STOKES au temps t en coordonnées lagrangiennes (!). La dénomination «*Arbitraire Euler-Lagrange*» provient d'ailleurs de ce que le domaine choisi est $\Omega(t_0)$, et que localement le système d'équations écrit en eulérien est ramené en variables lagrangiennes.

B.4.2 Un point de vue numérique appliqué aux équations de Navier-Stokes

Abordons maintenant un algorithme de mise en œuvre numérique dans le cas des équations de NAVIER-STOKES incompressible (éventuellement couplées à une structure, pour laquelle nous n'entrons pas dans les détails). Soit une subdivision $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ de l'intervalle $(0, T)$. Nous notons Ω^n , \mathbf{u}^n , p^n , \mathbf{f}^n et c^n , les variables et quantités au temps t^n . Voici alors les étapes à suivre :

1. Soit Ω^n le nouveau domaine spatial de référence, avec son maillage, et c^n la vitesse du maillage sur la frontière.
2. La vitesse du maillage est calculée à l'intérieur de Ω^n en résolvant par exemple un laplacien avec pour condition de Dirichlet la vitesse c^n du bord de Ω^n .
3. Construction du nouveau domaine :

$$\Omega^{n+1} = \{ \mathbf{x} + (t^{n+1} - t^n)c^n ; \mathbf{x} \in \Omega^n \} .$$

4. Il s'agit ensuite de résoudre le problème semi-discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^n(C(\mathbf{x}, t^{n+1}, t^n))}{t^{n+1} - t^n} + (\mathbf{u}^n - c^n) \cdot \nabla \mathbf{u}^n(C(\mathbf{x}, t^{n+1}, t^n)) \\ \quad - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) + \nabla p^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega^{n+1} \\ \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \Omega^{n+1} . \end{cases}$$

qui est la discrétisation de (NS_{ALE}) par un schéma levant les non-linéarités, et qui nous ramène à la résolution d'un problème de STOKES.

5. Nous passons le cas échéant à la résolution d'un problème structure avec Ω^{n+1} , \mathbf{u}^{n+1} , p^{n+1} , et nous en déduisons les contraintes (normales), ainsi que la nouvelle vitesse du bord de l'interface.
6. Incrémentation : $n \rightarrow n + 1$. Retour en 1.

B.4.3 Utilisation de ces méthodes dans la thèse

D'un point de vue théorique, nous utilisons la méthode ALE dans un cadre particulier au **Chapitre 1** de la **Partie II**. Nous réécrivons les équations de NAVIER-STOKES (écrites en eulérien) en coordonnées lagrangiennes. Le difféomorphisme ϕ de passage entre $\Omega(0)$ et $\Omega(t)$ est obtenu à partir des trajectoires des particules. L'intérêt principal est de rendre le domaine fluide indépendant du temps ; nous reportons néanmoins la difficulté⁶² sur les opérateurs différentiels qui dépendent alors de la solution elle-même.

D'un point de vue numérique, nous utilisons la méthode ALE dans un autre cadre particulier, au **Chapitre 2** de la **Partie II**. Dans notre cas, le domaine fluide dépend du temps, mais le système d'EDP (écrit en eulérien) à résoudre ne fait pas intervenir d'opérateur différentiel en temps : la convection du domaine n'apparaît donc pas dans le système réécrit en les quantités ALE. Néanmoins, nous utilisons la mise à jour du maillage suivant la méthode précédemment décrite.

Enfin, et toujours d'un point de vue numérique, nous utilisons la méthode des caractéristiques au **Chapitre 3** de la **Partie II**, pour la résolution des équations de NAVIER-STOKES. Dans ce cas, ni le domaine, ni le maillage fluide ne dépendent du temps. Néanmoins, nous devons prendre en compte la vitesse de convection de l'écoulement à chaque instant et résoudre les équations soit sur Ω^n , soit sur Ω^{n+1} (dans notre cas, nous les résolvons sur Ω^n).

⁶²Cette difficulté est liée à notre choix du difféomorphisme ϕ .

Index

- ALE, méthode –, 191
- BERNOULLI, formule de –, 118
bootstrap, 100
boucle fermée, contrôle en –, 11
boucle ouverte, contrôle en –, 11
- CARATHÉODORY, théorème de –, 99
cœur, 9
cœur artificiel, 10
collabe, 4, 150
conditions de bord de type DIRICHLET, 7
conditions de bord de type NEUMANN, 7
constantes de LAMÉ, 28, 147
contrôle, 162, 163
contrôle en boucle fermée, 11
contrôle en boucle ouverte, 11
- DIRAC, fonction – régularisée, 139, 142
DIRAC, mesure de –, 136
DIRICHLET, conditions de bord de type –, 7
- éléments propres généralisés, 67
équations de LAGRANGE, 29
espace d'éléments finis, 165
espace de SOBOLEV, 22
EULER, équation de conservation de la quantité de mouvement, 6
EULER, schéma d'–, 73, 165
eulérien, formalisme, 191
- feedback, 11, 161, 170
fluide irrotationnel, 117
fluide newtonien, 6
fluide non-newtonien, 6
fluide parfait, 6, 117
fluide potentiel, 117
fonction DIRAC régularisée, 139, 142
formalisme eulérien, 191
formalisme lagrangien, 191
formule de REYNOLDS, 120
- formule de BERNOULLI, 118
FREEFEM++, 69, 141
frontière immergée, méthode de la –, 135
- GALERKIN, méthode de –, 34, 39, 64
GREEN-SAINT VENANT, tenseur des déformations de –, 28
GRONWALL, lemme de –, 51, 86
- hémodynamique, 3
- implicite, théorème des fonctions –s, 97
infinitésimale, rotation –, 26
infinitésimale, translation –, 26
infinitésimaux, mouvements –, 26
irrotationnel, fluide –, 117
- KALMAN, matrice de gain de –, 170
KALMAN, vecteur de –, 170
- LAGRANGE, multiplicateur de –, 91
LAGRANGE, équations de –, 29
lagrangien, formalisme, 191
LAMÉ, constantes de –, 28, 147
Linéaire-Quadratique, système –, 170
loi de comportement, 5
- matrice de gain de KALMAN, 170
matrice de RICCATI, 170
matériau de SAINT VENANT-KIRCHHOFF, 28
mesure de DIRAC, 136
modélisation, 5
mouvements infinitésimaux, 26
multiplicateur de LAGRANGE, 91
méthode ALE, 191
méthode de GALERKIN, 34, 39, 64
méthode de la frontière immergée, 135
- NAVIER-STOKES, équation de conservation de la quantité de mouvement, 6
NEUMANN, conditions de bord de type –, 7
NEWMARK, schéma de –, 123

- newtonien, fluide –, 6
- non-newtonien, fluide –, 6

- opérateur de l'élasticité linéarisée, 34

- parfait, fluide –, 6, 117
- perturbation, 22
- théorème de point fixe de PICARD, 95, 112
- pizzaïolo, 113
- potentiel, fluide –, 117
- problème aux valeurs propres généralisées, 67
- produit contracté, 29

- REYNOLDS, formule de, 120
- RICCATI, matrice de –, 170
- rotation infinitésimale, 26

- SAINT VENANT-KIRCHHOFF, matériau de –, 28
- schéma d'EULER, 73, 165
- schéma de sc Newmark, 123
- SOBOLEV, espace de –, 22
- stent, 4
- système Linéaire-Quadratique, 170

- TAYLOR-HOOD, élément fini de –, 169
- tenseur des déformations de GREEN-SAINT VENANT, 28
- théorème de CARATHÉODORY, 99
- théorème de point fixe de PICARD, 95, 112
- théorème des fonctions implicites, 97
- translation infinitésimale, 26

- valeurs propres généralisées, 67
- vecteur de KALMAN, 170
- ventricule artificiel, 9, 116, 133

Bibliographie

- [Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975. ISBN 0120441500. xviii, 268 pp.
- [All83] G. Allain. *Un problème de Navier-Stokes avec surface libre*. PhD thesis, Thèse de troisième cycle de l'Université Paris VI, 1983.
- [All87] G. Allain. Small-time existence for the Navier-Stokes equations with a free surface. *Appl. Math. Optim.*, 16(1) :37–50, 1987.
- [Arn89] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics, translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1989.
- [Ave83] A. Avez. *Calcul différentiel*. Number 2ème tirage in Collection Maîtrise de Mathématiques Pures. Masson, Paris, 1983. ISBN 2-225-79079-5. 150 pp.
- [BdV03] H. Beirão da Veiga. On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 1(1) :1, 2003.
- [Bea81] J.T. Beale. The initial value problem for the Navier-Stokes equation with a free surface. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, 34(3) :359–392, 1981.
- [BL92] R.P. Beyer and R.J. LeVeque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 :332–364, 1992.
- [BLA02] BLAS. Blas (basic linear algebra subprograms). <http://www.netlib.org/blas/>, 2002.
- [Bré96] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Number 5ème tirage in Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1996. ISBN 2-225-77198-7. 234 pp.
- [Cia86] P. G. Ciarlet. *Élasticité tridimensionnelle*, volume RMA1 of *Collection Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1986. ISBN 2-225-80724-8. 168 pp.
- [Cia88] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Volume I*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. ISBN 0-444-70259-8. xlii+451 pp. Three-dimensional elasticity.
- [CL55] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw Hill, New York, 1955.
- [CM96a] M.A. Crisfield and G.F. Moita. A co-rotational formulation for 2-d continua including incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 : 2619–2633, 1996.
- [CM96b] M.A. Crisfield and G.F. Moita. A finite element formulation for 3-d continua using the co-rotational technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3775–3792, 1996.
- [CSMT99] C. Conca, J. San Martín, and M. Tucsnak. Motion of a rigid body in viscous fluid. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.1 Math.*, 328(6) :473–478, 1999.

- [CSMT00] C. Conca, J. San Martin, and M. Tucsnak. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in viscous fluid. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(5-6) :1019–1042, 2000.
- [CTDL73] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Mécanique quantique, Volume 2*. Hermann, Paris, 1973. ISBN 2-7056-5767-3.
- [DE99] B. Desjardins and M.J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 146 :59–71, 1999.
- [DE00] B. Desjardins and M.J. Esteban. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(7-8) : 1399–1413, 2000.
- [Dec97] Jérôme Declerck. *Étude de la dynamique cardiaque par analyse d’images tridimensionnelles*. PhD thesis, Thèse de troisième cycle de l’Université de Nice Sophia-Antipolis, 1997.
- [DEGLT01] Benoît Desjardins, Maria-J. Esteban, Céline Grandmont, and Patrick Le Tallec. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Rev. Mat. Univ. Compl.*, XIV (2) :523–538, 2001.
- [DGH82] J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comp. Methods in App. Mech. and Eng.*, 33 :689–723, 1982.
- [DiC00] Nicolas DiCesare. *Outils pour l’optimisation de forme et le contrôle optimal, application à la mécanique des fluides*. PhD thesis, Thèse de troisième cycle de l’Université de Paris VI, 2000.
- [DL72] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherche Mathématique, N.21.
- [DL87] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, volume 1 à 9. Masson, Paris, 1987.
- [Duv90] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Collection Mathématiques Appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1990.
- [EEM94] D. Errate, M. Esteban, and Y. Maday. Couplage fluide structure, un modèle simplifié. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Math.*, 318, 1994.
- [FDV76] B. Fraeijs De Veubeke. The dynamics of flexible bodies. *Int. J. Engng Sci.*, 14 :895–913, 1976.
- [FN99] L. Formaggia and F. Nobile. A stability analysis for the arbitrary lagrangian eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.*, 7(2) :105–131, 1999.
- [FNQV99] Luca Formaggia, Fabio Nobile, Alfio Quarteroni, and Alessandro Veneziani. Multiscale modelling of the circulatory system : a preliminary analysis. *Comput. Vis. Sci.*, 2(2-3) : 75–83, 1999.
- [FO99a] F. Flori and P. Orenca. Analysis of a nonlinear fluid-structure interaction problem in velocity displacement formulation. *Nonlinear Analysis*, 35 :561–587, 1999.
- [FO99b] F. Flori and P. Orenca. On a nonlinear fluid-structure interaction problem defined on a domain depending on time. *Nonlinear Analysis*, 38 :549–569, 1999.
- [FPD01] C. Farhat, K. Pierson, and C. Degand. Multidisciplinary simulation of the maneuvering of an aircraft. *Engineering with Computers*, 17 :16–27, 2001.

-
- [FPL00] C. Farhat, K. Pierson, and M. Lesoinne. The second generation of feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically nonlinear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184 :333–374, 2000.
- [Gas01] L. Gastaldi. A priori error estimates for the arbitrary lagrangian eulerian formulation with finite elements. *East-West J. Numer. Math.*, 9(2) :123–156, 2001.
- [GLS00] M.D. Gunzburger, H.-C. Lee, and G.A. Seregin. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2(3) :219–266, 2000.
- [GM98a] Céline Grandmont and Yvon Maday. Analyse et méthodes numériques pour la simulation de phénomènes d’interaction fluide-structure. *ESAIM : Proceedings*, <http://www.emath.fr/proc/Vol.3/>, CANum’97(3) :101–117, 1998.
- [GM98b] Céline Grandmont and Yvon Maday. Existence de solutions d’un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Math.*, 326 : 525–530, 1998.
- [GM00a] Céline Grandmont and Yvon Maday. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. *M2AN*, 34(3) :609–636, 2000.
- [GM00b] Céline Grandmont and Yvon Maday. Fluid-structure interaction : A theoretical point of view. *Rev. Eur. Élém. Finis*, 9(6-7) :633–653, 2000.
- [GMM02] Céline Grandmont, Yvon Maday, and Paul Métier. Existence of a solution for an unsteady elasticity problem in large displacement and small perturbation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 334 :521–526, 2002.
- [GR79] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979. ISBN 3-540-09557-8. 200 pp.
- [Gra98] Céline Grandmont. *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d’interaction fluide-structure*. PhD thesis, Thèse de troisième cycle de l’Université paris VI, 1998.
- [Gui98] Valérie Guimet. *Analyse numérique et simulation de problèmes d’interaction fluide-structure en régime incompressible*. PhD thesis, Thèse de troisième cycle de l’Université de Paris VI, 1998.
- [GvdVJ99a] F.J.H. Gijzen, F.N. van de Vosse, and J.D. Janssen. The influence of the non-newtonian properties of blood on the flow in large arteries : Steady flow in a carotid bifurcation model. *J. Biomech.*, 32 :601–608, 1999.
- [GvdVJ99b] F.J.H. Gijzen, F.N. van de Vosse, and J.D. Janssen. The influence of the non-newtonian properties of blood on the flow in large arteries : Unsteady flow in a 90-degree curved tube. *J. Biomech.*, 32 :705–713, 1999.
- [Hei00] Matthias Heinkenschloss. Time-domain decomposition iterative methods for the solution of distributed linear quadratic optimal control problems. *CAAM Technical Reports (Dept. of Computational and Applied Mathematics at Rice University)*, 00(31), 2000.
- [HG98] J.W. He and R. Glowinski. Neumann control of unstable parabolic systems : Numerical approach. *J. Opt. Theory Appl.*, 96(1) :1–55, 1998.
- [HGMP98] J.W. He, R. Glowinski, R. Metacalfe, and J. Periaux. A numerical approach to the control and stabilization of advection-diffusion systems : Application to viscous drag reduction. *Int. J. Comput. Fluid Dynamics*, 11(1-2) :131–156, 1998.

- [HLZ81] T.J.R. Hughes, W. Liu, and T.K. Zimmermann. Lagrangian-eulerian element formulation for incompressible viscous flows. *Comp. Methods in App. Mech. and Eng.*, 29 :329–349, 1981.
- [HS99] K.-H. Hoffmann and V.N. Starovoitov. On a motion of a solid body in a viscous fluid. two-dimensional case. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 9(2) :633–648, 1999.
- [HS00] K.-H. Hoffmann and V.N. Starovoitov. Zur bewegung einer kugel in einer zähen flüssigkeit. *Doc. Math.*, 5 :15–21, 2000.
- [Hue94] Patrick Huerre. *Mécaniques des Milieux Continus*, volume 4, Mécanique des fluides. École Polytechnique, 1994.
- [IW77] Atsushi Inoue and Minoru Wakimoto. On existence of solutions of the navier-stokes equation in a time dependent domain. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24(2) : 303–319, 1977.
- [Jud74] N.V. Judakov. The solvability of the problem of the motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. *Dinamika Splošn. Sredy*, no Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami :249–253, 1974.
- [Kav93] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, New York, 1993.
- [LAP02] LAPACK. Lapack – linear algebra package. <http://www.netlib.org/lapack/>, 2002.
- [Lew86] Frank L. Lewis. *Optimal Control*. A Wiley-Interscience publication. Wiley-Interscience, 1986. ISBN 0-471-81240-4.
- [Lio68] J.L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [Lio69] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969. 554 pp.
- [Lio88a] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1, Contrôlabilité exacte, RMA-8*. Masson, Paris, 1988.
- [Lio88b] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2, Perturbations, RMA-9*. Masson, Paris, 1988.
- [LM68] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.*, volume 1. Dunod, Paris, 1968.
- [Mau96] Bertrand Maury. Characteristics ale method for the unsteady 3d navier-stokes equations with a free surface. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 6 :175–188, 1996.
- [Mau01] Bertrand Maury. A fat boundary method for the poisson problem in a domain with holes. *Journal of Scientific Computing*, 16(3) :319–339, 2001.
- [MMM01] Yvon Maday, Bertrand Maury, and Paul Métier. Interaction de fluides potentiels avec une membrane élastique. *ESAIM : Proceedings*, <http://www.emath.fr/proc/Vol.10/>, CEM-RACS’99(10) :23–33, 2001.
- [MP96] Bertrand Maury and Olivier Pironneau. Characteristics ale method for unsteady free surface flows with surface tension. *Z. Angew. Math. Mech.*, 76, Suppl. 2 :613–614, 1996.
- [MS01] Paul Metier and Eric Sorosina. *Système D, Algèbre générale, 350 méthodes-400 exercices corrigés, 1ère et 2ème années toutes filières*. Dunod, Paris, 2001. ISBN 2-10-004911-9.

-
- [Nob01] Fabio Nobile. *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to haemodynamics*. PhD thesis, Department of Mathematics, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 2001.
- [Ope02] OpenDX. Opendx, the open source software project based on ibm's visualization data explorer. <http://www.opendx.org/>, 2002.
- [Oss98] Axel Osses. *Quelques méthodes théoriques et numériques de contrôlabilité et problèmes d'interactions fluide-structure*. PhD thesis, Thèse de troisième cycle de l'École Polytechnique, 1998.
- [Pes72] Charles S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *JCP*, 10 : 252, 1972.
- [Pes77] Charles S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *JCP*, 25 :220–252, 1977.
- [Pes89] Charles S. Peskin. Fiber architecture of the left ventricular wall : An asymptotic analysis. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLII :79–113, 1989.
- [Pes02] Charles S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, pages 1–39, 2002.
- [PH02] Olivier Pironneau and Frédéric Hecht. Freefem++. <http://www.freefem.org> ou <http://www.ann.jussieu.fr/hecht/freefem++.htm>, 2002.
- [Pir88] O. Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, volume RMA 7 of *Collection Recherches Appliquées*. Masson, Paris, 1988. ISBN 2-225-81464-3.
- [PM89a] Charles S. Peskin and David McQueen. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart : I. immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid. *JCP*, 81 :372–405, 1989.
- [PM89b] Charles S. Peskin and David McQueen. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart : II. contractile fibers. *JCP*, 82 :289–297, 1989.
- [Raj92] K.R. Rajagopal. *Mechanics of Non-newtonian Fluids, in Recent developments in theoretical fluid mechanics*, volume 291 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. GP.Galdi and J.Necas editors, New York, 1992. 129-162 pp.
- [RPB99] Alexandre Roma, Charles S. Peskin, and Marsha J. Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. *JCP*, 153(2) :509–534, 1999.
- [RPP97] Gerhard Rappitsch, Karl Perktold, and Elisabeth Pernkopf. Numerical modelling of shear-dependent mass transfer in large arteries. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 25(7) : 847–857, 1997.
- [RT92] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1992. ISBN 2-225-75670-8. 224 pp.
- [RVD98] Kris Riemslag, Jan Vierendeels, and Erik Dick. Two-dimensional incompressible navier-stokes calculations in complex-shaped moving domains. *J. Eng. Math.*, 34(1-2) :57–73, 1998.
- [RVD00] Kris Riemslag, Jan Vierendeels, and Erik Dick. An arbitrary lagrangian-eulerian finite volume method for the simulation of rotary displacement pump flow. *Appl. Numer. Math.*, 32(4) :419–433, 2000.
- [Sch92] R.M.S.M. Schulkes. Interactions of an elastic solid with a viscous fluid : Eigenmode analysis. *JCP*, 100 :270–283, 1992.
- [Ser87] Denis Serre. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. existence. *Japan J. Appl. Math.*, 4(1) :99–110, 1987.

- [SG98] John M. Stockie and Sheldon I. Green. Simulating the motion of flexible pulp fibres using the immersed boundary method. *JCP*, 147 :147–165, 1998.
- [SMST02] Jorge Alonso San Martín, Victor Starovoitov, and Marius Tucsnak. Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 161(2) :113–147, 2002.
- [Sol77] V.A. Solonnikov. Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface. *Math. USSR Izvestiya (Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.)*, 41 (6) :1388–1424, 1977.
- [Sol88a] V.A. Solonnikov. On the transient motion of an isolated volume of viscous incompressible fluid. *Math. USSR Izvestiya (Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.)*, 31 :381–405, 1988.
- [Sol88b] V.A. Solonnikov. Unsteady motion of a finite mass of fluid, bounded by a free surface. *J. Soviet Math.*, 40 :672–686, 1988.
- [Thi02] Marc Thiriet. Le coeur. modélisations et simulations numériques. *Cours de l'École Doctorale de Sciences mathématiques de Paris Centre*, Juin 2002.
- [TT02a] Takéo Takahashi and Marius Tucsnak. Existence of strong solutions for a model of motion of a rigid in a bounded domain. *Prépublication de l'Institut Elie Cartan, Univ. Nancy I*, 96016, 2002.
- [TT02b] Takéo Takahashi and Marius Tucsnak. Global strong solutions for the two dimensional motion of a rigid body in a viscous fluid. *Prépublication de l'Institut Elie Cartan, Univ. Nancy I*, 2002.
- [Tuc02] Marius Tucsnak. Global weak solutions for the two dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Prépublication de l'Institut Elie Cartan, Univ. Nancy I*, 01013, 2002.

Modélisation, analyse mathématique et applications numériques de problèmes d'interaction fluide-structure instationnaires

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons des problèmes instationnaires en interaction fluide-structure. Nous nous plaçons en outre dans un cadre bidimensionnel.

Dans un premier temps, nous nous attachons à étudier l'existence et l'unicité de solutions pour un problème d'élasticité en grands déplacements et petites perturbations. Nous introduisons ensuite ce modèle de structure dans un système de couplage avec un fluide visqueux : nous montrons l'existence de solutions pour ce problème.

Par ailleurs, nous considérons des problèmes d'interaction fluide-structure en vue d'applications numériques. Ce travail est motivé par les écoulements sanguins dans un ventricule cardiaque artificiel. Nous effectuons deux approches distinctes : l'une à l'aide d'une méthode ALE simplifiée, et l'autre en utilisant la méthode de la frontière immergée. Concernant ce dernier point, nous abordons un problème de contrôle optimal par feedback.

Mots-clés: interaction fluide-structure, couplage, Navier-Stokes incompressible, fluide potentiel, existence, unicité, structure élastique en grands déplacements et petites déformations, hémodynamique, écoulements sanguins, contrôle optimal, feedback.

Modelling, mathematical analysis and numerical applications of unsteady fluid-structure interaction problems

Abstract

In this work, we consider unsteady problems in fluid-structure interaction in a two-dimensional framework.

First, we study existence and uniqueness of solutions for an elasticity problem in large displacement and small strain. We then insert this structure model in a coupled system with a viscous fluid: we prove existence of solutions for this problem.

Furthermore, we consider fluid-structure interaction problems in the aim of numerical applications. This work is motivated by blood flows in an artificial heart ventricle. We apply two different approaches: the first one with a simplified ALE method, and the second one by using the immersed boundary method. For this last study, we deal with an optimal control problem by means of a feedback.

Keywords: fluid-structure interaction, coupling, incompressible Navier-Stokes system, potential fluid, existence, uniqueness, elastic structure in large displacements small strains, hemodynamic, blood flow, optimal control, feedback.

