



HAL
open science

Matière Noire Astronomique et Champs Scalaires

Alexandre Arbey

► **To cite this version:**

Alexandre Arbey. Matière Noire Astronomique et Champs Scalaires. Astrophysique [astro-ph]. Université de Savoie, 2002. Français. NNT: . tel-00002945

HAL Id: tel-00002945

<https://theses.hal.science/tel-00002945v1>

Submitted on 4 Jun 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale de l'Université de Savoie

Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Physique Théorique

Thèse de Doctorat de l'Université de Savoie

présentée pour obtenir le

Grade de Docteur en Physique Théorique

Spécialité : Astrophysique

par

Alexandre ARBEY

Matière Noire Astronomique et Champs Scalaires

Soutenue le 17 décembre 2002

au Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique (LAPTH)

devant la commission d'examen composée de :

M. Francis BERNARDEAU Rapporteur
Mme Françoise COMBES Présidente
Mme Ruth DURRER Examinatrice
M. Pierre SALATI Directeur
M. Paolo SALUCCI Rapporteur
M. Joseph SILK Examineur

Ecole Doctorale de l'Université de Savoie

Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Physique Théorique

Thèse de Doctorat de l'Université de Savoie

présentée pour obtenir le

Grade de Docteur en Physique Théorique

Spécialité : Astrophysique

par

Alexandre ARBEY

Matière Noire Astronomique et Champs Scalaires

Soutenue le 17 décembre 2002

au Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique (LAPTH)

devant la commission d'examen composée de :

M. Francis BERNARDEAU Rapporteur
Mme Françoise COMBES Présidente
Mme Ruth DURRER Examinatrice
M. Pierre SALATI Directeur
M. Paolo SALUCCI Rapporteur
M. Joseph SILK Examineur

A Nazila.

Table des matières

Remerciements	11
Introduction	13
1 Le Modèle Standard Cosmologique	17
1.1 Le modèle de Friedmann-Lemaître	17
1.1.1 Métrique de Robertson et Walker	17
1.1.2 Equations d'Einstein et Constante cosmologique . . .	18
1.1.3 Equations d'évolution	19
1.2 Le Fond de Rayonnement Cosmologique et la nucléosynthèse primordiale	21
1.3 Principe de la Formation des Structures	23
1.3.1 Théorie linéaire des perturbations	23
1.3.2 Evolution non-linéaire	26
Bibliographie	30
2 Observations et problèmes	33
2.1 Paramètres Cosmologiques	33
2.1.1 L'étude des Supernovæ	34
2.1.2 L'étude du CMB	36
2.1.3 Les grandes structures	37
2.1.4 Energie Noire et Matière Noire	38
2.2 Détection de la matière noire	39
2.2.1 Les galaxies	39
2.2.2 Les amas galactiques	40
2.2.3 Conclusions	43
Bibliographie	53
3 Candidats à la Matière Noire	57
3.1 Matière Noire Baryonique	57
3.1.1 Nuages de gaz moléculaires	57
3.1.2 MACHOs	58
3.2 Neutrinos	58
3.3 WIMPs	61

3.4	MOND	63
3.5	Axions	64
3.5.1	Le problème de la violation de CP forte	64
3.5.2	Solution de Peccei-Quinn	65
3.5.3	Axions et matière noire	66
3.5.4	Conclusion	66
	Bibliographie	72
4	Les modèles à champs scalaires	77
4.1	L'Inflation	77
4.1.1	Le problème de l'horizon	77
4.1.2	Le problème des Fluctuations	78
4.1.3	La platitude de l'Univers	78
4.1.4	Les modèles d'inflation	79
4.2	La Quintessence	81
4.2.1	Un problème d'échelle	81
4.2.2	Les modèles de quintessence	82
4.3	Théories tenseur-scalaire	83
4.4	Etoiles à bosons	84
	Bibliographie	86
5	Halos Galactiques Quintessentiels	89
5.1	Introduction	92
5.2	Can a scalar field bind galaxies?	95
5.3	The self-gravitating complex and massive scalar field.	98
5.4	Comparison with observations.	105
5.5	Discussion and prospects.	113
6	Contraintes Cosmologiques	121
6.1	Introduction	124
6.2	Galactic halos	128
6.2.1	Free field	129
6.2.2	Quartic self-coupling λ	130
6.3	Cosmological dark matter	132
6.3.1	Matter-like behavior	132
6.3.2	radiation domination : the $\lambda = 0$ case	134
6.3.3	radiation domination : $\lambda \neq 0$	136
6.4	Discussion	138
7	Auto-couplage quartique	145
7.1	Introduction	148
7.2	Gravitational behavior	152
7.3	Resolution method	157
7.4	The rotation curves of dwarf spirals	160

7.5	The solar system	167
7.6	Cosmological behavior	169
7.7	Conclusions	171
	Appendix A	176
	Appendix B	177
Conclusion et Perspectives		181
A	Annexe Mathématique	185
A.1	Opérations vectorielles	185
	A.1.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	185
	A.1.2 Coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)	185
	A.1.3 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)	186
A.2	Fonctions de Bessel Sphériques	187
A.3	Polynômes de Legendre	188
	A.3.1 Définition	188
	A.3.2 Décomposition en polynômes de Legendre	189
	A.3.3 Equation de Poisson en coordonnées sphériques	190
A.4	Equations Différentielles	190
A.5	Aide-Mémoire : Intégration Numérique	191
	A.5.1 Intégration selon Simpson	191
	A.5.2 Résolution d'équations différentielles selon Runge et Kutta	192
	Bibliographie	194
B	Annexe Physique	197
B.1	Rappels de Relativité Générale	197
	B.1.1 Tenseurs de Riemann	197
	B.1.2 Equations d'Einstein	198
	B.1.3 Métriques	199
B.2	Equation de Poisson pour des systèmes axisymétriques	201
	Bibliographie	202

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Salati, qui m'a fait découvrir l'Astrophysique et la Cosmologie depuis mon entrée à l'Université, et qui a accepté de superviser mon travail de thèse. Il a su me proposer de travailler sur un sujet très intéressant, et m'a toujours fait profiter au mieux de ses compétences, tout en me permettant de garder une grande liberté d'initiative. Je le remercie aussi de ses conseils lors de la rédaction de ce manuscrit. Je remercie aussi Julien Lesgourgues, qui a montré, durant notre collaboration, une ardeur au travail hors du commun. J'ai eu grand plaisir à travailler avec lui, et je le remercie aussi pour tous ses commentaires lors de ma rédaction de thèse.

Le travail que je présente ici doit aussi à beaucoup d'autres personnes que j'ai croisées durant mon existence, et qui m'ont permis de me passionner pour la Physique. La liste est trop longue pour citer tout le monde, mais je tiens tout de même à remercier chaleureusement les enseignants de l'Université de Savoie et de l'École Normale Supérieure de Lyon, en particulier Angel Alastuey, Robert Baratte, Daniel Décamp, François Delduc, Luc Frappat, Jean-Claude Le Guillou, Emeri Sokatchev et Robert Zitoun, pour la qualité de leurs enseignements et pour l'excellente ambiance lors de leurs cours.

J'ai aussi eu des échanges scientifiques avec de nombreuses personnes, et je tiens à remercier tout particulièrement Fernand Grard, David Maurin, Patrick Peter, Eric Pilon, Georg Raffelt, Varun Sahni, Richard Taillet, Jean-Philippe Uzan, ainsi que tous ceux avec qui j'ai pu discuter de travaux scientifiques.

J'ai été très content de pouvoir travailler au sein du Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique, dont les membres m'ont accueilli avec chaleur, et qui m'ont ainsi permis d'être dans de bonnes dispositions dès mon arrivée. Je remercie particulièrement son Directeur, Paul Sorba, qui m'a toujours incité à participer aux écoles et colloques qui pouvaient me permettre d'améliorer mes connaissances scientifiques et de faire connaître mes travaux à l'extérieur du laboratoire.

Je suis également très reconnaissant envers Francis Bernardeau, Françoise Combes, Ruth Durrer, Paolo Salucci et Joseph Silk qui ont accepté de faire

partie de mon jury.

Des pensées amicales vont également à ceux qui se sont trouvés près de moi durant ma thèse, mes parents, mes grands-parents, mon oncle Pascal, qui m'ont toujours soutenu, mes voisins thésards, Vincent Caudrelier, Aurélien Cottrant et Nicolas Crampé, et mes amis, Benoît Bataillou, Olivier Cinquin, Céline Damian, Dominique Di Cicco, Sophie Ducarre, Laurent Favre, Guillaume Girard, Maxime Richard, Benjamin et Olivier Fellix, Matthieu Lacolle, Christophe Marcel, Guillaume Nicoud, Renaud Rovasio, Jean-François Travail et Antony Vesque, ainsi que tous les membres du Chambéry Kendo Club, qui ont rendu mon existence infiniment plus agréable.

Enfin et surtout, ma reconnaissance éternelle va à ma chère fiancée Nazila, pour avoir si merveilleusement changé mon existence de célibataire...

Introduction

Le problème de la Matière Noire soulève une question fondamentale qui concerne de nombreuses échelles de la cosmologie et de l'astrophysique (de la taille des galaxies à celle de l'Univers). De nombreux modèles tentent d'expliquer les différentes observations, dont les premières remontent aux années 30, et cependant, le sujet reste d'actualité. L'explication la plus en vogue est fondée sur différentes extensions du Modèle Standard des particules élémentaires, et présuppose l'existence de particules supplémentaires interagissant faiblement : les neutralinos. Néanmoins, la granularité de la distribution galactique de ces particules pose problème, si bien que la véritable nature de la matière noire constitue encore une énigme.

Une autre question importante se pose en cosmologie : l'Univers apparaît rempli d'une sorte de fluide d'énergie noire de nature inconnue. Là encore, de nombreux modèles essaient de mettre à jour les propriétés de ce fluide. Les plus étudiés d'entre eux sont des modèles à base de champs scalaires ne reposant actuellement pas sur les théories des particules élémentaires. Ainsi, aucune réponse n'apparaît aujourd'hui définitive.

Cette thèse est basée sur la question : "La Matière Noire et l'Energie Noire ne pourraient-elles pas être différentes facettes d'une même entité ?" Ce genre de question se pose déjà dans les théories tenseur-scalaire. Cette thèse s'inscrit néanmoins dans une optique différente : les modèles à champs scalaires sont présents dans de nombreux sujets de cosmologie et de physique des particules. Est-il possible d'expliquer les observations concernant le problème de la matière noire avec un champ scalaire ? Si une telle idée fonctionne, il serait intéressant, à terme, d'essayer d'unifier les modèles de matière noire et d'énergie noire vers un même modèle à base de champ(s) scalaire(s).

Dans le premier chapitre de ce mémoire, je présente des généralités théoriques sur le modèle standard cosmologique. Pour cela, je présenterai le modèle de Friedmann-Lemaître d'Univers homogène en expansion avec constante cosmologique. Je m'intéresserai ensuite succinctement au Fond de Rayonnement Cosmologique, relique du Big-Bang chaud et de la nucléosynthèse primordiale. Enfin, je décrirai des mécanismes de formation des structures. Dans le chapitre suivant, je présenterai, en me basant sur le modèle standard cosmologique, les différentes observations, tant du point de vue cosmologique

qu’astrophysique, qui conduisent à penser, d’une part, que la constante cosmologique existe, et d’autre part que la matière noire représente la majorité de la matière totale de l’Univers.

Dans un troisième chapitre, je décrirai différents modèles essayant de résoudre le problème de la Matière Noire, depuis des modèles de matière baryonique “invisible”, en passant par des modèles fondés sur la physique des particules (WIMPs, neutrinos, axions), jusqu’au modèle beaucoup plus exotique de gravité modifiée MOND. On verra alors que certains modèles sont plus privilégiés par l’observation que d’autres, mais que finalement aucun d’entre eux n’est exempt de problème.

Dans le quatrième chapitre, je parlerai succinctement de différentes approches à base de champs scalaires, en particulier des modèles cosmologiques de quintessence et d’inflation. On pourra prendre connaissance de l’existence de théories de gravitation modifiée, dites tenseur-scalaire. On verra finalement dans les modèles d’étoiles à bosons comment un champ scalaire complexe peut avoir un comportement de matière.

Après ces quatre chapitres généraux, les trois chapitres suivants forment la partie scientifique de ma thèse, axée autour de modèles de matière noire fondés sur des champs scalaires complexes.

Le chapitre cinq, basé sur un article publié avec J. Lesgourgues et P. Salati dans *Physical Review D*, présente un modèle simple de halo galactique formé par un champ scalaire complexe massif et chargé dans $U(1)$, à la manière des étoiles à bosons. Nous verrons qu’un tel modèle est capable de reproduire les courbes de rotation universelles de M. Persic, P. Salucci et F. Stel, ainsi que la courbe de rotation de la galaxie spirale naine DDO 154, à condition que le champ scalaire soit associé à une masse proche de 10^{-23} eV.

Le sixième chapitre, fondés sur un article publié avec J. Lesgourgues et P. Salati dans *Physical Review D*, analyse le comportement cosmologique d’un champ scalaire complexe chargé dans $U(1)$, associé soit, comme au chapitre précédent, à un potentiel quadratique, soit à un potentiel quartique. En comparant les résultats cosmologiques à ceux obtenus au niveau des galaxies, on voit apparaître différents problèmes qui rendent nécessaire une analyse plus poussée du potentiel quartique au niveau des halos galactiques.

Le septième et dernier chapitre s’articule autour d’un article réalisé avec J. Lesgourgues et P. Salati et soumis à *Physical Review D*, et s’intéresse à la manière dont un halo de champ scalaire complexe chargé dans $U(1)$ et associé à un potentiel quartique, est capable d’expliquer les courbes de rotation des galaxies spirales naines ou de petite taille. On montrera qu’un tel champ a alors un comportement cosmologique acceptable.

Dans la conclusion, je résumerai rapidement les résultats, et je présenterai différentes perspectives d’études astrophysiques et cosmologiques pour les modèles à champs scalaires complexes.

Enfin, de nombreuses formules issues des mathématiques ou de la physique sont utilisées tout au long de cette thèse. De manière à ne pas alourdir le propos, elles sont récapitulées à la fin, dans les annexes A et B.

Chapitre 1

Le Modèle Standard Cosmologique

Dans ce chapitre, je vais rappeler ce qu'est le Modèle Standard Cosmologique d'un point de vue théorique. Il est possible de trouver des présentations plus longues dans des ouvrages classiques [1] à [6]. Les observations seront décrites dans le chapitre suivant.

Le Modèle Standard Cosmologique est en fait une description complète de l'évolution cosmologique de l'Univers, du Big-Bang à aujourd'hui.

1.1 Le modèle de Friedmann-Lemaître

De nombreuses observations astronomiques tendent à montrer que l'Univers est globalement homogène et isotrope. C'est l'hypothèse de base du modèle cosmologique de Friedmann et Lemaître.

1.1.1 Métrique de Robertson et Walker

Le modèle de Friedmann-Lemaître est un modèle de Relativité Générale. Il est fondé sur une métrique qui décrit correctement les conditions d'isotropie et d'homogénéité : la métrique de Robertson [7] et Walker [8] :

$$d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\} . \quad (1.1)$$

$a(t)$ est le “facteur d'échelle”, qui décrit la dilatation de l'Univers en fonction du temps. Les observations tendent à montrer que ce facteur a toujours été en augmentation, donc que l'Univers s'est dilaté.

k est le facteur de courbure. Si k est positif, l'Univers est “fermé”, et si k est négatif il est “ouvert”. Différentes observations suggèrent que k est

presque nul (voir chapitre suivant), c'est-à-dire que l'Univers a des sections spatiales plates.

On introduira le taux d'expansion $H(t)$ (> 0) :

$$H(t) = \frac{d \ln a}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} . \quad (1.2)$$

On peut calculer le tenseur de courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ qui est associé à cette métrique :

$$\begin{cases} R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} , \\ R_{ij} = g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2} \right) . \end{cases} \quad (1.3)$$

Les autres composantes du tenseur sont nulles.

1.1.2 Equations d'Einstein et Constante cosmologique

Les équations fondatrices de la Relativité Générale prédisent un Univers non-permanent et dynamique, qui peut débiter par une explosion de type "big-bang", ou peut disparaître dans une implosion de type "big-crunch", ou les deux. Cette idée perturbait Einstein, qui a voulu changer sa théorie pour qu'elle reflète les croyances philosophiques occidentales en un Univers permanent. De part la nature covariante et symétrique des équations de la Relativité Générale, la seule manière simple de procéder est d'ajouter au terme géométrique un terme supplémentaire. Les équations d'Einstein s'écrivent alors :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \quad (1.4)$$

où $R_{\mu\nu}$ et R sont respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, $T_{\mu\nu}$ le tenseur impulsion-énergie, et Λ la "constante cosmologique".

Cette équation modifiée admet une solution particulière d'Univers statique, cependant instable. Pourtant, Einstein avait foi en cette nouvelle équation [9].

Plus tard, Hubble découvrit l'expansion de l'Univers [10], et par conséquent la constante cosmologique n'était plus nécessaire. Einstein l'a alors abandonnée pour revenir à la loi originelle.

Finalement, les mesures actuelles semblent indiquer que cette constante cosmologique est non-nulle (voir chapitre suivant). Friedmann et Lemaître ont été les premiers à élaborer des scénarii cosmologiques avec expansion de l'Univers [11][12][13].

On peut interpréter l'existence de ce terme Λ de deux manières. Tout d'abord, elle peut être considérée comme une nouvelle constante fondamentale de la gravitation, au même titre que G , mais qui doit, elle, décrire la géométrie de l'Univers. Elle est associée à l'échelle de longueur

$$L_\Lambda = \Lambda^{-1/2} . \quad (1.5)$$

D'autre part, il est possible d'imaginer la constante cosmologique comme une densité ou une pression d'un fluide additionnel qui remplirait l'Univers. Le tenseur $\Lambda g_{\mu\nu}$ contribuerait alors au tenseur énergie-impulsion par un terme

$$T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} . \quad (1.6)$$

Le tenseur énergie-impulsion d'un gaz parfait avec une densité d'énergie ρ et une pression P est donné par

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho) U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} , \quad (1.7)$$

où $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ est la quadri-vitesse du gaz, x^μ étant sa position et τ le temps propre. La constante cosmologique peut alors être interprétée en terme de fluide au repos dont la pression P_Λ et la densité d'énergie ρ_Λ sont données par

$$-P_\Lambda = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} . \quad (1.8)$$

Quelle que soit l'interprétation choisie, les équations d'évolution restent les mêmes.

1.1.3 Equations d'évolution

Si l'on veut dériver les équations qui décrivent l'évolution de l'Univers, il faut donner la forme du tenseur impulsion-énergie. On va considérer qu'il existe un fluide cosmique (constitué par exemple de matière, de constante cosmologique, de radiation...) de densité ρ et de pression P .

Les équations d'Einstein conduisent à la conservation du tenseur impulsion-énergie¹. On a donc :

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -P \frac{d(a^3)}{dt} . \quad (1.9)$$

D'autre part, les composantes espace-espace de l'équation d'Einstein conduisent à la deuxième équation de Friedmann-Lemaître :

¹Il est possible d'interpréter cette conservation comme une relation d'adiabaticité : $dU = -PdV$, où dU est la variation de l'énergie interne du gaz, P sa pression et dV la variation de son volume.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \{\rho + 3P\} . \quad (1.10)$$

La composante temps-temps donne la première équation de Friedmann-Lemaître :

$$\left\{ \frac{\dot{a}}{a} \right\}^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} . \quad (1.11)$$

On pourra remarquer que les trois précédentes équations sont liées. La dernière équation va permettre de déterminer totalement l'évolution de $a(t)$. A l'heure actuelle, cette équation devient

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho^0 - \frac{k}{a_0^2} \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_C^0 , \quad (1.12)$$

ce qui permet de définir la densité critique ρ_C^0 comme la valeur critique pour laquelle l'Univers a des sections spatiales plates ($k = 0$). Pour d'autres valeurs de la densité, la géométrie de l'Univers est globalement courbée. Les indices 0 indiquent que les valeurs sont prises à l'heure actuelle. H_0 est appelée constante de Hubble.

Si l'on veut résoudre les équations de Friedmann-Lemaître, il convient de donner forme au fluide cosmique. Pour cela, postulons une équation d'état reliant densité et pression :

$$P = \omega \rho . \quad (1.13)$$

Si ω est constant, la conservation du tenseur impulsion-énergie donne

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} . \quad (1.14)$$

Pour la matière baryonique, $\omega = 0$ (car sa pression est négligeable devant sa densité) ; pour la radiation, $\omega = 1/3$ (voir le paragraphe suivant) ; pour la constante cosmologique $\omega = -1$ (densité constante - voir équation (1.8)).

Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'après le Big-Bang, l'Univers a tout d'abord été dominé par la radiation (qui est encore observée dans le fond de rayonnement cosmologique). Par conséquent, les équations précédentes donnent (lorsqu'on néglige les termes non-dominants : densité de matière, constante cosmologique, courbure...) :

$$\begin{cases} a(t) = t^{1/2} , \\ H = \frac{1}{2} t^{-1} , \end{cases} \quad (1.15)$$

et on peut montrer que la température évolue en $a(t)^{-1}$.

Lorsque la température a bien diminué, les densités de matière et de radiation deviennent du même ordre de grandeur : c'est l'égalité radiation-matière, pour $a/a_0 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$.

Ensuite, la matière domine, et les équations nous donnent donc :

$$\begin{cases} a(t) = t^{2/3} , \\ H = \frac{2}{3}t^{-1} . \end{cases} \quad (1.16)$$

L'étape suivante dépend fortement de la valeur de la constante cosmologique et du terme de courbure. Ainsi, après la domination de la matière, la courbure puis la constante cosmologique pourraient dominer, bien sûr si elles existent, ou l'inverse.

Déterminer la valeur de ces paramètres revient à déterminer où en est l'évolution de l'Univers, et quelle a été l'importance des différentes phases.

1.2 Le Fond de Rayonnement Cosmologique et la nucléosynthèse primordiale

La découverte de l'expansion de l'Univers a conduit au concept de Big-Bang Chaud, c'est-à-dire à un modèle d'Univers très chaud et très dense à l'origine. Ce modèle conduit à deux prédictions : d'une part il doit subsister un fond de rayonnement fossile de cette époque, et d'autre part on doit pouvoir prédire l'abondance des éléments légers synthétisés après le Big-Bang [18][19].

La découverte du fond de rayonnement cosmologique (CMB) [14] a été un évènement essentiel qui a donné un fondement observationnel solide à ce modèle d'Univers chaud.

Au tout début de l'Univers, la matière est décomposée en un plasma ionisé de particules élémentaires. Pour une température supérieure à environ 1 MeV, les réactions entre les différentes particules se produisent très rapidement, à un taux bien plus élevé que le taux d'expansion de l'Univers, imposant ainsi un équilibre chimique. Les réactions



se produisent à l'équilibre, ce qui conduit à un potentiel chimique nul pour les photons. Par conséquent, ils suivent la statistique de Bose-Einstein à potentiel chimique nul, donc

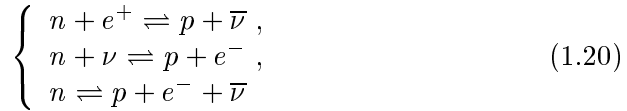
$$P_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma \Rightarrow \rho_\gamma \propto a^{-4} . \quad (1.18)$$

Il respectent aussi le spectre de Planck $\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15}T^4$, donc

$$a(t)T(t) = \text{constante} . \quad (1.19)$$

Ainsi, l'Univers, en s'étendant, se refroidit.

C'est à cette époque que commence la nucléosynthèse primordiale : à partir de 1 MeV, les réactions



cessent d'être en équilibre, et la différence de masse entre les neutrons et les protons diminue la quantité de neutrons au profit de celle des protons, qui vont devenir de plus en plus nombreux. Les protons vont alors devenir stables vis-à-vis des réactions précédentes. Les premiers noyaux d'hydrogène stables sont donc formés.

Ensuite, vers 0.1 MeV, les annihilation positrons/électrons laissent un excès de photons. A ce moment-là, la nucléosynthèse produit rapidement les éléments légers : ${}^4\text{He}$ (environ 25% de la masse), ${}^3\text{He}$ et D ($10^{-2}\%$) et ${}^7\text{Li}$ ($10^{-8}\%$). Les abondances des éléments légers dépendent uniquement d'un paramètre-clé : le rapport nombre de baryons sur nombre de photons (η), qui est en rapport direct avec la brisure de CP [16], et qui peut être prédite par certaines théories de baryogénèse [17], ou déterminé expérimentalement. Ce rapport est important, car on peut montrer qu'il est relié à la densité de matière baryonique, et par conséquent la connaissance de η donne la quantité de baryons dans l'Univers. Ainsi, on peut montrer que

$$\Omega_b h^2 = 3.64 \times 10^{-3} \eta_{10} , \quad (1.21)$$

où $\Omega_b = \rho_b/\rho_C^0$, $\eta_{10} = \eta/10^{-10}$ et $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$. Pour une température d'environ 4000 K (qui équivaut à $(a(t)/a_0)^{-1} \approx 1300$), les électrons et les noyaux chargés se combinent pour donner un fluide baryonique composé d'atomes neutres. Les photons deviennent libres, et ne sont dès lors que peu diffusés par la matière : c'est la recombinaison.

Avant la recombinaison, un photon subissait un nombre énorme de collisions avec des électrons libres. Par conséquent, le plasma était totalement opaque, et se comportait comme un nuage dans lequel la lumière était diffusée. C'est seulement pendant la recombinaison que le plasma devient transparent. Le Fond de Rayonnement Cosmologique que nous observons aujourd'hui a donc été émis lors de cette recombinaison.

Le Fond de Rayonnement Cosmologique est globalement isotrope, mais nous pouvons y observer des anisotropies de faible intensité. Ces anisotropies correspondent à la présence d'inhomogénéités dans le plasma au moment de la

recombinaison, dues par exemple à des fluctuations de température. Il est possible de montrer que ces inhomogénéités n'auraient pas pu engendrer de structures avant la recombinaison, à cause du couplage fort entre la radiation et la matière. Ainsi, ces perturbations du fluide baryonique n'ont pu grandir pour engendrer les grandes structures (galaxies, amas...) qu'après la recombinaison.

Après la recombinaison, l'équilibre thermique n'est plus respecté. Cependant, le nombre de photons se conserve. La densité de photons évolue donc en $n_\gamma \propto a^{-3}$. Les longueurs d'onde des photons sont décalées vers le rouge, donc leur énergie est réduite d'un facteur $(1+z) \propto a^{-1}$. Au final, la densité d'énergie des photons évolue en

$$\rho_\gamma \propto a^{-4} , \quad (1.22)$$

que ce soit avant ou après la recombinaison.

1.3 Principe de la Formation des Structures

L'idée de base de la formation des structures est qu'elles proviennent de perturbations du fluide cosmique qui se seraient effondrées sous leur propre poids. Nous allons nous intéresser succinctement à la théorie de formation des structures².

1.3.1 Théorie linéaire des perturbations

Avant la recombinaison, il est possible de montrer que des perturbations du fluide cosmique ne pourraient pas engendrer des structures. Aussi, plaçons nous après la recombinaison. Considérons un Univers en expansion à sections spatiales plates, dominé par un gaz cosmique de pression P et de densité ρ telles que

$$\begin{cases} P = P_0 + P_1(\vec{x}, t) , \\ \rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{x}, t) . \end{cases} \quad (1.23)$$

ρ_0 et P_0 correspondent respectivement à la pression et à la densité du fluide homogène, et ρ_1 et P_1 sont des inhomogénéités du premier ordre telles que $|\rho_1| \ll \rho_0$ et $|P_1| \ll P_0$.

On se place dans une métrique proche de la métrique plate (et en expansion) :

²Nous passerons ici sous silence les problèmes de jauge, qui sont traités en particulier dans l'article [15].

$$d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \{(\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j\}^3, \quad (1.24)$$

où $|h_{ij}| \ll 1$. Cette métrique fournit, au premier ordre en h , la composante temps-temps du tenseur de Ricci

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_{ii} + \frac{1}{2}\ddot{h}_{ii}. \quad (1.25)$$

Le tenseur impulsion-énergie d'un gaz s'écrit

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

où $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. On peut supposer que la vitesse \vec{v} du fluide est faible, par conséquent, au premier ordre $U^\mu = (1, \vec{v})$. Finalement, au premier ordre, le tenseur impulsion-énergie s'écrit :

$$\begin{cases} T^{00} = \rho = \rho_0 + \rho_1, \\ T^{0i} = (P_0 + \rho_0)v^i, \\ T^{ij} = \frac{P_0}{a^2}(\delta_{ij} - h_{ij}) + \frac{P_1}{a^2}\delta_{ij}. \end{cases} \quad (1.27)$$

Les équations d'Einstein peuvent être écrites sous la forme :

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right). \quad (1.28)$$

La composante temps-temps donne

$$\begin{cases} \text{ordre 0 : } 3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho_0 + 3P_0), \\ \text{ordre 1 : } \partial_0 \left(\frac{a^2}{2}\dot{h}_{ii} \right) = -4\pi G a^2(\rho_1 + 3P_1). \end{cases} \quad (1.29)$$

Il est possible de montrer qu'écrire les autres équations d'Einstein revient à écrire la conservation du tenseur impulsion-énergie

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.30)$$

La composante temps donne alors :

$$\begin{cases} \text{ordre 0 : } \dot{\rho}_0 + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_0 + P_0) = 0, \\ \text{ordre 1 : } \dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_1 + P_1) + (\rho_0 + P_0) \left(\frac{\dot{h}_{ii}}{2} + \partial_i v^i \right) = 0, \end{cases} \quad (1.31)$$

³En particulier, nous passerons sous silence les problèmes de jauge, qui sont traités en particulier dans l'article [15].

tandis que les composantes d'espace donnent à l'ordre 1

$$\partial_0 \{(\rho_0 + P_0)a^5 v^i\} + \partial_i(a^3 P_1) = 0 . \quad (1.32)$$

Les équations à l'ordre 0 ne sont autres que les équations de Friedmann-Lemaître et de conservation du tenseur impulsion-énergie. En combinant les équations à l'ordre 1, on obtient

$$\partial_0 \left\{ a^5 \left[\dot{\rho}_1 + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_1 + P_1) + \frac{\dot{h}_{ii}}{2} (\rho_0 + P_0) \right] \right\} = a^3 \Delta(P_1) . \quad (1.33)$$

Dans le cadre cosmologique, la matière a une pression négligeable par rapport à sa densité, donc $P_0 \ll \rho_0$, et dans un univers où elle domine $\rho_0 \propto a^{-3}$. On voit donc que $\rho_1/\rho_0 \propto \rho_1 a^3$. L'évolution de ρ_0 étant connue, on cherche l'évolution du terme

$$\delta = \rho_1 a^3 . \quad (1.34)$$

On trouve alors l'équation

$$\ddot{\delta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} - (4\pi G \rho_0) \delta - \left(\frac{P_1}{\rho_1} \right) \frac{1}{a^2} \Delta \delta = 0 . \quad (1.35)$$

On pose $P_1/\rho_1 = V_S^2$, où V_S est la vitesse du son dans le fluide. Si l'on considère une perturbation de nombre d'onde k , telle que $\delta(\vec{x}, t) = \epsilon(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$, on obtient l'équation

$$\ddot{\epsilon} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\epsilon} + \left[\left(\frac{k V_S}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \epsilon = 0 . \quad (1.36)$$

On définit la longueur de Jeans, λ_J , comme la longueur d'onde λ pour laquelle le terme de droite s'annule. Comme la matière domine, on a $H = 2t^{-1}/3$. Donc

$$\lambda_J = \sqrt{6} \pi V_S t . \quad (1.37)$$

On différencie deux cas. Si la longueur d'onde de la perturbation est inférieure à la longueur de Jeans, on a

$$\ddot{\epsilon} + 2H\dot{\epsilon} + |f(t)|\epsilon = 0 . \quad (1.38)$$

L'expansion va jouer un rôle de frottement. On peut démontrer que l'on va alors avoir un amortissement dû à l'expansion, les perturbations vont rester sous la forme d'ondes sonores. En particulier, dans le cas où $\lambda \ll \lambda_J$, l'équation devient

$$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{2\pi V_S}{\lambda} \right)^2 \epsilon = 0 , \quad (1.39)$$

ce qui correspond à l'équation d'une onde sonore.

Dans le cas contraire,

$$\ddot{\epsilon} + 2H\dot{\epsilon} - |f(t)|\epsilon = 0 , \quad (1.40)$$

et on peut montrer que l'onde sonore va s'effondrer sous son propre poids, et les perturbations vont donc pouvoir croître. En particulier, dans le cas où $\lambda \gg \lambda_J$, l'équation devient

$$\ddot{\epsilon} + 2H\dot{\epsilon} - \frac{3}{2}H^2\epsilon = 0 . \quad (1.41)$$

La solution de cette équation est de la forme

$$\delta(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{2/3} , \quad (1.42)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes.

Au moment de la recombinaison, la longueur de Jeans est environ de la même taille que l'horizon (voir paragraphe 4.1 pour plus de détails sur l'horizon). Ainsi, seules les longueurs d'onde extérieures à l'horizon vont pouvoir croître. Après le découplage, les inhomogénéités des baryons vont être associées à une vitesse du son beaucoup plus faible, si bien que des structures de masses supérieures à environ $10^4 - 10^5 M_\odot$ vont pouvoir se former.

Lorsque δ devient grand, ces équations ne sont plus valables, et il faut alors se tourner vers une théorie d'évolution non-linéaire.

1.3.2 Evolution non-linéaire

L'étude de l'évolution non-linéaire des perturbations est une étude très compliquée qui nécessite des simulations à N corps. Cependant, il est possible d'avoir une idée de cette évolution par un modèle simple.

Ainsi, nous allons étudier l'évolution d'une surdensité à symétrie sphérique dans un modèle newtonien, appelé modèle "top-hat". Pour cela, on va supposer que la distribution initiale de densité de fluide s'écrit

$$\rho(r, t_i) = \rho_0(t_i) + \rho_1(r, t_i) . \quad (1.43)$$

ρ_0 est la densité homogène et isotrope de fluide, et ρ_1 est la surdensité.

Pour simplifier les équations, nous allons poser

$$\delta_i(r) \equiv \delta(r, t_i) \equiv \frac{\rho_1(r, t_i)}{\rho_0(t_i)} . \quad (1.44)$$

On se place dans un cas newtonien, c'est-à-dire dans le cas des longueurs d'onde inférieures à l'échelle cosmologique $d_H = H^{-1}$ (distance de Hubble). r est un rayon comobile, donc proportionnel à $a(t)$.

Le potentiel gravitationnel de cette région surdense est donné par

$$\Phi(r, t) = \Phi_0(r, t) + \Phi_1(r, t) . \quad (1.45)$$

Φ_0 est uniquement généré par $\rho_0(t)$, donc l'équation de Poisson donne

$$\Phi_0(r, t) = \frac{2\pi G}{3} \rho_0(t) r^2 . \quad (1.46)$$

Considérons l'équation du mouvement d'une fine couche de particules situées à une distance r du centre :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{4\pi G}{3} \vec{r} - \vec{\nabla} \Phi_1 . \quad (1.47)$$

La masse du fluide homogène vaut

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 = \text{constante} . \quad (1.48)$$

L'excès de masse due à la surdensité vaut

$$M_1 = 4\pi \rho_0(t) \int_0^r q^2 \delta(q, t) dq . \quad (1.49)$$

L'équation du mouvement se réécrit donc

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{(M_0 + M_1)G}{r^3} \vec{r} . \quad (1.50)$$

Nous allons faire l'hypothèse que la surdensité est composée de fines couches sphériques de masses constantes (dans le temps) et qui ne se croisent pas. Ainsi, la masse contenue à l'intérieur d'une coquille de rayon r ne change pas. Nous allons indexer les différentes couches par $j = 1, 2, 3 \dots$

Les masses étant constantes, l'équation du mouvement s'intègre directement en

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{G(M_0 + M_1)}{r} = E . \quad (1.51)$$

E est une constante d'intégration. Le premier terme est un terme d'énergie cinétique, et le deuxième un terme d'énergie potentielle. Si $E > 0$, \dot{r}^2 n'est jamais nul, on aura donc une expansion perpétuelle de la couche. Au contraire, si $E < 0$, la couche va pouvoir se contracter et s'effondrer. On va pouvoir évaluer E en fonction des conditions initiales.

Le terme énergie cinétique totale s'écrit $K = \frac{1}{2} \dot{r}^2$. A l'instant initial, si l'on néglige la vitesse particulière par rapport à la vitesse d'expansion, on a

$$K_i = \frac{1}{2} H_i^2 r_i^2 . \quad (1.52)$$

Le terme d'énergie potentielle vaut, à l'instant initial,

$$U_i = - \left(\frac{G(M_0 + M_1)}{r} \right)_{t=t_i} = - \frac{4\pi G}{3} \rho_0(t_i) r_i^2 (1 + \bar{\delta}_i) , \quad (1.53)$$

où $\bar{\delta}_i$ est la surdensité moyenne de la sphère de rayon initial $r = r_i$ au temps $t = t_i$, tel que

$$\bar{\delta}_i = \frac{3}{4\pi r_i^3} \int_0^{r_i} \delta_i(r) 4\pi r^2 dr . \quad (1.54)$$

En posant

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_0(t_i)}{\left(\frac{3H_i^2}{8\pi G} \right)} , \quad (1.55)$$

on obtient finalement

$$E = K_i + U_i = K_i \Omega_i [\Omega_i^{-1} - (1 + \bar{\delta}_i)] . \quad (1.56)$$

La condition d'effondrement devient

$$\bar{\delta}_i > \Omega_i^{-1} - 1 . \quad (1.57)$$

Dans un Univers à sections spatiales plates ou sphériques, cette condition est vraie dès que $\bar{\delta}_i > 0$.

Intéressons nous uniquement au cas où la condition d'effondrement est satisfaite ($E < 0$). La couche va s'étendre jusqu'à un rayon maximum r_{max} , puis va se contracter. On montre que

$$r_{max} = r_i \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)} . \quad (1.58)$$

Donc, si $\bar{\delta}_i$ et $(\Omega_i^{-1} - 1)$ sont du même ordre, la couche va s'étendre beaucoup, et va donc mettre plus de temps à se contracter.

L'équation du mouvement peut se réécrire

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{G(M_0 + M_1)}{r} = \frac{G(M_0 + M_1)}{r_{max}} . \quad (1.59)$$

Avec le changement de variable $r = A(1 - \cos \theta)$ (où θ va de 0 à 2π), l'équation du mouvement donne $t = T + B(\theta - \sin \theta)$, où T est une constante d'intégration et $B = A^{3/2}(GM)^{-1/2}$. En reprenant l'expression de $M = M_0 + M_1$, on montre que

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{1 + \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)} , \quad (1.60)$$

et

$$B = \frac{1 + \bar{\delta}_i}{2H_i\Omega^{1/2}[\bar{\delta}_i - (\Omega_i^{-1} - 1)]^{3/2}} . \quad (1.61)$$

On peut évaluer T en réécrivant les équations au temps $t = t_i$. Il est ainsi possible de résoudre les équations du mouvement dans le cas général.

Cependant, pour simplifier le calcul, plaçons nous dans le cas d'un Univers à sections spatiales plates $\Omega_i = 1$. Dans ce cas, on montre que $T = \delta_i t_i$, qui, puisque la surdensité était faible à l'instant initial, pourra être considéré comme nul. La densité moyenne d'une sphère s'écrit alors

$$\bar{\rho}(t) = \frac{3(M_0 + M_1)}{4\pi A^3(1 - \cos\theta)} , \quad (1.62)$$

tandis que la densité du fluide homogène s'écrit ($a \propto t^{2/3}$)

$$\rho_0(t) = \rho_0(t_i) \left(\frac{a(t)}{a_i} \right)^{-3} = \frac{1}{6\pi G t^2} . \quad (1.63)$$

Si l'on définit la surdensité moyenne $\bar{\delta}$ par

$$\frac{\bar{\rho}(r, t)}{\rho_0} = 1 + \bar{\delta}(r, t) . \quad (1.64)$$

Alors, on obtient

$$\bar{\delta} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^3} - 1 . \quad (1.65)$$

Lorsque θ est proche de 0, on retombe sur le cas linéaire $\bar{\delta} \propto t^{2/3}$. On pourrait montrer que la fonction $\bar{\delta}$ croît lorsque θ augmente, et ceci plus rapidement que dans le calcul en évolution linéaire, et on voit que lorsque θ est proche de 2π , $\bar{\delta}$ diverge. La masse s'effondre alors en un point. En réalité, l'hypothèse implicite de la vitesse lente des particules (c'est-à-dire de la pression négligeable) sera brisée bien avant, et la matière ne restera pas répartie dans des couches sphériques. En effet, un potentiel moyen visible par toutes les particules va se former et donner un effet de "relaxation violente" du système (voir l'article [20] pour une description de cette relaxation), qui va ensuite le conduire à un équilibre du Viriel ($U + 2K = 0$). Le temps mis par les fluctuations pour atteindre l'équilibre du Viriel correspond à $\theta = 2\pi$, et on peut montrer qu'à cet instant $\bar{\delta} \approx 170!$ A partir de ce moment-là, ces grandes surdensités devraient pouvoir former les structures que nous observons actuellement.

Bibliographie

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, “Gravitation”, W. H. Freeman, San Francisco (1973), ISBN 0-7167-0334-3.
- [2] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, Addison Wiley and Sons, New York (1972), ISBN 0-471-92567-5.
- [3] J. A. Peacock, “Cosmological Physics”, Cambridge University Press, Cambridge (1998), ISBN 0-521-42270-1.
- [4] T. Padmanabhan, “Structure Formation in the Universe”, Cambridge University Press, Cambridge (1993), ISBN 0-521-41448-2.
- [5] E. W. Kolb & M. S. Turner, “The Early Universe”, Addison-Wesley, Reading (1990), ISBN 0-201-11603-0.
- [6] P. J. E. Peebles, “Principles of Physical Cosmology”, Princeton University Press, Princeton (1993), ISBN 0-691-07428-3.
- [7] H. P. Robertson, “On the Foundations of Relativistic Cosmology”, Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A.) 15 (1935) 822-829.
- [8] A. G. Walker, “On Milne’s Theory of World-Structure”, Proceedings of the London Mathematical Society 42 (1936) 90-127.
- [9] A. Einstein, “Kosmologische Betrachtung zur allgemeinen Relativitätstheorie”, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte 2. Halbband (1917) 142-152
- [10] E. Hubble & M. L. Humason, “The velocity-distance relation among extragalactic nebulae”, Astrophysical Journal 74 (1931) 43-80.
- [11] A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes”, Zeitschrift für Physics 10 (1922) 377-386.
- [12] A. Friedmann, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”, Zeitschrift für Physics 21 (1924) 326-332.
- [13] G. Lemaître, “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques”, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A47 (1927) 49-59.

- [14] A. A. Penzias & R. W. Wilson, "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s", *Astrophysical Journal* 142 (1965) 419-421.
- [15] J. M. Bardeen, "Gauge-invariant cosmological perturbations", *Physical Review D* 22 (1980) 1882-1905.
- [16] A. D. Sakharov, "Breaking of CP-invariance, C-Assymetry, and Baryon Assymetry of the Universe", *Pis'ma ZhETF* 5 (1967), 32-35.
- [17] A. Riotto & M. Trodden, "Recent Progress in Baryogenesis", *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 49 (1999) 35-75.
- [18] G. Gamov, "Expanding Universe and the origin of elements", *Physical Review* 70 (1946) 572-573.
- [19] R. A. Alpher, H. A. Bethe & G. Gamov, "The origin of chemical elements", *Physical Review* 73 (1948) 803-804.
- [20] D. Lynden-Bell, "Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 136 (1967) 101-121.

Chapitre 2

Observations et problèmes

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à différentes observations astronomiques. Tout d'abord, nous allons étudier celles qui permettent de déterminer les paramètres cosmologiques, et donc de contraindre les différents modèles d'évolution de l'Univers. Ensuite, nous nous intéresserons aux expériences qui mettent en évidence la présence de matière noire.

2.1 Paramètres Cosmologiques

Supposons que l'Univers est aujourd'hui rempli d'un fluide cosmique composé de matière, et d'une constante cosmologique (négligeons l'influence de la radiation).

On définit des paramètres cosmologiques à partir de densités actuelles rapportées à la densité critique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_M = \frac{\rho_M^0}{\rho_C^0} , \\ \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_C^0} . \end{array} \right. \quad (2.1)$$

(On peut définir de même $\Omega_b = \rho_b^0 / \rho_C^0$, ...)

On définit aussi un paramètre de courbure

$$\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} . \quad (2.2)$$

Si $\Omega_K < 0$, l'Univers est sphérique, si $\Omega_K > 0$ il est hyperbolique. On utilisera souvent la constante de Hubble réduite h :

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}} . \quad (2.3)$$

Finalement, le décalage vers le rouge z , ou redshift, est donné par

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z} . \quad (2.4)$$

On peut alors réécrire la première équation de Friedmann-Lemaître sous la forme

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z)\sqrt{F(z)} , \quad (2.5)$$

où $F(z)$ est donné par

$$F(z) \equiv (1+z)^2(1+z\Omega_M) - z(z+2)\Omega_\Lambda . \quad (2.6)$$

On va chercher à mesurer les paramètres cosmologiques de plusieurs manières.

2.1.1 L'étude des Supernovæ

Un test important en cosmologie est de déterminer la relation entre distance de luminosité des structures et redshift.

Soient l la luminosité apparente, c'est-à-dire le flux de lumière émis par une source lumineuse par unité de surface et par unité de temps, et L la luminosité absolue, ou puissance totale émise. La distance de luminosité est alors définie par

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Considérons une source au repos, située à une codistance r_1 de la Terre. L'énergie qu'elle émet à l'instant t_1 pendant une durée δt_1 vaut, par définition, $L\delta t_1$. Cette énergie est émise de manière isotrope, les radiations se répartissent donc sur une sphère dont le rayon vaut aujourd'hui au niveau de la Terre $4\pi r_1^2 a_0^2$, où a_0 est le facteur d'échelle au moment de l'observation. D'autre part, toutes les longueurs d'onde ont été décalées vers le rouge par interaction gravitationnelle d'un facteur $(1+z)$, et par conséquent l'énergie reçue est réduite d'un facteur $(1+z)^{-1}$. L'énergie reçue au niveau de la Terre pendant un temps $\delta t_0 = (1+z)\delta t_1$, pour la surface $4\pi r_1^2 a_0^2$ vaut donc :

$$l = \frac{L\delta t_1}{1+z} \frac{1}{4\pi r_1^2 a_0^2} \frac{1}{\delta t_0} = \frac{L}{4\pi r_1^2 a_0^2 (1+z)^2} . \quad (2.8)$$

On en déduit que la distance de luminosité vaut

$$d_L = r_1 a_0 (1+z) . \quad (2.9)$$

Pour des photons, $d\tau^2 = 0$, donc, si la lumière est émise au temps t_1 par une source située à une codistance r_1 de la Terre, et qu'elle est reçue au temps t_0 :

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} . \quad (2.10)$$

A partir de la première équation de Friedmann-Lemaître, on peut écrire

$$d_L = \frac{c}{H_0} \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_K|}} S \left\{ \sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{F(z')}} \right\}, \quad (2.11)$$

où la fonction S est définie par

$$S(x) \equiv \begin{cases} \sin x & \text{si } k > 0 & \text{Univers sphérique,} \\ x & \text{si } k = 0 & \text{Univers plat,} \\ \sinh x & \text{si } k < 0 & \text{Univers hyperbolique.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Mesurer la distance de luminosité nécessite à la fois la connaissance des luminosités apparente et absolue. La première est directement observée. La difficulté majeure vient de la connaissance de la luminosité absolue.

C'est ici qu'interviennent les supernovæ SNeIa. En effet, on pense qu'elles se comportent comme des "chandelles standards", c'est-à-dire que leurs propriétés sont indépendantes de l'espace et du temps; en d'autres termes, on a observé que leur luminosité absolue est proportionnelle à leur temps d'extinction et il est par conséquent possible de l'évaluer.

On peut définir la magnitude relative m :

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{l}{l_{\odot}} + m_{\odot}, \quad (2.13)$$

où l_{\odot} est la luminosité apparente du Soleil, et m_{\odot} est sa magnitude apparente. La magnitude absolue M correspond à la brillance d'une source observée depuis une distance de 10 pc. On a donc

$$M = -2.5 \log_{10} \frac{L}{L_{\odot}} + M_{\odot}, \quad (2.14)$$

où $L_{\odot} = 4\pi(10 \text{ pc})^2 l_{\odot}$ est la luminosité absolue du Soleil, mesurable, et M_{\odot} est sa magnitude absolue, dépendant des fréquences d'observation.

Au final, la relation entre les deux magnitudes est

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d_L}{1 \text{ pc}} - 5. \quad (2.15)$$

Pour les supernovæ SNeIa, si l'on suppose qu'elles sont bien des chandelles standards, il est possible de trouver M , et par conséquent trois mesures de luminosité apparente et de redshift devraient suffire à évaluer trois paramètres cosmologiques indépendants : H_0 , Ω_M et Ω_{Λ} . Cependant, les mesures actuelles se font à z faible, et on a alors accès uniquement à la magnitude au premier ordre en z , ce qui crée une importante dégénérescence en $\Omega_{\Lambda} - \Omega_M/2$.

Des mesures ont été effectuées par le Supernova Cosmology Project sur un

échantillon de 42 supernovæ [1], et conduisent à la figure 2.1 .
Les valeurs préférées de ces paramètres cosmologiques semblent être

$$0.8\Omega_M - 0.6\Omega_\Lambda \approx -0.2 \pm 0.1 , \quad (2.16)$$

soit, dans le cas d'une cosmologie plate ($\Omega_K = 0$)

$$\Omega_M = 0.28 \pm 0.14 . \quad (2.17)$$

On peut voir sur la figure 2.2 les différentes fenêtres possibles dans l'espace des paramètres.

2.1.2 L'étude du CMB

En 1965, Penzias et Wilson ont mis en évidence l'existence d'un rayonnement cosmique fossile à environ 3 K [3]. C'est cette première observation qui a permis de confirmer l'hypothèse que l'Univers était chaud dans le passé, et s'est refroidi en s'étendant. En 1990, le satellite COBE [4] a évalué la température moyenne de ce fond de rayonnement cosmologique à 2.728 ± 0.06 K. On se reportera à la figure 2.3 récapitulant ses résultats. Puisqu'on observe des galaxies dans l'Univers, on s'attendait à observer de grandes anisotropies. COBE a tout d'abord observé une variation régulière – mais faible – d'une extrémité du ciel à l'autre. Cependant, celle-ci s'explique par le fait que le système solaire se déplace par rapport au repère comobile vers la constellation de la Vierge, provoquant un effet dipolaire. Ensuite, COBE a mis en évidence de très petites fluctuations. En réalité, l'Univers devait être, au moment de la recombinaison, homogène à au moins 0.025% près ! L'amplitude mesurée des anisotropies ne dépassait pas $\Delta T/T \approx 10^{-5}$.

Plus récemment, des expériences, telles que celles des collaborations Boomerang [6], Maxima [7] ou Archeops [8], ont permis des analyses plus précises. Au moment de la recombinaison, certaines régions étaient causalement déconnectées (voir chapitre 4 – Inflation). Il est possible de calculer l'angle θ_H correspondant à la distance causale au moment de la recombinaison observée aujourd'hui. Cet angle a joué un rôle important au moment de la recombinaison. En effet, pour des angles supérieurs, on observe les fluctuations statiques de grandes tailles qui sont plus larges que l'horizon. Les fluctuations d'angles inférieurs correspondent aux modes situés à l'intérieur de l'horizon, et qui oscillent comme des ondes sonores. En étudiant le CMB sous différentes échelles angulaires, on peut donc visualiser l'ensemble des oscillations. Quand un mode d'oscillation entre dans l'horizon, sa densité oscille et passe par une série de minima et de maxima qui sont peu à peu effacés par la diffusion des photons (Silk damping [9]). Ainsi, en observant le CMB sous plusieurs échelles angulaires, on peut voir les différents modes au moment du découplage. Si l'on décompose les anisotropies de température

en harmoniques sphériques

$$\delta T(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) , \quad (2.18)$$

on retrouvera les pics acoustiques de la figure 2.4 . Chaque coefficient C_l correspond à la quantité $|a_{lm}|^2$ moyennée sur les m pour un multipôle l fixé. Il représente la différence de température moyennée sur tout le ciel entre deux directions séparées par un angle $\theta \approx 200^\circ/l$. Il est possible de montrer que la taille du premier pic acoustique est reliée directement à la géométrie de l'Univers et à la taille de l'horizon θ_H par la relation

$$\theta_H \approx \frac{1^\circ}{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda}} . \quad (2.19)$$

Au final, une étude plus complète des modèles de CMB (en particulier, avec le programme cmbfast [10]) peut montrer que pour $\Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_b$ et h donnés, les fluctuations de températures diffèrent (voir figure 2.5). Le spectre des anisotropies permet de donner des contraintes sur ces paramètres, et les derniers résultats sont [11] :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0.72 \pm 0.05 , \\ \Omega_b h^2 = 0.024 \pm 0.001 , \\ \Omega_M h^2 = 0.14 \pm 0.02 , \\ \Omega_K = 0.02 \pm 0.02 . \end{array} \right. \quad (2.20)$$

On peut d'ores et déjà remarquer qu'un Univers à sections spatiales plates est privilégié, et que les baryons ne forment qu'une petite partie de la matière totale.

2.1.3 Les grandes structures

Dans le but d'évaluer les différents paramètres cosmologiques, il est aussi possible de tirer partie des observations des grandes structures, par exemple des galaxies, ou des amas galactiques. En effet, ces structures ont été générées par les mêmes inhomogénéités qui ont donné les fluctuations du CMB au moment de la recombinaison. Par conséquent, si l'on est capable de tracer une carte intergalactique des grandes structures, et que l'on connaît le spectre initial des inhomogénéités (par exemple, à l'aide des théories inflationnaires et des résultats du CMB - voir figure 2.6), on doit pouvoir déduire du spectre de puissance de ces grandes structures les paramètres cosmologiques. On notera en particulier que l'expérience "2dF Galaxy Redshift Survey" [14] trace

une telle carte à partir de données sur près de 200000 galaxies (voir figure 2.7). Les résultats [16] favorisent une valeur des paramètres cosmologiques :

$$\begin{cases} \Omega_M h = 0.20 \pm 0.03 , \\ \Omega_b / \Omega_M = 0.15 \pm 0.07 , \end{cases} \quad (2.21)$$

en accord avec les résultats précédents.

D'autre part, la luminosité des galaxies spirales semble corrélée à leur vitesse de rotation par la loi de Tully-Fisher. Ainsi, si l'on peut déterminer la vitesse de rotation des galaxies, on peut déterminer leur magnitude absolue, et si l'on mesure leur magnitude apparente, on en déduit la distance qui nous en sépare. Dans le cas où les galaxies étudiées sont fixes par rapport au flot de Hubble, à partir d'une mesure de redshift, on peut trouver leur vitesse de récession, c'est-à-dire la vitesse à laquelle l'expansion les éloigne de nous. Par la loi de Hubble (vitesse de récession $\times H_0 =$ distance), on peut alors en déduire h . Cette idée a été utilisée dans le "Key Project" du Télescope Spatial Hubble [17], et les résultats indiquent que

$$h = 0.72 \pm 0.08 . \quad (2.22)$$

2.1.4 Energie Noire et Matière Noire

Nous venons de voir que l'évaluation des paramètres cosmologiques tend à montrer que :

- 1) l'Univers est quasiment plat,
- 2) il existe une constante cosmologique non-nulle, dont la densité vaut environ 2/3 de la densité critique,
- 3) la quantité de baryons ne représente environ que 15% de la masse totale de matière. On pourra à ce propos remarquer que la théorie de la nucléosynthèse primordiale est désormais en accord avec cette quantité de matière baryonique.

L'existence de matière non-baryonique et de la constante cosmologique pose dans les deux cas un problème important : quelles sont les compositions de cette Matière et de cette Energie Noires.

Avant de tenter de répondre à ces questions (voir chapitres 3 et 4), il peut être intéressant de s'en poser une autre : les expériences précédentes révèlent-elles bien l'existence de cette matière et cette énergie noire ? En ce qui concerne l'énergie noire, elle n'a pas été observée plus directement par d'autres méthodes. Par contre, de la matière noire a été mise en évidence dans de nombreux objets astrophysiques.

2.2 Détection de la matière noire

La matière noire a une nature totalement inconnue. Il n'y a pour le moment aucune preuve directe de son existence. Par contre, il est possible de voir, par des méthode indirectes, sa présence dans de nombreux objets astronomiques.

2.2.1 Les galaxies

On peut considérer que les galaxies se répartissent en deux groupes : les galaxies spirales et les galaxies elliptiques (dont les galaxies sphéroïdes et les galaxies lenticulaires)[18]. Il est possible d'y déceler de la matière noire dans les deux cas.

Courbe de rotation de galaxies spirales

La présence de matière noire peut être mise en évidence en considérant les courbes de rotation des galaxies spirales [19], c'est-à-dire des tracés de vitesse angulaire d'une particule-test située à une distance r du centre. Cette vitesse peut être mesurée par effet Doppler à la fois optiquement à l'aide du spectre d'émission de l'hydrogène chargé HII, à partir de mesures radio de la raie à 21 cm de l'hydrogène neutre HI, et à partir de l'émission des étoiles du disque galactique. Comme l'hydrogène est généralement présent en nuages jusqu'à une large distance, il permet d'évaluer la distribution de masse jusqu'à des distances supérieures à la partie visible de la galaxie.

Si la distribution de masse galactique suivait la distribution lumineuse observée, on s'attendrait à ce que la vitesse décroisse rapidement en obéissant aux lois de Newton. Imaginons une particule-test de masse m , animée d'une vitesse v en mouvement circulaire, située à une distance r du centre d'une galaxie de masse M . Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{GM}{r^2}, \quad (2.23)$$

soit une vitesse

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.24)$$

Les observations galactiques montrent un profil de vitesse plutôt plat [20] (v constante - voir figure 2.8), ce qui semblerait indiquer que $M \propto r$, soit une densité de matière en $\rho_M \propto r^{-2}$, ce qui montre qu'une grande quantité de masse s'étend assez loin. Pourtant, les observations semblent indiquer une densité de matière en $\rho_M \propto e^{-r/r_0}$.

En utilisant le rapport masse sur luminosité des étoiles (à l'aide de modèles d'évolution stellaire [21]), on peut déduire ce même rapport pour la galaxie, et donc en déduire la masse visible.

Finalement, la matière visible joue un rôle assez important au centre, alors que la platitude des courbes de rotation ne peut être due qu'à un halo de matière noire s'étendant à grande distance du centre, et dont la masse semble être dix fois supérieure à la masse de matière visible. On notera néanmoins que les mesures à grand rayon ont encore une statistique réduite, mais que la statistique importante au centre peut permettre d'essayer de classifier le comportement des courbes de rotation et d'en tirer des moyennes laissant apparaître l'influence de la matière noire à moyen rayon (voir [22] et figure 2.9).

On pourra finalement remarquer que certaines galaxies de petites tailles (en particulier la galaxie naine DDO 154 [23]) ont des courbes de rotation bien connues, et que l'étude de leur nuage gazeux de HI tend à montrer que la matière noire domine à tout rayon.

Naines sphéroïdes et noyaux des elliptiques

En utilisant des modèles théoriques des galaxies naines sphéroïdes et des noyaux des elliptiques, il est possible d'estimer la quantité de matière noire dans les deux systèmes [19].

En effet, en supposant que ces systèmes sont des sphères virialisées, on montre que le rapport masse sur luminosité peut s'écrire en fonction de la brillance centrale I_0 , d'un rayon de cœur r_0 et de la dispersion des vitesses, σ^2 , sous la forme

$$\frac{M}{L} = \frac{9\sigma^2}{2\pi G I_0 r_0} . \quad (2.25)$$

On obtient σ par des mesures d'effet Doppler sur les spectres d'émission de HI et de H₂. Pour obtenir I_0 et r_0 , on mesure le profil de luminosité du système, puis on le décrit avec une sphère isotherme dont on ajuste les paramètres pour arriver à trouver la meilleure valeur de I_0 et r_0 . Ensuite, de même que pour les galaxies spirales, on peut trouver le rapport masse visible sur luminosité. Les analyses récentes tendent à montrer que les galaxies sphéroïdes, contrairement à ce que l'on pensait, ne sont généralement pas dominées à petit rayon par la matière noire à la manière des galaxies spirales naines [24]. Néanmoins, la présence de matière noire y est nécessaire pour expliquer les dispersions de vitesse observées.

2.2.2 Les amas galactiques

L'étude de la répartition des galaxies dans l'espace tend à montrer qu'elles se groupent sous forme d'amas constitués de quelques dizaines à plusieurs milliers de galaxies. On peut mettre en évidence la présence de matière noire par plusieurs méthodes.

Dynamique des amas

On peut raisonnablement supposer que les amas se sont formés à cause de l'attraction gravitationnelle, et qu'ils sont désormais en équilibre stationnaire. Le système est alors virialisé. On a alors

$$U + 2K = 0 , \quad (2.26)$$

où U et K sont respectivement l'énergie potentielle de gravitation et l'énergie cinétique de l'amas, c'est-à-dire la somme de toutes les énergies des galaxies qui le composent. Si l'on suppose que la distribution des vitesses est isotrope, en mesurant d'une part la dispersion de vitesse σ , et d'autre part la taille de l'amas R , on peut, en première approximation, écrire pour la masse M de l'amas

$$M \approx \frac{R\sigma^2}{G} . \quad (2.27)$$

Une méthode expérimentale consiste donc à mesurer la vitesse moyenne de l'amas (en mesurant la vitesse moyenne de chaque galaxie et en en prenant la moyenne), puis la dispersion des vitesses autour de cette moyenne, et enfin à mesurer approximativement la taille de l'amas à partir des galaxies visibles. Par ailleurs, il est possible d'évaluer la masse de matière visible en sommant les masses de toutes les galaxies (voir le paragraphe 2.2.1).

Cette méthode a été la plus utilisée car elle est la plus simple, mais elle est fondée sur deux hypothèses difficiles à justifier : l'isotropie de la distribution des vitesses, et la virialisation du système. Néanmoins, elle reste fortement utilisée [25].

Ces observations tendent à montrer que la masse totale est bien plus importante que la masse lumineuse. On parle dans ce cas de matière noire pour décrire cette masse non-lumineuse. On notera néanmoins que ces études prédisent des valeurs de Ω_M compatibles avec les études cosmologiques [26].

L'émission de rayonnement X

Une deuxième méthode consiste à étudier le rayonnement des amas. En effet, les amas contiennent un gaz très chaud ($T \approx 10^8 \text{K}$), totalement ionisé et de faible densité ($n \approx 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$). Ce gaz émet du rayonnement X par Bremsstrahlung.

Si l'on suppose que le gaz est en équilibre hydrostatique (Φ est le potentiel gravitationnel, et ρ et P respectivement la densité et la pression du gaz), donc que

$$\vec{\nabla} \Phi = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P , \quad (2.28)$$

et se comporte comme un gaz parfait, suivant l'équation d'état (T est la température du gaz, et m la masse moyenne d'une particule de gaz)

$$P = \frac{\rho}{m} kT , \quad (2.29)$$

on peut montrer que dans le cas d'un amas purement sphérique

$$M_{tot}(r) = -\frac{kTr}{Gm} \left[\frac{d \ln(\rho)}{d \ln(r)} + \frac{d \ln(T)}{d \ln(r)} \right] . \quad (2.30)$$

Finalement, on peut trouver la masse totale à partir de la connaissance de la répartition de température, de la densité du gaz, et de la masse moyenne des particules le constituant. D'autre part, si l'on connaît la densité de gaz et que l'on suppose que la contribution des baryons est dominée par le gaz et les étoiles visibles, il est possible de trouver la masse de matière baryonique M_b dans l'amas. Enfin, comme l'échelle spatiale des amas est très grande, on peut supposer que le rapport masse baryonique sur masse totale est représentatif du paramètre cosmologique Ω_B .

Il est possible d'obtenir le profil de densité à partir de la brillance de surface de l'amas, et le profil de température par spectroscopie. Les instruments actuels, tels que le satellite ROSAT [27], ont des résolutions suffisamment importantes pour étudier correctement le gaz.

Des études récentes semblent montrer que la fraction de baryons M_b/M_{tot} est de l'ordre de 10 à 12% (dont environ 9% de gaz), apparemment en accord avec les résultats du CMB et de la nucléosynthèse primordiale [28]. On pourra néanmoins remarquer que la fraction baryonique ainsi trouvée n'est valable que si les amas sont représentatifs de l'Univers dans son ensemble.

Effets de lentille gravitationnelle

Lorsqu'un corps massif passe près de la ligne de visée entre un observateur et un corps observé, la relativité générale prédit une courbure des rayons lumineux, conduisant à des distorsions dans l'image du corps observé. L'angle de déviation de la lumière est proportionnel à la masse du corps défecteur, et on peut espérer utiliser cet effet pour trouver la masse des amas.

Lorsqu'on observe des objets situés au-delà des amas, on peut observer deux phénomènes : l'un, appelé "strong lensing" conduit à des images multiples et des images déformées sous forme d'arcs, et se produit lorsque les amas sont très denses. L'autre, appelé "weak lensing", se produit pour des amas peu denses et donne des déformations moyennes peu importantes, qui permettent de sonder l'intérieur de l'amas.

Le strong lensing est plus facile à observer, mais il demande une modélisation importante de l'amas de manière à expliquer les diverses déformations, et ne renseigne finalement que sur ses parties denses.

Le weak lensing, même s'il est plus difficile à observer, permet de cartographier la distribution de masse. Cette méthode nécessite l'utilisation de

caméras à large champ.

A l'aide de cette méthode, il est donc possible de déterminer la masse totale d'un amas. Pour obtenir la fraction baryonique, il reste nécessaire d'évaluer la masse due au gaz et aux étoiles, ce qui se fait à l'aide du rayonnement X. Les méthodes fondées sur le lensing sont actuellement activement utilisées, et les résultats semblent déjà indiquer que les baryons sont plus nombreux que dans les expériences basées simplement sur le rayonnement X [29]. Les prochaines générations de télescopes devraient encore permettre d'améliorer les résultats [30].

2.2.3 Conclusions

Il existe certainement d'autres manières d'observer la présence de matière noire. Dans tous les cas, comme nous avons pu le voir, galaxies et amas galactiques indiquent déjà fortement la présence de matière noire. En ce qui concerne les observations des galaxies, elles ne permettent pas de différencier matière baryonique et matière non-baryonique, laissant ainsi la possibilité que la matière noire soit au moins en partie composée de matière baryonique non-visible. Cependant, les mesures sur les amas, combinées aux observations cosmologiques, indiqueraient qu'environ 10% de la matière est baryonique, alors que le reste est constitué de masse inconnue. D'autre part, au niveau des galaxies, seule 10% de cette matière baryonique est visible. Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à différentes explications possibles.

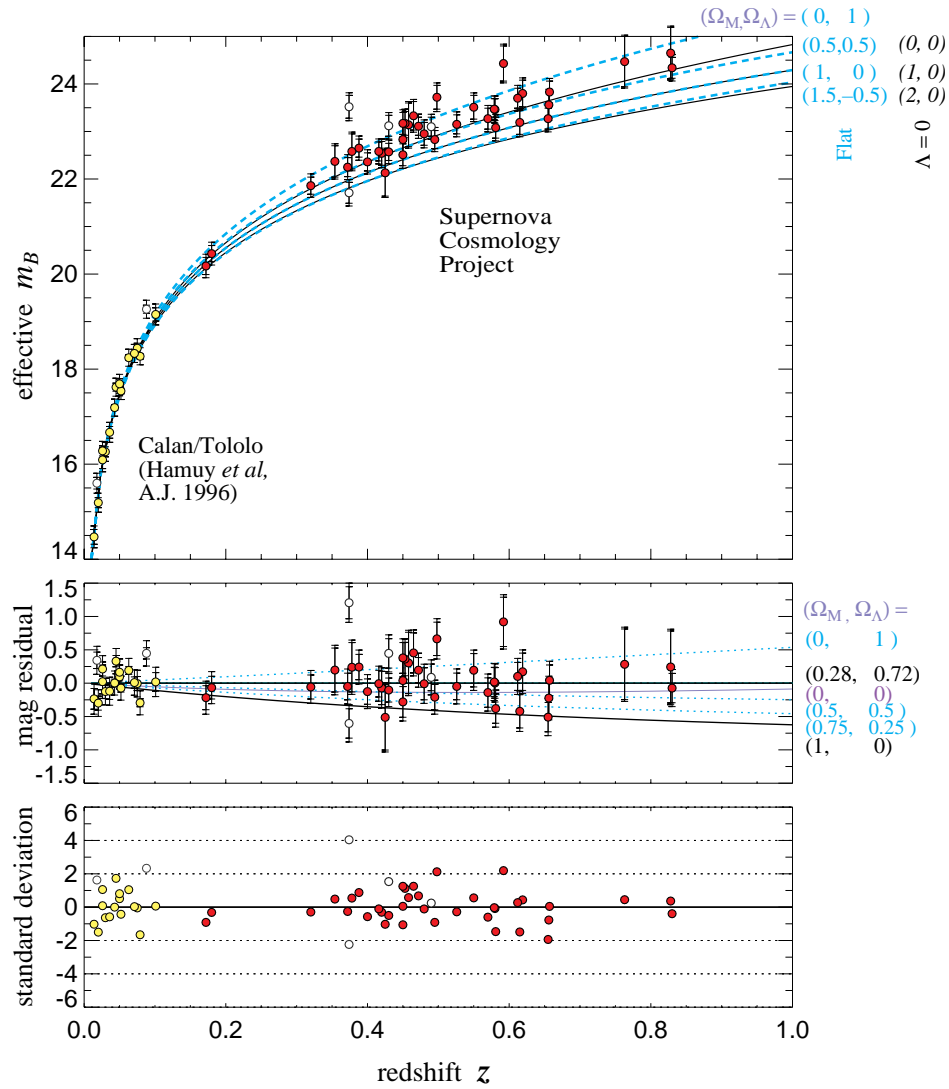


FIG. 2.1 – Diagramme de Hubble pour 42 SNeIa du Supernovae Cosmology Project et 18 SNeIa à bas redshift du Calán/Tololo Supernovae Survey (Emprunté à [1]).

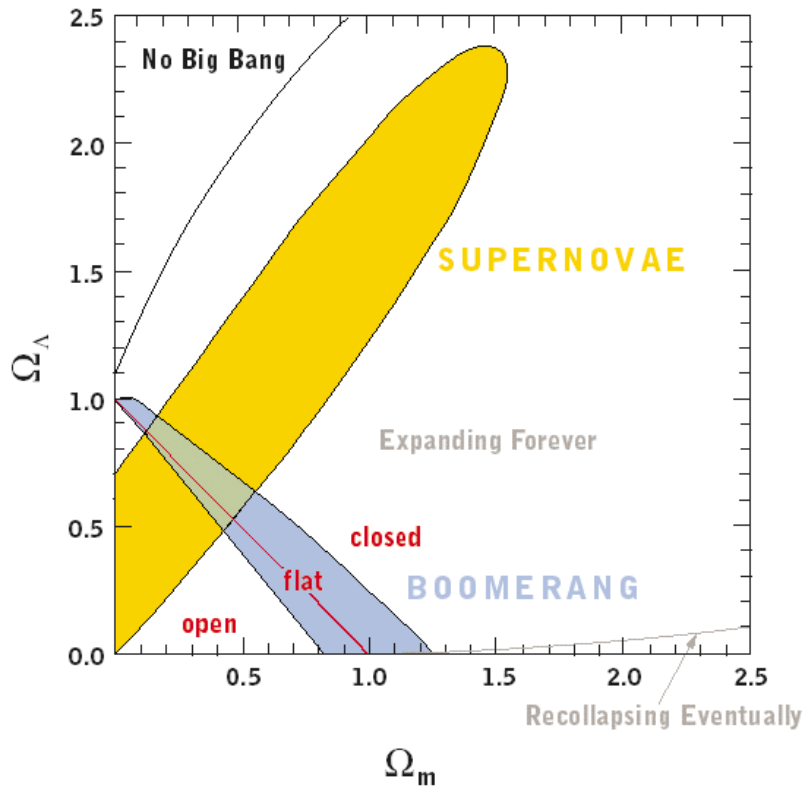


FIG. 2.2 – Résultats cosmologiques de l'expérience Boomerang comparés aux résultats des SNeIa, dans le plan $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ (Emprunté à [2]).

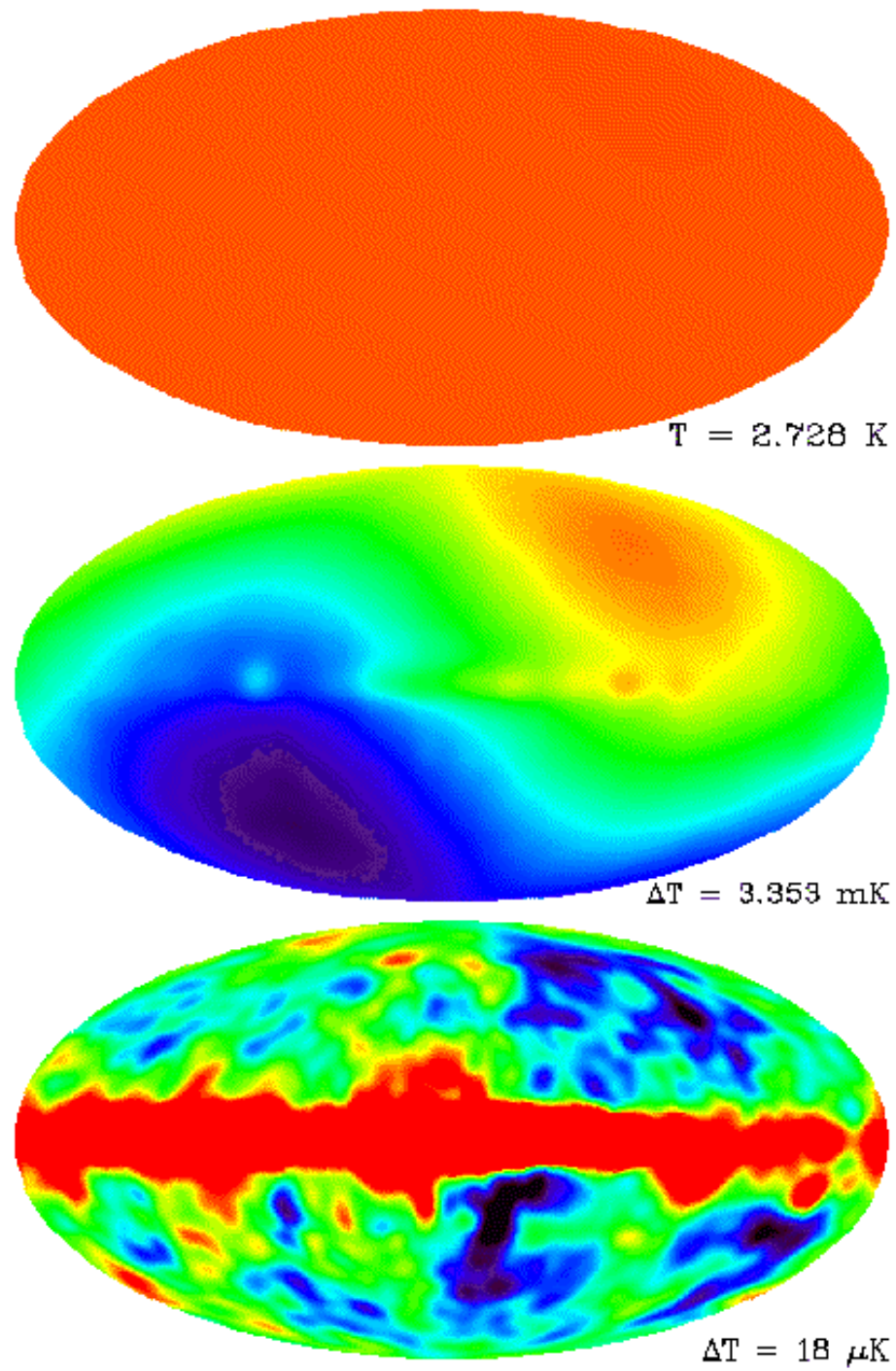


FIG. 2.3 – Observations du CMB par le satellite COBE (Emprunté à [5]).

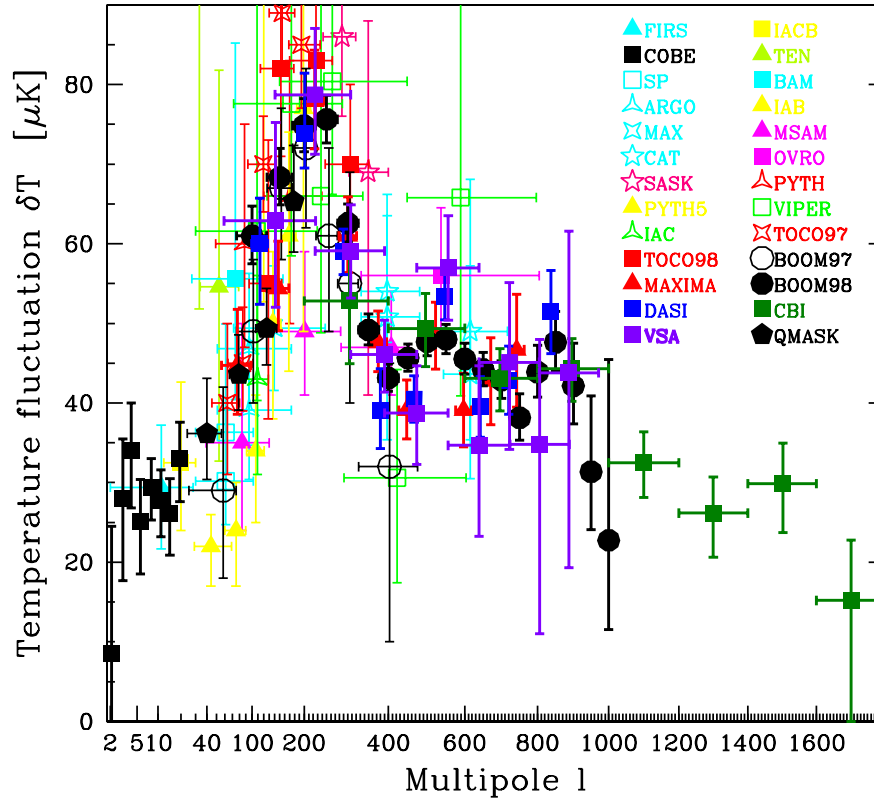


FIG. 2.4 – Données du spectre angulaire de puissance du CMB des principales expériences. Les barres d'erreurs n'incluent pas les calibrations, ce qui permet un ajustement vertical important entre les différentes expériences (Emprunté à [13]).

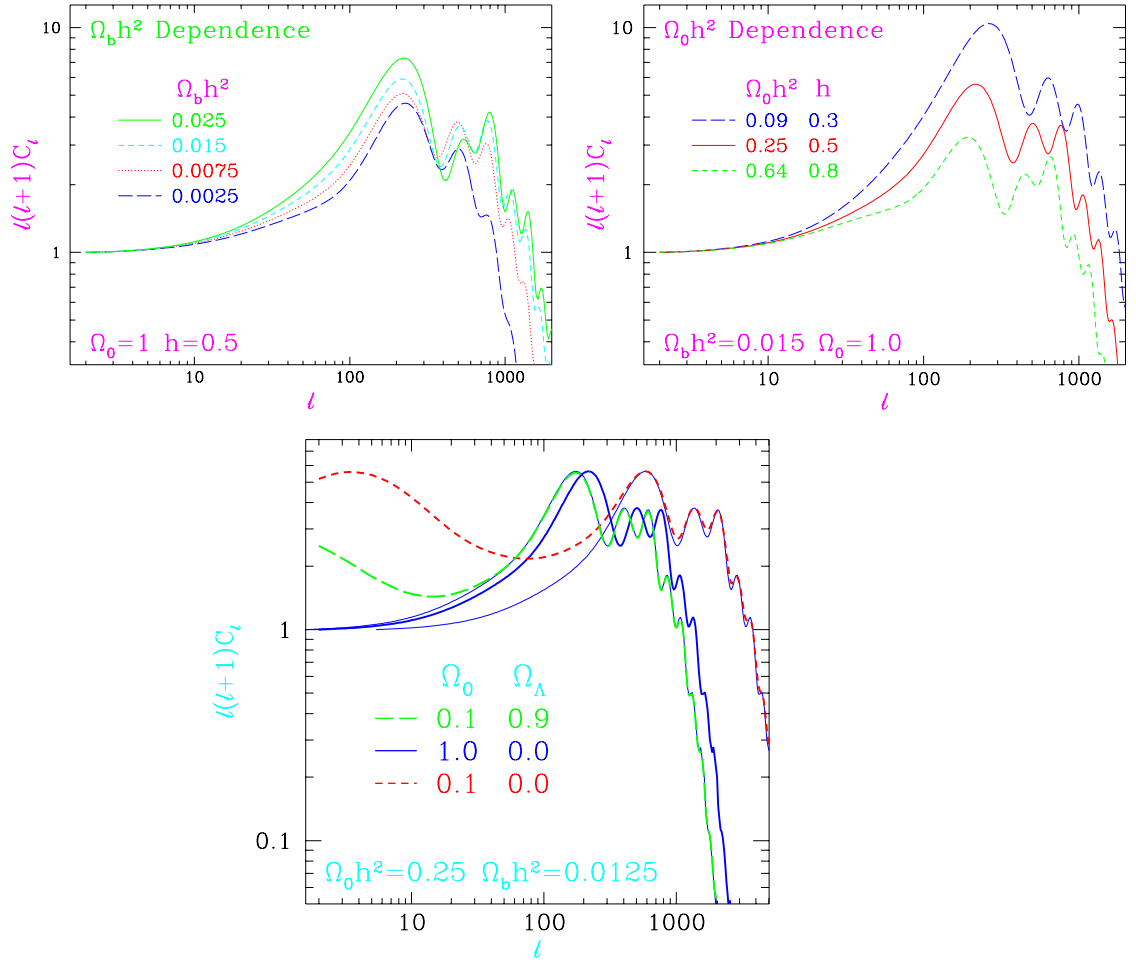


FIG. 2.5 – Influence de $\Omega_b h^2$ (à gauche), $\Omega_M h^2$ (à droite) et $\Omega_M + \Omega_\Lambda$ (au centre) sur le spectre de puissance du CMB (Emprunté à [12]).

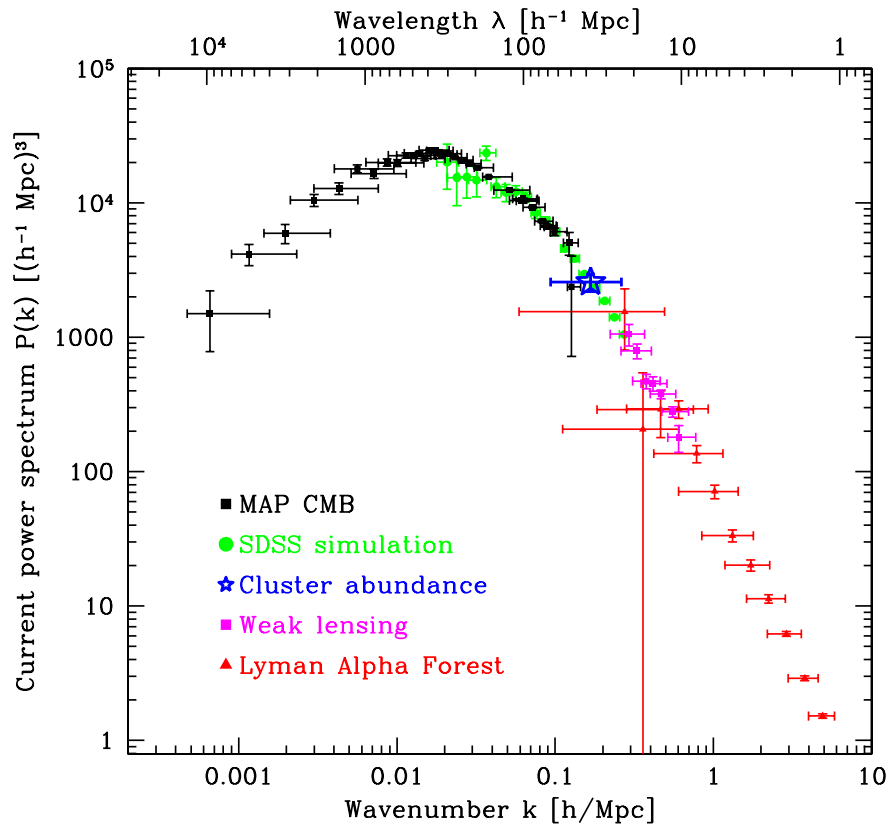


FIG. 2.6 – Simulation des futures mesures du spectre de puissance primordial (Emprunté à [13]).

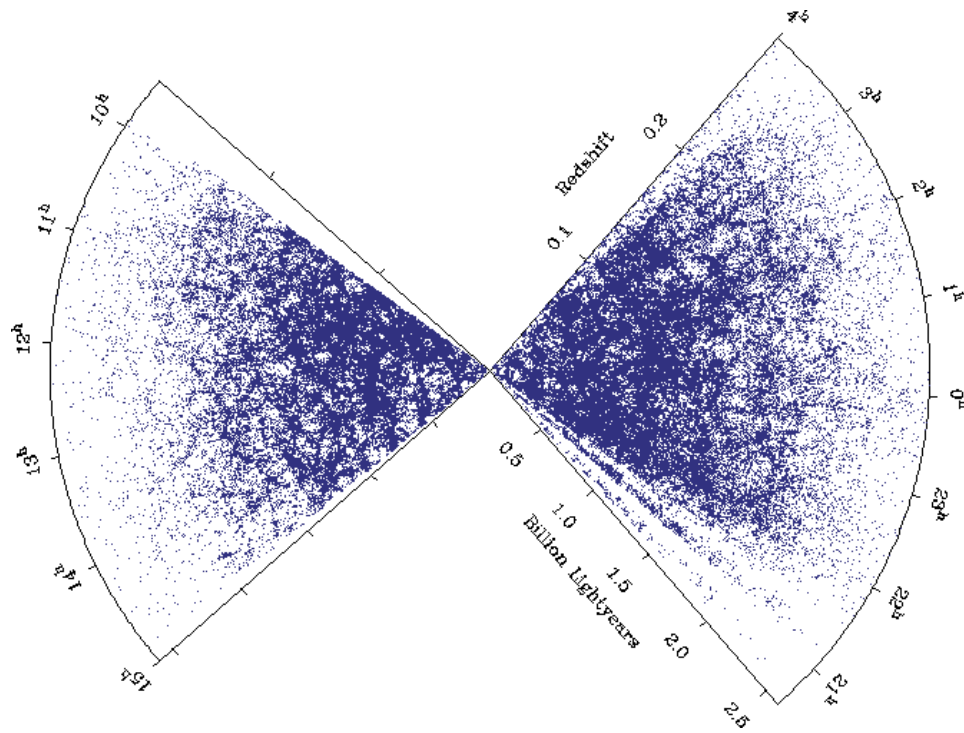


FIG. 2.7 – Distribution des Galaxies, vues sous un angle de 4° , pour un total de 213703 galaxies, par l'expérience 2dFGRS (Emprunté à [15]).

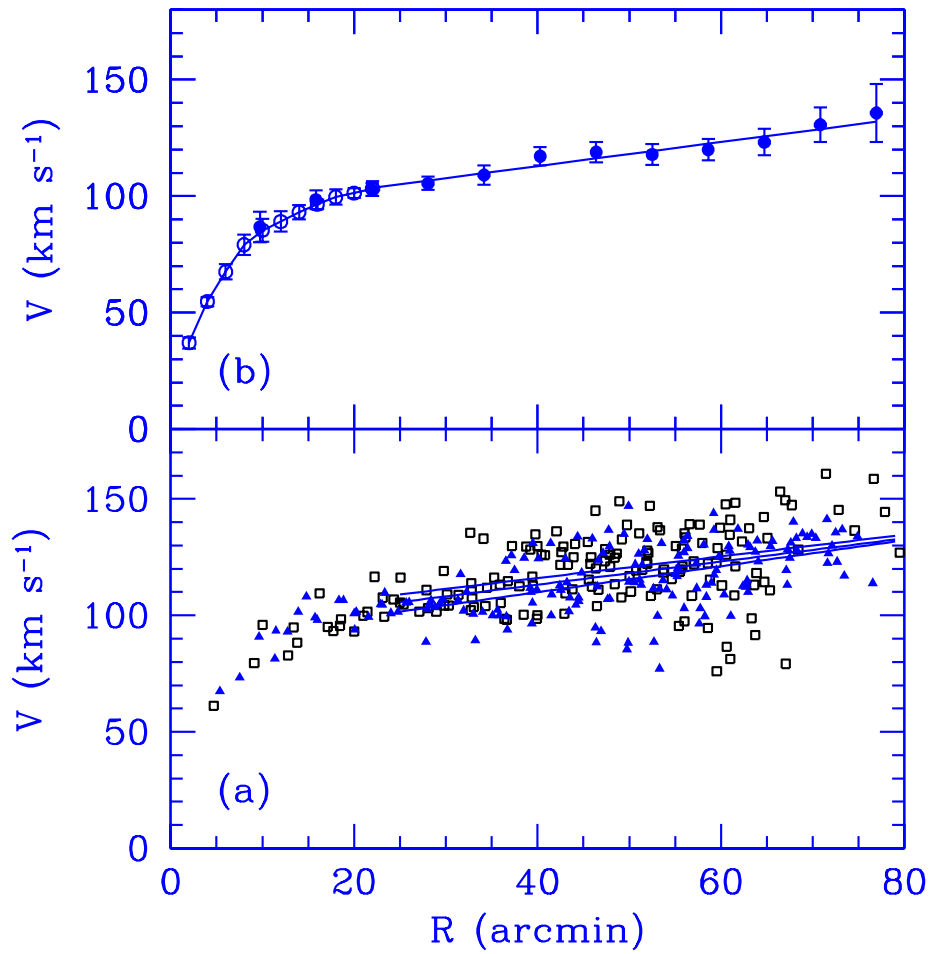


FIG. 2.8 – Courbe de rotation de la galaxie M33 (Emprunté à [20]).

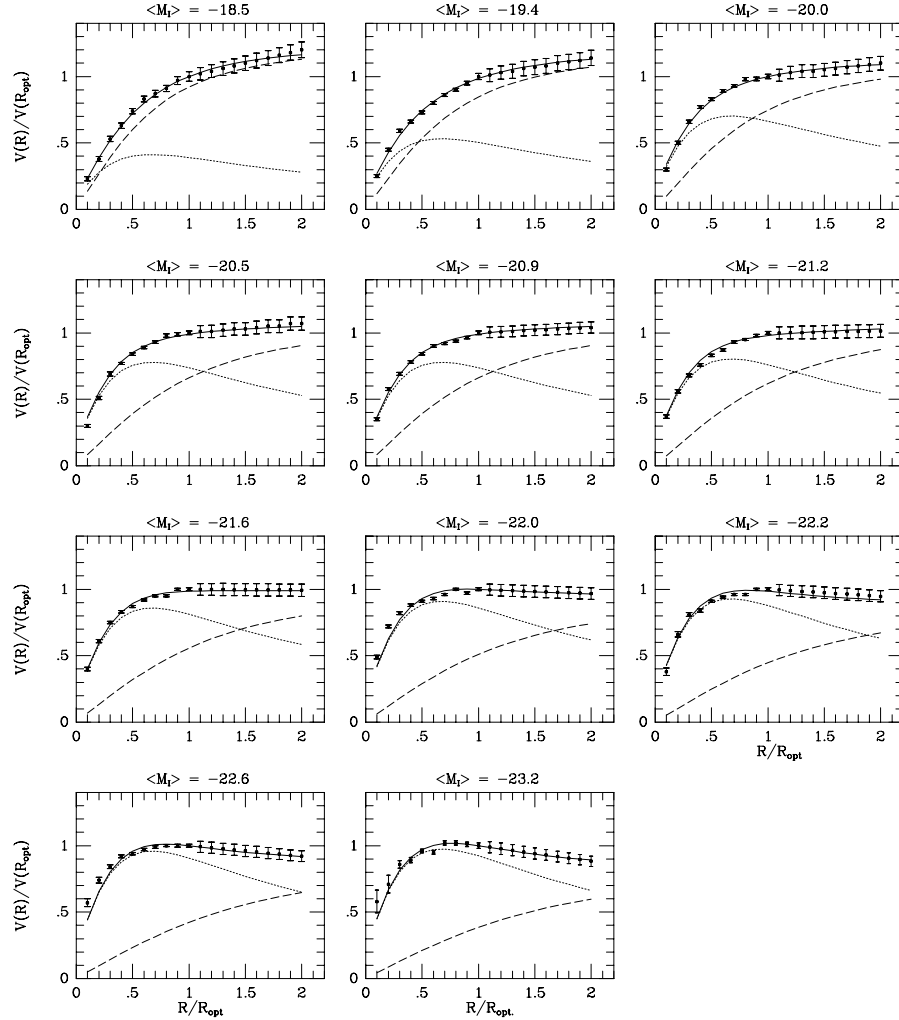


FIG. 2.9 – Courbes de Rotation Universelles, moyennes sur plusieurs courbes de rotation classées en fonction de leurs magnitudes. En trait plein, on voit le meilleur ajustement, en pointillés la contribution du disque, et en tirets la contribution du halo de matière noire selon des profils isothermes. Au-delà du rayon optique, les courbes sont obtenues par extrapolation (Emprunté à [22]).

Bibliographie

- [1] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project], “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovæ”, *The Astrophysical Journal* 517 (1999), 565-586.
- [2] Boomerang Homepage, <http://www.physics.ucsb.edu/~boomerang/> .
- [3] A. A. Penzias & R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s”, *The Astrophysical Journal* 142 (1965), 419-421.
- [4] D. J. Fixsen et al., “The cosmic microwave background spectrum from the full COBE/FIRAS data set”, *The Astrophysical Journal* 473 (1996), 576-587.
- [5] Cosmic Background Explorer Homepage, http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html .
- [6] C. B. Netterfield et al., “A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background”, *The Astrophysical Journal* 571 (2002), 604-614.
- [7] S. Hanany et al., “MAXIMA-1 : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees”, *The Astrophysical Journal* 545 (2000), L5.
- [8] A. Benoît et al. [Archeops Collaboration], “Cosmological Constraints from Archeops”, *astro-ph/0210306* (2002).
- [9] J. Silk, “Cosmic Black-Body Radiation and Galaxy Formation”, *The Astrophysical Journal* 151 (1968), 459-471.
- [10] U. Seljak & M. Zaldarriaga, voir <http://physics.nyu.edu/matiasz/CMBFAST/cmbfast.html> .
- [11] D. N. Spergel et al., “First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters”, *astro-ph/0302209*.
- [12] W. Hu, voir <http://background.uchicago.edu/~whu/> .
- [13] M. Tegmark & M. Zaldarriaga, “Separating the Early Universe from the Late Universe : cosmological parameter estimation beyond the black box”, *astro-ph/0207047* (2002).

- [14] W. J. Percival et al., “The 2dF Galaxy Redshift Survey : the power spectrum and the matter content of the Universe”, *MNRAS* 327 (2001), 1297-1306.
- [15] 2dF Galaxy Redshift Survey Homepage, <http://msowww.anu.edu.au/2dFGRS/> .
- [16] J. A. Peacock, “Studying large-scale structure with the 2dF Galaxy Redshift Survey”, astro-ph/0204239 (2002).
- [17] W. L. Freedman et al., “Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant”, *The Astrophysical Journal* 553 (2001), 47.
- [18] J. Binney & S. Tremaine, “Galactic Dynamics”, Princeton University Press, Princeton (1987), ISBN 0-691-08445-9.
- [19] T. Padmanabhan, “Structure Formation in the Universe”, Cambridge University Press, Cambridge (1993), ISBN 0-521-41448-2.
- [20] E. Corbelli & P. Salucci, “The Extended Rotation Curve and the Dark Matter Halo of M33”, astro-ph/9909252 (1999).
- [21] C. J. Conselice, J. S. Gallagher III, R. F. G. Wyse, “Galaxy Populations and Evolution in Clusters III. The Origin of Low-Mass Galaxies in Clusters : Constraints from Stellar Populations”, astro-ph/0210080 (2002).
- [22] M. Persic, P. Salucci & F. Stel, “The Universal Rotation Curve Of Spiral Galaxies : 1. The Dark Matter Connection”, *MNRAS* 281 (1986), 27.
- [23] G. Hoffman, E. E. Salpeter & N. J. Carle, “The Fine Structure and Outskirts of DDO 154”, astro-ph/0107484.
- [24] Annamaria Borriello, Paolo Salucci & Luigi Danese, “The Fundamental Plane of Ellipticals : I. The Dark Matter Connection”, astro-ph/0208268 (2002).
- [25] S. Borgani, M. Girardi, R.G. Carlberg, H.K.C. Yee & E. Ellingson, “Velocity Dispersions of CNOC Clusters and the Evolution of the Cluster Abundance”, astro-ph/9907323 (1999).
- [26] H. Muriel, H. Quintana, L. Infante, D. G. Lambas & M. J. Way, “Velocity dispersions and cluster properties in the SARS (Southern Abell Redshift Survey) clusters. Paper II”, astro-ph/0207468 (2002).
- [27] R. Cruddace et al., “The ROSAT All-Sky Survey : a Catalog of Clusters of Galaxies in a Region of 1 Ster around the South Galactic Pole”, astro-ph/0201069 (2002).
- [28] R. Sadat, A. Blanchard & M. Douspis, “The baryon fraction in X-Rays galaxy clusters revisited”, astro-ph/0112105 (2001).
- [29] H. Dahle, K. Pedersen, P.B. Lilje, S.J. Maddox & N. Kaiser, “Weak Gravitational Lensing by a Sample of X-ray Luminous Clusters of Galaxies

- III. Serendipitous Weak Lensing Detections of Dark and Luminous Mass Concentrations”, astro-ph/0208050 (2002).
- [30] Y. Mellier, L. van Waerbeke, E. Bertin, I. Tereno, P. Schneider, F. Bernardeau, T. Erben, “Prospects for weak lensing/cosmic shear with VLTs”, astro-ph/0210093 (2002).

Chapitre 3

Candidats à la Matière Noire

Les candidats à la matière noire sont relativement nombreux. Nous allons nous intéresser à certains d'entre eux.

3.1 Matière Noire Baryonique

Nous avons vu que le problème de la matière noire prendre des formes diverses. Les études cosmologiques semblent montrer que seulement 10 % de la matière est baryonique. Quelle est donc cette matière non-baryonique ? Lorsqu'on décide d'étudier la matière baryonique, là-encore on n'en voit directement qu'une faible partie. Où est donc accumulée la matière baryonique ?

3.1.1 Nuages de gaz moléculaires

De nombreuses observations tendent à montrer que le milieu interstellaire des galaxies est principalement composé d'hydrogène HI et de gaz moléculaire H₂. Si la quantité de gaz HI peut être relativement bien évaluée, celle de H₂ est difficile à mettre en évidence. En effet, il n'est détectable directement que dans le cas où sa température est suffisamment élevée pour qu'il émette dans des fréquences observables. Si l'on considère par exemple le cas de la galaxie spirale NGC 891, le spectromètre ISO (Infrared Space Observatory) a permis de mettre en évidence une grande proportion de gaz H₂ [1], et indique que la masse de H₂ serait cinq à quinze fois supérieure à celle de HI. Aussi, il est possible qu'un tel gaz suffise à expliquer la masse manquante galactique [2]. On pourra aussi noter un couplage apparent entre la quantité de gaz HI et la quantité de matière noire [3] (voir figure 3.1), ce qui pourrait renforcer l'idée de l'existence d'un gaz froid de type H₂ dont la densité serait proportionnelle à celle de HI.

On peut cependant remarquer que cette présence importante de H₂ n'a pas pu être vérifiée dans de nombreuses galaxies. En particulier, la Voie

Lactée ne possède pas cette proportion d'hydrogène moléculaire : en effet, le rayonnement cosmique ferait rayonner le gaz, ce qui n'est pas observé [4]. Néanmoins, une telle découverte conforte l'idée qu'une partie de la matière noire est peut-être baryonique, sans toutefois expliquer toutes les observations cosmiques.

3.1.2 MACHOs

Il se pourrait que la matière noire des halos galactiques soit constituée d'objets baryoniques appelés MACHOs (Massive Compact Halo Objects), peu visibles. Il peut s'agir d'étoiles peu rayonnantes (naines blanches ou rouges), ou avortées (naines brunes, telles que Jupiter), ou encore de trous noirs. Des expériences telles que EROS et MACHO ont tenté de mettre en évidence de tels objets. Les résultats de EROS montrent que des objets de masses inférieures à $1 M_{\odot}$ ne peuvent contribuer à plus de 40 % de la masse d'un halo galactique [5], tandis que l'expérience MACHO indique que les objets de masses inférieures à $30 M_{\odot}$ ne suffisent pas à expliquer la masse totale des halos [6].

Même si les MACHOs peuvent aider à répondre au moins partiellement à la questions de la matière baryonique dans les halos galactiques, ils ne peuvent toutefois pas expliquer les observations cosmologiques.

Nous allons donc nous intéresser à différentes formes potentielles de matière noire non-baryonique.

3.2 Neutrinos

Durant longtemps, les neutrinos ont été considérés comme des fermions non-massifs. L'idée des neutrinos massifs s'est par contre généralisée dans les années 90 aussi bien en physique des particules qu'en astrophysique et cosmologie. Différentes expériences (ALEPH, Kamiokande...) ont pu donner des limites supérieures aux masses des neutrinos [7] :

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} &< 3 \text{ eV} , \\ m_{\nu_{\mu}} &< 18.2 \text{ keV} , \\ m_{\nu_{\tau}} &< 170 \text{ MeV} . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si les neutrinos ont une masse, les états propres d'interaction $|\nu_l\rangle$ peuvent ne pas être les mêmes que les états propres de masse $|\nu_m\rangle$. On peut alors considérer que les neutrinos observables $|\nu_l\rangle$ sont des mélanges d'états propres de masse tels que :

$$|\nu_l\rangle = \sum_m U_{lm} |\nu_m\rangle . \tag{3.2}$$

U est la matrice de mélange leptonique. Si les neutrinos ne se déclinent que sous trois saveurs, il s'agit d'une matrice 3×3 , unitaire, et réelle si CP est conservée, telle que

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Du fait de cette superposition d'états propres de masse, les neutrinos observables peuvent osciller avec la distance, c'est-à-dire changer de saveur. Pour un neutrino d'énergie E , la probabilité d'osciller vers une autre saveur sur la distance d vaut :

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_l'; d) = |\langle \nu_l' | \nu_l(d) \rangle|^2 = \left| \sum_n U_{ln} U_{l'n}^* e^{-i(\frac{m_n^2}{2E})d} \right|^2, \quad (3.4)$$

où les m_n sont les masses des neutrinos. On voit donc que si $m_n = 0$, les neutrinos ne vont pas osciller. Dans le cas d'études d'oscillations entre deux saveurs, on peut montrer que la probabilité d'oscillation est fonction de $\Delta m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$. On voit donc que les expériences sensibles à seulement deux familles ne vont pas pouvoir contraindre directement la masse des neutrinos, mais leur différence de masse.

Certaines expériences ont pu mettre en évidence des oscillations de neutrinos :

- grâce à la mesure du flux des neutrinos électroniques émis par le Soleil, donc à des énergies de l'ordre de 100 keV - 1 MeV (GALLEX, Super Kamio-kande...), on voit que $\Delta m_{e\mu}^2 \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$ [8].
- grâce à la mesure du flux des neutrinos muoniques produits lors des réactions des muons du rayonnement cosmique avec l'atmosphère, donc à des énergies de l'ordre de 1 GeV (MACRO, Super Kamio-kande...), on voit que $\Delta m_{\mu\tau}^2 \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ [9].
- grâce à la mise en évidence d'événements caractéristiques de ν_e dans des faisceaux de ν_μ provenant d'accélérateurs (LSND), on a (bien que ce résultat soit controversé) $\Delta m_{\mu\tau}^2 \approx 0.1 - 1 \text{ eV}^2$ [10]. D'autres expériences, telles que Amanda ou Antares, sont en cours, avec pour but d'étudier les neutrinos cosmiques de hautes énergies. Finalement, comme aucune oscillation vers des neutrinos supplémentaires dits "stériles" (c'est-à-dire qui n'inter-agissent pas) n'a été mise en évidence, l'hypothèse de ce type d'oscillations est éliminée par différentes expériences (En particulier, voir [9]).

D'un point de vue cosmologique (on pourra se reporter, pour un traitement plus complet, à [11]), au début de l'Univers, les neutrinos ont fait partie du bain thermique primordial constitué de photons, électrons, protons, ... Il

est alors possible de montrer que les neutrinos se sont découplés avant les photons. Après le découplage, la relation entre la température de Planck des neutrinos et des photons est donnée par $T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma$, soit aujourd'hui :

$$T_\nu^0 = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma^0 \approx 1.947 \text{ K} . \quad (3.5)$$

Les neutrinos sont des fermions, et suivent donc la statistique de Fermi-Dirac. Néanmoins, si on néglige leur masse, on peut alors montrer que la densité d'énergie des neutrinos vaut, à haute température (c'est-à-dire juste après leur découplage)

$$\rho_\nu = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_\nu \rho_\gamma , \quad (3.6)$$

où N_ν est le nombre de saveurs de neutrinos. S'il y a uniquement trois saveurs, les neutrinos participent alors à la densité des particules relativistes en l'augmentant d'un facteur 1.68.

Si on ne néglige plus la masse des neutrinos [11][12], mais qu'elle reste faible (bien moins que 1 MeV), on montre qu'au moment du découplage les neutrinos sont encore ultra-relativistes (Matière Noire Chaude), et que le paramètre cosmologique qui leur est associé vaut

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum m_i}{93.5 \text{ eV}} , \quad (3.7)$$

où les m_i sont les masses des différentes saveurs. On voit que la cosmologie met alors des limites importantes sur un tel modèle, puisque pour ne pas fermer l'Univers, la somme de leurs masses doit être inférieure à $93.5 h^2 \text{ eV}$. Ces masses n'étant pas exclues, un tel modèle pourrait sembler possible. Malheureusement, la vitesse de tels neutrinos serait tellement proche de celle de la lumière que les petites fluctuations seraient lavées, et que par conséquent les fluctuations primordiales engendreraient des structures beaucoup plus étendues que les galaxies observées [13]. De fait, l'observation du CMB et des grandes structures met une limite à la masse des neutrinos : $\sum m_i < 4.2 \text{ eV}$ [14].

Si l'on considère maintenant des masses bien plus élevées de neutrinos, alors il est possible de montrer [15] que des neutrinos de large masse peuvent exister sans fermer l'Univers : s'ils sont du type Dirac, une limite inférieure est $m_\nu \approx 2 \text{ GeV}$, et s'ils sont du type Majorana, elle devient $m_\nu \approx 6 \text{ GeV}$. Cependant, ces masses sont au-dessus des limites de masse des mesures en laboratoire, et il ne semble possible de les considérer que dans le cadre de théories plus exotiques. Néanmoins, si la masse des neutrinos était de cet ordre, leur vitesse serait bien réduite. Les neutrinos pourraient alors être

considérés comme des WIMPs, et on parlerait alors de matière noire froide (voir le paragraphe suivant). Finalement, des neutrinos exotiques pourraient avoir des masses proches du keV, formant ainsi de la matière noire tiède. Une telle matière noire reste un candidat viable [16], même s'il reste difficile de motiver théoriquement son existence.

3.3 WIMPs

Actuellement, les meilleurs candidats à la matière noire semblent être des particules massives stables interagissant faiblement (WIMPs), issues d'extensions du Modèle Standard de la Physique des Particules. Si ces particules sont stables et d'une masse élevée (de l'ordre du TeV), elles devraient pouvoir se trouver sous forme de Matière Noire Froide (CDM), et engendrer les grandes structures.

Intéressons nous au cas des WIMPs issus du Modèle Standard Supersymétrique Minimal (MSSM). La Supersymétrie¹ est une théorie qui se décline sous de nombreuses formes, tout en respectant une symétrie particulière, aujourd'hui brisée : il existe une relation entre les fermions et les bosons, c'est-à-dire à chaque fermion correspond un boson partenaire, et réciproquement. L'avantage de cette théorie est à la fois qu'elle résout certains problèmes théoriques du Modèle Standard, et en retrouve les résultats principaux. Le MSSM est un modèle particulier de Supersymétrie qui possède le même groupe de jauge que le Modèle Standard tout en contenant une extension supersymétrique. Contrairement au Modèle Standard, le MSSM requiert deux doublets de Higgs. A chaque particule connue dans le Modèle Standard correspond une particule-partenaire supersymétrique. Dans ce modèle, on voit apparaître quatre nouveaux fermions neutres interagissant faiblement : les neutralinos, superpositions des partenaires supersymétriques des bosons de Higgs (higgsinos), du photon (photino) et du boson de jauge Z^0 (zino). On peut introduire de manière *ad hoc* une symétrie discrète $R = (-1)^{3(B-L)+2S}$, appelée la R -parité, où B et L sont les nombres baryonique et leptonique, et S le spin. Ainsi, à chaque particule du modèle standard correspond un nombre pair $R = +1$, et à chaque particule supersymétrique un nombre impair $R = -1$. Dans le MSSM, on suppose que ce nombre est conservé. A cause de cela, la particule supersymétrique la plus légère ne va pas pouvoir se désintégrer vers une particule plus légère, et va donc rester stable. Il lui est néanmoins possible de s'annihiler avec une autre particule supersymétrique (en particulier avec elle-même) pour redonner de la matière ordinaire. Certains arguments (dont le fait que cette particule stable doit être électriquement neutre et non-colorée) [18] semblent indiquer que c'est l'un des neutralinos qui tendrait à être cette particule stable, avec une masse

¹Pour plus de détails sur la Supersymétrie et le MSSM, on pourra se reporter par exemple à [17].

supérieure à 100 GeV. Ainsi, le MSSM fournit – à la condition que le respect de la R -parité soit bien réel – une particule stable, neutre, interagissant faiblement, c'est-à-dire prédit l'existence d'une WIMP. Donc, s'il s'avère que la Supersymétrie est vérifiée expérimentalement, l'existence des WIMPs est possible. Néanmoins, même si aucune expérience n'a invalidé le modèle, aucune n'a mis encore en évidence son existence.

Du point de vue cosmologique et astrophysique, l'hypothèse de l'existence des WIMPs permet de reproduire de nombreux résultats observationnels. Actuellement, comme on cherche à obtenir des prédictions précises, la difficulté principale des études des modèles de CDM est qu'il est nécessaire d'utiliser des simulations numériques à N -corps de grande précision, ce qui impose l'utilisation d'ordinateurs puissants (voir figure 3.2). En dehors de ces problèmes techniques, on peut voir que d'une part, l'existence des WIMPs explique correctement la formation et l'évolution des grandes structures [20]. Ensuite, elle fournit le spectre des fluctuations de masse nécessaire à la formation des halos galactique et des amas d'étoiles [21]. Au niveau des courbes de rotation galactiques, Navarro, Frenk et White ont réalisé une étude systématique de la structure des halos sur une large gamme de masses [22], et trouvent qu'ils suivent une forme universelle, dont l'échelle est déterminée uniquement par leur masse. Les halos de WIMPs expliquent bien les courbes de rotation à grand rayon (voir figure 3.3).

Si les modèles de WIMPs réussissent à bien rendre compte des observations aux grandes échelles, on voit néanmoins apparaître des problèmes à des échelles un peu plus petites. En particulier, la matière noire a tendance à trop s'accumuler au centre des galaxies, et ne peut donc en reproduire les courbes de rotation à faible rayon, en particulier pour les galaxies spirales naines ou à faible brillance de surface (LSB), dans lesquelles la matière noire est sensée dominer [23] (voir figure 3.4). Un autre problème important est que les WIMPs ont tendance à s'accumuler pour former des sous-structures de petites tailles. Les simulations montreraient par exemple que l'on observe environ 100 fois moins de satellites galactiques autour de la Voie Lactée que ce qui est prévu [24]. Cependant, il semblerait que les récentes recherches de satellites montrent que l'on sous-estimait leur nombre, car les moins lumineux ne seraient observables que par leurs effets gravitationnels [25].

Dans tous les cas, le succès des modèles de CDM provient du fait qu'ils donnent une vision de l'Univers très proche de la réalité. Le fait qu'on ait découvert des problèmes aux petites échelles révèle les efforts importants qui sont faits pour tester ces modèles.

En dépit de leurs réussites, les modèles des WIMPs ne sont pas une réponse définitive au problème de la matière noire. En effet, même s'ils donnent de l'Univers une vision réaliste, les problèmes restent importants, et une bonne manière de confirmer de tels modèles serait de réussir à détecter directement les WIMPs. Il reste toujours la question de la connaissance des propriétés des WIMPs : sont-ils des partenaires supersymétriques ou non ? En tout cas, de

nombreuses expériences de détection (EDELWEISS, CDMS, ANTARES...) sont en cours, et espèrent apporter une réponse dans les années à venir.

3.4 MOND

La dynamique modifiée MOND [26] est avant tout une théorie phénoménologique *ad hoc* qui espère se passer de matière noire pour expliquer les observations. Pour cela, elle modifie la dynamique newtonienne aux échelles des petites accélérations avec l'idée suivante : une particule-test située à une distance r d'une masse M est soumise à une accélération a telle que

$$\frac{a^2}{a_0} \approx \frac{GM}{r^2}, \quad (3.8)$$

pour $a \ll a_0$ et

$$a = \frac{GM}{r^2}, \quad (3.9)$$

pour $a \gg a_0$. a_0 est une constante aux dimensions d'une accélération (de l'ordre de $10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$). MOND est donc différente de la loi Newtonienne habituelle uniquement aux faibles accélérations.

MOND respecte certaines lois phénoménologiques, en particulier :

- 1) Les courbes de rotations des galaxies sont asymptotiquement plates.
- 2) La vitesse de rotation asymptotique d'une galaxie est proportionnelle à la racine quatrième de la masse baryonique totale (relation de Tully-Fisher).
- 3) La distribution de matière visible dans les galaxies détermine le champ d'accélération de la galaxie.

Cette idée a été activement étudiée depuis 20 ans dans le contexte des courbes des structures astrophysiques. Elle semblerait pouvoir fonctionner à l'échelle des galaxies (voir figure 3.5). Cependant, comme cette théorie est non-relativiste, elle ne s'adapte pas facilement aux échelles plus larges (en particulier à la cosmologie). Des études (voir par exemple [27]) essaie cependant de l'élargir à d'autres niveaux.

La littérature autour de MOND va du succès dans de nombreux domaines testés [28], à la discussion sur de nombreux problèmes ou échecs [29], si bien que la réussite de la théorie n'est pas avérée.

En tout cas, si en tant que gravité newtonienne modifiée MOND peut s'avérer correcte, elle possède néanmoins des problèmes conceptuels importants [30] :

- elle viole explicitement le principe d'équivalence,

- elle viole la conservation des moments,
- elle viole l'invariance de Lorentz,
- elle ne permet pas la superposition des champs gravitationnels.

En bref, MOND brise les principes de base de la physique théorique actuelle, ce qui rend difficile une approche des phénomènes cosmologiques à grande échelle. Cependant, on peut noter que les développeurs de MOND travaillent activement à rendre cette théorie compatible avec les observations.

3.5 Axions

Les axions sont apparus pour la première fois en Physique des Particules en tant que solution possible au problème de la violation de CP forte du Modèle Standard.

3.5.1 Le problème de la violation de CP forte

L'existence de l'axion a été postulée il y a une vingtaine d'années pour expliquer pourquoi les interactions fortes conservent les symétries P et CP alors que les interactions faibles les violent.

Pour une vision plus détaillée du problème, on pourra se reporter par exemple à [31].

On peut en effet écrire le Lagrangien de la QCD sous la forme

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} = \mathcal{L}_{QCD} + \bar{\Theta} \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} , \quad (3.10)$$

où $G_{\mu\nu}^a$ est le tenseur gluonique et $\tilde{G}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} G_{\lambda\rho}^a$ son dual. Le premier terme est le Lagrangien habituel de la QCD, largement utilisé dans les calculs phénoménologiques. Le deuxième terme est un terme effectif qui provient d'une part des propriétés topologiques du vide des théories de jauge non-abéliennes, et d'autre part du processus de diagonalisation de la matrice de masse des quarks. Il n'intervient pas dans les calculs perturbatifs, car il peut s'écrire comme la divergence d'un courant, et donc comme un terme de surface dans l'action. Ce terme gluonique existe néanmoins, et viole les symétries P et CP.

À partir de contraintes sur le moment électrique dipolaire des neutrons, on trouve que $|\bar{\Theta}| \leq 10^{-10}$, ce qui montre que les interactions fortes violent peu ou pas CP. Ce résultat soulève une question : pourquoi $\bar{\Theta}$ est-il si petit ? C'est le problème de la violation de CP forte.

3.5.2 Solution de Peccei-Quinn

Peccei et Quinn ont proposé en 1977 [32] une solution encore d'actualité. Ils ont proposé une théorie dans laquelle $\bar{\Theta}$ devient une variable dynamique, qui peut relaxer vers un minimum du potentiel effectif sans violer P et CP. L'idée de base est d'étendre le contenu en champs (et en particules) du Modèle Standard des particules élémentaires, de façon à ce que cette extension possède une symétrie chirale globale supplémentaire $U(1)_{PQ}$ qui est spontanément brisée. Il apparaît alors dans le Lagrangien un boson de Goldstone (excitation de spin 0 et de masse nulle) : l'axion.

Sous l'effet de cette symétrie $U(1)_{PQ}$, le champ ϕ associé à l'axion se transforme selon :

$$\phi \longrightarrow \phi + F_\phi \epsilon . \quad (3.11)$$

F_ϕ est une constante de la dimension d'une énergie, qui donne l'échelle d'énergie à laquelle la symétrie $U(1)_{PQ}$ est spontanément brisée, et qui doit être bien supérieure à Λ_{QCD} . A est une constante sans dimension dépendant des détails de la modélisation, mais génériquement de l'ordre de l'unité.

En plus d'être spontanément brisée, cette symétrie $U(1)_{PQ}$, dont la réalisation sur les fermions est chirale, souffre d'une anomalie de Adler-Bell-Jackiw [35], qui induit sur le Lagrangien effectif la transformation :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\epsilon A g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \cdot \tilde{G}^{a\mu\nu} \quad (3.12)$$

Le Lagrangien effectif de l'extension du modèle standard que l'on considère met alors en jeu des termes supplémentaires de la forme

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{A g^2}{32\pi^2 F_\phi} \phi G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} . \quad (3.13)$$

Ce Lagrangien effectif contient ainsi le terme suivant, violant P, CP et T :

$$\mathcal{L}_v = \frac{g^2}{32\pi^2} \left(\frac{A}{F_\phi} \phi + \bar{\Theta} \right) G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} . \quad (3.14)$$

Dans le vide, état de densité d'énergie minimale, la valeur moyenne de ϕ s'ajuste à

$$\langle \phi \rangle = -\frac{1}{A} F_\phi \bar{\Theta} , \quad (3.15)$$

de sorte que le terme violant P, CP et T est éliminé. Le champ

$$\phi' = \phi - \langle \phi \rangle \quad (3.16)$$

est le champ de l'axion. Cette excitation, initialement de masse nulle lorsque l'on ignore l'anomalie chirale, acquiert, du fait de cette anomalie, une masse

$$m_\phi \sim \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{F_\phi} . \quad (3.17)$$

3.5.3 Axions et matière noire

La masse pour les axions peut être contrainte par différentes observations. Tout d'abord, si cette masse est trop petite, les axions auraient été produits en trop grand nombre dans l'Univers primordial. Une limite inférieure a pu être calculée pour différents mécanismes de production dans différents scénarii cosmologiques (en particulier, voir [36][37][38]), donnant comme contrainte $m_\phi \geq 10^{-6}$ eV.

D'autre part une autre étude a été effectuée sur les supernovæ. Des axions trop lourds auraient tendance à refroidir le cœur à un point tel que la distribution des neutrinos arrivant serait incompatible avec les observations [39]. La borne supérieure de la masse est proche de 10^{-2} eV.

D'après les modèles cosmologiques [40], la densité d'axions dans l'Univers vaut

$$\Omega_a \equiv 0.5 \left(\frac{10^{-6} \text{ eV}}{m_a} \right)^{7/6}, \quad (3.18)$$

ce qui montre qu'un axion de masse proche du μeV contribuerait significativement à la densité d'énergie de l'Univers.

D'autre part, on pourrait s'attendre, à cause de leur faible masse, à ce que les axions, à l'instar des neutrinos, se comportent comme de la matière noire chaude, et ainsi ne puissent pas expliquer correctement la formation des structures. Cependant, les propriétés des axions [41] font qu'ils n'ont pas besoin de provenir d'un mécanisme thermique dans l'Univers primordial, et peuvent ainsi avoir des vitesses non-relativistes. Actuellement, de nombreuses expériences tentent de mettre en évidence l'existence de l'axion [42], sans avoir pour le moment de réponse satisfaisante. L'axion reste donc une solution possible au problème de la matière noire.

3.5.4 Conclusion

Les modèles présentés ci-dessus ne sont pas les seuls modèles de matière noire. On peut trouver d'autres modèles issus des théories des cordes (dont une conséquence est, par exemple, le gaz de Chaplygin [43]), des dimensions supplémentaires, etc... qui essaient aussi de résoudre le problème de la matière noire (voir le chapitre suivant). Néanmoins, les modèles les plus favorisés actuellement sont le modèle des WIMPs en ce qui concerne la matière noire non-baryonique, et les modèles de gaz froid pour la matière noire baryonique. Dans les deux cas, de nombreux problèmes subsistent, et il n'y a donc pas de réponse définitive au problème de la matière noire.

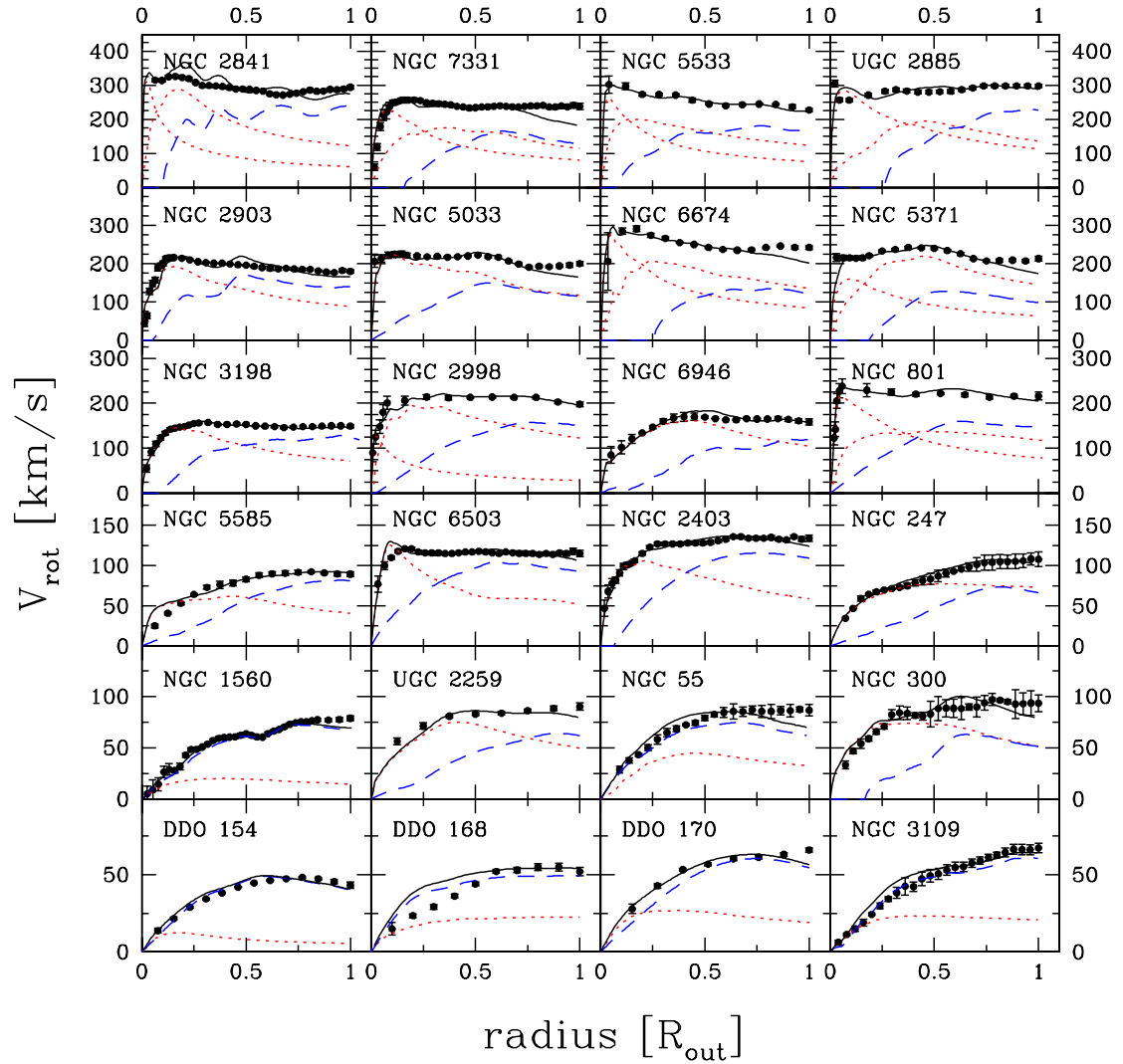


FIG. 3.1 – Différentes courbes de rotations. Les résultats expérimentaux sont les points avec les barres d'erreurs. Les lignes pointillées dénotent la contribution du disque et du bulbe (s'il existe). Les lignes en tirets correspondent à la contribution du gaz HI qui a été mise à l'échelle de manière à obtenir les meilleurs ajustements. Ces meilleurs ajustements sont en traits pleins (Emprunté à [3]).

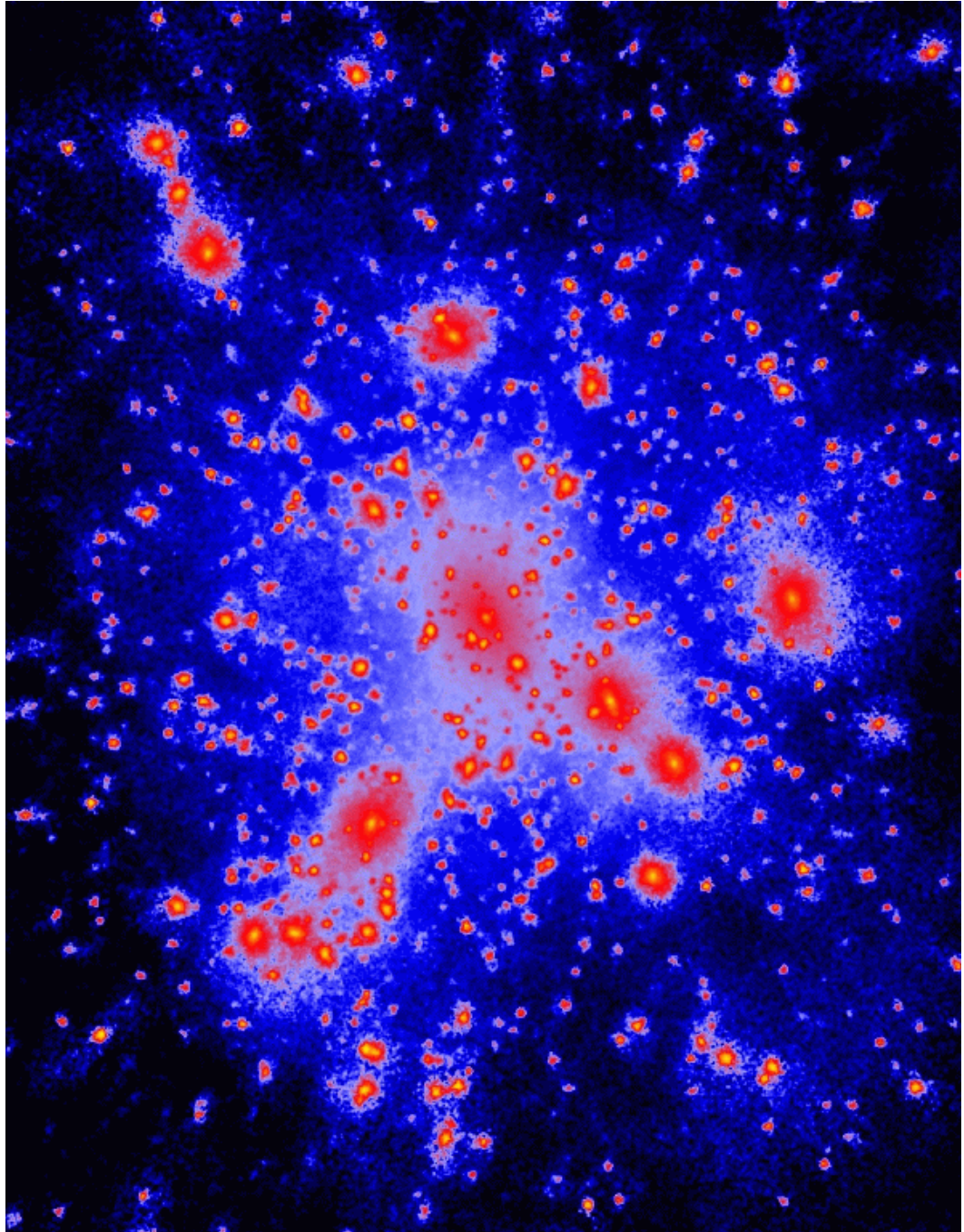


FIG. 3.2 – Halo massif de particules de CDM tel qu'il pourrait entourer les galaxies. Cette simulation a nécessité 150000 heures-machine sur un grand super-ordinateur à architecture parallèle (Emprunté à [19]).

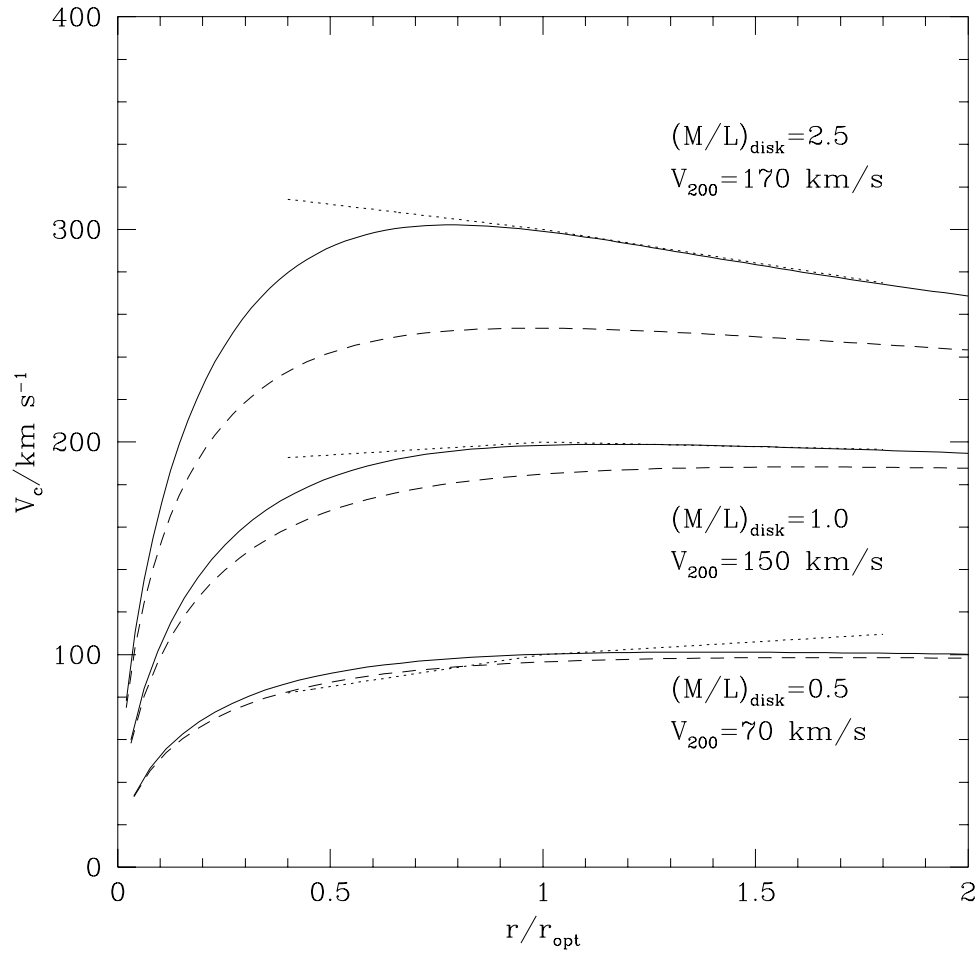


FIG. 3.3 – Courbes de rotation de systèmes constitués d'un disque baryonique et d'un halo de CDM. La masse totale des baryons est un paramètre libre. La contribution du halo est obtenue en effectuant une mise à l'échelle du profil de Navarro, Frenk et White, de manière à obtenir le meilleur ajustement possible de courbes de rotation expérimentales. En trait plein, on peut voir la courbe de rotation théorique, en tirets la contribution du halo, et en pointillés les données (Emprunté à [22]).

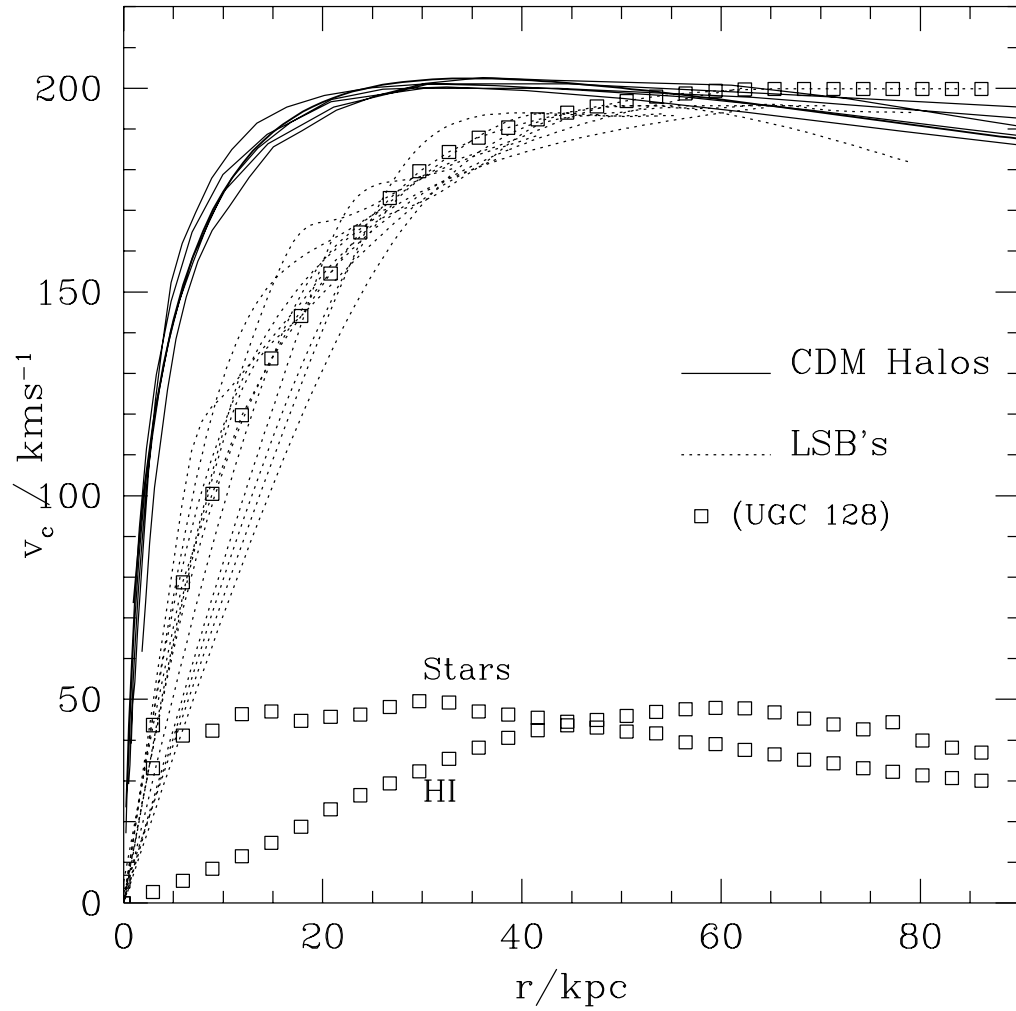


FIG. 3.4 – En traits pleins, on peut voir des courbes de rotation provenant de simulations numériques de halos de CDM à haute précision. En pointillés, on a les données expérimentales de LSB. En carrés, on peut voir la courbe de rotation d’une LSB typique, ainsi que la contribution des baryons, sous forme d’étoiles et de HI (Emprunté à [23]).

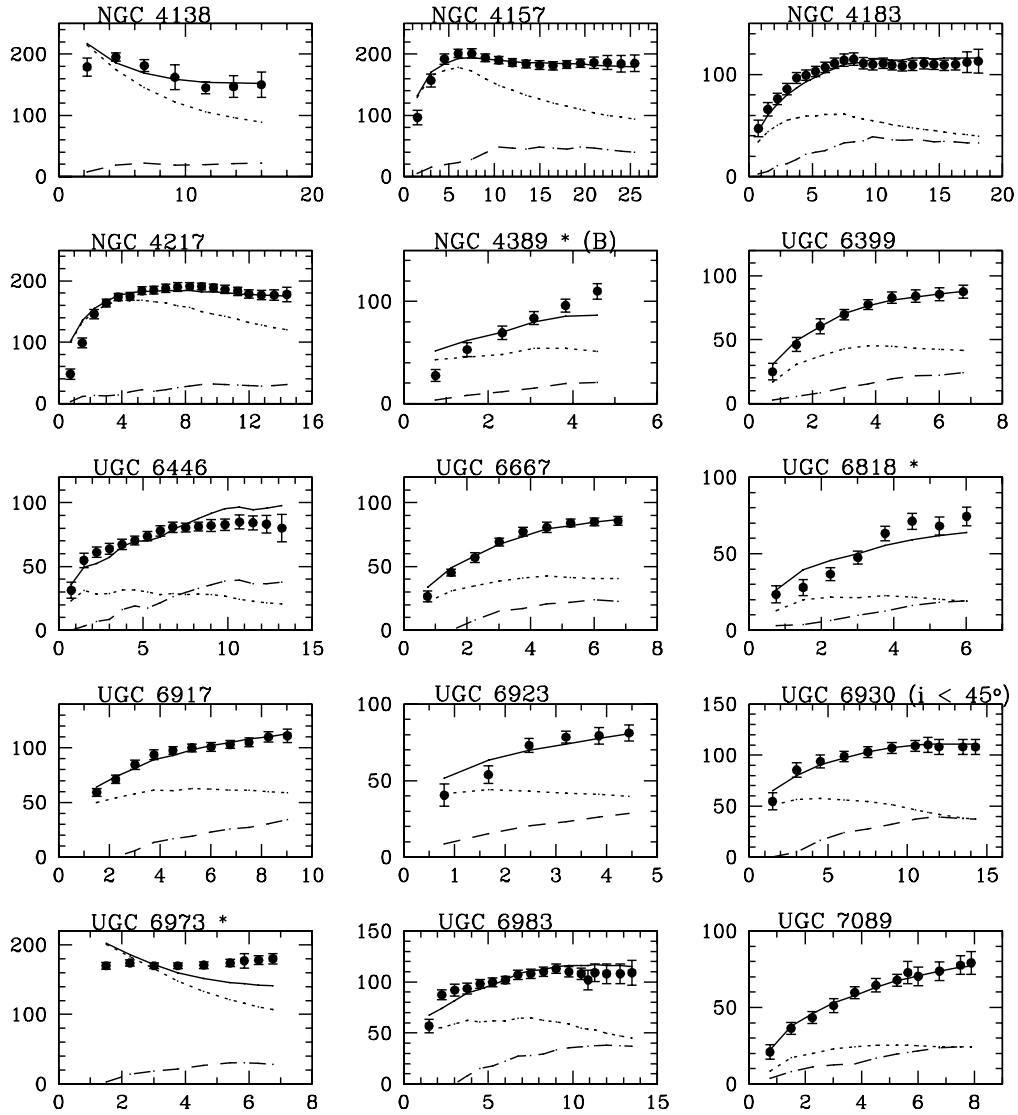


FIG. 3.5 – Courbes de rotation des galaxies Ursa Major ajustées par MOND, pour une même valeur de a_0 . En pointillés, on peut voir la contribution de la matière visible en théorie Newtonienne, et en traits alternés la contribution du gaz (Emprunté à [28]).

Bibliographie

- [1] E. A. Valentijn & P. P. Van der Werf, “First extragalactic direct detection of large-scale molecular hydrogen in the disk of NGC 891”, *The Astrophysical Journal* 522 (1999) L29-L33.
- [2] F. Combes, “H2 in Galaxies”, astro-ph/9910296 (1999).
- [3] H. Hoekstra, T. S. van Albada & R. Sancisi, “On the apparent coupling of neutral hydrogen and dark matter in spiral galaxies”, astro-ph/0010569 (2000).
- [4] P. Salati et al., “The gas deficiency of the galactic halo”, *Astronomy and Astrophysics* 313 (1996), 1-7.
- [5] T. Lasserre et al., “Not enough stellar Mass Machos in the Galactic Halo”, astro-ph/0002253 (2000).
- [6] C. Alcock et al., “MACHO Project Limits on Black Hole Dark Matter in the 1–30 Solar Mass Range”, astro-ph/0011506 (2000).
- [7] P. J. Kernan & L. M. Krauss, “Yet Another Paper on Sn1987a : Large Angle Oscillations, and the Electron Neutrino Mass”, *Nuclear Physics B* 437 (1995), 243-256.
K. Assamagan et al., “Upper limit of the muon-neutrino mass and charged-pion mass from momentum analysis of a surface muon beam”, *Physical Review D* 53 (1996), 6065-6077.
ALEPH Collaboration, “An upper limit on the τ neutrino mass from three- and five-prong τ decays”, *European Physics Journal C* 2 (1998), 395-406.
Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>
- [8] S. Fukuda et al., “Constraints on Neutrino Oscillations Using 1258 Days of Super-Kamiokande Solar Neutrino Data”, *Physical Review Letters* 86 (2001), 5656-5660.
- [9] S. Fukuda et al., “Tau Neutrinos Favored over Sterile Neutrinos in Atmospheric Muon Neutrino Oscillations”, *Physical Review Letters* 85 (2000), 3999-4003.
- [10] C. Athanassopoulos et al., “Results on $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ Neutrino Oscillations from the LSND”, *Physical Review Letters* 81 (1998), 1774-1777.

- [11] J. A. Peacock, “Cosmological Physics”, Cambridge University Press, Cambridge (1998), ISBN 0-521-42270-1.
- [12] R. Cowsik & J. McClelland, “An Upper Limit on the Neutrino Rest Mass”, *Physical Review Letters* 29 (1972), 669-670.
- [13] S. D. M. White, C. S. Frenk & M. Davis, “Clustering in a neutrino-dominated universe”, *The Astrophysical Journal* 274 (1983), L1-L5.
- [14] X. Wang, M. Tegmark & M. Zaldarriaga, “Is cosmology consistent?”, *Physical Review D* 65 (2002), 123001.
- [15] B. W. Lee & S. Weinberg, “Cosmological Lower Bound on Heavy-Neutrino Masses”, *Physical Review Letters* 39 (1977), 165-168.
- [16] R. Schaeffer & J. Silk, “Cold, Warm, or Hot Dark Matter : Biased Galaxy Formation and Pancakes”, *The Astrophysical Journal* 332 (1988), 1-16.
- [17] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields - Volume III”, Cambridge University Press, Cambridge (2000), ISBN 0-521-66000-9.
- [18] J. Ellis et al., “Supersymmetric Relics From the Big Bang”, *Nuclear Physics B* 238 (1984), 453-476.
- [19] B. Moore, <http://star-www.dur.ac.uk/~moore/>
- [20] M. Davis, G. Efstathiou, C. S. Frenk & S. D. M. White, “The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter”, *The Astrophysical Journal* 292 (1985), 371-394.
- [21] P. J. E. Peebles, “Dark matter and the origin of galaxies and globular star clusters”, *The Astrophysical Journal* 277 (1984), 470-477.
- [22] J. F. Navarro, C. S. Frenk & S. D. M. White, “The Structure of Cold Dark Matter Halos”, *The Astrophysical Journal* 462 (1996), 563-575.
- [23] B. Moore et al., “Cold collapse and the core catastrophe”, *MNRAS* 310 (1999), 1147-1152.
- [24] A. A. Klypin, A. V. Kravtsov, O. Valenzuela & F. Prada, “Where are the missing galactic satellites?”, *The Astrophysical Journal* 522 (1999), 89-92.
- [25] N. Dalal & C. S. Kochanek, “Direct Detection of CDM Substructure”, [astro-ph/0111456v2](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0111456v2) (2002).
- [26] M. Milgrom, “MOND – theoretical aspects”, [astro-ph/0207231](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0207231) (2002).
- [27] R. H. Sanders, “The formation of cosmic structure with modified Newtonian dynamics”, [astro-ph/0011439v2](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0011439v2) (2001).
- [28] R. H. Sanders & S. S. McGaugh, “Modified Newtonian Dynamics as an alternative to Dark Matter”, [astro-ph/0204521](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0204521) (2002).
- [29] F. C. Van den Bosch & J. J. Dalcanton, “Disk Galaxies as Cosmological Benchmarks : Cold Dark Matter versus Modified Newtonian Dynamics”, [astro-ph/0007121](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0007121) (2001).

- [30] D. Scott, M. White, J. D. Cohn & E. Pierpaoli, “Cosmological difficulties with Modified Newtonian Dynamics (or : La Fin du MOND ?)”, astro-ph/0104435 (2001).
- [31] T.-P. Cheng & L.-F. Li, “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford University Press, Oxford (1984), ISBN 0-19-851956-7.
- [32] R. D. Peccei & H. R. Quinn, “CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles”, Physical Review Letters 38 (1977), 1440-1443.
- [33] S. Weinberg, “A New Light Boson?”, Physical Review Letters 40 (1978), 223-226.
- [34] F. Wilczek, “Problem of Strong P and T Invariance in the Presence of Instantons”, Physical Review Letters 40 (1978), 279-282.
- [35] S. L. Adler, “Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics”, Physical Review 177 (1969), 2426-2438.
J. S. Bell & R. Jackiw, “A PCAC puzzle : $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model”, Nuovo Cimento A60 (1969), 47-61.
- [36] J. Preskill, M. B. Ise & F. Wilczek, “Cosmology of the invisible axion”, Physics Letters B120 (1983), 127-132.
- [37] L. F. Abbott & L. Sikivie, “A cosmological bound on the invisible axion”, Physics Letters B120 (1983), 133-136.
- [38] M. Dine & W. Fischler, “The not-so-harmless axion”, Physics Letters B120 (1983), 137-141.
- [39] M. S. Turner, “Axions from SN1987a”, Physical Review Letters 60 (1988), 1797-1800.
- [40] E. W. Kolb & M. S. Turner, “The Early Universe”, Addison-Wesley, Reading (1990), ISBN 0-201-11603-0.
- [41] G. G. Raffelt, “Axions in Astrophysics and Cosmology”, hep-ph/9502358.
- [42] S. J. Asztalos et al., “Experimental constraints on the axion dark matter halo density”, The Astrophysical Journal 571 (2002), L27-L30.
- [43] N. Bilić, G. B. Tupper & R. D. Viollier, “Dark Matter, Dark Energy & the Chaplygin Gas”, astro-ph/0207423 (2002).

Chapitre 4

Les modèles à champs scalaires

En cosmologie, les champs scalaires sont utilisés pour décrire un grand nombre de phénomènes, dans le but de régler certains problèmes. Nous allons étudier ici les raisons et les formes des modèles à champ scalaire les plus connus.

4.1 L’Inflation

Le Modèle Standard Cosmologique a soulevé certains problèmes. Le rôle de l’inflation est de résoudre certains d’entre eux [1].

4.1.1 Le problème de l’horizon

Le paramètre de Hubble $H = \dot{a}/a$ permet de définir une distance caractéristique $R_H = H^{-1}$, appelée “Rayon de Hubble”. Cette échelle joue un rôle fondamental dans de nombreux problèmes cosmologiques.

Étudions le cas de deux photons émis au même point origine O et au même instant t_i dans des directions opposées. La distance physique entre les deux particules vaut

$$d_H(t) = 2a(t) \int_0^{r(t)} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} . \quad (4.1)$$

Or, pour des photons, $d\tau^2 = 0$. On en déduit :

$$d_H(t) = 2a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} . \quad (4.2)$$

Si $t_i = 0$, c’est-à-dire que l’on intègre à partir de la singularité initiale, $d_H(t)$ est appelé “Horizon des Particules”. En bref, deux points de l’Univers ne sont en connexion causale, c’est-à-dire ne peuvent échanger des informations, que

si leur distance est inférieure à l'horizon. Dans le cas de l'Univers primordial dominé, dans le Modèle Cosmologique Standard, par la radiation, on a $a(t) \propto t^{1/2}$, d'où

$$d_H(t) = 4t = 2R_H(t) . \quad (4.3)$$

A partir de là, il est possible de calculer la taille de l'horizon au moment du découplage, et de montrer qu'elle représente une distance vue par un observateur sous un angle proche de 1° . En d'autres termes, cela revient à dire que l'on observe environ 10^3 régions causalement déconnectées au moment du découplage. Comment se fait-il donc que la température du fond de rayonnement cosmologique soit relativement homogène ?

4.1.2 Le problème des Fluctuations

Les fluctuations du Fond de Rayonnement Cosmologique ont conduit à la formation des structures que nous connaissons (galaxies, amas, étoiles). Étudions rapidement leur évolution.

Décomposons tout d'abord les perturbations initiales en modes de Fourier. Une perturbation de vecteur d'onde \vec{k} possède une longueur d'onde $\lambda_k(t) = 2\pi a(t)/k$.

Dans un Univers dominé par la radiation, $a(t) \propto t^{1/2}$, alors que s'il est dominé par la matière, $a(t) \propto t^{2/3}$. Donc, dans tous les cas, au bout d'un certain temps, le rayon de Hubble $R_H(t) (\propto t)$ croît plus rapidement que les longueurs d'onde, et par conséquent les modes des perturbations rentrent les uns après les autres dans le rayon de Hubble.

On peut montrer que si les perturbations s'étaient formées avec des longueurs d'onde inférieures au rayon de Hubble (donc récemment), elles n'auraient pas eu le temps de croître suffisamment pour former les grandes structures observables. Par conséquent, les longueurs d'onde étaient nécessairement supérieures au rayon de Hubble au moment de leur formation.

Or, comme je l'ai indiqué précédemment, seule la gravitation s'exerce à l'extérieur du rayon de Hubble, et donc les fluctuations ont dû se former par un effet de Relativité Générale. Le seul mécanisme connu est celui des défauts topologiques, qui est malheureusement défavorisé par les observations des anisotropies.

La manière dont les fluctuations primordiales ont été engendrées reste un problème dans ce scénario cosmologique standard.

4.1.3 La platitude de l'Univers

Considérons la proportion du terme de courbure par rapport à la densité critique totale (c'est-à-dire au paramètre de Hubble) :

$$\left| \frac{k}{a(t)^2 H(t)^2} \right| \propto \dot{a}(t)^{-2} . \quad (4.4)$$

Lorsque la radiation domine, ce terme croît comme t , et lorsque la matière domine, il croît en $t^{2/3}$. On peut donc dire que la platitude de l'Univers s'estompe avec le temps. Les contraintes expérimentales actuelles semblent pourtant indiquer que l'Univers est proche de la platitude. Or cela correspondrait, à l'instant $t = 0$, à un Univers parfaitement plat, ou, si l'on se place au temps de Planck ($t_P = (\hbar G/c^5)^{1/2} \approx 5.391 \times 10^{-44}$ s), à

$$\left| \frac{k}{a(t_P)^2 H(t_P)^2} \right| \leq 10^{-59} . \quad (4.5)$$

Par conséquent que les densités d'énergie ont dû être ajustées trop finement autour de la densité critique pour que cela reste naturel. Cela revient à dire que dans le cas d'un Univers fermé, un Big-Crunch aurait déjà eu lieu, et dans le cas d'un Univers ouvert, la courbure dominerait aujourd'hui!

4.1.4 Les modèles d'inflation

Il est possible de montrer que les trois problèmes évoqués ci-dessus peuvent être résolus en supposant que l'Univers a eu pendant un certain temps une croissance accélérée : $\ddot{a} > 0$. (On voit en particulier que si \dot{a} est croissant, le problème de la platitude est directement résolu.)

Dans les équations de Friedmann-Lemaître, cela correspond à $\rho + 3P < 0$. On peut montrer que c'est le cas si la densité d'énergie est dominée par le potentiel d'un champ scalaire. L'idée générale de l'inflation est la suivante¹ : dans l'Univers primordial, la densité d'énergie est dominée pendant un certain temps par l'énergie potentielle d'un champ scalaire appelé inflaton.

Nous pouvons désormais nous intéresser à un modèle d'inflation particulier : l'inflation en "roulement lent", ou "slow-roll".

Commençons par définir une densité lagrangienne pour un champ scalaire supposé spatialement homogène (au moins au début de l'inflation) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) . \quad (4.6)$$

Il est associé au tenseur impulsion-énergie

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \mathcal{L} g_{\mu\nu} , \quad (4.7)$$

et donc à la densité

$$\rho_\varphi = T^{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) , \quad (4.8)$$

¹Pour une revue complète sur l'inflation, on pourra se référer à [2].

et à la pression

$$P_\varphi = -\frac{1}{4}g_{ij}T^{ij} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) . \quad (4.9)$$

L'équation de Klein-Gordon pour ce champ scalaire est équivalente à la deuxième équation de Friedmann-Lemaître, et s'écrit :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 . \quad (4.10)$$

On peut d'ores et déjà interpréter le terme contenant H comme un terme de frottement qui ralentirait l'évolution du champ scalaire.

Plaçons nous dans un univers à sections spatiales plates. La première équation de Friedmann-Lemaître devient :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right) . \quad (4.11)$$

En combinant les deux équations, on obtient

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2 . \quad (4.12)$$

Cette équation nous dit que H est décroissant. Pour obtenir $\ddot{a} > 0$, il suffit d'imposer une variation lente du paramètre de Hubble :

$$|\dot{H}| \ll H^2 , \quad (4.13)$$

ce qui donne la condition sur le potentiel

$$\dot{\varphi}^2 \ll 2V(\varphi) . \quad (4.14)$$

Pour assurer une période d'inflation suffisamment longue, il faut que le champ évolue lentement vers sa valeur d'équilibre, donc

$$|\ddot{\varphi}| \ll 3H|\dot{\varphi}| . \quad (4.15)$$

Ces deux hypothèses sont appelées "conditions de roulement lent" ("slow roll"). Les équations du mouvement deviennent alors

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}V(\varphi) , \quad (4.16)$$

$$\dot{\varphi} \approx -\frac{V'(\varphi)}{3H} . \quad (4.17)$$

On en déduit, à l'ordre dominant :

$$\dot{H} \approx -\frac{1}{6} \frac{V'^2}{V} , \quad (4.18)$$

$$\ddot{\varphi} \approx \frac{1}{24\pi G} \frac{V''V'}{V} . \quad (4.19)$$

On peut alors réécrire les conditions de roulement lent sous la forme (à un facteur 3 près...)

$$\epsilon \ll 1 \quad |\eta| \ll 1 , \quad (4.20)$$

où ϵ et η sont les “paramètres de roulement lent” tel que définis par Liddle et Lyth :

$$\epsilon \equiv \frac{1}{6\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 , \quad (4.21)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} . \quad (4.22)$$

Ces conditions sur le potentiel sont relativement fortes. Cependant, un potentiel polynomial peut les satisfaire.

D’une manière générale, les modèles d’inflation sont nombreux ([3],[4]...). Nous venons de voir comment l’un d’entre eux est introduit, et sur quelles motivations. Ces modèles cherchent à résoudre les problèmes du Modèle Cosmologique Standard.

Le modèleen “slow roll” est un modèle particulier basé sur un simple champ scalaire, de même que de nombreux modèles de quintessence, comme nous allons le voir maintenant.

4.2 La Quintessence

Les modèles de quintessence sont des modèles essayant de résoudre de problème de l’énergie noire à l’aide de champs scalaires réels.

4.2.1 Un problème d’échelle

La constante cosmologique Λ pourrait être considérée comme une nouvelle constante fondamentale de la gravitation, au même titre que G . Elle serait alors associée à une échelle de distance :

$$L_\Lambda = \Lambda^{-1/2} \approx 1.7h^{-1} \text{Gpc} , \quad (4.23)$$

où h est la constante de Hubble réduite, de l’ordre de 0.65. Il est possible de comparer cette distance à celle de Planck, correspondant elle-aussi à une échelle fondamentale de la gravitation :

$$L_P = \left\{ \frac{\hbar G}{c^3} \right\}^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-20} \text{fm} . \quad (4.24)$$

Cette différence d'échelle est colossale, elle ne trouve pas d'explication directe. Une hypothèse est donc de considérer que la constante cosmologique n'est pas une constante fondamentale, mais un fluide de pression négative qui a pu évoluer dans le temps. Ce fluide exotique est appelé "quintessence", d'après le nom que les Grecs donnaient à la substance "céleste" (la cinquième, après l'air, la terre, le feu et l'eau) qui maintenait la lune et les étoiles en place.

4.2.2 Les modèles de quintessence

Les mesures actuelles semblent favoriser une fluide qui aurait aujourd'hui une pression négative. Nous sommes donc proche du champ scalaire de type inflaton. En particulier, cela est vrai si le potentiel de ce champ domine totalement. Les modèles de quintessence, comme les modèles d'inflation, se basent sur un champ scalaire neutre. Le Lagrangien est le même :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) . \quad (4.25)$$

Pour la quintessence, on se place aussi dans un Univers plat et homogène spatialement, de manière à obtenir la densité et la pression

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) , \quad (4.26)$$

$$P_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) . \quad (4.27)$$

On voit donc que si le potentiel domine, on aura $\omega_\varphi \approx -1$. L'équation de Klein-Gordon est elle aussi la même :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 . \quad (4.28)$$

Etudions par exemple une quintessence "invariante d'échelle" [5], c'est-à-dire fondée sur des équations d'état invariantes telles que

$$\rho_\varphi \propto a^{-n} \iff \omega_\varphi = \frac{n}{3} - 1 = c^{te} . \quad (4.29)$$

Il s'agit là de solutions simples, mais relativement restrictives. Comme H est très grand dans les premiers temps de l'Univers, le terme d'amortissement dans l'équation de Klein-Gordon est lui aussi très grand, et par conséquent, si l'on veut que le champ ne soit pas complètement amorti aujourd'hui, il faut que le terme d'énergie cinétique $\dot{\varphi}^2/2$ domine fortement. Ainsi, dans les premiers instants de l'Univers, $\omega_\varphi \approx 1$.

Supposons que l'Univers soit empli du fluide cosmologique ρ_φ , et d'un plasma ρ_{plasma} tel que

$$\rho_{\text{plasma}} \propto a^{-m} \iff \omega_{\text{plasma}} = \frac{m}{3} - 1. \quad (4.30)$$

Pour de la matière baryonique $m = 3$, et pour de la radiation $m = 4$.

A partir de ces équations, on peut déterminer $V(\varphi)$. On peut différencier deux cas.

Dans le cas où $m = n$, les équations mènent à

$$V(\varphi) = V_0 e^{-\beta\varphi}, \quad (4.31)$$

où

$$\beta = \sqrt{\frac{n}{M_P^2} \frac{1}{\Omega_\Lambda}}. \quad (4.32)$$

$M_P \equiv (8\pi G)^{-1/2}$ est la masse de Plack réduite, et $\Omega_\Lambda = \rho_\varphi^0 / \rho_0^c$. On a donc un potentiel purement exponentiel.

Dans le cas où $m \neq n$, le potentiel est beaucoup plus compliqué, et formé de plusieurs exponentielles.

Même si ce modèle est physiquement intéressant, mais sous cette forme il a de sérieux problèmes avec les différentes observations présentées au chapitre précédent [6]. De nombreux modèles avec différents types de potentiels existent, et il est très difficile de sélectionner les formes de fonctions pour le potentiel qui auraient à la fois un intérêt physique, et seraient compatibles avec les observations. On remarquera néanmoins que les potentiels à double exponentielle [7] donnent actuellement de bons résultats.

D'autres types de modèles basés sur des champs scalaires ont aussi tendance à se développer : des théories tenseur-scalaire du type Brans-Dicke, qui coupleraient le champ scalaire à la gravitation.

Ces difficultés font en tout cas du problème de l'Energie Noire un problème encore loin d'être résolu.

4.3 Théories tenseur-scalaire

Une autre idée pour tenter de résoudre les problèmes cosmologiques est de considérer que les équations d'Einstein ne sont que des approximations des véritables équations de la Gravitation. On peut par exemple penser que G n'est pas une constante. Pour cela, les théories dites tenseur-scalaire couplent un champ scalaire à la gravitation, et modifient ainsi les équations

de gravitation. Un cas assez général de ces théories se fonde sur la densité lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L} = \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_M , \quad (4.33)$$

où $\omega(\phi)$ représente la force du couplage entre ϕ et R , et \mathcal{L}_M est la densité lagrangienne de la contribution des champs de matière, indépendante de ϕ . On pourra comparer cette densité à celle d'Einstein :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M . \quad (4.34)$$

Le champ scalaire est ainsi bien couplé à la matière, et la constante de gravitation G est remplacée par la fonction ϕ^{-1} .

Etant donné que les équations d'Einstein sont bien testées aux petites échelles, de tels modèles sont extrêmement contraints. En particulier, de nombreuses expériences ont été pratiquées dans le Système Solaire, et elles indiquent que $|\omega(\phi)| > 3000$ et $|\omega^{-3}(\phi) \frac{d\omega}{d\phi}| < 0.0006$ [8].

Ces théories sont activement étudiées depuis leur introduction dans les années 70 [9]. Elles n'ont pas encore de forme définitivement fixée, mais doivent satisfaire des contraintes importantes, qui rétrécissent le champ d'investigation.

Ces théories pourraient pourtant expliquer certains problèmes cosmologiques, et de récents résultats semblent pouvoir expliquer en particulier l'accélération actuelle de l'Univers [10], le problème de l'horizon [11], et les résultats de la nucléosynthèse primordiale [12]. On notera néanmoins que les expériences actuelles ne sont pas suffisamment précises pour vraiment tester toutes les prédictions de ces théories, et qu'elles ne sont pas plus favorisées que les modèles d'inflation et de quintessence.

4.4 Étoiles à bosons

Les étoiles à bosons sont en fait des configurations à base de champs scalaires massifs en équilibre gravitationnel², telles qu'étudiées dans les années 60 [14]. On peut trouver les équations qui les caractérisent en écrivant une densité lagrangienne sous la forme

$$\mathcal{L} = \left[\frac{R}{16\pi G} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] , \quad (4.35)$$

où R est la courbure scalaire, g le déterminant de la métrique, et ϕ un champ scalaire complexe associé à un potentiel V . Ce lagrangien conduit

²Pour une revue complète, se reporter à [13].

aux équations de Klein-Gordon-Einstein :

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \\ \square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi^*} = 0 , \end{cases} \quad (4.36)$$

où le tenseur impulsion-énergie s'écrit

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^* - g_{\mu\nu} [g^{\eta\sigma}\partial_\eta\phi^*\partial_\sigma\phi - V(\phi)] , \quad (4.37)$$

et \square est le d'Alembertien tel que

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) . \quad (4.38)$$

On remarquera que la première équation correspond aux équations d'Einstein associé à un fluide composé d'un champ scalaire complexe donnant le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$, et que la deuxième équation est l'équation de Klein-Gordon en Relativité Générale.

Ce genre d'équations a été surtout étudié avec des potentiels quadratiques [15] ou quartiques [16].

Intéressons-nous au cas quartique :

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2|\phi|^2 + \frac{1}{4}\lambda|\phi|^4 , \quad (4.39)$$

avec une symétrie sphérique. On choisit de ne considérer que les solutions statiques. On pourra se placer dans une métrique de type Schwarzschild :

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega . \quad (4.40)$$

Pour s'assurer de la stabilité du champ scalaire, on va choisir une symétrie $U(1)$, permettant au champ d'avoir une rotation interne, et d'être réécrit sous la forme

$$\phi(r, t) = \sqrt{4\pi G}\sigma(r)e^{-i\omega t} . \quad (4.41)$$

Dans ce cas, les équations de Klein-Gordon-Einstein donnent

$$\begin{cases} \frac{A'}{A^2x} + \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{A}\right) = \left(\frac{\omega^2}{m^2B} + 1\right)\sigma^2 + \frac{\Lambda}{2}\sigma^4 + \frac{\sigma'^2}{A} , \\ \frac{B'}{xAB} - \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{A}\right) = \left(\frac{\omega^2}{m^2B} - 1\right)\sigma^2 - \frac{\Lambda}{2}\sigma^4 + \frac{\sigma'^2}{A} , \\ \sigma'' + \left(\frac{2}{x} + \frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A}\right)\sigma' + A\left[\left(\frac{\omega^2}{m^2B} - 1\right)\sigma - \Lambda\sigma^3\right] = 0 , \end{cases} \quad (4.42)$$

où $x = mr$ et $\Lambda = \lambda/(4\pi Gm^2)$. Les primes dénotent des dérivations par rapport à x . On peut effectuer un changement de variable et réécrire A en fonction d'une "masse réduite" \mathcal{M} telle que

$$A(x) = \left[1 - 2\frac{\mathcal{M}(x)}{x} \right]^{-1}. \quad (4.43)$$

On peut alors montrer que la masse totale du système M_{tot} vaut

$$M_{\text{tot}} = \frac{\mathcal{M}(\infty)}{mG}. \quad (4.44)$$

Il est possible de calculer cette masse numériquement [16]. Pour de grandes valeurs de Λ (qui restent de petites valeurs de λ), on peut montrer que

$$M_{\text{tot}} \approx 0.22 \frac{\Lambda^{1/2}}{mG}. \quad (4.45)$$

Dans ce cas, il est aussi possible de trouver la densité et la pression dues au champ scalaire :

$$\begin{cases} \rho_\phi = \frac{1}{16\pi\Lambda} \left(3\frac{\omega^2}{m^2B} + 1 \right) \left(\frac{\omega^2}{m^2B} - 1 \right)^2, \\ P_\phi = \frac{1}{16\pi\Lambda} \left(\frac{\omega^2}{m^2B} - 1 \right). \end{cases} \quad (4.46)$$

Si l'on résout ces équations dans le cas à grand Λ (voir [16]), on trouve que la masse maximale des étoiles à bosons vaut

$$M_{\text{max}} \approx (0.10 \text{ GeV}^2) M_\odot \frac{\lambda^{1/2}}{m^2}, \quad (4.47)$$

où $1 M_\odot \approx 1.989 \times 10^{30}$ kg dénote une unité de masse solaire. Ainsi, pour un $m^4/\lambda \sim \text{GeV}^4$, un champ scalaire complexe peut se condenser pour former des systèmes stables de masse comparable à celle de notre Soleil, appelés étoiles à bosons. Un tel champ a alors un comportement de matière.

Les propriétés des étoiles à bosons ont été grandement étudiée [17][18][19], mais rien jusqu'à présent n'a permis de confirmer ou non leur existence.

Nous venons de passer en revue un certain nombre de modèles fondés sur l'utilisation de champs scalaires. Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser à un champ scalaire complexe du type étoile à bosons, pouvant donc se comporter comme de la matière, et voir s'il est capable d'expliquer les courbes de rotation galactiques.

Bibliographie

- [1] A. H. Guth, “Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems”, *Physical Review D* 23 (1981), 347-356.
- [2] D. H. Lyth & A. Riotto, “Particle Physics Models of Inflation and the Cosmological Density Perturbation”, *Physics Report* 314 (1998), 1.
- [3] A. Linde, “Hybrid Inflation”, *Physical Review D* 49 (1994), 748-754.
- [4] G. Dvali & S.-H. H. Tye, “Brane Inflation”, *Physics Letters B* 450 (1999), 72-82.
- [5] E. J. Copeland, A. R. Liddle & D. Wands, “Exponential potentials and cosmological scaling solutions”, *Physical Review D* 57 (1998), 4686-4690.
- [6] P.S. Corasaniti & E.J. Copeland, “Constraining the quintessence equation of state with SnIa data and CMB peaks”, *Physical Review D* 65 (2002), 043004.
- [7] T. Barreiro, E.J. Copeland & N.J. Nunes, “Quintessence arising from exponential potentials”, *Physical Review D* 61 (2000), 127301.
- [8] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment”, *Living Reviews in Relativity* 4 (2001), 4-107.
- [9] C. H. Brans & R. H. Dicke, “Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation”, *Physical Review* 124 (1961), 925-935.
- [10] A. Bhadra & K. K. Nandi, “Do Scalar-Tensor Cosmologies naturally explain all the current cosmological observations?”, *gr-qc/0203103* (2002).
- [11] D. Lohiya & M. Sethi, “A program for a problem free Cosmology within a framework of a rich class of scalar tensor theories”, *Classical and Quantum Gravity* 16 (1999), 1545-1563.
- [12] A. Serna & J. M. Alimi, “Constraints on the scalar-tensor theories of gravitation from primordial nucleosynthesis”, *Physical Review D* 53 (1996), 3087-3098.
- [13] P. Jetzer, “Boson Stars”, *Physics Reports* 220 (1992), 163-227.
- [14] D. J. Kaup, “Klein-Gordon Geon”, *Physical Review* 172 (1968), 1331-1342.

- [15] R. Ruffini & S. Bonazzola, “Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State”, *Physical Review* 187 (1969), 1767-1783.
- [16] M. Colpi, S. L. Shapiro & I. Wasserman, “Bosons Stars : Gravitational Equilibria of Self-Interacting Scalars Fields”, *Physical Review Letters* 57 (1986), 2485-2488.
- [17] F. E. Schunck & A. R. Liddle, “The gravitational redshift of boson stars”, *Physical Letters* B404 (1997), 25-32.
- [18] E. W. Mielke & F. E. Schunck, “Boson Stars : Alternatives to primordial black holes ?”, *Nuclear Physics* B564 (2000), 185-203.
- [19] S. H. Hawley & M. W. Choptuik, “Boson stars driven to the brink of black hole formation”, *Physical Review* D62 (2000), 104024.

Chapitre 5

Halos Galactiques Quintessentiels

Nous venons de passer en revue différents modèles cosmologiques ou astrophysiques basés sur des champs scalaires. Nous voudrions mettre en place un modèle capable d'expliquer le problème de la matière noire. Comme nous l'avons vu, la présence de matière noire intervient à différentes échelles, des courbes de rotation galactiques, jusqu'à l'évolution cosmologique de l'Univers. Si l'on considère les modèles d'étoiles à bosons, on dénote qu'ils sont capables de décrire des structures de la taille des étoiles à l'aide de champs scalaires complexes. Dans un premier temps, il semblerait donc intéressant de s'inspirer de ces modèles dans le but de décrire avec une méthode similaire des structures de taille plus élevée et réputées pour contenir beaucoup de matière noire : les galaxies.

A la différence des étoiles à bosons, les galaxies contiennent à la fois de la matière noire et de la matière baryonique visible. Il faudra donc prendre en compte cette matière baryonique dans les équations.

Les étoiles à bosons illustrent le fait qu'un champ scalaire complexe chargé dans $U(1)$ est capable d'avoir un effet attractif qui peut lier les structures gravitationnelles. Ce champ scalaire doit être associé à un potentiel. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à un simple potentiel quadratique, rendant simplement ce champ massif.

Dans la suite de ce chapitre figure un article que j'ai réalisé en collaboration avec Julien Lesgourgues et Pierre Salati, et qui a été publié dans la revue "Physical Review D 64, 123528" du 28 novembre 2001.

Dans une introduction, nous y redécouvrons le problème de l'énergie et de la matière noires. Nous verrons ensuite quelles propriétés un champ scalaire doit suivre pour être capable de former des structures. Nous nous intéresserons alors seulement aux équations relatives à la configuration des

galaxies, en considérant qu'elles sont stables par nature. Nous n'avons pas dans cet article étudié la stabilité d'un tel champ, et nous espérons que la conservation de la charge associée au champ scalaire est suffisante pour l'assurer. De manière à étudier des systèmes galactiques, nous avons considéré des densités baryoniques équivalentes à des exponentielles décroissantes. La résolution des équations a été essentiellement numérique, et la principale difficulté est provenue de l'extrême sensibilité des solutions aux conditions aux limites du système. Ainsi, deux conditions au centre légèrement différentes engendrent numériquement des résultats très différents. Nous avons heureusement trouvé que la majorité des conditions aux bords conduisaient à des solutions non-physiques pour lesquelles le potentiel gravitationnel était non-nul à l'infini. Nous avons donc pu nous servir de cette propriété pour déterminer précisément les conditions d'intégration du système d'équations. Ceci étant fait, nous avons vu qu'il est possible de trouver plusieurs types de configurations correspondant à des états d'énergies différentes. Comme l'énergie la plus basse correspond généralement à l'état le plus stable, nous nous sommes intéressés dans la suite uniquement à l'état fondamental.

De manière à juger du réalisme du modèle, nous l'avons ensuite confronté avec les courbes de rotation universelle de M. Persic, P. Salucci et F. Stel. Une analyse sur six courbes universelles montre qu'elles peuvent être expliquées par ce modèle. Néanmoins, à cause du fait qu'elles sont des courbes moyennes, elles donnent une valeur très peu précise de la masse du champ scalaire proche de $m \approx 10^{-23}$ eV. Le problème des courbes de rotation plates étant récurrent, j'ai modifié cette version de l'article pour ajouter une courbe montrant qu'il est possible de trouver des courbes de rotation plates à longue distance à condition que la proportion des matière baryonique au centre soit importante. D'autre part, étant donné que les galaxies spirales naines semblent poser problème à de nombreux modèles de matière noire, j'ai aussi insérer un ajustement de la courbes de rotation de DDO 154 avec notre champ scalaire, qui indique une valeur de la masse plus précise et proche de $m \approx 9 \times 10^{-24}$ eV, assez proche de la masse trouvée par l'ajustement des courbes universelles.

En conclusion, nous verrons que notre champ scalaire est capable de bien reproduire les courbes de rotation des galaxies, mais qu'il doit encore s'insérer dans un schéma cosmologique extrêmement contraint. Nous commencerons cette étude dans le chapitre suivant. D'autre part, à cause de la faible masse du champ scalaire – ridiculement petite par rapport à l'échelle de masse de la physique des particules élémentaires – il serait intéressant d'étudier le cas d'un champ scalaire associé à un potentiel quartique, avec l'espoir qu'il aurait alors une masse beaucoup plus élevée. Nous nous intéresserons à un tel cas dans les deux chapitres suivants.

Cette introduction va maintenant être développée plus en détail dans la version modifiée de mon premier article.

Quintessential Halos around Galaxies

Alexandre Arbey^{a,b} ¹, Julien Lesgourgues^a and Pierre Salati^{a,b}

a) Laboratoire de Physique Théorique LAPTH
B.P. 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex

b) Université de Savoie
B.P. 1104, F-73011 Chambéry Cedex

11 September 2001

The nature of the dark matter that binds galaxies remains an open question. The favored candidate has been so far the neutralino. This massive species with evanescent interactions is now in difficulty. It would actually collapse in dense clumps and would therefore play havoc with the matter it is supposed to shepherd.

We focus here on a massive and non-interacting complex scalar field as an alternate option to the astronomical missing mass. We investigate the classical solutions that describe the Bose condensate of such a field in gravitational interaction with matter. This simplistic model accounts quite well for the dark matter inside low-luminosity spirals whereas the agreement lessens for the brightest objects where baryons dominate. A scalar mass $m \sim 0.4$ to 1.6×10^{-23} eV is derived when both high and low-luminosity spirals are fitted at the same time. Comparison with astronomical observations is made quantitative through a chi-squared analysis. We conclude that scalar fields offer a promising direction worth being explored.

5.1 Introduction

The observations of the Cosmic Microwave Background anisotropies [1] point towards a flat universe. The determination of the relation between the distance of luminosity and the redshift of supernovae SNeIa [2] strongly favors the existence of a cosmological constant which contributes a fraction $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ to the closure density. The pressure-to-density ratio w of that fluid is negative with a value of $w = -1$ in the case of an exact cosmological constant. Alternatively, this component could be in the form of dark energy – the so-called quintessence – whose simplest incarnation is a neutral scalar field Φ with the Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \quad . \quad (5.1)$$

¹E-mail : arbey@lapp.in2p3.fr, lesgourg@lapp.in2p3.fr, salati@lapp.in2p3.fr

Should the metric be flat and the field homogeneous, the energy density may be expressed as

$$\rho \equiv T_0^0 = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \quad , \quad (5.2)$$

whereas the pressure obtains from $T_{ij} \equiv -g_{ij} P$ so that

$$P = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi) \quad . \quad (5.3)$$

If the kinetic term is negligible with respect to the contribution of the potential, a pure cosmological constant $\omega = -1$ is recovered. Cosmological scenarios with quintessence in the form of a scalar field have been investigated [3] with various potentials and their relevance to structure formation has been discussed.

On the other hand, matter contributes a fraction $\Omega_M \sim 0.3$ to the energy balance of the universe. The nature of that component is still unresolved insofar as baryons amount only to [4]

$$\Omega_B h^2 = 0.02 \pm 0.002 \quad . \quad (5.4)$$

According to the common wisdom, non-baryonic dark matter would be made of neutralinos – a massive species with weak interactions that naturally arises in the framework of supersymmetric theories. This approach has given rise to some excitement in the community and many experimental projects have been developed to hunt for these evading particles. The general enthusiasm has been recently refreshed when numerical simulations have shown that cold dark matter would cluster in very dense and numerous clumps [5] (see however [6]). The halo of the Milky Way should contain \sim half a thousand satellites with mass in excess of $10^8 M_\odot$ while a dozen only of dwarf-spheroidals are seen. The clumps would also heat and eventually shred the galactic ridge. More generally, this process would lead to the destruction of the disks of spirals. A neutralino cusp would form at the centers of the latter. This is not supported by the rotation curves of low surface brightness galaxies that indicate on the contrary the presence of a core with constant density. Finally, two-body interactions with halo neutralinos and its associated dynamical friction would rapidly disrupt the otherwise observed spinning bar at the center of the Milky Way.

Neutralinos may be in jeopardy. New candidates are under scrutiny such as particles with self interactions [7]. An interesting possibility is based on configurations of the above-mentioned scalar field Φ for which the pressure P vanishes.

An academic example is provided by the exponential potential

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \rho_\Phi^0 e^{\{-\beta(\Phi_0 - \Phi)\}} \quad , \quad (5.5)$$

where the parameter β is

$$\beta = \sqrt{\frac{24\pi G}{\Omega_\Phi}}. \quad (5.6)$$

In a flat and matter-dominated universe, such a field Φ would behave just exactly as cold dark matter and would contribute a fraction $\Omega_\Phi = \rho_\Phi^0/\rho_C^0$ to the closure density. More generally, the kinetic energy $\dot{\Phi}^2/2$ should cancel the potential $V(\Phi)$ in order for the pressure to vanish and for the fluid to mimic the effect of non-relativistic matter. As will be discussed in the next section, this is actually the case when Φ behaves like an axion and oscillates coherently on a time scale much shorter than the typical durations at stake. Alternatively, the field Φ could have additional degrees of freedom and rotate in the corresponding internal space. The idea that the excess of gravity inside galaxies may be due to a classical configuration of some scalar field Φ has already drawn some attention. The discussion has nevertheless remained at an introductory level. A condensate of massive bosons with repulsive interparticle potential has been postulated [8] to suppress the formation of structure on subgalactic scales. The polytropic index of this bosonic halo varies from $n = 1$ at low density up to $n = 3$ at high density. The stability and annihilation of such a system has been mentioned in [9] and a limit on the quartic coupling constant of Φ has been derived. The relevance of scalar fields to the structure of galactic haloes and their associated dark matter cannot be seriously addressed without comparing the theoretical rotation curves to the observations. An exponential potential – with negative overall sign – is shown [10] to lead to flat rotation curves. A massless and non-interacting complex scalar field is thoroughly considered in [11]. The self-gravitating structure of the field is calculated.

We nevertheless feel that these analysis may be improved in several ways. To commence, a negative potential does not seem quite appealing. It actually leads to unphysical situations where the scalar field rolls down the hill indefinitely and converts the infinite amount of energy stored into $V < 0$ into kinetic energy. Then, as mentioned in [12], the rotation curves are assumed to be flat up to an infinite distance. In both [10] and [11], the Bose condensate extends to infinity and the mass of the system diverges linearly in the radius r . The Minkowski metric is no longer recovered at large r . On the contrary, space exhibits a small deficit of solid angle. We feel that such a behavior is not realistic insofar as the rotation curves of bright spirals are actually found to decrease beyond their optical radius [13]. Another strange consequence is that Newton's gravitation does not apply even when the fields are weak. Matching the metric with the Robertson-Walker form may also be a problem. Finally, the agreement between the predicted and the observed rotation curves is only qualitative and in the case of [10] is based on just a few examples. The goodness of that agreement is not assessed from a quantitative point of view.

This motivated us to reinvestigate more thoroughly the subject. In the next section, we discuss the general conditions under which a scalar field may bind galaxies. We show that the same field cannot easily account – at the same time – for the dark matter at galactic scales and for the cosmological quintessence. We explain the reasons which have lead us to consider the model scrutinized in section (5.3). The corresponding rotations curves are derived in section (5.4) and are compared by means of a chi-squared analysis to the universal curves unveiled by [13]. The results are discussed in section (5.5) and prospects for future investigations are finally suggested.

5.2 Can a scalar field bind galaxies ?

In the weak field approximation of general relativity – or quasi-Newtonian limit – deviations from the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ are accounted for by the perturbation $h_{\mu\nu}$. In the harmonic coordinate gauge where it satisfies the condition

$$\partial_\alpha h^\alpha_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu h^\alpha_\alpha = 0 \quad , \quad (5.7)$$

this perturbation $h_{\mu\nu}$ is related to the source tensor

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha_\alpha \quad . \quad (5.8)$$

through

$$h_{\mu\nu}(\vec{r}) = -4G \int \frac{S_{\mu\nu}(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3\vec{r}' \quad . \quad (5.9)$$

The stress-energy tensor is denoted by $T_{\mu\nu}$. The gravitational potential – which in the quasi-Newtonian approximation is nothing but $h_{00}/2$ – is sourced by S_{00} . Note that in the case of pressureless matter, one would have $2S_{00} = T_0^0$ and the gravitational potential would just be sourced by the energy density. So, the scalar field generates the same gravitational potential as an equivalent cold matter component with energy density $2S_{00}$. For this reason, the later quantity can be called the *effective* density. In the simplest case of the neutral scalar field Φ of Eq. (5.1), it reads :

$$\rho_{\text{eff}} \equiv 2S_{00} = 2(\partial_0\Phi)^2 - 2V \quad . \quad (5.10)$$

Note that unlike the true energy density, ρ_{eff} contains no space-derivatives $\partial_i\Phi$.

In order to generate the gravitational potential well that is observed inside galaxies, a distribution of dark matter is generally introduced in addition to the baryon population. An excess of binding ensues and matter is tied more closely. Should the scalar field Φ be responsible for the haloes of galaxies, its effective density ρ_{eff} would play the role of the ordinary cold dark matter

density, and should in particular be positive. Since the gravitational potential in a galaxy is essentially static, we would have to assume – a priori – that the time derivative $\dot{\Phi} = \partial_0 \Phi$ vanishes. The effective density ρ_{eff} would therefore reduce to $-2V(\Phi)$ and the field potential would have to be negative. This is actually the solution suggested by [10]. However, even if we are not aware of a principle that strictly forbids a negative potential, we would prefer to avoid such an unusual assumption. Nothing would prevent the system from being unstable in that case and we will therefore disregard this option. On the other hand, a static field with positive potential V leads to a positive Newtonian potential and therefore to repulsion. It would lessen the attraction of ordinary matter and disrupt galaxies. This is not completely surprising since the same positive V is proposed to accelerate the expansion of the universe as its contents repel each other. This property has led to the hasty conclusion that a scalar field could not bind matter inside galaxies.

Let us assume however that the scalar field Φ varies much more rapidly than the system in which it is embedded. Our Milky Way rotates in ~ 200 million years. If the field changes on a much shorter timescale, the associated effective density would be felt through its time average

$$\rho_{\text{eff}} = 2 \left\langle \dot{\Phi}^2 \right\rangle - 2 \langle V \rangle . \quad (5.11)$$

The field Φ may oscillate for instance at the bottom of the potential well. The pulsation of the corresponding vibrations is equal to the scalar mass m and may be derived from the curvature of the potential at its minimum in $\Phi = 0$

$$m^2 \equiv V''(0) . \quad (5.12)$$

Actually the field behaves just like an ordinary harmonic oscillator whenever the pulsation m is much larger than the wavevector k of the self-gravitating configuration. This translates into the condition

$$\frac{2\pi}{m} \ll R , \quad (5.13)$$

where R is the typical length on which Φ changes appreciably. For the haloes of galaxies, R is of order a few kpc. Because Φ varies in time like $e^{(-im t)}$, the kinetic and potential energies are related on average by

$$\langle V(\Phi) \rangle = \left\langle \frac{\dot{\Phi}^2}{2} \right\rangle . \quad (5.14)$$

The effective density may now induce a gravitational attraction insofar as

$$\rho_{\text{eff}} = 2 \langle V \rangle > 0 . \quad (5.15)$$

Allowing the field Φ to vibrate quickly has led to an overall change of sign with respect to the case considered in [10]. Notice furthermore that the

associated pressure vanishes as a result of (5.3) and (5.14) so that the scalar fluid behaves just like non-relativistic matter. Such coherent oscillations have already been considered in the literature, in the case of the axion in particular – see also the interesting discussion of a quintessence field with a late oscillatory stage in [14].

Another illustration of a fast evolving field is to make it rotate in some internal space. We may look for configurations where the dark energy itself – and not its time-average – is rigorously static. A complex field with a uniformly rotating phase features the simplest realization of that idea

$$\Phi = \frac{\sigma(r)}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} . \quad (5.16)$$

If the field is non-interacting but has a mass m , the associated effective density obtains from

$$\frac{\rho_{\text{eff}}}{2} = S_{00} = 2\dot{\Phi}^\dagger\dot{\Phi} - U(\Phi) , \quad (5.17)$$

where the potential $U = m^2\Phi^\dagger\Phi$. The pressure of the scalar fluid may be approximated by

$$P \simeq \dot{\Phi}^\dagger\dot{\Phi} - U(\Phi) , \quad (5.18)$$

when the space-derivatives of the field are negligible. This amounts to assume once again that the typical length R of the system way exceeds $1/\omega$. Whenever the condition $m \simeq \omega$ holds, the pressure is vanishingly small and the scalar fluid behaves as a non-relativistic component. The associated effective density becomes $\rho_{\text{eff}} = \omega^2\sigma^2(r)$ with no explicit dependence on the time. The complete model will be discussed in the next section where we will consider the possibility of a boson-star like system extending over a whole galaxy and playing the role of a dark halo.

We conclude this section by pointing out the difficulty to have a common explanation for both the local dark matter and the cosmological quintessence in terms of a scalar field. An excess of gravitational binding on galactic scales requires the condition

$$\dot{\Phi}^2 \geq V(\Phi) \quad (5.19)$$

to be fulfilled. Conversely, should the overall pressure P be negative to account for a cosmological constant, the potential would have to satisfy the inequality

$$\frac{\dot{\Phi}^2}{2} \leq V(\Phi) . \quad (5.20)$$

We conclude that the pressure-to-density ratio w must not exceed the value of $-1/3$ in order for both conditions to be simultaneously met. Such a range seems to be already excluded by the measurements of supernovae SNeIa [2].

5.3 The self-gravitating complex and massive scalar field.

Boson stars have been extensively studied in the past – see for instance [15, 16, 17, 18]. For clarity, we will briefly summarize the main features of self-gravitating bosons, following closely the presentation of [16]. We are interested in the stable and bounded configurations of a complex scalar field obeying the action

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L} \{ \Phi, \partial_\mu \Phi \} = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi - U(\Phi) \right\} , \quad (5.21)$$

where the potential U is invariant under the global symmetry

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{i\alpha} \Phi . \quad (5.22)$$

The conservation of the corresponding conserved current is crucial for the stability of the boson star. Real scalar fields have no stable bounded configurations. One can show that all spherically symmetric minimum energy solutions depend on time only through a rotating phase so that the complex field Φ may be expressed as in Eq. (5.16) – see for instance the appendix in [16]. In analogy with the hydrogen atom, such solutions correspond to the energy eigenstates $(n, l = 0, m = 0)$. We will see later how the discrete energy levels n of a boson star are associated with different values of the rotation parameter ω . The parametrization (5.16) of Φ is compatible with a static isotropic metric

$$d\tau^2 = e^{2u} dt^2 - e^{2v} \{ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \} , \quad (5.23)$$

where u and v depend only on the radius r . The Klein-Gordon equation reads

$$e^{-2v} \left\{ \sigma'' + \left(u' + v' + \frac{2}{r} \right) \sigma' \right\} + \omega^2 e^{-2u} \sigma - U'(\sigma) = 0 . \quad (5.24)$$

The Einstein equations provide two additional independent equations of motion. We can choose for instance

$$2v'' + v'^2 + \frac{4v'}{r} = -8\pi G e^{2v} \{ W + V + U \} , \quad (5.25)$$

and

$$u'' + v'' + u'^2 + \frac{1}{r} (u' + v') = 8\pi G e^{2v} \{ W - V - U \} , \quad (5.26)$$

where the kinetic and gradient contributions to the field energy density are respectively denoted by

$$W = e^{-2u} \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \quad \text{and} \quad V = e^{-2v} \frac{\sigma'^2}{2} . \quad (5.27)$$

From the assumption that boson stars are non singular configurations, asymptotically flat and of finite energy, severe restrictions can be put on the boundary conditions for u , v and σ . In order to avoid any singularity at the origin, the radial derivatives u' , v' and σ' must vanish at $r = 0$. Actually, since an angular deficit at the origin would imply an infinite concentration of energy, we infer the complementary condition $v(0) = 0$. This appears explicitly in the Einstein equations when they are written in a slightly different way [18]. Anyhow, in this paper, we will focus on the Newtonian regime for which v can be shifted by a constant term without any modification for the (u, σ) solution.

Spacetime is asymptotically Minkowskian if both metric parameters u and v vanish at infinite distance r . More precisely, for bounded configurations, one expects that on very large distances the field will appear as a point-like mass M and that Schwarzschild's metric will be recovered

$$e^u = \frac{r-a}{r+a} \quad , \quad e^v = \left\{ \frac{r+a}{r} \right\}^2 \quad , \quad a = GM/2 \quad . \quad (5.28)$$

Let us focus now on the finite energy condition. The total energy can be inferred from the matter and gravitational Lagrangian. The latter quantity can be calculated by subtracting to the Einstein-Hilbert action a surface term – as is usually done for bounded gravitational objects – so that

$$L_G = \frac{1}{2G} \int_0^\infty r^2 dr e^{u+v} \{v'^2 + 2u'v'\} \quad . \quad (5.29)$$

The total energy is the sum of the gravitational energy $E_G = -L_G$ and of the matter energy

$$E_M = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr e^{u+3v} \{W + V + U\} \quad . \quad (5.30)$$

Using the Einstein equation (5.25), one can rewrite the total energy in terms of the metric and integrate exactly :

$$\begin{aligned} E_M + E_G &= -G^{-1} \int_0^\infty r^2 dr e^{u+v} \left\{ v'' + v'^2 + \frac{2}{r} v' + u'v' \right\} \\ &= -G^{-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r^2 v' e^{u+v} \right\} \quad . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Inserting the Schwarzschild asymptotic solution (5.28), one can check that the total mass is the same as the total energy so that $M = E_M + E_G$. Following (5.28), the mass is also the limit of a slightly different expression

$$M = -G^{-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r^2 v' e^{v/2} \right\} \quad (5.32)$$

By rewriting this limit as an integral over r , and by using the Einstein equation (5.25), one is able to express the mass or total energy in terms of the field energy density

$$E_M + E_G = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr e^{5v/2} \{W + V + U\} . \quad (5.33)$$

Notice that the gravitational contribution is then contained in the factor $e^{(5v/2)}$. For bounded objects, the sum $W + V + U$ should therefore go to zero faster than r^{-3} . Another important quantity is the conserved charge associated to the $U(1)$ global symmetry, i.e., the number of particles minus antiparticles N

$$\begin{aligned} N &\equiv \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \sqrt{-g} g^{0\mu} \{i (\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^\dagger \Phi)\} \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^\infty 4\pi r^2 dr e^u + 3v W . \end{aligned} \quad (5.34)$$

The simplest realization of this system occurs with a quadratic potential $U = m^2 \Phi^\dagger \Phi$. By inspecting the Klein–Gordon equation at large radii, one finds that finite energy solutions may exist only if $m > \omega^2$. Moreover, as soon as u and v – respectively u' and v' – are small with respect to unity – respectively $1/r$ – the field asymptotically behaves as

$$\sigma \propto r^{-1} e^{\{-(m^2 - \omega^2)^{1/2} r\}} . \quad (5.35)$$

Dimensionless equations are obtained by rescaling the field by the Planck mass and the radial coordinate by m^{-1} – which is essentially the Compton wavelength of Φ

$$\bar{\sigma} = \sqrt{2\pi G} \sigma \quad , \quad \bar{r} = r m . \quad (5.36)$$

Because of the symmetries of the action, the particle mass m , the rotation velocity ω and the lapse function e^u appear in the dimensionless equations only through the particular combination $(\omega/m)^2 e^{-2u}$. It is then convenient to define the rescaled lapse function

$$e^{-2\bar{u}} = \frac{\omega^2}{m^2} e^{-2u} . \quad (5.37)$$

Asymptotic flatness imposes a relation between (ω/m) and the value of \bar{u} at infinity

$$\frac{\omega}{m} = e^{-\bar{u}(\infty)} . \quad (5.38)$$

²In the opposite case $m < \omega$, the field oscillates at large distance like $r^{-1} \sin((\omega^2 - m^2)^{1/2} r)$. It fills the Universe with an infinite amount of energy, unless some truncation mechanism is put by hand. This problem arises in particular when $m = 0$ [11], but not for the solutions considered here.

The solutions can be calculated by integrating a simple system of three variables – $\bar{\sigma}$, \bar{u} and v – from zero to infinity. For a given $\bar{\sigma}(0)$, with the assumption that $v(0) = 0$ and all first derivatives vanish at the origin, there is only one free boundary condition left, namely the value of $\bar{u}(0)$. Using an overshooting method, one finds a discrete set of values $\bar{u}(0)_n$ – with $n = 0, \dots, \infty$ – such that \bar{u} converges at infinity with $\bar{\sigma}$ and v smoothly decreasing towards zero. The resulting configurations are the energy eigenstates of the system. The state with minimal energy is characterized by the absence of nodes – of spheres where $\sigma(r) = 0$ – while each n -excited state has got n nodes.

Since we will assume that bosons play the role of galactic dark matter, we only need to study the Newtonian regime in which $|u|$ and $|v| \ll 1$. In this limit, the system has got additional symmetries which facilitate the description and classification of the exact numerical solutions. The global order of magnitude of u and v depends on the parameter ξ defined by $\xi^2 = 1 - \omega^2/m^2$, with $\xi \ll 1$ corresponding to the Newtonian limit. Indeed, one can show [16] that $u = \mathcal{O}(\xi^2)$ and $v = \mathcal{O}(\xi^2)$ while $u+v = \mathcal{O}(\xi^4)$. So, at order $\mathcal{O}(\xi^2)$, $u = -v$ – as usual in the first-order post-Newtonian approximation [19] – and the system follows a simple pair of equations

$$\bar{u}'' + \frac{2}{\bar{r}} \bar{u}' = 2 \bar{\sigma}^2 , \quad (5.39)$$

$$\bar{\sigma}'' + \frac{2}{\bar{r}} \bar{\sigma}' = 2 \bar{u} \bar{\sigma} . \quad (5.40)$$

The solutions are therefore left invariant by the following rescaling

$$\begin{aligned} \bar{u} &\longrightarrow k \bar{u} , \\ \bar{\sigma} &\longrightarrow k \bar{\sigma} , \\ \bar{r} &\longrightarrow k^{-1/2} \bar{r} . \end{aligned} \quad (5.41)$$

This means that any configuration is fully described by its number n of nodes and by the field value $\bar{\sigma}(0)$ at the origin. In other words, Newtonian solutions with the same number of nodes are related among each other through the rescaling (5.41). The invariance of the solution appears more clearly when relations (5.39) and (5.40) are expressed in terms of the ratios $S = \bar{\sigma}(r)/\bar{\sigma}(0)$ and $\bar{u}_{\text{red}} = \bar{u}(r)/\bar{\sigma}(0)$

$$\bar{u}_{\text{red}}'' + \frac{2}{x} \bar{u}_{\text{red}}' = 2 S^2 , \quad (5.42)$$

$$S'' + \frac{2}{x} S' = 2 \bar{u}_{\text{red}} S . \quad (5.43)$$

The length parameter is now described by $x = m r \sqrt{\bar{\sigma}(0)} = \bar{r} \sqrt{\bar{\sigma}(0)}$. We conclude that once the number n of nodes is specified, the value of \bar{u}_{red} at the origin is unique. So is the field configuration $S(x)$. The ratio $\bar{u}_{\text{red}}(0) =$

$\bar{u}(0)/\bar{\sigma}(0)$ has been computed for the fundamental state, the first excited states and also in the limit where $n \rightarrow \infty$. Our results are quoted in Table 5.1 and are in good agreement with [16].

n	$\bar{u}_{\text{red}}(0) = \bar{u}(0)/\bar{\sigma}(0)$	$(1 - \omega/m)/\bar{\sigma}(0)$	$\bar{M}/\sqrt{\bar{\sigma}(0)}$	$\bar{N}/\sqrt{\bar{\sigma}(0)}$
0	-0.91858	0.97894	2.4	1.2
1	-1.2099	0.916	5.4	2.7
2	-1.3437	0.892	8.4	4.2
3	-1.4282	0.877	11.4	5.7
5	-1.5370	0.860	17.4	8.7
10	-1.6831	0.839	32	16
∞	-5.	4.35	∞	∞

TAB. 5.1 – Scaling factors for \bar{u} , $(1 - \omega/m)$, \bar{M} and \bar{N} for the fundamental $n = 0$ state and a few n -excited states. These numbers are applicable only in the Newtonian limit which is reached when all quantities u , v , \bar{u} , $\bar{\sigma}$ and $(1 - \omega/m)$ are small with respect to unity.

For each configuration, ω/m could have been calculated from Eq. (5.38) but in practice \bar{u} converges very slowly. We obtain much more precision by taking into account the asymptotic Schwarzschild expression (5.28) which implies that

$$e^u = 1 - \bar{r} u' + \mathcal{O}(r^{-2}) . \quad (5.44)$$

Noticing that $u' = \bar{u}'$, we find in the Newtonian limit

$$1 - \frac{\omega}{m} = \lim_{r \rightarrow \infty} \{ \bar{u} - \bar{r} \bar{u}' \} . \quad (5.45)$$

We also compute a dimensionless mass parameter

$$\bar{M} = \lim_{r \rightarrow \infty} \{ \bar{r}^2 \bar{u}' \} = \frac{mM}{M_{\text{P}}^2} , \quad (5.46)$$

and a rescaled particle number

$$\bar{N} = \int_0^\infty \bar{\sigma}^2 \bar{r}^2 d\bar{r} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{M_{\text{P}}^2} N . \quad (5.47)$$

While $(1 - \omega/m)$ scales as $\bar{\sigma}(0)$, \bar{M} and \bar{N} scale as $\sqrt{\bar{\sigma}(0)}$ with factors depending on n that are given in Table 5.1.

We now focus on rotation curves inside a toy model of galactic halo consisting only of bosonic dark matter. Any baryonic contribution from the disk, the

bulge or any other component is neglected here. Test particles with circular orbits of radius r have rotation speed v

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \Phi_{\text{grav}} = c^2 u' . \quad (5.48)$$

So, the rotation curve is given by $c\sqrt{ru'}$. In Fig. 5.1, we plot this quantity for the fundamental and the $n = 2, 4, 6$ states as well as for an extremely excited field configuration with $n \rightarrow \infty$. We also show the rotation curves associated to the usual fitting functions for cold dark matter haloes. We first consider an isothermal distribution with

$$\rho_{\text{iso}} \propto \{a^2 + r^2\}^{-1} , \quad (5.49)$$

where a stands for the core radius. We also feature the case of the cuspy profile towards which n-body numerical simulations point [20]

$$\rho_{\text{cusp}} \propto r^{-1} \{a + r\}^{-2} . \quad (5.50)$$

In this case, a approximately corresponds to the radius where peak velocity is reached. The overall normalization and a have been adjusted in order to match the scalar field halo rotation curves. As can be seen on Fig. 5.1, the curve associated to the cold dark matter isothermal distribution (5.49) becomes flat at large distances as in the large n case. It does not exhibit however the peak which all the other curves feature. At the outskirts of the system, the cuspy distribution (5.50) leads to a decrease of the rotation velocity with $\mathcal{V}^2 \propto \log(r)/r$ while, in the $n = 0, 2, 4, 6$ states, the decrease is typically Keplerian. Near the origin, the scalar field configurations yield a core with constant density as in the isothermal case. This is in agreement with recent measurements of the rotation curves of low surface brightness spirals. Note the small wiggles of the excited configurations. This could provide an explanation for some peculiar rotation curves with oscillatory behavior – as proposed by [11] who obtains similar curves in his massless model. However we will not consider this possibility in this paper, since we focus in a first stage on universal rotation curves of spiral galaxies [13].

At this point, we must say a few words about the stability of such self-interacting bosons. Beside the Newtonian limit, a first complication arises from the fact that – for a given number N of particles and number n of nodes – there are actually several values of the mass M corresponding to static, bounded and spherically symmetric configurations. Only the lowest energy state is stable. This phenomenon occurs above a critical particle number $N \sim 0.3 (M_{\text{P}}/m)^2$. In the Newtonian regime, we are much below this scale and, for a given set (N, n) , there is a unique static configuration. A stronger condition is that the gravitating boson system should be stable against fission into free particles so that $M < Nm$. It was shown in [16] that this criteria is fulfilled

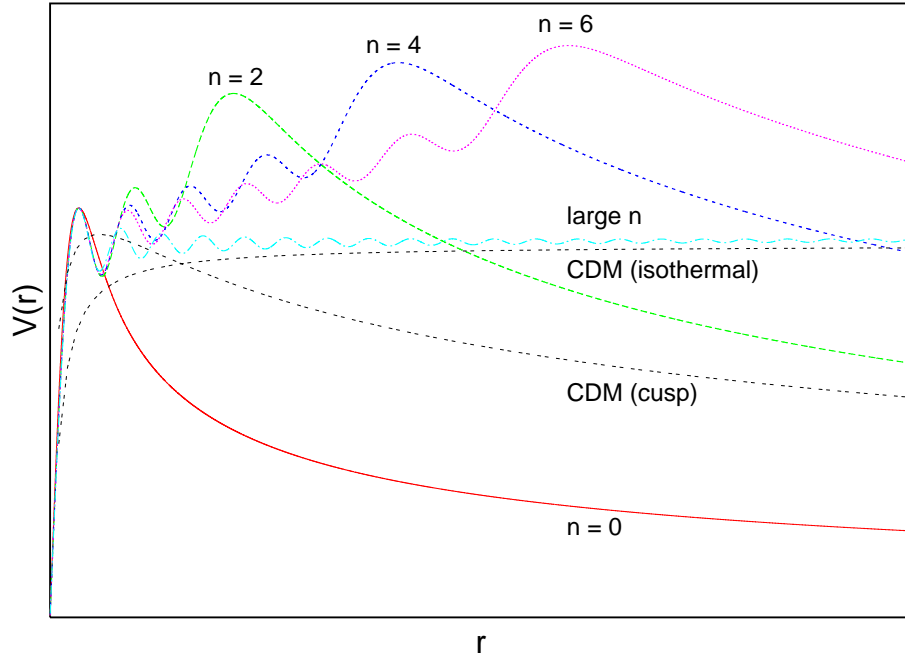


FIG. 5.1 – Rotation curves inside a galactic halo that consists of a pure self-gravitating scalar field. The corresponding boson is massive but has no interactions. The fundamental and $n = 2, 4, 6$ states are featured together with an extremely excited field configuration for which $n \rightarrow \infty$. Conventional CDM haloes are also presented for comparison with mass density given by relations (5.49) – isothermal distribution – and (5.50) – cuspy profile. Each curve has an arbitrary core radius and normalization. We choose to normalize the five scalar field solutions to a common amplitude at the first maximum. These solutions possess $n + 1$ maxima, followed by a decay in $r^{-1/2}$ – as for any bounded object. The amplitudes of the first inner maxima are approximately the same, while the outer ones are bigger. For $n \rightarrow \infty$, the last maximum and the $r^{-1/2}$ behavior are rejected far outside the figure, at infinity : we only see a quasi-flat region with small oscillations.

by all states in the Newtonian limit, even for large values of n . In that regime, M tends towards $N m$ when $n \rightarrow \infty$ at fixed N (in Table 5.1, the precision on \bar{M} and \bar{N} is not sufficient to see this effect). Stability against fission is only a necessary condition. More generally, one should check stability (i) at the classical level under any small perturbation leaving N unchanged and (ii) at the quantum level under tunneling from excited states to the fundamental state. The former analysis was performed analytically by [17] who concludes on the stability of all excited states – at least in the Newtonian limit. A non-perturbative analysis was performed numerically in [21] and

yielded the opposite conclusion. However, as clearly stated in [21], these simulations were based on the most general perturbations which were in particular allowed to violate the conservation of the particle number N . Therefore, the positive result of [17] seems to apply to our situation. As far as the stability under tunneling is concerned, we are not aware of any previous result. Notice anyway that, in order to be conservative, we will only consider $n = 0$ fundamental state configurations in what follows.

5.4 Comparison with observations.

In general, reproducing the observed galactic rotation curves amounts in modeling the contribution of many components apart from the halo and the observed luminous disk, like a HI gas, a rotating bar or bulge, etc. In order to make a strong statement, we will restrict our analysis to the simplest case of spiral galaxies and on distances smaller than the optical radius r_{opt} defined as the radius of the sphere encompassing 83% of the luminous matter. Indeed, for spiral galaxies and on such distances, the only significant contributions to the total density arise from a stellar disk with exponential density profile, plus the unknown dark halo contribution : one can avoid introducing a plethora of free parameters describing the other components. On the basis of such considerations, Persic, Salucci and Stel [13] – hereafter denoted PSS – performed a detailed statistical study over about 1100 optical and radio rotation curves. They rescaled each rotation curve to the same size and amplitude by expressing the radius as r/r_{opt} and the speed as $\mathcal{V}(r)/\mathcal{V}(r_{\text{opt}})$. *The rescaled curves were found to depend only on a single parameter, the luminosity M_I .* Galaxies were divided in eleven classes depending on their brightness M_I and the authors provided for each group of spirals the average rotation curve in the range $r < 1.1 r_{\text{opt}}$. They showed that for non-luminous galaxies, rotation curves are increasing near the optical radius while for brighter objects, they tend to become flat or they even slightly decrease. This result is remarkable insofar as the dynamical contribution of the luminous disk – known up to a constant bias factor β – is slightly decreasing at r_{opt} . The immediate conclusion is that faint galaxies are always dominated by their halo whereas bright spirals only need a very small contribution from non-luminous matter. This amazing one-to-one correspondance between the disk and halo core density, depending only on one parameter (the magnitude), is generally called the disk-halo conspiracy.

The purpose of this article is to investigate whether or not a non-interacting massive scalar field halo may account for the universal rotation curves of PSS. To achieve this goal, we must solve once again the Einstein and Klein-Gordon equations, adding to the former the contribution from the luminous disk. In order to keep a spherically symmetric metric, we will describe the

gravitational impact of the disk as if it was spherical. This approximation is reasonable provided that the corresponding contribution to the mass budget of the system remains small – which is the case for faint spirals. In the opposite case, a much more complicated metric needs to be introduced in order to describe the aspherical distribution of luminous matter. We therefore add to the time–time Einstein equation the disk density contribution ρ . Should the disk be alone, the rotation curve would be [13]

$$\mathcal{V}_{\text{disk}}^2(r) = \mathcal{V}_{\text{disk}}^2(r_{\text{opt}}) \frac{1.97 (r/r_{\text{opt}})^{1.22}}{\{(r/r_{\text{opt}})^2 + 0.78^2\}^{1.43}} . \quad (5.51)$$

The density ρ is easily derived from a simple Newtonian calculation

$$4 \pi G \rho = \frac{\mathcal{V}_{\text{disk}}^2}{r^2} + 2 \frac{\mathcal{V}_{\text{disk}} \mathcal{V}'_{\text{disk}}}{r} = \mathcal{V}_{\text{disk}}^2(r_{\text{opt}}) \frac{f(r/r_{\text{opt}})}{r_{\text{opt}}^2} , \quad (5.52)$$

where we introduce the dimensionless function

$$f(u) \equiv \frac{4.38 u^{-0.78}}{\{u^2 + 0.78^2\}^{1.43}} - \frac{5.64 u^{1.22}}{\{u^2 + 0.78^2\}^{2.43}} . \quad (5.53)$$

Note that this profile is only valid in the range $0.04 r_{\text{opt}} < r < 2 r_{\text{opt}}$ since relation (5.51) obtains from the fit of a more complicated expression involving modified Bessel functions. Below $r < 0.04 r_{\text{opt}}$, we maintain a constant density which would otherwise diverge. We have actually checked that the details of the disk mass density near the center do not affect our results.

Introducing the additional mass distribution ρ of the luminous disk into the pure scalar case discussed in section (5.3) simply amounts to modify the time–time Einstein relation (5.25) into

$$2v'' + v'^2 + \frac{4v'}{\bar{r}} = -2e^{2v} \left\{ \left(1 + e^{-2\bar{u}}\right) \bar{\sigma}^2 + e^{-2v} \bar{\sigma}'^2 + \bar{\rho} \right\} , \quad (5.54)$$

where the dimensionless disk density $\bar{\rho}$ may be expressed as

$$\bar{\rho} = \frac{4 \pi G}{m^2} \rho . \quad (5.55)$$

The radius \bar{r} and the scalar field $\bar{\sigma}$ have been previously defined in relation (5.36). The other Einstein equation (5.26) as well as the Klein–Gordon relation (5.24) are not affected. It is worth studying the limit of these equations in the Newtonian regime in order to gain intuition on their scaling behavior. As before, the relation $u = -v \simeq \bar{u}$ applies in this regime and the system reduces to

$$\bar{u}'' + \frac{2}{\bar{r}} \bar{u}' = 2 \bar{\sigma}^2 + \bar{\rho} , \quad (5.56)$$

$$\bar{\sigma}'' + \frac{2}{\bar{r}} \bar{\sigma}' = 2 \bar{u} \bar{\sigma} . \quad (5.57)$$

Relation (5.40) is not modified whereas the disk mass density $\bar{\rho}$ is introduced in the right hand side term of expression (5.39) to yield Eq. (5.56). As before, the scale invariance of the solution becomes more obvious when these relations are expressed in terms of the quantities $S = \bar{\sigma}(r)/\bar{\sigma}(0)$ and $\bar{u}_{\text{red}} = \bar{u}(r)/\bar{\sigma}(0)$. The system (5.56) and (5.57) becomes

$$\bar{u}_{\text{red}}'' + \frac{2}{x} \bar{u}_{\text{red}}' = 2 S^2 + \mathcal{R} , \quad (5.58)$$

$$S'' + \frac{2}{x} S' = 2 \bar{u}_{\text{red}} S . \quad (5.59)$$

The disk density enters through the dimensionless parameter

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\sigma}^2(0)} \equiv \frac{4\pi G}{m^2} \frac{\rho}{\bar{\sigma}^2(0)} . \quad (5.60)$$

Should \mathcal{R} vanish, the fundamental $n = 0$ mode solution for $S(x)$ would be uniquely determined. Taking advantage of relations (5.52) and (5.53) allows to express the disk contribution \mathcal{R} as

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{V}_{\text{disk}}^2(r_{\text{opt}})}{\bar{\sigma}(0)} \left\{ x_{\text{opt}}^{-2} f\left(\frac{x}{x_{\text{opt}}}\right) \right\} . \quad (5.61)$$

The general scale-invariant solution $S(x)$ in the presence of a disk depends now on the parameters

$$\alpha \equiv x_{\text{opt}} = m r_{\text{opt}} \sqrt{\bar{\sigma}(0)} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{\mathcal{V}_{\text{disk}}^2(r_{\text{opt}})}{\bar{\sigma}(0)} , \quad (5.62)$$

which come into play through the disk density

$$\mathcal{R} \{\alpha, \gamma\} = \gamma \alpha^{-2} f(x/\alpha) . \quad (5.63)$$

The radial extension x_{opt} of the matter disk relative to the scalar halo is accounted for by the parameter α . Since the scalar field generates a rotation curve whose magnitude \mathcal{V}^2 scales as $\bar{\sigma}(0)$, the quantity γ measures the dynamical impact of the disk relative to that of the halo. These parameters determine therefore the size and the mass of the disk with respect to the halo in which it is embedded. The actual scale of the entire system is specified in turns by – say – the optical radius r_{opt} and the disk speed $\mathcal{V}_{\text{disk}}(r_{\text{opt}})$. Once the configuration $\{\alpha, \gamma\}$ is chosen, the behavior of the field – given by the scale-invariant solution $S_{\alpha\gamma}(x)$ to the system (5.58) and (5.59) – is completely determined. The full rotation curve which both disk and halo generate may be readily derived.

With a χ^2 analysis, we obtain likelihood contours in the two-dimensional³ free parameter space $\{\alpha, \gamma\}$ shown on Fig. 5.2.

³The PSS data include an error bar also at $r = r_{\text{opt}}$, reflecting the cumulated observational uncertainties at the point chosen for rescaling. So, in each χ^2 calculation, we must marginalize over an overall data normalization factor, which means that we have three free parameters and $11 - 3 = 8$ degrees of freedom.

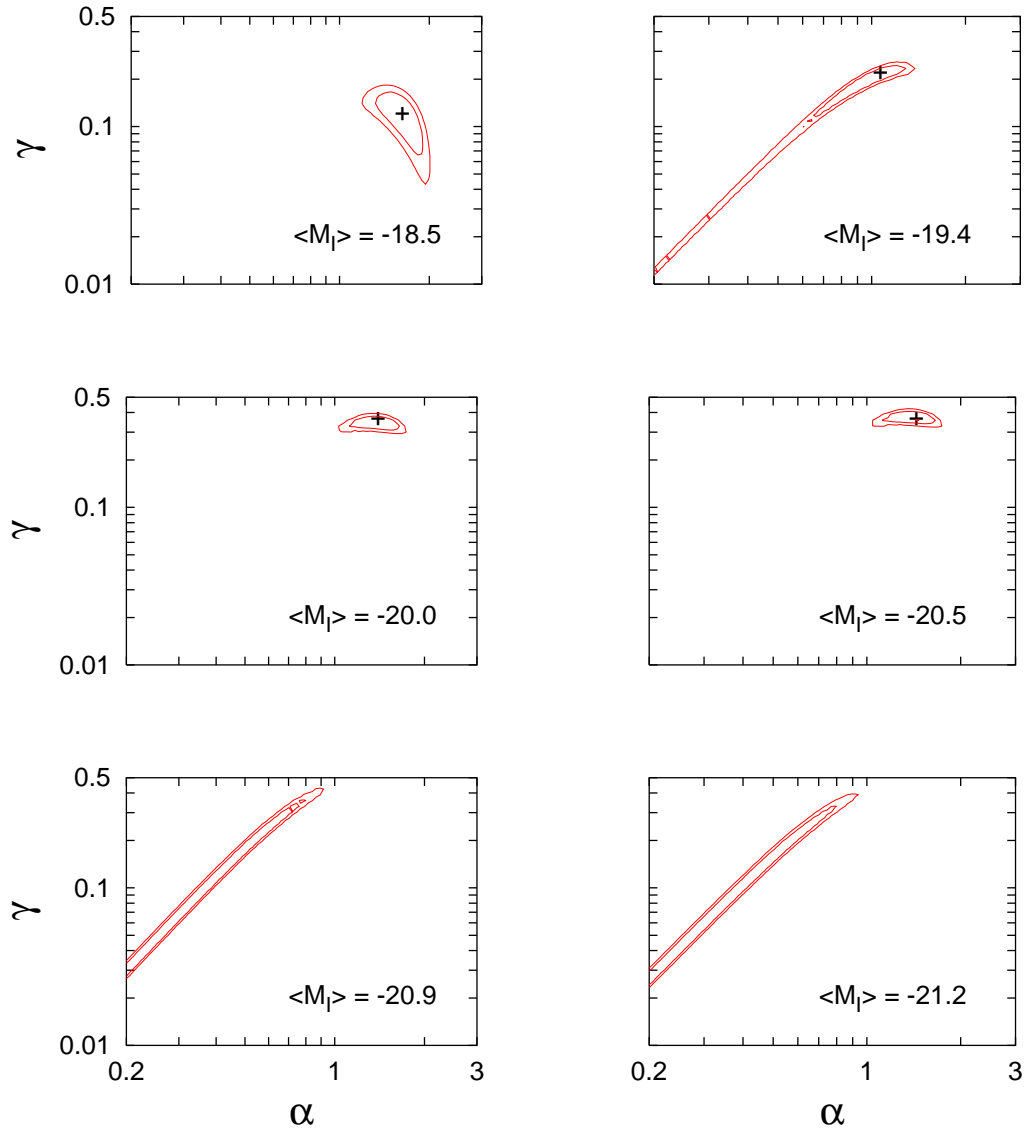


FIG. 5.2 – Two-dimensional likelihood contours in the $\{\alpha, \gamma\}$ space, for six galaxy classes ordered by growing magnitude. In the four first cases, the crosses show the best-fit models. For the last two cases, the minimum is strongly degenerate along a line ranging from $\alpha = 0$ to $\alpha = 0.5$. The curves correspond to $\chi^2 - \chi_{\min}^2 = 3.2$ (resp. 6.2), which would give the 68% (resp. 95%) allowed region if the experimental errors could be rigorously interpreted as $1-\sigma$ gaussian errors.

We use only the six less luminous galaxy classes from PSS since they are the most relevant probes of the halo contribution and *a priori* the closest cases to spherical symmetry – brighter galaxies require only a small halo

contribution, at least inside the optical radius. The minimum χ^2 values are (2.5, 23.6, 20.9, 29.4, 17.8, 7.6), and the corresponding best-fit rotation curves are shown on Fig. 5.3. We will not over-interpret the absolute value

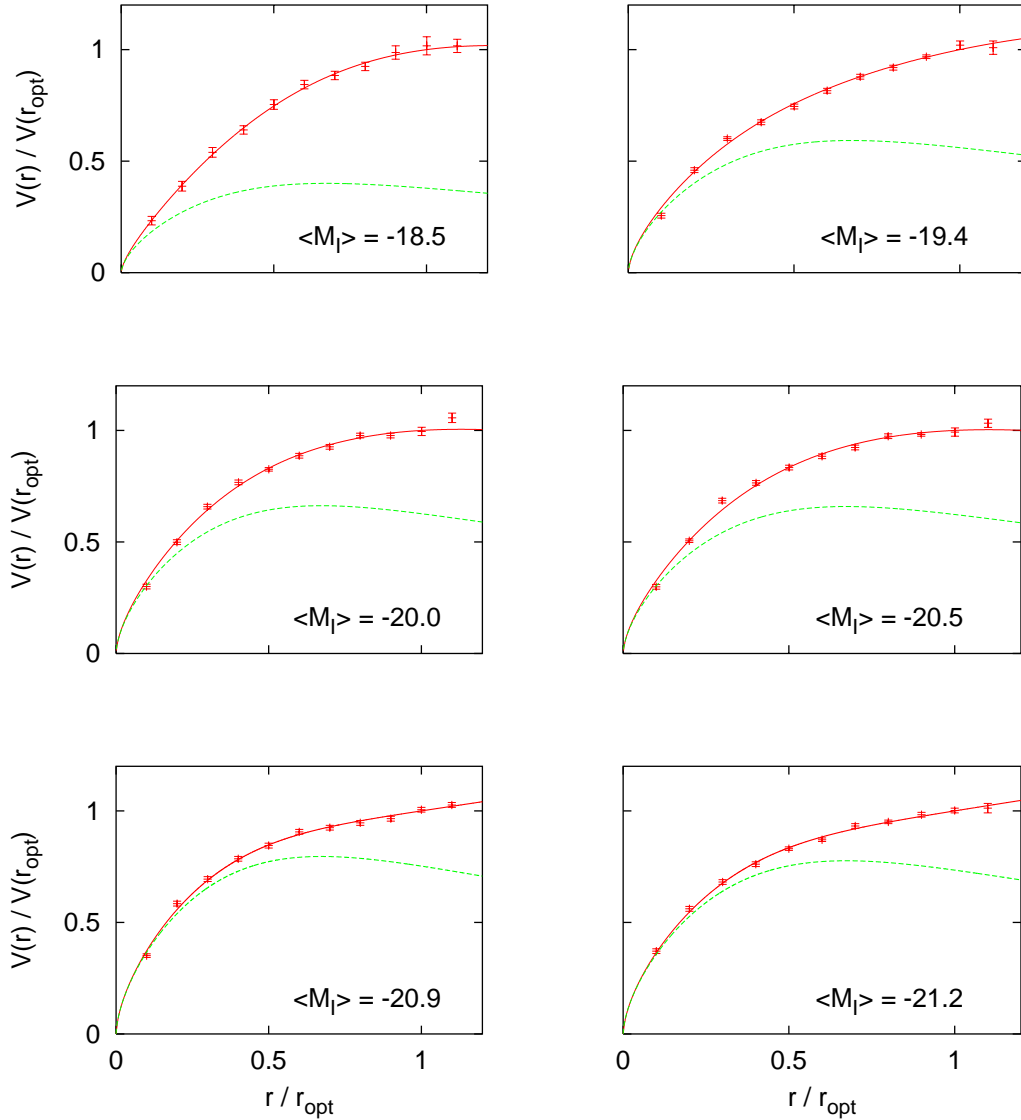


FIG. 5.3 – In each panel, the theoretical rotation curve corresponds to the $\{\alpha, \gamma\}$ configuration that provides the best fit to the data. The dashed lines shows the contribution of the disk, which increases with the galaxy magnitude as for usual CDM models.

of the χ^2 in terms of goodness-of-fit, because we do not know the exact meaning of the data error bars. A careful examination shows that the points are not distributed according to their very small errors, at least if the data

are to be explained by smooth curves – this is visible for instance with the third point in the $\langle M_I \rangle = -20.5$ case, which explains why the minimal χ^2 is only 29.4. Therefore, there is a hint either that the errors are slightly underestimated, or that the data feature small wiggles corresponding e.g. to spiral arms, that should enter into a better modelization of the disk density. Anyway, even with the given error bars, the χ^2 are already fairly good and our scalar halo model seems to fit universal rotation curves at least as well as the toy-model CDM halo used by PSS. We also note that for the last two cases, the minimum is strongly degenerate along a line ranging from $\alpha = 0$ to $\alpha = 0.5$. So, for the most luminous galaxies, the data provide only a lower bound on the halo size, while for the other cases a specific value is preferred. For each individual galaxy, one can restore the physical value of the rotation velocity by adjusting the free scaling parameter $\bar{\sigma}(0)$. The mass of the scalar field is given by

$$m^2 = \frac{\alpha^2 \gamma}{r_{\text{opt}}^2 \beta \mathcal{V}^2(r_{\text{opt}})} . \quad (5.64)$$

Here we defined the parameter $\beta = \mathcal{V}_{\text{disk}}^2(r_{\text{opt}})/\mathcal{V}^2(r_{\text{opt}})$, calculated by the code for each value of the relevant parameters $\{\alpha, \gamma\}$. Of course, our model can provide a powerful explanation for galactic rotation curves only if all galaxies can be fitted simultaneously with the same value of m , and therefore approximately the same angular velocity ω (in principle one could introduce a time-dependant effective mass, with slightly different values at large and small redshifts; however, since galaxy rotation curves have never been found to be redshift-dependant, we discard this possibility and assume that m is constant in space and time, at least on observable scales). In order to test this idea, it would be natural to use data from individual galaxies; but in doing so, one would face back the problems associated with large systematic uncertainties, which motivate the PSS approach. In a first step, we plot χ^2 as a function of $m r_{\text{opt}} \mathcal{V}(r_{\text{opt}})$ in Fig. 5.4 and remark that the faint galaxies have a preferred mass while the brighter ones in the two last panels provide only an upper bound. Then, we assume that each synthetic universal rotation curve is associated with a unique typical galaxy, with average optical radius and velocity. For each class of magnitude, we perform an average on the sub-sample given by PSS – see the tables in their Appendix D – and find respectively $\langle r_{\text{opt}} \mathcal{V}(r_{\text{opt}}) \rangle = 710, 1100, 1900, 2500, 3200$ and 4900 kpc km s⁻¹. Since we do not employ the raw 600 galaxy data, we cannot give an error on these numbers, nor can we make a precise prediction for the mass. However, plotting now the χ^2 as a function of m , we find that the first four classes are perfectly compatible with a mass $m \in [4 - 16] \times 10^{-24}$ eV while the two others push towards the lower-end of this interval with $m \in [4 - 8] \times 10^{-24}$ eV.

On Fig. 5.5, we plot the rotation curves obtained with $m = 6 \times 10^{-24}$ eV $\simeq 5 \times 10^{-52}$ M_P and minimized over γ . Although the χ^2 values are approximately 1.5 bigger than those of the independent best-fits of Fig. 5.3, the

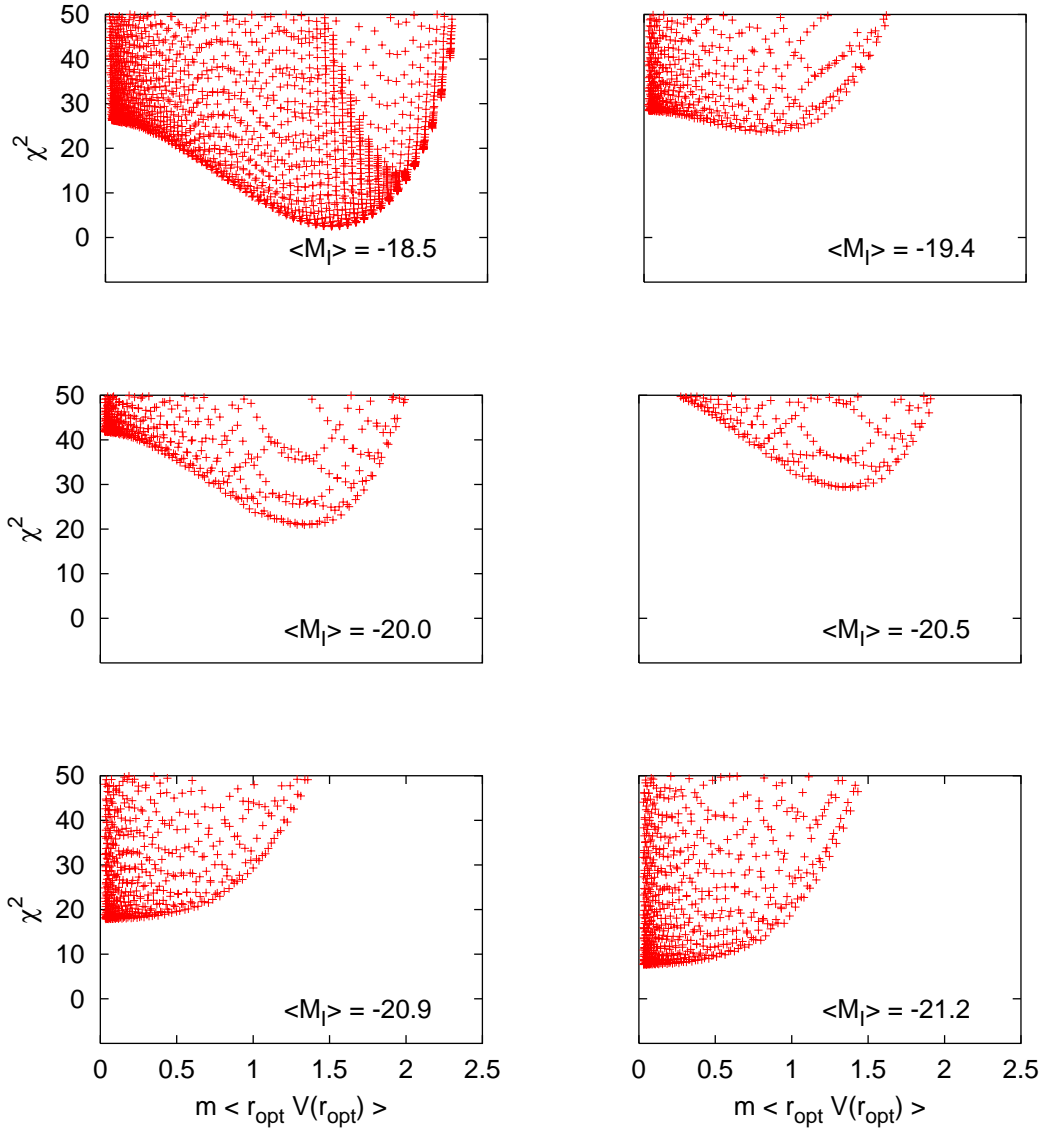


FIG. 5.4 – The constellation of $\{\alpha, \gamma\}$ configurations is featured in the plane $(m \langle r_{\text{opt}} \mathcal{V}_{\text{opt}} \rangle, \chi^2)$. Faint galaxies have a preferred mass while the brighter ones in the two last panels provide only an upper bound.

agreement with the data remains quite good. The effect of fixing the mass is to obtain more radical behaviors at r_{opt} : for light galaxies, the rotation curves are growing faster near the optical radius while for bright galaxies they are even flatter. On Fig. 5.6, we show that flat rotation curves can exist for $m = 6 \times 10^{-24}$ eV if the baryonic mass is important.

For all these models, the total mass is close to $M = 5 \times 10^{10} M_{\odot}$ whereas the ratio of the total radius over the optical radius – which respecti-

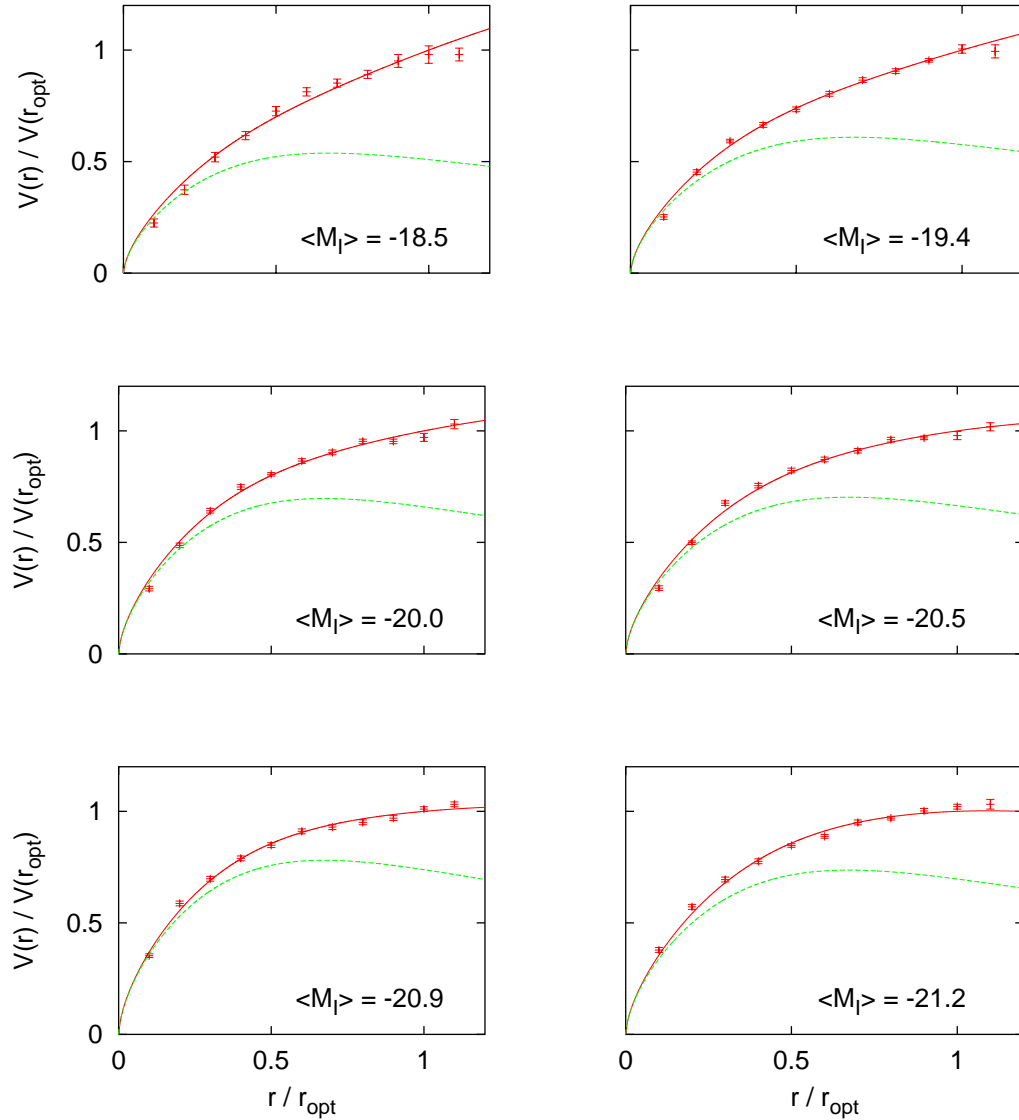


FIG. 5.5 – In each panel, the average value $\langle r_{\text{opt}} \mathcal{V}_{\text{opt}} \rangle$ over the corresponding spiral galaxies has been used to get the scalar field mass $m = \alpha\sqrt{\gamma}/(r_{\text{opt}} \mathcal{V}_{\text{opt}})$. The best fit configurations with a common value of the mass $m = 6 \times 10^{-24}$ eV are shown in solid lines, together with the observations. Again, the dashed line shows the contribution from the disk only.

vely encompass 83% of the total and luminous mass – varies between 4 for $\langle M_I \rangle = -18.5$ and 1.5 for $\langle M_I \rangle = -21.2$.

As the dwarf spiral galaxy DDO 154 is known to be essentially dominated by dark matter at all radii [22], it could be a reliable test for this model.

This galaxy is associated to $\langle r_{\text{opt}} \mathcal{V}(r_{\text{opt}}) \rangle \approx 75 \text{ kpc km s}^{-1}$. We have done the same way as precedently a χ^2 analysis on fits of its rotation curve (while neglecting the HI contribution), and it seems this is compatible with a mass $m \in [8 - 10] \times 10^{-24} \text{ eV}$. On Fig. 5.7, we have plotted the best fit for a value of the mass $m = 9 \times 10^{-24} \text{ eV}$. This value is slightly bigger than what we found before, but not very different.

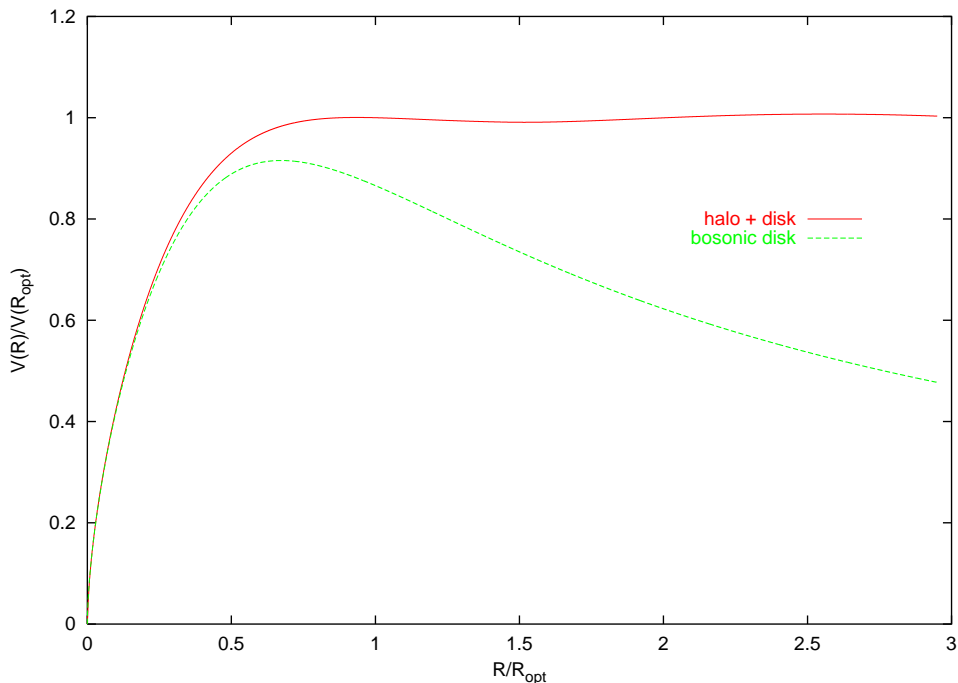


FIG. 5.6 – The possible flat rotation curve for a value of the mass $m = 6 \times 10^{-24} \text{ eV}$ is shown in solid lines, whereas the dashed line shows the contribution from the disk only.

5.5 Discussion and prospects.

In this work, we solved the Einstein and Klein–Gordon equations for a free massive scalar field, in presence of a baryonic disk. Using the universal curves of Persic, Salucci and Stel [13], which are based on hundreds of galaxies, and a prototypical galaxy like DDO 154 [22], we showed that a galactic halo consisting in such a Bose condensate could explain fairly well the rotation of low–luminosity spiral galaxies. A single value of the mass, of order $6 - 8 \times 10^{-24} \text{ eV}$, is compatible with galaxies of different magnitudes and sizes. The corresponding Compton wavelength $1/m \simeq 10^{-2} \text{ kpc}$ is three orders of magnitudes smaller than the typical size of spirals. Indeed, the spatial extension of a self–gravitating field Φ is given approximately by $1/(\sqrt{\Phi(0)} m)$,

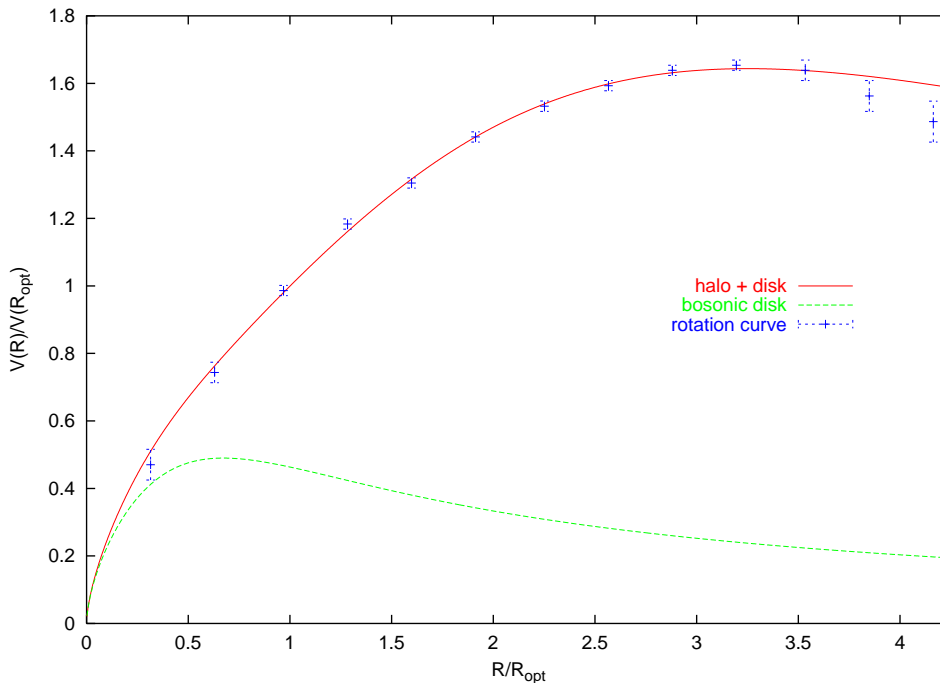


FIG. 5.7 – The best fit configuration of DDO 154 with a value of the mass $m = 9 \times 10^{-24}$ eV is shown in solid lines, together with the observations. Again, the dashed line shows the contribution from the disk only.

while the square root of the central field value (expressed in Planck units) is comparable with the velocity of orbiting particles (in units of c). Since we are dealing with speeds $\mathcal{V} \sim 100 \text{ km s}^{-1} \sim 10^{-3} c$, there is really a factor of 10^3 between the Compton wavelength and the size of the halo. Note that since $\omega \simeq m$, the light scalar field Φ rotates in its internal space with a period of ~ 30 yr.

We conclude that scalar fields could be a nice alternative to CDM halo models. Our positive results concerning the rotation curves are strengthened by other astrophysical considerations. First, a scalar field solves naturally the dynamical friction issue for barred galaxies. Because it is completely smooth, such an extended field cannot slow down the spinning bars observed at the centers of many galaxies, as would a granular CDM medium. Second, following Hu, Barkana and Gruzinov [23], an ultra-light scalar field can avoid the excess of small-scale structure predicted by CDM simulations near the galactic center.

Of course, several improvements are needed before concluding that a scalar field is the best galactic dark matter candidate on the market. First, it is necessary to extend the comparison to various other types of individual galaxy rotation curves, with the drawback that more degrees of freedom

must be included in realistic modelizations of the baryonic components (gas, bulge, ...). This is however the only way to obtain better constraints on m , and to find out whether a quartic coupling, not considered in this analysis, improves the model. In some particular cases, it would be worth taking into account excited field configurations, which seem to be stable (due to charge conservation) and which predict ultra-flat rotation curves far from the core, with small wiggles that may have already been observed (see also the claim in [24] concerning possible existence of discrete dynamical classes for spiral galaxy disks). Also, in order to get a better view of the rotation curves in the vicinity of the core, especially for bright spiral galaxies, further technical ingredients must be passed to the equations, in order to distinguish the spherical symmetry of the halo from the quasi two-dimensional distribution of the stars.

Finally, it would be extremely interesting to plug such a complex light scalar field into a general cosmological framework, and study into details the growth of linear perturbations and the formation of non-linear structures. The pioneering discussions on such cosmological scenarios [23, 25] are very promising and suggest that many interesting developments on scalar field dark matter should arise in the next years.

Acknowledgements

We would like to thank R. Taillet and J.-P. Uzan for useful discussions.

Bibliographie

- [1] A. T. Lee et al., “A High Spatial Resolution Analysis of the MAXIMA-1 Cosmic Microwave Background Anisotropy Data”, *The Astrophysical Journal* 561 (2001), L1-L6.
- C. B. Netterfield et al., “A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background”, *The Astrophysical Journal* 571 (2002), 604-614.
- N. W. Halverson et al., “DASI First Results : A Measurement of the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum”, *The Astrophysical Journal* 568 (2002), 38-45.
- C. Pryke, N. W. Halverson, E. M. Leitch, J. Kovac, J. E. Carlstrom, W. L. Holzapfel & M. Dragovan, “Cosmological Parameter Extraction from the First Season of Observations with DASI”, *The Astrophysical Journal* 568 (2002), 46-51.
- [2] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae”, *Astrophysical Journal* 517 (1999), 565.
- [3] R. R. Caldwell, R. Dave & P. J. Steinhardt, “Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State”, *Physical Review Letters* 80 (1998), 1582.
- E. J. Copeland, A. R. Liddle & D. Wands, “Exponential potentials and cosmological scaling solutions”, *Physical Review D* 57 (1998), 4686.
- A. R. Liddle & R. J. Scherrer, “A classification of scalar field potentials with cosmological scaling solutions”, *Physical Review D* 59 (1999), 023509.
- P. J. Peebles & A. Vilenkin, “Quintessential inflation”, *Physical Review D* 59 (1999), 063505.
- P. Binétruy, “Models of dynamical supersymmetry breaking and quintessence”, *Physical Review D* 60 (1999), 063502.
- P. J. Steinhardt, L. Wang & I. Zlatev, “Cosmological tracking solutions”, *Physical Review D* 59 (1999), 123504.
- P. Brax & J. Martin, “Quintessence and supergravity”, *Physics Letters B* 468 (1999), 40.

- A. Riazuelo & J. Uzan, “Quintessence and gravitational waves”, *Physical Review D* 62 (2000), 083506.
- T. Matos, F. S. Guzman & L. A. Urena-Lopez, “Scalar field as dark matter in the universe”, *Classical and Quantum Gravity* 17 (2000), 1707.
- T. Matos & L. A. Urena-Lopez, “A further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter”, *Physical Review D* 63 (2001), 063506.
- [4] S. Burles & D. Tytler, *The Astrophysical Journal* 499 (1998), 699 ; *The Astrophysical Journal* 507 (1998), 732.
- [5] B. Moore et al., *The Astrophysical Journal* 524 (1999), L19.
- [6] W. B. Lin, D. H. Huang, X. Zhang & R. Brandenberger, *Physical Review Letters* 86 (2001), 954.
- [7] D. N. Spergel & P. J. Steinhardt, “Observational evidence for self-interacting cold dark matter”, *Physical Review Letters* 84 (2000), 3760.
- [8] J. Goodman, astro-ph/0003018.
- [9] A. Riotto & I. Tkachev, “What if dark matter is bosonic and self-interacting”, *Physics Letters B* 484 (2000), 177.
- [10] T. Matos, F. S. Guzman & D. Nunez, “Spherical scalar field halo in galaxies”, *Physical Review D* 62 (2000), 061301.
- T. Matos & F. S. Guzman, “Scalar fields as dark matter in spiral galaxies”, *Classical and Quantum Gravity* 17 (2000), L9.
- F. S. Guzman, T. Matos & H. Villegas-Brena, “Scalar dark matter in spiral galaxies”, astro-ph/9811143.
- T. Matos, F. S. Guzman, L. A. Urena-Lopez & D. Nunez, “Scalar field dark matter”, astro-ph/0102419.
- [11] F. E. Schunck, “A scalar field matter model for dark halos of galaxies and gravitational redshift”, astro-ph/9802258.
- [12] U. Nucamendi, M. Salgado & D. Sudarsky, “An alternative approach to the galactic dark matter problem”, *Physical Review D* 63 (2001), 125016.
- [13] M. Persic, P. Salucci & F. Stel, “The Universal Rotation Curve Of Spiral Galaxies : 1. The Dark Matter Connection”, *MNRAS* 281 (1986), 27.
- [14] V. Sahni & L. Wang, *Physical Review D* 62 (2000), 103517.
- [15] R. Ruffini & S. Bonazzola, “Systems Of Self-Gravitating Particles In General Relativity And The Concept Of An Equation Of State”, *Physical Review* 187 (1969), 1767.
- [16] R. Friedberg, T. D. Lee & Y. Pang, “Mini-Soliton Stars”, *Physical Review D* 35 (1987), 3640.
- [17] P. Jetzer, “Boson stars”, *Physics Reports* 220 (1992), 163.

- [18] A. R. Liddle & M. S. Madsen, “The Structure and formation of boson stars”, *International Journal of Modern Physics D1* (1992), 101.
- [19] S. Weinberg, “*Gravitation and Cosmology*”, Wiley, New York (1972).
- [20] J. F. Navarro, C. S. Frenk & S. D. M. White, *The Astrophysical Journal* 462 (1996), 563.
- [21] J. Balakrishna, E. Seidel & W. Suen, “Dynamical evolution of boson stars. II : Excited states and self-interacting fields”, *Physical Review D58* (1998), 104004.
- [22] C. Carignan & C. Purton, “The “Total” Mass of DDO 154”, *The Astrophysical Journal* 506 (1998), 125-134.
G. Hoffman, E. E. Salpeter & N. J. Carle, “The Fine Structure and Outskirts of DDO 154”, astro-ph/0107484.
- [23] W. Hu, R. Barkana & A. Gruzinov, “Fuzzy cold dark matter : The wave properties of ultralight particles”, *Physical Review Letters* 85 (2000), 1158.
- [24] D. F. Roscoe, “Discrete dynamical classes for galaxy discs and the implication of a second generation of Tully–Fisher methods”, *Astronomy and Astrophysics* 385 (2002), 431-453.
- [25] L. A. Boyle, R. R. Caldwell & M. Kamionkowski, “Spintessence! New models for dark matter and dark energy”, *Physics Letters B545* (2002), 17-22.

Chapitre 6

Contraintes Cosmologiques

Nous venons de voir qu'un champ scalaire complexe chargé dans $U(1)$, massif et sans interaction, est capable d'expliquer la forme des courbes de rotation universelles de M. Persic, P. Salucci et F. Stel et de la courbe de rotation de DDO 154. Pour continuer notre approche de la matière noire à base de champs scalaires, nous allons maintenant étudier son comportement cosmologique. Comme nous avons trouvé dans le chapitre précédent qu'un tel champ est vraiment très léger en comparaison des échelles de masse de la physique des particules, il peut être intéressant d'utiliser des potentiels plus complexes que le simple potentiel quadratique, avec l'espoir d'obtenir des masses plus importantes. Nous allons donc étudier en parallèle le cas d'un potentiel quartique, finalement bien proche du champ quadratique dans la limite où l'auto-interaction du champ est faible.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la question suivante : se peut-il que des champs scalaires complexes chargés dans $U(1)$ et associés à des potentiels quartiques ou quadratiques, puissent se comporter cosmologiquement comme de la matière noire ?

Pour répondre à cette question, nous avons conduit l'étude d'un modèle cosmologique dans l'article que j'ai réalisé en collaboration avec Julien Lesgourgues et Pierre Salati, et qui a été publié dans la revue "Physical Review D 65, 083514" du 3 avril 2002.

Pour ce faire, après une introduction générale sur le problème de la matière noire, nous allons tout d'abord rappeler les résultats obtenus au chapitre précédent. Nous verrons alors dans une étude sommaire, qu'un champ scalaire associé à un potentiel quartique doit être capable de former des structures de la taille des galaxies tout en gardant une masse proche de celles de la physique des particules. On pourra consulter le chapitre 7 pour une étude plus précise de ce cas.

Nous avons considéré un modèle d'univers homogène et isotrope du type

Friedmann-Lemaître contenant uniquement de la radiation et un champ scalaire complexe avec rotation interne. Il serait néanmoins facile d'y ajouter la contribution de la matière baryonique, qui n'a qu'une faible influence sur les résultats obtenus. Après avoir écrit les équations de la gravitation et du champ scalaire dans le cas d'un potentiel quadratique ou quartique, nous trouverons des solutions approximatives analytiques, puis des solutions numériques plus exactes. A ce propos, il a été nécessaire de mettre au point des techniques d'intégration à pas adaptatif, qui soient véritablement capables de suivre l'évolution précise du champ. En effet, comme nous le verrons plus loin, le champ suivra des phases oscillatoires avec des amplitudes et des périodes de plus en plus réduites. Une intégration directe des équations aurait alors nivelé ces oscillations, conduisant à des solutions erronées. Les pas adaptatifs permettent donc à l'intégration de s'adapter naturellement à la taille des oscillations.

Dans la suite, nous verrons alors qu'un champ associé à un potentiel quadratique va dans un premier temps être dominé par la radiation : l'énergie cinétique domine les équations et le champ va alors avoir une densité évoluant en a^{-6} , a étant le paramètre d'échelle. Ensuite, après une période de transition où sa densité va rester constante, le champ va avoir des équations dominées par le potentiel et va alors se comporter comme de la matière, devenant au bout d'un certain temps dominant par rapport à la radiation. Si l'on compare cette évolution aux observations actuelles, un tel champ semble pouvoir exister en tant que matière noire.

Pour un potentiel quartique, le comportement du champ scalaire est différent : alors que la radiation domine, la densité de champ va suivre des équations dominées par le terme quartique, et va osciller de plus en plus rapidement : le champ va alors se comporter comme de la radiation. Après cette phase, la partie quadratique du potentiel va dominer, et on va alors trouver, de la même manière que pour un potentiel purement quadratique, que le champ va se comporter dès lors comme de la matière noire. Nous verrons aussi que le moment de la transition radiation-matière est lié à la valeur de la masse et de la constante d'auto-interaction du champ.

Au final, dans les deux cas, les comportements cosmologiques de ces champs scalaires sont satisfaisants. Nous mettrons malgré tout à jour différents problèmes : pour le potentiel quadratique, à cause de la conservation de la charge associée au champ scalaire, il semble impossible que les galaxies aient toutes des charges de même signe et que dans l'Univers primordial il en soit de même. Une réponse à ce problème pourrait être de considérer un scénario contraire, avec des galaxies de charges opposées et un univers primordial rempli avec un champ scalaire associé à des charges différentes, mais il faudrait alors répondre à la question de la formation des structures

bosoniques et des effets de l'interaction entre deux galaxies de charges opposées. Le potentiel quartique n'est pas soumis à ces problèmes, car dans ce cas, la masse étant beaucoup plus grande, les densités en jeu sont bien plus faibles. Néanmoins, ce champ va se comporter dans un premier temps comme de la radiation. Il se confond donc avec les neutrinos, et, à ce titre, réagit comme une ou plusieurs familles supplémentaires de neutrinos. Une rapide étude des contraintes données par la taille des halos galactiques montrera qu'un champ scalaire soumis à un potentiel quartique est associé à cinq familles effectives de neutrinos supplémentaires, alors que la comparaison de l'abondance d'hélium 4 dans l'Univers avec les prédictions des modèles de nucléosynthèse primordiale impose comme contrainte que le nombre de familles de neutrinos supplémentaires soit inférieur à un. Nous verrons cependant dans le chapitre suivant qu'une étude plus détaillée donne des résultats moins problématiques.

Nous allons maintenant rentrer dans les détails de cette étude cosmologique, en nous intéressant à une version peu modifiée de l'article précédemment cité.

Cosmological Constraints on Quintessential Halos

Alexandre Arbey^{a,b} ¹, Julien Lesgourgues^{c,a} and Pierre Salati^{a,b}

a) Laboratoire de Physique Théorique LAPTH
B.P. 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex

b) Université de Savoie
B.P. 1104, F-73011 Chambéry Cedex

c) Theoretical Physics Division, CERN
CH-1211 Genève 23, Switzerland

6 February 2002

A complex scalar field has recently been suggested to bind galaxies and flatten the rotation curves of spirals. Its cosmological behavior is thoroughly investigated here.

Such a field is shown to be a potential candidate for the cosmological dark matter that fills up a fraction $\Omega_{\text{cdm}} \sim 0.3$ of the Universe.

However, problems arise when the limits from galactic dynamics and some cosmological constraints are taken simultaneously into account.

A free complex field, associated to a very small mass $m \sim 10^{-23}$ eV, has a correct cosmological behavior in the early Universe, but behaves today mostly as a real axion, with a problematic value of its conserved quantum number.

On the other hand, an interacting field with quartic coupling $\lambda \sim 0.1$ has a more realistic mass $m \sim 1$ eV and carries a quantum number close to the photon number density. Unlike a free field, it would be spinning today in the complex plane – like the so-called “spintessence”. Unfortunately, the cosmological evolution of such field in the early Universe is hardly compatible with constraints from nucleosynthesis and structure formation.

6.1 Introduction

The observations of the Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies [1], combined either with the determination of the relation between the distance of luminosity and the redshift of supernovae SNeIa [2], or with the large scale structure (LSS) information from galaxy and cluster

¹E-mail : arbey@lapp.in2p3.fr, lesgourg@lapp.in2p3.fr, salati@lapp.in2p3.fr

surveys [3], give independent evidence for a dark matter density in the range $\Omega_{\text{cdm}} h^2 = 0.13 \pm 0.05$ [1], to be compared to a baryon density of $\Omega_{\text{b}} h^2 = 0.019 \pm 0.002$ as indicated by nucleosynthesis [4] and the relative heights of the first acoustic peaks in the CMB data. The nature of that component is still unresolved insofar. The favorite candidate for the non-baryonic dark matter is a weakly-interacting massive particle (WIMP). The so-called neutralino naturally arises in the framework of supersymmetric theories. Depending on the numerous parameters of the model, its relic abundance Ω_{cdm} falls in the ballpark of the measured value. New experimental techniques have been developed in the past decade to detect these evading species. However, detailed numerical simulations have recently pointed to a few problems related to the extreme weakness with which that form of matter interacts. Neutralinos tend naturally to collapse in numerous and highly packed clumps [5] that are not seen – see however [6]. The halo of the Milky Way should contain \sim half a thousand satellites with mass in excess of $10^8 M_{\odot}$ while a dozen only of dwarf-spheroidals are seen. The clumps would also heat and eventually shred the galactic ridge. More generally, this process would lead to the destruction of the disks of spirals. A neutralino cusp would form at their centers. This is not supported by the rotation curves of low-surface-brightness galaxies that indicate on the contrary the presence of a core with constant density. Finally, two-body interactions with halo neutralinos and its associated dynamical friction would rapidly slow down the otherwise observed spinning bars at the center of spirals like M31.

New candidates for the astronomical dark matter are therefore under scrutiny such as warm dark matter [7], particles with self interactions [8], or non-thermally produced WIMPs [9]. An exciting possibility would be to have a common explanation for both the dark energy Ω_{Λ} and the dark matter Ω_{cdm} components of the Universe. Before trying to reach such an ambitious goal², one could explore the relevance of scalar fields to the cosmological and galactic dark matter puzzles, as was done for dark energy with the so-called “quintessence” models [11]. The archetypal example of quintessence is a neutral scalar field φ with Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - V(\varphi) \quad . \quad (6.1)$$

Should the field be homogeneous, its cosmological energy density would be expressed as

$$\rho_{\varphi} \equiv T^0_0 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \quad , \quad (6.2)$$

whereas the pressure would obtain from $T_{ij} \equiv -g_{ij} P$ so that

$$P_{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) \quad . \quad (6.3)$$

²a possible direction for using a quintessence field as dark matter was proposed in [10].

If the kinetic term $\dot{\varphi}^2/2$ is small with respect to the contribution from the potential $V(\varphi)$, the equation of state can match the condition for driving accelerated expansion in the Universe, $\omega_Q \equiv P_\varphi/\rho_\varphi < -1/3$. Instead, in order to behave as dark matter today, the field should be pressureless: $|P_\varphi| \ll \rho_\varphi$. So, the kinetic and potential energies should cancel out in Eq. (6.3), a condition automatically fulfilled by a quickly oscillating scalar field averaged over one period of oscillation. This well-known setup is that of the cosmological axion. It requires a quadratic scalar potential, so that the kinetic and potential energies both redshift as $\varphi^2 \propto a^{-3}$ with the Universe expansion and cancel out at any time during the field dominated stage, which is then equivalent to the usual matter dominated one.

Axions – or more generally, bosonic dark matter – were revived recently due to the undergoing CDM crisis. For instance, it was noticed in [12] that structure formation on small scales can be forbidden by quantum mechanics, for wavelengths smaller than the Compton wavelength – i.e., the minimal spreading of an individual boson wave function. The latter matches the scale of galactic substructures for an ultra-light mass of order $m \sim 10^{-22}$ eV. Alternatively, one may introduce a self-coupling term [13, 8]. As we have seen, the existence of a matter-like dominated stage requires that the contribution of non-quadratic terms to the potential energy remains subdominant. Nevertheless, a self-coupling would modify the field behavior in the early Universe, as well as its clustering properties today in regions where the field is overdense – exactly like for boson stars, which are crucially affected by the presence of a self-coupling [15]. The self-coupling is also relevant for the issue of field clumps stability, and can explain why dwarf and low-surface-brightness galaxies have cores with finite density [16].

A remarkable feature with bosonic dark matter is the possibility to form Bose condensates, i.e., large domains where the field is coherent in phase and is in equilibrium inside its own gravitational potential – like boson stars – or in that of an external baryonic matter distribution. This opens the possibility to have a very simple and elegant model for galactic halos, in which rotation curves would follow from simple equations – essentially the Klein-Gordon wave equation, which governs classical scalar fields as well as Bose condensates. This situation strongly differs from the more conventional picture of a gas of individual particles – fermions or heavy bosons – for which gravitational clustering does not lead to universal density profiles and where the shape of galactic halos can only be studied through technically difficult N -body simulations.

The formation and stability of such condensates is a complicated issue – see e.g. [19, 20, 21] – even when the field is complex and has a global charge – not to be understood as an electric charge, but as a conserved number of quanta like the baryon or lepton number. For instance, a large condensate can be unstable under fragmentation into smaller clumps. For a real scalar field

with no conserved charge, the issue of stability is even more subtle since the field can self-annihilate, especially when the condensate core density exceeds a critical value [19]. This property can improve the agreement with observations [16], since the coupling constant will tune the upper limit on the density of dark matter cusps at the center of galaxies. However, such a positive feature is far from excluding models with a conserved charge. In fact, the issue of Bose condensation on galactic scales – in an expanding Universe – has never been studied in details. The result would depend very much on the scalar potential, and it is difficult to guess what would be the maximal core density today.

In this work, we will focus on the scenario with a conserved charge, and assume that dark matter consists in a complex scalar field with a quasi-homogeneous density in the early Universe, producing later galactic halos through Bose-condensation. The Lagrangian density reads

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - V(\phi) . \quad (6.4)$$

Throughout this analysis, we will focus on the potential

$$V = m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda \left\{ \phi^\dagger \phi \right\}^2 . \quad (6.5)$$

As a prologue to the study of density perturbations, we will follow the evolution of the homogeneous cosmological background of this field, taking into account the constraints on the scalar potential coming from galactic halos. In a previous work [17], we did a detailed comparison of such halos with universal galactic rotation curves [23], for a massive complex scalar field. We recall the salient features of this analysis in section 6.2 and discuss how the corresponding constraint on the mass m is modified when a self-interaction coupling λ is introduced. In the subsequent section 6.3, we study how this scenario can be implemented cosmologically. Neglecting the spatial variations of ϕ , we are led to the cosmological density

$$\rho_\phi = \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + V(\phi) \quad (6.6)$$

and pressure

$$P_\phi = \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - V(\phi) . \quad (6.7)$$

Beside the issue of charge conservation, the case for a complex scalar field is somewhat richer than that of a real (neutral) scalar field. In one limit, the complex field can behave as an effective real one, similar to the usual axion. On the other hand, it can be spinning in the complex plane with slowly-varying modulus, like in the so-called spintessence [18] scenario. This depends on the dominant term in the kinetic energy, which can be either radial and oscillating, or orthoradial and slowly varying. As a result, during the field dominated era, the spintessence would have a continuously vanishing pressure, while the axion pressure would oscillate between $+\rho_\phi$ and

$-\rho_\phi$. Finally, in section 6.4, we discuss our results and feature the problems that plague the axion–spintessence dark matter scenario. We will suggest some future directions worth being investigated.

6.2 Galactic halos

We are interested in galactic halos consisting in self-gravitating scalar field configurations – which can be seen as Bose–Einstein condensates spanning over very large scales. Since the typical velocities observed in galaxies do not exceed a few hundreds of km.s^{-1} , it is enough to study the quasi-Newtonian limit where the deviations from the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ are accounted for by the vanishingly small perturbation $h_{\mu\nu}$. Inside galaxies, the latter is of order the gravitational potential

$$h_{\mu\nu} \sim \Phi \sim V_C^2 \quad , \quad (6.8)$$

where V_C is the rotation velocity – in the case of spirals – and where $\sqrt{2} V_C$ is the escape velocity from the system. In the harmonic coordinate gauge where it satisfies the condition

$$\partial_\alpha h_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \partial_\mu h_\alpha^\alpha = 0 \quad , \quad (6.9)$$

the perturbation $h_{\mu\nu}$ is related to the source tensor

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_\alpha^\alpha \quad (6.10)$$

through

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi \mathcal{G} S_{\mu\nu} \quad . \quad (6.11)$$

The Poisson equation reads like

$$\Delta\Phi = 8\pi \mathcal{G} S_{00} \quad , \quad (6.12)$$

where $\Phi = h_{00}/2$ is the Newtonian potential. For pressureless matter, $2 S_{00} = T_{00} = \rho$. On the other hand, for the complex scalar field, the gravitational potential is sourced by the effective mass density

$$\frac{\rho_\phi^{\text{eff}}}{2} \equiv S_{00} = \left\{ 2 \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - V(\phi) \right\} \quad (6.13)$$

which is a priori different from its cosmological counterpart (6.6). So, inside a galactic halo, the gravitational potential is given by

$$\Delta\Phi = 4\pi \mathcal{G} \left(\rho_\phi^{\text{eff}} + \rho_b \right) \quad , \quad (6.14)$$

where ρ_b is the distribution of baryonic matter forming the various galactic components – stellar disk, bar, bulge... In first approximation, the galaxy

can be seen as spherically symmetric. In that case, one shows [22] that all stable field configurations must be in the form

$$\phi(r, t) = \frac{\sigma(r)}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \quad (6.15)$$

where the amplitude σ depends only on the radius r . Then, the effective field density reads like

$$\rho_{\phi}^{\text{eff}} = \left\{ 2\omega^2 \sigma^2 - m^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} \lambda \sigma^4 \right\} . \quad (6.16)$$

The radial distribution of the field $\sigma(r)$ and the gravitational potential $\Phi(r)$ are given by a system of two coupled equations : the Poisson equation (6.14) and the Klein–Gordon equation. The latter may be expressed as

$$e^{-2v} \left\{ \sigma'' + \left(u' + v' + \frac{2}{r} \right) \sigma' \right\} + \omega^2 e^{-2u} \sigma - m^2 \sigma - \lambda \sigma^3 = 0 \quad (6.17)$$

in the isotropic metric where

$$d\tau^2 = e^{2u} dt^2 - e^{2v} \{ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \} . \quad (6.18)$$

The prime denotes the derivative with respect to the radius r . The Newtonian approximation corresponds to

$$u \simeq -v \simeq \Phi . \quad (6.19)$$

Relation (6.17) simplifies into

$$\Delta \sigma + (1 - 4\Phi) \omega^2 \sigma - (1 - 2\Phi) (m^2 \sigma + \lambda \sigma^3) = 0 . \quad (6.20)$$

For each value of the parameters (m, λ, ω) and a given baryon distribution, these equations form an eigenvalue problem with discrete solutions, labelled either by the central value $\sigma_0 > 0$ or by the number of nodes n in which $\sigma(r) = 0$. The lowest energy state – which is not identically null due to charge conservation – has $n = 0$. The self-consistency of the Newtonian limit requires $|\Phi| \ll 1$. Such solutions exist only for

$$0 < (m^2 - \omega^2) \ll m^2 . \quad (6.21)$$

6.2.1 Free field

In [17], we solved these equations for $\lambda = 0$. We found that halos consisting in the fundamental configuration of a free scalar field fit perfectly well the universal rotation curves of low-luminosity spiral galaxies [23]. These data has three advantages for our purpose : the robustness of the points and error bars – obtained by averaging over many galaxies –, the good determination

of the baryon distribution – solely a stellar disk with exponential luminosity profile – and the low baryon contribution which justifies the approximation of spherical symmetry.

With a quadratic potential, the size of the halo is given by

$$l \sim \sqrt{\frac{M_P}{\sigma_0} \frac{\hbar}{m c}} , \quad (6.22)$$

where we neglected the dependence on the baryon density. If the central field value σ_0 is significantly smaller than the Planck mass, the coherence length of the condensate exceeds the Compton wavelength of an individual particle – $l_{\text{compton}} = \hbar/(m c)$ – but it is clear that only an ultra-light scalar field can condensate on distances of order 10 kpc. The typical orbiting velocity in such a halo is given by $v/c \sim \sqrt{\sigma_0/M_P}$. Therefore, requiring $v \sim 100 \text{ km.s}^{-1}$ and $l \sim 10 \text{ kpc}$ fixes σ_0 around $10^{-6} M_P$ and m around 10^{-23} eV , as confirmed by a detailed fitting to the data [17].

Since the distribution of such halos only depends on the free parameters σ_0 and m – where we impose a unique value of m for all galaxies – we believe that their success in reproducing universal rotation curves is a significant argument in favor of this model. On the other hand, the existence of such a low mass, even if not strictly forbidden by fundamental principles, is very unlikely due to unavoidable radiative corrections. This could motivate a systematic investigation of other potentials for the scalar field. The next level of complexity would consist in adding a quartic self-coupling.

6.2.2 Quartic self-coupling λ

As is well known for boson stars – which are exactly identical to our halos in the absence of a baryon component – the inclusion of a quartic term drastically modifies the mass m and the extension of the condensate, even when it contributes to a negligible fraction of the central energy density [15, 18]. This is so because $\lambda \sigma^2$ can be very small with respect to $m^2 \simeq \omega^2$ and yet comparable to the difference $(m^2 - \omega^2)$ that appears in the Klein-Gordon equation. In the limit where $\Lambda \equiv \lambda/(4\pi \mathcal{G} m^2) \gg 1$ and in the absence of a baryon population, we can even give an exact analytic solution for the field and for the orbiting velocity of test particles :

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left\{ \frac{\sin \left(m \sqrt{2/\Lambda} r \right)}{m \sqrt{2/\Lambda} r} \right\}^{1/2} , \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{v(r)}{c} &= r \Phi'(r) \\ &= 2\pi \Lambda \frac{\sigma_0^2}{M_P^2} \left\{ \frac{\sin \left(m \sqrt{2/\Lambda} r \right)}{m \sqrt{2/\Lambda} r} - \cos \left(m \sqrt{2/\Lambda} r \right) \right\} , \end{aligned} \quad (6.24)$$

with the requirement that

$$\Lambda^{-1} \ll \frac{\sigma_0}{M_P} \ll \Lambda^{-1/2} . \quad (6.25)$$

Because $\sigma_0/M_P \sim (v/c)/\sqrt{\Lambda}$, the second inequality follows from the Newtonian self-consistency condition $|\Phi| \sim v^2 \ll 1$. The first inequality translates into $\Lambda \gg (c/v)^2$. It implies that all the field spatial derivatives can be neglected in Eq. (6.20) and sets the maximal radius up to which the analytic solution is valid. This maximal radius is at most equal to half a period so that $r \leq \sqrt{\Lambda/2}(\pi/m)$. That bound is almost saturated for $\Lambda \rightarrow \infty$. Note that ω does not appear in the analytic solutions because it is only relevant at larger radii. However, the Newtonian self-consistency condition imposes that $1 - \omega^2/m^2 \ll 1$.

The field behavior (6.23) may be readily recovered by neglecting the spatial derivatives of σ in the Klein–Gordon equation (6.20) so that

$$\sigma^2(r) \simeq \frac{m^2}{\lambda} \left\{ \frac{\Omega^2}{B} - 1 \right\} , \quad (6.26)$$

where $B(r) = 1 + 2\Phi(r)$ and $\Omega = \omega/m$. In the Newtonian limit, the pressure (6.7) reads like

$$P_\phi \equiv \mathcal{L} \simeq \frac{m^4}{4\lambda} \left\{ \frac{\Omega^2}{B} - 1 \right\}^2 , \quad (6.27)$$

whilst the effective mass density (6.16) of the Bose–condensate is

$$\rho_\phi^{\text{eff}} \simeq m^2 \sigma^2 \simeq \frac{m^4}{\lambda} \left\{ \frac{\Omega^2}{B} - 1 \right\} . \quad (6.28)$$

Both are related through the Lane–Emden polytropic equation of state

$$P_\phi = K \rho_\phi^{\text{eff}1 + 1/n} , \quad (6.29)$$

with $K = \lambda/(4m^4)$ while the polytropic index is $n = 1$. For such a value, the gravitating system – in hydrostatic equilibrium – is shown to have a constant core radius $r_c = \pi a$ where

$$a^2 = \frac{1}{8\pi\mathcal{G}} \frac{\lambda}{m^4} . \quad (6.30)$$

The field and density profiles are functions of the reduced radius $z = r/a$

$$\frac{\rho_\phi'(r)}{\rho_\phi'(0)} = \frac{\sigma^2(r)}{\sigma_0^2} = \frac{\sin(z)}{z} . \quad (6.31)$$

The most striking feature in the large Λ limit is as follows : although the quartic term remains subdominant in the energy density – Eq. (6.25) implies that $\lambda\sigma^4 \ll m^2\sigma^2$ – the typical size of the system is very different from the free field case since now it reads like

$$l \sim \lambda^{1/2} M_P \hbar / (m^2 c) . \quad (6.32)$$

As the central field value does not appear in this expression, different halo sizes would just result from different baryon contributions to the density, which bring corrections to (6.32). The central field value σ_0 still determines the rotation curve amplitude. In the large Λ limit and in the absence of baryons, the maximal rotation speed is given exactly by

$$\frac{v_{\max}^2}{c^2} = 2.13 \pi \Lambda \frac{\sigma_0^2}{M_P^2} \quad \text{at} \quad r = 1.94 \Lambda^{1/2} / m . \quad (6.33)$$

In this paper, we will not extend our previous comparison with galactic rotation curves [17] to the case of a quartic self-coupling, leaving this for a future publication. We will just use relations (6.32) and (6.33) in order to find a rough order of magnitude estimate for λ/m^4 which has the best chance to provide a good fit to the data. In the next section, this constraint will be plugged into a cosmological dark matter scenario. By requiring that the rotation velocity peaks around 200 km.s⁻¹ at a typical radius of 10 kpc, we find

$$m \sim \lambda^{1/4} \text{ eV} \quad \text{and} \quad \sigma_0 \sim \Lambda^{-1/2} 10^{-3} M_P . \quad (6.34)$$

Taking for instance λ in the range $[1, 10^{-4}]$, we obtain a mass of order 0.1 to 1 eV, i.e., a few orders of magnitude larger than the expected neutrino masses. This gives $\Lambda \sim 10^{52}$ and $\sigma_0 \sim 0.1$ eV.

6.3 Cosmological dark matter

6.3.1 Matter-like behavior

A homogeneous complex scalar field with a quadratic potential is a perfect candidate for pressureless cold dark matter. Let us write the Klein–Gordon and Friedman equations for the field configuration

$$\phi(t) = \frac{\sigma(t)}{\sqrt{2}} e^{i\theta(t)} . \quad (6.35)$$

This amounts to

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \frac{d\sigma}{dt} + m^2\sigma + \lambda\sigma^3 - \omega^2\sigma = 0 , \quad (6.36)$$

$$\frac{d\omega}{dt}\sigma + \frac{3}{a} \frac{da}{dt}\omega\sigma + 2\omega \frac{d\sigma}{dt} = 0 , \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned}
3H^2 &= 3 \left(\frac{da}{a dt} \right)^2 \\
&= 8\pi \mathcal{G} \left[\rho_{\text{rad}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 + \omega^2 \sigma^2 + m^2 \sigma^2 + \frac{\lambda}{2} \sigma^4 \right\} \right] \quad (6.38)
\end{aligned}$$

where ρ_{rad} is the usual density of relativistic photons and neutrinos and $\omega = d\theta/dt$. The second equation implies the conservation of the charge per comoving volume $Q = \omega \sigma^2 a^3$. Therefore, we can rewrite the first equation as

$$\frac{d^2 \sigma}{dt^2} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \frac{d\sigma}{dt} + m^2 \sigma + \lambda \sigma^3 - \frac{Q^2}{\sigma^3 a^6} = 0 . \quad (6.39)$$

It is most convenient to use the dimensionless time and field variables :

$$\tilde{t} = mt , \quad \tilde{H} = H/m , \quad u = \sqrt{\frac{m}{Q}} a^{3/2} \sigma . \quad (6.40)$$

Then, the charge conservation implies $\omega u^2 = m$ and the Klein–Gordon equation reads like

$$\ddot{u} + \left\{ 1 - u^{-4} + \frac{\lambda Q}{a^3 m^3} u^2 - \frac{3}{2} \left(\dot{\tilde{H}} + \frac{3}{2} \tilde{H}^2 \right) \right\} u = 0 , \quad (6.41)$$

where the dot denotes a derivative with respect to \tilde{t} . When $\lambda \neq 0$, we see that the self-coupling term always dominates the mass term in the past, when $a \rightarrow 0$. However, we will first study the opposite case when the quartic term is zero or subdominant. If Eq. (6.41) is to be applied today, or in the late stage of evolution of the Universe, we can also neglect the contribution from the Universe expansion : today, one has $H_0 \sim 10^{-61} M_P$, many orders of magnitude below the values of m discussed in section 6.2. So, Eq. (6.41) reduces to

$$\ddot{u} + u - u^{-3} = 0 , \quad (6.42)$$

and describes some periodic oscillations in a static potential $V(u) \equiv (u^2 + u^{-2})/2$, with a minimum at $u_0 = 1$ corresponding to $\omega = m$. The field density reads

$$\rho_\phi = m Q E_u a^{-3} , \quad (6.43)$$

where $E_u \geq 1$ stands for the conserved energy $(\dot{u}^2 + u^2 + u^{-2})/2$. We conclude that in the late evolution of the Universe, as soon as m becomes bigger than H and $\lambda^{1/2} \sigma$, the homogeneous scalar field behaves exactly as a cosmological background of dark matter.

Let us provide further intuition on the physical meaning of the oscillations for the variable u . If $E_u \simeq 1$ and u is almost stable around one, then the

modulus slowly decreases as $\sigma \propto a^{-3/2}$, while the phase velocity is constant with $\omega = m$. The equation of state is that of pressureless matter :

$$w = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} \sim \frac{H^2}{m^2} \ll 1 . \quad (6.44)$$

Such a field, following a spiral trajectory, is a particular case of what was recently called spintessence [18]. On the other hand, when $E_u \gg 1$, u and ω strongly oscillates, but the trajectory of $u e^{i\theta(t)}$ is a fixed ellipse as can be seen from the exact analytic solution to Eq. (6.42) :

$$u = \left\{ (E_u^2 - 1)^{1/2} \sin(2\tilde{t} + \alpha) + E_u \right\}^{1/2} , \quad (6.45)$$

$$\theta(\tilde{t} = \pi) - \theta(0) = \int_0^\pi \frac{\pi}{m} \tilde{\omega}(t) dt = \int_0^\pi u^{-2} d\tilde{t} = \pi .$$

The integral of the phase over one period of oscillation obtains from Gradshcheyn and Ryzhik, (3.661.4). So, the field ϕ follows an ellipse which axes decrease as $a^{-3/2}$. In the large E_u limit, the ellipse is squeezed and reduces asymptotically to a line. Then, the complex field is essentially similar to a real oscillating field, like in usual axionic dark matter models. The pressure does not vanish identically, but quickly oscillates between $+\rho_\phi$ and $-\rho_\phi$, with zero average over one period $\Delta t = \pi/m$. This period is much smaller than H^{-1} : on cosmological scales, the field still has the same effect as pressureless matter.

6.3.2 radiation domination : the $\lambda = 0$ case

In the $\lambda = 0$ case, we know that the mass should be of order $m \sim 10^{-23}$ eV, ten orders of magnitude above the present value of the Hubble parameter. It is easy to show that H will start to dominate over the mass at a redshift of order 6×10^5 . Therefore, the previous analytic solutions (6.43) and (6.45) only apply to the end of the radiation dominated stage. During radiation domination, the Klein–Gordon equation (6.41) simplifies into

$$\ddot{u} + u + \frac{3}{4} \tilde{H}^2 u - u^{-3} = 0 . \quad (6.46)$$

When $H \gg m$ – i.e., $\tilde{H} \gg 1$ – the term u can be neglected in the above equation. We then obtain a simple non-linear equation for the variable $v = a^{-1/2} u$

$$v'' - \frac{1}{v^3} = 0 , \quad (6.47)$$

where the prime denotes derivation with respect to conformal time $d\tilde{t} = a d\tau$. There is an exact solution :

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{m}} \frac{v}{a} = \left\{ C_1 + \frac{C_2}{a} + \frac{C_3}{a^2} \right\}^{1/2} . \quad (6.48)$$

Only two of the three constants (C_1 , C_2 , C_3) are independent since

$$C_1 C_3 = \frac{C_2^2}{4} + \frac{Q^2}{(a^2 H)^2} . \quad (6.49)$$

Remember that $a^2 H$ is also constant during radiation domination. The free parameters (C_1 , C_2) can be conveniently expressed as a function of the initial conditions for the field at some initial time t_i :

$$C_1 = \sigma_i^2 + \frac{2\sigma_i(d\sigma/dt)_i}{H_i} + \frac{(d\sigma/dt)_i^2}{H_i^2} + \frac{\omega_i^2 \sigma_i^2}{H_i^2} , \quad (6.50)$$

$$C_2 = -2a_i \left\{ \frac{\sigma_i(d\sigma/dt)_i}{H_i} + \frac{(d\sigma/dt)_i^2}{H_i^2} + \frac{\omega_i^2 \sigma_i^2}{H_i^2} \right\} . \quad (6.51)$$

These results show that σ quickly stabilizes at a value $\sqrt{C_1}$. During radiation domination, the field energy density reads like :

$$\rho_\phi = \frac{(a^2 H)^2 C_3}{2 a^6} + \frac{m^2}{2} \left\{ C_1 + \frac{C_2}{a} + \frac{C_3}{a^2} \right\} . \quad (6.52)$$

Interestingly, we see that after some time the energy can be dominated by the contribution of the mass term, even if the latter can be neglected in the Klein–Gordon equation.

We now understand what the generic evolution looks like, starting from an early time – say, for instance, at the end of reheating – at which the field density is smaller than the radiation density : first, ρ_ϕ decays as a^{-6} ; then, it stabilizes around the value $m^2 C_1/2$, and remains constant as long as $H > m$; finally, when $H < m$, the density decays as that of pressureless matter, takes over the radiation density, and drives the matter–like dominated stage. Such a scenario requires a single constraint : the constant value of the field density during radiation domination should be matched with the matter density extrapolated from today back to the time t_* at which $H = m$:

$$\frac{m^2}{2} C_1 = \Omega_{\text{cdm}} \rho_c^0 \left(\frac{a_0}{a_*} \right)^3 \quad \Rightarrow \quad C_1 \sim 7 \times 10^{-4} M_P^2 . \quad (6.53)$$

The scenario is enough constrained to reach another conclusion : when the field density decays as matter, its dynamics is that of an effective oscillating real scalar field and not that of spintessence. Indeed, as soon as the density becomes constant during radiation domination, one has

$$\frac{(a^2 H)^2 C_3}{2 a^6} \ll \frac{m^2}{2} C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q^2}{a^6} \ll m^2 C_1^2 . \quad (6.54)$$

On the other hand, a crude matching between the two expressions for the energy density (6.43) and (6.52) at the time when $H = m$ gives :

$$m Q E_u a^{-3} \sim m^2 C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q^2}{a^6} E_u^2 \sim m^2 C_1^2 . \quad (6.55)$$

By combining Eq. (6.54) and (6.55), we find that $E_u^2 \gg 1$, which is the condition for the field trajectory in the complex plane to be a squeezed ellipse of constant phase.

So far, we have assumed that the radiation density was initially dominant, in order to use the analytic solutions (6.48) and (6.52). Instead, if the field dominates initially – a situation that could be allowed before the time of Big Bang Nucleosynthesis (BBN) – the field density will nevertheless decay as a^{-6} . Indeed, if $\rho_\phi \geq \rho_{\text{rad}}$, then necessarily³ $\rho_\phi \gg m^2 \sigma^2$. We conclude that $P_\phi = \rho_\phi$, and energy conservation implies that $\rho_\phi \propto a^{-6}$. As soon as the radiation density takes over, the previously described analytic solutions do apply.

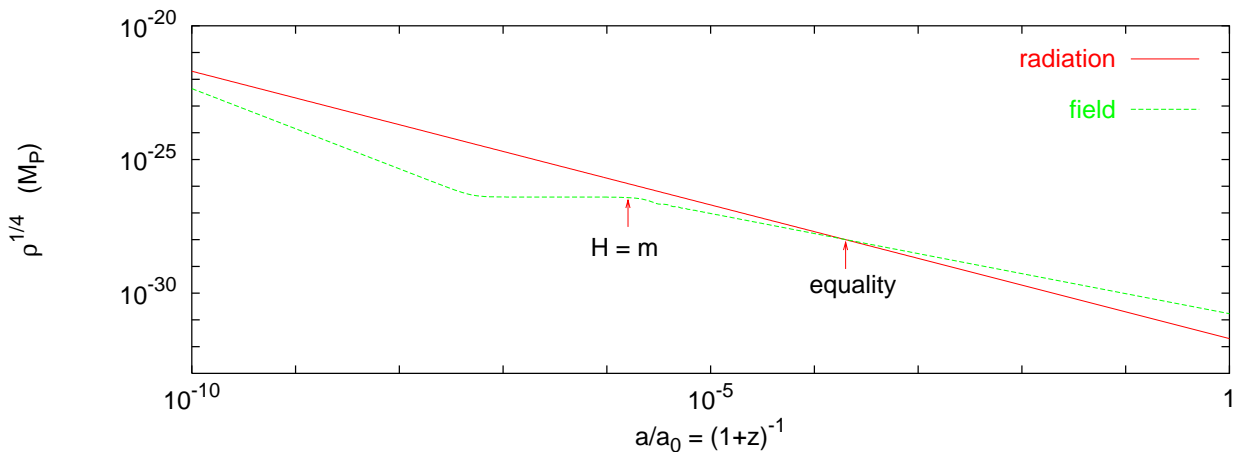


FIG. 6.1 – Evolution of the field and matter densities, in the scenario with $\lambda = 0$ and $m \sim 10^{-23}$ eV. The evolution starts at a redshift $z = 10^{10}$ – but we could have equally well started earlier. The initial value of the field density can be chosen arbitrarily, below or above that of radiation density. After decaying as a^{-6} , the field density reaches a plateau which amplitude has been fixed according to Eq. (6.53). This condition ensures a correct value of the density today : $\rho_\phi = \Omega_{\text{cdm}} \rho_c^0$. At $z = 6.3 \times 10^5$, when $H = m$, the density starts to decrease as a^{-3} , like for pressureless matter, and takes over radiation at $z \simeq 3 \times 10^3$.

6.3.3 radiation domination : $\lambda \neq 0$

If the field has got a quartic self-coupling, $\lambda \sigma^4$ must be negligible with respect to $m^2 \sigma^2$ in the late Universe in order to drive a matter-like dominated stage with $\rho_\phi \propto a^{-3}$. However, a quartic self-coupling is likely to be cosmologically relevant at early times, whenever the field modulus σ well exceeds

³Proof : even if σ was as large as M_P , $m^2 \sigma^2$ would be of order $10^{-102} M_P^4$, which corresponds to the radiation density at redshift 10^6 , well after BBN.

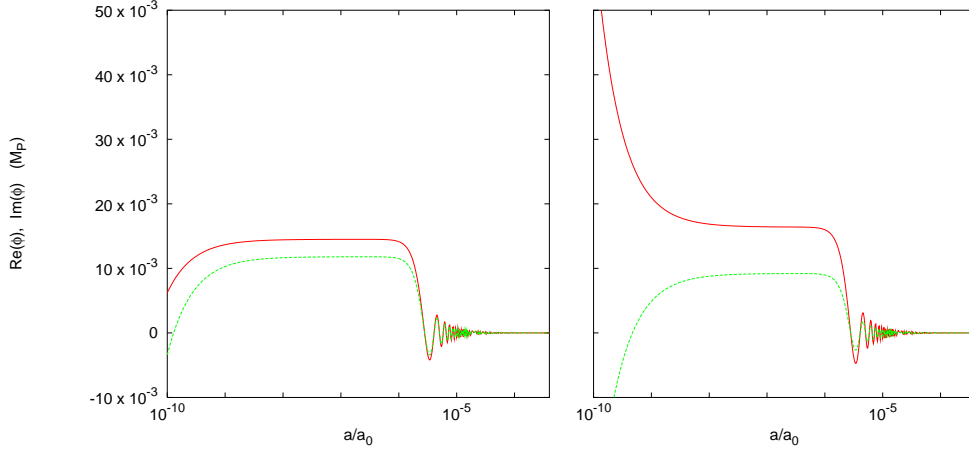


FIG. 6.2 – Two possible evolutions of the field real and imaginary parts, in the scenario with $\lambda = 0$ and $m \sim 10^{-23}$ eV. On the left panel, the initial field modulus has been chosen below the equilibrium value $\sqrt{C_1}$ as determined in Eq. (6.53). The opposite situation is shown on the right panel. In both cases, the field density decays like in Fig. 6.1. At redshift $z = 6.3 \times 10^5$, when $H = m$, the field starts to oscillate, but its density decays smoothly as that of pressureless matter. Because the real and imaginary parts are exactly in phase, the field is equivalent to a single real scalar field.

$\lambda^{-1/2} m$. In that case, the equation for v – see relation (6.47) – reads like

$$v'' - \frac{a''}{a} v + \frac{\lambda Q}{m^3} v^3 - \frac{1}{v^3} = 0 . \quad (6.56)$$

During radiation domination, $a'' = 0$ and v is a periodic – elliptic – function, describing non-harmonic oscillations in the potential $V(v) = \lambda Q v^4 / (4 m^3) + 1 / (2 v^2)$, with a minimum at $v_0 = \{m^3 / (\lambda Q)\}^{1/6}$. The period of the oscillations – expressed in conformal time – is of order $m(Q\lambda)^{-1/3}$. So, σ performs damped oscillations with a constant period $\Delta a \sim a^2 H(Q\lambda)^{-1/3}$ with respect to the scale factor. If we furthermore define the conserved pseudo-energy of v by $E_v = v'^2 / 2 + V(v)$, we can express the field density as

$$\rho_\phi = m Q \left\{ E_v - \frac{H a}{m} v v' + \frac{H^2 a^2}{2 m^2} v^2 \right\} a^{-4} . \quad (6.57)$$

Remember that Ha decays as a^{-1} during radiation domination : a priori, at early times, the field density performs damped oscillations like the field modulus while at late times it decays smoothly, as for radiation

$$\rho_\phi = m Q E_v a^{-4} . \quad (6.58)$$

The transition between both behaviors takes place when $H^2 a^2 v^2 \sim m^2 E_v$, where v is evaluated at the maximum of one oscillation :

$v_{\max} \sim (4m^3 E_v / \lambda Q)^{1/4}$. Inserting this condition in Eq. (6.57), we find that the transition between damped oscillations and smooth decay occurs when $\rho_\phi \simeq H^4 / \lambda$. In practice, this implies that the oscillatory behavior is generally irrelevant unless λ is fine-tuned to extremely small values – for the ordinary radiation component, the condition $\rho_{\text{rad}} \gg H^4$ is already realized at the end of inflation. So, Eq. (6.58) applies even in the early Universe.

Later on, the transition between radiation-like and matter-like behaviors will be effective when the maximal value of σ during one oscillation, computed from Eq.(6.56), will be comparable to $\lambda^{-1/2} m$. This translates into

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sqrt{\frac{Q}{m}} \frac{v_{\max}}{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{4mQE_v}{\lambda} \right)^{1/4} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \\ \Rightarrow \quad a &= \left(\frac{4\lambda QE_v}{m^3} \right)^{1/4} \quad \Rightarrow \quad \rho_\phi \sim \frac{m^4}{\lambda} \simeq (\text{eV})^4 . \end{aligned} \tag{6.59}$$

In the last equality we used the constraint from the size of galactic halos. Since, on the other hand, $\rho_{\text{eq}} \sim 0.55 (\text{eV})^4$, the transition to matter-like behavior occurs slightly before equality. This means that at earlier times, when the field behaves like radiation, its density should be fine-tuned in order to be close to the radiation density.

This scenario is illustrated on Fig. 6.3. In order to obtain the correct value of the field and radiation densities today, ρ_ϕ must be adjusted to $0.6 \rho_{\text{rad}}$. This would correspond to an effective number of extra neutrino species of $\Delta N_{\text{eff}} = 5$ that is not even allowed by BBN.

6.4 Discussion

In section II, we recalled why a complex scalar field is an attractive candidate for dark matter in galactic halos; it can provide a rather powerful explanation to the observed rotation curves, because the radial distribution of a scalar field after Bose condensation is constrained by a wave equation (the Klein–Gordon equation); this form of dark matter would be very smooth, and unlike a gas of individual particles, it would not slow down the relative motion of the baryonic components through dynamical friction.

The results of section III show that the complex scalar field can also play the role of a cosmological dark matter background, since after various possible behaviors in the early Universe, which depend on the exact shape of the potential, the field will decay like ordinary pressureless matter as soon as the mass term dominates the potential and the mass is bigger than the Hubble parameter.

However, when the parameters of the scalar potential are estimated from the size and mass of galactic halos, and plugged into the cosmological evolution,

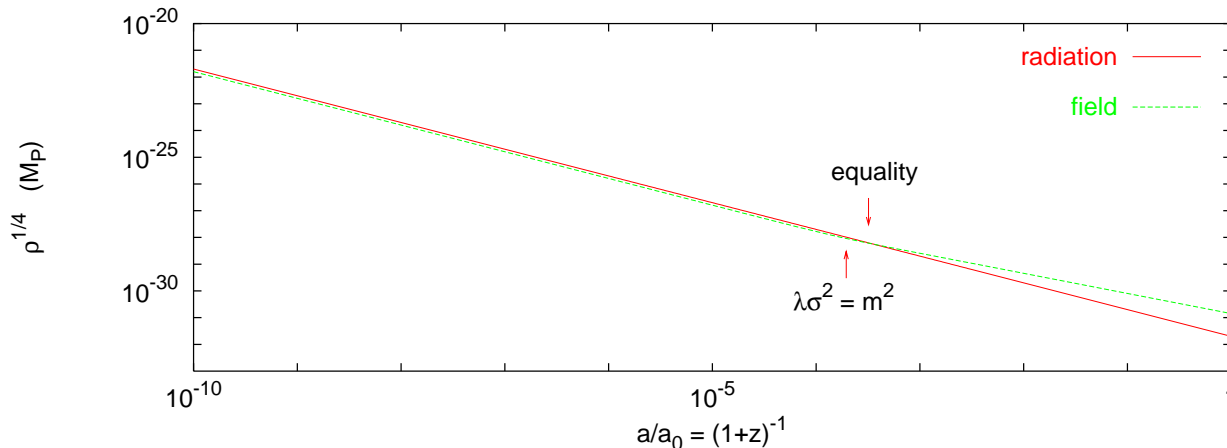


FIG. 6.3 – Evolution of the field and matter densities, in the scenario with $m \sim \lambda^{1/4}$ eV and arbitrary λ . The evolution also starts at a redshift $z = 10^{10}$. The field decays first as dark radiation, and then as dark matter. The transition between these two regimes is constrained by Eq. (6.59) to take place immediately before matter–radiation equality. In other words, in the early Universe, the field density must be very close to that of radiation. The simulation gives $\rho_\phi = 0.6 \rho_{\text{rad}}$ in order to obtain a correct value of $\rho_\phi = \rho_{\text{cdm}}$ today (such that $\Omega_{\text{cdm}} h^2 = 0.13$).

some tension appears both for the free–field model and for the one with a quartic self–coupling. Indeed, the redshift at which the field starts to decay like matter, $\rho_\phi \propto a^{-3}$, is completely fixed by these parameter values.

In the case with $\lambda = 0$, this transition occurs at a redshift close to $z = 6 \times 10^5$. The comoving wavenumber of perturbations entering into the Hubble radius at that time is $k = 3 \text{ Mpc}^{-1}$. As shown in Ref.[12], this is of the same order of magnitude as the Jeans length for the free field. So, larger wavelengths – in particular, those probed by the spectrum of CMB anisotropies and by the linear matter power spectrum – are expected to undergo the same evolution as in an ordinary CDM model. On smaller wavelength, one would still need to prove with numerical simulations that Bose condensation can occur on the scale of galactic halos – and eventually also on slightly bigger and smaller scales. So far, this model still sounds attractive, apart maybe from the ultra–light mass required ($m \sim 10^{-23} \text{ eV}$).

In the case with $\lambda \neq 0$, the transition between radiation–like and matter–like behaviors happens even later, just before equality; therefore, the field density during radiation domination has to be very close to that of photons and neutrinos. Our simulation reveals that $\Omega_{\text{cdm}} h^2 = 0.13$ today obtains from $\rho_\phi / \rho_{\text{rad}} \simeq 0.6$ during radiation domination; in other words, the field contributes to the number of relativistic degrees of freedom as an effective neutrino

number $\Delta N_{\text{eff}} \simeq 5$, in contradiction with the BBN constraint $|\Delta N_{\text{eff}}| \leq 1$. Moreover, the perturbations which enter into the Hubble radius before the transition – which would be probed today by the spectrum of CMB anisotropy and the linear matter power spectrum, since their comobile wavenumber is bigger than $k \sim 10^{-2} \text{ Mpc}^{-1}$ – would be suppressed with respect to CDM perturbations (essentially, like for hot dark matter). These problems were previously noticed by Peebles [13] in the case of a real scalar field. As a possible solution, Peebles suggests a polynomial self-coupling with a power slightly smaller than four. In fact, in order to save this scenario, it would be enough to increase the redshift of the transition by a factor ten or so. We conclude that the model with a quartic self-coupling is marginally excluded by cosmological constraints, but that any small deviations from the simple framework studied here are worth being investigated.

Our analysis is still incomplete. We said that the conservation of the charge $J_0 = i(\dot{\phi}^* \dot{\phi} - \dot{\phi} \dot{\phi}^*)$ was crucial for the stability of the condensates. Charge conservation also provides further constraints between, on the one hand, the cosmological background of the field in the early Universe, and on the other hand, the current distribution of dark matter in the form of field condensates. Also, it can give some hints on possible mechanisms for the generation of the field density in the early Universe. In terms of quanta, the conservation of charge implies a constant number of bosons minus anti-bosons inside a comoving volume :

$$Q = (n_\phi - n_{\bar{\phi}})a^3 = \text{cte} \quad , \quad (6.60)$$

where $(n_\phi, n_{\bar{\phi}})$ are the number density of bosons and of their CP conjugates. We want to evaluate this number today in the form of galactic dark matter. A priori, the rotating phase inside each condensate is fixed up to an arbitrary sign : $\theta(t) \simeq \pm m t$. So, some halos can be made of bosons, and some others of anti-bosons. This may occur, for instance, if the scalar field was populated during a phase transition : after the transition, the initial field distribution could be very homogeneous, but with an arbitrary phase distribution, leading to domains with positive and negative values of $\omega = d\theta/dt$. A priori, such a disordered initial configuration – with no phase coherence – may not exclude the subsequent formation of Bose condensates. In this case, the mean number density of bosons minus anti-bosons today can be arbitrarily close to zero, and the conservation of charge does not give any new constraint. Note however that two halos of opposite charge could annihilate and radiate out a massive amount of energy. Although this issue would deserve a more careful study, it is probably in conflict with observations.

Let us consider now the case where all galaxies carry a charge with same sign. This can occur if the field underwent inflation – or was coupled to a field that underwent inflation – in such way to be very homogeneous in the early Universe, as assumed in section III. Then, at the beginning of

the matter-like regime, the phase would be coherent even on super-horizon scales, and all condensates would form with the same rotating phase. We can estimate the charge in galaxies, Q_{gal} , by multiplying the typical charge of a single halo by the number density of halos. This charge must be smaller than or equal to the total charge of the cosmological homogeneous background, $Q_{\text{tot}} = \omega \sigma^2 a^3$.

In the $\lambda = 0$ case, the charge inside one halo is given by [22, 17] :

$$N \sim \sqrt{\frac{\sigma_0}{M_P}} \frac{M_P^2}{m^2} \sim 10^{99} . \quad (6.61)$$

Under the very crude assumption that the Universe contains in average one halo per volume $\mathcal{V} = 1 \text{ Mpc}^3$, we find a mean density today

$$n_\phi = Q_{\text{gal}} a_0^{-3} \sim N/\mathcal{V} \sim 10^{25} \text{ cm}^{-3} . \quad (6.62)$$

This number is extremely large, 10^{22} times bigger than the present number density of photons. This is a strong indication that the model is not realistic : it would be very difficult to generate such a huge charge in the early Universe. In fact we can even completely exclude the model by comparing Q_{gal} with the total charge of the cosmological background. We saw in section III, Eqs.(6.54, 6.55), that the existence of a plateau for ρ_ϕ during radiation domination imposes today a field dynamics close to that of an oscillating real axion, rather than spintessence. For spintessence, the number density $n_\phi = Q_{\text{tot}} a^{-3}$ is equal to ρ_ϕ/m as can be seen from Eq.(6.43) with $E_u = 1$. For an oscillating axion, most of the kinetic energy is in the radial direction and $n_\phi \ll \rho_\phi/m$ since the term E_u in relation (6.43) is now much larger than 1. Because we must be in the latter case at least during matter domination, we find the following upper bound on the total charge today :

$$n_\phi = Q_{\text{tot}} a_0^{-3} \ll \frac{\Omega_{\text{cdm}} \rho_c^0}{m} \simeq 10^{23} \text{ cm}^{-3} . \quad (6.63)$$

We find $Q_{\text{tot}} \ll Q_{\text{gal}}$, which is impossible. We conclude that the present dark matter scenario, based on a complex free scalar field forming galactic halos after Bose condensation, is not consistent – at least when the field is assumed to be homogeneous in the early Universe, and today all condensates carry a charge with the same sign. It would certainly be interesting to investigate the opposite scenario, with a homogeneous initial density but random phases, with the drawback that halos and “anti-halos” may annihilate.

As we have seen, the case $\lambda \neq 0$ is already marginally excluded by cosmological constraints, but it is worth calculating the various charges also for this model. An individual halo has got a charge – see relation (6.34) –

$$|N| \sim \frac{\sigma_0^2 \lambda^{3/2} M_P^3}{m^5} \sim \left(\frac{1 \text{ eV}}{m} \right) 10^{75} . \quad (6.64)$$

Under the assumption that all halos have a positive charge, one finds

$$n_\phi = Q_{\text{gal}} a_0^{-3} \sim N/\mathcal{V} \sim 30 \text{ cm}^{-3} \left(\frac{1\text{eV}}{m} \right) . \quad (6.65)$$

We are led to two intriguing coincidences. First, with λ of order one – and therefore m of order 1 eV – the field number density is of the same order of magnitude as that of photons for which $n_\gamma = 400 \text{ cm}^{-3}$. Second, provided that the field behaves cosmologically as spintessence, with $\rho_\phi \sim m n_\phi$, we can calculate the total charge and find $Q_{\text{tot}} \sim Q_{\text{gal}}$: the cosmological and astrophysical charges are consistent. Therefore, the scenario requires a mechanism in the early Universe that would fine-tune both n_ϕ and ρ_ϕ to some values very close to n_γ and ρ_γ .

As we already said, this scenario with a quadratic coupling is plagued by inherent difficulties to produce small-scale perturbations, and by an inconsistency with the number of relativistic degrees of freedom indicated by nucleosynthesis. However, one should retain two positive features. First, any small modification of the scenario that would shift by a factor ten the redshift of the transition between radiation-like and matter-like behaviors would evade these difficulties. Second, the initial conditions for the field number density and energy density should be surprisingly close to those of photons.

Throughout this discussion, we tried to give some arguments both in favor and against the two models considered here, based on two different scalar potentials. In their present form, none of these models can survive. However, we believe that one should retain the many positive indications discussed before as an encouragement for investigating other variants of scalar field dark matter. The fact that the two scalar potentials lead to very different conclusions already shows how rich and unpredictable is the field.

Acknowledgements

J. L. would like to thank J. Garcia-Bellido, S. Khlebnikov, A. Riotto and M. Shaposhnikov for illuminating discussions.

Bibliographie

- [1] C. B. Netterfield et al. (The Boomerang collaboration), “A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background”, *The Astrophysical Journal* 571 (2002), 604-614.
- [2] S. Perlmutter et al. (The Supernova Cosmology Project), *The Astrophysical Journal* 517 (1999), 565.
- [3] W. J. Percival et al., “The 2dF Galaxy Redshift Survey : the power spectrum and the dark matter content of the universe”, astro-ph/0105252.
- [4] S. Burles & D. Tytler, *The Astrophysical Journal* 499 (1998), 699 and *The Astrophysical Journal* 507 (1998), 732.
- [5] B. Moore et al., *The Astrophysical Journal* 524 (1999), L19.
- [6] A. S. Font, J. F. Navarro, J. Stadel & T. Quinn, “Halo substructure and disk heating in a Lambda CDM universe”, astro-ph/0106268 ; N. Dalal & C. S. Kochanek, “Direct detection of CDM substructure”, astro-ph/0111456 ; M. D. Weinberg & N. Katz, “Bar-driven dark halo evolution : a resolution of the cusp-core controversy”, astro-ph/0110632.
- [7] P. Colin, V. Avila-Reese & O. Valenzuela, “Substructure and halo density profiles in a Warm Dark Matter Cosmology”, *The Astrophysical Journal* 542 (2000), 622 ;
V. K. Narayanan, D. N. Spergel, R. Davé & C.-P. Ma, “Lyman-Alpha Forest constraints on the mass of warm dark matter and the shape of the linear power spectrum”, astro-ph/0005095 ;
R. Barkana, Z. Haiman & J. P. Ostriker, “Constraints on Warm Dark Matter from cosmological reionization”, astro-ph/0102304 ;
K. Abazajian, G. M. Fuller & W. H. Tucker, “Direct detection of warm dark matter in the X-ray”, *The Astrophysical Journal* 562 (2001), 593 ;
S. H. Hansen, J. Lesgourgues, S. Pastor & J. Silk, “Constraining the window on sterile neutrinos as warm dark matter”, *MNRAS* 333 (2002), 544-546..
- [8] D. N. Spergel & P. J. Steinhardt, *Physical Review Letters* 84 (2000), 3760.

- [9] W. B. Lin, D. H. Huang, X. Zhang & R. Brandenberger, *Physical Review Letters* 86 (2001), 954.
- [10] V. Sahni & L. Wang, *Physical Review D* 62 (2000), 103517.
- [11] S. Bludman & M. Roos, *The Astrophysical Journal* 547 (2001), 77 ;
P. J. Steinhardt & R. R. Caldwell, *Cosmic Microwave Background and Large Scale Structure of the Universe*, ASP Conference Series, Vol. 151, 1998, ed. Y. I. Byun and K. W. Ng (1998) 13.
- [12] W. Hu, R. Barkana, & A. Gruzinov, *Physical Review Letters* 85 (2000), 1158.
- [13] P. J. E. Peebles, “Fluid Dark Matter”, astro-ph/0002495.
- [14] J. Goodman, “Repulsive Dark Matter”, astro-ph/0003018.
- [15] M. Colpi, S. L. Shapiro & I. Wasserman, *Physical Review D* 57 (1986), 1485.
- [16] A. Riotto & I. Tkachev, *Physics Letters B* 484 (2000), 177.
- [17] A. Arbey, J. Lesgourgues and P. Salati, “Quintessential Halos around Galaxies”, *Physical Review D* 64 (2001), 123528.
- [18] L. A. Boyle, R. R. Caldwell & M. Kamionkowski, “Spintessence! New Models for Dark Matter and Dark Energy”, *Physics Letters B* 545 (2002), 17-22.
- [19] I. I. Tkachev, *Soviet Astronomy Letters* 12 (1986), 305.
- [20] E. Seidel & W. M. Suen, *Physical Review Letters* 72 (1994), 2516.
- [21] S. Khlebnikov, “Strong acoustic turbulence and the speed of Bose-Einstein condensation”, hep-ph/0201163.
- [22] R. Friedberg, T. D. Lee, & Y. Pang, *Physical Review D* 35 (1987), 3640.
- [23] M. Persic, P. Salucci & F. Stel, “The Universal Rotation Curve of Spiral Galaxies : I. the Dark Matter Connection”, *MNRAS* 281 (1996) 27.
- [24] A. R. Liddle & M. S. Madsen, *International Journal of Modern Physics D* 1 (1992), 101.

Chapitre 7

Auto-couplage quartique

Nous avons étudié aux chapitres cinq et six un modèle de matière noire basé sur un champ scalaire complexe chargé dans $U(1)$ soumis à un potentiel quadratique. Nous avons alors vu qu’il reproduit bien les courbes de rotation des galaxies spirales, et que pour ce faire il est associé à une masse de l’ordre de 10^{-23} eV. Nous avons aussi analysé son comportement cosmologique, et nous avons conclu qu’il se comporte au moins depuis la recombinaison comme de la matière noire. Nous avons enfin mis à jour des problèmes dus à sa charge conservée. Avec l’espoir de trouver une masse plus élevée, nous avons aussi commencé au chapitre précédent l’étude d’un potentiel quartique. Nous avons déjà vu que son comportement cosmologique est correct. Néanmoins, une analyse rapide des contraintes dues à la taille des galaxies sur la masse et l’auto-couplage du champ indiquait que ce champ devait correspondre à cinq familles effectives de neutrinos supplémentaires, ce qui, comme nous l’avons déjà dit, est exclu. Il reste cependant nécessaire d’effectuer une étude plus approfondie pour estimer correctement la valeur des paramètres du potentiel quartique. C’est ce qui est fait dans l’article suivant (astro-ph/0301533), réalisé en collaboration avec J. Lesgourgues et P. Salati, et soumis à “Physical Review D”.

Tout d’abord, après une introduction générale sur le problème de la matière noire et des configurations cohérentes de champs scalaires, nous établirons les équations qui régissent la dynamique galactique. En considérant que le champ est statique et en nous plaçant dans une limite classique de la Relativité Générale, nous montrerons que les équations du mouvement et du champ se réduisent à une seule équation : une équation de Poisson modifiée, hautement non-linéaire. Dans le cas d’un système sans baryon, donc purement bosonique, cette équation se réduit à l’équation de Lane et Emden pour un polytrophe $n = 1$, dont la solution est connue. Cette équation fixe une taille limite au halo bosonique.

Nous décrivons ensuite la méthode de résolution. Nous considérerons les galaxies comme des systèmes axisymétriques, de manière à réduire le problème à deux dimensions. Habituellement, une transformation de Legendre permet de réduire encore le problème à des équations à une variable. Cependant, le problème de la non-linéarité ne permet pas de décomposer en même temps les deux membres de l'équation de Poisson. C'est là qu'apparaît donc naturellement l'idée de traiter le problème par la procédure de récursion décrite dans l'article. Une fois cette idée mise en place, il reste à résoudre, pour chaque itération, les équations provenant de la décomposition de Legendre. J'ai tout d'abord essayé de les résoudre avec des intégrations selon Runge-Kutta, mais malheureusement nous avons ici un important problème de sensibilité aux conditions aux limites. Etant donné le nombre d'équations à résoudre pour trouver la véritable solution, il vaudrait mieux changer de méthode. Ainsi, plutôt que d'essayer de trouver deux conditions mal connues au centre de la galaxie, il semblait préférable d'utiliser une condition connue au centre et une à l'infini. C'est ce qui permet de dire que la méthode des fonctions de Green doit être la plus efficace. J'ai donc pu finaliser la méthode de résolution par récurrence précédemment décrite. Un nouveau problème est alors apparu : avec un potentiel initial "aléatoire" (par exemple le potentiel gravitationnel généré par les bosons ou les baryons seuls), cette récurrence ne permettait de traiter que des galaxies contenant soit très peu de bosons, soit très peu de baryons. Elle ne convergait pas dans les autres cas. Il était donc clair qu'il fallait un potentiel initial proche du potentiel réel. Après différents essais infructueux, j'ai pu trouver le potentiel approché qui est décrit dans l'annexe de l'article et qui permet la convergence de la récursion. J'ai ensuite testé les solutions par de nombreuses méthodes, avec succès.

Une fois cette méthode trouvée, nous allons l'appliquer à différents cas. Le premier est celui de la galaxie spirale naine DDO 154. Nous effectuerons tout d'abord une comparaison des résultats donnés par différents modèles de WIMPs. Nous supposerons ensuite que la quantité de gaz observée dans la galaxie est sous-évaluée. Nous verrons alors que, parmi ces différents modèles, c'est notre modèle de champ scalaire auto-couplé qui reproduit le mieux les courbes de rotation de DDO 154. Nous trouverons ainsi des contraintes sur la valeur de la masse et de la constante d'auto-couplage. En réutilisant ces contraintes, nous allons nous intéresser à des galaxies plus grosses. Nous verrons alors que notre modèle reproduit correctement les courbes de rotation des galaxies de taille petite ou moyenne, mais que le halo bosonique ne s'étend pas suffisamment loin pour expliquer tout seul les courbes de rotation des grandes galaxies.

Nous nous intéresserons ensuite à l'influence d'un tel champ scalaire au niveau du système solaire.

Nous allons enfin reconsidérer les comportement cosmologiques dans le cas du potentiel quartique, et nous montrerons que le problème du nombre de familles de neutrinos décrit au précédent chapitre tend à disparaître.

En conclusion, nous avons vu que notre modèle est capable de bien reproduire les courbes de rotation des si problématiques galaxies naines. Il est cependant marginalement compatible avec les contraintes de la nucléosynthèse primordiale. Dans ce modèle, contraintes galactiques et contraintes de la nucléosynthèse sont antagonistes, si bien qu'il semble difficile en même temps d'expliquer les courbes de rotation des grandes galaxies, et de satisfaire les contraintes sur le nombre de familles de neutrinos. Néanmoins, ce modèle reste encore acceptable. Il faudra cependant se poser la question du problème des grandes structures. Il se peut par exemple qu'un halo galactique de grande taille soit composé de plusieurs "clumps" bosoniques. Il se pourrait aussi que la matière noire soit en fait composée de tout petits "clumps", ressemblant alors fortement à des WIMPs. Il faudra alors se poser la question de la phénoménologie de la collision des "clumps". Ainsi, au final, même si ce modèle est soumis à différents problèmes, seule l'augmentation prochaines de la précision des contraintes de nucléosynthèse pourra vraiment permettre de le tester.

Dans l'article suivant va maintenant être développée plus en détails cette introduction.

Galactic Halos of Fluid Dark Matter

Alexandre Arbey^{a,b} ¹, Julien Lesgourgues^{c,a} and Pierre Salati^{a,b}

a) Laboratoire de Physique Théorique LAPTH
B.P. 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex

b) Université de Savoie
B.P. 1104, F-73011 Chambéry Cedex

c) Theoretical Physics Division, CERN
CH-1211 Genève 23, Switzerland

29 November 2002

Dwarf spiral galaxies – and in particular the prototypical DDO 154 – are known to be completely dominated by an unseen component. The putative neutralinos – so far the favored explanation for the astronomical dark matter – fail to reproduce the well measured rotation curves of those systems because these species tend to form a central cusp whose presence is not supported by observation. We have considered here a self-coupled charged scalar field as an alternative to neutralinos and investigated whether a Bose condensate of that field could account for the dark matter inside DDO 154 and more generally inside dwarf spirals. The size of the condensate turns out to be precisely determined by the scalar mass m and self-coupling λ of the field. We find actually that for $m^4/\lambda \sim 50 - 75 \text{ eV}^4$, the agreement with the measurements of the circular speed of DDO 154 is impressive whereas it lessens for larger systems. The cosmological behavior of the field is also found to be consistent – yet marginally – with the limits set by BBN on the effective number of neutrino families. We conclude that classical configurations of a scalar and self-coupled field provide a possible solution to the astronomical dark matter problem and we suggest further directions of research.

7.1 Introduction

After many years of global consensus on the fact that dark matter consists in Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs) – like, for instance, the lightest neutralino in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM)

¹E-mail : arbey@lapp.in2p3.fr, lesgourg@lapp.in2p3.fr, salati@lapp.in2p3.fr

– there is still no strong evidence in favor of WIMPS, neither from bolometer experiments designed for direct detection, nor from the observation of cosmic rays, a fraction of which could consist in WIMPs annihilation products. This absence of experimental constraints on dark matter from the particle physics side leaves the door wide open for alternative descriptions of the hidden mass of the Universe.

Moreover, in the past three years, there has been a lot of controversy concerning the small-scale inhomogeneities of the WIMPs density. Indeed, many recent N-body simulations of structure formation in the Universe suggested that any dark matter component modeled as a gas of free particles – such as WIMPs – tends to cluster excessively on scales of order 1 kpc and smaller. This would result in cuspy density profiles at galactic centers, while most rotation curves indicate a smooth core density [1]. Many galaxies even seem to be dominated by baryons near their center, with a significant dark matter fraction only at large radii. This clearly contradicts the results from current N-body simulations, in which the dark matter density is strongly enhanced at the center of the halo with respect to its outskirts.

This argument was attacked by Weinberg and Katz [2], who stressed the importance of including the baryon component in N-body simulations. Indeed, the baryon dissipative effects could be responsible for a smoothing of the central dark matter cusp in the early Universe. This possible solution to the dark matter crisis was discarded later by Sellwood [3], who found opposite results in his simulation.

Apart from the central cusp problem, N-body simulations raised some secondary issues [1]. First, a clumpy halo could generate some tidal effects that could break the spatial coherence of the disk. Second, the predicted number of satellite galaxies around each galactic halo is far beyond what we see around the Milky Way. Third, the dynamical friction between dark matter particles and baryons should freeze out the spinning motion of baryonic bars in barred galaxies. All these arguments are still unclear, because they seem to depend on the resolution under which simulations are carried [4, 5], and also because of our ignorance of what could be the light-to-mass ratio inside small dark matter clumps. In addition, the predicted number of satellite galaxies doesn't seem to be in contradiction with constraints from microlensing [6].

Should these various problems be confirmed or not, it sounds reasonable to explore alternatives to the WIMPs model, or more generally speaking, to any description based on a gas of free particles. This can be done in various ways: for instance, one can introduce some deviations from a perfect thermal phase-space distribution [7], or add a self-coupling between dark matter particles [8]. A more radical possibility is to drop the assumption that dark matter is governed by the laws of statistical thermodynamics. This would be the case if dark matter consisted in a classical scalar field, coherent on

very large scales, and governed by the Klein–Gordon equation of motion.

This framework should be clearly distinguished from other models of bosonic dark matter, like those based on heavy bosons – for instance, sneutrinos – or axions. In the first case, the Compton wavelength $\hbar/(mc)$ of an individual particle is much smaller than the typical interparticle distance while in the second case, for axion masses of order 10^{-6} eV, it is still much smaller than the typical size of a galaxy. So, in these examples, the bosons can be described on astronomical scales like a gas of free particles in statistical equilibrium. It follows that the halo structure cannot be distinguished from that of standard WIMPs.

A coherent scalar field configuration governed by the Klein–Gordon and Einstein equations is nothing but a self-gravitating Bose condensate. Such condensates span over scales comparable to the De Broglie wavelength, $L = \hbar/p$. In the case of free bosons – i.e., with a quadratic scalar potential – the momentum p is of order mv_{esc} where v_{esc} is the escape velocity from the system. Typical examples are boson stars [9, 10, 11, 12], for which the characteristic orders of magnitude discussed in the literature are, for instance, $m \sim 10$ GeV and $v_{\text{esc}} \sim c$, leading to a radius as tiny as $L \sim 10^{-14}$ cm. Even for axions, which have a much smaller mass and an escape velocity given by the motion of stars in a galaxy – $v_{\text{esc}} \sim 100$ km/s – the De Broglie wavelength is only of order $L = 100$ km, so that on galactic scales, the medium can be treated as a gas. In order to obtain a galactic halo described by the Klein–Gordon equation, one should consider masses of order $m = \hbar/(Lv_{\text{esc}})$ where $v_{\text{esc}} \sim 100$ km/s and $L \sim 10$ kpc. This yields $m \sim 10^{-23}$ eV. Such an ultra-light scalar field was called “fuzzy dark matter” by Hu [13], who discussed its overall cosmological behavior. In some previous works, we focused on a variant of this model in which the ultra-light scalar field is complex – then, the conserved number associated with the $U(1)$ global symmetry helps in stabilizing the condensate against fragmentation [10, 12]. In [14] – thereafter Paper I – we compared the rotation curves predicted by this model with some data from spiral galaxies. In [15] – thereafter Paper II – we simulated the cosmological evolution of the homogeneous background of such a field. The model seems to be quite successful in explaining the rotation curves, but it has two caveats. First, such a low mass is very difficult to implement in realistic particle physics models. The second problem is related to the fact that because of the $U(1)$ symmetry, the field carries a conserved quantum number. As explained in Paper II, the value derived from cosmological considerations for the density of this quantum number does not seem consistent with that inferred from astrophysical arguments.

These caveats motivate the introduction of a quartic self-coupling term in the scalar potential. In that case, it is already known from boson stars that for the same value of the mass, the self-coupling constrains the field to condensate on much larger scales [16, 18] – the size of the self-gravitating

configurations is still given by $L = \hbar/p$, but in presence of a self-coupling, the momentum cannot be identified with mv_{esc} . Then, without recurring to ultra-light masses, we may still describe the galactic halos with a Bose condensate. A massive scalar field with quartic – or close to quartic – self-coupling was proposed as a possible dark matter candidate by Peebles, who called it “fluid dark matter” [17]. In this paper, we will study a variant of fluid dark matter in which the quartically self-coupled massive scalar field is complex, still for stability reasons².

We will focus mainly on galaxy rotation curves, assuming that the dark matter halos are the self-gravitating, aspherical and stable equilibrium configurations of our scalar field in the presence of a baryonic matter distribution – stellar disk, HI gas, etc... We will present here the first solution of this problem. However, we should stress that some different models in which the rotation curves are also seeded by a coherent scalar field were studied previously by Schunk [19] – with a vanishing scalar potential, Goodman [20] – with a repulsive self-interaction, Matos et al. [21], Nucamendi et al. [22], Wetterich [23], Urena-Lopez and Liddle [24]. In some of these papers, and also in many other recent proposals – see for instance [25] – the main goal is to try to solve simultaneously the dark energy and dark matter problems, assuming that a quintessence field can cluster on galactic scales. This raises some subtle issues, like the existence of a scale-dependent equation of state. At the present stage, we do not have such an ambition, and we will focus only on the dark matter problem.

In section 7.2, we write the Einstein and the Klein–Gordon equations which govern the scalar field and the gravitational potential distributions in the presence of a given baryonic matter density. We will see that these equations can be combined into a single non-linear Poisson equation. The solutions are technically difficult to find, first, due to the non-linearity, and second, because some boundary conditions are given at the center, some others at infinity. So, it is not possible to follow a lattice approach, in which one would start from a particular point and integrate numerically grid point by grid point. However we present in section 7.3 a recursive method which allows to find all the exact solutions after a few iterations. In section 7.4, we compare the galaxy rotation curves obtained in this way with some observational data. We lay a particular emphasis on the dwarf spiral galaxy DDO 154, for which the rotation curve is among the most difficult to explain with usual dark matter profiles. We will see that a mass-over-self-coupling ratio $m^4/\lambda \simeq 50 \text{ (eV)}^4$ provides a very good fit to the DDO 154 rotation curve – however at the expense of poor fits to the largest spiral galaxies. Because the scalar field condensates inside the gravitational potential wells of baryons and strengthens them, the question of its effects on the inner dynamics of

²In contrast, a scalar field dark matter model in which the field is real and unstable is discussed in [18].

the solar system naturally arises. We derive in section 7.5 the modification of the solar attraction in the presence of the self-interacting scalar field under scrutiny and show that an anomalous acceleration appears that is constant and that points towards the Sun. We investigate the limit set on our model by the Pioneer radio data. In Paper II, we studied the cosmological behavior of a homogeneous scalar field that was assumed to play the role of dark matter at least from the time of matter-radiation equality until today. This analysis is updated in section 7.6 where we specifically assume $m^4/\lambda \simeq 50$ (eV)⁴. Such a large value points towards a large total density of the Universe during radiation domination which is at the edge of the current bounds set in particular by BBN on cosmological parameters. The last section is devoted to a discussion of the strong and weak aspects of our alternative dark matter model. We finally suggest some further directions of investigation beyond the simple but restrictive framework of isolated bosonic configurations.

7.2 Gravitational behavior

The complex scalar field ϕ under scrutiny in this article is associated to the Lagrangian density

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi - V(\phi) \ , \quad (7.1)$$

where the $U(1)$ invariant potential V includes both quadratic and quartic contributions

$$V(\phi) = m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda \left\{ \phi^\dagger \phi \right\}^2 \ . \quad (7.2)$$

The gravitational behavior of the system follows the standard GR equations whilst the field ϕ satisfies the Klein-Gordon equation

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left\{ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right\} + \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0 \ , \quad (7.3)$$

where $g_{\mu\nu}$ denotes the metric. We would like to investigate to which extent the scalar field ϕ may account for the dark matter inside galaxies. The problem simplifies insofar as the gravitational fields at stake are weak and static. In this quasi-Newtonian limit of general relativity, deviations from the Minkowski metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ are accounted for by the perturbation tensor $h_{\mu\nu}$ – from now on, we use the convention $c = 1$. The Newtonian gravitational potential $\Phi = h_{00}/2$ is actually a small quantity of order $v_{\text{esc}}^2 \sim 10^{-7} - 10^{-6}$, where v_{esc} denotes the escape velocity. Our analysis is based on an expansion up to first order in Φ . The baryonic content of galaxies is described through the energy-momentum tensor

$$T^{\mu\nu} = (\rho_b + P_b) U^\mu U^\nu - P_b g_{\mu\nu} \ , \quad (7.4)$$

where $U^\mu = \{1, \vec{v}\}$. Baryons behave as dust with non-relativistic velocities. Actually, because galaxies are virialized systems – hence the assumption of static gravitational fields – the spatial velocity v is a small quantity of order $v_{\text{esc}} \sim \sqrt{\Phi}$. The kinetic pressure-to-mass density ratio is even more negligible since $P_b/\rho_b \sim v^2 \sim v_{\text{esc}}^2 \sim \Phi \ll 1$. We are interested in classical configurations where the field ϕ is in a coherent state such as

$$\phi\{\vec{x}, t\} = \frac{\sigma(\vec{x})}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} . \quad (7.5)$$

Indeed, one can prove that all stable spherically symmetric configurations can be parameterized in that way [10]. The time-derivative $\partial_0\phi$ equals $-i\omega\phi$, whereas the space-derivative $\partial_i\phi$ is of order ϕ/L where L is the physical length of the configuration. That length – which is related to the parameters m and λ of the potential – is required to be $\sim 1 - 100$ kpc to account for the galactic dark matter. On the other hand, we shall see later that ω is very close to the mass m , which is numerically found to be in the ballpark of a fraction of eV. We readily infer a ratio

$$\frac{\partial_i\phi}{\partial_0\phi} \sim \frac{1}{mL} = 6.4 \times 10^{-27} \left\{ \frac{1 \text{ eV}}{m} \right\} \left\{ \frac{1 \text{ kpc}}{L} \right\} . \quad (7.6)$$

So, the space derivative $\partial_i\phi$ of the scalar field can be safely neglected throughout the analysis.

In its weak-field limit, general relativity becomes a gauge theory. By conveniently choosing the gauge of harmonic coordinates in which the metric perturbation $h_{\mu\nu}$ satisfies the condition

$$\partial_\mu h^\mu{}_\alpha = \frac{1}{2} \partial_\alpha \{h^\mu{}_\mu\} , \quad (7.7)$$

the GR equations simplify into

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} . \quad (7.8)$$

The effective source $S_{\mu\nu}$ is related to the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$ through

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda . \quad (7.9)$$

In the propagation eq. (7.8), the source $S_{\mu\nu}$ is computed in flat space while the metric perturbation $h_{\mu\nu}$ is of order Φ . If the dark matter inside galaxies is understood as some classical configuration of the field ϕ , $S_{\mu\nu}$ should take into account both baryonic population – stars and gas – and scalar condensate. In the Newtonian limit where gravito-magnetic effects are disregarded, the non-relativistic velocities of baryons can be neglected. The only non-vanishing components of the baryonic source tensor are

$$S_{00}^{\text{b}} = \frac{\rho_b}{2} \quad \text{and} \quad S_{ij}^{\text{b}} = -\eta_{ij} \frac{\rho_b}{2} . \quad (7.10)$$

Assuming that eq. (7.5) describes the scalar field configuration and disregarding the space-derivatives $\partial_i \phi$ leads to the source components

$$S_{00}^\varphi = \omega^2 \sigma^2 - V \quad \text{whilst} \quad S_{ij}^\varphi = -\eta_{ij} V , \quad (7.11)$$

where the potential is

$$V(\sigma) = \frac{m^2}{2} \sigma^2 + \frac{\lambda}{4} \sigma^4 . \quad (7.12)$$

The well-known solution of the Lienard and Wiechert retarded potentials satisfies the propagation eq. (7.8). We readily conclude that the metric does not contain any space-time component h_{0i} and may be expressed at this stage as

$$d\tau^2 = (1 + 2\Phi) dt^2 - (1 - 2\Psi) \delta_{ij} dx^i dx^j , \quad (7.13)$$

where the static potentials Φ and Ψ are given by integrals over the source distribution \mathcal{D} of the baryonic and scalar mass densities

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3 \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \{ \rho_b(\vec{y}) + \rho'_\phi(\vec{y}) \} , \quad (7.14)$$

and

$$\Psi(\vec{x}) = -G \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3 \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \{ \rho_b(\vec{y}) + \rho''_\phi(\vec{y}) \} . \quad (7.15)$$

The densities ρ'_ϕ and ρ''_ϕ are respectively defined by

$$\rho'_\phi = 2\omega^2 \sigma^2 - m^2 \sigma^2 - \frac{\lambda}{2} \sigma^4 , \quad (7.16)$$

and

$$\rho''_\phi = m^2 \sigma^2 + \frac{\lambda}{2} \sigma^4 . \quad (7.17)$$

The potentials Φ and Ψ are different *a priori*. A careful inspection of the Klein-Gordon equation will eventually show that they are actually equal. The latter may be written as

$$(1 - 2\Phi) \ddot{\phi} - (1 + \Phi - 3\Psi)^{-1} \partial_i \{ (1 + \Phi - \Psi) \partial_i \phi \} + \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0 . \quad (7.18)$$

The space-dependent term is some 53 orders of magnitude smaller than its time-dependent counterpart and we can safely disregard it so that relation (7.18) simplifies into

$$\lambda \sigma^2 = (1 - 2\Phi) \omega^2 - m^2 , \quad (7.19)$$

where the configuration (7.5) has been assumed. The scalar field is in a classical state that may be pictured as a Bose condensate on the boundaries of which the gravitational potential is

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2} \right) . \quad (7.20)$$

Because the potential Φ_0 is a small quantity, the pulsation ω is very close to the mass m . The scalar field essentially vanishes outside the condensate whereas its inner value is directly related to the gravitational potential Φ through

$$\lambda \sigma^2 = 2 (\Phi_0 - \Phi) \omega^2 \simeq 2 (\Phi_0 - \Phi) m^2 . \quad (7.21)$$

This relation has important consequences. To commence, the densities $\rho'_\phi = m^2 \sigma^2 \{1 + 3\Phi_0 - \Phi\}$ and $\rho''_\phi = m^2 \sigma^2 \{1 + \Phi_0 - \Phi - 2\Psi\}$ become both equal to $\rho_\phi \simeq m^2 \sigma^2$ at lowest order in the potentials. Then $\Phi \equiv \Psi$ and the metric simplifies. It is straightforward to show that it readily satisfies the gauge condition (7.7). The scalar field density may be expressed as a difference between the gravitational potentials inside and on the boundary of the scalar field condensate

$$\rho_\phi = \frac{2 m^4}{\lambda} (\Phi_0 - \Phi) \mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi) , \quad (7.22)$$

where $\mathcal{H}(x) = 1$ for $x > 0$ and $\mathcal{H}(x) = 0$ elsewhere. This leads to the Poisson equation

$$\Delta \Phi = 4 \pi G \rho_b + 8 \pi G \frac{m^4}{\lambda} (\Phi_0 - \Phi) \mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi) . \quad (7.23)$$

Inside the condensate, gravity turns out to be effectively modified by the presence of the scalar density ρ_ϕ whereas the conventional Poisson equation is recovered outside. Defining the Planck mass through $M_P = 1/\sqrt{G}$, we derive a typical scale of

$$L^2 = \frac{\lambda}{8 \pi} \frac{M_P^2}{m^4} = \frac{\Lambda}{m^2} , \quad (7.24)$$

for the scalar field configurations in which we are interested. The dimensionless constant Λ has been introduced by [16] in their analysis of self-interacting boson stars. The scale L is related to the mass m and the quartic coupling λ through

$$L \simeq 1.6 \text{ kpc} \left\{ \frac{\lambda}{10^{-2}} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1 \text{ eV}}{m} \right\}^2 , \quad (7.25)$$

so that values of the mass in the ballpark of the eV may well be compatible with a size L of order a few kiloparsecs. As already noticed by [16], the

space-dependent term in the Klein–Gordon eq. (7.18) is actually suppressed by a factor of Λ which, in our case, reaches values as large as $\sim 10^{53}$. The key feature of the scalar field configurations at stake is the existence of a unique scale L that depends only on the parameters m and λ of the potential V .

A pure scalar field configuration may also be seen as a mere fluid with mass density ρ_ϕ . The pressure P_ϕ may be derived from the space–space component $T_{ij} = -\eta_{ij} P_\phi$ of its energy–momentum tensor. This leads to

$$P_\phi = \mathcal{L} = g^{00} \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - V \simeq \frac{m^4}{\lambda} (\Phi_0 - \Phi)^2 \quad (7.26)$$

inside the condensate where $\Phi \leq \Phi_0$. The corresponding equation of state boils down to

$$P_\phi = \frac{\lambda}{4 m^4} \rho_\phi^2, \quad (7.27)$$

and features the generic polytropic form $P = K \rho^\Gamma$ where $\Gamma = 1 + 1/n$ and $K = \lambda/4 m^4$ are constants. Spherical symmetric solutions of configurations in hydrostatic equilibrium are searched of the form $\rho/\rho_C = \Theta^n(z)$ and $P/P_C = \Theta^{n+1}(z)$ where $z = r/L$ is the dimensionless radius. The typical scale of the polytrope depends on the central density ρ_C and pressure P_C through

$$L^2 = \frac{(n+1)P_C}{4\pi G \rho_C^2}, \quad (7.28)$$

whereas the generic function Θ satisfies the Lane–Emden equation

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{d\Theta}{dz} \right\} = -\Theta^n, \quad (7.29)$$

with the initial conditions $\Theta(0) = 1$ and $\Theta'(0) = 0$. In the scalar field case, the polytropic index is $n = 1$ and the solution

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_{\phi_C}} = \Theta(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (7.30)$$

readily obtains. It describes a spherical symmetric configuration where the scalar field alone is bound by its own gravity. The radius of the pure scalar field condensate is then $R = \pi L$ where the scale L has already been derived in relations (7.24) and (7.25) :

$$R = \pi L = \pi \left\{ \frac{K}{2\pi G} \right\}^{1/2} \equiv \pi \left\{ \frac{\lambda}{8\pi G} \right\}^{1/2} \frac{1}{m^2} \quad (7.31)$$

The effect of an aspherical distribution of baryons on the scalar field condensate will be examined in the next section.

7.3 Resolution method

We would like to compute the gravitational potential Φ associated with any density of baryons ρ_b in the galaxy, in the presence of a scalar field condensate. So, we need to solve eq. (7.23). The Heaviside function renders this equation strongly non-linear : different solutions have different surfaces where

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi_0, \quad (7.32)$$

so the sum of two solutions is not a solution. Nevertheless, it is possible to solve the equation with a recursive method. The idea is to start from an approximate solution $\Phi^{(0)}$, and to find $\Phi^{(n)}$ from the iterations

$$\Delta\Phi^{(n+1)} = 4\pi G\rho_b + 8\pi G\frac{m^4}{\lambda} \left(\Phi_0 - \Phi^{(n)}\right) \mathcal{H}\left(\Phi_0 - \Phi^{(n)}\right). \quad (7.33)$$

If, for a judicious choice of $\Phi^{(0)}$, the $\Phi^{(n)}$'s converge towards a limit $\Phi^{(\infty)}$, then the latter will be an exact solution of (7.23).

We will always work in the approximation in which the baryonic density $\rho_b(\vec{x})$ is axially symmetric, continuous and vanishing at infinity. So, the induced gravitational potential should be

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{axially symmetric,} \\ \text{continuous and twice derivable,} \\ \text{vanishing at infinity.} \end{array} \right. \quad (7.34)$$

We introduce a spherical coordinate system (r, θ, φ) where $(\theta = 0)$ defines the symmetry axis. So, there will be no φ -dependence in the solutions, and a good way to find them is to perform a Legendre transformation. Let's first illustrate this for the general Poisson equation :

$$\Delta\Phi(r, \theta) = S(r, \theta), \quad (7.35)$$

where S and Φ possess the properties of symmetry and continuity listed previously. If one decomposes the potential Φ and the source term S into Legendre polynomials :

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \theta)\Phi_l(r), \quad (7.36)$$

$$S(r, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \theta)S_l(r), \quad (7.37)$$

then the S_l 's are found from

$$S_l(r) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} S(r, \theta)P_l(\cos \theta)d(\cos \theta), \quad (7.38)$$

while the Φ_l 's are the solutions of the linear set of equations

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_l = S_l. \quad (7.39)$$

The boundary conditions are given by the properties (7.34) for all l 's,

$$\frac{d}{dr} \Phi_l(0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_l(r) = 0. \quad (7.40)$$

So, in order to find the solution of eq. (7.39), one can first compute some Green functions G_l that are continuous, null at infinity, with zero derivative at the center, and verifying

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} G_l(r, u) \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} G_l(r, u) = \delta(r - u) \quad (7.41)$$

where δ is the Dirac function. The unique answer is

$$G_l(r, u) = -\frac{u}{2l+1} \left\{ \left(\frac{r}{u} \right)^l \mathcal{H}(u-r) + \left(\frac{r}{u} \right)^{-(l+1)} \mathcal{H}(r-u) \right\}. \quad (7.42)$$

Since $\Phi_l(r) = \int_0^{+\infty} S_l(u) G_l(u, r) du$, one finally finds

$$\Phi_l(r) = -\frac{r^{-(l+1)}}{2l+1} \int_0^r S_l(u) u^{l+2} du - \frac{r^l}{2l+1} \int_r^{+\infty} S_l(u) u^{1-l} du. \quad (7.43)$$

We can still use this Green function technique in our recursive method. Indeed, if $\Phi^{(n)}$ shares the properties (7.34), then we can identify the right-hand side of eq. (7.33) with $S(r, \theta)$, and find $\Phi^{(n+1)}$ using the method described above. Then $\Phi^{(n+1)}$ also shares the properties (7.34).

So, at each recursion step, we need to expand the right hand-side of eq. (7.33) in Legendre coefficients. Note that the $\Phi_l^{(n)}$'s are known from the previous iteration, while the number Φ_0 has to be imposed in some arbitrary way. In fact, looking again at eq. (7.23), it is clear that there should be different solutions Φ associated with different values of the free parameter Φ_0 . Intuitively, this parameter tunes the size of the bosonic halo, since it defines the surface inside of which the scalar field plays a role. In the recursion technique, a possible strategy could be to impose Φ_0 once and for all. Proceeding in that way, we found that the solution did not converge properly. In fact, it is much more efficient to choose arbitrarily a point of coordinates (r_0, θ_0) , and to impose step by step that this point remains on the boundary; in other words, for each n , we define Φ_0 as $\Phi^{(n)}(r_0, \theta_0)$. For a given θ_0 , the different possible choices of r_0 generate a one-parameter family of solutions.

However, only a finite range of r_0 values lead to a solution, from $r_{\min} = 0$ for no bosonic halo, to

$$r_{\max} = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{8 \pi G m^4}} = \pi L \quad (7.44)$$

for a pure scalar field configuration – see eq. (7.31) or the alternative derivation in Appendix A. The choice of θ_0 itself is irrelevant and we checked that any other choice gives the same family of solutions.

In summary, for a given baryonic density, the modified non-linear Poisson can be solved by :

1. choosing an arbitrary θ_0 .
2. choosing a value r_0 reflecting the size of the scalar field halo.
3. defining a starting function $\Phi^{(0)}$.
4. integrating eq. (7.33) recursively, with the help of equations (7.38), (7.43) and (7.36).

We show in Appendix B how to define a function $\Phi^{(0)}$ which is close enough to the real solution in order to ensure fast convergence.

Let us illustrate this technique with a particular example, based on a stellar disk plus a bosonic halo. In the following, we will always treat the stellar disk as a thin distribution with exponentially decreasing density. The optical radius is defined in such a way that it encompasses 83% of the total stellar mass, and the thickness of the disk is chosen to be twenty times smaller than its radius, so that

$$\rho_b(r, \theta) \propto e^{-3.2|\cos \theta| \frac{r}{r_{\text{opt}}}} e^{-3.2\gamma|\sin \theta| \frac{r}{r_{\text{opt}}}}, \quad (7.45)$$

where $\gamma = 20$. Let us choose a case where r_0 and r_{opt} are comparable, so that baryons and bosons both have an influence, for instance :

$$r_{\text{opt}} = \frac{r_{\max}}{\pi} \quad \text{and} \quad (r_0, \theta_0) = \left(2 \frac{r_{\max}}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.46)$$

We plot on figure 7.1 the function

$$\frac{\Phi^{(n)}(r, \pi/2)}{\Phi^{(n)}(r_0, \pi/2)} \quad (7.47)$$

for $n = 0, 1, 5, 10$. In this example, the value $\Phi = \Phi_0$ is reached at $r = 2 r_{\text{opt}}$ in the disk plane, and $r = 1.85 r_{\text{opt}}$ in the orthogonal direction. The oblate form of the equipotentials is seen on figure 7.2.

A good test of the recursive method is to pick up different values of θ_0 , and to see whether there is always a value $r_0(\theta_0)$ such that Φ_0 is always the same, and the solutions $\Phi(r, \theta)$ are exactly identical. We checked this successfully on various examples.

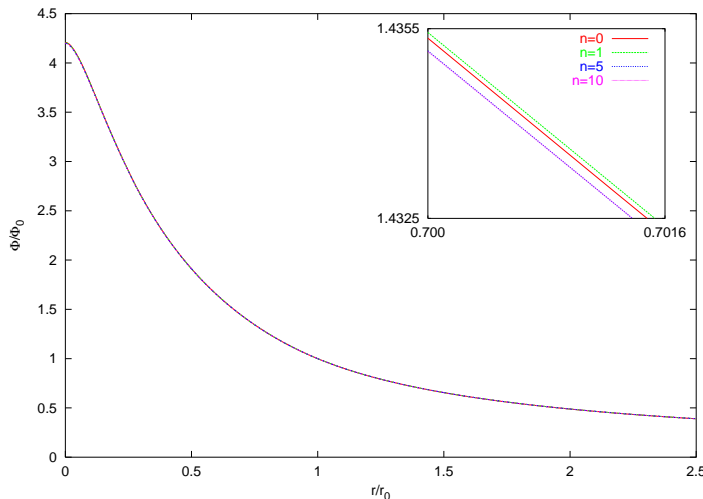


FIG. 7.1 – Gravitational potential $\Phi^{(n)}$ seen in the direction $\theta = \pi/2$ after $n = 0$ (in red), 1 (in green), 5 (in blue) and 10 (in purple) recursions, with $r_{\text{opt}} = r_{\text{max}}/\pi$, $r_0 = 2r_{\text{max}}/\pi$, $\theta_0 = \pi/2$. The functions are seen to converge quickly.

The rotation curve can be deduced from the gravitational potential :

$$v^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \theta = \pi/2). \quad (7.48)$$

On figure 7.3, we compare the rotation curve obtained following our method with the one calculated in the approximation of Paper I : namely, replacing the thin disk by a spherical one, with a density such that in absence of any halo, the rotation curve along the stellar plane would be the same as with the true non-spherical disk. In presence of a halo, one can see that the difference becomes important only at large radius.

7.4 The rotation curves of dwarf spirals

Dwarf spiral galaxies are known to be completely dominated by dark matter at all radii. Usual CDM models fail to reproduce the rotation curves of those systems. The purpose of this analysis is to investigate whether a self-interacting massive scalar field halo is able to reproduce such rotation curves. Therefore, we will first scrutinize the typical dwarf spiral galaxy DDO 154 that has been thoroughly studied – see for example the observations by [26] and [27]. Because it is isolated and therefore seems to be protected against any external influence, this dwarf spiral features a prototypical example for our study. Its HI gas contribution is well measured and

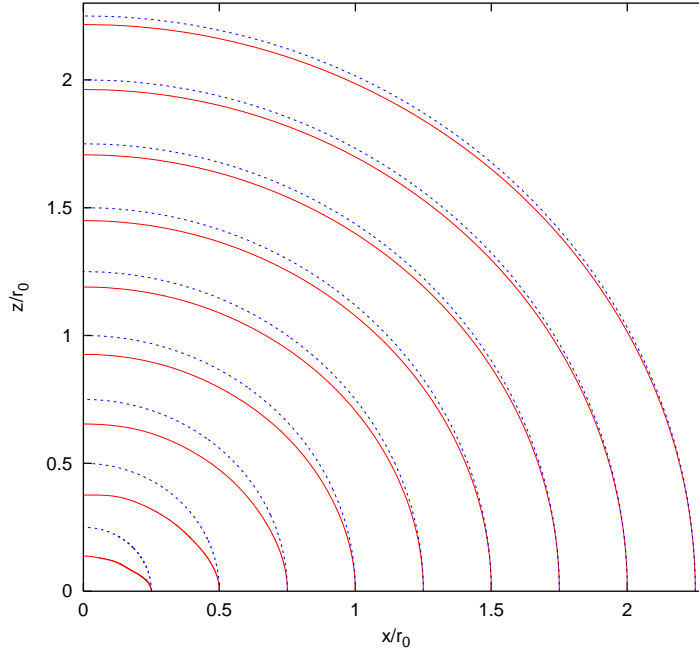


FIG. 7.2 – Equipotential lines generated by a disk-shaped density and a scalar field halo (in red), compared to spherical equipotentials (in blue). This plot has been computed in the case ($r_{\text{opt}} = r_{\text{max}}/\pi$, $r_0 = 2r_{\text{max}}/\pi$, $\theta_0 = \pi/2$). The cartesian coordinate (x, z) are such that the axis of revolution of the galaxy corresponds to $x = 0$.

follows the distribution

$$\rho_{\text{gas}}(r, \theta) = \rho_{\text{gas}}^c e^{-0.8 |\cos \theta| \frac{r}{r_{\text{opt}}}} e^{-5 |\sin \theta| \frac{r}{r_{\text{opt}}}}. \quad (7.49)$$

Its optical radius r_{opt} is equal to 1.4 kpc. The contribution of its stars is visible and therefore well-known, with a density distribution given by relation (7.45). Both stars and gas account for a small fraction of the observed circular velocity.

In order to compare the various dark matter models with the observations of DDO 154, we have performed a χ^2 test on the 13 data points from ref. [27]. To commence, we have considered models in which the approximate real density of stars and gas has been assumed with $\rho_{\text{gas}}^c \approx 0.15 \rho_{\text{stars}}^c$ and $v_{\text{stars}}(r_{\text{opt}}) \approx 0.3 - 0.4 v_{\text{tot}}(r_{\text{opt}})$ – where v_{stars} is the stellar contribution to the rotation velocity v_{tot} . The precise value of the ratio $v_{\text{stars}}(r_{\text{opt}})/v_{\text{tot}}(r_{\text{opt}})$ is unknown and has been adjusted here in order to provide the best fit. On top of stars and gas, a dark matter component is added with a density profile that depends on the model at stake. The Moore’s model [1] is featured in the

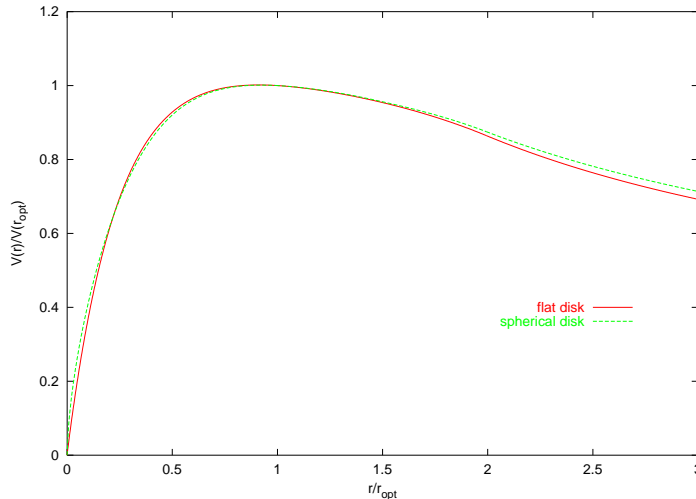


FIG. 7.3 – Rotation curve due to a disk-shaped density (in red) compared to that obtained in a spherical approximation (in green) as in Paper I. These two examples have been computed in the case ($r_{\text{opt}} = r_{\text{max}}/\pi$, $r_0 = 2r_{\text{opt}}$, $\theta_0 = \pi/2$). The difference is seen to be fairly small.

panel (a) of fig. 7.4 and corresponds to the spherical symmetric density

$$\rho_{\text{M}}(r) = \rho_{\text{M}}^{\text{c}} \left\{ \frac{r_{\text{opt}}^3}{r^{1.5} (r + r_s)^{1.5}} \right\}, \quad (7.50)$$

where r_s is a scale radius parameter that is also adjusted in the fit. Recent CDM N–body simulations point towards such a profile. In the case of DDO 154, the best fit corresponds to $\rho_{\text{M}}^{\text{c}} (r_{\text{opt}}/r_s)^{1.5} \approx 0.07 \rho_{\text{stars}}^{\text{c}}$ and to very large values of the scale radius r_s . The χ^2 value is found to be approximatively equal to 600 for 10 degrees of freedom. As previously mentioned, Moore’s model where the density diverges like $r^{-1.5}$ in the central region fails to account for the dark matter distribution inside DDO 154. Then, we have tested a NFW spherical density profile [28] where

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \rho_{\text{NFW}}^{\text{c}} \left\{ \frac{r_{\text{opt}}^3}{r (r + r_s)^2} \right\}. \quad (7.51)$$

Such a distribution peaks at the center and has also been found to naturally arise in N–body numerical simulations of neutralino dark matter. We find that the best χ^2 lies around 200 when $r_s \approx 9 r_{\text{opt}}$ and $\rho_{\text{NFW}}^{\text{c}} \approx 6 \rho_{\text{stars}}^{\text{c}}$ – see panel (b) of fig. 7.4. We have also considered an isothermal spherical halo [29] with

$$\rho_{\text{iso}}(r) = \rho_{\text{iso}}^{\text{c}} \left\{ \frac{r_{\text{opt}}^2}{r^2 + r_s^2} \right\}. \quad (7.52)$$

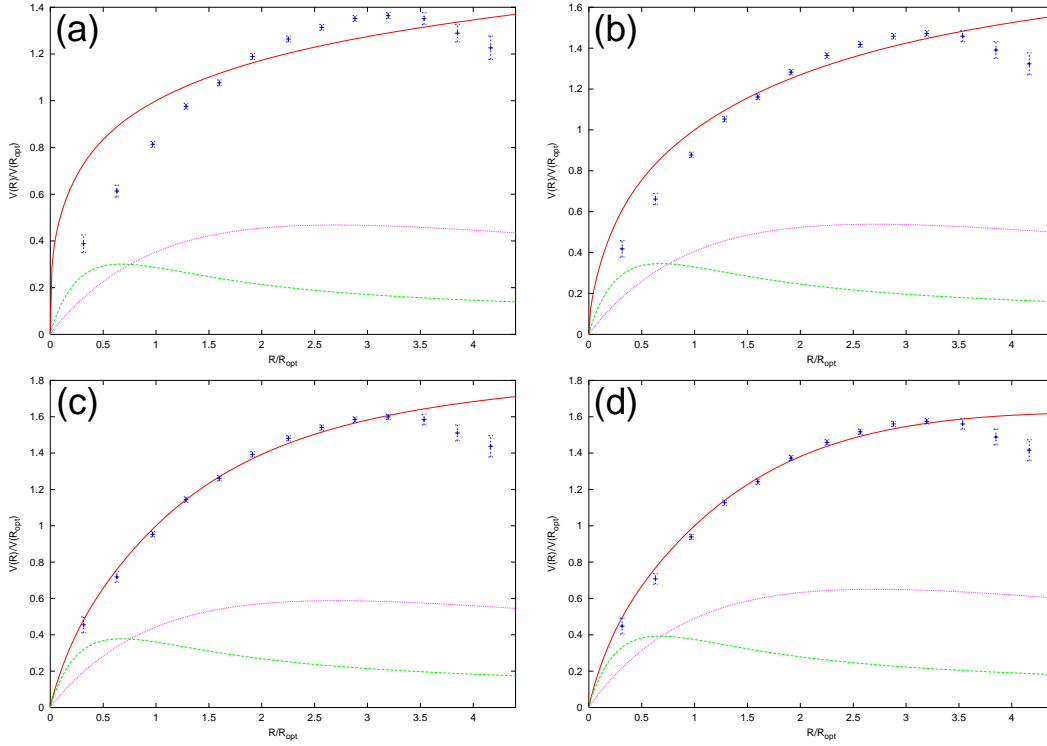


FIG. 7.4 – From left to right and top to bottom, the best fit of the DDO 154 ($r_{\text{opt}} = 1.4$ kpc) rotation curve (in red) is featured as well as the observed stellar (in green) and gas (in purple) densities. A dark matter component has been added and various profiles have been assumed : Moore's density (a), NFW profile (b), isothermal halo (c) and Burkert's phenomenological distribution (d).

This density has been introduced in order to account for flat rotation curves. In the case of DDO 154 where the circular speed starts to decrease beyond 4.5 kpc, the best fit is obtained for $r_s \approx 1.2 r_{\text{opt}}$ and $\rho_{\text{iso}}^c \approx 0.15 \rho_{\text{stars}}^c$. The corresponding χ^2 is now far better with a value ~ 55 – see panel (c) of fig. 7.4. Finally, a Burkert spherical distribution [30]

$$\rho_{\text{B}}(r) = \rho_{\text{B}}^c \left\{ \frac{r_{\text{opt}}^3}{(r + r_s)(r^2 + r_s^2)} \right\}, \quad (7.53)$$

has been considered. This density law has a core radius of size r_s – just like the isothermal halo – and converges at large distances towards a Moore or a NFW profile. It has been introduced as a phenomenological explanation of the rotation curves of dwarf galaxies [31]. The best parameters are then $r_s \approx 1.9 r_{\text{opt}}$ and $\rho_{\text{B}}^c \approx 6 \rho_{\text{stars}}^c$, leading to a best $\chi^2 \sim 45$ – see panel (d) of

fig. 7.4. At this stage, we reach the conclusion that neutralino dark matter – should it collapse according to the N-body numerical simulations à la Moore or NFW – is too much peaked at the center of DDO 154 and does not account for the rotation curve in that region. The fact that these species fail to reproduce the inner dynamics of a system known to be saturated by dark matter is definitely a problem. The isothermal and Burkert halos provide a better agreement with the data but are not consistent with the decrease observed beyond 4.5 kpc.

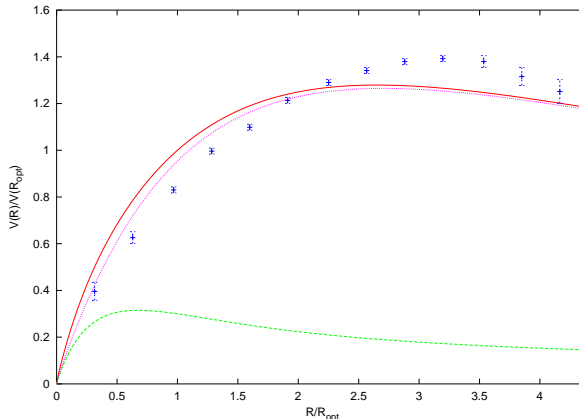


FIG. 7.5 – The DDO 154 rotation curve (in red) is fitted with the observed stellar density (in green) while the gas distribution (in purple) has been artificially enhanced with respect to the observed HI by a rescaling factor.

We have then investigated a slightly different idea. Following Pfenninger and Combes [32], the dark matter inside galaxies would consist of pure molecular hydrogen H_2 – so cold that it would have gone undetected so far. The formation of stars in the inner parts and its concomitant UV light production would have turned part of the H_2 into detectable HI. The distribution of this hidden H_2 component could be derived in the case of DDO 154 from its observed rotation curve. We will nevertheless adopt the opposite point of view since our aim is to derive – and not to start from – the circular speed. We have therefore artificially rescaled the observed gas density (7.49) by a homogeneous overall factor. The best fit featured in fig. 7.5 corresponds to $\rho_{\text{gas}}^c = \rho_{\text{stars}}^c$ and leads to a best χ^2 of ~ 500 which is not particularly exciting. In the case of the models of fig. 7.4, the addition of such a cold gas component does not improve the goodness of our fits.

Finally, we have assumed the presence of a self-interacting bosonic halo and applied the recursion method discussed in section 7.3. The left plot of fig. 7.6 corresponds to stellar and gas populations as observed while a

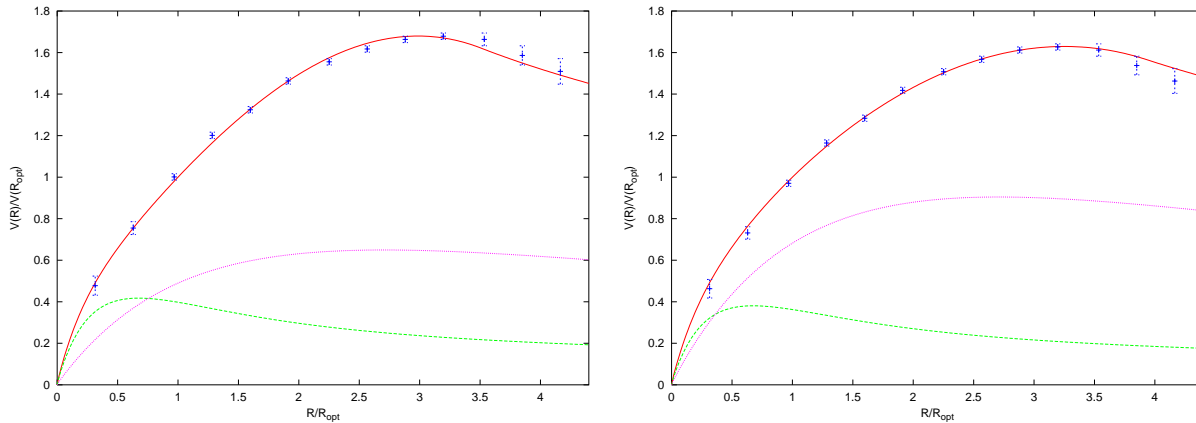


FIG. 7.6 – The best fit of the DDO 154 rotation curve (in red) is presented with the observed stellar density (in green) and gas distribution (in purple). In the left panel, a self-interacting bosonic halo is assumed with $m^4/\lambda \approx 75$ eV^4 together with the observed gas density profile. In the right panel, the gas component has been rescaled in order to improve the goodness of fit and a value of $m^4/\lambda \approx 50$ eV^4 is derived.

value of $m^4/\lambda \approx 75$ eV^4 provides a best χ^2 of 16. The agreement with the measured rotation curve is quite good. Notice that the bosonic halo dominates completely the inner dynamics beyond ~ 0.5 kpc. More impressive is the right plot of fig. 7.6 where the gas distribution has now been rescaled in order to improve the goodness of fit. A best χ^2 of ~ 7 is reached for $\rho_{\text{gas}}^c \approx 0.35 \rho_{\text{stars}}^c$ and a value of $m^4/\lambda \approx 50$ eV^4 .

Beside the prototypical example of DDO 154, we have analyzed a set [31] of small and medium size spiral systems for which measurements of the rotation curve are of high quality. These galaxies have been selected on the requirement that they have no bulge, very little HI – if any – and a dominant stellar disk that accounts for the dynamics in the central region. They are also dominated by dark matter as is clear from fig. 7.7. A self-interacting bosonic halo has been assumed with $m^4/\lambda \approx 50$ eV^4 . Because of the presence of wiggles in the rotation curves – presumably related to spiral arms inside the disks – the best χ^2 value becomes meaningless. The qualitative agreement is nevertheless correct except in the case of 545–G5 where the optical radius is $r_{\text{opt}} = 7.7$ kpc. Because the mass m and the coupling λ define a unique scale of ~ 2.3 kpc – see relation (7.25) – the Bose condensate does not extend enough to account for the dark matter inside large systems. A single self-interacting bosonic halo fails to reproduce at the same time the dark matter inside light and massive spirals. A possible

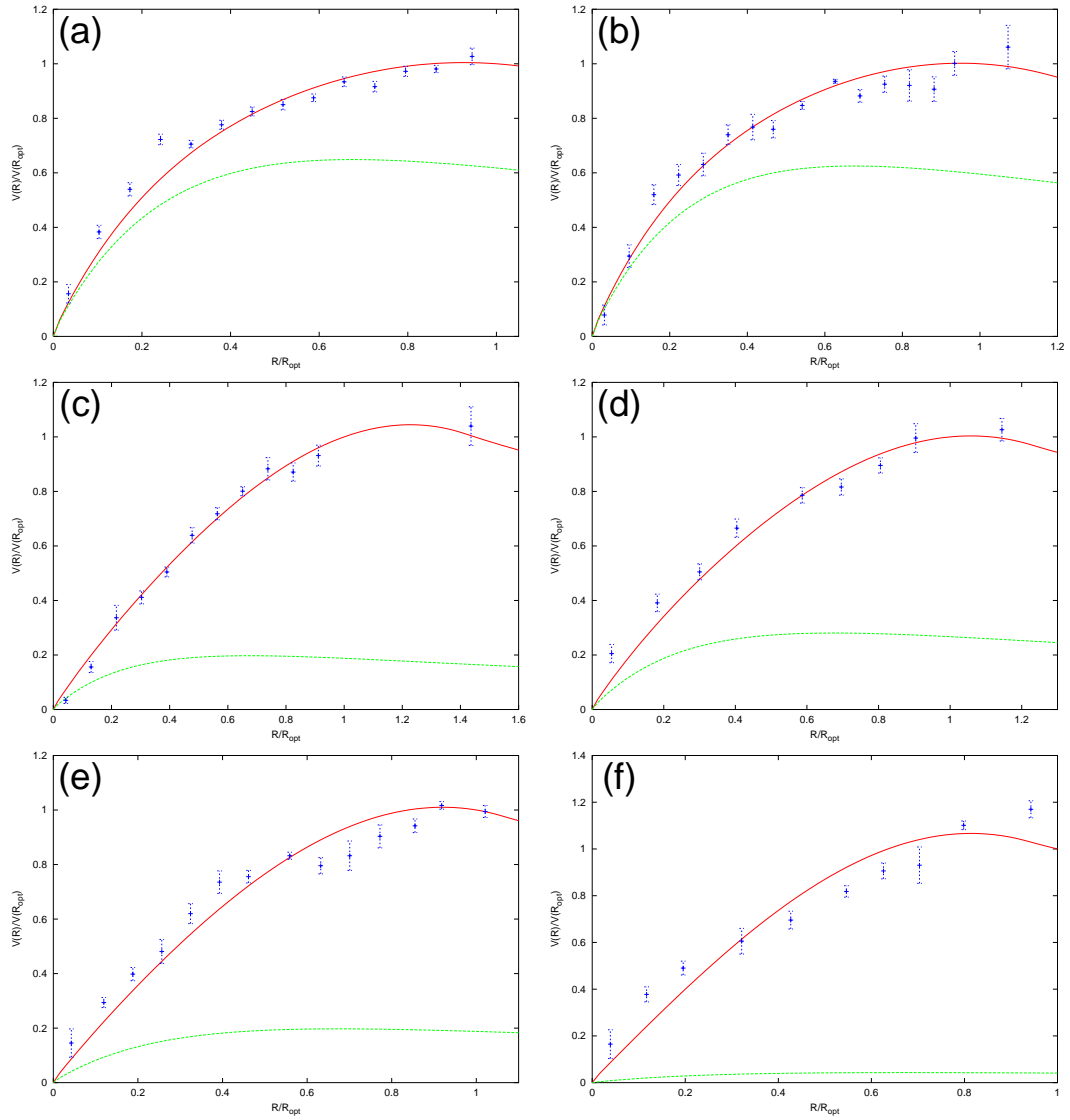


FIG. 7.7 – From left to right and top to bottom, the best fit (in red) of the rotation curves of various spiral galaxies with increasing optical radii. The green lines stand for the stellar contributions. The various panels respectively correspond to (a) N7339 ($r_{\text{opt}} = 4.8$ kpc) – (b) M-3-1042 ($r_{\text{opt}} = 4.8$ kpc) – (c) N755 ($r_{\text{opt}} = 4.8$ kpc) – (d) 116-G12 ($r_{\text{opt}} = 5.4$ kpc) – (e) 563-G14 ($r_{\text{opt}} = 6.4$ kpc) – (f) 545-G5 ($r_{\text{opt}} = 7.7$ kpc).

solution lies in the existence of several small bosonic condensates or clumps inside the halos of large galaxies whereas a single condensate would account

for the dark matter of dwarf spirals such as DDO 154. We have concentrated on dwarf spiral galaxies for which neutralinos seem to be actually in trouble. The case of several bosonic clumps is beyond the scope of this work and will be investigated elsewhere.

7.5 The solar system

As long as we were interested in the inner dynamics of galactic systems, the baryonic density ρ_b in equations (7.23) and (7.33) was implicitly averaged over distances of order a few pc and behaved smoothly. If the stellar population is now made of point-like particles with mass M_i , the gravitational potential Φ varies according to

$$\Delta\Phi + 8\pi G \frac{m^4}{\lambda} (\Phi - \Phi_0) \mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi) = 4\pi G \sum_i M_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) . \quad (7.54)$$

Outside the Bose condensate, the usual Poisson equation is recovered so that the gravitational attraction of a star – say the Sun – is not modified with respect to the conventional situation. Slightly different is the case where the Sun lies inside the region where the field ϕ extends. Intuitively, the scalar field is expected to be attracted by the solar gravity and to concentrate around the Sun whose gravity should consequently be strengthened. In order to investigate that effect, we first notice that the potential difference $\Phi - \Phi_0$ is a linear function of the sources within the Bose condensate. The contribution Φ_\odot of the sun to the potential difference $\Phi - \Phi_0$ satisfies the modified Poisson equation

$$\Delta\Phi_\odot + 8\pi G \frac{m^4}{\lambda} \Phi_\odot = 4\pi G \rho_\odot , \quad (7.55)$$

with the condition that it must vanish on the boundaries of the Bose condensate. If the solar system is well embedded inside the latter – below a depth well in excess of a few AU – the surface of the condensate is so far that we may just require that Φ_\odot vanishes at infinity.

Assuming in addition that the solar density ρ_\odot has an isotropic distribution, the solution of eq. (7.55) readily obtains in terms of the spherical Bessel functions $j_0(z) = \sin z/z$ and $n_0(z) = -\cos z/z$ as explained in Appendix B

$$\Phi_\odot(r) = -4\pi G \frac{L^3}{r} \left\{ \cos z \int_0^z \rho_\odot(u) u \sin u du + \sin z \int_z^{+\infty} \rho_\odot(u) u \cos u du \right\} . \quad (7.56)$$

The dimensionless radial coordinate z is defined as the ratio r/L where the typical scale L has already been defined in section 7.2. Relations (7.24) and (7.25) imply that L exceeds the solar radius R_\odot by some ten to eleven orders

of magnitude. The gravitational potential which the Sun generates with the help of the scalar field ϕ simplifies into

$$\Phi_{\odot}(r) = -\frac{GM_{\odot}}{r} \cos(r/L) . \quad (7.57)$$

Because of our assumption as regards the boundary condition – which we placed at infinity – this relation may be safely used only for distances $r \ll L$. Inside the solar system, this leads to the potential

$$\Phi_{\odot}(r) = -\frac{GM_{\odot}}{r} \left\{ 1 - \frac{r^2}{2L^2} \right\} , \quad (7.58)$$

and to the gravitational field

$$g(r) = -\frac{GM_{\odot}}{r^2} - \frac{GM_{\odot}}{2L^2} . \quad (7.59)$$

Should the solar system be embedded inside the Bose condensate of the field under scrutiny in this article, the various planets and satellites that orbit around the Sun should undergo the additional constant radial attraction

$$\delta g = 2.85 \times 10^{-18} \text{ cm s}^{-2} \left\{ \frac{10^{-2}}{\lambda} \right\} \left\{ \frac{m}{1 \text{ eV}} \right\}^4 . \quad (7.60)$$

This acceleration is so weak that it should not alter the motion of the planets around the Sun. The relative increase of the solar gravitational attraction is actually

$$\frac{\delta g}{g} = 1.93 \times 10^{-17} \left\{ \frac{r}{1 \text{ AU}} \right\}^2 \left\{ \frac{10^{-2}}{\lambda} \right\} \left\{ \frac{m}{1 \text{ eV}} \right\}^4 . \quad (7.61)$$

Detailed analysis of radio metric data from Pioneer 10 and 11 indicate the existence of an apparent anomalous acceleration acting on these spacecrafts [33]. Quite exciting is the observation that this anomalous acceleration δg_P is constant and directed towards the Sun. Both features are actually expected in the presence of a self-interacting scalar field. However, the magnitude of the observed anomalous acceleration $\delta g_P \sim 8.5 \times 10^{-8} \text{ cm s}^{-2}$ is ten orders of magnitude larger than what is needed to explain the rotation curve of DDO 154. Should the Pioneer acceleration be the consequence of a scalar field enhanced solar gravity, it would indicate an exceedingly large value for $m/\lambda^{1/4}$ of order 1.3 keV and a typical condensate size $L \sim 9 \times 10^{-3} \text{ pc}$. We are therefore lead to the conclusion that we cannot explain with the same value of $m/\lambda^{1/4}$ the Pioneer anomalous acceleration and the rotation curves of dwarf spirals.

7.6 Cosmological behavior

We will now consider briefly the possible cosmological behavior of our scalar field. In Paper II, we studied the cosmological evolution of a homogeneous complex scalar field with a quadratic and/or quartic potential. Here, we want to update this analysis for the values of m^4/λ found in section 7.4. Generally speaking, focusing on the homogeneous quantities is the first step in any comprehensive study of a given cosmological scenario. In our case, we need to know whether the evolution of the field background violates any cosmological bound before studying the possible growth of spatial fluctuations – hoping that they will cluster and form galactic halos after the time of equality between radiation density and field density.

We refer the reader to Paper II for a detailed resolution of the Klein–Gordon and Friedman equations in a Universe containing ordinary radiation, baryons, a homogeneous complex field and a cosmological constant relevant only today. It is straightforward to show that when the potential is dominated by the quartic term, the energy density of the field smoothly decays as a^{-4} : so, in the early Universe, the scalar field behaves as “dark radiation”. Later, when the quadratic term takes over, i.e., when

$$m^2|\phi|^2 \sim \lambda|\phi|^4 \quad \Rightarrow \quad V(\phi) \sim 2 \frac{m^4}{\lambda}, \quad (7.62)$$

the field starts to decay as a^{-3} , like dark matter: so, it can be responsible for a “matter-like” dominated stage. During the whole cosmological evolution, the kinetic energy of the field is of the same order of magnitude as its potential energy. So, the ratio m^4/λ immediately gives a rough estimate of the total energy density of the field at the time of its transition, denoted later as ρ_ϕ^{tr} . If this density is $\sim 1 \text{ eV}^4$, we immediately notice that it is of the same order of magnitude as the density at radiation–matter equality – remember that $\rho_{\text{eq}} \simeq 0.55 \text{ eV}^4$ for the concordance Λ CDM model. So, in the early Universe, the density of our “dark radiation” (the scalar field) had to be comparable to that of “true radiation” (photons and neutrinos). This brings some considerable tension with the bound on the total radiation density that can be derived from BBN.

This cosmological toy–model and the problems associated with it were first discussed by Peebles [17] in the case of a real scalar field, with essentially the same motivations as in the present work. As a possible way out, Peebles proposed a small modification of the scalar potential,

$$V(\phi) = m^2\phi^2 + \lambda\phi^q, \quad (7.63)$$

where q would be non–integer and slightly smaller than 4. Indeed, by lowering the index q , one can decrease the fraction of dark radiation in the early Universe, and in particular at BBN. We will not follow this direction.

Indeed, the analysis of section 7.4 revealed a preferred value of m^4/λ around 50–75 eV⁴. This is significantly larger than the observed value of ρ_{eq} and than the rough estimate of Paper I where we considered $m^4/\lambda \simeq 1$ eV⁴. Our purpose in the rest of this section will be to check whether this new value is compatible with the BBN bound.

In order to obtain a precise relation between the parameter m^4/λ and the effective number of neutrinos at BBN – which is a convenient way to parameterize a cosmological density which behaves like some extra relativistic degrees of freedom – we need to study numerically the detailed behavior of the field in a vicinity of the transition between the radiation-like and the matter-like regimes. For each value of m^4/λ , it is possible to follow ρ_ϕ , and to extrapolate the branches in $\rho_\phi \propto a^{-4}$ and in $\rho_\phi \propto a^{-3}$. We define ρ_ϕ^{tr} as the energy density given by intersecting the two asymptotes. The knowledge of this single number is sufficient in order to relate exactly the constant value of $\rho_\phi a^4$ in the early Universe to the constant value of $\rho_\phi a^3$ measured today. A simple numerical simulation gives

$$\rho_\phi^{\text{transition}} = 2.4 m^4/\lambda \quad (7.64)$$

independently of any other field or cosmological parameters. The simulation also provides a very good analytic approximation of the field density at any time – imposing that today, when $a = a_0$, the field density is given by the fraction of the critical density usually attributed to Cold Dark Matter, $\rho_\phi = \Omega_{\text{cdm}} \rho_c^0$:

$$\rho_\phi = \Omega_{\text{cdm}} \rho_c^0 \left[(a_0/a)^6 + \left(\Omega_{\text{cdm}} \rho_c^0 \frac{\lambda}{2.4 m^4} \right)^{2/3} (a_0/a)^8 \right]^{1/2}. \quad (7.65)$$

The field density before the transition can be read directly from the previous equation. It can be conveniently parameterized in terms of an effective neutrino number, defined as usual through

$$\Delta N_{\text{eff}} = \frac{\rho_\phi}{\rho_\nu}, \quad (7.66)$$

where ρ_ν is the standard density of a single relativistic neutrino species. The final result is

$$\Delta N_{\text{eff}} = \left(\frac{\Omega_{\text{cdm}}^4 \rho_c^0 \lambda}{2.4 \rho_\nu^0 m^4} \right)^{1/3} = 7.5 \left(\frac{\Omega_{\text{cdm}} h^2}{0.13} \right)^{4/3} \left(\frac{\lambda^{1/4} \text{eV}}{m} \right)^{4/3}. \quad (7.67)$$

Sticking to $m^4/\lambda = 50$ (eV)⁴, and using the currently preferred values $h = 0.68$ and $\Omega_{\text{cdm}} = 0.3$, one finds $\Delta N_{\text{eff}} = 2$, which is above the usual BBN bound $|\Delta N_{\text{eff}}| < 1$ [34]. However, it is still possible to find some values of $(\Delta N_{\text{eff}}, h, \Omega_{\text{cdm}})$ satisfying the above relation, and allowed at the 1- σ level

by current CMB experiments and BBN predictions [35] – for instance, (1.0, 0.63, 0.20). In any case, in a very near future, the new CMB observations will set some stringent limits on these three parameters : it will then be easy to state about the validity of our alternative to the usual cosmological scenario.

7.7 Conclusions

We have shown that a self-coupled charged scalar field provides an excellent fit to the rotation curve of the dwarf spiral DDO 154. That galaxy is the prototypical example of a system known to be completely dominated by dark matter. The effect of the quartic coupling λ results into an effective modified gravitation inside the Bose condensate where the Poisson equation becomes strongly non-linear. The problem – complicated by the non-sphericity of the baryon distribution – has been solved exactly as explained in section 7.3. The agreement with the observations of the circular speed of DDO 154 is impressive. Notice that neutralino dark matter does not pass this test because of the central cusp that it would develop. We conclude that the charged scalar field considered in this analysis provides an exciting alternative to the galactic dark matter – at least inside dwarf systems. A typical value of $m^4/\lambda \sim 50 - 75 \text{ eV}^4$ obtains.

The scalar field behaves cosmologically as a dark radiation component as long as the quartic contribution of the potential $V(\phi)$ dominates over its quadratic counterpart. The situation gets reversed when the field energy density is $\sim 2.4 m^4/\lambda$ and a matter-like behavior subsequently ensues. The larger the crucial parameter m^4/λ , the sooner the transition between dark radiation and dark matter-like behaviors and consequently the smaller the contribution of the scalar field to the overall radiation density at early times – for a fixed scalar field mass density today. A large value of m^4/λ translates into a small number of effective neutrino families during BBN and we have shown that our model marginally satisfies the requirement that ΔN_{eff} should not exceed 1.

Actually the model is strongly constrained on the one hand side by the size L of the Bose condensates – and therefore of the corresponding galactic halos – and on the other hand side by the contribution ΔN_{eff} to the radiation density at BBN. Both L and ΔN_{eff} decrease with m^4/λ and a value for the latter of $\sim 50 - 75 \text{ eV}^4$ – which provides excellent agreement with DDO 154 – is marginally consistent with BBN. Large halos cannot consequently be pictured in terms of a single Bose condensate and the simple scheme presented here has to be modified. A possible solution – yet not very natural – is to replace the quartic field self-interaction by a ϕ^q term as suggested by [17]. This would alleviate the BBN constraint.

Another option worth being explored is to imagine that massive and exten-

ded halos are formed of several bosonic clumps. The coherent configuration that has been investigated here may be understood as the ground state of some gigantic bosonic atom. It is therefore conceivable that the scalar field may also form several such condensates that would be organized inside a huge bosonic molecule with a spatial extension much in excess of L . The electron cloud around the proton does not extend further than $\sim 10^{-10}$ m inside the hydrogen atom and yet electrons are delocalized over meter size distances inside metals.

If so, the dark matter would be made of small bosonic clumps. Should the solar system lie within such a system, the motion of its planets would provide in that case a lower bound on L since the smaller is the latter, the stronger is the effective modification to Newton's law of gravitation. We have actually shown in section 7.5 that the scalar field concentrates in the solar potential well and strengthens it to generate an additional gravitational attraction that is radial and constant. As a matter of fact, the radio data from the Pioneer probes are consistent with such an anomalous acceleration that seems to be constant and directed towards the Sun. Assuming that it results from the self-interacting scalar field which we have investigated in this work, the observed magnitude $\delta g_P \sim 8.5 \times 10^{-8}$ cm s⁻² would imply a value for $m/\lambda^{1/4}$ of order 1.3 keV and a typical condensate size $L \sim 0.01$ pc. The merging of many of these small bosonic clumps into a larger structure like a galactic halo is an open question.

Acknowledgments

We would like to thank D. Maurin and R. Taillet for useful discussions.

Bibliographie

- [1] B. Moore et al., “Cold collapse and the core catastrophe”, MNRAS 310 (1999), 1147.
- [2] M. D. Weinberg & N. Katz, “Bar-driven dark halo evolution : a resolution of the cusp-core controversy”, The Astrophysical Journal 580 (2002), 627.
- [3] J. A. Sellwood, “Bars and Dark Matter Halo Cores”, astro-ph/0210079.
- [4] A. S. Font, J. F. Navarro, J. Stadel & T. Quinn, “Halo substructure and disk heating in a Lambda CDM universe”, The Astrophysical Journal 563 (2001), L1.
- [5] O. Valenzuela & A. Klypin, “Secular bar formation in galaxies with significant amount of dark matter”, astro-ph/0204028.
- [6] N. Dalal & C. S. Kochanek, “Direct detection of CDM substructure”, The Astrophysical Journal 572 (2002), 25.
- [7] W. B. Lin, D. H. Huang, X. Zhang & R. Brandenberger, Physical Review Letters 86 (2001), 954.
- [8] D. N. Spergel & P. J. Steinhardt, Physical Review Letters 84 (2000), 3760.
- [9] R. Ruffini & S. Bonazzola, “Systems Of Self-Gravitating Particles In General Relativity And The Concept Of An Equation Of State”, Physical Review 187 (1969), 1767.
- [10] R. Friedberg, T. D. Lee, & Y. Pang, Physical Review D35 (1987), 3640.
- [11] P. Jetzer, “Boson stars”, Physics Reports 220 (1992), 163.
- [12] A. R. Liddle & M. S. Madsen, International Journal of Modern Physics D1 (1992), 101.
- [13] W. Hu, R. Barkana, & A. Gruzinov, Physical Review Letters 85 (2000), 1158.
- [14] A. Arbey, J. Lesgourgues and P. Salati, “Quintessential Halos around Galaxies”, Physical Review D64 (2001), 123528.
- [15] A. Arbey, J. Lesgourgues and P. Salati, “Cosmological Constraints on Quintessential Halos”, Physical Review D65 (2002), 083514.

- [16] M. Colpi, S. L. Shapiro & I. Wasserman, *Physical Review Letters* 57 (1986), 2485.
- [17] P. J. E. Peebles, “Fluid Dark Matter”, astro-ph/0002495.
- [18] A. Riotto & I. Tkachev, *Physics Letters* B484 (2000), 177.
- [19] F. E. Schunck, “A scalar field matter model for dark halos of galaxies and gravitational redshift”, astro-ph/9802258.
- [20] J. Goodman, astro-ph/0003018.
- [21] F. S. Guzman & T. Matos, *Classical and Quantum Gravity* 17 (2000), L9; F. S. Guzman, T. Matos & H. Villegas-Brena, *Review of Mexican Astronomy and Astrophysics* 37 (2001), 63; T. Matos, F.S. Guzman & L. A. Urena-Lopez, *Classical and Quantum Gravity* 17 (2000), 1707; T. Matos & F. S. Guzman, *Annalen der Physik* 9 (2000), S1; T. Matos, F. S. Guzman & D. Nunez, *Physical Review D*62 (2000), 061301; T. Matos & L. A. Urena-Lopez, *Classical and Quantum Gravity* 17 (2000), L75; *Physical Review D*63 (2001), 063506; M. Alcubierre, F. S. Guzman, T. Matos, D. Nunez, L. Arturo Urena-Lopez & P. Wiederhold, *Classical and Quantum Gravity* 19 (2002), 5017.
- [22] U. Nucamendi, M. Salgado & D. Sudarsky, *Physical Review D*63 (2001), 125016.
- [23] C. Wetterich, *Physics Letters* B522 (2001), 5.
- [24] L. A. Urena-Lopez & A. R. Liddle, *Physical Review D*66 (2002), 083005.
- [25] V. Sahni & L. Wang, *Physical Review D*62 (2000), 103517; F. Perrotta & C. Baccigalupi, *Physical Review D*65 (2002), 123505; M. Pietroni, hep-ph/0203085; J. E. Kim & H. P. Nilles, *Physics Letters* B553 (2003), 1; M. C. Bento, O. Bertolami & A. A. Sen, astro-ph/0210468; D. Carturan & F. Finelli, astro-ph/0211626; B. A. Bassett, M. Kunz, D. Parkinson & C. Ungarelli, astro-ph/0211303.
- [26] G. L. Hoffman, E. E. Salpeter & N. J. Carle, “The fine structure and outskirts of DDO 154”, astro-ph/0107484.
- [27] C. Carignan & C. Purton, “The “total” mass of DDO 154”, *The Astrophysical Journal* 506 (1998), 125.
- [28] J. F. Navarro, C. S. Frenk & S. D. M. White, “The structure of cold dark matter halos”, *The Astrophysical Journal* 462 (1996), 563.
- [29] C. Carignan & S. Beaulieu, “Optical and HI studies of the ‘gas-rich’ dwarf irregular galaxy DDO 154”, *The Astrophysical Journal* 347 (1989), 760.
- [30] A. Burkert, “The structure of dark matter halos in dwarf galaxies”, *The Astrophysical Journal* 447 (1995), L25.
- [31] A. Borriello & P. Salucci, “The dark matter distribution in disk galaxies”, *MNRAS* 323 (2001), 285.

- [32] D. Pfenniger, F. Combes & L. Martinet, *Astronomy and Astrophysics* 285 (1994), 79.
- [33] J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, A. S. Liu, M. M. Nieto, & S. G. Turyshev, *Physical Review Letters* 81 (1998), 2858.
- [34] S. Burles & D. Tytler, *The Astrophysical Journal* 499 (1998), 699; *The Astrophysical Journal* 507 (1998), 732.
- [35] A. Benoît et al., “Cosmological constraints from Archeops”, *astro-ph/0210306*.

Appendix A

The purpose of this section is to derive the gravitational potential generated by a pure scalar field condensate. This calculation is complementary to the one at the end of section 7.2, based on the polytropic formalism. In absence of a baryonic density ρ_b , eq. (7.23) reads

$$\Delta(\Phi - \Phi_0) + 8\pi G \frac{m^4}{\lambda} (\Phi - \Phi_0) \mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi) = 0. \quad (7.68)$$

Since there is no source, let us suppose that the gravitational potential has a spherical symmetry. One can do a change of variable $r = z \sqrt{\frac{\lambda}{8\pi G m^4}}$ so that the equation becomes simply

$$\frac{d^2}{dz^2} \{z(\Phi - \Phi_0)\} + z(\Phi - \Phi_0) \mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi) = 0. \quad (7.69)$$

The only solution of this equation which is continuous and derivable everywhere, and goes to zero at infinity is

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_0 + (\Phi(0) - \Phi_0) \frac{\sin z}{z} & \text{if } z < \pi \quad (\text{see Paper II}) \\ \frac{\pi \Phi_0}{z} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7.70)$$

So, the maximum extension of the scalar field halo is $r_{\max} = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{8\pi G m^4}}$. The density of the bosonic halo is

$$\rho_\phi = -\frac{2m^4}{\lambda} (\Phi - \Phi_0) \mathcal{H}(z - \pi) \quad (7.71)$$

and the total mass is

$$M = 4\pi \left(\frac{\lambda}{8\pi G m^4} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \rho_\phi(z') z'^2 dz' = \frac{\pi}{G} \sqrt{\frac{\lambda}{8\pi G m^4}} (\Phi_0 - \Phi(0)). \quad (7.72)$$

On the other hand, the Gauss theorem applied to the sphere of radius $r = r_{\max}$ gives

$$\Phi_0 = -\frac{GM}{r_{\max}} = -\frac{GM}{\pi} \sqrt{\frac{8\pi G m^4}{\lambda}} \quad (7.73)$$

so that $\Phi(0) = 2\Phi_0$. The solution (7.70) can be rewritten as

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi_0 \left(1 + \frac{\sin z}{z} \right) & \text{if } z < \pi \\ \frac{\pi \Phi_0}{z} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7.74)$$

Appendix B

The purpose of this Appendix is to provide a prescription for the definition of $\Phi^{(0)}$ – the starting function in the recursive method. We tested this prescription on various examples, and found that $\Phi^{(0)}$ is always a fairly good approximation of the exact solution, allowing for quick convergence.

The idea is to enforce the boundary surface on which the field density $(m^4/\lambda)(\Phi - \Phi_0) \mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi)$ vanishes to be a perfect sphere. Of course, this has to be wrong when the baryonic density is non-spherical. So, if we impose a constant boundary radius, we need to relax the fact that the value of Φ should be constant all over the boundary. In other terms, if r is the radial coordinate, we replace $\mathcal{H}(\Phi_0 - \Phi)$ by $\mathcal{H}(r_0 - r)$, where r_0 is an arbitrary boundary radius.

If we define a dimensionless radial coordinate $z = r \sqrt{\frac{8\pi G m^4}{\lambda}}$, eq. (7.23) becomes

$$\Delta\Phi = S(z, \theta) + (\Phi_0 - \Phi) \mathcal{H}(z_0 - z). \quad (7.75)$$

where $S = 4\pi G\rho$. After a Legendre transformation, we obtain the following set of differential equations :

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\Phi_l}{dz} \right) - \frac{l(l+1)}{z^2} (\Phi_l - \Phi_0 \delta_{l,0}) \mathcal{H}(z_0 - z) = S_l(z) \quad (7.76)$$

where $\delta_{l,0}$ is the Kronecker symbol. Each of these equations can be solved separately on the two intervals $0 \leq z \leq z_0$ and $z_0 \leq z \leq \infty$, using Green functions. In terms of the spherical Bessel functions $j_l(z)$ and $n_l(z)$, the solution of eq. (7.75) for $z \leq z_0$ is

$$\Phi_l(z) = \Phi_0 \delta_{l,0} + n_l(z) \int_0^z u^2 j_l(u) S_l(u) du + j_l(z) \int_z^{z_0} u^2 n_l(u) S_l(u) du + C_l^1 j_l(z) \quad (7.77)$$

where C_l^1 is a free constant. In the same way, for $z \geq z_0$, the solution is

$$\Phi_l(z) = -\frac{1}{2l+1} z^{-(l+1)} \int_{z_0}^z u^{l+2} S_l(u) du - \frac{1}{2l+1} z^l \int_z^{+\infty} u^{1-l} S_l(u) du - C_l^2 \frac{1}{2l+1} z^{-(l+1)} \quad (7.78)$$

where C_l^2 is another free constant. We impose that each Legendre coefficient of the gravitational potential is derivable and continuous on the boundary $z = z_0$:

$$\begin{cases} \Phi_l(z_0^-) & = \Phi_l(z_0^+), \\ \frac{d}{dz} \Phi_l(z_0^-) & = \frac{d}{dz} \Phi_l(z_0^+). \end{cases} \quad (7.79)$$

This defines a unique value for each constant of integration :

$$\begin{aligned} C_l^1 &= \frac{(I_l^2 - I_l^1 - \Phi_0 \delta_{l,0})(l+1) + z_0(J_l^2 - J_l^1)}{(l+1)j_l(z_0) + z_0 j_l'(z_0)}, \\ C_l^2 &= \frac{-z_0^{l+2}(2l+1)j_l(z_0)(J_l^2 - J_l^1) + z_0^{l+2}(2l+1)j_l'(z_0)(I_l^2 - I_l^1 - \Phi_0 \delta_{l,0})}{(l+1)j_l(z_0) + z_0 j_l'(z_0)}, \end{aligned} \quad (7.80)$$

where

$$\begin{aligned} I_l^1 &= n_l(z_0) \int_0^{z_0} u^2 j_l(u) S_l(u) du, \\ I_l^2 &= -\frac{1}{2l+1} z_0^l \int_{z_0}^{+\infty} u^{1-l} S_l(u) du, \\ J_l^1 &= n_l'(z_0) \int_0^{z_0} u^2 j_l(u) S_l(u) du, \\ J_l^2 &= -\frac{l}{2l+1} z_0^{l-1} \int_{z_0}^{+\infty} u^{1-l} S_l(u) du. \end{aligned} \quad (7.81)$$

One can then reconstruct the gravitational potential $\Phi^{(0)}$ from

$$\Phi^{(0)}(z, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \theta) \Phi_l(z). \quad (7.82)$$

So far, the approximate solution $\Phi^{(0)}$ constructed in this way depends on two arbitrary numbers : first, z_0 , and second, Φ_0 , which appears explicitly in the definition of C_0^1 and C_0^2 . However, z_0 and Φ_0 have to be related in some way. Indeed, if $\Phi^{(0)}$ was an exact solution, Φ_0 would be equal by definition to $\Phi^{(0)}(z_0, \theta)$ for any θ . In our approximation scheme, $\Phi^{(0)}(z_0, \theta)$ is not independent of θ , but we can choose a particular direction θ_0 , and impose that $\Phi_0 = \Phi^{(0)}(z_0, \theta_0)$. Inserting this identity in eq. (7.82), and using eq. (7.77), one obtains the relation

$$\Phi_0 = \Phi^{(0)}(z_0, \theta_0) = \frac{z_0}{\tan z_0} \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \theta_0) \left\{ n_l(z_0) \int_0^{z_0} u^2 j_l(u) S_l(u) du + K_l j_l(z_0) \right\} \quad (7.83)$$

where

$$K_l = \frac{(I_l^2 - I_l^1)(l+1) + z_0(J_l^2 - J_l^1)}{(l+1)j_l(z_0) + z_0 j_l'(z_0)}. \quad (7.84)$$

In summary, the first step of our recursive method is performed in the following order :

1. we choose a value z_0 (or r_0) and an arbitrary direction θ_0 (that will be kept for all the following iterations).

2. we solve eq. (7.83) in order to find Φ_0 .
3. we compute $\Phi^{(0)}(z, \theta)$ using eqs. (7.77), (7.78), (7.82).

The next iterations are performed in the much simpler way described in section 7.3.

Conclusion et Perspectives

Mes travaux de thèse portent essentiellement sur le problème de la Matière Noire.

Lors des quatre premiers chapitres ont été présentés le modèle cosmologique du Big-Bang chaud, ainsi que les observations qui soulèvent la question de la nature de la matière noire et de l'énergie noire. Nous avons aussi vu les modèles de matière noire les plus étudiés et différents modèles astrophysiques ou cosmologiques fondés sur des champs scalaires. Nous avons ainsi mis l'accent sur la possibilité que la matière noire puisse être expliquée, à la manière de l'énergie noire, à partir d'un champ scalaire complexe.

Nous nous sommes intéressés au chapitre cinq à un modèle simple de halo galactique formé par un champ scalaire complexe massif et chargé dans $U(1)$. Un tel champ est capable de rendre compte à la fois des courbes de rotation universelles de M. Persic, P. Salucci et F. Stel, et de la courbe de rotation de la galaxie spirale naine DDO 154, à condition qu'il soit associé à une masse proche de 10^{-23} eV. De part le fait que les courbes universelles sont des courbes moyennes, cette masse n'a pas pu être précisément évaluée. Pour ce faire, il faudrait effectuer une étude plus systématique sur des galaxies individuelles. Néanmoins, une telle masse semble très éloignée des masses habituelles de la physique des particules élémentaires.

Dans le chapitre suivant, nous avons vu que le champ scalaire précédent pouvait avoir un comportement cosmologique satisfaisant, mais qu'il était impossible que dans l'univers primordial ce champ ait été homogène au niveau de sa phase et que les galaxies aient des charges de même signe. Il pourrait néanmoins être intéressant de considérer des modèles "contraires" dans lesquels la densité de champ scalaire serait homogène, mais avec des phases différentes, et donc dans lesquels les galaxies pourraient avoir des charges opposées. Il faudrait alors déterminer si ces galaxies de charges opposées s'annihilent en entrant en collision, et si cela engendre des phénomènes observables. Dans ce même chapitre, nous nous sommes aussi intéressés à l'évolution cosmologique d'un champ scalaire complexe massif chargé dans $U(1)$ et en auto-interaction. Nous avons alors vu que son comportement cosmologique est satisfaisant, mais que, comme il se comporte dans l'univers primordial comme une radiation noire, la connaissance expérimentale du nombre de familles de neutrinos apporte des contraintes importantes.

Dans le dernier chapitre, nous avons étendu l'étude d'un tel champ aux courbes de rotation des galaxies spirales, et nous avons montré qu'un tel modèle reproduit bien les courbes de rotation de DDO 154 et des galaxies de petite taille. Les contraintes galactiques ont aussi permis de montrer que les contraintes actuelles sur le nombre de familles de neutrinos n'excluent pas ce modèle, mais ne le favorisent pas. Les observations futures du CMB devraient rapidement permettre d'établir ou non la validité d'un tel modèle. D'autre part, ce modèle ne permet pas d'expliquer les courbes de rotation des galaxies de grandes tailles, ni l'existence d'une quantité de matière noire dans les amas galactiques. On ne peut néanmoins pas statuer sur ce fait, car nous avons uniquement considéré des modèles de galaxies contenant un seul condensat de champ scalaire. De la même manière que des atomes étendent la densité de probabilité de présence de leurs électrons lorsqu'ils forment une molécule, on peut espérer que plusieurs halos bosoniques puissent eux-aussi s'étendre, et ainsi expliquer des courbes de rotation plates, et – dans le meilleur des cas – former un halo global de champ scalaire au niveau des amas galactiques. Une autre manière de lever le problème pourrait aussi être de considérer des halos composés de plusieurs “clumps” bosoniques, qui en augmenteraient ainsi la masse. Enfin, nous avons pu constater que si le champ scalaire reproduit correctement les courbes de rotation des galaxies, il n'a cependant qu'une très faible influence au niveau du système solaire.

Nous avons donc vu au cours de cette thèse que ce modèle explique globalement bien les observations au niveau des galaxies et de la cosmologie. J'ai déjà décrit différentes études qu'il me semblerait intéressant de mener, et je pense que celles qui suivent devraient encore s'ajouter à cette liste.

- Tout d'abord, nous avons vu qu'un champ scalaire quartique est associé à des équations qui semblent modifier les lois habituelles de la gravité. On peut dès lors se demander ce qu'il en est, et si les effets de lentilles gravitationnelles sont capables de les mettre en évidence.
- Une autre question importante se pose : de tels systèmes sont-ils stables ? En ce qui concerne le champ scalaire soumis à un potentiel quartique, étant donné qu'il réagit de la même manière qu'un polytrophe $n = 1$, il y a toutes les raisons de penser qu'il est stable, car l'indice adiabatique Γ d'un tel fluide est supérieur à $4/3$. Mais en ce qui concerne le potentiel quadratique, il faudra tester si l'existence d'un nombre conservé est suffisante pour empêcher la fragmentation des halos bosoniques.
- Nous avons jusqu'à présent aussi toujours étudié des structures bosoniques statiques et déjà existantes. Il n'est cependant pas évident qu'elles puissent se former. Il sera donc nécessaire d'étudier la formation des structures bosoniques dans un Univers en expansion.
- Enfin, nous avons considéré qu'à chaque galaxie correspond une phase différente. On est alors en droit de se demander ce qui se passe lorsque deux galaxies entrent en collision : Leurs phases vont-elles changer ? Des

phénomènes visibles vont-ils se produire ?

Par ailleurs, étant donné que ce modèle est basé sur un champ scalaire, on peut aussi se demander s'il ne pourrait pas expliquer en même temps le problème de l'énergie noire, par exemple en considérant séparément la partie homogène du champ scalaire (qui pourrait donner l'énergie noire), de sa partie inhomogène (matière noire). Plus simplement, on pourra essayer différents types de potentiel (par exemple issus des modèles de quintessence), et voir si un tel champ scalaire peut expliquer en même temps la constante cosmologique (comme un modèle de quintessence) et les courbes de rotation des galaxies.

Au final, nous avons étudié certains aspects liés à l'existence de champs scalaires permettant de rendre compte avec succès de la matière noire galactique et cosmologique. De nombreux points d'interrogation subsistent cependant, même si cette matière noire bosonique semble offrir une alternative sérieuse aux neutralinos.

Annexe A

Annexe Mathématique

A.1 Opérations vectorielles

Soient \vec{e}_i les vecteurs orthonormés associés aux différents systèmes de coordonnées, et A_i les coordonnées de \vec{A} correspondantes.

A.1.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Gradient :

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.1})$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (\text{A.3})$$

Laplacien :

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Coordonnées cylindriques (ρ, θ, z)

Gradient :

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{A.5})$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \quad (\text{A.7})$$

Laplacien :

$$\Delta \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{A.8})$$

A.1.3 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

θ est l'angle azimutal dans le plan (x,y), aussi appelé longitude. ϕ est l'angle polaire, pris depuis l'axe (Oz), aussi appelé colatitude.

Gradient :

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{A.9})$$

Divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi A_\phi) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{A.10})$$

Rotationnel :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta A_\theta) - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) \vec{e}_\phi \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Laplacien :

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.12})$$

A.2 Fonctions de Bessel Sphériques

On pourra se reporter à [1] ou [2] pour une description complète de ces fonctions.

Les fonctions de Bessel sphériques j_l et n_l sont solutions de l'équation :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial z_l(r)}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} z_l(r) + z_l(r) = 0, \quad (\text{A.13})$$

où l est un entier naturel.

Les premières fonctions sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} j_0(x) = \frac{\sin x}{x} & n_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \\ j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} & n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2} & n_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3 \sin x}{x^2} \\ j_3(x) = \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2} \right) \sin x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x & n_3(x) = -\left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2} \right) \cos x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

Ces fonctions peuvent être trouvées par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\sin x}{x} \right) \\ n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\cos x}{x} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

Dans la limite des petits arguments ($x \ll l$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right) \\ n_l(x) \rightarrow -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

où $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots(5)(3)(1)$

De même, dans la limite des grands arguments ($x \gg l$) :

$$\begin{cases} j_l(x) \longrightarrow \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) \longrightarrow -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Il est aussi possible de trouver ces fonctions et leurs dérivées par récurrence :

$$\begin{cases} z_{l+2}(x) = \frac{2l+3}{x} z_{l+1}(x) - z_l(x) \\ \frac{dz_l(x)}{dx} = \frac{l}{x} z_l(x) - z_{l+1}(x) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Une propriété importante de ces fonctions concerne leurs Wronskiens (voir le paragraphe A.4) :

$$W(j_l, n_l)(x) \equiv j_l(x) \frac{dn_l(x)}{dx} - \frac{dj_l(x)}{dx} n_l(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{A.19})$$

Ces fonctions sont donc toujours indépendantes.

A.3 Polynômes de Legendre

Là encore, on pourra se reporter à [1] ou [2] pour une description complète de ces polynômes.

A.3.1 Définition

Les polynômes de Legendre P_l sont solutions de l'équation

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right\} + l(l+1)P_l = 0, \quad (\text{A.20})$$

où l est un entier naturel et x est compris dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Il s'agit de polynômes de degré l . Si l est pair (impair), le polynôme est uniquement composés de termes pairs (impairs).

Par convention, ces polynomes sont normalisés de manière à ce que

$$P_l(+1) = 1. \quad (\text{A.21})$$

Les premiers polynômes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{array} \right. \quad (\text{A.22})$$

La Formule de Rodrigues donne une représentation compacte des polynômes de Legendre :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l . \quad (\text{A.23})$$

Il est aussi possible de trouver les polynômes de Legendre par récurrence :

$$P_{l+2}(x) = \frac{2l+3}{l+2} x P_{l+1}(x) - \frac{l+1}{l+2} P_l(x) . \quad (\text{A.24})$$

Il en est de même pour leurs dérivées :

$$\frac{P_{l+1}(x)}{dx} = x \frac{P_l(x)}{dx} + (l+1) P_l(x) . \quad (\text{A.25})$$

A.3.2 Décomposition en polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre forment une base orthogonale complète telle que :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} . \quad (\text{A.26})$$

Par cette propriété, il est possible de décomposer sur cette base n'importe quelle fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $-1 \leq x \leq +1$.

La représentation en séries de Legendre est :

$$f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l P_l(x) , \quad (\text{A.27})$$

où

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) dx . \quad (\text{A.28})$$

A.3.3 Equation de Poisson en coordonnées sphériques

On cherche à résoudre l'équation (système axisymétrique) :

$$\Delta \Phi(r, \phi) = S(r, \Phi) . \quad (\text{A.29})$$

On décompose les fonctions $\Phi(r, \phi)$ et $S(r, \Phi)$ en polynômes de Legendre :

$$\Phi(r, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \phi) \Phi_l(r) \quad (\text{A.30})$$

$$S(r, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} P_l(\cos \phi) S_l(r)$$

L'équation de Poisson à deux variables se transforme en un système constitué d'une infinité d'équations à une seule variable :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_l(r)}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_l(r) = S_l(r) . \quad (\text{A.31})$$

A.4 Equations Différentielles

La résolution des équations différentielles est un problème mathématique complexe. Il est possible de se reporter à [1] ou [3] pour une vision étendue sur le sujet. En ce qui nous concerne, nous allons nous étudier uniquement les type d'équations différentielles qui nous intéresse : les équations différentielles linéaires inhomogènes du second ordre avec des conditions au bord de Dirichlet homogènes, c'est-à-dire des équations du type :

$$L\psi(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right) \psi(x) = f(x) , \quad (\text{A.32})$$

où x est une variable générique, et $q(x)$ et $r(x)$ sont des fonctions C^∞ . Les conditions au bord de Dirichlet homogènes sont les suivantes : aux extrémités x_1 et x_2 , on a

$$\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0 . \quad (\text{A.33})$$

Nous savons que la solution la plus générale pour cette équation s'écrit :

$$\psi(x) = \psi^{\text{homogène}}(x) + \psi^{\text{particulière}}(x) , \quad (\text{A.34})$$

où $\psi^{\text{homogène}}$ est la solution de $L\psi^{\text{homogène}}(x) = 0$ et $\psi^{\text{particulière}}$ est une solution particulière.

Pour trouver la solution homogène de l'équation différentielle, il faut utiliser les méthodes mathématiques traditionnelles. Cependant, on sait que

cette équation a deux et seulement deux solutions indépendantes. En calculant le Wronskien des deux solutions, on peut déterminer si elles sont bien indépendantes. Le Wronskien est défini comme suit :

$$W(\psi_1, \psi_2)(x) = \psi_1(x) \frac{d\psi_2(x)}{dx} - \frac{d\psi_1(x)}{dx} \psi_2(x) . \quad (\text{A.35})$$

Les deux solutions homogènes $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont linéairement dépendantes si, pour tout x , le Wronskien est identiquement nul.

La solution particulière du problème est donnée par

$$\psi^{\text{particulière}}(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx' G(x|x') f(x') , \quad (\text{A.36})$$

où $G(x|x')$ est la fonction de Green du problème :

$$LG(x|x') = \delta(x - x') . \quad (\text{A.37})$$

Dans le cas des conditions au bord de Dirichlet homogènes, si l'on peut trouver deux solutions homogènes linéairement indépendantes $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$, alors la fonction de Green existe, et la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$\psi(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx' \frac{f(x')}{W(x')} \{ \theta(x' - x) \psi_2(x') \psi_1(x) + \theta(x - x') \psi_1(x') \psi_2(x) \} , \quad (\text{A.38})$$

où $W(x)$ est le Wronskien de $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$, et $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside. Au final, on a :

$$\begin{aligned} \psi(x) = & - \left\{ \psi_1(x) \int_x^{x_2} dx' \frac{f(x')}{\psi_1(x') \psi_2'(x') - \psi_1'(x') \psi_2(x')} \psi_2(x') \right. \\ & \left. + \psi_2(x) \int_{x_1}^x dx' \frac{f(x')}{\psi_1(x') \psi_2'(x') - \psi_1'(x') \psi_2(x')} \psi_1(x') \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

A.5 Aide-Mémoire : Intégration Numérique

On pourra se reporter à [4] ou [5] pour une description plus large des méthodes numériques d'intégration.

A.5.1 Intégration selon Simpson

Le but de la méthode de Simpson est d'évaluer des intégrales à une variable du type

$$I = \int_a^b f(x)dx . \quad (\text{A.40})$$

Soit h l'intervalle sur lequel on va sommer. Soit x_n la position au n -ième pas ($h = x_{n+1} - x_n$). On pose $f_n = f(x_n)$.

La formule la plus simple d'intégration numérique est la formule des trapèzes, qui approxime la fonction à intégrer par des segments de droites :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h \left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1 \right] + O(h^3 f'') . \quad (\text{A.41})$$

Simpson a approximé la fonction à intégrer par des paraboles, ce qui donne la formule suivante :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h \left[\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2 \right] + O(h^5 f^{(4)}) , \quad (\text{A.42})$$

où $f^{(4)}$ est la dérivée quatrième de f évaluée à n'importe quel point dans l'intervalle.

Il est possible d'approximer par des polynômes de degré 3 :

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = h \left[\frac{3}{8}f_0 + \frac{9}{8}f_1 + \frac{9}{8}f_2 + \frac{3}{8}f_3 \right] + O(h^5 f^{(4)}) , \quad (\text{A.43})$$

ou de degré 4 (Loi de Bode)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = h \left[\frac{14}{45}f_0 + \frac{64}{45}f_1 + \frac{24}{45}f_2 + \frac{64}{45}f_3 + \frac{14}{45}f_4 \right] + O(h^7 f^{(6)}) . \quad (\text{A.44})$$

C'est la première de ces lois de Simpson qui est la plus utilisée.

A.5.2 Résolution d'équations différentielles selon Runge et Kutta

Le but de la méthode de Runge et Kutta est de résoudre des équations différentielles ordinaires avec conditions initiales connues.

Lorsqu'on a une équation différentielle d'ordre n avec une seule fonction, il est possible de la transformer en n équations d'ordre 1 avec n fonctions.

Par exemple, si l'on considère l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) \frac{dy}{dx} = r(x) , \quad (\text{A.45})$$

elle peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= z(x) \\ \frac{dz}{dx} &= r(x) - q(x)z(x)\end{aligned}\tag{A.46}$$

où z est une nouvelle fonction.

La méthode de Runge-Kutta résout un système de n équations différentielles du premier ordre à n fonctions y_i , telles que

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) .\tag{A.47}$$

Une difficulté de cette méthode est qu'il faut connaître les conditions initiales de toutes les fonctions y_i .

Dans la suite, on utilisera les notations y et f à la place de y_i et f_i .

On supposera que l'intégration numérique se fait sur un intervalle h , et on notera x_n la valeur de x au n -ième pas ($h = x_{n+1} - x_n$). On posera : $y_n = y(x_n)$.

Une formule d'intégration simple est la formule d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) ,\tag{A.48}$$

qui se base sur le développement au premier ordre de la fonction y .

La formule classique de Runge-Kutta se base sur le développement au quatrième ordre :

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)\end{aligned}\tag{A.49}$$

Il existe des formules de Runge-Kutta à des ordres supérieurs, mais nous ne les détaillerons pas ici.

Bibliographie

- [1] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, John Wiley & Sons, New York (1999), ISBN 0-471-30932-X.
- [2] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik, “Table of integrals, series and products”, Academic Press, New York (1980), ISBN 0-12-294760-6.
- [3] G. Barton, “Elements of Green’s Functions and Propagation”, Oxford University Press, New York (1997), ISBN 0-198-51988-5.
- [4] R. L. Burden & J. D. Faires, “Numerical Analysis”, PWS-Kent Publishing Company, Boston (1993), ISBN 0-534-93219-3.
- [5] W. H. Press et al., “Numerical Recipes in C”, Cambridge University Press, Cambridge (1997), ISBN 0-521-43108-5.

Annexe B

Annexe Physique

B.1 Rappels de Relativité Générale

Pour un développement complet sur la Relativité Générale, on pourra se reporter en particulier aux ouvrages [1] ou [2].

B.1.1 Tenseurs de Riemann

Soit une géométrie basée sur la métrique

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{B.1})$$

Un photon dans cette géométrie suit l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0 , \quad (\text{B.2})$$

où p est sa position le long de la trajectoire, et où $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ est appelé “connexion affine”, ou “symbole de Christoffel”, relié à la métrique par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) . \quad (\text{B.3})$$

Cette équation définit des géodésiques. On peut l'obtenir à partir d'un formalisme lagrangien.

Soit le Lagrangien

$$L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu . \quad (\text{B.4})$$

L'équation des géodésiques peut alors se réécrire

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} . \quad (\text{B.5})$$

On peut utiliser l'équivalence des deux formes de l'équation des géodésiques pour dériver rapidement les $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

La dérivée covariante d'un vecteur covariant U_ν est donnée par

$$D_\mu U_\nu \equiv \partial_\mu U_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda U_\lambda , \quad (\text{B.6})$$

et devient, pour un vecteur contravariant V^ν

$$D_\mu V^\nu \equiv \partial_\mu V^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda . \quad (\text{B.7})$$

La dérivée covariante d'un tenseur s'écrit comme une dérivée simple à laquelle s'ajoutent les termes correspondant à chaque indice covariant ou contravariant, de la même manière que pour les vecteurs. On peut montrer que

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel $R_{\mu\nu\gamma\delta}$ se définit par :

$$[D_\mu, D_\nu] V^\lambda = R_{\mu\nu\kappa}^\lambda V^\kappa . \quad (\text{B.9})$$

On peut montrer que

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\eta}^\mu - \Gamma_{\nu\beta}^\eta \Gamma_{\alpha\eta}^\mu . \quad (\text{B.10})$$

Ce tenseur possède une symétrie $R_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} = R_{(\alpha\beta)(\mu\nu)}$ et une antisymétrie $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\nu\mu\beta\alpha}$.

On définit à partir de ce tenseur par contraction d'indices un tenseur symétrique, appelé tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha , \quad (\text{B.11})$$

ainsi que la courbure scalaire

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} . \quad (\text{B.12})$$

On peut ainsi définir un tenseur conservé

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R , \quad (\text{B.13})$$

qui vérifie

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{B.14})$$

B.1.2 Equations d'Einstein

Les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (\text{B.15})$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur impulsion-énergie, vérifiant

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{B.16})$$

Elle peuvent se réécrire sous la forme

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu} , \quad (\text{B.17})$$

avec

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha{}_\alpha . \quad (\text{B.18})$$

On notera que les équations d'Einstein peuvent s'obtenir à partir de l'action globale :

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x \left[\frac{R}{16\pi G} + T^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right] , \quad (\text{B.19})$$

qui est invariante pour toute modification $\delta g_{\alpha\beta}$ de la métrique. Dans cette action, $g = -\det(g_{\mu\nu})$.

Dans le cadre du principe variationnel, on montre que

$$\delta \sqrt{|g|} = \frac{\sqrt{|g|}}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} , \quad (\text{B.20})$$

et

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{B.21})$$

B.1.3 Métriques

Les métriques sont nombreuses et ont des propriétés propres. Je fais ici un rappel des principales métriques. Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ peut se retrouver à partir de

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{B.22})$$

Métrique de Lorentz

Il s'agit de la métrique plate, qui s'écrit sous la forme

$$d\tau^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 . \quad (\text{B.23})$$

Le tenseur métrique est souvent noté $\eta_{\mu\nu}$ et sert de référence par rapport à $g_{\mu\nu}$. C'est la métrique utilisée en Relativité Restreinte. Les connexions affines et le tenseur de Riemann sont tous nuls dans cette géométrie.

Métrie de Schwarzschild

Elle s'écrit

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{B.24})$$

Cette expression s'applique à l'extérieur d'un objet statique à symétrie sphérique d'énergie totale M . On appelle généralement le rayon $r = 2M$ rayon de Schwarzschild. A l'intérieur de ce rayon, la géométrie présente une singularité. Cette métrique est employée généralement pour traiter les effets dus à des étoiles isolées ou des trous noirs.

On notera qu'une métrique générale statique et isotrope peut s'écrire sous la forme

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{B.25})$$

Les connexions affines non-nulles associées à cette métrique sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t &= \frac{B'}{2B}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{B'}{2A}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'}{2A} \\ \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \\ \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Les seuls éléments non-nuls du tenseur de Ricci sont

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B'}{2A} + \left(\frac{B'}{4A}\right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) - \frac{B'}{rA} \\ R_{rr} &= -\frac{B''}{2A} - \left(\frac{B'}{4B}\right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) - \frac{A'}{rA} \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{1}{A} - \left(\frac{r}{2A}\right) \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Le tenseur de Ricci est donc purement diagonal.

Si l'on considère une distribution de matière à symétrie sphérique variant au cours du temps, la métrique devient simplement :

$$d\tau^2 = B(t, r)dt^2 - A(t, r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{B.28})$$

Les connexions affines et le tenseur de Riemann sont eux aussi modifiés de manière à tenir compte de la dépendance en temps.

Métrie de Robertson et Walker

Elle décrit un espace homogène et isotrope, et s'écrit

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (\text{B.29})$$

$a(t)$ est un facteur d'échelle qui varie avec le temps et qui permet donc de décrire un Univers non-statique en expansion. Si $k = 0$, l'Univers a des sections spatiales plates ; si $k > 0$, elles sont sphériques ; et si $k < 0$, elles sont hyperboliques. Une telle métrique est utilisée en cosmologie pour décrire des Univers homogènes et isotropes.

Les connexions affines non-nulles associées à cette métrique sont (i, j se référant à des composantes d'espace) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^t &= -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij}, \quad \Gamma_{tj}^i = \Gamma_{jt}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -(1 - kr^2)r, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -(1 - kr^2)r \sin^2 \theta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^r = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Les composantes non-nulles du tenseur de Ricci sont :

$$\begin{aligned} R_{tt} &= 3 \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ij} &= g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

On pourra remarquer que le tenseur de Ricci n'a pas de composantes temps-espace.

B.2 Equation de Poisson pour des systèmes axisymétriques

On pourra se reporter à [3] pour un développement plus complet sur le sujet.

L'intérêt de cet annexe est de permettre de comparer des solutions analytiques de l'équation de Poisson pour des systèmes non-sphériques, à des solutions numériques. En effet, l'équation de Poisson a, pour des systèmes axisymétriques, c'est-à-dire des systèmes sphéroïdaux ayant un axe de symétrie,

des solutions analytiques “simples”, permettant ainsi d’effectuer des tests non-triviaux sur les programmes numériques de résolution.

L’équation de Poisson pour un potentiel gravitationnel Φ et une densité de matière ρ s’écrit

$$\Delta\Phi = 8\pi G\rho \iff D_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 8\pi G\rho . \quad (\text{B.32})$$

Plaçons nous en coordonnées sphériques. Considérons une densité de matière répartie de manière axisymétrique autour de l’axe (Oz), c’est-à-dire une densité $\rho = \rho(m^2)$, où

$$m^2 = r^2 \sin^2 \phi + \frac{r^2 \cos^2 \phi}{1 - e^2} . \quad (\text{B.33})$$

Chaque courbe d’isodensité se trouve ainsi sur un ellipsoïde d’excentricité e , de demi grand-axe m et de demi petit-axe $m/\sqrt{1 - e^2}$, ayant une symétrie de révolution autour de (Oz).

Si l’on définit

$$\psi(m) \equiv \int_0^{m^2} \rho(n^2) dn^2 , \quad (\text{B.34})$$

alors on montre que le potentiel gravitationnel s’écrit

$$\Phi(r, \phi) = -2\pi G \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left[\psi(\infty) \arcsin e - \int_{\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e}}^{\infty} \psi(m) \frac{d\tau_m}{1 + \tau_m^2} \right] , \quad (\text{B.35})$$

où τ_m est tel que

$$\frac{r^2 \sin^2 \phi}{1 + \tau_m^2} + \frac{r^2 \cos^2 \phi}{\tau_m^2} = m^2 e^2 . \quad (\text{B.36})$$

Il est alors facile – par des méthodes numériques d’intégration – d’évaluer le potentiel en tout point.

Bibliographie

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, "Gravitation", W. H. Freeman, San Francisco (1973), ISBN 0-7167-0334-3.
- [2] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Addison Wiley and Sons, New York (1972), ISBN 0-471-92567-5.
- [3] J. Binney & S. Tremaine, "Galactic Dynamics", Princeton University Press, Princeton (1987), ISBN 0-691-08445-9.

Résumé

Cette thèse porte sur le problème de la Matière Noire astrophysique et cosmologique.

Dans les quatre premiers chapitres sont exposés succinctement le Modèle Standard Cosmologique, les observations démontrant la présence d'énergie et de matière noires, les modèles de matière noire les plus étudiés, et différents modèles cosmologiques ou astrophysiques reposant sur des champs scalaires. Dans les trois chapitres suivants est détaillé un modèle de matière noire bosonique basé sur l'existence d'un champ scalaire complexe et chargé dans $U(1)$. Nous verrons que couplé à un potentiel quadratique, un tel champ est susceptible d'expliquer les courbes de rotation des galaxies, tout en conservant depuis la recombinaison un comportement cosmologique de matière. Nous nous intéresserons ensuite au cas du potentiel quartique, et nous montrerons d'une part que son comportement cosmologique est lui aussi relativement bon, et d'autre part qu'il explique bien les courbes de rotation des galaxies spirales de petite taille, si problématiques pour de nombreux modèles de matière noire.

Mots-clés : Astrophysique, Cosmologie, Gravitation, Matière Noire, Energie Noire, Galaxies, Etoiles à bosons, Champs Scalaires.

Abstract

This PhD thesis is devoted to the cosmological and astrophysical Dark Matter problems.

In the first four chapters are detailed successively the Standard Cosmological Model, observations leading to the dark matter and dark energy problems, most studied dark matter models, and different cosmological or astrophysical models using scalar fields. In the three following chapters, we expose several dark matter models based on a complex, $U(1)$ -charged, scalar field. Associated with a quadratic potential, such a scalar field can explain galaxy rotation curves, while having a matter behavior since the recombination. In the case of a quartic potential, this field has a good cosmological behavior too, and is able to reproduce the rotation curves of small spiral galaxies, which are highly problematic for many dark matter models.

Keywords : Astrophysics, Cosmology, Gravitation, Dark Matter, Dark Energy, Galaxies, Boson Stars, Scalar Fields.