

Contribution à la mécanique statistique quantique des gaz froids

Jean-Noël Fuchs

Introduction : gaz froids

Propriétés d'équilibre des gaz froids denses :

- développement en agrégats classiques
- développement en agrégats quantiques

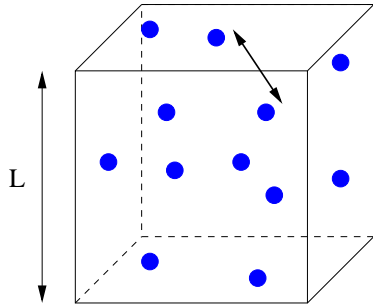
Propriétés de transport des gaz froids :

- gaz non-dégénéré “spin” $1/2$: théorie cinétique
 - ondes de spin
 - instabilité de Castaing
- gaz de Bose 1D $T = 0$: modes hydrodynamiques

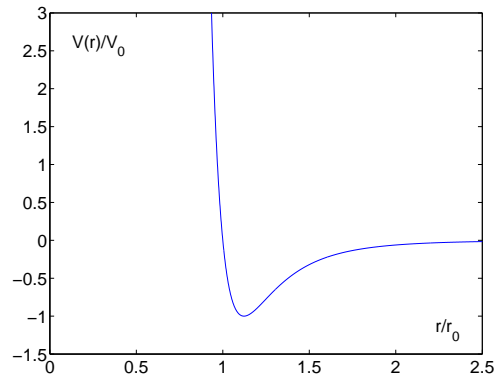
Conclusion

Introduction : gaz froids

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V(r_{ij})$$



$$n = N/L^3$$



4 longueurs caractéristiques :

- Longueur d'onde thermique $\lambda_T = \sqrt{\hbar^2/mk_B T}$
- Distance moyenne entre atomes $n^{-1/3}$
- Portée du potentiel b
- Longueur de diffusion a

Froid $\lambda_T \gg a$ collisions à basse énergie décrites par a

Non-dégénéré $\lambda_T \ll n^{-1/3}$

Interactions faibles $n^{-1/3} \gg a$

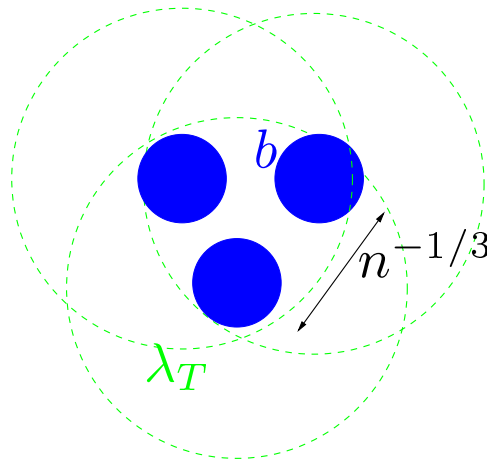
Dilué $n^{-1/3} \gg b$

Equilibre : Développement en agrégats d'un gaz dense

Systèmes dilués =? modèles pour les systèmes denses

- Agrégats classiques : gaz dilués et gaz denses (Ursell, Yvon, Mayer, ...)
- Agrégats quantiques : gaz dilués (Kahn et Uhlenbeck, Lee et Yang, Grüter et Laloë, ...) systèmes quantiques denses ?

$$n^{-1/3} \sim b$$



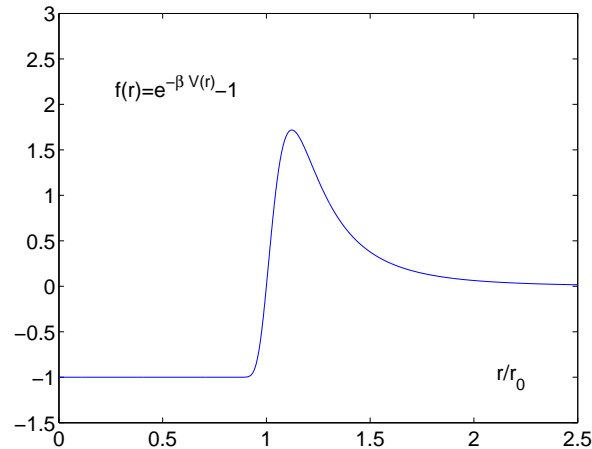
Fonction de partition grand canonique : $Z_{gc}(\mathcal{V}, \beta, z)$

$\mathcal{V} = L^3$, $\beta = 1/k_B T$ et $z = e^{\beta\mu}$

Densité : $n = z \partial_z \ln Z_{gc} / \mathcal{V}$

Développement en agrégats classiques

Fonction de Mayer : $f(r) = e^{-\beta V(r)} - 1$



- **Gaz dilués** : diagrammes connectés (Mayer 1)

$$n = \sum_{l=1}^{\infty} l b_l (z/\lambda_T^3)^l = \circ + \circ\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \dots$$

$l! b_l = \sum$ agrégats à l particules

$$b_1 = \circ = 1$$

$$2! b_2 = \circ\text{---}\bullet = \int d^3r f(r)$$

$$3! b_3 = \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet + \circ\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet\text{---}\bullet$$

Equation d'état : $\beta p = \ln Z_{gc}/\mathcal{V}$ et $n = z \partial_z \ln Z_{gc}/\mathcal{V}$

- **Gaz denses** : diagrammes irréductibles (Mayer 2)

$$n = \frac{z}{\lambda_T^3} e^{-\beta\Delta}; \quad -\beta\Delta = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l n^l = \text{---}\bullet + \triangle + \dots$$

$(l - 1)! \beta_{l-1} = \sum$ agrégats irréductibles à l particules

$$\beta_1 = \text{---}\bullet = 2b_2$$

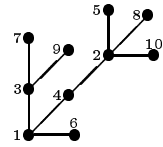
$$2!\beta_2 = \triangle$$

$$3!\beta_3 = 3 \times \square + 6 \times \begin{array}{|c|} \hline \diagup \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Viriel : } \beta p = n \left[1 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{l+1} \beta_l n^l \right]$$

Démonstrations usuelles : Mayer, Hansen-McDonald,...

Démonstration graphique :



- arbres = agrégats complètement réductibles
- auto-similarité du développement :

$$\begin{aligned} n &\simeq \circ + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + \dots \\ &= \frac{z}{\lambda_T^3} \left\{ 1 + \begin{array}{|c|} \hline \text{---}\bullet \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2!} \times \begin{array}{|c|} \hline \text{---}\bullet \\ \hline \text{---}\bullet \\ \hline \end{array} + \dots + \frac{1}{r_1!} \times \begin{array}{|c|} \hline \text{---}\bullet \\ \hline \text{---}\bullet \\ \hline \text{---}\bullet \\ \hline \text{---}\bullet \\ \hline \end{array} + \dots \right\} \\ &= \frac{z}{\lambda_T^3} e^{\beta_1 n} \Rightarrow \beta p = n - \beta_1 n^2 / 2 \end{aligned}$$

Développement en agrégats quantiques : opérateurs d'Ursell et cycles d'échange (gaz dilué)

1^{ère} quantification : séparation interactions/statistique quantique ; proche formalisme classique ; proche PIMC

$$\vdash = zU_1 = ze^{-\beta H_1} \leftrightarrow b_1$$

Interactions : opérateurs d'Ursell

$$\mathbb{I} = z^2 U_2 = z^2 e^{-\beta H_2} - zU_1(1)zU_1(2) \leftrightarrow b_2$$

$$\mathbb{III} = z^3 U_3 \leftrightarrow b_3$$

Statistique quantique : cycles d'échange

$$\vdash\vdash\vdash = C_3$$

Opérateur densité à un corps (grand canonique) :

$$\rho_I(1) \text{ tel que } n = \text{Tr}_1 \{ \rho_I(1) \} / \mathcal{V}$$

Exemples :

- statistique de Boltzmann ($\eta = 0$) :

$$\rho_I = \vdash + \mathbb{I} + \frac{1}{2!} \times \mathbb{III} + \dots$$

- gaz parfait de Bose/Fermi ($\eta = \pm 1$) :

$$f_I = \vdash + \vdash\vdash + \vdash\vdash\vdash + \dots = \frac{zU_1}{1 - \eta zU_1}$$

Gaz dense : statistique de Boltzmann

Pas de cycles d'échange ($\eta = 0$)

$$\text{Exponentiation : } \rho_I(1) = \sqrt{zU_1(1)} e^{-\beta\Delta(1)} \sqrt{zU_1(1)}$$

Arbres quantiques ? :

$$U_2(1, 2) = \sqrt{U_1(1)U_1(2)} \bar{U}_2(1, 2) \sqrt{U_1(1)U_1(2)}$$

$$\bar{U}_2 \leftrightarrow f(r)$$

Définir U_i^R en fonction de \bar{U}_2 (difficultés : ordre des opérateurs, hermiticité, etc.) :

$$U_3 = \text{III} \simeq 2 \times \begin{array}{c} \square \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} = U_3^R$$

Auto-similarité du développement :

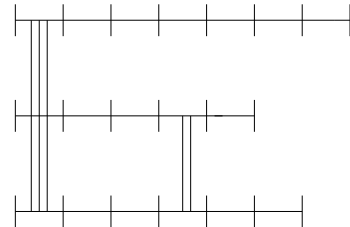
$$\begin{aligned} \rho_I(1) = \sqrt{zU_1(1)} \left\{ 1 + \begin{array}{c} \square \\ | \\ \circ \end{array} + \frac{1}{2!} \times \begin{array}{c} \square \\ | \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \square \\ | \\ \circ \end{array} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_1!} \times \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \square \quad \square \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \dots \right\} \sqrt{zU_1(1)} \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } -\beta\Delta(1) = \text{Tr}_2 \{ \bar{U}_2(1, 2) \rho_I(2) \}$$

$$\text{Généralisation : } \bar{U}_3^{Irr.} = \bar{U}_3 - \bar{U}_3^R$$

$$\text{Tr}_{2,3} \left\{ \frac{1}{2!} \bar{U}_3^{Irr.}(1, 2, 3) \rho_I(2) \rho_I(3) \right\}$$

Gaz dense : statistique de Bose ou de Fermi



Avec cycles d'échange ($\eta = \pm 1$) :

Exponentiation :

$$\rho_I(1) = \frac{1}{\sqrt{zU_1(1)} e^{-\beta\Delta(1)} \sqrt{zU_1(1) - \eta}}$$

Arbres + pas de boucle \Rightarrow auto-similarité : direct + échange

$$-\beta\Delta(1) = Tr_2 \{ \bar{U}_2(1, 2) [1 + \eta P_{ex.}(1, 2)] \rho_I(2) \}$$

Conclusion

Viriel quantique (Beth-Uhlenbeck)

U_l : résoudre le problème quantique à l corps

Gaz non-condensés

^4He : transition gaz-liquide puis superfluide

Plan

Introduction : gaz froids

Propriétés d'équilibre des gaz froids denses :

- développement en agrégats classiques
- développement en agrégats quantiques

Propriétés de transport des gaz froids :

- gaz non-dégénéré “spin” $1/2$: théorie cinétique
 - ondes de spin
 - instabilité de Castaing
- gaz de Bose 1D $T = 0$: modes hydrodynamiques

Conclusion

Séparation transitoire des états de spin (Équipe E. Cornell, JILA 2001-2002)

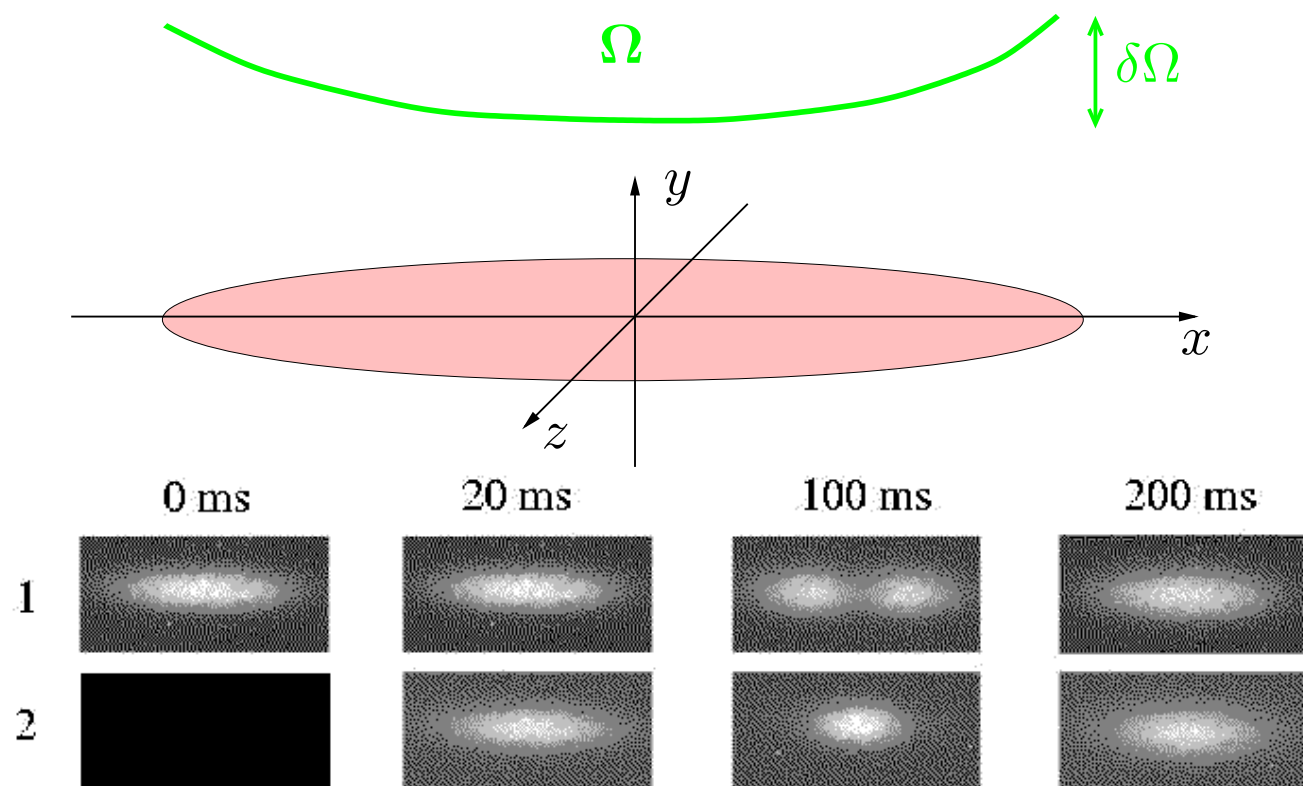
Gaz de Bose ^{87}Rb , $T \sim 2T_{BEC} \simeq 0.6\mu\text{ K}$

2 états hyperfins : $|1\rangle \equiv |F = 1, m_f = -1\rangle, |2\rangle \equiv |F = 2, m_f = 1\rangle \leftrightarrow$ "spin" $1/2$

Piège magnétique cigare

Courbure du champ "magnétique" Ω

Impulsion RF $\pi/2$: $t = 0$



Mécanisme physique ?

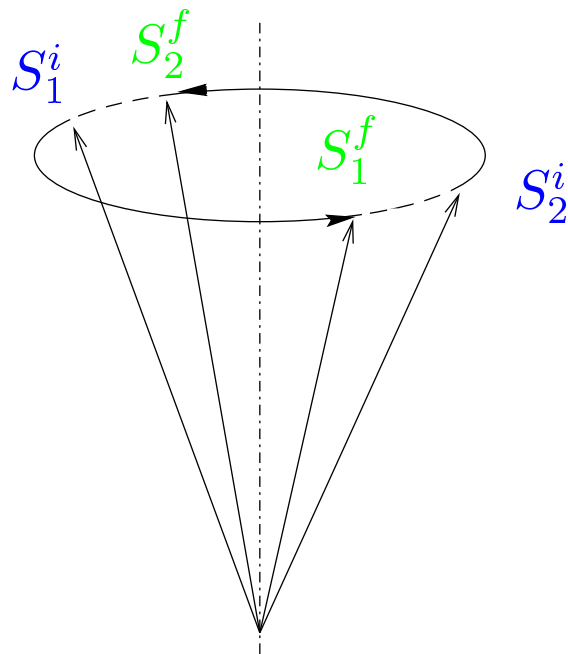
Effet de rotation des spins identiques (ISRE)

Collision entre 2 atomes identiques avec un "spin" $1/2$
(interactions indépendantes du "spin")

Polarisations initiales différentes ($S_1^i \neq S_2^i$)

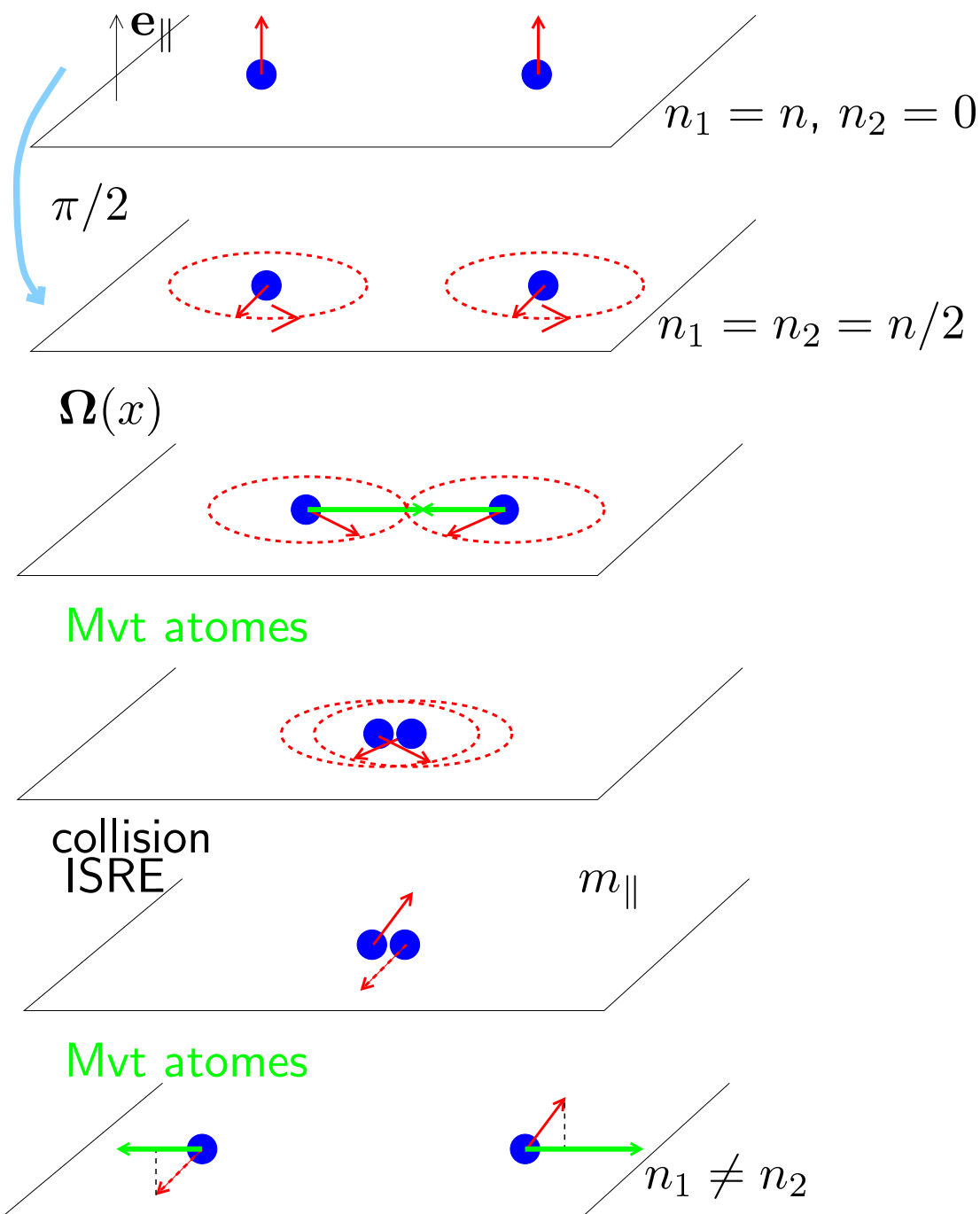
+ Indiscernabilité des atomes

\Rightarrow effet d'interférence quantique : les polarisations tournent autour de leur somme (ISRE, Lhuillier-Laloë)



A basse énergie, l'ISRE est essentiellement dû aux collisions vers l'avant qui dominent les collisions latérales lorsque $\lambda_T \gg a$

Mécanisme physique



Théorie cinétique

Equation cinétique à 3D + cigare allongé \Rightarrow équation cinétique effective 1D $f(x, p, t)$ et $\mathbf{M}(x, p, t)$:

$$\partial_t f + \frac{p}{m} \partial_x f - m\omega_{ax}^2 x \partial_p f \simeq -\frac{f - f^{eq}}{\tau}$$

$$\partial_t \mathbf{M} + \frac{p}{m} \partial_x \mathbf{M} - m\omega_{ax}^2 x \partial_p \mathbf{M} - \left(\boldsymbol{\Omega} + \frac{g\mathbf{m}}{2\hbar} \right) \times \mathbf{M}$$

$$\simeq -\frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}^{eq}}{\tau}$$

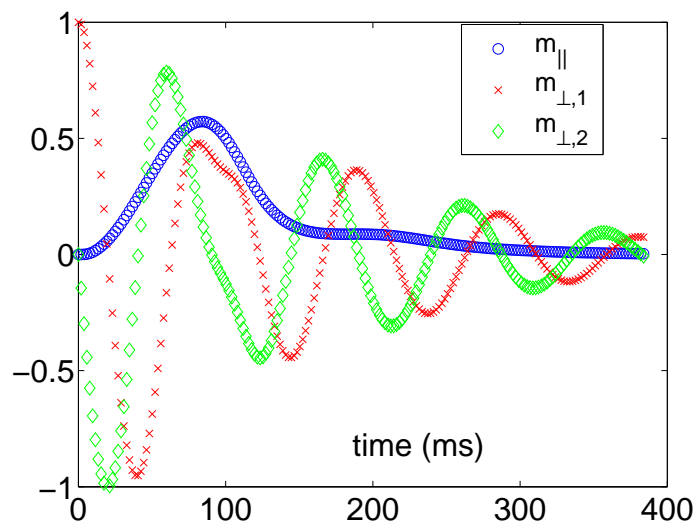
où $\mathbf{m}(x, t) = \int dp \mathbf{M}(x, p, t)$

Champ "magnétique" :

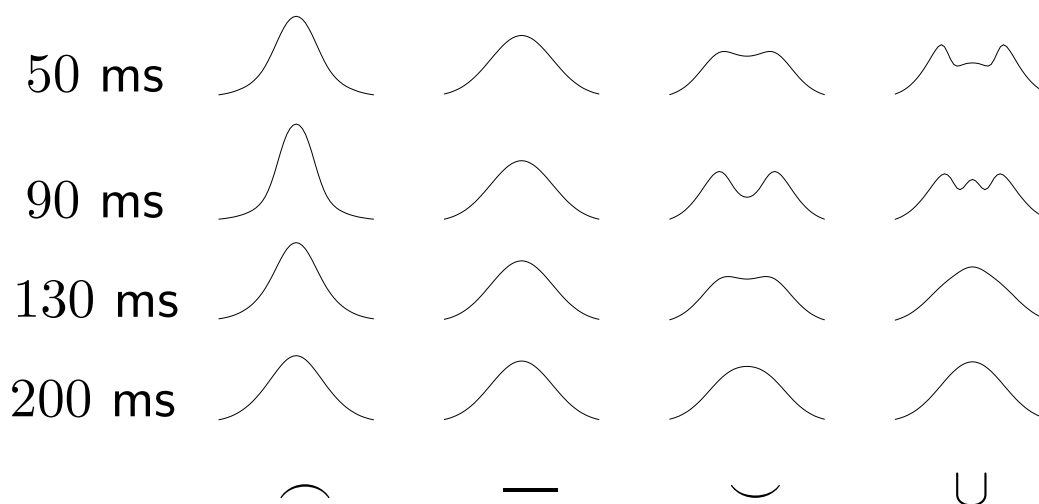
$$\hbar\boldsymbol{\Omega}(x) \simeq \underbrace{[V_2^{ext}(x) - V_1^{ext}(x)]}_{\text{effet Zeeman diff.}} + \underbrace{\frac{\delta g n(x)}{2}}_{\text{champ moyen diff.}} \mathbf{e}_{\parallel}$$

où $n(x, t) = \int dp f(x, p, t)$

Résolution numérique



Au centre du piège : $m_{\parallel} = n_2 - n_1$, $m_{\perp,1}$ et $m_{\perp,2}$

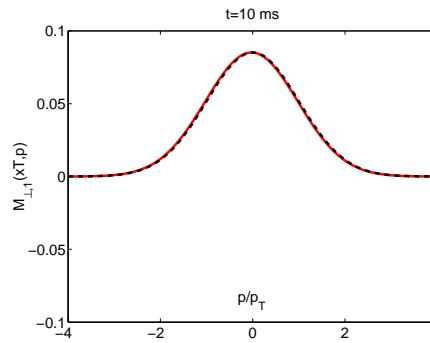
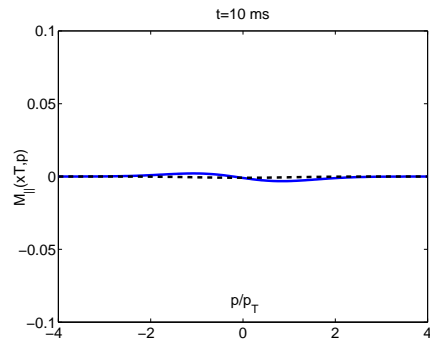


Population $n_1(x)$ en fonction du temps pour différentes courbures $\delta\Omega$ du champ magnétique

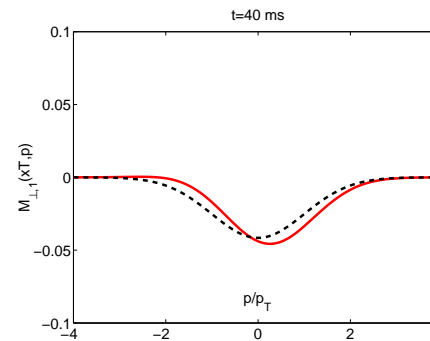
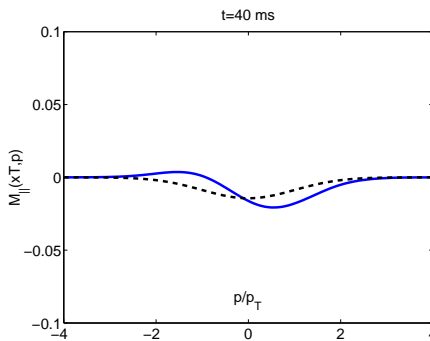
Ondes de spin non-hydrodynamiques et de grande amplitude

$$M_{\parallel}(p) \text{ et } M_{\parallel}^{eq}(p)$$

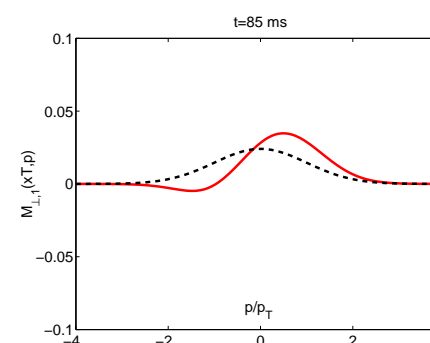
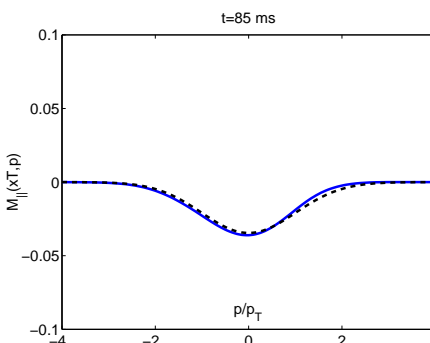
$$M_{\perp}(p) \text{ et } M_{\perp}^{eq}(p)$$



10 ms



40 ms



85 ms

Loin de l'équilibre local et global \Rightarrow nécessité de la théorie cinétique (\sim onde de choc)

Instabilité de Castaing

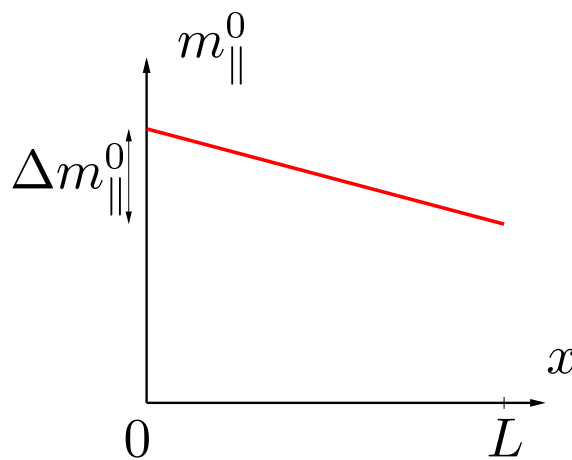
Gaz (homogène) non-dégénéré spin 1/2 en régime hydrodynamique :

gradient de polarisation longitudinal

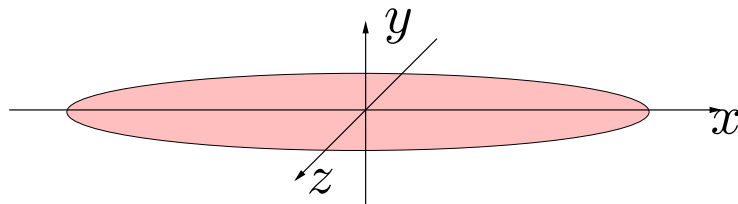
+ ISRE important $\mu = gn\tau/\hbar \sim \lambda_T/a \gg 1$

\Rightarrow instabilité des ondes de spin transverses de grande longueur d'onde :

$$\mu \frac{\Delta m_{\parallel}^0}{n} > kL \gg 1$$

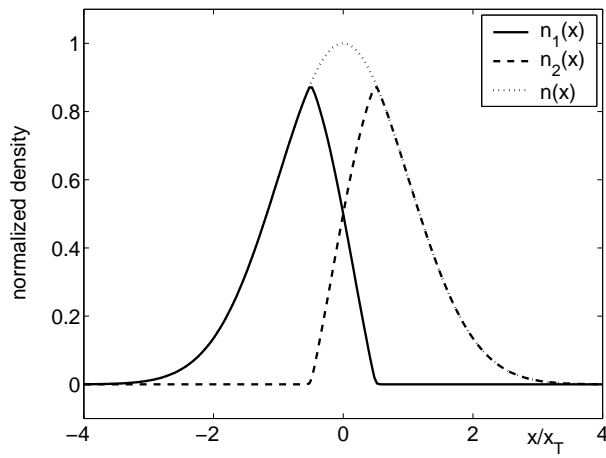


Gaz froid piégé en régime non-hydrodynamique ?

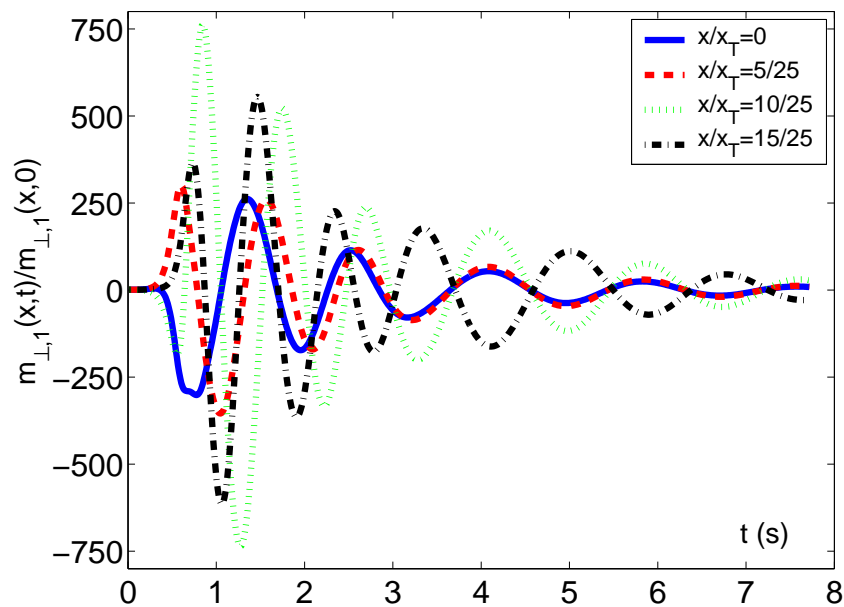


Instabilité de Castaing dans un gaz piégé

Initialement : $\Delta m_{\parallel}^0/n \sim 1$



Instabilité $\mu \simeq 25$:



JILA : $\mu = 5$; $\mu \sim \lambda_T/a$, $a \searrow$ résonance de Feshbach

Plan

Introduction : gaz froids

Propriétés d'équilibre des gaz froids denses :

- développement en agrégats classiques
- développement en agrégats quantiques

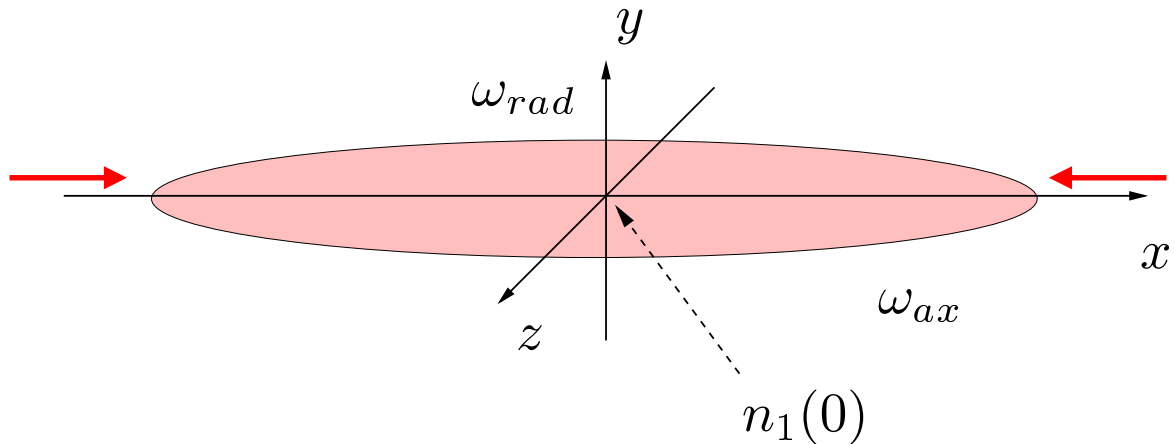
Propriétés de transport des gaz froids :

- gaz non-dégénéré “spin” $1/2$: théorie cinétique
 - ondes de spin
 - instabilité de Castaing
- gaz de Bose 1D $T = 0$: modes hydrodynamiques

Conclusion

Gaz de Bose 1D $T = 0$ répulsif $a > 0$

BEC 3D $T = 0$, piège cigare $\omega_{rad} \gg \omega_{ax}$, Gross-Pitaevskii



où $a_1 \simeq \hbar/m\omega_{rad}a$ est la longueur de diffusion 1D

Mode collectif d'oscillation de plus basse fréquence (→ hydrodynamique), variable $n_1(0)$

Intérêt :

- expériences
- 1D homogène exactement soluble (Lieb-Liniger)
- fermionisation (Tonks-Girardeau)

Hydrodynamique linéarisée : modèles solubles

$$\begin{aligned}\partial_t n_1 + \partial_x(n_1^0 v) &= 0 \\ m\partial_t v &= -\partial_x \left[\mu(n_1) + m\omega_{ax}^2 x^2/2 \right]\end{aligned}$$

Ingrédient : équation d'état $\mu(n_1)$ (LL ou GP)

Méthode : remplacer $\mu(n_1)$ par $\mu_{mod}(n_1)$ soluble (Combescot et Leyronas)

e.g. $\bar{\mu}_{mod} = 1 - (1 - \bar{n}^{1/p})^{2/\alpha} = \bar{n}^{1/p}$ quand $\alpha = 2$

$\nu_0^2 = \omega^2/\omega_{ax}^2 = \alpha + (\alpha - 1)/p$

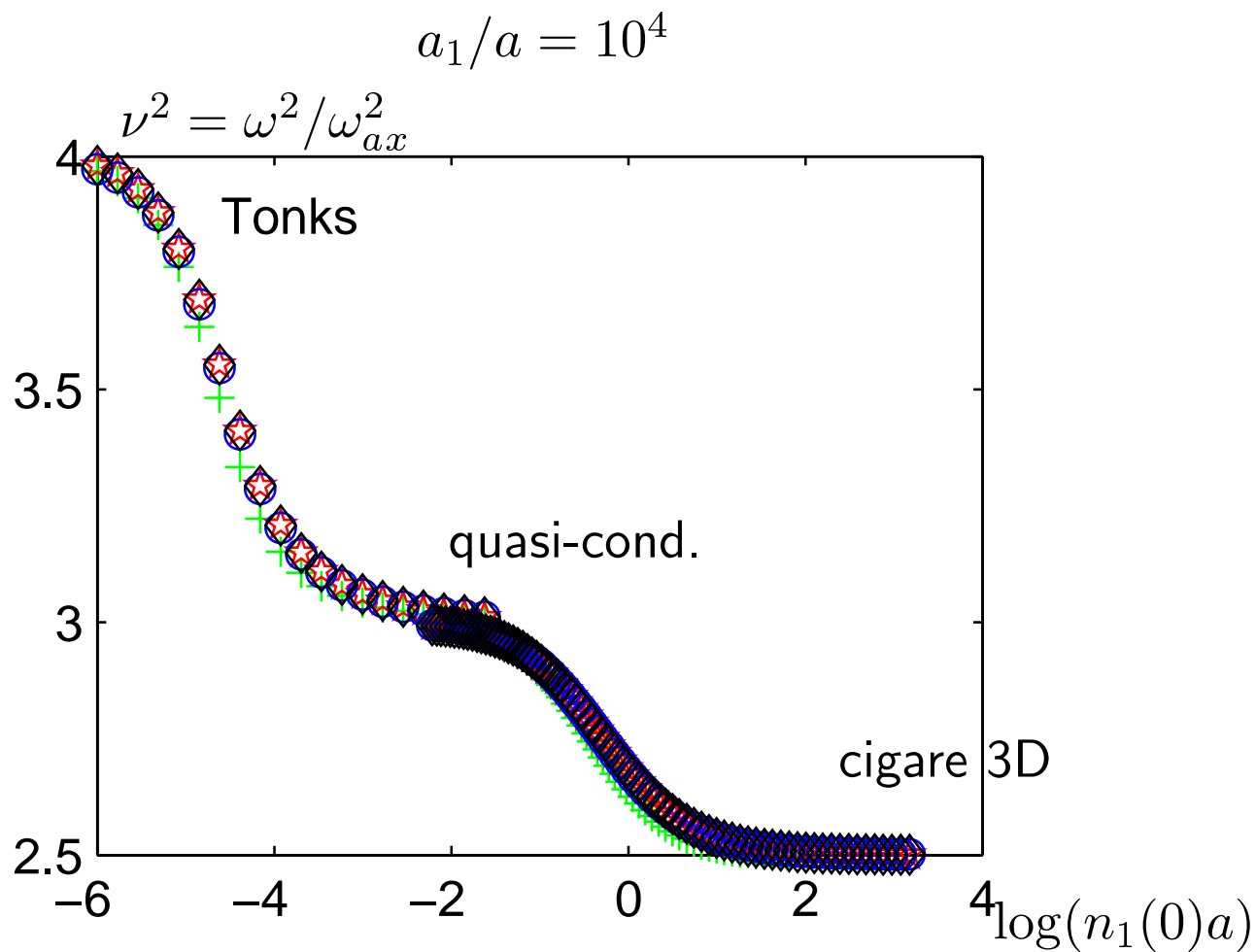
cigare 3D : $\bar{\mu} = \bar{n}^{1/2} \Rightarrow \nu^2 = 5/2$

quasi-condensat : $\bar{\mu} = \bar{n} \Rightarrow \nu^2 = 3$

Tonks : $\bar{\mu} = \bar{n}^2 \Rightarrow \nu^2 = 4$

Perturbation 1^{er} ordre : $\nu_{corr}^2 = \nu_0^2 + \delta\nu^2$

Mode hydrodynamique de plus basse fréquence



- + 2 paramètres
- 3 paramètres
- ★ 2 paramètres + correction
- ◇ 3 paramètres + correction

Conclusion

Perspectives : agrégats quantiques

- cycles d'échange et fraction condensée
- T_{BEC} dans un réseau optique (cf. Holzmann, Grüter et Laloë pour BEC)
- transition BCS (paires de Schafroth ?)
- opérateurs Ursell en présence d'un condensat

Agrégats quantiques

Franck Laloë et Markus Holzmann

Gaz non-dégénéré "spin" 1/2

Franck Laloë, Dimitri Gangardt et Olivier Prévoté

Modes hydrodynamiques gaz de Bose 1D

Roland Combescot et Xavier Leyronas