Le modèle de Davies-Fulling. Un modèle pour la radiation de Hawking.

Obadia Nathaniel

▶ **To cite this version:**

Obadia Nathaniel. Le modèle de Davies-Fulling. Un modèle pour la radiation de Hawking.. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Migration - université en cours d'affectation, 2003. Français. NNT : . tel-00003015v1

HAL Id: tel-00003015

https://theses.hal.science/tel-00003015v1

Submitted on 1 Jul 2003 (v1), last revised 1 Jul 2003 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS - TOURS
ÉCOLE DOCTORALE : SANTÉ, SCIENCES, TECHNOLOGIES
ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2002/2003

Thèse pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Tours

présentée par **Nathaniel Obadia**

le 28 Mars 2003

Discipline : **PHYSIQUE**

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

Le modèle de Davies-Fulling et ses généralisations
Un modèle pour la radiation de Hawking

Directeur de thèse : **Renaud Parentani**

Membres du Jury

Président	Claude Barrabès	Professeur	Université de Tours
Rapporteur	Serge Massar	Chercheur FNRS	Université Libre de Bruxelles (Belgique)
Rapporteur	Adrian Ottewill	Professeur	University College de Dublin (Irlande)
Examinateur	Renaud Parentani	M. de Conférences	Université de Tours
Examinateur	Philippe Spindel	Professeur	Université de Mons-Hainaut (Belgique)
Examinateur	Mikhail Volkov	Professeur	Université de Tours

A la mémoire de mon grand-père Joseph Hochmann

Remerciements

En premier lieu, j'aimerais remercier les professeurs Barrabès, Ottewill, Spindel et Volkov ainsi que Serge Massar de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury. Je leur associe Nathalie Deruelle et Jean-Philippe Uzan qui n'ont malheureusement pas pu être disponibles pour la soutenance.

C'est un plaisir de remercier Peter Forgács pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mathématique et Physique Théorique afin d'effectuer ces années de thèse. Avec lui, c'est à chaque membre du laboratoire que j'adresse des remerciements sincères pour les réponses que chacun a apportées, un jour, aux questions que j'ai posées. A ce titre, l'aide et les conseils d'Amaury Mouchet comptent parmi les enseignements dont je me souviendrai le mieux dans l'avenir.

Durant ces années, j'ai également professé au sein du Département de Physique et en particulier en classe préparatoire au CAPES. Ce n'est une découverte pour personne qu'on apprend aussi en enseignant. C'est à Pierre Viaud, puis Jean-Claude Soret, ainsi qu'à George Assef et Patrick Drevet que va la reconnaissance d'un jeune enseignant inexpérimenté. A travers eux, ce sont aussi les membres du Département de Physique, ainsi que les autres membres de l'équipe du CAPES que je remercie pour m'avoir fait profiter (tous, sans exception) de leur expérience.

Un laboratoire, un département, ne reposent pas que sur les personnels enseignants et les chercheurs. J'ai eu maintes fois l'occasion de vérifier que sans Walter, Patrick, Michèle, Olivier[1], David, Denis, Pierrette, Christophe et Madame Barbey, bien des problèmes ne trouvent pas leur solution. Pour toutes les fois où ils m'ont tiré d'affaire, merci.

Il en est qui ont "souffert" un peu plus que les autres de ma présence : Arnaud, Sébastián et David[2], merci pour les discussions, les coups de mains... et le fait de n'avoir pas cassé mon lecteur CD.

Ces années m'ont aussi apporté, en plus de ceux que j'ai déjà cités, des amis sincères. Cette liste ne serait donc pas complète si elle n'incluait nommément Gisèle, Yannick (et Emile), Awatef et Jérôme, Rui et Graciète, et Enrick.

Si l'intérêt pour les sciences m'est venu de mon grand-père, celui pour la physique est né lors de mon passage à l'ENS Lyon. Je tiens à remercier Michel Peyrard pour m'avoir fait découvrir la Mécanique Quantique, Pierre Salati pour m'avoir fait rentrer dans le monde des équations d'Einstein ainsi que tous les autres enseignants auprès desquels je me suis enrichi durant quatre ans.

Je n'oublie pas tous ceux à qui je dois d'avoir eu une vie en dehors des miroirs accélérés et des trous noirs qui rayonnent : ma famille, et en premier lieu mes parents, frère et soeurs, ainsi que mes amis : Vincent et Estelle, Marion et Mark-Per, Xav et Mélie (et

[1] Merci d'avoir enlevé les jeux de mon ordinateur...

[2] Çampo.

Celeste), Philou et Agnès, Sophie, sa famille et Jean-Guillaume (et Conan), Manue et Damien, Nono (les réunions, le vent, les bountys, *etc*...), Benoit et Isa, Mano et Cécile, Nini et Rémi, Coralie et Joé, Marie et Vincent, Judith, Cécile, les Zazas, David et Keren (et Dalia), Céline et Hannibal, Valérie et ma promise Camille, Dom' et Dave, Hélène et Bruno (et Yoël et Noémie), Alex, Bruno et Cécilia, Vincent (et qui maintenant ?), Alexe, Christophe et Corinne (et Flavie), Fabrice et Nelly, Fabi et Arnaud, ... Si je n'arrêtais pas cette liste, elle pourrait bien augmenter démesurément la taille de ces "Remerciements", je ne doute pas que ceux qui n'y apparaissent pas sachent qu'ils y ont aussi leur place.

Enfin, *last but not least*, je ne peux clore ces remerciements sans en adresser aux deux personnes à qui je dois d'être entré dans l'univers dont ces pages proviennent : le professeur Joseph Katz, auprès duquel j'ai découvert à quel point la Relativité Générale se mariait mal avec la Mécanique Quantique et grâce auquel j'ai pu rencontrer mon directeur de thèse, Renaud Parentani, dont il m'est très difficile de détailler la somme considérable des choses que j'ai apprises à son contact, tant scientifiques qu'humaines.

Table des matières

Introduction **11**

1 Le Modèle de Davies-Fulling. Généralisations **27**
1.1 Miroirs totalement réfléchissants 28
1.1.1 Trajectoires asymptotiquement inertielles 29
1.1.2 Trajectoires asymptotiquement non inertielles 38
1.2 Miroirs partiellement transparents 40
1.2.1 Passage aux modes propres 41
1.2.2 Description de la transmittivité partielle 43
1.2.3 Les coefficients de Bogoliubov 45
1.3 Théorie de la matrice $\hat{S}$ 47
1.4 Flux de particules - Energie 50
1.4.1 Le flux en termes des coefficients de Bogoliubov 50
1.4.2 Lien avec le modèle de Davies-Fulling 51
1.5 Formulation locale et trajectoires particulières 52
1.5.1 Le flux en termes des fonctions de Wightman 53
1.5.2 Trajectoires particulières 55
1.6 Conclusion et failles du modèle 60

2 Le Modèle Lagrangien **63**
2.1 Lagrangiens indépendants du temps 65
2.1.1 Couplage par le courant de Noether pour un miroir fin 65
2.1.2 Cas général - Causalité 68
2.2 Lagrangiens dépendants du temps 70
2.2.1 Le flux en termes des amplitudes de transition 71
2.2.2 Interprétation 73
2.3 Miroir inertiel 75
2.3.1 La radiation dans le vide 75
2.3.2 La radiation dans un bain thermique 82
2.4 Conclusion 84

3 Le Miroir Uniformément Accéléré **85**
3.1 Les différentes particules 85
3.1.1 Les particules de Rindler 85
3.1.2 Les particules de Unruh 88
3.2 La fonction de couplage temporel 89
3.2.1 Choix de $\tilde{f}$ - Rôle physique 89

3.2.2 Rôle mathématique . . . 91
3.3 Les amplitudes de transition régularisées . . . 92
3.3.1 En termes des particules de Minkowski . . . 92
3.3.2 Les amplitudes "mixtes" et le détecteur uniformément accéléré . . . 93
3.4 Quelles sont les particules qui participent à l'énergie ? . . . 95
3.5 Formulation locale de l'énergie . . . 98
3.5.1 Flux de Minkowski . . . 98
3.5.2 Flux de Rindler . . . 101
3.6 Deux miroirs symétriques uniformément accélérés . . . 103
3.6.1 Ce qu'en dit le modèle de Davies-Fulling . . . 103
3.6.2 La description régularisée . . . 105
3.6.3 Un interféromètre parfait ? . . . 108
3.7 Conclusion . . . 110

4 La Fonction de Corrélation $\langle T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\rangle$ 113
4.1 Etat des corrélations avant la diffusion . . . 113
4.2 Corrélations passé/futur . . . 115
4.2.1 Formulation générale . . . 115
4.2.2 Miroir inertiel . . . 117
4.2.3 Réflexion sur un miroir uniformément accéléré . . . 119
4.2.4 Autres configurations pour un miroir uniformément accéléré . . . 122
4.3 Corrélations sur $\mathcal{J}^+$ . . . 125
4.3.1 Formulation générale et miroir inertiel . . . 125
4.3.2 Miroir uniformément accéléré . . . 127
4.4 Conclusion . . . 128

5 Les Valeurs Conditionnelles du Flux 131
5.1 Le projecteur $\mathbf{P}$ . . . 132
5.1.1 Le choix du paquet d'ondes . . . 132
5.1.2 Son contenu spatio-temporel . . . 134
5.1.3 Son contenu spectral . . . 135
5.2 Les valeurs conditionnelles du flux . . . 135
5.2.1 Calcul de la probabilité . . . 136
5.2.2 Les valeurs conditionnelles . . . 137
5.3 Interprétation et Conclusion . . . 138
5.4 Entre Post-sélection et fonctions de corrélation . . . 140
5.4.1 Couplage avec un détecteur . . . 140
5.4.2 $\langle T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\rangle$ et $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}$ vus comme des cas limites . . . 143

Conclusion 145

APPENDICES 147

A Recouvrement des vides *in* et *out* 149

B Inversibilité de la matrice $\alpha^{UV}_{\omega k}$ 153

C Les relations d'unitarité pour la matrice $\mathcal{B}$ 155

D Les fonctions K_ν de Bessel **157**

E Le terme $\mathcal{D}$ **159**

F Validité du traitement perturbatif **163**

G L'énergie pour un miroir inertiel dans le vide **165**

H Le flux dans un bain thermique **167**

I Les diagrammes de Carter-Penrose **169**

J La trajectoire régularisée **171**

ARTICLES **175**

Notes on Moving Mirrors 177
Uniformly Accelerated Mirrors - Mean Fluxes 197
Uniformly Accelerated Mirrors - Quantum Correlations 213

BIBLIOGRAPHIE **233**

Introduction

Ce qu'on désigne par "gravité quantique" est la théorie qui décri(rai)t le comportement quantique de l'interaction gravitationnelle. Le conditionnel peut sembler naturel car une telle théorie n'existe pas encore ; elle est, en fait, un des challenges majeurs de la physique théorique de ce siècle. En effet, alors que l'on a réussi à quantifier les trois autres interactions fondamentales, la gravitation résiste encore. Après avoir démontré le caractère renormalisable de la théorie de Yang-Mills, 't Hooft et Veltman ainsi que Deser et Van Nieuwenhuizen[1] montrait dès 1973 que la Relativité Générale couplée à la matière n'est pas renormalisable. La quantification perturbative "à la Feynman" des amplitudes de diffusion pour l'interaction gravitationnelle fut donc abandonnée à cette époque.

La question fut alors reposée : Comment atteindre alors une théorie de la gravité quantique ? Aujourd'hui, les idées de méthodes sont nombreuses (théorie(s) des cordes, géométrie non-commutative, *loop quantum gravity*, twistors, quantification canonique par les variables d'Ashtekar, *etc*...). On serait tenté d'ajouter "heureusement" tant, depuis 30 ans, les résultats manquent cruellement. Pour une revue quasi-exhaustive de l'histoire, de l'état des lieux ainsi que des diverses approches employées pour atteindre la gravité quantique, on pourra se reporter à [2].

C'est sans doute naturellement que, parallèlement au débat autour d'une théorie si générale, d'autres sujets voisins étaient également abordés par la communauté scientifique. Dans le même esprit, se posa la question très proche d'établir une théorie complète des champs quantiques en espace-temps courbe, et le problème de la cosmologie quantique fut ravivé. De plus, un an à peine après 't Hooft et Veltman, Hawking[3, 4] montrait que, sous certaines approximations, les Trous Noirs[5] neutres, statiques et de masse M émettaient quantiquement une radiation thermique de température :

$$k_B T_H \;=\; \frac{\hbar\kappa}{2\pi c}\,, \tag{1}$$

où $\kappa = c^4/4GM$ est la gravité de surface du Trou Noir[3], validant ainsi l'interprétation entropique de leur aire par Bekenstein[9]. Si la méthode de Hawking (que nous expliciterons plus loin) fut vérifiée et validée *a posteriori* par d'autres approches[10, 11, 12, 13, 14,

[3]Une définition claire de la gravité de surface est donnée par Wald[6, 7]. On associe la gravité de surface à un horizon de Killing, qui n'est pas nécessairement un *bifurcate Killing horizon*. Soit H cet horizon auquel on associe le champ de Killing ϕ^μ. Par définition, $\phi^\mu\phi_\mu = 0$ sur H, et $\nabla^\nu(\phi^\mu\phi_\mu)\perp H$. Comme ϕ^μ est aussi orthogonal à H, les deux vecteurs doivent être proportionnels :

$$\nabla^\nu(\phi^\mu\phi_\mu) = -2\kappa\phi^\nu,$$

où la constante κ est donnée par $\kappa = \left[-\frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi_\nu)(\nabla^\mu\phi^\nu)\right]_H^{1/2}$, et représente la force qu'il faut fournir à l'infini pour maintenir une masse unité sur l'horizon, d'où le nom de gravité de surface[8].

15, 16, 17], ce résultat souleva des doutes quant à ses conséquences thermodynamiques[4]. Sans entrer dans les détails d'un débat qui n'est toujours pas clos[19, 20], l'évaporation d'un Trou Noir semble transformer un état pur en matrice densité, traduisant ainsi une *perte d'information*. De plus, outre le débat théorique, l'effet Hawking souffre du fait que sa vérification expérimentale est peu évidente. En effet, la température concernée peut s'écrire $T_H \simeq 6.10^{-8}(M_\odot/M)$K, où $M_\odot \simeq 2.\ 10^{30}$kg est la masse du Soleil. En sachant qu'une étoile qui s'effondre ne peut créer de Trou Noir que si sa masse est supérieure à quelques masses solaires[5], on constate que la valeur de ce phénomène est au minimum de 7 ordres de grandeur plus faible que le rayonnement cosmologique de fond diffus dans lequel baigne l'univers[6].

La convergence de tous ces problèmes amène à se poser une seconde question : En dehors de vouloir unifier les quatre interactions fondamentales dans une même description quantique, en quoi la connaissance de la gravité quantique est-elle réellement utile ? Poser cette question, c'est demander en fait quels sont les domaines dont la compréhension nécessite *à la fois* une description quantique *et* le formalisme de la Relativité Générale. Les domaines situés au confluent des deux théories sont forcément causes de phénomènes paradoxaux, puisque la description que nous pouvons en avoir est incomplète. Ainsi, tout ce que nous pourrions comprendre de leur étude serait à mettre au crédit de ce à quoi la "gravité quantique" pourrait ressembler *in fine*. Dans un article qui n'a pas reçu l'attention qu'il méritait en son temps, Carlitz et Willey[25] posaient le problème en ces termes :
"In contemplating a quantum-mechanical theory of gravity, one encounters a number of paradoxes which play upon fundamental notions of spacetime and of quantum measurements. These paradoxes may be viewed as obstacles to the construction of a viable theory of quantum gravity or as opportunities for insight into the structure such a theory will ultimately have."
La deuxième partie de leur alternative traduit l'esprit dans lequel se situe l'étude des deux problèmes que sont la cosmologie quantique et la radiation de Hawking. En effet, l'étude de ces deux singularités - le Big-Bang et les Trous Noirs - nécessite à la fois un traitement quantique (en particulier à cause des processus de création de paires) et une prise en compte des effets de courbure dus aux densités de matière qu'elles engendrent. Typiquement, cela implique que les échelles engagées dans la description des phénomènes peuvent dépasser celle de Planck ($t < t_{Pl} \simeq 10^{-43}$s , $l < l_{Pl} \simeq 10^{-35}$m , $E > E_{Pl} \simeq 10^{19}$GeV ou $C > 10^{70}\mathrm{m}^{-2}$ où C est la courbure de l'espace-temps[7]).

---

[4] On douta, bien sûr d'abord, de l'existence des Trous Noirs "tout court". Pour une bonne et courte revue de l'histoire des Trous Noirs, ainsi que des preuves astrophysiques de leur existence, voir [18].

[5] Succinctement, une étoile s'effondre lorsqu'elle a épuisé tout son Hydrogène et son Helium sous forme de réactions thermonucléaires. A ce stade, la pression de radiation ne contrebalance plus l'interaction gravitationnelle. Pour les masses les plus faibles, le produit de l'effondrement est soit une Naine Blanche, soit une Etoile à Neutrons. La masse maximum de ces deux objets est donnée respectivement par les limites de Chandrasekhar[21, 22] $M_C \simeq 1.4M_\odot$ et d'Oppenheimer-Volkoff[23] $M_{OV} \simeq 3M_\odot$. Ainsi, au-delà de quelques masses solaires, le produit de l'effondrement d'une étoile ne peut être qu'un Trou Noir.

[6] Il existe des Trous Noirs qui ne proviennent pas de l'effondrement de masses gazeuses ou d'étoiles mais des fluctuations primordiales de densité[24]. Ce sont eux qui constituent les candidats susceptibles d'offrir une radiation de Hawking observable. De plus, on suppose que le stade final de leur évolution pourrait être la cause de certains jets γ. En contrepartie, leur faible densité ne leur permet pas d'être détectés par l'accrétion de matière qu'ils engendrent, comme leurs analogues super-massifs.

[7] Excepté lorsqu'elles sont explicitement indiquées, nous supposerons toujours implicite la présence des constantes fondamentales. Cela revient à poser $c = G = k_B = 1$. Ainsi, les temps sont exprimés en termes du temps de Planck t_{Pl}, *etc...*

Comment décrit-on les fluctuations d'un champ quantique dans de telles métriques ? La question est ardue puisque, par le biais des équations d'Eintein, la répartition de la densité d'énergie de n'importe quel champ modifie la métrique de l'espace-temps qui le contient. Ainsi, pour un champ quantique décrit par son *opérateur* énergie-impulsion $\hat{T}_{\mu\nu}$, ces équations impliquent que la métrique elle-même doit être considérée comme un opérateur obéissant à :

$$\hat{G}_{\mu\nu} \;=\; 8\pi\,\hat{T}_{\mu\nu}\ .$$

Dans un premier temps, pour résoudre ces équations, on fixe la métrique classiquement et on étudie le comportement quantique du champ dans cet espace-temps. Ceci constitue l'*approximation semi-classique*. Ainsi, lorsque le champ est dans un état $|\Psi\rangle$, l'équation précédente devient :

$$G_{\mu\nu} \;=\; 8\pi\,\langle\Psi|\hat{T}_{\mu\nu}|\Psi\rangle\ . \tag{2}$$

On pourrait penser que la résolution de cette dernière équation offre des résultats analogues à celle des équations d'Einstein classiques. Ce serait oublier que les valeurs moyennes des champs quantiques ne satisfont pas aux conditions (forte ou faible) portant sur l'énergie, comme les champs classiques. Outre ce que nous verrons par la suite, l'effet Casimir[26] est un bon exemple pour lequel la valeur moyenne de la densité d'énergie est négative dans toute une zone de l'espace-temps. Nous verrons explicitement quelles sont les conséquences importantes de cette particularité dans le cas du Trou Noir. Une fois ces équations résolues, on se trouve confronté à certaines incohérences qui sont simplement liées au fait que l'on a négligé les effets de recul, ceci découlant simplement de l'approximation semi-classique. Il convient donc de prendre en compte dynamiquement les effets de recul. Naturellement, ceci ne peut être fait que perturbativement. On constate donc que le problème est loin d'être trivial.

Observons les difficultés qui émergent déjà dans l'approximation semi-classique. Pour se confronter avec succès à la description des champs quantiques évoluant dans la métrique d'un Trou Noir (ou dans le cadre du Big-Bang), il faut avoir de bonnes connaissances du comportement de ces champs en espace-temps courbe. Or, la particularité malheureuse de tels espace-temps est que la notion de particule n'y est pas unique. En effet, si dans l'espace-temps de Minkowski, il est trivial de décomposer un champ obéissant à l'équation de Klein-Gordon sur ses modes à fréquences positives et négatives, une telle entreprise est impossible lorsque la courbure est non-nulle, puisqu'alors, le signe de la fréquence dépend de la position. Un exemple simple[4] permet de comprendre les difficultés que cela engendre. Imaginons un espace-temps pouvant être divisé en trois régions : une première qui est plate (ou asymptotiquement plate), une seconde qui possède une courbure non-nulle, puis une troisième analogue à la première. Ainsi, s'il n'est pas possible de définir avec unicité des particules dans la région intermédiaire, on peut tout de même y parvenir dans les deux autres à l'aide du temps de Minkowski. Cependant, les modes respectifs ne seront pas les mêmes, ce qui signifie que le vide relatif à la première région n'est pas celui relatif à la troisième. Hawking interprète ce phénomène comme la signature du fait suivant : la dépendance temporelle de la métrique dans la région intermédiaire *crée* un certain nombre de particules. Explicitement, si le champ est dans son état fondamental, *i.e.* le vide, dans la première région, bien qu'il ne semble être couplé à aucune source extérieure, il se retrouve peuplé de particules dans la troisième région, *par le simple effet du champ gravitationnel*,

voir (2). Cet effet traduit donc l'instabilité du vide par rapport à la gravitation. On comprend bien que cette instabilité nuise sensiblement à la description particulaire des champs de matière. Pour autant, cela ne signifie pas qu'un champ quantique ne puisse être étudié en espace-temps courbe : les prédictions physiques peuvent toujours s'exprimer en termes d'éléments de matrice d'un opérateur entre deux états[6]. Par exemple, dans l'Eq.(2), la base de modes sur laquelle l'état $|\Psi\rangle$ est défini n'a pas d'importance, seule la valeur moyenne de $\hat{T}_{\mu\nu}$ compte.

On pourrait hâtivement conclure de ce que nous venons d'exposer qu'un champ gravitationnel suffit à expliquer l'Eq.(1) ; ce serait une erreur. En effet, comme le dit Wald[7], c'est dans l'espace de Minkowski que l'on trouve un des premiers exemples de ce genre de phénomène ! Le fait d'être confronté, pour un même champ, à des représentations en termes de particules différentes peut également s'obtenir en espace-temps plat. En effet, un an après Hawking, Davies[27], et surtout Unruh[28], puis Bisognano et Wichmann[29], montraient qu'un observateur uniformément accéléré dans le vide de Minkowski perçoit ce dernier comme étant peuplé d'un bain thermique de particules à la température :

$$k_B T_U \;=\; \frac{\hbar a}{2\pi c}\,, \tag{3}$$

où a est l'accélération qu'expérimente l'observateur. On ne peut que remarquer la correspondance avec la formule de Hawking (1). Le référentiel propre d'un observateur uniformément accéléré est appelé référentiel de Rindler. Pour cet observateur "en chute libre", l'état dans lequel le champ se trouve est décomposé en termes de modes à fréquences positives et négatives *par rapport au temps de Rindler* et non au temps de Minkowski. Comme ces deux variables ne sont pas reliées par une transformation affine, le vide de Minkowski possède des fréquences de Rindler négatives, *i.e.* il se peuple de particules pour l'observateur uniformément accéléré. Quant à la nature thermique de l'état correspondant, ou plus précisément de sa matrice densité, elle émerge naturellement des relations entre coordonnées de Minkowski et coordonnées de Rindler. C'est à ce titre que l'analogie avec l'effet Hawking se traduit de la manière la plus ostensible, comme nous allons le voir par la suite.

Pour comprendre l'effet Unruh (ainsi que l'effet Hawking), et plus généralement pour quantifier des champs en espace-temps courbe, il faut considérer les vecteurs de Killing[5, 6, 7] associés à la métrique que l'on considère. On rappelle que ces vecteurs sont les générateurs infinitésimaux des isométries de l'espace-temps. Ce sont ceux dont les orbites sont de genre de temps qui servent à quantifier les champs. Le "temps" défini à partir de ces vecteurs permet de décomposer les modes du champs en fréquences positives et négatives, *i.e.* d'introduire les notions de particule et d'anti-particule. Dans l'espace-temps de Minkowski, la métrique est trivialement invariante par translation temporelle selon t, le temps pour un observateur inertiel. Le vecteur de Killing associé est donc simplement $(\partial/\partial t)^\mu$ et le vide associé aux particules correspondantes est appelé vide de Minkowski. Cependant, l'espace-temps de Minkowski est également invariant par *boost* de Lorentz. A ce type d'isométrie, on associe un vecteur de Killing à un seul paramètre a donné par $l^\mu = a\,(z\,(\partial/\partial t)^\mu + t\,(\partial/\partial z)^\mu) = (\partial/\partial\tau)^\mu$. Ce vecteur de Killing n'est de genre-temps que dans les quadrant R et L de Rindler, voir figure Fig.1. Cette propriété a deux conséquences majeures. La première est que la région R est alors globalement hyperbolique[8], ce qui signifie que l'on peut y quantifier les champs par rapport à la nouvelle variable temporelle

[8] Soit Σ une hypersurface telle qu'il n'existe pas de courbe de genre temps qui la coupe à deux reprises.

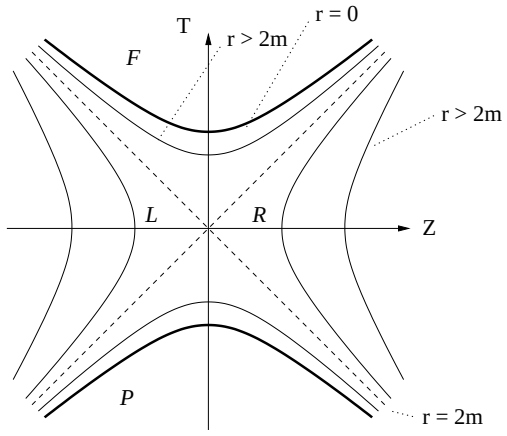

Fig. 1: Diagramme de Kruskal de l'espace-temps de Minkowski. Le quadrant R de Rindler est compris entre les axes $T = Z$ et $T = -Z$ dans la région des $Z > 0$. Ces axes, représentés en pointillés, sont les horizons de Killing définis par le vecteur de Killing l^μ. Ce dernier n'est de genre temps que dans les quadrant R et L.

τ. Ceci amène à la définition du vide et des (anti-)particules de Rindler. C'est précisément en termes de ces particules que le vide de Minkowski apparaît comme un état thermique à la température (3). Les orbites correspondant à τ sont paramétrées par a, et sont en fait les trajectoires à accélération uniforme a. La deuxième conséquence des propriétés de l^μ est qu'il définit deux horizons de Killing (*bifurcate Killing horizons*). Ce sont les hypersurfaces de genre lumière auxquelles l^μ est orthogonal et qui séparent l'espace-temps en quatre régions R, L, F et P. Il est important de noter que la présence d'un horizon de Killing est une des similarités majeures entre la situation de Hawking et celle de Unruh : pour un Trou Noir stationnaire, l'horizon des évènements est un horizon de Killing. C'est en fait la présence d'un horizon qui est la principale cause physique des Eqs.(1) et (3).

On pourrait argumenter que, contrairement à l'effet Hawking, qui repose sur la présence d'un champ gravitationnel, l'effet Unruh n'a pas de réalité, mais constitue juste un artifice de calcul lié à un changement de référentiel. Tel n'est pas le cas. Au contraire, c'est justement en tant que changement de référentiel qu'il prend sa signification physique. La compréhension de l'effet Unruh est conceptuellement analogue avec celle qui concerne la différence entre les référentiels galiléens et non-galiléens (en effet, cette dernière fait intervenir des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis auxquelles l'expérience est sensible). Dans notre cas, la nécessité d'avoir un bain thermique de particules à la température T_U a été montré récemment[30] en étudiant le temps de vie d'un proton soumis à un champ électrique constant[9]. Ainsi, l'effet Unruh possède-t-il une réalité physique, tout

---

Soit $D(\Sigma)$ l'ensemble des points qui sont reliés par une courbe de genre de temps ou de genre lumière à un point de Σ. Si l'espace-temps entier est égal à $D(\Sigma)$, alors Σ est appelée "surface de Cauchy" de cet espace-temps, et ce dernier est qualifié de "globalement hyperbolique"[7].

[9]L'idée est la suivante. Un proton inertiel a un temps de vie très supérieur à l'âge de l'univers que l'on note T_P. Cependant, il a été montré qu'un proton uniformément accéléré dans le vide se désintégrait dans le référentiel du laboratoire selon $p^+ \longrightarrow n + e^+ + \nu^e$ avec un temps de vie propre $\tau_p(a)$ qui est une fonction décroissante de l'accélération. Ce temps de vie étant un scalaire de Lorentz, il doit être le même dans tous les référentiels. Or, dans le référentiel de Rindler attaché au proton, ce dernier est immobile. Ainsi, la désintégration précédente devrait être interdite par conservation de l'énergie, ce qui implique $\tau_p = T_P$. Le seul moyen de retrouver la valeur de $\tau_p(a)$ est de prendre en compte les réactions faisant intervenir les particules de Rindler présentes *par effet Unruh* dans le référentiel du proton uniformément

comme l'effet Hawking[10].

Heureusement, la similarité entre les phénomènes de Hawking (1) et de Unruh (3) n'est pas totale. L'effet Unruh fait intervenir une physique beaucoup plus "conventionnelle". Tout d'abord, l'étude de cette radiation a lieu en espace-temps plat. Ceci, rappelons-le, permet d'utiliser, en plus des éléments de matrices d'opérateurs, la description des champs quantiques en termes de particules. Les résultats fournis par les deux descriptions peuvent alors être comparés, ce qui peut permettre de mieux comprendre, par analogie, ce qui se passe en espace-temps courbe, d'une manière générale, et pour le Trou Noir en particulier. De plus, la comparaison des référentiels inertiel et uniformément accéléré, si elle fait intervenir un horizon causal, n'inclut pas de coupure de l'espace-temps, *i.e.* de singularité.

Ces caractéristiques permettent de conduire l'étude des divers problèmes associés au rayonnement (les effets de recul, le problème "trans-planckien" dont nous reparlerons en détail, *etc*...) dans un environnement plus propice. L'étude de l'effet Unruh, outre son intérêt propre, possède donc l'avantage de permettre une meilleure compréhension de la radiation de Hawking. Entre autres, elle permet de mieux appréhender le contenu particulaire de la radiation, de décrire les corrélations dans le flux émis et d'aller au-delà de l'approximation semi-classique.

Le but de cette Introduction est de présenter sommairement les résultats de Hawking[11] pour pouvoir ensuite les relier, dans la suite du texte, à la physique mise en jeu en espace-temps plat par l'effet Unruh.

Le Trou Noir

La particularité de la géométrie engendrée par un Trou Noir réside dans le fait que la courbure qu'il cause à l'espace-temps sépare ce dernier en deux régions par un horizon causal appelé "horizon des évènements", voir Fig.2. Pour un Trou Noir sphérique, statique, sans charge et de masse M, cet horizon est la sphère qui a pour centre la singularité et pour rayon $r_S = 2MG/c^2$, appelé rayon de Schwarzschild. Ce dernier est donné numériquement par $r_S \simeq 3(M/M_\odot)$km. D'après le théorème de Birkhoff, la métrique à l'extérieur du Trou Noir est donnée par celle de Schwarzschild :

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2)$$

accéléré. En ne considérant que les trois réactions les plus importantes :

$$p^+ + e_U^- \longrightarrow n + \nu^e \;\;,\;\; p^+ + \bar{\nu}_U^e \longrightarrow n + e^+ \;\;,\;\; p^+ + \bar{\nu}_U^e + e_U^- \longrightarrow n \;,$$

où la population des électrons (e_U^-) et des anti-neutrinos ($\bar{\nu}_U^e$) est fixée par le facteur thermique $n_\omega = (1+e^{\omega/k_B T_U})^{-1}$, on retrouve numériquement $\tau_p(a)$ avec une excellente précision ($\sim 10^{-16}$).

[10] Pour une revue riche bien que non-exhaustive des aspects expérimentaux liés aux deux "effets", voir [31].

[11] La présentation que nous allons donner n'est pas exactement celle de Hawking. Dans ses deux articles fondateurs[3, 4], la méthode qu'il utilise est la suivante. Après avoir pris un mode à fréquences positives (*i.e.* une particule) dans le futur lointain du Trou Noir, il le propage dans le passé. Sur son chemin, le mode expérimente un effet Doppler gravitationnel à la traversée de l'horizon, une réflexion sur la singularité et un effet Doppler classique. Hawking analyse le contenu en fréquences positives *et négatives* de ce même mode dans le passé asymptotique de l'étoile. De la structure de ce mode et de l'hypothèse que l'état initial est le vide, il en tire la nature thermique du flux émis.
La méthode que nous allons adopter[32] est plus naturelle puisqu'elle décrit l'évolution d'un mode dans le sens des t croissants.

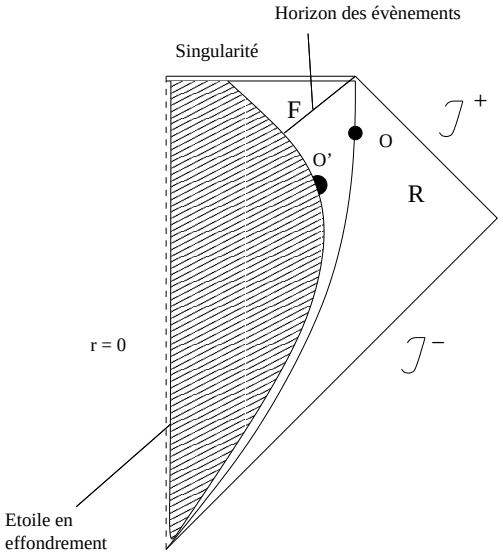

Fig. 2: Diagramme de Carter-Penrose d'une étoile qui s'effondre pour former un Trou Noir (les coordonnées utilisées dans ce type de diagramme sont données dans l'Appendice J). Un observateur O qui ne tombe pas dans le Trou Noir ne voit jamais au-delà d'un certain temps dans l'histoire d'un second observateur O' qui se trouve sur la surface du Trou Noir. Cet effet provient de la présence d'un horizon des évènements.

$$= \quad -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \ ,$$

où $u, v = t \mp r^*$, avec la coordonnée "tortue" définie par $r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r-2M}{2M}\right)$, soit $\mathrm{d}r^*/\mathrm{d}r = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$ et $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2$. Notons, en particulier, que dans la deuxième égalité, r est une fonction implicite de u et de v.

A cause de la courbure engendrée, aucune information (particule massive, photon, neutrino, *etc*...) ne peut sortir de la région interne à cette sphère, alors que tout type de matière ou de rayonnement peut y rentrer à loisir. Quand Bekenstein[9] suggéra de relier l'aire de l'horizon $A = 4\pi(2MG/c^2)^2$ à une entropie, en particulier à cause du fait qu'elle ne pouvait que croître[12], il se heurta à l'argumentaire imparable de Bardeen, Carter et Hawking[34], à savoir que s'il y avait une entropie, il devait forcément y avoir une température associée. Or, le Trou Noir ne laissant rien s'échapper, il ne pouvait posséder de rayonnement thermique comme un corps noir : la seule température possible était donc 0K ! Ainsi, l'aire A (ou un multiple) ne devait pas être plus considérée comme une "vraie" entropie, que la gravité de surface $\kappa = 1/4M$ (ou un multiple) n'était une "vraie" température.

L'Idée de Hawking

C'est en suivant les idées de Zel'dovich[35] et Starobinski[36], qui pensaient qu'un Trou Noir en rotation devait émettre une radiation spontanée[13], que Hawking montra que même

[12] L'énoncé du théorème de l'aire des Trous Noirs est, bien sûr, dû à Hawking[33]. L'hypothèse maîtresse de la démonstration est que le tenseur énergie-impulsion est supposé satisfaire à la condition faible d'énergie : $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$, où l^μ est n'importe quel vecteur de genre lumière.

[13] ...étant donné que le phénomène de super-radiance présente de fortes analogies avec les processus d'émission stimulée, *cf* Chapitre 1, note (9).

les Trous Noirs statiques rayonnent vers l'extérieur, et ceci *quantiquement*. C'est le double caractère stationnaire et thermique de ce rayonnement qui le convainquit de la justesse de son raisonnement. Quelles sont le principe, les hypothèses et les conclusions de celui-ci ?

Le principe de la radiation émise par un Trou Noir repose sur l'effet Doppler gravitationnel que subissent les fluctuations du champ au bord de l'horizon des évènements. Comme nous l'avons déjà dit, la radiation de Hawking peut se comprendre comme un exemple de l'instabilité du vide vis-à-vis du champ gravitationnel créé par un Trou Noir. En effet, ce champ est assez puissant pour mettre "sur couche de masse" les paires virtuelles créées et annihilées lors des fluctuations du vide. Si, lors du processus de création de paire, une particule réelle part en direction de l'intérieur du Trou Noir, elle traversera l'horizon pour tomber vers la singularité ; alors, par conservation de la quantité de mouvement, l'anti-particule créée simultanément s'échappera dans l'autre direction, donnant ainsi lieu à un rayonnement vers l'extérieur.

Plus prosaïquement, Hawking considère d'abord que le champ est dans son état fondamental, *i.e.* le vide, avant l'effondrement de l'étoile. Il inspecte ensuite le contenu en fréquences négatives de ses modes loin (et longtemps) après la formation du Trou Noir. Il trouve que la répartition des modes est celle d'un bain thermique de particules de température T_H, voir Eq.(1).

Tout d'abord, afin de simplifier les expressions, le champ de radiation est supposé être un champ scalaire sans masse[14]. L'absence de masse assure que les paquets d'ondes de ce "scalairon" (aussi appelé "photon scalaire") suivent les géodésiques de l'espace-temps. Quant à son caractère scalaire, il permet de s'affranchir des contributions liées au spin (bien qu'elles ne changent pas fondamentalement le résultat final).

L'hypothèse fondamentale du raisonnement repose sur le caractère semi-classique du calcul. Alors que le champ de radiation est traité quantiquement, le Trou Noir, c'est-à-dire la métrique qu'il engendre, est traité classiquement. Comme le dit Hawking lui-même[3] : *"Of course, this calculation ignores the back reaction of the particles on the metric, and quantum fluctuations on the metric. These might alter the picture."*

La Correspondance Entre Les Deux Métriques

[14] L'énergie des particules rayonnées est donnée par l'Eq.(1), soit $k_B T_H$. Pour un Trou Noir supermassif comme le candidat de la galaxie $M32$, dont la masse est estimée à 1.6 $10^6 M_\odot$, cette énergie vaut approximativement 3. 10^{-18}eV !! On comprend aisément que seules les particules non-massives puissent être créées lors d'un tel rayonnement. A titre de comparaison, la radiation de Hawking commence à contenir des électrons ($m_e c^2 \simeq 500$MeV) pour des Trous Noirs de masse inférieure à $10^{-17} M_\odot$. Comme nous l'avons déjà dit, de telles masses correspondent aux Trous Noirs primordiaux.

Cependant, on pourrait penser que des Trous Noirs "classiques", *i.e.* issus de l'effondrement d'étoiles, puissent être également la cause de telles radiations. En effet, en rayonnant leur énergie, ils perdent une partie de leur masse et leur température de Hawking s'accroît : les Trous Noirs s'échauffent en s'évaporant. Ainsi, au bout d'un certain temps, l'énergie de leur rayonnement pourrait atteindre les 500MeV désirés. Un tel cas de figure est rapidement évacué numériquement. La loi de Stephan prédit que les corps noirs rayonnent leur énergie avec un taux donné par $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = \sigma T^4 (4\pi R^2)$. Ainsi, la masse des Trous Noirs correspondants obéit à l'équation $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = -\alpha/M^2$, où $\alpha = \hbar c^6/15.2^{10} G^2 \simeq 10^{-28} M_\odot^2$. Le temps de vie d'un Trou Noir est donc approximativement donné par $t_{TN} \simeq 7.10^{57} (M_{initial}/M_\odot)^3$s. En raison du facteur 10^{-17} cité plus haut, ce temps est excessivement proche de celui qu'il faut à un Trou Noir classique pour émettre des électrons. Or, lorsqu'on compare ce dernier à l'âge de l'univers ($\sim 10^{17}$s), on trouve qu'il lui est supérieur de 40 ordres de magnitude !! Ainsi, des Trous Noirs issus de l'effondrement d'étoiles n'ont pas eu le temps de s'évaporer au point de pouvoir émettre des électrons. Les seuls candidats possibles à la détection restent donc les Trous Noirs primordiaux.

Considérons, selon l'idée de Unruh[28] que le Trou Noir est formé à partir de l'effondrement d'une sphère de poussière. Cette hypothèse a pour intérêt de simplifier grandement l'expression de la métrique à l'intérieur de l'horizon puisque, d'après un corollaire du théorème de Birkhoff, elle est tout simplement plate. Ainsi, à l'intérieur de la sphère, la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2) \\ &= -\mathrm{d}\mathcal{U}\mathrm{d}\mathcal{V} + r^2\mathrm{d}\Omega^2\ , \end{aligned} \tag{4}$$

avec $\mathcal{U}, \mathcal{V} = T \mp r$. Le raisonnement de Hawking repose sur les correspondances existant entre les coordonnées intérieures et extérieures. Une fois que nous aurons explicité le lien entre elles, nous pourrons exprimer comment les modes du champ de radiation expérimentent l'effet Doppler gravitationnel dû à la géométrie du Trou Noir.

Notons, tout d'abord, qu'un cône de lumière futur (passé) peut être invariablement désigné par une seule valeur de $\mathcal{U}$ ou de u (respectivement de $\mathcal{V}$ ou de v). Ainsi, $\mathcal{U}$ est une fonction de u, et $\mathcal{V}$ est une fonction de v. De plus, comme r est le même à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère en effondrement, les sphères ont pour aire $4\pi r^2$ dans tout l'espace-temps. Appelons R_{sphere} le rayon de notre pseudo-étoile et posons l'hypothèse supplémentaire suivante : les particules qui constituent la sphère suivent les géodésiques de l'espace données par $v = v_{sphere}$. Ainsi, selon le choix de coordonnées ou de référentiel, on a $R_{sphere} = r(u, v_{sphere})$ et $R_{sphere} = (\mathcal{V}(v_{sphere}) - \mathcal{U})/2$. Une dernière constatation va nous permettre de simplifier grandement les expressions. Sur $\mathcal{J}^-$, soit $u = -\infty$, l'espace-temps est également plat à l'extérieur de la sphère. On peut donc choisir v tel que $\mathcal{V}(v) = v$.

Sur la sphère ($\mathcal{V} = v = v_{sphere}$), les deux métriques coïncident. Ainsi, les éléments de métrique sont égaux, ce qui équivaut à :

$$\mathrm{d}\mathcal{U}\ \mathrm{d}\mathcal{V} = \left(1 - \frac{2M}{R_{sphere}}\right)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ .$$

Cette équation permet de relier les deux temps retardés. En choisissant astucieusement les constantes d'intégration et la valeur de v_{sphere}[37], on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} u(\mathcal{U}) &= \mathcal{U} - 4M \ln\left(-\frac{\mathcal{U}}{4M}\right)\ , \\ \text{soit}\ \ \mathcal{U}(u) &= -4M\ e^{-u/4M} \quad \text{pour}\ \ u \to +\infty\ . \end{aligned} \tag{5}$$

Remarque importante. C'est à ce niveau que l'analogie avec les référentiels uniformément accélérés et l'effet Unruh est la plus patente. La relation $U = -4M\ e^{-u/4M}$ est également obtenue entre la coordonnée de Kruskal $U = t - r$, où t et r sont les coordonnées de Minkowski, et le temps propre retardé $u = \tau - \rho$, où τ et ρ sont les coordonnées dans le référentiel propre associé à un référentiel uniformément accéléré tel que $a = 1/4M\ [= T_H]$. On comprend donc que les fréquences par rapport à ces deux référentiels exhiberont le même effet Doppler pour les effets Hawking et Unruh[38], ceci donnant lieu à l'équivalence entre les relations (1) et (3).

La Radiation de Hawking

Comme le champ est scalaire, il obéit à l'équation de d'Alembert. En dehors de l'étoile en effondrement, la symétrie sphérique de la métrique suggère d'exprimer les modes sur la

base des harmoniques sphériques $\Phi_l(r,t)Y_l^m(\theta,\varphi)/r$. Conventionnellement, la division par r dans la décomposition implique que $\Phi_l(r=0)=0$. L'équation de d'Alembert associée aux modes l s'écrit pour la partie radiale Φ_l de la manière suivante :

$$\frac{1}{r-r_S}\left(\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}+V_l(r)\right]\Phi_l\right) \;=\; 0 \;, \tag{6}$$

où le potentiel est donné par :

$$V_l(r) \;=\; \frac{1}{r^4}\;(r-r_S)\;(r_S+l(l+1)r) \;.$$

Deux hypothèses simplifient grandement l'Eq.(6). Tout d'abord, en remarquant que la barrière de potentiel est d'autant plus haute que le moment angulaire l est grand, il est raisonnable de ne considérer que les ondes s, *i.e.* imposer $l=0$. En effet, il a été montré numériquement qu'elles représentent à elles seules 90% du rayonnement[39, 40]. Deuxièmement, dans ces conditions, on observe que le potentiel présente un maximum pour $r=4r_S/3$ de valeur $\sim 0.1/r_S^2$ et de largeur à mi-hauteur $\sim 1.1\;r_S$. La présence de cette barrière constitue donc un filtre passe-haut de fréquence de coupure $\mathcal{O}(r_S^{-1})$. Elle ne change pas fondamentalement la nature du flux émis mais elle permet par contre de s'affranchir d'éventuels problèmes de divergence infra-rouge dus au caractère non-massif du champ. Ainsi, pour des modes de fréquences suffisamment supérieures à r_S^{-1}, on va pouvoir négliger ce potentiel.

Dans ces conditions, à l'extérieur de la sphère de Schwarzschild, les modes s du champ scalaire obéissent à :

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\Phi=0 \quad\Leftrightarrow\quad \Phi(u,v)=\Phi^u(u)+\Phi^v(v) \;,$$

alors qu'à l'intérieur, l'Eq.(4) fournit :

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{U}}\frac{\partial}{\partial \mathcal{V}}\Phi=0 \quad\Leftrightarrow\quad \Phi(\mathcal{U},\mathcal{V})=\Phi^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})+\Phi^{\mathcal{V}}(\mathcal{V}) \;.$$

Le fait que la fonction Φ s'annule en $r=0$ assure que :

$$\Phi(u,v)=\Phi^u(u)-\Phi^u(v) \;\text{ et }\; \Phi(\mathcal{U},\mathcal{V})=\Phi^{\mathcal{U}}(\mathcal{U})-\Phi^{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) \;.$$

L'étape qui suit clôture la dérivation de la radiation de Hawking. Supposons que l'état est le vide sur l'infinité passé $\mathcal{J}^-$, soit $u=-\infty$. En décomposant le champ Φ sur ses modes à fréquence ω, cela a pour conséquence de limiter les modes v aux $\omega>0$. De plus, l'annulation de ces modes en $r=0$ *à l'intérieur de la sphère* permet de les écrire génériquement :

$$\Phi_\omega=\frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}}-\frac{e^{-i\omega \mathcal{U}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \;,$$

car $\mathcal{V}=v$. Pour connaître le contenu d'un tel mode sur $\mathcal{J}^+$, soit $v=+\infty$, il suffit de le décomposer sur la base propre de cette hypersurface, *i.e.* les modes $\frac{e^{-i\lambda u}}{\sqrt{4\pi\lambda}}$. Cette décomposition s'écrit grâce aux coefficients de Bogoliubov[41] $\alpha_{\omega\lambda}$ et $\beta_{\omega\lambda}$ qui donnent respectivement le recouvrement des modes sortants avec les modes à λ positifs et négatifs.

On comprend d'ores et déjà que c'est le caractère non affine de la relation (5) qui va permet à des coefficients $\beta_{\omega\lambda}$ d'être non nuls, *i.e.* à des particules d'être créées.

Le caractère thermique de la radiation s'obtient en calculant explicitement ces coefficients. Dans la limite des grands ω, *i.e.* supérieurs à r_S^{-1}, on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \; - \frac{e^{-i4M\omega e^{-u/4M}}}{\sqrt{4\pi\omega}} i\overleftrightarrow{\partial}_u \frac{e^{-i\lambda u}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \qquad (7) \\ &= \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\omega}{\lambda}}\; (4M\omega)^{-i4M\lambda-1}\; e^{2\pi M\lambda}\, \Gamma\left(1+i4M\lambda\right) \;, \\ \text{et} \quad \beta_{\omega\lambda} &= \alpha^*_{\omega\lambda}\, e^{-4\pi M\lambda} \;. \qquad (8) \end{aligned}$$

L'Eq.(8) conduit à $\left|\beta_{\omega\lambda}/\alpha_{\omega\lambda}\right|^2 = e^{-8\pi M\lambda}$. La première conséquence de ce résultat est que le nombre de particules créées dans le mode λ par unité de temps propre est donné par $n_\lambda = 1/2\pi\left(e^{8\pi M\lambda}-1\right)$, ce qui est exactement ce qu'on aurait obtenu pour un corps noir à la température $T_H = 1/8\pi M$. De plus, cette quantité permet de calculer le flux de particules émises dans la direction u :

$$\langle T_{uu}\rangle \;=\; \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\; \lambda\, n_\lambda \;=\; \frac{\pi}{12}\, T_H^2 \;. \qquad (9)$$

Le fait que $\langle T_{uu}\rangle$ soit une fonction constante de u fournit la seconde caractéristique principale de la radiation de Hawking, *i.e.* sa stationnarité.

Nous avons ainsi démontré qu'un Trou Noir émet une radiation thermique, stationnaire et d'origine purement *quantique*[15]. Afin de décrire quels sont les aspects de l'effet

[15]... puisque $T_H \propto \hbar$, voir (1). En partant de ces propriétés, l'expression de la température de Hawking est d'ailleurs pratiquement fixée. En effet, par analyse dimensionnelle, l'énergie que l'on peut associer à un Trou Noir statique et non chargé s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{TN} \propto Mc^2 \left(\frac{\hbar c}{GM^2}\right)^\alpha \;,$$

où α est n'importe quel réel. Si $\alpha = 0$, on retrouve l'énergie au repos de l'étoile, qui ne peut évidemment pas être l'énergie rayonnée de manière stationnaire. Si $\alpha = 1/2$, on retrouve l'énergie de Planck, qui ne dépend pas de la masse du Trou Noir. Si l'on suppose que le rayonnement de Hawking provient de phénomènes quantiques à une boucle, cela revient à poser $\alpha = 1$, ce qui redonne l'expression (1), au facteur numérique près.

En outre, il existe une dérivation grossière de la formule de Hawking, basée sur ces mêmes hypothèses de thermicité et de stationnarité, simplement à partir des relations d'incertitude d'Heisenberg[42]. En supposant que, par effet tunnel, des particules puissent sortir de la sphère de Schwarzschild, quelle serait la puissance associée à la radiation correspondante ? Prenons un photon à l'intérieur de l'horizon (ou n'importe quelle particule sans masse afin que l'effet soit maximal). L'incertitude sur la position de cette particule est de l'ordre de r_S. Ainsi, l'incertitude temporelle s'écrit $\Delta t = r_S/c = 2GM/c^3$. Le principe d'Heisenberg permet alors d'écrire la puissance associée de la manière suivante :

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \simeq \frac{\hbar}{(\Delta t)^2} \simeq \frac{\hbar c^6}{4G^2M^2} \;.$$

En supposant que le processus est thermique, et que la radiation provient "géographiquement" de la sphère de Schwarzschild, cette puissance est associée, à un facteur numérique près, à la température de Hawking, comme nous l'avons vu dans la note précédente.

Remarquons également qu'une autre manière d'arriver au résultat d'Hawking consiste à dire que la longueur de Compton associée au Trou Noir est donnée par $l_C = r_S$.

Unruh qu'il sera intéressant d'étudier, il convient d'insister sur les problèmes inhérents au traitement de Hawking.

Les Problèmes de la Radiation de Hawking

Comme nous l'avons précisé au début de cette Introduction, la dérivation de Hawking repose sur l'hypothèse de l'approximation semi-classique. Pour une grande partie de la vie du Trou Noir, cette approximation est valide. En effet, tant que la masse de ce dernier varie peu, on est en droit de considérer la métrique comme fixe. Comme nous l'avons déjà dit dans la note (14), la masse du Trou Noir décroît selon $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = -\alpha/M^2$. Ainsi, en fin d'évaporation, les effets de recul doivent impérativement être pris en compte dans le calcul avant de pouvoir prédire quoique ce soit.

La radiation de Hawking possède un autre problème plus intrinsèque. Pour savoir quelles sont les fréquences entrantes ω qui participent à un mode λ recueilli sur $\mathcal{J}^+$, on peut recourir à la méthode du point de selle dans l'expression (7). On obtient immédiatement :

$$\omega \;=\; \lambda\, e^{u/4M}\ . \tag{10}$$

Un rapide calcul situe le problème que constitue l'Eq.(10). Les modes sortants de Hawking $\lambda = T_H$ correspondent à des modes entrants de Planck $\omega = \omega_{Pl}$ au bout d'un temps très court, typiquement $\Delta\tau = \frac{4MG}{c^3} \ln\left(\hbar\omega_{Pl}/k_B T_H\right) \simeq 2.10^{-5}\,(90 + \ln\left(M/M_\odot\right))\,(M/M_\odot)\,\mathrm{s}$. Par exemple, pour le Trou Noir galactique mentionné dans la note (14), ce temps est approximativement d'une heure, ce qui est excessivement court par rapport à son temps de vie[16].

Ainsi, il suffit d'un temps excessivement court par rapport à la durée de vie du Trou Noir pour que les domaines de fréquences conventionnel et trans-Planckien[43] se retrouvent liés par effet Doppler. Comme nous l'avons déjà dit, s'il existe une théorie de la gravité quantique, ces effets se font sentir à de telles fréquences. Si la radiation que nous pourrions recevoir émanait de fréquences arbitrairement élevées, *i.e.* de longueur d'ondes arbitrairement faibles, l'évaporation d'un Trou Noir serait alors un formidable microscope pour la physique des longueurs sub-Planckiennes, comme le dit Jacobson[44, 45]. Il semble que l'absence d'un cut-off ultra-violet naturel nous plonge dans un domaine où la physique nous est inconnue. Une manière moins fondamentale de formuler le problème trans-Planckien est de souligner qu'en physique, nous avons l'habitude de travailler dans des domaines (échelles) disjoints. Or, dans la radiation de Hawking, l'Eq.(10) mélange allègrement les fréquences infra-rouges et ultra-violettes de tout ordre.

D'où pourrait venir un cut-off providentiel pour la radiation de Hawking ? Un des premiers à répondre à cette question fut Unruh[12]. En prenant pour analogue la propagation des ondes sonores dans un fluide, il proposa un modèle pour lequel la relation de dispersion exhibe un cut-off ultra-violet, au-delà duquel l'onde devient dissipative. L'intérêt de son étude réside dans le fait que, pour des fréquences de coupure suffisamment élevées par rapport à la gravité de surface du Trou Noir, cette relation de dispersion ne modifie pas les propriétés de la radiation de Hawking. Il reste à trouver pour quelle(s) raison(s) la

[16] On remarque que ce temps caractéristique est une fonction croissante de la masse. Ainsi, il est encore plus faible pour les Trous Noirs primordiaux. Cependant, comme leur temps de vie est gouverné par $(M/M_\odot)^3$, il décroît plus vite que $\Delta\tau$. Donc, en-dessous d'une certaine masse, les Trous Noirs primordiaux n'ont pas le temps de convertir des modes de Planck en radiation de Hawking. Ils ne semblent donc pas être affectés par le problème trans-Planckien.

relation de dispersion serait modifiée. Les voies explorées pour répondre à cette question sont multiples. Les modes à forts moments angulaires, "emprisonnés" entre l'horizon et la barrière de potentiel, pourraient interagir avec les modes s sortant[46, 47]. Leur effet pourrait être décrit par des fluctuations de la métrique autour du Trou Noir[48]. Il a été également montré que les configurations entrantes dans le Trou Noir pourraient être la cause de telles fluctuations[49]. Enfin, sans être exhaustif, l'idée que l'invariance de Lorentz puisse être brisée à une certaine échelle (celle de Planck, par exemple) fait l'objet d'une intense littérature[50].

On constate que ces problèmes sont spécialement ardus à cause de la géométrie particulière du Trou Noir. C'est précisément parce que l'étude de l'effet Unruh a lieu en espace-temps plat qu'elle est un bon "laboratoire" pour explorer le problème trans-Planckien, la prise en compte des effets de recul[17], *etc*...

$\sim$

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la radiation engendrée par un "miroir" en mouvement[18]. Dans ce problème, l'espace-temps est supposé plat. La condition qui remplace l'effet de courbure pour la radiation de Hawking est une condition de bord le long d'une trajectoire de genre temps. C'est ce que nous appellerons un "miroir" en mouvement. Comme pour l'effet Hawking, notre champ sera un "photon scalaire". Nous verrons que, pour une accélération non nulle de cette trajectoire, des particules de ce champ sont créées et émises vers $\mathcal{J}^+$, bien que l'état initial soit le vide. Nous verrons bien sûr que lorsque la trajectoire est uniformément accélérée, l'expression des modes du champ traduit l'effet Unruh. Comme nous l'avons déjà dit, l'avantage de travailler en espace-temps plat repose principalement sur le choix de représentation pour les grandeurs physiques : à savoir, les exprimer en tant qu'éléments de matrice d'opérateurs, ou en termes de particules. Nous "jonglerons" donc entre ces deux représentations afin de donner le plus de signification physique possible aux résultats obtenus. Le manuscrit se découpe de la manière suivante.

Le premier Chapitre a pour but d'introduire et de généraliser le modèle original de Davies-Fulling[54]. Après avoir expliqué les hypothèses sur lesquelles il repose, à savoir un miroir totalement réfléchissant et astreint à se déplacer sur une trajectoire fixe, nous le généraliserons de plusieurs manières[55]. En particulier, nous examinerons en détail le caractère asymptotique des trajectoires choisies, ce dernier s'avérant d'une grande importance pour définir les modes du champ. Puis, en nous plaçant dans le référentiel propre de la trajectoire, nous décrirons la radiation émise lorsque le miroir n'est pas totalement réfléchissant pour toutes les fréquences. Ensuite, nous utiliserons la description particulaire en réécrivant les résultats précédemment obtenus dans l'espace de Fock. Ceci nous permettra d'interpréter les coefficients de Bogoliubov comme des amplitudes de réflexion, de transmission et de création de paires. Ceci fait, nous aurons une bonne compréhension de la diffusion par un miroir en mouvement. Nous exprimerons alors le flux émis comme une fonction plus ou moins explicite du trajet suivi par le miroir, ce qui nous permettra d'isoler quelques trajectoires intéressantes. Comme un cas particulier, nous retrouverons

[17] et même l'étude thermodynamique liée à la "perte d'information" dont nous avons déjà parlé, voir, par exemple [51].

[18] On peut également étudier l'effet Unruh pour le plus simple des "observateurs", *i.e.* l'atome à deux niveaux[52]. Le traitement appliqué dans cette thèse a également été mené pour ce dernier[53]. Dans la suite, nous verrons que les résultats alors obtenus peuvent être retrouvés comme des cas particulier de l'étude du miroir.

celle qui donne un flux identique à celui de Hawking. Enfin, nous conclurons ce Chapitre en remarquant quelles sont les faiblesses du modèle et pourquoi il est important de le modifier profondément.

La présentation du nouveau modèle est l'objet du deuxième Chapitre. Le miroir n'est plus décrit comme une simple condition de bord mais grâce à un Lagrangien perturbatif localisé sur la trajectoire[56, 55]. Ce Chapitre a essentiellement pour but de comprendre comment joue chaque paramètre de ce Lagrangien : ainsi, nous prendrons des cas simples. En choisissant une action indépendante du temps, nous relierons les résultats obtenus à ceux provenant du modèle de Davies-Fulling généralisé. Puis, en nous limitant aux trajectoires inertielles, nous interpréterons comment le fait d'*allumer* et d'*éteindre* l'interaction aux extrémités de la trajectoire influe sur le flux émis.

Une fois le rôle de chaque terme du Lagrangien identifié, nous étudierons en détail le cas des trajectoires uniformément accélérées[57] : le flux émis pour de tels miroirs sera l'objet du troisième Chapitre. L'intérêt de ces trajectoires vient de ce qu'elles engendrent un flux nul alors que des paires de particules sont pourtant créées par effet Unruh. Cette incohérence (déjà présente dans le modèle de Davies-Fulling) peut être résolue dans ce modèle en découplant adiabatiquement le champ au miroir par le biais d'une fonction temporelle de couplage. Après avoir explicité le choix d'une telle fonction, nous montrerons qu'elle résout l'ensemble des problèmes inhérents à la radiation, et en particulier le problème trans-Planckien. Comme "cerise sur le gâteau", nous verrons que les résultats erronés trouvés dans la littérature concernant la radiation engendrée par deux miroirs uniformément accélérés aux trajectoires symétriques peuvent être expliqués et corrigés.

Dans les trois premiers Chapitres, nous ne nous sommes intéressés qu'aux valeurs moyennes du flux émis par le miroir. Ainsi, bien que les quanta soient créés par paires, les résultats obtenus ne nous permettent pas de décrire les corrélations entre les particules reçues sur $\mathcal{J}^+$. Rappelons que, dans le cas du Trou Noir, les partenaires des particules reçues sur $\mathcal{J}^+$ sont de l'autre côté de l'horizon des évènements, *i.e.* soumis à une autre métrique, plongeant vers la singularité, et surtout, inaccessibles à l'observateur asymptotique. Pour les miroirs en mouvement, même si elles sont majoritairement de l'autre côté de l'horizon causal, le caractère plat de la métrique permet de les décrire parfaitement. Pour analyser les corrélations du flux émis, nous utiliserons deux méthodes différentes[58]. Dans le quatrième Chapitre, nous étudierons en détail la fonction de corrélation à deux points $\langle T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\rangle$[25]. Nous donnerons les corrélations pour le modèle Lagrangien comme pour le modèle de Davies-Fulling, pour des trajectoires inertielles comme pour des trajectoires uniformément accélérées. Bien que la méthode soit relativement simple, elle s'avèrera en un sens "trop locale" pour comprendre certaines des corrélations obtenues sur $\mathcal{J}^+$ lorsque l'accélération est constante. C'est pourquoi, dans le cinquième Chapitre, nous développerons une seconde méthode, appelée *Post-sélection*[59]. Cette dernière consiste à étudier d'autres éléments de matrice de l'opérateur $T_{\mu\nu}$ que ses valeurs moyennes. Ces éléments sont obtenus en spécifiant partiellement l'état final du champ dans l'espace de Fock. La valeur "conditionnelle"[19] du flux dans cet état nous permettra de révéler les corrélations entre les paquets d'ondes reçus sur $\mathcal{J}^+$.

Il faut toutefois noter que, dans ce manuscrit, nous limiterons notre travail à l'étude du flux émis par un miroir *en l'absence de recul*. La prise en compte de ces effets n'est pas possible dans le cadre du modèle de Davies-Fulling. Cependant, elle a été réalisée à

[19] ..dans le sens de "conditionnelle à la détection d'un paquet d'ondes" ..

l'aide d'un modèle Lagrangien[56]. Il a été montré qu'une des principales conséquences de ces effets est la décohérence du flux émis. Nous trouverons également que le flux perd sa cohérence en "allumant" et "éteignant" l'interaction (troisième Chapitre), ainsi qu'en "post-sélectionnant" l'état final (cinquième Chapitre).

Chapitre 1

Le Modèle de Davies-Fulling. Généralisations

Dans le premier volume sera traité le thème très étendu des ouvertudes.
Le sens de cette phase du jeu doit avant tout être expliqué au lecteur,
et il ne doit apprendre à fond que quelques ouvertudes importantes...
Il faut d'abord étudier ce qui est simple, sinon la progression est impossible.

L. Pachman

Dans ce Chapitre, nous allons nous appliquer à décrire la radiation émise par un "miroir" en mouvement. L'espace-temps est celui de Minkowski. Par souci de simplicité, notre étude se situe à $1+1$ dimensions ; la signature de la métrique est $(+,-)$. La méthode que nous allons utiliser ici reprend, puis généralise celle développée par Davies et Fulling[60, 61, 54, 62].

Le problème décrit les processus de diffusion et de création de paires de particules pour un champ scalaire. Ce champ est libre et supposé sans masse. Comme nous l'avons expliqué en Introduction, lorsque l'on considère la radiation de Hawking, les quanta sont créés par l'effet du champ gravitationnel sur la métrique. Dans notre cas, comme la courbure de l'espace-temps est nulle, la création de quanta va provenir d'une origine différente : l'adjonction de conditions de bord. A ce titre, le phénomène mis en jeu se rapproche de l'effet Casimir[26], qui traduit le fait que l'espace compris entre deux plaques de conducteurs possède une énergie du vide inférieure à l'énergie du vide en l'absence de plaques. Il existe cependant une différence pratique entre la radiation de Davies-Fulling et l'effet Casimir. Elle réside dans le fait que, dans notre étude, il n'existe qu'une seule condition de bord, que nous appelons "miroir", et que la trajectoire suivie par ce miroir engendre un flux d'énergie.

Fixer des conditions limites au champ revient à imposer au miroir de suivre une trajectoire *classique*. Cette trajectoire est physique dans le sens où nous requérons qu'elle soit de genre temps. Si t et z sont respectivement les coordonnées de temps et d'espace, la trajectoire est notée $z = z_{cl}(t)$. "Classique" signifie que la donnée de $z_{cl}(t)$ est imposée. Cela implique donc que les effets de recul induits par la réflexion de quanta, ou leur création de paires, sont négligés.[1]

Qu'impliquent les hypothèses sur lesquelles ce modèle repose ? La métrique étant celle de Minkowski, le champ de radiation Φ obéit à l'équation de d'Alembert :

$$\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\Phi = (\partial_t^2 - \partial_z^2)\Phi(t,z) = 0 \ . \tag{1.1}$$

[1] La prise en compte de ces effets nécessite un traitement différent. Le modèle approprié ainsi que les implications de ces effets ont été détaillés par Parentani[56].

Comme l'étude concerne un champ non massif à $1+1$ dimensions, il est particulièrement utile de travailler avec les coordonnées de genre lumière $U, V = t \mp z$. L'équation précédente se réécrit alors :

$$\partial_U \partial_V \Phi(U,V) = 0 \ . \tag{1.2}$$

Ainsi, toutes les solutions de cette équation peuvent se décomposer de la manière suivante :

$$\Phi(U,V) = \Phi^U(U) + \Phi^V(V) \ , \tag{1.3}$$

où les fonctions Φ^U et Φ^V sont déterminées par la condition de bord le long de la trajectoire. Etant donné le choix de coordonnées (U,V), cette trajectoire sera notée également $U = U_{cl}(V)$ ou $V = V_{cl}(U)$.

Dans un premier temps, nous donnerons le traitement exact de la diffusion du champ Φ par des miroirs totalement réfléchissants (modèle original de Davies-Fulling). Pour ce faire, nous devrons porter une attention toute particulière aux propriétés asymptotiques des trajectoires. Puis, nous généraliserons cette étude au cas (plus physique) des miroirs partiellement transparents. Les résultats obtenus nous inciterons à reconsidérer la diffusion dans le cadre général de la théorie de la matrice $\hat{S}$, propre à la théorie des champs. Cela étant fait, nous aurons alors tous les moyens pour inspecter le flux de radiation émis par un miroir. Nous comparerons ensuite ces résultats à ceux obtenus à partir d'une formulation locale du flux, reposant sur l'utilisation des fonctions de Green. Cette seconde formulation nous permettra d'isoler quelques trajectoires aux propriétés intéressantes, et ceci, dans un double but. Premièrement, d'établir le lien avec la radiation de Hawking. Deuxièmement, de révéler les incohérences propres au modèle. Ce dernier point nous incitera à traiter de la diffusion par le biais d'un modèle différent, dont l'étude fera l'objet des Chapitres suivants.

1.1 Miroirs totalement réfléchissants

Pour traduire la réflexion totale des quanta du champ sur le miroir, on impose une condition de type Dirichlet[2] le long de la trajectoire de celui-ci. Ainsi, le champ scalaire satisfait l'équation supplémentaire suivante :

$$\Phi(U, V_{cl}(U)) = \Phi(U_{cl}(V), V) = 0 \ , \tag{1.4}$$

pour tout U inclus dans le support de V_{cl} et pour tout V inclus dans le support de U_{cl}. Les Eqs.(1.2) et (1.4) sont particulièrement simples, et le miroir est supposé parfaitement réfléchissant pour toutes les fréquences et à tout moment. Il apparaît donc évident que les propriétés du champ de radiation sont univoquement dictées par celles de la trajectoire. Nous allons donc voir quelles sont les propriétés pertinentes de cette dernière, et de quelle manière elles influencent la réflexion (ou la création) de quanta sur (par) le miroir.

[2] Le choix de la condition de Dirichlet est dicté par l'analogie entre notre "miroir", qui diffuse un champ scalaire, et un miroir réel qui diffuse des photons. Cependant, on peut montrer que, dans le cadre général des conditions de Robin $(A + B\, n^\nu \nabla_\nu)\ \Phi = 0$, la radiation par le miroir est peu sensible au rapport A/B (voir, par exemple, [63] et les références dans cet article).

Avant d'aller plus en détail, il nous faut préciser que le traitement original de Davies et Fulling est défaillant pour les trajectoires asymptotiquement non-inertielles. Cette carence, dont les implications ont été soulignées en premier par Grove[64], les a conduit à des conclusions erronées[65] ; en particulier, à considérer que, dans certains cas, flux de particules et flux d'énergie émis par le miroir ne coïncident pas. L'étude qui va suivre a l'avantage d'être complète, *i.e.* d'être valable pour toutes les trajectoires possibles du miroir. Cependant, dans un souci de clarté, nous allons d'abord traiter le cas des trajectoires asymptotiquement inertielles, étude qui concorde en tout point avec le traitement original, pour ensuite nous intéresser à celui, plus problématique, des trajectoires qui entrent ou sortent de l'espace-temps au travers des infinités nulles $\mathcal{J}^-$ et $\mathcal{J}^+$.

1.1.1 Trajectoires asymptotiquement inertielles

Une trajectoire asymptotiquement inertielle est, par définition, une trajectoire pour laquelle[3] $V_{cl}(U) \simeq |\xi|(U - U_0) + V_0$ quand $U \to \pm\infty$, avec $\xi \neq 0$. En conséquence, elle a pour propriété principale de couvrir l'axe des U ainsi que celui des V dans sa totalité. En représentant l'espace-temps par un diagramme de Penrose, elle y rentre par le "point" i^- et en sort par i^+, voir figure(1.1).

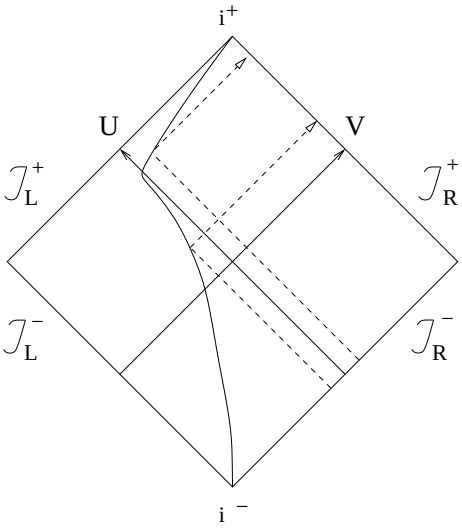

Fig. 1.1: Dans ce diagramme de Penrose, la courbe en gras est un exemple de trajectoire de genre temps, allant de i^- à i^+. Les lignes en tiret représentent des configurations entrantes V donnant lieu à la production d'une paire de quanta sortants U.

Comme le miroir est totalement réfléchissant[4], les configurations du champ vivant à sa droite sont totalement découplées de celles qui vivent à sa gauche. Donc le champ s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi(U, V) = \Phi^L(U, V) + \Phi^R(U, V), \tag{1.5}$$

[3]Une trajectoire inertielle est définie par $z_{cl}(t) = vt + z_0$. En termes des coordonnées sur le cône de lumière, cela donne $V_{cl}(U) = \frac{1+v}{1-v}U + 2z_0/(1-v)$. Le fait de ne prendre que des trajectoires de genre temps équivaut à imposer $-1 < v < 1$. Ainsi, le coefficient devant U est strictement positif.

[4]...et comme il n'est pas dynamique, c'est-à-dire qu'il ne tient pas compte du transfert de quantité de mouvement par les quanta du champ...

où $\Phi^R(U,V)$ est défini à droite du miroir, *i.e.* pour[5] $V > V_{cl}(U)$ et $\Phi^L(U,V)$, à gauche. Rappelons qu'étant donnée l'Eq.(1.3), chacune des deux fonctions précédentes s'écrit également comme la somme d'une fonction de U et d'une fonction de V. Dans la suite de cette sous-section, nous choisissons de ne nous intéresser qu'aux configurations du champ vivant à la droite du miroir (tous les résultats se transposent à gauche, en échangeant les lettres U et V pour Φ^L). Dans ce contexte, un miroir qui suit une trajectoire asymptotiquement inertielle a pour effet de réfléchir les configurations de type V ("gauchères") émergeant de $\mathcal{J}_R^-$ en configurations de type U ("droitières") vers $\mathcal{J}_R^+$.

Modes entrants, modes sortants

Comme la trajectoire ne coupe pas l'hypersurface $\mathcal{J}_R^-$, cette dernière est une surface de Cauchy pour la trajectoire[6]. Donc les modes propres du d'Alembertien sont les modes usuels de Minkowski, d'énergie $i\partial_t = k > 0$, donnés sur $\mathcal{J}_R^-$ par :

$$\varphi_k^{V,in}(U=-\infty,V) = \frac{e^{-ikV}}{\sqrt{4\pi k}} \ . \tag{1.6}$$

L'indice V,in souligne le fait que le mode considéré est défini sur la surface *initiale* $\mathcal{J}^-$ comme purement gaucher (nous introduisons cette notation afin de pouvoir plus aisément généraliser notre étude au cas des miroirs partiellement transparents, pour lesquels les modes gauchers et droitiers doivent être considérés simultanément). Ces modes forment une base complète et orthonormée. Leur norme est définie par le produit scalaire de Klein-Gordon[68]. Comme ces modes sont particulièrement simples sur $\mathcal{J}_R^-$, il est facile d'évaluer leur produit sur cette hypersurface :

$$(\varphi_k^{V,in}, \varphi_{k'}^{V,in}) =_{\mathcal{J}_R^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}V \ \varphi_k^{V,in\,*} \, i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_V \, \varphi_{k'}^{V,in} = \delta(k-k') \ , \tag{1.7a}$$

$$(\varphi_k^{V,in\,*}, \varphi_{k'}^{V,in\,*}) =_{\mathcal{J}_R^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}V \ \varphi_k^{V,in} \, i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_V \, \varphi_{k'}^{V,in\,*} = -\delta(k-k') \ , \tag{1.7b}$$

où $f\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu g \equiv f(\partial_\mu g) - (\partial_\mu f)g$. Ainsi le courant de Noether conservé par chaque mode vaut :

$$J^V = \varphi_k^{V,in\,*} \, i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_V \, \varphi_k^{V,in} = 1/2\pi \ , \tag{1.8}$$

alors qu'il prend la valeur opposée pour un anti-mode $\varphi_k^{V,in\,*}$. La condition de réflexion (1.4) permet d'exprimer chaque mode $\varphi_k^{V,in}$ à partir de sa donnée initiale sur $\mathcal{J}_R^-$ (1.6), en tout point de l'espace-temps (U,V) à droite du miroir :

$$\varphi_k^{V,in}(U,V) = \Theta(V - V_{cl}(U)) \left(\frac{e^{-ikV}}{\sqrt{4\pi k}} - \frac{e^{-ikV_{cl}(U)}}{\sqrt{4\pi k}} \right) \ , \tag{1.9}$$

[5] Pour une trajectoire de genre temps, les fonctions $V_{cl}(U)$ et $U_{cl}(V)$ sont strictement croissantes. De plus, dans le cas des trajectoires asymptotiquement inertielles, ces fonctions ont toutes deux pour support l'axe réel en entier. Ainsi, les conditions $V > V_{cl}(U)$ et $U < U_{cl}(V)$ sont strictement équivalentes.

[6] Cette propriété est à prendre dans le sens suivant : lorsque la trajectoire n'intersecte pas $\mathcal{J}_R^-$, on peut spécifier sur cette hypersurface les données initiales de Cauchy pour décrire les modes et leur diffusion à droite du miroir[67]. Il est important de noter que, lorsque cette propriété n'est plus respectée, le choix d'une base devient problématique ; c'est ce que nous verrons dans la section 1.1.2.

où Θ est la fonction de Heaviside définie par $\Theta(x>0)=+1,\ \Theta(x<0)=0$. Exprimé sur $\mathcal{J}_R^+$, un mode entrant gaucher ne dépend donc que de la variable U et vaut :

$$\varphi_k^{V,in}(U,V=+\infty)=-\frac{e^{-ikV_{cl}(U)}}{\sqrt{4\pi k}}\ . \tag{1.10}$$

Afin de pouvoir analyser le contenu fréquentiel de l'image des modes entrants (1.10), il nous faut les décomposer sur la base propre de $\mathcal{J}_R^+$. En parfaite analogie avec ce que nous venons de présenter pour $\mathcal{J}_R^-$, les modes à fréquence positive définis sur la surface $\mathcal{J}_R^+$ sont donnés par :

$$\varphi_\omega^{U,out}(U,V=+\infty)=\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}}\ . \tag{1.11}$$

On utilise la même terminologie que pour les modes entrants : l'indice U,out souligne que ces modes sont purement droitiers lorsqu'ils sont définis sur l'infinité nulle future $\mathcal{J}^+$. De même, pour chaque point de l'espace-temps à droite du miroir, les modes sortants droitiers s'écrivent :

$$\varphi_\omega^{U,out}(U,V)=\Theta(U_{cl}(V)-U)\left(\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}}-\frac{e^{-i\omega U_{cl}(V)}}{\sqrt{4\pi\omega}}\right)\ . \tag{1.12}$$

Comme les $\varphi_\omega^{U,out}$ forment également une base complète, en tout point de l'espace-temps, chaque mode entrant V,in peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\varphi_k^{V,in}=\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \left(\alpha_{\omega k}^{UV\,*}\varphi_\omega^{U,out}-\beta_{\omega k}^{UV\,*}\varphi_\omega^{U,out\,*}\right)\ . \tag{1.13}$$

Cette équation doit être considérée comme la définition des coefficients $\alpha_{\omega k}^{UV}$ et $\beta_{\omega k}^{UV}$. Explicitement, ces derniers sont donnés sous la forme d'intégrales de recouvrement. Comme les modes sortants s'expriment très simplement sur $\mathcal{J}_R^+$, c'est sur cette hypersurface[7] que nous choisissons de les évaluer, à l'aide des Eqs.(1.10) et (1.11) :

$$\alpha_{\omega k}^{UV\,*}\equiv(\varphi_\omega^{U,out},\varphi_k^{V,in})\ =_{\mathcal{J}_R^+}\ -2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}U\ \frac{e^{i\omega U}}{\sqrt{4\pi/\omega}}\frac{e^{-ikV_{cl}(U)}}{\sqrt{4\pi k}}\ , \tag{1.14}$$

$$\beta_{\omega k}^{UV\,*}\equiv(\varphi_\omega^{U,out\,*},\varphi_k^{V,in})=_{\mathcal{J}_R^+}\ 2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}U\ \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi/\omega}}\frac{e^{-ikV_{cl}(U)}}{\sqrt{4\pi k}}\ . \tag{1.15}$$

(Pour obtenir les intégrales précédentes, nous avons intégré une fois par partie.) La complétude des deux bases se lit au travers des relations suivantes :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k\ (\alpha_{\omega k}^{UV\,*}\alpha_{\omega' k}^{UV}-\beta_{\omega k}^{UV}\beta_{\omega' k}^{UV\,*})=\delta(\omega-\omega')\ , \tag{1.16a}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ (\alpha_{\omega k}^{UV}\alpha_{\omega k'}^{UV\,*}-\beta_{\omega k}^{UV}\beta_{\omega k'}^{UV\,*})=\delta(k-k')\ , \tag{1.16b}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k\ (\alpha_{\omega k}^{UV}\beta_{\omega' k}^{UV\,*}-\beta_{\omega k}^{UV\,*}\alpha_{\omega' k}^{UV})=0\ , \tag{1.16c}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ (\alpha_{\omega k}^{UV}\beta_{\omega k'}^{UV}-\beta_{\omega k}^{UV}\alpha_{\omega k'}^{UV})=0\ . \tag{1.16d}$$

[7] Une manière équivalente et tout aussi simple serait de les exprimer sur l'hypersurface $\mathcal{J}_R^-$ à l'aide des Eqs.(1.6) et (1.12). L'intégrale de recouvrement serait alors sur la variable V. Evidemment, le résultat obtenu est identique après avoir effectué un changement de variable.

Ce sont précisément ces relations qui permettent d'inverser la relation (1.13) afin d'exprimer les modes *out* en fonction des modes *in* :

$$\varphi_\omega^{U,out} = \int_0^\infty \mathrm{d}k \, \left(\alpha_{\omega k}^{UV} \varphi_k^{V,in} + \beta_{\omega k}^{UV\,*} \varphi_k^{V,in\,*} \right) \, . \tag{1.17}$$

Nous avons désormais en notre possession les outils qui vont nous permettre de décrire la diffusion par un miroir totalement réfléchissant et asymptotiquement inertiel. Ces outils sont les deux bases asymptotiques des modes du champ de radiation. Ces deux bases sont reliées linéairement par les relations (1.13) et (1.17) et chaque mode de l'une s'exprime en fonction des modes de l'autre à l'aide des mêmes coefficients $\alpha_{\omega k}^{UV}$ et $\beta_{\omega k}^{UV}$. Nous allons maintenant voir de quelle manière ces coefficients permettent de décrire les propriétés de la diffusion.

Résolution de la diffusion en termes d'ondes planes

Des Eqs.(1.14) et (1.15), nous apprenons qu'une fois la trajectoire donnée, les coefficients α et β sont univoquement fixés. Leur connaissance permet ainsi de résoudre la diffusion sur le miroir en termes d'ondes planes, *i.e.* dans le cadre d'un traitement purement ondulatoire[8]. En effet, quelle que soit la configuration initiale sur $\mathcal{J}_R^-$, elle se décompose sur les modes de la base *in* (1.6). Une fois cette décomposition effectuée, chaque mode est diffusé sur $\mathcal{J}_R^+$. Par le principe de superposition, il suffit alors de décomposer sur la base *out* l'image de chaque mode entrant par le biais de l'Eq.(1.13) pour obtenir l'image de la configuration initiale sur $\mathcal{J}_R^+$.

Dans cette décomposition, le rôle joué par les coefficients β est particulièrement important. Afin de souligner leur effet, prenons l'exemple d'un paquet d'ondes initial centré autour de la fréquence $\bar{k}$ et formé uniquement de modes entrants à fréquence positive. On le note :

$$\bar{\varphi}_{\bar{k}}^{V,in}(U = -\infty, V) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}k \; f_{\bar{k}}(k) \varphi_k^{V,in} \, . \tag{1.18}$$

On suppose de plus que sa charge de Noether vaut 1, ce qui revient à imposer la normalisation :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k \; |f_{\bar{k}}(k)|^2 = 1 \, . \tag{1.19}$$

En se servant des résultats précédents, on trouve que le paquet d'ondes se décompose sur la base *out* de la manière suivante :

$$\bar{\varphi}_{\bar{k}}^{V,in} = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \left(\bar{\alpha}_{\omega\bar{k}}^{UV\,*} \varphi_\omega^{U,out} - \bar{\beta}_{\omega\bar{k}}^{UV\,*} \varphi_\omega^{U,out\,*} \right) \, . \tag{1.20}$$

où

$$\bar{\alpha}_{\omega\bar{k}}^{UV\,*} = \int_0^\infty \mathrm{d}k \; f_{\bar{k}}(k) \alpha_{\omega k}^{UV\,*} \tag{1.21}$$

$$\text{et} \;\; \bar{\beta}_{\omega\bar{k}}^{UV\,*} = \int_0^\infty \mathrm{d}k \; f_{\bar{k}}(k) \beta_{\omega k}^{UV\,*} \, . \tag{1.22}$$

[8] ...purement ondulatoire et non quantique, dans le sens où on ne parle pas encore de "particules" mais juste de "modes".

Quelle est la charge q^+ portée par les modes sortants à fréquence positive ? Par définition, cette charge vaut :

$$q^+ = \left(\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \bar{\alpha}^{UV\,*}_{\omega\bar{k}} \varphi^{U,out}_{\omega}, \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' \; \bar{\alpha}^{UV\,*}_{\omega'\bar{k}} \varphi^{U,out}_{\omega'} \right) \; . \tag{1.23}$$

Grâce aux Eqs.(1.16), elle se réexprime sous la forme suivante :

$$q^+ = 1 + \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \left| \bar{\beta}^{UV}_{\omega\bar{k}} \right|^2 \geq 1 \; . \tag{1.24}$$

Ainsi, on constate que la charge de l'onde réfléchie s'est accrue si quelques coefficients β diffèrent de zéro. Bien évidemment, la conservation de la charge est assurée par la présence de modes sortants à fréquence négative :

$$q^- = \left(\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \left(-\bar{\beta}^{UV\,*}_{\omega\bar{k}} \varphi^{U,out\,*}_{\omega} \right), \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' \; \left(-\bar{\beta}^{UV\,*}_{\omega'\bar{k}} \varphi^{U,out\,*}_{\omega'} \right) \right) \; < \; 0 \; . \tag{1.25}$$

Il est donc important de souligner deux points. D'une part, les modes à fréquence négative qui assure la neutralité de la diffusion n'étaient pas présents dans le paquet d'ondes initial[9]. D'autre part, ce sont uniquement les coefficients β qui encodent cet accroissement partiel de la charge. Penchons-nous donc plus précisément sur ces coefficients.

D'après l'Eq.(1.15), les coefficients β représentent le recouvrement entre les modes entrants à fréquences positives et les modes sortants à fréquences négatives. De plus, on peut observer qu'ils dépendent fortement de l'accélération de la trajectoire. Cela se voit directement en les évaluant pour un miroir totalement inertiel, *i.e.* dont l'accélération est nulle en tout point. Dans ce cas, la trajectoire du miroir est donnée en toute généralité par $V_{cl}(U) = |\xi|(U - U_0) + V_0$, et les coefficients valent respectivement :

$$\alpha^{UV}_{\omega k} = -e^{ik(V_0 - |\xi| U_0)} \delta(k - \omega) \;\; \text{et} \;\; \beta^{UV}_{\omega k} = \delta(k + \omega) = 0 \; , \tag{1.26}$$

puisque $k, \omega > 0$. Ce sont donc les portions de la trajectoire où le miroir accélère qui engendrent des coefficients β non nuls. Ainsi, ces derniers modifient le contenu fréquentiel (ainsi que la répartition des charges) de l'onde émise. Nous allons voir par la suite qu'en termes de particules, ce sont ces mêmes coefficients β qui encodent la création de paires.

Le problème trans-Planckien

La représentation en termes de paquets d'ondes possède un avantage supplémentaire : celui de pouvoir fournir une image locale de la diffusion des modes par le miroir. Supposons que le paquet d'ondes de l'Eq.(1.18) soit principalement localisé[10] autour de $V = \bar{V}$.

[9] Ce phénomène n'est pas exceptionnel : l'accroissement de la charge des modes à fréquence positive se retrouve d'une manière générale dans les processus d'émission stimulée. Cet effet peut également être mis en concordance avec le phénomène de super-radiance qui advient pour la diffusion de quanta par un Trou Noir possédant un moment angulaire non nul [35, 36].

[10] En toute rigueur, il est impossible de localiser exactement un paquet d'ondes à fréquences positives dans une région de l'espace : si la densité de probabilité est maximale autour de $V = \bar{V} > 0$, il existe un second maximum dans la région des $V < 0$. Nous verrons cependant dans le cinquième Chapitre qu'on peut choisir des paquets d'ondes pour lesquels la hauteur du second maximum est exponentiellement faible par rapport à celle du premier : les modes de Unruh.

Appliquons la méthode de la phase stationnaire aux coefficients α et β donnés en (1.14) et (1.15). L'argument de l'exponentielle est $\phi = \pm i\omega U - ikV_{cl}(U)$. Si l'on suppose que les fréquences entrantes $k \simeq \bar{k}$ sont grandes comparées à $\left(\partial_U^3 V_{cl}\right)^2 / \left(\partial_U^2 V_{cl}\right)^3$, l'approximation WKB est valide. Le point de selle est obtenu respectivement pour α et β en :

$$\pm\omega^* = \bar{k}\left.\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right|_{V_{cl}(U)=\bar{V}} . \tag{1.27}$$

Pour β, le signe $-$ indique que le point de selle est imaginaire, ce qui a pour conséquence de rendre ces coefficients de Bogoluibov exponentiellement petits. Pour α, la condition de point de selle donne l'effet Doppler reliant la fréquence moyenne de l'onde réfléchie ω^* à celle du paquet d'ondes incident $\bar{k}$. Cette relation est d'une importance particulière puisqu'elle indique que, pour les trajectoires dont la pente prend des valeurs arbitrairement faibles, les fréquences initiales requises pour détecter sur $\mathcal{J}_R^+$ un mode dans le visible, par exemple, doivent être arbitrairement élevées. Cette ingérence des fréquences résidant au-delà de la limite de Planck ($\omega_{Planck} = \sqrt{c^5/G\hbar} \simeq 10^{43}$Hz) dans la physique conventionnelle constitue l'essence du problème "trans-Planckien" inhérent à ces trajectoires.

Remarque 1). Cette pente tend vers zéro lorsque la vitesse de la trajectoire se rapproche de celle de la lumière. Un tel phénomène ne peut advenir que si le miroir accélère. C'est donc en étudiant des miroirs accélérés (uniformément ou non) que l'on se confrontera avec le problème trans-Planckien.

Remarque 2). La relation (1.27) est très proche de celle obtenue pour la radiation de Hawking (10). Pour qu'elle soit rigoureusement égale, il faut que la trajectoire satisfasse[11] :

$$\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U} = e^{-U/4M} \quad \Rightarrow \quad V_{cl}(U) = -\frac{1}{4M}e^{-U/4M} . \tag{1.28}$$

Nous verrons que c'est précisément cette trajectoire qui engendre un flux similaire à celui de Hawking. Cette remarque rejoint celle que nous avons déjà faite suite à l'Eq.(5) de l'Introduction.

Particules entrantes, particules sortantes

Afin de pouvoir interpréter la diffusion sur le miroir en termes de création de particules, nous allons recourir à la seconde quantification pour le champ Φ^R. Comme Φ^R est donné par les Eqs.(1.2) et (1.4), les quanta sont créés par paires. Ainsi, nous imposons à Φ^R d'être chargé, ce qui nous permettra par la suite de repérer distinctement la particule (a) et son anti-particule (b), créées conjointement.

Tout comme pour la radiation de Hawking, la notion de *particule* dépend de la base de modes choisie. Naturellement, nous allons définir les (anti-)particules entrantes et sortantes par le biais de leurs opérateurs d'annihilation définis comme suit :

$$a_k^{V,in} = \left(\varphi_k^{V,in}, \Phi^R\right) \ , \ b_k^{V,in} = \left(\varphi_k^{V,in}, \Phi^{R\,\dagger}\right) \ , \tag{1.29a}$$

$$a_\omega^{U,out} = \left(\varphi_\omega^{U,out}, \Phi^R\right) \ , \ b_\omega^{U,out} = \left(\varphi_\omega^{U,out}, \Phi^{R\,\dagger}\right) \ . \tag{1.29b}$$

[11] Attention : ω n'est pas le même dans les relations (10) et (1.27). Par contre, u et U jouent un rôle similaire.

Les modes entrants et sortants forment chacun une base orthogonale. Ainsi, lorsque le champ de Heisenberg Φ^R satisfait à l'équation usuelle de commutation à temps égal :

$$\left[\Phi^R(t,z), \partial_t \Phi^{R\,\dagger}(t,z')\right] = i\delta(z-z') \ , \tag{1.30}$$

les opérateurs associés obéissent aux relations de commutation habituelles :

$$\left[a_k^{V,in}, a_{k'}^{V,in\,\dagger}\right] = \delta(k-k') \quad , \quad \left[a_\omega^{U,out}, a_{\omega'}^{U,out\,\dagger}\right] = \delta(\omega-\omega') \ , \tag{1.31}$$

$$\left[b_k^{V,in}, b_{k'}^{V,in\,\dagger}\right] = \delta(k-k') \quad , \quad \left[b_\omega^{U,out}, b_{\omega'}^{U,out\,\dagger}\right] = \delta(\omega-\omega') \ , \tag{1.32}$$

tous les autres commutateurs étant nuls. Ainsi, le champ Φ^R se décompose triviallement sur les bases *in* et *out* :

$$\begin{aligned} \Phi^R(U,V) &= \int_0^\infty \mathrm{d}k \, \left(a_k^{V,in}\varphi_k^{V,in} + b_k^{V,in\,\dagger}\varphi_k^{V,in\,*}\right) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, \left(a_\omega^{U,out}\varphi_\omega^{U,out} + b_\omega^{U,out\,\dagger}\varphi_\omega^{U,out\,*}\right) \ . \end{aligned} \tag{1.33}$$

Les relations (1.13) et (1.17) permettent d'exprimer les opérateurs *in* en fonction des opérateurs *out*, et inversement, par les relations de Bogoliubov suivantes :

$$\begin{cases} a_k^{V,in} = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, \left(\alpha_{\omega k}^{UV} \, a_\omega^{U,out} + \beta_{\omega k}^{UV} \, b_\omega^{U,out\,\dagger}\right) \ , \\ \\ b_k^{V,in} = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \, \left(\alpha_{\omega k}^{UV} \, b_\omega^{U,out} + \beta_{\omega k}^{UV} \, a_\omega^{U,out\,\dagger}\right) \ , \end{cases} \tag{1.34}$$

$$\begin{cases} a_\omega^{U,out} = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}k \, \left(\alpha_{\omega k}^{UV\,*} \, a_k^{V,in} - \beta_{\omega k}^{UV} \, b_k^{V,in\,\dagger}\right) \ , \\ \\ b_\omega^{U,out} = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}k \, \left(\alpha_{\omega k}^{UV\,*} \, b_k^{V,in} - \beta_{\omega k}^{UV} \, a_k^{V,in\,\dagger}\right) \ . \end{cases} \tag{1.35}$$

Ce sont à partir de ces relations que les coefficients α, β sont appelés coefficients de Bogoliubov. Notons que ces relations soulignent le fait que, dans le modèle de Davies-Fulling, particules et anti-particules diffusent pareillement sur le miroir.

L'espace des états est défini par la donnée du vide relatif à chaque opérateur. Ainsi, on notera $|0_{part}^{V,in}\rangle$ et $|0_{antipart}^{V,in}\rangle$ respectivement, les kets normés tels que :

$$a_k^{V,in}|0_{part}^{V,in}\rangle = 0 \ , \ \forall k > 0 \ , \tag{1.36}$$

$$\text{et} \quad b_k^{V,in}|0_{antipart}^{V,in}\rangle = 0 \ , \ \forall k > 0 \ . \tag{1.37}$$

Plus généralement, on utilisera le vide *in* produit :

$$|0^{V,in}\rangle = |0_{part}^{V,in}\rangle \otimes |0_{antipart}^{V,in}\rangle \ , \tag{1.38}$$

et son corollaire *out* :

$$|0^{U,out}\rangle = |0_{part}^{U,out}\rangle \otimes |0_{antipart}^{U,out}\rangle \ . \tag{1.39}$$

Résolution de la diffusion en termes de particules

Cette fois-ci, au travers des relations (1.34) et (1.35), c'est donc la diffusion *quantique* sur le miroir, *i.e.* en termes de particules, que la connaissance des coefficients α et β permet de résoudre. En effet, on peut calculer explicitement et en toute généralité l'amplitude de probabilité d'obtenir un état final quelconque $|\Xi^{out}\rangle$, exprimé sur $\mathcal{J}^+$ en termes des opérateurs *out*, en partant de n'importe quel état initial $|\Psi^{in}\rangle$, défini sur $\mathcal{J}^-$. Cette amplitude est donnée par le produit de l'espace de Fock $\langle\Xi^{out}|\Psi^{in}\rangle$.

Plus particulièrement, il est intéressant de connaître le recouvrement des vides *in* et *out*, que l'on notera $Z = \langle 0^{U,out}|0^{V,in}\rangle$. Ce nombre complexe possède un module inférieur ou égal à l'unité[12]. S'il satisfait à $|Z| < 1$, cela traduit l'instabilité du vide, c'est-à-dire le fait que le vide final soit peuplé de particules et d'anti-particules *in* (ou que le vide initial contienne des (anti-)particules *out*). Le phénomène d'instabilité du vide se traduit directement en calculant le nombre de particules *out* dans l'état $|0^{V,in}\rangle$:

$$\langle N_\omega^{U,out}\rangle \equiv \langle 0^{V,in}|a_\omega^{U,out\,\dagger}\, a_\omega^{U,out}|0^{V,in}\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}k \;\left|\beta_{\omega k}^{UV}\right|^2 \;. \tag{1.40}$$

Ce nombre diffère de zéro dès que certains coefficients β ne sont plus nuls[13]. Ce résultat, tout comme l'accroissement de la charge des modes à fréquence positive (voir (1.24)), souligne le rôle spécifique de ces coefficients. Nous pouvons donc nous demander quelle est leur interprétation en termes de particules.

D'une manière générale, les coefficients de Bogoliubov s'écrivent comme les éléments de matrice suivants :

$$\begin{aligned}
\alpha_{\omega k}^{UV} &= \langle 0^{V,in}|a_k^{V,in}\, a_\omega^{U,out\,\dagger}|0^{V,in}\rangle = \langle 0^{U,out}|a_k^{V,in}\, a_\omega^{U,out\,\dagger}|0^{U,out}\rangle \\
&= \langle 0^{V,in}|b_k^{V,in}\, b_\omega^{U,out\,\dagger}|0^{V,in}\rangle = \langle 0^{U,out}|b_k^{V,in}\, b_\omega^{U,out\,\dagger}|0^{U,out}\rangle \qquad (1.41)\\
\beta_{\omega k}^{UV} &= -\langle 0^{V,in}|b_k^{V,in}\, a_\omega^{U,out}|0^{V,in}\rangle = \langle 0^{U,out}|b_\omega^{U,out}\, a_k^{V,in}|0^{U,out}\rangle \\
&= -\langle 0^{V,in}|a_k^{V,in}\, b_\omega^{U,out}|0^{V,in}\rangle = \langle 0^{U,out}|a_\omega^{U,out}\, b_k^{V,in}|0^{U,out}\rangle \;. \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

L'interprétation de ces équations n'est pas aisée : les coefficients α ne constituent pas le recouvrement des états à une particule entrante et sortante,

$$\alpha_{\omega k}^{UV} \neq \langle 0^{V,in}|a_k^{V,in}\, a_\omega^{U,out\,\dagger}|0^{U,out}\rangle \;, \tag{1.43}$$

et les coefficients β ne donnent pas directement l'amplitude de création de paires,

$$\beta_{\omega\omega'}^{UV} \neq \langle 0^{U,out}|a_\omega^{U,out}\, b_{\omega'}^{U,out}|0^{V,in}\rangle \;. \tag{1.44}$$

Cependant, l'un comme l'autre en sont sensiblement proches. En effet, en notant $(\alpha^{-1})_{\omega k}^{UV}$ la matrice inverse[14] de $\alpha_{\omega k}^{UV}$, l'amplitude de probabilité pour qu'un seul quantum initial de fréquence k soit diffusé en un seul quantum final de fréquence ω vaut :

$$\langle 0^{U,out}|a_\omega^{U,out} a_k^{V,in\,\dagger}|0^{V,in}\rangle = Z\,(\alpha^{-1})_{\omega k}^{UV} \;, \tag{1.45}$$

[12] Le calcul explicite de Z est présenté dans l'Appendice A.

[13] En parfaite analogie avec ce que nous avons vu précédemment, le fait qu'en partant du vide, on aboutisse à la présence de particules (a) ne pose évidemment aucun problème en ce qui concerne la conservation de la charge. En effet, le nombre d'anti-particules créées (b) est rigoureusement identique à $\langle N_\omega^{U,out}\rangle$ calculé en (1.40).

[14] L'inversibilité de la matrice $\alpha_{\omega k}^{UV}$ est démontrée dans l'Appendice B.

et la probabilité de trouver une paire de quanta *out* de fréquences ω, ω' en partant du vide *in* vaut :

$$\langle 0^{U,out}|a_{\omega}^{U,out}b_{\omega'}^{U,out}|0^{V,in}\rangle = -Z\int_0^{\infty}\mathrm{d}k\ \beta_{\omega k}^{UV}(\alpha^{-1})_{\omega' k}^{UV}\ . \tag{1.46}$$

(Ces deux relation se vérifient facilement à l'aide des relations (1.34) et (1.35)).

En fait, les notions de diffusion de quanta et de création de paires ne sont trivialement reliées aux coefficients de Bogoliubov que dans un cas très particulier : quand tous les coefficients β s'annulent. Dans ce cas, l'Eq.(1.46) nous apprend qu'il n'y a pas de paire créée dans le processus de diffusion, ce que confirme, bien évidemment, l'Eq.(1.40), qui affirme que le vide *in* n'est peuplé d'aucune (anti-)particule *out*. Ainsi, $Z = 1$ à une phase près (*i.e.* le vide ne se "désintègre" pas), et les relations de complétude (1.16) nous donnent $(\alpha^{-1})_{\omega k}^{UV} = \alpha_{\omega k}^{UV\,*}$. Il est facile de vérifier à partir des définitions (1.14) et (1.15) qu'une telle situation est réalisée quand la trajectoire est inertielle, voir (1.26). Dans cette configuration seulement, les matrices α et β sont clairement reliées au recouvrement des états entrants et sortants et à la la création de paires.

Il est également possible de mieux comprendre le rôle spécifique des coefficients de Bogoliubov en sortant du cadre de l'émission spontanée[62]. En effet, considérons que l'état initial n'est pas le vide $|0^{V,in}\rangle$, mais l'état (normé) comportant n particules entrantes de fréquence k_0 :

$$|\Psi^{in}(n,k_0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(a_{k_0}^{V,in\,\dagger})^n\ |0^{V,in}\rangle\ . \tag{1.47}$$

Dans cet état, le nombre de particules sortantes de fréquence ω vaut :

$$\langle N_{\omega}^{U,out}\rangle_{\Psi} = \langle\Psi^{in}|a_{\omega}^{U,out\,\dagger}\,a_{\omega}^{U,out}|\Psi^{in}\rangle = \langle N_{\omega}^{U,out}\rangle\ +\ n\ \left|\alpha_{\omega k_0}^{UV}\right|^2\ . \tag{1.48}$$

Le premier terme est la contribution du vide relative à l'émission spontanée donnée en (1.40) ; à ce titre il est indépendant de $|\Psi^{in}(n,k_0)\rangle$ et s'exprime en fonction des coefficients β uniquement. Le second terme, au contraire, dépend de n et de k_0 et peut donc être interprété comme relatif au processus d'émission stimulée. On remarque qu'il s'exprime simplement grâce aux coefficients α. En intégrant l'Eq.(1.48) sur ω, on obtient le nombre total de particules sortantes dans l'état $|\Psi^{in}(n,k_0)\rangle$. Il est facile de vérifier que ce nombre vaut n quand aucune particule n'est créée, *i.e.* quand tous les coefficients β sont nuls. De plus, l'Eq.(1.16a) permet d'affirmer que l'intégrale du second terme de (1.48) est strictement supérieure à n dès que quelques β diffèrent de zéro. Ainsi, lorsque l'état initial diffère du vide, les émissions spontanée (au travers des β) et stimulée (traduite au travers des α) causent une augmentation du nombre total de particules.

Bien que ce soit d'ores et déjà possible pour les miroirs totalement réfléchissants, nous démontrerons dans le cadre plus général des miroirs partiellement transparents, qu'au premier ordre de l'interaction, les coefficients de Bogoliubov prennent une interprétation particulaire simple. Avant cela, nous allons nous intéresser aux trajectoires asymptotiquement non inertielles. Leur étude revêt deux intérêts principaux. D'une part, les trajectoires qui engendrent un flux similaire à la radiation de Hawking, ainsi que les trajectoires uniformément accélérées, font partie de cette catégorie. D'autre part, l'étude de ces trajectoires nécessite de représenter simultanément les modes gauchers et droitiers, ce que requiert également le traitement des miroirs partiellement transparents.

Il est important de rappeler que tout ce qui vient d'être montré s'applique également à gauche du miroir, pour le champ Φ^L. En effet, des résultats analogues sont obtenus à partir de toutes les relations précédentes, en échangeant simplement les lettres U et V. Au contraire, lorsqu'on considère des trajectoires asymptotiquement non inertielles, cette équivalence devient caduque. Ce sont précisément ces trajectoires que nous allons étudier dans la section suivante.

1.1.2 Trajectoires asymptotiquement non inertielles

Corollairement à ce que nous avons dit au début de la section précédente, certaines trajectoires non inertielles peuvent être caractérisées par le fait qu'elles ne démarrent pas en i^-, qu'elles n'aboutissent pas en i^+, ou par l'adjonction de ces deux propriétés[15]. Dans ce cas, le découplage strict entre configurations gauchères et droitières n'a plus lieu. Cet effet ne doit pas être confondu avec le découplage, toujours existant, entre la gauche et la droite du miroir ; propriété qui découle de l'hypothèse de réflexion totale.

Afin d'étudier les particularités du traitement de la radiation engendrée par de tels miroirs, nous allons prendre un exemple simple et instructif. Cet exemple n'est pas anodin, il a été pris dès l'introduction du modèle par Davies et Fulling[60] et il a été également l'objet d'une attention toute particulière de la part de Carlitz et Willey[25]. Nous verrons que l'intérêt de cette trajectoire est de reproduire une radiation identique à celle de Hawking.

Considérons donc un miroir soumis à se déplacer suivant :

$$V_{cl}(U) = -\kappa^{-1}\, e^{-\kappa U} \ , \tag{1.49}$$

où $\kappa > 0$ a la dimension inverse d'un temps (ou la dimension d'une accélération, tout comme la gravité de surface pour le Trou Noir). Cette trajectoire n'est asymptotiquement inertielle ni dans le passé, ni dans le futur. En représentation conforme, elle a pour origine i^- et aboutit en $V = 0$ sur $\mathcal{J}_L^+$, voir figure (1.2).

Intéressons-nous aux modes et à leur diffusion. Suivant le signe de V, les configurations entrantes gauchères sont, ou non, réfléchies sur le miroir. Pour $V < 0$, elles arrivent sur $\mathcal{J}_R^+$ et couvrent toutes les valeurs de U. Pour $V > 0$, elles arrivent sur la partie $V > 0$ de $\mathcal{J}_L^+$. Au contraire, à gauche du miroir, toutes les configurations entrantes droitières sont réfléchies, mais leur image ne couvre que la moitié $V < 0$ de $\mathcal{J}_L^+$. *De facto*, cette différence met en évidence la dissymétrie induite par le choix de la trajectoire. Ainsi, contrairement à l'Eq.(1.10), l'image de $\varphi_k^{V,in}$ défini en (1.6), sur $\mathcal{J}^+$ ne dépend pas uniquement de la variable U mais bien aussi de V :

$$\varphi_k^{V,in}(U,V)\Big|_{t=+\infty} = \Theta(V)\frac{e^{-ikV}}{\sqrt{4\pi k}} - \Theta(V_{cl}(U))\frac{e^{ik\kappa e^{-\kappa U}}}{\sqrt{4\pi k}} \ . \tag{1.50}$$

Ce mode est singulier sur $\mathcal{J}^+$ en $V = 0$, précisément lorsque la trajectoire du miroir rencontre l'infinité future. De plus, les configurations vivant à gauche du miroir, *i.e.* les modes entrants droitiers, sont également singuliers en $V = 0$. Ainsi, le choix de la trajectoire (1.49) s'avère singulier pour *tous* les modes entrants sur l'infinité future $\mathcal{J}^+$. Se

[15] Je remercie Ph. Spindel de m'avoir fait remarquer, qu'en aucun cas, pour une trajectoire, le fait de partir de i^- et d'arriver en i^+ n'est équivalent à celui d'être asymptotiquement inertielle. Pour exemple, la trajectoire $z_{cl}(t) = t_0\ \mathrm{argsh}\,(t/t_0)$, qui n'est, à l'évidence, pas asymptotiquement inertielle et qui part pourtant de i^- pour arriver en i^+.

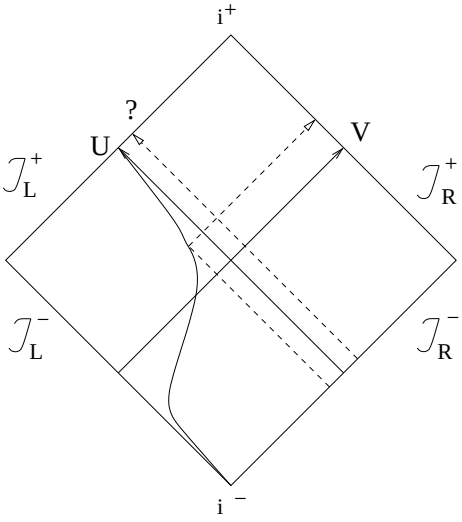

Fig. 1.2: Dans ce diagramme de Penrose, nous avons représenté la trajectoire définie à l'Eq.(1.49). Dans ce cas, $\mathcal{J}^-_R$ est une surface de Cauchy, ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{J}^+_R$. On reconnaît en la partie $V > 0$ de $\mathcal{J}^+_L$ l'horizon futur d'un Trou Noir. Les quanta gauchers définis pour $V < 0$ sont réfléchis sur le miroir et arrivent sur l'infinité future $\mathcal{J}^+_R$ sous la forme de droitiers. Au contraire, comme les autres quanta, définis pour $V > 0$, se trouvent en dehors du cône causal de la trajectoire, ils ne rejoignent jamais le miroir et finissent leur course sur $\mathcal{J}^+_L$. Le point d'interrogation a pour but de souligner le problème inhérent au traitement de ces configurations, c'est-à-dire au choix d'une base appropriée de modes susceptibles de décrire la diffusion sur ce type de miroir.

pose alors la question : Quelle est la base de modes sortants appropriée qu'il convient de choisir pour décrire la diffusion des configurations entrantes par le miroir (1.49) ?

Une première méthode consisterait à choisir une base de modes sortants qui diffèrent selon le côté de la trajectoire duquel on se trouve. En particulier, cette méthode nécessite d'introduire deux bases de modes gauchers sur $\mathcal{J}^-_R$ qui s'annulent respectivement d'un côté et de l'autre de l'horizon $V = 0$. Ces bases sont à ce point inappropriées que leur contenu en fréquences de Minkowski n'est pas défini. Nous n'allons donc pas adopter ce choix.

La méthode qu'il convient d'adopter est de découpler asymptotiquement le champ de radiation du miroir. Cela revient à considérer que le miroir est transparent aux extrémités de sa trajectoire. Ainsi, les modes sortants libres $\varphi^{U,out}_\omega = \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}}$, voir (1.11), et $\varphi^{V,out}_\omega = \frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}$, forment à nouveau une base complète et conviennent pour décomposer l'image des modes *in* donnés par l'Eq.(1.50). Dans ces conditions, l'image d'un mode entrant de fréquence k sur $\mathcal{J}^+_R \cup \{\mathcal{J}^+_L(V > 0)\}$ est décomposé selon l'expression suivante :

$$\varphi^{V,in}_k = \sum_{j=U,V} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \left(\alpha^{jV\,*}_{\omega k}\ \varphi^{j,out}_\omega - \beta^{jV\,*}_{\omega k}\ \varphi^{j,out\,*}_\omega \right) . \tag{1.51}$$

(Dans la suite, l'indice j sera implicitement sommé sur ses deux valeurs U et V lorsqu'il sera répété dans la même expression.) L'équation précédente généralise donc l'Eq.(1.13) puisqu'il est nécessaire de décomposer les modes *in* sur deux bases *out* distinctes et non plus une seule. En conséquence, les coefficients de Bogoliubov prennent donc la forme de vecteurs à deux indices. De même, lorsque l'on désire décrire la diffusion à gauche du

miroir, la même hypothèse de découplage asymptotique fournit la décomposition suivante :

$$\varphi_k^{U,in} = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \left(\alpha_{\omega k}^{jU\,*}\ \varphi_\omega^{j,out} - \beta_{\omega k}^{jU\,*}\ \varphi_\omega^{j,out\,*} \right) . \tag{1.52}$$

Ainsi, l'étude de la diffusion par un miroir asymptotiquement non inertiel est rendue possible par la connaissance des deux matrices 2×2 de Bogoliubov, $\alpha_{\omega k}^{ij}$ et $\beta_{\omega k}^{ij}$. Les éléments de ces matrices sont donnés, comme dans la section précédente, par des produits scalaires de Klein-Gordon, voir Eqs.(1.14) et (1.15), les coefficients à indice VV dans l'expression (1.51) venant directement de la dépendance en V du mode exprimé en (1.50). Naturellement, on retrouve que lorsque la trajectoire devient asymptotiquement inertielle, les éléments diagonaux VV et UU de ces deux matrices s'annulent.

La trajectoire (1.49) part de i^-. Notons que lorsque l'on choisit que le miroir parte de $\mathcal{J}^-$ et finisse en $\mathcal{J}^+$ ou en i^+, les décompositions (1.51) et (1.52) sont encore valides ; d'où l'avantage de notre description. Par conséquent, lorsqu'on passe en seconde quantification, il convient, en toute généralité, d'écrire les champs à gauche et à droite du miroir suivant :

$$\begin{aligned} \Phi^{R,L} &= \int_0^\infty \mathrm{d}k \left(a_k^{j,in} \varphi_k^{j,in} + b_k^{j,in\,\dagger} \varphi_k^{j,in\,*} \right) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \left(a_\omega^{j,out} \varphi_\omega^{j,out} + b_\omega^{j,out\,\dagger} \varphi_\omega^{j,out\,*} \right) . \end{aligned} \tag{1.53}$$

Comme nous l'avons précédemment dit, la généralité de cette notation va nous permettre de traiter la diffusion par des miroirs partiellement transparents.

1.2 Miroirs partiellement transparents

Quel que soit le comportement asymptotique de la trajectoire, le traitement de la radiation par un miroir partiellement transparent nécessite la prise en compte simultanée des modes gauchers et droitiers[16]. En effet, pour de tels systèmes, un mode entrant V, par exemple, est réfléchi sous la forme d'un mode U et transmis sous la forme d'un mode V, même pour une trajectoire inertielle. Nous verrons dans le Chapitre suivant qu'il existe une méthode radicalement différente, basée sur un traitement perturbatif, qui décrit de tels miroirs. Cependant, dans ce chapitre, nous allons continuer la généralisation du modèle de Davies-Fulling en décrivant, à l'aide des bases *in* et *out* précédemment définies, la diffusion des configurations initiales par un miroir qui ne réfléchit pas totalement.

La méthode que nous allons utiliser est essentiellement de nature matricielle. Elle possède trois étapes.

- Tout d'abord, une fois la trajectoire fixée, nous allons nous placer dans le référentiel propre d'un miroir totalement réfléchissant. Nous verrons que, dans ce référentiel, la diffusion des configurations entrantes, exprimées aux travers des modes propres, est décrite à l'aide d'une matrice particulièrement simple.
- Ensuite, nous verrons que cette matrice se généralise facilement au cas des miroirs partiellement transparents.

[16] Pour un traitement des miroirs partiellement transparents en vue de l'étude de l'effet Casimir, voir Jaekel et Reynaud[69], où, afin de préparer l'étude de la densité d'énergie d'un champ scalaire entre deux miroirs, les auteurs considèrent d'abord la diffusion par un seul miroir (inertiel).

– Le calcul d'une deuxième matrice, reliant les modes propres à ceux de Minkowski nous permettra, finalement, de trouver les coefficients de Bogoliubov $\alpha^{ij}_{\omega k}$ et $\beta^{ij}_{\omega k}$ qui décrive la diffusion des modes de Minkowski.

Cette méthode a pour avantage de décrire les particularités de la diffusion par le biais de deux opérateurs linéaires aux rôles bien séparés : une première matrice, que nous noterons $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$, indépendante de la cinématique du miroir, mais traduisant toutes ses propriétés optiques, et une seconde matrice, que nous noterons $\mathcal{B}_{k\lambda}$, indépendante des qualités du miroir mais traduisant toutes les particularités de sa trajectoire.

1.2.1 Passage aux modes propres

Bien que nous ayons vu que l'hypothèse de découplage asymptotique permette d'utiliser les modes libres de Minkowski pour décrire la diffusion pour tous les types de trajectoire, nous allons supposer ici que le miroir est asymptotiquement inertiel. Dans ces conditions, la trajectoire couvre toutes les valeurs de U et de V. Afin de construire les modes propres correspondants, il est utile de définir de nouvelles coordonnées u et v telles que :

$$\frac{v+u}{2} = \tau \ , \tag{1.54}$$

où τ est le temps propre pour le miroir, et

$$\frac{v-u}{2} = \rho \ , \tag{1.55}$$

tel que la trajectoire se lise $\rho = \rho_0 = \textit{constante}$. Ces deux coordonnées sont définies par deux fonctions analytiques $u(U)$ et $v(V)$. Ces fonctions sont directement déterminées à partir de la donnée de $V_{cl}(U)$ et des relations (1.54) et (1.55). En effet, comme l'élément de métrique le long de la trajectoire est donné par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \partial_V U_{cl}(V)\, \mathrm{d}V^2 = \partial_U V_{cl}(U)\, \mathrm{d}U^2 \\ &= \mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}v^2 = \mathrm{d}u^2 \ , \end{aligned} \tag{1.56}$$

on obtient[17] :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \sqrt{\partial_V U_{cl}} \ \text{ et } \ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}U} = \sqrt{\partial_U V_{cl}} \ . \tag{1.57}$$

Les définitions précédentes assurent que les nouvelles coordonnées u, v couvrent respectivement l'axe des U et celui des V. Ainsi, les modes propres définis par :

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{e^{-i\lambda u}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \ , \tag{1.58}$$

$$\varphi_\lambda(v) = \frac{e^{-i\lambda v}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \ , \tag{1.59}$$

forment une base complète de $\mathcal{J}^-$ et de $\mathcal{J}^+$. (Dans cette section, les fréquences λ et λ' indiqueront toujours un mode propre, alors que k, k', ω, ω' signifieront que le mode est de Minkowski.)

[17] Rappelons que le fait que la trajectoire soit de genre temps implique que les arguments des racines carrées sont positifs.

Lorsqu'on considère que la réflexion est totale, la diffusion le long de la trajectoire $v = v_{cl}(u) = u + 2\rho_0$ s'exprime très simplement. A droite du miroir, en parfaite analogie avec (1.9), les modes propres entrants gauchers se lisent :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{V,in}(u,v) &= \varphi_\lambda(v) - e^{-2i\lambda\rho_0}\,\varphi_\lambda(u) \\ &= \frac{e^{-i\lambda v}}{\sqrt{4\pi\lambda}} - \frac{e^{-i\lambda(u+2\rho_0)}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\ . \end{aligned} \tag{1.60}$$

Similairement, les modes sortants droitiers s'écrivent :

$$\varphi_\lambda^{U,out}(u,v) = \frac{e^{-i\lambda u}}{\sqrt{4\pi\lambda}} - \frac{e^{-i\lambda(v-2\rho_0)}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\ . \tag{1.61}$$

Ainsi, les modes entrants et sortants sont reliés par :

$$\varphi_\lambda^{V,in}(u,v) = -e^{-2i\lambda\rho_0}\,\varphi_\lambda^{U,out}(u,v)\ . \tag{1.62}$$

De même, à gauche du miroir, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^{U,in}(u,v) &= \varphi_\lambda(u) - e^{2i\lambda\rho_0}\,\varphi_\lambda(v) \\ &= -e^{2i\lambda\rho_0}\,\varphi_\lambda^{V,out}(u,v)\ . \end{aligned} \tag{1.63}$$

Il est intéressant pour la suite de rassembler les résultats (1.62) et (1.63) sous la forme d'une matrice de diffusion 2×2 sur les indices $(i,j) \in (U,V)$. Ainsi la diffusion en termes des modes propres se lit-elle :

$$\varphi_\lambda^{i,out} = S_\lambda^{ij}\varphi_\lambda^{j,in}\ , \tag{1.64}$$

où

$$\mathbf{S}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -e^{+2i\lambda\rho_0} \\ -e^{-2i\lambda\rho_0} & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{1.65}$$

Plusieurs informations issues de cette matrice méritent d'être notées. Premièrement, elle ne mélange pas les modes de fréquences différentes. En effet, dans le référentiel propre au miroir, la diffusion est stationnaire et en cela, elle est rigoureusement identique à la réflexion par un miroir inertiel en termes des modes de Minkowski[69]. Ainsi, tous les coefficients β de Bogoliubov sont nuls (pas de paires créées) et tous les coefficients α sont diagonaux en fréquence (pas d'effet Doppler). Nous retrouverons cette propriété lorsque nous considèreront les miroirs partiellement réfléchissants.

Deuxièmement, d'après l'Eq.(1.65), $\mathbf{S}_\lambda$ est anti-diagonale. Cette propriété est évidemment réservée aux miroirs à réflexion totale puisqu'elle signifie que les modes entrants gauchers ressortent exclusivement sous forme de droitiers, et *vice-versa*. Nous allons voir immédiatement comment généraliser cette matrice afin qu'elle puisse décrire la diffusion par un miroir partiellement transparent.

Avant cela, notons que lorsqu'on passe en seconde quantification, la base des opérateurs propres doit évidemment décrire les particules et anti-particules gauchères et droitières simultanément. Ainsi, le champ se décompose-t-il de la manière suivante :

$$\Phi = \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\ \left(a_\lambda^{j,in}\varphi_\lambda^{j,in} + b_\lambda^{j,in\,\dagger}\varphi_\lambda^{j,in\,*}\right) \tag{1.66a}$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda'\ \left(a_{\lambda'}^{j,out}\varphi_{\lambda'}^{j,out} + b_{\lambda'}^{j,out\,\dagger}\varphi_{\lambda'}^{j,out\,*}\right)\ . \tag{1.66b}$$

Les opérateurs de création et d'annihilation sont liés aux modes propres par des relations identiques aux Eqs.(1.29). De plus, la diffusion en termes des a_λ, b_λ est également dictée par la matrice $\mathbf{S}_\lambda$ selon la relation :

$$a_\lambda^{j,in} = S_\lambda^{ij} a_\lambda^{i,out} \ . \tag{1.67}$$

Pour finir avec le traitement de la réflexion totale, rappelons que ces opérateurs annulent leurs vides respectifs, que nous qualifierons de "propres". Pour alléger au maximum les expressions, nous allons adopter les notations suivantes :

$$|0_{propre}^{in}\rangle = |0_{propre}^{U,in}\rangle \otimes |0_{propre}^{V,in}\rangle \ \text{ et } \ |0_{propre}^{out}\rangle = |0_{propre}^{U,out}\rangle \otimes |0_{propre}^{V,out}\rangle \ . \tag{1.68}$$

1.2.2 Description de la transmittivité partielle

On cherche maintenant à décrire un miroir partiellement réfléchissant en modifiant la (trop simpliste) matrice $\mathbf{S}_\lambda$. Lorsqu'on suppose que la diffusion est élastique, la nouvelle matrice $\mathbf{S}_\lambda$ qui généralise l'Eq.(1.65) est unitaire. En gardant cette prescription, nous faisons le choix de n'étendre notre étude qu'au cas de la diffusion par un miroir qui préserve à la fois la linéarité (pour pouvoir traiter simplement le problème en termes matriciels) et l'unitarité (afin, entre autres, que les relations qui lient les opérateurs en seconde quantification soient canoniques).

Dans le cas le plus général, une matrice 2×2 complexe s'exprime en fonction de huit paramètres réels. Par souci de simplicité, nous n'allons pas indiquer l'argument λ pour ces paramètres, mais il est évident que la matrice elle-même étant dépendante de la fréquence choisie, chaque paramètre est donc une fonction réelle de λ. Cette dépendance vis-à-vis de l'énergie des modes incidents nous permet de décrire des miroirs plus physiques puisque dispersifs[18]. La nouvelle matrice se note :

$$\mathbf{S}_\lambda = \begin{pmatrix} s_u\, e^{-i\phi_u} & -i\, R\, e^{i\vartheta} \\ -i\, R'\, e^{i\vartheta'} & s_v\, e^{-i\phi_v} \end{pmatrix} \ . \tag{1.69}$$

L'hypothèse d'unitarité $\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{1}$ revient à imposer les quatre contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} R = R' \quad , \qquad & s_u = s_v = s \ , \\ s^2 + R^2 = 1 \quad \text{et} \quad & \phi_u + \phi_v + \vartheta + \vartheta' = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.70}$$

Le choix des paramètres dans la notation des divers coefficients de $\mathbf{S}_\lambda$ (en lieu et place de la notation $a + ib$) n'est pas anodin : physiquement, s et R représente respectivement les coefficients de transmission et de réflexion par le miroir. Par exemple, la probabilité pour qu'un mode propre entrant soit réfléchi[19] vaut $R^2 \leq 1$. Comme $s_u = s_v$, le fait que les phases ϕ_u et ϕ_v diffèrent implique que la diffusion est sensible au signe du moment du mode

[18] Par contre, l'éventuel caractère dissipatif du miroir ne peut être décrit dans ce modèle puisqu'il va à l'encontre de l'unitarité de $\mathbf{S}_\lambda$.

[19] Appelons "particule propre" l'état à fréquence $\lambda = i\partial_\tau$ positive. La probabilité que mentionne le texte est obtenue directement en évaluant, par exemple, le nombre de particules propres V, out quand l'état initial est celui qui décrit une seule particule propre U, in. A l'aide des Eqs.(1.67),(1.69) et (1.70), on obtient :

$$\langle 0_{propre}^{U,in} | a_\lambda^{U,in} \, (a_\lambda^{V,out\,\dagger} a_\lambda^{V,out}) \, a_\lambda^{U,in\,\dagger} | 0_{propre}^{U,in} \rangle = R^2 \ .$$

Dans le même état, le calcul du nombre de particules propres U, out fournit l'interprétation du terme s

incident. Or, dans la suite, nous verrons que l'emploi d'Hamiltoniens invariants par parité implique l'indépendance vis-à-vis de ce signe. Par conséquent, nous allons supposer égales ces deux phases et nous utiliserons les notations suivantes : $\phi = \phi_u = \phi_v$ et $\theta = \vartheta + \phi$. Ainsi, la matrice de diffusion ne dépend plus que de trois paramètres et se réécrit[20] :

$$\mathbf{S}_\lambda = e^{-i\phi} \begin{pmatrix} \sqrt{1-R^2} & -i\,R\,e^{i\theta} \\ -i\,R\,e^{-i\theta} & \sqrt{1-R^2} \end{pmatrix} \ . \tag{1.71}$$

Comme nous avons imposé la phase des modes libres incidents par les relations (1.58) et (1.59), la phase globale ϕ est donnée de manière univoque. Par exemple, dans le modèle de Davies-Fulling pour un miroir totalement réfléchissant, cette valeur est fixée à $\phi = \pi/2,\ \forall\lambda$. De plus, on décrit la diffusion par de tels miroirs en imposant $R = 1,\ \forall\lambda$ (ce qui est cohérent avec l'interprétation de R que nous avons soulignée auparavant) ainsi que $\theta = 2\rho_0\lambda$, voir Eq.(1.65).

Afin de décrire complètement la diffusion par un miroir partiellement réfléchissant, nous devons traiter particules et anti-particules simultanément. Pour ce faire, nous allons considérer les vecteurs à quatre composantes $a_\lambda^{\mu,in}$ et $a_\lambda^{\mu,out}$ définis comme suit :

$$a_\lambda^{\mu,in} = \begin{pmatrix} a_\lambda^{U,in} \\ a_\lambda^{V,in} \\ b_\lambda^{U,in\,\dagger} \\ b_\lambda^{V,in\,\dagger} \end{pmatrix} \ , \ a_\lambda^{\mu,out} = \begin{pmatrix} a_\lambda^{U,out} \\ a_\lambda^{V,out} \\ b_\lambda^{U,out\,\dagger} \\ b_\lambda^{V,out\,\dagger} \end{pmatrix} \ . \tag{1.72}$$

Comme nous travaillons avec un champ chargé, les modes associés à $b_\lambda^{j\,\dagger}$ peuvent ne pas être les complexes conjugués de ceux associés[21] à a_λ^j. Ainsi, nous noterons d'une barre les modes $\bar\varphi_\lambda^j$ associés aux anti-particules. Dans ces conditions, les vecteurs de modes correspondants à (1.72) sont :

$$\varphi_\lambda^{\mu,in} = \begin{pmatrix} \varphi_\lambda^{U,in} \\ \varphi_\lambda^{V,in} \\ \bar\varphi_\lambda^{U,in\,*} \\ \bar\varphi_\lambda^{V,in\,*} \end{pmatrix} \ , \ \varphi_\lambda^{\mu,out} = \begin{pmatrix} \varphi_\lambda^{U,out} \\ \varphi_\lambda^{V,out} \\ \bar\varphi_\lambda^{U,out\,*} \\ \bar\varphi_\lambda^{V,out\,*} \end{pmatrix} \ . \tag{1.73}$$

En notant $\bar{\mathbf{S}}_\lambda(\bar R, \bar\phi, \bar\theta)$ la matrice de diffusion des "anti-modes" $\bar\varphi_\lambda$, les vecteurs $\varphi_{\lambda'}^{\nu,in}$ et $\varphi_\lambda^{\mu,out}$ sont reliés par :

$$\varphi_\lambda^{\mu,out} = S_{\lambda\lambda'}^{\mu\nu}\,\varphi_{\lambda'}^{\nu,in} \ , \tag{1.74}$$

puisqu'on trouve :

$$\langle 0_{propre}^{U,in} | a_\lambda^{U,in}\,(a_\lambda^{U,out\,\dagger} a_\lambda^{U,out})\,a_\lambda^{U,in\,\dagger} | 0_{propre}^{U,in}\rangle = s^2 \ .$$

En termes optiques, les coefficients s et R sont donc les coefficients de transmission et de réflexion du miroir. Remarquons que si l'on avait calculé le nombre d'anti-particules ($b_\lambda^{j,out}$), on aurait trouvé un résultat nul. En effet, la matrice de diffusion étant à fréquence propre fixe, elle ne mélange *a fortiori* pas les fréquences positives et négatives. Ainsi, à l'aide de la relation $s^2 + R^2 = 1$, on trouve que la diffusion dans le référentiel propre conserve la charge et le nombre de particules.

[20] A partir des coefficients de cette matrice on peut calculer explicitement la force exercée sur le miroir lorsqu'il forme, avec un second miroir identique, une cavité de Casimir de largeur L, voir [69] :

$$F = \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\,|\lambda|\,\frac{R^2(\lambda)\left(R^2(\lambda) + \cos(2\lambda L)\right)}{R^4(\lambda) + 2R^2(\lambda)\cos(2\lambda L) + 1} \ .$$

[21] C'est le cas, par exemple, d'un tel champ interagissant avec le champ électromagnétique, voir Sect. 1.3 dans [32].

où la répétition des fréquences continues λ, λ' implique leur intégration sur l'axe réel positif, et celle des indices discrets μ, ν, leur sommation sur les quatre valeurs (particule U, particule V, anti-particule U, anti-particule V). La matrice (4×4) $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ est donnée par :

$$\mathbf{S}_{\lambda\lambda'} = \delta(\lambda - \lambda') \begin{pmatrix} \mathbf{S}_\lambda & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{S}}^*_\lambda \end{pmatrix} . \tag{1.75}$$

Cette matrice nous permet de donner les relations analogues à (1.34) entre opérateurs d'annihilation propres :

$$\begin{cases} a^{j,in}_\lambda = \alpha^{ij}_{\lambda'\lambda}\, a^{i,out}_{\lambda'} + \beta^{ij}_{\lambda'\lambda}\, b^{i,out\,\dagger}_{\lambda'} \\ b^{V,in}_\lambda = \alpha^{ij}_{\lambda'\lambda}\, b^{i,out}_{\lambda'} + \beta^{ij}_{\lambda'\lambda}\, a^{i,out\,\dagger}_{\lambda'} \end{cases} , \tag{1.76}$$

où les coefficients de Bogoliubov sont directement reliés aux éléments de la matrice $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ par :

$$\alpha^{ij}_{\lambda\lambda'} \equiv [a^{j,in}_{\lambda'}, a^{i,out\,\dagger}_\lambda] = (\varphi^{j,in}_{\lambda'}, \varphi^{i,out}_\lambda) = S^{\,ij}_{\lambda\lambda'} , \tag{1.77a}$$

$$\bar{\alpha}^{ij}_{\lambda\lambda'} \equiv [b^{j,in}_{\lambda'}, b^{i,out\,\dagger}_\lambda] = (\bar{\varphi}^{j,in}_{\lambda'}, \bar{\varphi}^{i,out}_\lambda) = S^{\,i+2\,j+2\,*}_{\lambda\lambda'} , \tag{1.77b}$$

$$\beta^{ij}_{\lambda\lambda'} \equiv [a^{i,out}_\lambda, b^{j,in}_{\lambda'}] = (\bar{\varphi}^{j,in}_{\lambda'}, \varphi^{i,out\,*}_\lambda) = S^{\,i\,j+2\,*}_{\lambda\lambda'} , \tag{1.77c}$$

$$\bar{\beta}^{ij}_{\lambda\lambda'} \equiv [b^{i,out}_\lambda, a^{j,in}_{\lambda'}] = (\varphi^{j,in}_{\lambda'}, \bar{\varphi}^{i,out\,*}_\lambda) = S^{\,i+2\,j}_{\lambda\lambda'} . \tag{1.77d}$$

Comme la matrice $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ est diagonale par blocs, voir (1.75), et conformément à ce que nous annoncions à la fin de la section précédente, tous les coefficients $\beta_{\lambda\lambda'}$ sont nuls. Notons que, pour la même raison, l'hypothèse d'unitarité contraint les sous-matrices $\mathbf{S}_\lambda$ et $\bar{\mathbf{S}}_\lambda$ séparément. De plus, en toute généralité, $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ satisfait à cette hypothèse dans le sens suivant :

$$(S^\dagger)^{\mu\nu}_{\lambda\lambda''}\, S^{\nu\mu'}_{\lambda''\lambda'} = \delta(\lambda - \lambda')\, \delta^{\mu\mu'} . \tag{1.78}$$

Ainsi, nous avons réussi à traduire les propriétés optiques d'un miroir partiellement transparent dans une matrice simple exprimée à l'aide des modes propres de la trajectoire. Cette matrice possède les propriétés suivantes :

- elle est diagonale par blocs, voir l'Eq.(1.75), *i.e.* ses coefficients β sont tous nuls,
- elle est diagonale en fréquence, *i.e.* ses coefficients α sont de la forme $\delta(\lambda - \lambda')\alpha_\lambda$,
- elle mélange les indices U et V afin de traduire l'absence de réflectivité totale.

1.2.3 Les coefficients de Bogoliubov

La dernière étape consiste donc à prendre en compte les effets de la trajectoire. Ceci va nous permettre en particulier de décrire l'éventuelle création de paires, *i.e.* l'émergence de coefficients $\beta_{\omega k}$ non nuls. Prendre en compte ces effets équivaut à trouver la relation entre la matrice $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ et $\mathbf{S}_{\omega k}$, la matrice des coefficients de Bogoliubov reliant les modes de Minkowski entrants et sortants. Pour ce faire, il nous faut remarquer que ces deux matrices sont liées par celle qui permet d'exprimer les modes libres de Minkowski φ^μ_k en fonction des modes propres de la trajectoire φ^ν_λ :

$$\varphi^\mu_k = \mathcal{B}^{\mu\nu}_{k\lambda} \varphi^\nu_\lambda . \tag{1.79}$$

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont de nature purement cinématique dans le sens où ils ne tiennent pas compte des propriétés optiques du miroir mais uniquement de sa trajectoire. Ainsi, on obtient directement :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{k\lambda} &= \begin{pmatrix} (\varphi^U_\lambda, \varphi^U_k) & 0 & -(\varphi^{U\,*}_\lambda, \varphi^U_k) & 0 \\ 0 & (\varphi^V_\lambda, \varphi^V_k) & 0 & -(\varphi^{V\,*}_\lambda, \varphi^V_k) \\ (\varphi^U_\lambda, \varphi^{U\,*}_k) & 0 & -(\varphi^{U\,*}_\lambda, \varphi^{U\,*}_k) & 0 \\ 0 & (\varphi^V_\lambda, \varphi^{V\,*}_k) & 0 & -(\varphi^{V\,*}_\lambda, \varphi^{V\,*}_k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{UU}_{k\lambda} & 0 & \beta^{UU\,*}_{k\lambda} & 0 \\ 0 & \alpha^{VV}_{k\lambda} & 0 & \beta^{VV\,*}_{k\lambda} \\ \beta^{UU}_{k\lambda} & 0 & \alpha^{UU\,*}_{k\lambda} & 0 \\ 0 & \beta^{VV}_{k\lambda} & 0 & \alpha^{VV\,*}_{k\lambda} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{1.80}$$

Comme $\mathcal{B}_{k\lambda}$ relie des modes libres, *i.e.* non diffusés, ses éléments sont indépendants de la charge de la particule. cela signifie par exemple que $\mathcal{B}^{1\,1}_{k\lambda} \equiv \alpha^{UU}_{k\lambda} = \bar{\alpha}^{UU}_{k\lambda} \equiv \mathcal{B}^{3\,3\,*}_{k\lambda}$. La même égalité s'applique également à $\alpha^{VV}_{k\lambda}$, $\beta^{VV}_{k\lambda}$ et $\beta^{UU}_{k\lambda}$.

Plus important encore, la relation (1.79) reliant des modes non diffusés, elle est donc tout autant valide entre les modes entrants de Minkowski et les modes propres entrants qu'entre les modes sortants de Minkowski et les modes propres sortants. Ainsi, on peut écrire les deux relations :

$$\varphi^{\nu',in}_{\lambda'} = (\mathcal{B}^{-1}_{k'\lambda'})^{\nu'\mu'} \varphi^{\mu',in}_{k} \ , \tag{1.81a}$$

$$\varphi^{\mu,out}_{k} = \mathcal{B}^{\mu\nu}_{k\lambda} \varphi^{\nu,out}_{\lambda} \ , \tag{1.81b}$$

où $(\mathcal{B}^{-1}_{k'\lambda'})^{\nu'\mu'}$ est la matrice inverse de $\mathcal{B}^{\mu\nu}_{k\lambda}$ au sens matriciel usuel. Elle est donnée par :

$$\mathcal{B}^{-1}_{k\lambda} = \begin{pmatrix} \alpha^{UU\,*}_{k\lambda} & 0 & -\beta^{UU\,*}_{k\lambda} & 0 \\ 0 & \alpha^{VV\,*}_{k\lambda} & 0 & -\beta^{VV\,*}_{k\lambda} \\ -\beta^{UU}_{k\lambda} & 0 & \alpha^{UU}_{k\lambda} & 0 \\ 0 & -\beta^{VV}_{k\lambda} & 0 & \alpha^{VV}_{k\lambda} \end{pmatrix} . \tag{1.82}$$

Notons qu'en inspectant (1.75) et (1.80), il est évident que $\mathcal{B}$ et $\mathbf{S}$ diffèrent en tout point. En effet, à part pour le cas trivial d'une trajectoire inertielle, $\mathcal{B}$:

- n'est pas diagonale par blocs, *i.e.* ses coefficients β diffèrent de zéro,
- n'est pas diagonale en fréquence,
- ne mélange pas les indices U et V .

Grâce à ces deux matrices, nous sommes désormais capables de relier les modes entrants et sortants de Minkowski, en généralisant ce que le modèle de Davies-Fulling exprimait dans les Eqs.(1.17),(1.51) et (1.52). Ainsi, la relation :

$$\varphi^{\mu,out}_{\omega} = S^{\mu\mu'}_{\omega k} \ \varphi^{\mu',in}_{k} \ , \tag{1.83}$$

définit la matrice $S_{\omega k}$ donnée par le produit suivant :

$$S^{\mu\mu'}_{\omega k} = \mathcal{B}^{\mu\nu}_{\omega\lambda} \, S^{\nu\nu'}_{\lambda\lambda'} \, (\mathcal{B}_{k\lambda'}{}^{-1})^{\nu'\mu'} \ . \tag{1.84}$$

Afin d'isoler la partie triviale qui correspond à un miroir totalement transparent (et également afin d'obtenir des expressions qui sont facilement comparables avec celles que

nous obtiendrons avec un traitement perturbatif), nous allons représenter les coefficients de Bogoliubov en termes des matrices de transfert $\mathbf{T}_\lambda$ et $\bar{\mathbf{T}}_\lambda$, définies comme suit :

$$\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{1} - i\,\mathbf{T}_\lambda \;\text{ et }\; \bar{\mathbf{S}}_\lambda = \mathbf{1} - i\,\bar{\mathbf{T}}_\lambda \;. \tag{1.85}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
S^{1,1}_{\omega k} &\equiv (\varphi^{U,in}_k, \varphi^{U,out}_\omega) \\
&= \alpha^{UU}_{\omega k} = \delta(\omega - k) - i(\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\, T^{UU}_\lambda\, \alpha^{UU\,*}_{k\lambda} + \beta^{UU\,*}_{\omega\lambda}\, \bar{T}^{UU\,*}_\lambda\, \beta^{UU}_{k\lambda}) \;, && \text{(1.86a)} \\
S^{1,2}_{\omega k} &\equiv (\varphi^{V,in}_k, \varphi^{U,out}_\omega) \\
&= \alpha^{UV}_{\omega k} = -i(\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\, T^{UV}_\lambda\, \alpha^{VV\,*}_{k\lambda} + \beta^{UU\,*}_{\omega\lambda}\, \bar{T}^{UV\,*}_\lambda\, \beta^{VV}_{k\lambda}) \;, && \text{(1.86b)} \\
S^{1,3}_{\omega k} &\equiv -(\bar{\varphi}^{U,in\,*}_k, \varphi^{U,out}_\omega) \\
&= \beta^{UU\,*}_{\omega k} = i(\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\, T^{UU}_\lambda\, \beta^{UU\,*}_{k\lambda} + \beta^{UU\,*}_{\omega\lambda}\, \bar{T}^{UU\,*}_\lambda\, \alpha^{UU}_{k\lambda}) \;, && \text{(1.86c)} \\
S^{1,4}_{\omega k} &\equiv -(\bar{\varphi}^{V,in\,*}_k, \varphi^{U,out}_\omega) \\
&= \beta^{UV\,*}_{\omega k} = i(\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\, T^{UV}_\lambda\, \beta^{VV\,*}_{k\lambda} + \beta^{UU\,*}_{\omega\lambda}\, \bar{T}^{UV\,*}_\lambda\, \alpha^{VV}_{k\lambda}) \;, && \text{(1.86d)}
\end{aligned}$$

ainsi que des relations similaires pour les autres composants.

Nous avons donc obtenu ce que nous cherchions, à savoir l'expression reliant les modes de Minkowski sortants et entrants, en fonction :

- des matrices $\mathbf{T}_\lambda$ et $\bar{\mathbf{T}}_\lambda$, évaluées dans le référentiel propre de la trajectoire et traduisant *uniquement* les propriétés optiques du miroir,
- et de la matrice $\mathcal{B}$, reliant les modes propres aux modes de Minkowski, et qui ne dépend *que* de la cinématique de la trajectoire.

Ce résultat est très important dans la mesure où, comme nous le savons déjà, la totalité des propriétés de la diffusion est incluse dans la donnée des coefficients de Bogoluibov.

Remarque. Les coefficients de Bogoliubov ainsi obtenus recèlent ces deux informations. Ils obéissent à des relations de complétude qui généralisent les Eqs.(1.16). Comme les coefficients relatifs aux particules peuvent différer de ceux correspondants aux anti-particules, les relations de complétude sont plus nombreuses :

$$\begin{aligned}
\alpha^{ij\,*}_{\omega k}\, \alpha^{mj}_{\omega' k} - \beta^{ij}_{\omega k}\, \beta^{mj\,*}_{\omega' k} &= \delta^{im}\, \delta(\omega - \omega') \;, && \text{(1.87a)} \\
\bar{\alpha}^{ij\,*}_{\omega k}\, \bar{\alpha}^{mj}_{\omega' k} - \bar{\beta}^{ij}_{\omega k}\, \bar{\beta}^{mj\,*}_{\omega' k} &= \delta^{im}\, \delta(\omega - \omega') \;, && \text{(1.87b)} \\
\alpha^{ij}_{\omega k}\, \alpha^{im\,*}_{\omega k'} - \bar{\beta}^{ij}_{\omega k}\, \bar{\beta}^{im\,*}_{\omega k'} &= \delta^{jm}\, \delta(k - k') \;, && \text{(1.87c)} \\
\bar{\alpha}^{ij}_{\omega k}\, \bar{\alpha}^{im\,*}_{\omega k'} - \beta^{ij}_{\omega k}\, \beta^{im\,*}_{\omega k'} &= \delta^{jm}\, \delta(k - k') \;, && \text{(1.87d)} \\
\alpha^{ij}_{\omega k}\, \bar{\beta}^{mj\,*}_{\omega' k} - \beta^{ij\,*}_{\omega k}\, \bar{\alpha}^{mj}_{\omega' k} &= 0 \;, && \text{(1.87e)} \\
\alpha^{ij}_{\omega k}\, \beta^{im}_{\omega k'} - \bar{\beta}^{ij}_{\omega k}\, \bar{\alpha}^{im}_{\omega k'} &= 0 \;. && \text{(1.87f)}
\end{aligned}$$

1.3 Théorie de la matrice $\hat{S}$

Avant de nous intéresser, dans la prochaine section, aux liens entre les coefficients de Bogoliubov et le flux d'énergie émise, nous allons achever maintenant la description de la diffusion, en reliant les matrices $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ et $\mathbf{S}_{\omega k}$, qui agissent linéairement sur les opérateurs entrants et sortants, à la matrice conventionnelle de diffusion $\hat{S}$, agissant sur l'espace de Fock des états à plusieurs particules.

Par définition[68], l'opérateur unitaire $\hat{S}$ relie les états et opérateurs entrants et sortants de la manière suivante :

$$|0^{in}_{propre}\rangle = \hat{S}\,|0^{out}_{propre}\rangle, \tag{1.88a}$$

$$a^{i,out}_{\lambda} = \hat{S}^{-1}\,a^{i,in}_{\lambda}\,\hat{S}\ ,\ b^{i,out\,\dagger}_{\lambda} = \hat{S}^{-1}\,b^{i,in\,\dagger}_{\lambda}\,\hat{S}\ , \tag{1.88b}$$

$$|0^{in}\rangle = \hat{S}\,|0^{out}\rangle, \tag{1.88c}$$

$$a^{i,out}_{k} = \hat{S}^{-1}\,a^{i,in}_{k}\,\hat{S}\ ,\ b^{i,out\,\dagger}_{k} = \hat{S}^{-1}\,b^{i,in\,\dagger}_{k}\,\hat{S}\ . \tag{1.88d}$$

Il est important de noter que $\hat{S}$ décrit aussi bien la diffusion des états propres (voir (1.88a) et (1.88b)) que celle des états de Minkowski (voir (1.88c) et (1.88d)). En effet, la matrice $\hat{S}$ contient toute l'information relative à la diffusion des quanta par le miroir, indépendamment de la base choisie. Ainsi, en tant qu'opérateur, $\hat{S}$ doit pouvoir s'exprimer comme une fonctionnelle des opérateurs d'annihilation et de création propres ainsi que comme une fonctionnelle de leurs analogues de Minkowski.

Intéressons-nous d'abord aux opérateurs propres. En termes des a_{λ}, b_{λ}, $\hat{S}$ doit contenir la même information que la matrice de diffusion $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$, en particulier la donnée des six paramètres $R, \bar{R}, \phi, \bar{\phi}, \theta, \bar{\theta}$. Par analogie avec la théorie des états comprimés[70], la linéarité des transformations de Bogoliubov nous apprend que $\hat{S}$ est l'exponentielle d'une forme quadratique. De plus, compte-tenu de la diagonalité par blocs de $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$, cette forme ne doit pas mélanger les fréquences positives (a) et négatives (b). Cette prescription équivaut au fait que $Z_{propre} = \langle 0^{out}_{propre}|0^{in}_{propre}\rangle$ soit réduit à une phase. Enfin, comme $\mathbf{S}_{\lambda}$ et $\bar{\mathbf{S}}_{\lambda}$ décrivent une diffusion stationnaire, *i.e.* à λ fixée, il en est de même pour la forme quadratique. Ainsi on peut naturellement poser :

$$\hat{S} = e^{-\frac{i}{2}\left\{ s^{ij}_{\lambda\lambda'}(a^{i,in}_{\lambda}\,a^{j,in\,\dagger}_{\lambda'} + a^{j,in\,\dagger}_{\lambda'}\,a^{i,in}_{\lambda}) + \bar{s}^{ij}_{\lambda\lambda'}(b^{i,in}_{\lambda}\,b^{j,in\,\dagger}_{\lambda'} + b^{j,in\,\dagger}_{\lambda'}\,b^{i,in}_{\lambda})\right\}}\ , \tag{1.89}$$

où

$$s^{ij}_{\lambda\lambda'} \;=\; \delta(\lambda-\lambda')\,s^{ij}_{\lambda}(R,\phi,\theta)\ ,\quad \text{et}\quad \bar{s}^{ij}_{\lambda\lambda'} = \delta(\lambda-\lambda')\,\bar{s}^{ij}_{\lambda}(\bar{R},\bar{\phi},\bar{\theta})\ . \tag{1.90}$$

Compte-tenu de la forme de $\hat{S}$ donnée ci-dessus, l'algèbre usuelle fournit la formule suivante :

$$\hat{S}^{-1}\,a^{i,in}_{\lambda}\,\hat{S} = a^{i,in}_{\lambda} - \frac{1}{1!}a^{j,in}_{\lambda'}s^{ji}_{\lambda'\lambda} + \frac{1}{2!}a^{j,in}_{\zeta}s^{jl}_{\zeta\lambda'}s^{li}_{\lambda'\lambda} - \frac{1}{3!}a^{j,in}_{\zeta'}s^{jl}_{\zeta'\zeta}s^{lm}_{\zeta\lambda'}s^{mi}_{\lambda'\lambda} + \ldots \tag{1.91}$$

Ainsi, à partir des Eqs.(1.88b), la matrice $\mathbf{s}$ se trouve complètement déterminée, et l'on obtient en toute généralité :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\lambda\lambda'} \;&=\; \delta(\lambda-\lambda')\begin{pmatrix} \phi & \mathrm{Arcsin}(R)\,e^{i\theta} \\ \mathrm{Arcsin}(R)\,e^{-i\theta} & \phi \end{pmatrix}\ , \\ \text{et}\quad \bar{\mathbf{s}}_{\lambda\lambda'} \;&=\; \mathbf{s}_{\lambda\lambda'}(\bar{R},\bar{\theta},\bar{\phi})\ , \end{aligned} \tag{1.92}$$

Afin de faciliter l'expression de la matrice $\hat{S}$ en fonction des opérateurs de Minkowski, réécrivons l'expression précédente avec les vecteurs définis en (1.72). On a directement :

$$\hat{S} = e^{-\frac{i}{2}\{s^{\mu\nu}_{\lambda\lambda'}(a^{\mu,in}_{\lambda}\,a^{\nu,in\,\dagger}_{\lambda'} + a^{\nu,in\,\dagger}_{\lambda'}\,a^{\mu,in}_{\lambda})\}}\ \text{ avec }\ (s^{\mu\nu}_{\lambda\lambda'}) = \begin{pmatrix} s^{ij}_{\lambda\lambda'} & 0 \\ 0 & \bar{s}^{ij}_{\lambda\lambda'} \end{pmatrix}\ . \tag{1.93}$$

Pour pouvoir exprimer $\hat{S}$ en fonction des opérateurs de Minkowski, il ne nous reste plus qu'à relier ces derniers aux opérateurs propres. Les Eqs.(1.81) fournissent les relations suivantes :

$$a_{\lambda}^{\mu,in} = \mathcal{B}_{k\lambda}^{\mu'\mu}\ a_{k}^{\mu',in}\ , \tag{1.94a}$$

$$a_{\lambda'}^{\nu,in\,\dagger} = \mathcal{B}_{k'\lambda'}^{\nu'\nu\,*}\ a_{k'}^{\nu',in\,\dagger}\ . \tag{1.94b}$$

Ainsi on obtient :

$$\hat{S} = e^{-\frac{i}{2}\{s_{kk'}^{\mu'\nu'}\,(a_{k}^{\mu',in}\ a_{k'}^{\nu',in\,\dagger} + a_{k'}^{\nu',in\,\dagger}\ a_{k}^{\mu',in})\}} \quad \text{avec} \quad s_{kk'}^{\mu'\nu'} = \mathcal{B}_{k\lambda}^{\mu'\mu}\ s_{\lambda\lambda'}^{\mu\nu}\ \mathcal{B}_{k'\lambda'}^{\nu'\nu\,*}\ . \tag{1.95}$$

Le fait que $s_{kk'}^{\mu'\nu'}$ mélange les fréquences positives et négatives de Minkowski par le biais de la matrice $\mathcal{B}$ permet de retrouver l'éventuelle instabilité du vide traduite par :

$$|Z| = |\langle 0^{out}|0^{in}\rangle| \leq 1\ . \tag{1.96}$$

Résumons. Formellement, $\hat{S}$ fournit toutes les réponses concernant la diffusion des états asymptotiques. La possible désintégration du vide est traduite par la valeur de :

$$Z = \langle 0^{in}|\ \hat{S}\ |0^{in}\rangle\ . \tag{1.97}$$

L'amplitude de probabilité pour qu'un seul quantum initial de fréquence k soit diffusé en un seul quantum final de fréquence ω, donnée en (1.45), s'exprime :

$$\langle 0^{out}|a_{\omega}^{i,out}a_{k}^{j,in\,\dagger}|0^{in}\rangle = \langle 0^{in}|a_{\omega}^{i,in}\ \hat{S}\ a_{k}^{j,in\,\dagger}|0^{in}\rangle = Z\ (\alpha^{-1})_{\omega k}^{ij}\ . \tag{1.98}$$

Enfin, la probabilité de trouver une paire de quanta *out* de fréquences ω, ω' en partant du vide *in*, donnée en (1.46), vaut :

$$\langle 0^{out}|a_{\omega}^{i,out}b_{\omega'}^{j,out}|0^{in}\rangle = \langle 0^{in}|a_{\omega}^{i,in}b_{\omega'}^{j,in}\ \hat{S}\ |0^{in}\rangle = -Z\ \beta_{\omega k}^{ij}(\alpha^{-1})_{\omega' k}^{ij}\ , \tag{1.99}$$

(pas de sommation sur i, j).

Comment les résultats précédents fournissent-ils une interprétation physique aux coefficients de Bogoliubov définis en (1.86) ? La réponse est quasi immédiate. A partir de ces équations, on peut écrire schématiquement que $\alpha = \mathbf{1} - i\mathbf{T}$ et $\beta = -i\mathbf{T}$. Ainsi, au premier ordre de la matrice de transfert $\mathbf{T}$, on a $\alpha^{-1} \simeq \mathbf{1} + i\mathbf{T}$. Dans cette approximation, α^* multiplié par Z donne l'amplitude de diffusion d'une particule et β multiplié par Z donne celle de la création de paire. Cette interprétation se verra confirmée lorsque nous étudierons la radiation du miroir en théorie de perturbation. (Nous verrons également que la division par Z s'interprète comme le choix de la fonctionnelle génératrice propre, *i.e.* par la suppression des diagrammes non connexes dans le développement perturbatif en puissances de la constante de couplage. De même, nous constaterons que la matrice $\hat{S}$ équivaut à l'opérateur d'évolution $T\ e^{iL_{int}}$.)

Bien évidemment, l'interprétation des coefficients de Bogoliubov que nous venons de donner n'a plus lieu d'être lorsqu'on prend en compte les termes d'ordre supérieur en $\mathbf{T}$. C'est précisément le cas pour des miroirs totalement réfléchissants. Cependant, pour de tels miroirs, le modèle de Davies-Fulling est tout de même décrit par la matrice $\mathbf{s}$ suivante :

$$\mathbf{s}_{\lambda\lambda'}^{DF} = \frac{\pi}{2}\,\delta(\lambda - \lambda')\ \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\rho_0\lambda} \\ e^{-2i\rho_0\lambda} & 1 \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{s}}_{\lambda\lambda'}^{DF}\ . \tag{1.100}$$

Ainsi, bien que le système considéré découple totalement les configurations qui résident de part et d'autre du miroir, la matrice $\hat{S}$ formée à partir (1.100) a la propriété de traiter la diffusion des deux côtés simultanément. Au passage, on retrouve ici le fait que le modèle de Davies-Fulling traite particules et anti-particules similairement.

1.4 Flux de particules - Energie

Nous avons désormais une parfaite connaissance des coefficients de Bogoliubov par le biais des Eqs.(1.86) et (1.87). De plus, nous savons qu'ils permettent, en particulier grâce à $\hat{S}$, de calculer les valeurs moyennes de tous les opérateurs. Nous pouvons donc chercher à exprimer la densité d'énergie du flux de radiation émis par un miroir en mouvement.

1.4.1 Le flux en termes des coefficients de Bogoliubov

Ce flux se sépare en deux canaux, gaucher et droitier, correspondant naturellement aux directions des particules non massives diffusées ou créées par le miroir. Dans la suite, nous allons nous intéresser exclusivement au flux des quanta droitiers, noté T_{UU}. L'opérateur hermitien correspondant s'exprime en fonction du champ de radiation de la manière suivante :

$$T_{UU}(U) \equiv \partial_U \Phi \partial_U \Phi^\dagger + \partial_U \Phi^\dagger \partial_U \Phi \ . \tag{1.101}$$

La symétrisation est due au fait que le champ est chargé et que l'on désire que l'opérateur "flux" traite les particules et les anti-particules similairement. Par la suite, nous allons nous intéresser principalement aux processus d'émission spontanée, c'est-à-dire à la radiation reçue sur $\mathcal{J}_R^+$ et émise par un miroir quand l'état initial est le vide $|0^{in}\rangle$ (dans le deuxième Chapitre, nous étudierons la réponse de T_{UU} quand le miroir est plongé dans un bain thermique). L'expression que nous allons étudier est la suivante :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle \equiv \langle 0^{in}|T_{UU}(U)|0^{in}\rangle - \langle 0^{out}|T_{UU}(U)|0^{out}\rangle \ . \tag{1.102}$$

La soustraction de la valeur moyenne du flux dans le vide sortant $|0^{out}\rangle$ a pour but d'enlever l'énergie (infinie) de point zéro. Cette énergie est précisément celle que contient le champ de radiation dans le vide de Minkowski, en l'absence de tout miroir. Ainsi, en la soustrayant, nous ne gardons que la partie du flux directement due au processus de diffusion.

Comme la valeur moyenne de T_{UU} est calculée sur $\mathcal{J}_R^+$, les modes *out* sont les modes de Minkowski définis en (1.11). Le calcul du deuxième terme de l'Eq.(1.102) est donc trivial et conduit à un résultat divergent qui s'exprime ainsi :

$$\langle 0^{out}|T_{UU}(U)|0^{out}\rangle = 2\iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}\,e^{-i(\omega'-\omega)U}\,\delta(\omega-\omega') \ . \tag{1.103}$$

Le premier terme de l'Eq.(1.102), quant à lui, s'obtient en exprimant les modes *in* en fonction des modes *out* par le biais de la matrice $\mathbf{S}_{\omega k}$ donnée en (1.86). En utilisant les expressions (1.87a) et (1.87b) pour réécrire le terme $\delta(\omega-\omega')$ dans $\langle 0^{out}|T_{UU}|0^{out}\rangle$, la soustraction des deux valeurs moyennes permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\langle T_{UU}\rangle = \langle T_{UU}\rangle^{particule} + \langle T_{UU}\rangle^{anti-particule} \ , \tag{1.104}$$

où

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}\rangle^{particule} \;=\; \mathrm{Re}\Bigg[\sum_{j=U,V} \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \\ \left[e^{-i(\omega'-\omega)U}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \beta^{Uj\,*}_{\omega k}\,\beta^{Uj}_{\omega' k}\right) + e^{-i(\omega'+\omega)U}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \bar{\alpha}^{Uj\,*}_{\omega k}\,\beta^{Uj}_{\omega' k}\right)\right]\Bigg] \ ,\end{aligned} \tag{1.105}$$

est le flux porté par les particules. Le flux porté par les anti-particules $\langle T_{VV}\rangle^{anti-particule}$ est obtenu par une expression similaire où les coefficients $\bar{\alpha}, \beta$ sont remplacés par $\alpha, \bar{\beta}$. Remarquons que comme l'opérateur T_{UU} est hermitien, il est naturel que sa valeur moyenne soit réelle.

Il existe une autre manière d'exprimer le flux émis. En effet, $\langle T_{UU}\rangle$ peut également s'écrire :

$$\langle T_{UU}\rangle = \langle T_{UU}\rangle^{I} + \langle T_{UU}\rangle^{II} \ , \tag{1.106}$$

où

$$\langle T_{UU}\rangle^{I} = \sum_{j=U,V} \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}\omega' \, \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \, e^{-i(\omega'-\omega)U} \left[\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k \ \beta_{\omega k}^{Uj\,*} \ \beta_{\omega' k}^{Uj} \right) + \left(\int_0^\infty \mathrm{d}k \ \bar{\beta}_{\omega k}^{Uj\,*} \ \bar{\beta}_{\omega' k}^{Uj} \right) \right] \ , \tag{1.107}$$

$$\text{et } \langle T_{UU}\rangle^{II} = \mathrm{Re}\Big[\sum_{j=U,V} \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}\omega' \, \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} e^{-i(\omega'+\omega)U} \left[\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k \ \bar{\alpha}_{\omega k}^{Uj\,*} \ \beta_{\omega' k}^{Uj} \right) + \left(\int_0^\infty \mathrm{d}k \ \alpha_{\omega k}^{Uj\,*} \ \bar{\beta}_{\omega' k}^{Uj} \right) \right] \Big] \ . \tag{1.108}$$

Cette réécriture permet d'isoler les termes du flux qui conduisent à l'énergie totale émise vers $\mathcal{J}_R^+$:

$$\langle H_U\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U \ \langle T_{UU}\rangle \ . \tag{1.109}$$

En effet, comme l'intégration du terme $e^{-i(\omega'+\omega)U}$ dans $\langle T_{UU}\rangle^{II}$ conduit à la distribution $\delta(\omega+\omega')$ portant sur les fréquences positives ω, ω', on voit clairement que la partie II du flux ne contribue pas à $\langle H_U\rangle$.

Par conséquent, c'est $\langle T_{UU}\rangle^{I}$ qui détermine complètement l'énergie totale :

$$\langle H_U\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U \ \langle T_{UU}\rangle^{I} = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \ \omega \sum_{j=U,V} \int_0^\infty \mathrm{d}k \ \left(\left| \beta_{\omega k}^{Uj} \right|^2 + \left| \bar{\beta}_{\omega k}^{Uj} \right|^2 \right) \tag{1.110}$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \ \omega \ \langle N_\omega^U \rangle \ . \tag{1.111}$$

Dans la deuxième égalité, nous soulignons le fait que l'énergie totale émise s'exprime uniquement à partir des coefficients β qui traduisent la création de paires, et ceci au travers du nombre de (anti-)particules *out* trouvées à partir du vide *in*, voir (1.40). De plus, ces expressions permettent d'affirmer que l'énergie totale émise est positive dans tous les cas, et qu'elle n'est nulle que quand tous les coefficients β le sont. Quant au flux, les Eqs.(1.105) ou (1.107) et (1.108) montrent qu'il s'annule si tous les coefficients β valent 0. Cependant, rien ne prouve que l'implication inverse est vraie.

1.4.2 Lien avec le modèle de Davies-Fulling

On peut également noter que des résultats analogues à ce que nous venons d'exposer auraient pu être obtenus pour un miroir totalement réfléchissant dès la première section

de ce Chapitre. Comme nous l'avons déjà dit, le modèle de Davies-Fulling ne différencie pas les particules des anti-particules. Dans ce cas, les deux termes de l'Eq.(1.104) sont égaux. De plus, tous les coefficients de Bogoliubov à indice supérieur UU sont nuls. En faisant le calcul directement, on aurait obtenu :

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}\rangle_{DF} &= 2\mathrm{Re}\Big[\iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \\ &\Big[e^{-i(\omega'-\omega)U}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k\;\tilde{\beta}^{UV\,*}_{\omega k}\,\tilde{\beta}^{UV}_{\omega' k}\right)+e^{-i(\omega'+\omega)U}\left(\int_0^\infty \mathrm{d}k\;\tilde{\alpha}^{UV\,*}_{\omega k}\,\tilde{\beta}^{UV}_{\omega' k}\right)\Big]\Big]\,,\end{aligned} \tag{1.112}$$

où $\tilde{\alpha}^{UV}_{\omega k}$ et $\tilde{\beta}^{UV}_{\omega k}$ sont les coefficients calculés pour un miroir totalement réfléchissant et dont la valeur exacte est donnée par les Eqs.(1.14) et (1.15).

Pour une trajectoire fixée, peut-on relier simplement le flux émis par un miroir partiellement transparent à celui obtenu dans le modèle de Davies-Fulling ? En général, ce n'est pas le cas. Cependant, plaçons-nous dans le cas particulier où la diffusion par un tel miroir ne dépend ni de la charge, ni de l'énergie de la particule. Le fait que la charge n'influe pas la diffusion implique que les deux matrices-blocs qui forment $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ dans (1.75) soient identiques. Ainsi, on a les égalités suivantes $R=\bar{R}$, $\phi=-\bar{\phi}$ et $\theta=-\bar{\theta}$. Le fait que l'énergie ne modifie pas la diffusion conduit à ce que R et ϕ soient indépendants[22] de λ. Ces conditions (restrictives) permettent de déduire plusieurs renseignements sur les coefficients de Bogoliubov. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser les relations d'unitarité issues de la matrice $\mathcal{B}$ données dans l'Appendice C. Avec la relation (C.1d), l'équation (1.86c) donne directement $\beta^{UU}_{kk'}=0$, tout comme pour le modèle de Davies-Fulling pour lequel les coefficients de transmittivité sont nuls. Ainsi, seuls les coefficients qui traduisent la réflexion, *i.e.* à indice UV, subsistent dans l'expression de $\langle T_{UU}\rangle$, voir (1.105). De plus, comme l'élément anti-diagonal de la matrice de transfert est donné par $T^{UV}=-Re^{i(\theta-\phi)}$, les relations (C.1a) et (C.1b) permettent d'écrire $|\beta^{UV}_{kk'}|=R|\tilde{\beta}^{UV}_{kk'}|$ et $|\alpha^{UV}_{kk'}|=R|\tilde{\alpha}^{UV}_{kk'}|$. Ainsi, la valeur moyenne du flux émis vaut :

$$\langle T_{UU}\rangle = R^2\,\langle T_{UU}\rangle_{DF}\;. \tag{1.113}$$

Un calcul analogue montrerait naturellement que le reste de l'énergie est portée par le flux des (anti-)particules gauchères, *i.e.* $\langle T_{VV}\rangle = (1-R^2)\,\langle T_{UU}\rangle_{DF}$. Ainsi, dans cette configuration, la conservation de l'énergie selon les modes transmis et réfléchis s'exprime très simplement. Bien évidemment, quand la diffusion des particules propres est sensible, par exemple, à leur énergie, le lien entre le flux et son analogue de Davies-Fulling devient *a priori* impossible.

1.5 Formulation locale et trajectoires particulières

Dans cette section, nous revenons au cas des miroirs totalement réfléchissants. Notre but est de montrer que la valeur moyenne du flux émis peut être écrite sans recourir aux coefficients de Bogoliubov, et de manière locale. Ne pas faire intervenir ces coefficients revient à mettre de côté l'aspect "particulaire" du flux. De plus, la possibilité d'une telle réécriture se trouve confortée *a priori* par le fait que la valeur de $\langle T_{UU}\rangle$, c'est-à-dire la

[22] Nous verrons dans le Chapitre suivant que lorsque le terme perturbatif du Lagrangien est indépendant du temps et respecte la symétrie $U(1)$, ces conditions sont automatiquement remplies.

valeur moyenne d'un opérateur local dans un état initialement préparé sur $\mathcal{J}^-$, est indépendante du choix de la base *out*. Enfin, cette seconde formulation permet de distinguer quelques trajectoires aux propriétés particulièrement intéressantes. Comme nous l'avons remarqué en Introduction, la représentation globale du flux en termes de particules est possible parce que nous travaillons en espace-temps plat. Au contraire, la représentation locale en termes des fonctions de Wightman que nous allons présenter peut également s'obtenir pour un espace-temps courbe.

1.5.1 Le flux en termes des fonctions de Wightman

L'outil que nous allons utiliser est la fonction[23] de Green-Wightman à deux points évaluée respectivement dans les vides *in* et *out* :

$$W^{in}(U,V;U',V') \equiv \langle 0^{in}|\, \Phi^\dagger(U,V)\, \Phi(U',V')\, |0^{in}\rangle \ , \tag{1.114}$$

$$W^{out}(U,V;U',V') \equiv \langle 0^{out}|\, \Phi^\dagger(U,V)\, \Phi(U',V')\, |0^{out}\rangle \ . \tag{1.115}$$

A droite du miroir, en développant le champ Φ^R sur les bases *in* et *out*, voir (1.33), on obtient :

$$W^{in}(U,V;U',V') = \int_0^\infty \mathrm{d}k\ \varphi_k^{V,in}(U,V)\ \varphi_k^{V,in\,*}(U',V') \ , \tag{1.116}$$

$$W^{out}(U,V;U',V') = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \varphi_\omega^{U,out}(U,V)\ \varphi_\omega^{U,out\,*}(U',V') \ . \tag{1.117}$$

Notons qu'au travers de la définition des modes entrants et sortants, Eqs.(1.9) et (1.12), les fonctions de Wightman ainsi exprimées sont implicitement nulles à gauche du miroir, c'est-à-dire pour $V < V_{cl}(U)$ ou $V' < V_{cl}(U')$. A l'aide de la relation formelle :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \frac{1}{k} e^{-ik\Delta} = -\lim_{\epsilon\to 0} \ln\left(\Delta - i\epsilon\right) \ , \tag{1.118}$$

les fonctions de Wightman se réécrivent :

$$W^{in}(U,V;U',V') = -\frac{1}{4\pi}\Theta(V - V_{cl}(U))\Theta(V' - V_{cl}(U')) \times \lim_{\epsilon\to 0} \ln\left(\frac{(V-V'-i\epsilon)(V_{cl}(U)-V_{cl}(U')-i\epsilon)}{(V-V_{cl}(U')-i\epsilon)(V_{cl}(U)-V'-i\epsilon)}\right) \ , \tag{1.119}$$

$$W^{out}(U,V;U',V') = -\frac{1}{4\pi}\Theta(V - V_{cl}(U))\Theta(V' - V_{cl}(U')) \times \lim_{\epsilon\to 0} \ln\left(\frac{(U-U'-i\epsilon)(U_{cl}(V)-U_{cl}(V')-i\epsilon)}{(U-U_{cl}(V')-i\epsilon)(U_{cl}(V)-U'-i\epsilon)}\right) \ . \tag{1.120}$$

Remarque. En inspectant (1.118), on comprend que le signe de la prescription $i\epsilon$ n'est pas fortuit. En effet, il est rigoureusement lié au fait que seules des fréquences positives interviennent dans l'expression des fonctions de Wightman. Cette propriété sera d'une importance capitale lorsque nous regarderons des quantités intégrées.

[23] Comme nous travaillons de nouveau dans le cadre du modèle de Davies-Fulling, particules et anti-particules contribuent de manière égale. Ainsi nous n'avons pas besoin de recourir à une seconde fonction où Φ et $\Phi^\dagger$ sont échangés dans les Eqs.(1.114) et (1.115).

A partir de ces fonctions, la valeur moyenne du flux[24] sur $\mathcal{J}_R^+$ s'exprime de la manière suivante :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle = 2 \lim_{U'\to U} \left[\partial_U \partial_{U'} W^{in}(U, V=+\infty; U', V'=+\infty) - \partial_U \partial_{U'} W^{out}(U, V=+\infty; U', V'=+\infty) \right] , \quad (1.121)$$

où le facteur 2 traduit la prise en compte simultanée des particules et des anti-particules. A l'aide des Eqs.(1.119) et (1.120), on trouve :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle = -\frac{1}{2\pi} \lim_{U'\to U} \partial_U \partial_{U'} \left[\ln\left(V_{cl}(U) - V_{cl}(U')\right) - \ln\left(U - U'\right)\right] \quad (1.122)$$

$$= \frac{1}{6\pi} \left[\left(\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^{1/2} \partial_U^2 \left(\left(\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^{-1/2} \right) \right] \quad (1.123)$$

$$= \frac{1}{24\pi} \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{cl}}{\mathrm{d}U^2}\right) \left(\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^{-1} \right]^2 - \frac{1}{12\pi} \partial_U \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{cl}}{\mathrm{d}U^2}\right) \left(\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^{-1} \right] \quad (1.124)$$

On a donc réussi à obtenir une formulation de $\langle T_{UU}\rangle$ qui possède la caractéristique d'être locale et de ne s'exprimer qu'à partir de la trajectoire et de ses dérivées. L'Eq.(1.124) possède une structure similaire à l'expression du flux que nous avions en (1.106). En effet, le premier terme, une fois intégré sur U, fournit une énergie positive et le deuxième, étant une dérivée, intègre à 0 quand la trajectoire est asymptotiquement inertielle.

Une seconde et fondamentale propriété de cette formulation est qu'elle contient explicitement la notion de causalité. En effet, afin que cette expression ait mathématiquement un sens, il est nécessaire que U fasse partie du support de V_{cl}. En terme de diffusion de quanta, cela signifie que le flux de particules droitières doit être évalué dans le futur de la trajectoire : le miroir n'émet aucun flux d'énergie en dehors du cône de lumière de sa trajectoire.

Remarque. On est en droit de se demander si une expression similaire peut être obtenue pour des miroirs partiellement réfléchissants. En toute généralité, cela est impossible. En effet, pour une matrice de transfert quelconque, les éléments de $\mathbf{T}_\lambda$ dépendent de la fréquence propre d'une manière non triviale. Ainsi, quand on évalue les coefficients de Bogoliubov (1.86), la structure de $\mathbf{T}_\lambda$ se mélange à celle des coefficients cinématiques $\alpha_{k\lambda}, \beta_{k\lambda}$ lors de l'intégration sur λ. Dans ce cas, on perd en général la possibilité de réexprimer les flux en termes des dérivées multiples de la trajectoire. Cependant, comme nous l'avons vu en (1.113), lorsque la diffusion ne dépend que des propriétés cinématiques des particules mises en jeu, le flux obtenu est proportionnel à celui de Davies-Fulling. Ainsi, dans ce cas, peut-on de nouveau l'exprimer de manière locale. Cette propriété peut être étendue à certains miroirs partiellement transparent dont les matrices de transfert sont non triviales. Une condition nécessaire est que le développement en puissances de λ des éléments de $\mathbf{T}_\lambda$ soit fini.

[24] Il est intéressant de noter que l'on peut calculer la valeur moyenne du flux (1.121) sur toutes les hypersurfaces à temps avancé V constant, et non pas uniquement sur $\mathcal{J}_R^+ (\equiv V = +\infty)$. Le résultat ne dépend *a priori* pas de la valeur de V. Cependant, la réflectivité totale du miroir et le choix d'étudier la radiation à droite de la trajectoire imposent une limitation causale à la région de l'espace-temps où cette expression est valide. Si l'on choisit l'hypersurface $\mathcal{J}_R^+$, son cône passé englobe la trajectoire : l'Eq.(1.121) est donc valide pour toutes les valeurs de U. Au contraire, si l'on choisit de remplacer $V = +\infty$ par $V = V_0$ dans (1.121), l'expression n'est plus valide que pour $U < U_{cl}(V_0)$.

A partir de l'expression du flux en tant que fonctionnelle de la trajectoire, nous nous proposons maintenant d'identifier quelques classes de trajectoires particulières.

1.5.2 Trajectoires particulières

Trajectoires inertielles

Tout d'abord, les expression précédentes permettent de retrouver trivialement le fait qu'un miroir inertiel ne rayonne pas. En introduisant la trajectoire $V_{cl}(U) = |\xi|(U-U_0)+V_0$ dans les expressions (1.123) ou (1.124), on trouve évidemment $\langle T_{UU}(U)\rangle \equiv 0$. Ce résultat concorde avec ce qu'on aurait obtenu à partir de la formulation "particulaire" du flux, voir Eq.(1.112), puisque les trajectoires inertielles engendrent des coefficients β tous nuls. Ceci nous confirme l'idée suivante : le fait d'avoir un flux rayonné non nul provient du caractère non adiabatique de la diffusion, *i.e.* de l'accélération de la trajectoire traduite par $\mathrm{d}^2V_{cl}/\mathrm{d}U^2 \neq 0$. En effet, (le carré de) l'accélération en chaque point d'une trajectoire quelconque est donnée par :

$$a^2(U) = \frac{1}{4}\frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2V_{cl}}{\mathrm{d}U^2}\right)^2}{\left(\dfrac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^3} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\left(\left(\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^{-1/2}\right)\right)^2 . \tag{1.125}$$

Trajectoires à flux constant

Guidés par l'analogie avec la radiation de Hawking, cherchons les trajectoires qui engendrent un flux constant non nul. En partant de l'Eq.(1.123), on trouve facilement la forme générale des trajectoires qui engendrent un flux dont la densité vaut $\Omega^2 \neq 0$. Elle est donnée par l'intégrale suivante :

$$\langle T_{UU}\rangle = \Omega^2 \;\;\Rightarrow\;\; V_{cl}^{\Omega}(U) \;\;=\;\; \int^U \mathrm{d}U' \,\frac{1}{(Ae^{-\sqrt{6\pi}\Omega U'} + Be^{\sqrt{6\pi}\Omega U'})^2} . \tag{1.126}$$

La trajectoire étant supposée croissante, cela revient à imposer l'inégalité $AB \geq 0$. Si $A = B = 0$, on trouve les trajectoires de genre lumière qui engendrent un flux nul. Si $A \neq 0$, l'intégration de (1.126) conduit aux trajectoires $V_{cl}^{\Omega}(U) = V_0 + \frac{1}{2\sqrt{6\pi}\Omega A}\frac{1}{(Ae^{-2\sqrt{6\pi}\Omega U}+B)^2}$. Elles ont pour origine $V = V_0$ sur $\mathcal{J}_R^-$ et arrivent en i^+ si $B = 0$, ou en $V = V_0 + \frac{1}{2\sqrt{6\pi}\Omega AB^2}$ sur $\mathcal{J}_L^+$ si $B \neq 0$. Si $A = 0$ et $B \neq 0$, on obtient $V_{cl}^{\Omega}(U) = V_0 - \frac{e^{-4\sqrt{6\pi}\Omega U}}{2\sqrt{6\pi}\Omega B^3}$. Ces trajectoires partent toutes de i^- et arrivent en $V = V_0$ sur $\mathcal{J}_L^+$. Dans cette classe, se trouve la trajectoire utilisée en (1.49), lorsqu'on impose $V_0 = 0$. Un miroir suivant cette trajectoire rayonne donc un flux constant :

$$V_{cl}(U) = -\kappa^{-1}\, e^{-\kappa U} \;\;\Rightarrow\;\; \langle T_{UU}\rangle = \kappa^2/96\pi . \tag{1.127}$$

La trajectoire qui fournit un flux stationnaire, comme celui de Hawking, est donc celle que nous avions supposée en début de Chapitre, voir (1.28). Inspectons plus précisément cette trajectoire ainsi que la radiation qu'elle engendre.

A l'aide des Eqs.(1.54),(1.55) et (1.56), la trajectoire est paramétrée par son temps propre de la manière suivante :

$$\forall \tau \in]-\infty, \tau_0] \ , \ V_{cl}(\tau) = -\frac{\kappa(\tau-\tau_0)^2}{4} \ \text{ et } \ U_{cl}(\tau) = -\frac{2}{\kappa}\,\ln(-\frac{\kappa(\tau-\tau_0)}{2}) \ . \quad (1.128)$$

Ainsi, le carré de l'accélération est-il donné par :

$$\begin{aligned} \forall \tau \in]-\infty, \tau_0] \ , \ a^2(\tau) &\equiv -\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}\,\frac{\mathrm{d}^2x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \ , & (1.129)\\ &= \frac{1}{(\tau-\tau_0)^2} \ \Rightarrow \ a(U) = \frac{\kappa}{2}\,e^{\kappa U/2} \ , \ \forall\, U \ . & (1.130) \end{aligned}$$

Une remarque peut sembler utile. Nous avons vu que les trajectoires à accélération nulle n'engendrent pas de radiation. Nous en avons déduit que l'accélération était la cause de non adiabaticité nécessaire à la présence de cette radiation. Cependant, bien que relativement simples, les Eqs.(1.123) et (1.124) reliant fonctionnellement le flux émis à l'expression de la trajectoire ne fournissent pas de lien direct entre $\langle T_{UU}(U)\rangle$ et $a(U)$ donnée par (1.125). La trajectoire (1.127) illustre précisément cet état de fait. En effet, l'accélération de cette trajectoire est nulle dans le passé asymptotique et croit exponentiellement avec U, voir l'Eq.(1.130), et cependant, le flux est stationnaire, *i.e.* $\langle T_{UU}(U)\rangle = cste\ , \forall U$. La prochaine section, qui concerne les trajectoires à accélération constante, illustrera également le fait que, s'il est fondamental, le lien entre accélération et flux émis n'est pas trivial.

Une seconde propriété de cette trajectoire provient de la valeur de ses coefficients de Bogoliubov. En injectant (1.49) dans l'Eq.(1.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \beta^{UV}_{\omega k} &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}U\ e^{i\omega U - i\frac{k}{\kappa}e^{-\kappa U}}\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\omega}{k}}\,e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{\kappa}}\,\Gamma(-i\frac{\omega}{\kappa})\,\left(\frac{k}{\kappa}\right)^{i\frac{\omega}{\kappa}} \ . & (1.131) \end{aligned}$$

A l'aide de ces coefficients et de la relation :

$$\Gamma^*(ix) = \Gamma(-ix) = \frac{2\pi}{x(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}\,\frac{1}{\Gamma(ix)} \ , \quad (1.132)$$

on peut calculer le nombre de quanta *out* de fréquences comprises dans l'intervalle $[\omega, \omega+\mathrm{d}\omega]$ créés à partir de quanta *in* résidant dans l'intervalle $[k, k+\mathrm{d}k]$:

$$\begin{aligned} n_\omega(k)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\omega &\equiv \left|\beta^{UV}_{\omega k}\right|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\omega & (1.133)\\ &= \frac{1}{2\pi\kappa k}\,\frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa}-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\omega \ , & (1.134) \end{aligned}$$

c'est-à-dire une distribution de Planck à la température $\kappa/2\pi$. Ainsi, en notant la parfaite analogie avec les relations obtenues pour la radiation de Hawking, on retrouve le fait que le flux émis vers la droite est non seulement stationnaire :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle = \hbar\kappa^2c^2/96\pi \ , \quad (1.135)$$

mais aussi thermique, avec une température donnée par :

$$k_B T = \hbar\kappa/2\pi c \ . \tag{1.136}$$

Nous avons remis ici les constantes fondamentales pour bien insister sur le fait que les deux propriétés de stationnarité et de thermicité illustrent des phénomènes de nature purement quantique.

Remarque. Un flux constant implique bien évidemment une énergie totale émise infinie. A partir de la formulation locale on trouve que l'énergie totale émise par un tel miroir diverge comme $\langle H_U \rangle = \frac{\kappa^2}{96\pi}\,\Theta$, où $\Theta \to +\infty$ est le temps[25] pendant lequel le champ interagit avec le miroir. Similairement, grâce au calcul des coefficients de Bogoliubov et à la relation :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}\ , \tag{1.137}$$

la densité d'énergie totale émise par unité de fréquence *in* vaut :

$$h^U(k) \equiv 2\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \omega\ n_\omega(k) = \frac{1}{24\pi}\,\frac{\kappa}{k}\ . \tag{1.138}$$

Ainsi, $\langle H_U \rangle$ diverge-t-elle aussi en fonction des cut-off infra-rouge et ultra-violet selon[26] $\langle H_U \rangle = \frac{\kappa}{24\pi}\ln(k_{UV}/k_{IR})$.

On peut voir, par ces deux formulations de la divergence de l'énergie, que les expressions locales et particulaires du flux, si elles donnent des résultats concordants, ne sont pas trivialement reliées l'une à l'autre. L'exemple de trajectoire qui va suivre pousse plus loin encore le désaccord entre ces deux types d'expression, révélant les faiblesses du modèle tout entier.

Trajectoires uniformément accélérées

La classe des trajectoires qui engendrent un flux nul contient les trajectoires inertielles mais ne se limite pas à elles. Précisément, de telles trajectoires annulent le terme $\partial_U^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U}\right)^{-1/2}\right)$ dans (1.123) pour toutes les valeurs de U. Une intégration triviale nous permet d'écrire leur forme générale[27] :

$$V_{cl}^{acc}(U) = \frac{AU + B}{CU + D}\ . \tag{1.139}$$

[25]La nature de cette divergence est juste une indication. En effet, le modèle (même généralisé) de Davies-Fulling ne permet pas de contrôler la durée de l'interaction entre le miroir et le champ de radiation. C'est précisément cette possibilité qu'apportera le modèle Lagrangien que nous développerons dans le Chapitre suivant.

Remarque. Le temps indiqué ici Θ est un temps de Minkowski $\Delta U = U_2 - U_1$. En terme de temps propre, l'intervalle $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ est donné par la relation suivante :

$$\Delta\tau = \frac{4}{\kappa}\,e^{\kappa(U_2+U_1)/4}\ \sinh(\kappa\Delta U/4)\ .$$

[26]La relation générique entre le temps d'interaction et les cut-offs fréquentiels $\kappa\Theta \propto \ln(k_{UV}/k_{IR})$ sera retrouvée lorsque nous utiliserons le modèle Lagrangien dans le troisième Chapitre pour la trajectoire uniformément accélérée, *cf* Eqs.(3.24) et (3.51).

[27]... appelée mathématiquement "transformation de Möbius".

On retrouve les trajectoires inertielles quand $C = 0$, et comme nous les avons déjà étudiées, nous allons supposer dans la suite que $C \neq 0$. De plus, sans restreindre la généralité de cette classe, nous allons poser $C > 0$. Géométriquement, chaque fonction du type (1.139) est la réunion de deux branches de trajectoire. La première est définie pour $U < -D/C$. Elle a pour origine $V = A/C$ sur $\mathcal{J}_R^-$ et sort de l'espace-temps par l'asymptote $U = -D/C$ sur $\mathcal{J}_R^+$. La seconde a le support complémentaire sur l'axe réel. Elle débute en $U = -D/C$ sur $\mathcal{J}_L^-$ et termine en $V = A/C$ sur $\mathcal{J}_L^+$. Il est important de noter que ces deux branches sont causalement déconnectées, voir figure (1.3).

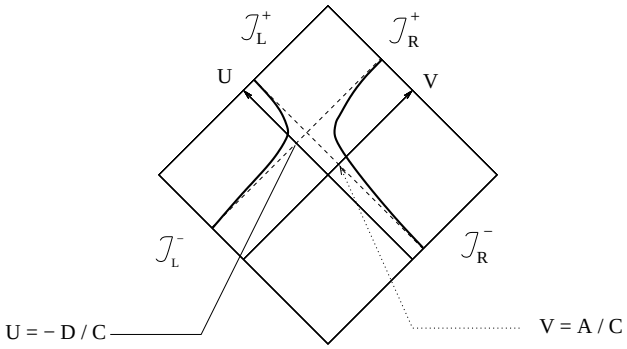

Fig. 1.3: Dans ce diagramme de Penrose , nous avons représenté un cas quelconque de trajectoire uniformément accélérée. Les deux branches ainsi que leurs asymptotes respectives sont précisées.

Le fait que les deux branches de $V_{cl}^{acc}(U)$ soient des fonctions croissantes impose la deuxième condition :

$$\frac{\mathrm{d}V_{cl}^{acc}}{\mathrm{d}U} = \frac{AD - BC}{(CU + D)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad AD - BC > 0 \; . \tag{1.140}$$

En reprenant l'Eq.(1.125), on trouve que l'accélération subie par cette trajectoire est constante et vaut :

$$a = C/\sqrt{AD - BC} \; . \tag{1.141}$$

Dans la suite, nous allons considérer le cas particulier[28] pour lequel les asymptotes coïncident avec les axes des coordonnées. La trajectoire correspondante satisfait donc l'implication suivante :

$$V_{cl}^{acc}(U) = -\frac{1}{a^2 U} \quad \Rightarrow \quad \langle T_{UU}(U) \rangle \equiv 0 \; . \tag{1.142}$$

Nous avons représenté les deux branches L et R (dénommées ainsi parce qu'elles sont incluses dans les quadrants L et R du diagramme de Penrose) dans la figure (1.4). D'après (1.142), on passe de l'une de l'autre en inversant les rôles de U et V. Ainsi, dans la suite, nous allons principalement étudier la branche qui se situe dans la zone de Rindler L.

Que valent les coefficients de Bogoliubov associés à la diffusion par le miroir L ? Pour pouvoir répondre à cette question, il nous faut d'abord expliciter la forme des modes

[28] Ce cas particulier engendre tous les autres par composition avec les deux boosts galiléens $V \to CV - A$ et $U \to CU + D$.

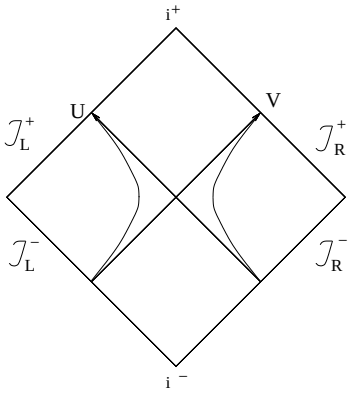

FIG. 1.4: Dans ce diagramme de Penrose, nous avons représenté les deux branches de la trajectoire uniformément accélérée que nous considérerons par la suite. Les asymptotes coïncident avec les axes des coordonnées.

entrants exprimés dans le futur asymptotique. En reprenant la même syntaxe que pour (1.50), on obtient :

$$\varphi_k^{V,in}(U,V)\Big|_{t=+\infty} = \Theta(V)\,\frac{e^{-ikV}}{\sqrt{4\pi k}} - \Theta(U)\,\frac{e^{ik/a^2U}}{\sqrt{4\pi k}}\,, \tag{1.143}$$

$$\varphi_k^{U,in}(U,V)\Big|_{t=+\infty} = \Theta(-U)\,\frac{e^{-ikU}}{\sqrt{4\pi k}}\,. \tag{1.144}$$

De même que la trajectoire à flux constant (1.49), la trajectoire uniformément accélérée (1.142) sort de l'espace-temps par $\mathcal{J}_L^+$. Ainsi, les modes entrants gauchers s'expriment-ils en fonction de U et de V quand $t \to +\infty$. Il n'en est pas de même pour les modes entrants droitiers, qui ne résident à droite du miroir que si leur support est $U < 0$, d'où l'Eq.(1.144).

Le miroir étant asymptotiquement non inertiel, son rayonnement nécessite donc la connaissance de matrices 2×2 de Bogoliubov, comme nous l'avons vu à la section 1.1.2. Les coefficients requis pour décrire le rayonnement à droite du miroir s'écrivent :

$$\alpha_{\omega k}^{UU\,*} \equiv \left(\varphi_\omega^{U,out}, \varphi_k^{U,in}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{k+\omega}{\sqrt{k\omega}}\frac{i}{k-\omega}\,, \tag{1.145a}$$

$$\beta_{\omega k}^{UU\,*} \equiv \left(\varphi_\omega^{U,out\,*}, \varphi_k^{U,in}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{k-\omega}{\sqrt{k\omega}}\frac{i}{k+\omega}\,, \tag{1.145b}$$

$$\alpha_{\omega k}^{UV\,*} \equiv \left(\varphi_\omega^{U,out}, \varphi_k^{V,in}\right) = \frac{-1}{\pi a}K_1(-i\frac{2\sqrt{k\omega}}{a})\,, \tag{1.145c}$$

$$\beta_{\omega k}^{UV\,*} \equiv \left(\varphi_\omega^{U,out\,*}, \varphi_k^{V,in}\right) = \frac{-i}{\pi a}K_1(\frac{2\sqrt{k\omega}}{a})\,, \tag{1.145d}$$

où K_1 est une fonction de Bessel de seconde espèce (voir Appendice D). L'examen des résultats (1.145b) et (1.145d) soulève un paradoxe majeur. En effet, les coefficients β qui traduisent la création de paires de particules sont non nuls. Cela signifie qu'il en est de même pour le nombre de (anti-)particules *out* peuplant le vide *in*, voir (1.40). Intuitivement, ce résultat ne paraît guère compatible avec la particularité principale de la trajectoire considérée, à savoir la nullité du flux émis (1.142). En effet, une telle incompatibilité reviendrait à conclure que le flux d'énergie n'est pas associé à celui des particules

créées par le miroir. Davies et Fulling[62] ont souligné ce problème et l'on évacué en faisant à la cohérence comme panacée : *"Clearly, coherence effects are operating which are manifested by an exact cancellation of the last two terms of..."* notre équation (1.124). Cet argument, que Grove[64] ne clarifiera que dix ans plus tard, tend à abandonner l'aspect particulaire du flux pour certaines trajectoires "problématiques"[65].

Cependant, le calcul de l'énergie émise traduit et souligne ce même paradoxe. Exprimée comme intégrale du flux (1.109), cette énergie est nulle :

$$\langle H_U \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U \, \langle T_{UU} \rangle = 0 \ , \tag{1.146}$$

alors qu'il n'en est pas de même quand on écrit que $\langle H_U \rangle$ est la somme sur les énergies portées par les particules émises :

$$\langle H_U \rangle = 2 \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \omega \, \langle N_\omega^U \rangle = +\infty \ . \tag{1.147}$$

En effet, quel que soit le canal U ou V des particules entrantes impliquées dans la création de paires, l'intégrand de l'expression précédente, à savoir le nombre de particules droitières sortantes dans le vide *in*, est divergent :

$$\begin{aligned} \langle N_\omega^U \rangle &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \, \left|\beta_{\omega k}^{UU}\right|^2 + \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \, \left|\beta_{\omega k}^{UV}\right|^2 \qquad (1.148) \\ &= \frac{1}{16\pi^2\omega} \langle\!\langle \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \rangle\!\rangle + \frac{1}{4\pi^2\omega} \langle\!\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, \frac{e^y(\cosh(y)\sinh(y)-y)}{\sinh^3(y)} \rangle\!\rangle = +\infty \ , \end{aligned}$$

où les symboles $\langle\!\langle \, \rangle\!\rangle$ servent à souligner le fait que les intégrales sont divergentes. Cette formulation de $\langle N_\omega^U \rangle$ permet de montrer que l'énergie $\langle H_U \rangle$ exprimée en (1.147) diverge autant à cause de l'intégration sur k que de celle sur ω.

Il apparaît donc que le traitement des miroirs uniformément accélérés ne soit pas possible dans le cadre du modèle de Davies-Fulling. Dans la section suivante nous allons résumer les résultats énoncés dans ce Chapitre ainsi que les principales difficultés auxquelles le modèle est confronté.

1.6 Conclusion et failles du modèle

Dans ce Chapitre, nous avons généralisé le modèle original de Davies-Fulling de deux manières différentes. Premièrement, nous avons utilisé l'hypothèse de découplage asymptotique afin de pouvoir traiter les miroirs qui suivent des trajectoires asymptotiquement non inertielles. Cette hypothèse a pour effet de "débrancher" l'interaction miroir/radiation dans le passé et dans le futur asymptotique de la trajectoire. Supposer ce découplage a pour but de pouvoir utiliser les bases de modes asymptotiques conventionnelles afin de décrire correctement la diffusion du champ de radiation. Soulignons, cependant, que cette hypothèse ne fait pas partie du modèle original de Davies-Fulling mais qu'au contraire, elle a été l'objet d'un rajout *ad hoc*.

Deuxièmement, nous avons traité le cas des miroirs partiellement transparents. A ce titre, les Eqs.(1.86) sont un des résultats prépondérants de ce Chapitre. Elles donnent les coefficients de Bogoliubov pour toutes les trajectoires ainsi que tous les miroirs qui

préservent l'unitarité de la diffusion. Ces coefficients décrivent la diffusion des modes asymptotiques en fonction des propriétés optiques du miroir dans son référentiel propre (traduites par la matrice de transfert $\mathbf{T}_\lambda$). La donnée de cette matrice, combinée à la cinématique de la trajectoire, permet de construire des coefficients α et β ayant des propriétés et un rôle analogue à ceux du modèle de Davies-Fulling.

A l'aide de ces coefficients, nous avons pu exprimer en toute généralité le nombre moyen de particules émise dans le vide $\langle N_\omega^U \rangle$, le flux de ces particules $\langle T_{UU} \rangle$, voir Eqs.(1.104) et (1.105), ainsi que leur énergie totale $\langle H_U \rangle$, voir Eqs.(1.110) et (1.111). Nous avons ainsi pu isoler le caractère particulier des coefficients β. Comme ils traduisent la création de paires de particules au premier ordre en $\mathbf{T}_\lambda$, voir (1.99), on trouve naturellement qu'eux seuls interviennent dans les expressions de $\langle N_\omega^U \rangle$ et de $\langle H_U \rangle$.

De plus, quand le miroir est totalement réfléchissant (et pour quelques rares cas de miroirs partiellement transparents), le flux peut être exprimé de manière locale comme une fonctionnelle des dérivées multiples de la trajectoire, voir Eqs.(1.123) et (1.124). Cette propriété nous a permis d'isoler certaines de ces trajectoires ; en particulier, la trajectoire (1.127) qui permet une analogie forte entre le flux émis par le miroir et la radiation de Hawking.

Cependant, plusieurs zones délictueuses résident dans le modèle original et ses généralisations.

a) Tout d'abord, le problème trans-Planckien. Rappelons que cette expression désigne le fait que, pour certaines trajectoires, les fréquences initiales qui participent au spectre final sont arbitrairement élevées. Ainsi, la théorie ne semble pas respecter une nécessaire séparation des échelles. Ce problème réside principalement dans le fait que le modèle proposé ne possède aucun cut-off fréquentiel intrinsèque.

b) Ensuite, la causalité. Au contraire de la formulation locale, qui repose sur des fonctions de Green, la formulation en termes des coefficients de Bogoliubov ne traduit d'aucune manière la notion de causalité. (Si l'on désire l'implémenter, il est nécessaire de le faire "à la main" en spécifiant les propriétés analytiques de la matrice de diffusion dans le plan complexe de λ, comme nous allons le voir.)

c) Enfin, le cas des trajectoires uniformément accélérées. En examinant les Eqs.(1.145), plusieurs problèmes doivent être soulignés. Premièrement, les coefficients de Bogoliubov sont déficients : ${\alpha^{UU}_{\omega k}}^*$ diverge quand $\omega = k$, ${\alpha^{UV}_{\omega k}}^*$ est mal défini (puisque la représentation intégrale de la fonction de Bessel nécessite un argument possédant une partie réelle strictement positive, voir Appendice D), et, de plus, tous les coefficients divergent dans l'infra-rouge[29]. Deuxièmement, le nombre de particules émises diverge aussi dans l'ultra-violet, voir (1.148). Troisièmement, les deux formulations du flux semblent donner des résultats différents : la formulation locale indique un flux nul alors que les coefficients β qui traduisent la création de paires ne le sont pas.

   Un dernier problème survient lorsqu'on considère deux miroirs suivant chacun une branche de la trajectoire uniformément accélérée. Dans ce cas, que nous expliciterons dans la suite, non seulement le flux émis mais aussi les coefficients β sont nuls. Le dispositif ainsi formé semble réaliser un interféromètre parfait. Or ceci est impossible car ces deux miroirs voyagent dans des régions de l'espace-temps causalement

[29] Cette dernière divergence est due au fait que le champ diffusé est non massif. Elle n'est donc pas directement à mettre au passif du modèle utilisé pour la diffusion. Nous verrons d'ailleurs dans le Chapitre suivant qu'une simple précaution dans le Lagrangien d'interaction permet d'en faire fi.

déconnectées.

Sans que cela soit un véritable grief, on peut ajouter à cette liste une réserve sur le découplage adiabatique. En effet, bien qu'elle permette d'utiliser la base des modes de Minkowski pour décrire le champ pour certaines trajectoires pathologiques, cette hypothèse a le désavantage de n'être quantifiée par aucune grandeur.

Le but du modèle que nous allons maintenant présenter est de retrouver les résultats exposés dans ce Chapitre tout en apportant une réponse à tous les problèmes que nous venons de soulever.

Chapitre 2

Le Modèle Lagrangien

Incertitudes, ô mes délices
Vous et moi nous nous en allons
Comme s'en vont les écrevisses,
A reculons, à reculons.

G. Apollinaire

L'objet de ce Chapitre est d'introduire un second modèle qui traite l'interaction champ/ miroir. La motivation de ce changement est, bien sûr, de pouvoir répondre aux divers problèmes qu'engendre le modèle de Davies-Fulling que nous avons généralisé au Chapitre précédent. Toutes ces difficultés viennent d'être clairement listées. Nous allons voir, le long de ce Chapitre et du suivant, que notre nouveau modèle leur apporte à tous une réponse cohérente.

Le trait principal du modèle que nous allons présenter réside dans le fait qu'il dérive d'un principe actionnel. Au contraire du modèle de Davies-Fulling, dans lequel l'interaction radiation/miroir se traduit par une condition limite, c'est ici au travers d'un Lagrangien que le champ va interagir avec le miroir[71, 72, 56]. Afin de traduire l'effet du mouvement de ce dernier, le Lagrangien est localisé sur la trajectoire. On associe à cette interaction une constante de couplage g et le comportement du champ va être donné perturbativement en g. Ainsi, ce sont donc des miroirs *a priori* partiellement transparents qui seront décrits lorsqu'on travaillera à un certain ordre en g. Pour décrire les miroirs totalement réfléchissants, il faudra donc sommer la série de perturbation et faire tendre $g \to \infty$. Notons que ce modèle impose aussi une trajectoire au miroir : cette étude implique donc que l'on continue à négliger les effets de recul. Le Lagrangien que nous allons choisir est self-interactif : ainsi, il n'est point besoin d'introduire une source extérieure.

L'avantage principal de cette nouvelle formulation est que l'on va désormais pouvoir "allumer" et "éteindre" l'interaction dans le temps, c'est-à-dire, en particulier, contrôler le caractère asymptotique du couplage[1].

En toute généralité, le Lagrangien d'interaction s'écrit :

$$L_{int} \quad = \quad -\int \mathrm{d}\tau H_{int}(\tau)$$

[1] A mi-chemin entre le modèle de Davies-Fulling et la prise en compte des effets de recul dans notre modèle Lagrangien se trouve le travail de Ford et Svaiter[73]. Leur idée est la suivante : tout en gardant une condition de bord identique au modèle de Davies-Fulling, ils lui permettent de fluctuer légèrement autour de la trajectoire. L'amplitude de cette fluctuation est le cut-off ultra-violet dont le modèle a besoin. Cela leur permet, par exemple de comparer les deux formulations de l'énergie émise, voir Eqs.(1.146) et (1.147).

$$= \quad -g \int \mathrm{d}\tau f(\tau) \int \mathrm{d}^2x \; \delta^2(x^\mu - x^\mu_{cl}(\tau)) \; Q(\rho(x^\mu)) \; \mathcal{F}[\Phi(t,z) \, , \Phi^\dagger(t,z)] \; . \quad (2.1)$$

Détaillons les éléments qui paramètrent L_{int}. De même qu'au Chapitre précédent, la trajectoire se lit $x^\mu = x^\mu_{cl}(\tau)$. g est la constante de couplage ; à ce titre, elle est réelle. Les fonctions $f(\tau)$ et $Q(\rho(x^\mu))$ sont supposées réelles et positives. De plus, elles sont respectivement sans dimension et de dimension T^{-1} (T indique l'unité de temps). Ainsi, la dimensionnalité de g est exclusivement fixée par le choix de la fonctionnelle $\mathcal{F}$. Ce choix est limité par deux exigences : $\mathcal{F}$ doit être une forme quadratique afin de préserver la linéarité de la diffusion, et, pour que H_{int} soit véritablement une densité hamiltonienne, $\mathcal{F}$ doit être hermitique. Le choix reste vaste. Nous allons donc nous limiter aux trois cas suivants, indexés par le nombre de dérivées portant sur le champ de radiation :

$$\mathcal{F}_0[\Phi \, , \Phi^\dagger] \equiv \Phi^\dagger \Phi + \Phi \Phi^\dagger \quad \Rightarrow \quad [g] = T^{-1} \; , \quad (2.2)$$

$$\mathcal{F}_1[\Phi \, , \Phi^\dagger] \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu_{cl}}{\mathrm{d}\tau} \left(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{\partial_\mu} \Phi \right) \quad \Rightarrow \quad [g] = 1 \; , \quad (2.3)$$

$$\mathcal{F}_2[\Phi \, , \Phi^\dagger] \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu_{cl}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\nu_{cl}}{\mathrm{d}\tau} \left(\partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi + \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^\dagger \right) \quad \Rightarrow \quad [g] = T \; , \quad (2.4)$$

où nous avons indiqué quelle était la dimension de la constante de couplage correspondante. Pour (2.2) et (2.4), qui représentent respectivement des termes de masse et d'énergie, nous avons symétrisé les expressions, afin de rendre la théorie qui en découle invariante par conjugaison de charge. Au contraire, pour (2.3), qui figure le courant, nous avons laissé une dissymétrie. La fonction $f(\tau)$ a pour rôle d'indiquer la durée du couplage entre la radiation et le miroir, dans les coordonnées du référentiel propre. C'est par le biais de cette fonction que le miroir va pouvoir être "allumé" puis "éteint". Quand l'interaction est "branchée" pendant une durée propre $2T$, la normalisation de la fonction temporelle se lit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \; f(\tau) = 2T \; . \quad (2.5)$$

Respectivement, $Q(\rho(x^\mu))$ indique la zone de l'espace à l'intérieur de laquelle le champ interagit avec le miroir. C'est donc au travers de cette fonction que le miroir va éventuellement pouvoir acquérir une "épaisseur" non nulle dans son référentiel propre. Quel que soit le miroir, la fonction spatiale satisfait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\rho \; Q(\rho) = 1 \; . \quad (2.6)$$

Afin de pouvoir être capable d'adapter les paramètres du Lagrangien à la résolution des problèmes de la diffusion, nous allons dans un premier temps nous limiter volontairement au cas où l'interaction est indépendante du temps. Le but de cette restriction est de retrouver, dans le vocabulaire de la théorie des perturbations, les résultats obtenus dans le Chapitre précédent pour le modèle (généralisé) de Davies-Fulling - dans lequel, rappelons-le, le couplage est uniforme. Ceci fait, nous nous intéresserons ensuite aux Lagrangiens qui permettent de contrôler temporellement ce couplage.

2.1 Lagrangiens indépendants du temps

Comme nous l'avons dit précédemment, nous allons considérer ici que miroir est couplé au champ de radiation le long de la trajectoire *de manière uniforme*[2]. Cette hypothèse équivaut à poser $f(\tau) = 1,\ \forall\tau$.

De plus, dans cette section, nous nous limiterons à l'exposé de la matrice de diffusion ; bien qu'il soit réalisable pour les Lagrangiens qui ne dépendent pas du temps, le calcul des amplitudes de transition et du flux d'énergie sera présenté dans le cadre plus général des Lagrangiens possédant une fonction $f(\tau)$ non constante.

Afin d'alléger l'exposé de la diffusion, nous allons présenter en détails les calculs relatifs au choix $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ défini en (2.3). Ceci fait, nous donnerons alors les résultats obtenus pour les deux autres formes quadratiques et généraliserons l'expression de la matrice de transfert.

2.1.1 Couplage par le courant de Noether pour un miroir fin

Les relations de diffusion

Lorsque le couplage est indépendant de τ, il est judicieux de réécrire le Lagrangien uniquement à l'aide des coordonnées (τ, ρ), définies dans le référentiel propre. On obtient immédiatement :

$$L_{int} = -g \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\rho\, Q(\rho)\, \mathcal{F}_1[\Phi(\tau,\rho)\,,\Phi^\dagger(\tau,\rho)]\ . \tag{2.7}$$

Ecrire la matrice de diffusion revient à relier les champs asymptotiques passé et futur Φ^{in} et Φ^{out}. Ces champs sont libres, dans le sens où ils obéissent à l'équation de d'Alembert (1.1). Bien évidemment, il n'en est pas de même pour le champ Φ : comme l'interaction n'est plus exprimée au travers d'une condition limite mais d'un Lagrangien, l'Eq.(1.1) ne s'applique pas à Φ. Au contraire, quand $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, le champ satisfait à l'équation suivante[3] :

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\rho^2)\Phi(\tau,\rho) = -g\, Q(\rho)\, 2i\, \partial_\tau\Phi(\tau,\rho)\ . \tag{2.8}$$

Cette équation est linéaire (notons que, comme nous avons pris soin de ne choisir que des fonctionnelles $\mathcal{F}$ quadratiques, les équations respectives auxquelles obéit Φ pour les autres choix possibles de $\mathcal{F}$ sont aussi linéaires). Ainsi, Φ peut-il s'écrire en fonction

[2] Si nous ne connaissons pas à l'avance les résultats que le modèle Lagrangien va fournir dans ces conditions (puisqu'il dépend des paramètres fonctionnels Q et $\mathcal{F}$), nous savons tout de même que certaines des incohérences explicitées au Chapitre précédent ne seront pas résolues dans cette section. En effet, en imposant au couplage d'être uniforme, on ne permet pas un possible découplage adiabatique. Or, cette hypothèse nous a été nécessaire, par exemple dans le traitement des trajectoires accélérées. Cette section a cependant pour but de démontrer que la simple utilisation de ce nouveau modèle permet déjà de résoudre certains problèmes. Par exemple, nous allons voir que le lien avec les résultats du Chapitre précédent est univoque et que la notion de causalité apparaît naturellement dans la matrice de diffusion, grâce aux fonctions de Green.

[3] Comme l'intégrand de (2.1) est localisé sur la trajectoire, les Eqs.(2.3) et (2.4) se réécrivent trivialement en fonction du temps propre grâce à la relation :

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu_{cl}}{\mathrm{d}\tau}\,\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial\tau}\ .$$

des champs asymptotiques et des fonctions de Green retardée G^{ret} et avancée G^{av} de la manière suivante :

$$\Phi(\tau,\rho) = \Phi^{in}(\tau,\rho) - 2i\,g \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\rho'\; G^{ret}(\tau,\rho;\tau',\rho')\; Q(\rho')\;\partial_{\tau'}\Phi(\tau',\rho') \qquad (2.9)$$

$$= \Phi^{out}(\tau,\rho) - 2i\,g \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\rho'\; G^{av}(\tau,\rho;\tau',\rho')\; Q(\rho')\;\partial_{\tau'}\Phi(\tau',\rho')\ . \qquad (2.10)$$

Etant donnée la stationnarité du couplage, nous savons, à l'instar de l'étude déjà menée dans le référentiel propre du miroir, que la diffusion ne mélange pas les fréquences propres λ. Ainsi, nous pouvons décomposer les trois champs de radiation sur leurs bases respectives à fréquence fixée, définies de la manière suivante :

$$\varphi_\lambda(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\;\Phi(\tau,\rho)\,e^{i\lambda\tau}\ , \qquad (2.11)$$

$$\varphi^{in}_\lambda(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\;\Phi^{in}(\tau,\rho)\,e^{i\lambda\tau}\ , \qquad (2.12)$$

$$\varphi^{out}_\lambda(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\;\Phi^{out}(\tau,\rho)\,e^{i\lambda\tau}\ . \qquad (2.13)$$

Rappelons que, comme les champs asymptotiques *in* et *out* sont libres, ils vérifient l'Eq.(1.3) : chacun s'écrit comme la somme d'une fonction de U et d'une fonction de V. Cette condition permet d'écrire les "champs propres" $\varphi_\lambda^{in(out)}$ explicitement en termes des opérateurs de création et d'annihilation. A partir des relations (1.66), on obtient :

$$\varphi^{in}_\lambda(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}}\left(\, a^{U,in}_\lambda\, e^{i\lambda\rho} + a^{V,in}_\lambda\, e^{-i\lambda\rho}\,\right) \quad \text{si } \lambda>0\ , \qquad (2.14a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi|\lambda|}}\left(\, b^{U,in\,\dagger}_{|\lambda|}\, e^{-i|\lambda|\rho} + b^{V,in\,\dagger}_{|\lambda|}\, e^{i|\lambda|\rho}\,\right) \text{ si } \lambda<0\ , \qquad (2.14b)$$

$$\varphi^{out}_\lambda(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}}\left(\, a^{U,out}_\lambda\, e^{i\lambda\rho} + a^{V,out}_\lambda\, e^{-i\lambda\rho}\,\right) \quad \text{si } \lambda>0\ , \qquad (2.14c)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi|\lambda|}}\left(\, b^{U,out\,\dagger}_{|\lambda|}\, e^{-i|\lambda|\rho} + b^{V,out\,\dagger}_{|\lambda|}\, e^{i|\lambda|\rho}\,\right) \text{ si } \lambda<0\ . \qquad (2.14d)$$

La linéarité des relations (2.9) et (2.10) nous indique que ces champs propres asymptotiques vont pouvoir être reliés matriciellement. Ainsi, il ne nous reste plus qu'à développer ces équations sur les φ_λ afin d'obtenir la matrice qui relie les opérateurs *in* et *out*, voir (1.67). Pour ce faire, l'intégrale sur le temps propre τ dans (2.11) nécessite la connaissance des fonctions de Green dans le plan complexe.

Ces fonctions sont définies par les intégrales suivantes :

$$G^{ret}(\tau,\rho;\tau',\rho') = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}l\;\frac{e^{-i\lambda(\tau-\tau')+il(\rho-\rho')}}{l^2-(\lambda+i\epsilon)^2}\ , \qquad (2.15)$$

$$G^{av}(\tau,\rho;\tau',\rho') = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}l\;\frac{e^{-i\lambda(\tau-\tau')+il(\rho-\rho')}}{l^2-(\lambda-i\epsilon)^2}\ . \qquad (2.16)$$

Dans ces expressions la causalité émane naturellement du choix de la prescription $\pm i\epsilon$: en effet, en effectuant l'intégration sur λ dans le plan complexe, on montre facilement que

ces fonctions vérifient les égalités suivantes :

$$G^{ret}(\tau,\rho;\tau',\rho') = 0 \quad \text{si } \tau' > \tau \ , \tag{2.17}$$
$$G^{av}(\tau,\rho;\tau',\rho') = 0 \quad \text{si } \tau' < \tau \ . \tag{2.18}$$

Ainsi, grâce à l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}l \ \frac{e^{il(\rho-\rho')}}{l^2-(\lambda\pm i\epsilon)^2} = \frac{\pm 2i\pi}{2(\lambda\pm i\epsilon)} \, e^{\pm il|\rho-\rho'|} \ , \tag{2.19}$$

et à la définition (2.11), les relations (2.9) et (2.10) fournissent, après avoir intégré par parties sur la variable τ' :

$$\varphi_\lambda(\rho) = \varphi_\lambda^{in}(\rho) - ig\,\Lambda_\epsilon^+(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\rho' \, Q(\rho')\,\varphi_\lambda(\rho')\, e^{i\lambda|\rho-\rho'|} \tag{2.20}$$
$$= \varphi_\lambda^{out}(\rho) + ig\,\Lambda_\epsilon^-(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\rho' \, Q(\rho')\,\varphi_\lambda(\rho')\, e^{-i\lambda|\rho-\rho'|} \ , \tag{2.21}$$

où

$$\Lambda_\epsilon^\pm(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda\pm i\epsilon} \ . \tag{2.22}$$

Le terme $\Lambda_\epsilon^\pm(\lambda)$ est à prendre au sens des distributions, c'est-à-dire que son rôle apparaîtra lorsqu'on effectuera l'intégration sur λ. Comme nous l'avons dit, en spécifiant le demi-plan complexe dans lequel l'intégration doit être réalisée, $\Lambda_\epsilon^\pm(\lambda)$ restitue la causalité des fonctions de Green retardée et avancée.

Miroirs infiniment fins

Afin d'obtenir des résultats simples, plaçons-nous, dans un premier temps, dans le cas d'un miroir infiniment fin. Ce miroir suivant la trajectoire $\rho = \rho_0$, la fonction de largeur spatiale prend la forme triviale suivante : $Q(\rho) = \delta(\rho-\rho_0)$. Cette hypothèse permet d'obtenir des équations analytiquement solubles. En effet, dans la limite $\epsilon \to 0$, les équations précédentes deviennent :

$$\varphi_\lambda(\rho) = \varphi_\lambda^{in}(\rho) - ig\,\varphi_\lambda(\rho_0)\, e^{i\lambda|\rho-\rho_0|} \tag{2.23}$$
$$= \varphi_\lambda^{out}(\rho) + ig\,\varphi_\lambda(\rho_0)\, e^{-i\lambda|\rho-\rho_0|} \ , \tag{2.24}$$

ce qui implique que les champs propres asymptotiques sont reliés de la manière suivante :

$$\varphi_\lambda^{in}(\rho) = \varphi_\lambda^{out}(\rho) + \frac{ig}{1-ig}\left(e^{i\lambda(\rho-\rho_0)} + e^{-i\lambda(\rho-\rho_0)}\right)\varphi_\lambda^{out}(\rho_0) \ . \tag{2.25}$$

En utilisant les relations (2.14), on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_\lambda^{U,in} \\ a_\lambda^{V,in} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-ig} \begin{pmatrix} 1 & ig\,e^{-2i\lambda\rho_0} \\ ig\,e^{2i\lambda\rho_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda^{U,out} \\ a_\lambda^{V,out} \end{pmatrix} \ . \tag{2.26}$$

La donnée de cette matrice équivaut[4] à celle de la matrice $\mathbf{S}_\lambda$ entre modes *in* et *out*. Il est important de remarquer que cette dernière possède les propriétés de (1.71). Précisément, la diffusion ainsi décrite dans le référentiel propre revient à fixer les paramètres suivants :

$$R = \frac{g}{\sqrt{1+g^2}}\,, \quad \phi = \mathrm{Arctan}(g) \ \text{ et } \ \theta = 2\lambda\rho_0\ . \tag{2.27}$$

L'interprétation du résultat précédent est simple. Premièrement, la phase θ est univoquement fixée et elle correspond exactement à ce que nous avions trouvé dans le Chapitre précédent. Deuxièmement, le coefficient de réflexion R est inférieur à 1 et il est clairement lié à la constante de couplage g. D'un côté, lorsque l'interaction est nulle $g = 0$, le miroir est totalement transparent $R = 0$. De l'autre côté, dans la limite de couplage fort, c'est-à-dire pour[5] $g \to +\infty$, on retrouve le modèle de Davies-Fulling, *i.e.* la matrice de diffusion qui représente un miroir totalement réfléchissant avec $R = 1$ et $\phi = \pi/2$ (voir l'Eq.(1.65) et la discussion après (1.71)).

Notons que ces résultats fournissent des paramètres de diffusion R et ϕ indépendants de la fréquence propre λ. Cette propriété est une conséquence directe du choix de la forme quadratique $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ dont une des particularités est d'imposer une constante de couplage sans dimension, voir (2.3). Comme le problème ne possède pas de grandeur dimensionnée intrinsèque, le coefficient de réflectivité ne peut pas dépendre de λ.

2.1.2 Cas général - Causalité

Miroirs infiniment fins

Quand la forme quadratique choisie est $\mathcal{F}_0$ ou $\mathcal{F}_2$, les propriétés optiques du miroir ainsi décrit se trouvent modifiées. En effet, les paramètres R et ϕ ne sont plus indépendants de λ. En particulier, le nombre de dérivées par rapport au temps propre dans $\mathcal{F}$ a pour conséquence de modifier le comportement infra-rouge ou ultra-violet du coefficient de réflectivité R. Pour $\mathcal{F}_0$, l'Eq.(2.26) équivaut à une matrice de diffusion paramétrée de la manière suivante :

$$R(\lambda) = \frac{g/\lambda}{\sqrt{1+g^2/\lambda^2}}\,, \quad \phi(\lambda) = \mathrm{Arctan}(g/\lambda) \ \text{ et } \ \theta = 2\lambda\rho_0\ . \tag{2.28}$$

Cette matrice traduit correctement les propriétés optiques d'un miroir physique dans l'UV puisqu'à hautes fréquences ce dernier devient transparent. Cependant, on remarque que le miroir est totalement réfléchissant dans l'infra-rouge ; nous verrons que ceci donne lieu à des expressions divergentes.

Inversement, pour $\mathcal{F}_2$, on obtient :

$$R(\lambda) = \frac{g\lambda}{\sqrt{1+g^2\lambda^2}}\,, \quad \phi(\lambda) = \mathrm{Arctan}(g\lambda) \ \text{ et } \ \theta = 2\lambda\rho_0\ . \tag{2.29}$$

[4] La matrice de diffusion reliant les opérateurs est l'inverse de la transposée (ou la complexe conjuguée) de celle qui relie les modes, voir Eqs.(1.64) et (1.67). C'est cette dernière que nous avons appelée $\mathbf{S}_\lambda$.

[5] On notera que la limite pour g doit être prise sur l'axe réel positif pour retrouver exactement les résultats du Chapitre précédent. Ce signe provient du choix que nous avons effectué pour $\mathcal{F}_1$. En effet, si nous avions interverti le champ et son hermitique conjugué dans la définition (2.3), la matrice $\mathbf{S}_\lambda$ aurait été retrouvée cette fois-ci en prenant la limite $g \to -\infty$.

Dans ce cas, bien que le miroir soit totalement réfléchissant dans l'ultra-violet, il est transparent dans l'infra-rouge. (Cette dernière propriété nous sera particulièrement utile quand nous chercherons à obtenir des résultats finis pour les valeurs moyennes d'observables dans la section suivante.)

Après avoir inspecté ces résultats on peut les généraliser en donnant la matrice de transfert obtenue pour des miroirs infiniment fins en fonction du nombre n de dérivées dans la forme quadratique $\mathcal{F}$. Cette matrice s'écrit :

$$\mathbf{T}_\lambda = \frac{g\lambda^{n-1}}{1+ig\lambda^{n-1}\Lambda_\epsilon^+(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\lambda\rho_0} \\ e^{-2i\lambda\rho_0} & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.30}$$

Dans cette expression, c'est sciemment que nous n'avons pas fait tendre ϵ vers 0. En effet, les matrices de transfert $\mathbf{T}$ et de diffusion $\mathbf{S}$ sont ainsi analytiquement déterminées dans le plan complexe par la fonction Λ_ϵ^+. Cette dernière détermine la nature du pôle en λ. On remarque que Λ_ϵ^+ provient de la fonction de Green retardée G^{ret}, voir (2.9). Ainsi, c'est au travers de cette propriété analytique que la causalité apparaît dans le modèle Lagrangien. Remarquons que dans le modèle généralisé de Davies-Fulling, les éléments de la matrice de diffusion étaient privés de cette spécification. En fait, si l'on désirait alors implémenter la causalité, il était nécessaire de le faire "à la main", *i.e.* en rajoutant le terme Λ_ϵ^+ de manière *ad hoc*. Dans le modèle Lagrangien, au contraire, ce terme émerge naturellement à partir des équations de Heisenberg.

La causalité n'est pas la seule vertu du formalisme Lagrangien. A partir de la relation (2.25), on remarque que les matrices qui traduisent la diffusion des particules (a), *i.e.* (2.26), et des anti-particules ($b^\dagger$) sont égales, *par définition*. Lorsque, de plus, on choisit $\mathcal{F}_1$ dans le Lagrangien, nous avons vu que les paramètres R et ϕ étaient indépendants de λ. Ces deux conditions sont précisément celles que nous avions du imposer (de manière *ad hoc* une fois de plus) lors du Chapitre précédent, afin de retrouver les résultats du modèle de Davies-Fulling (voir Sect. 1.4.2 où nous avons montré qu'elles permettaient d'annuler tous les coefficients $\beta_{\omega k}^{UU}$). Ici, c'est naturellement que les coefficients de Bogoliubov reliant les modes de Minkowski $\beta_{\omega k}^{UU}$ s'annulent pour un miroir infiniment fin, décrit par le couplage $\mathcal{F}_1$ dans le modèle Lagrangien.

Miroirs épais

Revenons à la forme quadratique $\mathcal{F}_1$ afin de traiter le cas des miroirs épais. Pour de tels miroirs la fonction de largeur spatiale Q n'est plus réduite à une distribution de Dirac. En définissant ses composantes de Fourier ainsi que celles des "champs propres" de fréquence λ de la manière conventionnelle :

$$Q_l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\rho\; Q(\rho)\, e^{il\rho} \;,\; \varphi_{\lambda,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\rho\; \varphi_\lambda(\rho)\, e^{il\rho} \;, \tag{2.31}$$

les Eqs.(2.20) et (2.21), une fois intégrées sur ρ, deviennent :

$$\varphi_{\lambda,l} = \varphi_{\lambda,l}^{in} + \frac{2g\lambda}{(\lambda+i\epsilon)^2-l^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}l'\; Q_{l-l'}\;\varphi_{\lambda,l'} \tag{2.32}$$

$$= \varphi_{\lambda,l}^{out} + \frac{2g\lambda}{(\lambda-i\epsilon)^2-l^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}l'\; Q_{l-l'}\;\varphi_{\lambda,l'} \;. \tag{2.33}$$

En toute généralité, ces équations ne peuvent plus amener à des relations analytiques entre les champs asymptotiques *in* et *out*. En effet, la non trivialité induite par Q nous empêche de resommer la série de Dyson définie par les Eqs.(2.20) et (2.21). Cependant, comme nous travaillons en théorie de perturbation, nous pouvons donner la matrice de transfert au premier ordre[6] de la constante de couplage g. On obtient :

$$\mathbf{T}_\lambda = g \begin{pmatrix} 1 & 2\pi\, Q^*_{2\lambda} \\ 2\pi\, Q_{2\lambda} & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.34}$$

Il est utile de prendre un exemple afin de comprendre l'effet de l'épaisseur sur les propriétés optiques du miroir. Prenons un miroir suivant la trajectoire $\rho = \rho_0$ dont l'épaisseur vaut 2σ. La fonction de largeur spatiale et ses composantes de Fourier valent :

$$Q(\rho) = \frac{1}{2\sigma}\,\Theta(\rho - (\rho_0 - \sigma))\Theta(\rho_0 + \sigma - \rho)\ ,\ Q_{2\lambda} = \frac{e^{2i\lambda\rho_0}}{2\pi}\,\frac{\sin(2\sigma\lambda)}{2\sigma\lambda} . \tag{2.35}$$

Les termes non-diagonaux de $\mathbf{T}$ traduisent la réflectivité pour un miroir infiniment fin, voir (2.30). Ainsi, il est intéressant de les comparer à ceux du miroir épais. Au premier ordre en g, on obtient :

$$\sigma = 0 \ \Rightarrow\ T^{UV} = g\, e^{+2i\lambda\rho_0} , \tag{2.36}$$

$$\sigma \neq 0 \ \Rightarrow\ T^{UV} = g\, e^{+2i\lambda\rho_0}\,\frac{\sin(2\sigma\lambda)}{2\sigma\lambda} . \tag{2.37}$$

Ainsi, on reconnaît le comportement classique d'un miroir physique. La diffusion des grandes longueurs d'onde[7] ($|\lambda| \ll 1/\sigma$) n'est pas influencée par l'épaisseur du miroir. Au contraire, cette dernière agit comme un cut-off ultra-violet dans le sens suivant : pour $|\lambda| \gg 1/\sigma$, le miroir est totalement transparent.

Remarque. On montre que cette propriété est conservée lorsque les formes $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_2$ sont utilisées. Ainsi, lorsqu'on choisit $\mathcal{F}_2$ dans le Lagrangien et que le miroir n'est pas infiniment fin, on s'affranchit respectivement des divergences infra-rouges et ultra-violettes dans la matrice de diffusion.

2.2 Lagrangiens dépendants du temps

Lorsque la fonction temporelle f n'est plus constante, la série de Dyson n'est généralement pas resommable. En cela, on retrouve un comportement similaire à que nous venons de voir pour les miroirs épais. En effet, la présence des coefficients de Fourier non triviaux f_λ rend la résolution des Eqs.(2.9) et (2.10) impossible en termes des fréquences propres, tout comme les coefficients Q_l empêchaient la résolution des Eqs.(2.20) et (2.21). De fait, comme les effets des fonctions spatiale et temporelle sont susceptibles de se mélanger, nous allons supposer une nouvelle fois que le miroir est infiniment fin afin de nous affranchir de la dépendance en Q. Ainsi, nous pourrons clairement isoler comment la dépendance temporelle traduite par f influe sur la radiation émise. Pour analyser ces conséquences, nous allons travailler perturbativement : toutes les valeurs moyennes d'observables seront évaluées au second ordre en g.

[6] Remarquons que comme cette matrice n'est donnée qu'au premier ordre en g, la matrice $\mathbf{S}$ qu'elle induit ne respecte plus l'unitarité qu'à cet ordre.

[7] λ est une fréquence et non une longueur d'onde.

2.2.1 Le flux en termes des amplitudes de transition

Par souci de simplicité, le traitement que nous allons effectuer va se faire en représentation d'interaction. Ceci revient à considérer que les opérateurs sont libres et que ce sont les états qui évoluent dans le temps. Ces hypothèses se résument ainsi. Φ obéit de nouveau à l'équation de d'Alembert (1.1). Les opérateurs asymptotiques *in* et *out* coïncident : nous les noterons donc a^j_ω et b^j_ω. Par conséquent, ils définissent un seul vide, le vide de Minkowski noté $|0\rangle$, tel que $a^j_\omega|0\rangle = 0$ et $b^j_\omega|0\rangle = 0$. Quant aux états, ils sont décrit temporellement grâce à l'opérateur d'évolution conventionnel :

$$|\Psi(t=+\infty)\rangle = T\, e^{iL_{int}}\, |\Psi(t=-\infty)\rangle \ , \tag{2.38}$$

où L_{int} est défini en (2.1) et où T signifie que cet opérateur est ordonné dans le temps. Notons que comme la trajectoire empruntée par le miroir est de genre temps, la coordonnée temporelle utilisée pour ordonner l'expression précédente est indifféremment τ, t, U ou V.

Notre but étant de pouvoir calculer des valeurs moyennes d'observables, et en particulier de comparer le flux émis par un miroir dans ce modèle à celui calculé au Chapitre précédent, nous choisissons de nous focaliser, dans un premier temps, sur le processus d'émission spontanée. Ainsi, l'état que nous allons étudier est vide de particules avant l'interaction, soit :

$$|\Psi(t=-\infty)\rangle = |0\rangle \ . \tag{2.39}$$

Que ce soit à cause de la non adiabaticité de la trajectoire, *i.e.* de son accélération, ou de la non stationnarité du couplage, *i.e.* $f(\tau) \neq 1$, cet état va évoluer en se peuplant de paires de particules/anti-particules. Ainsi, au second ordre en g, ce même état, exprimé en $t = +\infty$ vaut, d'après (2.38) :

$$|\Psi(t=+\infty)\rangle = |0\rangle - \sum_{i,j} \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\, (B^{ij}_{\omega\omega'} + C^{ij}_{\omega\omega'})\, a^{i\,\dagger}_\omega\, b^{j\,\dagger}_{\omega'}|0\rangle \ , \tag{2.40}$$

où

$$B^{ij}_{\omega\omega'} = -\langle 0|\, a^i_\omega\, b^j_{\omega'}\, iL_{int}\, |0\rangle = ig\, \langle 0|\, a^i_\omega\, b^j_{\omega'} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, f(\tau)\, \mathcal{F}(\tau) \right) |0\rangle \ , \tag{2.41}$$

$$C^{ij}_{\omega\omega'} = g^2\, \langle 0|\, a^i_\omega\, b^j_{\omega'} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau'\, f(\tau)\, f(\tau')\, \mathcal{F}(\tau)\, \mathcal{F}(\tau') \right) |0\rangle_c . \tag{2.42}$$

Plusieurs notations ont servi dans ces expressions. Rappelons tout d'abord que les fréquences ω, ω' ainsi que celles que nous utiliserons par la suite sont toutes des fréquences de Minkowski. Les indices i et j indiquent, comme auparavant, les particules gauchères V et droitières U. D'autre part, pour éviter de surcharger les expressions, nous n'avons pas spécifié la dépendance par rapport à la coordonnée spatiale ρ dans $\mathcal{F}$. Cette dépendance est implicite et la localisation de la densité Lagrangienne le long de la trajectoire impose $\rho = \rho_0$ partout. Les valeurs moyennes utilisant le symbole $\langle 0|...|0\rangle_c$ indiquent que l'expression ne comporte que des diagrammes connexes. Nous verrons par la suite que dans l'évaluation des valeurs moyennes d'observables, les diagrammes non connexes disparaissent conventionnellement sous l'effet d'un dénominateur[68].

Dans la suite, afin d'établir une concordance ostensible avec les résultats du Chapitre précédent, il sera également utile de noter d'une barre les amplitudes où particules et anti-particules ont échangé leur rôle. Les expressions obtenues sont trivialement reliées aux amplitudes de départ de la manière suivante :

$$\bar{B}^{ij}_{\omega\omega'} = B^{ji}_{\omega'\omega} \quad , \quad \bar{C}^{ij}_{\omega\omega'} = C^{ji}_{\omega'\omega} \ . \tag{2.43}$$

La donnée de l'état quand $t = +\infty$ va permettre le calcul du flux de particules/anti-particules droitières sur $\mathcal{J}^+_R$. L'opérateur correspondant, défini en (1.101), s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{UU}(U) &= \partial_U\Phi\partial_U\Phi^\dagger + \partial_U\Phi^\dagger\partial_U\Phi \\ &= \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}\left\{\left(a^U_{\omega'}\,e^{-i\omega' U} - b^{U\,\dagger}_{\omega'}\,e^{i\omega' U}\right)\left(a^{U\,\dagger}_{\omega}\,e^{i\omega U} - b^U_{\omega}\,e^{-i\omega U}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(b^U_{\omega'}\,e^{-i\omega' U} - a^{U\,\dagger}_{\omega'}\,e^{i\omega' U}\right)\left(b^{U\,\dagger}_{\omega}\,e^{i\omega U} - a^U_{\omega}\,e^{-i\omega U}\right)\right\} \qquad (2.44) \\ &= \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}\left\{e^{-iU(\omega'-\omega)}\left(a^U_{\omega'}\,a^{U\,\dagger}_{\omega} + a^{U\,\dagger}_{\omega}\,a^U_{\omega'} + b^U_{\omega'}\,b^{U\,\dagger}_{\omega} + b^{U\,\dagger}_{\omega}\,b^U_{\omega'}\right)\right. \\ &\quad \left. - e^{-iU(\omega'+\omega)}\,\left(a^U_{\omega'}\,b^U_{\omega} + b^U_{\omega'}\,a^U_{\omega}\right) - e^{iU(\omega'+\omega)}\,\left(a^{U\,\dagger}_{\omega'}\,b^{U\,\dagger}_{\omega} + b^{U\,\dagger}_{\omega'}\,a^{U\,\dagger}_{\omega}\right)\right\} \ . \qquad (2.45) \end{aligned}$$

Ainsi, sa valeur moyenne dans l'état $|\Psi(t=+\infty)\rangle$ vaut :

$$\begin{aligned} \langle T_{UU}(U)\rangle &= \langle\Psi(t=+\infty)|T_{UU}|\Psi(t=+\infty)\rangle_c - \langle\Psi(t=-\infty)|T_{UU}|\Psi(t=-\infty)\rangle \\ &= 2\mathrm{Re}\left[\iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}\left[e^{-iU(\omega'-\omega)}\sum_j\int_0^\infty \mathrm{d}k\,\left(B^{Uj\,*}_{\omega k}B^{Uj}_{\omega' k} + \bar{B}^{Uj\,*}_{\omega k}\bar{B}^{Uj}_{\omega' k}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + e^{-iU(\omega'+\omega)}\left(B^{UU}_{\omega\omega'} + \bar{B}^{UU}_{\omega\omega'} + C^{UU}_{\omega\omega'} + \bar{C}^{UU}_{\omega\omega'}\right)\right]\right] \ . \qquad (2.46) \end{aligned}$$

De même que pour (1.102), notons que nous avons soustrait la valeur moyenne du flux dans l'état initial, *i.e.* l'énergie de point zéro. Si le premier terme de (2.46) possède une ressemblance frappante avec celui de l'expression (1.105), il n'en est pas de même pour le second. Inspectons donc plus précisément ce dernier. Pour ce faire, il est judicieux de décomposer l'amplitude $C^{UU}_{\omega\omega'}$ en deux parties :

$$C^{UU}_{\omega\omega'} = R^{UU}_{\omega\omega'} + \langle 0|a^U_\omega b^U_{\omega'}\,\mathcal{D}|0\rangle_c \ , \tag{2.47}$$

où

$$R^{UU}_{\omega\omega'} = \frac{1}{2}\,\langle 0|a^U_\omega b^U_{\omega'}\,L_{int}\,L_{int}|0\rangle_c \ , \tag{2.48}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{g^2}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'\,f(\tau)\,f(\tau')\,sgn(\tau-\tau')\,\mathcal{F}(\tau)\,\mathcal{F}(\tau') \ , \\ &\text{avec} \quad sgn(\tau-\tau') = \theta(\tau-\tau') - \theta(\tau'-\tau) \ . \end{aligned} \tag{2.49}$$

Dans l'Appendice E, nous démontrons que la contribution du terme $\mathcal{D}$ au flux émis possède plusieurs propriétés notables. Tout d'abord, elle réside uniquement dans les transitoires

de $f(\tau)$. Ensuite, elle ne contient pas d'énergie. Enfin, ces deux propriétés sont vraies quelle que soit la trajectoire. Ce terme ne modifie donc pas le contenu physique du flux émis. Comme, de plus, les complications calculatoires qu'il induit sont non négligeables, nous n'allons pas tenir compte de sa contribution dans le reste de l'étude.

Par conséquent, il ne nous reste plus que le terme $R^{UU}_{\omega\omega'}$. Ce dernier étant la partie connexe d'une valeur moyenne, on peut rigoureusement l'exprimer en insérant entre les deux Lagrangiens le projecteur $\mathcal{P}$ suivant :

$$\mathcal{P} = \sum_{i,j} \iint_0^\infty \mathrm{d}k\, \mathrm{d}k'\; a^{i\,\dagger}_k\; b^{j\,\dagger}_{k'} |0\rangle\, \langle 0| a^i_k\; b^j_{k'}\;. \tag{2.50}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} R^{UU}_{\omega\omega'} &= \frac{1}{2}\, \langle 0| a^U_\omega b^U_{\omega'}\; L_{int}\, \mathcal{P}\; L_{int} |0\rangle_c \qquad (2.51)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_i \int_0^\infty \mathrm{d}k\; \langle 0| a^U_\omega\; (iL_{int})\; a^{i\,\dagger}_k |0\rangle_c\; B^{iU}_{k\omega'} + \sum_j \int_0^\infty \mathrm{d}k'\; \langle 0| b^U_{\omega'}\; (iL_{int})\; b^{j\,\dagger}_{k'} |0\rangle_c\; B^{Uj}_{\omega k'} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, compte-tenu des définitions (2.43), la parenthèse du second terme de (2.46) se réécrit :

$$B^{UU}_{\omega\omega'} + \bar{B}^{UU}_{\omega\omega'} + R^{UU}_{\omega\omega'} + \bar{R}^{UU}_{\omega\omega'} = \sum_j \int_0^\infty \mathrm{d}k\; \left(\bar{A}^{Uj\,*}_{\omega k}\; B^{Uj}_{\omega' k} + A^{Uj\,*}_{\omega' k}\; \bar{B}^{Uj}_{\omega k} \right)\;, \tag{2.52}$$

où

$$A^{ij\,*}_{\omega k} = \langle 0| a^i_\omega\; (1 + iL_{int})\; a^{j\,\dagger}_k |0\rangle_c \;\text{ et }\; \bar{A}^{ij\,*}_{\omega k} = \langle 0| b^i_\omega\; (1 + iL_{int})\; b^{j\,\dagger}_k |0\rangle_c\;. \tag{2.53}$$

Finalement, le flux porté par les quanta droitiers vaut :

$$\langle T_{UU} \rangle = \langle T_{UU} \rangle^{particule} + \langle T_{UU} \rangle^{anti-particule}\;, \tag{2.54}$$

où

$$\begin{aligned} \langle T_{UU} \rangle^{particule} &= \mathrm{Re}\Bigg[\sum_j \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\; \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \qquad (2.55)\\ &\qquad \left[e^{-i(\omega'-\omega)U} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}k\; B^{Uj\,*}_{\omega k}\; B^{Uj}_{\omega' k} \right) + e^{-i(\omega'+\omega)U} \left(\int_0^\infty \mathrm{d}k\; \bar{A}^{Uj\,*}_{\omega k}\; B^{Uj}_{\omega' k} \right) \right] \Bigg]\;, \end{aligned}$$

est celui des particules et où celui des anti-particules s'obtient en remplaçant $B^{Uj}_{\omega k}$ et $\bar{A}^{Uj\,*}_{\omega k}$ par $\bar{B}^{Uj}_{\omega k}$ et $A^{Uj\,*}_{\omega k}$.

2.2.2 Interprétation

Le flux trouvé dans le modèle Lagrangien au second ordre en g, *i.e.* l'Eq.(2.55), est fonctionnellement identique à celui trouvé dans le modèle généralisé de Davies-Fulling décrivant des miroirs partiellement réfléchissants, *i.e.* l'Eq.(1.105). Le passage entre les deux résultats s'opère en remplaçant les coefficients $\alpha^{Uj}_{\omega k}$ et $\beta^{Uj}_{\omega k}$ par les amplitudes de

transition $A^{Uj}_{\omega k}$ et $B^{Uj}_{\omega k}$. Cette correspondance renforce ainsi l'interprétation que nous avions donnée des coefficients de Bogoliubov lors de l'étude de la matrice $\hat{S}$.

En effet, pour obtenir clairement cette correspondance, notons tout d'abord que la matrice $\hat{S}$ développée précédemment n'est rien d'autre que l'opérateur d'évolution $T\, e^{iL_{int}}$ puisque son rôle est précisément de transformer les états asymptotiques passé en états asymptotiques futur. Puis, il nous faut remarquer que le premier ordre de la matrice de transfert dans le Chapitre précédent correspond au premier ordre en g ; pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la matrice $\mathbf{T}$ dans l'Eq.(2.34). Ainsi, pour relier les coefficients de Bogoliubov aux amplitudes de transition, il suffit de réécrire les Eqs. (1.98) et (1.99) au premier ordre :

$$\begin{aligned} \alpha^{ij\,*}_{\omega k} &= \frac{1}{Z}\,\langle 0^{in}|a^{i,in}_{\omega}\;\hat{S}\;a^{j,in\,\dagger}_{k}|0^{in}\rangle \\ &= \langle 0|a^{i}_{\omega}\;(1+iL_{int})\;a^{j\,\dagger}_{k}|0\rangle_{c} = A^{ij\,*}_{\omega k}\;, \end{aligned} \tag{2.56}$$

et

$$\begin{aligned} \beta^{ij}_{\omega k} &= -\frac{1}{Z}\,\langle 0^{in}|a^{i,in}_{\omega}b^{j,in}_{k}\;\hat{S}\;|0^{in}\rangle \\ &= -\langle 0|a^{i}_{\omega}\;b^{j}_{k}\;(1+iL_{int})|0\rangle_{c} = B^{ij}_{\omega k}\;. \end{aligned} \tag{2.57}$$

La correspondance entre les deux formalismes est claire : au premier ordre de la série de perturbation, les amplitudes de transition coïncident exactement avec les coefficients de Bogoliubov. De plus, on peut vérifier ici ce que nous avions affirmé sur le rôle de $Z = \langle 0^{out}|0^{in}\rangle$: la division par Z équivaut effectivement à la suppression des diagrammes non connexes.

Enfin, remarquons que le lien peut être également fait entre les précédents résultats et le modèle de Davies-Fulling original. En effet, lorsqu'on choisit la forme $\mathcal{F}_1$ et que l'on impose $f(\tau) = 1$, les amplitudes de transition sont trivialement reliées au coefficients de Bogoliubov donnés en (1.14) et (1.15) :

$$A^{UV}_{\omega k} = ig\;\tilde{\alpha}^{UV}_{\omega k}\quad,\quad B^{UV}_{\omega k} = ig\;\tilde{\beta}^{UV}_{\omega k}\;. \tag{2.58}$$

Une des conséquences de la généralité de cette équivalence est que seules les amplitudes de création de paire B interviennent dans la valeur moyenne du nombre de (anti-)particules créées et de l'énergie totale émise. Ainsi, tout comme en (1.110), on obtient :

$$\langle N^{U}_{\omega}\rangle = \sum_{j}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}k\,\left|B^{Uj}_{\omega k}\right|^{2}\quad,\quad \langle \bar{N}^{U}_{\omega}\rangle = \sum_{j}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}k\,\left|\bar{B}^{Uj}_{\omega k}\right|^{2} \tag{2.59}$$

$$\langle H_U\rangle = \int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\;\omega\;\left(\langle N^{U}_{\omega}\rangle + \langle \bar{N}^{U}_{\omega}\rangle\right)\;. \tag{2.60}$$

Comme précédemment, l'énergie est positive et ne s'annule que si aucune paire n'est créée. Notons que $\langle H_U\rangle$ est purement en g^2 alors que le flux défini en (2.55) possède une partie du premier ordre. Cependant, les amplitudes correspondantes étant facteurs de $e^{-iU(\omega'+\omega)}$, elles ne contribuent pas à l'énergie totale.

2.3 Miroir inertiel

Cette section a pour but de bien appréhender les effets de fonction temporelle f sur la radiation émise par le miroir. Ainsi, afin d'isoler clairement le rôle de f, nous allons nous affranchir des effets de la trajectoire. Pour ce faire, nous allons étudier la radiation d'un miroir inertiel. Le résultat principal que nous allons présenter est que la radiation est engendrée par les transitoires du couplage, *i.e.* dans un cas simple, l'allumage et l'extinction de la fonction f. Sans retrancher à la généralité[8], nous supposerons que le miroir est immobile : $z_{cl}(t) = 0$. Dans ces conditions, le temps propre de la trajectoire et celui de Minkowski coïncident.

Dans un premier temps, nous allons détailler la radiation engendrée par un tel miroir dans le vide, puis, afin de préparer l'étude des miroirs uniformément accélérés, nous calculerons le flux émis quand l'état initial est un bain thermique.

2.3.1 La radiation dans le vide

Dans cette sous-section l'état initial est le vide. Cela signifie que seuls les processus d'émission spontanée peuvent être la cause d'une radiation. De plus, comme nous l'avons déjà dit, la trajectoire est inertielle. En reprenant le langage du modèle de Davies-Fulling, ceci signifie que ses coefficients $\tilde{\beta}$ sont nuls. Ainsi, seule la dépendance temporelle du couplage peut engendrer des amplitudes B non nulles, *i.e.* créer des paires de particules. Nous allons expliciter cette dépendance en deux étapes. Premièrement, en calculant le nombre moyen de particules émises, nous allons voir comment f dicte le contenu fréquentiel du spectre émis. Deuxièmement, nous allons donner une formulation locale à ce flux en tant que fonctionnelle de f et de ses dérivées.

De plus, dans toute la suite, f ainsi que ses dérivées sont supposées décroître suffisamment rapidement pour les temps asymptotiquement grands. Faire cette supposition est d'abord motivé mathématiquement : cela équivaut à travailler avec des coefficients de Fourier finis et cela assure que l'intégrale sur le temps dans le Lagrangien (2.1) converge. Mais faire cette hypothèse émane également d'une motivation physique qui s'avèrera fondée par la suite : cela traduit le découplage adiabatique que nous avions du introduire "à la main" dans le Chapitre précédent afin de traiter tous les types de trajectoires.

Nombre moyen de particules émises

Etant données les conditions précédentes, il va être facile d'exprimer les amplitudes de transition en termes des coefficients de Fourier de la fonction f. Ces coefficients sont donnés conventionnellement par :

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \; f(t)\, e^{i\omega t} \; . \tag{2.61}$$

[8]En toute généralité, les trajectoires inertielles s'écrivent $z_{cl}(t) = vt + z_0$, avec $|v| < 1$ constante. Cependant, rappelons que f est une fonction du temps propre, et que les expressions que nous manipulons sont invariantes sous l'effet des éléments du groupe de Lorentz. Ainsi, toutes les quantités physiques, en particulier les valeurs moyennes d'observables, ne doivent donc pas dépendre de v et de z_0.

Ainsi, selon le choix de la forme $\mathcal{F}$, les amplitudes de transition définies en (2.41) et (2.53) s'expriment de la manière suivante :

$$A^{ij\,*}_{\omega\omega'} = \delta^{ij}\delta(\omega-\omega') - ig\,\frac{E_n(\omega,\omega')}{\sqrt{\omega\omega'}}\,f_{\omega-\omega'}\ , \tag{2.62}$$

$$B^{ij}_{\omega\omega'} = ig\,\frac{E_n(\omega,-\omega')}{\sqrt{\omega\omega'}}\,f_{\omega+\omega'}\ , \tag{2.63}$$

où

$$E_0(\omega,\omega') = 1 \quad \text{pour} \quad \mathcal{F}=\mathcal{F}_0\ , \tag{2.64}$$

$$E_1(\omega,\omega') = \frac{\omega+\omega'}{2} \quad \text{pour} \quad \mathcal{F}=\mathcal{F}_1\ , \tag{2.65}$$

$$E_2(\omega,\omega') = \omega\omega' \quad \text{pour} \quad \mathcal{F}=\mathcal{F}_2\ . \tag{2.66}$$

Un des inconvénients que présentait le modèle du Chapitre précédent était d'engendrer des coefficients de Bogoliubov qui divergent dans l'infra-rouge. Lors de l'étude des Lagrangiens indépendants du temps, nous avions souligné le caractère régulier à basses fréquences de la matrice de transfert pour le couplage $\mathcal{F}_2$, voir (2.29). On retrouve ici les mêmes comportements en inspectant le terme $\frac{E_n(\omega,\pm\omega')}{\sqrt{\omega\omega'}}$: les deux premiers choix de $\mathcal{F}$ fournissent des résultats singuliers dans l'infra-rouge alors que $\mathcal{F}_2$ permet de décrire un miroir transparent à basse fréquence, *i.e.* $A^{ij\,*}_{\omega\omega'} \simeq \delta^{ij}\delta(\omega-\omega')$ et $B^{ij}_{\omega\omega'} \simeq 0$ quand $\omega,\omega' \to 0$, et ceci, *indépendamment de* f. C'est pourquoi, dans la suite, nous n'allons utiliser que $\mathcal{F}_2$ dans le Lagrangien (2.1).

Etant donné ce choix, au second ordre en g, le nombre moyen de particules et d'anti-particules créées vaut, d'après (2.59) et (2.63) :

$$\langle N^U_\omega\rangle = 4g^2\,\omega\int_0^\infty \mathrm{d}\omega'\,\omega'\ |f_{\omega+\omega'}|^2\ . \tag{2.67}$$

Le facteur 4 provient de deux origines. Premièrement, particules et anti-particules contribuent à parts égales au flux émis, voir (2.43). Deuxièmement, l'amplitude de création de paires ne dépend pas des canaux U ou V. De plus, on retrouve bien évidemment dans cette formulation le fait que les miroirs stationnairement couplés au champ de radiation ne créent pas de particules puisqu'ils possèdent des coefficients de Fourier $f_{\omega>0}=0$.

Un exemple de fonction f

Pour pouvoir comprendre l'expression (2.67), prenons un exemple de fonction temporelle. Comme notre but est de décrire les effets transitoires associés à l'allumage et à l'extinction du couplage, nous allons choisir une fonction qui décroît exponentiellement vite au-delà d'un certain laps de temps et qui est quasiment constante à l'intérieur de cette plage :

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\tanh\left(\frac{t+T}{\Delta}\right) - \tanh\left(\frac{t-T}{\Delta}\right)\right)\ . \tag{2.68}$$

Il est facile de vérifier que cette fonction satisfait à la condition de normalisation (2.5). Le rôle de chaque paramètre est clairement défini (voir Fig.(2.1)) : la fonction f est

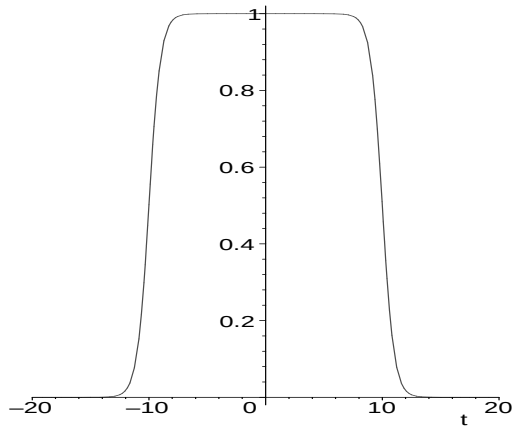

Fig. 2.1: La fonction $f(t)$ définie en (2.68) quand ses paramètres prennent les valeurs $T = 10$ et $\Delta = 1$. L'allumage du couplage a lieu entre $t \simeq -T - \Delta$ et $t \simeq -T + \Delta$. De même, l'extinction commence vers $t \simeq T - \Delta$ et se finit à $t \simeq T + \Delta$. Entre ces deux périodes $f(t) \simeq 1$ et au-delà $f(t) \simeq 0$.

quasiment constante pendant un temps de $2T$ (dans la limite $T \gg \Delta$) et les transitoires durent approximativement 2Δ. Ainsi, lorsque $\Delta \to 0$, f tend vers la fonction "porte" :

$$\lim_{\Delta \to 0} f(t) = \Theta(t+T) - \Theta(t-T) \ . \tag{2.69}$$

D'après (2.61), les coefficients de Fourier de f valent :

$$f_\omega = \frac{\Delta}{2} \, \frac{\sin(\omega T)}{\sinh(\pi \omega \Delta/2)} \ . \tag{2.70}$$

Comme le couplage dure $2T$, leur comportement asymptotique dans l'infra-rouge est donné par :

$$f_\omega \overset{\omega \to 0}{\to} \frac{2T}{2\pi} \ , \tag{2.71}$$

tandis que dans l'ultra-violet, on obtient :

$$f_\omega \overset{\omega \to +\infty}{\approx} \Delta \, \sin(\omega T) \, e^{-\pi \omega \Delta/2} \ . \tag{2.72}$$

La décroissance exponentielle ainsi soulignée est l'outil mathématique qui assurera la convergence des intégrales pour les hautes fréquences ; il est utile de remarquer que cette exponentielle s'exprime en fonction du temps qui indique les transitoires Δ et non de celui qui fixe la durée du couplage T.

Avec la fonction temporelle définie en (2.68), le nombre moyen de particules émises (2.67) vaut :

$$\langle N_\omega^U \rangle = \frac{g^2 \Delta^2}{2} \, \omega \int_0^\infty \mathrm{d}\omega' \, \omega' \, \frac{\sin^2\left((\omega+\omega')T\right)}{\sinh^2\left(\pi(\omega+\omega')\Delta/2\right)} \ . \tag{2.73}$$

Cette expression possède plusieurs propriétés intéressantes. La première est que la "règle d'or" n'est pas respectée, *i.e.* que le nombre moyen de particules émises ne satisfait pas à $\langle N_\omega^U \rangle \overset{T \to +\infty}{\propto} T$. Au contraire, lorsque la durée du couplage tend vers l'infini dans la limite

$T/\Delta \gg 1$, on montre[9] que $\langle N_\omega^U \rangle$ devient indépendant de T. Deuxièmement, on remarque que l'origine des propriétés optiques du miroir apparaît clairement dans l'expression (2.73). En effet, c'est parce que nous avons préféré $\mathcal{F}_2$ aux autres formes quadratiques que l'on trouve une densité de paires créées nulle dans l'infra-rouge :

$$\langle N_\omega^U \rangle \stackrel{\omega \to 0}{\to} 0 \ , \tag{2.74}$$

et c'est le choix de f qui induit une décroissance exponentielle dans l'ultra-violet :

$$\langle N_\omega^U \rangle \stackrel{\omega \to +\infty}{<} \frac{2g^2}{\pi^2}\, \omega\, e^{-\pi\omega\Delta} \ . \tag{2.75}$$

Troisièmement, comme le nombre moyen de particules s'annule aux deux extrémités du spectre, on peut penser qu'il possède un maximum. C'est effectivement le cas. Ce maximum est donné par $\omega_M \simeq 1/\Delta$ et est proportionnel à g^2/Δ. De plus, l'intégrand de $\langle N_{\omega_M}^U \rangle$ est lui aussi maximum pour $\omega' \simeq 1/\Delta$.

Ces propriétés indiquent clairement que le processus d'émission est engendré par les transitoires. En effet, le nombre de particules est indépendant de la durée du couplage lorsque celle-ci est très supérieure à celle des transitoires Δ et c'est précisément la fréquence associée à ces transitoires $1/\Delta$ qui domine le maximum et le comportement ultra-violet du spectre émis.

Remarque. Les résultats précédents peuvent nous permettre de répondre à la question suivante : Quelle(s) condition(s) portant sur la constante de couplage - dimensionnée - g garanti(ssen)t la validité du traitement perturbatif ? Cette discussion sortant légèrement du cadre de cette section, nous y répondons dans l'Appendice F.

Formulation locale

Maintenant que nous avons compris de quelle manière les transitoires dictent le contenu fréquentiel du spectre émis, nous allons voir comment ils influent sur la répartition spatio-temporelle du flux. Dans le Chapitre précédent, nous avions pu exprimer la valeur moyenne du flux comme une fonctionnelle de la trajectoire, à l'aide des fonctions de Wightman. Dans ce cette section, nous allons voir que ces mêmes fonctions vont nous permettre de décrire localement le flux comme une fonctionnelle de f.

Comme notre étude utilise la représentation d'interaction, à la différence des Eqs.(1.114) et (1.115), il n'existe qu'une seule fonction de Wightman :

$$\begin{aligned} W(U,V;U',V') &= \langle 0|\, \Phi^\dagger(U,V)\, \Phi(U',V')\, |0\rangle & (2.76)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\, \ln\{(U-U'-i\epsilon)(V-V'-i\epsilon)\} \ . & (2.77) \end{aligned}$$

Comme le Lagrangien formé avec $\mathcal{F}_2$ contient deux dérivées par rapport à t, nous allons avoir besoin de l'expression des dérivées de cette fonction. Elle s'obtiennent à partir de l'expression suivante :

$$\partial_U W(U,V;U',V') = -\frac{1}{4\pi}\, \frac{1}{(U-U'-i\epsilon)} \ . \tag{2.78}$$

[9] Sans recourir à des calculs fastidieux, on peut remarquer que, dans (2.73), T intervient uniquement dans le terme oscillant. Ainsi, même lorsque $T \to +\infty$, l'aire couverte par l'intégrand ne peut pas excéder celle de l'enveloppe déterminée par le terme $\frac{\omega'}{\sinh^2\left(\pi(\omega+\omega')\Delta/2\right)}$. On peut montrer qu'elle tend en fait vers sa moitié.

Lorsque l'on retire la contribution du terme $\mathcal{D}$, la valeur moyenne du flux dans le vide, au second ordre en g, vaut d'après (2.38) et (2.46) :

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}\rangle &= \langle 0|\Big(1 - i\,L_{int} - \tfrac{1}{2}\,L_{int}L_{int}\Big)\,T_{UU}\,\Big(1 + i\,L_{int} - \tfrac{1}{2}\,L_{int}L_{int}\Big)|0\rangle_c - \langle 0|T_{UU}|0\rangle \\ &= i\Big\{\langle 0|T_{UU}\,L_{int}|0\rangle_c - \langle 0|L_{int}\,T_{UU}|0\rangle_c\Big\} \qquad (2.79)\\ &\quad + \Big\{\langle 0|L_{int}\,T_{UU}\,L_{int}|0\rangle_c - \frac{1}{2}\,\Big(\langle 0|T_{UU}\,L_{int}\,L_{int}|0\rangle_c + \langle 0|L_{int}\,L_{int}\,T_{UU}|0\rangle_c\Big)\Big\}\,.\end{aligned}$$

Contrairement à la représentation du flux en fonction des amplitudes de transition (2.55), nous allons d'abord séparer les termes linéaires et quadratiques en g, puis nous les exprimerons en fonction des dérivées de W. En remarquant que les deux termes qui composent la partie linéaire en g du flux sont complexes conjugués, cette dernière est évidemment réelle et s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}\rangle_{lin} &= -2\,\mathrm{Im}\Big(\langle 0|T_{UU}\,L_{int}|0\rangle_c\Big) \qquad (2.80)\\ &= 8g\,\mathrm{Im}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\;f(t)\,\Big(\partial_U\partial_t W(U;t)\Big)^2\Big) \qquad (2.81)\\ &= -\frac{g}{12\pi}\,\partial_U^3 f\;. \qquad (2.82)\end{aligned}$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons d'abord intégré par parties à trois reprises. Les termes aux bords sont nuls puisque f et ses dérivées sont supposées décroître suffisamment rapidement. La dernière intégration s'opère grâce à la relation générique :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x \pm i\epsilon}\right) = \mp\,\pi\,\delta(x)\;. \qquad (2.83)$$

Ainsi, le terme linéaire s'exprime localement[10]. Le fait qu'il dépende de la dérivée troisième de f a deux conséquences majeures. Tout d'abord, comme prévu, quand le couplage est stationnaire, ce terme s'annule. Cela implique qu'il n'est significativement non nul que pendant les transitoires de f. Ensuite, il ne transporte pas d'énergie. Ceci coïncide avec la formulation (1.106), dans laquelle la partie linéaire apparaissait au travers des amplitudes A, voir (1.108), et ne participait pas à l'énergie totale $\langle H_U\rangle$.

[10]Le terme linéaire peut également être écrit sous la forme d'un commutateur :

$$\langle T_{UU}\rangle_{lin} = i\,\langle 0|[T_{UU}, L_{int}]|0\rangle_c\;.$$

Cependant, cette écriture induit des expressions divergentes. Cet effet vient de ce que les propriétés analytiques de la fonction de Wightman, qui proviennent de la prescription $i\epsilon$, disparaissent dans le commutateur. Cette prescription est capitale puisqu'elle équivaut à définir le contenu fréquentiel du vide. C'est par ce biais que les valeurs moyennes d'opérateurs prennent un sens mathématique. Ainsi, en effectuant d'abord la commutation, on obtiendrait un résultat infini. Le même phénomène advient dans l'étude du terme quadratique qui peut aussi s'écrire à l'aide de deux commutateurs :

$$\langle T_{UU}\rangle_{quadr} = -\frac{1}{2}\,\langle 0|\,[[T_{UU}, L_{int}], L_{int}]\,|0\rangle_c\;.$$

De même, pour ce terme, une seule commutation doit être faite au risque d'obtenir un résultat divergent.

Le terme quadratique, quant à lui, peut s'écrire de la manière suivante :

$$\langle T_{UU}\rangle_{quadr} = \mathrm{Re}\Big(\langle 0|L_{int}\,[T_{UU}, L_{int}]|0\rangle\Big)\ . \tag{2.84}$$

Dans un premier temps, évaluons le commutateur. En notant Φ^U la partie du champ qui s'exprime en fonctions des opérateurs a^U et $b^{U\,\dagger}$, on a la relation suivante :

$$[\partial_U \Phi^U(U), \partial_{U'}\Phi^{U\,\dagger}(U')] = -\frac{i}{2}\,\partial_{U'}\delta(U-U')\ . \tag{2.85}$$

De cette relation, on tire le résultat suivant :

$$[T_{UU}(U), \mathcal{F}_2(t)] \;=\; -i\,\partial_t\delta(U-t)\left\{\partial_U\Phi^{U\,\dagger}\,\partial_t\Phi + \partial_U\Phi^U\,\partial_t\Phi^\dagger + (h.c.)\right\}\ , \tag{2.86}$$

où $(h.c.)$ désigne l'opérateur hermitique conjugué. Ce résultat permet, en intégrant par parties sur t, de calculer le commutateur :

$$\begin{aligned}[T_{UU}, L_{int}] \;&=\; ig\,\partial_U f\left\{\partial_U\Phi^{U\,\dagger}\,\partial_t\Phi + \partial_U\Phi^U\,\partial_t\Phi^\dagger + (h.c.)\right\}\Big|_{t=U} \\ &\quad + ig\,f(U)\left\{\partial_U\Phi^{U\,\dagger}\,\partial_t^2\Phi + \partial_U\Phi^U\,\partial_t^2\Phi^\dagger + (h.c.)\right\}\Big|_{t=U}\ .\end{aligned} \tag{2.87}$$

En insérant (2.87) dans l'expression (2.84), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}\rangle_{quadr} \;&=\; 16g^2\,(\partial_U f)\,\mathrm{Re}\left(i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(t)\left(\partial_U\partial_t W(t,U)\right)^2\right) \qquad (2.88)\\ &\quad + 16g^2\,f(U)\,\mathrm{Re}\left(i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(t)\left(\partial_U\partial_t W(t,U)\right)\left(\partial_U^2\partial_t W(t,U)\right)\right) \\ &=\; -\frac{g^2}{12\pi}\left(2\,\partial_U f\,\partial_U^3 f + f\,\partial_U^4 f\right)\ . \qquad (2.89)\end{aligned}$$

Ainsi, la partie quadratique en g du flux s'exprime également de manière locale en fonction de f et de ses dérivées. Le fait qu'il n'y ait pas de terme en f^2 dans l'expression précédente permet, comme pour la partie linéaire, de vérifier que pour un couplage stationnaire, le flux émis est nul. De plus, l'analogie avec la formulation locale du Chapitre précédent (1.124) va plus loin puisque l'Eq.(2.89) peut se décomposer en deux termes : un premier terme qui ne porte pas d'énergie et un second qui définit une énergie totale positive. Ainsi, lorsqu'on rajoute le terme linéaire (2.80), le flux se décompose de la manière suivante :

$$\langle T_{UU}\rangle = \frac{g^2}{12\pi}\left(\partial_U^2 f\right)^2 - \frac{1}{12\pi}\,\partial_U\left[g\,\partial_U^2 f + g^2\left(\frac{1}{2}\partial_U^4(f^2) - \partial_U^2((\partial_U f)^2)\right)\right]\ . \tag{2.90}$$

Dans la figure (2.2), nous avons représenté sur un même graphique la fonction f ainsi que divers termes composant le flux émis. Cette figure souligne le fait que le flux n'est non négligeable qu'autour des transitoires.

L'énergie totale émise peut donc s'écrire de deux manières différentes. La première insiste sur le contenu fréquentiel des transitoires et s'écrit comme une intégrale sur les coefficients de Fourier de f et la seconde provient de la formulation spatio-temporelle du flux et se lit comme une intégrale sur la dérivée seconde de f :

$$\begin{aligned}\langle H_U\rangle \;&=\; \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \omega\,\langle N_\omega^U\rangle = 4g^2\iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\omega^2\omega'\ |f_{\omega+\omega'}|^2 \qquad (2.91)\\ &=\; \frac{g^2}{12\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}U\ \left(\partial_U^2 f\right)^2 = \frac{g^2}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \omega^2\ |f_\omega|^2\ . \qquad (2.92)\end{aligned}$$

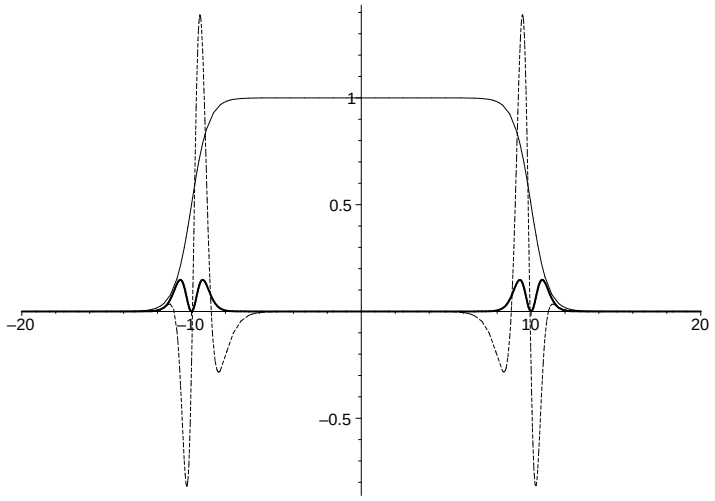

Fig. 2.2: La courbe fine en trait plein est la fonction temporelle définie en (2.68), quand ses paramètres prennent les valeurs $T = 10$ et $\Delta = 1$. La partie quadratique du flux est représentée en tirets, et en trait gras nous avons isolé le terme responsable de l'énergie totale. Pour ce dernier, on obtient deux zones formées de deux pics chacune (et non un seul) à cause du nombre (pair) de dérivées dans $\mathcal{F}_2$. Les deux courbes ont été tracées avec les mêmes unités (arbitraires).

De la première formulation, on apprend qu'une condition suffisante pour que l'énergie soit finie est que la décroissance dans l'ultra-violet de $\langle N_\omega^U \rangle$ soit au moins $1/\omega^{2+\epsilon}$. Cette condition est remplie lorsqu'on prend la fontion f définie en (2.68), voir (2.75). De plus, avec ce choix, on peut calculer analytiquement[11] l'énergie totale :

$$\langle H_U \rangle = \frac{2g^2}{45\pi} \frac{1}{\Delta^3} \Xi(T/\Delta) \ . \tag{2.93}$$

La propriété intéressante de ce résultat se lit sur la figure (2.3) : de même que le nombre de particules, l'énergie totale ne dépend plus de T lorsque $T \gg \Delta$.

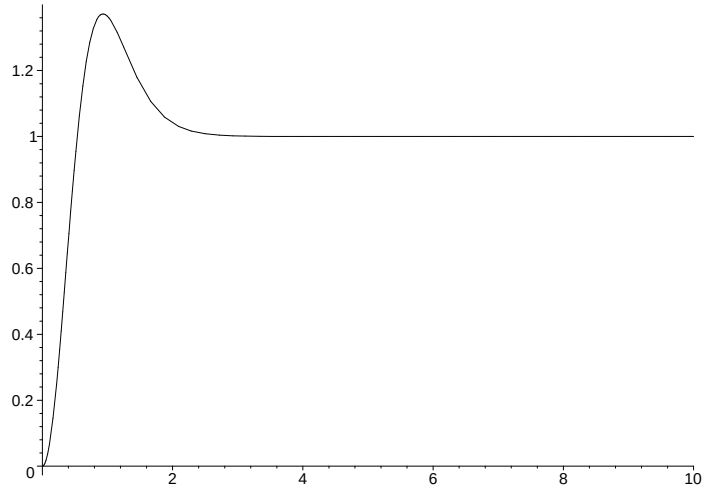

Fig. 2.3: La courbe représentée ici est la fonction $\Xi(T/\Delta)$ explicitée dans l'Appendice G. Quand T devient supérieur à quelques Δ, cette fonction sature à 1.

Ainsi, tant que le temps caractéristique des transitoires Δ diffère de zéro, il détermine la répartition du flux d'énergie ainsi que sa norme de manière univoque. Que se passe-t-il

[11] Voir Appendice G.

quand $\Delta \to 0$? La situation considérée correspond à celle étudiée en [74] et [75] à cause de l'analogie qu'elle présente avec le flux résiduel émis à la fin de l'évaporation d'un trou noir. Comme nous l'avons vu en (2.69), dans cette limite, f devient une fonction "porte". Cela a pour conséquence de concentrer le flux à l'intérieur de deux pics de largeur infiniment fine et de hauteur infiniment grande. De fait, $\langle T_{UU} \rangle$ ne doit plus être considéré comme une fonction mais plutôt comme une distribution. D'après (2.90), cette distribution est en quelque sorte "pire" qu'un δ de Dirac, ce qui implique l'absence de définition pour l'énergie totale $\langle H_U \rangle$. Ce qui est important de souligner, c'est que cette singularité n'est pas universelle. Elle dépend non seulement du nombre de dérivées dans $\mathcal{F}$ mais également de l'ordre en g auquel on effectue le calcul. Ainsi, il n'y a pas de réponse *a priori* à la question : qu'advient-il du flux lorsque la condition de réflexion sur le miroir disparaît ? La raison de ce *statu quo* est que la question est mal posée. Pour étudier la nature de la singularité que développe le flux dans ces conditions, il convient :

- d'abord, de choisir un Lagrangien dont la forme quadratique contient un nombre suffisant de dérivées par rapport au temps propre,
- puis, de considérer une fonction temporelle qui décroît suffisamment vite pour les temps asymptotiquement grands,
- enfin, de prendre la limite où le miroir devient, à partir d'un certain moment, totalement transparent.

2.3.2 La radiation dans un bain thermique

Suite au Chapitre précédent, voir (1.142), nous savons que les trajectoires uniformément accélérées présentent la dérangeante propriété de posséder d'une part, un flux nul, et d'autre part, des coefficients β tous non nuls. De plus, le nombre moyen de particules émises diverge. Forts de l'étude menée ci-dessus, nous pouvons raisonnablement mettre cette incohérence au profit des singularités de $\langle T_{UU} \rangle$. En effet, ces dernières n'apparaissent pas dans l'expression (1.124) et le modèle (même généralisé) de Davies-Fulling n'en a pas tenu compte.

Ici, au lieu de nous confronter directement à ces trajectoires, nous allons contourner le problème en étudiant le flux émis par un miroir inertiel placé dans un bain thermique. En effet, nous allons montrer dans le Chapitre suivant qu'il existe un isomorphisme important[60, 38] entre les deux situations suivantes :

- la radiation en termes de particules de Minkowski émises par un miroir immobile dans un bain à la température $\theta = a/2\pi$,
- et la radiation en termes de particules "propres" émises par un miroir soumis à une accélération uniforme a. Ces particules sont appelées particules de Rindler.

Cet effet est l'effet Unruh que nous avons mentionné en Introduction. Dans cette section, nous donnerons uniquement le traitement relatif au bain thermique et dans le prochain Chapitre, nous le traduirons en termes de flux de Rindler.

Par définition, un bain thermique à la température $\theta = 1/\beta$ est un état dont les éléments de la matrice densité sont diagonaux et valent :

$$\langle n; \omega, i | \hat{\rho} | n; \omega, i \rangle = (1 - e^{-\beta\omega})\, e^{-\beta\omega n} \ , \tag{2.94}$$

où l'on a utilisé la notation désignant l'état à n particules de fréquence ω, voir (1.47) :

$$|n; \omega, i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \, (a^{i\,\dagger}_{\omega})^n \, |0\rangle \ . \tag{2.95}$$

En l'absence de miroir, en se servant de l'Eq.(1.48), le nombre moyen de particules dans cet état est donné par :

$$\langle N_\omega^U \rangle = \mathrm{Tr}\Big(\hat{\rho}\, a_\omega^{U\,\dagger} a_\omega^U\Big) = \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\ . \tag{2.96}$$

Cet état est également défini par sa fonction de Wightman, dont la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}\partial_U W^\beta(U,V;U',V') &= \partial_U \mathrm{Tr}\Big(\hat{\rho}\,\Phi^\dagger(U,V)\,\Phi(U',V')\Big)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\pi}{\beta}\,\coth\Big(\frac{\pi}{\beta}(U-U'-i\epsilon)\Big)\ .\end{aligned} \tag{2.97}$$

Bien évidemment, dans la limite où la température tend vers 0, *i.e.* $\beta \to +\infty$, les Eqs.(2.94), (2.96) et (2.97) redonnent les résultats propres au vide, c'est-à-dire, respectivement, que le seul élément non nul de la matrice densité est $\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle = 1$, que $\langle N_\omega^U\rangle = 0$, et que la fonction de Wightman obéit à l'expression (2.76).

Grâce à la fonction de Wightman, nous sommes capables de calculer le flux émis en présence du miroir. Le calcul, moins trivial que celui effectué dans le vide, est présenté dans l'Appendice H. La méthode reste cependant identique à celle que nous venons de développer. On sépare d'abord les contributions linéaires et quadratiques :

$$\langle T_{UU}\rangle^\beta = \langle T_{UU}\rangle^\beta_{lin} + \langle T_{UU}\rangle^\beta_{quadr}\ , \tag{2.98}$$

avec

$$\langle T_{UU}\rangle^\beta_{lin} = 8g\,\mathrm{Im}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(t)\,\Big(\partial_U\partial_t W^\beta(U;t)\Big)^2\Big) \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}\text{et}\ \ \langle T_{UU}\rangle^\beta_{quadr} &= 16g^2\,(\partial_U f)\,\mathrm{Re}\Big(i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(t)\,\Big(\partial_U\partial_t W^\beta(t,U)\Big)^2\Big)\\ &\quad + 16g^2\,f(U)\,\mathrm{Re}\Big(i\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ f(t)\,\Big(\partial_U\partial_t W^\beta(t,U)\Big)\,\Big(\partial_U^2\partial_t W^\beta(t,U)\Big)\Big)\ .\end{aligned} \tag{2.100}$$

Puis, après avoir effectué les intégrales, on trouve le résultat suivant :

$$\langle T_{UU}\rangle^\beta = \langle T_{UU}\rangle - \Big(\frac{2\pi}{\beta}\Big)^2\,\Big[\frac{g}{12\pi}\,\partial_U f - \frac{g^2}{12\pi}\,\big(2(\partial_U f)^2 + f\partial_U^2 f\big)\Big]\ . \tag{2.101}$$

Le premier terme est la contribution du vide donnée en (2.90) et le deuxième s'annule naturellement quand la température tend vers zéro. A l'opposé, dans la limite des grandes températures, c'est ce terme qui domine l'expression du flux, puisque le rapport d'échelle entre les deux termes vaut $(\Delta/\beta)^2$. Remarquons que la partie thermique, à l'instar de la partie inhérente au vide, s'annule lorsque le couplage est stationnaire, *i.e.* $f(t) \equiv 1$. Une telle propriété implique qu'un miroir inertiel couplé uniformément au champ de radiation ne rayonne pas, même lorsqu'il est plongé dans un bain thermique. En termes des caractéristiques de la fonction de couplage temporel, cela implique que, même à grande température, ce sont toujours les transitoires de f, exprimées au travers de Δ, qui pilotent

la valeur du flux. Il en est de même pour l'énergie totale puisque la partie thermique du flux peut également s'écrire comme la somme d'une dérivée et d'un terme positif :

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}\rangle^{\beta} - \langle T_{UU}\rangle &= -\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \left[\frac{g}{12\pi}\,\partial_U f - \frac{g^2}{12\pi}\,\left(2(\partial_U f)^2 + f\partial_U^2 f\right)\right] \qquad (2.102)\\ &= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \frac{g^2}{12\pi}\,(\partial_U f)^2 - \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \partial_U\left[\frac{g}{12\pi}\,f - \frac{g^2}{12\pi}\,f\,\partial_U f\right].\end{aligned}$$

Ainsi l'énergie totale vaut :

$$\langle H_U\rangle^{\beta} = \langle H_U\rangle + \frac{g^2}{12\pi}\,\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\,(\partial_U f)^2\,. \qquad (2.103)$$

De même que la partie du vide, le terme thermique ne dépend pas de la durée du couplage dans la limite $T/\Delta \gg 1$; la différence avec (2.93) réside dans le fait que, dans cette limite, son comportement est conduit par $1/\Delta\beta^2$.

2.4 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons introduit un nouveau modèle pour décrire l'interaction entre le champ de radiation et un miroir. Ce modèle repose sur un Lagrangien qui possède plusieurs propriétés. Il permet :

- de choisir les propriétés dispersives du miroir en modifiant le nombre de dérivées du champ Φ dans $\mathcal{F}$,
- de décrire un miroir épais grâce à la fonction $Q(\rho)$,
- et de contrôler l'intensité du couplage le long de la trajectoire par le biais de la fonction temporelle $f(\tau)$.

Ce modèle reproduit les résultats que nous avons trouvés lors du Chapitre précédent en résolvant certains des problèmes listés dans la Conclusion. La correspondance entre les modèles de Davies-Fulling et Lagrangien se lit clairement au travers, d'une part, des Eqs.(2.54) et (2.55), qui donnent un flux d'énergie émise identique à celui du premier Chapitre, et d'autre part, des Eqs.(2.56) et (2.57), qui relient les amplitudes de transitions $A^{ij\,*}_{\omega k}$ et $B^{ij}_{\omega k}$ aux coefficients de Bogoliubov $\alpha^{ij\,*}_{\omega k}$ et $\beta^{ij}_{\omega k}$. Les problèmes résolus sont, premièrement, l'apparition de la causalité dans la formulation globale du flux, grâce à la fonction $\Lambda^{\pm}_{\epsilon}(\lambda)$ donnée en (2.22), et secondement, la possibilité explicite de découpler asymptotiquement le champ et le miroir par le biais de la fonction $f(\tau)$.

En considérant le flux émis par un miroir inertiel dans le vide, nous avons vu que les particules étaient créées non pas quand l'interaction était constante mais précisément à l'"allumage " et à l'"extinction" de cette dernière. De plus, en analysant le même phénomène dans un bain thermique, nous sommes arrivés à une conclusion identique. Ainsi, lorsque le couplage est uniforme, le flux émis est nul tout comme dans le vide ; par contre, lorsque l'interaction possède des transitoires, le flux correspondant est augmenté par l'effet de la température.

Dans la liste des problèmes soulevée à la fin du Chapitre précédent, restent ceux inhérents aux trajectoires uniformément accélérées. La résolution de ces problèmes est l'objet du Chapitre suivant.

Chapitre 3

Le Miroir Uniformément Accéléré

Tous les fleuves vont à la mer, et la mer n'en est pas remplie ;
vers l'endroit qui est assigné aux fleuves, ils dirigent invariablement leur cours.
Toutes choses sont toujours en mouvement, personne n'est capable d'en rendre compte ;
l'oeil n'en a jamais assez de voir, ni l'oreille ne se lasse d'entendre.

Kohelet $1.7 - 8$

Nous allons maintenant utiliser le modèle Lagrangien lorsque la trajectoire du miroir est uniformément accélérée, afin de répondre aux problèmes soulevés à la fin du premier Chapitre[1]. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux modes propres liés à la trajectoire. Les particularités du mouvement uniformément accéléré vont nous permettre de définir deux types de particules propres : les particules de Rindler et de Unruh. Ensuite, nous introduirons une nouvelle fonction de couplage temporel, paramétrée par l'accélération, ce qui nous permettra de régulariser les amplitudes de transition du Lagrangien. Ainsi, on obtiendra une expression régulière du flux d'énergie. Ceci fait, nous donnerons également une formulation locale au flux émis par un miroir uniformément accéléré. Nous conclurons ce Chapitre en résolvant les incohérences inhérentes à la radiation émise par deux miroirs uniformément accélérés symétriques.

3.1 Les différentes particules

3.1.1 Les particules de Rindler

Comme précédemment, nous allons considérer la branche de la trajectoire qui réside dans le quadrant L de Rindler. Soit, selon (1.142) :

$$V_{cl}(U) = -\frac{1}{a^2 U} \ , \ \ U \in]0, +\infty[\ . \tag{3.1}$$

Afin de construire les modes propres de la trajectoire uniformément accélérée, (ainsi que les particules qui leur sont associées) reprenons la démarche utilisée lors de la section 1.2.1 pour des trajectoires asymptotiquement inertielles. Les relations (1.56) et (1.57) permettent de définir les coordonnées de genre lumière dans le référentiel propre :

$$u_L \ = \ \frac{1}{a} \ln(aU) \ , \ \ \text{pour} \ \ U > 0 \ , \tag{3.2}$$

[1] Il existe une méthode *ad hoc* qui régularise le flux d'énergie émise, tout en gardant le formalisme de Davies-Fulling. Elle consiste à régulariser non pas l'interaction mais la trajectoire, de telle sorte que cette dernière soit asymptotiquement inertielle. Un exemple est présenté dans l'Appendice J.

$$v_L \;=\; -\frac{1}{a}\,\ln(-aV)\;,\quad \text{pour}\;\; V<0\;, \tag{3.3}$$

et, grâce aux définitions (1.54) et (1.55), on obtient :

$$\tau=\frac{1}{2a}\,\ln(-U/V)\;\;\text{et}\;\;\rho=-\frac{1}{2a}\,\ln(-a^2UV)\;. \tag{3.4}$$

Ainsi, le long de la trajectoire, les coordonnées propres valent :

$$\tau_{cl}(U)=u_L(U)\;\;,\;\;\tau_{cl}(V)=v_L(V)\;\;\text{et}\;\;\rho=0\;. \tag{3.5}$$

D'après (1.58) et (1.59), les modes propres tels que $i\partial_\tau=\lambda$ sont donnés par :

$${}^{L}\varphi^{U}_{\lambda}(u_L)=\frac{e^{-i\lambda u_L}}{\sqrt{4\pi\lambda}}=\Theta(U)\frac{(aU)^{-i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\;\;\text{et}\;\;{}^{L}\varphi^{V}_{\lambda}(v_L)=\frac{e^{-i\lambda v_L}}{\sqrt{4\pi\lambda}}=\Theta(-V)\frac{(-aV)^{i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\;, \tag{3.6}$$

où l'indice L a pour but de rappeler que ces modes décrivent des quanta causalement connectés à la trajectoire incluse dans ce quadrant. En effet, comme la trajectoire elle-même, les coordonnées précédemment définies ne couvrent qu'une partie de l'espace-temps de Minkowski. Par exemple, le flux porté par les particules droitières arrivant sur la partie $U<0$ de $\mathcal{J}^+_R$ ne peut pas être décrit par les modes propres (3.6). En symétrisant par rapport à l'origine des coordonnées $U=V=0$, on définit donc les coordonnées complémentaires suivantes :

$$u_R \;=\; -\frac{1}{a}\,\ln(-aU)\;,\quad \text{pour}\;\; U<0\;, \tag{3.7}$$

$$\text{et}\;\; v_R \;=\; \frac{1}{a}\,\ln(aV)\;,\quad \text{pour}\;\; V>0\;, \tag{3.8}$$

qui ne sont rien d'autre que les coordonnées propres[2] de la trajectoire uniformément accélérée dans le quadrant R. On tire de ces coordonnées les modes correspondants dans le quadrant R :

$${}^{R}\varphi^{U}_{\lambda}(u_R)=\frac{e^{-i\lambda u_R}}{\sqrt{4\pi\lambda}}=\Theta(-U)\frac{(-aU)^{i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\;\;\text{et}\;\;{}^{R}\varphi^{V}_{\lambda}(v_R)=\frac{e^{-i\lambda v_R}}{\sqrt{4\pi\lambda}}=\Theta(V)\frac{(aV)^{-i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\;. \tag{3.9}$$

Par définition, voir (1.29), ces deux familles de modes équivalent à deux familles de particules propres. Ainsi, le champ se décompose dans tout l'espace-temps de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(U,V) \;=\; \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\;\big(&{}^{L}a^{U}_{\lambda}\,{}^{L}\varphi^{U}_{\lambda}\;+\;{}^{L}a^{V}_{\lambda}\,{}^{L}\varphi^{V}_{\lambda}\;+\;{}^{R}a^{U}_{\lambda}\,{}^{R}\varphi^{U}_{\lambda}\;+\;{}^{R}a^{V}_{\lambda}\,{}^{R}\varphi^{V}_{\lambda}\\&+\;{}^{L}b^{U\,\dagger}_{\lambda}\,{}^{L}\varphi^{U\,*}_{\lambda}\;+\;{}^{L}b^{V\,\dagger}_{\lambda}\,{}^{L}\varphi^{V\,*}_{\lambda}\;+\;{}^{R}b^{U\,\dagger}_{\lambda}\,{}^{R}\varphi^{U\,*}_{\lambda}\;+\;{}^{R}b^{V\,\dagger}_{\lambda}\,{}^{R}\varphi^{V\,*}_{\lambda}\big)\;.\end{aligned} \tag{3.10}$$

[2] Remarquons que ces coordonnées définissent, au travers de (1.54), un temps propre $\tau=-\frac{1}{2a}\,\ln(-U/V)$. Si ce temps propre est l'opposé de ce que nous avons trouvé en (3.4), il a l'avantage d'être orienté, tout comme ce dernier, dans le sens des t croissants. En effet, si l'on impose la même formulation au temps propre sur les deux branches de trajectoire, l'une des deux sera obligatoirement orientée dans le sens des t décroissants. Pour éviter les problèmes liés à la causalité, nous choisissons donc de conserver cette notation, tout en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'une convention.

Comme nous l'avons fait dans le premier Chapitre, il est possible d'établir les relations de Bogoliubov entre les bases de Rindler et de Minkowski. Le but de cette de décomposition est essentiellement de connaître le contenu spectral de Minkowski des modes propres. En d'autres termes, nous voulons savoir de quel type de "vraies" (anti-)particules est constituée une particule de Rindler. Pour ce faire, il nous suffit de calculer les recouvrements des différents modes donnés par la matrice $\mathcal{B}_{k\lambda}$, voir (1.80). Par exemple, les deux types de particules droitières sont reliés par :

$$\Theta(U)\,\varphi^U_\omega = {}^L\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\,{}^L\varphi^U_\lambda \;+\; {}^L\beta^{UU}_{\omega\lambda}\,{}^L\varphi^{U\,*}_\lambda \quad\Rightarrow\quad {}^La^U_\lambda = {}^L\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\,a^U_\omega \;+\; {}^L\beta^{UU\,*}_{\omega\lambda}\,b^{U\,\dagger}_\omega \;, \tag{3.11}$$

$$\Theta(-U)\,\varphi^U_\omega = {}^R\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\,{}^R\varphi^U_\lambda \;+\; {}^R\beta^{UU}_{\omega\lambda}\,{}^R\varphi^{U\,*}_\lambda \quad\Rightarrow\quad {}^Ra^U_\lambda = {}^R\alpha^{UU}_{\omega\lambda}\,a^U_\omega \;+\; {}^R\beta^{UU\,*}_{\omega\lambda}\,b^{U\,\dagger}_\omega \;, \tag{3.12}$$

avec

$$\begin{aligned}
{}^L\alpha^{UU}_{\omega\lambda} &= \int_0^\infty \mathrm{d}U\,\frac{(aU)^{i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\,i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_U\,\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}} \\
&= -\frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{a}{\omega}\right)^{i\lambda/a}\Gamma\left(i\frac{\lambda}{a}\right)\,e^{\pi\lambda/2a}\;, \qquad (3.13a)\\
{}^L\beta^{UU}_{\omega\lambda} &= -\int_0^\infty \mathrm{d}U\,\frac{(aU)^{-i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\,i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_U\,\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}} \\
&= -\frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{a}{\omega}\right)^{-i\lambda/a}\Gamma\left(-i\frac{\lambda}{a}\right)\,e^{-\pi\lambda/2a}\;, \qquad (3.13b)\\
{}^R\alpha^{UU}_{\omega\lambda} &= \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}U\,\frac{(-aU)^{-i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\,i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_U\,\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}} \\
&= \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{a}{\omega}\right)^{-i\lambda/a}\Gamma\left(-i\frac{\lambda}{a}\right)\,e^{\pi\lambda/2a}\;, \qquad (3.13c)\\
{}^R\beta^{UU}_{\omega\lambda} &= -\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}U\,\frac{(-aU)^{i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda}}\,i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_U\,\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}} \\
&= \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}}\left(\frac{a}{\omega}\right)^{i\lambda/a}\Gamma\left(i\frac{\lambda}{a}\right)\,e^{-\pi\lambda/2a}\;. \qquad (3.13d)
\end{aligned}$$

A partir des relations précédentes, nous voyons que les particules de Rindler sont formées de particules ainsi que d'anti-particules de Minkowski de toutes fréquences. Ces relations permettent également de calculer le nombre de particules droitières de Rindler L dans le vide de Minkowski[3] :

$$\langle 0|{}^La^{U\,\dagger}_\lambda\,{}^La^U_{\lambda'}|0\rangle = \frac{\delta(\lambda-\lambda')}{e^{2\pi\lambda/a}-1}\;. \tag{3.14}$$

Ainsi, le vide de Minkowski est un bain thermique de particules (et d'anti-particules) de Rindler à la température $\theta = a/2\pi$. Un calcul similaire montre que le vide de Rindler est un bain thermique de particules de Minkowski à la même température. Appelons "observateur de Rindler", un observateur inertiel pour les coordonnées de Rindler. Par définition, il suit une trajectoire uniformément accélérée par rapport au référentiel de Minkowski. Nous

[3] Ce dernier est toujours noté $|0\rangle$, par opposition à l'état qui annule les opérateurs de Rindler, noté $|0\rangle^{R,L}$

comprenons alors l'intérêt de l'étude menée à la fin du Chapitre précédent : l'étude du flux de Minkowski pour un miroir inertiel dans un bain thermique équivaut à celle d'un miroir uniformément accéléré en termes des modes de Rindler. Nous utiliserons cette propriété quand nous calculerons le flux de Rindler.

Bien que possédant une formulation simple, les modes de Rindler présentent le désavantage d'être formés d'anti-modes de Minkowski, comme le soulignent les expressions (3.13b) et (3.13d). Ainsi, en utilisant des amplitudes de transition à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation de Rindler, on perd inévitablement le contenu en termes de particules de Minkowski. Nous allons donc présenter une troisième famille de modes qui sont également des modes propres de l'opérateur $i\partial_\tau$ mais qui ne possèdent que des fréquences de Minkowski positives : les modes de Unruh.

3.1.2 Les particules de Unruh

Les modes de Unruh, notés $\hat{\varphi}^U_\lambda$ and $\hat{\varphi}^V_\lambda$, avec $\lambda \in]-\infty, +\infty[$, possèdent plusieurs propriétés remarquables :

- Ils ne possèdent que des fréquences de Minkowski positives. Explicitement, cela signifie qu'ils s'écrivent selon les intégrales suivantes :

$$\hat{\varphi}^U_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \gamma^U_{\lambda\omega} \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}}\ ,$$

$$\text{avec}\ \ \gamma^U_{\lambda\omega} = \frac{\Gamma(i\lambda/a)}{\sqrt{\frac{a\pi}{\lambda \sinh(\pi\lambda/a)}}} \left(\frac{\omega}{a}\right)^{-i\lambda/a} \frac{e^{-\omega\epsilon}}{\sqrt{2\pi a\omega}}\ , \tag{3.15a}$$

$$\text{et}\ \ \hat{\varphi}^V_\lambda = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \gamma^V_{\lambda\omega} \frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}\ ,\ \ \text{avec}\ \ \gamma^V_{\lambda\omega} = \gamma^{U\,*}_{\lambda\omega}\ . \tag{3.15b}$$

- Ils sont des modes propres de l'opérateur $i\partial_\tau$. Cette propriété implique qu'ils s'expriment comme des simples combinaisons linéaires des modes de Rindler. De fait, on peut écrire les relations suivantes, pour $\lambda > 0$:

$$\hat{\varphi}^U_\lambda = \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi\lambda/a}-1}}\ {}^L\varphi^{U\,*}_\lambda + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\ {}^R\varphi^U_\lambda\ , \tag{3.16a}$$

$$\hat{\varphi}^U_{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\ {}^L\varphi^U_\lambda + \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi\lambda/a}-1}}\ {}^R\varphi^{U\,*}_\lambda\ , \tag{3.16b}$$

$$\hat{\varphi}^V_\lambda = \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi\lambda/a}-1}}\ {}^L\varphi^{V\,*}_\lambda + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\ {}^R\varphi^V_\lambda\ , \tag{3.16c}$$

$$\hat{\varphi}^V_{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\ {}^L\varphi^V_\lambda + \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi\lambda/a}-1}}\ {}^R\varphi^{V\,*}_\lambda\ . \tag{3.16d}$$

  Ces relations indiquent que ce sont les modes de Unruh possédant une fréquence λ négative qui peuplent majoritairement le quadrant L pour les grandes valeurs de $|\lambda|$.
- Ils peuvent s'écrire analytiquement. En effet, quel que soit le signe de λ, on a :

$$\hat{\varphi}^U_\lambda \ = \ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{[a(U-i\epsilon)]^{i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}}\ , \tag{3.17}$$

$$\hat{\varphi}^V_\lambda \ = \ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{[a(V-i\epsilon)]^{-i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda(1-e^{-2\pi\lambda/a})}}\ , \tag{3.18}$$

où la prescription analytique sur la coordonnée spatio-temporelle se lit de la manière suivante :

$$x \pm i\epsilon = \begin{cases} x \ , & \text{si } x > 0 \\ -x\, e^{\pm i\pi} \ , & \text{si } x < 0 \end{cases} \ . \tag{3.19}$$

- Les modes de Unruh gauchers et droitiers sont identiques le long de la trajectoire. En effet, à partir des Eqs.(3.5), (3.6), (3.9) et (3.16), on trouve directement que :

$$\hat{\varphi}^U_\lambda(U_{cl}(\tau)) = \hat{\varphi}^V_\lambda(V_{cl}(\tau)) = \frac{e^{i\lambda\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}} \ , \tag{3.20}$$

pour la trajectoire L, alors que le long de la trajectoire R, on obtient[4] :

$$\hat{\varphi}^U_\lambda(U_{cl}(\tau)) = \hat{\varphi}^V_\lambda(V_{cl}(\tau)) = \frac{e^{-i\lambda\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda(1-e^{-2\pi\lambda/a})}} \ . \tag{3.21}$$

A l'aide de ces modes, on définit canoniquement des opérateurs de création et d'annihilation, ce qui permet de décomposer le champ de radiation comme suit :

$$\Phi(U,V) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \, \left(\hat{a}^U_\lambda \, \hat{\varphi}^U_\lambda \, + \, \hat{a}^V_\lambda \, \hat{\varphi}^V_\lambda \, + \, \hat{b}^{U\,\dagger}_\lambda \, \hat{\varphi}^{U\,*}_\lambda \, + \, \hat{b}^{V\,\dagger}_\lambda \, \hat{\varphi}^{V\,*}_\lambda \right) \ . \tag{3.22}$$

Il est important de remarquer que, comme les particules de Unruh ne contiennent pas d'anti-particules de Minkowski, le vide pour les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ est le vide de Minkowski $|0\rangle$.

3.2 La fonction de couplage temporel

Quelle que soit la famille de particules choisie, si le couplage entre le champ de radiation et le miroir est stationnaire, les amplitudes de transition et les coefficients de Bogoliubov donnés en (1.145) sont identiques, voir (2.56) et (2.57). Ils présentent donc les mêmes pathologies. Afin d'obtenir des amplitudes régulières, il nous faut donc allumer et éteindre ce couplage adiabatiquement, comme nous l'avons fait pour le miroir inertiel au Chapitre précédent. Cette condition équivaut à choisir une fonction adéquate du temps propre, que nous noterons $\tilde{f}(\tau)$. De même que pour la fonction $f(t)$ définie en (2.68), la fonction de couplage temporel $\tilde{f}(\tau)$ doit posséder les propriétés suivantes. Elle doit être suffisamment régulière : au vu des Eqs.(2.89) et (2.101), cela signifie qu'elle doit être continue et dérivable à l'ordre 4 au moins. De plus, afin de pouvoir traduire un découplage adiabatique entre le champ de radiation et le miroir, elle doit être quasiment constante pendant un laps de temps (plateau), puis décroître suffisamment rapidement en dehors de cette période.

3.2.1 Choix de $\tilde{f}$ - Rôle physique

L'argument de $\tilde{f}$ étant le temps propre τ, la fonction doit être paramétrée par l'accélération a. Notre choix se porte sur :

$$\tilde{f}(\tau) = e^{-2\eta \, \cosh(a\tau)} \ . \tag{3.23}$$

[4] La différence de signe $\pm i\lambda\tau$ entre (3.20) et (3.21) fait écho à la remarque que nous avons faite dans la note (2). En effet, rappelons que le temps propre en tant que fonctionnelle des coordonnées de Minkowski U et V possède deux expressions opposées selon que la trajectoire réside en L ou en R.

Dans cette expression, η est un réel positif sans dimension. Afin que la durée du plateau soit grande par rapport à celle des transitoires, comme pour f donnée en (2.68), ce paramètre doit satisfaire : $0 < \eta \ll 1$. Les caractéristiques de cette fonction sont les suivantes

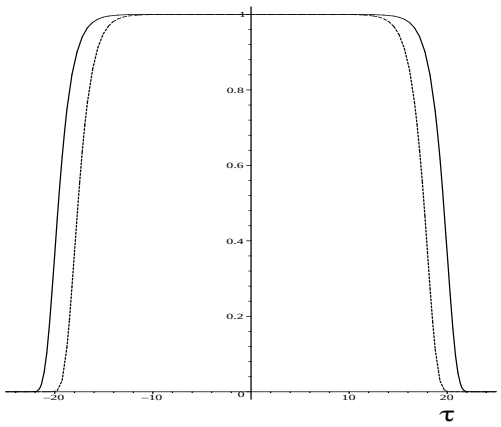

Fig. 3.1: Dans cette figure, nous avons tracé la fonction temporelle $\tilde{f}(\tau)$ pour deux valeurs du paramètre η mais pour la même valeur de l'accélération, posée à $a = 1$. La courbe en trait plein correspond à $\ln \eta = -20$ et celle en pointillés, à $\ln \eta = -18$. On voit clairement que la durée du plateau est linéaire en $\ln \eta$, comme le prévoit (3.24), alors que la pente des transitoires ne dépend pas de ce paramètre, voir (3.25).

(voir figure (3.1)) :

- Elle possède un plateau de hauteur $e^{-2\eta} \simeq 1$ autour de la valeur $\tau = 0$. La largeur de ce plateau en temps propre est donnée par :

$$2T \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \ \tilde{f}(\tau) = \frac{2}{a} K_0(2\eta) \simeq \frac{2|\ln(\eta)|}{a} \ . \tag{3.24}$$

- Ce plateau se termine par des courbes dont la pente maximale est donnée par :

$$\max |\partial_\tau \tilde{f}| \simeq \frac{a}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \tau \simeq \pm T \ . \tag{3.25}$$

  Il est remarquable de noter que cette pente ne dépend pas du paramètre régulateur η mais uniquement de l'accélération : ceci aura des conséquences importantes sur la valeur du flux de Rindler.
- La longueur des transitoires est de quelques $1/a$. En effet, soient τ_1 et τ_2 les temps propres (positifs) pour lesquels la fonction $\tilde{f}$ vaut respectivement les fractions ϵ et $1 - \epsilon$ de sa valeur maximale :

$$\tilde{f}(\tau_1) = e^{-2\eta}\,(1-\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \tau_1 \simeq \frac{1}{a} \ln(\epsilon/\eta) \ , \tag{3.26}$$

$$\tilde{f}(\tau_2) = e^{-2\eta}\,\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tau_1 \simeq \frac{1}{a} \ln(|\ln \epsilon|/\eta) \ . \tag{3.27}$$

  Les transitoires ont pour durée l'intervalle de temps entre τ_1 et τ_2 qui est donné, pour $\epsilon = 0.1$ %, par :

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{a} \ln(|\ln \epsilon|/\epsilon) \simeq \frac{8.8}{a} \ . \tag{3.28}$$

  Ainsi, imposer que la durée du plateau soit grande devant celle des transitoires équivaut à la condition plus restrictive $2T \gg (\tau_2 - \tau_1) \ \Leftrightarrow \ |\ln \eta| \gg 1$.

– Après ces transitoires, la fonction décroît exponentiellement vite :

$$\tilde{f}(\tau) \overset{|\tau|\to+\infty}{\simeq} e^{-\eta e^{a|\tau|}} \ . \tag{3.29}$$

Nous verrons par la suite que cette décroissance est suffisamment prononcée pour pouvoir obtenir une énergie totale finie.

En plus des conditions portant sur le comportement spatio-temporel de $\tilde{f}$, nous savons que la régularité de l'énergie et du flux s'exprime également au travers de conditions portant sur ses coefficients de Fourier, voir (2.91). Dans notre cas, ces coefficients valent :

$$\tilde{f}_\lambda \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \ e^{-2\eta\cosh(a\tau)} e^{i\lambda\tau} = \frac{1}{a\pi} K_{i\lambda/a}(2\eta) \tag{3.30}$$

$$|\tilde{f}_\lambda| \overset{\lambda\to\infty}{\sim} \frac{1}{a}(a/\lambda)^{1/2} e^{-\pi\lambda/2a} \ . \tag{3.31}$$

Comme la pente maximale de la fonction $\tilde{f}$ est indépendante du régulateur η, il n'est pas surprenant qu'il en soit de même pour le comportement ultra-violet de ses coefficients.

3.2.2 Rôle mathématique

En termes des coordonnées de Minkowski le long de la trajectoire (3.5), l'Eq.(3.23) se réécrit :

$$\tilde{f}(\tau) = e^{-\eta(aU_{cl}(\tau)+1/aU_{cl}(\tau))} = e^{\eta(aV_{cl}(\tau)+1/aV_{cl}(\tau))} \ . \tag{3.32}$$

Cette réécriture permet de donner à la fonction temporelle le rôle d'un régulateur mathématique. Afin de prouver cette propriété, considérons, par exemple, l'amplitude de création de paire $B^{UV}_{\omega\omega'}$:

$$\begin{aligned} B^{UV}_{\omega\omega'} &= ig\,\langle 0|\, a^U_\omega\, b^V_{\omega'} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\ \mathcal{F}_2(\tau)\ \tilde{f}(\tau)\right)|0\rangle \\ &= -\frac{ig\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi a}\int_0^\infty \mathrm{d}U\ e^{i\omega U - i\omega'/a^2U}\ e^{-\eta aU}\ \frac{e^{-\eta/aU}}{U} \qquad (3.33) \\ &= -\frac{ig\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi a}\int_0^\infty \mathrm{d}U\ \frac{1}{U}\ e^{i(\omega+ia\eta)U - i(\omega'-ia\eta)/a^2U} \ . \qquad (3.34) \end{aligned}$$

L'Eq.(3.33) montre que c'est le paramètre η qui permet l'intégrabilité au sens de Riemann de l'amplitude de transition en régularisant l'intégrand à ses deux bornes. Quant à (3.34), elle semble indiquer que, pour $\eta \to 0^+$, le régulateur a également pour vocation de définir le comportement analytique des fréquences de Minkowski. Nous reviendrons plus en détail sur cet aspect dans la prochaine section.

Avant d'expliciter les amplitudes de transition régularisées, il est utile de remarquer que la réécriture (3.32) permet également de donner les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ en termes des fréquences de Minkowski :

$$\tilde{f}_\omega \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}U\ e^{-\eta(aU+1/aU)} e^{i\omega U} = -\frac{1}{a\pi}\frac{1}{\sqrt{1-i\omega/a\eta}} K_1(2\eta\sqrt{1-i\omega/a\eta}) \tag{3.35}$$

$$\text{et} \qquad |\tilde{f}_\omega| \overset{\omega\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a}(a/\omega)^{3/4}\eta^{1/4} e^{-\sqrt{2\omega\eta/a}} \ . \tag{3.36}$$

A l'inverse de (3.31), on peut remarquer que la décroissance ultra-violette de $\tilde{f}_\omega$ est dictée par le paramètre η : nous interpréterons cette dépendance lorsque nous calculerons l'énergie totale dans la limite où η tend vers zéro.

3.3 Les amplitudes de transition régularisées

3.3.1 En termes des particules de Minkowski

Nous allons maintenant voir de quelle manière le choix conjoint de la forme quadratique $\mathcal{F}_2$ et de la fonction temporelle $\tilde{f}(\tau)$ définie en (3.23) permet au Lagrangien de posséder des amplitudes de transitions régulières. Régulières signifie que, par ce biais, nous allons répondre aux problèmes soulevés à la fin du premier Chapitre (remarque c)).

Afin de comprendre l'effet de chaque terme du Lagrangien, nous allons d'abord donner les amplitudes non régulières correspondant aux résultats de Davies et Fulling. Comme nous le savons déjà, les coefficients de Bogoliubov (1.145) pour un miroir parfait et uniformément accéléré sont égaux, au facteur ig près, aux amplitudes de transition pour le Lagrangien possédant les propriétés suivantes : $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ et $f(\tau) \equiv 1$, voir (2.56) et (2.57). Le fait de ne pas choisir le courant de Noether mais la forme quadratique $\mathcal{F}_2$ a été motivé par la volonté de se débarrasser des divergences infra-rouges (non physiques car dues à l'utilisation de quanta non massifs). Dans ces conditions, lorsque le couplage est encore considéré comme uniforme, les amplitudes de transitions valent :

$$A^{UU\,*}_{\omega\omega'} \longrightarrow \delta(\omega-\omega') + \frac{ig}{2\pi}\, a\, \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{(\omega-\omega')^2}\ , \tag{3.37a}$$

$$B^{UU}_{\omega\omega'} \longrightarrow \frac{ig}{2\pi}\, a\, \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{(\omega+\omega')^2}\ , \tag{3.37b}$$

$$A^{UV\,*}_{\omega\omega'} \longrightarrow -\frac{ig}{\pi}\, \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}\, K_0(-2i\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a})\ , \tag{3.37c}$$

$$B^{UV}_{\omega\omega'} \longrightarrow -\frac{ig}{\pi}\, \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}\, K_0(2\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a})\ . \tag{3.37d}$$

Si les divergences infra-rouges ont effectivement disparu pour les amplitudes de réflexion (UV), elles existent encore pour celles qui traduisent la transmittivité (UU). De plus, les autres griefs que nous reprochions aux α, β persistent encore : à savoir, la divergence de $A^{UU\,*}_{\omega\omega'}$ lorsque $\omega = \omega'$ et l'absence de définition pour l'argument de la fonction de Bessel dans $A^{UV\,*}_{\omega\omega'}$. Comme nous travaillons dans le contexte de la théorie des champs, nous pouvons rajouter aux problèmes ci-dessus l'absence de symétrie entre les amplitudes A et B (*crossing symmetry*).

L'apport du régulateur η va résoudre tous ces problèmes. Explicitement, lorsque l'interaction miroir/radiation est découplée adiabatiquement par $\tilde{f}$, on trouve :

$$A^{UU\,*}_{\omega\omega'} = \delta(\omega-\omega') - \frac{4ig}{\pi}\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}\frac{\eta^2}{X^2}K_2(X)\ , \tag{3.38a}$$

$$\text{où}\quad X = 2\eta\sqrt{1 - i(\omega-\omega')/a\eta}\ ,$$

$$B^{UU}_{\omega\omega'} = -\frac{4ig}{\pi}\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}\frac{\eta^2}{X'^2}K_2(X')\ , \tag{3.38b}$$

$$\text{où} \quad X' = 2\eta\sqrt{1 - i(\omega + \omega')/a\eta} \ ,$$

$$A^{UV\,*}_{\omega\omega'} = -\frac{ig}{\pi}\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}K_0(Y) \ , \tag{3.38c}$$

$$\text{où} \quad Y = 2\sqrt{(\omega/a + i\eta)(-\omega'/a - i\eta)} \ ,$$

$$B^{UV}_{\omega\omega'} = -\frac{ig}{\pi}\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}K_0(Y') \ , \tag{3.38d}$$

$$\text{où} \quad Y' = 2\sqrt{(\omega/a + i\eta)(\omega'/a - i\eta)} \ .$$

Il est facile de vérifier que :

$$A^{UU\,*}_{\omega\omega'} - \delta(\omega - \omega') \overset{\omega' \to \omega}{\to} -\frac{ig}{\pi a}K_2(2\eta)\,\omega \ , \tag{3.39}$$

qui est fini, et que l'argument Y de la fonction de Bessel dans $A^{UV\,*}_{\omega\omega'}$ est correctement défini. Enfin, les amplitudes de transition sont maintenant reliées analytiquement par la relation suivante :

$$A^{ij\,*}_{\omega\omega'} = B^{ij}_{\omega,\omega' e^{i\pi}} \ . \tag{3.40}$$

(Voir [53], où une relation analogue émerge pour les amplitudes d'un détecteur uniformément accéléré. Nous reviendrons plus tard sur cette similarité.)

Rajoutons que, lorsque le miroir se déplace dans le quadrant R, les amplitudes de transition s'obtiennent très simplement en remplaçant η par $-\eta$; une telle correspondance se comprend aisément en inspectant la réécriture de $\tilde{f}$ donnée en (3.32). Il est important de souligner que cette correspondance n'a pas lieu pour les amplitudes non régulières (3.37) puisqu'elles gardent la même expression, que le miroir se déplace dans le quadrant L ou le quadrant R.

Cependant, ce ne sont pas ces amplitudes de transition qui vont nous servir à exprimer le flux d'énergie émis sur $\mathcal{J}^+_R$. La raison est qu'elles ne permettent pas de comprendre simplement quelle est la répartition spectrale des particules qui contribuent à l'énergie totale (1.111). Les amplitudes de transition en termes des particules de Rindler, bien que très faciles à exprimer[5] souffrent elles aussi de ce problème. C'est pourquoi nous allons définir des amplitudes "mixtes" qui vont nous permettre de comprendre quelles sont les fréquences qui participent au flux du champ de radiation.

3.3.2 Les amplitudes "mixtes" et le détecteur uniformément accéléré

Afin de conserver les notions de particules et d'anti-particules ces amplitudes ne vont pas mélanger les quanta de Minkowski et de Rindler mais de Minkowski et de Unruh. En effet, nous avons vu précédemment que les particules de Unruh ne sont constituées que de

[5]Les amplitudes de transitions en termes des particules de Rindler s'expriment très simplement en fonction des coefficients de Fourier $\tilde{f}_\lambda$ (3.30). Nous avons déjà effectué ce calcul : en effet, la diffusion des particules de Rindler par un miroir uniformément accéléré est identique à celle des particules de Minkowski par un miroir inertiel. Les amplitudes de transition recherchées s'écrivent donc en remplaçant ω et ω' par λ et λ' dans (2.62) et (2.63).

particules de Minkowski, voir (3.15). Les amplitudes de transition correspondantes sont donc définies par :

$$A^{ij\,*}_{\omega\lambda} \equiv \langle 0|a^i_\omega\,(1+iL_{int})\,\hat{a}^{j\,\dagger}_\lambda|0\rangle_c\ , \tag{3.41}$$

$$B^{ij}_{\omega\lambda} \equiv -\langle 0|\ a^i_\omega\,\hat{b}^j_\lambda\ iL_{int}\ |0\rangle\ . \tag{3.42}$$

De plus, comme les modes de Unruh gauchers et droitiers sont identiques le long de la trajectoire uniformément accélérée, voir (3.20), l'indice relatif à la particule correspondante est indifféremment U ou V dans l'expression des amplitudes, hormis pour le terme trivial en δ. La radiation émise sur $\mathcal{J}^+_R$ est donc décrite entièrement à l'aide des deux amplitudes suivantes :

$$A^{UV\,*}_{\omega\lambda} = -\frac{ig}{\pi a}\sqrt{\frac{\omega\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\,(1-i\omega/a\eta)^{-(1-i\lambda/a)/2}\,K_{1-i\lambda/a}(2\eta\sqrt{1-i\omega/a\eta}) \tag{3.43}$$

$$B^{UV}_{\omega\lambda} = -\frac{ig}{\pi a}\sqrt{\frac{\omega\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\,(1-i\omega/a\eta)^{-(1+i\lambda/a)/2}\,K_{1+i\lambda/a}(2\eta\sqrt{1-i\omega/a\eta}) \tag{3.44}$$

Bien évidemment, tout comme les amplitudes de la section précédente, les amplitudes mixtes sont régulières grâce au paramètre η. De plus, elles permettent de définir un nombre de particules et une énergie finis. Sans démonstration, on peut s'en convaincre en remarquant que, comme ces amplitudes sont fonctionnellement un mélange des composants de Fourier de $\tilde{f}$, (3.30) et (3.35), elles en possèdent également les propriétés asymptotiques.

Deux raisons distinctes ont motivé le choix de telles amplitudes. D'abord, comme nous allons le voir dans la prochaine section, il va être possible grâce à elles d'inspecter le contenu particulaire de l'énergie reçue sur $\mathcal{J}^+$. La seconde raison est qu'elles permettent une analogie directe avec les amplitudes de transition d'un détecteur uniformément accéléré.

Le modèle du détecteur[52, 32, 53] est plus simple que celui du miroir. On appelle "détecteur" un atome à deux niveaux, notés $|+\rangle$ et $|-\rangle$, séparés par un gap en énergie m. A l'instar du miroir, cet atome suit une trajectoire de genre temps. L'interaction détecteur/champ de radiation $L_{detecteur}$ diffère de l'interaction miroir/champ de radiation (2.1) uniquement au travers de la forme quadratique :

$$\mathcal{F}(\tau) \Rightarrow \partial_\tau\Phi^\dagger\,e^{-im\tau}\,|-\rangle\langle+| \quad + \quad \partial_\tau\Phi\,e^{im\tau}\,|+\rangle\langle-|\ . \tag{3.45}$$

Comme on a rajouté une source extérieure, l'espace de Fock s'élargit. Les amplitudes de transition dépendent donc des quanta créés ou diffusés mais aussi de l'état du détecteur. Quand celui-ci suit une trajectoire uniformément accélérée, il est facile de voir que, par exemple, l'amplitude d'émission spontanée[6] est reliée aux amplitudes que nous venons de définir de la manière suivante :

$$M^{-\to+}_\omega \equiv \langle+|\langle 0|b^U_\omega\ iL_{detecteur}|0\rangle|-\rangle = \frac{1}{\omega\sqrt{m}}\ B^{UV}_{\omega\lambda}\big|_{\lambda=m}\ . \tag{3.46}$$

De même que pour le miroir, c'est la fonction de couplage temporel qui assure la régularité des amplitudes de transition dans l'étude du détecteur uniformément accéléré. Ainsi, toute la discussion qui va suivre peut être intégralement traduite pour ce modèle. En particulier,

[6]Pour un détecteur accéléré, une bonne analyse des processus d'émission stimulée est faite dans [76].

le domaine des fréquences de Minkowski qui contribuent à l'énergie émise est identique pour les deux modèles (voir Eqs.(2.62) et (2.63) dans [32] ainsi que la discussion qui suit). Dans l'expression (3.46), il est important de remarquer que les paires créées sont formées d'une (anti-)particule et d'un (des-)exciton du détecteur. Tout se passe comme si les seuls processus autorisés étaient à fréquence de Unruh fixée $\lambda = m$. Réciproquement, en représentation mixte, le miroir se comporte comme un ensemble de détecteurs pour lesquels le gap m prend toutes les valeurs de l'axe réel.

3.4 Quelles sont les particules qui participent à l'énergie ?

Dans la prochaine section, nous donnerons la valeur exacte de l'énergie à partir d'une formulation locale. Dans celle-ci, nous allons en faire un calcul approximatif afin de répondre à la question ci-dessus. Avant cela, rappelons ce qui se passe lorsque le couplage est constant. Pour ce faire, les résultats du modèle de Davies-Fulling sont suffisants. L'Eq.(1.148) nous apprend que l'énergie $\langle H^U \rangle$ s'écrit comme l'intégrale sur ω de deux termes constants et infinis :

$$\begin{aligned} \langle H^U \rangle &= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \omega \, \langle N_\omega^U \rangle \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; (\langle\!\langle 1 \rangle\!\rangle + \langle\!\langle 2 \rangle\!\rangle) \; . \end{aligned} \tag{3.47}$$

Nous allons maintenant voir que lorsque l'intéraction est paramétrée par η l'intégrand de $\langle H^U \rangle$ n'est plus constant ni infini. Dans ce but, réécrivons à l'aide des amplitudes mixtes l'énergie totale émise sur $\mathcal{J}_R^+$. D'après (2.59) et (2.60), cette énergie vaut :

$$\langle H^U \rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \; h(\omega, \lambda; \eta) \; , \tag{3.48}$$

où la densité d'énergie h est donnée par :

$$h(\omega, \lambda; \eta) = 4 \, \omega \; \left| B_{\omega\lambda}^{UV} \right|^2 \; . \tag{3.49}$$

Comme nous l'avons précédemment remarqué, le comportement asymptotique des amplitudes mixtes se déduit facilement de celui des coefficients de Fourier de $\tilde{f}$. On montre donc aisément que :

$$h(\omega, \lambda; \eta) \overset{|\lambda| \to \infty}{\propto} e^{-2\pi |\lambda| / a} \; . \tag{3.50}$$

Ainsi, les fréquences de Unruh qui participent au flux se situent autour de $\lambda = 0$ avec une largeur de quelques a. C'est dans cette approximation que nous allons nous placer.

Tout d'abord, il nous faut remarquer que le régulateur η a une fonction de cut-off vis-à-vis des fréquences de Minkowski. En effet, celles qui contribuent significativement à la densité h font partie de l'intervalle suivant (voir figure (3.2)) :

$$a\eta \lesssim \omega \lesssim \xi a / \eta \; , \tag{3.51}$$

où ξ est un facteur numérique. Lorsque λ prend des valeurs convenables (voir paragraphe précédent) et que l'on utilise le critère de largeur à mi-hauteur, on trouve :

$$\frac{h(\omega = \xi a/\eta, \lambda; \eta)}{h(\omega = a, \lambda; \eta)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \xi \simeq 0,50 \; . \tag{3.52}$$

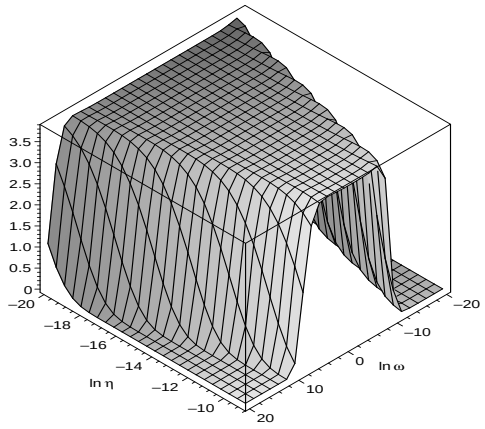

Fig. 3.2: Dans cette figure, nous avons représenté, avec une unité arbitraire, la densité d'énergie $h(\omega, \lambda = 0.15; \eta)$ en fonction de $\ln\omega$ et $\ln\eta$. De plus, nous avons posé $a = 1$. On voit clairement que la surface ainsi décrite possède un plateau de hauteur constante, délimité par les plans $\ln\omega = \pm\ln\eta$.

Ensuite, comme on peut le voir également sur la figure (3.2), à l'intérieur de l'intervalle (3.51), la densité d'énergie ne dépend plus de ω. Ces deux observations nous permettent d'approximer l'intégrale sur les fréquences de Minkowski de la manière suivante :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; h(\omega, \lambda; \eta) \quad \simeq \quad h(\omega = a, \lambda; \eta) \times \int_{a\eta}^{\xi a/\eta} \mathrm{d}\omega \quad \simeq \quad \frac{\xi a}{\eta} \, h(\omega = a, \lambda; \eta) \; . \tag{3.53}$$

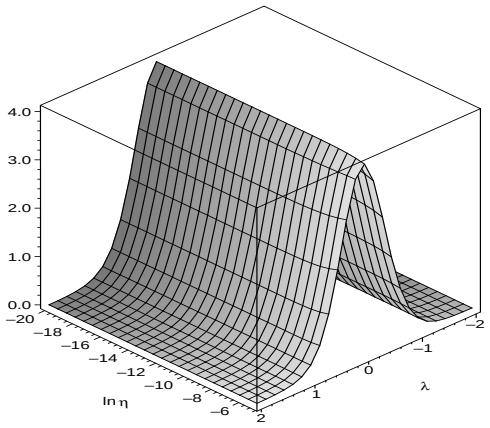

Fig. 3.3: Dans cette figure, nous avons représenté, dans les mêmes unités que la figure précédente, la densité d'énergie $h(\omega = a, \lambda; \eta)$ en fonction de λ et $\ln\eta$. Il est clair que la densité d'énergie indépendante du régulateur η. Cette propriété vient de ce que la fréquence de Minkowski se trouve à l'intérieur du plateau, *i.e.* $a\eta \ll \omega = a \ll a/\eta$.

D'après la figure (3.3), dans l'intervalle (3.51), h ne dépend pas non plus de λ. Cette propriété se démontre mathématiquement en appliquant la limite asymptotique (D.3) à

l'Eq.(3.44). On obtient le comportement (conforme à nos suppositions) suivant :

$$B^{UV}_{a\lambda} \stackrel{\eta\to 0}{\to} \frac{ig\,\lambda}{e^{\pi\lambda/a} - e^{-\pi\lambda/a}}\,\gamma^{U}_{\lambda a}\ , \tag{3.54}$$

où γ est défini en (3.15a).

Ainsi l'intégration sur les fréquences de Unruh peut être analytiquement conduite et, grâce à la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{x^2}{(e^x - e^{-x})^2} \ = \ \frac{\pi^2}{12}\ , \tag{3.55}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle H^U \rangle \ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega\ h(\omega,\lambda;\eta) \\
&\simeq \ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\ \frac{\xi a}{\eta}\, h(\omega = a,\lambda;\eta) \\
&\simeq \ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\ \frac{\xi a}{\eta}\, 4a\, \frac{g^2\,\lambda^2}{(e^{\pi\lambda/a} - e^{-\pi\lambda/a})^2}\, \frac{1}{2\pi a^2} \\
&\simeq \ \xi\, \frac{g^2 a^3}{6\pi\eta}\ .
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Bien évidemment, l'ambiguïté qui entoure la valeur exacte du facteur ξ, ainsi que les approximations conduites dans ce développement ne nous permettent pas d'affirmer que le résultat précédent est exact. Cependant, nous allons voir maintenant qu'à la place de $\xi = 0.50$, c'est la valeur $3/8$ qui donne le résultat correct. Plus important, nous allons également pouvoir vérifier que le facteur dimensionné g^2a^3 est juste et que l'énergie totale portée par les quanta de Minkowski est effectivement conduite par l'inverse du régulateur η.

Ainsi, grâce à la fonction de couplage temporel (3.23), nous avons pu non seulement régulariser les amplitudes de transition mais aussi rendre l'énergie et le nombre de particules créées finis. En effet, la méthode que nous avons employée pour le calcul de l'énergie s'applique également au nombre total de particules émises et fournit le résultat suivant :

$$\langle N^U \rangle \simeq \frac{g^2 a^2}{3\pi}\, |\ln(\xi\eta)|\ . \tag{3.57}$$

De plus, nous avons réussi à circonscrire le domaine des fréquences qui interviennent constructivement dans la radiation, en interprétant le régulateur η comme l'élément déterminant pour obtenir les cut-offs infra-rouge et ultra-violet :

$$\omega_{IR} = a\eta \quad \text{et} \quad \omega_{UV} \simeq a/\eta\ . \tag{3.58}$$

Au-delà de ces bornes, les quanta correspondants interfèrent destructivement. L'importance de ce résultat est de fournir le cut-off ultra-violet qui manquait cruellement au modèle de Davies-Fulling. Bien évidemment, lorsque le régulateur η tend vers 0, ces cut-offs disparaissent et l'énergie ainsi que le nombre de particules divergent, retrouvant ainsi leur comportement pathologique.

Maintenant que nous avons réussi à montrer que la représentation particulaire (globale), lorsqu'elle est conduite correctement, ne donne pas de résultats infinis, il nous faut prouver que le formalisme local ne fournit pas de flux et d'énergie nuls.

3.5 Formulation locale de l'énergie

Nous avons montré à la fin du Chapitre précédent que le formalisme des fonctions de Wightman permet de donner une formulation locale au flux d'énergie pour un miroir inertiel. Nous allons utiliser les résultats trouvés dans le cas du bain thermique pour calculer le flux ainsi que l'énergie de Rindler d'un miroir uniformément accéléré, en tant que fonctionnelles de $\tilde{f}$. Avant cela, nous allons directement effectuer le calcul du flux et de l'énergie de Minkowski. Les motivations de cette étude sont multiples. En confrontant nos résultats avec ceux du modèle de Davies-Fulling, nous pourrons insister sur l'importance des transitoires et expliquer la répartition spatio-temporelle du flux. De plus, l'application d'un formalisme Lagrangien possédant des amplitudes de transition régulières nous permettra de tracer la notion de causalité dans les différentes expressions (notion qui, rappelons-le, disparaît par endroits dans le modèle de Davies-Fulling). Enfin, le calcul explicite de l'énergie nous permettra de vérifier l'Eq.(3.56).

3.5.1 Flux de Minkowski

Expression générale

Reprenons les expressions de la section 2.3.1 afin de déterminer le flux émis sur $\mathcal{J}_R^+$. Ainsi, on commence par séparer les termes linéaire et quadratique en g. On obtient[7] donc, à partir de (2.80) :

$$\begin{aligned} \langle T_{UU}(U)\rangle_{lin} &= -2\,\mathrm{Im}\Big(\langle 0|T_{UU}\,L_{int}|0\rangle_c\Big) \\ &= \frac{g}{2\pi^2}\,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\;\tilde{f}(\tau)\,\dot{U}_{cl}^2(\tau)\,\frac{1}{(U-U_{cl}(\tau)-i\epsilon)^4}\right)\;, \end{aligned} \tag{3.59}$$

où

$$\dot{U}_{cl}(\tau)=\partial_\tau U_{cl}\;\;(=aU_{cl}(\tau)\text{ pour la trajectoire uniformément accélérée})\;, \tag{3.60}$$

voir (3.2) et (3.5). Pour calculer l'intégrale (3.59), il est commode d'utiliser la coordonnée $\tilde{U}=U_{cl}(\tau)$ comme variable d'intégration et de définir la nouvelle fonction temporelle :

$$\tilde{F}(\tilde{U})=\dot{U}_{cl}(\tau[\tilde{U}])\;\tilde{f}(\tau[\tilde{U}])\;. \tag{3.61}$$

On obtient alors :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle_{lin}=\frac{g}{2\pi^2}\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{d}U\;\tilde{F}(\tilde{U})\,\frac{1}{(U-\tilde{U}-i\epsilon)^4}\right)\;. \tag{3.62}$$

La résolution de cette intégrale se fait de la même manière que pour la trajectoire inertielle. En effet, en intégrant par parties, le comportement asymptotique que l'on a imposé à $\tilde{f}$ rend nuls tous les termes aux bords[8], et l'Eq.(2.83) permet d'effectuer la dernière

[7] Bien que les expressions suivantes fassent intervenir la fonction $\tilde{f}$, elles sont correctes pour toutes les fonctions de couplage temporel qui satisfont aux exigences de différentiabilité et de comportement asymptotique rappelées au début de la section 3.2.

[8] Sans supposer que $\tilde{f}$ est donnée par l'Eq.(3.23), une condition nécessaire pour que les termes aux bords soient nuls est que cette fonction décroisse plus vite que $e^{-a|\tau|}$.

intégration. La différence entre (2.80) et (3.62) réside dans le domaine d'intégration. En effet, comme la trajectoire elle-même, l'intégrale dans (3.62) ne porte que sur la partie positive de l'axe réel. Cette importante différence implique en fait la notion de causalité puisque le résultat se lit :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle_{lin} = -\Theta(U)\,\frac{g}{12\pi}\,\partial_U^3 \tilde{F}\ . \tag{3.63}$$

Dans cette expression, la fonction de Heaviside Θ assure que la partie linéaire du flux ne peut être non nulle que dans le futur causal de la trajectoire, c'est-à-dire pour $U > 0$.

Intéressons-nous à la partie quadratique. A partir de (2.88), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle T_{UU}(U)\rangle_{quadr} \;=\; & \frac{g^2}{2\pi^2}\mathrm{Re}\Bigg(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau'\,\frac{\tilde{f}(\tau')}{(U_{cl}(\tau')-U-i\epsilon)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\;\tilde{f}(\tau)\;\times \\ & \partial_U\delta(U_{cl}(\tau)-U)\;\left[\frac{i}{(U_{cl}(\tau')-U_{cl}(\tau)-i\epsilon)^2}+\frac{\dot{V}_{cl}(\tau)\dot{V}_{cl}(\tau')}{\dot{U}_{cl}(\tau)\dot{U}_{cl}(\tau')}\frac{i}{(V_{cl}(\tau')-V_{cl}(\tau)-i\epsilon)^2}\right]\Bigg)\ .\end{aligned} \tag{3.64}$$

La particularité des trajectoires uniformément accélérées (ainsi que des trajectoires inertielles) est que les deux termes entre crochets sont égaux. On peut donc aisément appliquer la méthode développée pour le terme quadratique d'un miroir inertiel et l'on trouve pour le flux total :

$$\langle T_{UU}\rangle = \Theta(U)\,\left\{\frac{g^2}{12\pi}\left(\partial_U^2\tilde{F}\right)^2-\frac{1}{12\pi}\,\partial_U\left[g\,\partial_U^2\tilde{F}+g^2\left(\frac{1}{2}\partial_U^4(\tilde{F}^2)-\partial_U^2((\partial_U\tilde{F})^2)\right)\right]\right\} \tag{3.65}$$

En inspectant ce résultat, il n'est pas surprenant de retrouver que, lorsque le couplage est stationnaire dans le temps propre de la trajectoire, on a d'après (3.61) :

$$\tilde{F}(\tilde{U}) = a\tilde{U}\ , \tag{3.66}$$

ce qui conduit à un flux nul partout. Ainsi, pour un miroir uniformément accéléré comme pour un miroir inertiel, nous avons démontré que le flux ne réside que dans les transitoires de la fonction de couplage temporel[9].

Remarques sur la causalité

a) L'expression (3.65) soulève une problématique importante : le lien entre la causalité et la nécessité de posséder un régulateur. On peut se rendre compte de l'importance de ce dernier en comparant comment apparaît la causalité dans les deux formulations du flux que nous possédons.

D'une part, la causalité se lit trivialement dans la formulation locale puisque, au travers du facteur $\Theta(U)$, le flux est rigoureusement nul dans la région de l'espace-temps qui est causalement déconnectée de la trajectoire. D'autre part, elle devient moins lisible lorsqu'on exprime le flux en fonction des amplitudes de transition. "Moins lisible" signifie que le respect de la causalité dépend de la méthode de calcul. En effet, avec ou sans régulateur, lorsque ces amplitudes sont tout d'abord exprimées comme des intégrales sur le temps propre, puis intégrées sur ω, la causalité est immédiatement respectée. Mais il

[9]Pour une conclusion similaire lorsque le champ est plongé dans un bain thermique, ou couplé à un oscillateur uniformément accéléré, voir [77].

n'en est pas de même lorsque ces deux opérations sont réalisées dans le sens opposé : si l'on effectue d'abord l'intégration sur τ *en l'absence de régulateur*, la causalité disparaît. Ceci est facile à vérifier : il suffit d'observer que, contrairement aux amplitudes régularisées, les amplitudes (3.37) sont identiques pour le miroir L et le miroir R. Au contraire, grâce à la prescription $\pm i\eta$, les amplitudes (3.38) diffèrent pour les deux branches de la trajectoire. Ainsi, l'importance de la fonction $\tilde{f}$ est d'imprimer, dans l'expression des amplitudes, la notion de causalité au travers du pôle $\pm ia/\eta$.

Notons aussi que ces effets sont identiques lorsque l'on utilise la représentation mixte. Cette précision a pour but de souligner que, dans l'étude du détecteur uniformément accéléré, c'est également au travers de $\tilde{f}$ (et donc de η) que la causalité est respectée.

Précisons finalement que c'est la différence entre les amplitudes de transition des deux trajectoires L et R, induite par le paramètre η, qui nous permettra de résoudre le problème de la radiation engendrée par deux miroirs uniformément accélérés symétriques.

b) Le respect de la causalité n'est en rien lié au fait de considérer une trajectoire uniformément accélérée. En effet, les équations (3.59) et (3.64) sont valables quelle que soit la trajectoire. Dans le cas général, désignons par $\mathcal{C}$ l'espace image de $U_{cl}(\tau)$. La partie linéaire du flux s'exprime alors en remplaçant juste la condition $U > 0$ par $U \in \mathcal{C}$. Pour la partie quadratique, le résultat est plus complexe car il nécessite de former une autre fonction que $\tilde{F}$ à partir de $\tilde{f}$, telle que le second terme entre crochets dans (3.64) soit facilement intégrable. Cependant, même sans donner explicitement cette fonction, on sait, grâce au terme $\delta(U_{cl}(\tau)-U)$ dans l'Eq.(3.64) que la partie quadratique respecte aussi la causalité au travers de la condition $U \in \mathcal{C}$.

Le cas de la fonction $\tilde{f}$

Quand la trajectoire est uniformément accélérée et que le couplage temporel est décrit par (3.23), on peut intégrer explicitement la formulation locale du flux afin de trouver l'énergie totale. Ainsi, à partir de (3.65) et grâce à (3.61) et à (D.1), on trouve le résultat (fini) suivant :

$$\begin{aligned}\langle H^U \rangle &= \frac{g^2}{12\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}U \left(\partial_U^2 \tilde{F}\right)^2 \\ &= \frac{g^2 a^3}{6\pi}\left(8\eta^3 K_0(4\eta) + (4\eta^2+2\eta^4)K_1(4\eta)\right. \\ &\qquad \left. -8\eta^3 K_2(4\eta) - 3\eta^4 K_3(4\eta) + \eta^4 K_5(4\eta)\right) \ . \end{aligned} \tag{3.67}$$

Comme le régulateur η est très petit devant 1, la limite (D.3) permet écrire :

$$\langle H^U \rangle \overset{\eta \ll 1}{\simeq} \frac{g^2 a^3}{16\pi}\frac{1}{\eta} + \mathcal{O}(1) \ . \tag{3.68}$$

Ainsi, le résultat approché (3.56) est correct lorsque $\xi = 3/8$.

Notons que les pathologies du modèle de Davies-Fulling ressurgissent dès que l'on fait tendre η vers zéro : le flux devient nul partout, comme nous venons de le voir, et l'énergie totale diverge. L'interprétation de ce phénomène est simple. En faisant tendre η vers zéro, on réalise deux actions simultanées : d'une part, on rejette les transitoires du couplage temporel aux extrémités de la trajectoire $U = 0$ et $U = +\infty$, et d'autre part, l'effet de "blueshift" exponentiellement grand en $U = 0^+$ fait diverger l'énergie

émise. C'est précisément ce qui advient lorsque le couplage est totalement stationnaire : le flux, en tant que fonction régulière, est nul en tout point de son domaine de définition $]0,+\infty[$ mais c'est en tant que fonction singulière en zéro (ou plus correctement en tant que distribution) qu'il est intégré pour fournir une énergie divergente. De même que pour les amplitudes, qui deviennent analytiques et intégrables au sens de Rieman, les valeurs moyennes d'observables (re)deviennent des fonctions grâce au régulateur η.

Remarque 1). Le rôle des deux extrémités de la trajectoire s'inverse lorsque l'on considère l'énergie émise par les particules gauchères. Dans ce cas, c'est la région $V \to 0^-$, soit $U \to +\infty$, qui engendre un "blueshift" exponentiellement grand et qui conduit à la divergence de $\langle H^V \rangle$. Cette remarque fait écho aux motivations qui nous avaient poussés, dans le premier Chapitre, à imposer de manière *ad hoc* un découplage adiabatique entre la radiation et le miroir. En effet, ce sont précisément les régions de la trajectoire qui intersectent (perpendiculairement) les surfaces $\mathcal{J}^{\pm}$ qui sont à l'origine des incohérences du modèle.

Remarque 2). Revenons au problème trans-Planckien. Comme le stipule l'Eq.(1.27), c'est la partie de la trajectoire $V_{cl}(U)$ qui exhibe une pente quasi nulle qui est à l'origine d'effets de redshift exponentiellement grands. Lorsque le couplage est adiabatiquement éteint en $\tau = \ln(\eta)/a$, le miroir n'interagit plus avec le champ de radiation à cette extrémité de la trajectoire, et aucune particule n'y est créée. Cela a donc pour conséquence de résoudre le problème trans-Planckien. Notons qu'une manière strictement équivalente de constater la résolution de ce problème est de rappeler l'apparition du cut-off ultra-violet, lui aussi fixé par η. Lorsque le miroir uniformément accéléré se déplace dans le quadrant L, la partie incriminée de sa trajectoire est son extrémité future $U \to +\infty$. Dans cette région, la trajectoire qui produit un flux constant (1.127) possède le même comportement. Ainsi, comme nous le savons, elle est également soumise au problème trans-Planckien. De fait, ce problème peut donc être résolu en éteignant l'interaction lorsque $\tau \to \tau_0$, voir (1.128). Cependant, dans cette région, la stationnarité du flux sera alors perdue.

3.5.2 Flux de Rindler

On pourrait bien évidemment appliquer la même méthode que précédemment pour calculer le flux de Rindler. Cependant, nous avons déjà fait ce calcul explicitement en inspectant le flux d'un miroir inertiel plongé dans un bain thermique de particules. Après avoir relié la température de l'état initial à l'accélération de la trajectoire par $\theta = 2\pi/a$, les Eqs.(2.90) et Eq.(2.102) donnent directement le flux de Rindler émis sur $\mathcal{J}_R^+$:

$$\begin{aligned} \langle T_{uu}(u_L) \rangle &\equiv \langle 0 | \partial_{u_L}\Phi \, \partial_{u_L}\Phi^\dagger + \partial_{u_L}\Phi^\dagger \, \partial_{u_L}\Phi | 0 \rangle & (3.69) \\ &= \frac{g^2}{12\pi} \left[(\partial_u^2 \tilde{f})^2 + a^2 \, (\partial_u \tilde{f})^2 \right] & (3.70) \\ &\quad - \frac{1}{12\pi} \, \partial_u \left[g \left(\partial_u^2 \tilde{f} + a^2 \, \tilde{f} \right) + g^2 \left(\frac{1}{2} \partial_u^4 (\tilde{f}^2) - \partial_u^2 ((\partial_u \tilde{f})^2) + a^2 \tilde{f} \, \partial_u \tilde{f} \right) \right] . \end{aligned}$$

Remarquons que, dans la définition (3.69), bien que le champ doive être décomposé selon les modes de Rindler (3.10), sa valeur moyenne est prise dans le vide de Minkowski $|0\rangle$.

La décomposition (3.70) a bien sûr pour but de montrer que, comme l'énergie de Minkowski, l'énergie de Rindler émise sur $\mathcal{J}_R^+$ par le miroir L est positive et, grâce au

comportement asymptotique de $\tilde{f}$, finie :

$$\langle {}^{L}H^{U}_{Rindler}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\ \langle T_{uu}(u_L)\rangle = \frac{g^2}{12\pi}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\ \left((\partial_u^2 \tilde{f})^2 + a^2\ (\partial_u \tilde{f})^2\right)\ . \tag{3.71}$$

Lorsque $\tilde{f}$ est donnée par (3.23), l'expression de l'énergie de Rindler est particulièrement simple :

$$\langle {}^{L}H^{U}_{Rindler}\rangle \quad = \quad \frac{g^2 a^3}{2\pi}\,\eta^2\ K_2(4\eta)\ , \tag{3.72}$$

$$\text{avec} \quad \langle {}^{L}H^{U}_{Rindler}\rangle \quad \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} \quad \frac{g^2 a^3}{16\pi} + \mathcal{O}(\eta)\ . \tag{3.73}$$

Comme on peut le voir sur la figure (3.4), le flux de Rindler, comme celui de Minkowski,

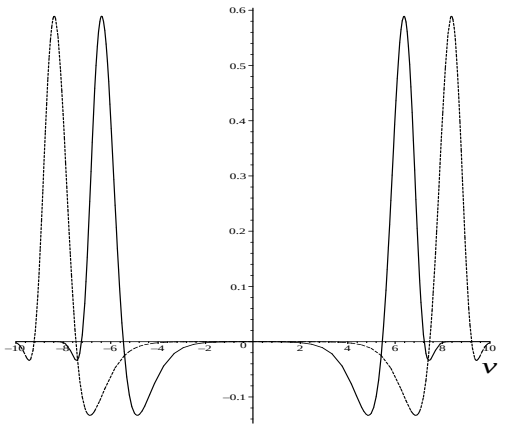

FIG. 3.4: Dans cette figure, nous avons tracé la valeur moyenne du flux de Rindler $\langle T_{uu}(u_L)\rangle$, lorsque $a = 1$ et pour deux valeurs distinctes de η. La courbe en trait plein correspond $\ln\eta = -6$ alors que celle en pointillés a été tracée pour $\ln\eta = -8$. De cette figure, on doit déduire deux importantes propriétés du flux. Premièrement, que ce dernier n'est non nul que durant les transitoires du couplage. Secondement, que son amplitude n'est pas déterminée par les caractéristiques de ces transitoires, exprimée au travers du paramètre η, mais uniquement par la valeur de l'accélération.

n'est émis que durant les transitoires du couplage temporel. Cependant, son amplitude ne dépend pas de η. Cet effet est souligné par l'étude du comportement limite de l'énergie de Rindler (3.73), qui ne tend pas vers zéro lorsque le couplage devient stationnaire. Nous avons déjà l'explication de ce phénomène : lorsque nous avons calculé le comportement des coefficients de Fourier $\tilde{f}_\lambda$ dans l'ultra-violet, nous avions souligné que, dans cette limite, ils ne dépendaient plus du régulateur η. Nous avions expliqué ceci par le fait que la pente maximale de $\tilde{f}$ en était également indépendante. Ainsi, pour les modes de Rindler, c'est la fréquence $1 \times a$ qui détermine la valeur de l'énergie émise. Il n'est donc pas étonnant de trouver que cette énergie ne dépend que très peu de η et qu'il en est de même pour la valeur maximale du flux.

Ce résultat est-il une conséquence pathologique de notre choix pour $\tilde{f}$? La réponse est non. En effet, nous aurions pu choisir une fonction de couplage temporel différente, telle qu'on puisse faire tendre la valeur maximale de sa pente vers zéro. Cette condition aurait irrémédiablement conduit à $\langle {}^{L}H^{U}_{Rindler}\rangle \to 0$ dans la limite de couplage stationnaire.

Cependant, dans ce cas, on aurait obtenu une énergie de Minkowski $\langle H^U \rangle$ divergente puisque la condition nécessaire d'existence du flux,

$$\tilde{f}(\tau)\, e^{a|\tau|} \stackrel{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;, \tag{3.74}$$

donnée dans la note (8), n'aurait pas été respectée. En d'autres termes, pour annuler l'énergie de Rindler, le prix à payer est de s'affranchir de l'adiabaticité du découplage. Ainsi, lorsque l'accélération est fixée, il est impossible de faire tendre l'énergie de Rindler vers zéro sans faire diverger l'énergie de Minkowski.

Remarque. D'après l'Eq.(3.69), les flux de Rindler et de Minkowski sont trivialement reliés par le biais du Jacobien entre leurs coordonnées respectives :

$$\begin{aligned} \langle T_{uu}(u_L)\rangle &= \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u_L}\right)^2 \langle T_{UU}(U)\rangle \\ &= e^{2au_L}\, \langle T_{UU}(e^{au_L}/a)\rangle \;. \end{aligned} \tag{3.75}$$

3.6 Deux miroirs symétriques uniformément accélérés

Dans cette section, nous allons inspecter une autre incohérence du modèle de Davies-Fulling lorsqu'on l'applique aux miroirs uniformément accélérés. La situation étudiée est la suivante. On considère deux miroirs suivant chacun une des branches de la même trajectoire uniformément accélérée. Comme on peut l'observer sur la figure (3.6), ces deux branches sont symétriques par rapport à l'origine des coordonnées de Minkowski et leur réunion couvre tout l'axe réel.

Comme nous allons le voir, dans le modèle de Davies-Fulling, cette configuration engendre non seulement un flux d'énergie nul mais également le fait que l'ensemble des coefficients de Bogoliubov β sont également nuls. Une situation totalement analogue à un seul miroir inertiel et formant, selon les dires de Gerlach[78], un interféromètre parfait. L'incohérence qui réside dans cette situation est que les deux miroirs, dont la radiation émise semble interférer destructivement en tout point de l'espace-temps, sont causalement déconnectés sur toute leur trajectoire !

Comme pour l'étude d'un seul miroir, nous allons voir que la pathologie de cette situation est à mettre au compte des singularités du flux et de l'irrégularité des amplitudes de transition. Dans un premier temps, nous allons détailler les résultats fournis par le modèle de Davies-Fulling ainsi que par le modèle Lagrangien non régularisé. Puis, nous utiliserons le couplage décrit par $\tilde{f}$ pour obtenir des résultats corrects. Enfin, nous essaierons d'approcher au maximum (mais sans l'atteindre) le régime de l'interféromètre parfait en réglant les couplages temporels de chaque miroir.

3.6.1 Ce qu'en dit le modèle de Davies-Fulling

Dans le modèle de Davies-Fulling, la propriété prépondérante du système formé par les deux miroirs est que leurs trajectoires couvrent, à elles deux, la totalité des axes U et V. Ainsi, on pourra utiliser pour l'adjonction des deux miroirs le traitement que nous avions appliqué aux réflecteurs asymptotiquement inertiels. En termes de modes, cela signifie, qu'en tout point de l'espace-temps, un mode entrant gaucher vaut :

$$\varphi_k^{V,in}(U,V) = \frac{e^{-ikV}}{\sqrt{4\pi k}} - \frac{e^{-ikV_{cl}(U)}}{\sqrt{4\pi k}} \;, \tag{3.76}$$

et qu'il est réfléchi sur $\mathcal{J}_R^+$ sous la forme suivante :

$$\varphi_k^{V,in}(U, V=+\infty) \;=\; -\frac{e^{-ikV_{cl}(U)}}{\sqrt{4\pi k}} = -\frac{e^{ik/a^2U}}{\sqrt{4\pi k}} \;, \quad \forall U \;, \tag{3.77}$$

alors qu'un seul miroir restreindrait l'équation précédente à une moitié de l'axe des U et posséderait un terme supplémentaire, voir (1.143).

En ce qui concerne le flux émis, la formulation locale, voir Eqs.(1.123) et (1.124), donne le même résultat que pour un seul miroir, à savoir un flux nul pour toutes les valeurs de U. Ce qui constitue la spécificité de l'ensemble des deux miroirs symétriques réside dans la formulation en termes des coefficients de Bogoliubov. Que valent donc les coefficients de Bogoliubov pour la diffusion par ces deux miroirs ? Intéressons-nous principalement aux coefficients de création de paires puisque ce sont eux qui permettent d'exprimer l'énergie ainsi que le nombre de particules créées. Les coefficients ${}^{L+R}\beta_{\omega k}^{UV}$ relatifs à l'ensemble des deux miroirs peuvent être reliés aux coefficients pour chaque branche de la trajectoire ${}^{L}\beta_{\omega k}^{UV}$ et ${}^{R}\beta_{\omega k}^{UV}$ de la manière suivante, voir (1.15) :

$$\begin{aligned}
{}^{L+R}\beta_{\omega k}^{UV\,*} &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U \; \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi/\omega}} \frac{e^{ik/a^2U}}{\sqrt{4\pi k}} \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}U \; \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi/\omega}} \frac{e^{ik/a^2U}}{\sqrt{4\pi k}} + 2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}U \; \frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi/\omega}} \frac{e^{ik/a^2U}}{\sqrt{4\pi k}} \\
&= {}^{L}\beta_{\omega k}^{UV\,*} + {}^{R}\beta_{\omega k}^{UV\,*} \;,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

avec, d'après (1.145d) :

$${}^{L}\beta_{\omega k}^{UV\,*} = \frac{-i}{\pi a} K_1\!\left(\frac{2\sqrt{k\omega}}{a}\right) \;. \tag{3.79}$$

Or les coefficients relatifs à chaque branche s'expriment l'un en fonction de l'autre selon :

$${}^{R}\beta_{\omega k}^{UV\,*} = {}^{L}\beta_{\omega k}^{UV} = -{}^{L}\beta_{\omega k}^{UV\,*} \;\; \Rightarrow \;\; {}^{L+R}\beta_{\omega k}^{UV\,*} = 0 \;. \tag{3.80}$$

Ainsi, les coefficients ${}^{L+R}\beta_{\omega k}^{UV}$ sont nuls pour toutes les valeurs de ω et de k. La conséquence principale d'un tel résultat est que le nombre de particules créées à partir du vide ainsi que l'énergie totale émise sont nuls :

$${}^{L+R}\beta_{\omega k}^{UV} = 0 \;\Rightarrow\; \langle {}^{L+R}N_\omega^U \rangle \;=\; \int_0^\infty \mathrm{d}k \;\left|{}^{L+R}\beta_{\omega k}^{UV}\right|^2 = 0 \;, \tag{3.81}$$

$$\langle {}^{L+R}H^U \rangle \;=\; \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \; \omega \, \langle {}^{L+R}N_\omega^U \rangle = 0 \;. \tag{3.82}$$

Cette situation est due au fait que le nombre de particules s'exprime comme pour un système à interférences cohérentes, c'est-à-dire par le carré de la somme des contributions $\left|{}^{L}\beta_{\omega k}^{UV} + {}^{R}\beta_{\omega k}^{UV}\right|^2$ et non pas par la somme des carrés $\left|{}^{L}\beta_{\omega k}^{UV}\right|^2 + \left|{}^{R}\beta_{\omega k}^{UV}\right|^2$. On est donc en droit d'interpréter ce processus comme étant dû à des interférences parfaitement destructives entre les amplitudes issues de chaque miroir.

A l'issue de cette étude, il ressort que deux miroirs uniformément accélérés symétriques ont le même effet sur le champ de radiation qu'un seul miroir inertiel : aucune

paire n'est créée, aucun flux n'est émis, en d'autres mots, les configurations du vide ne sont modifiées en rien. Gerlach[78] a donc trouvé logique d'appeler ce système un interféromètre parfait[10]. L'utilité d'un tel système consiste à déceler les perturbations de la métrique dans un des quadrants de Rindler. Ces perturbations donneraient alors lieu à une figure d'interférences sur $\mathcal{J}^+$. En ceci, un tel dispositif n'est rien d'autre que l'analogue Lorentzien de l'interféromètre de Mach-Zender.

Ces interférences sont-elles dues au caractère totalement réfléchissant du miroir ? La réponse est non. Une manière directe pour s'en convaincre est de calculer les amplitudes de création de paires pour le modèle Lagrangien. Dans ce modèle, chaque miroir est décrit au travers d'un Lagrangien de type (2.1) localisé sur sa trajectoire respective. En toute généralité, les Lagrangiens L^L_{int} et L^R_{int} possèdent chacun une fonction temporelle ($\tilde{f}^L$ et $\tilde{f}^R$) ainsi qu'une constante de couplage (g^L et g^R), et le Lagrangien total d'interaction est simplement leur somme :

$$\begin{aligned} L^{L+R}_{int} &= L^L_{int}\Big[V_{cl}(U) = -1/a^2U,\ U>0\ ;\ g^L\ ;\ \tilde{f}^L(\tau)\Big] \\ &\quad + L^R_{int}\Big[V_{cl}(U) = -1/a^2U,\ U<0\ ;\ g^R\ ;\ \tilde{f}^R(\tau)\Big]\ . \end{aligned} \tag{3.83}$$

Si l'on désire inspecter uniquement l'effet de la réflectivité partielle, on doit considérer que le couplage est stationnaire pour les deux miroirs : $\tilde{f}^L(\tau) = \tilde{f}^R(\tau) \equiv 1$. Or, nous avons déjà vu que, dans cette situation, les amplitudes de transition sont données par les Eqs.(3.37) quand la forme quadratique du champ est $\mathcal{F}_2$. De plus, ces amplitudes présentent la remarquable propriété de ne pas être affectées par le choix de la branche de trajectoire (voir discussion après (3.40)). Ainsi, les amplitudes de création de paires s'annulent comme les coefficients β selon la condition suivante :

$${}^{L+R}B^{ij}_{\omega\omega'} = -\langle 0|a^i_\omega\ b^j_{\omega'}\ iL^{L+R}_{int}|0\rangle \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^L + g^R = 0\ . \tag{3.84}$$

Remarque. Si l'on avait choisi le courant de Noether $\mathcal{F}_1$ dans l'expression des Lagrangiens, la condition d'annulation des amplitudes B aurait été $g^L = g^R$. En ceci, on retrouve l'analogie entre ce choix de Lagrangien et le modèle de Davies-Fulling, voir (2.58).

Ce qu'implique ces résultats, c'est que la nature parfaitement destructive des interférences n'est pas à mettre au profit de la reflexion totale (ni du choix de la forme quadratique). Il nous reste à expliciter la dépendance temporelle du couplage induite par les fonctions $\tilde{f}^L(\tau)$ et $\tilde{f}^R(\tau)$.

3.6.2 La description régularisée

De la section précédente, nous avons appris que le couplage entre le champ de radiation et le miroir doit être éteint et allumé adiabatiquement si l'on désire que les amplitudes et le flux (en tant que fonction) soient réguliers. C'est cette même hypothèse que nous devons appliquer au cas des deux miroirs symétriques, si l'on veut obtenir des résultats justes. Ainsi, supposons que chaque miroir soit décrit correctement. De plus, afin de tirer profit de l'étude précédemment menée, on va supposer que leur couplage temporel est fixé par la fonction (3.32). On a alors :

$$\tilde{f}^L(U) = e^{-\eta(aU + 1/aU)}\ ,\ U>0 \ \text{ et } \ \tilde{f}^R(U) = e^{\eta(aU+1/aU)}\ ,\ U<0\ . \tag{3.85}$$

[10]La nature de ces interférences parfaitement destructives est également à l'origine des effets d'interférences propres à la radiation émise par deux trous noirs accélérés, étudiée par Yi[79]. Une réponse à ce traitement est donnée dans [80].

Les amplitudes de transition

Les amplitudes de création de paires sont donc données par :

$$ {}^{L+R}B^{UV}_{\omega\lambda} = {}^{L}B^{UV}_{\omega\lambda} + {}^{R}B^{UV}_{\omega\lambda} \ , \tag{3.86} $$

où, d'après (3.42), on a :

$$ \begin{aligned} {}^{L,R}B^{UV}_{\omega\lambda} &= -\frac{ig^{L,R}}{\pi a}\sqrt{\frac{\omega\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}\,(1-is\omega/a\eta)^{-(1+i\lambda/a)/2}\,K_{1+i\lambda/a}(2\eta\sqrt{1-is\omega/a\eta}) \ , \\ &\text{avec } \ s=\pm 1 \ \Leftrightarrow \ L,R \ . \end{aligned} \tag{3.87} $$

L'importance du régulateur η est manifeste dans l'équation précédente. C'est sa présence qui différencie les amplitudes des deux miroirs (voir notre discussion sur la causalité). Ainsi, on peut donc supposer que c'est au voisinage des cut-offs infra-rouge et ultra-violet (3.58) que les effets interférants ne vont plus être destructifs.

Afin de prouver (numériquement) cette supposition, évaluons l'intégrand de l'énergie de Minkowski ${}^{L+R}h(\omega,\lambda;\eta)$, voir (3.49) :

. (3.88)

Comme notre but est d'approcher au maximum la situation à interférences totales, nous allons supposer, en plus de la condition (3.85), que les constantes de couplage sont opposées : $g^L + g^R = 0$, voir (3.84). Le résultat apparaît dans la figure (3.5) où l'on voit

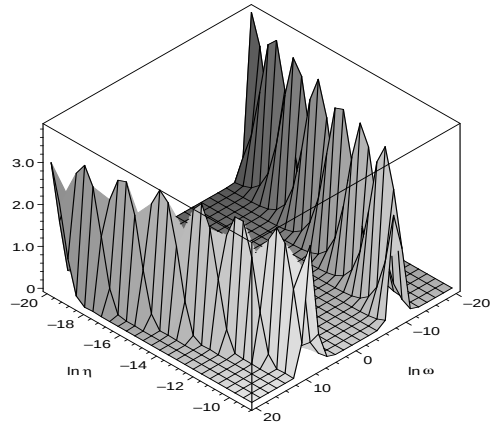

Fig. 3.5: Dans cette figure, nous avons représenté, dans les mêmes unités que la figure (3.2), la densité d'énergie pour l'ensemble formé des deux miroirs ${}^{L+R}h(\omega,\lambda;\eta)$, en fonction de $\ln\omega$ et de $\ln\eta$. Au contraire de la densité d'énergie pour un seul miroir, les modes résidant à l'intérieur du plateau ne contribuent pas à l'énergie à cause de leurs interférences destructives. Ces dernières n'ont plus lieu le long des deux lignes correspondant aux cut-offs infra-rouge et ultra-violet : $\ln\omega = \ln(a\eta)$ et $\ln\omega = \ln(a/\eta)$.

clairement de quelle manière la dépendance temporelle exprimée par $\tilde{f}^L$ et $\tilde{f}^R$ agit sur l'énergie. Tout d'abord, en dehors du plateau, les fréquences de Minkowski ne contribuent pas à l'énergie, à l'instar d'un seul miroir, comme nous l'avons vu dans la figure (3.2). Cependant, à l'intérieur de ce plateau et loin des bornes, les deux amplitudes sont opposées et donnent lieu à des interférences destructives, comme dans le modèle de Davies-Fulling. En effet, cette plage fréquentielle :

$$ \omega_{IR} = a\eta \ \ll \ \omega \ \ll \ \omega_{UV} = a/\eta \ , \tag{3.89} $$

est à mettre en correspondance avec la plage temporelle :

$$\tau_{min} = -T = -\frac{\ln|\eta|}{a} \quad \ll \quad \tau \quad \ll \quad \tau_{max} = T = \frac{\ln|\eta|}{a} \ , \tag{3.90}$$

pendant laquelle le couplage est stationnaire, d'où les interférences parfaites semblables au modèle de Davies-Fulling. Donc, c'est seulement au voisinage des cut-offs ω_{IR} et ω_{UV} que les amplitudes diffèrent significativement et participent ainsi à l'énergie émise. Lorsque le couplage devient stationnaire (*i.e.* $\eta \to 0$), ces cut-offs sont rejetés aux limites du domaine d'intégration et l'intérieur du plateau couvre tout l'espace des fréquences, d'où une énergie nulle.

Deux miroirs incohérents

Il existe une seconde manière de comprendre pourquoi les deux miroirs ne peuvent pas interférer destructivement de manière totale. Nous avons vu que, quelle que soit la formulation utilisée, lorsque le miroir est adiabatiquement couplé au champ de radiation, la causalité est inhérente au flux $\langle T_{UU}(U)\rangle$. Ainsi, le flux émis par l'ensemble des deux miroirs s'écrit comme la somme des flux émis par chacun :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle^{L+R} = \langle T_{UU}(U)\rangle^{L} + \langle T_{UU}(U)\rangle^{R} \ , \tag{3.91}$$

où le premier terme du second membre est rigoureusement nul lorsque U est négatif et le second, lorsque U est positif. Donc, l'énergie totale s'exprime également de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\langle {}^{L+R}H^{U}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U \ \langle T_{UU}(U)\rangle^{L+R} \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}U \ \langle T_{UU}(U)\rangle^{L} + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}U \ \langle T_{UU}(U)\rangle^{R} \\
&= \langle {}^{L}H^{U}\rangle + \langle {}^{R}H^{U}\rangle \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \ \left(\left| {}^{L}B^{UV}_{\omega\lambda} \right|^2 + \left| {}^{R}B^{UV}_{\omega\lambda} \right|^2 \right) \ .
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Cette réécriture a pour but de souligner que, lorsque la causalité est respectée, les deux miroirs interfèrent d'une manière *incohérente*, à l'inverse de ce que nous avions trouvé pour le modèle de Davies-Fulling. Cette propriété induit la relation suivante, qui ne repose que sur le respect de la causalité dans l'expression des amplitudes de transition :

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega \ \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \ \mathrm{Re}\left\{ {}^{L}B^{UV}_{\omega\lambda} \ {}^{R}B^{UV\,*}_{\omega\lambda} \right\} \equiv 0 \ . \tag{3.93}$$

A partir de (3.87), on trouve que cette relation provient du comportement analytique des amplitudes ${}^{R}B^{UV}_{\omega\lambda}$ et ${}^{L}B^{UV}_{\omega\lambda}$. Ainsi, comme nous l'avons déjà vu lors de la généralisation du modèle de Davies-Fulling dans le premier Chapitre, c'est l'analyticité des amplitudes qui explique la causalité des expressions locales.

Maintenant que nous avons montré que les deux miroirs ne peuvent intrinsèquement pas constituer un interféromètre parfait, nous pouvons cependant nous poser la question suivante : dans quelle mesure peut-on approcher au plus près de ce régime ?

3.6.3 Un interféromètre parfait ?

Théorème

Avant d'étudier cette situation approchée, démontrons que les deux miroirs constituent un interféromètre parfait *si et seulement si* ils sont couplés uniformément au champ de radiation.

Pour ce faire, supposons que les fonctions temporelles $\tilde{f}^L$ et $\tilde{f}^R$ soient quelconques. Comme nous l'avons vu lorsque les deux couplages sont constants dans le temps, un interféromètre parfait n'émet aucune radiation (autre que les fluctuations du vide) en l'absence de particule incidente. Ainsi, dans ces conditions, la probabilité de recevoir une particule sur $\mathcal{J}^+$ est identique à celle en l'absence de miroir (ou avec un miroir totalement inertiel), c'est-à-dire nulle. Par contre, lorsque les miroirs sont décrits correctement, le flux est non nul, de même que le nombre de particules émises. Afin de quantifier la "perfection" de l'interféromètre, nous allons donc calculer la probabilité de recevoir un quantum sur $\mathcal{J}^+$. Plus précisément, nous allons calculer la probabilité de recevoir une particule de Unruh sur la partie $U < 0$ de $\mathcal{J}_R^+$. Ce choix est simple à expliquer : d'une part, comme les modes de Unruh ne contiennent que des fréquences positives de Minkowski, cette probabilité ne sera nulle que pour un interféromètre parfait[11], et d'autre part, comme ces modes sont des modes propres des deux trajectoires, la probabilité va pouvoir s'écrire simplement.

Cette probabilité va s'exprimer à l'aide du projecteur sur l'état à une particule de Unruh, voir (3.20), de fréquence $\bar{\lambda} > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^U_{\bar{\lambda}} &\equiv \left(\frac{e^{i\bar{\lambda}u_R}}{\sqrt{4\pi\bar{\lambda}(1-e^{-2\pi\bar{\lambda}/a})}}\, \hat{a}^{U\,\dagger}_{\bar{\lambda}} |0\rangle \right) \left(\langle 0| \hat{a}^U_{\bar{\lambda}} \, \frac{e^{-i\bar{\lambda}u_R}}{\sqrt{4\pi\bar{\lambda}(1-e^{-2\pi\bar{\lambda}/a})}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\bar{\lambda}(1-e^{-2\pi\bar{\lambda}/a})} \left\{ \hat{a}^{U\,\dagger}_{\bar{\lambda}} |0^U_{part}\rangle\langle 0^U_{part}| \hat{a}^U_{\bar{\lambda}} \otimes \mathbf{1}[\hat{a}^V, \hat{b}^U, \hat{b}^V] \right\} , \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

où $|0^U_{part}\rangle$ est le vide restreint aux particules $\hat{a}^U$ et $\mathbf{1}[\hat{a}^V, \hat{b}^U, \hat{b}^V]$, l'opérateur identité pour les anti-particules et les particules droitières. Afin de calculer la valeur moyenne de cet opérateur dans l'état final sur $\mathcal{J}^+$, il est nécessaire d'utiliser les amplitudes de création de paires en termes des fréquences de Unruh :

$$\begin{aligned}
{}^{L+R}\hat{B}^{UV}_{\lambda\lambda'} &= -i\, \langle 0| \hat{a}^U_\lambda \, \hat{b}^U_{\lambda'} \, {}^{L+R}L_{int} |0\rangle \qquad (3.95) \\
&= 2i\, g^L \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \; \tilde{f}^L(\tau)\, \partial_\tau \hat{\varphi}^{U\,*}_\lambda \, \partial_\tau \hat{\varphi}^{U\,*}_{\lambda'} \\
&\quad + 2i\, g^R \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \; \tilde{f}^R(\tau)\, \partial_\tau \hat{\varphi}^{U\,*}_\lambda \, \partial_\tau \hat{\varphi}^{U\,*}_{\lambda'} \qquad (3.96) \\
&= 2i\, g^L \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \; \tilde{f}^L(\tau) \, \frac{-i\lambda\, e^{-i\lambda\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}} \, \frac{-i\lambda'\, e^{-i\lambda'\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda'(e^{2\pi\lambda'/a}-1)}} \\
&\quad + 2i\, g^R \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \; \tilde{f}^R(\tau) \, \frac{i\lambda\, e^{i\lambda\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda(1-e^{-2\pi\lambda/a})}} \, \frac{i\lambda'\, e^{i\lambda'\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda'(1-e^{-2\pi\lambda'/a})}} \qquad (3.97)
\end{aligned}$$

[11] En effet, la spécification de ne posséder que des fréquences positives de Minkowski implique que le mode ne peut pas être circonscrit à un quadrant de Rindler. Ainsi, si la probabilité de détecter une particule de Unruh est nulle sur la partie $U < 0$ de $\mathcal{J}_R^+$, elle est nulle sur tout $\mathcal{J}_R^+$.

$$
\begin{aligned}
&= -i\,g^L\,\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}}\,\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'(e^{2\pi\lambda'/a}-1)}}\,\tilde{f}^L_{-\lambda-\lambda'} \\
&\quad -i\,g^R\,\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda(1-e^{-2\pi\lambda/a})}}\,\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'(1-e^{-2\pi\lambda'/a})}}\,\tilde{f}^R_{\lambda+\lambda'}\ . \qquad (3.98)
\end{aligned}
$$

Ainsi, au second ordre des constantes de couplage, la probabilité de trouver une particule de Unruh de fréquence $\bar{\lambda}$ sur $\mathcal{J}^+$ vaut :

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{P}^U_{\bar{\lambda}}\rangle^{L+R} &= \langle 0|e^{-iL^{L+R}_{int}}\,\mathbf{P}^U_{\bar{\lambda}}\,e^{iL^{L+R}_{int}}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\bar{\lambda}(1-e^{-2\pi\bar{\lambda}/a})}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\ \left|{}^{L+R}\hat{B}^{UU}_{\lambda\bar{\lambda}}\right|^2 \qquad (3.99)\\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(1-e^{-2\pi\bar{\lambda}/a})^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\,\frac{\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}\,\left|g^L\,\tilde{f}^L_{-\lambda-\bar{\lambda}}\,e^{-\pi(\lambda+\bar{\lambda})/a}+g^R\,\tilde{f}^R_{\lambda+\bar{\lambda}}\right|^2\ .
\end{aligned}
$$

Comme elle est positive, cette intégrale ne s'annule que quand son intégrand est strictement nul, soit pour :

$$
g^L\,\tilde{f}^L_{-\lambda}\,e^{-\pi\lambda/a}+g^R\,\tilde{f}^R_{\lambda}=0\ ,\quad \forall\lambda\ . \qquad (3.100)
$$

Or, les constantes de couplage étant réelles et les fonctions temporelles étant réelles et positives, cette égalité équivaut à :

$$
g^L+g^R=0\quad\text{et}\quad \tilde{f}^L_\lambda=\tilde{f}^R_\lambda=\delta(\lambda)\quad\Leftrightarrow\quad \tilde{f}^L(\tau)=\tilde{f}^R(\tau)\equiv 1\ . \qquad (3.101)
$$

Comme cette condition ne dépend pas de la fréquence $\bar{\lambda}$, nous avons démontré qu'aucune particule n'est créée si et seulement si les deux couplages sont uniformes dans le temps et les constantes opposées. Cependant, nous savons que cette situation correspond à des grandeurs mal définies et induit des résultats incorrects. Nous allons donc essayer de minimiser $\langle \mathbf{P}^U_{\bar{\lambda}}\rangle^{L+R}$ tout en découplant adiabatiquement les deux miroirs du champ de radiation.

Un interféromètre presque parfait

Afin de pouvoir contrôler séparément la durée propre des couplages ainsi que l'endroit de la trajectoire autour duquel l'interaction est branchée, supposons que les fonctions temporelles soient des fonctions Gaussiennes :

$$
\tilde{f}^R(\tau)=e^{-(\tau-\tau_R)^2/2T_R^2}\quad\text{et}\quad \tilde{f}^L(\tau)=e^{-(\tau-\tau_L)^2/2T_L^2}\ . \qquad (3.102)
$$

Leur décroissance est suffisante pour que l'énergie de Minkowski soit finie. De plus, pour que la minimisation de la probabilité soit optimale, nous allons nous placer dans la situation "la plus interférante", c'est-à-dire que nous allons supposer que $g^L + g^R = 0$. Enfin, nous choisissons de travailler dans la double limite des évènements rares[12] $\bar{\lambda}/a \gg 1$ ainsi

[12] Comme nous l'avons vu, les modes de Unruh sont formés de modes R et L de Rindler. A partir des relations (3.16), on obtient pour $\bar{\lambda}>0$:

$$
\hat{a}^U_{\bar{\lambda}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\pi\bar{\lambda}/a}}}\,{}^R a^U_{\bar{\lambda}}-\frac{1}{\sqrt{e^{2\pi\bar{\lambda}/a}-1}}\,{}^L b^{U\,\dagger}_{\bar{\lambda}}\ .
$$

Ainsi, la prescription $\bar{\lambda}/a \gg 1$ a pour but de localiser préférentiellement la particule dans le quadrant R ($U<0$) plutôt que dans le quadrant L, ce qui était notre hypothèse de départ.

que des couplages longs par rapport à l'accélération[13] $aT_{L,R} \gg 1$. Dans ces conditions, on peut comparer la probabilité de détecter une particule de Unruh, lorsque les deux miroirs interagissent avec le champ de radiation, avec celle d'observer le même phénomène quand un seul de ces miroirs existe. Le rapport de ces grandeurs a l'avantage de ne plus dépendre, en particulier, de la valeur (et de la dimension) des constantes de couplage :

$$\frac{\langle \mathbf{P}_{\bar{\lambda}} \rangle^{L+R}}{\langle \mathbf{P}_{\bar{\lambda}} \rangle^{L}} \propto \frac{1}{a^2 T^2}(1 + \chi_1(\tau_R + \tau_L)^2 a^2 + \chi_2 |T_R - T_L|/T_L) \ , \tag{3.103}$$

où χ_1 and χ_2 sont des nombres réels positifs proches de l'unité, et où $T = (T_R + T_L)/2$. L'interprétation de cette équation est que l'interféromètre est approché lorsque les fonctions temporelles :

- possèdent la même durée propre $T_R = T_L = T$,
- et sont centrées symétriquement par rapport à l'origine des coordonnées : $\tau_R + \tau_L = 0$ (voir figure (3.6)).

Notons que lorsque les miroirs sont uniformément couplés tout au long de leurs trajectoires, le système presque parfait tend à se comporter comme un interféromètre parfait :

$$T \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{P}_{\bar{\lambda}} \rangle^{R+L} / \langle \mathbf{P}_{\bar{\lambda}} \rangle^{L} \to 0 \ . \tag{3.104}$$

Cependant, cette limite induit également que l'énergie de Minkowski diverge comme e^{aT}.

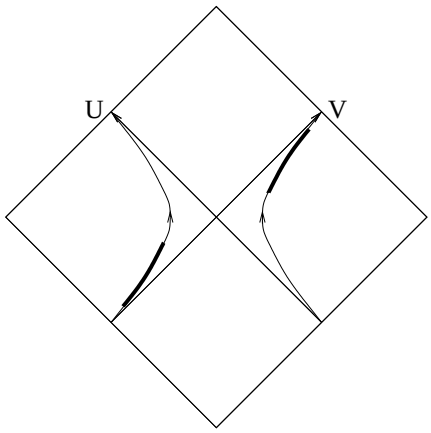

Fig. 3.6: Dans ce diagramme d'espace-temps, nous avons représenté les deux trajectoires uniformément accélérées symétriques. Les parties des trajectoires en trait gras sont celles où l'interaction est significativement branchée. Ainsi, comme elles sont symétriques par rapport à $U = V = 0$ et qu'elles possèdent la même durée, elles donnent un exemple d'un interféromètre presque parfait.

3.7 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons résolu tous les problèmes que nous avions soulevés après nous être confrontés au modèle de Davies-Fulling. Pour ce faire, il nous a fallu expliciter ce que nous avions appelé le "découplage adiabatique", c'est-à-dire le fait d'éteindre l'interaction entre le champ de radiation et le miroir quand la trajectoire intersecte une infinité

[13] Cette condition était implicitement vérifiée avec la fonction (3.23) puisqu'elle équivaut à ce que la durée du plateau soit grande devant celle des transitoires, voir (3.28).

de type $\mathcal{J}$. La nécessité de cette hypothèse résidait dans le fait que cette propriété de la trajectoire avait des conséquences fâcheuses sur la radiation : impossibilité de trouver des modes réguliers, effets Doppler exponentiels, incompatibilité des expressions de l'énergie, divergence du nombre de particules émises, *etc...*

L'instrument qui nous a permis d'apporter une solution à ces pathologies (qui sont toutes présentes pour un miroir uniformément accéléré) est la fonction temporelle (3.23). Non seulement c'est elle qui traduit l'allumage et l'extinction du couplage, mais c'est précisément aussi la fonction mathématique qui rend régulières les représentations intégrales des amplitudes, voir (3.33). En introduisant cette fonction dans le Lagrangien, nous avons trouvé que les amplitudes de transition au premier ordre de la constante de couplage acquièrent les propriétés de régularité, de causalité et de symétrie. Conséquence de ces effets, l'énergie et le nombre de particules émises ont repris des valeurs finies, contrôlées par le régulateur η. De plus, en calculant l'énergie par les deux méthodes, spatio-temporelle et fréquentielle, nous avons compris de quelle manière la fonction temporelle et son paramètre η dictent la nature des particules créées. A l'instar des résultats pour le miroir inertiel, c'est lors des transitoires de $\tilde{f}$ que des particules sont émises. De plus, en ce qui concerne leur spectre, nous avons trouvé que toutes les fréquences ne participent pas à l'énergie : seulement celles contenues entre les cut-offs infra-rouge $a\eta$ et ultra-violet a/η interfèrent constructivement. Cette dernière propriété a notament empêché le modèle d'engendrer des effets Doppler arbitrairement élevés. Ainsi, nous avons pu comprendre quelle était la nature des problèmes du modèle de Davies-Fulling. Lorsqu'on l'applique au miroir uniformément accéléré, le flux droitier résultant est localisé sur les deux horizons de la trajectoire $U = 0$ et $U = +\infty$ sous forme de singularités. De plus, l'effet de blueshift infini en $U = 0$ fait diverger l'énergie émise, et l'effet de redshift exponentiel quand $U \to +\infty$ transforme des fréquences arbitrairement grandes (trans-Planckiennes) en fréquences physiques (cis-Planckiennes).

En marge de cette étude[14], plusieurs résultats ont aussi pu être trouvés. Tout d'abord, nous avons souligné le lien fonctionnel entre les amplitudes du miroir et celles d'un détecteur à deux états. Ainsi, nous pouvons intégralement reporter nos conclusions à l'étude de ce dernier. Nous supposerons donc par la suite que l'interaction d'un détecteur avec le champ de radiation est correctement décrite si ces derniers sont couplés par le biais d'un Lagrangien adéquat. Puis, nous nous sommes penchés sur le cas de deux miroirs uniformément accélérés symétriques. Nous avons démontré que, si l'on désire que la diffusion soit traitée correctement, un tel système ne peut en aucun cas former un interféromètre parfait. En fait, une telle propriété n'est rien d'autre qu'un artefact dû à l'uniformité temporelle du couplage. Grâce à la causalité, nous avons également pu montrer que ces deux miroirs, parce que causalement déconnectés, interfèrent de manière incohérente au sens optique du terme.

Ce dernier résultat ouvre la perspective de l'étude des interférences pour la radiation engendrée par un miroir. Une autre problématique pour laquelle les interférences d'un miroir uniformément accéléré jouent un rôle important est l'étude des corrélations. En effet, jusqu'ici, nous ne nous sommes intéressés qu'aux valeurs moyennes d'observables physiques. Dans le Chapitre suivant, c'est la fonction à deux points $\langle T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} \rangle$, ses pathologies et les manières d'y remédier que nous allons étudier.

[14]Pour un aperçu des effets d'une fonction de couplage temporel au travers de l'analogie miroir accéléré/flux de Hawking, voir Wu et Ford[81].

Chapitre 4

La Fonction de Corrélation $\langle T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} \rangle$

Comment identifier un doute avec certitude ?

R. Devos

Dans ce Chapitre, nous entamons l'étude des corrélations entre les particules émises durant le processus radiatif. Les raisons qui motivent une telle entreprise sont diverses. Tout d'abord, il ne faut pas perdre de vue les motivations historiques qui ont poussé Moore[82], deWitt[83], Unruh[28], Wald[52] et bien sûr Davies et Fulling[60, 61, 54, 62] à s'intéresser à la radiation émise par un champ scalaire soumis à des conditions de bords dans l'espace-temps plat : l'analogie avec la radiation de Hawking et les problèmes inhérents à la théorie des champs en espace-temps courbe. Or, rappelons que si, au travers des équations d'Einstein, c'est $T_{\mu\nu}$ qui est la source des effets gravitationnels, les fluctuations de la métrique, elles, sont engendrées par la fonction à deux points $\langle T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} \rangle$. Ainsi, savoir maîtriser cet objet dans le modèle de Davies-Fulling, et, plus généralement, pour décrire la radiation émise par un miroir, a un intérêt fondamental. Dans cette optique, c'est évidemment en se frottant de nouveau aux comportements pathologiques, *i.e.* à la trajectoire uniformément accélérée, que nous allons pouvoir avoir une idée de la nature des corrélations dans le spectre émis.

Nous allons donc présenter les fonctions de corrélation à deux points pour toutes les configurations possibles de la trajectoire uniformément accélérée. Afin de pouvoir préciser les effets propres à l'accélération, nous présenterons également, lorsque ce sera possible, les résultats pour un miroir inertiel dans des configurations analogues. Enfin, dans le but d'insister sur le rôle de la fonction de couplage temporel, nous donnerons aussi les corrélations que prévoient le modèle de Davies-Fulling pour ces trajectoires ainsi que pour celle à flux constant.

4.1 Etat des corrélations avant la diffusion

Afin de pouvoir interpréter les effets du miroir sur la fonction à deux points du flux, il nous faut connaître les valeurs que prennent cette fonction en l'absence de miroir ou, ce qui est équivalent, dans le passé asymptotique de la trajectoire. Dans le premier cas, on comprend aisément que le modèle utilisé n'a aucune importance puisque le champ scalaire n'est alors sensible qu'aux fluctuations du vide. Dans le second cas, si la trajectoire n'intersecte pas les hypersurfaces de genre lumière sur lesquelles on évalue les opérateurs T_{UU} et T_{VV}, ces derniers se trouvent alors dans le passé de ladite trajectoire. Ainsi,

par causalité, la valeur de la fonction à deux points est rigoureusement égale à celle en l'absence de miroir. Si, par contre, la trajectoire n'est pas issue de i^-, alors il est nécessaire de recourir à l'hypothèse de découplage adiabatique pour pouvoir utiliser les modes de Minkowski afin de décrire le champ.

Les seules fonctions de corrélation non nulles s'expriment à partir de la fonction de Wightman (2.77) et sont données par :

$$\begin{aligned} C_{vac}(U,U') &\equiv \langle 0|T_{UU}(U,V=-\infty)\,T_{UU}(U',V'=-\infty)|0\rangle_c \\ &= (2\partial_U\partial_{U'}W(U,V;U',V'))^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(U-U'-i\epsilon)^4}\ , \qquad (4.1) \\ C_{vac}(V,V') &\equiv \langle 0|T_{VV}(U=-\infty,V)\,T_{VV}(U'=-\infty,V')|0\rangle_c \\ &= (2\partial_V\partial_{V'}W(U,V;U',V'))^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(V-V'-i\epsilon)^4}\ . \qquad (4.2) \end{aligned}$$

L'Eq.(4.1) traduit les fluctuations du vide sur $\mathcal{J}_L^-$ et (4.2), celles sur $\mathcal{J}_R^-$. Les deux grandeurs possèdent la même divergence à courte distance et, de même que pour la fonction de Wightman, le signe de la prescription $i\epsilon$ équivaut au fait que seules les fréquences positives peuplent le vide (voir la discussion au sujet de (1.118)). Rappelons que la notation $\langle 0|...|0\rangle_c$ indique, comme aux Chapitres précédents, que seuls les diagrammes connexes sont gardés. Par exemple, cela signifie que le seul diagramme à contribuer sur $\mathcal{J}_L^-$ est le suivant :

$$C_{vac}(U,U') = 4\langle 0|\,\partial_U\overbrace{\Phi(U)\,\partial_U\overbrace{\Phi^\dagger(U)\,\partial_{U'}\Phi(U')}\,\partial_{U'}\Phi^\dagger(U')}\,|0\rangle\ . \qquad (4.3)$$

Cette condition est donc équivalente à soustraire le terme déconnecté (comme on le trouve souvent dans la littérature) :

$$\begin{aligned} C_{vac}(U,U') &= \langle 0|T_{UU}(U,V=-\infty)\,T_{UU}(U',V'=-\infty)|0\rangle \\ &\quad -\langle 0|T_{UU}(U,V=-\infty)|0\rangle\langle 0|T_{UU}(U',V'=-\infty)|0\rangle\ . \qquad (4.4) \end{aligned}$$

Remarque. En l'absence de miroir, la spécification de l'hypersurface sur laquelle on évalue le flux est inutile. Par exemple, dans les écritures (4.1) et (4.4), le résultat aurait été le même si l'on avait spécifié $V=+\infty$ et $V'=-\infty$ - ce qui correspond à des corrélations entre $\mathcal{J}_L^-$ et $\mathcal{J}_R^+$ - ou $V=V'=+\infty$ - ce qui correspond à des corrélations sur $\mathcal{J}_R^+$.

Bien entendu, il n'existe pas de corrélation entre T_{UU} évalué sur $\mathcal{J}_L^-$ et T_{VV} évalué sur $\mathcal{J}_R^-$ pour la raison évidente que ces deux hypersurfaces sont causalement déconnectées :

$$C_{vac}(U,V') = \langle 0|T_{UU}(U,V=-\infty)\,T_{VV}(U'=-\infty,V')|0\rangle_c \equiv 0\ . \qquad (4.5)$$

En seconde quantification, cette raison équivaut au fait que les opérateurs de création et d'annihilation gauchers et droitiers commutent.

Nous allons exploiter le résultat (4.5) tout au long de ce Chapitre. En effet, si, dans le futur de la trajectoire, on observe une fonction à deux points, mélangeant les flux gaucher et droitier, non nulle, on pourra alors imputer ce terme à la radiation émise par le miroir, et non aux fluctuations du vide. Ainsi, dans la suite, nous allons nous intéresser uniquement aux fonctions :

$$C(U,V') \equiv \langle T_{UU}(U)\,T_{VV}(V')\rangle_c\ , \qquad (4.6)$$

lorsqu'au moins un de ces flux est exprimé sur $\mathcal{J}^+$. Une raison plus pragmatique nous a conduit à écarter l'étude des corrélations U/U ou V/V : elles n'apportent pas plus d'information que leurs corrollaires U/V et leur calcul est sensiblement plus compliqué, à cause des interférences entre les fluctuations du vide initiales et les corrélations dues à l'interaction avec le miroir.

Si le choix du modèle est sans conséquence lorsqu'on inspecte les corrélations dans le passé de la trajectoire, il n'en est évidemment pas de même quand au moins l'un des flux provient de particules émises par le miroir. Ainsi, dans la suite, nous présenterons pour chaque configuration le résultat issu du modèle Lagrangien régulier, pour le comparer avec les prédictions du modèle de Davies-Fulling.

4.2 Corrélations passé/futur

Dans cette section, nous allons étudier les corrélations existant entre le flux gaucher sur $\mathcal{J}_R^-$ et le flux droitier sur $\mathcal{J}_R^+$ en présence d'un miroir. Ces corrélations dépendent bien évidemment de la nature du miroir choisi. Comme pour la valeur moyenne du flux, c'est par l'étude de la diffusion par un miroir inertiel que nous allons commencer. Ceci nous permettra de comprendre les implications de la fonction de couplage temporel $f(t)$, en comparant les résultats du modèle Lagrangien régularisé à ceux du modèle de Davies-Fulling. Puis, nous décrirons l'ensemble des corrélations passé/futur lorsque le miroir est uniformément accéléré. Nous verrons qu'il en existe une plus grande variété, ceci étant dû au fait que la trajectoire est inscrite dans un quadrant de Rindler.

Quel que soit le modèle, et quelle que soit la trajectoire du miroir, nous appelons "fonction de corrélation passé/futur" la fonction à deux points suivante :

$$C^{+/-}(U,V') \equiv \langle 0|T_{UU}(U,V=+\infty)\, T_{VV}(U'=-\infty,V')|0\rangle_c \ . \tag{4.7}$$

4.2.1 Formulation générale

Modèle Lagrangien

Dans l'expression (4.7), seul le flux droitier est exprimé sur $\mathcal{J}^+$. En représentation d'Heisenberg, cela signifie que, au contraire de T_{VV} qui est encore dans son état initial, T_{UU} doit être exprimé à l'aide de l'opérateur d'évolution de la théorie. En représentation d'interaction, l'opérateur d'évolution a déjà été étudié, et nous l'avons relié à la matrice $\hat{S}$ de diffusion :

$$\mathbf{U}_{t=-\infty}^{t=+\infty} \ = \ T\, e^{i\, L_{int}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{S} \ . \tag{4.8}$$

Ainsi, la fonction de corrélation s'écrit de la manière suivante :

$$C^{+/-}(U,V') = \langle 0|e^{-iL_{int}}\, T_{UU}(U)\, e^{iL_{int}}\, T_{VV}(V')|0\rangle_c \ , \tag{4.9}$$

où, comme dans le Chapitre précédent, les opérateurs de flux sont désormais exprimés à partir des champs libres. Afin de prolonger de manière cohérente l'étude que nous avons menée pour les valeurs moyennes, nous allons également développer les fonctions de corrélation au second ordre de la constante de couplage. De plus, nous allons aussi

négliger la contribution du terme $\mathcal{D}$ dans l'expression de l'état final, voir (2.49). Ainsi, au second ordre en g, la fonction de corrélation se réécrit :

$$\begin{aligned} C^{+/-}(U,V') &= \langle 0|L_{int}\, T_{UU}\, L_{int}\, T_{VV}|0\rangle_c \\ &\quad -\frac{1}{2}\langle 0|(L_{int}\, L_{int}\, T_{UU} + T_{UU}\, L_{int}\, L_{int})\, T_{VV}|0\rangle_c \,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pour calculer cette fonction, comme toutes les autres auxquelles nous serons confrontés par la suite, nous allons introduire deux nouvelles fonctions à deux points :

$$P(U,V') \equiv i\,\langle 0|\partial_U\Phi(U)\,\partial_{V'}\Phi^\dagger(V')\;L_{int}|0\rangle \tag{4.11}$$

$$= \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}\,B^{UV}_{\omega\omega'}\,e^{-i(\omega U+\omega' V')} \tag{4.12}$$

$$= -2i\,g\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\;f(\tau)\,\Big(\partial_U\partial_\tau W(U,U_{cl}(\tau))\Big)\,\Big(\partial_{V'}\partial_\tau W(V',V_{cl}(\tau))\Big), \tag{4.13}$$

où W est donnée par (2.76), et

$$Q(U,V') \equiv i\,\langle 0|\partial_U\Phi(U)\;L_{int}\;\partial_{V'}\Phi^\dagger(V')|0\rangle \tag{4.14}$$

$$= \iint_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\,\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}\,A^{UV\,*}_{\omega\omega'}\,e^{-i(\omega U-\omega' V')} \tag{4.15}$$

$$= -2i\,g\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\;f(\tau)\,\Big(\partial_U\partial_\tau W(U,U_{cl}(\tau))\Big)\,\Big(\partial_{V'}\partial_\tau W(V_{cl}(\tau),V')\Big). \tag{4.16}$$

Formellement, ces fonctions sont respectivement les doubles transformées de Fourier des amplitudes de transition $A^{UV\,*}_{\omega\omega'}$ et $B^{UV}_{\omega\omega'}$. Ainsi, P traduit la création des paires formées d'une particule droitière et de son anti-particule gauchère, de manière spatio-temporelle. De même, Q exprime localement la réflexion d'une particule incidente gauchère en particule droitière. Notons que l'existence des intégrales (4.12) et (4.15) dépend du comportement asymptotique (et plus particulièrement du comportement ultra-violet) des amplitudes de transition. Ainsi, on peut supposer que, lorsque l'interaction est découplée asymptotiquement de manière adiabatique, le comportement ultra-violet de la fonction temporelle $\tilde{f}(\tau)$ rend ces intégrales finies, voir par exemple (3.98).

A l'aide de ces deux fonctions, la corrélation passé/futur s'écrit simplement :

$$C^{+/-}(U,V') = 2\,\Big(P^*(U,V') + Q(U,V')\Big)^2 \,. \tag{4.17}$$

Notons qu'*a priori*, cette fonction n'est pas réelle.

Modèle de Davies-Fulling

Cherchons à donner une formulation générale à la fonction de corrélation passé/futur (4.7) dans le cadre du modèle de Davies-Fulling. C'est également grâce à la fonction de Wightman que cela va pouvoir être réalisé. Ainsi, comme seuls les termes connexes subsistent, à partir de (1.114) on trouve[1] :

$$C^{+/-}_{DF}(U,V') = \big(2\,\partial_U\partial_{V'}W^{in}(U,V')\big)^2 = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{(\mathrm{d}V_{cl}/\mathrm{d}U)^2}{(V_{cl}(U)-V'-i\epsilon)^4}\,, \tag{4.18}$$

[1] A notre connaissance, Wilczek[84] est parmi les premiers à s'être intéressé à ces objets dans le but de décrire les corrélations du flux de Hawking, jusqu'à en donner une définition presque identique à (4.18). Sa formulation ne diffère de la nôtre que par l'(importante) absence de la prescription $i\epsilon$.

$$\forall U \text{ tel que } \exists V \mid U = U_{cl}(V) \ .$$

La spécification du domaine de validité de U est importante. Elle rappelle que cette équation n'est juste que si U fait partie du domaine de définition de V_{cl}. Cette remarque est sans conséquence pour le miroir inertiel mais nous verrons dans le cas uniformément accéléré qu'elle implique que (4.18) n'est valable que sur la moitié de l'axe réel. Dans ce cas, que nous discuterons en détail par la suite, on retrouve les corrélations dues aux fluctuations du vide lorsque T_{UU} n'est pas évalué dans le futur de la trajectoire.

De même que pour le modèle Lagrangien, $C^{+/-}_{DF}(U,V')$ n'est pas réelle. La nature de sa partie imaginaire nous induit à faire deux remarques. Tout d'abord, cette fonction diverge pour une seule configuration : $V_{cl}(U) = V'$. Cette situation correspond à la réflexion d'un quantum incident gaucher en quantum sortant droitier, comme dans le cadre de l'optique géométrique. Nous verrons que cette divergence apparaît de même dans le modèle Lagrangien (4.17).

Cependant, c'est uniquement autour de cette singularité que la partie imaginaire existe. Ainsi, si l'on désire connaître la valeur des corrélations, on peut prendre la limite $\epsilon \to 0$ en dehors de ces couples de points. Au contraire, si ce sont des quantités intégrées que l'on calcule, comme $\langle H^U T_{VV} \rangle$, cette limite ne peut plus être prise. Pour ces objets, l'intégration doit impérativement précéder la limite $\epsilon \to 0$. C'est la même précaution qui a été prise dans [85] pour évaluer l'énergie dans le vide de Rindler.

Ces remarques nous conduisent donc à considérer $C^{+/-}_{DF}(U,V')$ comme une distribution : d'une part, en dehors des couples de points $V_{cl}(U) = V'$, cette distribution se réduit à une fonction régulière réelle positive ; et d'autre part, ce sont précisément ces couples qui définissent les pôles de la distribution.

4.2.2 Miroir inertiel

Lorsque le miroir est totalement inertiel, sa trajectoire est $V_{cl}(U) = U$, voir la note (8) du deuxième Chapitre. Nous avons représenté l'espace-temps ainsi que les flux incident et sortant dans la figure (4.1). Dans ces conditions, le modèle de Davies-Fulling fournit une fonction de corrélation particulièrement simple à interpréter :

$$C^{+/-}_{DF,inert}(U,V') = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(U-V'-i\epsilon)^4} \ . \tag{4.19}$$

En effet, comme le miroir réfléchit totalement les quanta, cette fonction traduit la simple réflexion des corrélations existant au préalable sur $\mathcal{J}^-_R$ et données par (4.2). On retrouve donc la même divergence ultra-violette que dans les corrélations passé/passé, après avoir effectué $V \to U$.

En quoi le modèle Lagrangien modifie-t-il ce résultat ? Pour comprendre, en particulier, comment intervient la fonction temporelle $f(t)$ dans $C^{+/-}$, il nous faut expliciter les fonctions à deux points P et Q. A partir des Eqs.(4.13) et (4.16), on obtient :

$$P_{inert}(U,V') = \frac{-2ig}{(4\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \ f(t)\frac{1}{(U-t-i\epsilon)^2}\frac{1}{(V'-t-i\epsilon)^2} \ , \tag{4.20}$$

$$\text{et } Q_{inert}(U,V') = \frac{-2ig}{(4\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \ f(t)\frac{1}{(U-t-i\epsilon)^2}\frac{1}{(t-V'-i\epsilon)^2} \ . \tag{4.21}$$

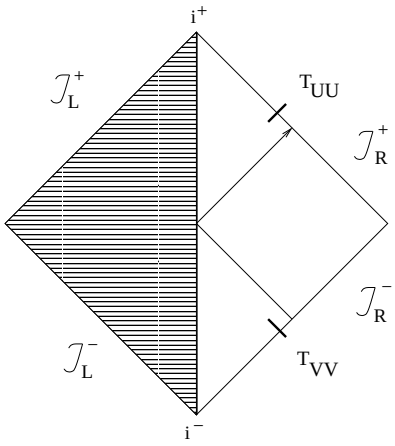

Fig. 4.1: Nous avons représenté ici le diagramme de Penrose pour l'espace-temps autour d'un miroir totalement inertiel. Que le miroir soit totalement réfléchissant ou non, nous avons grisé la région à gauche du miroir pour souligner que nous étudions les corrélations entre $\mathcal{J}_R^-$ et $\mathcal{J}_R^+$.

Ces deux intégrales s'expriment par la méthode des résidus. Comme nous l'avons déjà dit, la prescription $-i\epsilon$ est reliée au fait que seules les fréquences positives peuplent le vide. Ainsi, c'est précisément cette prescription qui choisit quelles sont les fréquences de Fourier de la fonction temporelle qui contribuent dans ces intégrales. C'est pourquoi, nous allons séparer les fréquences positives et négatives dans la décomposition de f en introduisant deux nouvelles fonctions :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega e^{-i\omega t} = f_+(t) \quad + \quad f_-(t)\ , \\ &\text{avec}\ \ f_+(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad f_-(t) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\omega\ f_\omega e^{-i\omega t} = f_+^*(t)\ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

A l'aide de ces fonctions, P et Q peuvent être écrite sous forme locale :

$$P_{inert}(U,V') = -\frac{g}{4\pi}\left[\partial_U\left(\frac{f_+(U)}{(U-V'-i\epsilon)^2}\right) + \partial_{V'}\left(\frac{f_+(V')}{(V'-U-i\epsilon)^2}\right)\right]\ , \tag{4.23}$$

$$\text{et}\ \ Q_{inert}(U,V') = -\frac{g}{4\pi}\left[\partial_U\left(\frac{f_+(U)}{(U-V'-i\epsilon)^2}\right) - \partial_{V'}\left(\frac{f_-(V')}{(V'-U+i\epsilon)^2}\right)\right]\ . \tag{4.24}$$

En reprenant l'Eq.(4.17), on trouve la fonction de corrélation. De plus, si cette fonction est évaluée en dehors de ses singularités "géométriques", on peut effectuer la limite $\epsilon \to 0$. Dans ces conditions, on obtient :

$$V' \neq V_{cl}(U) = U \ \Rightarrow\ C_{inert}^{+/-}(U,V')\Big|_{\epsilon=0} = \frac{g^2}{8\pi^2}\left[\partial_U\left(\frac{f(U)}{(U-V')^2}\right)\right]^2\ . \tag{4.25}$$

Comparons cette expression avec celle que nous avons obtenue dans le modèle de Davies-Fulling (4.19). Pour ce faire, il faut supposer que le couplage est constant. On obtient :

$$f(t) = 1\ , \forall\, t\ \ \Rightarrow\ C_{inert}^{+/-}(U,V')\Big|_{\epsilon=0} = \frac{g^2}{2\pi^2}\frac{1}{(U-V')^6}\ . \tag{4.26}$$

Dans ces conditions, les deux expressions diffèrent en deux points. La première différence est triviale : elle réside dans le facteur g^2 qui est dû au développement perturbatif. La seconde concerne la puissance du dénominateur. En effet, le pôle est d'ordre 4 dans le modèle de Davies-Fulling et d'ordre 6 dans le modèle Lagrangien. Ceci découle du choix de la forme quadratique $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$ qui possède deux dérivées par rapport au temps propre. Si nous avions choisi $\mathcal{F}_1$ à la place, les dénominateurs auraient été identiques ; cependant, grâce à notre étude des valeurs moyennes, nous savons qu'un tel choix de $\mathcal{F}$ aurait rendu parallèlement les représentations intégrales (4.12) et (4.15) divergentes dans l'infra-rouge.

Lorsque la fonction de couplage temporel n'est pas constante, l'interprétation de (4.25) est simple puisqu'elle repose sur le respect de la causalité. Supposons que f soit à support compact $\mathcal{S}$. Dans ces conditions, pour des configurations sortantes telles que $U \notin \mathcal{S}$, on trouve que la fonction de corrélation est rigoureusement nulle. On comprend effectivement que de telles configurations, si elles parvenaient sur $\mathcal{J}_R^+$, émaneraient d'une partie de la trajectoire où le miroir n'interagissait pas avec le champ de radiation. Dans ces conditions, les corrélations résultantes sont identiques à ce qu'on aurait trouvé dans le vide et ce, *quelles que soient les configurations entrantes*. Une autre conséquence de l'Eq.(4.25) est que, contrairement à ce que nous avions trouvé dans le modèle de Davies-Fulling, en dehors de l'image géométrique, la fonction de corrélation n'est pas symétrique en U, V.

4.2.3 Réflexion sur un miroir uniformément accéléré

Ce que nous entendons par "réflexion", c'est l'étude des corrélations pour lesquelles le flux entrant gaucher et le flux sortant droitier sont en contact causal avec la trajectoire. Dans cette sous-section, ainsi que dans la suivante, nous retournons au cas de la trajectoire uniformément accélérée dans le quadrant L, voir (1.142). Ainsi, la condition de "réflexion" équivaut à $V' < 0$ et $U > 0$, voir figure (4.2).

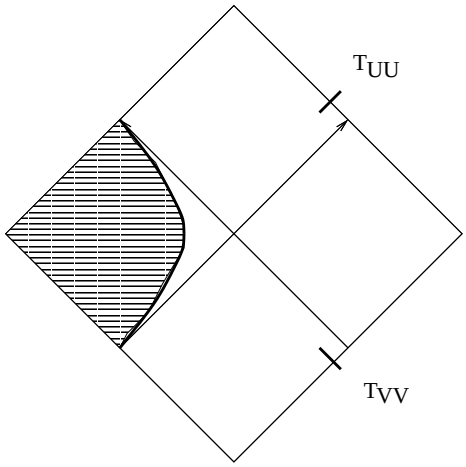

Fig. 4.2: Nous avons représenté ici le diagramme de Penrose pour l'espace-temps autour d'un miroir uniformément accéléré. De même que pour la figure précédente, nous avons grisé la région à gauche du miroir pour souligner que nous étudions les corrélations entre $\mathcal{J}_R^-$ et $\mathcal{J}_R^+$.

Dans le cadre du modèle de Davies-Fulling, l'Eq.(4.18) permet directement d'obtenir,

pour $V' < 0$ et $U > 0$:

$$C^{+/-}_{DF,un.acc.}(U,V') = \frac{1}{4\pi^2}\frac{(1/a^2U^2)^2}{(-1/(a^2U)-V'-i\epsilon)^4} \ . \tag{4.27}$$

Afin de pouvoir comparer cette expression à celle obtenue pour un miroir inertiel, nous allons exprimer les corrélations entre les flux de Rindler. A partir de la relation (3.75) et des coordonnées de Rindler données en (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} c^{+/-}_{DF,un.acc.}(u_L,v'_L) &\equiv \langle T_{uu}(u_L)T_{vv}(v'_L)\rangle = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u_L}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}v'_L}\right)^2 C^{+/-}_{DF,un.acc.}(U,V') \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{a}\,\sinh\left(\frac{a(u_L-v'_L-i\epsilon)}{2}\right)\right)^4} \ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Lorsque l'accélération tend vers zéro, on retrouve rigoureusement l'expression obtenue pour le miroir inertiel (4.19). La correspondance entre les deux expressions est en fait assez simple : (4.28) est précisément la fonction qu'on aurait trouvé pour un miroir inertiel placé dans un bain thermique de température $\theta = a/2\pi$. Ceci est un nouvel exemple du lien entre les systèmes uniformément accélérés et ceux qui sont plongés dans un bain thermique. Nous allons voir de quelle manière apparaît cette correspondance dans le cadre du modèle Lagrangien.

Pour ce faire, il nous faut évaluer les fonctions P et Q. De même que précédemment, il est plus commode d'utiliser leurs analogues de Rindler définis comme suit :

$$p_{un.acc.}(u_L,v'_L) \equiv i\,\langle 0|\partial_u\Phi(u_L)\,\partial_v\Phi^\dagger(v'_L)\ L_{int}|0\rangle \tag{4.29}$$

$$= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u_L}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}v'_L}\,P_{un.acc.}(U,V') \ , \tag{4.30}$$

$$\text{et}\ \ q_{un.acc.}(u_L,v'_L) \equiv i\,\langle 0|\partial_u\Phi(u_L)\ L_{int}\ \partial_v\Phi^\dagger(v'_L)|0\rangle \tag{4.31}$$

$$= \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u_L}\,\frac{\mathrm{d}V'}{\mathrm{d}v'_L}\,Q_{un.acc.}(U,V') \ , \tag{4.32}$$

qui eux-mêmes définissent la fonction de corrélation :

$$c^{+/-}_{un.acc.}(u_L,v'_L) = 2\left(p^*_{un.acc.}+q_{un.acc.}\right)^2 . \tag{4.33}$$

D'après (4.13) et (4.16), on obtient :

$$p_{un.acc.}(u_L,v'_L) = \frac{-2i\,g\,a^4}{(16\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\ \tilde{f}(\tau)\,\frac{1}{\sinh^2(\frac{a(u_L-\tau-i\epsilon)}{2})}\,\frac{1}{\sinh^2(\frac{a(v'_L-\tau-i\epsilon)}{2})} \tag{4.34}$$

$$\text{et}\ \ q_{un.acc.}(u_L,v'_L) = \frac{-2i\,g\,a^4}{(16\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\ \tilde{f}(\tau)\,\frac{1}{\sinh^2(\frac{a(u_L-\tau-i\epsilon)}{2})}\,\frac{1}{\sinh^2(\frac{a(\tau-v'_L-i\epsilon)}{2})} \tag{4.35}$$

Ces intégrales peuvent être évaluées par la méthode des résidus en décomposant les dérivées des fonctions de Wightman sur leurs pôles :

$$\frac{1}{\sinh^2(x)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^2} \ , \tag{4.36}$$

et en introduisant les deux nouvelles fonctions :

$$\tilde{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\ \tilde{f}_\lambda e^{-i\lambda\tau} = \tilde{f}_+(\tau) + \tilde{f}_-(\tau)\ , \qquad \text{avec} \quad \tilde{f}_+(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\ \frac{\tilde{f}_\lambda e^{-i\lambda\tau}}{1 - e^{-2\pi\lambda/a}}\ ,$$

$$\text{et} \quad \tilde{f}_-(\tau) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\ \frac{\tilde{f}_\lambda e^{-i\lambda\tau}}{e^{2\pi\lambda/a} - 1} = \tilde{f}_+^*(\tau) \qquad . \tag{4.37}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} p_{un.acc.}(u_L, v'_L) &= -\frac{g}{4\pi}\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}_+(u_L)}{\left(\frac{2}{a}\ \sinh\left(\frac{a(u_L - v'_L - i\epsilon)}{2}\right)\right)^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \partial_{v'_L}\left(\frac{\tilde{f}_+(v'_L)}{\left(\frac{2}{a}\ \sinh\left(\frac{a(v'_L - u_L - i\epsilon)}{2}\right)\right)^2}\right)\right]\ , \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad q_{un.acc.}(u_L, v'_L) &= -\frac{g}{4\pi}\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}_+(u_L)}{\left(\frac{2}{a}\ \sinh\left(\frac{a(u_L - v'_L - i\epsilon)}{2}\right)\right)^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \partial_{v'_L}\left(\frac{\tilde{f}_-(v'_L)}{\left(\frac{2}{a}\ \sinh\left(\frac{a(v'_L - u_L + i\epsilon)}{2}\right)\right)^2}\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Ainsi, en dehors des singularités géométriques, la fonction de corrélation s'obtient facilement :

$$\begin{aligned} V' = -\frac{e^{-av'_L}}{a} \quad &\neq \quad V_{cl}(U) = -1/a^2 U = -\frac{e^{-au_L}}{a} \\ &\Rightarrow \quad c^{+/-}_{un.acc.}(u_L, v'_L) = \frac{g^2}{8\pi^2}\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\left(\frac{2}{a}\ \sinh\left(\frac{a(u_L - v'_L)}{2}\right)\right)^2}\right)\right]^2\ , \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\text{et} \quad C^{+/-}_{un.acc.}(U > 0, V' < 0) = \left(a^2\ U\ V'\right)^{-2} \times c^{+/-}_{un.acc.}\left(\frac{\ln(aU)}{a}, -\frac{\ln(-aV')}{a}\right)\ . \tag{4.41}$$

Ce résultat appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, lorsqu'on compare l'Eq.(4.40) avec le résultat inertiel (4.25), on remarque que la correspondance est la même que pour le modèle de Davies-Fulling : on obtient les corrélations des flux de Rindler pour le miroir uniformément accéléré à partir de celles des flux de Minkowski dans un bain thermique.

Ensuite, comparons l'Eq.(4.40) avec le résultat de Davies-Fulling. Hormis les différences que nous avions soulignées pour le miroir inertiel, à savoir le préfacteur g^2 et la puissance du dénominateur, la limite $\tilde{f}(\tau) \equiv 1$ redonne l'Eq.(4.28). Cette concordance est générique dans le sens où elle s'exprime par les relations liant les amplitudes de transition et les coefficients de Bogoliubov, voir (2.56) et (2.57). Ainsi, les deux modèles se trouvent liés au travers des Eqs.(4.12) et (4.15).

Enfin, de même que pour le miroir inertiel, la causalité se traduit par la dissymétrie entre la coordonnée sortante u_L et la coordonnée entrante v'_L, puisque $\tilde{f}$ ne dépend que de la première.

Remarque. En appliquant le modèle de Davies-Fulling à la trajectoire à flux constant (1.127), Carlitz et Willey[25] ont trouvé un résultat quasi analogue à (4.28). En effet, la trajectoire se lisant $\kappa U_{cl}(V) = -\ln(-\kappa V), \quad V < 0$, il est judicieux de définir la nouvelle coordonnée avancée suivante $\kappa v'_L = -\ln(-\kappa V')$ lorsque $V' < 0$. Dans ces conditions, la fonction de corrélation vaut :

$$C^{+/-}_{DF,CW}(U, v'_L) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{\kappa} \sinh\left(\frac{\kappa(U - v'_L - i\epsilon)}{2}\right)\right)^4} . \tag{4.42}$$

Ainsi, on retrouve, comme il se doit, la singularité due à la réflexion géométrique $U = v'_L = U_{cl}(V')$, mais exprimée au travers de la fonctionnelle thermique pour la coordonnée sortante $1/\sinh(\kappa(U - U_{cl}(V))/2)$. Ceci provient du fait que le flux sortant est effectivement à la température uniforme $\kappa/2\pi$, voir (1.136).

4.2.4 Autres configurations pour un miroir uniformément accéléré

Comme nous l'avons dit, le fait que la trajectoire soit incluse dans un seul quadrant de Rindler implique qu'il existe des configurations passé/futur qui n'ont pas d'analogue dans le cas inertiel. Ces configurations correspondent aux cas où les flux entrant et/ou sortant sont causalement déconnectés de la trajectoire.

Les corrélations trivialement nulles

Commençons par les configurations pour lesquelles c'est le flux sortant qui ne se trouve pas dans le futur du miroir, voir figure (4.3). Dans ce cas, le résultat est trivial. En effet, par causalité, les corrélations entre le flux entrant et $T_{UU}(U < 0)$ restent identiques quelle que soit l'hypersurface sur laquelle le flux sortant est évalué. En particulier, à la place de $\mathcal{J}^+_R$, on peut choisir $\mathcal{J}^-_L$ sur laquelle nous savons que ces corrélations sont identiquement nulles, voir (4.5). Ainsi, on a :

$$\forall V' \ , \quad C^{+/-}_{un.acc.}(U < 0, V') = C_{vac}(U < 0, V') = 0 . \tag{4.43}$$

Les corrélations non divergentes

Les corrélations intéressantes sont bien évidemment celles où seul le flux entrant est causalement déconnecté de la trajectoire. Pour le miroir en L, cette condition correspond à $V' > 0$. Anticipons les calculs pour les deux modèles en rappelant que nous utiliserons les flux de Rindler exprimés avec les coordonnées idoines (3.2) et (3.8). Dans ces conditions, le fait de préserver $U > 0$ permet d'obtenir les corrélations dans le cadre du modèle de Davies-Fulling par le biais de la relation (4.18) :

$$c^{+/-}_{DF,un.acc.}(u_L, v'_R) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{a} \cosh\left(\frac{a(u_L + v'_R)}{2}\right)\right)^4} . \tag{4.44}$$

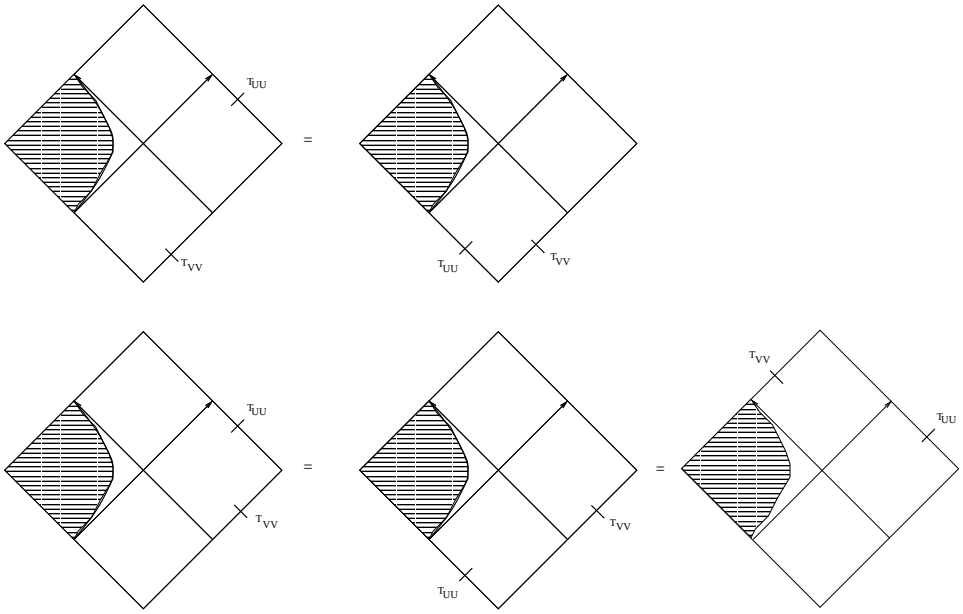

Fig. 4.3: Dans ce diagramme de Penrose, nous illustrons l'équivalence des corrélations passé/futur avec leurs corrollaires passé/passé, lorsque le flux sortant est causalement déconnecté de la trajectoire. Comme ces dernières sont nulles, il en est de même pour les premières. Le cinquième diagramme prévoit que la condition $U < 0$ suffit également à annuler les corrélations futur/futur lorsqu'on se restreint à la droite du miroir, voir la prochaine section.

L'intéressante propriété de ce résultat est que $c^{+/-}_{DF,un.acc.}(u_L, v'_R)$ est une fonction régulière et réelle, quelles que soient les valeurs de u_L et v'_R. En effet, auparavant, les couples de points qui donnaient lieu à des singularités étaient respectivement objet et image géométrique par le miroir ; comme cette configuration est impossible à cause du signe de V', la fonction de corrélation est régulière partout.

En plus de la méthode directe, il est intéressant de remarquer que l'équation précédente peut être obtenue par prolongement analytique. En effet, la prescription $-(V' + i\epsilon)$ dans (4.27) indique que la rotation de $V' < 0$ à $V' > 0$ doit être effectuée dans le plan complexe inférieur, voir (3.19). En termes des coordonnées de Rindler, ceci définit le sens de la translation parallèlement à l'axe imaginaire :

$$V' + i\epsilon = \begin{cases} V' \quad \text{quand} \quad V' = \frac{e^{a v'_R}}{a} > 0 \\ -V'\, e^{i\pi} \quad \text{quand} \quad V' = -\frac{e^{-a v'_L}}{a} < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v'_L \to -v'_R + i\pi/a \ . \tag{4.45}$$

De même que le signe de $i\epsilon$, celui de $i\pi/a$ découle univoquement du fait que le vide n'est formé que de fréquences de Minkowski positives.

Dans le cadre du modèle Lagrangien, avant de calculer les fonctions p et q, remarquons que le choix du signe de V' implique un autre résultat important. En effet, comme le flux entrant est causalement déconnecté de la trajectoire, l'opérateur associé commute avec le Lagrangien. Ainsi, en reprenant les définitions (4.11) et (4.14), on obtient :

$$\left[\partial_{V'}\Phi^\dagger(V' > 0)\ ,\ L_{int}\right] = 0 \ \Rightarrow \ p_{un.acc.}(u_L, v'_R) = q_{un.acc.}(u_L, v'_R)\ , \tag{4.46}$$

$$\text{et} \quad p_{un.acc.}(u_L, v'_R) = \frac{-2i\ g\ a^4}{(16\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\ \tilde{f}(\tau)\ \frac{1}{\sinh^2(\frac{a(u_L - \tau - i\epsilon)}{2})}\ \frac{1}{\cosh^2(\frac{a(v'_R + \tau)}{2})}\ . \tag{4.47}$$

Ces relations ont deux conséquences. La première est que, dans cette configuration, la fonction de corrélation s'écrit de la manière suivante, voir (4.33) :

$$c^{+/-}_{un.acc.}(u_L, v'_R) = 8 \ (\ \mathrm{Re}[\ p_{un.acc.}(u_L, v'_R) \ ] \ )^2 \ , \tag{4.48}$$

où l'on retrouve le fait que le corrélateur est réel. La seconde est que le résultat est également non divergent puisqu'on trouve :

$$c^{+/-}_{un.acc.}(u_L, v'_R) = \frac{g^2}{8\pi^2} \ \left[\partial_{u_L} \left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\left(\frac{2}{a} \ \cosh\left(\frac{a(u_L + v'_R)}{2} \right) \right)^2} \right) \right]^2 \ . \tag{4.49}$$

Avant d'interpréter ce résultat, il est intéressant de remarquer qu'il aurait pu être obtenu de deux autres manières. Premièrement, nous aurions pu déduire (4.49) en utilisant la correspondance avec le modèle de Davies-Fulling (4.44) ainsi que le respect de la causalité, tout comme nous l'avons montré pour les configurations précédentes[2]. Deuxièmement, nous aurions pu utiliser le prolongement analytique (4.45) afin de l'appliquer directement à l'Eq.(4.49). Notons qu'appliquer cette méthode requiert l'analyticité des amplitudes de transition dans p et q. Cette condition est précisément satisfaite lorsque la fonction $\tilde{f}$ est bien choisie puisqu'alors, les amplitudes A et B sont reliées par la symétrie (3.40).

L'absence de singularité dans la limite $u_L + v'_R \to 0$ pour (4.49) peut également s'expliquer à partir des amplitudes de transition. Tout d'abord, la fonction de corrélation s'exprime uniquement à partir de p. Ensuite, p lui-même s'exprime uniquement à partir des amplitudes de création de paires B. Enfin, en utilisant (3.38d) et (D.4), on montre que ces dernières décroissent pour les hautes fréquences selon : $B^{UV}_{\omega\omega'} \simeq (\omega\omega')^{1/4} \, e^{-2\sqrt{\omega\omega'}/a}$. Ainsi, elles ne peuvent pas engendrer de divergences ultra-violettes.

Si (4.49) ne possède pas de singularité, elle possède tout de même un maximum autour[3] de $u_L + v'_R = 0$. La largeur de ce maximum est donnée par $1/a$. Si l'on revient aux coordonnées de Minkowski, ce maximum correspond à :

$$u_L + v'_R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V' = -V_{cl}(U) \ , \tag{4.50}$$

voir figure (4.4). De plus, comme $V' > 0$, $T_{VV}(V')$ peut être évalué sur toutes les hypersurfaces $U' = cste$, et en particulier $\mathcal{J}^+_L$. Cela signifie que la fonction de corrélation futur/futur est maximale *dans ce domaine de coordonnées* pour $V' = -V_{cl}(U)$. Ainsi, les fluctuations du vide autour de $V' = -V_{cl}(U)$ sont interprétées de la manière suivante du point de vue de la création de paires : elles donnent naissance au partenaire (gaucher et détecté dans la partie $V' > 0$ de $\mathcal{J}^+_L$) du quantum qui arrive en $U > 0$.

Cependant, ce résultat pose un problème. Si l'on rend le couplage uniforme, on trouve :

$$\tilde{f}(\tau) \equiv 1$$

$$\Rightarrow \quad c^{+/-}_{un.acc.}(u_L, v'_R) = c^{+/+}_{un.acc.}(u_L, v'_R) \quad = \quad \frac{g^2 a^6}{2(16\pi)^2} \ \left[\frac{\sinh\left(\frac{a(u_L + v'_R)}{2} \right)}{\cosh^3\left(\frac{a(u_L + v'_R)}{2} \right)} \right]^2 \ , \tag{4.51}$$

[2]Dans les configurations précédentes, nous avons également utilisé l'analogie entre les miroirs inertiel et uniformément accéléré. Ceci ne peut nous être d'aucune utilité ici puisque, dans le cas inertiel, toutes les configurations entrantes et sortantes sont causalement connectées à la trajectoire.

[3]Prenons $\tilde{f}(\tau)$ donnée en (3.23). En toute rigueur, à cause du nombre (pair) de dérivées dans $\mathcal{F}_2$, la fonction de corrélation est nulle pour $u_L + v'_R = 0$, mais elle est entourée de deux pics à une distance de l'ordre de $1/a$. En prenant un nombre impair et supérieur à 2 de dérivées, $u_L + v'_R = 0$ devient alors le maximum absolu de $c^{+/-}(u_L, v'_R)$.

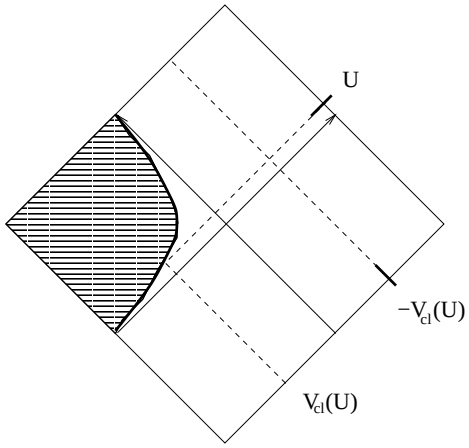

Fig. 4.4: Ce diagramme de Penrose illustre deux propriétés de corrélations lorsque $U > 0$ et $V' > 0$. La première est que ces corrélations sont maximales autour de $V = -V_{cl}(U)$, c'est-à-dire la position symétrique de l'image géométrique $V = V_{cl}(U)$, qui se situe de l'autre côté de l'horizon. La seconde propriété est que, par causalité, cette fonction s'avère être aussi la corrélation futur/futur entre la partie $V' > 0$ de $\mathcal{J}_L^+$ et la partie $U > 0$ de $\mathcal{J}_R^+$.

soient des corrélations à l'évidence non nulles. Or, dans le Chapitre précédent, nous avons montré que lorsque le couplage est constant, le flux en tant que fonction est rigoureusement nul. Nous avons même montré que le flux est réparti en deux singularités qui correspondent aux horizons de la trajectoire $U = 0$ et $U = +\infty$. Nous nous trouvons donc en présence d'un paradoxe, puisqu'il existe des corrélations entre des flux qui s'avèrent être nuls. Afin de clarifier cette situation, il nous faut d'abord connaître toutes les autres corrélations futur/futur. (En fait, ceci va s'avérer insuffisant et va nous obliger à développer dans le prochain Chapitre une autre manière (moins singulière) d'étudier ces corrélations.)

Remarque. Carlitz et Willey ont prolongé analytiquement leur résultat (4.42) pour obtenir les corrélations lorsque $V' > 0$. En posant $\kappa v'_R = \ln(\kappa V')$, ils ont obtenu :

$$C^{+/-}_{DF,CW}(U, v'_R) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{\kappa} \cosh\left(\frac{\kappa(U + v'_R)}{2}\right)\right)^4} . \tag{4.52}$$

Notons que, pour cette trajectoire, il n'est pas paradoxal de trouver des corrélations non nulles lorsque le couplage est uniforme, puisque le flux sortant n'est plus nul mais constant et donné par (1.127).

4.3 Corrélations sur $\mathcal{J}^+$

4.3.1 Formulation générale et miroir inertiel

Lorsque l'on regarde les corrélations entre les flux gaucher et droitier sur $\mathcal{J}^+$, elles sont données par la fonction de corrélation suivante :

$$C^{+/+}(U, V') \equiv \langle 0 | T_{UU}(U, V = +\infty) T_{VV}(U' = +\infty, V') | 0 \rangle_c . \tag{4.53}$$

En représentation d'interaction, le fait que les deux opérateurs soient évalués sur les infinités futures de genre lumière modifie l'expression par rapport à (4.9). Ainsi, au second

ordre en g, on obtient :

$$\begin{aligned} C^{+/+}(U,V') &= \langle 0|e^{-iL_{int}}\, T_{UU}(U)\, T_{VV}(V')\, e^{iL_{int}}|0\rangle_c \ , \\ &= \langle 0|L_{int}\, T_{UU}(U)\, T_{VV}(V')\, L_{int}|0\rangle_c \\ &\qquad -\mathrm{Re}\Big[\langle 0|L_{int}\, L_{int}\, T_{UU}(U)\, T_{VV}(V')|0\rangle_c\Big] \ . \end{aligned} \tag{4.54}$$

L'Eq.(4.54) possède plusieurs propriétés. Premièrement, elle souligne que, comme T_{UU} et T_{VV} commutent, la fonction trouvée est toujours réelle. Compte tenu de ce que nous avons compris avec les corrélations passé/futur, ceci nous laisse supposer que cette fonction ne va pas posséder de pôle. La seconde propriété vient de sa formulation qui souligne l'analogie entre cette fonction et le flux donné en (2.46). En effet, à l'instar du second terme dans l'expression du flux, la partie réelle dans (4.54) devient nulle si on l'intègre sur U (ou V')[4]. De plus, nous allons voir que quand les deux flux sont évalués dans le futur causal de la trajectoire uniformément accélérée, et que le couplage est constant, les deux termes de (4.54) se compensent. En cela, on retrouve bien sûr le comportement du flux (1.124). Enfin, le fait de ne garder que les diagrammes connexes permet d'exprimer la fonction de corrélation en termes de la seule fonction P :

$$C^{+/+}(U,V') = 4\ |P(U,V')|^2 + 4\,\mathrm{Re}[P(U,V')^2] = 8\,(\,\mathrm{Re}[P(U,V')]\,)^2 \ . \tag{4.55}$$

Comme P s'exprime uniquement en fonction des amplitudes de créaion de paires, nous sommes donc sûrs que la fonction de corrélation est finie.

Lorsque le miroir est inertiel, ces conditions permettent de prendre la limite $\epsilon \to 0$ pour tous les couples de points. A partir de (4.20), on trouve :

$$C^{+/+}_{inert}(U,V') = \frac{g^2}{8\pi^2}\left[\partial_U\left(\frac{f(U)}{(U-V')^2}\right) + \partial_{V'}\left(\frac{f(V')}{(V'-U)^2}\right)\right]^2 \ . \tag{4.56}$$

De cette formule, nous apprenons que, quand le couplage est constant, les corrélations dans le futur de la trajectoire sont identiquement nulles. Ce résultat n'est pas surprenant : nous savons que, pour un miroir inertiel, un couplage constant n'engendre aucune création de particules. Ainsi, les corrélations résultantes sont celles qu'on aurait trouvées en l'absence de miroir, *i.e.* nulles. De plus, (4.56) légitime le fait d'avoir effectué au préalable la limite $\epsilon \to 0$, puisque $U = V'$ n'est pas un pôle de l'expression. En effet, lorsque $f(t)$ n'est pas une constante, la fonction de corrélation admet la limite finie suivante :

$$\lim_{V'\to U} C^{+/+}_{inert}(U,V') \ = \ \frac{2\,g^2}{(12\pi)^2}\left[\partial_U^3 f(U)\right]^2 \ . \tag{4.57}$$

Contrairement aux expressions précédentes, $C^{+/+}_{inert}$ possède deux termes, chacun offrant respectivement une dépendance de la fonction de couplage f en U et en V'. Bien entendu, ceci est dû au respect de la causalité.

[4]Ceci est facile à vérifier. Par exemple, si l'on intègre sur U, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\ \langle 0|T_{UU}(U)\, T_{VV}(V')\, L_{int}\, L_{int}|0\rangle_c = \langle 0|H_U\, T_{VV}(V')\, L_{int}\, L_{int}|0\rangle_c \ .$$

Or, l'énergie étant nulle dans le vide, *i.e.* $H_U|0\rangle = 0$, ce terme vaut toujours zéro.

4.3.2 Miroir uniformément accéléré

Lorsqu'on inspecte les corrélations sur $\mathcal{J}^+$ pour un miroir uniformément accéléré, on doit, comme précédemment, séparer les expressions selon le signe de U et de V'. En fait, par causalité, nous avons déjà effectué les calculs pour trois des configurations sur les quatre possibles.

• Lorsque $U<0$ et $V'>0$, les flux gaucher et droitier sont tous les deux déconnectés de la trajectoire. Leurs corrélations sont donc identiques quelles que soient les hypersurfaces sur lesquelles on les évaluent. Ainsi, comme nous l'avons représenté sur la figure (4.3), ces corrélations sont nulles. En effet, à partir de (4.43), on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} C^{+/+}_{un.acc.}(U,V'>0)=C^{+/-}_{un.acc.}(U,V'>0)\\ C^{+/-}_{un.acc.}(U<0,V')=C_{vac}(U<0,V')\\ C_{vac}(U,V')=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; C^{+/+}_{un.acc.}(U<0,V'>0)=0\ . \quad (4.58)$$

• Lorsque $U>0$ et $V'>0$, seul le flux gaucher est causalement déconnecté et, de même que précédemment, par causalité, on trouve :

$$\begin{aligned} C^{+/+}_{un.acc.}(U>0,V'>0) &= C^{+/-}_{un.acc.}(U>0,V'>0)\\ &= \left(a^2\,U\,V'\right)^{-2}\times c^{+/-}_{un.acc.}\left(\frac{\ln(aU)}{a},\frac{\ln(aV')}{a}\right)\ , \end{aligned} \quad (4.59)$$

où la fonction $c^{+/-}_{un.acc.}$ est donnée en (4.49).

• Lorsque $U<0$ et $V'<0$, c'est la situation opposée : seul le flux droitier est causalement déconnecté. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} C^{+/+}_{un.acc.}(U<0,V'<0) &= C^{+/-}_{un.acc.}(V'<0,U<0)\\ &= \left(a^2\,U\,V'\right)^{-2}\times c^{+/-}_{un.acc.}\left(-\frac{\ln(-aV')}{a},-\frac{\ln(-aU)}{a}\right)\ , \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec la même fonctionnelle (4.49). Notons, cependant, que dans cette expression, l'argument de $\tilde{f}$ est $v'_L=-\frac{\ln(-aV')}{a}$.

• Finalement, le cas le plus intéressant est la situation analogue à ce que nous avons vu pour le miroir inertiel, c'est-à-dire quand les deux flux sont dans le futur de la trajectoire : $U>0$ et $V'<0$. Dans le modèle original de Davies-Fulling, ces deux flux ne sont pas corrélés puisque, le miroir étant totalement réfléchissant, la radiation à gauche de la trajectoire est complètement indépendante de la radiation à droite. Le modèle Lagrangien, quant à lui, en insérant (4.38) dans (4.55), fournit le résultat suivant :

$$c^{+/+}_{un.acc.}(u_L,v'_L)=\frac{g^2}{8\pi^2}\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\frac{4}{a^2}\sinh^2(\frac{a}{2}(u_L-v'_L)}\right)+\partial_{v'_L}\left(\frac{\tilde{f}(v'_L)}{\frac{4}{a^2}\sinh^2(\frac{a}{2}(v'_L-u_L)}\right)\right]^2 \quad (4.61)$$

De même que pour le miroir inertiel, nous avons d'abord effectué la limite $\epsilon\to 0$, et cette limite est justifiée *a posteriori* par l'absence de pôle :

$$\lim_{v'_L\to u_L} c^{+/+}_{un.acc.}(u_L,v'_L)=\frac{2\,g^2}{(12\pi)^2}\left[(\partial^3_{u_L}-a^2\partial_{u_L})\tilde{f}(u_L)\right]^2\ . \quad (4.62)$$

(4.61) est une illustration directe du théorème de Grove[86] qui stipule que le flux émis par un système uniformément accéléré est identique en tout point avec celui engendré par

le même système lorsqu'il est inertiel et plongé dans un bain thermique. En effet, on passe de l'Eq.(4.56) à (4.61) en remplaçant les coordonnées de Minkowski par celles de Rindler et la fonction de Wightman dans le vide (2.78) par celle dans un bain thermique (2.97).

Il est important de noter que la valeur moyenne du flux et la fonction de corrélation possèdent la même structure. En effet, en remarquant que ces corrélations sont identiquement nulles quand le couplage est constant, on déduit que ces deux fonctions sont localisées durant les transitoires de la fonction de couplage temporel, comme on peut le voir dans la figure (4.5).

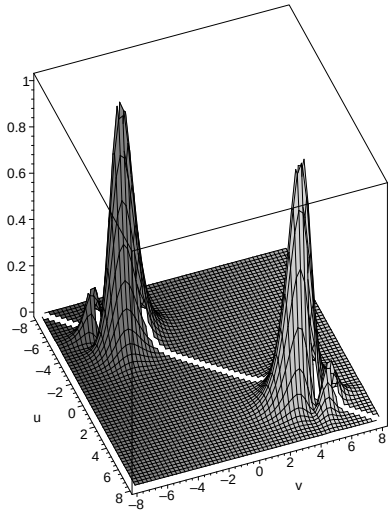

Fig. 4.5: Dans cette figure, nous avons représenté la fonction de corrélation (4.61) lorsque $\tilde{f}(\tau)$ est donnée par (3.23). Les unités sont arbitraires et les valeurs des paramètres sont fixées à $a = 1$ et $\ln \eta = -4$. Les deux pics sont localisés de deux manières. Premièrement, ils correspondent à l'image géométrique : $u_L = v'_L$, soit $V' = -1/a^2 U$. Deuxièmement, ils coïncident avec les transitoires de $\tilde{f}$: $u_L = v'_L = \pm T$.

4.4 Conclusion

Les résultats de ce Chapitre sont résumés dans les deux tableaux suivants. La leçon principale à retenir est que la fonction de corrélation ressemble fortement à la valeur moyenne du flux pour les trajectoires inertielles comme pour celles qui sont uniformément accélérées. En effet, lorsqu'on regarde les flux liés causalement à la trajectoire, leurs corrélations sont localisées durant les transitoires de la fonction de couplage temporel $\tilde{f}(\tau)$. En particulier, cela signifie que ces corrélations s'annulent dans la limite de couplage constant.

Cependant, pour la trajectoire uniformément accélérée, lorsque U et V' sont de même signe, c'est-à-dire lorsqu'un seul des flux est connecté à la trajectoire, le résultat ne tend pas vers 0. Les configurations correspondantes sont des fonctions de la grandeur $a(u_L + v'_R)$ (ou de $a(u_R + v'_L)$). Lorsque la même convention de temps propre[5] est utilisée dans les quadrants L et R, cette grandeur est affine à $\tau - \tau'$. Ceci indique une production stationnaire de particules, précisément lorsque $\tilde{f}(\tau) \equiv 1$. De plus, les corrélations sont maximales lorsque $U = -U_{cl}(V')$. Pour $c^{+/+}$, cette condition indique que, dans le processus

[5]voir note (2) du troisième Chapitre.

de création de paires, le partenaire gaucher d'un quantum droitier $U > 0$ se situe en $V' = -V_{cl}(U)$.

Il semble donc que la fonction de corrélation à deux points soit un outil trop singulier puisque, dans la limite de couplage constant, apparaissent des corrélations entre des quanta qui pourtant interfèrent parfaitement. Ainsi, ce sont encore les interférences particulièrement prononcées de la radiation émise par le système uniformément accéléré qui sont la cause du comportement pathologique des grandeurs étudiées. C'est pour expliquer ce phénomène que, dans le Chapitre suivant, nous allons utiliser une seconde méthode d'investigation en décorrélant les flux émis de manière explicite.

$\Xi\, c^{+/-}_{un.acc.}(u,v')$	$U = -\frac{1}{a}e^{-au_R} < 0$	$U = \frac{1}{a}e^{au_L} > 0$
$V' = -\frac{1}{a}e^{-av'_L} < 0$	0	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\sinh^2(\frac{a}{2}(u_L - v'_L)}\right)\right]^2$
$V' = \frac{1}{a}e^{av'_R} > 0$	0	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\cosh^2(\frac{a}{2}(u_L + v'_R)}\right)\right]^2$

Tab. 4.1: Tableau récapitulatif des expressions de la fonction de corrélation de Rindler passé/futur $c^{+/-}$ pour un miroir uniformément accéléré en L. Cette fonction est identiquement nulle pour les flux sortants causalement déconnectés de la trajectoire, *i.e.* $U < 0$. Elle diverge lorsque le flux sortant est évalué pour l'image géométrique du flux entrant, *i.e.* $U = U_{cl}(V')$. Enfin, elle est finie dans le cas restant, puisqu'elle correspond aux corrélations entre un quantum droitier et son partenaire gaucher. $\Xi = (16\pi)^2/2g^2a^4$.

$\Xi\, c^{+/+}_{un.acc.}(u,v')$	$U = -\frac{1}{a}e^{-au_R} < 0$	$U = \frac{1}{a}e^{au_L} > 0$
$V' = -\frac{1}{a}e^{-av'_L} < 0$	$\left[\partial_{v'_L}\left(\frac{\tilde{f}(v'_L)}{\cosh^2(\frac{a}{2}(u_R + v'_L)}\right)\right]^2$	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\sinh^2(\frac{a}{2}(u_L - v'_L)}\right) + \{u_L \leftrightarrow v'_L\}\right]^2$
$V' = \frac{1}{a}e^{av'_R} > 0$	0	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\tilde{f}(u_L)}{\cosh^2(\frac{a}{2}(u_L + v'_R)}\right)\right]^2$

Tab. 4.2: Tableau récapitulatif des expressions de la fonction de corrélation de Rindler futur/futur $c^{+/+}$ pour un miroir uniformément accéléré en L. De même que précédemment, cette fonction est nulle lorsque le flux sortant est causalement déconnecté et elle est finie dans les autres qui correspondent aux corrélations entre quanta partenaires provenant du processus de création de paires. $\Xi = (16\pi)^2/2g^2a^4$.

Chapitre 5

Les Valeurs Conditionnelles du Flux

La question suivante a-t-elle un sens :
qu'est-ce qui doit être *pour que quelque chose puisse être ce-qui-arrive ?*

L. Wittgenstein

Dans les Chapitres précédents, nous avons constaté que le caractère très fortement interférent de la radiation émise par un miroir uniformément accéléré était la cause des comportements pathologiques de la valeur moyenne du flux ainsi que de ses corrélations. Afin de palier ce problème, dans ce Chapitre, nous allons détruire ces interférences en imposant *de facto* une décorrélation dans le flux émis. Une manière adéquate pourrait être de prendre en compte les effets de recul dus au transfert de quantité de mouvement lors de la création de paires. En effet, les paires créées modifiant au fur et à mesure la trajectoire du miroir, elles ne peuvent plus interférer et le flux (et les corrélations) ne s'annulent plus quand le couplage est constant[1].

La technique que nous allons adopter est différente. Elle consiste à spécifier en partie les configurations du champ sur $\mathcal{J}^+$, d'où le terme de "post-sélection". Cette méthode fait partie de la théorie dite des valeurs "faibles" (*weak values*) d'opérateurs, introduite par Aharonov et Vaidman[59][2]. Le principe en est le suivant : il consiste à ne plus mesurer la valeur moyenne d'une observable dans un état, mais plutôt sa valeur entre deux mesures du système auquel elle est couplée "faiblement". L'application de cette méthode repose donc sur la connaissance de l'état initial (ou seulement d'une partie de cet état) et de l'état final (ou seulement d'une partie de cet état). Or, le sujet de notre étude est le décryptage des corrélations entre les quanta émis sur $\mathcal{J}^+$. Pour trouver comment ces dernières sont réparties, nous allons continuer à présélectionner le vide, et nous allons calculer la valeur faible du flux en spécifiant partiellement l'état final. Cette technique nécessite l'emploi d'un projecteur $\mathbf{P}$, agissant dans l'espace de Fock et définissant une partie des configurations sur $\mathcal{J}^+$. La grandeur physique que nous allons étudier est aussi appelée "valeur conditionnelle". Conditionnelle signifie qu'elle impose à l'observable étu-

[1] Pour les conséquences du recul sur la valeur moyenne du flux, voir [56], où il est démontré que les deux termes de (2.55) ne se compensent plus pour la trajectoire uniformément accélérée car le terme interférant "AB" disparaît. Le résultat est similaire pour un détecteur uniformément accéléré[87]. En ce qui concerne les corrélations, la décohérence induite par les effets de recul sépare aussi $\langle T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} \rangle$ en deux termes, ceci menant également à une valeur non nulle de la fonction à deux points dans le futur de la trajectoire *même en l'absence de fonction temporelle* (ceci fera l'objet d'une future publication).

[2] Pour une application de cette méthode à la création de paires par effet Schwinger[88], voir [89], pour l'effet Unruh appliqué à un détecteur uniformément accéléré, voir [53], et pour la radiation de Hawking, voir [37].

diée d'être évaluée dans le sous-espace propre de $\mathbf{P}$. En représentation d'Heisenberg, la valeur conditionnelle du flux d'énergie s'écrit :

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\mathbf{P}} \equiv \frac{\langle 0|\mathbf{P}\, T_{\mu\nu}|0\rangle}{\langle 0|\mathbf{P}|0\rangle} = \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle + \frac{\langle 0|\mathbf{P}\, T_{\mu\nu}|0\rangle_c}{\langle 0|\mathbf{P}|0\rangle}\,, \tag{5.1}$$

où le second terme du membre de droite est la partie connexe de la valeur conditionnelle.

Dans ce Chapitre, nous allons voir deux méthodes différentes de post-sélection. La première consiste tout simplement à ne spécifier l'état final que des particules. Ainsi, les anti-particules créées conjointement avec ces dernières lors du processus de création de paires dicteront la répartition du flux conditionnel. Les maxima de ce flux nous renseigneront sur les corrélations présentes dans le flux créé[90, 53]. La seconde méthode est moins directe. Elle impose de coupler le champ, en plus de la self-interaction avec le miroir, avec une source auxiliaire. C'est alors l'état final de cette source que l'on post-sélectionne. Nous verrons que cette méthode est une interpolation entre la première et l'étude des corrélations par le biais de $\langle T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\rangle$.

5.1 Le projecteur P

Lorsque nous avions étudié les interférences entre deux miroirs uniformément accélérés symétriques, nous avions introduit le projecteur sur l'état à une particule de Unruh (3.94). Les motivations de ce choix découlaient naturellement des propriétés particulièrement adaptées de ces modes. Voyons comment elles s'adaptent à notre problématique. Premièrement, nous désirons que le projecteur sur un certain état $|\Upsilon\rangle$ nous permette de détecter une particule issue de la création de paires par le miroir. Cette condition nécessite en toute généralité que l'état correspondant soit orthogonal à l'état initial. Dans le cadre de notre étude, $|\Upsilon\rangle$ doit donc être orthogonal au vide de Minkowski : $\langle 0|\Upsilon\rangle = 0$. Ceci invalide, par exemple, le choix des particules de Rindler, puisqu'elles peuplent le vide de Minkowski, voir (3.14). Par contre, comme les particules de Unruh sont uniquement formées de particules de Minkowski, elles sont *de facto* orthogonales à $|0\rangle$. Deuxièmement, comme les modes de Unruh sont des modes propres de la trajectoire uniformément accéléré, ils permettent d'exprimer la diffusion de manière stationnaire.

Comme ces propriétés restent pertinentes pour notre étude, c'est donc encore à partir de ces modes que nous allons post-sélectionner l'état du champ sur $\mathcal{J}^+$. Cependant, c'est une version un peu plus générale que nous allons présenter ici. En effet, le fait de fixer exactement la fréquence de Unruh $\bar{\lambda}$ empêche de localiser spatialement les quanta. Cela se voit facilement en remarquant que le projecteur lui-même (3.94), comme sa valeur moyenne (3.99), ne dépendent pas de u_R. Ainsi, afin de localiser plus finement les configurations de manière spatio-temporelle, nous allons considérer non pas un seul quantum de Unruh mais une superposition de tels quanta.

5.1.1 Le choix du paquet d'ondes

Le rôle du paquet d'ondes va être plus précisément de spécifier une partie de l'état final sur $\mathcal{J}^+_R$. Ainsi, de même que dans le troisième Chapitre, le projecteur que nous choisissons est uniquement constitué de modes droitiers U. Cependant, ici, nous allons localiser

principalement le paquet d'ondes dans le futur causal de la trajectoire L^3, *i.e.* autour de :

$$\bar{U} \;=\; \frac{1}{a}\, e^{a\bar{u}_L} \;>\; 0\;. \tag{5.2}$$

Le paquet d'ondes correspondant est défini de la manière suivante :

$$|\Upsilon\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\; \Omega^*(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)\; \hat{a}_\lambda^{U\,\dagger}|0\rangle^{U,part}\;, \tag{5.3}$$

où $|0\rangle^{U,part}$ est le vide restreint à l'espace de Fock des particules droitières. La fonction Ω est normalisée selon :

$$\langle\Upsilon|\Upsilon\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\;\; \left|\Omega(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)\right|^2 = 1\;. \tag{5.4}$$

Afin d'obtenir des résultats analytiques, Ω est donnée par :

$$\Omega(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L) \equiv \frac{e^{i\lambda\bar{u}_L}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}} \times \frac{e^{-(\lambda-\bar{\lambda})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \times \lambda \sinh^2(\pi\lambda/a) \times \mathcal{N}\left[\bar{\lambda},\sigma\right]\;. \tag{5.5}$$

Dans le premier terme, on reconnaît un anti-mode de Unruh $\hat{\varphi}_\lambda^{U\,*}$ (voir (3.17) lorsque $U = \frac{1}{a}e^{a\bar{u}_L} > 0$). Le deuxième terme détermine la structure Gaussienne du paquet d'ondes par la donnée de son centre $\bar{\lambda}$ et de sa largeur σ. Le troisième terme a été rajouté afin de pouvoir calculer les valeurs conditionnelles du flux de manière analytique. Enfin, $\mathcal{N}$ est une constante qui ne dépend que des paramètres et qui assure la normalisation (5.4). Le calcul direct donne[4] :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\left[\bar{\lambda},\sigma\right] \;=\; & \frac{16\sqrt{2}\pi^2\sqrt{\sigma}}{a}\left[\frac{1}{2}s\sqrt{\pi}\left[(2l+s^2)\,e^{l+s^2/4} - 6l\right.\right. \\ & \left.\left. +(6l-3s^2)\,e^{-l+s^2/4} - (2l-2s^2)\,e^{-2l+s^2}\right]\right]^{-1/2}\;,\end{aligned} \tag{5.7}$$

où

$$l \;=\; 2\pi\bar{\lambda}/a \quad\text{et}\quad s \;=\; 2\pi\sigma/a\;. \tag{5.8}$$

De même que dans (3.94), le projecteur[5] sur l'état $|\Upsilon\rangle$ ne spécifie pas tout l'espace de Fock, et s'écrit :

$$\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma} \equiv |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| \;\otimes\; \mathbf{1}[\hat{a}^V,\hat{b}^U,\hat{b}^V]\;. \tag{5.9}$$

---

[3]Dans ce chapitre, nous allons de nouveau supposer que le miroir se déplace dans le quadrant L de Rindler.

[4]Lorsque $\bar{\lambda} < 0$, et dans la double limite $\bar{\lambda}/a \gg 1$ et $\bar{\lambda}/a \gg \sigma^2/a^2$, on trouve :

$$\mathcal{N}^2\left[\bar{\lambda},\sigma\right] \;\to\; \frac{128\pi^{3/2}\,e^{4\pi\bar{\lambda}/a}}{\bar{\lambda}}\;. \tag{5.6}$$

[5]Contrairement à (3.94), la normalisation (5.4) justifie mathématiquement l'appellation de projecteur puisqu'on a :

$$\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma} = \mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\;.$$

5.1.2 Son contenu spatio-temporel

Sous quelle(s) condition(s) ce projecteur détermine-t-il des quanta localisés préférentiellement dans les $U > 0$ et autour de $\bar{U}$ en particulier ? Rappelons que cette question est justifiée, malgré la formulation (5.5), par le fait qu'un état qui ne possède que des fréquences de Minkowski positives ne peut être restreint dans un quadrant de Rindler.

Pour répondre à cette question, il suffit d'évaluer le flux de particules droitières dans cet état *en l'absence de miroir*. Comme nous allons le voir, ce flux possède deux maxima, répartis d'un côté et de l'autre de l'horizon $U = 0$, et d'intensités différentes. Lorsque nous les aurons évalués, il nous suffira donc d'ajuster les paramètres du paquet d'ondes afin de déplacer le "barycentre" des particules dans la région des $U > 0$.

Comme l'état est défini à partir de particules de Unruh, il est plus commode de calculer les valeurs moyennes du flux de Rindler. Ainsi, dans l'expression de $T_{uu}(U)$, le champ va naturellement être décomposé sur la base de Unruh. Nous allons donc avoir deux expressions, selon le signe de U. La valeur moyenne s'écrit de la manière suivante :

$$\langle \Upsilon | T_{uu}(u) | \Upsilon \rangle_c = 2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \; \Omega(\lambda) \; \partial_u \hat{\varphi}_\lambda^{U\,*} \right|^2 . \tag{5.10}$$

Lorsque $U = \frac{1}{a} e^{a u_L} > 0$, le résultat précédent vaut :

$$\langle \Upsilon | T_{uu}(u_L) | \Upsilon \rangle_c = \frac{\mathcal{N}^2}{2^6 \pi^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \; e^{-(\lambda - \bar{\lambda})^2 / 2\sigma^2 - i\lambda(\bar{u}_L - u_L)} \; \lambda \; \sinh(\pi\lambda/a) \; e^{-\pi\lambda/a} \right|^2 , \tag{5.11}$$

et quand $U = -\frac{1}{a} e^{-a u_R} < 0$, on obtient :

$$\langle \Upsilon | T_{uu}(u_R) | \Upsilon \rangle_c = \frac{\mathcal{N}^2}{2^6 \pi^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \; e^{-(\lambda - \bar{\lambda})^2 / 2\sigma^2 - i\lambda(\bar{u}_L + u_R)} \; \lambda \; \sinh(\pi\lambda/a) \right|^2 . \tag{5.12}$$

Des deux résultats précédents, on apprend donc que le flux possède deux maxima : un premier en $u_L = \bar{u}_L$, soit $U = \bar{U} > 0$ et le second, placé symétriquement en $u_R = -\bar{u}_L$, soit $U = -\bar{U} < 0$. Lorsque le paquet d'ondes est piqué en fréquences, *i.e.* $\sigma^2/a^2 \ll |\bar{\lambda}|/a$, le rapport de ces maxima est donné par :

$$\frac{\langle \Upsilon | T_{uu}(u_L = \bar{u}_L) | \Upsilon \rangle_c}{\langle \Upsilon | T_{uu}(u_R = -\bar{u}_L) | \Upsilon \rangle_c} = e^{-2\pi\bar{\lambda}/a} , \tag{5.13}$$

où l'on retrouve le facteur thermique qui traduit l'effet Unruh. Ainsi, si l'on désire que le paquet d'ondes $|\Upsilon\rangle$ soit préférentiellement localisé autour de $\bar{U}$, les deux conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\bar{\lambda} < 0 \quad \text{et} \quad |\bar{\lambda}|/a \gg 1 . \tag{5.14}$$

Ce résultat révèle la structure particulière des modes de Unruh. Ces derniers décrivent des quanta qui se situent de part et d'autre de l'horizon ($U = 0$ en l'occurence) mais qui possèdent deux pics dont les probabilités respectives sont reliées par le facteur de Unruh. Cette propriété permet de parler de modes à fréquence de Minkowski positive vivant quasi-uniquement dans un quadrant de Rindler.

5.1.3 Son contenu spectral

Avant de calculer les valeurs conditionnelles du flux, interrogeons-nous sur le contenu de $|\Upsilon\rangle$ en termes de fréquences de Minkowski. Afin de connaître quelle partie du spectre de Minkowski intervient dans cet état, il suffit de calculer la probabilité d'y détecter une particule de fréquence ω. Cette grandeur est donnée par :

$$\langle 0|\, a^U_\omega\, \mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\, a^{U\,\dagger}_\omega|0\rangle \;=\; \Big|\langle 0|\, a^U_\omega\, |\Upsilon\rangle\Big|^2 \;=\; \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\; \Omega^*(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)\; \gamma^U_{\lambda\omega}\right|^2 \;, \tag{5.15}$$

où $\gamma^U_{\lambda\omega}$ est donné en (3.15a). Le calcul direct ne fournissant pas de résultat analytique, on peut tout de même étudier où se situe son maximum en ayant recours à la méthode de la phase stationnaire. Bien que l'expression soit compliquée, dans la limite de validité (5.14), elle se réduit à :

$$\lambda_{pt.selle} = \bar{\lambda} - i\frac{\sigma^2}{a}\ln\left(\frac{-\omega}{\lambda_{pt.selle}e^{-a\bar{u}_L}}\right) \;. \tag{5.16}$$

La norme de l'intégrale (5.15) est maximale quand la valeur au point de selle est réelle. Cette condition correspond, d'une part, à la relation attendue $\lambda_{pt.selle} = \bar{\lambda}$, et d'autre part, à la condition :

$$\omega_{Max} \;=\; -\bar{\lambda}\, e^{-a\bar{u}_L} \;. \tag{5.17}$$

De cette relation on déduit que le paquet d'ondes $|\Upsilon\rangle$ est également centré, pour les fréquences de Minkowski, autour de ω_{Max}. De plus, on trouve que l'étalement autour de cette fréquence est $\sigma\, e^{-a\bar{u}_L}$.

Pour résumer, nous avons trouvé que les conditions :

$$\frac{\sigma^2}{a^2} \;\ll\; \frac{|\bar{\lambda}|}{a}\;, \quad \bar{\lambda} \;<\; 0\;, \quad \text{et} \quad \frac{|\bar{\lambda}|}{a} \;\gg\; 1\;, \tag{5.18}$$

permettent au paquet d'ondes qui définit le projecteur $\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}$ d'être correctement piqué autant dans l'espace-temps (autour de $\bar{U} > 0$), que pour les fréquences de Unruh (autour de $\lambda = \bar{\lambda} < 0$) et de Minkowski (autour de $\omega = -\bar{\lambda}/a\bar{U}$). Nous sommes donc en mesure d'exploiter ce projecteur afin d'évaluer les valeurs conditionnelles du flux.

5.2 Les valeurs conditionnelles du flux

Afin de calculer la valeur conditionnelle du flux (5.1), il nous faut d'abord évaluer le dénominateur de cette expression. Ce dernier correspond à la probabilité de détecter les quanta post-sélectionnés lorsque l'interaction avec le miroir est branchée. Nous allons voir dans ce calcul que notre choix de paquet d'ondes, et en particulier son comportement à hautes fréquences, possède l'intéressante propriété de jouer le rôle de la fonction de couplage temporel, *i.e.* de régulariser les expressions. Cette propriété va nous permettre de donner les valeurs conditionnelles des flux gauchers et droitiers sur $\mathcal{J}^+$ lorsque le couplage est constant. Ainsi, nous pourrons inspecter les corrélations inhérentes aux flux émis dans les conditions où les interférences sont le plus destructives.

5.2.1 Calcul de la probabilité

De même que pour l'étude des deux miroirs symétriques, il est préférable d'utiliser les amplitudes de transition en termes des modes de Unruh. Pour un seul miroir en L, le résultat est obtenu à partir de (3.98) en posant $g^R = 0$, et se réduit à :

$$B^{UV}_{\lambda\lambda'} = -i\,g\,\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}}\,\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'(e^{2\pi\lambda'/a}-1)}}\,\tilde{f}_{-\lambda-\lambda'}\ . \tag{5.19}$$

En représentation d'interaction, la probabilité de détecter l'état $|\Upsilon\rangle$ sur $\mathcal{J}^+_R$ au second ordre en g, c'est-à-dire le dénominateur dans (5.1), s'écrit :

$$P_\Upsilon = \Big|\langle\Upsilon|\,e^{iL_{int}}\,|0\rangle\Big|^2 = \langle 0|\,e^{-iL_{int}}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,e^{iL_{int}}|0\rangle = \langle 0|L_{int}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}L_{int}|0\rangle\ . \tag{5.20}$$

Notons que les autres termes d'ordre g^2, comme $\langle 0|L_{int}L_{int}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}|0\rangle$ par exemple, sont nuls précisément grâce au fait que $|\Upsilon\rangle$ est orthogonal au vide de Minkowski. A l'aide de ces amplitudes, cette probabilité vaut :

$$P_\Upsilon = 2\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda'\mathrm{d}\mu\,\hat{B}^*_{\lambda\mu}\,\hat{B}_{\lambda'\mu}\,\Omega^*(\lambda)\,\Omega(\lambda')\ . \tag{5.21}$$

Quand le paquet d'ondes est réduit à un seul quantum de fréquence $\bar{\lambda}$, comme nous l'avons fait pour (3.99), la convergence de l'intégration sur λ nécessite d'imposer des contraintes au comportement ultra-violet de $\tilde{f}_\lambda$, invalidant la possibilité d'un couplage constant (voir, par exemple, la discussion suivant (2.92) ainsi que (3.31)). Au contraire, avec notre choix de paquet d'ondes (5.5), le terme Gaussien décroît suffisamment vite pour permettre de considérer le cas $\tilde{f}(\tau) \equiv 1$. En fait, cette situation est précisément celle que nous recherchions puisqu'ainsi, il va nous être possible d'inspecter les très fortes interférences qui annulent le flux et une partie seulement de ses fonctions de corrélation.

Dorénavant, nous allons donc supposer que $\tilde{f}(\tau) \equiv 1$. Dans ces conditions, les amplitudes de transitions deviennent particulièrement simples :

$$B^{UV}_{\lambda\lambda'} = i\,g\,\frac{\lambda}{2\sinh(\pi\lambda/a)}\,\delta(\lambda+\lambda')\ , \tag{5.22}$$

et fournissent la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} P_\Upsilon &= \frac{g^2\,\mathcal{N}^2}{64\pi^2\sigma}\,\frac{a^4}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\;x^3\,(1-e^{-x})\,e^{-(x-l)^2/s^2} \\ &= \frac{g^2\,\mathcal{N}^2}{64\pi^2\sigma}\,\frac{a^4}{(2\pi)^4}\,s\sqrt{\pi}\,\Bigg[(l^3+3ls^2/2) \\ &\qquad -\left(\frac{(2l-s^2)^3}{8}-\frac{3s^2(2l-s^2)}{4}\right)\,e^{-l+s^2/4}\Bigg]\ , \end{aligned} \tag{5.23}$$

où s et l sont donnés en (5.8). Compte-tenu de (5.6), lorsque les conditions (5.18) sont respectées, on trouve :

$$P_\Upsilon = 2g^2\bar{\lambda}^2\,e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a} + \mathcal{O}(\sigma/\bar{\lambda})\ . \tag{5.24}$$

Cette grandeur est indépendante de $\bar{u}_L$. Ceci indique que le processus de création de paires est stationnaire. De plus, les paires créées sont réparties au travers du facteur thermique $e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}$. Les évènements que nous étudions sont donc rares.

5.2.2 Les valeurs conditionnelles

Maintenant que nous avons étudié le dénominateur de (5.1), nous pouvons donner l'expression totale du flux conditionnel. Pour ce faire, il faut évaluer ce dernier en représentation d'interaction. De plus, nous n'en gardons que la partie connexe, *i.e.* le deuxième terme de (5.1). Deux termes interviennent dans son écriture :

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_\Upsilon}\,\langle 0|\mathbf{P}\,T_{\mu\nu}|0\rangle_c^{Heisenberg} &= \frac{1}{P_\Upsilon}\,\langle 0|\,e^{-iL_{int}}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,T_{\mu\nu}\,e^{-iL_{int}}\,|0\rangle_c \\ &= \langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}^{p.s.} + \langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire}\ . \end{aligned} \tag{5.25}$$

Dans l'expression précédente, $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}^{p.s.}$ est le flux porté par le paquet d'ondes que nous avons post-sélectionné. Il est obtenu en ne gardant que les termes en $a^U a^{U\,\dagger}$ et en $a^{U\,\dagger}b^{U\,\dagger}$ de $T_{\mu\nu}$. Sa structure est similaire à celle que nous avons évaluée en (5.11) et (5.12) : il possède deux pics en $U=\bar{U}$ et en $U=-\bar{U}$ qui correspondent aux deux maxima de probabilité de l'état $|\Upsilon\rangle$. De plus, comme pour les quanta qui émergent d'un Trou Noir[37], ce terme est complexe. En effet, les contractions de Wick qui interviennent dans sa décomposition sont les suivantes :

$$P_\Upsilon\,\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}^{p.s.} = \langle 0|\,\overbrace{L_{int}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,T_{\mu\nu}\,L_{int}}\,|0\rangle - \langle 0|\,\overbrace{L_{int}\,L_{int}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,T_{\mu\nu}}\,|0\rangle\ , \tag{5.26}$$

où seul le premier terme est réel.

Bien évidemment, le terme qui nous intéresse est celui du partenaire, puisqu'il va nous permettre de déceler les corrélations sur $\mathcal{J}^+$. Il existe deux sortes de partenaires à notre paquet d'ondes de particules droitières : ceux formés d'anti-particules droitières et ceux formés d'anti-particules gauchères. Ainsi, $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire}$ provient des contributions $b^U b^{U\,\dagger}$ et $b^V b^{V\,\dagger}$ de l'opérateur flux. Les contractions qui interviennent permettent de prévoir que ce terme est réel :

$$P_\Upsilon\,\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire} = \langle 0|\,\overbrace{L_{int}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,T_{\mu\nu}\,L_{int}}\,|0\rangle\ , \tag{5.27}$$

puisqu'il ne fait intervenir que les amplitudes de création de paires. En termes de ces amplitudes, le flux porté par les anti-particules gauchères vaut :

$$\langle T_{vv}(V)\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire} = \frac{2\left|\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda'\,\hat{B}_{\lambda\lambda'}\,\Omega(\lambda)\,\partial_v\hat{\varphi}^V_{\lambda'}\right|^2}{\langle 0|\,e^{-iL_{int}}\,\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\,e^{iL_{int}}|0\rangle}\ . \tag{5.28}$$

L'expression de ce flux, comme celle de son homologue droitier, dépend du signe de sa variable. Ainsi, lorsque les conditions (5.18) sont respectées, les flux conditionnels portés par les anti-particules valent :

$$\langle T_{vv}(v_R)\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire} = \frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(\bar{u}_L+v_R)^2\sigma^2}\ , \tag{5.29}$$

$$\langle T_{vv}(v_L)\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire} = \frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(\bar{u}_L-v_L)^2\sigma^2}\,e^{-2\pi|\lambda|/a}\ , \tag{5.30}$$

$$\langle T_{uu}(u_R)\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire} = \frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(\bar{u}_L+u_R)^2\sigma^2}\ , \tag{5.31}$$

$$\langle T_{uu}(u_L)\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire} = \frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(\bar{u}_L-u_L)^2\sigma^2}\,e^{-2\pi|\lambda|/a}\ . \tag{5.32}$$

Ces résultats sont représentés dans la figure (5.1) et nous allons les discuter dans la prochaine section.

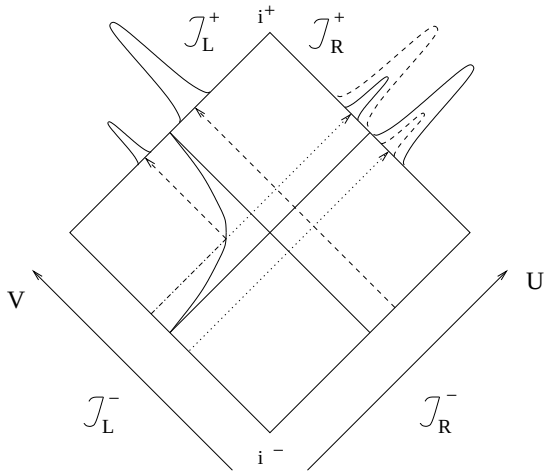

Fig. 5.1: Dans cette figure, nous avons représenté schématiquement l'intensité du flux reçu sur $\mathcal{J}^+$. Les courbes en pointillés désignent le flux porté par le paquet d'ondes post-sélectionné. Bien entendu, afin que les contributions de part et d'autre de l'horizon puissent apparaître, nous avons remplacé le facteur $e^{-2\pi|\lambda|/a} \ll 1$ par un simple facteur $1/2$. Nous avons fait de même pour les courbes pleines, qui donnent la répartition des flux portés par les partenaires reçus sur $\mathcal{J}^+_L$ et $\mathcal{J}^+_R$. Quant aux lignes en pointillés et en tirets, elles représentent les caractéristiques suivies par les configurations.

5.3 Interprétation et Conclusion

Tout d'abord, il nous faut noter la similarité entre (5.29) et le résultat que nous avions obtenu à partir de la fonction de corrélation $c^{+/+}(u_L, v'_R)$ donnée en (4.51). Les deux méthodes d'investigation pour l'étude des corrélations donnent le même résultat générique. En effet, en les appliquant au cas du couplage constant dans le temps, elles montrent que les corrélations sont maximales pour $v_R = -\bar{u}_L$. En termes de particules créées par le miroir, cela signifie que lorsqu'un quantum est détecté sur la partie $U > 0$ de $\mathcal{J}^+_R$ pour $u_L = \bar{u}_L$, son partenaire sur la partie $V > 0$ de $\mathcal{J}^+_L$ est localisé autour de $v_R = -\bar{u}_L$. La seule différence, autre que fonctionnelle, entre les deux résultats, vient de ce que la largeur du pic est donnée par $1/a$ pour $c^{+/+}$ et par $1/\sigma$ pour la valeur conditionnelle du flux. Ceci vient du choix que nous avons fait lors de la définition du paquet d'ondes $\Omega(\lambda)$. Cependant, cette différence disparaît si l'on rajoute l'hypothèse supplémentaire $\sigma = a$, qui rentre dans le domaine des conditions nécessaires et suffisantes à l'application de notre étude (5.18). Ainsi, les deux méthodes fournissent la même information pour cette configuration.

Cette similarité n'a rien de surprenant. En effet, lorsqu'on effectue explicitement le calcul de la fonction de corrélation pour $\tilde{f}(\tau) \equiv 1$, on obtient à partir de (4.54) et (4.55) :

$$\begin{aligned} c^{+/+}_{un.acc.}(u_L, v'_R) &= \langle 0| \overbrace{L_{int}\, T_{uu}(u_L)\, T_{vv}(v'_R)\, L_{int}}\ |0\rangle \\ &\quad -\mathrm{Re}\Big[\langle 0| \overbrace{L_{int}\, L_{int}\, T_{uu}(u_L)\, T_{vv}(v'_R)}\ |0\rangle\Big] \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$= \frac{g^2 a^6}{(16\pi)^2} \left\{ \left| \frac{\sinh(\phi)}{\cosh^3(\phi)} + i\,\frac{2}{\pi}\frac{\cosh(\phi) - \phi\sinh(\phi)}{\cosh^3(\phi)} \right|^2 \right.$$
$$\left. + \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\sinh(\phi)}{\cosh^3(\phi)} + i\,\frac{2}{\pi}\frac{\cosh(\phi) - \phi\sinh(\phi)}{\cosh^3(\phi)} \right)^2 \right] \right\} , \quad (5.34)$$

où

$$\phi = \frac{a(u_L + v'_R)}{2} , \quad (5.35)$$

ce qui redonne (4.51). Nous avons détaillé les éléments qui interviennent dans cette expression afin de souligner les rôles que jouent chacun des deux termes de (5.33) et afin de les relier à l'expression du flux conditionnel. En effet, on peut remarquer que le premier terme de (5.33) possède la même structure et exhibe les mêmes contractions de Wick que le flux conditionnel (5.27). Etant donnée cette remarque, on peut interpréter T_{uu} comme un opérateur de post-sélection. De plus, comme autour[6] du pic $u_L + v'_R = 0$, le premier terme est dominant sur le deuxième (qui lui-même est interférant), l'analogie entre les deux formulations devient justifiée.

Au contraire, lorsqu'on inspecte le flux conditionnel causalement connecté à la trajectoire, la correspondance entre les deux méthodes est perdue dans la limite de couplage constant. A la place de la corrélation nulle (4.61), on trouve un flux conditionnel fini (5.30). Cependant, ce dernier est plus petit que son homologue résidant de l'autre côté de l'horizon, par le facteur thermique $e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}$. La raison de cette différence est la suivante. Lorsque l'on utilise la fonction de corrélation $c^{+/+}$, la post-sélection induite par l'opérateur $T_{uu}(u_L)$ restreint les quanta droitiers reçus sur $\mathcal{J}_R^+$ au futur causal du quadrant L. Or, nous savons que, lorsque le couplage est constant, le flux de quanta est émis le long de l'horizon $U = 0$ (ainsi que pour $U \to +\infty$). On en conclut que pour les valeurs finies de u_L, $T_{uu}(u_L)$ est insensible à ces transitoires. Comme cet opérateur ne détecte rien, les corrélations avec T_{vv} sont logiquement nulles. La situation est totalement différente avec la post-sélection par $\mathbf{P}_{\bar{\lambda},\sigma}^{\bar{u}_L}$. En effet, dans la première section de ce Chapitre, nous avons explicitement montré que le paquet d'ondes $|\Upsilon\rangle$, s'il était majoritairement localisé dans le futur causal du quadrant L, possédait un second maximum de l'autre côté de l'horizon. L'importance de cette étude réside dans le fait que la probabilité de présence de quanta post-sélectionnés le long de l'horizon $U = 0$ est non nulle. Comme le miroir n'émet que dans cette direction, $\mathbf{P}_{\bar{\lambda},\sigma}^{\bar{u}_L}$ permet de détecter une partie des paires créées, et post-sélectionner avec cet opérateur ouvre la possibilité d'avoir des corrélations non-nulles. Dans ces conditions, il n'est pas surprenant de trouver ce que cachent les interférences totales du flux émis : le maximum de $\langle T_{vv}(v_L)\rangle_{\mathbf{P}}^{partenaire}$ en $v_L = \bar{u}_L$ nous apprend que des paires "particule droitière/anti-particule gauchère" sont créées précisément le long de la trajectoire du miroir. Les interférences destructives dues au caractère uniformément accéléré de la trajectoire tendent à faire disparaître ces corrélations, d'où la présence du facteur thermique exponentiellement faible. La présence du second pic n'est que le reflet de la structure des modes de Unruh, qui sont répartis symétriquement par rapport à l'horizon et dont les poids respectifs sont également dépendant de $e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}$. Cette explication est renforcée par les résultats de la valeur conditionnelle pour le partenaire droitier, voir (5.31)

[6] Voir la note (3) du Chapitre précédent précédant (4.50).

et (5.32). Ces flux montrent que le partenaire reçu sur $\mathcal{J}_R^+$, comme le post-sélectionné, réside principalement de l'autre côté de l'horizon et symétriquement à ce dernier.

Notons que si nous avions choisi de post-sélectionner un paquet d'ondes de quanta de Rindler L, l'expression (5.27) ne se serait pas réduite à un seul terme, puisque le paquet d'ondes n'aurait pas été orthogonal au vide de Minkowski. La conséquence de ceci aurait été une contribution additive avec le même comportement que dans (4.54), *i.e.* une compensation exacte du premier terme et une annulation de la valeur conditionnelle du flux.

Que pouvons-nous conclure de cette étude ? Il apparaît que la fonction de corrélation $\langle T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} \rangle$ est un objet trop local pour pouvoir être utilisé dans toutes les conditions. En effet, la cohérence intrinsèque de sa formulation ne permet pas à cette fonction de décrire le processus de création de paires, à cause des interférences excessivement fines du flux émis par le miroir uniformément accéléré. Pour que cette fonction contienne l'information relative aux corrélations du flux, il est nécessaire d'introduire de la décohérence dans le modèle (initialement trop simpliste). Les moyens sont multiples. Premièrement, nous avons vu que le fait d'introduire une dépendance temporelle au couplage était nécessaire si l'on désirait avoir des expressions régulières. On comprend maintenant que cette modification a également pour effet d'altérer suffisamment la structure du flux pour pouvoir lire ces corrélations, voir par exemple la figure (4.5). Deuxièmement, nous venons de voir que la post-sélection par des quanta de Unruh (*i.e.* des combinaisons linéaires de quanta de Minkowski) rendait les corrélations limpides. Il existe une troisième méthode, dont nous avons déjà parlé, qui a pour effet de décorréler le flux émis : il s'agit de la prise en compte des effets de recul.

Dans la prochaine section, nous allons présenter une seconde méthode de post-sélection qui permettra d'établir un lien explicite entre les fonctions de corrélation et le valeurs conditionnelles du flux.

5.4 Entre Post-sélection et fonctions de corrélation

Dans cette section, la post-sélection va se lire différemment. Au lieu de spécifier partiellement l'état du champ de radiation sur $\mathcal{J}^+$, nous allons rajouter une source extérieure, la coupler au champ Φ et post-sélectionner son état plutôt que celui du champ lui-même. Ainsi, c'est au travers de l'interaction avec cette source que les configurations futures du champ de radiation vont se trouver sélectionnées. La source que nous allons choisir a déjà été utilisée dans la section 3.3.2, il s'agit de l'atome (ou du détecteur) à deux niveaux. Cette méthode a cela de "physique" qu'elle correspond directement à l'aspect "expérimental" de notre exposé. En effet, s'il est peu aisé de compter et de localiser les particules reçues sur $\mathcal{J}^+$, il est beaucoup plus facile de regarder si, oui ou non, le détecteur (ou l'ensemble statistique de détecteurs formant un compteur de type Geiger) "clique".

5.4.1 Couplage avec un détecteur

Contrairement à ce que nous avons fait précédemment, le détecteur ici est supposé totalement inertiel. Comme la trajectoire du miroir est inscrite dans le quadrant L, cela signifie que le détecteur se trouve sur la droite du miroir, voir figure (5.2). De plus, nous supposons que les transitions de l'atome ne peuvent être dues qu'à l'interaction avec des

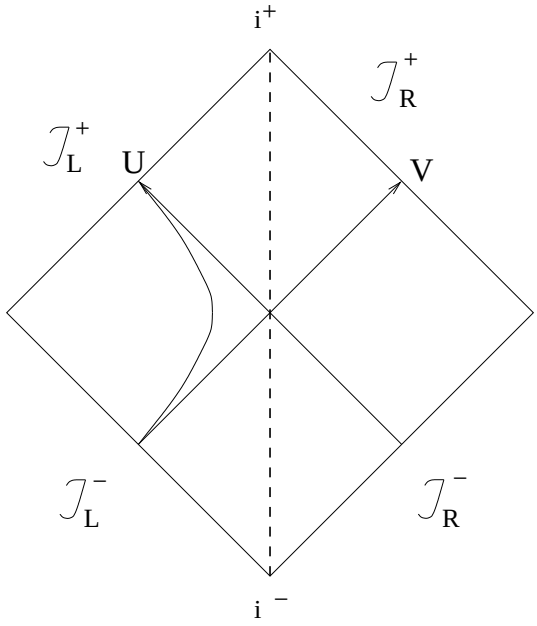

Fig. 5.2: Dans cette figure nous avons représenté en trait plein la trajectoire du miroir et en pointillés celle du détecteur. Comme ce dernier se trouve à la droite de la trajectoire uniformément accélérée et qu'il n'est sensible qu'aux quanta droitiers, l'interaction L_{int} précède toujours L_{det} dans les produits ordonnés d'opérateurs.

quanta droitiers U du champ. Cette dernière hypothèse a pour effet de rendre le détecteur insensible aux quanta qui arrivent sur le miroir en provenance de $\mathcal{J}_R^-$. En d'autres termes, le détecteur se trouve soit dans le futur, soit dans une région causalement déconnectée du miroir. Son Lagrangien d'interaction s'écrit de la manière suivante :

$$L_{det} \;=\; -G\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\; F(U)\Big(\partial_U \Phi^{U\,\dagger}\, e^{-imU}\; |-\rangle\langle +| \;+\; \partial_U \Phi^U\, e^{imU}\; |+\rangle\langle -|\Big)\;. \quad (5.36)$$

Dans cette expression, G est la constante de couplage, $F(t)$, la fonction temporelle de l'interaction et m est toujours le gap entre les deux niveaux de l'atome. Comme la trajectoire de l'atome est totalement inertielle, la condition $z_{cl}(t) = 0$ rend les variables U et t équivalentes dans l'intégrale précédente. En l'absence de miroir, *i.e.* $g = 0$, le champ est dans son état fondamental. Ainsi, c'est bien sûr au travers de la non-uniformité de $F(t)$ que des "paires" vont pouvoir être créées par le détecteur. Ce que nous qualifions de "paire" créée par ce système est l'adjonction d'un quantum de champ avec un "exciton" ou un "désexciton" de l'atome, comme nous l'avons calculé en (3.46). Pour la trajectoire inertielle, ces paires sont naturellement créées durant les transitoires de $F(t)$ et l'amplitude de création de paire est donnée par :

$$M_\omega^{-\to+} = \langle +|\langle 0|b_\omega^U\; iL_{det}|0\rangle|-\rangle = G\,\sqrt{\pi\omega}\,F_{\omega+m}\;, \quad (5.37)$$

où $F_{\omega+m}$ est une composante de Fourier de $F(t)$. Naturellement, m agit comme un cut-off infra-rouge dans le sens suivant. Si $F(t)$ ne varie pas assez vite, *i.e.* si elle ne possède pas de fréquences de Fourier supérieures à m, le détecteur ne va jamais "cliquer" dans le vide, ni, par conséquent, émettre de quantum de champ.

Comme L_{int} se trouve dans le passé de L_{det}, l'opérateur d'évolution s'écrit :

$$T\, e^{i(L_{total})} = T\, e^{i(L_{int}+L_{det})} = 1 + i(L_{int} + L_{det}) - L_{det}L_{int} - \frac{1}{2}\, L_{int}^2 - \frac{1}{2}\, L_{det}^2 \ . \quad (5.38)$$

Comme c'est le cas depuis le début de notre étude, ce sont les processus d'émission spontanée qui nous intéressent. Cela suppose que nous allons choisir comme état initial le vide, c'est-à-dire, ici, l'état fondamental de l'espace de Fock $|0\rangle \otimes |-\rangle$. La post-sélection va consister à imposer au détecteur de se trouver dans son état excité $|+\rangle$ lorsque $t = +\infty$. Le projecteur qui va remplacer $\mathbf{P}$ est donc tout simplement :

$$\mathbf{\Pi} = |+\rangle\langle +|. \quad (5.39)$$

Ce choix impose que chaque opérateur d'évolution soit développé à un ordre impair en G. Les expressions des valeurs conditionnelles seront donc toutes à l'ordre $G^2\, g^2$. De même qu'avec le projecteur $\mathbf{P}$, la valeur conditionnelle du flux s'écrit en représentation d'Heisenberg :

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{\Pi}} \ \equiv \ \frac{\langle 0|\mathbf{\Pi}\, T_{\mu\nu}|0\rangle}{\langle 0|\mathbf{\Pi}|0\rangle} \ = \ \langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle \ + \ \frac{\langle 0|\mathbf{\Pi}\, T_{\mu\nu}|0\rangle_c}{\langle 0|\mathbf{\Pi}|0\rangle} \ , \quad (5.40)$$

soit en représentation d'interaction :

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{\Pi}} = \langle 0|e^{-iL_{total}}\, T_{\mu\nu}\, e^{iL_{total}}|0\rangle_c + \frac{\langle 0|e^{-iL_{total}}\, \mathbf{\Pi}\, T_{\mu\nu}\, e^{iL_{total}}|0\rangle_c}{\langle 0|e^{-iL_{total}}\, \mathbf{\Pi}\, e^{iL_{total}}|0\rangle_c} \ . \quad (5.41)$$

Dans ces conditions, la probabilité pour que le détecteur soit excité en fin de parcours vaut :

$$\langle \mathbf{\Pi}\rangle_c = \langle 0|\left(1 - iL_{int} - \tfrac{1}{2}\, L_{int}^2\right)\ \hat{\mathbf{\Pi}}\ \left(1 + iL_{int} - \tfrac{1}{2}\, L_{int}^2\right)|0\rangle_c \ , \quad (5.42)$$

avec

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = \langle -|L_{det}\, \mathbf{\Pi}\, L_{det}|-\rangle_c \ . \quad (5.43)$$

Or, un calcul direct fournit le résultat suivant :

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = G^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\ \mathrm{d}U'\ F(U)\, F(U')\, e^{-im(U-U')}\ \partial_U\Phi^\dagger\partial_{U'}\Phi \ . \quad (5.44)$$

Donc la probabilité $\langle \mathbf{\Pi}\rangle$ vaut :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{\Pi}\rangle_c \ = \ G^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} &\mathrm{d}U\ \mathrm{d}U'\ F(U)\, F(U')\, e^{-im(U-U')} \\ &\times \langle 0|\left(1 - iL_{int} - \tfrac{1}{2}\, L_{int}^2\right)\ \partial_U\Phi^\dagger\partial_{U'}\Phi\ \left(1 + iL_{int} - \tfrac{1}{2}\, L_{int}^2\right)|0\rangle_c \quad (5.45)\end{aligned}$$

Remarquons que si les deux opérateurs de champ étaient évalués au même point, la valeur moyenne intégrée ne serait rien d'autre que celle de l'opérateur de flux. La probabilité peut donc être vue comme la valeur moyenne "diffuse" (*smeared averaged value*) du flux droitier, ou comme la valeur moyennée par $F(t)$ de l'expression à points séparés (*point-spitted*) de ce même opérateur. Ces deux manières de calculer des valeurs moyennes d'opérateurs

ont souvent été utilisées dans la littérature, afin de faire disparaître les divergences ultra-violettes inhérentes aux expressions[91, 92, 93]. Or, c'est précisément le rôle que nous avons reconnu au projecteur $\mathbf{P}$ dans la section précédente. Il n'est donc pas surprenant que ce soit également le cas pour la post-sélection par le biais de $\mathbf{\Pi}$.

La méthode de calcul que nous venons d'effectuer se réédite intégralement pour calculer le numérateur de la valeur conditionnelle du flux. On trouve immédiatement :

$$\begin{aligned}
&\langle 0|e^{-iL_{total}}\,\mathbf{\Pi}\,T_{VV}(V)\,e^{iL_{total}}|0\rangle_c \\
&\qquad = \langle 0|\,\left(1-iL_{int}-\frac{1}{2}\,L_{int}^2\right)\,\hat{\mathbf{\Pi}}\,T_{VV}(V)\,\left(1+iL_{int}-\frac{1}{2}\,L_{int}^2\right)\,|0\rangle_c \qquad (5.46)\\
&\qquad = G^2\,\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}U\,\mathrm{d}U'\,F(U)\,F(U')\,e^{-im(U-U')} \\
&\times\langle 0|\left(1-iL_{int}-\frac{1}{2}\,L_{int}^2\right)\,\left(\partial_U\Phi^\dagger\partial_{U'}\Phi\right)\,T_{VV}(V)\,\left(1+iL_{int}-\frac{1}{2}\,L_{int}^2\right)|0\rangle_c \qquad (5.47)\\
&\qquad = \frac{G^2}{4}\,\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}U\,\mathrm{d}U'\,F(U)\,F(U')\,e^{-im(U-U')}\,\mathrm{Re}[P(U,V)]\,\mathrm{Re}[P(U',V)]\;. \qquad (5.48)
\end{aligned}$$

De la dernière écriture, on déduit que la valeur conditionnelle du flux obtenue est, cette fois-ci, toujours réelle. Ceci est univoquement relié au fait que le numérateur peut être obtenu exclusivement à l'aide des amplitudes de création de paires du miroir $B^{UV}_{\omega\omega'}$, voir (4.12).

De plus, sans faire de calcul explicite, mais en se servant de ce que nous avons vu pour la fonction de corrélation $C^{+/+}$, on peut conclure qu'une condition nécessaire pour que l'intégrand soit non nul est que U,U' et V résident dans les transitoires de la fonction temporelle du miroir[7]. Pour ce faire, il est donc également nécessaire que ces transitoires soient incluses dans le support de $F(t)$. En d'autres termes, on trouve logiquement que le changement d'état du détecteur n'est corrélé au flux de radiation que si l'atome est branché dans le futur des transitoires du miroir. Ainsi, par causalité, le comportement de $F(t)$ pour $t<0$ n'a strictement aucune influence sur la valeur conditionnelle du flux.

Notons enfin que, comme la trajectoire du détecteur est inertielle, rien n'empêche de le coupler uniformément au champ de radiation. Cette hypothèse revient à poser $F(t)\equiv 1$. Pour autant, ce n'est pas cette condition que nous allons prendre pour interpréter la valeur conditionnelle obtenue. Les fonctions $F(t)$ intéressantes vont être discutées maintenant.

5.4.2 $\langle T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\rangle$ et $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}$ vus comme des cas limites

Nous allons interpréter les résultats (5.42) et (5.47) en reliant la valeur conditionnelle du flux qu'ils induisent avec les deux autres formulations que nous avons considérées auparavant : la valeur conditionnelle obtenue avec $\mathbf{P}$ et la fonction de corrélation à deux points. Pour ce faire, il suffit de faire tendre $F(t)$ vers deux comportements limites.

D'une part, considérons que le champ de radiation n'interagit avec le détecteur qu'à un seul instant. L'interaction est alors localisée de manière spatio-temporelle au point $U=V=U_0$ de la trajectoire de ce dernier. On a alors $F(U)=\delta(U-U_0)$. Cette fonction implique qu'il réagit à tous les quanta avec une sensibilité égale puisque la fonction $F(t)$

[7] Ceci n'est rien d'autre que l'application du théorème de Grove[64].

possède toutes les fréquences de Minkowski. L'expression (5.48) nous apprend alors que la valeur conditionnelle vaut :

$$\langle T_{VV}\rangle_{\mathbf{\Pi}} = \frac{C^{+/+}(U_0,V)}{\langle T_{UU}(U_0)\rangle} \ . \tag{5.49}$$

La fonction de corrélation apparaît donc comme étant la version "ultra-locale" de la post-sélection par le projecteur Π.

D'autre part, choisissons de localiser F non pas dans l'espace-temps mais dans l'espace de ses composantes de Fourier. Si l'on ne garde que la composante $F_{k=0}$, l'Eq.(5.37) nous apprend que le détecteur va être insensible aux configurations du vide. C'est donc autour de la fréquence m que l'on doit localiser la représentation spectrale de F. Afin de conserver une fonction temporelle réelle, on ne change rien en écrivant : $F_k = \delta(k-m)+\delta(k+m)$, soit $F(t) = 2\cos(mt)$. Comme on le voit, cette fonction n'éteint pas le couplage pour les temps asymptotiquement grands mais elle n'est sensible qu'à une seule fréquence (positive) de Minkowski. Dans ces conditions, l'opérateur $\hat{\mathbf{\Pi}}$ défini en (5.43) vaut :

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = 8\pi\ m\ a^{U\,\dagger}_{2m}\ a^{U}_{2m} = 8\pi\ m\ a^{U\,\dagger}_{2m}|0\rangle\langle 0|\ a^{U}_{2m}\ , \tag{5.50}$$

où la deuxième expression n'est valide que lorsqu'on se limite aux diagrammes connexes au second ordre en g. Cette seconde écriture a pour but de souligner l'équivalence avec la post-sélection d'une seule particule de Minkowski comme nous l'avons définie en (5.9). Notons que ce cas particulier revient à choisir une seule particule de fréquence $2m$ à la place d'un paquet d'ondes de particules de Unruh, ce qui équivaut à prendre $\Omega(\lambda) = \gamma^{U}_{\lambda,2m}$. De plus, il est important de remarquer que si elle est ultra-locale dans le domaine spectral, cette post-sélection ne possède aucune spécification spatio-temporelle.

L'étude des corrélations par cette méthode fait donc le lien entre les deux autres outils sur lesquels nous nous sommes déjà penchés. En effet, on peut donc considérer le flux conditionnel $\langle T_{VV}\rangle_{\mathbf{\Pi}}$ comme une interpolation entre la fonction de corrélation hyper-locale $\langle T_{UU}T_{VV}\rangle$ et la post-sélection d'une particule de Minkowski donnée par (5.9) au travers de (5.50). Cette interpolation est cruciale dans le sens où elle redonne sa légitimité à la description particulaire des grandeurs physiques associées à la radiation. En effet, en l'absence d'un choix unique de particules lorsqu'on travaille en espace-temps courbe, il a souvent été considéré que les seuls objets utilisables étaient les valeurs moyennes d'opérateurs, comme celles du flux en termes des fonctions de Wightman, ou celles des fonctions de corrélation à deux points. La légitimité de la description particulaire vient autant de son à-propos que de la régularité des expressions qu'elle engendre. En effet, comme nous l'avons déjà dit, cela reste une question physique et sensée que de se demander si l'atome a, ou n'a pas, subi une transition. De plus, nous avons pu voir que l'information recueillie au travers des valeurs conditionnelles, dont $\langle T_{VV}\rangle_{\mathbf{\Pi}}$ fait partie, est beaucoup plus riche que celle qui émane des fonctions à deux points.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes attelés à généraliser le modèle de Davies-Fulling. Les principaux résultats que nous avons trouvés sont de deux sortes. Les premiers concernent le flux émis par un miroir uniformément accéléré. En découplant adiabatiquement le champ de radiation du miroir par le biais d'une fonction temporelle (notée $\tilde{f}(\tau)$), nous avons résolu toutes les incohérences que possédait le modèle de Davies-Fulling. En particulier, nous avons obtenu des amplitudes de transition régulières qui ne divergent ni dans l'infra-rouge ni dans l'ultra-violet, et dont le comportement analytique permet de garantir le respect de la causalité. En outre, nous avons obtenu des expressions concordantes des flux émis qu'on utilise une description locale (en termes des fonctions de Wightman) ou globale (en termes des modes asymptotiques). Nous avons montré que le flux est concentré dans les transitoires de $\tilde{f}(\tau)$, ce qui explique qu'ils soit nul dans le cadre du modèle de Davies-Fulling. De plus, nous avons trouvé que les propriétés spectrales de $\tilde{f}(\tau)$ introduisent des cut-offs infra-rouge et ultra-violet. C'est grâce à ce dernier que nous avons éliminé la présence dans le flux émis de fréquences soumises à un *redshift* arbitrairement élevé (problème que l'on peut relier au problème "trans-Planckien" qui est génériquement lié à la présence d'un horizon).

Le second type de résultats que nous avons trouvés concerne les corrélations quantiques présentes dans le flux. Pour étudier ces dernières, nous avons utilisé deux méthodes différentes. Premièrement, en examinant les fonctions de corrélations à deux points, nous avons montré que, dans le futur causal de la trajectoire uniformément accélérée, les paires de particules à impulsions opposées - particules (et anti-particules) U et V - sont émises uniquement pendant les transitoires de $\tilde{f}(\tau)$. En cela, les fonctions de corrélations possèdent un comportement similaire à celui du flux. La seconde méthode que nous avons employée utilise les valeurs du flux conditionnelles à la détection d'un paquet d'ondes sur l'infinité future $\mathcal{J}^+$. Ayant défini le contenu en particules du champ sur $\mathcal{J}^+$, nous avons étudié la repartition correspondante du flux porté par les anti-particules. Lorsque l'interaction champ/miroir est uniforme, le flux instantanné est nul à cause d'interférences destructives entre les quanta émis. Grâce aux valeurs conditionnelles, nous avons montré que les paires de quanta sont majoritairement formées de particules et d'anti-particules reparties de part et d'autre de l'horizon de la trajectoire.

La description que nous avons présentée permet de s'intéresser à un problème où les miroirs jouent un rôle particulièrement important : l'effet Casimir. La prise en compte des effets dispersifs des deux miroirs a été réalisée par Jaekel et Reynaud[69]. Leurs résultats réapparaissent avec le formalisme du premier Chapitre, aussi bien par le biais des coefficients de Bogoliubov qu'au travers des fonctions de Green. Cependant, ces auteurs restent dans le cadre du modèle de Davies-Fulling puisqu'ils ne découplent pas adiabatiquement le champ et le miroir. Ainsi, lorsque l'interaction est uniforme, la densité d'énergie est

négative et constante. Nous avons vu que notre formalisme permettait de considérer simultanément deux miroirs. Dans cette thèse, les miroirs uniformément accélérés que nous avons pris étaient causalement déconnectés ; ils ne pouvaient donc pas constituer une cavité de Perot-Fabry. Il serait intéressant d'étudier l'ensemble formé par deux miroirs inertiels séparés par une distance L. En utilisant une fonction $f(t)$ qui découple asymptotiquement ces miroirs au champ de radiation, on pourrait comparer la contribution négative due à l'effet Casimir (et qui ne dépend que de L) à la contribution positive des transitoires (qui ne dépend que de la largeur des transitoires Δ). Entre autres, une analyse détaillée de ce problème pourrait nous révéler comment la notion de force attractive apparaît à partir des amplitudes de diffusion sur chaque miroir.

Le concept de force nous rappelle que notre étude possède tout de même une sérieuse carence. En effet, dans notre travail, nous avons toujours négligés les effets de recul, que ce soit en généralisant le modèle de Davies-Fulling ou avec le modèle Lagrangien. Prendre en compte ces effets est impossible dans le modèle de Davies-Fulling. Cependant, on peut construire un nouveau Lagrangien où l'impulsion est conservée. La méthode repose sur un formalisme simple[56]. Au lieu d'utiliser un Lagrangien self-interactif, le champ scalaire est couplé à un champ "lourd", jouant le rôle du miroir. Pour décrire une trajectoire uniformément accélérée, le champ lourd est supposé chargé et soumis à un champ électrique constant. Le résultat est que le flux devient incohérent et strictement positif. La raison est que l'effet du recul est perçu différemment par les deux termes de l'Eq.(2.55). Alors que ces deux termes se compensaient exactement dans le cas sans recul, le second (celui que nous avons qualifié d'interférant parce qu'il ne participe pas à l'énergie $\langle H_U \rangle$) disparaît lorsque les effets de recul sont pris en compte. Ce nouveau modèle ayant été utilisé pour comprendre les valeurs moyennes du flux, il serait intéressant de l'appliquer aux calcul des fonctions de corrélations. La prise en compte du caractère dynamique de l'interaction devrait exhiber le même type de comportement.

Ne perdons pas de vue que ce qui motive l'étude de la radiation émise par un miroir est la volonté d'une meilleure compréhension de l'effet Hawking. Pour effectuer un lien entre les deux situations il faut poursuivre l'étude initiée par Carlitz et Willey[25] en considérant un miroir qui suit la trajectoire $\kappa V_{cl}(U) = -e^{-\kappa U}$, puisque cette dernière engendre un flux thermique et stationnaire tout comme celui de Hawking. Il serait intéressant d'approfondir l'étude du flux engendré par un tel miroir. Nous avons vu que, si l'interaction est découplée adiabatiquement (ou si la trajectoire est modifiée "à la main"), le flux émis ne possède plus de fréquences trans-Planckiennes arbitrairement décalées vers le rouge. Comment la prise en compte des effets de recul résout-elle se problème ? En quoi la stationnarité du flux et son caractère thermique sont-ils modifiés ? Dans le quatrième Chapitre, nous avons calculé les fonctions de corrélation correspondantes mais uniquement entre les flux dirigés vers la droite T_{UU} et ceux dirigés vers la gauche T_{VV}. Il serait donc intéressant d'étudier les corrélations du flux thermique reçu sur $\mathcal{J}_R^+$; pour ce faire, les valeurs conditionnelles semblent être l'outil indiqué.

APPENDICES

A) Recouvrement des vides *in* et *out*
B) Inversibilité de la matrice $\alpha^{UV}_{\omega k}$
C) Les relations d'unitarité pour la matrice $\mathcal{B}$
D) Fonctions K_ν de Bessel
E) Le terme $\mathcal{D}$
F) Validité du traitement perturbatif
G) L'énergie pour un miroir inertiel dans le vide
H) Le flux dans un bain thermique
I) Les diagrammes de Carter-Penrose
J) La trajectoire régularisée

Annexe A

Recouvrement des vides *in* et *out*

Calculemus.

G. Leibniz

Afin d'avoir des expressions finies, nous utiliserons, dans cet Appendice, des bases *in* et *out* discrètes. Ainsi, les intégrales sont ici remplacées par des sommes, ce qui implique que toutes les fréquences sont supposées quantifiées. De même, des symboles de Kronecker seront utilisés à la place les distributions de Dirac. Tout ceci est résumé dans le tableau suivant.

Repr. continue	Repr. discrète
$k, \omega, \omega' \in \Re^+$	$k, \omega, \omega' \in k_0 \times \mathbf{N}$
$\int_0^\infty \mathrm{d}k$	$\sum_k$
$\delta(k-\omega)$	$\delta^{k,\omega}$

Tab. A.1: Correspondance entre les représentations continue et discrète.

Notre but est d'obtenir une expression de $Z = \langle 0^{U,out} | 0^{V,in} \rangle$ dans le cas général où les coefficients $\alpha^{UV}_{\omega k}, \beta^{UV}_{\omega k}$ ne sont pas diagonaux en fréquence. A ce titre, les expressions originales de Kamefuchi et Umezawa[94] ne sont plus valables. En plus des opérateurs *in* et *out*, il est judicieux de définir une troisième famille d'opérateurs, que l'on notera par un tilde. Cette dernière forme une généralisation des modes de Unruh[28, 32] dans le sens où $\tilde{a}_\omega$ est, d'une part, constitué uniquement d'opérateurs $a^{V,in}_k$ et, d'autre part, uniquement caractérisé par une fréquence[1] $\omega > 0$, comme les opérateurs $a^{U,out}_\omega$. La même construction s'opère pour les anti-particules. Cela implique, bien évidemment, que la notion de particule/anti-particule soit la même pour les opérateurs *in* et leurs combinaisons linéaires tilde.

Ces opérateurs s'écrivent sous la forme suivante :

$$\alpha_\omega \, \tilde{a}_\omega \;\; = \;\; \sum_k \alpha^{UV\,*}_{\omega k} \, a^{V,in}_k \, , \qquad \alpha_\omega \, \tilde{b}_\omega = \sum_k \alpha^{UV\,*}_{\omega k} \, b^{V,in}_k \, . \tag{A.1}$$

[1] La différence notable entre cette nouvelle base et celle de Unruh est que, dans notre cas, le signe de la fréquence des modes tilde est positif alors que, pour les modes originaux de Unruh, λ prend toutes les valeurs de $\mathcal{R}$, voir (3.16).

Les coefficients α_ω sont supposés réels et aucun d'entre eux n'est nul. En imposant la normalisation des commutateurs à même fréquence :

$$[\tilde{a}_\omega, \tilde{a}^\dagger_\omega] = 1, \tag{A.2}$$

on trouve l'expression des coefficients α_ω en fonction de ceux de Bogoliubov :

$$\alpha_\omega = \sqrt{\sum_k |\alpha^{UV}_{\omega k}|^2}\ . \tag{A.3}$$

Lorsque les coefficients $\alpha^{UV}_{\omega k}$ et $\beta^{UV}_{\omega k}$ sont arbitraires, la nouvelle base n'est pas orthogonale et les relations de commutations sont données en toute généralité par la donnée de la matrice $F_{\omega\omega'}$ définie comme suit :

$$[\tilde{a}_\omega, \tilde{a}^\dagger_{\omega'}] \equiv \frac{F_{\omega\omega'}}{\alpha_\omega \alpha_{\omega'}} = [\tilde{b}_\omega, \tilde{b}^\dagger_{\omega'}] = \frac{\sum_k \alpha^{UV\,*}_{\omega k} \alpha^{UV}_{\omega' k}}{\alpha_\omega \alpha_{\omega'}}\ . \tag{A.4}$$

Bien sûr, les équation précédentes sont compatibles avec (A.3) et la matrice F satisfait à : $F_{\omega\omega} = \alpha^2_\omega,\ \forall\omega$. De plus, F est inversible :

$$\sum_{\omega'} F_{\omega\omega'} F^{-1}_{\omega'\omega''} = \delta_{\omega,\omega''} \quad \Rightarrow \quad F^{-1}_{\omega'\omega''} = \sum_{k'} (\alpha^{-1})^{UV}_{\omega' k'} (\alpha^{-1})^{UV\,*}_{\omega'' k'}\ , \tag{A.5}$$

où $(\alpha^{-1})^{UV}_{\omega k}$ est la matrice inverse de $\alpha^{UV}_{\omega k}$ (son inversibilité est démontrée dans l'Appendice suivant), et F satisfait également :

$$F_{\omega'\omega} = F^*_{\omega\omega'}\ . \tag{A.6}$$

En se servant des relations (1.35), les opérateurs *out* s'expriment en fonction des nouveaux opérateurs de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{U,out}_\omega = \alpha_\omega\ \tilde{a}_\omega - \sum_{\omega'} \alpha_{\omega'} B_{\omega\omega'}\ \tilde{b}^\dagger_{\omega'} \\ b^{U,out}_\omega = \alpha_\omega\ \tilde{b}_\omega - \sum_{\omega'} \alpha_{\omega'} B_{\omega\omega'}\ \tilde{a}^\dagger_{\omega'} \end{array} \right. \quad \text{où}\ \ B_{\omega\omega'} \ \equiv\ \sum_k \beta^{UV}_{\omega k}\ (\alpha^{-1})^{UV}_{\omega' k}\ . \tag{A.7}$$

Les relations de commutations canoniques des opérateurs *out* permettent de relier les matrices B et F :

$$\left[a^{U,out}_\omega, a^{U,out\,\dagger}_{\omega'}\right] = \delta_{\omega,\omega'} \quad \Rightarrow \quad F_{\omega\omega'} - \sum_{\Omega\Omega'} B_{\omega\Omega} B^*_{\omega'\Omega'} F_{\Omega'\Omega} = \delta_{\omega,\omega'}\ , \tag{A.8}$$

$$\left[a^{U,out}_\omega, b^{U,out}_{\omega'}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\Omega} B_{\omega'\Omega} F^*_{\Omega\omega} - \sum_{\Omega'} B_{\omega\Omega'} F^*_{\Omega'\omega'} = 0\ . \tag{A.9}$$

L'avantage des modes tilde est de permettre d'exprimer le vide *out* en fonction du vide *in*. Supposons que ces deux états soient reliés de la manière suivante :

$$|0^{U,out}\rangle = f(\tilde{a}^\dagger_\lambda, \tilde{b}^\dagger_{\lambda'})|0^{V,in}\rangle\ . \tag{A.10}$$

Le fait que les particules soient créées par paires et les résultats de la section 1.3 nous incitent à poser :

$$f(\tilde{a}^\dagger_\lambda, \tilde{b}^\dagger_{\lambda'}) = Z_0 \, \exp\Big(\sum_{\lambda\lambda'} A_{\lambda\lambda'} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'} \, \tilde{a}^\dagger_\lambda \tilde{b}^\dagger_{\lambda'} \Big) \, . \tag{A.11}$$

La définition du facteur de désintégration du vide permet d'avoir immédiatement :

$$Z = \langle 0^{U,out} | 0^{V,in} \rangle = Z_0^* \, . \tag{A.12}$$

Reste à déterminer la matrice inconnue A en fonction des matrices B et F. La méthode consiste à utiliser la définition du vide *out*, à savoir l'état qui engendre le noyau de l'opérateur linéaire a^{out}_ω, puis à décomposer cet opérateur sur la nouvelle base tilde grâce à (A.7). Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a^{U,out}_\omega \, |0^{U,out}\rangle &= 0 \qquad\qquad (A.13) \\ &= Z^* \left(\alpha_\omega \, \tilde{a}_\omega - \sum_{\omega'} \alpha_{\omega'} B_{\omega\omega'} \, \tilde{b}^\dagger_{\omega'} \right) \, \exp\Big(\sum_{\lambda\lambda'} A_{\lambda\lambda'} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'} \, \tilde{a}^\dagger_\lambda \tilde{b}^\dagger_{\lambda'} \Big) \, |0^{V,in}\rangle \, . \end{aligned}$$

L'opérateur $\tilde{b}^\dagger_{\omega'}$ commute avec l'exponentielle. Il n'en est pas de même pour $\tilde{a}_\omega$ qui vérifie, grâce à (A.4) :

$$\left[\tilde{a}_\omega, \exp\Big(\sum_{\lambda\lambda'} A_{\lambda\lambda'} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'} \, \tilde{a}^\dagger_\lambda \tilde{b}^\dagger_{\lambda'} \Big) \right] = \sum_{\nu\nu'} F_{\omega\nu} A_{\nu\nu'} \frac{\alpha_{\nu'}}{\alpha_\omega} \, \tilde{b}^\dagger_{\nu'} \, \exp\Big(\sum_{\lambda\lambda'} A_{\lambda\lambda'} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'} \, \tilde{a}^\dagger_\lambda \tilde{b}^\dagger_{\lambda'} \Big) \tag{A.14}$$

Les deux relations précédentes permettent d'écrire l'expression suivante :

$$\left\{ \sum_{\nu\nu'} F_{\omega\nu} A_{\nu\nu'} \alpha_{\nu'} \, \tilde{b}^\dagger_{\nu'} - \sum_{\omega'} \alpha_{\omega'} B_{\omega\omega'} \, \tilde{b}^\dagger_{\omega'} \right\} \, |0^{U,out}\rangle = 0 \, . \tag{A.15}$$

En la projetant sur le bra $\langle 0^{V,in}| \tilde{b}_\Omega$, on obtient :

$$\frac{Z^*}{\alpha_\Omega} \left(\sum_{\nu\nu'} F_{\omega\nu} A_{\nu\nu'} F^*_{\nu'\Omega} - \sum_{\omega'} B_{\omega\omega'} F^*_{\omega'\Omega} \right) = 0 \, . \tag{A.16}$$

Comme la matrice F est inversible, la matrice A s'exprime de la manière suivante :

$$A_{\omega\omega'} = \sum_\nu F^{-1}_{\omega\nu} B_{\nu\omega'} \, . \tag{A.17}$$

Grâce à cette dernière expression, on peut réécrire l'Eq.(A.10) à partir de (A.11) et (A.12) :

$$|0^{U,out}\rangle = Z^* \, \exp\Big(\sum_{\omega\omega'\nu} F^{-1}_{\omega\nu} B_{\nu\omega'} \alpha_\omega \alpha_{\omega'} \, \tilde{a}^\dagger_\omega \tilde{b}^\dagger_{\omega'} \Big) |0^{V,in}\rangle \, , \tag{A.18}$$

puis, à l'aide des relations (A.1), (A.5) et (A.7), les vides *in* et *out* sont reliés par les coefficients de Bogoliubov selon :

$$|0^{U,out}\rangle = Z^* \, \exp\Big(\sum_{\omega k k'} (\alpha^{-1})^{UV\,*}_{\omega k} \beta^{UV}_{\omega k'} \, a^{V,in\,\dagger}_k b^{V,in\,\dagger}_{k'} \Big) |0^{V,in}\rangle \, . \tag{A.19}$$

Remarque. Cette relation est à rapprocher de la matrice $\hat{S}$ dont l'action sur les vides entrant et sortant est explicitée en (1.95). En effet, l'opérateur f que nous venons d'introduire est la projection de $\hat{S}$ sur l'espace engendré par $|0^{V,in}\rangle$.

L'apparente complexité de l'expression précédente permet cependant de relier facilement l'instabilité du vide $|Z| < 1$ à la probabilité de création d'une paire de particules *out* dans le vide *in*. Ainsi, cette probabilité vaut :

$$\begin{aligned} P_{\omega\omega'} &= \langle 0^{U,out}|a_{\omega}^{U,out} b_{\omega'}^{U,out}|0^{V,in}\rangle \\ &= -Z\, B_{\omega\omega'} \quad (cf.\text{Eq.}(1.46)) \\ &= -Z \sum_{k} \beta_{\omega k}^{UV} \alpha_{\omega' k}^{UV\,*} + \mathcal{O}(\beta^3)\ . \end{aligned} \tag{A.20}$$

D'après (A.19), on a :

$$|0^{V,in}\rangle = Z\ \exp\Big(-\sum_{k\omega\omega'} (\alpha^{-1})_{\omega k}^{UV}\, \beta_{\omega' k}^{UV}\ a_{\omega}^{U,out\,\dagger} b_{\omega'}^{U,out\,\dagger} \Big) |0^{U,out}\rangle\ . \tag{A.21}$$

Ainsi, au second ordre en β, en projetant sur $\langle 0^{V,in}|$ l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= Z\, \langle 0^{V,in}| \exp\Big(-\sum_{k\omega\omega'} (\alpha^{-1})_{\omega k}^{UV}\, \beta_{\omega' k}^{UV}\ a_{\omega}^{U,out\,\dagger} b_{\omega'}^{U,out\,\dagger} \Big) |0^{U,out}\rangle \\ &= Z\, (Z^* - \sum_{k\omega\omega'} (\alpha^{-1})_{\omega k}^{UV}\, \beta_{\omega' k}^{UV}\ P_{\omega\omega'}^{*} + \mathcal{O}(\beta^4)) \\ &= |Z|^2 (1 + \sum_{\omega\omega'} |B_{\omega\omega'}|^2 + \mathcal{O}(\beta^4))\ , \end{aligned} \tag{A.22}$$

et Z est finalement donné par :

$$|Z|^2 = 1 - \sum_{\omega\omega'} |B_{\omega\omega'}|^2 + \mathcal{O}(\beta^4)\ . \tag{A.23}$$

Annexe B

Inversibilité de la matrice $\alpha^{UV}_{\omega k}$

Nous allons démontrer que si la matrice $\alpha^{UV}_{\omega k}$ n'était pas inversible, il existerait un paquet de particules *in* qui arriverait sur $\mathcal{J}^+$ sous la forme d'anti-particules uniquement. La charge ne serait pas conservée pour cet état, ce qui est impossible.

Supposons que $\alpha^{UV}_{\omega k}$ ne soit pas inversible. Il existe alors un paquet d'ondes non nul $f(k)$ tel que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k\ f(k)\alpha^{UV}_{\omega k} = 0\ ,\ \forall\omega\ . \tag{B.1}$$

La fonction f étant ainsi définie à un facteur près, on peut imposer qu'elle soit normée de la façon suivante $\int_0^\infty \mathrm{d}k\ |f(k)|^2 = 1$. Définissons l'état suivant

$$|\Psi\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}k\ f^*(k) a_k^{V,in\,\dagger}|0^{V,in}\rangle\ . \tag{B.2}$$

La charge portée par $|\Psi\rangle$ peut se calculer de deux manières différentes. Premièrement, en fonction des modes *in* :

$$\begin{aligned} q &= \langle\Psi|\int_0^\infty \mathrm{d}k\ a_k^{V,in\,\dagger}\, a_k^{V,in}|\Psi\rangle - \langle\Psi|\int_0^\infty \mathrm{d}k\ b_k^{V,in\,\dagger}\, b_k^{V,in}|\Psi\rangle \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}k\ |f(k)|^2 - 0 = 1\ . \end{aligned} \tag{B.3}$$

Deuxièmement, en fonction des modes *out* :

$$\begin{aligned} q' &= \langle\Psi|\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ a_k^{U,out\,\dagger}\, a_k^{U,out}|\Psi\rangle - \langle\Psi|\int_0^\infty \mathrm{d}k\ b_k^{U,out\,\dagger}\, b_k^{U,out}|\Psi\rangle \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int_0^\infty \mathrm{d}k\ \left|\beta^{UV}_{\omega k}\right|^2 - \left(\int_0^\infty \mathrm{d}\omega \int_0^\infty \mathrm{d}k\ \left|\beta^{UV}_{\omega k}\right|^2 + \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \left|\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \beta^{UV}_{\omega k} f(k)\right|^2\right) \\ &= -\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ \left|\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \beta^{UV}_{\omega k} f(k)\right|^2 < 0\ . \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ainsi, comme $q \neq q'$, un tel état ne conserverait pas sa charge lors du processus de diffusion, ce qui est impossible.

Donc la matrice $\alpha^{UV}_{\omega k}$ est inversible.

Annexe C

Les relations d'unitarité pour la matrice $\mathcal{B}$

A partir de la matrice $\mathcal{B}$ définie en (1.80) et de son inverse, calculée en (1.82), on obtient les relations d'unitarité suivantes :

$$\alpha_{k\lambda}^{UU}\alpha_{\omega\lambda}^{UU\,*} - \beta_{k\lambda}^{UU\,*}\beta_{\omega\lambda}^{UU} = \delta(k-\omega)\ , \tag{C.1a}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{UU}\beta_{\omega\lambda}^{UU\,*} - \beta_{k\lambda}^{UU\,*}\alpha_{\omega\lambda}^{UU} = 0\ , \tag{C.1b}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{VV}\alpha_{\omega\lambda}^{VV\,*} - \beta_{k\lambda}^{VV\,*}\beta_{\omega\lambda}^{VV} = \delta(k-\omega)\ , \tag{C.1c}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{VV}\beta_{\omega\lambda}^{VV\,*} - \beta_{k\lambda}^{VV\,*}\alpha_{\omega\lambda}^{VV} = 0\ , \tag{C.1d}$$
$$\beta_{k\lambda}^{UU}\alpha_{\omega\lambda}^{UU\,*} - \alpha_{k\lambda}^{UU\,*}\beta_{\omega\lambda}^{UU} = 0\ , \tag{C.1e}$$
$$\beta_{k\lambda}^{UU}\beta_{\omega\lambda}^{UU\,*} - \alpha_{k\lambda}^{UU\,*}\alpha_{\omega\lambda}^{UU} = \delta(k-\omega)\ , \tag{C.1f}$$
$$\beta_{k\lambda}^{VV}\alpha_{\omega\lambda}^{VV\,*} - \alpha_{k\lambda}^{VV\,*}\beta_{\omega\lambda}^{VV} = 0\ , \tag{C.1g}$$
$$\beta_{k\lambda}^{VV}\beta_{\omega\lambda}^{VV\,*} - \alpha_{k\lambda}^{VV\,*}\alpha_{\omega\lambda}^{VV} = \delta(k-\omega)\ , \tag{C.1h}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{UU\,*}\alpha_{k\lambda'}^{UU} - \beta_{k\lambda}^{UU\,*}\beta_{k\lambda'}^{UU} = \delta(\lambda-\lambda')\ , \tag{C.1i}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{UU\,*}\beta_{k\lambda'}^{UU\,*} - \beta_{k\lambda}^{UU\,*}\alpha_{k\lambda'}^{UU\,*} = 0\ , \tag{C.1j}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{VV\,*}\alpha_{k\lambda'}^{VV} - \beta_{k\lambda}^{VV\,*}\beta_{k\lambda'}^{VV} = \delta(\lambda-\lambda')\ , \tag{C.1k}$$
$$\alpha_{k\lambda}^{VV\,*}\beta_{k\lambda'}^{VV\,*} - \beta_{k\lambda}^{VV\,*}\alpha_{k\lambda'}^{VV\,*} = 0\ , \tag{C.1l}$$
$$\beta_{k\lambda}^{UU}\alpha_{k\lambda'}^{UU} - \alpha_{k\lambda}^{UU}\beta_{k\lambda'}^{UU} = 0\ , \tag{C.1m}$$
$$\beta_{k\lambda}^{UU}\beta_{k\lambda'}^{UU\,*} - \alpha_{k\lambda}^{UU}\alpha_{k\lambda'}^{UU\,*} = \delta(\lambda-\lambda')\ , \tag{C.1n}$$
$$\beta_{k\lambda}^{VV}\alpha_{k\lambda'}^{VV} - \alpha_{k\lambda}^{VV}\beta_{k\lambda'}^{VV} = 0\ , \tag{C.1o}$$
$$\beta_{k\lambda}^{VV}\beta_{k\lambda'}^{VV\,*} - \alpha_{k\lambda}^{VV}\alpha_{k\lambda'}^{VV\,*} = \delta(\lambda-\lambda')\ . \tag{C.1p}$$

Annexe D

Les fonctions K_ν de Bessel

Dans cet Appendice, majoritairement issu de [95], nous rappelons quelques relations propres aux fonctions modifiées de Bessel $K_\nu(z)$, où $(\nu, z) \in \mathcal{C}$. C'est de leur représentation intégrale dont nous avons besoin pour exprimer certains coefficients de Boboliubov, certaines amplitudes de transition et le flux instantané.

En toute généralité, on a :

$$K_\nu(z) \;=\; \int_0^\infty \mathrm{d}t\; e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t), \tag{D.1}$$

quand $|\arg(z)| < \pi/2$. Cette condition impose donc à la partie réelle de la variable z d'être positive. Ainsi, les coefficients $\alpha_{\omega k}^{UV\,*}$ donnés en (1.145c) sont mal définis.

Certaines réécritures sont utiles dans le corps du texte, à savoir :

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}x\; \frac{1}{x}\, e^{-\frac{z}{2}(x+1/x)} \;, \tag{D.2a}$$

$$K_1(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}x\; e^{-\frac{z}{2}(x+1/x)} \;, \tag{D.2b}$$

$$K_2(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}x\; x\, e^{-\frac{z}{2}(x+1/x)} \;. \tag{D.2c}$$

Afin de connaître le comportement de l'énergie quand $\eta \to 0$, nous avons besoin d'avoir celui des fonctions de Bessel dans cette limite :

$$K_0(z) \overset{z\to 0}{\sim} -\ln(z) \quad \text{et} \quad K_\nu(z) \overset{z\to 0}{\sim} \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu, \quad \text{quand } \Re(\nu) > 0 \;. \tag{D.3}$$

De plus, la compréhension du comportement ultra-violet des amplitudes de transition nécessite la connaissance de celui des fonctions de Bessel :

$$K_\nu(z) \quad \overset{z\to+\infty}{\sim} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}, \;\; \forall \nu \;. \tag{D.4}$$

Enfin, dans le calcul de l'énergie de Minkowski, il est utile de rappeler que pour $k \in \mathcal{N}$ et $\nu \in \mathcal{R}$, on a :

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \{z^\nu K_\nu(z)\} \;=\; e^{-i\pi k} z^{\nu-k} K_{\nu-k}(z) \;, \tag{D.5}$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \left\{z^{-\nu} K_\nu(z)\right\} \;=\; e^{i\pi k} z^{-\nu-k} K_{\nu+k}(z) \;. \tag{D.6}$$

Annexe E

Le terme $\mathcal{D}$

Cet Appendice a pour but de détailler les propriétés de ce que nous avons appelé "l'opérateur $\mathcal{D}$", et, en particulier, celles de sa contribution à la valeur moyenne du flux. Rappelons la définition donnée dans l'Eq.(2.49) :

$$\mathcal{D} \;=\; \frac{g^2}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'\; f(\tau)\; f(\tau')\; sgn(\tau-\tau')\; \mathcal{F}(\tau)\; \mathcal{F}(\tau')\;, \tag{E.1}$$

où la fonction "signe" est donnée en termes des fonctions de Heaviside selon :

$$sgn(\tau-\tau') = \theta(\tau-\tau') - \theta(\tau'-\tau)\;. \tag{E.2}$$

a) Comme les formes quadratiques $\mathcal{F}$ auxquelles nous nous limitons sont toutes hermitiques et que les fonctions de couplage temporel sont toutes réelles, l'antisymétrie de la fonction signe a pour conséquence de rendre l'opérateur $\mathcal{D}$ anti-hermitique :

$$\mathcal{D}^\dagger \;=\; -\mathcal{D}\;. \tag{E.3}$$

b) D'après (2.46) et (2.47), la contribution de ce terme au flux de particules vaut :

$$\langle T_{UU}\rangle_{\mathcal{D}} \;=\; 2\,\mathrm{Re}\left[\iint_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega'\;\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}\;e^{-iU(\omega+\omega')}\;2\langle 0|a^U_\omega b^U_{\omega'}\,\mathcal{D}|0\rangle\right] \tag{E.4}$$

$$\;=\; \langle 0|\,[\mathcal{D}\,,\,T_{UU}]\,|0\rangle\;, \tag{E.5}$$

où la seconde écriture découle directement de (E.3). Le fait que cette contribution puisse s'écrire comme un commutateur a pour conséquence immédiate de garantir que ce terme est causal. Il partage bien sûr cette propriété avec le terme linéaire et le terme quadratique. En particulier, pour un miroir uniformément accéléré dans le quadrant L, le fait que $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(U_{cl}(\tau) > 0, V_{cl}(\tau) < 0)$ dans (E.1) permet de retrouver le facteur $\Theta(U)$ dans l'expression de $\langle T_{UU}\rangle_{\mathcal{D}}$ comme dans (3.65).

c) Une deuxième propriété de $\langle T_{UU}\rangle_{\mathcal{D}}$ est qu'il ne transporte pas d'énergie de Minkowski. Ceci se vérifie trivialement à partir de l'Eq.(E.4) en intégrant sur U, et ce, quelle que soit la trajectoire.

d) Dans le cas de la trajectoire uniformément accélérée, une propriété corrolaire intéressante de ce terme est qu'il ne transporte pas non plus d'énergie de Rindler, c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u_L\;\langle T_{uu}(u_L)\rangle_{\mathcal{D}} \;=\; \int_0^{\infty}\mathrm{d}U\;aU\;\langle T_{UU}(U)\rangle_{\mathcal{D}} \;=\; 0\;. \tag{E.6}$$

Ce résultat se démontre au moins de deux manières. Tout d'abord, on peut faire un calcul direct à partir de (E.4) lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2$. Pour ce faire, il nous faut l'amplitude de création de paire de l'opérateur $\mathcal{D}$:

$$\langle 0|a^U_\omega b^U_{\omega'}\,\mathcal{D}|0\rangle = \left(\frac{ga}{4\pi}\right)^2 \sqrt{\omega\omega'} \tag{E.7}$$

$$\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'\; f(\tau)\; f(\tau')\; sgn(\tau-\tau')\; \frac{e^{i(\omega U_{cl}(\tau)+\omega' U_{cl}(\tau')}}{\sinh^2\left(\frac{a}{2}(\tau-\tau'-i\epsilon)\right)} \tag{E.8}$$

Ensuite, après avoir utilisé l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\; \frac{x}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{(a+b)\ln(a/b)-2(a-b)}{(a-b)^3} \overset{b\to a}{\to} \frac{1}{6a^2}\,, \tag{E.9}$$

le calcul aboutit directement à (E.6).

Une seconde manière consiste à remarquer que l'opérateur "énergie de Rindler" n'est rien d'autre que l'opérateur de générateur de boosts. En effet, il correspond à $i\partial_\tau$ et, à ce titre, il annihile le vide de Minkowski.

e) Dans le texte, nous avons aussi souligné le fait que le flux relatif au terme $\mathcal{D}$ ne résidait que dans les transitoires de $f(\tau)$. Lorsque la trajectoire est inertielle, ce résultat se démontre très facilement puisque, lorsque $f(t) \equiv 1$, $\langle T_{UU}(U)\rangle_{\mathcal{D}}$ s'avère être indépendant de U, donc nul. Lorsqu'on choisit la trajectoire uniformément accélérée, le flux de Rindler correspondant quand $f(\tau) \equiv 1$ vaut :

$$\langle T_{uu}(u_L)\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{g^2a^2}{16\pi^3}\,\mathrm{Re}\left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'\; sgn(\tau-\tau') \right. \tag{E.10}$$

$$\left. \times \frac{e^{-a(\tau+\tau')}}{\sinh^2\left(\frac{a}{2}(u_L-\tau-i\epsilon)\right)\sinh^2\left(\frac{a}{2}(u_L-\tau'-i\epsilon)\right)\sinh^2\left(\frac{a}{2}(\tau-\tau'-i\epsilon)\right)} \right\}$$

$$= -\frac{g^2a^2}{16\pi^3}\,\mathrm{Re}\left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\Delta\; sgn(\Delta) \right. \tag{E.11}$$

$$\left. \times \frac{e^{-a(2\tau-\Delta)}}{\sinh^2\left(\frac{a}{2}(u_L-\tau-i\epsilon)\right)\sinh^2\left(\frac{a}{2}(u_L-\tau+\Delta-i\epsilon)\right)\sinh^2\left(\frac{a}{2}(\Delta-i\epsilon)\right)} \right\}$$

$$= -\frac{g^2a^2}{16\pi^3}\,e^{-2au_L}\,\mathrm{Re}\left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Delta\; sgn(\Delta) \right. \tag{E.12}$$

$$\left. \times \frac{e^{-a(2t-\Delta)}}{\sinh^2\left(\frac{a}{2}(-t-i\epsilon)\right)\sinh^2\left(\frac{a}{2}(-t+\Delta-i\epsilon)\right)\sinh^2\left(\frac{a}{2}(\Delta-i\epsilon)\right)} \right\}\,.$$

Pour passer de (E.10) à (E.11), on a utilisé le changement de variable $\tau' \to \Delta = \tau - \tau'$ et pour passer de (E.11) à (E.12), $\tau \to t = \tau - u_L$. La dernière expression est remarquable puisqu'elle montre que le flux relatif au terme $\mathcal{D}$ s'écrit tout simplement :

$$\langle T_{uu}(u_L)\rangle_{\mathcal{D}} = cste \;\times\; e^{-2au_L}\,. \tag{E.13}$$

Or, en vertu du résultat concernant l'intégrale de cette fonction (E.6), cette constante ne peut être que nulle. Le fait que le flux relatif au terme $\mathcal{D}$ soit identiquement nul pour un

couplage uniforme montre que, à l'instar des autres termes, celui-ci aussi ne réside que durant les transitoires de la fonction de couplage temporel.

Remarque. On peut souligner que c'est bel et bien le fait d'avoir imposé $f(\tau) \equiv 1$ qui a permis une telle décomposition. En effet, à part cette fonction triviale, seules les fonctions (divergentes) de type $f(\tau) = e^{\alpha\tau}$ fournissent un résultat analogue.

Annexe F

Validité du traitement perturbatif

Comme nous l'avons déjà dit, lorsqu'on choisit comme forme quadratique des opérateurs de champs la forme $\mathcal{F}_2$, la constante de couplage acquiert la dimension d'un temps, voir (2.4). Cette dimensionnalité nous induit à poser la question suivante : Quelle est (ou quelles sont) la (les) condition(s) portant sur g et qui garantissent que le traitement perturbatif soit pertinent ? En effet, si, pour $\mathcal{F}_1$, la condition $g \ll 1$ semble naturelle, il convient de l'adapter au cas $\mathcal{F}_2$ en fonction des autres grandeurs dimensionnées du problème.

Lorsque le couplage à un miroir inertiel est assuré au travers de la fonction de couplage temporel (2.68), les autres durées à notre disposition sont T, la longueur du couplage, et Δ, celle des transitoires.

Rappelons le nombre moyen de particules $\langle N_\omega^U \rangle$ trouvé en (2.73) :

$$\langle N_\omega^U \rangle = \frac{g^2\Delta^2}{2}\,\omega \int_0^\infty \mathrm{d}\omega'\,\omega' \,\frac{\sin^2\left((\omega+\omega')T\right)}{\sinh^2\left(\pi(\omega+\omega')\Delta/2\right)}\,. \tag{F.1}$$

Cette expression est valide seulement si le nombre de quanta par cellule quantique est effectivement donné par $\langle N_\omega^U \rangle \mathrm{d}\omega \simeq \langle N_\omega^U \rangle \pi/T$, lorsque $\omega T \gg 1$. C'est le cas si la probabilité de trouver deux quanta dans une cellule est négligeable devant celle de n'en trouver qu'un seul. Cette condition revient à imposer $\langle N_\omega^U \rangle \pi/T \ll 1$. Dans la limite des couplages longs dans laquelle nous nous trouvons, *i.e.* lorsque le couplage dure nettement plus longtemps que les transitoires, on a :

$$T/\Delta \gg 1 \quad \Rightarrow \qquad \frac{\langle N_\omega^U \rangle \pi}{T} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g^2}{T\Delta} \ll 1\,. \tag{F.2}$$

Cette équivalence provient du fait que le maximum de $\langle N_\omega^U \rangle$ est proportionnel à g^2/Δ (voir discussion après (2.75)).

A l'aide de (F.1), on peut calculer le nombre total de quanta droitiers reçus sur $\mathcal{J}_R^+$. On obtient :

$$\begin{aligned} \langle N^U \rangle \quad &= \quad \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\langle N_\omega^U \rangle = \frac{4g^2}{3\pi^4\Delta^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x^3}{\sinh^2 x}\,\sin^2\left(\frac{2x}{\pi}\frac{T}{\Delta}\right) \\ &\overset{T/\Delta\gg 1}{\to} \quad \frac{\zeta(3)}{\pi^4}\,\frac{g^2}{\Delta^2}\,, \end{aligned} \tag{F.3}$$

où ζ est la fonction de Rieman.

La condition (F.2) permet de prendre la limite $T \to +\infty$ avec Δ fixé sans problème. Au contraire, la limite $\Delta \to 0$ doit être prise avec précaution. Une condition suffisante consiste à garder la constante adimensionnée $g_1 \equiv g/\sqrt{T\Delta} \ll 1$ fixe. Une condition encore plus forte revient à imposer au nombre total de quanta émis d'être fini, ce qui équivaut, d'après (F.3), à faire tendre conjointement g et Δ vers 0 de telle sorte que $g_2 \equiv g/\Delta$ reste constante.

Annexe G

L'énergie pour un miroir inertiel dans le vide

En explicitant la relation (2.92) pour le choix de f défini en (2.68), on obtient :

$$\langle H_U \rangle = \frac{g^2}{12\pi\Delta^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \left(\tanh^3(x+\alpha) - \tanh^3(x-\alpha) - \tanh(x+\alpha) + \tanh(x-\alpha) \right)^2 ,$$

avec $\alpha = T/\Delta$. En posant :

$$\Xi(\alpha) = \frac{15}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \left(\tanh^3(x+\alpha) - \tanh^3(x-\alpha) - \tanh(x+\alpha) + \tanh(x-\alpha) \right)^2 , \quad \text{(G.1)}$$

on a :

$$\langle H_U \rangle = \frac{2g^2}{45\pi\Delta^3} \, \Xi(T/\Delta) , \quad \text{(G.2)}$$

avec

$$\Xi(\alpha) = 1 + 15 \, \frac{\alpha \, \cosh(2\alpha)(\cosh(4\alpha)+5) + 2\sinh^3(2\alpha) - \sinh(6\alpha)}{\sinh^5(2\alpha)} \overset{\alpha\to+\infty}{\to} 1 . \quad \text{(G.3)}$$

La fonction $\Xi(\alpha)$ est tracée dans la figure (2.3).

Annexe H

Le flux dans un bain thermique

Dans cet Appendice, nous allons détailler le calcul relatif au terme linéaire de $\langle T_{UU}\rangle_\beta$, celui du terme quadratique participe de la même méthode. Les Eqs.(2.97) et (2.99) permettent de le réécrire sous la forme suivante :

$$\langle T_{UU}\rangle^\beta_{lin} = \frac{g\pi^2}{2\beta^4}\,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\;\frac{f(t)}{\sinh^4\left(\pi(U-t-i\epsilon)/\beta\right)}\right)\,. \tag{H.1}$$

A partir de la décomposition en pôles de $\frac{1}{\sinh^2 x}$:

$$\frac{1}{\sinh^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^2} \tag{H.2}$$

on peut écrire celle de son carré :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh^4 x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{+\infty}\frac{1}{(n-m)^2}\,\frac{1}{(x-in\pi)^2}\\ &\quad -\frac{4i}{\pi^3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{+\infty}\frac{1}{(n-m)^3}\,\frac{1}{x-in\pi}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^4} - \frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^2}\,.\end{aligned} \tag{H.3}$$

Afin d'exprimer l'intégrale dans (H.1), on doit décomposer f sur ses composantes de Fourier :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\; f_\omega\, e^{-i\omega t}\,, \tag{H.4}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{f(t)}{\sinh^4\left(\pi(U-t-i\epsilon)/\beta\right)} \\
&\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{e^{-i\omega t}}{\sinh^4\left(\pi(U-t-i\epsilon)/\beta\right)} \\
&\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega \times \left(\frac{\beta^4}{\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{e^{-i\omega t}}{(U-t-i\epsilon-in\beta)^4} \right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{2}{3}\frac{\beta^2}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{e^{-i\omega t}}{(U-t-i\epsilon-in\beta)^2} \right) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega e^{-i\omega U} \times \left(\frac{\beta^4}{\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\ \frac{e^{-i\omega t'}}{(t'+i\epsilon+in\beta)^4} \right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{2}{3}\frac{\beta^2}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\ \frac{e^{-i\omega t'}}{(t'+i\epsilon+in\beta)^2} \right) \qquad \text{(H.5)}
\end{aligned}$$

Or, par intégrations par parties, on a la relation générale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{e^{-ixy}}{(x+z)^n} = \frac{(-iy)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{e^{-ixy}}{(x+z)}\ , \qquad \text{(H.6)}$$

ce qui permet de réécrire l'expression (H.5) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{f(t)}{\sinh^4\left(\pi(U-t-i\epsilon)/\beta\right)} \quad &= \quad i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega\ e^{-i\omega U} \\
\times \left(\frac{\beta^4}{\pi^4}\frac{\omega^3}{6} + \frac{2}{3}\frac{\beta^2}{\pi^2}\omega \right) \quad &\times \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\ \frac{e^{-i\omega t'}}{(t'+i\epsilon+in\beta)}\ . \qquad \text{(H.7)}
\end{aligned}$$

Le calcul par la méthode des résidus fournit le résultat suivant :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t'\ \frac{e^{-i\omega t'}}{(t'+i\epsilon+in\beta)} = \frac{-2i\pi}{1-e^{-\beta\omega}}\ . \qquad \text{(H.8)}$$

En introduisant la nouvelle fonction f_β :

$$f_\beta(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ f_\omega\ e^{-i\omega U}\ \frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}\ , \qquad \text{(H.9)}$$

Le terme linéaire se réécrit :

$$\langle T_{UU} \rangle_{lin}^{\beta} = \frac{g\pi^2}{2\beta^4}\ 2\pi\ \mathrm{Im}\left(\frac{-i\beta^4}{6\pi^4}\ \partial_U^3 f_\beta + \frac{2i\beta^2}{3\pi^2}\ \partial_U f_\beta \right)\ . \qquad \text{(H.10)}$$

En remarquant finalement que :

$$\mathrm{Im}\Big(i f_\beta(U) \Big) = \frac{1}{2} f(U)\ , \qquad \text{(H.11)}$$

on arrive au résultat suivant :

$$\langle T_{UU} \rangle_{lin}^{\beta} = -\frac{g}{12\pi}\ \left(\partial_U^3 f - \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \partial_U f \right)\ , \qquad \text{(H.12)}$$

qui correspond à ce que nous avons donné en (2.101).

Annexe I

Les diagrammes de Carter-Penrose

Dans cet Appendice, nous rappelons comment sont construits les diagrammes de Carter-Penrose[38]. Le but de tels diagrammes est de ramener à distance finie les points de l'espace-temps t, z. Pour ce faire, on utilise les grandeurs de genre lumière $U, V = t \mp z$, et on introduit les nouvelles coordonnées :

$$U' = 2 \arctan U \quad \text{et} \quad V' = 2 \arctan V \ . \tag{I.1}$$

Comme l'élément de métrique satisfait à :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}U \, \mathrm{d}V = \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2(U'/2)} \frac{1}{\cos^2(V'/2)} \, \mathrm{d}U' \, \mathrm{d}V' \ , \tag{I.2}$$

on remarque que la transformation de coordonnées est conforme.

Les coordonnées U', V' prennent des valeurs comprises entre $-\pi$ et π. Ainsi, l'espace-temps de Minkowski se représente sous la forme d'un carré, voir Fig.I.1. Lorsque l'axe des t est vertical, les géodésiques de genre lumière sont à 45^o : en effet, la transformation conforme laisse les cônes de lumière invariants.

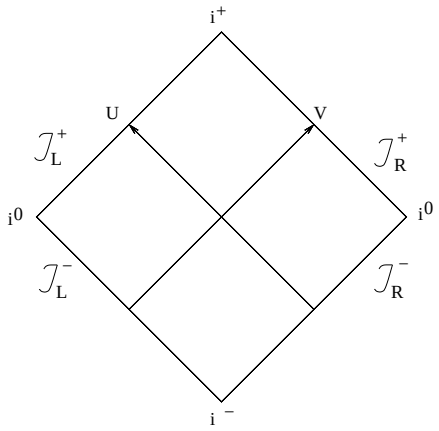

Fig. I.1: Diagramme de Penrose de l'espace-temps de Minkowski. Les géodésiques de genre lumière émanent des infinis passé $\mathcal{J}^-_R$ et $\mathcal{J}^-_L$ et aboutissent respectivement sur les infinis futur $\mathcal{J}^+_L$ et $\mathcal{J}^+_R$. Les trajectoires asymptotiquement de genre temps partent de i^- et finissent en i^+. Les trajectoires asymptotiquement de genre espace partent et arrivent en i^0.

Annexe J

La trajectoire régularisée

Cet Appendice a pour but de présenter une autre manière de rendre régulière la radiation émise par un miroir uniformément accéléré. Elle consiste à modifier asymptotiquement la trajectoire tout en conservant le formalisme de Davies-Fulling. Le but est le suivant : régulariser les expressions de telle sorte à ne pas réobtenir un flux nul, des divergences ultra-violettes menant à une énergie infinie ainsi que le problème trans-Planckien.

Comme nous l'avons vu dans le premier Chapitre, la spécificité de la trajectoire uniformément accélérée est qu'elle ne couvre que la moitié de l'axe des U (et des V). Dans cet Appendice, nous allons donner une version régularisée du miroir uniformément accéléré qui réside dans le quadrant L, soit de la fonction :

$$V_{cl}(U) = -\frac{1}{a^2 U} , \quad U > 0 . \tag{J.1}$$

La nouvelle trajectoire n'est plus limitée à ce quadrant : elle démarre en i^- dans le quadrant P et se termine en i^+ dans le quadrant F. Ainsi, toute l'hypersurface $\mathcal{J}_R^+$ et toute l'hypersurface $\mathcal{J}_L^+$ se trouvent dans le futur causal de la trajectoire régularisée. Le but de cette modification est double :

1) en ne possédant plus d'horizon en $U = 0$, elle ne peut plus causer la divergence de l'énergie $\langle H_U \rangle$ (voir discussion après (3.68)),
2) et, en ne possédant plus d'horizon en $V = 0$, elle ne peut plus provoquer de redshift exponentiellement fort des quanta émis vers la droite (voir l'Eq.(1.27)).

Concernant le deuxième point, on comprend que la trajectoire de Carlitz-Willey (1.127) ne représente pas un bon choix bien qu'elle couvre tout l'axe des U. En effet, elle ne constitue en rien une généralisation du cas uniformément accéléré - comme nous l'avons vu en (1.130), son accélération est strictement croissante et divergente de surcroix - et, de plus, elle souffre aussi du problème trans-Planckien.

La transformation que nous avons choisie est paramétrée par deux réels positifs ϵ et η sans dimension et supposés petits devant 1. Pour résoudre le point 1), il nous faut gommer la divergence de la pente de $V_{cl}(U)$. A ce titre, c'est la dérivée de cette fonction que nous devons modifier :

$$\frac{\mathrm{d}V_{cl}}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{a^2 U^2} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}V_{intermediaire}}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{a^2 U^2 + \epsilon^2} . \tag{J.2}$$

Pour résoudre le point 2), il nous faut nous assurer que cette pente admette une borne inférieure non nulle :

$$\frac{\mathrm{d}V_{intermediaire}}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{a^2 U^2 + \epsilon^2} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}V_{reg}}{\mathrm{d}U} = \eta^2 + \frac{1}{a^2 U^2 + \epsilon^2} , \tag{J.3}$$

ce qui conduit à la trajectoire suivante :

$$V_{reg}(U) = \eta^2 U + \frac{1}{a\epsilon}\left(\arctan\left(\frac{aU}{\epsilon}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{J.4}$$

Remarquons que, comme $\frac{\mathrm{d}V_{reg}}{\mathrm{d}U} > 0$, la trajectoire est bien de genre temps. Comme on peut le voir sur la figure Fig.(J.1), les trajectoires initiale et régularisée se rejoignent dans quadrant L. Cependant, les propriétés asymptotiques du nouveau miroir sont modifiées. Dans le futur, ce dernier décélère et quitte le quadrant L pour terminer asymptotiquement sa course comme un miroir inertiel en i^+. Dans le passé, il décélère pour traverser l'horizon $U = 0$ inertiellement, puis il réaccélère dans le quadrant P, et enfin, décélère jusqu'à atteindre i^- comme un miroir inertiel. En particulier, on montre aisément que la trajectoire est asymptotiquement inertielle puisqu'on trouve :

$$z = z_{cl}(t) \quad \overset{t\to-\infty}{\sim} \quad -\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}t - \frac{\pi}{a\epsilon(1+\eta^2)} \ , \tag{J.5}$$

$$\text{et} \quad z = z_{cl}(t) \quad \overset{t\to+\infty}{\sim} \quad -\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}t \ . \tag{J.6}$$

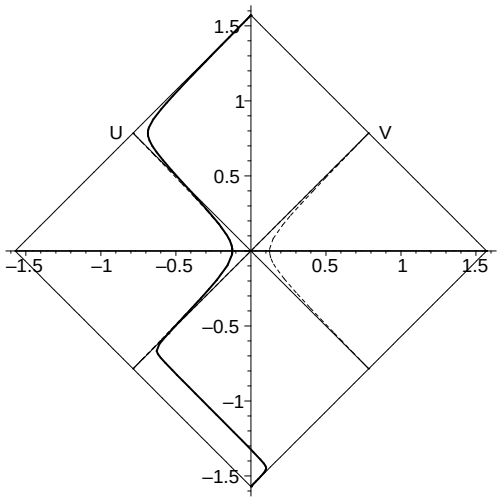

Fig. J.1: Diagramme de Penrose pour la trajectoire uniformément accélérée (en pointillés) et la trajectoire régularisée (en trait plein). Cette dernière coupe l'axe des V en $V_0 = -\pi/2\epsilon a$ et celui des U en $U_0 \simeq 1/\eta a$. Dans cette figure, nous avons choisi $a = 8$, $\epsilon = 0.1$ et $\eta = 0.1$.

On peut également directement calculer l'accélération le long de la trajectoire :

$$a(U) = a\,\frac{aU}{\left(1+\eta^2\left(a^2U^2+\epsilon^2\right)\right)^{3/2}\sqrt{a^2U^2+\epsilon^2}} \ . \tag{J.7}$$

Ceci permet d'isoler clairement le rôle de chaque paramètre. L'équation précédente donne $a(U=0) = 0$. Si le paramètre ϵ était nul, on aurait $a_{\epsilon=0}(U=0) = a$. On peut donc en déduire que ϵ est responsable de la décélération en $U = 0$. De même, l'accélération sur la trajectoire régularisée satisfait à $a(U = \pm\infty) = 0$. Sans le paramètre η, on aurait $a_{\eta=0}(U = \pm\infty) = \pm a$. Ainsi, c'est grâce à η que le miroir décélère aux extrémités asymptotiques de

sa trajectoire. De plus, $V_{reg}(U)$ est *quasi* uniformément accélérée dans le quadrant L et dans le quadrant P puisque :

$$\epsilon \ll aU \ll 1/\eta \quad \Rightarrow \quad a(U) \simeq a \ , \tag{J.8}$$

$$\text{et} \quad -1/\eta \ll -aU \ll -\epsilon \quad \Rightarrow \quad a(U) \simeq -a \ . \tag{J.9}$$

Les propriétés géométriques de la trajectoire régularisée ayant été analysées, nous pouvons nous poser la question principale : Quel est le flux émis par ce miroir ? Pour répondre à cette question, il suffit d'injecter l'Eq.(J.4) dans la formule (1.124). On trouve :

$$\langle T_{UU}(U)\rangle = \frac{a^2}{6\pi}\frac{\epsilon^2+\epsilon^4\eta^2-3\eta^2a^4U^4-2\eta^2\epsilon^2a^2U^2}{\left(\epsilon^2+a^2U^2\right)^2\left(1+\eta^2\epsilon^2+\eta^2a^2U^2\right)^2} \ . \tag{J.10}$$

Comme le flux n'est pas une fonctionnelle linéaire de la trajectoire, il est plus difficile de clairement séparer les rôles respectifs des paramètres ϵ et η pour l'énergie émise. Cependant, comme $V_{reg}(U)$ est une généralisation de la trajectoire uniformément accélérée, on s'attend à trouver un flux majoritairement localisé sur l'horizon $U = 0$. Or, comme c'est le paramètre ϵ qui régularise la trajectoire sur cette surface, il est cohérent de trouver que le maximum du flux est donné par $\langle T_{UU}(U=0)\rangle \simeq \frac{a^2}{6\pi\epsilon^2}$. La figure (J.2) donne l'allure du flux.

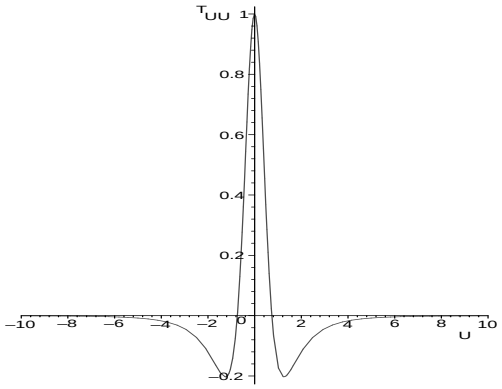

Fig. J.2: Le flux $\langle T_{UU}(U)\rangle$ donné par la formule (J.10), pour $a = 1$. Bien que ces valeurs de paramètres ne soient pas conformes à nos hypothèses, nous avons choisi de poser $\epsilon = \eta = 1$ afin de rendre la figure présentable. En effet, lorsque $\epsilon \ll 1$ et $\eta \ll 1$, on obtient les résultats suivants. La valeur maximale de $\langle T_{UU}(U)\rangle$ est obtenue pour $U = 0$ et vaut $a^2/6\pi\epsilon^2$. Le flux décroît très vite autour de l'origine pour s'annuler en $U \propto \sqrt{\eta/\epsilon}/a$ avec une pente proportionnelle à $a^3\eta^{5/2}\epsilon^{-1/2}$. Il atteint en suite son minimum $\langle T_{UU}(U \simeq \pm 0.8\eta^{2/3}\epsilon^{-1/3}/a)\rangle \simeq -a^2\eta^2/2\pi$ pour tendre enfin vers 0 comme $-1/2\pi\eta^2a^2U^4$. C'est présisément parce que les amplitudes maximale et minimale sont dans un rapport proportionnel à $1/\eta^2\epsilon^2$ que nous avons choisi de poser $\epsilon = \eta = 1$ pour représenter la figure.

La régularisation permet ainsi de mieux comprendre la nature du flux à l'horizon dans le cas uniformément accéléré[64][1]. En effet, la forme de $\langle T_{UU}(U)\rangle$ trouvée en (J.10) permet de calculer l'énergie émise :

$$\langle H_U\rangle = \frac{a}{12\epsilon} + \frac{a\eta}{12}\left(4\eta\epsilon - \frac{1}{\left(1+\eta^2\epsilon^2\right)^{3/2}}\left(3+7\eta^2\epsilon^2+4\eta^4\epsilon^4\right)\right) \ \simeq \ \frac{a}{12\epsilon} \ , \tag{J.11}$$

[1]Pour une interprétation de ce type de comportement pour le calcul du flux dans le vide de Rindler, voir [85].

qui diverge lorsque $\epsilon \to 0$. On comprend ainsi que le flux se localise sur l'horizon dans le cas uniformément accéléré.

On peut également calculer les coefficients de Bogoliubov associés à cette trajectoire. Ils s'écrivent de la manière suivante :

$$\alpha^{UV\,*}_{\omega k} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\; e^{i(\omega - k\eta^2)U - i\frac{k}{a\epsilon}\left(\arctan(\frac{aU}{\epsilon}) - \frac{\pi}{2}\right)}\,, \tag{J.12}$$

$$\beta^{UV\,*}_{\omega k} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\; e^{-i(\omega + k\eta^2)U - i\frac{k}{a\epsilon}\left(\arctan(\frac{aU}{\epsilon}) - \frac{\pi}{2}\right)}\,. \tag{J.13}$$

On rappelle que, dans le cas uniformément accéléré, ces coefficients donnaient une énergie $\langle H^U\rangle$ divergente, *cf* Eqs.(1.146) et (1.147). Tel n'est plus le cas pour la trajectoire régularisée. En effet, un calcul direct permet de retrouver le résultat (J.11) en injectant l'Eq.(J.13) dans les relations (1.40) et (1.111). Ceci provient du fait que les fréquences sortantes ω associées à une fréquence entrante k fixée ne peuvent désormais plus être arbitrairement élevées sans être supprimées exponentiellement (voir *Remarque* ci-après). En effet, en reprenant la relation (1.27), on voit bien que la méthode de la phase stationnaire appliquée à $\alpha^{UV\,*}_{\omega k}$ donne :

$$k\eta^2 \,<\, \omega^* = \frac{k}{\epsilon^2 + a^2U^2} + k\eta^2 \,<\, \frac{k}{\epsilon^2} + k\eta^2 \,\simeq\, \frac{k}{\epsilon^2}\,. \tag{J.14}$$

Ainsi, ϵ fournit donc le cut-off ultra-violet qui explique le résultat fini (J.11) et η fournit le cut-off l'infra-rouge qui résout le problème trans-Planckien.

Remarque. Pour comprendre comment le flux est émis, il est intéressant d'étudier les coefficients β de Bogoliubov. Pour ce faire, la méthode WKB est un outil approprié. De plus, il faut comparer l'expression (J.13) avec celle obtenue pour le miroir uniformément accéléré :

$$\tilde{\beta}^{UV\,*}_{\omega k} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{k}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}U\; e^{-i\omega U + i\frac{k}{a^2U}} \tag{J.15}$$

$$\overset{WKB}{=} -i\frac{e^{-2\sqrt{\omega k}/a}}{2\sqrt{\pi a}(\omega k)^{1/4}}\,, \tag{J.16}$$

Ce résultat est valide dans le domaine $a^2 \ll \omega k$. Pour l'expression (J.13), il existe deux régimes indépendants du régulateur η. Dans le premier, *i.e.* $a^2 \ll \omega k \ll k^2/\epsilon^2$, on obtient $\beta^{UV\,*}_{\omega k} = \tilde{\beta}^{UV\,*}_{\omega k}$, ce qui signifie que pour les fréquences sortantes ω situées en dessous du cut-off k/ϵ^2, le miroir agit comme s'il était uniformément accéléré. Au contraire, dans le second régime, *i.e.* $\omega \gg k/\epsilon^2 \gg a/\epsilon$, on trouve :

$$\beta^{UV\,*}_{\omega k} \simeq -i\frac{e^{-\omega\epsilon/a}}{2\sqrt{\pi a}\sqrt{\omega\epsilon}}\,, \tag{J.17}$$

qui montre clairement que ces hautes fréquences sont exponentiellement supprimées. C'est donc bien la présence d'un cut-off ultra-violet ϵ qui permet d'obtenir une énergie émise finie.

Articles

Notes on Moving Mirrors

N. Obadia & R. Parentani

Phys.Rev. **D 64** 044019 (2001)

Notes on moving mirrors

N. Obadia* and R. Parentani†
Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, CNRS-UMR 6083, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France
(Received 12 March 2001; published 27 July 2001)

The Davies-Fulling (DF) model describes the scattering of a massless field by a noninertial mirror in two dimensions. In this paper, we generalize this model in two different ways. First, we consider partially reflecting mirrors. We show that the Bogoliubov coefficients relating inertial modes can be expressed in terms of the reflection factor and the transformation from inertial modes to modes at rest with respect to the mirror. In this perspective, the DF model is simply the limiting case when the reflection factor is unity for all frequencies. In the second part, we introduce an alternative model which is based on self-interactions described by an action principle. When the coupling is constant, this model can be solved exactly and gives rise to a partially reflecting mirror. The usefulness of this dynamical model lies in the possibility of switching off the coupling between the mirror and field. This allows us to obtain regularized expressions for the fluxes in situations where they are singular when using the DF model. Two examples are considered. The first concerns the flux induced by the disappearance of the reflection condition, a situation which bears some analogies with the end of the evaporation of a black hole. The second case concerns the flux emitted by a uniformly accelerated mirror.

DOI: 10.1103/PhysRevD.64.044019 PACS number(s): 04.62.+v, 03.70.+k, 04.70.Dy

I. INTRODUCTION

The Davies-Fulling (DF) model [1] describes the scattering of a massless field by a noninertial mirror in two dimensions. It has received and continues to receive attention [2–11] principally because of its simplicity and its relationship to Hawking radiation [12]. (One can indeed mimic the varying Doppler effect induced by the collapse of a star by the total reflection on a receding mirror.) Because of its simplicity, this model has been also used to investigate the relationships between the particle description of fluxes emitted by the mirror and its field description based on the two-point Green's function. The motivation behind this analysis is the following. When quantizing a field in a curved space-time, one loses the uniqueness of choice for the particle notion which is then used to define the vacuum and its excitations. Based on this fact, some authors have proposed discarding the particle point of view [13]. The DF model, being defined in flat space time and giving rise to particle creation as in a curved space-time, provides a good playground for confronting the two points of view. Finally, the DF model also provides a good starting point for studying the role of ultrahigh frequencies which arise in the presence of event horizons [14–18]. This is particularly true when considering uniformly accelerated mirrors [3,19,20]. Indeed, in this case one has to confront the fact that the instantaneous value of the energy flux identically vanishes, whereas the Bogoliubov coefficients, mixing positive and negative frequencies, do not vanish and lead to a total energy, which furthermore diverges.

Quite independently of these specific difficulties, there is a fundamental reason which complicates the analysis of these problems: the DF model does not follow from an action principle. In fact, the reflection condition is imposed from the outset instead of following from interactions with the boundary. Therefore only questions concerning asymptotic properties of asymptotically inertial mirrors can be properly answered. To emphasize this point, we shall show in the first part of this article that the scattering in the DF model can be expressed in purely kinematic terms. It results from the Bogoliubov transformation relating the usual Minkowski modes to noninertial modes which are eigenmodes with respect to the proper time of the mirror. The scattering of the latter is then trivial, as trivial as the scattering of Minkowski modes by an inertial mirror. This rephrasing of the DF model is very useful in that it allows us to consider partially transmitting mirrors with arbitrary frequency-dependent transmission coefficients. In this perspective, the DF model is simply the limiting case in which the reflection is total for all frequencies.

In the second part of the paper, we analyze an alternative model for scattering along a given trajectory which is based on self-interactions described by an action principle. The main motivation for considering this model is that we can now switch on and off the coupling between the mirror and field. Therefore, we can work with well-defined asymptotic free states. The relationship between the partially transmitting mirrors previously considered and this model will be explicitly made.

To this end, we first work with a coupling which is constant. In this case, the Born series can be exactly summed and lead to a partially transmitting mirror. Moreover, in the large coupling constant limit, one recovers the DF model: i.e., total reflection. The only difference with respect to the kinematic approach is that causality is now built in. Second, we consider the case when the coupling is time dependent. In this case, we compute the fluxes perturbatively to quadratic order in the coupling. The novelty arises from transient effects associated with the switching on and off. The possibility of controlling these transients is crucial for regularizing the fluxes in situations where they are singular when using the DF model.

*Email address: obadia@celfi.phys.univ-tours.fr
†Email address: parenta@celfi.phys.univ-tours.fr

 ©2001 The American Physical Society

To make this explicit, we consider two examples. The first one consists in computing the flux associated with the appearance (or disappearance) of the reflecting boundary condition. This problem was considered by Anderson and DeWitt [21]. Moreover, as discussed in [7], it presents some analogies with the residual flux associated with the disappearance of a black hole at the end of the evaporation process. When using the DF model, the flux is singular and its spectral properties are ill defined. On the contrary, with the self-interacting model, it can be described by a well-defined process in which the coupling to the mirror is switched off more and more rapidly. The second application concerns the flux emitted by a uniformly accelerated mirror. In the DF model, the energy flux vanishes everywhere, but on the horizons where it is not defined. With the other model, instead, a well-defined and regular expression will be obtained. In the intermediate regime, when the coupling is constant, we recover the vanishing of the local flux. But we also find transient effects which become singular when the switching on and off is performed for asymptotic early and late proper times, thereby explaining the paradoxical situation encountered in the DF model where quanta are produced while the energy flux vanishes.

We conclude the paper by presenting the main results in a synthetic manner. We also wish to stress that in this paper recoil effects shall be totally ignored since the trajectory of the mirror is given once for all. Nevertheless, since the self-interacting model is based on Feynman diagrams, it prepares for the analysis of taking into account the dynamics of the mirror [10,11]. Indeed, the S matrices computed with or without backreaction effects possess a very similar structure.

II. KINEMATIC MODELS

In the first part of this section, we review the basic properties of the Davies-Fulling model. In particular, we compare the particle description of the fluxes based on Bogoliubov coefficients with that based on two-point functions. In the second part, we show how the scattering process can be generalized so as to describe partially transmitting mirrors. This generalization will be performed in a matrix formalism. We have chosen this formalism for two reasons: first to emphasize the kinematic nature of the DF model and second to introduce in natural terms the generalization to partial reflection. In the third part, we relate the Bogoliubov coefficients to the S matrix acting in Fock space, thereby preparing for the analysis of transition amplitudes performed in the next section.

A. Davies-Fulling model

In the Davies-Fulling model, the mirror is perfectly reflecting for all frequencies and its trajectory is chosen from the outset. Moreover, no width is attributed to the reflecting condition: i.e., it acts like a delta in space. Beside the fact that the trajectory is always timelike, we shall also impose that it be asymptotically inertial. In conformal terms this means that the trajectory starts from i^- and ends in i^+, the past and future timelike infinities, respectively [22]. The reason is that in the other cases, i.e., when the mirror originates and/or ends on null infinities, the calculation of the energy radiated by the mirror is ill defined. (The specific problems associated with null asymptotic trajectories will be considered in a next article [23].)

In this paper, we shall consider the scattering of a *complex* massless scaler field. The reason for this choice is that it allows us to consider more general scattering matrices when the reflection condition is not perfect. This possibility will be exploited in the next subsections. Since the dynamics of the mirror is trivial, the evolution of the field is entirely governed by the d'Alembert equation

$$(\partial_t^2-\partial_z^2)\Phi(t,z)=0 \tag{1}$$

and the reflection condition

$$\Phi(t,z_{\rm cl}(t))=0 \tag{2}$$

along the classical trajectory of the mirror $z=z_{\rm cl}(t)$.

Since the field is massless and since we work in two dimensions, it is particularly useful to work in the lightlike coordinates defined by $U, V=t\mp z$. For instance, the general solution of Eq. (1) is the sum of a function of U alone plus a function of V. In addition, since the mirror is perfectly reflecting, the trajectory of the mirror completely decouples the left-hand-side configurations from the right-hand-side ones. Therefore, in this subsection, we can and shall restrict our attention to the configurations residing on the left of the mirror.

Finally, since the mirror trajectory emerges from i^-, $V=-\infty$ is a complete Cauchy surface. Hence the usual modes of the d'Alembertian given by

$$\varphi_k(U)=\frac{e^{-ikU}}{\sqrt{4\pi|k|}} \tag{3}$$

form a complete and orthonormal basis. (Instead, when the trajectory starts from the null past infinity $\mathcal{J}^-$, the choice of a complete and orthonormal basis should be reconsidered [23].) We recall that the norm of the modes is determined by the Klein-Gordon scalar product which reads, when evaluated on $\mathcal{J}^-$,

$$\langle\varphi_k|\varphi_{k'}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dU\,\varphi_k^*\,i\overleftrightarrow{\partial}_U\varphi_{k'}=\mathrm{sgn}(k)\,\delta(k-k'). \tag{4}$$

The scattered mode corresponding to Eq. (3) is determined by Eq. (2) to be

$$\varphi_k^{\rm scat}(V)=-\frac{e^{-ikU_{\rm cl}(V)}}{\sqrt{4\pi|k|}}, \tag{5}$$

where $U=U_{\rm cl}(V)$ is the trajectory of the mirror in the lightlike coordinates.

The in mode $\varphi_k^{\rm in}(U,V)$ is by definition the solution of Eqs. (1) and (2) which has Eq. (3) as initial data. It is given by

$$\varphi_k^{\rm in}(U,V)=\frac{e^{-ikU}}{\sqrt{4\pi|k|}}-\frac{e^{-ikU_{\rm cl}(V)}}{\sqrt{4\pi|k|}}. \tag{6}$$

To analyze the frequency content of its scattered part, it should be Fourier decomposed on the final Cauchy surface $U=+\infty$ (the left part of $\mathcal{J}^+$). In total analogy with what we have on $\mathcal{J}^-$, on $\mathcal{J}^+$ the normalized modes are

$$\varphi_\omega(V)=\frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi|\omega|}}. \tag{7}$$

Then the scattered mode (5) can be decomposed as

$$\varphi_k^{\rm scat}=\int_0^\infty d\omega(\alpha_{\omega k}^*\varphi_\omega-\beta_{\omega k}^*\varphi_\omega^*), \tag{8}$$

where the coefficients $\alpha_{\omega k}$, $\beta_{\omega k}$ are given by the overlaps

$$\alpha_{\omega k}^*=\langle\varphi_\omega|\varphi_k^{\rm scat}\rangle=-2\int_{-\infty}^{+\infty}dV\frac{e^{i\omega V}}{\sqrt{4\pi|\omega|^{-1}}}\frac{e^{-ikU_{\rm cl}(V)}}{\sqrt{4\pi|k|}},$$

$$\beta_{\omega k}^*=\langle\varphi_\omega^*|\varphi_k^{\rm scat}\rangle. \tag{9}$$

Since both the initial and final sets of modes are complete, the coefficients $\alpha_{\omega k}$, $\beta_{\omega k}$ satisfy the relations

$$\int_0^\infty dk(\alpha_{\omega k}^*\alpha_{\omega' k}-\beta_{\omega k}\beta_{\omega' k}^*)=\delta(\omega-\omega'),$$

$$\int_0^\infty d\omega(\alpha_{\omega k}\alpha_{\omega k'}^*-\beta_{\omega k}\beta_{\omega k'}^*)=\delta(k-k'),$$

$$\int_0^\infty dk(\alpha_{\omega k}\beta_{\omega k'}-\beta_{\omega k}\alpha_{\omega k'})=0,$$

$$\int_0^\infty d\omega(\alpha_{\omega k}\beta_{\omega' k}^*-\beta_{\omega k}^*\alpha_{\omega' k})=0. \tag{10}$$

Note that these relations are not trivially satisfied when the trajectory of the mirror reaches one of the null infinities rather than the timelike ones. Notice also that the overlaps (9) can be computed on any spacelike surface which runs from $z=-\infty$ to some point on the mirror $(t,z_{\rm cl}(t))$. In this case, one should use the full expression of the in modes given in Eq. (6) as well as that of the out modes given by

$$\varphi_\omega^{\rm out}(U,V)=\varphi_\omega(V)+\varphi_\omega^{b\rm scat}(U). \tag{11}$$

The second term $\varphi_\omega^{b\rm scat}$ results from the backward scattering of φ_ω given in Eq. (7).

When the overlaps $\alpha_{\omega k}$ and $\beta_{\omega k}$ are known, the classical scattering problem is solved. That is, it suffices to decompose the initial data in terms of the modes (7) to obtain, through Eq. (9), the Fourier content of its image on $\mathcal{J}^+$. It should be pointed out that the coefficients $\beta_{\omega k}$ which mix positive and negative frequencies have a well-defined role in this classical wave theory: they determine the (nonadiabatic [24]) increase of the Fourier components of the scattered wave [see, e.g., Eq. (11) in [10] for their influence on the energy of the reflected wave]. It should be also pointed out that one can recover an approximate space-time description of the scattering when considering localized wave packets rather than plane waves: for sufficiently high frequencies [i.e., short wavelengths compared to the (acceleration of the mirror)$^{-1}$], the coefficients $\beta_{\omega k}$ vanish and the mean frequency of the reflected packet $\bar{\omega}$ is related to $\bar{k}$, that of the incident one, by the Doppler effect $\bar{\omega}=\bar{k}\partial_V U_{\rm cl}|_{U=\bar{U}}$ evaluated at $\bar{U}$, the retarded time of the center of the incident packet. These two properties are easily obtained by forming wave packets and evaluating the integrals in Eq. (9) by the saddle point method.

When $\alpha_{\omega k}$ and $\beta_{\omega k}$ are known, the quantum scattering problem is also solved. This follows from the linearity of Eqs. (1) and (2): when working in a second-quantized framework, being linear, these equations provide the Heisenberg equations for the field operator. Thus the field operator can be written both in the in and out bases by

$$\Phi=\int_0^\infty dk(a_k^{\rm in}\varphi_k^{\rm in}+b_k^{\rm in\dagger}+\varphi_k^{\rm in*})$$

$$=\int_0^\infty d\omega(a_\omega^{\rm out}\varphi_\omega^{\rm out}+b_\omega^{\rm out\dagger}\varphi_\omega^{\rm out*}). \tag{12}$$

When imposing that it satisfy the equal-time commutation relation $[\Phi(z),\partial_t\Phi^\dagger(z')]=i\delta(z-z')$, Eq. (4) guarantees that the in operators a_k, b_k satisfy the usual commutation relations leading to the particle interpretation. Then the in vacuum $|0_{\rm in}\rangle$ is defined as the product of the ground states of the in oscillators and its excitations are generated by the creation operators $a_k^{\rm in\dagger}$, $b_k^{\rm in\dagger}$. Moreover, by construction of the in modes on $\mathcal{J}^-$, the in particles correspond to the usual Minkowski particles on $\mathcal{J}^-$. Similarly, by construction of the out modes, all these properties apply to the out operators $a_k^{\rm out\dagger}$, $b_k^{\rm out\dagger}$ and to the out vacuum $|0_{\rm out}\rangle$ when replacing $\mathcal{J}^-$ by $\mathcal{J}^+$.

Given the orthonormal and complete character of the in and out mode basis, Eqs. (9) and (12) determine the Bogoliubov relations

$$a_k^{\rm in}=\int_0^\infty d\omega(\alpha_{\omega k}a_\omega^{\rm out}+\beta_{\omega k}b_\omega^{\rm out\dagger}),$$

$$b_k^{\rm in\dagger}=\int_0^\infty d\omega(\beta_{\omega k}^*a_\omega^{\rm out}+\alpha_{\omega k}^*b_\omega^{\rm out\dagger}),$$

$$a_\omega^{\rm out}=\int_0^\infty dk(\alpha_{\omega k}^*a_k^{\rm in}-\beta_{\omega k}b_k^{\rm in\dagger}),$$

$$b_\omega^{\rm out\dagger}=\int_0^\infty dk(-\beta_{\omega k}^*a_k^{\rm in}+\alpha_{\omega k}b_k^{\rm in\dagger}). \tag{13}$$

Then Eqs. (10) guarantee the compatibility of the particle interpretation in each basis, i.e., both in and out operators obey the canonical commutations relations. With the rela-

tions (13), all questions concerning quantum scattering processes can be answered. For instance, the probability amplitude to obtain a given final state $|\Psi_{\rm fin}\rangle$ specified on $\mathcal{J}^+$ in terms of out operators starting from some in state $|\Xi_{\rm in}\rangle$ constructed on $\mathcal{J}^-$ is given by the product $\langle\Psi_{\rm fin}|\Xi_{\rm in}\rangle$ [which should not be confused with the Klein-Gordon product, Eq. (4), which concerns the modes of the field]. More intrinsic is the overlap $Z^{-1}=\langle 0_{\rm out}|0_{\rm in}\rangle$ between the initial and final vacuum states. Indeed, it determines the probability amplitude for the (spontaneous) decay of the vacuum specified on $\mathcal{J}^-$. The computation of Z is easy when the transformation is diagonal in energy: see, e.g., [2,8]. In the general case, however, as a result of the frequency mixing between in and out modes, the calculation of Z is less trivial. This generalization is presented in the Appendix.

It should also be noted that the Bogoliubov coefficients themselves are given by the following matrix elements:

$$\alpha^*_{\omega k}=\langle 0_{\rm in}|a^{\rm out}_\omega a^{\rm in\dagger}_k|0_{\rm in}\rangle,$$

$$-\beta^*_{\omega k}=\langle 0_{\rm in}|b^{\rm out\dagger}_\omega a^{\rm in\dagger}_k|0_{\rm in}\rangle. \qquad (14)$$

However, it is not clear how to attribute a physical meaning to these equations. In particular, the relationship with the second one and pair creation amplitude is quite obscure. Indeed, the *probability* amplitude to obtain on $\mathcal{J}^+$ one pair of quanta of frequencies ω and ω' in the in vacuum is given by [see Eq. (A7) in the Appendix]

$$\langle 0_{\rm out}|a^{\rm out}_\omega b^{\rm out}_{\omega'}|0_{\rm in}\rangle=-\frac{1}{Z}\int_0^\infty dk\,\beta_{\omega k}\alpha^{-1}_{k\omega'}. \qquad (15)$$

We shall return to these questions of interpretation in Sec. II C.

Instead of considering in-out matrix elements in Fock space, more attention has been put on the expectation values of (local) operators in a given initial state. The most studied object is probably the energy flux emitted by the mirror when the state of the field is the in vacuum. The motivations for this analysis are, first, its relevance for black hole radiation [2–11]; second, that its nonvanishing value is due to spontaneous pair creation, a specific feature of quantum field theory; and third, that this value can be computed either from using Eqs. (13) or from the properties of the Green's function of Φ.

Having at our disposal the Bogoliubov coefficients $\alpha_{\omega k}$ and $\beta_{\omega k}$, we start with the particle point of view. We consider the density energy of the emitted flux. The corresponding Hermitian operator is[1] $T_{VV}=\partial_V\Phi^\dagger\partial_V\Phi+\partial_V\Phi\partial_V\Phi^\dagger$. On the left of the mirror $[U>U_{\rm cl}(V)]$, using Eq. (13) and the first line of Eq. (10), the expectation value of the energy flux is

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}\rangle&\equiv\langle 0_{\rm in}|T_{VV}|0_{\rm in}\rangle-\langle 0_{\rm out}|T_{VV}|0_{\rm out}\rangle\\&=2\,{\rm Re}\Bigg\{\int\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}\\&\quad\times\Bigg[e^{-i(\omega'-\omega)V}\Bigg(\int_0^\infty dk\,\beta^*_{\omega k}\beta_{\omega' k}\Bigg)\\&\quad-e^{-i(\omega'+\omega)V}\Bigg(\int_0^\infty dk\,\alpha^*_{\omega k}\beta_{\omega' k}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}. \qquad (16)\end{aligned}$$

It should be noted that the subtraction of the out vacuum flux follows from the prescription of subtracting the contribution of the Minkowski vacuum. Indeed, by construction of the out modes, they coincide with the usual Minkowski modes on $\mathcal{J}^+$.

The total energy emitted to $\mathcal{J}^+$ is obtained from integrating $\langle T_{VV}\rangle$ over V. The integration eliminates the second term, which is due to interferences between states with different particle numbers. It gives

$$\begin{aligned}\langle H_V\rangle&=\int_{-\infty}^{+\infty}dV\langle T_{VV}\rangle\\&=2\int_0^\infty d\omega\,\omega\int_0^\infty dk|\beta_{\omega k}|^2=2\int_0^\infty d\omega\,\omega\langle n_\omega\rangle. \qquad (17)\end{aligned}$$

One gets the usual relationship between the mean energy and mean number of particles, $\langle n_\omega\rangle=\int_0^\infty dk|\beta_{\omega k}|^2$, found on $\mathcal{J}^+$ (it equals the number of antiparticles). In this writing one sees that the nonvanishing character of $\langle H_V\rangle$ is due to the β coefficients which govern the vacuum decay; see Eq. (A6) in the Appendix.

We now reconsider the flux $\langle T_{VV}\rangle$ without making use of the Bogoliubov coefficients and with less emphasis on the notion of particle. This alternative method is based on the Wightman function evaluated in the in vacuum:

$$\begin{aligned}&\langle 0_{\rm in}|\Phi^\dagger(U,V)\Phi(U',V')|0_{\rm in}\rangle\\&\quad=\int_0^\infty dk\,\varphi^{\rm in}_k(U,V)\varphi^{\rm in}_k{}^*(U',V'). \qquad (18)\end{aligned}$$

In terms of this function, using Eq. (5), the mean flux on $\mathcal{J}^+$ reads

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}\rangle&=2\lim_{V'\to V}[\langle 0_{\rm in}|\partial_V\Phi^\dagger\partial_{V'}\Phi|0_{\rm in}\rangle\\&\quad-\langle 0_{\rm out}|\partial_V\Phi^\dagger\partial_{V'}\Phi|0_{\rm out}\rangle]\\&=-\frac{1}{2\pi}\lim_{V'\to V}\partial_V\partial_{V'}[\ln|U_{\rm cl}(V')-U_{\rm cl}(V)|-\ln|V'-V|]\\&=\frac{1}{6\pi}\left\{\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{1/2}\partial_V^2\left[\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{-1/2}\right]\right\}\end{aligned}$$

[1]The symmetrization is due to the fact that we deal with a complex field. Of course, in the DF model, particles and antiparticles equally contribute to $\langle T_{VV}\rangle$. This explains the overall factors of 2 in the next equations. We warn the reader that this equal contribution will not be necessarily found when considering partially transmitting mirrors.

$$= \frac{1}{24\pi}\left[\left(\frac{d^2U_{\rm cl}}{dV^2}\right)\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{-1}\right]^2 - \frac{1}{12\pi}\partial_V\left[\left(\frac{d^2U_{\rm cl}}{dV^2}\right)\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{-1}\right]. \quad (19)$$

Again, the subtraction of the out vacuum flux follows from the prescription of subtracting the contribution of the Minkowski vacuum. In this point splitting method, it is through that prescription that the notion of vacuum decay is reintroduced. Indeed, on $\mathcal{J}^+$, the above subtraction is equivalent to normal ordering with respect to out operators. [This is straightforwardly proved by using Eq. (10).] Moreover, the fact that $\langle T_{VV}\rangle$ and $\langle H_V\rangle$ vanish only for inertial trajectories,[2] i.e., when $\partial_V^2 U_{\rm cl}=0$, confirms that their nonvanishing character is due to the nonadiabaticity [24] of the scattering, a notion deeply rooted in the spontaneous creation of pairs of particles. In conclusion, a close examination of the point splitting method and that based on Bogoliubov coefficients reveals their complete agreement in flat space-time. In [25] this correspondence was extended to curved space-time by introducing Bogoliubov coefficients which are defined locally.

From Eq. (19) we learn that the energy flux is local in that it depends only on three derivatives of the trajectory $U_{\rm cl}(V)$ evaluated at the retarded time V (remember that we are on the left of the mirror). We shall see below that this locality is a consequence of dealing with a perfectly reflecting mirror for all frequencies.

Notice finally that in Eq. (16), the first term is positive definite and gives a positive total energy $\langle H_V\rangle$. Indeed, being a total derivative, the second term does not contribute to $\langle H_V\rangle$ when the trajectory is asymptotically inertial since $U_{\rm cl}(V)\sim V$ for asymptotically late and early V's. This might not be the case for trajectories which enter or leave the space through null infinities because of the infinite Doppler effect encountered asymptotically.

B. Partially transmitting mirrors

In this subsection we study partially transmitting (but still recoil-less) noninertial mirrors. We shall proceed in three steps. We first show that the scattering by a noninertial mirror is most simply described in terms of the wave functions which are eigenmodes of the proper time of the mirror. (We shall call them the proper-time modes.) When using these modes, the matrix relating the scattered modes to the initial ones is diagonal in the frequency, exactly as for the scattering of Minkowski modes by a mirror at rest. Second, we shall see that these modes are well adapted for introducing partially reflecting coefficients with arbitrary frequency-dependent phase and amplitude. Indeed, since this matrix is diagonal in the proper-time frequency, unitarity constrains its elements in a simple manner, frequency by frequency. Third, for both partial and total reflection, we shall see that the usual Bogoliubov coefficients, Eq. (9), relating the in and out Minkowski modes are simply obtained from this diagonal matrix.

To satisfy this program, we first need to construct the proper-time modes. To this end it is very useful to introduce new lightlike coordinates u, v such that the timelike coordinate $(u+v)/2=\tau$ is the proper time of the mirror and the spacelike one defined by $v-u/2=\rho$ is such that the trajectory reads $\rho=\rho_0=$const. These new coordinates are defined by two analytic functions $u(U)$ and $v(V)$ where U,V are the Minkowski lightlike coordinates. These functions are determined by the mirror trajectory $U_{\rm cl}(V)$ and the two conditions defining τ and ρ. Indeed, along the mirror's trajectory, the length element obeys

$$ds^2=\partial_V U_{\rm cl}(V)dV^2=\partial_U V_{\rm cl}(U)dU^2=dv^2=du^2=d\tau^2. \quad (20)$$

This gives

$$\frac{dv}{dV}=\sqrt{\partial_V U_{\rm cl}},\quad \frac{du}{dU}=\sqrt{\partial_U V_{\rm cl}}. \quad (21)$$

One verifies that the Jacobians dv/dV and du/dU define a time-dependent boost since they satisfy $(du/dV)(du/dU)=1$ for all τ. The proper-time modes are then simply given by

$$\varphi_\lambda(u)=\frac{e^{-i\lambda u}}{\sqrt{4\pi|\lambda|}},$$

$$\varphi_\lambda(v)=\frac{e^{-i\lambda v}}{\sqrt{4\pi|\lambda|}}. \quad (22)$$

They form a complete basis on $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$ since our condition that the trajectory emerge from i^- and finish on i^+ implies that the v and u axes cover those of V and U, respectively.

In the case of total reflection, the scattering along the mirror at $\rho=\rho_0$ is trivial. When using the conventions of the former subsection [Eqs. (6) and (11)], one has, on the left of the mirror,

$$\varphi_\lambda^{U,\rm in}(u,v)=\varphi_\lambda(u)-e^{2i\lambda\rho_0}\varphi_\lambda(v)=-e^{2i\lambda\rho_0}\varphi_\lambda^{V,\rm out}(u,v). \quad (23)$$

The new subscripts U and V indicate which side of $\mathcal{J}^-$ ($\mathcal{J}^+$) is the asymptotic support of the in (out) functions. We have introduced it in order to describe partial reflection which requires us to consider simultaneously both sides of the mirror. Using this notation, on the right of the mirror, one has

[2]For uniform acceleration, the two terms in Eq. (19) cancel each other, leading to a null flux. However, the Bogoliubov coefficients $\beta_{\omega k}$ do not vanish, thereby indicating that particles are produced. Moreover, when used in Eq. (17) they lead to a divergent integrated energy. To establish the compatibility of the null flux with this divergent result requires a regularization scheme. To obtain such a scheme is the main reason for considering the dynamical model of Sec. III.

$$\varphi_\lambda^{V,\mathrm{in}}(u,v)=\varphi_\lambda(v)-e^{-2i\lambda\rho_0}\varphi_\lambda(u)=-e^{-2i\lambda\rho_0}\varphi_\lambda^{U,\mathrm{out}}(u,v). \tag{24}$$

It will be useful to express these relations by a 2×2 matrix $\mathbf{S}_\lambda$ as

$$\varphi_\lambda^{i,\mathrm{out}}=S_\lambda^{ij}\varphi_\lambda^{j,\mathrm{in}}(\equiv a_\lambda^{j,\mathrm{in}}=S_\lambda^{ij}a_\lambda^{i,\mathrm{out}}). \tag{25}$$

At fixed λ, the indices of rows and columns i, j are the new subscript U or V. As usual, repeated indices are summed over. For total reflection, one has

$$\mathbf{S}_\lambda=\begin{pmatrix}0 & -e^{+2i\lambda\rho_0}\\ -e^{-2i\lambda\rho_0} & 0\end{pmatrix}, \tag{26}$$

We now consider partial reflection. When considering elastic reflection, the matrix $\mathbf{S}_\lambda$ relating in and out modes which generalizes Eq. (25) is unitary. [That is, we generalize total reflection in a restricted way since we keep both the linearity and the unitarity of Eq. (25).] Unitarity constrains the elements of $\mathbf{S}_\lambda$,

$$\mathbf{S}_\lambda=\begin{pmatrix}s_u e^{i\varphi_u} & -iRe^{i\varphi}\\ -iR'e^{i\varphi'} & s_v e^{i\varphi_v}\end{pmatrix}, \tag{27}$$

to obey

$$R=R',\quad s_u=s_v,$$

$$s_u^2+R^2=1,\quad \varphi'=\varphi_u+\varphi_v-\varphi. \tag{28}$$

(For simplicity of the expressions, we have not written the argument λ, but all variables should be understood as λ dependent.) Physically, R and s correspond to the reflection and transmission coefficients; i.e., when working in the rest frame of the mirror, the probability for an incident quantum of frequency λ to be reflected is R^2.

In what follows we impose $\varphi_u=\varphi_v=-\phi$, a condition which expresses that the transmitted part of the scattering is independent of the sign of the momentum. In anticipation of Sec. III, we point out that this equality is automatically satisfied when considering parity-invariant Hamiltonians (see [26], Chap. 3.4). In this case the matrix reads

$$\mathbf{S}_\lambda=e^{-i\phi}\begin{pmatrix}\sqrt{1-R^2} & -iRe^{i\theta}\\ -iRe^{-i\theta} & \sqrt{1-R^2}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

In principle, the common phase $e^{-i\phi}$ could be reabsorbed in a redefinition of the modes. However, when using in and out modes conventionally defined, i.e., $\varphi_\lambda^{V,\mathrm{in}}(v)=\varphi_\lambda^{V,\mathrm{out}}(v)=\varphi_\lambda(v)$ of Eq. (22), the phase ϕ is unequivocally fixed. As we shall see in the next section, this convention is automatically used when considering interactions perturbatively. This is also the case in the DF model. Indeed, the limiting case of total reflection given in Eq. (26) is reached for $R\to1$ and $\phi=\pi/2$ for all λ. One also finds that the other phase θ is related to the mirror location by $\theta=2\rho_0\lambda$.

To complete our second step, we should describe particles and antiparticles simultaneously. To this end, we group the in operators $(a_\lambda^{U,\mathrm{in}},a_\lambda^{V,\mathrm{in}},b_\lambda^{U,\mathrm{in}\dagger},b_\lambda^{V,\mathrm{in}\dagger})$ in a four-vector $a_\lambda^{\mu,\mathrm{in}}$ and the out operators $(a_\lambda^{U,\mathrm{out}},a_\lambda^{V,\mathrm{out}},b_\lambda^{U,\mathrm{out}\dagger},b_\lambda^{V,\mathrm{out}\dagger})$ in $a_\lambda^{\mu,\mathrm{out}}$. Similarly, we group their corresponding modes in the four-vectors $\varphi_\lambda^{\mu,\mathrm{in}}$ and $\varphi_\lambda^{\mu,\mathrm{out}}$. Since we work with a charged field, the modes associated with $b_\lambda^{i\dagger}$ might not be complex conjugates of those associated with a_λ^i (as is the case when dealing with a charged field in an electromagnetic field: see, e.g., Sec. 1.3 in [8]). Explicitly, in our case, the four modes are $(\varphi_\lambda^U,\varphi_\lambda^V,\overline{\varphi}_\lambda^{U*},\overline{\varphi}_\lambda^{V*})$ where $\overline{\varphi}_\lambda^i$ designate the two modes associated with the antiparticles operator b_λ^U and b_λ^V.

We then introduce the 4×4 matrix given by

$$\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}=\delta(\lambda-\lambda')\begin{pmatrix}\mathbf{S}_\lambda & 0\\ 0 & \overline{\mathbf{S}}_\lambda^*\end{pmatrix}, \tag{30}$$

where $\overline{\mathbf{S}}_\lambda$ is the scattering matrix for the antiparticles. Since $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ is block diagonal, unitarity constrains $\mathbf{S}_\lambda$ and $\overline{\mathbf{S}}_\lambda$ separately. $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ acts on the in four-vector as follows:

$$\varphi_\lambda^{\mu,\mathrm{out}}=S_{\lambda\lambda'}^{\mu\nu}\varphi_{\lambda'}^{\nu,\mathrm{in}}, \tag{31}$$

where continuous repeated indices are integrated from 0 to ∞ and discrete ones summed over the four components defined at fixed frequency. With these choices, the components of $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ are the Bogoliubov coefficients conventionally defined. By conventionally defined we mean the equations which generalize Eq. (13), i.e.,

$$a_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}=\alpha_{\lambda\lambda'}^{ij}a_\lambda^{i,\mathrm{out}}+\overline{\beta}_{\lambda\lambda'}^{ij}b_\lambda^{i,\mathrm{out}\dagger},$$

$$b_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}\dagger}=\beta_{\lambda\lambda'}^{ij*}a_\lambda^{i,\mathrm{out}}+\overline{\alpha}_{\lambda\lambda'}^{ij*}b_\lambda^{i,\mathrm{out}\dagger}, \tag{32}$$

where the Bogoliubov coefficients $\alpha,\overline{\alpha},\beta,\overline{\beta}$ are now 2×2 matrices. By direct identification, one obtains

$$\alpha_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\varphi_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\varphi_\lambda^{i,\mathrm{out}}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{ij},$$

$$\overline{\alpha}_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\overline{\varphi}_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\overline{\varphi}_\lambda^{i,\mathrm{out}}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{i+2j+2*},$$

$$\beta_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\overline{\varphi}_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\varphi_\lambda^{i,\mathrm{out}*}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{ij+2*},$$

$$\overline{\beta}_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\varphi_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\overline{\varphi}_\lambda^{i,\mathrm{out}*}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{i+2j}. \tag{33}$$

When $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ is block diagonal in the sense of Eq. (30), one obviously has $\beta_{\lambda\lambda'}^{ij}=\overline{\beta}_{\lambda\lambda'}^{ij}=0$. In full generality, $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ satisfies unitarity in the following sense:

$$(S^\dagger)_{\lambda\lambda''}^{\mu\nu}S_{\lambda''\lambda'}^{\nu\mu'}=\delta(\lambda-\lambda')\delta^{\mu\mu'}. \tag{34}$$

This equation generalizes Eqs. (10) to partially transmitting mirrors.

With Eqs. (26), (30), and (31), we have shown that scattering in the DF model is trivial when using proper-time

$$\varphi_\lambda^{V,\mathrm{in}}(u,v)=\varphi_\lambda(v)-e^{-2i\lambda\rho_0}\varphi_\lambda(u)=-e^{-2i\lambda\rho_0}\varphi_\lambda^{U,\mathrm{out}}(u,v). \tag{24}$$

It will be useful to express these relations by a 2×2 matrix $\mathbf{S}_\lambda$ as

$$\varphi_\lambda^{i,\mathrm{out}}=S_\lambda^{ij}\varphi_\lambda^{j,\mathrm{in}}(\equiv a_\lambda^{j,\mathrm{in}}=S_\lambda^{ij}a_\lambda^{i,\mathrm{out}}). \tag{25}$$

At fixed λ, the indices of rows and columns i, j are the new subscript U or V. As usual, repeated indices are summed over. For total reflection, one has

$$\mathbf{S}_\lambda=\begin{pmatrix}0 & -e^{+2i\lambda\rho_0}\\ -e^{-2i\lambda\rho_0} & 0\end{pmatrix}, \tag{26}$$

We now consider partial reflection. When considering elastic reflection, the matrix $\mathbf{S}_\lambda$ relating in and out modes which generalizes Eq. (25) is unitary. [That is, we generalize total reflection in a restricted way since we keep both the linearity and the unitarity of Eq. (25).] Unitarity constrains the elements of $\mathbf{S}_\lambda$,

$$\mathbf{S}_\lambda=\begin{pmatrix}s_u e^{i\varphi_u} & -iRe^{i\varphi}\\ -iR'e^{i\varphi'} & s_v e^{i\varphi_v}\end{pmatrix}, \tag{27}$$

to obey

$$R=R',\quad s_u=s_v,$$

$$s_u^2+R^2=1,\quad \varphi'=\varphi_u+\varphi_v-\varphi. \tag{28}$$

(For simplicity of the expressions, we have not written the argument λ, but all variables should be understood as λ dependent.) Physically, R and s correspond to the reflection and transmission coefficients; i.e., when working in the rest frame of the mirror, the probability for an incident quantum of frequency λ to be reflected is R^2.

In what follows we impose $\varphi_u=\varphi_v=-\phi$, a condition which expresses that the transmitted part of the scattering is independent of the sign of the momentum. In anticipation of Sec. III, we point out that this equality is automatically satisfied when considering parity-invariant Hamiltonians (see [26], Chap. 3.4). In this case the matrix reads

$$\mathbf{S}_\lambda=e^{-i\phi}\begin{pmatrix}\sqrt{1-R^2} & -iRe^{i\theta}\\ -iRe^{-i\theta} & \sqrt{1-R^2}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

In principle, the common phase $e^{-i\phi}$ could be reabsorbed in a redefinition of the modes. However, when using in and out modes conventionally defined, i.e., $\varphi_\lambda^{V,\mathrm{in}}(v)=\varphi_\lambda^{V,\mathrm{out}}(v)=\varphi_\lambda(v)$ of Eq. (22), the phase ϕ is unequivocally fixed. As we shall see in the next section, this convention is automatically used when considering interactions perturbatively. This is also the case in the DF model. Indeed, the limiting case of total reflection given in Eq. (26) is reached for $R\to1$ and $\phi=\pi/2$ for all λ. One also finds that the other phase θ is related to the mirror location by $\theta=2\rho_0\lambda$.

To complete our second step, we should describe particles and antiparticles simultaneously. To this end, we group the in operators $(a_\lambda^{U,\mathrm{in}},a_\lambda^{V,\mathrm{in}},b_\lambda^{U,\mathrm{in}\dagger},b_\lambda^{V,\mathrm{in}\dagger})$ in a four-vector $a_\lambda^{\mu,\mathrm{in}}$ and the out operators $(a_\lambda^{U,\mathrm{out}},a_\lambda^{V,\mathrm{out}},b_\lambda^{U,\mathrm{out}\dagger},b_\lambda^{V,\mathrm{out}\dagger})$ in $a_\lambda^{\mu,\mathrm{out}}$. Similarly, we group their corresponding modes in the four-vectors $\varphi_\lambda^{\mu,\mathrm{in}}$ and $\varphi_\lambda^{\mu,\mathrm{out}}$. Since we work with a charged field, the modes associated with $b_\lambda^{i\dagger}$ might not be complex conjugates of those associated with a_λ^i (as is the case when dealing with a charged field in an electromagnetic field: see, e.g., Sec. 1.3 in [8]). Explicitly, in our case, the four modes are $(\varphi_\lambda^U,\varphi_\lambda^V,\overline{\varphi}_\lambda^{U*},\overline{\varphi}_\lambda^{V*})$ where $\overline{\varphi}_\lambda^i$ designate the two modes associated with the antiparticles operator b_λ^U and b_λ^V.

We then introduce the 4×4 matrix given by

$$\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}=\delta(\lambda-\lambda')\begin{pmatrix}\mathbf{S}_\lambda & 0\\ 0 & \overline{\mathbf{S}}_\lambda^*\end{pmatrix}, \tag{30}$$

where $\overline{\mathbf{S}}_\lambda$ is the scattering matrix for the antiparticles. Since $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ is block diagonal, unitarity constrains $\mathbf{S}_\lambda$ and $\overline{\mathbf{S}}_\lambda$ separately. $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ acts on the in four-vector as follows:

$$\varphi_\lambda^{\mu,\mathrm{out}}=S_{\lambda\lambda'}^{\mu\nu}\varphi_{\lambda'}^{\nu,\mathrm{in}}, \tag{31}$$

where continuous repeated indices are integrated from 0 to ∞ and discrete ones summed over the four components defined at fixed frequency. With these choices, the components of $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ are the Bogoliubov coefficients conventionally defined. By conventionally defined we mean the equations which generalize Eq. (13), i.e.,

$$a_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}=\alpha_{\lambda\lambda'}^{ij}a_\lambda^{i,\mathrm{out}}+\overline{\beta}_{\lambda\lambda'}^{ij}b_\lambda^{i,\mathrm{out}\dagger},$$

$$b_{\lambda'}^{j,\mathrm{int}\dagger}=\beta_{\lambda\lambda'}^{ij*}a_\lambda^{i,\mathrm{out}}+\overline{\alpha}_{\lambda\lambda'}^{ij*}b_\lambda^{i,\mathrm{out}\dagger}, \tag{32}$$

where the Bogoliubov coefficients $\alpha,\overline{\alpha},\beta,\overline{\beta}$ are now 2×2 matrices. By direct identification, one obtains

$$\alpha_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\varphi_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\varphi_\lambda^{i,\mathrm{out}}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{ij},$$

$$\overline{\alpha}_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\overline{\varphi}_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\overline{\varphi}_\lambda^{i,\mathrm{out}}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{i+2j+2*},$$

$$\beta_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\overline{\varphi}_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\varphi_\lambda^{i,\mathrm{out}*}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{ij+2*},$$

$$\overline{\beta}_{\lambda\lambda'}^{ij}=\langle\varphi_{\lambda'}^{j,\mathrm{in}}|\overline{\varphi}_\lambda^{i,\mathrm{out}*}\rangle=S_{\lambda\lambda'}^{i+2j}. \tag{33}$$

When $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ is block diagonal in the sense of Eq. (30), one obviously has $\beta_{\lambda\lambda'}^{ij}=\overline{\beta}_{\lambda\lambda'}^{ij}=0$. In full generality, $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ satisfies unitarity in the following sense:

$$(S^\dagger)_{\lambda\lambda''}^{\mu\nu}S_{\lambda''\lambda'}^{\nu\mu'}=\delta(\lambda-\lambda')\delta^{\mu\mu'}. \tag{34}$$

This equation generalizes Eqs. (10) to partially transmitting mirrors.

With Eqs. (26), (30), and (31), we have shown that scattering in the DF model is trivial when using proper-time

modes. We have done more since Eqs. (31) and (33) apply to all partially transmitting mirrors governed by $\mathbf{S}_\lambda$ given by Eq. (29).

The last step consists in finding the relationship between $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ and the Bogoliubov coefficients between in and out Minkowski modes. This is simply achieved by introducing the 4×4 matrix which relates the (unscattered) Minkowski modes of frequency $k=-i\partial_t$ to the (unscattered) proper-time modes of frequency $\lambda=-i\partial_\tau$:

$$\phi_k^\mu=\mathcal{B}_{k\lambda}^{\mu\nu}\varphi_\lambda^\nu. \tag{35}$$

The elements of this matrix are given by

$$\mathcal{B}_{k\lambda}=\begin{pmatrix} \langle\varphi_\lambda^U|\phi_k^U\rangle & 0 & -\langle\varphi_\lambda^{U*}|\phi_k^U\rangle & 0\\ 0 & \langle\varphi_\lambda^V|\phi_k^V\rangle & 0 & -\langle\varphi_\lambda^{V*}|\phi_k^V\rangle\\ \langle\varphi_\lambda^U|\phi_k^{U*}\rangle & 0 & -\langle\varphi_\lambda^{U*}|\phi_k^{U*}\rangle & 0\\ 0 & \langle\varphi_\lambda^V|\phi_k^{V*}\rangle & 0 & -\langle\varphi_\lambda^{V*}|\phi_k^{V*}\rangle \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{k\lambda}^{UU} & 0 & \beta_{k\lambda}^{UU*} & 0\\ 0 & \alpha_{k\lambda}^{VV} & 0 & \beta_{k\lambda}^{VV*}\\ \beta_{k\lambda}^{UU} & 0 & \alpha_{k\lambda}^{UU*} & 0\\ 0 & \beta_{k\lambda}^{VV} & 0 & \alpha_{k\lambda}^{VV*} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Since $\mathcal{B}_{k\lambda}$ relates unscattered modes, it is independent of the charge of the particle; hence, $\mathcal{B}_{k\lambda}^{11}\equiv\alpha_{k\lambda}^{UU}=\overline{\alpha}_{k\lambda}^{UU}\equiv\mathcal{B}_{k\lambda}^{33}$. The same equality applies to $\alpha_{k\lambda}^{VV}$, $\beta_{k\lambda}^{VV}$, and $\beta_{k\lambda}^{UU}$.

The important point for us is that $\mathcal{B}_{k\lambda}$ also relates the in Minkowski modes to the in proper-time modes and the out Minkowski modes to the out proper-time modes. Therefore the linear relation between in and out Minkowski modes is given by

$$\phi_\omega^{\mu,\mathrm{out}}=S_{\omega k}^{\mu\mu'}\phi_k^{\mu',\mathrm{in}}, \tag{37}$$

where

$$S_{\omega k}^{\mu\mu'}=\mathcal{B}_{\omega\lambda}^{\mu\nu}S_{\lambda\lambda'}^{\nu\nu'}(\mathcal{B}_{k\lambda'}^{-1})^{\nu'\mu'}. \tag{38}$$

Repeated indices are summed over, and the inverse of $\mathcal{B}$ is defined by

$$\varphi_\lambda^\nu=(\mathcal{B}_{k\lambda}^{-1})^{\nu\mu}\phi_k^\mu. \tag{39}$$

It is given by

$$\mathcal{B}_{k\lambda}^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_{k\lambda}^{UU*} & 0 & -\beta_{k\lambda}^{UU*} & 0\\ 0 & \alpha_{k\lambda}^{VV*} & 0 & -\beta_{k\lambda}^{VV*}\\ -\beta_{k\lambda}^{UU} & 0 & \alpha_{k\lambda}^{UU} & 0\\ 0 & -\beta_{k\lambda}^{VV} & 0 & \alpha_{k\lambda}^{VV} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Explicitly, using the dictionary (33) now applied to Minkowski modes, the four coefficients $S_{\omega k}^{1\nu}$ are

$$\alpha_{\omega k}^{UU}=\delta(\omega-k)-i\int_0^\infty d\lambda\,(\alpha_{\omega\lambda}^{UU}T_\lambda^{UU}\alpha_{k\lambda}^{UU*}+\beta_{\omega\lambda}^{UU*}\overline{T}_\lambda^{UU*}\beta_{k\lambda}^{UU}), \tag{41}$$

$$\alpha_{\omega k}^{UV}=-i\int_0^\infty d\lambda\,(\alpha_{\omega\lambda}^{UU}T_\lambda^{UV}\alpha_{k\lambda}^{VV*}+\beta_{\omega\lambda}^{UU*}\overline{T}_\lambda^{UV}\beta_{k\lambda}^{VV}),$$

$$\beta_{\omega k}^{UU*}=i\int_0^\infty d\lambda\,(\alpha_{\omega\lambda}^{UU}T_\lambda^{UU}\beta_{k\lambda}^{UU*}+\beta_{\omega\lambda}^{UU*}\overline{T}_\lambda^{UU*}\alpha_{k\lambda}^{UU}),$$

$$\beta_{\omega k}^{UV*}=i\int_0^\infty d\lambda\,(\alpha_{\omega\lambda}^{UU}T_\lambda^{UV}\beta_{k\lambda}^{VV*}+\beta_{\omega\lambda}^{UU*}\overline{T}_\lambda^{UV*}\alpha_{k\lambda}^{VV}).$$

Similar equations give expressions for the other components of $S_{\omega k}^{\mu\nu}$. We have written $\mathbf{S}_\lambda$ as $\mathbf{S}_\lambda=\mathbf{1}-i\mathbf{T}_\lambda$ (and $\overline{\mathbf{S}}_\lambda=\mathbf{1}-i\overline{\mathbf{T}}_\lambda$) in order to extract the trivial part of the diagonal elements. This trivial part leads to the delta function in the first equation. The usefulness of this expression is that it will be easily related to the perturbative expressions we shall encounter in the next section.

Equations (41) are the central result of this section. They give the in-out overlaps of Minkowski modes in terms of the matrices $\mathbf{T}_\lambda,\overline{\mathbf{T}}_\lambda$ computed in the rest frame of the mirror and the overlaps between the free (unscattered) Minkowski and proper-time modes.

It is then easy to obtain the mean flux emitted by this partially transmitting noninertial mirror when the initial state of the field is the Minkowski vacuum. The same algebra which gave Eq. (16) now gives

$$\langle T_{VV}\rangle=\langle T_{VV}\rangle^{\mathrm{particle}}+\langle T_{VV}\rangle^{\mathrm{antiparticle}}, \tag{42}$$

where

$$\langle T_{VV}\rangle^{\mathrm{particle}}=\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=U,V}\int\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}\times\left[e^{-i(\omega'-\omega)V}\left(\int_0^\infty dk\,\beta_{\omega k}^{Vj*}\beta_{\omega' k}^{Vj}\right)-e^{-i(\omega'+\omega)V}\left(\int_0^\infty dk\,\overline{\alpha}_{\omega k}^{Vj*}\beta_{\omega' k}^{Vj}\right)\right]\right\}. \tag{43}$$

$\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{antiparticle}}$ is given by the same expression with $\overline{\alpha},\beta$ replaced by α,β. Here $\langle T_{VV}\rangle$ possesses the same structure as

Eq. (16). However, four kinds of coefficients α, β should be considered since we are dealing with *partial* reflection of *charged* particles.

When the scattering is independent of the energy and charge of the particles, i.e., when R and ϕ defined in Eq. (29) are independent of λ and when $\overline{\mathbf{S}}^*_\lambda = \mathbf{S}_{-\lambda}$, integration over λ can be trivially performed as it expresses the completeness of the φ_λ modes. In this case, as in the DF model, one has $\beta^{UU}_{\omega k} = \beta^{VV}_{\omega k} = 0$. One also finds that the emitted flux is simply

$$\langle T_{VV}\rangle = R^2 \langle T_{VV}\rangle_{\rm DF}, \tag{44}$$

where $\langle T_{VV}\rangle_{\rm DF}$ is the flux found in the DF model; see Eq. (16).

Instead, when R and ϕ depend on the energy and/or the charge, $\beta^{UU}_{\omega k}$ and $\beta^{VV}_{\omega k}$ will be, in general,[3] different from zero. In this case, one also loses the possibility of reexpressing the flux in terms of the derivatives of the trajectory as we did in Eq. (19). This can be understood from Eqs. (41): when expressing $\mathbf{T}_\lambda$ as a series in powers of λ, one would obtain for $\langle T_{VV}\rangle$ a nonlocal expression in V unless the series in λ stops after a finite number of terms.

C. Additional remarks

In this subsection, we relate the matrices $\mathbf{S}_{\lambda\lambda'}$ and $\mathbf{S}_{\omega k}$, which act linearly on in and out operators, to the conventional S matrix acting on multiparticle states in Fock space. With this identification we shall be able to relate the Bogoliubov coefficients, Eqs. (41), to *transition amplitudes* and not only to expectation values as in Eq. (43).

By definition [26], the action of this operator on states and operators is the following:

$$|0_{\rm in}\rangle = \hat S |0_{\rm out}\rangle,$$

$$a^{i,\rm out}_\lambda = \hat S^{-1} a^{i,\rm in}_\lambda \hat S, \quad b^{i,\rm out\dagger}_\lambda = \hat S^{-1} b^{i,\rm in\dagger}_\lambda \hat S. \tag{45}$$

Since we are dealing with elastic scattering, this operator contains exactly the same information as the matrices $\mathbf{S}_\lambda, \overline{\mathbf{S}}_\lambda$. Indeed, the block-diagonal character of Eq. (30) and the linearity of Eq. (31) tell us that $\hat S$ is the exponential of a quadratic form of the proper-time operators a_λ, b_λ:

$$\hat S = e^{-i(a^{i,\rm in}_\lambda s^{ij}_{\lambda\lambda'} a^{j,\rm in\dagger}_{\lambda'} - b^{i,\rm in\dagger}_\lambda \overline{s}^{jj}_{\lambda\lambda'} b^{j,\rm in}_{\lambda'})}. \tag{46}$$

Then straightforward algebra gives

$$\mathbf{s}_{\lambda\lambda'} = \delta(\lambda-\lambda') \begin{pmatrix} \phi & \arcsin(R) e^{i\theta} \\ \arcsin(R) e^{-i\theta} & \phi \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{s}}_{\lambda\lambda'} = \mathbf{s}_{\lambda\lambda'}(\overline{R}, \overline{\theta}, \overline{\phi}), \tag{47}$$

where R, θ, ϕ have been defined in Eq. (29) and $\overline{R}, \overline{\theta}, \overline{\phi}$ are defined in the same way from $\overline{\mathbf{S}}_\lambda$. We note that in the DF model, i.e., in the limit of perfect reflection, $\mathbf{s}_{\lambda\lambda'}$ is given by

$$\mathbf{s}^{\rm DF}_{\lambda\lambda'} = \delta(\lambda-\lambda') \left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 1 \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{s}}^{\rm DF}_{\lambda\lambda'}. \tag{48}$$

Although the configurations on the left and right of the mirror completely decouple, the S matrix $\hat S$ treats both sides simultaneously.

To anticipate the expression of $\hat S$ in terms of Minkowski operators which will mix creation and destruction operators, it is a convenient to rewrite Eq. (46) in term of the four-vector $a^{\mu,\rm in}_\lambda$,

$$\hat S = e^{-i(a^{\mu,\rm in}_\lambda s^{\mu\nu}_{\lambda\lambda'} a^{\nu,\rm in\dagger}_{\lambda'})}, \quad \text{with } (s^{\mu\nu}_{\lambda\lambda'}) = \begin{pmatrix} s^{ij}_{\lambda\lambda'} & 0 \\ 0 & -\overline{s}^{ij}_{\lambda\lambda'} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

To obtain the expression of $\hat S$ in terms of the Minkowski operators $a^{i,\rm in}_k, b^{i,\rm in}_k$, it suffices to use the matrix $\mathcal{B}_{\omega\lambda}$ to replace proper-time operators by Minkowski ones. Explicitly, one obtains

$$\hat S = \exp[-i(a^{\mu,\rm in}_\omega s^{\mu\nu}_{\omega\omega'} a^{\nu,\rm in\dagger}_{\omega'})],$$

with

$$s^{\mu\nu}_{\omega\omega'} = \mathcal{B}^{\mu\mu'}_{\omega\lambda} s^{\mu'\nu'}_{\lambda\lambda'} (\mathcal{B}^\dagger_{\omega'\lambda'})^{\nu\nu'}. \tag{50}$$

Formally, $\hat S$ provides the answer to all questions concerning asymptotic states and expectation values. For instance, the probability amplitude governing the (Minkowski) vacuum decay, Eq. (A6), is simply

$$Z^{-1} = \langle 0_{\rm out}|0_{\rm in}\rangle = \langle 0_{\rm in}|\hat S|0_{\rm in}\rangle. \tag{51}$$

Similarly, the probability amplitude for an initial quantum of momentum k to be scattered and for no pair to be created is

$$\langle 0_{\rm out}| a^{i,\rm out}_\omega a^{j,\rm in\dagger}_k |0_{\rm in}\rangle = \langle 0_{\rm in}| a^{i,\rm in}_\omega \hat S a^{j,\rm in\dagger}_k |0_{\rm in}\rangle = \frac{1}{Z} (\alpha^{-1})^{ji}_{k\omega}. \tag{52}$$

The last equality is easily obtained by using Eq. (32) to express $a^{i,\rm out}_\omega$ in terms of $a^{j,\rm in}_k$ and $b^{j,\rm out\dagger}_\omega$. In the same way, the Bogoliubov coefficient β is related to the probability amplitude to find a pair of out quanta in the in vacuum by

$$\beta^{ij}_{\omega k} (\overline{\alpha}^{-1})^{ji'}_{k\omega'} = -\frac{\langle 0_{\rm out}| a^{i,\rm out}_\omega b^{i',\rm out}_{\omega'} |0_{\rm in}\rangle}{\langle 0_{\rm out}|0_{\rm in}\rangle} = -\frac{\langle 0_{\rm in}| a^{i,\rm in}_\omega b^{i',\rm in}_{\omega'} \hat S |0_{\rm in}\rangle}{\langle 0_{\rm in}|\hat S|0_{\rm in}\rangle}. \tag{53}$$

In this, we recover Eq. (15). It should be stressed that these relations *determine* the physical interpretation of the overlaps α, β given in Eqs. (41). In fact, the second-quantized framework was never used to obtain Eq. (41): only the linearity of

[3] $\beta^{UU}_{\omega k} = 0$ requires that $\overline{T}^{UU*}_\lambda = -T^{UU}_{-\lambda}$ for all $\lambda > 0$ and similarly for the VV coefficients. In the next section, we shall see that the condition is satisfied for time-independent couplings with U(1) symmetry.

the relations and the orthonormal character of the proper-time and Minkowski-mode bases were exploited.

The physical interpretation of α, β is the following: to first order in the transfer matrix $\mathbf{T}_\lambda$, $\alpha(\beta)$ divided by Z gives the probability amplitude to scatter a quantum (to produce a pair of quanta), since $\alpha^{-1}\simeq 1+iT$ ($\beta\simeq -iT$). Upon considering higher-order terms in $\mathbf{T}_\lambda$, one loses the simplicity of the relationship so as to get the above equations. The simple relation in the linear regime will be nicely confirmed in the next section when using perturbation theory. We shall see in particular that division by Z corresponds to the usual restriction of keeping only the connected graphs engendered by the development of $\hat{S}=Te^{-ig\int dt\, H}$ in powers of g. We shall further comment on these aspects at the end of Sec. III.

III. SELF-INTERACTING MODEL

In this section, following [28,29,10], we introduce a model based on self-interactions which derives from an action principle. In the first part, we consider time-independent couplings. In this case, resumming the Born series leads, as in Eq. (30), to diagonal matrices in the proper-time energy λ with parameters R and ϕ, which depend on λ according to the number of derivatives in the interaction Hamiltonian. The important difference is that causality is now built in, as follows from interactions governed by an action. This model will also be generalized by considering a thick mirror with a nonzero width. Using a perturbative approach, we shall see that the thickness acts as a UV cutoff.

In the second part, we work with time-dependent couplings. We shall work perturbatively up to second order in the interactions. The novelty concerns the transients induced by the switching on and off of the coupling.

A. Scattering with g constant

To exploit the fact that the coupling is τ independent, it is convenient to work with the coordinates (τ,ρ) in which the mirror is at rest. In these coordinates, the interaction Lagrangian reads

$$L_{\rm int}=g\int\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,d\rho f(\rho)J(\Phi(\tau,\rho),\Phi^\dagger(\tau,\rho)). \quad (54)$$

Here g is the coupling parameter, and f is a real function which specifies the thickness of the mirror and which is normalized as $\int_{-\infty}^{+\infty}d\rho\, f(\rho)=1$. Also, J is a Hermitian operator which is quadratic in the complex field. We shall consider three different cases: $\Phi^\dagger\Phi+\Phi\Phi^\dagger$, $\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}_\tau\Phi$, and $\partial_\tau\Phi^\dagger\partial_\tau\Phi+\partial_\tau\Phi\partial_\tau\Phi^\dagger$. In the following equations, we shall present the details only with the second expression. At the end of the derivation, we shall give the final results for the two other cases.

Given Eq. (54), Eq. (1) is now replaced by

$$(\partial_\tau^2-\partial_\rho^2)\Phi(\tau,\rho)=gf(\rho)2i\partial_\tau\Phi. \quad (55)$$

Being linear, the solution can be expressed as

$$\begin{aligned}\Phi(\tau,\rho)&=\Phi^{\rm in}(\tau,\rho)+g\int\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau'\,d\rho'\\&\quad\times G^{\rm ret}(\tau,\rho;\tau',\rho')f(\rho')2i\partial_{\tau'}\Phi(\tau',\rho')\\&=\Phi^{\rm out}(\tau,\rho)+g\int\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau'\,d\rho'\\&\quad\times G^{\rm adv}(\tau,\rho;\tau',\rho')f(\rho')2i\partial_{\tau'}\Phi(\tau',\rho'),\end{aligned} \quad (56)$$

in terms of the homogeneous solution $\Phi^{\rm in}$ ($\Phi^{\rm out}$) which determines the initial (final) data. The retarded and advanced Green's functions are defined, as usual, by

$$G^{\rm ret}(\tau,\rho;\tau',\rho')=\int\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\,dl\,\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{e^{-i\lambda(\tau-\tau')+il(\rho-\rho')}}{l^2-(\lambda+i\epsilon)^2}$$

$$(=0\ \text{ for }\ \tau'>\tau),$$

$$G^{\rm adv}(\tau,\rho;\tau',\rho')=\int\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\,dl\,\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{e^{-i\lambda(\tau-\tau')+il(\rho-\rho')}}{l^2-(\lambda-i\epsilon)^2}$$

$$(=0\ \text{ for }\ \tau'<\tau). \quad (57)$$

To exploit the time independence of the coupling g, we work at fixed energy with

$$\varphi_\lambda(\rho)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\frac{1}{2\pi}\Phi(\tau,\rho)e^{i\lambda\tau}. \quad (58)$$

In a Fourier transform, Eqs. (56) give

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(\rho)&=\varphi_\lambda^{\rm in}(\rho)+ig\int_{-\infty}^{+\infty}d\rho'\,f(\rho')\varphi_\lambda(\rho')e^{i\lambda|\rho-\rho'|}\\&=\varphi_\lambda^{\rm out}(\rho)-ig\int_{-\infty}^{+\infty}d\rho'\,f(\rho')\varphi_\lambda(\rho')e^{-i\lambda|\rho-\rho'|}.\end{aligned} \quad (59)$$

These equations have been obtained by using

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dl\,\frac{e^{il(\rho-\rho')}}{l^2-(\lambda\pm i\epsilon)^2}=\frac{\pm 2i\pi}{2(\lambda\pm i\epsilon)}e^{\pm i\lambda|\rho-\rho'|}, \quad (60)$$

and by having taken the limit $\epsilon\to 0$.

We now decompose the quantized modes $\varphi_\lambda^{\rm in}$ in terms of creation and destruction operators:

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^{\rm in}(\rho)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}}(a_\lambda^{U,{\rm in}}e^{i\lambda\rho}+a_\lambda^{V,{\rm in}}e^{-i\lambda\rho})\quad(\text{for }\lambda>0)\\&=\frac{1}{\sqrt{4\pi|\lambda|}}(b_{|\lambda|}^{U,{\rm in}\dagger}e^{-i|\lambda|\rho}+b_{|\lambda|}^{V,{\rm in}\dagger}e^{i|\lambda|\rho})\quad(\text{for }\lambda<0).\end{aligned} \quad (61)$$

We do the same for the out modes. Then, for $f(\rho)=\delta(\rho-\rho_0)$, Eqs. (59) give

$$\begin{pmatrix} a_\lambda^{U,\mathrm{out}} \\ a_\lambda^{V,\mathrm{out}} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-ig} \begin{pmatrix} 1 & ige^{-2i\lambda\rho_0} \\ ige^{2i\lambda\rho_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda^{U,\mathrm{in}} \\ a_\lambda^{V,\mathrm{in}} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

We recover the linear structure of $\mathbf{S}_\lambda$ in Eq. (25). Since the unitarity of $\mathbf{S}_\lambda$ provides $a_\lambda^{i,\mathrm{out}} = S_\lambda^{ij} * a_\lambda^{j,\mathrm{in}}$, when using the definitions of Eq. (29), we obtain

$$R = \frac{g}{\sqrt{1+g^2}}, \quad \phi = \arctan(g), \quad \theta = 2\lambda\rho_0. \quad (63)$$

In the strong-coupling limit (i.e., for $g \to +\infty$), one obtains the total reflection (26) in a λ-independent manner. This is a special feature of the coupling $J = \Phi^\dagger i \overleftrightarrow{\partial}_\tau \Phi$, which is associated with a dimensionless g.

This analysis can be repeated with the two other operators previously defined. The presence or absence of derivatives in J modifies the IR or UV behavior of R. For $J = \Phi^\dagger \Phi + \Phi\Phi^\dagger$, one obtains [28]

$$R_\lambda = \frac{g/\lambda}{\sqrt{1+g^2/\lambda^2}}, \quad \phi_\lambda = \arctan(g/\lambda), \quad \theta = 2\lambda\rho_0. \quad (64)$$

In this case, the mirror is totally reflecting in the IR. This leads to strong IR divergences when considering time-dependent coupling g. On the contrary, when $J = \partial_\tau\Phi^\dagger\partial_\tau\Phi + \partial_\tau\Phi\partial_\tau\Phi^\dagger$, we get

$$R_\lambda = \frac{g\lambda}{\sqrt{1+g^2\lambda^2}}, \quad \phi_\lambda = \arctan(g\lambda), \quad \theta = 2\lambda\rho_0. \quad (65)$$

In this case, the mirror is transparent in the IR limit. This useful property will be exploited in Sec. IV.

We notice that the transfer matrix $\mathbf{T}_\lambda$ can be expressed in a general way according to the number n of derivatives ∂_τ in the interaction term:

$$\mathbf{T}_\lambda = \frac{-g\lambda^{n-1}}{1-ig\lambda^{n-1}A_\epsilon} \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\lambda\rho_0} \\ e^{-2i\lambda\rho_0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

In this expression, we have not taken the limit $\epsilon \to 0$ in using Eq. (60). The function $A_\epsilon = \lambda/(\lambda + i\epsilon)$ determines the analytical properties of $\mathbf{T}_\lambda$ in the complex λ plane. The specification of the pole of A_ϵ follows from that of G^{ret} in Eq. (57). It guarantees that *causality* will be respected [28]. This crucial ingredient was missing in Sec. II B wherein the matrix $\mathbf{T}_\lambda$ can be chosen from the outset. In that kinematic framework, the analytical properties should be imposed by hand if one wishes to implement causality. On the contrary, in the present case causality follows from the Heisenberg equations (56).

Equations (59) and (61) also determine the relation between the antiparticle in and out operators $b_\lambda^{i\dagger}$. By direct computation one finds $\overline{\mathbf{T}}_\lambda^* = -\mathbf{T}_{-\lambda}$. This is precisely the condition which gives $\beta_{\omega k}^{UU} = \beta_{\omega k}^{VV} = 0$; see footnote 3. When using $\mathbf{T}_\lambda, \overline{\mathbf{T}}_\lambda$ in Eqs. (41), we obtain the Bogoliubov coefficients relating inertial modes. And from these coefficients, one gets the mean value of the energy flux T_{VV} as in Eq. (43), but with causality built in.

We now study the case of a thick mirror with J given by $\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{\partial}_\tau \Phi$. To display the effects of $f(\rho)$ in Eq. (54), it is convenient to work with the (spatial) Fourier components. Equation (59) becomes

$$\varphi_{\lambda,l} = \varphi_{\lambda,l}^{\mathrm{in}} - \frac{2g\lambda}{(\lambda+i\epsilon)^2 - l^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dl'\, f_{l-l'} \varphi_{\lambda,l'}$$

$$= \varphi_{\lambda,l}^{\mathrm{out}} - \frac{2g\lambda}{(\lambda-i\epsilon)^2 - l^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dl'\, f_{l-l'} \varphi_{\lambda,l'}. \quad (67)$$

For an arbitrary window function f, these equations do not lead to analytic relations between asymptotic in and out fields. Therefore, to estimate the effects of $f(\rho)$, we use perturbation theory. To first order in g, we get

$$\mathbf{T}_\lambda^f = -g \begin{pmatrix} 1 & 2\pi f_{2\lambda}^* \\ 2\pi f_{2\lambda} & 1 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

For a normalized Gaussian function f centered on ρ_0, the nondiagonal terms which determine the reflection probability are $ge^{\pm 2i\lambda\rho_0} e^{-2\lambda^2\sigma^2}$. Therefore, σ, the spread of the mirror, reduces the reflection of high frequencies: for $\lambda \gg 1/\sigma$, the mirror is completely transparent (this is also true for the two other J's).

B. Scattering with g time dependent

In this subsection, the coupling parameter is a function of the proper time $g(\tau) = g f(\tau)$ where $f(\tau)$ is normalized by $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau) = 2T$, with $2T$ the proper-time lapse during which the interactions are turned on. Unlike what we had in the former subsection, resumming the Born series is no longer possible since the time dependence of the coupling destroys the decoupling of the equations into sectors at fixed frequency λ. Thus we shall work perturbatively: all quantities will be evaluated up to second order in g. In fact, we meet a situation analogous of that of a thick mirror which mixes different momenta.

We first remind the reader that in the interacting picture, the operator Φ evolves freely, i.e., with $g = 0$: it obeys Eq. (1) and not Eq. (55). Therefore the in operators a_ω, b_ω specified at $t = -\infty$ coincide with the out operators and are equal to the usual Minkowski operators. Hence they define the (Minkowski) vacuum $|0\rangle$. Instead, the states evolve through the action of the time-ordered operator:

$$|\Psi(t=+\infty)\rangle = Te^{iL}|\Psi(t=-\infty)\rangle, \quad (69)$$

where $L = g\int d\tau f(\tau) J$ engenders self-interactions. Since the trajectory is time like, T, the time ordering with respect to the Minkowski time t, is equivalent to that of the proper time τ.

To make contact with Sec. II, we work in this section with the state $|\Psi_0(t)\rangle$ which is equal to $|0\rangle$ for $t = \tau = -\infty$. When expressing its final value in the basis of the unperturbed states, i.e., the states which would have been stationary in the absence of interactions ($g = 0$), we get

$$|\Psi_0(\tau=+\infty)\rangle = |0\rangle + \sum_{i,j} \int \int_0^\infty d\omega\, d\omega' (B^{ij}_{\omega\omega'} + C^{ij}_{\omega\omega'}) |\omega\omega'\rangle_{ij}, \tag{70}$$

where

$$B^{ij}_{\omega\omega'} = ig\langle 0|a^i_\omega b^j_{\omega'} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, f(\tau) J(\tau) \right) |0\rangle,$$

$$|\omega\omega'\rangle_{ij} \equiv a^{i\dagger}_\omega b^{j\dagger}_{\omega'} |0\rangle, \tag{71}$$

$$C^{ij}_{\omega\omega'} = -g^2 \langle 0|a^i_\omega b^j_{\omega'} \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\tau} d\tau'\, f(\tau) f(\tau') J(\tau) J(\tau') \right) |0\rangle_c. \tag{72}$$

We have limited the expansion in g to these three terms since we shall compute the energy-momentum tensor up to g^2 terms only. As before, i,j denote the U, V sectors and ω,ω' Minkowski energies. The symbol $\langle\,\rangle_c$ means that only the *connected* part of the expectation value is kept. This restriction follows from the fact that the contribution of the disconnected graphs cancels out since they also appear in the denominator of the matrix elements; see, e.g., [26].

Using Eq. (70), the expectation value of T_{VV} is given by

$$\langle T_{VV}\rangle = \langle \Psi_0(\tau=+\infty)|T_{VV}|\Psi_0(\tau=+\infty)\rangle_c = \mathrm{Re}\left\{ \sum_j \int \int_0^\infty d\omega\, d\omega' \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \times \left[e^{-iV(\omega'-\omega)} \int_0^\infty dk (B^{Vj}_{\omega k} * B^{Vj}_{\omega' k} + \bar{B}^{Vj}_{\omega k} * \bar{B}^{Vj}_{\omega' k}) - e^{-iV(\omega'+\omega)} (B^{VV}_{\omega\omega'} + \bar{B}^{VV}_{\omega\omega'} + C^{VV}_{\omega\omega'} + \bar{C}^{VV}_{\omega\omega'}) \right] \right\}, \tag{73}$$

where $\bar{B}^{ij}_{\omega k}$ and $\bar{C}^{VV}_{\omega\omega'}$ are related to the unbarred quantities by inverting particle and antiparticle operators: thus, $\bar{B}^{ij}_{\omega\omega'} = B^{ji}_{\omega'\omega}$ and $\bar{C}^{VV}_{\omega\omega'} = C^{VV}_{\omega'\omega}$.

Since the integral of the second term in Eq. (73) vanishes, and since barred and unbarred quantities differ at most by a phase, the total energy received on the V part of $\mathcal{J}^+$ is

$$\langle H_V\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dV \langle T_{VV}\rangle_c = 2\sum_j \int_0^\infty d\omega\, \omega \int_0^\infty dk |B^{Vj}_{\omega k}|^2. \tag{74}$$

Hence only the B terms contribute to the energy as the β terms did in Eq. (17).

In order to compute the local properties of the flux, we need to compute the second term of Eq. (73). To this end we decompose $C^{VV}_{\omega\omega'}$ into two parts:

$$C^{VV}_{\omega\omega'} = R^{VV}_{\omega\omega'} - \langle 0|a^V_\omega b^V_{\omega'} \mathcal{D}|0\rangle_c, \tag{75}$$

where

$$R^{VV}_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2}\langle 0|a^V_\omega b^V_{\omega'} LL|0\rangle_c, \tag{76}$$

$$\mathcal{D} = \frac{g^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau'\, f(\tau) f(\tau') \epsilon(\tau-\tau') J(\tau) J(\tau') \right) \tag{77}$$

and $\epsilon(\tau-\tau') = \theta(\tau-\tau') - \theta(\tau'-\tau)$. Then $\langle T_{VV}\rangle_{\mathcal{D}}$, the contribution of $\mathcal{D}$ to $\langle T_{VV}\rangle$, enjoys the following properties (see Appendix A in [17] for a similar analysis applied to a two-level atom coupled to radiation). First, it carries no energy. This is obvious since it is built with terms which all contain $e^{iV(\omega+\omega')}$. Second, it vanishes for $f(\tau) = cst$. This can be understood from the fact that the time ordering properties can be encoded in the analytical properties of the matrix $\mathbf{T}_\lambda$ which is diagonal in λ; see Eq. (66). This means that this term modifies the shape of the transients related to the switching on and off of the interaction, but without affecting their energy content. In the rest of the paper, we shall therefore ignore this term.

We now compute $R^{VV}_{\omega\omega'}$. Since only the connected part should be kept, we can insert the following operator between the two operators L in Eq. (76):

$$\sum_{i,j} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk'\, a^{i\dagger}_k b^{j\dagger}_{k'} |0\rangle\langle 0| a^i_k b^j_{k'}. \tag{78}$$

Grouping together, as in Eq. (73), the first- and second-order contributions in g, we get

$$B^{VV}_{\omega\omega'} + \bar{B}^{VV}_{\omega\omega'} + R^{VV}_{\omega\omega'} + \bar{R}^{VV}_{\omega\omega'} = \sum_i \int_0^\infty dk (\bar{A}^{Vj}_{\omega k} * B^{Vj}_{\omega' k} + A^{Vj}_{\omega' k} * \bar{B}^{Vj}_{\omega k}), \tag{79}$$

with

$$A^{ij*}_{\omega k} = \langle 0|a^i_\omega (1+iL) a^{j\dagger}_k |0\rangle_c,$$

$$\bar{A}^{ij*}_{\omega k} = \langle 0|b^i_\omega (1+iL) b^{j\dagger}_k |0\rangle_c. \tag{80}$$

Hence we find that $\langle T_{VV}\rangle$ is given by Eq. (42) with

$$\langle T_{VV}\rangle^{\mathrm{particle}} = \mathrm{Re}\sum_j \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi} \times \left[e^{-iV(\omega'-\omega)} \left(\int_0^\infty dk\, B^{Vj}_{\omega k} * B^{Vj}_{\omega' k} \right) - e^{-iV(\omega'+\omega)} \left(\int_0^\infty dk\, \bar{A}^{Vj}_{\omega k} * B^{Vj}_{\omega' k} \right) \right]. \tag{81}$$

$\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{antiparticle}}$ is given by the same expression with $\bar{A}^{Vj}_{\omega k}, B^{Vj}_{\omega k}$ replaced by $A^{Vj}_{\omega k}, \bar{B}^{Vj}_{\omega k}$.

Thus, to second order in g, we recover the structure of Eq. (43), which gives the flux emitted by a partially transmitting mirror. The Bogoliubov coefficients $\alpha_{\omega k}^{Vj}$ and $\beta_{\omega k}^{Vj}$ have been replaced by the transition amplitudes $A_{\omega k}^{Vj}$ and $B_{\omega k}^{Vj}$. In this, we recover the correspondence of Eqs. (52) and (53) when considered to first order in the transfer matrix $\mathbf{T}_\lambda$. This is not surprising since the evolution operator Te^{iL}, which defines $A_{\omega k}^*$ and $B_{\omega k}$ given in Eqs. (80) and (71), is, *by definition*, the operator $\hat{S}$ of Eq. (45).

This correspondence is nicely illustrated in the case where $g(\tau)=g$ and $J=\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}_\tau\Phi$. In this case, to order g, but whatever is the mirror's trajectory $U=U_{\rm cl}(V)$, one has the following identities:

$$A_{\omega k}^{VU}=g\alpha_{\omega k}, \quad B_{\omega k}^{VU}=g\beta_{\omega k}, \tag{82}$$

where $\alpha_{\omega k}$ and $\beta_{\omega k}$ are the overlaps, Eq. (9), computed in the DF model. These relations establish that $\alpha_{\omega k}$ and $\beta_{\omega k}$ should be viewed as transition amplitudes. This is important for the following reason. It implies that the momentum transfers to the mirror (which have been neglected so far) associated with the transitions described by A and B are, respectively, $\hbar(k+\omega)$ and $\hbar(-k+\omega)$. This fact imposes limitations when considering the emission of ultrahigh (trans-Planckian) frequencies since neglecting the momentum transfers requires $\hbar\omega\ll M$, where M is the mass of the mirror [10]. Thus, when high-frequency quanta are emitted, the validity of the predictions obtained with a recoil-less model *must* be questioned [11].

IV. APPLICATIONS

The aim of this section is to illustrate the usefulness of the dynamical model in which one can switch on and off the coupling between the mirror and radiation field. First, we analyze the properties of the energy flux associated with the switching on and off when the mirror is at rest ($z=0$) and in Minkowski vacuum. As expected, we shall see that the flux is localized in the transitory periods where the coupling is turned on or off. Moreover, the mean frequency emitted is given by the switching rate of the coupling.

Second, we generalize this analysis by replacing the Minkowski vacuum by a thermal bath. Then we use the well-known parallel between inertial systems in a thermal bath and uniformly accelerated systems in vacuum to obtain (for the first time) a regularized expression of the flux emitted by a uniformly accelerated mirror.

A. Transients in vacuum

We first focus on the frequency content of the transients. For an inertial mirror at rest at $z=0$ in Minkowski vacuum, the transition amplitudes A and B of Eqs. (80) and (71) can be expressed in terms of the Fourier transforms of $f(t)$:

$$f_\omega=\frac{1}{2\pi}\int dt\, f(t)e^{i\omega t}. \tag{83}$$

To order g, we obtain

$$A_{\omega k}^{ij*}=\delta(\omega-k)\,\delta^{ij}+igf_{\omega-k}\frac{j(\omega,k)}{\sqrt{\omega k}}, \tag{84}$$

$$B_{\omega k}^{ij}=igf_{\omega+k}\frac{j(\omega,-k)}{\sqrt{\omega k}}, \tag{85}$$

where

$$j(\omega,k)=\begin{cases}1 & \text{for } \Phi^\dagger\Phi+\Phi\Phi^\dagger,\\ \omega+k & \text{for } \Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}_t\Phi,\\ \omega k & \text{for } \partial_t\Phi^\dagger\partial_t\Phi+\partial_t\Phi\partial_t\Phi^\dagger.\end{cases} \tag{86}$$

Thus, to order g^2, the mean number of V particles of energy ω is given by

$$\langle N_\omega^V\rangle=2\sum_j\int_0^\infty dk|B_{\omega k}|^2. \tag{87}$$

The factor of 2 arises from the fact that it is equally probable to emit a UV or a VV pair of quanta of energy ω and k.

To further analyze the transients associated with the switching on and off of the coupling to the mirror, we shall work with the function

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[\tanh\left(\frac{t+T}{\Delta}\right)-\tanh\left(\frac{t-T}{\Delta}\right)\right]. \tag{88}$$

It is almost constant during a lapse of time $2(T-\Delta)$ centered about $t=0$, and the time intervals of the switching on and off are $\simeq 4\Delta$. In the limit $\Delta\to 0$, f tends to the square window $[\theta(t+T)-\theta(t-T)]/2$. The Fourier components of f are

$$f_\omega=\frac{\Delta}{2}\frac{\sin(\omega T)}{\sinh(\omega\pi\Delta/2)}. \tag{89}$$

One sees that the UV behavior is exponentially damped by Δ. On the contrary, in the IR, $f_\omega\to T/\pi$, as expected since the coupling lasts $2T$.

When considering the first two cases of $j(\omega,k)$ of Eq. (86), this last observation implies that the mean number $\langle N_\omega\rangle$ is ill defined since the integral over k in Eq. (87) diverges in the IR. Therefore, to obtain well-defined expressions, we shall work with the third case. In this case, one has

$$\langle N_\omega^V\rangle=\frac{g^2\Delta^2}{2}\omega\int_0^\infty d\omega'\,\omega'\frac{\sin^2[(\omega+\omega')T]}{\sinh^2[(\omega+\omega')\pi\Delta/2]}. \tag{90}$$

It is perhaps appropriate to discuss the condition on the (dimensionful) coupling constant g which guarantees the validity of Eq. (87), which follows from a perturbative treatment limited to order g^2. The condition is that the mean number of quanta per quantum cell (which is equal to $\langle N_\omega\rangle d\omega\simeq\langle N_\omega\rangle\pi/T$ in the limit $\omega T\gg 1$) be well approximated by Eq. (87). This requires that the probability to obtain two quanta in a cell is negligible with respect to that of obtaining one. This translates mathematically by $g^2\ll T\Delta$ in the limit of interest $T/\Delta\gg 1$, i.e., when the flat plateau is much longer that the slopes. The condition $g^2\ll T\Delta$ means that the limit $T\to\infty$ can be safely taken. Instead, the limit

$\Delta\to 0$ is more delicate. A sufficient condition consists in working at fixed $\tilde{g}^2\ll 1$, where $\tilde{g}=g(T\Delta)^{-1/2}$. A stronger condition is to impose that the total number of particle emitted, $\int_0^\infty\langle N_\omega^V\rangle d\omega$, be finite in the limit $\Delta\to 0$. In this case, $\bar{g}=g/\Delta$ should be held fixed.

When studying Eq. (90), one first notices that in the limit $T\to\infty$ with g and Δ fixed the total number of particles emitted is independent of T, thereby not giving rise to a golden rule behavior characterized by a linear growth in T. Second, $\langle N_\omega^V\rangle$ is maximum for $\omega\propto 1/\Delta$. Finally, for $\omega\Delta\gg 1$, one has $\langle N_\omega^V\rangle\simeq e^{-\pi\omega\Delta}$. We thus find all the expected attributes of transients: their particle content is independent of the duration T when $T/\Delta\gg 1$, and their Fourier content is peaked around the adiabatic switching rate Δ^{-1}.

We now study the space-time repartition of the energy fluxes associated with these transient effects. We first notice that once the D term defined in Eq. (75) has been dropped, the mean flux can be expressed as

$$\langle T_{VV}\rangle=-2\,\mathrm{Im}(\langle 0|T_{VV}L|0\rangle)+\mathrm{Re}(\langle 0|L[T_{VV},L]|0\rangle). \tag{91}$$

Of course, by decomposing L and T_{VV} in terms of creation and annihilation operators, one would recover, respectively, the linear and quadratic contributions of Eq. (81). However, being interested in the space-time properties, we shall not do so and shall work instead in the time "representation." In this approach, $\langle T_{VV}\rangle$ is governed by the V part of the (positive frequency) Wightman function. This latter obeys

$$\begin{aligned}\partial_V W(V-V')&=\partial_V\langle 0|\Phi^\dagger(V,U)\Phi(V',U')|0\rangle\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{V-V'-i\epsilon}.\end{aligned} \tag{92}$$

Using this function, the first term of Eq. (91) reads

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{lin}}&=-8g\,\mathrm{Im}\left[\int dt\, f(t)\{\partial_t\partial_V W(V-t)\}^2\right]\\&=\frac{g}{12\pi}\partial_t^3 f(t=V).\end{aligned} \tag{93}$$

To obtain this result, we have integrated by parts 3 times. The boundary contributions all vanish since f given in Eq. (88) decreases faster that any power of t. The last integration is trivially performed by using $\mathrm{Im}[(x-i\epsilon)^{-1}]=\pi\delta(x)$. These properties explain the local character of the expectation value.[4]

To evaluate the second term of Eq. (91), which is quadratic in g, we proceed along the same lines. We first evaluate the commutator so as to obtain a quadratic form in Φ and Φ_V, where Φ_V means only that the V part of the field operator Φ should be kept. We then notice that the derivatives ∂_t in J might be expressed as ∂_V since they are evaluated at $z=0$, but they act both on the V and U parts of Φ. Using this notation, one gets

$$\begin{aligned}[T_{VV},L]=&\,igf(V)[(\partial_V\Phi_V^\dagger\partial_V^2\Phi+\partial_V\Phi_V\partial_V^2\Phi^\dagger)+\mathrm{H.c.}]\\&+igf'(V)[(\partial_V\Phi_V^\dagger\partial_V\Phi+\partial_V\Phi_V\Phi^\dagger)+\mathrm{H.c.}].\end{aligned} \tag{94}$$

Then the g^2 contribution of T_{VV} is

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{quadr}}=&\,16g^2f(V)\mathrm{Re}\left(i\int dV' f(V')[\partial_{V'}\partial_V^2 W(V'-V)]\right.\\&\left.\times[\partial_{V'}\partial_V W(V'-V)]\right)+16g^2\partial_V f\\&\times\mathrm{Re}\left(i\int dV' f(V')[\partial_{V'}\partial_V W(V'-V)]^2\right)\\=&-\frac{g^2}{12\pi}(f\partial_V^4 f+2\partial_V f\partial_V^3 f).\end{aligned} \tag{95}$$

Having obtained explicit expressions for both terms of Eq. (91), we can now analyze the properties of $\langle T_{VV}\rangle$. First, neither f appears in Eq. (93) nor f^2 in Eq. (95). Thus one recovers the fact that an inertial mirror does not radiate while its coupling is constant. This is illustrated in Fig. 1. Second, being given by derivatives of f with respect to time, the magnitude of $\langle T_{VV}\rangle$ scales with positive powers of the switching on and off rate Δ^{-1}.

Finally, to obtain the integrated value of the energy emitted, as in Eq. (19), one decomposes $\langle T_{VV}\rangle$ into two parts: a total derivative which does not contribute to the total energy and the rest which turns out to be positive definite. Explicitly, we get

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}\rangle&=\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{lin}}+\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{quadr}}\\&=\frac{g^2}{12\pi}(\partial_V^2 f)^2-\frac{1}{12\pi}\partial_V\left[-g\partial_V^2 f\right.\\&\left.\quad+g^2\left(\frac{1}{2}\partial_V^4(f^2)-\partial_V^2[(\partial_V f)^2]\right)\right].\end{aligned} \tag{96}$$

Thus the total energy is

$$\langle H_V\rangle=\frac{g^2}{12\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dV(\partial_V^2 f)^2=\int_0^\infty d\omega\,\omega\langle N_\omega^V\rangle. \tag{97}$$

Here $\langle H_V\rangle$ is finite when the mean number $\langle N_\omega\rangle$ decreases faster than ω^{-2}. This is the case when working with Eq. (88) at fixed $\Delta\neq 0$. In this case, one finds

[4]It should be pointed out that we could have written $\langle T_{VV}\rangle_{\mathrm{lin}}$ as a commutator. This, however, is not appropriate since one loses the analytical properties of W which are encoded by $i\epsilon$ (they arise from frequency content of the vacuum and play a crucial role in defining the above expressions). By performing first the commutator [or, equivalently, by first taking the imaginary part in Eq. (93)], one would obtain an ill-defined expression. The same remark applies to the quadratic term in g. To obtain well-defined expressions, only one commutation (and not two) should be done.

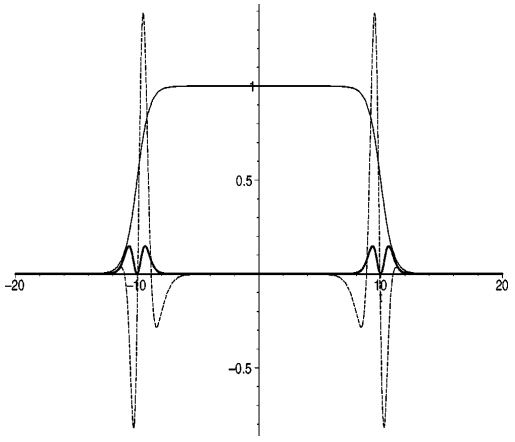

FIG. 1. The thin solid line is $f(t)$ given by Eq. (88) for $T=10$ and $\Delta=1$. The dashed line is $\langle T_{VV}\rangle_{\rm quadr}$, and the thick line is the part of $\langle T_{VV}\rangle$ which contributes to the energy; see Eq. (97). These two curves have been plotted in the same arbitrary units. The behavior of $\langle T_{VV}\rangle_{\rm lin}$ is similar to $\langle T_{VV}\rangle_{\rm quadr}$.

$$\langle H_V\rangle = \frac{2g^2}{45\pi}\frac{1}{\Delta^3}F\left(\frac{T}{\Delta}\right). \tag{98}$$

The main feature $\langle H_V\rangle$ is that it is independent of T in the limit $T/\Delta \gg 1$ (see Fig. 2), thereby confirming that the emitted energy is indeed associated with the two transitory periods, irrespectively of the lapse of time ($=2T$) which separates them.

To conclude this subsection, we consider the limit $\Delta \to 0$. This corresponds to the situation studied in [21] and [7] in view of its analogies with the residual flux emitted at the end of the evaporation of a black hole. In this limit, $f(t)$ becomes a step function, the energy flux is concentrated in a narrow lapse Δ, and its frequency content diverges. In fact, $\langle T_{VV}\rangle$ becomes a *distribution* since it is built on the derivatives of $f(t)$. More precisely, the singularity is worse than a delta, as clearly seen from Eq. (95). This means that not only the instantaneous flux $\langle T_{VV}\rangle$ diverges, but also that the total energy emitted is singular, as indicated in Eq. (98).

Moreover, being singular, this singular behavior is not universal. It depends on the number of derivatives in the Hamiltonian, and it might also vary when considering higher orders in g. Hence the question as to what is the flux emitted by the disappearance of the reflection condition is not well defined. To have a well-defined question, one should first choose a regular model such as that defined by Eq. (54) and with $g(t)$ given by Eq. (88), and only then consider the singular limit $\Delta \to 0$. What we learn from this is that the DF model should be conceived as providing a useful approximative description of some physical processes only when the predictions are well defined, i.e., independent of the characteristics of the original dynamical model (such as the mass of the mirror or the precise nature of the coupling) when the limits of large mass and large coupling are taken.

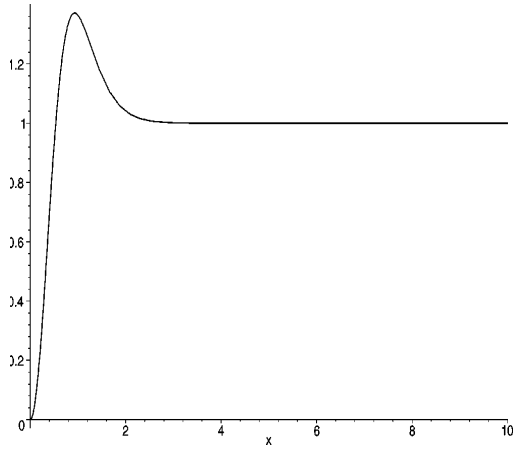

FIG. 2. The plot is $F(x)$ defined by Eqs. (98) and (97) in such a way that $F \to 1$ for $x \to \infty$.

B. Flux emitted by a uniformly accelerated mirror

The case of uniform acceleration in a Minkowski vacuum is *a priori* rather perplexing. On the one hand, Eq. (19) immediately gives that the mean flux vanishes for uniform acceleration, i.e., for $UV=-a^{-2}$. This is a consequence of the fact that ∂_τ is a Killing vector in Minkowski space-time [30–32]. On the other hand, however, the Bogoliubov coefficients $\beta_{\omega k}$ of Eq. (9) do not vanish [3,10]. Moreover, when used in Eq. (17), they lead to a divergent energy $\langle H_V\rangle$. To conciliate these results, one must infer that there is a singular flux on the past horizon $V=0$, as is the case for a uniformly accelerated "atom" coupled to the radiation field [33,8]. In fact, as shown in Appendix C of [17], this singular flux will be found for all uniformly accelerated quantum systems coupled to the radiation field.

Our aim is now to show that there is indeed a singular flux of energy along the past horizon when taking the limit of constant coupling $g(\tau)=g$ at the end of the calculation. To obtain the regularized expression for this flux, we shall generalize the analysis of the former section to a nonzero-temperature heat bath and then use the isomorphism between the flux emitted by this mirror at rest in a heat bath at temperature $a/2\pi$ and the flux emitted by a uniformly accelerated mirror of acceleration a when expressed in the Rindler coordinate system.

In a thermal bath, the V part of the Wightman function obeys

$$\partial_V W^\beta(V-V') = -\frac{1}{4\pi}\frac{\pi}{\beta}\coth\left(\frac{\pi}{\beta}(V-V'-i\epsilon)\right). \tag{99}$$

It reduces to $\partial_V W$ of Eq. (92) in the zero-temperature limit for $\beta \to \infty$. When replacing W by W^β in Eqs. (93) and (95), we obtain the mean flux emitted in a thermal bath. It can be shown to be[5]

[5]The details of the calculation will be presented in [23].

$$\langle T_{VV}\rangle^{\beta}=\frac{g}{12\pi}\partial_V^3 f-\frac{g^2}{12\pi}[f(V)\partial_V^4 f+2\partial_V f\partial_V^3 f]$$
$$-\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2\left[\frac{g}{12\pi}\partial_V f-\frac{g^2}{12\pi}[f(V)\partial_V^2 f+2\partial_V f\partial_V f]\right]. \tag{100}$$

The first two terms are equal to Eq. (96), and the last two scale like $(\Delta/\beta)^2$. Thus they are negligible in the low-temperature limit $\beta\gg\Delta$ and dominant in the high-temperature regime.

We are now in position to obtain a regular expression for the flux emitted by a uniformly accelerated mirror in Minkowski vacuum. Using the well-known isomorphism between systems at rest in a thermal bath and accelerated systems in vacuum, the mean flux of Rindler energy emitted by a mirror of acceleration a is

$$\langle T_{vv}(v)\rangle^{\rm acc}=\langle T_{VV}(V=v)\rangle^{\beta=2\pi/a}, \tag{101}$$

where v is the null advanced Rindler time $[av=\ln(aV)]$ when the mirror is located in the right Rindler quadrant ($z>|t|$). When using Eq. (88), the coupling between the mirror and field is turned on during a proper-time lapse $2T$ and the switching on and off rate Δ^{-1} is now measured with the proper time τ.

In the limit $T\gg\beta$ and a^{-1}, $\langle T_{vv}(v)\rangle^{\rm acc}\to 0$ at fixed $|v|<T$ since the flux is localized in the transients of "thickness" Δ centered around $v=\pm T$. In this, we recover the fact that a uniformly accelerated mirror does not radiate. In the DF model, this immediately follows from Eq. (19). (As noted above, this vanishing is a universal property of accelerated systems when they have reached equilibrium with the Rindler bath [17].)

However, this vanishing flux is accompanied by transient effects whose Minkowski properties become singular in the limit $T\to\infty$ whatever the value of Δ is. This simply follows from the fact that the mean flux measured in the inertial system of coordinates V, $U=t\pm z$ is

$$\langle T_{VV}(V)\rangle^{\rm acc}=\left(\frac{dv}{dV}\right)^2\langle T_{vv}[v=a^{-1}\ln(aV)]\rangle^{\rm acc}$$
$$=\left(\frac{1}{aV}\right)^2\langle T_{vv}(v)\rangle^{\rm acc}. \tag{102}$$

From this expression, using Eq. (88), one finds that the Minkowski flux diverges for all T if $a>\Delta^{-1}$, i.e., if the switching on is slower than the boost factor $dv/dV=e^{-av}$, which diverges for $v\to-\infty$. When $a<\Delta^{-1}$, the flux is well defined and its maximal value, which grows like e^{2aT}, is reached around $V=a^{-1}e^{-aT}$. This establishes the fact that in the limit of constant coupling $T\to\infty$, one has a singular flux of energy along the past horizon. Quite surprisingly, the condition $a\Delta<1$ tells us that accelerated mirrors which lead to a finite Minkowski flux have their fluxes dominated by the first two terms in Eq. (100). That is, the flux is dominated by the boosted vacuum transients governed by Δ rather than by the temperature effects induced by the acceleration.

Notice that if one requires that the total Minkowski energy

$$\langle H_V^{\rm acc}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dv\,e^{av}\langle T_{vv}^{\rm acc}\rangle \tag{103}$$

and the mean number of Minkowski quanta emitted by the mirror be finite, one gets a weaker condition $a\Delta<2$. Indeed, only one power of the boost factor should be tamed by the switching-on function f. (A similar condition also arises when considering the fluxes emitted by an accelerated two-level atom [17].) When this condition is met, using Eqs. (100), (101), and (103), we get

$$\langle H_V^{\rm acc}\rangle=\frac{g^2}{12\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dv\,e^{av}[(\partial_v^2 f)^2+2a^2(\partial_v f)^2]. \tag{104}$$

This energy is positive definite and diverges, as expected, like e^{aT} when $aT\gg 1$.

V. CONCLUSIONS

In this paper we generalized the DF model which describes the scattering of a radiation field by a mirror which follows a noninertial trajectory. We first considered partially transmitting mirrors and then studied a dynamical model based on an action principle. We obtained the following results.

Equations (41) give the Bogoliubov coefficients in terms of the transfer matrix $\mathbf{T}_\lambda$ evaluated in the rest frame of the mirror and the overlaps $\alpha_{\omega\lambda},\beta_{\omega\lambda}$ which relate the Minkowski plane waves of frequency ω to the proper-time modes of (proper) frequency λ. This expression is *universal* in that it governs all quantum systems coupled linearly and stationarily to the radiation field. The only model-dependent quantity is $\mathbf{T}_\lambda$. This is illustrated by the dynamical model of Sec. III A, which gives rise to the diagonal transfer matrix given in Eq. (66).

The main difference between the partially transmitting mirrors defined in a purely kinematic way in Sec. III B and the dynamical model of Sec. III A concerns causality: see the discussion which follows Eq. (66).

In Sec. III B, we analyze the scattering in the interacting picture. In this picture, there is no Bogoliubov transformation since the basis of asymptotic states is provided by the usual "free" states engendered by the Minkowski creation operators. The nontrivial value of the energy flux emitted by the mirror results from the connected parts of the matrix elements of the evolution operator $\hat{S}=Te^{iL}$; see Eqs. (71)–(73).

Equations (52) and (53) as well as Eqs. (82) establish the connection between the Bogoliubov matrices α and β, which mathematically relate two bases of field modes, and the transition amplitudes for physical processes to occur, i.e., the matrix elements of $\hat{S}=Te^{iL}$. It should be noticed that a similar relationship also exists between Bogoliubov coefficients and the transition amplitudes of a two-level atom: see Eq. (2.55) in [8].

The usefulness of the interacting picture is that it permits us to switch on and off the coupling constant at some finite time in a controlled manner. This possibility in turn allows us to obtain regularized expressions for the flux in situations where the flux is ill defined when using the DF model. This is illustrated in Sec. IV B with the case of uniform acceleration.

APPENDIX: THE in-out OVERLAP IN THE GENERAL CASE

Our aim is to obtain an expression for the overlap between the in and out vacua when the Bogoliubov coefficients are nondiagonal. In this case, the original expression of Kamefuchi and Umezawa [34] does not apply.

In order to have simple expressions for this overlap, we will use a discretized basis of wavepackets in which the integrals are replaced by sums and Dirac distributions by Kronecker symbols. In addition to the in and out operators, it is appropriate to define a third class of operators $\hat{a}_\omega, \hat{b}_\omega$. This new basis generalizes the "Unruh" modes [27,8] in that $\hat{a}_\omega$ ($\hat{b}_\omega$) is made out of $a_k^{\rm in}$ ($b_k^{\rm in}$), but is characterized by a fixed out frequency ω:

$$\alpha_\omega \hat{a}_\omega = \sum_k \alpha^*_{\omega k} a^{\rm in}_k, \quad \alpha_\omega \hat{b}_\omega = \sum_k \alpha^*_{\omega k} b^{\rm in}_k. \tag{A1}$$

The real coefficients α_ω are such that $[\hat{a}_\omega, \hat{a}^\dagger_\omega]=1$; therefore, $\alpha_\omega^2 = \Sigma_k |\alpha_{\omega k}|^2$. The notion of particles and antiparticles is obviously maintained since the $\hat{a}$ are made of $a^{\rm in}$ only. Notwithstanding, for arbitrary $\alpha_{\omega k}$ and $\beta_{\omega k}$, this new basis is not orthogonal and the commutation rules are given by

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}^\dagger_{\omega'}] \equiv F_{\omega\omega'} = [\hat{b}_\omega, \hat{b}^\dagger_{\omega'}] = \frac{\Sigma_k \alpha^*_{\omega k}\alpha_{\omega' k}}{\alpha_\omega \alpha_{\omega'}}. \tag{A2}$$

By construction and from Eq. (13), these new operators are related to the out operators by

$$a^{\rm out}_\omega = \alpha_\omega \hat{a}_\omega - \sum_{\omega'} \alpha_{\omega'} B_{\omega\omega'} \hat{b}^\dagger_{\omega'},$$

$$b^{\rm out}_\omega = \alpha_\omega \hat{b}_\omega - \sum_{\omega'} \alpha_{\omega'} B_{\omega\omega'} \hat{a}^\dagger_{\omega'},$$

with

$$B_{\omega\omega'} \equiv \sum_k \beta_{\omega k} \alpha^{-1}_{k\omega'}, \tag{A3}$$

where $\alpha^{-1}_{k\omega}$ is the inverse matrix of $\alpha_{\omega k}$. ($\alpha_{\omega k}$ is always invertible since otherwise there would exist incoming particles whose scattering would give only antiparticles.)

As for the Unruh modes, the operators $\hat{a}$, $\hat{b}$ are useful to relate in a simple way the out vacuum to the in vacuum. Straightforward algebra indeed gives

$$|0_{\rm out}\rangle = \frac{1}{Z} \exp\left(\sum_{\omega\omega' k} \frac{\alpha_{\omega'}}{\alpha_k} F^{-1}_{\omega k} B_{k\omega'} \hat{a}^\dagger_\omega \hat{b}^\dagger_{\omega'} \right) |0_{\rm in}\rangle, \tag{A4}$$

where Z is defined by

$$Z^{-2} = |\langle 0_{\rm out}|0_{\rm in}\rangle|^2. \tag{A5}$$

Even though Eq. (A4) looks cumbersome, one easily verifies that, to order β^2, it correctly gives the relationship between the vacuum decay ($Z>1$) and the pair creation probability of Minkowski quanta. Indeed, using $(F^{-1})_{\omega\omega'}\langle 0_{\rm in}|\hat{a}_{\omega'}\hat{a}^\dagger_{\omega''}|0_{\rm in}\rangle = \delta_{\omega,\omega''}$ and the condition on $B_{\omega\omega'}$ and $F_{\omega\omega'}$, which arises from $[a^{\rm out}_\omega, b^{\rm out}_{\omega'}]=0$ and Eq. (A2), one obtains

$$Z^2 = 1 + \sum_{\omega\omega'} |B_{\omega\omega'}|^2 + O(\beta^4). \tag{A6}$$

This is the correct expression since the probability to have a pair of out quanta is

$$|\langle 0_{\rm out}| a^{\rm out}_\omega b^{\rm out}_{\omega'} |0_{\rm in}\rangle|^2 = \left|\frac{B_{\omega\omega'}}{Z}\right|^2 = |B_{\omega\omega'}|^2 + O(\beta^4). \tag{A7}$$

For completeness, we notice that when the scattering is stationary (as is the case for uniform acceleration and in black hole evaporation), one has

$$B_{\omega\omega'} = \frac{\beta_\omega}{\alpha_\omega}\delta_{\omega,\omega'}, F_{\omega\omega'} = \delta_{\omega,\omega'}. \tag{A8}$$

Since they are diagonal, Eq. (A4) becomes

$$|0_{\rm out}\rangle = \frac{1}{Z} \exp\left(\sum_\omega \frac{\beta_\omega}{\alpha_\omega} \hat{a}^\dagger_\omega \hat{b}^\dagger_\omega \right) |0_{\rm in}\rangle, \tag{A9}$$

thereby recovering the usual diagonal expression governed by the "Unruh" operators $\hat{a}_\omega, \hat{b}_\omega$.

[1] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London **A348**, 393 (1976).

[2] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).

[3] P. Grove, Class. Quantum Grav. **3**, 793 (1986).

[4] R. Carlitz and R. Willey, Phys. Rev. D **36**, 2327 (1987).

[5] F. Wilczek, "Quantum purity at a small price: Easing a black hole paradox," hep-th/9302096.

[6] T. D. Chung and H. Verlinde, Nucl. Phys. **B418**, 305 (1994).

[7] A. Strominger, "Les Houches Lectures on Black Holes," hep-th/9501071.

[8] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, Phys. Rep. **260**, 329 (1995).

[9] L. H. Ford, "Quantum Field Theory in Curved Spacetime," gr-qc/9707062.

[10] R. Parentani, Nucl. Phys. **B465**, 175 (1996).
[11] R. Parentani, Phys. Rev. D **61**, 027501 (2000).
[12] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
[13] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
[14] T. Jacobson, Phys. Rev. D **44**, 1731 (1991).
[15] C. R. Stephens, G. 't Hooft, and B. F. Whiting, Class. Quantum Grav. **11**, 621 (1994).
[16] F. Englert, S. Massar, and R. Parentani, Class. Quantum Grav. **11**, 2919 (1994).
[17] S. Massar and R. Parentani, Phys. Rev. D **54**, 7426 (1996).
[18] Y. Kiem, H. Verlinde, and E. Verlinde, Phys. Rev. D **52**, 7053 (1995).
[19] U. H. Gerlach, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 3667 (1996).
[20] V. Frolov and D. Singh, Class. Quantum Grav. **16**, 3693 (1999).
[21] A. Anderson and B. DeWitt, Found. Phys. **16**, 91 (1986).
[22] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
[23] N. Obadia and R. Parentani, "Uniformly accelerated mirrors" (in preparation).
[24] S. Massar and R. Parentani, Nucl. Phys. **B513**, 375 (1998).
[25] S. Massar, R. Parentani, and R. Brout, Class. Quantum Grav. **10**, 2341 (1993).
[26] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1985).
[27] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
[28] M. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A **180**, 9 (1993).
[29] M. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A **167**, 227 (1992).
[30] P. Grove, Class. Quantum Grav. **3**, 801 (1986).
[31] D. Raine, D. Sciama, and P. Grove, Proc. R. Soc. London **A435**, 205 (1991).
[32] S. Massar, R. Parentani, and R. Brout, Class. Quantum Grav. **10**, 385 (1993).
[33] W. Unruh, Phys. Rev. D **46**, 3271 (1992).
[34] S. Kamefuchi and H. Umezawa, Nuovo Cimento **31**, 429 (1964).

Uniformly Accelerated Mirrors
Mean Fluxes

N. Obadia & R. Parentani

Phys.Rev. **D 67** 024021 (2003)

Uniformly accelerated mirrors. I. Mean fluxes

N. Obadia* and R. Parentani†

Laboratoire de Mathematiques et Physique Théorique, CNRS-UMR 6083, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

(Received 18 September 2002; published 21 January 2003)

The Davies-Fulling model describes the scattering of a massless field by a moving mirror in $1+1$ dimensions. When the mirror travels under uniform acceleration, one encounters severe problems which are due to the infinite blueshift effects associated with the horizons. On one hand, the Bogoliubov coefficients are ill defined and the total energy emitted diverges. On the other hand, the instantaneous mean flux vanishes. To obtain well-defined expressions we introduce an alternative model based on an action principle. The usefulness of this model is to allow us to switch on and off the interaction at asymptotically large times. By an appropriate choice of the switching function, we obtain analytical expressions for the scattering amplitudes and the fluxes emitted by the mirror. When the coupling is constant, we recover the vanishing flux. However, it is now followed by transients which inevitably become singular when the switching off is performed at late time. Our analysis reveals that the scattering amplitudes (and the Bogoliubov coefficients) should be seen as distributions and not as mere functions. Moreover, our regularized amplitudes can be put in a one to one correspondence with the transition amplitudes of an accelerated detector, thereby unifying the physics of uniformly accelerated systems. In a forthcoming article, we shall use our scattering amplitudes to analyze the quantum correlations among emitted particles which are also ill defined in the Davies-Fulling model in the presence of horizons.

DOI: 10.1103/PhysRevD.67.024021 PACS number(s): 04.62.+v, 03.70.+k, 04.70.Dy

INTRODUCTION

When considering the fluxes emitted by a uniformly accelerated mirror described by the Davies-Fulling model, one encounters a paradoxical situation: when working in the initial vacuum, the local flux of energy vanishes whereas the Bogoliubov coefficients encoding pair creation do not. Moreover, $\langle N_\omega \rangle$, the mean number of particles with frequency ω emitted to $\mathcal{J}^+$ diverges [1–3], and so does the corresponding total energy $\langle H \rangle = \int_0^\infty d\omega\, \omega \langle N_\omega \rangle$.

It should be pointed out that similar properties are shared by all uniformly accelerated systems. They are indeed found (in a slightly different form) in the case of a uniformly accelerated classical charge [4], an accelerated two-level atom [5–7], and for accelerated black holes [8,9]. The vanishing of the energy flux and the divergence of the total energy are both unavoidable when considering uniformly accelerated systems whose coupling to the radiation field is constant. The vanishing of the flux follows from the facts that the orbits with uniform acceleration are generated by the boost operator of the Lorentz group and that the Minkowski vacuum is a null eigenstate of this operator. Hence stationarity is built in and this implies a vanishing flux. (When applied to accelerated atoms this is known as Grove's theorem [10–13].) The divergence of the total energy emitted follows from the singular behavior of the ''Rindler'' modes (i.e., the eigenmodes of the boost operator) on the horizons associated with a uniformly accelerated trajectory; see Appendix C of [7] for a general proof.

In order to obtain regular expressions for the flux and the energy emitted, one needs either to regularize the trajectory by decreasing the acceleration at asymptotically large times, or, as we shall do, to switch off the coupling between the accelerated system (here the mirror) and the radiation field. This procedure was already applied to an accelerated two-level atom in [7] and regular expressions have been found for the local flux and the total energy emitted. In the present paper, it is our intention to apply a similar treatment to an accelerated mirror. However, one immediately encounters a problem: this analysis cannot be performed within the framework of the original Davies-Fulling model because, by construction, the reflection on the mirror is total. Therefore, we first introduce an alternative model based on an action principle which, on one hand, reproduces the results of the Davies-Fulling model when the coupling between the mirror and the radiation is constant and, on the other hand, allows one to switch on and off the interactions.

When using this model to describe the scattering by an accelerated mirror, we obtain regular expressions for the transition amplitudes in the place of the singular Bogoliubov coefficients obtained with the Davies-Fulling model. Both local quantities, such as the mean flux $\langle T_{VV} \rangle$, and global ones, such as the mean energy $\langle H \rangle$ and density of particles $\langle N_\omega \rangle$, are now well defined. Moreover, as long as the coupling is constant, we recover the fact that the energy flux vanishes. However, it is now preceded and followed by transient effects associated with the switching on and off. Because of the ever increasing Doppler effect associated with constant acceleration, these effects are exponentially blueshifted (in terms of the proper time of the mirror). Therefore, in order to get a finite energy, the rate of switching off the interaction must be faster than the growth of the Doppler effect (a condition also found in [7]). If this condition is not satisfied, the mirror emits an infinite energy, thereby recovering ill-defined results like those obtained with the Davies-Fulling model.

To further clarify the physics in play in the scattering by a mirror of acceleration a, we compute the transition ampli-

*Email address: obadia@celfi.phys.univ-tours.fr

†Email address: parenta@celfi.phys.univ-tours.fr

 ©2003 The American Physical Society

tudes governing pair creation in a "mixed" representation. By mixed we mean that in each pair one quantum is characterized by ω, a Minkowski frequency, whereas its partner is characterized by λ, a Rindler frequency, the eigenvalue of the energy with respect to the proper time of the mirror. This representation is useful for the following reasons. First, when $\lambda = \Delta M$, the scattering amplitudes closely correspond to the transition amplitudes governing the absorption and emission of photons by an accelerated two-level atom whose energy gap is ΔM. It is quite nice to see how, for each Minkowski frequency ω, the "exciton" of the atom is replaced by the emission of the partner of the Minkowski quantum. Secondly, the range of Minkowski frequencies ω that participate to the processes when the interactions last for a proper time lapse of T is finite and grows with ae^{aT}. Hence the physics in play is a succession of pair creation acts with Doppler shifted Minkowski frequencies. However, this cannot be seen by considering only the expectation value of the flux, i.e., the one-point function of the stress tensor, because these successive individual effects perfectly interfere with each order since, in the absence of recoils, the orbit is generated by a Killing field. In order to reveal these local acts, one should either consider the correlations among emitted quanta by computing the two-point function [14] of the energy flux or enlarge the dynamics so as to take into account the recoil effects. In the following article [15] we will analyze these quantum correlations, and in a forthcoming paper we shall analyze recoil effects.

I. THE DAVIES-FULLING MODEL AND ITS EXTENSIONS

In this section, we first analyze the case of asymptotically inertial trajectories (Sec. I A). We introduce notation that also applies to the cases of trajectories which enter or leave space-time through null infinities (Sec. I B), cases which turn out to be more delicate to analyze. In Sec. I C we introduce the self-interacting model. Section I D is devoted to the study of energy fluxes.

A. Asymptotically inertial trajectories

In the Davies-Fulling model [1], one studies the scattering of a massless scalar field induced by imposing a Dirichlet boundary condition along a timelike trajectory in $1+1$ dimensions. The evolution of the field operator is governed by the d'Alembert equation

$$(\partial_t^2 - \partial_z^2)\Phi(t,z) = 0, \tag{1}$$

together with the reflection condition along the trajectory of the mirror $z = z_{\rm cl}(t)$,

$$\Phi(t, z_{\rm cl}(t)) = 0. \tag{2}$$

Since we work in $1+1$ dimensions with a massless field, it is particularly useful to work in the lightlike coordinates U, $V = t \mp z$. Then, Eq. (1) becomes $\partial_U \partial_V \Phi(U,V) = 0$, and its general solution is a sum of a function of U plus a function of V. Since the trajectory of the mirror is given once for all, the recoil effects induced by the scattering of quanta are neglected.

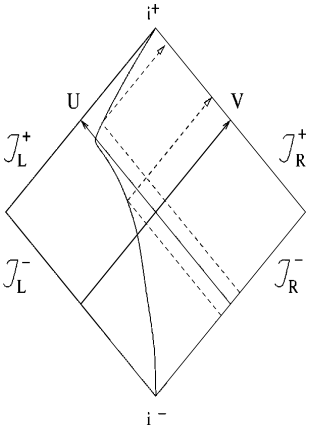

FIG. 1. In this Penrose diagram, the solid line is a timelike trajectory going from i^- to i^+. The dashed lines represent incoming V configurations which give rise to the production of a pair of outgoing U quanta (right movers).

In this subsection, in addition to the condition that the mirror trajectory be timelike, we consider only asymptotically inertial trajectories, i.e., trajectories which originate from the timelike past infinity i^- and which end in i^+ (see Fig. 1). Then, since the reflection is total, the configurations emerging from $\mathcal{J}_R^-$, the right part of $\mathcal{J}^-$, are completely decoupled from those emerging from $\mathcal{J}_L^-$. Therefore, one can analyze what happens on each side separately. On the right-hand side, all left movers are scattered into right movers and sent toward $\mathcal{J}_R^+$. In second quantization, when the trajectory is not inertial, this leads to the production of pairs formed with two right movers. Similarly, on the left-hand side, one studies the scattering from $\mathcal{J}_L^-$ to $\mathcal{J}_L^+$. Since the expressions governing the scattering on the left are obtained from those on the right by exchanging U and V, we will restrict ourselves to the analysis of the scattering from $\mathcal{J}_R^-$ to $\mathcal{J}_R^+$.

To analyze the scattering in second quantization, one first needs to identify the in basis of modes which are defined before the scattering occurs. On $\mathcal{J}_R^-$, the usual eigenmodes of Minkowski energy $i\partial_t = \omega > 0$ can be used since $\mathcal{J}_R^-$ is a Cauchy surface for the left movers when the mirror emerges from i^- (this is no longer the case for trajectories which emerge from $\mathcal{J}_R^-$; see Sec. I B). On $\mathcal{J}_R^-$ the Minkowski modes are given by

$$\varphi_\omega^{V,\rm in}(V, U = -\infty) = \frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}, \tag{3}$$

where the upper index V,in means that the mode is left moving and defined on the initial Cauchy surface $\mathcal{J}^-$. We have introduced the index V in order to be able to deal with partially reflecting mirrors for which left and right movers

should be simultaneously considered. The norm of $\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}$ is determined by the usual Klein-Gordon scalar product. On $\mathcal{J}_R^-$, one has

$$(\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}},\varphi_{\omega'}^{V,\mathrm{in}})\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}dV\,\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}*}i\overleftrightarrow{\partial}_V\varphi_{\omega'}^{V,\mathrm{in}}=\delta(\omega-\omega'),\quad(4)$$

where $f\overleftrightarrow{\partial}_V g=f\partial_V g-g\partial_V f$.

For finite values of U, on the right-hand side of the mirror, i.e., for $V\geqslant V_{\mathrm{cl}}(U)$, the in mode $\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}$, the solution of Eq. (2) which has Eq. (3) as initial Cauchy data is

$$\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}(V,U)=\frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}-\frac{e^{-i\omega V_{\mathrm{cl}}(U)}}{\sqrt{4\pi\omega}}.\quad(5)$$

To analyze its final frequency content, it should be Fourier decomposed on $\mathcal{J}_R^+$. In total analogy with what we have on $\mathcal{J}_R^-$, on $\mathcal{J}_R^+$ the positive frequency modes are

$$\varphi_{\omega'}^{U,\mathrm{out}}(U,V=+\infty)=\frac{e^{-i\omega' U}}{\sqrt{4\pi\omega'}}.\quad(6)$$

Since they are complete, on $\mathcal{J}_R^+$, the in modes can be written as

$$\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}(U,V=+\infty)=\int_0^\infty d\omega'(\alpha_{\omega'\omega}^{UV*}\varphi_{\omega'}^{U,\mathrm{out}}-\beta_{\omega'\omega}^{UV*}\varphi_{\omega'}^{U,\mathrm{out}*}).\quad(7)$$

When evaluated on $\mathcal{J}_R^+$, the overlaps are given by

$$\alpha_{\omega'\omega}^{UV*}\equiv(\varphi_{\omega'}^{U,\mathrm{out}},\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}})=-2\int_{-\infty}^{+\infty}dU\frac{e^{i\omega' U}}{\sqrt{4\pi/\omega'}}\frac{e^{-i\omega V_{\mathrm{cl}}(U)}}{\sqrt{4\pi\omega}},\quad(8)$$

$$\beta_{\omega'\omega}^{UV*}\equiv(\varphi_{\omega'}^{U,\mathrm{out}*},\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}})=2\int_{-\infty}^{+\infty}dU\frac{e^{-i\omega' U}}{\sqrt{4\pi/\omega'}}\frac{e^{-i\omega V_{\mathrm{cl}}(U)}}{\sqrt{4\pi\omega}}.\quad(9)$$

To interpret the scattering in terms of particle creation, one should decompose the Heisenberg field operator Φ in both the in and out bases. When working with a complex field, annihilation in operators of particles and antiparticles are defined by

$$a_\omega^{V,\mathrm{in}}=(\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}},\Phi),\quad b_\omega^{V,\mathrm{in}}=(\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}},\Phi^\dagger).\quad(10)$$

Because the in modes $\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}$ form an orthogonal and complete basis, these operators satisfy the canonical commutators when the field operator satisfies the equal-time commutation relation $[\Phi(t,z),\partial_t\Phi^\dagger(t,z')]=i\delta(z-z')$. The in vacuum state is defined, as usual, by $a_\omega^{V,\mathrm{in}}|0\rangle=b_\omega^{V,\mathrm{in}}|0\rangle=0$. Similarly, the out operators are defined with the out modes $\varphi_\omega^{U,\mathrm{out}}$.

Since we are dealing with a linear theory without sources, the overlaps α and β of Eqs. (8) and (9) define the Bogoliubov coefficients relating the initial and final operators a_ω, b_ω. Therefore, these overlaps determine the expectation values (as well as the nondiagonal matrix elements) of all operators built with Φ. For instance, when the initial state is vacuum, the mean number of right moving particles of energy ω' received on $\mathcal{J}_R^+$ is

$$\langle N_{\omega'}^U\rangle\equiv{}_{\mathrm{in}}\langle 0|a_{\omega'}^{U,\mathrm{out}\dagger}a_{\omega'}^{U,\mathrm{out}}|0\rangle_{\mathrm{in}}=\int_0^\infty d\omega|\beta_{\omega'\omega}^{UV}|^2.\quad(11)$$

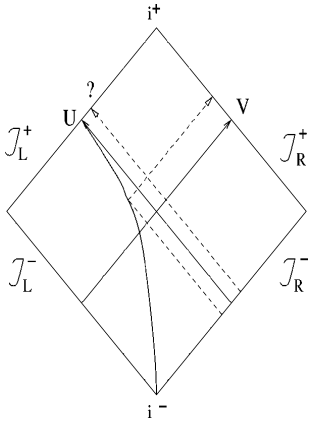

FIG. 2. In this Penrose diagram we represent the trajectory defined in Eq. (12). This trajectory has often been considered (see, e.g., [14]) because of its analogy with the Hawking effect. In this case, $\mathcal{J}_R^-$ is a Cauchy surface whereas $\mathcal{J}_R^+$ is not. The portion of $\mathcal{J}_L^+$ with $V>0$ plays the role of the future horizon of the black hole. The dashed lines are incoming left movers. One sees that for $V<0$ the quanta are reflected, giving rise to right movers for all values of U. On the contrary, for $V>0$, the incoming quanta do not reach the trajectory and end up in $\mathcal{J}_L^+$. The question mark is there to bring the reader's attention to the issue of the choice of the appropriate basis of out modes to decompose the field configurations when the mirror crosses $\mathcal{J}_L^+$.

B. Nonasymptotically inertial trajectories

When the trajectory does not end on i^+ (or does not begin from i^-), the strict decoupling between left and right movers is no longer realized even when the reflection on the mirror is total. Consider, for instance, the trajectory

$$V_{\mathrm{cl}}(U)=-\kappa^{-1}e^{-\kappa U}.\quad(12)$$

The mirror goes from i^- to $V=0$ on $\mathcal{J}_L^+$. Depending on the sign of V, left movers emerging from $\mathcal{J}_R^-$ are either reflected into right movers for $V<0$ or end as left movers on $\mathcal{J}_L^+$ for $V>0$ (see Fig. 2). Thus, on $\mathcal{J}^+$, the image of $\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}$ of Eq. (3) now contains two pieces:

$$\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}(U,V)=\Theta(V)\frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}-\frac{e^{i\omega\kappa e^{-\kappa U}}}{\sqrt{4\pi\omega}}.\quad(13)$$

This mode is singular at $V=0$ where the mirror hits $\mathcal{J}_L^+$. On the other side of the mirror, the U in modes emerging from $\mathcal{J}_L^-$ are fully reflected into left movers but they are also singular on $\mathcal{J}_L^+$. Hence both sets of in modes are singular on $\mathcal{J}^+$, at $V=0$.

This raises an interesting question: Given that the mirror trajectory ends on $\mathcal{J}_L^+$, which is part of the final Cauchy surface, what is the appropriate set of out modes to describe the scattered field configurations?

The procedure we shall follow to choose these modes is to decouple the radiation field asymptotically from the mirror, i.e., to make the mirror asymptotically transparent. In this case, the free Minkowski modes $e^{-i\omega' V}/\sqrt{4\pi\omega'}$ and $e^{-i\omega' U}/\sqrt{4\pi\omega'}$ still form a complete out basis. We shall not adopt the other choice, which consists in working with out modes defined on either side of the mirror on $\mathcal{J}_L^+$. These modes are so singular that their (Minkowski) energy content is not defined. Nevertheless, when working in a state specified on $\mathcal{J}^-$, the expectation values of local operators whose support is $V\neq 0$ are independent of the out basis one chooses. The out basis is necessary only for computing global quantities such as the total energy $\langle H\rangle=\int_0^\infty d\omega\,\omega\langle N_\omega\rangle$.

When adopting the asymptotic decoupling hypothesis, the image of $\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}$ on $\mathcal{J}_R^+\cup\{\mathcal{J}_L^+(V>0)\}$ can be decomposed as

$$\varphi_\omega^{V,\mathrm{in}}=\int_0^\infty d\omega'\,(\alpha^{jV*}_{\omega'\omega}\varphi^{j,\mathrm{out}}_{\omega'}-\beta^{jV*}_{\omega'\omega}\varphi^{j,\mathrm{out}*}_{\omega'}),\qquad(14)$$

where $\varphi^{j,\mathrm{out}}_{\omega'}$ are the usual Minkowski modes, as in Eq. (7). The Bogoliubov coefficients α,β are now 2×2 matrices. The discrete index j stands for U,V and is summed over when repeated. These coefficients are still given by the Klein-Gordon scalar product as in Eqs. (8) and (9), since the out basis is composed of the usual Minkowski modes. When the trajectory is asymptotically inertial, we recover what happens in the right-hand side of the mirror for $\alpha^{ij}=\alpha^{UV}$, $\beta^{ij}=\beta^{UV}$, and on the left-hand side for $\alpha^{ij}=\alpha^{VU}$, $\beta^{ij}=\beta^{VU}$. In addition, one has $\alpha^{VV}=\beta^{VV}=\alpha^{UU}=\beta^{UU}=0$. Finally, we mention that a similar decomposition of Eq. (14) holds on each side of the mirror when the mirror travels from $\mathcal{J}^-$ to $\mathcal{J}^+$, as is the case for a uniformly accelerated system (see Sec. II).

C. Partially transmitting mirrors

In preparation for subsequent analysis, we now present how to study partially transmitting mirrors. In this case, one should also consider U and V modes simultaneously. Indeed, when the trajectory is asymptotically inertial, an incoming U mode is partially scattered into an outgoing V mode and partially transmitted as an outgoing U mode. Hence, when the mirror is not inertial, a proper description of the Bogoliubov coefficients requires one to consider 2×2 matrices α,β which mix U and V modes.

There are two different ways to describe partially transmitting mirrors. First, one can choose from the outset the transmission coefficient (expressed in the rest frame of the mirror) and deduce from it the Bogoliubov coefficients (see Sec. II B in [16]). We shall not follow this method since it does not allow one to switch off the coupling to the radiation field.

The other method is based on self-interactions described by an action. The principal usefulness of this model is to allow switching on and off of the coupling of the radiation with the mirror. We will see in the next sections that this is necessary to obtain well-defined transition energy fluxes for a uniformly accelerated mirror. In the following, we shall use only this model (see Sec. III in [16] for more details).

In this model, the scattering on the mirror is governed by an action whose density is localized on the mirror trajectory $x^\mu_{\mathrm{cl}}(\tau)$, where τ is the proper time,

$$L_{\mathrm{int}}=-\int d\tau H_{\mathrm{int}}(\tau)=-g_0\int d\tau\, g(\tau)\int d^2x\times\delta^2[x^\mu-x^\mu_{\mathrm{cl}}(\tau)]\mathcal{F}[\Phi^\dagger(t,z),\Phi(t,z)].\qquad(15)$$

g_0 is the coupling constant. The real function $g(\tau)$ controls the time dependence of the interaction: When the coupling lasts a proper time lapse equal to $2T$, $g(\tau)$ is normalized by $\int d\tau\, g(\tau)=2T$. To preserve the linearity of the scattering, $\mathcal{F}$ must be a quadratic form of the field Φ, and to have a well-defined Hamiltonian, it should be Hermitian. The various possibilities with the lowest number of derivatives are $\mathcal{F}_0=\Phi^\dagger\Phi$, $\mathcal{F}_1=\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}_\tau\Phi$, and $\mathcal{F}_2=\partial_\tau\Phi^\dagger\partial_\tau\Phi$.

In the interacting picture, the charged field evolves freely. It can thus be decomposed as

$$\Phi(U,V)=\int_0^\infty\frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}(a^U_\omega e^{-i\omega U}+a^V_\omega e^{-i\omega V}+b^{U\dagger}_\omega e^{i\omega U}+b^{V\dagger}_\omega e^{i\omega V}).\qquad(16)$$

The annihilation and creation operators of left and right moving particles (and antiparticles) are constant and obey the usual commutation relations

$$[a^i_\omega,a^{j\dagger}_{\omega'}]=\delta^{ij}\delta(\omega-\omega'),\quad[b^i_\omega,b^{j\dagger}_{\omega'}]=\delta^{ij}\delta(\omega-\omega').\qquad(17)$$

All other commutators vanish. In the interacting picture, the states evolve through the action of a time-ordered operator $Te^{iL_{\mathrm{int}}}$. When the initial state is vacuum, up to second order in g_0, the state on $\mathcal{J}^+$ is

$$Te^{iL_{\mathrm{int}}}|0\rangle=|0\rangle+iL_{\mathrm{int}}|0\rangle+\frac{(iL_{\mathrm{int}})^2}{2}|0\rangle+|D\rangle.\qquad(18)$$

The ket $|D\rangle$ contains terms arising from time ordering. None of these terms contribute to the total energy emitted (see [16] for a detailed analysis). Hence we drop $|D\rangle$ from now on.

The relationship between this model and the original Davies-Fulling model can be made explicit by considering the case where $\mathcal{F}=\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}_\tau\Phi$ and $g(\tau)=1$ (see [16]). In this case, whatever the mirror trajectory is, the first order transition amplitudes are related to the overlaps $\alpha^{ij}_{\omega\omega'},\beta^{ij}_{\omega\omega'}$ entering into Eq. (14) in the following way:

$$A^{VV*}_{\omega\omega'}\equiv\langle 0|a^V_\omega e^{iL_{\mathrm{int}}}a^{V\dagger}_{\omega'}|0\rangle_c=\delta(\omega-\omega')-ig_0\alpha^{VV}_{\omega\omega'},\qquad(19a)$$

$$B^{VV*}_{\omega\omega'}\equiv\langle 0|e^{-iL_{\mathrm{int}}}a^{V\dagger}_\omega b^{V\dagger}_{\omega'}|0\rangle=-ig_0\beta^{VV}_{\omega\omega'},\qquad(19b)$$

$$A^{VU*}_{\omega\omega'} \equiv \langle 0|a^V_\omega e^{iL_{\rm int}} a^{U\dagger}_{\omega'}|0\rangle_c = -ig_0\alpha^{VU*}_{\omega\omega'}, \tag{19c}$$

$$B^{VU*}_{\omega\omega'} \equiv \langle 0|e^{-iL_{\rm int}} a^{V\dagger}_\omega b^{U\dagger}_{\omega'}|0\rangle = ig_0\beta^{VU*}_{\omega\omega'}, \tag{19d}$$

where the subscript $\langle\ \rangle_c$ means that only the connected graphs are kept. In Eqs. (19b) and (19d), one sees clearly the link between the β coefficients and pair creation amplitudes.

When using these amplitudes to compute energy fluxes one encounters severe infrared divergences due to the massless character of Φ. These divergences can be eliminated by considering the Hamiltonian with one more derivative:

$$\mathcal{H}[\Phi^\dagger,\Phi] = \frac{dx^\mu_{\rm cl}}{d\tau}\frac{dx^\nu_{\rm cl}}{d\tau}(\partial_\mu\Phi^\dagger\partial_\nu\Phi + \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi^\dagger). \tag{20}$$

The two terms within the parentheses mean that the interaction is symmetrical under charge conjugation. This implies that the transition amplitudes will be invariant under the exchange of a and b operators.

It should be stressed that the self-interacting model can handle without modification the cases when the trajectory enters and/or leaves space through null infinities. In these cases, when computing transition amplitudes perturbatively, one automatically adopts the convention of using asymptotically free modes. Indeed, the interacting picture is based on the assumption that the interaction is switched on and off asymptotically. This remark reinforces the well-founded character of the choice adopted in the former subsection to use, for the out basis, free Minkowski modes on $\mathcal{J}^+$.

D. Energy fluxes

In this subsection, we compute physical observables such as the number of emitted particles, the energy, and its fluxes, to second order in g_0 and when the initial state is vacuum. We study only the left moving quanta emitted toward $\mathcal{J}^+_L$; all the results for the right movers can be obtained by exchanging U and V.

The mean number of V particles of energy ω is particularly simple because only the second term of Eq. (18) contributes. One obtains

$$\langle N^V_\omega\rangle \equiv \langle 0|e^{-iL_{\rm int}} a^{V\dagger}_\omega a^V_\omega e^{iL_{\rm int}}|0\rangle = \int_0^\infty d\omega'(|B^{VV}_{\omega\omega'}|^2 + |B^{VU}_{\omega\omega'}|^2), \tag{21}$$

in the place of Eq. (11) since the partner of a^V_ω can be either a U or a V quantum. Then the (subtracted) integrated energy is, as usual,

$$\langle H^V_M\rangle = 2\int_0^\infty d\omega\,\omega\langle N^V_\omega\rangle, \tag{22}$$

where the factor of 2 stands for particles+antiparticles.

One can also compute the local flux of energy. The corresponding Hermitian operator is $T_{VV} = \partial_V\Phi^\dagger\partial_V\Phi + \partial_V\Phi\partial_V\Phi^\dagger$. Its expectation value is given by

$$\langle T_{VV}(V)\rangle \equiv \langle 0|e^{-iL_{\rm int}} T_{VV} e^{iL_{\rm int}}|0\rangle - \langle 0|T_{VV}|0\rangle = \langle T^{\rm I}_{VV}\rangle + \langle T^{\rm II}_{VV}\rangle, \tag{23}$$

where

$$\langle T^{\rm I}_{VV}\rangle \equiv \langle 0|L_{\rm int}T_{VV}L_{\rm int}|0\rangle_c = 2\sum_{j=U,V}\int\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}e^{-i(\omega'-\omega)V} \times\left(\int_0^\infty dk\,B^{Vj}_{\omega k}B^{Vj*}_{\omega' k}\right) \tag{24}$$

and

$$\langle T^{\rm II}_{VV}\rangle \equiv -2[{\rm Im}\{\langle 0|T_{VV}L_{\rm int}|0\rangle\} + {\rm Re}\{\langle 0|T_{VV}L_{\rm int}L_{\rm int}|0\rangle_c\}] = -2\,{\rm Re}\left\{\sum_{j=U,V}\int\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}e^{-i(\omega'+\omega)V} \times\left(\int_0^\infty dk\,A^{Vj}_{\omega k}B^{Vj*}_{\omega' k}\right)\right\}. \tag{25}$$

We have subtracted the average value of T_{VV} in the vacuum in order to remove the zero point energy. In Eq. (23), we introduced $\langle T^{\rm I}_{VV}\rangle$, which determines the integrated (positive) energy $\langle H^V_M\rangle$ of Eq. (22) and $\langle T^{\rm II}_{VV}\rangle$, which integrates to 0. Note that the linear term in g_0 in the first equality of Eq. (25) reappears in the second through the definition of the A terms given by Eqs. (19).

In addition to these expressions based on the amplitudes A and B, one can also express $\langle T_{VV}\rangle$ by using the "scattered" Wightman function.[1] This function is defined by

$$W(U,V;U',V') = \langle 0|e^{-iL_{\rm int}}\Phi^\dagger(U,V)\Phi(U',V')e^{iL_{\rm int}}|0\rangle_c. \tag{26}$$

To obtain the subtracted flux, one needs also the unperturbed Wightman function evaluated in the vacuum:

$$W_{\rm vac}(U,V;U',V') = \langle 0|\Phi^\dagger(U,V)\Phi(U',V')|0\rangle = -\frac{1}{4\pi}[\ln(V'-V-i\epsilon) + \ln(U'-U-i\epsilon)]. \tag{27}$$

In terms of these functions, the mean flux on $\mathcal{J}^+_L$ reads [16]

[1] This illustrates the fact that one does not need to choose an out basis when computing expectation values of local operators with initial states prepared on $\mathcal{J}^-$. Notice, however, that the subtraction in Eq. (28) implicitly reintroduces the notion of a Minkowski vacuum on $\mathcal{J}^+$ since the *only* singularity of $W_{\rm vac}(U,V;U',V')$ in Eq. (27) is the usual short distance one, independently of the presence of the mirror on $\mathcal{J}^+$. Thus, since subtracting the vacuum contribution on $\mathcal{J}^+$ is equivalent to subtracting that of the out modes, the use of Eq. (27) implies that the mirror is no longer coupled to the radiation field at asymptotically late times.

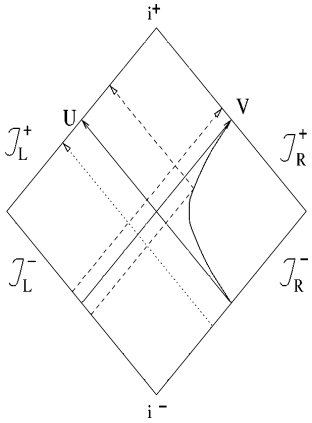

FIG. 3. In this Penrose diagram, we show a uniformly accelerated trajectory going from $V=0$ on $\mathcal{J}_R^-$ to $U=0$ on $\mathcal{J}_R^+$. The dashed lines represent the scattering of a pair of quanta (represented by localized wave packets) emerging from $\mathcal{J}_L^-$. One particle is reflected into an outgoing V quantum for $U<0$ whereas the other ends as a left mover on $\mathcal{J}_R^+$ for $U>0$. The dotted line represents a V quantum which is not reflected by the mirror.

$$\langle T_{VV}(V)\rangle = 2 \lim_{V'\to V} \partial_V \partial_{V'} [W(U,V;U',V') - W_{\rm vac}(U,V;U',V')]. \tag{28}$$

Notice finally that this expression also applies to the Davies-Fulling model and leads to the well-known result

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}(V)\rangle^{\rm DF} &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{V'\to V} \lim_{\epsilon\to 0} \partial_V \partial_{V'} [\ln(U_{\rm cl}(V') - U_{\rm cl}(V) - i\epsilon) - \ln(V'-V-i\epsilon)] \\ &= \frac{1}{6\pi}\left\{\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{1/2} \partial_V^2 \left[\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{-1/2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

From this equation one sees that the energy flux is local in that it contains at most three derivatives of $U_{\rm cl}(V)$ evaluated at the advanced time V. When considering the interacting model with $g(\tau)\neq$ const, this local property will be lost.

II. UNIFORMLY ACCELERATED MIRRORS

Uniform acceleration means that

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = -a^2 = \text{const}. \tag{30}$$

In terms of Minkowski space-time coordinates, the trajectory reads $t^2-z^2=UV=-1/a^2$. In the following, we will consider a uniformly accelerated mirror living in the right Rindler wedge R, i.e., its trajectory is $U_{\rm cl}(V)=-1/a^2V$ with V running from 0 to $+\infty$ (see Fig. 3).

The scattering associated with this trajectory leads to several difficulties when using the Davies-Fulling model. In Sec. II A, we list these difficulties. Then we will see how they can be resolved by using our self-interacting model with a smooth switching on and off of the coupling.

A. The difficulties in using the Davies-Fulling model

When considering the scattering by a uniformly accelerated mirror with the Davies-Fulling model, on the left side of the trajectory, the images on $\mathcal{J}^+$ of the scattered in modes are

$$\varphi_\omega^{U,\rm in}(U,V) = \Theta(U)\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}} + \Theta(V)\left(-\frac{e^{i\omega/a^2V}}{\sqrt{4\pi\omega}}\right), \tag{31}$$

$$\varphi_\omega^{V,\rm in}(U,V) = \Theta(-V)\frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}. \tag{32}$$

As expected from Sec. I B, they are singular where the mirror enters $(V=0)$ and leaves $(U=0)$ the space-time. Their overlaps with plane waves (out modes) are [2]

$$\alpha^{VV}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out}, \varphi_\omega^{V,\rm in}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega+\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}}\frac{i}{\omega-\omega'}, \tag{33a}$$

$$\beta^{VV}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out*}, \varphi_\omega^{V,\rm in}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega-\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}}\frac{i}{\omega+\omega'}, \tag{33b}$$

$$\alpha^{VU}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out}, \varphi_\omega^{U,\rm in}) = \frac{-1}{\pi a} K_1\left(-i\frac{2\sqrt{\omega\omega'}}{a}\right), \tag{33c}$$

$$\beta^{VU}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out*}, \varphi_\omega^{U,\rm in}) = \frac{-i}{\pi a} K_1\left(\frac{2\sqrt{\omega\omega'}}{a}\right), \tag{33d}$$

where $K_1(z)$ is a modified Bessel function (see Appendix A).

When computing $\langle N_\omega\rangle$ [given by $\int_0^\infty d\omega'\,(|\beta^{VV}_{\omega'\omega}|^2 + |\beta^{VU}_{\omega'\omega}|^2)$); see Eqs. (11) and (21)], the integral over ω' diverges in the infrared. Moreover, $\alpha^{VV}_{\omega'\omega}$ diverges when $\omega=\omega'$. Similarly, $\alpha^{VU}_{\omega'\omega}$ is ill defined since the integral representation of the Bessel function in Eq. (33c) requires one to contain a finite and positive real part [see Eq. (A1)].

In addition to these problems in momentum space, when computing the space-time properties of the flux, one encounters the following properties. When plugging $U_{\rm cl}(V)=-1/a^2V$ for $V>0$ into Eq. (29), one finds that $\langle T_{VV}(V)\rangle^{\rm DF}$ vanishes.[2] This is not in agreement with the nonvanishing character of the β since, on one hand, $\langle H_M^V\rangle$

[2]Generally, the trajectories which provide a vanishing V flux are of the form $U_{\rm cl}(V)=(AV+B)/(CV+D)$ [1]. Timelikeness imposes $AD>BC$. If $C=0$, we recover inertial trajectories. If $C\neq 0$, we recover uniformly accelerated trajectories with $a=C/\sqrt{AD-BC}$.

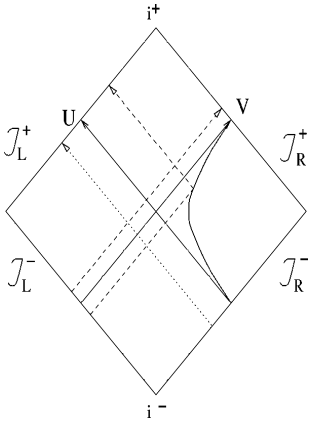

FIG. 3. In this Penrose diagram, we show a uniformly accelerated trajectory going from $V=0$ on $\mathcal{J}_R^-$ to $U=0$ on $\mathcal{J}_R^+$. The dashed lines represent the scattering of a pair of quanta (represented by localized wave packets) emerging from $\mathcal{J}_L^-$. One particle is reflected into an outgoing V quantum for $U<0$ whereas the other ends as a left mover on $\mathcal{J}_R^+$ for $U>0$. The dotted line represents a V quantum which is not reflected by the mirror.

$$\langle T_{VV}(V)\rangle = 2 \lim_{V'\to V} \partial_V \partial_{V'} [W(U,V;U',V') - W_{\rm vac}(U,V;U',V')]. \quad (28)$$

Notice finally that this expression also applies to the Davies-Fulling model and leads to the well-known result

$$\langle T_{VV}(V)\rangle^{\rm DF} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{V'\to V^{\epsilon\to 0}} \lim \partial_V \partial_{V'} [\ln(U_{\rm cl}(V') - U_{\rm cl}(V) - i\epsilon) - \ln(V'-V-i\epsilon)] = \frac{1}{6\pi}\left\{\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{1/2} \partial_V^2 \left[\left(\frac{dU_{\rm cl}}{dV}\right)^{-1/2}\right]\right\}. \quad (29)$$

From this equation one sees that the energy flux is local in that it contains at most three derivatives of $U_{\rm cl}(V)$ evaluated at the advanced time V. When considering the interacting model with $g(\tau)\neq$ const, this local property will be lost.

II. UNIFORMLY ACCELERATED MIRRORS

Uniform acceleration means that

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = -a^2 = \text{const}. \quad (30)$$

In terms of Minkowski space-time coordinates, the trajectory reads $t^2-z^2=UV=-1/a^2$. In the following, we will consider a uniformly accelerated mirror living in the right Rindler wedge R, i.e., its trajectory is $U_{\rm cl}(V)=-1/a^2V$ with V running from 0 to $+\infty$ (see Fig. 3).

The scattering associated with this trajectory leads to several difficulties when using the Davies-Fulling model. In Sec. II A, we list these difficulties. Then we will see how they can be resolved by using our self-interacting model with a smooth switching on and off of the coupling.

A. The difficulties in using the Davies-Fulling model

When considering the scattering by a uniformly accelerated mirror with the Davies-Fulling model, on the left side of the trajectory, the images on $\mathcal{J}^+$ of the scattered in modes are

$$\varphi_\omega^{U,\rm in}(U,V) = \Theta(U)\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}} + \Theta(V)\left(-\frac{e^{i\omega/a^2V}}{\sqrt{4\pi\omega}}\right), \quad (31)$$

$$\varphi_\omega^{V,\rm in}(U,V) = \Theta(-V)\frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}. \quad (32)$$

As expected from Sec. I B, they are singular where the mirror enters ($V=0$) and leaves ($U=0$) the space-time. Their overlaps with plane waves (out modes) are [2]

$$\alpha^{VV*}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out}, \varphi_\omega^{V,\rm in}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega+\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}}\frac{i}{\omega-\omega'}, \quad (33a)$$

$$\beta^{VV*}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out*}, \varphi_\omega^{V,\rm in}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega-\omega'}{\sqrt{\omega\omega'}}\frac{i}{\omega+\omega'}, \quad (33b)$$

$$\alpha^{VU*}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out}, \varphi_\omega^{U,\rm in}) = \frac{-1}{\pi a}K_1\left(-i\frac{2\sqrt{\omega\omega'}}{a}\right), \quad (33c)$$

$$\beta^{VU*}_{\omega'\omega} \equiv (\varphi_{\omega'}^{V,\rm out*}, \varphi_\omega^{U,\rm in}) = \frac{-i}{\pi a}K_1\left(\frac{2\sqrt{\omega\omega'}}{a}\right), \quad (33d)$$

where $K_1(z)$ is a modified Bessel function (see Appendix A).

When computing $\langle N_\omega\rangle$ [given by $\int_0^\infty d\omega' (|\beta^{VV}_{\omega'\omega}|^2 + |\beta^{VU}_{\omega'\omega}|^2)$); see Eqs. (11) and (21)], the integral over ω' diverges in the infrared. Moreover, $\alpha^{VV}_{\omega'\omega}$ diverges when $\omega=\omega'$. Similarly, $\alpha^{VU}_{\omega'\omega}$ is ill defined since the integral representation of the Bessel function in Eq. (33c) requires one to contain a finite and positive real part [see Eq. (A1)].

In addition to these problems in momentum space, when computing the space-time properties of the flux, one encounters the following properties. When plugging $U_{\rm cl}(V)=-1/a^2V$ for $V>0$ into Eq. (29), one finds that $\langle T_{VV}(V)\rangle^{\rm DF}$ vanishes.[2] This is not in agreement with the nonvanishing character of the β since, on one hand, $\langle H_M^V\rangle$

[2]Generally, the trajectories which provide a vanishing V flux are of the form $U_{\rm cl}(V)=(AV+B)/(CV+D)$ [1]. Timelikeness imposes $AD>BC$. If $C=0$, we recover inertial trajectories. If $C\neq 0$, we recover uniformly accelerated trajectories with $a=C/\sqrt{AD-BC}$.

$=\int_0^\infty d\omega\,\omega\langle N_\omega^V\rangle$ and, on the other hand, $\langle H_M^V\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dV\langle T_{VV}\rangle$. It is as if the created particles were carrying no energy flux [1,17,18].

To sum up, the difficulties of the Davies-Fulling model for uniformly accelerated trajectories are as follows.

(i) Unregulated and infrared diverging overlaps, Eqs. (33).

(ii) A diverging expression for $\langle N_\omega\rangle$, the mean number of particles created.

(iii) A vanishing local flux, although pair creation transition amplitudes do not vanish.

(iv) When one considers the scattering by *two* uniformly accelerated mirrors with symmetrical trajectories, i.e., which both obey $UV=-1/a^2$, the (unregulated) overlaps β also vanish, together with the local flux. From [19], one could infer that these settings form a perfect interferometer. This cannot be exactly the case since the two mirrors live in two causally uncorrelated regions. This issue will be fully discussed in a forthcoming paper [15].

B. The switching function g

To avoid the difficulties listed above, we shall use our self-interacting model, based on Eqs. (15) and (20). We require that the switching function $g(\tau)$ be continuous, differentiable, and it decrease sufficiently rapidly for large τ. A choice we find very convenient and shall adopt is

$$g(\tau)=e^{-2\eta\cosh(a\tau)}=e^{-\eta[aV_{\rm cl}(\tau)+1/aV_{\rm cl}(\tau)]}, \qquad (34)$$

where $0<\eta\ll 1$ is a dimensionless parameter which controls the switching time.

$g(\tau)$ can be interpreted in two different ways: either as governing how the interactions with the mirror are turned on and off, or as a mathematical regulator which properly defines the transition amplitudes $A_{ij}^{\omega\omega'}, B_{ij}^{\omega\omega'}$. This second interpretation implicitly relies on the limit $\eta\to 0$ (see Appendix B). In the body of the text, we shall use the first (physical) interpretation of $g(\tau)$.

The features of $g(\tau)$ are the following (see Fig. 4).

(a) A plateau of height 1 centered around $\tau=0$ and of width equal to

$$2T\equiv 2\pi g_{\lambda=0}\simeq \frac{2|\ln(2\eta)|}{a}. \qquad (35)$$

(b) Slopes which are maximal and equal to $a/e+\mathcal{O}(\eta^2)$ for $a\tau\simeq\pm(aT+\ln 2)$.

(c) An exponentially decreasing tail. We shall see that this extremely rapid decreasing behavior ($\sim e^{-\eta e^{a|\tau|}}$) is sufficient for having a finite Minkowski flux on $\mathcal{J}^+$.

We now compute the Rindler and Minkowski Fourier components of g since they will reappear in the expressions of the transition amplitudes. They are given in terms of the modified Bessel functions:

$$g_\lambda\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{-2\eta\cosh(a\tau)}e^{i\lambda\tau}=\frac{1}{a\pi}K_{i\lambda/a}(2\eta), \qquad (36)$$

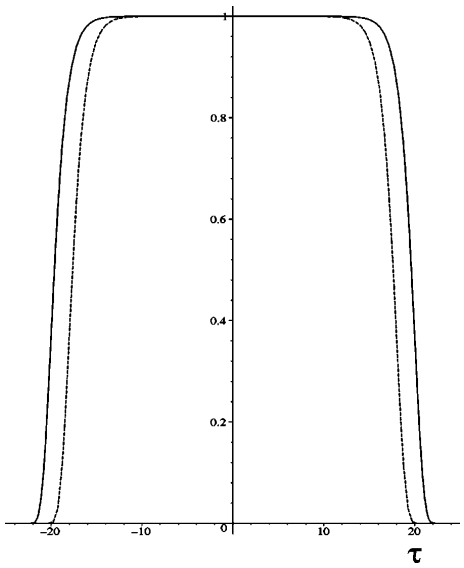

FIG. 4. Here are presented two $g(\tau)$, both for $a=1$. The solid line is with $\ln\eta=-20$ and the dashed line with $\ln\eta=-18$. One sees that the size of the plateau is linear in $\ln\eta$ whereas the slope is independent of η. This remark will be crucial when considering the Rindler energy emitted by the mirror (see Sec. III).

$$g_\omega\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dV\, e^{-\eta(aV+1/aV)}e^{i\omega V}$$

$$=-\frac{1}{a\pi}\frac{1}{\sqrt{1-i\omega/a\eta}}K_1(2\eta\sqrt{1-i\omega/a\eta}). \qquad (37)$$

In the ultraviolet, for $\lambda\gg a$ and $\omega\gg a/\eta$, the Rindler and Minkowski components decrease, respectively, as

$$|g_\lambda|\overset{\lambda\to\infty}{\sim}\frac{1}{a}(a/\lambda)^{1/2}e^{-\pi\lambda/2a}, \qquad (38)$$

$$|g_\omega|\overset{\omega\to\infty}{\sim}\frac{1}{a}(a/\omega)^{3/4}\eta^{1/4}e^{-\sqrt{2\omega\eta/a}}. \qquad (39)$$

From Eq. (38), one sees that the ultraviolet behavior of the Rindler component is independent of η. This is a direct consequence of point (b), which states that the maximal slope of the switching function is independent of η when expressed in proper time τ. From Eq. (39) one finds instead that the ultraviolet behavior of the Minkowski components is damped by the regulator η.

C. Regularized amplitudes and particle content

Given $g(\tau)$ of Eq. (34), the transition amplitudes can be explicitly calculated. They are given in Appendix B and, as expected, they are well defined. Nevertheless, we will not work with these amplitudes characterized by Minkowski frequencies since they are not convenient for computing the expectation value of observables. Similarly, we will not work with the transition amplitudes with Rindler frequencies even though they are simply expressed in terms of g_λ of Eq. (36).

It turns out that it is more convenient to express the fluxes and the energy in terms of transition amplitudes containing one Minkowski and one Rindler frequency. More precisely, these amplitudes mix Minkowski and "Unruh" quanta. The Unruh modes $\hat{\varphi}^j_\lambda$ are linear combinations of positive frequency Minkowski modes *and* eigenmodes of Rindler energy λ (see [5,13] and Appendix C).

These "mixed" transition amplitudes[3] are given by the matrix elements of the scattering operator with the Minkowski operator a^j_ω and the Unruh one $\hat{a}^j_\lambda$:

$$A^{ij}_{\omega\lambda}{}^{*} \equiv \langle 0|a^i_\omega e^{iL_{\rm int}} \hat{a}^{j\dagger}_\lambda|0\rangle_c ,$$

$$B^{ij}_{\omega\lambda} \equiv \langle 0|a^i_\omega \hat{b}^j_\lambda e^{iL_{\rm int}}|0\rangle. \tag{40}$$

To first order in g_0, using Eqs. (15), (20), (63), and (78), we get

$$A^{VU}_{\omega\lambda}{}^{*} = -\frac{ig_0}{\pi a}\sqrt{\omega\lambda/(1-e^{-2\pi\lambda/a})}(1-i\omega/a\,\eta)^{-(1-i\lambda/a)/2} \times K_{1-i\lambda/a}(2\sqrt{\eta}\sqrt{1-i\omega/a\,\eta}), \tag{41}$$

$$B^{VU}_{\omega\lambda} = \frac{ig_0}{\pi a}\sqrt{\omega\lambda/(1-e^{-2\pi\lambda/a})}(1-i\omega/a\,\eta)^{-(1+i\lambda/a)/2} \times K_{1+i\lambda/a}(2\sqrt{\eta}\sqrt{1-i\omega/a\,\eta}). \tag{42}$$

Moreover, as shown in Appendix C, the U and V Unruh modes coincide when evaluated along the trajectory. Therefore $B^{VU}_{\omega\lambda} = B^{VV}_{\omega\lambda}$, and similarly for A.

Using these amplitudes, the mean Minkowski energy emitted to $\mathcal{J}^+_L$ can be written

$$\langle H^V_M\rangle = 4\int_0^\infty d\omega\,\omega\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,|B^{VV}_{\omega\lambda}|^2 = \int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\; h_M(\omega,\lambda;\eta). \tag{43}$$

The number 4 before the first integral means that processes involving U or V particles and U or V antiparticles equally contribute to the mean Minkowski energy emitted to $\mathcal{J}^+_L$ (or $\mathcal{J}^+_R$).

The exact computation of $\langle H^V_M\rangle$ will be performed in the next section. In the following, we shall study $h_M(\omega,\lambda,\eta) = 4\omega|B^{VV}_{\omega\lambda}|^2$ to give a qualitative understanding of $\langle H^V_M\rangle$. The usefulness of the mixed representation is that the behavior of $h_M(\omega,\lambda;\eta)$ in the (ω,λ,η) space is quite easy to explain. The starting point is that the norm of $B^{VU}_{\omega\lambda}$ decreases as $e^{-2\pi|\lambda|/a}$ for $|\lambda|\gg a$, as expected from the correspondence mentioned in footnote 3. Hence, the relevant range of λ is centered around 0 and of extension a few a's. When λ belongs to this interval, the following analysis applies.

First, η acts as a regulator: the Minkowski frequencies which contribute to h_M belong to the interval

$$a\,\eta \lesssim \omega \lesssim \xi a/\eta, \tag{44}$$

where ξ is a numerical factor. Its value is ~ 0.50 when one uses the mid height criterion: $h_M(\omega=\xi a/\eta,\lambda;\eta)/h_M(\omega=a,\lambda;\eta)=1/2$ with λ belonging to the relevant interval.

Secondly, within the range given in Eq. (44), h_M hardly depends on ω, as shown in Fig. 5.[4] Hence, for any given value of η, one can first trivially perform the integral over ω from $a\,\eta$ to $\xi a/\eta$. The value of this integral is given by $h_M(\omega=a,\lambda;\eta)\times\xi a/\eta$, since $\eta\ll 1$.

Thirdly, the height of the plateau hardly depends on η (see Fig. 6). This can be understood from Eq. (A4): when Eq. (44) is satisfied and when $\eta\ll 1$, $B^{VU}_{\omega\lambda}$ is independent of η. Hence, one can take the limit $\eta\to 0$ to estimate how h_M depends on λ. In this limit, the scattering amplitudes obey

$$B^{VV}_{\omega\lambda} \overset{n\to 0}{\to} -ig_0\frac{\lambda}{e^{\pi\lambda/a}-e^{-\pi\lambda/a}}\,\gamma^{V}_{\lambda\omega}{}^{*}, \tag{45}$$

where $\gamma^V_{\lambda\omega} = (\varphi^V_\omega, \hat{\varphi}^V_\lambda)$ is given in Eq. (C6) of Appendix C. In this case, we get

$$h_M(\omega=a,\lambda;\eta) = 4\omega|B^{VV}_{\omega\lambda}|^2 = \frac{g_0^2}{2\pi a}\left(\frac{\lambda}{e^{\pi\lambda/a}-e^{-\pi\lambda/a}}\right)^2, \tag{46}$$

thereby recovering the above mentioned Boltzmann expansion law for $|\lambda|\gg a$. Thus the mean energy can be approximated by

$$\langle H^V_M\rangle = \xi\frac{a}{\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\; h_M(\omega=a,\lambda;\eta) = \xi\frac{g_0^2 a^3}{6\pi\eta}. \tag{47}$$

Although the numerical factor is not exactly determined (because of the ambiguity of defining ξ), we will see in the next section that the factor $g_0^2a^3$ and the scaling in $1/\eta$ correctly define the behavior of $\langle H^V_M\rangle$ when $\eta\ll 1$ (the exact value of ξ is 3/8 instead of 1/2).

So far, by the introduction of the switching off function [Eq. (34)], we have solved the first two problems listed in Sec. II A. Indeed, the transition amplitudes (expressed in the

[3]These scattering amplitudes make contact with the transition amplitudes of a uniformly accelerated detector coupled to the radiation field Φ [5,6,7,13,20]. For instance, the spontaneous emission amplitude of a two-level atom with an energy gap ΔM is equal to $(\omega\sqrt{\lambda})^{-1}B^{VU}_{\omega,\lambda}|_{\lambda=\Delta M}$; see Eq. (2.48) in [13].

[4]In this, we recover what was found for an accelerated detector; see Sec. 2.4 of [13]. In that case, the Minkowski frequencies that contribute to the processes are the Doppler frequencies that resonate with the energy gap ΔM when the interactions are turned on, i.e., those that satisfy $\omega = e^{a\tau}\Delta M$ for $-T<\tau<T$. Moreover, within that range, the transition amplitudes do not depend on ω and the limit $\eta\to 0$ can be used to estimate the amplitude, as in Eq. (45).

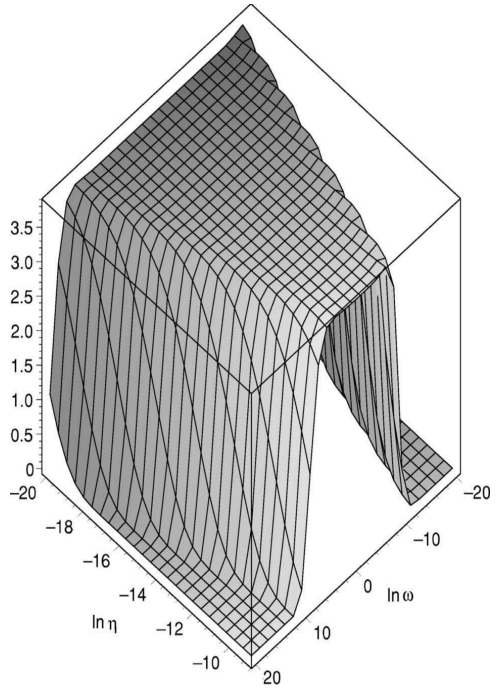

FIG. 5. Here we show $h_M(\omega,\lambda=0.15;\eta)$ in terms of $\ln\omega$ and $\ln\eta$. One sees clearly that the surface exhibits a "plateau" of constant height which is limited by the lines $\ln\omega=\pm\ln\eta$. $h_M(\omega,\lambda;\eta)$ is given in arbitrary units and $a=1$.

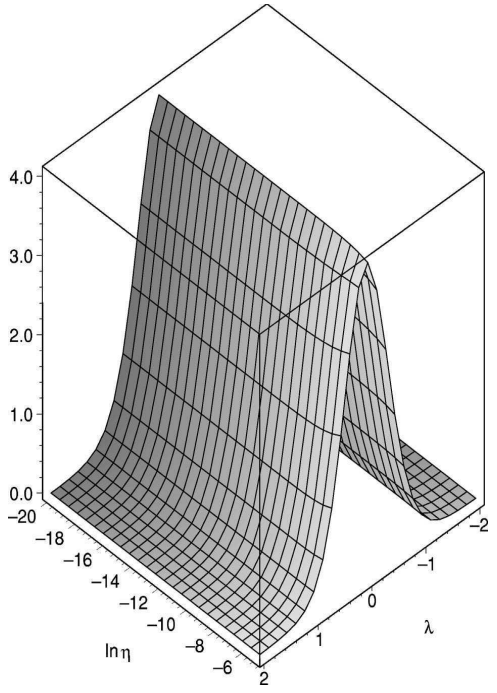

FIG. 6. Here we show $h_M(\omega=1,\lambda;\eta)$ in terms of λ and $\ln\eta$. One clearly sees that the energy density h_M is independent of η. This comes from that the fact that we compute it "within the plateau," i.e., for $a\eta\ll\omega=a\ll a/\eta$. Again, $h_M(\omega,\lambda;\eta)$ is given in arbitrary units and $a=1$.

Minkowski, Rindler, or mixed representation) are now well defined in both the infrared and the ultraviolet, and the energy emitted is no longer infinite. The third and last point, i.e., the issue concerning the local fluxes, is the subject of the next section.

III. LOCAL MINKOWSKI AND RINDLER FLUXES

In the Davies-Fulling model, the flux is given by Eq. (29). It is a local function of the trajectory $U_{\rm cl}(V)$ and its derivatives expressed at the advanced time V. This result relies on the time independence of the coupling. Indeed, this feature no longer occurs when the coupling to the radiation field is switched on and off.

To compute $\langle T_{VV}\rangle$ of Eq. (23) we first put together the two terms quadratic in g_0. This is appropriate when computing local properties in space-time because it leads to a simplification since this gives rise to a commutator which is local. Then the flux reads

$$\langle T_{VV}(V)\rangle = -2\,\mathrm{Im}\{\langle 0|T_{VV}L_{\rm int}|0\rangle\} + \mathrm{Re}(\langle 0|L_{\rm int}[T_{VV},L_{\rm int}]|0\rangle) \tag{48}$$

$$= \langle T_{VV}(V)\rangle_1 + \langle T_{VV}(V)\rangle_2 . \tag{49}$$

(Note that all disconnected diagrams automatically cancel in this expression.) Both terms are governed by the second derivative of the Wightman function, Eq. (27),

$$\partial_V\partial_{V'}W_{\rm vac}(V-V') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(V-V'-i\epsilon)^2}. \tag{50}$$

Using this function, they read

$$\langle T_{VV}(V)\rangle_1 = -\frac{g_0}{2\pi^2} \times \mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, g(\tau)\dot V_{\rm cl}^2(\tau)\frac{1}{[V-V_{\rm cl}(\tau)-i\epsilon]^4}\right\}, \tag{51}$$

$$\langle T_{VV}(V)\rangle_2 = \frac{g_0^2}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau'\frac{g(\tau')}{[V_{\rm cl}(\tau')-V-i\epsilon]^2} \times\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, g(\tau)\partial_V\delta(V_{\rm cl}(\tau)-V) \times\left(\frac{i}{[V_{\rm cl}(\tau')-V_{\rm cl}(\tau)-i\epsilon]^2} + \frac{\dot U_{\rm cl}(\tau)\dot U_{\rm cl}(\tau')}{\dot V_{\rm cl}(\tau)\dot V_{\rm cl}(\tau')}\frac{i}{[U_{\rm cl}(\tau')-U_{\rm cl}(\tau)-i\epsilon]^2}\right)\right\}, \tag{52}$$

where an overdot designates a derivation with respect to the proper time. The function $\partial_V\delta$ comes from the commutator

$$[\partial_V\Phi^\dagger,\partial_{V'}\Phi]=[\partial_V\Phi,\partial_{V'}\Phi^\dagger]=\frac{i}{2}\partial_V\delta(V-V'). \quad (53)$$

To evaluate the integrals, it is appropriate to use the dummy variable $\tilde{V}=V_{\rm cl}(\tau)$ and to define a new function

$$G(\tilde{V})=\dot{V}_{\rm cl}(\tau[\tilde{V}])g(\tau[\tilde{V}]), \quad (54)$$

which can be interpreted as the effective coupling constant when using $\tilde{V}$ as the time. Using this function, one can evaluate Eqs. (51) and (52) by integrating by parts until the exponent of the pole is unity. All boundary contributions vanish if $g(\tau)$ decreases faster than $e^{-a|\tau|}$, a condition satisfied by the switching function we chose in Eq. (34). If $g(\tau)$ decreases more slowly than $e^{-a|\tau|}$, the expectation value of T_{VV} is ill defined. Hence it appears that the condition $g(\tau)e^{a|\tau|}\to 0$ for $\tau\to\pm\infty$ is a necessary condition for having well-defined Minkowski expressions.

Concerning Eq. (51), after three integrations by parts, the last integration is trivially performed by using $\mathrm{Im}\{(x-i\epsilon)^{-1}\}=\pi\delta(x)$. Concerning Eq. (52), the two terms within the parentheses are equal. In order to compute this expression, one first performs the integral over τ by using the function $\partial_V\delta$. Then, as for Eq. (51), one integrates by parts until one gets a first order pole.

Grouping the results for Eqs. (51) and (52), one obtains, for $V>0$,

$$\langle T_{VV}(V>0)\rangle=\frac{1}{12\pi}[g_0\partial_V^3G-g_0^2(G\partial_V^4G+2\partial_VG\partial_V^3G)] \quad (55)$$

$$=\frac{g_0^2}{12\pi}\{(\partial_V^2G)^2+\partial_V[\cdots]\}. \quad (56)$$

For $V<0$, one gets $\langle T_{VV}\rangle\equiv 0$ as expected since the $V<0$ part of $\mathcal{J}_L^+$ is causally disconnected from the mirror trajectory.[5]

[5]We would like to briefly comment on causality. When computing the flux in a causally disconnected point with respect to the trajectory, one must obviously find zero [20]. This is trivially the case when one expresses, in Eqs. (24) and (25), the transition amplitudes as integrals over the proper time τ and first performs the integral over ω. However, in the absence of a regulator, one loses causality when inverting the order of the integrations. This can be seen from the unregulated amplitudes where the fact that the mirror was in the R or L quadrant is lost [see Eqs. (B4)] in Appendix B. The advantage of $g(\tau)$ is to give rise to transition amplitudes [see Eqs. (B1)], wherein the prescription of the pole governed by η keeps control of causality. The same remark applies to the amplitudes in the mixed representation defined in Eqs. (41) and (42). When using them to compute the flux, causality is kept. Because of the analogy with the transition amplitudes of an accelerated detector, causality is also preserved by regularizing these amplitudes [see Eqs. (25), (26), and (63) of [7]].

In Eq. (56), we have separated the flux into two parts, a square term which will lead to a positive Minkowski energy $\langle H_M^V\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dV\langle T_{VV}\rangle$, and a total derivative which does not contribute to it [note the similarity with $\langle T_{VV}^I\rangle$ and $\langle T_{VV}^{II}\rangle$ of Eq. (23)]. When using the coupling function of Eq. (34) and Eqs. (56) and (A1), one can obtain an analytical expression for $\langle H_M^V\rangle$:

$$\langle H_M^V\rangle=\frac{g_0^2a^3}{6\pi}[8\eta^3K_0(4\eta)+(4\eta^2+2\eta^4)K_1(4\eta) -8\eta^3K_2(4\eta)-3\eta^4K_3(4\eta)+\eta^4K_5(4\eta)]. \quad (57)$$

When taking the limit $\eta\to 0$ one obtains

$$\langle H_M^V\rangle\overset{\eta\to 0}{\sim}\frac{g_0^2a^3}{16\pi}\frac{1}{\eta}+\mathcal{O}(1). \quad (58)$$

Hence, up to a numerical factor, we recover the result of Eq. (47). It is interesting to see how the pathological features of constant coupling reemerge when taking $\eta\to 0$. In this limit, the effective coupling constant of Eq. (54) obeys $G(V)=aV$. Hence Eq. (55) gives a vanishing flux whereas $\langle H_M^V\rangle$ clearly diverges [see Eq. (58)].

To complete the analysis of the transients, we now compute the Rindler flux $[\langle T_{vv}\rangle\equiv(dV/dv)^2\langle T_{VV})\rangle]$ in terms of the Rindler advanced time $v=(1/a)\ln(aV)$. This analysis clearly establish that the Rindler energy carried by the transient effects is insensitive to the duration of the interaction and depends only on the rate of switching on and off the interactions. From Eq. (55), we get

$$\langle T_{vv}(v)\rangle=\frac{a^2}{12\pi}\{-g_0\partial_vg+g_0^2[g\partial_v^2g+2(\partial_vg)^2]\} -\frac{1}{12\pi}[-g_0\partial_v^3g+g_0^2(g\partial_v^4g+2\partial_vg\partial_v^3g)] \quad (59)$$

$$=\frac{g_0^2}{12\pi}[a^2(\partial_vg)^2+(\partial_v^2g)^2]+\partial_v[\cdots]. \quad (60)$$

As for the Minkowski energy $\langle H_M^V\rangle$, Eq. (60) shows that one also obtains a positive Rindler energy $\langle H_R^V\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dv\langle T_{vv}\rangle$. Using g given by Eq. (34), the Rindler energy is

$$\langle H_R^V\rangle=\frac{g_0^2a^3}{2\pi}\eta^2K_2(4\eta), \quad (61)$$

$$\langle H_R^V\rangle\xrightarrow{\eta\to 0}\frac{g_0^2a^3}{16\pi}+\mathcal{O}(\eta). \quad (62)$$

In Fig. 7, we have plotted the Rindler flux when the switching function g is given by Eq. (34). We previously noticed that the slope of $g(\tau)$ does not depend on η. As the slope determines the Fourier content of g_λ, one understands

why we obtain a nonvanishing Rindler energy even in the limit $\eta \to 0$. We could have chosen different switching functions $g(\tau)$ such that their slope would tend to zero. In the limit, we would have found $\langle H_R \rangle = 0$, as for a constant coupling. However, in this case, we would necessarily have obtained a diverging Minkowski energy $\langle H_M^V \rangle$, since the condition $g(\tau)e^{a|\tau|} \to 0$ for $\tau \to \pm\infty$ would not have been satisfied. Hence $\langle H_R \rangle$ cannot be sent to 0 if one requires a finite $\langle H_M^V \rangle$.

CONCLUSIONS

By considering the self-interacting model defined by Eq. (15), with $\mathcal{F}$ given in Eq. (20) and $g(\tau)$ given in Eq. (34), we have solved all the difficulties listed in Sec. II A: The transmission amplitudes are well defined and given in Eqs. (41), (42), and (B1), the mean energy flux is given in Eq. (57), and the local flux in Eq. (55). All these quantities are regularized by the parameter η which controls the switching on and off of the coupling through Eq. (34).

The important lesson which emerges from this analysis is the following: When expressing $\langle T_{VV} \rangle$ in terms of A and B as in Eqs. (24) and (25), the regulator η should be sent to 0 *after* having integrated over k, ω, and ω'. In this, we recover what was found in [22] when evaluating the energy density in the Rindler vacuum. If instead one first sends $\eta \to 0$, the unregulated expressions of the scattering amplitudes are so poorly defined that one even loses causality and crossing symmetry (see Appendix B). Therefore, in the presence of horizons, or more generally when the mirror enters or leaves space-time through null infinities, it is mandatory to consider the scattering amplitudes as distributions and not only as functions of frequencies belonging to $[0, +\infty]$.

In addition, by expressing the scattering amplitudes in the mixed representation [see Eqs. (41) and (42)], we have made contact with the physics of a uniformly accelerated detector. Indeed, its absorption or emission transition amplitudes are given by the same functions as the scattering amplitudes in the mixed representation. This strict correspondence establishes that the physics of uniformly accelerated systems is dominated by the kinematics, namely, (near) stationarity with respect to proper (Rindler) time and (near) singular behavior due to the exponentially growing blueshift effects associated with uniform acceleration.

APPENDIX A: BESSEL FUNCTIONS

In this appendix we recall some features of the modified Bessel functions $K_\nu(z)$, where $(\nu, z) \in \mathcal{C}$ (see [21], p. 374). They can be expressed by the following integral representation:

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty dt\, e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t), \tag{A1}$$

where $|\arg(z)| < \pi/2$. For $k \in \mathcal{N}$ and $\nu \in \mathcal{R}$, one has

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \{z^\nu K_\nu(z)\} = e^{-i\pi k} z^{\nu-k} K_{\nu-k}(z), \tag{A2}$$

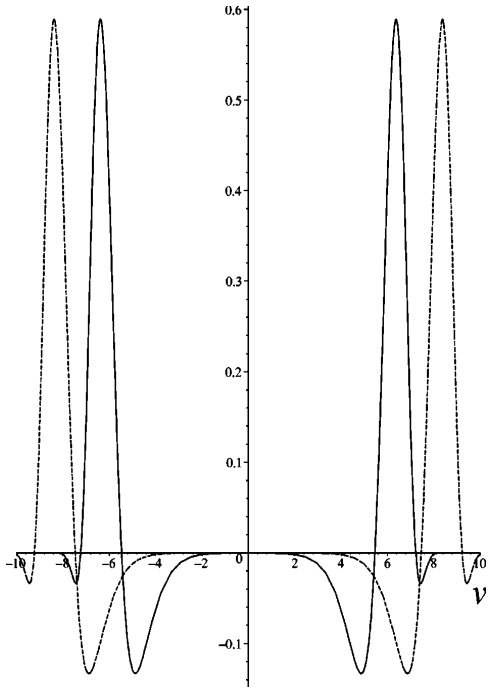

FIG. 7. Here is plotted $\langle T_{vv}(v) \rangle$ as a function of $av = \ln(aV)$, for $a = 1$ in arbitrary units and for two different values of η. The switching function has been taken for $\ln \eta = -6$ (solid curve) and $\ln \eta = -8$ (dashed curve). Notice the two following properties. The flux is significantly nonzero within the transients only. The amplitude of these transients is independent of the duration of the interactions governed by η.

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \{z^{-\nu} K_\nu(z)\} = e^{i\pi k} z^{-\nu-k} K_{\nu+k}(z). \tag{A3}$$

We also recall the asymptotic behavior of the K's for small and large arguments:

$$K_0(z) \overset{z\to 0}{\sim} -\ln(z)$$

$$\text{and } K_\nu(z) \overset{z\to 0}{\sim} \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \quad \text{for } \Re(\nu) > 0 \tag{A4}$$

whereas

$$K_\nu(z) \overset{z\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi/2z}\, e^{-z} \quad \text{for all } \nu. \tag{A5}$$

APPENDIX B: REGULARIZED TRANSITION AMPLITUDES

The aim of this appendix is to give the exact expressions for the regularized transition amplitudes in terms of Minkowski frequencies. The main virtue of the regulator η is to define them without ambiguity. The direct evaluation of Eqs. (19) with $g(\tau)$ defined by Eq. (34) gives

$$A^{VV*}_{\omega\omega'} = \delta(\omega-\omega') - \frac{4ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}\frac{\eta^2}{X^2}K_2(X) \quad \text{where}$$

$$X = 2\eta\sqrt{1-i(\omega-\omega')/a\,\eta}, \tag{B1a}$$

$$B^{VV}_{\omega\omega'} = \frac{4ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}\frac{\eta^2}{X'^2}K_2(X') \quad \text{where}$$

$$X' = 2\eta\sqrt{1-i(\omega+\omega')/a\,\eta}, \tag{B1b}$$

$$A^{VU*}_{\omega\omega'} = -\frac{ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}K_0(Y) \quad \text{where}$$

$$Y = 2\sqrt{(\omega/a+i\eta)(-\omega'/a-i\eta)}, \tag{B1c}$$

$$B^{VU}_{\omega\omega'} = \frac{ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}K_0(Y') \quad \text{where}$$

$$Y' = 2\sqrt{(\omega/a+i\eta)(\omega'/a-i\eta)}. \tag{B1d}$$

Two important remarks should be made. Because these amplitudes have been regularized, they possess analytical properties which guarantee that they obey crossing symmetry, that is,

$$A^{ij*}_{\omega\omega'} = -B^{ij}_{\omega,\omega' e^{i\pi}} \tag{B2}$$

(see [23] for exploiting this symmetry in studying accelerated detectors). Secondly, had the mirror followed the accelerated trajectory in the left quadrant rather than in the right one, the corresponding transition amplitudes would have been obtained by simply replacing η by $-\eta$.

We wish also to stress that $g(\tau)$ can be considered as a mathematical regulator which properly defines the transition amplitudes. Consider, for instance, $B^{VU}_{\omega\omega'}$. Using Eq. (34), it is given by

$$B^{VU}_{\omega\omega'} \propto \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{a}\int_0^\infty dV\frac{1}{V}e^{i[(\omega+i\eta)V-(\omega'-i\eta)/a^2V]}. \tag{B3}$$

One clearly sees that the integral is now well defined for both $V\to 0$ and $V\to\infty$.

Finally, it is interesting to take the limit $\eta\to 0$ to see how one recovers the singular amplitudes that one would have obtained with a constant coupling. Using Eqs. (B1), in the limit $\eta\to 0$, we get

$$A^{VV*}_{\omega\omega'} \to \delta(\omega-\omega') + \frac{ig_0}{2\pi}a\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{(\omega-\omega')^2}, \tag{B4a}$$

$$B^{VV}_{\omega\omega'} \to -\frac{ig_0}{2\pi}a\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{(\omega+\omega')^2}, \tag{B4b}$$

$$A^{VU*}_{\omega\omega'} \to -\frac{ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}K_0\left(-2i\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}\right), \tag{B4c}$$

$$B^{VU}_{\omega\omega'} \to \frac{ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}K_0\left(2\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}\right). \tag{B4d}$$

Although the choice of our Lagrangian, based on Eq. (20), has removed the infrared divergences, the A terms are clearly ill defined, as in the original Davies-Fulling model. More importantly, crossing symmetry and causality are both lost if one uses these unregulated amplitudes. This clearly establishes that the Bogoliubov coefficients must be conceived as *distributions*, or at least as analytical functions of ω and ω', and not merely as functions defined from $[0, +\infty[$. Thus the limit $\eta\to 0$ should be performed only at the end of the calculation, after having performed all integrations. This is because the limit $\eta\to 0$ in general does not commute with these integrations.

APPENDIX C: THE UNRUH MODES

By definition, the "Unruh" [5] modes $\hat{\varphi}^V_\lambda$ and $\hat{\varphi}^U_\lambda$ possess the following properties: they are made of positive Minkowski frequency modes only, whatever is the sign of λ, and they are eigenfunctions of $iaV\partial_V$ (or $-iaU\partial_U$) with eigenvalue λ. They are thus well adapted to study uniformly accelerated systems since they are eigenmodes of $i\partial_\tau = \lambda$ where τ is the proper time calculated along the accelerated trajectory.

Since the Unruh modes form a complete and orthonormal basis, one can define in a canonical way the corresponding annihilation and creation operators of particles and antiparticles $\hat{a}^i_\lambda$, $\hat{a}^{i\dagger}_\lambda$, $\hat{b}^i_\lambda$, and $\hat{b}^{i\dagger}_\lambda$:

$$\hat{a}^i_\lambda = (\hat{\varphi}^i_\lambda, \Phi), \quad \hat{b}^i_\lambda = (\hat{\varphi}^i_\lambda, \Phi^\dagger), \tag{C1}$$

where the subscript i stands as before for U and V. Hence, the scalar field can be decomposed as

$$\Phi(U,V) = \sum_{i=U,V}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda(\hat{\varphi}^i_\lambda\hat{a}^i_\lambda + \hat{\varphi}^{i*}_\lambda\hat{b}^{i\dagger}_\lambda). \tag{C2}$$

Note that the integrals over λ cover the entire real axis.

The Unruh modes are analytically expressed as follows:

$$\hat{\varphi}^V_\lambda(V) \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{[a(V-i\epsilon)]^{-i\lambda/a}}{\sqrt{4\pi\lambda(1-e^{-2\pi\lambda/a})}} \tag{C3}$$

$$= \int_0^\infty d\omega\,\gamma^V_{\lambda\omega}\frac{e^{-i\omega V}}{\sqrt{4\pi\omega}}, \tag{C4}$$

with

$$\gamma^V_{\lambda\omega} \equiv (\varphi^V_\omega, \hat{\varphi}^V_\lambda) \tag{C5}$$

$$= \frac{\Gamma(-i\lambda/a)}{\sqrt{a\pi/\lambda\sinh(\pi\lambda/a)}}\left(\frac{\omega}{a}\right)^{i\lambda/a}\frac{e^{-\omega\epsilon}}{\sqrt{2\pi a\omega}}$$

$$= [(\gamma^V)^{-1}_{\lambda\omega}]^*. \tag{C6}$$

Notice that the regulator ϵ in Eqs. (C3) and (C6) plays a role similar to η in the text: ϵ is *needed* to properly define the energy density in the Rindler vacuum [22].

When considering U modes, we get similar expressions with $\gamma^{U}_{\lambda\omega}=\gamma^{V*}_{\lambda\omega}$. Finally, when evaluated along the accelerated trajectories, within the right (R) or the left (L) quadrant, U and V Unruh modes coincide and are given by, in R,

$$V=V^{R}_{\rm cl}(\tau)=e^{a\tau}/a,$$

$$U=U^{R}_{\rm cl}(\tau)=-e^{-a\tau}/a,$$

and in L,

$$V=V^{L}_{\rm cl}(\tau)=-e^{-a\tau}/a,$$

$$U=U^{L}_{\rm cl}(\tau)=e^{a\tau}/a,$$

$$\text{and}\quad \hat{\varphi}^{V}_{\lambda}(V)=\hat{\varphi}^{U}_{\lambda}(U)=\frac{e^{-i\lambda\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda(1-e^{-2\pi\lambda}/a)}}, \tag{C7}$$

$$\text{and}\quad \hat{\varphi}^{V}_{\lambda}(V)=\hat{\varphi}^{U}_{\lambda}(U)=\frac{e^{i\lambda\tau}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}}. \tag{C8}$$

[1] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London **A348**, 393 (1976).
[2] P. Grove, Class. Quantum Grav. **3**, 793 (1986).
[3] R. Parentani, Nucl. Phys. **B465**, 175 (1996).
[4] D. G. Boulware, Ann. Phys. (N.Y.) **124**, 169 (1980).
[5] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
[6] A. Higuchi, G. E. A. Matsas, and C. B. Peres, Phys. Rev. D **48**, 3731 (1993).
[7] S. Massar and R. Parentani, Phys. Rev. D **54**, 7426 (1996).
[8] P. Yi, Phys. Rev. Lett. **75**, 382 (1995); Phys. Rev. D **53**, 7041 (1996).
[9] S. Massar and R. Parentani, Phys. Rev. Lett. **78**, 4526 (1997).
[10] P. Grove, Class. Quantum Grav. **3**, 801 (1986).
[11] D. Raine, D. Sciama, and P. Grove, Proc. R. Soc. London **A435**, 205 (1991).
[12] S. Massar, R. Parentani, and R. Brout, Class. Quantum Grav. **10**, 385 (1993).
[13] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, Phys. Rep. **260**, 329 (1995).
[14] R. Carlitz and R. Willey, Phys. Rev. D **36**, 2327 (1987).
[15] N. Obadia and R. Parentani, following paper, Phys. Rev. D **67**, 024022 (2003).
[16] N. Obadia and R. Parentani, Phys. Rev. D **64**, 044019 (2001).
[17] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London **A356**, 393 (1976).
[18] W. R. Walker, Phys. Rev. D **31**, 767 (1985).
[19] U. H. Gerlach, Phys. Rev. D **59**, 104009 (1999).
[20] W. G. Unruh and R. M. Wald, Phys. Rev. D **29**, 1047 (1984).
[21] *Handbook of Mathematical Functions*, Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No. 55, edited by M. Abramovitz and I. A. Stegun (U.S. GPO, Washington, D.C., 1964).
[22] R. Parentani, Class. Quantum Grav. **10**, 1409 (1993).
[23] R. Parentani and S. Massar, Phys. Rev. D **55**, 3603 (1997).

Uniformly Accelerated Mirrors and Quantum Correlations

N. Obadia & R. Parentani

Phys.Rev. **D 67** 024022 (2003)

Uniformly accelerated mirrors. II. Quantum correlations

N. Obadia* and R. Parentani†

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, CNRS-UMR 6083, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

(Received 18 September 2002; published 21 January 2003)

We study the correlations between the particles emitted by moving mirrors. To this end, we first analyze $\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\alpha\beta}(x')\rangle$, the two-point function of the stress tensor of the radiation field. In this we generalize the work undertaken by Carlitz and Willey. To further analyze how the vacuum correlations on $\mathcal{J}^-$ are scattered by the mirror and redistributed among the pairs of particles produced, we use a more powerful approach based on the value of $T_{\mu\nu}$ which is conditional on the detection of a given particle on $\mathcal{J}^+$. We apply both methods to the fluxes emitted by a uniformly accelerated mirror. This case is particularly interesting because of its strong interferences which lead to a vanishing flux, and because of its divergences which are due to the infinite blueshift effects associated with the horizons. Using the conditional value of $T_{\mu\nu}$, we reveal the existence of correlations between the particles created and their partners in a domain where the mean fluxes and the two-point function vanish. This demonstrates that the scattering by an accelerated mirror leads to a steady conversion of vacuum fluctuations into pairs of quanta. In the last section, we study the scattering by two uniformly accelerated mirrors which follow symmetrical trajectories (i.e., which possess the same horizons). When using the Davies-Fulling model, the Bogoliubov coefficients encoding pair creation vanish because of perfectly destructive interferences. When using regularized amplitudes, these interferences are inevitably lost, thereby giving rise to pair creation.

DOI: 10.1103/PhysRevD.67.024022 PACS number(s): 04.62.+v, 03.70.+k, 04.70.Dy

INTRODUCTION

It is now well understood that the scattering of a quantum radiation field by a noninertial mirror leads to the production of pairs of particles [1–3]. However, up to now, most studies have been restricted to the analysis of mean quantities such as the expectation value of the stress tensor $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle$, i.e., the one-point function. This analysis is very restrictive in that most of the information concerning the correlations among particles is ignored. In particular, $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle$ cannot be used to identify the relationships between the particles and their partners.

In this paper, it is our intention to go beyond the mean field approach. To this end, we first study the (connected part of the) two-point function $\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\alpha\beta}(x')\rangle_c$. In this, we complete the analysis undertaken by Carlitz and Willey [4] and Wilczek [5]; see also [6,7]. Our motivations are the following. First, since $T_{\mu\nu}$ is the source of gravity, if one wishes to go beyond the semiclassical treatment, i.e., Einstein equations driven by the mean $\langle T_{\mu\nu}\rangle$, it is imperative to gain some experience concerning the two-point function since it governs the metric fluctuations about the mean background geometry [8–11]. Secondly, we wish to relate the analysis of $\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\alpha\beta}(x')\rangle_c$ to an alternative approach [12–14,3] of correlations which was used to reveal the space-time distribution of the correlations among charged pairs produced in a constant electric field and among Hawking quanta emerging from a black hole. This method is based on the value of $T_{\mu\nu}$ which is conditional on the detection of a specific quantum (or specific quanta) on $\mathcal{J}^+$. We shall show that the two approaches are closely related and that the second one is more powerful for identifying the correlations between the particles and their partners. Finally, the quantum correlations within the fluxes emitted by a mirror constitute an interesting subject *per se*.

In this respect, it is particularly interesting to study the correlations in the fluxes emitted by a uniformly accelerated mirror. Indeed, these fluxes possess, on one hand, strong interferences which lead to a vanishing mean flux and, on the other hand, very high frequencies associated with the diverging blueshift effects encountered when the mirror enters or leaves space-time. In order to tame this singular behavior, one needs to abandon the original Davies-Fulling model [1] and use a self-interacting model described by an action [15–17]. In this paper, we shall compare the two-point functions computed with the Davies-Fulling model and this self-interacting model.

Because of the strong interferences in the case of uniform acceleration, we shall see that the analysis of the two-point function is not sufficient to properly isolate the correlations among the particles produced. To complete the analysis, we therefore use the conditional value of $T_{\mu\nu}$. By an appropriate choice of the detected quantum on $\mathcal{J}^+$, we unravel correlations among the two members in a produced pair even in domains where the mean flux and the two-point function vanish. These correlations show that the scattering by a uniformly accelerated mirror leads to a steady conversion of vacuum fluctuations into pairs of particles, something which could not be seen from the expressions of the mean flux and the two-point function, which both vanish. Another nice property of this alternative approach is that the wave packet of the detected particle can be chosen in such a way that the former regularization of the scattering amplitudes is no longer necessary. We hope that this double and complementary analysis of observables in the presence of very high frequencies can lead to a better understanding of "trans-

*Email address: obadia@celfi.phys.univ-tours.fr

†Email address: parenta@celfi.phys.univ-tours.fr

 ©2003 The American Physical Society

Planckian'' physics, i.e., the fact that Hawking radiation [18–21,14,11], and cosmological density fluctuations [22,23] arise from ultrahigh energy configurations.

Finally, to illustrate the necessity of using regular scattering amplitudes, we study the scattering by two uniformly accelerated mirrors which follow symmetrical trajectories (i.e., which possess the same horizons). When using the Davies-Fulling model, the Bogoliubov coefficients governing pair creation identically vanish. This vanishing follows from perfectly destructive interferences between the two mirrors, a phenomenon related to what Gerlach [24] called a perfect interferometer, and which was also found when considering the fluxes emitted by two accelerating black holes [25,26]. When using regulated amplitudes, we show that these interferences are inevitably lost and that the total energy emitted is the sum of the energy emitted by each mirror. It thus appears that the perfect interferences are an artifact due to the oversimplification of the description of the scattering. A similar conclusion can be reached when taking into account recoil effects [15,27]. This further legitimizes the use of regulated scattering amplitudes.

We have organized the paper as follows. In Sec. I, we recall the basic properties of the self-interacting model. Section II is devoted to the study of the two-point correlation function. In Sec. III, we compute the conditional value of $T_{\mu\nu}$. In Sec. IV, we study the scattering by two uniformly accelerated mirrors. (It should be noted that this last section can be read independently of Secs. I and II as it concerns mean fluxes and not two-point functions.)

I. THE LAGRANGIAN MODEL

In [17], our aim was to obtain regular expressions for the fluxes and the energy emitted by a uniformly accelerated mirror. To this end, the scattering of the scalar field Φ by the mirror was described by a self-interacting model based on an action.

The action density is localized on the mirror trajectory $x^\mu_{\rm cl}(\tau)$ where τ is the proper time. To preserve the linearity of the scattering, the density is a quadratic form of the field Φ. Since the field is massless, infrared divergences appear in the transition amplitudes. To get rid of these problems, it is sufficient to use a density which contains two time derivatives. The interacting Lagrangian we shall use is

$$L_{\rm int}=-g_0\int d\tau\, g(\tau)\int d^2x\,\delta^2(x^\mu-x^\mu_{\rm cl}(\tau))\times\frac{dx^\mu_{\rm cl}}{d\tau}\frac{dx^\nu_{cl}}{d\tau}(\partial_\mu\Phi^\dagger\,\partial_\nu\Phi+\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi^\dagger) \tag{1}$$

$$=-g_0\int d\tau\, g(\tau)(\partial_\tau\Phi^\dagger\,\partial_\tau\Phi+\partial_\tau\Phi\,\partial_\tau\Phi^\dagger).$$

Here, g_0 is the coupling constant. The real function $g(\tau)$ controls the time dependence of the interaction. When the interaction lasts $2T$, its normalization is given by $\int d\tau g(\tau)=2T$. The two terms in the parentheses imply that $L_{\rm int}$ is chargeless. Hence the transition amplitudes will be invariant under charge conjugation.

We work in the interacting picture. Therefore, the charged field evolves freely, i.e., according to the d'Alembert equation

$$\Box\Phi(t,z)=4\partial_U\partial_V\Phi(U,V)=0. \tag{2}$$

Since the field is massless, it is useful to use the lightlike coordinates $U,V=t\mp z$. The free field Φ can be decomposed as

$$\Phi(U,V)=\int_0^\infty\frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}}(a^U_\omega e^{-i\omega U}+a^V_\omega e^{-i\omega V}+b^{U\dagger}_\omega e^{i\omega U}+b^{V\dagger}_\omega e^{i\omega V}). \tag{3}$$

The annihilation and creation operators of left and right moving particles (and antiparticles) are constant and obey the usual commutation relations

$$[a^i_\omega,a^{j\dagger}_{\omega'}]=\delta^{ij}\delta(\omega-\omega'),\quad [b^i_\omega,b^{j\dagger}_{\omega'}]=\delta^{ij}\delta(\omega-\omega'), \tag{4}$$

where the indices i,j stand for U and V. All other commutators vanish. In the interacting picture, the states evolve through the action of the time-ordered operator $Te^{iL_{\rm int}}$. When the initial state is vacuum, the state on $\mathcal{J}^+$ is given, up to second order in g_0, by

$$Te^{iL_{\rm int}}|0\rangle=|0\rangle+iL_{\rm int}|0\rangle+\frac{(iL_{\rm int})^2}{2}|0\rangle+|D\rangle. \tag{5}$$

The ket $|D\rangle$ contains terms arising from time ordering. These terms do not contribute to the total energy emitted (see [16]). Hence we drop $|D\rangle$ from now on.

When working in the vacuum, to obtain the mean flux $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ and the two-point function $\langle T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\rangle$ to order g_0^2, it is sufficient to develop the scattering amplitudes to first order in g_0. To this order, the amplitude describing the scattering of an incoming quantum of frequency ω' to an outgoing of frequency ω is given by

$$A^{ij*}_{\omega\omega'}\equiv\langle 0|a^i_\omega(1+iL_{\rm int})a^{j\dagger}_{\omega'}|0\rangle_c, \tag{6}$$

where the subscript $\langle\rangle_c$ means that only the connected graphs are kept. Similarly, the spontaneous pair production amplitude reads

$$B^{ij}_{\omega\omega'}\equiv\langle 0|a^i_\omega b^j_{\omega'}iL_{\rm int}|0\rangle. \tag{7}$$

Both nonlocal and local objects are easily obtained in terms of A and B. For instance, to order g_0^2, the mean number of spontaneously created left moving particles of frequency ω is given by

$$\langle N^V_\omega\rangle\equiv\langle 0|L_{\rm int}a^{V\dagger}_\omega a^V_\omega L_{\rm int}|0\rangle=\int_0^\infty d\omega'(|B^{VV}_{\omega\omega'}|^2+|B^{VU}_{\omega\omega'}|^2). \tag{8}$$

Then, the (subtracted) integrated energy is, as usual,

$$\langle H^V\rangle = 2\int_0^\infty d\omega\,\omega\langle N^V_\omega\rangle. \tag{9}$$

The factor of 2 stands for particles + antiparticles, which contribute equally. One can also compute the local flux of energy. The corresponding operator is $T_{VV}=\partial_V\Phi^\dagger\,\partial_V\Phi+\partial_V\Phi\,\partial_V\Phi^\dagger$. Its vacuum expectation value is given by

$$\begin{aligned}\langle T_{VV}(V)\rangle &\equiv \langle 0|e^{-iL_{\rm int}}T_{VV}e^{iL_{\rm int}}|0\rangle_c - \langle 0|T_{VV}|0\rangle \\ &= 2\sum_{j=U,V}\int\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}e^{-i(\omega'-\omega)V} \\ &\quad\times\left(\int_0^\infty dk\,B^{Vj}_{\omega k}{}^{*}B^{Vj}_{\omega' k}\right) \\ &\quad -2\,{\rm Re}\left\{\sum_{j=U,V}\int\int_0^\infty d\omega\,d\omega'\frac{\sqrt{\omega\omega'}}{2\pi}e^{-i(\omega'+\omega)V}\right. \\ &\quad\left.\times\left(\int_0^\infty dk\,A^{Vj}_{\omega k}{}^{*}B^{Vj}_{\omega' k}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{10}$$

We have subtracted the average value of T_{VV} in the vacuum in order to remove the zero point energy. When integrated over all V, the first term of Eq. (10) determines the (positive) energy $\langle H^V\rangle$ of Eq. (9). The second term clearly integrates to 0.

The above model can easily be related to the original Davies-Fulling one [1,2], where the field obeys

$$\Box\Phi(U,V)=0 \quad \text{and} \quad \Phi(V,V_{\rm cl}(U))=0, \tag{11}$$

where $V_{\rm cl}(U)$ is the mirror trajectory expressed in null coordinates. On the right of the trajectory, the Bogoliubov coefficients are given by the overlaps between initial V modes of frequency ω defined on $\mathcal{J}^-_R$ and out modes of frequency ω' defined on $\mathcal{J}^+_R$:

$$\alpha^*_{\omega\omega'}\equiv(\varphi^{U,\rm out}_\omega,\varphi^{V,\rm in}_{\omega'})=-\int_{-\infty}^{+\infty}dU\frac{e^{i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}}i\overleftrightarrow{\partial}_U\frac{e^{-i\omega' V_{\rm cl}(U)}}{\sqrt{4\pi\omega'}}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\beta^*_{\omega\omega'}&\equiv(\varphi^{U,\rm out}_\omega{}^{*},\varphi^{V,\rm in}_{\omega'}) \\ &=-\int_{-\infty}^{+\infty}dU\frac{e^{-i\omega U}}{\sqrt{4\pi\omega}}i\overleftrightarrow{\partial}_U\frac{e^{-i\omega' V_{\rm cl}(U)}}{\sqrt{4\pi\omega'}}.\end{aligned} \tag{13}$$

Two properties are worth remembering. In the Davies-Fulling model, when starting from vacuum, the flux of energy emitted by the mirror is given by Eq. (10) with $A^{VU}_{\omega\omega'}$ and $B^{VU}_{\omega\omega'}$, respectively, replaced by $\alpha_{\omega\omega'}$ and $\beta_{\omega\omega'}$, and $A^{VV}_{\omega\omega'}, B^{VV}_{\omega\omega'}$ sent to zero. Secondly, $A^{UV}_{\omega\omega'}=ig_0\alpha_{\omega\omega'}$ and $B^{UV}_{\omega\omega'}=-ig_0\beta_{\omega\omega'}$ for all trajectories $V=V_{\rm cl}(U)$ when using $\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial}_\tau\Phi$ instead of $\partial_\tau\Phi^\dagger\partial_\tau\Phi+\partial_\tau\Phi\partial_\tau\Phi^\dagger$ in Eq. (1) and when putting $g(\tau)=1$, see [17] for more details.

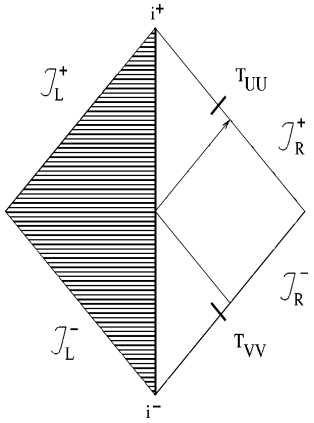

FIG. 1. The Penrose diagram of space-time around an inertial mirror. Since we are concerned with the correlations between $\mathcal{J}^-_R$ and $\mathcal{J}^+_R$, the dashed region is of no interest.

As shown in this reference, these two properties guarantee that $\langle T_{VV}(V)\rangle$ behave similarly whether one uses the Lagrangian or the Davies-Fulling model to describe the scattering. It is only for trajectories that lead to singular fluxes when using the Davies-Fulling model that the two descriptions can significantly differ because the coupling function $g(\tau)$ in Eq. (1) can be chosen so as to obtain regular expressions.

II. THE TWO-POINT CORRELATION FUNCTION

To analyze the quantum correlations among the particles emitted by the mirror, we first study the two-point function of $T_{\mu\nu}$. Given the Lagrangian defined in Eq. (1), when a U quantum is detected on $\mathcal{J}^+_R$ (the right-hand side of $\mathcal{J}^+$; see Fig. 1), its partner can be either a U or a V quantum, emitted, respectively, toward $\mathcal{J}^+_R$ or $\mathcal{J}^+_L$.

In this section, for reasons of simplicity, we mainly focus on U/V correlations and study the two-point function $\langle T_{UU}T_{VV}\rangle_c$. Indeed, in the absence of the mirror, these correlations vanish. Hence, if $\langle T_{UU}T_{VV}\rangle_c\neq 0$, it results from the scattering and not from preexisting correlations which exist in the vacuum (see Sec. II A). This is not the case for $\langle T_{VV}T_{VV}\rangle_c$ which originates both from the scattering and from preexisting correlations. Moreover, since these two channels interfere, the expressions are much more complicated.

A. Initial correlations on $\mathcal{J}^-$, before the scattering

On $\mathcal{J}^-_R$, when the trajectory does not enter space through it, the field is unscattered. Therefore, when working in the vacuum, the two-point function is given by

$$\begin{aligned}C_{\rm vac}(V,V')&\equiv\langle 0|T_{VV}(U=-\infty,V)T_{VV}(U'=-\infty,V')|0\rangle_c \\ &=[2\partial_V\partial_{V'}W_{\rm vac}(V,V')]^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(V-V'-i\epsilon)^4},\end{aligned} \tag{14}$$

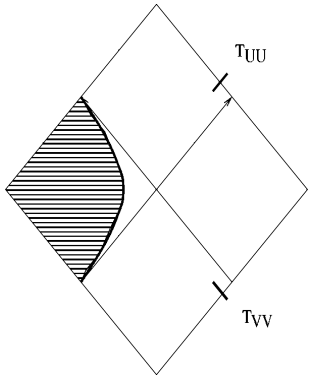

FIG. 2. The Penrose diagram of space-time around a uniformly accelerated mirror in the left Rindler wedge. As before, we consider only configurations on the right of the trajectory.

where the subscript c means that only connected graphs are kept and where $W_{\rm vac}(V,V')$ is the V part of the vacuum Wightman function

$$W_{\rm vac}(V,V') \equiv \langle 0|\Phi(U=-\infty,V)\Phi^\dagger(U'=-\infty,V')|0\rangle = -\frac{1}{4\pi}\ln(V-V'-i\epsilon). \quad (15)$$

Equation (14) is valid for the Davies-Fulling model and for the Lagrangian model. It applies both for an inertial and for a uniformly accelerated mirror in L, since the past null infinity $\mathcal{J}_R^-$ lies on the past of the mirror (see Fig. 2). Had the mirror entered space through $\mathcal{J}_R^-$, a prescription should have been adopted to define the in vacuum on $\mathcal{J}_R^-$ in the presence of a mirror (see Sec. I B in [17]).

B. Correlations between $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$

When the field is initially in vacuum, the correlations between $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$ are governed by the (connected) two-point function

$$C^{+/-}(U,V') \equiv \langle 0|T_{UU}(U,V=+\infty)T_{VV}(U'=-\infty,V')|0\rangle_c . \quad (16)$$

In this expression, written in the Heisenberg picture, only T_{UU} is evaluated on $\mathcal{J}^+$. Hence, in the interacting picture, $C^{+/-}(U,V')$ is given by

$$C^{+/-}(U,V') \equiv \langle 0|e^{-iL_{\rm int}}T_{UU}(U)e^{iL_{\rm int}}T_{VV}(V')|0\rangle_c , \quad (17)$$

where T_{UU} and T_{VV} are now expressed in terms of the free field of Eq. (3). To second order in the coupling constant and when neglecting again the $|D\rangle$ term of Eq. (5), we get

$$C^{+/-}(U,V') = \langle 0|L_{\rm int}T_{UU}L_{\rm int}T_{VV}|0\rangle_c - \frac{1}{2}\langle 0|(L_{\rm int}L_{\rm int}T_{UU}+T_{UU}L_{\rm int}L_{\rm int})T_{VV}|0\rangle_c . \quad (18)$$

To compute this expression, it is convenient to introduce the functions

$$F(U,V') \equiv i\langle 0|\partial_U\Phi(U)\partial_{V'}\Phi^\dagger(V')L_{\rm int}|0\rangle \quad (19)$$

$$= -\int\int_0^\infty d\omega\, d\omega' \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}B^{UV}_{\omega\omega'}e^{-i(\omega U+\omega' V')} \quad (20)$$

and

$$G(U,V') \equiv i\langle 0|\partial_U\Phi(U)L_{\rm int}\partial_{V'}\Phi^\dagger(V')|0\rangle \quad (21)$$

$$= \int\int_0^\infty d\omega\, d\omega' \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{4\pi}A^{UV*}_{\omega\omega'}e^{-i(\omega U-\omega' V')}. \quad (22)$$

From these equations, we see that F is expressed in terms of the pair production amplitude B whereas G is a function of the scattering amplitude A. Using Eqs. (19) and (21), one can rewrite the correlation function in the following form:

$$C^{+/-}(U,V') = [F^*(U,V')+G(U,V')]^2. \quad (23)$$

Before applying Eq. (23) to inertial and accelerated trajectories, it is interesting to compute Eq. (16) in the Davies-Fulling model. In this case, one gets

$$C^{+/-}_{\rm DF}(U,V') = 2[\partial_U\partial_{V'}W^{+/-}_{\rm DF}(U,V')]^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{(dV_{\rm cl}/dU)^2}{[V_{\rm cl}(U)-V'-i\epsilon]^4}, \quad (24)$$

where the relevant part of the scattered Wightman function is given by

$$W^{+/-}_{\rm DF}(U,V') = \langle 0|\Phi(U,V=+\infty)\Phi^\dagger(U'=-\infty,V')|0\rangle = \frac{1}{4\pi}\ln[V_{\rm cl}(U)-V'-i\epsilon]. \quad (25)$$

Equations (23) and (24) show that the two-point function is not real. In this regard, it is worth making the following remarks. First we note that $C^{+/-}_{\rm DF}$ diverges only when $V' \to V_{\rm cl}(U)$, i.e., at the classical image point. Similarly, we shall see that $C^{+/-}$ of Eq. (23) also diverges in this limit but is otherwise finite. The fact that no regularization is needed to evaluate it follows from the fact that only connected graphs have been kept in Eq. (17).

Secondly, we note that the imaginary character of $C^{+/-}_{\rm DF}$ arises only from its singular limit. The sign of ϵ encodes the fact that only positive frequencies enter in the Wightman function Eq. (15). Therefore, on one hand, the limit $\epsilon \to 0$ can be taken when evaluating the two-point functions when $V' \neq V_{\rm cl}(U)$. On the other hand, however, the $i\epsilon$ prescription must be kept when using $C^{+/-}$ to obtain the correlations of integrated operators, e.g., $\langle H^U T_{VV}\rangle$ where $H^U = \int dU T_{UU}$. Indeed, the definition of the integral over U requires that the limit $\epsilon \to 0$ be taken after having performed the integral; see [28], where it is shown that the same procedure should be

used to properly evaluate the energy in the Rindler vacuum. In this sense, the two-point functions should be viewed as distributions.

1. Inertial mirror

In the case of an inertial mirror, the canonical[1] trajectory reads $V_{\rm cl}(U)=U$. The corresponding space-time diagram is pictured in Fig. 1. In the Davies-Fulling model, using Eq. (24), the two-point function reads

$$C^{+/-}_{\rm DF,inert}(U,V')=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(U-V'-i\epsilon)^4}. \tag{26}$$

The small distance divergence comes from the vacuum configurations emerging from $\mathcal{J}^-_R$ at V' and which have been reflected on the mirror at $V'=V_{\rm cl}(U)=U$. We therefore recover the divergence which existed in the vacuum on $\mathcal{J}^-$ [see Eq. (14)].

To compute the corresponding two-point function in the Lagrangian model, we use Eq. (23). Equations (19) and (21) applied to the inertial trajectory give

$$\begin{aligned}F_{\rm inert}(U,V')&=-2ig_0\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,g(t)\partial_U\partial_t W_{\rm vac}(U,t)\partial_{V'}\partial_t W_{\rm vac}(V',t)\\&=\frac{-2ig_0}{(4\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,g(t)\frac{1}{(U-t-i\epsilon)^2}\frac{1}{(V'-t-i\epsilon)^2},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}G_{\rm inert}(U,V')&=-2ig_0\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,g(t)\partial_U\partial_t W_{\rm vac}(U,t)\partial_t\partial_{V'} W_{\rm vac}(t,V')\\&=\frac{-2ig_0}{(4\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,g(t)\frac{1}{(U-t-i\epsilon)^2}\frac{1}{(t-V'-i\epsilon)^2}.\end{aligned} \tag{28}$$

To obtain local expressions for $F_{\rm inert}$ and $G_{\rm inert}$, we express $g(t)$ with its Fourier components and perform the integrations over t by the method of residues. Since the Minkowski vacuum contains only positive frequency, it is appropriate to decompose $g(t)$ as $g(t)=g_+(t)+g_-(t)$ where g_+ contains only positive frequencies:

$$g_+(t)=\int_0^\infty d\omega\, g_\omega e^{-i\omega t}$$

with

$$g_\omega\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,g(t)e^{i\omega t}. \tag{29}$$

Then we get

$$F_{\rm inert}(U,V')=-\frac{g_0}{4\pi}\left[\partial_U\left(\frac{g_+(U)}{(U-V'-i\epsilon)^2}\right)+\partial_{V'}\left(\frac{g_+(V')}{(V'-U-i\epsilon)^2}\right)\right], \tag{30}$$

$$G_{\rm inert}(U,V')=-\frac{g_0}{4\pi}\left[\partial_U\left(\frac{g_+(U)}{(U-V'-i\epsilon)^2}\right)-\partial_{V'}\left(\frac{g_-(V')}{(V'-U+i\epsilon)^2}\right)\right]. \tag{31}$$

To obtain the value of $C^{+/-}_{\rm inert}(U,V')$ off the image point $U=U_{\rm cl}(V')=V'$, we can take the limit $\epsilon\to0$. Using Eq. (23), we get

$$C^{+/-}_{\rm inert}(U,V')|_{\epsilon=0}=\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[\partial_U\left(\frac{g(U)}{(U-V')^2}\right)\right]^2, \tag{32}$$

where $\Theta(U)$ is the Heaviside function. Two remarks should be made. On one hand, when $g(t)\equiv1$, one recovers Eq. (26) up to two differences. The first one is the g_0^2 prefactor due to the perturbative expansion. The second one is the power of the pole (of order 6 instead of 4). This discrepancy arises from the fact that we have taken a Lagrangian with two time derivatives [see Eq. (1)]. Had we taken the current $J=\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial_\tau}\Phi$ instead of $\partial_\tau\Phi^\dagger\partial_\tau\Phi+\partial_\tau\Phi\,\partial_\tau\Phi^\dagger$, we would have obtained a fourth order pole in Eq. (32). However, in that case, the expressions in the Fourier transform, i.e., Eqs. (20) and (22), would have been divergent in the low frequency limit.

On the other hand, when $g(t)$ possesses a compact support, the correlator identically vanishes, as it should do by causality, when the *outgoing* configurations (here the U configurations) lie outside the support of $g(t)$, i.e., when they cross the trajectory without being scattered by the mirror. Hence, unlike in the Davies-Fulling model, $C^{+/-}_{\rm inert}(U,V')$ is not symmetric in U,V'.

2. Classical scattering by a uniformly accelerated mirror

We first look at classically reflected configurations, i.e., at configurations that have support for $V'<0$ and $U>0$ when the uniformly accelerated trajectory follows $V_{\rm cl}(U)=-1/a^2U$ in the left Rindler wedge (see Fig. 2). This situation corresponds to what we just analyzed for an inertial trajectory.

In the Davies-Fulling model, the relevant part of the Wightman function, Eq. (25), is given by

$$W^{+/-}_{\rm DF,unif\,acc}(U,V')=\frac{1}{4\pi}\Theta(U)\ln[-1/(a^2U)-V'-i\epsilon]. \tag{33}$$

Then, Eq. (24) gives

[1]Generally, inertial trajectories read $V_{\rm cl}(U)=|\xi|(U-U_0)+V_0$. They all provide the same two-point functions by applying $U'=\sqrt{|\xi|}(U-U_0)$, $V'=(V-V_0)/\sqrt{|\xi|}$.

$$C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(U,V')=\frac{1}{4\pi^2}\Theta(U)\frac{(1/a^2U^2)^2}{[-1/(a^2U)-V'-i\epsilon]^4}, \tag{34}$$

up to an ill-defined singular contribution on $U=0$. Using the Rindler coordinates

$$v'_L=-\frac{1}{a}\ln(-aV') \quad \text{and} \quad u_L=\frac{1}{a}\ln(aU), \tag{35}$$

the "Rindler" correlation function is

$$\begin{aligned} C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(u_L,v'_L)&\equiv\langle T_{uu}(u_L)T_{vv}(v'_L)\rangle \\ &=\left(\frac{dU}{du_L}\right)^2\left(\frac{dV'}{dv'_L}\right)^2 C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(U,V') \\ &=\left[\frac{a^2}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-v'_L-i\epsilon)/2]}\right]^2. \end{aligned} \tag{36}$$

When comparing this expression[2] to that of an inertial trajectory, Eq. (26), one finds the following correspondence: Eq. (36) is exactly the expression one would have obtained for $C^{+/-}_{\mathrm{DF}}$ in the case of an inertial mirror in a thermal bath with $T=a/2\pi$ (see [5]). This is no surprise since the scattering of Rindler modes by an accelerated mirror is identical (in fact trivial when using the Davies-Fulling model) to the scattering of Minkowski modes by an inertial mirror, and since the two-point function W_{vac} of Eq. (15) is thermal when expressed in terms of Rindler coordinates. We shall now verify that the same correspondence applies to the Lagrangian model.

When applying this model to the uniformly accelerated trajectory, Eqs. (19) and (21) give

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&\frac{-2ig_0a^4}{(16\pi)^2}e^{a(v'_L-u_L)}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau) \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-\tau-i\epsilon)/2]} \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(v'_L-\tau-i\epsilon)/2]}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$C^{+/-}_{\mathrm{DF,CW}}(U,v'_L)=\left[\frac{\kappa^2}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2[\kappa(U-v'_L-i\epsilon)/2]}\right]^2. \tag{37}$$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&\frac{-2ig_0a^4}{(16\pi)^2}e^{a(v'_L-u_L)}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau) \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-\tau-i\epsilon)/2]} \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(\tau-v'_L-i\epsilon)/2]}. \end{aligned} \tag{39}$$

As in the inertial case, one can perform the integrals when using the following decomposition:

$$\frac{1}{\sinh^2(x)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^2}, \tag{40}$$

and by introducing the function

$$\bar{g}_+(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\,\frac{g_\lambda e^{-i\lambda\tau}}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}$$

with

$$g_\lambda\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau)e^{i\lambda\tau}, \tag{41}$$

and $\bar{g}_-(\tau)=\bar{g}^*_+(\tau)$. We get

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&-\frac{g_0}{4\pi}\frac{a^2}{4}e^{a(v'_L-u_L)} \\ &\times\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\bar{g}_+(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L-i\epsilon)]}\right)\right. \\ &\left.+\partial_{v'_L}\left(\frac{\bar{g}_+(v'_L)}{\sinh^2[(a/2)(v'_L-u_L-i\epsilon)]}\right)\right], \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&-\frac{g_0}{4\pi}\frac{a^2}{4}e^{a(v'_L-u_L)} \\ &\times\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\bar{g}_+(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L-i\epsilon)]}\right)\right. \\ &\left.-\partial_{v'_L}\left(\frac{\bar{g}_-(v'_L)}{\sinh^2[(a/2)(v'_L-u_L+i\epsilon)]}\right)\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Since $\bar{g}_+(\tau)+\bar{g}_-(\tau)=g(\tau)$, when taking the limit $\epsilon\to0$, the correlation function reads

$$C^{+/-}_{\mathrm{unif\ acc}}(u_L,v'_L)=\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{a^2}{4}\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L)]}\right)\right]^2, \tag{44}$$

[2]We note that a similar expression has been obtained by Carlitz and Willey [4] in the case of the trajectory $-\kappa U=\ln[-\kappa V_{\mathrm{cl}}(U)]$. When defining $-\kappa v'_L=\ln(-\kappa V')$ for $V'<0$, their result reads

$$C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(U,V')=\frac{1}{4\pi^2}\Theta(U)\frac{(1/a^2U^2)^2}{[-1/(a^2U)-V'-i\epsilon]^4}, \tag{34}$$

up to an ill-defined singular contribution on $U=0$. Using the Rindler coordinates

$$v'_L=-\frac{1}{a}\ln(-aV') \quad \text{and} \quad u_L=\frac{1}{a}\ln(aU), \tag{35}$$

the "Rindler" correlation function is

$$\begin{aligned} C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(u_L,v'_L)&\equiv\langle T_{uu}(u_L)T_{vv}(v'_L)\rangle \\ &=\left(\frac{dU}{du_L}\right)^2\left(\frac{dV'}{dv'_L}\right)^2 C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(U,V') \\ &=\left[\frac{a^2}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-v'_L-i\epsilon)/2]}\right]^2. \end{aligned} \tag{36}$$

When comparing this expression[2] to that of an inertial trajectory, Eq. (26), one finds the following correspondence: Eq. (36) is exactly the expression one would have obtained for $C^{+/-}_{\mathrm{DF}}$ in the case of an inertial mirror in a thermal bath with $T=a/2\pi$ (see [5]). This is no surprise since the scattering of Rindler modes by an accelerated mirror is identical (in fact trivial when using the Davies-Fulling model) to the scattering of Minkowski modes by an inertial mirror, and since the two-point function W_{vac} of Eq. (15) is thermal when expressed in terms of Rindler coordinates. We shall now verify that the same correspondence applies to the Lagrangian model.

When applying this model to the uniformly accelerated trajectory, Eqs. (19) and (21) give

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&\frac{-2ig_0a^4}{(16\pi)^2}e^{a(v'_L-u_L)}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau) \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-\tau-i\epsilon)/2]} \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(v'_L-\tau-i\epsilon)/2]}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$C^{+/-}_{\mathrm{DF,CW}}(U,v'_L)=\left[\frac{\kappa^2}{8\pi}\frac{1}{\sinh^2[\kappa(U-v'_L-i\epsilon)/2]}\right]^2. \tag{37}$$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&\frac{-2ig_0a^4}{(16\pi)^2}e^{a(v'_L-u_L)}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau) \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-\tau-i\epsilon)/2]} \\ &\times\frac{1}{\sinh^2[a(\tau-v'_L-i\epsilon)/2]}. \end{aligned} \tag{39}$$

As in the inertial case, one can perform the integrals when using the following decomposition:

$$\frac{1}{\sinh^2(x)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-in\pi)^2}, \tag{40}$$

and by introducing the function

$$\bar{g}_+(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\,\frac{g_\lambda e^{-i\lambda\tau}}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}$$

with

$$g_\lambda\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau)e^{i\lambda\tau}, \tag{41}$$

and $\bar{g}_-(\tau)=\bar{g}^*_+(\tau)$. We get

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&-\frac{g_0}{4\pi}\frac{a^2}{4}e^{a(v'_L-u_L)} \\ &\times\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\bar{g}_+(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L-i\epsilon)]}\right)\right. \\ &\left.+\partial_{v'_L}\left(\frac{\bar{g}_+(v'_L)}{\sinh^2[(a/2)(v'_L-u_L-i\epsilon)]}\right)\right], \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{unif\ acc}}(U,V')=&-\frac{g_0}{4\pi}\frac{a^2}{4}e^{a(v'_L-u_L)} \\ &\times\left[\partial_{u_L}\left(\frac{\bar{g}_+(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L-i\epsilon)]}\right)\right. \\ &\left.-\partial_{v'_L}\left(\frac{\bar{g}_-(v'_L)}{\sinh^2[(a/2)(v'_L-u_L+i\epsilon)]}\right)\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Since $\bar{g}_+(\tau)+\bar{g}_-(\tau)=g(\tau)$, when taking the limit $\epsilon\to0$, the correlation function reads

$$C^{+/-}_{\mathrm{unif\ acc}}(u_L,v'_L)=\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{a^2}{4}\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L)]}\right)\right]^2, \tag{44}$$

[2]We note that a similar expression has been obtained by Carlitz and Willey [4] in the case of the trajectory $-\kappa U=\ln[-\kappa V_{\mathrm{cl}}(U)]$. When defining $-\kappa v'_L=\ln(-\kappa V')$ for $V'<0$, their result reads

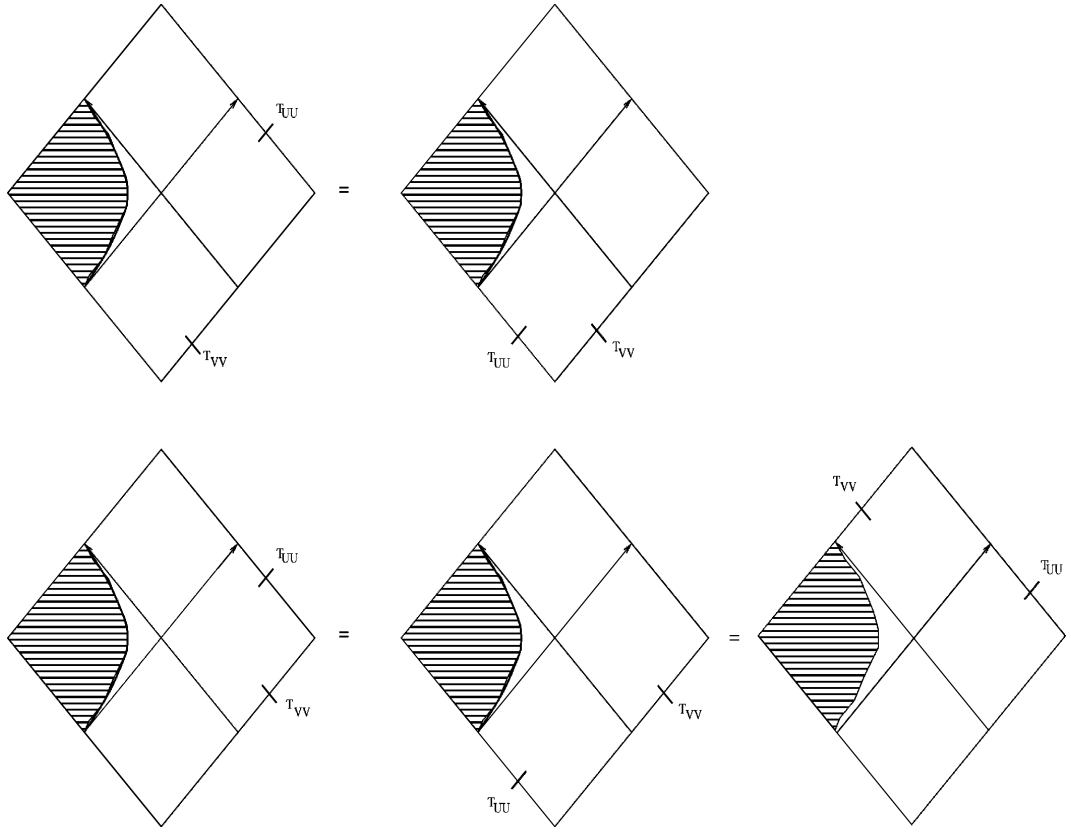

FIG. 3. In these Penrose diagrams, we show the equivalence between the correlations between $\mathcal{J}_R^-$ and $\mathcal{J}_R^+$ with $U<0$ and those between $\mathcal{J}_R^-$ and $\mathcal{J}_L^-$. Since the latter identically vanish, so do the former. This is also the case in the fifth diagram which represents U/V correlations on $\mathcal{J}^+$ when $U<0$ (see Sec. II C).

as expected from Eq. (32) and the correspondence between accelerated systems described in Rindler coordinates and inertial systems in a thermal bath.

Moreover, when $g(\tau)$ is a constant, we recover that the only differences between the two-point functions obtained in the Davies-Fulling model and in the Lagrangian model concern the g_0^2 prefactor and the additional proper time derivative. In fact these relations are generic since they directly follow from the fact that, when $g(\tau)$ is a constant, the scattering amplitudes of Eqs. (6) and (7) are proportional to the Bogoliubov coefficients obtained in the Davies-Fulling model [see Eqs. (33) in [16]].

3. Other correlations on the right of an accelerated mirror

When the mirror is uniformly accelerated, in addition to the ''classical'' scattering analyzed above, there exist three other sectors since both $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$ cover two Rindler patches.

Let us first examine the trivial correlations between $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$. They are obtained for $U<0$ and any V', i.e., below the past horizon of the mirror (see Fig. 3). Not surprisingly, these correlations identically vanish. Indeed, causality tells us that these correlations are equal to the (null) correlations between U and V vacuum configurations evaluated on $\mathcal{J}^-$:

$$C^{+/-}(U<0,V')=C^{-/-}(U<0,V')=0. \tag{45}$$

The last and most interesting case corresponds to the correlations between $U>0$ and $V'>0$. In the Davies-Fulling model, the correlation function is again given by Eq. (34). Indeed, the Wightman function given in Eq. (25) is valid for any V'. Then, given the Rindler coordinate on the other side of the horizon $V=0$,

$$v_R'=\frac{1}{a}\ln(aV'), \tag{46}$$

one can rewrite the correlation function in the following way:

$$C^{+/-}_{\mathrm{DF,unif\ acc}}(u_L,v_R')=\left[\frac{a^2}{8\pi}\frac{1}{\cosh^2[(a/2)(v_R'+u_L)]}\right]^2. \tag{47}$$

This result can be obtained by analytically continuing Eq. (34) according to $V'\to V'e^{-i\pi}$. It is the $i\epsilon$ prescription which specifies that the continuation should be performed in the lower plane. In terms of Rindler coordinates, it amounts to applying $v_L\to -v_R+i\pi/a$ in Eq. (36). This analytical

continuation also applies to the Unruh modes [3] and follows from the fact that the Minkowski vacuum contains positive frequencies only.[3]

In the interacting model, since $V'>0$ lies in a disconnected region for the trajectory, the field expressed at this point commutes with the Lagrangian. Hence, one has

$$F(U>0,V'>0)=G(U>0,V'>0)$$
$$=\frac{-2ig_0a^4}{(16\pi)^2}e^{-a(v'_R+u_L)}\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\, g(\tau)\times\frac{1}{\sinh^2[a(u_L-\tau-i\epsilon)/2]}\times\frac{1}{\cosh^2[a(v'_R+\tau-i\epsilon)/2]}. \quad (49)$$

Thus, Eq. (23) gives

$$C^{+/-}_{\text{unif acc}}(U>0,V'>0)=4\{\text{Re}[F(U>0,V'>0)]\}^2, \quad (50)$$

which is real, like $C^{+/-}_{\text{DF}}$ in Eq. (47). The corresponding Rindler two-point function is given by

$$C^{+/-}_{\text{unif acc}}(u_L,v'_R)=\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\times\left[\frac{a^2}{4}\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\cosh^2[(a/2)(u_L+v'_R)]}\right)\right]^2. \quad (51)$$

It is interesting to notice that Eq. (51) could have been obtained in two different ways. On one hand, Eq. (51) follows from Eq. (47) by applying the generic relations between the two models. On the other hand, Eq. (51) could have been obtained from Eq. (44) because the (regularized) scattering amplitudes [see Eq. (A7)] obey crossing symmetry which follows from the stability of the Minkowski vacuum and which allows one to deform the integral over ω' so as to obtain Eq. (49).

Since Eqs. (47) and (51) do not concern the classical reflection on the mirror, they never diverge. In fact, they are expressed only in terms of pair creation coefficients which decrease in the ultraviolet regime like $B^{VU}_{\omega\omega'}\sim e^{-\sqrt{\omega\omega'}/a}$. Nevertheless, they are peaked around $u_L+v'_R=0$ with a spread governed by $1/a$. This locus corresponds to $V=-V_{\text{cl}}(U)$. This maximum indicates that the configurations which give rise to the "partner" of an outgoing quantum, found for $U>0$, are vacuum configurations which are symmetrically distributed on the other side of the horizon (see Fig. 4).

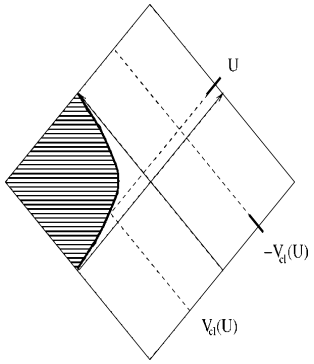

FIG. 4. This diagram illustrates the fact that the correlations between T_{UU} and T_{VV} when $U>0$ and $V'>0$ are peaked around $V=-V_{\text{cl}}(U)$, that is, on the other side of the horizon at $V=0$, and symmetrically with respect to the locus of classical reflection given by $V=V_{\text{cl}}(U)$ [see Eqs. (47) and (51)]. The diagram also illustrates the fact that, by causality, $C^{+/+}$ of Eq. (59) is equal to $C^{+/-}$ of Eq. (47) when $U>0$ and $V'>0$.

This result is somehow paradoxical in the case of a uniformly accelerated mirror because it indicates that pairs are steadily produced (in terms of the proper time) in a domain where the mean flux $\langle T_{UU}\rangle$ vanishes (instead, the steady character of Eq. (48) causes no surprise since the corresponding $\langle T_{UU}\rangle$ is thermal and constant [4]). To clarify the situation, we shall analyze in Sec. III the correlations between U and V configurations by using the alternative method based on the conditional value of $T_{\mu\nu}$. Before doing so, it is interesting to analyze the correlations between $\mathcal{J}^+_R$ and $\mathcal{J}^+_L$.

C. The correlations on $\mathcal{J}^+$

We now look at the U/V correlations on $\mathcal{J}^+$, that is,

$$C^{+/+}(U,V')\equiv\langle 0|T_{UU}(U,V=+\infty)T_{VV}(U'=+\infty,V')|0\rangle_c. \quad (52)$$

In the interacting picture, the two-point function reads

$$C^{+/+}(U,V')=\langle 0|e^{-iL_{\text{int}}}T_{UU}(U)T_{VV}(V')e^{iL_{\text{int}}}|0\rangle_c. \quad (53)$$

To second order in g_0, we get

$$C^{+/+}(U,V')=\langle 0|L_{\text{int}}T_{UU}T_{VV}L_{\text{int}}|0\rangle_c - \text{Re}[\langle 0|T_{UU}T_{VV}L_{\text{int}}L_{\text{int}}|0\rangle_c]. \quad (54)$$

Notice that the second term behaves like the second term in the mean flux [see Eq. (10)]: it vanishes when integrated over V' (or U). Moreover, when applied to an accelerated mirror it leads to a vanishing $C^{+/+}(U,V')$ [as the second term in Eq. (10) leads to a vanishing mean flux] when the coupling is constant and when U and V' are both in the causal future of the mirror.

[3]This continuation also applies for the trajectory $\kappa U=-\ln(-\kappa V)$ for $V<0$. When defining $\kappa v'_R=\ln(\kappa V')$ for $V'>0$, Carlitz and Willey noticed that

$$C^{+/-}_{\text{DF,CW}}(U,v'_R)=\left[\frac{\kappa^2}{8\pi}\frac{1}{\cosh^2[\kappa(U+v'_R)/2]}\right]^2 \quad (48)$$

is the analytical continuation of Eq. (37).

Equation (54) guarantees that $C^{+/+}$ is real and only depends on F defined in Eq. (19):

$$C^{+/+}(U,V') = [F^*(U,V') + F(U,V')]^2 = 4\{\mathrm{Re}[F(U,V')]\}^2. \quad (55)$$

Since it arises only from pair creation amplitudes, this guarantees that it is finite, as for Eq. (51). When the trajectory is inertial, Eq. (30) gives

$$C^{+/+}_{\mathrm{inert}}(U,V') = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[\partial_U\left(\frac{g(U)}{(U-V')^2}\right) + \partial_{V'}\left(\frac{g(V')}{(V'-U)^2}\right)\right]^2. \quad (56)$$

When $g(t)$ is constant, $C^{+/+}_{\mathrm{inert}}$ vanishes for every couple of points (U,V'). This is as it should be: inertial systems do not radiate when their coupling to the radiation field is constant. Moreover, when $g(t)$ varies, Eq. (56) is finite even in the coincidence image limit, that is, $V' \to V_{\mathrm{cl}}(U)$. In this limit, one gets

$$\lim_{V'\to U} C^{+/+}_{\mathrm{inert}}(U,V') = \frac{g_0^2}{(24\pi)^2}[\partial_U^3 g(U)]^2. \quad (57)$$

This equation should be added to Eq. (95) in [16] which gives the mean flux emitted by this inertial mirror.

When applied to a uniformly accelerated mirror, Eq. (53) depends on the sign of U and V'. By causality, in three of the four cases, $C^{+/+}$ can be expressed in terms of the correlation functions previously computed between $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$. The fourth case is the analogue of the configurations studied in the inertial case, Eq. (56). We first discuss the three other cases.

Since the $V'>0$ part of $\mathcal{J}^+_L$ is causally disconnected from the trajectory, one has

$$C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}(U<0,V'>0) = C^{+/-}_{\mathrm{unif\,acc}}(U<0,V'>0) = 0, \quad (58)$$

according to Eq. (45) (see Fig. 3), and

$$C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}(U>0,V'>0) = C^{+/-}_{\mathrm{unif\,acc}}(U>0,V'>0), \quad (59)$$

given in Eq. (51) (see Fig. 4). Moreover, the $U<0$ part $\mathcal{J}^+_R$ is also disconnected from the trajectory. Hence, one obtains

$$C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}(U<0,V'<0) = C^{+/-}_{\mathrm{unif\,acc}}(V'<0,U<0). \quad (60)$$

By direct evaluation, one gets

$$C^{+/-}_{\mathrm{unif\,acc}}(v'_L,u_R) = C^{+/-}_{\mathrm{unif\,acc}}(u_L = v'_L, v'_R = u_R), \quad (61)$$

where $-aU = e^{-au_R}$ and $-aV' = e^{-av'_L}$ and where the right-hand side is given by Eq. (51).

The last and most interesting correlations are encountered when the supports of T_{UU} and T_{VV} are both in the future of the trajectory, i.e., for $U>0$ and $V'<0$. In the Davies-Fulling model, the two-point function is identically zero since the mirror is perfectly reflecting. Instead, the Lagrangian model provides a nonvanishing result. In terms of Rindler coordinates, Eqs. (42) and (55) gives

$$C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}(u_L,v'_L) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{(4/a^2)\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L]}\right) + \partial_{v'_L}\left(\frac{g(v'_L)}{(4/a^2)\sinh^2[(a/2)(v'_L-u_L)]}\right)\right]^2. \quad (62)$$

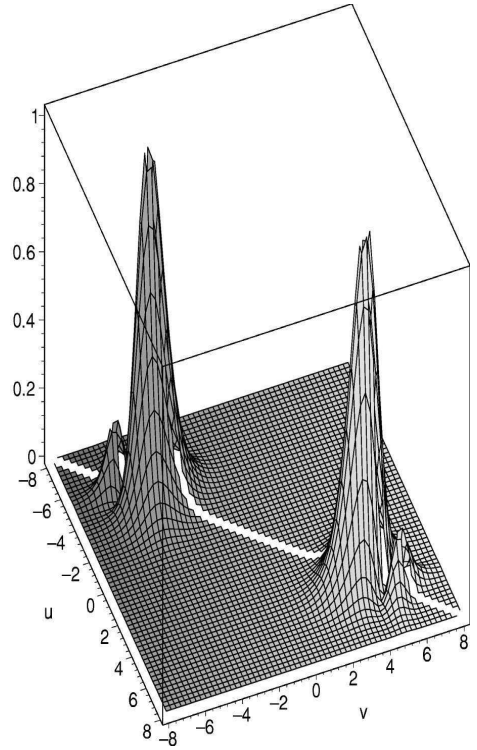

FIG. 5. $C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}(u_L,v_L)$ when $g(\tau)$ is given by Eq. (A2) and in arbitrary units. We choose $a=1$ and $\ln\eta=-4$. The two peaks are located for $u_L=v_L\simeq\pm(\ln 2\eta)$, when the coupling is switched on and off; see Eq. (A3).

Equations (56) and (62) enjoy similar properties. Indeed, $C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}$ also vanishes when g is constant and when $g(\tau)$ varies, it is finite in the coincidence image limit

$$\lim_{v'_L\to u_L} C^{+/+}_{\mathrm{unif\,acc}}(u_L,v'_L) = \frac{g_0^2}{(24\pi)^2}[(\partial^3_{u_L} - a^2\partial_{u_L})g(u_L)]^2. \quad (63)$$

Equation (62) is an illustration of Grove's theorem [29,3] which states that the fluxes emitted by a uniformly accelerated system behave like those emitted by the same system when it is inertial and in a thermal bath. Indeed, Eq. (62) follows from Eq. (56) by replacing Minkowski coordinates by Rindler ones and the vacuum two-point function by its

TABLE I. The two-point functions between $\mathcal{J}^-$ and $\mathcal{J}^+$ for a uniformly accelerated mirror in L. They are of three different results. $C^{+/-}$ identically vanishes for $U<0$, since this corresponds to causally disconnected outgoing fluxes. On the contrary, $C^{+/-}$ diverges in the coincidence image limit, for $V'=V_{\rm cl}(U)$. Finally, $C^{+/-}$ is finite in the remaining case which corresponds to the correlations between a U quantum and its V partner (see Fig. 4).

$\left(\frac{16\pi}{a^2 g_0}\right)^2 C^{+/-}_{\text{unif acc}}(u,v')$	$U=-\frac{1}{a}e^{-au_R}<0$	$U=\frac{1}{a}e^{au_L}>0$
$V'=-\frac{1}{a}e^{-av'_L}<0$	0	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L)]}\right)\right]^2$
$V'=\frac{1}{a}e^{av'_R}>0$	0	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\cosh^2[(a/2)(u_L+v'_R)]}\right)\right]^2$

thermal expression. One has only transient effects when the switching function varies. This is illustrated in Fig. 5 where one sees that the two-point function possesses two peaks localized in transients.

In brief, the lessons we obtained from the analysis of the two-point function are the following (see Tables I and II). For an accelerated mirror, the mean flux and the two-point function in causal contact, Eq. (62), are concentrated in the transients. Hence they both vanish in the limit $g(\tau)\to$const and in the Davies-Fulling model. However, this is not the case for Eq. (59). Moreover, since the latter is a function of $u_L+v'_R$ (i.e., $\tau-\tau'$) when $g(\tau)$ is a constant, this indicates a steady production of particles. To understand the origin of this discrepancy, we shall analyze in the next section matrix elements of $T_{\mu\nu}$, which contain more information than the two-point function.

III. QUANTUM CORRELATIONS REVEALED BY "POSTSELECTION"

To further analyze the correlations we now apply a second method. Two different situations are considered.

In Sec. III A, the selection of the final configurations on $\mathcal{J}^+$ (hereafter called "postselection" to conform to the jargon) is imposed from the outset. This method is straightforward and leads to the answer we are searching for, namely, to identify why $C^{+/+}$ in Eq. (62) vanishes whereas $C^{+/+}$ of Eq. (59) indicates a steady pair creation rate.

In Sec. III B we shall nevertheless present another way to perform the postselection: we shall couple the radiation field to an additional quantum device and then postselect the state of the latter. The justification of this second approach is that the resulting expression for the conditional value of $T_{\mu\nu}$ will establish a clear relation between the traditional approach based on the two-point function and the unusual one based on the conditional values. We shall see that the conditional value is a kind of point-split and smeared version of the two-point function previously analyzed.

A. The conditional value of $T_{\mu\nu}$

To compute the conditional value of an operator, one first chooses some final configurations on $\mathcal{J}^+$ (in our case, a wave packet representing a particle emitted toward $\mathcal{J}^+_R$). This defines a projector $\mathbf{P}$ in Fock space. Then, in the Heisenberg picture, the corresponding conditional values of $T_{\mu\nu}$ reads

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}\equiv\frac{\langle 0|T_{\mu\nu}\mathbf{P}|0\rangle}{\langle 0|\mathbf{P}|0\rangle}=\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle+\frac{\langle 0|T_{\mu\nu}\mathbf{P}|0\rangle_c}{\langle 0|\mathbf{P}|0\rangle}. \quad (64)$$

For further details concerning the physical meaning of the (connected) matrix element of $T_{\mu\nu}$, we refer to [14].

TABLE II. The two-point functions on $\mathcal{J}^+$ for a uniformly accelerated mirror in L. $C^{+/+}$ vanishes for disconnected configurations $V'>0$ and $U<0$. In the three other cases it is finite everywhere as it results from pair creation amplitudes only.

$\left(\frac{16\pi}{a^2 g_0}\right)^2 C^{+/+}_{\text{unif acc}}(u,v')$	$U=-\frac{1}{a}e^{-au_R}<0$	$U=\frac{1}{a}e^{au_L}>0$
$V'=-\frac{1}{a}e^{-av'_L}<0$	$\left[\partial_{v'_L}\left(\frac{g(v'_L)}{\cosh^2[(a/2)(u_R+v'_L)]}\right)\right]^2$	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\sinh^2[(a/2)(u_L-v'_L)]}\right)+\{u_L\leftrightarrow v'_L\}\right]^2$
$V'=\frac{1}{a}e^{av'_R}>0$	0	$\left[\partial_{u_L}\left(\frac{g(u_L)}{\cosh^2[(a/2)(u_L+v'_R)]}\right)\right]^2$

1. The choice of the wave packet

To obtain simple expressions for $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}}$ in the case of a uniformly accelerated mirror, we shall postselect a one-particle state described by a superposition of "Unruh" [30] modes $\tilde{\varphi}^U_\lambda$. (We recall that they are eigenmodes with respect to the proper time τ evaluated along the trajectory and superpositions of positive frequency Minkowski modes; for further details see [30,17].) We have chosen this state for two reasons. First we want to detect a particle which is produced by the scattering on the mirror, i.e., we want $|\Psi\rangle$ to be orthogonal to the initial state, the Minkowski vacuum $|0\rangle$. This requirement prevents us from working with Rindler quanta since they are present in this vacuum. The second reason is obvious: the stationarity of the scattering is expressed in term of eigenmodes of $i\partial_\tau=\lambda$ which is a Rindler frequency.

Moreover, we choose to perform the postselection on $\mathcal{J}^+_R$, in causal contact with the mirror, i.e., for $U>0$ (see Fig. 2). The selected state is thus of the form

$$|\Psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\ f^*(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)\tilde{a}^{U\dagger}_\lambda|0\rangle^{U,\mathrm{part}}, \tag{65}$$

where $|0\rangle^{U,\mathrm{part}}$ is the vacuum with respect to U particles and $\tilde{a}^{U\dagger}_\lambda$ is the creation operator of an Unruh U particle. The function f is normalized as follows:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\,|f(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)|^2=1. \tag{66}$$

It is also important to mention that $|\Psi\rangle$ does not fully specify the state on $\mathcal{J}^+$. Indeed, since we are interested in determining the partner of $|\Psi\rangle$, we do not specify what is the state of particles emitted to $\mathcal{J}^+_L$ nor the antiparticle states. Therefore $|\Psi\rangle$ defines a projector $\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}$ (in the sense that $\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}=\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}$) which only determines the U particle sector:

$$\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}\equiv|\Psi\rangle\langle\Psi|\otimes\mathbf{1}[\tilde{a}^V,\tilde{b}^U,\tilde{b}^V], \tag{67}$$

since $\mathbf{1}[\tilde{a}^V,\tilde{b}^U,\tilde{b}^V]$ is the identity operator for the particle states on $\mathcal{J}^+_L$ and the antiparticle states.

To obtain analytical expressions, we choose the function f to be

$$f(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)\equiv\frac{e^{i\lambda\bar{u}_L}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}}\frac{e^{-(\lambda-\bar{\lambda})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}}\times\lambda\sinh^2(\pi\lambda/a)\times\mathcal{N}[\bar{\lambda},\sigma]. \tag{68}$$

The first factor corresponds to an Unruh quantum centered around $u_L=\bar{u}_L$ with a mean frequency given by $\bar{\lambda}$. The second factor has been chosen so as to obtain analytical expressions for the conditional values and the third factor ensures that $|\Psi\rangle$ is normalized according to Eq. (66). Since we want to detect the particle well localized around $\bar{u}_L$, i.e., around $a\bar{U}=e^{a\bar{u}_L}>0$, $\bar{\lambda}$ must obey

$$\bar{\lambda}<0\quad\text{and}\quad|\bar{\lambda}|/a\gg1. \tag{69}$$

The first condition arises from the fact that Unruh modes of negative Rindler frequency live mainly in the L sector. The second condition guarantees that the second peak of the wave packet found around $U=-\bar{U}<0$ is negligible. We recall that wave packets built with Unruh modes possess two peaks. The relative weights of their norms is the thermal factor $e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}$ encoding the Unruh effect.

Before computing the conditional value of the flux, one enquires into the Minkowski frequency content of $|\Psi\rangle$. To this end, we compute the probability to find a one-particle state of Minkowski frequency ω:

$$\langle0|a^U_\omega\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}a^{U\dagger}_\omega|0\rangle=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\ f^*(\lambda;\bar{\lambda},\sigma,\bar{u}_L)\gamma_{\lambda\omega}\right|^2, \tag{70}$$

where

$$\gamma_{\lambda\omega}\equiv\langle0|a^U_\omega\tilde{a}^{U\dagger}_\lambda|0\rangle=\frac{\Gamma(i\lambda/a)}{\sqrt{\frac{a\pi}{\lambda\sinh(\pi\lambda/a)}}}\left(\frac{\omega}{a}\right)^{-i\lambda/a}\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega a}}. \tag{71}$$

In the limit $|\bar{\lambda}|/a\gg1$ the stationary phase condition gives

$$\lambda_{\mathrm{sp}}=\bar{\lambda}-i\frac{\sigma^2}{a}\ln\left(\frac{-\omega}{\lambda_{\mathrm{sp}}e^{-a\bar{u}_L}}\right). \tag{72}$$

The norm of the overlap is maximum when the imaginary part of λ_{sp} vanishes. Thus $|\Psi\rangle$ is made of Minkowski frequencies centered around $\bar{\omega}=|\bar{\lambda}|e^{-a\bar{u}_L}$. The spread in ω is $\sigma e^{-a\bar{u}_L}$. When $\sigma<a$, our wave packet is thus well peaked both in Minkowski frequencies and in space-time.

2. The conditional values of the fluxes

To obtain the connected part of the conditional value, we first compute the denominator of the second term in Eq. (64) which gives the probability of detecting our chosen quantum. To the second order in g_0, it is given by $\langle0|L_{\mathrm{int}}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\bar{\lambda},\sigma}L_{\mathrm{int}}|0\rangle$. Since $|\Psi\rangle$ is expressed in terms of Unruh quanta, it is appropriate to reexpress the transition amplitudes in terms of these rather than Minkowski quanta as in Eqs. (6) and (7). The resulting amplitudes will be denoted $\tilde{B}_{\lambda\lambda'}$. We have suppressed the upper indices U,V because they are all equal. Moreover, they simply depend on the Rindler Fourier components of $g(\tau)$:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{\lambda\lambda'}&\equiv\langle0|\tilde{a}^U_\lambda\tilde{b}^V_\lambda iL_{\mathrm{int}}|0\rangle\\&=\langle0|\tilde{a}^U_\lambda\tilde{b}^U_\lambda iL_{\mathrm{int}}|0\rangle\\&=ig_0\frac{\lambda\lambda'}{\sqrt{\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)\lambda'(e^{2\pi\lambda'/a}-1)}}g^*_{\lambda+\lambda'}.\end{aligned} \tag{73}$$

Then the probability reads

$$\langle 0|L_{\rm int}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\lambda,\sigma}L_{\rm int}|0\rangle = 2\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, d\lambda'\, d\mu\, \tilde{B}^*_{\lambda\mu}\tilde{B}_{\lambda'\mu} f^*(\lambda) f(\lambda'). \tag{74}$$

We must now verify that the matrix elements computed with $\tilde{B}_{\lambda'\lambda}$ converge. We remind the reader that, when computing the *average* value of the fluxes, convergence was provided by the asymptotic decreasing of $g(\tau)$, namely, $g(\tau)\to 0$ faster than $e^{-a|\tau|}$ (see [17]). In the case of *conditional* values, an ultraviolet frequency cutoff can be provided by $f(\lambda)$, which characterizes the postselected wave packet. When this is the case, one can safely consider the limit of constant coupling: $g(\tau)=1$. In this limit, we get

$$\tilde{B}_{\lambda\lambda'} = -\frac{ig_0}{2}\frac{\lambda}{\sinh(\pi\lambda/a)}\delta(\lambda+\lambda'). \tag{75}$$

When using f given in Eq. (68), the Gaussian weight guarantees that all expressions are well defined in the ultraviolet. Moreover, Eq. (68) leads to analytical expressions for the probability and the conditional values of the flux. However, since these expressions are rather complicated, we shall present only their behavior in the limit $|\bar{\lambda}|/a \gg \sigma^2/a^2$ in addition to Eq. (69) (this condition means that we work with well peaked wave packets in λ). In this limit, the probability reads

$$\langle 0|L_{\rm int}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\lambda,\sigma}L_{\rm int}|0\rangle = 2g_0^2\bar{\lambda}^2 e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}, \tag{76}$$

which is independent of the value of $\bar{u}_L$, thereby indicating a steady production of particles weighted by the thermal factor, as expected from the general analysis of Appendix C in [14]. [The corrections to Eq. (76) and the following equations are $O(\sigma/\bar{\lambda})$.]

The connected part of the conditional values of the flux is

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathbf{P}c} = \langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm p.s.}_{\mathbf{P}} + \langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}}, \tag{77}$$

where $\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm p.s.}_{\mathbf{P}}$ is the flux carried by the postselected particle and $\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}}$ that carried by its partner. When $\mathbf{P}$ is given by Eq. (67), $\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm p.s.}_{\mathbf{P}}$ is purely outgoing and consists in matrix elements of $\tilde{a}^U\tilde{a}^{U\dagger}$ and $\tilde{a}^U\tilde{b}^U$. It possesses two maxima for $U=\bar{U}$ and $U=-\bar{U}$, which are related to the probability of measuring the position of the postselected wave packet. Moreover, as for Hawking quanta emerging from a black hole, it is complex [14].

The "partner" term of Eq. (77) is more interesting. To second order in g_0, it is given by

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}} = \frac{\langle 0|L_{\rm int}T_{\mu\nu}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\lambda,\sigma}L_{\rm int}|0\rangle}{\langle 0|L_{\rm int}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\lambda,\sigma}L_{\rm int}|0\rangle}. \tag{78}$$

Unlike the p.s. term, $\langle T_{\mu\nu}\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}}$ contains both U and V fluxes. Moreover, since the scattering amplitudes of Eq. (73) are identical for U and V modes, one has $\langle T_{UU}(U)\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}} = \langle T_{VV}(V=-U)\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}}$. Explicitly, one gets

$$\langle T_{VV}\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}} = \frac{2\left|\int\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, d\lambda'\, \tilde{B}_{\lambda\lambda'} f(\lambda)\partial_V\tilde{\varphi}^V_{\lambda'}\right|^2}{\langle 0|L_{\rm int}\mathbf{P}^{\bar{u}_L}_{\lambda,\sigma}L_{\rm int}|0\rangle}, \tag{79}$$

where $\tilde{\varphi}_\lambda$ is the mode associated with the Unruh operator $\tilde{a}_\lambda$. This part of the conditional flux consists only in matrix elements of $\tilde{b}^V\tilde{b}^{V\dagger}$. Having postselected a wave packet made with $\tilde{a}$ only, this guarantees that the "partner" term is real.

In the right quadrant, for $V>0$, the Rindler flux is

$$\langle T_{vv}(v_R)\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}} = \frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}} e^{-(\bar{u}_L+v_R)^2\sigma^2}. \tag{80}$$

In this, we find a behavior very similar to that of $C^{+/+}(\bar{u}_L, v_R)$ of Eq. (59): $C^{+/+}$ also exhibits a constant maximum for $v_R=-\bar{u}_L$ (see Table II). The width is here given by $1/\sigma$ instead of $1/a$ as in Eq. (59), because of our choice of the window function $f(\lambda)$ in Eq. (68). The similarity of $\langle T_{vv}(v_R)\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}}$ after having postselected a U quantum at $\bar{u}_L$ with $C^{+/+}(\bar{u}_L, v_R)$ should cause no surprise: the first term of Eq. (54) is dominant and T_{UU} acts in it as $\mathbf{P}$ does in Eq. (78).

However the correspondence with the two-point function is lost when computing the conditional value in the left quadrant, for $V<0$. Whereas $C^{+/+}(u_L, v'_L)$ vanishes for $g(\tau)=1$, we obtain

$$\langle T_{vv}(v_L)\rangle^{\rm partner}_{\mathbf{P}} = \frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}} e^{-(\bar{u}_L-v_L)^2\sigma^2} e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}, \tag{81}$$

which is smaller than Eq. (80) by the thermal factor $e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}$. The origin of this loss is as follows. In Eq. (53) the postselection induced by $T_{uu}(u_L)$ is strictly confined in the L quadrant. Hence it is insensitive to the transients (located on $U=0^+$ in the limit $g\to$const) which contain all the emitted particles. On the contrary, the postselection carried by $|\Psi\rangle$ specifies that one Unruh quantum be present on $\mathcal{J}^+_R$. This prescription is sensitive to the particle content of the transients. In fact, *all* wave packets made with only positive Minkowski frequency modes are sensitive to these transients, since there exists *no* such wave packet that can vanish in a Rindler quadrant.[4] Had we postselected a superposition of L

[4]The first explanation of the compatibility of a null mean local flux with the readings of a particle detector was made in [31]. Grove proved that the detection of particles produced by a uniformly accelerating mirror occurs only if the detector is switched on in the causal future of the transients; see also [32] for a similar observation in a slightly different context.

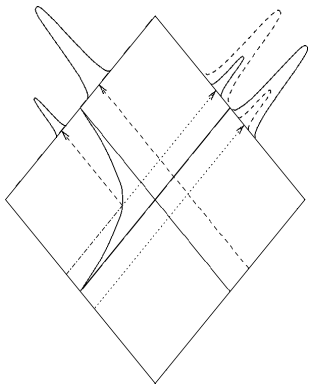

FIG. 6. In this figure, the intensity profile of the postselected wave packet is drawn as a dashed curve. The corresponding values of the partner conditional fluxes are represented by solid curves. The U/V symmetry of these fluxes is manifest. The dotted and dashed straight lines schematically represent the characteristics followed by the partner configurations.

Rindler quanta only, we would have found that $\langle T_{vv}(v_L)\rangle_{\mathbf{P}}^{\text{partner}}$ identically vanished, exactly like $C^{+/+}$ in Eq. (62). The origin of this null result can be traced back to Eq. (54). When one postselects only L Rindler quanta, the contribution of the second (interfering) term cancels that of the first term. Instead, when imposing that a superposition of Minkowski quanta be found on $\mathcal{J}^+$, the second term vanishes since the postselected state is orthogonal to the Minkowski vacuum.

We learned from this analysis that, being local in U, $C^{+/+}(u_L,v_L')$ is an extremely coherent object whose vanishing results from fine-tuned interferences. The slightest modification of the scattering, e.g., recoil effects [15,27] or switching off effects, would break these interferences. This leads to a nonvanishing result whose content of Unruh quanta tells us that the pair creation process is stationary. In conclusion, the two-point correlation function vanishes because, on one hand, it probes only locally the final configurations, and, on the other, the description of the scattering is too simplified.

When looking at the partner conditional flux on $\mathcal{J}_R^+$, one obtains the same expressions as in Eqs. (80) and (81) with $v\to u$

$$\langle T_{uu}(u_R)\rangle_{\mathbf{P}}^{\text{partner}}=\frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}}e^{-(\bar{u}_L+u_R)^2\sigma^2}, \tag{82}$$

$$\langle T_{uu}(u_L)\rangle_{\mathbf{P}}^{\text{partner}}=\frac{\sigma|\bar{\lambda}|}{\sqrt{\pi}}e^{-(\bar{u}_L-u_L)^2\sigma^2}e^{-2\pi|\bar{\lambda}|/a}. \tag{83}$$

From these, one sees that the U partner of a U postselected wave packet lies mainly on the other side of the horizon $U=0$ (see Fig. 6) and is distributed in a way that once more displays the stationarity of the process.

In conclusion, we notice that the transition amplitude $B_{\lambda\lambda'}$ of Eq. (75) is unchanged if one now considers the scattering by a mirror moving in the right quadrant. Hence, one would obtain exactly the same conditional fluxes. To obtain expressions which depend on the side in which the mirror lives, one should consider time dependent coupling. This is the subject of Sec. IV. Before doing so, we shall consider another way to implement the postselection which will reveal the relations between the conditional fluxes and the two-point function.

B. Postselection by an additional quantum device

Another way to implement the postselection is to introduce an additional quantum system coupled to the field on the right of the mirror. In what follows, we shall use an inertial two-level atom [2,3] positioned at $z=\text{const}$, on the right of the mirror. The transitions of the two-level atom are described by the lowering operator $A(t)=e^{-imt}A$ and its Hermitian conjugate. Here, m is the energy gap between its ground ($|-\rangle$) and excited states ($|+\rangle$). One has $A|-\rangle=0$ and $A|+\rangle=|-\rangle$.

To make contact with Sec. III A, we couple the detector only to U quanta. This is achieved by the following action:

$$L_A=-f_0\int dU\, f(U)(\partial_U\Phi^{U\dagger}Ae^{-imU}+\partial_U\Phi^U A^\dagger e^{imU}). \tag{84}$$

Here, f_0 is the coupling constant and $f(t)$ is a real function which governs how the interaction is turned off and on.

Instead of Eq. (64), we consider the value of the energy flux $\langle T_{VV}\rangle_{\mathbf{\Pi}}$ which is conditional on finding the detector in its excited state at $t=+\infty$ when the initial state is $|0\rangle\otimes|-\rangle$. The postselection is imposed by applying the projector $\mathbf{\Pi}=|+\rangle\langle+|$ at $t=+\infty$. To second order in f_0, in the Heisenberg representation for the evolution governed by L_{int}, we obtain

$$\langle T_{VV}\rangle_{\mathbf{\Pi}}=\langle 0|T_{VV}|0\rangle+\frac{\langle 0|T_{VV}\tilde{\mathbf{\Pi}}|0\rangle_c}{\langle 0|\tilde{\mathbf{\Pi}}|0\rangle}, \tag{85}$$

where

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{\Pi}}&=\langle -|L_A\mathbf{\Pi}L_A|-\rangle\\&=f_0^2\int\int_{-\infty}^{+\infty}dU\,dU'\,f(U)f(U')e^{-im(U-U')}\partial_U\Phi^\dagger\partial_{U'}\Phi.\end{aligned} \tag{86}$$

In the connected part of the conditional flux, the time ordering of L_A with L_{int} is such that L_A can always be sent to the future of the evolution operator $Te^{iL_{\text{int}}}$ since the detector is on the right of the mirror and since it responds only to U quanta. In the interacting picture, the second term in Eq. (85) is

$$\langle T_{VV}\rangle_{\mathbf{\Pi}c}=\frac{\int\int_{-\infty}^{+\infty}dU\,dU'\,f(U)f(U')e^{-im(U-U')}\langle 0|e^{-iL_{\rm int}}\partial_U\Phi^\dagger\,\partial_{U'}\Phi\,T_{VV}e^{iL_{\rm int}}|0\rangle_c}{(\langle 0|e^{-iL_{\rm int}}\tilde{\mathbf{\Pi}}e^{iL_{\rm int}}|0\rangle/f_0^2)}. \tag{87}$$

This expression should be compared to the two-point function of Eq. (53) and to the former conditional flux [see Eq. (78)]. Two limits can be considered. In the first limit, f is localized in space-time, i.e., $f(U)=\delta(U-U_0)$. In this case, the numerator gives the two-point function $C^{+/+}(U_0,V)$ of Eq. (53) whereas the denominator gives the mean value of T_{UU}. In the second limit, the Fourier transform of fe^{-imU} is "local" in the energy space, i.e., $\tilde{f}(\omega)=\delta(\omega-m)$. In this case, the particle detector is switched on for all times and is sensitive only to Minkowski quanta of frequency m. Then, up to an overall constant, the projector $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ reduces to the normal-ordered counting operator $\mathbf{P}_m=a_m^{U\dagger}a_m^U$. When acting on one-particle Minkowski states, it thus acts as the projector of Eq. (67).

We have thus proved that the conditional value, Eq. (87), generalizes the notion of correlation functions as it interpolates from the local two-point function $\langle T_{UU}T_{VV}\rangle$ to the global correlation $\langle a_m^{U\dagger}a_m^UT_{VV}\rangle$ which relies on the notion of a particle. The intermediate cases correspond to smeared and point-split expressions; see [33,34] for similar considerations on smeared correlation functions.

IV. SCATTERING BY TWO ACCELERATED MIRRORS

In this section, we study the scattering by two accelerating mirrors which follow symmetrical trajectories in the R and L quadrants (see Fig. 9 below). In Sec. IV A, using the (unregulated) Davies-Fulling model, we show that the Bogoliubov coefficients encoding pair creation identically vanish. Their vanishing arises from perfect interferences, in very much the same way as in the perfect interferometer of Gerlach [24]. In Sec. IV B, we prove that these perfect interferences are an artifact of the unregulated description in which the coupling of the mirror to the radiation field is strictly constant. In Sec. IV C, we show how this singular regime can be approached (but never fully realized if one insists on keeping regularity) by fine-tuning the coupling constant.

A. The Davies-Fulling description

In the Davies-Fulling model, the mode scattered by the two mirrors is given by

$$\varphi_\omega^{\rm scat}(U)=-\frac{e^{-i\omega V_{\rm cl}(U)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \tag{88}$$

for *all* U. Indeed, the peculiarity of two symmetrical uniformly accelerated trajectories is that $V_{\rm cl}(U)=-1/a^2U$ is valid for all values of U (and V), as in the case of a single mirror which originates from i^- and ends in i^+. If only one accelerated mirror were present, the support of $V_{\rm cl}(U)=-1/a^2U$ would be restricted to half the real axis.

The Bogoliubov coefficient ${}^{L+R}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}$ encoding pair creation is given, as usual, by the overlap between $\varphi_\omega^{\rm scat}$ and an out mode of frequency ω' [see Eq. (13)]. Thus one has

$${}^{L+R}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}={}^{L}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}+{}^{R}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}, \tag{89}$$

where ${}^L\beta$ (${}^R\beta$) is the Bogoliubov coefficient one would obtain when considering only one mirror. Moreover, since [2]

$${}^{R}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}=\frac{i}{\pi a}K_1(2\sqrt{\omega\omega'}/a)=-{}^{L}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}, \tag{90}$$

the total Bogoliubov coefficient ${}^{L+R}\beta^{UV}_{\omega\omega'}$ vanishes for all values of ω and ω'. Thus the total energy emitted

$$\langle H_M^V\rangle=\int_0^\infty d\omega\,\omega\int_0^\infty d\omega'\,|{}^{L+R}\beta^{UV*}_{\omega\omega'}|^2 \tag{91}$$

vanishes as well, since it is given in terms of the square of ${}^L\beta^{UV}+{}^R\beta^{UV}$ and not in terms of the sum of their squares. Therefore, $\langle H_M^V\rangle$ vanishes because of the perfectly destructive interferences between the scattering amplitudes.

In brief, in this description, no pair is created, i.e., the two mirrors have no effect on the vacuum configurations, exactly like an inertial mirror. This cancellation is directly related to what Gerlach called a perfect interferometer [see Eq. (125) in [24]]. It is also related to the canceling effect found by Yi [25] when considering the asymptotic radiation emitted by two accelerated (charged) black holes.

It is important to verify that this result is not due to the fact that the mirrors are perfectly reflecting. In fact, it is also obtained when using partially transmitting mirrors in constant interaction with the radiation field. This is easily verified by using the interacting model. In this case, each mirror is coupled to the field by a Lagrangian given by Eq. (1) with coupling parameter $g_0^L(g_0^R)$ and switching function $g^L(\tau)$ $[g^R(\tau)]$. The total Lagrangian is the sum $L_{\rm int}=L^L+L^R$. Thus, using Eq. (7), to first order in g_0^L and g_0^R, the amplitude of spontaneous pair creation ${}^{L+R}B^{ij}_{\omega\omega'}$ $=\langle 0|a_\omega^i b_{\omega'}^j iL_{\rm int}|0\rangle$ identically vanishes when[5] $g_0^R=-g_0^L$ and when $g^R(\tau)=g^L(\tau)=$const. Hence, perfect interferences do

[5]Had we taken the current $J=\Phi^\dagger i\overleftrightarrow{\partial_\tau}\Phi$ instead of $\partial_\tau\Phi^\dagger\partial_\tau\Phi+\partial_\tau\Phi\,\partial_\tau\Phi^\dagger$ in Eq. (1), the condition would have been $g_0^R=g_0^L$, thereby recovering the correspondence between the Lagrangian model and the Davies-Fulling one.

not follow from perfect reflection. As we shall now prove, they directly follow from the fact that the coupling is constant.

B. The regulated description

In [17], we proved that the scattering by a uniformly accelerated mirror is regular only if its coupling to the radiation field decreases faster than $e^{-a|\tau|}$. (If this condition is not satisfied, the expectation values of observables are ill defined, i.e., the result might depend on the order in which the integrations are performed.)

We shall now prove that by using *any* regular description of the scattering the interferences leading to the vanishing of the ${}^{L+R}\beta$ coefficients are *inevitably* lost. To this end, it is convenient to work in a "mixed" representation, i.e., with one quantum characterized by a Minkowski frequency and its partner by an Unruh quantum with a given Rindler frequency; see Sec. II C in [17] for detailed expressions. In this case, when using $g(\tau)$ given in Eq. (A3), the spontaneous pair creation amplitude is

$$
\begin{aligned}
{}^{R,L}B^{VV}_{\omega\lambda} &\equiv \langle 0|a^{V}_{\omega}\tilde{b}^{U}_{\lambda}e^{iL^{R,L}}|0\rangle_c \\
&= \frac{ig_0}{\pi a}\sqrt{\frac{\omega\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda/a}}}(1-is\omega/a\eta)^{-(1+i\lambda/a)/2} \\
&\quad \times K_{1+i\lambda/a}(2\eta\sqrt{1-is\omega/a\eta})
\end{aligned}
\tag{92}
$$

where $s=\pm 1$ for R and L, respectively. One also finds that ${}^{R,L}B^{VU}_{\omega\lambda} = {}^{R,L}B^{VV}_{\omega\lambda}$. We thus see that the regulator $\eta \ll 1$, which is needed to obtain well-defined expressions, enters differently in the amplitudes of the R and L mirrors. In fact, this is necessary for causality to be respected. Hence, it is quite conceivable that the former canceling effects will be lost when ω approaches the ultraviolet scale a/η.

Let us verify this numerically by studying the integrand of the Minkowski energy:

$$
\begin{aligned}
\langle H^{V}_{M}\rangle^{L+R} &= 4\int_0^{\infty} d\omega\,\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \left|{}^{L}B^{VV}_{\omega\lambda} + {}^{R}B^{VV}_{\omega\lambda}\right|^2 \\
&= \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, h^{L+R}_{M}(\omega,\lambda;\eta).
\end{aligned}
\tag{93}
$$

When $g^{R}_{0} = -g^{L}_{0}$ and when $g^{R}(\tau) = g^{L}(\tau)$ is given by Eq. (A3), the integrand h^{L+R}_{M} is shown in Figs. 7 and 8. One clearly sees how $g(\tau)$ plays its role. The transients associated by the switching function are different for the right and left mirrors. Hence the sum of amplitudes no longer vanishes for frequencies close to the frequency cutoffs $a\eta$ and a/η. Instead, all the modes within the plateau, i.e., when the interaction is almost constant, interfere destructively, as in the Davies-Fulling model. Hence, they do not participate to the total energy.

There is another simple way to prove that the two mirrors cannot interfere destructively. It follows from causality. In fact, since the two mirrors are causally disconnected, the mean flux obeys

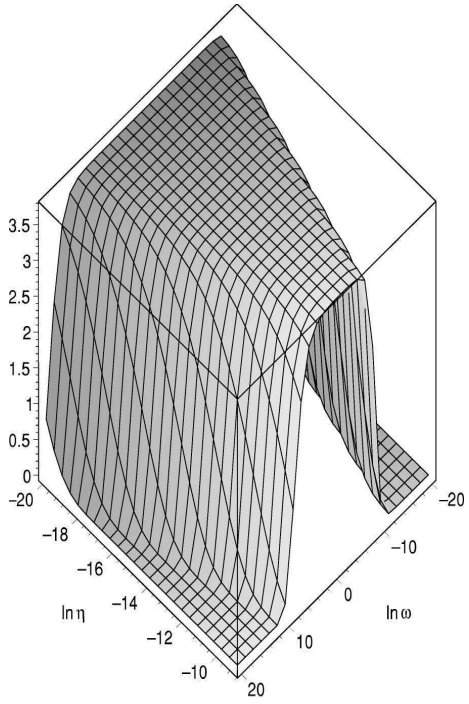

FIG. 7. The integrand for one mirror $h^{L}_{M}(\omega,\lambda=0.15a;\eta)$ in terms of $\ln\omega$ and $\ln\eta$ and in arbitrary units. One sees clearly that the contribution of Minkowski modes exhibits a "plateau" of constant height which is limited by the cutoffs $\ln\omega=\pm\ln\eta$. All the modes whose frequency belongs to this interval participate in the emitted flux.

$$
\langle T_{VV}(V)\rangle^{L+R} = \langle T_{VV}(V)\rangle^{L} + \langle T_{VV}(V)\rangle^{R}, \tag{94}
$$

since $\langle T_{VV}\rangle^{L(R)}$ vanishes identically in R (L). Hence

$$
\begin{aligned}
\langle H^{V}_{M}\rangle^{L+R} &= \langle H^{V}_{M}\rangle^{L} + \langle H^{V}_{M}\rangle^{R} \\
&= 4\int_0^{\infty} d\omega\,\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \left(\left|{}^{L}B^{VV}_{\omega\lambda}\right|^2 + \left|{}^{R}B^{VV}_{\omega\lambda}\right|^2\right).
\end{aligned}
\tag{95}
$$

This tells us that whatever are the couplings between the two mirrors and the radiation field, when causality is respected, the total energy emitted by the mirrors can be added incoherently, i.e., *unlike* what was found in the Davies-Fulling model in Eq. (91). Therefore, when causality is respected, Eqs. (93) and (95) imply

$$
\int_0^{\infty} d\omega\,\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \mathrm{Re}\{{}^{R}B^{VV}_{\omega\lambda}\,{}^{L}B^{VV*}_{\omega\lambda}\} \equiv 0. \tag{96}
$$

To complete the analysis we now determine to what extent two accelerated mirrors can constitute a perfect interferometer. That is, what is the most interfering situation?

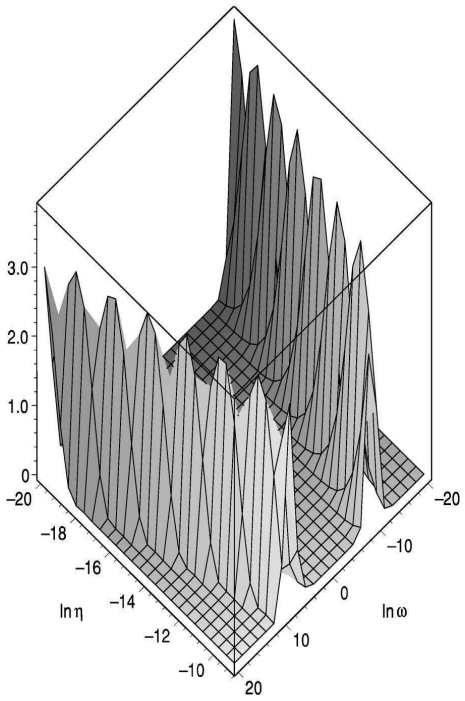

FIG. 8. The integrand for the two mirrors $h_M^{L+R}(\omega,\lambda=0.15a;\eta)$ in terms of $\ln\omega$ and $\ln\eta$ and in the same arbitrary units. Unlike for a single mirror, the "inside" modes with $a\eta \ll \omega \ll a/\eta$ no longer contribute because of the destructive interferences. However, these interferences are lost when reaching the transient frequencies $\omega=a\eta$ and $\omega=a/\eta$, thereby giving rise to a positive integrand.

C. A perfect interferometer?

To answer this question, we use the interacting model and we parametrize the coupling constant in Fourier transform: $g^L(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\ g_\lambda^L e^{-i\lambda\tau}$ and $g^R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\ g_\lambda^R e^{-i\lambda\tau}$.

Instead of studying the average value of H or T_{VV}, it is simpler to compute the probability of receiving one Unruh quantum on $\mathcal{J}^+$. The two accelerating mirrors would provide a perfectly interfering device if this probability vanishes. To compute it we use the projector $\mathbf{P}_\lambda^-$ associated with the detection of an Unruh quantum on $\mathcal{J}_R^+$, i.e., with

$$f(\lambda)=\delta(\lambda-\bar{\lambda})\frac{e^{i\lambda\bar{u}_L}}{\sqrt{4\pi\lambda(e^{2\pi\lambda/a}-1)}} \tag{97}$$

in Eq. (68). To the second order in the g_0's, from Eq. (74), we get

$$\langle\mathbf{P}_\lambda^-\rangle^{L+R}=\frac{n_\lambda^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\ \lambda n_\lambda|g_0^L g_{\lambda+\bar{\lambda}}^{L*}+e^{\pi(\bar{\lambda}+\lambda)/a}g_0^R g_{\lambda+\bar{\lambda}}^R|^2. \tag{98}$$

The above expression vanishes if

$$g_0^L g_\lambda^{L*}=-e^{\pi\lambda/a}g_0^R g_\lambda^R, \tag{99}$$

for all λ. The only solution for (real and positive) coupling functions is given by time independent opposite real numbers: $g^L(\tau)=g^R(\tau)=1$ and $g_0^L=-g_0^R$. Therefore, we find that one can form a perfect interferometer *if and only if* one considers two mirrors constantly in interaction with the radiation. However, the necessary condition to obtain regular Minkowski expressions is then violated.

So let us minimize the probability $\langle\mathbf{P}_\lambda^-\rangle^{L+R}$ by insisting that one has regular expressions, i.e., that both g_R and g_L decrease faster that $e^{-a|\tau|}$. For instance, take Gaussian switching functions for each mirror with *a priori* different width and center:

$$g^R(\tau)=e^{-(\tau-\tau_R)^2/2T_R^2}$$

and

$$g^L(\tau)=e^{-(\tau-\tau_L)^2/2T_L^2}. \tag{100}$$

For simplicity and from our previous analysis, we suppose that $g_0^R=-g_0^L$. We also work in the double limit of rare events $|\bar{\lambda}|/a\gg 1$ and long couplings $aT_{L,R}\gg 1$. Then the ratio of the probabilities when having one or two mirrors is

$$\frac{\langle\mathbf{P}_\lambda^-\rangle^{L+R}}{\langle\mathbf{P}_\lambda^-\rangle^{L}}\propto\frac{1}{a^2T^2}[1+\chi_1(\tau_R+\tau_L)^2a^2+\chi_2|T_R-T_L|/T_L], \tag{101}$$

where χ_1 and χ_2 are positive factors of order unity and $T=(T_R+T_L)/2$. Therefore, the minimization of the probability is reached for switching functions that possess the same lapse $T_R=T_L=T$ and that are centered symmetrically: $\tau_R+\tau_L=0$ (see Fig. 9).

When $T\to+\infty$, we get $\langle\mathbf{P}_\lambda^-\rangle^{R+L}/\langle\mathbf{P}_\lambda^-\rangle^{L}\to 0$, thereby approaching the perfect interferometer behavior. However, in this case, the Minkowski energy will diverge like e^{aT}.

CONCLUSIONS

We recall the main results derived in this paper. We first study the quantum correlations within the fluxes emitted by a uniformly accelerated mirror. The results, which are summarized in Tables I and II, reveal how the original correlations of the vacuum are scattered by the mirror. However, this analysis is partial in that the particle content of the fluxes is not disentangled when probing the final state with a local operator. This is particularly clear for $C^{+/+}$ of Eq. (62) which vanishes in the limit $g\to$const.

To complete the analysis, we then compute the conditional flux, which is correlated with the detection of a given outgoing particle. These conditional fluxes are rather similar to the corresponding two-point functions. However, they differ in one respect: the second term of Eq. (54) never contributes to the conditional value whereas it does for the two-point function. In fact, it is at the origin of the vanishing of $C^{+/+}$ of Eq. (62). In addition, once its contribution is suppressed, either by a postselection or by taking into account recoil effects, one finds that the scattering by a uniformly accelerated mirror leads to a steady production of pairs of quanta.

To further relate the usual correlation functions to the conditional values of the fluxes, we present another way to per-

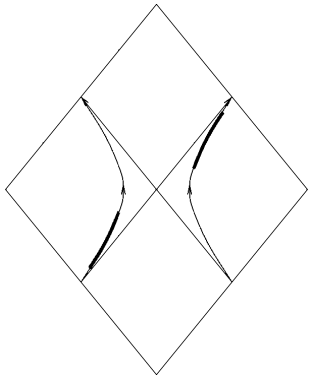

FIG. 9. In this diagram, we show the trajectories followed by the two mirrors. We represent an example of a fine-tuned device by drawing thicker lines when the interactions are switched on. The centers of the thicker parts are symmetrical with respect to $U=V=0$ and the lapses are identical.

form the postselection so as to be able to recover the former as limiting cases of the latter. We believe that this is quite important for the following reasons. First, when studying quantum field theory in a curved space-time [2], one loses the notion of a particle which exists in Minkowski space-time. Therefore, in the absence of a unique definition of a particle, it has been claimed that the only meaningful quantities are expectation values of local operators. We find this claim too restrictive in that not only mean quantities have physical meaning: To ask what happened when a particle detector did or did not click are perfectly legitimate questions. It is therefore of importance to establish an explicit relationship between the local and the particle descriptions. This has been achieved here by introducing a particle detector, computing the conditional value of the flux, and adjusting the window function both in space-time and in the energy space, so as to generate a spectrum of matrix elements which reduce, in limiting cases, to conventional expectation values of local operators and global operators.

Secondly, the correlations of local operators are singular in the coincidence point limit and near a black hole horizon [18–21,14,11] or in inflationary cosmology [22,23]. It is still unclear at present how to handle these divergences when considering the gravitational back-reaction associated with the fluctuations of $T_{\mu\nu}$. It is thus also of importance to deal from the outset with point-split and smeared generalization of (ultralocal) correlation functions. Such a generalization is naturally obtained by considering the conditional fluxes as computed in Sec. III B.

Finally, to further illustrate the need for using regularized transition amplitudes, we studied the scattering by two mirrors that follow symmetrical trajectories. This example is particularly interesting since it leads to incoherent results when using the Davis-Fulling model. Instead, when using regularized amplitudes, the apparently paradoxical results are all resolved.

APPENDIX: UNIFORMLY ACCELERATED MIRRORS

Uniform acceleration means that (up to a 2D translation)

$$t_{\rm cl}^2(\tau)-z_{\rm cl}^2(\tau)=-\frac{1}{a^2}. \tag{A1}$$

This equation defines two causally disconnected trajectories, lying respectively in R and L, the right and left Rindler wedges. In Secs. II and III, we consider the scattering on the right of an accelerated mirror in the left quadrant. In null coordinates, its trajectory is given by

$$V_{\rm cl}(\tau)=-\frac{1}{a}e^{-a\tau}=-1/a^2U_{\rm cl}(\tau) \tag{A2}$$

(we work with $dt_{\rm cl}/d\tau>0$).

In the self-interacting model, as shown in [17], any function $g(\tau)$ which decreases faster than $e^{-a|\tau|}$ is sufficient to obtain regular transition amplitudes. A convenient choice is provided by

$$g(\tau)\equiv e^{-2\eta\cosh(a\tau)}=e^{-\eta[aV_{\rm cl}(\tau)+1/aV_{\rm cl}(\tau)]}, \tag{A3}$$

where $0<\eta\ll 1$ is a dimensionless parameter. This function possesses a plateau of height 1 centered around $\tau=0$ whose duration is given by

$$2T\simeq\frac{2|\ln(2\eta)|}{a}. \tag{A4}$$

The slope of the switching on and off is independent of η and proportional to a. The tail decreases as $e^{-\eta e^{a|\tau|}}$; thus faster than the required $e^{-a|\tau|}$.

Using Eq. (A3), we obtained analytical expressions for the scattering amplitudes $A^{ij}_{\omega\omega'}$ and $B^{ij}_{\omega\omega'}$:

$$A^{VV}_{\omega\omega'}{}^{*}=\delta(\omega-\omega')-\frac{4ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}\frac{\eta^2}{X^2}K_2(X), \tag{A5}$$

where $X=2\eta\sqrt{1-i(\omega-\omega')/a\eta}$, and where K_2 is a modified Bessel function (see Appendix A in [17] and [35]), and

$$A^{VU}_{\omega\omega'}{}^{*}=-\frac{ig_0}{\pi}\frac{\sqrt{|\omega\omega'|}}{a}K_0(Y), \tag{A6}$$

where $Y=2\sqrt{(\omega/a+i\eta)(-\omega'/a-i\eta)}$. The well-defined analytical properties of $A_{\omega\omega'}$ allow one to obtain the pair creation amplitudes by crossing symmetry:

$$B^{ij}_{\omega\omega'}=-A^{ij}{}^{*}_{\omega,\omega''=\omega' e^{-i\pi}}. \tag{A7}$$

Unlike the overlaps of Eqs. (12) and (13) evaluated with the Davies-Fulling model (see Eqs. (19) of [17] for explicit expressions), these amplitudes are regular and well defined in the complex plane of ω and ω'.

[1] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, Proc. R. Soc. London **A348**, 393 (1976).
[2] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
[3] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, Phys. Rep. **260**, 329 (1995).
[4] R. Carlitz and R. Willey, Phys. Rev. D **36**, 2327 (1987).
[5] F. Wilczek, in Proceedings, Black Holes, Membranes, Wormholes, and Superstrings, Houston, 1992, hep-th/9302096.
[6] C.-H. Wu and L. H. Ford, Phys. Rev. D **60**, 104013 (1999).
[7] B. L. Hu and N. G. Phillips, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1817 (2000); N. G. Phillips and B. L. Hu, Phys. Rev. D **63**, 104001 (2001).
[8] J. W. York, Phys. Rev. D **28**, 2929 (1983).
[9] A. Casher, F. Englert, N. Itzhaki, S. Massar, and R. Parentani, Nucl. Phys. **B484**, 419 (1997).
[10] R. Martín and E. Verdaguer, Phys. Lett. B **465**, 113 (1999); Phys. Rev. D **61**, 124024 (2000).
[11] C. Barrabès, V. Frolov, and R. Parentani, Phys. Rev. D **62**, 044020 (2000); R. Parentani, *ibid.* **63**, 041503(R) (2001); Int. J. Theor. Phys. **40**, 2201 (2001).
[12] Y. Aharonov, D. Albert, A. Casher, and L. Vaidman, Phys. Lett. A **124**, 199 (1987); Y. Aharonov and L. Vaidman, Phys. Rev. A **41**, 11 (1990).
[13] R. Brout, S. Massar, S. Popescu, R. Parentani, and P. Spindel, Phys. Rev. D **52**, 1119 (1995).
[14] S. Massar and R. Parentani, Phys. Rev. D **54**, 7444 (1996).
[15] R. Parentani, Nucl. Phys. **B465**, 175 (1996).
[16] N. Obadia and R. Parentani, Phys. Rev. D **64**, 044019 (2001).
[17] N. Obadia and R. Parentani, preceding paper, Phys. Rev. D **67**, 024021 (2003).
[18] T. Jacobson, Phys. Rev. D **44**, 1731 (1991); Prog. Theor. Phys. Suppl. **136**, 1 (1999).
[19] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B256**, 727 (1985); Int. J. Mod. Phys. A **11**, 4623 (1996).
[20] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **51**, 2827 (1995).
[21] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and Ph. Spindel, Phys. Rev. D **52**, 4559 (1995).
[22] J. Martin and R. H. Brandenberger, Phys. Rev. D **63**, 123501 (2001); J. C. Niemeyer, *ibid.* **63**, 123502 (2001).
[23] J. C. Niemeyer and R. Parentani, Phys. Rev. D **64**, 101301(R) (2001).
[24] U. H. Gerlach, Phys. Rev. D **59**, 104009 (1999).
[25] P. Yi, Phys. Rev. Lett. **75**, 382 (1995).
[26] S. Massar and R. Parentani, Phys. Rev. Lett. **78**, 4526 (1997).
[27] N. Obadia and R. Parentani (in preparation).
[28] R. Parentani, Class. Quantum Grav. **10**, 1409 (1993).
[29] P. Grove, Class. Quantum Grav. **3**, 801 (1986).
[30] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
[31] P. Grove, Class. Quantum Grav. **3**, 793 (1986).
[32] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **46**, 3271 (1992).
[33] B. L. Hu and N. G. Phillips, Phys. Rev. D **62**, 084017 (2000).
[34] L. H. Ford, A. D. Helfer, and T. A. Roman, Phys. Rev. D **66**, 124012 (2002).
[35] *Handbook of Mathematical Functions*, Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No. 55, edited by M. Abramovitz and I. A. Stegun (U.S. GPO, Washington, D.C., 1964).

Bibliographie

Quiconque rapporte une parole au nom de son auteur apporte la délivrance au monde, comme il est dit (Esther II 22) : "... et Esther en fit part au roi au nom de Mardochée".

Talmud. Traité des Pères VI 6

[1] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 62**, 444 (1973) ;
G. 't Hooft et M. Veltman, Ann. Inst. Poincaré **20**, 69 (1974) ;
S. Deser et P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D 10**, 401 (1974) ;
S. Deser et P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D 10**, 411 (1974).

[2] C. Rovelli, *Notes for a brief history of quantum gravity* in GR-QC/0006061 ainsi que les références (nombreuses) de cet article.

[3] S.W. Hawking, Nature **258**, 30 (1974).

[4] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).

[5] C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman and Company (1973).

[6] R.M. Wald, *General Relativity*, Univ. of Chicago Press, Chicago (1984).

[7] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Univ. of Chicago Press, Chicago (1994).

[8] T.A. Jacobson et G. Kang, Class. Quant. Grav. **10**, L1 (1993).

[9] J.D. Bekenstein, Nuovo Cim. Lett. **4**, 737 (1972) ;
J.D. Bekenstein, Phys. Rev. **D 7**, 2333 (1974) ;
J.D. Bekenstein, Phys. Rev. **D 9**, 3292 (1974).

[10] J.B. Hartle et S.W. Hawking, Phys. Rev. **D 13**, 2188 (1976).

[11] K. Fredenhagen et R. Haag, Commun. Math. Phys. **127**, 273 (1990).

[12] W.G. Unruh, Phys. Rev. Lett. **46**, 1351 (1981).

[13] W.G. Unruh, Phys. Rev. **D 51**, 2827 (1995).

[14] S. Corley et T. Jacobson, Phys. Rev. **D 54**, 1568 (1996).

[15] S. Corley et T. Jacobson, Phys. Rev. **D 59**, 124011 (1999).

[16] T. Jacobson et D. Mattingly, Phys. Rev. **D 61**, 024017 (2000).

[17] M.K. Parikh et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **24**, 5042 (2000).

[18] A. Celotti, J.C. Miller et D. W. Sciama, Class. Quant. Grav. **16 A**, 3 (1999).

[19] W. Israel, *The Thermodynamics of Black Holes* (2002), non publié.

[20] R.M. Wald, Living Rev. Rel. **4**, 6 (2001).

[21] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford (1983).

[22] S.L. Shapiro et S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. The Physics of Compact Objects*, Wiley-Interscience, New-York (1983).

[23] J.R. Oppenheimer et G. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).

[24] Y.B. Zel'dovich et I.D. Novikov, Sov. Astron. **10**, 602 (1967) ;
B.J. Carr et S.W. Hawking, Mon. Not. R. Astr. Soc. **168**, 399 (1974) ;
B.J. Carr, Astrophys. J. **205**, 1 (1975).

[25] R. Carlitz et R. Willey, Phys. Rev. **D 36**, 2327 (1987).

[26] H.B.G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948) ;
G. Plunien, B. Müller et W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 87 (1986).

[27] P.C.W. Davies, J. Phys. A : Math. Gen. **8**, 609 (1975).

[28] W.G. Unruh, Phys. Rev. **D 14**, 870 (1976).

[29] J.J. Bisognano et E.H. Wichmann, J. Math. Phys. **17**, 303 (1976).

[30] G.E.A. Matsas et D.A.T. Vanzella, Phys. Rev. **D 59**, 094004 (1999) ;
D.A.T. Vanzella et G.E.A. Matsas, Phys. Rev. **D 63**, 014010 (2001) ;
D.A.T. Vanzella et G.E.A. Matsas, Phys. Rev. Lett. **87**, 151301 (2001) ;
G.E.A. Matsas et D.A.T. Vanzella, *The Fulling-Davies-Unruh effect is mandatory : The proton's testimony* in GR-QC/0205078.

[31] H.C. Rosu, *Hawking-like effects and Unruh-like effects : Toward experiments ?* in GR-QC/9406012.

[32] R. Brout, S. Massar, R. Parentani et Ph. Spindel, Phys. Rep. **260**, 329 (1995).

[33] S.W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).

[34] J.M. Bardeen, B. Carter et S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).

[35] Y.B. Zel'dovich, Soviet. Phys. JETP, **35**, 1085 (1972).

[36] A.A. Starobinski, Soviet. Phys. JETP, **37**, 28 (1973).

[37] S. Massar et R. Parentani, Phys. Rev. **D 54**, 7444 (1996).

[38] N.D. Birrell et P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ. Press (1982).

[39] N. Sanchez, Phys. Rev. **D 18**, 1030 (1978).

[40] P. Candelas, Phys. Rev. **D 21**, 2185 (1980).

[41] N.N. Bogoliubov, Soviet. Phys. JETP, **7**, 51 (1958).

[42] L.M. Celnikier, *Basics of Cosmic Structures*, Editions Frontières (1989).

[43] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 256**, 727 (1985).

[44] T. Jacobson, Phys. Rev. **D 44**, 1731 (1991).

[45] T. Jacobson, *Introduction to blach hole microscopy* in HEP-TH/9510026.

[46] R. Brout, S. Massar, R. Parentani et Ph. Spindel, Phys. Rev. **D 52**, 4559 (1995).

[47] A. Casher, F. Englert, N. Itzhaki, S. Massar et R. Parentani, Nucl. Phys. **B 484**, 419 (1997).

[48] C. Barrabès, V. Frolov et R. Parentani, Phys. Rev. **D 62**, 044020 (2000).

[49] R. Parentani, Phys. Rev. **D 63**, 041503(R) (2001).

[50] La littérature autour ce sujet est vaste. Elle regroupe autant les articles théoriques que ceux qui sont basés sur des observations. L'idée est que les *boosts* réalisés sur Terre sont trop faibles pour pouvoir affirmer que l'on a testé l'invariance de Lorentz expérimentalement. En particulier, deux phénomènes critiques sont discutés dans la littérature. Le premier est le fait que les rayons cosmiques γ dont l'énergie dépasse la dizaine de TeV, et qui devraient former des paires électrons/positrons par collisions sur les photons infra-rouges, ne semblent pas s'annihiler conformément à ce qu'on aurait prédit en supposant l'invariance de Lorentz. La différence est alors interprétée comme provenant du non-respect de cette invariance pour ces *boosts* gigantesques : R.J. Protheroe et H. Meyer, Phys. Lett. **B 493**, 1 (2000).
Le deuxième phénomène provient de la présence inattendue de rayons cosmiques à ultra-haute énergie, au-delà de la coupure GZK, alors qu'ils devraient majoritairement former des pions par collisions sur le rayonnement cosmologique à 2.7K :
K. Greisen, Phys. Rev. Lett. **16**, 748 (1966) ;
G.T. Zatsepin et V.A. Kuz'min, Soviet. Phys. JETP Lett. **4**, 78 (1966) ;
N. Nagano et A.A. Watson, Rev. Mod. Phys. **72**, 689 (2000).
La confrontation avec la théorie donne lieu à diverses interprétations :
D. Colladay et V.A. Kostelecký, Phys. Rev. **D 55**, 6760 (1997) ;
D. Colladay et V.A. Kostelecký, Phys. Rev. **D 58**, 116002 (1998) ;
G. Amelino-Camelia *et al.*, Nature (London) 393, 763 (1998) ;
S. Coleman et S.L. Glashow, Phys. Rev. D 59, 116008 (1999) ;
P. Bhattacharjee et G. Sigl, Phys.Rept. **327**, 109 (2000) ;
G. Amelino-Camelia et T. Piran, Phys. Rev. **D 64**, 036005 (2001) ;
T. Jacobson, S. Liberati, et D. Mattingly, Phys. Rev. **D 66**, 081302(R) (2002) ;
T. Jacobson, S. Liberati, et D. Mattingly, *Threshold effects and Planck scale Lorentz violation : combined constraints from high energy astrophysics* in HEP-PH/0209264 ;
J.W. Moffat, *Spontaneous violation of Lorentz invariance and ultrahigh energy cosmic rays* in HEP-TH/0211167.

[51] S. Mukohyama et W. Israel, Phys. Rev. **D 62**, 121501 (2000).

[52] W.G. Unruh et R.M. Wald, Phys. Rev. **D 29**, 1047 (1984).

[53] S. Massar et R. Parentani, Phys. Rev. **D 54**, 7426 (1996).

[54] P.C.W. Davies et S.A. Fulling, Proc. R. Soc. Lond. **A 354**, 59 (1977).

[55] N. Obadia et R. Parentani, Phys. Rev. **D 64**, 044019 (2001).

[56] R. Parentani, Nucl. Phys. **B 465**, 175 (1995).

[57] N. Obadia et R. Parentani, Phys. Rev. **D 67**, 024021 (2003).

[58] N. Obadia et R. Parentani, Phys. Rev. **D 67**, 024022 (2003).

[59] Y. Aharonov et L. Vaidman, Phys. Rev. **A 41**, 11 (1990).

[60] S.A. Fulling et P.C.W. Davies, Proc. R. Soc. Lond. **A 348**, 393 (1976).

[61] P.C.W. Davies, S.A. Fulling et W.G. Unruh, Phys. Rev. **D 13**, 2720 (1976).

[62] P.C.W. Davies et S.A. Fulling, Proc. R. Soc. Lond. **A 356**, 237 (1977).

[63] A.A. Saharian, Class. Quant. Grav. **19**, 5039 (2002).

[64] P. Grove, Class. Quant. Grav. **3**, 793 (1986).

[65] W.R. Walker, Phys. Rev. **D 31**, 767 (1985).

[66] S.W. Hawking et G.F. Ellis, *The Large-Scale Structure of Spacetime*, Cambridge Univ. Press, (1973).

[67] V.P. Frolov et I.D. Novikov, *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers, (1998).

[68] C. Itzykson et J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill (1985).

[69] M.T. Jaekel et S. Reynaud, J. Phys. I (France), **1**, 1395 (1991).

[70] L. Mandel et E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, (1995).

[71] M.T. Jaekel et S. Reynaud, Phys. Lett. **A 167**, 227 (1992).

[72] M.T. Jaekel et S. Reynaud, Phys. Lett. **A 180**, 9 (1993).

[73] L.H. Ford et N.F. Svaiter, Phys. Rev. **D 58**, 065007 (1998).

[74] A. Strominger, *Les Houches Lectures on Black Holes* in HEP-TH/9501071

[75] A. Anderson et B. DeWitt, Found. Phys. **16**, 91 (1986).

[76] J. Audretsch et R. Müller, Phys. Rev. **D 49**, 4056 (1994).

[77] W.G. Unruh, Phys. Rev. **D 46**, 3271 (1992) ;
et pour une étude spécifique de l'oscillateur harmonique uniformément accéléré, voir :
D.J. Raine, D.W. Sciama et P. Grove, Proc. R. Soc. Lond. **A 435**, 205 (1991) ;
S. Massar, R. Parentani et R. Brout, Class. Quant. Grav. **10**, 385 (1993).

[78] U.H. Gerlach, Phys. Rev. **D 59**, 104009 (1999).

[79] P. Yi, Phys. Rev. Lett. **75**, 382 (1995) ;
P. Yi, Phys. Rev. **D 53**, 7041 (1996).

[80] S. Massar et R. Parentani, Phys. Rev. Lett. **78**, 4526 (1997).

[81] C.-H. Wu et L.H. Ford, Phys. Rev. **D 60**, 104013 (1999).

[82] G.T. Moore, J. Math. Phys. **9**, 2679 (1970).

[83] B.S. deWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).

[84] F. Wilczek, *Quantum purity at a small price : Easing a black hole paradox* in HEP-TH/9302096, Houston 1992, Proceedings "Black holes, membranes, wormholes and superstrings".

[85] R. Parentani, Class. Quant. Grav. **10**, 1409 (1993).

[86] P. Grove, Class. Quant. Grav. **3**, 801 (1986).

[87] R. Parentani, Nucl. Phys. **B 454**, 227 (1995).

[88] W. Heisenberg et H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936) ;
J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

[89] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, S. Popescu et Ph. Spindel, Phys. Rev. **D 52**, 1119 (1995).

[90] J. Audretsch et R. Müller, Phys. Rev. **D 49**, 6566 (1994).

[91] B.L. Hu et N.G. Phillips, Phys. Rev. **D 62**, 084017 (2000).

[92] L.H. Ford, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1803 (2000) ;
L.H. Ford, A.D. Helfer et T.A. Roman, Phys. Rev. **D 66**, 124012 (2002).

[93] Pour une application des méthodes que nous avons appliquées (fonctions temporelles, comportement analytique,*etc*...) à l'effet Casimir :
G. Barton, J. Phys. A : Math. Gen. **24**, 991 (1991) ;
G. Barton, J. Phys. A : Math. Gen. **24**, 5533 (1991).

[94] S. Kamefuchi et H. Umezawa, Nuovo Cim. **31**, 429 (1964).

[95] M. Abramovitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington D.C. (1964).