



**HAL**  
open science

# Atomisation d'un jet liquide par un courant gazeux

Philippe Marmottant

► **To cite this version:**

Philippe Marmottant. Atomisation d'un jet liquide par un courant gazeux. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2001. Français. NNT : . tel-00003054

**HAL Id: tel-00003054**

**<https://theses.hal.science/tel-00003054>**

Submitted on 26 Jun 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

*N° attribué par la bibliothèque*  
-----

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

***Spécialité: « Mécanique des Fluides et Transferts »***

préparée au Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels  
dans le cadre de l'Ecole Doctorale « Mécanique et Energétique »

présentée et soutenue publiquement

par

**Philippe MARMOTTANT**

le 18 décembre 2001

**ATOMISATION D'UN LIQUIDE  
PAR UN COURANT GAZEUX**

—————  
***Directeur de thèse :***

Emmanuel VILLERMAUX  
—————

**JURY**

M.	E. HOPFINGER	, Président
M.	Y. POMEAU	, Rapporteur
M.	S. ZALESKI	, Rapporteur
M.	E. VILLERMAUX	, Directeur de Thèse
M.	J. EGGERS	, Examineur
M.	G. SEARBY	, Examineur
M.	S. ZURBACH	, Invité



Ce manuscrit ne saurait commencer sans des remerciements, car je n'ai pas été tout seul au cours de ces trois années !

Mes remerciements s'adressent en priorité à Emmanuel Villermaux, qui a encadré cette thèse. Son soutien constant, qui s'est exercé malgré la distance, son impétueuse et exigeante passion scientifique ont imprimé à cette thèse la motivation d'un défi scientifique.

Je tiens à remercier les rapporteurs et les membres du Jury, pour leurs remarques et les discussions que nous avons pu avoir, qui m'ont permis de progresser sur certains points cruciaux de cette thèse.

La partie expérimentale de cette thèse doit beaucoup à la joviale efficacité et inventivité de de Jean-Paul Barbier-Neyret qui a conçu et réalisé le système de déclenchement des ampoules flash. Le montage hydraulique et pneumatique de l'injecteur a bénéficié de la compétence dynamique de Serge Layat à Grenoble, et de l'accueil des marseillais François Bettino et Jacky Minelli lors de mes déplacements vers le Sud.

Pendant ma première année de thèse j'ai beaucoup apprécié l'aide de Jérôme Duplat, thésard aîné. Il est pour beaucoup dans mon initiation à la manoeuvre des Macintosh, et ses doigts de fée m'ont épargné des crises de rage lors de la fabrication des fils chauds. Sa relecture attentive de mon manuscrit m'a beaucoup apporté.

Je n'oublie pas d'adresser mes remerciements à la fougue de Cédric Poulain qui m'a proposé l'étalonnage automatique des fils chaud, ce qui m'a entre autre évité la fastidieuse version manuelle de cette procédure.

Lors de mes séjours à Marseille, l'expertise chaleureuse de Geoff Searby m'a toujours tiré d'affaire lorsque mon ordinateur était capricieux. Travailler aux côtés de Nicolas Brémond, Pierre Héraud et Christophe Clanet fut un plaisir.

Je remercie Papa et Maman qui ont accepté de me voir revenir par période à la maison.

La relecture de la charmante Sonia a élégamment éliminé toutes les incorrections de langage que j'ai pu commettre.

Le sable des mers, les gouttes de la pluie, les jours de l'éternité,  
qui les dénombrera ?

*Le Siracide 1.2*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Motivations . . . . .	7
1.1.1	Formation d’embruns . . . . .	7
1.1.2	Formation de spray de combustible . . . . .	9
1.2	Tension de surface et fractionnement . . . . .	11
1.2.1	La tension de surface s’oppose à la création d’interface . . . . .	11
1.2.2	. . . mais provoque la brisure de jets liquides . . . . .	12
1.2.3	Pont liquides et ligaments étirés . . . . .	15
1.3	Brisure assistée par courant de gaz . . . . .	17
1.3.1	Brisure de gouttes . . . . .	17
1.3.2	Jet liquide rapide dans une atmosphère immobile, $u_2 = 0$ . . . . .	21
1.3.3	Jet liquide entouré d’un jet gazeux rapide $u_2 > u_1$ . . . . .	22
1.4	Distribution des tailles après une fragmentation . . . . .	26
1.4.1	Mécanismes de brisure . . . . .	26
1.4.2	Observations dans les sprays . . . . .	28
1.5	Plan de la thèse . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Méthodes expérimentales</b>	<b>31</b>
2.1	Production du jet liquide et du jet gazeux . . . . .	31
2.1.1	Injecteur coaxial convergent . . . . .	31
2.1.2	Schéma d’ensemble . . . . .	31
2.1.3	Profils de vitesse en sortie de la tuyère d’air . . . . .	33
2.2	Propriétés des fluides . . . . .	35
2.3	Visualisation . . . . .	37
2.3.1	Visualisation ponctuelle avec un laser pour mesurer des fré- quences de passage . . . . .	37
2.3.2	Prise d’images . . . . .	38
2.4	Détections de gouttes . . . . .	40
2.4.1	Élimination de l’image du fond . . . . .	41
2.4.2	Origine des dégradés de gris sur les images . . . . .	42

2.4.3	Modélisation des profils par convolution d'images nettes avec une tache de flou . . . . .	47
2.4.4	Evaluation des gradients de gris sur les images . . . . .	52
2.4.5	Algorithme de détection . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Déstabilisation du liquide</b>	<b>63</b>
3.1	Instabilité de cisaillement . . . . .	63
3.1.1	Analyse de stabilité avec un profil de vitesse dans l'air . . . . .	63
3.1.2	Description expérimentale de l'instabilité . . . . .	67
3.2	Déstabilisation transverse . . . . .	74
3.2.1	Naissance des digitations . . . . .	74
3.2.2	Accélération de surface . . . . .	77
3.2.3	Effet d'une accélération oscillatoire . . . . .	79
3.2.4	Interprétation des mesures . . . . .	86
3.3	Accélération des ondulations transverses . . . . .	87
3.3.1	Faits expérimentaux . . . . .	87
3.3.2	Modélisation de l'accélération des protubérances et vitesse de projection du ligament . . . . .	89
3.4	Elongation sous forme de ligaments . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Formation des gouttes</b>	<b>97</b>
4.1	Brisure des ligaments . . . . .	98
4.1.1	Diamètre du ligament avant sa cassure . . . . .	98
4.1.2	Rapport d'aspect des ligaments à la brisure . . . . .	101
4.2	Gouttes formées à partir d'un ligament . . . . .	103
4.2.1	Distribution des volumes des ligaments . . . . .	103
4.2.2	Distribution des tailles de gouttelettes issues d'un ligament . . . . .	106
4.3	Distribution des tailles de gouttes dans le spray . . . . .	109
4.3.1	Mesures dans le spray, dans la région d'atomisation primaire . . . . .	110
4.3.2	Les distributions ont une décroissance exponentielle . . . . .	111
4.3.3	Influence de la vitesse d'air . . . . .	111
4.3.4	Lien entre la brisure ligamentaire et le spray . . . . .	116
4.3.5	Évolution de la distribution avec la distance aval . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Dynamique ligamentaire</b>	<b>121</b>
5.1	Ligament entraîné par un tube capillaire à partir d'une surface liquide . . . . .	122
5.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	122
5.1.2	Etirement de l'extrémité par la capillarité . . . . .	124
5.1.3	Etirement quasi-statique . . . . .	128
5.1.4	Elongation . . . . .	133

5.1.5	Temps de brisure . . . . .	138
5.1.6	Distribution des tailles de gouttes . . . . .	141
5.2	Ligaments entraînés par le courant d'air coaxial . . . . .	144
5.2.1	Déformation de la protubérance initiale par les forces aérodynamiques . . . . .	144
5.2.2	Blocage de la récession de l'extrémité . . . . .	147
5.2.3	Brisure au temps capillaire . . . . .	148
5.2.4	Ralentissement visqueux . . . . .	152
5.3	Tailles produites par la brisure d'un ligament étiré . . . . .	155
5.3.1	L'étirement réduit l'instabilité capillaire . . . . .	155
5.3.2	Distribution aléatoire des brisures . . . . .	156
5.3.3	Distribution issue de l'interaction de gouttes élémentaires . . . . .	158
<b>6</b>	<b>Aspects géométriques</b>	<b>165</b>
6.1	Extraction d'une longueur de contour . . . . .	165
6.2	Surface générée lors de l'instabilité primaire . . . . .	168
6.3	Longueur de contour dans le spray . . . . .	169
6.3.1	Influence du seuil sur la détection des contours: résultats expérimentaux . . . . .	169
6.3.2	Périmètre des gouttes dans l'aérosol en fonction du seuil . . . . .	171
6.3.3	Valeur du périmètre lorsque le spray est figé: une mesure du taux de production de gouttes . . . . .	174
6.4	Rugosité du contour . . . . .	176
6.4.1	Dimension fractale locale . . . . .	176
6.4.2	Mesure de la dimension fractale . . . . .	178
6.4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	181
6.4.4	Interprétation atomistique . . . . .	186
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>195</b>
<b>A</b>	<b>Conditions d'injection turbulentes</b>	<b>197</b>
A.1	Injection . . . . .	198
A.1.1	Écoulement liquide turbulent, écoulement gazeux laminaire: injecteur TL . . . . .	198
A.1.2	Écoulement liquide et gazeux turbulents: injecteur TT . . . . .	198
A.2	État de surface du jet liquide seul pour les différents injecteurs . . . . .	203
A.3	Longueur d'onde de l'instabilité primaire . . . . .	204
A.3.1	Effet de la vitesse gaz . . . . .	204
A.3.2	Effet de la vitesse liquide . . . . .	206
A.4	Taille des gouttes dans le spray . . . . .	209



# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse vise à comprendre comment s'effectue la fragmentation d'un liquide assistée par un courant de gaz. Compréhension qui est cruciale pour l'étude de la formation des aérosols de gouttelettes en milieu naturel, ou des sprays dans le monde industriel. Lorsque cette fragmentation est efficace, et produit un nombre conséquent de gouttelettes de liquide, le terme d'*atomisation* est employé, bien que le liquide ne se fragmente pas jusqu'à atteindre des tailles atomiques (insécables, selon l'étymologie du mot atome). Les tailles des gouttes composant un aérosol peuvent s'étendre sur une large gamme d'échelles : la distribution de ces tailles sera l'objet de notre attention.

### 1.1 Motivations

La formation de sprays de gouttelettes par courant de gaz intéressent beaucoup de disciplines. Nous évoquerons plus particulièrement deux situations d'atomisation : à la surface de la mer et dans les moteurs de fusée.

#### 1.1.1 Formation d'embruns

Les embruns sont arrachés par le vent à la crête des vagues, et forment un aérosol qui contribue aux échanges de quantité de mouvement, de chaleur et de masse entre la mer et l'atmosphère (figure 1.1). Difficile à étudier *in situ* la production d'embruns a été simulée dans une soufflerie d'air sur un plan d'eau de mer par Anguelova & Barber (1999). L'analyse des images prises sur les crêtes permet d'individualiser les gouttes et de leur attribuer une taille. On obtient ainsi un histogramme des tailles qui fait apparaître une très large dispersion des tailles autour d'une valeur maximum (figure 1.2). L'intensité du vent modifie de manière conséquente la production d'embruns. L'échelle de vitesse de vent créée par l'amiral anglais Francis Beaufort et généralisée dans la marine anglaise en 1874 est d'ailleurs basée sur l'observation de l'aspect des vagues et sur la production d'embruns (Bétis, 2000). Depuis un vent qualifié de calme (force 0 : la mer est



FIG. 1.1: *Formation d'embruns dans le vent.*

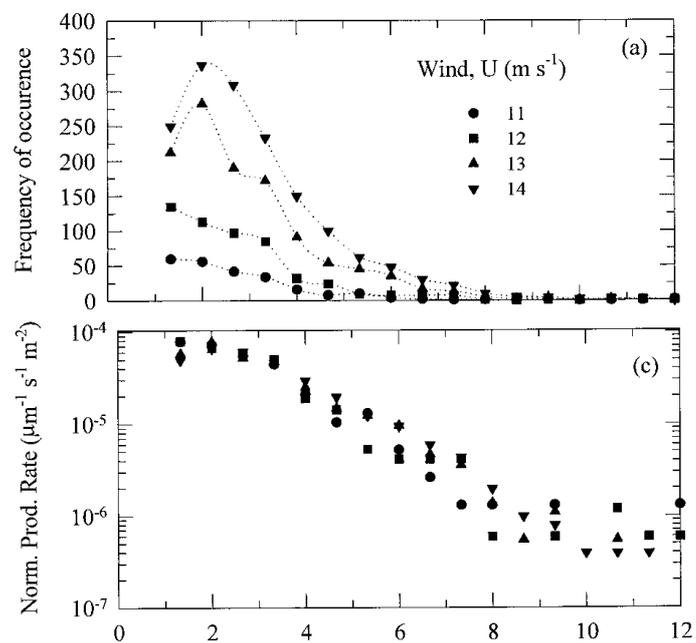


FIG. 1.2: (a) *Histogramme des tailles de gouttes*, (c) *taux de production normalisé par le nombre de déferlements de vague (Anguelova & Barber, 1999, figure 2a et 2c).*

comme un miroir), en passant par grand frais (force 7: la mer grossit, l'écume est soufflée en traînées, lames déferlantes) jusqu'à ouragan (force 12: air plein d'écume et d'embruns, mer entièrement blanche) les effets de la vitesse du vent sur la mer sont codifiés pour connaître son intensité. Le degré  $d$  sur l'échelle de Beaufort associé à la vitesse  $v$  du vent à 10 m de hauteur est la partie entière de  $(v/v_0)^{2/3}$ , avec  $v_0 = 0.83$  m/s.

### 1.1.2 Formation de spray de combustible

Dans le domaine industriel la production d'un spray est une étape qui favorise les réactions chimiques telle que la combustion, car l'atomisation augmente l'aire interfaciale. Ainsi, le premier étage de la fusée Ariane 5 est propulsé par la combustion d'un mélange oxygène/hydrogène. Un grand nombre de petits injecteurs alimentés en oxygène liquide (LOx) et hydrogène gazeux (GH<sub>2</sub>) sont disposés sur la calandre de la chambre de combustion et créent un spray de gouttelettes de LOx dans le GH<sub>2</sub>. Ces injecteurs se présentent sous la forme d'un tube central d'amenée du LOx, inséré dans un tube plus large de même axe, d'où la dénomination d'injecteur coaxial. Le GH<sub>2</sub> est injecté entre les deux tubes (schéma figure 1.3). Ce courant de gaz atomise le jet de liquide et produit un spray de

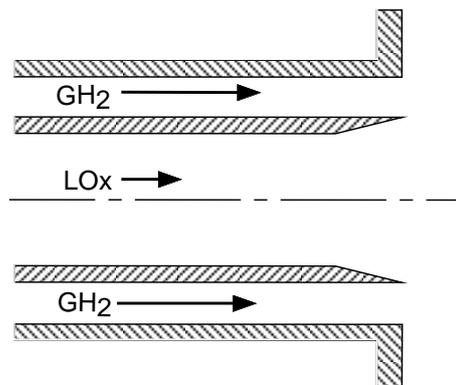


FIG. 1.3: Schéma d'un injecteur coaxial.

petites gouttelettes qui s'enflamme rapidement.

Cette thèse s'est déroulée dans le cadre d'un groupement de recherche (GdR) rassemblant CNES, CNRS, ONERA et SNECMA, intitulé « Combustion dans les moteurs de fusée ». La communauté scientifique des organismes cités plus haut a en effet ressenti le besoin d'approfondir les connaissances existantes dans la combustion cryogénique haute-pression (Vuillermoz *et al.*, 2001). Ce GdR a amené ainsi la concertation d'expérimentateurs, de numériciens et théoriciens. Les expériences menées sur les banc d'essai Mascotte de l'ONERA s'approchent de très près des conditions de combustion en sortie d'un injecteur (figure 1.4). Le

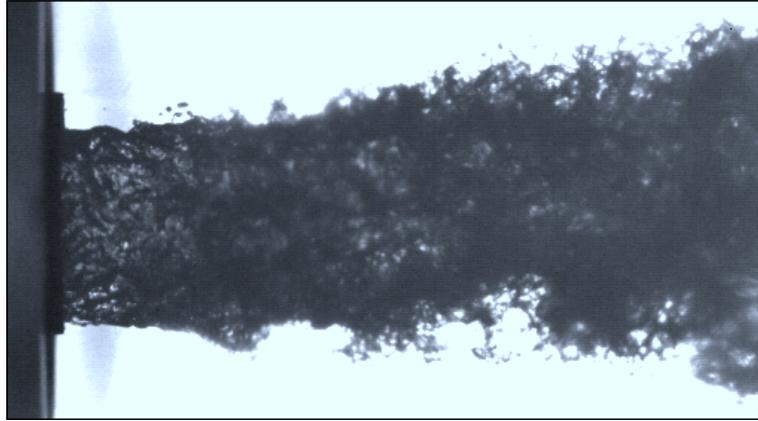


FIG. 1.4: *Expérimentation du banc Mascotte en conditions de combustion : jet d'oxygène liquide et jet d'hydrogène à 1 MPa (Gicquel et al., 2001).*

diagnostic de l'écoulement et de la flamme requiert des méthodes non intrusives d'observation, et l'atomisation proprement dite de l'oxygène se produit souvent dans la zone de combustion, ce qui rend difficile son observation. Dans cette optique les études de l'atomisation du jet liquide en elle-même, sans combustion, sont riches d'enseignements. Une première méthode est la modélisation numérique directe de l'écoulement. Cette méthode a été développée avec un code de résolution des équations de Navier-Stokes qui intègre la présence de l'interface dans les cellules de calcul par une fraction volumique sur les propriétés du fluide, et la position de l'interface par un plan (Scardovelli & Zaleski, 1999). Il est alors possible de simuler des évolutions d'interface 2D ou 3D, pour des rapports de densité et des nombres de Reynolds limités. Ces simulations montrent que l'atomisation fait intervenir l'apparition transitoire de ligaments de la phase de plus forte densité dans la phase de faible densité (Keller *et al.*, 1994).

Une deuxième méthode est d'étudier l'atomisation dans des configurations expérimentales simples avec des liquides non-réactifs. Des jets coaxiaux liquide-air de différentes géométries ont été réalisés. Une géométrie plane, quasi-bidimensionnelle, est obtenue en mettant en contact deux jets rectangulaires parallèles de faible rapport d'aspect. Le jet liquide s'écoule dans un canal horizontal, il est cisailé sur sa surface par un jet d'air dans les travaux de Raynal (1997). Plus proche des injecteurs de fusée, des jets axisymétriques ont été étudiés dans le cadre de ce GdR (Villermaux, 1998; Lasheras *et al.*, 1998; Lasheras & Hopfinger, 2000; Marmottant & Villermaux, 2001*b*, par exemple).

## 1.2 Tension de surface et fractionnement

### 1.2.1 La tension de surface s'oppose à la création d'interface ...

Cette énergie de surface peut être vue comme une énergie potentielle : si l'on considère une surface d'aire  $S$  délimitée par une frontière fermée décrite par le vecteur  $\mathbf{r}(l)$ , avec  $l$  abscisse curviligne, un déplacement de la frontière  $\delta\mathbf{r}(l)$  impose de fournir une énergie :

$$\delta E = \sigma \delta S = \sigma \oint dl \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} = \oint (\sigma d\mathbf{l} \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{r},$$

ce qui revient à exprimer le travail d'une force extérieure linéique  $\sigma \mathbf{n}$  sur la frontière : pour un mouvement quasi-statique ces forces sont opposées aux forces qu'exercent la surface sur l'extérieur  $\mathbf{f} = -\sigma \mathbf{n}$  (figure 1.5). Cette force linéique dirigée orthogonalement au contour vers l'intérieur, est la force de *capillarité*. La

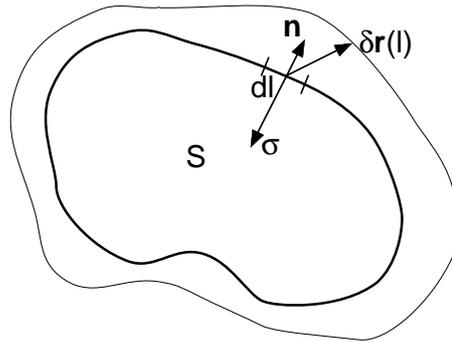


FIG. 1.5: Augmentation de la surface et force de tension superficielle exercée sur la frontière

tension de surface exerce une force linéique sur sa frontière, et quand la surface n'est pas plane et présente une courbure  $\kappa = 1/R_x + 1/R_y$ , où  $R_x$  et  $R_y$  sont les rayons de courbures principaux, elle exerce aussi une pression sur le milieu vers lequel est dirigé la courbure. Si l'on considère un élément de surface infinitésimal carré  $dx dy$  dont les cotés sont dans les plans de courbures principaux il est soumis à une force  $\sigma dy dx / R_x$  dans un plan de courbure et à une force  $\sigma dx dy / R_y$  dans l'autre (figure 1.6). Au total la pression exercée, appelée *pression de Laplace* est le produit de la tension superficielle par la courbure :  $\Delta P = \sigma(1/R_x + 1/R_y)$ .

Si la capillarité s'oppose à la création de surface elle ne s'oppose pas forcément au fractionnement du liquide comme nous allons le voir.

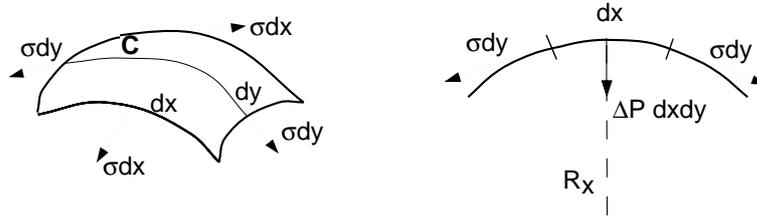


FIG. 1.6: *Pression de Laplace due à la courbure de la surface (droite : vue en coupe de C).*

### 1.2.2 ... mais provoque la brisure de jets liquides

L'expérience courante montre que tout jet de liquide sortant d'un orifice ne reste pas lisse mais présente des ondulations, et qu'il se brise finalement en gouttes (figure 1.7).

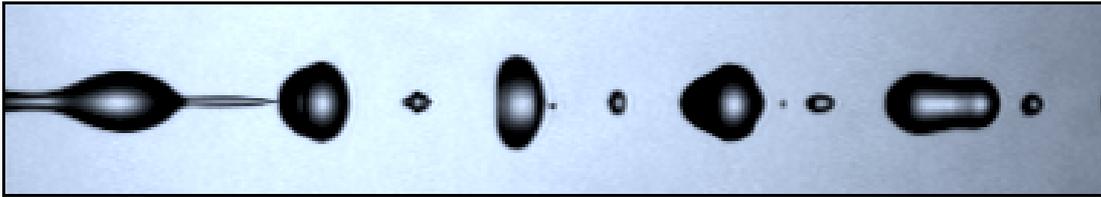


FIG. 1.7: *Image de la brisure de Rayleigh d'un jet de 8 mm.*

Le cylindre est en effet une forme instable vis-à-vis de la tension de surface. Suivant en cela Eggers (1997), nous constatons qu'il est possible de diminuer l'aire d'un cylindre de rayon initial  $r_0$  imprimant à sa surface des ondulations infinitésimales d'amplitude  $\epsilon$  modulée selon son axe  $x$  et du type

$$r = r_0 + \epsilon \exp(ikx) + \beta.$$

Le niveau moyen  $\beta$  est modifié par l'ondulation, et la conservation du volume impose  $\beta = -2\epsilon^2$ . L'aire du cylindre sur une longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  est

$$A = 2\pi r_0 \lambda \left( 1 + \frac{1}{4} \epsilon^2 ((kr_0)^2 - 1) \right),$$

la surface du cylindre diminue donc lorsque  $kr_0 = 2\pi r_0/\lambda < 1$ , c'est à dire pour les longueurs d'onde supérieures au périmètre du jet. En conséquence la surface cylindrique est instable vis-à-vis de ces modulations puisqu'elles réduisent son énergie potentielle de surface. Une analyse de stabilité linéaire permet de connaître l'évolution temporelle de ces petites perturbations. En supposant un écoulement

inviscide et des perturbations de la forme  $\epsilon \exp(ikx - i\omega t) = \epsilon \exp(ikx + st)$ , où  $k$  est réel et  $s = -i\omega$  complexe, la relation de dispersion donne le taux de croissance  $s$  en fonction de  $k$  :

$$s^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 r_0^3} \frac{z I_1(z)}{I_0(z)} (1 - z^2), \quad (1.1)$$

avec  $I_m$  la fonction de Bessel modifiée du premier genre d'ordre  $m$ , et  $z = kr_0 = 2\pi r_0/\lambda$ . Lorsque  $z > 1$  le taux de croissance est imaginaire : les perturbations oscillent à la fréquence  $\omega$  et sont finalement atténuées par la viscosité. Le taux de croissance est réel pour  $z < 1$ , les perturbations croissent exponentiellement et le jet est donc instable quelle que soit leur amplitude initiale. Le taux de croissance admet un maximum entre 0 et 1 pour  $z = 0.697$  qui vaut  $s_R = 0.34 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 r_0^3}}$ . Ce mode correspond à une longueur d'onde égale à  $\lambda_R = 9.01 r_0$ .

Les résultats de cette analyse de stabilité décrivent une instabilité *temporelle* sur un cylindre : nous avons supposé une perturbation uniforme sur tout le cylindre. Dans le cas d'un jet sortant d'une buse, les perturbations croissent avec l'abscisse lorsque l'on s'éloigne de la buse : il s'agit d'une instabilité *spatiale*. L'analyse de stabilité consiste à examiner le vecteur d'onde  $\underline{k}$  complexe en fonction de la pulsation  $\omega$  réelle des oscillations  $\epsilon \exp(i\underline{k}x - i\omega t)$  : le nombre d'onde est la partie réelle  $k_r$  de  $\underline{k}$  et le taux de croissance spatial est  $k_i$ , sa partie imaginaire. On peut montrer que le nombre d'onde le plus amplifié est identique à celui qui s'ensuit d'une analyse temporelle lorsque le nombre de Weber  $We = \rho_1 u^2 d/\sigma$ , calculé avec la vitesse de sortie du jet et son diamètre, est grand devant 1. Dans la plupart des jets expérimentaux ce nombre est supérieur à 100.

Cette instabilité capillaire dite de Plateau-Rayleigh fut observée la première fois par Savart (1833). Il mit au point un système de résonance de l'instabilité en introduisant une rétroaction mécanique permettant de transmettre l'impact des gouttes formées en aval par l'instabilité vers la buse de production du jet, ceci afin de sélectionner le mode le plus amplifié. Plateau (1873) utilisa ces observations de fréquence d'impact pour en déduire une longueur d'onde de brisure des jets et Rayleigh (1879) fut le premier à proposer la théorie d'instabilité d'un cylindre décrite plus haut, remarquablement en accord avec ces mesures.

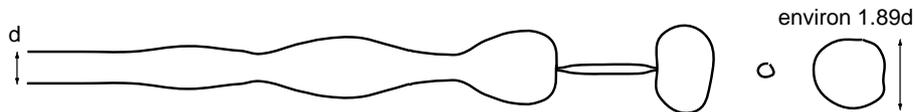


FIG. 1.8: Schéma de la brisure de Rayleigh d'un jet.

Si l'on suppose que le jet se fractionne en portions de longueur d'onde  $\lambda_R$  égales, la conservation du volume montre que les gouttes produites ont un diamètre de  $1.89d$  (figure 1.8). Il faut remarquer que la brisure s'accompagne toujours

de gouttes satellites entre les gouttes principales. La raison en est que juste avant la brisure le jet devient très fin entre les gouttes, produisant un fin cylindre de diamètre peu variable, et que la forme du jet avant la brisure suit une évolution universelle décrit par une fonction de similarité découverte par Jens Eggers, cette forme étant dissymétrique (Eggers, 1997). Suivant cette fonction le rayon du jet varie peu d'un côté de la brisure et beaucoup de l'autre : la brisure ne peut donc se produire au milieu, et il s'en produit donc au moins deux aux extrémités du cylindre inter-gouttes, ce qui crée un petit morceau de liquide qui donne le ou les satellites.

La taille des gouttes principales et satellites peut être contrôlée avec précision en imposant une excitation à la buse (ultrasonique pour les petits jets) qui permet de sélectionner plus étroitement la longueur d'onde, et la taille des satellites (figure 1.9). La taille de la buse détermine la taille du jet et des gouttes : il serait

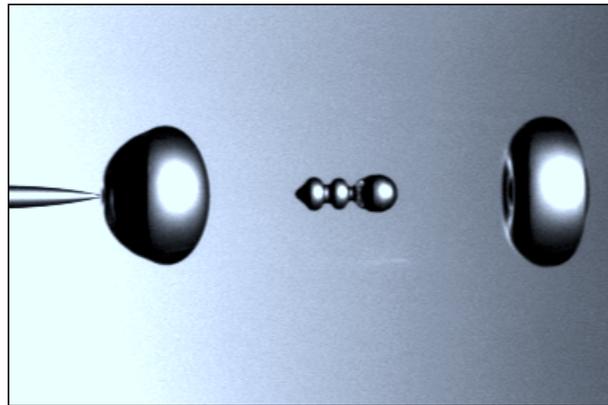


FIG. 1.9: *Goutte satellite qui se rassemble juste après la brisure du jet. La buse est excitée par une vibration axiale de forte amplitude.*

donc possible de créer n'importe quelle taille de gouttes en choisissant le diamètre de la buse. Les pertes de charge pour les petites diamètres limitent expérimentalement la production de petite jets. Citons à ce propos Gañán-Calvo (1998) qui proposent une méthode originale pour réaliser des gouttes microniques : pour produire et stabiliser des jets de taille micronique ils approchent d'une goutte une plaque percée d'un trou par lequel l'atmosphère est aspirée. La goutte est déformée par le courant de gaz sous forme d'un fin jet qui passe à travers le trou et qui se brise plus en aval sous forme de gouttes dont les tailles peuvent être aussi petites que  $80\mu\text{m}$ , avec une très faible dispersion autour de cette valeur.

### 1.2.3 Pont liquides et ligaments étirés

Pour immobiliser un cylindre liquide, il est possible de le maintenir entre deux surfaces circulaires : on obtient alors un pont liquide. La stabilité des ponts de liquides a fait l'objet de nombreuses études. La configuration expérimentale la plus utilisée pour les étudier est le conteneur de Plateau qui permet d'isoler un pont de liquide entre deux surfaces. Le pont est immergé dans un fluide de densité voisine de façon à réduire les effets de la pesanteur. Plus récemment, l'influence de la gravité sur la stabilité de ponts verticaux a été analysée numériquement et théoriquement (Mesguer & Sanz, 1985; Padday *et al.*, 1997). Un courant de fluide coaxial au pont liquide, qui est maintenu entre deux barres rondes, stabilise dans certaines conditions la surface soumise sinon à l'instabilité capillaire de Plateau-Rayleigh (Lowry & Steen, 1997).

Cette configuration permet de produire un étirement du liquide. L'influence de l'étirement sur la stabilité des ponts a fait l'objet d'études théoriques (Frankel & Weihs, 1985), et expérimentales. En effet l'élongation de ponts liquides entre deux surfaces a surtout été mise en oeuvre pour caractériser la viscosité élongationnelle de ligaments non-newtoniens. Le dispositif utilisé réalise un taux d'étirement constant, éloignant les plaques de manière exponentielle avec le temps (Spiegelberg *et al.*, 1996). La simulation de l'étirement d'un pont liquide newtonien entre un disque fixe et un disque mobile permet de quantifier l'influence de la viscosité sur la diminution du diamètre et les forces appliquées aux disques (Gaudet *et al.*, 1996).

Les ponts liquides étirés sont aussi l'intermédiaire obligatoire du détachement d'une goutte soumise à la gravité : leur brisure détermine le volume de la goutte qui tombe et de celle qui reste accolés à l'orifice (Peregrine *et al.*, 1990). Lorsque le fluide est très visqueux le pont liquide prend la forme d'un ligament cylindrique (figure 1.10), d'autant plus long et fin que le fluide est visqueux (Henderson *et al.*, 2000).

Leur diamètre présentent une portion de diamètre uniforme. Ces auteurs montrent qu'un cylindre liquide de volume donné dont le diamètre et la longueur évoluent comme :

$$\xi = \frac{\xi_0}{\sqrt{t + t^*}}, \quad (1.2)$$

$$l = v(t + t^*), \quad (1.3)$$

avec  $t^* > 0$  une constante arbitraire, satisfait l'équation de Navier-Stokes pour  $t + t^* > 0$  quel que soit la viscosité  $\nu$  du liquide.

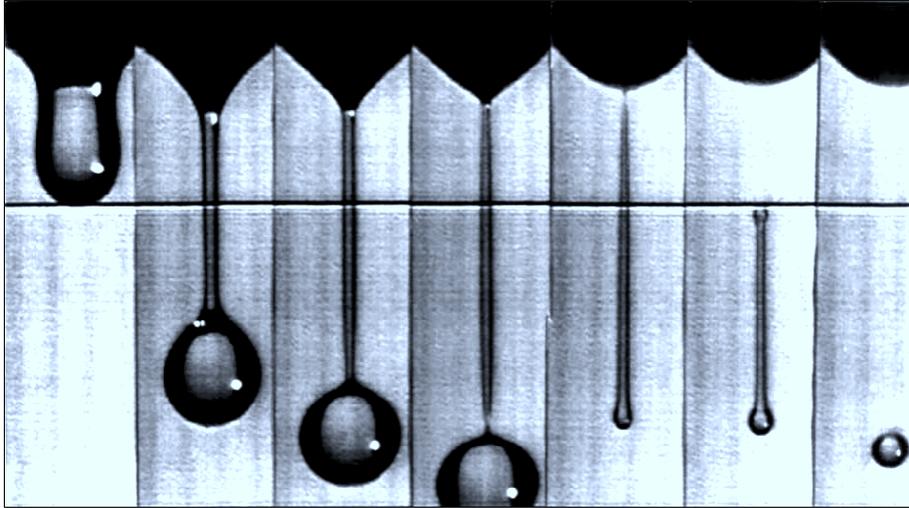


FIG. 1.10: *Ligament formé par la chute d'une goutte d'huile dont la viscosité cinématique est 75 fois celle de l'eau. L'intervalle entre les images est d'environ 6 ms à partir de la deuxième (d'après la figure 1 de Henderson et al., 2000).*

Ces équations du mouvement ne font pas intervenir la capillarité : la raison est que la viscosité domine le mouvement. La valeur du nombre de Reynolds  $Re$  construit avec le diamètre initial du ligament varie de 0.05 à 2 au maximum, d'après l'analyse de leurs données. Le nombre de Reynolds est défini de la façon suivante :

$$Re = \frac{u_0 r_0}{\nu_1} = \sqrt{\frac{r_0 \sigma}{\rho_1 \nu_1^2}}, \quad (1.4)$$

où  $u_0 = \sqrt{\sigma/\rho r_0}$  est la vitesse capillaire causée, par une suppression de Laplace  $\sigma/r_0$ , qui est balancée par un terme d'ordre de grandeur  $\rho_1 u_0^2$  dans les équations de quantité de mouvement. La brisure se produit en général aux extrémités, mais peut aussi se produire au milieu du ligament pour les liquides très visqueux, quand le ligament devient extrêmement fin.

## 1.3 Brisure assistée par courant de gaz

### 1.3.1 Brisure de gouttes

La forme qui minimise la surface à volume constant est la sphère : les gouttes sphériques sont donc des objets stables. Pour les briser en plusieurs gouttes il est nécessaire d'exercer une force extérieure qui amènera à la formation d'un nouvel état stable, celui des gouttes filles, mais d'énergie de surface supérieure. Par exemple la brisure d'une goutte en deux gouttes identiques produit une surface supérieure d'un facteur 1.26.

Plaçons à présent une goutte de diamètre  $d$  (de densité  $\rho_1$  et de viscosité  $\mu_1$ ) dans un fort courant de gaz (de densité  $\rho_2$  et de viscosité  $\mu_2$ ) de vitesse relative  $\Delta U$  (figure 1.11). Une analyse de l'équation de Navier-Stokes de l'écoulement gaz,  $\rho_2 \partial_t \mathbf{u} + \rho_2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho_2 \nu_2 \Delta \mathbf{u}$ , montre que les forces de pression qui s'appliquent sur la goutte dans un écoulement permanent sont les forces de pression inertielles, d'ordre de grandeur  $\rho_2 \Delta U^2$ , et les forces dues à la viscosité, d'ordre de grandeur  $\rho_2 \nu_2 \Delta U/d$ . Lorsque les termes de pression inertielle dominant, c'est-à-dire lorsque leur rapport, qui n'est autre que le nombre de Reynolds  $Re = \Delta U d / \nu_2$  est grand devant 1, la goutte est soumise à une force de traînée aérodynamique de  $C_D \frac{1}{2} \rho_2 \Delta U^2 S$ , proportionnelle à la surface présentée à l'écoulement  $S = \pi d^2 / 4$ . Le coefficient de traînée  $C_D$  sur une sphère vaut environ 0.5 pour  $10^3 < Re < 10^5$ , et il chute à 0.14 pour  $Re \gtrsim 10^6$ , lorsque la couche limite se décolle, valeur moins élevée lorsque la sphère est rugueuse et que l'écoulement est turbulent (figure 1.11).

A cette pression inertielle qui tend à déformer la sphère, s'oppose la pression de Laplace  $2\sigma/R = 4\sigma/d$  qui tend à rassembler le volume vers une forme sphérique. Le rapport entre ordres de grandeur des forces de pression inertielles  $\rho_2 \Delta U^2$  et des forces de pression de Laplace  $\sigma/d$  est le nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho_2 \Delta U^2 d}{\sigma}$$

proposé par Weber (1931).

La goutte se brise lorsque la pression inertielle est suffisamment forte, c'est-à-dire lorsque le nombre de Weber dépasse une valeur critique. Une analyse quantitative des forces en présence conduit Hinze (1949) à proposer un nombre de Weber critique de brisure de 12 dans un courant de gaz constant. Les mesures de vitesse minimale de brisure de Lane (1951) avec des gouttes d'eau montrent que ce nombre critique est d'environ 10.5. Dans le cas de gouttes soumises à des ondes de choc, c'est l'écoulement permanent créé par l'onde de choc qui brise la goutte, avec le même critère basé sur le nombre de Weber (Ranger & Nicholls, 1969).

Pilch & Erdman (1987) dressent une classification des modes de brisure de la

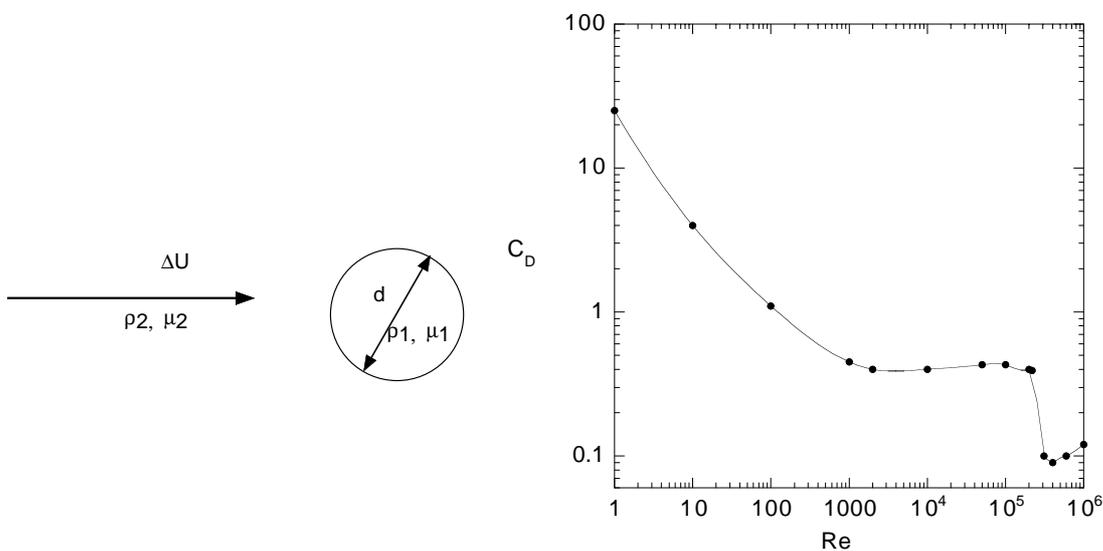


FIG. 1.11: *Gauche : Goutte placée dans un écoulement de gaz Droite : Coefficient de traînée sur une sphère rigide (d'après la figure 1.5 de Schlichting, 1987).*

goutte en fonction du nombre de Weber, voir figure 1.12. Ceux-ci sont, pour des nombres de Weber croissants :

- a) « vibrational break-up » : pour les petites vitesses d'air la goutte entre en résonance et se brise ;
- b) « bag break-up » : la goutte s'aplatit et forme un sac qui se perce en un point et se brise en toute petites gouttes ;
- c) « bag and jet break-up » : appelé aussi « umbrella break-up », par rapport au mode précédent, un jet se forme au centre et se brise plus tard ;
- d) « sheet stripping » : des lames de liquide sont épluchées de la surface et se brisent rapidement ;
- e) « wave crest stripping » et « catastrophic break-up » : des vagues de courte longueur d'onde et de grande amplitude sont formées sur la face exposée à l'air, puis sont érodées par le courant d'air. Le mode « catastrophic » correspond au moment où les vagues sont d'amplitude suffisante pour casser la goutte mère. Ce processus se répète en cascade jusqu'à ce que le nombre de Weber des fragments, calculé avec leur vitesse relative par rapport au gaz qui a été modifiée par l'accélération des fragments, soit inférieur au nombre critique.

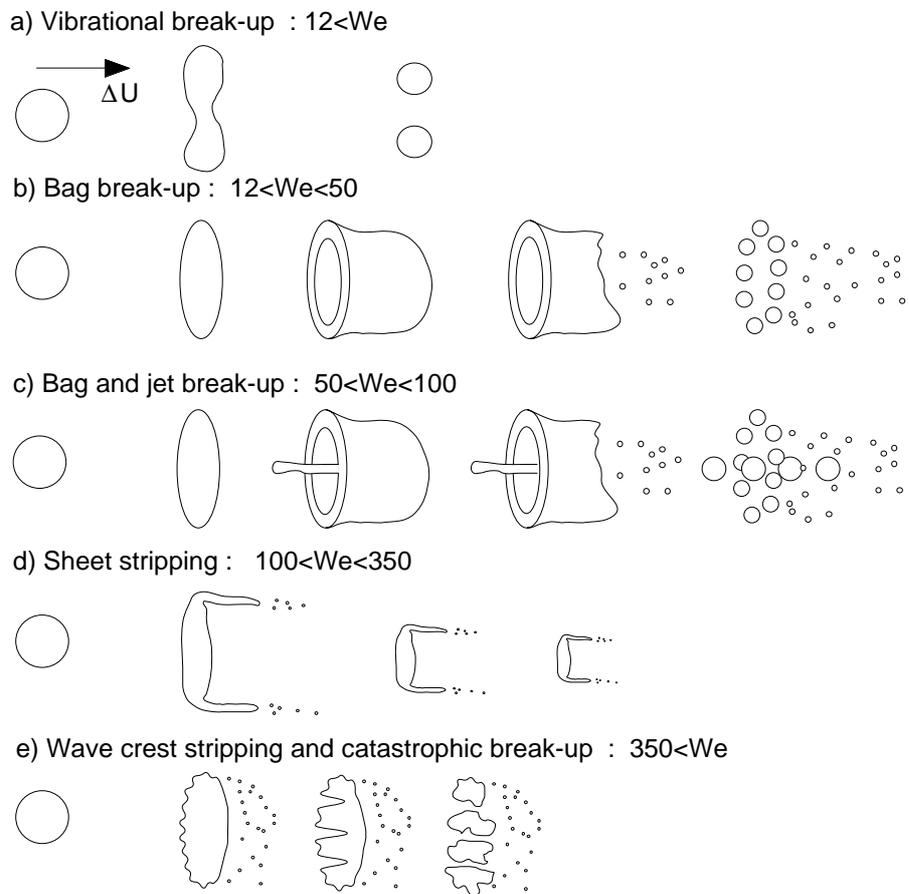


FIG. 1.12: Modes de désintégration d'une goutte en fonction du nombre de Weber, inspiré de la figure 1 de Pilch & Erdman (1987).

Dans un écoulement turbulent, Kolmogorov (1949) (traduit du russe par Tikhomirov, 1991) utilise le même argument d'un nombre de Weber critique pour déduire la taille en dessous de laquelle des gouttes injectées ne sont pas brisées aux temps longs. La vitesse utilisée pour construire le nombre de Weber est l'incrément de vitesse turbulent caractéristique  $\delta u$  entre deux points séparés de  $d_0$ .

En l'absence de vitesse uniforme, le cisaillement seul est aussi susceptible de briser les gouttes. Renardy & Cristini (2001*a,b*) ont réalisé des simulations numériques VOF intéressantes à cet égard, qui portent sur l'évolution de gouttes placées non pas dans un courant fluide uniforme mais dans un écoulement cisailé. La goutte de rayon  $a$  est immergée dans un fluide de même densité et de même viscosité, dont le champ de vitesse est  $\mathbf{u} = \dot{\gamma}z \mathbf{e}_x$  (voir la figure 1.13). Les simulations montrent que la goutte s'allonge sous l'effet du courant gazeux, tout comme les ligaments, et se casse lorsque les contraintes de cisaillement l'emportent sur la tension de surface.

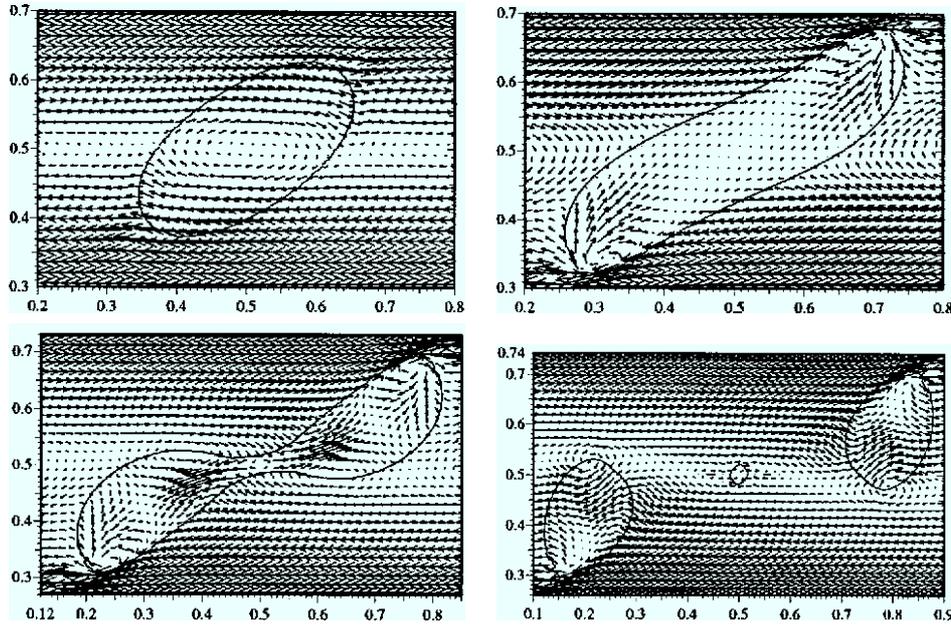


FIG. 1.13: *Brisure d'une goutte plongée dans le cisaillement d'un fluide de même densité et viscosité  $Re = 60$ ,  $Ca = 0.056$ , d'après la figure 2 de Renardy & Cristini (2001a).*

Pour les faibles nombres de Reynolds  $Re = \rho\dot{\gamma}a^2/\mu$ , les gouttes se brisent lorsque le nombre capillaire  $Ca = \mu\dot{\gamma}a/\sigma$  est supérieur à 0.43. A nombre de Reynolds croissant, le nombre capillaire limite diminue, et dès la valeur  $Re = 40$  les effets inertiels  $\rho v^2 \sim \rho\dot{\gamma}^2 a^2$  dominent les contraintes de cisaillement et les gouttes se brisent lorsque  $Ca > 3.3/Re$ , ce qui correspond à un nombre de Weber  $We = \rho(\dot{\gamma}a)^2 a/\sigma$  supérieur à 3.3. Construit avec le diamètre  $2a$  le nombre de Weber limite est 26.4, le double de celui obtenu expérimentalement pour des gouttes dans un écoulement uniforme, de viscosité et densité différentes. Le cisaillement provoque donc bien la brisure d'une forme initialement stable, avec un critère qui dépend aussi du nombre de Weber.

### 1.3.2 Jet liquide rapide dans une atmosphère immobile, $u_2 = 0$

Lorsqu'un jet de liquide est lancé avec une grande vitesse  $u_1$  dans un milieu gazeux immobile, le frottement avec l'air rend la surface instable. Sur la figure 1.14 on observe le développement d'une instabilité de l'interface. Elle met en jeu de petites perturbations axisymétriques de courte longueur d'onde, desquelles naissent des doigts de liquides, qui se déstabilisent en gouttes.

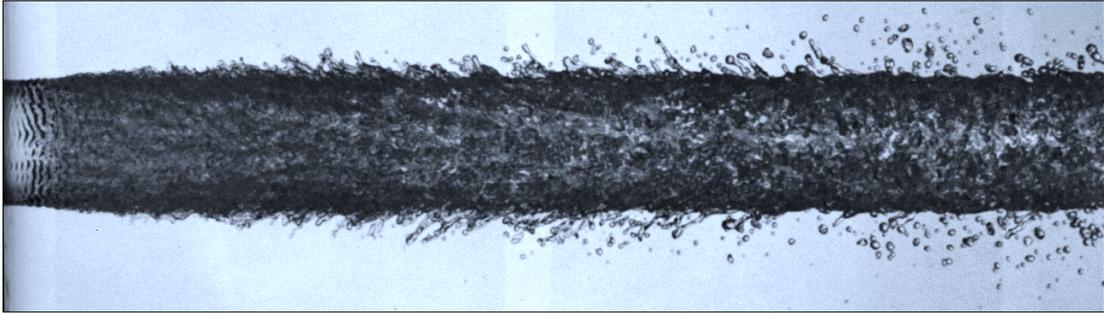


FIG. 1.14: *Jet d'eau émergeant dans une atmosphère immobile à la vitesse de 25 m/s d'une buse de 6 mm de diamètre (d'après Hoyt & Taylor, 1977).*

Pour élucider l'apparition de ces ondulations dues au cisaillement d'air, la littérature fournit deux théories sur la création de vaguelettes à la surface de liquides visqueux : celle de Taylor (1963) qui est une analyse de stabilité des équations du mouvement et qui suppose une transmission purement normale des contraintes à l'interface liquide-gaz, et celle de Jeffreys (1925) qui prend en compte l'inclinaison de la surface vers le courant d'air à travers un paramètre ajustable. Ces théories sont appliquées pour prédire le comportement de l'angle du spray, angle que fait le développement conique du spray autour du jet, mesuré visuellement. La tangente de cet angle est estimée par la vitesse de croissance des instabilités (normalement à la surface) rapportée à la vitesse de convection du jet (Reitz & Bracco, 1982).

Nous n'avons pas trouvé d'analyse des fréquences d'instabilités dans la littérature, par contre la taille des gouttes produites à partir d'un jet laminaire a été étudiée par Wu *et al.* (1991), pour différents liquides, tailles de jet et vitesses d'injection à l'aide de techniques holographiques. Le diamètre souvent utilisé dans les études sur l'atomisation n'est pas le diamètre moyen  $d_{10} = \langle d^1 \rangle / \langle d^0 \rangle$ , où  $\langle \rangle$  désigne la moyenne sur l'ensemble des gouttes, mais le diamètre de Sauter  $d_{32}$ , rapport de la moyenne des cubes des diamètres sur la moyenne des carrés des diamètres  $d_{32} = \langle d^3 \rangle / \langle d^2 \rangle$ . Dans un spray de  $N$  gouttes le rapport entre le volume total de gouttes  $V = N\pi\langle d^3 \rangle / 6$  et leur surface totale  $S = N\pi\langle d^2 \rangle$  est  $V/S = d_{32}/6$ . Pour un volume donné l'atomisation est donc plus efficace en ce qui concerne la production de surface lorsque  $d_{32}$  est petit. Partant de l'idée que c'est la couche

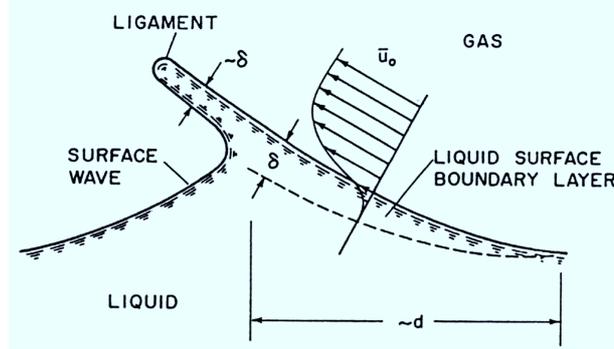


FIG. 1.15: Proposition d'un mécanisme d'arrachement des ligaments par extrusion de la couche limite dans le liquide (d'après Wu et al., 1991).

limite qui fixe l'épaisseur des portions de ligaments arrachés et donc des gouttes (figure 1.15), les auteurs observent une bonne corrélation des résultats lorsque le nombre de Weber  $We_{d_{32}}$ , basé sur le diamètre de Sauter  $d_{32}$ , est tracé en fonction de  $We_{\delta_1}$ , basé sur l'épaisseur de la couche limite laminaire  $\delta_1$  qui se développe dans le liquide sur une distance  $d$  ( $\delta_1 \sim d \times Re_d^{-1/2}$ ,  $Re_d = u_1 d / \nu_1$ ). Une régression empirique en  $We_{d_{32}} \sim We_{\delta_1}^{0.82}$  est proposée, qui implique une variation des diamètres avec la vitesse liquide en  $u_1^{-0.77}$ .

### 1.3.3 Jet liquide entouré d'un jet gazeux rapide $u_2 > u_1$

Nous en venons à présent aux cas où un courant de gaz souffle autour du jet liquide dès sa sortie avec une vitesse bien plus grande que celle du liquide, situation à laquelle est dédiée la suite de ce mémoire.

#### Longueur intacte

La longueur de liquide intacte non brisée, ou longueur de cône liquide, est une variable qu'il est aisé de mesurer sur des photographies si la densité du spray environnant n'est pas trop élevée, ou par sonde de conductivité ou sonde optique dans le cas contraire. De façon générale la longueur de cône diminue avec la vitesse d'air qui est déstabilisante, et augmente avec la vitesse d'eau. Afin de déterminer le flux de liquide entraîné dans le courant d'air, il suffit de connaître la vitesse d'entraînement du liquide vers le gaz  $u_e$ . Si l'on suppose qu'elle est due aux dépressions d'origine turbulente dans le gaz, l'équilibre des contraintes normales à l'interface impose  $\rho_1 u_e^2 \sim \rho_2 u_2'^2$ , avec  $u_2'$  les fluctuations de vitesse turbulente (Villermaux, 1998). Sachant que les fluctuations turbulentes sont dans un rapport constant avec la vitesse du jet gaz  $u_2$ , il en résulte une vitesse  $u_e \sim (\rho_2 / \rho_1)^{1/2} u_2$ . Dans le cas de fluides homogènes nous retrouvons là l'hypothèse d'entraînement de

Taylor dans un panache turbulent (Taylor, 1956). La longueur du dard  $L$  s'obtient par conservation du flux de liquide, entre la sortie de buse de section  $S_b \sim d^2$  et l'interface du cône liquide d'aire  $S_j \sim dL$  lorsque  $L \gg d_1$ :  $d_1^2 u_1 \sim d_1 L u_e$ . D'où l'on tire :

$$\frac{L}{d_1} \sim \frac{u_1}{u_e} \sim \frac{1}{\sqrt{M}},$$

avec  $M$  le rapport des flux de quantité de mouvement, ou, de façon équivalente, des pressions inertielles :

$$M = \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 u_1^2}.$$

Sur des jets ronds eau-air (Eroglu *et al.*, 1991), des jets plans eau-air (Raynal, 1997) ou des jets hélium liquide-hélium gaz (Ladam, 2000) cette évolution de  $L$  avec  $M$  est confirmée, avec toutefois un léger effet de la vitesse liquide à  $M$  constant.

### Modes de brisure

Les recherches sur la brisure en gouttelettes d'un jet liquide assistée par jet d'air, motivées par les besoins de compréhension de l'atomisation dans les injecteurs coaxiaux de fusée, sont plus récentes que celle de la brisure des gouttelettes. Une étude réalisée par Faragó & Chigier (1992) sur l'atomisation d'un jet rond d'eau de 1 mm dans un large jet d'air propose une classification en termes de modes de brisure selon le nombre de Weber aérodynamique déjà présenté dans la brisure des gouttes,  $We = \rho_2 (\Delta u)^2 d / \sigma$ .

Tout comme pour la brisure des gouttes, se présentent différents régimes suivant le nombre de Weber aérodynamique (figure 1.16):

- Brisure de Rayleigh ( $We < 25$ ) : la brisure est toujours dominée par les effets de tension de surface. Les effets aérodynamiques transparaissent dans les mouvements radiaux imprimés au jet lorsque le nombre de Weber dépasse 15. La taille des gouttes est de l'ordre du diamètre de jet ;
- Formation de membranes ( $25 < We < 70$ ) : une membrane est gonflée par le courant d'air et se brise en de très fines gouttelettes, le bord de la membrane produit de plus grosses gouttes ;
- Formation de fibres ( $We > 100$ ) : des fibres sont formées à la surface du jet, ces fibres sont arrachées par le courant d'air et se brisent.

Si la terminologie utilisée n'est pas la même, les auteurs remarquent les similitudes entre les modes de brisure des jets ronds et des gouttes, ou même des nappes soumises à un courant d'air. La formation de membranes est en effet très proche

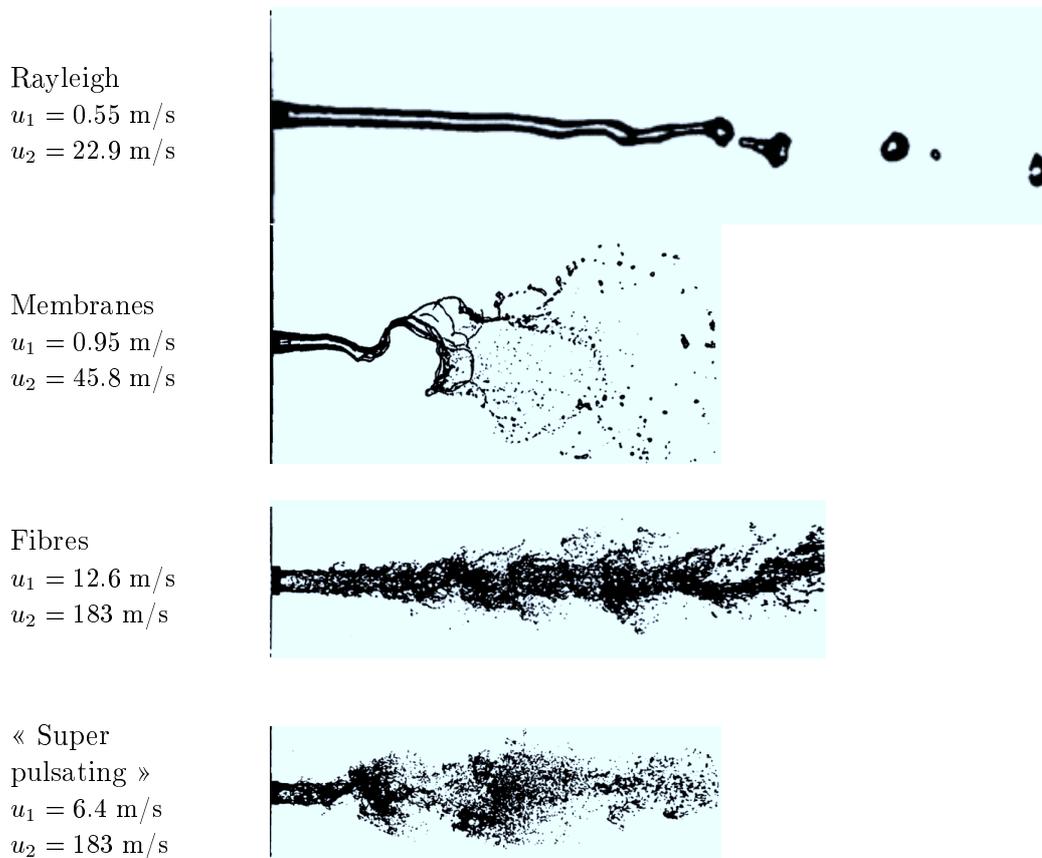


FIG. 1.16: Modes de désintégration, extraits des figures 5,7 8 et 9 de Faragó & Chigier (1992)

des celle qui se produit dans le mode « bag-breakup » pour les gouttes, et les fibres rappellent le processus de « stripping ».

L'effet de la vitesse liquide est aussi pris en compte par le nombre de Reynolds liquide  $Re_{d_1} = u_1 d_1 / \nu_1$  et intervient donc dans la classification des différents modes dans le plan  $(We, Re_{d_1})$  de la figure 1.17.

Les petites vitesses liquide font apparaître des pulsations dans la formation de l'aérosol de gouttelettes: le liquide est arraché par paquets. Ces pulsations apparaissent lorsque le rapport  $u_1 / \Delta u$  est inférieur à environ  $13 \times 10^3$ . Il est intéressant de noter que cette transition vers un mode de pulsation correspond à un rapport des flux de quantité de mouvement gaz et liquide  $M = \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 u_1^2}$  supérieur à une valeur critique de 7. Cette transition, dite de recirculation, est bien connue dans le cas de jets homogènes (Rehab *et al.*, 1997) pour lesquels elle se produit à un rapport de vitesse de 8. Pour des jets liquide-gaz la transition est estimée à  $M = 35$  (Lasheras *et al.*, 1998). L'effet de  $M$  a été pris en compte dans la construction du diagramme donnant les régimes de brisures (Lasheras & Hopfinger, 2000).

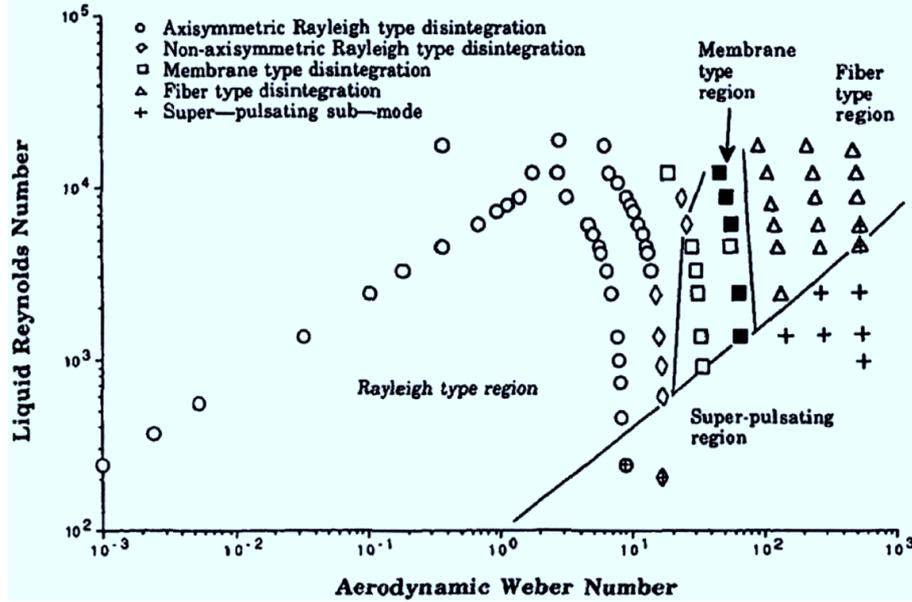


FIG. 1.17: Modes de désintégration d'un jet d'eau rond dans un courant d'air coaxial (d'après Faragó & Chigier, 1992).

### Instabilité de cisaillement

Tout comme les jets liquides lancés dans une atmosphère immobile, le cisaillement avec l'air produit une instabilité qui se traduit par la croissance d'oscillations de la surface. L'instabilité, due à la discontinuité du profil de vitesse, est l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Lorsque les densités des fluides sont très contrastées  $\rho_1 \gg \rho_2$  ainsi que les vitesses  $\Delta U \gg 1$ , les oscillations les plus amplifiées par cette instabilité ont une longueur d'onde  $\lambda_{KH} = 3\pi \frac{\sigma}{\rho_2 \Delta U^2}$ . Dans le cas des jets coaxiaux le profil de vitesse n'est pas discontinu car une couche limite s'est développée dans les tuyères d'amenée des fluides et il faut en tenir compte dans le calcul d'instabilité. Raynal (1997) et Villermaux (1998) ont montré que lorsque l'on modélise les couches limite dans le liquide et dans le gaz par un profil de vitesse linéaire par morceaux, c'est l'instabilité impulsée par le profil gazeux d'épaisseur de couche limite  $\delta$  qui domine, et les oscillations les plus amplifiées ont pour longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/1.5 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \delta$ , ce dès que  $\lambda/\lambda_{KH} = We_\lambda > 1$ .

Ces oscillations sont advectées sur le jet avec une vitesse de convection  $u_c = \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$ , et croissent avec un taux d'amplification temporel de  $r = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{\delta}$ . Les mesures de fréquences de passage des ondes et de la vitesse de convection sur une installation plane s'accordent parfaitement avec ces prédictions (Lasheras *et al.*, 1998).

### Taille des gouttes dans le spray

Dans le cas de jets ronds le processus de brisure et de formation de gouttes a été peu étudié. Une analyse du spray généré en aval à l'aide d'un Phase Doppler Particule Analyser (qui donne vitesse et taille des gouttes quand elles sont sphériques) conduit Yatsuyanagi *et al.* (1994) à des diamètres de gouttes  $d_{32}$  qui décroissent avec la vitesse d'air en  $\Delta u^{-1} \simeq u_2^{-1}$ , analogue en cela avec le comportement des tailles de gouttes produites par un jet rapide évoqué dans le paragraphe précédent. Contrairement aux arguments concernant la brisure de gouttes dans un courant de gaz, la taille moyenne des gouttes n'est pas donnée par un nombre de Weber critique calculé avec l'écoulement de gaz, car ceci conduirait à des tailles qui diminueraient selon  $\sigma/(\rho_2 u_2^2)$ , qui est aussi la longueur d'onde de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz.

Dans les études sur l'atomisation il a souvent été postulé que la taille des gouttes est proportionnée à la taille des longueurs d'ondes les plus amplifiées sur le jet, mais aucune étude précise de la brisure primaire du jet n'a été conduite. La brisure secondaire, celle des gouttes dans le courant de gaz est plus documentée (Lasheras *et al.*, 1998). Nous allons voir quels sont les éléments que nous pouvons apporter pour jeter un pont entre la naissance des ondulations et la tailles des gouttes dans le spray.

## 1.4 Distribution des tailles après une fragmentation

Contrairement à la brisure de jets liquides qui donne des gouttes de tailles monodisperse, l'atomisation due à l'interaction aérodynamique produit des distributions de tailles de gouttes extrêmement larges.

### 1.4.1 Mécanismes de brisure

Passons en revue divers mécanismes imaginés pour la fragmentation : en effet, la distribution des tailles des objets après brisure dépend fortement du mécanisme qui les génère.

La brisure en cascade d'un objet selon le même processus à toutes les échelles produit des distribution log-normales (Kolmogorov, 1941). La distribution log-normale est la distribution de  $x$  avec  $y = \ln(x)$  distribué de façon gaussienne. Quand  $x$  est la moyenne géométrique d'un grand nombre  $N$  de variables aléatoires  $x_i$  tel que  $x = (\prod_N x_i)^{1/N}$ , sa distribution tend vers une log-normale, en effet  $y$  est la moyenne arithmétique  $y = \sum_N y_i/N$  d'un grand nombre de variables aléatoires et tend vers une gaussienne d'après le théorème central-limite ; la distribution de  $x$  est donc :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \langle \ln(x) \rangle)^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (1.5)$$

où  $\langle \ln(x) \rangle$  est la moyenne de  $\ln(x)$  et  $\sigma_2 = \sqrt{\langle (\ln(x) - \langle \ln(x) \rangle)^2 \rangle}$  son écart-type.

La brisure d'un segment en  $m + 1$  morceaux selon  $m$  lieux de brisure aléatoire produit une distribution de probabilité des tailles des morceaux :

$$p(x) = m(1 - x)^{m-1}, \quad (1.6)$$

qui se démontre en additionnant les probabilités conditionnelles (Marmottant & Villiermaux, 2000), ou de manière géométrique (Longuet-Higgins, 1992). Ce modèle a été étendu aux dimensions supérieures en considérant le découpage d'un cube selon des plans parallèles aux faces, selon deux ou trois directions orthogonales. Il a été appliqué par Longuet-Higgins (1992) dans le cas de la brisure de bulles prises dans des vagues et par C. Martínez-Bazán & Lasheras (1999) dans le cas de la brisure de bulles injectées dans un jet liquide turbulent. Ce modèle impose de connaître le nombre de brisure, et s'applique surtout dans le cas d'un faible nombre de brisures.

A l'inverse de la fragmentation aléatoire, Cohen (1990, 1991) considère les gouttes formées par la brisure explosive d'une goutte comme l'agglomération aléatoire de gouttelettes *élémentaires* de taille  $d_{min}$ . Leur taille est la taille minimale dans un spray de gouttelettes de taille uniforme, sachant que l'énergie de surface  $N\sigma\pi d^2$  atteignable dépend de l'énergie cinétique initiale. Les distributions qui résultent de la combinaison la plus probable de toutes les particules, sont des distributions de Poisson sur le nombre de gouttelettes agglomérées  $i$  :

$$p(i) = \frac{\langle i \rangle^i}{i!} \exp(-\langle i \rangle) \quad (1.7)$$

où  $i$  est le rapport du volume de l'agrégat et du volume de la goutte minimale,  $i = v/v_{min} = (d/d_{min})^3$ .

Suivant la même type de démarche statistique, on peut considérer que l'ensemble des gouttes est un système qui est dans l'état qui maximise l'entropie, lorsqu'il s'agit alors d'un système ayant évolué pendant un temps assez long de manière à ce que toutes les possibilités aient été explorées. L'entropie, qui mesure le désordre du système ou l'absence d'information, est définie par  $S = -k \sum_i p_i \ln(p_i)$  dans le cas d'un système discret de probabilité, et par

$$S = -k \int_0^\infty p(x) \ln(p(x)\delta x) d(x)$$

lorsqu'elle est associée à la distribution continue de probabilité  $p(x)$  (Diu *et al.*, 1989). La constante  $\delta x$  est la précision de la mesure, qui est introduite pour respecter l'homogénéité de la relation ; elle ajoute un terme constant à l'entropie. La distribution qui maximise l'entropie lorsqu'aucune condition n'est imposée est la distribution uniforme : tous les diamètres sont possibles. Si l'on impose

une contrainte sur notre système en fixant le moment d'ordre  $n$  de la variable,  $\langle x^n \rangle = m_n$ , la méthode des multiplicateurs de Lagrange fournit des distributions différentes. Si la moyenne  $\langle x \rangle = m_1$  est imposée,  $p(x) = 1/m_1 \exp(-x/m_1)$  est alors la distribution qui maximise l'entropie ( $x$  varie toujours de 0 à  $\infty$ ), et si en plus la variance  $m_2$  est imposée, on obtient une gaussienne  $p(x) \sim \exp(-x/m_1 - x^2/m_2)$ .

#### 1.4.2 Observations dans les sprays

L'approximation des distributions de volumes de gouttelettes par des lois log-normales est l'une des plus utilisées, elle nécessite seulement deux paramètres : une moyenne et un écart-type. Il existe par ailleurs un grand nombre de fonctions à paramètres utilisées pour approcher les mesures de distributions (voir Lefebvre, 1989, pour une revue). Remarquons que les observations suggèrent parfois une décroissance des tailles de gouttes de nature exponentielle (figure 1.2).

Dans les sprays issus d'injecteurs de carburant, les distributions expérimentales présentent une forme similaire : Simmons (1977a) note que les distributions de volumes de gouttes peuvent être caractérisées par un seul paramètre, tel le diamètre de Sauter  $d_{32}$  ou le diamètre massique moyen  $d_{0.5}$  (médiane de la distribution des volumes de gouttes). Ces deux grandeurs sont dans un rapport constant de  $d_{0.5}/d_{32} = 1.2$  à 5% près. La distribution du *nombre* de gouttes suit une loi exponentielle autour du diamètre massique moyen sur une large gamme (Simmons, 1977b).

## 1.5 Plan de la thèse

L'exposé de ce mémoire est divisé en cinq parties.

Le dispositif expérimental produisant un jet liquide entouré d'un jet gazeux de même axe sera tout d'abord défini (chapitre 2), et la géométrie des écoulements de liquide et de gaz en sortie précisée. Nous décrirons aussi les techniques de visualisation que nous avons utilisées pour observer le jet liquide et le brouillard qui s'en détache.

La partie suivante (chapitre 3) s'intéressera à l'instabilité de la surface qui se produit dès la sortie du jet liquide. Nous étudierons les longueurs d'onde préférentiellement produites. Une analyse de stabilité montrera que la surface est instable selon des modes azimutaux et que ces modes président à la formation de digitations liquides.

Le devenir des digitations dans le courant gazeux est d'être fortement étirés sous la forme de fins ligaments. Le moment de leur brisure et les tailles des gouttelettes qui sont créés seront examinées au regard des tailles initiales émergeant de l'instabilité azimutale. Les gouttelettes forment un spray dont les caractéristiques s'obtiennent par analyse d'images. Nous montrerons que les tailles sont réparties de façon universelle (chapitre 4).

Nous examinerons ensuite la dynamique des ligaments, en les étudiant individuellement au travers d'une expérience simple de création de ligaments, entraînés par un tube capillaire. Nous verrons quel sont les paramètres qui déterminent la taille de brisure du ligament et la distribution des tailles de gouttes produites (chapitre 5).

Les processus d'instabilité de surface et d'atomisation conduisent à l'augmentation de l'aire interfaciale et de la rugosité de la surface, et nous expliciterons au cours du dernier chapitre (6) comment ces processus se traduisent dans les caractéristiques géométriques du contour des images du jet.

L'influence de turbulences de l'écoulement sur les mécanismes d'atomisation du jet fera l'objet d'une annexe.



## Chapitre 2

# Méthodes expérimentales

**N**OUS ALLONS DÉCRIRE dans ce chapitre comment a été conçu le dispositif expérimental visant à produire un jet de liquide entouré par un jet de gaz coaxial dans les conditions les plus laminaires possibles. Puis nous caractériserons les profils de couche limite obtenus dans le jet d'air. Seront enfin détaillées la visualisation de l'écoulement et la méthode de détection automatique des gouttes sur les images.

### 2.1 Production du jet liquide et du jet gazeux

#### 2.1.1 Injecteur coaxial convergent

L'écoulement de liquide et de gaz est a été produit par un injecteur coaxial convergent pour la tuyère liquide centrale et pour la tuyère gaz qui l'entoure (Figure 2.1). La convergence des tuyères d'injection du liquide au centre et du gaz autour, qui induit une contraction des sections de 6.9 pour le jet liquide et de 6 pour le jet gaz, réduit le taux de turbulence et assure un écoulement plus laminaire (voir la description de l'effet de la contraction dans la thèse de Raynal, 1997).

#### 2.1.2 Schéma d'ensemble

Le dispositif expérimental est agencé de la façon suivante (figure 2.2): l'injecteur est fixé vers le bas sur un plateau situé à 1m50 du sol, les fluides sont injectés dans un espace muni de protections latérales qui permettent de ne pas perdre le spray sur les côtés et de le récupérer dans une cuve. Une évacuation de liquide permet de récupérer les liquides au fond de la cuve réceptacle. Les vapeurs sont évacuées plus haut, grâce à des ouvertures larges dans les protections. Dans le cas où le liquide était de l'éthanol, les vapeurs, qui contenaient aussi des gouttelettes, étaient aspirées à l'aide d'un ventilateur et évacuées à l'extérieur du bâtiment.

Les débits liquides sont repérés par un débitmètre à flotteur Kobold, qui a

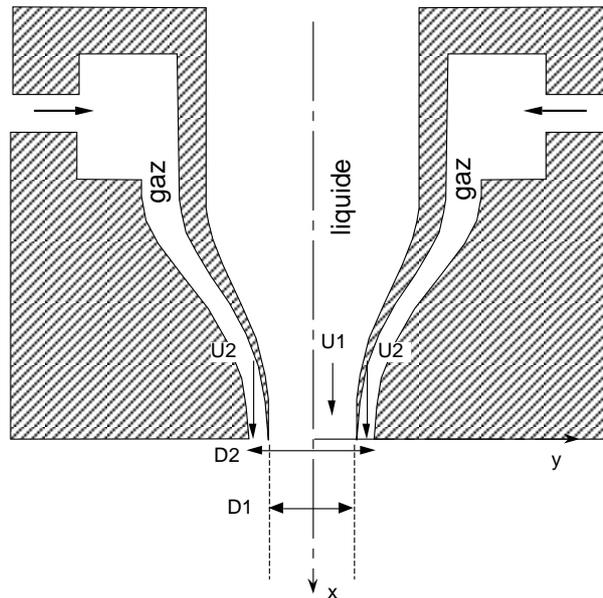


FIG. 2.1: Schéma de l'injecteur:  $D_1$  et  $D_2$  sont les diamètres intérieurs et extérieurs de la couronne et  $e$  son épaisseur,  $u_1$  et  $u_2$  les vitesses des jets coaxiaux.  $D_1 = 8\text{mm}$ ,  $D_2 = 11.4\text{mm}$  et  $e = 1.7\text{mm}$ . La lèvre qui sépare les deux jets est épaisse de  $0.2\text{mm}$  en sortie.

été étalonné en réalisant des pesées chronométrées. Sa précision de lecture est d'environ 2%. Nous l'avons utilisé pour mesurer les vitesses du liquide jusqu'à  $0.94\text{ m/s}$  qui sa limite de validité, pour des vitesses plus grandes nous avons reconduit des mesures de débit. Le débit d'air est mesuré par un débitmètre Mc Millan à turbine. Celui-ci a été étalonné en produisant le débit d'air dans un tube de section de sortie large, dans lequel était placé un tube de Pitot relié à un micromanomètre Furness, et qui donnait la vitesse de l'écoulement. L'indication numérique donnée est linéaire avec la vitesse d'air pour les petites vitesses, puis sous-estime la vitesse. Nous avons utilisé une régression polynomiale d'ordre 4 pour relier l'indication à la vitesse réelle sur toute la gamme. La précision de mesure annoncée par la constructeur est de 3% .

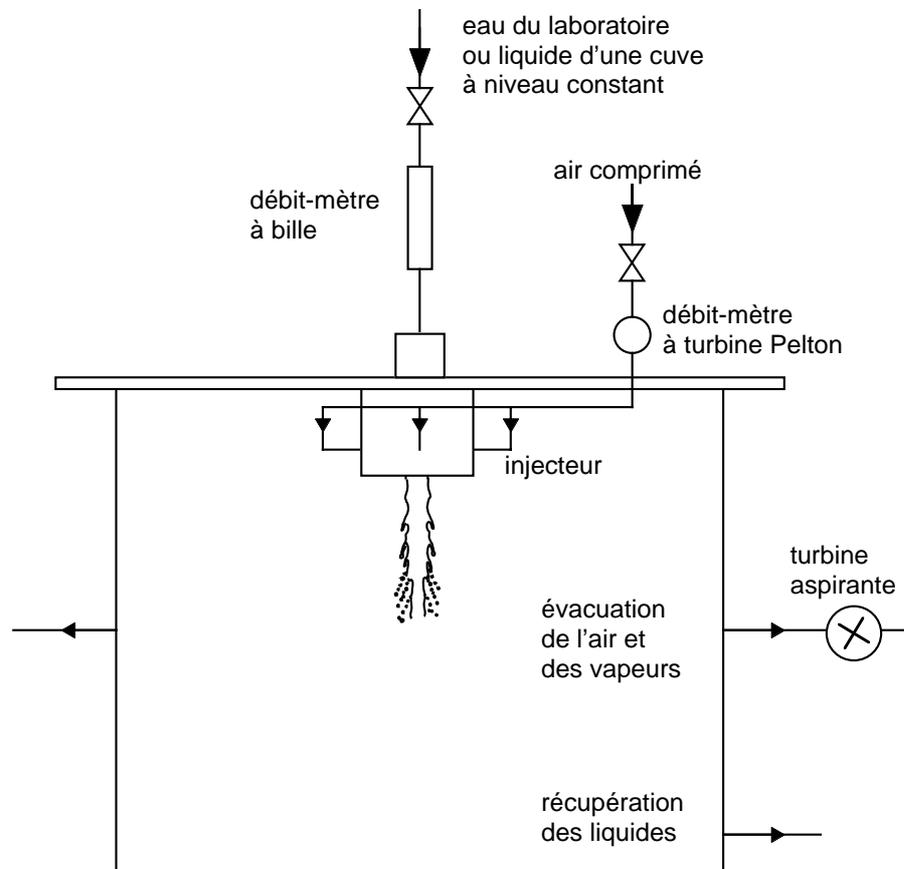


FIG. 2.2: Schéma du dispositif expérimental.

### 2.1.3 Profils de vitesse en sortie de la tuyère d'air

Sur un dispositif similaire créant aussi un courant liquide et un courant gazeux, mais séparés par une interface plane, Raynal (1997) avait montré que c'est l'épaisseur de la couche limite gazeuse, juste en sortie d'injecteur, qui détermine les paramètres de l'instabilité. Cette couche limite se développe sur la paroi de séparation du liquide et du gaz. Il s'en développe aussi une sur la paroi du tube externe dans le gaz, qui est du même ordre d'épaisseur comme nous allons le voir. La couche limite dans le liquide, qui se crée sur la paroi interne du tube central ne contrôle pas l'instabilité de cisaillement et n'a donc pas été mesurée.

La technique de l'anémométrie à fil chaud permet de reconstituer le profil de la vitesse d'air sur un rayon de la couronne, avec une vitesse de jet liquide nulle (Figure 2.3). Le principe de l'anémométrie à fil chaud est le suivant : un fil conducteur extrêmement fin – de l'ordre de 5 microns de diamètre dans notre cas, de type Wollaston – est maintenu à une température constante de l'ordre de

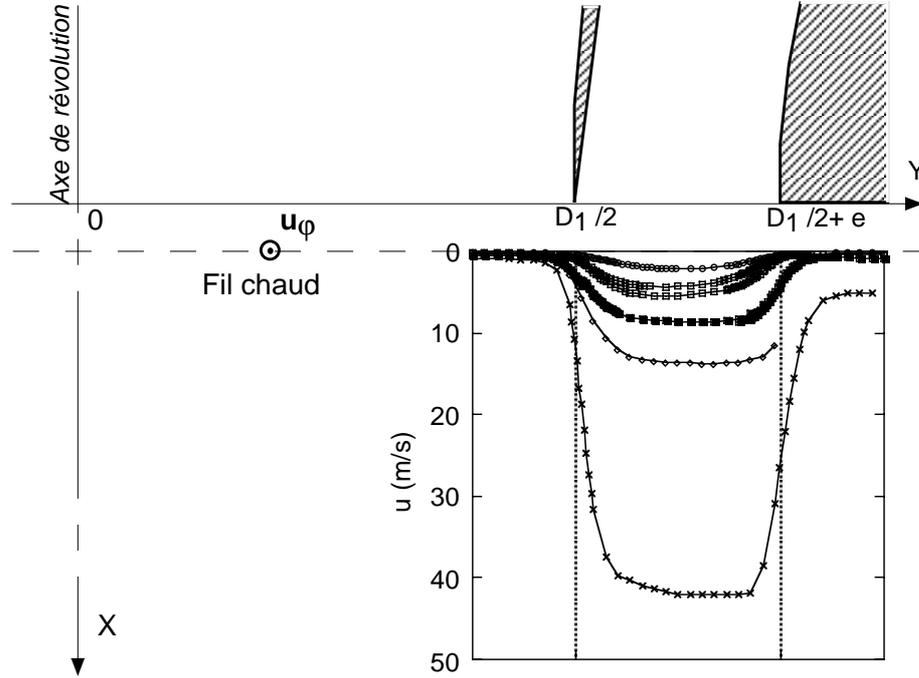


FIG. 2.3: Profils de vitesse en sortie d'injecteur.

$t = 450^\circ\text{C}$  par un anémomètre DISA qui délivre une tension liée à aux pertes thermiques convectives, et donc à la vitesse d'air.

Le fil est positionné par un système tridimensionnel MicroControl le plus près possible de la sortie de l'injecteur, à moins d'un millimètre. Nous avons particulièrement veillé d'une part à placer le fil dans un plan perpendiculaire à l'écoulement, et d'autre part à l'orienter ensuite orthogonalement au rayon de profil sur lequel il se déplace, donc selon  $\mathbf{u}_\phi$  : la surface sensible du fil chaud est en effet de l'ordre du demi millimètre, et la vitesse dans la couche limite varie sur des distances bien plus petites dans la direction du rayon Oy.

Les profils obtenus reconstituent bien une transition depuis un écoulement bien établi pour les petites vitesses d'air, quasiment de type Poiseuille, vers un écoulement bouchon avec couches limites sur la paroi interne et externe (figure 2.4 a). L'épaisseur de la couche limite est caractérisée par l'épaisseur de vorticité  $\delta$  définie par :

$$\delta = \frac{U_{max} - U_{min}}{\left. \frac{dU}{dy} \right|_{max}}. \quad (2.1)$$

Les mesures effectuées avec différents débits d'air montrent que  $\delta$  est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds  $Re = \frac{eu_2}{\nu_2}$  construit à l'aide de l'épaisseur  $e$  de la couronne (Figure 2.4 b) – ce qui est un résultat

classique de la couche limite laminaire – et que l'épaisseur de vorticité suit la relation :

$$\frac{\delta}{e} = \frac{5.6}{\sqrt{Re}}. \quad (2.2)$$

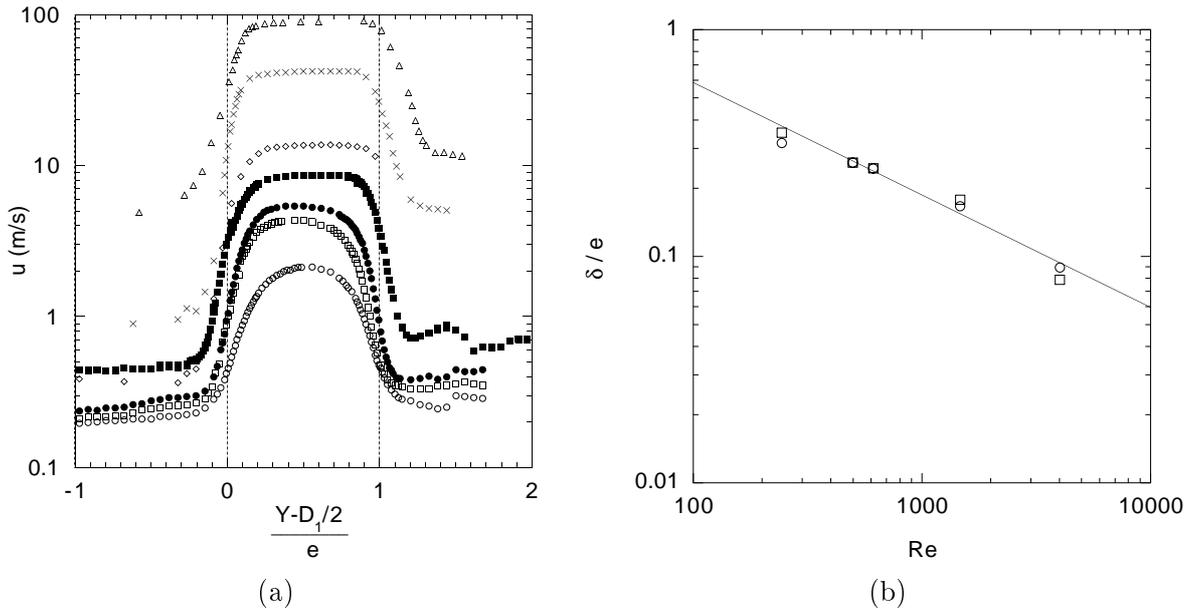


FIG. 2.4: (a) Profils de vitesse dans la couronne d'air en fonction du rayon, sans jet de liquide. Vitesses d'air maximales de 2.1, 4.3, 5.4, 8.7, 14, 42 et 90 m/s. (b) Epaisseur de vorticité adimensionn e par l'épaisseur de l'entrefer en fonction  $Re = eu_{\max}/\nu_2$ . Cercles :  paisseur de la couche intérieure touchant le jet, carrés :  paisseur de la couche extérieure, ligne :  $5.6Re^{-1/2}$ .

## 2.2 Propriétés des fluides

Les liquides utilisés ont été :

- l'eau du laboratoire,
- une solution d'éthanol à 95 % (alcool à brûler) qui a permis d'étudier l'influence de la tension de surface,
- une solution de glycérol (glycérine blanche) dilu e dans l'eau   60 % en volume qui a permis quant à elle d'étudier l'effet de la viscosité du liquide à tension de surface similaire.

La présence d'un surfactant à la surface abaisse la tension de surface de l'eau et une première idée aurait été d'en diluer dans le liquide injecté pour faire varier à volonté la tension de surface. Ce serait une erreur : en effet la cinétique d'adsorption à la surface n'est pas instantanée et la surface créée par lors de la sortie du jet est initialement vierge, donc de tension inchangée par rapport à l'eau pure, puis elle diminue avec l'adsorption des molécules contenues dans le liquide. L'étirement de la surface ralentit de plus l'adsorption dont les temps caractéristiques sont souvent de l'ordre de la milliseconde. La mesure de la tension de surface sur des nappes étirées fournit d'ailleurs une méthode qui permet de retrouver la cinétique d'adsorption des molécules (Marmottant *et al.*, 2000). C'est pourquoi il est préférable d'utiliser des liquides purs et dépourvus de tensio-actifs dans les expérimentations d'écoulement à surface variable.

Les tensions de surface des liquides choisis ont été déterminées par la méthode de la goutte pendante en atmosphère saturée (Wilkinson, 1972), qui consiste à relier le poids des gouttes qui se détache d'un capillaire à la force de capillarité qui les retient sur la sortie du capillaire. Les gouttes doivent être formées très doucement pour éviter tout effet inertiel lors du détachement de la goutte. Les densités sont quant à elles évaluées par pesée d'un pycnomètre, qui permet des mesures précises de volume. Pour la solution de glycérol, le viscosimètre de Baumé (dispositif permettant la mesure de la vitesse d'un écoulement de Poiseuille à travers un capillaire) montre que la viscosité dynamique de la glycérine pure est 1000 fois celle de l'eau, et que dans le cas de notre solution à 60 % en volume elle est de 14 fois celle de l'eau à 20°C (voir l'ensemble des résultats table 2.1). La viscosité dynamique de l'éthanol est quant à elle proche de celle de l'eau (1.34 mPa.s d'après les données du CRC Handbook of Chemistry and Physics).

TAB. 2.1: *Tensions de surface, densités et viscosités dynamiques, mesurées à 20° C.*

	tension de surface (mN/m)	densité	viscosité (centiPoise)
eau	69 ±1	1	1.14 ±0.01
éthanol	25 ±1	0.79	1.34
glycérol 60 %	70 ±1	1.16	16.0 ±0.2

La vitesse débitante du jet d'eau est au maximum de 3 m/s ( $Re_{D1} = 23000$ ) la limite étant imposée par la pression du réseau d'eau de ville, alors qu'avec l'éthanol et la solution de glycérol c'est la hauteur de la cuve à niveau constant qui ne nous a pas permis de dépasser 1 m/s.

Le gaz injecté est l'air fourni par le réseau d'air comprimé du laboratoire (dont la pression est au minimum de 5.6 bars). Un détendeur réglé à 5 bars,

nous a affranchi des variations de pression du réseau. La vitesse maximale de jet annulaire d'air que nous avons pu atteindre est 70 m/s ( $Re_e = 8000$ ).

## 2.3 Visualisation

### 2.3.1 Visualisation ponctuelle avec un laser pour mesurer des fréquences de passage

Le passage d'ondulation de la surface du jet a été observé avec un faisceau laser fin qui passe tangentiellement à la surface. Une photodiode reçoit le laser de l'autre côté du jet, de sorte qu'une ondulation obscurcit le faisceau ou le dévie se qui se traduit par une intensité laser moindre au niveau de la photodiode (figure 2.5 a). Le signal de la photodiode est digitalisé sur une carte d'acquisition 16 bits MIO-Lab 16XH. Le spectre en fréquence est réalisé par transformée de Fourier rapide sur une suite d'au moins 1024 mesures, réalisée avec un taux d'acquisition de 2000 Hz, ce qui permet de voir des fréquences du signal jusqu'à 1000 Hz d'après le théorème de Shanon. Un grand nombre d'acquisition est nécessaire pour moyenner le résultat et obtenir un spectre convergé donnant la densité d'énergie, carré des amplitudes  $E(f)$  associées aux modes de Fourier. Le spectre met en évidence les fréquences de passage sous forme de pics pour le fondamental et ses multiples harmoniques (figure 2.5 b).

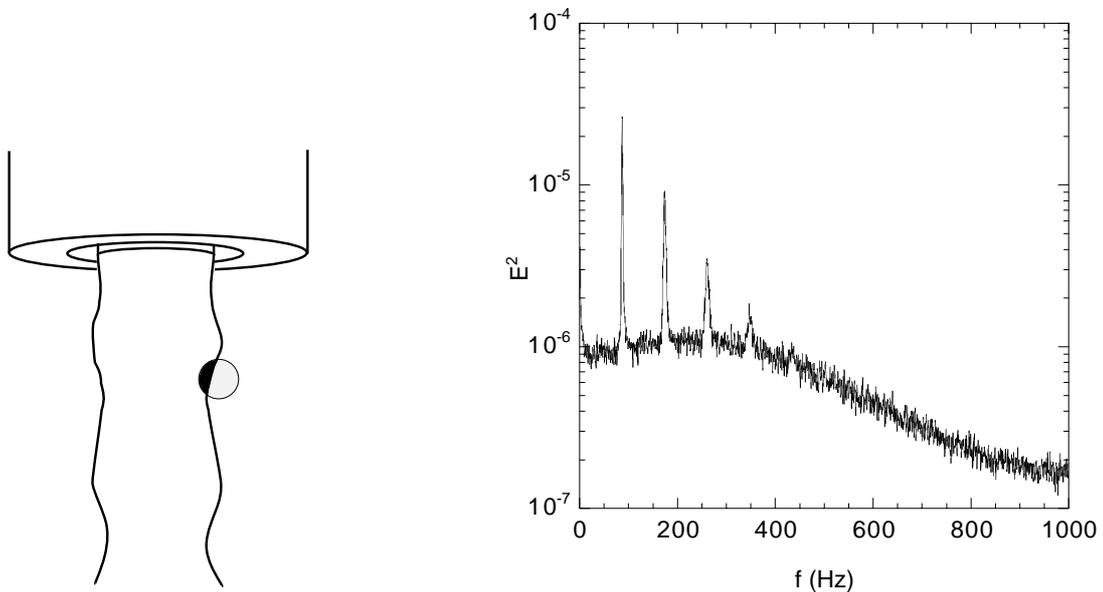


FIG. 2.5: Gauche : Intersection du faisceau laser (vu dans son axe) et de la surface Droite : Spectre du signal de passage

### 2.3.2 Prise d'images

La scène est éclairée par un écran diffuseur derrière lequel on a placé une source lumineuse (figure 2.6). Les mouvements du jet sont rapides : une exposition courte

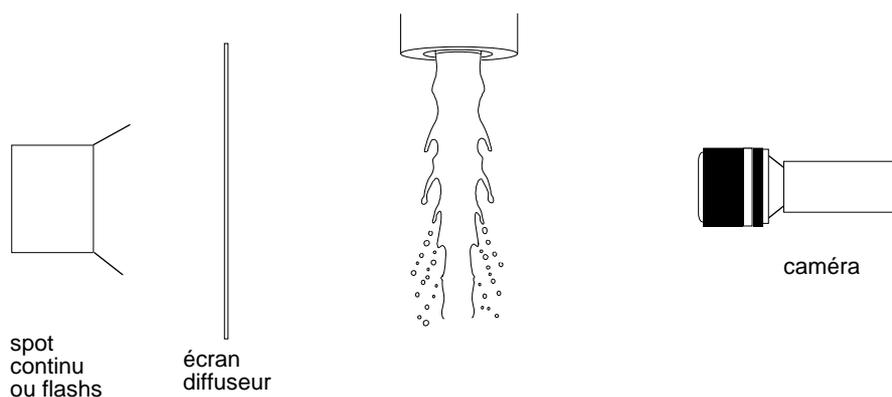


FIG. 2.6: *Disposition de l'éclairage.*

est nécessaire pour la prise d'images. Il existe deux possibilités : soit utiliser un obturateur rapide avec une source continue de lumière, soit utiliser un flash dont le temps d'éclair est court. La deuxième solution a l'avantage de ne pas perdre de lumière, elle impose par contre de synchroniser les déclenchements du flash de façon à ce qu'ils se produisent pendant l'ouverture de la caméra.

Nous avons donc mis au point un système composé de deux ampoules flash à arc-court au Xénon (modèle FXP 850 de EG&G ElectroOptics). Chacune de ces ampoules est associée à un déclencheur d'impulsion et à un condensateur de  $C = 2\mu F$ , chargé sous une tension de  $U = 1000$  Volts. L'énergie déployée lors d'un éclair est donc de l'ordre  $CU^2/2 = 1$  Joule. Le signal d'émission lumineuse obtenu aux bornes d'une photorésistance placée devant le flash montre un pic asymétrique, de montée rapide et de décroissance lente, de largeur à mi-hauteur d'environ  $5\mu s$  (figure 2.7). Les deux flashes sont indépendants, ce qui permet de déclencher successivement l'un puis l'autre, décalés d'un temps contrôlable à l'aide d'un module de synchronisation. Ce module autorise la répétition du même flash : au total nous pouvons donc émettre 4 éclairs successifs. Si la caméra est de type vidéo, le module de commande synchronise l'émission des flashes avec l'ouverture de l'obturateur électronique de la caméra, en se basant sur le signal vidéo.

Associé à une caméra vidéo ou à une caméra haute résolution, ce système de flash permet de figer le mouvement pour extraire des informations de taille et de déplacement. Pour suivre tous les détails du développement d'un mouvement nous avons plutôt utilisé une caméra rapide de moins bonne résolution spatiale mais qui permettait une très bonne résolution temporelle.

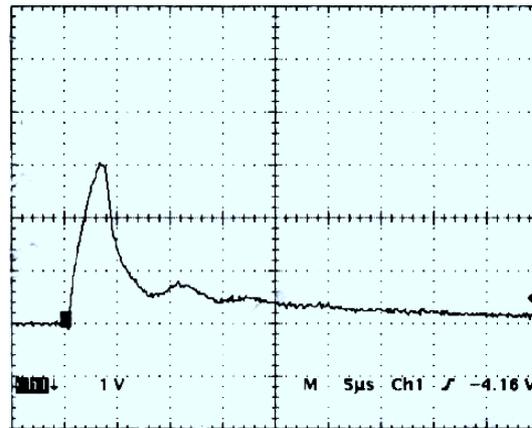


FIG. 2.7: *Signal d'émission du flash tel qu'observé à l'oscilloscope (5 $\mu$ s par division).*

Type	Vidéo	Haute résolution	Rapide
Marque	Sony	Hamamatsu	Kodak Ektapro
Modèle	8500 CE (vidéo)	Orca C4792-95-12	Hs Motion Analyser 4540 MX
Carte d'acquisition	Graftech	intégrée	intégrée
Résolution	768x256 (trame)	1280x1024	256x256 ( $f \leq 4500$ Hz)
Niveaux de gris	8 bits	12 bits	8 bits
Fréquence d'acquisition	50 Hz	$\sim 4$ Hz	$\rightarrow 4500$ Hz pleine image $\rightarrow 40500$ Hz image réduite
Eclairage	flash 5 $\mu$ s, 1 J	flash 5 $\mu$ s, 1 J	spot de 1000W

TAB. 2.2: *Caméras utilisées.*

Nous avons donc utilisé trois caméras monochromes au cours de cette thèse : une caméra vidéo classique, une caméra haute résolution et une caméra rapide (table 2.2).

Ces caméras étaient munies d'un objectif photographique Nikkor 55mm macro, muni d'une bague adaptatrice pour la fixation sur les caméras. Des bagues allonges ont parfois été ajoutées pour s'approcher plus près de l'objet, la plus grande d'entre étant de 18mm.

Les images ont été principalement analysées à l'aide du logiciel NIH Image, développé par le National Health Institute, initialement pour la détection de cellules biologiques) de Wayne Rasband (disponible à l'URL <http://rsb.info.nih.gov/nih-image>). Nous avons aussi utilisé sa version adaptée pour l'annotation d'objets, Object Image, développée par Norbert Vischer de l'Université d'Amsterdam (disponible à l'URL <http://simon.bio.uva.nl/object-image.html>).

## 2.4 Détections de gouttes

La brisure du jet liquide produit de multiples gouttelettes réparties dans l'espace sous forme de spray. La distribution des tailles de gouttes, s'obtient par la collection d'un ensemble le plus nombreux possible de tailles de gouttes, dans une zone donnée de l'espace. Les techniques d'anémométrie laser Doppler (Phase Doppler Particule Analyser), qui utilisent un réseau d'interfrange entre deux lasers à un endroit donné de l'espace, mesurent les vitesses de passage des gouttes ainsi que leur taille. L'inconvénient de cette technique est qu'elle ne fonctionne que dans des sprays peu denses et que les tailles ne sont mesurées que lorsque les gouttes sont sphériques, ce qui est loin d'être le cas juste après la brisure du jet liquide.

Pour d'étudier la zone de spray juste après sa formation, l'imagerie fournit une méthode directe d'observation des tailles et vitesses. De part leur dispersion dans l'espace, les gouttes sont à des distances variables à l'objectif: leur taille apparente dépend de cette distance. Pour mesurer des longueurs sur l'image il importe que les tailles apparentes soient calibrées de la même façon. Ce n'est pas possible lorsqu'elles ne sont pas toutes dans le même plan. Nous avons alors décidé de travailler à faible profondeur de champ, ce qui signifie en pratique ouvrir suffisamment le diaphragme de l'objectif (figure 2.8). Les gouttes nettes, situées

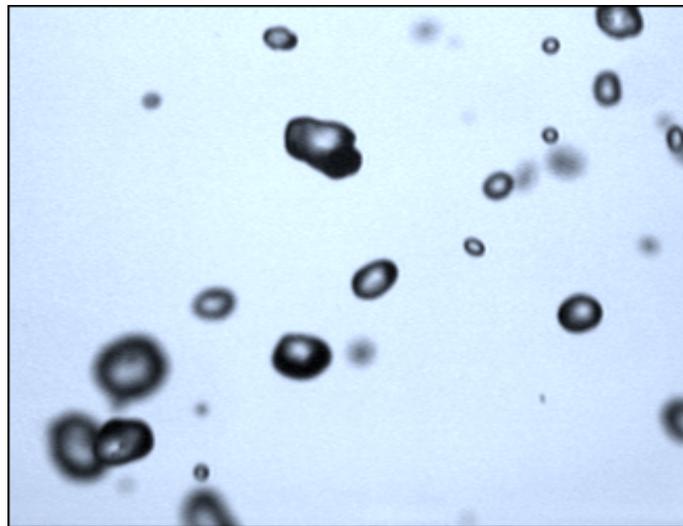


FIG. 2.8: *Instantané dans le spray.*

près du plan focal ont alors toutes la même calibration. Les gouttes floues sont situées soit trop près de l'objectif, donc trop en avant du plan focal, soit trop loin de l'objectif et donc trop en arrière du plan focal de sortes qu'elles apparaissent soit trop grandes soit trop petites. Il sera donc nécessaire de les éliminer lors des

mesures de tailles. Travailler avec un faible profondeur de champ et éliminer les gouttes floues permet de plus de limiter les superpositions de gouttes sur l'image, qui faussent la détection des gouttes.

Pour réaliser des statistiques nous avons voulu connaître un grand nombre de tailles de gouttes issues de la brisure. Avant de présenter l'algorithme d'élimination automatique des gouttes floues, nous détaillerons la procédure que nous avons utilisée pour éliminer les inhomogénéités du fond de l'image, puis quelles sont les origines des dégradés de gris sur des images de gouttes, leur modélisation par une tache de flou, et enfin l'algorithme qui évalue les gradients de gris et élimine les gouttes floues.

### 2.4.1 Élimination de l'image du fond

Sur nos images, le nombre de niveaux de gris dépend de l'échantillonnage du signal lumineux capté sur chaque pixel de la caméra : il est typiquement sur 8 bits (soit 256 niveaux) mais pour les caméras de qualité il s'élève à 12 bits (soit 4096 niveaux). Par la suite nous utiliserons pour décrire le niveau de gris un indice  $N$  de *niveau de noir* et un indice  $B$  de *niveau de blanc* définis comme suit : si un pixel est complètement noir son intensité est  $N = 1$ , et si il est complètement blanc elle est  $N = 0$ . L'indice de blanc  $B$  est son complémentaire  $B = 1 - N$ , il vaut  $B = 1$  pour du blanc pur et  $B = 0$  pour du noir.

Sur une image avec des objets, le fond (qui est l'image directe de l'écran diffuseur) n'est pas entièrement blanc et présente des pixels d'intensité  $N > 0$ , à cause des inhomogénéités de l'éclairage, et cela nuit à l'homogénéité de la détection. Afin de gommer ces hétérogénéités d'éclairage, deux méthodes sont possibles lorsque l'on a aussi pris une image du fond sans les objets :

- La soustraction :  $N = N_{image} - N_{fond}$  rend le fond uniformément blanc (niveau de noir  $N = 0$ ) là où il n'y pas d'objets, ailleurs la présence d'un objet augmente le niveau de noir. L'inconvénient de cette méthode est que les parties complètement opaques et noires sont légèrement illuminés après soustraction ;
- La division :  $B = B_{image}/B_{fond}$  ; cette méthode suppose que la présence d'objets modifie le coefficient  $t$  de transmission de la lumière selon une loi linéaire  $B_{image} = tB_{fond}$ . Un objet opaque sera donc caractérisé par une transmission nulle et un objet translucide par une transmission 1. L'image avec un fond uniformément lumineux ( $B_{fond} = 1$ ) serait donc  $B = t = B_{image}/B_{fond}$ . L'avantage de cette méthode est de rendre le fond parfaitement blanc et les objets opaques parfaitement noirs ; son inconvénient est d'amplifier les variations d'intensités de blancs du fond lorsqu'elle sont faibles.

Nous avons utilisé la seconde méthode car le fond de nos images était suffisamment lumineux (figure 2.9).

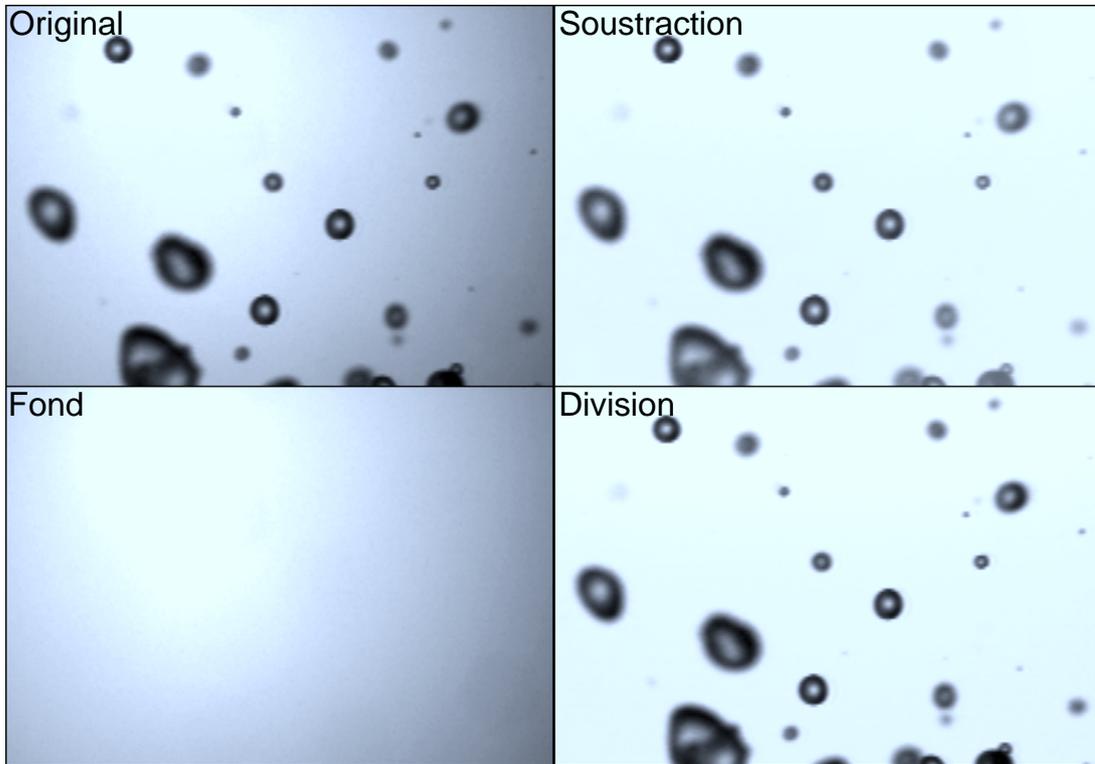


FIG. 2.9: *Soustraction et division de l'image du fond.*

#### 2.4.2 Origine des dégradés de gris sur les images

Les pixels situés hors de l'image des éléments liquides sont uniformément blanc après soustraction de l'image de fond. Par contre l'image du liquide présente toujours des nuances de gris.

#### la transmission à travers le liquide

Le jet ou les gouttes liquides ne sont pas complètement opaques à la lumière de l'écran diffuseur qui est placé dans le fond du champ visuel de la caméra. La surface courbe du liquide se comporte comme un dioptre plus ou moins cylindrique pour le jet, sphérique pour les gouttes. Il y a donc à l'intérieur du jet et des gouttes un halo lumineux qui n'est autre que l'image optique de l'écran lumineux par le dioptre liquide. Ce halo a un aspect rectangulaire dans le jet et circulaire dans les gouttes (voir la figure 1.7 par exemple).

La taille de ce halo est directement liée à la taille de l'écran : nous avons donc restreint au maximum la taille de l'écran qui restait en dehors du champ de la caméra en apposant des caches, tout en veillant à conserver un fond entièrement lumineux dans le cadre de l'image. Nous avons essayé d'éviter de restreindre la zone éclairée de l'écran par des bords nets, et plutôt recherché des caches pas complètement opaque, car les bords nets intérieurs à l'image de la goutte gênent l'algorithme de sélection des gouttes nettes que nous allons décrire plus loin.

### le flou inhérent au système optique

L'autre raison pour laquelle notre image n'est pas parfaitement contrastée noir/blanc tient à l'inévitable flou de notre système optique : l'image d'une source ponctuelle n'est pas un point mais une tache, appelée tache de flou. Cette tache de flou est la superposition de plusieurs phénomènes optiques.

Le premier est la *diffraction* par l'ouverture circulaire de l'objectif : elle apparaît pour de forts grossissements. Elle est commune en observation astronomique. Avec une lunette ou un télescope muni d'un oculaire de fort grossissement, l'image d'une étoile dont le diamètre apparent devrait être indiscernable même avec le grossissement est une tache de diffraction (tache d'Airy). Cette tache est composée d'un halo central et d'anneaux concentriques d'intensité décroissante, visibles lorsque le système optique est de qualité. Cette tache a pour taille angulaire  $2.44\lambda/D$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde lumineuse,  $D$  le diamètre d'ouverture. Pour un objectif de focale  $F$ , l'image d'un objet situé à l'infini est une tache de dimension  $2.44\lambda F/D = 2.44\lambda N$ , avec  $N$  le nombre d'ouverture. Notre objectif fermé au maximum à  $N = 16$  produit donc des taches de taille de 30nm, bien en dessous de la résolution maximale obtenue, qui est de l'ordre de  $10\mu m$  par pixels. Nous ne devrions donc pas l'observer pour des objets situés à l'infini. Pour les gouttes observées de près, l'adjonction de bagues-allonges augmente la distance focale, mais pas suffisamment pour observer la tache de diffraction.

Le second, difficile à évaluer, est relatif à la *qualité du système optique*. Nous pensons avoir réduit au maximum les aberrations optiques grâce à l'utilisation d'un objectif photographique estampillé Macro, qui permet d'observer à petites distances (jusqu'à 24cm). Nous avons tout de même été contraints de lui adjoindre des bagues, d'une part pour le raccordement avec la caméra, d'autre part pour allonger la focale de manière à observer d'encore plus près nos objets (à environ 10cm). L'objectif travaillant en dehors de ses conditions d'utilisations normales est donc nécessairement limité dans ses performances, ce qui se traduit par un léger flou.

Nous prendrons comme exemple des images de gouttes, produites par l'atomisation du jet et réalisées par la caméra haute résolution avec une grande profondeur de champ. De plus ces gouttes sont proches du plan focal, de sorte que

toutes les gouttes présentent le même degré de flou, ou de netteté si l'on préfère, qui est inhérent au système optique.

Les profils de niveau de gris sont obtenus à partir d'images individuelles de gouttes (Figure 2.10 a). Nous appliquons pour cela un filtre qui binarise l'image en noir et blanc selon que les pixels ont une intensité de niveau de gris supérieure à un seuil donné ou non (voir sur la Figure 2.10 b une représentation tridimensionnelle des niveaux de gris). Nous relevons alors sur cette image le nombre de pixels noirs composant la goutte, halo intérieur compris, pour différents seuils de détection sur les niveaux de gris augmente. Nous obtenons ainsi la surface  $S$  en unité de pixels carrés, de laquelle nous déduisons un diamètre équivalent  $d$ , défini par le diamètre du disque de même surface  $\pi d^2/4 = S$  (Figure 2.11). Les gradients de

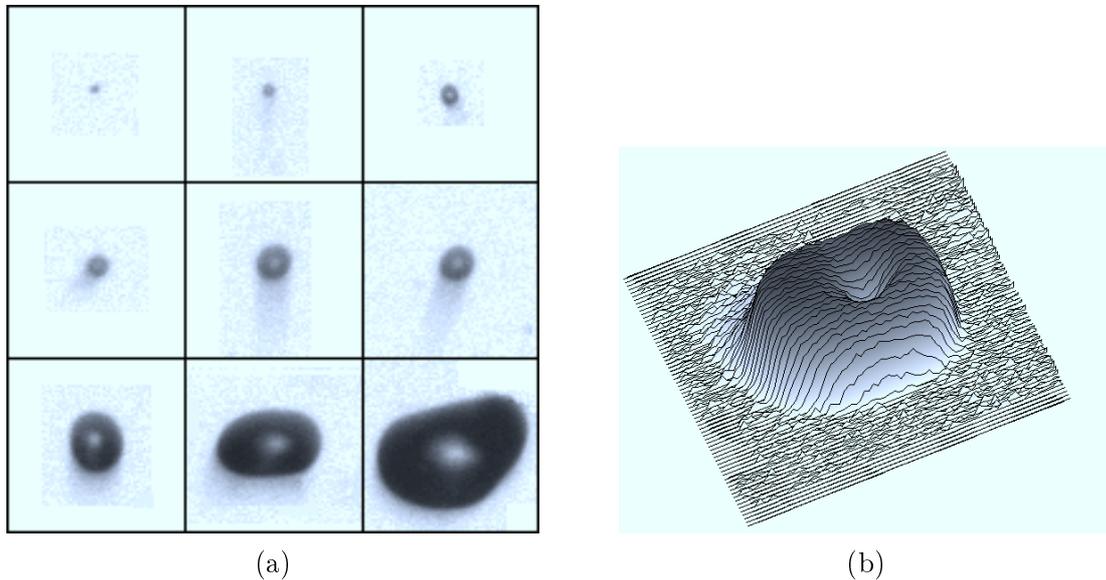


FIG. 2.10: (a) Images de gouttes avec une résolution de 27 pixels/mm (cadres de 70 pixels de large). (b) Représentation 3D des niveaux de gris d'une goutte.

niveaux de gris sont du même ordre sur les gouttes images, avec une épaisseur de transition  $2\Delta x$  d'environ 12 pixels entre le niveau  $N = 1$  et  $N = 0$ . Le gradient d'intensité à mi-hauteur est donc  $\Delta N/\Delta x = -1/6$ .

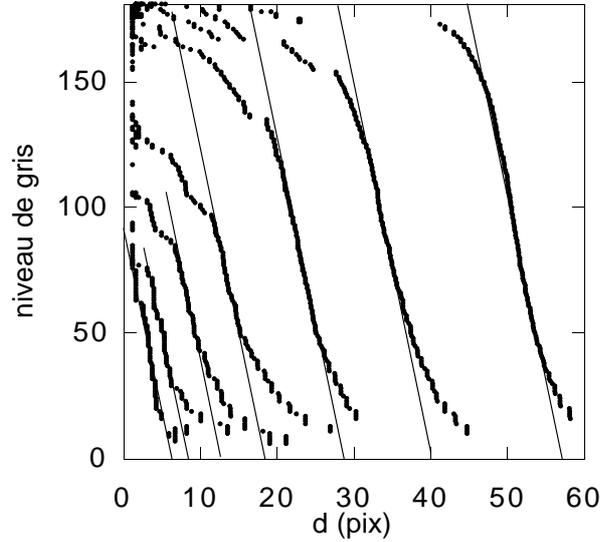


FIG. 2.11: *Diamètre observé en fonction du niveau de gris seuil, pour des gouttes prises dans les mêmes conditions.*

### l'écart au plan focal

Le phénomène le plus intuitif qui induise un dégradé de niveau de gris est l'*écart au plan focal*, plan de netteté optimale. Des objets situés au-delà ou en-deçà de ce plan ne sont plus «au point». La largeur de l'espace où la netteté est admissible est appelée profondeur de champ, et dépend de l'ouverture de l'objectif; elle augmente lorsque l'on ferme l'objectif. Les objets qui sont en dehors de cette région peuvent paraître flous. En fait, pour être précis, tout objet situé à une distance  $X$  non nulle du plan focal est flou.

Dans le cadre d'une approximation d'optique géométrique, négligeant toute diffraction, la tache de flou d'une source ponctuelle est l'intersection entre le plan focal et le cône issu de cette source avec pour base la pupille d'entrée de l'objectif (figure 2.12). Si l'on compte  $X$  positivement lorsque l'on s'éloigne du plan focal, et si l'on note  $d_P$  la distance entre le plan focal et la pupille de diamètre  $D$ , alors le diamètre de cette tache de flou est

$$\Delta = D \left| \frac{X}{d_P + X} \right|, \quad (2.3)$$

et il augmente linéairement pour les petites distances  $X$  autour du plan focal. En réalité  $\Delta$  ne tend pas vers 0 lorsque l'on s'approche du plan focal puisque l'on atteint la résolution du système optique qui a toujours un flou intrinsèque, dû soit à la diffraction soit à la qualité optique, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent.

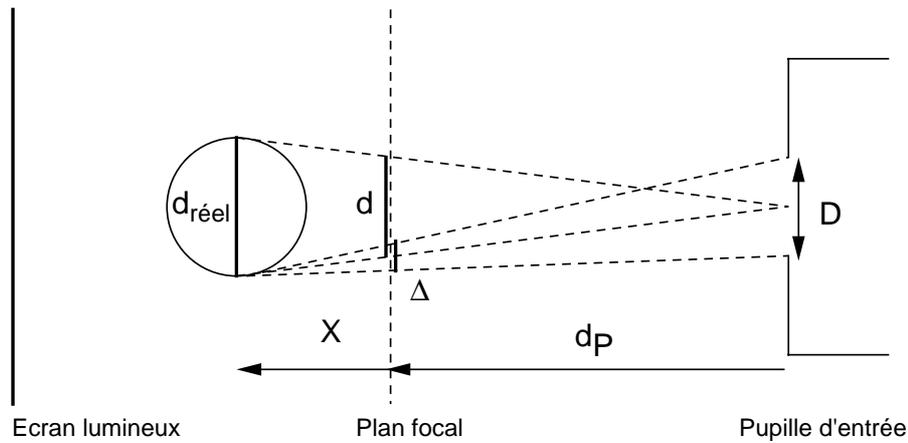


FIG. 2.12: Modélisation géométrique du système optique (d'après Bongiovanni et al., 1997).

La diffraction et la qualité du système optique produisent une tache de flou de taille constante qui ne dépend pas de l'objet observé. L'écart au plan focal ajoute par contre une contribution dont l'importance dépend de la position de l'objet. C'est cette propriété qui nous permettra de rejeter les gouttes trop éloignées du plan focal avec notre algorithme de comptage.

### 2.4.3 Modélisation des profils par convolution d'images nettes avec une tache de flou

L'image d'une source ponctuelle est une tache de flou : cette tache est la réponse du système optique. Si le système en question est linéaire et invariant par translation, l'image observée est la convolution spatiale de l'image apparente idéalement nette et de la tache de flou.

#### Tache circulaire

Bongiovanni (1996) modélise la tache de flou par un disque d'intensité uniforme de diamètre  $\Delta$  ou de rayon  $R_\Delta$ . L'intensité image  $O$  de la tache de flou est en fonction de la distance  $\rho$  au centre du disque image :

$$O_\Delta(\rho) = \frac{1}{\pi R_\Delta^2} \quad \text{si } \rho \leq R_\Delta \quad \text{et} \quad O_\Delta(\rho) = 0 \quad \text{sinon.} \quad (2.4)$$

L'image d'un objet est la superposition des taches de flou  $O_\Delta$  provenant de chacun des points de l'image idéalement nette  $B_{net}$ . L'intensité de blanc  $B = 1 - N$  de l'image est donc la convolution spatiale de l'objet et de la tache de flou :

$$B = B_{net} \otimes O_\Delta. \quad (2.5)$$

La normalisation en  $1/\pi R_\Delta^2$  de  $O_\Delta$  provient du fait qu'un plan infini uniforme a produit est inchangé par rapport à son image qui a donc la même intensité.

S'il n'y avait pas de flou (avec une ouverture infiniment petite, sans diffraction et défaut optique), l'objet apparent, de taille  $d$  dans le plan focal, serait simplement agrandi ou diminué par rapport à l'objet réel, de taille  $d_{réel}$ . Il serait la projection de l'objet réel sur le plan focal, avec un rapport homothétique  $d/d_{réel} = d_P/(d_P + X)$  (figure 2.12). On note bien que l'image apparente diminue lorsque  $X$  augmente avec  $X > 0$ , et qu'elle augmente lorsque  $-X$  augmente avec  $X < 0$ . Pour des distances focales grandes devant le diamètre des gouttes sphériques, l'image d'une boule est proche de l'image d'un disque de même diamètre. Nous modéliserons donc les images de gouttes  $B_{net}$  par des images de disques opaques de diamètre apparent  $d$ . L'intensité image d'un disque net de diamètre apparent  $d$  est une fonction qui vaut 1 à l'intérieur du disque et 0 à l'extérieur. L'image floue est sa convolution avec  $O_\Delta$  selon l'équation 2.5 (figure 2.13).

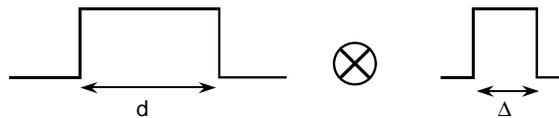


FIG. 2.13: Convolution de l'image nette par une tache de flou circulaire uniforme.

Le résultat analytique de la convolution s'exprime en fonction des variables adimensionnelles  $\rho^* = \rho/(d/2)$  et  $\Delta^* = \Delta/d$ :

$$\rho^* \geq 1 + \Delta^* \quad N(\rho^*) = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho^* \leq |1 - \Delta^*| \quad N(\rho^*) = \min(1, 1/\Delta^{*2}) \quad (2.7)$$

$$|1 - \Delta^*| \leq \rho^* \leq 1 + \Delta^* \quad N(\rho^*) = \frac{1}{\pi \Delta^{*2}} \arccos \left( \frac{\rho^{*2} + 1 - \Delta^{*2}}{2\rho^*} \right) + \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{\rho^{*2} - 1 + \Delta^{*2}}{2\rho^* \Delta^*} \right) - \frac{1}{2\pi \Delta^{*2}} \sqrt{2\Delta^{*2} + 2\rho^{*2} \Delta^{*2} + 2\rho^{*2} - 1 - \Delta^{*4} - \rho^{*4}} \quad (2.8)$$

toujours d'après Bongiovanni. Ces expressions décrivent le profil tel qu'on l'observe en effectuant un relevé des intensités selon un diamètre de l'image (Figure 2.14). Les profils ainsi obtenus présentent des gradients similaires pour  $d \gg \Delta$ :

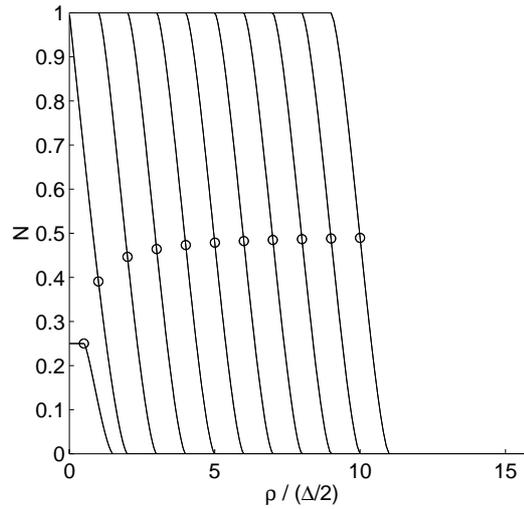


FIG. 2.14: Profil résultant de la convolution de disques avec une tache circulaire de largeur  $\delta$ , avec  $d/\Delta = 1/2, 1, 2, \dots, 10$ . Les cercles représentent la valeur du profil sur le bord de l'objet.

$$\frac{dN}{dx}(d/2) = -\frac{4}{\pi \Delta}, \quad (2.9)$$

mais ils présentent des discontinuités lorsque  $N$  tend vers 0 ou la valeur maximale alors que les profils expérimentaux de la figure 2.11 ont des variations continues. De plus leurs intensités de noir sont saturées au centre de l'image.

### Tache lorentzienne

Nous obtenons une meilleure description des profils de gouttes en supposant que la tache de flou a un profil de forme Lorentzienne de largeur à mi-hauteur  $\Delta$  :

$$\mathcal{L}_\Delta(\rho) = \frac{\frac{1}{\pi\Delta/2}}{1 + \left(\frac{x}{\Delta/2}\right)^2} \quad (2.10)$$

Pour simplifier le calcul nous allons effectuer la convolution (Figure 2.15) des profils uniquement selon un axe d'abscisse  $x$  (convolution unidimensionnelle selon la variable  $x$  avec  $\rho = |x|$ ) :

$$B(x) = O_d(x) \otimes \mathcal{L}_\Delta(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctan\left(\frac{2x+d}{\Delta}\right) - \arctan\left(\frac{2x-d}{\Delta}\right) \right\}. \quad (2.11)$$

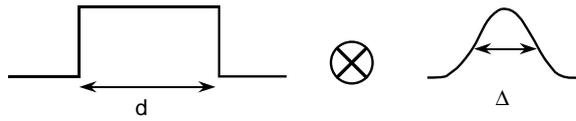


FIG. 2.15: Convolution de l'image nette par une tache de flou de profil lorentzien.

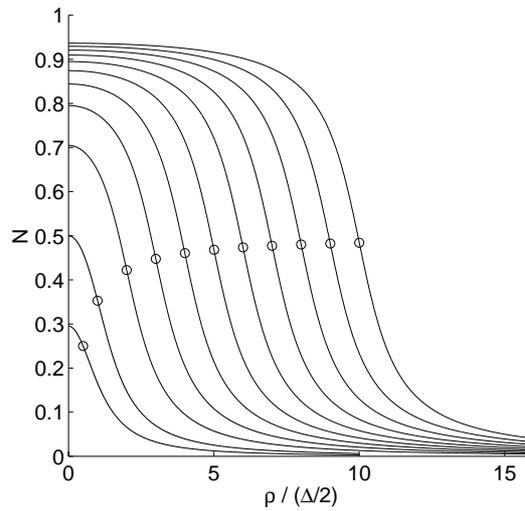


FIG. 2.16: Profil résultant de la convolution de disques de taille  $d$  avec une tache lorentzienne de largeur à mi-hauteur  $\delta$ ,  $d/\Delta = 1/2, 1, 2, \dots, 10$ . Les cercles représentent la valeur du profil sur le bord de l'objet.

Les profils obtenus (Figure 2.16) présentent aussi des gradients d'intensité similaires sur les bords pour les gouttes grandes devant la tache de flou. En effet pour  $d \gg \Delta$ , le gradient d'intensité est maximum au bord ( $\rho = d/2$ ), et vaut

$$\frac{dN}{dx}(d/2) = -\frac{2}{\pi\Delta}. \quad (2.12)$$

Lorsque la largeur à mi-hauteur des lorentziennes est deux fois plus petite que le diamètre des taches circulaires alors les gradients sont identiques par les deux méthodes d'après l'Eq. (2.9). Le gradient de niveaux de gris des images expérimentales de la figure 2.11 est d'environ  $-1/6$  pour les grandes gouttes, ce qui correspond à une tache de flou lorentzienne de largeur à mi-hauteur  $\Delta \simeq 4$  pixels, d'après l'équation 2.12. Mis à part la plus grosse goutte, l'accord entre les profils lorentziens et expérimentaux est raisonnable pour cette valeur (figure 2.17).

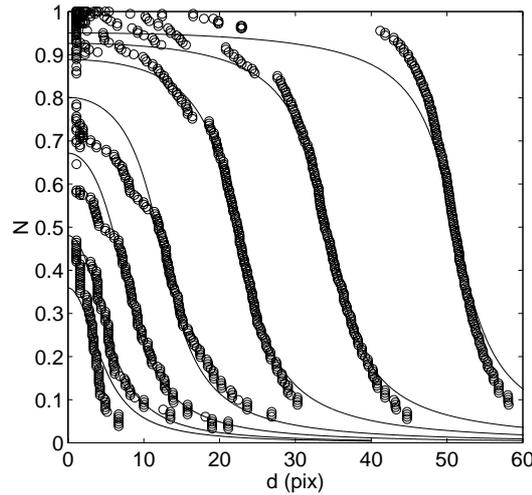


FIG. 2.17: Comparaison des profils expérimentaux avec des taches lorentziennes  $\Delta=4$  pixels.

### Gradient et taille apparente

Pour les gouttes dont le diamètre  $d$  est petit devant  $\Delta$  le gradient n'est pas maximum à la position du bord mais plus loin (figure 2.18, gauche), et sa valeur est amoindrie (figure 2.18, droite). La position du maximum de gradient n'est donc pas un bon critère pour évaluer la taille des gouttes.

Imposer un seuil  $N_s$  sur les niveaux de gris revient à relever le bord de la goutte à l'abscisse  $x$  telle que  $N(x) = N_s$ . Le diamètre apparent  $d_{app} = 2x$  s'obtient en

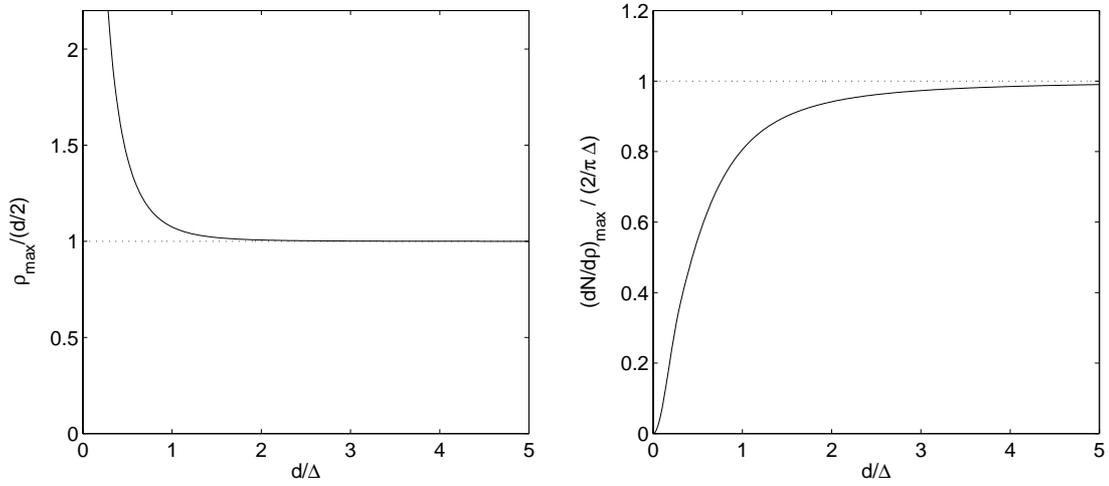


FIG. 2.18: Gauche : Position du maximum du gradient. Droite : valeur du gradient.

inversant la fonction profil  $N(x)$ :

$$\frac{d_{app}}{d} = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{d} \frac{2}{\tan \pi N_s} - \left(\frac{\Delta}{d}\right)^2}. \quad (2.13)$$

Il apparaît que la mesure du diamètre apparent à  $N_s = 0.5$  est au plus proche

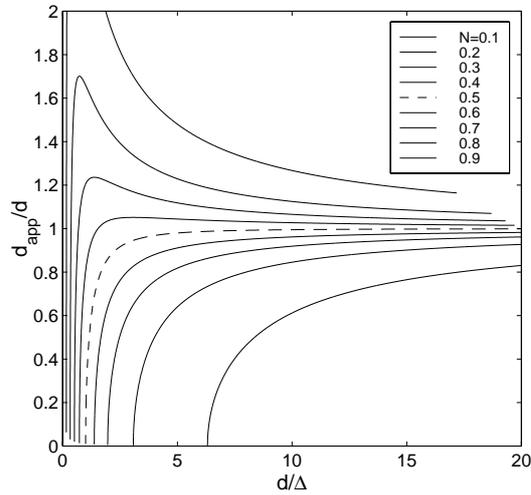


FIG. 2.19: Diamètre apparent pour différents seuillages.

des diamètres réels lorsque ceux-ci sont grands (figure 2.19). Ce seuillage modifie par contre l'évaluation des petits diamètres, en les sous-estimant de plus en plus lorsque  $d$  devient inférieur à quelques  $\Delta$ .

#### 2.4.4 Evaluation des gradients de gris sur les images

Nous venons donc de voir que le flou se traduit par l'existence d'un gradient de niveaux de gris dans la zone de contour des gouttes et que son intensité est inversement proportionnelle à la largeur de la tache de flou, quelle que soit sa forme exacte. Nous allons donc voir comment évaluer ce gradient sur des images à l'aide d'un filtre, puis comment il évolue en fonction de l'écart avec le plan focal, ou comment la tache de flou est modifiée par cette écart.

##### Filtre gradient

Les logiciels de traitement d'image sont le plus souvent dotés d'un filtre qui met en évidence les contours. C'est en règle générale un filtre de type dérivateur qui évalue le module du vecteur gradient d'intensité  $\|\mathbf{grad}N\| = \sqrt{\left|\frac{\partial N}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial N}{\partial y}\right|^2}$ . Les images numériques ne sont pas continues sur le plan mais sont discrétisées sous forme d'une matrice de valeurs d'intensité de pixels  $N_{ij}$ , et il faut donc approximer ces dérivées par des méthodes dites des différences finies :

– *Filtre de Roberts*

il évalue les gradients diagonaux en convoluant l'image par les matrices

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array},$$

puis somme leurs valeurs absolues.

– *Filtre de Sobel*

Les gradients verticaux et horizontaux sont évalués en convoluant l'image par les matrices

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array},$$

puis la racine carrée de ces gradients au carré est la valeur du filtre.

– *Filtre Sigma*

Nous avons constaté que l'inconvénient des filtres précédents est qu'ils ne respectent pas l'isotropie de l'orientation de l'interface. En effet, avec ces filtres les contours d'objets circulaires ne présentent pas un gradient uniforme sur leur pourtour. Le filtre Sigma est plus respectueux de l'isotropie. Il est défini par l'écart-type des huit pixels voisins  $\Sigma_2 = \sqrt{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}$ , avec  $\langle \rangle$  la moyenne sur les huit voisins. La norme associée à cet écart-type est la norme 2, d'où l'indice de  $\Sigma$ . La moyenne est calculée par la convolution avec

1	1	1
1	0	1
1	1	1

et les écarts à la moyenne  $N - \langle N \rangle$  sont la convolution de l'image avec les matrices

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \frac{1}{8} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \frac{1}{8} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \text{etc ...}$$

qui apparaissent ainsi comme les gradients dans les 8 directions. La racine carrée de la moyenne des écarts au carré donne la valeur du filtre.

Nous avons choisi ce dernier filtre en l'implémentant sous sa forme « norme 1 » (et non sous la forme précédente « norme 2 »):

$$\Sigma_1 = \langle |\langle N - \langle N \rangle| \rangle, \quad (2.14)$$

qui est nettement moins gourmande en temps de calcul. Le résultat, nécessairement inférieur à 1, est codé sur 256 niveaux de gris.

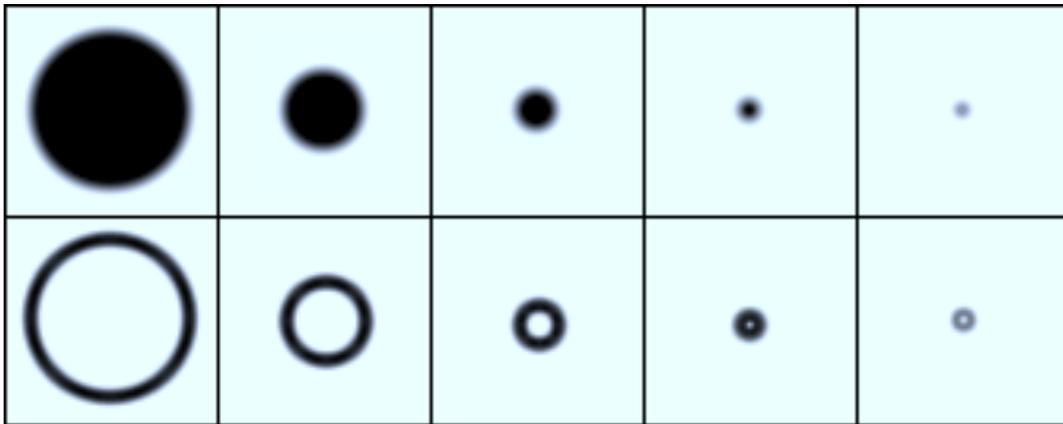


FIG. 2.20: Influence du rayon de courbure de disques opaques (haut) sur l'évaluation du gradient d'intensité (bas), diamètres de  $d = 50, 25, 12, 6, 3$  pixels, tache de flou de 5 pixels. Dès que  $d > \Delta$  l'intensité du gradient ne dépend pas du diamètre.

### Isotropie et influence de la courbure

Pour tester l'isotropie de ce filtre et l'influence du rayon de courbure des gouttes nous l'avons appliqué à des images théoriques de disques opaques de différents diamètres. Sur la figure 2.20 (images du haut) nous avons construit

des images de disques de défocalisation donnée, avec le modèle d'une tache de flou circulaire uniforme de diamètre 5 pixels, puis appliqué le calcul du filtre  $\Sigma$  (images du bas).

L'intensité du gradient est relativement uniforme sur le périmètre à 10 % près. De plus sa valeur est identique pour les diamètres lorsque ceux-ci sont supérieurs à 6 pixels ( $d/\Delta > 1$ ), en dessous la tache de flou devient aussi grande que le disque et diminue fortement le contraste, ce qui diminue le gradient (figure 2.21).

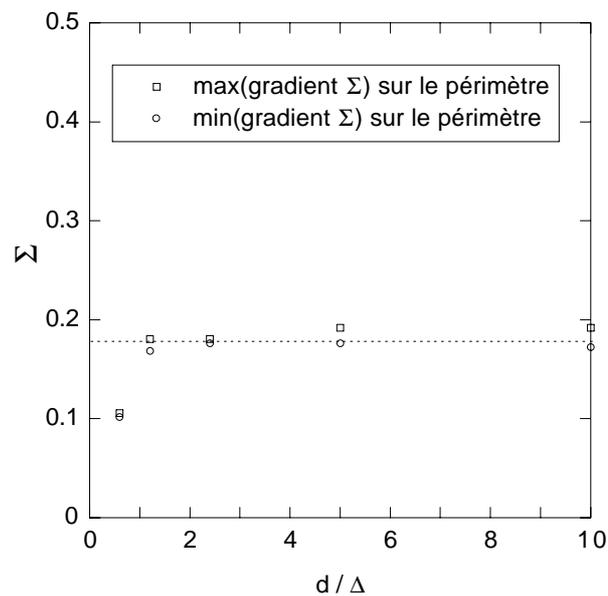


FIG. 2.21: Effet de la courbure sur l'intensité du gradient  $\Sigma$  : maximum et minimum sur le périmètre des cercles de la figure précédente ( $\Delta = 5$  pixels).

### Relation avec le gradient de profil

Appliqué à des images créées à partir des profils théoriques avec  $\Delta = 1$  à 10 pixels, on constate que le gradient  $\Sigma$  est proportionnel au gradient d'intensité théorique (équations 2.9 et 2.12), pour les gradients inférieurs à 0.2, puis sature (figure 2.22).

En conclusion le filtre  $\Sigma$  donne une valeur de gradient isotrope, qui décroît de façon monotone avec la taille de la tache de flou et permettra donc d'évaluer cette tache.

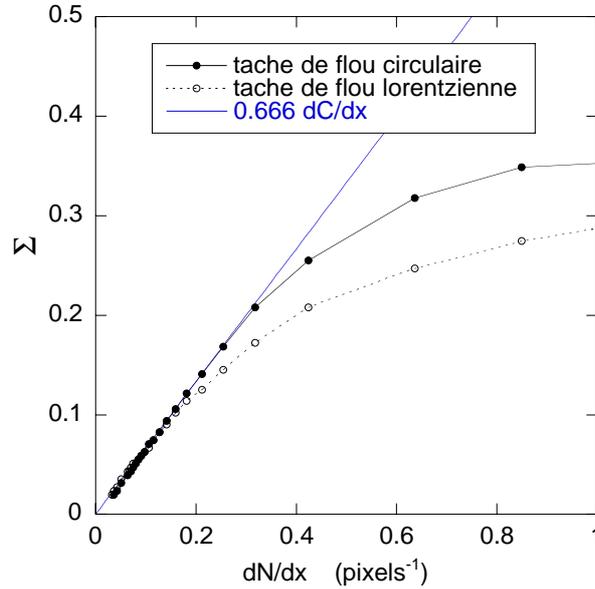


FIG. 2.22: Gradient  $\Sigma$  en fonction du gradient d'intensité au bord.

### Flou en fonction de l'écart au plan focal

Reste à déterminer comment varie le gradient du bord des gouttes avec la distance au plan focal. Nous avons procédé de manière expérimentale pour le connaître: une bille d'acier de 4.75 mm (pour simuler une goutte) nous a permis de tester le flou créé par le système optique pour différentes distances  $X$  du plan focal. Le gradient est maximal pour les gouttes nettes et décroît de manière relativement symétrique autour du plan focal (Figure 2.23 a). Le gradient nous permet donc d'estimer la distance au plan focal.

A partir de ce gradient nous pouvons à présent connaître l'évolution, en fonction de l'écart au plan focal, de la taille de tache de flou lorentzienne qui modéliserait le gradient observé. Cette taille a une valeur finie sur le plan focal et grandit de manière symétrique autour de  $X = 0$  (figure 2.23 b). Comme le suggérerait l'équation 2.3 la taille augmente linéairement lorsqu'elle est petite devant la distance à l'objectif  $d_P$ , ce qui était le cas dans ces expériences où  $d_P \sim 100\text{mm}$ , mais elle n'est pas nulle initialement: il y a toujours un flou résiduel incompressible qui est lié au système optique.

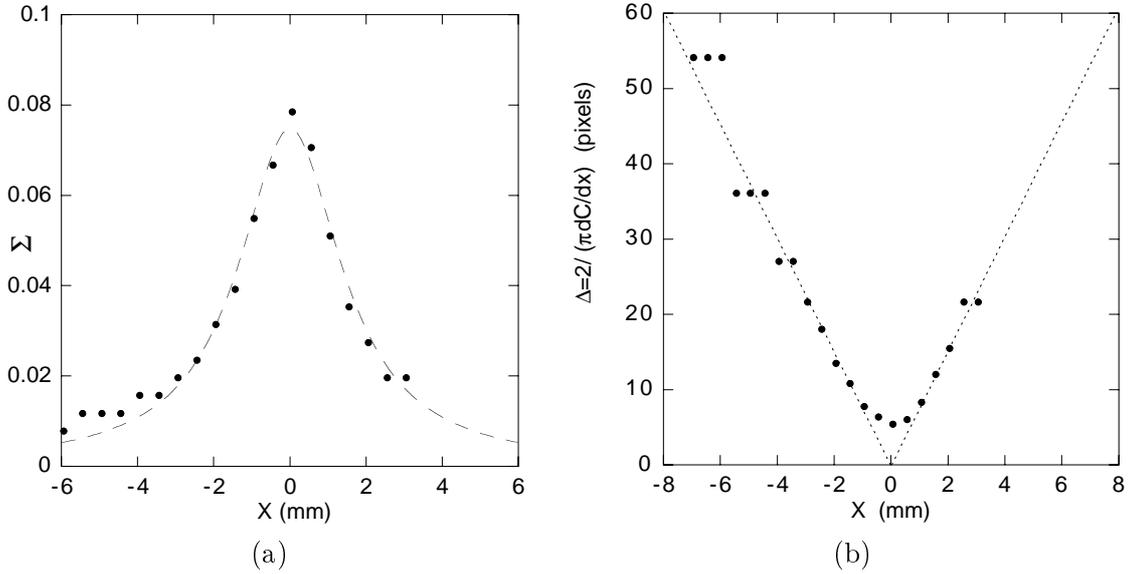


FIG. 2.23: (a) Intensité du gradient  $\Sigma$  sur le contour de l'image d'une bille en fonction de la défocalisation. L'intensité mesurée (points) est la valeur minimale sur le périmètre. En pointillés une régression. (b) Diamètre de la tache de flou (lorentzienne) qui donnerait le même flou. Pointillés : approximation linéaire pour les grands écarts  $|X|$ .

### 2.4.5 Algorithme de détection

Nous savons à présent relier le résultat du filtre  $\Sigma$  à la distance au plan focal, ce qui nous donne un critère objectif de sélection des gouttes. Les opérations de détection peuvent être automatisées sous forme d'un algorithme qui pourra traiter un grand nombre d'images. Le seul paramètre que l'on fixe est le critère de netteté, qui correspond à une valeur minimale de gradient, et que l'on pourra relier à la distance au point focal pour chacune des conditions de prises de vues. Décrivons la suite d'opérations qui permet de détecter les gouttes sur une image (Figure 2.24).

**1. Division par l'image du fond :** Cette procédure décrite plus haut est indispensable pour homogénéiser le fond et détecter de la même manière toutes les gouttes (Image 1).

**2. Calcul du gradient :** Le filtre  $\Sigma$  est appliqué à l'image d'origine après division du fond et met en évidence les gradients sur les contours (Image 2).

**3. Elimination des gouttes floues :** Un seuil ajustable  $N_G$  permet ensuite de ne garder que les points de contours pour lesquels le gradient est suffisamment élevé, c-à-d les parties de contours suffisamment nettes (Image 3).

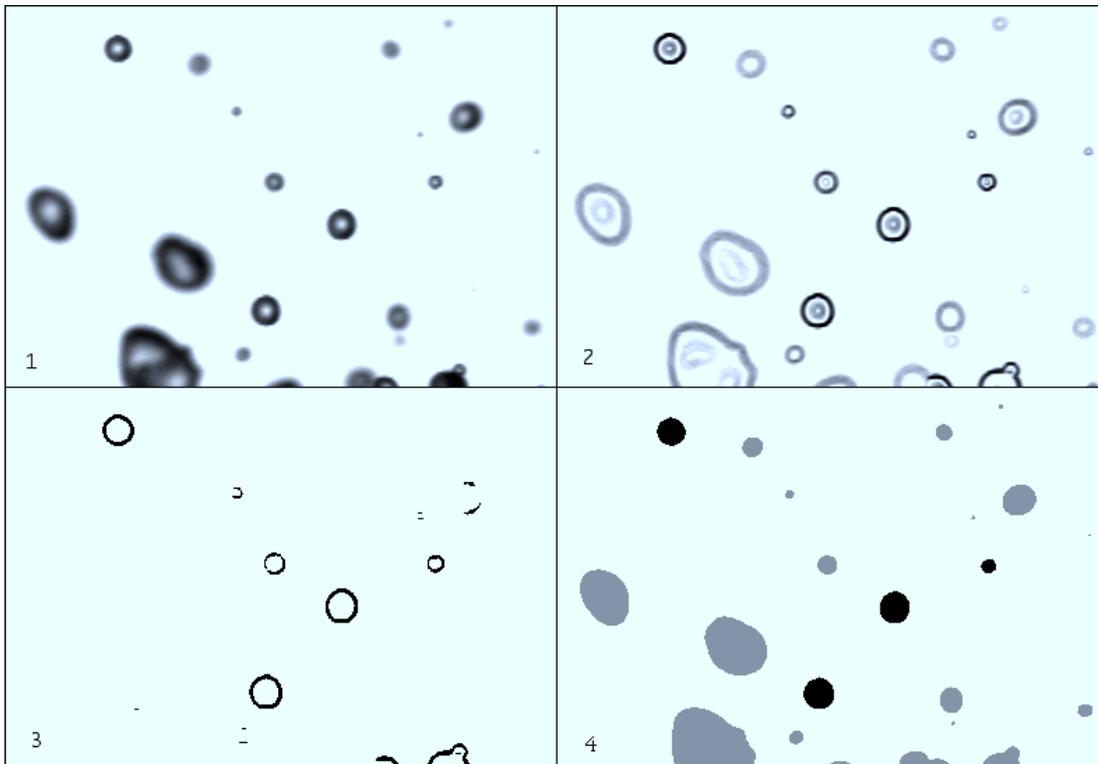


FIG. 2.24: *Image 1 : image d'origine après division du fond. Image 2 : Gradient d'intensité autour de chaque pixel. Image 3 : seuil inférieur sur le gradient. Image 4 : élimination des contours non fermés ou touchant le bord et affichage de la surface (en gris les gouttes non sélectionnées).*

Comme le gradient au bord est directement lié à la distance au plan focal, un seuil sur le gradient revient à ne conserver que les gouttes dont la distance est inférieure à une distance donnée. La fenêtre d'observation des gouttes est ainsi bien délimitée dans l'espace, tant en largeur et en hauteur qu'en profondeur, dimensions qui sont de l'ordre du millimètre.

Les contours qui sont nets sur toute leur périphérie donnent des boucles fermées, et à l'inverse, si une partie de la goutte n'est pas nette, son contour sera interrompu. Ne sont retenus que les contours fermés qui ne touchent pas le bord de l'image.

**4. Mesure de la surface des tailles de gouttes :** Ces boucles fermées servent à désigner les gouttes nettes (Image 4). Mais comme les boucles ont une certaine épaisseur, il est malaisé de les utiliser pour déterminer précisément les bords de gouttes. D'autre part Bongiovanni (1996) et nos simulations d'images de gouttes par convolution avec une tache de flou montrent que l'endroit de gradient maximum ne correspond pas forcément à la position du bord réel (voir figure 2.18, gauche). Une très bonne approximation du bord des gouttes consiste à effectuer un seuil à mi-hauteur  $N_s = 0.5$  sur l'image de départ après soustraction du fond. La

figure du profil théorique d'un disque flou (figure 2.19) a montré que cette valeur de seuil donne une très bonne estimation du diamètre tant qu'il est supérieur à celui de la tache de flou.

L'opération de marquage des pixels selon que leur intensité est supérieure au seuil  $N_S$  ou non, appelée *segmentation* en traitement d'image, binarise l'image en pixels blancs et noir. Les gouttes prennent la forme d'îlots de pixels noirs. Les îlots connexes de pixels noirs sont détectés par une routine de traitement d'image, qui fournit leurs caractéristiques, telles que le nombre de pixels et donc leur surface  $S$  en pixels carrés. Sont exclus ceux qui ne sont pas marqués (contenus) par les boucles fermées obtenues précédemment. Les gouttes ne sont pas nécessairement sphériques mais on peut déduire de leur surface un diamètre équivalent  $d$  tel que  $S = \pi d^2/4$ . C'est ce diamètre que nous utiliserons par la suite pour présenter les tailles de gouttes.

### Test sur des gouttes de tailles connues

Pour consolider la validité de notre dépouillement en ce qui concerne les mesures de tailles, nous avons testé cet algorithme sur des images de gouttes issues de la brisure de Rayleigh simple de jets liquides. Les images contenaient les gouttes issues de deux jets de diamètres différents mis côte-à-côte (figure 2.25). Le dia-

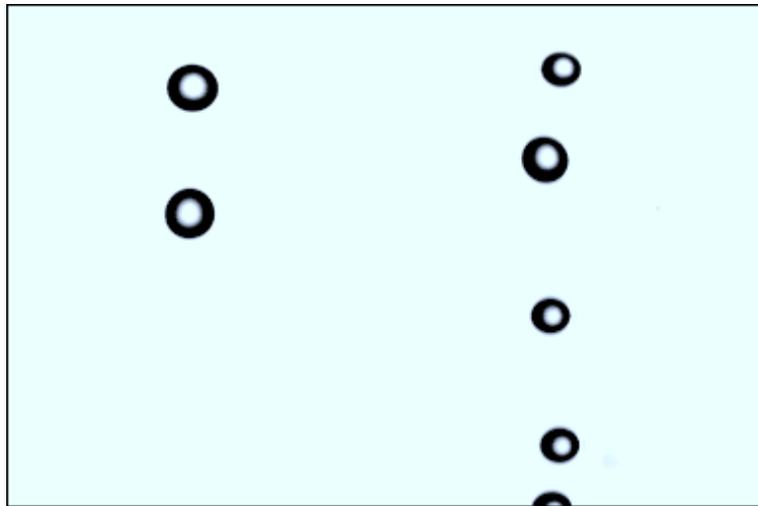


FIG. 2.25: Gouttes issues de la brisure de Rayleigh de deux jets de diamètres voisins, dans un rapport 1.33

mètre courant des jets fut mesuré juste en amont de la brisure, qui se déroulait à une centaine de diamètres de la sortie et valait  $d_1 = 0.246$  mm pour le plus fin et 0.327 mm pour l'autre, soit un rapport de diamètres de 1.33. Le dépouillement d'un millier d'images de la sorte, selon l'algorithme de détection décrit plus haut

donne la taille de brisure en goutte attendue de 1.89 fois le diamètre pour les deux jets (figure 2.26). La détection permet donc de discriminer les tailles de deux jets de tailles proches. L'écart-type relatif de chacun des pics est de  $\sigma/\langle d \rangle = 3\%$  (que nous exprimerons plus bas avec le paramètre  $n$ , défini par  $\sigma/\langle d \rangle = 1/\sqrt{n}$ , et qui vaut ici 1100). Examinons à présent l'étendue des tailles que l'algorithme mesure

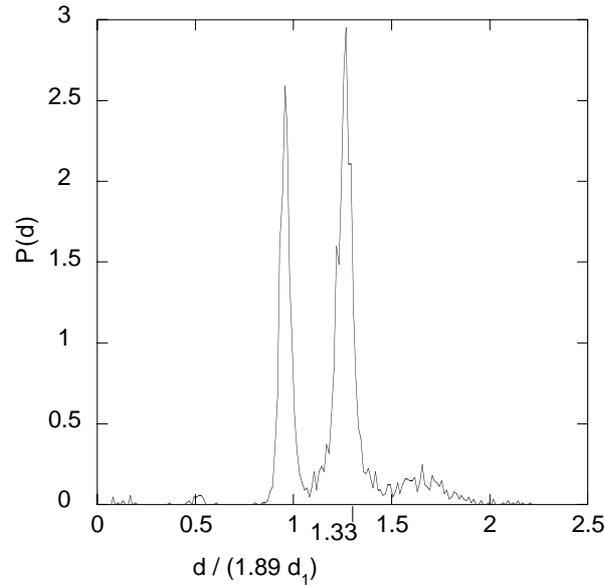


FIG. 2.26: *Histogramme des tailles de gouttes créées par deux jets liquides dont les diamètres sont dans un rapport 1.33.*

correctement, pour les grands et les petits objets.

## Grandes gouttes

Les gouttes sont détectées jusqu'à ce qu'elles dépassent le cadre de l'image. Mais qu'en est-il si leur diamètre devient grand devant la profondeur de champ? En ce cas les surfaces de la goutte qui sont loin du plan focal seront floues, alors même que le centre peut être sur le plan de netteté. Mais cela ne modifie pas l'image en projection, car seul le bord produit un contour qui peut être net ou flou sur l'image. Ce bord correspond à une ligne qui fait le tour de la goutte et c'est la position de cette ligne qui décidera de la netteté de la goutte, indépendamment des autres parties de sa surface, qu'elles soient très proches ou très éloignées (figure 2.27). Les gouttes plus grandes que la profondeur de champ peuvent donc toujours être détectées.

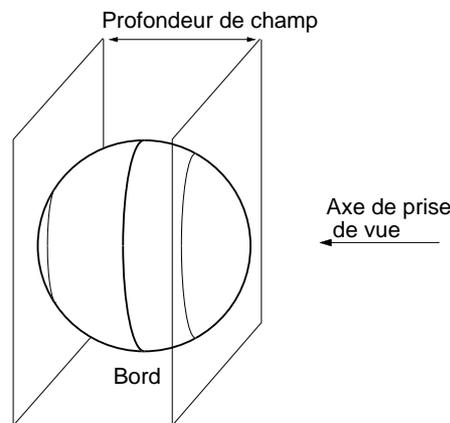


FIG. 2.27: Le bord de l'image correspond au plus grand diamètre de la goutte. Il peut être net alors que le volume de la goutte n'est pas complètement dans la profondeur de champ.

## Petites gouttes

Augmenter le seuil sur le gradient d'intensité du contour permet de diminuer la profondeur de champ des gouttes sélectionnées : l'algorithme détecte moins de gouttes au total. La forme de la distribution est inchangée pour les grands diamètres mais dépend du seuil pour les petites gouttes (un exemple de distribution dans le spray est à la figure 2.28).

En effet, lorsque l'on augmente le seuil sur le gradient de gris pour diminuer la profondeur de champ, toutes les gouttes ne sont pas concernées de la même façon. Pour un même écart au plan focal les petites gouttes ont un gradient de gris plus faible lorsque leur taille est inférieure à la taille de leur tache de flou  $\Delta$  (voir plus haut avec une tache de flou de profil lorentzien figure 2.18). Donc le seuil rejette les gouttes qui sont au-delà d'une certaine distance du plan focal mais aussi des gouttes qui sont à l'intérieur et dont le rapport diamètre sur taille

de flou est petit. Nous ne sommes donc sûrs que des diamètres qui sont supérieurs à cette taille de flou. En pratique la tache de flou  $\Delta$  des images les plus nettes dans le plan focal est toujours de l'ordre de quelques pixels, selon le grossissement choisi, donc les tailles de cet ordre constituent la limite inférieure d'une détection correcte.

Sur les distributions, il est simple de connaître cette limite inférieure : c'est le diamètre en dessous duquel la distribution est modifiée par les changements de gradient. Sur la figure 2.28 il s'agit d'une taille de 10 pixels. Nous avons donc

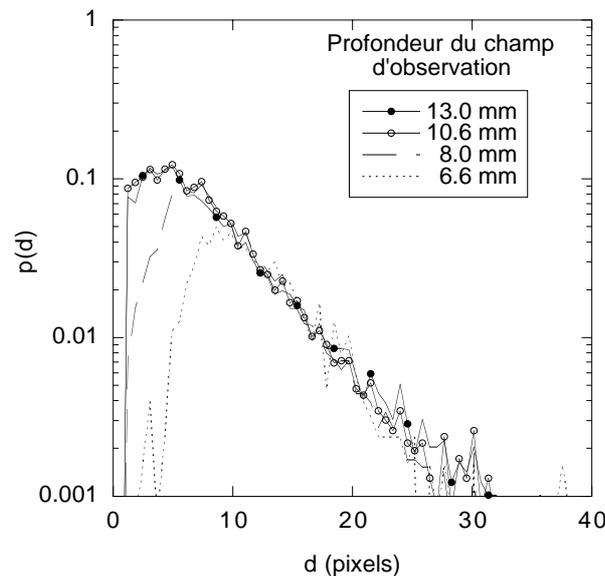


FIG. 2.28: *Distribution des diamètres de gouttes pour différents seuils sur la netteté, correspondant à différentes profondeurs de champ. Echelle : 10 pixels = 0.3 mm. Taille de la fenêtre d'observation : 12 mm par 8 mm. Les distributions sont normalisées sur les diamètres supérieurs à 10 pixels.*

systématiquement dépouillé les images avec différents seuils de façon à identifier cette limite inférieure de validité de la distribution, qui varie entre 10 à 20 pixels selon les conditions de prises de vues.

### Taille moyenne $d_{10}$

Comme la proportion de petites gouttes observées par l'algorithme dépend de plus du seuil de détection sur la netteté, et que la distribution est souvent la plus fournie pour ces diamètre, le diamètre moyen  $d_{10}$  des gouttes dépend aussi du seuil. Il dépend cependant moins du seuil que le nombre total de gouttes : le diamètre moyen qui s'écrit comme  $d_{10} = \int_0^\infty d^1 h(d) d(d) / \int_0^\infty d^0 h(d) d(d)$ , avec

$h(d)$  la distribution du nombre de gouttes, est moins sensible au nombre de petites gouttes que le nombre total de gouttes  $n = \int_0^\infty h(d) d(d)$ .

Un seuil faible accepte toutes les gouttes de la même manière mais introduit des erreurs de calibration et du bruit de fond, ce qui a plutôt tendance à diminuer le diamètre moyen. À l'inverse un seuil très fort permet de délimiter une petite fenêtre dans l'espace mais élimine beaucoup de petites gouttes et réduit le diamètre moyen. Nous avons donc fait varier le seuil entre ces deux extrêmes depuis l'apparition du bruit de fond (avec l'apparition d'un pic de petits diamètres) jusqu'à l'élimination de la majorité des petites gouttes. Le diamètre moyen est donc compris entre ces deux bornes.

## Chapitre 3

# Déstabilisation du liquide

**E**MERGEANT dans une atmosphère immobile, le jet liquide projeté vers le bas à des vitesses de l'ordre du mètre par seconde est soumis à la brisure capillaire, qui intervient typiquement à des distances de l'ordre du mètre pour des jets d'eau de  $u_1 = 1$  m/s. Si l'on actionne le jet d'air coaxial de vitesse  $u_2$ , la surface est déstabilisée par le cisaillement. La surface présente des ondulations axisymétriques qui naissent d'autant plus près de la sortie du jet, et avec une croissance d'autant plus grande que la vitesse d'air augmente. A partir d'une certaine vitesse d'air ces ondulations se déstabilisent transversalement et des digitations liquides se forment. Ces digitations s'étirent et prennent l'aspect de ligaments.

### 3.1 Instabilité de cisaillement

Dès la sortie de l'injecteur, la surface séparant les courants d'eau et d'air animés de vitesses différentes est instable. L'instabilité prend la forme d'ondulations axisymétriques qui sont amplifiées au cours de leur propagation le long du jet.

#### 3.1.1 Analyse de stabilité avec un profil de vitesse dans l'air

A la sortie de l'injecteur, le jet d'eau et la couronne d'air présentent une couche limite sur les parois de l'injecteur, due au frottement sur les parois internes. Ces couches limites sont laminaires, car le taux de turbulence est fortement réduit par la convergence de l'écoulement. En sortie d'injecteur, les deux couches limites se juxtaposent de part et d'autre d'interface du jet liquide (figure 3.1). Le jet d'air exerce un cisaillement  $\tau$  sur la surface liquide, ce qui accélère le liquide. Le profil de vitesse dans le liquide est alors inversé sur une profondeur croissante  $\delta_1 \sim \sqrt{\nu_1 t}$  sous la surface. L'épaisseur de couche limite dans la gaz  $\delta_2$  est peu modifiée, car la vitesse d'interface  $u_i$  est toujours petite devant  $u_2$ . Ce profil génère l'instabilité de cisaillement.

Rayleigh (1880) avait montré que dans un fluide homogène un profil de vitesse présentant une couche de transition entre deux courant de vitesses différentes est

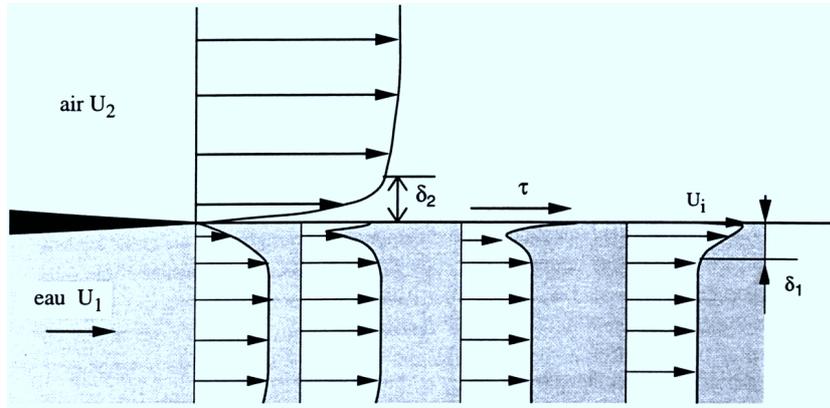


FIG. 3.1: Rencontre des couches limites (d'après la figure 4.2 de la thèse de Raynal, 1997).

instable vis-à-vis de petites perturbations de l'écoulement. Son analyse de stabilité était réalisée sur un profil de vitesse linéaire (figure 3.2a). L'analyse de stabilité

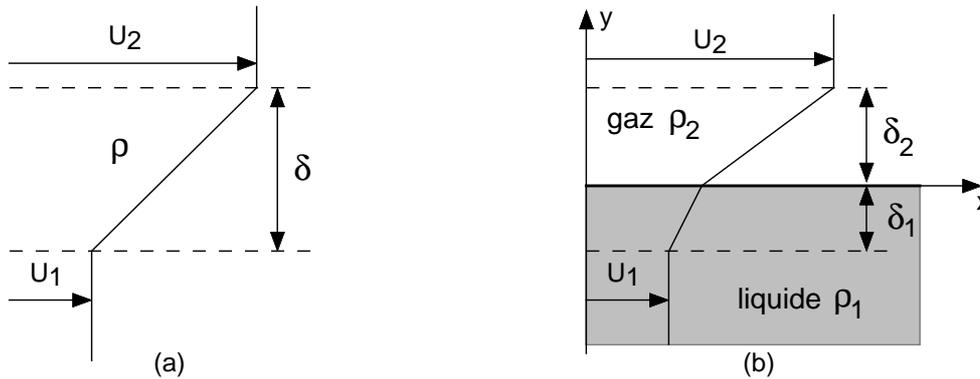


FIG. 3.2: (a) Profil de couche de transition linéaire dans un fluide homogène (b) Profil des couches limites dans un fluide hétérogène.

de réalise comme suit : l'introduction d'ondulations spatio-temporelles de surface

$$\eta = \eta_0 \exp(i\omega t - ikx), \quad (3.1)$$

d'amplitude infinitésimale, conduit à une relation de dispersion de la forme  $f(\underline{\omega}, \underline{k}) = 0$ . Ces nombres sont *a priori* complexes :  $\underline{k} = k + ik_i$  et  $\underline{\omega} = \omega + i\omega_i$ . Les parties réelles sont le nombre d'onde  $k$  ( $\lambda = 2\pi/k$  est la longueur d'onde) et la pulsation  $\omega$  ( $f = \omega/2\pi$  est la fréquence). Les parties imaginaires décrivent les croissances, spatiale pour  $k_i$ , temporelle pour  $\omega_i$  pour des conditions instables.

Deux approches sont envisageables pour déterminer le nombre d'onde et la pulsation de la perturbation la plus amplifiée, qui dominera les autres à partir du bruit de fond initial de l'écoulement.

Si l'on s'intéresse à la croissance spatiale des oscillations, il faut considérer un vecteur d'onde complexe  $\underline{k} = k_r + ik_i$ ,  $k_i$  donnant le taux de croissance, et une pulsation  $\underline{\omega} = \omega$  réelle,  $\omega_i = 0$ , signifiant que l'amplitude en un point de l'espace oscille mais ne croît pas (figure 3.3). La relation de dispersion donne donc  $k(\omega)$  et  $k_i(\omega)$ . La courbe  $k_i(\omega)$  admet un maximum en  $\omega_M$  qui donne le mode  $(k(\omega_M), \omega_M)$  le plus amplifié, c'est celui qui est sélectionné par l'instabilité.

Dans le cas d'une croissance temporelle des oscillations, il faut supposer que la perturbation ne croît pas selon l'espace. Son nombre d'onde est  $\underline{k} = k$ , c-à-d  $k_i = 0$ , elle oscille et croît dans le temps, ce qui signifie que  $\underline{\omega} = \omega + i\omega_i$ . Le mode  $(k, \omega)$  sélectionné est celui qui maximise  $\omega_i(k)$ .

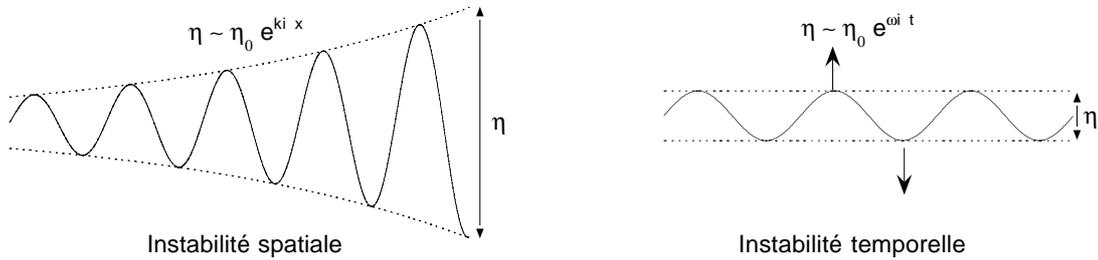


FIG. 3.3: Croissance spatiale ou temporelle des instabilités.

L'analyse de stabilité temporelle du profil conduit Rayleigh (figure 3.2a) montre que la surface est instable lorsque  $k_r \delta < 1.28$ . La longueur d'onde la plus amplifiée est telle que  $k_r \delta \simeq 0.8$  et le taux de croissance temporel associé  $\omega_i \simeq 0.2(u_2 - u_1)/\delta$ . Et seules les longueurs d'onde supérieures à  $2\pi\delta/1.28$  sont instables.

Dans le cas de deux phases de vitesses différentes raccordées par deux profils de part et d'autre de l'interface, l'interface est aussi instable (Pouliquen *et al.*, 1994). Une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement réalisée avec des profils de vitesse linéaires (figure 3.2b), pour obtenir des solutions analytiques, montre que l'incidence de la couche limite de l'eau sur la croissance des oscillations de surface est négligeable par rapport à celle de l'air, la raison est que cette croissance est inhibée par la viscosité tant que  $Re_{\delta_1} = u\delta_1/\nu_1 < 150$  (Villermaux, 1998). Notons que dans certaines conditions un deuxième mode d'instabilité peut apparaître en présence d'une couche limite liquide, comme le montre l'analyse de stabilité avec des profils en fonction erreur *erf* de Yecko & Zaleski (2000).

Il suffit donc de modéliser l'écoulement initial par une couche limite dans l'air. La vitesse de l'air passe de la valeur  $u_1$  sur l'interface, à la valeur  $u_2$  sur une épaisseur  $d_2$  (Figure 3.4). Lorsqu'ils sont écrits sous forme adimensionnelle  $\kappa = \underline{k}d_2$ ,  $\Omega = \underline{\omega}d_2/(u_2 - u_1)$ , la relation de dispersion s'écrit sous la forme  $f(\kappa, \Omega) = 0$ , pour des conditions  $u_2/u_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ ,  $We_{d_2} = \rho_2(u_2 - u_1)^2 d_2/\sigma$  données.

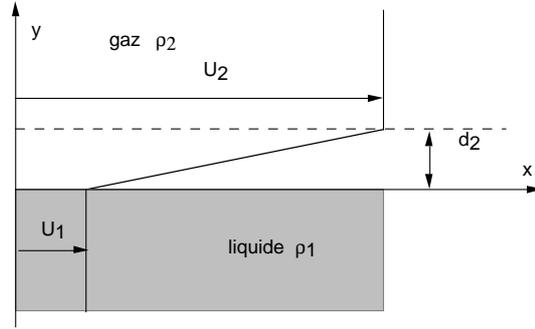


FIG. 3.4: Profil de vitesse utilisé dans l'analyse de stabilité linéaire.

L'influence de la gravité a été négligée ici. Elle s'énonce

$$e^{-2\kappa} = [1 - (2\Omega + \kappa)] \frac{1 + \frac{\rho_1 + 1}{2} (2\Omega - \kappa)}{1 + \frac{\rho_1 - 1}{2} (2\Omega - \kappa)}, \quad (3.2)$$

pour les grands nombre Weber (Villermaux, 1998). On peut montrer si l'on inclue la tension de surface dans cette équation, son effet est négligeable sur les courbes de dispersion lorsque le nombre de Weber est supérieur à 1, ce qui est le cas dans nos expériences où  $We_\delta$  varie de 1 à 10.

Le mode le plus amplifié qui résulte de l'analyse de stabilité temporelle avec une surface plane est caractérisé par :

$$k \simeq 1.5 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{1}{d_2} \quad (3.3)$$

$$\omega \simeq 1.5 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{u_c}{d_2} \quad (3.4)$$

$$\omega_i \simeq \frac{\rho_2 u_2}{\rho_1 d_2} \quad (3.5)$$

avec  $u_c$  la vitesse de convection des perturbations, vitesse de groupe :

$$u_c = \frac{d\omega}{dk} \simeq \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}. \quad (3.6)$$

Toutes les égalités doivent s'entendre à 10 % près dans le cas air-eau, avec  $\rho_2/\rho_1 = 1.2/1000$ . A rapport de densité fixé, les paramètres physiques décrivant l'instabilité – longueur d'onde, fréquence et taux de croissance – varient donc de la façon suivante :  $\lambda \sim d_2$ ,  $f \sim u_c/d_2$  et  $\omega_i \sim u_2/d_2$ .

Les résultats sont sensiblement les mêmes avec une analyse spatiale en ce qui concerne les modes sélectionnés, donc les valeurs du nombre d'onde  $k$  et la

pulsation  $\omega$ . Le taux de croissance spatial  $k_i$  est lié au taux de croissance temporel  $\omega_i$  par la relation de Gaster (1962), dans le cas où la croissance sur une période  $T = 1/f$  est petite soit  $\omega_i T \ll 1$  :

$$k_i = \frac{\omega_i}{u_c}. \quad (3.7)$$

Si on explicite  $\omega_i T$ , on trouve  $\omega_i T = \frac{2\pi}{1.5} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M+1}}}$ , avec  $M = \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 u_1^2}$  rapport des flux de quantité de mouvement, cette quantité est bornée quel que soit  $M$  par 0.145 ce qui en principe assure bien la relation. Pour une instabilité spatiale, la vitesse de groupe n'est valable qu'en ordre de grandeur.

### 3.1.2 Description expérimentale de l'instabilité

Dans notre configuration d'un jet d'eau cisailé en sortie par un jet d'air la croissance de l'instabilité est uniquement spatiale dans le repère du laboratoire. En un point donné de l'espace, la surface oscille mais l'amplitude de cette oscillation est constante. En effet les ondulations sont convectées loin de la sortie et ne peuvent exercer de rétroaction sur l'origine des oscillations, l'instabilité est de type convectif. Dans le cas contraire, si les perturbations pouvaient remonter le cours de l'écoulement et faire croître les oscillations en un point fixe de l'espace, on parlerait d'instabilité absolue.

Examinons à présent les trois grandeurs physiques caractérisant ces ondes quand leur amplitude est faible, le nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ , la pulsation de passage  $\omega = 2\pi f$  et le taux de croissance spatial  $k_i$ .

### Longueurs d'onde

Sur des images instantanées du jet, la longueur d'onde de l'instabilité apparaît clairement, et nous l'avons mesurée crête à crête (figure 3.5). Comme ces crêtes d'ondes sont susceptibles d'être accélérées par le courant d'air lorsque leur amplitude n'est plus négligeable, nous avons choisi les crêtes les plus proches de la sortie. Pour une vitesse de jet liquide donnée, la longueur d'onde  $\lambda$  diminue quand la vitesse d'air augmente, en  $u_2^{-1/2}$ , de la même façon que l'épaisseur de vorticité  $\delta$  (figure 3.6, gauche). La longueur d'onde est proportionnelle à l'épaisseur de vorticité  $\lambda \sim \delta$ , comme le laissait attendre l'analyse de stabilité. Le rapport de la longueur d'onde avec  $\delta$  est de l'ordre de 30 pour les vitesses d'eau de 1 et 2 m/s, avec  $\delta$  déterminé dans le chapitre précédent avec l'Eq. (2.2). Pour une vitesse d'eau de 0.45 m/s ce rapport est un peu plus grand, 40 en moyenne (figure 3.6 droite). Une explication est sans doute la convergence du jet liquide à faible vitesse due à la gravité, qui provoque une divergence du jet d'air, ce qui amoindrit le cisaillement de la couche limite sur la surface liquide et augmente donc la valeur de couche limite sur la surface par rapport à  $\delta$  (voir la section A.3.2 en annexe).



FIG. 3.5: Longueur d'onde de l'instabilité de cisaillement.

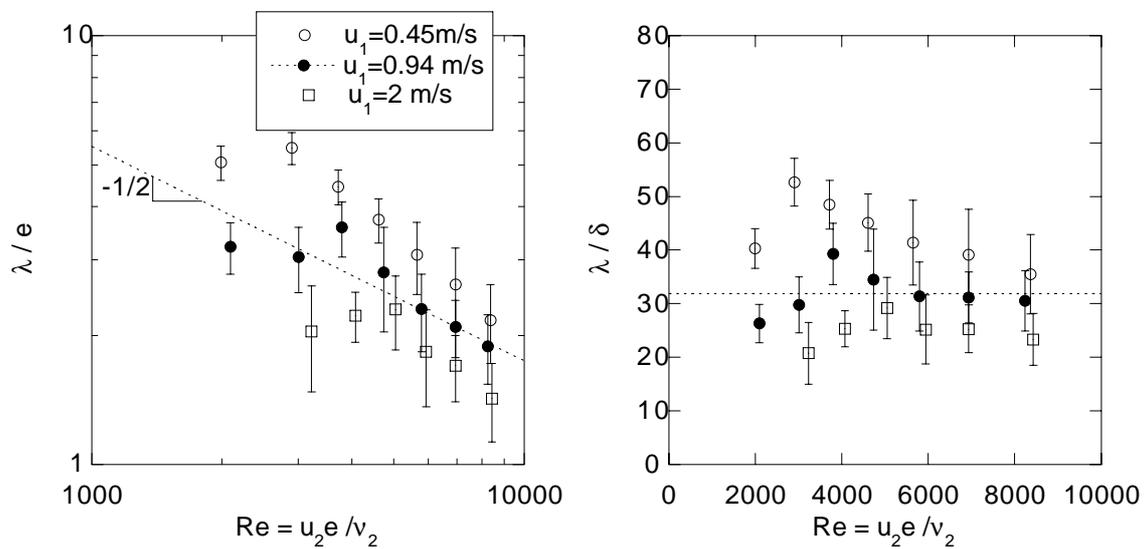


FIG. 3.6: Gauche : Longueur d'onde rapportée à l'épaisseur de couche limite du jet d'air pour trois vitesses de jet d'eau. Droite : Rapportée à l'épaisseur de couche limite  $\delta$ . Les barres d'erreur ont pour amplitude la déviation standard des données, elles représentent la dispersion des mesures autour de la moyenne.

### Fréquence

La fréquence de passage, mesurée en plaçant le plus près possible de la sortie de l'injecteur le faisceau laser et en observant le spectre du signal recueilli sur la photodiode, montre que les fréquences croissent rapidement avec la vitesse d'air. Pour les petites vitesses de liquide cette croissance est en  $u_2^{3/2}$  (Figure 3.7). La fréquence est bien proportionnelle à  $u_c/\delta$  : une régression linéaire donne  $f =$

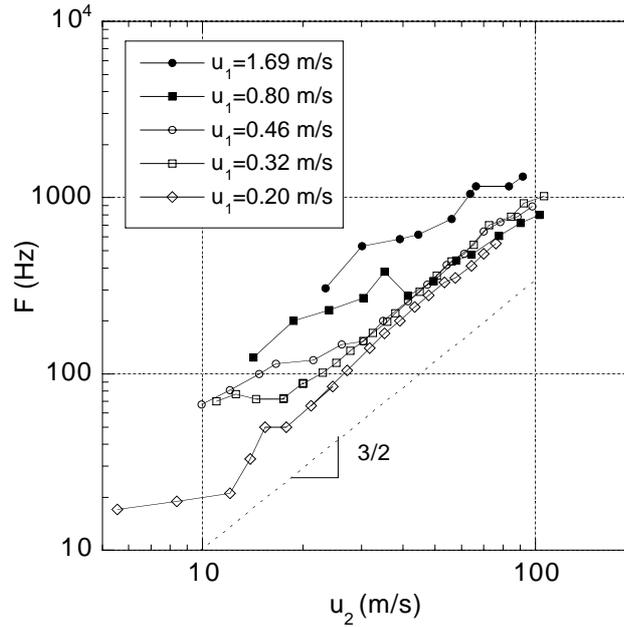


FIG. 3.7: Fréquence de passage des ondulations pour différentes vitesses d'eau.

$1/40 \times u_c/\delta$  (Figure 3.8). Pour  $u_2 \gg u_1$ , la vitesse de convection est  $u_c \simeq u_2 \sqrt{\rho_2/\rho_1}$  et donc  $u_c/\delta \sim u_2^{3/2}$ .

Nous avons ajouté à nos mesures les résultats expérimentaux de Eroglu & Chigier (1991), listés dans leur table 3 pour différentes vitesses liquides et vitesses gaz, et provenant du même type de dispositif expérimental. D'après la description de leur injecteur, de tuyère convergente pour le gaz seulement, l'épaisseur annulaire en sortie est de  $e = 4.55\text{mm}$ , le diamètre du jet liquide  $d_1 = 0.971\text{mm}$ . Cependant l'épaisseur de la couche limite gazeuse n'y est pas mentionnée : nous avons supposé qu'elle s'était développé jusqu'à une épaisseur comparable à la nôtre, en effet la longueur des tuyères gaz était du même ordre de grandeur pour les deux injecteurs : de l'ordre de 50mm dans notre injecteur et de l'ordre de 40mm dans le leur. Les résultats sont aussi dispersés quand ils sont tracé en fonction de  $u_2$ , par l'effet de la vitesse liquide sur  $u_c$  et s'alignent en fonction de  $u_c/\delta$ . Les deux ensembles de mesures se complètent autour de la même loi en  $u_c/\delta$  (figure 3.8).

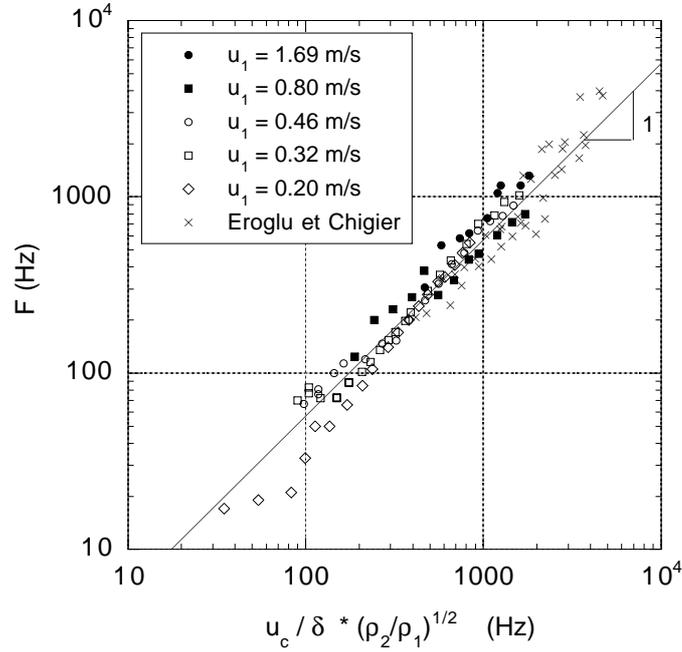


FIG. 3.8: Fréquence de passage en fonction de  $u_c/\delta$ . Ligne:  $1/1.4 \times u_c/\delta \sqrt{\rho_2/\rho_1} = 1/40 \times u_c/\delta$ . Croix: mesures de Eroglu & Chigier (1991) avec  $\delta = 5.6 e Re^{-1/2}$ ,  $e = 4.55$  mm.

### Taux de croissance spatial

La croissance des amplitudes des oscillations est visible sur des images instantanées du contour du jet (Figure 3.9). L'on obtient une quantité proportionnelle à l'amplitude en prenant l'écart-type  $\sigma(x)$  des différentes positions  $y_i$  de la surface à une distance  $x$  de l'injecteur donnée:  $\sigma(x) = \langle (y_i - \langle y_i \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ , où  $\langle \cdot \rangle$  est la moyenne sur les indices  $i$ . Si l'oscillation était parfaitement sinusoïdale d'amplitude  $a(x)$ , l'écart-type serait donné par  $\sigma(x)^2 = a(x)^2/2$ . La croissance des amplitudes est exponentielle juste à la sortie de l'injecteur (figure 3.10). Plus loin elles saturent.

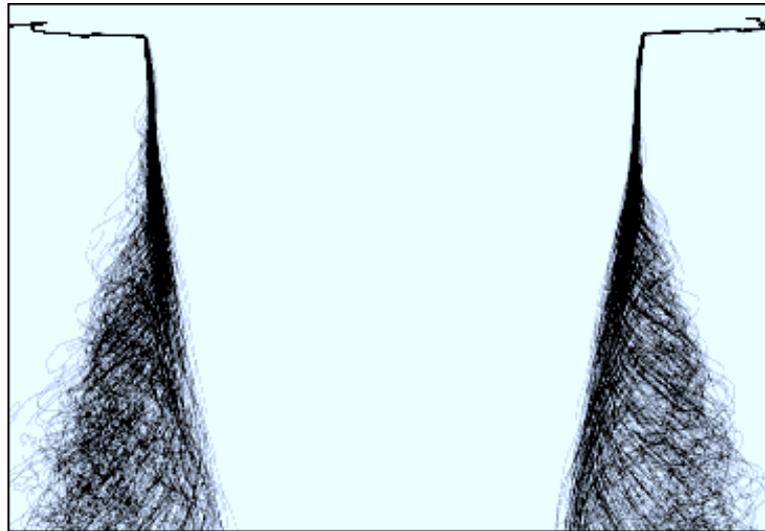


FIG. 3.9: Superposition de 256 contours de la surface du jet, montrant la croissance des oscillations qui se propagent vers le bas ( $u_1 = 0.94$  m/s,  $u_2 = 33$  m/s).

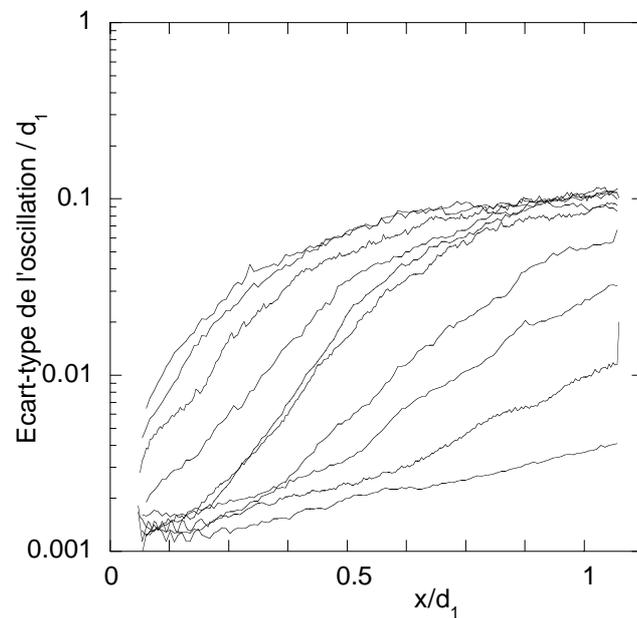


FIG. 3.10: Ecart-type des oscillations en fonction de la distance de sortie  $x$ . Vitesses d'air de bas en haut : 18, 21, 25, 27, 29, 30, 33, 38, 48, 57 m/s. Vitesse d'eau  $u_1 = 0.94$  m/s.

Le taux de croissance spatial de l'instabilité peut alors être déterminé dans cette partie de croissance exponentielle, en fonction de la vitesse d'air (figure 3.11). D'après la relation de Gaster, le taux de croissance temporel équivalent est  $\omega_i = k_i u_c$ . On retrouve alors la loi de proportionnalité  $\omega_i \sim u_2/\delta$ .

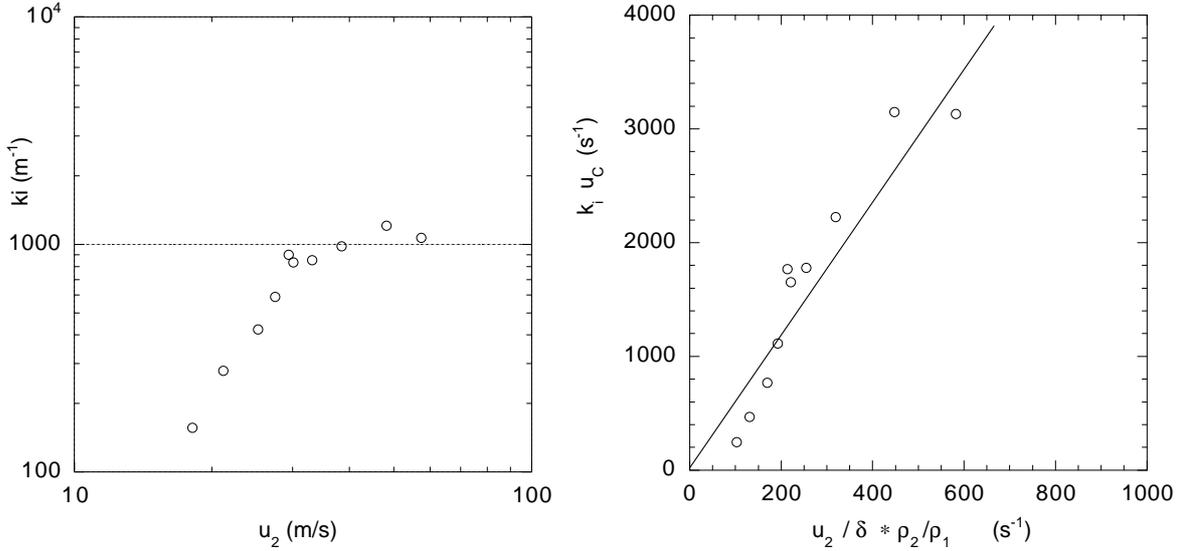


FIG. 3.11: *Gauche* : Taux de croissance spatial de l'instabilité. *Droite* : Taux de croissance temporel estimé à partir du taux de croissance spatial en fonction de la fréquence théorique. Ligne :  $5.8 \times \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{\delta}$ .

### Comparaison avec l'analyse de stabilité

Les grandeurs de l'instabilité varient avec les paramètres de l'écoulement comme le prévoyait l'analyse de stabilité, à savoir  $\lambda \sim \delta \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$  pour la longueur d'onde,  $T \sim \frac{\delta}{u_c} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$  pour la période, et  $\tau_i = 1/\omega_i \sim \frac{\delta}{u_2} \frac{\rho_1}{\rho_2}$  pour temps caractéristique de croissance. Nous avons choisi ces grandeurs plutôt que  $k$ ,  $\omega$  et  $\omega_i$ , car elles sont proportionnelles à  $\delta$ . Le rapport des densités valait  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1000}{1.2}$  tout au long des expériences précédentes.

Si les variations sont identiques, les préfacteurs sont par contre différents. Comparé aux prévisions élaborées avec un profil linéaire d'épaisseur  $d_2 = \delta$ , les longueurs d'ondes et les périodes expérimentales sont environ 4 fois plus petites que prévu, les temps de croissance 6 fois plus petits (Table 3.1.2).

Tout se passe donc comme si l'épaisseur de vorticité de profil  $d_2$  qu'il faut utiliser pour modéliser l'écoulement devait être 4 à 6 fois plus petite que  $\delta$ .

		Expériences (E)	Analyse de stabilité (S)	Quotient (S)/(E)
longueur d'onde	$\lambda / \left( \delta \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \right)$	1.0 - 1.4	4.2	4 - 3
période	$T / \left( \frac{\delta}{u_c} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \right)$	1.4	4.2	3
temps de croissance	$\tau_i / \left( \frac{\delta}{u_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$	0.17	1	6

TAB. 3.1: *Comparaison des résultats avec la théorie de stabilité plane supposant un profil linéaire d'épaisseur  $\delta = d_2$ .*

L'installation de géométrie plane présente par contre des préfacteurs expérimentaux et théoriques identiques avec une épaisseur de profil linéaire de  $d_2 = \delta$ . Nous envisageons deux possibilités qui expliqueraient cette différence. Premièrement le profil linéaire utilisé pour l'analyse de stabilité n'a pas exactement la forme de celui observé (le gradient de vitesse n'est pas constant sur l'épaisseur de la couche, mais varie continûment, voir Figure 2.3), d'où une prévision qui est valide en termes de dépendance aux paramètres pertinents de l'écoulement, mais qui ne donne pas forcément les bons facteurs de proportionnalité. Deuxièmement la courbure transverse du jet n'est pas prise en compte dans ce modèle, or si à l'échelle de  $\delta$  la surface est quasi-plane, il n'en est pas de même à l'échelle de  $\lambda$ .

## 3.2 Déstabilisation transverse

### 3.2.1 Naissance des digitations

Les oscillations du rayon du jet, sensiblement sinusoïdales pour de faibles amplitudes, changent de forme au cours de leur amplification. L'oscillation se concentre autour de la crête, qui est accélérée par le courant d'air, et de laquelle surgissent des ligaments liquides (Figure 3.12).

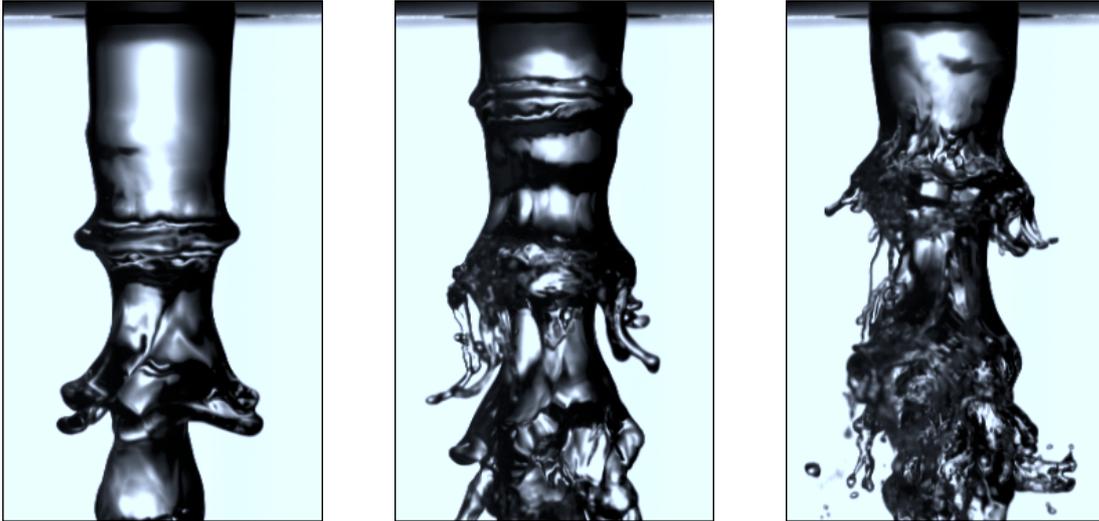
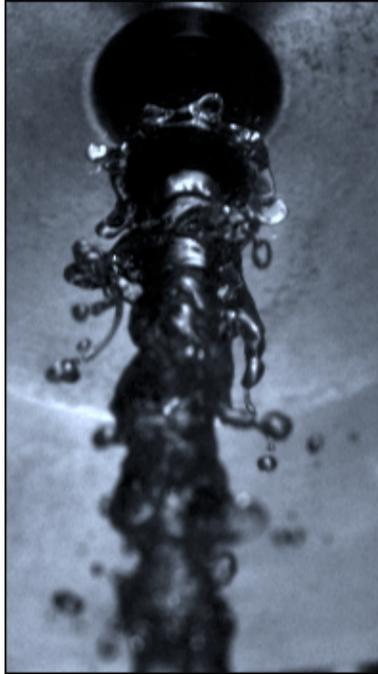
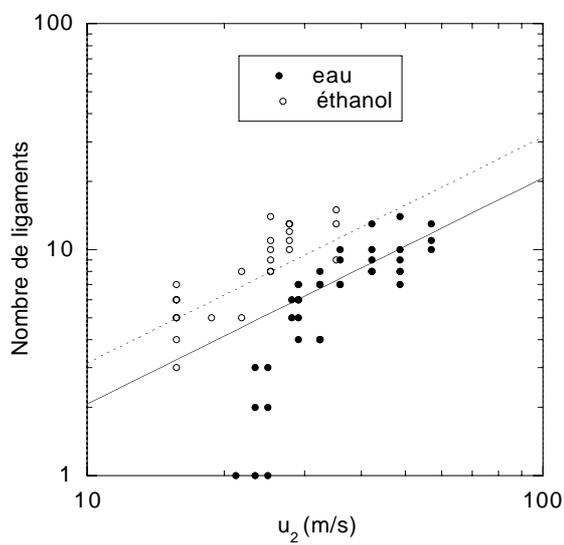


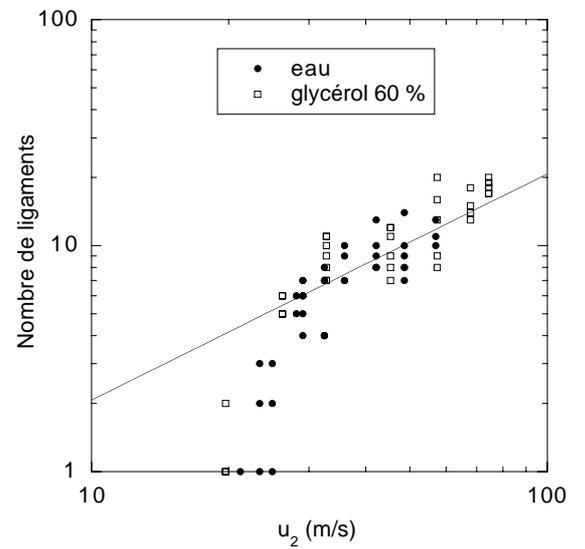
FIG. 3.12: Vitesses d'air croissantes de 24,27 et 32 m/s.

Les ligaments visibles sur les photographies sont ceux qui ne sont pas cachés par le jet liquide. Le comptage de ces ligaments sous-estime donc le nombre total des ligaments répartis autour d'une crête, d'un facteur constant d'environ  $3/4$ . Une vue en contre-plongée améliore la vue d'ensemble, mais ne permet pas d'imposer de grandes vitesses d'air, car le spray couvre rapidement l'objectif ou le miroir que l'on aurait disposé pour observer le jet sans mouiller la caméra (figure 3.13).

Des séries de mesures effectuées pour différentes vitesses d'air montrent que le nombre de ligaments autour d'une oscillation augmente avec la vitesse d'air et tend à devenir proportionnel à la vitesse. Ceci indique que la taille transversale des ligaments, exprimée par  $\lambda_{\perp} = \pi D_1/n$  si  $n$  ligaments sont régulièrement disposés autour du jet, est inversement proportionnelle à la vitesse d'air aux grandes vitesses. Le nombre de ligaments qui se forment sur le périmètre des crêtes est plus grand avec l'éthanol qu'avec l'eau, et il est identique pour la solution de glycérol et l'eau (Figure 3.14).

FIG. 3.13: *Naissance des digitations.*

(a)



(b)

FIG. 3.14: *Nombre de ligaments autour du périmètre vus sur les photographies. (a) Eau, éthanol. (b) Eau, glycérol 60 %. Lignes : proportionnalité avec  $u_2$  pour les grandes vitesses.*

Ces ligaments naissent d'une modulation transverse des vagues sur leur périmètre. Cette modulation croissante apparaît après le développement des ondulations de l'instabilité de cisaillement, il s'agit donc d'une instabilité secondaire. Cette instabilité diffère de la première, car sa longueur d'onde  $\lambda_{\perp}$  :

- dépend de la tension de surface
- varie différemment avec la vitesse d'air, elle est proportionnelle à  $u_2^{-1}$  alors que l'instabilité primaire produit des longueur d'onde  $\lambda \sim \delta$  proportionnelle à  $u_2^{-1/2}$ .

Il ne peut donc s'agir d'une déstabilisation transverse de la première instabilité, à l'instar de l'alignement des tourbillons de Kelvin-Helmoltz dans une couche de mélange homogène, qui imprimerait à la surface une modulation transverse de longueur d'onde semblable.

L'origine de la formation de structures transverses qui mène à la formation des digitations puis des gouttes est décrite par plusieurs mécanismes différents dans la littérature.

Dans le cas d'un jet rapide dans une atmosphère immobile Wu *et al.* (1991) proposent un mécanisme qui expliciterait la taille des ligaments puis des gouttes : la croissance d'une couche limite dans le liquide  $\delta_1 \sim \sqrt{\nu t}$  qui s'arrache (figure 1.15). Le problème est de décider quand la couche limite s'arrache du liquide. En supposant qu'elle se meut à une vitesse proportionnelle à la vitesse relative de l'air  $u_2$  et qu'elle s'arrache à une distance fixe de l'ordre du diamètre de l'injecteur  $t \sim d_1/u_2$ , on obtient des ligaments dont la taille ne dépend pas de la tension de surface et décroissent en  $u_2^{-1/2}$  avec la vitesse d'air. Ce mécanisme permet d'obtenir les bons paramètres d'adimensionnalisation mais pas la bonne dépendance des tailles de gouttes avec la vitesse d'air : leur mesures indiquent plutôt une variation en  $u_2^{-0.77}$ .

Par analogie avec la brisure des gouttes, un argument sur l'équilibre entre forces aérodynamiques  $\rho_2 u_2^2$  et force de rétention capillaire  $\sigma/d$  donne une taille de gouttes arrachées  $d \sim \sigma/(\rho_2 u_2^2)$ , qui correspond à un nombre de Weber construit avec  $d$  constant (Lasheras & Hopfinger, 2000). Si la tension de surface intervient bien dans ce mécanisme, le détail de la brisure n'est pas explicité ; dans le cas de gouttes soumises à un courant d'air,  $d$  est bien la taille maximale qui persiste dans l'écoulement. Cependant ce n'est pas la taille moyenne des gouttes dans le spray formé par la brisure des plus grosses goutte, brisure qui peut produire de très petites tailles.

Lorsque sa couche limite est soumise à une accélération centrifuge dans un conduit en coude, l'écoulement gazeux est instable. Cette instabilité dite de Görtler forme des tourbillons dans l'axe de l'écoulement. Dans notre écoulement les vagues de l'instabilité de cisaillement pourrait induire une accélération de la

couche limite, mais là encore l'influence de la tension de surface sur la longueur d'onde n'est pas expliquée.

Les crêtes s'affinent au cours de leur évolution et le liquide projeté par l'instabilité primaire prend la forme d'une nappe. Une instabilité capillaire sur le bord de la nappe expliquerait l'apparition de modulation azimutales (Villermaux, 1998). Les photographies ne montrent pas le développement de nappes très étirées puis la formation d'un bourrelet, mais plutôt un développement simultané des modulations et de la nappe (voir figure 3.13). Lorsque les modulations apparaissent l'épaisseur de la nappe est trop épaisse pour que l'instabilité capillaire ait le temps de jouer un rôle. En effet, sachant que le temps caractéristique de croissance des instabilités capillaires est  $t_\sigma \simeq (\rho_1 d^3 / \sigma)^{1/2}$ , comparé à la période de passage des oscillations primaires, il vaut :

$$\frac{t_\sigma}{T} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)^{3/2} We_\lambda^{1/2}. \quad (3.8)$$

Comme  $50 < We_\lambda < 300$ , le développement capillaire ne peut être significatif que lorsque ce le rapport  $t_\sigma/T$  est inférieur à 1, c-à-d pour  $d/\lambda$  inférieur à 0.27 pour les faibles vitesses et 0.15 pour les plus grandes, hors ce diamètre de courbure est tout juste atteint quand les ondulations transverses naissent comme nous le verrons plus bas en observant l'amplitude des vagues à partir desquelles les digitations naissent.

Nous allons à présent montrer que le passage des ondulations primaires provoque une accélération de la surface, perpendiculairement à elle-même, et que cette accélération oscillatoire est suffisante pour déclencher une instabilité secondaire de la surface.

### 3.2.2 Accélération de surface

L'analyse de stabilité de l'écoulement prédit des ondes propagatives sur la surface du jet, avec une vitesse de groupe  $u_c \simeq u_1 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} u_2$  dans le référentiel du laboratoire, donc supérieure à la vitesse du jet. Vitesse de phase et vitesse de groupe sont d'ailleurs égales d'après l'analyse de stabilité :  $v_\phi = \omega/k = u_c = d\omega/dk$  d'après les équations 3.3 et 3.4. Nous n'avons pas mesuré cette vitesse directement sur les ondes de faibles amplitude car les mesures sur des images nécessitent des amplitudes minimum pour lesquelles les ondes ne sont plus sinusoïdales (exemple figure 3.12). Nous pouvons simplement estimer la vitesse de phase  $v_\phi = \omega/k = \lambda/T$  à partir des mesures de longueur d'onde et de fréquence, et nous trouvons qu'elle vaut entre  $0.71u_c$  et  $u_c$  (table 3.1.2). Les mesures de Raynal (1997) sur jet plan utilisant la corrélation entre les signaux de sondes séparées d'une petite distance le long du jet, ont aussi montré que la vitesse de déplacement des structures est  $u_c$ .

Les ondes se propagent à une vitesse  $u_c$  supérieure à la vitesse débitante du jet liquide  $u_1$ . Si l'on suppose qu'à la surface les particules liquides vont aussi à la vitesse  $u_1$ , le passage des ondes les accélère de manière oscillatoire (à cause de leur passage à une vitesse  $u_c > u_1$ ) et croissante (car elles sont amplifiées).

*En fait le profil de vitesse dans le jet liquide n'est pas uniformément  $u_1$  comme le montre la figure 3.1. En particulier la vitesse du liquide en surface  $u_i$  est différente de  $u_1$ . La vitesse de surface est nulle en sortie par continuité avec sa valeur sur la paroi interne de l'injecteur, nulle à cause de la viscosité. Puis la surface est entraînée par le frottement à une vitesse  $u_i$  croissante.*

*Exprimons le temps nécessaire pour que la vitesse d'interface soit accélérée d'une vitesse  $u_i = u_1$ , créant une couche limite de profondeur  $\delta_1$ , petite devant l'épaisseur déjà présente en sortie. La continuité des contraintes visqueuses  $\tau$  à l'interface supposée plane impose*

$$\tau = \mu_1 \frac{u_i}{\delta_1} = \mu_2 \frac{u_2}{\delta}. \quad (3.9)$$

*Sachant que la couche limite liquide évolue par diffusion de vortacité selon  $\delta_1 = \sqrt{\nu_1 t}$ , alors que l'épaisseur de vortacité gaz  $\delta$  est constante,  $u_i$  croît en proportion de  $\delta_1$ . Le temps nécessaire pour que la vitesse d'interface  $u_i$  atteigne  $u_1$  est, adimensionné par la période de l'instabilité  $T \simeq 1/\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{\delta}$  :*

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{u_1^2}{\nu_1} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2}{f} \quad (3.10)$$

*Sachant que le membre de droite vaut  $\frac{4500\text{s}^{-1}}{f}$ , il est au minimum égal à 4 pour les grandes vitesses d'après les résultats de la figure 3.7 avec  $u_1 \simeq 1$  m/s. Le temps nécessaire pour accélérer le liquide est donc grand devant la période : la vitesse d'interface n'est donc pas rapidement entraînée par le frottement lorsque l'interface est quasi-plane et que les oscillations sont encore petites. Quand les oscillations grandissent, le frottement augmente avec l'angle présenté par la surface au jet d'air et le calcul plus haut n'est plus valable. Ultérieurement le liquide est accéléré de manière plus significative par le courant de gaz, nous verrons comment plus bas, et dans ce cas les ondes n'excitent plus la surface de manière oscillatoire ; mais cela se produit quand les mouvements ne sont plus de faible amplitude et quand les ligaments sont déjà naissants. Nous négligerons donc par la suite les effets de profils de vitesse dans le jet liquide à l'interface pour évaluer l'accélération, et supposerons que les particules de l'interface sont animées de la vitesse du jet liquide, à la vitesse  $u_i = u_1$ .*

Dans le référentiel du liquide les crêtes séparées de  $\lambda$  se meuvent à la vitesse

$u_c - u_1$  et passent donc avec une pulsation

$$\omega_L = \omega - ku_1 = 2\pi \frac{u_c - u_1}{\lambda} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \frac{u_2}{\lambda}, \quad (3.11)$$

qui est inférieure à la pulsation  $\omega$  mesurée dans le référentiel absolu, d'un effet Doppler qui vaut, relativement à  $\omega$ ,  $ku_1/\omega = u_1/u_c = 1/(1+\sqrt{M})$  et donc décroît avec la vitesse gaz. Le changement de coordonnées entre le référentiel absolu (A) et le référentiel du liquide (L) est  $x' = x - u_1t$ , et permet d'exprimer comment se meuvent de petites oscillations de la surface dans les deux référentiels

$$\eta = \eta_0 \exp(i\omega t - ikx + k_i x) \quad \text{dans (A),} \quad (3.12)$$

$$= \eta_0 \exp(i\omega_L t - ikx' + k_i x' + k_i u_1 t) \quad \text{dans (L).} \quad (3.13)$$

On remarque que dans le référentiel (L) l'instabilité croît à la fois dans l'espace avec un taux  $k_i$ , et dans le temps avec un taux  $k_i u_1$ . En un point donné fixe  $x' = 0$  dans le référentiel du jet liquide, donc en chute avec le jet, la surface oscille avec une amplitude croissante selon  $\eta(t) = \eta_0 \exp(i\omega_L t + k_i u_1 t) = a(t) \exp(i\omega_L t)$ .

Supposant toujours des amplitudes  $a(t) = \eta_0 \exp(k_i u_1 t)$  faibles devant  $\lambda$ , les variations spatiales sont faibles : la surface donc peu pentue est accélérée perpendiculairement à elle-même selon

$$\eta = -a(t) \sin(\omega_L t) \quad (3.14)$$

et avec une accélération oscillatoire

$$g = \frac{d^2 \eta}{dt^2} = a(t) \omega_L^2 \sin(\omega_L t), \quad (3.15)$$

où nous utilisons de nouveau la notation réelle pour les oscillations.

Cette accélération perpendiculaire à la surface peut être significative : dès  $u_2 = 20$  m/s (et à  $u_1 = 1$  m/s), la fréquence  $f$  vaut 200 Hz expérimentalement dans le référentiel du laboratoire, et avec l'effet Doppler elle vaut dans le référentiel (L)  $f_L = 100$  Hz si l'on suit le jet. Sachant que l'amplitude des ondes atteint typiquement 1 mm sur nos images, l'accélération produite vaut  $400 \text{ m.s}^{-2}$ .

### 3.2.3 Effet d'une accélération oscillatoire

L'accélération oscillatoire de la surface due au passage de l'onde primaire est à l'origine d'une instabilité secondaire qui forme des modulations transverses. Cette processus peut être analysé selon deux points de vue équivalents : soit selon l'instabilité paramétrique de Faraday qui considère les fréquences de résonance de la surface, soit selon l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui considère l'accélération au moment où elle est dirigée vers le liquide.

### Analyse selon l'instabilité de Faraday

L'oscillation verticale d'une cuve de liquide à une fréquence  $\omega$  excite les ondes stationnaires de la surface libre de fréquence  $\omega_0$ , à partir d'un certain seuil d'amplitude. Ce seuil est d'autant plus bas que la moitié de la fréquence d'excitation  $\omega/2$  est proche de la fréquence propre  $\omega_0$  pour laquelle il y a résonance (voir l'article de revue de Miles & Henderson, 1990). Si l'on se place dans le référentiel du jet, la surface cylindrique est accélérée radialement par le passage des ondes longitudinales d'amplitude croissante. Un point de la surface est donc soumis à des accélérations oscillatoires de plus en plus fortes, ce qui excite les modes propres du cylindre au-dessus d'un certain seuil, et ce qui nous amène à considérer une instabilité de Faraday. Il est à noter que nous sommes dans le *régime transitoire* d'établissement de l'instabilité de Faraday, car l'amplitude d'excitation  $a(t)$  croît exponentiellement puis sature, et que nous supposons implicitement que le nombre de périodes de l'excitation est suffisant pour induire un développement conséquent de l'instabilité.

Nous allons donc commencer par déterminer les modes propres d'oscillation du cylindre. L'analyse de stabilité pour des oscillations de la surface d'un jet de rayon  $r_0$  de la forme

$$r = r_0 + \epsilon \exp(ikx - i\omega t + im\phi), \quad (3.16)$$

où  $\epsilon \ll 1$ ,  $k$  est le nombre d'onde longitudinal, et  $m$  le nombre d'oscillations azimutales, conduit à la relation de dispersion suivante :

$$\underline{\omega}^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 r_0^3} \frac{z I_m'(z)}{I_m(z)} (m^2 + z^2 - 1), \quad (3.17)$$

avec  $I_m$  la fonction de Bessel d'ordre  $m$  et  $z = kr_0 = 2\pi a/\lambda$ . Pour une modulation axisymétrique  $m = 0$ ,  $\underline{\omega}^2$  est négatif lorsque  $z < 1$  et alors  $\underline{\omega} = \pm i\omega_i$  est imaginaire : nous obtenons une oscillation croissante, qui est l'instabilité capillaire du jet. Pour une modulation non-axisymétrique  $m \geq 1$ ,  $\underline{\omega}^2$  est toujours positif, donc le mouvement est oscillatoire de pulsation  $\underline{\omega} = \omega_m$ , avec :

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 r_0^3} \left( \frac{z I_{m+1}(z)}{I_m(z)} + m \right) (m^2 + z^2 - 1)}, \quad (3.18)$$

après expression de la dérivée de  $I_m(z)$ . Cette expression est sensiblement constante pour  $z$  variant de 0 à 1, c'est-à-dire pour des longueurs d'onde longitudinales plus grandes que le périmètre du jet, ce qui est le plus souvent le cas avec les ondes de cisaillement. Nous utiliserons donc cette fréquence calculée en  $z = 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) :

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 r_0^3} m(m^2 - 1)} \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 r_0^3} m^3}, \quad (3.19)$$

qui augmente avec le nombre de modulations azimutales  $m$ .

La pulsation excitatrice associée au passage des instabilités longitudinales dans le référentiel du jet est  $\omega_L$ . Elle excite donc les oscillations libres  $\omega_m$  les plus proches de la fréquence excitatrice moitié  $\omega_L/2$ . Nous déduisons alors de  $\omega_m = \omega_L/2$  le nombre  $m$  de modulations de l'excitation la plus proche. Puis la longueur d'onde transverse associée :

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda} = \frac{2\pi r_0/m}{\lambda} = 2\pi^{1/3} We_{\lambda}^{-1/3} = 2.96 We_{\lambda}^{-1/3}, \quad (3.20)$$

avec  $We_{\lambda} = \rho_2 u_2^2 \lambda / \sigma$ . Si nous remplaçons à présent l'expression de la longueur d'onde parallèle déterminée précédemment table (3.1.2),  $\lambda \simeq 1.04 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \delta$ , nous trouvons :

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\delta} = 3.00 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3} We_{\delta}^{-1/3}. \quad (3.21)$$

La variation de  $\lambda_{\perp}$  avec la vitesse d'air est plus forte que celle de  $\delta$ , elle est proportionnelle à  $u_2^{-1}$ .

### Analyse selon l'instabilité de Rayleigh-Taylor

L'accélération connue par le liquide dans son référentiel est  $g = a\omega_L^2 \sin(\omega_L t)$ , alternativement dirigée vers le gaz et le liquide (figure 3.15). Lorsque la surface

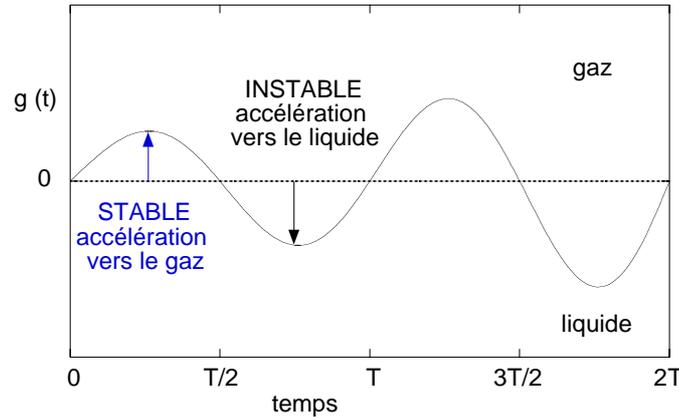


FIG. 3.15: Accélération de surface. Remarque : l'accélération  $g$  et la position  $\eta$  de la surface sont en opposition de phase.

est accélérée vers le liquide la situation est instable au sens de Rayleigh-Taylor (Rayleigh, 1883; Taylor, 1950; Lewis, 1950), instabilité qui crée justement des digitations. Remarquons que cette instabilité est excitée par *périodes*.

Nous allons voir tout d'abord comment cette instabilité sélectionne des longueurs qui correspondent à l'accélération maximale au cours d'une ondulation. Nous verrons ensuite que l'apparition des ligaments est lié à un seuil sur l'amplitude des ondes primaires que nous déterminerons expérimentalement.

**longueur d'onde sélectionnée pour la production de doigts** Si l'on considère une petite fluctuation transversale  $b_0 \exp(im\phi)$  (figure 3.16) elle est amplifiée

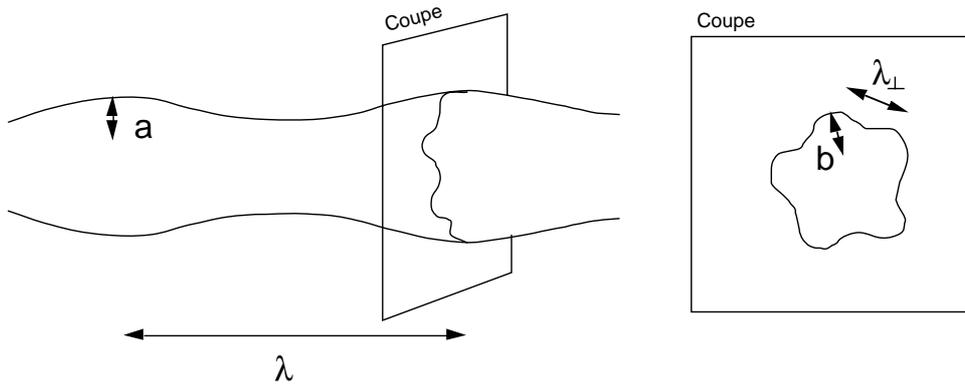


FIG. 3.16: Développement de l'instabilité transverse.

par l'instabilité. Contrairement à l'analyse de Faraday précédente nous allons négliger la courbure du jet et utiliser les résultats de l'analyse de stabilité plane de Rayleigh-Taylor qui sont pour le taux de croissance temporel et la longueur d'onde la plus amplifiée de l'instabilité :

$$\omega_{iRT} = \left( \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left( \frac{\rho_1 g^3}{\sigma} \right)^{1/4}, \quad (3.22)$$

$$\lambda_{RT} = 2\pi \left( \frac{3\sigma}{\rho_1 g} \right)^{1/2}, \quad (3.23)$$

d'après Chandrasekhar (1961), lorsque la densité de gaz est très petite devant la densité de liquide.

Ici  $g(t) = a(t)\omega_L^2 \sin(\omega_L t)$  croît en proportion de  $a(t)$ , donc le taux d'amplification  $\omega_{iRT}$  dépend du temps. Pendant le temps  $dt$  l'amplitude  $b$  de la perturbation (initialement  $b = b_0$ ) varie de :  $db = b \omega_{iRT}(t) dt$ . Donc pendant la demi-période  $T_L/2 = \pi/\omega_L$  (voir Eq. (3.11) pour  $\omega_L$ ) qui voit une accélération dirigée vers le liquide, la perturbation a crû de :

$$b_1 = b_0 \exp \int_0^{T_L/2} \omega_{iRT}(t) dt, \quad (3.24)$$

et d'après les équations (3.11), (3.15) et (3.22) :

$$\int_0^{T_L/2} \omega_{iRT}(t) dt \propto \left( \frac{\rho_1 g_{\max}^3}{\sigma} \right)^{1/4} / \omega_L, \quad (3.25)$$

$$= \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \frac{\Gamma(7/8)}{\Gamma(11/8)} We_\lambda^{1/4} \left( \frac{a}{\lambda} \right)^{3/4}, \quad (3.26)$$

avec  $We_\lambda = \frac{\rho_2 u^2 \lambda}{\sigma}$ , qui est le nombre de Weber défini avec l'inertie du gaz et la tension capillaire d'une surface de rayon de courbure  $\lambda$ . Le facteur d'amplification dépend donc de l'amplitude des ondes primaires  $a(t)$ , fonction croissante du temps.

Lorsque l'amplification est suffisamment forte elle crée des ondulations transversales non linéaires qui se transforment en ligaments. Cette condition d'amplification est réalisée lorsque  $b_1$  dépasse une valeur seuil  $b_s$ , qui est inconnue ici. La condition de d'apparition de ligaments s'écrit :

$$\int_0^{T/2} \omega_{iRT}(t) dt > \ln \left( \frac{b_s}{b_0} \right), \quad (3.27)$$

qui s'exprime avec la valeur de l'amplitude de l'onde principale :

$$\frac{a}{\lambda} > \beta We_\lambda^{-1/3}, \quad (3.28)$$

avec  $\beta \simeq 0.0428 \ln^{4/3}(b_s/b_0)$  après intégration numérique.

La longueur d'onde de l'instabilité de Rayleigh-Taylor sélectionnée au cours de la demi-période est celle qui correspond au taux d'amplification le plus fort : c'est celui de l'accélération maximale  $g_{\max} = a\omega_L^2$ , ce qui d'après Eq. (3.23) produit une longueur d'onde

$$\lambda_\perp = 2\pi \left( \frac{3\sigma}{\rho_1 g_{\max}} \right)^{1/2}, \quad (3.29)$$

donc la longueur d'onde sélectionnée pendant la demi-période instable est :

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda} = \sqrt{3} We_\lambda^{-1/2} \left( \frac{a}{\lambda} \right)^{-1/2}. \quad (3.30)$$

Si l'on choisit pour  $a/\lambda$  la valeur minimale de déclenchement de l'équation (3.28) il en résulte :

$$\frac{\lambda_\perp}{\lambda} = \sqrt{\frac{3}{\beta}} We_\lambda^{-1/3}. \quad (3.31)$$

**condition de formation de ligaments** D'après le modèle précédent, les ligaments ne se forment que lorsque le rapport de l'amplitude et de la longueur d'onde des oscillations primaires est supérieur à une valeur seuil qui dépend de  $\beta$ , fonction du taux d'amplification critique d'une perturbation transversale  $b_s/b_0$  et du nombre de Weber  $We_\lambda$  (Eq. (3.28)). Pour déterminer quel est ce taux d'amplification critique, nous avons mesuré l'amplitude de saturation  $a_{\max}$  des oscillations primaires directement sur des images instantanées, en mesurant l'écart maximal entre l'altitude de la crête et l'altitude du creux des oscillations, et noté si ces oscillations conduisaient à la formation de ligaments ou pas. Nous avons aussi mesuré à chaque fois la longueur d'onde des oscillations, ce qui permet de calculer  $a_{\max}/\lambda \times We_\lambda^{1/3}$  (Figure 3.17). On constate que cette quantité croît en moyenne avec la vitesse d'air et que les ligaments commencent à se former dès que la vitesse est supérieure à  $u_2 = 21$  m/s, ce qui correspond à  $a_{\max}/\lambda \times We_\lambda^{1/3}$  supérieur à environ 0.5. Le facteur  $\beta$  est donc égal à 0.5, ce qui implique un taux d'amplification de  $b_s/b_0 = 550$ . Le valeur de l'amplitude de déclenchement est

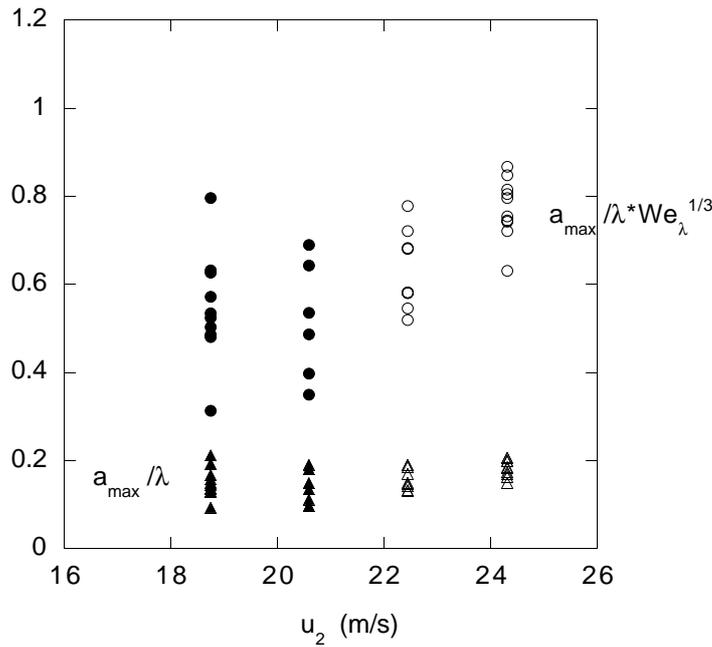


FIG. 3.17: Amplitude maximale des oscillations et formation des ligaments en fonction de la vitesse d'air,  $u_1 = 0.94$  m/s. Triangles : rapport  $a_{\max}/\lambda$ , cercles : rapport  $a_{\max}/\lambda \times We_\lambda^{1/3}$ . Symboles pleins : les ligaments ne se développent pas, symboles vides : il y a des ligaments plus loin sur le jet.

d'environ  $0.2\lambda$ , soit des tailles millimétriques.

Il s'ensuit que la longueur d'onde sélectionnée est

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda} = 2.45 We_{\lambda}^{-1/3}. \quad (3.32)$$

Si l'on exprime  $\lambda$  en fonction de l'épaisseur de vorticité, nous trouvons :

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\delta} = 2.51 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{1/3} We_{\delta}^{-1/3}. \quad (3.33)$$

### Comparaison des deux méthodes

Les deux analyses précédentes produisent des résultats similaires. L'inconvénient de l'analyse en selon l'instabilité de Rayleigh-Taylor est qu'elle nécessite la mesure de l'amplitude de déclenchement de l'instabilité. Cependant un avantage de cette méthode est qu'elle donne une évaluation du taux de croissance  $\omega_{iRT}$  des instabilités au moment où les ligaments surgissent (donc incluant le facteur de déclenchement  $\beta$ ) :

$$\omega_{iRT} = 0.92 \omega_L = 0.88 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{\delta}, \quad (3.34)$$

le taux de croissance est donc proche de la pulsation d'excitation, et du taux de croissance de l'instabilité primaire de cisaillement  $\omega_i$ .

Les longueurs d'onde  $\lambda_{\perp}$  varient toutes deux avec la vitesse d'air en  $u_2^{-1}$ .

### 3.2.4 Interprétation des mesures

La longueur d'onde  $\lambda/\delta$  tracée en fonction de  $\frac{\rho_2}{\rho_1} We_\delta$ , toutes les mesures réalisées avec les diverses tensions de surface et densités de l'eau, de l'éthanol et du glycérol se superposent, et suivent une loi qui est proche de la prédiction théorique de Faraday en valeur absolue et en tendance  $\lambda/\delta \simeq 3\delta(\frac{\rho_2}{\rho_1} We_\delta)^{-1/3}$  (figure 3.18).

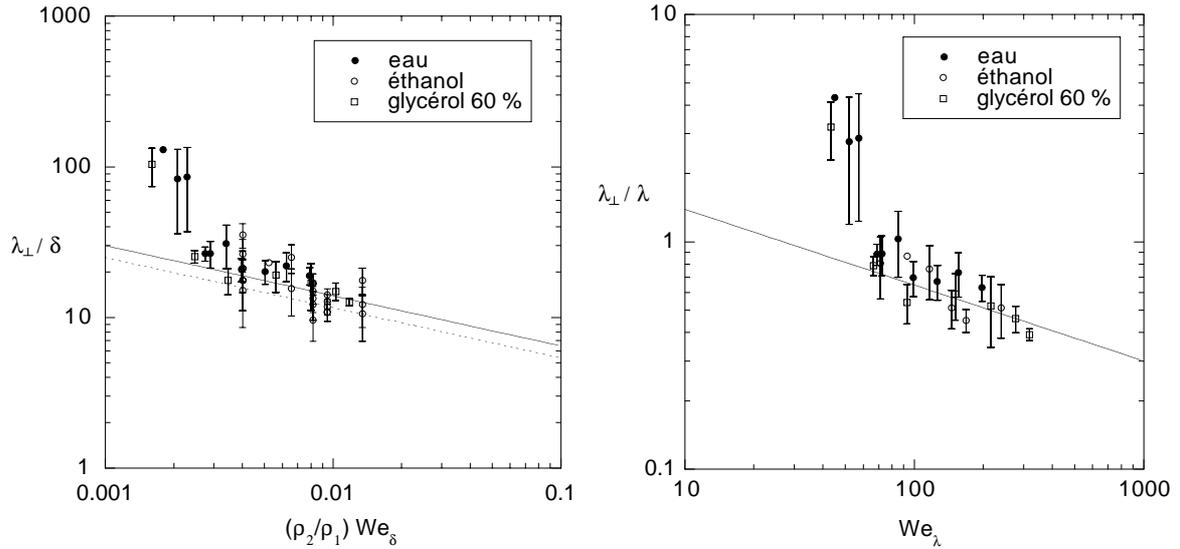


FIG. 3.18: Gauche : Espacement des ligaments des différents liquides sur le périmètre du jet en fonction de  $\rho_2/\rho_1 We_\delta$ . Ligne continue : prédiction Faraday, ligne discontinue : prédiction Rayleigh-Taylor. Droite : Espacement des ligaments rapporté à la longueur d'onde  $\lambda$ .

L'accord est moins bon en ce qui concerne les grandes longueurs d'onde : si l'on se rapporte au comptage du nombre de ligaments (figure 3.14) ces longueurs d'onde ont été obtenues pour un petit nombre de ligaments. La longueur d'onde n'est pas négligeable par rapport au périmètre pour ces ondulations, et les effets de courbure que nous avons négligés dans les analyses précédentes interviennent.

Si l'on utilise à présent la longueur d'onde primaire, on retrouve les variations prédites (figure 3.18).

La viscosité de la solution de glycérol (14 fois celle de l'eau) ne semble pas entrer en ligne de compte dans la production initiale des ligaments, les résultats étant très proches de ceux de l'eau.

### 3.3 Accélération des ondulations transverses

#### 3.3.1 Faits expérimentaux

L'accélération des particules liquides qui formeront un ligament étiré présente deux phases : une première phase, d'accélération, lorsque le liquide est toujours regroupé sur une crête, puis une phase d'étirement, lorsque les ligaments qui jaillissent des crêtes sont soumis au courant gazeux.

Alors que les ligaments ne sont pas encore formés, les crêtes sont accélérées par le courant d'air. Initialement, leur amplitude est nulle et l'interface plane est peu accélérée (voir section 3.2.2) par le simple frottement de l'air sur le liquide. L'analyse de stabilité linéaire prédit que le passage des ondes les plus amplifiées se produit à la vitesse  $u_c$ , lorsque leur amplitude est infinitésimale.

Les ondulations créées par l'instabilité de cisaillement qui se propagent à la surface ne font que créer un mouvement circulaire des particules liquides dans le référentiel attaché au jet liquide, qui se meut à la vitesse  $u_1$  par rapport au référentiel du laboratoire (figure 3.19). En effet une perturbation de surface du liquide  $\eta = \eta_0 \exp(i\omega t - ikx)$ , induit une modification du potentiel des vitesses dans le liquide  $\Phi = \Phi_0(y) \exp(i\omega t - ikx)$ , avec  $y$  la profondeur sous la surface. Si l'on suppose l'écoulement inviscide la vitesse des particules est  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ . La non compressibilité impose  $\text{div } \mathbf{v} = \Delta\Phi = 0$  ; il en résulte que  $\Phi_0(y) = A \exp(-ky)$ . Les composantes oscillantes de la vitesse  $v_x = -ik\Phi$  et  $v_y = -\underline{k}\Phi$  sont de même amplitude et en quadrature : les particules décrivent des cercles.

Ces ondes sont fortement amplifiées et deviennent très vite non- linéaires. La surface des crêtes présentée perpendiculairement à l'écoulement s'accroît, et une proportion de plus en plus grande de particules liquides est accélérée par la contrainte gazeuse. Les crêtes se meuvent alors à une vitesse plus grande que le jet.

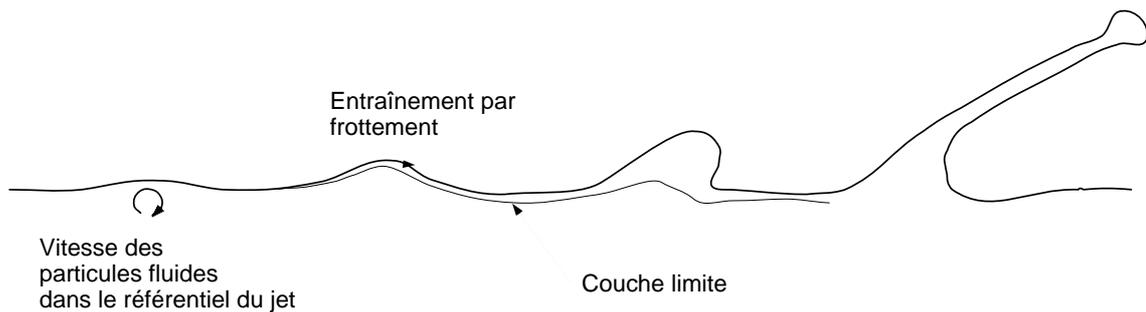


FIG. 3.19: *Mouvement initial des particules fluides dû au passage des ondes à la surface et accélération par la traînée aérodynamique.*

Dans le but d'observer la vitesse de déplacement des crêtes, il est possible de coupler à la fois une bonne résolution spatiale des images et une information sur

le déplacement, lorsque la caméra de haute résolution est associée au système d'éclairage faisant intervenir les deux flashes. Lorsqu'ils sont actionnés successivement avec un décalage temporel  $\Delta t$ , durant l'ouverture de l'obturateur de la caméra, deux expositions sont superposées sur la même image (figure 3.20). Le dé-

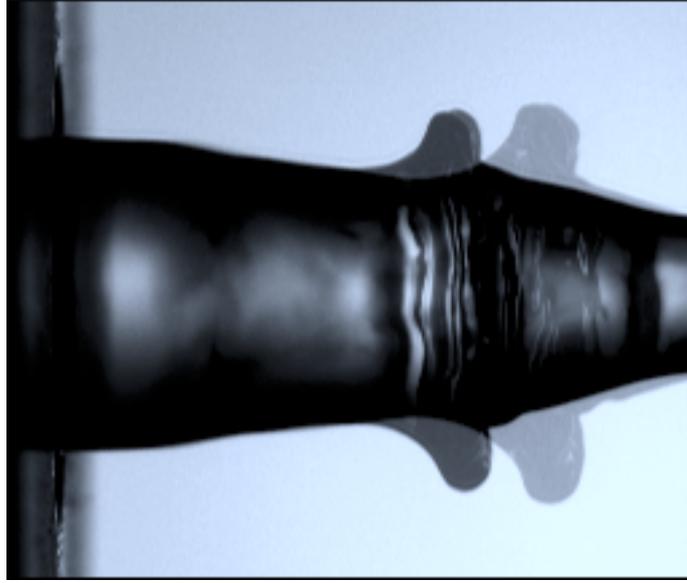


FIG. 3.20: *Double flashes*.  $u_1 = 0.45 \text{ m/s}$ ,  $u_2 = 19 \text{ m/s}$ ,  $\Delta t = 2 \text{ ms}$ .

placement des crêtes des oscillations d'une position  $x_1$  à une position  $x_2$  est alors visible, ce qui permet de calculer un vecteur vitesse moyen  $v_x = (x_2 - x_1)/\Delta t$  en fonction de  $x_1$  (Figure 3.21).

Il apparaît que la vitesse initiale des crêtes est celle du jet liquide, puis qu'elle croît linéairement avec la distance. La vitesse initiale des crêtes n'est donc pas la vitesse de convection  $u_c = u_1 \left(1 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{u_1}}\right)$ . Cela ne veut pas pour autant dire que les ondulations de surface se propagent à la vitesse  $u_1$  et que la théorie de stabilité est mise en défaut en ce qui concerne la vitesse de propagation. En effet, si les ondulations se déplaçaient à la vitesse  $u_1$ , la mesure de fréquence de passage seraient  $f = u_1/\lambda$  donc proportionnelle à  $u_2^{1/2}$  en lieu de  $u_2^{3/2}$ , ce qui est en désaccord avec les mesures de fréquence du chapitre précédent. Il faut donc bien différencier les crêtes des ondes qui sont entraînées à la vitesse du liquide et les ondulations qui se propagent à la vitesse de phase  $u_c$ .

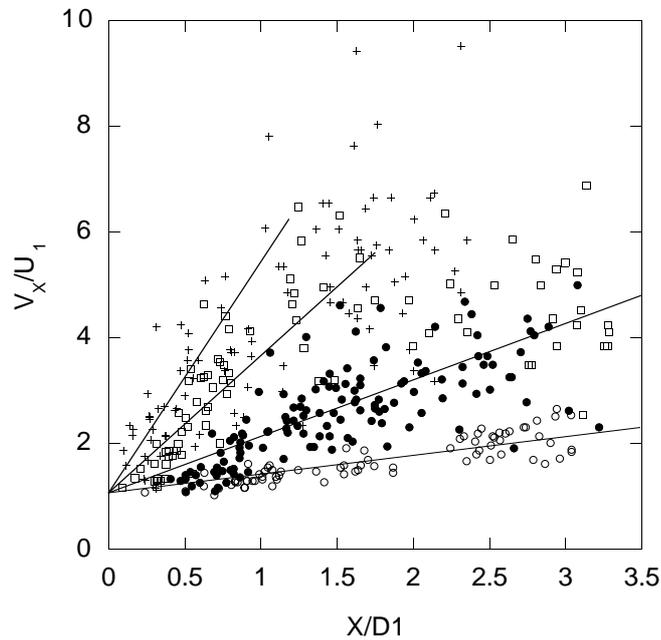


FIG. 3.21: Vitesse axiale des crêtes déterminée par double flash, adimensionnée par une vitesse de liquide de  $u_1 = 0.94$  m/s et des vitesses de gaz de 21 (cercles vides), 28 (cercles pleins), 34 (carrés vides) et 42 m/s (croix). La vitesse croît linéairement à partir de la vitesse du liquide.

### 3.3.2 Modélisation de l'accélération des protubérances et vitesse de projection du ligament

Pour comprendre quel est l'effet de la force de traînée sur l'accélération des crêtes nous examinerons au préalable deux cas simples : l'accélération de sphères rigides, puis l'accélération de gouttes.

#### Accélération d'une sphère rigide dans un courant d'air

Considérons une sphère rigide plongée dans un courant d'air avec une vitesse  $v_G$  initialement nulle (figure 3.22). Elle est soumise à une force de traînée aé-

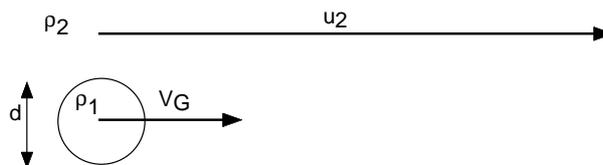


FIG. 3.22: Boule entraînée dans un courant gazeux.

rodynamique qui vaut  $F = \frac{1}{2}\rho_2\Delta(u_2 - v_G)^2 C_D S$ , avec  $S = 2\pi(d/2)^2$  la surface présentée au courant gazeux, et  $C_D$  le coefficient de traînée qui vaut environ 0.5 pour les grands nombres de Reynolds  $Re = \Delta U d / \nu_2$ . Toute cette force est consacrée à l'accélération du centre de masse, et la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\rho_1 V \frac{dv_G}{dt} = \frac{1}{2} \rho_2 (u_2 - v_G)^2 C_D S \sigma P. \quad (3.35)$$

L'accélération de la sphère est proportionnelle au rapport surface sur volume donc à  $1/d$  :

$$\frac{dv_G}{dt} = \frac{3C_D}{4} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{(u_2 - v_G)^2}{d}. \quad (3.36)$$

Initialement l'accélération vaut donc  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3C_D}{4} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2^2}{d}$ , et le déplacement  $x$  évolue comme :

$$\frac{x}{d} \simeq \frac{3C_D}{8} \left( \frac{t}{t_a} \right)^2, \quad (3.37)$$

avec

$$t_a = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{d}{u_2}}, \quad (3.38)$$

le temps caractéristique associé au déplacement. La résolution de l'équation différentielle (3.36) donne la vitesse tout au long de l'accélération :

$$\frac{v_G}{u_2} = \frac{\frac{3C_D}{4} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{t}{t_a}}}{1 + \frac{3C_D}{4} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{t}{t_a}}}. \quad (3.39)$$

Après une augmentation initialement linéaire ( $t \ll t_a \sqrt{\rho_1/\rho_2}$ ), la vitesse tend doucement vers  $u_2$  ( $t \gg t_a \sqrt{\rho_1/\rho_2}$ ).

### Accélération d'une goutte dans un courant d'air

Si l'on considère à présent une goutte placée dans le courant gazeux, sa surface libre est modifiée par l'écoulement d'air : nous avons vu dans l'introduction (page 17) que la goutte se brise lorsque le nombre de Weber  $We_d = \rho_2 \Delta u_2^2 d / \sigma$  est supérieur à environ 12 pour les liquides peu visqueux. La relation 3.36 est toujours valable dans le cas d'une goutte qui se fragmente, mais avec un coefficient de frottement supérieur, dû à une surface plus importante de la goutte. Des mesures

effectuées à haut nombre de Weber, donnent un coefficient de l'ordre de  $C_D \simeq 2.5$  (Pilch & Erdman, 1987). La goutte se brise en un temps  $t_f$  qui varie de  $4 t_a$  à  $6 t_a$  selon le mode de brisure : les gouttes dans le mode « bag break-up » se brisent plus vite que dans le mode « sheet-stripping » qui désintègre progressivement la goutte. D'après l'équation 3.39, sa vitesse finale rapportée à  $u_2$  est :

$$\frac{v_G}{u_2} \simeq \frac{3C_D}{4} \sqrt{\frac{\rho_2 t_f}{\rho_1 t_a}}, \quad (3.40)$$

elle varie donc entre  $0.26 u_2$  et  $0.39 u_2$  selon le mode de brisure.

### Accélération d'une protubérance de taille $\lambda_\perp$

Nous allons utiliser les outils que nous venons d'exposer pour l'accélération des sphères et des gouttes pour caractériser l'accélération des crêtes. Si nous négligeons la viscosité du liquide et la viscosité du gaz, les forces qui s'appliquent sur une ondulation transverse de la crête sont :

- la force de traînée aérodynamique proportionnelle à la surface  $S$  présentée,  $T = \frac{1}{2} \rho_2 u_2^2 C_D S$ , avec  $C_D$  un coefficient de traînée qui dépend de la forme de la surface;
- la force de rétention capillaire proportionnelle au périmètre  $P$  qui relie le volume au corps du jet liquide,  $\sigma P$ .

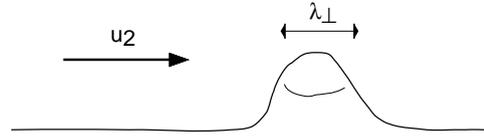
Le centre de masse est donc soumis à une accélération :

$$\rho_1 V a_x = \frac{1}{2} \rho_2 u_2^2 C_D S - \sigma P, \quad (3.41)$$

Nous avons vu précédemment que la taille transverse des ondulations est  $\lambda_\perp$ . Supposons à présent que l'ondulation entraînée par l'air est une protubérance proportionnée à  $\lambda_\perp$ , et dont la forme varie homothétiquement lorsque  $\lambda_\perp$  varie, et que ses dimensions sont proches de celles d'une demi-sphère de diamètre  $\lambda_\perp$ , avec un volume  $V \simeq \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} \lambda_\perp^3$ , une surface présentée  $S \simeq \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \lambda_\perp^2$  et un périmètre  $P \sim \pi \lambda_\perp$ . Le rapport de la force de traînée sur la force capillaire est alors  $We_{\lambda_\perp} \times \frac{C_D}{16}$ . Si l'on suppose que  $C_D = 1$ , il vaut environ 3 lors de l'apparition des ligaments à  $u_2 = 25$  m/s ( $We_{\lambda_\perp} = 50$ ), et est proportionnel à la vitesse. Le terme de rétention capillaire s'avère donc négligeable à l'instant initial dans le bilan des forces.

L'accélération  $a_x$  de la crête est donc constante et vaut  $a_x = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 \lambda_\perp}$ , tout comme le cas d'une sphère seule. Elle varie donc fortement avec la vitesse d'air, proportionnellement à  $u_2^3$ . Les mesures donnent accès à l'accélération spatiale selon la direction du jet  $\frac{dv_x}{dx}$  qui est reliée à l'accélération  $a_x$  par

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}. \quad (3.42)$$

FIG. 3.23: Accélération d'une protubérance de taille  $\lambda_{\perp}$ .

Initialement la vitesse de la crête est  $v_x = u_1$ , donc  $\frac{dv_x}{dx}(x=0) = \frac{a_x}{u_1}$ .

La pente à l'origine de la courbe  $v_x(x)$  est tracée figure 3.24 pour deux vitesses liquides : elle montre une accélération compatible avec une variation en  $u_2$  à la puissance 3 (figure 3.24, gauche). L'accélération avec  $u_1 = 0.45\text{m/s}$  est 2.0 fois plus grande que celle avec  $u_1 = 0.94\text{m/s}$ , alors que la vitesse est divisée par un rapport 2.1 : l'accélération spatiale est inversement proportionnelle à la vitesse liquide. L'accélération mesurée varie comme  $0.6 \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 \lambda_{\perp}}$ , ce qui donne un coefficient de frottement de  $C_D \simeq 0.8$ , légèrement supérieur à la valeur du coefficient sur une sphère.

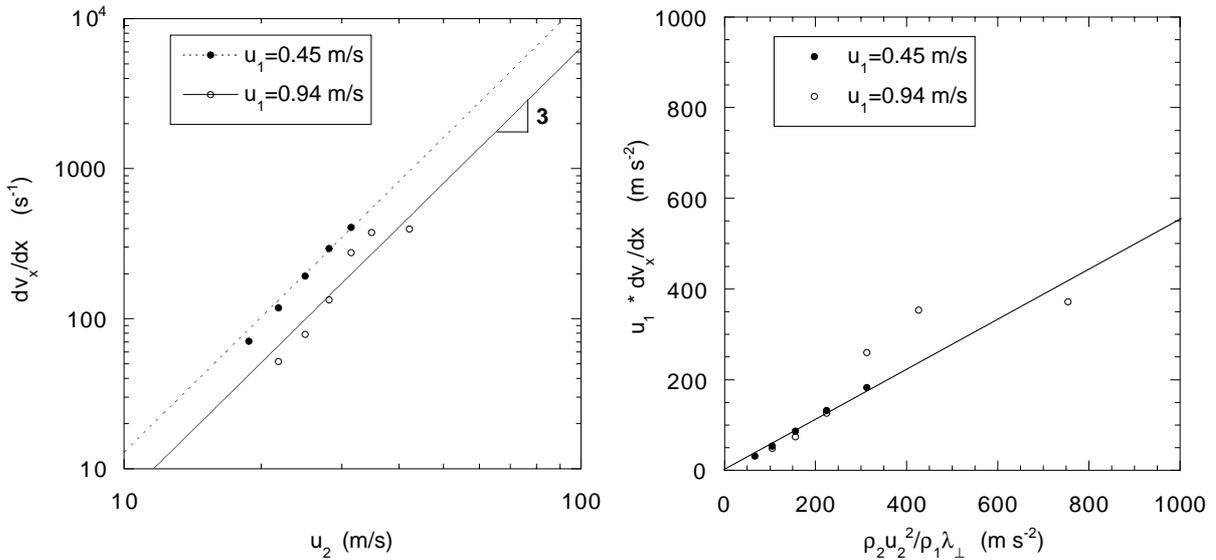


FIG. 3.24: Gauche : Accélération spatiale  $dv_x/dx$  déterminée à partir de la figure 3.21 en fonction de la vitesse  $u_2$ , pour deux vitesses liquides. Une régression avec une loi en  $u_2^3$  est présentée (lignes). Droite : Idem en fonction de l'accélération temporelle théorique. Ligne :  $0.6 \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 \lambda_{\perp}}$ .

### 3.4 Elongation sous forme de ligaments

Le volume de la protubérance initiale s'allonge ensuite dans le courant d'air : sa base est retenue sur le jet liquide par la tension superficielle, tandis que la force de pression aérodynamique l'étire toujours. Un ligament se détache alors de la crête (exemple figure 3.25).

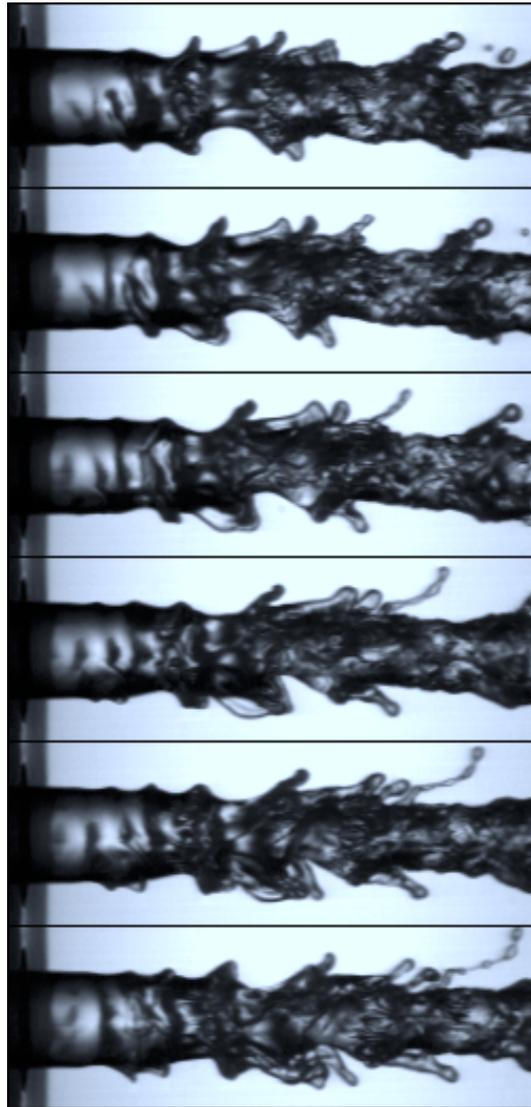


FIG. 3.25: *Elongation d'un ligament*,  $\Delta t = 1 \text{ ms}$ ,  $u_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $u_2 = 25 \text{ m/s}$ .

Sur des films réalisés à 9000 et 18000 images/s, nous avons surligné la longueur du ligament sur chaque image et ainsi obtenu la longueur du ligament avant la brisure en fonction du temps (Figure 3.26, les ligaments choisis sont les plus représentatifs d'une condition de vitesse). L'évolution de la longueur du ligament est manifestement prescrite par la vitesse  $u_2$  : plus la vitesse est grande plus les ligaments s'étirent vite.

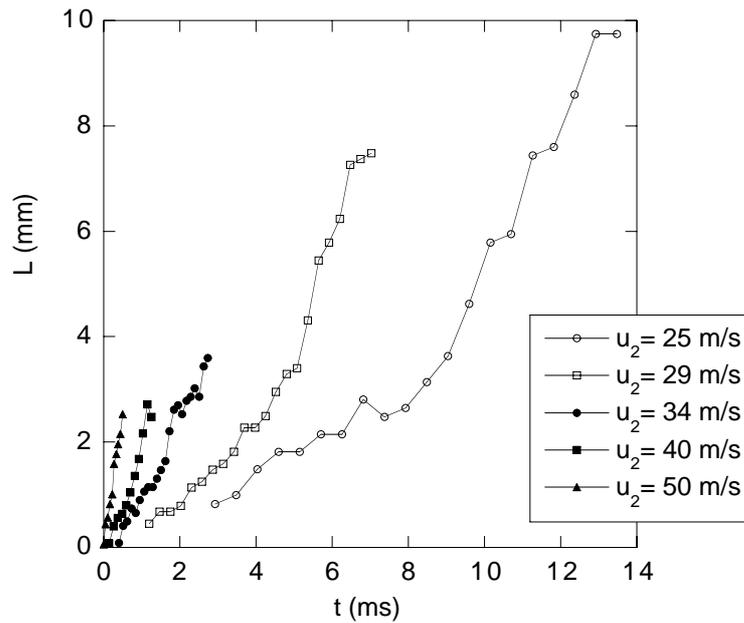


FIG. 3.26: Longueur de ligaments avec le temps. L'origine des temps est interpolée à l'aide de la pente initiale. La fin de la courbe correspond à la brisure du ligament.

Si nous étendons les mesures de vitesse de crêtes aux mesures de vitesse  $u_L$  des extrémités des ligaments et ensuite des gouttes formées, on constate que l'accélération chute lorsque les gouttes sont formées (Figure 3.27).

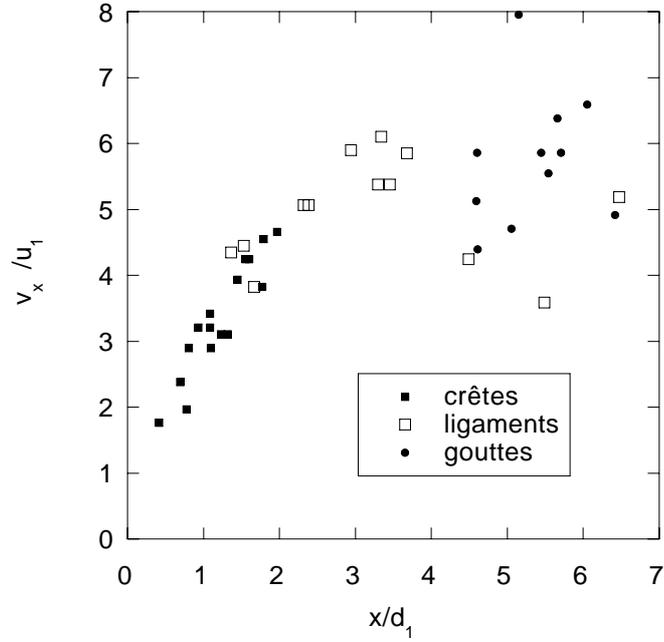


FIG. 3.27: Vitesse des crêtes, des extrémités des ligaments et des gouttes formées ( $u_1 = 0.45 \text{ m/s}$ ,  $u_2 = 21 \text{ m/s}$ ).



## Chapitre 4

# Formation des gouttes

LES DIGITATIONS qui naissent sur les crêtes des ondulations sont étirées par la friction de l'air et forment des ligaments de plus en plus fins (figure 4.1). La brisure de ces ligaments produit des gouttes de tailles très dispersées. Au cours de ce chapitre nous dégagerons les caractéristiques expérimentales de la brisure : épaisseur et rapport d'aspect du ligament à la brisure ; nous traiterons ensuite de la taille des gouttes produites par la brisure individuelle des ligaments, et enfin des distributions de tailles dans le spray.

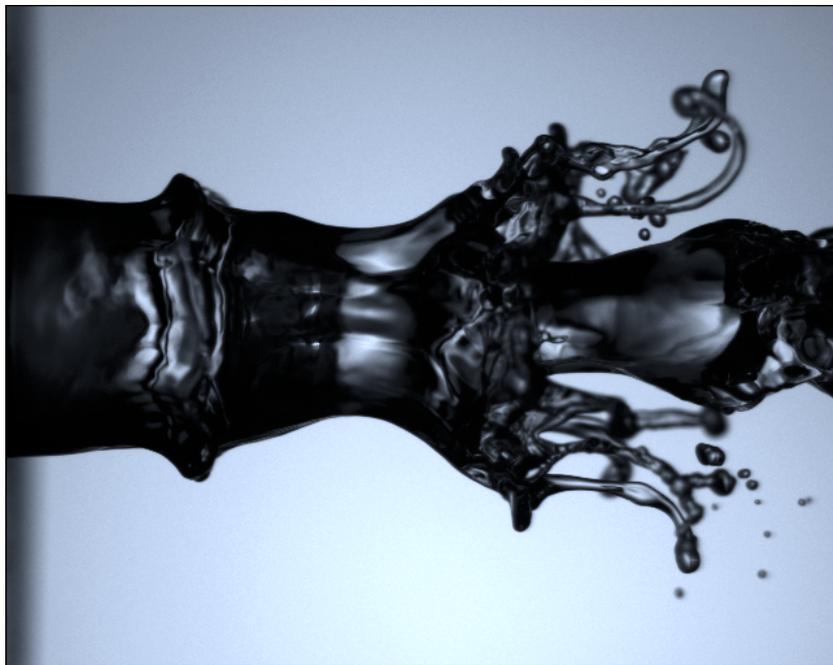


FIG. 4.1: *Etirement des ligaments (Marmottant & Villermaux, 2001a).*

## 4.1 Brisure des ligaments

### 4.1.1 Diamètre du ligament avant sa cassure

Lorsqu'il est suffisamment fin, le ligament se brise en gouttelettes. Les brisures se produisent toutes dans un intervalle court inférieur à la milliseconde (voir les images de la figure 4.2).

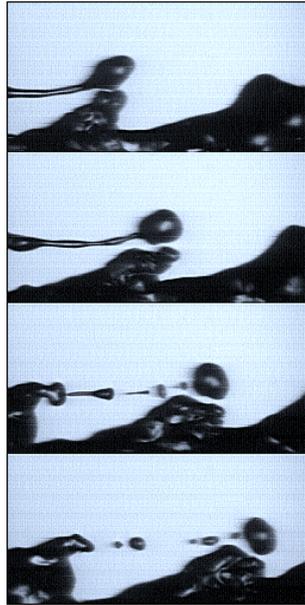


FIG. 4.2: *Étirement d'un ligament et brisure (images séparées de 0.67 ms).*

Nous avons étudié les brisures sur des photographies doublement exposées au flash avec un écart de 1 ms environ. L'emploi d'une caméra numérique de haute définition est alors possible. Sur une série d'images, lorsque la brisure a lieu entre les deux flashes, nous estimons le diamètre de brisure en mesurant le diamètre du ligament de la première exposition, sur ses plus petites parties encore cylindriques (Figure 4.3). Les mesures réalisées à la caméra rapide sont limitées par une moins bonne résolution, et une taille d'acquisition sur le capteur CCD qui est de plus en plus réduite à grande vitesse d'acquisition.

La taille des ligaments à la brisure  $\xi_b$  décroît fortement avec la vitesse du gaz, et une régression avec en loi de puissance  $-3/2$  est représentée bien les petites vitesses (figure 4.4).

D'après les mesures avec de l'éthanol, de tension de surface environ trois fois moindre, la taille de brisure des ligaments est affectée par le changement de tension de surface du liquide : les tailles de cassures sont plus petites.

Remarquons que la taille de brisure est modifiée par la viscosité : en effet les images du jet de glycérol à 60 % montrent des ligaments qui sont beaucoup plus

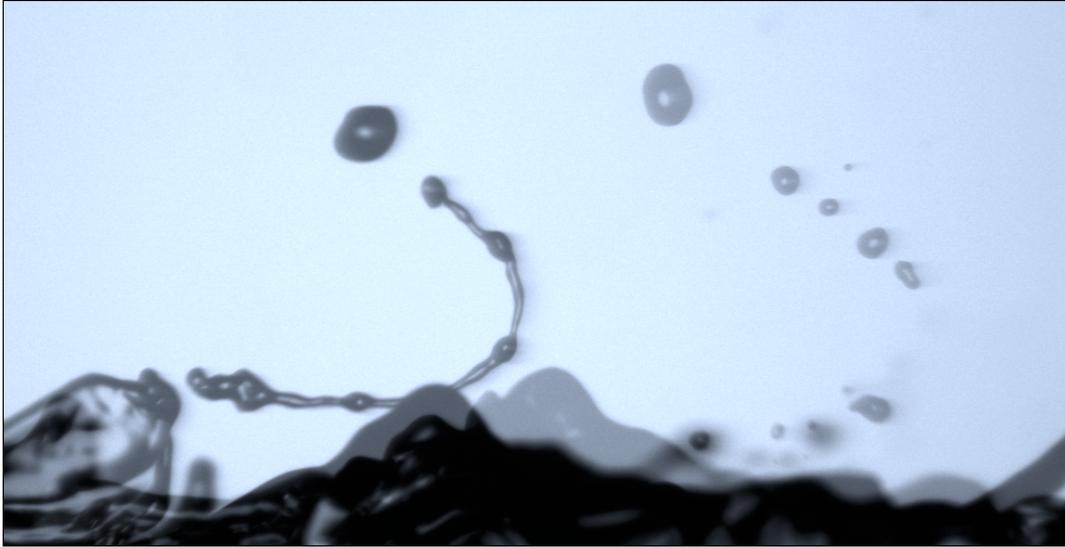


FIG. 4.3: *Brisure d'un ligament entre deux expositions de flash superposées.*

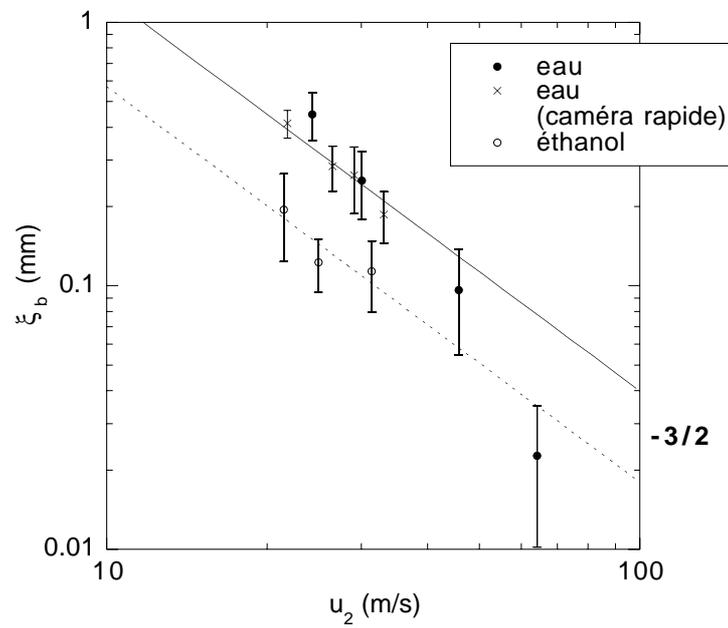


FIG. 4.4: *Diamètre  $\xi$  de brisure des ligaments d'eau et d'éthanol. Régression par des courbes en  $u_2^{-3/2}$ .*



FIG. 4.5: Images du jet avec une solution de glycérol à 60% en volume,  $u_1 = 0.5$  m/s. Gauche :  $u_2 = 41$  m/s, droite :  $u_2 = 34$  m/s.

allongés que pour les images en eau (Figure 4.5), et qui sont donc des plus fins à la brisure. Les mesures de l'épaisseur des ligaments juste avant leur rupture en apporte la confirmation (Figure 4.6).

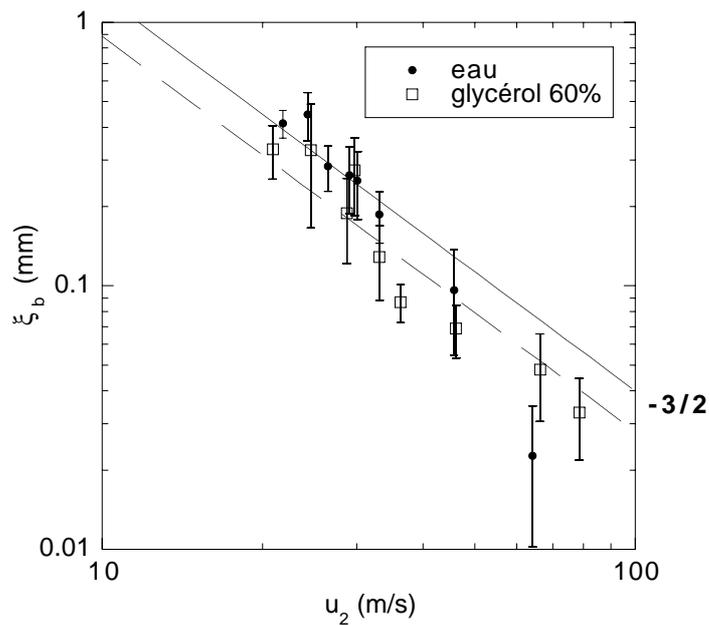


FIG. 4.6: Diamètre des ligaments de glycérol 60 % et d'eau juste avant brisure.

### 4.1.2 Rapport d'aspect des ligaments à la brisure

La mesure des longueurs de ligament à la brisure conjointement avec leur épaisseur à la brisure, sur des films rapides, montre que le rapport d'aspect augmente significativement avec la vitesse gazeuse (figure 4.7). Cette augmentation est directement visible sur les images du jet (figure 4.8).

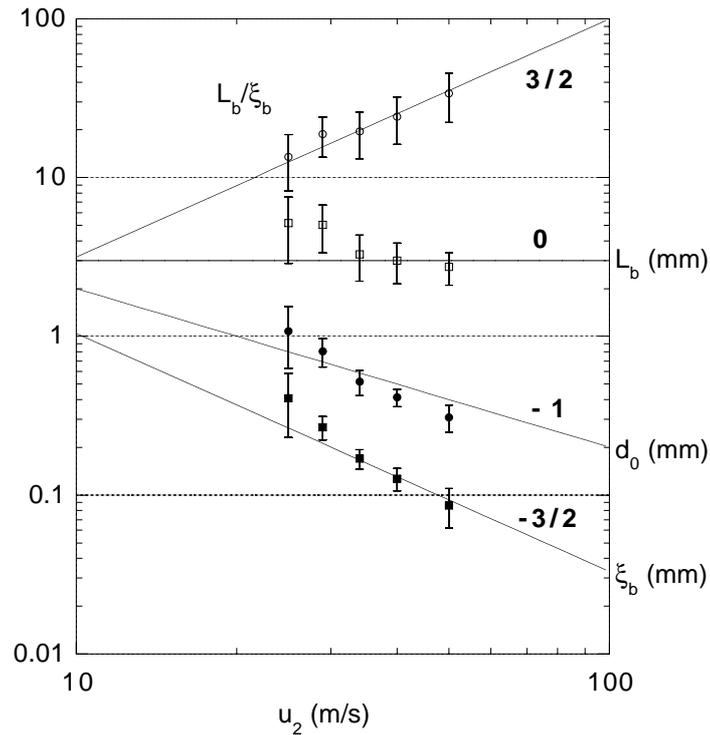


FIG. 4.7: Rapport d'aspect des ligaments à la brisure, et évolution des dimensions du ligament: longueur  $L_b$ , taille  $d_0$  et diamètre  $\xi_b$ . Jet d'eau.

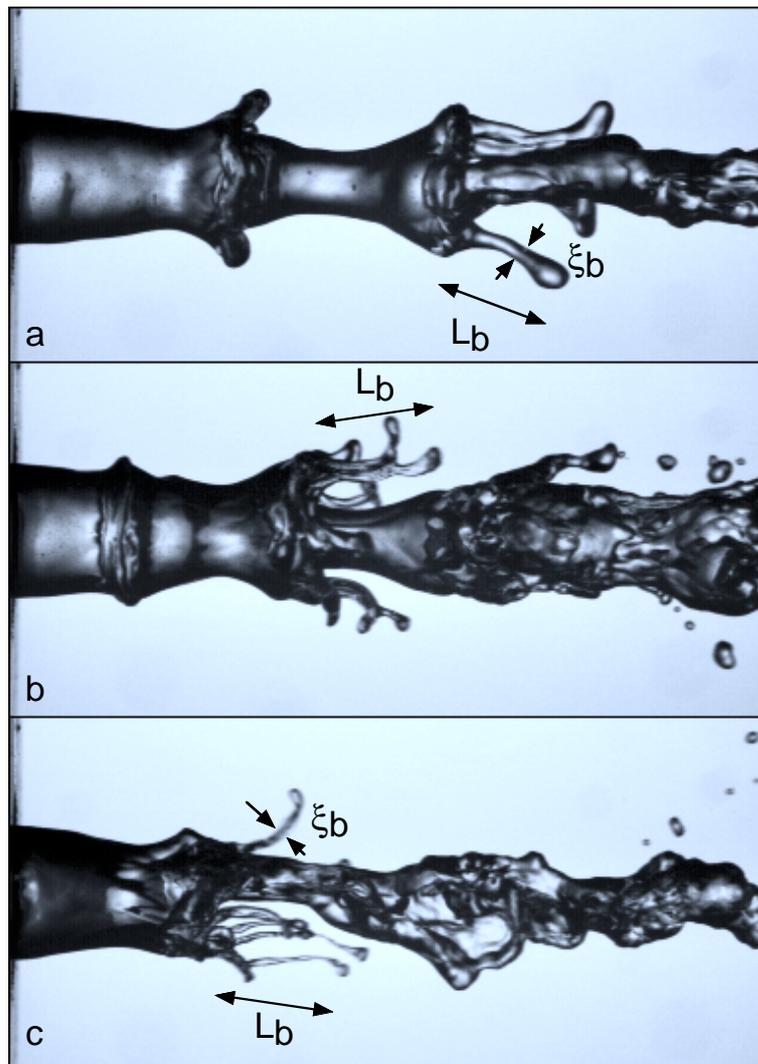


FIG. 4.8: *Le rapport d'aspect maximal des ligament augmente avec la vitesse d'air (vitesses croissantes d'environ 20, 35 et 50 m/s). La longueur  $l_b$  avant la brisure varie peu, alors que le diamètre  $\xi_b$  diminue avec la vitesse*

## 4.2 Gouttes formées à partir d'un ligament

La brisure des ligaments s'effectue de manière beaucoup moins régulière que celle d'un jet non-étiré : les tailles de gouttes produites sont plus largement distribuées. La dispersion des tailles de gouttes formées résulte de la conjonction de deux facteurs : la dispersion des volumes de ligaments, et la dispersion des tailles produite par la brisure du volume en elle-même.

### 4.2.1 Distribution des volumes des ligaments

Afin de connaître le volume des ligaments, la méthode de double exposition trouve son utilité pour repérer les gouttes issues de la brisure d'un ligament, lorsqu'il arrive que la brisure se produise entre les deux illuminations. Nous identifions alors manuellement les gouttes sur une image de bonne résolution (figure 4.9). De la surface  $S$  des gouttes sur l'image nous déduisons leur diamètre  $d$  tel que

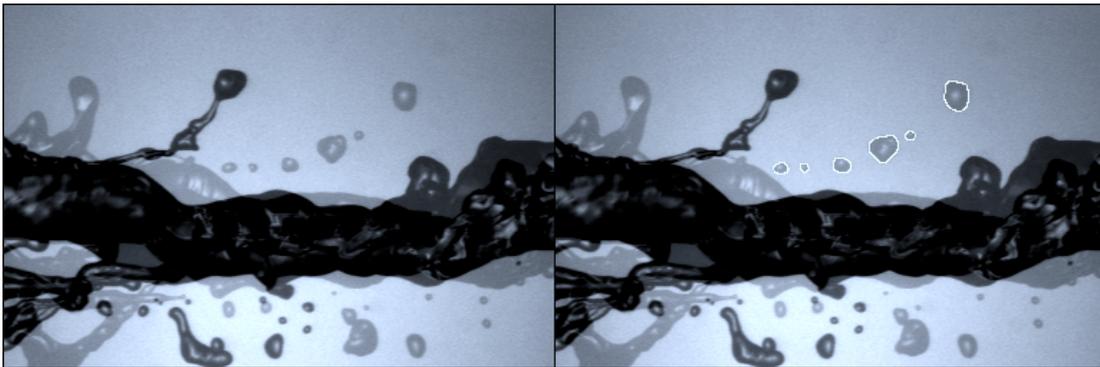


FIG. 4.9: *Identification des gouttes sur une image de brisure totale.*

$S = \pi d^2/4$  (en supposant qu'elles sont proches de la forme sphérique) et leur volume  $\pi d^3/6$ . La somme de ces volumes est le volume  $v_0 = \sum \pi d_i^3/6$  du ligament, car d'après nos observations la quasi-totalité du ligament s'est brisé.

Nous définissons alors la taille du ligament  $d_0$  par le diamètre qu'il aurait s'il était rassemblé en une seule boule :

$$v_0 = \frac{\pi}{6} d_0^3. \quad (4.1)$$

Les volumes décroissent en moyenne très fortement avec la vitesse du gaz, avec une variation en  $u_2^{-3}$  (figure 4.10). La taille transverse  $d_0$  associée à ce volume est donc proportionnée à la longueur d'onde transverse  $\lambda_\perp$ , selon  $d_0 \simeq 0.23\lambda_\perp$  expérimentalement, avec  $\lambda_\perp \sim \delta We_\delta^{-1/3}$  (figure 4.11). L'écart-type relatif des tailles  $d_{10}$  est de  $0.20 \pm 0.05$  pour toutes les vitesses de gaz.

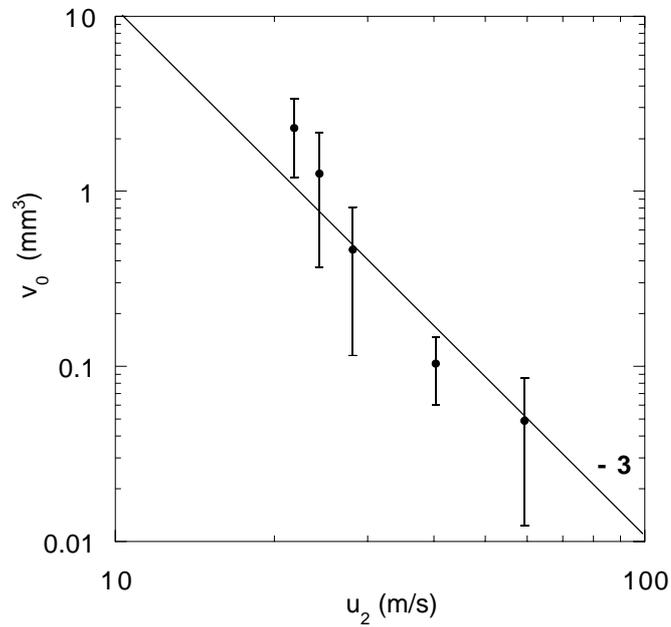


FIG. 4.10: Volume du ligament avant brisure estimé d'après les gouttes issues de la brisure du jet d'eau. Ligne : régression avec une courbe en  $u_2^{-3}$ .

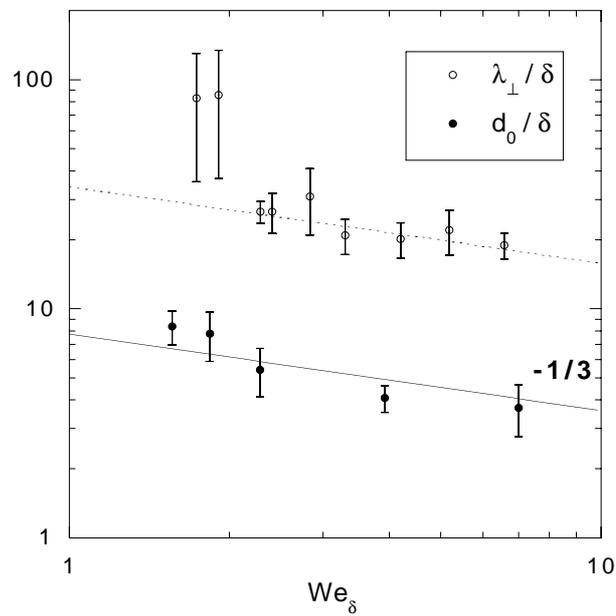


FIG. 4.11: Taille de ligament  $d_0$  et longueur d'onde transverse rapportés à l'épaisseur de couche limite gazeuse.

La distribution des tailles  $d_0$  s'obtient par un classement des mesures  $x$  selon un histogramme dont les classes sont des intervalles égaux  $[x_i, x_{i+1}]$ . Pour obtenir des distributions *convergées*, c'est-à-dire avec un nombre  $N_i$  suffisant d'événements dans chaque classe de l'histogramme, de façon à obtenir une bonne approximation et réduire l'erreur relative qui est en  $1/\sqrt{N}$ , nous avons accumulé un nombre plus important de données. La procédure d'extraction des diamètres, manuelle, est très longue car peu d'images doublement exposées montrent l'avant et l'après brisure, c'est pourquoi nous n'avons traité qu'un jeu de conditions,  $u_1 = 0.45$  m/s et  $u_2 = 29$  m/s. Nous avons retenu 111 images de ligaments, ce qui a représenté un total de 1100 gouttes, contre une dizaine pour chacune des conditions des mesures présentées sur les figures 4.10 et 4.11.

La distribution des tailles, que nous noterons  $R(d_0)$ , est relativement symétrique autour de la moyenne (figure 4.12), avec un écart-type relatif de 0.20.

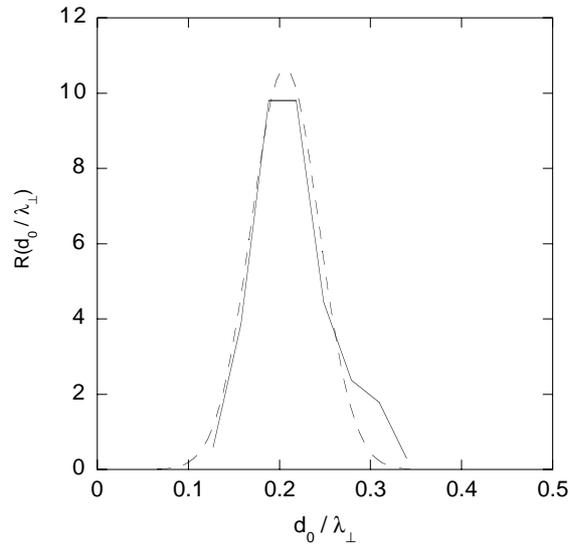


FIG. 4.12: *Distribution des tailles  $d_0$  de ligaments (111 mesures réparties dans 8 classes), ligne en pointillés: régression par une loi de probabilité gaussienne (moyenne  $0.21\lambda_{\perp}$ , écart-type 18%),  $u_2 = 29$  m/s.*

### 4.2.2 Distribution des tailles de gouttelettes issues d'un ligament

Le nombre de gouttelettes produites par un ligament est de 9 en moyenne, et réparti approximativement selon une poissonnienne (figure 4.13).

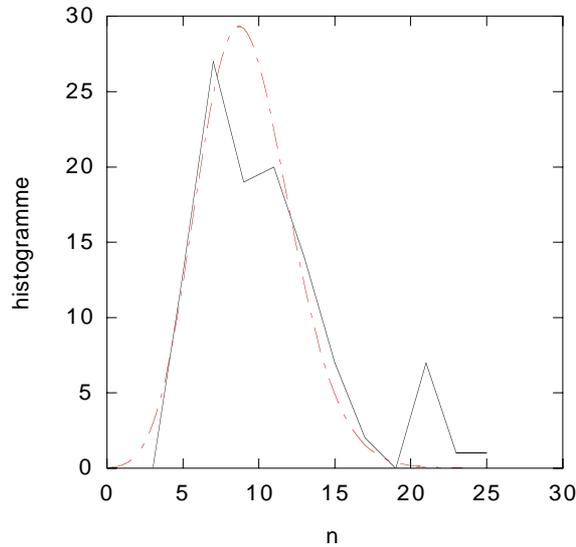


FIG. 4.13: *Distribution du nombre de gouttes issues d'un ligament (trait plein), approximation par une distribution poissonnienne de moyenne  $\langle n \rangle = 9.2$  (trait pointillé),  $u_2 = 29$  m/s.*

Lest tailles de gouttes adimensionnées par la taille du ligament dont elles sont issues,  $d/d_0$ , tracés en fonction de  $d_0$ , montrent une répartition des  $d/d_0$  semblable pour des  $d_0$  (en abscisse sur la figure 4.14) différents. Il apparaît donc plausible de considérer que la distribution  $Q(d/d_0)$  ne dépend pas de  $d_0$ . Par exemple, si l'on sépare le jeu de données suivant que  $d_0$  est supérieur ou inférieur à la valeur médiane, les distributions obtenues sont similaires (figure 4.15). Nous ne pouvons pas séparer davantage notre jeu de données : les distributions ne seraient plus convergées. La distribution est très large à cette vitesse d'air : autour d'une moyenne de  $\langle d/d_0 \rangle = 0.36$  l'écart-type relatif est de 0.58.

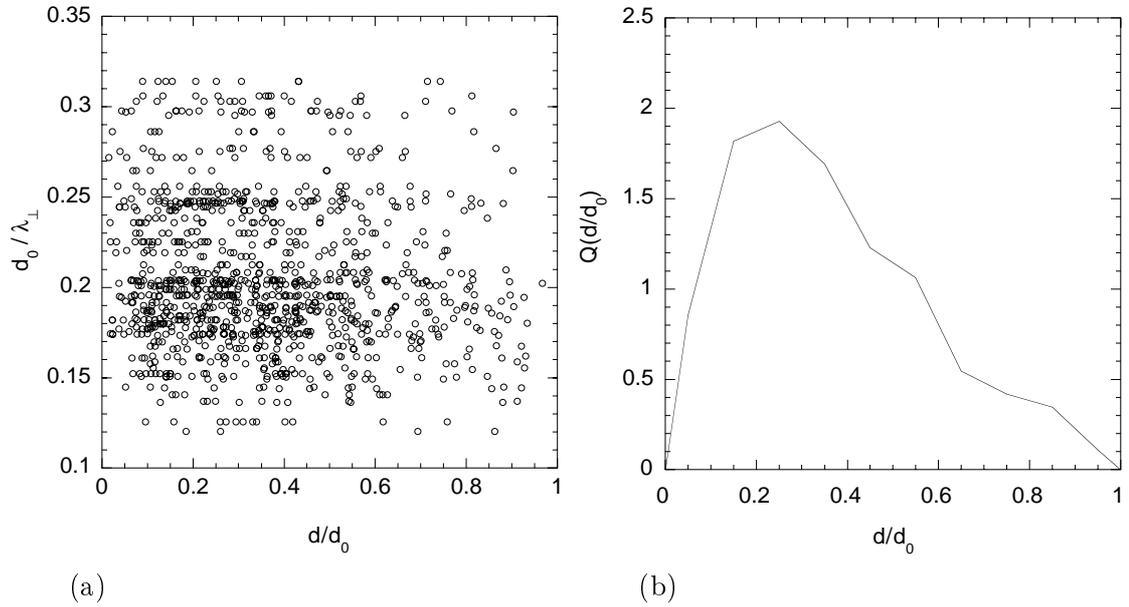


FIG. 4.14: (a) Diamètre des gouttelettes rapporté au diamètre  $d_0$ , en fonction de  $d_0$ . (b) Distribution des tailles de gouttes rapportées à la taille  $d_0$  du ligament,  $u_2 = 29$  m/s (répartition de 1100 points dans 10 classes).

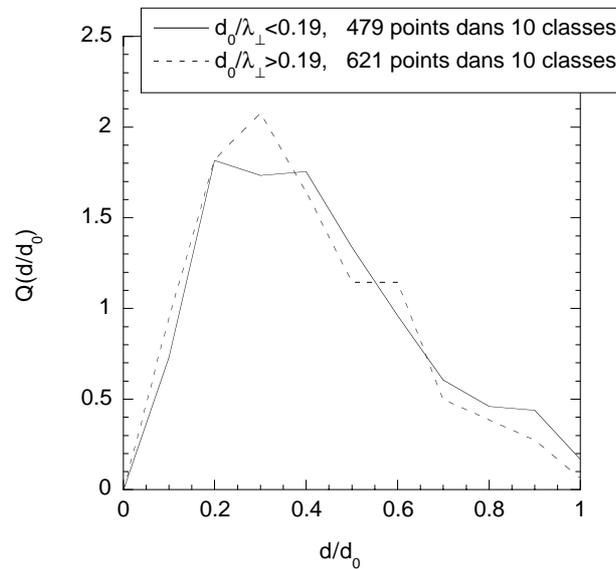


FIG. 4.15: Distributions  $Q(d/d_0)$  pour les petits et grands diamètres  $d_0$  ( $d_0/\lambda_{\perp} < 0.19$  et  $d_0/\lambda_{\perp} > 0.19$ ),  $u_2 = 29$  m/s.

La vitesse d'air ne modifie pas grandement la forme de la distribution (figure 4.16) : sa forme est conservée ainsi que ses moments (table 4.1). Nous avons ajouté aux données obtenues à 29 m/s (1100 gouttes) les distributions pour deux vitesses gazeuses plus élevées, 38 m/s (183 gouttes) et 50 m/s (440 gouttes).

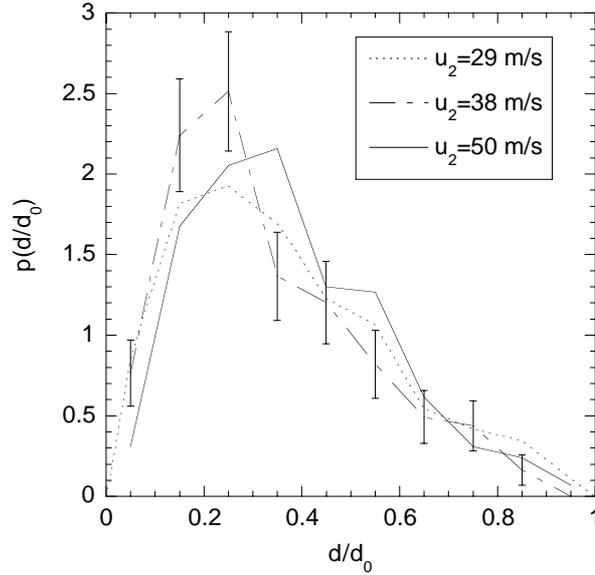


FIG. 4.16: Distributions expérimentales des tailles de gouttes rapportées à la taille  $d_0$  du ligament pour plusieurs vitesses d'air. Barre d'erreurs pour la distribution la moins convergée.

$u_2$ (m/s)	$We_\delta$	$\langle d/d_0 \rangle$	$\text{std}(d)/\langle d \rangle$
29	2.4	0.36	0.60
38	3.7	0.32	0.60
50	5.5	0.37	0.51

TAB. 4.1: Moments des distributions de  $d/d_0$  : moyenne et déviation standard normalisée.

En conclusion, les tailles de brisure sont entièrement déterminées par la taille des ligaments  $d_0$  quelle que soit la vitesse. Il faut remarquer que la taille moyenne des gouttelettes  $\langle d \rangle$  obtenue n'est pas proportionnée au diamètre des ligaments. En effet la taille moyenne est proportionnée à  $d_0$  donc à  $\lambda_\perp$  qui varie en  $u_2^{-1}$ , alors que le diamètre de brisure  $\xi_b$  varie en  $u_2^{-2}$ . Le rapport  $\langle d \rangle/\xi_b$  augmente proportionnellement avec la vitesse du gaz, avec les mesures en eau il vaut  $\langle d \rangle/\xi_b = u_2/u_0$ , avec  $u_0 = 10.6$  m/s.

### 4.3 Distribution des tailles de gouttes dans le spray

Les brisures des ligaments produisent des gouttes qui alimentent un spray entraîné dans le courant de gaz. Ces gouttes proviennent de la première fragmentation du jet liquide, selon le mécanisme décrit dans la section précédente, appelée atomisation primaire dans le contexte de la formation de spray. Lorsque le courant gazeux est très fort et que les gouttes sont brisées une nouvelle fois, on utilise le terme d'atomisation secondaire.

Les tailles des gouttes issues de l'atomisation primaire ont été peu mesurées dans les sprays coaxiaux. Les observations de Yatsuyanagi *et al.* (1994) concernant un spray produit par un jet coaxial eau/azote, dont les tailles de gouttes sont mesurées avec un PDPA, concluent que le diamètre de Sauter  $d_{32}$  est inversement proportionnel à  $\Delta u = u_2 - u_1$  :  $d_{32} \sim \frac{10 \text{ m/s}}{\Delta u} \times 0.6 \text{ mm}$ . Ces résultats incluent cependant des phénomènes d'atomisation secondaire. Des mesures réalisées dans la région d'atomisation primaire strictement, en sortie d'un injecteur coaxial eau/liquide à l'aide d'un analyseur de spray commercial fonctionnant par analyse d'images, sont aussi en accord avec cette décroissance (voir la figure 4.17 de Shavit & Chigier, 1995). La mesure de la taille des gouttes à l'aide d'une sonde

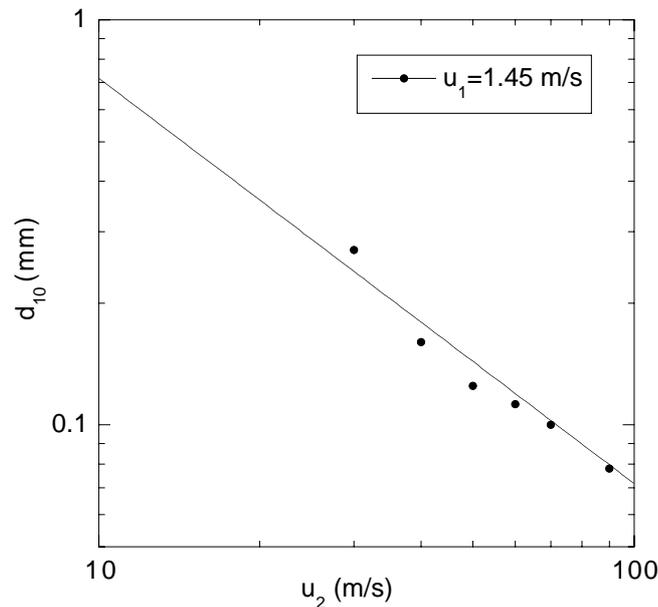


FIG. 4.17: Taille des gouttes mesurées à 10 mm du point de brisure moyen, à l'aide d'un injecteur tubulaire (d'après la figure 12 de Shavit & Chigier, 1995). Jet liquide de diamètre  $d_1 = 0.89 \text{ mm}$ , épaisseur de couronne  $e = 4.56 \text{ mm}$ .

optique – utilisée traditionnellement pour détecter la présence du liquide – conçue pour détecter la vitesse de passage des gouttes sur la sonde et en déduire

leur diamètre, montrent aussi une décroissance des diamètres moyens en  $u_2^{-1}$  dans un écoulement coaxial eau/air plan (Hong *et al.*, 2000).

Au cours de cette section nous examinerons les caractéristiques des tailles de gouttes dans le spray issu de l'atomisation primaire, et nous montrerons qu'elles sont liées aux longueurs d'onde des ondulations transverses initiales de la surface. Leur distribution est quant à elle liée au processus de brisure. L'effet de la viscosité, dont les conséquences sur la brisure des ligaments étaient manifestes, modifie les tailles dans le spray. Nous verrons enfin quelle est l'évolution des distributions du spray plus en aval de la région d'atomisation primaire.

#### 4.3.1 Mesures dans le spray, dans la région d'atomisation primaire

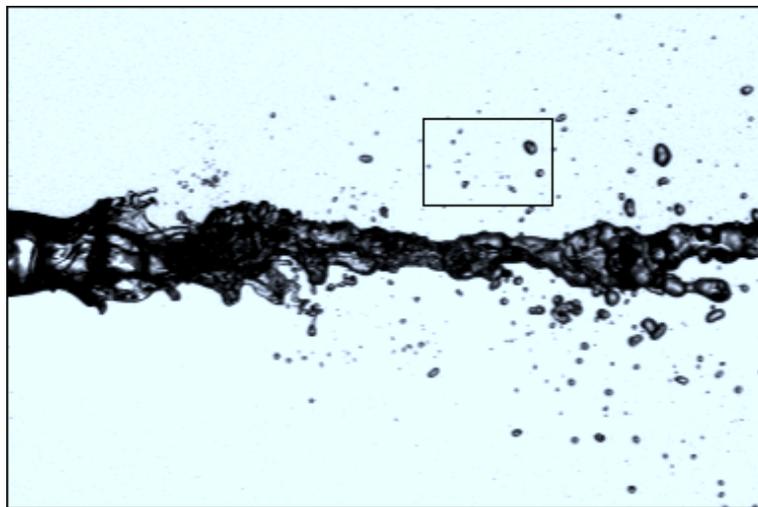


FIG. 4.18: *Mesure des tailles de gouttes dans la région d'atomisation primaire.*

Les mesures de tailles de gouttes dans le spray ont été faites en dépouillant des photographies prises dans la région proche de l'atomisation primaire (Figure 4.18) : dans cette région les ligaments ont eu le temps de se briser et les gouttes le temps de relaxer vers une forme sphérique, notamment en ce qui concerne les plus grosses, dont le temps de relaxation est plus grand<sup>1</sup>.

Les images sont exposées à l'aide du flash, dont le temps d'éclair est de l'ordre de  $5 \mu s$ . Au delà d'une vitesse d'air de  $70 \text{ m/s}$ , les gouttes qui viennent de se former sont animées d'une vitesse telle que le filé de leur image ne devient plus négligeable devant leur diamètre, et c'est pourquoi nous avons arrêté à cette vitesse les mesures. L'objectif est ouvert de façon à obtenir une faible profondeur de

1. Le rapport entre les contraintes de frottement visqueux  $\mu_1 \omega_0$ , et les forces de pression de Laplace  $\sigma/d$  qui entretiennent l'oscillation  $\omega_0$  est donné par le nombre de Ohnesorge  $Oh = \mu_1 / \sqrt{\rho_1 \sigma d}$ ; les oscillations des petites gouttes sont donc plus vite amorties.

champ (de l'ordre du mm). Le traitement automatique de ces images sélectionne les gouttes nettes, donc près du plan focal, pour lesquelles la taille apparente est calibrée. Il permet d'enregistrer et de traiter un grand nombre d'images, et d'obtenir les distributions de tailles qui étaient obtenues à la main lors de l'étude de la brisure des ligaments.

### 4.3.2 Les distributions ont une décroissance exponentielle

L'acquisition d'un nombre d'images de l'ordre du millier permet d'obtenir des distributions convergées (exemple Figure 4.19) : celles-ci sont systématiquement des exponentielles décroissantes vers les grands diamètres. La taille moyenne  $d_m$  associée à une distribution purement exponentielle est l'inverse du taux de décroissance, de sorte que :

$$P(d) = \frac{1}{d_m} \exp(-d/d_m). \quad (4.2)$$

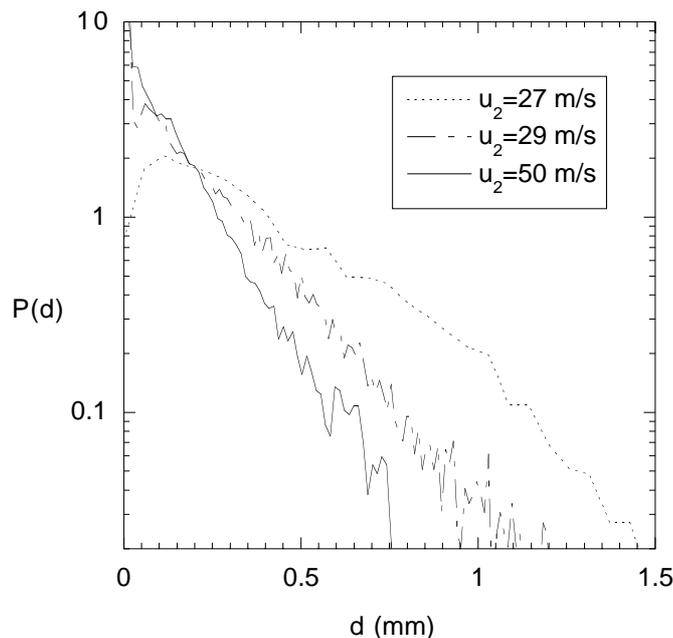


FIG. 4.19: *Distribution des tailles de gouttes (eau).*

### 4.3.3 Influence de la vitesse d'air

La longueur d'onde transverse  $\lambda_{\perp}$  décroît de façon inversement proportionnelle à la vitesse d'air : nous allons voir que la taille moyenne des gouttes  $d_{10}$  varie de façon identique, dans un rapport constant avec la longueur d'onde transverse.

### Jet d'eau et jet d'éthanol

Le taux de décroissance  $1/d_m$  des distributions de tailles de gouttelettes, que l'on obtient par une régression exponentielle des distributions expérimentales pour les grands diamètres, tracé en fonction de la vitesse d'air (Figure 4.20 a), augmente linéairement avec  $u_2$ . La taille moyenne des gouttes  $d_{10}$  calculée d'après

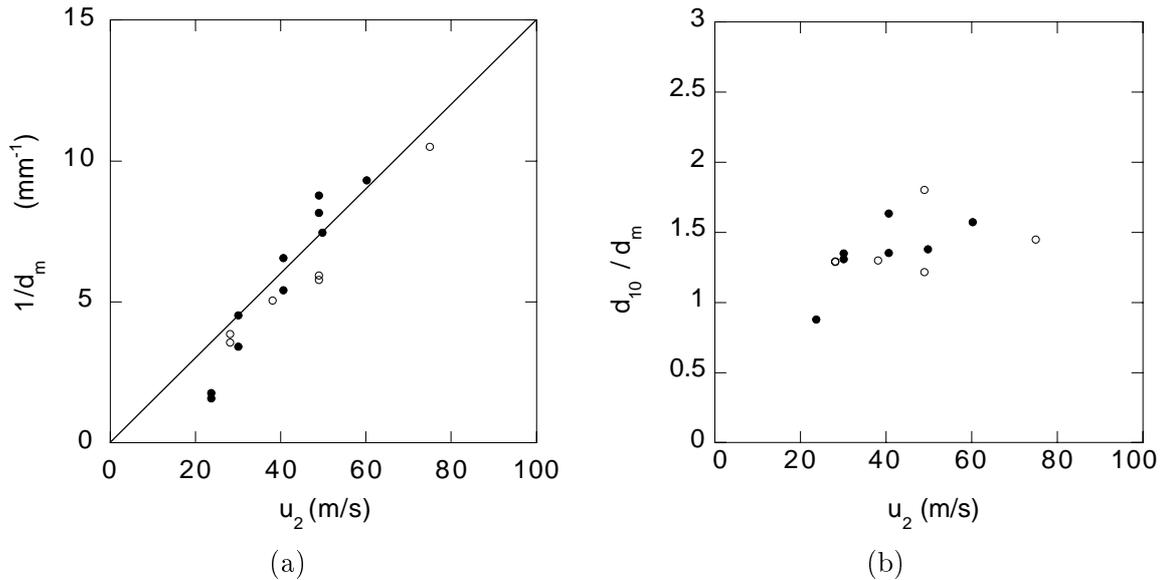


FIG. 4.20: (a) Taux de décroissance  $1/d_m = -d\ln(P)/d(d)$  des distributions exponentielles. Cercles pleins :  $u_1 = 0.45 \text{ m/s}$ . Cercles vides :  $u_1 = 0.94 \text{ m/s}$ . Lignes : approximation linéaire. (b) Diamètre moyen rapporté au diamètre caractéristique de décroissance des distributions.

les données de tous les diamètres n'est pas égale à l'inverse du taux de décroissance  $d_m$ . En effet les distributions expérimentales ne sont pas exponentielles sur toute la gamme des diamètres : pour les petits diamètres la densité de probabilité est inférieure. Le diamètre moyen  $d_{10}$  est donc supérieur au diamètre moyen  $d_m$  associé à l'exponentielle extrapolée pour les petits diamètres. Leur rapport est cependant sensiblement constant, de l'ordre de 1.5 (Figure 4.20 b) : les déficits de petites gouttes par rapport à une distribution exponentielle sont donc similaires pour toutes les vitesses.

La taille moyenne des gouttes  $d_{10}$  est proportionnelle à  $u_2^{-1}$  pour un jet d'eau comme pour un jet d'éthanol (Figure 4.21). Une caractéristique supplémentaire de la taille moyenne est qu'elle ne dépend pas de façon significative de la vitesse du liquide, (deux vitesses liquides dans un rapport 2 ont été testées pour l'eau). Ces deux propriétés sont aussi celles de la longueur d'onde transverse  $\lambda_{\perp}$ ,

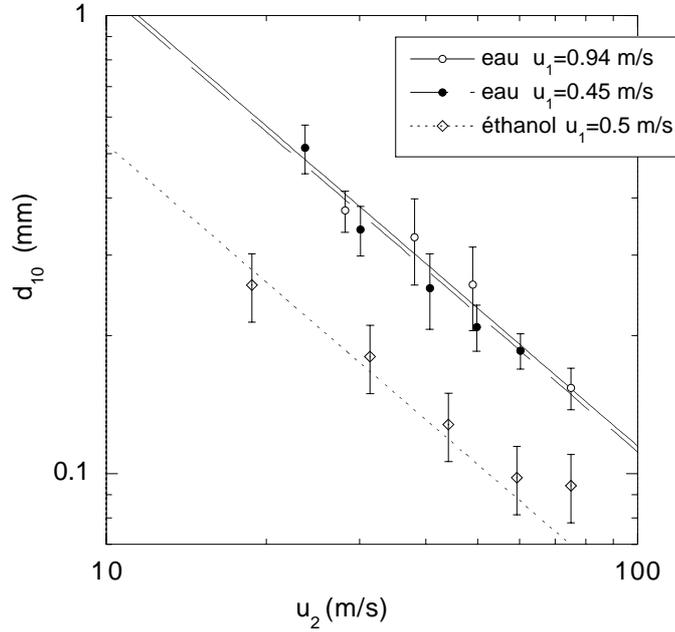


FIG. 4.21: Taille moyenne des gouttes d'éthanol et d'eau, régressions en  $u_2^{-1}$ . Il y a un facteur 0.5 entre les diamètres moyens des gouttes d'éthanol et d'eau.

taille initiale des ligaments. Leur rapport  $d_{10}/\lambda_{\perp}$  est d'environ 0.10 avec l'eau (figure 4.22). Si les diamètres de gouttes sont plus petits avec de l'éthanol, ils le sont à proportion des longueurs d'onde transverses qui sont aussi plus petites : leur rapport  $d_{10}/\lambda_{\perp} \simeq 0.08$  est légèrement plus faible que pour l'eau.

Le nombre de petites gouttes varie avec le seuil de détection sur la netteté des contours et donc le diamètre moyen aussi : les barres d'erreur apposées aux points de mesure des tailles moyennes sur les graphiques représentent l'étendue de cette variation. Tracées en fonction de  $\rho_2/\rho_1 We_{\delta}$  les mesures d'eau et d'éthanol sont proches de la droite

$$d_{10} \simeq 0.1 \lambda_{\perp} \simeq 0.34 \delta (\rho_2/\rho_1)^{-1/3} We_{\delta}^{-1/3}, \quad (4.3)$$

voir (Figure 4.23).

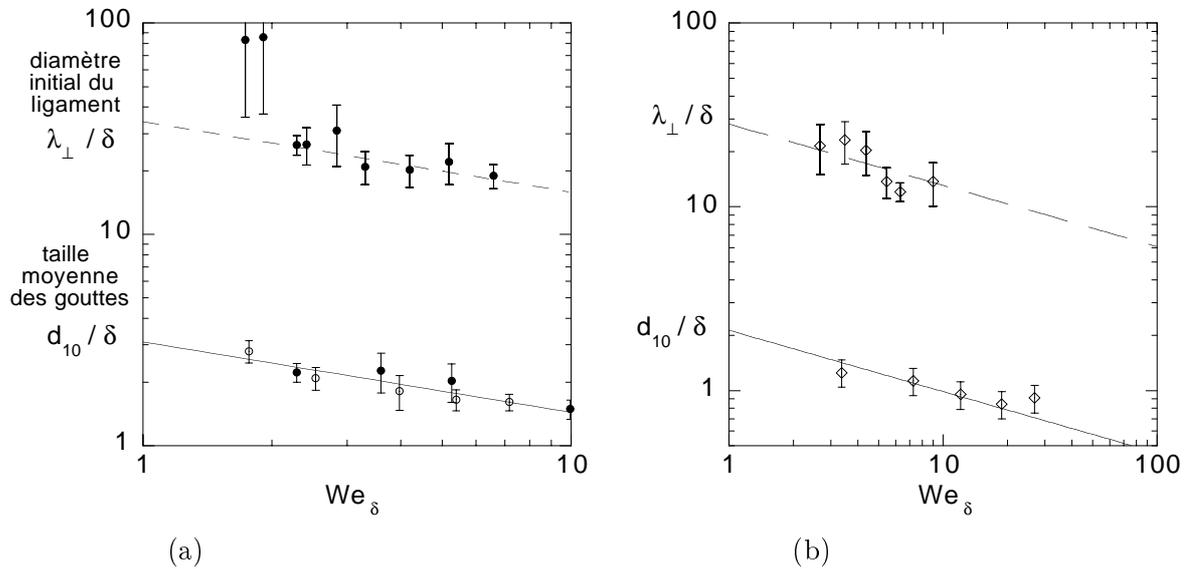


FIG. 4.22: (a) Tailles moyennes des gouttes d'eau comparées avec la longueur d'onde transverse, régressions en  $\delta We_{\delta}^{-1/3}$ . (b) Idem avec dans le spray de gouttes d'éthanol.

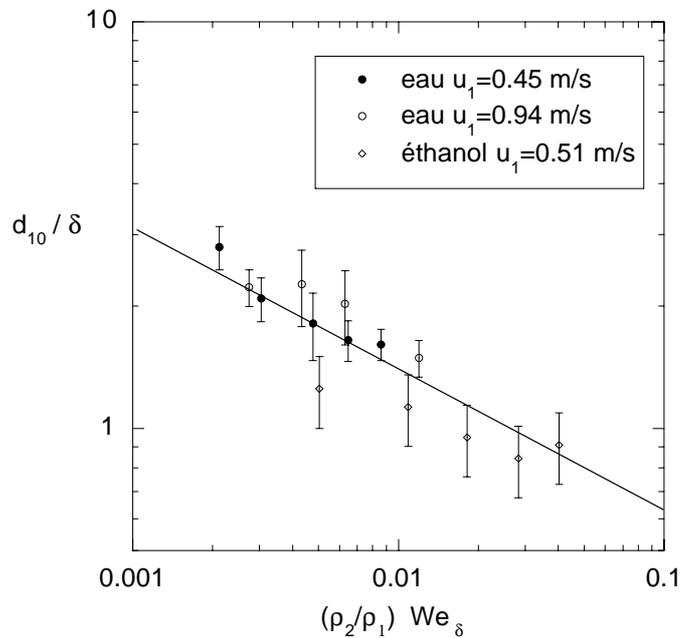


FIG. 4.23: Taille moyenne des gouttes adimensionnée par  $\delta$  en fonction de  $\rho_2 / \rho_1 We_{\delta}$ .

### Jet d'une solution glycérol

Les distributions des tailles de gouttelettes dans le spray d'une solution de glycérol à 60 % en volume présentent la même décroissance exponentielle (Figure 4.24).

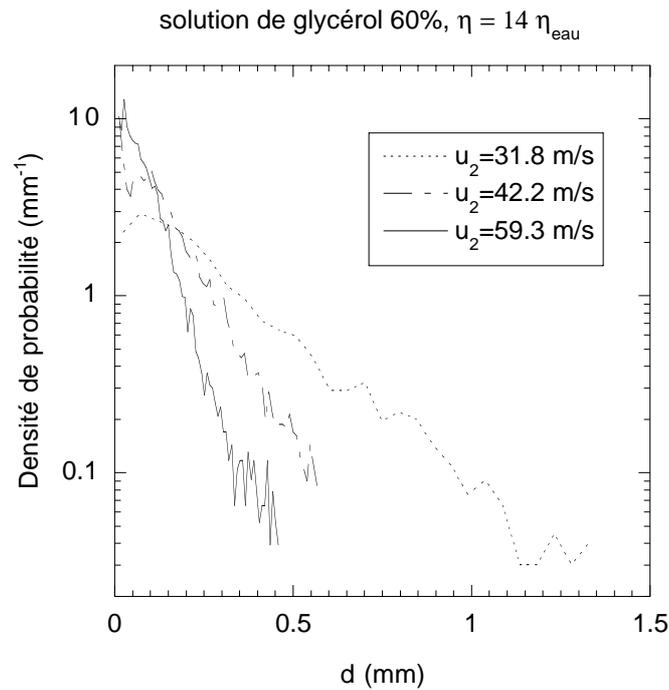


FIG. 4.24: *Distribution des tailles dans le spray pour une solution aqueuse de glycérol.*

La taille moyenne des gouttes dans le spray diminue plus fortement avec la vitesse d'air que pour l'eau (Figure 4.25). Pour le diamètre de brisure des ligaments, la viscosité retarde donc le moment de la brisure et ce d'autant plus que le diamètre des ligaments est petit. Nous exposerons dans le chapitre suivant la conséquence de la viscosité sur la brisure des ligaments et son impact sur les tailles moyennes.

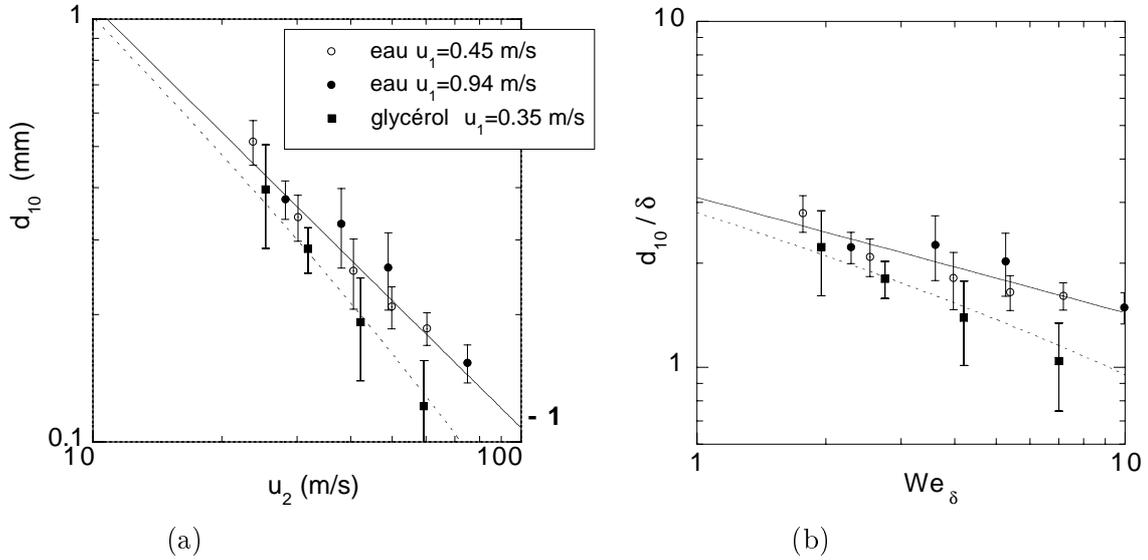


FIG. 4.25: (a) Taille moyenne des gouttes dans le spray avec une solution de glycérol et avec de l'eau, ligne en pointillés : prédiction de l'effet de la viscosité (Eq 5.43). (b) Diamètre moyen adimensionné par  $\delta$ .

#### 4.3.4 Lien entre la brisure ligamentaire et le spray

Les gouttes observ es dans le spray en aval de la région d'atomisation primaire sont toutes issues de la brisure de ligaments. Nous devons donc observer la superposition des brisures. La distribution finale des tailles des gouttes dans le spray  $P(d)$  est alors la composition de la distribution des tailles de ligament  $R(d_0)$  par la distribution des tailles de gouttes issues de chaque ligament  $Q(d/d_0, d_0)$  qui dépend de  $d_0$  *a priori* :

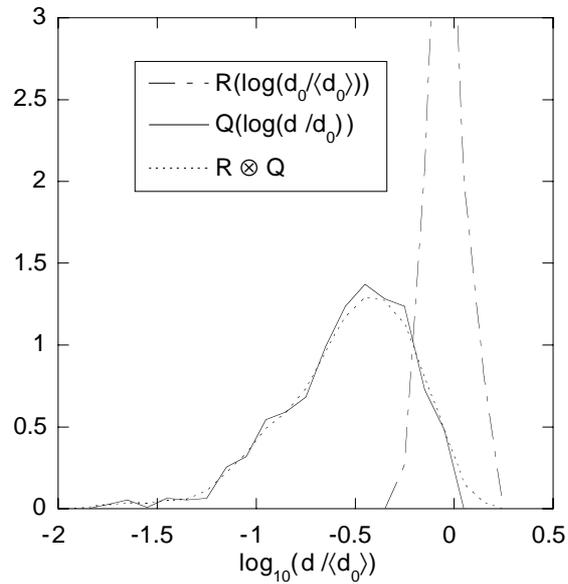
$$P(d) = \int R(d_0) Q\left(\frac{d}{d_0}, d_0\right) \frac{d(d_0)}{d_0}. \quad (4.4)$$

Si l'on suppose que la distribution  $Q(d/d_0)$  ne dépend pas de  $d_0$ , ce que les mesures de la section 4.2 tendent à confirmer, alors la composition se simplifie en :

$$P(d) = \int R(d_0) Q\left(\frac{d}{d_0}\right) \frac{d(d_0)}{d_0}. \quad (4.5)$$

Ceci revient à effectuer une convolution après le changement de variable  $x = \ln(d/\langle d_0 \rangle)$  et  $x_0 = \ln(d_0/\langle d_0 \rangle)$  :

$$P(x) = \int R(x_0) Q(x - x_0) dx_0 \quad (4.6)$$

FIG. 4.26: *Convolution des distributions.*

La distribution des logarithmes de tailles de gouttes rapportées au tailles de leur ligament d'origine,  $Q(\ln(d/d_0))$  est plus large que la distribution des tailles de ligaments  $R(d_0)$  (figure 4.26). C'est donc la distribution de brisure  $Q(d/d_0)$  qui fixe la largeur de la distribution finale  $P(d)$ , ainsi que sa décroissance. La composition des distributions expérimentales selon l'équation 4.6 donne bien une courbe d'allure exponentielle tout comme celle du spray (figure 4.27), avec toutefois une légère convexité.

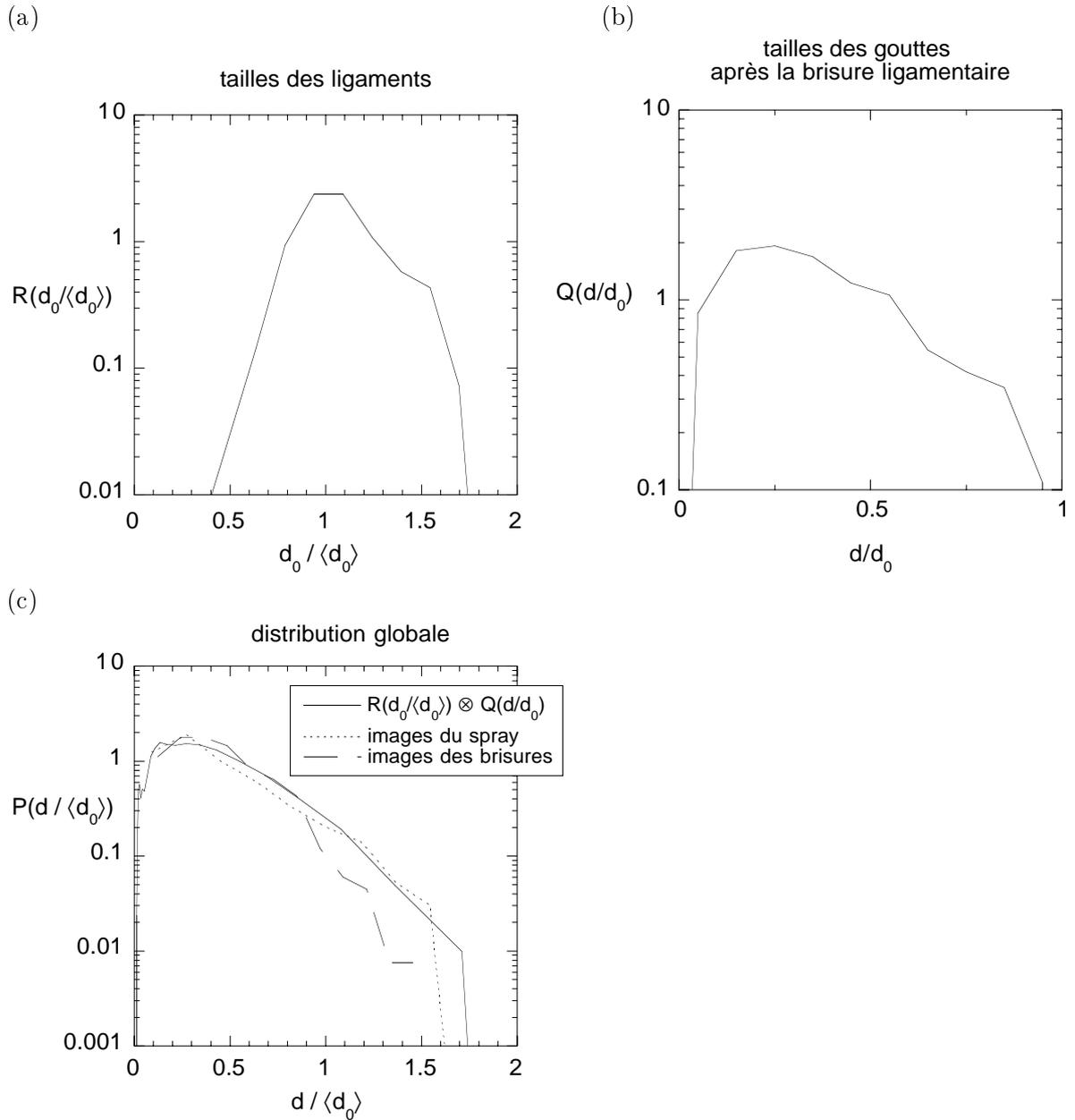


FIG. 4.27: (a) et (b) Exemples de distributions à  $u_2 = 29$  m/s. (c) Trait continu : composition des distributions expérimentales  $Q(d/d_0)$  avec  $R(d_0/\langle d_0 \rangle)$ ; pointillés : distribution obtenue dans un spray à des conditions similaires de vitesse d'air  $u_2 = 28$  m/s,  $u_1 = 0.94$  m/s ; trait discontinu long : distribution des tailles obtenues par analyse des ligaments.

### 4.3.5 Évolution de la distribution avec la distance aval

Les distributions de tailles présentées précédemment ont été mesurées juste en aval de la région de brisure primaire des ligaments, pour observer des gouttes qui ont eu le temps de relaxer vers une forme relativement sphérique. Pour mettre en évidence une éventuelle évolution des distributions de tailles avec la distance, nous avons traité des images prises directement dans la région de brisure des ligaments d'eau (zones A et B de la figure 4.28), puis plus loin en aval (zones D et E) que la région de mesure choisie usuellement (zone C). Les distributions obtenues sont réunies sur la figure 4.29. Le caractère exponentiel de la distribution

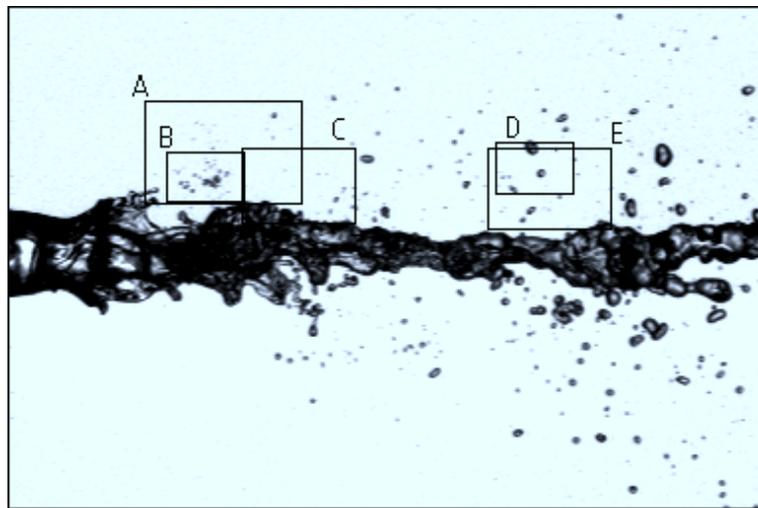


FIG. 4.28: *Zones de mesure des gouttes.*

est conservé mais une légère augmentation du diamètre moyen se produit. Cette augmentation est due à la présence de gros paquets de liquide issus du jet central qui n'ont pas été atomisés sous forme de ligaments par le courant gazeux. Cette augmentation n'est pas due à des coalescences qui n'ont jamais été observées sur les images : les concentrations de gouttes ne sont pas suffisantes aux vitesses étudiées, et les trajectoires sont divergentes. Nous n'avons pas observé non plus de brisure secondaire de gouttelettes sur nos images. Les caractéristiques du spray sont donc fixées dès la brisure.

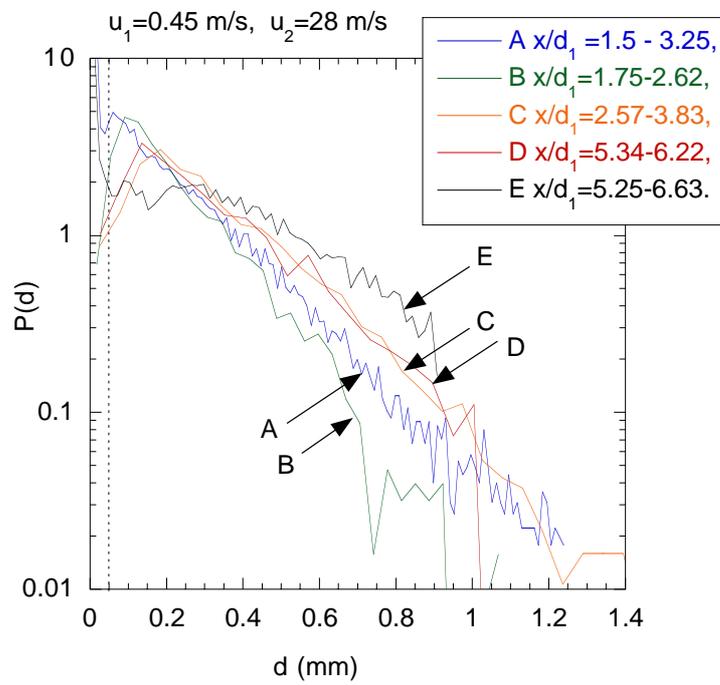


FIG. 4.29: Évolution des distributions de tailles de gouttes avec la distance.

## Chapitre 5

# Dynamique ligamentaire

**N**OUS ALLONS À PRÉSENT nous concentrer sur l'analyse de l'évolution des ligaments, qui sont la forme intermédiaire du liquide dans la formation des gouttes, et dont la brisure conditionne les tailles de gouttes. Les ligaments liquides sont fortement étirés par le courant gazeux : ils deviennent cylindriques avec grand rapport d'aspect. Chaque cylindre est toujours attaché à la surface libre, et terminé par une boule de liquide qui offre une plus grande résistance au courant d'air, et donc maintient le ligament sous tension (figure 5.1), et nous avons vu que ces ligaments sont constamment étirés.

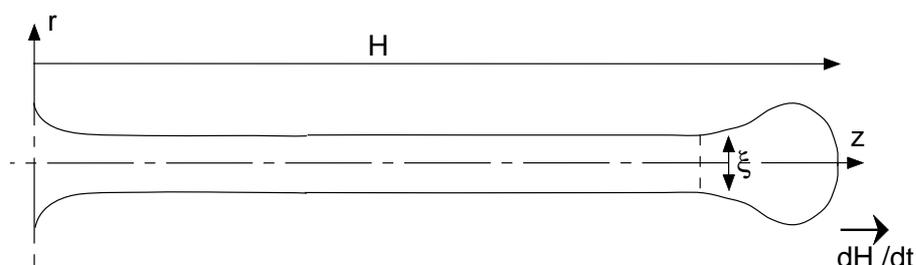


FIG. 5.1: *Etirement du ligament dans le courant d'air.*

Nous examinerons dans ce chapitre la dynamique du ligament étiré et plus particulièrement sa partie cylindrique. Dans une première partie nous poserons les équations du mouvement. Ensuite des expériences d'élongation de ligaments par un capillaire permettront de mettre en lumière les temps caractéristiques d'élongation et les temps de brisure. Nous reviendrons ensuite aux ligaments coaxiaux, et verrons que leur devenir est similaire.

## 5.1 Ligament entraîné par un tube capillaire à partir d'une surface liquide

Pour suivre l'évolution du diamètre d'un ligament étiré avec précision nous avons produit des ligaments étirés à partir d'une surface immobile. Dans les expériences qui suivent l'élongation du ligament liquide dans une atmosphère immobile est déterminée mécaniquement par l'opérateur. L'absence d'effets aérodynamiques nous permettra d'identifier les conséquences de l'étirement sur la contraction des ligaments et leur brisure. Contrairement aux ligaments étirés par la friction du courant gazeux sur leur extrémité, la partie cylindrique est ici étiré par une pipette. Entre la pipette et la partie cylindrique proprement dite il y a un volume de liquide intermédiaire qui transmet la tension du cylindre. L'ensemble forme ce qu'on appelle un pont liquide.

Contrairement aux expériences d'élongation d'un pont lors du détachement d'une goutte pendante de Henderson *et al.* (2000), les expériences que nous allons présenter se placent dans le contexte d'une élongation rapide, pour laquelle les effets inertiels dominent les effets visqueux.

### 5.1.1 Dispositif expérimental

Les ligaments liquides sont produits à partir d'une surface liquide au repos. Lorsque l'extrémité inférieure d'un tube capillaire vertical trempe légèrement sous la surface et que l'on retire *rapidement* le capillaire, un ligament de liquide étiré est formé entre l'extrémité du tube et la surface (figure 5.2). L'étirement a été produit manuellement en tenant directement le tube et en veillant à tirer le plus verticalement possible, ou alors par l'intermédiaire d'un filin passant sur une poulie située à la verticale du tube, lequel dispositif permettait de tirer le tube bien verticalement. L'extrémité supérieure était bouchée, ce qui empêchait la petite portion de liquide déjà présente de tomber du tube. Les tubes avaient pour diamètre 1.4, 5, 7 et 15 mm.

Les liquides que nous avons testés sont de l'eau distillée ( $\sigma = 70$  mN/m), de l'éthanol ( $\sigma = 25$  mN/m), et des huiles silicones ( $\sigma = 20$  mN/m), de viscosité 5 et 20 centiStokes, donc 5 à 20 fois celle de l'eau ou de l'éthanol. Les longueurs et diamètres sont mesurés sur les images obtenues par caméra rapide (figure 5.3). Dans les expériences que nous allons présenter ici le nombre de Reynolds initial varie de 1000 à 300 pour les ligaments d'eau et d'éthanol, et de 20 à 6 pour l'huile silicone la plus visqueuse. Nous sommes donc toujours dans le domaine inertiel.

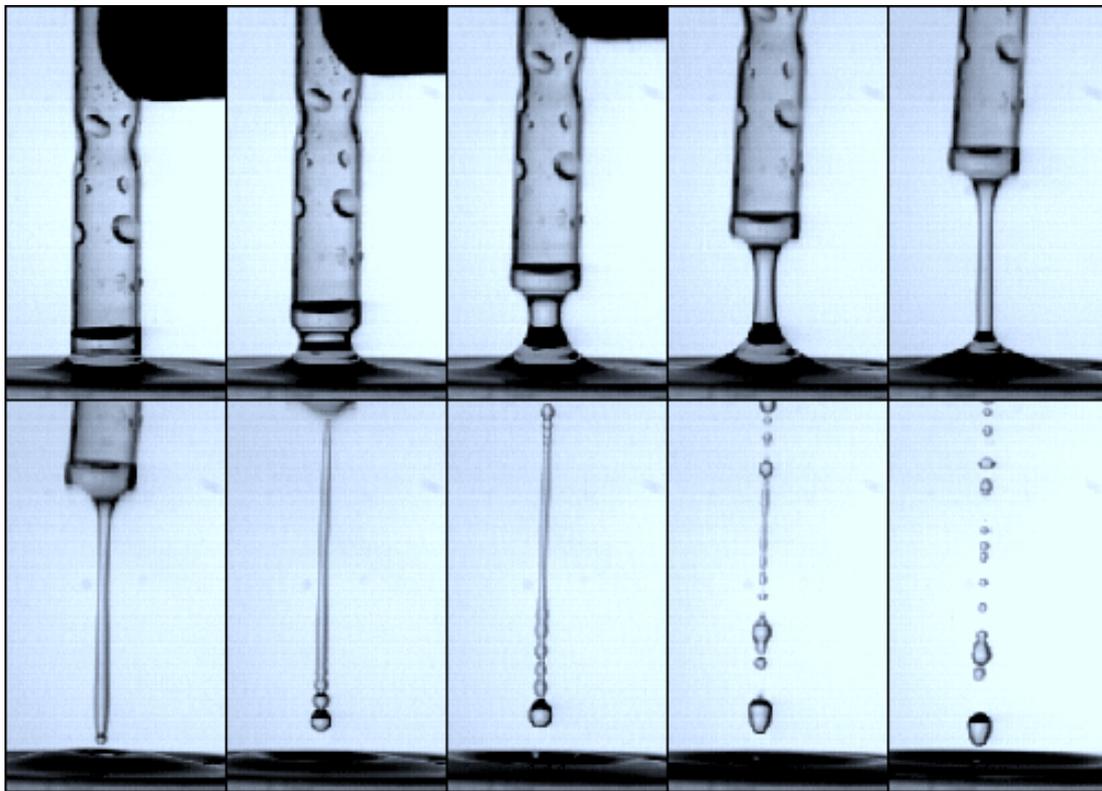


FIG. 5.2: *Etirement d'un ligament d'eau à l'aide d'une pipette de 7 mm de diamètre,  $\Delta t = 4.5$  ms.*

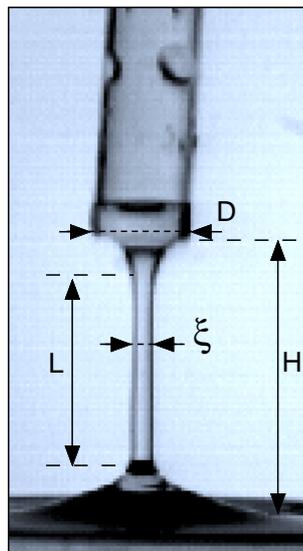


FIG. 5.3: *Elévation  $H$  du tube, longueur de la partie cylindrique  $L$  et diamètre du ligament  $\xi$ .*

### 5.1.2 Etirement de l'extrémité par la capillarité

Nous allons étudier le mouvement de la partie cylindrique attachée à une surface libre (figure 5.4), lorsqu'elle est entraînée par son extrémité. Nous faisons ici abstraction de la partie qui étire le ligament, car c'est la partie cylindrique qui sera sujette à la brisure et donnera les gouttes. Le cylindre a pour diamètre  $\xi(t)$  et pour longueur  $L(t)$ .

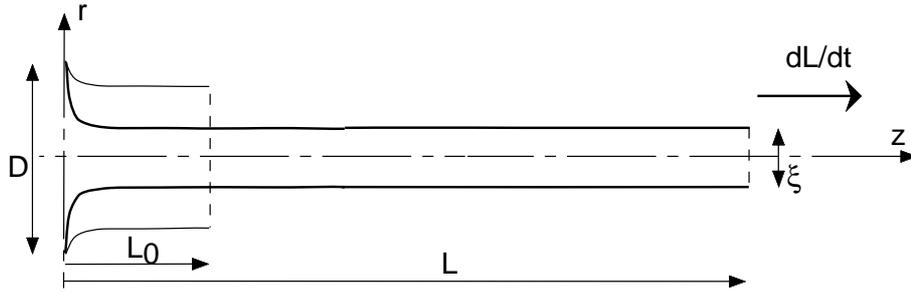


FIG. 5.4: *Etirement d'un ligament à partir d'une base de diamètre  $D$ .*

Nous supposons dans un premier temps que son volume est constant, que nous exprimerons en fonction du diamètre de sa taille en boule,  $V = \pi \xi^2 L / 4 = \pi d_0^3 / 6$ . Nous supposons que le ligament est connecté au réservoir de liquide par une base de diamètre  $D$  qui est le diamètre initial du cylindre  $D$ . Le champ de vitesse du fluide dans le cylindre est purement élongationnel :

$$u_z = \frac{z}{L} \dot{L}, \quad (5.1)$$

$$u_r = -\frac{r}{2L} \dot{L}. \quad (5.2)$$

Ce champ de vitesse est tel que  $\Delta \mathbf{u} = 0$ , de sorte que les termes de frottement visqueux sont nuls : la viscosité n'intervient pas sur l'évolution du mouvement, et les équations de Navier-Stokes se réduisent aux équations d'Euler.

La quantité de mouvement du cylindre selon  $\mathbf{e}_z$  est

$$p_z = \iiint_V \rho_1 u_z dV = \frac{1}{2} \rho_1 V \dot{L}. \quad (5.3)$$

Il est soumis à la force capillaire sur son extrémité, d'intensité  $\sigma \pi \xi$ , alors qu'à sa base le liquide de courbure nulle n'est pas soumis à la force de capillarité. La relation fondamentale de la dynamique donne alors l'évolution de la quantité de mouvement :

$$\frac{1}{2} \rho_1 V \ddot{L} = \sigma \pi \xi. \quad (5.4)$$

Le diamètre est lié à la longueur par la conservation du volume :  $V = \pi d_0^3 / 6 = \pi \xi^2 L / 4$ . L'accélération décroît donc quand  $L$  augmente, proportionnellement à  $\xi / d_0 \sim (L / d_0)^{-1/2}$ . Si nous adimensionnons les longueurs par  $d_0$  et les temps

par  $t_\sigma(d_0) = \sqrt{\rho_1 d_0^3 / \sigma}$  alors les variables adimensionnées donnent  $L = L^* d_0$ , et  $t = t^* t_\sigma(d_0)$ , et :

$$\frac{d^2 L^*}{dt^{*2}} = 4\sqrt{6} \frac{1}{L^{*1/2}}. \quad (5.5)$$

Cette équation différentielle sur  $L^*$  n'a pas de solution analytique simple. Une intégration numérique a donc été réalisée avec comme conditions initiales une longueur  $L(0) = d_0$  et une vitesse  $\dot{L}(0) = U^* v_0$ , avec  $v_0 = d_0 / t_\sigma(d_0)$  la vitesse capillaire. Les courbes d'évolution montrent que si la vitesse de projection est petite devant la vitesse capillaire alors la capillarité impose une décroissance de  $\xi$  qui est d'allure exponentielle (figure 5.5). Si par contre la vitesse initiale n'est pas nulle, la capillarité joue moins initialement et la décroissance de  $\xi$  est plus proche de la solution à vitesse constante constant  $L^* \sim 1 + U^* t^*$  et  $\xi \sim 1 / \sqrt{1 + U^* t^*}$ .

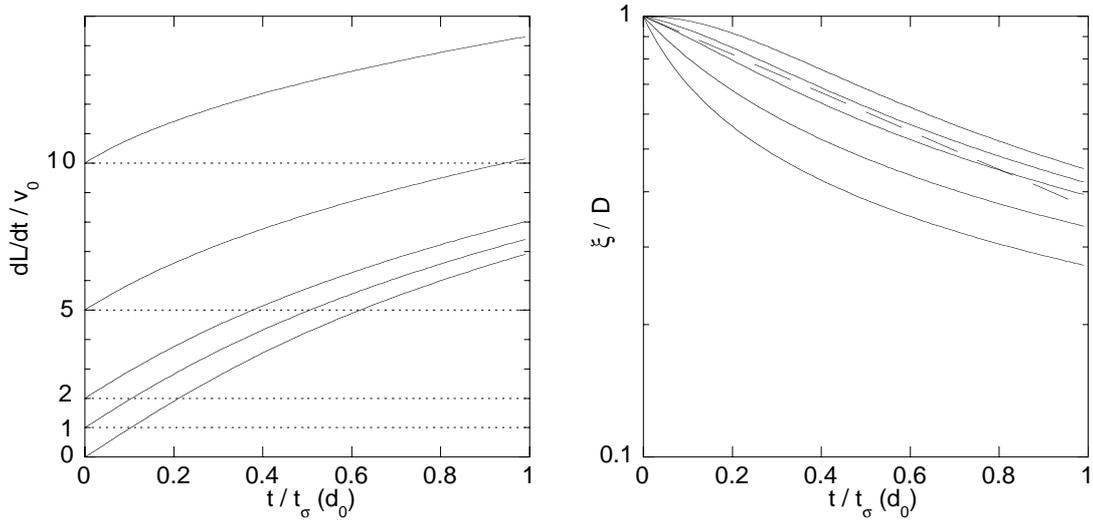


FIG. 5.5: Gauche : Vitesse rapportée à la vitesse capillaire  $v_0 = d_0 / t_\sigma(d_0)$  et Droite : diamètre du ligament étiré par la capillarité. Trait continu : vitesses initiales  $dL/dt(0) = 0, 1, 2, 5$  et 10 fois la vitesse capillaire  $v_0$ . Trait discontinu : approximation par  $\exp(-t/t_\sigma(d_0))$ .

Mais en définitive les taux de décroissance du diamètres, pentes de la courbe dans un diagramme semi-logarithmique, sont similaires. A faible vitesse devant  $v_0$ , le diamètre décroît donc *approximativement* comme :

$$\frac{\xi}{D} \simeq \exp\left(-\frac{t}{t_\sigma(d_0)}\right) = \exp\left(-\left(\frac{D}{d_0}\right)^{3/2} \frac{t}{t_\sigma(D)}\right). \quad (5.6)$$

C'est donc le temps capillaire construit à l'aide du volume  $\pi d_0^3 / 4$  qui donne le taux de décroissance.

### Perte de volume

Nous avons supposé que le volume restait constant lors de l'étirement : nous allons vérifier la justesse de cette supposition en estimant quel est le volume perdu pour un mouvement d'étirement exponentiel prescrit.

Si le fluide s'écoule par la section ouverte de diamètre  $D$ , donc dans le sens opposé à l'extrémité étirée avec une vitesse  $-u_0 \mathbf{e}_z$ , le mouvement d'élongation est modifié, il présente en effet un point de vitesse nulle dans le ligament à une abscisse  $z = l(t)$ . Le champ de vitesse devient :

$$u_z = \frac{z}{L} \dot{L} - u(0) = \frac{z - l}{L} \dot{L}. \quad (5.7)$$

L'équation du mouvement qui se réduit à l'équation d'Euler, puisque le laplacien du champ de vitesse,  $\nu_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}$ , est strictement nul, et que l'écoulement est donc non visqueux :

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (5.8)$$

Nous allons résoudre cette équation en supposant que l'élongation du cylindre est exponentielle :  $L = L_0 \exp(\gamma t)$ . L'intégration de l'Eq. (5.8) entre  $z = 0$  et  $z = l(t)$  donne

$$-l u_0 + \frac{1}{2} u(l)^2 - \frac{1}{2} u_0^2 = -(p(l) - p(0)) = -\frac{2\sigma}{\rho_1 \xi}. \quad (5.9)$$

Si l'on suppose que le point d'arrêt bouge peu par rapport à la vitesse de sortie ( $l \ll u(0)$ ), alors la vitesse de sortie du fluide est

$$u(0) = -2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 \xi}}. \quad (5.10)$$

Le fluide s'écoule par le bas sur une section de diamètre  $D$ , le débit sortant est donc  $Q = u(0) \pi D^2 / 4$ . Tout le volume du ligament au dessus de l'eau est concerné par la contraction, donc le volume qui diminue est  $V = \pi \xi^2 L / 4$ . L'équation de conservation du volume de la colonne liquide,  $dV/dt = Q$ , s'écrit :

$$\frac{d(\xi^2 L)}{dt} = -2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 \xi}} D^2, \quad (5.11)$$

Pour un étirement nul, avec  $\gamma = 0$  et  $L = L_0$ , la solution de l'équation précédente est

$$\frac{\xi}{D} = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^{2/5}, \quad (5.12)$$

avec  $t_1 = \frac{5}{4} \sqrt{\rho_1 D L_0^2 / \sigma}$  proportionné à  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3 / \sigma}$  via le rapport d'aspect  $L_0/D$  initial :  $t_1 = \frac{5}{4} t_\sigma \frac{L_0}{D}$ . Un ligament fin se vide donc moins vite qu'un ligament court. Cette solution est singulière en temps : le ligament non étiré se pince en un temps proportionné à  $t_\sigma$ .

Avec un étirement  $L(t) = L_0 \exp(+\gamma t)$ , la solution devient

$$\frac{\xi}{D} = \left( 1 - \frac{1 - e^{-\gamma t/2}}{t_1 \gamma/2} \right)^{2/5} e^{-\gamma t/2}, \quad (5.13)$$

L'évolution de  $\xi$  est proche de  $\exp(-\gamma t/2)$  lorsque le taux d'étirement est grand comparé au taux capillaire ( $\gamma t_1 \gg 1$ ). L'on retrouve par contre la contraction en  $(t_b - t)^{2/5}$  lorsque le taux d'étirement est très faible ( $\gamma t_1 \ll 1$ ), voir figure 5.6a. Le volume décroît aussi moins vite avec l'étirement : nous voyons que la contraction est dominée par l'évolution de  $L$ , même si la pression de Laplace augmente singulièrement lorsque  $\xi$  tends vers 0 (figure 5.6b). Le moment singulier où le volume tends vers 0, moment de brisure, est donc retardé par l'étirement.

Dans le cas d'un ligament étiré par la force capillaire même, le taux d'étirement est  $\gamma \simeq 1/t_\sigma(d_0)$ , temps calculé avec le volume du ligament, et  $\gamma t_1 = \frac{5}{6} \left(\frac{d_0}{D}\right)^{3/2}$  dépend seulement de la géométrie initiale.

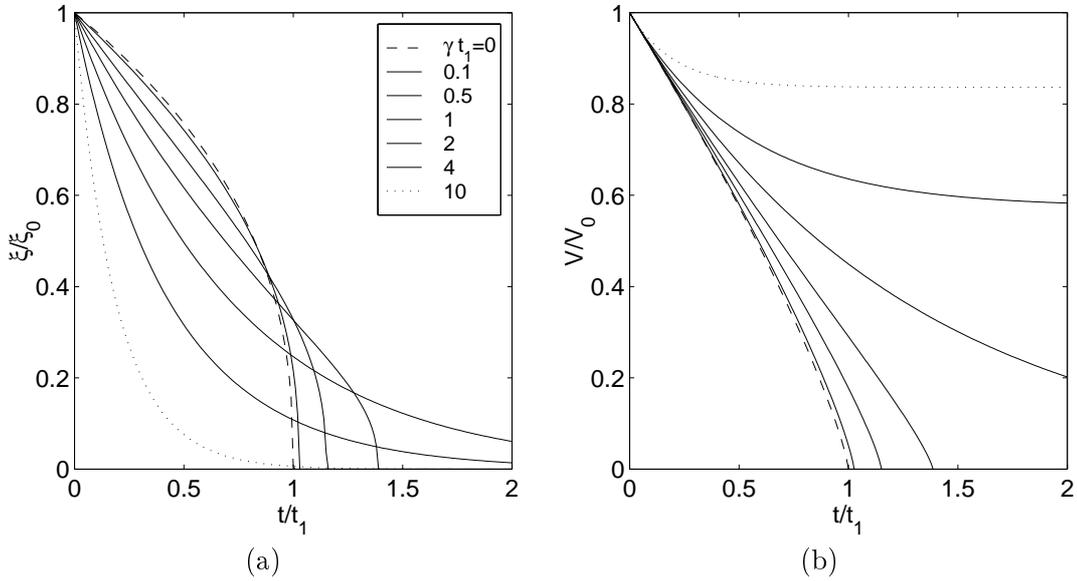


FIG. 5.6: (a) Effet d'une variation exponentielle de la longueur  $L = L_0 \exp(\gamma t)$  sur le diamètre du ligament liquide, pour des taux d'élongation  $\gamma t_1 \sim \gamma t_\sigma$  croissants. (b) Variation du volume du ligament,  $\xi^2 L$ , avec le temps.

### 5.1.3 Etirement quasi-statique

Des expériences réalisées en étirant *très lentement* un capillaire montrent que lorsque le ménisque est amené à une altitude suffisante (ici  $H/D \simeq 0.5$ ) il se contracte avec une vitesse croissante (figure 5.7 et 5.8). Se forme alors une petite goutte.

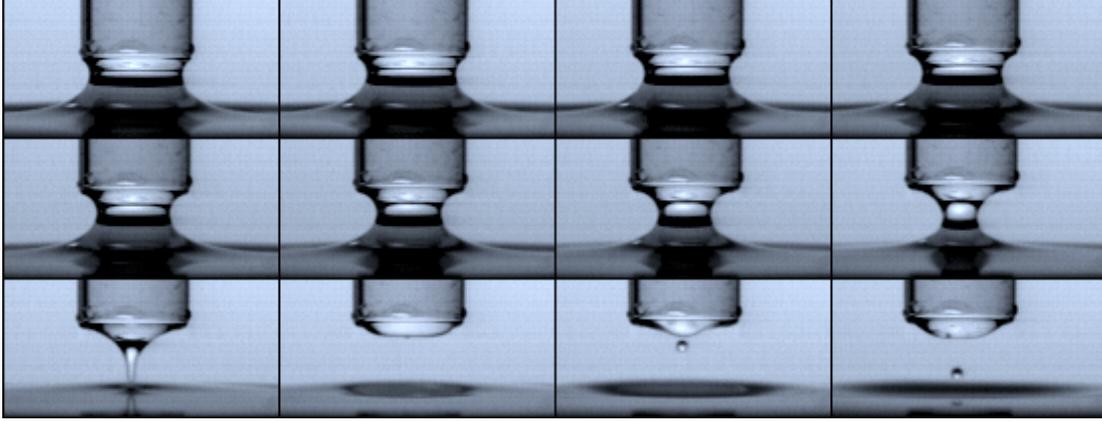


FIG. 5.7: *Contraction d'un ligament allongé de manière quasi-statique. Eau,  $D = 7$  mm,  $\Delta t = 10.7$  ms.*

### Stabilité

Nous allons tout d'abord analyser les conditions de contraction du pont liquide : en effet des petites élévations de la pipette résultent en un pont liquide stable. Considérons la surface libre attachée à la pipette de diamètre  $D$  lorsqu'elle est maintenue *immobile* à une altitude  $H$ . D'après l'équation de Laplace la pression dans le liquide est

$$P = P_0 + \sigma\kappa, \quad (5.14)$$

avec  $P_0$  la pression atmosphérique extérieure, et  $\kappa$  la courbure locale de la surface qui est fonction des rayons de courbures  $R_1$  et  $R_2$  des plans principaux  $\kappa = 1/R_1 + 1/R_2$ . Or à l'équilibre, l'équation de la statique donne :

$$P = P(z = 0) - \rho_1 g z, \quad (5.15)$$

A l'altitude 0, la surface libre est plane à l'infini et donc la pression de Laplace est nulle,  $P(z = 0) = P_0$ . La courbure est donc fonction de l'altitude, ce qui s'écrit en variables adimensionnées par  $r_0 = D/2$  :

$$\kappa r_0 = \frac{1}{R(1 + (R')^2)^{1/2}} - \frac{R''}{(1 + (R')^2)^{3/2}} = -Bo Z \quad (5.16)$$

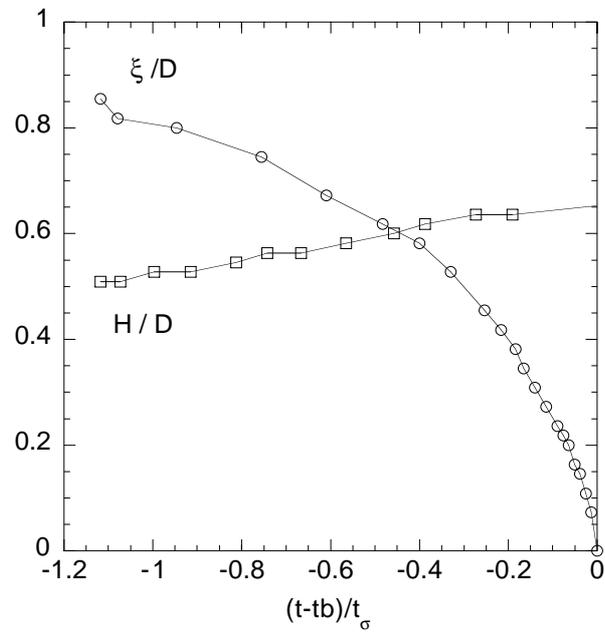


FIG. 5.8: Evolution du diamètre du ligament  $\xi$  et de sa hauteur  $H$ .

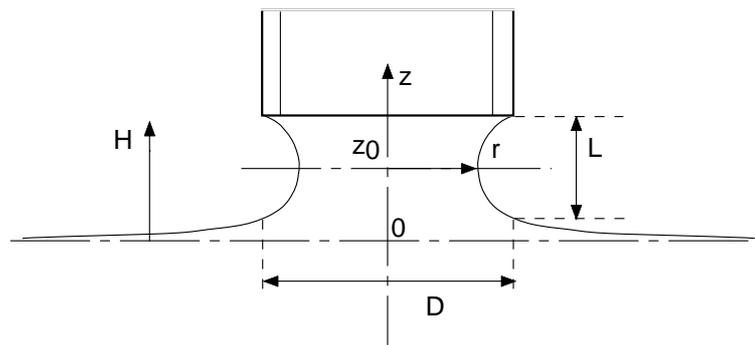


FIG. 5.9: Pont liquide avec surface libre.

avec  $R = r/r_0$  et  $Z = z/r_0$  et  $R' = dR/dZ$ . Le nombre de Bond  $Bo = \rho_1 g r_0^2 / \sigma$  estime le rapport entre l'ordre de grandeur de effets de pesanteur à l'échelle  $r_0$ ,  $\rho_1 g r_0$ , et les effets de tension de surface à cette échelle,  $\sigma/r_0$ . Si l'on utilise la longueur capillaire, définie par la longueur pour laquelle effets capillaires et visqueux sont égaux,  $l_\sigma = \sqrt{\sigma/\rho_1 g}$ , le nombre de Bond est :  $Bo = (r_0/l_\sigma)^2$ . Avec de l'eau la longueur capillaire vaut 2.67 mm. Pour les plus petits capillaires de 1.4mm le nombre de Bond vaut 0.0686, alors que pour les capillaires de 15 mm, il vaut 7.8. Nous pouvons négliger la gravité dans le cas des petits capillaires et la courbure est donc nulle, mais pas dans le cas des grands diamètres, où elle diminue avec l'altitude.

La solution de l'équation de surface  $\kappa = 1/R_1 + 1/R_2 = 0$ , dont les courbures des plans principaux sont opposées est une *caténoïde*, chaînette de révolution, d'équation :

$$\xi(z) = cD \cosh\left(\frac{1}{c} \frac{z - z_0}{D}\right) \quad (5.17)$$

avec  $c$  une constante qui est fixée par les conditions aux limites,  $z_0$  est l'altitude du plan de symétrie de la caténoïde. On peut remarquer que cette courbe ne présente pas de tangente horizontale  $\xi' \rightarrow \infty$  à une altitude finie de sorte que cette solution ne peut décrire la surface près de  $z = 0$ . La gravité doit nécessairement être prise en compte pour décrire l'infléchissement de la surface à cette altitude (voir Huh & Scriven, 1969; Padday, 1970, pour une résolution numérique de l'équation (5.16)). Par contre la caténoïde présente une bonne approximation de la solution sur un intervalle  $L$  (voir figure 5.9) défini comme la distance entre les deux points  $\xi = D$ . Padday (1970) montre que lorsque le diamètre minimal de la surface est petit devant la longueur capillaire  $\xi_{min}/l_c \ll 1$  la forme du profil, est très proche de la caténoïde.

On peut montrer que la caténoïde existe (*ie* il existe une valeur de  $c$  telle que  $\xi(z = \pm L/2D) = D$  entre deux disques de diamètre  $D$  séparés de  $L$  seulement lorsque  $L/D < 0.6627$ . Au dessus de cette valeur le pont liquide est donc instable (figure 5.10).

Le volume compris dans l'enveloppe pour cette valeur critique, qui est le volume maximal soulevé, est alors de  $V = 0.2633D^3$ , ce qui donne, rassemblé en boule, un diamètre de  $0.79D$ . Le volume est donc lié au diamètre de pipette seulement. La gravité provoque une rupture du pont à des altitudes plus faibles, et ce d'autant plus que le nombre de Bond  $Bo$  est grand (Padday & Pitt, 1973). Lorsque  $Bo$  tend vers l'infini le pont se brise en effet à  $L = 2l_\sigma$ , et le volume soulevé est donc inférieur pour les gros capillaires.

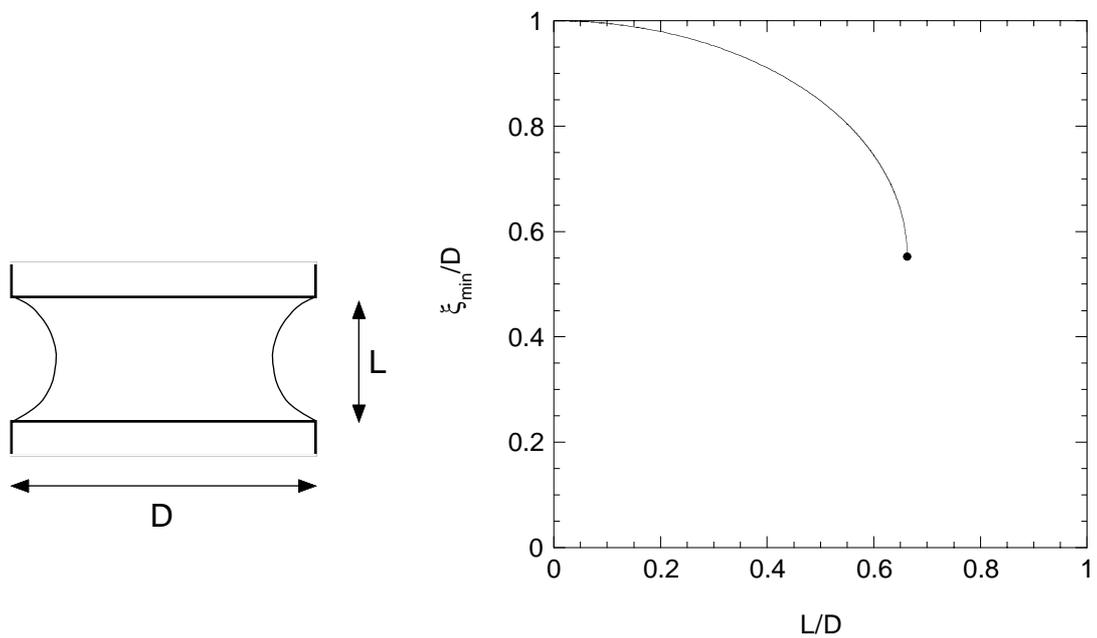


FIG. 5.10: Gauche : La surface libre est une caténoïde en gravité nulle Droite : Diamètre au centre de la caténoïde en fonction de l'écartement des disques. Point : diamètre critique de stabilité de coordonnées  $L/D \simeq 0.6627$  et  $\xi_{\min}/D \simeq 0.5524$ .

### Contraction

Nous avons vu dans la première partie que la contraction d'un volume  $\xi^2 L$  menait à sa vidange avec une vitesse  $2\sqrt{\sigma/\rho_1\xi}$  par une section de surface  $\pi D^2/4$ . Le diamètre évolue alors comme  $\xi/D \sim (1 - t/t_\sigma)^{2/5}$  d'après l'équation (5.12). Ce comportement est bien celui révélé par l'évolution de  $\xi$  en fonction du temps avant la brisure (figure 5.11), pour les temps initiaux. Cette dépendance avait été observée lors de la simulation de la brisure d'un film mince, stabilisé par un surfactant, tendu entre deux anneaux à une distance hors équilibre (Chen & Steen, 1997), lors de la période de pincement. Cette situation est similaire à celle pont liquide, mis à part que l'inertie du fluide intérieure et du fluide extérieur sont à prendre en compte. On peut remarquer que la même analyse pour le volume d'air intérieur, chassé par le film et s'écoulant par les anneaux, donne les mêmes équations d'évolution du volume.

Très vite la modélisation du volume par un cylindre de hauteur  $H$  ne tient plus car le cylindre s'est considérablement pincé (figure 5.7). Le volume qui se contracte ne dépend plus des conditions aux limites : la seule longueur significative est celle du diamètre courant  $\xi(t)$ . Le volume contracté est donc  $V \sim \xi^3$  et la section par lequel il se vide comme  $S \sim \xi^2$  : nous sommes dans une situation d'autosimilarité de l'écoulement (Eggers, 1997). La conservation du volume implique à présent :

$$\frac{d\xi}{dt} \sim -\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1\xi}}, \quad (5.18)$$

et une évolution du diamètre courant en :

$$\frac{\xi}{D} \sim \left(1 - \frac{t}{t_\sigma}\right)^{2/3}, \quad (5.19)$$

avec  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3/\sigma}$ . Nous remarquons que la dépendance au paramètre extérieur  $L$  a disparu. Les simulations de Chen & Steen (1997) montrent aussi cette dépendance des distances avec le temps à la puissance  $2/3$  juste avant la brisure pour un film.

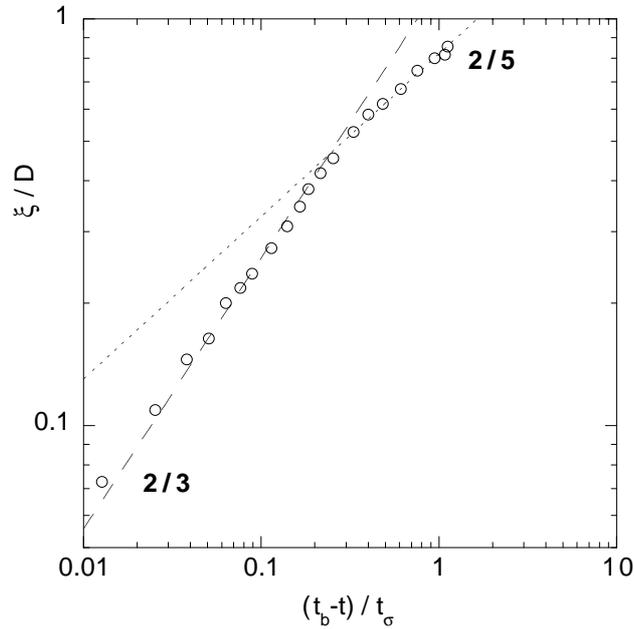


FIG. 5.11: *Épaisseur du ligament en fonction de l'écart de temps avant la brisure  $t_b - t$  adimensionné par  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3 / \sigma}$ . Lignes : régressions par des lois de puissance  $\xi/D = (t_b - t / t_\sigma)^\alpha$ , avec  $\alpha = 2/5$  et  $\alpha = 2/3$ .*

#### 5.1.4 Elongation

Lorsque l'on étire rapidement le ligament à l'aide du capillaire, le diamètre diminue rapidement, et une partie cylindrique apparaît.

La longueur caractéristique de l'expérience est le diamètre  $D$  du tube, qui est aussi le diamètre initial du ligament. L'évolution temporelle est quant à elle liée à deux paramètres imposés : la capillarité qui induit les contractions de diamètre par instabilité de type Plateau-Rayleigh et l'étirement des extrémités séparées de  $H(t)$ . Ces paramètres sont caractérisés par le temps capillaire  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3 / \sigma}$ , inverse du taux de croissance de l'instabilité de Rayleigh, et par le temps d'augmentation de la hauteur  $t_H = 1 / \frac{d \ln(H/D)}{dt}$ . La viscosité du liquide intervient à travers le nombre de Reynolds  $Re = \sqrt{D\sigma} / \rho_1 \nu_1^2$ , rapport du temps de diffusion visqueux  $t_\nu = D^2 / \nu_1$  et du temps capillaire  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3 / \sigma}$ . L'influence de la pesanteur sur l'inertie du liquide est négligeable, le nombre de Froude  $Fr = gh / (dH/dt)^2$  est en effet toujours petit devant 1. Nous ne tiendrons pas non plus compte de l'atmosphère environnante.

### Cinétique

Le déplacement du tube impose une vitesse d'élongation  $\frac{d(H/D)}{dt}$  légèrement croissante (exemple figure 5.12). La vitesse d'élévation initiale de la pipette est de l'ordre de 2 à 6 fois la vitesse caractéristique  $D/t_\sigma$ . La portion de liquide cylindrique  $L$  suit une croissance différente: en effet elle croît relativement à  $H$  jusqu'à la rejoindre, ce qui crée une croissance plus lente au début puis un fléchissement rapide vers la même asymptote. La différence des longueurs tient dans les volumes situés aux extrémités du cylindre qui s'allongent eux aussi.

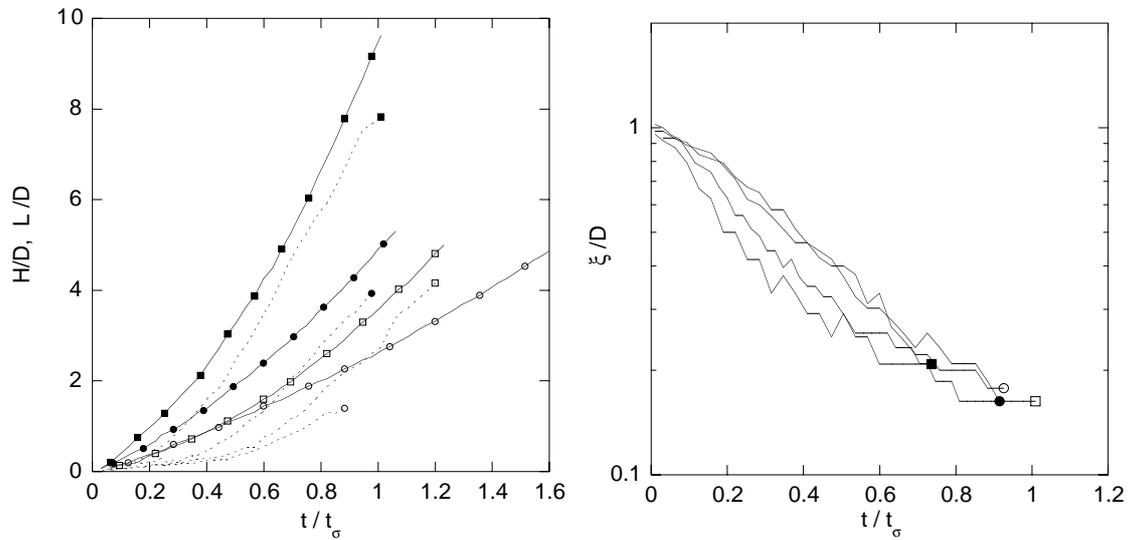


FIG. 5.12: *Gauche* : Hauteur  $H$  du cylindre en fonction du temps et longueur  $L$  de la partie cylindrique, la brisure est pointée par un symbole. Symboles : différentes élongations. Eau,  $D = 5$  mm. *Droite* : Épaisseur minimale  $\xi$  du cylindre en fonction du temps. Eau,  $D = 5$  mm.

L'épaisseur  $\xi$  diminue autour d'une exponentielle décroissante avec le temps (figure 5.12): le taux de décroissance est donné par le temps capillaire construit sur le diamètre *extérieure* du tube mouillé  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3 / \sigma}$ , de sorte que l'épaisseur varie selon :

$$\frac{\xi}{D} \sim \exp\left(-\alpha \frac{t}{t_\sigma}\right). \quad (5.20)$$

Ce taux de décroissance dépend peu de l'étirement imposé par  $H(t)$  quand les vitesses initiales sont faibles devant la vitesse capillaire, comme la laissait prévoir la modélisation de la première partie. Pour les étirement plus fort la valeur de  $\xi$  est inférieure à l'équation (5.20) mais ça n'était pas le cas des ligaments présentés ici.

En effet, d'après les résultats expérimentaux présentés sur la figure 5.12, la vitesse  $\frac{dH}{dt}$  peut varier d'un facteur 2, la décroissance de  $\xi(t)$  est alors plus rapide, mais les taux de décroissance sont comparables pour toutes les vitesses lorsqu'approche de la brisure. Pour l'ensemble des conditions expérimentales, les graphes d'évolution du diamètre avant la brisure suivent une décroissance à taux constant, taux similaires près de la brisure malgré des différences initiales.

Avec le plus grand diamètre extérieur de 15 mm (13.6 intérieur) la chute du liquide était inévitable: il s'approche en effet de la longueur capillaire  $l_c = 2\pi\sqrt{\sigma/\rho_1 a}$  (elle vaut 16.8 mm avec de l'eau et l'accélération de la pesanteur  $a = g$ ) qui donne la longueur d'onde minimale instable au sens de l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour une surface plane. Cette longueur d'onde diminue car l'accélération de la pipette dirigée vers le liquide accentue les forces d'inertie, dirigées vers le bas dans le référentiel du liquide.

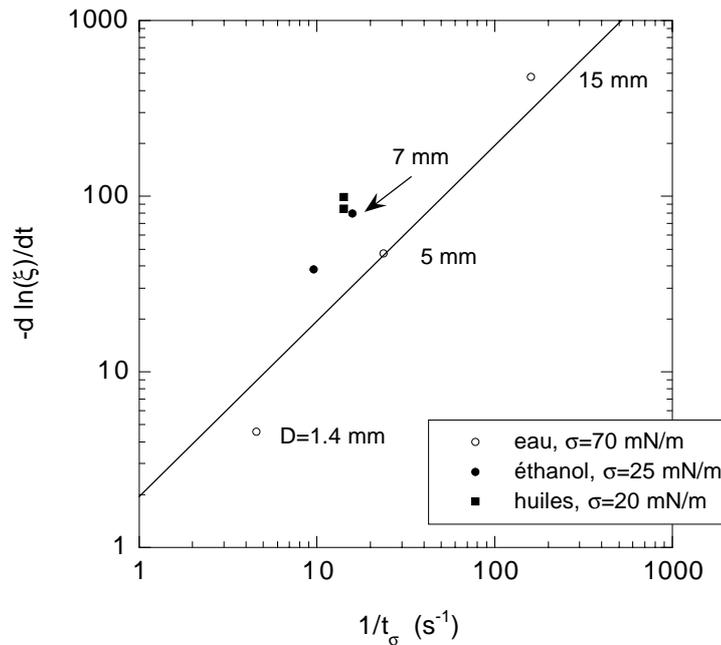


FIG. 5.13: Taux de décroissance du diamètre des ligaments avant leur brisure, pour différents diamètres et différentes solutions. Ligne :  $2/t_\sigma$ .

Mais d'après nos mesures l'épaisseur de ligament  $\xi$  décroît de manière différente selon les diamètres de pipette et les liquides utilisés, pour des étirements  $H(t)$  semblables. La partie cylindrique n'est donc pas étirée avec le taux imposé par la hauteur  $H$ . Le taux de décroissance de  $d \ln \xi / dt$  croît en effet linéairement avec le taux capillaire  $1/t_\sigma$  (figure 5.13). Les taux rapportés au taux capillaire,  $\alpha = d \ln \xi / dt \times t_\sigma$  sont donnés dans la table 5.1, page 141. Ils sont tous d'environ 2 fois le taux capillaire pour les ligaments d'eau et de 3 fois ce taux dans le cas de l'éthanol et des huiles silicones.

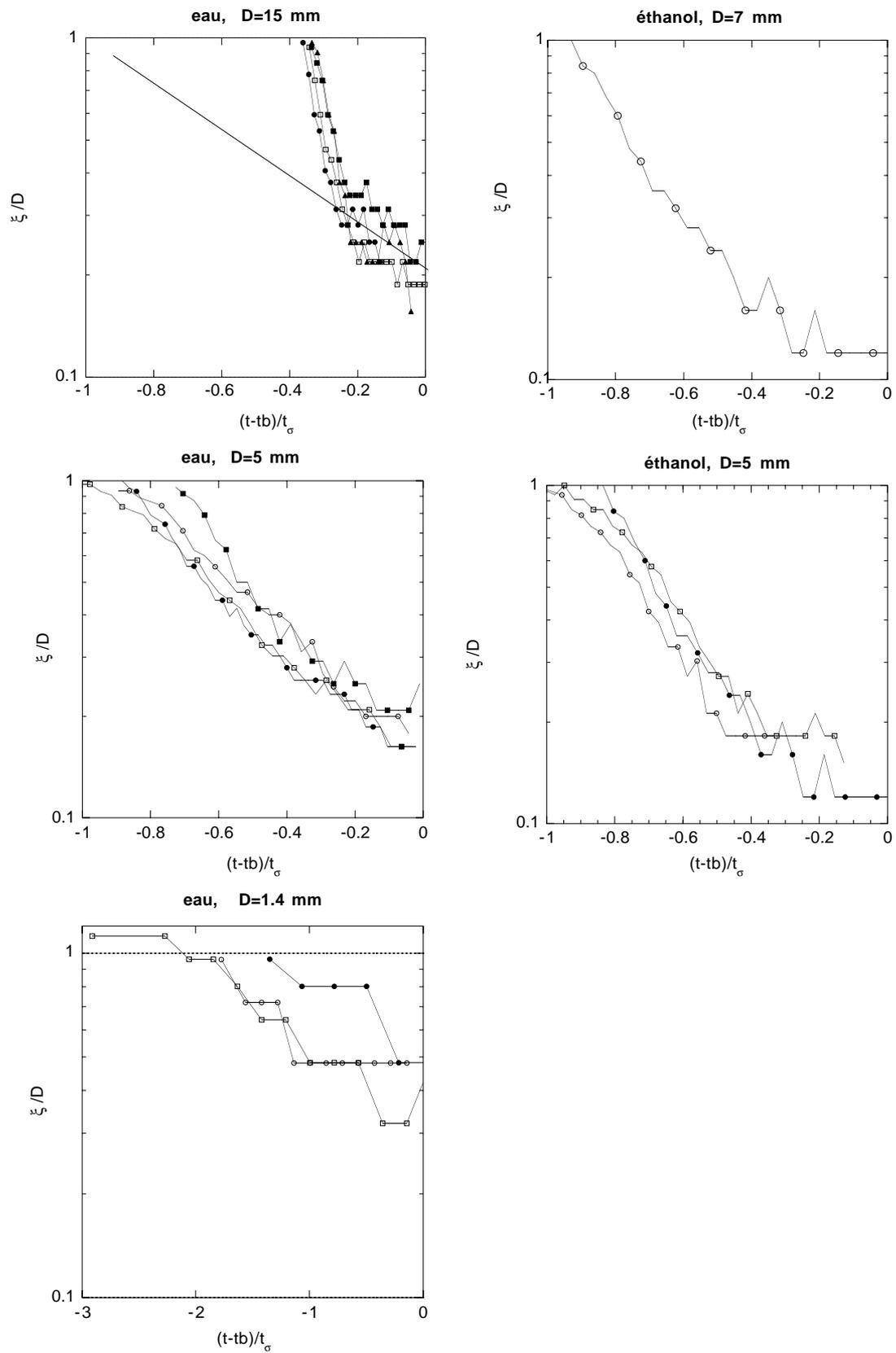


FIG. 5.14: *Épaisseur minimale  $e$  du cylindre en fonction du temps rapporté à  $t_\sigma$  (eau et éthanol).*

Tracé en fonction du temps adimensionné par le temps capillaire les évolutions de  $\xi$  sont semblables pour des diamètres différents (figure 5.14).

Pour comparer l'influence relative de la capillarité et de l'allongement de  $H$ , traçons le rapport de leurs temps caractéristiques (figure 5.15). Si le temps capillaire  $t_\sigma$  est toujours plus long que le temps d'allongement, en revanche le temps capillaire basé sur le diamètre courant  $\xi(t)$  en lieu de sa valeur initiale  $D$  décroît très vite. Dès  $t = 0.4t_\sigma$ , il est plus petit que le temps d'allongement : l'influence de l'étiement imposé s'estompe et ne reste que la capillarité pour contrôler le mouvement. L'étiement fixe donc plutôt l'évolution initiale.

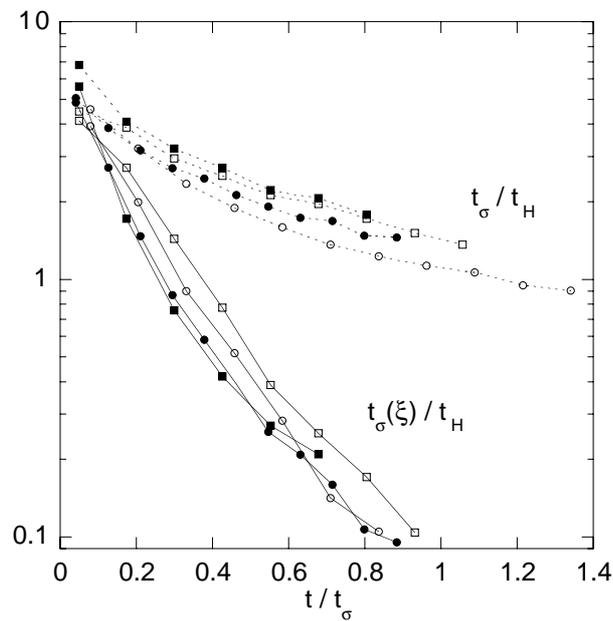


FIG. 5.15: Rapport des temps caractéristiques de croissance capillaire  $t_\sigma$  et d'allongement  $t_H = 1/\frac{d(H/D)}{dt}$ . Ligne :  $t_\sigma(\xi) = \sqrt{\rho_1 \xi^3 / \sigma}$ , pointillés :  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 D^3 / \sigma}$ . Eau,  $D = 5$  mm.

### Volume de la partie cylindrique

La partie cylindrique évolue à volume constant comme le révèle la mesure de la longueur cylindrique  $L$  sur les images, qui permet de connaître le volume par  $V_{cyl} = \frac{\pi}{4} \xi^2 L$  (exemple figure 5.16).

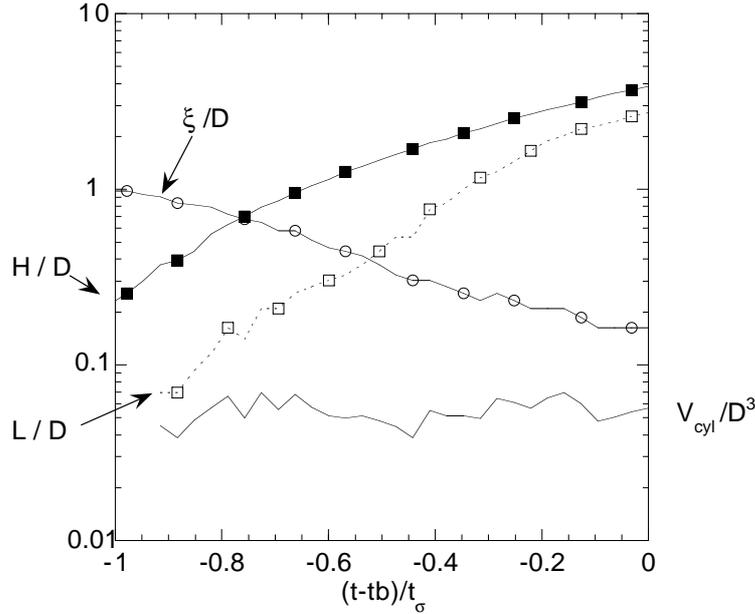


FIG. 5.16: Volume de la partie cylindrique :  $V_{cyl} = \frac{\pi}{4} \xi^2 L$ .

Exprimé en termes du diamètre  $d_0$  de la sphère de même volume tel que  $V_{cyl} = \frac{\pi}{6} d_0^3$ , le volume de cette partie a pour taille  $d_0^{cyl}$ , qui vaut en général près de  $0.5D$  (table 5.1). Le volume entraîné est dépendant de l'étirement imposé (figure 5.17), dans la gamme des vitesses initiale de l'expérience.

L'analyse de l'étirement d'un volume de taille  $d_0$  a montré que le taux de décroissance de  $\xi$  qui en résulte est  $1/t_\sigma(d_0)$  lorsque la vitesse initiale  $dH/dt(0)$  n'est pas trop grande, comparée à la vitesse capillaire  $v_0 = \sqrt{\sigma/\rho_1 d_0}$ . Ici  $dH/dt(0)/v_0$  est au maximum de 4 donc l'approximation  $\xi/D \simeq \exp(-t/t_\sigma(d_0))$  est valable. Nous avons exprimé le taux de décroissance par  $\alpha = d \ln \xi / dt \times t_\sigma$ , or selon l'équation (5.6)  $\alpha$  est le rapport  $(D/d_0)^{3/2}$ . D'après les mesures de  $d_0$  ce rapport vaut 2.8, qui est proche des taux de décroissance observés.

#### 5.1.5 Temps de brisure

La contraction n'est plus singulière pour un cylindre étiré, il n'arrive pas un moment où le diamètre minimal tend vers 0. Par contre les parties qui sont aux extrémités sont peut étirées et se contractent de la même façon qu'un pont liquide

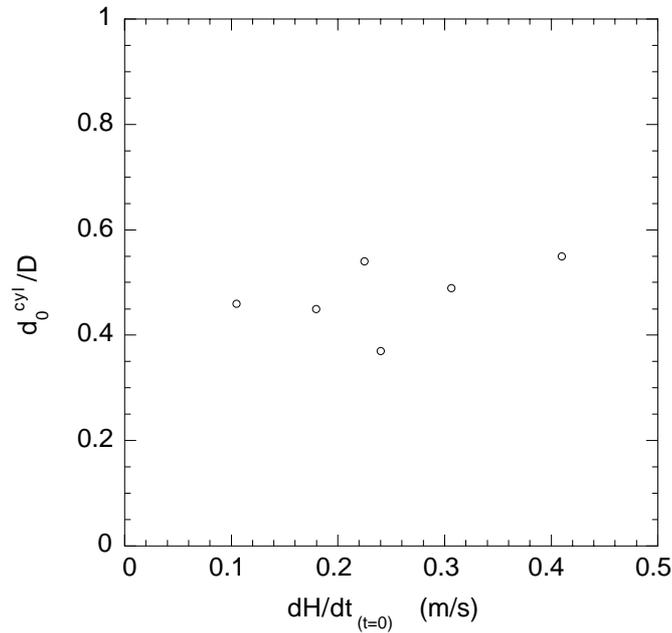


FIG. 5.17: Taille de la partie cylindrique en fonction de la vitesse initiale de la pipette. Ethanol  $D = 5$  mm.

soutenu par un capillaire immobile. Ce qui explique que la première brisure se produise toujours aux *extrémités* de la partie cylindrique du ligament, soit du côté du réservoir de liquide, soit du côté du tube. Les processus de brisure sont de plus fondamentalement dissymétriques : la forme du jet à la brisure est nécessairement celle d'un cône de faible angle d'un côté du point de brisure, et celle d'un cône de grand angle de l'autre côté, d'après la solution d'autosimilarité de (Eggers, 1997). Ce qui explique que le pont ne peut se briser symétriquement en son milieu, et que les brisures se forment près des extrémités qui forment un cône de grand angle de part et d'autre de la partie cylindrique. Ce même argument éclaire la formation de gouttes satellites lors de la brisure de Plateau-Rayleigh d'un jet non étiré (page 14).

Le temps de brisure est donc déterminé par le temps capillaire  $t_\sigma$  calculé avec le diamètre  $D$  des extrémités. Le ligament se brise ensuite dans un temps très court, un petit moment après la première brisure. Le moment de la première brisure dans la partie cylindrique est proche de  $t = 1.0 t_\sigma$  (figure 5.18 et table 5.1) excepté pour le diamètre de 15 mm, qui est sujet à des ondulations de surface dès le début de l'étirement. Le capillaire de 1.4 mm produit aussi des temps plus longs : il entraîne en effet plus de liquide, et le diamètre initial semble plus grand que  $D$  (figure 5.14). La durée de la brisure totale du ligament est au maximum du tiers du temps capillaire.

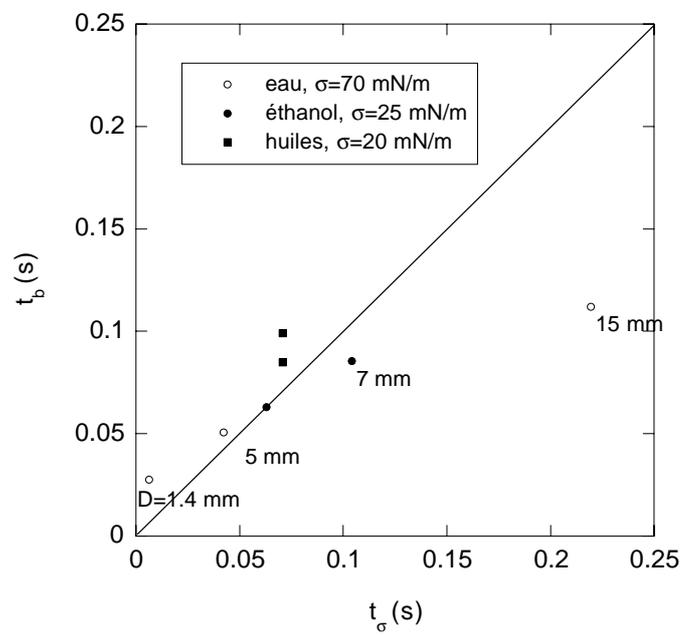


FIG. 5.18: Temps de première brisure de la partie cylindrique en fonction du temps capillaire, pour différentes conditions de diamètre et de tension de surface.

Liquide	$D$ (mm)	$\alpha$	$d_0^{cyl}/D$	$d_0^g/D$	$\langle d/D \rangle$	$\text{ér}(d/D)$	$t_b/t_\sigma$	$\Delta t_b/t_\sigma$
eau	15	-1.6	0.6	0.51	0.24	0.46	0.51	0.19
eau	5	-2.1	0.5	0.51	0.25	0.48	1.2	0.21
eau	1.4	-2.0	1.3	1.53	1.0	0.30	1.5	4.4
éthanol	7	-2.9	0.4	0.33	0.21	0.40	0.4	0.82
éthanol	5	-3.0	0.3	0.62	0.21	0.38	0.5	1.0
PDMS 5 cSt	5	-3.2	–	0.42	0.16	0.31	1.2	0.3
V20 20 cSt	5	-2.9	–	0.39	0.17	0.41	1.4	0.22

TAB. 5.1: *Elongation*: taux de contraction du diamètre  $\alpha = \frac{d \ln(e)}{dt}/t_\sigma$ , et « taille »  $d_0^{cyl}$  de la partie cylindrique. *Brisure*: taille  $d_0^g$  du volume total des gouttes, taille moyenne des gouttes et écart-type relatif, moment  $t_b$  de la première brisure centrale et durée de la brisure totale du ligament.

### 5.1.6 Distribution des tailles de gouttes

Le volume total des gouttes, exprimé par sa taille en boule  $d_0^g$  dans la table 5.1, est proche du volume du cylindre  $d_0^{cyl}$  estimé d'après sa longueur et son diamètre, ce qui conforte la validité de nos mesures de diamètres  $\xi(t)$ .

Contrairement à la brisure de Plateau-Rayleigh d'un jet non étiré (figure 2.26), la dispersion des diamètres est favorisée par l'étirement (figure 5.19). La taille moyenne est cependant toujours dans le même rapport avec  $D$ , de l'ordre de 0.24 pour l'eau (hormis l'exception du diamètre 1.4 mm qui n'a pas été tracé), 0.21 pour l'éthanol et 0.16 pour les huiles silicones. Nous avons apposé aux courbes des régressions par une fonction *Gamma* à un paramètre, nous la présenterons plus bas.

La taille de brisure varie peu selon les conditions:  $\xi_b \simeq 0.2D$  (d'après la figure 5.14). Puisque la brisure se produit à  $t_b \simeq t_\sigma$ , le diamètre du ligament à la brisure,  $\xi_b$ , est :

$$\xi_b/D \sim \exp(-t_b/t_\sigma(d_0)) \sim \exp(-(D/d_0)^{3/2}). \quad (5.21)$$

Pour  $d_0 = 0.5D$ , on trouve  $\xi_b/D = 0.068$ , ce qui est inférieur aux tailles de brisure observée de 0.1 à 0.2. Par contre, la taille des gouttes observée est bien de l'ordre de  $d_{10} \simeq 1.89\xi_b = 0.2D$  à  $0.4D$ . Nous verrons plus loin que l'étirement modifie cette prédiction.

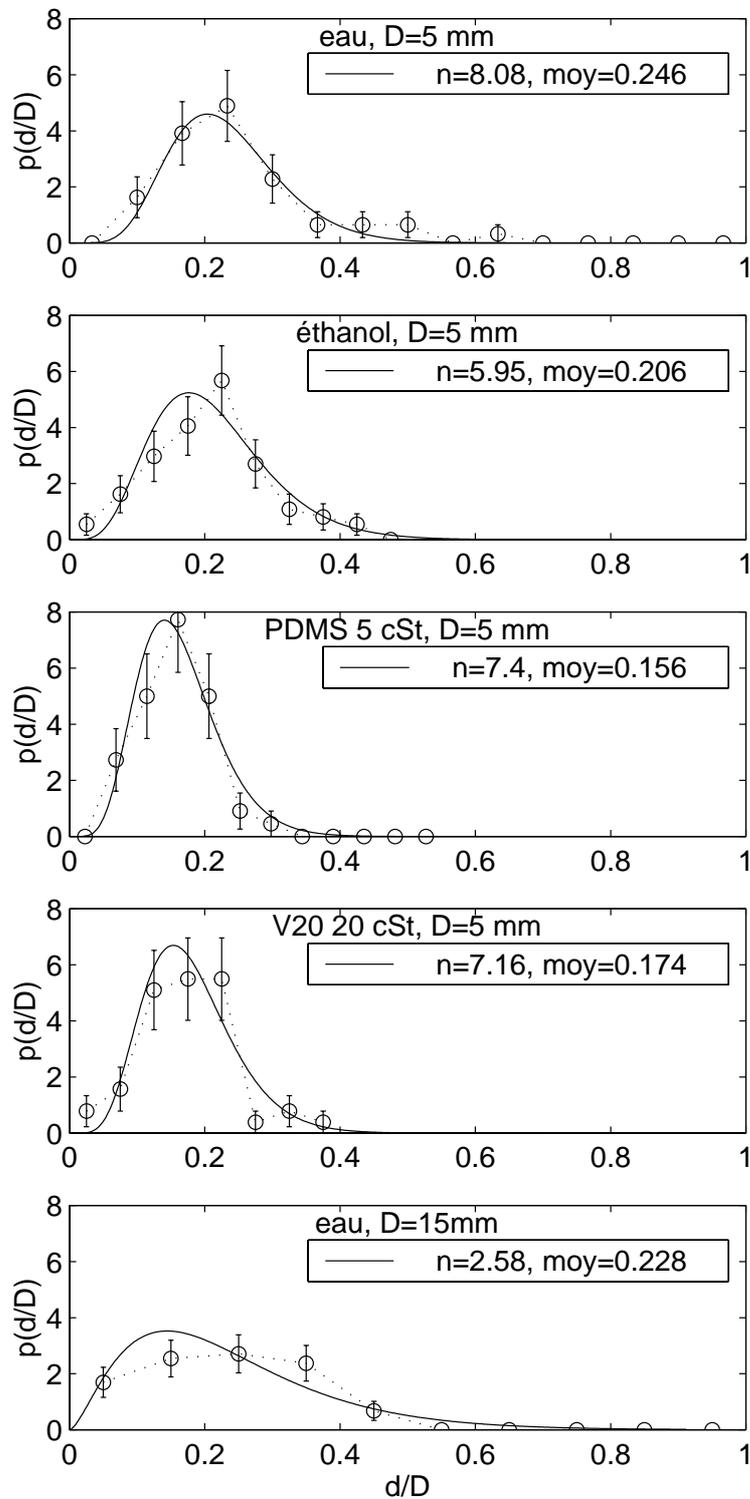


FIG. 5.19: Distributions de tailles issues de la brisure de ligaments étirés par un capillaire. Régression par la fonction Gamma de paramètre  $n$ .

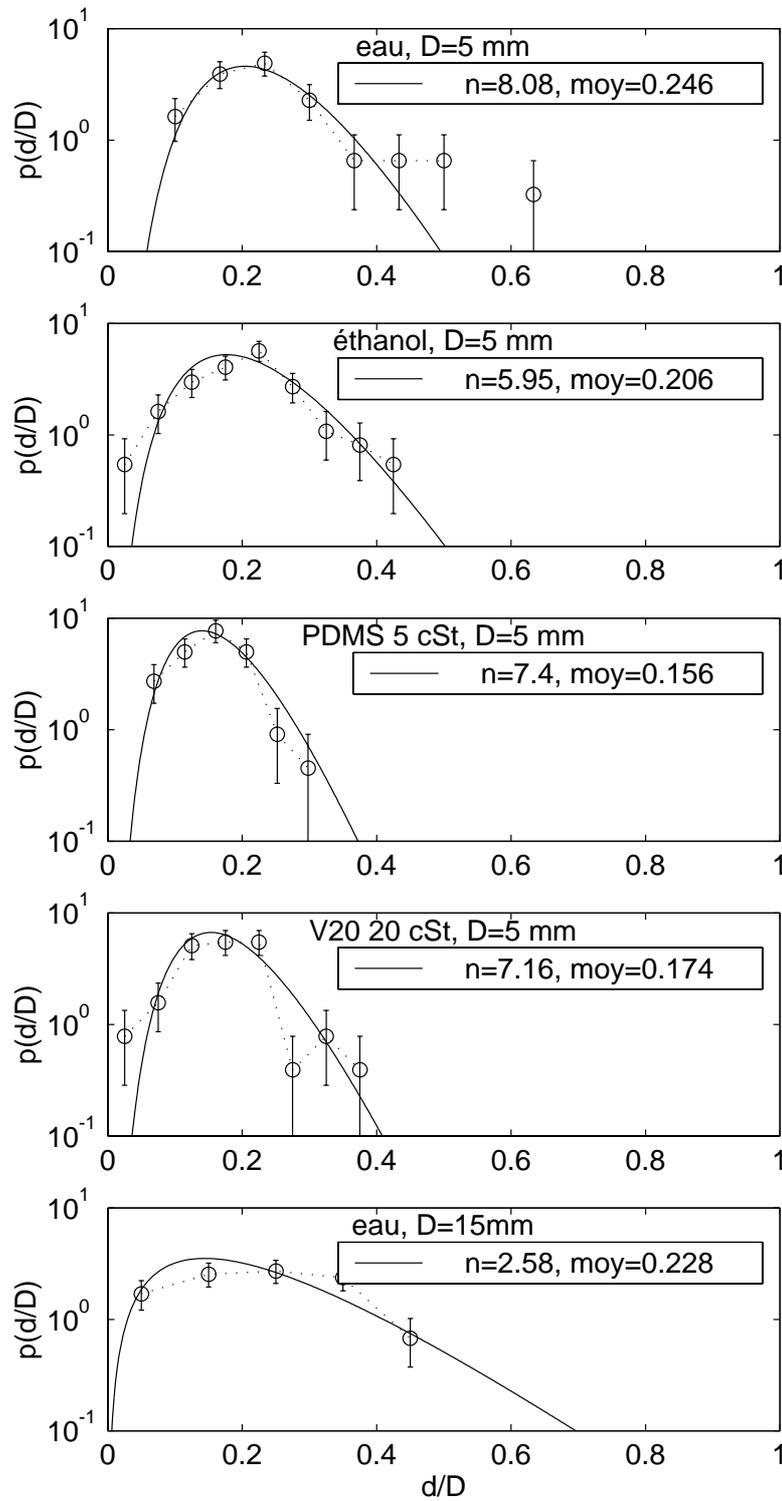


FIG. 5.20: Echelle logarithmique pour les densités de probabilité.

## 5.2 Ligaments entraînés par le courant d'air coaxial

### 5.2.1 Déformation de la protubérance initiale par les forces aérodynamiques

L'accélération initiale de crêtes à la surface du liquide résulte de l'application de la force de traînée aérodynamique, sur une surface présentée à l'écoulement de diamètre proportionné à  $\lambda_{\perp}$ .

La phase d'*accélération*, pendant laquelle la structure est accélérée en bloc (décrite section 3.3), est suivie par une phase de *déformation* qui transforme cette protubérance en un ligament de liquide en extension, toujours attaché à sa base liquide. Son volume est celui d'une boule de diamètre  $d_0$ . Les forces de traînée aérodynamique qui déforment le volume ont pour expression :

$$T_L = \frac{1}{2} C_D \rho_2 u_2^2 S_L \quad (5.22)$$

avec une surface présentée  $S_L$ , qui est initialement  $S_L \simeq \frac{\pi}{4} d_0^2$ , puis quand le ligament se déforme doit diminuer. Les forces de rétentions capillaires qui s'opposent à la création de surface ont pour expression

$$F_L = \pi \sigma \xi. \quad (5.23)$$

Le rapport de ces deux contraintes est  $\frac{T_L}{F_L} = \frac{C_D}{8} We_{d_0}$ . Dans les conditions de notre injections  $We_{d_0} > 15$  et donc nous nous négligerons la tension de surface.

La quantité de mouvement d'un volume  $V$  en extension uniforme est  $p_x = \frac{1}{2} \rho_1 V \frac{dL}{dt}$ , avec  $L$  sa dimension dans la direction d'élongation. Si l'on exclue les forces autres que la traînée, la relation fondamentale de la dynamique  $\frac{dp_x}{dt} = T_L$  montre qu'initialement  $\frac{d^2 L}{dt^2} = \frac{3}{2} C_D \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 d_0}$ . La longueur évolue donc aux temps courts selon :

$$\frac{L - L_0}{d_0} \simeq \frac{3C_D}{4} \left( \frac{t}{t_a(d_0)} \right)^2, \quad (5.24)$$

avec

$$t_a(d_0) = \sqrt{\frac{\rho_1 d_0}{\rho_2 u_2}}, \quad (5.25)$$

la longueur initiale du ligament  $L_0$  est d'ordre  $d_0$ . Si l'on suppose qu'il est initialement cylindrique, et aussi long que large, alors  $\frac{\pi}{4} L_0^3 = \frac{\pi}{6} d_0^3$ . Remarquons que l'accélération d'une boule de diamètre  $d_0$  dans un courant d'air se produirait selon les mêmes équations pour sa position  $x$ , avec une accélération deux fois plus faible cependant, car dans ce cas la quantité de mouvement est  $p_x = \rho_1 V \frac{dx}{dt}$  (Eq. (3.37)).

L'extension mesurée sur les photographies suit bien la prédiction de l'équation 5.24 (figure 5.21).

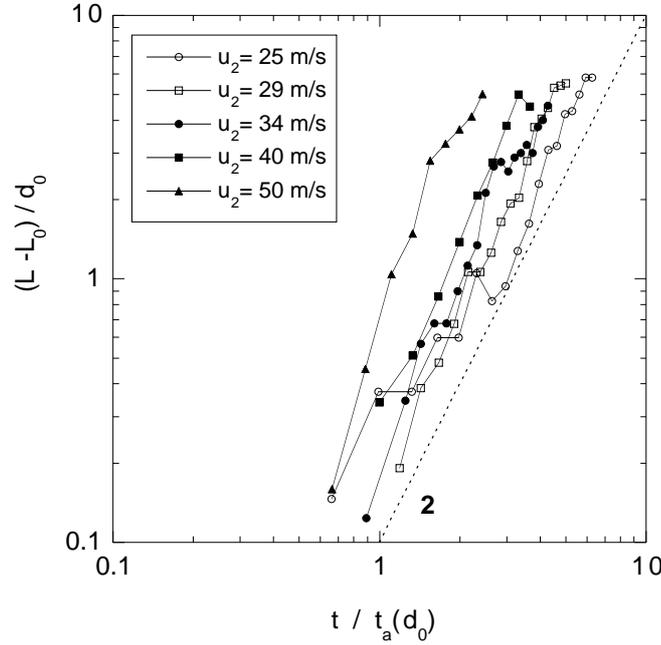


FIG. 5.21: Longueur des ligaments en fonction du temps adimensionnée par le temps de déplacement  $t_a(d_0) = \sqrt{\rho_1/\rho_2}d_0/u_2$ . Pointillés : approximation des premiers instants par la croissance parabolique de l'équation 5.24, avec  $C_D = 0.3$ . L'origine des temps est déterminée pour que les longueurs valent  $L = d_0$  au même instant.

La traînée diminue au cours de l'étirement : en effet la surface du ligament présentée à l'écoulement, que l'on peut estimer être de l'ordre de  $\xi^2$ , diminue si l'on suppose un volume constant  $V \sim \xi^2 L$ . D'autre part la tension de surface s'oppose à l'élongation. Un modèle qualitatif de l'évolution de la longueur est le suivant :

$$\rho_1 d_0^3 \frac{d^2 L}{dt^2} = \rho_2 u_2 \xi^2 - \sigma \xi \quad (5.26)$$

avec initialement  $L(0) = d_0$ , et  $dL/dt(0) = 0$ . En exprimant le temps en unités  $t_a(d_0)$  et les longueurs en unités  $d_0$ , on obtient :

$$\frac{d^2 L^*}{dt^{*2}} = \frac{1}{L^*} - \frac{1}{We_{d_0}} \frac{1}{\sqrt{L^*}} \quad (5.27)$$

Sa résolution montre que le premier effet de ralentissement est dû à la diminution de  $\xi$ , et que la tension de surface intervient d'autant ensuite, de plus en plus tôt quand le nombre de Weber  $We_{d_0}$  se rapproche de 1 (figure 5.22). Le ligament peut même entrer dans une phase de contraction, lorsque la rétraction capillaire l'emporte sur la traînée. On remarque cependant qu'une l'évolution parabolique de la longueur est une très bonne approximation.

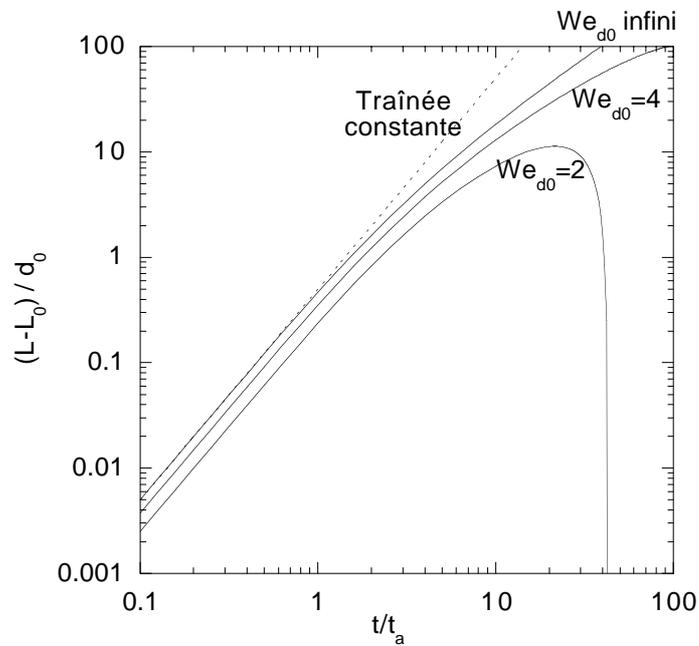


FIG. 5.22: Accélération de la protubérance : effet de la diminution de la traînée et de la tension de surface.

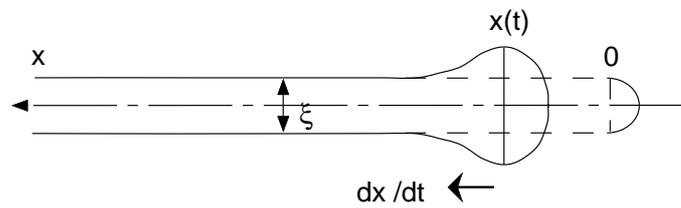


FIG. 5.23: Récession capillaire de l'extrémité d'un ligament dans une atmosphère immobile.

### 5.2.2 Blocage de la récession de l'extrémité

Le ligament prend en effet une forme de plus en plus allongée, et présente une partie de diamètre uniforme terminée par une extrémité sphérique de diamètre supérieur (figure 5.1). S'il n'y avait pas de courant gazeux, l'extrémité, qui est soumise à des forces capillaires de la part du ligament, non compensées, serait accélérée vers le ligament (figure 5.23).

La modélisation de la dynamique de l'accumulation de volume lors de la récession a été effectuée par Taylor (1959) dans le cas du bord d'une lame liquide, puis étendue au cas d'un cylindre liquide par Keller (1983), et qui a permis de prédire la fréquence de chute de gouttes Clanet & Lasheras (1999). Ce modèle considère que la masse du bord situé à l'abscisse  $x$  est la masse accumulée  $M = \pi\rho_1 x\xi^2/4$ , soumise aux forces constantes de capillarité,  $F_E = \pi\sigma\xi$ . L'équation du mouvement est

$$\frac{d}{dt} \left( M \frac{dx}{dt} \right) = \sigma\pi\xi. \quad (5.28)$$

Elle s'intègre aisément : le mouvement s'effectue à masse constante avec la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1\xi}} = 2v_0, \quad (5.29)$$

avec  $v_0$  la vitesse capillaire. Les simulations de Schulkes (1996) retrouvent ce régime pour des liquides peu visqueux.

Le frottement aérodynamique bloque cette accumulation : le bourrelet présente une surface croissante au courant gazeux, et donc une traînée croissante. Nous avons toutes les raisons de penser qu'arrive un moment où la traînée compense la capillarité. En effet, la force de traînée *sur l'extrémité*,

$$T_E = \frac{1}{2}C_E\rho_2u_2^2S_E, \quad (5.30)$$

avec  $S_E \simeq \pi d_E^2/4$ , s'oppose aux forces capillaires et aux forces de pression  $F_E$ . Le rapport des deux vaut

$$\frac{T_E}{F_E} \simeq \frac{C_E}{8} \left( \frac{d_E}{\xi} \right)^2 We_\xi. \quad (5.31)$$

Pour une forme de l'extrémité telle que son coefficient de frottement soit celui d'une sphère,  $C_E \simeq 0.5$ , on constate que le rapport  $T_E/F_E$  est toujours supérieur à 1, car à la rupture  $We_\xi$  vaut au minimum 4, et le diamètre  $d_E$  est toujours au moins le double de  $\xi$ .

Sur les images de ligaments, on voit en effet qu'avant leur rupture le diamètre de l'extrémité  $d_E$  est toujours de l'ordre de 2.5 fois le diamètre du ligament  $\xi$  (figure 5.24). Les pressions de Laplace dans le ligament,  $\sigma/(\xi/2)$ , et dans l'extrémité,  $2\sigma/(d_E/2)$ , sont alors sensiblement équilibrées.

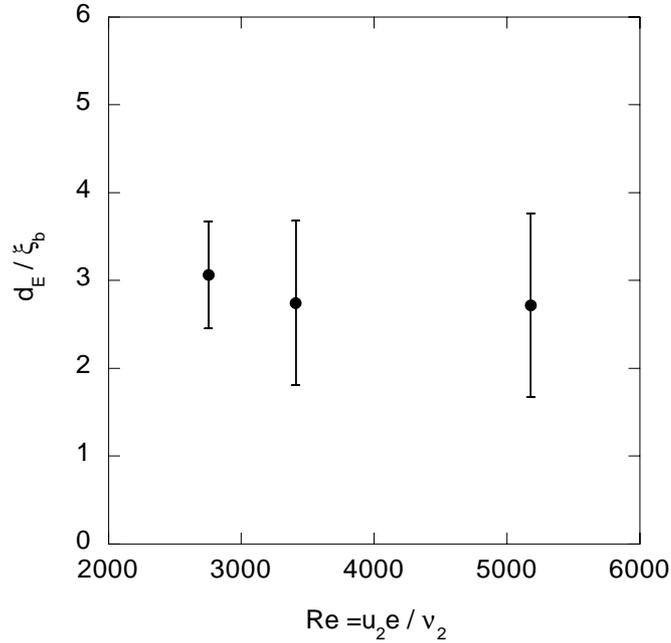


FIG. 5.24: Taille de l'extrémité du ligament avant la rupture.

### 5.2.3 Brisure au temps capillaire

Les ligaments, dont l'étirement est produit par l'extraction d'un pipette depuis une surface, ont montré que le volume de la partie cylindrique reste constant au cours de l'écoulement. Les dimensions du ligaments, longueur et épaisseur, sont donc liées par  $V = \pi L \xi^2 / 4 = \pi d_0^3 / 6$ , et l'on obtient :

$$L/d_0 \sim (t/t_a(d_0))^2, \quad (5.32)$$

$$\xi/d_0 \sim (t/t_a(d_0))^{-1}, \quad (5.33)$$

lorsque  $L \gg L_0$ .

Une deuxième caractéristique des ligaments étirés est que la brisure se produit en premier lieu sur les extrémités de la partie cylindrique, après un temps  $t \simeq t_\sigma(d_0)$  peu sensible à l'étirement initial. Les ligaments sélectionnés pour illustration (figure 5.25 a) se brisent en effet un temps caractéristique de l'ordre de  $t_\sigma$ . Une estimation du temps de brisure est obtenue par l'écart temporel entre la première apparition du ligament sur les images et le moment de la brisure (figure 5.25 b).

Puis dans un temps court le cylindre se déstabilise. A ce temps précis, les dimensions à la brisure,  $L_b$  et  $\xi_b$ , sont donc :

$$L_b/d_0 \sim (t_\sigma/t_a)^2 \sim We_{d_0}, \quad (5.34)$$

$$\xi_b/d_0 \sim (t_\sigma/t_a)^{-1} \sim We_{d_0}^{-1/2}, \quad (5.35)$$

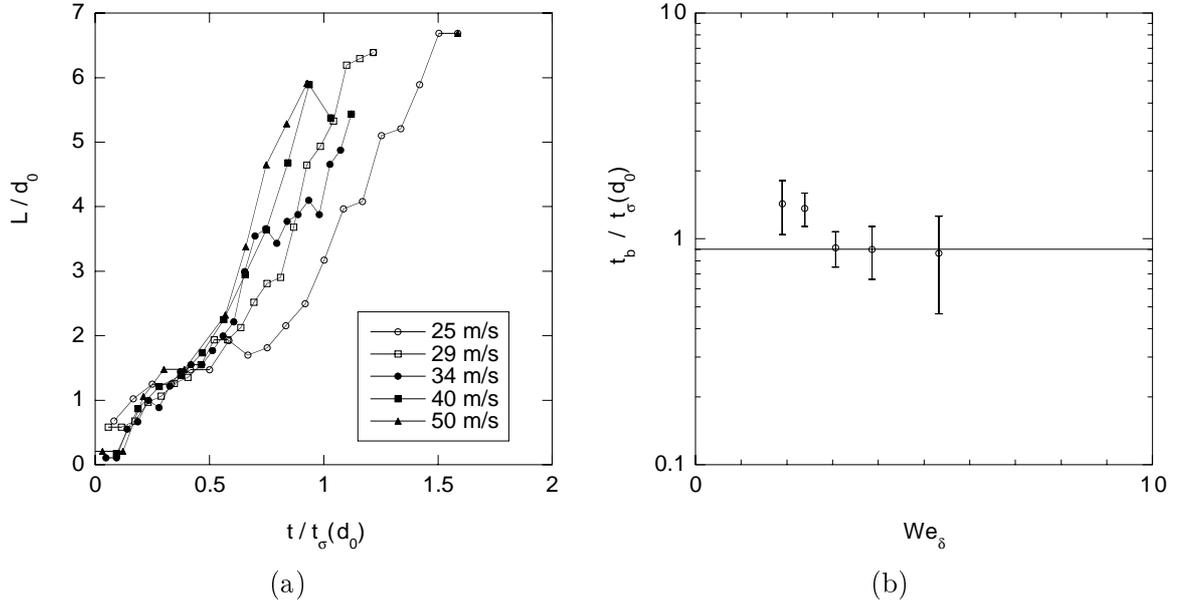


FIG. 5.25: (a) Longueur rapportée au temps capillaire  $t_\sigma$ . (b) Temps de brisure rapporté au temps capillaire.

avec  $We_{d_0} = \rho_2 u_2^2 d_0 / \sigma$ .

Le rapport d'aspect à la brisure, le nombre de Weber à la brisure, varient donc comme :

$$\frac{L_b}{\xi_b} \sim We_{d_0}^{3/2}, \quad (5.36)$$

$$We_{\xi_b} \sim We_{d_0}^{1/2}, \quad (5.37)$$

ce sont ces quantités que nous avons mesurées et présentées lors du chapitre précédent.

Le volume  $d_0$  du ligament est proportionné à  $\lambda_\perp \simeq 3\delta(\rho_1/\rho_2)^{1/3}We_\delta^{-1/3}$  (équation 3.21 ou 3.33), et varie donc proportionnellement à  $u_2^{-1}$ . La variation du rapport d'aspect est  $L_b/\xi_b \propto u_2^{3/2}$ , qui est précisément celle que nous avons observé figure 4.7.

Quant au nombre de Weber à la brisure, il varie comme  $We_{\xi_b} \propto u_2^{1/2}$ , autrement dit  $\xi_b \propto u_2^{-3/2}$ . Cette dépendance du diamètre est proche de celle observée dans la section 4.1.1 pour des mesures effectuées avec de l'eau, de l'éthanol et une solution de glycérine. Notons que pour les grandes vitesses un régression empirique en  $u_2^{-2}$ , ce qui donne un  $We_{\xi_b}$  constant, donne de une meilleure approximation (figure 5.27)

La taille du ligament que l'on attend à la brisure est donc :

$$\xi_b \sim \delta (\rho_1/\rho_2)^{1/6} We_\delta^{-2/3}. \quad (5.38)$$

Toutes conditions égales par ailleurs, un changement de tension de surface affecte la taille  $\xi_b$  proportionnellement à  $\sigma^{2/3}$ . Un changement de densité du liquide intervient seulement proportionnellement à  $\rho_1^{1/6}$ . Il est donc cohérent d'observer des diamètres de brisure plus petits avec de l'éthanol qu'avec de l'eau. Si l'on adimensionne  $\xi_b$  par  $\delta$ , tracé en fonction de  $We_\delta$ , les diamètres mesurés avec de l'eau et l'éthanol de tension de surface trois fois plus petite, suivent bien la loi de l'équation 5.38 (figure 5.26).

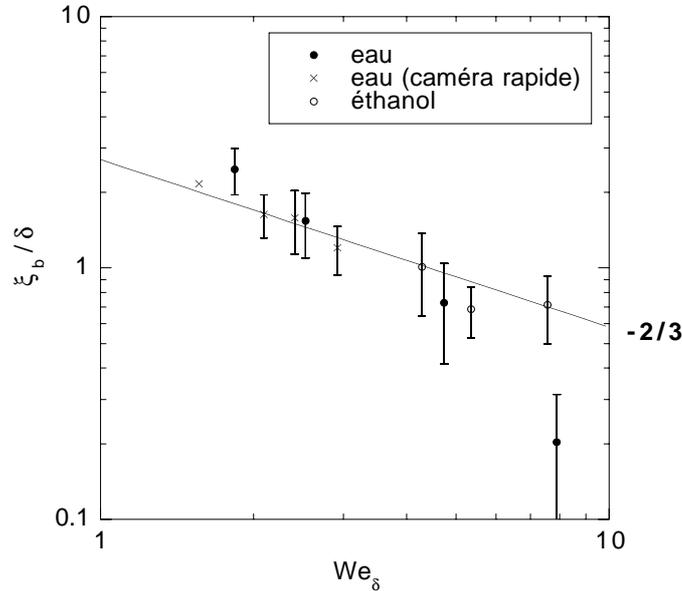


FIG. 5.26: *Diamètre de brisure des ligaments.*

**Remarque :** Les mesures à grandes vitesses sont toutefois inférieures à ces prédictions et suggèrent une approximation par loi de puissance plus sévère, en  $u_2^{-2}$ , ce qui donne un nombre de Weber à la brisure de

$$We_{\xi_b} \simeq 4 \quad (5.39)$$

pour les ligaments inviscides d'eau et d'éthanol et de 2.7 pour la solution de glycérol (figure 5.27).

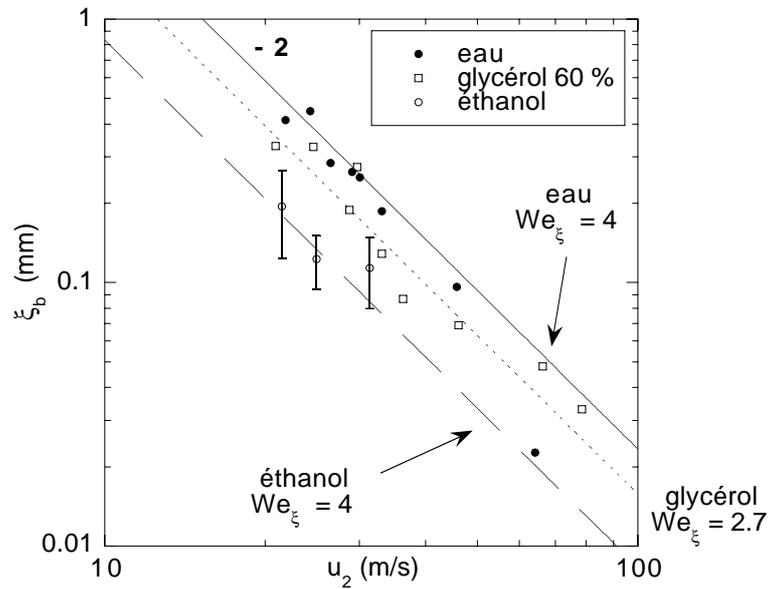


FIG. 5.27: Régression empirique par des lois en  $We_{\xi_b} = \rho_2 u_2^2 \xi_b / \sigma$  constante.

Notons que dans tous les cas la taille à la brisure  $\xi_b$  ne donne pas la taille moyenne des gouttes dans le spray  $d_{10}$  (qui décroît avec  $u_2^{-1}$ , comme  $d_0$ ). Ce résultat est en opposition avec la brisure de Plateau-Rayleigh de ligaments non étirés. Les tailles de brisure obtenues dans les cas des ligaments entraînés par pipette ne montrent pas un tel écart non plus.

La différence avec ces situations est que la brisure se produit dans un écoulement de fluide dans le cas des ligaments coaxiaux, et que fluide interagit toujours avec le ligament. Il n'est donc pas incohérent de trouver une taille de gouttes qui n'est pas proportionnée à la taille de brisure, comme le prédit la croissance des perturbations sur un cylindre immobile. La taille des gouttes est par contre toujours liée au volume, de taille  $d_0$ , qui fixe l'échelle spatiale des phénomènes.

### 5.2.4 Ralentissement visqueux

La viscosité modifie le diamètre de brisure des ligaments de glycérol, de sorte que les diamètres sont plus petits que ceux des ligaments d'eau (d'un facteur 0.68 environ), alors que les paramètres de tension de surface et de densité sont identiques.

La viscosité diminue le taux de croissance de l'instabilité capillaire dans le cas d'un cylindre non- tir e de diamètre  $\xi$ . Le temps caractéristique d'évolution des ligaments, inverse du taux capillaire, est donc plus grand. D'après l'article de revue d'Eggers (1997), le taux de croissance de l'instabilité vaut<sup>1</sup> :

$$\omega_i \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 \xi^3}} \left( \sqrt{4x^2(1-x^2) + \frac{9}{2} Re^{-2} x^4} - 3\sqrt{2} Re^{-1} x^2 \right), \quad (5.40)$$

avec  $x = kr_0$  le nombre d'onde adimensionnel et le nombre de Reynolds<sup>2</sup> calcul e avec le rayon courant  $r_0 = \xi/2$ ,  $Re = \sqrt{r_0 \sigma / \rho_1 \nu_1^2}$ .

Le nombre d'onde pour lequel la croissance est maximale,  $x_m = k_m r_0$ , dépend du nombre de Reynolds, il diminue quand le nombre de Reynolds diminue (Figure 5.28 a). Le taux d'instabilité maximale  $\omega_i^m$ , varie aussi avec le nombre de Reynolds. Le temps d'instabilité capillaire correspondant s'écrit, par rapport à sa valeur inviscide :

$$t_\sigma = \frac{1}{\omega_i^m} = \sqrt{\frac{\rho_1 \xi^2}{\sigma}} f(Re), \quad (5.41)$$

où la fonction  $f(Re)$  est l'inverse du terme entre parenthèses de l'équation (5.40),  valu e en  $x = x_m$ . Ce terme vaut 1 pour les grands nombre de Reynolds, et augmente quand le nombre de Reynolds diminue (Figure 5.28 b). En conséquence la croissance du pincement dû à l'instabilité est plus longue pour les faibles nombres de Reynolds.

A l'échelle de  $\xi = d_0$ , qui varie entre 0.3 mm et 1 mm expérimentalement, le nombre  $Re$  est supérieur à 100 avec de l'eau, et supérieur à 10 avec la solution de glycérol (qui est 12 fois plus visqueuse au sens des viscosités cinématiques  $\nu_1$ , 14 fois au sens des viscosités dynamiques). La viscosité ne fait donc pas la différence pour les temps de croissance initiaux. D'après les équations dérivées précédemment la brisure devrait s'effectuer de la même façon au temps  $t_\sigma(d_0)$ . Mais la croissance des perturbations ne se fait pas de la même façon lorsque le diamètre diminue, et la viscosité intervient dans pour les petites diamètres, contrairement aux ligaments d'eau ou d'éthanol.

1. Cette formule est approchée, avec 7% d'erreur à viscosité nulle, puis avec une précision accrue pour les viscosités importantes.

2. Le nombre de Reynolds s'exprime aussi en fonction du rapport du temps de diffusion visqueuse  $t_\nu = r_0^2 / \nu_1$  et du temps capillaire d'échelle  $t_\sigma(r_0)$  :  $Re = t_\nu / t_\sigma(r_0)$ .

En effet, à l'échelle de la taille de brisure  $\xi = \xi_b$ , qui varie entre  $300\mu\text{m}$  et  $30\mu\text{m}$  expérimentalement, le nombre de Reynolds calculé avec le rayon des ligaments d'eau varie donc entre 100 et 30. Par contre, avec la solution de glycérol il varie entre 8 et 2.5. Le temps de croissance à la brisure est donc allongé d'un facteur 1.3 à 2 respectivement.

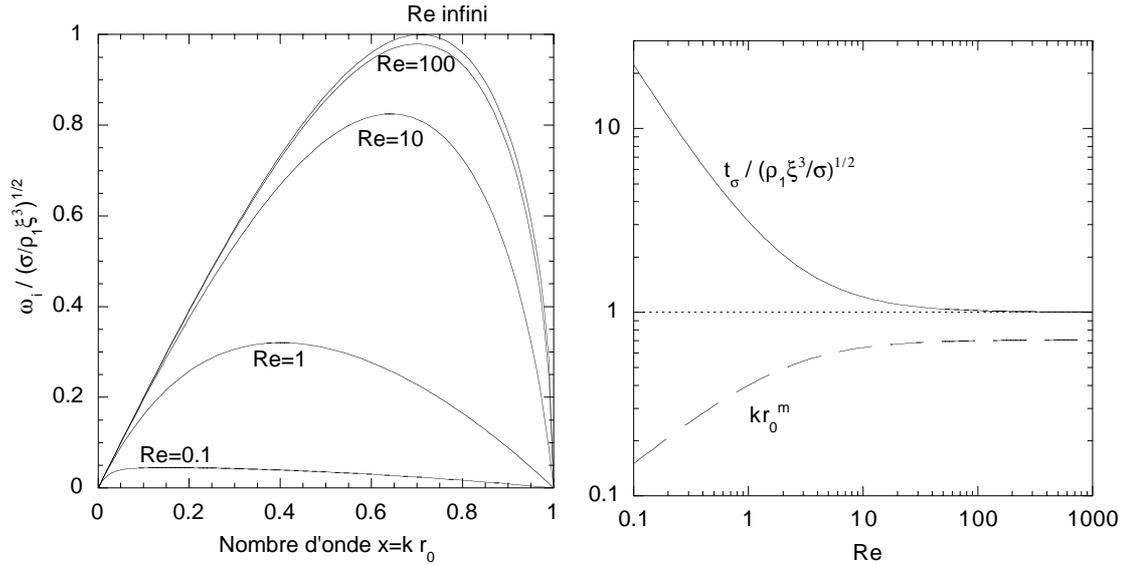


FIG. 5.28: (a) Courbe de croissance en fonction du nombre d'onde de l'instabilité capillaire. (b) Evolution du temps d'instabilité rapporté à sa valeur non visqueuse  $\sqrt{\rho_1 \xi^3 / \sigma}$ , et nombre d'onde le plus amplifié en fonction du nombre de Reynolds  $Re = \sqrt{\xi \sigma / 2 \rho \nu_1^2}$ .

Déterminons de combien doit être plus petit le diamètre de brisure des ligaments de glycérol pour produire le même temps de croissance que les ligaments d'eau d'une taille donnée. Les conditions de croissance de l'instabilité avec de l'eau et du glycérol sont les mêmes lorsque

$$t_\sigma(\xi_b^{eau}, \nu_1) = t_\sigma(\xi_b^{gly}, 12 \nu_1). \quad (5.42)$$

La résolution de cette équation montre que les diamètres des ligaments de glycérol doivent être d'autant plus petits que le nombre de Reynolds est plus faible (figure 5.29). Il faut des diamètres 0.85 à 0.65 fois plus petits pour obtenir le même temps de capillaire dans la plage de nombre de Reynolds couverte avec les ligaments d'eau. Nous retrouvons bien l'ordre de grandeur de 0.68 observé pour la diminution du diamètre de brisure.

Les mesures de tailles moyennes dans le spray après augmentation de la viscosité sont dans le même rapport que les tailles de ligaments à la brisure prédites

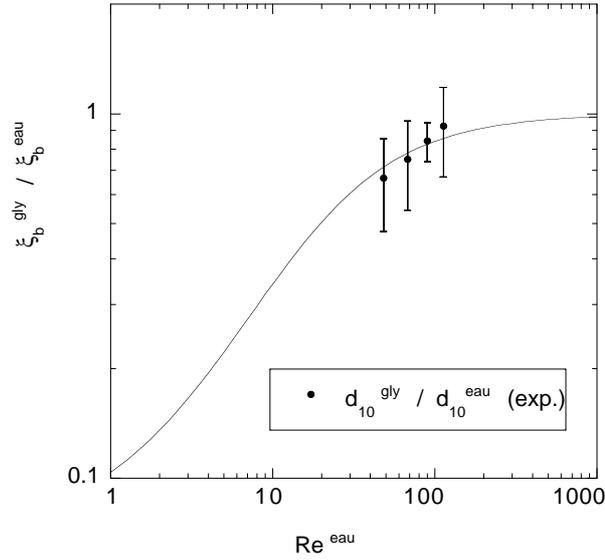


FIG. 5.29: Rapport des diamètres de ligaments de glycérol et d'eau pour lesquels le temps de croissance de l'instabilité de Rayleigh  $\omega_i^m$  est identique.

par l'équation (figure 5.29), soit

$$\frac{d_{10}^{gly}}{d_{10}^{eau}} \simeq \frac{\xi_b^{gly}}{\xi_b^{eau}}, \quad (5.43)$$

alors on s'attend à des tailles moyennes d'autant plus petites avec le glycérol que le nombre de Reynolds  $Re$  est élevé. C'est effectivement ce que nous observons figure 4.25, la prédiction de l'équation (5.43) représentant bien l'accroissement de l'écart entre les deux liquides avec la vitesse gazeuse.

La viscosité retarde donc la brisure parce que le processus de croissance des perturbations est ralenti.

## 5.3 Tailles produites par la brisure d'un ligament étiré

### 5.3.1 L'étirement réduit l'instabilité capillaire

Les ligaments sont fortement étirés : leur longueur augmente et leur diamètre diminue si bien qu'ils présentent un rapport longueur sur diamètre grand devant 1. Le ligament devient alors de plus en plus instable et forme des varicosités amplifiées. Dans le cas d'un cylindre de diamètre  $\xi$  constant, configuration soumise à l'instabilité capillaire de Plateau-Rayleigh, une analyse de stabilité linéaire montre que les perturbations axisymétriques les plus amplifiées ont une longueur d'onde  $\lambda = 4.51\xi$ , ce qui, par conservation du volume, donne après brisure du jet des gouttes de diamètre  $1.89\xi$ . Mais nous avons vu que l'étirement amoindrit le taux d'amplification. En effet, il réduit le diamètre du ligament et l'amplitude de la perturbation dans le même rapport (figure 5.28).

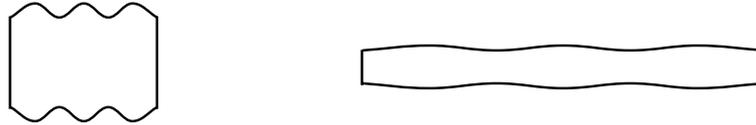


FIG. 5.30: *Etirement d'une perturbation.*

De plus la sélection d'une longueur d'onde n'a pas lieu pour la valeur précitée. En effet une varicosité dont la longueur d'onde est égale à la longueur d'onde la plus amplifiée par l'instabilité capillaire à un instant donné, est toujours étirée : elle s'écarte du taux d'amplification maximal, même si elle est toujours amplifiée.

D'après Frankel & Weihs (1985), pour de forts étirements la longueur d'onde instantanée la plus amplifiée est  $10.2\xi(t)$ , ce qui donne des gouttes de diamètre  $2.47\xi(t)$ . Leur analyse de stabilité d'un cylindre de rayon  $\xi(t)$  étiré à vitesse constante (de champ de vitesse *initial*  $\mathbf{u} = Kx\mathbf{e}_x$ , et dont la longueur  $L$  croît selon un taux initial  $d\ln L/dt = K$ ), montre que l'évolution des perturbations de surface dépend des conditions initiales en plus des conditions de longueur d'onde. Une perturbation de très petite longueur d'onde croît peu initialement, puis comme elle est advectée et étirée par le champ de vitesse, sa longueur d'onde atteint une taille d'amplification maximale et croît rapidement – mais moins vite qu'une exponentielle – et enfin sature quand la longueur d'onde devient vraiment plus grande. Les perturbations ne peuvent croître dès le temps initial que si le rapport entre le temps de l'instabilité capillaire  $t_\sigma = \sqrt{\rho_1 d^3/\sigma}$  et le temps caractéristique de l'étirement initial  $\tau_e = 1/K$  est inférieur à  $\sqrt{32/3}$ . Dans le cas contraire les perturbations oscillent et il faut attendre que leur longueur d'onde soit suffisante.

Du fait de la variation de la longueur d'onde la plus amplifiée, nous pouvons nous demander si il est légitime de parler de sélection d'une longueur d'onde. Nous

observons en effet que la brisure du ligament n'est pas régulière, et la distance entre deux ruptures n'est pas homogène. De plus les résultats expérimentaux ne donnent pas une taille  $\langle d \rangle$  proportionnelle à  $\xi(t = t_{\text{brisure}})$ .

### 5.3.2 Distribution aléatoire des brisures

Nous avons noté que la sélection d'une longueur d'onde est atténuée par l'étiement. Nous allons dans un premier temps étudier la forme des distributions issues de la brisure purement aléatoire des ligaments. Nous verrons plus bas comment modéliser l'effet des interactions entre gouttes lors de leur formation sur la distribution finale.

Considérons donc que les brisures se produisent de façon aléatoire le long du ligament, avec un taux de brisure imposé et donc une longueur de brisure moyenne imposée.

Nous avons vu dans l'introduction que a brisure aléatoire le long d'un segment de longueur unité avec  $m$  brisures prédit que la distribution des tailles  $x$  suit une loi en  $p(x, m) = m(1-x)^{m-1}$  pour  $m \geq 1$ . Si il n'y pas de brisure  $p(x, 0) = \delta(x-1)$  avec  $\delta$  symbole de Kronecker.

Ce nombre de brisure est lui-même réparti : nous allons déterminer sa distribution. Supposons que la brisure se produise avec un taux  $\lambda$  de brisures par unité de longueur selon un processus de Poisson. La probabilité que  $m$  brisures aient lieu sur une longueur unité est :

$$p(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad (5.44)$$

le nombre moyen de brisures est alors  $\langle m \rangle = \lambda$ .

La densité de probabilité d'avoir un segment de taille adimensionnée  $x$  est donc la densité de probabilité que ce segment ait la taille  $x$  et qu'il y ait  $m = 0$  brisure sur le ligament, ou qu'il ait la taille  $x$  et qu'il y ait  $m = 1$  brisure, ou qu'il ait la taille  $x$  et avec  $m = 2$  brisures et ainsi de suite. Les événements séparés par les *ou* étant exclusifs, la probabilité de leur union est la somme des probabilités. Ceux séparés par les *et* étant indépendants, la probabilité de leur intersection est le produit des probabilités. Donc la densité de probabilité d'avoir un segment de taille  $x$  est :

$$p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p(m) p(x, m) = \lambda e^{-\lambda x} + e^{-\lambda} \delta(x-1), \quad (5.45)$$

d'après les équations 1.6 et 5.44. La probabilité que  $x$  vaille 1 est d'ordre  $e^{-\langle m \rangle}$ , donc très petite en pratique, et nous ne conserverons que le premier terme par la suite. Il est à remarquer que cette loi aurait pu être dérivée directement des propriétés d'un processus de Poisson de taux  $\lambda$  : les distances entre coupures, et

donc les tailles, sont en effet distribuées selon une loi exponentielle, dite loi des temps d'attente :  $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ . La méthode de l'entropie donne également cette distribution si l'on suppose que seule la longueur moyenne de brisure est fixée et que nous n'avons aucune autre information disponible.

Un segment de taille  $x$  sur le ligament supposé cylindrique a pour volume  $v = xv_0$ . La distribution des volumes  $v$  est donc donnée par  $p(v/v_0) = \langle m \rangle e^{-\langle m \rangle v/v_0}$ . La distribution des diamètres adimensionnés se déduit par un changement de variable :

$$v/v_0 = (d/d_0)^3, \quad (5.46)$$

$$p(d/d_0) = 3(d/d_0)^2 p(v/v_0), \quad (5.47)$$

ce qui donne des courbes en cloches quasi-symétriques (Figure 5.31). Le pic de ces distributions se produit pour des diamètres d'autant plus petits que le nombre de coupures est grand. La largeur relative de la distribution autour de son maximum diminue avec le nombre de brisures.

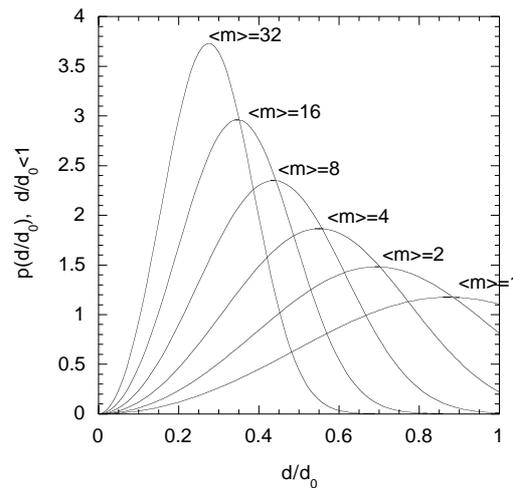


FIG. 5.31: Densités théoriques de probabilité des diamètres de gouttes issues de la brisure aléatoire du ligament,  $\langle m \rangle$  est le nombre moyen de brisures.

Si les mesures donnent bien des distribution avec un maximum marqué, la largeur du pic et la dissymétrie ne correspondent pas. Le nombre moyen de gouttes observé, d'une dizaine, implique un maximum de distribution de coupures à  $d/d_0 = 0.40$  assez proche de la valeur observée, cependant le processus de brisure génère un plus grand éventail de tailles.

### 5.3.3 Distribution issue de l'interaction de gouttes élémentaires

Même si la brisure se produit en un temps court elle n'est pas instantanée, et permet des échanges de volume entre les différentes varicosités qui se forment entretemps. Un film rapide de la brisure d'un ligament étiré par un capillaire témoigne des coalescences et brisures entre gouttes en formation (figure 5.32).

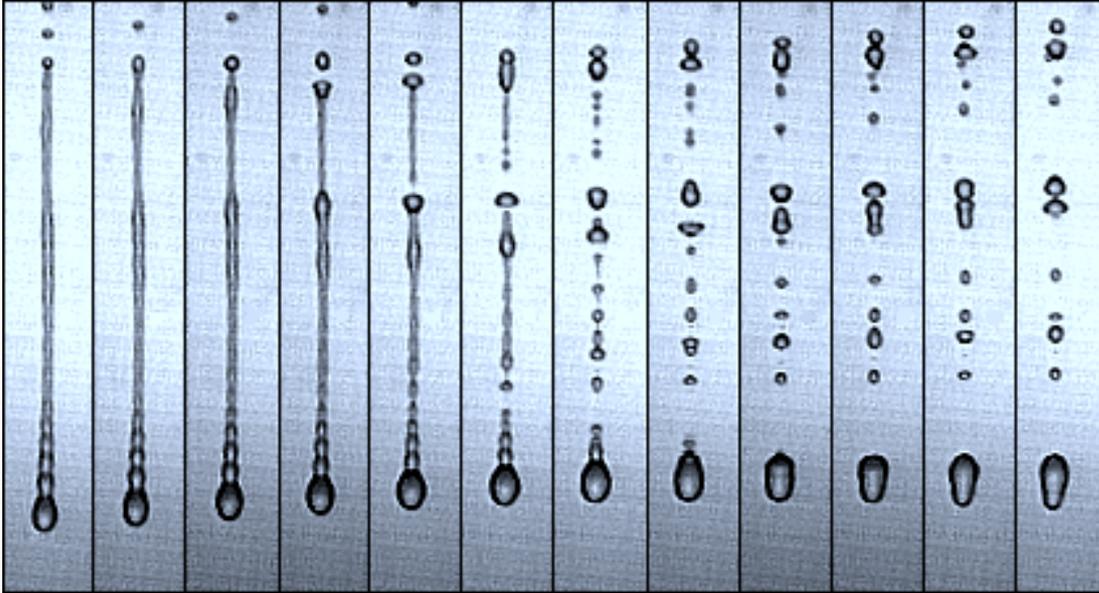


FIG. 5.32: Réarrangement des volumes au cours de la croissance des varicosités et après la brisure,  $\Delta t = 1.78$  ms, champ de 7.3 mm de large.

Déterminons la distribution issue des interactions entre gouttes. Soit  $p_0(x)$  la distribution des tailles  $x$  des objets élémentaires. Si les gouttes interagissent chacune avec une de leur voisine alors les tailles vont se rééquilibrer entre elles. Nous allons supposer que la taille d'une goutte  $x$  résultant de l'interaction de deux gouttes est la moyenne des tailles initiales des gouttes numérotées 1 et 2:  $x = (x_1 + x_2)/2$ . L'interaction ne signifie donc pas nécessairement un échange de volume, ce qui équilibrerait les cubes des tailles, mais plutôt une superposition des tailles caractéristiques sur le cylindre initial. La distribution de  $p_2(x)$  s'obtient en considérant la probabilité de toutes les associations à moyenne donnée :

$$p_2(x) = \int_{x_1+x_2=2x} p_0(x_1) p_0(x_2) dx_2, \quad (5.48)$$

avec implicitement l'hypothèse que les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendantes. La distribution est donc simplement la convolution de  $p_0$  avec elle-même:  $p_2(x) = p_0 \otimes p_0(x/2)$ . Si la goutte résulte de l'interaction de  $n$  gouttes adjacentes, la

distribution de  $x$  sera :

$$p_n(x) = \int_{x_1+x_2+\dots+x_n=x} p_0(x_1)p_0(x_2)\dots p_0(x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n, \quad (5.49)$$

qui est la convolution de  $p_0$  avec elle-même  $n$  fois répétée, évaluée en  $x/n$ , soit  $p_n(x) = p_0^{\otimes n}(x/n)$ .

Si l'on suppose que les tailles initiales sont distribuées sans mécanisme aucun de sélection si ce n'est une taille moyenne  $\overline{x_0}$ , c'est-à-dire si l'on ne dispose d'aucune information sur les moments des tailles si ce n'est le premier, alors la distribution la plus probable au sens statistique est la distribution exponentielle  $p_0(x) = \exp(-x/\overline{x_0})/\overline{x_0}$  car elle maximise l'incertitude – l'entropie – qui lui est associée. La distribution  $p_n(x)$ , convolution de  $n$  exponentielles, s'obtient aisément dans l'espace de Laplace : sa transformée de Laplace est le produit de  $n$  fois la transformée de Laplace d'une exponentielle. Le résultat est la fonction

$$p_n(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-ny}, \quad (5.50)$$

avec  $y = x/\overline{x_0}$  où  $\Gamma$  est la fonction d'Euler définie par  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ , et qui vaut  $\Gamma(n) = (n-1)!$  pour les entiers. Dans la littérature des probabilités, cette fonction est appelée fonction *Gamma* (Feller, 1971), distribution de Poisson composée, ou aussi loi de Pearson (Levy, 1965). Sa moyenne est 1 et son écart-type<sup>3</sup> égal à  $1/\sqrt{n}$ . Cette distribution n'est donc paramétrée que une valeur :  $n$ . Elle varie depuis une exponentielle décroissante vers une distribution qui converge autour de 1 sous la forme d'une gaussienne pour les grandes valeurs de  $n$  (figure 5.33). Si le nombre d'interaction est variable d'une goutte à l'autre, sa moyenne  $\langle n \rangle$  peut ne plus être entière. Nous considérerons dans ce cas que la distribution *Gamma* est toujours valable pour décrire la distribution moyenne.

---

3. Pour les grandes valeurs de  $n$  on retrouve ici le résultat du théorème central limite à propos de l'écart-type relatif d'une somme d'un grand nombre de variables aléatoires, qui est valable quel que soit leur distribution initiale.

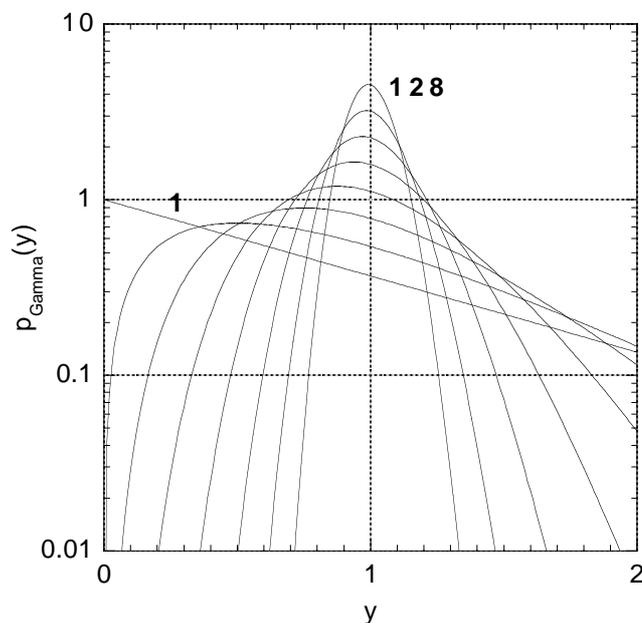


FIG. 5.33: *Distribution Gamma, avec un paramètre  $n$  de 1,2,4,8,16,32,64 et 128.*

Dans le cas de ligaments étirés par une pipette, le nombre  $n$  obtenu par régression des distributions par une fonction *Gamma* varie de 4 à 8 (figure 5.19).

L'application de la fonction *Gamma* aux distributions mesurées dans le spray donne une bonne approximation (figure 5.3.3 et figure 5.3.3). La taille moyenne  $\langle d \rangle$  des gouttes après le processus de brisure n'est pas proportionnée à la taille  $\xi_b$  du ligament juste avant la naissance des corrugations : les mesures montrent que leur rapport varie de façon croissante avec la vitesse gaz, de 2.7 à 4.7, entre 28 et 50 m/s (figure 5.34). Si l'on suppose que les gouttes résultent de l'interaction de tailles élémentaires  $\xi_b$ , alors  $\langle d \rangle / \xi_b$  devrait être l'étendue relative de l'interaction entre gouttes élémentaires et donc donner le nombre d'interactions. Le nombre  $n$  d'interactions déduit des régressions *Gamma* augmente aussi légèrement avec la vitesse d'air. Il est très proche du rapport entre la taille moyenne des gouttes et la taille du ligament à la brisure ; cependant l'ordre de grandeur est correct.

Ce nombre d'interactions est faible (2 à 3) comparé avec celui des distributions des ligaments entraînés par un tube, les gouttes sont en effet toujours séparées par le courant d'air alors que dans le cas des ligaments brisés les photographies montre que l'étirement final est très faible..

En conclusion la dispersion des tailles de gouttes issues de la rupture de ligament étirés est bien représentée lorsque l'on suppose que les gouttes interagissent avec leurs voisines.

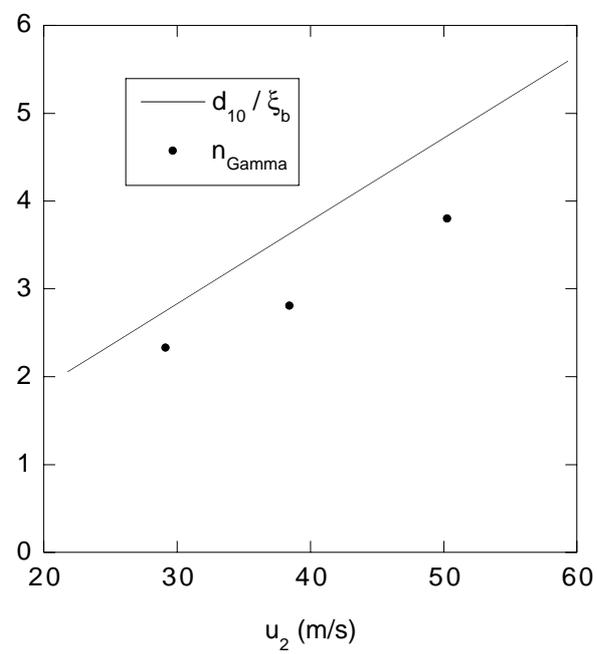


FIG. 5.34: Rapport entre le diamètre moyen et la taille du ligament et nombre d'interactions d'après la régression par fonction Gamma.

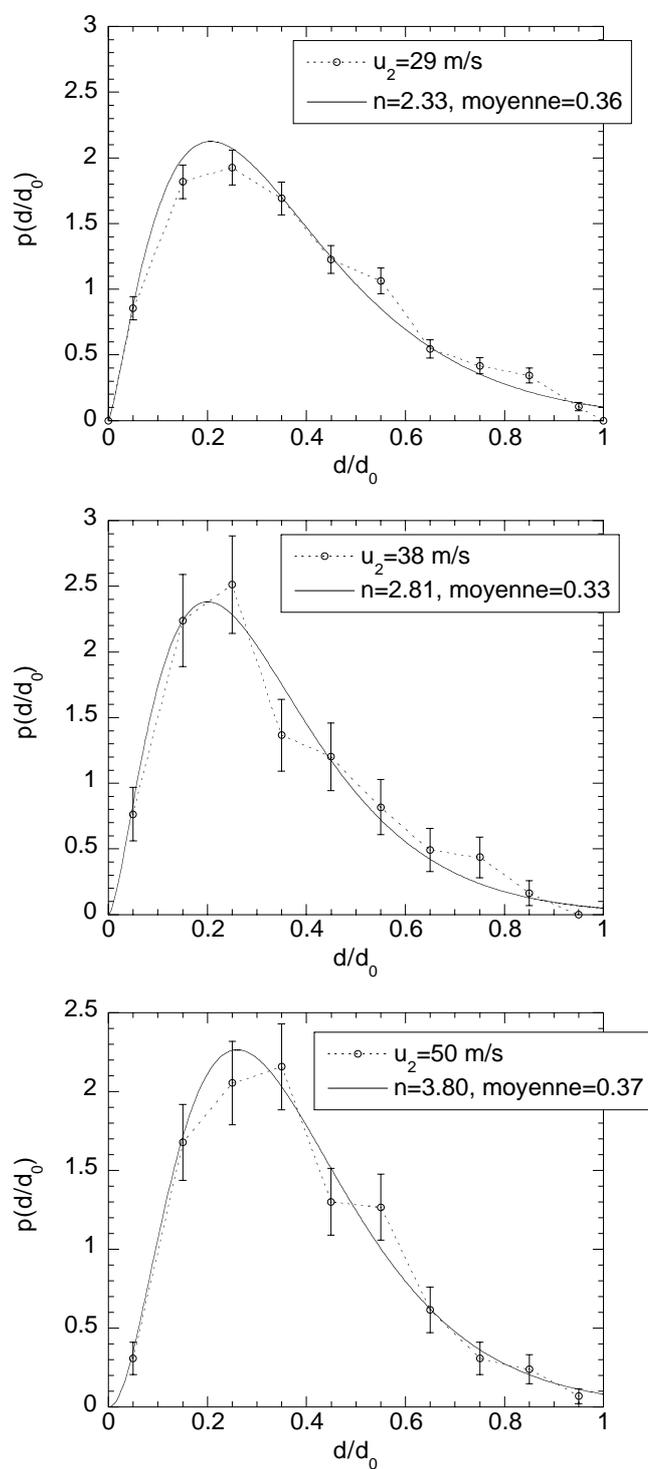


FIG. 5.35: Régression des distributions de tailles après brisure  $d/d_0$  par la fonction Gamma caractérisée par sa moyenne et le paramètre  $n$ .

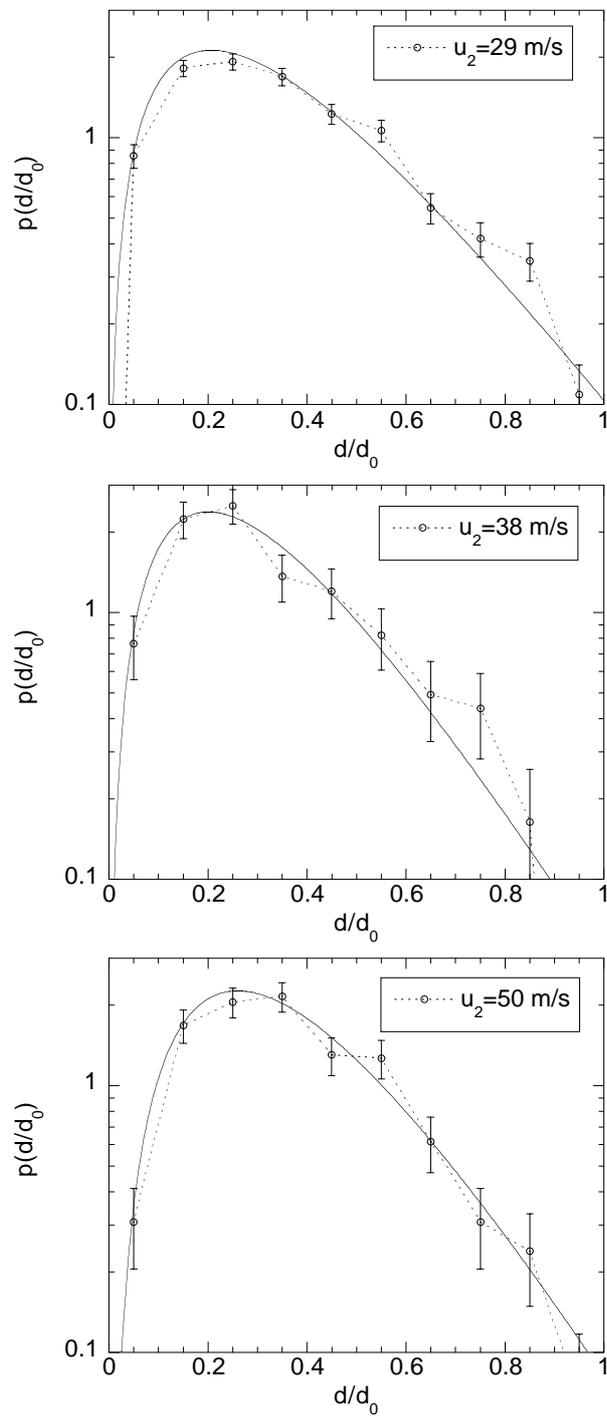


FIG. 5.36: Mêmes données que la figure précédente en diagramme semi-logarithmique.



## Chapitre 6

# Aspects géométriques

L'ATOMISATION PRIMAIRE d'un jet en un spray de gouttelettes est un processus qui génère de la surface. Les études sur l'évaporation et la combustion du liquide s'intéressent au premier chef à l'aire qui est produite. Par exemple, la densité d'interface est une variable particulièrement utilisée dans les modèles de combustion (Phillips, 1972; Marble & Broadwell, 1977) ainsi que pour les calculs numériques de propagation de flamme (Candel & Poinso, 1989). La complexité de la surface et sa rugosité sont aussi l'enjeu de recherches sur les mécanismes du mélange de deux phases miscibles ou réactives dans un milieu turbulent (Sreenivasan, 1991; Catrakis & Dimotakis, 1996; Pocheau & Queiros-Conde, 1996; Villermaux & Innocenti, 1999).

Nous allons voir comment quantifier cette génération de surface à partir des contours des images puis comment la rugosité du contour peut être évaluée par l'analyse fractale.

### 6.1 Extraction d'une longueur de contour

S'il n'est pas possible de mesurer directement l'aire de la surface sur nos images, il est par contre aisé d'étudier les lignes de contour du jet, qui sont la projection cylindrique de la surface sur le plan focal image.

Les images sont composées de pixels codés sur des niveaux de gris. Le nombre de niveaux dépend de l'échantillonnage du signal des pixels, typiquement sur 8 bits (soit 256 niveaux) et pour les caméras de qualité sur 12 bits (soit 4096 niveaux). Pour faire apparaître la ligne de contour sur une image en niveaux de gris, il est nécessaire de les binariser en imposant un seuil  $C_s$  sur les intensités lumineuses  $N$  des pixels. Par convention, nous donnons aux pixels blancs hors du jet le niveau de noir  $N = 0$ , et aux pixels du jet complètement noirs le niveau  $N = 1$ . Le seuil  $C_s$  de binarisation départage les pixels selon leur niveau  $C$ :

- si  $N < C_s$  le pixel est classé avec ceux qui n'appartiennent pas au jet et

sera blanc sur l'image binarisée ;

- si  $N \geq C_s$  le pixel est classé avec ceux qui appartiennent au jet.

Cette opération de *segmentation* binarise l'image en pixels blancs et noir.

Le contour est alors mis en évidence en ne retenant que les pixels noirs ( $C \geq C_s$ ) qui ont au moins un pixel blanc ( $C < C_s$ ) sur leurs huit voisins : c'est-à-dire les pixels qui sont sur la frontière. L'image de la figure 6.1 montre le contour ainsi obtenu sur le jet. Comme le jet n'est pas opaque à la lumière, des zones lumineuses sont présentes en son sein et les bords de ces zones apparaissent à l'intérieur du jet sur l'image contour. Pour les éliminer il faut réaliser une opération de remplissage par connexité avec une couleur de marquage à partir d'un point du haut et d'un point bas de l'image. Seuls les contours qui jouxtent cette couleur de marquage sont retenus. Comme la couleur de marquage ne rentre pas à l'intérieur du jet, les contours intérieurs ne sont pas retenus.

La *longueur d'interface* est définie comme le nombre de pixels de frontière. Cette longueur est mesurée sur des portions rectangulaires de l'image correspondant à des intervalles réguliers  $\Delta x$  de la distance à la sortie d'injecteur, de sorte que pour chaque intervalle  $[i\Delta x \quad i\Delta x + \Delta x]$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$ , nous avons une longueur  $L_i$ . Cette opération est répétée sur un jeu d'images de façon à avoir des quantités moyennes.

Initialement la surface du jet est cylindrique et le contour sur un rectangle a pour

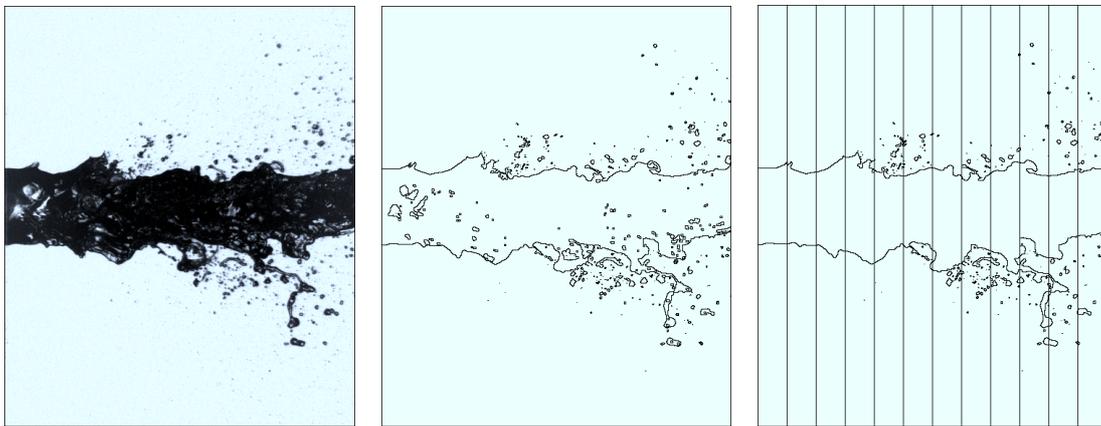


FIG. 6.1: *Gauche* : Image du jet après soustraction du fond. *Milieu* : Seuillage à concentration  $C_s = 0.5$ , mise en évidence des pixels de frontière. *Droite* : Elimination des contours intérieurs par remplissage de l'extérieur, comptage de la longueur dans des intervalles  $\Delta x$ .

longueur  $L_0 = 2\Delta x$ , somme des contours haut et bas. Rapporté à  $L_0$ , le comportement de  $L_i$  avec la distance est similaire pour toutes les vitesses : la longueur

augmente exponentiellement avec la distance à l'injecteur  $x/d_1$ , puis admet une saturation dont la valeur dépend du seuil  $C_s$  (Figure 6.2).

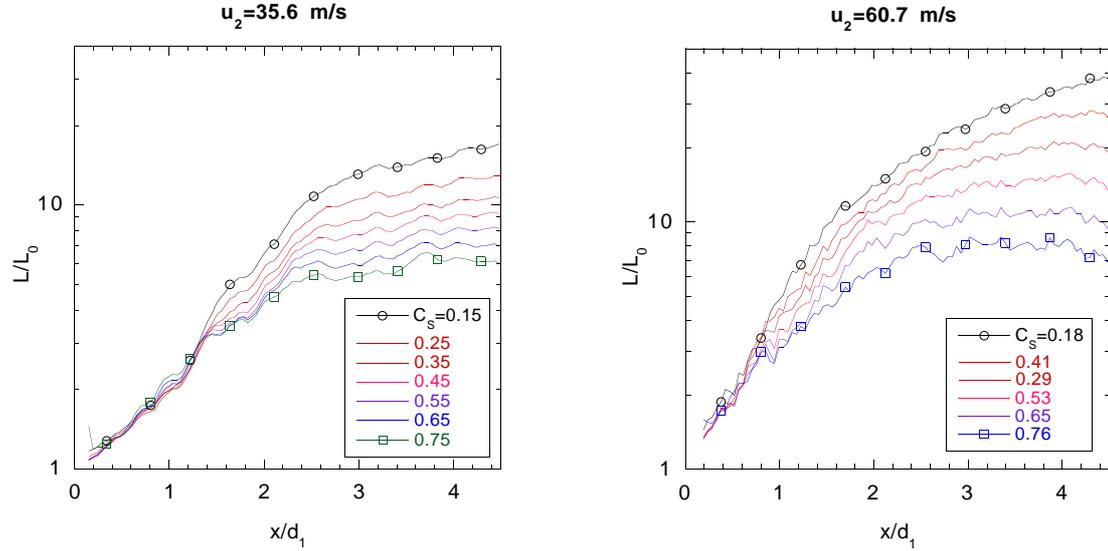


FIG. 6.2: Gauche : Longueur d'interface moyennée sur 60 images pour différents seuils  $C_s$  de binarisation,  $u_2 = 35.6$  m/s. Droite :  $u_2 = 60.7$  m/s.

Ce comportement est lié aux deux types de contours : celui du jet liquide central non atomisé et celui des gouttes. Ces deux contributions s'ajoutent dans la mesure globale de longueur :

$$L = L_{jet} + L_{gouttes}. \quad (6.1)$$

En sortie de buse, le jet n'est pas atomisé et seule la silhouette du jet et les perturbations à sa surface sont observées. Cette longueur dépend peu du seuil : une variation de celui-ci déplace la frontière mais la variation de périmètre induite est négligeable par rapport au total.

Plus en aval, la production de gouttelettes crée des contours qui sont prépondérants dans la mesure de longueur,  $L_{jet} \ll L_{gouttes}$ . La longueur de contour apparaît relativement stationnaire avec la distance, exprimant par là le fait que la distribution des gouttes se fige car il n'y a plus d'atomisation. En revanche, comme nous le verrons par la suite, la longueur dépend drastiquement du seuil, car une variation de seuil déplace la frontière des gouttes sur une distance qui n'est pas négligeable relativement à la taille des petites gouttes, les plus nombreuses.

L'absence de gouttes près de la sortie se reflète clairement sur la figure 6.2 : pour les petites distances  $x$ , la longueur dépend peu du seuil. Puis lorsque  $L/L_0$  est supérieur à 3 environ, la longueur dépend du seuil car des gouttes ont été produites.

## 6.2 Surface générée lors de l'instabilité primaire

Interéssons nous à la partie initiale du contour, lorsque les gouttes n'ont pas encore été formées. La croissance exponentielle initiale de  $L$  est d'autant plus forte que la vitesse de gaz est grande (Figure 6.3). Ceci est conforme à l'amplification

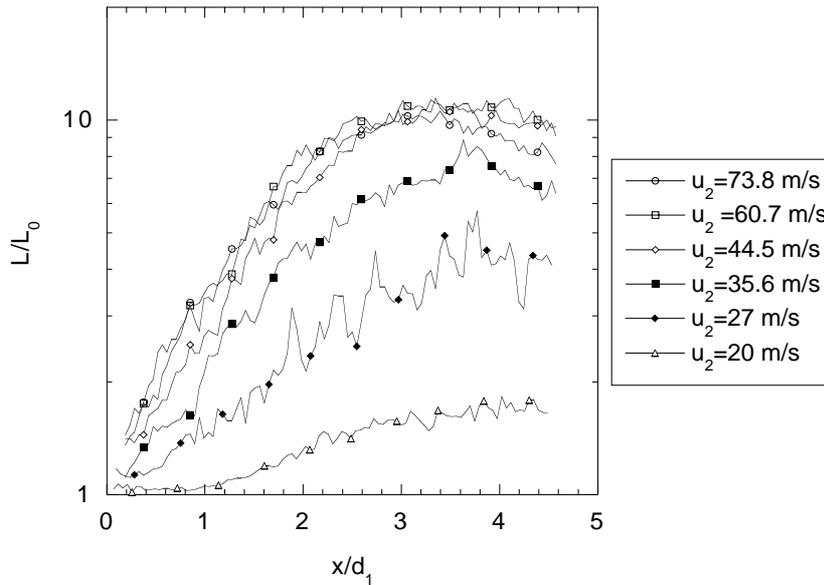


FIG. 6.3: Longueur du contour pour différentes vitesses de gaz,  $C_S = 0.65$ .

de surface due à l'instabilité primaire de cisaillement. En effet les ondulations primaires ont une amplitude exponentiellement croissante  $\eta = \eta_0 e^{k_i x}$ ,  $k_i$  désignant le taux de croissance spatial. Quand ces ondulations croissent à longueur d'onde constante, leur arc  $L$  croît aussi en  $L \simeq 2\eta_0 e^{k_i x}$  lorsque  $\eta \gg L_0$  (Figure 6.4).

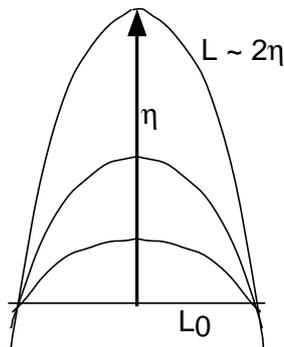


FIG. 6.4: Croissance des ondulations primaires.

Si le taux de croissance spatial  $k_i$  est estimé à partir du taux de croissance

temporel théorique de l'instabilité longitudinale  $\omega_i^{th} \simeq \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{u_2}{\delta}$ , en supposant que la vitesse de convection initiale est  $u_c$ , ie par  $k_i^{th} \simeq \omega_i^{th}/u_c$  (voir section 3.1.1), alors les courbes se superposent tant que  $k_i^{th} x < 4$  ou  $L/L_0 < 3$  (Figure 6.5). Nous

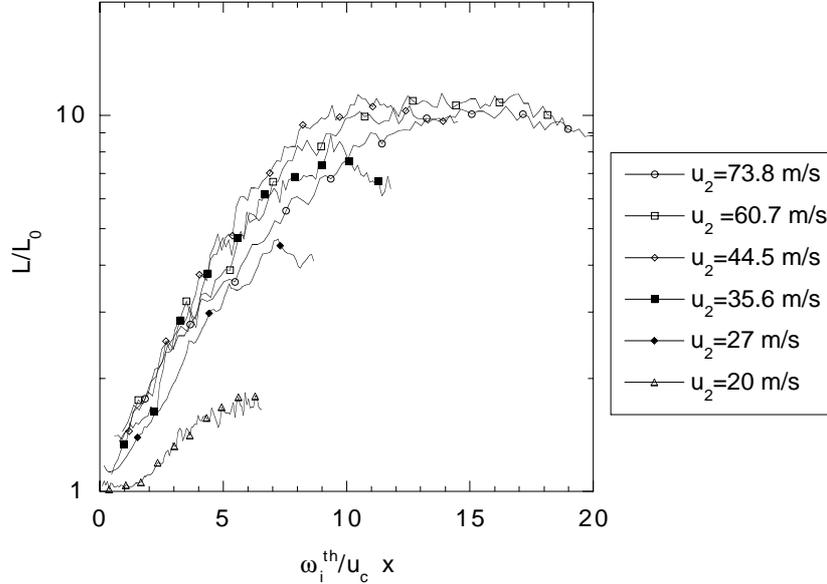


FIG. 6.5: Longueur de contour en fonction de la distance adimensionnée par le taux de croissance spatial théorique de l'instabilité de cisaillement.

retrouvons donc les caractéristiques de l'instabilité de cisaillement longitudinale. La régression de la partie exponentielle des courbes de la figure 6.3 permet de déterminer un taux de croissance spatial  $k_i^{exp}$  des ondulations. Le taux de croissance temporel estimé à partir du taux de croissance expérimental par  $\omega_i^{exp} = k_i^{exp} u_c$ , est inférieur au taux de croissance temporel théorique  $\omega_i^{th}$ , surtout pour les grandes valeurs (figure 6.6).

Pour  $k_i^{th} x > 4$  les longueurs de contour suivent des courbes différentes : d'autres phénomènes entrent en ligne de compte tels que la déstabilisation secondaire transverse et la formation de gouttelettes.

## 6.3 Longueur de contour dans le spray

### 6.3.1 Influence du seuil sur la détection des contours : résultats expérimentaux

La longueur de saturation en aval est très sensible au seuil de binarisation  $C_s$  : elle dépend exponentiellement de celui-ci :  $L/L_0 \propto \exp(-\alpha C_s)$  (Figure 6.7). L'argument  $\alpha$  augmente avec la vitesse du gaz. Cette dépendance avec le seuil est due au fait que l'image initiale présente des dégradés de niveaux de gris.

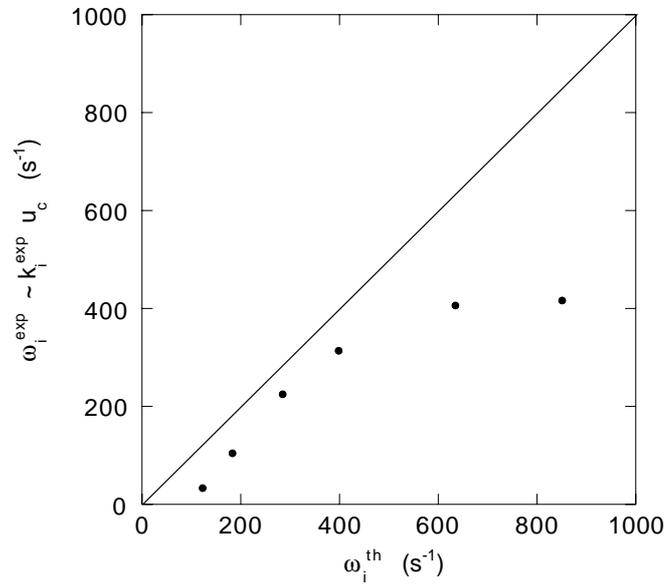


FIG. 6.6: Taux de croissance temporel des ondulations en fonction du taux théorique.

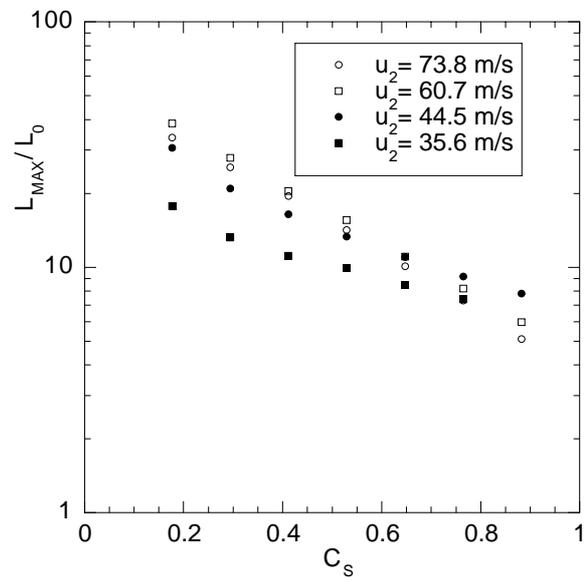


FIG. 6.7: Longueur aval en fonction du seuil  $C_S$  pour la détection de contours.

La position de la frontière se déplace avec le seuil, et les périmètres des gouttes varient alors.

### 6.3.2 Périmètre des gouttes dans l'aérosol en fonction du seuil

La contribution des contours du jet devient négligeable dans le spray, en effet  $L \ll L_0$ . Nous allons donc supposer que la longueur totale est apportée par les périmètres de gouttes. Le périmètre total des gouttes sur une image du spray aval est la contribution de tous les périmètres :

$$L = \sum_i \pi d_i, \quad (6.2)$$

où l'on a supposé que les gouttes sont sphériques et que leur périmètre est donné par leur diamètre  $d_i$ . Le périmètre moyen calculé sur un grand nombre d'images  $n_{images}$  fait apparaître le diamètre moyen

$$\langle L \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \pi d_i}{n_{images}} = N \pi d_{10} = N \pi \int_0^\infty d p(d) d(d), \quad (6.3)$$

avec  $N = n/n_{images}$  le nombre moyen de gouttes par image<sup>1</sup>. Le diamètre apparent  $d_{app}$  des gouttes sur les images est fonction du diamètre réel  $d$ , de  $C_s$  ainsi que du flou<sup>??</sup>. Le périmètre total apparent est la somme de ces diamètres apparents pondérés par la distribution de  $d$  :

$$L_{app}(C_s) = N \pi \int_0^\infty d_{app}(d, C_s, \Delta) p(d) d(d) \quad (6.4)$$

Les mesures détaillées de tailles de gouttes dans l'aérosol ont montré que les distributions  $p(d)$  sont proches d'exponentielles décroissantes de diamètre moyen  $d_{10}$ , soit  $p(x = d/d_{10}) = exp(-x)$ . Or les diamètres apparents en fonction du seuil sont bien représentés, surtout pour les petits diamètres, par l'image théorique d'un disque convolué par une tache de flou lorentzienne de largeur  $\Delta$ , qui est proportionnée au diamètre réel  $d$  par facteur  $f$  qui ne dépend que du seuil et de  $\Delta/d$  :  $d_{app} = d f(C_s, \Delta/d)$  (équation 2.13 page 50). Le périmètre apparent rapporté au périmètre réel est :

$$\frac{L_{app}(C_s, \Delta/d_{10})}{L} = \int_0^\infty \sqrt{1 + \frac{\Delta/d_{10}}{x} \frac{2}{\tan \pi C_s} - \left(\frac{\Delta/d_{10}}{x}\right)^2} x e^{-x} dx, \quad (6.5)$$

qui est une fonction de  $\Delta/d_{10}$  et de  $C_s$  seulement après le changement de variable  $x = d/d_{10}$ . Ce rapport est bien égal 1 lorsque  $\Delta = 0$  et qu'il n'y a plus de flou.

1. Nous omettrons par la suite les symboles moyenne  $\langle . \rangle$  autour des longueurs.

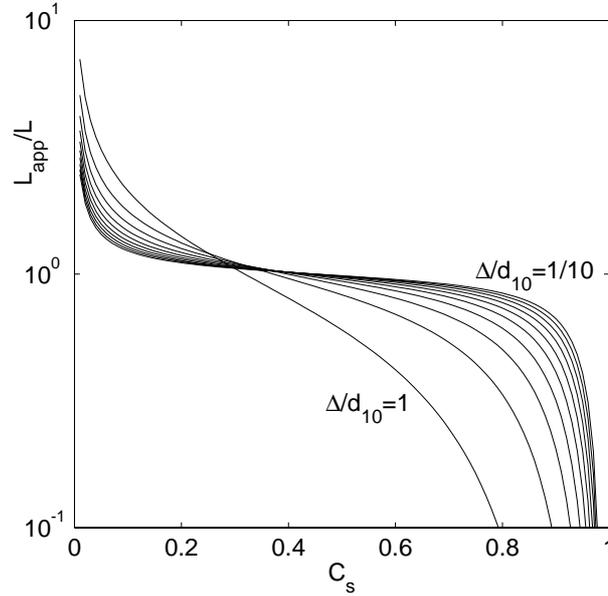


FIG. 6.8: Longueur apparente des gouttes en fonction du seuil,  $\Delta/d_{10} = 0.1, 0.2, \dots, 1$ .

Sur la figure 6.8 on note que  $L_{app}(C_s, \Delta/d_{10})/L$  décroît exponentiellement avec  $C_s$  dans l'intervalle  $0.3 < C_s < 0.7$  environ. Si nous recherchons l'exponentielle décroissante qui tangente la courbe, d'équation  $\exp(-\alpha(C_s - C_1))$ , avec  $\alpha = \min(d \ln L/dC_s)$  et  $C_1 = C_s(L_{app} = L)$ . Nous trouvons que le paramètre  $\alpha$  est proche de  $\alpha \simeq 2.74 \Delta/d_{10}$  pour  $\Delta/d_{10} < 1$  (Figure 6.9). Les taux de décroissance expérimentaux (obtenus par régression exponentielle des courbes de la figure 6.7), sont tout à fait en accord avec le comportement précédent, en choisissant la valeur de la taille de la tache de flou  $\Delta \simeq 4$  pixels déterminée par l'analyse des profils des images de gouttes. Les longueurs apparentes sont égales aux longueurs vraies pour  $C_s = C_1(\Delta/d_{10})$  (Figure 6.9).

Nous pouvons résumer le comportement de ces courbes par  $\exp(-2.74\Delta/d_{10}(C_s - C_1))$ . En d'autres termes :

$$L_{app}(C_s, \Delta/d_{10}) \simeq \exp\left(-\frac{d_c}{d_{10}}\right) L \quad \text{avec} \quad d_c = 2.74 \Delta(C_s - C_1) \quad (6.6)$$

$$\simeq N\pi \int_{d_c}^{\infty} \pi dp(d)d(d). \quad (6.7)$$

En conclusion, le seuillage introduit un biais sur le périmètre observé. Ce biais correspond à un diamètre de coupure  $d_c$  dans la distribution exponentielle  $p(d)$  des tailles au-dessous duquel les gouttes ne sont plus observées. Il est nul lorsque le seuil choisi est  $C_s = C_1$  proche de 0.5 pour les petits flous.

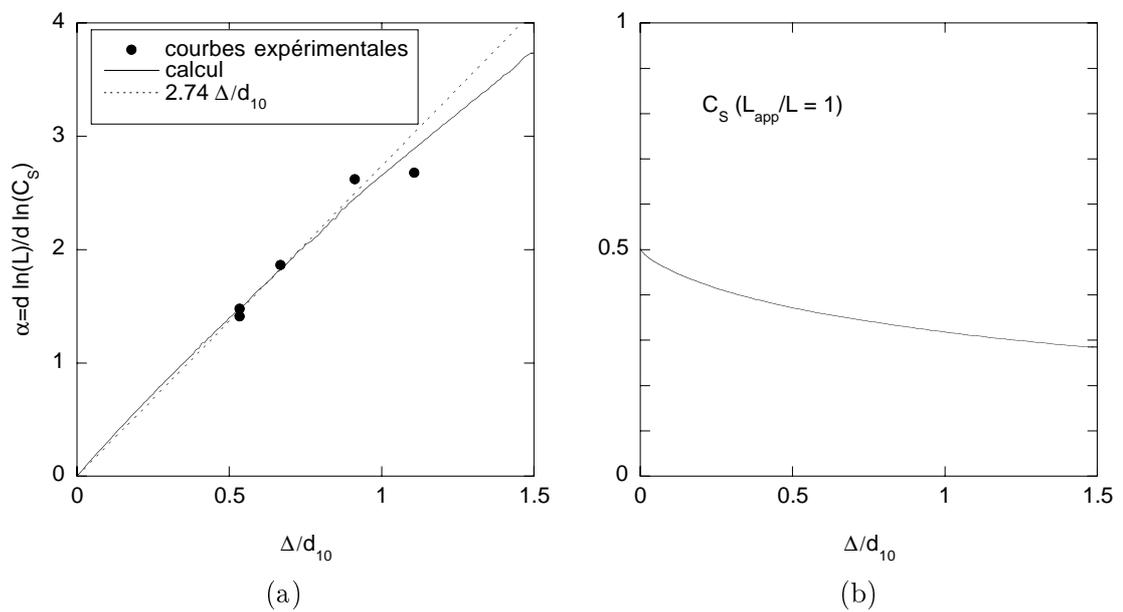


FIG. 6.9: (a) Taux de décroissance des longueurs avec le seuil en fonction de la tache de flou  $\Delta/d_{10}$ , calcul : tangente au point d'inflexion des courbes de la figure précédente,  $\alpha = \min(d \ln L/d C_s)$ . (b) Calcul du seuil  $C_s$  pour lequel les longueurs apparentes sont égales aux longueurs vraies.

### 6.3.3 Valeur du périmètre lorsque le spray est figé : une mesure du taux de production de gouttes

Le périmètre en aval donne une estimation du nombre de gouttes produites : la majeure contribution provient des périmètres de gouttes et s'il y a une quantité  $N$  de gouttes dans la tranche d'épaisseur  $\Delta x$ , alors leur périmètre est en moyenne  $L = N\pi d_{10}$ , soit une densité linéique de gouttes  $n(x)$  sur l'image :

$$n(x) = \frac{N}{\Delta x} = 2 \frac{L/L_0}{\pi d_{10}}, \quad (6.8)$$

sachant que  $L_0 = 2\Delta x$ . Les densités semblent augmenter initialement (figure 6.10) : il s'agit en fait du processus de génération de surface qui augmente la longueur par rapport au périmètre des gouttes. Un seuil est ensuite atteint et la densité va diminuant légèrement car il n'y a plus de production de surface et les contours sont dus aux gouttes ;  $n$  est alors véritablement leur densité.

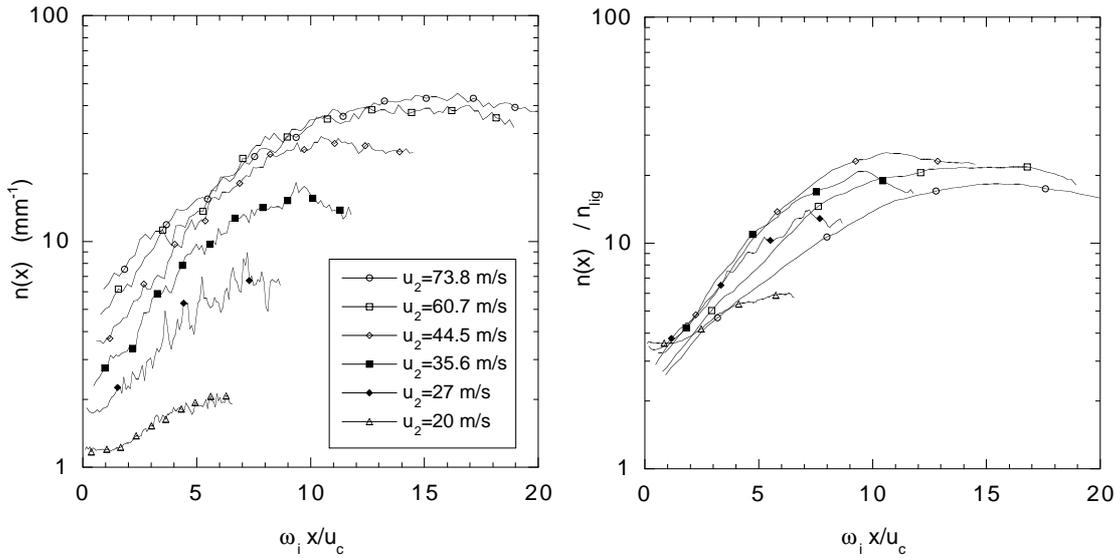


FIG. 6.10: Gauche : Densité linéique de gouttes estimée d'après le périmètre total et le périmètre moyen  $n(x) = L/\pi d_{10} \Delta x$ . Droite : Densité rapportée au nombre théorique de ligaments par unité de longueur  $n_{lig}$  (les courbes ont été lissées pour plus de clarté).

Il est possible d'estimer cette densité en revenant au mécanisme de production primaire des gouttelettes. Les ondulations primaires espacées de  $\lambda$  génèrent à leurs crêtes un nombre de ligaments  $\pi d_1/\lambda_\perp$  suite à une déstabilisation secondaire transversale, et ces ligaments se brisent en un nombre moyen  $\langle m \rangle$  de gouttes. La

densité linéique de ligaments ainsi produits le long du jet est

$$n_{lig} = \frac{\pi d_1 / \lambda_{\perp}}{\lambda}, \quad (6.9)$$

et la densité de gouttes  $n_1 = \langle m \rangle \times n_{lig}$ . Les gouttes sont produites à partir d'ondulations du jet liquide qui se déplacent initialement à la vitesse  $u_c$ , avec les espacement longitudinaux  $\lambda$  et transverses  $\lambda_{\perp}$  : le flux de gouttes initial est  $n_1 u_c$ , qui est aussi le taux de production. Les gouttes sont ensuite accélérées par le courant gazeux et se meuvent à une vitesse  $v_g$  supérieure. En supposant qu'il n'y a plus de formation de gouttelettes, le flux de particules  $n(x) v_g(x)$  est conservé et la densité de gouttes  $n(x) = n_1 u_c / v_g(x)$  diminue donc. La brisure des ligaments est le moment de formation des gouttes du spray, dont les caractéristiques de tailles n'évoluent ensuite plus. Il est donc logique d'observer un maximum de  $L_{app}(C_s, \Delta/d_{10})/L$  à cet instant. La position du maximum diminue d'après les résultats de la figure 6.3 : la brisure se produit en effet plus tôt d'après les temps d'évolutions des tailles de ligaments de l'ordre de  $t_{\sigma} d_0$ , qui sont plus courts aux grandes vitesses puisque les tailles  $d_0$  des ligaments sont plus petites.

La densité de gouttes rapportée à la densité de ligaments  $n/n_{lig}$  atteint un seuil d'environ 20 qui dépend peu de la vitesse (si  $u_2 \geq 35$ ). La valeur du seuil laisse présumer d'un nombre de gouttes  $\langle m \rangle$  produit initialement plus grand encore, dans le rapport des vitesses d'accélération. Ce nombre est cependant supérieur aux observations réalisées sur les images, qui étaient d'une dizaine de gouttes par ligament.  $n_{lig}$  semble fixer l'échelle de saturation de la densité et donc l'échelle des périmètres observés.

## 6.4 Rugosité du contour

L'instabilité de l'écoulement augmente la surface du jet liquide, et nous avons vu comment cela se traduisait par une augmentation de la longueur du contour sur les images. Initialement rectiligne, le contour ondule et devient tortueux, puis se scinde et produit de multiples boucles fermées : il s'agit des contours des gouttes engendrées par l'atomisation du jet.

Comment mesurer la rugosité croissante du contour et la taille des rugosités ? L'univers du traitement du signal fournit de nombreux outils : transformée de Fourier spatiale (pour faire apparaître les périodicités), analyse en ondelettes (pour localiser ces périodicités), analyse fractale. L'analyse de Fourier est plutôt consacrée aux signaux longs (donc aux images grandes) ce qui n'est pas notre cas. Par contre l'analyse fractale est un outil simple pour caractériser la rugosité des interfaces. Elle a été beaucoup utilisée dans les études sur la turbulence (voir la revue de Sreenivasan, 1991) pour suivre les corrugations de la surface d'un volume de scalaire passif injecté dans un écoulement turbulent (Villermaux & Innocenti, 1999; Villermaux & Rehab, 2000).

Dans le contexte de l'atomisation coaxiale, les contours d'un jet liquide rendu opaque par addition d'un colorant – pour annuler les contours intérieurs qui apparaissent lorsque la lumière traverse le liquide – ont été analysés avec ce concept (Shavit & Chigier, 1995), conduisant les auteurs à corrélérer l'augmentation des rugosités avec celle de la vitesse du courant gazeux.

### 6.4.1 Dimension fractale locale

L'analyse fractale s'intéresse aux propriétés géométriques d'un objet lorsque l'on change l'échelle typique d'observation. Popularisés par Benoît Mandelbrot, les fractals sont des objets qui ont la caractéristique d'être auto-similaires : vus à différentes échelles, pour différents grossissements, leur aspect et donc leur rugosité est similaire.

Un exemple célèbre de fractal auto-similaire à toutes les échelles est la courbe de Koch. Sa construction itérative est la suivante : la courbe de départ est un segment de longueur  $l$ , à l'étape  $n = 1$  ce segment est remplacé par une ligne brisée elle-même constituée de quatre segments de longueur trois fois plus petite (Figure 6.4.1). Les étapes suivantes remplacent chaque segment par la ligne précédente mise à l'échelle. Nous avons légèrement modifié la construction de cette courbe pour faire varier son aspect « rugueux », en adaptant l'angle  $\alpha$  initialement à  $\pi/6$  dans le cas où les longueurs sont divisées par 3. Un angle petit donne des courbes quasiment lisses, alors qu'un angle proche de  $\pi/2$  crée un aspect hérissé.

L'objet résultant a le même aspect à toutes les échelles. Cette courbe n'a pas d'épaisseur, mais sa longueur est infinie. En effet si l'on compte le nombre de segments à chaque nouvelle étape de la construction, on voit qu'il en faut 4 fois

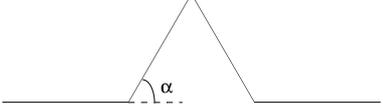
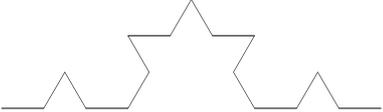
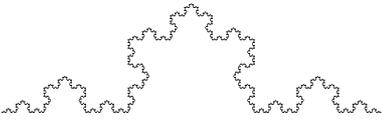
	Étape	Taille du segment	Nombre de segments
	0	$\epsilon = l$	$N = 1$
	1	$\epsilon = \frac{l}{2+2\cos\alpha}$	$N = 4$
	2	$\epsilon = \frac{l}{(2+2\cos\alpha)^2}$	$N = 4^2$
	$i$	$\epsilon = \frac{l}{(2+2\cos\alpha)^i}$	$N = 4^i$

FIG. 6.11: Construction de la courbe de Koch de paramètre  $\alpha$ .

plus alors que la taille du segment est seulement  $(2 + 2 \cos \alpha)$  fois plus petite. Le nombre de segments à l'étape  $i$  est  $N = 4^i$  et leur taille est  $\epsilon = l/(2 + 2 \cos \alpha)^i$ . Leurs logarithmes sont  $\ln N = i \ln 4$  et  $\ln(\epsilon/l) = -i \ln(2 + 2 \cos \alpha)$ , donc  $N$  est relié à  $\epsilon$  par

$$N(\epsilon) = (\epsilon/l)^{-\frac{\ln 4}{\ln(2+2\cos\alpha)}}, \quad (6.10)$$

où l'exposant de  $\epsilon$  varie entre -1 et -2 quand l'angle  $\alpha$  varie de 0 à  $\pi/6$ . Le flocon de Koch est intermédiaire entre la ligne (dimension 1,  $N(\epsilon) \propto (\epsilon/l)^{-1}$ ) et la surface (dimension 2,  $N(\epsilon) \propto (\epsilon/l)^{-2}$ ): sa dimension est donc intermédiaire entre 1 et 2. La longueur de la courbe à l'étape où les segments ont pour taille  $\epsilon$  est  $L(\epsilon) = N(\epsilon) \times \epsilon$ : elle dépend de  $\epsilon$ , et tend vers l'infini lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

Pour déterminer la dimension fractale d'un objet auto-similaire en dimension quelconque, il suffit de connaître le nombre minimal  $N(\epsilon)$  de boules (au sens topologique) de taille  $\epsilon$  qui recouvrent tout l'objet. La dimension fractale dite de Minkowski-Bouligand est définie par :

$$D_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (6.11)$$

ou, autrement dit,  $N(\epsilon) \propto (\epsilon/l)^{-D_F}$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Selon cette définition, la dimension de la courbe de Koch modifiée est  $\ln 4 / \ln(2 + 2 \cos \alpha)$ . De façon équivalente, elle se détermine si l'on connaît le facteur d'augmentation de  $N$ ,  $f_N = N(\epsilon_1)/N(\epsilon_0)$ , lorsque l'on diminue la taille des boules d'un facteur

$f_\epsilon = \epsilon_0/\epsilon_1$  :

$$D_F = \frac{\ln f_N}{\ln f_\epsilon} = -\frac{\Delta \ln N}{\Delta \ln \epsilon}, \quad (6.12)$$

qui est la dimension d'homothétie. Pour la courbe de Koch le nombre de boules augmente d'un facteur  $f_N = 4$  lorsque leur taille est divisée par un facteur  $f_\epsilon = 2 + 2 \cos \alpha$ .  $D_F$  est donc la pente locale de la courbe  $N(\epsilon)$  dans un diagramme logarithmique :

$$D_F = -\frac{d \ln N}{d \ln \epsilon}. \quad (6.13)$$

Si l'objet n'est pas auto-similaire à toutes les échelles,  $N$  ne suit pas une loi en  $N(\epsilon) = (\epsilon/l)^{-D_F}$  et la dimension définie par l'équation 6.13 dépend de l'échelle de  $\epsilon$  : nous utiliserons le terme de dimension fractale *locale* pour la désigner car l'aspect fractal varie avec l'échelle (Catrakis & Dimotakis, 1996). La dimension  $D_F(\epsilon)$  nous renseigne sur les échelles des rugosités. Elle pourrait être considérée comme un spectre des rugosités, si ce n'est que la valeur absolue de la dimension est plus difficile à utiliser : elle est liée à la géométrie précise des surfaces. Ses variations sont par contre une indication de l'évolution de la courbe : une dimension plus grande correspond à des contours plus circonvoqués.

#### 6.4.2 Mesure de la dimension fractale

En pratique, la mesure de la dimension fractale d'une courbe sur une image peut se réaliser de plusieurs façons (figure 6.12) :

- *La méthode de l'arpenteur* utilise le relevé avec un compas de longueur  $e$  variable, ce qui donne une longueur  $L(\epsilon)$ . Celle-ci se comporte comme  $N(\epsilon) \times \epsilon$ , soit en  $(\epsilon/l)^{1-D_F}$ . La pente de  $L(\epsilon)$  dans un diagramme logarithmique donne donc  $D_F$ .
- *La méthode du carreleur* (« box counting ») consiste à couvrir l'image de carreaux carrés de côté  $\epsilon$  et à relever le nombre  $N(\epsilon)$  de carreaux qui recouvrent la courbe. L'inconvénient de cette méthode est que si les dimensions de l'image ne sont pas un multiple de la taille des carreaux alors les carreaux dépassent de l'image ce qui fausse la mesure. Pour que les carreaux couvrent exactement une image carrée, il faut la recouvrir par des carreaux dont les côtés sont une suite dyadique  $\epsilon \sim l 2^{-n}$ . Mais alors cette suite tend rapidement vers 0 et l'on dispose d'un faible nombre de mesures de  $N(\epsilon)$  (Le Méhauté, 1991, page 50).
- *La méthode de dilatation*. Elle est basée sur la mesure de l'aire  $A(\epsilon)$  du contour épaissi avec une largeur variable  $\epsilon$ . L'épaississement s'obtient en

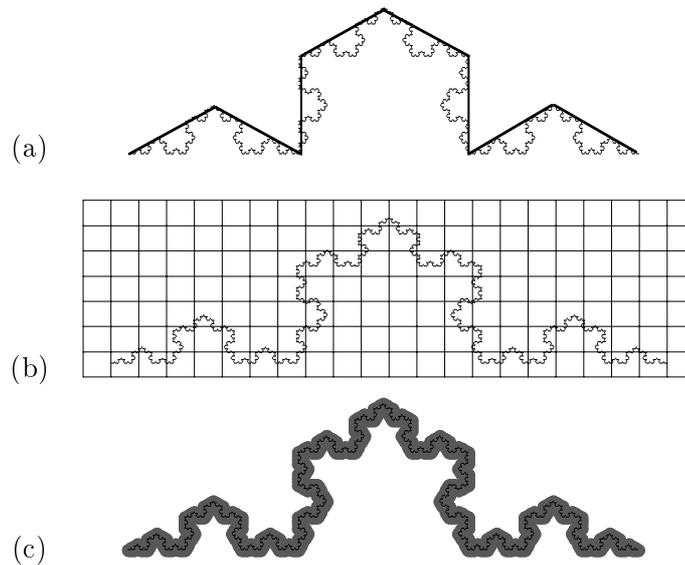


FIG. 6.12: Méthode de l'arpenteur (a), du carreleur (b), et de dilatation (c).

superposant les disques de diamètre  $e$  dont le centre est sur la courbe. Pour une courbe lisse le rapport  $L(\epsilon) = A(\epsilon)/\epsilon$  tend vers la longueur de la courbe lorsque  $e$  tend vers 0, alors que pour un fractal il se comporte comme  $L(\epsilon) \sim N(\epsilon)\epsilon^2/\epsilon \sim (\epsilon/l)^{1-D_F}$ .

Nous avons choisi la dernière méthode qui est la plus simple à implémenter sur des images composées de pixels (Smith *et al.*, 1996). Partant de l'image de la courbe, chacun des pixels (qui sont équivalents à des disques de taille 1) est remplacé par un disque de diamètre  $\epsilon = 1, 3, \dots$  pixels de large. Ceci est réalisé de manière itérative avec un traitement d'image : un filtre dit de dilatation ajoute quatre pixels autour des pixels présents, dans les quatre directions cardinales, et la répétition de cette opération augmente à chaque fois de 2 pixels le diamètre des disques de taille  $e$ . Ce filtre ne produit donc pas une dilatation des cercles de recouvrement à partir des pixels initiaux mais à partir des bords du recouvrement précédent. Nous verrons plus bas que les différences introduites sont négligeables. De l'aire du contour épaissi  $A(e)$  obtenue à chaque étape on déduit  $L(\epsilon) = A(\epsilon)/\epsilon$ , et une estimation du nombre de boîtes nécessaires pour couvrir la courbe,  $N(\epsilon) = A(\epsilon)/\epsilon^2$ . La pente des fonction  $L(\epsilon)$  et  $N(\epsilon)$  dans un diagramme logarithmique est  $1 - D_F(\epsilon)$  et  $-D_F(\epsilon)$  respectivement.

Afin de tester cette méthode sur une ligne de contour, nous avons créé une ligne rugueuse par répétition d'un motif de Koch modifié d'angle  $\alpha = 72^\circ$  (figure 6.13). Nous avons stoppé la construction du motif à l'étape 5 seulement, de façon à créer une auto-similarité dans une seule plage d'échelles, dont les bornes sont la

longueur du segment de départ  $\epsilon_0 = \epsilon_{max}$  et celle du plus petit segment  $\epsilon_5 = \epsilon_{min}$ , et donc plage d'amplitude  $\epsilon_{max}/\epsilon_{min} = 50$ . La courbe des longueur  $L(\epsilon)$  tracée



FIG. 6.13: Répétition du motif de Koch modifié ( $\alpha = 0.8 \times \pi/2$ ) pour créer une ligne rugueuse.

dans un diagramme logarithmique ne décroît avec une loi de puissance que sur un petit intervalle (figure 6.14). La dérivation de la pente de cette courbe donne la dimension fractale locale, elle n'est proche de la valeur théorique  $D_F = 1.44$  qu'au milieu de l'intervalle  $[\epsilon_{min} \epsilon_{max}]$ . Vu aux très grandes échelles un motif isolé ressemble à un point et sa dimension locale tend vers 0 aux grandes échelles. Lorsque les motifs sont répétés et alignés, la courbe a un aspect linéaire aux grandes échelles et la dimension tend vers 1.

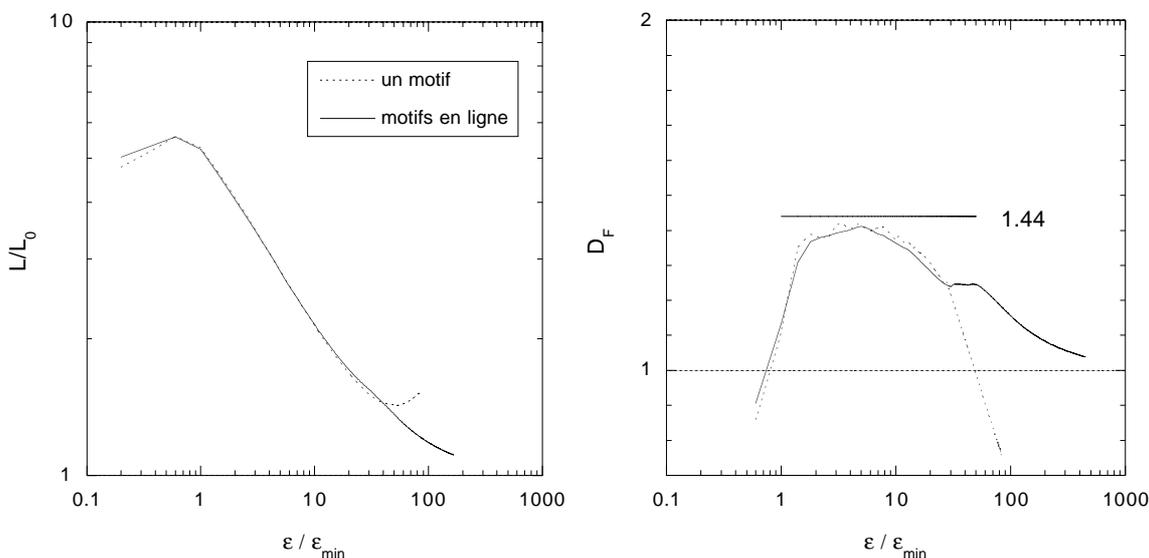


FIG. 6.14: Gauche : Algorithme de dilatation de pixel sur la courbe de Koch modifiée,  $\alpha = 0.8 \times \pi/2$ , construite jusqu'à l'étape 5 ( $\epsilon_0/\epsilon_5 = 50$ ), pour un motif et 4 motifs en ligne. Longueur apparente. Droite : Dimension fractale locale, ligne : dimension théorique sur la plage de construction  $[\epsilon_{min} \epsilon_{max}]$ ,  $\epsilon_{max}/\epsilon_{min} = 50$ .

### 6.4.3 Résultats expérimentaux

Pour suivre l'évolution de la rugosité le long du jet, nous avons considéré plusieurs zones en aval du jet, en commençant juste en sortie d'injecteur (Figure 6.15). Nous avons choisi une taille de fenêtre égale au diamètre du jet  $d_1$ . Cette largeur est toujours inférieure à la longueur d'onde primaire de l'instabilité de cisaillement  $\lambda$ , qui est la taille d'évolution caractéristique de l'interface instable. Nous obtenons ainsi une mesure de la rugosité dans les zones  $x/d_1 = [0..1]$ ,  $[1..2]$ ,  $[2..3]$  et  $[3..4]$ . Les contours haut et bas sont séparés et soumis à l'algorithme de dilata-

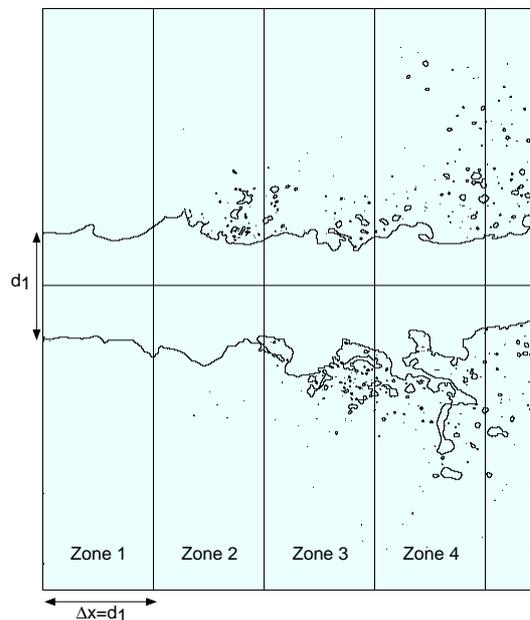


FIG. 6.15: Zones de mesures de la dimension fractale.

tion de pixel. Les résultats  $L(\epsilon)$ ,  $N(\epsilon)$  et  $D_F(\epsilon)$  d'une centaine d'image sont ainsi moyennés.

Sur la figure 6.16 nous voyons un exemple de longueur de contour de nombre de boîtes, en fonction du diamètre du disque de mesure, résultats fournis par l'algorithme de dilatation de pixel. Partant des grandes échelles  $\epsilon$  on remarque que les longueurs  $L(\epsilon)$  sont proches de la largeur de la fenêtre  $L_0$  : le contour vu à ces échelles est un segment. Si l'on diminue l'échelle de résolution  $e$  (en effectuant un grossissement) on remarque que ces longueur croissent : le contour est plus rugueux et la dimension fractale  $D_F$  s'accroît. Puis pour les petites échelles, la longueur  $L(\epsilon)$  varie peu, la courbe ne présente plus de rugosité : la dimension est proche de 1. Cette dernière longueur, à  $\epsilon = 1$  pixel, est la longueur de contour que nous avons étudiée plus haut : on vérifie par là même que notre résolution spatiale était suffisante pour résoudre toutes les rugosités du contour, puisque

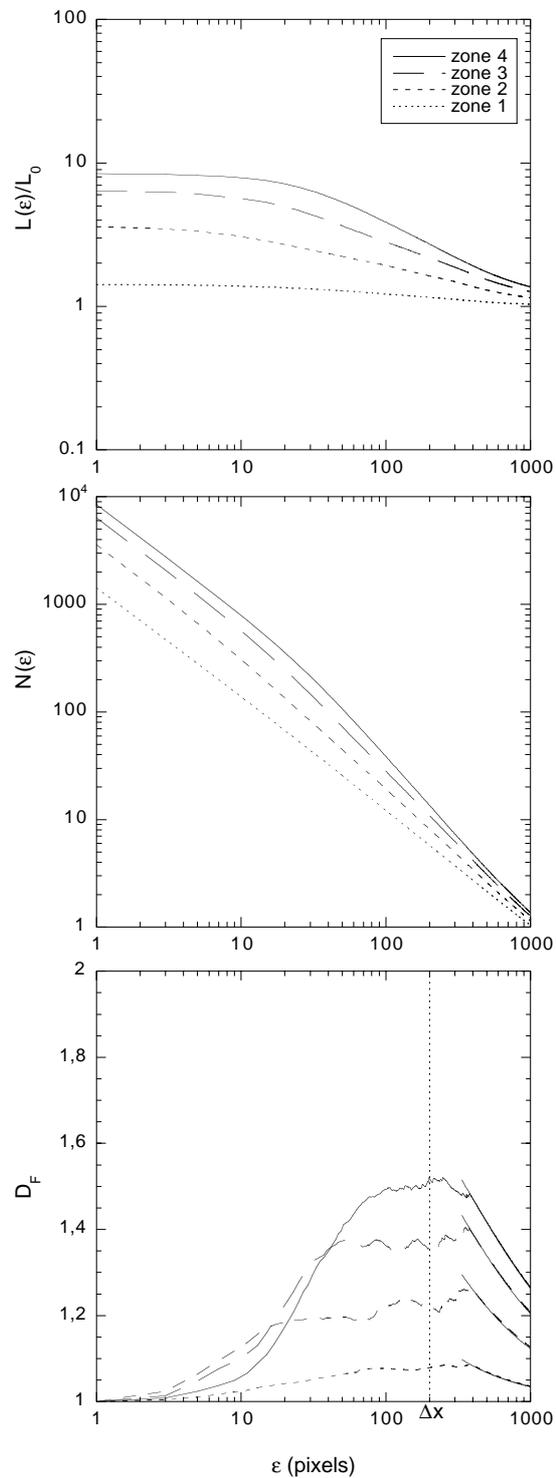


FIG. 6.16: Longueur, nombre de carrés de côté  $\epsilon$  nécessaires pour couvrir le contour et dimension fractale. Les contours proviennent d'images seuillées à  $C_s = 0.5$  de jets coaxiaux de vitesses  $u_1 = 1$  m/s et  $u_2 = 35.5$  m/s. Régression des décroissances de  $D_F$  par des courbes d'équation  $D_F = 2 - 1/(1 + H/\epsilon)$ , avec  $H = 36, 140, 256$ , et 356 pixels pour les zones 1 à 4.

nous sommes en dessous de l'échelle des rugosités.

Le passage par un maximum de  $D_F$  aux échelles intermédiaires se retrouve dans l'aspect visuel du contour avec des fenêtres d'observation de taille variable (Figure 6.17). Pour de forts grossissements la contour a bien un aspect lisse (image 1), il se complexifie pour des grossissements intermédiaires (images 2 et 3) et redevient lisse aux faibles grossissements (image 4)<sup>2</sup>.

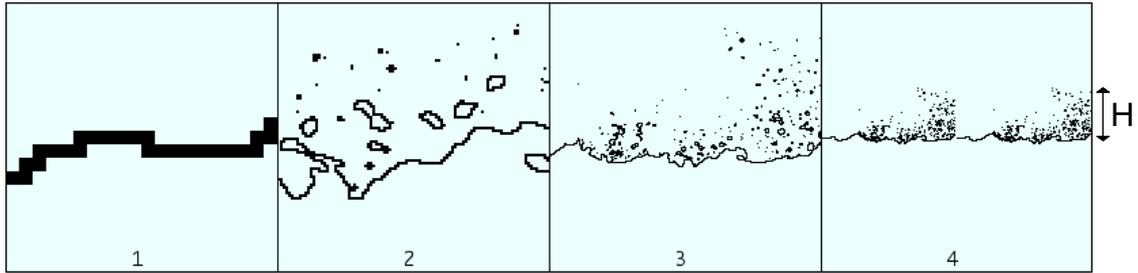


FIG. 6.17: Vues du contour supérieur du jet avec différentes tailles de fenêtres : 20, 100, 400, 1000 pixels.

Il est possible d'examiner des échelles supérieures à la largeur de la fenêtre  $\Delta x$  car le spray a une étendue transverse finie  $H$  et nous pouvons augmenter indéfiniment la hauteur de la fenêtre. Le comportement de la dimension fractale est alors prévisible dès que  $\epsilon$  est supérieur à  $H$ , tout le spray est recouvert par les pixels dilatés et donc l'aire dilatée  $A(\epsilon)$  est majorée par  $(H + \epsilon)\Delta x$ . La dimension fractale qui en résulte est majorée par

$$D_F = 2 - \frac{1}{1 + H/\epsilon}, \quad (6.14)$$

qui vaut 1.5 pour  $\epsilon = H$ , puis qui tend ensuite rapidement vers 1. Sur la figure 6.16 la décroissance de  $D_F$  est très bien approximée par cette équation, montrant l'augmentation

de l'étendue transverse  $H$  vers l'aval du spray.

### Effet du seuil de binarisation

Si un changement de seuil a un effet notable sur les longueurs de contour, il n'en est pas ainsi avec les dimensions fractales (voir la figure 6.18 où l'on a fait varier les seuils de binarisation des contours  $C_S$ ). Le comportement de  $D_F(\epsilon)$  est légèrement modifié pour les grandes échelles, mais les petites échelles ne sont

2. Pour augmenter artificiellement la taille de la fenêtre nous avons recopié l'image dans le sens du jet : cet artifice permet de ne pas augmenter la taille de la fenêtre d'observation du jet et de rester en dessous de l'échelle de variation de la surface.

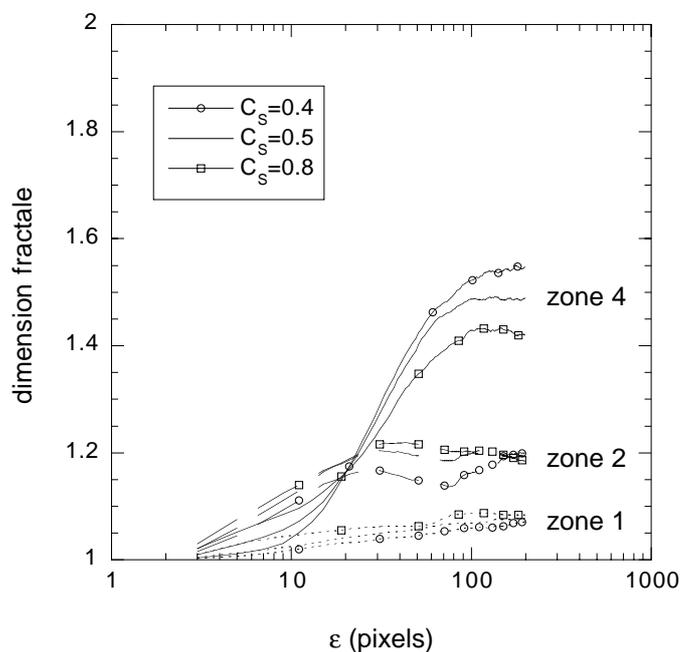


FIG. 6.18: Dimension fractale locale  $u_2 = 35.6$  m/s pour différents seuils de binarisation.

pas touchées par le changement de seuil. Par la suite nous prendrons un seuil à mi-hauteur  $C_s = 0.5$ .

### Evolution avec la distance et la vitesse du courant gazeux

Les courbes précédentes avaient été réalisées pour les mêmes conditions d'atomisation avec une vitesse de courant gazeux de  $u_2 = 35.5$  m/s : nous avons par la suite augmenté la vitesse ( $u_2 = 45, 61, 74$  m/s), et appliqué l'algorithme de dilatation fractale pour les mêmes zones.

Le maximum de la dimension fractale est d'autant plus important que l'on examine des zones plus en aval de la sortie : la rugosité de la courbe s'accroît avec la distance (Figure 6.19). Le jet initialement lisse voit naître des corrugations à sa surface, ce sont tout d'abord les ondulations de l'instabilité de cisaillement, puis ensuite les gouttelettes dont les contours de tailles sont de plus en plus dispersés.

Les dimensions fractales sont sensibles à l'augmentation de la vitesse gaz : le maximum apparaît pour des échelles de tailles plus petites.

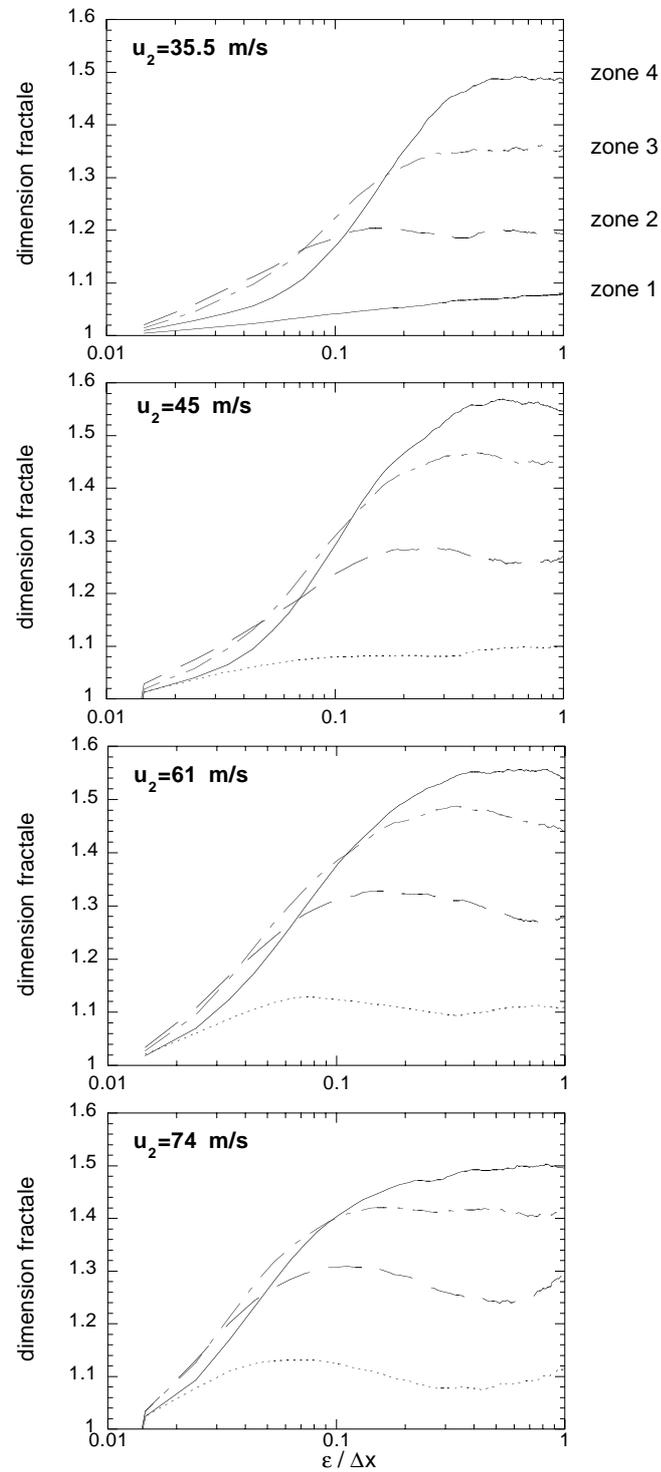


FIG. 6.19: Variation de la vitesse d'injection d'air pour les zones  $x/\Delta x = [0..1], [1..2],$  et  $[3..4]$ .

Une fois l'échelle rapportée à la taille transverse typique  $\lambda_{\perp}$  des ondulations transverses et des gouttelettes, les départs des courbes se superposent, montrant que  $\lambda_{\perp}$  est l'échelle à partir de laquelle les rugosités sont observées (Figure 6.20). Par contre la position du maximum n'est pas proportionnée à  $\lambda_{\perp}$ , puisqu'elle diminue par rapport à  $\lambda_{\perp}$  lorsque  $u_2$  varie. Le maximum de rugosité n'est donc pas obtenu pour l'échelle caractéristique des longueurs d'onde sur le jet et des tailles de gouttelettes.

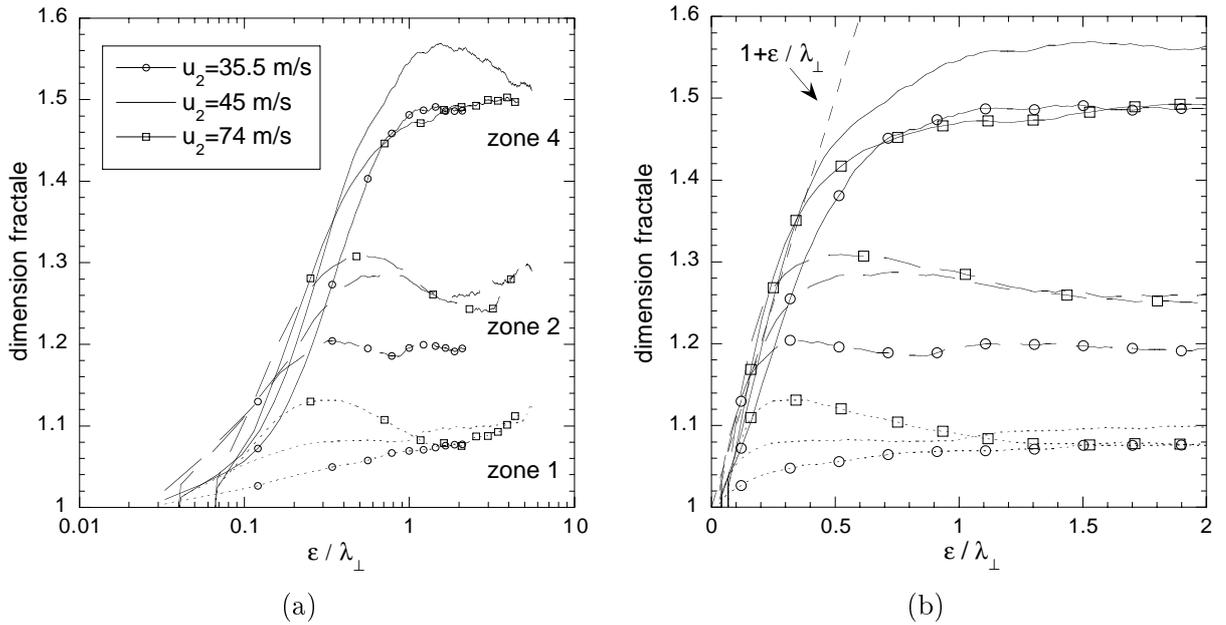


FIG. 6.20: (a) Echelle  $\epsilon$  rapportée à  $\lambda_{\perp}$ . (b) Même figure que précédemment mais en coordonnées linéaires pour  $\epsilon/\lambda_{\perp}$ .

La croissance initiale de  $D_F(\epsilon/\lambda_{\perp})$  est identique pour toutes les vitesses que nous avons testées. Dans un diagramme linéaire (Figure 6.20 b), la croissance se fait avec une pente 1 environ,  $D_F \simeq 1 + \epsilon/\lambda_{\perp}$ . L'aspect du contour est donc identique aux petites échelles. La dimension atteint un maximum d'autant plus grand que la zone est éloignée de la sortie et que la vitesse est grande.

Quel est le rôle de  $\lambda_{\perp}$  sur la dimension fractale? Pourquoi la valeur du maximum n'est-elle pas proportionnée à  $\lambda_{\perp}$ ? Pour répondre à ces questions nous avons étudié la rugosité du nuage de gouttelettes.

#### 6.4.4 Interprétation atomistique

L'examen des images révèle que dès que  $x/d_1 = 2$ , soit à partir de la zone 3, la majorité de la longueur est due au spray. Par conséquent la rugosité de la courbe

est déterminée par un ensemble de multiples boucles, les contours des gouttes, dont les tailles et les positions sont très variables.

Pour comprendre quelle est la contribution des gouttes individuelles sur la rugosité, nous avons déterminé numériquement et analytiquement, suivant toujours la méthode de dilatation, la dimension fractale d'un cercle, simplification d'une goutte. L'influence de la résolution des images a été étudiée. Les aspects collectifs ont ensuite été pris en compte, tout d'abord avec deux cercles puis avec un ensemble de cercles répartis sur le plan.

### Un cercle

Vu à une échelle petite devant son diamètre, un cercle est linéaire et sa dimension fractale locale à cette échelle est 1. Pour des échelles grandes devant son diamètre, il a un aspect ponctuel et sa dimension est 0. Quelle que soit la résolution (nombre de pixels sur lequel s'étend le diamètre) les dimensions suivent la même évolution :  $D_F = 1$  pour  $\epsilon \ll d$ ,  $D_F \rightarrow 0$  pour  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Il y a un petit maximum à  $\epsilon \simeq 0.70 d$  qui vaut  $D_F \simeq 1.10$  (Figure 6.21). L'aire du contour

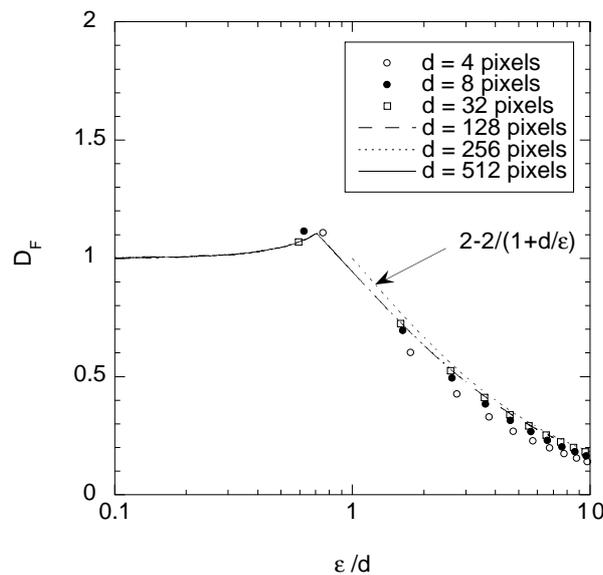


FIG. 6.21: Dimension fractale d'une goutte.

épaissi par l'algorithme de dilatation de pixel permet de retrouver la décroissance de  $D_F$  : lorsque le rayon  $\epsilon/2$  du disque de mesure est supérieur au rayon du cercle  $d/2$ , le cercle est recouvert par un grand disque de diamètre  $d + \epsilon$ . L'aire épaissie est donc  $A(\epsilon) = \pi(d + \epsilon)^2/4$  (figure 6.22), et donc la dimension  $D_F = 2 - \frac{2}{1+d/\epsilon}$ , proche des courbes numériques. Dans le cas où le rayon est plus petit  $A(\epsilon) = \pi d \epsilon$ ,

et la dimension théorique est 1. L'augmentation de  $D_F$  observée est un biais introduit par le filtre de dilatation de pixel, qui est légèrement non isotrope, et a tendance à recouvrir non par des cercles mais par des figures plus aplaties sur les bords verticaux et horizontaux. L'erreur commise sur la dimension fractale est de l'ordre de 10 % au maximum.

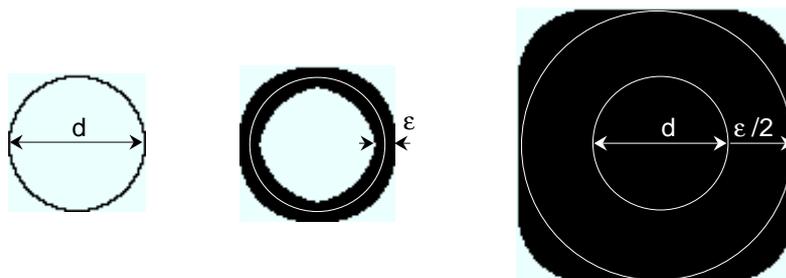


FIG. 6.22: Un cercle, cas  $\epsilon < d$ , et cas  $\epsilon > d$ .

Le diamètre  $d$  est donc bien l'échelle de rugosité principale mais cette rugosité ne produit guère d'augmentation de  $D_F(\epsilon)$  au dessus de 1. L'effet des cercles individuels sur la rugosité est donc négligeable. L'investigation de l'effet collectif s'avère nécessaire. Considérons donc :

### Deux cercles

Sur une image, deux cercles de même diamètre (nous avons choisi 64 pixels) ont été mis côte-à-côte séparés d'une distance  $\delta$  (Figure 6.23). Séparés de plus

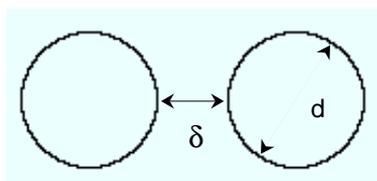


FIG. 6.23: Deux cercles ( $d = 64$  pixels).

d'un rayon,  $\delta > d/2$ , la dimension a toujours un maximum à  $\epsilon \simeq 0.70 d$  comme pour un seul cercle, et une discontinuité de  $D_F$  survient lorsque les pixels dilatés se touchent à  $\epsilon = \delta$  car la surface couverte diminue moins vite tout à coup, l'« espace » est plus rugueux à cette échelle. Quand au contraire les cercles sont séparés de moins d'un rayon,  $\delta < d/2$ , le maximum de la dimension fractale est plus grand et vaut 1.28 (Figure 6.24), les recouvrements interagissent mutuellement avant que les cercles ne soient entièrement recouverts de façon à former des disques. En conclusion lorsque les gouttes sont très proches le maximum de  $D_F$  est augmenté.

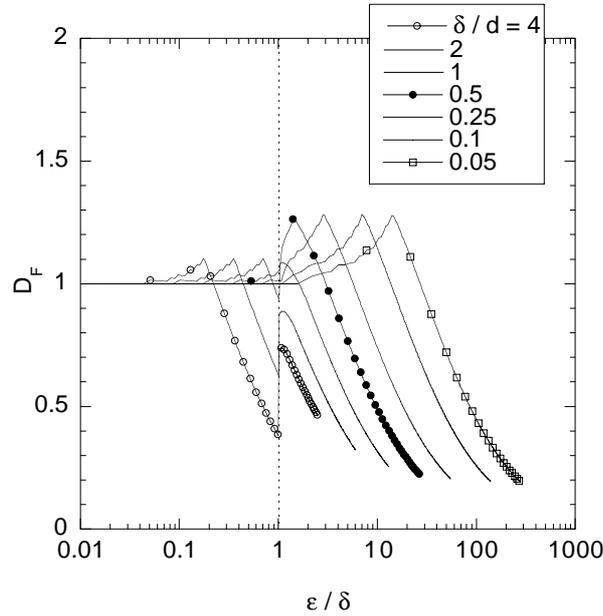


FIG. 6.24: Dimension fractale de deux cercles, rapporté à leur distance : il y a une augmentation de la dimension fractale maximale pour les petites distances entre surfaces, telles que  $\delta/d < 1/2$ .

### Nuage de cercles

Pour modéliser l'image des contours d'un brouillard de gouttes, nous avons réparti aléatoirement un grand nombre  $n$  de cercles sur la surface  $S$  d'un carré. Deux types d'images (Figure 6.25) ont été créées de cette façon : une première série avec des diamètres monodisperses de  $d_m$  pixels, et une seconde avec des diamètres choisis aléatoirement sur une distribution de probabilité exponentielle caractérisée par le même diamètre moyen  $\langle d \rangle = d_m$  pixels,

$$p(d) = \frac{1}{\langle d \rangle} \exp(-d/\langle d \rangle),$$

un diamètre  $d_m$  de 10 pixels a été choisi car la réponse d'une goutte à l'algorithme est très proche de la réponse de gouttes infiniment résolues. Nous exprimerons la densité de particule  $n/S$  par une distance,  $\langle d_{ij} \rangle$ , que nous définissons comme la distance entre proches voisins de points disposés sur réseau carré de même densité :  $\langle d_{ij} \rangle = \sqrt{S/n}$ .

Dans un premier temps nous allons limiter la fenêtre d'observation à ses bords (surlignés en noirs figure 6.25). Pour des cercles de diamètres monodisperses, l'évolution aux petites échelles de  $D_F(\epsilon)$  est identique à celle d'un cercle seul mais la dimension augmente ensuite radicalement et pour des échelles d'autant plus

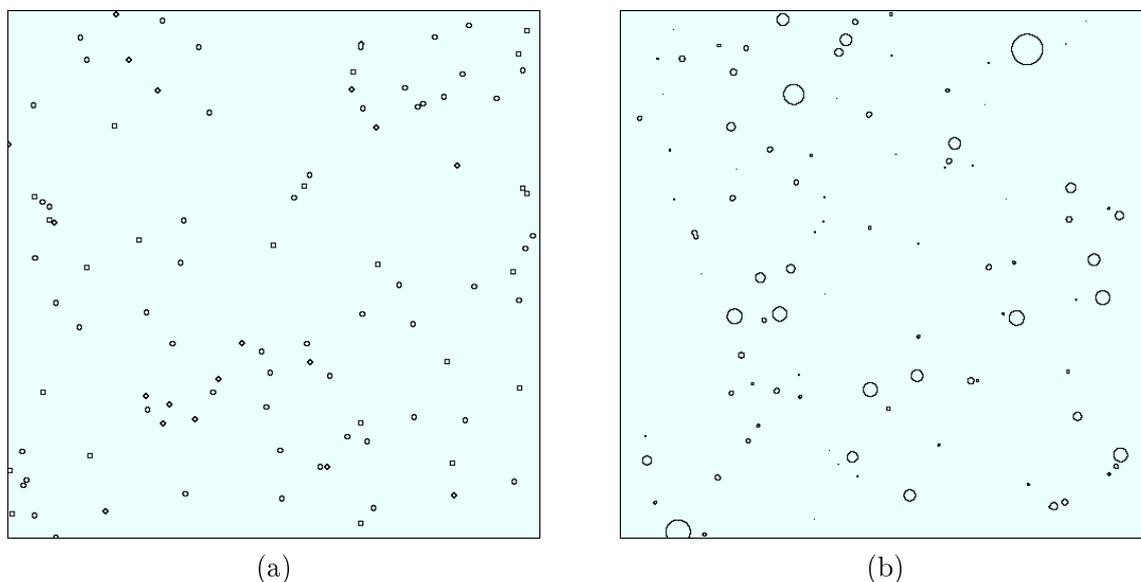


FIG. 6.25: (a) Répartition aléatoire de disques sur le plan avec une distance moyenne entre les centres des disques de  $\langle d_{ij} \rangle = 10d$ . Leur diamètre est  $d = 10$  pixels. (b) Les diamètres sont distribués exponentiellement avec une moyenne  $\langle d \rangle = 10$  pixels.

petites que les cercles sont rapprochés (Figure 6.26 a). Dans le cas de cercles de tailles distribuées exponentiellement, le petit maximum est gommé par la palette des différentes tailles, mais l'évolution ultérieure reste la même (Figure 6.26 b).

Comparé à la distance  $\langle d_{ij} \rangle$ , le maximum des dimensions fractales est atteint pour  $\epsilon/\langle d_{ij} \rangle \simeq 2$  (figure 6.27). La pente maximale de la croissance de la dimension est relativement constante : les courbes sont parallèles à la droite d'équation  $D_F \simeq 1 + 0.75\epsilon/\langle d_{ij} \rangle$ .

La dimension tend vers 2 pour les grandes échelles car le champ d'observation est limité : toute la surface du champ finit par être recouverte par les dilatations. Pour nous rapprocher du cas expérimental, nous allons considérer que l'extension du champ de cercles est limitée en hauteur et qu'au dessus et au dessous il n'y a pas de contours. Nous utiliserons donc une fenêtre très haute remplie par le champ de contours sur une hauteur égale à la largeur de fenêtre (figure 6.28). Les résultats sont similaires pour les petites échelles, pour les grandes échelles la dimension fractale présente par contre une décroissance plutôt que de saturer à 2 (figure 6.29). Cette décroissance est causée par l'étendue finie du spray, et la dimension fractale est proche de la prédiction de l'équation 6.14,  $D_F = 2 - 1/(1 + H/\epsilon)$ , qui suppose que le spray est entièrement recouvert à partir d'une extension transverse  $H$ .

La croissance rapportée à  $\lambda_{\perp}$  n'est pas significativement modifiée par l'ex-

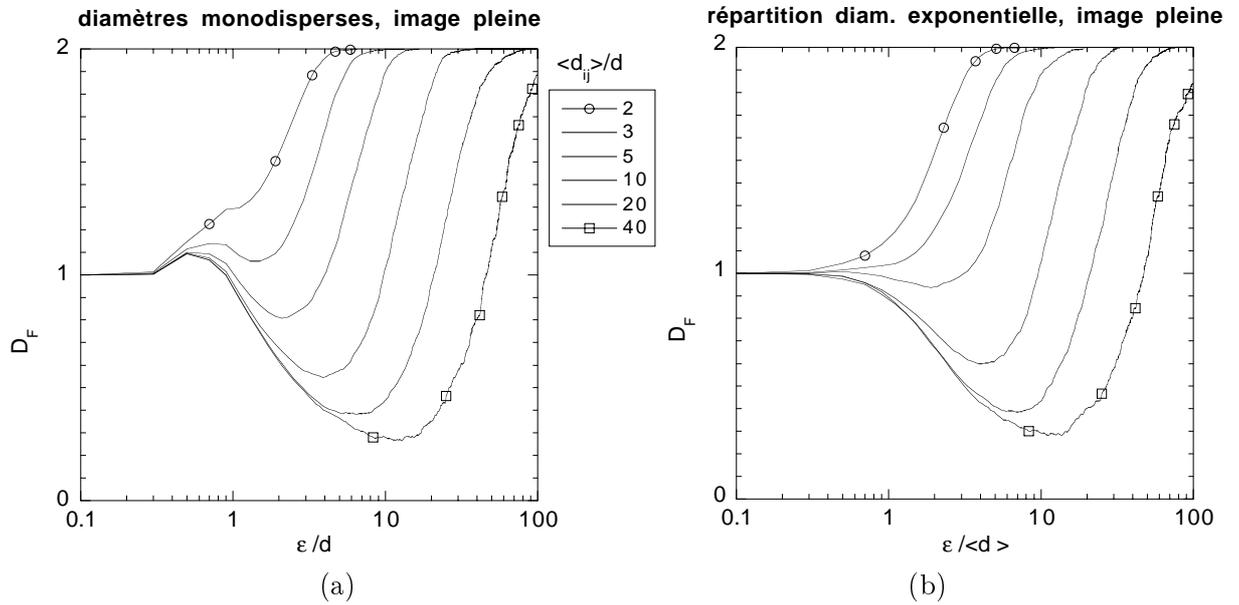


FIG. 6.26: (a) Dimension fractale des répartitions monodisperses  $d = 10$  pixels, (b) exponentielles de moyenne  $\langle d \rangle = 10$  pixels.

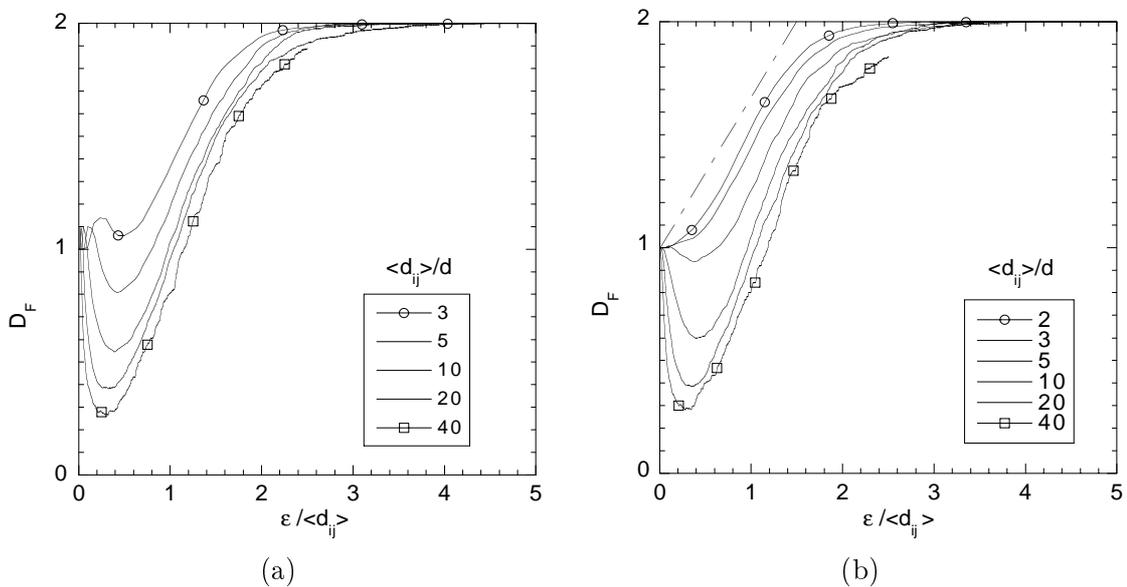


FIG. 6.27: (a) Idem rapporté à  $\langle d_{ij} \rangle$  (b) En trait discontinu droite de pente 0.75.

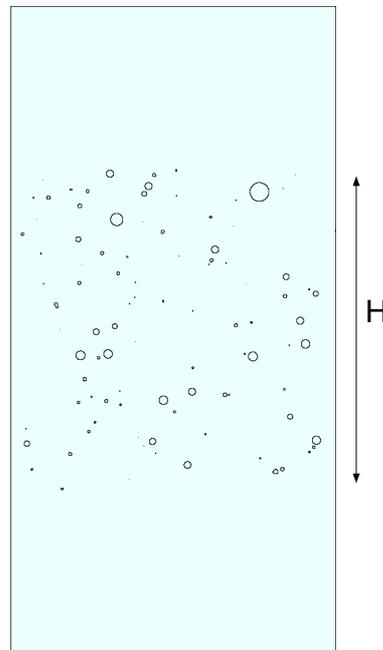
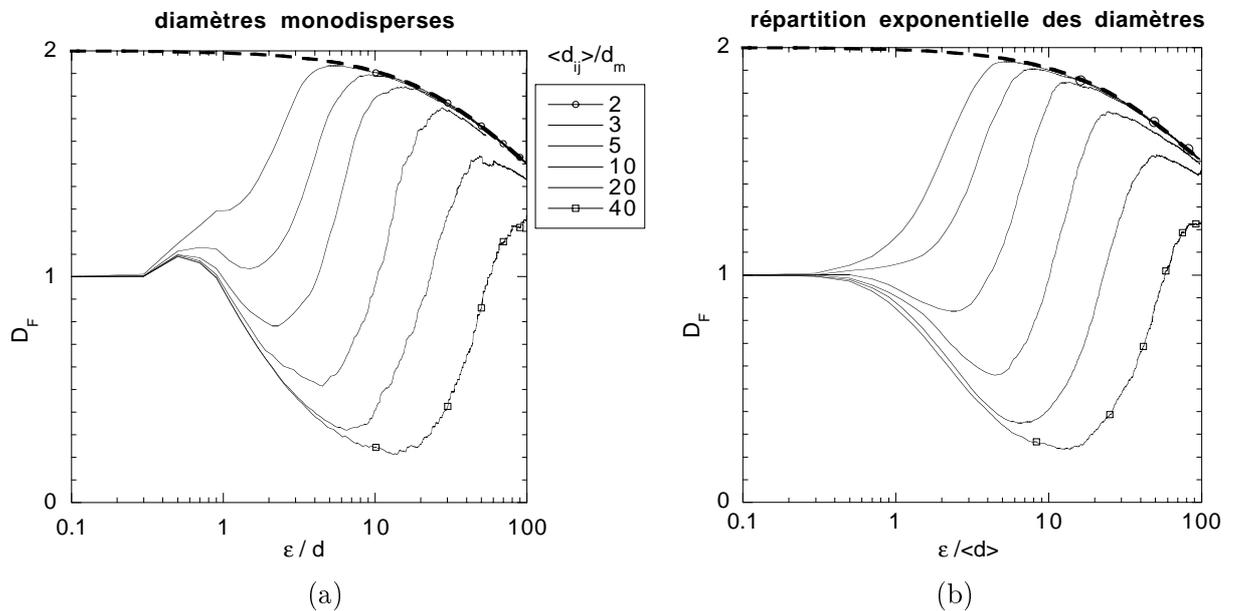
FIG. 6.28: *Spray limité en hauteur.*

FIG. 6.29: (a) *Spray d'étendue transverse  $H = 1000$  pixels : dimension fractale des répartitions monodisperse  $d = 10$  pixels, (b) et exponentielles  $\langle d \rangle = 10$  pixels. Lignes en pointillés  $D_F = 2 - 1/(1 + H/\epsilon)$ .*

tension finie du spray et la position du maximum de  $D_F$  se produit toujours à  $\epsilon/\langle d_{ij} \rangle \simeq 2$  (figure 6.30). La dimension suit l'équation 6.14 lorsque ce maximum est atteint est donc la valeur de la dimension fractale est imposée par le rapport entre la largeur transverse du spray et l'espacement moyen des contours selon

$$D_F \simeq 2 - \frac{1}{1 + H/2\langle d_{ij} \rangle}. \quad (6.15)$$

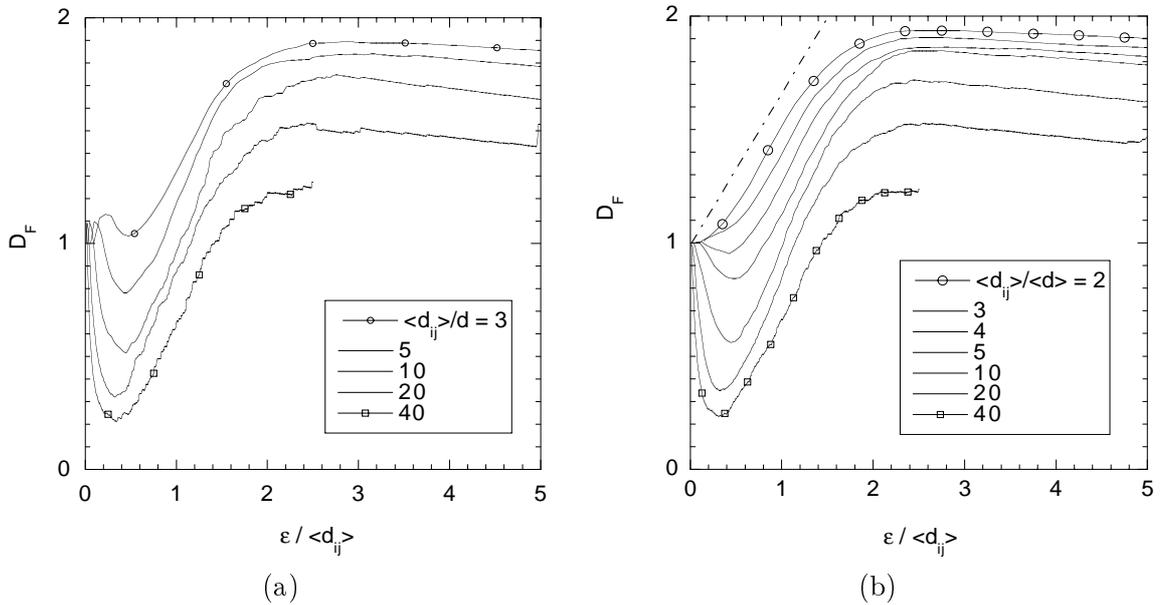


FIG. 6.30: (a) *Idem* rapporté à  $\langle d_{ij} \rangle$  (b) *En trait discontinu* droite de pente 0.75.

Nous pouvons donc conclure de ces modélisations que l'échelle de rugosité maximale est celle de l'espacement moyen des contours avec  $\epsilon = 2\langle d_{ij} \rangle$ . La valeur de  $D_F$  est liée au rapport entre l'étendue du spray et l'espacement  $H/\langle d_{ij} \rangle$ .

Les courbes expérimentales dans le jet (figure 6.20 ou 6.20) s'interprètent alors simplement: l'augmentation initiale en  $D_F \simeq 1 + \epsilon/\lambda_{\perp}$  est similaire à l'augmentation de la dimension d'un champ de cercles très dense pour lequel  $D_F \simeq 1 + 0.75 \epsilon/\langle d_{ij} \rangle$ : ceci indique que l'espacement moyen est d'environ  $0.75\lambda_{\perp}$ . Il est logiquement proportionné à l'espacement initial des ligaments. Le maximum de la dimension fractale reflète l'étendue des contours relativement à l'espacement des gouttes. Si l'on calcule par l'équation 6.15 le rapport théorique  $H/\langle d_{ij} \rangle$  d'après la valeur maximale de  $D_F$  mesurée dans le jet, on constate que le spray s'étend avec la distance selon une vitesse d'expansion relativement constante aux petites vitesses (figure 6.31 a). Sachant que  $\langle d_{ij} \rangle$  est proportionné à  $\lambda_{\perp}$ , nous pouvons

inférer la largeur réelle du spray. Elle croît de la même manière initialement (pendant la formation des ligaments et leur brisure) quelle que soit la vitesse du courant d'air : l'angle du spray est relativement constant (figure 6.31 b). Aux grandes vitesses le spray est infléchi par rapport à cet angle car l'accélération des petites gouttelettes est plus forte.

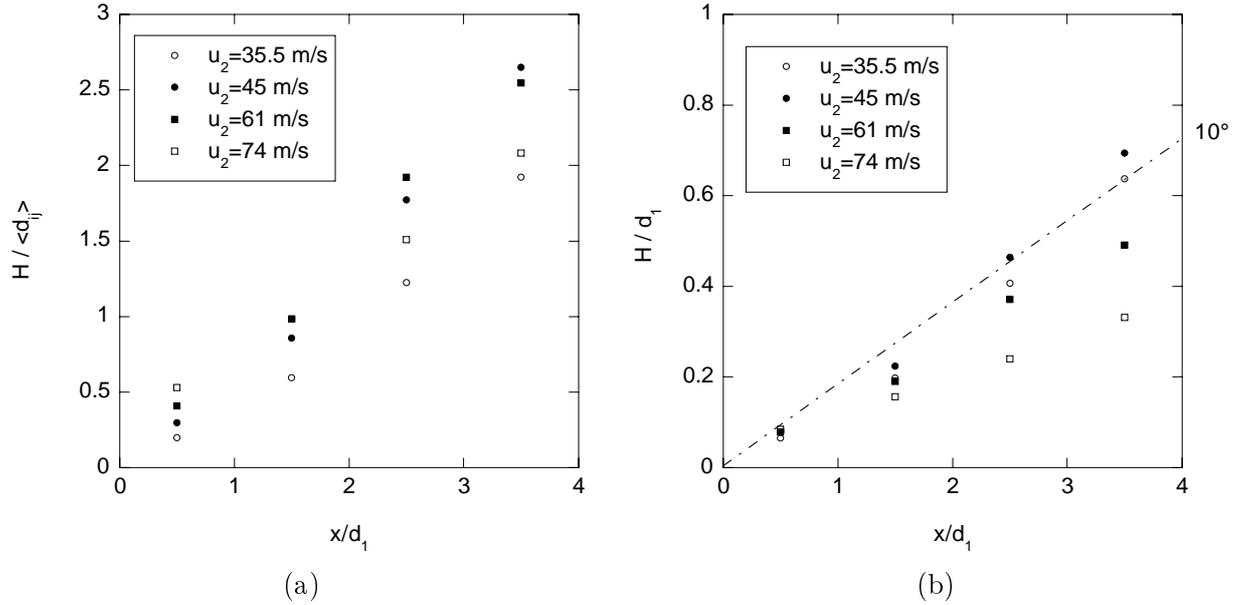


FIG. 6.31: (a) *Etendue du spray relativement à l'interdistance moyenne*, (b) *et relativement au diamètre du jet*. Régression linéaire :  $H \simeq x \tan \beta$ , avec  $\beta = 10^\circ$ .

En conclusion la rugosité des contours du jet, mesurée par  $D_F(\epsilon)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , est réglée par la taille  $\lambda_\perp$  des ondulations qui donnent naissance aux ligaments. L'augmentation du maximum de la dimension fractale révèle l'expansion radiale du spray de contours.

## Chapitre 7

### Conclusions

Il ressort de cette étude que la formation d'un brouillard de gouttelettes à partir d'un jet liquide présente une étape intermédiaire pendant laquelle des ligaments de liquide sont entraînés par le courant gazeux rapide.

La formation de ces ligaments est liée à une instabilité de la surface liquide. L'épaisseur de vorticité  $\delta$  contrôle le développement de cette instabilité, qui engendre des ondulations longitudinales puis transverses de longueur d'onde  $\lambda_{\perp} \simeq 4 \delta We_{\delta}^{-1/3} (\rho_1/\rho_2)^{1/3}$ . Cette longueur fixe la taille initiale des ligaments arrach es du jet liquide.

Si l'étirement des ligaments est dû aux forces de traînée aérodynamique, en revanche le moment de la brisure des ligaments est fix e par le temps de contraction capillaire initial. Les tailles de gouttelettes qui proviennent de la brisure sont déterminées par le volume initial du ligament  $v_0 = \pi d_0^3/6$  avec  $d_0 \simeq 0.23 \lambda_{\perp}$  (expériences avec de l'eau et de l'air), avec une taille moyenne de gouttelettes de  $0.4 d_0$  donc  $0.1 \lambda_{\perp}$ . La répartition large des tailles résulte de l'interaction des gouttes pendant la brisure du ligament, qui est décrite par une fonction de probabilité *Gamma*.

La largeur de la distribution des diamètres de gouttes dans le spray est principalement due à la brisure des ligaments et non à la variabilité de la taille des ligaments. Une composition de la distribution des tailles de ligaments et de la distribution de leur brisure permet de retrouver la décroissance systématiquement exponentielle des distributions de tailles de gouttes dans le spray. La dépendance de la taille moyenne des gouttes en  $\delta We_{\delta}^{-1/3}$  est confirmée avec une tension de surface plus faible (expériences avec de l'éthanol). Par contre, si l'on augmente de 14 fois la viscosité, les diamètres obtenus décroissent plus vite avec  $We_{\delta}$  (expériences avec une solution de glycérol) car la brisure des ligaments est retardée.

L'examen des contours du jet sur les images montre que la surface du jet liquide augmente avec un taux d'amplification qui est initialement celui des ondulations longitudinales. L'utilisation de la dimension fractale, dans sa version

locale, nous montre que la rugosité de la surface est liée à la longueur d'onde transverse  $\lambda_{\perp}$ . Sa valeur est maximale dans le spray, et elle est d'autant plus grande que gouttes sont proches.

## Annexe A

# Conditions d'injection turbulentes

**N**OUS AVONS UTILISÉ jusqu'à présent un injecteur convergent qui garantissait des écoulements laminaires pour le jet liquide et le jet gaz, et qui permettait d'observer un développement régulier des instabilités. Nous appellerons par la suite cet injecteur LL (pour Laminaire dans le liquide et Laminaire dans le gaz).

Dans les moteurs de fusées les vitesses sont très élevées, avec des nombres de Reynolds de l'ordre de  $10^5$ , et les conditions d'injection sont turbulentes dans le jet liquide et le jet gazeux. L'on peut alors se demander ce qu'il advient des mécanismes de brisures que nous avons décrit dans le cas de conditions autant que possible laminaires. L'influence de structures turbulentes sur la brisure de jets liquides injectés à grande vitesse dans une atmosphère immobile a fait l'objet de nombreuses études. L'interaction des échelles turbulentes dans le jet liquide et la surface (voir l'article de Mansour & Chigier, 1994, pour leur description) est responsable de la taille des ligaments arrachés et de la taille des gouttes produites (Wu & Faeth, 1993, 1995). Par contre l'étude de la brisure de jets coaxiaux de liquide et de gaz turbulents n'a été que peu étudiée. Mayer (1994) expose des visualisations du comportement de jet coaxiaux en fonction des nombres de Reynolds liquide et gaz, et remarque que les structures turbulentes sont visibles à la surface dès la sortie de l'injecteur et que l'atomisation se produit plus près de l'injecteur en présence de ces ondulations de surface.

Afin de tester l'influence de ces structures sur l'atomisation primaire, à savoir sur les longueurs d'ondulations de la surface et la taille des gouttes produites, nous avons étudié l'influence de la turbulence dans le jet liquide seul, puis de la turbulence dans le jet liquide et le jet gazeux.

## A.1 Injection

### A.1.1 Écoulement liquide turbulent, écoulement gazeux laminaire : injecteur TL

Nous avons tout d'abord modifié l'écoulement du jet liquide central de notre injecteur convergent LL en introduisant des obstacles de façon à développer des turbulences (Figure A.1). Un disque percé d'un trou étoilé de 3 mm de diamètre a été placé en arrivée d'injecteur, son but étant de promouvoir des structures turbulentes à grande échelle. Un tube de 10mm de diamètre pourvu d'écaillés le long de sa surface intérieure a été de même introduit dans la tuyère de l'injecteur, de façon à induire un maximum de rugosités sur les bords du jet.

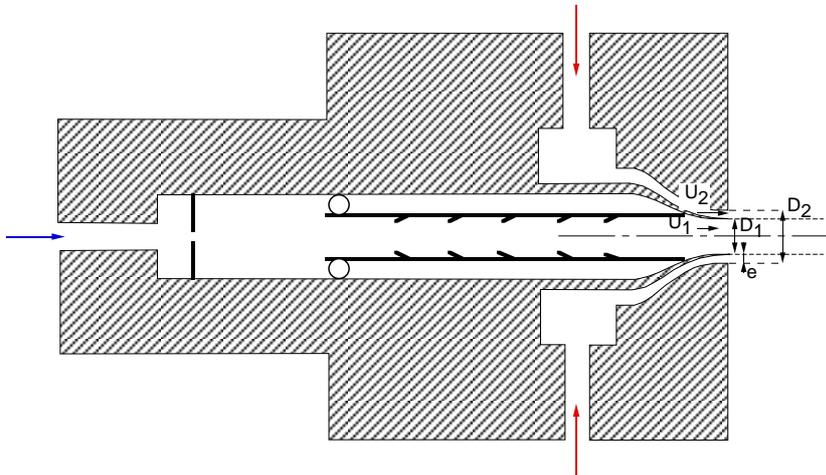


FIG. A.1: Schéma en coupe de l'injecteur TL : le liquide est injecté dans le tube central (diamètre en sortie  $D_1 = 7.6$  mm), le gaz par les quatre entrées latérales. Le diamètre externe du jet annulaire gazeux est  $D_2 = 11.4$  mm.

### A.1.2 Écoulement liquide et gazeux turbulents : injecteur TT

Pour introduire des turbulences dans le jet liquide ainsi que dans le jet gazeux nous avons dessiné un nouvel injecteur composé de longs tubes cylindriques coaxiaux (Figure A.2). Son rapport longueur de tube/diamètre de jet central est de l'ordre de 37, afin d'obtenir une turbulence pleinement développée en sortie du jet liquide. Des obstacles sont placés en début du tube central pour déclencher l'apparition de turbulences à des vitesses les aussi faibles que possibles. Les diamètres de sortie sont  $D_1 = 7.6$  mm et  $D_2 = 11.4$  mm, les mêmes que pour l'injecteur convergent LL ou sa version TL, ce qui permet de comparer les résultats.

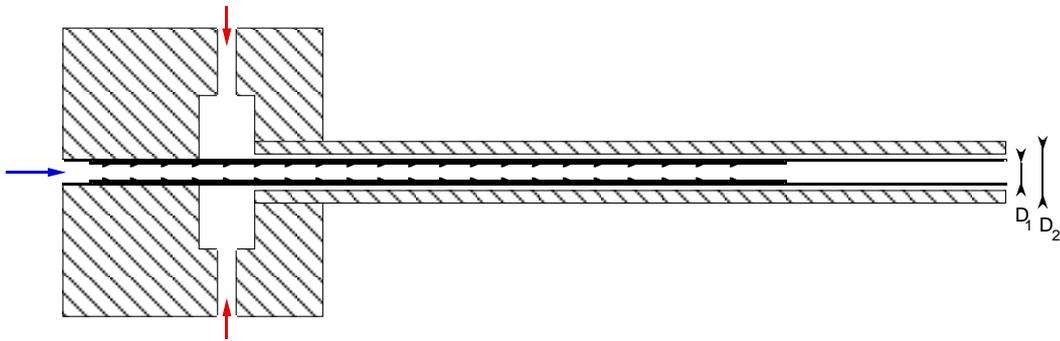


FIG. A.2: Schéma en coupe de l'injecteur TT. Tube central :  $D_1 = 7.6$  mm ; couronne annulaire : diamètre externe  $D_2 = 11.4$  mm.

**Caractérisation du taux de turbulence dans le jet central** Nous avons commencé par nous intéresser au taux de turbulence dans le jet liquide. Les profils de vitesse dans le jet central n'ont pas été mesurés avec de l'eau, mais en remplaçant l'eau par de l'air : en effet une similitude de Reynolds nous permet de passer des profils de vitesse en air, réalisés avec un fil chaud, à ceux en eau. Ceci évite de recourir à des mesures dans l'eau avec un film, mesures qui sont beaucoup plus délicates, car le film accumule des impuretés qui modifient sa réponse au cours du temps. La vitesse d'air  $u_{2central}$  qui donne le même nombre de Reynolds dans le tube central qu'une vitesse d'eau  $u_1$  est telle que  $Re_{D_1} = u_{2central}D_1/\nu_2 = u_1D_1/\nu_1$ . Le rapport des viscosités cinématiques gaz-liquide étant de 15, il faut donc des vitesses d'air 15 fois plus fortes pour obtenir le même nombre de Reynolds. Le fil chaud est positionné au plus près de la sortie de l'injecteur (0.6 mm, voir Figure A.3). Le taux de turbulence au milieu du jet central est de l'ordre de 8% et atteint jusqu'à 17% au niveau du bord (Figure A.4). Nous sommes donc assurés d'avoir une turbulence suffisante dans le liquide.

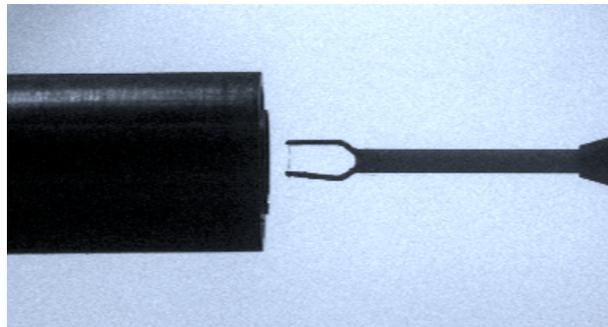


FIG. A.3: Mesure au fil chaud.

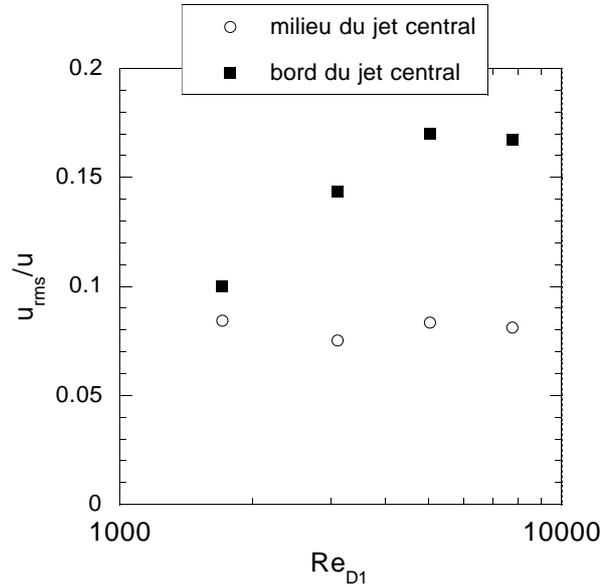


FIG. A.4: Taux de turbulence au milieu et au bord du jet central.

**Épaisseur de couche limite turbulente dans le jet de gaz** Les mesures au fil chaud dans le jet annulaire nous donnent les profils de vitesse dans la couronne d'air coaxiale de l'injecteur turbulent (Figure A.5). Ils nous renseignent sur l'épaisseur de couche limite sur la face externe du tube séparateur en sortie d'injecteur, à débit de liquide nul. Il existe de multiples évaluations de cette épaisseur. La plus simple est l'épaisseur de vortacité définie par le rapport de la vitesse maximale (au centre) et de la plus grande pente du profil au bord :  $\delta = u_{max}/\left.\frac{du}{dy}\right|_{max}$ . C'est celle que nous avons utilisé plus haut lors de notre étude de l'écoulement dans l'injecteur convergent laminaire LL. On utilise aussi l'épaisseur de déplacement, définie par  $\delta_1 = \int_0^\infty (1 - u/u_{max})dy$ , ainsi que l'épaisseur de quantité de mouvement  $\delta_2 = \int_0^\infty u/u_{max}(1 - u/u_{max})dy$ . Nous les avons tracées en fonction du nombre de Reynolds  $Re_2 = u_{max}e/\nu_2$ , calculé avec l'épaisseur de la couronne  $e$  (Figure A.6).

Pour les petits nombres de Reynolds l'épaisseur de vortacité est constante : l'écoulement s'approche d'un écoulement de Poiseuille de profil de vitesse parabolique, pour lequel la pente du profil aux bords est proportionnée à la vitesse maximale. En effet la vitesse longitudinale en fonction de la distance à la paroi  $y$  suit la parabole  $u(y) = u_{max}4y(e - y)/e^2$ . La pente aux bords est donc  $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = 4u_{max}/e$ , ce qui donne une épaisseur de vortacité  $\delta = e/4$  proche des points de mesure pour  $Re_2 < 1000$ . L'établissement d'un profil de Poiseuille dans un canal nécessite une longueur de l'ordre de  $L = 0.035 eRe_2$  (d'après Schlichting, 1987), soit 35 épaisseurs de couronnes pour  $Re_2 = 1000$ , si l'on néglige la courbure

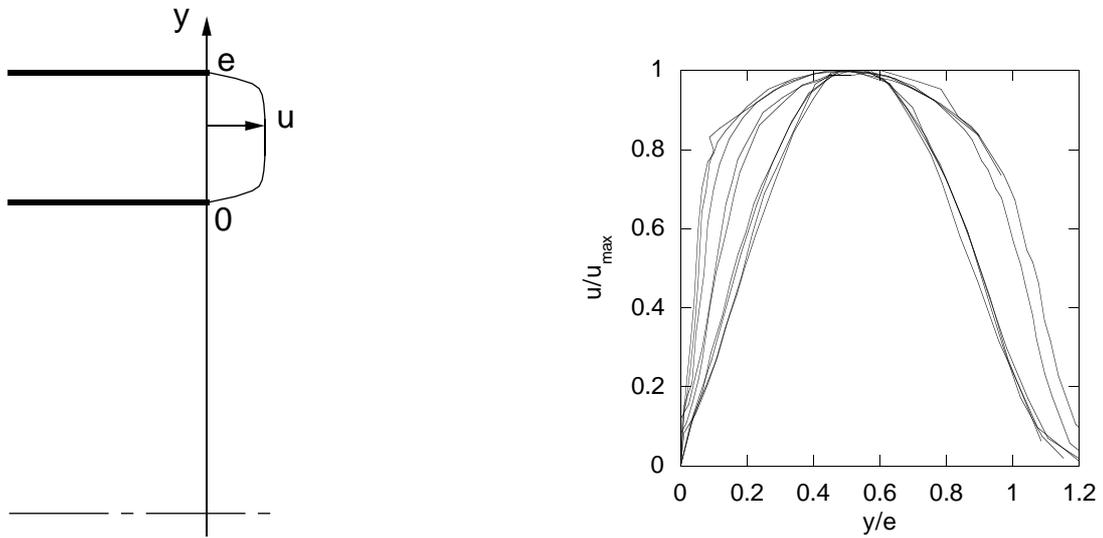


FIG. A.5: Profils de vitesse d'air dans la couronne coaxiale adimensionnés par la vitesse maximale  $u_{max} = 1.5, 3.2, 6.14, 11.2, 17, 25.2, 33.7, 45.5, 54.5$  m/s.

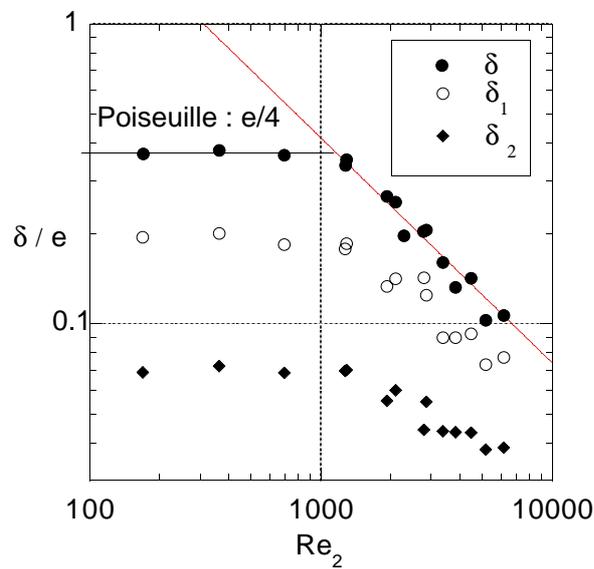


FIG. A.6: Épaisseur de couche limite au bord intérieur de la couronne de l'injecteur turbulent TT : épaisseur de vortacité  $\delta$ , de déplacement  $\delta_1$ , et de quantité de mouvement  $\delta_2$ . Interpolation de  $\delta$  pour les grands Reynolds en  $74/Re_2^{-3/4}$ .

du canal annulaire. Or nous avons un rapport longueur de tube sur épaisseur de couronne de 140 qui nous permet d'affirmer que l'écoulement est établi en sortie jusqu'à  $Re_2 = 1000$ .

Pour de plus grands nombres de Reynolds la couche limite devient turbulente : en ce cas la vitesse de frottement  $u_\tau$ , définie par  $\rho_2 u_\tau^2 = \mu_2 \frac{du}{dy}|_{y=0}$ , suit la loi de Blasius :

$$\frac{u_\tau}{u_2} = \frac{0.164}{Re_2^{1/8}}, \quad (\text{A.1})$$

voir Schlichting (1987). Ce qui donne une épaisseur de vortacité de  $\delta$  qui suit la relation :

$$\frac{\delta}{e} = \frac{37.2}{Re_2^{3/4}}, \quad (\text{A.2})$$

tendance que nous retrouvons avec un préfacteur expérimental différent, de 74. Les deux autres évaluations de l'épaisseur de la couche limite,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ne suivent pas les lois attendues en  $Re^{-1/7}$  pour une couche limite turbulente. La raison en est que les mesures n'ont pas été effectuées exactement en sortie de tube mais quelque peu en aval pour ne pas briser le fil chaud ; nous avons donc des vitesses non nulle à  $y = 0$  ( $y$  est la distance à la paroi) et nous sommes légèrement dans le début de la couche de mélange, alors que les définitions  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont très sensibles à la vitesse près de  $y = 0$ .

## A.2 Etat de surface du jet liquide seul pour les différents injecteurs

Pour caractériser l'état de surface du jet liquide nous avons photographié le jet à débit d'air nul. Les profils obtenus avec l'injecteur convergent TL (munis d'obstacles dans sa tuyère liquide) sont très proches de ceux obtenus avec l'injecteur tubulaire TT (Figure A.7). Nous avons considéré que les corrugations du jet deviennent significatives à la sortie à partir de 2.0 m/s.

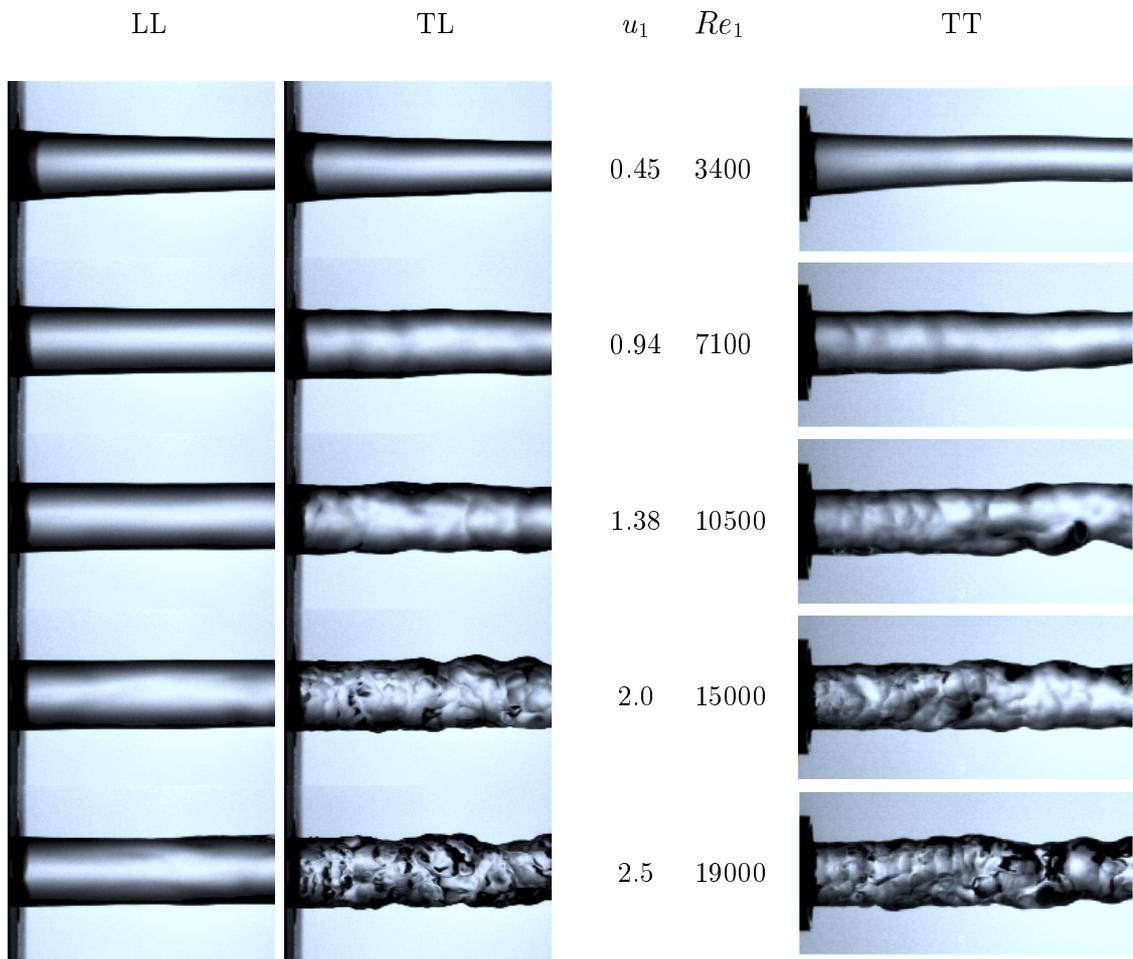


FIG. A.7: Etat de surface jet liquide avec les injecteurs LL (laminaire dans le liquide et le gaz), TL (liquide turbulent, gaz laminaire) et TT (turbulent dans le liquide et le gaz) en fonction du nombre de Reynolds liquide  $Re_1 = u_1 D_1 / \nu_1$ , à vitesse de gaz nulle. Les images ont été tournées : la pesanteur est dirigée vers la droite.

### A.3 Longueur d'onde de l'instabilité primaire

#### A.3.1 Effet de la vitesse gaz

Nous avons mesuré sur des clichés, en fonction de nombre de Reynolds gaz  $Re_2 = eu_2/\nu_2$ , les longueurs d'ondes longitudinales apparaissant sur des jets d'eau de vitesse 2m/s lorsque le jet d'air est actionné dans l'injecteur tubulaire long TT (Figure A.8). Les longueurs d'onde sont convenablement approximées par une loi en  $Re_2^{-3/4}$ , tout l'a été  $\delta$  pour  $Re_2 > 1000$ . La longueur d'onde est donc proportionnelle à l'épaisseur de vortacité, et leur rapport  $\lambda/\delta$  est de 26 en moyenne. Les mêmes mesures ont été effectuées avec l'injecteur convergent à  $u_1 = 2$  m/s,

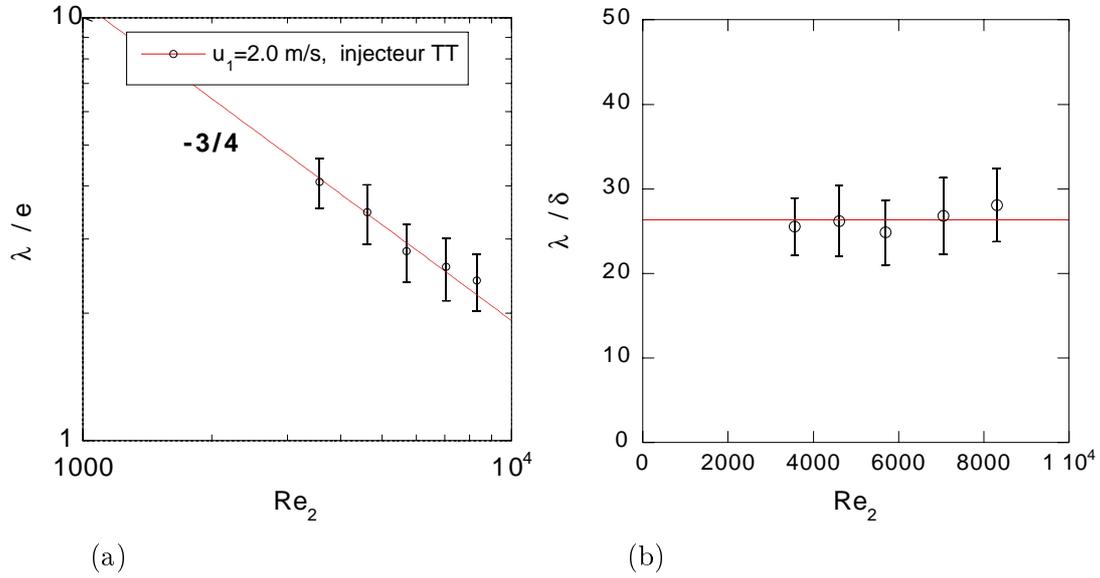


FIG. A.8: (a): Longueur d'onde longitudinale (injecteur TT). (b): Longueur d'onde longitudinale adimensionnée par l'épaisseur de vortacité  $\delta$ , ligne: moyenne de 26.

en conditions laminaires (injecteur LL) puis turbulentes (injecteur TL) pour le liquide (Figure A.9). Elles montrent la même relation entre longueur d'onde et épaisseur de vortacité, avec le même rapport constant de 26 environ. La présence de perturbations turbulentes ne modifie donc pas les tailles des longueurs d'onde les plus amplifiées par l'instabilité de cisaillement.

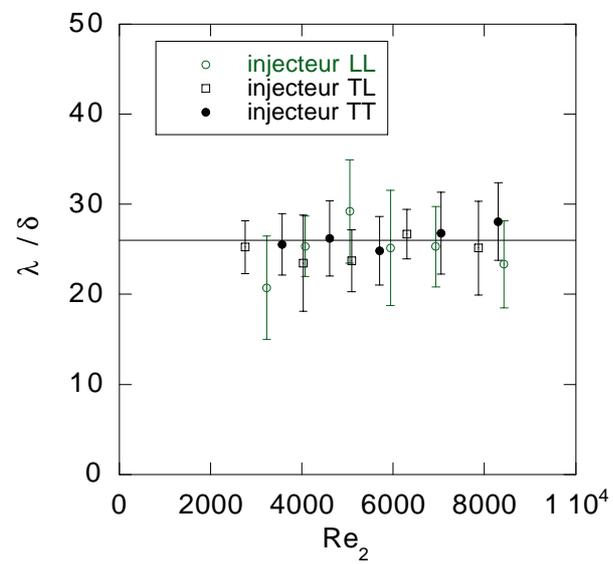


FIG. A.9: Longueur d'onde rapportée à  $\delta$  pour les différents injecteurs étudiés LL, TL et TT à  $u_1 = 2$  m/s.

### A.3.2 Effet de la vitesse liquide

**Injecteur LL.** Les mesures des caractéristiques de formation du spray effectuées à  $u_1 = 2$  m/s devront être comparées aux mesures effectuées à des vitesses de liquide plus faibles ( $u_1 = 0.45$  et  $0.94$  m/s) en conditions laminaires. Or il faut remarquer que dans le cas de l'injecteur convergent lisse LL la longueur d'onde longitudinale  $\lambda$  dépend de la vitesse liquide (Figure A.10, a), contrairement aux prédictions de la théorie de stabilité linéaire avec un profil de vitesse linéaire d'épaisseur  $d_2$ , qui donne  $\lambda = 2\pi/1.5 d_2 \sqrt{\rho_1/\rho_2}$ . Ce rapport est de l'ordre de 43 pour une vitesse d'eau de  $u_1 = 0.45$  m/s, et décroît vers une moyenne de 26 lorsque la vitesse d'eau atteint 2 m/s. Les mesures à vitesse d'air constante (Figure A.10, b) mettent en évidence cette transition, qui est la plus visible à faible vitesse d'air.

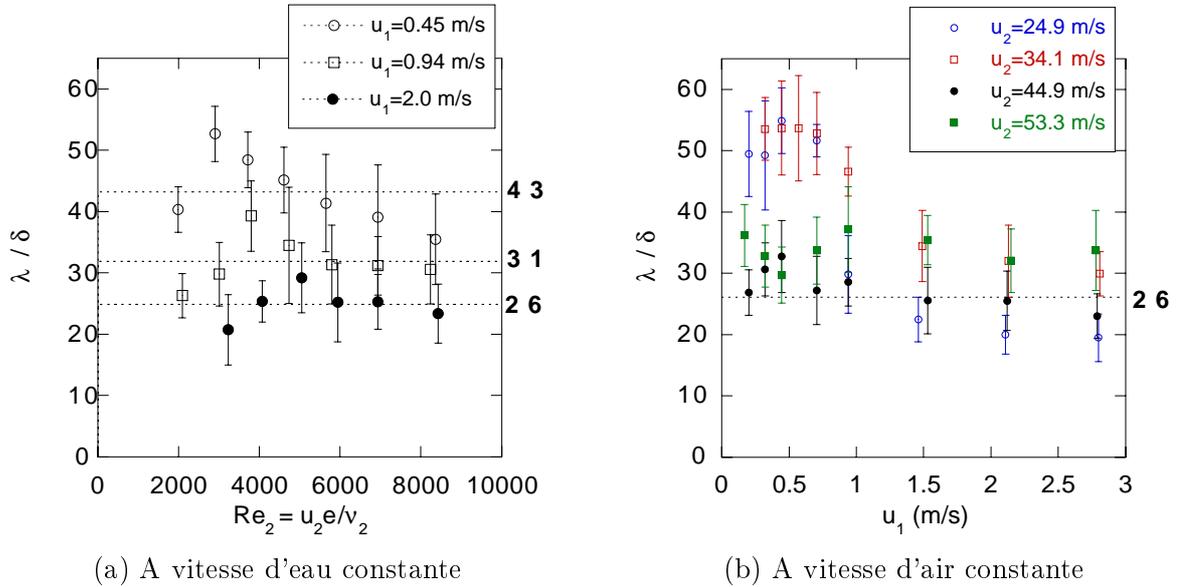


FIG. A.10: Longueur d'onde longitudinale adimensionnée par l'épaisseur de vorticité  $\delta$ , injecteur LL. (a) En fonction de  $Re_2$ . Une régression donne pour valeurs  $\lambda/\delta = 43, 31$  et  $25$  pour des vitesses liquide  $u_1 = 0.45, 0.94$  et  $2$  m/s respectivement, (b) En fonction de  $u_1$ , ligne : moyenne de  $26$ .

La contraction du jet due à l'accélération du liquide par la pesanteur fournit une explication. En effet le passage de la paroi interne de la tuyère de gaz à la surface du liquide produit un coude divergent à la sortie de l'injecteur, dont l'angle s'accroît à petite vitesse liquide (voir les images de la figure A.7). La divergence de l'écoulement induit alors une augmentation de la couche limite sur la surface du liquide et donc de la longueur d'onde primaire  $\lambda$  de l'instabilité. Pour déterminer la rupture de pente en sortie, étudions l'évolution du rayon du

jet liquide à l'aval de la sortie. En supposant l'écoulement irrotationnel, et de profil de vitesse uniforme à une altitude donnée, nous déduisons de l'équation de Bernoulli la vitesse de chute du jet :

$$u = u_1 \sqrt{1 + \frac{2gx}{u_1^2} + \frac{4\sigma}{\rho_1 u_1^2 d_1} \left(1 - \frac{d_1}{d}\right)}, \quad (\text{A.3})$$

avec  $x$  la distance à la sortie vers le bas, et après avoir remplacé la pression donnée par la formule de Laplace  $p = p_{atm} + 2\sigma/d$ . Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un grand nombre de Weber liquide  $We_1 = \rho_1 u_1^2 d_1 / \sigma$ , et donc nous négligerons le dernier terme sous la racine carrée. La conservation du débit pour ce jet quasi-parallèle implique  $d_1^2 u_1 = d^2 u$ . D'où :

$$\frac{d}{d_1} = \left(1 + \frac{2gx}{u_1^2}\right)^{-1/4}. \quad (\text{A.4})$$

La pente du jet par rapport à la verticale est donc :

$$\frac{dr}{dh} = -\frac{gd_1}{4u_1^2} = -\frac{Fr}{4}. \quad (\text{A.5})$$

La pente à l'origine est égale au quart du nombre de Froude défini par  $Fr = \frac{gd_1}{u_1^2}$ . Des mesures sur les photographies montrent que le diamètre du jet suit bien la relation A.4 (figure A.11) et la pente à l'origine suit la relation A.5 pour les petites vitesses (Figure A.12). La pente à l'origine est de l'ordre de 0.05 pour  $u_1 \geq 1$  m/s, alors qu'elle est double et vaut 0.1 pour  $u_1 = 0.5$  m/s.

L'écoulement au niveau de la couche limite a donc lieu dans un espace deux fois plus grand, ce qui induit une diminution de la vitesse moyenne. L'épaisseur de la couche limite augmente alors nécessairement après le changement de pente. Cet effet apparaît dans les équations classiques d'évolution de la couche limite, telle l'équation intégrale de Karman qui s'écrit :

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial x} + \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{U} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho_2 U^2}, \quad (\text{A.6})$$

avec  $\tau_0 = \mu_2 \frac{du}{dy}|_{y=0}$  le frottement pariétal. Dans cette équation le deuxième terme est négatif et le terme du membre de droite positif, donc  $\delta_2$  augmente avec l'abscisse curviligne  $x$ , et ce d'autant plus que la vitesse diminue. Par conséquent l'épaisseur de vortacité  $\delta$  et la longueur d'onde  $\lambda$  augmentent. Cette hypothèse semble la plus raisonnable pour interpréter l'observation de plus grandes longueurs d'onde à faible vitesse liquide.

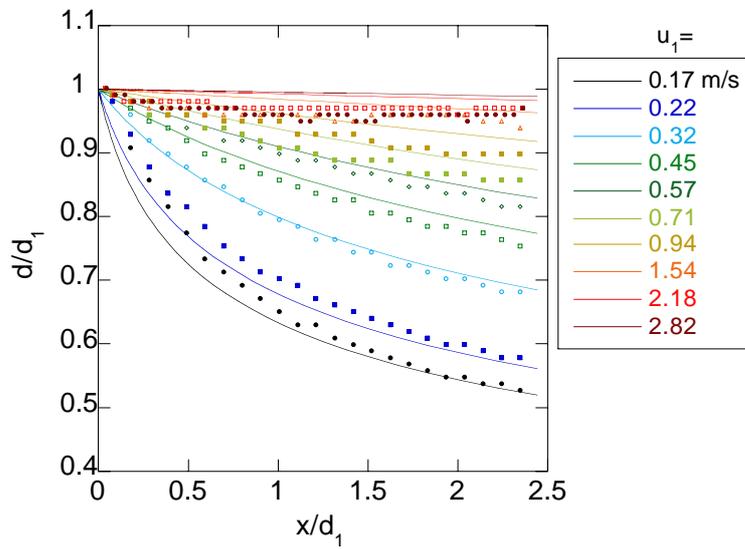


FIG. A.11: Profils du jet liquide avec l'injecteur LL, distance à l'injecteur adimensionnée par  $d_1$ . Lignes : prédictions de l'équation A.4.

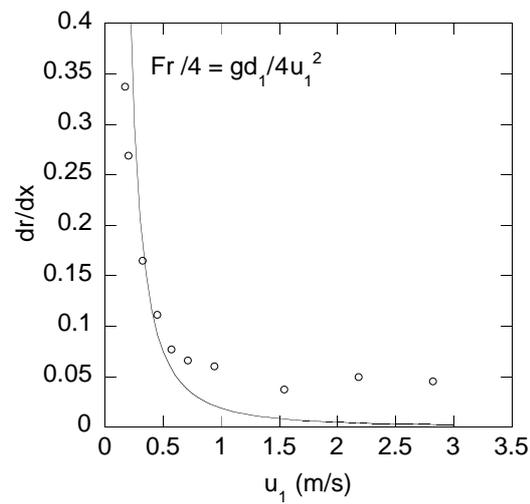


FIG. A.12: Pente du profil de jet liquide en sortie d'injecteur LL

**Injecteur TT.** L'injecteur tubulaire long TT ne produit pas le même effet de variation de la longueur d'onde avec la vitesse liquide. Il est aussi possible de l'interpréter en termes d'interaction entre couche limite et profil d'interface. En effet les corrugations présentes à la surface du jet même à faible vitesse (voir Figure A.7) libèrent moins d'espace qu'une interface lisse, ce qui induit une diminution moindre de la vitesse, et donc une augmentation moindre de la couche limite à faible vitesse liquide.

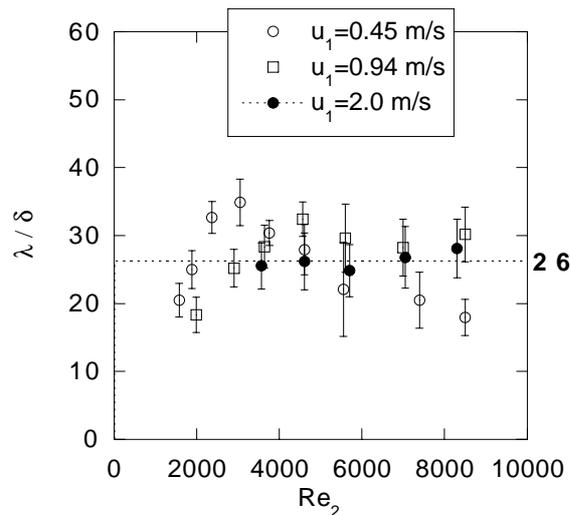


FIG. A.13: Longueur d'onde longitudinale adimensionnée par l'épaisseur de vortacité  $\delta$  pour l'injecteur TT, ligne : moyenne de 26.

En conclusion, la longueur d'onde est environ 26 fois l'épaisseur de vortacité lorsque le jet est bien cylindrique, donc à grande vitesse d'eau ( $u_1 > 1$  m/s,  $Fr = gd_1/u_1^2 < 0.075$ ). Dans le cas de l'injecteur lisse à faible vitesse d'eau, la convergence du jet impose de réévaluer le rapport  $\lambda/\delta$  qui est alors de l'ordre de 43.

## A.4 Taille des gouttes dans le spray

Les mesures de tailles dans le spray ont donc aussi été effectuées à  $u_1 = 2.0$  m/s avec l'injecteur TT, des vitesses de liquide inférieures ne garantissant pas des corrugations suffisantes à la surface du jet. Nous avons effectué le même type de mesures avec notre injecteur convergent lisse LL pour comparaison, voir Figure A.14.

Quand le diamètre moyen est adimensionné par l'épaisseur de vortacité, la loi  $d_{10}/\delta \propto We^{-1/3}$  est bien vérifiée (Figure A.15). Les gouttes mesurées à  $u_1 = 2$  m/s avec l'injecteur LL sont plus petites d'un facteur 0.5 que les gouttes mesurées

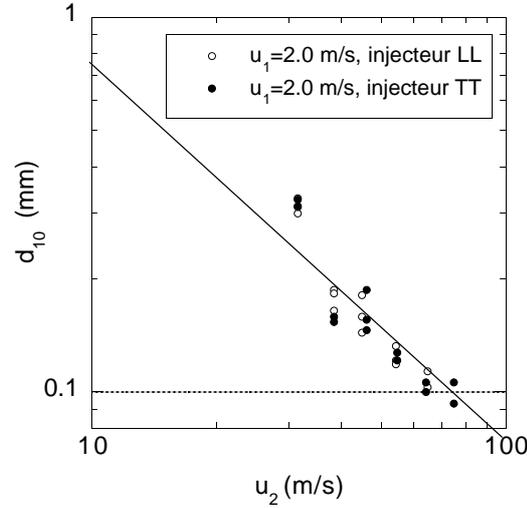


FIG. A.14: *Diamètres moyens des gouttes dans le spray en fonction de la vitesse  $u_2$ .*

précédemment à  $u_1 = 0.45$  m/s ou  $u_1 = 0.94$  m/s avec le même injecteur. Cette différence est due à une diminution du rapport  $\lambda/\delta$  avec la vitesse liquide qui est lui aussi d'un facteur 0.5 entre  $u_1 = 0.45$  et 2 m/s.

En revanche les relations entre la taille des gouttes et les longueurs d'ondes instables obtenues précédemment à plus faible vitesse,  $d_{10} \simeq 0.1\lambda_{\perp}$  et  $\lambda_{\perp}/\lambda \simeq 2.45 We_{\lambda}^{-1/3}$ , sont toujours vérifiées. Pour nous en convaincre nous avons tracé le diamètre moyen des gouttes rapporté à la longueur d'onde longitudinale  $\lambda$  (telle qu'elle avait été approximée en Figure A.10). Tous les résultats de l'injecteur LL sont répartis autour de la droite d'équation

$$d_{10}/\lambda \simeq 0.245 We_{\lambda}^{-1/3}, \quad (\text{A.7})$$

et les résultats de l'injecteur TT sont légèrement inférieurs à cette prédiction (figure A.16). La taille moyenne des gouttes est donc proportionnée à  $\lambda$  de la même façon, que les conditions d'injections du liquide ou du gaz soient turbulentes ou laminaires. La longueur d'onde est elle-même liée à  $\delta$  avec un facteur 26 à grande vitesse liquide ( $Fr = gd_1/u_1^2 < 0.075$ ), sachant qu'il faut éventuellement réajuster ce facteur à petite vitesse liquide.

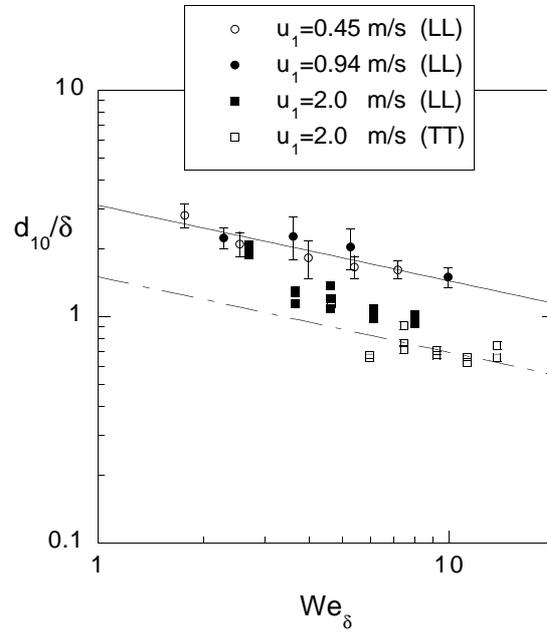


FIG. A.15: Diamètres moyens des gouttes dans le spray. Interpolations en  $We_\delta^{1/3}$ , avec des préfacteurs de 3.1 et 1.5.

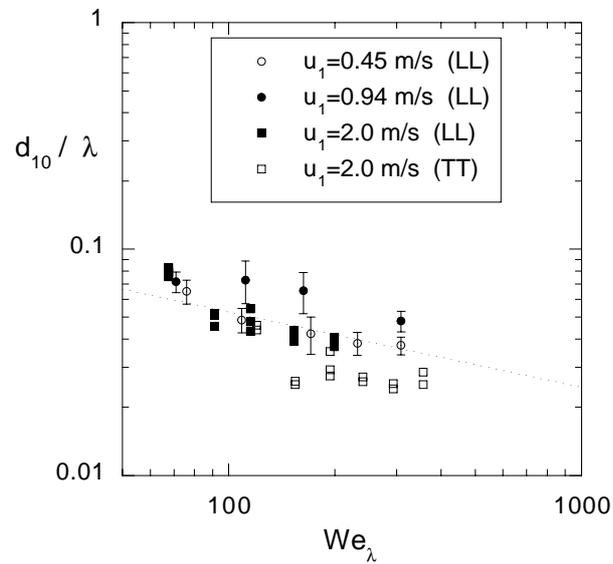


FIG. A.16: Diamètres des gouttes et longueur d'onde primaire, ligne en pointillés :  $d_{10}/\lambda = 0.1\lambda_\perp/\lambda = 0.245 We_\lambda^{-1/3}$ .



## Bibliographie

- ANGUELOVA, M. & BARBER, R. P. 1999 Spume drops produced by the wind tearing of wave crests. *J. Phys. Oceanogr.* **29**, 1156–1165.
- BONGIOVANNI, C. 1996 Traitement d'image appliqué à la mesure de la taille, de la vitesse et de la déformation des bulles. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- BONGIOVANNI, C., CHEVAILLIER, J. P. & FABRE, J. 1997 Sizing of bubbles by incoherent imaging: defocus bias. *Exp. in Fluids* **23**, 209–216.
- BÉTIS, P. 2000 *La météorologie à l'usage du marin*, 2nd éd. Info-Mer.
- C. MARTÍNEZ-BAZÁN, J. L. M. N. & LASHERAS, J. C. 1999 On the breakup of an air bubble injected into a fully developed turbulent flow. part 2. size pdf of the resulting daughter bubbles. *J. Fluid Mech.* **401**, 183–207.
- CANDEL, S. & POINSOT, T. J. 1989 Flame stretch and the balance equation for the flame area. *Combust. Sci. and Tech.* pp. 1–15.
- CATRAKIS, H. J. & DIMOTAKIS, P. E. 1996 Mixing in turbulent jets: scalar measures and isosurface geometry. *J. Fluid Mech.* **317**, 369–406.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. New York, Dover publication.
- CHEN, Y.-J. & STEEN, P. H. 1997 Dynamics of inviscid capillary breakup: collapse and pinchoff of a film bridge. *J. Fluid Mech.* **341**, 245–267.
- CLANET, C. & LASHERAS, J. C. 1999 Transition from dripping to jetting. *J. Fluid Mech.* **383**, 307–326.
- COHEN, R. D. 1990 Steady-state cluster size distribution in stirred suspensions. *J. Chem. Soc. Faraday Trans.* **86** (12), 2133–2138.
- COHEN, R. D. 1991 Shattering of a liquid drop due to impact. *Proc. R. Soc. London A* (435), 483–503.

- DIU, B., GUTHMANN, C., LEDERER, D. & ROULET, B. 1989 *Physique Statistique*. Hermann.
- EGGERS, J. 1997 Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Mod. Phys.* **69** (3), 865–929.
- EROGLU, H. & CHIGIER, N. 1991 Wave characteristics of liquid jets from airblast coaxial atomizers. *Atom. and Sprays* **1**, 349–366.
- EROGLU, H., CHIGIER, N. & FARAGÓ, Z. 1991 Coaxial atomizer intact lengths. *Phys. Fluids A* **3** (2), 303–308.
- FARAGÓ, Z. & CHIGIER, N. 1992 Morphological classification of disintegration of round liquid jets in a coaxial air stream. *Atom. and Sprays* **2**, 137–153.
- FELLER, W. 1971 *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley.
- FRANKEL, I. & WEIHS, D. 1985 Stability of a capillary jet with linearly increasing axial velocity (with application to shaped charges). *J. Fluid Mech.* **155**, 289–307.
- GAÑÁN-CALVO, A. M. 1998 Generation of steady liquid microthreads and micro-sized monodisperse sprays in gas streams. *Phys. Rev. Lett.* **80** (2), 285–288.
- GASTER, M. 1962 A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **14**, 222–224.
- GAUDET, S., MCKINLEY, G. & STONE, H. 1996 Extensional deformation of newtonian liquid bridges. *Phys. Fluids* **8** (10), 2568–2579.
- GICQUEL, P., VINGERT, L., LECOURT, R. & BARAT, M. 2001 Etude expérimentale des sprays cryotechniques dans des conditions sub et supercritiques. In *Combustion dans les moteurs de fusées, Actes du Colloque de Synthèse du Groupe de Recherche CNES/CNRS/ONERA/SNECMA*, pp. 350–369. Toulouse, Cité de l’Espace, Cépaduès-Éditions.
- HENDERSON, D., SEGUR, H., SMOLKA, L. B. & WADATI, M. 2000 The motion of a falling liquid filament. *Phys. Fluids* **12** (3), 550–565.
- HINZE, J. 1949 Critical speeds and sizes of liquid globules. *Appl. Sci. Res.* **A1**, 273–288.

- HONG, M., CARTELLIER, A. & HOPFINGER, E. 2000 Spray characterisation using optical probes: feasibility drop velocity, size and concentration measurements. In *Second Japanese-European Two-Phase Flow Group Meeting*. Tsukuba, Japan.
- HOYT, J. W. & TAYLOR, J. 1977 Waves on water jet. *J. Fluid Mech.* **83**, 119.
- HUH, C. & SCRIVEN, L. E. 1969 Shapes of axisymmetric fluid interfaces of unbounded extent. *J. Colloid Interface Sci.* **30**, 323–337.
- JEFFREYS, H. 1925 On the formation of water wave by wind. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **107**, 189.
- KELLER, F. X., LI, J., VALLET, A., VANDROMME, D. & S.ZALESKI 1994 Direct numerical simulation of interface break-up and atomisation. In *proceedings of ICLASS-94, Rouen, France*, pp. 56–62.
- KELLER, J. B. 1983 Breaking of liquid films and liquid threads. *Phys. Fluid* **26** (12), 3451–3453.
- KOLMOGOROV, A. N. 1941 Über das logarithmisch normale verteilungsgesetz der dimensionen der teilchen bei zerstückelung. *Dok. Akad. Nauk SSSR* **31** (2), 99–101.
- KOLMOGOROV, A. N. 1949 On the breakage of drops in a turbulent flow (en russe). *Dok. Akad. Nauk SSSR* **66** (5), 825–828.
- LADAM, Y. 2000 Atomisation et évaporation d'un jet mixte hélium-liquide/hélium gazeux. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- LANE, W. 1951 Shatter of drops in streams of air. *Industrial and Engineering Chemistry* **43** (6), 1312–1317.
- LASHERAS, J. & HOPFINGER, E. 2000 Liquid jet instability and atomization in a coaxial gas stream. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **32**, 275–308.
- LASHERAS, J., VILLERMAUX, E. & HOPFINGER, E. 1998 Breakup and atomisation of a round water jet by a high-speed annular jet. *J. Fluid Mech.* **357**, 351–379.
- LE MÉHAUTÉ, A. 1991 *Les géométries fractales*. Hermès.
- LEFEBVRE, A. H. 1989 *Atom. and sprays*. New York, Hemisphere Pub. Corp.
- LEVY, P. 1965 *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars.

- LEWIS, D. J. 1950 The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes ii. *Proc. Roy Soc. A* **CCII**.
- LONGUET-HIGGINS, M. S. 1992 The crushing of air cavities in a liquid. *Proc. R. Soc. London A* **439**, 611–626.
- LOWRY, B. J. & STEEN, P. H. 1997 Stability of slender liquid bridges subjected to axial flows. *J. Fluid Mech.* **330**, 189–213.
- MANSOUR, A. & CHIGIER, N. 1994 Turbulence characteristics in cylindrical liquid jets. *Phys. Fluids* **6** (10), 3380–3391.
- MARBLE, F. E. & BROADWELL, J. E. 1977 The coherent flame model for turbulent chemical reactions. *Tech. Rep.*. Project SQUID, Department of Navy, Project SQUID Headquarters, Chaffee Hall, Purdue University, West Lafayette, Indiana.
- MARMOTTANT, P. & VILLERMAUX, E. 2000 Atomisation primaire dans les jets coaxiaux. *Combustion* (accepté).
- MARMOTTANT, P. & VILLERMAUX, E. 2001a Ligament mediated drop formation (accepté). *Gallery of Fluid Motion Phys. Fluids* .
- MARMOTTANT, P. & VILLERMAUX, E. 2001b Mécanismes d'atomisation primaire dans les jets coaxiaux. In *Combustion dans les moteurs de fusées, Actes du Colloque de Synthèse du Groupe de Recherche CNES/CNRS/ONERA/SNECMA*, pp. 33–48. Toulouse, Cité de l'Espace, Cépaduès-Éditions.
- MARMOTTANT, P., VILLERMAUX, E. & CLANET, C. 2000 Transient surface tension of an expanding liquid sheet. *J. Colloid Interface Sci.* **230** (1), 29–40.
- MAYER, W. 1994 Coaxial atomization of a round liquid jet in a high speed gas stream: A phenomenological study. *Experiments in Fluids* **16** (6), 401–410.
- MESGUER, J. & SANZ, A. 1985 Numerical and experimental study of the dynamics of axisymmetric slender liquid bridges. *J. Fluid Mech.* **153**, 83–101.
- MILES, J. & HENDERSON, D. 1990 Parametrically forced surface waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 143–165.
- PADDAY, J. 1970 The profiles of axially symmetric menisci. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **269**, 265–293.

- PADDAY, J., PETRÉ, G., RUSU, C., GAMERO, J. & WOZNAK, G. 1997 The shape stability and breakage of pendant liquid bridges. *J. Fluid Mech.* **352**, 177–204.
- PADDAY, J. & PITT, A. 1973 The stability of axisymmetric menisci. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **275**, 489–528.
- PEREGRINE, D., SHOKER, G. & SYMON, A. 1990 The bifurcation of liquid bridges. *J. Fluid Mech.* **212**, 25–39.
- PHILLIPS, O. M. 1972 The entrainment interface. *J. Fluid Mech.* **51** (1), 97–118.
- PILCH, M. & ERDMAN, C. 1987 Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop. *Int. J. Multiphase Flow* **13** (6), 741–757.
- PLATEAU, J. 1873 *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Paris, Gauthier Villars.
- POCHEAU, A. & QUEIROS-CONDE, D. 1996 Transition from euclidian to fractal forms within a scale-invariant process : a turbulent combustion study. *Europhys. Lett.* **35**, 439–444.
- POULIQUEN, O., CHOMAZ, J. & HUERRE, P. 1994 Propagating holmboe waves at the interface between two immiscible fluids. *J. Fluid Mech.* **266**, 277–302.
- RANGER, A. & NICHOLLS, J. 1969 Aerodynamic shattering of liquid drops. *AIAA Journal* **7** (2), 285–290.
- RAYLEIGH, L. 1879 On the stability of jets. *Proc. London Math. Soc.* **10**, 4, (paru dans le volume de 1878).
- RAYLEIGH, L. 1880 On the stability, or instability of certain fluid motion. *Proc. London Math. Soc.* **11**, 57.
- RAYLEIGH, L. 1883 Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. Roy. Soc.* **XIV**, 170–177.
- RAYNAL, L. 1997 Instabilité et entraînement à l'interface d'une couche de mélange liquide-gaz. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- REHAB, H., VILLERMAUX, E. & HOPFINGER, E. 1997 Flow regimes of large-velocity-ratio coaxial jets. *J. Fluid Mech.* **345**, 357–381.
- REITZ, R. D. & BRACCO, F. 1982 Mechanism of atomisation of a liquid jet. *Phys. Fluids* **25** (10), 1730–1742.

- RENARDY, Y. Y. & CRISTINI, V. 2001*a* Effect of inertia on drop breakup under shear. *Phys. Fluids* **13** (1), 7–13.
- RENARDY, Y. Y. & CRISTINI, V. 2001*b* Scalings for fragments produced from drop breakup in shear flow with inertia. *Phys. Fluids* **13** (9), 2161–2164.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Annal. Chim.* **53**, 333, planches dans le volume 54.
- SCARDOVELLI, R. & ZALESKI, S. 1999 Direct numerical simulation of free-surface and interface flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 567–603.
- SCHLICHTING, H. 1987 *Boundary layer theory*, 7th éd. New York, McGraw-Hill.
- SCHULKES, R. M. S. M. 1996 The contraction of liquid filaments. *J. Fluid Mech.* **309**, 277–300.
- SHAVIT, U. & CHIGIER, N. 1995 Fractal dimensions of liquid jet interface under breakup. *Atom. and Sprays* **5**, 525–543.
- SIMMONS, H. 1977*a* The correlation of drop-sizes distributions in fuel nozzles sprays. part i. *J. Eng. for Power* **7**, 309–314.
- SIMMONS, H. 1977*b* The correlation of drop-sizes distributions in fuel nozzles sprays. part ii. *J. Eng. for Power* **7**, 315–319.
- SMITH, T. G. J., LANGE, G. D. & MARKS, W. B. 1996 Fractal methods and results in cellular morphology. *J. Neurosci. Methods* **69**, 123–126.
- SPIEGELBERG, S. H., ABLES, D. C. & MCKINLEY, G. H. 1996 The role of end-effects on measurements of extensional viscosity in filament stretching rheometers. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **64**, 229–267.
- SREENIVASAN, K. 1991 Fractals and multifractals in fluid turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 539–600.
- TAYLOR, G. I. 1950 The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes i. *Proc. Roy. Soc. A* **CCI**, 192–196.
- TAYLOR, G. I. 1956 Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. *Proc. Roy. Soc. A* **234**, 1–23.
- TAYLOR, G. I. 1959 The dynamics of thin sheets of fluids iii. *Proc. Roy. Soc. A* **253**, 313–321.

- TAYLOR, G. I. 1963 Generation of ripples by wind blowing over a viscous fluid. In *The scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor* (ed. G. K. Batchelor), vol. III, pp. 244–254. Cambridge, Cambridge Univ. Press.
- TIKHOMIROV, V. M. 1991 *Selected Works of A. N. Kolmogorov: Mathematics and Mechanics (Mathematics and Its Applications. Soviet Series, 25)*. Dordrecht, Kluwer Acad. Pale.
- VILLERMAUX, E. 1998 Mixing and spray formation in coaxial jets. *J. Prop. and Power* **14** (5), 807–817.
- VILLERMAUX, E. & INNOCENTI, C. 1999 On the geometry of turbulent mixing. *J. Fluid Mech.* **393**, 123–147.
- VILLERMAUX, E. & REHAB, H. 2000 Mixing in coaxial jets. *J. Fluid Mech.* **425**, 161–185.
- VUILLERMOZ, P., THOMAS, J., BORCHI, R., SEARBY, G., KUENTZMANN, P. & HABIBALLAH, M. 2001 Les étapes marquantes de dix ans de gdr. In *Combustion dans les moteurs de fusées, Actes du Colloque de Synthèse du Groupe de Recherche CNES/CNRS/ONERA/SNECMA*, pp. 33–48. Toulouse, Cité de l'Espace, Cépaduès-Éditions.
- WEBER, C. 1931 Zum zerfall eines flüssigkeitsstrahles. *Z. angew. Math. U. Mech.* **2**, 136.
- WILKINSON, M. C. 1972 Extended use of, and comments on, the drop-weight technique for the determination of surface and interfacial phenomena. *J. Colloid Interface Sci.* **40**, 14.
- WU, P.-K. & FAETH, G. 1993 Aerodynamic effects on primary breakup of turbulent liquids. *Atom. and Sprays* **3**, 265–289.
- WU, P.-K. & FAETH, G. 1995 Onset and end drop formation along the surface of turbulent jets in still gases. *Phys. Fluid* **7** (11), 2915–2917.
- WU, P.-K., RUFF, G. & FAETH, G. 1991 Primary break-up in liquid-gas mixing layers. *Atom. and Sprays* **1**, 421–440.
- YATSUYANAGI, N., SAKAMOTO, H. & SATO, K. 1994 Atomization characteristics of liquid jets injected into a high-velocity flow field. *Atom. and Sprays* **4**, 451–471.

- YECKO, P. & ZALESKI, S. 2000 Two-phase shear instability: waves, fingers and drops. In *Proceedings of the fourteenth international annual Florida workshop in Nonlinear Astronomy and Physics "Astrophysical Turbulence and Convection", University of Florida Feb. 1999* (ed. A. of the New York Academy of Sciences), , vol. 898, pp. 127–143.



---

## RÉSUMÉ

La fragmentation d'un jet liquide en un spray de gouttelettes est étudiée lorsque sa surface est soumise à un fort courant de gaz parallèle au jet. La visualisation du jet révèle qu'une étape transitoire précédant la formation des gouttelettes est la croissance de ligaments liquides à partir de la surface. En effet la surface est instable vis-à-vis du cisaillement imposé par le courant gazeux. Initialement lisse elle est soumise à des ondulations axisymétriques grandissantes, dont la longueur d'onde est déterminée par l'épaisseur de la couche limite gazeuse. Les crêtes de ces ondulations présentent des modulations transverses dont l'espacement résulte d'une compétition entre les forces capillaires et l'inertie du gaz. L'allongement de ces modulations dans le courant gazeux crée les ligaments de liquide.

Le devenir des ligaments est étroitement lié à l'espacement des modulations transverses. Leur brisure, qui se produit lorsque les forces capillaires les fragmentent, est l'acte de naissance de gouttes dont la taille moyenne est proportionnelle à cet espacement. Les tailles sont largement réparties autour de cette moyenne et un modèle basé sur l'interaction des tailles pendant la brisure rend compte de leur distribution.

Le spray de gouttelettes qui résulte des brisures des ligaments présente aussi un large éventail de diamètres. Leur répartition est telle que le nombre de gouttelettes d'un diamètre donné décroît exponentiellement avec le diamètre. Le diamètre moyen est aussi proportionné à l'espacement transverse, il est inversement proportionnel à la vitesse du courant de gaz.

---

## AIRBLAST ATOMIZATION OF A LIQUID JET

---

### SUMMARY

The atomisation of a liquid jet into a spray of droplets was studied, in an experimental set-up where its surface is submitted to a fast coaxial gaseous stream. Jet visualisation reveals that drop formation is preceded by a transient stage of liquid ligaments stretched from the liquid jet. The explanation is that its surface is unstable within the shear flow of gas. The smooth exiting surface is seeded by growing axisymmetric disturbances whose wavelength is fixed by the shear layer thickness. Transverses modulations are superimposed on the crest of these ondulations, their spacing is derived from a balance between capillary forces and gas inertia. The modulations grow and are stretched by air flow to the stage of ligaments.

The future of this ligament is doomed with modulation spacing. The ligament break-up takes place when capillary forces seize and fragment them. This is the birth of droplets whose mean diameter is proportional to the modulation spacing. Their large distribution is well accounted for by a model including sizes interaction during break-up.

The spray that results from break-ups also displays a large range of diameters. The drop size distribution is exponentially decaying towards increasing sizes. The mean diameter in the spray is proportional to transverse spacing and inversely proportional to the gas flow velocity.

---

### SPÉCIALITÉ

Mécanique des Fluides

---

### MOTS-CLÉS

Atomisation, jets coaxiaux, ligaments, gouttes, spray.

---

**Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels**

**BP 53 38041 Grenoble Cedex 9**