



HAL
open science

Mise en place d'un polarimètre de Mueller achromatique dans le domaine du visible en régime laser impulsionnel

Bruno Boulbry

► To cite this version:

Bruno Boulbry. Mise en place d'un polarimètre de Mueller achromatique dans le domaine du visible en régime laser impulsionnel. Autre. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2002. Français. NNT : . tel-00003057

HAL Id: tel-00003057

<https://theses.hal.science/tel-00003057>

Submitted on 26 Jun 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES DE BREST

Spécialité : OPTRONIQUE



par

Bruno BOULBRY

**MISE EN PLACE D'UN POLARIMÈTRE DE MUELLER
ACHROMATIQUE DANS LE DOMAINE DU VISIBLE EN
RÉGIME LASER IMPULSIONNEL**

Soutenue le 16 Décembre 2002 devant la commission d'examen composée de :

- Président** M. DE BOUGRENET DE LA TOCNAYE J. L., Professeur, ENSTBr (Brest)
Rapporteur M. LI H. W., Professeur, IEMN, Université de Lille 1 (Villeneuve d'Ascq)
Rapporteur M. EMILE O., Professeur, Université de Rennes 1
M. DE MARTINO A., Chargé de recherche CNRS, Ecole Polytechnique (Palaiseau)
M. CARIOU J., Professeur, U.B.O. (Brest)
M. LE JEUNE B., Maître de Conférences, U.B.O. (Brest)

Recherches effectuées au **Laboratoire de Spectrométrie et Optique Laser**
6 Avenue Victor Le Gorgeu, B.P. 809, 29285 BREST Cedex

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Spectrométrie et Optique Laser de la faculté des Sciences de Brest (Université de Bretagne Occidentale) sous la direction scientifique de Messieurs Jean Lotrian et Jack Cariou, professeurs. Je tiens, en premier lieu, à leur exprimer toute ma reconnaissance pour m'avoir accueilli au laboratoire et m'avoir permis de mener à bien ce travail malgré les nombreuses difficultés rencontrées.

Ce travail s'inscrit dans le cadre du Programme Pluri Formations LYOPO (<http://www.univ-brest.fr/lyopo>) en collaboration avec une équipe de chimistes (UMR 6521) et je tiens donc à présenter mes remerciements à Messieurs Jack Cariou et Alain Le Bihan qui furent à l'origine du projet et sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

Je remercie aussi vivement Monsieur Bernard Le Jeune pour tout le temps qu'il a pu me consacrer, sans faillir, pour toutes ces questions qui sans lui seraient sans doute restées sans réponse, pour ses conseils avisés, pour sa patience, pour son extrême gentillesse et pour avoir su m'épauler dans les moments les plus difficiles.

Je suis, d'autre part, sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs Hong Wu Li et Olivier Emile en acceptant d'examiner ce travail ainsi que Messieurs Jean Louis De Bougrenet de la Tocnaye et Antonello de Martino en participant à ce jury.

J'adresse également mes remerciements sincères à Messieurs Bruno Bousquet et Fabrice Pellen avec qui j'ai eu un immense plaisir à travailler et au contact de qui j'ai énormément appris. Merci à toi Bruno pour la rigueur avec laquelle tu as examiné ce travail ainsi que les articles que j'ai pu rédiger. Je remercie aussi Monsieur Yves Guern qui, grâce à ses connaissances en informatique, m'a permis de résoudre un problème qui fut le point de départ des résultats apparaissant dans ce manuscrit.

Je tiens également à remercier les autres membres du laboratoire et ceux qui y étaient au début de ma thèse pour leur soutien et tous ces bons moments passés ensemble.

Au cours de ce travail, Monsieur Guy Zion a apporté le plus grand soin aux réalisations mécaniques et a aussi soigné certains schémas et dessins qui apparaissent dans ce manuscrit. Je le remercie pour cette aide.

Je n'oublie pas de remercier les collègues chimistes qui ont été compréhensifs pour le partage du matériel et notamment celui du laser.

Merci aux amis et membres de ma famille qui sont venus m'encourager le jour de ma soutenance.

Je tiens enfin à remercier du fond du cœur mes parents pour leur soutien et toute l'aide qu'ils ont pu m'apporter pendant ces longues années de thèse.

Sommaire

Introduction	1
Chapitre 1 : Description mathématique des phénomènes liés à l'état de polarisation d'une onde optique	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Concept général de la lumière polarisée.....	7
1.3 Représentation de la polarisation à partir du formalisme de Jones.....	12
1.3.1 Vecteur de Jones.....	12
1.3.2 Matrice de Jones.....	13
1.3.3 Décomposition polaire.....	14
1.4 La matrice de polarisation ou matrice de cohérence.....	16
1.4.1 Définitions.....	16
1.4.2 Cas particuliers et degré de polarisation.....	17
1.4.3 Correspondance entre le formalisme de Jones et la matrice de cohérence.....	19
1.5 Formalisme de Stokes-Mueller.....	20
1.5.1 Vecteur de Stokes.....	20
1.5.2 Cas particuliers et degré de polarisation.....	21
1.5.3 Matrice de Mueller.....	23
1.5.4 Relations entre le formalisme de Stokes-Mueller et ceux précédemment évoqués.....	25
1.5.5 Matrice de Mueller d'un système optique physiquement réalisable.....	30
1.6 La sphère de Poincaré.....	37
1.6.1 Présentation.....	37
1.6.2 Caractéristiques générales de la Sphère de Poincaré.....	38
1.7 Conclusion.....	40
Annexe 1.1.....	42
Chapitre 2 : Présentation du polarimètre	45
2.1 Introduction.....	45
2.2 Dispositif expérimental de base d'un ellipsomètre.....	47
2.3 Procédure d'obtention des matrices de Mueller.....	48
2.3.1 Description formelle du dispositif.....	48
2.3.2 Principe de base.....	49
2.4 Montage expérimental.....	52
2.4.1 La source utilisée : un oscillateur paramétrique optique.....	52
2.4.2 La mise en forme du faisceau.....	54

2.4.3 Génération et analyse d'états de polarisation.....	57
2.4.4 Détection et numérisation.....	64
2.5 Conclusion.....	70
Annexe 2.1.....	71
Annexe 2.2.....	80
Chapitre 3 : Optimisation du processus de mesure.....	81
3.1 Introduction.....	81
3.2 Correction des erreurs systématiques.....	82
3.2.1 Influence des défauts de positionnement des lames quart d'onde et des polariseurs.....	82
3.2.2 Compensation des défauts sur les retards des lames quart d'onde.....	83
3.2.3 Influence de l'activité optique des lames quart d'onde.....	86
3.2.4 Erreurs associées aux lames quart d'onde d'ordre zéro quasi achromatiques..	106
3.3 Etalonnage du polarimètre.....	117
3.3.1 Introduction.....	117
3.3.2 Présentation de l'étalonnage pour quelques longueurs d'onde.....	117
3.3.3 Conclusion.....	125
3.4 Mise en place d'un banc de caractérisation de lames de phase compensées.....	126
3.4.1 Introduction.....	126
3.4.2 Modèle théorique.....	127
3.4.3 Méthodologie expérimentale, description du banc de test et résultats.....	129
3.4.4 Discussion.....	134
3.5 Conclusion.....	137
Chapitre 4 : Interprétation des résultats.....	138
4.1 Introduction.....	138
4.2 Origine des erreurs aléatoires.....	139
4.3 Minimisation et quantification des erreurs aléatoires.....	140
4.4 Interprétation des manipulations réalisées à vide.....	145
4.5 Déroulement et interprétation d'une manipulation.....	158
Résumé et perspectives.....	166

Introduction

L'œil humain, bien que très performant, n'est pas sensible à la nature vectorielle de la lumière comme le sont les yeux de certains insectes. Nous ne distinguons, en effet, que sa couleur, liée à la longueur d'onde, ainsi que son intensité. Elle a donc longtemps été perçue comme une grandeur scalaire et ce n'est qu'au début du XIX^{ème} siècle que la vibration transverse de la lumière a été mise en évidence par YOUNG et FRESNEL. Avec le développement de l'électromagnétisme, la notion de polarisation a alors été introduite afin de décrire le comportement vectoriel de la lumière. La polarisation décrit la façon dont le champ électrique évolue en un point de l'espace. Si ce comportement est ordonné, si le champ électrique décrit une trajectoire régulière, alors le rayonnement électromagnétique est dit "polarisé". Il est naturellement dit "dépolarisé" dans le cas contraire. La notion de polarisation est tout à fait essentielle car la réponse optique d'un milieu ou d'un système physique est très sensible à l'état de polarisation de la lumière incidente.

Les études sur les phénomènes de polarisation de la lumière ont donc été considérablement développées au cours de ce siècle mais ont fini par perdre de leur importance au profit des informations purement scalaires véhiculées par les ondes électromagnétiques. Ce n'est qu'à partir de 1960 quand Théodore MAIMAN eut mis au point le premier laser (d'après la théorie développée par Arthur L. SCHAWLOW et Charles H. TOWNES qui ont été les premiers à généraliser le principe de l'émission stimulée aux fréquences optiques et infrarouges) que l'exploitation des informations polarimétriques s'est surtout manifestée. L'utilisation des sources cohérentes, en provoquant un regain d'intérêt de la recherche dans ce domaine, a dû néanmoins s'accompagner d'une adaptation des formalismes et des méthodologies.

En effet, la lumière constitue un moyen privilégié de diagnostic et de caractérisation. Elle permet de sonder un milieu ou un système physique de façon non invasive, c'est à dire que le milieu n'est pas, ou peu, modifié lors de la mesure. Mesurer la réponse polarimétrique

du milieu (ou d'un système) permet alors d'accroître de façon conséquente le nombre d'informations le concernant. C'est pourquoi l'exploitation de l'information polarimétrique des ondes électromagnétiques optiques fait aujourd'hui l'objet d'un intérêt croissant dans de nombreux domaines de recherches tels la biochimie (identification de cellules, virus ou autres particules en suspension dans un milieu,...) [1], les télécommunications [2, 3], la physique des matériaux [4], etc...

Un domaine scientifique particulier, appelé "polarimétrie" (ou "ellipsométrie") s'est alors développé afin de mettre au point des appareils de mesure sensibles à la polarisation de la lumière. Celui-ci consiste à observer, à travers une succession d'éléments polarisants, les transformations engendrées par un milieu ou une surface (ou les deux à la fois). Différentes techniques ont été mises au point pour mesurer les caractéristiques polarimétriques de l'onde mais la plupart d'entre elles consistent à déterminer des paramètres de dimension énergétique (comme les paramètres de Stokes), donc directement liés à des grandeurs mesurables. D'autres techniques s'intéressent plus particulièrement aux modifications que peut engendrer un milieu sur une onde optique polarisée, que l'on peut quantifier soit en terme d'atténuation (milieu dichroïque), soit en terme de déphasage (milieu biréfringent).

De nombreuses études ont été développées dans ce domaine par le Laboratoire de Spectrométrie et Optique Laser de l'Université de Bretagne Occidentale. Les premiers travaux concernaient l'imagerie sous-marine, pour créer des contrastes multiparamétrés conduisant à l'identification et à la classification d'objets immergés [5, 6]. Depuis quelques années, ces travaux se sont diversifiés et ont permis de caractériser des milieux très différents tels des

-
- [1] **D. B. SHAPIRO, M. F. MAESTRE, W. M. McCLAIN, P. G. HULL, Y. SHI, M. S. QUINBY-HUNT, J. E. HEARST, A. J. HUNT**, "Determination of the average orientation of DNA in the octopus sperm *Eledone cirrhosa* through polarized light scattering", *Appl. Opt.*, vol. 29, 1689-1695 (1990).
 - [2] **L. P. KAMINOW**, "Polarization in optical fibers", *IEEE JQE*, vol. QE 17, 15-25 (1981).
 - [3] **P. OLIVARD**, "Application du formalisme de Stokes-Mueller à la caractérisation de fibres optiques soumises à des contraintes uniformes", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
 - [4] **B. DREVILLON**, "Phase modulated ellipsometry from the ultraviolet to the infrared: in situ application to the growth of semiconductors", *Progress in crystal growth and characterization of materials*, vol. 27 (1993).
 - [5] **B. LE JEUNE**, "Caractéristiques polarimétriques d'une onde optique en milieu marin : application à l'imagerie par laser impulsif", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1990).
 - [6] **G. LE BRUN**, "Exploitation du paramétrage polarimétrique en imagerie sous-marine par laser : application à la classification et à l'identification de cibles", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1992).

lames de ferrofluides [7], des fibres optiques soumises à des contraintes [3] ou encore des matériaux rugueux [8]. Pour chacune de ces applications, une seule longueur d'onde était utilisée.

L'extension de l'étude polarimétrique d'un échantillon sur plusieurs longueurs d'onde ou sur un continuum de longueurs d'onde peut cependant s'avérer précieuse. La sensibilité des structures moléculaires à la longueur d'onde, par exemple, que ce soit dans les bandes d'absorption (diffusion inélastique) ou en dehors (diffusion élastique) [9] fait qu'une analyse plus complète de ces milieux nécessite un balayage continu en longueur d'onde. La résolution du problème inverse dans le cadre de l'ellipsométrie sur des couches minces passe également souvent par des mesures sur une large bande spectrale. Enfin, l'étude polarimétrique de certains phénomènes comme la fluorescence ne peut s'effectuer que si l'on est capable d'adapter la longueur d'onde du faisceau incident à l'échantillon à analyser [10].

Ces considérations, associées à l'acquisition par le laboratoire d'une source accordable en longueur d'onde de l'UV (222,5 nm) à l'infrarouge (1750 nm), impulsionnelle (une impulsion durant quelques nanosecondes), nous ont donc naturellement conduit à mettre en place un polarimètre capable de fonctionner sur une gamme spectrale étendue. C'est l'objet de l'étude présentée dans ce manuscrit. Les éléments optiques polarisants utilisés dans la conception de l'appareillage, tels que les lames de phase, étant sensibles à la longueur d'onde, une attention particulière doit être portée à l'étalonnage du polarimètre. De même, le bon fonctionnement d'un tel appareil ne peut se faire que si l'on réduit la plage spectrale d'utilisation à quelques centaines de nanomètres. Au delà de cette gamme de longueurs d'onde, les caractéristiques des éléments destinés à coder l'information de polarisation varient de façon telle qu'un étalonnage n'est plus envisageable. Nous avons choisi, pour commencer, de faire fonctionner le polarimètre dans la gamme spectrale du visible 400-700 nm.

-
- [7] **P. Y. GERLIGAND**, "Caractérisation polarimétrique de lames de ferrofluides : application à l'imagerie active", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1995).
- [8] **P. ELIES**, "Etude expérimentale de la dépolarisation en imagerie laser : classification d'échantillons, analyse du champ de speckle", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
- [9] **Y. SHI, M. MACLAIN**, "Longwave properties of the orientation averaged Mueller scattering matrix for particles of arbitrary shape. I. Dependence on wavelength and scattering angle ", *J. Chem. Phys.*, vol. 93, 5609-5615 (1990).
- [10] **Y. SHINDO, Y. ODA**, "Mueller matrix approach to fluorescence spectroscopy. I : Mueller matrix expression for fluorescent samples and their application to problems of circularly polarized emission spectroscopy", *Appl. Spectrosc.*, vol. 46, 1251-1259 (1992).

De nombreux polarimètres spectroscopiques ont déjà été développés dans le passé mais sont, pour la plupart, incomplets car ils ne mesurent que partiellement la réponse polarimétrique d'un système. C'est le cas de bon nombre d'ellipsomètres dédiés à l'étude d'un empilement de couches minces de différents matériaux [11] et développés en réponse à la demande de l'industrie de la micro-électronique qui, pour gérer une intégration grandissante des composants, doit contrôler de mieux en mieux ses procédés de fabrication.

Quelques polarimètres spectroscopiques complets capables de mesurer à la fois la réponse d'un système de façon déterministe (transformation de la polarisation) mais aussi statistique (dépolariation) ont vu le jour ces dernières années [12, 13, 14], mais aucun, à ma connaissance, n'utilise de source laser monochromatique impulsionnelle pourtant nécessaire dans l'étude de certains phénomènes comme la fluorescence ou les effets non linéaires. Ces considérations ont grandement motivé le travail présenté ici.

Il se décompose alors comme suit : dans un premier chapitre, nous décrivons les différents formalismes couramment utilisés pour décrire la polarisation d'une onde électromagnétique. Puis, nous détaillons, dans le deuxième chapitre, la méthodologie expérimentale utilisée. Le troisième chapitre présente l'étalonnage du polarimètre visant à réduire les erreurs de mesure. Une étude statistique nous permet, pour finir, d'étudier les limites de cet étalonnage, de calculer les incertitudes résiduelles associées à une mesure et donc de conclure quant à la résolution de l'appareil.

Remarque : Les références bibliographiques sont présentées sous forme de notes de bas de page. Leur numérotation est organisée par chapitre et un récapitulatif général est donné en fin de document. En raison de ce choix de présentation, certaines références de l'introduction et de la conclusion sont de nouveau citées dans le document.

-
- [11] **A. EN NACIRI**, "Spectroscopic ellipsometry of anisotropic materials : application to the optical constants of HgI_2 ", Appl. Opt., vol. 38, 647-654 (1999).
 - [12] **M. H. SMITH, J. D. HOWE, J. B. WOODRUFF, M. A. MILLER, G. R. A. PETTY, E. A. SORNSIN**, "Multispectral infrared Stokes imaging polarimeter", Proc. SPIE, vol. 3754 (1999).
 - [13] **E. A. SORNSIN, R. A. CHIPMAN**, "Alignment and calibration of an infrared achromatic retarder using FTIR Mueller matrix spectropolarimetry", Proc. SPIE, 28-34 (1997).
 - [14] **E. COMPAIN**, "Conception et réalisation d'un ellipsomètre de Mueller achromatique fonctionnant en temps réel", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1999).

Chapitre 1

Description mathématique des phénomènes liés à l'état de polarisation d'une onde optique

1.1 Introduction

L'onde électromagnétique peut être caractérisée par quatre paramètres principaux : l'intensité, la fréquence, la polarisation et la phase. Bien que très performante, la vision naturelle de l'homme n'est sensible qu'à sa couleur liée à la fréquence de modulation ainsi qu'à son intensité. Nous ne distinguons pas la nature vectorielle de la lumière et elle a donc longtemps été perçue comme une grandeur scalaire. Ce n'est qu'au début du XIX^{ème} siècle que la vibration transverse de la lumière a été mise en évidence par Young et Fresnel. Avec le développement de l'électromagnétisme, la notion de polarisation a alors été introduite afin de comprendre ce comportement. La polarisation décrit l'évolution temporelle du vecteur champ électrique. Si cette évolution est stationnaire pendant le temps de mesure, l'onde sera dite polarisée, sinon elle sera dite partiellement ou totalement dépolarisée. Lorsqu'une onde lumineuse traverse un milieu ou est réfléchiée par une cible, sa polarisation subit une transformation. Cette variation de l'état de polarisation de l'onde permet alors une caractérisation du système considéré.

L'étude du passage lumineux à travers une succession d'éléments polarisants peut être facilitée par l'utilisation de divers formalismes. En 1852, STOKES [1] posa les fondements de

[1] **G.G. STOKES**, "On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources" , Trans Cambridge Phil. Soc., vol. 9, 339-416 (1852).

la théorie mathématique de la polarisation de la lumière. L'intérêt majeur des travaux de Stokes est d'avoir montré que quatre paramètres associés à des grandeurs mesurables, suffisaient à caractériser complètement l'état de polarisation d'une onde qu'elle soit partiellement, totalement ou non polarisée. Ces quatre grandeurs sont désormais bien connues sous le nom de paramètres de Stokes. Puis POINCARÉ [2], en 1892, démontra que chaque état de polarisation pouvait être représenté par un point sur une sphère. Une des propriétés remarquables de la sphère de Poincaré est que chacun de ses points (représentatif d'un état de polarisation) peut être décrit par trois des paramètres de Stokes.

En 1941, JONES [3], à travers une série de huit articles, introduisit pour la première fois une méthode matricielle pour décrire le comportement d'une lumière polarisée traversant des éléments optiques. Chaque opérateur de polarisation est décrit par une matrice de dimension 2×2 , dans l'espace vectoriel associé au champ électrique. Si le formalisme de Jones constitue, de par sa simplicité, un formidable outil pour décrire théoriquement les phénomènes polarimétriques, il présente toutefois deux inconvénients majeurs : il ne traite que le cas des ondes totalement polarisées et les paramètres utilisés sont associés à des grandeurs complexes donc non mesurables directement.

Le formalisme de Stokes-Mueller, développé par MUELLER [4], en 1948, présente donc une alternative intéressante car il permet non seulement de traiter les ondes polarisées mais également les ondes dépolariées, tout en étant relié à des grandeurs énergétiques, donc mesurables. La matrice de Mueller est réelle et permet le passage d'un vecteur de Stokes à un autre.

Enfin, des travaux importants dans le domaine ont été réalisés par BORN et WOLF [5] qui ont associé dans une seule écriture à la fois la polarisation partielle et la cohérence partielle par le biais de la matrice de cohérence (ou de polarisation).

[2] **H. POINCARÉ**, "Théorie mathématique de la lumière", Gauthiers-Villars, vol. 2, Paris (1892).

[3] **R.C. JONES**, "A new calculus for the treatment of optical systems", J.O.S.A., vol. 31, 488-493 (1941); vol. 31, 493-499 (1941); vol. 31, 500-503 (1941); vol. 32, 486-493 (1942); vol. 37, 107-110 (1947); vol. 37, 110-112 (1947); vol. 38, 671-684 (1948); vol. 46, 126-131 (1956).

[4] **H. MUELLER**, "The foundation of optics", J.O.S.A. (A), vol. 38, 551 (1948).

[5] **M. BORN, E. WOLF**, "Principles of Optics", 6^{ème} édition, Pergamon Press, New-York (1983).

Dans ce chapitre nous allons donc présenter les différents formalismes décrivant la polarisation d'une onde en exposant les éventuels avantages ou inconvénients de chacun d'entre eux.

1.2 Concept général de la lumière polarisée

Le vecteur champ électrique d'une onde électromagnétique plane et monochromatique (ou quasi-monochromatique) peut être décomposé en trois composantes orthogonales dans le système de coordonnées cartésiennes. Dans le cas général, le vecteur champ électrique \vec{E} s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_x(x, y, z, t)\vec{x} + E_y(x, y, z, t)\vec{y} + E_z(x, y, z, t)\vec{z} \quad (1.1)$$

où \vec{x}, \vec{y} et \vec{z} sont les vecteurs unitaires du système d'axes de référence.

Pour une onde plane quasi-monochromatique :

$$E_i(x, y, z, t) = E_{0i} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_i) \quad (1.2)$$

où $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ et $i = x, y$ ou z

et φ_i est un terme de phase, tandis que E_{0i} est un terme d'amplitude (positif).

Si on choisit l'axe des z comme direction de propagation, le vecteur d'onde \vec{k} et le vecteur \vec{E} étant orthogonaux ($k_x = k_y = 0$), dans un milieu isotrope, le champ électrique est transverse ($E_z = 0$). On obtient alors le système simplifié suivant :

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \quad (1.3)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \quad (1.4)$$

$$E_z(t) = 0 \quad (1.5)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} n \text{ où } \lambda \text{ est la longueur d'onde (dans le vide) et } n \text{ est l'indice de réfraction vu}$$

par l'onde dans la direction de propagation.

Par souci d'allégement de l'écriture, la dépendance temporelle sera sous-entendue et on écrira $E_i(t) = E_i$.

En combinant les deux expressions (1.3) et (1.4), et en éliminant la variable temporelle t , on peut montrer que l'extrémité du vecteur champ électrique décrit une ellipse dont l'équation est la suivante :

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi) \tag{1.6}$$

avec $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$.

L'état de polarisation est entièrement défini si on connaît l'ensemble des paramètres de l'ellipse (voir Figure 1.1), c'est à dire son ellipticité ϵ , son azimuth θ , la différence de phase φ et son sens de rotation (qui dépend directement du signe de $\sin(\varphi)$).

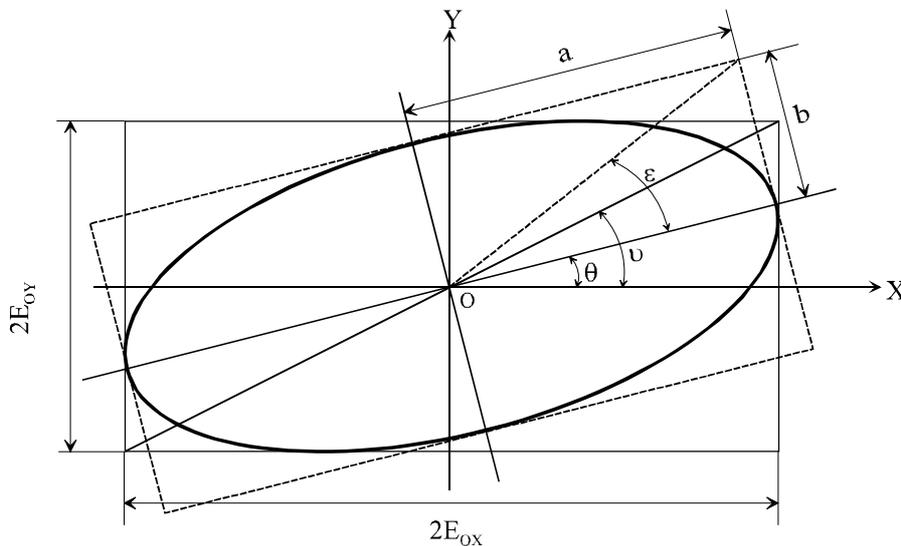


Figure 1.1 : Ellipse de polarisation

Ainsi, lorsque $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ (modulo 2π), nous sommes en présence d'une onde polarisée rectilignement ; lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y}$, l'ellipse devient un cercle, et la polarisation est dite circulaire. La figure 1.2 illustre différents états de polarisation.

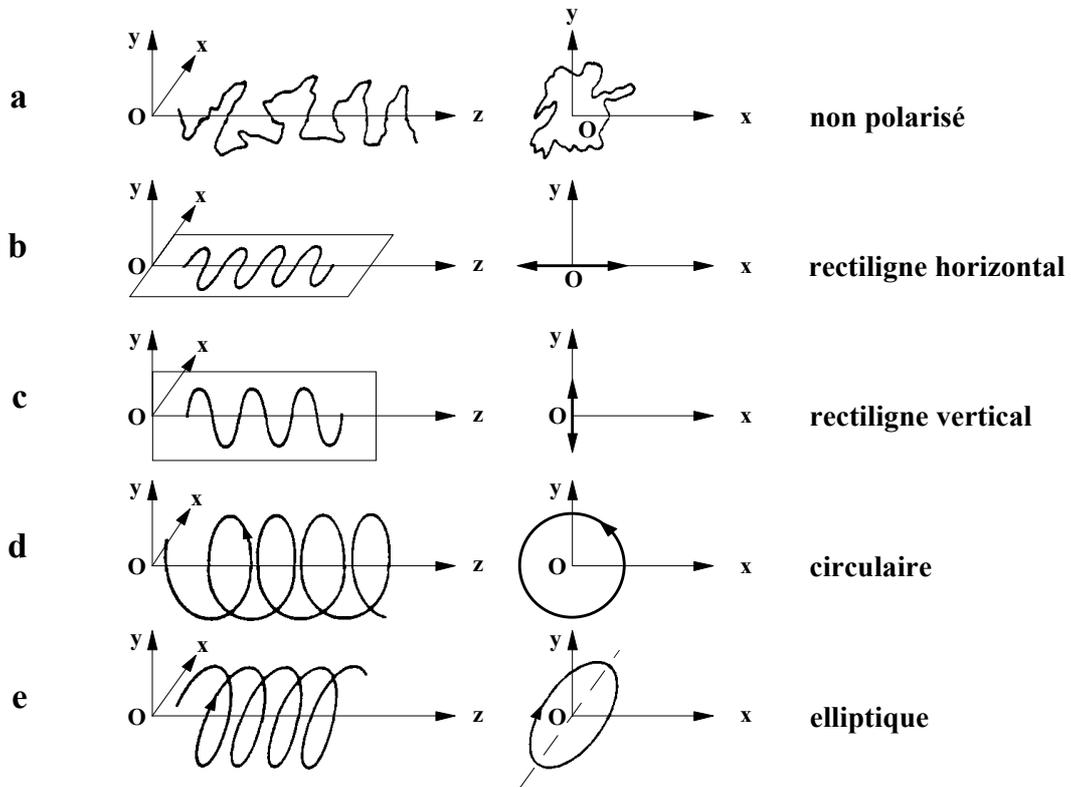


Figure 1.2 : Différents états de polarisation

Les différents paramètres de l'ellipse sont liés aux paramètres de l'onde par une série de relations :

$$a^2 + b^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (1.7)$$

$$\pm ab = E_{0x} E_{0y} \sin(\varphi) \quad (1.8)$$

$$(E_{0x}^2 - E_{0y}^2) \tan(2\theta) = 2E_{0x} E_{0y} \cos(\varphi) \quad (1.9)$$

$$\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \tan(\nu) \quad (1.10)$$

$$\frac{b}{a} = \tan(\varepsilon) \quad (1.11)$$

et,

$$\frac{2 E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} = \tan(2\nu) \quad (1.12a)$$

$$\frac{2 E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \sin(2\nu) \quad (1.12b)$$

Ou encore [6],

$$\tan(2\theta) = \tan(2\nu)\cos(\varphi) \quad (1.13)$$

$$\cos(2\varepsilon)\cos(2\theta) = \cos(2\nu) \quad (1.14)$$

$$\cos(2\varepsilon)\sin(2\theta) = \cos(2\nu)\tan(2\theta) = \sin(2\nu)\cos(\varphi) \quad (1.15)$$

$$\pm \sin(2\varepsilon) = \sin(2\nu)\sin(\varphi) \quad (1.16)$$

$$\pm \tan(2\varepsilon) = \sin(2\theta)\tan(\varphi) \quad (1.17)$$

Il convient d'être prudent quand on utilise ces équations pour des calculs numériques, les changements de cadran sur le cercle trigonométrique doivent être bien appréhendés. Les calculs numériques donnent en effet des résultats bornés : $\tan^{-1} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin^{-1} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \cos^{-1} x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

L'ellipse est dite droite ou gauche selon le sens de rotation du vecteur champ électrique. Par convention, elle est dite droite lorsque pour un observateur regardant dans la direction opposée au sens de propagation, la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles

d'une montre. Ainsi dans les équations (1.8), (1.16) et (1.17), le signe (+) correspond à une rotation gauche et respectivement le signe (-) correspond à une rotation droite du vecteur champ électrique.

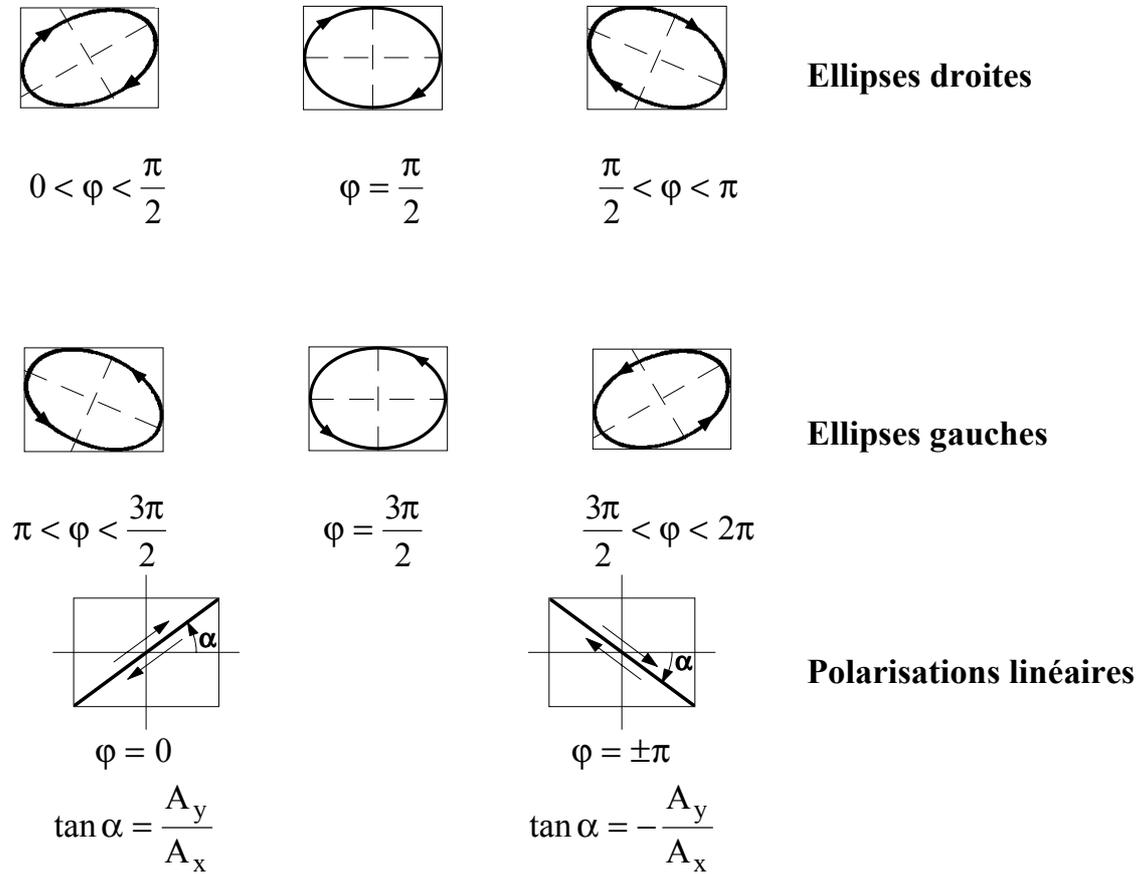


Figure 1.3 : Etats de polarisation pour plusieurs valeurs de déphasage

[6] E. COLLET, "Polarized light – Fundamentals and applications", Optical engineering (Marcel Dekker inc.), New-York, 1993, pages 27 à 31.

1.3 Représentation de la polarisation à partir du formalisme de Jones

1.3.1 Vecteur de Jones

La nature vectorielle de l'état de polarisation de la lumière suggère d'utiliser une représentation vectorielle de ce dernier. Dans la fameuse série d'articles parus en 1941, JONES [3] introduit donc une approche matricielle dans la résolution des problèmes relatifs à la polarisation de la lumière. Il propose ainsi de décrire l'état de polarisation d'une onde quasi monochromatique plane se propageant dans la direction des z croissants par un vecteur colonne complexe \vec{J} appelé vecteur de Jones et tel que :

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{j\varphi_x} \\ E_{oy} e^{j\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Cette représentation complexe ne doit pas cacher que seules les quantités réelles sont observables (mais pas forcément directement mesurables). Par exemple, la composante suivant l'axe Ox du champ \vec{E} s'exprime par :

$$E_x(t) = \text{Re} [E_x e^{j\omega t}] = \text{Re} [E_{ox} e^{j(\omega t + \varphi_x)}] \quad (1.19)$$

Le vecteur de Jones représente l'état de polarisation général d'une onde plane quasi-monochromatique, à savoir l'état de polarisation elliptique. Il n'y a pas de vecteur de Jones pour la lumière naturelle (supposée totalement dépolarisée) et la lumière partiellement polarisée.

Le flux de l'onde peut s'obtenir en additionnant les carrés des amplitudes le long des deux directions orthogonales :

$$I \propto E_x^2 + E_y^2 \quad (1.20)$$

Ou encore $I \propto E^T E$

Où E^T est la matrice adjointe de E (complexe conjugué puis transposé). L'onde est dite normée si le flux est égal à l'unité : $E^T E = 1$.

1.3.2 Matrice de Jones

Le formalisme de Jones permet également de décrire de façon matricielle et déterministe la transformation linéaire subie par une onde polarisée interagissant avec un système optique.

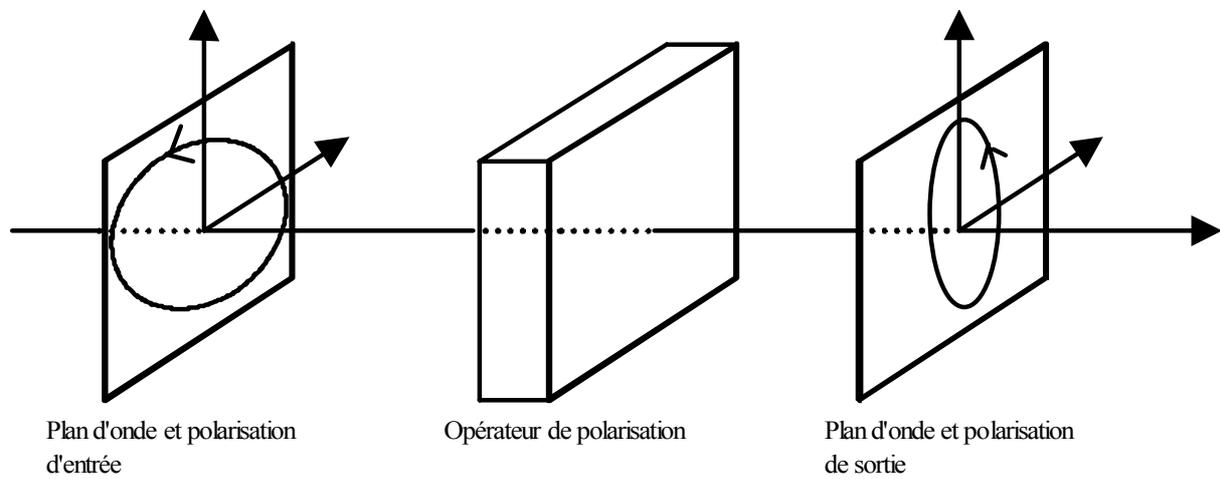


Figure 1.4 : Modification de l'état de polarisation

Le vecteur de Jones incident \vec{J}_e se transforme en vecteur émergent \vec{J}_s par l'intermédiaire d'une matrice complexe 2×2 : $[T]$ appelée logiquement la matrice de Jones :

$$\vec{J}_s = [T] \vec{J}_e \tag{1.21}$$

Dans le cas général, la matrice de Jones comprend 7 coefficients indépendants. Le huitième coefficient de cette matrice complexe est la phase absolue φ , rattachée à l'aspect cohérent de la lumière, qui n'est pas pris en compte. Ce formalisme est tout à fait approprié pour décrire un système optique complexe composé de n éléments en série, la réponse globale étant obtenue par multiplication matricielle des matrices de Jones des n sous systèmes :

$$\vec{J}_s = [T_n][T_{n-1}] \dots [T_2][T_1] \vec{J}_e \quad (1.22)$$

On remarque que la première matrice du produit des $[T_n]$ est la matrice de transfert du dernier élément traversé.

1.3.3 Décomposition polaire

En introduisant sa méthode de calcul matriciel pour traiter les systèmes optiques non dépolarisant, JONES [3] démontrait qu'un système optique contenant n'importe quel nombre de polariseurs partiels, lames à retard et rotateurs était optiquement équivalent à un système contenant quatre éléments : deux lames à retard, un polariseur partiel et un rotateur (ce dernier n'étant pas nécessaire dans la plupart des cas).

WHITNEY reprit, en 1971, cette analyse des systèmes optiques linéaires comportant des effets de polarisation et l'adapta à travers une exploitation de l'algèbre des matrices de spin de Pauli [7]. Elle introduisit ainsi la notion de décomposition polaire en optique polarimétrique. La décomposition polaire d'une matrice de Jones peut être factorisée sous la forme suivante :

$$[T] = [T_p] \cdot [T_R] \quad \text{ou} \quad [T] = [T_R] \cdot [T_p'] \quad (1.23)$$

Où $[T_p]$, $[T_p']$ sont des matrices hermitiennes, et $[T_R]$ est une matrice unitaire.

WHITNEY démontra que les matrices hermitiennes pouvaient être associées à des polariseurs partiels elliptiques tandis que les matrices unitaires pouvaient être associées à des retardeurs partiels elliptiques. Une telle décomposition fut reprise plus tard par GIL et BERNABEU [8] de manière à obtenir les propriétés de retard et de polarisation d'un système optique non dépolarisant à partir des matrices de Mueller. Il est également possible d'obtenir les paramètres de la décomposition polaire directement à partir de la matrice de Jones. LU et

[7] C. WHITNEY, "Pauli-algebraic operators in polarisation optics", J. O. S. A., vol. 61, 1207-1213 (1971).

[8] J. J. GIL, E. BERNABEU, "Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix", Optik, vol. 76, 67-71 (1987).

CHIPMAN [9] ont ainsi introduit la diatténuation et la retardance de manière à extraire les propriétés de transmission et de retard d'un élément de polarisation décrit par une matrice de Jones homogène $[T]$. Ils définissent la diatténuation comme une dépendance de la transmittance de l'élément de polarisation à l'état de polarisation incident, et la retardance comme une mesure de la dépendance du chemin optique à l'état de polarisation incident.

Soient T_{\max} et T_{\min} les transmittances maximale et minimale en énergie de $[T_p]$ respectivement, alors :

$$T_{\max, \min} = \frac{\text{tr}([T]^+[T]) \pm \sqrt{[\text{tr}([T]^+[T])]^2 - 4|\det[T]|^2}}{2} \quad (1.24)$$

où $[T]^+$ représente la matrice transposée conjuguée de $[T]$.

Les coefficients principaux de transmission d'amplitude pour les deux états propres orthogonaux de polarisation de $[T_p]$ sont P_1 et P_2 :

$$P_1^2 = T_{\max} ; P_2^2 = T_{\min} \quad (1.25)$$

La "diatténuation" [9] est alors définie par :

$$D = \frac{P_1^2 - P_2^2}{P_1^2 + P_2^2} \quad (1.26)$$

Tandis que la "retardance" (retard de phase) entre les deux états propres de $[T_R]$ est donnée par:

$$\eta = 2 \arcsin \left\{ \frac{\left| \text{tr}[T] + \frac{\det[T]}{|\det[T]|} (\text{tr}[T]^+) \right|}{2\sqrt{\text{tr}([T]^+[T]) + 2|\det[T]|}} \right\} \quad (1.27)$$

[9] S. -Y. LU, R. A. CHIPMAN, "Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices", J. O. S. A (A), vol. 11, 766-773 (1994).

Le formalisme de Jones offre donc de nombreux avantages mais il ne permet cependant pas de traiter les ondes dépolarisées ou partiellement polarisées. Or, c'est ce type d'ondes que nous rencontrerons le plus souvent dans notre étude. Il est donc souhaitable d'envisager l'utilisation d'un autre formalisme.

1.4 La matrice de polarisation ou matrice de cohérence

1.4.1 Définitions

Pour traiter conjointement les problèmes impliquant la cohérence partielle et la lumière partiellement polarisée, une matrice (de dimension 2), appelée matrice de polarisation ou matrice de cohérence a été développée. Elle est définie comme la moyenne temporelle du produit tensoriel (ou produit de Kronecker) d'un vecteur de Jones par son transposé conjugué :

$$[C] = \langle \vec{E} \otimes \vec{E}^+ \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{xy}^* & C_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

où $\langle \rangle$ symbolise la moyenne temporelle, et \vec{E}^+ le vecteur transposé conjugué de \vec{E} .

La matrice $[C]$ est hermitique ($C_{yx} = C_{xy}^*$) et ne dépend donc que de quatre paramètres réels indépendants. L'intensité totale est définie par la trace de la matrice quel que soit le système d'axes choisi.

$$I = \text{tr}(C) = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle \quad (1.29)$$

Le facteur de corrélation complexe μ_{xy} , permettant d'évaluer la corrélation entre les composantes du champ électrique dans les directions x et y, est défini par :

$$\mu_{xy} = |\mu_{xy}| e^{j\beta_{xy}} = \frac{C_{xy}}{\sqrt{C_{xx}C_{yy}}} \quad (1.30)$$

Avec $0 \leq |\mu_{xy}| \leq 1$

$|\mu_{xy}|$ traduit donc le degré de cohérence des composantes du champ électrique, tandis que β_{xy} traduit leur différence de phases.

1.4.2 Cas particuliers et degré de polarisation

a) lumière non polarisée :

Lorsqu'une onde est non polarisée, les composantes en x et y ne sont pas corrélées, ceci implique que $\mu_{xy} = 0$, $C_{xx} = C_{yy}$ et $C_{xy} = C_{yx} = 0$. Les intensités respectives de chacune des composantes du champ sont statistiquement identiques, ce qui nous permet d'écrire :

$$[C_d] = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & 0 \\ 0 & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{2} I_d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

b) lumière complètement polarisée :

Si on considère une onde plane monochromatique complètement polarisée (c.à.d. E_{ox} , E_{oy} et φ indépendants du temps), la matrice de polarisation s'écrit :

$$[C_p] = \begin{bmatrix} E_{ox}^2 & E_{ox} E_{oy} e^{j\varphi} \\ E_{ox} E_{oy} e^{-j\varphi} & E_{oy}^2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Le déterminant de cette matrice est nul et $|\mu_{xy}| = 1$ (cohérence totale)

c) degré de polarisation :

Avec les conditions exprimées pour $[C_p]$ et $[C_d]$, si la matrice de polarisation $[C]$ a une forme quelconque, elle peut s'exprimer comme la superposition d'une onde parfaitement polarisée et d'une onde non polarisée [7] telle que :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{xy}^* & C_{yy} \end{bmatrix} = [C_d] + [C_p] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

avec $A \geq 0$, $B \geq 0$ et $C \geq 0$ car ce sont les expressions d'intensités.

De plus, $\det[C_p] = 0$ nous donne $\det([C] - A[Id]) = 0$ avec $[Id]$ la matrice identité et \det désignant le déterminant d'une matrice.

Ou encore $(C_{xx} - A)(C_{yy} - A) - C_{xy}C_{xy}^* = 0$, ce qui finalement nous donne :

$$A^2 - A \operatorname{tr}[C] + \det[C] = 0 \quad (1.34)$$

avec $\operatorname{tr}[C] = C_{xx} + C_{yy}$ et $\det[C] = C_{xx}C_{yy} - C_{xy}C_{yx}$

Les solutions sont :

$$A_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}[C] \pm \sqrt{(\operatorname{tr}[C])^2 - 4 \det[C]}}{2} \geq 0 \quad (1.35)$$

Le discriminant est positif (afin d'obtenir une solution réelle), ce qui impose :

$$(C_{xx} - C_{yy})^2 + 4|C_{xy}|^2 \geq |C_{xx} - C_{yy}|^2 \geq 0 \quad (1.36)$$

D'où

$$\text{Si } C_{xx} \geq C_{yy} \quad A_{1,2} \geq (\leq) \frac{(C_{xx} + C_{yy}) \pm (C_{xx} - C_{yy})}{2} \quad (1.37a)$$

$$\text{Si } C_{xx} \leq C_{yy} \quad A_{1,2} \geq (\leq) \frac{(C_{xx} + C_{yy}) \pm (C_{yy} - C_{xx})}{2} \quad (1.37b)$$

Et, puisque $B = C_{xx} - A \geq 0$ et $C = C_{yy} - A \geq 0$, seule convient la solution A_2 , telle que :

$$A_2 = \frac{\text{tr}[C] - \sqrt{\text{tr}[C]^2 - 4\det[C]}}{2} \quad (1.38)$$

L'intensité totale nous est donnée par la trace de la matrice de polarisation:

$$I_{tot} = C_{xx} + C_{yy} = 2A_2 + B + C \quad (1.39)$$

L'intensité de la partie complètement polarisée nous est donnée, de la même façon, par :

$$I_{pol} = C_{xx} + C_{yy} - 2A_2 = B + C \quad (1.40)$$

Le degré de polarisation est alors défini comme le rapport suivant :

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \sqrt{1 - 4 \frac{\det[C]}{(\text{tr}[C])^2}} \quad (1.41)$$

Il peut également s'exprimer à l'aide du facteur de corrélation complexe μ_{xy} :

$$P = \sqrt{1 - 4 \frac{C_{xx} C_{yy} (1 - |\mu_{xy}|^2)}{(\text{tr}[C])^2}} \quad (1.42)$$

1.4.3 Correspondance entre le formalisme de Jones et la matrice de cohérence

Considérons à nouveau \vec{J}_e et \vec{J}_s comme étant respectivement les vecteurs de Jones des ondes incidente et émergente d'un système optique caractérisé par la matrice de Jones $[T]$, la matrice de polarisation (ou de cohérence) $[C_s]$ associée au vecteur \vec{J}_s s'écrit par définition :

$$\begin{aligned}
 [C_s] &= \langle \vec{J}_s \otimes \vec{J}_s^+ \rangle = \langle [T] \vec{J}_e \otimes ([T] \vec{J}_e)^+ \rangle = \langle [T] \vec{J}_e \otimes \vec{J}_e^+ [T]^+ \rangle \\
 &= [T] \langle \vec{J}_e \otimes \vec{J}_e^+ \rangle [T]^+
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

d'où

$$[C_s] = [T][C_e][T]^+ \tag{1.44}$$

avec $[C_e] = \langle \vec{J}_e \otimes \vec{J}_e^+ \rangle$ la matrice de polarisation associée à \vec{J}_e .

Cette dernière relation permet de faire le lien entre le formalisme de Jones et celui de la matrice de cohérence.

1.5 Formalisme de Stokes-Mueller

1.5.1 Vecteur de Stokes

La matrice de polarisation nous permet donc de manipuler des ondes partiellement polarisées. La principale différence démarquant le formalisme de Stokes de celui de Jones est de se baser, pour décrire la polarisation de la lumière, sur les quantités directement mesurables que sont les intensités plutôt que sur les champs électriques. Dans le formalisme de Stokes, la polarisation de la lumière est décrite par un vecteur de dimension 4 appelé le vecteur de Stokes.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* + E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_x^* - E_y E_y^* \rangle \\ \langle E_x E_y^* + E_y E_x^* \rangle \\ i \langle E_x E_y^* - E_y E_x^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} + C_{yy} \\ C_{xx} - C_{yy} \\ C_{xy} + C_{yx} \\ -i(C_{xy} - C_{yx}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_{ox}^2 \rangle + \langle E_{oy}^2 \rangle \\ \langle E_{ox}^2 \rangle - \langle E_{oy}^2 \rangle \\ 2 \langle E_{ox} E_{oy} \cos \varphi \rangle \\ 2 \langle E_{ox} E_{oy} \sin \varphi \rangle \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

Où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

En effet, en optique, les seules quantités mesurables sont à dimension énergétique. Or, les détecteurs possèdent des temps d'intégration très supérieurs aux périodes d'oscillation des ondes optiques ($10^{-14} - 10^{-15}$ secondes). Les quantités mesurées sont donc des moyennes temporelles.

Le symbole $\langle \rangle$ représente la moyenne temporelle telle que $\langle E_x E_y \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_x E_y dt$, où T est le temps d'intégration du détecteur. Ce symbole est également une moyenne "spatiale", le terme "spatiale" restant à définir pour chaque contexte expérimental : c'est typiquement la section du faisceau vu par le photo-détecteur.

Des quatre composantes, la première S_0 joue un rôle particulier puisqu'elle représente l'intensité totale du faisceau. Les trois autres sont reliées à des intensités dans des modes de polarisation complémentaires : linéaire dans le plan d'incidence (I_p), à 45° (I_{45}), à 90° (I_s) et à -45° (I_{-45}) ainsi qu'aux modes circulaires droit I_d et gauche I_g .

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} I_p + I_s \\ I_p - I_s \\ I_{+45} - I_{-45} \\ I_d - I_g \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

1.5.2 Cas particuliers et degré de polarisation

a) lumière complètement polarisée et non polarisée:

Pour une onde plane monochromatique complètement polarisée, les termes d'amplitude E_{0x} , E_{0y} ainsi que la différence entre les termes de phase φ_x et φ_y sont indépendants du temps. Dans ce cas les 4 paramètres de Stokes deviennent :

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (1.47.a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (1.47.b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos(\varphi) \quad (1.47.c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin(\varphi) \quad (1.47.d)$$

D'où, pour une onde complètement polarisée :

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (1.48)$$

Dans le cas d'une lumière non polarisée $C_{xy} = C_{yx} = 0$ et $C_{xx} = C_{yy}$, il en résulte que :

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad (1.49)$$

b) lumière partiellement polarisée et degré de polarisation:

En utilisant l'inégalité de Schwartz (équation (1.51)), on peut montrer que pour n'importe quel état de polarisation, les paramètres de Stokes vérifient toujours la relation suivante :

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (1.50)$$

$$\left| \langle E_x(t)E_y^*(t) \rangle \right|^2 \leq \langle |E_x(t)|^2 \rangle \langle |E_y(t)|^2 \rangle \quad (1.51)$$

On peut ainsi définir le degré de polarisation de l'onde par :

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (1.52)$$

Si $P = 1$ l'onde est dite complètement polarisée.

Si $P = 0$ l'onde n'est pas polarisée.

Si $0 < P < 1$ l'onde est partiellement polarisée.

Au théorème de décomposition énoncé pour la matrice de cohérence correspond un théorème identique associé au vecteur de Stokes : une onde quelconque de vecteur de Stokes \vec{S} pourra se décomposer en une partie complètement polarisée et en une partie complètement dépolarisée, cette décomposition est unique :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

"onde partiellement polarisée = onde complètement dépolarisée + onde polarisée"

Des exemples de vecteurs de Stokes sont donnés dans l'annexe 1.1.

1.5.3 Matrice de Mueller

Les paramètres de Stokes permettent de caractériser complètement l'état de polarisation d'une onde lumineuse. Mueller, quant à lui, a montré qu'il existait une relation linéaire entre les vecteurs de Stokes d'entrée \vec{S}_e et de sortie \vec{S}_s d'un système optique [4]. Il est à noter que les travaux de SOLEILLET [10] et PERRIN [11] avaient abouti à des résultats similaires, mais l'histoire n'aura retenu que le nom de Mueller :

$$\vec{S}_s = [M] \vec{S}_e \quad (1.54)$$

Où $[M]$ est la matrice de Mueller, dont les éléments m_{ij} ($i, j = 0..3$) sont réels et directement reliés à la mesure. Elle peut être considérée comme la matrice de transfert en polarisation d'un milieu donné. Connaissant $[M]$, on peut prédire l'état de polarisation à la sortie du système pour un état incident connu. (L'annexe 1.1 présente les matrices de Mueller de différents composants optiques).

[10] P. SOLEILLET, "Sur les paramètres caractérisant la polarisation partielle de la lumière dans les phénomènes de fluorescence", Ann. Phys., vol. 12, 23-97 (1929).

[11] F. PERRIN, "Polarisation of light scattered by isotropic media", J. of Chem. Phys., vol. 10, 415-427 (1942).

Les propriétés matricielles permettent, comme pour le formalisme de Jones, de déterminer la matrice de Mueller d'un système optique formé d'une succession d'éléments : c'est le produit des matrices des éléments constituant le système. Si on a n éléments optiques, et que la lumière traverse ces éléments dans l'ordre $1, 2, \dots, n$, alors la matrice de Mueller du système sera :

$$[M] = [M_n][M_{n-1}][M_{n-2}] \dots [M_2][M_1] \quad (1.55)$$

L'étude de cette matrice a suggéré à FRY et KATTAWAR [12] d'utiliser l'égalité:

$$\text{tr}([M]^T[M]) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 = 4m_{00}^2 \quad (1.56)$$

pour caractériser les systèmes optiques non dépolarisants, condition confirmée, entre autre, par les travaux de GIL et BERNABEU [13].

Un paramètre souvent exploité à partir de la matrice de Mueller, est l'indice de dépolarisation, qui est similaire au degré de polarisation introduit pour les vecteurs de Stokes (équation (1.52)), puisqu'il traduit le caractère dépolarisant ou non du milieu décrit par la matrice de Mueller. Ce paramètre a été introduit par GIL et BERNABEU [13, 14] et fournit une mesure moyenne du pouvoir polarisant d'un système optique:

$$P_d = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=0}^3 m_{ij}^2 - m_{00}^2}{3 m_{00}^2}} \quad \text{avec } 0 \leq P_d \leq 1 \quad (1.57)$$

Si $P_d = 1$ alors la matrice obtenue est celle d'un milieu non dépolarisant (matrice dite de Mueller-Jones),

Si $P_d = 0$ alors le milieu est complètement dépolarisant.

-
- [12] **E. S. FRY et G. W. KATTAWAR**, "Relationships between elements of the Stokes matrix", Appl. Opt., vol. 20, 2811-2814 (1981).
 [13] **J. J. GIL et E. BERNABEU**, "A depolarization criterion in Mueller matrices", Opt. Act., vol. 32 (3) , 259-261 (1985).
 [14] **J. J. GIL et E. BERNABEU**, "Depolarization and polarization indices of an optical system", Opt. Act., vol 33, 185-189 (1986).

1.5.4 Relations entre le formalisme de Stokes-Mueller et ceux précédemment évoqués

a) Lien entre les paramètres de Stokes et l'ellipse de polarisation :

Les paramètres de l'ellipse, définis au paragraphe 1.2, peuvent s'exprimer en fonction des paramètres de Stokes. En effet, considérons le vecteur de Stokes normalisé par rapport à S_0 d'une onde totalement polarisée :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_1/S_0 \\ S_2/S_0 \\ S_3/S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\nu) \\ \sin(2\nu)\cos(\varphi) \\ \pm \sin(2\nu)\sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\varepsilon)\cos(2\theta) \\ \cos(2\varepsilon)\sin(2\theta) \\ \pm \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

alors les relations suivantes peuvent être établies :

\Rightarrow ellipticité ε ($-\pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/4$)

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{S_3}{S_0} \right] \quad (1.59)$$

\Rightarrow azimut θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{S_2}{S_1} \right] \quad (1.60)$$

\Rightarrow différence de phase moyenne φ entre les deux composantes selon $0x$ et $0y$

($-\pi \leq \varepsilon \leq \pi$)

$$\varphi = \arctan \left[\frac{S_3}{S_2} \right] \quad (1.61)$$

b) Lien entre les paramètres de Stokes et la matrice de cohérence :

L'équation (1.45) nous donne :

$$\begin{aligned}
 S_0 &= C_{xx} + C_{yy} & 2C_{xx} &= S_0 + S_1 \\
 S_1 &= C_{xx} - C_{yy} & 2C_{yy} &= S_0 - S_1 \\
 S_2 &= C_{xy} + C_{yx} & 2C_{xy} &= S_2 - iS_3 \\
 S_3 &= i(C_{xy} - C_{yx}) & 2C_{yx} &= S_2 + iS_3
 \end{aligned}
 \quad \text{et} \quad (1.62)$$

Ces relations peuvent être mises sous la forme matricielle en utilisant la matrice $[A]$ définie ci-dessous, d'une part ou les matrices de Pauli, d'autre part.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

ainsi :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} C_{xx} \\ C_{xy} \\ C_{yx} \\ C_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

$$[C] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \vec{S}_i \quad (1.65)$$

où les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Il est à noter que si, dans l'équation (1.42), on remplace les éléments de la matrice de cohérence par les éléments du vecteurs de Stokes conformément à (1.62), on retrouve la définition du degré de polarisation donné par (1.52). C'est pour cela qu'au théorème de décomposition énoncé pour la matrice de cohérence (équation (1.33)), correspond un théorème identique adapté au formalisme de Stokes (équation (1.53)).

c) Relation entre les matrices de Jones et de Mueller :

A chaque matrice de Jones $[T]$, il est possible d'associer une matrice de Mueller $[M]$ définie par ses éléments m_{ij} ($i, j = 0..3$) comme suit :

$$m_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} ([T][\sigma_j][T^+][\sigma_i]) \quad (1.67)$$

La matrice $[M]$ peut également être déduite d'une matrice de Jones au moyen de l'opération matricielle relativement simple :

$$[M] = [A]([T] \otimes [T^+])[A^{-1}] \quad (1.68)$$

Une matrice de Jones de dimension 2×2 , contient huit paramètres indépendants (parties réelle et imaginaire des quatre éléments de la matrice), ou sept paramètres si l'on exclut la phase absolue. Une matrice de Mueller, de dimension 4×4 , contient, au plus, seize paramètres indépendants, y compris l'information de dépolarisation. Nous venons de voir que chaque matrice de Jones décrivant donc un système optique non dépolarisant, peut être transformée en une matrice de Mueller équivalente à l'aide des équations (1.67) ou (1.68). L'inverse n'est cependant pas nécessairement vrai. Dans le cas où l'on peut associer à la matrice de Mueller une matrice de Jones *c. à d.* si elle décrit un système optique non dépolarisant, elle est appelée matrice de Mueller-Jones. Une matrice de Mueller-Jones est donc une matrice comprenant seulement sept paramètres indépendants.

Il existe plusieurs critères pour déterminer si une matrice de Mueller est une matrice de Mueller-Jones. D'après JONES [3], si un système optique ne dépolarise pas, il doit exister neuf égalités indépendantes entre les éléments m_{ij} de sa matrice de Mueller, conjoncture

reprise plus tard par VAN DE HULST [15] dans son étude sur la diffusion lumineuse de petites particules. En 1981, FRY et KATTAWAR [12] établirent sept égalités indépendantes entre les seize coefficients de la matrice de Mueller et démontrèrent qu'elles se transforment en inégalités lorsque le système étudié dépolairise.

$$S = \sum_{i,j} m_{ij}^2 \leq 4m_{00}^2 \quad (1.69a)$$

$$C1 = (m_{00} + m_{11})^2 - (m_{01} + m_{10})^2 - (m_{22} + m_{33})^2 - (m_{32} - m_{23})^2 \geq 0 \quad (1.69b)$$

$$C2 = (m_{00} - m_{11})^2 - (m_{10} - m_{01})^2 - (m_{22} - m_{33})^2 - (m_{32} + m_{23})^2 \geq 0 \quad (1.69c)$$

$$C3 = (m_{00} + m_{10})^2 - (m_{01} + m_{11})^2 - (m_{02} + m_{12})^2 - (m_{03} + m_{13})^2 \geq 0 \quad (1.69d)$$

$$C4 = (m_{00} - m_{10})^2 - (m_{01} - m_{11})^2 - (m_{02} - m_{12})^2 - (m_{03} - m_{13})^2 \geq 0 \quad (1.69e)$$

$$C5 = (m_{00} + m_{01})^2 - (m_{10} + m_{11})^2 - (m_{20} + m_{21})^2 - (m_{30} + m_{31})^2 \geq 0 \quad (1.69f)$$

$$C6 = (m_{00} - m_{01})^2 - (m_{10} - m_{11})^2 - (m_{20} - m_{21})^2 - (m_{30} - m_{31})^2 \geq 0 \quad (1.69g)$$

Si la partie nécessaire de la condition $S = 4m_{00}^2$ et $C_i = 0$ ($i = 1..6$) pour qu'une matrice de Mueller décrive un système non dépolairisant fut vérifiée par KIM, MANDEL et WOLF [16], elle n'est cependant pas suffisante au sens où des contre-exemples ont été proposés et discutés dans la littérature [17, 18].

Plusieurs autres auteurs ont développé des conditions nécessaires pour qu'une matrice soit de Mueller-Jones. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, la condition portant sur l'indice de polarisation (équation (1.57)) introduite par GIL et BERNABEU [14] ou encore la relation matricielle de BARAKAT [19] basée sur la théorie des groupes (transformation de Lorentz). Par la suite, des conditions nécessaires et suffisantes ont été développées par BROSSEAU [20, 21] ou encore SIMON [17, 22]. Ce dernier suppose que le système optique peut être représenté par une matrice de Jones $[T]$ et forme la matrice $[Q]$:

-
- [15] **H. C. VAN DE HULST**, "Light scattering by small particles", Ed. Wiley, New-York (1957).
 [16] **K. KIM, L. MANDEL, E. WOLF**, "Relationship between Jones and Mueller matrices for a random media", J. O. S. A., vol. 4, 433-437 (1987).
 [17] **R. SIMON**, "Mueller matrices and depolarization criteria", Journal of Modern Optics, vol. 47, 569-575 (1987).
 [18] **A. B. KOSTINSKI**, "Depolarisation criterion for incoherent scattering", Appl. Opt., vol.31, 3506-3508 (1992).
 [19] **R. BARAKAT**, "Bilinear constraints between elements of the 4x4 Mueller-Jones transfer matrix of polarization theory", Opt. Commun., vol. 28, 159-161 (1981).
 [20] **C. BROSSEAU**, "Analysis of experimental data for Mueller polarization matrices", Optik, vol. 85, 83-86 (1990).

$$[Q] = [T] \otimes [T^+] \quad (1.70)$$

Il définit ensuite une matrice $[N]$ dont les éléments s'écrivent, en fonction des coefficients de $[Q]$:

$$n_{ij,kl} = q_{ik,jl} \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (1.71)$$

Soit en développant par rapport aux coefficients de la matrice de Mueller-Jones associée à $[T]$:

$$[N] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{00} + m_{11} + m_{01} + m_{10} & m_{02} + m_{12} + i(m_{03} + m_{13}) & m_{20} + m_{21} - i(m_{30} + m_{31}) & m_{22} + m_{33} + i(m_{23} - m_{32}) \\ m_{02} + m_{12} - i(m_{03} + m_{13}) & m_{00} - m_{11} - m_{01} + m_{10} & m_{22} - m_{33} - i(m_{23} + m_{32}) & m_{20} - m_{21} - i(m_{30} - m_{31}) \\ m_{20} + m_{21} + i(m_{03} + m_{31}) & m_{22} - m_{33} + i(m_{23} + m_{32}) & m_{00} - m_{11} + m_{01} - m_{10} & m_{02} - m_{12} + i(m_{03} - m_{13}) \\ m_{22} + m_{33} - i(m_{23} - m_{32}) & m_{20} - m_{21} + i(m_{30} - m_{31}) & m_{02} - m_{12} - i(m_{03} - m_{13}) & m_{00} + m_{11} - m_{01} + m_{10} \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

avec

$$\text{tr}[N] = 2m_{00} \quad (1.73)$$

La matrice $[N]$ ainsi formée à partir d'une matrice de Jones $[T]$ est hermitienne par construction et doit donc vérifier la relation suivante :

$$[N]^2 = (\text{tr}[N])[N] \quad (1.74)$$

Or $[N]$ ne satisfait l'équation (1.74) que si et seulement si l'une de ses quatre valeurs propres est positive et égale à $\text{tr}[N]$ et les trois autres sont nulles. Une méthode pour vérifier qu'une matrice de Mueller $[M]$ est une matrice de Mueller-Jones est donc de former la matrice $[N]$ à partir des coefficients de $[M]$ et de vérifier la relation (1.74) en calculant ses quatre valeurs propres. La détermination de la matrice de Jones associée se fait ensuite de manière aisée à partir du vecteur propre correspondant à la valeur propre non nulle de $[N]$, comme nous le verrons par la suite.

-
- [21] **C. BROSSEAU**, "Polarization transfer in non-depolarizing optical linear media", *Optik*, vol. 85, 180-182 (1990).
 [22] **R. SIMON**, "The connection between Mueller and Jones matrices of polarization optics", *Opt. Commun.*, vol. 42, 293-297 (1982).

1.5.5 Matrice de Mueller d'un système optique physiquement réalisable

Afin de vérifier qu'une matrice de Mueller correspond bien à un système optique passif physiquement réalisable, il convient de distinguer plusieurs cas :

Dans un premier temps, supposons que le système étudié ne dépolarise pas. Dans ce cas précis la matrice de Mueller doit être de Mueller-Jones et donc vérifier les critères évoqués précédemment. Le critère le plus couramment utilisé actuellement afin de vérifier la validité des mesures reste celui de SIMON, critère uniquement valable pour des matrices déterministes. Malheureusement, les matrices de Mueller étant obtenues expérimentalement, ses coefficients sont bruités par des erreurs de mesure qui peuvent être systématiques ou aléatoires (l'étude de ces erreurs et leur conséquence sur les éléments de la matrice de Mueller sera développée dans le chapitre 3). Il n'y a donc que très peu de chances pour qu'une matrice de Mueller expérimentale puisse satisfaire rigoureusement à de tels critères. Il convient par conséquent d'utiliser un critère qui prenne en compte l'influence du bruit de mesure associée à chaque élément de la matrice de Mueller, comme celui développé par ANDERSON et BARAKAT [23], qui consiste à décomposer la matrice de Mueller en opérateurs de polarisation, ce qui permet d'isoler le comportement non-dépolarisant de l'échantillon dont la signature doit donc être une matrice de Mueller-Jones et de vérifier ensuite que l'opérateur restant correspond à du bruit en comparant sa matrice à une matrice d'écart-types associés aux éléments m_{ij} : $[S] = [\sigma(m_{ij})]$. Si ce n'est pas le cas, nous ne pouvons toujours pas conclure quant à la validité de nos mesures car le milieu peut également dépolariser. Si la dépolarisation est isotrope, *c. à d.* si elle est la même quel que soit l'état de polarisation de l'onde incidente la matrice de Mueller $[M]$ peut alors s'écrire sous la forme [18]:

$$[M] = [M_J] + [M_d] \quad (1.75)$$

où $[M_J]$ est une matrice de Mueller-Jones et $[M_d]$ la matrice d'un dépolariseur isotrope tel que :

[23] D. G. M. ANDERSON, R. BARAKAT, "Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix", J. O. S. A., vol. 11, 2305-2319 (1994).

$$[M_d] = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

$[M_j]$ satisfaisant à la condition de la trace (équation (1.56)), il est permis d'établir que cette décomposition est unique et que le coefficient de dépolarisation d se calcule à partir des éléments m_{ij} de $[M]$:

$$d = m_{00} - \sqrt{\frac{\text{tr}([M]^T[M]) - m_{00}^2}{3}} \quad (1.77)$$

Cette décomposition revient à considérer l'état de polarisation d'une onde lumineuse émergente comme la superposition incohérente d'un état complètement polarisé et d'un état non polarisé indépendant de la polarisation incidente.

Il est ainsi possible de décomposer la matrice expérimentale en une matrice de Mueller-Jones traduisant les transformations de polarisation engendrées par le milieu et de calculer également la matrice traduisant une dépolarisation isotrope du milieu. L'opérateur restant doit donc correspondre à du bruit de mesure si la dépolarisation est isotrope. Si encore une fois, ce n'est pas le cas, c'est que la dépolarisation n'est plus isotrope (dépolarisation anisotrope dépendant de l'état de polarisation de l'onde incidente) ou que la mesure est fautive. Dans le cadre de la dépolarisation anisotrope, il n'existe malheureusement pas, à ma connaissance, de critères permettant de vérifier la validité de nos mesures et donc d'affirmer que la matrice de Mueller correspond bien à un système optique physiquement réalisable.

La décomposition de la matrice de Mueller en opérateurs de polarisation a été introduite par CLOUDE [24, 25, 26, 27, 28] à partir de la théorie des groupes. Il a ainsi défini

-
- [24] S. R. CLOUDE, "Group theory and polarisation algebra", *Optik*, vol. 75, 26-36 (1986).
 - [25] S. R. CLOUDE, "Condition for the physical realisability of matrix operators in polarimetry", in *Polarization consideration for optical systems II*, R. A. CHIPMAN ed., *Proc. Soc. Photo-Opt Instrum. Eng.*, vol. 1166, 177-185 (1989).
 - [26] S. R. CLOUDE, "Lie groups in electromagnetic wave propagation and scattering", *J. of Electromagnetic Waves and Application*, vol. 6, 947-974 (1992).
 - [27] S. R. CLOUDE, "Special unitary groups polarimetry theory", *Proc. SPIE*, vol. 2265, 292-303 (1994).
 - [28] S. R. CLOUDE, E. POTTIER, "Concept of polarization entropy in optical", *Optical Engineering*, vol. 34, 1599-1610 (1995).

des opérateurs hermitiens liés à la matrice de Mueller qui permettent d'isoler les composantes matricielles ne correspondant pas, *à priori*, à un système physiquement réalisable. Son objectif étant d'extraire une matrice de Mueller-Jones à partir d'une matrice de Mueller quelconque, il se base sur une matrice de Jones $[T]$ et la représente par un vecteur cible \vec{k} , de dimension quatre, dont les coefficients sont :

$$k_i = \frac{\text{tr}([T][\psi_i])}{2} \quad (1.78)$$

où les $[\psi_i]$ forment une base de quatre matrices complexes de dimension 2×2 . Il existe une infinité de bases permettant d'exprimer \vec{k} en fonction de $[T]$, parmi lesquelles la base des matrices de Pauli. Nous pouvons également choisir cette base de manière à obtenir la relation suivante:

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{yx} \\ T_{yy} \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

Il est alors possible de construire une matrice d'ordre quatre, par la relation :

$$[N] = \vec{k} \cdot \vec{k}^+ \quad (1.80)$$

La matrice $[N]$ obtenue est exactement identique à celle de l'équation (1.72), à la différence qu'elle n'est pas construite de la même façon à partir de la matrice de Jones. Le fait de construire la matrice $[N]$ de manière différente permet d'établir un critère de décomposition basé sur l'algèbre. La matrice $[N]$ est appelée matrice de cohérence de cible par analogie avec la matrice de cohérence d'une onde polarisée $[C]$, de dimension 2, définie précédemment.

Nous pouvons écrire $[N]$ en fonction des éléments m_{ij} de la matrice de Mueller associée :

$$[N] = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j \quad (1.81)$$

Il est par conséquent possible, à l'aide de cette relation, de former une matrice de cohérence de cible à partir d'une matrice de Mueller quelconque. $[N]$ étant hermitienne, définie semi-positive, elle est diagonalisable et possède quatre valeurs propres réelles positives (ou nulles) et quatre vecteurs propres orthogonaux entre eux. Chaque vecteur propre correspond à un vecteur \vec{k} unique (à un facteur de phase près) et donc à une seule matrice de Jones. CLOUDE en a déduit un théorème de décomposition de cible, qui exprime $[N]$ comme la somme incohérente d'au plus quatre composantes de cible chacune pondérée par sa valeur propre respective :

$$[N] = \lambda_0[N_0] + \lambda_1[N_1] + \lambda_2[N_2] + \lambda_3[N_3] \quad (1.82)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $[M]$ soit de Mueller-Jones est donc que $[N]$ ne possède qu'une seule valeur propre non nulle.

Une telle décomposition permet également de déterminer une estimation de $[M]$ par une matrice de Mueller-Jones. Cette estimation reste applicable si $[N]$ possède une valeur propre dominante et trois autres quasiment nulles. Autrement dit, si $\lambda_0 \cong \text{tr}[N] = 2m_{00}$ et $\lambda_i \cong 0$, pour $i = 1, 2, 3$, une matrice de Mueller-Jones peut être construite à partir du vecteur propre \vec{W}_0 associé à λ_0 , en posant :

$$\vec{k} = \sqrt{\lambda_0} \vec{W}_0 \quad (1.83)$$

La matrice de Jones associée s'obtient ensuite facilement à partir de l'équation (1.79). Notons que cette matrice est définie à une constante multiplicative près. Un tel processus permet donc d'opérer un filtrage de la matrice de Mueller. Cependant, le fait que $[M]$ ne soit pas une matrice de Mueller-Jones (*i.e.* les valeurs propres λ_i , pour $i=1, 2, 3$ ne sont pas nulles), n'est pas uniquement imputable aux erreurs expérimentales, mais peut également être attribué à l'effet de dépolarisation intrinsèque du système optique considéré. Dans ce cas, le

filtrage fait perdre une partie de l'information du signal. Il est donc nécessaire de distinguer le bruit de mesure de la dépolarisation.

La méthode de caractérisation d'une matrice de Mueller expérimentale est donc la suivante [23, 29, 30] :

Soit $[M]$ une matrice de Mueller expérimentale pour laquelle nous avons évalué la matrice d'écart-type $[S]$ (voir Chapitre 4), caractérisant les incertitudes sur les éléments m_{ij} . Introduisons la norme de Frobenius d'une matrice X de dimension $n \times n$, définie par :

$$\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(X^+ X)} \quad (1.84)$$

Nous pouvons comparer la matrice expérimentale $[M]$ et sa matrice de Mueller-Jones estimée en évaluant :

$$\|\Delta[M]\|_F = \|[M] - [\tilde{M}_J]\|_F \quad (1.85a)$$

$$\|\Delta[N]\|_F = \|[N] - [\tilde{N}_J]\|_F \quad (1.86b)$$

où $[\tilde{M}_J]$ et $[\tilde{N}_J]$ sont respectivement la matrice de Mueller-Jones extraite de $[M]$ et la matrice de cohérence de cible correspondant à la valeur propre λ_0 .

D'après [23] :

$$\|\Delta[N]\|_F = \sqrt{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + |\lambda_3|^2} \quad (1.87)$$

Si la différence entre $[M]$ et $[\tilde{M}_J]$ est uniquement la conséquence d'erreurs expérimentales, alors $\|\Delta[M]\|_F$ et $\|\Delta[N]\|_F$ doivent être inférieures ou égales à $\|[S]\|_F$. Si

[29] **F. LE ROY BREHONNET**, "Application de décomposition de matrices de Mueller à la caractérisation et à la classification de cibles", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).

[30] **F. LE ROY-BREHONNET, B. LE JEUNE**, "Utilization of Mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties", Prog. Quant. Electr. , 1-42 (1997).

cette condition n'est pas vérifiée, c'est que le système optique dépolarise. Nous pouvons alors examiner le cas où la matrice de Mueller $[M]$ présente un effet de dépolarisation isotrope et dans ce cas $[M]$ s'écrit $[M]=[M_J]+[M_d]$ (équation (1.75)). La détermination de $[M_d]$ se fait en calculant le seul de ses éléments non nuls, à savoir le coefficient de dépolarisation isotrope d . Ce dernier peut être obtenu à l'aide de l'équation (1.77) ou par la suivante :

$$d = \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \quad (1.88)$$

A la matrice $[M_d]$, nous pouvons associer par l'équation (1.81) une matrice de cohérence $[N_d]$, diagonale, de la forme [28,31] :

$$[N_d] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

Supposons que $[M]$ puisse s'écrire sous la forme (1.75) et soit $[N]$ sa matrice de cohérence. $[N]$ peut se mettre sous la forme [29, 30]:

$$[N] = [W][\Lambda][W^+] \quad (1.90)$$

où $[\Lambda]$ est une matrice diagonale formée par les valeurs propres λ_i de $[N]$ ($i = 0, 1, 2, 3$) avec $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$, et $[W]$ est une matrice unitaire composée des vecteurs propres colonnes associés \vec{W}_i .

Comme il existe une correspondance univoque entre une matrice de Mueller et sa matrice de cohérence, nous pouvons écrire :

$$[N] = [N_J] + [N_d] \quad (1.91)$$

Avec $[N_J]$ la matrice de cohérence de cible associée à une matrice de Mueller-Jones.

Puisque $[N_d]$ est une matrice diagonale, nous voyons que la dépolarisation isotrope n'affecte pas la matrice unitaire $[W]$ mais seulement les valeurs propres de $[N]$ avec la même pondération. Nous pouvons donc calculer :

$$[N_J] = (\lambda_0 - \frac{d}{2}) \vec{W}_0 \vec{W}_0^+ \quad (1.92)$$

Une fois que l'on a extrait le facteur de dépolarisation $d/2$ contenu dans λ_0 , $[N]$ ne contient plus que la partie non dépolarisante $[N_J]$.

La matrice de Mueller $[M_J]$ calculée à partir de $[N_J]$ est alors la matrice de Mueller-Jones attendue. Si $\| \Delta[M] \|_F = \| [M] - [M_J] \|_F \leq \| S \|_F$, nous pouvons en déduire que la matrice de Mueller présente de la dépolarisation isotrope et qu'elle correspond bien, aux erreurs de mesures près, à un système optique physiquement réalisable. Cette décomposition nous permet par la suite de calculer les caractéristiques du système optique : le retard, la diatténuation et le coefficient de dépolarisation isotrope.

Si ce n'est pas le cas, c'est que, soit la mesure est erronée et ne correspond donc pas à un système physiquement réalisable, soit que la dépolarisation n'est pas isotrope. Une autre approche consiste alors à étudier les problèmes de surpolarisation par l'examen de la sphère de Poincaré.

[31] F. LE ROY-BREHONNET, P. ELIES, P. Y. GERLIGAND, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN, "Mueller matrix decomposition : application to optical targets classification", J. I. P. R. , Nantes, 374-381 (1995).

1.6 La sphère de Poincaré

1.6.1 Présentation

Comme nous l'avons vu tout au long de ce chapitre, différents formalismes permettent de définir l'état de polarisation d'une onde optique. Ces formalismes sont matriciels et permettent par conséquent de caractériser l'état de polarisation d'un faisceau traversant un ou plusieurs éléments optiques montés en cascade. Toutefois, il n'est pas toujours facile, à première vue, d'interpréter tel vecteur ou telle matrice ou de déterminer comment évoluera un état de polarisation lors de la traversée d'un milieu. La méthode géométrique proposée par POINCARÉ [2] permet de résoudre ce problème et de représenter tout état de polarisation sur une sphère dont chaque point correspond à un état possible de polarisation d'un faisceau lumineux [32].

Considérons, en effet, le vecteur de Stokes normalisé d'un état de polarisation quelconque (équation (1.58)) :

$$\vec{S}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ S_{1n} \\ S_{2n} \\ S_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta) \\ \cos(2\varepsilon) \sin(2\theta) \\ \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

ε et θ sont respectivement l'ellipticité et l'azimuth de l'ellipse de polarisation.

L'équation (1.48) s'écrit alors :

$$S_0^2 = 1 = S_{1n}^2 + S_{2n}^2 + S_{3n}^2 \quad (1.94)$$

Ce vecteur est donc complètement caractérisé par seulement trois paramètres indépendants qui sont les coordonnées cartésiennes d'un point situé sur une sphère unité.

[32] A. GARCIA WEIDNER, "The Poincaré sphere : isolated and real trajectories describing the state of polarization", J. Optics (Paris), vol. 23, 3-12 (1992).

Cette sphère est appelée sphère de Poincaré où chaque point décrivant un état de polarisation peut être également représenté par ses coordonnées polaires, à savoir 2ε et 2θ .

De façon à garder les conventions adoptées depuis le début de ce chapitre, les figures suivantes indiquent deux façons de représenter la sphère :

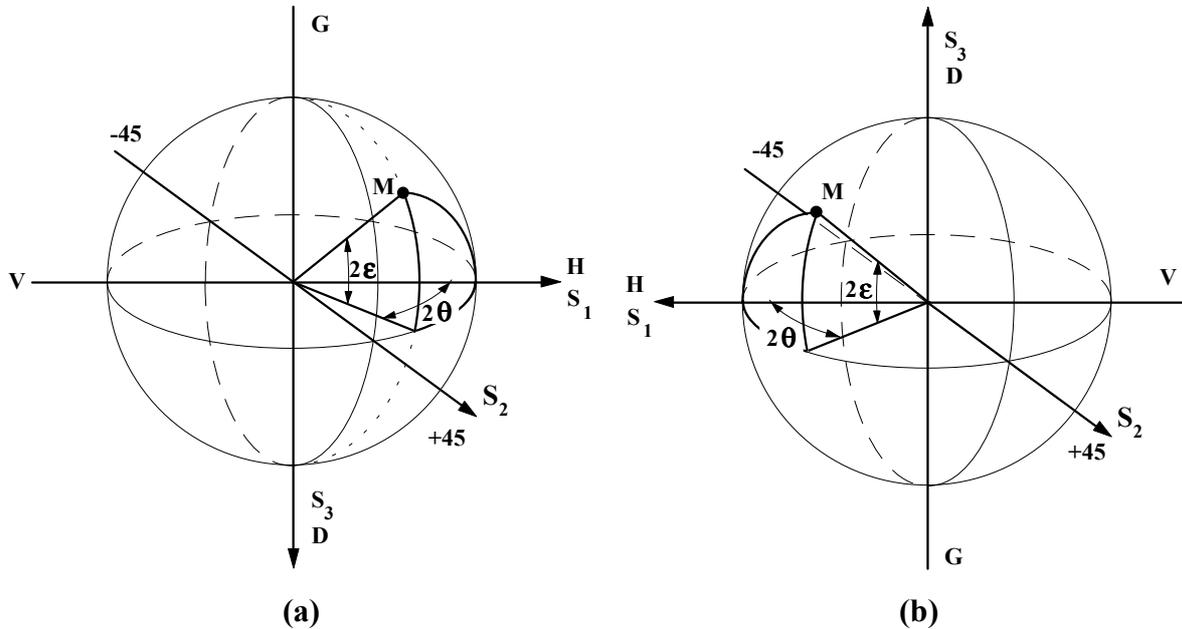


Figure 1.5 : Représentation d'un état de polarisation sur la sphère de Poincaré

1.6.2 Caractéristiques générales de la Sphère de Poincaré

- Les polarisations rectilignes sont représentées par des points sur l'équateur.
- Les polarisations circulaires sont aux pôles :
 - pôle nord : polarisation circulaire droite (représentation (b)).
 - pôle sud : polarisation circulaire gauche.
- L'hémisphère nord correspond aux vibrations elliptiques droites.
- L'hémisphère sud correspond aux vibrations elliptiques gauches.
- Deux vibrations orthogonales (ellipses orthogonales) sont représentées par deux points diamétralement opposés sur la sphère.

La figure suivante représente schématiquement les caractéristiques énoncées ci-dessus :

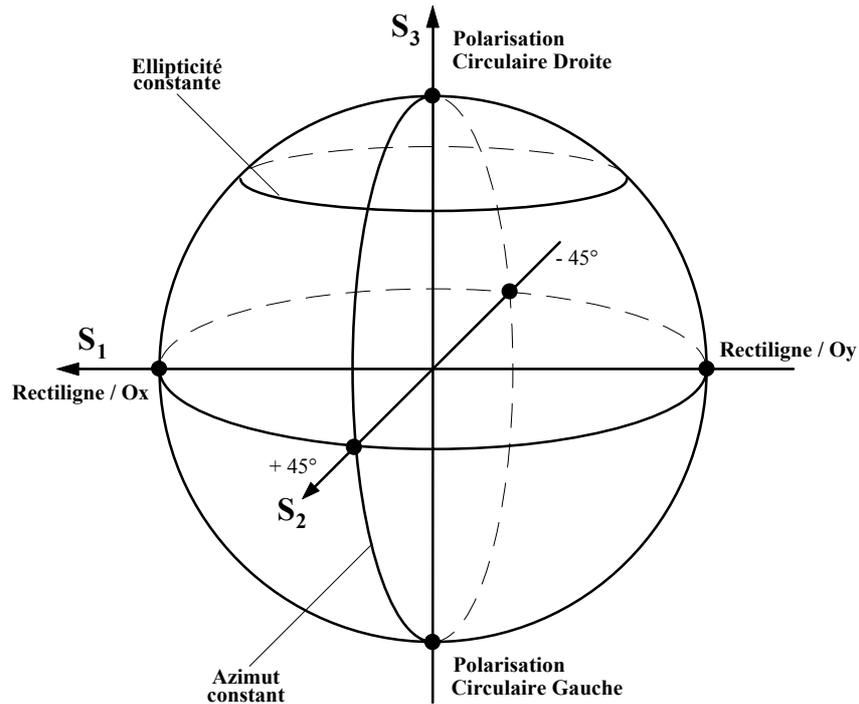


Figure 1.6 : Représentation des principaux états de polarisation sur la sphère de Poincaré

En conclusion, l'évolution d'un état de polarisation à travers un système optique se traduira par le déplacement du point représentatif de cet état sur la sphère de Poincaré. Dans le cas d'une lumière partiellement polarisée, les points représentatifs ne sont pas regroupés uniformément mais se regroupent autour du point correspondant à la valeur la plus probable de l'état de polarisation (figure (1.7)). Plus la distribution sera étroite autour du point central, plus la lumière se comportera comme une lumière polarisée caractérisée par un état donné.

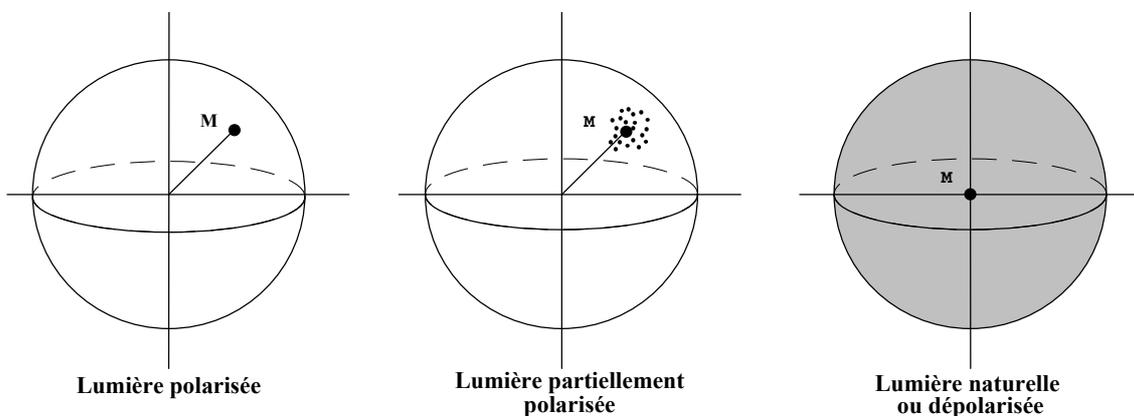


Figure 1.7 : Représentation des différents types de lumière sur la sphère de Poincaré

1.7 Conclusion

Nous avons donc montré que l'état de polarisation d'une onde monochromatique ou quasi-monochromatique pouvait être représenté de différentes manières. D'autres formalismes, beaucoup moins utilisés, représentent la polarisation de la lumière de façon différente. On peut citer comme exemple la représentation basée sur les quaternions, introduite par PELLAT-FINET [33, 34, 35, 36], qui s'apparente à celle des vecteurs de Stokes et qui, comme elle, résout le problème de la somme incohérente de lumières polarisées mais qui ne permet pas de décrire la dépolarisation. D'autres auteurs ont également développé des formalismes afin de modéliser et de comprendre certains phénomènes complexes comme la polarisation dans des fibres optiques soumises à des contraintes [37, 38].

Le formalisme de Jones convient plus à une approche théorique de la polarisation car son calcul porte sur des amplitudes, et qu'il ne peut traiter que des ondes complètement polarisées. Par contre le formalisme de Stokes-Mueller traite les ondes quel que soit leur état de polarisation, ainsi que n'importe quelle transformation de polarisation, qu'il soit caractérisé par une matrice de Jones ou non. Notre étude consistant à mettre en place un spectropolarimètre, *c. à d.* un appareil capable de fournir la signature polarimétrique de n'importe quel système optique, nous pouvons être confrontés à des problèmes de dépolarisation. Nous utiliserons donc tout naturellement le formalisme de Stokes-Mueller qui, en plus d'appréhender plus aisément ces phénomènes, présente l'avantage de prendre directement en compte des grandeurs à dimensions énergétiques donc directement mesurables. L'utilisation de ce formalisme associé à la représentation de la sphère de Poincaré, nous permettra de décrire simplement les phénomènes observés.

-
- [33] **P. PELLAT FINET**, "représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions", *Optica Acta.*, vol. 31, 415-434 (1984).
 - [34] **P. PELLAT FINET**, "An introduction to a vectorial calculus for polarization optics", *Optik*, vol. 84, 169-175 (1990).
 - [35] **P. PELLAT FINET**, "Geometrical approach to polarization optics I : geometrical structure of polarized light", *Optik*, vol. 87, 27-33 (1991).
 - [36] **P. PELLAT FINET**, "Geometrical approach to polarization optics II : quaternion representation of polarized light", *Optik*, vol. 87, 68-77 (1991).
 - [37] **C. S. BROWN**, "The unified formalism for treating polarization effects using Stokes parameters and the Lorentz group", *Proc. SPIE*, vol. 1746, 174-182 (1992).
 - [38] **C. S. BROWN, M. W. SHUTE, D. D. WILLIAMS, F. MUHAMMED**, "The development and calibration of an optical fiber polarimeter", *Proc. SPIE*, vol. 2265, 62-69 (1994).

La décomposition spectrale de la matrice de cohérence de cible associée à la matrice de Mueller offre enfin l'avantage de pouvoir décomposer les différentes actions du système optique sur une onde polarisée et de vérifier la pertinence de nos résultats par la prise en compte du bruit de mesure.

Annexe 1.1 : Vecteurs de Stokes, de Jones et matrice de Mueller

Etat de polarisation	Représentation temporelle	Vecteur de Jones	Vecteur de Stokes
Rectiligne // Ox	$\begin{cases} E_x(t) = E_{0x} \cos \omega t \\ E_y(t) = 0 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Rectiligne // Oy	$\begin{cases} E_x(t) = 0 \\ E_y(t) = E_{0y} \cos \omega t \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Rectiligne à $\pm 45^\circ$	$\begin{cases} E_x(t) = E_0 \cos \omega t \\ E_y(t) = E_0 \cos \omega t \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Circulaire gauche	$\begin{cases} E_x(t) = E_0 \cos \omega t \\ E_y(t) = -E_0 \sin \omega t \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
Circulaire droite	$\begin{cases} E_x(t) = E_0 \cos \omega t \\ E_y(t) = E_0 \sin \omega t \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Elliptique	$\begin{cases} E_x(t) = E_0 \cos \omega t \\ E_y(t) = E_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu e^{i\varphi} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\nu \\ \sin 2\nu \cos \varphi \\ \pm \sin 2\nu \sin \varphi \end{bmatrix}$
Non polarisé			$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

MATRICES DE MUELLER
DE QUELQUES COMPOSANTS OPTIQUES
 (tous les angles sont référencés par rapport à l'axe des x -axe horizontal)

Polariseur linéaire horizontal*	Polariseur polariseur vertical*
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Polariseur linéaire* d'azimuth θ	Polariseur circulaire*
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & C & S & 0 \\ C & C^2 & CS & 0 \\ S & CS & S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>$C = \cos 2\theta \quad S = \sin 2\theta$</p>	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Polariseur elliptique* (forme générale) <i>ellipticité = tan ϵ</i>
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & CC_e & SC_e & \pm S_e \\ CC_e & C^2 C_e^2 & CSC_e^2 & \pm CS_e C_e \\ SC_e & CSC_e^2 & S^2 C_e^2 & \pm SS_e C_e \\ \pm S_e & \pm CS_e C_e & \pm SS_e C_e & S_e^2 \end{bmatrix}$ <p>$S_e = \sin 2\epsilon \quad C_e = \cos 2\epsilon$</p>

Polariseur dichroïque* (coefficients de transmission en amplitude : P_x et P_y)
$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_x^2 + P_y^2 & \pm(P_x^2 - P_y^2) & 0 & 0 \\ \pm(P_x^2 - P_y^2) & P_x^2 + P_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2P_x P_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2P_x P_y \end{bmatrix}$

Biréfringent linéaire* (dans ses axes)	Biréfringent linéaire* (d'orientation θ)	
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta & -\sin \Delta \\ 0 & 0 & \sin \Delta & \cos \Delta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 + S^2 \cos \Delta & CS(1 - \cos \Delta) & S \sin \Delta \\ 0 & CS(1 - \cos \Delta) & S^2 + C^2 \cos \Delta & -C \sin \Delta \\ 0 & -S \sin \Delta & C \sin \Delta & \cos \Delta \end{bmatrix}$	
$C = \cos 2\theta$	$S = \sin 2\theta$	Δ : différence de phase

Biréfringent circulaire*
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Delta/2) & \pm \sin(\Delta/2) & 0 \\ 0 & \pm \sin(\Delta/2) & \cos(\Delta/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Biréfringent elliptique* (forme générale)
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (D^2 - E^2 - F^2 + G^2) & 2(DE + FG) & -2(DF + EG) \\ 0 & 2(DE - FG) & (-D^2 + E^2 - F^2 + G^2) & -2(DG - EF) \\ 0 & -2(DF - EG) & -2(DG + EF) & (-D^2 - E^2 + F^2 + G^2) \end{bmatrix}$
<p style="text-align: center;">avec</p> $D = \cos 2\varepsilon \cos 2\theta \sin(\Delta/2) \quad F = \sin 2\varepsilon \sin(\Delta/2)$ $E = \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \sin(\Delta/2) \quad G = \cos(\Delta/2)$ <p style="text-align: center;">θ : azimut, Δ : différence de phase, $\tan \varepsilon$: ellipticité</p>

* Ces matrices sont en partie extraites de "Modern description of polarized light : matrix methods" de H.G. JERRARD, Optics and Laser Techn., pages 309-319, 1982, ou de "Ellipsometrie and polarized light" de R.M.A AZZAM et N.M. BASHARA, North-Holland Publis. Comp., 1977

Chapitre 2

Présentation du polarimètre

2.1 Introduction

Comme nous venons de le voir, le formalisme le mieux adapté à l'analyse polarimétrique d'un système optique est celui de Stokes-Mueller. Nous présentons donc dans ce chapitre la procédure expérimentale, basée sur ce formalisme, qui permet de mesurer les matrices de Mueller d'un échantillon sur tout le spectre du visible.

Il existe de nos jours de nombreux appareils permettant de mesurer, soit de manière partielle, soit entièrement les éléments de la matrice de Mueller d'un système optique. Ces appareils sont désignés sous le terme "ellipsomètre" car les premiers outils de caractérisation utilisant la polarisation de la lumière ne travaillaient qu'avec des faisceaux totalement polarisés. C'est donc tout naturellement que la forme décrite par le champ électrique a donné son nom au domaine scientifique dédié à son étude : l'ellipsométrie. Cette grande famille d'appareils peut être divisée en plusieurs classes :

- L'ellipsométrie standard : c'est actuellement la seule technique polarimétrique à avoir franchi la porte des laboratoires. Elle est dédiée à l'étude des échantillons plans isotropes, sans activité optique (dichroïsme circulaire) et non rugueux [1]. Cette catégorie d'échantillons est particulière car leur matrice de Jones, en plus du coefficient de transmission, ne comporte

[1] **B. DREVILLON**, "Phase modulated ellipsometry from the ultraviolet to the infrared : in situ application to the growth of semiconductors", Progress in Crystal growth and characterization of materials, 27 (1993).

que deux coefficients. L'essor de cette technique résulte de l'importante demande industrielle de caractérisation de dépôts de couches minces.

- L'ellipsométrie généralisée : elle est de plus en plus développée pour caractériser des milieux anisotropes non dépolarisants. Cette classe comprend donc les appareils qui mesurent les 7 coefficients de la matrice de Jones d'un échantillon.

Ces appareils font partie de la classe des ellipsomètres de Mueller incomplets car ils ne mesurent que partiellement la matrice de Mueller d'un échantillon. Ainsi quatre paramètres seulement sont nécessaires pour caractériser un échantillon isotrope ou encore la diffusion sur des particules sphériques. Pour caractériser des matériaux plus complexes comme ceux qui présentent de la dépolarisation anisotrope ou encore la diffusion par des particules de structure aléatoire (non sphérique et non cylindrique), il est nécessaire de disposer de tous les éléments de la matrice de Mueller. Pour ce faire, il est indispensable de développer un ellipsomètre de Mueller complet, encore appelé polarimètre.

- L'ellipsométrie spectroscopique : ces appareils présentent l'avantage de pouvoir accéder à la matrice de Mueller d'un échantillon sur une large bande spectrale. Les ellipsomètres spectroscopiques standards ou généralisés sont actuellement très développés pour répondre aux besoins d'une intégration croissante des composants électroniques ou optiques [2, 3]. La résolution du problème inverse, en effet, permettant d'accéder aux caractéristiques d'un empilement de couches minces, à partir de l'évolution des transformations de polarisation engendrées par le matériau, en fonction de l'angle d'incidence, peut fournir plusieurs solutions correspondant à des modèles multicouches différents. L'extension de l'étude à un continuum de longueurs d'onde permet alors de résoudre ce genre de problème. Quelques ellipsomètres spectroscopiques complets capables de mesurer les 16 coefficients de la matrice de Mueller sur l'ensemble d'un spectre ont été récemment développés ou sont encore à l'étude [4], mais aucun d'entre eux, à ma

[2] **A. EN NACIRI**, "Ellipsométrie spectroscopique conventionnelle et généralisée de milieux anisotropes. Application à l'étude des propriétés optiques de l'iodure mercurique (HgI₂)", Thèse de Doctorat, Université de Metz (1999).

[3] **B. LECOURT**, "Ellipsométrie spectroscopique conventionnelle et généralisée de films moléculaires ultraminces. Bases théoriques et instrumentales - Application à l'étude de films Langmuir-Boldgett et de films autosupportés", Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I (1998).

[4] **E. COMPAIN**, "Conception et réalisation d'un ellipsomètre de Mueller achromatique fonctionnant en temps réel", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1999).

connaissance, n'est capable de fonctionner avec une source laser pulsée. Une telle source associée au polarimètre permettrait pourtant bon nombre d'études originales comme l'étude de l'évolution temporelle d'un phénomène de fluorescence, par exemple. C'est donc sur le développement d'un tel appareil qu'a porté le sujet de cette thèse.

Tous les ellipsomètres appartenant à l'une de ces catégories reposent sur la même configuration de base. Leurs différences se situent au niveau de la source utilisée (lasers, source de lumière blanche associée à un monochromateur,...), des éléments servant à coder et analyser la polarisation de l'onde électromagnétique et de la manière dont sont réalisés le codage et l'analyse (génération d'un ensemble discret d'état de polarisation ou modulation de ces derniers pour une application temps réels).

2.2 Dispositif expérimental de base d'un ellipsomètre

Il convient en premier lieu d'utiliser une source lumineuse. Pour notre part, nous utilisons donc une source laser impulsionnelle monochromatique et cohérente. La présence d'un étage OPO (voir plus loin) offre la possibilité d'étendre chaque étude à une large bande spectrale (ici la gamme du visible).

Il s'agit ensuite de générer de façon contrôlée des états de polarisation que l'on envoie sur l'échantillon. Enfin, la polarisation de la lumière émergente est mesurée afin de caractériser les modifications induites par l'échantillon sur les états de polarisation incidents. Aucun ellipsomètre n'échappe à cette configuration et leur différence tient dans la façon de générer puis de mesurer les états de polarisation, ce qui peut être fait d'un très grand nombre de façon. De manière générale, le nombre de coefficients de la matrice de Mueller mesurés est au plus égal au produit du nombre d'états de polarisation indépendants générés par le nombre d'états indépendants mesurés.

Il existe donc plusieurs techniques permettant de générer ou de mesurer des états de polarisation (modulateurs photo-élastiques et électro-optiques, effet Kerr, effet Faraday, lames de phase,...), mais elles sont soit difficiles à mettre en œuvre, soit peu stables (en température par exemple), soit totalement incompatibles avec la source utilisée (il est nécessaire d'utiliser des éléments achromatiques supportant des flux d'énergie élevés). Notre choix s'est porté sur des lames biréfringentes quart d'onde sur support tournant, associées à des polariseurs de

Glan. Les raisons de ce choix sont, d'une part, leur achromaticité (lames achromatiques zéro-ordre compensées), leur tenue aux flux et le fait qu'elles soient peu sensibles aux facteurs extérieurs. Seuls leurs défauts de conception pourront avoir des conséquences sur la précision des résultats. Les conséquences de ces défauts étant tout à fait reproductibles dans le temps, il est alors possible de les corriger (voir le chapitre 3 concernant l'étalonnage de l'appareil). Les nombreux polarimètres développés au laboratoire et reposant sur une telle disposition [5, 6, 7, 8, 9] ont également motivé ce choix. Le principe d'obtention de la matrice de Mueller à l'aide d'un tel polarimètre est le suivant :

2.3 Procédure d'obtention des matrices de Mueller

2.3.1 Description formelle du dispositif

Un polarimètre composé d'un système de mise en forme polarimétrique et d'un système d'analyse permet d'obtenir la matrice de Mueller d'un système optique. Les systèmes de mise en forme et d'analyse sont composés identiquement d'un polariseur linéaire et d'une lame quart d'onde conformément à la figure 2.1. Le polariseur d'entrée est orienté verticalement (référence du système) tandis que le polariseur de sortie est orienté horizontalement. Les lames quart d'onde d'entrée et de sortie sont orientées respectivement de θ et θ' par rapport à la verticale.

-
- [5] **B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Imagerie sous-marine par laser : contraste polarimétrique", *J. Optics (Paris)*, vol. 21, 133-140 (1990).
 - [6] **G. LE BRUN, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Laser imaging procedure for evaluating the polarization signature of immersed targets", *Pure Appl. Opt.*, vol. 2, 445-470 (1993).
 - [7] **P.-Y. GERLIGAND, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Polarimetric characterization of thin plates of ferrofluids : Application to active imagery", *J. of Magn. And Magn. Mat*, vol. 122, 406-410 (1993).
 - [8] **P. ELIES, B. LE JEUNE, F. LE ROY-BREHONNET, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Experimental investigation of the speckle polarization for a polished aluminium sample", *J. Phys. D :Applied Phys.*, vol. 30, 29-39 (1997).
 - [9] **P. OLIVARD, P Y GERLIGAND, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Measurement of optical fibre parameters using an optical polarimeter and Stokes-Mueller formalism", *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 32, 1618-1625 (1999).

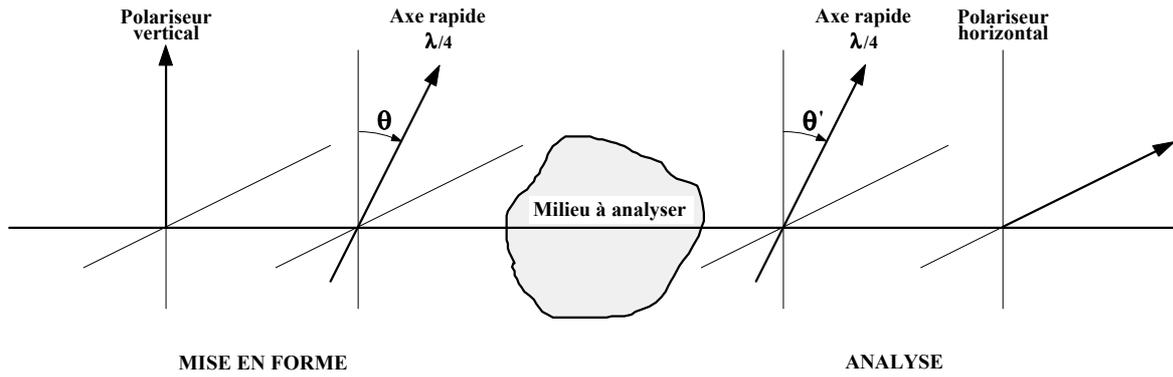


Figure 2.1 : Disposition du polarimètre

2.3.2 Principe de base

Soit $[M]$, la matrice de Mueller que l'on cherche à déterminer :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Le vecteur de Stokes de sortie \vec{S}' du polarimètre est lié au vecteur d'entrée \vec{S} par la relation matricielle suivante :

$$\vec{S}' = [P'] [L'] [M] [L] [P] \vec{S} \quad (2.2)$$

où $[P]$, $[P']$, $[L]$ et $[L']$ sont respectivement les matrices de Mueller des polariseurs et lames quart d'onde d'entrée et de sortie. Les expressions de ces matrices, référencées par rapport à la verticale, sont données par les équations ci-dessous :

$$[P] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Polariseur linéaire vertical} \quad (2.3)$$

$$[P'] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Polariseur linéaire horizontal} \quad (2.4)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & CS & -S \\ 0 & CS & S^2 & C \\ 0 & S & -C & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} C = \cos(2\theta) \\ S = \sin(2\theta) \end{array} \quad \text{Lame quart d'onde} \quad (2.5)$$

Les quantités mesurables sont énergétiques et l'intensité lumineuse de l'onde arrivant sur le détecteur est entièrement contenue dans le terme S'_0 (du vecteur de Stokes de sortie \vec{S}'). Dans le cas du polarimètre, en développant l'équation (2.2) suivant S'_0 , il vient :

$$\begin{aligned} S'_0(\theta, \theta') = I(\theta, \theta') = & m_{00} + m_{01}C^2 + m_{02}CS + m_{03}S \\ & + (m_{10} + m_{11}C^2 + m_{12}CS + m_{13}S)(-C^2) \\ & + (m_{21} + m_{21}C^2 + m_{22}CS + m_{23}S)(-C'S') \\ & + (m_{30} + m_{31}C^2 + m_{32}CS + m_{33}S)(S') \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec

$$\begin{array}{ll} C = \cos(2\theta) & S = \sin(2\theta) \\ C' = \cos(2\theta') & S' = \sin(2\theta') \end{array}$$

Tous les éléments m_{ij} de la matrice à déterminer apparaissent dans l'expression de l'intensité détectée. Ainsi, seize combinaisons angulaires (θ, θ') conduisent à un système de seize équations à seize inconnues qu'il convient de résoudre pour obtenir les éléments de la matrice de Mueller. On obtient alors le système matriciel suivant :

$$[I] = [A][m] \quad (2.7)$$

où

$$[I] = [I_0 \dots I_{15}]^T \quad (2.8)$$

$$[m] = [m_{00} \dots m_{33}]^T \quad (2.9)$$

et la matrice $[A]$ contient des termes ne dépendant uniquement que des angles (θ, θ') .

On obtient les m_{ij} par :

$$[m] = [A]^{-1}[I] \quad (2.10)$$

En choisissant seize combinaisons (θ, θ') de sorte que la matrice $[A]$ ne soit pas singulière (donc inversible), les m_{ij} s'obtiennent immédiatement.

En réalité, l'utilisation d'un système surdéterminé (nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues) nous permettra de réduire les bruits aléatoires et de pouvoir estimer leur influence [10]. Ainsi, en choisissant d'effectuer soixante quatre mesures d'intensité, on obtient le système matriciel suivant :

$$[I] = [B][m] \quad (2.11)$$

où

$$[I] = [I_0 \dots I_{63}]^T \quad (2.12)$$

$$[B] \quad \text{matrice de dimension } 64 \times 16$$

L'inversion de ce système n'est pas immédiate du fait que la matrice $[B]$ n'est pas carrée. Les éléments de la matrice de Mueller s'obtiennent alors par :

$$[m] = ([B]^T [B])^{-1} [B]^T [I] \quad (2.13)$$

Les positions angulaires des lames d'entrée et de sortie sont choisies multiples de $22,5^\circ$. Ainsi, l'état de polarisation de l'onde incidente sur le milieu décrit des états particuliers conformément au tableau 2.1.

[10] J. P. NOUGIER, "Méthode de calcul numérique", Edition Masson, 41-44 (1981).

Position de la lame d'entrée θ	Etat de polarisation d'entrée
0°	rectiligne verticale
22,5°	elliptique gauche
45°	circulaire gauche
67,5°	elliptique gauche
90°	rectiligne verticale
112,5°	elliptique droite
135°	circulaire droite
157,5°	elliptique droite

Tableau 2.1 : Etats de polarisation d'entrée en fonction de θ

2.4 Montage expérimental

Le dispositif expérimental dont nous allons faire la description est présenté figure 2.4. Il comprends un bras fixe, avant l'échantillon et un bras mobile comprenant le système d'analyse en polarisation, le porte échantillon, et enfin, la source avec le système de mise en forme du faisceau.

Décrivons en détail ces différentes composantes :

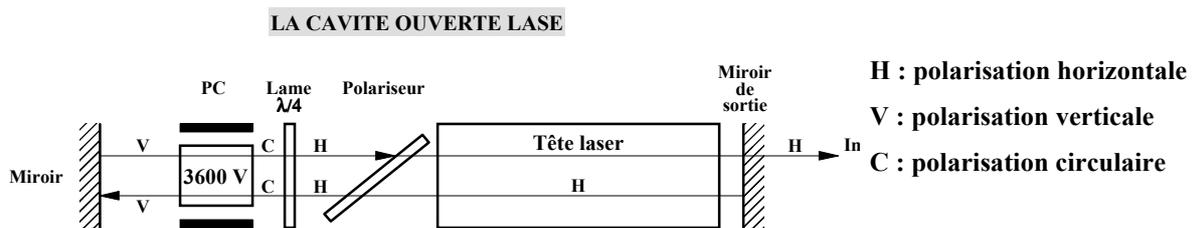
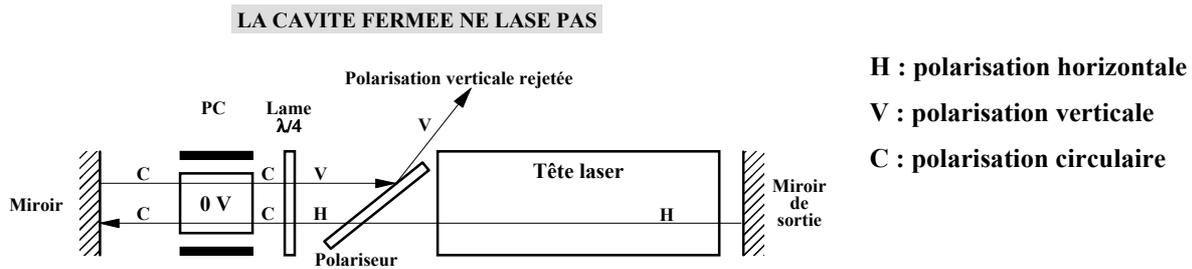
2.4.1 La source utilisée : un oscillateur paramétrique optique

La source dont nous disposons est constituée de deux étages : un laser Nd :YAG triplé (faisceau "pompe") et un étage OPO (Oscillateur Paramétrique Optique).

a) Le laser Nd : YAG (Powerlite 9001 de la société Continuum)

Un barreau de Nd :YAG de 6 mm de diamètre est pompé par des lampes flashes à une fréquence de 10 Hz. La durée de fluorescence du barreau de Nd :YAG est de quelques centaines de microsecondes comme la décharge des lampes flash.

Un système de « Q-switch » actif permet de « fabriquer » des impulsions de l'ordre de 10 ns. Il associe une cellule de Pockels, une lame quart d'onde et un polariseur. C'est l'effet Pockels longitudinal qui rend le cristal de KD^*P quart d'onde à $1,06 \mu\text{m}$ quand on lui applique une tension de 3600V. Sinon, quand il n'est soumis à aucune tension, la polarisation de l'onde qui le traverse reste inchangée. Les figures 2.2 et 2.3 rappellent le principe de fonctionnement du « Q-switch » actif.



Lorsqu'aucune tension n'est appliquée à la cellule de Pockels (figure 2.2) le faisceau, polarisé horizontalement, traverse le polariseur puis une lame quart d'onde le rend circulaire. La cellule de Pockels n'étant soumise à aucune tension, elle ne modifie pas la polarisation du faisceau. L'onde circulaire, réfléchiée sur le miroir de fond de la cavité retransverse la cellule puis la lame quart d'onde. Sa polarisation devient alors verticale. Ce faisceau vertical est rejeté par le polariseur horizontal et il ne peut donc pas y avoir d'oscillation dans la cavité.

Lorsque la cellule de Pockels est soumise à une tension de 3600 V (figure 2.3), elle transforme la polarisation du faisceau circulaire en une polarisation verticale. En retransversant la cellule active, le faisceau ressort circulaire et il devient horizontal après la lame quart d'onde. Il peut alors traverser le polariseur et l'oscillation dans la cavité est possible.

On a donc, en sortie de la cavité laser, un faisceau à 1064 nm , de 6 à 8 ns de durée à une fréquence de 10 Hz.

Le faisceau est ensuite amplifié par simple passage dans deux barreaux de Nd :YAG, de 9 mm de diamètre, pompés par flash.

Dans un cristal de KD^*P , il y a génération du second harmonique à 532 nm. Puis, en mélangeant le faisceau à 1064 nm avec celui à 532 nm, on génère le troisième harmonique à 355 nm dans un deuxième cristal de KDP par un processus de somme de fréquences.

Finalement, on récupère en sortie un faisceau à 355 nm avec une énergie de 350 mJ. Les impulsions de 6 ns sont cadencées à 10 Hz. Son profil spatial est presque gaussien de diamètre entre 6 et 8 mm.

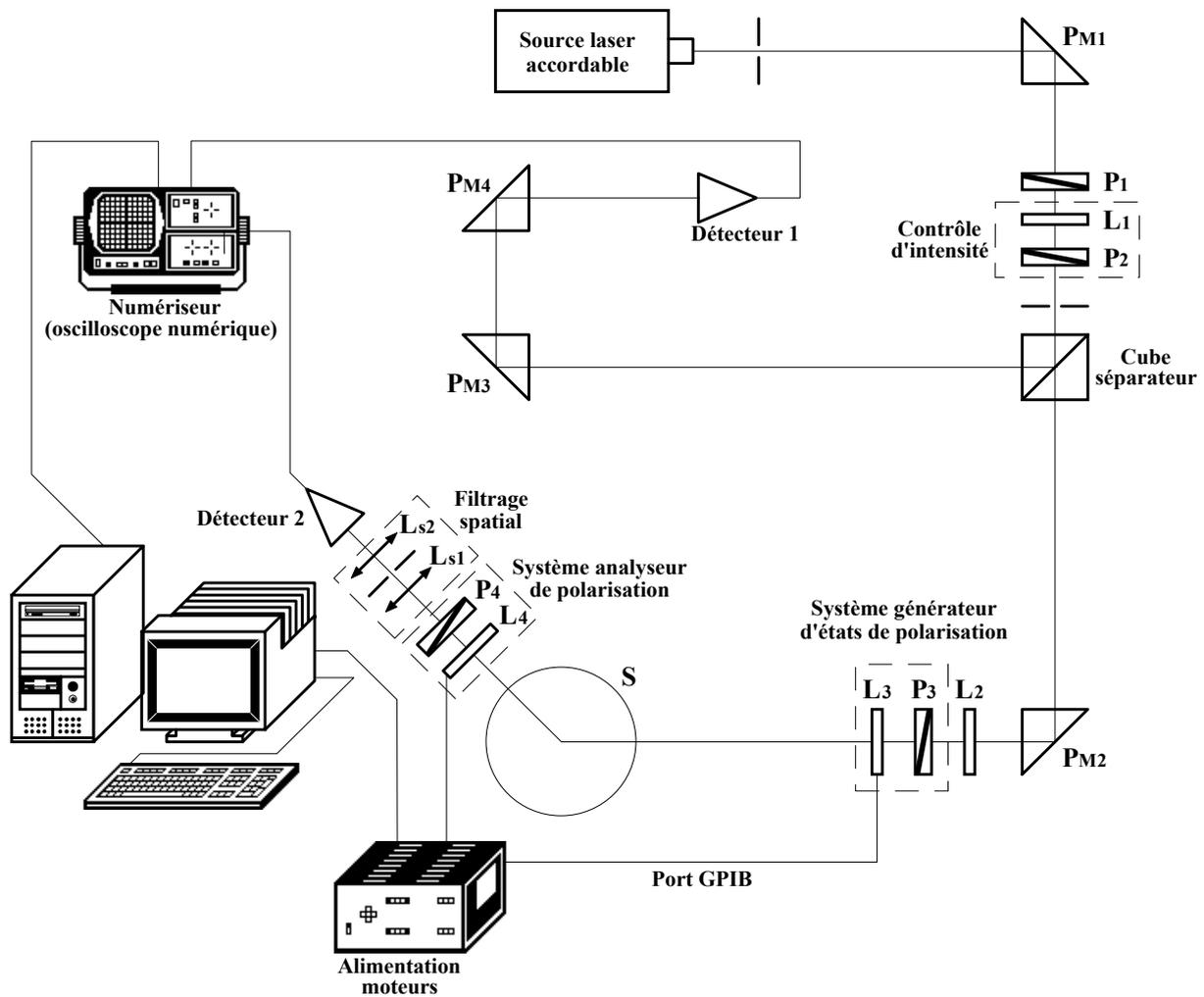
Ces impulsions servent à pomper un OPO grâce auquel nous disposons d'une grande gamme de longueurs d'onde.

b) L'Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) (Sunlite EX OPO Continuum)

L'Oscillateur Paramétrique Optique (OPO) dont nous disposons génère des radiations allant du visible au proche infrarouge (445 nm à 1750 nm) à partir du faisceau "pompe". Il est formé de deux étages : un étage oscillateur qui fournit un faisceau accordable, suivi d'un étage amplificateur qui permet d'accroître l'énergie de ce faisceau et de fournir un faisceau « idler ». Un étage doubleur permet ensuite d'étendre le domaine spectral de 222,5 nm à 1750 nm. Le fonctionnement de chaque étage de la source est expliqué en détails dans l'annexe 2.1.

2.4.2 La mise en forme du faisceau

Les faisceaux aux différentes couleurs résultent de conditions d'accord de phase différentes dans les cristaux non linéaires et n'ont pas forcément le même profil transverse. De plus, le pointé du faisceau laser est optimisé longueur d'onde par longueur d'onde, mais il peut subsister des décalages légers entre les faisceaux aux diverses longueurs d'onde. Les figures 2.5 et 2.6 contiennent chacune les images correspondant aux tirs laser à 470 et 550 nm respectivement.



P_1, P_2, P_3 : Polariseurs verticaux L_1, L_2 : Lames demi onde quasi achromatiques
 P_4 : Polariseur horizontal L_3, L_4 : Lames quart d'onde quasi achromatiques
 L_{s1}, L_{s2} : Lentilles achromatiques (focale 10 mm) en option S : échantillon diffusant
 $P_{m1}, P_{m2}, P_{m3}, P_{m4}$: Prismes de renvoi Détecteurs : Photodiodes

Figure 2.4 : Dispositif expérimental

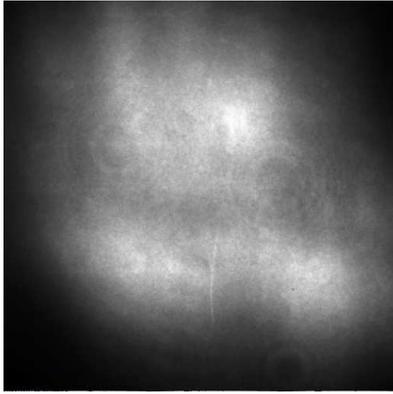


Figure 2.5 : Répartition d'intensité dans le faisceau laser à 470 nm

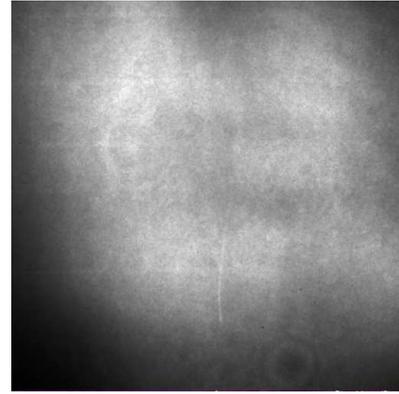


Figure 2.6 : Répartition d'intensité dans le faisceau laser à 550 nm

Les impulsions générées par le laser sont donc instables à la fois temporellement, mais aussi spatialement. Les instabilités temporelles pourront être corrigées à l'aide d'une voie référence. Les instabilités spatiales résultent, quant à elles, de modes parasites générés dans l'OPO et qui viennent se superposer au signal en se décalant spatialement en raison de la présence du prisme de sortie. Il est difficile de s'affranchir d'un tel problème et seule la présence d'un filtrage spatial réalisé dans une enceinte à vide permettrait de réduire ces instabilités. Ces dernières ont malheureusement des conséquences sur le plan temporel car le faisceau référence et le faisceau signal n'empruntant pas le même chemin optique, la contribution des modes parasites ne sera pas la même au niveau des deux détecteurs. Il en résulte une différence dans la forme temporelle du faisceau et ceci s'accompagne bien sûr d'une mauvaise correction des instabilités. Néanmoins, comme nous le verrons plus loin, la forme temporelle du signal et celle du signal de référence sont suffisamment similaires pour que nous puissions réaliser une correction tout à fait appréciable. Il convient cependant de ne pas fermer de trop les obturateurs présents sur les deux voies afin d'obtenir autant que possible une contribution de ces modes parasites équivalente sur les détecteurs.

Le deuxième souci majeur lors de l'utilisation d'une telle source est l'intensité du faisceau qui n'est pas la même d'une longueur d'onde à l'autre. Le pouvoir réfléchissant du cube séparateur (qui permet de générer deux faisceaux) varie également d'une longueur d'onde à l'autre. Il est donc indispensable de régler l'intensité du faisceau en sortie de laser afin de ne pas saturer l'un des détecteurs (non linéarité du signal électronique par rapport au signal optique). La courbe 2.7 nous donne la réponse en linéarité des photodiodes utilisées.

L'obtention d'une intensité lumineuse variant linéairement est réalisée en utilisant la loi de Malus [11].

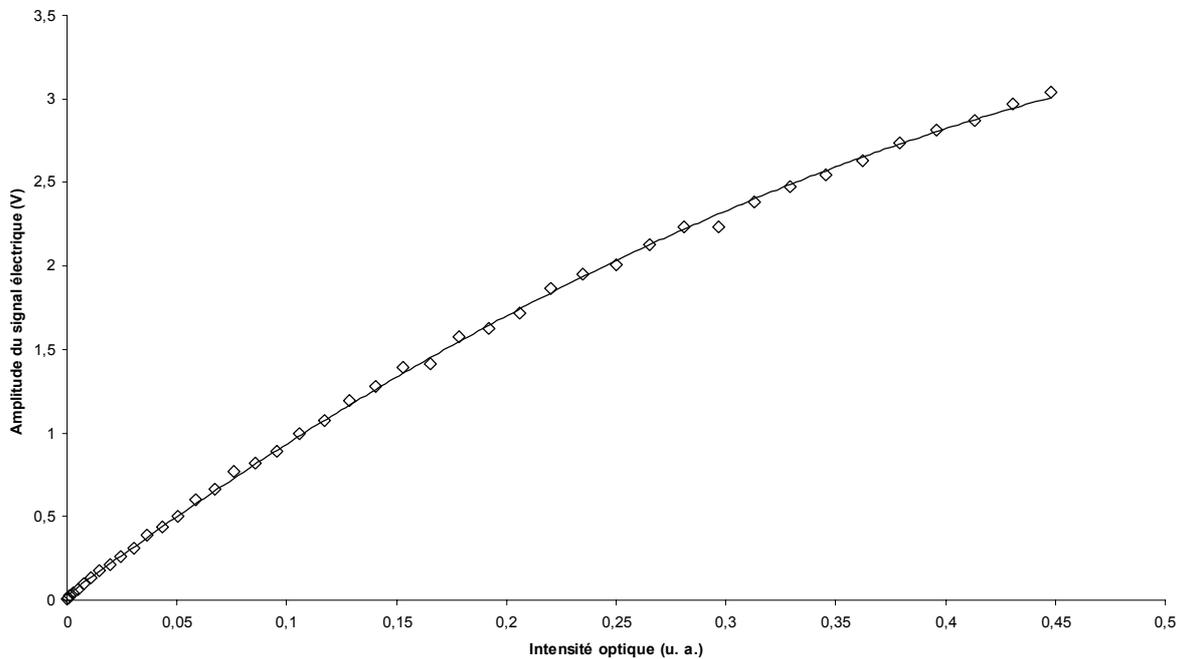


Figure 2.7 : Réponse en linéarité du détecteur

Pour des signaux électriques dont l'amplitude dépasse 1 volt, la réponse de la photodiode n'est plus linéaire. Dans ce cas de figure, nous diminuerons l'intensité en faisant tourner une lame demi-onde L_1 devant un polariseur P_2 . La polarisation du faisceau laser en sortie d'OPO n'étant pas parfaitement rectiligne, l'introduction de cette lame demi onde peut induire des bruits supplémentaires sur les intensités [12]. Le fait de placer le polariseur P_1 (orienté verticalement) à la sortie de la source permet d'éliminer ce type de bruit.

2.4.3 Génération et analyse d'états de polarisation

a) Les lames quart d'onde

Comme nous l'avons vu précédemment la génération et l'analyse des états de polarisation se fait en associant un polariseur à une lame quart d'onde. Ces lames, tout comme

[11] S. HUARD, "Polarisation de la lumière", Edition Masson, page 93 (1994).

[12] B. H. KOLNER, "Intensity noise enhancement in the half wave/polarizer attenuator", Opt. Letters, vol. 16, 784-786 (1991).

la lame L_1 , doivent à la fois être achromatiques et supporter des flux intenses. Les lames utilisées sont des lames en quartz-MgF₂ d'ordre zéro quasi achromatique (Fichou). Une lame quasi achromatique peut en effet être réalisée à partir de deux matériaux biréfringents si la différence entre leur biréfringence (différence entre l'indice ordinaire et extraordinaire) ne varie que très faiblement avec la longueur d'onde [13]. C'est le cas du Quartz et du MgF₂ dans la gamme spectrale 400-700 nm [14]. Il est donc possible d'obtenir une lame quart d'onde quasi achromatique en associant une lame de quartz avec une lame de MgF₂, par contact optique, et en croisant leurs axes optiques. Si la biréfringence des deux cristaux était de signe opposé, il faudrait, par contre, aligner leurs axes optiques. En effet, si on souhaite rendre quart d'onde une lame d'ordre zéro aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 , il suffit de choisir des épaisseurs de Quartz, d_q , et de MgF₂, d_m , en résolvant le système d'équations suivant :

$$\frac{\lambda_1}{4} = d_q \Delta n_q(\lambda_1) - d_m \Delta n_m(\lambda_1) \quad (2.14a)$$

$$\frac{\lambda_2}{4} = d_q \Delta n_q(\lambda_2) - d_m \Delta n_m(\lambda_2) \quad (2.14b)$$

où $\Delta n_q(\lambda)$ et $\Delta n_m(\lambda)$ représente la biréfringence du quartz et du MgF₂ à la longueur d'onde λ , respectivement.

La lame sera quart d'onde aux autres longueurs d'onde si la différence d'épaisseur optique entre les deux matériaux reste constante sur toute la gamme spectrale étudiée. En réalité, il est difficile de trouver de tels matériaux et nous sommes obligés de nous contenter de matériaux dont la biréfringence varie de façon quasi équivalente sur la gamme 400-700 nm comme le Quartz et le MgF₂ (voir figure 2.8, construite à partir des résultats obtenus par BECKERS [15]), d'où le terme de lame quasi achromatique. Le déphasage sera donc de 90° pour deux longueurs d'onde de la gamme spectrale et , d'après le constructeur, ne s'écartera de cette valeur que de 3 % pour les autres longueurs d'onde. Nous avons, en guise d'illustration, calculé le déphasage induit par les lames quart d'onde sur la gamme spectrale 400-700 nm, d'après les épaisseurs fournies par le constructeur (figure 2.9).

[13] **A. M. TITLE**, "Improvement of birefringent filters. 2 : Achromatic waveplates", Appl Opt, vol. 14, 229-237 (1975).

[14] **J. M. BENNET**, "Handbook of optics", Edition Mc Graw-Hill, New York (1995).

[15] **J. M. BECKERS**, "Achromatic linear retarders", Appl. Opt., vol. 10, 973-975 (1971).

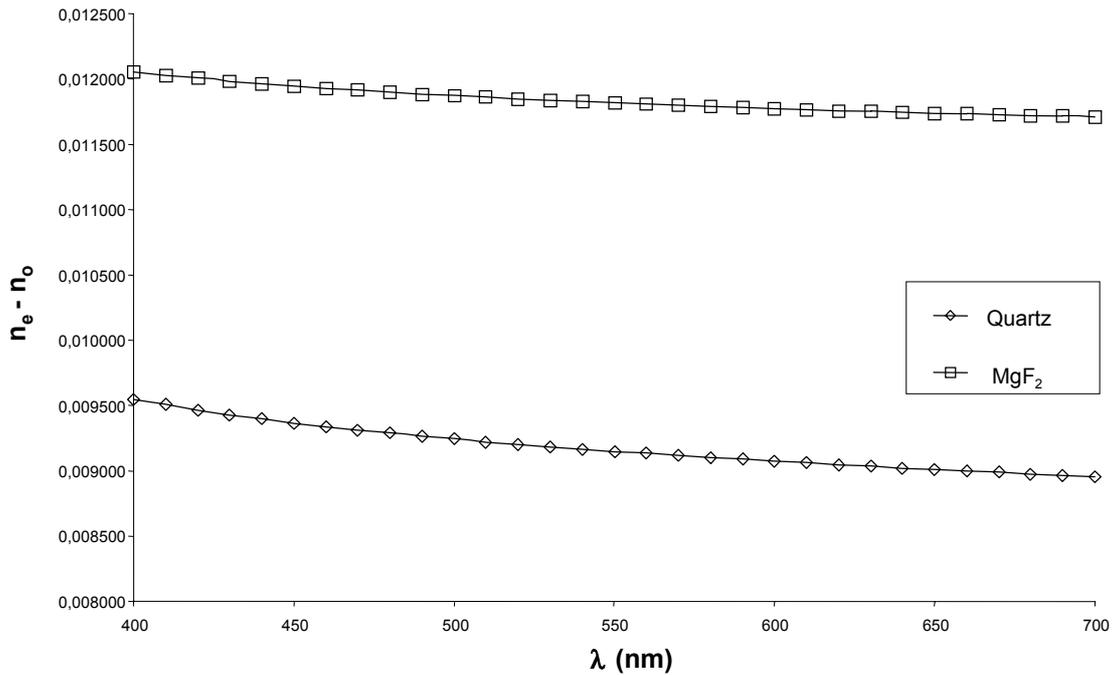


Figure 2.8 : Biréfringence du Quart et du MgF₂ sur la gamme spectrale 400-700 nm

Il existe bien évidemment d'autres matériaux qui répondent parfaitement à ces exigences et le meilleur choix aurait été d'associer deux cristaux, l'un négatif et l'autre positif comme le Saphir (cristal négatif) et le MgF₂ (cristal positif) [16]. Malheureusement, les indices de réfraction de ces deux matériaux diffèrent considérablement si bien que la lumière incidente serait polarisée par la réflexion à l'interface. Il est également possible d'obtenir des lames quasi achromatiques en associant des cristaux de même nature orientés d'un angle particulier l'un par rapport à l'autre [17, 18]. Des lames plus performantes peuvent enfin être obtenues en utilisant plus de deux matériaux [19]. Ces dernières ne sont malheureusement pas encore disponibles sur le marché.

- [16] V. CHANDRASEKHARAN, H. DAMANY, "Birefringence of sapphire, magnesium fluoride, and Quartz in the vacuum ultraviolet, and retardation plates", *Appl. Opt.*, vol. 7, 939-941 (1968).
- [17] M. G. DESTRIAU, J. PROUTEAU, "Réalisation d'un quart d'onde quasi achromatique par juxtaposition de deux lames cristallines de même nature", *J. Phys. Radium*, vol.10, 53-55 (1949).
- [18] S. PANCHARATNAM, "Achromatic combinations of birefringent plates", *Proc. Indian Acad. Sci.*, vol. 41, 137-144 (1955).
- [19] P. HARIHARAN, "Broad-band superachromatic retarders", *Meas. Sci. Technol.*, vol. 9, 1978-1980 (1998).

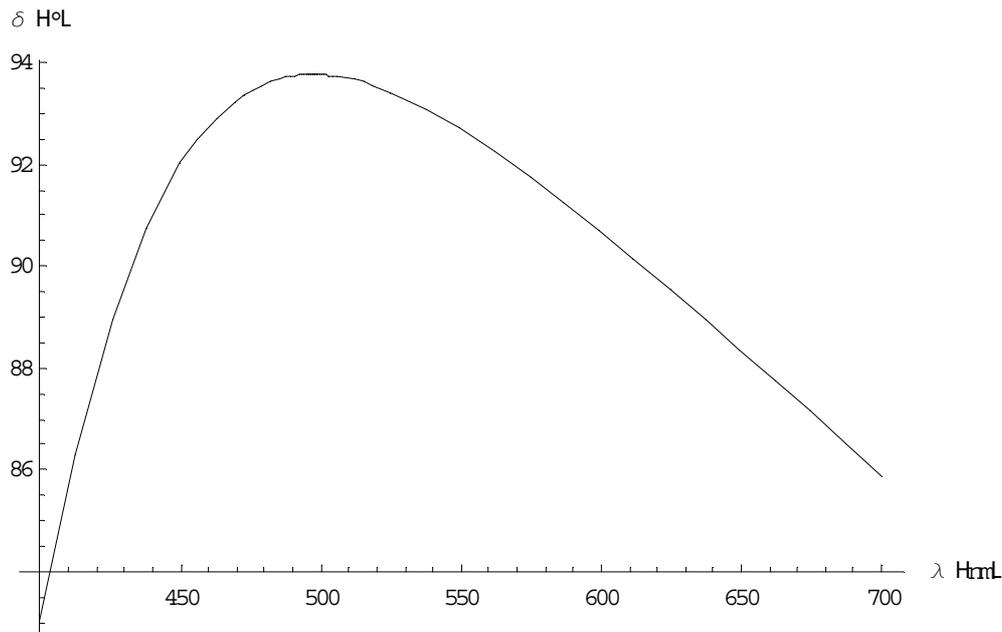


Figure 2.9 : Déphasage induit par les lames quart d'onde achromatiques d'après les données constructeur

Les deux lames quart d'onde sont entraînées en rotation par des moteurs pas à pas, précis au centième de degré, commandés par un contrôleur programmable. Celui-ci est relié à un micro-ordinateur au moyen d'une interface AT-GPIB. Chaque déplacement est commandé à distance à l'aide d'un programme réalisé sous LABVIEW 5.1. Les axes neutres des lames sont repérés grâce à la configuration polariseurs croisés. En faisant tourner une lame de phase entre deux polariseurs croisés, le minimum d'intensité est obtenu lorsque l'un des axes neutres de la lame est aligné avec le polariseur d'entrée, qui nous sert de référence. La première lame étant ainsi alignée avec la référence, il ne reste plus qu'à répéter l'opération avec la deuxième lame.

b) Les polariseurs

Les polariseurs sont des polariseurs de Glan-Foucault également entraînés en rotation par le contrôleur programmable. Ce sont des prismes à séparation d'air, comme le montre la figure 2.10, qui peuvent être utilisés avec de fortes puissances. L'état de polarisation éliminé par réflexion est alors absorbé par un revêtement adéquat. Nous allons à présent décrire la procédure de positionnement de ces deux polariseurs.

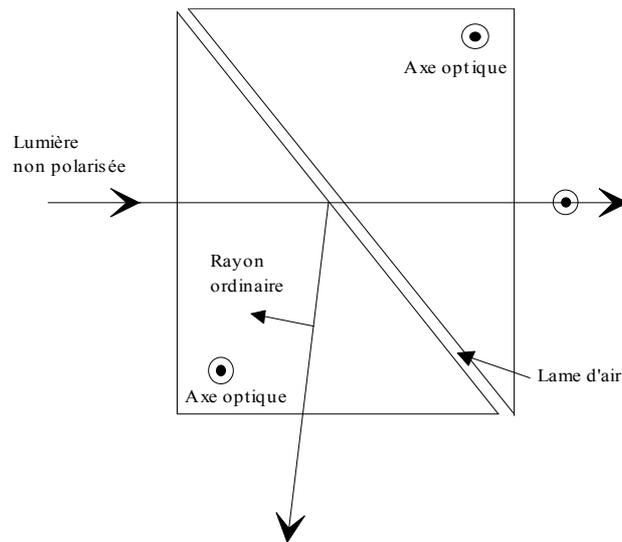


Figure 2.10 : Prisme de GLAN-FOUCAULT

La position précise du polariseur d'entrée est nécessaire lorsque l'on souhaite exploiter des mesures ellipsométriques afin de déterminer l'épaisseur et l'indice optique d'une couche cristalline, par exemple. La résolution du problème inverse, en effet, ne peut se faire que si l'on connaît précisément la polarisation de l'onde incidente sur l'échantillon [20].

Croisement du polariseur de sortie et du polariseur d'entrée

Nous avons, tout d'abord, réalisé le croisement des deux polariseurs visuellement afin d'obtenir la position du polariseur de sortie par rapport à celui d'entrée de façon assez grossière. La position précise du polariseur de sortie est ensuite obtenue en faisant tourner ce dernier, à l'aide du moteur pas à pas, autour de la position précédemment trouvée afin de déterminer la position exacte qui correspond à l'extinction à l'aide du détecteur placé derrière le polariseur de sortie. Si le balayage angulaire n'est pas trop important, la déviation du faisceau sur le détecteur, due aux faces non parallèles du polariseur de Glan, est suffisamment faible pour obtenir une courbe exploitable. En effet, cette dernière doit être une courbe en $\cos^2(\theta)$, θ étant l'angle de rotation du polariseur de sortie (loi de Malus), si bien qu'une approximation polynomiale d'ordre 2 suffit à décrire la courbe et nous permet de calculer la position exacte correspondant au croisement des deux polariseurs.

[20] A. YASSFY, "Ellipsométrie spectroscopique. Application à la caractérisation de Silicium poreux", Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal-Clermont 2 (1996).

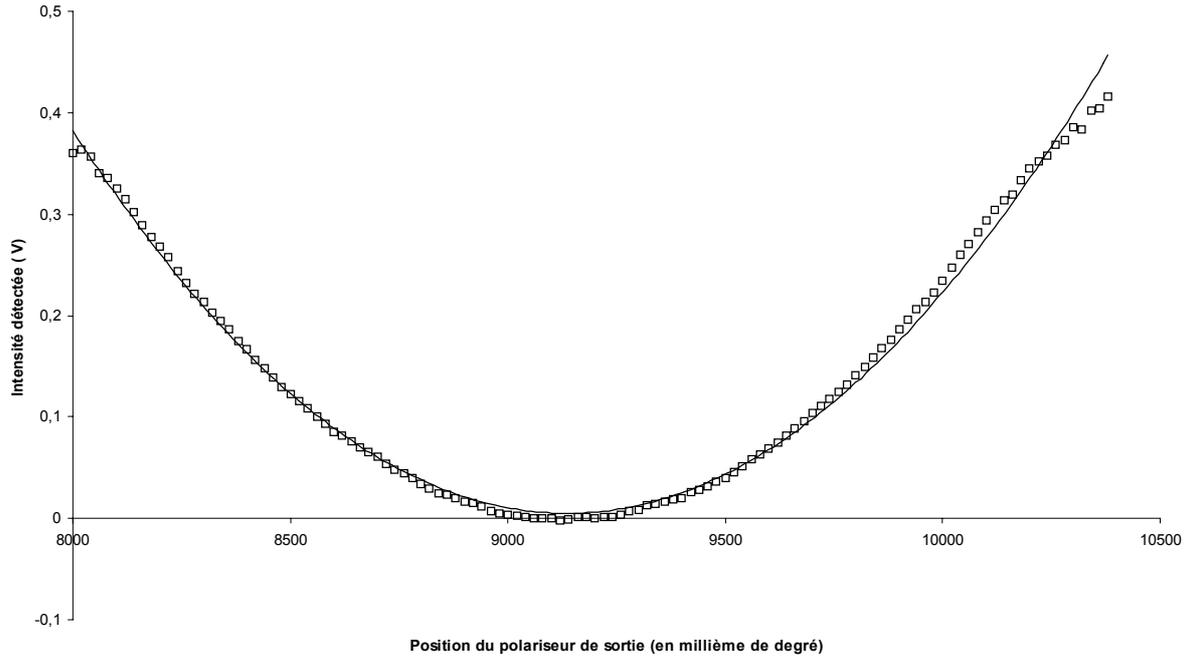


Figure 2.11 : Intensité détectée en fonction de la position angulaire du polariseur de sortie

Positionnement des deux polariseurs

Le positionnement des deux polariseurs est obtenu par réflexion sur une surface plane isotrope et absorbante (une lame de Silicium par exemple). La matrice de Jones d'un tel milieu est donnée par l'équation 2.15 :

$$[T_{Si}] = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

où r_p et r_s sont des nombres complexes qui désignent respectivement le coefficient de réflexion de la composante p et celui de la composante s de l'onde incidente sur l'échantillon et qui peuvent être mis sous la forme :

$$r_p = |r_p| e^{i\Delta_p} \quad (2.16a)$$

$$r_s = |r_s| e^{i\Delta_s} \quad (2.16b)$$

Le porte échantillon (voir annexe 2.2) nous permet de positionner avec précision l'échantillon de Silicium perpendiculairement à la table supportant le polarimètre. Il suffit pour cela d'observer la direction du faisceau réfléchi pour plusieurs positions de l'échantillon. Ce dernier étant ainsi positionné, il définit le plan d'incidence qui se trouve être la table supportant le polarimètre. Si le polariseur d'entrée n'est pas tout à fait bien orienté, l'onde lumineuse incidente sur la lame de Silicium possède alors une composante s et p. L'onde réfléchie par le Silicium est alors de polarisation elliptique et la présence du polariseur de sortie, croisé par rapport au polariseur d'entrée, ne permet pas de réaliser l'extinction. Seul un état de polarisation vertical p incident sur le Silicium se réfléchit en un état de polarisation rectiligne vertical, ce qui conduit alors à l'extinction grâce à la présence d'un polariseur croisé par rapport au premier polariseur. La procédure de positionnement des deux polariseurs est donc la suivante : on fait tourner les deux polariseurs croisés par rapport aux positions préalablement définies et conformément à la figure 2.12. La photodiode placée juste derrière le deuxième polariseur nous permet de repérer la position des polariseurs correspondant à l'extinction.

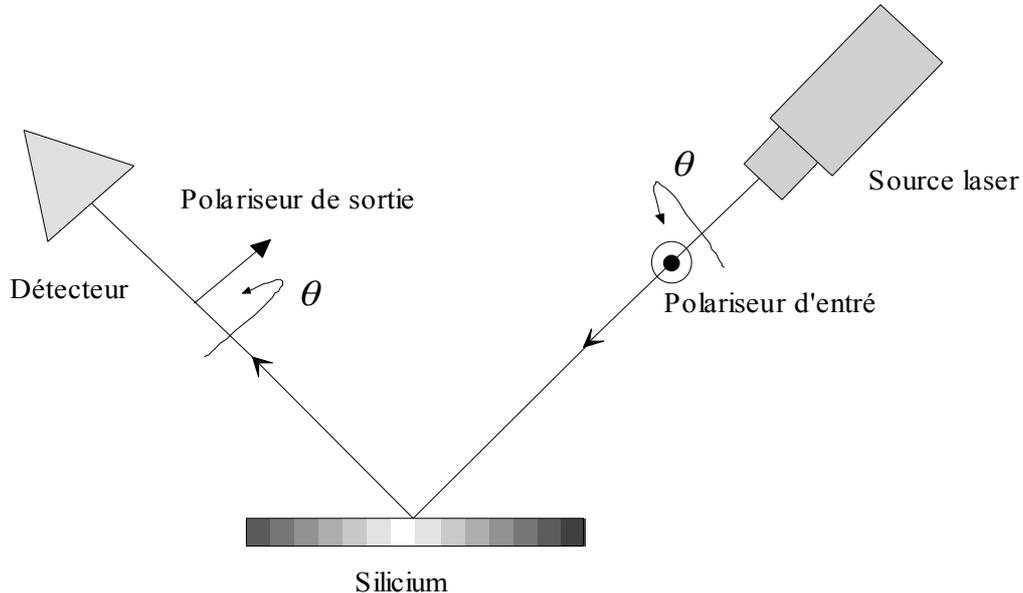


Figure 2.12 : Procédure de positionnement des polariseurs

Lames et polariseurs sont ainsi orientés initialement avec une précision d'un centième de degré.

2.4.4 Détection et numérisation

La détection est assurée par une photodiode (Hamamatsu S5973-01) de fréquence de coupure 1,5 GHz et dont la réponse spectrale se situe entre 320 et 1000 nm (le pic de sensibilité étant à 760 nm). La numérisation est assurée par un oscilloscope à phosphore numérique (tektronix, série TDS 3052) de fréquence d'échantillonnage maximum de 5 G éch./s et de bande passante 500 MHz. Le numériseur possède deux voies, il est donc possible de récupérer numériquement la forme du faisceau correspondant au signal et celui correspondant à la voie référence. Malheureusement nous ne disposons, alors, que d'une vingtaine de points d'acquisition pour décrire respectivement le signal et le signal référence. Le chemin optique de la voie référence est tel que les deux signaux atteignent quasiment au même moment les deux détecteurs. Il existe cependant un léger biais temporel du fait des fluctuations spatiales et des câbles de liaison détecteur-numériseur dont la longueur est difficilement ajustable compte tenu de la durée d'une impulsion (une dizaine de nanosecondes). En raison de ce biais, et compte tenu du peu de points de numérisation, les deux signaux ne sont donc pas numérisés identiquement et la correction des fluctuations de la source par la référence est, de ce fait, insuffisante.

La solution réside dans la possibilité offerte par l'oscilloscope de réaliser les mesures directement sur l'écran. L'entrelacement permet d'élargir temporellement la forme du signal à l'écran et donc d'obtenir plus de points pour décrire le signal. L'option de moyenne proposée par l'oscilloscope numérique (moyenne glissante) permet de réduire le bruit aléatoire et facilite la visualisation de détails. La réduction de la bande passante de l'oscilloscope de 500 à 150 MHz permet, en outre, de réduire l'influence de modes parasites dans le signal et donc d'obtenir deux signaux (référence et signal) quasi identiques (figures 2.13 et 2.14).

Le tableau 2.2 permet de tester la correction des fluctuations d'intensité pour différentes configurations du mode d'acquisition et de mesure. Pus la moyenne est réalisée sur un grand nombre de tirs et meilleure est la correction. Il faudra cependant introduire une temporisation en cas de moyenne importante car la moyenne glissante ne se fait pas instantanément. A titre d'exemple, en cas de moyenne sur 32 tirs, le signal sur l'écran de l'oscilloscope mettra environ 15 secondes pour passer d'un niveau haut à un niveau bas. Il est donc important de trouver un compromis pour ne pas trop ralentir la mesure des 64 intensités.

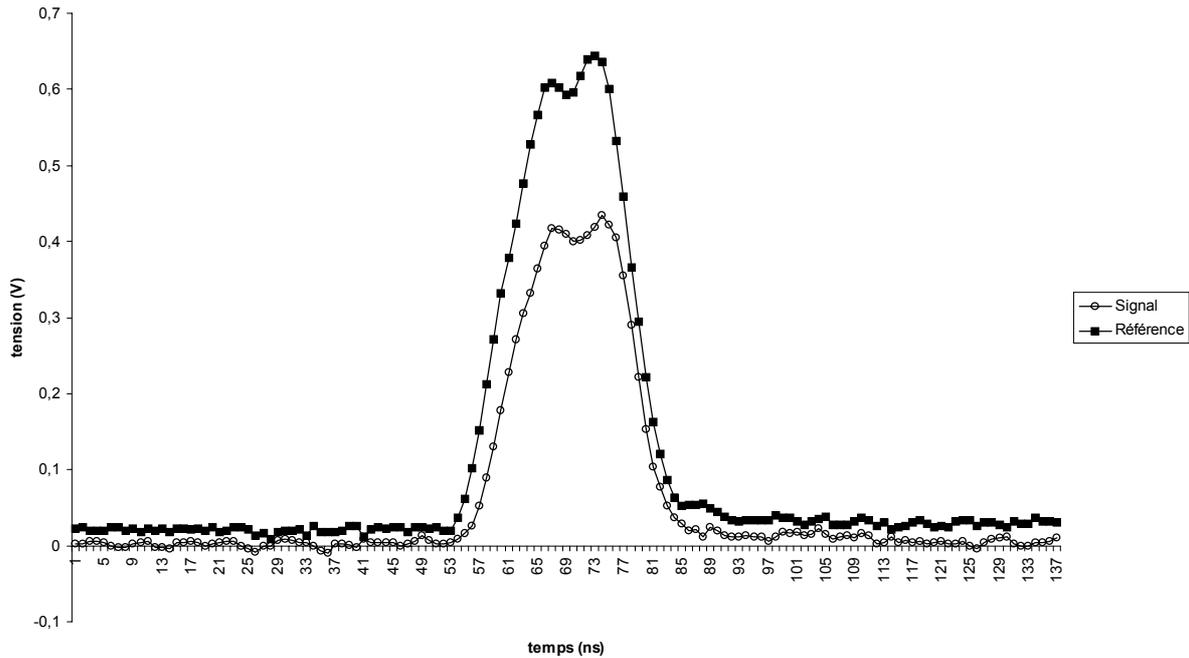


Figure 2.13 : Signaux reçus par la photodiode en fonction du temps et numérisés à l'aide de l'oscilloscope de bande passante 500 MHz

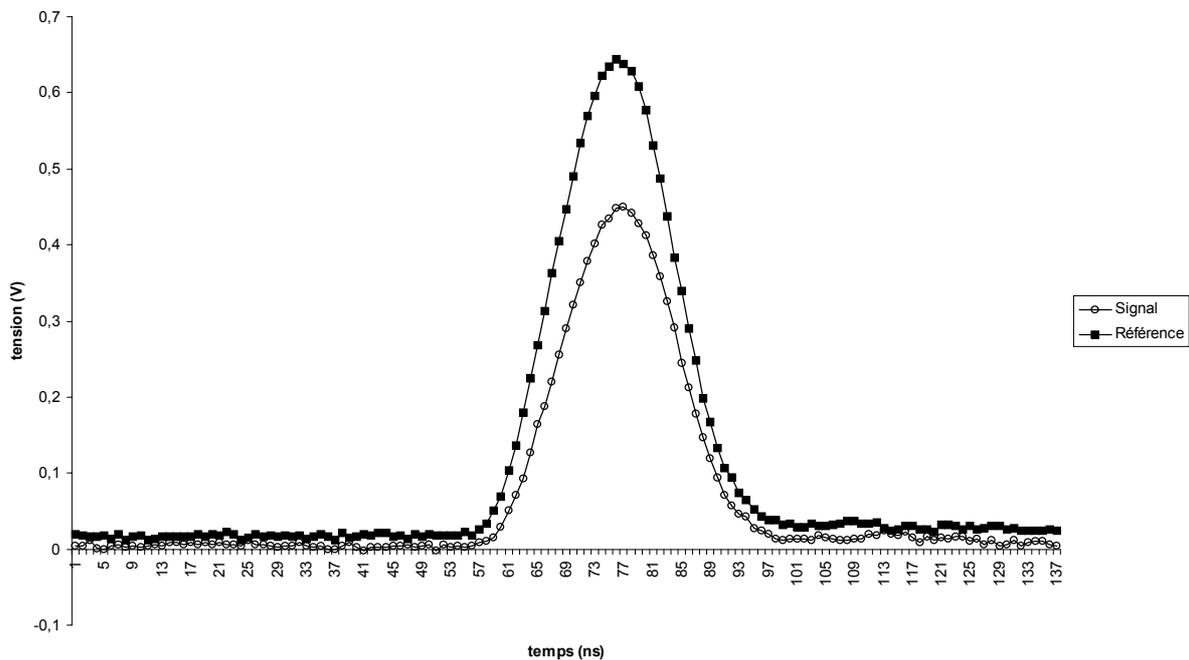


Figure 2.14 : Signaux reçus par la photodiode en fonction du temps et numérisés à l'aide du même oscilloscope dont la bande passante a été réduite à 150 MHz (le nombre de points de numérisations est identique car nous sommes en mode entrelacé)

	Moyenne sur 16 tirs, mesure de l'amplitude du signal, bande passante de 500 MHz	Moyenne sur 32 tirs, mesure de l'amplitude du signal, bande passante de 500 MHz	Moyenne sur 16 tirs, mesure de la valeur moyenne du signal, bande passante de 500 MHz	Moyenne sur 32 tirs, mesure de l'amplitude du signal, bande passante de 150 MHz
Ecart type sur la moyenne pour le signal	0,0184	0,0121	0,0132	0,0217
Ecart type sur la moyenne pour le signal corrigé	0,0093	0,0074	0,0196	0,0047

Tableau 2.2 : Ecart type divisé par la moyenne d'une population de 50 acquisitions réalisées de différentes manières

La mesure de la moyenne du signal n'est pas intéressante car on y incorpore plus de bruit électronique et la dynamique de valeurs obtenues est beaucoup plus faible que lors de la mesure de l'amplitude. Enfin, la réduction de la bande passante permet de réaliser de meilleures corrections d'intensité.

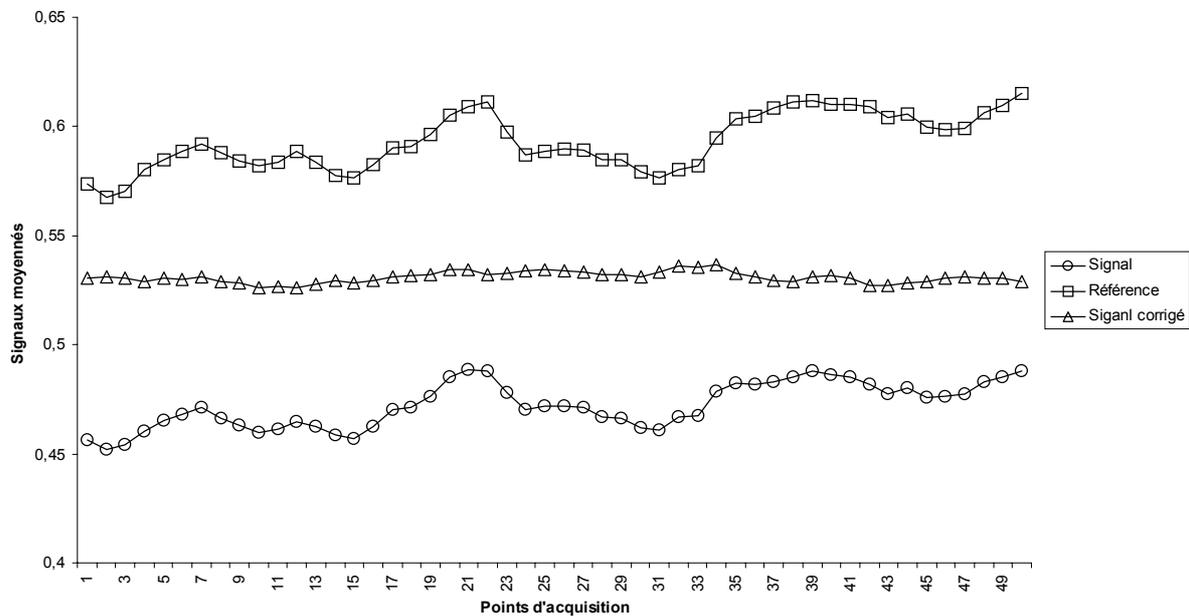


Figure 2.15 : Amplitude du signal moyenné (moyenne sur 32 tirs), du signal référence moyenné et du signal corrigé, à l'aide de la photodiode suivie du numériseur réglé sur une bande passante de 150 MHz

L'acquisition se fera donc sur 32 tirs et la mesure de l'amplitude des deux signaux est réalisée directement sur l'oscilloscope. Ces valeurs seront ensuite récupérées simultanément à l'aide du port GPIB et leur rapport sauvegardé dans un fichier en fin de manipulation.

La synchronisation se fait en externe sur l'alimentation du laser afin de pouvoir réaliser au même instant la mesure du bruit de fond sur les deux voies d'acquisition à l'aide de deux obturateurs. La moyenne de ces mesures réalisées en début et en fin de manipulation sera soustraite aux valeurs correspondant au signal et au signal référence.

Nous avons, pour valider la procédure d'acquisition du signal et sa mesure, calculé la moyenne et l'écart-type d'une population de 30 acquisitions du signal corrigé auquel nous avons soustrait le bruit de fond, pour plusieurs niveaux d'intensité du signal (le signal référence restant fixe, à hauteur de 800 mV). Le résultat apparaît sur la figure 2.16.

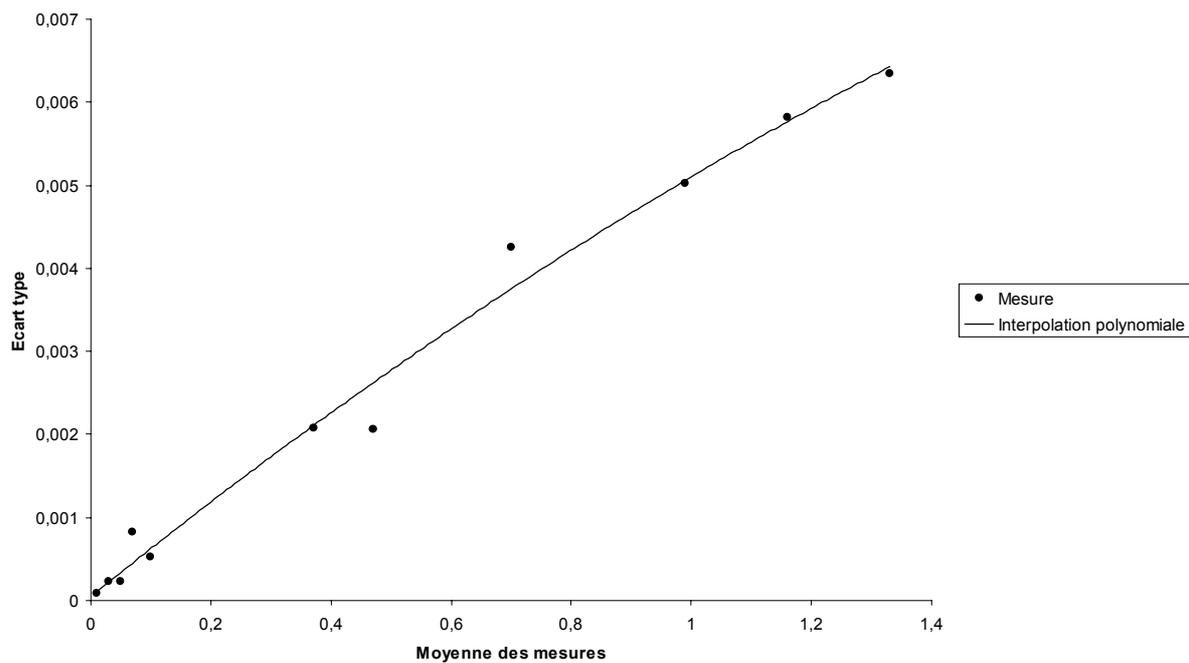
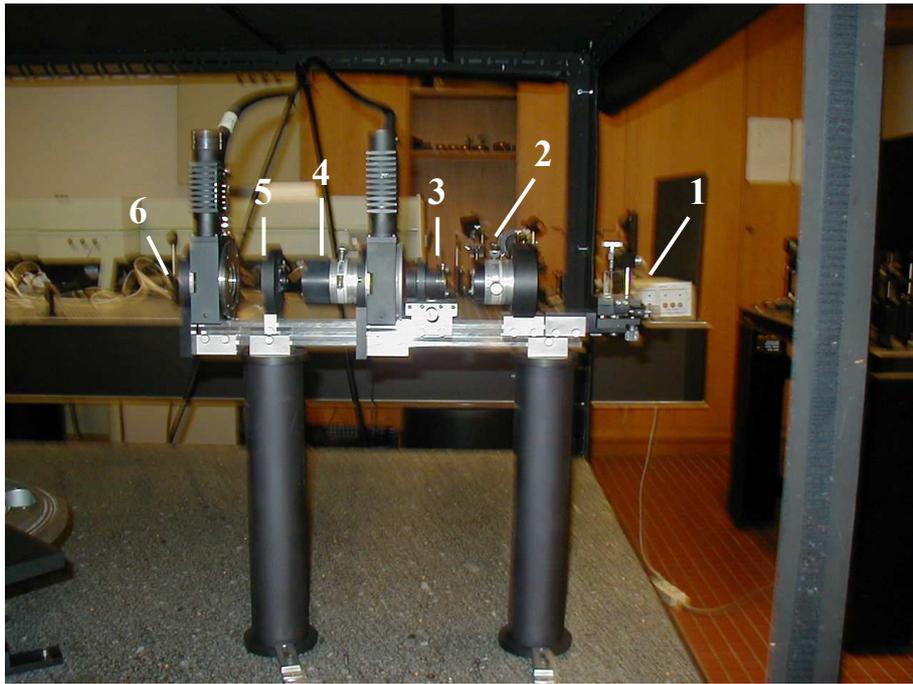


Figure 2.16 : Variation de l'écart-type en fonction de l'intensité mesurée

L'équation de cette courbe sera nécessaire pour évaluer la matrice d'écart-type $[S]$ présentée dans le premier chapitre et ce, afin d'estimer la validité de nos mesures.

Le banc de mesure complet apparaît sur les figures 2.17 à 2.20.



1 : prisme de renvoi

4 : polariseur

2 : lame demi-onde

6 : lame quart d'onde

3 et 5 : diaphragmes d'alignement

Figure 2.17 : Bras d'entrée



1 : porte échantillon

3 : diaphragme d'alignement

5 : polariseur

2 : obturateur

4 : lame quart d'onde

6 : détecteur

Figure 2.18 : Bras de sortie



- | | |
|-----------------------|--------------------|
| 1 : bras d'entrée | 3 : goniomètre |
| 2 : porte échantillon | 4 : bras de sortie |

Figure 2.19 : vue d'ensemble du polarimètre



- | | | |
|-------------------------------|--------------------------|---------------|
| 1 : polarimètre | 3 : alimentation moteurs | 5 : référence |
| 2 : mise en forme du faisceau | 4 : laser + OPO | |

Figure 2.20 : vue d'ensemble du montage

2.5 Conclusion

Nous avons présenté ici les procédures expérimentales permettant d'obtenir des matrices de Mueller où l'influence des bruits de mesure a été minimisée et estimée à l'aide d'une voie référence et d'une procédure d'acquisition judicieusement choisie. Les nombreux degrés de liberté offerts par le banc goniométrique et le porte échantillon, ainsi que la source impulsionnelle accordable en longueur d'onde, nous permettent, en outre, de réaliser un grand nombre de mesures polarimétriques sur tout type d'échantillons diffusants. La précision des résultat réside à présent dans la réduction des erreurs systématiques liées à la qualité intrinsèque des éléments optiques, que nous ne maîtrisons pas, mais qu'il est possible de corriger au moyen d'un étalonnage. L'estimation faite dans ce chapitre de l'écart-type sur les intensités nous permettra par la suite d'estimer l'écart-type sur les éléments de la matrice de Mueller et donc de valider notre méthode d'étalonnage.

Annexe 2.1 : Principe de fonctionnement de l'OPO (Oscillateur Paramétrique Optique)

Pour comprendre le fonctionnement de l'OPO, nous allons d'abord faire quelques rappels sur l'optique non linéaire et les principes physiques nécessaires pour la génération de longueurs d'onde.

a) Rappel d'optique non linéaire

Réponse linéaire

Lorsqu'une onde optique se propage dans un milieu transparent, son champ électrique excite le nuage électronique de chaque atome constituant la matière. Cette matière peut être modélisée par un ensemble de dipôles électriques. Sous l'effet de l'onde, chaque dipôle acquiert un moment dipolaire et, si l'excitation de l'onde est de faible amplitude, le moment dipolaire reste proportionnel au champ excitateur et les dipôles oscillent à la même fréquence que l'onde : la réponse du milieu est linéaire. Les dipôles sont, à leur tour, à l'origine d'un rayonnement électromagnétique. L'expression du champ électrique émergent du milieu est donc la somme du champ électrique incident, qui n'a pas interagit avec le milieu, et du champ électrique rayonné par les dipôles, tous les deux à la même fréquence.

Réponse non linéaire

Les lasers produisent des ondes dont l'éclairement est de plusieurs ordres de grandeur supérieur à celle d'une source classique. Dans ce cas, l'excursion des électrons autour de leur centre de rappel peut être facilement plus de cent fois plus grande que celle obtenue à faible éclairement. En conséquence, les atomes environnants commencent à jouer un rôle prépondérant : à chaque cycle d'oscillation, les électrons testent le potentiel répulsif présenté par les atomes voisins. C'est cet état qui permet à la structure du milieu d'influencer la fréquence de la lumière rayonnée par les électrons oscillants. Le mouvement des électrons n'est plus sinusoïdal, et le rayonnement des dipôles donne lieu à la génération d'harmoniques,

c'est-à-dire à des faisceaux dont les fréquences sont des multiples de la fréquence initiale (figure 2.21). C'est le domaine de l'optique non linéaire [21, 22, 23].

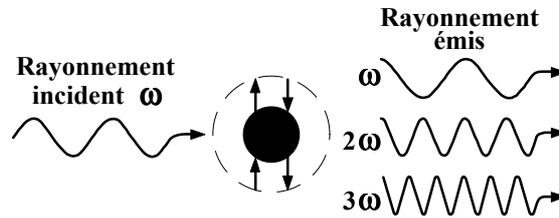


Figure 2.21 : Réponse non linéaire du milieu

Génération paramétrique

Une onde électromagnétique incidente composée de deux champs de fréquence ω_1 et ω_2 pourra donner naissance à une onde de fréquence somme ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) ou différence ($\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$) par effet non linéaire du second ordre.

Le processus de génération paramétrique peut être interprété comme l'inverse de la somme de fréquences. C'est un processus à trois photons au cours duquel un photon pompe donne spontanément deux photons moins énergétiques. Le terme spontanément signifie ici qu'aucune aide n'a été fournie au faisceau pompe pour générer les deux photons. C'est le bruit de photon (c'est-à-dire les photons présents dans le milieu, possédant la bonne fréquence et la bonne direction de propagation) qui sert de « germe » : le bruit joue ici le même rôle que l'émission spontanée dans le laser. En général, les deux photons produits n'ont pas la même énergie. Le photon le plus énergétique est appelé signal tandis que l'autre est le complémentaire ou encore l'idler en anglo-saxon (figure 2.22).

-
- [21] **A BOSCHERON, C. SAUTET, E. BERIOT**, "La conversion de fréquence pour les lasers de puissance", Revue scientifique et technique de la direction des applications militaires, n° 22, 31-42 (1999).
 [22] **Y. R. SHEN**, "The Principles of Nonlinear Optics", Wiley-Interscience, (1984).
 [23] **E. ROSENCHER, B. VINTER**, "Optoélectronique", Edition Masson, (1998).

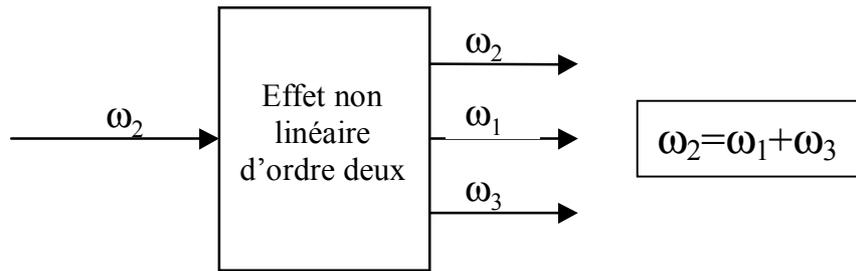


Figure 2.22 : Génération paramétrique

Amplification paramétrique

Dans le processus d'amplification paramétrique, un germe de signal est injecté simultanément avec un faisceau pompe dans le cristal, alors il y a amplification du signal et génération de l'idler (figure 2.23).

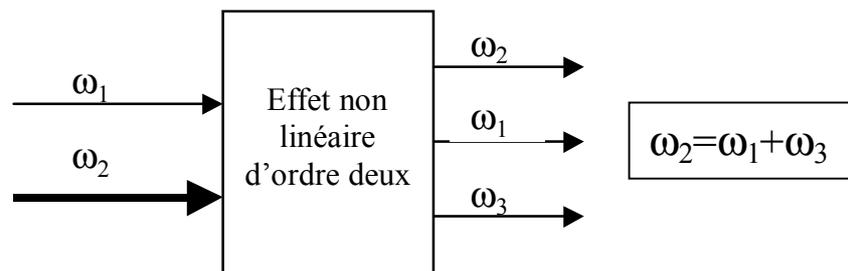


Figure 2.23 : Amplification paramétrique

Condition pour un transfert d'énergie avec une bonne efficacité

L'objectif principal est, bien sûr, de réaliser ces transferts de longueurs d'onde avec une bonne efficacité énergétique et il faut s'assurer que la propagation de l'onde créée se fait dans de bonnes conditions pour que la conversion se fasse avec un fort rendement. Par exemple, chaque ondelette à la fréquence harmonique est émise dans le sens de propagation de l'onde incidente et elle se propage à la vitesse de phase du milieu pour la fréquence 2ω :

$v_{\phi,2\omega} = \frac{c}{n_{2\omega}}$. L'onde fondamentale se propage, quant à elle, avec une vitesse de phase

différente : $v_{\phi,\omega} = \frac{c}{n_{\omega}}$. (C'est l'onde fondamentale qui définit la phase de chacun des

oscillateurs électroniques et, ainsi, la phase initiale des ondelettes émises à 2ω . L'onde résultante à 2ω est la somme de toutes les ondelettes déphasées provenant des oscillateurs présents dans la matière. Pour assurer la condition d'accord de phase telle que toutes les ondelettes s'additionnent en phase, il faut adapter les propriétés du milieu, de sorte que la vitesse de phase de l'onde fondamentale soit égale à celle de l'onde au deuxième harmonique. Dans ce cas, les ondelettes de tous les oscillateurs vont se renforcer les unes les autres, en s'additionnant de manière constructive, et conduiront à une conversion à fort rendement.

Réalisation de l'accord de phase dans les cristaux

L'accord de phase dans les cristaux est accompli en choisissant un matériau optique biréfringent. L'anisotropie est utilisée pour compenser la dispersion normale de l'indice de réfraction. Dans les cristaux uniaxes caractérisés par un axe privilégié, l'axe optique, l'un de ces indices est indépendant de la direction de propagation ; c'est l'indice ordinaire $N_o(\lambda)$. L'autre indice, l'indice extraordinaire, n_e , dépend de l'angle θ entre l'axe optique du cristal et la direction de propagation, et varie entre l'indice ordinaire $N_o(\lambda)$ pour $\theta = 0$ et l'indice principal extraordinaire $N_e(\lambda)$ pour $\theta = \pi/2$. A titre d'illustration, les courbes de la figure 2.24 permettent de chercher la position angulaire de l'accord de phase colinéaire en doublement de fréquence. On choisit l'angle θ d'accord de phase tel que : $n_e(\theta, \lambda_0/2) = N_o(\lambda_0)$.

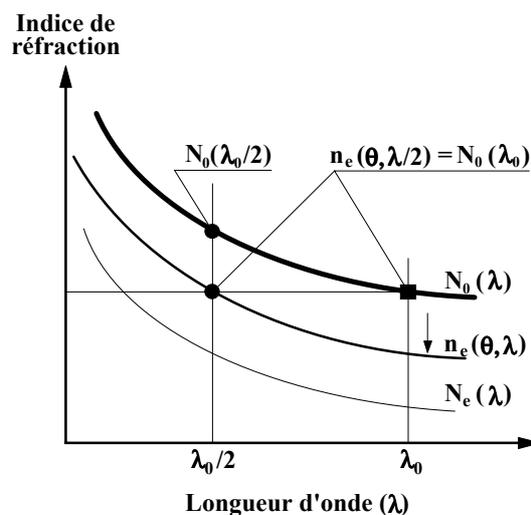


Figure 2.24 : Courbes d'indice ordinaire et extraordinaire pour le BBO
Accord de phase colinéaire de type I en doublement de fréquence

d'incidence et détermine les fréquences générées. Le domaine d'accordabilité du cristal est déterminé par ses caractéristiques d'absorption et le domaine angulaire pour lequel l'accord de phase est réalisable : le cristal de BBO utilisé permet de générer simultanément un faisceau signal de 445 à 710 nm et un faisceau complémentaire de 710 nm à 1750 nm. Pour un angle donné, on obtient un couple de longueurs d'onde comme le montre la figure 2.26.

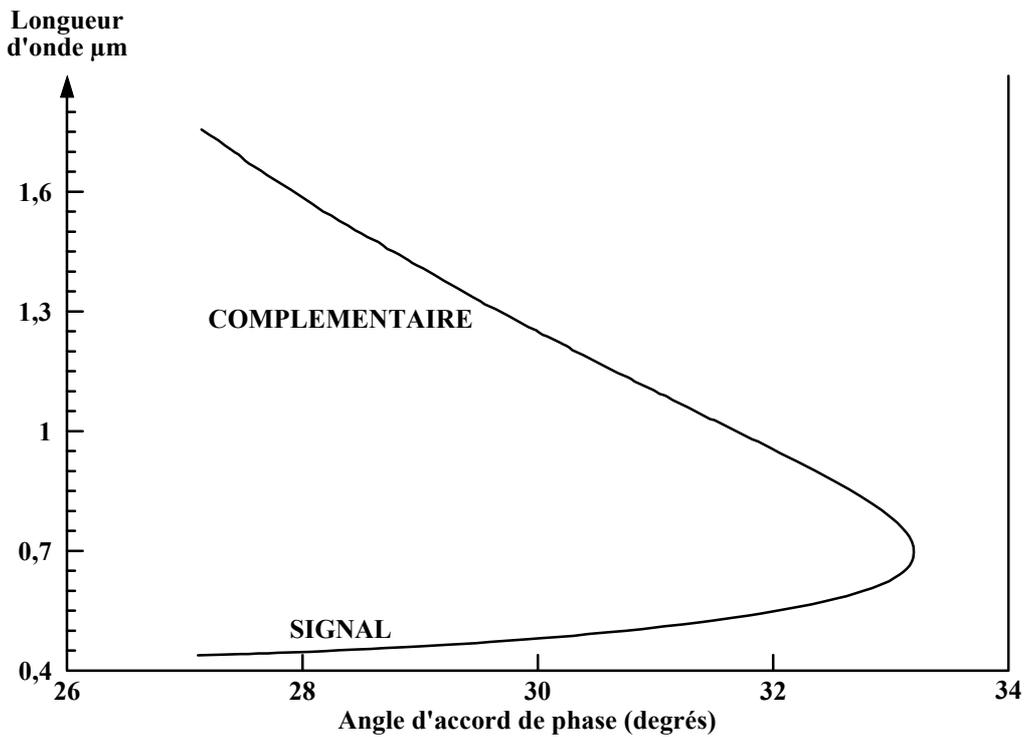


Figure 2.26 : Domaine d'accordabilité du cristal de BBO

Le signal diffracte sur un réseau puis frappe un miroir dont la position angulaire est asservie sur la longueur d'onde signal choisie. La diffraction au premier ordre du faisceau est renvoyée sur le réseau. Ainsi, le faisceau est réintroduit dans la cavité et il y a oscillations dans la cavité. Lorsque les pertes sont compensées par le gain dans la cavité, une partie du signal sort de la cavité par réflexion spéculaire, c'est-à-dire suivant l'ordre zéro de diffraction du réseau.

L'idler est, quant à lui, rejeté par le réseau. De plus, le pompage est non colinéaire dans le cristal de sorte que signal et idler soient spatialement séparés : l'idler est non colinéaire au signal si bien qu'il ne peut pas résonner en même temps que lui et, finalement, seul le signal sort de la cavité.

L'étage amplificateur

Avant d'entrer dans l'étage amplificateur, la deuxième partie du faisceau pompe suit un trajet pour que le pompage de l'amplificateur soit synchrone.

Le germe de signal sortant de l'étage oscillateur arrive dans les cristaux amplificateurs synchronisés et colinéaires avec le faisceau pompe à 355 nm. Il y a génération de l'idler par différence de fréquence en un simple passage : $\omega_i = \omega_p - \omega_s$. Comme le faisceau pompe est colinéaire avec le germe de signal, l'amplification est telle que les trois couleurs (pompe, signal et idler) sortent colinéaires de l'étage amplificateur. Des miroirs dichroïques peuvent d'ailleurs être utilisés pour les séparer.

Doublage de fréquence

Le doublage de fréquence est ensuite réalisé par un jeu de deux cristaux de BBO. Leurs rôles sont complémentaires ; l'un double par accord de phase angulaire pendant que l'autre compense la déviation angulaire et les rôles s'inversent à 550 nm. La figure 2.27 illustre les rôles des deux cristaux.

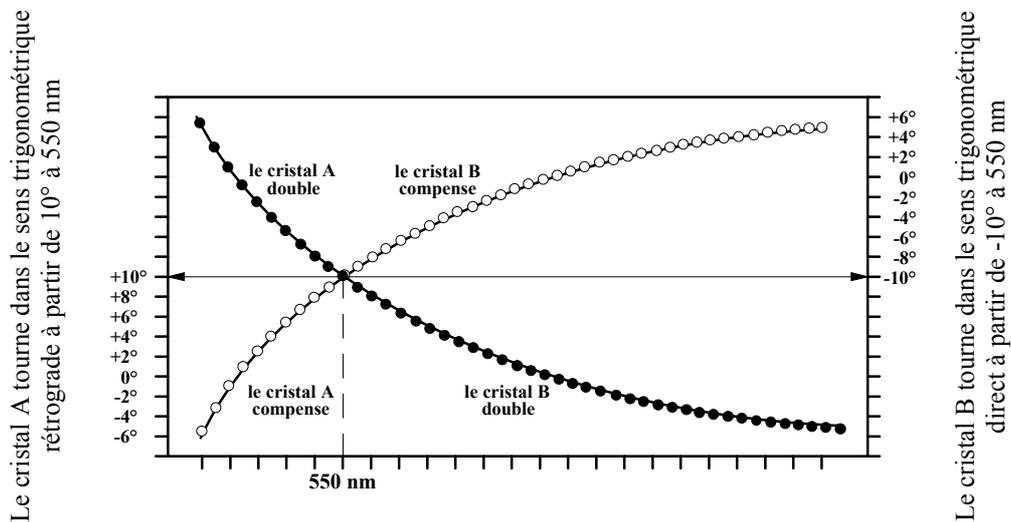


Figure 2.27 : Rôles des cristaux

Le prisme de sortie : un Pellin-Broca

En sortie de l'étage doubleur nous avons finalement quatre faisceaux : le signal, l'idler, le signal doublé et l'idler doublé.

Pour avoir accès aux longueurs d'onde individuelles, il faut séparer ces quatre faisceaux qui sortent colinéaires de l'étage doubleur. Le prisme de Pellin-Broca présente un minimum de déviation à 90° , indépendant de la longueur d'onde incidente et puisque toutes les longueurs d'onde sont colinéaires avant le prisme, on peut les sélectionner à 90° du faisceau incident, une à une, par simple rotation du prisme (figure 2.28).

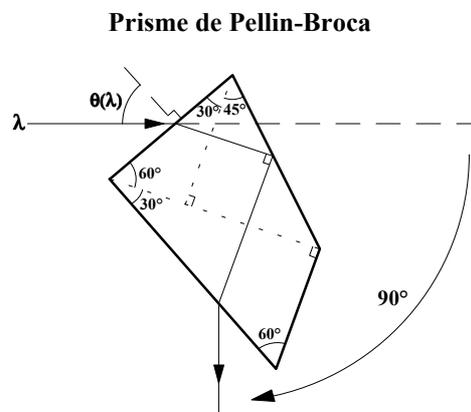


Figure 2.28 : Prisme de Pellin-Broca

Balayage en longueur d'onde

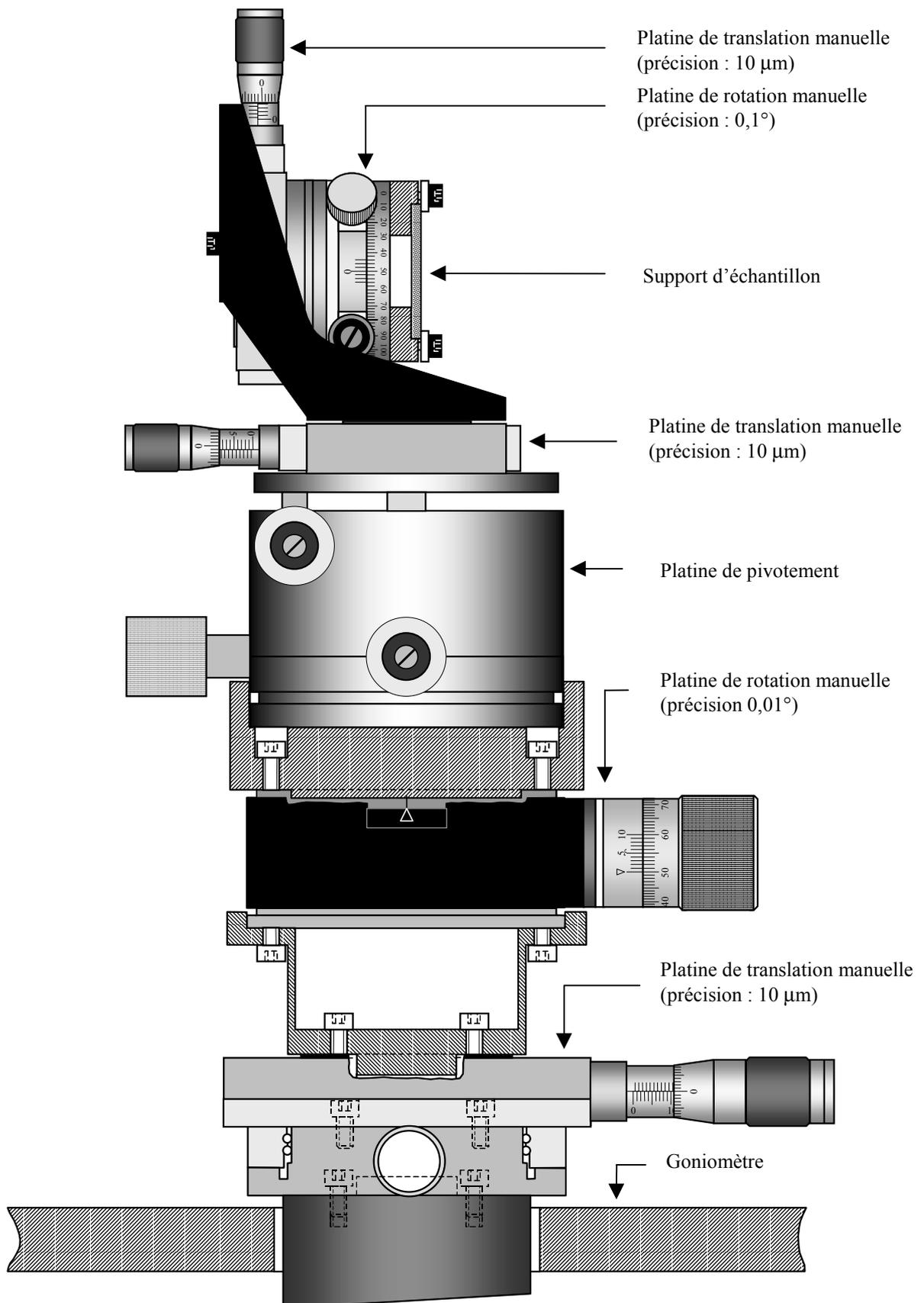
Les différents cristaux et le prisme de Pellin-Broca sont positionnés sur des moteurs dont la rotation est commandée par un logiciel.

Les positions de chaque cristal sont optimisées pour toutes les longueurs d'onde afin de réaliser l'accord de phase. De même, la position du prisme est calibrée pour que le pointé du faisceau soit quasiment fixe pendant le défilement des couleurs. Les positions de chaque moteur sont enregistrées dans des fichiers de calibration.

Pour accéder à une longueur d'onde, suivant le domaine spectral auquel elle correspond (signal, signal doublé, idler ou idler doublé), il faut choisir les fichiers de calibration qui optimisent les accords de phase pour les différents cristaux et l'angle à donner au prisme de sortie.

En sortie du laser, il faut finalement sélectionner un faisceau parmi les quatre présents pour trouver la longueur d'onde voulue : le signal, qui permet de balayer le domaine spectral de 445 à 710 nm, l'idler qui permet d'accéder aux longueurs d'onde entre 710 et 1750 nm ; le signal doublé donne accès aux longueurs d'onde entre 222,5 et 355 nm et enfin le doublage de l'idler permet d'atteindre les longueurs d'onde de 355 à 445 nm. Les impulsions ont une durée de 5 ns et sont cadencées à 10 Hz. Les énergies varient du millijoule à quelques dizaines de millijoules selon les longueurs d'onde.

Annexe 2.2 : Porte échantillon



Chapitre 3

Optimisation du processus de mesure

3.1 Introduction

Les erreurs de mesure sont essentiellement de deux types : les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires. Les erreurs aléatoires (ou bruit de mesure) proviennent essentiellement des fluctuations de la source et de la stabilité du détecteur. On ne peut avoir accès qu'à des grandeurs statistiques. Il est donc impossible de s'en affranchir totalement, nous pouvons cependant évaluer leur influence sur la qualité des mesures, ce qui nous permettra de valider le processus de mesure, et de les minimiser par le biais de méthodes adéquates comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent.

Parmi les erreurs systématiques, les plus fréquemment rencontrées sont liées à la qualité intrinsèque des éléments optiques et en particulier celle des lames biréfringentes utilisées pour coder et analyser les états de polarisation [1, 2, 3]. Dans cette catégorie d'erreurs viennent s'ajouter les défauts de positionnement des éléments optiques : mauvais alignement ou encore mauvais réglages angulaires des lames à retard ou des polariseurs.

-
- [1] **R. M. A. AZZAM, N. M. BASHARA**, "Analysis of systematic errors in rotating-analyser ellipsometers", *J. O. S. A.*, vol. 64, 1459-1469 (1974).
 - [2] **P. S. AUGÉ**, "Mueller matrix ellipsometry with imperfect compensators", *J. O. S. A.*, vol. 68, 1519-1528 (1978).
 - [3] **N. G. THEOFANOUS**, "Error analysis of circular polarizer-analyzer systems for phase retardation measurements", *J. O. S. A.*, vol. 4, 2191-2200 (1987).

3.2 Correction des erreurs systématiques

L'analyse et la détermination de l'ordre de grandeur, sur les m_{ij} , des bruits aléatoires reçus par le détecteur, sera l'objet du prochain chapitre, mais nous savons, par l'analyse de la reproductibilité des résultats expérimentaux qu'il est inférieur ou de l'ordre du pour cent. Il devient donc possible de compenser les imperfections introduites par les éléments retardateurs non idéaux [4, 5, 6].

La compensation de ces imperfections est réalisée à partir des éléments m_{ij} de la matrice du polarimètre à vide, *c. à d.* sans milieu à analyser, dont les valeurs dépendent directement de ces erreurs systématiques. D. H. GOLDSTEIN et R. A. CHIPMAN [7] ont montré que ces erreurs étaient loin d'être négligeables, même pour de faibles valeurs de défauts sur les lames quart d'onde.

3.2.1 Influence des défauts de positionnement des lames quart d'onde et des polariseurs

A vide, la matrice de Mueller obtenue doit donc être la matrice identité. Le tableau suivant présente quelques simulations [8] en considérant uniquement les erreurs d'orientation des éléments optiques. On désigne par $\Delta\theta_e$ et $\Delta\theta_s$ les défauts de positionnement des lames quart d'onde d'entrée et de sortie, et par $\Delta\theta_p$ l'erreur d'alignement angulaire du polariseur de sortie.

-
- [4] **P. D. HALE, G. W. DAY**, "Stability of birefringent linear retarders (waveplates)", *Appl. Opt.*, vol. 27, 5146-5153 (1988).
 - [5] **J. L. PEZZANITI, R. A. CHIPMAN**, "Linear polarization uniformity measurements taken with an imaging polarimeter", *Optical Engineering*, vol. 34, 1569-1573 (1995).
 - [6] **E. A. WEST, M. H. SMITH**, "Polarization errors associated with birefringent waveplates", *Proc. SPIE* (San Diego U.S.A), vol. 2265, 260-271 (1994).
 - [7] **D. H. GOLDSTEIN, R. A. CHIPMAN**, "Error analysis of a Mueller matrix polarimeter", *J. O. S. A.*, vol. 7, 693-700 (1990).
 - [8] **P. OLIVARD**, "Application du formalisme de Stokes-Mueller à la caractérisation polarimétrique de fibres optiques soumises à des contraintes uniformes", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).

$\Delta\theta_e$	$\Delta\theta_s$	$\Delta\theta_p$	Matrice simulée
0°	0°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
0°	$0,1^\circ$	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,0035 & 0 \\ 0 & 1 & 0,007 & 0 \\ 0 & -0,007 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$0,1^\circ$	0°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,007 & 0 \\ -0,0035 & 0,007 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
0°	0°	$0,1^\circ$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0035 & 0 \\ 0 & 1 & -0,0035 & 0 \\ -0,0035 & 0,0035 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$0,1^\circ$	$-0,15^\circ$	$0,2^\circ$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,017 & -0,012 & 0 \\ 0,018 & 1 & -0,024 & 0 \\ -0,003 & 0,024 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tableau 3.1 : Influence des erreurs d'alignements angulaires des éléments optiques

Chacun de ces éléments étant positionné avec une précision de l'ordre du centième de degré, nous ne devrions pas, en toute logique, observer ce type d'erreur lors de l'étalonnage à vide du polarimètre.

3.2.2 Compensation des défauts sur les retards des lames quart d'onde

Considérons maintenant les cas précédents en prenant en compte un éventuel défaut sur les retards des lames quart d'onde d'entrée et de sortie. On note ici δ_e et δ_s les retards effectifs de ces lames.

$\Delta\theta_e$	$\Delta\theta_s$	$\Delta\theta_p$	δ_e	δ_s	Matrice simulée
0°	0°	0°	89°	90°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,983 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,983 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
0°	0°	0°	90°	89°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,017 & 0 & 0 \\ 0 & 0,983 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,983 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
0°	0°	0°	89°	89°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,017 & 0 & 0 \\ 0,017 & 0,9657 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9657 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
0,1°	-0,15°	0,2°	89°	89°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,017 & -0,012 & 0 \\ 0,017 & 0,965 & -0,024 & 0 \\ -0,003 & 0,024 & 0,965 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tableau 3.2 : Combinaison des erreurs d'alignement et des défauts de retards des lames quart d'onde

Le tableau précédent montre que les défauts de retard des lames sont localisés sur les éléments m_{01} , m_{10} , m_{11} et m_{22} . De plus, les variations de m_{01} et m_{10} sont non corrélées, *c. à d.* que les défauts de la lame de sortie n'interviennent que sur le terme m_{01} et inversement pour la lame d'entrée.

La matrice de calcul intervenant dans l'expression (2.13) est obtenue en considérant des éléments optiques parfaits (retard des lames quart d'onde de 90°) dont les positionnement sont précis. En théorie, la matrice de Mueller obtenue à vide est la matrice identité. Or, dans la pratique, nous observons des éléments diagonaux différents de 1 et des éléments non-diagonaux non nuls. Le positionnement des lames et des polariseurs étant effectuée avec précision, ces erreurs sont donc attribuées aux seuls défauts sur les retards des lames quart d'onde. En résumé, nous réalisons une erreur de mesure sur les éléments de la matrice de

Mueller en considérant le retard des lames de 90° alors que, dans la réalité, ce retard peut s'écarter de cette valeur d'au moins 3%, du fait que nous utilisons des lames quasi achromatiques, voire d'une valeur plus importante compte tenu des défauts physiques des lames (défauts d'épaisseur en particulier) ou des erreurs d'alignement de faisceau à la traversée de la lame. Afin de calculer ces retards, nous incluons dans la matrice de calcul $[B_{calc}]$ (équation (2.11)) ces défauts, afin de générer un fichier intensité simulé :

$$[I_{sim}] = [B_{calc}][I_d] \quad (3.1)$$

où $[I_d]$ est un vecteur de dimension 16 représentant la matrice de Mueller du vide.

Ce fichier intensité nous permet de générer, par la suite, une matrice de Mueller simulée (équation (3.2)), puis de comparer, par approche successive, les éléments m_{01} et m_{10} simulés avec les valeurs m_{01} et m_{10} obtenues expérimentalement en considérant les lames comme étant parfaites.

$$[m_{sim}] = ([B]^T [B])^{-1} [B]^T [I_{sim}] \quad (3.2a)$$

$$[m_{exp}] = ([B]^T [B])^{-1} [B]^T [I_{exp}] \quad (3.2b)$$

où $[B]$ est la matrice de calcul idéale (retards des lames de 90°)

Cette méthode nous fournit directement une estimation des retards vrais des lames de phase. Le fait de travailler directement sur le fichier intensité pour obtenir ces retards nous aurait obligé à réaliser une double itération sur les deux retards de lame. En travaillant sur les seuls éléments m_{01} et m_{10} , nous considérons de façon prédominante les défauts des retards par rapport aux autres erreurs qu'elles soient systématiques ou statistiques. Toutefois, les bruits de mesures peuvent rendre très incertains les résultats et il est nécessaire d'en minimiser les effets avant d'envisager l'étalonnage du polarimètre.

Une fois que l'on a obtenu une estimation des retards vrais des lames quart d'onde, il ne reste plus qu'à insérer ces valeurs dans la matrice de calcul corrigée $[B_{cor}]$ et de recalculer la matrice de Mueller :

$$[m_{cor}] = ([B_{cor}]^T [B_{cor}])^{-1} [B_{cor}]^T [I_{exp}] \quad (3.3)$$

avec $[I_{exp}]$ le fichier intensité expérimental.

Nous devrions retrouver une matrice identité. Or, nous avons remarqué que, lors de l'étalonnage à vide, les termes m_{02} , m_{20} , m_{12} et m_{21} conservaient des valeurs relativement importantes [8]. L'hypothèse retenue était le pouvoir rotatoire propre aux lames quart d'onde [6] dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent et qui nécessite un étalonnage plus complet (mais aussi plus complexe). Le pouvoir rotatoire (ou activité optique) variant avec la longueur d'onde, il semblait donc important, à ce stade de l'étude, de vérifier cette hypothèse, afin de corriger ces erreurs, préjudiciables à toute étude polarimétrique menée sur une large bande spectrale.

3.2.3 Influence de l'activité optique des lames quart d'onde

a) Introduction

Quand une onde lumineuse monochromatique, polarisée rectilignement, se propage dans certains milieux isotropes, on constate que son plan de polarisation tourne, la rotation étant proportionnelle à l'épaisseur traversée. On observe ce même phénomène dans certains cristaux cubiques et dans certains cristaux uniaxes ou biaxes, lorsque la lumière se propage dans la direction d'un axe optique, *c. à d.* selon une direction pour laquelle la double réfraction s'annule. Le quartz alpha constitue un exemple remarquable de cristal de ce genre.

L'explication du phénomène est la suivante : l'onde incidente polarisée rectilignement qui pénètre le milieu, se partage en deux ondes polarisées circulairement, l'une droite, l'autre gauche. Ces deux ondes polarisées se propagent dans le milieu à des vitesses légèrement différentes. Par suite, si les deux composantes polarisées circulairement sont en phase lorsqu'elles pénètrent dans le milieu, elles seront déphasées quand elles en sortiront. A la sortie du milieu, ces deux composantes donnent naissance à une vibration rectiligne dont le plan de polarisation a tourné, par rapport à celui de la vibration incidente, d'un angle égal à la moitié de la différence de phase qui sépare les deux composantes circulaires.

Etant donné que cet effet peut apparaître dans les cristaux biréfringents lorsque la lumière se propage selon un axe optique, il s'agit maintenant de savoir s'il se produit lorsque

la lumière se propage dans d'autres directions. Dans ce dernier cas, l'activité optique se superpose à la biréfringence ordinaire et on peut la considérer comme étant une petite perturbation de cette dernière [9].

Par exemple, considérons les surfaces d'onde (ou surface des indices) d'un quartz alpha, représentées sur la figure 3.1, à une échelle arbitraire. La surface des indices est le lieu géométrique des points construits à partir des variations de l'indice en fonction de l'orientation du plan d'onde [10].

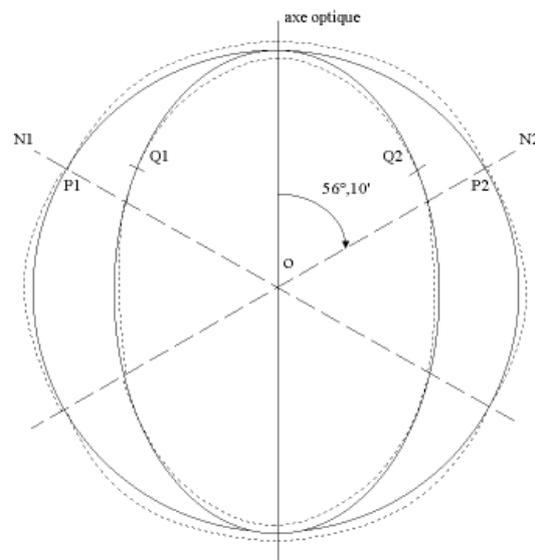


Figure 3.1 : Surfaces d'onde du quartz alpha (échelle arbitraire), normales (traits pleins) et distordues par l'activité optique (traits pointillés)

ON1 et ON2 sont les normales aux ondes pour lesquelles $k = 0$ (rapport du petit axe au grand axe de l'ellipse de polarisation). P1, P2, Q1, Q2 sont les points de contact des ondes normales et des ondes distordues : ils définissent les directions des rayons pour lesquels il n'y a pas de distorsion des surfaces d'onde. Le quartz alpha est un cristal uniaxe positif : en l'absence d'activité optique, les surfaces d'onde seraient formées d'une sphère et d'un ellipsoïde de révolution, représentés en traits pleins. L'activité optique a pour effet de déformer légèrement les surfaces d'onde, selon la forme indiquée en traits pointillés. Ces surfaces ne sont plus tangentes sur l'axe optique. Leur distance correspond à des vitesses de propagation différentes pour les deux composantes polarisées circulairement, dont nous avons parlé précédemment. Cette distance est très petite, $5 \cdot 10^{-5}$ fois environ le rayon moyen.

[9] J. F. NYE, "Physical properties of crystals", Edition Clarendon (Oxford), sec. 14, (1957).

[10] G. BRUHAT, "Optique", Cours de physique générale, Edition Masson (Paris), (1992).

Sur la figure 3.1, le phénomène est très considérablement amplifié. Avant que ne soit introduite l'activité optique, les deux surfaces d'onde d'un cristal uniaxe représentent la propagation, à partir d'un point, de deux ondes distinctes, polarisées rectilignement. Après modification des surfaces pour tenir compte de l'activité optique, nous trouvons que, selon l'axe optique, les deux ondes ne sont plus polarisées rectilignement, mais sont polarisées circulairement. Dans une direction quelconque, à l'intérieur du cristal, les phénomènes sont les suivants : à une onde incidente donnée, sont associées deux ondes qui se propagent dans le cristal sans changer de forme. En général, ces deux ondes sont polarisées elliptiquement. Les deux ellipses qui définissent l'état de polarisation des deux ondes sont identiques, mais les sens de rotation sont opposés. Leurs grands axes, orthogonaux, coïncident avec les directions de vibrations principales qui existeraient pour l'onde incidente, si le cristal ne présentait pas d'activité optique.

Selon l'axe optique, les deux ondes, nous l'avons vu, sont polarisées circulairement ; en dehors de la direction de l'axe optique, le rapport k varie avec la direction. Dans le quartz alpha, k dépend uniquement de l'angle que fait la normale à l'onde avec l'axe optique. La figure 3.2 donne la variation de k : selon l'axe optique, k est égal à 1, mais il diminue ensuite très rapidement, et s'annule lorsque l'angle avec l'axe optique est de $56^{\circ}10'$. Si la normale à l'onde est perpendiculaire à l'axe optique, k garde encore une valeur finie, quoique très petite. Le phénomène est beaucoup moins important concernant le MgF_2 .

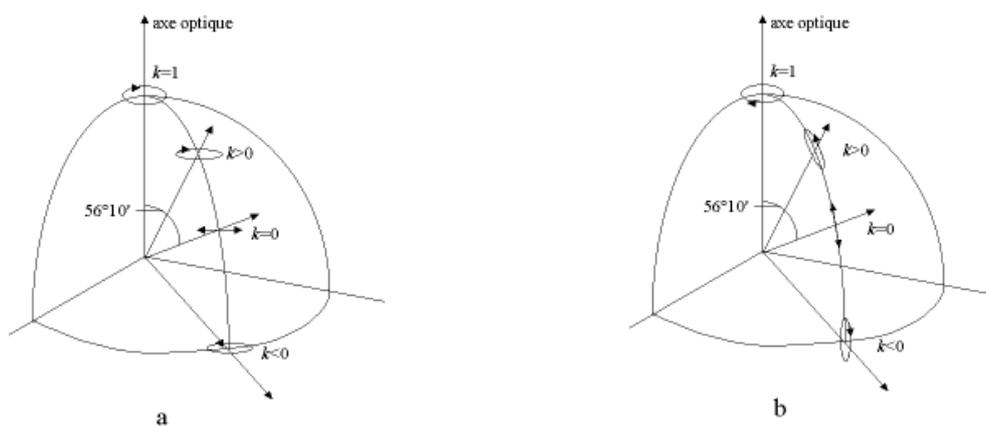


Figure 3.2 : Variation du paramètre k en fonction de la direction de la normale à l'onde (flèche radiale) dans le quartz droit ; (a) onde "ordinaire", (b) onde "extraordinaire"

Les deux cristaux étant taillés selon l'axe optique et le faisceau laser traversant les lames à incidence normale, à la biréfringence linéaire viendra donc se superposer de la

biréfringence circulaire. En d'autres termes, les modes de vibration propres des lames quart d'onde seront donc des modes de vibrations légèrement elliptiques.

En conclusion, nous sommes amenés à utiliser un modèle de biréfringent elliptique pour décrire les lames quart d'onde utilisées. Les deux indices de réfraction, vus par les deux états propres de polarisation, étant différents, il peut également apparaître une transmission différentielle (en d'autres termes, du dichroïsme). Pour être complet, nous adopterons donc le modèle d'un biréfringent elliptique dichroïque pour décrire chacune des lames. Cette représentation présente l'avantage de prendre en compte tous les phénomènes physiques pouvant intervenir au niveau des lames, et en particulier les multiples réflexions à l'intérieur de ces dernières, qui ont pour conséquence d'accroître l'ellipticité des modes de vibration propre [11, 12].

Le modèle d'un élément biréfringent elliptique dichroïque s'impose donc comme étant la meilleure représentation possible des lames quart d'onde et nous permettra de réaliser une compensation complète des défauts intrinsèques aux lames quasi achromatiques.

b) Matrice de Jones et de Mueller d'un élément biréfringent elliptique dichroïque

SCIERSKI et RATAJCZYK [13] ont développé une matrice de Jones, valable pour tout milieu biréfringent elliptique dichroïque. Le principe est le suivant :

Considérons une onde plane monochromatique représentée par son vecteur champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$.

$k = \frac{n\omega}{c}$, n étant l'indice de réfraction de l'onde dans la direction de propagation.

\vec{E}_0 est un vecteur complexe situé dans le plan d'onde, qui caractérise l'état de polarisation.

-
- [11] **K. PIETRASZKIEWICZ, W. A. WOZNIAK, P. KURZYNOWSKI**, "Effect of multiple reflections in retardance plates with elliptical birefringence", *J. O. S. A. (A)*, vol. 12, 420-424 (1995).
 [12] **J. POIRSON, T. LANTERNIER, J. C. COTTEVERTE, A. LE FLOCH, F. BRETENAKER**, "Jones matrix of a quarter-wave plate for Gaussian beams", *Appl. Opt.*, vol. 34, 6806-6818 (1995).
 [13] **I. SCIERSKY, F. RATAJCZYK**, "The Jones matrix of the real dichroic elliptic object", *Optik*, vol. 68, 121-125 (1984).

$$\vec{E}_0 = \begin{bmatrix} E_{ox} e^{i\phi_x} \\ E_{oy} e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

E_{ox} et E_{oy} sont les composantes de champ qui apparaissent sur la figure 1.1 et ϕ est le déphasage entre la composante en x et la composante en y du vecteur champ électrique.

Représentation d'un état de polarisation elliptique

Soit \vec{J} le vecteur de Jones d'un état de polarisation elliptique. En utilisant les notations de la figure 1.1 et l'expression (1.18), ce vecteur peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Il est parfois utile de représenter un état de polarisation elliptique en utilisant la direction θ du grand axe de l'ellipse (azimut) et l'angle ε (ellipticité).

Dans le repère propre de l'ellipse, le vecteur de Jones s'écrit :

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) \times e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon) \\ i \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Pour l'exprimer dans le repère du laboratoire, il suffit d'effectuer une rotation d'angle $-\theta$, dont la matrice est $R(-\theta)$. R est la matrice de changement de base $(x, y) \rightarrow (x', y')$.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\vec{J} = R(-\theta) \vec{J}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\varepsilon) - i \sin(\theta) \sin(\varepsilon) \\ \sin(\theta) \cos(\varepsilon) + i \cos(\theta) \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Détermination de la matrice de Jones d'un milieu anisotrope elliptique dichroïque

Soit $[T]$ la matrice de Jones d'un biréfringent elliptique dichroïque.

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} \\ T_{10} & T_{11} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Il existe 2 modes de vibration propres dans un biréfringent elliptique, ces 2 modes étant des modes de vibration elliptique, orthogonaux, représentés par :

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \times e^{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\nu) e^{-i\phi} \\ \sin(\nu) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\vec{J}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\nu + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\nu + \frac{\pi}{2}) \times e^{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\nu) \\ \cos(\nu) e^{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\nu) e^{-i\phi} \\ \cos(\nu) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

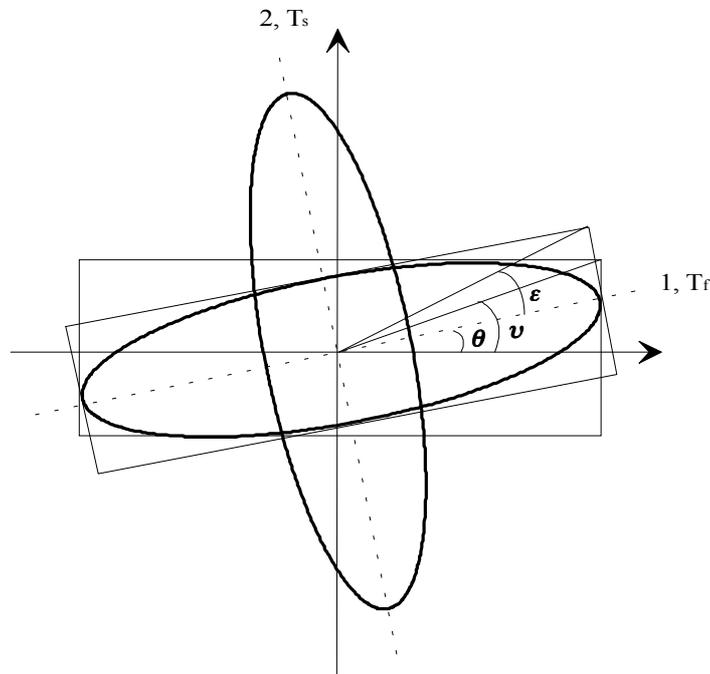


Figure 3.3 : Illustration des vecteurs propres 1 et 2 d'une lame biréfringente

Afin de calculer les quatre termes de la matrice de Jones d'un biréfringent elliptique, on étudie deux cas : celui où la polarisation de l'onde incidente est rectiligne horizontale et celui où elle est rectiligne verticale.

Pour une onde incidente polarisée rectiligne horizontale, l'état de polarisation est représenté par le vecteur $\vec{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On projette \vec{J} sur les deux modes de vibration propres. Les deux composantes ainsi obtenues correspondent à des états de polarisation se propageant sans altération mais se retrouvant déphasés d'une quantité $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)e$, à la sortie du matériau (e est l'épaisseur du matériau traversé, n_f et n_s sont les indices de réfraction associés à l'axe rapide et l'axe lent respectivement).

Si l'on tient compte du dichroïsme, il faut en outre affecter ces deux composantes d'un coefficient de transmission :

T_f : coefficient de transmission le long de l'axe rapide.

T_s : coefficient de transmission le long de l'axe lent.

On obtient ainsi l'équation suivante :

$$[T] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_f \begin{bmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu)e^{i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \vec{J}_1 + T_s \begin{bmatrix} -\sin(\nu) \\ \cos(\nu)e^{i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\delta} \times \vec{J}_2 \quad (3.12)$$

Et finalement, en identifiant, on trouve :

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_f \cos^2(\nu) + T_s \sin^2(\nu) e^{-i\delta} \\ T_{10} &= \sin(\nu) \cos(\nu) (T_f - T_s e^{-i\delta}) e^{i\phi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour une onde incidente polarisée rectiligne verticale, l'état de polarisation est représenté par le vecteur $\vec{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De la même façon que précédemment, on obtient :

$$[T] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_f \begin{bmatrix} \cos(\nu)e^{-i\phi} \\ \sin(\nu) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \bar{J}_1 + T_s \begin{bmatrix} -\sin(\nu)e^{-i\phi} \\ \cos(\nu) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\delta} \times \bar{J}_2 \quad (3.14)$$

Et :

$$\begin{aligned} T_{01} &= \sin(\nu) \cos(\nu) (T_f - T_s e^{-i\delta}) e^{-i\phi} \\ T_{11} &= T_f \sin^2(\nu) + T_s \cos^2(\nu) e^{-i\delta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

On obtient ainsi la matrice de Jones d'un matériau biréfringent dans le cas le plus général, en fonction de δ , ϕ et ν :

$$[T] = \begin{bmatrix} T_f \cos^2(\nu) + T_s \sin^2(\nu) e^{-i\delta} & \sin(\nu) \cos(\nu) (T_f - T_s e^{-i\delta}) e^{-i\phi} \\ \sin(\nu) \cos(\nu) (T_f - T_s e^{-i\delta}) e^{i\phi} & T_f \sin^2(\nu) + T_s \cos^2(\nu) e^{-i\delta} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Détermination de la matrice de Mueller d'un milieu anisotrope elliptique dichroïque

Les éléments de la matrice de Mueller d'un dispositif optique non dépolarisant peuvent être reliés à la matrice de Jones par l'équation (1.68). La référence est prise sur la polarisation d'entrée (axe des x). Pour $\theta = 0$, l'axe rapide de la lame est donc confondu avec l'axe du polariseur d'entrée.

Si on connaît les éléments de la matrice de Mueller de la lame à $\theta = 0$, il est relativement facile de déterminer sa matrice pour une position θ quelconque. Il suffit pour cela d'effectuer un changement de référentiel. On passe en effet du référentiel absolu au nouveau référentiel par une simple rotation de $-\theta$.

La matrice de Mueller d'un milieu biréfringent elliptique se met alors sous la forme :

$$M(\theta) = R(-\theta)M(\theta = 0)R(\theta) \quad (3.17)$$

avec :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Le calcul nous donne des termes relativement compliqués en fonction de θ , ν , δ , ϕ , T_f et T_s . Cependant, en remarquant que ces valeurs, en dehors de θ , caractérisent uniquement la lame lorsque son axe rapide coïncide avec l'axe des x , il vient :

$$\nu = \nu(\theta = 0) = \varepsilon \quad (3.19)$$

$$\phi = \phi(\theta = 0) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ selon que l'ellipse est droite ou gauche (voir figure 1.3)}$$

c) Influence des erreurs dues à l'ellipticité des lames de phase

Erreur d'alignement des éléments optiques

L'étalonnage à vide du polarimètre ne nous permet pas d'obtenir rigoureusement la matrice identité, même après correction des retards de lame. Les incertitudes relativement importantes concernent les éléments m_{02} , m_{20} , m_{12} et m_{21} et sont en général attribuées à l'activité optique (pouvoir rotatoire) des lames de phase.

Cependant, des simulations ont montré que l'erreur réalisée sur ces éléments pouvait également provenir d'une erreur d'alignement angulaire des éléments optiques. Les alignements étant réalisés par dichotomie avec une précision de l'ordre du centième de degré, nous nous sommes demandés si notre procédure d'alignement était, dans un premier temps, compatible avec un éventuel pouvoir rotatoire des lames $\lambda/4$.

La position $\theta = 0$ correspond à l'alignement de l'axe rapide de la lame quart d'onde avec l'axe du polariseur d'entrée (axe des x). Les états propres de la lame (directions propres dans le cas d'un biréfringent linéaire) correspondant à des états de polarisation qui peuvent se propager sans altération et compte tenu du fait que le polariseur de sortie est croisé avec le

polariseur d'entrée, cette position correspond donc à l'extinction, dans le cas idéal, ou plus rigoureusement, au minimum d'intensité, dans un cadre expérimental. La position $\theta = 0$ pour la deuxième lame correspond également au minimum d'intensité, même en présence de la première lame à condition, bien sûr, de l'avoir préalablement alignée avec le polariseur d'entrée.

La procédure d'alignement adoptée est donc la suivante : alignement de l'axe rapide de la première lame avec le polariseur d'entrée ($\theta = 0$) en estimant la position correspondant au minimum d'intensité par un ajustement polynomial, puis, une fois que la première lame est alignée, nous appliquons la procédure à la deuxième lame. La première question est donc la suivante : en présence d'activité optique ou d'éléments biréfringents elliptiques, le minimum d'intensité correspond-il toujours à la position $\theta = 0$? La connaissance de la matrice de Mueller d'un biréfringent elliptique dichroïque va nous permettre de répondre à cette question.

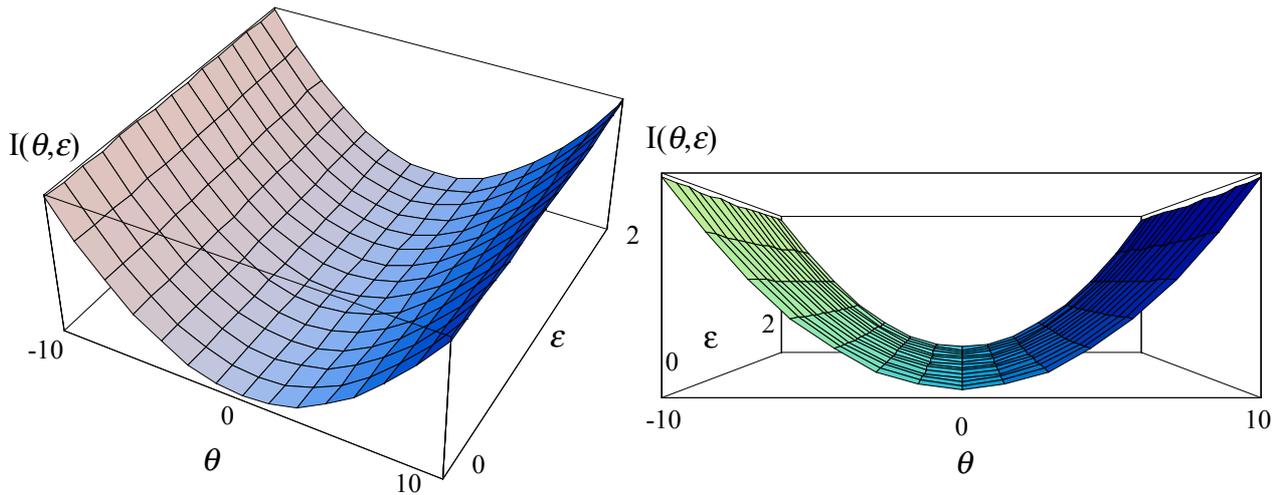


Figure 3.4 : Simulation de l'intensité détectée en fonction de la position angulaire θ (en degré) de la lame $\lambda/4$ d'entrée pour différentes valeurs d'ellipticité (en degré)

La figure 3.4 présente l'intensité détectée lorsque l'on fait tourner une lame $\lambda/4$ entre deux polariseurs croisés. L'intensité correspond au vecteur de Stokes \vec{S}_s calculé de la façon suivante :

$$\vec{S}_s = [P'] [R(-\theta)] [M(\epsilon)] [R(\theta)] [P] \vec{S}_e \quad (3.20)$$

où $[P']$, $[P]$, $[M(\varepsilon)]$ et \vec{S}_e représentent respectivement les matrices de Mueller des polariseurs d'entrée, de sortie, de la lame quart d'onde et le vecteur de Stokes de l'onde incidente. ε est l'ellipticité des modes de vibration propres de la lame quart d'onde.

Nous pouvons ainsi nous rendre compte que, quelle que soit la valeur de son ellipticité, nous retrouvons bien l'extinction pour la position $\theta = 0$. La procédure d'alignement est donc tout à fait correcte pour une seule lame. Nous avons ensuite simulé l'intensité détectée en fonction de l'orientation de la deuxième lame, toujours dans la configuration polariseurs croisés, mais en présence, cette fois-ci, de la première lame à la position $\theta = 0$. Nous avons réalisé cette simulation pour différentes valeurs de l'ellipticité de la première lame. L'intensité correspond, cette fois, au vecteur de Stokes \vec{S}_s calculé de la façon suivante :

$$\vec{S}_s = [P'] [R(-\theta)] [M'(\varepsilon')] [R(\theta)] [M(\varepsilon)] [P] \vec{S}_e \quad (3.21)$$

Où $[M'(\varepsilon')]$ représente la matrice de Mueller de la deuxième lame.

Les résultats de cette simulation apparaissent dans la figure 3.5. A noter, dans un premier temps, l'absence d'extinction en présence d'activité optique et, beaucoup plus important, un minimum d'intensité obtenu pour une valeur de θ différente de 0. On peut ainsi se rendre compte, à la lecture de ce graphique, que pour une ellipticité d'un des modes de vibration propres de la lame d'entrée, de l'ordre du degré, nous réalisons une erreur d'alignement de la lame de sortie de quelques dixièmes de degrés.

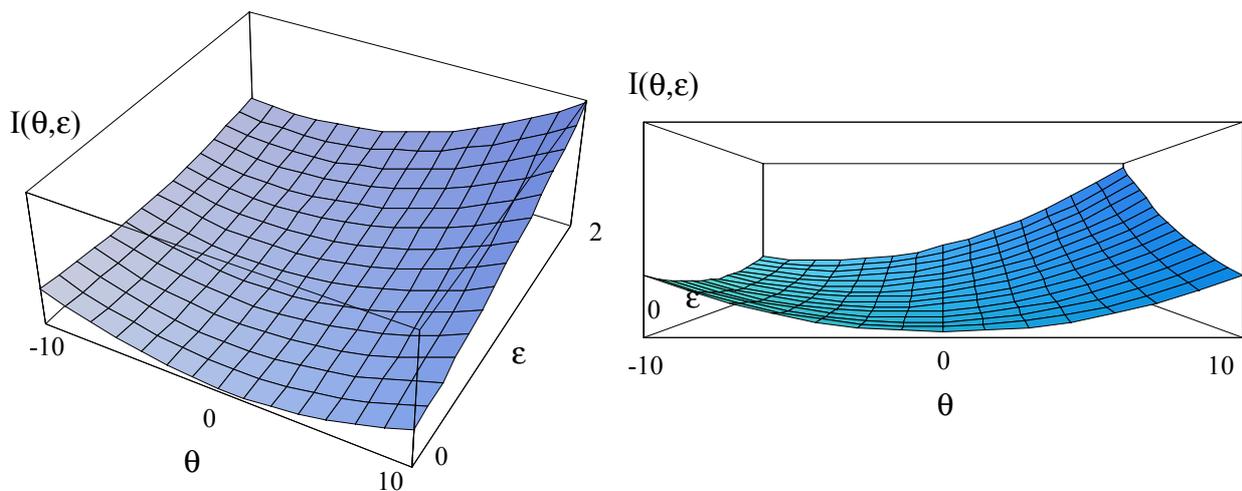


Figure 3.5 : Simulation de l'intensité détectée en fonction de la position angulaire de la lame $\lambda/4$ de sortie pour différentes valeurs d'ellipticité de la lame d'entrée

Les incertitudes concernant les éléments m_{02} , m_{20} , m_{12} et m_{21} proviennent donc au départ d'une erreur d'alignement causée par le pouvoir rotatoire de la lame $\lambda/4$ d'entrée. Nous avons par la suite adopté deux méthodes : dans un premier temps l'alignement de la lame de sortie en présence de la lame d'entrée puis dans un deuxième temps, l'alignement de la lame de sortie après avoir retiré la lame d'entrée. Les positions correspondant au minimum d'intensité diffèrent alors d'un angle de 8.10^{-2} degré témoignant ainsi de la présence d'activité optique. L'alignement de la deuxième lame a donc été réalisé en l'absence de la lame d'entrée. Ce nouvel alignement ne nous a pas permis de réduire considérablement l'incertitude portant sur les éléments cités plus haut ; néanmoins, nous pouvons à présent confirmer que la position $\theta = 0$ pour la deuxième lame correspond bien à l'alignement de son axe rapide avec le polariseur d'entrée et ainsi utiliser la matrice $M(\theta)$ décrite dans le chapitre précédent pour la caractériser. Un étalonnage complet de nos éléments passant par la connaissance de l'ellipticité et du dichroïsme de chacune des lames, il nous reste donc à caractériser les lames de phase.

Influence de l'ellipticité et du dichroïsme sur le calcul de la matrice de Mueller

Une méthode permettant de caractériser une lame de phase, consiste à la faire tourner entre deux polariseurs en adoptant deux configurations (polariseurs croisés et polariseurs parallèles) et de calculer les coefficients de Fourier de l'intensité détectée.

Lame placée entre deux polariseurs croisés :

Soient \vec{S}_e le vecteur de Stokes de l'onde arrivant sur la lame (polarisation rectiligne parallèle à Ox), $M(\theta)$ la matrice de Mueller de la lame de phase (dont l'axe rapide forme un angle θ avec l'axe Ox) et $[P_s]$ la matrice de Mueller du polariseur de sortie (polarisation rectiligne parallèle à Oy).

$$\vec{S}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [P_s] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de Stokes de l'onde arrivant sur le détecteur s'obtient donc par la relation simple :

$$\vec{S}_s = [P_s][M(\theta)]\vec{S}_e \quad (3.22)$$

L'intensité lumineuse de l'onde (que l'on notera I^\perp dans cette configuration) étant entièrement contenue dans le terme $\vec{S}_s [1]$, nous obtenons finalement :

$$I^\perp(\theta) = I_0^\perp + a_0^\perp \cos(4\theta) \quad (3.23)$$

$$I_0^\perp = \frac{D}{8}(1 + S^2) \quad (3.24a)$$

$$a_0^\perp = \frac{-DC^2}{8} \quad (3.24b)$$

$$\text{avec : } D = T_f^2 + T_s^2 - 2T_f T_s \cos(\delta) \quad (3.24c)$$

$$S = \sin(2\varepsilon) \quad (3.24d)$$

$$C = \cos(2\varepsilon) \quad (3.24e)$$

Lame placée entre deux polariseurs parallèles :

Soit $[P_s]$ la matrice de Mueller du polariseur de sortie (polarisation rectiligne parallèle à Ox).

$$[P_s] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de Stokes de l'onde arrivant sur le détecteur s'obtient de nouveau par la relation (3.22) et l'intensité lumineuse de l'onde (que l'on notera I'') arrivant sur le détecteur vaut cette fois ci :

$$I''(\theta) = I_0'' + a_2'' \cos(2\theta) + a_4'' \cos(4\theta) \quad (3.25)$$

$$I_0'' = \frac{t}{2} - \frac{D}{8}(1 + S^2) \quad (3.26a)$$

$$a_2'' = -\frac{C}{2}\Delta t \quad (3.26b)$$

avec :

$$a_4'' = \frac{DC^2}{8} \quad (3.26c)$$

$$t = T_f^2 + T_s^2 \quad (3.26d)$$

$$\Delta t = T_f^2 - T_s^2 \quad (3.26e)$$

A partir des coefficients de Fourier de $I''(\theta)$ et $I^\perp(\theta)$, nous pouvons extraire les différents paramètres de chacune de nos lames en utilisant les relations :

$$S = \sin(\varepsilon) = \sqrt{\frac{I_0^\perp + a_4^\perp}{I_0^\perp - a_4^\perp}} \quad (3.27a)$$

$$\frac{t}{\Delta t} = C \frac{a_4'' I_0^\perp - a_4^\perp I_0''}{a_4^\perp a_2''} \quad (3.27b)$$

$$\frac{T_s}{T_f} = \sqrt{\frac{\frac{t}{\Delta t} - 1}{\frac{t}{\Delta t} + 1}} \quad (3.27c)$$

$$\cos(\delta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_s}{T_f} \right)^{-1} + \frac{T_s}{T_f} \right] \left[1 - \frac{D}{\Delta t} \right] \quad (3.27d)$$

Nous avons réalisé cette expérience pour différentes longueurs d'onde, les résultats sont présentés dans le tableau 3.3.

Longueur d'onde (en nm)	Ellipticité ϵ (en degré)	Dichroïsme T_s/T_f	Déphasage δ (en degré)
700	1,1	1	79,18
675	0,64	1	81,66
650	0,61	0,997	83,79
625	1,75	1	85,61
600	1,84	1,006	86,71
575	0,63	0,998	87,93
550	0,62	1	89,23
525	1,54	1,002	90,42
500	1,75	1,003	90,57
475	1,125	0,992	89,30

Tableau 3.3 : Caractéristiques de la lame de sortie, obtenues expérimentalement, à différentes longueurs d'onde

Les valeurs de déphasage ne semblent malheureusement pas conformes à celles déterminées par la méthode décrite dans le paragraphe 3.2.2. Le problème vient du fait que les valeurs de certains des coefficients de Fourier sont très faibles et par conséquent très bruitées.

Nous avons donc décidé d'adopter une tout autre procédure. Des simulations réalisées grâce au modèle d'un élément biréfringent elliptique dichroïque nous ont permis, dans un premier temps, de localiser les éléments de la matrice de Mueller concernés par ces défauts intrinsèques [14]. Le tableau 3.4 montre que les défauts de retard des lames sont localisés sur les éléments m_{02} , m_{20} , m_{11} et m_{22} et m_{33} . De plus, les variations de m_{02} et m_{20} sont non corrélées, *c. à d.* que les défauts de la lame de sortie n'interviennent que sur le terme m_{02} et inversement pour la lame d'entrée. Nous pouvons également nous rendre compte, à l'aide du tableau 3.5, que la présence des défauts de retards ne change en rien les valeurs de ces éléments et, inversement, la présence de défauts dues à l'ellipticité des modes propres ne change en rien (ou très faiblement) les valeurs des éléments m_{01} et m_{10} . Les défauts intrinsèques aux lames de phase et leur influence sur les éléments de la matrice de Mueller

[14] **B. BOULBRY, B. LE JEUNE, B. BOUSQUET, F. PELLEN, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Error analysis and calibration of a spectroscopic Mueller matrix polarimeter using a short-pulse laser source", *Meas. Sci. Technol.*, vol. 13, 1563-1573 (2002).

sont donc non corrélés d'une lame à l'autre. Ce constat nous a alors permis de corriger ces défauts conformément à la méthode décrite dans le paragraphe 3.2.2 (équations (3.1), (3.2) et (3.3)). Cette méthode nous permet également d'évaluer et de corriger les défauts des lames indépendamment les uns des autres. Elle nous évite, par conséquent, d'avoir à minimiser une fonction d'erreur en itérant simultanément l'ensemble des caractéristiques, ce qui aurait été à la fois lourd et fastidieux. Néanmoins, nous serons amenés à utiliser une telle méthode lorsque les défauts de retard seront importants. Pour certaines longueurs d'onde, en effet, les retards peuvent avoir des valeurs très éloignées de 90° , comme nous le verrons dans le paragraphe 3.4. Dans ce cas de figure, nous observons une faible corrélation des défauts de lames et de leur influence sur les éléments de la matrice de Mueller. La détermination des caractéristiques de lame par la méthode décrite plus haut n'est donc plus valable mais nous permettra cependant d'obtenir des valeurs d'initialisation lors de la minimisation de la fonction d'erreur suivante :

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{64} \sum_{k=0}^{63} \left(\frac{[I_k]_{sim} - [I_k]_{exp}}{[I_k]_{exp}} \right)^2} \quad (3.28)$$

Où $[I_k]_{exp}$ et $[I_k]_{sim}$ sont respectivement les fichiers intensités expérimentales et recalculées (équation (3.2)).

Nous pouvons ainsi nous rendre compte que les erreurs de mesure importantes sur les éléments m_{12} et m_{21} ne proviennent vraisemblablement pas directement de l'ellipticité des modes propres des lames mais uniquement de la mauvaise procédure d'alignement qui, en présence d'ellipticité, nous amène à réaliser des erreurs de positionnement angulaire de la lame de sortie de près d'un dixième de degré. Malheureusement, en alignant chacune des deux lames indépendamment l'une de l'autre, nous observons de nouveau des erreurs de mesure sur ces éléments de la matrice de Mueller. Nous avons donc été amenés, à ce stade de l'étalonnage, à considérer le dichroïsme, seul défaut intrinsèque des lames à avoir été jusqu'à présent négligé.

$\varepsilon_e = v_e(\theta=0)$	$\varepsilon_s = v_s(\theta=0)$	Matrice simulée
2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9951 & 0 & 0 \\ -0,0698 & 0 & 0,9951 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9976 \end{bmatrix}$
1°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9988 & 0 & 0 \\ -0,0349 & 0 & 0,9988 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9934 \end{bmatrix}$
0°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0698 & 0 \\ 0 & 0,9951 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9951 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9976 \end{bmatrix}$
0°	1°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0349 & 0 \\ 0 & 0,9988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9988 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9994 \end{bmatrix}$
2°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0691 & 0 \\ 0 & 0,9855 & 0 & 0 \\ -0,0691 & 0 & 0,9855 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9903 \end{bmatrix}$
2°	1°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0346 & 0 \\ 0 & 0,9915 & 0 & 0 \\ -0,0695 & 0 & 0,9915 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9945 \end{bmatrix}$
1°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0695 & 0 \\ 0 & 0,9915 & 0 & 0 \\ -0,0346 & 0 & 0,9915 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9945 \end{bmatrix}$

Tableau 3.4 : Influence de l'ellipticité des modes de vibration propre des lames quart d'onde sur la détermination de la matrice de Mueller. Les indices s et e désignent respectivement la lame de sortie et la lame d'entrée. Les retards sont ici de 90°

δ_e	δ_s	ε_e	ε_s	Matrice simulée
89°	90°	0°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0175 & 0,9825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
90°	89°	0°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0175 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
89°	90°	1°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0175 & 0,9814 & 0 & 0 \\ -0,0349 & 0 & 0,9814 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9992 \end{bmatrix}$
89°	90°	0°	1°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0343 & 0 \\ 0,0174 & 0,9814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9814 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9992 \end{bmatrix}$
90°	89°	1°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0174 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9814 & 0 & 0 \\ -0,0343 & 0 & 0,9814 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9992 \end{bmatrix}$
89°	90°	2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0175 & 0,9778 & 0 & 0 \\ -0,0697 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9974 \end{bmatrix}$

Tableau 3.5 : Influence de l'ellipticité des modes de vibration propre et du déphasage des lames $\lambda/4$ sur la détermination de la matrice de Mueller

δ_e	δ_s	ε_e	ε_s	Matrice simulée
90°	89°	0°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0175 & -0,0697 & 0 \\ 0 & 0,9778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9974 \end{bmatrix}$
90°	89°	2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0174 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9778 & 0 & 0 \\ -0,0685 & 0 & 0,9778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9974 \end{bmatrix}$
82°	85°	2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0,0756 & 0 & 0 \\ 0,1286 & 0,7916 & 0 & 0 \\ -0,0638 & 0 & 0,7916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9962 \end{bmatrix}$

Tableau 3.5 (suite) : Influence de l'ellipticité des modes de vibration propre et du déphasage des lames $\lambda/4$ sur la détermination de la matrice de Mueller

Le tableau 3.6 présente l'influence du dichroïsme sur les éléments de la matrice de Mueller. Seuls les éléments m_{23} et m_{32} sont concernés. Notons également que le dichroïsme des lames se répercute de façon non corrélée sur les éléments de la matrice de Mueller. Nous observons, enfin, une non corrélation de l'influence de ce défaut avec l'influence des défauts observés précédemment. Nous pouvons donc corriger ce défaut conformément à la méthode décrite plus haut. L'erreur de mesure réalisée sur les éléments m_{12} et m_{21} n'est donc pas imputable au dichroïsme ou à l'activité optique. Cette erreur de mesure provient vraisemblablement d'un mauvais alignement des lames de phase pour certaines longueurs d'onde, comme le montre le Tableau 3.1. Cette erreur de mesure n'apparaît pas, en effet, lorsque l'on travaille à la longueur d'onde utilisée lors de l'alignement des lames mais nous l'observons lorsque nous changeons de longueur d'onde. Tout se passe, en réalité, comme si la direction des axes neutres de la lame variait avec λ , ce qui, dans un premier temps peut paraître surprenant, dans la mesure où seule la structure cristalline des matériaux fixe la direction de ces axes neutres.

δ_e	δ_s	ε_e	ε_s	$\frac{T_y}{T_f}$ Lame d'entrée	$\frac{T_y}{T_f}$ Lame de sortie	Matrice simulée
90°	90°	0°	0°	0.98	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0202 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
89°	91°	1°	2°	0.98	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0171 & -0.0683 & -0.0014 \\ 0.0176 & 0.9909 & 0 & 0 \\ -0.0352 & 0 & 0.9909 & 0.0204 \\ 0.0007 & 0 & 0 & 0.9937 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	1	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0202 & 1 \end{bmatrix}$
89°	91°	1°	2°	1	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0171 & -0.0682 & 0.0014 \\ 0.0176 & 0.9909 & 0 & 0 \\ -0.0352 & 0 & 0.9909 & 0 \\ -0.0007 & 0 & 0.0197 & 0.9937 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	0.98	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0202 \\ 0 & 0 & 0.0202 & 1 \end{bmatrix}$
89°	91°	1°	2°	0.98	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0171 & -0.0682 & 0 \\ 0.0176 & 0.9909 & 0 & 0 \\ -0.0352 & 0 & 0.9909 & 0.0204 \\ 0 & 0 & 0.0197 & 0.9939 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	1.02	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0198 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	1	1.02	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0198 & 1 \end{bmatrix}$

Tableau 3.6 : Influence des défauts intrinsèques aux lames $\lambda/4$ sur la détermination de la matrice de Mueller

Cette structure ne pouvant pas évoluer en fonction de la longueur d'onde, nous avons donc, initialement, rejeté une telle hypothèse jusqu'à la découverte d'un article de CHENAULT [15] décrivant le même phénomène. D'après lui, la position des axes neutres d'une lame quasi achromatique peut osciller avec λ en raison d'un mauvais alignement entre les axes neutres des deux cristaux utilisés lors de sa conception. Son explication est la suivante : l'indice de réfraction de chacun de ces matériaux varie avec la longueur d'onde λ , il existe donc une valeur de λ pour laquelle le premier cristal est exactement une lame $\lambda/4$. La lame compensée étant également une lame $\lambda/4$, le deuxième cristal est donc forcément une lame onde $c. \grave{a} d.$ une lame n'engendrant aucune modification polarimétrique. Les axes neutres de la lame compensée sont donc ceux de la première lame. Pour une autre longueur d'onde, le phénomène est inversé et les axes neutres de la lame compensée sont, cette fois ci, ceux de la deuxième lame. Pour une longueur d'onde intermédiaire, les axes neutres de la lame sont donc compris entre ces deux positions.

Nous avons voulu vérifier cette hypothèse, c'est l'objet du prochain paragraphe.

3.2.4 Erreurs associées aux lames quart d'onde d'ordre zéro quasi achromatiques

Une erreur d'alignement interne entre les deux cristaux d'une lame achromatique, schématisée sur la figure 3.6, a donc été introduite dans nos calculs afin d'étudier les conséquences d'un tel défaut sur l'orientation des axes neutres de la lame ainsi que sur l'ellipticité des modes de vibration propres [16].

La matrice de Jones d'une telle lame peut donc être calculée à partir des matrices de Jones des lames de quartz et de MgF_2 et à l'aide de la matrice de changement de base $R(\theta)$:

$$[M] = [R(-\theta)][M_{MgF_2}][R(\theta)][M_{quartz}] \quad (3.29)$$

-
- [15] **D. B. CHENAULT, R. A. CHIPMAN**, "Measurements of linear diattenuation and linear retardance spectra with a rotating sample spectropolarimeter", *Appl. Opt.*, vol. 32, 3513-3519 (1993).
- [16] **B. BOULBRY, B. BOUSQUET, B. LE JEUNE, Y. GUERN, J. LOTRIAN**, "Polarization errors associated with zero-order achromatic quarter-wave plates in the whole visible spectral range", *Opt. Express*, vol. 9, 225-235 (2001).

$$[M_{\text{quartz}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_{\text{quartz}}} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$[M_{\text{MgF}_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_{\text{MgF}_2}} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où δ_{quartz} et δ_{MgF_2} représentent les retards engendrés par les lames de quartz et de MgF_2 .

$$\delta_{\text{quartz}} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_{\text{quartz}} d_{\text{quartz}} \quad (3.32)$$

$$\delta_{\text{MgF}_2} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_{\text{MgF}_2} d_{\text{MgF}_2} \quad (3.33)$$

Δn_{quartz} , Δn_{MgF_2} , d_{quartz} et d_{MgF_2} représentent respectivement les biréfringences et les épaisseurs des lames de quartz et de MgF_2 .

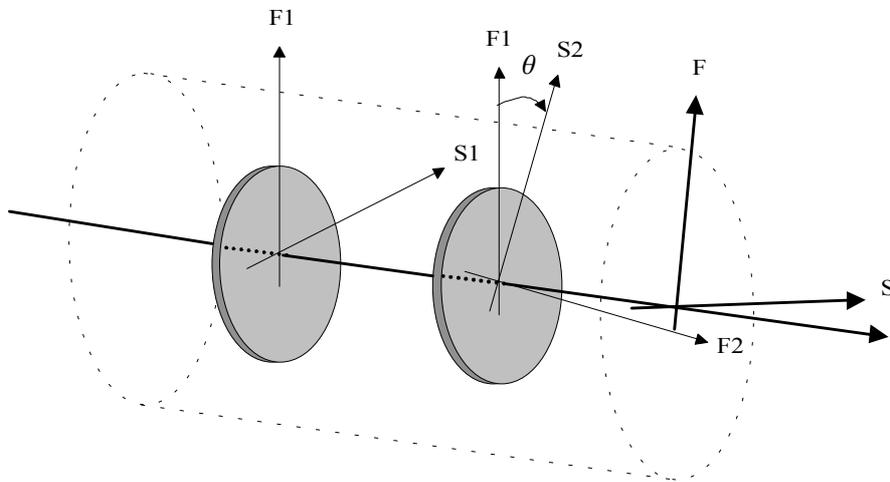


Figure 3.6 : défaut d'alignement interne d'une lame achromatique. (F_1, S_1) et (F_2, S_2) désignent les axes rapides et lents des lames de quartz et de MgF_2 . (F, S) désigne les axes neutres de la lame ordre-zéro compensée.

Si le désalignement entre les deux cristaux est faible, les conséquences d'un tel défaut sur le déphasage sont négligeables [15]. Nous nous sommes donc uniquement intéressé aux conséquences éventuelles sur l'ellipticité ε des modes de vibration propres et l'azimut α

associés aux deux lames. Le calcul des vecteurs propres de la matrice $[M]$ donne, en effet, deux vecteurs complexes \vec{J}_1 et \vec{J}_2 décrivant chacun une vibration elliptique :

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b + ic \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\vec{J}_2 = \begin{bmatrix} -b + ic \\ a \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

avec a , b et c réels.

Le calcul de l'ellipticité s'effectue à l'aide de l'expression (1.15) : $\sin(\varepsilon) = \sin(2\nu)\sin(\phi)$, où ε , ν et ϕ sont les angles définis dans le paragraphe 1.2 et représentés à la figure 1.1. Si nous considérons le vecteur \vec{J}_1 , ϕ et E_{oy} représentent, respectivement, l'argument et la valeur absolue du nombre complexe $b + ic$. $E_{ox} = a$ et $\nu = \arctan(E_{oy}/E_{ox})$. Nous avons ainsi calculé l'ellipticité de ce mode de vibration propre sur toute la gamme spectrale du visible et ce, pour plusieurs valeurs de désalignement θ . Les épaisseurs de quartz et de MgF_2 utilisées dans nos calculs sont celles fournies par le fournisseur (Fichou), à savoir 239,1 nm pour la lame de quartz et 197,1 nm pour la lame de MgF_2 . Les résultats de nos simulations apparaissent sur la figure 3.7 .

Celle-ci nous permet d'observer une dépendance linéaire de l'ellipticité ε en fonction du désalignement θ entre les deux cristaux ($\varepsilon \cong 1,38 \theta$). Celle-ci oscille trois fois sur la gamme spectrale 400-700 nm, la période de modulation augmentant avec λ . Ce premier résultat met en évidence l'intérêt de prendre en compte l'ellipticité des modes de vibration propres lors de mesures spectro-polarimétriques réalisées à l'aide de lames achromatiques imparfaites.

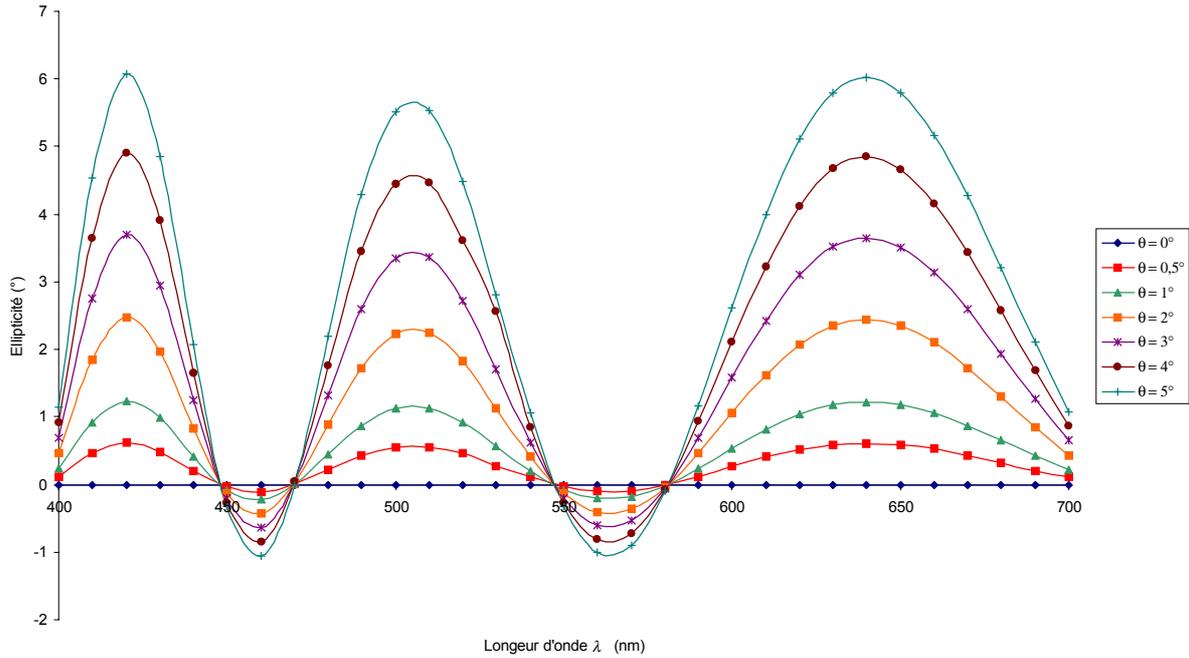


Figure 3.7 : Simulation de l'ellipticité ε des modes de vibration propre d'une lame quart d'onde en quartz-MgF₂, en fonction de la longueur d'onde λ et pour différentes valeurs de désalignement θ entre les deux cristaux.

Nous avons également, à partir du même modèle, calculé la position azimutale α des vecteurs propres associées à la lame en fonction de λ . Pour déterminer la valeur de α , nous avons, tout d'abord, multiplié le vecteur propre \vec{J}_1 par la matrice de rotation $[R(-\alpha)]$. En effet, lorsque le vecteur $\vec{J} = [R(-\alpha)]\vec{J}_1$ représente un état de polarisation elliptique dont les axes de l'ellipse coïncident avec ceux du laboratoire, la différence de phase ϕ entre la composante en x et la composante en y de \vec{J} vaut $\pi/2$. Cette constatation nous permet de calculer facilement l'angle α , à l'aide de la méthode suivante : Si les composantes en x et y de \vec{J} sont respectivement $J_x = E_{ox} e^{i\phi_x}$ et $J_y = E_{oy} e^{i\phi_y}$, alors $\phi = \phi_y - \phi_x = \pi/2$, $J_x / J_y = (E_{ox} / E_{oy}) e^{-i\pi/2}$ et finalement, la partie réelle de J_x / J_y est égale à zéro. Ces considérations nous conduisent à l'équation (3.36) :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - c^2} \quad (3.36)$$

Une expression analogue peut également être obtenue pour l'ellipticité ε :

$$\sin(\varepsilon) = \frac{2ac}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3.37)$$

Nous avons ainsi calculé l'azimut de la lame sur la gamme spectrale du visible et pour plusieurs valeurs de désalignement θ . Le résultat apparaît sur la figure suivante :

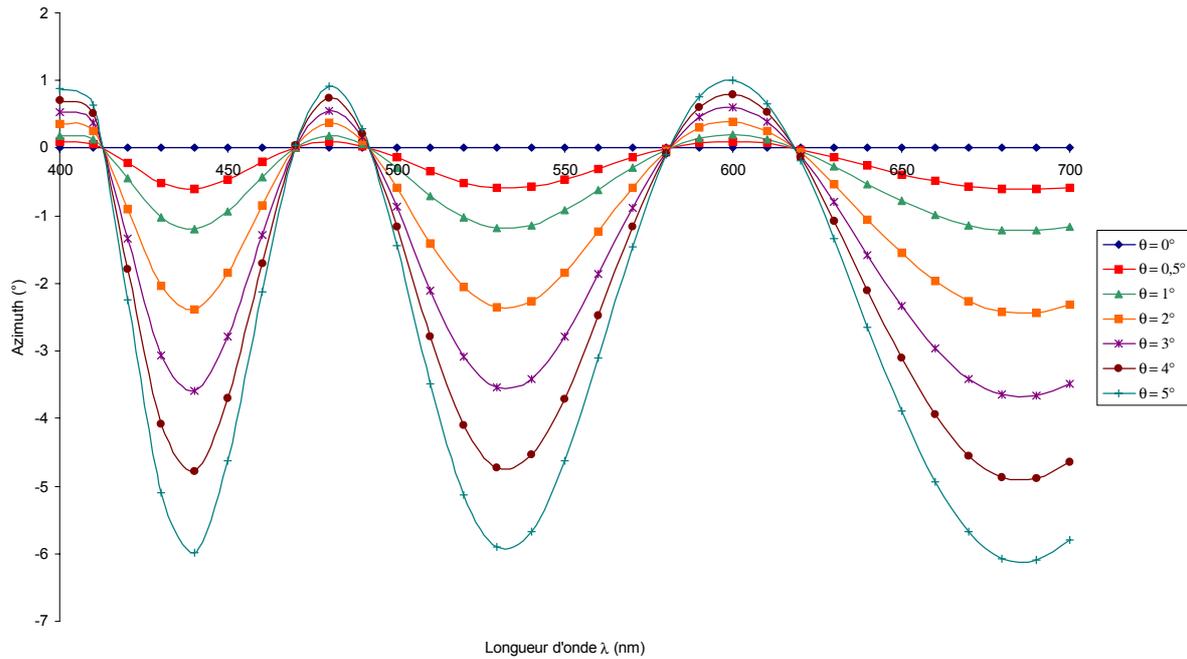


Figure 3.8 : Simulation de l'azimut α d'une lame quart d'onde en quartz-MgF₂, en fonction de la longueur d'onde λ et pour différentes valeurs de désalignement θ entre les deux cristaux.

La figure précédente montre que, de la même manière que pour l'ellipticité ε , l'azimut de la lame oscille trois fois entre 400 et 700 nm, que la période de modulation augmente avec la longueur d'onde et que l'amplitude des oscillations est linéairement dépendante du désalignement θ . Nous avons expérimentalement observé une amplitude de ces oscillations d'environ 1° (voir plus loin), correspondant donc à une valeur de θ de $0,72^\circ$. Cette valeur du désalignement entre les deux cristaux a donc été choisie dans les modélisations qui suivent.

Afin de comprendre ces oscillations, nous avons examiné conjointement les valeurs de ε et de α en fonction de λ ainsi que les valeurs de déphasage engendré par chacune des deux lames constituant la lame achromatique, sur la même gamme spectrale.

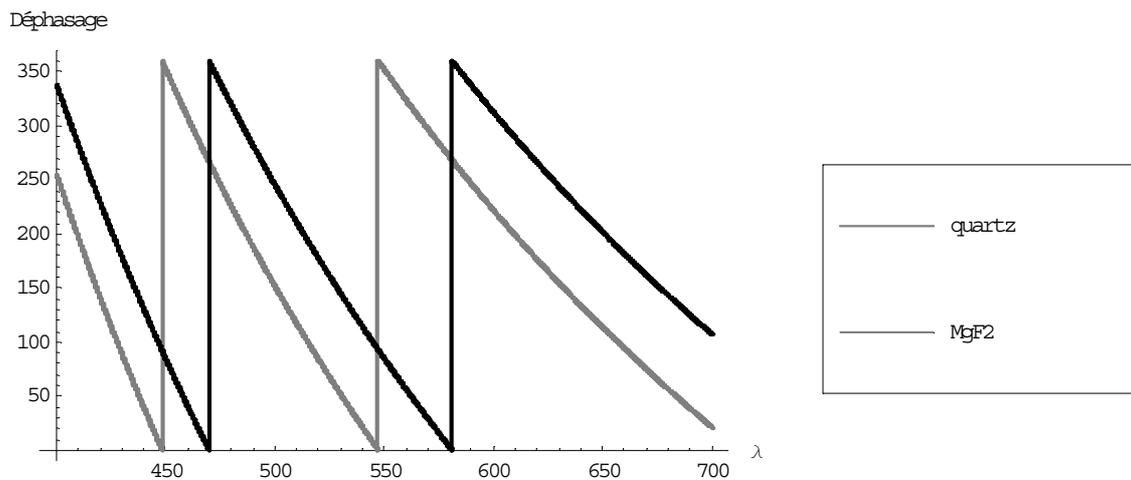


Figure 3.9 : Déphasage théorique (en degré) induit respectivement par la lame de quartz et par la lame de MgF_2 en fonction de la longueur d'onde λ (en nm)

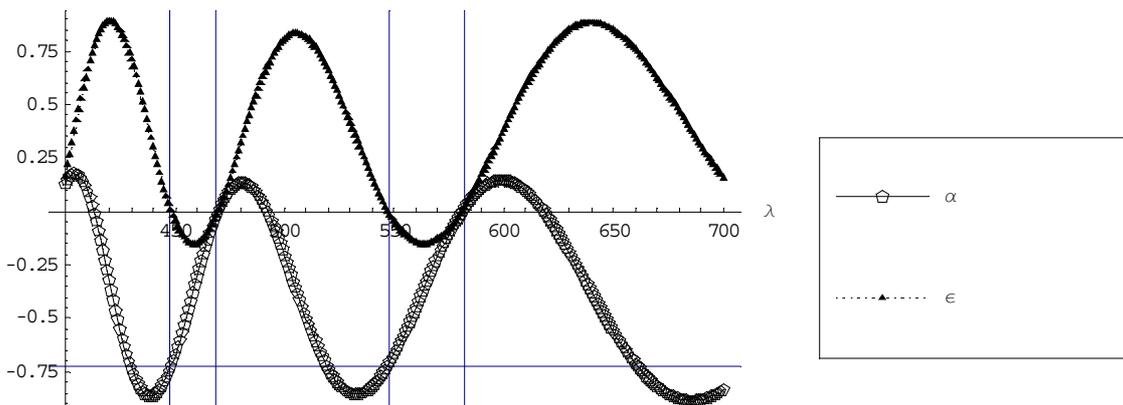


Figure 3.10 : Azimut α (en degré) et ellipticité ε (en degré) de la lame achromatique en quartz- MgF_2 en fonction de la longueur d'onde λ (en nm) pour $\theta = 1^\circ$

A la longueur d'onde $\lambda_1 = 448$ nm, la lame de quartz n'induit aucun déphasage alors que la lame de MgF_2 agit comme une lame quart d'onde parfaite (Figure 3.9). Dans ce cas de figure, la première lame n'engendre absolument aucune modification polarimétrique du faisceau et l'ellipticité de la lame compensée est donc celle de la deuxième lame *c. à d.* une ellipticité nulle, étant donné que nous avons négligé l'activité optique des cristaux dans notre modèle. L'azimut est également celui de la deuxième lame, à savoir $\theta = 0,72^\circ$ correspondant au désalignement, étant donné que la référence est prise sur la position de la lame de quartz. A

la longueur d'onde $\lambda_2 = 469$ nm, les rôles sont inversés. La lame de quartz agit comme une parfaite quart d'onde et la lame de MgF_2 comme une lame onde. Les valeurs d'ellipticité et d'azimut de la lame compensée sont donc les valeurs de la lame de quartz *c. à d.* des valeurs nulles. Aux longueurs d'onde $\lambda_3 = 548$ nm et $\lambda_4 = 582$ nm, nous retrouvons les mêmes cas de figure que pour λ_1 et λ_2 .

Les variations de la position azimutale des lames de phase ainsi que l'ellipticité des modes de vibration propre observés lors de l'étalonnage à vide de l'appareillage, proviendraient donc vraisemblablement d'un défaut d'alignement interne des lames achromatiques (voir tableaux 3.7 et 3.8) . Pour vérifier cette hypothèse, nous avons déterminé expérimentalement la position des axes neutres des lames de phase conformément à la méthode décrite dans le paragraphe précédent (configuration polariseurs croisés) afin de pouvoir les comparer au modèle et ainsi remonter aux caractéristiques des lames. Nous avons tout d'abord choisi de comparer les résultats expérimentaux avec le modèle en utilisant les données fournisseurs (épaisseurs des deux cristaux). Le résultat apparaît sur la figure 3.11 et la différence observée entre les deux courbes met en évidence les mauvaises valeurs d'épaisseurs fournies par le constructeur. Nous avons donc choisi de réaliser un ajustement de la courbe expérimentale (minimisation d'une fonction d'erreur par la méthode des moindres carrés, réalisée sous Matlab) afin de déterminer au mieux les caractéristiques des lames et ainsi valider notre modèle en le comparant à l'expérience. Le résultat, obtenu pour une des deux lames, apparaît sur la figure 3.12. La quasi superposition des points expérimentaux avec les points recalculés (en particulier entre 550 et 700 nm) nous permet de valider notre modèle et ainsi d'obtenir une estimation des caractéristiques de nos lames. Concernant la lame d'entrée (courbes 3.11 et 3.12), l'estimation est la suivante : 242 μm d'épaisseur de quartz, 172 μm d'épaisseur de MgF_2 et un défaut d'alignement interne de $0,78^\circ$. Les caractéristiques de la lame de sortie ont également été calculées (tableau 3.10, page 36).

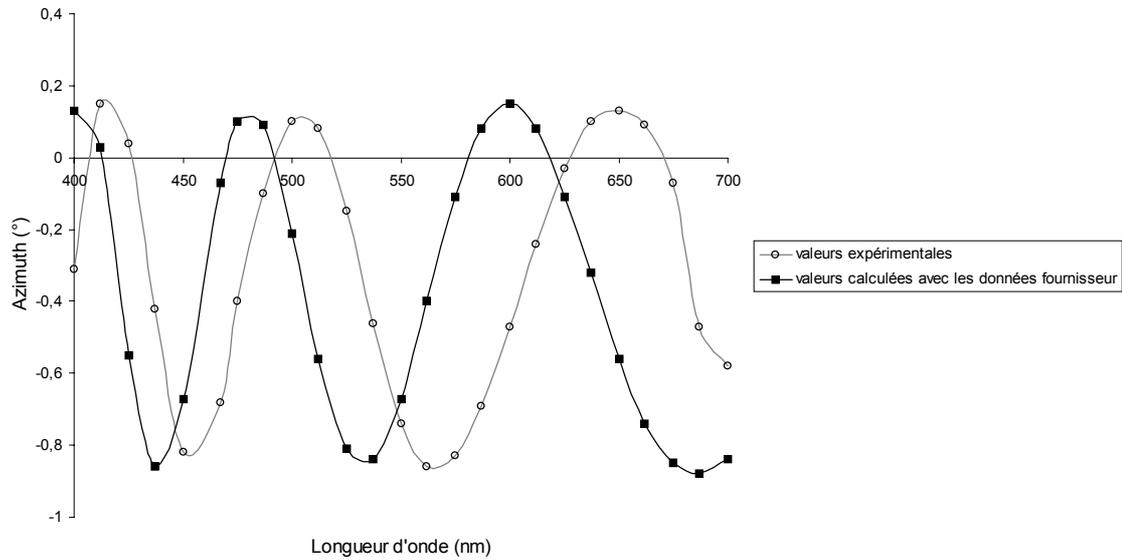


Figure 3.11 : Position des axes neutres de la lame achromatique relevée expérimentalement ainsi que la position calculée en considérant les données fournisseur

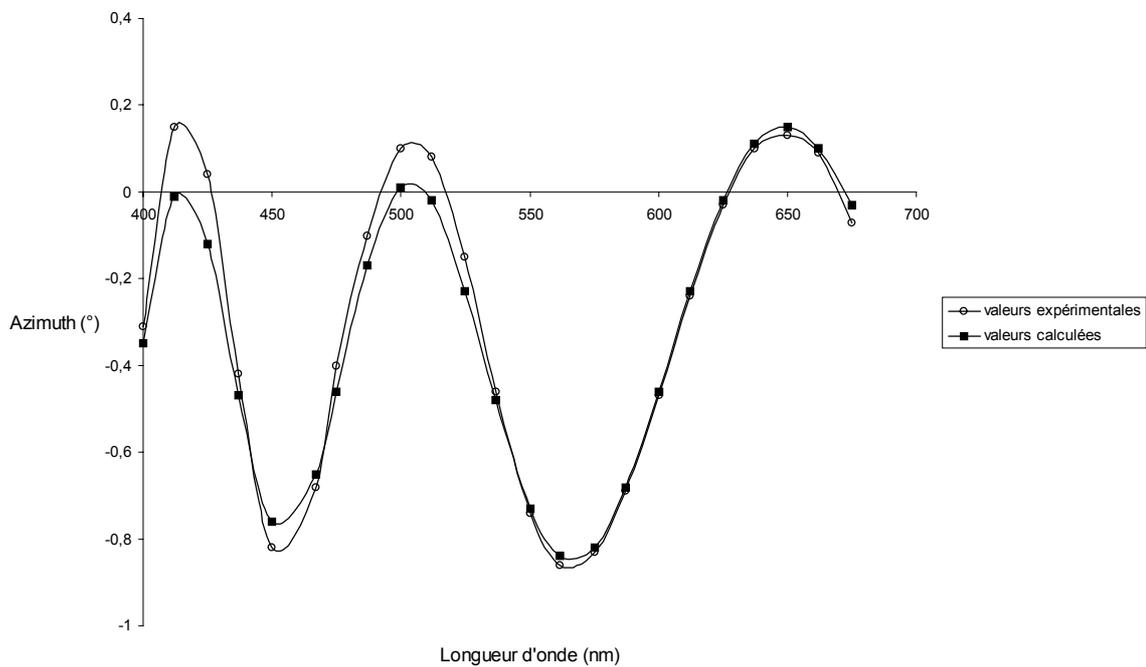


Figure 3.12 : Position des axes neutres de la lame achromatique relevée expérimentalement ainsi que le meilleur ajustement obtenu pour des épaisseurs de 242 μm pour la lame de quartz, 172 μm pour la lame de MgF2 et un défaut d'alignement interne de 0,78 $^\circ$

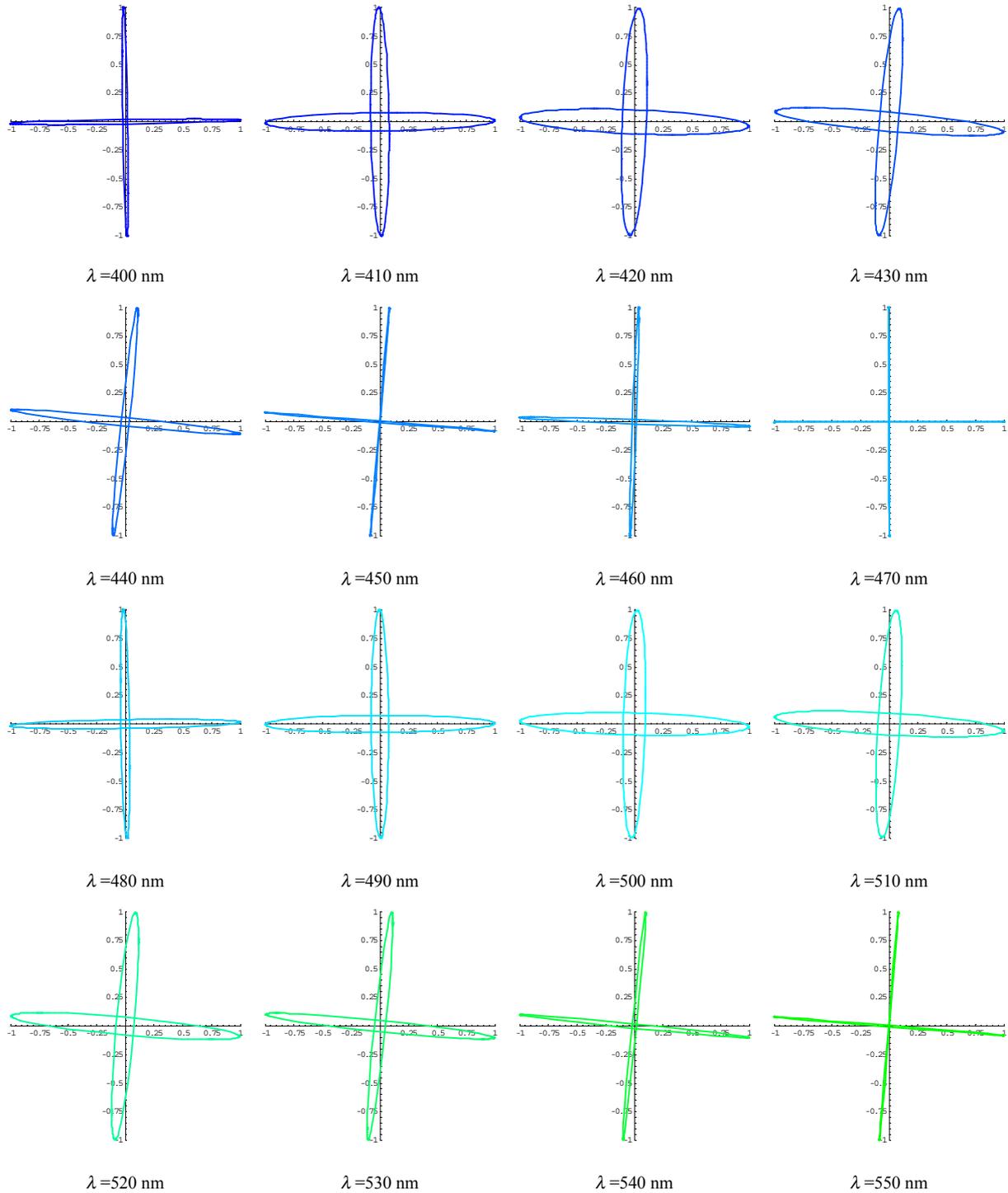


Tableau 3.7 : Représentation des modes de vibration propre d'une lame quasi achromatique en quartz-MgF₂, présentant un défaut d'alignement interne de 5°, en fonction de λ variant de 400 à 550 nm

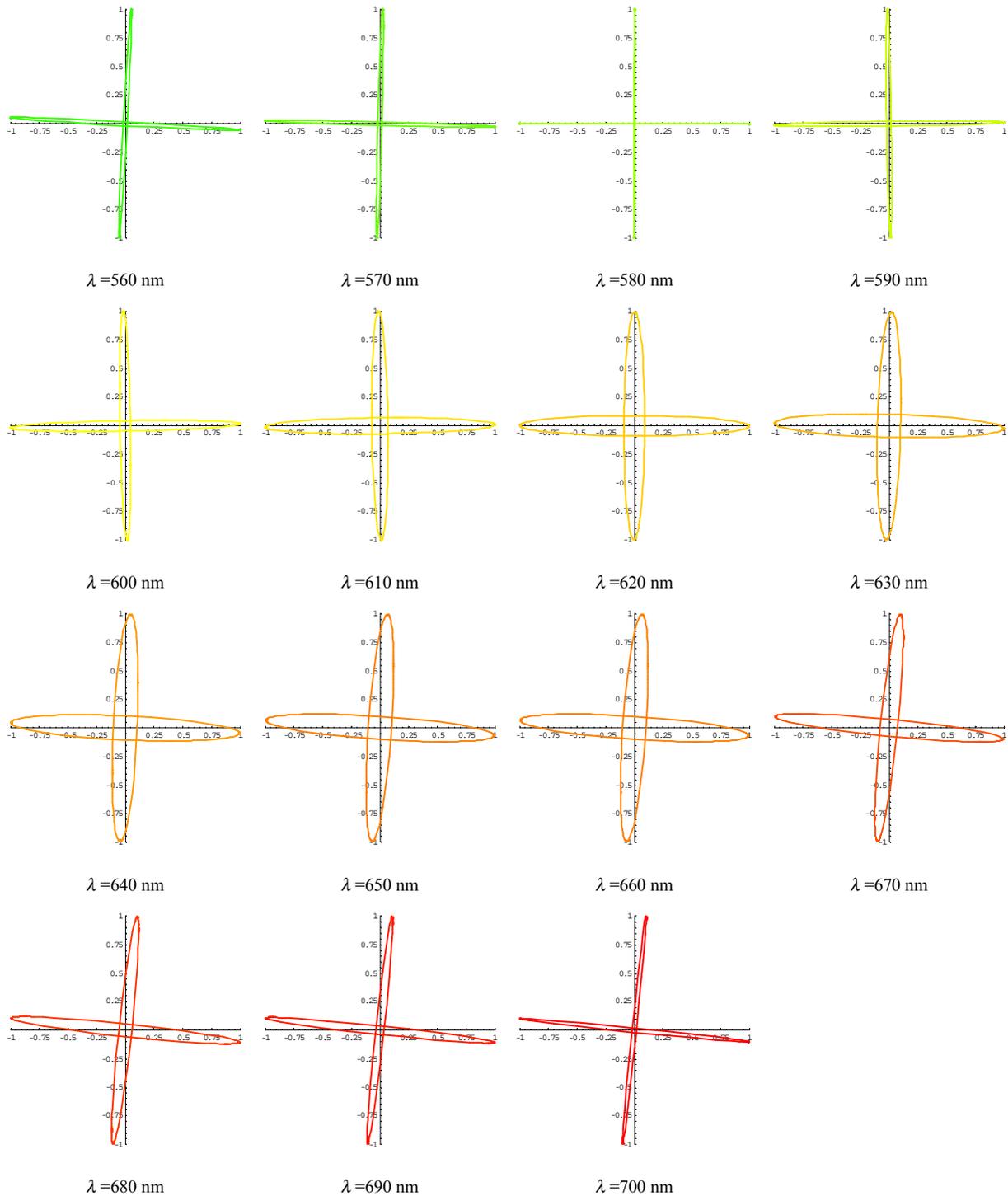


Tableau 3.8 : Représentation des modes de vibration propre d'une lame quasi achromatique en quartz-MgF₂, présentant un défaut d'alignement interne de 5°, en fonction de λ variant de 560 à 700 nm

La différence observée, figure 3.12, entre l'expérience et la théorie, viendrait vraisemblablement de l'activité optique des cristaux (en particulier le quartz) [17], négligée dans notre modèle, d'autant que cette différence augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'UV [18]. Nous avons donc réalisé un ajustement sur différentes portions de la courbe afin de déterminer la précision des résultats obtenus (tableau 3.9).

Domaine de longueur d'onde (nm)	400-475	400-600	400-700
Épaisseur de quartz (μm)	247	239	242
Épaisseur de MgF_2 (μm)	168	175	172
Défaut d'alignement ($^\circ$)	0,74	0,68	0,78

Tableau 3.9 : estimation des caractéristiques de la lame achromatique d'entrée obtenue en considérant différents domaines de longueur d'onde

	Lame $\lambda/4$ d'entrée	Lame $\lambda/4$ de sortie
Épaisseur de quartz (μm)	242	239
Épaisseur de MgF_2 (μm)	172	162
Défaut d'alignement ($^\circ$)	0,78	0,19

Tableau 3.10 : estimation des caractéristiques des lames quart d'onde

Les épaisseurs calculées en réalisant un ajustement sur différentes parties de la courbe expérimentale constituent donc une estimation des épaisseurs vraies à 4-5 μm . Le défaut d'alignement interne des lames est obtenu, quant à lui, avec une précision de 0,1 $^\circ$.

Il semblerait donc que l'ellipticité des modes de vibration propre des lames quart d'onde soit principalement due à une erreur d'alignement interne des cristaux les constituant, bien plus qu'à l'activité optique du quartz. Nous allons, par la suite, vérifier cette hypothèse en calculant l'ellipticité des vecteurs propres par la méthode décrite dans le paragraphe 3.3.3 (étalonnage à vide de l'appareillage) et en comparant les résultats obtenus avec les valeurs calculées dans ce paragraphe.

[17] J. F. NYE, "Physical Properties of Crystals", Clarendon, Oxford (1957).

[18] A. YARIV, P. YEH, "Optical waves in crystals", J. Wiley and sons, New York (1984).

3.3 Etalonnage du polarimètre

3.3.1 Introduction

Nous avons réalisé l'étalonnage à vide de l'appareillage pour différentes longueurs d'onde, de 400 nm à 700 nm. Celui-ci nous permet de déterminer les caractéristiques des lames (déphasage, ellipticité des modes de vibration propres, dichroïsme éventuel). Par la suite, nous avons introduit ces caractéristiques dans la matrice de calcul $[B_{cor}]$ (équation (3.17)), puis recalculé la matrice de Mueller afin de vérifier que les erreurs réalisées sur les éléments de la matrice de Mueller, après correction des erreurs systématiques, correspondent bien aux erreurs aléatoires dont il est difficile de s'affranchir (voir Chapitre 1, page 32).

3.3.2 Présentation de l'étalonnage pour quelques longueurs d'onde

Pour $\lambda = 650$ nm, la matrice de Mueller à vide expérimentale, obtenue à l'aide du polarimètre et en considérant des lames quart d'onde parfaites (sans défaut), est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.108 & -0.007 & -0.007 \\ 0.081 & 0.817 & -0.005 & -0.004 \\ -0.013 & 0.006 & 0.807 & -0.005 \\ -0.005 & 0.006 & 0.004 & 1.007 \end{bmatrix}$$

Les valeurs non nulles des éléments m_{01} et m_{10} nous donnent une estimation du déphasage vrai des lames $\lambda/4$: $\delta_e = 85,37^\circ$ et $\delta_s = 83,30^\circ$. En tenant compte de ces valeurs, la matrice de Mueller corrigée à vide devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.000 & -0.008 & -0.007 \\ 0.010 & 0.995 & -0.006 & -0.005 \\ -0.015 & 0.007 & 0.983 & -0.006 \\ -0.005 & 0.006 & 0.005 & 1.006 \end{bmatrix}$$

La méthode utilisée ici pour estimer le déphasage des lames n'est pas tout à fait adaptée en raison d'un écart beaucoup trop important par rapport à 90° . Dans ce cas de figure, il existe une très faible corrélation entre les éléments m_{01} et m_{10} et une double itération sur les valeurs de déphasage afin de minimiser la fonction d'erreur χ^2 par rapport aux intensités s'avère alors nécessaire, comme en témoigne la figure 3.13. Les valeurs précédemment déterminées constituent alors des valeurs de départ lors de la minimisation par la méthode des moindres carrés.

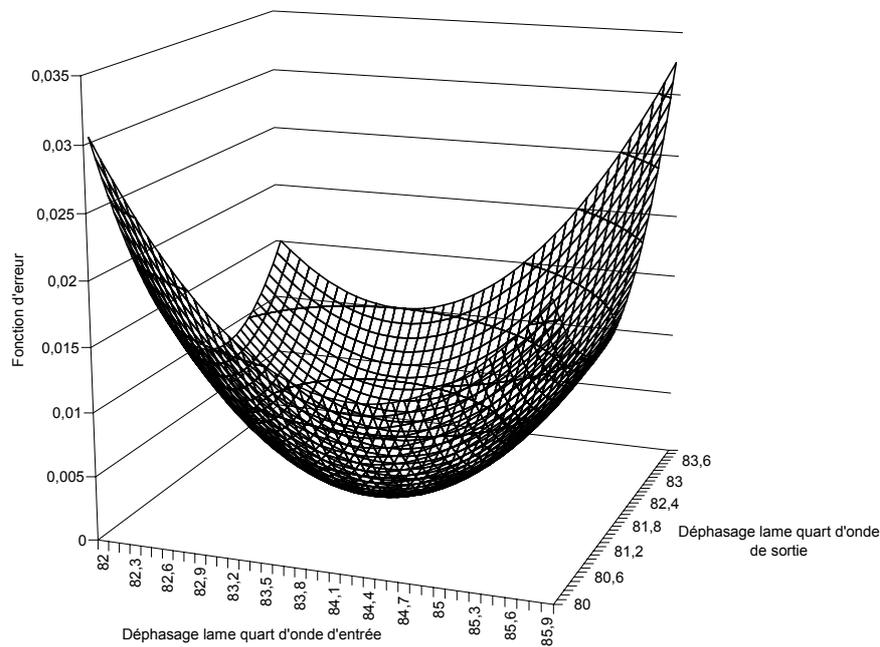


Figure 3.13 : Fonction d'erreur χ^2 en fonction du déphasage des lames $\lambda/4$ introduit dans la matrice de calcul pour une longueur d'onde de 650 nm

La nouvelle estimation du déphasage vrai des lames devient alors : $\delta_e = 84,77^\circ$, $\delta_s = 83,23^\circ$, ce qui nous conduit à la matrice de Mueller corrigée suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,001 & -0,008 & -0,007 \\ 0,001 & 1,008 & -0,006 & -0,005 \\ -0,015 & 0,007 & 0,995 & -0,006 \\ -0,005 & 0,006 & 0,005 & 1,007 \end{bmatrix}$$

Notons que la valeur de m_{20} est supérieure à 0,01. Comme nous venons de le voir dans la section 3.3.3 l'erreur faite sur les éléments m_{20} et m_{02} est due à la biréfringence elliptique des lames dont les caractéristiques, $\varepsilon_e = 0,34^\circ$; $\varepsilon_s = 0,04^\circ$; $\phi_e = 90^\circ$; $\phi_s = 90^\circ$, ont été estimées à l'aide de la même procédure que pour le déphasage (section 3.3.2). Après correction, la matrice de Mueller à vide devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,001 & 0,001 & -0,007 \\ -0,001 & 1,008 & -0,006 & -0,005 \\ 0,000 & 0,008 & 0,996 & -0,006 \\ -0,005 & 0,006 & 0,005 & 1,008 \end{bmatrix}$$

Les éléments non nuls m_{23} et m_{32} pourraient résulter d'un dichroïsme éventuel (voir tableau 3.6). Si tel est le cas, l'utilisation de la procédure utilisée pour estimer le déphasage et l'ellipticité des vecteurs propres nous permet de remonter aux rapports des coefficients de transmission des lames : $\frac{T_s}{T_f} = 1,007$ pour la lame d'entrée et $\frac{T_s}{T_f} = 0,994$ concernant la lame

de sortie. Dans ce cas, et après correction, la matrice de Mueller devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,001 & 0,001 & -0,007 \\ -0,001 & 1,008 & -0,006 & -0,005 \\ 0,000 & 0,008 & 0,996 & 0,000 \\ -0,005 & 0,007 & -0,001 & 1,008 \end{bmatrix}$$

En réalité, les valeurs de m_{23} et m_{32} sont si faibles que ces éléments ne diffèrent probablement de zéro qu'en raison d'erreurs de mesure aléatoires ou d'un très faible phénomène extérieur. En conséquence, ces éléments étant inférieurs à 0,01 (ordre de grandeur des erreurs statistiques réalisées jusqu'à présent sur les éléments de la matrice de Mueller), nous ne pouvons les considérer comme étant des erreurs systématiques.

Comme nous venons de le voir, une très grande précision sur les éléments de la matrice de Mueller à vide (inférieure à 0,01) a donc été obtenue à travers un étalonnage complet des erreurs systématiques et ce, grâce au modèle d'un élément biréfringent elliptique dichroïque, utilisé pour décrire chacune des lames $\lambda/4$. Ceci conduit à une meilleure corrélation entre le fichier "64-intensités" expérimental $[I_{exp}]$ et le fichier recalculé $[I_{sim}]$. Cette précision est obtenue sur toute la bande spectrale 400-700nm. Par exemple, à $\lambda = 600$ nm, la matrice de Mueller expérimentale obtenue est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,000 & -0,011 & 0,009 \\ 0,002 & 1,000 & -0,009 & 0,007 \\ -0,027 & -0,005 & 0,984 & 0,004 \\ 0,006 & -0,004 & -0,003 & 1,006 \end{bmatrix}$$

Après correction, celle-ci devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,000 & 0,001 & 0,009 \\ -0,001 & 1,005 & -0,009 & 0,007 \\ 0,000 & -0,005 & 0,989 & 0,000 \\ 0,006 & -0,004 & 0,000 & 1,007 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 550$ nm, la matrice expérimentale à vide, calculée à l'aide du polarimètre se présente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,021 & -0,010 & -0,001 \\ -0,011 & 0,994 & 0,008 & 0,001 \\ 0,002 & -0,003 & 0,993 & 0,007 \\ 0,000 & -0,001 & -0,004 & 1,002 \end{bmatrix}$$

Les corrections conduisent à la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,003 & 0,008 & 0,001 \\ 0,000 & -0,003 & 1,003 & 0,000 \\ 0,001 & -0,001 & 0,000 & 1,002 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 500$ nm, notre polarimètre fournit une matrice à vide :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,003 & -0,010 & 0,000 \\ -0,028 & 1,036 & -0,008 & 0,000 \\ -0,029 & 0,009 & 1,033 & -0,005 \\ 0,002 & -0,004 & 0,000 & 1,005 \end{bmatrix}$$

qui, après correction devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,006 & -0,008 & 0,000 \\ 0,000 & 0,009 & 1,003 & 0,001 \\ 0,002 & -0,004 & 0,001 & 1,006 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 600$ nm, il est intéressant de noter qu'à l'exception de m_{22} , tous les éléments de la matrice de Mueller sont obtenus avec une précision inférieure au centième, ce qui constitue un progrès important par rapport aux résultats obtenus jusqu'à présent [8, 14], en particulier ceux obtenus sur une large bande spectrale [19]. Afin de mettre en évidence l'intérêt de l'étalonnage, nous avons comparé l'ellipticité des états propres d'une des lames calculée en réalisant un ajustement sur la position azimutale de la lame (voir section 3.1.4) et l'ellipticité de la même lame obtenue en réalisant un étalonnage à vide complet. Le résultat apparaît sur la figure 3.14 et témoigne d'une assez bonne corrélation entre les deux méthodes.

[19] **D. B. CHENAULT**, "Infrared Spectropolarimetry", Thèse de Doctorat, University of Alabama in Huntsville (1992).

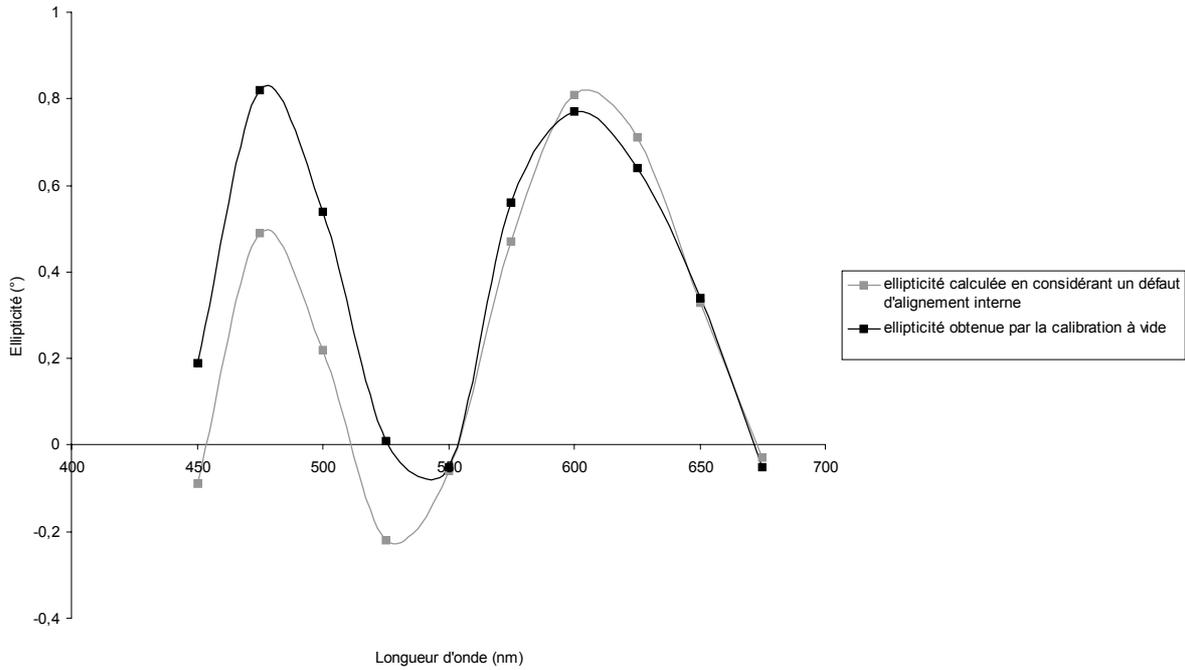


Figure 3.14 : Ellipticité des modes de vibration propre de la lame d'entrée, en fonction de λ , calculée de deux manières différentes : 1) en réalisant un ajustement sur la position des axes neutres en fonction de λ ; 2) en réalisant un étalonnage à vide

La différence entre les deux courbes s'explique aisément par des erreurs statistiques qui brulent les éléments de la matrice de Mueller et qui, par conséquent, compte tenu du fait de la relativement faible valeur d'ellipticité, nous amène à surestimer ou sous-estimer l'ellipticité en travaillant sur les éléments m_{02} et m_{20} . Néanmoins, nous pouvons en déduire que la biréfringence elliptique des lames provient bien d'un défaut d'alignement interne propre aux lames compensées, ce qui valide les calculs réalisés dans la section 3.1.4. Les caractéristiques "optiques" des deux lames ont donc été calculées sur la gamme spectrale du visible et apparaissent sur les figures 3.15 à 3.19*.

*

Notons au passage que nous n'avons pas adopté la même convention de signe lors de la détermination expérimentale de l'ellipticité et lors de son calcul théorique. Il conviendra donc de choisir le signe opposé dans l'exploitation expérimentale des figures 3.18 et 3.19.

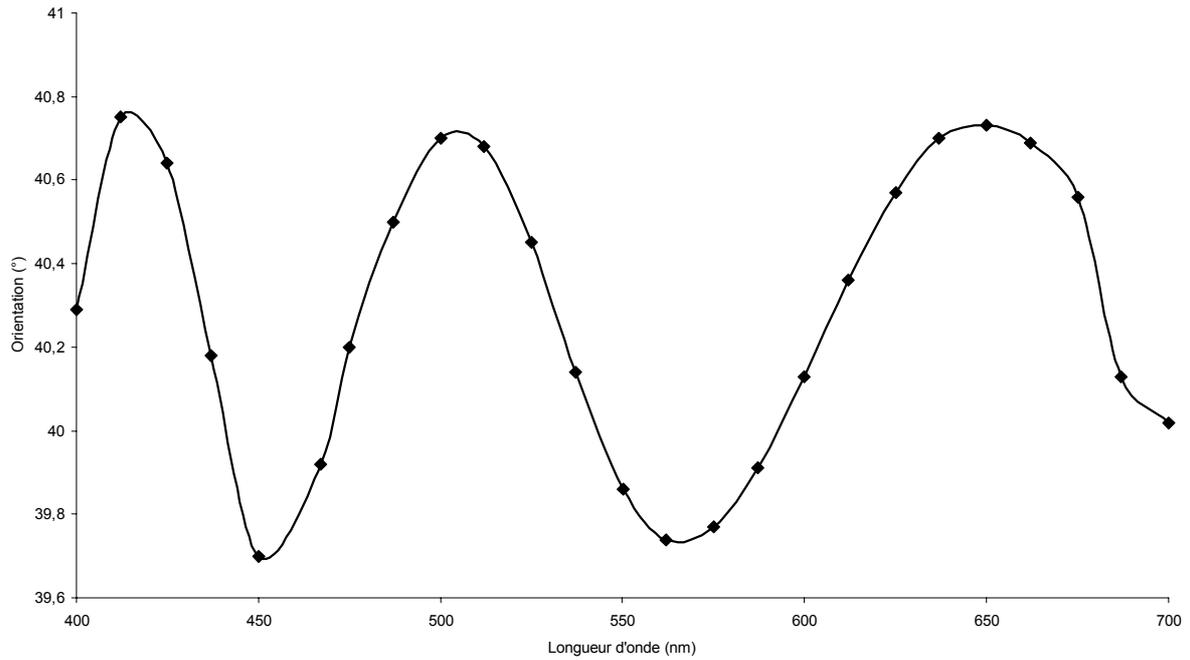


Figure 3.15 : Position des axes neutres de la lame d'entrée en fonction de λ , obtenue expérimentalement

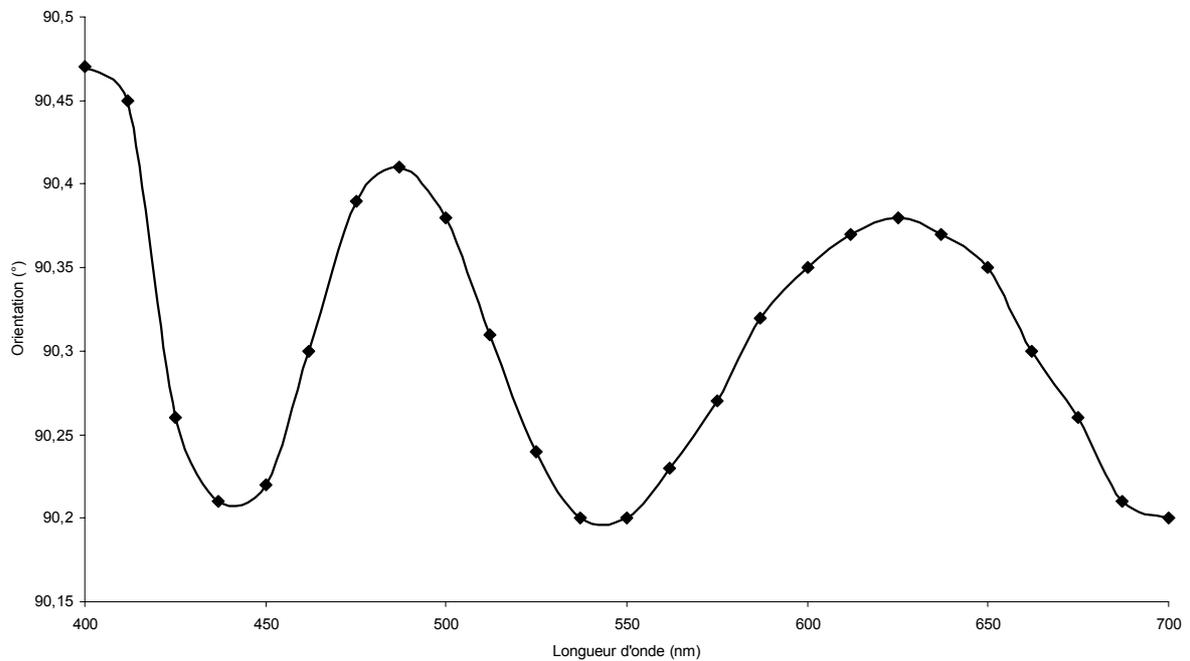


Figure 3.16 : Position des axes neutres de la lame de sortie en fonction de λ , obtenue expérimentalement

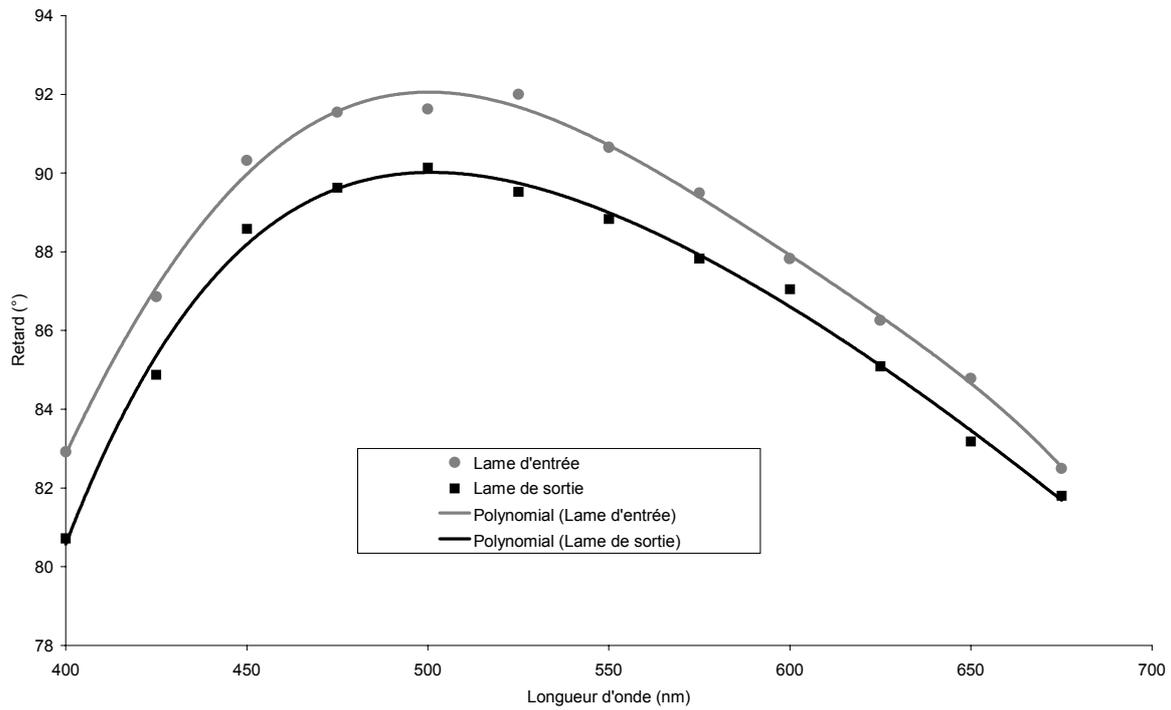


Figure 3.17 : Déphasage des lames d'entrée et sortie calculée en réalisant un étalonnage à vide du polarimètre

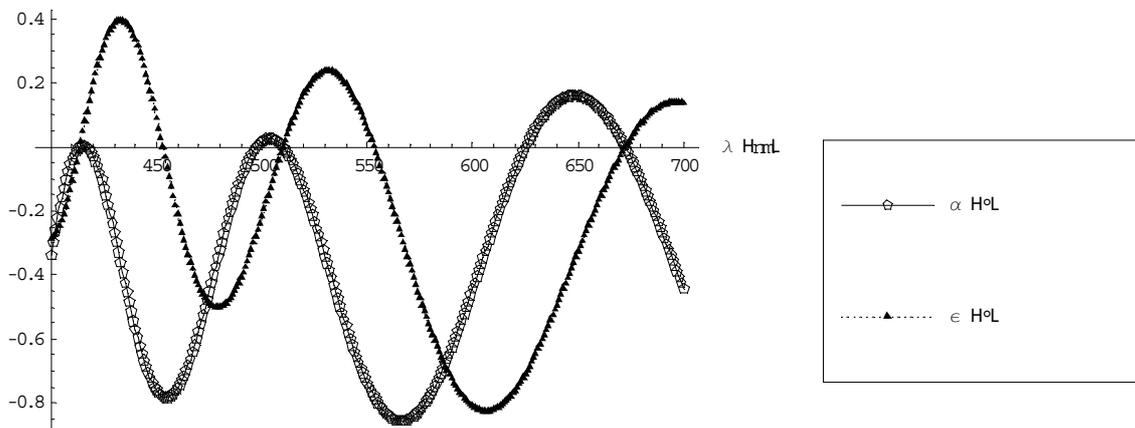


Figure 3.18 : Ellipticité ϵ et position α des axes neutres de la lame d'entrée calculées grâce aux valeurs du tableau 3.10

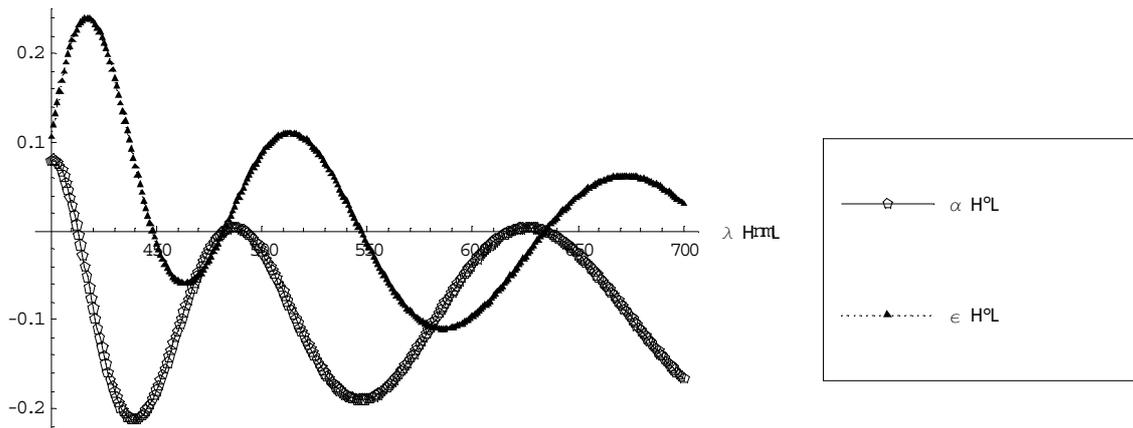


Figure 3.19 : Ellipticité ε et position α des axes neutres de la lame de sortie calculées grâce aux valeurs du tableau 3.10

3.3.3 Conclusion

La méthode d'étalonnage telle que nous la décrivons dans cette section nous permet donc de corriger la quasi-totalité des défauts des lames. En témoigne la corrélation entre les caractéristiques obtenues grâce à l'étalonnage à vide du polarimètre et celles calculées à l'aide du modèle de deux cristaux avec un défaut d'alignement interne. Ceci nous permet d'obtenir une précision sur les éléments de la matrice de Mueller inférieure au centième (*c. à d.* de l'ordre de grandeur des erreurs aléatoires observées grâce à l'analyse de la reproductibilité des résultats expérimentaux). Une étude statistique basée sur le critère d'Anderson et Barakat fait cependant apparaître, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, un résiduel d'erreurs aléatoires non corrigées en raison des très faibles valeurs d'écart type attribuées aux erreurs aléatoires. Ces erreurs sont malgré tout relativement négligeables et n'apparaissent qu'en raison du choix de la procédure d'acquisition et de la correction des fluctuations d'intensités par la référence. En conséquence, l'intérêt que peut susciter la caractérisation de lames de phase compensées nous a poussé à mettre en place un banc de mesures moins onéreux. L'emploi courant de ces lames lorsqu'il s'agit de coder l'information de polarisation associé au prix exorbitant d'un laser doublé d'un OPO nous a conduit à mettre en place un banc de caractérisation utilisant un monochromateur. C'est l'objet de la dernière section du chapitre.

3.4 Mise en place d'un banc de caractérisation de lames de phase compensées

3.4.1 Introduction

Les lames de phase compensées (zéro-ordre ou premier-ordre) réalisées par collage optique de deux cristaux sont couramment utilisées en instrumentation ; elles remplacent les lames simples lorsque l'épaisseur requise est trop petite ou lorsque des lames quasi-achromatiques sont nécessaires. Dans la plupart des éléments destinés à mesurer des états de polarisation, ces éléments sont devenus essentiels. Ils peuvent être utilisés, par exemple, comme éléments actifs dans des mesures polarimétriques haute-résolution comme nous venons de le voir. En conséquence, une erreur résiduelle associée à ces lames peut entraîner une erreur de mesure non négligeable et doit donc être prise en compte dans une procédure d'étalonnage. Le désalignement entre les axes neutres des deux cristaux est une des principales sources d'erreur et conduit à l'oscillation des axes neutres de la lame compensée avec la longueur d'onde ainsi qu'à des modes de vibration propres elliptiques. La détermination expérimentale de cette oscillation et l'ajustement réalisé grâce à un modèle théorique prenant en compte ce désalignement nous permet d'estimer à la fois, la valeur de l'angle entre les axes neutres des deux cristaux et leurs épaisseurs, puis par la suite d'accéder aux caractéristiques optiques de la lame (déphasage, ellipticité des modes de vibration propre,...). Il nous semblait donc intéressant, à ce stade de l'étude, de mettre en place un banc de test de lame compensée, basé sur le même principe que précédemment mais en remplaçant le laser par une source de lumière blanche puissante et l'oscillateur paramétrique optique par un simple monochromateur [20]. Nous avons ensuite cherché à valider le banc en caractérisant une lame quart d'onde à 532 nm utilisée dans un système LIDAR (Light Detection And Ranging) [21].

[20] **B. BOULBRY, B. LE JEUNE, F. PELLEN, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Identification of error parameters and calibration of a double-crystal birefringent waveplate with a broadband spectral light source", *J. Phys. D : Applied Phys.*, vol. 35, 2508-2515 (2002).

[21] **F. PELLEN**, "Evaluation de l'apport en détection en milieu marin de la technique de modulation hyperfréquence sur porteuse optique à 0,5 micron", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (2000).

Les lames de phase sont généralement réalisées à l'aide d'une simple lame de cristal, mais l'épaisseur requise est souvent trop petite pour être polie correctement. Bien que la calcite, par exemple, constitue un excellent matériau dans la construction des lames de phase, son importante biréfringence impose l'utilisation d'une lame extrêmement fine, inférieure au micron, dans la construction d'une lame $\lambda/4$ [Chap. 2, Ref 17]. C'est pourquoi, la plupart des lames de phase sont des retardeurs ordre-multiple. Le problème vient du fait que les lames zéro-ordre ou premier-ordre compensées offrent un grand nombre d'avantages : par exemple, les variations du retard de phase avec la température sont cent fois moins importantes que pour les ordres multiples. Ces mêmes variations avec l'angle d'incidence sont également beaucoup moins importantes, ce qui constitue un avantage certain.

Heureusement, il est possible de réaliser des lames faible ordre compensées en assemblant deux cristaux (de quartz, par exemple) d'épaisseur quasi identique et en croisant leurs axes optiques. La lame est ensuite polie jusqu'à obtenir une différence d'épaisseur correspondant au déphasage désiré. La lame $\lambda/4$ que nous avons cherché à caractériser est constituée de deux lames de quartz d'épaisseur d_1 et d_2 tel que :

$$\frac{\lambda}{4} = \Delta n_{\text{quartz}}(\lambda)(d_2 - d_1) \quad (3.38)$$

où λ est la longueur d'onde d'émission du laser, à savoir 532 nm et $\Delta n_{\text{quartz}}(\lambda)$, la biréfringence du quartz à la longueur d'onde λ .

3.4.2 Modèle théorique

Le modèle théorique est quasiment le même que dans la section 3.3.4, à savoir deux lames de quartz avec un désalignement θ entre l'axe rapide de la première lame et l'axe lent de la deuxième. Les raisons d'une éventuelle oscillation de la position azimutale de la lame compensée sont les mêmes que pour les lames quasi-achromatiques utilisées dans notre polarimètre, comme en témoigne les modélisations effectuées en incorporant dans nos calculs des valeurs d'épaisseurs $d_1 = 492,78 \mu\text{m}$ et $d_2 = 507,25 \mu\text{m}$, nécessaires à l'élaboration d'une lame $\lambda/4$ de 1 mm ainsi qu'une erreur d'alignement θ de 1° entre les deux cristaux (figure 3.20). Le calcul de la position azimutale de la lame ainsi que celui de l'ellipticité des modes

de vibration propre repose sur les mêmes équations que précédemment (équations (3.36) et (3.37)).

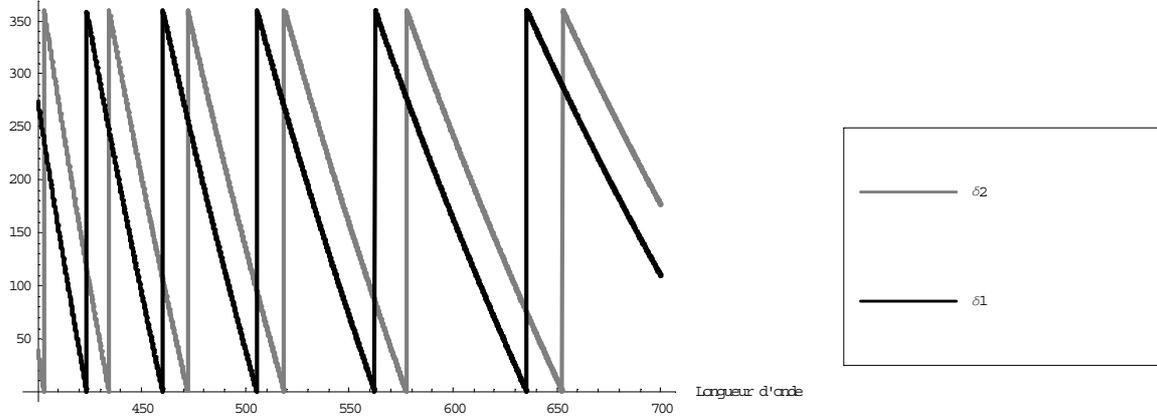


Figure 3.20 : Retard calculé (en degrés), en fonction de λ (nm), pour chacune des lames de quartz constituant une lame $\lambda/4$ zéro-ordre compensée à 532 nm, d'une épaisseur de 1 mm

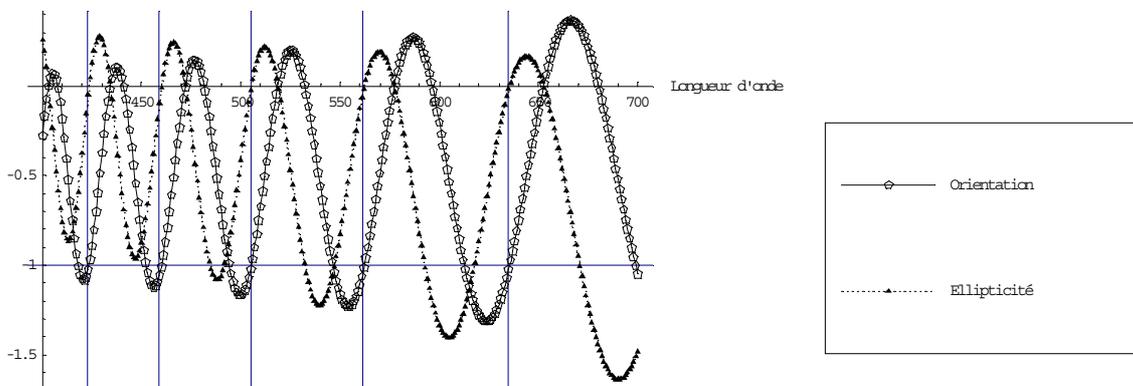
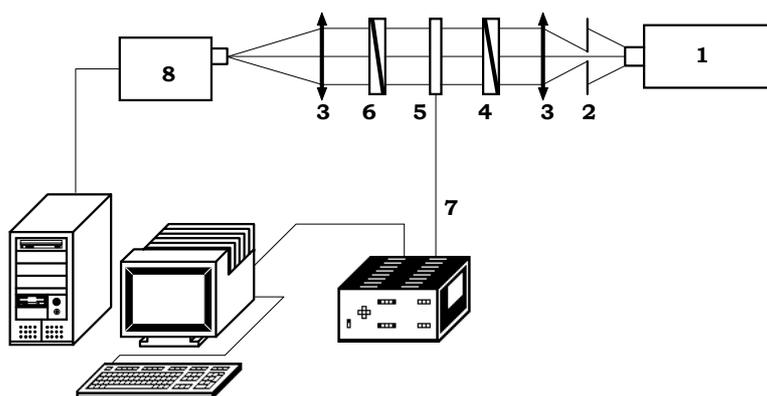


Figure 3.21 : Orientation (en degrés) et ellipticité des modes de vibration propre (en degrés), en fonction de λ (nm), d'une lame de quartz zéro-ordre compensée à 532 nm, d'une épaisseur de 1 mm

3.4.3 Méthodologie expérimentale, description du banc de test et résultats

L'orientation des axes neutres de la lame a été calculée grâce à la configuration polariseurs croisés, conformément à la méthode décrite dans le chapitre 2 (section 2.4.3.a). L'intensité est minimale voir nulle (cas idéal et peu envisageable d'une lame compensée sans défaut d'alignement interne) lorsque les axes neutres de la lame sont alignés avec la direction des polariseurs qui constituent ainsi un référentiel dans lequel nous pouvons repérer l'orientation de la lame. La description du banc de test apparaît dans la figure 3.22. La source de lumière blanche est une lampe halogène de 10 W, elle couvre le spectre de longueurs d'onde compris entre 400 et 600 nm. Un trou est utilisé afin d'obtenir une source quasi ponctuelle et ce, afin de pouvoir paralléliser le faisceau avant la traversée des différents éléments optiques. Les axes de ces éléments sont alignés à l'aide de moteurs pas à pas précis au centième de degré. Le détecteur est un photomultiplicateur. La résolution en longueur d'onde du monochromateur (figure 3.23) a été estimée à l'aide d'un laser He-Ne et se trouve être inférieure au nanomètre.

Nous avons ainsi mesuré l'intensité en fonction de la longueur d'onde λ de 400 à 600 nm, par pas de 1 nm, pour plusieurs positions angulaires de la lame de phase (figures 3.24 à 3.28).



- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. Lampe halogène | 6. Polariseur linéaire horizontal |
| 2. Trou | 7. Alimentation des moteurs pas à pas |
| 3. Lentilles | 8. Monochromateur de Czerny-Turner (Jobin-Yvon) + détecteur |
| 4. Polariseur linéaire vertical | |
| 5. Lame de phase compensée | |

Figure 3.22 : Dispositif expérimental

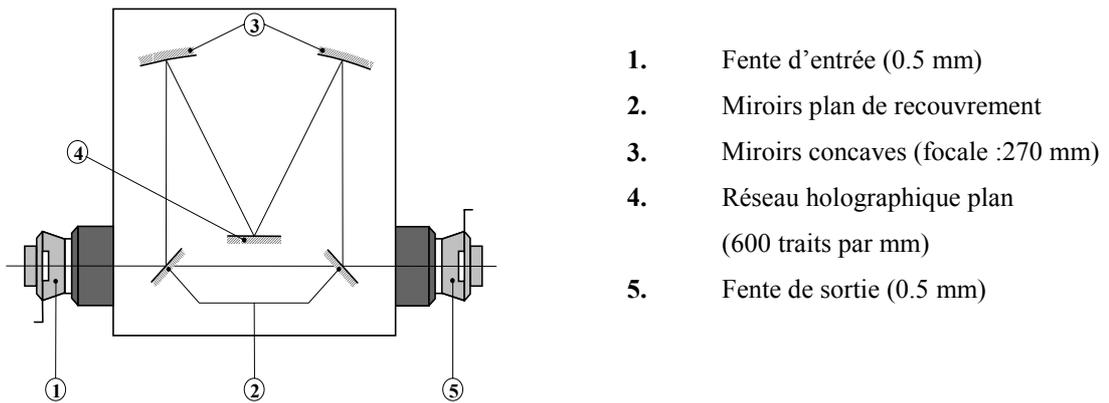


Figure 3.23 : Schéma et caractéristiques du monochromateur

L'examen des figures 3.24 et 3.26 montre une oscillation de l'intensité détectée en fonction de λ lorsque les axes neutres de la lame sont relativement proches des axes du référentiel fixé par les deux polariseurs (*c. à d.* pour une intensité quasi minimale). En outre, les figures 3.25 et 3.27 mettent en évidence une inversion des minima et des maxima d'intensité en fonction de la longueur d'onde lorsque la direction de la lame passe d'un côté et de l'autre de la position correspondant au minimum d'intensité (ici 4° environ). Cette oscillation provient en fait d'une erreur d'alignement interne de la lame comme nous le verrons plus loin.

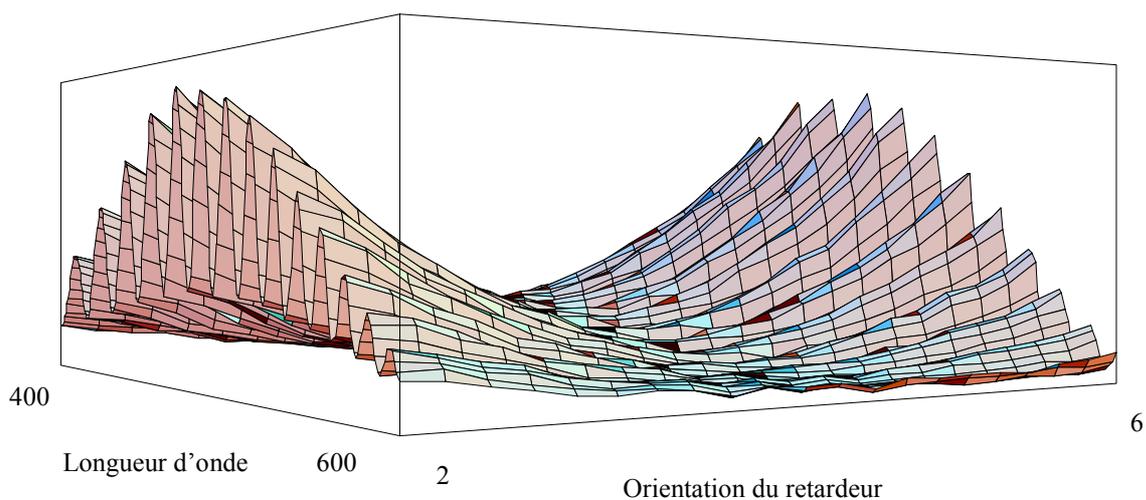


Figure 3.24 : Intensités détectées (u. a.) en fonction de λ (nm) et de la direction angulaire arbitraire α (en degrés) de la lame $\lambda/4$ compensée

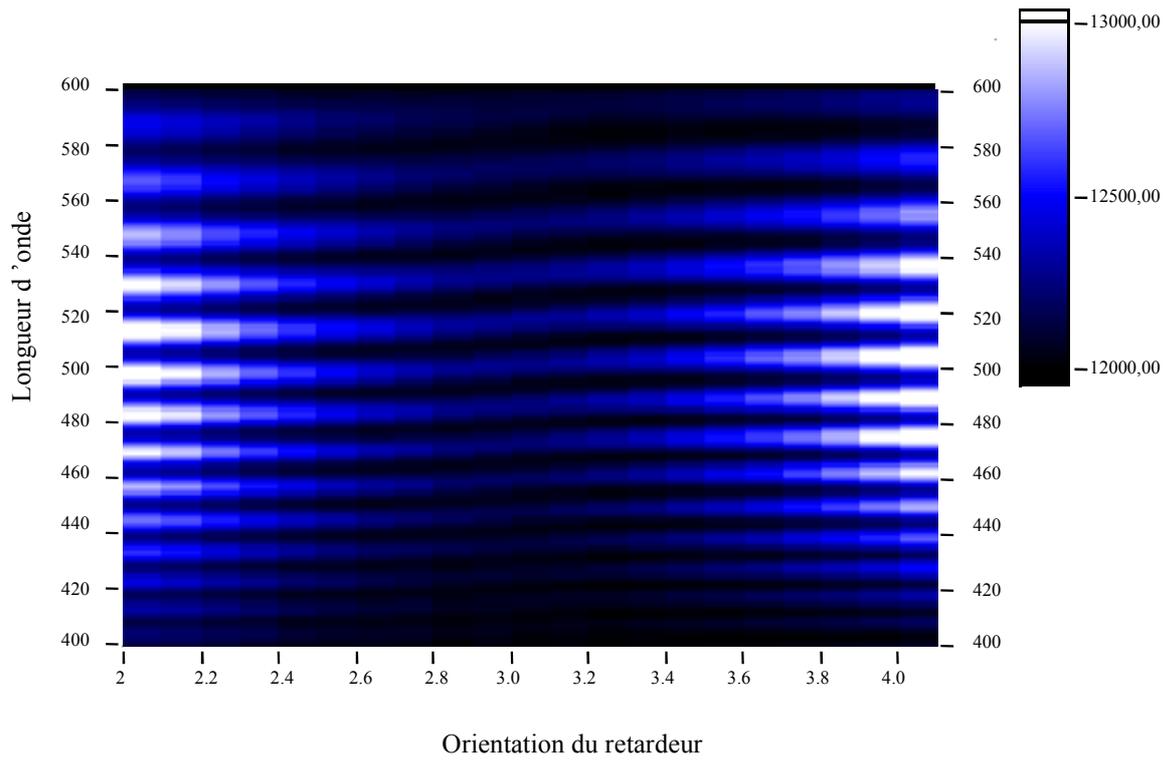


Figure 3.25 : Intensités détectées (u. a.) en fonction de λ (nm) et de la direction angulaire arbitraire α (en degrés) de la lame $\lambda/4$ compensée

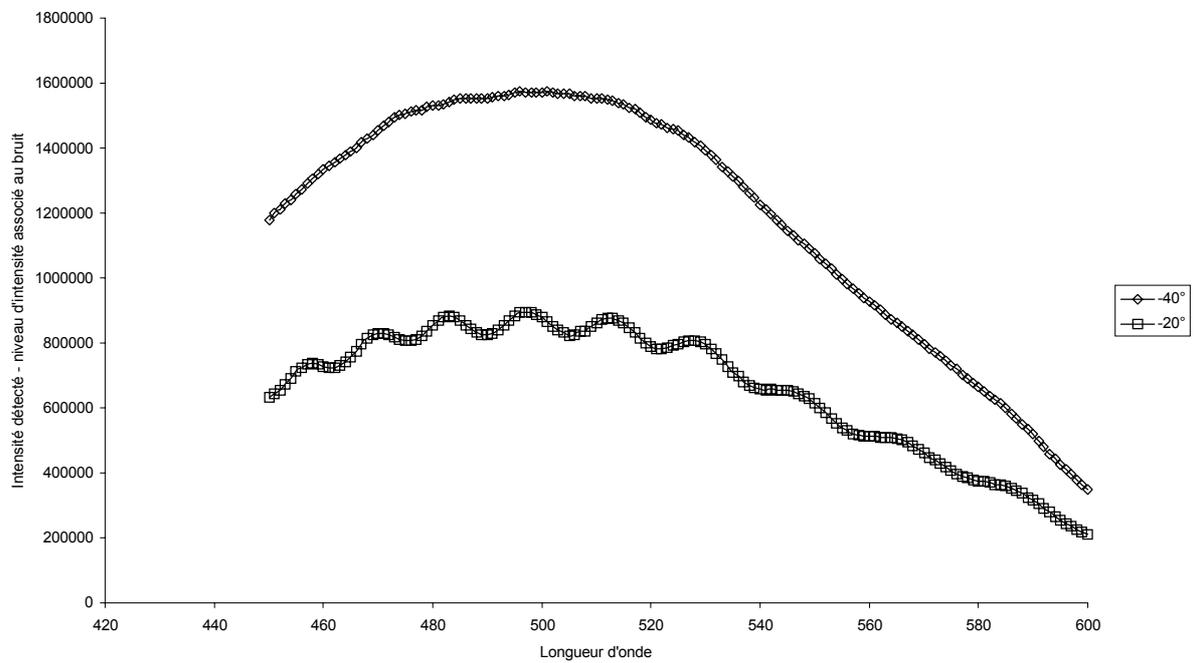


Figure 3.26 : Intensité détectée (u. a.) en fonction de λ (nm) pour des directions angulaires de la lame compensée de -40° et -20° par rapport aux deux polariseurs

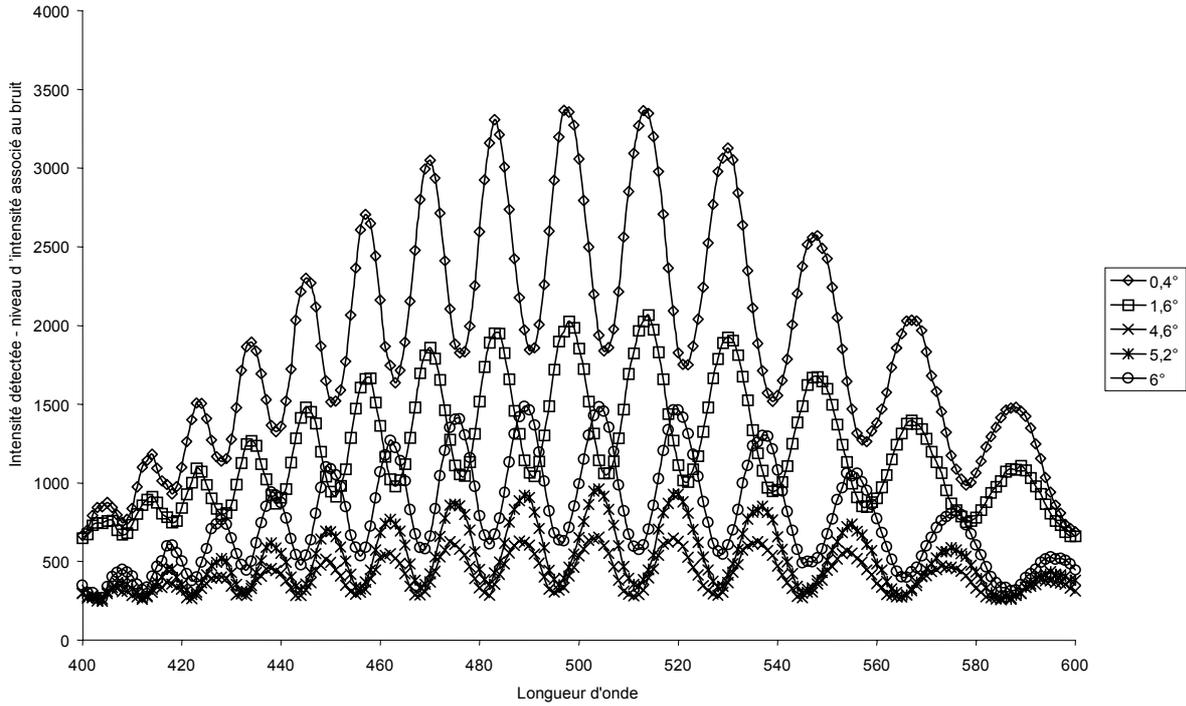


Figure 3.27 : Intensité détectée (u. a.) en fonction de λ (nm) pour différentes directions angulaires de la lame compensée

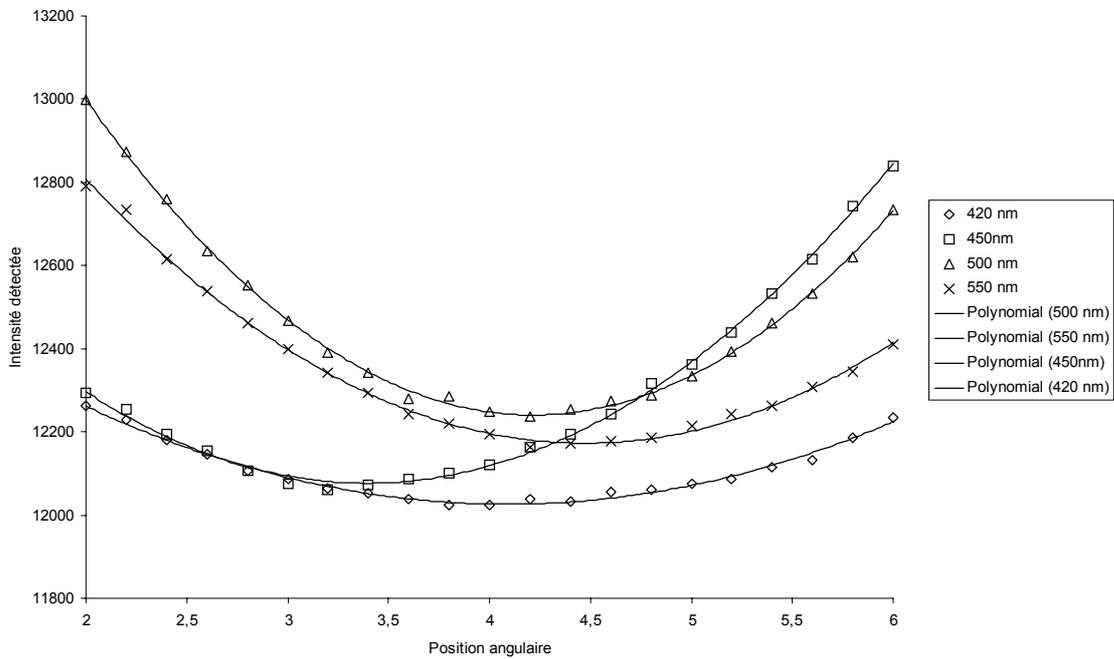


Figure 3.28 : Intensité détectée (u. a.) en fonction de la direction angulaire de la lame compensée et pour différentes valeurs de λ

Pour chaque longueur d'onde une interpolation polynomiale d'ordre 2 de l'intensité détectée en fonction de la position angulaire de la lame de phase (figure 3.28) nous a permis de déterminer la position de la lame correspondant au minimum d'intensité. Celle-ci coïncide donc avec l'alignement entre les axes neutres de la lame et la direction des polariseurs, nous permettant de cette façon de déterminer la position des axes neutres par rapport à notre référentiel.

La position des axes neutres par rapport aux polariseurs fixes a ainsi été calculée sur l'ensemble du spectre 400-600 nm. Un ajustement par la méthode des moindres carrés, basé sur le modèle théorique décrit précédemment, nous a ensuite permis d'estimer les caractéristiques de la lame (figure 3.29). Le meilleur ajustement a en effet été obtenu pour des valeurs de $1,1^\circ$ concernant le défaut d'alignement interne et 1,5630 et 1,6374 mm concernant les épaisseurs des deux lames de quartz. Ces caractéristiques correspondent à un retard engendré par la lame de $0,57 + 2\pi$ radians pour une longueur d'onde de 532 nm, *c. à d.* à une lame quasi quart d'onde compensée au premier ordre. Les valeurs de biréfringence sont toujours extraites de l'article de BECKERS (Chap. 2, Ref 18).

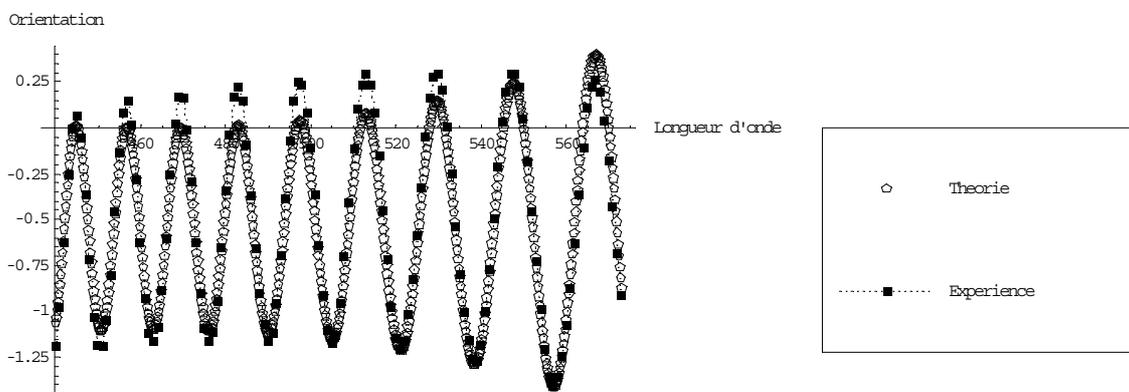


Figure 3.29 : Orientation des axes neutres de la lame compensée (en degrés) en fonction de λ (nm) déterminée expérimentalement et le meilleur ajustement obtenu pour un défaut d'alignement de $1,1^\circ$ pour des épaisseurs de 1,5630 mm pour la première lame et 1,6374 mm pour la seconde lame

3.4.4 Discussion

En observant la figure 3.28, on peut remarquer que l'intensité minimale ne correspond pas toujours au centre de la courbe d'intensité en fonction de la position angulaire de la lame, et du fait d'une légère dissymétrie de cette même courbe, nous observons tout naturellement une légère différence entre le modèle théorique et les résultats expérimentaux. La figure 3.28, en effet, montre une meilleure interpolation polynomiale de la courbe d'intensité pour certaines longueurs d'onde par rapport aux autres. La différence entre le modèle théorique et l'expérience peut également s'expliquer par l'activité optique du quartz de nouveau négligé dans notre modèle, mais dont l'effet reste faible comparativement à celui dû au défaut d'alignement des cristaux. La diatténuation, quant à elle, a été estimée aux environs de $2 \cdot 10^{-3}$. C'est pourquoi, nous avons négligé une éventuelle réflexion différentielle par la lame d'autant que la rotation de cette dernière reste relativement restreinte autour de la position correspondant au minimum d'intensité. La dernière raison que nous pouvons invoquer est le niveau de bruit non négligeable, en particulier pour les faibles niveaux d'intensité. En conclusion, le modèle utilisé n'est pas tout à fait précis et ne nous fournit qu'une estimation des caractéristiques de la lame, de la même manière que pour les lames achromatiques utilisées dans le polarimètre. En réalisant un ajustement sur différentes parties des données expérimentales (entre 450 et 500 nm et entre 450 et 535 nm) et du fait de l'activité optique du quartz, nous obtenons différentes valeurs concernant les caractéristiques de la lame (tableau 3.11). Ces valeurs nous permettent de déterminer, de la même manière que précédemment, la précision sur les résultats obtenus. Cette dernière est comprise entre 15 et 30 μm pour les épaisseurs de quartz et de $0,05^\circ$ concernant le défaut d'alignement interne de la lame.

Domaine de longueurs d'onde (nm)	450-500	450-535	440-573
Epaisseur de la première lame (μm)	1593	1593	1563
Epaisseur de la seconde lame (μm)	1659	1662	1637
Défaut d'alignement interne (degrés)	1,04	1,01	1,1

Tableau 3.11 : caractéristiques de la lame compensée obtenues en réalisant un ajustement sur différents domaines spectraux

Néanmoins, la relativement bonne corrélation entre le modèle utilisé et l'expérience nous permet d'estimer les paramètres physiques de la lame et par là même d'avoir accès aux caractéristiques optiques du retardeur.

Nous avons, pour finir, simulé l'intensité détectée en fonction de λ (sans tenir compte du spectre de la lumière blanche émise par l'halogène) [20], à l'aide du modèle précédent et des équations (3.39).

$$\vec{J}_s = [P][R(-\alpha)][M][R(\alpha)]\vec{J}_e \quad (3.39a)$$

$$I = \vec{J}_s \cdot \vec{J}_s^* \quad (3.39b)$$

où \vec{J}_s et \vec{J}_e représentent les vecteurs de Jones de l'onde arrivant respectivement sur le monochromateur et sur la lame, et X^* le complexe conjugué du vecteur X . $[R(\alpha)]$ représente de nouveau la matrice de changement de base et α la direction angulaire de la lame par rapport aux polariseurs qui nous servent de référence. $[P]$ est la matrice de Jones du polariseur linéaire horizontal et $[M]$ celle d'une lame compensée constituée de deux lames de quartz d'épaisseurs 1,5630 mm et 1,6374 mm et présentant un défaut d'orientation de $1,1^\circ$ (calcul similaire à celui de l'équation (3.29)). I est l'intensité de l'onde optique arrivant sur le monochromateur.

Comme nous pouvons le constater sur les figures 3.30 et 3.31, l'intensité varie bien en fonction de λ lorsque les axes neutres de la lame se trouvent relativement proches des axes du référentiel. Cette observation concorde avec les résultats expérimentaux obtenus (figures 3.24 à 3.27) et peut s'expliquer aisément par la variation de l'ellipticité des modes de vibration propre de la lame causée par le défaut d'alignement interne. L'observation de ces fluctuations constitue donc un bon test pour déterminer un éventuel défaut de ce type.

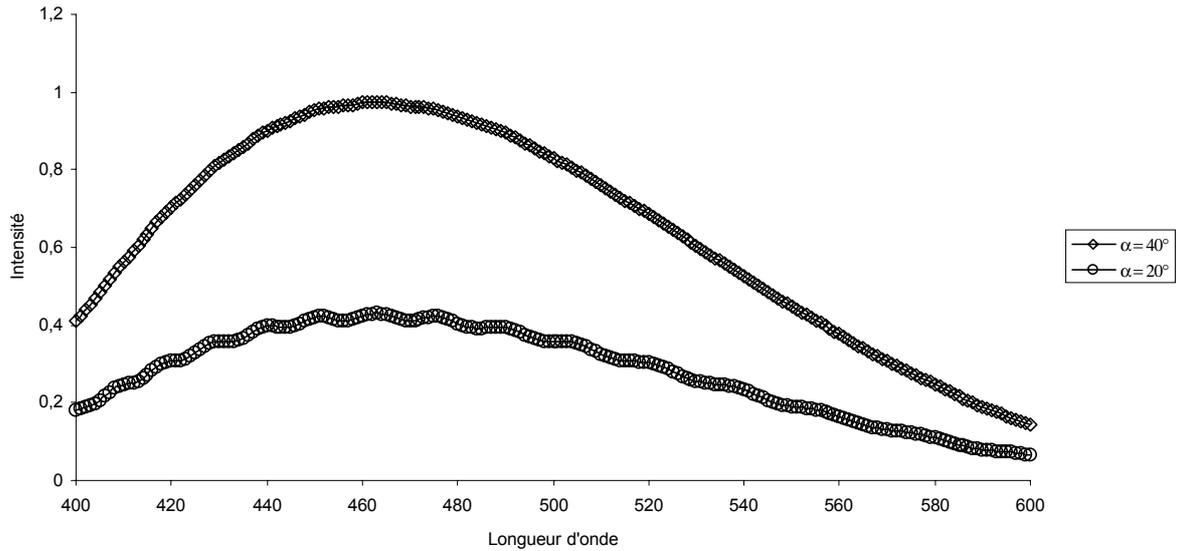


Figure 3.30 : Simulation de l'intensité (u. a.) arrivant sur le monochromateur, en fonction de λ (nm) et pour des directions angulaires des axes neutres de la première lame de 40° et 20° . 0° correspond à la direction du premier polariseur

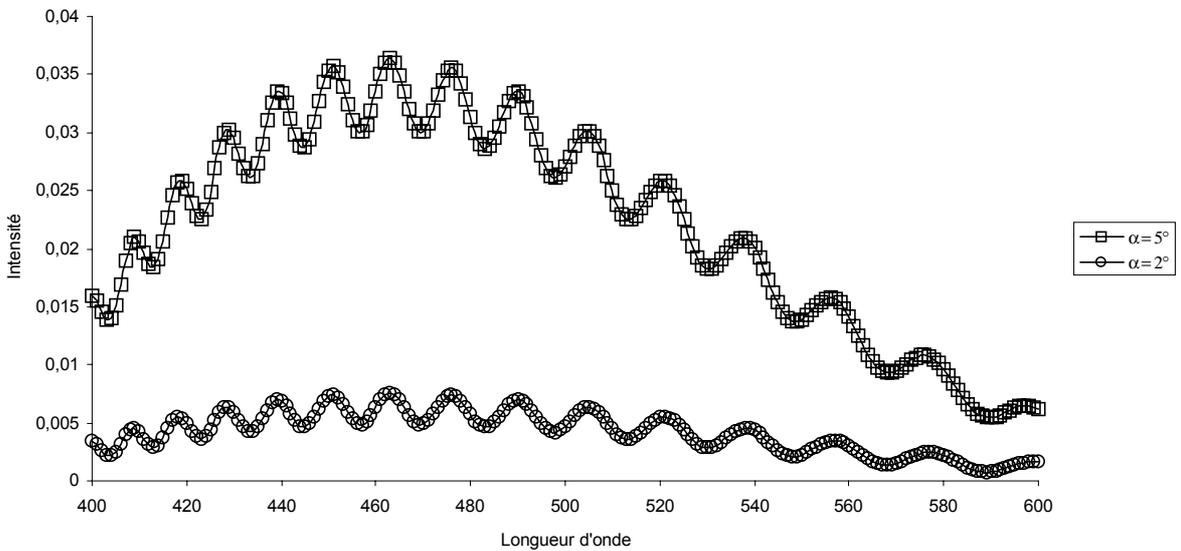


Figure 3.31 : Simulation de l'intensité (u. a.) arrivant sur le détecteur, en fonction de λ (nm) et pour des directions angulaires des axes neutres de la première lame de 5° et 2° . 0° correspond à la direction du premier polariseur

3.5 Conclusion

La prise en compte d'un défaut d'alignement interne d'une lame de phase compensée et, de façon plus générale, le modèle d'un élément biréfringent elliptique pour caractériser ces lames nous a permis de corriger la quasi totalité des erreurs de mesure systématiques. Celle-ci nous permet d'obtenir une bonne précision sur nos résultats et ce, sur une large bande spectrale. Elle débouche finalement sur une méthode originale de caractérisation des lames de phase compensées que ce soit à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique ou tout simplement grâce à un simple monochromateur associé à une source de lumière blanche.

Chapitre 4

Interprétation des résultats

4.1 Introduction

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, il est impossible de s'affranchir complètement des erreurs aléatoires. Nous ne pouvons qu'en minimiser les effets à l'aide d'une voie référence, par exemple, ou (et) grâce à l'utilisation d'un système surdéterminé. Une étude statistique, basée sur la connaissance de la matrice d'écart-type introduite dans le chapitre 1, peut cependant nous permettre d'interpréter correctement les résultats expérimentaux et ce, malgré la présence d'erreurs statistiques. Cette étude n'est rendue possible qu'à partir du moment où seules ces erreurs aléatoires subsistent. En d'autres termes, la validation des résultats passe par la correction de toutes les erreurs systématiques à l'exception de celles dont les effets restent négligeables par rapport aux erreurs aléatoires.

Dans ce chapitre, nous présentons donc une méthode originale de minimisation et de quantification de ces erreurs nous permettant d'obtenir l'écart-type sur les éléments de la matrice de Mueller, ainsi que, comme exemples, sur l'indice de polarisation et le degré d'anisotropie de dépolarisation. Le critère d'Anderson et Barakat également présenté dans le premier chapitre nous permettra, par la suite, de valider notre procédure d'étalonnage, de regarder si toutes les erreurs systématiques ont bel et bien été corrigées et finalement d'ériger un organigramme de déroulement et d'interprétation des résultats. Nous allons voir comment on peut prendre en compte les erreurs systématiques dans le cas contraire. Des résultats expérimentaux portant sur la dépolarisation engendrée par des surfaces rugueuses sont également présentés afin de bien appréhender le déroulement d'une manipulation.

4.2 Origine des erreurs aléatoires

Les erreurs de bruit du détecteur ont pour origine commune les trois phénomènes suivants :

- Le bruit de grenaille (shot noise) provient de la statistique intrinsèque des photons qui suivent une loi statistique de Poisson. Cette loi statistique régit les arrivées aléatoires de particules discrètes. Ce bruit traduit donc la granularité de la lumière due à sa nature corpusculaire, c'est pourquoi il est également appelé bruit de photons. Il est inévitable et impose la limite de sensibilité de tous les systèmes de détection. Le bruit de photons peut avoir deux origines : une origine purement optique et une origine électrique associée à la détection et la numérisation. Le bruit de grenaille est un bruit blanc et il est l'image électrique du bruit de photons où la charge de l'électron e remplace l'énergie du photon $h\nu$ (h étant la constante de Planck et ν la fréquence), et l'intensité du photocourant i joue le rôle du flux F de photons.

- Le bruit thermique (Johnson noise) fait partie intégrante du détecteur : il est provoqué par le mouvement aléatoire des porteurs de charge à l'intérieur des éléments électriques du détecteur. Même si la neutralité électrique est assurée dans ces éléments, les mouvements thermiques aléatoires des porteurs (agitations thermiques) donnent naissance à des fluctuations dans le gradient de concentration des porteurs, provoquées par l'échauffement des composants électroniques et également par la température ambiante qui varie.

- Le bruit de quantification apparaît lors de la numérisation du signal. La quantification est la conversion du signal analogique d'entrée en un signal numérique de sortie comportant un nombre fini de valeurs.

De plus, les fluctuations thermiques et mécaniques au niveau de la source laser de pompe introduisent des fluctuations d'intensité qui, bien que faibles, sont amplifiées par les processus de conversion non linéaires dans les étages OPO et OPA.

Les erreurs systématiques pouvant être corrigées, la plus grande part des sources d'erreurs est donc attribuée à ces bruits aléatoires qui sont détectés par la photodiode. Ces bruits ont été statistiquement modélisés par une variance totale correspondant à la somme des variances individuelles de chaque source de bruit. Nous avons donc estimé l'écart-type du bruit, qui est fonction de l'intensité par :

$$\sigma_{total}(I) = \sqrt{\sum_{Bruits} \sigma_n^2(I)} \quad (4.1)$$

4.3 Minimisation et quantification des erreurs aléatoires

Afin de minimiser et quantifier les erreurs aléatoires, dues aux fluctuations de la source laser et au détecteur, ainsi que les erreurs systématiques, nous avons choisi d'utiliser un système surdéterminé. Nous avons aussi décidé de corriger les fluctuations d'intensité par une voie référence et de réaliser des mesures sur des signaux moyennés. Afin de prendre en compte ces bruits aléatoires, nous pouvons également modifier la procédure de calcul nous permettant d'obtenir les matrices de Mueller [1]. En effet, l'utilisation d'un système surdéterminé (le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues) est telle que chaque équation utilisée dans l'estimation des éléments de la matrice de Mueller ne doit pas être considérée de la même façon. Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'écart-type sur les intensités variait avec l'intensité. Or, chacune de ces équations est associée à une intensité et doit donc être pondérée par l'écart-type sur l'intensité correspondante, c'est le test du "khi-deux". Ce terme désigne une fonction de mérite connue [2], qui, dans le cadre de notre étude pourra se mettre sous la forme :

$$\chi^2 = \sum_{p=1}^{64} \left[\frac{I_{mes}(p) - \sum_{k=1}^{16} B_{pk} m_k}{\sigma_p} \right]^2 \quad (4.2)$$

-
- [1] **B. LE JEUNE, J. P. MARIE, P. Y. GERLIGAND, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Mueller matrix formalism in imagery. An experimental arrangement for noise reduction", Proc. SPIE (San Diego U.S.A), vol. 2265, 443-451 (1994).
- [2] **W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING**, "Numerical Recipes", Cambridge University Press, (1987).

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} [I_{mes}(p)] : \text{vecteur des intensités mesurées de dimension 64} \\ [B_{pk}] : \text{matrice de calcul de dimension } 64 \times 16 \\ [m_k] : \text{vecteur de dimension 16 représentant les éléments } m_{ij} \text{ de la matrice de} \\ \text{Mueller tel que } k = 4i+j+1, \text{ pour } i \text{ et } j \text{ variant de 0 à 3} \\ \sigma_p : \text{écart-type sur la } p^{\text{ième}} \text{ intensité} \end{array} \right.$$

Nous avons supposé que l'écart-type du bruit était uniquement fonction de l'intensité. Une interpolation polynomiale d'ordre 2 (figure 2.26), voire une interpolation linéaire, est alors suffisante pour avoir la forme analytique donnant la dépendance en intensité de l'écart-type $\sigma_p = f(I_{mes}(p))$. Elle nous permet d'associer à chaque intensité mesurée un écart-type.

Le test du "khi-deux" consiste donc à minimiser la fonction χ^2 par rapport aux coefficients m_k de façon à obtenir les meilleurs coefficients possibles, avec un poids statistique $1/\sigma_p$ attribué à chaque intensité.

On peut définir les nouvelles matrices $[B^n]$ et $[I^n]$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{pk}^n = \frac{B_{pk}}{\sigma_p} \\ I_p^n = \frac{I_{mes}(p)}{\sigma_p} \end{array} \right. \quad p = 1 \text{ à } 64 \text{ et } k = 1 \text{ à } 16 \quad (4.3)$$

Minimisons la fonction χ^2 en dérivant l'équation (4.2) par rapport aux coefficients m_k ($k = 1..16$), nous obtenons donc seize équations de la forme :

$$0 = \sum_{p=1}^{64} \frac{[I_{mes}(p) - \sum_{u=1}^{16} B_{pu} m_u]}{\sigma_p^2} B_{pk} \quad u = 1 \text{ à } 16 \quad (4.4)$$

que l'on peut réécrire, en changeant l'ordre des sommations, sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_{u=1}^{16} \alpha_{ku} m_u = \beta_k \quad \text{ou} \quad [\beta] = [\alpha][m] \quad (4.5)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ku} = \sum_{p=1}^{64} \frac{B_{pu} B_{pk}}{\sigma_p^2} \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad [\alpha] = [B^n]^T [B^n] \\ \beta_k = \sum_{p=1}^{64} \frac{I_{mes}[p] B_{pk}}{\sigma_p^2} \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad [\beta] = [B^n]^T [I^n] \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$[\alpha]$ est une matrice de dimension 16×16 et $[\beta]$ un vecteur de dimension 16.

L'équation précédente peut donc se mettre sous la forme :

$$[B^n]^T [B^n] [m] = [B^n]^T [I^n] \quad (4.7)$$

On peut donc écrire :

$$[m] = [\alpha]^{-1} [\beta] \quad (4.8)$$

Ou, sous la forme développée, après avoir posé $[\alpha]^{-1} = [C_{uk}]$:

$$m_u = \sum_{k=1}^{16} C_{uk} \beta_k = \sum_{k=1}^{16} C_{uk} \left[\sum_{p=1}^{64} \frac{I_{mes}(p) B_{pk}}{\sigma_p^2} \right] \quad (4.9)$$

De plus, la variance sur les coefficients m_u peut s'exprimer facilement à partir de la variance sur les intensités par la relation :

$$\sigma^2(m_u) = \sum_{p=1}^{64} \sigma_p^2 \left(\frac{\partial m_u}{\partial I_{mes}(p)} \right)^2 \quad (4.10)$$

Comme les coefficients de la matrice $[B]$ sont indépendants des intensités mesurées, on peut écrire :

$$\frac{\partial m_u}{\partial I_{mes}(p)} = \sum_{k=1}^{16} \left(\frac{C_{uk} B_{pk}}{\sigma_p^2} \right) \quad (4.11)$$

Ce qui entraîne :

$$\sigma^2(m_u) = \sum_{k=1}^{16} \sum_{l=1}^{16} C_{uk} C_{ul} \left[\sum_{p=1}^{64} \frac{B_{pk} B_{pl}}{\sigma_p^2} \right] \quad (4.12)$$

où $\sum_{p=1}^{64} \frac{B_{pk} B_{pl}}{\sigma_p^2} = \alpha_{lk}$ et, puisque $\sum_{l=1}^{16} C_{ul} \alpha_{lk} = \delta_{uk}$, nous obtenons la forme finale suivante

pour les éléments de la matrice de Mueller :

$$\sigma^2(m_u) = \sum_{k=1}^{16} C_{uk} \delta_{uk} = C_{uu} \quad (4.13)$$

Les éléments diagonaux de la matrice $[\alpha]^{-1} = [C_{uk}]$ sont alors les variances des coefficients m_{ij} . La matrice $[C_{uk}]$ est donc la matrice de covariance des incertitudes sur les termes de la matrice de Mueller.

Le premier paramètre déduit de la matrice de Mueller est l'indice de dépolarisation P_d (équation (1.57)). La variance de l'erreur associée à ce paramètre peut également être calculée à partir des expressions suivantes [3] :

$$\sigma^2(P_d) = \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} \left(\frac{\partial P_d}{\partial m_i} \right) \left(\frac{\partial P_d}{\partial m_j} \right) C_{ij} \quad (4.14)$$

Ou encore, si nous négligeons la corrélation entre les erreurs sur les termes m_{ij} (qui apparaît dans les termes croisés C_{ij} , $i \neq j$):

$$\sigma^2(P_d) = \sum_{u=1}^{16} \left(\frac{\partial P_d}{\partial m_u} \right)^2 C_{uu} = \sum_{u=1}^{16} \left(\frac{\partial P_d}{\partial m_u} \right)^2 \sigma^2(m_u) \quad (4.15)$$

[3] **D. L. SMITH**, "Matrix formalism for uncertainly analysis", Rev. Sci. Instrum., vol. 54, 818-824 (1983).

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_d}{\partial m_0} = \frac{-1}{3m_0^3} \left(\sum_{u=1}^{16} m_u^2 - m_0^2 \right) \left[\frac{\sum_{k=1}^{16} m_k^2 - m_0^2}{3m_0^3} \right]^{-1/2} = \frac{-1}{m_0} P_d \\ \frac{\partial P_d}{\partial m_u} = \frac{m_u}{3m_0^3} \left[\frac{\sum_{k=1}^{16} m_k^2 - m_0^2}{3m_0^3} \right]^{-1/2} = \frac{m_u}{3m_0^2} P_d^{-1} \quad \text{avec } u \neq 0 \end{array} \right.$$

Il est intéressant de noter que, connaissant dorénavant la matrice de covariance des erreurs associées à la matrice de Mueller, nous pouvons rapidement estimer la valeur de P_d .

En réalité, si nous désignons par $\mathcal{E}(x)$ l'estimation d'une valeur x bruitée, alors :

$$\mathcal{E}[m_u^2] = \mathcal{E}[m_u]^2 + C_{uu} \quad (4.16)$$

Dans ce cas, d'après l'équation (1.57) :

$$\mathcal{E}(P_d) = \sqrt{\frac{\sum_{u=2}^{16} \mathcal{E}[m_u^2]}{3 \mathcal{E}[m_1^2]}} \cong \sqrt{\frac{\sum_{u=2}^{16} \mathcal{E}[m_u]^2 + \sum_{u=2}^{16} C_{uu}}{3 \mathcal{E}[m_1]^2}} \quad (4.17)$$

La valeur de P_d est donc surestimée par le terme complémentaire $\sum_{u=2}^{16} C_{uu}$ qui n'est rien d'autre que la somme des variances associées aux éléments de la matrice de Mueller [4].

Nous pouvons donc à présent déterminer la matrice d'écart-type $[S]$ associée à nos mesures expérimentales et appliquer le critère d'Anderson et Barakat afin de vérifier si toutes les erreurs systématiques ont été correctement corrigées.

[4] F. LE ROY-BREHONNET, B. LE JEUNE, P. Y. GERLIGAND, J. CARIOU, J. LOTRIAN, "Analysis of depolarizing optical targets by Mueller matrix formalism", Pure Appl. Opt., vol. 6, 385-404 (1997).

4.4 Interprétation des manipulations réalisées à vide

Nous avons donc cherché à valider la méthode d'étalonnage en analysant la matrice de Mueller obtenue sans échantillon et en vérifiant que celle-ci correspondait bien à une matrice physiquement réalisable (en l'occurrence, ici, la matrice identité) dans la limite des erreurs expérimentales. Cela nous a amené à considérer deux types d'erreurs pouvant détériorer la précision sur l'estimation des éléments de la matrice de Mueller : les erreurs statistiques considérées précédemment et les erreurs systématiques résiduelles dues à une estimation des paramètres physiques des lames qui n'est pas parfaite.

Afin de pouvoir évaluer les performances du polarimètre, nous avons donc dû estimer l'influence de ces deux catégories d'erreurs. Pour cela, nous avons été amenés à comparer la matrice de Mueller obtenue à vide $[M]$ avec la matrice identité $[Id]$ qui aurait dû être obtenue en l'absence d'erreurs. La norme (de Frobenius) de la différence entre ces deux matrices (notée $\|\Delta[M]\|_F = \|[M] - [Id]\|_F$) nous a fourni une estimation de l'ensemble des erreurs (statistiques et systématiques). Nous avons également pu accéder à une estimation des erreurs statistiques grâce à la matrice d'écart-types $[S]$ (calculée à l'aide de l'équation (4.13)). Enfin, la différence entre ces deux matrices nous a permis d'évaluer le résiduel d'erreurs systématiques non corrigées.

Nous avons également extrait une matrice de Mueller-Jones $[\tilde{M}_J]$ de $[M]$ (voir Chapitre 1, section 1.5.5) à partir de sa matrice de cohérence $[N]$. Cette opération permet de filtrer une partie du bruit de mesure [4]. Nous avons donc cherché à savoir si ce filtrage était intéressant dans le cadre de notre polarimètre, en soustrayant à cette matrice de Mueller-Jones la matrice identité, de la même manière que précédemment, et en calculant sa norme de Frobenius $\|\Delta[M_J]\|_F = \|\tilde{M}_J - [Id]\|_F$. L'ensemble de ces résultats devrait nous permettre de déterminer si, avec un tel appareil, il est intéressant d'utiliser un critère statistique concernant les erreurs, similaire à celui d'Anderson et Barakat (Ref. 23, Chap 1), dans l'exploitation des résultats ou si il n'est pas simplement préférable de calculer la précision avec laquelle on obtient les paramètres polarimétriques associés au milieu ou à la cible étudiée. Les résultats, concernant les longueurs d'onde $\lambda = 650$ nm et $\lambda = 550$ nm, apparaissent dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Matrice de Mueller à vide ($\lambda = 650$ nm), corrigée	Matrice des écart-types
$[M] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0011 & -0,0069 & -0,0070 \\ -0,0015 & 1,0079 & -0,0058 & -0,0048 \\ -0,0032 & 0,0075 & 0,9956 & -0,0060 \\ -0,0049 & 0,0064 & 0,0048 & 1,0075 \end{bmatrix}$	$[S] = \begin{bmatrix} 0,0011 & 0,0012 & 0,0011 & 0,0012 \\ 0,0012 & 0,0012 & 0,0020 & 0,0012 \\ 0,0012 & 0,0020 & 0,0012 & 0,0007 \\ 0,0011 & 0,0012 & 0,0007 & 0,0010 \end{bmatrix}$
	$\ S\ _F = 0,0050$
Indice de dépolarisation : $P_d = 1,004$	Ecart-type : $\sigma(P_d) = 0,0017$ (équation (4.14))
Valeurs propres de [N] : $\lambda_0 = 2,0056$ $\lambda_1 = 0,0045$ $\lambda_2 = 0,0002$ $\lambda_3 = -0,0037$	
Coefficient de dépolarisation : $d = -0,0037$	
$\Delta[M] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0011 & -0,0069 & -0,0070 \\ -0,0015 & 0,0079 & -0,0058 & -0,0048 \\ -0,0032 & 0,0075 & -0,0044 & -0,0060 \\ -0,0049 & 0,0064 & 0,0048 & 0,0075 \end{bmatrix}$	$[\tilde{M}_J] = \begin{bmatrix} 1,0000 & -0,0002 & -0,0050 & -0,0059 \\ -0,0002 & 0,9999 & -0,0067 & -0,0055 \\ -0,0050 & 0,0066 & 0,9999 & -0,0054 \\ -0,0060 & 0,0056 & 0,0054 & 1,0000 \end{bmatrix}$
$\ \Delta[M]\ _F = 0,0220$	$\Delta[M_J] = \begin{bmatrix} 0,0000 & -0,0002 & -0,0050 & -0,0059 \\ -0,0002 & -0,0001 & -0,0067 & -0,0055 \\ -0,0050 & 0,0066 & -0,0001 & -0,0054 \\ -0,0060 & 0,0056 & 0,0054 & 0,0000 \end{bmatrix}$ $\ \Delta[M_J]\ _F = 0,0181$

Tableau 4.1 : Extraction d'une matrice de Mueller-Jones à partir de la matrice de Mueller à vide corrigée pour une longueur d'onde de 650 nm et vérification de la validité de la procédure d'étalonnage

Le critère utilisé ici consiste à comparer $\|\Delta[M]\|_F$ à $\|S\|_F$. Si $\|\Delta[M]\|_F \leq \|S\|_F$ alors les erreurs sont d'ordre statistique. Sinon, il faut considérer des erreurs systématiques. On dira alors que le critère n'est pas respecté.

Le tableau 4.1 met en avant le non respect de ce critère, même après extraction d'un éventuel opérateur de dépolarisation isotrope. La correction des fluctuations d'intensité et la procédure d'acquisition décrite dans le premier chapitre nous ont permis d'obtenir des écart-types sur les éléments de la matrice de Mueller relativement faibles. De ce fait, et même après correction des défauts des lames de phase, nous voyons apparaître un résiduel d'erreurs que nous ne pouvons donc pas assimiler seulement à des erreurs statistiques du fait du non respect du critère d'Anderson et Barakat mais également à des erreurs systématiques non

corrigées. Ce résiduel d'erreurs peut être attribué à l'activité optique négligée par rapport au défaut d'alignement interne des lames, à de multiples réflexions entre deux éléments optiques, aux dérives spatiales de l'intensité, aux inhomogénéités spatiales des lames de phase, à de la diffusion ou tout simplement au fait que nous n'avons accès qu'à des estimations des caractéristiques des lames et que l'écart type associé à ces estimations est supérieur à celui attribué aux seules erreurs statistiques. Ce fait est relativement nouveau au laboratoire car les détecteurs utilisés jusqu'à présent étaient relativement bruités (caméras CCD dédiées à l'imagerie polarimétrique) et les erreurs systématiques (à l'exception du retard des lames de phase) se trouvaient être du même ordre de grandeur que les erreurs statistiques. Néanmoins, le tableau 4.1 met en avant le fait que ce résiduel d'erreurs non corrigées reste négligeable.

Matrice de Mueller à vide ($\lambda = 550$ nm), corrigée	Matrice des écart-types
$[M] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0001 & 0,0000 & -0,0009 \\ -0,0001 & 1,0034 & 0,0080 & 0,0012 \\ -0,0001 & -0,0027 & 1,0031 & 0,0070 \\ 0,0009 & -0,0014 & -0,0040 & 1,0023 \end{bmatrix}$	$[S] = \begin{bmatrix} 0,0009 & 0,0010 & 0,0009 & 0,0010 \\ 0,0010 & 0,0011 & 0,0017 & 0,0011 \\ 0,0010 & 0,0017 & 0,0011 & 0,0007 \\ 0,0010 & 0,0010 & 0,0006 & 0,0009 \end{bmatrix}$
$\delta_e = 90,65^\circ ; \delta_s = 88,83^\circ ; \varepsilon_e = 0,05^\circ ; \varepsilon_s = 0,28^\circ$	$\ S\ _F = 0,0043$
Indice de dépolarisation : $P_d = 1,003$	Ecart-type : $\sigma(P_d) = 0,0014$ (équation (4.14))
Valeurs propres de $[M]$: $\lambda_0 = 2,0044$ $\lambda_1 = -0,0018$ $\lambda_2 = 0,0019$ $\lambda_3 = -0,0046$	$[\tilde{M}_J] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & -0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0053 & 0,0013 \\ -0,0001 & -0,0053 & 1,0000 & 0,0055 \\ 0,0000 & -0,0013 & -0,0055 & 1,0000 \end{bmatrix}$
Coefficient de dépolarisation : $d = -0,0030$	$\Delta[M_J] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & -0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0053 & 0,0013 \\ -0,0001 & -0,0053 & 0,0000 & 0,0055 \\ 0,0000 & -0,0013 & -0,0055 & 0,0000 \end{bmatrix}$
$\Delta[M] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0001 & 0,0000 & -0,0009 \\ -0,0001 & 0,0034 & 0,0080 & 0,0012 \\ -0,0001 & -0,0027 & 0,0031 & 0,0070 \\ 0,0009 & -0,0014 & -0,0040 & 0,0023 \end{bmatrix}$	$\ \Delta[M_J]\ _F = 0,0110$
$\ \Delta[M]\ _F = 0,0130$	

Tableau 4.2 : Extraction d'une matrice de Mueller-Jones à partir de la matrice de Mueller à vide corrigée pour une longueur d'onde de 550 nm et vérification de la validité de la procédure d'étalonnage

Le tableau 4.2 montre, en revanche, à $\lambda = 550$ nm, un résiduel d'erreurs non corrigées plus faible qu'à 650 nm. Cette situation peut s'expliquer par le fait que l'écart-type a été calculé pour une longueur d'onde de 550 nm (figure 2.16) et qu'il existerait donc un léger décalage concernant les autres longueurs d'onde. Nous serons donc amenés à déterminer la courbe des écarts-types sur l'ensemble du spectre du visible. L'étalonnage sans échantillon et à 550 nm fait également apparaître une légère surpolarisation de l'onde lumineuse à travers le polarimètre. Une surpolarisation n'existe pas dans la réalité (l'indice de dépolarisation est toujours compris entre 0 et 1, tout comme le degré de polarisation d'une onde lumineuse) et ne peut s'expliquer que par un résiduel d'erreurs systématiques mais aussi aléatoires (équation (4.17)). Nous avons donc voulu savoir si ce résiduel d'erreurs systématiques pouvait être interprété, à chaque fois, comme une surpolarisation et si cette surpolarisation était constante d'une longueur d'onde à l'autre ou, tout simplement, d'une expérience à l'autre. Pour ce faire, nous avons relevé expérimentalement, à vide, 64 intensités, ainsi que les 64 écarts-types associés. Chaque écart-type est calculé sur une population de 30 acquisitions, une acquisition étant réalisée tous les dixièmes de seconde pendant 3 secondes (le laser étant cadencé à 10 Hz), ce qui n'alourdit pas de trop le temps d'acquisition. La figure 4.1 et le tableau 4.3 présentent le résultat obtenu à 600 nm.

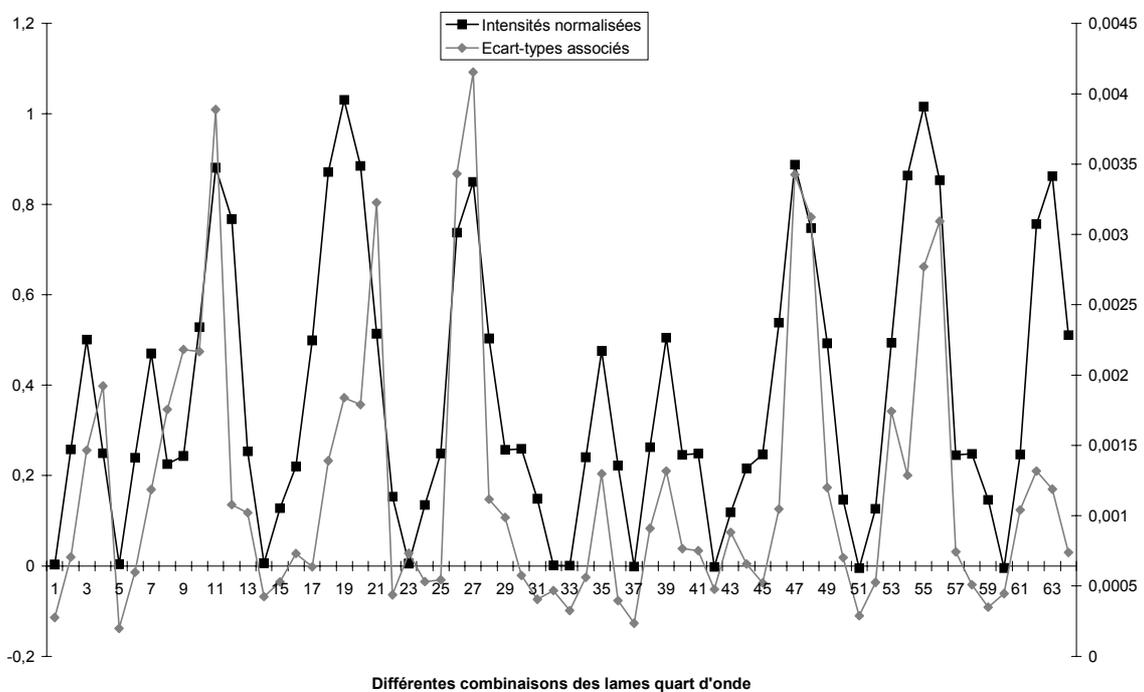


Figure 4.1 : Evolution des 64 intensités normalisées par la référence ainsi que les écarts-types associés pour une longueur d'onde de 600 nm

Matrice de Mueller à vide ($\lambda = 600$ nm), corrigée	Matrice des écart-types
$[M] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0002 & -0,0003 & 0,0082 \\ 0,0009 & 1,0033 & 0,0022 & -0,0033 \\ 0,0000 & 0,0031 & 0,9915 & 0,0006 \\ 0,0089 & -0,0073 & 0,0001 & 1,0087 \end{bmatrix}$	$[S] = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0,0005 & 0,0005 & 0,0003 \\ 0,0005 & 0,0006 & 0,0007 & 0,0004 \\ 0,0004 & 0,0006 & 0,0005 & 0,0003 \\ 0,0003 & 0,0004 & 0,0003 & 0,0003 \end{bmatrix}$
$\delta_e = 88,76^\circ ; \delta_s = 87,31^\circ ; \varepsilon_e = 0,97^\circ ; \varepsilon_s = 0,11^\circ$	$\ S\ _F = 0,0018$
Indice de dépolarisation : $P_d = 1,0012$	Ecart-type : $\sigma(P_d) = 0,0006$ (équation (4.14))
Valeurs propres de [N] : $\lambda_0 = 2,0018$ $\lambda_1 = -0,0110$ $\lambda_2 = 0,0102$ $\lambda_3 = -0,0011$	$[\tilde{M}_J] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0005 & -0,0001 & 0,0086 \\ 0,0054 & 1,0000 & -0,0005 & 0,0020 \\ -0,0001 & 0,0005 & 1,0000 & 0,0002 \\ 0,0086 & -0,0020 & -0,0002 & 1,0000 \end{bmatrix}$
Coefficient de dépolarisation : $d = -0,0012$	$\Delta[M_J] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0005 & -0,0001 & 0,0086 \\ 0,0054 & 0,0000 & -0,0005 & 0,0020 \\ -0,0001 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0002 \\ 0,0086 & -0,0020 & -0,0002 & 0,0000 \end{bmatrix}$
$\Delta[M] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0002 & -0,0003 & 0,0082 \\ 0,0009 & 0,0033 & 0,0022 & -0,0033 \\ 0,0000 & 0,0031 & -0,0085 & 0,0006 \\ 0,0089 & -0,0073 & 0,0001 & 0,0087 \end{bmatrix}$	$\ \Delta[M_J]\ _F = 0,0136$
$\ \Delta[M]\ _F = 0,0196$	

Tableau 4.3 : Extraction d'une matrice de Mueller-Jones à partir de la matrice de Mueller à vide corrigée pour une longueur d'onde de 600 nm et vérification de la validité de la procédure d'étalonnage

Le tableau 4.3 fait apparaître de nouveau le non respect du critère sur les erreurs. Une partie négligeable seulement des erreurs non corrigées peut être assimilée à une surpolarisation. Nous avons entrepris cette expérience pour plusieurs longueurs d'onde et la violation du critère fut quasi systématique. Nous avons observé une surpolarisation pour toutes les expériences réalisées. Néanmoins, la norme de Frobenius $\|\Delta[M]\|_F$ calculée, est pour chaque manipulation de l'ordre de celle calculée pour $\lambda = 600$ nm, c. à d., de l'ordre de 2 %. A titre d'exemple, nous présentons dans le tableau 4.4 le résultat obtenu à vide et à 550 nm lorsque l'écart-type est déterminé expérimentalement lors de l'acquisition des 64 intensités.

Matrice de Mueller à vide ($\lambda = 550$ nm), corrigée	Matrice des écart-types
$[M] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0080 \\ 0,0000 & 1,0073 & 0,0051 & 0,0053 \\ 0,0002 & 0,0102 & 1,0025 & -0,0004 \\ 0,0053 & -0,0052 & -0,0110 & 1,0061 \end{bmatrix}$	$[S] = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0,0004 & 0,0004 & 0,0003 \\ 0,0004 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0004 \\ 0,0004 & 0,0006 & 0,0006 & 0,0003 \\ 0,0003 & 0,0004 & 0,0003 & 0,0003 \end{bmatrix}$
$\delta_e = 90,56^\circ ; \delta_s = 88,76^\circ ; \varepsilon_e = 0,23^\circ ; \varepsilon_s = 0,13^\circ$	$\ S\ _F = 0,0017$
Indice de dépolarisation : $P_d = 1,0053$	Ecart-type : $\sigma(P_d) = 0,0005$ (équation (4.14))
Valeurs propres de [N] : $\lambda_0 = 2,0080$ $\lambda_1 = -0,0132$ $\lambda_2 = 0,0066$ $\lambda_3 = -0,0014$	$[\tilde{M}_J] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0001 & 0,0000 & 0,0066 \\ 0,0001 & 1,0000 & -0,0025 & 0,0052 \\ 0,0000 & 0,0025 & 1,0000 & 0,0053 \\ 0,0066 & -0,0052 & -0,0053 & 1,0000 \end{bmatrix}$
Coefficient de dépolarisation : $d = -0,0054$	$\Delta[M_J] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0001 & 0,0000 & 0,0066 \\ 0,0001 & 0,0000 & -0,0025 & 0,0052 \\ 0,0000 & 0,0025 & 0,0000 & 0,0053 \\ 0,0066 & -0,0052 & -0,0053 & 0,0000 \end{bmatrix}$
$\Delta[M] = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0002 & -0,0002 & 0,0080 \\ 0,0000 & 0,0073 & 0,0051 & 0,0053 \\ 0,0002 & 0,0102 & 0,0025 & -0,0004 \\ 0,0053 & -0,0052 & -0,0110 & 0,0061 \end{bmatrix}$	$\ \Delta[M_J]\ _F = 0,0145$
$\ \Delta[M]\ _F = 0,0223$	

Tableau 4.4 : Extraction d'une matrice de Mueller-Jones à partir de la matrice de Mueller à vide corrigée pour une longueur d'onde de 550 nm et vérification de la validité de la procédure d'étalonnage

Nous retrouvons quasiment les mêmes valeurs pour $\|\Delta[M]\|_F$ et $\|S\|_F$ que précédemment. Un ordre de grandeur sépare ces deux valeurs. La quasi reproductibilité des résultats nous permet ainsi de dégager une nouvelle valeur de $\|S\|_F = 0,02$ prenant en compte le résiduel d'erreur systématique non corrigé et justifiant ainsi la détermination de l'écart-type sur l'intensité au cours de son acquisition. Une telle méthode permet de tenir compte des conditions réelles de l'expérience qui peuvent changer d'un jour sur l'autre, voire d'une demi-journée à l'autre (les conditions de température diffèrent du matin au soir).

L'examen des matrices $\Delta[M]$ et la comparaison avec leur matrice d'écart-types associée montrent que les erreurs restant à corriger se répercutent préférentiellement sur certains éléments de la matrice de Mueller à savoir les éléments diagonaux ainsi que sur les

éléments m_{12} , m_{21} , m_{23} et m_{32} . Le résiduel d'erreurs sur les éléments diagonaux pourrait s'expliquer par le fait que nous calculons le déphasage des lames à partir des éléments m_{01} et m_{10} obtenus expérimentalement. Ces valeurs étant bruitées, nous surestimons ou sous-estimons donc le déphasage vrai des lames de phase. Après insertion des valeurs estimées dans la matrice de calcul $[B]$, nous obtenons donc des valeurs de m_{01} et m_{10} quasi nulles mais il subsiste toujours ce résiduel d'erreurs portant sur le déphasage et qui se répercute sur les éléments m_{11} et m_{22} (voir tableau 3.2). Nous sous-estimons donc les erreurs statistiques dans la mesure où elles se glissent également dans l'estimation des paramètres de lames. Les erreurs réalisées sur les éléments diagonaux m_{11} et m_{22} peuvent être également la conséquence des fluctuations de la source. En effet un décalage de l'angle d'incidence s'accompagne toujours d'une variation non négligeable du retard des lames compensées [Ref. 8, Chap. 3]. Ce décalage étant aléatoire, cela expliquerait la non reproductibilité des erreurs réalisées sur ces éléments. Le résiduel d'erreurs se répercutant sur les éléments diagonaux peut également provenir d'une mauvaise estimation de l'ellipticité des modes de vibration propre des lames, pour les mêmes raisons que précédemment (tableau 3.4). Les erreurs réalisées sur les éléments m_{11} et m_{22} pouvant provenir d'une mauvaise estimation de l'ensemble des paramètres de lames, elles sont donc logiquement supérieures à l'erreur réalisée sur l'élément m_{33} dont la seule cause ne peut être qu'une mauvaise estimation des vecteurs propres. Le décalage entre les erreurs réalisées sur les éléments m_{23} et m_{32} et leurs écart-types associés ne s'expliquent pas facilement. Le dichroïsme des lames, négligé jusqu'à présent, pourrait sans doute en être la cause (tableau 3.6). Le plus surprenant reste le résiduel d'erreur localisé sur les éléments m_{12} et m_{21} que seul un défaut d'alignement d'un des éléments optiques peut expliquer. Le fait d'avoir sans cesse à réajuster le pointé laser d'une expérience à l'autre pourrait expliquer ce phénomène.

Ce résiduel d'erreur peut donc avoir plusieurs origines. Il est sûrement en partie dû à des erreurs systématiques non corrigées ou plutôt à une mauvaise estimation des paramètres de lames calculés du fait d'erreurs statistiques. De ce fait, nous sous-estimons donc l'écart-type sur les éléments de la matrice de Mueller. Il faudrait, pour bien faire, considérer également les dérives spatiales de la source ainsi que les inhomogénéités spatiales du faisceau dans le calcul des écart-types, ce qui serait difficilement envisageable car ces phénomènes ont des répercussions sur les paramètres de lames rendant le problème extrêmement compliqué à résoudre. Une autre solution, bien plus réaliste, consisterait en la réalisation d'un filtrage spatial dans une enceinte à vide pour supprimer les fluctuations du faisceau laser et de le lisser

spatialement à l'aide d'une lame de phase aléatoire (LPA) avant sa focalisation (diminution de la cohérence spatiale du faisceau) [5].

La figure 4.2 montre l'allure des variations d'intensité normalisée par la référence pour différents étalonnages en longueur d'onde.

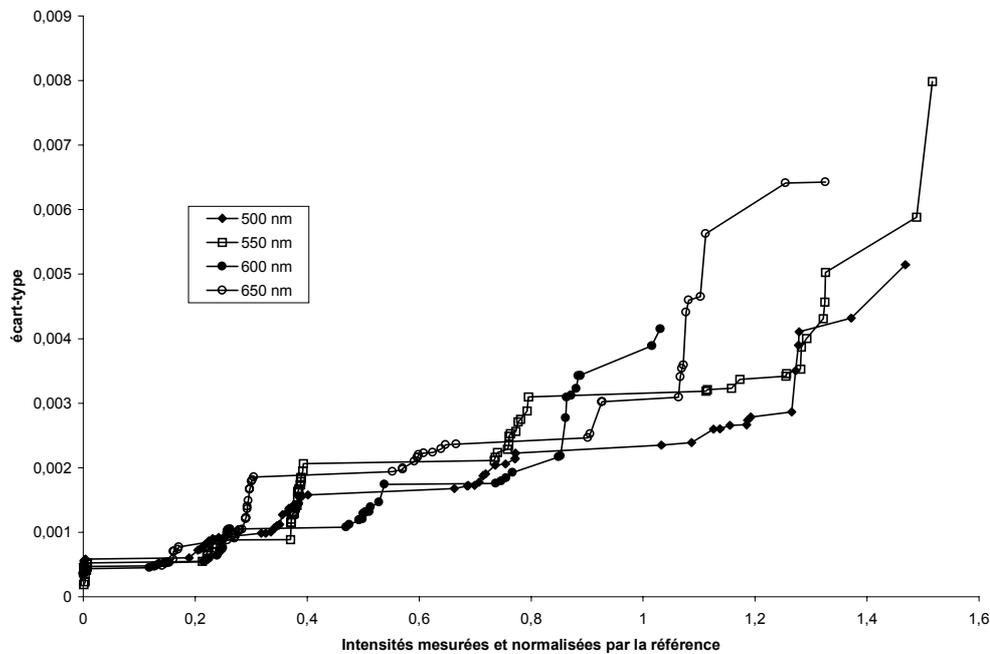


Figure 4.2 : écart-types associés aux intensités mesurées, déterminés expérimentalement pour quatre longueurs d'onde différentes

Les écart-types associés aux éléments de la matrice de Mueller sont donc difficilement quantifiables. Ceux-ci peuvent avoir des origines complexes comme dans le cadre de notre étude et même si les fluctuations d'intensités suffisent à les quantifier (lors de l'utilisation d'une source continue par exemple), seule une estimation de ces derniers est accessible car les écart-types sont eux mêmes soumis à une loi aléatoire.

L'utilisation de cette procédure d'étalonnage a cependant pu être validée lors de mesures polarimétriques en continu à 1550 nm, nous permettant ainsi de gagner un ordre de grandeur sur la précision de résultats expérimentaux [6]. La quasi reproductibilité des résultats

-
- [5] **J. C. CHANTELOUP**, "Contrôle et mise en forme des fronts de phase et d'énergie d'impulsions lasers brèves ultra-intenses", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1998).
 [6] **F. BOULVERT**, "Caractérisation des effets de polarisation dans les guides d'ondes rubans à base de polymères", rapport de stage de DEA, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2002.

obtenus précédemment lors de l'étalonnage à vide de notre polarimètre utilisant une source impulsionnelle, autorise, en outre, l'utilisation d'une valeur de $\|S\|_F$ prenant en compte le résiduel d'erreurs non corrigées et par conséquent, nous permet d'utiliser, malgré tout, le critère d'Anderson et Barakat dans l'exploitation des résultats obtenus.

Des simulations ont également montré qu'un défaut de 1° , uniquement sur le déphasage d'une des lames quart d'onde, s'accompagnait d'une erreur moyenne estimée par la norme de Frobenius $\|\Delta[M]\|_F = 0,0303$. Cette erreur simulée est supérieure à celle estimée lors de l'étalonnage sans échantillon qui prend pourtant en compte l'ensemble des erreurs qu'elles soient statistiques ou systématiques. Nous pouvons ainsi nous rendre compte de l'efficacité de l'étalonnage réalisé.

A la vue de ces résultats, il semblerait que l'extraction d'une matrice de Mueller-Jones à partir de la valeur propre dominante de la matrice de cohérence de cible $[N]$ n'améliore pas beaucoup la précision des résultats. Les erreurs résiduelles ne semblent donc pas se répercuter de façon équitable sur les quatre valeurs propres de $[N]$. Nous avons, pour confirmer cette hypothèse, généré 200 matrices de Mueller bruitées, en y ajoutant, à chaque fois, la matrice d'écart-type apparaissant dans le tableau 4.4 multipliée par une loi statistique gaussienne d'écart-type unité. Les résultats obtenus ont montré que, compte tenu du faible niveau d'erreurs aléatoires, un tel filtrage n'était pas efficace. Ils ont également confirmé le fait que les erreurs se répercutaient de façon prépondérante sur la valeur propre dominante de la matrice de cohérence de cible.

Le tableau 4.5 met en avant la relation entre les écart-types calculés directement à partir des fluctuations d'intensités et les écart-types réels apparaissant dans la matrice $\Delta[M]$. Nous y avons ajouté une nouvelle estimation de l'écart-type portant sur l'indice de dépolarisation, notée $\sigma(Pd)_2$, en prenant en compte les variances sur les éléments m_{ij} apparaissant dans la matrice $\Delta[M]$.

Pour cela, nous avons considéré que :

$$\sigma^2(m_u) = C_{uu} \cong (\Delta[M])_{ij}^2 \quad (4.19)$$

avec $u = 1+4i+j$

L'utilisation de l'équation 4.19 nous oblige cependant à négliger la corrélation entre les erreurs faites sur les différents termes m_{ij} , ce qui revient à négliger les termes croisés C_{ij} , pour $i \neq j$, dans l'équation (4.15). Pour valider cette hypothèse, nous avons également calculé l'écart-type associé à P_d à partir de l'équation simplifiée (4.16) et que nous noterons $\sigma(P_d)_3$.

λ (nm)	$\ \Delta M\ _F$	$\ \Delta M_p\ _F$	$\ S\ _F$	P_d	$\sigma(P_d)$	$\sigma(P_d)_3$	$\sigma(P_d)_2$
500	0,0228	0,0219	0,0031	1,0061	0,0009	0,0007	0,0069
550	0,0210	0,0203	0,0022	0,9948	0,0007	0,0005	0,0062
600	0,0219	0,0217	0,0022	0,9973	0,0007	0,0005	0,0048
600	0,0182	0,0180	0,0017	1,0026	0,0005	0,0004	0,0046
600	0,0251	0,0250	0,0021	0,9975	0,0007	0,0005	0,0070
650	0,0212	0,0199	0,0036	1,0072	0,0014	0,0010	0,0074

Tableau 4.5 : Indice de dépolarisation et statistiques associées pour différentes mesures à différentes longueurs d'onde

Nous pouvons ainsi nous rendre compte, dans un premier temps, qu'il existe une très faible corrélation entre les erreurs réalisées dans la mesure des différents termes de la matrice de Mueller. Cette corrélation est toutefois relativement négligeable et nous permet ainsi d'obtenir une assez bonne estimation de l'écart-type portant sur P_d , prenant en compte le résiduel d'erreurs non corrigées. Nous pouvons donc en conclure que l'indice de dépolarisation calculé à l'aide du polarimètre est obtenu avec une précision inférieure au pour cent.

Un deuxième paramètre important dans la caractérisation de la dépolarisation induite par un système est le degré de dépolarisation anisotrope *Add* (Anisotropic depolarisation degree) [7]. Celui-ci peut s'avérer très intéressant lors de la caractérisation et la classification d'échantillons dépolarisants [8]. Il est donc important de connaître avec exactitude la précision avec laquelle nous pouvons le déterminer à l'aide du polarimètre.

- [7] P. ELIES, B. LE JEUNE, J. P. MARIE, J. CARIOU, J. LOTRIAN, "Surface roughness and polarimetric analyses", Proc. SPIE, vol. 2782, International Symposium on Lasers, Optics and Vision for Productivity in Manufacturing I, Besançon (1996).
- [8] P. ELIES, B. LE JEUNE, P. OLIVARD, J. CARIOU, J. LOTRIAN, "The application of depolarization analysis to polarimetric characterization and classification of metallic and dielectric samples", J. Phys. D : Appl. Phys, vol. 30, 2520-2529 (1997).

Avant de calculer l'écart-type associé à ce paramètre, définissons le, et pour cela, considérons l'équation (1.54) qui exprime simplement le vecteur de Stokes réfléchi \vec{S}_s en fonction du vecteur incident \vec{S}_e :

$$\vec{S}_s = [M] \vec{S}_e \quad \text{avec } [M] = [m_{ij}] \quad i, j = 0..3$$

Le vecteur incident est fonction de l'ellipticité ε et de l'azimut θ de l'ellipse de polarisation (équation (1.58)) :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_1 / S_0 \\ S_2 / S_0 \\ S_3 / S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\varepsilon) \cos(2\theta) \\ \cos(2\varepsilon) \sin(2\theta) \\ \sin(2\varepsilon) \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors tracer le graphe en trois dimensions du degré de polarisation du vecteur réfléchi en fonction de ε variant de $-\pi/4$ à $\pi/4$, et de θ variant de 0 à π . Ceci revient à décrire tous les états purs possibles pour le vecteur incident. Deux cas représentés sur la figure 4.3 se présentent alors : le cas de la dépolarisation isotrope et celui de la dépolarisation anisotrope.

Lorsque le degré de polarisation P (équation (1.52)) du vecteur réfléchi reste constant quel que soit l'état pur en entrée, la dépolarisation est dite isotrope (figure 4.3.a), elle est dite anisotrope dans le cas contraire (figure 4.3.b) [Ref. 29, Chap. 1]. Il est alors possible de définir le caractère isotrope ou anisotrope d'un échantillon à partir des quatre valeurs propres de la décomposition spectrale de l'opérateur hermitien $[N]$ (équation (1.82)). En effet, lorsque les trois plus faibles valeurs propres sont du même ordre de grandeur, nous sommes en présence de dépolarisation isotrope, celle ci est donc anisotrope dans tous les autres cas. Nous pouvons, enfin, quantifier l'anisotropie en introduisant le degré de dépolarisation anisotrope *Add* :

$$Add = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} \quad (4.20)$$

Si $Add = 0$, la dépolarisation est isotrope.

Si $Add = 1$, la dépolarisation est complètement anisotrope.

P_{\max} et P_{\min} sont respectivement la valeur maximale et la valeur minimale que prend le degré de polarisation.

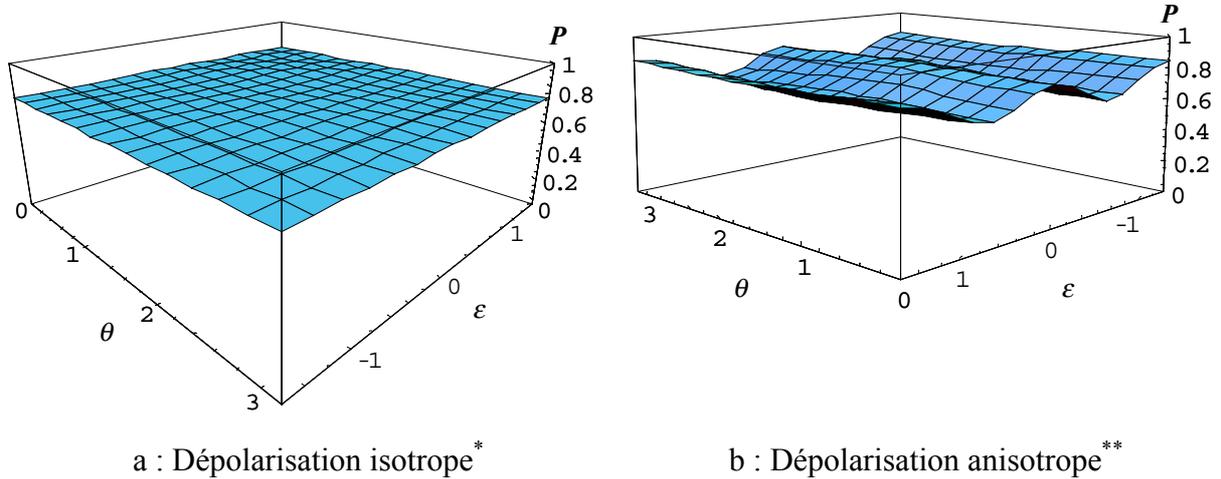


Figure 4.3

* Surface obtenue en considérant un coefficient de dépolarisation $d = 0,3$

** Surface obtenue en considérant les résultats expérimentaux de P. ELIES [9] concernant un échantillon de fer poli à $1 \mu\text{m}$ et pour un angle de diffusion de 30°

Connaissant la matrice de Mueller de notre échantillon, il devient alors facile de tracer le degré de polarisation de l'onde réfléchi en fonction de ϵ et de θ , puis de déterminer le degré d'anisotropie de dépolarisation à partir de la surface obtenue. La variance de l'erreur associée à ce paramètre peut alors être calculée, comme pour l'indice de dépolarisation par :

$$\sigma^2(Add) = \sum_{i=1}^{16} \sum_{j=1}^{16} \left(\frac{\partial Add}{\partial m_i} \right) \left(\frac{\partial Add}{\partial m_j} \right) C_{ij} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial Add}{\partial m_i} = \frac{2 \left(\frac{\partial P_{\max}}{\partial m_i} P_{\min} - \frac{\partial P_{\min}}{\partial m_i} P_{\max} \right)}{(P_{\max} + P_{\min})^2} \quad (4.22)$$

[9] P. ELIES, "Etude expérimentale de la dépolarisation en imagerie laser : Classification d'échantillons, analyse du champ de speckle", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).

Nous avons donc calculé les incertitudes relatives à ce paramètre, en tenant compte du résiduel d'erreurs, de la même manière que pour l'indice de dépolarisation. Le résultat apparaît dans le tableau 4.6.

λ (nm)	Add	$\sigma(Add)$	% d'erreur sur Add
500	0,0204	0,00013	0,6 %
550	0,0147	0,00009	0,6 %
600	0,0179	0,00014	0,8 %
600	0,0137	0,00010	0,7 %
600	0,0183	0,00024	1,31 %
650	0,0157	0,00004	0,3 %

Tableau 4.6 : Degré d'anisotropie de dépolarisation et statistiques associées pour différentes mesures à différentes longueurs d'onde

Le polarimètre nous permet donc de déterminer ce paramètre avec une précision de l'ordre du pour cent. Il resterait, pour bien faire, à déterminer l'incertitude relative à la décomposition polaire de la matrice de Mueller-Jones. Ce travail complexe mais déjà abordé dans la littérature [10] nous donnerait la précision avec laquelle est obtenue n'importe quel paramètre (qu'il caractérise une transformation de la polarisation ou de la dépolarisation) par le biais de ce montage.

En guise de conclusion pour ce chapitre, nous présentons donc l'organigramme de déroulement et d'interprétation d'une manipulation ainsi que des exemples de mesures réalisées sur des échantillons polis.

[10] **D. M. HAYES**, "Error propagation in decomposition of Mueller matrices", Proc. SPIE, vol. 3121, 112-123 (1997).

4.5 Déroulement et interprétation d'une manipulation

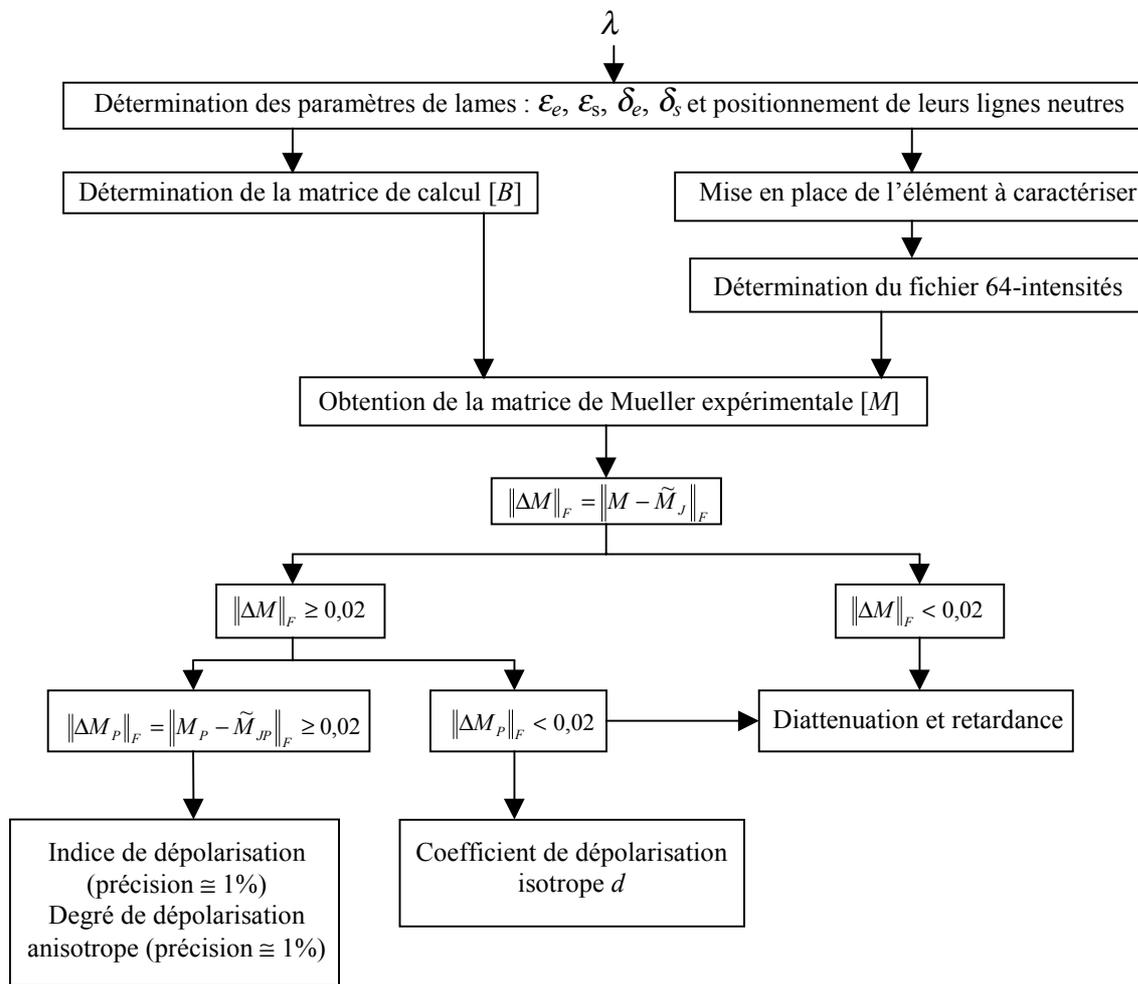


Figure 4.4 : Organigramme de déroulement d'une manipulation

Nous présentons à présent des résultats expérimentaux à deux longueurs d'onde différentes obtenus sur des surfaces dépolarisantes (échantillon d'aluminium poli). En effet, lorsque la lumière se réfléchit sur une surface, du fait de sa rugosité (même si cette dernière est faible), tous les photons ne vont pas subir le même trajet. Certains vont être directement réfléchis (figure 4.5.a), tandis que d'autres vont subir des réflexions multiples sur la surface (figure 4.5.b), et d'autres, enfin, dans le volume.

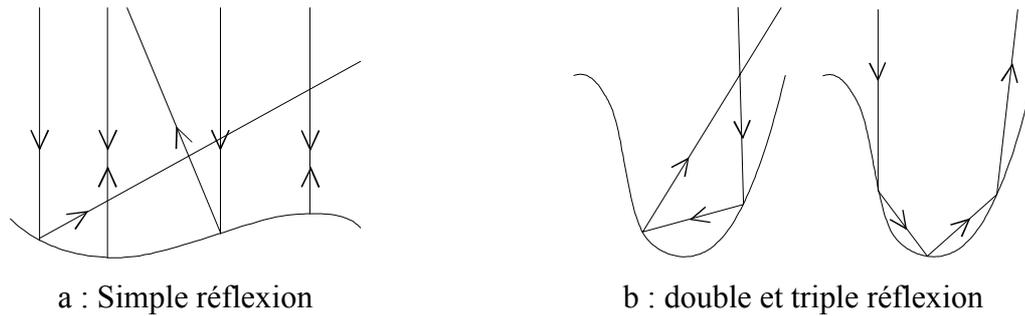


Figure 4.5

Or, à chaque réflexion, la polarisation du photon va être modifiée en fonction de l'angle d'incidence et de l'indice de la surface réfléchissante, cet indice étant complexe dans le cas des surfaces métalliques. Ce phénomène est mis en évidence par les relations de Fresnel, en considérant la figure 4.6.

$$\begin{cases} R_{//} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \\ R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \end{cases} \quad (4.23)$$

avec $R_{//} = |r_{//}|^2 = |E_{0r}/E_{0i}|_{//}^2$ et $R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 = |E_{0r}/E_{0i}|_{\perp}^2$, les notations // et \perp correspondant respectivement aux composantes parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence.

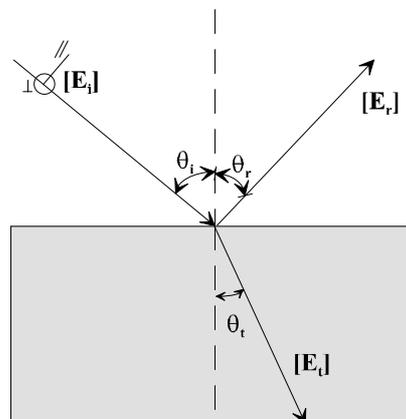


Figure 4.6 : Réflexion et réfraction sur une interface

Les photons incidents sur le détecteur n'ont donc pas tous le même état de polarisation, et c'est ce mélange qui provoque la dépolarisation.

Nous présentons à présent les résultats expérimentaux obtenus sur un échantillon d'aluminium poli à l'aide d'une poudre d'alumine dont les grains ont une taille moyenne de $0,3 \mu\text{m}$. Son profil de surface apparaît sur la figure 4.7 et la figure 4.8 décrit la disposition de l'échantillon par rapport au faisceau incident. Les résultats qui apparaissent dans les tableaux 4.7 et 4.8 ont été obtenus pour un angle de diffusion ϕ de 30° .

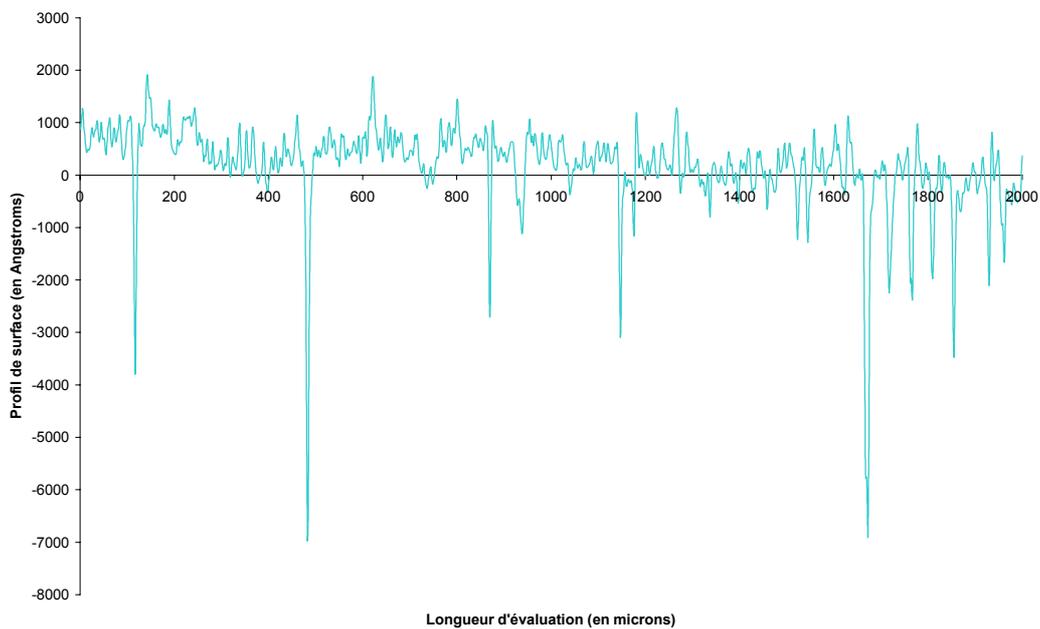


Figure 4.7 : Profil de l'échantillon d'aluminium

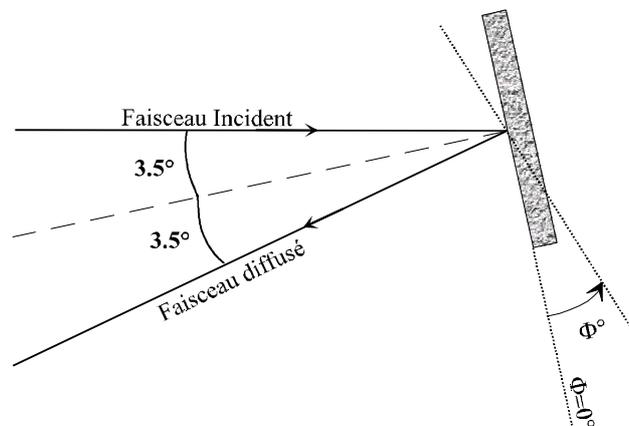


Figure 4.8 : Vue de dessus de la disposition de l'échantillon

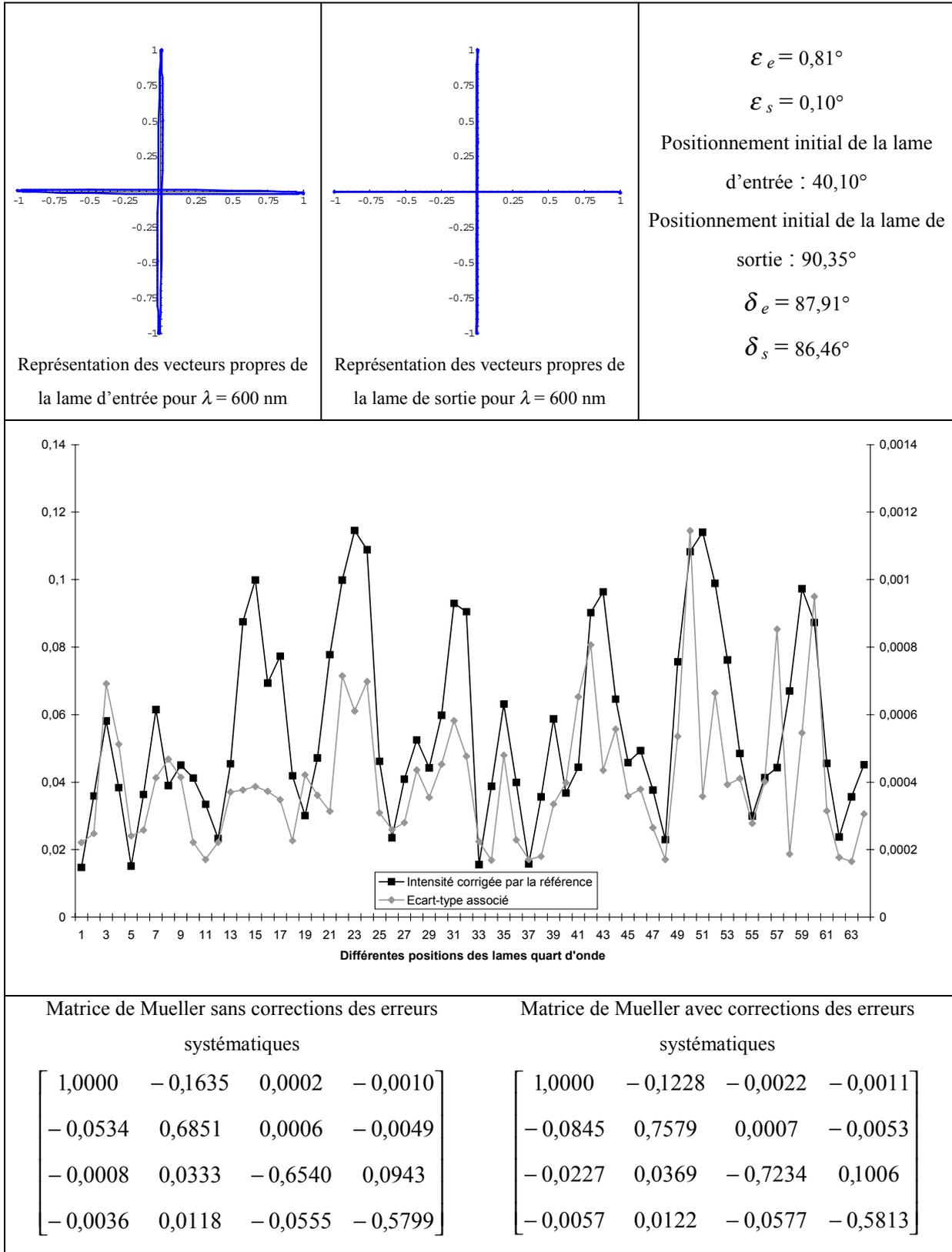


Tableau 4.7 : Résultats de l'étude polarimétrique de l'échantillon d'aluminium poli à $0,3 \mu\text{m}$ pour un angle de diffusion de 30° et une longueur d'onde incidente de 600 nm

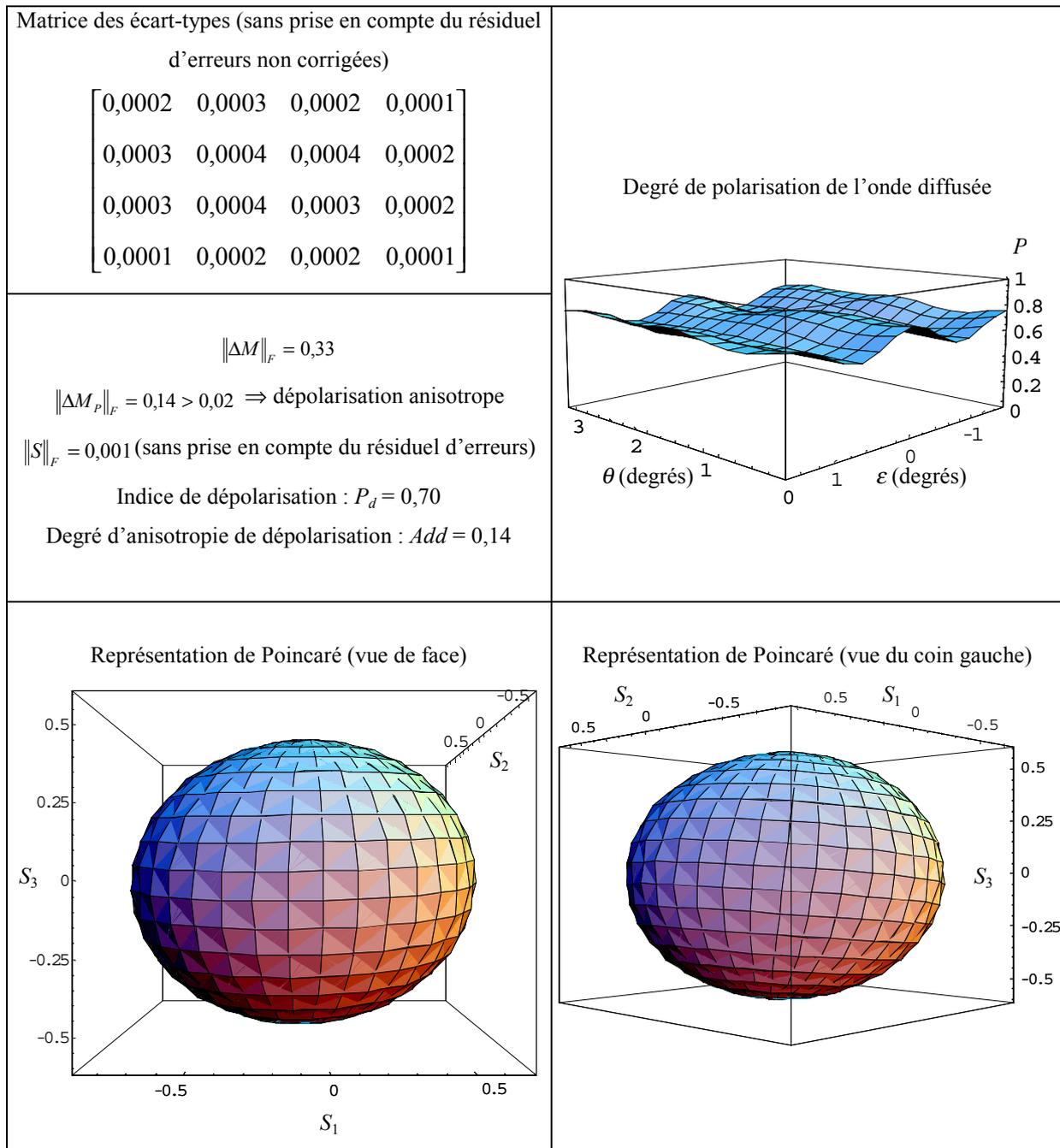


Tableau 4.8 : Résultats de l'étude polarimétrique de l'échantillon d'aluminium poli à 0,3 μm pour un angle de diffusion de 30° et une longueur d'onde incidente de 600 nm

(suite)

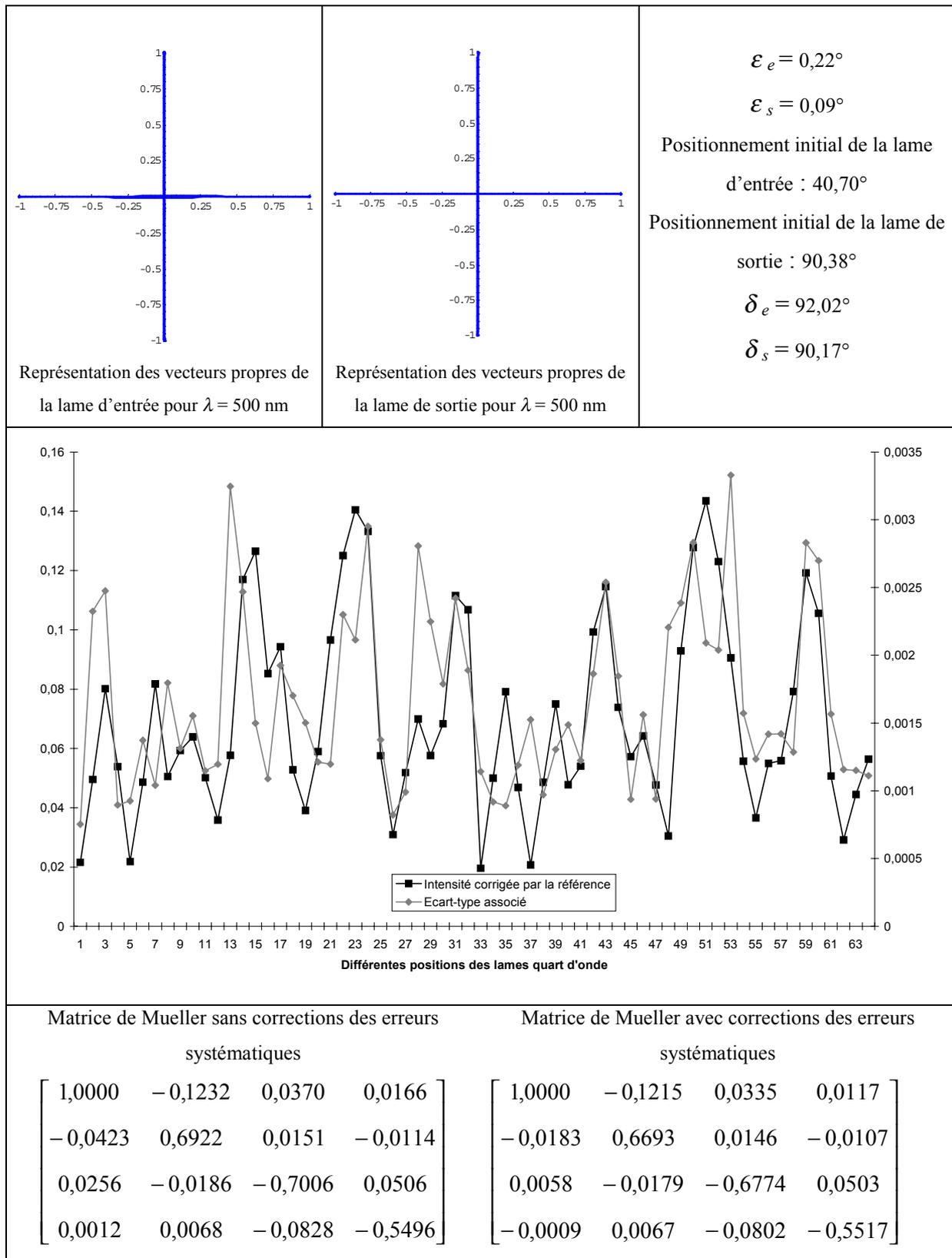


Tableau 4.9: Résultats de l'étude polarimétrique de l'échantillon d'aluminium poli à $0,3 \mu\text{m}$ pour un angle de diffusion de 30° et une longueur d'onde incidente de 500 nm

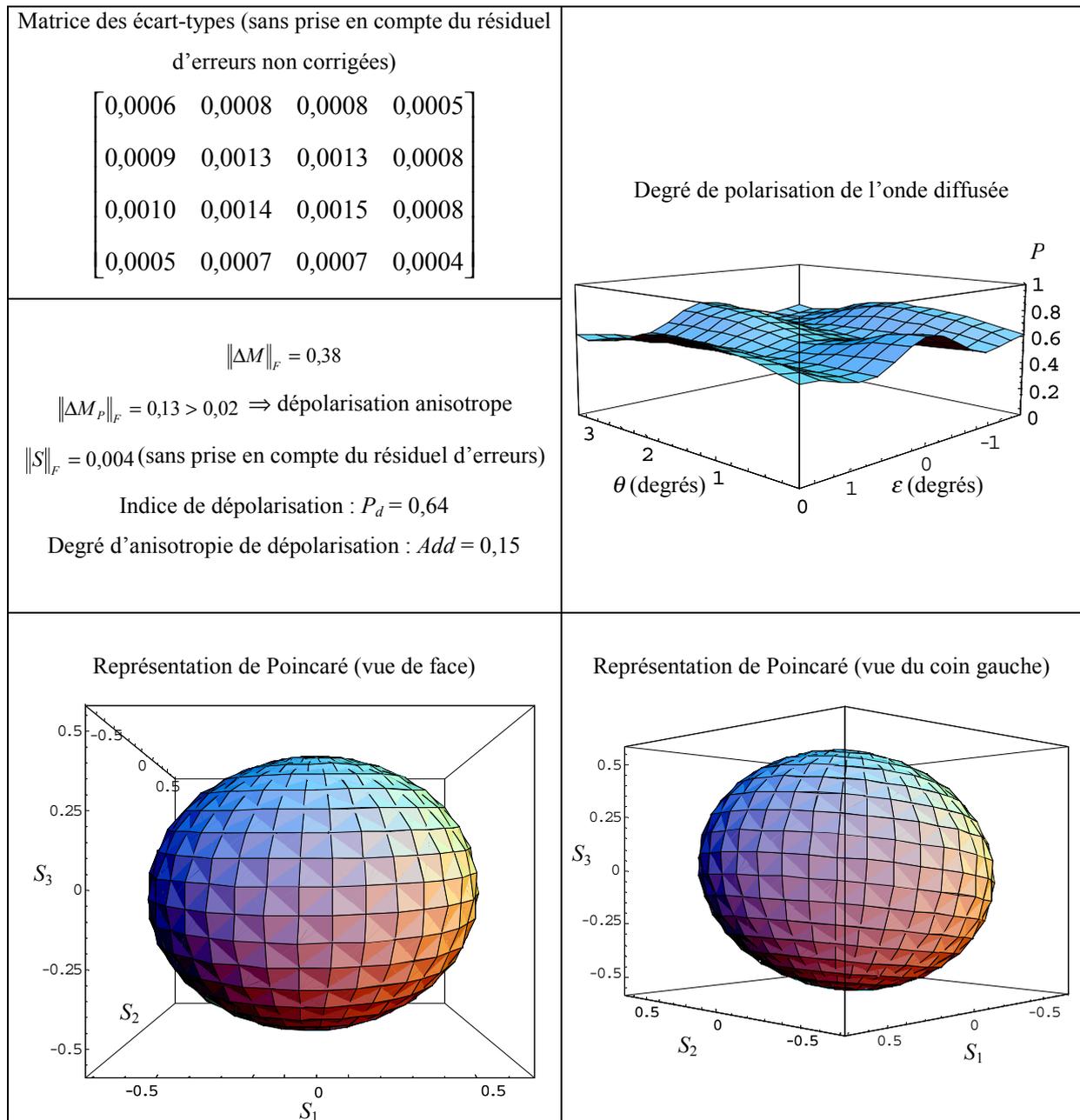


Tableau 4.10 : Résultats de l'étude polarimétrique de l'échantillon d'aluminium poli à $0,3 \mu\text{m}$ pour un angle de diffusion de 30° et une longueur d'onde incidente de 500 nm (suite)

Nous avons également fait apparaître dans ces tableaux l'évolution du vecteur de Stokes de l'onde diffusée par l'échantillon lorsque le vecteur de Stokes incident décrit tous les états polarisés (représentation de Poincaré). Pour un réflecteur idéal, cette représentation est une sphère. Pour des échantillons dépolarisants, nous obtenons une "sphéroïde" plus ou moins déformée suivant l'importance de la dépolarisation et son type (uniforme ou non), ou, et, les transformations induites par l'échantillon (changement d'orientation des axes de la sphère).

Cette représentation peut s'avérer intéressante dans toute étude polarimétrique car elle permet de visualiser conjointement des transformations de polarisation et de la dépolarisation [7].

Résumé et perspectives

La conception et la réalisation d'un polarimètre large bande sur la gamme spectrale du visible entre 400 et 700 nm vient d'être présentée, l'extension à d'autres domaines de longueurs d'onde étant tout à fait envisageable, d'autant que la source utilisée est accordable de l'Ultra-Violet (222,5 nm) à l'Infrarouge (1750 nm), mais toutefois en changeant les lames de phase de façon à "achromatiser" le polarimètre dans le domaine spectral choisi. Ce polarimètre permet de mesurer simultanément les 16 coefficients de la matrice de Mueller, offrant ainsi la possibilité d'étudier la réponse polarimétrique complète d'un échantillon, à la fois de façon déterministe (transformation de polarisation) mais également de façon statistique (dépolariation).

Les erreurs de mesure ont été réduites sur l'ensemble de la gamme spectrale et ont été estimées à moins de un pour cent par rapport au premier paramètre m_{00} de la matrice de Mueller ; les erreurs statistiques et systématiques résiduelles ont été estimées, ainsi que celles se répercutant sur les paramètres qualifiant la dépolariation (indice de dépolariation et degré d'anisotropie de dépolariation). Une telle précision a été obtenue grâce à l'utilisation d'un modèle de milieu biréfringent elliptique pour qualifier les lames de phase, nous permettant ainsi de prendre en considération la quasi totalité de leurs défauts. Un modèle aussi complet autorise également la prise en compte de phénomènes complexes comme les multiples réflexions à l'intérieur des lames. Ce procédé d'étalonnage, réalisé en configuration de transmission sans échantillon, est donc original et devrait intéresser les utilisateurs de ce type de polarimètre à éléments tournants (dual rotating retarders polarimeter), d'autant que son utilisation avec une source continue stable nous a permis de gagner un ordre de grandeur sur la précision des résultats. Concernant le résiduel d'erreurs systématiques, un certain nombre d'hypothèses peut déjà être avancé : le problème du pointé laser qui fluctue et qu'il faut donc sans cesse réajuster, rendant difficilement reproductibles les résultats d'une série de mesures à une autre, instabilités à la fois spatiales et temporelles du faisceau, déformation de la mécanique du bras de sortie sous le poids des éléments (en particulier les moteurs de rotation)

ce qui fait que la traversée de la lame de sortie par le faisceau n'est pas forcément exactement à incidence normale. Néanmoins, ce résiduel d'erreurs reste faible.

Le bras de sortie a été monté sur un banc goniométrique et un soin particulier a été porté au porte échantillon qui dispose d'un grand nombre de degrés de liberté, offrant ainsi à son utilisateur un grand nombre de configurations de mesures différentes (en transmission, en réflexion dans et en dehors du plan d'incidence). Une telle disposition présente un intérêt certain dans de nombreux domaines d'application : l'étude de la réflexion sur des surfaces ou couches minces rugueuses en dehors du plan d'incidence pour différencier des défauts de surface ou de volume par exemple [1, 2], ou bien utiliser la sensibilité à la longueur d'onde des effets dus à la rugosité [3]. L'utilisation conjointe du bras mobile et de l'accordabilité en longueur d'onde peut aussi permettre, par exemple, d'accéder à des informations de structure particulière ou de distribution de taille de particules en solution [4, 5], d'autant que des modèles théoriques ont été développés [6, 7, 8]. A l'heure actuelle, très peu d'expériences ont été réalisées dans le domaine spectral sur ces problématiques.

Par ailleurs, un banc de caractérisation des lames compensées a également été mis en place, l'intérêt de celui-ci étant son faible coût et sa simplicité de mise en œuvre, nous permettant de remonter aux épaisseurs des cristaux constituant la lame ainsi qu'au défaut d'alignement interne. La présence de franges sur le spectre de l'intensité détectée a été attribuée à ce défaut d'alignement, en raison de l'oscillation de l'ellipticité des modes propres de la lame, et il serait donc facile d'envisager un procédé de positionnement en temps réel des deux cristaux.

-
- [1] **T.A. GERMER, C.C. ASMAIL**, "Goniometric optical scatter instrument for out-of-plane ellipsometry measurements", *Rev. Sci. Instrum.*, vol 70, 3688-3695 (1999).
 - [2] **T.A. GERMER, C.C. ASMAIL**, "Polarization of light scattered by microrough surfaces and subsurface defects", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol 16, 1326-1332 (1999).
 - [3] **G.D. LEWIS, D.L. JORDAN, S.D. NIVEN**, "comparison of visible and infrared backscattering Mueller Matrices from roughened Aluminium surfaces", *Proc. SPIE* vol 3754 in Polarization measurement, analysis and Remote sensing, 266-276 (1999).
 - [4] **W. M. McCLAIN, W. H. JENG, B. PATI, Y. SHI, D. TIAN**, "Measurements of the Mueller scattering matrix by use of optical beats from a Zeeman laser", *Appl. Opt.*, vol. 33, 1230-1241 (1994).
 - [5] **M. I. MISHCHENKO, L. D. TRAVIS**, "Light scattering by polydispersions of randomly oriented spheroids with sizes comparable to wavelengths of observation", *Appl. Opt.*, vol. 33, 7206-7225 (1994).
 - [6] **Y. SHI, W. M. McCLAIN**, "Closed-form Mueller scattering matrix for a random ensemble of long, thin cylinders", *J. Chem. Phys.*, vol. 98, 1695-1711 (1993).
 - [7] **Y. SHI, W. M. McCLAIN**, "Longwave properties of the orientation averaged Mueller scattering matrix for particles of arbitrary shape. I. Dependence on wavelength and scattering angle", *J. Chem. Phys.*, vol. 93, (1990).
 - [8] **W. M. McCLAIN, W. A. GHOUL**, "Shape effects in elastic scattering by orientationally random ensembles of simple model viruses", *Biopolymers*, vol. 26, 2027-2040 (1987).

Enfin, l'originalité de cet appareil vient de la source laser impulsionnelle quasi-monochromatique accordable continûment spectralement, rendant ainsi possible des études polarimétriques pour des effets non linéaires [9, 10] ou pour des phénomènes d'absorption ou de fluorescence [11], et pour lesquelles, les rares travaux existants (à notre connaissance) montrent l'intérêt d'utiliser le formalisme de Mueller.

A court terme, l'étude de phénomènes de polarisation est déjà envisagées, dans le cadre d'un projet actuellement en cours au laboratoire et initié par l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire) concernant la signature polarimétrique du syndrome cutané radiologique. A plus long terme, l'utilisation du polarimètre pour l'étude d'effets non linéaires pourrait s'avérer également très intéressante.

-
- [9] **Y. SHI, W.M. McCLAIN, R.A. HARRIS**, "An extension of the Mueller scattering matrix to non linear light scattering", Chem. Phys. Lett., vol 205, 91-95 (1993).
- [10] **Y. SHI, W. M. McCLAIN**, "Generalized Stokes-Mueller formalism for two-photon absorption, frequency doubling, and hyper-Raman scattering", Phys. Rev. A, vol. 49, 1999-2015 (1994).
- [11] **Y. SHINDO, Y. ODA**, "Mueller matrix approach to fluorescence spectroscopy. I: Mueller matrix expression for fluorescent samples and their application to problems of circularly polarized emission spectroscopy", Appl. Spectrosc., vol. 46, 1251-1259 (1992).

Bibliographie

Introduction

- [1] **D. B. SHAPIRO, M. F. MAESTRE, W. M. McCLAIN, P. G. HULL, Y. SHI, M. S. QUINBY-HUNT, J. E. HEARST, A. J. HUNT**, "Determination of the average orientation of DNA in the octopus sperm *Eledone cirrhosa* through polarized light scattering", *Appl. Opt.*, vol. 29, 1689-1695 (1990).
- [2] **L. P. KAMINOW**, "Polarization in optical fibers", *IEEE JQE*, vol. QE 17, 15-25 (1981).
- [3] **P. OLIVARD**, "Application du formalisme de Stokes-Mueller à la caractérisation de fibres optiques soumises à des contraintes uniformes", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
- [4] **B. DREVILLON**, "Phase modulated ellipsometry from the ultraviolet to the infrared : in situ application to the growth of semiconductors", *Progress in crystal growth and characterization of materials*, vol. 27 (1993).
- [5] **B. LE JEUNE**, "Caractéristiques polarimétriques d'une onde optique en milieu marin : application à l'imagerie par laser impulsif", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1990).
- [6] **G. LE BRUN**, "Exploitation du paramétrage polarimétrique en imagerie sous-marine par laser : application à la classification et à l'identification de cibles", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1992).
- [7] **P. Y. GERLIGAND**, "Caractérisation polarimétrique de lames de ferrofluides : application à l'imagerie active", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1995).
- [8] **P. ELIES**, "Etude expérimentale de la dépolarisation en imagerie laser : classification d'échantillons, analyse du champ de speckle", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
- [9] **Y. SHI, M. MACLAIN**, "Longwave properties of the orientation averaged Mueller scattering matrix for particules of arbitrary shape. I. Dependence on wavelength and scattering angle ", *J. Chem. Phys.*, vol. 93, 5609-5615 (1990).

- [10] **Y. SHINDO, Y. ODA**, "Mueller matrix approach to fluorescence spectroscopy. I : Mueller matrix expression for fluorescent samples and their application to problems of circularly polarized emission spectroscopy", *Appl. Spectrosc.*, vol. 46, 1251-1259 (1992).
- [11] **A. EN NACIRI**, "Spectroscopic ellipsometry of anisotropic materials : application to the optical constants of HgI₂", *Appl. Opt.*, vol. 38, 647-654 (1999).
- [12] **M. H. SMITH, J. D. HOWE, J. B. WOODRUFF, M. A. MILLER, G. R. A. PETTY, E. A. SORNSIN**, "Multispectral infrared Stokes imaging polarimeter", *Proc. SPIE*, vol. 3754 (1999).
- [13] **E. A. SORNSIN, R. A. CHIPMAN**, "Alignment and calibration of an infrared achromatic retarder using FTIR Mueller matrix spectropolarimetry", *Proc. SPIE*, 28-34 (1997).
- [14] **E. COMPAIN**, "Conception et réalisation d'un ellipsomètre de Mueller achromatique fonctionnant en temps réel", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1999).

Chapitre 1

- [1] **G.G. STOKES**, "On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources", *Trans Cambridge Phil. Soc.*, vol. 9, 339-416 (1852).
- [2] **H. POINCARÉ**, "Théorie mathématique de la lumière", Gauthiers-Villars, vol. 2, Paris (1892).
- [3] **R.C. JONES**, "A new calculus for the treatment of optical systems", *J.O.S.A.*, vol. 31, 488-493 (1941); vol. 31, 493-499 (1941); vol. 31, 500-503 (1941); vol. 32, 486-493 (1942); vol. 37, 107-110 (1947); vol. 37, 110-112 (1947); vol. 38, 671-684 (1948); vol. 46, 126-131 (1956).
- [4] **H. MUELLER**, "The foundation of optics", *J.O.S.A. (A)*, vol. 38, 551 (1948).
- [5] **M. BORN, E. WOLF**, "Principles of Optics", 6^{ème} édition, Pergamon Press, New-York (1983).
- [6] **E. COLLET**, "Polarized light – Fundamentals and applications", *Optical engineering* (Marcel Dekker inc.), New-York, 1993, pages 27 à 31.
- [7] **C. WHITNEY**, "Pauli-algebraic operators in polarisation optics", *J. O. S. A.*, vol. 61, 1207-1213 (1971).
- [8] **J. J. GIL, E. BERNABEU**, "Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix", *Optik*, vol. 76, 67-71 (1987).

- [9] **S. -Y. LU, R. A. CHIPMAN**, "Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices", J. O. S. A (A), vol. 11, 766-773 (1994).
- [10] **P SOLEILLET**, "Sur les paramètres caractérisant la polarisation partielle de la lumière dans les phénomènes de fluorescence", Ann. Phys. , vol. 12, 23-97 (1929).
- [11] **F. PERRIN**, "Polarisation of light scattered by isotropic media", J. of Chem. Phys., vol. 10, 415-427 (1942).
- [12] **E. S. FRY et G. W. KATTAWAR**, "Relationships between elements of the Stokes matrix", Appl. Opt., vol. 20, 2811-2814 (1981).
- [13] **J. J. GIL et E. BERNABEU**, "A depolarization criterion in Mueller matrices", Opt. Act., vol. 32 (3) , 259-261 (1985).
- [14] **J. J. GIL et E. BERNABEU**, "Depolarization and polarization indices of an optical system", Opt. Act., vol 33, 185-189 (1986).
- [15] **H. C. VAN DE HULST**, "Light scattering by small particles", Ed. Wiley, New-York (1957).
- [16] **K. KIM, L. MANDEL, E. WOLF**, "Relationship between Jones and Mueller matrices for a random media", J. O. S. A., vol. 4, 433-437 (1987).
- [17] **R. SIMON**, "Mueller matrices and depolarization criteria", Journal of Modern Optics, vol. 47, 569-575 (1987).
- [18] **A. B. KOSTINSKI**, "Depolarisation criterion for incoherent scattering", Appl. Opt., vol.31, 3506-3508 (1992).
- [19] **R. BARAKAT**, "Bilinear constraints between elements of the 4x4 Mueller-Jones transfer matrix of polarization theory", Opt. Commun., vol. 28, 159-161 (1981).
- [20] **C. BROSSEAU**, "Analysis of experimental data for Mueller polarization matrices", Optik, vol. 85, 83-86 (1990).
- [21] **C. BROSSEAU**, "Polarization transfer in non-depolarizing optical linear media", Optik, vol. 85, 180-182 (1990).
- [22] **R. SIMON**, "The connection between Mueller and Jones matrices of polarization optics", Opt. Commun., vol. 42, 293-297 (1982).
- [23] **D. G. M. ANDERSON, R. BARAKAT**, "Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix", J. O. S. A., vol. 11, 2305-2319 (1994).
- [24] **S. R. CLOUDE**, "Group theory and polarisation algebra", Optik, vol. 75, 26-36 (1986).

- [25] **S. R. CLOUDE**, "Condition for the physical realisability of matrix operators in polarimetry", in Polarization consideration for optical systems II, R. A. CHIPMAN ed., Proc. Soc. Photo-Opt Instrum. Eng., vol. 1166, 177-185 (1989).
- [26] **S. R. CLOUDE**, "Lie groups in electromagnetic wave propagation and scattering", J. of Electromagnetic Waves and Application, vol. 6, 947-974 (1992).
- [27] **S. R. CLOUDE**, "Special unitary groups polarimetry theory", Proc. SPIE, vol. 2265, 292-303 (1994).
- [28] **S. R. CLOUDE, E. POTTIER**, "Concept of polarization entropy in optical scattering", Optical Engineering, vol. 34, 1599-1610 (1995).
- [29] **F. LE ROY BREHONNET**, "Application de décomposition de matrices de Mueller à la caractérisation et à la classification de cibles", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
- [30] **F. LE ROY-BREHONNET, B. LE JEUNE**, "Utilization of Mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties", Prog. Quant. Electr. , 1-42 (1997).
- [31] **F. LE ROY-BREHONNET, P. ELIES, P. Y. GERLIGAND, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Mueller matrix decomposition : application to optical targets classification", J. I. P. R. , Nantes, 374-381 (1995).
- [32] **A. GARCIA WEIDNER**, "The Poincaré sphere : isolated and real trajectories describing the state of polarization", J. Optics (Paris), vol. 23, 3-12 (1992).
- [33] **P. PELLAT FINET**, "représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions", Optica Acta. , vol. 31, 415-434 (1984).
- [34] **P. PELLAT FINET**, "An introduction to a vectorial calculus for polarization optics", Optik, vol. 84, 169-175 (1990).
- [35] **P. PELLAT FINET**, "Geometrical approach to polarization optics I : geometrical structure of polarized light", Optik, vol. 87, 27-33 (1991).
- [36] **P. PELLAT FINET**, "Geometrical approach to polarization optics II : quaternion representation of polarized light", Optik, vol. 87, 68-77 (1991).
- [37] **C. S. BROWN**, "The unified formalism for treating polarization effects using Stokes parameters and the Lorentz group", Proc. SPIE, vol. 1746, 174-182 (1992).
- [38] **C. S. BROWN, M. W. SHUTE, D. D. WILLIAMS, F. MUHAMMED**, "The development and calibration of an optical fiber polarimeter", Proc. SPIE, vol. 2265, 62-69 (1994).

Chapitre 2

- [1] **B. DREVILLON**, "Phase modulated ellipsometry from the ultraviolet to the infrared : in situ application to the growth of semiconductors", *Progress in Crystal growth and characterization of materials*, 27 (1993).
- [2] **A. EN NACIRI**, "Ellipsométrie spectroscopique conventionnelle et généralisée de milieux anisotropes. Application à l'étude des propriétés optiques de l'iodure mercurique (HgI₂)", Thèse de Doctorat, Université de Metz (1999).
- [3] **B. LECOURT**, "Ellipsométrie spectroscopique conventionnelle et généralisée de films moléculaires ultraminces. Bases théoriques et instrumentales - Application à l'étude de films Langmuir-Boldgett et de films autosupportés", Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I (1998).
- [4] **E. COMPAIN**, "Conception et réalisation d'un ellipsomètre de Mueller achromatique fonctionnant en temps réel", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1999).
- [5] **B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Imagerie sous-marine par laser : contraste polarimétrique", *J. Optics (Paris)*, vol. 21, 133-140 (1990).
- [6] **G. LE BRUN, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Laser imaging procedure for evaluating the polarization signature of immersed targets", *Pure Appl. Opt.*, vol. 2, 445-470 (1993).
- [7] **P.-Y. GERLIGAND, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Polarimetric characterization of thin plates of ferrofluids : Application to active imagery", *J. of Magn. And Magn. Mat*, vol. 122, 406-410 (1993).
- [8] **P. ELIES, B. LE JEUNE, F. LE ROY-BREHONNET, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Experimental investigation of the speckle polarization for a polished aluminium sample", *J. Phys. D :Applied Phys.*, vol. 30, 29-39 (1997).
- [9] **P. OLIVARD, P Y GERLIGAND, B. LE JEUNE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Measurement of optical fibre parameters using an optical polarimeter and Stokes-Mueller formalism", *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 32, 1618-1625 (1999).
- [10] **J. P. NOUGIER**, "Méthode de calcul numérique", Edition Masson, 41-44 (1981).
- [11] **S. HUARD**, "Polarisation de la lumière", Edition Masson, page 93 (1994).
- [12] **B. H. KOLNER**, "Intensity noise enhancement in the half wave/polarizer attenuator", *Opt. Letters*, vol. 16, 784-786 (1991).
- [13] **A. M. TITLE**, "Improvement of birefringent filters. 2 : Achromatic waveplates", *Appl Opt*, vol. 14, 229-237 (1975).
- [14] **J. M. BENNET**, "Handbook of optics", Edition Mc Graw-Hill, New York (1995).

- [15] **J. M. BECKERS**, "Achromatic linear retarders", *Appl. Opt.*, vol. 10, 973-975 (1971).
- [16] **V. CHANDRASEKHARAN, H. DAMANY**, "Birefringence of sapphire, magnesium fluoride, and Quartz in the vacuum ultraviolet, and retardation plates", *Appl. Opt.*, vol. 7, 939-941 (1968).
- [17] **M. G. DESTRIAU, J. PROUTEAU**, "Réalisation d'un quart d'onde quasi achromatique par juxtaposition de deux lames cristallines de même nature", *J. Phys. Radium*, vol.10, 53-55 (1949).
- [18] **S. PANCHARATNAM**, "Achromatic combinations of birefringent plates", *Proc. Indian Acad. Sci.*, vol. 41, 137-144 (1955).
- [19] **P. HARIHARAN**, "Broad-band superachromatic retarders", *Meas. Sci. Technol.*, vol. 9, 1978-1980 (1998).
- [20] **A. YASSFY**, "Ellipsométrie spectroscopique. Application à la caractérisation de Silicium poreux", Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal-Clermont 2 (1996).
- [21] **A BOSCHERON, C. SAUTET, E. BERIOT**, "La conversion de fréquence pour les lasers de puissance", *Revue scientifique et technique de la direction des applications militaires*, n° 22, 31-42 (1999).
- [22] **Y. R. SHEN**, "The Principles of Nonlinear Optics", Wiley-Interscience, (1984).
- [23] **E. ROSENCHER, B. VINTER**, "Optoélectronique", Edition Masson, (1998).

Chapitre 3

- [1] **R. M. A. AZZAM, N. M. BASHARA**, "Analysis of systematic errors in rotating-analyser ellipsometers", *J. O. S. A.*, vol. 64, 1459-1469 (1974).
- [2] **P. S. AUGÉ**, "Mueller matrix ellipsometry with imperfect compensators", *J. O. S. A.*, vol. 68, 1519-1528 (1978).
- [3] **N. G. THEOFANOUS**, "Error analysis of circular polarizer-analyzer systems for phase retardation measurements", *J. O. S. A.*, vol. 4, 2191-2200 (1987).
- [4] **P. D. HALE, G. W. DAY**, "Stability of birefringent linear retarders (waveplates)", *Appl. Opt.*, vol. 27, 5146-5153 (1988).
- [5] **J. L. PEZZANITI, R. A. CHIPMAN**, "Linear polarization uniformity measurements taken with an imaging polarimeter", *Optical Engineering*, vol. 34, 1569-1573 (1995).
- [6] **E. A. WEST, M. H. SMITH**, "Polarization errors associated with birefringent waveplates", *Proc. SPIE (San Diego U.S.A)*, vol. 2265, 260-271 (1994).

- [7] **D. H. GOLDSTEIN, R. A. CHIPMAN**, "Error analysis of a Mueller matrix polarimeter", *J. O. S. A.*, vol. 7, 693-700 (1990).
- [8] **P. OLIVARD**, "Application du formalisme de Stokes-Mueller à la caractérisation polarimétrique de fibres optiques soumises à des contraintes uniformes", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
- [9] **J. F. NYE**, "Physical properties of crystals", Edition Clarendon (Oxford), sec. 14, (1957).
- [10] **G. BRUHAT**, "Optique", Cours de physique générale, Edition Masson (Paris), (1992).
- [11] **K. PIETRASZKIEWICZ, W. A. WOZNIAK, P. KURZYNOWSKI**, "Effect of multiple reflections in retardance plates with elliptical birefringence", *J. O. S. A. (A)*, vol. 12, 420-424 (1995).
- [12] **J. POIRSON, T. LANTERNIER, J. C. COTTEVERTE, A. LE FLOCH, F. BRETENAKER**, "Jones matrix of a quarter-wave plate for Gaussian beams", *Appl. Opt.*, vol. 34, 6806-6818 (1995).
- [13] **I. SCIERSKY, F. RATAJCZYK**, "The Jones matrix of the real dichroic elliptic object", *Optik*, vol. 68, 121-125 (1984).
- [14] **B. BOULBRY, B. LE JEUNE, B. BOUSQUET, F. PELLE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Error analysis and calibration of a spectroscopic Mueller matrix polarimeter using a short-pulse laser source", *Meas. Sci. Technol.*, vol. 13, 1563-1573 (2002).
- [15] **D. B. CHENAULT, R. A. CHIPMAN**, "Measurements of linear diattenuation and linear retardance spectra with a rotating sample spectropolarimeter", *Appl. Opt.*, vol. 32, 3513-3519 (1993).
- [16] **B. BOULBRY, B. BOUSQUET, B. LE JEUNE, Y. GUERN, J. LOTRIAN**, "Polarization errors associated with zero-order achromatic quarter-wave plates in the whole visible spectral range", *Opt. Express*, vol. 9, 225-235 (2001).
- [17] **J. F. NYE**, "Physical Properties of Crystals", Clarendon, Oxford (1957).
- [18] **A. YARIV, P. YEH**, "Optical waves in crystals", J. Wiley and sons, New York (1984).
- [19] **D. B. CHENAULT**, "Infrared Spectropolarimetry", Thèse de Doctorat, University of Alabama in Huntsville (1992).
- [20] **B. BOULBRY, B. LE JEUNE, F. PELLE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Identification of error parameters and calibration of a double-crystal birefringent waveplate with a broadband spectral light source", *J. Phys. D : Applied Phys.*, vol. 35, 2508-2515 (2002).

- [21] **F. PELLEN**, "Evaluation de l'apport en détection en milieu marin de la technique de modulation hyperfréquence sur porteuse optique à 0,5 micron", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (2000).

Chapitre 4

- [1] **B. LE JEUNE, J. P. MARIE, P. Y. GERLIGAND, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Mueller matrix formalism in imagery. An experimental arrangement for noise reduction", Proc. SPIE (San Diego U.S.A), vol. 2265, 443-451 (1994).
- [2] **W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING**, "Numerical Recipes", Cambridge University Press, (1987).
- [3] **D. L. SMITH**, "Matrix formalism for uncertainly analysis", Rev. Sci. Instrum., vol. 54, 818-824 (1983).
- [4] **F. LE ROY-BREHONNET, B. LE JEUNE, P. Y. GERLIGAND, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Analysis of depolarizing optical targets by Mueller matrix formalism", Pure Appl. Opt., vol. 6, 385-404 (1997).
- [5] **J. C. CHANTELOUP**, "Contrôle et mise en forme des fronts de phase et d'énergie d'impulsions lasers brèves ultra-intenses", Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique (1998).
- [6] **F. BOULVERT**, "Caractérisation des effets de polarisation dans les guides d'ondes rubans à base de polymères", rapport de stage de DEA, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2002.
- [7] **P. ELIES, B. LE JEUNE, J. P. MARIE, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "Surface rugosity and polarimetric analyses", Proc. SPIE, vol. 2782, International Symposium on Lasers, Optics and Vision for Productivity in Manufacturing I, Besançon (1996).
- [8] **P. ELIES, B. LE JEUNE, P. OLIVARD, J. CARIOU, J. LOTRIAN**, "The application of de-polarization analysis to polarimetric characterization and classification of metallic and dielectric samples", J. Phys. D : Appl. Phys, vol. 30, 2520-2529 (1997).
- [9] **P. ELIES**, "Etude expérimentale de la dépolarisation en imagerie laser : Classification d'échantillons, analyse du champ de speckle", Thèse de Doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest (1996).
- [10] **D. M. HAYES**, "Error propagation in decomposition of Mueller matrices", Proc. SPIE, vol. 3121, 112-123 (1997).

Résumé et perspectives

- [1] **T.A. GERMER, C.C. ASMAIL**, "Goniometric optical scatter instrument for out-of-plane ellipsometry measurements", *Rev. Sci. Instrum.*, vol 70, 3688-3695 (1999).
- [2] **T.A. GERMER, C.C. ASMAIL**, "Polarization of light scattered by microrough surfaces and subsurface defects", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol 16, 1326-1332 (1999).
- [3] **G.D. LEWIS, D.L. JORDAN, S.D. NIVEN**, "comparison of visible and infrared backscattering Mueller Matrices from roughened Aluminium surfaces", *Proc. SPIE* vol 3754 in Polarization measurement, analysis and Remote sensing, 266-276 (1999).
- [4] **W. M. McCLAIN, W. H. JENG, B. PATI, Y. SHI, D. TIAN**, "Measurements of the Mueller scattering matrix by use of optical beats from a Zeeman laser", *Appl. Opt.*, vol. 33, 1230-1241 (1994).
- [5] **M. I. MISHCHENKO, L. D. TRAVIS**, "Light scattering by polydispersions of randomly oriented spheroids with sizes comparable to wavelengths of observation", *Appl. Opt.*, vol. 33, 7206-7225 (1994).
- [6] **Y. SHI, W. M. McCLAIN**, "Closed-form Mueller scattering matrix for a random ensemble of long, thin cylinders", *J. Chem. Phys.*, vol. 98, 1695-1711 (1993).
- [7] **Y. SHI, W. M. McCLAIN**, "Longwave properties of the orientation averaged Mueller scattering matrix for particles of arbitrary shape. I. Dependence on wavelength and scattering angle", *J. Chem. Phys.*, vol. 93, (1990).
- [8] **W. M. McCLAIN, W. A. GHOU**, "Shape effects in elastic scattering by orientationally random ensembles of simple model viruses", *Biopolymers*, vol. 26, 2027-2040 (1987).
- [9] **Y. SHI, W.M. McCLAIN, R.A. HARRIS**, "An extension of the Mueller scattering matrix to non linear light scattering", *Chem. Phys. Lett.*, vol 205, 91-95 (1993).
- [10] **Y. SHI, W. M. McCLAIN**, "Generalized Stokes-Mueller formalism for two-photon absorption, frequency doubling, and hyper-Raman scattering", *Phys. Rev. A*, vol. 49, 1999-2015 (1994).
- [11] **Y. SHINDO, Y. ODA**, "Mueller matrix approach to fluorescence spectroscopy. I: Mueller matrix expression for fluorescent samples and their application to problems of circularly polarized emission spectroscopy", *Appl. Spectrosc.*, vol. 46, 1251-1259 (1992).

Identification of error parameters and calibration of a double-crystal birefringent wave plate with a broadband spectral light source

B Boulbry, B Le Jeune, F Pellen, J Cariou and J Lotrian

Laboratoire de Spectrométrie et Optique Laser, Université de Bretagne Occidentale,
6, Avenue Le Gorgeu BP 809, 29285 Brest Cedex, France

E-mail: bruno.boulbry@univ-brest.fr

Received 8 April 2002, in final form 18 July 2002

Published 8 October 2002

Online at stacks.iop.org/JPhysD/35/2508

Abstract

A simple apparatus dedicated to the calibration of a low-order double-crystal birefringent wave plate is presented. These wave plates are widely used in optical instrumentation and the residual errors associated with these devices can be very important in high-resolution polarimetry. Misalignment between the crystals is considered and simulated. An analytical treatment of such unperfected device is given and is followed by numerical examples. The fit between the experimental values obtained using this apparatus and the theoretical ones proves the interest of the method and enabled us to assess the wave plate optical characteristics.

1. Introduction

Zero- or single-order quarter-wave-plates made of optically-cemented dual plates are widely used in instrumentation; they replace a single plate when the thickness required to produce the expected retardation is too reduced or when achromatic wave plates are needed. In most of these polarization measurement devices, these retarders seem to be a necessary evil. They may be used, for example, as one of the active elements in high-resolution polarimetry measurements. As a matter of fact, the residual errors associated with them lead to a non-negligible error on the measurements and should be taken into account in a calibration procedure. The misalignment of optic axes in a double crystal wave plate is one of the main source of error and leads to both elliptical eigenpolarization modes in the retarder (elliptical birefringence) and variation of its neutral axes direction with respect to the wavelength. The experimental determination of this variation and its fit by a theoretical model gives an estimation of the tilt error as well as indication on the thickness of the two materials used to achieve the retarder. The knowledge of these characteristics provides one with the optical properties of such retarders. Previous investigations have allowed us to

successfully determine the characteristics of a quartz-MgF₂ achromatic quarter-wave-plate [1], but because of the high cost of the devices involved in the experimental set-up, e.g. the optical parametric oscillator, it was highly desirable to design a simpler and cheaper apparatus. This led us to introduce, here, another solution and illustrate it with the experimental determination of the optical properties of a 532-nm double quartz quarter-wave-plate.

Retardation plates are usually made of a single piece of material, but the thickness required is generally too low for convenient polishing. Although calcite, for example, would, at first, sound a good material for retardation plates, its very high birefringence imposes one to use an extremely thin piece, less than 1 μm , to manufacture a single $\lambda/4$ retardation plate [2]. This is why, the retarders made of a single plate are very often multiple-order retarders. Nevertheless, a zero- or first-order wave plate has several advantages: for example, the change in phase retardation with temperature is less than one-hundredth that of the multiple-order plate and the change in retardation with angle of incidence is also small as compared with a single plate [2].

However, one can make a first-order plate by cementing together two pieces of quartz of nearly alike thickness in order

to parallel the fast axis of one of them with the slow axis of the other. The plate is then polished up to get a difference in thickness between them equal to that of a single $\lambda/4$ plate. A reasonably achromatic retardation plate can also be constructed from two, or more, different materials [3, 4] or two or more plates of the same material with their axes directed at the appropriate angle [5, 6].

Such wave plates are, therefore, widely used in instrumentation and the residual errors associated with them may be rather influential in, for example, spectropolarimetry measurement [7]. Precise measurements, indeed, are needed to know the plates characteristics.

One of the principal source of error is crystals misalignment for it causes variation of the wave plate neutral axes with respect to the wavelength (λ) [8]. This error leads as well to the elliptical eigenpolarization modes in the retarder and should be, consequently, taken into account in measurements based on the use such optical devices. The variation in the ellipticity of the plate eigenpolarization modes comes from this tilt error [1].

Fortunately, the experimental observation of the neutral axes variations is of great help in the determination of the whole characteristics of the compensated retarder [1] in order to, eventually, take them into account in a calibration procedure. The study reported here is aimed at showing it. The theoretical model used to describe the double crystal plate is developed in section 2. Section 3 deals with the experimental methodology and set-up used, then reports on the results obtained with a 532-nm double quartz quarter-wave-plate (Fichou SA). The last section discusses them.

2. Theoretical model

Two pieces of birefringent materials, e.g. two positive or negative uniaxial crystals, can be used to make a zero-order retarder, but the fast axis of the first one must be aligned with the slow axis of the other to cancel out all but the desired retardation. One negative and one positive crystals with their fast and slow axes aligned can be used as well.

In the first example mentioned above, the Jones matrix $[M]$ of the double-crystal wave plate with a tilt error θ between the two plates (figure 1) can be consequently calculated as follows:

$$[M] = [R(-\theta)][M_2][R(\theta)][M_1] \quad (1)$$

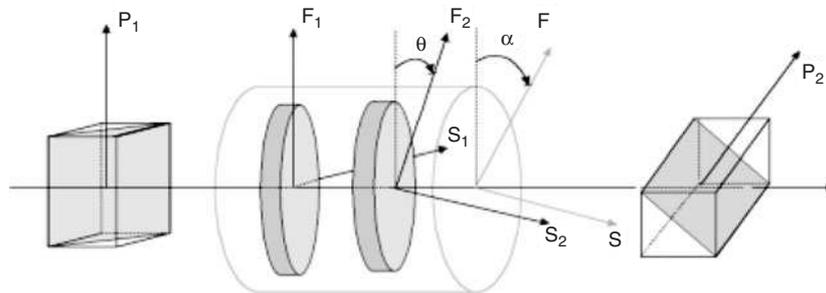


Figure 1. Schematic diagram of the misalignment and schematic layout of the experiment where (F_1, S_1) represent the fast and slow axes of the first plate, (F_2, S_2) , those of the second plate and (F, S) , those of the double-crystal retarder. P_1 and P_2 are crossed Glan-polarizers.

where $[M_1]$ is the Jones matrix of the first plate, $[M_2]$ is that of the second plate and $[R(\theta)]$ is the matrix of a rotational change of basis.

$$[R(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_1} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_2} \end{bmatrix} \quad (2c)$$

δ_1 and δ_2 are the retardation of the first and the second plate, respectively.

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_1 d_1 \quad (3a)$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_2 d_2 \quad (3b)$$

Δn_1 and Δn_2 are the values of birefringence for the materials at the wavelength specified and d_1, d_2 are the thickness of each plate.

If the misalignment between the two plates is small, its effect on the retardation is negligible [8]. As a matter of fact, a quarter-wave-plate, for example, could be obtained by cementing two pieces of quartz of different thickness (d_1 and d_2) on condition that:

$$\frac{1}{4}\lambda = \Delta n_{\text{quartz}}(\lambda)(d_2 - d_1) \quad (4)$$

The calculation of the eigenvectors of matrix $[M]$ gives the direction of the neutral axes as well as the ellipticity of the eigenpolarization modes of the plate versus λ [1]; it actually yields to the two orthogonal elliptical vectors, V_1 and V_2 :

$$V_1 = \begin{bmatrix} a \\ b + ic \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -b + ic \\ a \end{bmatrix} \quad (5)$$

where a, b, c are real numbers and i is the complex number such as $i^2 = -1$.

The ellipticity ε of V_1 is simply calculated using relation (6):

$$\sin(\varepsilon) = \sin(2\nu) \sin(\phi) \quad (6)$$

where ν and ϕ are, respectively, the diagonal angle and the phase difference between the x - and y -components of the elliptical state of polarization V_1 depicted in figure 2.

Considering the elliptical eigenvector, V_1 , ϕ and E_{0y} are the argument and the absolute value of the complex number $b + ic$, respectively. $E_{0x} = a$ and $\nu = \arctan(E_{0y}/E_{0x})$.

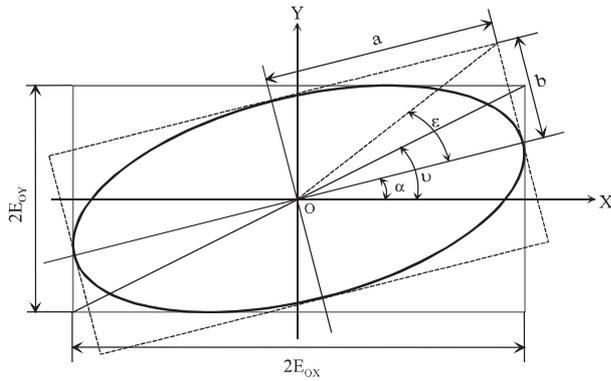


Figure 2. Parameters of the elliptical state of polarization V_1 .

We also calculated the orientation α of the double-quartz wave plate with respect to the wavelength. So as to calculate the orientation of the neutral axes of the retarder, we multiplied the eigenvector V_1 by the matrix of a rotational change of basis $R(-\alpha)$. Indeed, if the vector $V = R(-\alpha) \cdot V_1$ is the vector of an elliptical polarization state whose axes are aligned with the reference axes X and Y , then the phase difference, ϕ , between the x - and y -components of V is equal to $\pi/2$. This procedure allowed us to determine the orientation α of one of the neutral axes by applying the above method as follows. If the x - and y -components of V are $V_x = E_{0x}e^{i\phi_x}$ and $V_y = E_{0y}e^{i\phi_y}$, then

$$\phi = \phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{V_x}{V_y} = \frac{E_{0x}}{E_{0y}}e^{-i\phi} = -i \frac{E_{0x}}{E_{0y}}$$

and finally the real part of V_x/V_y is equal to zero. The azimuth, α , of the eigenvector V_1 is, consequently, given by:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - c^2} \quad (7)$$

And the eigenvectors ellipticity can also be expressed by:

$$\sin(\epsilon) = \frac{2ac}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (8)$$

This is exemplified in figures 3 and 4 where a modelled 1-mm zero-order quarter-wave-plate composed of two pieces of crystalline quartz of respective thickness 492.78 and 507.25 μm was used at 532 nm. These two graphs had been obtained after introduction, in the calculations, of a 1° misalignment error.

To understand these variations, let us first, examine both the ellipticity of the eigenpolarization modes and the direction of the retarder neutral axes versus λ , then the retardation of each individual quartz plate in order to better understand the physical effect within the materials.

One should note that, each time the retardation δ_2 of the second plate is equal to $2m\pi$ radians (m : integer), the ellipticity of the eigenvectors is null, and the direction of the neutral axes of the double quartz plate is the laboratory one; it corresponds to that of the first plate, i.e. equal to zero. In the same way, if the retardation δ_1 of the first plate is equal to $2m\pi$ radians, the ellipticity of the eigenvectors and the direction of the zero-order retarder are, respectively, equal to 0° and 1°, i.e. the misalignment value. In fact, if δ_2 is equal to $2m\pi$ radians, the second quartz plate displays no retardation, the ellipticity and

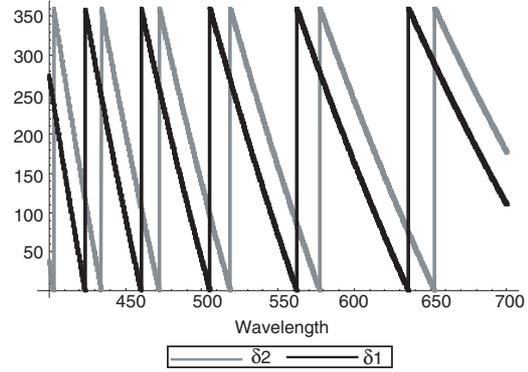


Figure 3. Calculated retardation (degrees) of each individual plate constituting the 1-mm quartz-quartz zero-order quarter-wave-plate at 532 nm versus λ (nm).

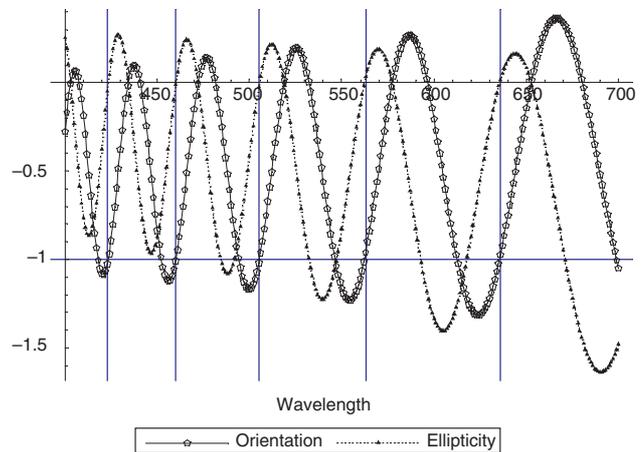
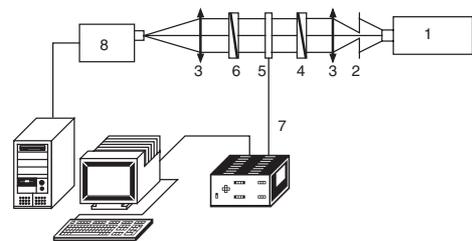


Figure 4. Calculated direction (degrees) of the neutral axes and ellipticity (degrees) of the eigenpolarization modes of a 1-mm zero-order quartz-quartz quarter-wave-plate at 532 nm with respect to λ (nm) (1° misalignment error).



1. Halogen light source
2. Pinhole
3. Lenses
4. Vertical linear polarizer (P_1)
5. Retarder
6. Horizontal linear polarizer (P_2)
7. Alimentation of the step-by-step rotational motor
8. Czerny-Turner spectrometer (Jobin-Yvon) + detector

Spectrometer characteristics: input and output slits of 0,5 mm, focalization concave mirrors with focal of 270 mm and holographic plan grating with 600 grooves per mm.

Figure 5. Experimental set-up.

direction of the retarder eigenvectors are, consequently, those of the first plate. In our calculations, we considered the quartz plates as perfect optical devices and assumed no optical activity for the quartz. Hence, if the retarder ellipticity is that of one of the quartz plates, its value is null. In the same way, each

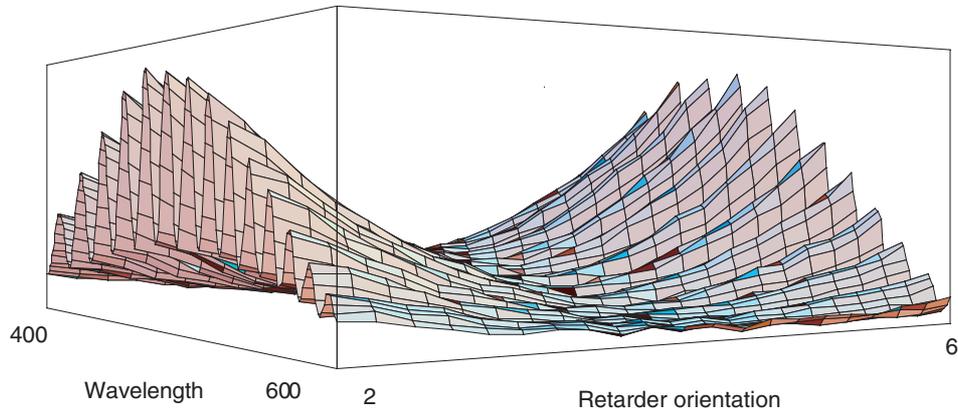


Figure 6. Intensity detected (a.u.) with respect to λ (nm) and to the retarder arbitrary angular direction α (degrees) of the double-quartz retarder.

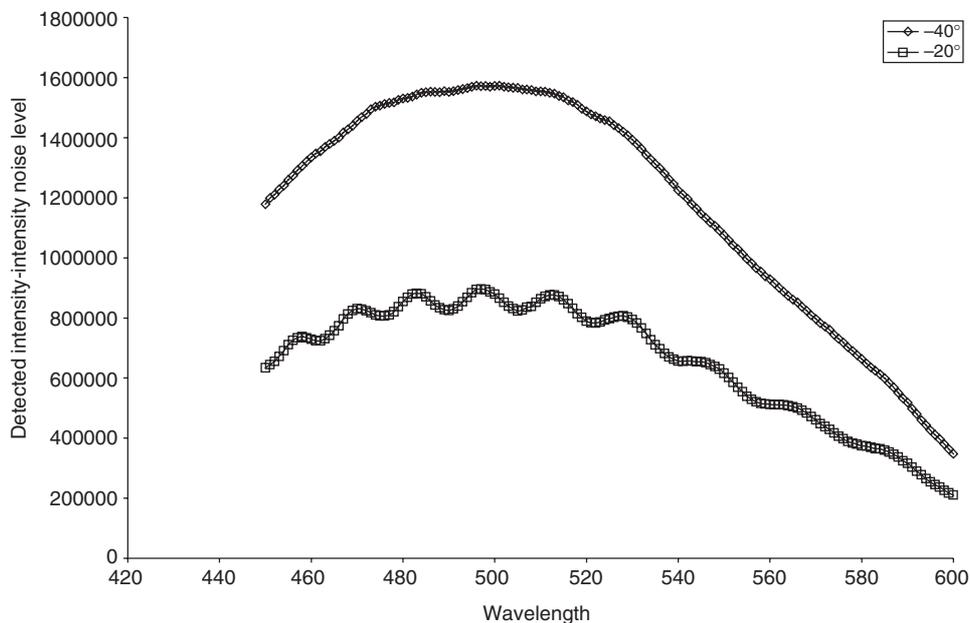


Figure 7. Intensity detected (a.u.) versus λ (nm) for the double-quartz retarder arbitrary angular direction of -40° and -20° between the two fixed polarizers.

time δ_1 is equal to $2m\pi$ radians, the direction and ellipticity of the retarder eigenvectors are those of the second plate, i.e. a null ellipticity and a direction of 1° corresponding to the tilt error.

How the experimental determination of the direction of the retarder neutral axes versus λ and the use of the above theoretical model enables one to determine its optical characteristics (thickness, direction, retardation and ellipticity of the eigenvectors), will be illustrated hereafter.

3. Experimental methodology, measurement set-up and results

The angular direction of the neutral axes was measured using a method of null intensity. Indeed, when the plate rotates between two orthogonal polarizers (figure 1), the intensity is minimum whenever one of its neutral axes is aligned with that

of the first polarizer. This situation remains valid even though the retarder eigenvectors ellipticity is not null [1].

Figure 5 displays the experimental set-up. The light comes from a 10-W halogen source; it covers the spectral range within 400–600 nm. A pinhole is used in order to obtain a quasi-punctual light source and then be able to parallel the incident beam on the optical devices. The axes of the optical components are aligned with a step-by-step rotational motor (accuracy 0.01°). The detector used is a photomultiplier. The estimated wavelength resolution of the experimental set-up calculated by means of a He–Ne laser source was less than 1 nm.

We measured the intensity versus λ from 400 to 600 nm, with a 1-nm step, at several angular positions of the retarder (figures 6–9). Considering figures 7 and 8 one should, first, note the variation of the detected intensity versus λ when the retarder neutral axes are rather close to those of the polarizers (corresponding to the minimum-intensity). In

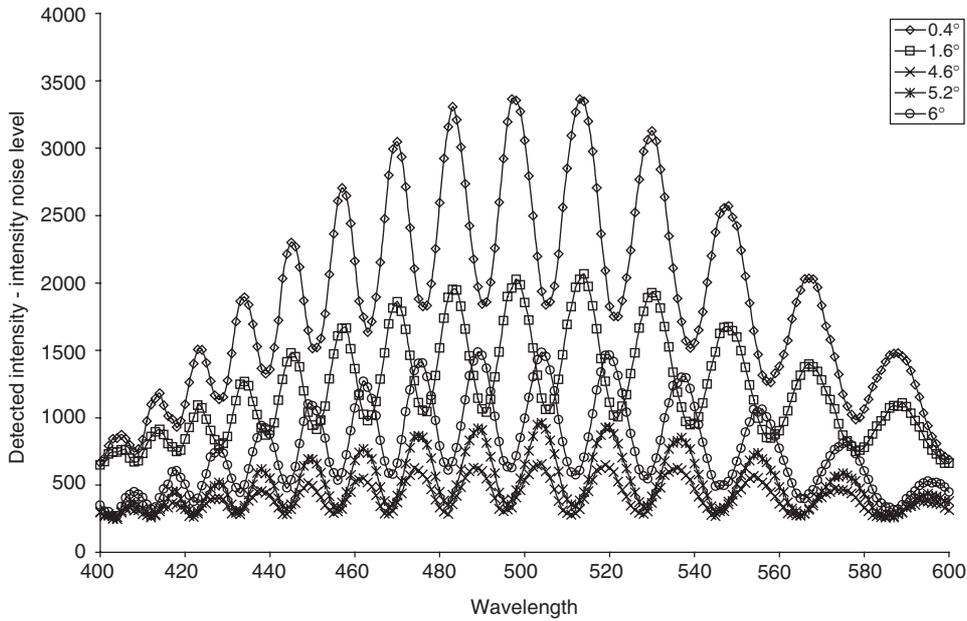


Figure 8. Intensity detected (a.u.) versus λ (nm) for the double-quartz retarder with several angular directions.

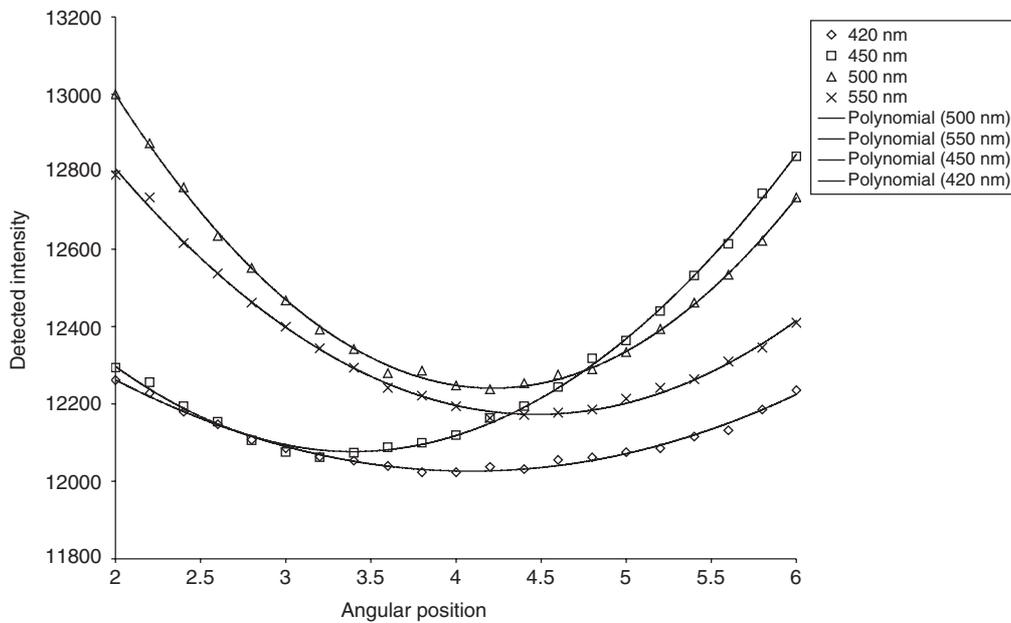


Figure 9. Intensity detected (a.u.) versus the retarder arbitrary angular direction (degrees) and for several wavelengths of the incident light.

addition, figure 8 shows the inversion of the minimum- and maximum-intensity for each wavelength when the direction of the retarder plate switches from one side of the minimum-intensity mean-position to the other one (here about 4°). This variation comes from the tilt error in the retarder as shown hereafter.

For each wavelength, a second-order polynomial fit of the detected intensity versus the retarder direction (figure 9) allowed us to determine the position corresponding to the minimum-intensity. The latter coincides with the alignment of the neutral axis with the fixed polarizers.

Such a procedure enabled us to find the neutral axis position with respect to the two polarizers.

The relative position of the neutral axis was then calculated on the visible spectral range 400–600 nm; a least-square analysis allowed us to estimate the characteristics of the retarder (figure 10). The best fit was obtained for a misalignment of 1.1° and a thickness of 1.5630 and 1.6374 mm for the first and the second quartz plates, respectively. These characteristics correspond to a retardation of $0.57\pi + 2\pi$ radians when $\lambda = 532$ nm, i.e. a first-order quasi-quarter-wave-plate. The birefringence values are extracted from a paper by Beckers [9].

4. Discussion

Since, for one wavelength, the minimal intensity does not always correspond to the middle of the intensity curve with respect to the retarder position, it is likely to explain the difference observed between the theoretical model and the experimental results as well as the inversion observed in figure 8. Figure 9, indeed, shows that a polynomial interpolation of this curve gives a better estimation of the neutral axis direction at certain wavelengths by comparison with other ones. The difference mentioned above may also come from the optical activity of the quartz plates [10] neglected in our model, but whose effect seems negligible compared to that of the misalignment. Diattenuation [8, 11] was estimated to be around 2×10^{-3} ; we, therefore, neglected

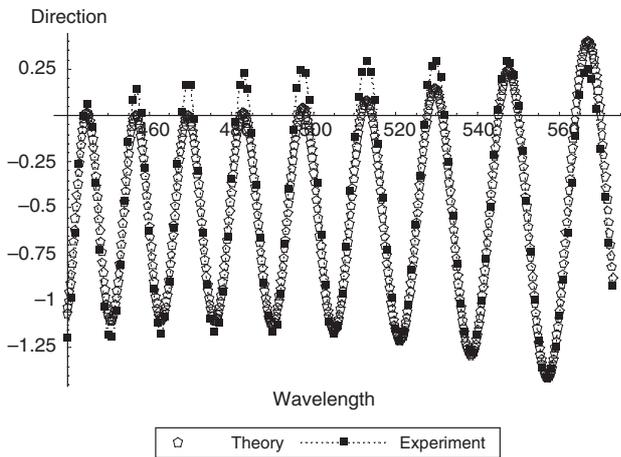


Figure 10. Experimental neutral axes direction (degrees) according to the wavelength (nm) and the best fit obtained for a misalignment of 1.1° and thicknesses of 1.5630 mm for the first plate and 1.6374 mm for the second plate.

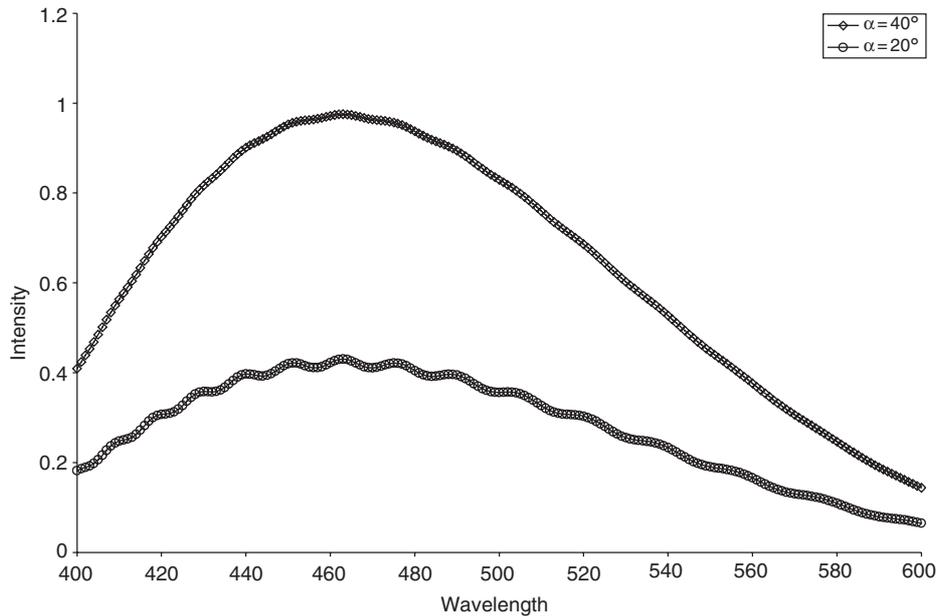


Figure 11. Simulated intensity (a.u.) on the detector according to the wavelength (nm) and for neutral axes directions of 40° and 20° . 0° corresponds to the first polarizer angular direction.

its effects on the results because of the low angular rotation of the retarder. The third reason is the statistical noise level of the experiment (especially with a detected intensity low level). In conclusion, the model used to describe the retarder is not inaccurate and the calculated characteristics are only an estimation of the real values. By fitting only the first part of the data (on the wavelength range 450–500 and 450–535 nm) and because of the optical activity, we obtained different values of the retarder characteristics. The thickness and tilt values corresponding to the three simulated curves (table 1) allowed us to determine the accuracy of the retarder characteristics. The thicknesses calculated by fitting the experimental and simulated azimuths of the retarder versus λ were, thus, precise to within 15–30 μm ; the tilt error was obtained with an accuracy higher than 0.05° .

Nevertheless, the theoretical model of two plates with an optical axis tilt error gave a good correlation with the experimental data and allowed us to assess both misalignment and double-crystal thickness. Such an experiment is also very relevant to determine the optical characteristics of the retarder, e.g. retardation or ellipticity of its eigenpolarization modes [1].

Simulation of detected intensity versus λ (without taking into account the light source spectrum) was, at last, plotted by using the model described in the first part and

Table 1. Characteristics of the retarder calculated by fitting experimental and calculated values on different spectral range.

Wavelength range (nm)	450–500	450–535	440–573
Thickness of the first plate (μm)	1593	1593	1563
Thickness of the second plate (μm)	1659	1662	1637
Tilt error (degrees)	1.04	1.01	1.1

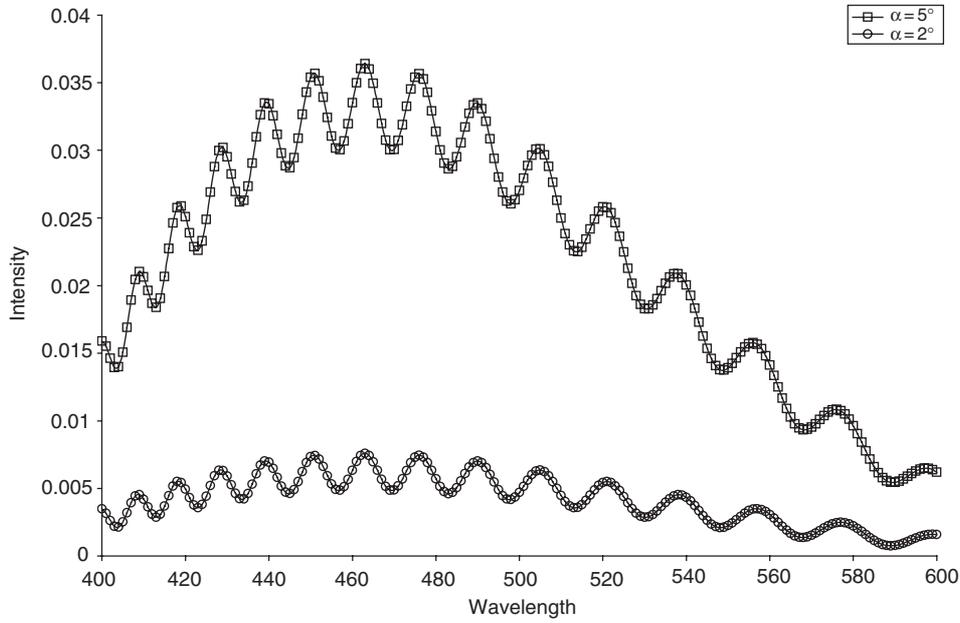


Figure 12. Simulated intensity (a.u.) on the detector according to the wavelength (nm) and for the first crystal plate neutral axes directions of 5° and 2° . 0° corresponds to the first polarizer angular direction.

equations (9a)–(9d).

$$J_{\text{out}} = [P][R(-\alpha)][M][R(\alpha)]J_{\text{in}} \quad (9a)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9b)$$

$$J_{\text{in}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9c)$$

$$I = J_{\text{out}} \cdot J_{\text{out}}^* \quad (9d)$$

where J_{out} and J_{in} are the Jones vectors of the light beam striking the detector and retarder, respectively and X^* denotes the complex conjugate of vector X . $[R(\alpha)]$ is a matrix of a rotational change of basis with α the rotational direction of the retarder with respect to the fixed polarizers. $[P]$ is the Jones matrix of a horizontal linear polarizer and $[M]$ that of a double-quartz retarder with a misalignment of 1.1° and thickness of 1.5630 and 1.6374 mm for the first and the second quartz plates, respectively. I represents the optical intensity on the detector.

As seen on figures 11 and 12, the intensity on the detector fluctuates with λ when the directions of the retarder neutral axes are close to those of the polarizers. This observation agrees well with the experimental results observed in figures 6–8. It can be explained by the variation of the retarder eigenvectors ellipticity versus λ [1] caused by the misalignment between the quartz plates. Consequently, the presence of such fluctuations constitutes a relevant test to determine a possible tilt error.

5. Conclusion

The experimental method reported here enables one to determine the characteristics of a compensated low-order wave

plate. The theoretical model of two plates with an optical axis tilt error gave a good correlation with the experiment and allowed us to estimate the tilt error as well as the respective thickness of the plates constituting the retarder. The knowledge of these characteristics is useful to determine the optical parameters of the plate, e.g. retardation or ellipticity of the eigenpolarization modes. Such an experiment should be, then, very relevant in the calibration of a dual retarder polarimeter, for instance. A better accuracy may be reached by taking into account the optical activity of the crystal plates. On the other hand, the results reported here show non-negligible effects, which could lead to error measurements when using this device to encode the polarization information of a light beam. Finally, such an experiment is easy and fast to characterize birefringent double plates and can be useful to align a double-crystal plate in real time; in addition its cost is rather low.

Acknowledgments

The authors thank Mr G Zion for technical assistance in achieving the mechanical items and Dr M P Friocourt for help in the preparation of the English manuscript.

References

- [1] Boulbry B, Bousquet B, Le Jeune B, Guern Y and Lotrian J 2001 Polarization errors associated with zero-order achromatic quarter-wave plates in the whole visible spectral range *Opt. Express* **9** 225–35 <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=OPEX-9-5-225>
- [2] Bennet J M 1995 *Handbook of Optics* (New York: McGraw-Hill)
- [3] Title A M 1975 Improvement of birefringent filters. 2: Achromatic wave plates *Appl. Opt.* **14** 229–37
- [4] Hariharan P 1998 Broad-band superachromatic retarders *Meas. Sci. Technol.* **9** 1978–80

-
- [5] Destriau M G and Prouteau J 1949 Réalisation d'un quart d'onde quasi achromatique par juxtaposition de deux lames cristallines de même nature *J. Phys. Radium* **10** 53–5
- [6] Pancharatnam S 1955 Achromatic combinations of birefringent plates *Proc. Indian. Acad. Sci.* **41** 137–44
- [7] West E A and Smith M H 1994 Polarization errors associated with birefringent wave plates *Proc. SPIE* (San Diego, USA) **2265** 260–71
- [8] Chenault D B and Chipman R A 1993 Measurements of linear diattenuation and linear retardation spectra with a rotating sample spectropolarimeter *Appl. Opt.* **32** 3513–19
- [9] Beckers J M 1971 Achromatic linear retarders *Appl. Opt.* **10** 973–5
- [10] Nye J F 1957 *Physical Properties of Crystals* (Oxford: Clarendon)
- [11] Lu S Y and Chipman R A 1994 Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 766–73

Error analysis and calibration of a spectroscopic Mueller matrix polarimeter using a short-pulse laser source

B Boulbry, B Le Jeune, B Bousquet, F Pellen, J Cariou and J Lotrian

Laboratoire de Spectrométrie et Optique Laser (E A 938), Université de Bretagne Occidentale, 6, Avenue Le Gorgeu BP 809, 29285 Brest Cedex, France

Received 18 December 2001, in final form 17 June 2002, accepted for publication 30 July 2002

Published 12 September 2002

Online at stacks.iop.org/MST/13/1563

Abstract

This paper deals with an error analysis together with the calibration of a spectroscopic Mueller polarimeter with dual rotating retarders; both of them take into consideration the elliptical birefringence characteristics of each rotating device. In doing so, the precision currently given for the Mueller matrix elements is drastically improved.

Simulations enabled us, first, to determine the measurement error on each element of the Mueller matrix without a sample and, second, to adopt a method of calibration. Experimental results and corrections highlight the interest of taking elliptical birefringence and dichroism into account.

Keywords: spectroscopic polarimeter, calibration, elliptical birefringence, quarter-waveplate

1. Introduction

Mueller matrix spectroscopic polarimetry is a powerful technique for the experimental determination of the polarization properties of optical devices; it also provides a complete description of complex elements, for example scattering media or targets [1–3]. Further to the numerous polarimetric studies conducted at a given wavelength within our team [4–6], it appeared interesting to widen them to a large spectral range. Our purpose was to characterize or discriminate turbid media by using the sensitivity of optical properties, i.e. scattering or absorption according to the operating wavelength [7]. Elements of the Mueller matrix versus the operating wavelength have already been measured elsewhere, but with an error margin of 1–4% [3]. The present study was, thus, aimed at first building a broadband Mueller matrix polarimeter in a pulsed regime, and then at carrying out a calibration procedure in order to obtain accurate results versus λ .

We have constructed, and then operated, a spectroscopic Mueller matrix polarimeter using a pulsed Nd:YAG laser source followed by an optical parametric oscillator. The polarization system is encoded and decoded by two rotating

retarders, i.e. achromatic quartz–MgF₂ quarter-waveplates, associated with two Glan polarizers. Thus, a well characterized waveplate is needed to ensure the success of our experiments. The retarders used in our polarimeter are achromatic on the whole visible spectral range 400–700 nm and exhibit, with respect to the wavelength, a retardance variation of almost $\pm 3\%$. Because their polarimetric properties are not exactly the same from one wavelength to another, it is very important to achieve a complete characterization of each quarter-waveplate. Misalignment, thickness and retardance errors have already been taken into account in many previous studies [8–10]. Unfortunately, when a calibration was carried out with no sample, a lack of precision was observed on four elements of the 4×4 Mueller matrix [11]; one should note that calibration of the polarimeter using a genuine device would be too complex because the device itself needs to be perfectly calibrated. Further to this study this error was assigned to optical activity, which means that retardance plates exhibit not only the property of linear birefringence, but also that of circular birefringence. To sum up, quarter-waveplates display the characteristics of elliptical birefringence [12]. Consequently, to be complete the calibration of a dual-rotating retarder polarimeter needs to take

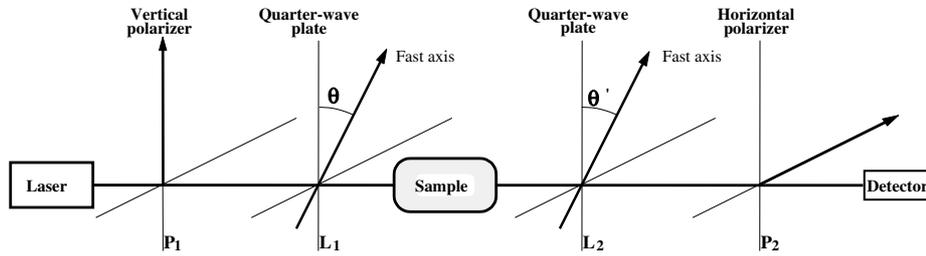


Figure 1. Schematic layout of the polarimeter.

elliptical birefringence into consideration in the measurement set-up. As this parameter depends on the incident light wavelength, it is of high importance in the calibration of a spectroscopic polarimeter. Since the refractive indices seen by the polarization eigenvectors of each plate are different, in the study reported here we took into account a possible differential transmission: this is why we used the model of a dichroic elliptic object developed by Scierski and Ratajczyk [13] to describe each quarter-waveplate. Moreover, contrary to classical methods [14], the use of such a model enabled us to consider all the physical effects liable to occur in the plate: among them, one should mention mainly the phenomenon of multiple reflections inside the plates [15, 16] and a possible tilt error when double crystal waveplates are used [20, 22].

This paper is organized as follows: the experimental method applied to measure the Mueller matrix is presented in section 2, and the model employed to describe the rotating retarders is developed in section 3. Section 4 reports on simulation results in the case of various error combinations and on how they affect the elements of the Mueller matrix. Our simulations enabled us to define the calibration procedure used to obtain the experimental results and corrections presented in section 5.

2. Experimental methodology and measurement set-up

The Mueller matrix was measured with an optical polarimeter depicted in figure 1. The input polarization encoding system is composed of a vertical (x -axis) linear polarizer, P_1 , followed by a quarter-waveplate whose fast axis makes an angle θ with the x -axis. The output polarization decoding system consists of a quarter-waveplate, whose fast axis makes an angle θ' with respect to the reference x -axis; it is followed by a linear horizontal polarizer, P_2 . P_1 and P_2 were initially crossed in order to obtain a null intensity.

The Stokes vector \vec{S}' emerging from P_2 can be expressed by the following matrix product:

$$\vec{S}' = [P_2][L_2][M][L_1][P_1]\vec{S} \quad (1)$$

where $[P_2]$, $[L_2]$, $[L_1]$ and $[P_1]$ are the Mueller matrices of each of the devices constituting the polarimeter, $[M]$ is the unknown Mueller matrix and \vec{S} is the Stokes vector of the incident light. The measurable intensity is enclosed in the first term of the output Stokes vector S'_0 ; in the case of perfect optical devices, i.e. quarter-waveplate linear retardance equal to 90° , it can be expressed as a function of the direction of the

two quarter-waveplates (θ, θ') and of the 16 unknown Mueller matrix coefficients:

$$\begin{aligned} S'_0(\theta, \theta') = I(\theta, \theta') = & m_{00} + m_{01}C^2 + m_{02}CS + m_{03}S \\ & + (m_{10} + m_{11}C^2 + m_{12}CS + m_{13}S)(-C'^2) \\ & + (m_{20} + m_{21}C^2 + m_{22}CS + m_{23}S)(-C'S') \\ & + (m_{30} + m_{31}C^2 + m_{32}CS + m_{33}S)(S') \end{aligned} \quad (2)$$

with $C = \cos(2\theta)$, $S = \sin(2\theta)$, $C' = \cos(2\theta')$ and $S' = \sin(2\theta')$.

One needs only 16 equations to obtain the Mueller matrix coefficients. To minimize errors we used an overdetermined system of 64 equations corresponding to 64 combinations of the angles (θ, θ'). In our experiments, these angles were multiples of 22.5° to describe specific test positions. The 64 measured intensities were, therefore, expressed by the following matrix:

$$[I_k] = [B][m_l] \quad \text{with} \quad \begin{cases} k = 0-63 \\ l = 4i + j = 0-15 \\ m_l = m_{ij} \end{cases} \quad (3)$$

where the coefficients of matrix $[B]$ depend on the orientation angles of the quarter-waveplates L_1 and L_2 . The m_{ij} ($i, j = 0-3$) are represented by

$$m_{ij} = m_l \quad (4a)$$

$$[m_l] = ([B]^T[B])^{-1}[B]^T[I_k] \quad (4b)$$

where $[\]^T$ indicates the transposed matrix.

Equation (4) can be computed for each measurement, and the expression $([B]^T[B])^{-1}[B]^T$ remains valid from one experiment to another.

Figure 2 displays the experimental set-up. The light source (Continuum Company) is a frequency-tripled Nd:YAG laser with a 6 ns pulse width at a 10 Hz repetition rate; it is followed by an optical parametric oscillator emitting from 445 to 1755 nm. The accuracy in wavelength was assessed as being about 5 pm with a linewidth less than or equal to 0.08 cm^{-1} , and divergence below or equal to 1.5 mrad. The detection is made by a photodiode. The axes of the various optical elements (quartz-MgF₂ achromatic quarter-waveplates, polarizers) are aligned with step-by-step motors (accuracy 0.01°) using a second-order polynomial least-squares fit method around null intensity. Intensity variations were corrected by means of a reference signal (detector 1) and the estimated standard deviation on the corrected signal was less than 1%. L_1 , P_2 and L_2 were used in order to control the intensity on the detectors. An additional polarizer P_1 was added so as to

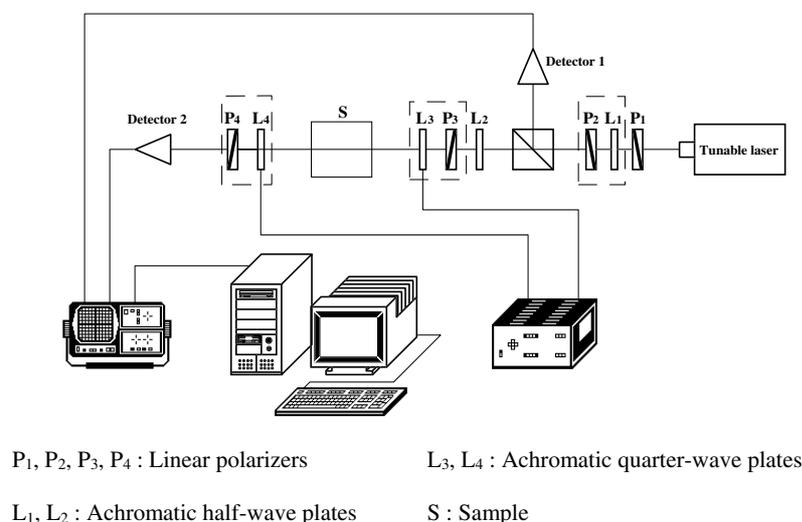


Figure 2. Experimental set-up.

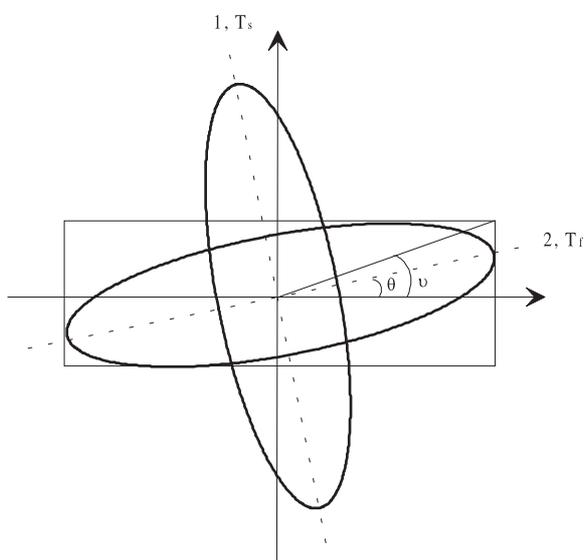


Figure 3. Schematic illustration of eigenvectors 1 and 2 of a birefringent medium. T_s and T_f are the corresponding coefficients of transmission.

eliminate a possible intensity noise effect when the power was being reduced [17]. A ‘ χ^2 test’ [18] was carried out to quantify to what extent noise affects the Mueller matrix coefficients. We considered the total noise variance on the detector as the summation of individual ones (quantization noise, shot noise, thermal noise). Light source fluctuations were corrected by using a reference detector; their influence along with that of noise level on the measurement error on the Mueller matrix elements was considered [19] to be less than 1%.

3. Dichroic elliptic object

Equation (2) was established in the case of linear birefringent waveplates with retardances of 90° . In fact, a possible misalignment of optic axis in the double crystal retarders together with optical activity lead to elliptical

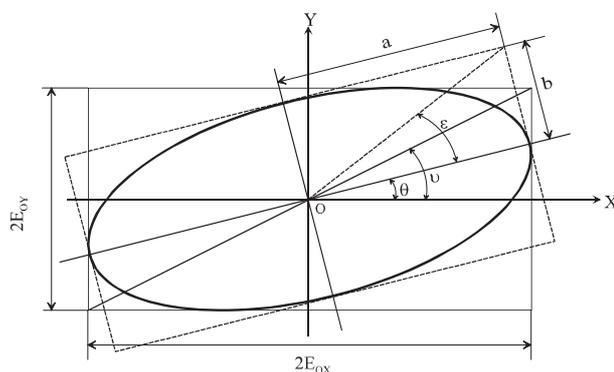


Figure 4. Ellipse of polarization of an eigenvector. E_x and E_y are the amplitudes of its x and y components. θ , ν and ϵ are the azimuth, the diagonal angle and the ellipticity of the eigenvector, respectively.

birefringence [20] i.e. elliptical eigenvectors as schematized in figure 3.

Eigenpolarization modes, i.e. the states of polarization that propagate without transformation through the plate, are orthogonal elliptical polarization states. One can describe an elliptical polarization state by means of two parameters as shown in figure 4: $[\theta, \epsilon]$ or $[\nu, \phi]$ where θ , ϵ , ν and ϕ are, respectively, the azimuth, the ellipticity angle, the diagonal angle and the phase difference between the x and y components of the eigenpolarization state. In order to simplify the expressions enclosed in the Jones matrix, we described an elliptic state by means of both ν and ϕ . Furthermore, the eigenpolarization modes undergo oscillations for the azimuth and ellipticity versus the wavelength [20].

The transmission properties of the dichroic elliptically birefringent plate can also be simply described by the Jones matrix J [13]:

$$[J] = \begin{bmatrix} T_f \cos^2(\nu) + T_s \sin^2(\nu)e^{-i\delta} & \sin(\nu) \cos(\nu)(T_f - T_s)e^{-i\delta} \\ \sin(\nu) \cos(\nu)(T_f - T_s)e^{i\delta} & T_f \sin^2(\nu) + T_s \cos^2(\nu)e^{-i\delta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

where T_f and T_s are the amplitude transmission coefficients and δ is the phase difference between the plates eigenvectors

Table 1. Mueller matrices for combination of errors on the eigenvector ellipticity with $\phi_i = \phi_o = 90^\circ$ (all the values are expressed in degrees).

$\varepsilon_i = \nu_i(\theta = 0)$	$\varepsilon_o = \nu_o(\theta = 0)$	Mueller matrix
2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9951 & 0 & 0 \\ -0.0698 & 0 & 0.9951 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9976 \end{bmatrix}$
1°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9988 & 0 & 0 \\ -0.0349 & 0 & 0.9988 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9934 \end{bmatrix}$
0°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0698 & 0 \\ 0 & 0.9951 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9951 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9976 \end{bmatrix}$
0°	1°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0349 & 0 \\ 0 & 0.9988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9988 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9994 \end{bmatrix}$
2°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0691 & 0 \\ 0 & 0.9855 & 0 & 0 \\ -0.0691 & 0 & 0.9855 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9903 \end{bmatrix}$
2°	1°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0346 & 0 \\ 0 & 0.9915 & 0 & 0 \\ -0.0695 & 0 & 0.9915 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9945 \end{bmatrix}$
1°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0695 & 0 \\ 0 & 0.9915 & 0 & 0 \\ -0.0346 & 0 & 0.9915 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9945 \end{bmatrix}$

introduced by the phase plate. The Mueller matrix $[M]$ of a non-depolarizing system can be derived from the Jones matrix $[J]$ by using relation (6) [21]:

$$[M] = [A]([J] \otimes [J^*])[A]^{-1}$$

with $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -j & j & 0 \end{bmatrix}$ (6)

where \otimes represents the Kronecker product.

The angular position of each device is relative to the x -axis, so the Mueller matrix of the waveplates is represented by

$$[M(\theta)] = [R(-\theta)][M(\theta = 0)][R(\theta)] \tag{7}$$

where $[R(\theta)]$ is the matrix of a rotational change of basis with θ as the angle between the x -axis and the azimuth of the fast eigenpolarization mode of the retarder (fast axis). $[M(\theta = 0)]$ is then the Mueller matrix of the plate whose fast axis is aligned with the reference x -axis, i.e. for $\nu = \nu(\theta = 0) = \varepsilon$ and $\phi = \phi(\theta = 0) = \pm \frac{\pi}{2}$ depending whether the ellipse of polarization of the eigenpolarization modes is right or left.

Elliptical birefringence characteristics of each rotating retarder were also introduced in equation (3) to examine the errors made on the elements of the Mueller matrix when we considered our plates as linear birefringent plates.

4. Error analysis

Theoretically, the Mueller matrix with no sample should be the identity matrix. But, because of retardance errors on the two quarter-waveplates, experiments have shown that, on the one hand, the elements m_{01} and m_{10} of the 4×4 Mueller matrix calculated from experimental data were not equal to zero and, on the other hand, m_{11} and m_{22} were not equal to one [9, 11]. In addition, simulations proved [11] that the correlation between the retardance-error-caused deviations on m_{01} and m_{10} is only very weak when the retardance errors are small (less than 5°): indeed, any retardance error on the input plate will result in an error on m_{01} , but this is not true on m_{10} . On the other hand, any error on the output plate will cause an error on m_{10} , but none on m_{01} [9]. Further to these observations, to calibrate our polarimeter we introduced new retardances in equation (3) by iteration in order to get a good fit between simulated and experimental m_{01} and m_{10} .

We first simulated the influence exerted by the retardation errors and those due to elliptical birefringence.

To calculate the simulated Mueller matrices of tables 1 and 2, we applied the following method: considering equation (1), we have $\vec{S}' = [P_2][L'(\theta')][Id][L(\theta)][P_1]\vec{S}$ where $[L'(\theta')]$ and $[L(\theta)]$ are calculated by means of relations (5)–(7).

The 64 simulated intensities with no sample are extracted from the first Stokes parameter $S'_0(\theta, \theta')$, and then expressed

Table 2. Mueller matrices for combination of errors on the eigenvector ellipticity including a retardance error on the plates (all the values are expressed in degrees).

δ_i	δ_o	ε_i	ε_o	Mueller matrix
89°	90°	0°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0175 & 0.9825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
90°	89°	0°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9825 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
89°	90°	1°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0175 & 0.9814 & 0 & 0 \\ -0.0349 & 0 & 0.9814 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9992 \end{bmatrix}$
89°	90°	0°	1°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0343 & 0 \\ 0.0174 & 0.9814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9814 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9992 \end{bmatrix}$
90°	89°	1°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0174 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9814 & 0 & 0 \\ -0.0343 & 0 & 0.9814 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9992 \end{bmatrix}$
89°	90°	2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0175 & 0.9778 & 0 & 0 \\ -0.0697 & 0 & 0.9778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9974 \end{bmatrix}$
90°	89°	0°	2°	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0175 & -0.0697 & 0 \\ 0 & 0.9778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9974 \end{bmatrix}$
90°	89°	2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0174 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9778 & 0 & 0 \\ -0.0685 & 0 & 0.9778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9974 \end{bmatrix}$
82°	85°	2°	0°	$\begin{bmatrix} 1 & -0.0756 & 0 & 0 \\ 0.1286 & 0.7916 & 0 & 0 \\ -0.0638 & 0 & 0.7916 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9962 \end{bmatrix}$

for the 64 combinations of (θ, θ') by

$$[I_k]_{sim} = [B_{kl}]_{sim}[Id_l] \quad (8)$$

with $\begin{cases} k = 0-63 \\ l = 4i + j = 0-15 \\ Id_l = Id_{ij} \end{cases}$

where $[Id]$ is the identity matrix rearranged in the form of a 1×16 vector, and $[B]_{sim}$ is the simulated measurement matrix that takes into account the parameters (ε, δ) of the two birefringent waveplates (imperfect quarter-waveplates) as well as their orientations (θ, θ') . In our case, we checked that the dichroism of each waveplate was not observable, so that we could consider $T_f = T_s$ (see table A.1 and experimental results in the last section).

The simulated Mueller matrices were then derived from equation (4):

$$(m_{ij})_{sim} = (m_l)_{sim} \quad (9a)$$

$$[m_l]_{sim} = ([B]_{id}^T [B]_{id})^{-1} [B]_{id}^T [I_k]_{sim} \quad (9b)$$

$[B]_{id}$ was calculated from equations (1) and (3) in the case of perfect optical devices (quarter-waveplate linear retardance equal to 90°).

Table 1 illustrates the effect of elliptical birefringence on the Mueller matrix measurement. $\varepsilon_i, \phi_i, \varepsilon_o$ and ϕ_o are the ellipticity angles and the phase difference between the x and y components of the fast eigenvector of the input and output plates, respectively. One should note that elliptical birefringence on the first plate leads to a measurement error on the element m_{20} , whereas no error occurs onto the other non-diagonal elements, and especially the symmetric one, m_{02} . Though elliptical birefringence on the second plate results in a measurement error on the element m_{02} , it has no effect on the measurement of m_{20} . We, consequently, used these two elements independently to determine the characteristics of each plate by employing an iterative method as described hereafter. Their knowledge allowed us to correct the Mueller matrix.

Table 2 shows that elliptical birefringence does not cause measurement error on m_{01} and m_{10} .

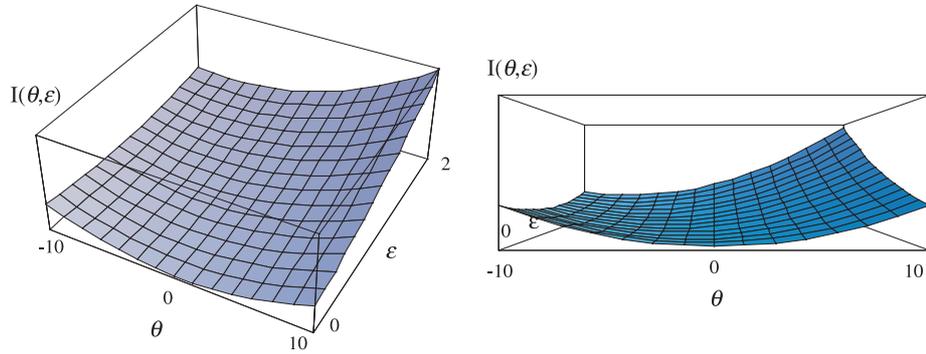


Figure 5. Intensity detected versus the azimuth angle θ of the output plate and the ellipticity angle ε of the input plate. The plates stand in between two orthogonal polarizers. If the ellipticity ε of the first plate eigenvector is different from zero, the azimuth of the second plate eigenvector corresponding to the minimum of intensity depends on the ε value.

(This figure is in colour only in the electronic version)

In conclusion, one should note a weak correlation between the error-induced consequences on the Mueller matrix elements. The values of the different elements m_{01} , m_{10} , m_{02} and m_{20} give, therefore, a good approximation of each waveplate eigenstate ellipticity and retardance.

To calibrate the polarimeter we first crossed the two polarizers, then introduced the first waveplate and looked for the minimal intensity corresponding to the alignment of the fast eigenpolarization mode with the first polarizer. We then removed the first waveplate and introduced the second one so as to align it as well. Oscillations of the eigenpolarization mode azimuthal angle had been previously determined [20].

One should note here that, by using this method of null intensity with and without the first plate set in place, we experimentally found two different positions for the second plate: they differed by about 0.08° . This difference was also indicative of elliptical birefringence (figure 5). We thus successively aligned the two plates. Plate repositioning repeatability was checked several times; it was found to be at least equal to 0.01° or better.

We then calculated the experimental Mueller matrix derived from equation (4):

$$[m_{ij}]_{exp} = [m_i]_{exp} = ([B]_{id}^T [B]_{id})^{-1} [B]_{id}^T [I_k]_{exp} \quad (10)$$

where $[I_k]_{exp}$ are the 64 experimental intensities.

The estimated retardances were calculated by iteration: new retardances were introduced in the simulated $[B]_{calc}$ matrix in order to get the simulated Mueller matrix $[m_{ij}]_{calc}$ with no sample:

$$[I_k]_{calc} = [B]_{calc} [I_d] \quad (11)$$

$$(m_{ij})_{calc} = (m_i)_{calc} \quad (12a)$$

$$[m_i]_{calc} = ([B]_{id}^T [B]_{id})^{-1} [B]_{id}^T [I_k]_{calc}. \quad (12b)$$

We repeated this iteration procedure until we obtained a good fit between the experimental and calculated elements m_{10} and m_{01} . In most cases, the negligible correlation between the retardance-error-caused deviation on these two elements allowed us to calculate independently the retardance of each plate. But, when this correlation was no longer negligible (which was the case when the retardance values were far from 90°), this method gave only an approximation of the true

values, and then a least-squares analysis was required: this was done by minimizing the function χ^2 (equation (13)) and, of course, by iterating the two unknown retardances. If so, these approximations provided good initialization values to minimize χ^2 .

$$\chi^2 = \sum_{k=0}^{63} ([I_k]_{calc} - [I_k]_{exp})^2. \quad (13)$$

At last, these retardances (figure 6) were introduced in the calculated $[B]_{calc}$ matrix, and the experimental Mueller matrix was finally corrected with respect to the estimated retardances of the retarders:

$$(m_{ij})_{corrected} = (m_i)_{corrected} \quad (14a)$$

$$[m_i]_{corrected} = ([B]_{calc}^T [B]_{calc})^{-1} [B]_{calc}^T [I_k]_{exp}. \quad (14b)$$

Ellipticity of the retarder eigenpolarization modes was calculated, and then the experimental Mueller matrix was corrected by using the iterative method as described above.

Relation (13) was used to determine whether χ was of the same order as the experimentally calculated intensity standard deviation (less than 1%), which enabled us to validate the method we had applied to correct the systematic errors.

Since the Mueller matrices given in tables 1 and 2 are not the true ones because of the simulated systematic errors, they cannot be interpreted from a physical point of view.

5. Experimental results and calibration

The Mueller matrix with no sample was measured and corrected for several wavelengths. For $\lambda = 650$ nm the experimental Mueller matrix obtained by using the polarimeter depicted in figure 2 was

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.108 & -0.007 & -0.007 \\ 0.081 & 0.817 & -0.005 & -0.004 \\ -0.013 & 0.006 & 0.807 & -0.005 \\ -0.005 & 0.006 & 0.004 & 1.007 \end{bmatrix}.$$

This gave the estimated retardance for each of the waveplates: $\delta_i = 85.37^\circ$ and $\delta_o = 83.30^\circ$. By taking these into account the Mueller matrix became

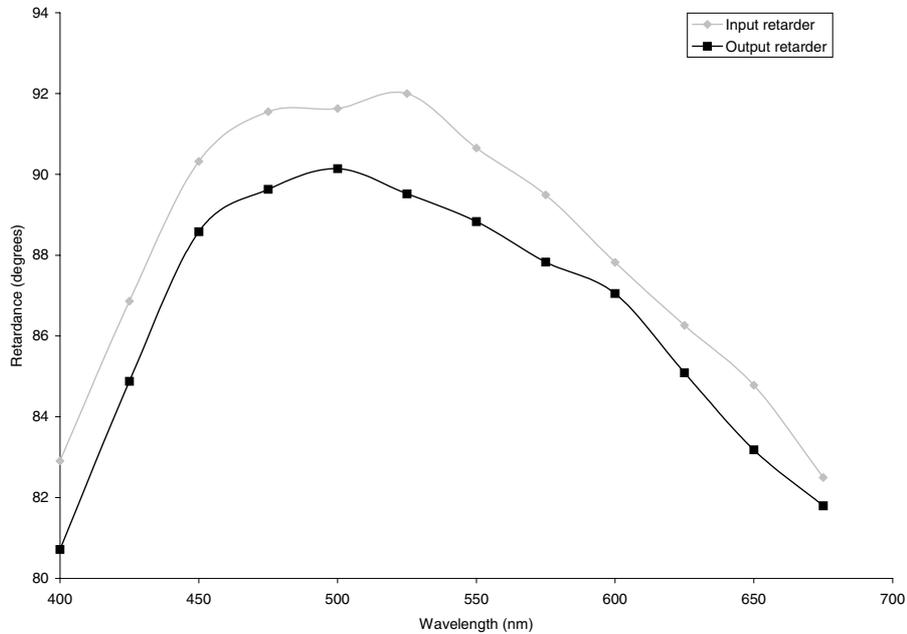


Figure 6. Retardance of each quarter-waveplate versus wavelength.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.000 & -0.008 & -0.007 \\ 0.010 & 0.995 & -0.006 & -0.005 \\ -0.015 & 0.007 & 0.983 & -0.006 \\ -0.005 & 0.006 & 0.005 & 1.006 \end{bmatrix}.$$

The method used to calculate the estimated retardance of the plates is not really suitable at 650 nm because of values far from 90° . As a matter of fact, the measurement error on the element m_{10} and m_{22} was important. In this case, the correlation between the retardance-error-caused deviations on m_{01} and m_{10} is no longer negligible, and then a least-squares analysis using these previous initialization values must be performed to estimate the retardances. The new estimated retardances were consequently $\delta_i = 84.77^\circ$ and $\delta_o = 83.23^\circ$, which led to the following corrected Mueller matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 & -0.008 & -0.007 \\ 0.001 & 1.008 & -0.006 & -0.005 \\ -0.015 & 0.007 & 0.995 & -0.006 \\ -0.005 & 0.006 & 0.005 & 1.007 \end{bmatrix}.$$

One should note that the measurement error on the elements m_{20} is higher than 0.01. As shown in section 4 the error on m_{20} and m_{02} is due to elliptical birefringence whose characteristics, $\varepsilon_i = 0.34^\circ$, $\varepsilon_o = 0.04^\circ$, $\phi_i = 90^\circ$ and $\phi_o = 90^\circ$, were calculated by means of the procedure reported in this paper. After correction the new Mueller matrix was

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.001 & -0.007 \\ -0.001 & 1.008 & -0.006 & -0.005 \\ 0.000 & 0.008 & 0.996 & -0.006 \\ -0.005 & 0.006 & 0.005 & 1.008 \end{bmatrix}.$$

The non-null elements m_{23} and m_{32} may result from dichroism: $\frac{T_x}{T_y} = 1.007$ for the input quarter-waveplate and $\frac{T_x}{T_y} = 0.994$ for the output quarter-waveplate. In this case, and after correction,

the Mueller matrix became

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.001 & -0.007 \\ -0.001 & 1.008 & -0.006 & -0.005 \\ 0.000 & 0.008 & 0.996 & 0.000 \\ -0.005 & 0.007 & -0.001 & 1.008 \end{bmatrix}.$$

In fact, the values of m_{23} and m_{32} are so low that they probably differ from zero because of statistical measurement errors or a very weak extrinsic phenomenon. As a matter of fact, since these elements of the Mueller matrix were less than 0.01 (about the statistical error level), they could not be considered as systematic measurement errors.

A high precision (less than 0.01) was consequently obtained on the elements of the Mueller matrix with no sample through a complete characterization of the quarter-waveplates: it resulted in a better correlation between the experimental and the simulated 64 intensities. This high precision was reached on the whole spectral range 450–700 nm; for instance, at 600 nm, the original experimental Mueller matrix obtained was as follows:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.000 & -0.011 & 0.009 \\ 0.002 & 1.000 & -0.009 & 0.007 \\ -0.027 & -0.005 & 0.984 & 0.004 \\ 0.006 & -0.004 & -0.003 & 1.006 \end{bmatrix}.$$

Further to corrections it became

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.000 & 0.001 & 0.009 \\ -0.001 & 1.005 & -0.009 & 0.007 \\ 0.000 & -0.005 & 0.989 & 0.000 \\ 0.006 & -0.004 & 0.000 & 1.007 \end{bmatrix}.$$

At 550 nm, the experimental Mueller matrix calculated from the polarimeter with no correction was

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.021 & -0.010 & -0.001 \\ -0.011 & 0.994 & 0.008 & 0.001 \\ 0.002 & -0.003 & 0.993 & 0.007 \\ 0.000 & -0.001 & -0.004 & 1.002 \end{bmatrix}.$$

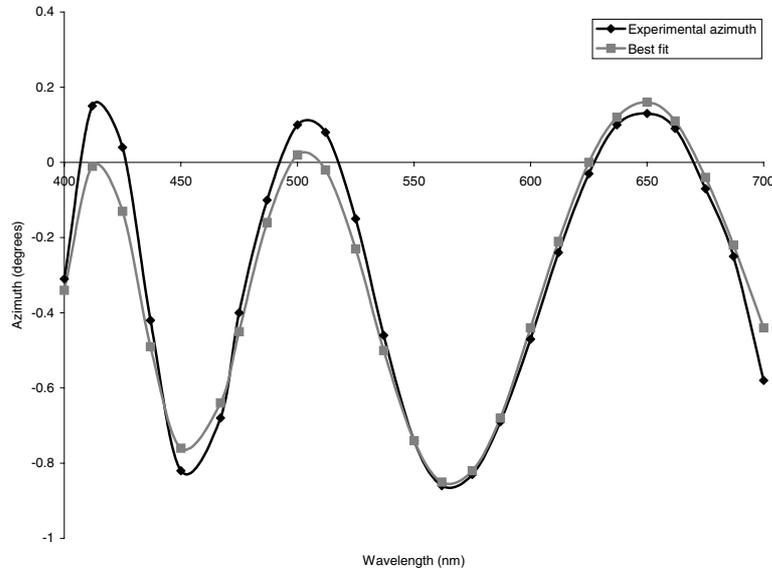


Figure 7. Experimental azimuth (black curve) of the first zero-order quarter-waveplate and the best fit (grey curve) obtained for a thickness of 242 μm for the quartz plate, 172 μm for the MgF_2 plate and a misalignment of 0.78° between the neutral axes of these two plates.

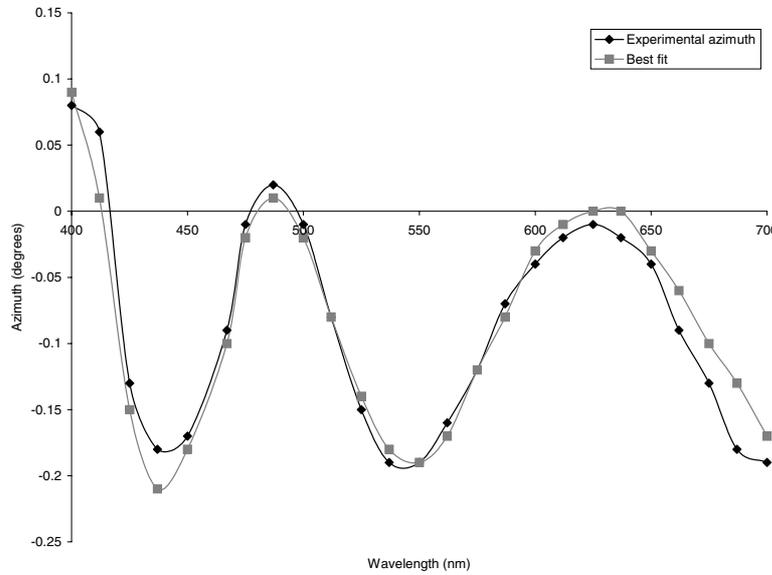


Figure 8. Experimental azimuth (black curve) of the second zero-order quarter-waveplate and the best fit (grey curve) obtained for a thickness of 239 μm for the quartz plate, 162 μm for the MgF_2 plate and a misalignment of 0.19° between the neutral axes of these two plates.

Corrections led to the following one:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.003 & 0.008 & 0.001 \\ 0.000 & -0.003 & 1.003 & 0.000 \\ 0.001 & -0.001 & 0.000 & 1.002 \end{bmatrix}.$$

At 500 nm, our polarimeter gave the experimental Mueller matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.003 & -0.010 & 0.000 \\ -0.028 & 1.036 & -0.008 & 0.000 \\ -0.029 & 0.009 & 1.033 & -0.005 \\ 0.002 & -0.004 & 0.000 & 1.005 \end{bmatrix}$$

which was transformed as follows after corrections:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.006 & -0.008 & 0.000 \\ 0.000 & 0.009 & 1.003 & 0.001 \\ 0.002 & -0.004 & 0.001 & 1.006 \end{bmatrix}.$$

At $\lambda = 600 \text{ nm}$, it is worth noting that the accuracy on all the elements, except m_{22} , is less than 0.01. To evidence the high interest of this calibration method, we calculated the characteristics of the two retarders by fitting the experimental azimuthal angle to those obtained with the model described in [20] (figures 7 and 8). The theoretical model of two plates with an optical axis tilt error gave a good correlation with the experimental data and allowed us to estimate the retarder characteristics: thickness of the different materials

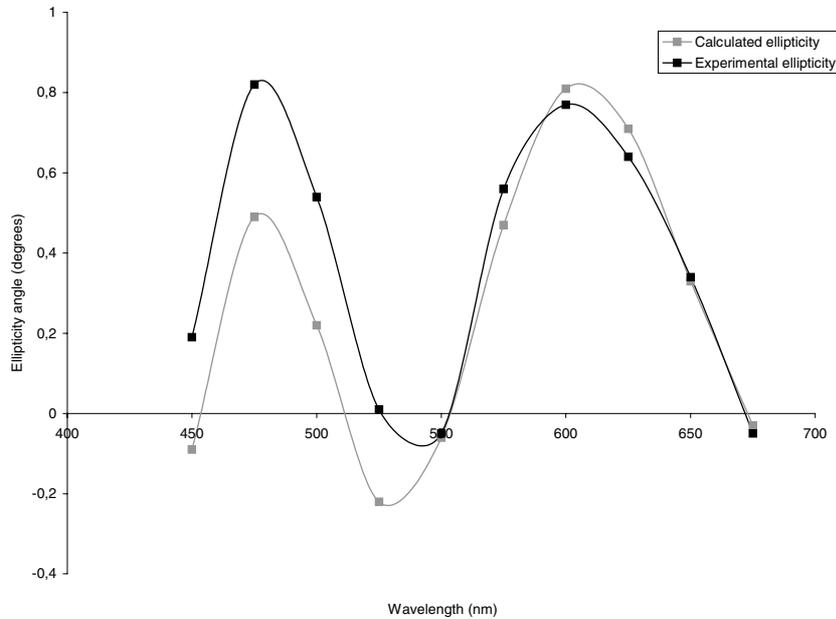


Figure 9. Experimental ellipticity angle of the first plate eigenvectors calculated by means of the method developed in section 4 and the ellipticity calculated with the characteristics of $242 \mu\text{m}$ for the quartz plate, 172 m for the MgF_2 plate and a misalignment of 0.78° between the neutral axes of these two plates.

used to achieve the achromatic retarders and tilt error. Their knowledge permitted us to calculate the ellipticity angle of the plate eigenstates and to compare them with the values obtained by the method reported here. Figure 9 shows a reasonably good correlation between the two curves and evidences the benefit of our model in a calibration procedure. The residual difference probably originates from the quartz plate optical activity [12] that was neglected in our model because of the predominant effects induced by the tilt error between the two plates composing the achromatic retarders. Evidence of this is provided by the higher difference at low wavelengths [25]. This difference is also greatly enhanced by the experimental noise level.

The interest of this method is also highlighted by the parameter χ (equation (15)) which is, for each wavelength, of the order of the intensity standard deviation. For example, for $\lambda = 650 \text{ nm}$, $\chi = 0.0091$, i.e. less than 1%.

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{64} \sum_{k=0}^{63} \left(\frac{[I_k]_{calc} - [I_k]_{exp}}{[I_k]_{exp}} \right)^2}. \quad (15)$$

Finally, we checked that our experimental Mueller matrices were physically achievable as Mueller–Jones matrices following the analysis of Anderson and Barakat [23].

We constructed the coherency matrix as follows:

$$[T] = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{i,j} \sigma_i \otimes \sigma_j^* \quad (16)$$

where the 16 matrices $\sigma_i \otimes \sigma_j^*$ are the Dirac matrices.

At last, we verified that, always, only one single eigenvalue was close to two, and three others, negative or positive, were near zero. These non-null values are only due to the experimental noise [4, 24]. In conclusion, our Mueller

matrices can be derived from Jones matrices; moreover, their differences from the identity matrix are about the experimental noise.

6. Conclusion

By taking elliptical birefringence into account we determined, with a good precision (less than 0.01), all the elements of the 4×4 Mueller matrix except at some particular wavelengths. By using the model of a dichroic elliptic object we considered all the physical effects liable to affect the plate: this is why the residual lack of precision on some elements at some specific wavelengths must come from a physical effect occurring outside the plates or statistical errors. For example, multiple reflections between two optical devices could lead to a measurement error on the Mueller matrix. The results reported here, nevertheless, evidence the relevance of our model in the calibration of a Mueller matrix polarimeter with dual rotating retarders.

These results also highlight the non-correlation between the error-caused deviation on the elements of the Mueller matrix in most cases. If this correlation is no longer negligible, it remains rather weak so that the iterative method described here will give quite a good approximation of these errors allowing, for instance, their use as an initialization in a least-squares fit method.

Acknowledgments

The authors thank Mr G Zion for technical assistance in achieving the mechanical items and Dr M P Friocourt for help in the preparation of the English manuscript.

Appendix A. Determination of the $[B]$ matrix

The $[B]$ matrix is the relation between the 64 measured intensities $[I_k]$ (corresponding to the first element of the output

Table A.1. Error-caused deviation on the Mueller matrix elements due to the retarder dichroism, retardance and eigenvector ellipticity.

δ_i	δ_o	ε_i	ε_o	T_s/T_f Input plate	T_s/T_f Output plate	Mueller matrix
90°	90°	0°	0°	0.98	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0202 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
89°	91°	1°	2°	0.98	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0171 & -0.0683 & -0.0014 \\ 0.0176 & 0.9909 & 0 & 0 \\ -0.0352 & 0 & 0.9909 & 0.0204 \\ 0.0007 & 0 & 0 & 0.9937 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	1	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0202 & 1 \end{bmatrix}$
89°	91°	1°	2°	1	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0171 & -0.0682 & 0.0014 \\ 0.0176 & 0.9909 & 0 & 0 \\ -0.0352 & 0 & 0.9909 & 0 \\ -0.0007 & 0 & 0.0197 & 0.9937 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	0.98	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0202 \\ 0 & 0 & 0.0202 & 1 \end{bmatrix}$
89°	91°	1°	2°	0.98	0.98	$\begin{bmatrix} 1 & 0.0171 & -0.0682 & 0 \\ 0.0176 & 0.9909 & 0 & 0 \\ -0.0352 & 0 & 0.9909 & 0.0204 \\ 0 & 0 & 0.0197 & 0.9939 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	1.02	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0198 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
90°	90°	0°	0°	1	1.02	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0198 & 1 \end{bmatrix}$

Stokes vector) and the 16 elements of the unknown Mueller matrix (equation (3)). It takes into account the Mueller matrix of each optical device crossed by the optical beam from the first polarizer up to the detector, i.e. the Mueller matrices $[L(\theta)]$ and $[L'(\theta')]$ of the input and output plates, respectively (θ and θ' are the azimuthal angle of each plate according to the fixed polarizers) and the Mueller matrices of the polarizers.

$$\begin{aligned} [L(\theta)] &= [R(-\theta)][L][R(\theta)]; \\ [L'(\theta')] &= [R(-\theta')][L'][R(\theta')] \end{aligned} \tag{A.1}$$

where $[L]$ and $[L']$ are the Mueller matrices of the plates with their neutral axes aligned with those of the laboratory ones and $R[\theta]$ the matrix of a rotational change of basis.

$[L]$ and $[L']$ are calculated by means of equation (6) with the phase ϕ occurring between the x and y components of the plate eigenstates equal to $\pm\frac{\pi}{2}$ (depending whether the ellipse of polarization of the eigenstates is right or left).

Equations (1) and (3) give a non-linear relation between the 64 detected intensities and the 16 elements of the unknown Mueller matrix. The $[B]$ matrix can also be calculated with the following 16 equations, depending on the combination of (θ, θ') :

$$B_0 = (N_{00} - N_{10})(M_{01} + M_{00}) \tag{A.2a}$$

$$B_1 = (N_{00} - N_{10})(M_{11} + M_{10}) \tag{A.2b}$$

$$B_2 = (N_{00} - N_{10})(M_{21} + M_{20}) \tag{A.2c}$$

$$B_3 = (N_{00} - N_{10})(M_{30} + M_{31}) \tag{A.2d}$$

$$B_4 = (N_{01} - N_{11})(M_{01} + M_{00}) \tag{A.2e}$$

$$B_5 = (N_{01} - N_{11})(M_{11} + M_{10}) \tag{A.2f}$$

$$B_6 = (N_{01} - N_{11})(M_{21} + M_{20}) \tag{A.2g}$$

$$B_7 = (N_{01} - N_{11})(M_{30} + M_{31}) \tag{A.2h}$$

$$B_8 = (N_{02} - N_{12})(M_{01} + M_{00}) \tag{A.2i}$$

$$B_9 = (N_{02} - N_{12})(M_{11} + M_{10}) \tag{A.2j}$$

$$B_{10} = (N_{02} - N_{12})(M_{21} + M_{20}) \tag{A.2k}$$

$$B_{11} = (N_{02} - N_{12})(M_{30} + M_{31}) \tag{A.2l}$$

$$B_{12} = (N_{03} - N_{13})(M_{01} + M_{00}) \tag{A.2m}$$

$$B_{13} = (N_{03} - N_{13})(M_{11} + M_{10}) \tag{A.2n}$$

$$B_{14} = (N_{03} - N_{13})(M_{21} + M_{20}) \tag{A.2o}$$

$$B_{15} = (N_{03} - N_{13})(M_{30} + M_{31}) \tag{A.2p}$$

where $[M_{ij}]_{i,j=0\dots3} = [L(\theta)]$ and $[N_{ij}]_{i,j=0\dots3} = [L'(\theta')]$ depend on θ and θ' , respectively.

The 64×16 matrix $[B]$ is finally obtained as follows:

$$[B]_{ij} = \begin{bmatrix} (B_0)_{j=0} & (B_1)_{j=0} & \cdot & \cdot & (B_{15})_{j=0} \\ (B_0)_{j=1} & (B_1)_{j=1} & \cdot & \cdot & (B_{15})_{j=1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (B_0)_{j=63} & (B_1)_{j=63} & \cdot & \cdot & (B_{15})_{j=63} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

with $j = 0-63$ corresponding to the 64 test positions, i.e. the 64 combinations of (θ, θ') .

References

- [1] McClain W M and Ghoul W A 1987 Shape effects in elastic scattering by orientationally random ensembles of simple model viruses *Biopolymers* **26** 2027–40
- [2] Bruce N C 1998 Calculation of the Mueller matrix for scattering of light from two-dimensional surfaces *Waves Random Media* **8** 15–28
- [3] Chenault D B 1992 Infrared spectropolarimetry *PhD Dissertation* University of Alabama in Huntsville
- [4] Le Roy-Bréhonnet F, Le Jeune B, Eliès P, Cariou J and Lotrian J 1996 Optical media and target characterization by Mueller matrix decomposition *J. Phys. D: Appl. Phys.* **29** 34–8
- [5] Eliès P, Le Jeune B, Gerligand P Y, Cariou J and Lotrian J 1997 Analysis of the dispersion of speckle polarization on the Poincaré sphere *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** 1285–92
- [6] Eliès P, Le Jeune B, Olivard P, Cariou J and Lotrian J 1997 The application of de-polarization analysis to polarimetric characterization and classification of metallic and dielectric samples *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** 2520–9
- [7] Shi Y and McClain W M 1990 Longwave properties of the orientation averaged Mueller scattering matrix for particles of arbitrary shape: I. Dependence on wavelength and scattering angle *J. Chem. Phys.* **93** 5605–15
- [8] Hauge P S 1978 Mueller matrix ellipsometry with imperfect compensators *J. Opt. Soc. Am.* **68** 1519–28
- [9] Goldstein D H and Chipman R A 1989 Error analysis of a Mueller matrix polarimeter *J. Opt. Soc. Am. A* **7** 693–700
- [10] West E A and Smith M H 1994 Polarization errors associated with birefringent waveplates *Proc. SPIE (San Diego, USA)* vol 2265, ed D H Goldstein and D B Chenault pp 260–71
- [11] Olivard P 1996 Application du formalisme de Stokes–Mueller à la caractérisation polarimétrique de fibres optiques soumises à des contraintes uniformes *PhD Dissertation* Université de Bretagne Occidentale, Brest, France p 90
- [12] Nye J F 1957 *Physical Properties of Crystals* (Oxford: Clarendon) section 14
- [13] Scierski I and Ratajczyk F 1984 The Jones matrix of the real dichroic elliptic object *Optik* **68** 121–5
- [14] Lecourt B 1998 Ellipsométrie spectroscopique conventionnelle et généralisée de films moléculaires ultraminesces *PhD Dissertation* Université Bordeaux 1 p 111
- [15] Pietraszkiewicz K, Wozniak W A and Kurzynowski P 1995 Effect of multiple reflections in retardance plates with elliptical birefringence *J. Opt. Soc. Am. A* **12** 420–4
- [16] Poirson J, Lanternier T, Cotteverte J C, Le Floch A and Bretenaker F 1995 Jones matrix of a quarter-wave plate for Gaussian beams *Appl. Opt.* **34** 6806–18
- [17] Kolner B H 1991 Intensity noise enhancement in the half-wave plate/polarizer attenuator *Opt. Lett.* **16** 784–6
- [18] Le Jeune B, Marie J P, Gerligand P Y, Cariou J and Lotrian J 1994 Mueller matrix formalism in imagery. An experimental arrangement for noise reduction *Proc. SPIE* **2265** 443–51
- [19] Eliès P, Le Jeune B, Le Roy-Brehonnet F, Cariou J and Lotrian J 1997 Experimental investigation of the speckle polarization for a polished aluminium sample *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** 29–39
- [20] Boulbry B, Bousquet B, Le Jeune B, Guern Y and Lotrian J 2001 Polarization errors associated with zero-order achromatic quarter-wave plates in the whole visible spectral range *Opt. Express* **9** 225–35
- [21] Azzam R M A and Bashara N M 1977 *Ellipsometry and Polarized Light* (Amsterdam: North-Holland) p 149
- [22] Chenault D B and Chipman R A 1993 Measurements of linear diattenuation and linear retardance spectra with a rotating sample spectropolarimeter *Appl. Opt.* **32** 3513–19
- [23] Anderson D G M and Barakat R 1994 Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix *J. Opt. Soc. Am.* **11** 2305–19
- [24] Le Roy-Bréhonnet F and Le Jeune B 1997 Utilization of Mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties *Prog. Quantum Electron.* **21** 109–51
- [25] Yariv A and Yeh P 1984 *Optical Waves in Crystals* (New York: Wiley)

Polarization errors associated with zero-order achromatic quarter-wave plates in the whole visible spectral range

Bruno Boulbry, Bruno Bousquet, Bernard Le Jeune, Yves Guern and Jean Lotrian

Laboratoire de Spectrométrie et Optique Laser (E.A. 938)
Université de Bretagne Occidentale
6, Avenue Le Gorgeu BP 809
29285 BREST Cedex (France)
Tel: (33) 2. 98.01.67.55
Fax: (33) 2. 98.01.61.31
E-mail: bruno.boulbry@univ-brest.fr

Abstract: By a combination of quarter-wave plates made of different birefringent materials it is possible to produce achromatic quarter-wave plates whose degree of achromatism is dependant on the dispersions of birefringence and on the thicknesses of the individual quarter-wave plates. These waveplates are widely used in optical instrumentation and the residual errors associated with these devices can be very important in high resolution spectro-polarimetry measurements. The misalignment of optic axis in a double crystal waveplate is one of the main source of error and leads to elliptical eigenpolarization modes in the retarder and the oscillation of its orientation according to the wavelength. This paper will discuss, first, how the characteristics of a quartz-MgF₂ quarter-wave plate is affected by such a misalignment. A correlation with the experiment is then achieved in order to highlight the interest of taking a possible tilt error into consideration when doing polarimetric measurements.

©2001 Optical Society of America

OCIS codes: (230.5440) Polarization-sensitive devices; (260.2130) Ellipsometry and Polarimetry

References

1. A. M. Title, "Improvement of birefringent filters. 2: Achromatic waveplates," *Appl. Opt.* **14**, 229-237 (1975).
2. P. Hariharan, "Broad-band superachromatic retarders," *Meas. Sci. Technol.* **9**, 1978-1980 (1998).
3. M. G. Destriau and J. Prouteau, "Réalisation d'un quart d'onde quasi achromatique par juxtaposition de deux lames cristallines de même nature," *J. Phys. Radium* **10**, 53-55 (1949).
4. S. Pancharatnam, "Achromatic combinations of birefringent plates," *Proc. Indian. Acad. Sci.* **41**, 137-144 (1955).
5. K. Serkowski, *Methods of experimental physics* vol 12, (N. Carleton, New York, 1974).
6. V. Chandrasekharan and H. Damany, "Birefringence of sapphire, magnesium fluoride, and quartz in the vacuum ultraviolet, and retardation plates," *Appl. Opt.* **7**, 939-941 (1968).
7. J. M. Beckers, "Achromatic linear retarders," *Appl. Opt.* **10**, 973-975 (1971).
8. E. A. West and M. H. Smith, "Polarization errors associated with birefringent waveplates," *Proc. SPIE* **2265**, 260-271 (1994) (San Diego, USA).
9. J. M. Bennet, *Handbook of optics*, (Mc Graw-Hill, New York, 1995).
10. D. B. Chenault and R. A. Chipman, "Measurements of linear diattenuation and linear retardance spectra with a rotating sample spectropolarimeter," *Appl. Opt.* **32**, 3513-3519 (1993).
11. I. Scierski and F. Ratajczyk, "The Jones matrix of the real dichroic elliptic object," *Optik* **68**, 121-125 (1984).
12. B. H. Kolner, "Intensity noise enhancement in the half-wave plate/polarizer attenuator," *Opt. Lett.* **16**, 784-786 (1991).
13. J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals*, (Clarendon, Oxford, 1957).
14. A. Yariv and P. Yeh, *Optical waves in crystals*, (J. Wiley and sons, New York, 1984).

1. Introduction

Retardation plates are generally made of a single piece of material, although when the thickness required for a plate is too small, two thicker pieces may be used with the fast axis of one aligned parallel to the slow axis of the other to cancel out all but the desired retardation. Those devices are called zero-order waveplates. Achromatic retardation plates which have almost the same retardation over a given range of wavelengths can be made from two or more different materials [1, 2] or two or

more plates of the same material whose axes are oriented at the appropriate angle [3, 4]. In the first case, the best choice of materials would be a pair of positive and negative crystals [5]. In this respect the best combination would be colorless sapphire (negative crystal) and magnesium fluoride (positive crystal) [6]. Unfortunately, the refractive indices of these materials differ considerably and incident natural light would become polarized by the reflection from their cemented interface. For these reasons it seems that the most convenient pair is quartz with magnesium fluoride with the fast axis of one aligned parallel with the slow axis of the other [7]. These waveplates are widely used in instrumentation and the residual errors associated with these devices can be of high importance in spectropolarimetry measurements [8]. The present paper describes how a misalignment inside a quartz-MgF₂ achromatic quarter-wave plate can affect those measurements.

2. Quart-MgF₂ achromatic quarter-wave plate

2.1 Optical system

A reasonably achromatic retardation plate can be constructed from pairs of birefringent materials. Difference between the birefringence of quartz and those of MgF₂ depends little of the wavelength on the visible spectral range [9]. As a matter of fact, both these materials are used with the fast axis of one aligned parallel to the slow axis of the other to make a zero-order achromatic quarter-wave plate on the range 400-700 nm. Assume that quartz and MgF₂ have thicknesses d_q and d_m and a birefringence Δn_q and Δn_m respectively, and that is to be achromatized at wavelengths λ_1 and λ_2 . We obtain the relations:

$$\frac{\lambda_1}{4} = d_q \Delta n_q(\lambda_1) - d_m \Delta n_m(\lambda_1) \quad (1.a)$$

$$\frac{\lambda_2}{4} = d_q \Delta n_q(\lambda_2) - d_m \Delta n_m(\lambda_2) \quad (1.b)$$

Where Δn 's are the values of birefringence for the materials at the wavelength specified. If the quarter-wave plate is made of quartz and MgF₂ with the thicknesses d_q and d_m respectively, the retardance will be 90° for λ_1 and λ_2 and the retardance variation according to the wavelength will be less than few percent. We have tested a quartz-MgF₂ quarter-wave plate (Optique de precision J. Fichou) whose thicknesses for the quartz and the MgF₂ are 239.1 μm and 197.1 μm respectively (commercial specifications). As a consequence of equations 1, the retardance is exactly equal to 90° at the wavelengths 432.2 nm and 614.5 nm (figure 1). The birefringence values are extracted from an article of J. M. Beckers [7].

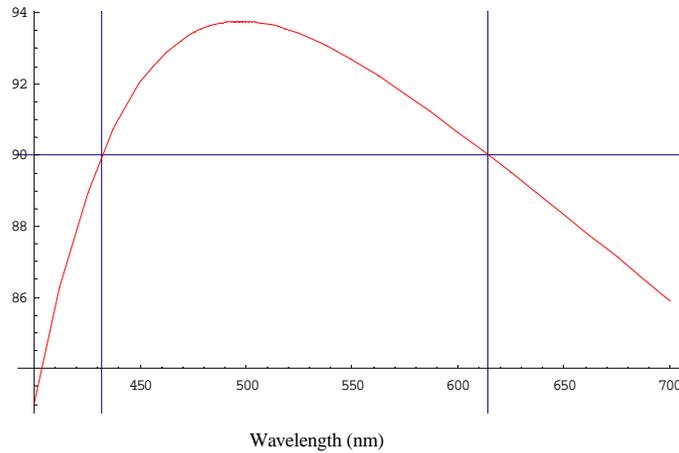


Figure 1. Simulation of the retardance (degrees) of a quartz-MgF₂ quarter-wave plate according to the wavelength (nm), the thicknesses of the quartz and the MgF₂ are 239.1 μm and 197.1 μm respectively.

2.2 Misalignment error

A tilt error between the two plates has been introduced in our calculations, as schematized in figure 2, in order to describe the consequences on the optical characteristics of the retarder.

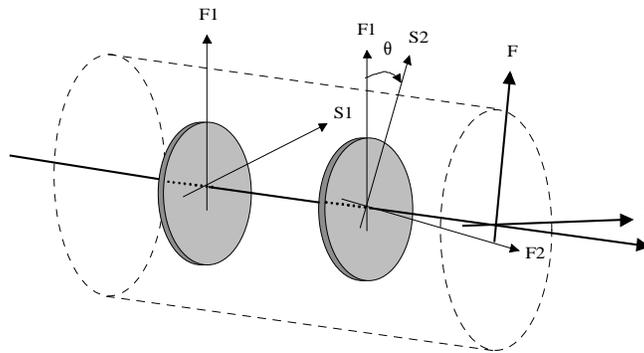


Figure 2. Schematic of the misalignment : (F1, S1) represent the fast and slow axes of the quartz, (F2, S2) the fast and slow axes of the MgF₂ and (F, S) those of the quartz-MgF₂ quarter-wave plate.

The Jones matrix $[M]$ of the quartz-MgF₂ quarter-wave plate with a tilt error θ between the two plates can be calculated as follows:

$$[M] = [R(-\theta)][M_m][R(\theta)][M_q] \quad (2)$$

With $[M_m]$ the Jones matrix of the MgF₂ plate, $[M_q]$ those of the quartz plate and $[R(\theta)]$ the matrix of a rotational change of basis.

$$\sin(\varepsilon) = \sin(2\nu) \sin(\phi) \quad (6)$$

For the elliptical eigenvector J_1 , ϕ and E_y are the argument and the absolute value of the complex number $b + i c$ respectively. $E_x = a$ and $\nu = \arctan \left[\frac{E_y}{E_x} \right]$.

Ellipticity ε can be calculated according to the wavelength on the visible spectral range for several values of the tilt error θ . Here again, the thicknesses of quartz and MgF_2 are the commercial specifications *i.e.* 239.1 nm and 197.1 nm. The results are presented on figure 4.

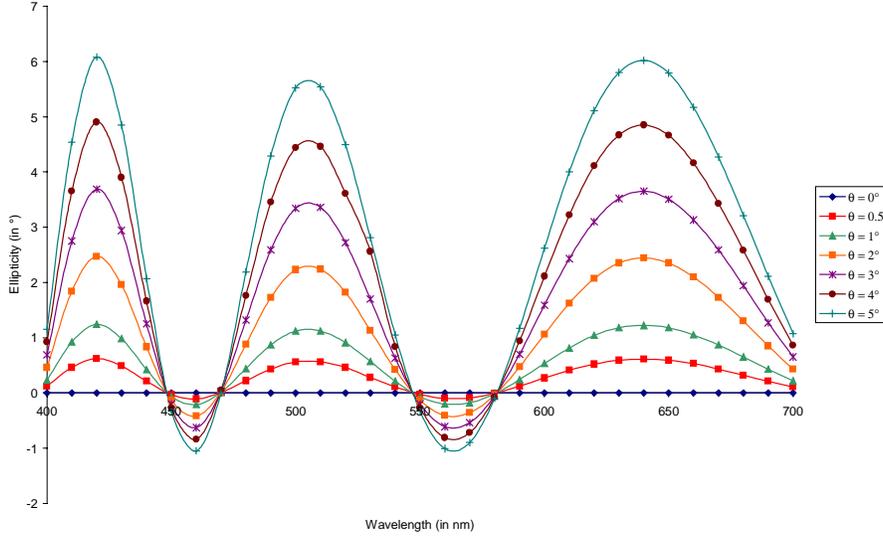


Figure 4. Ellipticity of the eigenvectors of a quartz-MgF₂ quarter-wave plate versus wavelength and for different values of the tilt between the two plates.

From the calculation illustrated on figure 4, one can observe a linear dependence of the ellipticity with the tilt ($\varepsilon \cong 1.38 \theta$). It oscillates three times over the 400-700 nm wavelength range and the period of modulation increases as the wavelength increases. This first result evidences the interest of taking ellipticity into account in spectropolarimetry measurements with imperfect zero-order achromatic quarter-wave plates.

We calculated as well the orientation of a quartz-MgF₂ quarter-wave plate according to the wavelength. So as to calculate the orientation of the neutral axes of the retarder, we multiplied the eigenvector J_1 by the matrix of a rotational change of basis $R(-\alpha)$. Indeed, when $J = R(-\alpha) \cdot J_1$ is the vector of an elliptical polarization state whose axes are aligned with the reference axes X and Y, then the phase difference ϕ occurring between the x and the y components of J is equal to $\frac{\pi}{2}$. This procedure allowed us to determine the orientation α of one of the neutral axes with the use of the method described as follows. If the x and y components of J are $J_x = E_x e^{i\phi_x}$ and $J_y = E_y e^{i\phi_y}$, then $\phi = \phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{J_x}{J_y} = \frac{E_x}{E_y} e^{-i\phi}$, and finally the real part of $\frac{J_x}{J_y}$ is equal to zero. Further to these explanations, the azimuth α of the eigenvector J_1 is given by:

$$\tan 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - c^2} \quad (7)$$

the azimuth α was calculated according to the wavelength on the visible spectral range for several values of θ . The results are presented on figure 5.

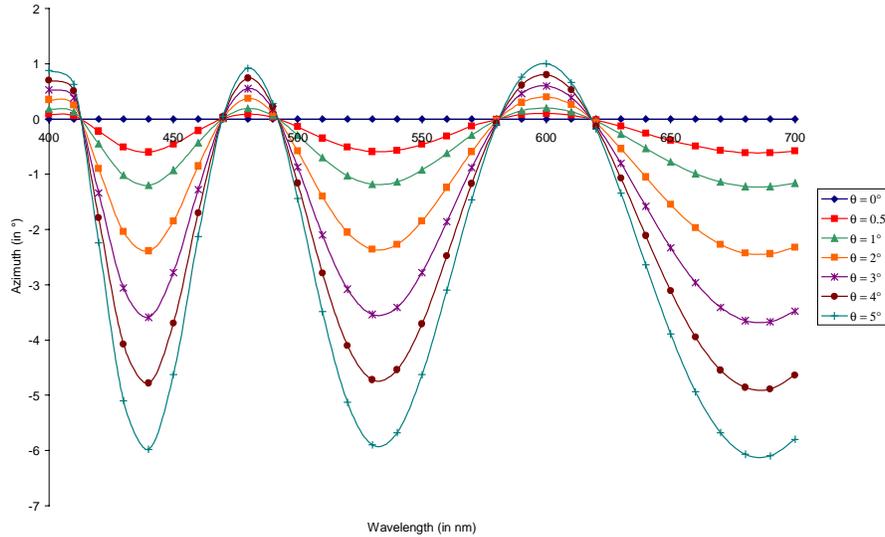


Figure 5. Azimuth of the eigenvector J_1 calculated for several tilt errors and according to the wavelength.

Figure 5 shows that, as for the ellipticity, the azimuth of the eigenpolarization modes oscillates three times over the visible spectral range. The modulation increases as the wavelength increases and the oscillation is linearly dependant of the tilt error. We experimentally observed an oscillation of the fast axis of almost 1° (see chapter 4 of the present paper) corresponding to a misalignment inside the retarder of $\theta = 0.72^\circ$. Further to this observation we took this value in the calculations described below.

To understand these oscillations, we examined both the ellipticity of the eigenpolarization modes and the orientation of the retarder fast axis, as a function of the wavelength, for $\theta = 0.72^\circ$ (the thicknesses are the commercial specifications). We plotted as well the values $\delta/2\pi$ according to the wavelength for the quartz and MgF_2 respectively for a best understanding of the physical effect occurring to the materials (Figure 6).

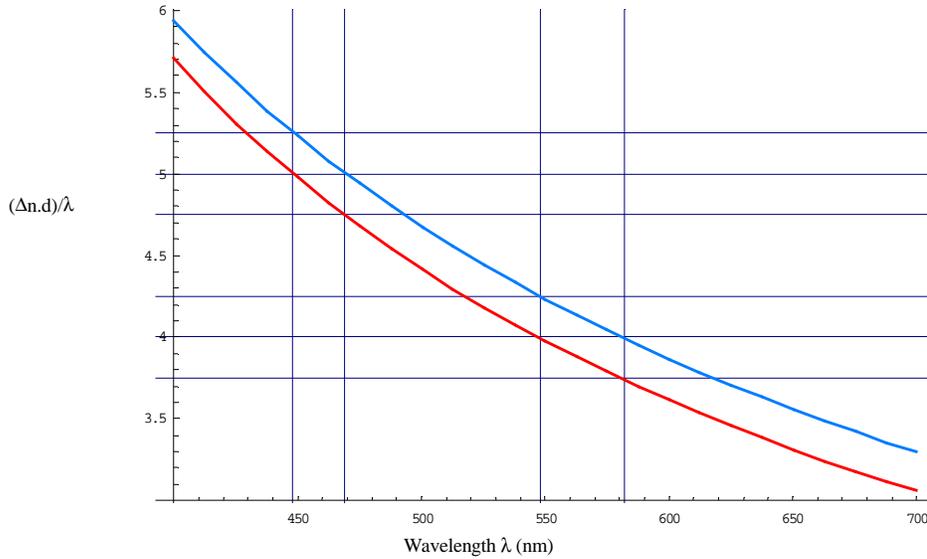


Figure 6. Calculated retardance of a 239.1 μm quartz plate divided by 2π (red curve, below) and those of a 197.1 μm MgF_2 plate divided by 2π (blue curve, above) as a function of the wavelength.

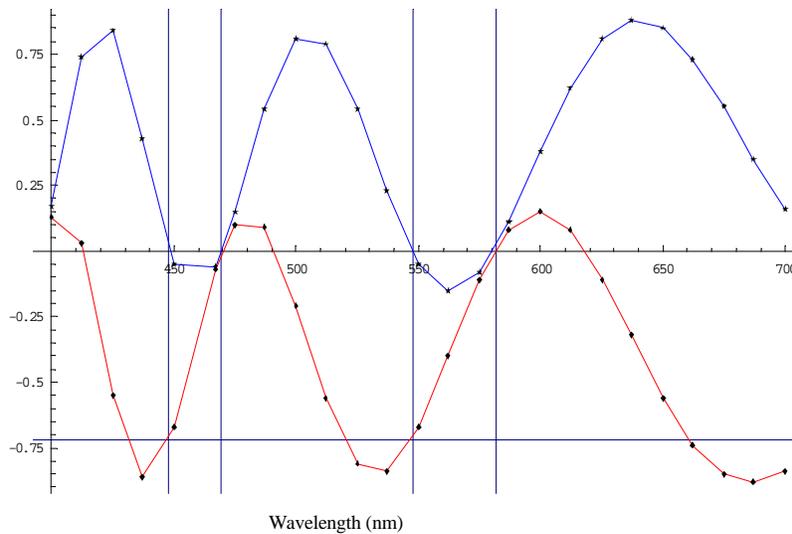


Figure 7. Calculated ellipticity (degrees) of the eigenpolarization modes (blue curve, above) and the orientation of the fast axis (red curve, below) of the retarder with a tilt error of 0.72° .

At $\lambda_1 = 448 \text{ nm}$, $(\Delta n_q \times d_q) / \lambda = 5$ (Figure 6) that means that the quartz plate displays no retardance. At the same wavelength, the MgF_2 plate acts as a perfect quarter-wave plate $((\Delta n_m \times d_m) / \lambda = 5.25)$. We considered the materials (quartz and MgF_2 plates) as perfect devices in our calculations and especially we assumed that the quartz has no optical activity. Consequently, if the first plate is a wave-plate at the wavelength 448 nm, the ellipticity and the orientation of the fast axis of the retarder would be those of the second plate *i.e.* $\varepsilon = 0^\circ$ and $\alpha = 0.72^\circ$ (figure 7). At $\lambda_2 = 469 \text{ nm}$, $(\Delta n_q \times d_q) / \lambda = 4.75$ and the quartz plate contributes the perfect quarter wave of retardance when the second plate has zero retardance. The retarder ellipticity and its orientation are thus those of the first

plate: $\varepsilon = 0^\circ$ (no optical activity) and $\alpha = 0^\circ$. At $\lambda_3 = 548$ nm, the MgF_2 plate acts as a perfect quarter-wave plate and the quartz one as a wave-plate ($\varepsilon = 0^\circ$, $\alpha = 0.72^\circ$) and at $\lambda_4 = 582$ nm the optical functions of the materials are reversed. Optical characteristics of the retarder according to the wavelength are resumed in figure 8.

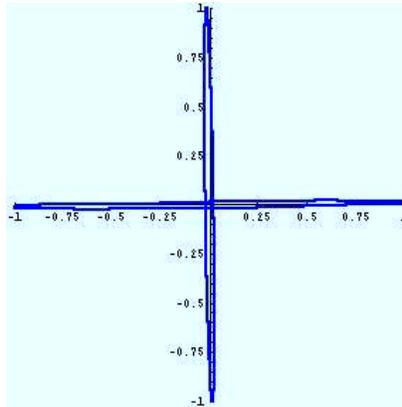


Figure 8. (54Ko) Eigenpolarization modes of a quartz- MgF_2 quarter-wave plate (9Ko version). Colors are in respect with the wavelength of the incident light.

3. Experimental results

3.1 Experimental methodology and measurement set-up

The azimuth of one of the eigenpolarization mode of the retarder was measured using a dichotomous method of null intensity. Indeed, when the plate rotates between two orthogonal polarizers (figure 9), the minimum of intensity is obtained when one of its neutral axes is aligned with those of the first polarizer. This situation remains valid even if the ellipticity of the retarder is not null. Figure 10 shows indeed that the minimum of intensity on the detector is constant whatever the ellipticity ε . This curve was plotted using the model of a dichroic elliptic object developed by Scierski and Ratajczyk [11].

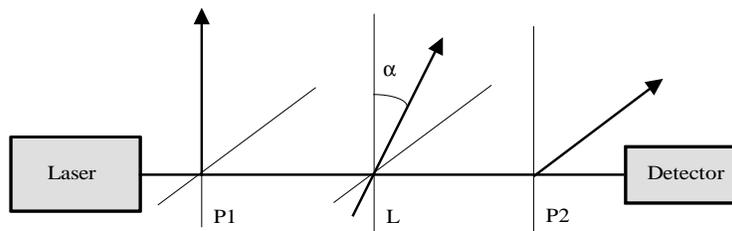


Figure 9. Schematic layout of the experiment. P1 and P2 are Glan-polarizers. L is the quartz- MgF_2 quarter-wave plate.

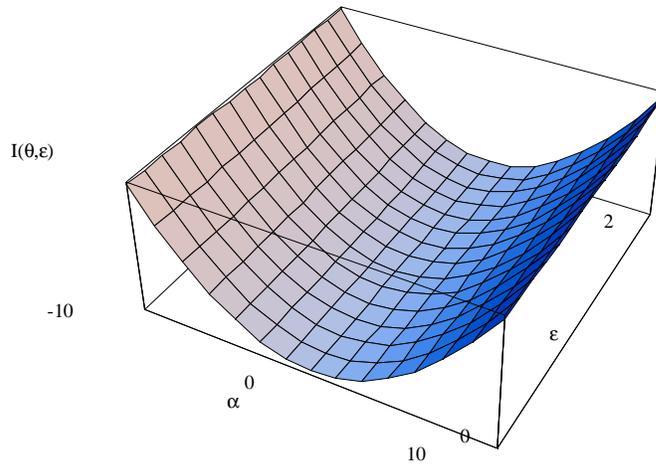
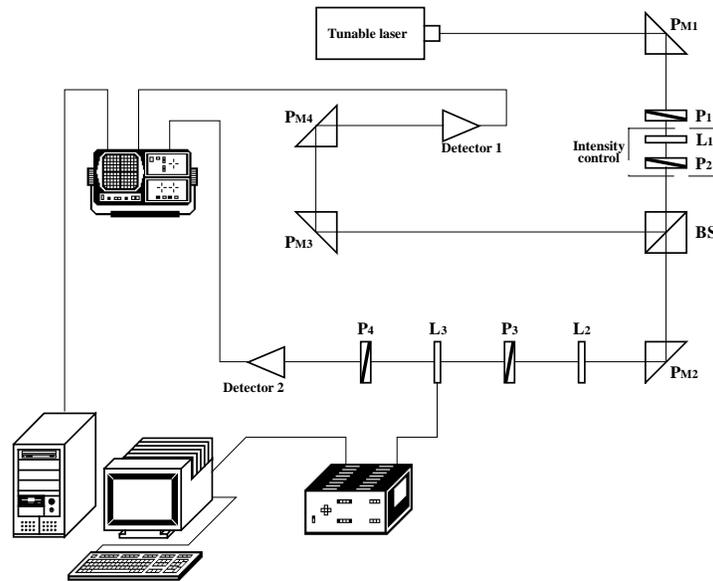


Figure 10. Intensity detected versus the azimuth-angle α (degrees) of an elliptic birefringent object between two orthogonal polarizers and the ellipticity ϵ of its eigenpolarization modes.

Figure 11 displays the experimental set-up. The light source is a commercial optical parametric oscillator (Sunlite - Continuum) pumped by a frequency-tripled Nd:YAG laser with a 6-ns pulse width. The detection is made by a photodiode. The axis of the optical elements are aligned with a step-by-step motor (accuracy: 0.01°). Intensity variations are corrected by means of a reference signal (detector 1) and the estimated standard deviation on the corrected signal is less than 5%. L_1 , P_2 and L_2 are used in order to control the intensity on the detectors. An additional polarizer P_1 has been added so as to eliminate a possible intensity noise effect when reducing the power [12].



P_1, P_2, P_3, P_4 : Linear polarizers
 L_1, L_2 : Achromatic half-wave plates
 PM_1, PM_2, PM_3, PM_4 : Prisms

BS: Beamsplitter
 L_3 : quartz-MgF2 achromatic quarter-wave plate

Figure 11. Experimental set-up.

3.2 Experimental results

The dichotomous method gives access to the experimental value of the azimuth (figure 12). Reproducibility of the measurements showed an estimated accuracy to within 0.02° . We plotted as well the theoretical azimuth calculated with the thicknesses already used (commercial specifications) and a tilt error of 0.72° . The difference occurring between the experimental and the theoretical points is due to false values of the thicknesses and evidences the need of determining the real characteristics of the quarter-wave plate in order to obtain a reasonably good fit between the two curves. We consequently used a least-square analysis. This method allowed us to have an estimation of the characteristics of the retarder: $d_q = 242 \mu\text{m}$, $d_m = 172 \mu\text{m}$ and $\theta = 0.78^\circ$ (figure 13).

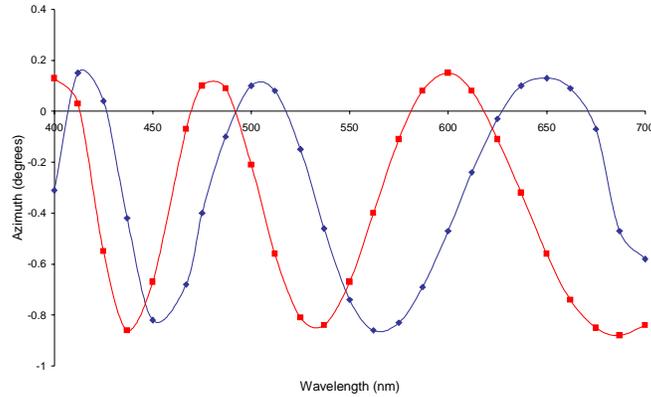


Figure 12. Experimental azimuth (blue curve) and theoretical azimuth calculated for a misalignment of 0.72° and thicknesses of $239.1 \mu\text{m}$ for the quartz plate and $197.1 \mu\text{m}$ for the MgF_2 plate (red curve).

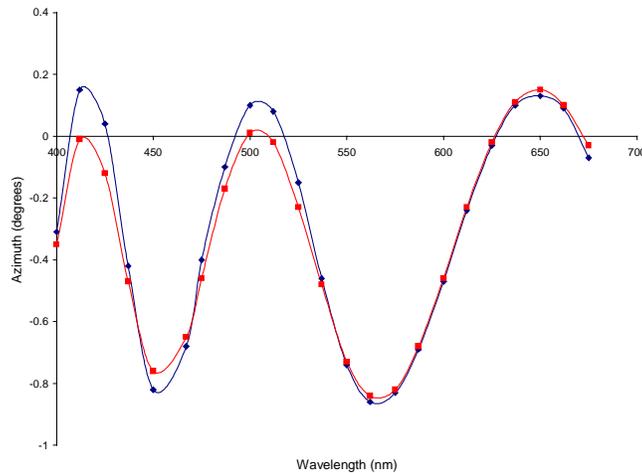


Figure 13. Experimental azimuth (blue curve) and the best fit obtained for a misalignment of 0.78° and thicknesses of $242 \mu\text{m}$ for the quartz plate and $172 \mu\text{m}$ for the MgF_2 plate (red curve).

One can observe on figure 13 that the angular amplitude of the calculated azimuth oscillations, in opposition to the experimentation, is not constant. The best fit between experimental data and theoretical calculation was obtained in the range 575-675 nm. The difference still remaining is

probably due to the optical activity of the quartz plate [13] especially since this difference is higher for the low wavelengths [14]. The model used to describe the retarder is not consequently accurate and the calculated characteristics only an estimation of the real values. Fitting only the first part of the data (on the wavelength range 400-475 nm and 400-600 nm) and because of the optical activity, we obtained different values of the retarder characteristics. The thicknesses and tilt value corresponding to this two simulated curves (table 1) allowed us to know the accuracy of the retarder characteristics calculated by mean of this method.

Wavelength range (nm)	400-475	400-600	400-700
Thickness of quartz (μm)	247	239	242
Thickness of MgF_2 (μm)	168	175	172
Tilt error (degrees)	0.74	0.68	0.78

Tableau 1. Characteristics of the retarder calculated by fitting experimental and calculated values on different spectral range.

Thicknesses calculated by fitting the experimental and the simulated azimuth of the retarder were thus precise to within 4-5 μm and the tilt error was obtained with an accuracy of 0.1° .

4. Conclusion

An experimental method to determine the characteristics of a quartz- MgF_2 achromatic quarter-wave plate has been presented. The theoretical model of two plates with an optical axis tilt error gave a good correlation with the experiment and allowed us to obtain an estimation of the tilt error with an accuracy equal to 0.1° . Thicknesses of the two materials used to achieve the achromatic retarder have been calculated as well and do not correspond to those given by the constructor. A better accuracy could be reached by taking into account the optical activity of the quartz. Nevertheless, the results reported here evidences a non negligible misalignment inside the retarder. Simulations showed that the eigenpolarization modes of the retarder are consequently elliptic and that this ellipticity varies strongly with the wavelength. Azimuth which was also experimentally measured according to the wavelength oscillates on the whole visible spectral range and could lead to error measurement when using this device in order to encode the polarization information in a spectropolarimeter.

RÉSUMÉ

La polarimétrie consiste à étudier les transformations de polarisation d'une onde électromagnétique engendrées par un système physique. La réponse optique de ce système étant très sensible à l'état de polarisation de la lumière incidente ainsi qu'à sa longueur d'onde, une classe évoluée de polarimètres capables de mesurer la réponse polarimétrique d'un échantillon sur une large bande spectrale a vu le jour permettant ainsi d'accroître de façon conséquente le nombre d'informations le concernant. Nous avons mis au point un tel polarimètre capable de fonctionner avec une source impulsionnelle. Un grand soin a été porté à la réduction des erreurs systématiques grâce à l'utilisation d'un modèle original pour décrire les lames de phase utilisées. Cet étalonnage a débouché sur la réalisation d'un banc de caractérisation de lames de phase compensées. Une étude statistique nous a ensuite permis de minimiser et quantifier le résiduel d'erreurs inhérentes à une mesure.

Mots clés : Polarisation, Polarimètre large bande, Formalisme de Stokes Mueller, Étalonnage, Erreurs systématiques et statistiques.

ABSTRACT

Polarimetry technique allows one to study the changes induced by a physical system in the polarisation of electromagnetic waves. As its optical response is greatly affected by the polarisation state and wavelength of the incident light, a class of powerful polarimeters has been developed to measure the polarimetric response of a sample over a wide spectral band. Such a device, therefore, allows one to greatly increase the number of data about the sample of concern. The polarimeter of that sort we developed and implemented is operating with a pulse source. Moreover, by running a novel and theoretical model to describe the compensated waveplates used we focused on the reduction of systematic errors. This calibration procedure led us to develop a compensated-waveplate characterisation bench. Then, a statistical study allowed us to greatly reduce and quantify the residual errors inherent in a measurement.

Key words : Polarization, Spectroscopic polarimeter, Stokes-Mueller formalism, Calibration, Systematic and statistical errors.