



HAL
open science

APPROCHES STATISTIQUES - PROBABILISTES DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES COMPOSITES À MATRICE CÉRAMIQUE

Vincent Calard

► **To cite this version:**

Vincent Calard. APPROCHES STATISTIQUES - PROBABILISTES DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES COMPOSITES À MATRICE CÉRAMIQUE. domain_other. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1998. Français. NNT: . tel-00003071

HAL Id: tel-00003071

<https://theses.hal.science/tel-00003071>

Submitted on 1 Jul 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 1948

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE
L'INGÉNIEUR

Par M. **VINCENT CALARD**

INGÉNIEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE PARIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

APPROCHES STATISTIQUES - PROBABILISTES DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES COMPOSITES À MATRICE CÉRAMIQUE

Soutenue le : **5 Octobre 1998**

Après avis de :

MM.	Dominique Jeulin	Maître de recherche EMP	Rapporteurs
	Philippe Bompard	Professeur ECP	

Devant la Commission d'examen formée de :

MM.	Dominique Rouby	Professeur INSA-Lyon	Président
	Xavier Aubard	Ingénieur SEP	Rapporteur
	Jean-Marc Deshouillers	Professeur Bordeaux II	Examineurs
	Denys Breysse	Professeur Bordeaux I	
	Roger Naslain	Professeur Bordeaux I	
	Jacques Lamon	Directeur de recherche CNRS	

Approches Statistiques-Probabilistes Du Comportement Mécanique Des Composites À Matrice Céramique

Résumé : Des approches statistiques-probabilités du comportement mécanique des composites à matrice céramique, fondées sur la description des phénomènes stochastiques à l'origine de la fragmentation matricielle et de la rupture ultime, ont été développées. Elles ont été appliquées à des composites unidirectionnels et tissés de type SiC/SiC. Elles ont permis de calculer le comportement mécanique et la rupture en traction et en flexion.

L'approche de la fragmentation matricielle repose sur l'analyse des populations de défauts qui provoquent cette fragmentation. Dans le cas des composites unidirectionnels étudiés, une seule population est suffisante pour calculer le comportement. Pour les composites tissés étudiés, trois populations de défauts caractérisent le processus de fissuration.

En ce qui concerne la rupture, une classification, fondée sur les effets de volumes et les ruptures successives d'éprouvettes en traction, permet de définir convenablement le choix du critère probabiliste de rupture (Weibull, Ergodique ...). Ainsi le caractère ergodique de la rupture d'un composite tissé SiC/SiC a été mis en évidence et vérifié sur des essais de flexion 3 points et 4 points.

Mots Clefs : Composite, Approche Micro-Macro, Comportement Mécanique, Rupture, Ergodicité.

Statistical And Probabilistic Approaches to The Mechanical Behaviour Of Ceramic Matrix Composites

Abstract : Statistical and probabilistic approaches to the mechanical behaviour of ceramic matrix composites, based on the description of the stochastic phenomena responsible for matrix fragmentation and ultimate failure, are developed. They were applied to unidirectional and woven SiC/SiC composites. They allow prevision of the mechanical behaviour and the ultimate failure both in tensile and in bending tests.

The matrix cracking approach is based on the description of the distribution of the flaw populations controlling matrix cracking. In the unidirectional SiC/SiC composites, a single flaw population was sufficient to calculate the mechanical behaviour. For the woven SiC/SiC composites, three flaw populations are responsible for matrix cracking.

A classification of failure features, based on the scale effect and the successive failure of specimen under tensile load, is proposed for the selection of the ultimate failure model (Weibull, Ergodic ...). Thus, the ergodic character of the failure of a SiC/SiC composite was shown using 3-point and 4-point bending tests.

Keywords : Composite, Micro-Macro Approach, Mechanical Behaviour, Failure, Ergodicity.

Remerciements

Ces 4 années passées au LCTS resteront pour moi un excellent souvenir, non seulement pour mon travail de recherche, mais aussi pour les rencontres et les événements que j'ai pu vivre dans cette belle région bordelaise.

Je remercie tout d'abord SEP et le CNRS pour leur soutien financier grâce auquel cette étude a pu être menée.

Je remercie aussi M. le Professeur Roger Naslain pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, et pour avoir prêté une attention toute particulière à ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Jacques Lamon, qui à l'origine de cette thèse, m'a suivi et m'a laissé une grande liberté de manoeuvre quant au déroulement et à l'organisation de mes recherches.

Je suis particulièrement sensible à l'intérêt que Messieurs Dominique Jeulin, Maître de recherche à l'École des Mines de Paris et Philippe Bompard, Professeur à l'École Centrale Paris ont porté à ce travail en me faisant l'honneur de le juger. Je leur adresse mes sincères remerciements.

Je suis très reconnaissant à Messieurs Dominique Rouby, Professeur à l'INSA de Lyon, Jean-Marc Deshouillers, Professeur à l'Université Victor Ségalen Bordeaux II, Denys Breysse, Professeur à l'Université Bordeaux I, et Xavier Aubard, Ingénieur à Société Européenne de Propulsion, d'avoir examiné ce travail et d'avoir participé au Jury.

Je remercie aussi tous les administrateurs que j'ai pu côtoyer au cours de mon séjour, Messieurs Michel Coignard, Henri Zavierta et Gil Hosten, et qui ont su régler tous les problèmes administratifs qui nous rendent la vie beaucoup moins simple. Leur travail eut été vain sans une équipe de choc formée de Mesdames Cécile Dupouy, Florence Croizer et Josette Forget. Merci encore pour les centaines de communications et autres appels au général (surtout à l'heure du café).

Ce travail ne serait rien sans l'aide précieuse de Bruno Humez, qui à l'aide de ses machines et instruments en tout genre, a su faire parler les composites par la force (Ils sont coriaces). Je remercie aussi Michel Saux, sans quoi ce mémoire aurait

été écrit sur un papyrus, et qui en installant, en désinstallant, en réinstallant, puis en rafistolant, a su maintenir en vie mon Mac certes récent, mais déjà trop vieux.

Parmi tous les membres du laboratoire que j'ai pu rencontrer, beaucoup sont partis, d'autres restent encore (bon courage) et certains sont revenus (pas facile de partir). Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance, pour leur aide, les discussions, et les critiques qui m'ont permis de prendre du recul sur mon travail de thèse. Je n'oublierai pas Gauthier-Antoine, dont le rire résonne encore dans les couloirs, Olivier (S), éternel revenant et membre à vie du labo, Gérald, merci pour l'Equipe et tes conseils, non pas sur le vélo mais sur le boulot, Agnès, la préférée de tous, Sophie (P), ça chauffe et ça surchauffe parfois, Philippe (C), le plus sérieux de tous, Fabrice, tes ... résonnent encore dans le bureau, Cédric, notre goth à tous ;-), Sophie (F), la Silicone Graphics se souviendra toujours de ton username, Gérard, seguitz se podetz, Olivier (F) et Emmanuel, les sportifs, adeptes du plâtre et autres attelles derniers cris, Philippe (F), quand commenceras-tu enfin ta thèse, et Jérôme (P), quand termineras-tu enfin la tienne...

À tous les autres que je ne cite pas ici, aux stagiaires, aux permanents, je vous exprime toute ma reconnaissance pour avoir contribué à votre manière à ce travail.

Enfin, je tiens également à remercier Angelika, qui bien que très peu passionnée par la mécanique et les textes scientifiques en général, a bien voulu lire entièrement la partie anglaise et corriger un nombre important de fautes. Je l'embrasse pour autant d'efforts fournis.

Maintenant, bonne lecture, et que ce mémoire puisse vous apprendre quelque chose !

Sommaire

<i>Introduction</i>	1
<hr/>	
<i>Partie I : Synthèse</i>	5
1. Fragmentation matricielle	7
<i>1.1. Composite unidirectionnel</i>	7
1.1.a Présentation de l'approche micromécanique	
1.1.b Modèles de fragmentation de la matrice	
1.1.c Résultats de l'analyse des essais sur minicomposites	
<i>1.2. Composite bidirectionnel tissé</i>	18
1.2.a Fragmentation matricielle en traction uniaxiale	
1.2.b Simulation numérique du comportement mécanique	
1.2.c Résultats et perspectives	
<i>1.3. Analyse générale</i>	24
2. Rupture	26
<i>2.1. Rupture du fil en traction</i>	28
2.1.a Modèle du partage global de charge (PGC)	
2.1.b Chargement non-uniforme	
2.1.c Partage local de charge (PLC)	
<i>2.2. Rupture du minicomposite et du Composite</i>	36
2.2.a Rupture du minicomposite	
2.2.b Rupture du composite 2D tissé	
<i>2.3. Classification des types de rupture et modèle ergodique</i>	37
2.3.a Classification des types de rupture dispersée	
2.3.b Interprétation macroscopique	
2.3.c Modèle ergodique	
<i>2.4. Essais mécaniques de rupture</i>	41
2.4.a Ruptures avec effet de volume	
2.4.b Ruptures avec un faible effet de volume	
2.4.c Essais de flexion	
<i>2.5. Analyse générale</i>	57
<hr/>	
<i>Conclusion</i>	63

<i>Partie II - 1 : Projet de publication</i>	69
--	----

Simulation of matrix cracking in unidirectional ceramic composites (minicomposites)

<i>1. Introduction</i>	71
<i>2. Models of matrix fragmentation</i>	72
2.1. Matrix fragmentation in minicomposites	
2.2. Iterative Weibull model	
2.3. Independent volume model	
2.4. Flaw population model	
<i>3. Numerical simulations</i>	77
3.1. Strain-force curve calculation	
3.2. Simulation algorithm	
<i>4. Results and discussion</i>	81
4.1. Material characteristics and testing	
4.2. Mechanical behaviour	
4.3. Flaw population analysis	
4.4. Discussion about scatter	
<i>5. Conclusion</i>	91

<i>Partie II - 2 : Projet de publication</i>	95
--	----

Micro-mechanical simulation of damage in a 2D woven SiC/SiC composite

<i>1. Introduction</i>	97
<i>2. Matrix fragmentation</i>	98
2.1. SiC/SiC composite microstructure	
2.2. Steps of fragmentation	
2.3. Flaw population	
<i>3. Numerical simulation</i>	103
3.1. Finite elements	
3.2. Homogenisation of the tow properties	
3.3. Algorithm	
<i>4. Results and discussion</i>	108
4.1. Results	
4.2. Discussion	
<i>5. Conclusion</i>	112

<i>Partie II - 3 : Projet de publication</i>	117
--	-----

Ultimate failure of fibre bundles and influence of load sharing conditions

<i>1. Introduction</i>	119
<i>2. Absolute global load sharing model (GLS)</i>	119
2.1. Hypotheses and calculations	
2.2. Experiments	
2.3. Strain-force curve	
2.4. Bundle ultimate load	
<i>3. Practical bundle tests</i>	125
3.1. Number of fibres	
3.2. Non-uniform loading (NUL)	
3.3. Local load sharing (LLS)	
<i>4. Discussion</i>	131
4.1. Influence on m and σ_0	
4.2. Ultimate failure load	
<i>5. Conclusion</i>	135

<i>Partie II - 4 : Projet de publication</i>	139
--	-----

Ultimate failure of 2D woven ceramic matrix composites with an introduction to the ergodic behaviour

<i>1. Introduction</i>	141
<i>2. The scatter in rupture modes</i>	143
2.1. Classification of the various types of scattering rupture	
2.2. Ergodic model (EM)	
<i>3. The tensile tests</i>	149
3.1. The size effect	
3.2. The successive tests	
<i>4. The bending tests</i>	154
4.1. Experimental apparatus	
4.2. Bending test analysis	
4.3. Experimental results	
4.4. Ergodic analysis	
<i>5. Conclusion</i>	158

<i>Annexes</i>	163
Modélisation des fonctions de répartition successives de défauts	165
Introduction à la théorie ergodique	171
Publications	177

Introduction

Introduction

Depuis quelques années, les matériaux composites se sont imposés dans de nombreux secteurs de pointe tels que le spatial, l'aéronautique, la construction navale ou même l'automobile. Une telle percée n'est pas le fruit du hasard mais bien la réponse à des besoins technologiques de plus en plus sévères. Un avantage des matériaux composites est en effet de pouvoir marier plusieurs caractéristiques mécaniques ou chimiques propres à chaque constituant. Ainsi le renfort d'un polymère par des fibres de verre permet d'obtenir un matériau léger, chimiquement peu réactif, étanche comme le plastique et, résistant comme le verre. Dans le domaine des hautes températures, domaine qui intéresse tous les motoristes en général, les matériaux composites à matrice céramique (CMC) et fibres céramiques longues se sont avérés une alternative aux alliages métalliques. En effet les CMCs sont capables de conserver leurs propriétés mécaniques à haute température et en milieu oxydant grâce à leur faible réactivité chimique, tout en présentant un caractère beaucoup moins fragile que les céramiques monolithiques.

Néanmoins un grand nombre de données expérimentales ainsi que des travaux parus dans la littérature montrent sans ambiguïté que le comportement mécanique des CMCs non seulement est de type statistique à l'échelle macroscopique, mais en outre résulte d'événements de rupture à l'échelle microscopique eux mêmes stochastiques. Ce caractère statistique résulte de la nature céramique fragile des constituants du composite (pris individuellement, la fibre et la matrice ont un comportement stochastique) et des variations locales de la structure (tissu) et de la micro-structure (porosité, hétérogénéités ...) qui induisent des singularités aléatoires du champ des contraintes. Ces effets se traduisent par une dispersion significative dans les courbes de comportement déformation/contrainte mesurées à l'aide d'échantillons de forme et de dimensions cependant identiques. Cette dispersion influence donc naturellement la valeur des caractéristiques du matériau à prendre en compte dans les calculs de comportement, ainsi que les résultats du calcul eux-mêmes qui peuvent souffrir d'effets d'échelle non considérés par les méthodes de calcul déterministes.

Ce problème a été résolu dans les matériaux monolithiques grâce à des approches de type statistique-probabiliste de la rupture [Lam83]. Un logiciel post-processeur des programmes de calcul par éléments finis permet de calculer le comportement de pièces de géométrie complexe soumises à des champs des contraintes multiaxiaux et/ou transitoires [Lam95a]. Divers travaux au LCTS ont porté sur le comportement aléatoire des CMCs à différentes échelles (microcomposite (fibre + matrice), minicomposite (un fil + matrice) et composite (tissu + matrice)) [Gui94, Lis97, Leb96]. Plusieurs résultats remarquables ont été obtenus, parmi lesquels on retiendra la prévision du comportement d'un SiC/SiC tissé à partir des caractéristiques de ces constituants, à l'aide du post-processeur de calcul de la probabilité de rupture [Lam95b].

Historiquement, cette étude s'inscrit donc dans le cadre de la mise au point d'un outil de calcul de pièces en composite et d'une méthodologie de dimensionnement. Il s'agit de développer un modèle statistique-probabiliste de description du comportement mécanique de ces matériaux en fonction des

paramètres micro-structuraux, et pour des raisons de simplicité, de paramètres statistiques équivalents caractéristiques de l'échelle macroscopique.

Il est apparu qu'il faut traiter séparément le comportement proprement dit lié à l'endommagement de la matrice (courbe déformation-contrainte) et la rupture ultime dictée par les fibres. Cette différence résulte de la complexité beaucoup plus grande de la rupture ultime par rapport à l'endommagement du composite dans le cadre d'une approche micro-macro. Ainsi, dans la première partie, nous proposons une approche micro-macro fondée sur les propriétés des constituants pour calculer tout d'abord le comportement d'un composite unidirectionnel, puis dans un second temps de passer au composite 2D tissé en modélisant une cellule du composite. Cette approche utilise la notion de population de défauts critiques pour simuler la fragmentation de la matrice qui est à l'origine du comportement non linéaire du composite. Il faut noter que par rapport aux travaux antérieurs [Gui94, Lis97, Leb96] l'approche proposée est une approche plus fondamentale dans la mesure où elle considère les populations de défauts, et plus générale dans la mesure où elle ne repose pas sur une statistique de type Weibull. Cette étude a permis de relier de manière probante le rôle des constituants au comportement macroscopique du composite.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de la rupture des CMCs. Nous présentons tout d'abord une analyse de la rupture d'un fil qui met en évidence le rôle du partage de charge et de l'uniformité des forces appliquées sur les propriétés à rupture. L'étude du fil a été une étape importante de ce mémoire car elle a permis de montrer que l'approche micro-macro de la rupture d'un système parallèle de fibre est très complexe, et qu'elle est actuellement impossible à appliquer pour traiter convenablement un composite, non pas par le raisonnement, mais par les moyens numériques qu'il faudrait mettre en oeuvre. Les méthodes analytiques ont en effet été appliquées dans des cas simples de partage de charge ce qui limite considérablement le champ d'investigation et les résultats. En conséquence, ceci nous a amené à étudier la rupture du composite 2D tissé d'un point de vue macroscopique. Pour cela une classification des types de rupture a été proposée pour définir une méthodologie expérimentale d'analyse. Ensuite cette méthodologie a été appliquée à des minicomposites et des composites. L'étude a ainsi révélé de forts et de faibles effets de volume pour ces matériaux. Un nouveau modèle a par ailleurs été construit pour traiter le cas de matériaux avec un faible effet de volume. Le calcul de la rupture a ensuite été appliqué à la flexion 3 points et pseudo 4 points pour valider l'approche.

Le matériau qui a été retenu pour illustrer et servir de support à l'approche générale est un composite tissé SiC/C/SiC formé d'un empilement de tissus de fils de fibres SiC, recouvertes d'une interphase en pyrocarbone et d'une matrice SiC élaborée par CVI.

La rédaction du mémoire se présente sous une forme mixte. Il comprend tout d'abord une partie en français qui donne, d'une manière concise, la synthèse de ce travail. Ensuite les résultats sont détaillés dans quatre projets de publication en anglais

Partie I : Synthèse

"Tout ce qui existe dans l'Univers est le fruit du
Hasard et de la Nécessité"

Démocrite.

1. Fragmentation matricielle

Le comportement mécanique des CMCs est conditionné par l'endommagement, qui résulte de la fragmentation matricielle, et la rupture ultime, qui est due aux fibres. Chacun de ces phénomènes est examiné séparément dans cette partie. Il faut remarquer que la fissuration matricielle a une importance qui dépend de la rigidité de la matrice par rapport à celle des fibres. Dans le cas des SiC/SiC par exemple, elle conditionne le champ de contraintes s'exerçant sur les fibres, et contribue à supporter une large part des efforts. Dans le cas du C/C, cet effet est moins significatif. Nous proposons donc ici une approche de la fissuration matricielle par des approches micro-macro pour des composites SiC/SiC, que nous généralisons à la fin. Ensuite nous présentons l'étude de la rupture ultime de ces composites ainsi qu'une démarche générale pour l'approche de la rupture des composites.

1.1. Composite unidirectionnel (*Partie II-1*)

Historiquement, l'approche d'un point de vue statistique-probabiliste du comportement mécanique des composites céramique à matrice céramique a été amorcée par les travaux de Laurent Guillaumat [Gui94], de Nathalie Lissart [Lis97] et de Gauthier-Antoine Lebrun [Leb96] qui ont proposé des modèles de fragmentation matricielle fondés sur le caractère probabiliste de l'apparition des fissures matricielles. Les améliorations apportées ici concernent notamment la rupture individuelle des fibres au cours du chargement, et la fragmentation matricielle, qui est traitée d'une manière plus fondamentale à l'aide des populations de défauts critiques. L'objectif de cette partie était dans une certaine manière la simplification de l'approche théorique des mécanismes de fissuration ainsi que la comparaison des différents modèles en termes de population de défauts afin de réaliser par la suite le passage au composite 2D tissé.

1.1.a Présentation de l'approche micromécanique

Le minicomposite étudié dans cette partie est un composite unidirectionnel formé de 500 fibres SiC Nicalon noyées dans une matrice SiC (Fig.1.1). Les fibres et la matrice sont des matériaux céramiques fragiles dont la rupture peut être décrite par une loi de Weibull à deux paramètres (m et σ_0). Au cours du chargement, des fissures matricielles apparaissent le long du composite en traversant totalement la section et induisent une perte de rigidité. Le premier point à résoudre est le calcul de l'influence d'une fissure sur le comportement.

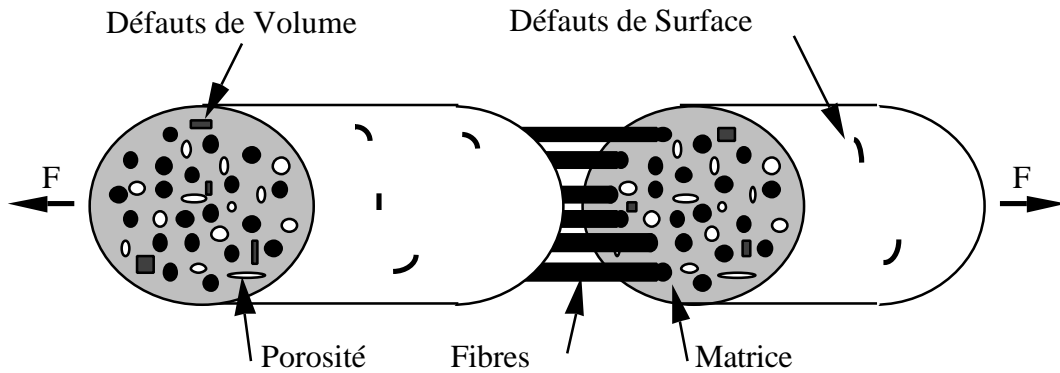


Fig.1.1 Structure du minicomposite.

Dans les parties non fissurées, la liaison entre les fibres et la matrice est supposée parfaite (continuité de la déformation) ce qui permet d'utiliser les relations découlant de la loi des mélanges. Lorsqu'une fissure transverse est créée dans la matrice, elle provoque une décohésion de la fibre et de la matrice sur une longueur $2l_d$ au niveau de l'interface. Le transfert de charge le long de la décohésion est contrôlé par une contrainte de cisaillement τ supposée constante et le rayon de la fibre R_f , qui implique un champ de contrainte triangulaire pour les portions de fibres situées au droit d'une fissure dans la matrice (Fig.1.2). Cette hypothèse sur le cisaillement τ est justifiée par la faible rugosité des surfaces en contact le long de la décohésion [Lam95c, Dro95] dans le cas des CMC. Des approches plus complexes [Ker98, Hut90], mettant en jeu des profils de rugosité plus accentués, seront sans doute plus appropriées pour d'autres matériaux.

$$2l_d = \frac{R_f}{\tau} (\sigma_{f,\max} - \sigma_{f,\min}) \quad (1.1)$$

$\sigma_{f,\max}$: Contrainte maximale dans la fibre au niveau d'une fissure.

$\sigma_{f,\min}$: Contrainte minimale dans la fibre avec la matrice intacte.

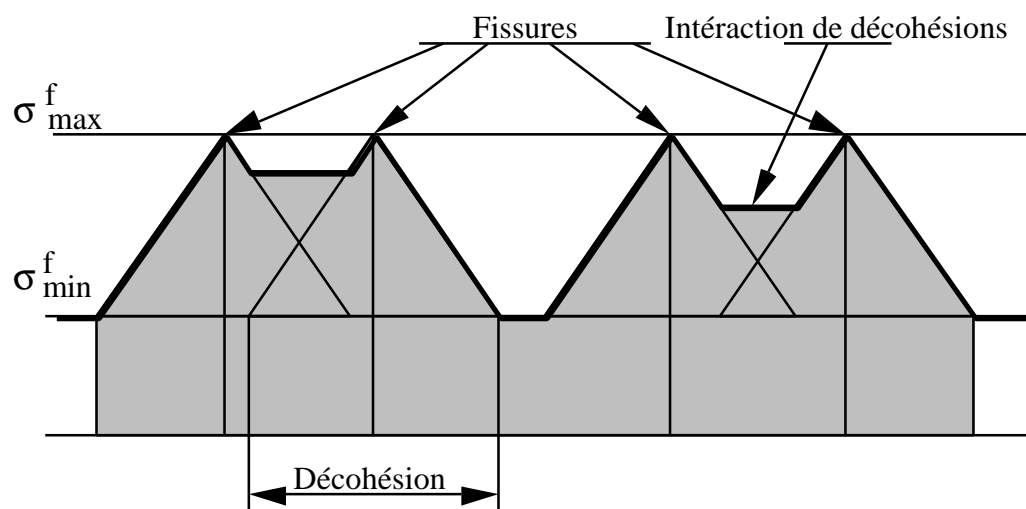


Fig.1.2 Profil des contraintes dans les fibres en présence des décohésions induites par les fissures de la matrice.

La déformation totale du composite est alors dictée par le nombre et la position des fissures matricielles. La simulation du comportement revient à modéliser cette fragmentation et à déterminer le champ des contraintes supporté par les fibres. Le profil des contraintes s'exerçant sur les fibres peut alors être représenté par une succession de triangles (Fig.1.2). On suppose par ailleurs qu'il n'y a pas de rupture de fibres. Le calcul de la courbe déformation-force est réalisé par l'intégration de l'équation des déformations des fibres le long du composite.

1.1.b Modèles de fragmentation de la matrice

Trois modèles ont été utilisés pour la simulation de la fragmentation de la matrice :

- **Le modèle itératif** est lié directement au caractère fragile de la matrice qui, en première approximation, suit pour la rupture une loi de Weibull [Lis97]. Le processus de fissuration est alors simple à simuler. Pour tout volume de matrice V non fissuré, la contrainte moyenne σ_w de fissuration est donnée par la moyenne de la loi de Weibull, avec $\Gamma()$ la fonction gamma classique : $\Gamma(x+1)=x!$:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_o \cdot \Gamma(1 + 1/m)}{V^{1/m}} \quad (1.2)$$

Le modèle itératif repose sur l'hypothèse que la statistique de Weibull continue de s'appliquer lorsque la taille des fragments devient de plus en plus petite. Ceci implique donc que l'historique de la fissuration (sélection des défauts) ne perturbe pas les paramètres de Weibull pour les petits volumes, ce qui est une hypothèse forte. En effet, les paramètres m et σ_o sont définis uniquement par l'analyse des premières fissurations matricielles de l'ensemble de tous les minicomposites.

- **Le modèle des volumes élémentaires indépendants** considère que la matrice est composée de N_t volumes élémentaires indépendants V correspondant au nombre total de fissures transverses à la saturation. Ainsi lorsque N_t est suffisamment grand, la probabilité de Weibull donne le nombre de volumes fissurés N_c :

$$\frac{N_c}{N_t} = P(\sigma) = 1 - \exp\left(-V(\sigma/\sigma_o)^m\right) \quad (1.3)$$

Il faut supposer pour ce modèle que la taille des volumes élémentaires reste suffisamment grande devant celle des défauts pour pouvoir appliquer le modèle de Weibull (1.3). Cette hypothèse a été vérifiée pour la matrice de SiC élaborée par le procédé CVI grâce à des essais de fragmentation réalisés sous microscope

électronique à balayage [Leb96]. Ceci a d'ailleurs permis de déterminer les paramètres statistiques de la matrice à partir des ruptures successives [Leb96].

- **Le modèle de population de défauts** est une approche plus fondamentale. Il est fondé sur la distribution des défauts critiques de la matrice. La simulation du comportement consiste à diviser la matrice en volumes élémentaires comme dans le modèle précédent, et à répartir une population de défauts de manière aléatoire parmi ces volumes (Fig.1.3). A chaque défaut, on peut associer une contrainte locale de rupture grâce à la mécanique linéaire de la rupture. Ainsi lorsque les défauts sont modélisés par des fissures initiales de longueur $2a$, perpendiculaires à la direction de chargement, et si on suppose par ailleurs que la taille des défauts est petite devant celle de la structure, alors la relation taille de défaut/contrainte est donnée par : $2a = 1/\pi (K_c/\sigma)^2$.

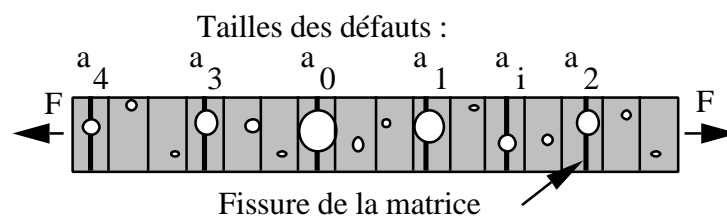


Fig.1.3 Modèle de population de défauts critiques.

Ensuite pour un niveau de charge F donné, les volumes qui présentent une contrainte appliquée plus grande que leur contrainte à rupture, se fissurent. Cette approche permet de déterminer la fonction de distribution de la population de défauts qui est responsable de la fragmentation en ajustant le résultat du calcul de la courbe d'endommagement avec la courbe expérimentale. La distribution de défauts est décrite par une fonction Beta $f_{\alpha,\beta}(x)$ à deux paramètres α et β . x est la taille adimensionnée des défauts : $x = a/a_w$, avec a_w la taille moyenne des défauts initiaux.

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.4)$$

La distribution des contraintes de rupture $g_{\alpha,\beta}(y)$ (y contrainte adimensionnée : $y = \sigma/\sigma_w$, avec σ_w contrainte de référence associé à a_w) s'effectue avec un changement de variable simple : $y = 1/\sqrt{x}$. σ_w a été choisie comme la contrainte moyenne du modèle de Weibull du défaut le plus gros initial, calculée à l'aide de l'équation (1.2).

$$g_{\alpha,\beta}(y) = 2 \cdot \frac{f_{\alpha,\beta}(1/y^2)}{y^3} \quad 1 \leq y \quad (1.5)$$

1.1.c Résultats de l'analyse des essais sur minicomposites

Les simulations et l'analyse des populations de défauts ont été réalisées sur deux lots de minicomposites (B et C) testés par Nathalie Lissart [Lis97] présentant des fractions volumiques de fibres de 40% \pm 5 et 21% \pm 3 respectivement. Les calculs ont été effectués pour deux minicomposites #B07 et #C01 de ces lots ayant des fractions volumiques de fibres de 35% et 19% respectivement.

Les propriétés élastiques des fibres sont : $E_f = 180$ GPa, $\nu_f = 0,12$ [Gui94]. Pour la matrice, les valeurs communément utilisées sont sous l'hypothèse de matériau isotrope : $E_m = 350$ GPa et $\nu_m = 0,20$ [Bob96]. Les paramètres de Weibull de la matrice ainsi que la contrainte de cisaillement interfacial τ pour les deux lots de minicomposites B et C sont respectivement : ($m = 6$, $\sigma_o = 10,5$ MPa, pour $V_o = 1\text{m}^3$, $\tau = 80$ MPa) et ($m = 5$, $\sigma_o = 4,3$ MPa, pour $V_o = 1\text{m}^3$, $\tau = 40$ MPa) [Lis97].

Les courbes de comportement sont présentées aux Fig.1.4 et Fig.1.5. Le modèle fondé sur la distribution des défauts critiques a permis d'identifier correctement les populations de défauts dans les deux minicomposites. Les valeurs de α et β ont été estimées par itérations afin d'approcher au mieux les courbes de comportement. Les courbes ainsi calculées sont en excellent accord avec les comportements déterminés expérimentalement, ce qui indique la pertinence de ces paramètres α et β .

Les deux autres modèles utilisent les paramètres ci-dessus. La différence entre les simulations et les résultats expérimentaux peut être attribuée à l'incertitude associée aux paramètres statistiques. Il faut savoir que les paramètres moyens, caractéristiques de l'ensemble des minicomposites d'un lot donné ont été employés pour les deux autres modèles. Ils peuvent différer de ceux relatifs à #B07 et #C01. Par contre le premier calcul montre la qualité de l'ajustement puisque les paramètres ont été déterminés pour #B07 et #C01 sur ces propres courbes. En fait cela montre que l'on peut identifier des valeurs satisfaisantes de α et β . Par contre les deux autres méthodes nécessitent un lot de minicomposites.

Aux Fig.1.6 et Fig.1.7, les distributions des défauts critiques des deux minicomposites ont été représentées. Les défauts sont caractérisés par la contrainte σ définie précédemment par ($\sigma_w y$). Les populations correspondant aux deux premiers modèles sont déduites de l'ensemble des contraintes de fissuration déterminées avec chaque modèle au cours de la fragmentation de la matrice. On peut donc tracer l'histogramme correspondant. On remarque ainsi que toutes les distributions de défauts sont proches. Chaque modèle de fragmentation peut donc être caractérisé par sa population de défauts propre. Modifier les paramètres des calculs revient à déplacer et transformer cette population.

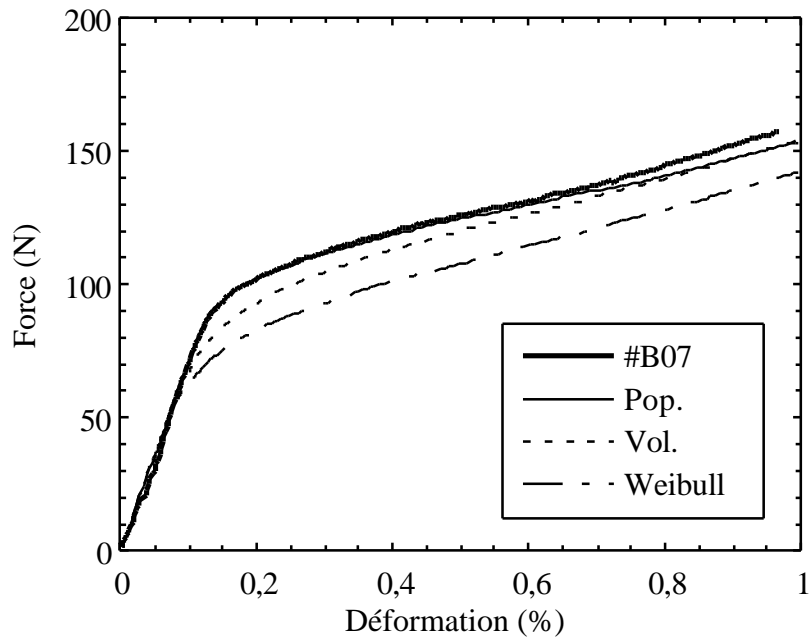


Fig.1.4 Simulation de la courbe de comportement d'un minicomposite SiC/SiC (essai #B07, $V_f = 35\%$).

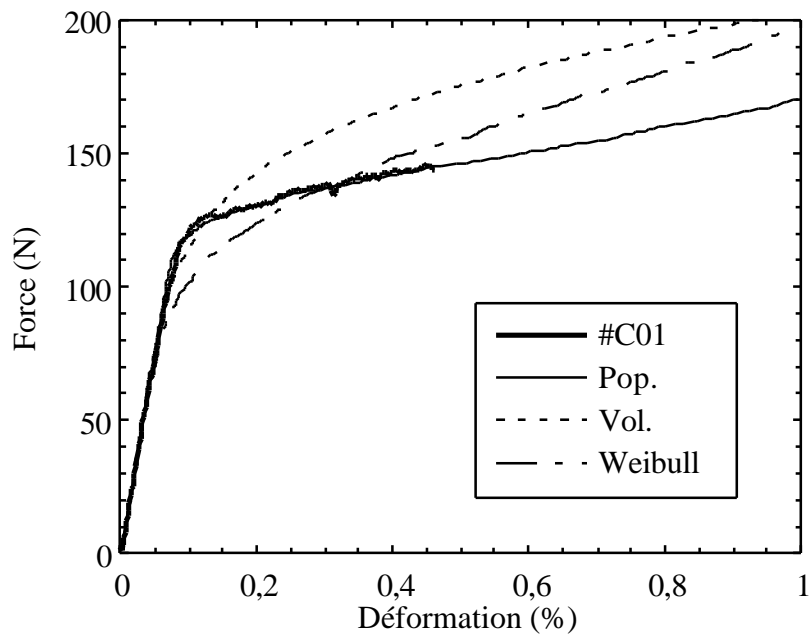


Fig.1.5 Simulation de la courbe de comportement d'un minicomposite SiC/SiC (essai #C01, $V_f = 19\%$).

Pop. : Modèle en population de défauts.
 Vol. : Modèle des volumes indépendants.
 Weibull : Modèle itératif de Weibull.

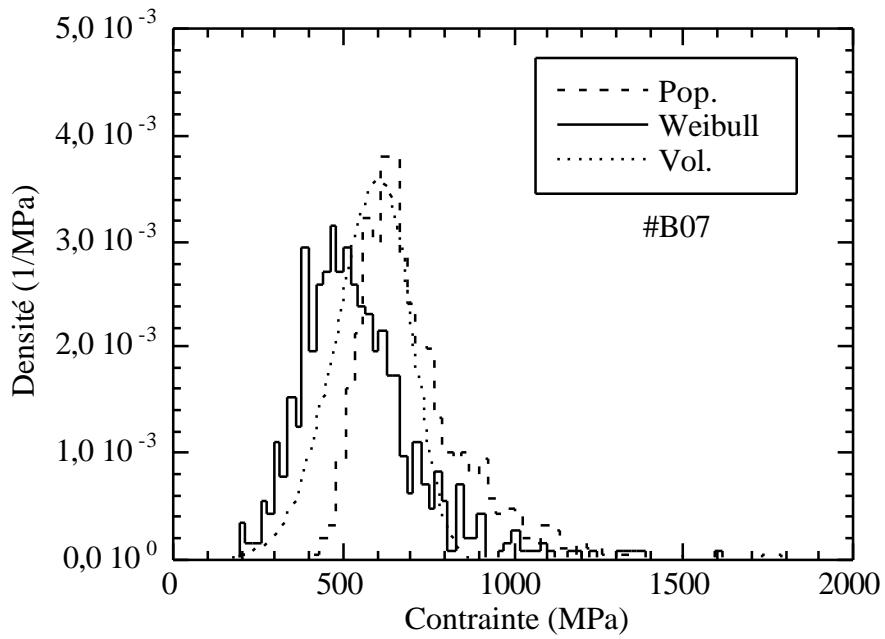


Fig.1.6 Comparaison des différentes distributions de défauts obtenues pour le minicomposite #B07.

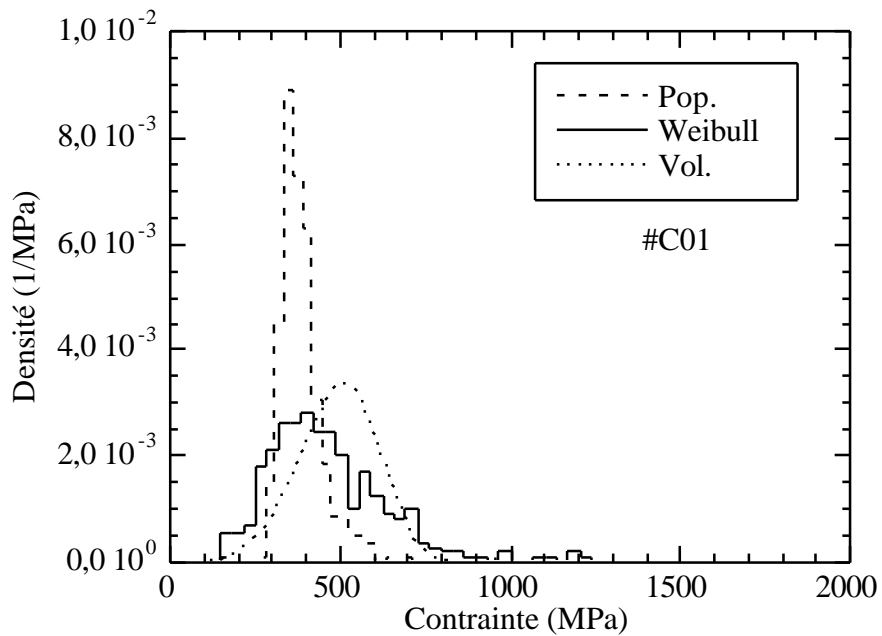


Fig.1.7 Comparaison des différentes distributions de défauts obtenues pour le minicomposite #C01.

Pop. : Modèle en population de défauts.
 Vol. : Modèle des volumes indépendants.
 Weibull : Modèle itératif de Weibull.

On observe par ailleurs que les défauts présents au cours de la fragmentation du minicomposite #C01 (Valeur moyenne $\sigma_{\#C01} = 390$ MPa) sont plus sévères que ceux du minicomposite #B07 (Valeur moyenne $\sigma_{\#B07} = 680$ MPa) bien que la matrice soit de même nature (SiC élaboré par CVI). Un tel résultat n'est a priori pas surprenant car il traduit un effet de volume lié au fait que le volume de matrice associé à chaque défaut dans le minicomposite #C01 est plus important que celui associé à chaque défaut dans le minicomposite #B07. Ce volume peut être évalué en considérant le volume matriciel pour une distance moyenne entre les fissures, ce qui donne 0,020 mm³ pour le minicomposite #B07 et 0,125 mm³ pour le minicomposite #C01.

On constate néanmoins que l'analyse des premières fissures réalisée par Nathalie Lissart [Lis97] montre une grande incertitude par rapport aux paramètres de Weibull identifiés pour chaque lot (m et σ_0 très différents), ce qui signifie que la population de défauts n'est pas la même pour chaque lot, même en tenant compte du volume. On peut certes argumenter que les valeurs numériques des paramètres sont toujours légèrement erronées, et que les hypothèses utilisées sont trop fortes. Néanmoins, il est possible de proposer une alternative aux raisonnements précédents.

En effet, si l'on observe la microstructure de la matrice SiC à l'aide d'un microscope, on constate que cette microstructure n'est pas homogène. Cette texture résulte du procédé d'élaboration (Dépôt CVI) qui conduit à un carbure de silicium cristallisé qui se présente selon plusieurs arrangements nommés polytypes [Vig95], et plusieurs couches de matrice qui présentent des microstructures différentes. La matrice SiC se développe selon un principe de germination et croissance, et donc génère une succession de grains coniques dont la taille moyenne augmente avec le dépôt matriciel [Lob89] (Fig1.8).

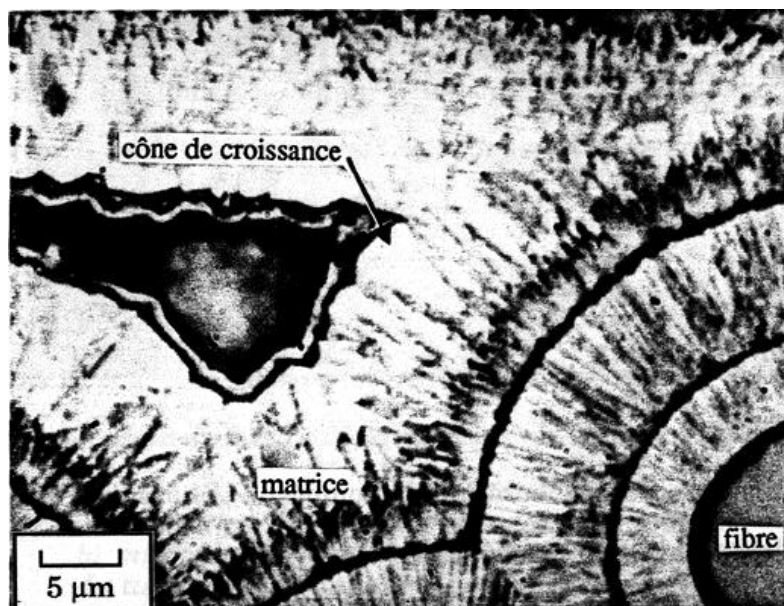


Fig.1.8 Cones de croissance d'une surface de composite SiC/SiC observés au microscope optique, en fonction des différentes couches [Gui94].

On peut donc supposer qu'il y a une croissance des défauts au cours de la densification en rapport avec la croissance des cones. Ceci peut se comparer à un dessin de Escher (Fig.1.9) qui représente un pavage du plan avec des salamandres de plus en plus grandes, qui peuvent être assimilées à des défauts de plus en plus gros. On comprend alors que l'effet de volume sera beaucoup plus accentué que l'effet d'échelle prévu par le modèle classique de Weibull.



Fig.1.9 Dessin de M.C. Escher, Xylogravure provenant de la fondation De Roos : Le remplissage périodique d'un plan (1958).

On supposera donc que plus le dépôt de matrice est important plus la taille ou la sévérité des défauts est grande. Pour mettre en évidence un tel phénomène, il est possible d'utiliser une approche phénoménologique basée sur cette croissance de sévérité, indépendamment de l'origine physique évoquée précédemment.

Nous supposerons ainsi que pour un volume V de matrice associé à chaque défaut pour un minicomposite donné, le plus gros défaut de ce volume n'est pas présent dans un autre minicomposite de fraction volumique de fibre plus important, présentant un volume $V/2$ de matrice associé à chaque défaut. Ceci est une hypothèse forte, mais nous permet de retrouver les hypothèses du calcul des ruptures successives développé par Das Neves [Das96] (**Annexe 1**), à savoir que la population de contraintes à rupture des volumes $V/2$ est déduite de la population des contraintes à rupture des volumes V par suppression du plus gros défauts, i.e. de la plus petite contrainte à rupture. Ainsi de suite, on considère que la densité de la population des contraintes à rupture des volumes $V/i+1$ est la densité de la population des contraintes à rupture ($f_{i+1}(\sigma)$) déduite par suppression des i plus petites contraintes, i.e des i plus gros défauts (Fig.1.10). D'après Das Neves [Das96], la fonction $f_{i+1}(\sigma)$ de densité des défauts associée au volume $V/i+1$ est :

$$f_{i+1}(\sigma) = L'_1(\sigma) \frac{(-\ln L_1(\sigma))^i}{i!} \quad (1.6)$$

avec $L_1'(\sigma) = f_1(\sigma)$ la fonction de densité des défauts associé aux volumes V et $L_1(\sigma)$ la fonction de répartition correspondante.

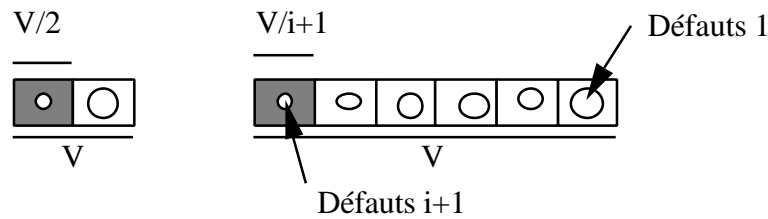


Fig.1.10 Sélection des défauts en fonction du volume.

Ainsi, si $f_1(\sigma)$ est la fonction de densité des défauts présents à l'essai #C01, la fonction de densité des défauts présents à l'essai #B07 est comprise entre $f_6(\sigma)$ et $f_7(\sigma)$ d'après le rapport des volumes matricielles correspondant à chaque défaut pour les deux essais. Sur la Fig.1.11, les densités de population de défauts sont représentées montrant une excellente estimation de la densité des défauts du minicomposite #B07.

On démontre ainsi que la population des défauts est directement influencée par le volume du dépôt matriciel. Ceci correspond donc à un effet de volume beaucoup plus important que celui prédit par une approche de type Weibull, à l'échelle du volume matriciel du minicomposite. En effet, ceci ne remet pas en cause une approche de type Weibull pour la fragmentation matricielle, puisque pour une population donnée de défauts, celle-ci reste toujours valable à condition de vérifier toujours les hypothèses du modèle utilisé.

Il est alors possible de faire varier les fractions volumiques de matrice et de fibres, et ainsi obtenir la dispersion des essais observée pour chaque lot. A la Fig.1.12, nous avons représenté les simulations de minicomposites de fractions volumiques de fibres comprises entre 30% et 45% du lot B, en utilisant le modèle en population de défauts. Dans ce cas on suppose que pour des fractions volumiques proches, la population de défauts est peut perturbée par l'effet d'échelle. Les calculs sont alors réalisés avec les mêmes paramètres, exceptées les fractions volumiques. On constate alors le bon accord entre les simulations et les essais expérimentaux (Fig.1.12). Il apparaît alors de manière évidente que la fraction volumique des fibres est une source importante de dispersion du comportement des minicomposites.

L'intérêt de l'approche proposée, à savoir l'utilisation de la population de défauts critiques, est de pouvoir caractériser la rupture locale de la matrice dans une approche basée sur les propriétés des constituants. Il est alors possible de simuler des composites unidirectionnels avec des paramètres différents pour comprendre leur comportement. Le passage au composite 2D tissé est bien entendu une conséquence inévitable.

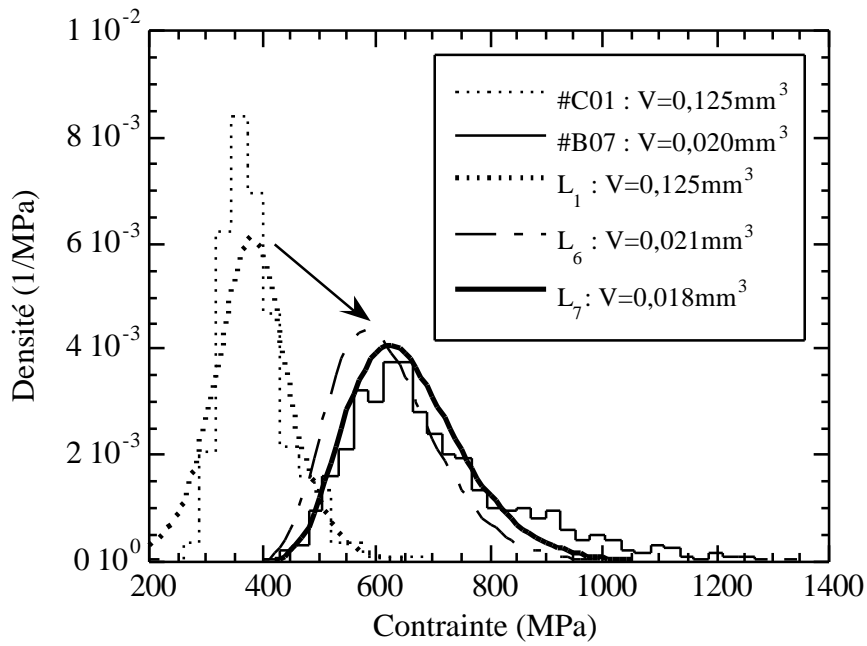


Fig.1.11 Calcul de la fonction de densité de fissure du lot B à partir de celle du lot C.

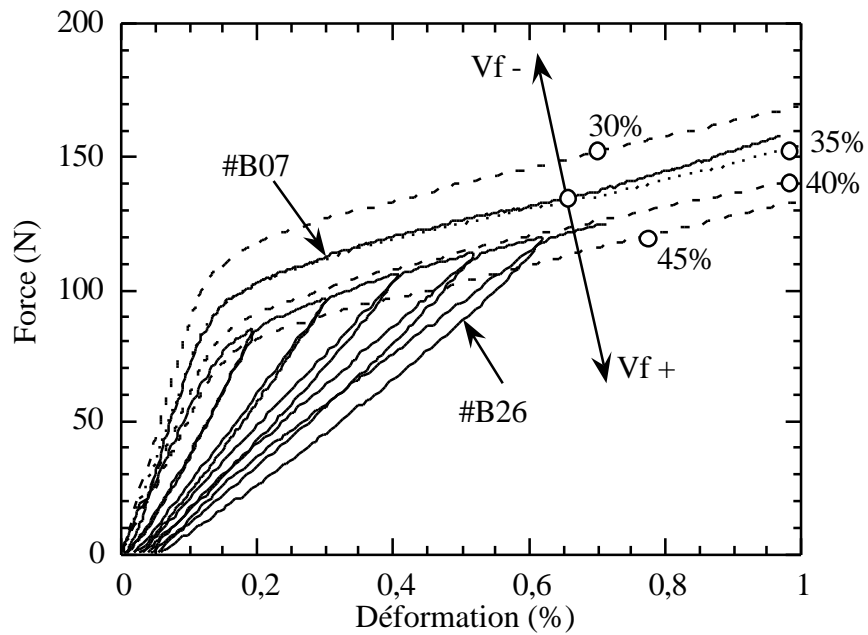


Fig.1.12 Simulation de l'effet de V_f sur le comportement du lot B, et comparaison par rapport à un autre essai de ce lot.

1.2. Composite bidirectionnel tissé (*Partie II-2*)

Dans la suite logique du composite unidirectionnel, le comportement du composite 2D tissé a été étudié en utilisant une approche semblable. Cette fois-ci, il faut tenir compte de la présence de macropores et des fils transversaux au sein du composite, qui constituent d'autres sources de fissuration matricielle.

1.2.a Fragmentation matricielle en traction uniaxiale

Brièvement, rappelons que le composite SiC/SiC 2D tissé étudié est formé d'un empilement de couches de tissu composées de fils de 500 filaments de SiC (Nicalon NLM 202) et infiltré par dépôt en phase vapeur d'une matrice SiC. Une interphase de pyrocarbone permet de lier la matrice aux fibres. Les différentes fractions volumiques des constituants sont résumées dans le tableau suivant :

	V_f (%)	V_m (%)	V_p (%)
Composite	35	50	15
Fil	40	55	5

Tab.1.1 Fractions volumiques des constituants au sein du composite (V_f : volume total de fibres; V_m : matrice; V_p : porosité)

Les mécanismes contrôlant la fragmentation matricielle responsables de la non-linéarité du comportement, en traction dans la direction des fils, ont été bien identifiés [Gui94 et Aub92], et peuvent se résumer en trois familles de fissures :

- La 1^{ère} famille apparaît aux angles des macropores entre les strates de tissu, pour une déformation comprise entre 0,03% et 0,10%.

- la 2^{ème} famille de fissures se forme dans les fils transversaux entre les fibres, un peu après le début de la fissuration de la 1^{ère} famille jusqu'à une déformation environ égale à 0,20%.

- La 3^{ème} famille de fissures est amorcée par les défauts matriciels des fils longitudinaux, et débute à une déformation de 0,20% jusqu'à la saturation du composite vers 0,80%. Il s'agit de fissures perpendiculaires à la direction des fibres dans les fils et localisées dans la matrice des fils longitudinaux.

Fondamentalement, la troisième famille de défauts correspond à la population de défauts qui a été étudiée dans le cas des minicomposites. Néanmoins, les minicomposites étudiés présentaient une fraction volumique de fibres de 40% et 21% pour les deux lots B et C respectivement. C'est pourquoi il a été choisi une distribution de défauts intermédiaire entre ces deux distributions (Fig.1.13). Ceci permet de tenir compte des variations locales de densité. Pour cela, on utilise une fonction Beta $f_{a_l, b_l}(y)$ de type 2 en ajustant les paramètres de cette fonction (a_l, b_l) par rapport à la moyenne et l'écart type de la distribution recherchée. Contrairement à la

fonction Beta de type 1 (utilisé pour le minicomposite), on travaille ainsi directement en population de contraintes critiques sans utiliser de changement de variable. Les calculs sont néanmoins effectués en considérant une contrainte adimensionnée par rapport à une contrainte de référence σ_w , correspondant à la contrainte moyenne de la populations des plus gros défauts présents dans le composite (Défauts de macropore) : $y = \sigma/\sigma_w$ avec $\sigma_w = 190$ MPa. Ceci permet d'éviter le problème de dépassement numérique de la machine, lié au calcul de la fonction Gamma $\Gamma()$.

$$f_{a_1, b_1}(y) = \frac{\Gamma(a_1 + b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)} \cdot \frac{y^{a_1-1}}{(1+y)^{a_1+b_1}} \quad 0 \leq y \leq +\infty \quad (1.7)$$

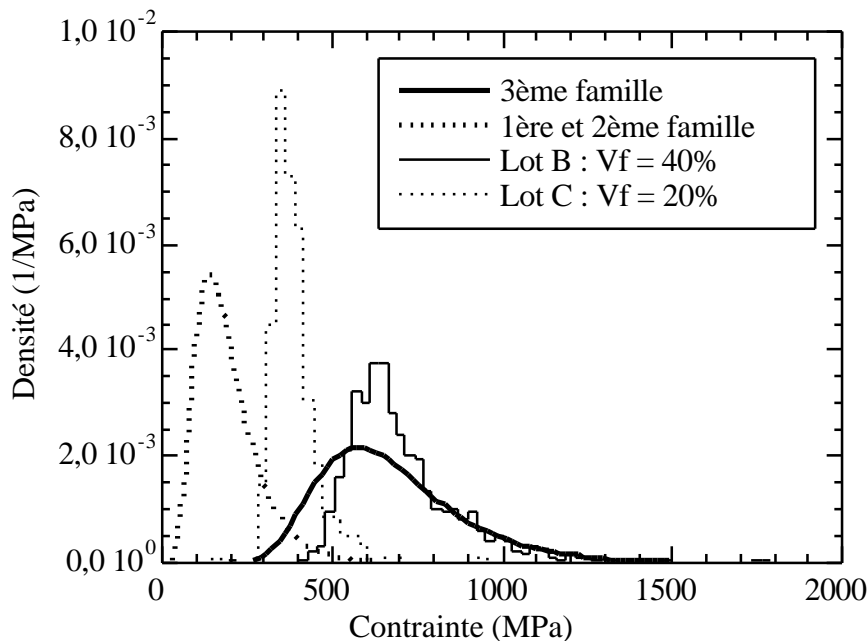


Fig.1.13 Populations de défauts des trois familles de fissures impliquées dans la fragmentation matricielle du composite 2D SiC/SiC, et comparaison avec les familles des Lots B et C des minicomposites.

De la même manière il est alors possible de modéliser les deux premières familles de défauts du composite. Cette fois-ci, l'identification de la population de défauts est basée sur les données expérimentales de fissuration établies par Laurent Guillaumat [Gui94]. On peut néanmoins utiliser les calculs de fissurations réalisés aussi par Laurent Guillaumat [Gui94] pour définir le processus d'endommagement d'une cellule élémentaire de composite représentant un type de macropore. On constate alors que les deux premières familles de fissures apparaissent certes l'une après l'autre mais présentent aussi un certain recoupement. C'est pourquoi une seule fonction Beta $f_{a_1, b_1}(y)$ de type 2 a été retenue pour décrire ces deux premières familles (Fig.1.13). La moyenne des contraintes à rupture de ces deux premières familles a été retenue comme valeur de référence. Finalement les moyennes et les écarts types des familles de défauts du composite sont :

$\sigma_w = 190 \text{ MPa}$	Lot C	Lot B	1ère & 2ème familles	3ème famille
Moyenne (MPa)	390	680	190	630
Écart type (MPa)	60	120	80	200

Tab.1.2 Synthèse des différentes populations de défauts.

1.2.b Simulation du comportement mécanique du 2D SiC/SiC

Le composite 2D tissé a été modélisé en considérant six volumes représentatifs du matériau, Fig.1.14, qui correspondent à des demi-oscillations du tissage. Ces six cellules forment un bloc de composite de longueur 1,5 mm, de hauteur 0,9 mm et d'épaisseur 1,5 mm.

Les calculs ont été effectués par éléments finis en considérant un calcul en contrainte plane sur un maillage de 600 éléments. Le maillage est formé de trois fils longitudinaux et de trois couches de fils transversaux découpés chacun en 100 éléments (Fig.1.14). Un élément représente une portion de $15 \mu\text{m}$ ($2L_e$) de composite qui correspond approximativement à la distance entre les fissures quand la saturation est atteinte ($10\text{-}20 \mu\text{m}$). Cette distance peut être reliée à une décohésion fibre-matrice de $15 \mu\text{m}$ ($2L_d$). Sur ce maillage sont réparties les différentes populations de défauts (matrice et macropores) qui donnent les niveaux de rupture des éléments du maillage. Cette répartition est effectuée de manière aléatoire comme dans l'approche du composite unidirectionnel, en tenant compte néanmoins de la présence d'ensembles d'éléments formant des macropores. Les conditions aux limites aux bords du maillage traduisent le fait que la section droite du composite reste droite au cours du chargement. Enfin, étant donné que les résultats seront comparé à des essais sur éprouvette d'épaisseur 3 mm seulement (3 fois la cellule), il semble actuellement peu important d'utiliser des méthodes d'homogénéisation plus élaborées pour définir des conditions aux limites équivalentes d'un milieu extérieur infini. Le calcul sera légèrement influencé par les effets de bords tout comme les mesures expérimentales de déformations.

La courbe de comportement est alors obtenue en déterminant pour une force appliquée aux six cellules (1 fil transverse + 1 macropore + 1 fil longitudinal), la déformation moyenne de la face de droite. L'algorithme du calcul est le même que celui utilisé pour les composites unidirectionnels. A chaque itération, la fissuration des fils longitudinaux ou transversaux est appliquée aux éléments du maillage qui sont soumis à une contrainte locale supérieure à la contrainte locale de rupture. Le module d'Young de l'élément sain est alors remplacé par le module de l'élément fissuré (calculé par homogénéisation, **Partie II-2**) en fonction de sa position (fil longitudinal ou transversal). Dans cette simulation, il n'y a pas de critère de rupture ultime. Le calcul a été arrêté à une déformation de 1%.

Comme on peut le constater sur la Fig.1.14, les ondulations ont été remplacées par des composites unidirectionnels droits. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas du SiC/SiC, car l'angle des ondulations est faible ($10^\circ\text{-}15^\circ$), ce qui

implique un champ de contrainte homogène [Gui94 et Car96]. La simulation du composite 2D tissé revient donc à considérer un composite équivalent proche d'un stratifié ($0^\circ/90^\circ$) dans les axes.

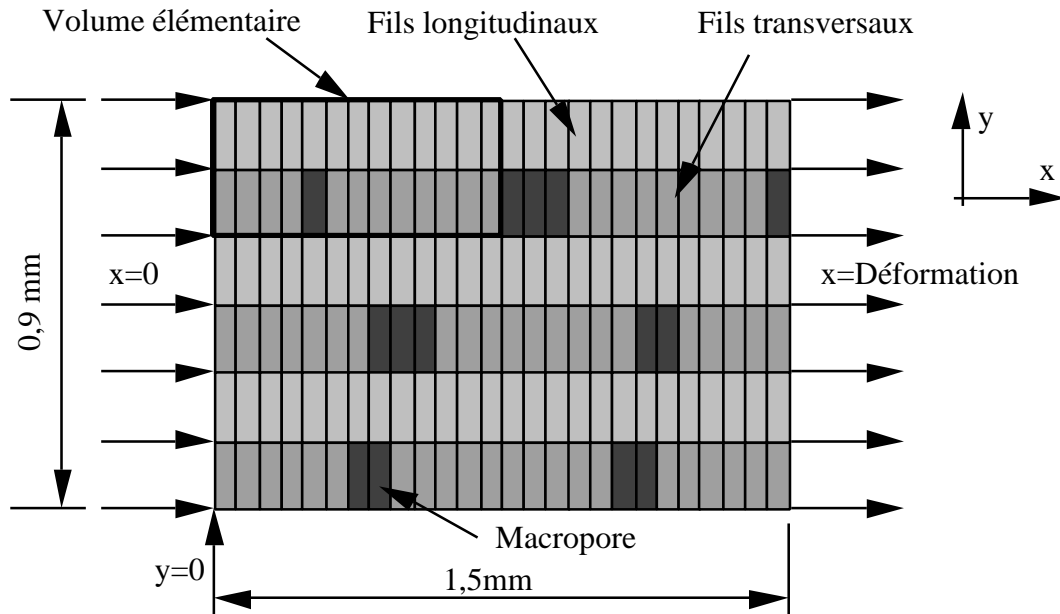


Fig.1.14 Maillage utilisé pour le calcul par éléments finis avec les fils transversaux et longitudinaux.

Pour les éléments sains (sans fissure) des fils longitudinaux, le module d'Young et le coefficient de Poisson sont calculés par la loi des mélanges. Pour les fils transversaux, les formules classiques de l'homogénéisation sont appliquées [Ber92]. En ce qui concerne les cellules de fils longitudinaux endommagées, l'homogénéisation est effectuée en tenant compte d'un champ des contraintes triangulaire supporté par les fibres au droit d'une fissure matricielle sur une longueur de décohésion $2l_d$. Pour les fils transversaux, on considère que l'endommagement est catastrophique, et que le module résultant chute de 90%.

1.2.c Résultats et perspectives

Différentes courbes de comportement, correspondant à différentes fractions volumiques de fibres, sont représentées à la Fig.1.16. Il apparaît ainsi un bon accord entre les essais et les calculs pour une fraction volumique de 35%, et un module initial de l'ordre de 230 GPa. On peut constater, que le comportement du matériau est assez bien reproduit à l'aide des six volumes élémentaires utilisés, ce qui indique que le volume sollicité est plus grand que le volume représentatif du matériau. D'autre part ceci est confirmé par la similitude des résultats obtenus pour plusieurs simulations correspondant à des répartitions aléatoires de défauts au sein du maillage.

Pour les autres fractions volumiques de fibres ($V_f = 20\%$ et 45%), les populations de défauts ont été choisies en faisant varier les paramètres des fonctions

Beta. Pour cela, on suppose que pour un dépôt matriciel important ($V_f = 20\%$) les macropores et la microporosité sont réduits, ce qui se traduit par des premières et deuxièmes familles de défauts moins sévères, donc déplacées vers la droite (Fig.1.15). A l'inverse, la troisième famille de défauts est plus critique dans ce cas puisqu'elle correspond à la famille identifiée pour le lot C (V_f plus petit), et donc elle est déplacée vers la gauche. Pour une fraction volumique de fibres de 45 %, les tendances sont inversées, à savoir que les premières et deuxièmes familles de défauts sont plus critiques que pour $V_f = 35\%$, et que la troisième famille de défauts est moins critique, puisqu'elle correspond à celle du lot B (Fig.1.15). On a supposé par ailleurs que la longueur de décohesion, donc la longueur des cellules était la même.

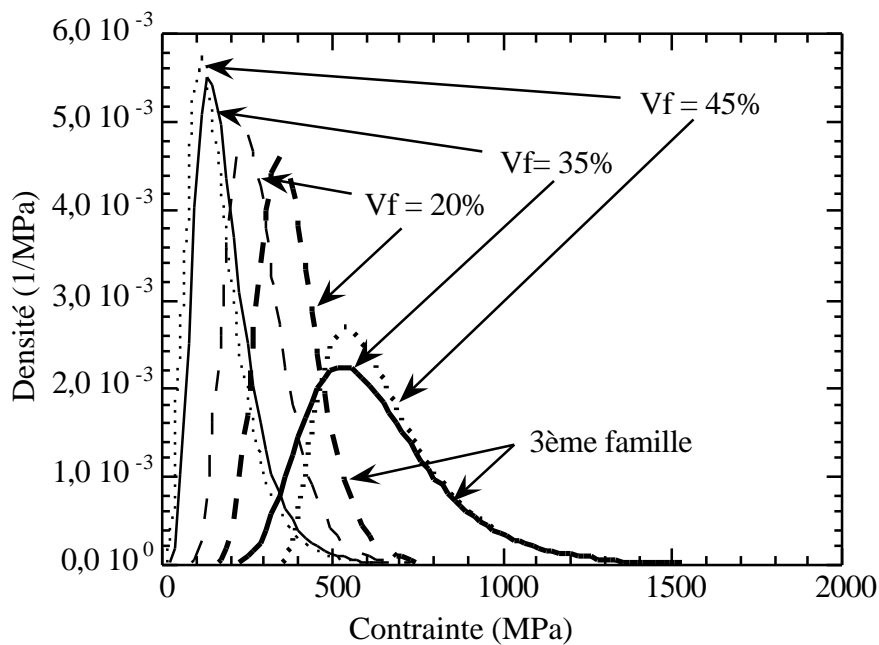


Fig.1.15 Populations de défauts pour différentes fractions volumiques de fibres.

Ainsi, on peut observer à la Fig.1.16, l'évolution des courbes d'endommagement pour différentes fractions volumiques de fibres. On constate alors que l'augmentation du dépôt matriciel ($V_f = 20\%$) augmente certes le module à l'origine (290 GPa), mais surtout provoque un endommagement brutal du composite. À l'inverse un faible dépôt matriciel diminue le module à l'origine (195 GPa) mais provoque surtout un endommagement réparti sur l'ensemble de la courbe de déformation.

De telles tendances ont été vérifiées sur des composites présentant une forte dispersion de densité (**Partie II-2**), et rejoignent les résultats de la simulation du comportement d'un matériau SiC/SiC fictif qui ne présenterait pas de macropore, c'est à dire parfaitement dense [Lam95b]. Le rôle de la première et de la deuxième famille de défauts est donc capital pour le comportement du composite. Il apparaît alors évident que l'amélioration du composite passe par une amélioration de ces deux premières familles. Pour cela on peut imaginer que les propriétés transverses de la liaison fibre-matrice doivent être renforcées et que la taille des macropores doit être diminuée. On remarquera néanmoins que dans les conditions de dépôt actuelles

($V_f = 35\%$), l'optimum du comportement est assez bien approché puisque le comportement de la courbe est au dessus des deux autres.

L'approche utilisée permet donc le calcul du comportement mécanique en fonction des propriétés des constituants dans les axes du matériau. La limite actuelle de cette approche est bien entendu le passage à des calculs hors axes et en trois dimensions. En effet, bien que la simulation de la fragmentation matricielle ne pose pas de problème hors axe, le passage micro-macro de l'effet de l'endommagement (fissuration) est beaucoup plus délicat. Il est malheureusement très difficile de pouvoir quantifier de manière analytique l'effet d'une fissure sur la loi de comportement local (Module d'Young ...) hors des axes des fils par exemple.

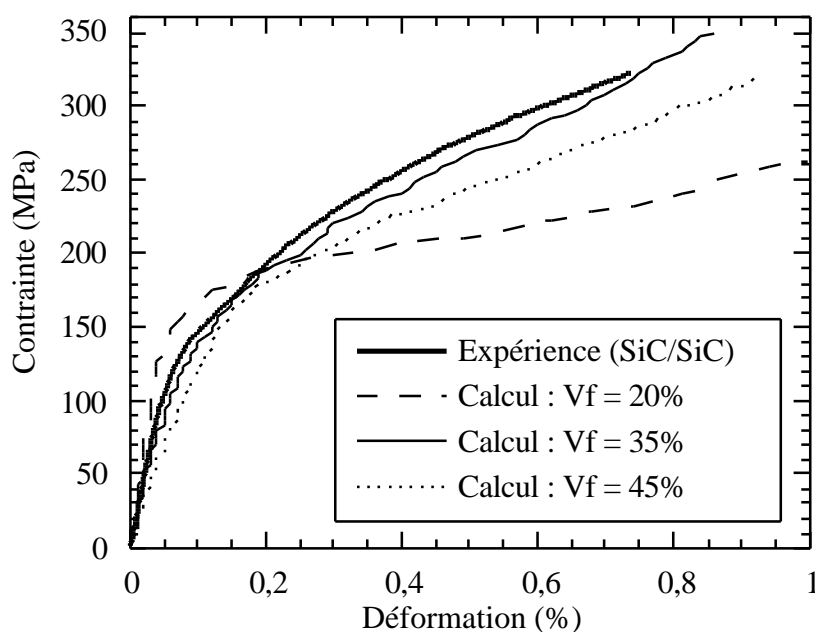


Fig.1.16 Simulations du comportement avec différentes fractions volumiques de fibres, et comparaison avec la courbe expérimentale du composite SiC/SiC.

En effet les modèles d'homogénéisation ne proposent que des estimations des lois de comportement élastiques pour des matériaux sans endommagement. L'influence microscopique d'une fissure sur le module d'Young transverse, et le module de cisaillement sont pour l'instant très difficiles à définir. En ce qui concerne les coefficients de Poisson, la difficulté est encore plus grande. Ainsi dans un champ multiaxial macroscopique, le calcul du champ des contraintes au niveau des fibres et de la matrice est actuellement impossible pour des matériaux composites. Une solution intermédiaire consiste à utiliser des propriétés homogènes isotropes pour les fils du composite par exemple [Lam95b]. Il n'en demeure pas moins que les avantages de l'approche micromécanique sont nombreux. Cette approche permet en effet de pouvoir localiser l'endommagement au sein de la structure, et de pouvoir ainsi faire intervenir des interactions entre les endommagements entre cellules par exemple. De tels mécanismes ne peuvent pas être retranscrits par une approche macroscopique. Il est possible de tenir compte aussi des variations des fractions volumiques des constituants au sein du matériau. Il faut noter par ailleurs, que le

passage à des calculs thermomécaniques est a priori possible en introduisant dans le calcul d'homogénéisation des équations d'oxydation.

1.3 Analyse générale

La méthode utilisée est d'autre part applicable a priori à n'importe quel composite présentant un endommagement provoqué par la fragmentation matricielle (C/C, C/SiC ...). Pour cela il faut tout d'abord définir la structure microscopique du composite en déterminant la répartition des fils longitudinaux et transversaux par exemple, ainsi que les propriétés élastiques et statistiques des constituants et les différentes fractions volumiques. Ceci nécessite aussi de prendre en compte d'autres effets propres à la nature du composite, tels que l'embuvage, l'aiguilletage ou la forme du tissage. Après ce travail de caractérisation, il faut évaluer les populations de défauts qui interviennent au cours de l'endommagement. Pour cela on dispose de plusieurs moyens :

- Le premier consiste à suivre la fissuration matricielle au cours du chargement et à tracer les histogrammes des contraintes d'apparition de fissure pour chaque famille de défauts [Gui94].

- D'autre part ces résultats peuvent être obtenus par calculs éléments finis en modélisant une cellule représentative du matériau, ce qui a été fait par Guillaumat [Gui94] et Thommeret [Lam95b] dans le cadre de l'étude du SiC/SiC. La démarche consiste à mailler une cellule du matériau (fil longitudinal, transversal et macropore), puis à calculer pour un champ des contraintes appliqué à la cellule, les zones d'apparition de fissure et leur évolution. On en déduit alors le processus de fissuration. Cette méthode reste limitée néanmoins à l'étude de cellules simples. On suppose en générale que les résultats restent vrai pour d'autres cellules.

- Un troisième moyen d'investigation peut être obtenu en étudiant des minicomposites, ce qui permet de caractériser la matrice en évaluant ces propriétés statistiques, et de définir directement certaines familles de défauts.

Une fois cette étape de caractérisation effectuée, on peut simuler le comportement mécanique en utilisant un calcul par éléments finis sur un volume représentatif du matériau (Fig.1.17). Il suffit de répartir les différentes populations de défauts parmi les éléments du maillage en fonction de la fissuration de la microstructure du matériau. La simulation consiste alors à fissurer les éléments du maillage en fonction des contraintes appliquées, et à introduire dans le calcul les valeurs des modules des matériaux sains et endommagés. On peut envisager éventuellement certains ajustements de paramètres pour corriger les approximations utilisées au cours de la démarche (homogénéisation des fils longitudinaux, phénomènes négligés ...). L'intérêt définitif de cette approche, est de pouvoir faire varier ensuite certains paramètres comme la densité, la structure, afin d'optimiser le comportement mécanique du composite et de simuler de nouveaux composites.

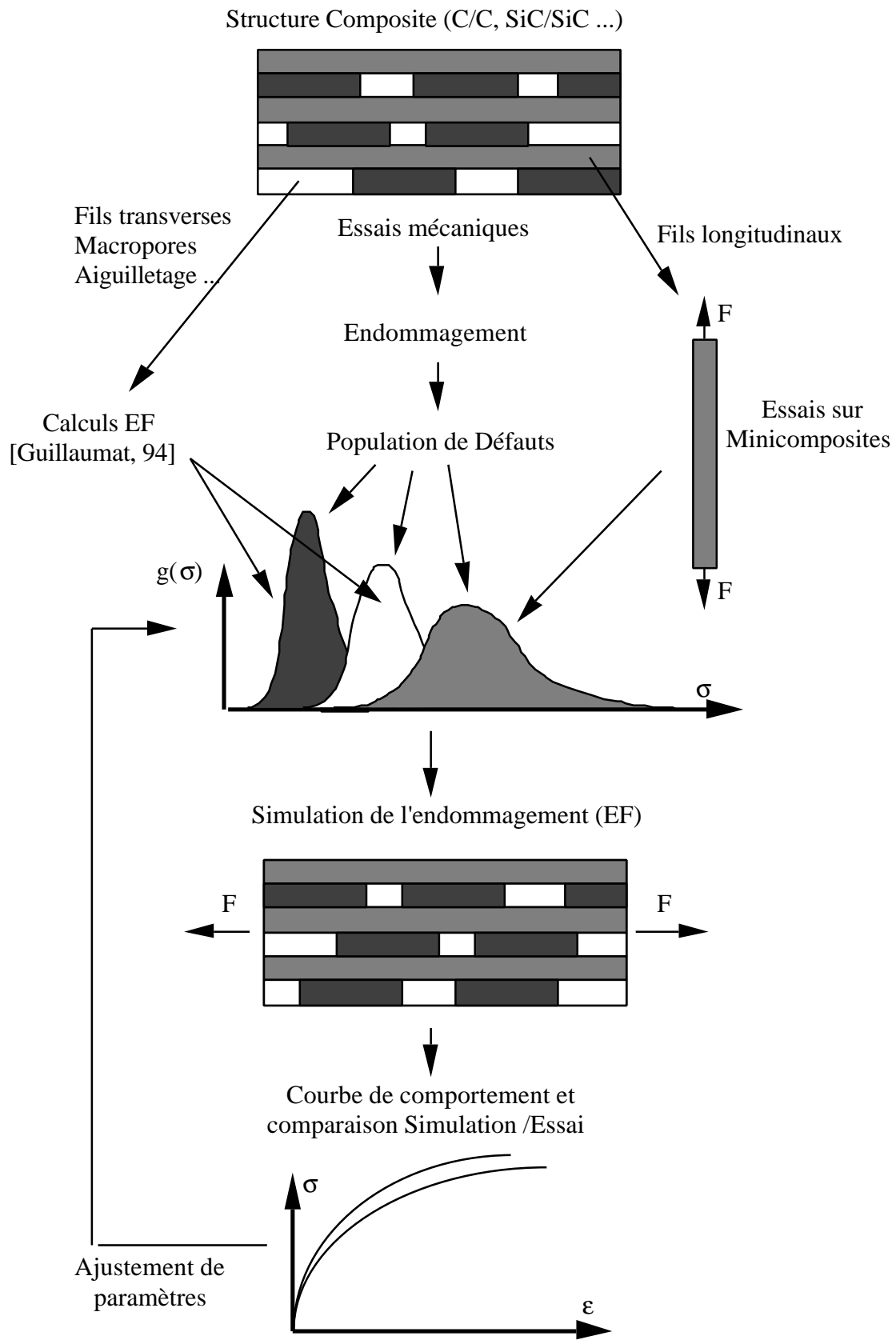


Fig.1.17 Plan d'étude générale d'un composite par l'approche micro-macro proposée.

2. Rupture

La rupture ultime du composite est dictée par les contraintes qui s'exercent sur les fibres, et dont la distribution peut être influencée par l'endommagement de la matrice. Elle dépend donc pour une grande part des propriétés des constituants, à savoir la matrice, les fibres et les interphases.

La figure 2.1 compare les distributions de contraintes à rupture ultime des fibres SiC, des fils bruts SiC (sans matrice), des minicomposites SiC/SiC (fils de fibres avec de la matrice) et des composites tissés bidirectionnels SiC/SiC. Les contraintes sont calculées à chaque fois sur la section totale (Section d'une fibre, d'un fil, des composites). Il apparaît une translation vers les faibles valeurs des distributions. La rupture du fil correspond à la rupture d'un certain pourcentage des fibres les plus faibles. Le composite unidirectionnel est plus faible que le fil, et le composite tissé correspond à la rupture d'un certain pourcentage de composites unidirectionnels les plus faibles.

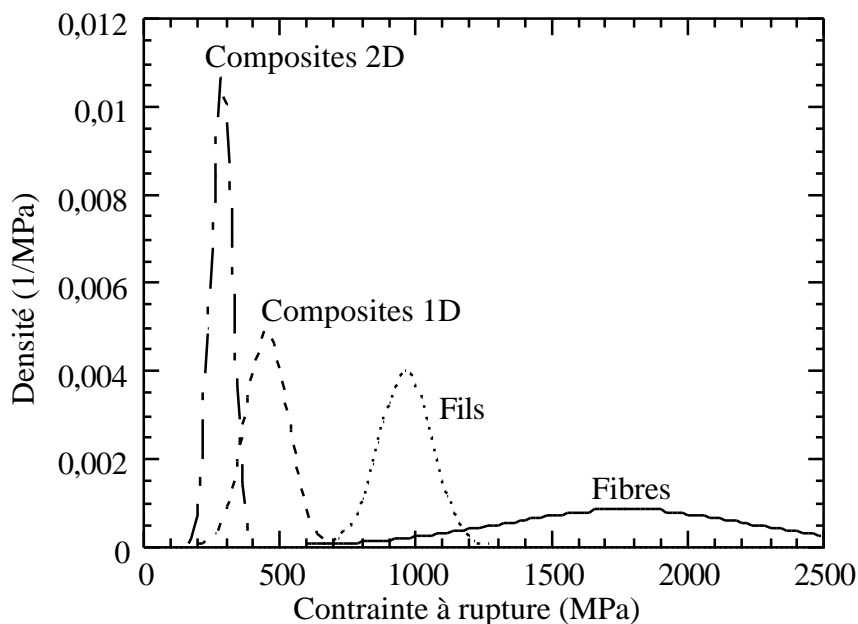


Fig.2.1 Fonctions de densité des contraintes à rupture des fibres SiC aux composites 2D tissés SiC/SiC (Données [Lis94] pour les fibres SiC NLM 202 et minicomposite SiC/SiC, et **(Partie II-4)** pour le composite 2D tissé SiC/SiC).

De nombreux auteurs [Bad82, Harl81, Boy97] ont ainsi essayé de relier la rupture des composites aux propriétés des fibres avec plus ou moins de succès surtout dans le cas des composites époxy de fibres de verre. En ce qui concerne les composites SiC/SiC, il a été démontré [Lis97] une étroite relation entre à la fois les propriétés à rupture des fibres, du fil brut, et du composite unidirectionnel. En ce qui concerne la rupture de certains composites 2D tissés, il faut citer les approches de

Baxevanakis et Munier [Bax94, Mun94] qui ont estimé la rupture à partir des propriétés des minicomposites à l'aide d'approches numériques.

D'une manière générale, il est possible d'obtenir des résultats satisfaisants concernant la valeur moyenne à rupture du composite à partir des propriétés des fibres, mais il est très difficile d'obtenir une estimation correcte de la dispersion. Il y a plusieurs raisons à cela. La première est la limitation d'une approche purement analytique pour traiter le problème de la rupture qui nécessite des approximations fortes. Les résultats [Harl81] donnent un comportement de type Weibull pour le composite, avec une estimation du module de Weibull du composite de l'ordre de $k \cdot m$, où k est le nombre critique de fibres voisines qui provoquent la rupture, et m est le module de Weibull de la fibre. En général, les calculs sont réalisés sous l'hypothèse de partage local de charge pour des géométries en général très simples (réseaux linéaires ou triangulaires). Ceci implique des valeurs de k peu fiables et peu caractéristiques du composite réel [Boy97]. Dans le cas d'un partage local plus élaboré, il faut recourir alors aux approches numériques. Néanmoins, une autre raison de l'échec de l'approche micro-macro, est alors la grande complexité des algorithmes qui impose une simplification de la géométrie étudiée et des relations entre constituants. Ceci implique en général des calculs numériques qui convergent vers des valeurs à rupture sans dispersion [Bax94]

Une première étape de ce travail a donc été d'approfondir l'approche numérique afin de mieux rendre compte de la dispersion à rupture des minicomposites à partir de leurs constituants. Pour cela, nous sommes revenus au cas du fil brut, qui est finalement assez représentatif de l'état du minicomposite au voisinage de la rupture, puisqu'alors, la matrice n'est pratiquement plus chargée du fait des décohésions le long des fibres. On démontre ainsi que l'un des paramètres les plus importants est le partage local des charges entre fibres voisines, qui est une source de dispersion importante, ce qu'on retrouve finalement pour les essais sur minicomposite. On montre par ailleurs que les minicomposites sont sensibles à l'effet d'échelle, ce qui a été vérifié expérimentalement ensuite.

En ce qui concerne le passage au composite 2D tissé, qui est l'objectif de cette approche micromécanique, les estimations des propriétés à rupture ont été beaucoup plus délicates. En effet, le premier problème qui apparaît est l'estimation de propriétés fiables concernant les minicomposites (contraintes, section, dispersion ...). D'autre part, un autre problème est la modélisation et la compréhension de l'assemblage de minicomposites au sein du composite.

Ainsi, face aux phénomènes physiques souvent complexes qui apparaissent au sein du composite (redistribution des efforts, rôle des fils transverses ...), il est apparu intéressant d'établir une classification des types de ruptures envisageables pour ces matériaux. Ceci nous a naturellement amené à une approche, cette fois-ci, macroscopique de la rupture, sans oublier de justifier les choix retenus par des considérations micromécaniques. La notion d'ergodicité du champ de contrainte critique a donc été introduite afin de comprendre dans certains cas l'absence d'effet de volume ou des effets très faibles. La démarche proposée a ensuite été confrontée à des essais mécaniques réalisés sur un certain nombre de composites différents.

En conclusion de ce travail, nous proposons une méthodologie d'analyse de la rupture pour des matériaux présentant une dispersion de leur propriétés à rupture. Ce travail devrait permettre à la fois de mieux comprendre les mécanismes de rupture à l'échelle microscopique du matériau, et surtout de permettre le dimensionnement de pièces composites à l'aide d'outils statistiques à l'échelle macroscopique. L'enjeu de ce type d'approche est bien évidemment de limiter le surdimensionnement introduit par des approches purement déterministes.

2.1. Rupture du fil en traction (*Partie II-3*)

Dans cette partie les propriétés à rupture du fil brut sont reliées aux propriétés à rupture des fibres, afin de pouvoir caractériser ensuite la rupture des minicomposites, mais aussi, plus généralement, de mettre en évidence les sources de dispersion au sein d'une structure formée d'éléments en parallèle qui est censée être peu dispersée.

Pour cela on considère que le fil est constitué de N_f fibres identiques et parallèles (Fig.2.2), dont la probabilité de rupture suit une loi de Weibull :

$$P(\sigma) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{V}{V_0}\right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (2.1)$$

avec V le volume de la fibre (en m^3) et σ la contrainte appliquée de manière uniforme. V_0 est le volume de référence ($V_0 = 1 m^3$). m est le module de Weibull et σ_0 le facteur d'échelle.

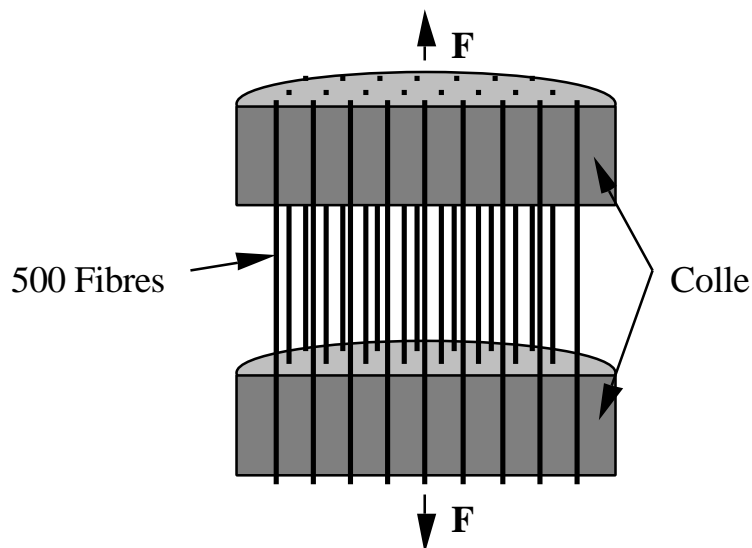


Fig.2.2 Schéma du fil brut étudié.

Les résultats de cette étude seront illustrés par l'analyse d'un fil de 500 fibres SiC Nicalon testé par Nathalie Lissart [Lis94].

2.1.a Modèle du partage global de charge (PGC)

La première hypothèse qui est formulée en général dans l'étude du fil [Dan45, Col58], est que toutes les fibres intactes au cours d'un essai de traction ont une contrainte appliquée identique. Ceci revient à supposer que, lorsqu'une fibre casse, toutes les autres fibres supportent l'excédent de charge ainsi libéré d'une manière identique. Un tel partage de charge est dit global. L'hypothèse d'égalité des charges implique aussi que toutes les fibres ont même longueur L . Lorsque N_t est grand, la proportion de fibres rompues N à l'intérieur du fil est alors :

$$\alpha = \frac{N}{N_t} = P(\sigma) \quad (2.2)$$

On en déduit alors la force $F(\sigma)$ exercée sur le fil pour une contrainte σ . Le maximum de la fonction $F(\sigma)$ correspond au point de rupture du fil, ce qui nous donne la contrainte maximale du fil (**Partie II-3**) :

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_0}{(mV)^{1/m}} \quad (2.3)$$

Pour calculer la dispersion de la force maximale, il suffit de revenir à la définition de α grâce à l'équation (2.2). Le nombre de fibres rompues N suit en effet par définition, une loi binomiale dépendant du nombre total de fibres, et de la probabilité critique de rupture : $B_i(N_t, \alpha_c) = N$. D'après les valeurs de l'espérance et la variance de la loi binomiale, on en déduit celles de la force maximale du fil, d'où son coefficient de variation :

$$C_v(F_{\max}) = \sqrt{\frac{\alpha_c}{(1-\alpha_c)N_t}} \quad (2.4)$$

On remarque ainsi que compte tenu de la valeur élevée de N_t , le coefficient de variation est très faible dans le cas d'un partage global de charge.

Par rapport aux hypothèses précédentes, il est intéressant de comparer le modèle du lien le plus faible appliqué au fil (LPF). Ceci nous servira plus tard pour montrer l'effet de volume d'un fil. Dans ce cas on considère que le fil se rompt dès la première rupture d'une fibre. La probabilité de rupture du fil $P_f(\sigma)$ est donc le produit des probabilités de survie de toutes les fibres :

$$P_f(\sigma) = 1 - (1 - P(\sigma))^{N_t} = 1 - \exp\left(-V \cdot N_t (\sigma / \sigma_0)^m\right) \quad (2.5)$$

On retrouve alors l'équation de Weibull avec cette fois-ci un volume total qui vaut $V_t = V N_t$. Les résultats de la statistique de Weibull nous donnent la contrainte moyenne à rupture :

$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{\sigma_0 \cdot \Gamma(1 + 1/m)}{V_t^{1/m}} \quad (2.6)$$

et le coefficient de variation :

$$C_v^2(\sigma_{\text{moy}}) = \frac{\Gamma(1 + 2/m) - \Gamma^2(1 + 1/m)}{\Gamma(1 + 1/m)} \quad (2.7)$$

On obtient ainsi la statistique de la force maximale. A partir des données des fibres, il est possible d'estimer les valeurs théoriques de rupture et de les comparer aux données expérimentales obtenues pour des fils bruts de SiC pour une longueur de 75 mm ($m = 4,6$ et $\sigma_0 = 8,4$ MPa avec $V_0 = 1 \text{ m}^3$) [Lis94] :

L=75mm	LPF	26 essais [Lis94]	PGC
F_{max} (N)	38 (10)*	77 (8)	94 (2)
C_v (%)	25	10	2

Tab.2.1 Valeurs expérimentales et théoriques de la distribution de la force à rupture du fil brut (* : entre parenthèse l'écart type).

On constate que la valeur expérimentale se trouve entre les deux modèles de rupture. Les essais ne sont donc pas purs, ce qui remet en cause la validité des hypothèses formulées. La variable qui apparaît alors la première dispersée est sans doute le nombre total de fibres. Néanmoins on se rend compte que ce paramètre influence de manière linéaire la force à rupture. Or la dispersion du nombre de fibres peut être estimée largement entre $\pm 5\%$ (mesures du module d'Young à l'origine du fil : $E = 180 \text{ GPa} \pm 10$). Ce qui introduit $\pm 5\text{N}$ d'écart par rapport à la valeur théorique de la force à rupture. Ceci n'explique donc pas l'écart observé.

2.1.b Chargement non-uniforme

L'hypothèse de non-uniformité des contraintes appliquées aux fibres apparaît naturellement en observant la non-linéarité du début des courbes de déformation-force (Fig.2.3). Il est ainsi légitime de supposer que toutes les fibres n'ont pas strictement la même longueur, ce qui entraîne pour une déformation donnée des disparités de contraintes. Pour modéliser ce phénomène, nous avons considéré qu'à partir du début de la linéarité (ϵ_l, F_l) (Fig.2.3), toutes les fibres sont tendues, mais qu'elles sont soumises à des forces $f(i)$ qui suivent une fonction puissance x^γ pour la répartition (2.8). Ceci traduit donc la non-uniformité de chargement. Le choix de cette fonction permet d'avoir une répartition continue et régulière en fonction de γ , ce qui est plus réaliste qu'une fonction en escalier par exemple :

$$f(i) = F_1 \left(\frac{i}{N_t} \right)^\gamma \cdot \frac{1}{K} \quad K = \sum_{j=1}^{N_t} (j / N_t)^\gamma \quad (2.8)$$

On en déduit alors la déformation des fibres. La déformation maximale correspond à la fibre la plus courte qui est mise en tension dès le début de l'essai (Force > 0 N). L'allongement du fil est calculé par rapport à la longueur nominale du fil (L = 75 mm dans ce cas), et en fonction de la déformation. On peut donc calculer la longueur de toutes les fibres.

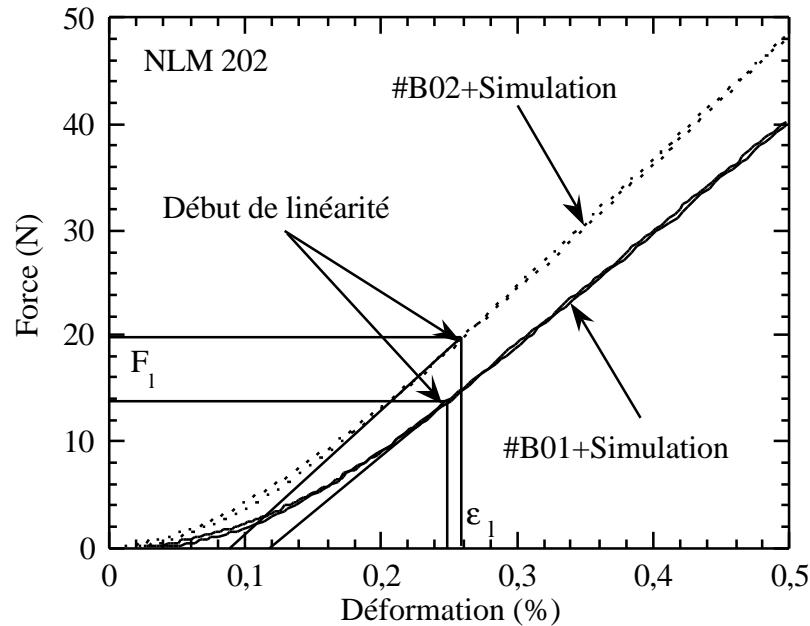


Fig.2.3 Courbes déformation-force au début de deux essais de traction sur fil (#B01 et #B02).

La simulation du début d'essai consiste à définir pour une déformation ϵ , l'allongement effectif du fil ($L\epsilon$), puis de déterminer les fibres en tension en comparant leur longueur à cet allongement plus la longueur de la fibre la plus courte. On obtient alors une courbe de comportement non-linéaire. La comparaison à des courbes expérimentales (Fig.2.3) nous permet d'identifier les paramètres du calcul (Tab.2.2), ce qui a été fait pour deux essais (#B01 et #B02) à titre d'exemple.

	#B01	#B02
N_t	470	500
F_1 (N)	14	20
ϵ_1 (%)	0,25	0,26
γ	0,90	0,55
σ_{max} (MPa)	320	375

Tab.2.2 Paramètres identifiés pour les essais #B01 and #B02 (σ_{max} représente la surcontrainte maximale entre la fibre la plus courte et la plus longue).

Il est donc possible maintenant de regarder l'influence d'un tel phénomène sur la force ultime à rupture. Pour cela, nous avons simulé le comportement à rupture du fil compte tenu des données de non-uniformité identifiées. En effet, une approche analytique du problème est très complexe. La simulation est réalisée par itération, en considérant des pas de déformation du fil $\Delta\varepsilon$. On calcule alors les incréments de charges $\Delta\sigma$ de chaque fibre en fonction de leur déformation propre. Lorsqu'une fibre dépasse son seuil de rupture, choisi au hasard au début de la simulation en fonction de la distribution de Weibull, la fibre casse, et la force chute alors de la force supportée par la fibre. Cette simulation est une simulation du comportement à déformation imposée. On obtient ainsi une distribution des forces maximales pour les deux types de chargement choisis :

	PGC	#B01	#B02
F_{\max} (N)	94 (2)	96 (2,3)	96 (2,4)
C_v (%)	2,0	2,4	2,5

Tab.2.3 Influence de la non-uniformité du chargement sur les forces à rupture du fil.

L'influence de la non-uniformité du chargement apparaît donc très faible d'après le Tab.2.3. Le faible écart observé n'est pas significatif puisque les calculs analytiques (PGC) et les simulations reposent sur des approximations différentes pour certains paramètres qui peuvent induire des erreurs systématiques faibles : approximation sur α , approximation du calcul du maximum, pas des incréments ... Les calculs ont par ailleurs été effectués en faisant varier le paramètre γ , pour caractériser la dispersion des surcontraintes entre deux fils. Les résultats sont très proches de ceux indiqués au Tab.2.3.

L'explication physique de ce faible effet est que la variation de charge introduite, bien que correspondant à un début de linéarité de 20 N (20% de la charge maximale), introduit des variations de contraintes positives et négatives au sein du fil. En effet pour 20 N, la charge moyenne observée est de l'ordre 240 MPa ce qui introduit des variations comprises entre -240 MPa et +100 MPa. La population de rupture des fibres est donc peu perturbée étant donné le niveau élevé de contrainte à rupture (1773 MPa). Il est alors nécessaire de considérer d'autres phénomènes comme source de dispersion : le partage local de charge.

2.1.c Partage local de charge (PLC)

Cet effet de partage local de charge caractérise la répartition non-uniforme des charges entre les fibres lorsque certaines fibres sont cassées. Physiquement, ceci peut s'expliquer par les effets dynamiques ou de vitesse de transfert des efforts sur les fibres voisines. On peut donc penser que la rupture d'une fibre entraîne

instantanément une surcharge locale, qui peut ensuite être répartie sur toutes les autres fibres intactes, quand celle-ci ne s'est pas rompue. Une telle hypothèse est réaliste compte tenu du module d'élasticité élevé des fibres.

La notion de partage de charge consiste ainsi à répartir la charge d'une fibre cassée non pas sur l'ensemble des fibres intactes, mais uniquement sur un certain nombre de fibres voisines. Pour cela, nous avons étendu la notion de partage de charge, qui est couramment étudiée pour un réseau triangulaire de fibres [Hed67, Smi93], à des réseaux imparfaits obtenus en supprimant un pourcentage (β_r) de liens du réseau initial triangulaire (Fig.2.4). Ceci permet de générer des réseaux compris entre le réseau triangulaire ($\beta_r=0$) et le "réseau" de fibres isolées ($\beta_r=1$). Le seuil de percolation est obtenu pour $\beta_r = 0,5 \%$.

Ainsi, lorsque qu'une fibre casse, sa charge est partagée entre toutes les fibres voisines connectées à elle et de manière identique (traduction numérique de l'effet dynamique). Plus généralement, lorsqu'un groupe de fibres cassées est formé (fibres connectées), ce que l'on appelle un îlot, les charges des nouvelles fibres cassées sont partagées entre les fibres connectées à l'îlot, ce qu'on appelle la berge. Le critère de rupture est atteint lorsque qu'il existe un îlot ne possédant plus de berge, i.e. plus de fibres connectées à lui. Ceci permet en effet d'obtenir le critère de fibre la plus faible (LPF) dans le cas d'un "réseau" de fibre isolée (chaque fibre est un îlot sans berge), et le critère du réseau triangulaire (le fil entier est un îlot sans berge évidemment).

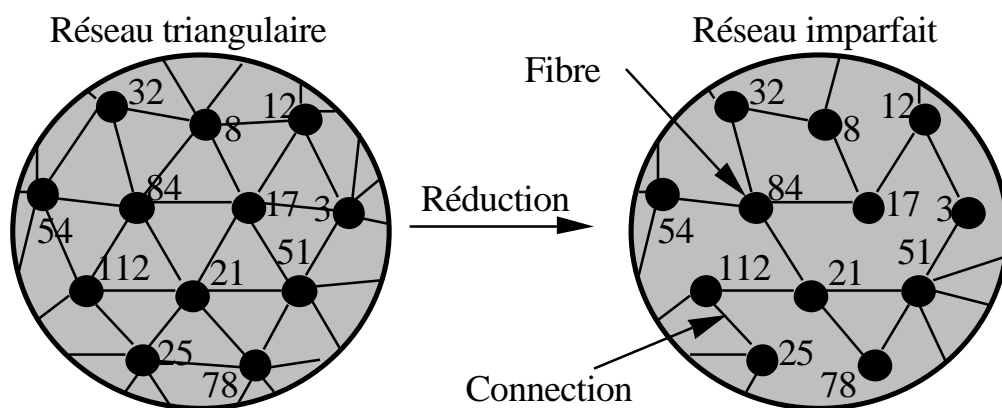


Fig.2.4 Réseau imparfait de partage local de charge entre les fibres (Le réseau est défini par un tableau de connectivité avec le numéro de chaque fibre).

On attribue alors à chaque fibre une contrainte à rupture en utilisant la distribution de Weibull des fibres. La simulation de la rupture est alors réalisée par itération en appliquant un incrément de charge à chaque fibre. Les charges des fibres qui cassent sont alors réparties suivant le partage local et le réseau étudié, caractérisé par β_r . Ce processus est continué avant l'incrément de charge suivant, jusqu'à ce qu'aucune nouvelle fibre ne casse. Le fil se rompt lorsqu'il existe un îlot sans berge, ce qui est obtenu lorsque que par exemple des cascades de rupture de fibres apparaissent.

Les simulations ont été réalisées pour plusieurs valeurs du pourcentage de réduction β_r entre 0 et 1 par pas de 0,01. Pour chaque valeur, il a été effectué 500 calculs. Ensuite la moyenne et l'écart type des forces maximales, ainsi que le minimum et le maximum ont été analysés (Fig.2.5). Par extrapolation, et par abus de notation, les valeurs du calcul en partage global de charge (PGC) ont été représentées pour $\beta_r = -1$. L'échelle est légèrement déformée mais donne tout de même un ordre d'idée pour des réseaux plus denses que le réseau triangulaire. Ceci nous permet de relier le modèle PGC au modèle LPF par l'intermédiaire des simulations du modèle PLC, étudié dans cette partie.

On constate alors que la moyenne de la force à rupture décroît jusqu'à la valeur du critère de la fibre la plus faible LPF ($F_{\max} = 40$ N). À l'inverse, la dispersion, donc l'écart type augmentent considérablement lorsque le réseau est de plus en plus réduit. On a donc bien mis en évidence une source de dispersion bien plus importante que toutes celles émises jusqu'à présent. D'autre part, on constate que le couple (F_{\max} , C_v) est fonction du paramètre β_r . On ne peut donc pas obtenir d'autres couples. On remarque alors (Tab.2.4) que pour un pourcentage de réduction β_r de 0,35, il y a un très bon accord entre les données expérimentales et les calculs. Ceci confirme donc bien la présence d'un partage local de charge lors des essais de traction réalisés par Lissart [Lis94].

	LPF	Essais [Lis94]	PLC	PGC
F_{\max} (N)	38 (10)*	77 (8)	76 (7)	94 (2)
C_v (%)	25	10	9	2

Tab.2.4 Comparaison du modèle de partage local de charge pour $\beta_r=0,35$ (Calcul sur 500 simulations) et les essais sur fils de fibres (* : entre parenthèses l'écart type).

Ce qui est aussi intéressant dans le calcul effectué est la réponse du minimum de la force à rupture F_{\max} . En effet alors que la moyenne et le maximum suivent une décroissance régulière en fonction de β_r (Fig.2.5), le minimum est instable et n'a pas de valeurs précises pour des valeurs de β_r comprise entre 0 et 0,4. Ce minimum est donc très sensible à β_r . En regardant de plus près les calculs, on peut montrer que ce minimum est en fait extrêmement dispersé entre deux calculs identiques (β_r est fixe, 500 simulations). C'est donc une variable aléatoire beaucoup plus dispersée que la moyenne ou le maximum.

Ceci est très important, car si l'on considère maintenant le problème d'un système série de fils (500 par exemple) soumis à un critère du fil le plus faible, la valeur à rupture correspondra au minimum calculé, et donc sera énormément dispersée. Ce résultat est surprenant puisque jusqu'à présent les études de rupture de tels systèmes prévoyaient peu de dispersion [Hil94, Bax94] ou la sous-estimaient énormément [Boy97] dans le cas, certes, de partage local sur des réseaux

triangulaires ou linéaires. Le partage local de charge est donc à la fois une source de dispersion pour la force maximale d'un fil seul, et pour le minimum de cette force pour un système de fils en série.

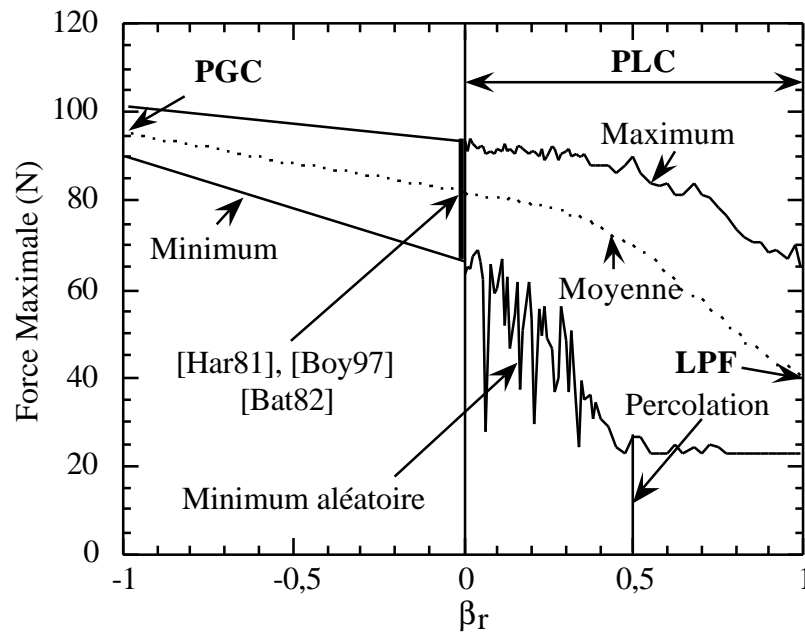


Fig.2.5 Force maximale à rupture du fil en fonction du paramètre de réduction des liens du réseau triangulaire β_r (extrapolation de PGC en $\beta_r = -1$).

En ce qui concerne l'effet de volume, il suffit de remarquer que le modèle de partage global de charge PGC et le modèle du lien le plus faible LPF sont sensibles à l'effet d'échelle. Pour cela il faut revenir aux équations (2.3) et (2.6), et constater que les contraintes moyennes à rupture sont des fonctions de $1/V^{1/m}$. Le modèle de partage local de charge est un modèle de transition entre ces deux modèles (Fig.2.5), ce qui veut dire que la contrainte moyenne à rupture du modèle PLC sera aussi sensible à l'effet de volume. Un tel résultat a été vérifié expérimentalement à l'aide d'essais de traction de fils bruts de fibres SiC [Lis94, Pas97].

En revanche, il est fortement probable que le minimum de la contrainte à rupture du modèle PLC, évalué sur les 500 simulations, soit nettement moins sensible à l'effet de volume. En effet pour ce paramètre, ce n'est pas la taille du fil qui est importante, mais le nombre de simulations du calcul (effet de la taille pour un système série). Or il est apparu que les calculs sur 100 simulations donnaient des résultats très similaires sur les valeurs minimales. On peut donc supposer que l'effet de volume sera atténué.

D'après ces deux remarques on peut donc affirmer que en fonction du critère de rupture choisi (fil de longueur l , ou fil formé de petits fils indépendants) et dans le cas du partage local de charge, il y aura ou non effet de volume pour le fil. Il est important de souligner que les deux approches (partages local et global) considèrent qu'il n'y a pas de rupture multiple de chaque fibre, mais qu'une fibre ne peut casser qu'une seule fois. Ce point est discuté en détail dans [Lis97].

2.2. Rupture du minicomposite et du composite

2.2.a Rupture du minicomposite

En utilisant les conclusions et les modèles proposés pour le fil brut, on peut déterminer les propriétés à rupture du minicomposite. En effet, comme il a été vu à la première partie, le minicomposite présente une fragmentation matricielle très importante près de la rupture, ce qui permet de supposer que la matrice est très peu chargée du fait de la continuité des décohésions entre les fissures (Fig.2.6). Cela est vérifié dans les composites tissés grâce aux variations de la rigidité qui tend vers la valeurs limite $1/2 E_f V_f$. C'est donc le fil de fibres qui contrôle la rupture finale. On peut donc supposer d'autre part que compte tenu des liens matriciels ponctuels entre fibres il y aura aussi un partage local de charge.

La grand difficulté, que l'on ne sait pas résoudre actuellement, est l'estimation de ce partage local de charge (paramètre β_r par exemple) en fonction de la microstructure et de l'endommagement matriciel.

Dans le cas des composites SiC/SiC, on peut néanmoins comparer les valeurs expérimentales à rupture du minicomposite et du fil brut. En utilisant les valeurs expérimentales du minicomposite [Lis97], on obtient en effet pour le lot C : $F_{max} = 130$ N avec un écart type de 10 N. Ces valeurs correspondent à une contrainte moyenne de 1622 MPa sur la section du fil de fibres et à un module de Weibull de 18. D'après les valeurs mesurées sur le fil brut (Tab.2.4), on obtient une contrainte moyenne à rupture du fil de fibres de l'ordre de 932 MPa, et un module de Weibull $m=12$.

L'écart entre les deux contraintes moyennes à rupture s'explique par la longueur équivalente qu'il faudrait introduire dans le calcul de la rupture du fil brut [Lis97]. Cette longueur est néanmoins délicate à évaluer car elle dépend fortement de la fraction volumique de matrice, de la contrainte de cisaillement entre la matrice et les fibres, et surtout de l'état de fissuration de la matrice. Néanmoins, les valeurs des modules de Weibull, qui sont proches pour les deux calculs, confirment qu'il y a bien un partage local de charge pour le minicomposite. Il semble que ce partage soit néanmoins plus important pour ce dernier (m plus grand). On démontre ainsi qu'il existe bien un lien étroit entre les propriétés à rupture du minicomposite et du fil, donc des fibres.

Nous n'irons pas plus loin dans cette analyse. Néanmoins, on peut d'ores et déjà affirmer que le minicomposite sera sensible à l'effet d'échelle, puisque comme il a été démontré, sous l'hypothèse du fil de fibres en partage local, il y a effet d'échelle. Ce résultats rejoint dans ce sens les conclusions de Nathalie Lissart [Lis97].

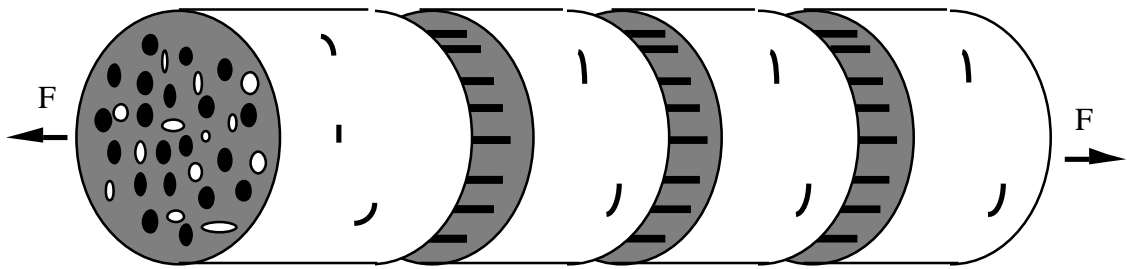


Fig.2.6 Fragmentation matricielle du minicomposite : La fragmentation impose une rupture dictée par le fil brut. Les décohésions imposent une longueur équivalente plus faible que la longueur du minicomposite. Les contacts ponctuels matriciels imposent un partage local de charge entre fibres.

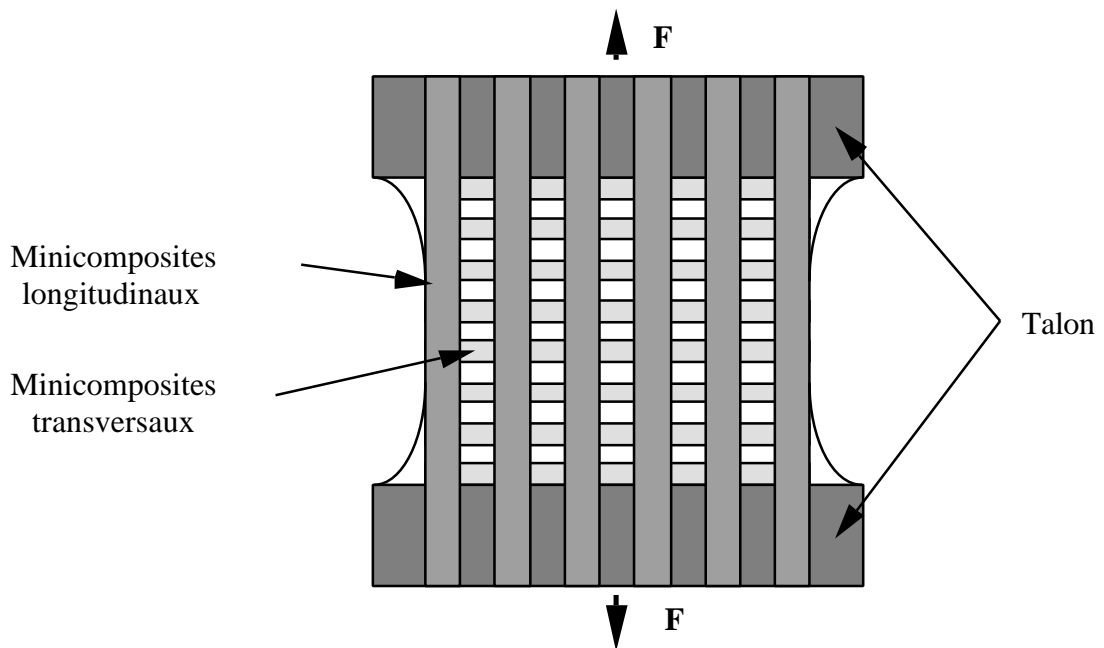


Fig.2.7 Assemblage des minicomposites au sein d'un composite 2D tissé. Si les minicomposites dictent la rupture, le composite 2D tissé sera sensible à l'effet de volume.

2.2.b Rupture du composite 2D tissé

On peut maintenant considérer le composite 2D tissé comme un assemblage de minicomposites transversaux et longitudinaux (Fig.2.7). Néanmoins le calcul des propriétés à rupture du composite 2D tissé à partir de celles du minicomposite nécessite un certain nombre d'hypothèses et d'approximations.

Tout d'abord, il est difficile d'obtenir des valeurs numériques précises concernant le minicomposite, et surtout représentatives des minicomposites qui forment le composite tissé. Ceci est dû en partie à l'écart mesuré entre les fractions volumiques et la répartition de la matrice pour ces deux échelles de composites, et qui sont liées à l'élaboration. Ceci implique que les mesures de contraintes à rupture pour le minicomposite seul ne représentent pas forcément les contraintes de rupture du fil longitudinal dans le composite.

D'autre part, il faut supposer que la structure du composite (tissage, ondulation, fils transverse ...) ne perturbe pas le champ des contraintes au sein de chaque minicomposite. Il serait sans doute possible de le calculer, mais il faut remarquer que de tels calculs nécessitent toujours l'utilisation d'une géométrie simple, qui n'est pas toujours représentative de l'ensemble des formes d'ondulation présentes dans le composites.

Il faut enfin, définir un critère de rupture pour l'ensemble des minicomposites qui forment la structure du composite. On retrouve alors des problèmes de transfert de charge cette fois-ci à l'échelle des minicomposites. Toute la difficulté réside dans la modélisation du partage local de charge. A ce sujet, il faut citer les travaux d'Emmanuelle Munier [Mun94] qui ont donné des résultats satisfaisants dans le cas d'un composite SiC/SiC 0,2%, et pour un partage de charge simple sur un système linéaire de minicomposites. Malheureusement, ce type d'approche n'est pas généralisable à tous les composites.

On peut néanmoins faire quelques remarques concernant le comportement du composite. En effet, sous l'hypothèse d'un partage local de charge entre les minicomposites, le composite sera sensible à l'effet d'échelle comme dans le cas du fil brut. En revanche, si on suppose que les minicomposites se comportent plutôt comme un ensemble de fils indépendants en série de longueur de jauge fixée par la période de l'ondulation du tissage, il est fortement probable que le composite sera moins sensible à l'effet d'échelle, comme les minicomposites qui le forment.

La difficulté est alors de déterminer le ou les paramètres microstructuraux qui dictent l'un ou l'autre cas. Compte tenu de la complexité d'une approche purement micromécanique, il apparaît alors évident de prendre le problème à l'envers en examinant les effets ou non de volume à l'échelle macroscopique du composite. On constate alors l'énorme intérêt des phénomènes micromécaniques discutés quant au choix d'un modèle macroscopique de rupture.

2.3. Classification des types de rupture et modèle ergodique (*Partie II-4*)

2.3.a Classification des types de rupture dispersée

Par rapport aux phénomènes micromécaniques que l'on vient de présenter, il est maintenant important de caractériser les types de rupture en fonction des observations macroscopiques. Pour cela nous avons retenu deux phénomènes expérimentaux, à savoir l'effet de volume et les ruptures successives, qui permettent de définir une classification précise et surtout suffisante pour un matériau quelconque présentant des ruptures dispersées.

- *l'effet de volume* est un phénomène connu pour un grand nombre de matériaux fragiles et est essentiellement lié à la probabilité plus grande de trouver dans un volume plus grand des défauts critiques plus sévères. L'effet de volume se traduit alors par l'équation suivante en terme de volume V_i et de moyenne des contraintes à rupture $\{\sigma_i\}$:

$$\forall V_1 > V_2 \Rightarrow \{\sigma_1\} < \{\sigma_2\} \quad (2.9)$$

et le non-effet de volume par :

$$\forall V_1 > V_2 \Rightarrow \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\} \quad (2.10)$$

- *Ruptures successives* : Il s'agit d'obtenir des ruptures successives des volumes de plus en plus petits de la même éprouvette. Cette information nous permet de vérifier l'influence de la suppression de défauts pour les volumes plus petits. Si l'on note $\sigma_{i,1}$ et $\sigma_{i,2}$ deux ruptures successives d'une éprouvette i :

- ou bien les ruptures successives sont toutes ordonnées identiquement :

$$(\forall i \sigma_{i,1} < \sigma_{i,2}) \text{ ou } (\forall i \sigma_{i,1} \geq \sigma_{i,2})$$

-ou bien les ruptures successives ne sont pas ordonnées d'une manière identique, dans ce cas elles sont indépendantes et les moyennes des 1^{ères} et des 2^{èmes} ruptures sont alors égales.

Sur la base de ces deux observations, il est alors possible d'établir une classification des types de rupture en combinant l'effet ou non de volume et les ruptures successives ordonnées identiquement ou non, ce qui donne en théorie six cas. Trois cas sont incompatibles:

- Un effet de volume avec des ruptures successives ordonnées décroissantes.
- Un effet de volume avec des ruptures successives non-ordonnées identiquement.
- Un non-effet de volume avec des ruptures ordonnées croissantes.

Si de plus on élimine les inéquations $\{\sigma_1\} > \{\sigma_2\}$ et $\sigma_{i,1} > \sigma_{i,2}$, puisqu'elles correspondent respectivement à une perte de propriétés pour des volumes de plus en plus petits (!), et à un endommagement systématique du matériau au cours du premier essai, on obtient alors le tableau suivant :

Modèles	Dispersion des contraintes	Effet d'échelle	Contraintes successives
Macro.		$V_1 > V_2$	$\forall i$
MLPF* -->	oui	$\{\sigma_1\} < \{\sigma_2\}$	$\sigma_{i,1} < \sigma_{i,2}$
SE**-->	oui	$\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$	$\sigma_{i,1} = \sigma_{i,2}$
	oui	$\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$	$\sigma_{i,1} < \sigma_{i,2}$ ou $\sigma_{i,1} > \sigma_{i,2}$

Tab.2.5 Classification des types de ruptures (* : Maillon le plus faible, ** : Seuil d'endommagement).

En revenant aux aspects micromécaniques, on constate donc que l'effet de volume, qui traduit finalement la rupture d'un certain pourcentage critique de fibres, implique des ruptures successives ordonnées croissantes. Ceci traduit simplement une suppression des défauts les plus sévères au sein du matériau. En revanche, le non-effet de volume implique deux comportements différents pour les ruptures successives.

2.3.b Interprétation macroscopique

On peut d'ores et déjà situer les nombreuses théories de la rupture des composites que l'on trouve dans la littérature. Sans proposer une liste exhaustive, on peut définir essentiellement trois types d'approche [Jeu96] :

- *Le modèle du maillon le plus faible* (MLPF) traduit le comportement fragile du matériau qui se rompt dès l'amorçage d'une fissure. Ce modèle peut alors s'écrire de plusieurs façons possibles, dont l'approche en volume développée par Weibull, ou l'approche du minicomposite le plus faible discutée précédemment.

- *Le modèle à seuil d'endommagement* (SE), approche phénoménologique, considère que la rupture finale n'intervient que lorsqu'un certain nombre de fissures ou un certain degré d'endommagement local sont présents dans le matériau pour générer une fissure catastrophique.

- *Le modèle d'arrêt de fissure* sort du cadre de cette étude, car c'est un critère surtout utilisé pour les concentrations de contrainte, ou les effets d'entaille. C'est un modèle basé sur les bilans d'énergie entre l'énergie nécessaire pour la propagation de fissure, et l'énergie emmagasinée par le matériau.

Le modèle MLPF correspond donc à la première ligne de notre classification. En ce qui concerne le modèle SE, il faut faire l'hypothèse d'un endommagement réparti sur l'éprouvette, sous peine de rencontrer des problèmes inhérents de logique. En effet, si l'endommagement critique n'est pas uniforme, il est possible d'imaginer des parties d'éprouvette possédant un seuil d'endommagement plus que critique à un même niveau de contrainte ! Ainsi, pour une éprouvette, les ruptures suivantes sont nécessairement égales à la première.

On constate alors que le troisième cas de rupture n'est pas décrit par ces deux types d'approches, ce que nous nous proposons maintenant d'interpréter à la fois par une approche micromécanique et macroscopique.

2.3.c Modèle ergodique

D'un point de vue déterministe, il est évident que le cas des ruptures successives indépendantes est difficilement compréhensible. Pour cela il suffit de revenir au calcul sur le fil brut, qui comme on l'a vu, est une description assez juste de la rupture du minicomposite. Dans ce cas, on constate que la traduction numérique de notre problème ne peut introduire cette notion d'indépendance de deux ruptures successives. C'est d'ailleurs là, une grande limite des modèles numériques, qui aussi complexes soient-ils, donnent toujours le même résultat pour des données initiales identiques. Il apparaît donc une nouvelle difficulté qui nécessite de tenir compte du fait que les données initiales peuvent être perturbées et ne sont finalement pas connues précisément.

C'est pourquoi, un modèle fondé sur la notion de champ des contraintes non déterministe a été envisagé, ce qui nous a amené à introduire la notion d'ergodicité (**Annexe 2**) qui s'applique parfaitement à ce type de problème. En d'autres termes, on considère que compte tenu de la structure du composite (tissage, strates ...) et de l'endommagement important de la matrice, le champ des contraintes critiques locales $\sigma_c(x,t)$, au niveau des fibres par exemple, ne peut pas être connu d'une manière déterministe (calculable) pour une éprouvette donnée. Le champ des contraintes critiques locales est défini par le champ des contraintes locales $\sigma_l(x,t,\sigma)$ pour un champ macroscopique appliqué σ et pour un essai t , et le critère local de rupture $\sigma_r(x)$: $\sigma_c(x,t) = \sigma_r(x) - \sigma_l(x,t,\sigma)$.

Ainsi, on peut imaginer une infinité d'essais t du même matériau sous des conditions de sollicitations identiques macroscopiquement et pour des éprouvettes de dimensions identiques, et représenter les fluctuations du champ des contraintes critiques locales $\sigma_c(x,t)$ pour chaque essai t (Fig.2.8). Pour des raisons de commodité l'éprouvette a une seule dimension x . Comme on peut le constater à la Fig.2.8, le champ des contraintes critiques locales, bien que macroscopiquement identique (minimum à la position x_2) présente une dispersion significative suivant les essais t_1 et t_2 par exemple. Cette dispersion est due à la sensibilité du matériau aux

perturbations infimes de prise dans les mors de la machine par exemple, ou due aux différences locales de structure induites par les variations dans la structure.

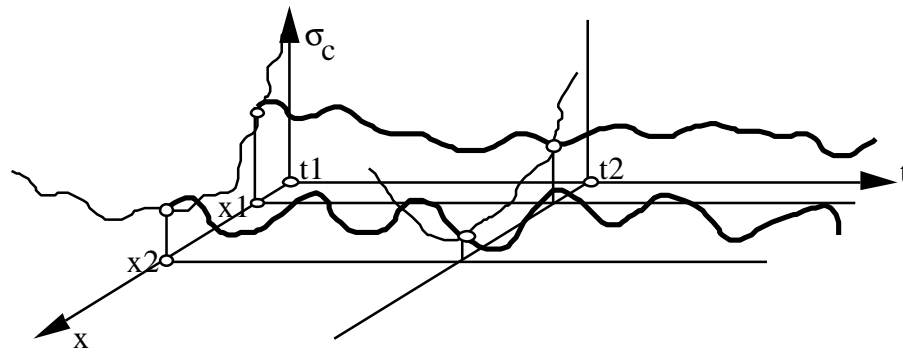


Fig.2.8 Représentation du champ de contraintes critiques locales en fonction de la position x au sein des éprouvettes et de la succession virtuelle d'essais t .

En appliquant alors l'hypothèse d'ergodicité aux fluctuations du champ des contraintes critiques locales $\sigma_c(x,t)$, on en déduit que la probabilité de rupture d'un volume V suffisamment grand (Volume élémentaire représentatif), pendant un essai t à un champ macroscopique constant ($\sigma(x) = \text{const}$), est égale à la probabilité de rupture en un point du volume x sur un intervalle de temps T suffisamment grand (nombre représentatif d'essais t), pour le même champ macroscopique $\sigma(x)$. Ainsi la probabilité de rupture d'une éprouvette de traction peut s'écrire par exemple par rapport à la contrainte macroscopique σ , avec une équation à deux paramètres m_e et σ_{oe} :

$$P_r(\sigma) = 1 - \exp\left(-(\sigma / \sigma_{oe})^{m_e}\right) \quad (2.11)$$

L'équation (2.11), ne dépend donc plus du volume sollicité. L'utilisation de cette fonction voisine de l'équation de Weibull n'est justifiée que par sa simplicité d'écriture. Une équation de probabilité issue d'une loi gaussienne serait tout aussi acceptable, mais cette fonction nécessiterait une approximation polynomiale pour pouvoir être calculée.

Lorsque que le champ est non uniforme, on peut introduire une notion de localisation de la rupture, qui rend compte de l'effet des gradients du champ des contraintes. Les zones soumises aux plus fortes contraintes sont en effet les plus susceptibles de se rompre. Sur la Fig.2.8, la rupture est ainsi la plus probable au point x_2 , mais le critère de rupture est probabiliste compte tenu de la dispersion inévitable du champ local. A titre d'exemple, le volume élémentaire retenu pour le SiC/SiC est un parallépipède de $2\text{mm} \times 2\text{mm} \times 300\mu\text{m}$, un peu plus grand que l'ondulation du tissage et l'épaisseur de la strate du tissu. Pour chaque volume i soumis à une contrainte moyenne $\sigma(i)$, la probabilité de localisation $P_1(i)$ est calculée arbitrairement par une fonction puissance x^{ma} par rapport à la contrainte moyenne maximale σ_{max} de tous les volumes élémentaires :

$$P_1(i) = (\sigma(i) / \sigma_{\text{max}})^{m_a} \frac{1}{K} \quad \text{avec } K = \sum_j (\sigma(j) / \sigma_{\text{max}})^{m_a} \quad (2.12)$$

L'exposant m_a permet d'accentuer la contribution des zones les plus sollicitées, et réduit donc par conséquence la contribution des zones les moins sollicitées. Ainsi le volume élémentaire de la contrainte moyenne maximale, possède la probabilité de localisation, ou d'apparition de la rupture, maximale. La probabilité de localisation est normée pour respecter : $\sum P_1(i) = 1$. Cette probabilité est à rapprocher de la fonction de distribution canonique de Boltzmann qui finalement traite un problème similaire (répartition des molécules d'un gaz suivant les niveaux d'énergie des états du système, **Annexe 2**). Le choix de la fonction puissance n'est donc pas anodin puisqu'elle se rapproche de l'exponentielle obtenue par Boltzmann par le calcul. Dans notre cas, un calcul analytique n'a pas été réalisé, et donc le choix s'est porté vers une fonction facilement identifiable.

Finalement, la probabilité de rupture $P_r(\sigma(i))$ de chaque volume élémentaire est donnée par l'équation (2.11). La probabilité totale de rupture P est donc la somme, sur tous les volumes élémentaires, des probabilités de localisation multipliées par les probabilités de rupture. Ceci ce justifie en disant que tous les événements, rupture au volume i de probabilité $P_1(i)$, forment une partition de l'ensemble des événements formé de toutes les ruptures possibles, ce qui nous permet d'appliquer la formule de Bayes :

$$P = \sum P_1(i) P_r(\sigma(i)) \quad (2.13)$$

2.4. Essais mécaniques de rupture

Afin d'illustrer la classification qui a été proposée, des essais de traction et de flexion ont été réalisés sur des matériaux composites de type SiC/SiC. La méthodologie consiste à réaliser d'une part des essais sur éprouvettes de volumes différents pour mettre en évidence un effet de volume, et d'autre part des essais de traction sur les portions d'éprouvettes rompues lorsque les éprouvettes cassées sont suffisamment grandes, afin si possible d'observer les ruptures successives.

2.4.a Ruptures avec effet de volume

Essais sur minicomposites SiC/SiC

Pour mettre en évidence l'effet de volume et l'effet des ruptures successives, nous avons considéré les composites unidirectionnels SiC/SiC (minicomposites) précédemment étudiés par Nathalie Lissart [Lis97]. Comme on l'a vu, l'effet de volume des fils implique presque sûrement un effet de volume pour les minicomposites. D'après notre classification, il est donc prévisible que les ruptures successives soient ordonnées croissantes.

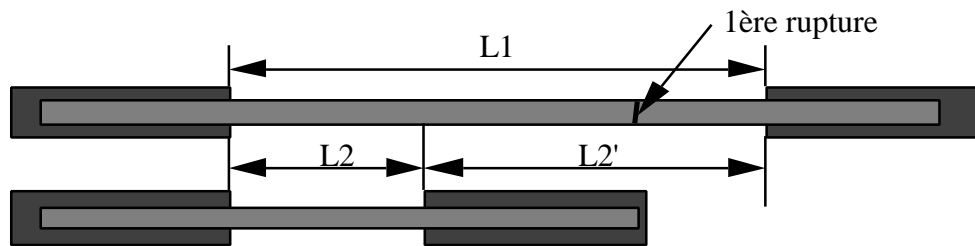


Fig.2.9 Schéma des échantillons successifs préparés à partir d'éprouvettes rompues (L_2' est la longueur non testée pendant le 2^{ème} essai).

Des échantillons de traction ont donc été préparés à l'aide des morceaux de minicomposites (2^{ème} rupture), du lot C de Nathalie Lissart (Fig.2.9). Ensuite, ces nouveaux échantillons ont été testés suivant la même procédure expérimentale [Lis97]. Il a par ailleurs été possible de préparer de nouveaux échantillons à partir de ceux-ci une fois rompus (3^{ème} rupture). Les résultats ont été regroupés au Tab.2.6 . Ainsi, à partir des 26 essais initiaux de longueur 75 mm, nous avons réalisé 16 2^{èmes} essais avec des longueurs comprises entre 22 et 45 mm, et 6 3^{èmes} essais avec des longueurs de 10 à 22 mm.

Les courbes de comportement de deux essais successifs sont représentées à la Fig.2.10. On remarque que la courbe de comportement du 2^{ème} essai retrouve celle du 1^{er} essai, qui commence au niveau force et de déformation de la rupture du 1^{er} essai. Il y a par ailleurs une excellente prévision de la courbe de comportement du 2^{ème} essai à partir des simulations (Voir 1.1 Composite unidirectionnel). La courbe est corrigée de la déformation résiduelle du 1^{er} essai (non-refermeture des fissures). La rupture du matériau a donc lieu loin de la saturation matricielle, car la matrice continue de se fissurer.

Essais	Nombre (-)	L (mm)	F_{moy} (N)	F_0 (N, $L_0 = 75\text{mm}$)	m (-)
1 ^{ers} (o) [Lis97]	26	75	134 (8)*	137	18
2 ^{èmes} (•)	16	22-45	152 (11)	142**	14**
3 ^{èmes} (→)	6	10-22	178 (14)	-	-

Tab.2.6 Résultats des essais successifs de rupture sur minicomposites (*: entre parenthèses l'écart type) (**: Uniquement sur les minicomposites de longueur 22 mm, 11 valeurs).

On constate que les moyennes des forces maximales F_{moy} des 2^{èmes} et 3^{èmes} essais sont nettement supérieures à la moyenne des 1^{ers} essais (Tab.2.6). Ceci confirme que les minicomposites présentent un effet de volume. Pour comprendre la notion d'ordre qui est introduite dans l'observation des ruptures successives, on peut représenter deux essais successifs dans un graphe F_1 - F_2 , où F_1 est la force à rupture obtenue au 1^{er} essai et F_2 est la suivante obtenue au 2^{ème} essai. On constate alors

(Fig.2.11) que les points, excepté un seul, se trouvent dans le triangle ($F_2 > F_1$) au dessus de la bissectrice ($F_2 = F_1$), ce qui est naturellement caractéristique d'un ordre croissant. Ceci montre encore une fois l'effet de volume des minicomposites.

En analysant alors les ruptures par l'équation de Weibull en termes de forces (26 1^{ers} essais avec $L=L_0 = 75$ mm et 11 2^{èmes} essais avec $L = 22$ mm) :

$$P(F) = 1 - \exp(- (L/L_0) (F/F_0)^m) \quad (2.14)$$

on obtient des valeurs de m et F_0 très proches (théorie du lien le plus faible) (Tab.2.6). La différence des valeurs entre dans le domaine d'incertitude habituellement observé. Elle peut dépendre du nombre d'échantillons testés qui est plus faible pour les deuxièmes ruptures. Elle dépend d'une manière certaine du fait que la longueur de jauge n'est pas identique pour tous les échantillons des 2^{èmes} ruptures (Tab.2.6), ce qui a pour effet de faire décroître le module de Weibull, et donc d'affecter le facteur d'échelle F_0 .

Par ailleurs la différence observée peut aussi s'expliquer par un effet de troncature lié au fait qu'il y a une sélection des défauts lors des essais successifs. Pour améliorer l'estimation des distributions à rupture des 2^{èmes} et 3^{èmes} ruptures à partir des 1^{ères}, on peut utiliser la méthode des distributions des ruptures successives (**Annexe 1**). Pour cela la 1^{ère} distribution a été approchée par une loi logistique modifiée $1-L_1(F)$ avec les paramètres suivant : $a = 5,69 E^8$, $b = 1,29$ et $c = 27,6$:

$$L_1(F) = 1 - \frac{1}{1 + a \cdot \exp\left(-\frac{F^b}{c}\right)} \quad (2.15)$$

Les équations des distributions successives sont alors :

$$1 - L_i(F) = 1 - L_1(F) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{(-\ln L_1(F))^j}{j!} \right) \quad (2.16)$$

Sur la Fig.2.12, les distributions des forces à rupture obtenues pour les différents essais successifs ainsi que les distributions $1-L_2(F)$ à $1-L_8(F)$ ont été représentées. On constate que la troncature induite par les 2^{èmes} essais est bien retranscrite (sélection des défauts). La différence qui apparaît entre les courbes expérimentales ($1-L_2(F)$) et théoriques (2^{ème} rupture) (Fig.2.12) s'explique par le fait qu'une partie du minicomposite (partie dans le talon + morceau restant = L_2' , Fig.2.9) n'est pas testé du fait de la préparation des échantillons. Il est donc fort probable que l'on n'active pas nécessairement le 2^{ème} ou le 3^{ème} défaut lors des essais successifs. D'ailleurs en utilisant plutôt le rapport des longueurs des essais successifs (75 mm - 22 mm - 10 mm), on améliore les prévisions des distributions expérimentales ($1-L_i(F)$) avec $i=3-4$ et $7-8$, respectivement pour les 2^{èmes} et 3^{èmes} essais). On constate

par ailleurs que le modèle avec une loi logistique modifiée prévoit bien un accroissement de dispersion des ruptures.

En conclusion, on démontre qu'il y a bien un effet de volume pour des longueurs de minicomposites comprises entre 20 mm et 75 mm. Ceci confirme bien la prévision qui avait été faite à partir du modèle du fil. Ces résultats rejoignent les résultats de Lissart [Lis97], qui bien qu'ayant utilisé un partage global de charge, prévoyait un effet de volume dans la rupture des minicomposites (Tab.2.7).

L (mm)	F_r [Lis94] (N)	Mesures F_{moy} (N)
10	166	178
22	-	144
75	122	134
300	106	-

Tab.2.7 Comparaisons des résultats des calculs théoriques sur minicomposites [Lis94] et expérimentaux (2^{èmes} et 3^{èmes} ruptures).

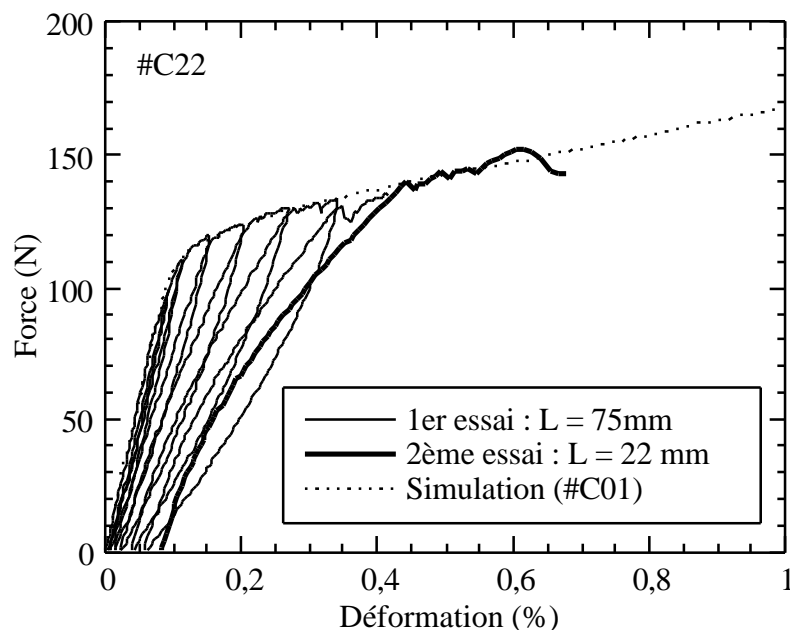


Fig.2.10 Courbes de comportement de deux essais successifs. Le point à l'origine du 2^{ème} essai est défini d'une manière empirique en mesurant l'évolution de la déformation résiduelle du 1^{er} essai, qui caractérise la non-refermeture des fissures.

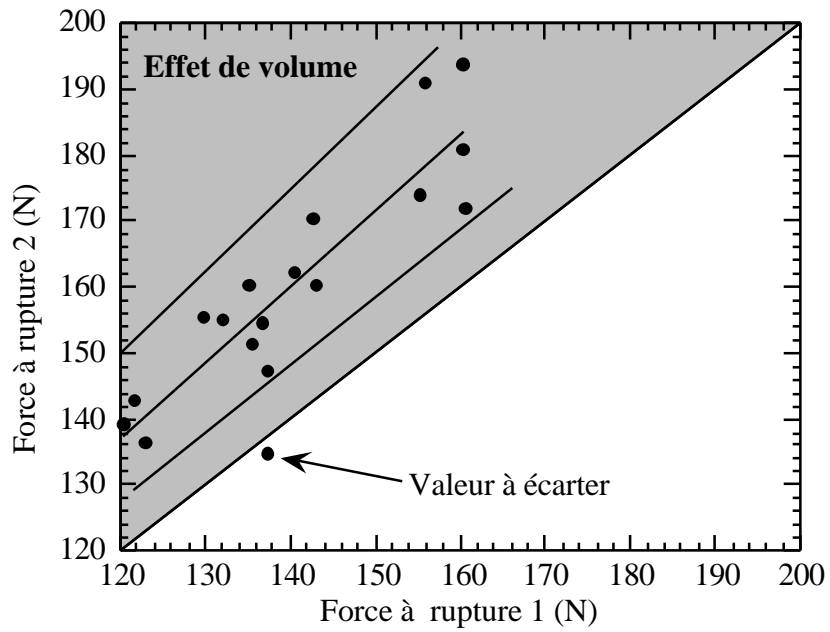


Fig.2.11 Représentation des ruptures successives dans un graphe F_1 - F_2 .

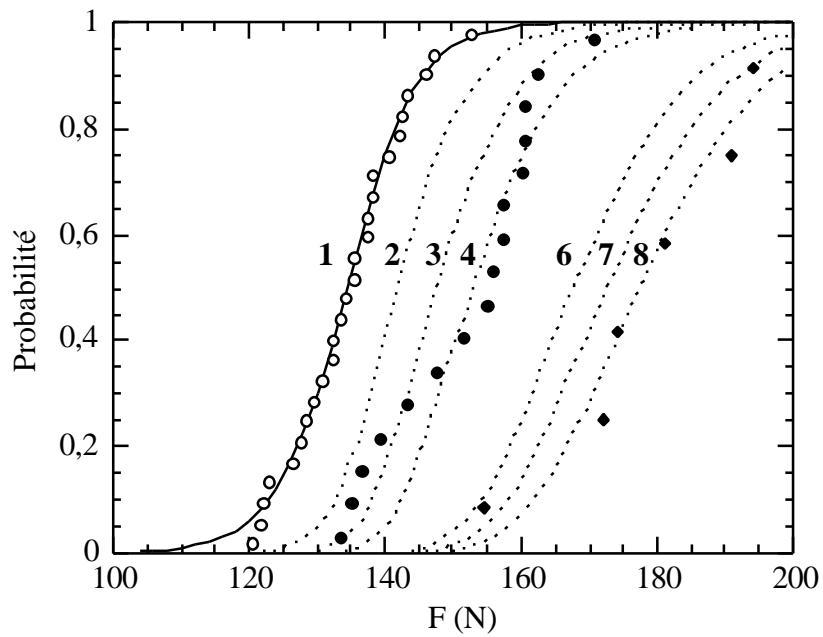


Fig.2.12 Courbe de probabilités de rupture des 1^{ers} (o), 2^{èmes} (•) et 3^{èmes} (→) essais successifs des minicomposites SiC/SiC (Nombre i : courbe $1-L_i(F)$).

Essais sur composite 2D tissé SiC/SiC 0,2%

Comme précédemment pour les minicomposites, des essais successifs en traction ont été réalisés sur des éprouvettes de composite 2D tissé SiC/SiC 0,2% de forme parallélépipédique (80 mm x 8 mm x 3,3 mm). Ce matériau présente une rupture précoce aux alentours de 0,2% de déformation, avec un faciès de rupture très plat de type fragile. Il est donc probable que la rupture soit sensible à l'effet de volume compte tenu des aspects du faciès. Ainsi des essais de traction de 2^{ème} rupture ont donc été réalisées sur 7 éprouvettes issues des morceaux d'éprouvettes rompues. Pour les 1^{ères} et 2^{èmes} ruptures les longueurs de jauges sont respectivement 80 mm et 40 mm. La vitesse de déformation était de $4 \cdot 10^{-4}$ %/s.

Les résultats sont analysés en termes de contrainte, puisqu'en général, la déformation des 2^{èmes} essais est entachée d'erreurs dû à l'imprécision de la déformation résiduelle. Pour les 1^{ers} essais la déformation à rupture est de l'ordre de 0,16% avec un écart type de 0,03%. Comme on pouvait s'y attendre, il n'est pas apparu de corrélation entre le module d'Young à l'origine (230 GPa (18)) et la contrainte à rupture. On ne peut donc pas déduire la faiblesse du matériau en mesurant seulement son module d'Young à l'origine.

Ainsi, à la Fig.2.13, les 2^{èmes} ruptures ont été représentées sur un graphe σ_1 - σ_2 , où σ_1 est la contrainte à la 1^{ère} rupture et σ_2 la contrainte à la 2^{ème} rupture. On remarque alors que toutes les ruptures sont ordonnées de manière croissante. Au Tab.2.8, on constate que les 2^{èmes} ruptures présentent une contrainte moyenne plus élevée que les 1^{ères} ruptures. On peut donc envisager certainement un effet de volume pour ce matériau. L'analyse par le modèle de Weibull (11 1^{ères} rupture, L = 80 mm et 7 2^{èmes} rupture; L= 40 mm), donne des paramètres m et σ_0 très proches (Tab.2.8). Comme pour les minicomposites, la faible différence entre les paramètres s'explique par la troncature des défauts au cours des 2^{èmes} essais. En utilisant l'approche des distributions de ruptures successives (**Annexe 1**) développée par Das Neves [Das96], il est alors possible d'obtenir une excellente corrélation entre la courbe expérimentale de probabilité des 2^{èmes} ruptures et la 2^{ème} distribution des ruptures 1-L₂(σ) (Fig.1.14). Les paramètres de la fonction logistique modifiée sont : a = 4,06 E⁹, b = 1,27 et c = 24,4.

On peut donc conclure que le composite SiC/SiC 0,2 % présente un effet de volume et sera donc bien décrit par une approche de type Weibull.

	Nombre	L (mm)	σ_{moy} (MPa)	σ_0 (MPa, L ₀ = 80mm)	m (-)
1 ^{er} (o)	11	80	139 (7)*	142	18
2 ^{ème} (•)	7	40	145 (6)	144	24

Tab.2.8 Résultats des essais successifs de rupture sur composites SiC/SiC 0,2% (* : entre parenthèses l'écart type).

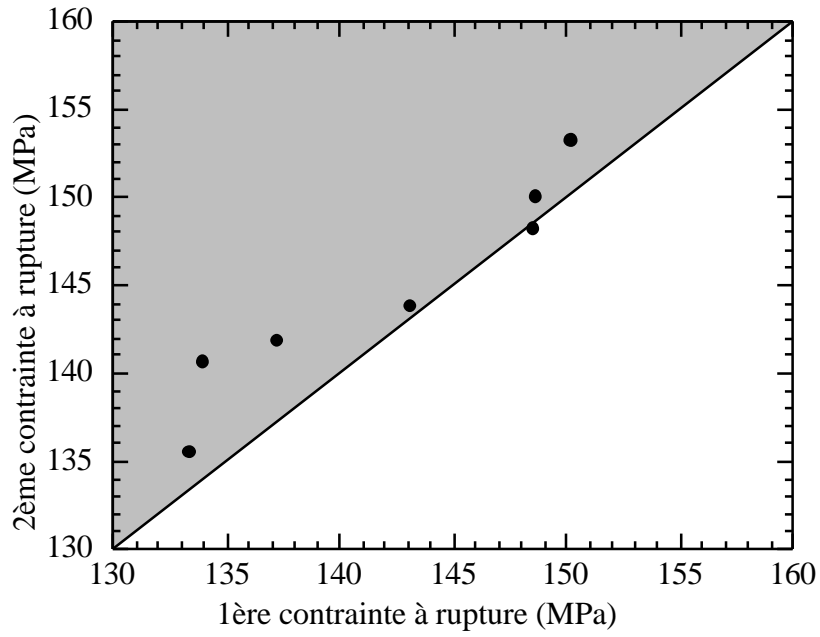


Fig.2.13 Représentation des ruptures successives dans un graphe σ_1 - σ_2 .

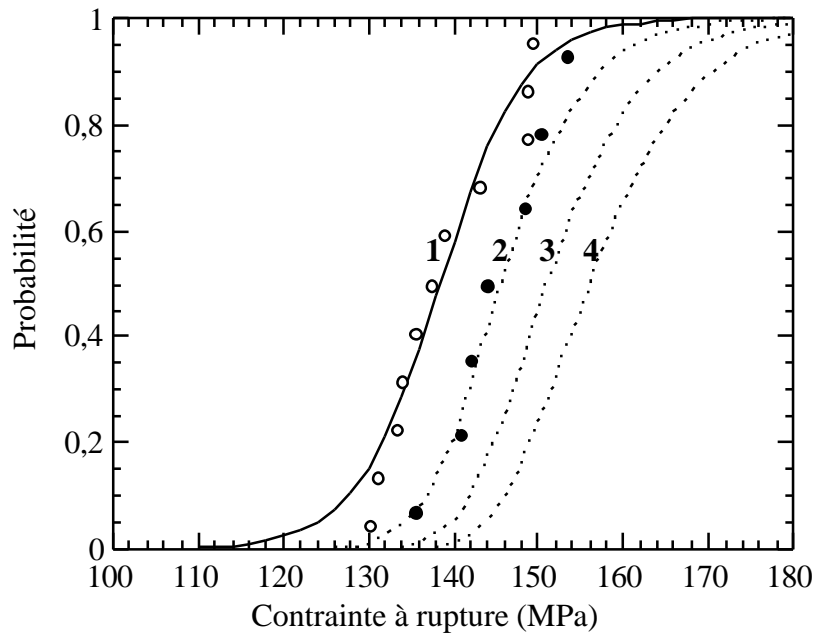


Fig.2.14 Distributions des contraintes de rupture obtenues pour des 1^{ers} (o), 2^{èmes} (•) essais successifs du composite SiC/SiC 0,2% (Nombre i : courbe 1- $L_i(F)$).

2.4.b Ruptures avec un faible effet de volume (*Partie II-4*)

Par rapport aux deux matériaux précédents, la méthodologie d'analyse a été entièrement suivie pour un composite SiC/SiC 1%, en réalisant tout d'abord des essais de traction sur des éprouvettes de volumes différents puis des essais successifs.

Essais sur volumes différents

Des essais de traction dans les axes du matériau ont été réalisés sur deux types d'éprouvettes pour un rapport de volume sollicité de 8 : 12 éprouvettes (8x30) de fût 8 mm x 30 mm x 3,3 mm et 12 éprouvettes (16x120) de fût 16 mm x 120 mm x 3,3 mm. Les essais ont été réalisés dans des conditions quasi-statiques avec une vitesse maximale de déformation de $4 \cdot 10^{-4}$ %/s. Les déformations ont été suivies par un extensomètre (longueur 25 mm).

Ainsi les ruptures sont représentées à la Fig.2.15, ce qui montre l'excellente reproductibilité de la courbe d'endommagement et l'écart entre les valeurs à rupture qui est significatif. Au Tab.2.9, On constate que les valeurs moyennes à rupture des contraintes et déformations maximales sont très proches pour les deux séries d'éprouvettes. Les valeurs moyennes sont approximativement 300 MPa et 0,6%. On peut donc conclure que l'effet de volume est faible pour ce matériau. On remarquera que la dispersion de la déformation à rupture de ce matériau est beaucoup plus marquée que la dispersion des contraintes à rupture en raison de la pente de la courbe d'endommagement pour ce niveau de déformation.

À la Fig.2.16, les courbes de distribution des contraintes à rupture pour 1 et 8 volumes sollicités sont pratiquement superposées aux erreurs de mesure près, ce qui confirme le faible effet de volume. Le nombre d'éprouvettes est faible mais suffisant pour conclure, car tout le domaine de rupture est balayé de manière identique par les deux populations. Sur la Fig.2.16, on constate par ailleurs que la prévision d'une approche de type Weibull, en considérant le matériau comme homogène pour un passage de 1 à 8 volumes, est très loin de la courbe expérimentale. Le choix qui avait été fait, est a priori suffisant pour différencier les deux populations de ruptures. Il apparaît donc évident que l'effet de volume est beaucoup plus faible que celui prévu par le modèle de Weibull.

	Contrainte à rupture (MPa)	Déformation à rupture (%)	m_e (-)	σ_{oe} (MPa)
8x30	299 (20)*	0,59 (0,10)	17	309
16x120	294 (19)	0,55 (0,09)	20	302

Tab.2.9 Caractéristiques de la rupture ultime de deux séries d'éprouvettes en composite SiC/SiC 1% : 12 éprouvettes par taille (*: Entre parenthèses l'écart type).

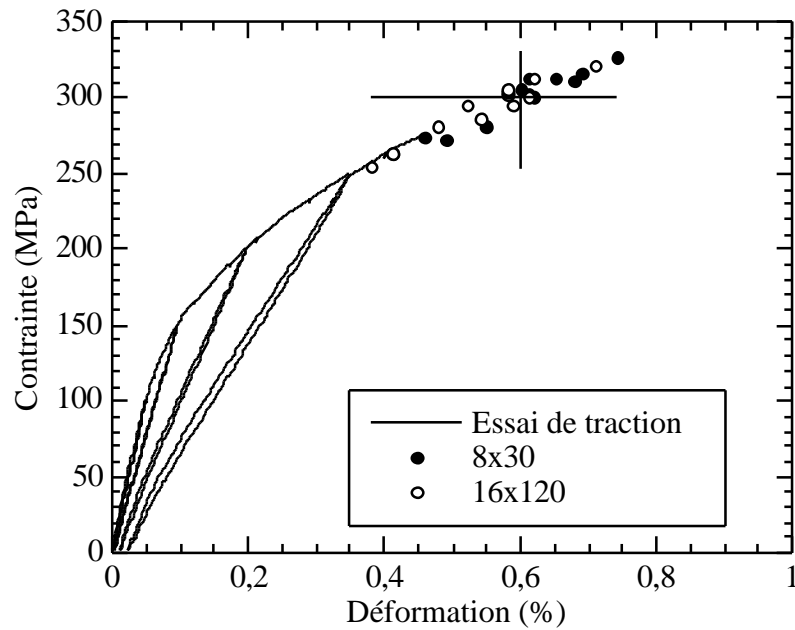


Fig.2.15 Courbe de comportement du SiC/SiC 1%. La rupture ultime est indiquée par les symboles "•" (éprouvette 8x30) et "o" (éprouvettes 16x120).

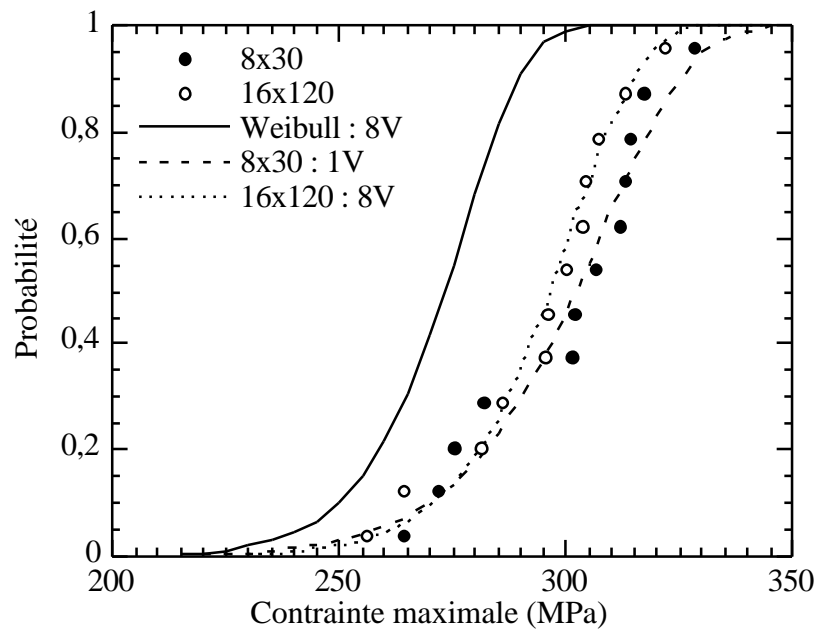


Fig.2.16 Comparaison des distributions des contraintes à rupture des éprouvettes 8x30 et 16x120. Les courbes en pointillés courts sont les ajustements des points expérimentaux "o" et "•". Le calcul de Weibull estime la distribution à rupture des éprouvettes 16x120 (8 Volume) à partir des 8x30 (1 Volume).

Ruptures successives

Des essais de ruptures successives des éprouvettes ont été effectués pour vérifier les conséquences du faible effet de volume. Les éprouvettes initiales présentaient des congés de raccordement à chaque extrémité. Techniquement, le fait de supprimer sur un coté ces congés lors d'un 2^{ème} essai (coté rupture) n'a pas été pénalisant pour les mesures, car ce composite tissé est peu sensible à la prise dans les mors.

Ainsi à partir des 24 1^{ers} essais, 19 2^{èmes} essais ont été réalisés. Les longueurs de fût des 2^{èmes} essais sont réparties entre 20 mm et 100 mm. Les résultats des valeurs moyennes à rupture (Tab.2.10) montrent un faible effet de volume. On constate une légère augmentation de la contrainte à rupture qui est difficilement exploitable et significative, compte tenu de l'incertitude de la mesure de la moyenne (± 5 MPa). Les déformations à rupture n'ont pas été reportées car l'analyse de cette valeur nécessite l'introduction de la déformation résiduelle du 1^{er} essai dans la mesure de déformation du 2^{ème} essai, ce qui n'est pas précis.

À la Fig.2.17, les distributions des contraintes à rupture des deux familles d'essais successifs montrent qu'il y a une bonne superposition des valeurs expérimentales au delà de 295 MPa. En deçà de cette valeur, les courbes se séparent ce qui peut signifier qu'il y a une légère sélection des défauts les plus gros. Ce phénomène est délicat à interpréter, et explique en partie la légère hausse de la moyenne des contraintes à rupture. Des observations au microscope électronique à balayage n'ont pas permis d'identifier les défauts à l'origine de la 1^{ère} rupture.

Afin de conclure maintenant au choix du modèle adéquat (SE ou ME), il suffit de tracer le graphe σ_1 - σ_2 (Fig.2.18) qui permet de constater que les ruptures successives ne sont pas ordonnées d'une manière identique, car les points forment un nuage de part et d'autre de la droite $\sigma_1 = \sigma_2$. Le matériau que nous avons étudié, est donc décrit par le troisième modèle : le modèle ergodique.

	L (mm)	n	Contrainte Max. (MPa)	Déf. Max. (%)	m _e (-)	σ_{oe} (MPa)
1 ^{ers} essais	30-120	24	298 (19)*	0,58 (0,09)	21	307
2 ^{èmes} essais	20-100	19	305 (13)	-	29	309

Tab.2.10 Résultats des essais successifs : 24 1^{ers} essais et 19 2^{èmes} essais (*: Entre parenthèses l'écart type).

On peut donc affirmer que le processus de rupture envisagé pour les fils, les minicomposites et le composite tissé 0,2%, n'est pas plausible pour ce matériau (1%). L'hypothèse d'une longueur de jauge fixe pour les minicomposites qui forment le composite est donc probablement plus proche de la vérité. Il est néanmoins difficile

de dire pourquoi, dans le cas du SiC/SiC 0,2%, la rupture est dictée par les fils, et pourquoi ce n'est pas le cas pour le SiC/SiC 1%.

Il est possible néanmoins d'indiquer quelques pistes à suivre. En effet, la dispersion à rupture diminue lorsqu'on passe des fibres aux composites (Fig.2.1), ce qui implique que le module de Weibull correspondant diminue, et donc que les effets de volume diminuent. Dans ce cas, on comprend que le SiC/SiC 1% qui est beaucoup plus performant que le SiC/SiC 0,2% présente une dispersion plus faible, et donc un effet de volume beaucoup plus faible.

D'autre part les variations de rigidité [Gui94] lors de l'endommagement montrent que dans le composite SiC/SiC 0,2%, la rupture ultime se produit alors que les décohésions fibres/matrice ne sont pas effectives. La limite de 0,2% correspond à la déformation à laquelle le processus de fissuration débute dans les fils [Gui94]. Par conséquent, la première rupture entraîne la rupture des fibres, et donc le composite est sensible à l'effet de volume (Voir paragraphe 2.1).

Dans le composite SiC/SiC 1%, la décohésion fibres/matrice est effective. Le faible effet de volume donne à penser que les liaisons entre fibres et fils sont faibles, voire nulles, et que les effets de partage local sont limités, voire nuls. La rupture ultime serait alors déterminée par la rupture des fils. Dans ce cas on retrouve le problème d'un ensemble de fils en série, qui comme on l'a vu (Paragraphe 2.1) semble être insensible à l'effet de volume.

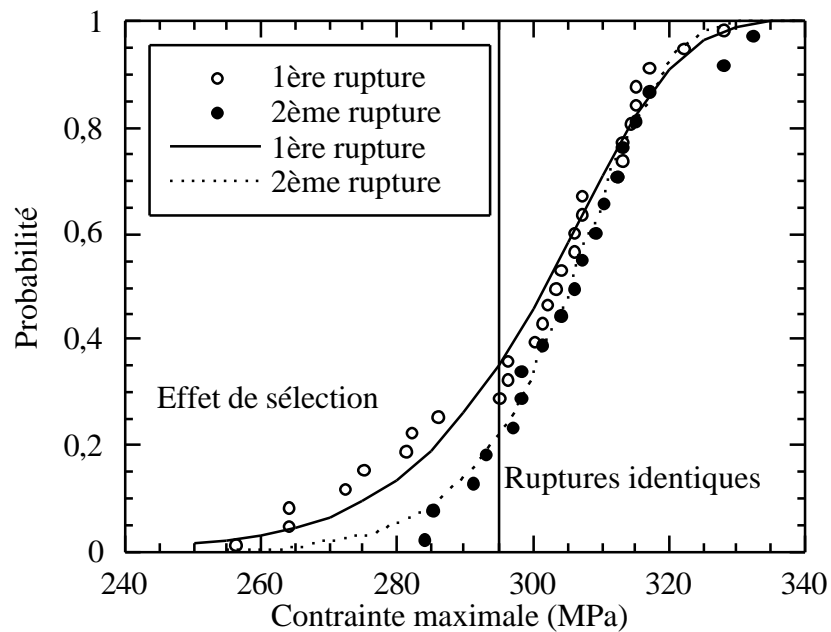


Fig.2.17 Comparaison des distributions des contraintes à rupture des 1ers et 2èmes essais.

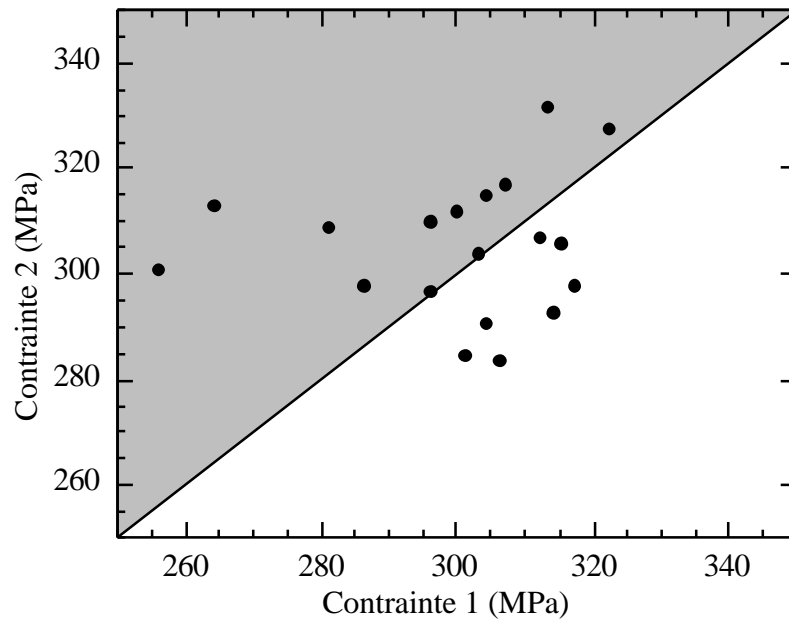


Fig.2.18 Représentation des contraintes de ruptures successives dans un graphe (σ_1 - σ_2).

2.4.c Essais de flexion (*Partie II-4*)

Il est important de valider l'approche à l'aide d'un essai présentant un champ des contraintes non-uniforme. Pour le modèle ergodique, il faut donc déterminer le paramètre de localisation m_a . Les deux autres paramètres (m_e et σ_{oe}) ont été identifiés à l'aide des essais de traction (Tab.2.9 et Tab.2.10) par la méthode du maximum de vraisemblance. On remarque que les valeurs sont peu dispersées par rapport au volume sollicité aux 1^{ers} et 2^{èmes} essais. Nous avons finalement retenu $m_e = 21$ et $\sigma_{oe} = 307$ MPa ($V_o = 1m^3$) qui provient de l'analyse de tous les 1^{ers} essais. L'identification de m_a a été faite à partir d'essais de flexion 3 points (3 Pts) en ajustant la distribution des contraintes à rupture expérimentale, à la distribution calculée à l'aide de l'équation (2.13). Ensuite les calculs ont été comparés à la distribution expérimentale des essais de flexion pseudo 4 points ("4 Pts"), qui présentent un champ des contraintes différent de la flexion 3 Pts.

Les essais de flexions 3 Pts (13 éprouvettes) et "4 Pts" (12 éprouvettes) ont été réalisés sur des éprouvettes de SiC/SiC parallélépipédiques 8 mm x 104 mm x 3,3 mm. Les déformations ont été suivies par des extensomètres placés sur la face en tension (10 mm et 25 mm pour les flexion 3 Pts et "4 Pts" respectivement). L'éprouvette est placée avec les strates de tissu verticales et parallèles à la direction de chargement, pour éviter les délaminages entre strates. L'écart des rouleaux hauts a été choisi à 80 mm. Un décalage de 100 μm a été décelé entre les deux rouleaux hauts de l'essai de flexion pseudo "4 Pts". Ce décalage n'a pas pu être corrigé, et on suppose qu'il est resté constant tout au long de l'essai puisque le montage était

absolument rigide. Néanmoins les essais de flexion pseudo "4 Pts" ont été conservés, car le champ de contraintes a pu être calculé et le décalage a pu être pris en compte dans l'analyse. Il n'y avait donc pas de raison objective d'écarter ces résultats.

Contrairement aux essais de traction, les essais de flexion doivent être dépouillés par calcul éléments finis pour des matériaux non-linéaires. En effet la théorie des poutres ne s'applique pas dans ce cas en raison de l'endommagement de la matrice. Une loi non linéaire sans couplage entre directions a été utilisée pour décrire la relation entre les contraintes et les déformations en présence de l'endommagement de la matrice ($[\sigma] = K(\epsilon) [\epsilon]$). Cette loi est issue des essais de traction suivant l'axe x avec l'hypothèse d'équilibrage entre les directions x et y (Fig.2.15).

Pour déterminer la contrainte et la déformation maximales en fonction de la force appliquée à l'éprouvette, le champ des contraintes et des déformations est calculé par éléments finis pour diverses forces appliquées. Ensuite la comparaison des courbes déformation-force expérimentales avec les courbes force-déformation maximale calculées permet de vérifier la validité des calculs. La distribution correspondante des contraintes permet de déterminer la contrainte de rupture (contrainte maximale dans l'éprouvette) qui correspond à la force de rupture.

Ainsi, au Tab.2.11, on constate le niveau élevé des contraintes et déformations à rupture obtenues pour les essais de flexion (~ 350 MPa et 1%), par rapport à celles obtenues en traction. Les dispersions mesurées sont néanmoins plus faibles, ce qui s'explique par le caractère localisé de la rupture et aussi par le niveau élevé des ruptures. La mesure des modules d'Young en flexion donne des résultats légèrement plus faibles que la traction. Ceci s'explique en partie par la mise en place des éprouvettes (mouvement des rouleaux) au début de l'essai, ce qui perturbe la mesure de rigidité.

	Module E (GPa)	Déf. max. Extenso. (%)	F. Max. Machine (N)	Contrainte Max. Elém. Finis (MPa)	Déf. Max. Elém. Finis (%)
Traction	226 (5)*	-	-	298 (19)	0.58 (0,09)
3 Pts	219 (10)	0,82 (0,07)	1090 (40)	341 (10)	0,98 (0,10)
"4 Pts"	203 (7)	0,63 (0,05)	1877 (73)	350 (11)	0,95 (0,09)

Tab.2.11 Résultats des "n" essais de flexion 3 Pts et pseudo "4 Pts" (*: Entre parenthèses l'écart type).

Les probabilités de rupture (équation 2.13) ont été calculées à l'aide du champ de contraintes obtenu par la méthode des éléments finis pour les deux types de flexion. Pour les contraintes de compression, on suppose que la probabilité de rupture est nulle, puisque le niveau de rupture en compression du SiC/SiC est très élevé (800 MPa), et n'est pas à l'origine de la rupture pour les essais de flexion.

À la Fig.2.19, les distributions des contraintes à rupture des essais de flexion sont comparées à la distribution des essais de traction. La figure 2.17 montre qu'il est possible de déterminer le paramètre m_a du modèle ergodique, de sorte que celui-ci décrive de manière satisfaisante la distribution statistique des contraintes de rupture en flexion 3 Pts. Le modèle a permis de prévoir la distribution des contraintes de rupture en flexion pseudo "4 Pts", ce qui valide le modèle et les hypothèses sur lesquelles il repose. La validation devra cependant être complétée à l'aide d'autres résultats expérimentaux.

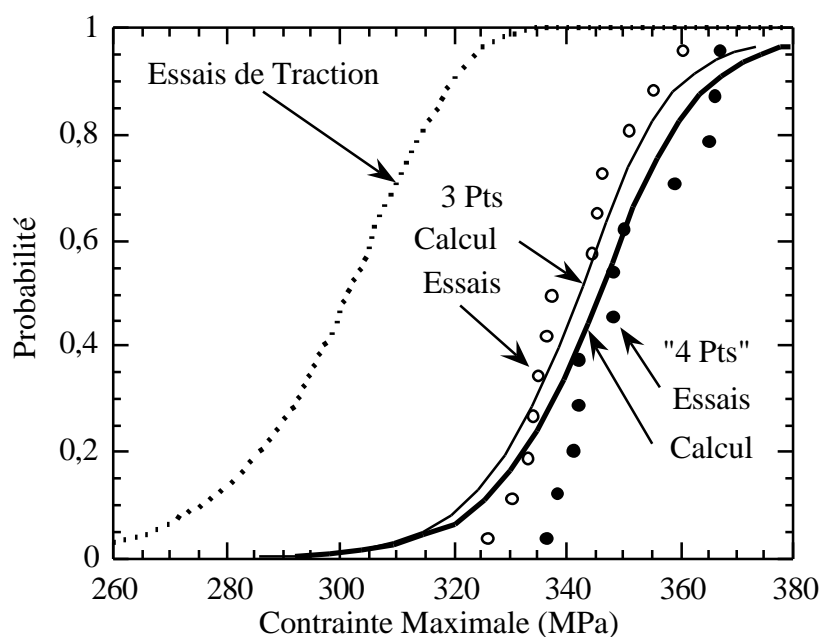


Fig.2.19 Comparaison entre les distributions expérimentales des contraintes à rupture des essais de flexion et les calculs du modèle ergodique.

Il est intéressant de noter que la rupture en flexion pseudo "4 Pts" se produit généralement à des contraintes supérieures à celles conduisant à la rupture en flexion 3 Pts. Ce résultat est décrit par le modèle ergodique qui prévoit cette tendance pour les conditions de chargement de la flexion pseudo "4 Pts". Ce résultat peut paraître paradoxal, dans la mesure où la flexion 4 Pts est généralement intermédiaire entre la traction et la flexion 3 Pts. Dans le cas idéal de la flexion 4 Pts, le modèle ergodique fournit des contraintes de rupture légèrement inférieures à celles obtenues pour la flexion 3 Pts. La tendance observée avec des essais de flexion pseudo "4 Pts" peut-être attribuée au décalage entre les points de chargement, mentionné plus haut. Le champ de contrainte est légèrement différent de celui généré lors d'un essai de flexion 4 Pts.

Le niveau élevé de rupture peut alors s'expliquer simplement. Tout d'abord, il faut admettre qu'un gradient de contrainte à l'échelle du minicomposite ne perturbe pas le niveau de rupture local du composite. Ceci s'explique comme dans le cas des fils par le faible effet d'un chargement non uniforme sur la rupture. D'autre part, l'hypothèse d'ergodicité et de localisation en terme de probabilité permet de

tenir compte des ruptures légèrement décalées par rapport au point le plus sollicité. Ainsi le matériau est capable de supporter localement de fortes concentrations de contraintes grâce au caractère ergodique du champ local.

Il apparaît ainsi que les modèles de rupture déterministes ne peuvent traiter de manière satisfaisante (sans surdimensionnement) la rupture en flexion à partir des données de traction. Le surdimensionnement est d'autant plus accentué que les essais de traction sont en général dispersés, ce qui nécessite de tenir compte des valeurs minimales de rupture. Dans le cas du SiC/SiC, la rupture minimale en traction se situe à 250 MPa et 0,4%, ce qui donne un niveau de rupture, pour un critère en contrainte maximale, au alentour de 750 N pour la flexion 3 Pts. Le modèle ergodique prévoit 950 N pour un risque de 1% sur la probabilité de rupture (coefficient de sécurité suffisant pour 13 éprouvettes seulement), ce qui est plus proche de la rupture minimale observée 1020 N.

En conclusion de cette analyse, la méthode suivie a ainsi permis de valider l'utilisation du modèle ergodique pour le calcul de la probabilité de rupture de la flexion "4 Pts" du composite SiC/SiC 1%. Il faut insister sur le fait que le choix de ce modèle a été guidé par la classification qui a été proposée et les résultats des essais d'effet de volume et de ruptures successives. Dans d'autres cas (matériaux présentant un effet de volume plus marqué tel que le SiC/SiC 0,2%), une approche de type Weibull, ou à seuil d'endommagement serait peut-être plus adéquate.

2.5. Analyse générale

Sans oublier l'objectif principal de ce travail, qui est de proposer des méthodes probabilistes pour décrire la rupture et l'endommagement, nous indiquons maintenant une méthodologie pour traiter la rupture de n'importe quel composite (C/C, C/SiC, Bois ...).

Bien évidemment, l'analyse générale que l'on propose concerne la famille des composites qui présentent une dispersion significative des propriétés à rupture en traction, ce qui est en général observé. On comprend donc que les méthodes déterministes sont délicates à mettre en oeuvre (Quel critère de rupture choisir ?), et introduisent nécessairement un surdimensionnement pour des champs de contraintes non-uniformes. La démarche est résumé à la Fig.2.20.

La première étape consiste donc à déterminer le type de rupture du composite à l'aide de la classification proposée. Ceci nécessite des essais de traction sur des volumes différents, et si possible des essais de ruptures successives. Une fois cette étape effectuée, on peut donc rapidement orienter le choix d'un modèle macroscopique vers les modèles proposés à l'aide du tableau de classification proposé (Tab.2.5) (Weibull, minicomposites le plus faible, seuil d'endommagement, ergodique ...). Bien entendu, il est important à ce moment là de revenir à une approche micromécanique pour affiner le choix, ce qui peut nécessiter l'adaptation

d'un modèle existant aux spécificités du matériau (plusieurs familles de défauts pour le modèle de Weibull par exemple).

A partir de cette première étape, on peut déjà envisager des essais de validation pour des chargements non-uniformes simples (essais de flexion, tubes...). Les principales étapes du calculs sont alors :

- Calcul du champ des contraintes et des déformations du matériau homogène équivalent.
- Prise en compte de l'influence de l'endommagement sur le champ des contraintes.
- Calcul de la probabilité de rupture à l'aide du champ des contraintes calculés, en fonction du modèle retenu et des paramètres statistiques identifiés.

L'étape suivante est évidemment le passage à un chargement mutli-axiale et non-uniforme de l'éprouvette. Dans l'étude qui a été faite (modèle ergodique), ce passage n'a pas été effectué. On peut citer néanmoins, à titre d'exemple, que pour des matériaux céramiques monolithiques, l'approche de Weibull a fait l'objet de travaux qui ont permis de prendre en compte ce type de chargement [Lam83].

En ce qui concerne le modèle ergodique, il est possible d'étendre les calculs au cas du chargement multi-axial en considérant par exemple un critère en contrainte équivalente ou le concept de la contrainte élémentaire, ce qui est communément réalisé pour les composites. Le choix du critère de rupture est en général dicté par la structure du matériau (macropores et effet de la contrainte hydrostatique), les équilibres entre les directions du matériau (termes quadratiques), la différence compression-traction (termes linéaires), ou les couplages des contraintes (termes croisés). Les critères suivants sont proposés dans la littérature , et sont donnés à titre d'exemple :

$$\text{Hill : } F_{ij}\sigma_i\sigma_j = 1 = \left(\frac{\sigma_e}{K}\right)^2 \quad (i,j) = 1,2,3,4,5,6$$

$$\text{Tsai-Wu : } F_1\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j = 1 = \left(\frac{\sigma_e}{K}\right)^2 \quad (i,j) = 1,2,3,4,5,6$$

Il est alors possible de définir une contrainte équivalente σ_e par rapport par exemple à la résistance sur un axe du matériau K.

La première hypothèse à formuler est que la contrainte équivalente choisie suit un champ local critique ergodique, et donc que toutes les équations qui ont été données s'appliquent avec cette contrainte. Cela suppose ainsi que le critère du maillon le plus faible qui est utilisé dans ce cas s'applique pour toutes les directions de sollicitation. La difficulté qui apparaît alors est de définir la distribution statistique de la contrainte équivalente à rupture.

Par rapport à cette première approche, on peut réduire l'hypothèse de la contrainte équivalente en considérant des mécanismes différents de rupture suivant les axes de sollicitation ou la nature de la contrainte appliquée (cisaillement, traction...). Ceci revient à dire que, suivant les axes, la rupture est de type fragile (maillon le plus faible), ergodique, ou non dispersée et définie alors par un critère déterministe de rupture ($\sigma < \sigma_r$). Il faut alors découpler tous les mécanismes suivant les axes, et dire que la rupture est atteinte lorsqu'au moins un des critères est rempli. On projette le champ des contraintes suivant les axes du matériau et on considère les directions indépendamment. On remarque qu'une telle méthode s'adaptera aisément dans le cas d'un critère fondé sur le minicomposite le plus faible (Probabilité de rupture maximale). Dans le cas du maillon le plus faible, la probabilité de survie est alors le produit des probabilités de survie des éléments de rupture.

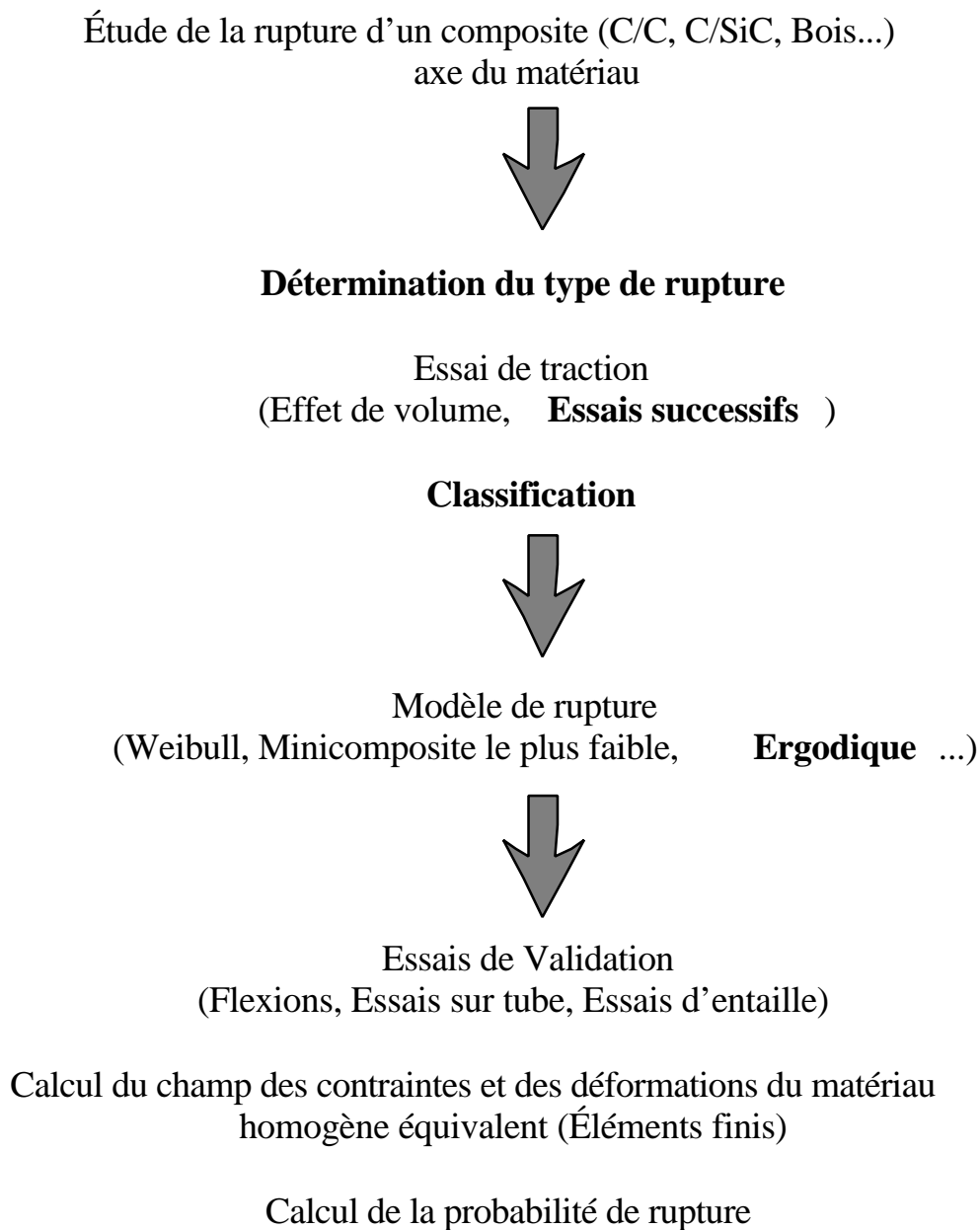


Fig.2.20 Schéma d'analyse de la rupture d'un matériau (En gras : apport nouveau de ce travail de thèse).

Le passage au champ de contraintes multi-axiales nécessitera des essais sous chargement complexe, ce qui est très souvent le premier obstacle à résoudre : chargement bi-axial, cisaillement, traction-cisaillement. En effet, l'analyse de ces essais nécessite l'utilisation de modèles de comportement souvent complexes. Ce sont donc avant tout ces calculs sur des matériaux homogènes équivalents qui fournissent les contraintes et les déformations du matériau que l'on utilisera pour les calculs de fiabilité. Il faut donc qu'ils soient validés.

Références

- [Aub92] X. Aubard, "Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D SiC/SiC", Thèse, Université de Paris 6, 1992.
- [Bat82] S. B. Batdorf and R. Ghaffarian, "Tensile strength of unidirectionally reinforced composites- I and II", J. Reinforced plastics and composites", Vol. 1, pp 153-176, 1982.
- [Bax94] C. Baxevanakis, "Comportement statistique à rupture de composites stratifiés", Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [Ber92] J.-M. Berthelot, "Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures", Edité par Masson, Paris, 1992.
- [Bob96] J.-L Bobet, R. Naslain et C. Bernard, "On the CVD of MoSi₂- 1 : Choice of the precursor and thermodynamic considerations", J. Chem. Vapor Deposition, Vol. 3, n° 3, pg 223-253, 1996.
- [Boy97] C.M. Boyer, "Composites unidirectionnels : modèles probabilistes de rupture et évaluation de la fiabilité", Thèse, n° 928, EDSPIC 138, Université de Clermont II, 1997.
- [Car96] P. Carrere, "Comportement thermomécanique d'un composite de type SiC/SiC", Thèse, n° 1592, Université de Bordeaux I, 1996.
- [Col58] B. D. Coleman, "On the strength of classical fibers and fibers bundle", J. Mech. Phys. Solid., Vol. 7, pg. 60-70, 1958.
- [Dan45] H. E. Daniels, "The statistical theory of the strength of bundles of threads I", Proc. R. Soc., Vol. A183, pg. 405-435, 1945.
- [Das96] C. Das Neves, "Modélisation probabiliste des fissures succesives dans les matrices céramiques des matériaux composites", Rapport de DEA, Mathématiques Appliquées, Université Bordeaux I, LCTS, 1996.

- [Dro95] C. Droillard, J. Lamon et X. Bourrat, "Strong interface in CMCs, a condition for efficient multilayered interphases", *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.*, Vol. 395, pg 371-376, 1995.
- [Gui94] L. Guillaumat, "Microfissuration des CMC : Relation avec la microstructure et le comportement mécanique", Thèse, n° 1056, Université de Bordeaux I, 1994.
- [Har81] D. G. Harlow & S.L. Phoenix, "Probability distributions for the strength of composite materials I : two-level bounds ", *Int. J. of Fracture*, Vol. 17, n° 4, pg 341-372, 1981.
- [Hed67] J.M. Hedgepeth & P. Van Dyke, "Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials", *J. Composite Materials*, Vol. 1, pg 294-309, 1967.
- [Hil94] F. Hild, J.M. Domergue, F.A. Leckie & A.G. Evans, "Tensile and flexural ultimate strength of fiber-reinforced ceramic matrix composites ", *Int. J. Solids Structures*, Vol 31, n° 7, pg 1035-1045, 1994.
- [Hut90] J.W. Hutchinson et H. Jensen, "Models of fiber debonding and pull-out in brittle composites with friction", *Mech. Mater.* Vol. 9, pg 139-163, 1990.
- [Jeu92] D. Jeulin, " Random functions and fracture statistics models ", *Proc. of the 4th Int. Geostatistics Cong.*, Troia, 13-18 Sept., Portugal, pg 225-236, 1992.
- [Ker98] R. Kerans, T. Parthasarathy, F. Rebillat et J. Lamon, "Interface properties in high-strength Nicalon/C/SiC composites, as determined by rough surface analysis of fiber push-out tests", *J. of Am. Ceram. Soc.*, Vol. 81, n° 7, pg 1881-1887, 1998.
- [Lam83] J. Lamon and A. G. Evans, 1983, "Statistical analysis of bending strength for brittle solids : A multiaxial fracture problem", *J. of Am. Ceram. Soc.*, Vol. 66, n° 3, pg 177-182, 1983.
- [Lam95a] J. Lamon, "La rupture des céramiques", *La Revue de Métallurgie, CIT/Science et Génie des matériaux*, pg 265-284, 1995.
- [Lam95b] J. Lamon et B. Thommeret, "Numerical simulation of the non-linear stress-strain behavior of SiC/SiC composites", *HT CMC-1 : Design, Durability and performance* (A.G. Evans et R. Naslains, eds), *Ceram. Trans.*, Vol. 57, 1995.
- [Lam95c] J. Lamon, F. Rebillat et A.G. Evans, "Microcomposite test procedure for evaluating the interface properties of ceramic matrix composite", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 78, n° 2, pg 401-405, 1995.

- [Leb96] G. A. Lebrun, "Comportement thermomécanique et durée de vie des composites à matrice céramique : Théorie et expérience", Thèse, n° 1606, Université Bordeaux I, 1996.
- [Lis94] N. Lissart, "Probabilité de rupture et fiabilité des composites à matrice céramique", Thèse, n° 1207, Université de Bordeaux I, 1994.
- [Lis97] N. Lissart et J. Lamon, "Damage and failure in ceramic matrix minicomposites : experimental study and model", Acta mater., Vol. 45, n° 3, pg 1025-1044, 1997.
- [Lob89] N. Lob, "Relations entre microstructure et comportement mécanique des composites SiC/SiC : études de la nature et du rôle de l'interface fibre-matrice dans les matériaux mono et multifilamentaire", Thèse, Université de Paris Sud (Centre d'Orsay), 1989.
- [Mun94] E. Munier, "Identification expérimental et modélisation statistique multi-échelle du comportement mécanique de composites SiC/SiC tissés", Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1994.
- [Smi93] R.L. Smith, S.L. Phoenix, M.R. Greenfield, R.B. Henstenburg et R.E. Pitt, "Lower-tail approximations for the probability of failure of three-dimensional fibrous composites with hexagonal geometry", Proc. R. Soc. Lond., A 388, pg 353-391, 1983.
- [Vig95] G.L. Vignoles et L. Ducasse, "A cluster approach for the modelling of the later-by-layer growth of SiC polytypes", J. Phys. Chem, Vol. 99, pg 5402-5412, 1995.

Conclusion

Conclusion

En ce qui concerne le comportement des CMCs, il est maintenant admis que le comportement mécanique résulte de la fragmentation matricielle qui est à l'origine de la forte non-linéarité observée lors des essais de traction. Une approche micromécanique fondée sur la population de défauts critiques au sein de la matrice a permis de généraliser les méthodes jusque là utilisées pour simuler le comportement mécanique des minicomposites en traction. Elle a permis de déduire des résultats d'essais de traction, les caractéristiques de la population de défauts critiques présents dans des composites unidirectionnels formés de fibres SiC infiltrés par CVI d'une matrice SiC.

L'étape suivante a consisté à étendre le concept de population de défauts en l'appliquant aux populations critiques de défauts présents dans le composite 2D tissé. On peut considérer trois familles de défauts dans la matrice qui génèrent des fissures matricielles à des niveaux de charges différents : les macropores, la microporosité des fils transverses, et les défauts matriciels dans les fils longitudinaux. Le comportement mécanique d'une cellule de composite a alors été simulé par éléments finis en introduisant dans les éléments correspondant aux fils soit longitudinaux soit transverses, les différentes populations de défauts. Ceci a permis de démontrer que l'endommagement du composite est homogène, et que l'on retrouve bien le comportement mécanique expérimental macroscopique à partir des propriétés micromécaniques de la structure et des constituants. Cette approche est pour l'instant limitée aux axes du matériau car l'homogénéisation d'un composite fissuré, qui est à la base du passage micro-macro, n'est pas satisfaisante hors des axes du matériau. L'approche proposée présente de nombreux avantages. Ainsi il est possible de simuler l'effet de la fraction volumique des fibres sur le comportement mécanique. On a démontré aussi que l'amélioration des propriétés mécaniques du composite passe par une réduction de l'effet des deux premières familles de défauts ainsi que l'amélioration des propriétés transverses de la liaison fibre-matrice.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de la rupture des CMCs, présentant une dispersion des propriétés à rupture, suivant une approche micro-macro. Nous proposons donc tout d'abord l'étude de la rupture d'un fil de fibres à partir des propriétés des fibres, ce qui permet d'introduire assez simplement des notions telles que le partage local ou global de charge et la non-uniformité du chargement entre fibres ainsi que l'influence de ces effets sur la force ultime à rupture. Il est apparu, que le partage local de charge est l'effet le plus pénalisant pour la rupture du fil, et que c'est surtout une source très importante de dispersion. L'étude du fil a montré la grande complexité de l'approche micromécanique de la rupture, due en partie à la modélisation du partage local de charge et au temps de calcul des simulations.

Néanmoins, le fil fournit une représentation assez fidèle du minicomposite proche de la saturation matricielle. Ceci nous a permis d'expliquer la dispersion des contraintes à rupture, et de mettre en évidence un effet de volume dans les

minicomposites, ce qui confirme certains travaux réalisés au laboratoire [Lis97]. Le composite 2D tissé doit donc présenter des effets de volume si le mécanisme de rupture repose sur la rupture de l'ensemble des minicomposites soumis eux aussi au partage local de charge. Cette approche micromécanique est apparue limitée à certains types de ruptures (rupture fragile du SiC/SiC 0,2%, partage local de charge excellent ...) qui ne sont pas nécessairement représentatifs de tous les types de rupture que l'on peut rencontrer dans les composites.

En vue d'une approche plus globale applicable à n'importe quel composite, la modélisation de la rupture s'est orientée vers une approche macroscopique. Pour cela, une classification des types de rupture dispersée a été élaborée afin d'établir une méthodologie de choix du modèle macroscopique de rupture à adopter pour le dimensionnement d'une pièce. Cette classification est basée sur la mesure de l'effet de volume du matériau par rapport à la rupture, et la mesure de ruptures successives d'une même éprouvette. Trois types de rupture ont été définis. Les modèles actuels de calcul de probabilité de rupture qui peuvent se résumer au modèle du lien le plus faible (Approche de type Weibull) et au modèle du seuil d'endommagement, permettent de traiter les deux premiers types, à savoir respectivement les matériaux présentant un effet de volume, et les matériaux sans effet de volume avec des ruptures successives égales. Le troisième cas correspond au matériau sans effet de volume avec des ruptures successives non-ordonnées identiquement. Ce cas a été traité à l'aide d'un modèle probabiliste fondé sur l'ergodicité du champ des contraintes critiques locales. Cette notion d'ergodicité s'explique par la très grande complexité du champ critique local due à la fragmentation matricielle, ainsi que par la sensibilité aux conditions initiales observée dans certains cas de partage de charge pour le système fil. Le modèle ergodique a été étendu au cas d'un champ macroscopique non-uniforme en introduisant la notion de localisation de rupture.

Cette classification a été appliquée au cas d'un composite SiC/SiC. Il présentait un faible effet de volume et des ruptures successives non-ordonnées identiquement. La rupture est décrite par le modèle ergodique. Nous avons réalisé des essais de flexion pour valider l'approche proposée au cas d'un chargement non-uniforme plus proche d'une condition réelle d'utilisation. En identifiant le paramètre de localisation à l'aide d'essais de flexion 3 points, les calculs ont permis de retrouver le niveau élevé de rupture d'essais de flexion pseudo 4 points. L'approche ergodique est donc validée dans le cas du composite SiC/SiC.

La suite de ce travail, consiste à appliquer l'approche proposée à d'autres matériaux (C/C, C/SiC, Bois ...). Il serait intéressant de généraliser l'approche ergodique au cas multi-axial, en s'inspirant de ce qui a déjà été fait pour les autres modèles, en introduisant par exemple la notion de contrainte équivalente.

Partie II :
Projets de Publication

Partie II - 1

Simulation of matrix cracking in unidirectional ceramic composites (minicomposites)

V. Calard & J. Lamon

Résumé : Nous proposons dans ce chapitre trois modèles micro-mécaniques de fragmentation de la matrice dans un composite unidirectionnel de type SiC/SiC, formé de 500 fibres. Les trois modèles sont fondés sur l'aspect probabiliste de la fragmentation matricielle. Le premier modèle (modèle itératif) est fondé sur une approche de type Weibull pour obtenir la contrainte à rupture moyenne d'un volume V de matrice. Le deuxième modèle (modèle des volumes indépendants) est basé sur la division de la matrice en volumes élémentaires, vérifiant l'équation de Weibull. La probabilité de Weibull indique alors le nombre de volumes fissurés. Le troisième modèle (modèle de population de défauts) que nous proposons, est fondé sur la notion de population de défauts critiques. Les trois modèles ont été appliqués à des minicomposites SiC/SiC. L'étude de la variabilité de la fraction volumique de matrice a permis de simuler la dispersion des essais. Il a été démontré par ailleurs que la population de défauts à l'origine de la fragmentation matricielle était directement liée au taux de dépôt de la matrice.

Mots clefs : micro-mécanique, minicomposite, fragmentation, défauts, Weibull.

Simulation of matrix cracking in unidirectional ceramic composites (minicomposites)

1. Introduction

The reliability of ceramic matrix composites (CMCs) is defined mainly by the probabilistic character of the matrix damage and of the fibre failure. It has been established that the behaviour of CMCs is characterised by three main stages [Gui93], which has been confirmed by the studies of unidirectional SiC/SiC composites (1D SiC/SiC) and woven SiC/SiC composites (2D SiC/SiC). The first stage can be defined as the linear behaviour without matrix damage. During the second stage, damage consists of cracks initiated at large inter-yarn pores, located between the plies, and then of cracks formed in the transverse yarns. After this first damage process, the matrix fragmentation, initiated by the surface and volume flaws, occurs in the bundles oriented in the loading direction (longitudinal bundles) and controls the stress-strain behaviour. The second stage stops when the matrix is totally damaged. Then only the fibres are loaded and the strain-stress behaviour becomes linear, which is the third stage.

In this paper, the matrix fragmentation is investigated on an unidirectional composites elaborated by a chemical vapour infiltration of bundles of 500 SiC fibres by a SiC matrix. The chemical structure of this unidirectional composite is close to that of bidirectional composites using the same vapour infiltration conditions. Those unidirectional composites were tested by Lissart [Lis97], and then these data were used for the theoretical modelisations of this paper.

In literature, several works have investigated the matrix fragmentation process and the fibre failure. Actually the SiC matrix exhibits further random phenomena like the first crack threshold or the crack number and locations. Thus, the most works have been mainly concerned with the onset of matrix cracking such as the works of Aveston et al [ACK71] and Budiansky et al [Bud86]. The ACK model was resumed by Beyerle et al [Bey92] and Kuo et al [Kuo95], contrary to Weitsman et al [Wei93], who improved the energy model of Budiansky et al. The classical statistical cracking models, like the Weibull theory [Wei51, Gum54], and more recently Batdorf et al [Bat79] and Lamon et al [Lam83] can be applied to the matrix volume under loading, and yielded some matrix fragmentation models [Spe93, Cho92, Eva94]. Nevertheless, the statistical approach was used more frequently for the ultimate composite failure [Bat81, Pho93, Sch90, Cur91, Sut88, Bat88]. A combined approach was made by Marshall et al [Mar85] and Danchaivijit et al [Dan93] in studying the matrix cracks bridged by fibres. These works were improved by a better understanding of the local load sharing between fibres and interfacial shear properties between matrix and fibres [He93].

The present paper proposes three matrix fragmentation models based on the probabilistic cracking behaviour of the SiC matrix to calculate the strain-force curve of unidirectional composites.

The first model, which was first proposed by Laurent Guillaumat [Gui93] and Nathalie Lissart [Lis97], considers the Weibull ceramic cracking function applied directly to the matrix volume under loading. The second model is a consequence of the works of Lebrun and Cho et al. [Leb96, Cho92]. The matrix is subdivided into elementary volumes which are calculated by the debonding length between matrix and fibres. Then the Weibull ceramic cracking function of an elementary matrix volume gives the number of damage volume, and so the number of matrix cracks for a definite applied load. The last model, which is probably the most fundamental, considers the description of the distribution of fracture-inducing flaws using a Beta-function. This approach can be compared with the works of Jayatilaka et al [Jay77] concerning the statistical approach to brittle fracture. Therefore the strain-force behaviour is function mainly of this parameter and others : debonding length, shear modulus between matrix and fibres ...

All those models have been used for predicting the mechanical behaviour of SiC/C/SiC unidirectional composites. These predictions have also been compared to experimental data. The hypotheses of all those models have then been discussed, and all the models have been compared using the flaw population induced by the calculation.

2. Models of matrix fragmentation

The proposed models recognise the basic statistical aspects of matrix brittle failure using different hypothesis for the matrix flaws in the case of an unidirectional composite with long fibres, introduced below.

2.1. Matrix fragmentation in minicomposites

Matrix cracking in minicomposites as well as in infiltrated fibre bundles within practicals CMCs, involves cracks that initiate from the pre-existing flaws and then propagate catastrophically through the cross-section. Experiments show that in a minicomposite test specimen loaded in tension parallel to the fibre axis, transverse cracks form sequentially in the matrix at increasingly applied stresses. Each crack propagates unstably through the matrix and perpendicular to the fibres, and then deflects in the fibre/matrix interphase. The matrix thus becomes subdivided into fragments which are like tubes in shape, as shown on Fig.1 and Fig.2, since the matrix and the fibres cross sections are uniform. Formation of a matrix crack causes debonding of the fibres over a distance l_d . A matrix crack appears in the portion of matrix located between two debonds. Saturation of matrix cracking occurs when the

debond is continuous along the minicomposites.

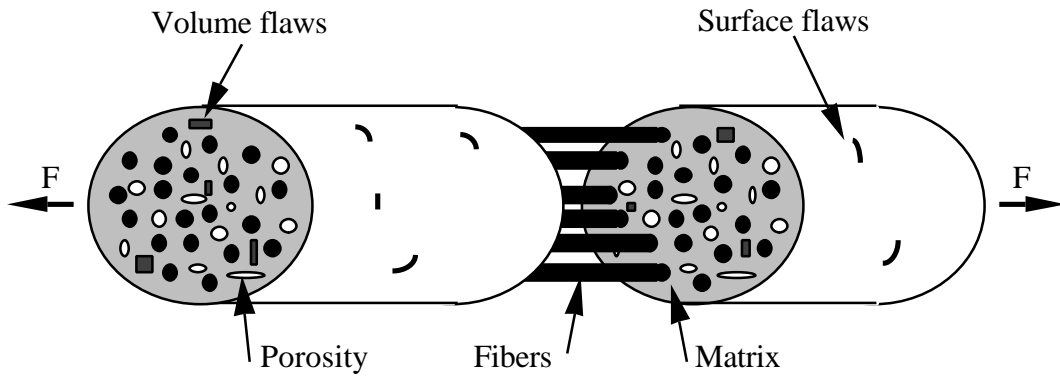


Fig.1 Unidirectional composite structure.

The load transfer along the debond (debond length = l_d) involves an interfacial shear stress (τ) which is assumed to be uniform. Minicomposites deformations are dictated by the fibres. The fibres fail only once, at high loads near ultimate failure [Lis97]. The bond between the fibres and the matrix is assumed to be perfect prior to debonding. Then debonding induces stress gradients in the fibres described by the shear lag model (Fig.3) with the following equations :

$$\sigma_f(z) = \sigma_{f,\max} - \frac{2\tau}{R_f} z \quad 0 \leq z \leq l_d \quad (1)$$

$$\sigma_f(z) = \sigma_{f,\min} \quad l_d \leq z \quad (2)$$

$\sigma_{f,\min}$ is the axial stress in the bonded portion of the fibre. It is given by the rule of mixture (3), and $\sigma_{f,\max}$ is the longitudinal maximal fibre stress when the matrix is completely unloaded (4) (F is the applied force, S is the composite cross sectional area, $x_f = E_m V_m / E_f V_f > 0$ is the composite fibre parameter, and V_f is the fibre volume fraction).

$$\sigma_{f,\min} = \frac{F}{S \cdot V_f \cdot (1 + x_f)} \quad (3)$$

$$\sigma_{f,\max} = \frac{F}{S \cdot V_f} \quad (4)$$

The residual stresses induced by cooling down from the processing temperature have been demonstrated to be negligible in SiC/SiC minicomposites [Leb96].

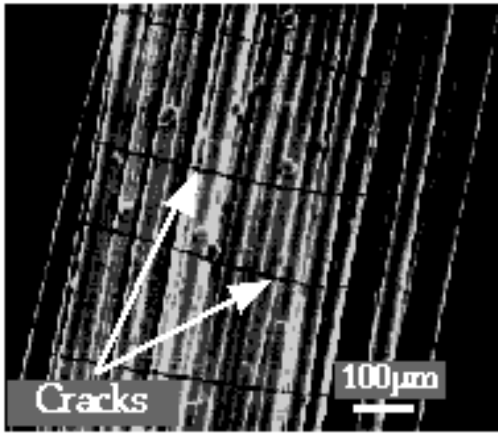


Fig.2 Minicomposite with cracks.

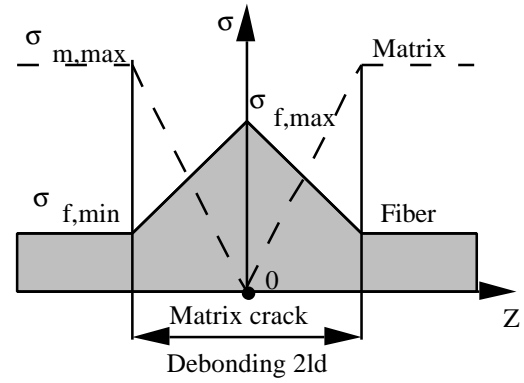


Fig.3 Shear lag model of the debonding area.

The debonding length is given by the equilibrium between the applied load in the fibre and the load transferred by shear between matrix and fibres :

$$2l_d = \frac{R_f}{\tau} (\sigma_{f,max} - \sigma_{f,min}) \quad (5)$$

The ultimate failure was supposed to occur at 1% total strain for the simulations. Finally, the fibres are assumed unbreakable during the calculations.

2.2. Iterative Weibull model

This model is based on the Weibull failure probability $P(\sigma)$ with two parameters (σ_0 and m). At a step i of the calculation, for an uncracked volume of matrix V_{ij} subjected to a uniform stress σ (Fig.4), this probability is wrote as follow:

$$P(\sigma) = 1 - \exp\left(-V_{ij} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (6)$$

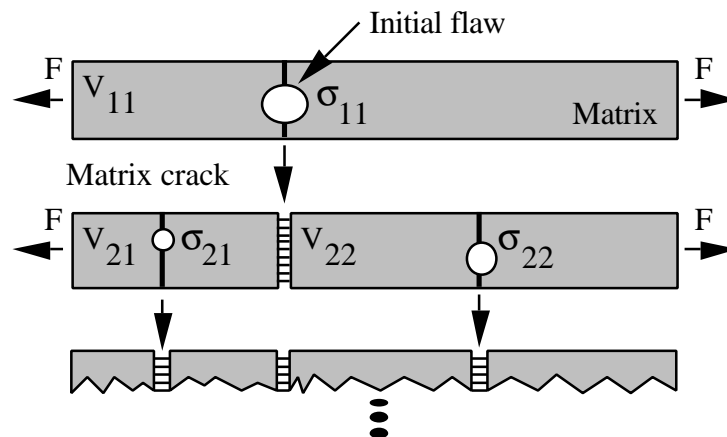


Fig.4 Iterative Weibull cracking process.

From (6), we deduce the mean failure stress σ_{ij} for a matrix volume V_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_0 \cdot \Gamma(1 + 1/m)}{V_{ij}^{1/m}} \quad (7)$$

Due to size effects, the matrix mean failure stress increases as the matrix fragments become smaller and smaller. The fragmentation simulation is then conducted by iteratively incrementing the applied force F in the composite. At each step of fragmentation (Fig.4), the mean failure stresses are evaluated for all the matrix volumes. The critical volumes exhibit strengths smaller than the applied stress, and so a matrix crack is generated in these fragments at random location. This process is iteratively done until the saturation of all the matrix occurs. Nevertheless, we must admit that the matrix Weibull parameters are constant regardless the matrix volume and the fragmentation step.

Thus, for an applied stress, the number and the location of matrix cracks are evaluated. The associated debond lengths are calculated which allows the determination of the stress field operating on the fibres, and allows the calculation of composite strain.

2.3. Independent volume model

Contrary to the Weibull model, the matrix is subdivided first into identical elementary volumes (Fig.5), which represent breakable matrix section. These elementary volumes V are evaluated experimentally by the mean distance between two matrix cracks, which accounts for the debonding length. Moreover, they are supposed independent and large enough to apply the Weibull failure probability (3) with two parameters (m and σ_0).

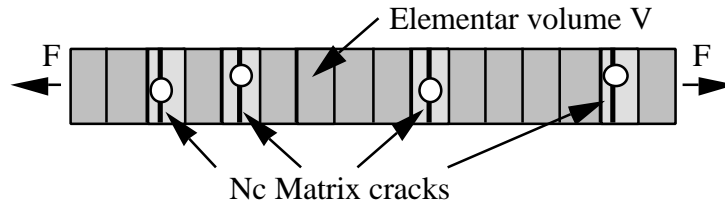


Fig.5 Independent volume cracking process.

Then, when the number of volumes N_t is high, this equation gives the accurate number of failed volumes N for an applied load :

$$\frac{N}{N_t} = P(\sigma) = 1 - \exp\left(-V(\sigma / \sigma_0)^m\right) \quad (8)$$

The crack locations are taken at random into the elementary volumes, and the stress field in fibre is evaluated as in the Weibull model in order to calculate the total strain.

2.4. Flaw population model

The notion of critical flaw population has been introduced in this model to reduce the hypothesis of the two first models. Actually, the iterative model does not account for the fragmentation history during the load, and the independent volume model is not accurate when the number of critical flaws is too small in an elementary volume, which is incompatible with the extreme value theory of Weibull.

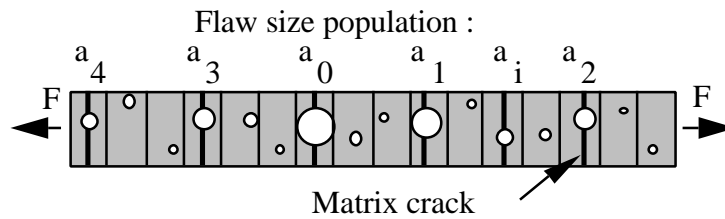


Fig.6 Critical flaw population.

Nevertheless, the failure probability (3) is supposed available for the onset of matrix cracking in accordance with the works of Weibull [Wei51] and Gumbel [Gum54]. The uncracked matrix is then subdivided into elementary volumes (Fig.6) as in the case of the independent volume model and the critical flaw population characterises the largest flaw of each volume. The elementary volume is small and equal to $8 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$. It was evaluated by measuring the smallest crack spacing distance (about $20 \text{ }\mu\text{m}$) during a tensile test on an unidirectional composite [Lis97].

A Beta density function $f_{\alpha,\beta}(x)$ with two parameters α and β was chosen to determine this critical flaw population :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9)$$

with the undimensional parameter $x = a/a_w$, where a is the current flaw size and a_w is the largest mean flaw evaluated by the following equations for the initial matrix volume with the classical failure mechanics :

$$\sigma_w = \frac{\sigma_o \cdot \Gamma(1 + 1/m)}{V^{1/m}} \quad (10)$$

$$a_w = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_w} \right)^2 \quad (11)$$

$\Gamma()$ is the classical Gamma function ($\Gamma(x+1)=x!$), and K_c the matrix toughness. The beta function is a bell curve where α characterises the smallest x near zero and β the greatest x near one. In terms of stresses, a change of variable is used (Fig.7) :

$$\sigma = K_c \frac{1}{\sqrt{\pi a}} = \sigma_w \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

which gives the stress flaw population density $g_{\alpha,\beta}(y)$:

$$g_{\alpha,\beta}(y) = 2 \cdot \frac{f_{\alpha,\beta}(1/y^2)}{y^3} \quad (13)$$

with the undimensional stress parameter $y = \sigma/\sigma_w$.

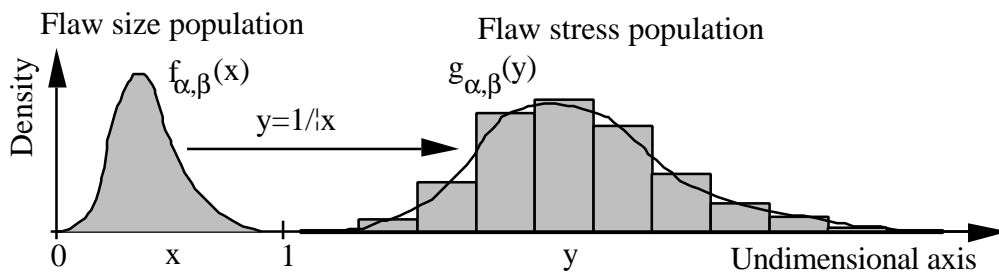


Fig.7 The Beta function with the change of variable.

Then this equation (13) gives the local strength population which is located at random for each elementary volume before the calculation. The fragmentation simulation is then conducted as in the iterative Weibull model. All the elementary volumes, with local strengths smaller than the applied stress, are broken with a crack location taken at random in the volume. This process is iteratively done until the saturation of all the matrix occurs. Finally, the stress field on fibre is calculated which yields the total strain of the composite.

3. Numerical simulations

3.1. Strain-force curve calculation

The strain-force behaviour is controlled by the stress field operating on the fibres. The stress field (Fig.8) is defined directly by the matrix crack number and location. An interaction between two debonding zones was supposed to describe the decrease of the shear stress between matrix and fibres. The strain calculation is then based on the integration of the stress field along the fibres.

Commonly, without any damage, the rule of mixture is supposed available

to estimate the unidirectional composite strain and the homogenised Young's modulus ($x_f = E_m V_m / E_f V_f > 0$ is the composite fibre parameter) :

$$E_c = E_f V_f (1 + x_f) \quad (14)$$

When the matrix fragmentation is saturated and the matrix is totally unloaded, the fibres dictated the deformations, and the Young modulus tends to :

$$E_s = E_f V_f \quad (15)$$

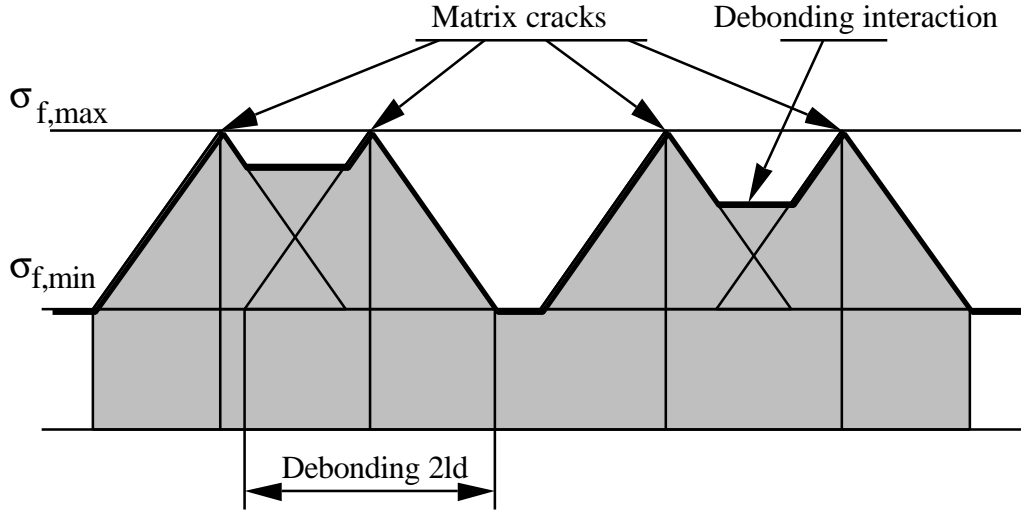


Fig.8 Stress field induced by the matrix cracks in fibres.

Nevertheless, before the total saturation, the integration of the stress field (Fig.8) is performed to evaluate the total elongation :

$$\Delta l_c = \frac{1}{E_f} \int_0^{l_c} \sigma_f(z) dz \quad (16)$$

This integration can be written with two terms :

$$\Delta l_c = l_c \frac{\sigma_{f,\min}}{E_f} + N_c \frac{2}{E_f} \int_0^{l_d} (\sigma_{f,\max} - \sigma_{f,\min}) \left(1 - \frac{z}{l_d}\right) dz \quad (17)$$

where N_c is the number of cracks. The following Young's modulus is then obtained :

$$E(N_c) = E_f V_f \frac{(1 + x_f)}{(1 + (l_d / l_c) \cdot N_c x_f)} \quad (18)$$

At the onset of saturation, this number can be computed by a Monte Carlo method. The simulation consists in locating at random matrix cracks out of all the

debonding zones till saturation. When the debonding length l_d is very small compared to the composite length l_c , the number of crack at saturation is approximately equal to $1.5 l_c / 2.l_d$. Finally, the Young's modulus at onset of saturation is :

$$E_{os} = E_f V_f \frac{(1 + x_f)}{(1 + 3x_f / 4)} \quad (19)$$

It can be noticed that the above Young's modulus E_{os} is greater than the only-fibres-loaded Young's modulus E_s , which can be explained by the matrix role at onset of saturation. Consequently the below inequality is easily obtained :

$$E_c > E(N_c) > E_{os} > E_s \quad (20)$$

Then, the strain-stress behaviour is determined by calculating the number of cracks N_c in minicomposites for each model of matrix fragmentation at a given stress σ , and by applying the classical relation : $\varepsilon = E(N_c(\sigma)) / \sigma$. In this case, the number of cracks depends on the stress.

3.2. Simulation algorithm

The calculation was computed with the above algorithm (Fig.9). For the iterative and independent volume models, the simulations were directly obtained from the material data, which means that this two models are models predicting strain-force behaviour. For the flaw population model, a converging loop is used to estimate the beta function parameters α and β . Thus, this model can be considered as a strain-force behaviour analysis model to estimate the matrix flaws induced by the elaboration process. The parameters required for the simulations are :

(i) Fibre and matrix Young's moduli : $E_f = 180$ GPa and $E_m = 350$ GPa.

The fibre modulus is taken to be equal to the bundle modulus, which takes into account the fibre failure during elaboration [lis94];

(ii) Fibre and matrix volume fractions, respectively V_f and V_m . These parameters are calculated using the composite elastic Young modulus assuming the rule of mixture. The number of fibres and mean fibre radius are known which allows the fibre cross sectional area evaluation S_f . The composite fibre parameter x_f is then given by :

$$x_f = \frac{\Delta F}{S_f E_f \Delta \varepsilon} - 1 \quad (21)$$

which yields the fibre volume fraction :

$$V_f = \frac{E_m}{x_f E_f + E_m} < 1 \quad (22)$$

(iii) The matrix statistical parameters m_m and σ_{om} . They are estimated by analysing the statistical distribution of stresses at onset of matrix cracking [Lis97];

(iv) The interfacial shear stress τ : It is evaluated during an unloading-reloading test using the widths of hysteresis loops with the Lamon-Rebillat-Evans model [Lam95]. An another rapid method consists in measuring the number of cracks N_c at matrix saturation, which gives the mean debonding length $l_d = 1.5l_c/N_c$, and the interfacial shear stress (5);

(v) Beta function parameters α and β : These two parameters are evaluated by a converging loop in the calculation. When all the other parameters are chosen, the area between the experimental and calculated strain-force curve is estimated with the parameter α and β . The convergence is then obtained when this area is under a defined criteria (1% of total area under strain-force curve).

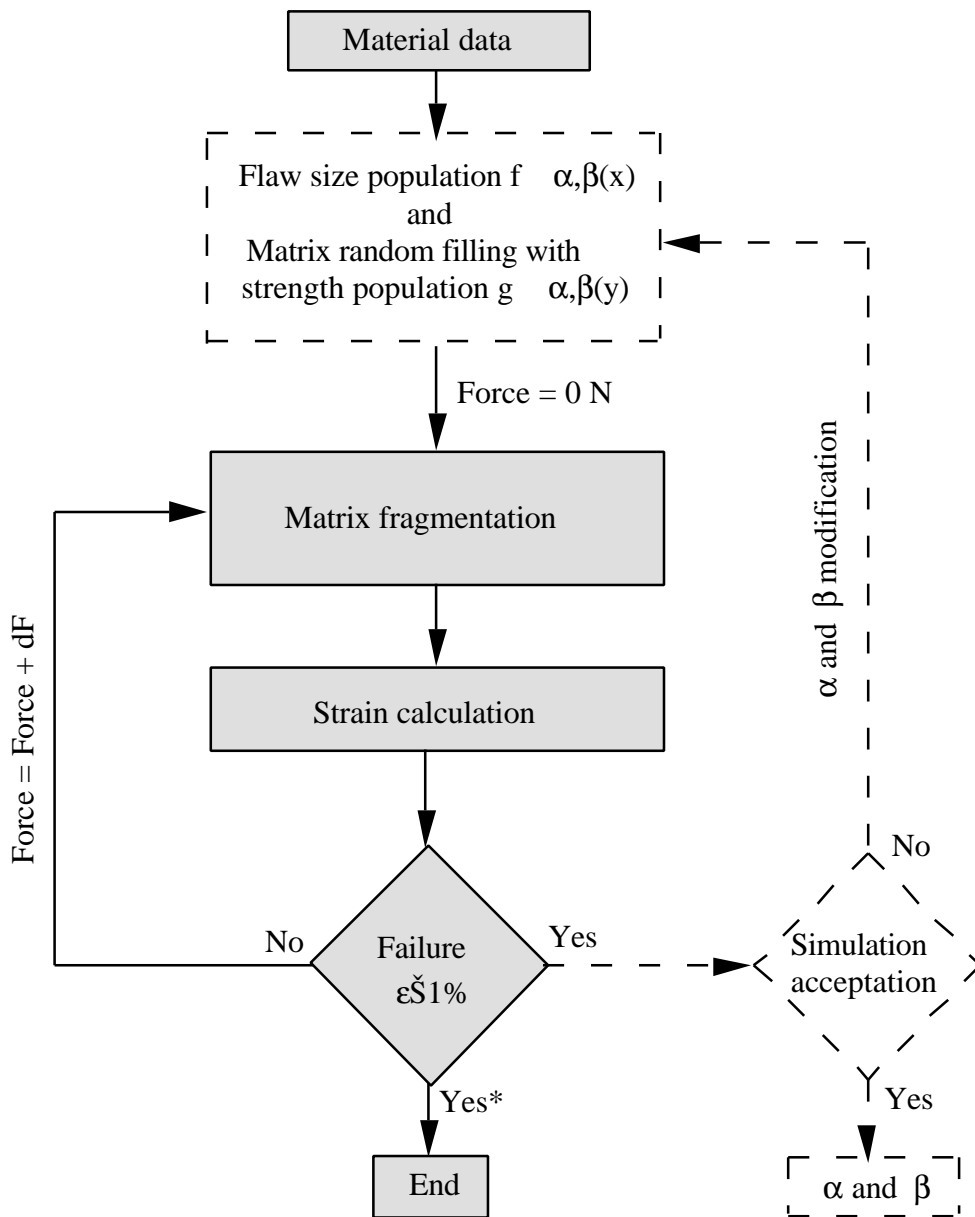


Fig.9 Computation algorithm (- - - : only for the critical flaw population model), (* : only for iterative and independent volume models).

4. Results and discussion

4.1. Material characteristics and testing

Batch	B	C
Number of specimens	12	30
Gauge length (mm)	75	75
V_f (%)	40 (± 5)	21 (± 3)
S_f (mm ²)	0,081	0,081
Young's modulus (GPa)	270 (± 40)	300 (± 50)
Linearity limit force (N)	40 (± 12)	60 (± 20)
Ultimate limit force (N)	120 (± 40)	130 (± 20)
Crack spacing distance* (μm)	70 (± 50)	-
τ (MPa)	100 (± 20)	50 (± 10)
m	6	5
σ_o (MPa, $V_o=1\text{m}^3$)	10,5	4,3

Tab.1 Mean characteristics of the SiC/SiC minicomposites [Lis97] (* : at saturation).

The SiC/SiC minicomposites were elaborated and tested by Lissart [Lis97]. The minicomposites can be separated into two batches B and C with respectively a fibre volume fraction of 40% and 21% (Tab.1). The tensile tests were performed on a rigid frame machine at room temperature at a constant displacement rate of 0,08 mm/min, which is considered as a quasi-static loading condition.

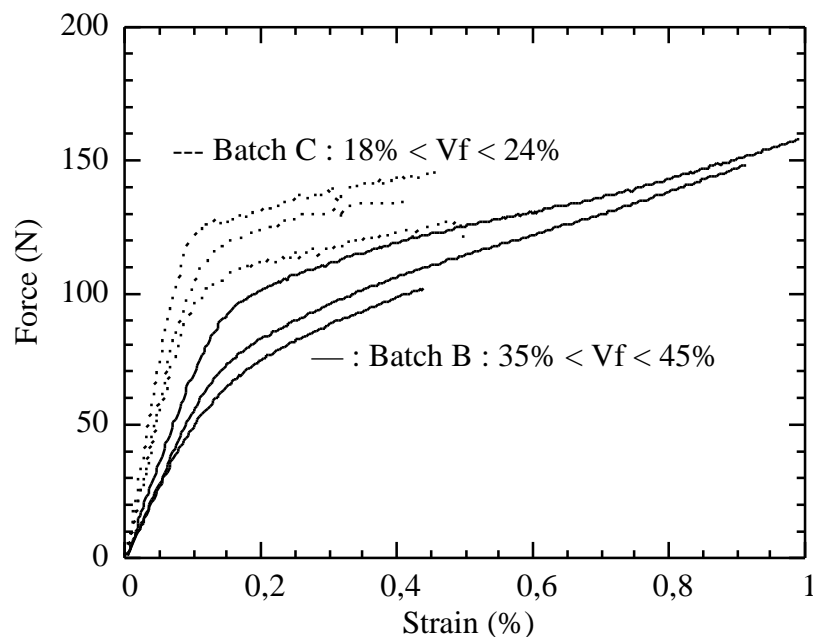


Fig.10 Strain-force behaviour of batches B and C : Example of scattering.

Specimen elongations were measured using two LVDT extensometers mounted on the grips, with the correction of the system loading compliance. The acoustic emission was recorded as the cumulative number of counts.

4.2. Mechanical behaviour

As the two batches of minicomposites were scattered (Fig.11), two particular tests (#B07 and #C01) were studied in detail. The analysis procedure was then conducted using the exact parameters of these minicomposites (Tab.2).

The results of computations are compared with the experimental curves (Fig.11 and Fig.12). The flaw population were calculated with the flaw population model by estimating the α and β parameters. Thus there is an excellent agreement between the flaw population model and the measured strain-stress behaviour.

Tests	#B07	#C01
V_f (%)	35	19
S_f (mm ²)	0,081	0,081
Young's modulus (GPa)	310	350
Linearity limit force (N)	60	100
Ultimate limit force (N)	157	142
Crack spacing distance* (μ m)	80	-
τ (MPa)	80	40
m	6	5
σ_o (MPa, $V_o=1m^3$)	10,6	4,3
α	3,5	4,5
β	58	45

Tab.2 Characteristics of the minicomposites #B07 and #C01 (* : at saturation).

Nevertheless, the iterative and independent volume models are not as efficient as expected. This means certainly that the assumptions are too strong. The iterative model based on the Weibull hypothesis for matrix cracks, is probably not acceptable. This is caused mainly by matrix crack history. Besides, the independent volume model presents a good agreement for test #B07. This means that the flaw population is well described by the Weibull law for a small matrix volume in this case. For the test #C01, a discrepancy appears clearly between the simulation and the experimental curve.

Thus the flaw population analysis seems to be the best approach to characterize the strain-force behaviour. The acoustic emission was then compared with the simulated number of matrix cracks (Fig.13). There can be observed a good agreement between the cumulative acoustic emission counts and the matrix cracks.

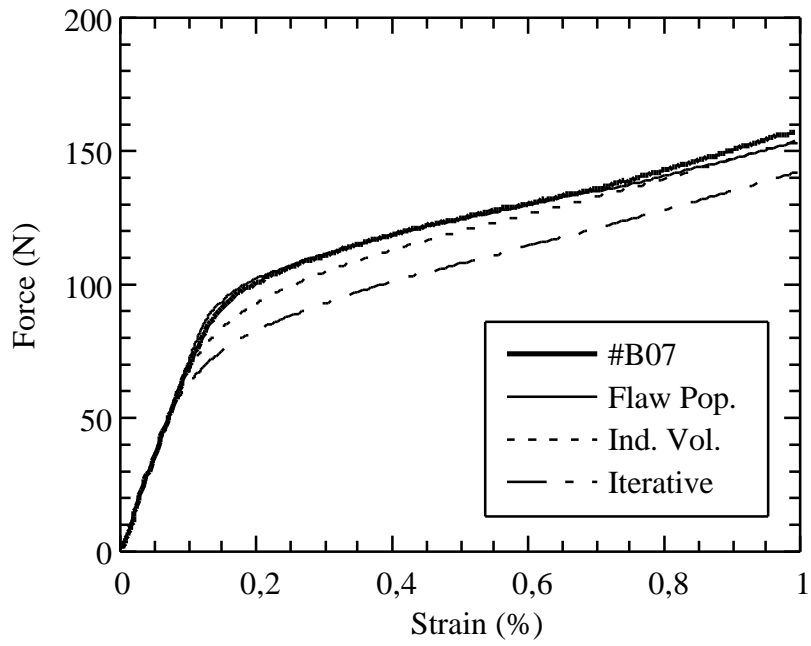


Fig.11 Comparison simulations and experimental curve for #B07.

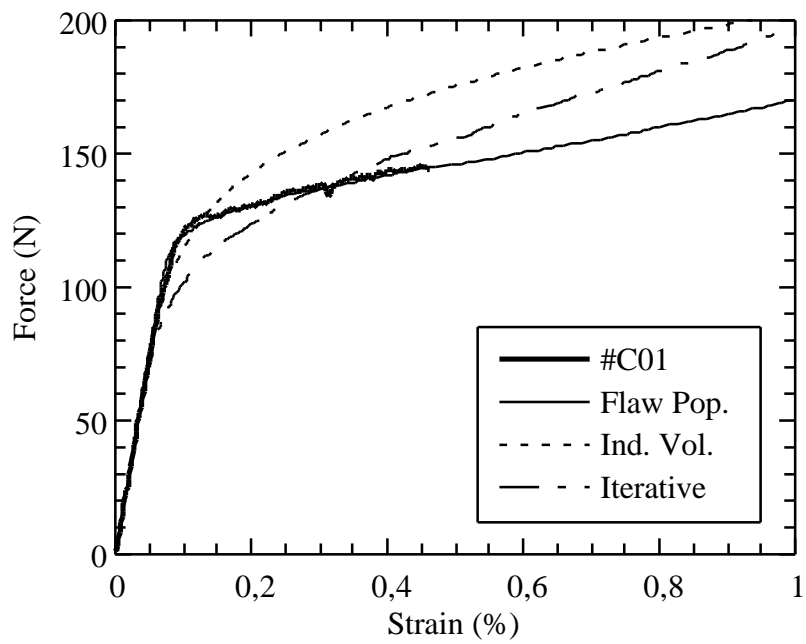


Fig.12 Comparison simulations and experimental curve for #C01.

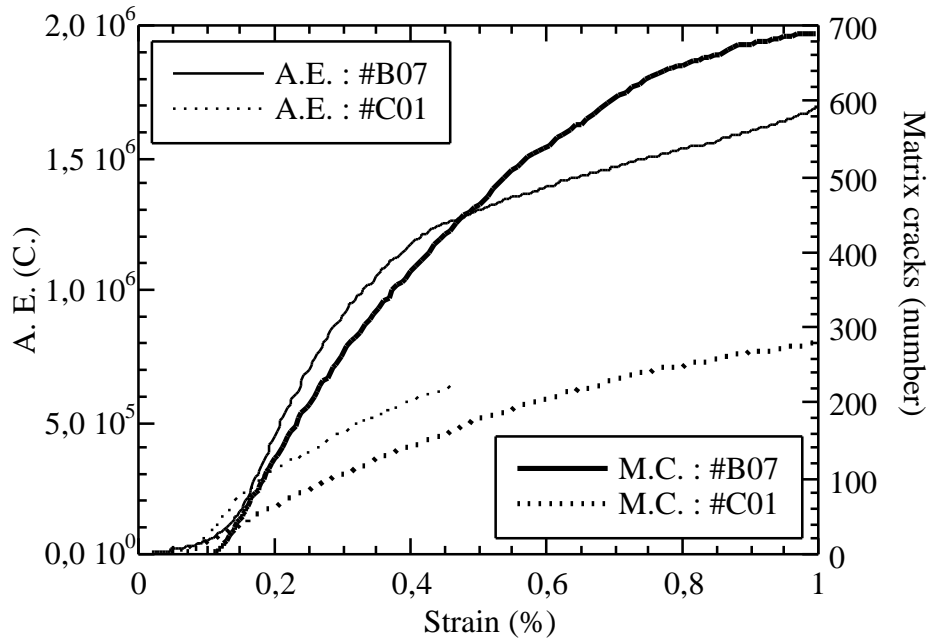


Fig.13 Acoustic emission (A.E.) compared to number of matrix cracks (M.C.).

4.3. Flaw population analysis

The comparison between the flaw population induced by the three models is shown in Fig.14 and Fig.15, and summarised in Tab.3, which allows a better understanding of the matrix fragmentation. For reasons of simplification, we will use the term of "flaw" according to its means in term of stress in this part. Then the flaw population extracted from the iterative model is clearly more critical than the two other ones. Nevertheless, the mean stress is close to the one calculated with the flaw population model for #C01. This confirms the better computation of iterative model for #C01 than for #B07. This suggests that flaws are great enough and distributed along the minicomposite as expected by the Weibull approach in the case of a fibre volume fraction of 20%

	Models	Mean σ (MPa)	Standard deviation σ (MPa)
#B07	Flaw pop.	680	120
	Iterative	540	180
	Ind. Vol.	580	115
#C01	Flaw pop.	390	60
	Iterative	460	180
	Ind. Vol.	490	120

Tab.3 Comparison of the mean stresses and the standard deviations of the flaw populations for the three models (MPa).

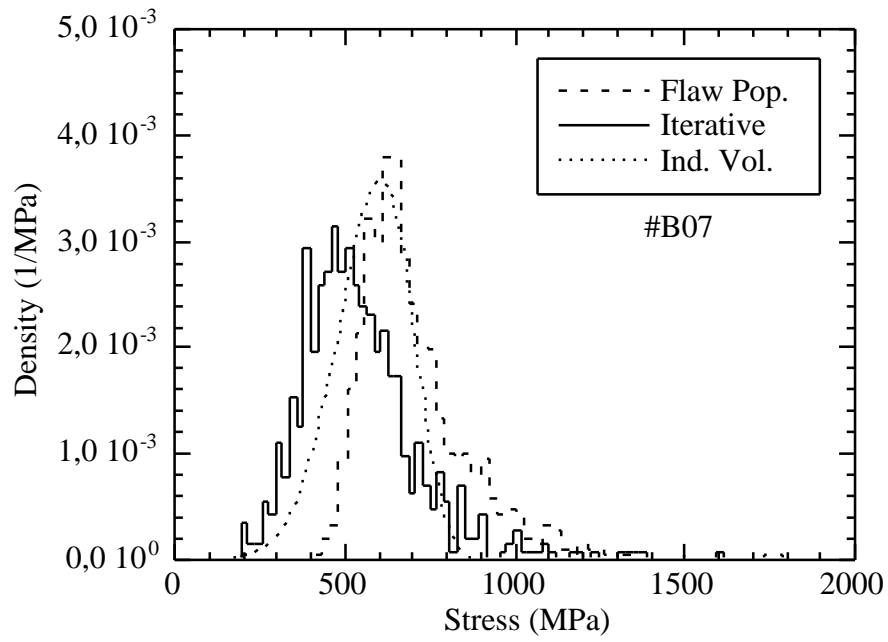


Fig.14 Comparison of the flaw population densities for #B07.

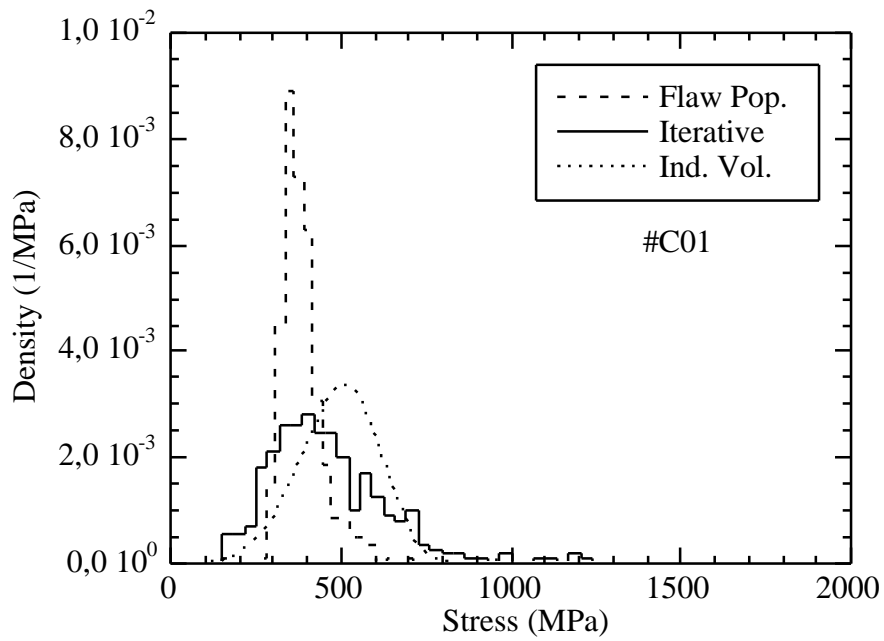


Fig.15 Comparison of the flaw population densities for #C01.

On the other hand, the independent volume flaw population gives a better agreement with the flaw population analysis for #B07, which confirms that the flaws are small and number enough to apply the Weibull theory on an elementary volume when the matrix deposition is small ($V_f=40\%$).

More interesting, one can observe that the flaw population of the batch C is more severe than the one of the batch B (Tab.3). Basically, this is not a surprising result because the matrix volume of the test #C01 is greater than the one of the test #B07. Nevertheless, the Weibull analysis at the onset of the matrix cracking exhibits various Weibull parameters σ_0 for both the tests (Tab.2), which means that scale effect is not an explanation. More precisely, if we consider the matrix volumes associated to a crack, which are respectively $0,125 \text{ mm}^3$ and $0,020 \text{ mm}^3$ for test #C01 and #B07, the Weibull theory gives a ratio of the mean values of the flaw distributions $\sigma_{\#B07}/\sigma_{\#C01}$ equaled to $((0,125/0,20)^m)$, which is not verified (Tab.3). This means that the matrix deposition is not homogeneous in terms of flaw severity.

Physically, an explanation can be yielded by the microscopic observation of the SiC matrix microstructure. Indeed, this microstructure is not homogeneous [Lob89]. The CVI processus of deposition implies a cristalization of the silicium carbide which is organized in many structures called polytypes [Vig95], and in many layers with various microstructures. The SiC matrix exhibits conical grains, whose size increases with the matrix deposition. Thus, we can suppose that the severity of the pre-existing flaws increase. The more important the matrix deposition, the greater the flaws (Fig.16).

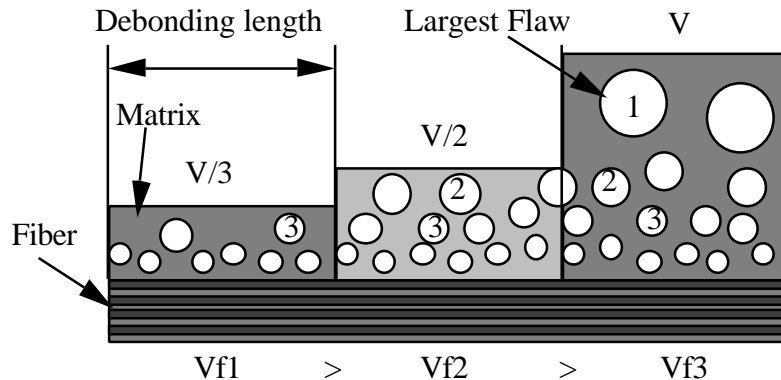


Fig.16 Flaw size dependence with fibre volume fraction V_f .

In order to verify these assumptions, a mathematical model was developed [All95, Das96, Pur97] to estimate the flaw growth in terms of stress severity. The model allows to calculate the small flaw population from the great one. We supposed that the decrease of matrix volume influences directly the decrease of flaws. Then consider that the matrix is subdivided into volumes V_1 equal to the matrix cross section multiplied by the debonding length. One can defined the population of the flaws corresponding to the largest flaws of each matrix volume V_1 . If the flaws are associated to their critical stresses (S_i), one can defined a survival distribution function $L_1(\sigma)$ equal to the probability that a stress S_i is greater than σ ($L_1 : R \rightarrow [0,1]$).

Then, for a matrix volume $V_2=V_1/2$, the flaw population distribution corresponds to the second survival distribution function induced by $L_1(\sigma)$, which suggests that the largest flaws has been removed, or in term of stresses, that the smallest critical stress has been removed :

$$L_2(\sigma) = L_1(\sigma)(1 - \ln L_1(\sigma)) > L_1(\sigma) \quad (23)$$

Consequently, when the debonding matrix volume is $V_1/(i+1)$, the survival distribution is given by :

$$L_{i+1}(\sigma) = L_1(\sigma) \cdot \sum_{k=0, i} \frac{(-\ln L_1(\sigma))^k}{k!} \quad (24)$$

Which yields the flaw population density by derivation of $1-L_{i+1}(\sigma)$:

$$f_{i+1}(\sigma) = -L_1'(\sigma) \frac{(-\ln L_1(\sigma))^i}{i!} \quad (25)$$

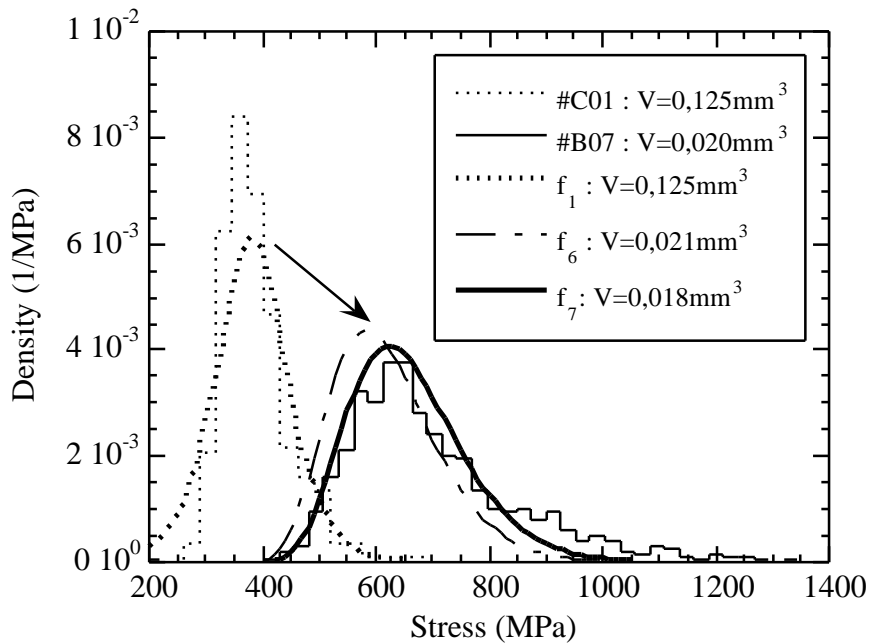


Fig.17 Calculation of the flaw population density of #B07 with that of #C01 ($a=5859$, $b=1,074$, $c=68,08$).

This equation was applied to estimate the flaw population of #B07 with the flaw population of #C01 (Fig.17). In regard to the matrix volume associated to a single crack of both the tests ($0,125/0,020 = 6,25$), the flaw population densities $f_6(\sigma)$ and $f_7(\sigma)$ allows the best estimation of the #B07 density from the #C01 one. Thus, the flaw population distribution of #C01 was approached with a modified logistic function $L_1(\sigma)$, which proved its efficiency in the case of matrix fragmentation [Das96].

$$L_1(\sigma) = 1 - \frac{1}{1 + a \cdot \exp\left(-\frac{\sigma^b}{c}\right)} \quad (26)$$

Fig.17 shows the different flaw population curves obtained from analysis and calculation. An excellent accordance can be observed between the curve $f_7(\sigma)$ and the flaw population density of #B07, which confirms the above assumptions and calculations.

In conclusion of this part, the flaw population approach proved itself to be an efficient means to analyse the matrix flaw responsible of the matrix fragmentation. It was demonstrated that flaw depends on the matrix deposition volume.

4.4. Discussion about the scatter

To understand the test scattering, some parameters have been regarded in detail. It appeared that the matrix volume fraction is an important source of scattering. This was mainly caused by the matrix deposition which was not uniform during elaboration and in the furnace. In Fig.18 and Fig.19, the simulations of different fibre volume fractions V_f were compared with the experimental curves. These simulations were computed using the same parameters of tests #B07 and #C01, except the fibre volume fractions. A great difference was then observed between a fibre volume fraction of 17% and 25% for batch C, and 30% and 45% for batch B. The flaw population was supposed fixed for each batch.

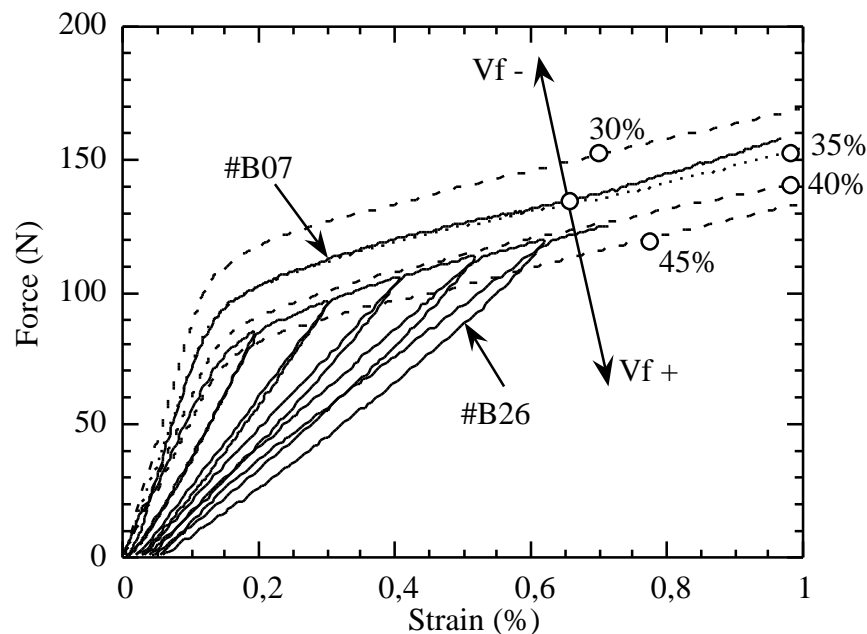


Fig.18 Variation of V_f with the data of #B07.

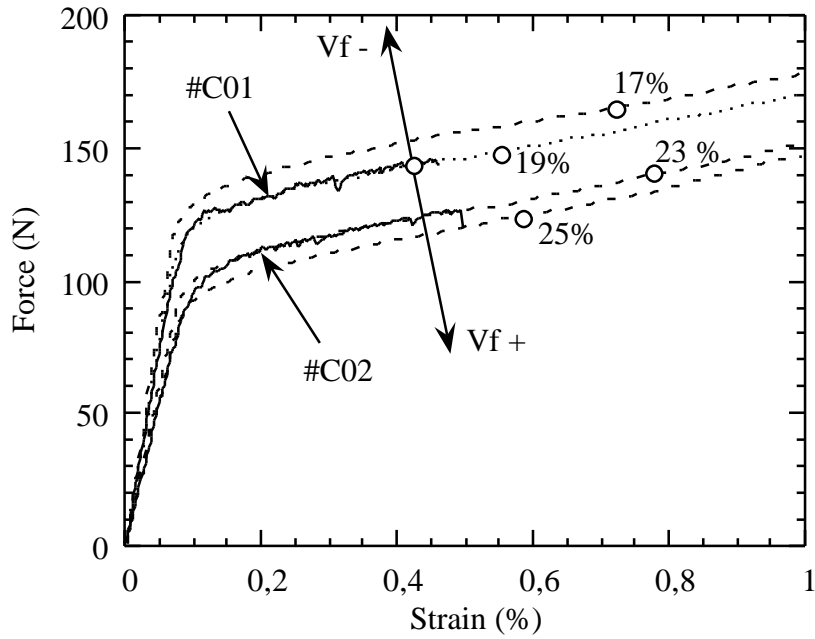


Fig.19 Variation of V_f with the data of #C01.

This first analysis was improved by modifying the interfacial shear stress. Actually, when the fibre volume fraction is increased, there is a slight discrepancy between the simulation and experimental curve (Fig.18 and Fig.19). This error has been solved by increasing the interfacial shear stress (Fig.20 and Fig.21). This can be explained by the debonding length, which is obviously an ascending function of the energy released during the matrix crack, and a decreasing function of the interfacial shear stress (Eq.5). Now, the greater the matrix volume fraction, the greater the released energy, which means that the interfacial shear stress is a decreasing function of the matrix volume fraction.

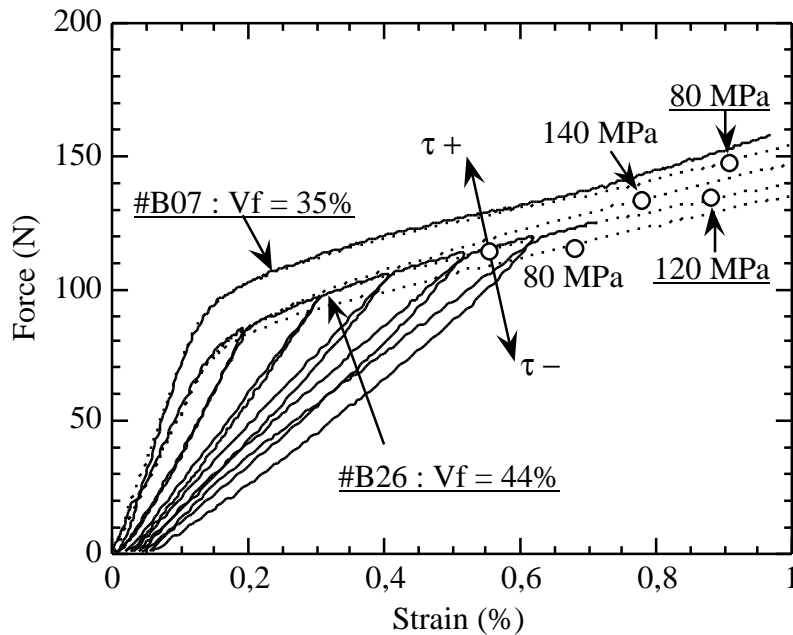


Fig.20 Variation of the interfacial shear stress τ with the data of #B07 and $V_f=44\%$.

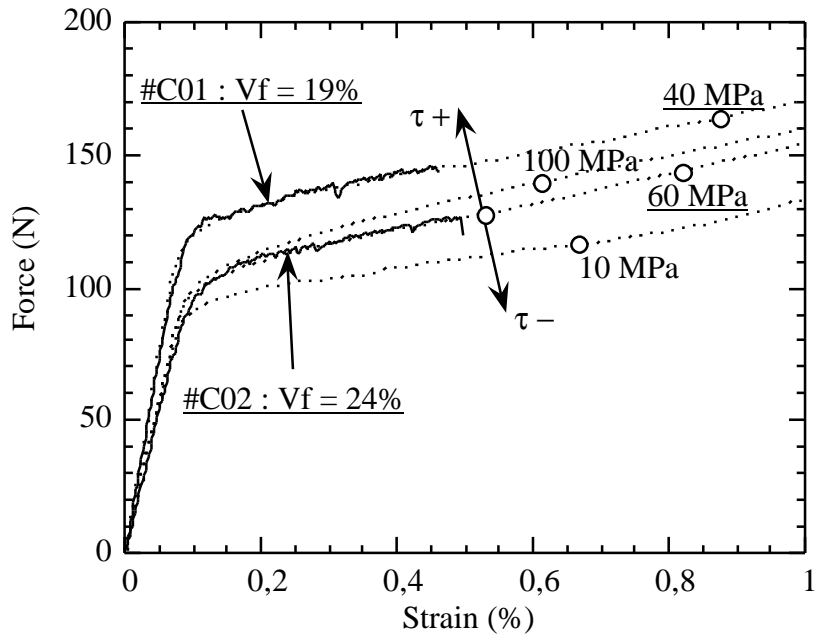


Fig.21 Variation of the interfacial shear stress τ with the data of #C01 and $V_f=24\%$.

The Fig.22 shows the correlation obtained with the fibre volume fraction and the interfacial shear stress. The values were estimated with 5 tests in batch C and 5 tests in batch B.

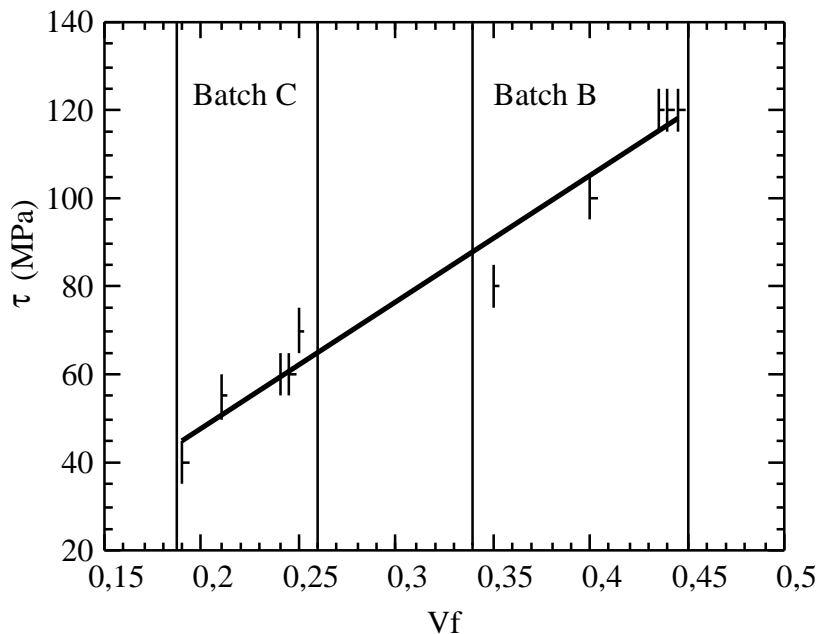


Fig.22 Correlation between interfacial shear stress τ and the fibre volume fraction V_f .

It appears clearly now, that the analysis of minicomposite is not straight forward. Some variation of V_f is of great importance in the total strain-force behaviour. Nevertheless, these examples prove the great interest to use a flaw

population model. The test scattering are well described with the variation of some parameters (V_f , τ , $f_{\alpha,\beta}(x)$) which allows to apply this approach as a predictive model.

5. Conclusion

The matrix fragmentation of SiC/SiC minicomposites was investigated under tensile loading conditions. First, three fragmentation models were compared with the experimental curves. The first model (iterative model) is based on the Weibull description of matrix cracks for each matrix volume during the fragmentation. The second model (independent volume model) assumes that, when the matrix is subdivided into elementary volumes, all the elementary volumes are independent, and follow a Weibull statistic. The third model (flaw population model) uses a effective flaw population to simulate the matrix fragmentation.

It appeared clearly that the iterative and independent volume model are not as accurate as expected. The flaw population model allowed to characterise the flaw population density of each test after computation. The calculations were realised on two batches with a mean fibre volume fraction of 20% (Batch C) and 40% (Batch B). The flaw population model showed an excellent agreement with experimental strain-force curves. Consequently, some assumptions had to be verify about the matrix deposition and the flaws induced by elaboration. It has been demonstrated that the flaw population is directly influenced by the matrix volume fraction. This enabled us to calculate the flaw population density of batch B with the one of batch C, using a mathematical model based on the flaw growth.

Moreover the test scattering was attributed to slight variability in the matrix volume fraction induced by elaboration. To improve the simulation, the interfacial shear stress was investigated as a function of fibre volume fraction. An excellent correlation has been found and attributed to the energy released during a matrix crack.

Finally, the proposed model appears as an accurate tool for analysing minicomposite tests. It was used as a predicting model in comparison to the experimental strain-force behaviour. It has been demonstrated that the interfacial shear stress and the flaw population are function of the fibre matrix fraction. The next step could be the optimisation of the mechanical behaviour regardless the fibre volume fraction and matrix fragmentation. The failure has not been investigated, it could be interesting to reconsider previous results [Lis97] in the light of these new findings.

References

- [All95] J.-C. Alla, "Analyse probabiliste de la fissuration des matériaux composites à matrice céramique", DEA Report, Applied Mathematic, University of Bordeaux I, LCTS, 1995.
- [Ave71] J. Aveston, G.A. Cooper et A. Kelly, "Single and multiple fracture", Conference Proceedings of National Physical Laboratory, Teddington, UK, London, Sciences and Technology, pg 15-26, 1971.
- [Bad88] M. G. Bader, "Tensile strength of uniaxial composites", Science and Engineering of Composite Materials, Vol 1, n° 1, pp 1-11, 1988.
- [Bat79] S. B. Batdorf and D. J. Chang, "On the relation between the fracture statistics of volume distributed and surface distributed cracks", Int. J. of Fracture, Vol 15, n°2, pp 191-199, 1979.
- [Bat82] S. B. Batdorf and R. Ghaffarian, "Tensile strength of unidirectionally reinforced composites- I and II", J. Reinforced plastics and composites", Vol 1, pp 153-176, 1982.
- [Bey92] D. S. Beyerle, S. M. Spearing, F. W. Zok and A. G. Evans, "Damage and failure in unidirectional ceramic-matrix composites", J. Am. Ceram. Soc., Vol 75, n°10, pp 2719-2725, 1992.
- [Bud86] B. Budiansky, J. W. Hutchinson and A. G. Evans, "Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics", J. Mech. Phys. Solids, Vol 34, n°2, pp 167-189, 1986.
- [Cho92] C. Cho, J. W. Holmes and J. R. Barder, "Distribution of matrix cracks in a uniaxial ceramic composite", J. Am. Ceram. Soc., Vol 75, n°2, pp 316-324, 1992.
- [Cur91] W. A. Curtin, "Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites", J. Am. Ceram. Soc., Vol 74, n°11, pp 2837-2845, 1991.
- [Dan93] S. Danchaiwijit and D. K. Shetty, "Matrix cracking in ceramic-matrix composites", J. Am. Ceram. Soc., Vol 76, n°10, pp 2497-2504, 1993.
- [Das96] C. Das Neves, "Modélisation probabiliste des fissures succesives dans les matrices céramiques des matériaux composites", DEA Report, Applied Mathematic, University of Bordeaux I, LCTS, 1996.
- [Eva94] A. G. Evans and F. W. Zok, "Review : The physics and mechanics of fibre-reinforced brittle matrix composites", J. Materials Science, Vol 29, pp 3857-3896, 1994.
- [Gui93] L. Guillaumat and J. Lamon, "Multifissuration des composites SiC/SiC",

Revue des Composites et des matériaux avancés, Vol. 3, numéro hors serie, pp 159-171, 1993.

- [Gum54] E. J. Gumbel, "Statistical theory of extreme value and some practical applications", National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series n°33, United States Department of Commerce, pp 1-51, 1954.
- [He93] M. Y. He, A. G. Evans and W. A. Curtin, "The ultimate tensile strength of metal and ceramic-matrix composites", *Acta metall. mater.*, Vol 41, n°3, pp 871-878, 1993.
- [Hil92] F. Hild, "De la rupture des matériaux à comportement fragile", Thesis, University of Paris 6, 1992.
- [Jay77] A. De S. Jayatilaka et K. Trustrum "Statistical approach to brittle fracture", *J. of Material Sciences*, Vol 12, pp 1426-1430, 1977.
- [Kuo95] W. S. Kuo and T. W. Chou, "Multiple cracking of unidirectional and cross-ply ceramic matrix composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol 78, n°3, pp 745-755, 1995.
- [Lam83] J. Lamon and A. G. Evans, 1983, "Statistical analysis of bending strength for brittle solids : A multiaxial fracture problem", *J. of Am. Ceram. Soc.*, Vol. 66, n°3, pp 177-182, 1983.
- [Lam95] J. Lamon, F. Rebillat and A.G. Evans, "Microcomposite test procedure for evaluating the interface properties of ceramic matrix composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol 78, pp 401-405, 1995.
- [Leb96] G. A. Lebrun, "Comportement thermomécanique et durée de vie des composites à matrice céramique : Théorie et expérience", Thesis, n°1606, University of Bordeaux I, 1996.
- [Lis97] N. Lissart and J. Lamon, "Damage and failure in ceramic matrix composites : experimental study and model", *Acta mater.*, Vol. 45, No 3, pp 1025-1044, 1997.
- [Lob89] N. Lob, "Relations entre microstructure et comportement mécanique des composites SiC/SiC : études de la nature et du rôle de l'interface fibre-matrice dans les matériaux mono et multifilamentaire", Thèse, Université de Paris Sud (Centre d'Orsay), 1989.
- [Mar85] D. B. Marshall, B. N. Cox and A. G. Evans, "The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites", *Acta metall.*, Vol 33, n°11, pp 2013-2021, 1985.
- [Pho93] S. L. Phoenix, "Statistical issues in the fracture of brittle-matrix fibrous composites", *Composite Science and Technology*, Vol 48, pp 65-80, 1993.

- [Pur97] I Gusti Putu Purnaba, "Étude de divers problèmes statistiques liés aux valeurs extrêmes : modélisation et simulations", Thesis, n°1777, University of Bordeaux I, Chapt 3, pp 147-203, 1997.
- [Sch90] H. R. Schwietert and S. Steif, "A theory for the ultimate strength of a brittle-matrix composite", J. Mech. Phys. Solids, Vol 38, n°3, pp 325-343, 1990.
- [Spe93] S. M. Spearing and F. W. Zok, "Stochastic aspects of matrix cracking in brittle matrix composites", Transaction of the ASME, Vol 115, pp 314-318, 1993.
- [Sut88] M. Sutcu, "Statistical fibre failure and single crack behavior in uniaxially reinforced ceramic composites", J. of Mat. Science. Vol 23, pp 928-933, 1988.
- [Vig95] G.L. Vignoles et L. Ducasse, "A cluster approach for the modelling of the later-by-layer growth of SiC polytypes", J. Phys. Chem, Vol. 99, pg 5402-5412, 1995.
- [Wei51] W. Weibull, "A statistical distribution of wide applicability", J. of Applied Mechanics, Vol. 18, September 1951, 293-29, 1951.
- [Wei93] Y. Weitsman and H. Zhu, "Multi-fracture of ceramic composites", J. Mech. Phys. Solids, Vol 41, n°2, pp 351-388, 1993.

Micro-mechanical simulation of damage in a 2D woven SiC/SiC composite

V. Calard & J. Lamon

Résumé : Cet article expose une approche micro-mécanique du comportement mécanique d'un composite tissé SiC/SiC. La simulation du comportement mécanique est réalisée en introduisant trois populations de défauts au sein de la matrice, correspondant aux trois familles d'endommagement identifiées pour les composites SiC/SiC : défauts des macropores, des fils transversaux et de la matrice. Les calculs ont été effectués par éléments finis en assimilant le composite à un stratifié ($0^\circ/90^\circ$). Les résultats sont en bon accord avec la courbe expérimentale obtenue pour le composite tissé. De plus les calculs ont été effectués en faisant varier la fraction volumique de fibres. Les résultats confirment le fait qu'un fort taux de matrice engendre certes un haut module à l'origine, mais provoque aussi un endommagement brutal. Un faible taux de matrice induit un module faible à l'origine avec un endommagement moins pénalisant. Ces résultats ont été confirmés par l'étude de composites SiC/SiC élaborés avec divers taux de matrice.

Mots clefs : Composite 2D, endommagement, défauts, simulation, éléments finis.

Micro-mechanical simulation of damage in 2D woven SiC/SiC composite

1. Introduction

The reinforcement of brittle materials with high strength fibres can yield composites that undergo large tensile strains prior to the ultimate failure. In the case of woven composites, the structure can be subdivided into matrix infiltrated bundles, oriented in two directions ($0^\circ/90^\circ$). It is now well established that the tensile stress-strain behaviour is characterised by three regimes [Gui93]. The first regime consists in the linear behaviour without matrix damage. The second regime is the matrix fragmentation occurring first, at large inter-yarn pores, located between the plies and then, at the transverse yarns. After this first damage, the matrix failures occur in the bundles oriented in the loading direction. When the matrix is totally damaged, the fibres control the stress-strain response, which is the third regime.

In this paper, the matrix fragmentation is investigated on a woven SiC/SiC composite elaborated by chemical vapour infiltration of plies formed of 500 fibre woven bundles. In literature, several works have investigated the matrix fragmentation process and the fibre failure. Actually, the SiC matrix exhibits further random phenomena like the first crack threshold or the crack number and locations. Thus, most of the works have mainly been concerned with the onset of matrix cracking such as the works of Aveston et al [ACK71] and Budiansky et al [Bud86]. The ACK model was resumed by Beyerle et al [Bey92] and Kuo et al [Kuo95], contrary to Weitsman et al [Wei93], who improved the energy model of Budiansky et al. The classical statistical cracking models, like the Weibull theory [Wei51, Gum54], and more recently Batdorf et al [Bat79] and Lamon et al [Lam83] can be applied to the matrix volume under loading, and yielded some matrix fragmentation models [Spe93, Cho92, Eva94]. Nevertheless, the statistical approach was used more frequently for the ultimate composite failure [Bat81, Pho93, Sch90, Cur91, Sut88, Bat88]. A combined approach was made by Marshall et al [Mar85] and Danchaivijit et al [Dan93] in studying the matrix cracks bridged by fibres. These works were improved by a better understanding of the local load sharing between fibres and interfacial shear properties between matrix and fibres [He93].

Generally, the finite element calculations are focused on the elastic response of the safe composite [Lebon] or of a composite with an initial damage [Kuo95]. Sometimes, the finite elements, coupled with probabilistic approaches, are used to determine the ultimate strength properties [LeBo96], and often in the case of layered composites ($0^\circ/90^\circ$). Munier [Mun94] and Ichihashi et al [Ich94] have simulated the stress-strain behaviour using the stress-strain response of the tows with a coupling of the damage between each direction. The composite is then described as a grid of tows with probabilistic thresholds for the damage. More recently, there was an interesting attempt directed at modelling the matrix cracking in composite using the

statistical and probabilistic aspect of the matrix failure [Lam98]. The approach consists in calculating by finite element the failure probability of the matrix for a representative cell of the composite, and by introducing matrix cracks resulting of this calculation. This method allows to predict the damage evolution, though it is limited to simple geometries of cells.

The present paper proposes a matrix fragmentation model based on the matrix flaw populations located in the composite. Three types of flaws were considered : macropores, flaws in transverse yarns and in longitudinal yarns. The calculations were performed by finite element method for predicting the mechanical behaviour of woven SiC/SiC composites. These predictions have also been compared to experimental data, and the calculations have been performed to simulate composites without macropores which allowed a better understanding of the relationship between the mechanical behaviour and the microstructure.

2. Matrix fragmentation

2.1. SiC/SiC composite microstructure

The SiC/SiC composite consists of fabrics of Nicalon fibre bundles which have been infiltrated by chemical vapour deposition with a pyrocarbon layer as interphase (Fig.1-3). A bundle contains 500 SiC fibres (Fig.1), which we call a tow after infiltration, and its shape is approximately an ellipse ($\sim 1,2\text{mm} \times \sim 0,150\text{mm}$). The composite contains intratow and intertow porosity. The volume fractions are reported in Tab.1. They were measured by the weighing of the dry and the wet composite, and by the weighing in water [Car96]. The matrix and fibre properties are reported in Tab.2, assuming an isotropic behaviour.

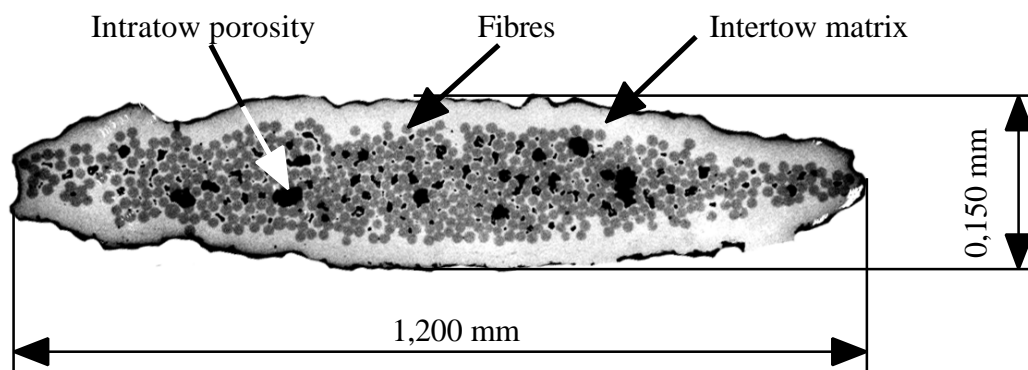


Fig.1 Cross section of a tow showing the SiC fibres, the intratow porosity, and the SiC matrix.

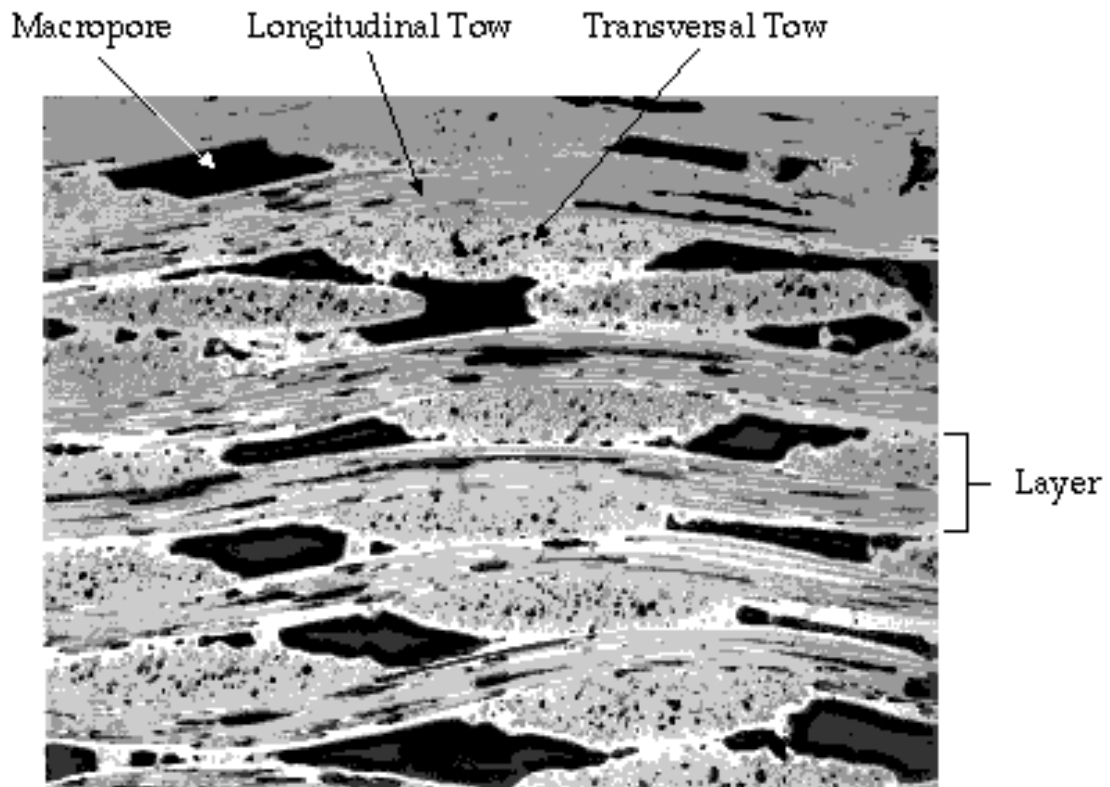


Fig.2 Structure of a woven SiC/SiC composite [Gui94].

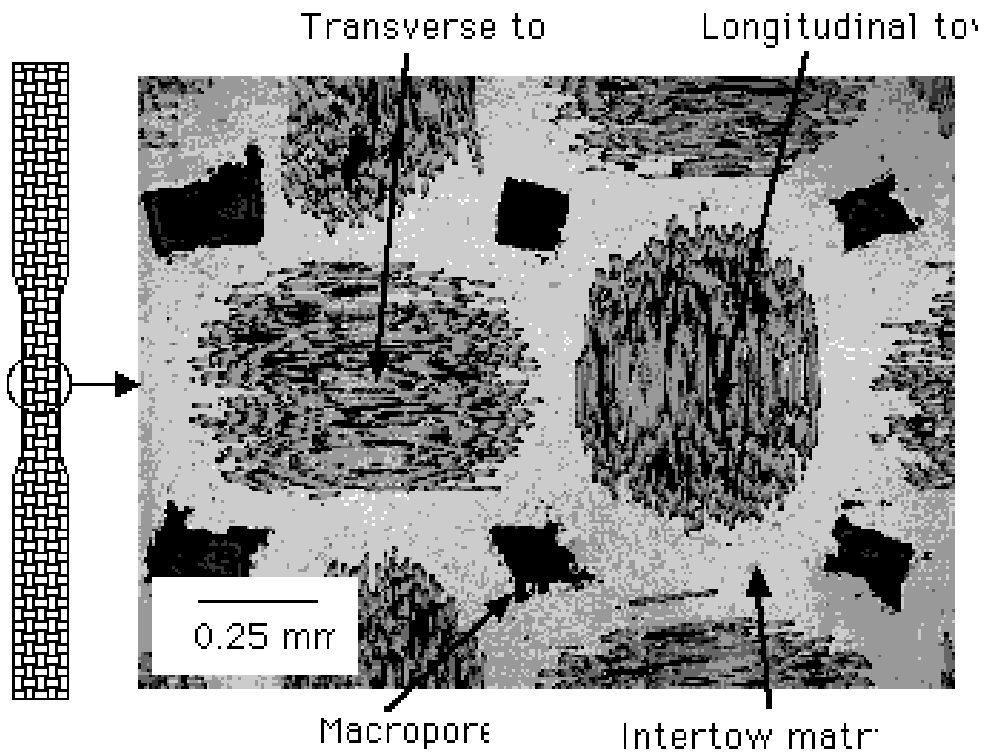


Fig.3 Tensile test specimen and micrograph showing the constituents in a woven ply of a SiC/SiC composite [Gui94].

	V_f (%)	V_m (%)	V_p (%)
Composite	35	50	15
Tow	40	55	5

Tab.1 The volume fractions of fibres, matrix and porosity in the composite, and in the tow [Gui94, Car96].

	E (GPa)	ν (-)
SiC matrix (CVI)	350	0,20
SiC fibre (Nicalon)	180	0,12

Tab.2 The fibre and matrix properties [Bob96,Lam93, Heu96].

2.2. Steps of fragmentation

The mechanisms controlling the matrix fragmentation responsible of the non-linear behaviour, under a tensile load in the longitudinal tow direction, have been well identified [Aub94, Gui94], and can be summarized in three families of cracks, which depend on the applied stress and the strain magnitude :

- The first family of cracks occurs at the macropore angles located between the plies, at macroscopic strains between 0,03% and 0,1%. These cracks are generally stopped by the longitudinal tows (Fig.4).

- The second family of cracks appears in the transverse tows, between fibres, just after the saturation of the first family and is pursued until a strain of 0,2%. More critical than the first family, these cracks can propagate through the longitudinal tows (Fig.4).

- The third family of cracks appears within the matrix in the longitudinal tows at a strain of 0,2% (Fig.5). These cracks are perpendicular to the fibres. Assuming a constant interfacial shear stress between fibres and matrix, the matrix is totally reloaded along the debond, and there is a stress gradient in the fibres. Finally, the saturation of this last family is reached around a strain of 0,8%.

2.3. Flaw populations

Basically, the matrix fragmentation can be described by the presence of flaw populations in the composite. For the longitudinal tows, the flaw population (intratow matrix flaws) have been investigated with unidirectional composites [Cal98], for various fibre volume fractions. This investigation has exhibited a very important relationship between the fibre volume fraction and the flaw distribution.



Fig.4 Micrograph showing examples of cracks initiated at a macropore (first family) and cracks initiated in the transverse tow (second family) in a SiC/SiC composite subject to tensile loading [Gui94].

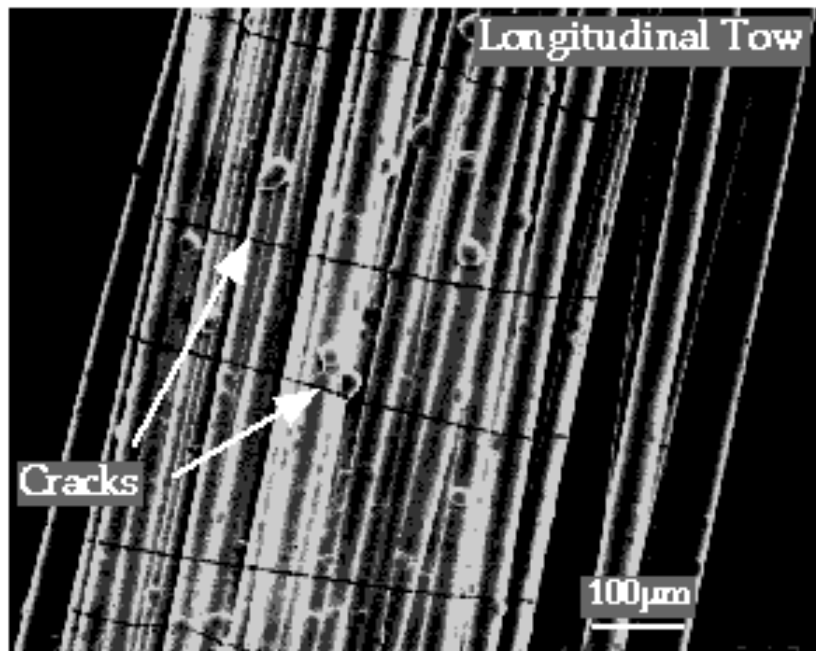


Fig.5 Examples of cracks of the third family located in the longitudinal tows.

Indeed, the flaw distribution is directly influenced by the matrix deposition : the greater the matrix volume fraction, the greater the flaw growth. In Fig.6, the flaw distributions for two fibre volume fractions ($V_f = 20\%$ and 40%) are plotted according to their extension stress (i.e. the stress required to get cracking), which shows the great severity of flaws for the 20% fibre volume fraction. Thus, we consider the flaws of the intratow matrix as intrinsic flaws. This approach can be compared with the works of Jayatilaka et al [Jay77] concerning the statistical approach of brittle fracture. In this paper, we chose a Beta II density function $f_{a_1, b_1}()$ with two parameters a_1 and b_1 to describe the flaw distribution for the longitudinal tows (Fig.6). The beta II function Y is obtained by the change of variable ($Y = X/(1+X)$) of a beta function X . In order to limit the computer problem of high numbers with the use of the beta II function, the stress is calculated arbitrarily with a reference stress σ_w corresponding to an average value of 1 for the beta II function : $y = \sigma/\sigma_w$ with $\sigma_w = 190$ MPa. Then the distribution is defined as :

$$f_{a_1, b_1}(y) = \frac{1}{B(a_1, b_1)} \frac{y^{a_1-1}}{(1+y)^{a_1+b_1}} \quad 0 \leq y \leq +\infty \quad (1)$$

where $B(a_1, b_1)$ is the complete beta parameter. a_1 and b_1 are calculated with the average (M) and standard deviation (S) of the distribution :

$$a_1 = M + M^2 \frac{1+M}{S^2} \quad (2)$$

$$b_1 = 2 + M \frac{1+M}{S^2} \quad (3)$$

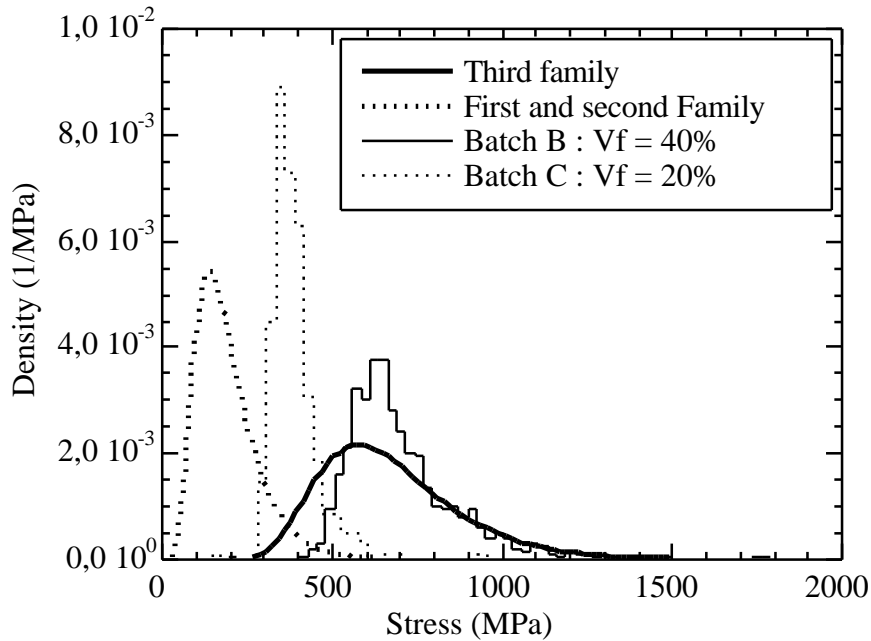


Fig.6 Flaw distributions of the three families involved in the fragmentation process, and two experimental distributions for various fibre volume fractions.

Finally the chosen flaw population covers the flaws for a fibre volume fraction between 20 % and 40% in order to take into account the slight scattering of the matrix deposition.

In the same way, the macropores and the flaws in transverse tows can be described by intrinsic flaw distributions. Guillaumat [Gui94] precisely studied the severity of some simple macropores with a numerical approach (finite element calculation) based on probabilistic considerations of the matrix [Lam83]. Such a computation is probably limited to some macropores with simple geometry (circles, squares, rhombus...). Nevertheless, Guillaumat prove that the macropore are the basis of the first crack family and he calculated the process of fragmentation with the three families in good accordance with the experiment. Thus, we consider that the macropore and transverse tow flaws are more severe than those of the longitudinal tows. This is described in Fig.6 by a flaw distribution around 200 MPa, which was introduced in regard to the experiment and the results of Guillaumat. Nevertheless, physically, this flaw distribution characterizes the severity of the first and second families. Moreover, we assume that these two first families are close in terms of stress, which allows us to describe them by a single beta II function $f_{at,bt}()$ with two parameters a_t and b_t . The calculation of this function is conducted as the same way as the third family beta II function. In conclusion, the characteristics of the three families are summarised in Tab.3 in comparison with the experimental data obtained upon unidirectional composites [Gui94].

$\sigma_w = 190$ MPa	Batch C	Batch B	1st & 2nd families	3rd family
Average (MPa)	390	680	190	630
Standard deviation (MPa)	60	120	80	200

Tab.3 Summary of the flaw populations [Cal98].

3. Numerical simulation

3.1. Finite element

The finite element calculation is performed to simulate the stress-strain behaviour of the woven SiC/SiC composite. The approach consists in distributing at random the flaw populations of each crack family in each element of the material mesh.

The woven composite is modelled as a layered composite ($0^\circ/90^\circ$) (Fig.7) assuming that the woven tows do not affect the stress field, which has largely been

proved by the works of Guillaumat [Gui94] and Carrere [Car96]. The calculations are performed in two dimensions on a square mesh (Fig.7) corresponding to 1,5 mm x 0,9 mm x 1,5 mm of the composite (1,5 mm is the half of the fabric periodicity and 0,3 mm is the fabric thickness). This square mesh is subdivided into six layers, which represent three transverse tows and three longitudinal tows. Then each layer is subdivided into 100 elements of 15 μm length, which is approximately the distance between cracks at matrix saturation (10-20 μm) [Gui94]. The width of the mesh is 1,5 mm.

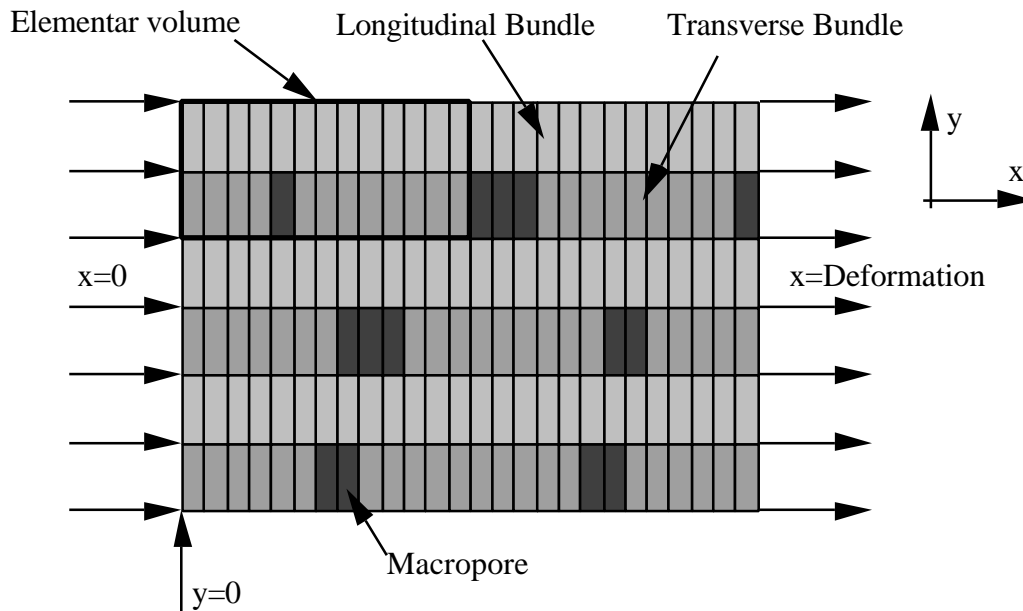


Fig.7 Mesh and boundary conditions for the finite element calculation.

We suppose that the lateral faces of the mesh remain straight during the simulation and that there is no contribution of the surrounding composite, which is confirmed when the volume of the mesh is assumed large enough.

3.2. Homogenization of the tow properties

The tows contain 500 SiC long fibres with a mean radius R_f of 7,25 μm infiltrated by a SiC matrix (Fig.1). The matrix and fibre cross sections are assumed constant. Moreover, the fibres are assumed characterized by a unique Young's modulus, a Poisson's ratio and a radius no scatter in data. There are no residual stresses induced upon cooling from the processing temperature, which was demonstrated by Lebrun [Leb96] for SiC/SiC composites. The bonding between matrix and fibres, without any damage, is supposed absolute which allows the use of the rule of mixtures for the calculation of the composite Young's modulus. Besides, a matrix crack causes a debonding length $2l_d$ located in the interphase, with a constant interfacial shear stress τ . Then, the longitudinal stress gradient in the fibres is described by the "shear lag" model (Fig.8) with the following equations :

$$\sigma_f(z) = \sigma_{f,\max} - \frac{2\tau}{R_f} z \quad 0 \leq z \leq l_d \quad (4)$$

$$\sigma_f(z) = \sigma_{f,\min} \quad l_d \leq z \quad (5)$$

$\sigma_{f,\min}$ is the longitudinal minimal fibre stress calculated with the rule of mixtures, and $\sigma_{f,\max}$ is the longitudinal maximal fibre stress, when the matrix is completely unloaded :

$$\sigma_{f,\min} = \frac{F}{S \cdot V_f \cdot (1 + x_f)} \quad (6)$$

$$\sigma_{f,\max} = \frac{F}{S \cdot V_f} \quad (7)$$

where F is the applied force, S is the composite cross sectional area, $x_f = E_m V_m / E_f V_f > 0$ is the composite fibre parameter, and V_f is the fibre volume fraction. The debonding length is given by the equilibrium between the applied load in the fibre and the load transferred by shear between matrix and fibres :

$$2l_d = \frac{R_f}{\tau} (\sigma_{f,\max} - \sigma_{f,\min}) \quad (8)$$

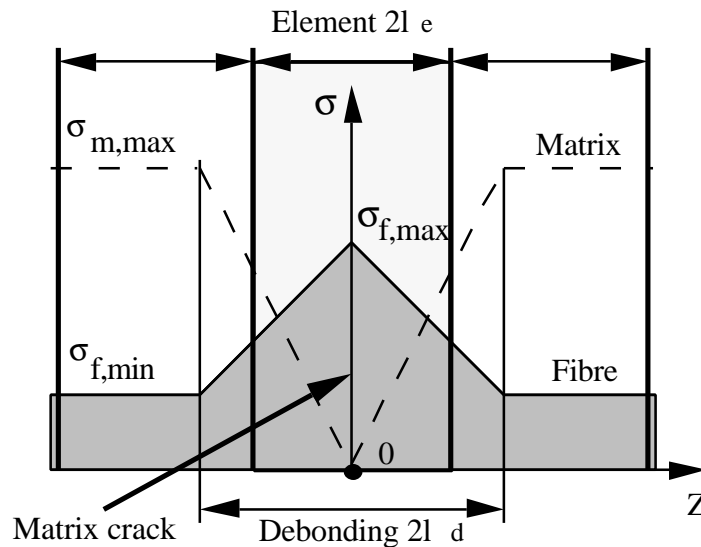


Fig. 8 Shear lag model of the debonding area.

Moreover, the matrix cracks occur in the volumes between the debonding length. When all the debonding lengths become continuous, the composite is saturated, and the fibres control the strain-force behaviour. Finally, it is assumed that the fibres can not experience multiple failures during the tensile test, and that the ultimate failure occurs at an applied strain of 1%.

For each element, the Young's modulus is homogenised in relation to the damage state. For an intact element, we apply the classical rule of mixtures (9) for

the longitudinal tow, and the homogenization theory for the transverse tow [Ber92], which yields approximately the rule of mixtures because the fibre properties are close to those of the matrix ($E_t \approx E_l$). The Poisson's ratio is also given by the rule of mixtures.

$$E_l = E_f V_f (1 + x_f) \quad (9)$$

$$\nu = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad (10)$$

When the element is damaged, with a single crack, the integration of the stress field (Fig.8) along the debonding length is performed to evaluate the total elongation :

$$\Delta l_d = \frac{2}{E_f} \int_0^{l_d} \sigma_f(z) dz \quad (11)$$

When the debonding length l_d is very small compared to the length of the composite l_c , the number of cracks at saturation is approximately equal to $1.5 l_c / 2.l_d$. This means that the element length l_e is approximately $2/3 l_d$. Thus, the Young's modulus for a damaged longitudinal element is calculated by including the total elongation of the debonding length into the element length :

$$E'_l = E_f V_f \frac{(1 + x_f)}{(1 + 3x_f / 4)} < E_l \quad (12)$$

This equation allows us to suppress the effect of the overlapping of two neighbouring debonding lengths. For the transverse tow, we suppose that any crack is catastrophic, and the transverse Young's modulus is equal to $E'_t = E_t / 10$.

	E (GPa)	ν (-)	E'(GPa)	ν' (-)
Longitudinal tow	255	0,16	80	0,16
Transverse tow	250	0,16	25	0,16

Tab.4 Summary of the tow properties.

Finally, the stiffness matrix d ($\sigma = d \epsilon$) is written in plane stress conditions with the corresponding Young's modulus and Poisson's ratio :

$$d = \begin{bmatrix} E / (1 - \nu^2) & \nu E / (1 - \nu^2) & 0 \\ \nu E / (1 - \nu^2) & E / (1 - \nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & E / (1 + \nu) \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.3. Algorithm

The calculations were computed according to the algorithm shown in Fig.9. At first, the flaw populations are distributed at random in the mesh elements : the first and the second family in the transverse tows, and the third family in the longitudinal tows. The strain and strain field are evaluated with a finite element code (Marc v6.1). The computation consists, for each step, in determining the damaged and not damaged elements by comparing the matrix applied stress $\sigma(i)$ of the element i , to the local matrix stress failure $\sigma_m(i)$. Then the stiffness matrix of each element is written with the corresponding value of the Young's modulus and Poisson's ratio. No ultimate failure criteria are introduced in the simulation. The calculation stops when a strain of 1% is reached. The strain of the mesh is determined from the displacement of the right face for a given applied force.

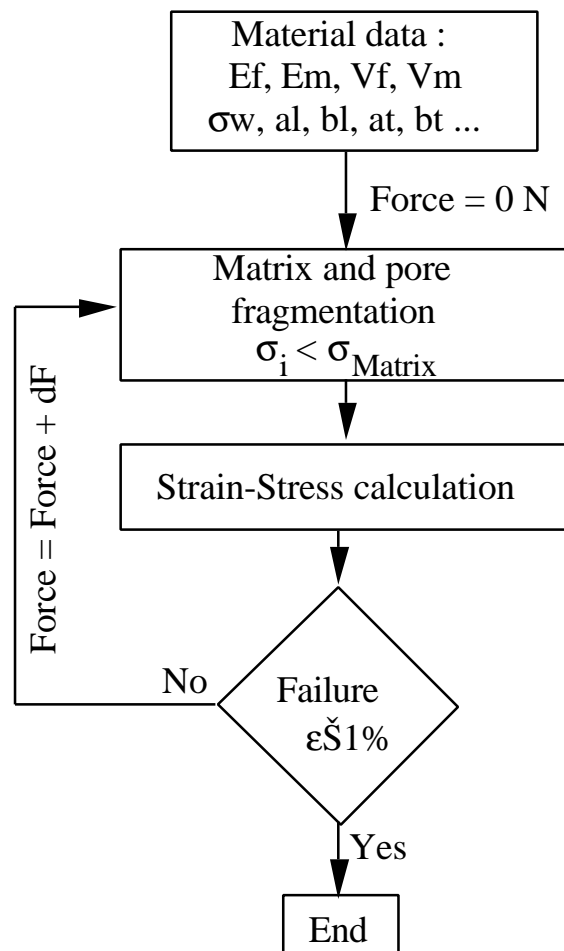


Fig.9 The computation algorithm.

4. Results and discussion

4.1. Results

The simulations were performed with the data of the woven SiC/SiC composites. The fibre volume fraction of the composite is 35%. One can notice from Fig.10 the good agreement between the simulation and the experiment, which means that the volume of composite used in calculation (1,5 mm x 0,9 mm x 1,5 mm) is large enough. Nevertheless, the curves show slight undulations due to the size of the mesh, which means that the strain-stress homogenisation is not obtained. A greater volume could improve the calculation, but thus the time required for computation will increase significantly.

Furthermore, the simulations allow the calculation of composites with various fibre volume fractions. As it has been described previously, the matrix flaws are defined by the matrix deposition. Thus, the third family of flaws can be calculated with respect to V_f (Fig.6). For the first and the second family of flaws (pores), the distribution can be evaluated arbitrarily in comparison to the distribution for $V_f = 35\%$. Indeed, for a fibre volume fraction of 20%, we can suppose that the composite is perfectly infiltrated, and that the sizes of the pores are smaller. This means that the distribution of stresses is less severe than that for $V_f = 35\%$. Inversely, for $V_f = 45\%$, we can imagine larger pores, which implies a stress distribution that is more severe. These distributions are reported in Fig.11, in comparison with the initial distribution ($V_f = 35\%$).

The computations were then performed using these stress distributions and the homogenized tow with respect to V_f (Fig.10). Then, we can observe that an increase of V_f decreases naturally the stiffness at the origin, but puts off the onset of the matrix fragmentation. Inversely, the calculations predict a catastrophic beginning of matrix fragmentation for a V_f of 20% ($E = 290$ GPa), due to the coincidence of the two stress distributions. For $V_f = 45\%$, the linear part of the strain-stress curve is short due to a severe stress distribution of the pores, contrary to the linear part for $V_f = 20\%$, which ends at 140 MPa.

These results can be illustrated by the stress-strain curves measured with woven SiC/SiC composites, which presented a great variation of density and consequently a great variation of fibre volume fractions. Indeed, the same tendencies can be observed (Fig.12). An increase of the matrix infiltration favours a catastrophic beginning of fragmentation, and consequently increases the strain of the composite. As a composite with high modulus and high strain-stress level for the ultimate failure is generally researched, these results confirm that an increase of infiltration is not recommended in this way.

These results are also in agreement with the predictions by Thommeret et al. [Lam98], who computed the damage process and then the stress-strain curves for a cell of SiC/SiC composite without macropore.

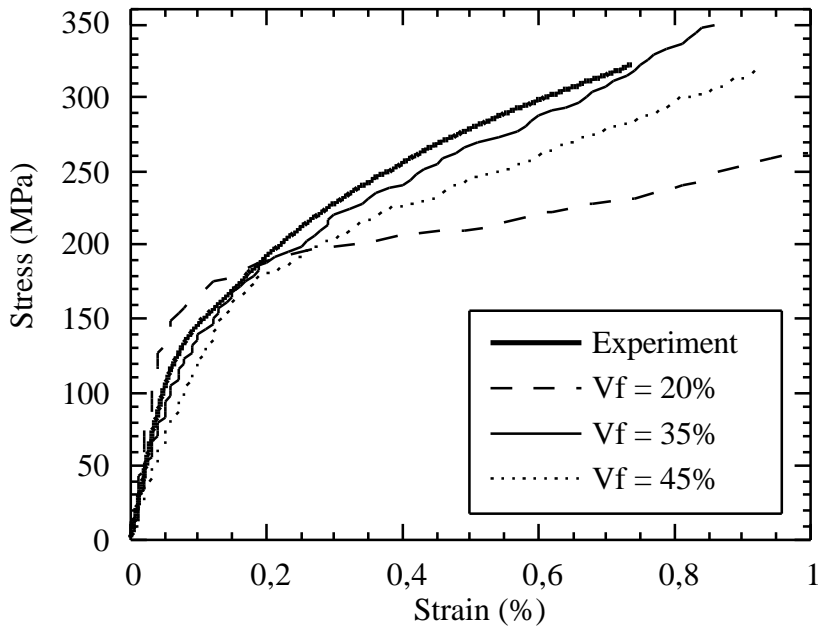


Fig.10 Comparison of various simulations with the experimental strain-stress behaviour of a SiC/SiC composites

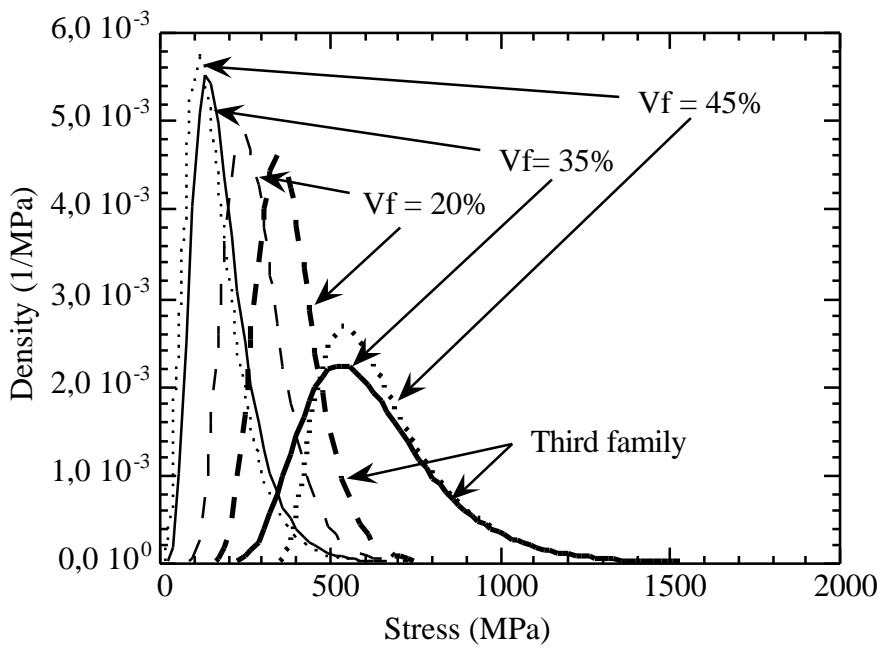


Fig.11 Flaw populations for various fibre volume fractions (first, second and third families).

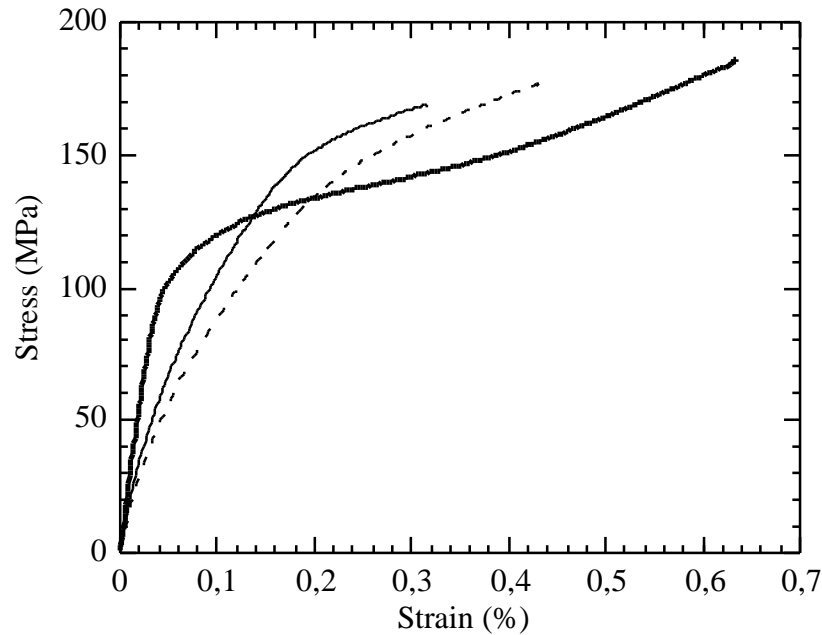


Fig.12 Examples of strain-stress behaviour of a SiC/SiC composite with various Young's moduli at the origin.

4.2. Discussion

A first consequence of the above results is that the improvement of the composite strain-stress behaviour can be achieved by limiting the severity of the first and the second families of cracks. Thus, we simulated the composite stress-strain behavior for various distributions of pores (Fig.13). The results (Fig.14) show that a better control of this distribution increases the composite performances. This implies that the transverse resistance between the matrix and the fibres should be improved. A decrease of the intertow porosity could push off the second family of cracks too. An effort of research should be done in this way.

An other point, which has not been studied here, is the problem of off-axis stress conditions. Indeed, the proposed study was performed in the directions of the tows, because the homogenisation theory now proposes analytical results in the fibre direction for unidirectional composites. For complex loading, the matrix failure analysis is properly known according to the works of Lamon et al [Lam83]. But, when a crack appears in the matrix, the homogenisation is more complex, and a lot of parameters as the transverse Young's modulus, Poisson's ratio, the shear stress, the debonding length, must be known precisely. This is probably one limit of the proposed study. An other limit is the computation time, which increases tremendously when the calculated composite volume is greater. This will certainly be resolved with the help of more powerful computers. Indeed, the effects of the temperature can be introduced for each crack in order to simulate the fibre and the interphase layer oxidation, which is the Achilles's heel of this composite. The microscopic approach enables us to consider the effect of the oxidation through the composite width. We can imagine that the above considerations about the role of V_f

and V_m will yield important results in regard to the composite optimisation.

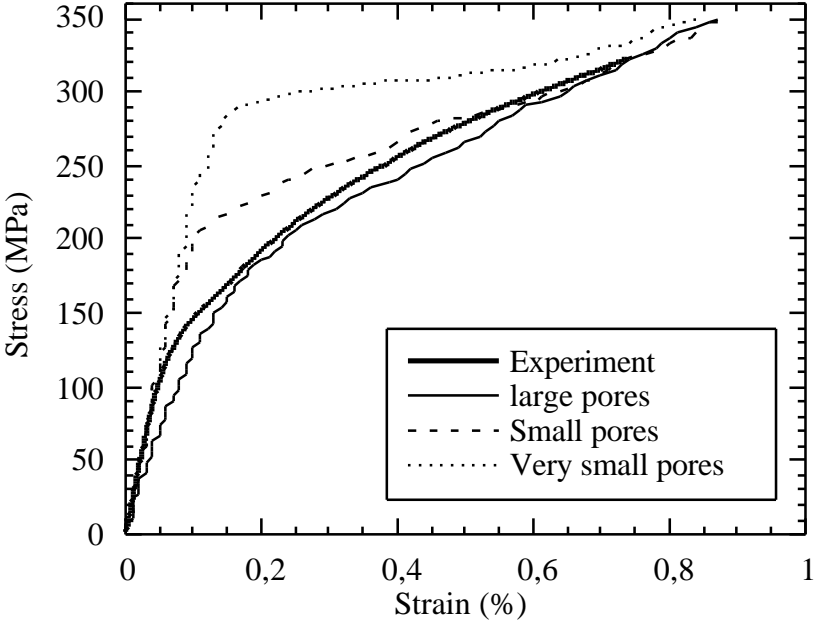


Fig.13 Simulated strain-stress curves for composites with various pore sizes.

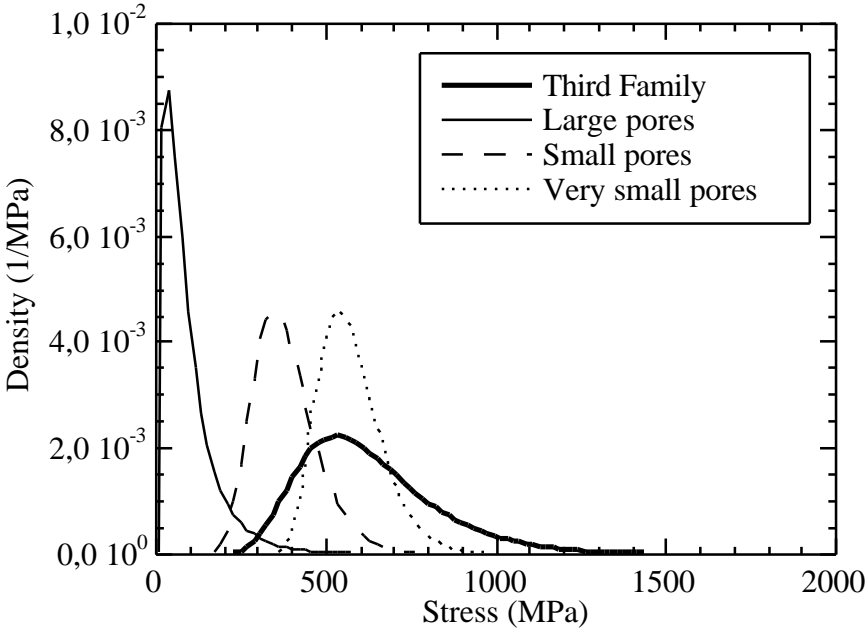


Fig.14 Representation of the first and second flaw populations induced by various pore sizes.

5. Conclusion

This paper deals with the micro-mechanical approach to the mechanical behavior of a woven SiC/SiC composite. The simulation of the strain-stress behaviour was performed by introducing the three families of cracks that appear in the matrix during composite damage : the pores, the intertow pores, and the intrinsic matrix flaws. The calculations used the finite element method, considering a multilayer (0°/90°) composite. The results were found in agreement with the experimental strain-stress curve in the composite axis. Moreover, the model allows us to predict the behaviour of composites with various fibre volume fractions. These results have been confirmed by the analysis of woven SiC/SiC composite revealing great variations of the matrix deposition and are in agreement with previous simulations based upon a statistical probabilistic approach. Some guidelines for the composite improvement, have been proposed. The effort should be focused on the resistance of the transverse tows to reduce the severity of the first and the second families of cracks. The third family of cracks is directly influenced by the matrix deposition, and its increase is not recommended in order to obtain a better strain-stress response. This result could be extended to thermal studies by including the oxidation effect on the cracks in the model.

References

- [Aub94] X. Aubard, J. Lamon and O. Allix, "Model of the nonlinear mechanical behavior of a 2D SiC/SiC CVI composites", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 77, n° 8, pp 2118-2126, 1994.
- [Ave71] J. Aveston, G.A. Cooper et A. Kelly, "Single and multiple fracture", Conference Proceedings of National Physical Laboratory, Teddington, UK, London, Sciences and Technology, pg 15-26, 1971.
- [Bad82] S. B. Batdorf and R. Ghaffarian, "Tensile strength of unidirectionally reinforced composites- I and II", J. Reinforced plastics and composites", Vol. 1, pp 153-176, 1982.
- [Bad88] M. G. Bader, "Tensile strength of uniaxial composites", Science and Engineering of Composite Materials, Vol. 1, n° 1, pp 1-11, 1988.
- [Bat79] S. B. Batdorf and D. J. Chang, "On the relation between the fracture statistics of volume distributed and surface distributed cracks", Int. J. of Fracture, Vol. 15, n° 2, pp 191-199, 1979.
- [Ber92] J.-M. Berthelot, "Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures", Edited by Masson, Paris, 1992.

- [Bey92] D. S. Beyerle, S. M. Spearing, F. W. Zok and A. G. Evans, "Damage and failure in unidirectional ceramic-matrix composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol. 75, n° 10, pp 2719-2725, 1992.
- [Bob96] J.-L Bobet, R. Naslain et C. Bernard, "On the CVD of MoSi₂- 1 : Choice of the precursor and thermodynamic considerations", *J. Chem. Vapor Deposition*, Vol. 3, n° 3, pg 223-253, 1996.
- [Bub86] B. Budiansky, J. W. Hutchinson and A. G. Evans, "Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 34, n° 2, pp 167-189, 1986.
- [Cal98] V. Calard and J. Lamon, "Simulation of matrix cracking in unidirectional ceramic composites (minicomposites)", Thesis n° 1948, University of Bordeaux I, (Partie II-1), pg 65-92, 1998.
- [Car96] P. Carrere, "Comportement thermomécanique d'un composite de type SiC/SiC", Thesis, n° 1592, University of Bordeaux I, France, 1996.
- [Cho92] C. Cho, J. W. Holmes and J. R. Barder, "Distribution of matrix cracks in a uniaxial ceramic composite", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol 75, n°2, pp 316-324, 1992.
- [Cur91] W. A. Curtin, "Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol 74, n°11, pp 2837-2845, 1991.
- [Dan93] S. Danchaivijit and D. K. Shetty, "Matrix cracking in ceramic-matrix composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol 76, n°10, pp 2497-2504, 1993.
- [Eva94] A. G. Evans and F. W. Zok, "Review : The physics and mechanics of fibre-reinforced brittle matrix composites", *J. Materials Science*, Vol 29, pp 3857-3896, 1994.
- [Gui93] L. Guillaumat and J. Lamon, "Multifissuration des composites SiC/SiC", *Revue des Composites et des matériaux avancés*, Vol 3, numéro hors serie, pp 159-171, 1993.
- [Gui94] L. Guillaumat, "Microfissuration des CMC : Relation avec la microstructure et le comportement mécanique", Thesis, n° 1056, University of Bordeaux I, France, 1994.
- [Gum54] E. J. Gumbel, "Statistical theory of extreme value and some practical applications", National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series n° 33, United States Department of Commerce, pp 1-51, 1954.
- [He93] M. Y. He, A. G. Evans and W. A. Curtin, "The ultimate tensile strength of metal and ceramic-matrix composites", *Acta metall. mater.*, Vol 41, n°3, pp 871-878, 1993.

- [Heu96] Heurtevent, "Matériaux multicouches nanoséquencés (PyC/SiC)_n. Application en tant qu'interphase dans les composites thermostructuraux", Thesis, n°1476, University of Bordeaux I, France, 1996.
- [Ich94] H. Ichihashi, H. Hamada, N. Ikuta & Z. Maekawa, "Finite element analysis of woven fabric composites considering interfacial properties", Composite Interfaces, Vol. 2, n°2, pp 81-94, 1994.
- [Jay77] A. De S. Jayatilaka et K. Trustrum "Statistical approach to brittle fracture", J. of Material Sciences, Vol. 12, pp 1426-1430, 1977.
- [Kuo95] W-S. Kuo & T-W. Chou, "Elastic response and effect of transverse cracking in woven fabric brittle matrix composites", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 78, n° 3, pp 783-792, 1995.
- [Kuo95] W. S. Kuo and T. W. Chou, "Multiple cracking of unidirectional and cross-ply ceramic matrix composites", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 78, n° 3, pp 745-755, 1995.
- [Lam83] J. Lamon and A. G. Evans, 1983, "Statistical analysis of bending strength for brittle solids : A multiaxial fracture problem", J. of Am. Ceram. Soc., Vol. 66, n° 3, pp 177-182, 1983.
- [Lam93] J. Lamon, N. Lissart, C. Rechiniac, D.M. Roach and J.M. Jouin, "Micromechanical and statistical approach to the behavior of CMCs", Cer. Eng. Sc. Proc., September-October, pp 1115-1124, 1993.
- [Lam98] J. Lamon, B. Thommeret and C. Percevault, "Probabilistic-statistical approach to the matrix damage and stress-strain behavior of 2D woven SiC-SiC ceramic matrix composites (CMCs)", J. of the European Ceram. Soc., in press, 1998.
- [Leb96] G. A. Lebrun, "Comportement thermomécanique et durée de vie des composites à matrice céramique : Théorie et expérience", Thesis, n° 1606, University of Bordeaux I, France, 1996.
- [Lebo93] B. Lebon, "Etude et modélisation de l'endommagement dans les composites tissés SiC/SiC", Thesis, University of Paris 6, France, 1993.
- [Lebo96] B. Lebon, C. Baxevanakis, D. Jeulin & J. Renard, "Comportement statistique à rupture des composites stratifiés", Proc. of JNC 10, Paris, October 29-31, pp 607-619, 1996.
- [Lis97] N. Lissart and J. Lamon, "Damage and failure in ceramic matrix composites : experimental study and model", Acta mater., Vol 45, n° 3, pp 1025-1044, 1997.
- [Mar85] D. B. Marshall, B. N. Cox and A. G. Evans, "The mechanics of matrix

cracking in brittle-matrix fiber composites", *Acta metall.*, Vol. 33, n° 11, pp 2013-2021, 1985.

- [Mun94] E. Munier, "Identification expérimental et modélisation statistique multi-échelle du comportement mécanique de composites SiC/SiC tissés", Thesis, Ecole nationale supérieure des Mines de Paris, France, 1994.
- [Pho93] S. L. Phoenix, "Statistical issues in the fracture of brittle-matrix fibrous composites", *Composite Science and Technology*, Vol. 48, pp 65-80, 1993.
- [Sch90] H. R. Schwieter and S. Steif, "A theory for the ultimate strength of a brittle-matrix composite", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, n° 3, pp 325-343, 1990.
- [Spe93] S. M. Spearing and F. W. Zok, "Stochastic aspects of matrix cracking in brittle matrix composites", *Transaction of the ASME*, Vol. 115, pp 314-318, 1993.
- [Sut88] M. Sutcu, "Statistical fibre failure and single crack behavior in uniaxially reinforced ceramic composites", *J. of Mat. Science*. Vol. 23, pp 928-933, 1988.
- [Wei51] W. Weibull, "A statistical distribution of wide applicability", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 18, September 1951, 293-29, 1951.
- [Wei93] Y. Weitsman and H. Zhu, "Multi-fracture of ceramic composites", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, n° 2, pp 351-388, 1993.

Ultimate failure of fibre bundles and influence of load sharing conditions

V. Calard & J. Lamon

Résumé : Cet article, examine les essais de traction sur fils (500 fibres sans matrice) d'un point de vue critique en indiquant tout d'abord les équations idéales du fil en partage global des charges (comportement, rupture). Cette approche permet de mettre en évidence la relation fibre-fil en insistant sur la sensibilité des équations. En ce qui concerne le passage inverse, les essais sur fil peuvent être perturbés par le nombre de fibres, le chargement non-uniforme et le partage local des charges. Néanmoins on démontre que le nombre de fibres et le chargement non uniforme ont des effets très faibles, contrairement au partage local de charge qui est très pénalisant. Ainsi dans ce cas, on observe une chute des propriétés à rupture du fil, ainsi qu'une augmentation de la dispersion. Les résultats de partage local de charge ont été réalisés pour des réseaux triangulaires imparfaits. Il apparaît ainsi des effets de sensibilité aux perturbations et des grandes dispersions des valeurs minimales, ce qui implique, dans le cas d'un système série de fils avec la notion du lien le plus faible, des ruptures fragiles beaucoup plus dispersées que ne le prévoient les théories classiques.

Mots clefs : fil, fibre, partage de charge, chargement non uniforme, dispersion.

Ultimate failure of fibre bundles and influence of load sharing conditions

1. Introduction

The fibre strength characterization has gained increased interest in recent years because the composite ultimate strength is directly influenced by the fibre properties [Ros64, Zwe68, Har77, Bat82, Bad88, Pho93]. Two experimental procedures can be used to identify the statistical fibre strength. The first one is the single fibre testing. This procedure is long and not as efficient as expected, because the number of tests required for a good accuracy is generally high (50 tests) [Pet95, Kha91], and not often respected. The second one is the fibre bundle testing, which seems easier and much more accurate [Chi84]. Nevertheless, some difficulties appear, induced by the experimental apparatus and the bundle result analysis.

Thus the present paper analyses the bundle test and the relationship between fibres and bundles properties. The absolute global load sharing model, which is introduced in the first part, has largely been described in the literature [Dan45, Col58]. In the second part, this model is resumed with particular considerations of some experimental problems as the total number of fibres, the non-uniform loading, and the local load sharing. It appears clearly that the statistical fibre properties are largely influenced by the bundle analysis [Hil95] so that the absolute global load sharing model is, without any care, unusable.

Two SiC fibres were investigated in this paper : SiC NLM 202 and SiC Hi-Nicalon. Each fibre type was analysed with two procedures : single fibre test and 500 fibre bundle test, which allowed us to compare and discuss the validity of the bundle test procedure.

2. Absolute global load sharing model (GLS)

2.1. Hypotheses and calculations

The bundle hypotheses have first been indicated by Daniels [Dan45] and Coleman [Col58], and are the basis of the bundle analysis. Consider a bundle of exactly N_t identical fibres (Radius R_f , length l) following the two parameter Weibull distribution [Wei51] for the strength :

$$P(\sigma) = 1 - \exp(-(V/V_o)(\sigma/\sigma_o)^m) \quad (1)$$

where $P()$ is the single fibre failure probability, for a volume V under a uniform stress σ , and V_0 is the reference volume ($V_0 = 1\text{m}^3$). A bundle test consists in loading N_t fibres glued in two circular end-tabs at each extremity, gripped in a tensile machine. When a fibre breaks during a tensile test, the global load sharing is assumed, which means that the broken fibre load is shared identically by the surviving fibres. Then all the remaining fibres carry the same load during the tensile test. The ratio $\alpha()$ of the number of broken fibres N versus the total number of fibres N_t is approximately equal to the failure probability when N_t is high :

$$\alpha(\sigma) = \frac{N}{N_t} = P(\sigma) \quad (2)$$

Consequently, the total force $F(\sigma)$ applied to the bundle is :

$$F(\sigma) = N_t(1 - \alpha(\sigma))S_f\sigma \quad (3)$$

with S_f the fibre cross section ($S_f = \pi R_f^2$). The maximum of the force $F()$ is given by :

$$F(\sigma_{\max}) = F_{\max} \Leftrightarrow \frac{dF}{d\sigma}(\sigma_{\max}) = 0 \quad (4)$$

which yields the maximum stress σ_{\max} and the critical ratio α_c :

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 (mV)^{-1/m} \quad (5)$$

$$\alpha_c = P(\sigma_{\max}) = 1 - \exp(-1/m) \quad (6)$$

To estimate the scattering of the maximum force F_{\max} , we can consider the binomial function $B(N_t, \alpha_c)$ [Bre88], which is naturally equal to the critical number of broken fibres N_c (statistical definition) :

$$N_c = B(N_t, \alpha_c) \quad (7)$$

Thus, the expectation $E()$ and the variance $S^2()$ of the critical number of broken fibres N_c are deduced from the expectation and the variance of the binomial function, which finally yields the expectation and the variance of the maximum force F_{\max} :

$$E(N_c) = N_t \alpha_c \Rightarrow E(F_{\max}) = N_t(1 - \alpha_c)S_f\sigma_{\max} \quad (8)$$

$$S^2(N_c) = N_t(1 - \alpha_c)\alpha_c \Rightarrow S^2(F_{\max}) = (S_f\sigma_{\max})^2 N_t(1 - \alpha_c)\alpha_c \quad (9)$$

This allows us to calculate the coefficient of variation C_v , given by Daniels [Dan45] and Gurvich & Pipe [Gur95] :

$$C_v(F_{\max}) = \frac{S(F_{\max})}{E(F_{\max})} = \sqrt{\frac{\alpha_c}{N_t(1 - \alpha_c)}} \quad (10)$$

A first consequence of (10), is that the coefficient of variation is small because the number of total fibres N_t is generally high ($N_t = 500$ in this paper). Therefore, the maximum force must not be scattered at all. By a numerical approach, F_{\max} and σ_{\max} can be computed which permits a better estimation. The computation is performed by evaluating the number of broken and surviving fibres for a force F . The strength σ of each fibre is calculated with the inverse equation of (1) ($P^{-1}()$), by choosing at random a probability value x ($\sigma = P^{-1}(x)$). When a fibre breaks, its load is shared between all the surviving fibres before an increase of the force, and so on until no new fibre breaks. The increase of F is pursued until the breaking point is reached. This numerical approach is commonly used in literature [Lie93, Man82]. A great number of computation is necessary to evaluate the scattering of F_{\max} and σ_{\max} . The strain-force behaviour can be deduced by estimating the total displacement assuming a linear strain-stress behaviour for the fibres ($\sigma = E \epsilon$).

2.2. Experiments

The present calculations were applied to 500 SiC fibre bundles tested under various conditions. Two Nicalon SiC fibres were examined, NLM 202 (Nippon Carbon) [Lis94] and Hi-Nicalon (Nippon Carbon) [Pas97], with the following properties :

	E (GPa)	m (-)	σ_o (MPa, $V_o=1m^3$)	R_f (μm)
NLM 202 (n=30)	180	4.6	8.4	7.25
Hi-Nicalon (n=10)	280	5.2	29.0	6.75

Tab.1 Fibre properties [Lis97], [Ber98].

These properties were deduced from the single fibre tests with the maximum likelihood analysis for n values. The NLM 202 fibre bundles (20 specimens, gauge length = 75 mm) were tested on an Instron 8501 machine at room temperature. The Hi-Nicalon fibre bundles (20 specimen, gauge length = 65 mm) were tested, at room temperature, on an experimental rigid frame machine built in the laboratory. Specimen elongation was measured using two LVDT extensometers mounted on the grips, with the correction of the system loading compliance. Two glues were used to fix the bundle ends : Loctite 496 for NLM 202 bundles and 3M 9323 for Hi-Nicalon bundles.

2.3. Strain-force curve (Relationship Fibre <--> Bundle)

The strain-force behaviour can then be computed with the fibre properties. In Fig.1, some calculated strain-force curves are plotted for each bundle type, which shows the natural scattering induced by the bundle test.

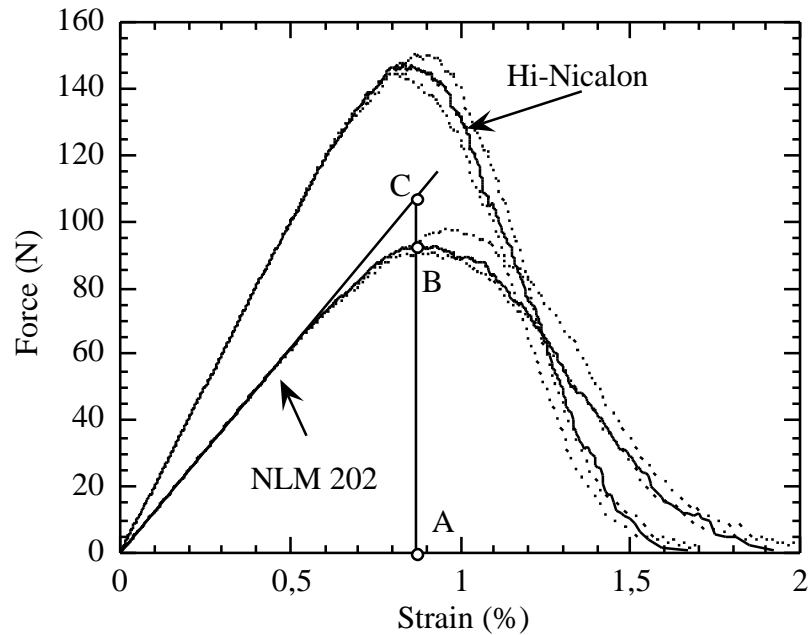


Fig.1 Theoretical strain-force curves for fiber bundles under tension (3 simulations for each fibre type).

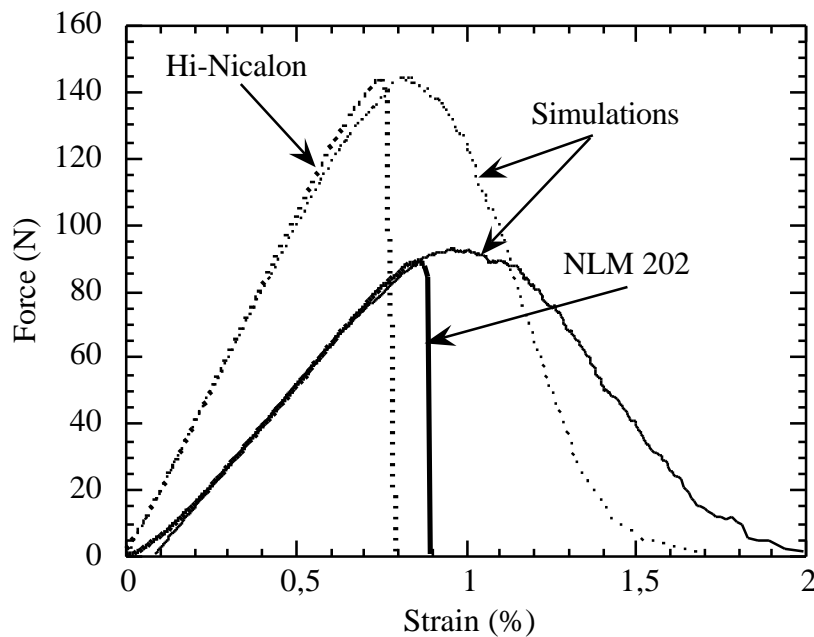


Fig.2 Comparison between the calculations and the experimental curves.

In Fig.2, two experimental curves are compared with the calculations. A good agreement can be noticed between the calculations and the experimental curves for both fibre bundles, although the part of the curve after the ultimate failure was not recorded, which is probably induced by the experimental apparatus. This experimental error does not allow us to apply the bundle analysis used by Loidl [Loi97], in order to estimate the fibre properties from a bundle strain-force curve. Indeed, the analysis of the bundle strain-force curve consists in calculating the probability of fibre fracture and the corresponding stress for a high number of points, taken on the entire curve. By using these data, the method of maximum-

likelihood is performed to obtain the Weibull parameters m and σ_0 . Consequently, the strain-force curve appears really useful when the experimental apparatus is accurate enough in order to obtain the entire curve. This leads us to consider the ultimate failure load, whose measurement is easier.

2.3. Bundle ultimate load

Relationship Fibre --> Bundle

At first, let's consider the relationship fibre --> bundle, which is described by the mean and the standard deviation of the ultimate force of each bundle type calculated as a function of the fibre properties (Tab.2 and Tab.3).

NLM 202	Tests [Lis94] (n=28, l=75 mm)	Analytical (3) et (5) (m=4.6 et $\sigma_0=8.4$ MPa)	Simulations (n=100) (m=4.6 et $\sigma_0=8.4$ MPa)
F_{\max} (N)	77	94	95
$S(F_{\max})$ (N)	8	2	2
C_v (%)	10	2	2

Tab.2 Comparison between the calculations and the experimental ultimate failure loads for NLM 202 fibres ($V_0 = 1\text{m}^3$).

Hi-Nicalon	Tests [Pas97] (n=20, l=65 mm)	Analytical (3) et (5) (m=5.2 et $\sigma_0=29.0$ MPa)	Simulations (n=100) (m=5.2 et $\sigma_0=29.0$ MPa)
F_{\max} (N)	146	165	167
$S(F_{\max})$ (N)	6	3.4	3.1
C_v (%)	4	2	2

Tab.3 Comparison between the calculations and the experimental ultimate failure loads for Hi-Nicalon fibres ($V_0 = 1\text{m}^3$).

A slight discrepancy can be observed between the experimental and calculated ultimate forces. Moreover, the high standard deviation value, measured for NLM 202 fibre bundles, implies that the absolute global load sharing assumption was not properly satisfied. For the Hi-Nicalon fibres, the values are closer to the theoretical results. Nevertheless, the discrepancy can probably be explained by the great sensitivity of equation (3) to m and σ_0 . Indeed, in Fig.3, the variations of F_{\max} are calculated for various values of m and σ_0 (data for Hi-Nicalon fibres). When m is equal to 5.5, the variation of F_{\max} is linear in respect to σ_0 . But when σ_0 is constant ($\sigma_0 = 30$ MPa), the variation of F_{\max} is exponential with respect to m .

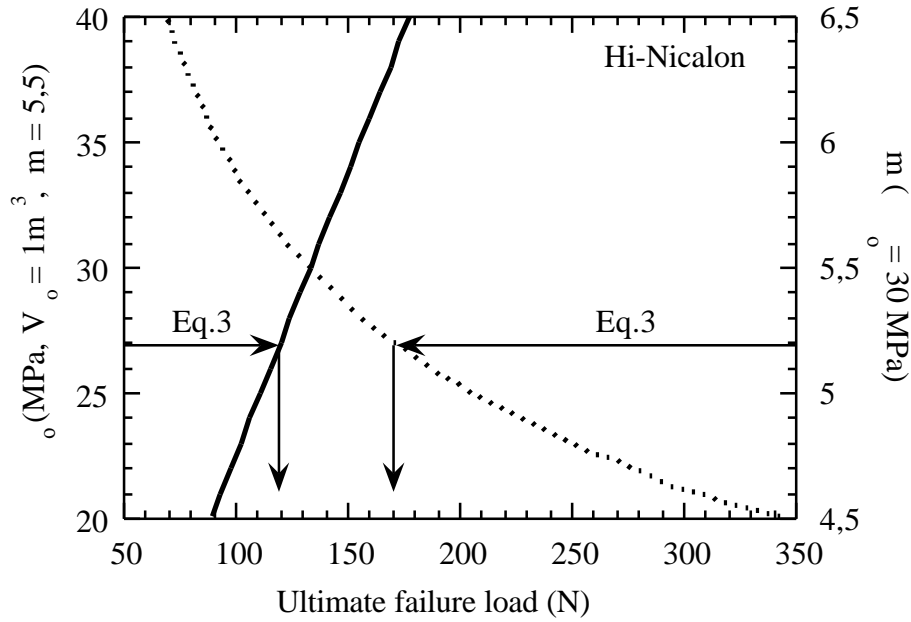


Fig.3 m and σ_0 influence on the ultimate failure load (Solid line : the ultimate load is a linear function of σ_0 with $m=5.5$) (Dotted curve : the ultimate load follows an exponential curve of m with $\sigma_0=30\text{MPa}$).

This means that a small error, made in the single fibre test analysis, is catastrophic for the prediction of the bundle ultimate force. For the Hi-Nicalon fibre, the number of single fibre tests is probably too small ($n=10$). Finally, this leads us to consider rather the m and σ_0 parameters as a couple of parameters linked by the value of the bundle ultimate force (3).

Relationship Bundle --> Fibre

Largely described in literature, the bundle ultimate load is generally the first parameter used to evaluate the fibre properties [Hil95]. The method consists in evaluating the critical ratio of broken fibres α_c , calculated from the ratio (AB/AC) (Fig.1), which gives m with (6), and then σ_0 with (3). The results are not accurate due to the natural bundle scattering of the critical ratio α_c (Fig1). Chi et al [Chi84] proposed a method based on both the ultimate load and strain, assuming a linear behaviour for the fibres. As the strain is strongly influenced by the non linearity at the beginning of the tensile test, this method is not rigorous.

Thus, we propose a method based only on the ultimate load measurement. As there are two unknowns, more than two equations are necessary. Thus, we may consider three different bundle lengths (volumes), which give three different ultimate failure loads (3). In order to calculate m , we can draw the function $\ln(F_{\max})$ versus $\ln(V)$ which yields :

$$\ln(F_{\max}) = \text{cons} \tan t - \frac{1}{m} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad (11)$$

with V the volume of a single fibre. Finally, the slope gives m , and σ_0 is deduced from (3). Finally the Weibull parameters of the Hi-Nicalon fibre are : $m = 5.7$ and $\sigma_0 = 38$ MPa.

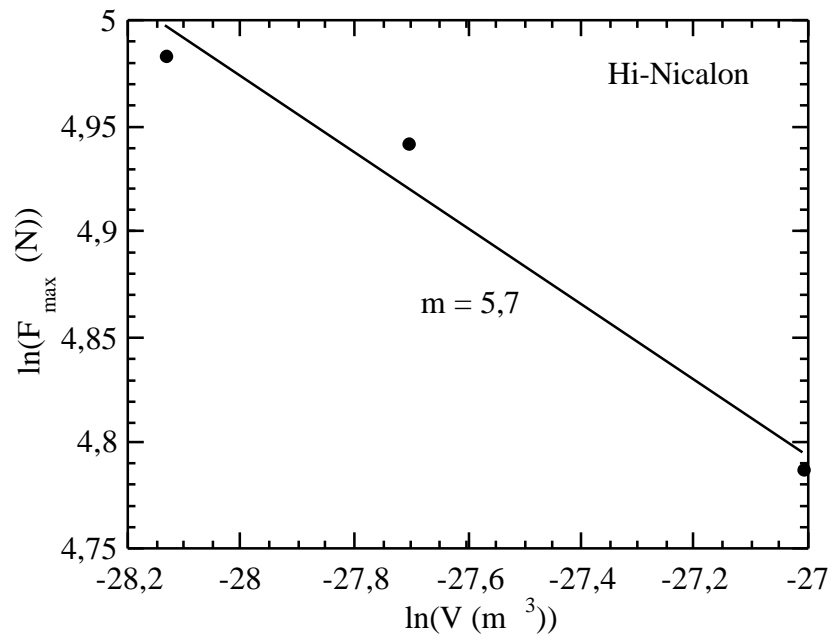


Fig.4 Scale effect on bundle ultimate failure loads for various fibre volumes (lengths).

Nevertheless, the standard deviations measured for the two bundle types are too high, contrary to the global load sharing (GLS) prediction. This discrepancy will be discussed below, regarding some important phenomena generally ignored in the GLS model.

3. Practical bundle tests

The GLS model is examined in this part as a function of various experimental factors including the number of fibres, the non-uniform load and the local load sharing.

3.1. Number of fibres

The number of fibres N_t is probably the first parameter which is scattered and not precisely defined. This assumption is proved by the study of the strain-force slope. Many reasons as the damage during handling, or the origin of the bundle can be supposed. In Fig.5 and Fig.6 the strain-force calculations were performed for numbers of fibres between 475 and 525. The scatter in the ultimate force is increasing consequently.

The exact number of fibres N_t can be evaluated from the bundle weight [Env97] or the slope of the strain-force curve in the linear part. Thus, the fibre weight, or the fibre Young's modulus and fibre mean radius must be known with good accuracy. Thus, a correcting method can be applied to reduce the effect of the effective number of fibres. Indeed, some fibres can be added or suppressed artificially in order to get the exact fibre number in the bundle, which can be done by adding or suppressing the load per fibre to the applied force. Nevertheless, this correction is not as efficient as expected, which leads us to consider other artifacts.

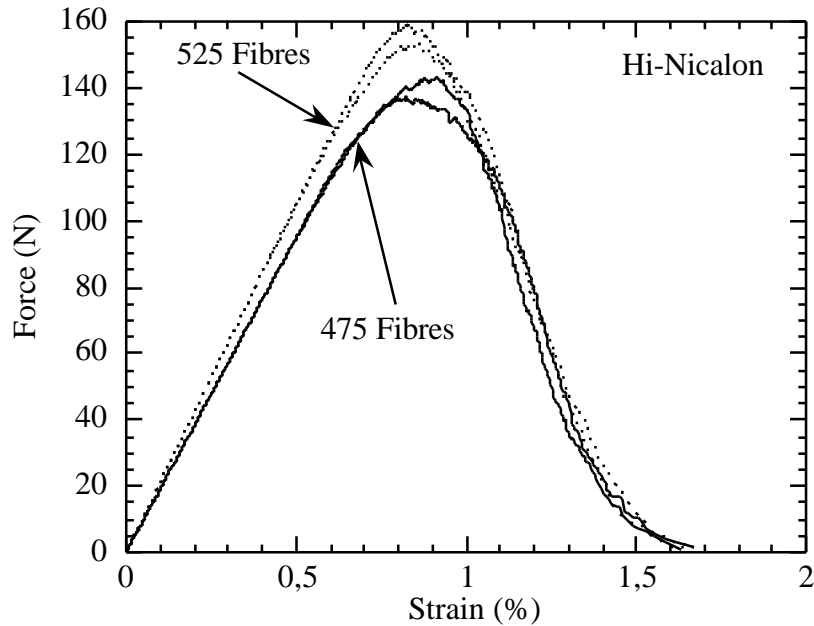


Fig.5 Strain-force curves computed for various numbers of Hi-Nicalon fibres.

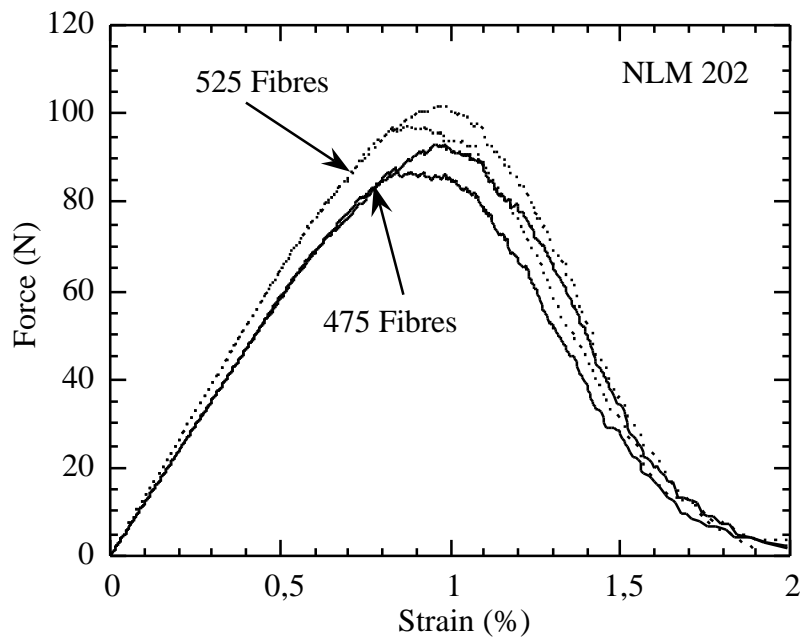


Fig.6 Strain-force curves computed for various numbers of NLM 202 fibres.

3.2. Non-uniform loading (NUL)

The non-uniform loading is indicated by the non linearity of the initial part of the strain-force curve. Indeed, it is generally difficult to obtain a linear slope at small forces. This is particularly obvious for the NLM 202 fibre bundles (Fig.2). It is now clearly established that this phenomenon is due to the scattering of the fibre lengths. Then we propose a numerical method to simulate the non linear behaviour. Consider the beginning of the linearity at F_l (N) and ϵ_l (%) (Fig.8). We suppose that the force $f(i)$ of the fibre i follows a power function x^γ at the beginning of linearity in order to characterize the non-uniform loading :

$$f(i) = F_l \left(\frac{i}{N_t} \right)^\gamma \frac{1}{K_{Nt}} \quad (12)$$

With the normalisation constant K_{Nt} :

$$K_{Nt} = \sum_{j=1}^{N_t} (j / N_t)^\gamma \quad (13)$$

which implies the following result at the beginning of linearity :

$$\sum f(i) = F_l \quad (14)$$

Then the strain of each fibre i is deduced for the Young's modulus E :

$$\epsilon(i) = \frac{f(i)}{E \cdot S_f} \quad (15)$$

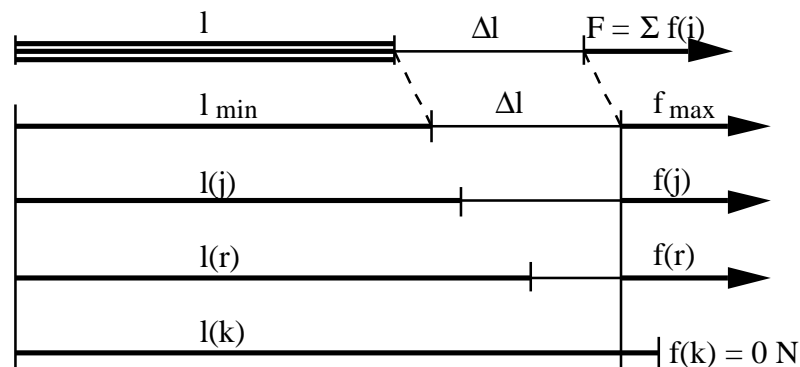


Fig.7 The various fibre lengths in the bundle.

The maximum strain value ϵ_{\max} corresponds to the shortest fibre l_{\min} , whose deformation is equal to the bundle deformation :

$$l_{\min} \epsilon_{\max} = \Delta l = l \epsilon_l \quad (16)$$

All the lengths of fibre i are then obtained :

$$l(i) = \frac{l_{\min} + \Delta l}{(1 + \varepsilon(i))} \quad (17)$$

Finally, the computation consists in evaluating for a total strain ε , the fibres with lengths shorter than $l(1 + \varepsilon)$ (Fig.7). The force is estimated by calculating the strain of each fibre under loading, and then the carried force. Two examples are given in Fig.8.

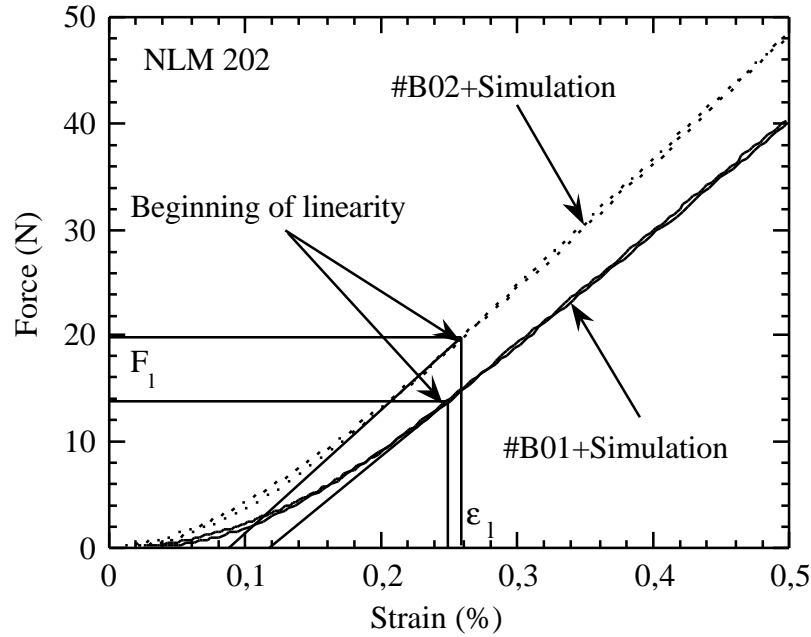


Fig.8 Strain-force curves computed for bundles with the NUL effect.

The following parameters were identified for these two examples :

	#B01	#B02
N_t	470	500
F_l (N)	14	20
ε_l (%)	0.25	0.26
γ	0.90	0.55
σ_{\max} (MPa)	320	375
l_{\min} (mm)	75.7	76.1
l_{mean} (mm)	75.8	76.2
l_{\max} (mm)	75.9	76.3

Tab.4 NUL parameters for tests #B01 and #B02.

σ_{\max} corresponds to the maximum stress in the shortest fibre at the beginning of linearity. l_{\min} , l_{mean} and l_{\max} are respectively the minimum, the mean

and the maximum fibre lengths in the bundle. Note that the variation of l is very small ($\pm 100 \mu\text{m}$), which means that the preparation of test specimens must be really careful to prevent any non-uniform load.

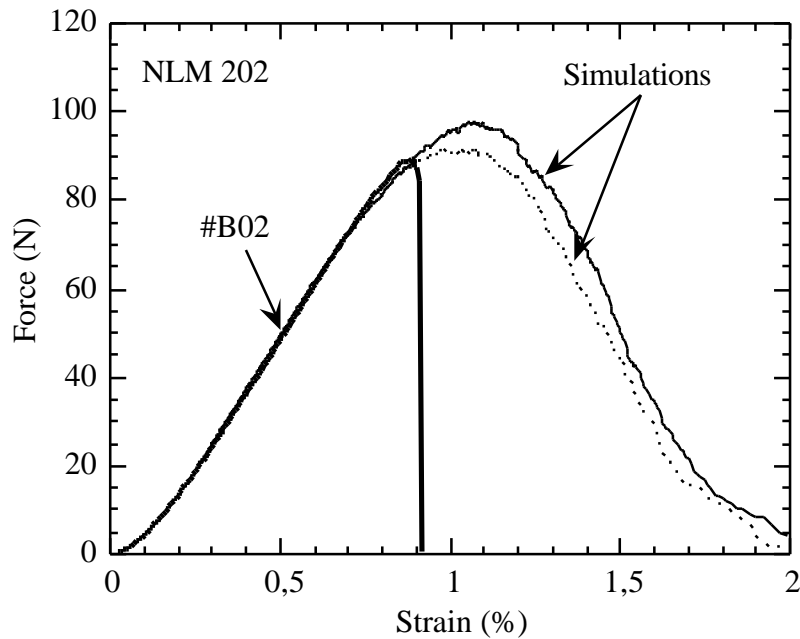


Fig.9 Comparison between the computed strain-force curve and the result of test #B02.

Finally, the strain-force curve can be calculated to obtain the entire curve. After the beginning of linearity, an increment of strain can be applied to the bundle. This increment gives for each fibre an increment of stress in relation to its length. Then when a fibre reaches its ultimate load, the fibre breaks and the load is suppressed from the total applied load, which is the sum of the load carried by all the surviving fibres. This simulation is then a simulation with an imposed strain. In Fig.9, the strain-force behaviour is computed and compared to the test #B02. An excellent agreement can be observed, but the ultimate failure is overestimated. This leads us to introduce the local load sharing concept.

3.3. Local load sharing (LLS)

This approach was introduced to explain the high standard deviation observed in the NLM 202 bundle tests. More generally, the GLS hypothesis is largely criticised in composite materials, because the matrix creates local stress concentrations around a breaking fibre [Hed97, Lie93, Har77, Bat82, Wis95]. In the case of the bundle test, the LLS hypothesis can be supposed in regard to interfibre friction [Hil95] or dynamic effects associated to fibre rigidity which controls damping of the strain waves.

Therefore, consider the 500 fibres assumed to be in a triangular array (Fig.10). If the fibres are assigned a label to be differentiated, it is possible to define a

triangular network, corresponding for each fibre to its six neighbours. This network can be reduced by suppressing at random some links between the fibres. This can be done by choosing a reducing parameter β_r between 0 and 1, and by giving a random number for each link. The link is then suppressed when the random number is smaller or equal to β_r . Then, when β_r is equal to 0, no link is suppressed. When β_r is equal to 1, all the links are suppressed. The percolation point is reached for $\beta_r = 0.5$ [Sta79] for a triangular array. This process allows us to create an infinity of networks with various numbers of links, and with continuity from a perfect triangular network to a bundle of isolated fibres. The perfect triangular network is commonly used in LLS works for 3D geometry [Hed67, Bat82], and the perfect linear network in 2D geometry [Har77]. This numerical simulation enables us to study imperfect networks which is analytically impossible [Boy97].

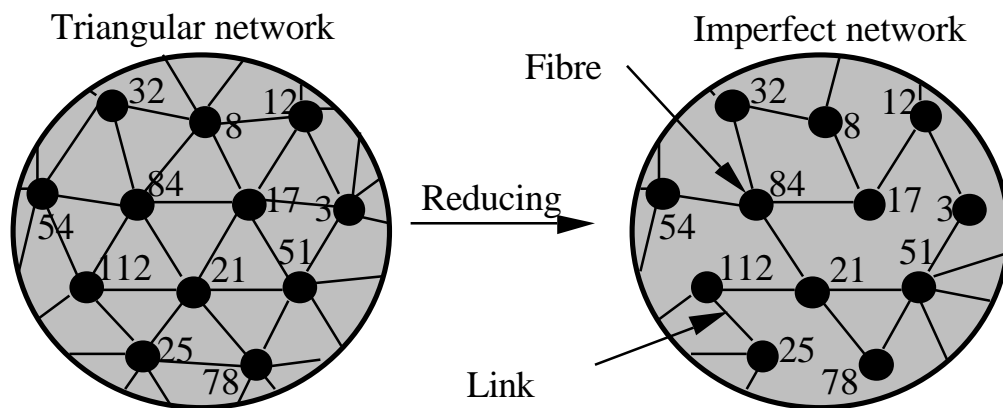


Fig.10 Imperfect network in the local load sharing approach.

When a fibre breaks, its load is shared between the neighbouring fibres which are linked to it. More generally, when a group of broken fibres is formed, which we call an isle, all the loads are shared by the fibres belonging to the coast. The ultimate failure point is reached when there's no coast (no surviving fibre connected to the isle). This allows us to obtain a continuity between the GLS model, where the final isle corresponds to the entire bundle, and the weakest fibre model (WF), where the isles are the fibres without any coast. For the triangular array, the final isle is the entire bundle. Some independent isles can appear when β_r is greater than the percolation point (definition).

Then the simulations were conducted using the algorithm pertinent to the GLS model. Only the local load sharing hypothesis is introduced. Then we must suppose that the total elongation of the bundle corresponds to the mean elongation of the fibres. Thus the calculation is performed by considering the remaining fibres and the total applied force. From this point of view, the LLS model may appear as not rigorous, but we must admit that no author have treated this problem until now. The LLS hypothesis is assumed in terms of stress, but not in terms of strain.

Nevertheless, the strain-force behaviours for various reducing parameters are plotted in Fig.11. The ultimate force is then largely decreased by an increase of β_r , which is in agreement with the Hill's results [Hil95]. The scatter is significantly increased.

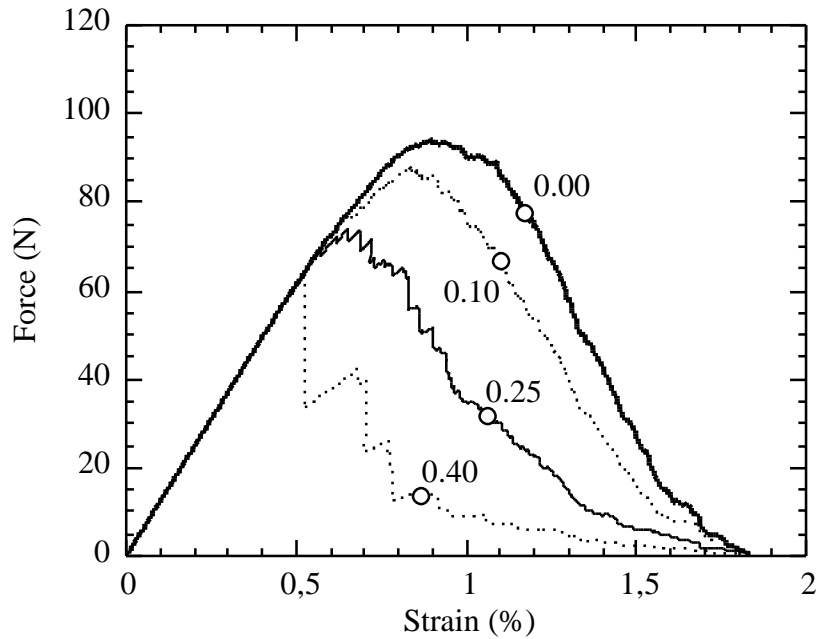


Fig.11 Strain-force curve computed for the LLS hypothesis and for various β_r ($\beta_r = 0.00 - 0.40$).

4. Discussion

The effect of the number of fibres, the non uniform load (NUL) and the local load sharing (LLS) are discussed in regard with the bundle analysis of m , σ_0 and F_{\max} (relationship Bundle \rightarrow Fibre). This part deals with the theoretical effects of these factors, regardless the experimental bundle analysis, largely discussed in the literature [Chi84, Hil95, Loi97...].

4.1. Influence on m and s_0

The parameters m and σ_0 characterize the fibre strength distribution. Commonly, these two parameters are estimated using the maximum likelihood method [Env95], which gives the best evaluation. A graphical method ($\ln(\sigma)/-\ln(-\ln(1-P))$) allows us the comparison of various distributions.

To examine the NUL effect, the fibre failure stresses were determined from the data of test #B01 and test #B02. The fibre stresses were evaluated as the apparent bundle stress ($\sigma(F) = F/S$), with F the applied load, and S the effective bundle section. This means that when a fibre breaks, we suppose that the stresses are equal among the fibres. Then the failure stresses are sorted by an ascending order. The probability of a stress i is given by $(i-0,5)/N_t$.

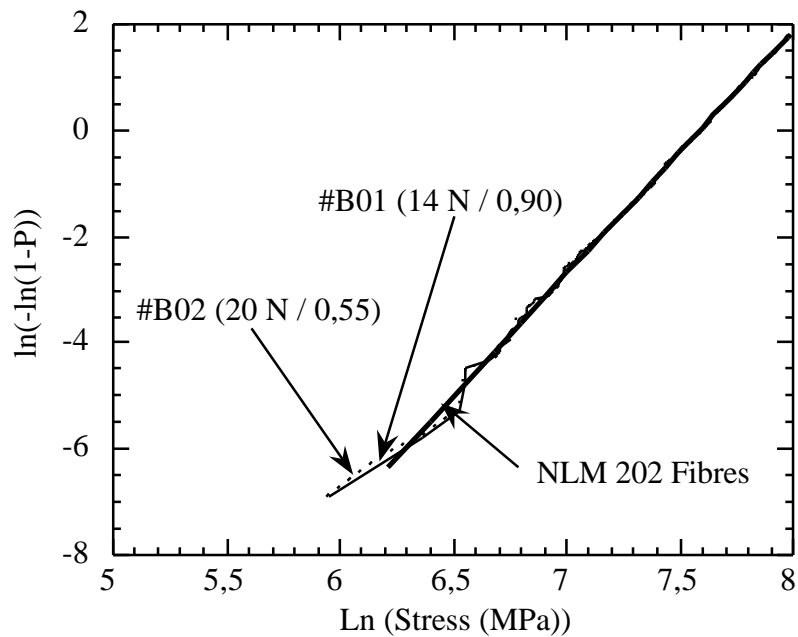


Fig.12 NUL influence on the statistical distribution of fiber strength (test #B01 and test #B02).

In Fig.12, the theoretical results are compared with the intrinsic Weibull fibre distribution, determined from tensile tests on individual fibers which shows similar curves. The Weibull parameters are calculated with the maximum likelihood for each curve, and indicated in Tab.5.

	NLM 202 [Lis94]	#B01	#B02
m (-)	4.6	4.5	4.5
σ_0 (MPa, $V_0=1m^3$)	8.4	7.4	7.4

Tab.5 Weibull parameters measured with the maximum likelihood.

In conclusion, the NUL effect is really negligible in regard to the curves and the calculations. Note that a slight decrease of both m and σ_0 may be expected.

To examine the GLS effect, the fibre stresses are evaluated as the apparent bundle stress ($\sigma(F) = F/S$), with F the applied load, and S the effective bundle section. This yields the Fig.13, where the reduction parameter β_r takes the value 0.00, 0.10, 0.25 and 0.40. The Fig.13 shows a slight discrepancy for $\beta_r < 0.10$. For higher β_r values, a significant discrepancy can be noticed. The maximum likelihood analysis should yield the same results, and was not performed.

Finally, the LLS effect appears to be more critical for the evaluation of m and σ_0 , than the NUL effect, which confirms the experimental conclusion of Hill [Hil95] about the interfibre friction.

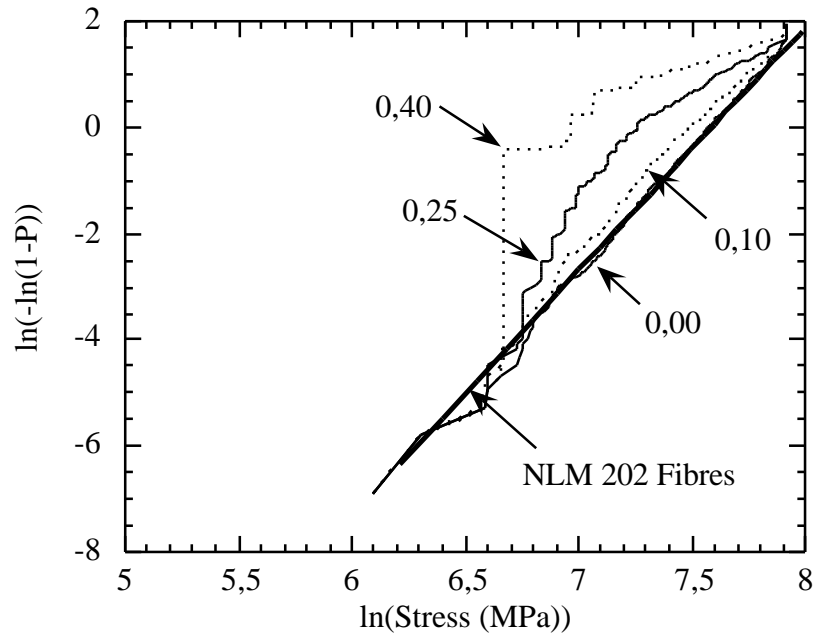


Fig.13 LLS influence on the statistical distribution of fibre strengths ($\beta_r = 0.00-0.40$)

4.2. Ultimate failure load

First, the ultimate failure load was calculated for various numbers of fibres N_t . In Fig.14, the ultimate force is plotted in respect with N_t , which shows clearly that, the higher the number of fibres, the higher the ultimate failure load.

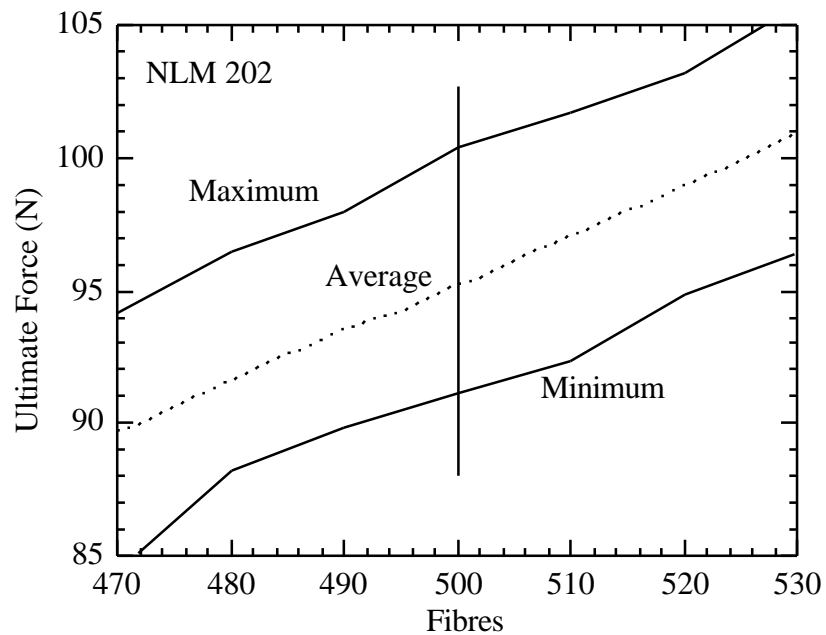


Fig.14 Ultimate failure load versus the number of fibres.

In the presence of the NUL effect, the analysis used the data of the tests #B01 and #B02. In Tab.6, the results are summarized and compared with the GLS failure load.

	GLS (3) and (10) ($m=4.6$ et $\sigma_0=8.4$ MPa)	#B01	#B02
F_{\max} (N)	94	96	96
$S(F_{\max})$ (N)	2.0	2.3	2.4
C_v (%)	2.0	2.4	2.5

Tab.6 NUL influence on the ultimate failure load (NLM 202).

Thus, the NUL conditions do not disturb the ultimate failure load. This is induced by the decrease of both m and σ_0 (Tab.5). Indeed, in Fig.3, a decrease in m increases the ultimate force (dotted curve), whereas a decrease in σ_0 decreases it (solid line). Finally, the NUL effect can be neglected.

In the presence of the LLS effect, the failure loads were computed for various reduction parameters β_r , between 0 and 1 (Fig.15) increasing by 0.01 steps. For each value of β_r , 500 simulations were conducted and analysed with the minimum, the maximum and the mean value of the ultimate load. In Fig.15, the values of β_r between -1 and 0, represent an artificial transition between the perfect network (GLS, $\beta_r = -1$) to the triangular network ($\beta_r = 0$). No computations were performed in this region, assuming a linear transition between the GLS model to the triangular network justified by a parameter β_r far away from the percolation transition ($\beta_r=0.5$).

NLM 202	Tests [Lis94]) ($n=28$, $l=75$ mm)	GLS (3) and (10) ($m=4.6$ et $\sigma_0=8.4$ MPa)	Simulations LLS ($n=500$) ($m=4.6$, $\sigma_0=8.4$ MPa, $\beta_r=0.35$)
F_{\max} (N)	77	94	76
$S(F_{\max})$ (N)	8	2	7
C_v (%)	10	2	9

Tab.7 Comparison of the LLS calculations and the experimental ultimate failure loads for NLM 202 fibres.

At first, the variations of the mean ultimate force show the decrease predicted from the triangular network average value to the weakest fibre average value (W.F. : $\beta_r = 1$, no local load sharing). The maximum shows the same trend. The scatter in the ultimate force increases consequently, when the local load network decreases. This result confirms the high standard deviation observed with the NLM 202 bundles. In Tab.7, with a reduction parameter β_r of 0.35, the experimental statistical values and the LLS simulations are in good agreement, which certainly confirms the presence of the LLS conditions.

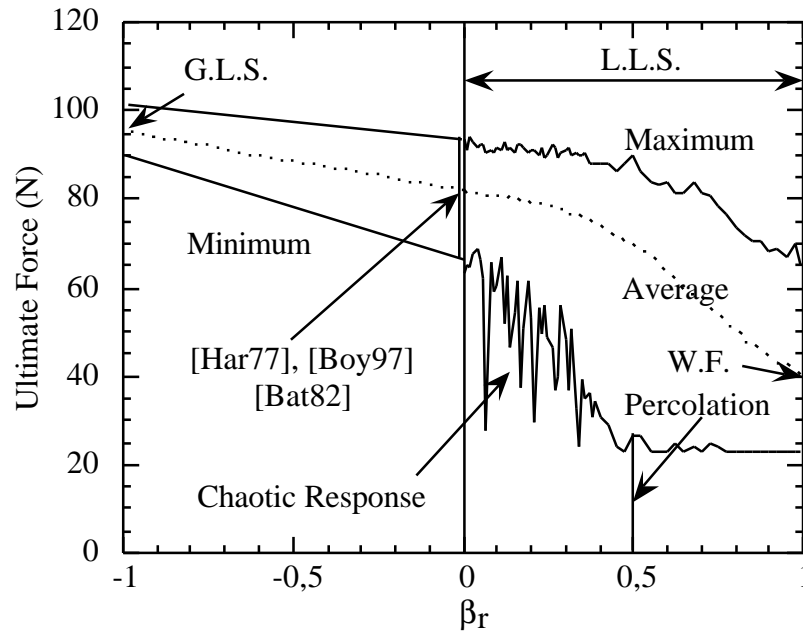


Fig.15 Ultimate failure load versus the reduction parameter β_r .

It is worth mentioning, the minimum values of the ultimate failure load which show chaotic values between 0.05 and 0.35. It was impossible to establish a relationship between the reduction parameter and the minimum values. A first consequence of this phenomenon is that for a system consisting of 500 bundles in series, the weakest link model (the weakest bundle failure) is totally scattered. At first, we could think that for any arrangement of 500 bundles, the weakest link would yield a deterministic result with a slight scatter, which was largely proved by the works of Rosen [Ros64] and Harlow [Har77] for a perfect linear network (2D), and by the works of Baddorf [Bat82] for a triangular network (3D). Nevertheless, for imperfect networks ($\beta_r > 0.1$), critical phenomena appear and generate a greater scatter than expected.

5. Conclusion

This work deals with the relationship between fibre and bundle properties. A first approach consists in evaluating the fibre properties by single fibre testing, and then calculating the bundle failure. With this method, the prediction of the average bundle failure strength is generally overestimated and the standard deviation is underestimated. This is induced by the sensibility of the mechanical equation proposed by the global load sharing model.

Another approach consists in evaluating the fibre properties by direct bundle tests. A lot of experimental methods are actually proposed, but they require a lot of care in the test preparation and very efficient testing facilities. Then, the bundle tests are generally not as accurate as expected, according to the experimental and physical uncertainties, like the total number of fibres (N_t), the non-uniform

loading (NUL) and the local load sharing (LLS).

These phenomena were described with two types of fibres (SiC NLM 202 and SiC Hi-Nicalon). These fibres were tested both by single fibre testing and by bundle testing (500 fibres). The discussion was conducted both on the m and σ_0 evaluation, and the effect on the ultimate failure load. Finally, the conclusions are :

a) The parameter N_t affects the ultimate load, but can be corrected by artificially adding or suppressing fibres in the bundle analysis.

b) The non-uniform loading effect can be neglected both for the ultimate failure load, and the strain-force curve analysis.

c) The local load sharing effect tremendously affects m and σ_0 , when the reduction parameter β_r is greater than 0.1.

d) In local load sharing conditions, the mean ultimate failure load decreases in comparison with that obtained for GLS condition, while the scatter increases.

Finally, the bundle analysis must be performed with much attention, particularly to reduce the LLS effects. Nevertheless, its study is of great interest because it is an intermediate scale between fibres and composites.

References

- [Bad88] M. G. Bader, "Tensile strength of uniaxial composites", Sciences and Engineering of Composite Materials, Vol. 1, pp. 1-11, 1988.
- [Bat82] S. B. Batdorf, "Tensile strength of unidirectionnally reinforced composites", J. Reinfor. Plast. & Comp., Vol. 1, pp 153-163, 1982.
- [Ber98] S. Bertrand, "Durée de vie de matériaux composites à matrice céramique et interphase nanoséquencée", Thesis, n°1927, University of Bordeaux I, France, 1998.
- [Boy97] C.M. Boyer, "Composites unidirectionnels : modèles probabilistes de rupture et évaluation de la fiabilité", Thesis, n°928, EDSPIC 138, University of Clermont II, France, 1997.
- [Bre88] D. Breyse, "A probabilistic model for damage of concrete structure", Proc. of 2nd Int. Symp. on Brittle Matrix Composite (BMC 2), Cedzyna, Poland, Septembre 20-22, pp 237-247, 1988.
- [Chi84] Z. Chi, T. Wei Chou & G. Shen, "Determination of single fiber strength distribution from fiber bundle testing", J. of Material Science, Vol. 19, pp

3319-3324, 1984.

- [Col58] B. D. Coleman, "On the strength of classical fibers and fibers bundle", J. Mech. Phys. Solid., Vol. 7, pp. 60-70, 1958.
- [Dan45] H. E. Daniels, "The statistical theory of the strength of bundles of threads I", Proc. R. Soc., Vol. A183, pp. 405-435, 1945.
- [Env95] (ENV 843-5), "Advanced monolithic ceramics-mechanical tests at room temperature-statistical analysis", European committee for standardization, 1995.
- [Env97] (ENV1007-5), "Advanced technical ceramics - ceramics composites - Methods of test for reinforcements - Part 5 : Determination of distribution of tensile strength and tensile strain to failure of filaments within a multifilament tow at ambient temperature", CEN TC184 SC1, Brussel, 1997.
- [Gur95] M. Gurvich & R. Pipes, "Strength size effect of laminated composites", Comp. Science and Technology, Vol. 55, pp93-105, 1995.
- [Har77] D. G. Harlow, "Probabilistic models for the tensile strength of composite materials", D. Phil. Thesis, Cornell University, USA, 1977.
- [Hed67] J.M. Hedgepeth & P. Van Dyke, "Local stress concentratinos in imperfect filamentary composite materials", J. Composite Materials, Vol. 1, pp 294-309, 1967.
- [Hil95] R. Hill & E.U. Okoroafor, "Weibull statistics of fibre bundle failure using mechanical and acoustical emission testing : The influence of interfibre friction", Composites, Vol. 26, pp 699-705, 1995.
- [Kah91] A. Khalili & K. Kromp, "Statistical properties of Weibull estimators", J. Mat. Science, Vol. 26, pp 6741-6752, 1991.
- [Lie93] M. Lienkamp & P. Schwartz, "A Monte Carlo simulation of the failure of a seven fiber microcomposite", Composite Science and Technology, Vol. 46, pp 139-146, 1993.
- [Lis94] N. Lissart, "Probabilité de rupture et fiabilité des composites à matrice céramique", Thesis, n°1207, University of Bordeaux I, France, 1994.
- [Loi97] D. Loidl, H. Peterlik & K. Kromp, "Statistical parameters of fibres for endless-fibre reinforced ceramic matrix composites evaluated by the fibre-bundle tension test", Proc. Int. Symp., Brittle Matrix Composites 5, Warsaw, October 13-15, pp 524-536, 1997.
- [Man82] P.W. Manders, M.G. Bader & T.Wei Chou, "Monte Carlo simulation of the strength of composite fibre bundles", Fibre Science and Technology, Vol.

17, pp 183-204, 1982.

- [Pas97] K. Pastor, "Propriétés mécaniques et rupture de fils et de fibres céramiques Hi-Nicalon", DEA Report, University of Bordeaux I, France, 1997.
- [Pet95] H. Peterlik, "The validity of Weibull estimators", J. of Mat. Science, Vol 30, pp1972-1976, 1995.
- [Pho93] S.L. Phoenix, "Statistical issues in the fracture of brittle-matrix fibrous composites", Comp. Science and Technology, Vol. 48, pp 65-80, 1993.
- [Ros64] B.W. Rosen, "Tensile failure of fibrous composites", AIAA Journal, Vol. 2, n° 11, pp. 1985-1991, 1964.
- [Sta79] D. Stauffer, "Scaling theory of percolation clusters", Physics Reports (Review Section of Physics Letters), Vol. 54, n°1, pp 1-79, 1979.
- [Wei51] W. Weibull, "A statistical distribution of wide applicability", Journal of applied mechanics, pp. 293-297, 1951.
- [Wis95] M.R. Wisnom & D. Green, "Tensile failure due to interaction between fibre breaks", Composites, Vol. 26, pp 499-508, 1995.
- [Zwe68] C. Zweben "Tensile failure of fiber composites", AIAA Journal, Vol. 2, pp 2325-2331, 1968.

Ultimate failure of 2D woven ceramic matrix composites with an introduction to the ergodic behaviour

V. Calard & J. Lamon

Résumé : Cet article traite de la rupture des composites à matrice céramique. On expose tout d'abord une classification des différentes ruptures en tenant compte de l'effet de volume et des ruptures successives d'éprouvettes de traction. Ceci permet d'obtenir trois familles de rupture, l'une correspondant à une approche de type Weibull, l'autre à une approche liée à un taux critique d'endommagement. Pour la troisième famille, nous proposons une approche liée à l'ergodicité du champ local critique. Par rapport à cette classification, nous présentons par la suite l'étude complète d'un composite SiC/SiC tissé, en réalisant des essais de traction dans les axes sur des éprouvettes de tailles différentes, et des ruptures successives. Cette première démarche permet de mettre en évidence un comportement de type ergodique, que nous appliquons alors aux calculs d'essais de flexion 3 points et pseudo 4 points. Les résultats sont en bon accord avec les probabilités expérimentales de rupture. D'une manière générale, la classification proposée doit permettre de traiter la plupart des matériaux présentant une dispersion de la rupture.

Mots clefs : Rupture, ergodicité, effet de volume, ruptures successives, flexion.

Ultimate failure of 2D woven ceramic matrix composites with an introduction to the ergodic behaviour

1. Introduction

In various engineering domains including aeronautics, nuclear industry or motor industry, the study of new high-tech materials requires the use of statistical and probabilistic methods to take into account the variability of their ultimate strength, in order to define safety factors. Thus, the ceramic matrix composites (CMCs) are being investigated extensively in order to provide reliable materials for strong working conditions (high temperature, oxidation ...). The purpose of this paper is to introduce a general probabilistic approach, which allows us to calculate the probability of fracture of a given CMC specimen, and to indicate the experimental procedure necessary for the definition of an accurate characterisation.

There have been a lot of attempts in the literature directed at calculating the ultimate failure load by the use of the fibre and matrix probabilistic properties [Dan45-Pho93]. These works generally propose microscopic approaches based on the interaction between the fibre breaks and the matrix, and they have mostly been applied to unidirectional composites. Two main assumptions can be extracted from these works : the global and the local load sharing between the fibre breaks. In the case of global load sharing, the works initiated first by Daniels [Dan45] and Rosen [Ros64], were resumed by Sutcu [Sut88] and Curtin [Cur91] with the introduction of the matrix fragmentation and the shear stress between the fibres and the matrix. These works were then pushed ahead by Hild et al [Hil94] who introduced the calculation of tensile and bending tests. Nevertheless, the analytical results remain complex and the variability of the ultimate strength has not yet been treated.

Contrary to the global load sharing, the local load sharing considers the interactions between two neighbouring fibres in terms of sharing load. These works were developed by Zweben et al [Zwe68], and the most important results were obtained by Harlow et al [Har77, Har81a, Har81b], and Baddorf [Bat82]. Generally, they deduced analytically that the ultimate failure function follows a Weibull probability function with a shape parameter close to $k \cdot m$, where k is the number of neighbouring broken fibres, initiating the failure, and m is the shape parameter of the Weibull function of the fibres. Nevertheless, the calculation does not take into account the shear stress between the fibres and the matrix, and the local load sharing refers generally to a perfect triangular or linear fibre network. Nowadays, it has been proved [Cal98] that in the case of imperfect networks, the variability of the ultimate strength is tremendously increased, which has been observed experimentally [Boy97].

Then, we must admit that a pure micro-macro approach is not satisfactory to predict the rupture properties with accuracy. Thus we will focus the aim of this paper on a macroscopic approach of the ultimate failure.

In the literature, three main failure criteria were investigated : the weakest link criterion [Wei51], the critical damage threshold [Jeu92], and the crack arrest failure criterion [Jeu93]. The weakest link criterion is based on the catastrophic failure of the material when the applied stress is larger than the critical stress at one single point of the part. This model has largely been described by the works of Weibull and the probability function of the ultimate stress is commonly given, for a uniform and uniaxial stress field, by :

$$P(\sigma) = 1 - \exp(-(V/V_0)(\sigma/\sigma_0)^m) \quad (1)$$

where V is the volume of the specimen, m the shape parameter, σ_0 the scale parameter, and V_0 the reference volume. Some improvements of this equation were proposed, taking into account various stress or material conditions like the multiaxial stress field [Lam83] or the Poisson distribution of the flaws [Jeu92]. But nevertheless, all the authors admit that the weakest link model is subject to a scale effect due to the V variable. To reduce the scale effect, the critical damage threshold was introduced by Jeulin [Jeu92] and applied to the CMCs. This approach is based on the critical damaged volume fraction necessary to break the specimen. The failure occurs when the damage volume $\mu(D)$ exceeds the fraction p_c of the breakable volume $\mu(B)$ of the specimen under an applied load ($\mu()$ is the Lebesgue measurement).

$$P(\text{no failure of } B) = P\left(\frac{\mu(D)}{\mu(B)} < p_c\right) \quad (2)$$

Unfortunately, this is a phenomenological model of rupture, and some theoretical problems appear in the presence of successive ruptures. Note that this model can be resumed with a discrete approach considering points like flaws in the material [Jeu92], but the conclusion is close to the above result (2). The last approach to the ultimate failure is the crack arrest model, which is based on the energy released during a crack in comparison to the critical energy criterion of the material. Commonly, the crack toughness is considered as an intrinsic parameter of the material. In the case of CMCs, this model is seldom used because it supposed that a single macroscopic failure can propagate and cause the breakage of the material, which is not obvious since the CMCs present a homogeneous damage.

Thus, in this paper, we will first introduce a classification method to select the ultimate failure models. This method is based on the scale effect observed on specimens with various sizes. This will lead us to present a new failure model based on the ergodicity of the critical local stress field. The results are illustrated using a woven SiC/SiC composite, which was tested at room temperature in the tow direction. Thus, 3-point and pseudo 4-point bending tests will be calculated with regard to the model corresponding to the classification analysis.

2. The scatter in rupture modes

2.1. Classification of the various types of scattering ruptures

With respect to the weakest link model (WLM) and the damage threshold model (DTM), we propose a classification based on two experimental phenomena which are observable in case of scattered failure data :

- The scale effect, which is a well-known effect occurring in brittle materials. The observation of this effect is conducted by testing various volumes or lengths of a material under the same stress conditions. Then classically, the scale effect yields the following equation, with $\{\sigma_1\}$ and $\{\sigma_2\}$ as the mean values of the ultimate stresses, for the volume V_1 and V_2 respectively :

$$\forall V_1 > V_2 \Rightarrow \{\sigma_1\} < \{\sigma_2\} \quad (3)$$

The non-scale effect is then described as:

$$\forall V_1 > V_2 \Rightarrow \{\sigma_1\} \geq \{\sigma_2\} \quad (4)$$

- The successive failure load, which is commonly used in fibre tests [Bax93], or in bending tests on brittle materials [Pho75]. The observation consists in testing successively the same specimen after the failure with the same experimental conditions. For two successive tests 1 (safe material) and 2, consider the successive failure stresses of the specimen i , $\sigma_{i,1}$ and $\sigma_{i,2}$ respectively, and the mean values $\{\sigma_1\}$ and $\{\sigma_2\}^*$ for both the tests 1 and 2, with a volume V_1 and V_2 respectively. Note that the stress averages of the volume V_2 for the scale effect $\{\sigma_2\}$ and the successive tests $\{\sigma_2\}^*$ are different, because there is generally a truncating effect due to the selection of flaws, which gives : $\{\sigma_2\} \leq \{\sigma_2\}^*$.

Either the stresses are identically ordered or they are non-identically-ordered. When they are non-identically-ordered, the same measurement is performed, which yields :

$$\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}^* \quad (5)$$

Then the identically ordered successive stresses yield :

$$\{\sigma_1\} < \{\sigma_2\}^* \text{ or } \{\sigma_1\} \geq \{\sigma_2\}^* \quad (6)$$

This two equations (5-6) can be illustrated with a graph $(\sigma_1 - \sigma_2)$ where σ_1 represents the first failure stress and σ_2 the second failure stress (Fig.1) Then the ordered stresses are plotted in one of the two triangles 1 or 3. The non-identically-ordered stresses are described by the circle 2 for example, or more generally are

plotted every where in the σ_1 - σ_2 plane. The bisecting straight line 4 represents the perfect equality of two successive tests ($\sigma_1 = \sigma_2$).

With these considerations, it is now important to consider both the observations. There are six possibilities : scale or non scale effect, and ordered (\pm) or non-identically-ordered successive stresses. Nevertheless, there are three incompatible cases. Indeed the successive tests correspond to a decrease of the stressed volume, which means that the values $\{\sigma_2\}$ and $\{\sigma_2\}^*$ must be compatible. Thus, in regards with (3) and (5), a scale effect with non-identically-ordered successive stresses is absurd. Moreover, a scale effect implies only ordered successive stresses in triangle 1, contrary to a non-scale effect which implies only ordered successive stresses in triangle 2. Note that the non-identically-ordered successive stresses and a non-scale effect yields :

$$\forall V_1 > V_2 \Rightarrow \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\} = \{\sigma_2\}^* \quad (7)$$

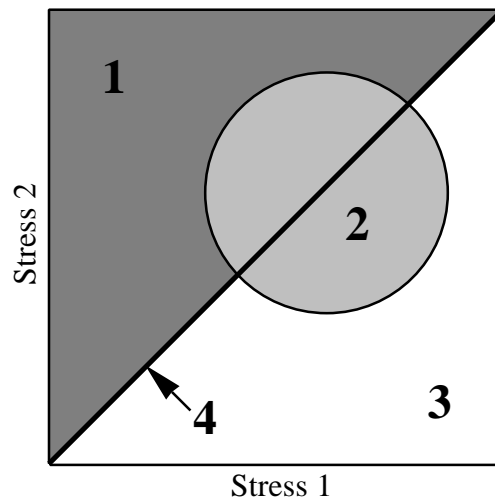


Fig.1 Illustration of the ordered and non-ordered successive stresses.

Moreover the alternatives $\{\sigma_1\} > \{\sigma_2\}$ and $\sigma_{i,1} > \sigma_{i,2}$, which respectively correspond to a non-scale effect in the classification and to the triangle 3 in Fig.1, are physically non acceptable. Indeed, this means that the greater the specimen, the higher the ultimate stress. In other terms, this implies that the physical phenomena, inducing the specimen failure, are not the same for great or small specimens, and that the specimen is thus unusable to predict an accurate failure strength. The triangle 3 suggests that the material is damaged during the first failure. In this case, a representative volume of the material must be investigated, otherwise the experiments are without interest. Thus (4) and (6) become :

$$\forall V_1 > V_2 \text{ and non - scale effect} \Rightarrow \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\} \quad (8)$$

$$\text{Ordered successive stresses} \Rightarrow \{\sigma_1\} < \{\sigma_2\}^* \text{ or } \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}^* \quad (9)$$

With regard to the two observations, the proposed models can be classified. Indeed it is obvious that the WLM implies a scale effect. The successive rupture is compatible with the DTM when we assume a homogeneous damage distribution in the specimen. Otherwise, it may be possible to find an elementary volume with a damage volume fraction greater than p_c in a specimen. This implies that two successive ruptures are equal. Moreover, the model predicts a non-scale effect ($\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$), but also a deterministic behaviour when the volume is great enough (the standard deviation is a decreasing function of the volume).

Finally, we can deduce the following rupture classification with the corresponding models of rupture :

Models	Scale effect	Successive stresses	Area in Fig.1
	$V_1 > V_2$	1-2	
WLM -->	$\{\sigma_1\} < \{\sigma_2\}$	$\sigma_{i,1} < \sigma_{i,2}$	1
DTM -->	$\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$	$\sigma_{i,1} = \sigma_{i,2}$	4
	$\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\}$	$\sigma_{i,1} < \text{ or } > \sigma_{i,2}$	2

Tab.1 The classification of various rupture modes.

2.2. The ergodic model (EM)

The proposed classification leads us to explain in detail the third case of rupture (Tab.1). Indeed, the assumption of non-identically-ordered successive ultimate stresses is surprising, as this means that the material has no memory of the past events. Though, until now, the authors have assumed that the critical stress field is deterministic, which implies that a given specimen has a single and predetermined behaviour. Is this reasonable in composites ? In order to answer this question, we must admit that the composite structure is complex, especially in woven fabric composites, where we can observe tow undulations, microporosity, pores, flaws ... Moreover, during the matrix fragmentation, the composite exhibits a complex network of failures which are interacting [Gui94]. Thus, we can suppose that the local stress field, at the fibre scale, is perpetually changing, and finally non-calculable. Some effects as the fibre failure or the local dynamical response will enhance this local variability.

Another point, which has been revealed by the study of fibre bundles [Cal98], is the effect of local load sharing, which increases the scattering of the ultimate failure of chains of bundles. This increase is largely enhanced in the case of imperfect load sharing, and any perturbation of a given imperfect load sharing can yield a catastrophic fall of the ultimate failure. In regard to the variability of the local stress field $\sigma_1(x, \sigma)$ (x is the position, and σ the macroscopic applied stress), and the local failure criterion of the material $\sigma_r(x)$, we must admit that the critical stress field $\sigma_c(x)$, defined by (10), is probably non deterministic.

$$\sigma_c(x) = \sigma_r(x) - \sigma_1(x, \sigma) \quad (10)$$

Thus, in order to solve the ultimate failure problem, the ergodic theory seems to be an appropriate solution. Indeed, initiated by physicists like Boltzmann and Maxwell, this theory was introduced to treat complex random systems as for instance the atoms in motion in the case of a perfect gas. This theory is based on the heuristic hypothesis that the system, isolated and with a given energy, will cover all the possible states, with the same energy, at random and uniformly (Ergodic hypothesis : "ergon" means "work" in Greek, and represents here the system's energy). Mathematicians (Birkhoff, Von Neumann ...) have resumed this theory, and one of the most important results is the following theorem : The phase and time averages of a Lebesgue integrable function over the phase space, are equal almost everywhere. We will not discuss the mathematical problems involved in this theory, but physically, this theorem means that in case of the gas theory for example, the average speed of the atoms in a sufficiently large volume, is equal to the average speed of one atom during a sufficiently long period of time.

Thus, we will suppose that the critical stress field is ergodic, and that the macroscopic stress field, applied to the specimen is uniform. For practical reasons, we consider that the specimen space is a one-dimensional space, and artificially, we can realise an infinity of tests on the same specimen geometry for a given material, and order them arbitrarily. Thus, each test is different from the others with respect to the perturbations of the boundary conditions or to the local differences of the structure (undulations, matrix volume ...). Then, the critical stress field $\sigma_c(x,t)$ can be plotted as a function of the position x and the test t (Fig.2). A point (x,t) of the plot represents the critical stress of the point x of the specimen during the test t ((x_1,t_1) or (x_2,t_2) for example). The variations of the critical stress field consist of all the admissible critical stress fields in the specimen with the same macroscopic stress field σ . On the basis of the gas theory, we can conclude that the average critical stress field of a sufficiently large volume is equal to the average critical stress field of a point for a sufficiently long period of time (a large number of tests).

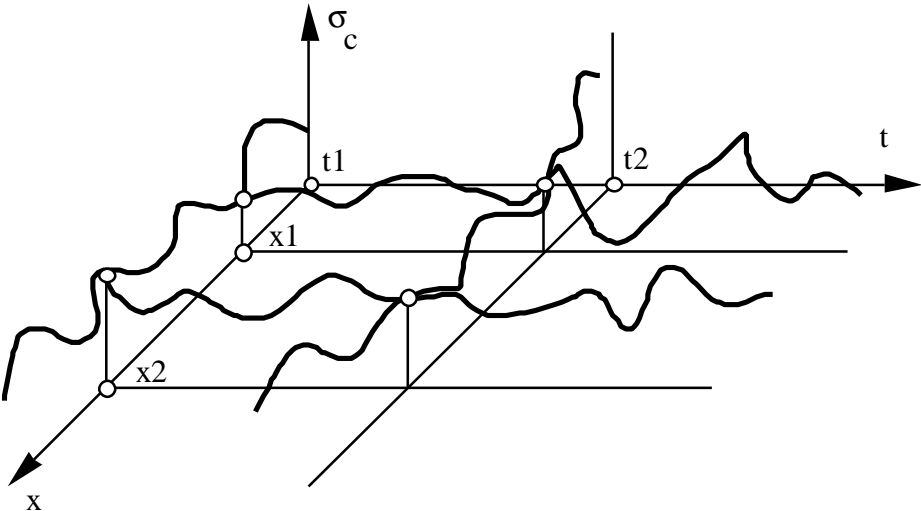


Fig.2 The critical stress field of a given specimen with respect to the space x and the tests t , in the case of a uniform macroscopic stress field.

Considering the weakest link hypothesis as the ultimate failure criterion, we suppose that the failure occurs when there is at least one point in the specimen with a negative critical stress ($\sigma_c(x,t) < 0$), which yields the following conjecture :

The probability of failure of a sufficiently large volume V , during a test t under a given macroscopic stress, is equal to the probability of failure of a point of the specimen during a sufficiently long period of time T (a large number of tests), under the same macroscopic stress.

This implies that the probability of failure of a specimen with a volume V , under an applied macroscopic stress σ , is independent of the volume, and then can be written by :

$$P_r(\sigma) = 1 - \exp(-(\sigma / \sigma_{oe})^{m_e}) \quad (11)$$

where m_e and σ_{oe} are two parameters. We use an equation close to the Weibull equation only for the practical utility of this bell curve. Regarding the failure classification, this equation confirms the non-scale effect (independence of the volume) and the non-identically-ordered successive tests (ergodic hypothesis of the critical stress field).

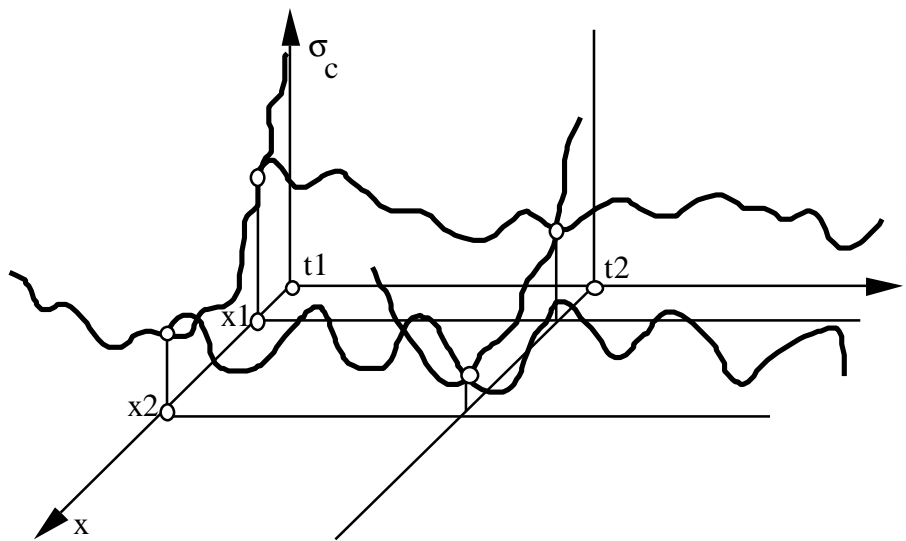


Fig.3 The critical stress field of a given specimen with respect to the space x and the tests t , in the case of a non-uniform macroscopic stress field.

When the macroscopic stress field is non-uniform (Fig.3), we can introduce the concept of failure localisation. Indeed, in Fig.3, we must admit that the critical point of failure is close to the maximum of the macroscopic stress, which corresponds to the minimum of the critical stress. Nevertheless, contrary to the deterministic failure theory, which uses the maximum stress as an ultimate criterion, we will use the maximum stress to define a probability of localisation of the failure. Thus, to illustrate the localisation concept, we will consider a bending specimen of a SiC/SiC composite (Fig.4). The fabrics are parallel to the loading direction. The

elementary volume is taken to be equal to 2 mm x 2 mm, which corresponds approximately to the undulation of the fabric.

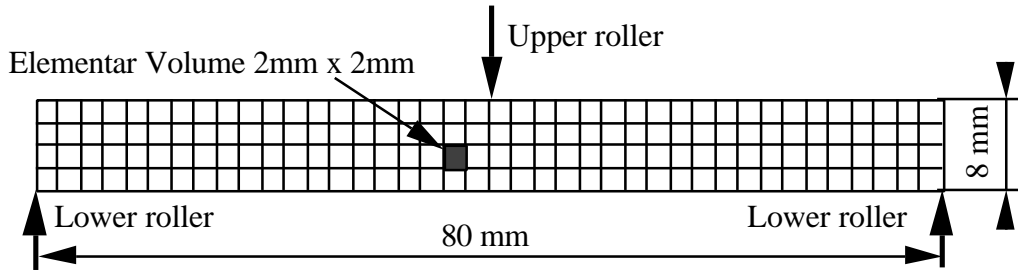


Fig.4 Example of a bending specimen (8mm x 80mm x 3,3mm) with 4 x 40 elementary volumes (Woven SiC/SiC composite).

For each elementary volume i , with a macroscopic mean stress $\sigma(i)$, we suppose arbitrarily, that the localisation probability is proportional to a power function x^{ma} , where x is the ratio between the applied stress $\sigma(i)$ and the maximum stress of all the elementary volumes σ_{max} :

$$P_1(i) = \left(\frac{\sigma(i)}{\sigma_{max}} \right)^{ma} \frac{1}{K} \quad (12)$$

and where K is a normalisation parameter ($\sum_i P_1(i) = 1$) :

$$K = \sum_j \left(\frac{\sigma(j)}{\sigma_{max}} \right)^{ma} \quad (13)$$

The term m_a , characterizes the severity of the localisation, and must be identified. The localisation probability can be compared to the canonical distribution function of Boltzmann which characterizes the distribution of the states of a system with a given energy. Finally, the failure probability of each elementary volume i , is evaluated by the theorem of Bayes, since all the events "rupture in volume i " form a partition of the probabilistic space of all the possible ruptures :

$$P(\sigma) = \sum_i P_1(i) \cdot P_r(\sigma(i)) \quad (14)$$

When the macroscopic stress is uniform, the equation (14) reduces to (11). There are three parameters (m_e , σ_{oe} and m_a). m_e and σ_{oe} are identified with tensile tests (uniform stress condition) and m_a is identified by 3-point bending tests for example (non-uniform stress condition).

3. The tensile tests

The tensile tests illustrate the failure classification proposed in the first part. The tests were performed on a woven SiC/SiC composite in the tow direction. The composite is made by chemical vapor infiltration (CVI) of a SiC matrix into a fabric of SiC Nicalon fibres (SEP, division de Snecma).

3.1. The size effect

The size effect is evidenced by testing various volumes of material under the same stress conditions. Two batches of 12 specimens were tested under quasi-static tensile conditions at room temperature (Fig.5). The strain rate was $4 \cdot 10^{-4} \text{ %/s}$ for all the specimens. Two aluminium end-tabs were glued at each extremity to grip the specimen in the tensile machine and to prevent any sliding during the tests.

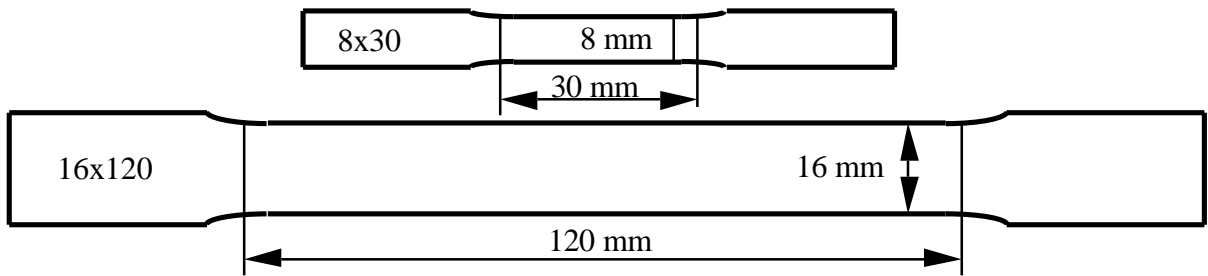


Fig.5 The two type of specimens used in the size effect observation : 8x30 and 16x120 specimens.

The strain was measured with an extensometer (gauge length = 25 mm). The specimens were prepared out of a composite plate with a thickness of 3,3 mm. The strain-stress curves were approximately identical for all the specimens, and they are plotted in Fig.6, showing the significant scatter of the ultimate failure. The ultimate failure stresses and strains are summarized in Tab.2. The results show clearly that the composite exhibits a small size effect, which is in agreement with by the works of Piccola [Pic95].

Specimens	Ultimate Stress (MPa)	Ultimate Strain (%)	m_e (-)	σ_{oe} (MPa)
8x30	299 (20)	0,59 (0,10)	17	309
16x120	294 (19)	0,55 (0,09)	20	302

Tab.2 Summary of the size effect on the ultimate failure (The standard deviation is given in brackets).

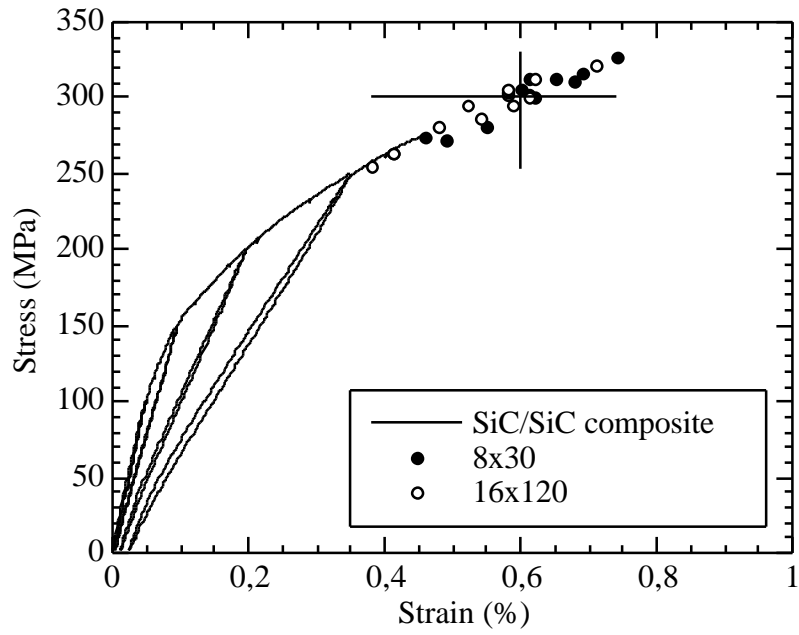


Fig.6 Strain-stress behaviour in tension of the woven SiC/SiC composite.

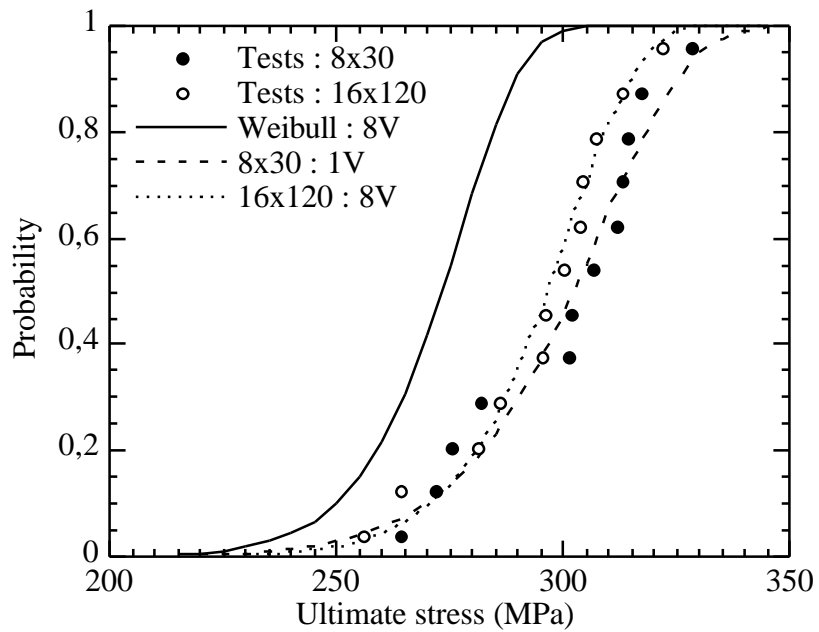


Fig.7 Comparison of the stress failure distribution for each volume.

In Fig.7, the stress failure distributions are compared to the classical Weibull prediction of the failure distribution of the 16x120 specimens, from the distribution of the 8x30 specimens (1V-->8V). The failure probability of a test is classically estimated by : $P(i) = (i-0,5) / N$, where i is the rank of the stress σ_i , when all the stresses are sorted in an ascending order, and N is the total number of tests.

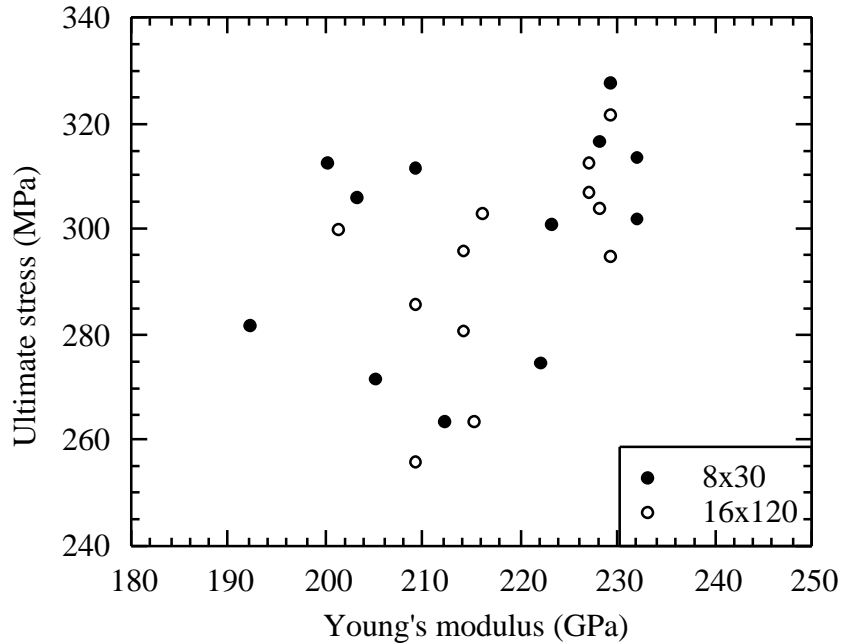


Fig.8 The absence of correlation between the Young's modulus and the ultimate stress.

The Weibull model predicts a great scale effect contrary to the experiments, which means that this approach is not well suited for the failure phenomenon. The Young's modulus has also been measured for each specimen, but as one can see in Fig.8, that, as expected, there is no correlation between the ultimate stress and the Young's modulus. In conclusion, the scale effect is small, which means that in the failure classification, the woven SiC/SiC composite is described by the second or the third case.

3.2. The successive tests

The successive tests are then necessary to differentiate the two cases of rupture of the SiC/SiC composite. They were performed under tension and the previous test conditions. Two aluminium end-tabs are glued on the largest part of the specimen remaining after the first test (Fig.9). In this case, there are straight sides between the end-tabs and the body of the specimen. Nevertheless, Piccola [Pic95] has demonstrated that in case of SiC/SiC composites, there is no difference between the straight-sided specimens and the reduced gauged specimens in terms of ultimate failure. The straight sides can influence the failure location, which sometimes can occur in the end-tabs. The successive tests were performed under these conditions, and actually a few ultimate cracks occurred in the end-tabs, but at a high ultimate

stress, which led us to validate these tests in regard to the mean stress value of the composite. Thus, we supposed that the tensile conditions are identical between the straight-sided specimens and the dog-bone specimens.

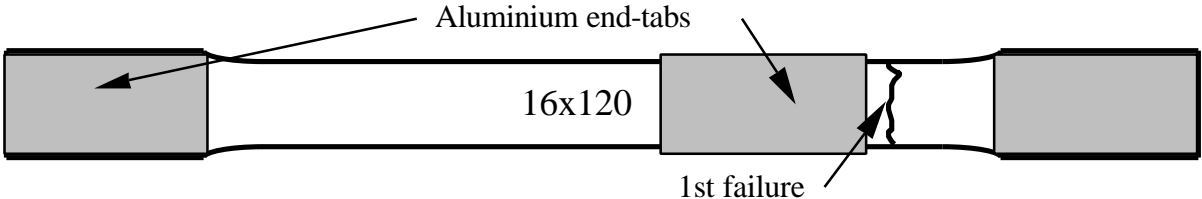


Fig.9 Specimen preparation for successive tests.

From the 24 first tests performed to evidence the size effect, 19 second tests and 4 third tests were possible with specimens of a length between 20 mm and 100 mm. The third tests were not analyzed in regard to the number of tests performed. The result of the first and second ultimate failure stresses are summarised in Tab.3. There is a slight increase of the mean ultimate stress (298-305 MPa), but this increase is in the range of the previously observed scale effect (Tab.2). The standard deviation really decreased in the second tests. This result confirms the equation (11). An example of strain-stress curves for three successive tests is plotted in Fig.10. One can observe that the tests are non-ordered, since the second test exhibits an ultimate failure lower than the first and the third tests. More generally, no correlation appeared between the first and the second tests : the successive tests are non-ordered.

	L (mm)	Ultimate Stress (MPa)	Ultimate Strain (%)	m_e (-)	σ_{oe} (MPa)
First tests	30-120	298 (19)	0,58 (0,09)	21	307
Second tests	20-100	305 (13)	-	29	309

Tab.3 Summary of the results of the successive tests (The standard deviations are given in brackets) : 24 first tests and 19 second tests.

In Fig.11, we compare the failure stress distribution of the successive tests. One can observe that there is a perfect similarity of the curves above 295 MPa. Under this value, the curves are distinct, which can be explained by the elimination of the biggest flaws after the first failure. Nevertheless the analysis of the specimen did not allow this difference to be explained. Thus, this phenomenon was neglected.

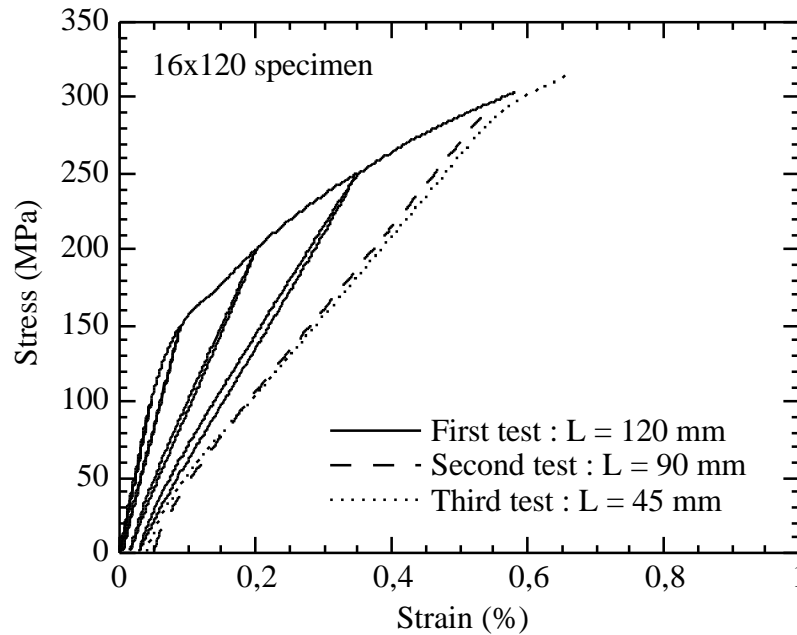


Fig.10 Strain-stress behaviour of three successive tests of a specimen.

The first and second successive stresses are plotted in a $\sigma_1 - \sigma_2$ graph (Fig.12). We obtain the predicted result described in the classification method : The points are in both the triangles 1 and 3. Moreover, excepted 2 extremal points, there are approximately in the circle 2, which confirms the equality of the mean stresses. In conclusion, the woven SiC/SiC composite exhibits non-ordered successive failures, which corresponds to the third case in the failure classification. This leads us to consider the ergodic approach to characterize the failure probability.

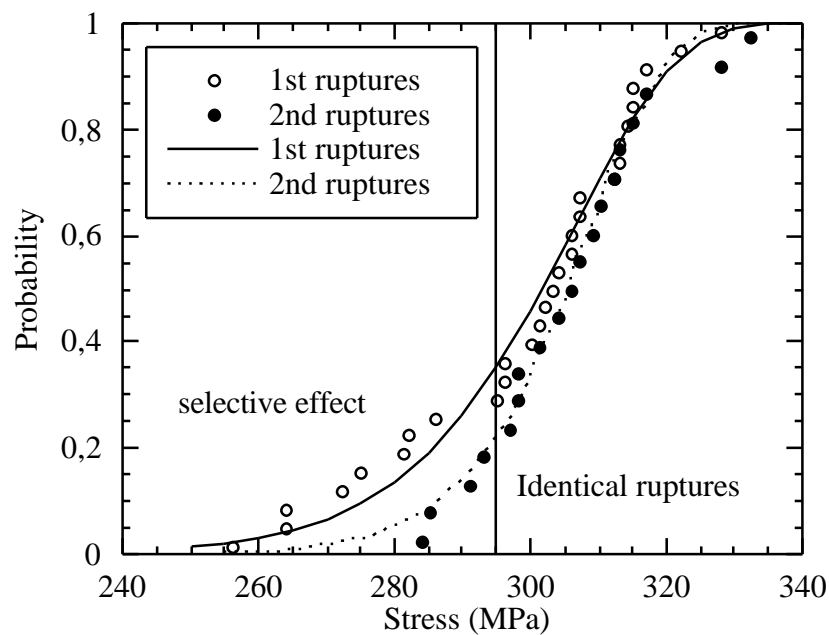


Fig.11 Comparison of the stress failure distribution of the first and second tests.

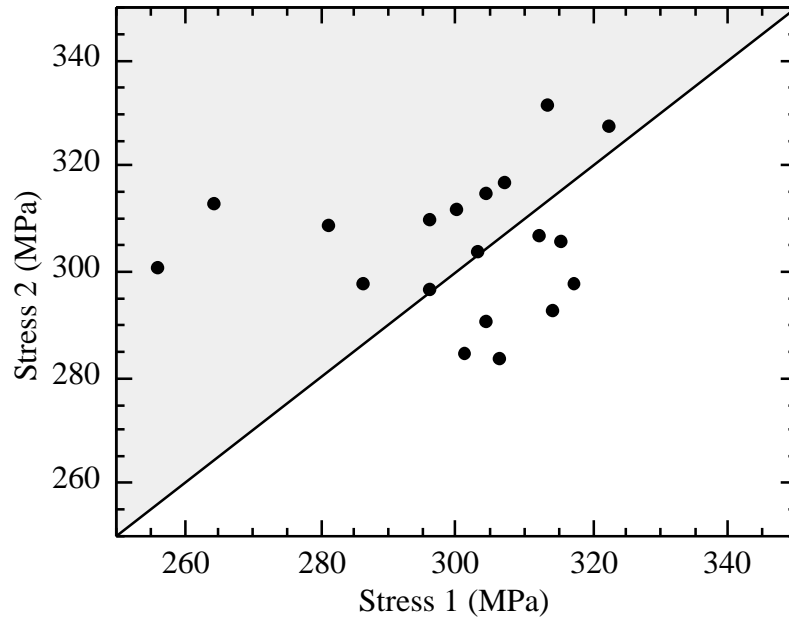


Fig.12 Representation of the successive stresses in a graph ($\sigma_1 - \sigma_2$).

4. The bending tests

An application of the ergodic approach is proposed in order to calculate the probability failure of pseudo 4-point bending tests ("4-PB" tests), and then to validate the model. The 3-point bending tests (3-PB) will be used to estimate the parameter m_a of the localisation probability equation.

4.1. Experimental apparatus

The 3-point and pseudo 4-point bending tests were realised using an Instron tensile machine with on SiC/SiC bar specimens (Fig.13 and Fig.14) : 13 specimens for the 3-PB tests and 12 specimens for "4-PB" tests. The displacement rate was chosen so as to obtain a maximal strain rate in each specimen close to the strain rate in the tensile tests ($4 \cdot 10^{-4}$ %/s). The strain was measured with an extensometer of 10 mm for the 3-PB tests, located in the outer surface under the upper roller (Fig.13), and 25 mm for the "4-PB" tests (Fig.14). The specimen was in a vertical position, i.e. with vertical layers parallel to the loading direction, in order to prevent any delamination between the layers.

For the "4-PB" tests, the experimental apparatus exhibited a 100 μm gap between the two upper rollers (Fig.14). Nevertheless, this apparatus error was taken into account in the finite element, assuming that this gap was constant since the apparatus was rigid.

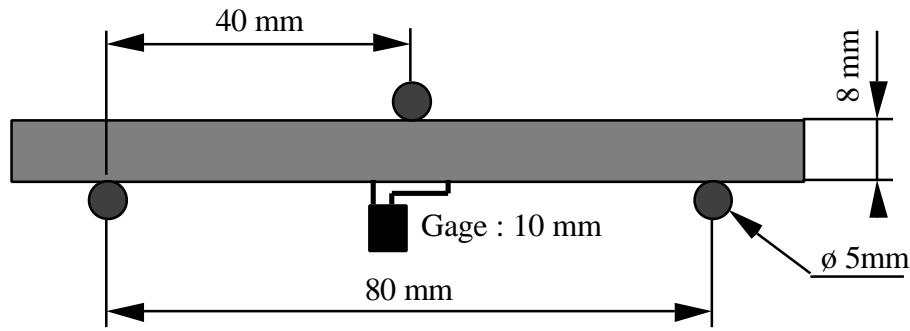


Fig.13 The 3-point bending tests.

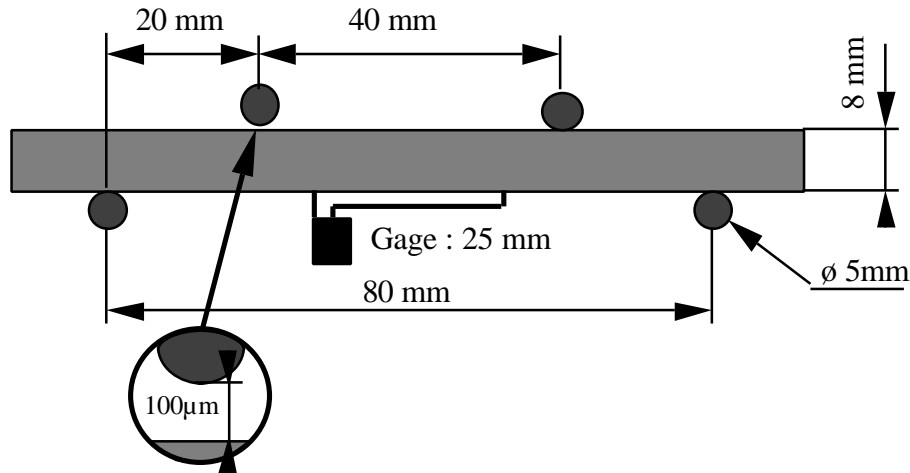


Fig.14 The pseudo 4-point bending tests.

4.2. Bending test analysis

Contrary to the tensile tests, the bending tests must be analyzed by a finite element method with non-linear material, since the bending theory is based on the linearity of the strain-stress relationship. Thus, the calculations were performed using a mesh of 4x40 quadrilateral elements (Fig.4), with the boundary conditions of the bending tests. The strain-stress behaviour is defined by the tensile tests in the tow direction. We assume that the SiC/SiC behaviour is orthotropic with no coupling between the two tow directions. The compressive behaviour is supposed linear using the same Young's modulus as for the tensile tests. As the specimen was in a vertical position, the transverse properties of the layers were neglected. The calculations were conducted for the imposed displacements of the upper rollers, and in plane stress conditions. A gap of 100 μm was artificially introduced in the calculation of the "4-PB" tests.

The finite element calculation provided the strain and stress field, and therefore the maximum strain (which corresponds to the strain measured by the extensometer), with respect to the applied force. The experimental force-strain curves are compared to the computed force-maximum strain curve in Fig.15. The ultimate stress and strain are derived from the failure load of each specimen.

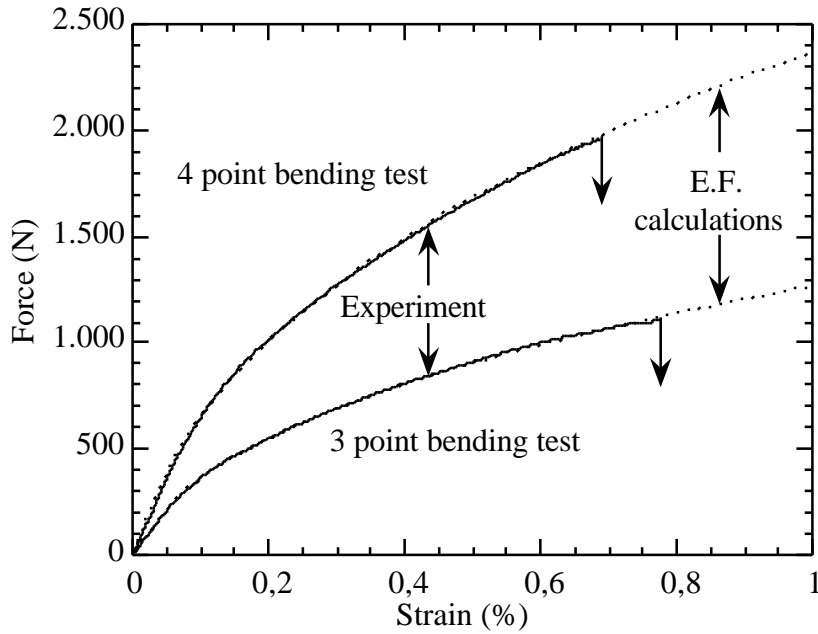


Fig.15 The finite calculations of the 3-point and 4-point bending tests.

4.3. Experimental Results

The experimental results are summarised in Tab.4, showing the high strain and stress ($\sim 1\%$ and 350 MPa) obtained for the bending tests in comparison to the tensile tests ($\sim 0,6\%$ and 300 MPa). These results confirm the previous tests realised by Inghels [Ing91] and McNulty [McN97]. The failure occurred systematically under the upper roller for the 3-PB test, and under the right upper roller (Fig.14) for the "4-PB" test due to the gap between the two rollers.

	Young's Modulus (GPa)	Ult. Strain Gauge (%)	F_{\max} Machine (N)	Ult. Stress Finite Elem. (MPa)	Ult. Strain Finite Elem. (%)
Tensile tests	226 (5)	0,58 (0,09)	-	298 (19)	-
3-point bending tests	219 (10)	0,82 (0,07)	1090 (40)	341 (10)	0,98 ((0,10)
Pseudo 4-point bending tests	203 (7)	0,63 (0,05)	1877 (73)	350 (11)	0,95 (0,09)

Tab.4 Summary of the results of the 3-point and pseudo 4-point bending tests (The standard deviations are in brackets).

The Young's modulus was measured, and a slight discrepancy appeared between the tensile and the bending test. This discrepancy can be attributed to load strain compliance. Nevertheless, we used a Young's modulus of 228 GPa for the calculations. The scatter of the bending failure data was less important than that of tensile data.

4.4. Ergodic analysis

The ergodic approach was applied to evaluate the failure probability of the bending tests. The calculations were performed by using the stress field determined with the finite element method, with the equations (14). The parameters m_e and σ_{oe} were deduced from the tensile tests of 8x30 specimens (Tab.2, $m_e = 17$ and $\sigma_{oe} = 309$) which was realised directly by the failure analysis since the stress field was assumed uniform.

The compressive part of the stress field was not taken into account since the SiC/SiC composite exhibits a high compressive stress at the failure (800 MPa), and assuming that the failure is caused primary by the tensile stresses.

The localisation parameter m_a was calculated by fitting the experimental failure probability curve of the 3-PB tests with the ergodic calculation. In Fig.16, the failure probability curves are plotted in comparison to the ergodic calculations. The 3-PB bending probability curve yields $m_a = 30$. We can observe the good agreement between the 3-PB probability curves and the ergodic prediction, which confirms the pertinence of the parameter m_a .

Moreover, the prediction of the "4-PB" tests was found in good agreement with the experimental probabilistic curve, which validates the ergodic model and its hypotheses.

Thus, the localisation probability allows us to define the weakest parts of the specimen, which corresponds to the high stress regions in the composite. Nevertheless, note that the localisation probability implies that the failure can occur not only in the peak stress region but also in the region near these points at lower stresses which explains that the composite can undergo high stress gradients.

Moreover, we can remark that the probability curves of the two types of bending are close, contrary to the results deduced from the linear analysis [Mar92]. This speaks for the idea of using a finite element method to analyse the experiments.

It is interesting to note that the failures of the pseudo 4-point bending test are generally higher than the failures of the 3-point bending test. This is paradoxical, since classically, the pure 4-point bending test is intermediate to the 3-point bending test and the tensile test. Nevertheless, it can be argued that the 100 μm gap between the two upper rollers in the pseudo 4-point bending tests have perturbed the tests, which can explain the higher values of failure. In the case of pure 4-point bending

test, the ergodic model yields a probabilistic failure curve slightly over the 3-point bending curve. This result was observed by Whitney [Whi80] in case of graphite-epoxy composites for the bending tests. He concluded that the Weibull approach was inadequate for describing failure in the fibre direction. In regard to the classification of the scattering rupture, it would be interesting to investigate this material with the proposed procedure.

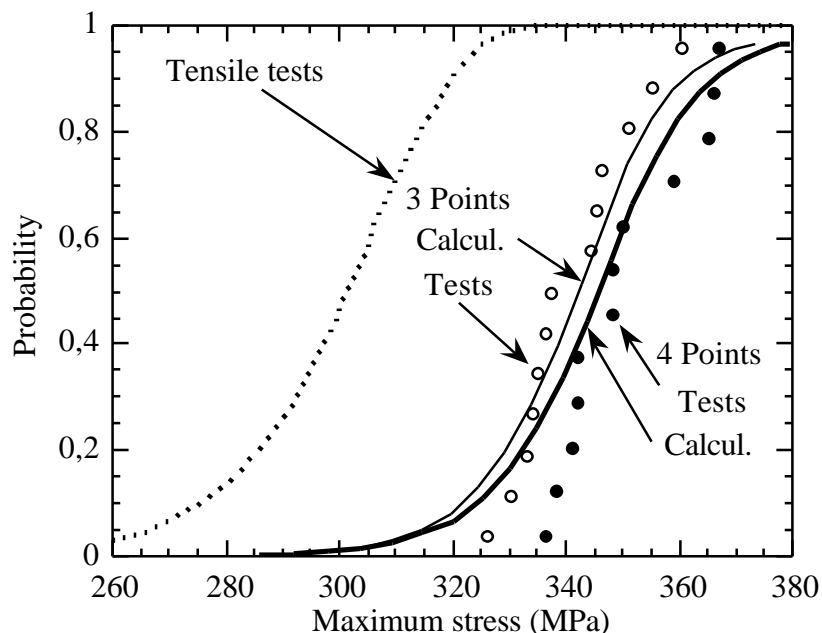


Fig.16 Comparison between the failure distribution and the calculations of the ergodic model.

The consequence of the scattering failure is that the deterministic approach are not able to predict with accuracy the rupture in case of non-uniform stresses. For example, we can consider the 3-PB tests of the studied composite. The minimal stress failure of the composite in tensile load is approximately 250 MPa, corresponding to a strain of 0,4%, which implies that the ultimate force must be equal to 750 N for the 3-PB tests, when we use a peak stress criterion. This value is largely under the experimental value (1020 N) measured with 13 specimens. The ergodic model predicts 950 N for a safety factor of 1%.

5. Conclusion

This paper deals with the rupture of ceramic matrix composites, and more precisely with the scatter of the ultimate stress. At first we introduced a failure classification, using the scale effect and successive tensile tests, to define the possible types of failure in such materials. Then, three types of rupture can be predicted. The first one can be described by a Weibull approach, and corresponds to a failure based on the weakest link hypothesis and the presence of flaws in the composite. The

second one can be described by a critical damage threshold where the failure is induced by a critical volume fraction of the damaged composite. The third type of failure is characterised by a non-scale effect and non-ordered successive tensile tests. An approach based on the ergodicity of the local critical stress field was proposed to explain this type of rupture.

Then, according to this classification, the complete study of a SiC/SiC composite was conducted. The non-scale effect and the independence of the successive failures were observed, which led us to consider the ergodic approach in order to describe the rupture. Then, an application on 3-point and pseudo 4-point bending tests was proposed to validate the ergodic model on a non-uniform macroscopic stress field. The concept of localisation was then presented to take into account the stress gradients in the bending specimens. The finite element method was used to analyse the bending tests and to realize the failure probability calculations. There was a good agreement between the experiment and the ergodic calculation. We can therefore conclude that the SiC/SiC composite exhibits an ergodic behaviour for the rupture.

References

- [Bad88] M. G. Bader, "Tensile strength of uniaxial composites", *Sciences and Engineering of Composite Materials*, Vol. 1, pp. 1-11, 1988.
- [Bat82] S. B. Batdorf, "Tensile strength of unidirectionally reinforced composites", *J. Reinfor. Plast. & Comp.*, Vol. 1, pp 153-163, 1982.
- [Bax93] C. Baxevanakis, D. Jeulin & D. Valentin, " Fracture statistics of single-fibre composite specimens ", *Comp. Science and Technology*, Vol. 48, pp 47-56, 1993.
- [Boy97] C.M. Boyer, "Composites unidirectionnels : modèles probabilistes de rupture et évaluation de la fiabilité", Thesis, n°928, EDSPIC 138, University of Clermont II, France, 1997.
- [Cal98] V. Calard & J. Lamon, " Ultimate failure of fibre bundles and influence of load sharing conditions", Thesis n°1948, University of Bordeaux I, Partie II-3, pp 115-136, 1998.
- [Cur91] W. A. Curtin, "Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites", *J. Am. Ceram. Soc.*, Vol 74, n°11, pp 2837-2845, 1991.
- [Dan45] H. E. Daniels, "The statistical theory of the strength of bundles of threads I", *Proc. R. Soc.*, Vol. A183, pp. 405-435, 1945.

- [Gui94] L. Guillaumat, "Microfissuration des CMC : Relation avec la microstructure et le comportement mécanique", Thesis, n°1056, University of Bordeaux 1, France, 1994.
- [Har77] D. G. Harlow, "Probabilistic models for the tensile strength of composite materials", D. Phil. Thesis, Cornell University, USA, 1977.
- [Har81a] D. G. Harlow & S.L. Phoenix, " Probability distributions for the strength of composite materials I : two-level bounds ", Int. J. of Fracture, Vol. 17, n°4, pp 341-372, 1981.
- [Har81b] D. G. Harlow & S.L. Phoenix, " Probability distributions for the strength of composite materials II : a convergent sequence of tight bounds ", Int. J. of Fracture, Vol. 17, n°6, pp 601-630, 1981.
- [Hil94] F. Hild, J.M. Domergue, F.A. Leckie & A.G. Evans, " Tensile and flexural ultimate strength of fiber-reinforced ceramic matrix composites ", Int. J. Solids Structures, Vol. 31, n°7, pp 1035-1045, 1994.
- [Ing91] E. Inghels & J. Lamon, " An approach of the mechanical behaviour of SiC/SiC and C/SiC ceramic matrix composites 1 - Experimental results ", J. Material Science, Vol. 26, n°20, pp 5403-5410, 1991.
- [Jeu92] D. Jeulin, " Random functions and fracture statistics models ", Proc. of the 4th Int. Geostatistics Cong., Troia, 13-18 Sept., pp 225-236, Portugal, 1992.
- [Jeu93] D. Jeulin, " Morphological models for fracture statistics ", Materials Science Forum, Vol. 123-125, pp 505-514, 1993
- [Lam83] J. Lamon and A. G. Evans, "Statistical analysis of bending strength for brittle solids : A multiaxial fracture problem", J. of Am. Ceram. Soc., Vol. 66, n°3, pp 177-182, 1983.
- [Mar92] V. Martinez, P. Kittl & G. Diaz, " Fracture statistic of torsion and flexure in glass rectangular bars ", J. of Materials Science, Vol. 27, pp 1457-1463, 1992.
- [McN97] J.C. McNulty & F.W. Zok, " Application of weakest-link fracture statistics to fiber-reinforced ceramic-matrix composites ", J. Am. Ceram., Vol. 80, n°6, pp 1535-1543, 1997.
- [Pho75] S.L. Phoenix, " Statistical analysis of flaw strength spectra of high-modulus fibers ", Composite Reliability, ASTM STP 580, American Society for Testing and Materials, pp 77-89, 1975.
- [Pho93] S.L. Phoenix, "Statistical issues in the fracture of brittle-matrix fibrous composites", Comp. Science and Technology, Vol. 48, pp 65-80, 1993.

- [Pic95] J.P. Piccola & M.G. Jenkins, "Effect of test parameters on tensile mechanical behaviour of a continuous fibre ceramic composite (CFCC)", Proceedings of the 19th Annual Conference on Composites, Advanced Ceramics, Materials and Structures, vol. A, Publ. par The American Ceramic Society, Janvier 1995, Cocoa Beach, Floride, pg 325-336, 1995.
- [Ros64] B.W. Rosen, "Tensile failure of fibrous composites", AIAA Journal, Vol. 2, n° 11, pp. 1985-1991, 1964.
- [Sut88] M. Sutcu, "Statistical fibre failure and single crack behavior in uniaxially reinforced ceramic composites", J. of Mat. Science. Vol 23, pp 928-933, 1988.
- [Wei51] W. Weibull, "A statistical distribution of wide applicability", Journal of Applied Mechanics, pp. 293-297, 1951.
- [Whi80] J.M. Whitney & M. Knight, " The relationship between tensile strength and flexure strength in fiber-reinforced composites ", Experimental Mechanics, Vol. 20, n°6, pp 211-216, 1980.
- [Zwe68] C. Zweben, "Tensile failure of fiber composites", AIAA Journal, Vol. 2, pp 2325-2331, 1968.

Annexes

Annexe 1

Modélisation des fonctions de répartition successives de défauts

Cette annexe est une synthèse des travaux de Alla [All95], et Das Neves [Das96], dans le cadre de stages de DEA de Mathématiques Appliquées au LCTS, et qui ont été repris aussi dans le cadre d'une thèse de Mathématiques par Purnaba [Pur97]. Nous ne présenterons ici que les résultats concernant la modélisation probabiliste des fissures successives, que nous avons appliquée à la détermination des troncatures lors des essais successifs, et à la sélection des défauts au sein de la matrice. Pour de plus amples informations, il est conseillé de consulter les mémoires cités en référence.

1. Hypothèses mathématiques et définition des variables

On considère que le matériau comporte p défauts, et on note C_i , la contrainte à rupture du $i^{\text{ème}}$ défaut. L'hypothèse est que les (C_i) sont des variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées et continues. On ordonne ensuite les contraintes (C_i) par ordre croissant, en nommant A_i la $i^{\text{ème}}$ plus petite contrainte. On remarque que l'hypothèse de continuité des variables aléatoires (C_i) implique que l'on a presque sûrement : $A_1 < A_2 < \dots < A_{p-1} < A_p$.

On note $L_i(\sigma)$ la fonction de survie du $i^{\text{ème}}$ défaut ($L_i(\sigma) = P\{A_i > \sigma\}$) et par $F(\sigma)$ la fonction de répartition commune des variables aléatoires (C_i) :

$$F(\sigma) = P\{C_1 \leq \sigma\}$$

D'après les hypothèses, $F(\sigma)$ est indépendante de l'indice i . La probabilité d'apparition de la première fissure est finalement :

$$P\{A_1 \leq \sigma\} = 1 - L_1(\sigma)$$

2. Relation entre $L_1(s)$ et $F(s)$

Cette relation que nous utiliserons par la suite permet de relier $L_1(\sigma)$ qui est une grandeur physiquement mesurable par des essais classiques de rupture (mesure de A_1), à $F(\sigma)$ qui est une grandeur très difficile à mesurer (mesure des (C_i)).

$$L_1(\sigma) = P\{A_1 > \sigma\}$$

$$L_1(\sigma) = P\{\min_{1 \leq i \leq p} (C_i) > \sigma\}$$

$$L_1(\sigma) = P\{C_1 > \sigma \text{ et } \dots \text{ et } C_p > \sigma\}$$

$$L_1(\sigma) = (P\{C_1 > \sigma\})^p \text{ par indépendance des variables aléatoires } (C_i)$$

d'où la relation suivante :

$$L_1(\sigma) = (1 - F(\sigma))^p$$

On remarquera que la fonction de répartition $F(\sigma)$ dépend de $L_1(\sigma)$ et du nombre de défauts p pris en compte ! Ce n'est donc pas une fonction intrinsèque du matériau contrairement à $L_1(\sigma)$.

3. Modélisation de la deuxième fissure

On cherche maintenant la probabilité d'apparition de la deuxième fissure, sachant que la première fissure a eu lieu, et donc que le défaut de sévérité la plus critique a conduit à une fissure :

$$P\{A_2 \leq \sigma\} = 1 - P\{A_2 > \sigma\} = 1 - L_2(\sigma)$$

Or, $\{A_2 > \sigma\}$ signifie :

ou bien $\{ C_1 > \sigma \text{ et } \dots \text{ et } C_p > \sigma \}$

ou bien $\{ C_1 \leq \sigma \text{ et } C_2 > \sigma \text{ et } \dots \text{ et } C_p > \sigma ,$
 $\text{ou } C_1 > \sigma \text{ et } C_2 \leq \sigma \text{ et } C_3 > \sigma \text{ et } \dots \text{ et } C_p > \sigma ,$
 \dots
 $\text{ou } C_1 > \sigma \text{ et } C_2 > \sigma \text{ et } \dots \text{ et } C_{p-1} > \sigma \text{ et } C_p \leq \sigma \}$

où les "ou" sont exclusifs, et donc, avec l'indépendance des variables aléatoires (C_i) , on a :

$$P\{A_2 > \sigma\} = (1 - F(\sigma))^p + pF(\sigma)(1 - F(\sigma))^{p-1}$$

Quand p est suffisamment grand on obtient :

$$P\{A_2 > \sigma\} = (1 - F(\sigma))^p (1 + pF(\sigma))$$

On cherche alors à calculer $pF(\sigma)$:

$$F(\sigma) = 1 - L_1(\sigma)^{1/p}$$

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left(\frac{1}{p} \ln L_1(\sigma)\right)$$

$$F(\sigma) = -\left(\frac{1}{p}\right) \ln L_1(\sigma) + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Ainsi, lorsque p est suffisamment grand, $pF(\sigma)$ converge vers $-\ln L_1(\sigma)$. Alors :

$$P\{A_2 > \sigma\} = L_1(\sigma)(1 - \ln L_1(\sigma))$$

Et donc, la probabilité d'apparition de la deuxième fissure est donnée par :

$$P\{A_2 \leq \sigma\} = 1 - L_1(\sigma)(1 - \ln L_1(\sigma))$$

4. Modélisation de la troisième fissure

La probabilité d'apparition de la troisième fissure est calculée de la même manière, sachant que les deux premières fissures ont eu lieu :

$$P\{A_3 \leq \sigma\} = 1 - P\{A_3 > \sigma\} = 1 - L_3(\sigma)$$

Après une interprétation de $\{A_3 > \sigma\}$ similaire à la deuxième fissure, on obtient :

$$P\{A_3 > \sigma\} = (1 - F(\sigma))^p + pF(\sigma)(1 - F(\sigma))^{p-1} + \left(\frac{p(p-1)}{2!}\right)F(\sigma)^2(1 - F(\sigma))^{p-2}$$

Avec p suffisamment grand :

$$P\{A_3 > \sigma\} = (1 - F(\sigma))^p \left(1 - pF(\sigma) + \frac{p(p-1)}{2!} F(\sigma)^2\right)$$

En calculant les termes $pF(\sigma)$, $F(\sigma)^2$, $pF(\sigma)^2$, $p^2F(\sigma)^2$, on en déduit finalement la probabilité d'apparition de la troisième fissure :

$$P\{A_3 \leq \sigma\} = 1 - L_1(\sigma) \left(1 - \ln L_1(\sigma) + \frac{(\ln L_1(\sigma))^2}{2!}\right)$$

5. Modélisation de la $i^{\text{ème}}$ fissure

Nous ne ferons pas ici la démonstration générale concernant la $i^{\text{ème}}$ fissure.

Cette démonstration est obtenue par récurrence à partir des résultats précédents. L'équation de la probabilité d'apparition de la $i^{\text{ème}}$ fissure est :

$$P \{A_i \leq \sigma\} = 1 - L_i(\sigma) = 1 - L_1(\sigma) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-\ln L_1(\sigma))^j}{j!} \right)$$

Par dérivation de cette équation on obtient la densité de la population de contrainte à rupture de la $i^{\text{ème}}$ fissure $f_i(\sigma)$:

$$f_i(\sigma) = -L_1'(\sigma) \frac{(-\ln L_1(\sigma))^{i-1}}{(i-1)!}$$

6. Discussion

L'approche mathématique qui est proposée ici, a été appliquée pour définir les populations de défauts successifs lors d'essais de fragmentation de la matrice. On remarque que les équations reposent uniquement sur la définition de la probabilité de survie du premier défaut $L_1(\sigma)$. Tout le calcul repose donc sur l'identification de cette fonction, qui est effectuée en analysant les premières ruptures d'un ensemble d'éprouvettes identiques. Or il est apparu que l'utilisation d'une fonction logistique modifiée pour définir $L_1(\sigma)$ donnait de meilleurs résultats que la fonction de Weibull classiquement utilisée dans ce cas :

$$\text{Fonction logistique modifiée : } L_1(\sigma) = 1 - \frac{1}{1 + a \exp\left(-\frac{\sigma^b}{c}\right)}$$

$$\text{Fonction de Weibull : } L_1(\sigma) = \exp\left(-(\sigma / \sigma_0)^m\right)$$

C'est donc cette fonction (logistique modifiée) qui a été utilisée dans ce mémoire. Cette fonction rend mieux compte de la population de survie des premiers défauts au delà du plus petit défaut observé lors des premières fissures. En effet, et c'est là un point intéressant, la probabilité d'apparition de la $i^{\text{ème}}$ fissure nécessite la connaissance des valeurs de $L_1(\sigma)$ pour des contraintes très supérieures au domaine d'identification de $L_1(\sigma)$. Mathématiquement, il n'y a évidemment pas de problème puisque $L_1(\sigma)$ est définie de 0 à +8. Mais en pratique que signifie $L_1(10^5 \text{ MPa})$, et comment identifier $L_1(\sigma)$ pour des contraintes très grandes ? La seule réponse qui a donc été proposée est l'utilisation de la fonction logistique modifiée qui tend nettement moins vite vers zéro que la fonction de survie correspondant à la loi de Weibull. La fonction logistique modifiée est donc potentiellement plus cohérente pour des valeurs hors du domaine d'identification. Il serait sans doute intéressant de poursuivre cette étude en analysant l'effet de la fonction choisie, et l'effet de l'identification des données initiales. Actuellement la fonction logistique modifiée est

acceptable, malgré une difficulté certaine pour l'identification des trois paramètres (a, b et c). La signification physique de ces paramètres n'a d'ailleurs pas été clairement établie. Signalons aussi que la probabilité d'obtenir des défauts de contrainte de rupture nulle n'est rigoureusement pas égale à zéro, mais est néanmoins une valeur très faible (a est en général très grand). Bien que physiquement pas acceptable, ceci ne perturbe pas les calculs puisque l'on s'intéresse ici aux valeurs des contraintes supérieures (--> +8).

En conclusion, le problème qui a été résolu, traduit l'effet d'une réduction d'une population donnée de défauts par suppression des défauts les plus gros. Les résultats sont tout à fait importants, puisque le processus de réduction qui est introduit n'apparaît pas dans le modèle classique de Weibull. En effet pour déterminer la population de défauts d'un volume plus faible (réduction des défauts) le modèle de Weibull considère que la population de défauts est intrinsèque au matériau, et donc la réduction est de type statistique par rapport au volume. Le modèle de Weibull s'applique donc à une évolution homogène alors que le modèle proposé traite une évolution non-homogène.

Références

- [All95] J.-C. Alla, "Analyse probabiliste de la fissuration des matériaux composites à matrice céramique", Rapport de DEA, Mathématiques Appliquées, Université de Bordeaux II, 1995.
- [Das96] C. Das Neves, "Modélisation probabiliste des fissures successives dans les matrices céramiques des matériaux composites", Rapport de DEA, Mathématiques Appliquées, Université de Bordeaux II, 1996.
- [Pur97] I Gusti Putu Purnaba, "Étude de divers problèmes statistiques liés aux valeurs extrêmes : modélisation et simulations", Thèse, n° 1777, pg 147-203, Université de Bordeaux II, 1997.

Annexe 2

Introduction à la théorie ergodique

1. Introduction à la théorie ergodique (Extrait de [Pet]).

D'une manière générale, la théorie ergodique est l'étude mathématique du comportement moyen à long terme des systèmes dynamiques. Pour illustrer ce concept il faut alors se placer dans un cadre mathématique général. Pour cela on considère l'ensemble des états d'un système qui forme ce que l'on appelle l'espace des phases X . L'évolution du système est représentée par une transformation $T: X \rightarrow X$, où $T(x)$ est la position au temps $t=1$ du système qui à l'instant $t=0$ était à la position x . Il est possible d'envisager des transformations continues en fonction du temps $(T_t, t \in \mathfrak{R})$. Si les lois régissant le système sont invariantes par rapport au temps, alors $T_{s+t} = T_s T_t$. $(T_t, t \in \mathfrak{R})$ définit alors un flot de transformations de l'espace X . L'étude des transformations de l'espace s'intéresse donc à l'étude de certaines transformations générant le flot, et éventuellement l'ensemble du flot.

Par rapport à cette introduction générale, il faut définir la structure de l'espace X d'un point de vue mathématique et donner des restrictions sur les transformations T . Dans le cas le plus simple de la théorie ergodique, X est défini comme un espace mesurable et T est une transformation préservant la mesure. Soit alors (X, \mathcal{B}, μ) un espace complet de probabilité, avec \mathcal{B} l'ensemble des sous-ensembles mesurables de X représentant l'ensemble des événements observables, et tel que \mathcal{B} contienne tous les sous-ensembles d'ensembles de mesure nulle, et μ une mesure sur X tel que $\mu(X) = 1$. Si on considère T comme une fonction bijective, avec T^{-1} mesurable aussi, alors $T.\mathcal{B} = T^{-1}.\mathcal{B} = \mathcal{B}$. De plus, pour tout $E \in \mathcal{B}$, on a $\mu(T.E) = \mu(T^{-1}.E) = \mu(E)$, puisque T est une transformation préservant la mesure. On peut définir alors une orbite $\{T^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ d'un point $x \in X$, qui représente une histoire complète du système, de l'infini passé vers l'infini futur. Soit alors une fonction mesurable $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant à une mesure faite sur le système. $f(x)$, $f(T(x))$, $f(T^2(x))$... représentent par exemple les valeurs d'une variable physique prise à des instants successifs (0, 1, 2 ...) et commençant à l'état x . Or en physique en général, il est intéressant et parfois nécessaire de considérer la moyenne à long terme d'une telle variable :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k(x))$$

où N représente un nombre important d'observations. Sans discuter du sens de "long terme", et du nombre d'observations, qui dépend en fait du système, la théorie ergodique se pose la question de la convergence de cette moyenne. Ainsi :

$$\{f(x)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T^k(x)) \right)$$

existe-t-elle ? Et si elle existe, $\{f(x)\}$ peut alors être considérée comme une valeur d'équilibre, ou bien une grandeur caractéristique de la variable f , donc du système. La convergence a été démontrée dans certains cas (Borel en 1909, avec la loi forte des grands nombres), mais on doit à Neumann la démonstration de la convergence au sens des moindres carrés, et à Birkhoff la démonstration au sens de presque partout, tous les deux en 1931. Leur résultats forment ce qu'on appelle actuellement le théorème de la moyenne ergodique, et le théorème central ergodique. Depuis cette époque de nombreuses généralisations ont été proposées concernant d'autres espaces X et d'autres type de fonctions T . Néanmoins cette question de l'existence de la moyenne est devenue une affaire de mathématiciens, alors que depuis longtemps en physique, cette existence avait été supposée. De plus, les physiciens qui ont introduit en premier la notion d'ergodicité, sont passé rapidement, il faut le dire, aux conséquences des théorèmes d'existence cités, à savoir que la moyenne temporelle $\{f(x)\}$ et la moyenne spatiale

$$\int_X f(x) d\mu$$

coïncident presque partout. Il est en effet souvent important en physique, que l'état d'équilibre du système se vérifie à la fois dans le temps et dans l'espace. Une telle affirmation a été introduite pour la première fois par Boltzmann d'une manière intuitive. Elle implique ainsi que le système évolue pour un temps suffisamment long vers l'état statistique le plus probable qui est l'état d'équilibre. Une autre notion qui intéresse la théorie ergodique, est le problème de récurrence pour décrire les orbites $\{T^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ de l'espace des phases. La notion de "mixing" apparaît ainsi pour traduire le caractère complexe d'un système dynamique, où les orbites se "mélangent" les unes aux autres au cours du temps. Un exemple simple est le mélange de deux peintures non-miscibles de couleurs différentes. Enfin un autre domaine très important actuellement est la classification des problèmes dynamiques en classes de systèmes équivalents. Ce problème récent doit beaucoup aux travaux de Kolmogorov et de Sinai qui ont su introduire la notion d'entropie pour définir un invariant des classes de systèmes. Cette notion est utilisée en théorie de l'information pour le codage et le décodage entre autres.

2. Transformation du Boulanger (Extrait de [Arn92])

Afin d'illustrer les notions précédentes, considérons la dynamique suivante, donnée par une transformation T qu'il est devenu classique d'appeler "transformation du boulanger" pour des raisons que la géométrie rendra évidente. Elle opère dans un carré dont les côtés ont pour longueur 1. Grâce à une suite de manipulations (Fig.1), elle envoie chaque point P sur un autre point $T(P)$ du carré, de la manière suivante : on aplatit tout d'abord le carré en un rectangle de longueur

double et de largeur moitié ; puis on coupe ce rectangle en deux, par une section verticale, et on place la moitié droite au dessus de la moitié gauche, qui elle reste en place, pour reformer le carré initial. Pour appréhender cette transformation d'une autre manière, on peut suivre un point P du carré, de coordonnées (x,y) au cours des opérations successives. L'aplatissement du carré en un rectangle envoie ce point sur P' de coordonnées (2x,y/2). Là, de deux choses l'une :

- ou bien $2x < 1$, alors la moitié n'est pas déplacée : $P' = T(P)$ en $(2x, y/2)$.
- ou bien $2x = 1$, alors la moitié est déplacée : $T(P)$ en $(2x-1, (y+1)/2)$.

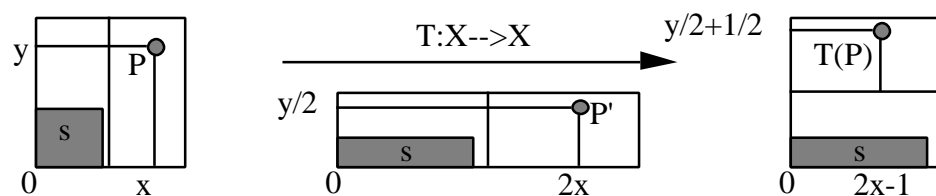


Fig.2.1 Transformation du boulanger

Cette transformation définit une dynamique à l'œuvre dans le carré qui, entre deux instants consécutifs, amène un point P en T(P). Le devenir de chaque point du carré est entièrement défini par ses coordonnées initiales ; nous prendrons ce système comme un exemple type de système totalement déterministe. Néanmoins on remarquera d'une manière évidente qu'une perturbation d'une position initiale engendre un comportement rapidement différent. Un tel système est donc sensible aux conditions initiales comme le billard par exemple. On peut vérifier aisément que la transformation T est une transformation qui préserve la mesure, en suivant par exemple l'évolution d'un carré de surface s (Fig.2.1). Ainsi pour un tel système la théorie ergodique s'applique d'après les hypothèses. De nombreuses conclusions en découlent alors. Ainsi si on prend pour fonction f la fonction caractéristique du carré de surface s (si x dans carré $f(x)=1$, sinon $f(x)=0$), alors les valeurs $f(P)$, $f(T(P))$, $f(T^2(P))$... représentent les positions ou non des points successifs dans le carré. L'égalité des moyennes spatiales et temporelles implique alors que la probabilité de passage des points $T^i(P)$ dans le carré est égale à la surface du carré s.

On démontre aussi, que ce système associé à une fonction f caractéristique cette fois-ci de la moitié du carré initial peut être mis en correspondance avec un système aléatoire comme le lancer de dé. En d'autres termes, si un observateur ne connaît que les positions x_i des points $T^i(P)$ jusqu'à un niveau n ($i=n$) il ne peut pas déterminer l'abscisse x_{n+1} : le système, bien que déterministe, est pour cette observateur complètement aléatoire.

La mise en correspondance par rapport au lancer de dé est finalement issue de la partition du carré initial en deux rectangles identiques. Cette notion de partition est importante puisqu'elle peut être associée à la notion d'entropie d'une manière générale, et qui s'écrit pour un système de Bernoulli évoluant sur un nombre n d'états (partition), présentant une probabilité d'occurrence P_i :

$$S = -\sum_{i=1}^n P_i \ln P_i$$

Cette relation rejoint d'une certaine manière l'entropie de Boltzmann. La définition de classe de systèmes dynamiques de même entropie, signifie qu'il existe, dans l'espace des phases, des partitions qui décrivent de manière identique les systèmes dynamiques de la même classe. On comprend alors l'importance de ces classes pour ramener un système dynamique nouveau à un système dynamique connu.

3. Fonction canonique de Boltzmann (Extrait de [Ruh89])

Par rapport à l'exposé du cadre de la théorie ergodique, nous revenons ici sur les travaux de Boltzmann, l'un des initiateurs de la physique statistique qui a véritablement transformé le champ d'investigation des physiciens avec par la suite la mécanique quantique ou la mécanique du chaos des systèmes dynamiques. Ses travaux se sont portés vers la compréhension statistique d'un système dynamique, en étudiant les molécules d'un gaz et l'équilibre thermodynamique qui en résulte. Contrairement à Maxwell, qui utilise le hasard par ignorance des états des molécules, Boltzmann considère l'évolution statistique du système dans l'espace des phases formé de toutes les combinaisons possibles de molécules à un état donné. C'est l'état d'équilibre le plus probable qui dicte l'évolution du système.

Nous envisageons par exemple un ensemble de n molécules d'un gaz parfait. Chacune de ces n molécules peut occuper arbitrairement l'une des nombreuses cases de l'espace des phases. Sans entrer dans les détails, une case de l'espace des phases correspond à la position et la quantité de mouvement d'une molécule. On peut par ailleurs attribuer un volume à chaque case, ou plus exactement quantifier les cases par un volume h^3 , notion que Boltzmann a introduit trente ans avant Planck.

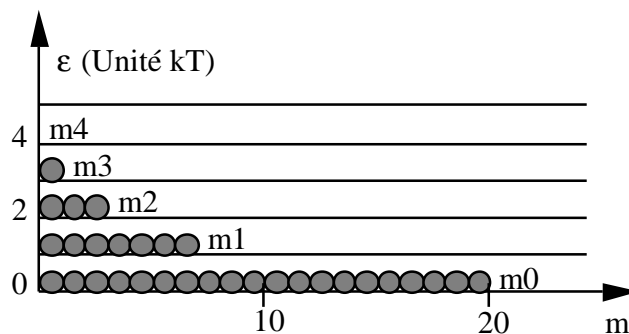


Fig.2.2 Représentation de la distribution de Boltzmann.

Ainsi la probabilité d'occuper une case i est a priori constante et indépendante de i . Au contraire, l'énergie d'une molécule située dans la case i a une valeur $\epsilon_{\text{symbo}_i}$ qui dépend de la case. Enfin le nombre de molécules dans la case i est donné par m_i .

Ainsi l'état microscopique est défini par un inventaire complet désignant pour chaque molécule son numéro et sa case. L'état macroscopique est défini simplement, par un niveau U d'énergie fixe (système isolé), et par le nombre de molécules pour chaque case, i.e. les valeurs $(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots)$.

L'objectif est de trouver les caractéristiques de l'état macroscopique le plus probable qui doit correspondre à l'équilibre statistique. Nous cherchons donc le nombre Ω d'états microscopiques accessibles, correspondant à un état macroscopique donné. Dans un système à k cases, Ω est le nombre de combinaisons suivant :

$$\Omega = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_i! \dots}$$

Plus tard Boltzmann introduira la notion d'entropie S du système (k constante de Boltzmann) :

$$S = k \ln \Omega$$

Alors la recherche de l'état macroscopique le plus probable, i.e. l'ensemble $(m_1, m_2, \dots, m_i, \dots)$, revient donc à chercher l'état avec le nombre Ω maximum, ou ce qui est plus pratique, à maximiser $\ln \Omega$, donc à maximiser l'entropie S. Les contraintes de cette résolution sont :

$$\sum_i m_i = n \quad \text{et} \quad \sum_i \epsilon_i m_i = U$$

avec U l'énergie du système isolé. Le résultat de ce problème s'exprime de manière simple en terme de probabilité d'occupation pour une molécule de l'état i de niveau d'énergie ϵ_i :

$$P(\epsilon_i) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right)$$

avec T la température absolue. Z est une fonction appelée fonction de partition.

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right)$$

Les niveaux d'occupation sont représentés à la Fig.2.2. Ce résultat que nous donnons, est à comparer à la fonction de localisation de rupture que nous avons indiquée dans la partie I et II - 4. En effet, on peut finalement comparer une molécule à une rupture. Cette rupture sera la plus probable pour un niveau d'énergie le plus bas, i.e. pour une contrainte critique la plus faible. C'est l'une des raisons pour laquelle nous avons choisi une fonction puissance avec un fort exposant pour obtenir une fonction facile à identifier et proche d'une exponentielle. Néanmoins, une continuation possible de la localisation de la rupture consisterait à utiliser la démarche de Boltzmann en définissant par exemple une énergie caractéristique de rupture. La question de l'entropie du système apparaît alors de manière naturelle, reste à savoir à quoi elle correspond ?

Références

- [Pet] K. Petersen, “ Ergodic theory “, Cambridge University Press.
- [Bil] P. Billingsley, “ Ergodic theory and information “, John Wiley & Sons Inc..
- [Far94] I. Farquhar, “ Ergodic theory in statistical mechanics “, John Wiley & Sons Inc., 1964.
- [Arn92] P. Arnoux & K. Chemla, “ Systèmes dynamiques et théorie ergodique “, Chaos et déterminisme, Points Sciences, Edition Seuil, pg 41-67, 1992.
- [Ruh89] C. Ruhla, “ La physique du hasard, de Blaise Pascal à Niels Bohr “, Liaisons Scientifiques, Edition Hachette-CNRS, 1989.

Annexe 3

Publications

V. Calard et J. Lamon, "Simulation de la fragmentation de la matrice dans les composites céramiques unidirectionnels", 10^{ème} Journées Nationales sur les composites (JNC-10), ENSAM, 29-31 Octobre, Paris, pg 1285-1294, 1996.

V. Calard et J. Lamon, "Approches probabilistes de la rupture des composites à matrice céramique en flexion 3 points et pseudo 4 points", 11^{ème} Journées Nationales sur les composites (JNC-11), 18-20 Novembre, Arcachon, 1998.

V. Calard et J. Lamon, "Probabilistic-statistical approach to matrix cracking in ceramic matrix composites (CMCs)", The 3rd Int. Conf. on High Temperature Ceramic Matrix Composites (HT-CMC 3), September 6-9, Osaka, Japan, 1998.

