



**HAL**  
open science

## Catégories enrichies faibles

Regis Pellissier

► **To cite this version:**

Regis Pellissier. Catégories enrichies faibles. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2002. Français. NNT: . tel-00003273

**HAL Id: tel-00003273**

**<https://theses.hal.science/tel-00003273v1>**

Submitted on 26 Aug 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00000565 (version 1) : 26 Aug 2003

# CATEGORIES ENRICHIES FAIBLES

Régis PELLISSIER

26 août 2003

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS  
UFR SCIENCES  
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées  
Département de Mathématiques  
Laboratoire J. A. Dieudonné, U.M.R. C.N.R.S. 6621

## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de  
DOCTEUR ÈS SCIENCES  
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis  
Spécialité : Mathématiques  
par

Régis PELLISSIER

## Catégories enrichies faibles.

Soutenue publiquement le jeudi 27 juin 2002 devant le jury composé de :

M. Clemens BERGER	Maître de conférence à l'Université de Nice
M. André HIRSCHOWITZ	Professeur à l'Université de Nice
M. André JOYAL	Professeur à l'Université de Montreal
M. Bernhard KELLER	Professeur à l'Université de Jussieu
M. Jean-Michel LEMAIRE	Professeur à l'Université de Nice
M. Georges MALTSINIOTIS	Directeur de recherche CNRS à Jussieu
M. Carlos SIMPSON	Directeur de recherche CNRS à Nice
M. Bertrand TOEN	Chargé de recherche CNRS à Nice

à 15h30, en salle de conférences du Laboratoire J.A. Dieudonné.

Deploꝛation sur le trespas de feu Jean Molinet,  
faicte par maistre Guillaume Cretin.

**M**olinet n'est lanl beupt, ne lanl nom, non,  
Il a lon lon, et comme tu voit, voir,  
Son doulx plaïd plaïst mieulx que ne faict ton ton,  
Ton bit art ard plus cher que charbon ton,  
Tel trenchant chantz perchent tel paroïl roïdz,  
D'entre gent gent ont noblel Franchoïl choïz,  
Se ne doïbz doïgz doubter en lon laïct laid,  
Car loutent vent vient au molinet nect.

(Guillaume Crétin, 1507)

.....

*En l'honneur des Pellissier Dragon*

....

# Introduction



Il existe à l'heure actuelle plusieurs définitions de  $n$ -catégories. L'une des pionnières est celle de Brown et Loday (approche cubique). Street dans *The algebra of oriented simplexes* (Journal of Pure and Applied Algebra 1987) a proposé une définition basée sur la condition de Kan. Baez et Dolan ont développé dans leur prépublication *Higher dimensional algebra III :  $n$ -categories and the algebra of opetopes* (1997) une théorie de  $n$ -catégories basée sur les opérades. Tamsamani a défini dans sa thèse *Sur des notions de  $n$ -catégorie et  $n$ -groupeïde non stricts via des ensembles multisimpliciaux* (K-theory 1999) la notion de  $n$ -nerf qui est une généralisation de celle du nerf d'une petite catégorie. Enfin Hirschowitz et Simpson se sont basés pour leur prépublication *Descente pour les  $n$ -champs* (1998) sur la notion de  $n$ -catégorie de Segal, une version simpliciale de la notion de  $n$ -nerf.

En regardant de plus près les travaux de Tamsamani et d'Hirschowitz-Simpson, on remarque une forte ressemblance à la fois dans la construction des  $n$ -catégories faibles, comme on l'a remarqué ci-dessus, et dans la démonstration de l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée les concernant, la démonstration pour les  $n$ -nerfs se trouvant dans la prépublication de Simpson *A closed model structure for  $n$ -categories, internal Hom,  $n$ -stacks and generalized Seifert-Van Kampen* et les idées de celle pour les  $n$ -catégories de Segal dans *Descente pour les  $n$ -champs*. Le principe général est de définir récursivement une  $n$ -catégorie faible comme un préfaisceau de la catégorie simpliciale dans la catégorie des  $(n - 1)$ -précatégories qui niveau par niveau est une  $(n - 1)$ -catégorie faible et qui vérifie certaines conditions dites conditions de Segal. De même, on démontre qu'il existe une structure de catégorie de modèles fermée pour les  $n$ -catégories faibles en supposant montrée celle pour les  $(n - 1)$ -catégories faibles. On remarquera que la structure de catégorie de modèles fermée n'est pas mise directement sur la catégorie des  $n$ -catégories faibles mais sur celle des  $n$ -précatégories faibles, c'est-à-dire des préfaisceaux de la catégorie simpliciale dans la catégorie des  $(n - 1)$ -précatégories.

Pour résumer ce qui précède, on se donne une catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  et l'on regarde les préfaisceaux de la catégorie simpliciale vers  $\mathcal{C}$ , que l'on appellera  $\mathcal{C}$ -précatégories. Puis on définit une notion de catégorie sur  $\mathcal{C}$ , ce que l'on appellera  $\mathcal{C}$ -catégorie, en demandant aux  $\mathcal{C}$ -précatégories de vérifier certaines conditions, principalement celles de Segal. Enfin on démontre qu'il existe sur la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories une structure de catégorie de modèles fermée basée sur la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie. Le but de cette thèse est donc d'étudier cette forme de généralisation de la notion de catégorie, ce qu'on ap-

pellera catégorie enrichie faible, tout d'abord en définissant en détail la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie, puis en cherchant à montrer l'existence d'un bon procédé de catégorisation des  $\mathcal{C}$ -précategories. Après quoi nous démontrerons l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée sur les  $\mathcal{C}$ -précategories avec pour équivalences faibles les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précategories qui après catégorisation sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Et pour finir, nous montrerons qu'avec cette structure de catégorie de modèles fermée sur les  $\mathcal{C}$ -précategories, on retrouve la structure de catégorie de modèles fermée pour les catégories de Segal de la prépublication *Descente pour les  $n$ -champs*.

Dans un premier chapitre, nous nous intéressons à la notion de catégorie enrichie faible sur une catégorie quelconque  $\mathcal{C}$ . Afin de simplifier les notations, on nommera  $\mathcal{C}$ -catégories les catégories enrichies faibles sur  $\mathcal{C}$ . Pour commencer, étant donnée une catégorie  $\mathcal{C}$  quelconque, nous définissons les  $\mathcal{C}$ -précategories comme les préfaisceaux de la catégorie simpliciale, notée  $\Delta$ , dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . Toutefois comme nous ne voulons considérer que les préfaisceaux  $A$  dont l'espace des objets  $A_0$  est un ensemble, nous demandons que la catégorie  $\mathcal{C}$  soit munie d'objets discrets, ce qui nous conduit à définir la notion de catégorie discrétisante. Ainsi les préfaisceaux de la catégorie simpliciale  $\Delta$  dans une catégorie discrétisante  $\mathcal{C}$  ayant leurs ensembles d'objets discrets seront les seuls à pouvoir être appelés  $\mathcal{C}$ -précategories.

La définition de  $\mathcal{C}$ -catégorie est beaucoup plus difficile à définir. Pour suivre les exemples des  $n$ -catégories faibles de Tamsamani ou de Segal évoquées précédemment, nous aimerions dire qu'une  $\mathcal{C}$ -catégorie est une  $\mathcal{C}$ -précategorie  $A$  telle que, pour tout  $n$  entier,  $A_n$  est une "catégorie de  $\mathcal{C}$ " et que, pour tout  $m > 1$ , les morphismes dits de Segal  $A_m \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  sont des "équivalences de catégories dans  $\mathcal{C}$ ". De même, nous voudrions dire qu'un morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$ -catégories est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories s'il est essentiellement surjectif et pleinement fidèle. Pour la pleine fidélité, il s'agit simplement de demander que pour tout couple d'objets  $(x, y)$  de la source de  $f$ , le morphisme de  $\mathcal{C}$   $f_1(x, y)$  soit une "équivalence de catégories dans  $\mathcal{C}$ ". Pour définir l'essentielle surjectivité, toujours en suivant les exemples des  $n$ -catégories faibles de Tamsamani et de Segal, cela nécessite l'existence d'un foncteur noté  $\tau_0$  des  $\mathcal{C}$ -catégories vers les ensembles généralisant la notion d'équivalence d'objets dans une catégorie. Or ce foncteur se définit très facilement si pour les "catégories de  $\mathcal{C}$ " un tel foncteur existe déjà.

Ainsi l'on remarque que les définitions de  $\mathcal{C}$ -catégorie et d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -

catégories nécessitent trois notions sur  $\mathcal{C}$  qui ont vocation à être respectivement celles de catégorie, d'équivalence de catégorie et d'équivalence d'objets d'une catégorie. Nous les nommerons respectivement objet régale, alliance d'objets régales et  $\tau_0$ . La catégorie  $\mathcal{C}$  munie de ces trois notions et vérifiant un certain nombre de propriétés techniques constituera une donnée de Segal. C'est grâce à cette notion de donnée de Segal que les définitions de  $\mathcal{C}$ -catégorie et d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories telles qu'elles ont été données ci-dessus auront un sens.

Après avoir défini correctement les notions de  $\mathcal{C}$ -catégorie et d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, nous allons chercher à construire un procédé de catégorisation qui associera à toute  $\mathcal{C}$ -précategorie une  $\mathcal{C}$ -catégorie tout en préservant son type d'homotopie. En nous inspirant de la prépublication de Simpson *A closed model structure for n-categories, internal Hom, n-stacks and generalized Seifert-Van Kampen* [5], nous allons chercher un tel procédé parmi les procédés d'addition transfinie de flèches. C'est pourquoi nous allons entièrement consacrer notre deuxième chapitre à l'étude des procédés d'addition de flèches que nous appellerons plan d'addition de cellules. Un des principaux rôles de ces plans d'addition de cellules est de résoudre le problème suivant. On se donne une catégorie  $\mathcal{C}$  cocomplète et une famille  $I$  de morphismes de  $\mathcal{C}$ . On appelle objet  $I$ -injectif tout objet ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches de  $I$ . Le problème qui se pose alors est de trouver un procédé qui transforme tout objet en objet  $I$ -injectif. La solution de ce problème se trouve en faisant des colimites transfinies de sommes amalgamées des flèches de  $I$ , ce qui n'est autre qu'appliquer un plan d'addition de cellules pour  $I$ . Et c'est un argument du type petit objet qui assurera que tel ou tel plan d'addition de cellules de  $I$  rend effectivement  $I$ -injectif.

Cependant cette astuce de passer par les plans d'addition de cellules pour résoudre le problème de la catégorisation des  $\mathcal{C}$ -précategories ne prend pas en compte la préservation de l'homotopie. On doit alors résoudre un autre problème. Parmi les plans d'addition de cellules  $P$  fonctoriels rendant  $I$ -injectif, y en a-t-il un tel que, pour tout objet  $A$ , l'image par  $P$  du morphisme naturel de  $A$  dans le résultat du plan  $P(A)$  est une équivalence d'objets  $I$ -injectifs, en supposant qu'une telle notion existe. Toujours en s'inspirant de [5], nous allons définir un plan d'addition de cellules rendant  $I$ -injectif ayant la propriété de factoriser de manière unique tout morphisme à valeur dans un objet  $I$ -injectif dont les relèvements par rapport aux morphismes de  $I$  sont marqués. Ce plan noté  $E_I$  sera le prototype de la catégorisation  $Cat$ . Son avantage est que s'il existe un plan d'addition de cellules rendant  $I$ -injectif et

préservant le type d'homotopie pour les objets  $I$ -injectifs, cela entraînera que notre procédé  $E_I$  a bien la propriété voulue de préservation de l'homotopie pour tous les objets.

Comme l'un des atouts de la catégorisation est de pouvoir définir des colimites pour les  $\mathcal{C}$ -catégories, dont les colimites en tant que  $\mathcal{C}$ -précatégories ne sont généralement pas des  $\mathcal{C}$ -catégories, il est utile de pouvoir comparer la catégorisation d'une colimite de  $\mathcal{C}$ -précatégories avec la colimite des catégorisées. Pour cela les plans d'addition de cellules nous seront à nouveau d'un grand secours, car ce problème consiste, en termes de plans d'addition de cellules, à comparer deux plans d'addition de cellules rajoutant les mêmes flèches mais pas dans le même ordre. En effet dans les plans d'addition de cellules, on ne fait souvent pas attention à l'ordre dans lequel on additionne les cellules. Or il existe certains plans d'addition de cellules, dit rationnels, pour lequel l'ordre d'addition est bien maîtrisé. On montrera donc que tout plan d'addition de cellules est rationalisable, ce qui permettra de montrer que deux plans d'addition de cellules sont équivalents s'ils ont même rationalisation.

Cependant pour pouvoir appliquer ces plans d'addition de cellules au problème de la catégorisation, encore faut-il qu'il existe un ensemble de morphismes  $I$  pour lequel les  $\mathcal{C}$ -précatégories  $I$ -injectives sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, on dira alors que  $I$  engendre la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie. Comme il n'existe en général pas de tel ensemble caractérisant les  $\mathcal{C}$ -catégories, nous serons obligés de passer par une notion plus forte de  $\mathcal{C}$ -catégorie, que l'on nommera  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, pour laquelle il existe un ensemble  $I$  l'engendrant. C'est donc l'objet du troisième chapitre que de bien définir cette notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile et de trouver son ensemble générateur.

Afin de définir cette notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, nous définissons tout d'abord les données de Segal proto-faciles comme des données de Segal pour lesquelles les notions d'objet régale et d'alliance d'objets régaux sont elles-mêmes faciles, c'est-à-dire caractérisées par des propriétés de relèvement à droite par rapport à des familles de flèches. Les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont alors simplement les  $\mathcal{C}$ -catégories correspondant aux données de Segal proto-faciles, qui forment bien évidemment des données de Segal. Afin de montrer qu'il existe un ensemble de flèches qui caractérise par relèvement les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles ainsi définies, nous définissons une construction  $\Theta$  qui est un bifoncteur qui à un ensemble simplicial  $X$  et à un objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  associe une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $X\Theta C$ . Cette construction a la propriété fondamentale suivante : si  $X$

est un ensemble simplicial représentable, noté  $\Delta[n]$  avec  $n$  entier, alors les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories de  $\Delta[n]\Theta\mathcal{C}$  vers une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  correspondent aux morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $C$  vers  $A_n$ . Grâce à cette construction, nous pouvons alors exhiber les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et définir le procédé de catégorisation  $Cat$  comme la plan d'addition de cellules  $E_I$  pour l'ensemble des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. En rassemblant toutes les hypothèses sur la donnée de Segal proto-facile qui permettent d'obtenir cette construction  $Cat$ , nous obtenons la notion de donnée de Segal pré-facile qui non seulement donne lieu à une notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie mais aussi assure l'existence du foncteur  $Cat$  transformant les  $\mathcal{C}$ -précatégories en  $\mathcal{C}$ -catégories.

Toutefois il reste encore à montrer que la construction  $Cat$  préserve le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories. Ce problème est assez délicat mais, comme on l'a vu dans le deuxième chapitre, si l'on est capable de construire une catégorisation préservant le type d'homotopie pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, alors la construction  $Cat$  préservera bien le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories. Aussi allons-nous consacrer le quatrième chapitre de cette thèse à la construction d'un tel procédé. Mais tout d'abord nous montrerons que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient la propriété du "trois pour deux", c'est-à-dire que si parmi  $f, g, g \circ f$  deux morphismes sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories alors le troisième aussi. En effet ce résultat est indispensable pour pouvoir appliquer le résultat du deuxième chapitre. Puis nous allons chercher une catégorisation préservant l'homotopie pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Ceci va passer par la mise en place de constructions  $Reg$  et  $Seg$  permettant de comprendre au niveau de la catégorie  $\mathcal{C}$  ce qu'il se passe lorsque l'on fait une somme amalgamée par l'une des flèches génératrices. Ces constructions vont alors montrer que certaines de ces sommes amalgamées sont compatibles entre elles, ce qui induira un plan d'addition de cellules  $Bigcat$  pour les flèches génératrices qui niveau par niveau respecte l'homotopie lorsqu'on l'applique aux  $\mathcal{C}$ -catégories. En appliquant alors le résultat du deuxième chapitre, l'on obtient que sous certaines hypothèses, qui donneront lieu à la notion de donnée de Segal facile, la construction  $Cat$  préserve bien l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories et donc résout bien comme il faut le problème de la catégorisation.

A la fin du quatrième chapitre, nous avons donc obtenu le résultat suivant : pour une donnée de Segal facile, il existe une notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie ainsi qu'un bon procédé de catégorisation  $Cat$ . Cependant parmi les hypothèses d'une donnée de Segal facile, on a demandé à la catégorie  $\mathcal{C}$  d'être une catégorie de

modèles fermée, car cette notion permet de bien gérer l'homotopie. Aussi est-il naturel de demander à la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories d'avoir une structure de catégorie de modèles fermée traduisant l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme le foncteur de catégorisation  $Cat$  préserve l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories, on définira les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories comme les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories dont l'image par  $Cat$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Afin de faciliter la démonstration du fait que les  $\mathcal{C}$ -précatégories avec leurs équivalences faibles forment une catégorie de modèles fermée, nous prendrons pour cofibrations les monomorphismes et pour fibrations les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes qui sont aussi des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

Dans le cinquième chapitre, nous allons donc montrer qu'il existe sur les  $\mathcal{C}$ -précatégories une structure de catégorie de modèles fermée avec les notions de cofibrations, d'équivalences faibles et de fibrations définies ci-dessus. Même si, comme dans la prépublication d'Hirschowitz-Simpson *Descente pour les  $n$ -champs*, nous allons montrer en fait qu'il existe une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, la démonstration suit de près, en la généralisant, celle de la prépublication de Simpson *A closed model structure for  $n$ -categories, internal Hom,  $n$ -stacks and generalized Seifert-Van Kampen*. Nous commençons ce chapitre par des rappels de quelques résultats sur la structure de catégorie de modèles fermée, en particulier en rappelant le lemme de reconnaissance d'une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante suivant :

**Lemme de reconnaissance d'une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante :**

*Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie munie d'une classe de morphismes  $W$  et de deux ensembles de morphismes  $I$  et  $J$ . Supposons que  $\mathcal{M}$  vérifie les propriétés suivantes :*

- 0)  $\mathcal{M}$  est complète et cocomplète,*
- 1)  $W$  est stable par rétracts et satisfait à l'axiome "trois pour deux" : pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes composables, si deux morphismes parmi  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  sont dans  $W$  alors le morphisme restant est aussi dans  $W$ ,*
- 2)  $I$  et  $J$  permettent l'argument du petit objet,*

3) Toute  $J$ -cofibration est à la fois une  $I$ -cofibration et dans  $W$ ,

4) Tout morphisme  $I$ -injectif est à la fois  $J$ -injectif et dans  $W$ ,

5) L'une des deux propriétés suivantes est vraie :

- les morphismes à la fois  $I$ -cofibrations et dans  $W$  sont des  $J$ -cofibrations,
- les morphismes à la fois  $J$ -injectifs et dans  $W$  sont  $I$ -injectifs.

Alors il existe une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante sur  $\mathcal{M}$  avec  $W$  pour classe des équivalences faibles,  $I$  pour l'ensemble des cofibrations génératrices et  $J$  pour l'ensemble des cofibrations triviales génératrices.

Nous allons tout au long du cinquième chapitre montrer que les  $\mathcal{C}$ -précatégories avec les monomorphismes et les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories vérifient successivement les six hypothèses de ce lemme de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. L'axiome 0) ayant déjà été montré dans le premier chapitre, nous commençons en fait par montrer l'axiome 1) qui concerne de la stabilité des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Or cet axiome se réduit à montrer simplement la stabilité par rétracts des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories car l'axiome "trois pour deux" découle directement du fait que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories le vérifient ainsi que du fait que la construction  $Cat$  préserve l'homotopie, résultats ayant été montrés dans le chapitre précédent. Puis en supposant que la catégorie  $\mathcal{C}$  elle-même est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, nous définissons l'ensemble  $\mathcal{I}$  des cofibrations génératrices des  $\mathcal{C}$ -précatégories à partir des cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  en utilisant la construction  $\Theta$  et nous définissons les cofibrations triviales génératrices comme les cofibrations triviales à sources et buts petits pour un cardinal transfini suffisamment grand. De ces définitions découle directement la vérification de l'axiome 2).

Etant donné que l'axiome 3) est le plus difficile à vérifier et qu'en outre pour vérifier l'axiome 5) l'on se sert des résultats de l'axiome 3), nous allons donc faire la vérification de l'axiome 4) avant celle du 3). Pour démontrer l'axiome 4), nous commençons par montrer que l'ensemble  $\mathcal{I}$  engendre les cofibrations par des arguments et des techniques classiques dans la théorie des catégories de modèles fermées. De ce résultat découle le fait que les morphismes  $I$ -injectifs se relèvent par rapport aux cofibrations et donc en particulier par rapport

aux cofibrations triviales, ce qui montre la première partie de l'hypothèse 4). Il ne reste donc plus qu'à montrer, pour terminer la vérification de l'axiome 4) que les morphismes  $I$ -injectifs sont des équivalences faibles, ce qui nécessite au préalable quelques rappels sur la préservation des équivalences faibles par colimites dans une catégorie de modèles fermée.

La vérification de l'axiome 3) est bien comme prévu la plus compliquée de toutes et comme elle est nécessaire pour pouvoir vérifier l'axiome 5), nous sommes obligés de vérifier d'abord l'axiome 3). Comme les propriétés des cofibrations entraînent que les morphismes engendrés par les cofibrations triviales génératrices sont bien des cofibrations, l'axiome 3) revient alors à montrer que ce sont des équivalences faibles. Or nous avons déjà vu que ces cofibrations génératrices vérifient l'argument du petit objet (axiome 2)). Ainsi tout morphisme engendré n'est autre qu'un rétract d'une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de cofibrations génératrices, qui sont par définition des cofibrations triviales. Comme la stabilité par rétract découle de l'axiome 1) et des propriétés des cofibrations, si l'on montre que les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée et par colimite séquentielle transfinie, on aura le résultat attendu.

Pour démontrer ce résultat, nous allons commencer par le cas particulier des cofibrations triviales qui sont des isomorphismes sur les objets, que l'on appellera iso-cofibrations triviales. Grâce aux propriétés de la construction  $Cat$  vis-à-vis des colimites découlant des rationalisations de plans d'addition de cellules du deuxième chapitre, montrer la stabilité des iso-cofibrations triviales par colimites revient à montrer celle de leurs catégorisées. On se contentera donc de regarder les iso-cofibrations triviales entre  $\mathcal{C}$ -catégories. Or justement pour les  $\mathcal{C}$ -catégories, les iso-cofibrations triviales ne sont autres que les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories qui niveau par niveau sont des cofibrations triviales. Ainsi la stabilité des iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories revient à une stabilité niveau par niveau, ce qui est assuré par la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ . Toutefois comme on l'a vu plus haut, les colimites de  $\mathcal{C}$ -catégories ne sont pas des  $\mathcal{C}$ -catégories, aussi allons-nous nous retrouver à avoir montré que certains morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories sont niveau par niveau des cofibrations triviales. C'est pourquoi afin de montrer la stabilité des iso-cofibrations triviales, nous allons dans un premier temps caractériser les iso-équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories et dans un second temps montrer qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui niveau par niveau est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$  est en fait une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories.



Afin d'obtenir la stabilité des cofibrations triviales quelconques, nous devons montrer un théorème sur le produit des  $\mathcal{C}$ -catégories qui après réduction revient à montrer qu'un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -précatégories ayant certaines propriétés est une équivalence faible. Pour montrer ce dernier résultat, nous allons faire intervenir la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie ordonnée. Nous définissons les  $\mathcal{C}$ -précatégories ordonnées comme des  $\mathcal{C}$ -précatégories dont l'ensemble des objets est totalement ordonné et vérifiant certaines propriétés. Un des avantages de cette notion est qu'elle possède une caractérisation très simple d'équivalence faible. En effet si un morphisme  $f$  entre  $\mathcal{C}$ -précatégories ordonnées respectant l'ordre vérifie la propriété que, pour tout couple d'objets adjacents  $(x, y)$  de la source de  $f$ ,  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ , alors  $f$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Ce résultat montre en particulier que les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont bien des équivalences faibles. Mais ce n'est pas sa seule utilité car il est aussi le point clef du théorème sur le produit des catégories. Ce théorème sur le produit des catégories est comme on l'a dit un des éléments importants de la démonstration de la stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée.

Avec ce dernier résultat, nous sommes en mesure de montrer le théorème qui nous donne une équivalence entre un produit de  $\mathcal{C}$ -précatégories et le produit de leurs catégorisations. La stabilité des iso-cofibrations triviales par sommes amalgamées et colimites transfinies, que l'on a montrée auparavant, permet en effet de réduire ce théorème au cas des  $\mathcal{C}$ -précatégories ordonnées dont la propriété sur les équivalences faibles démontre ce théorème. De ce théorème découle la préservation des équivalences faibles par produit, résultat dont nous avons besoin pour montrer la préservation par somme amalgamée des cofibrations triviales quelconques.

Pour démontrer la préservation des cofibrations triviales par somme amalgamée, nous faisons une récurrence transfinie sur la différence entre le nombre d'objets du but et celui de la source de la cofibration triviale. Le cas zéro ayant été déjà démontré, nous nous sommes ramenés à montrer ce qu'il se passe lorsqu'on rajoute un objet, d'abord isomorphe à un objet existant, puis seulement équivalent à un objet existant, et ce qu'il se passe lorsque l'on prend une colimite séquentielle transfinie de cofibrations triviales, ce qui montre en même temps la stabilité des cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie. On remarque que pour représenter l'équivalence entre deux objets d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie, on a dû supposer l'existence d'un bon intervalle, noté

$\bar{J}$ , qui est une condition difficile à formuler directement sur  $\mathcal{C}$ . Ayant donc montré que les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée et colimite séquentielle transfinie, nous avons terminé la vérification de l'axiome 3), comme on l'a vu précédemment.

Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier le dernier axiome, ce qui nous demande quelques lemmes techniques sur la catégorisation  $Cat$  ainsi que des techniques de cardinaux transfinis. Comme à chaque vérification d'axiome nous avons ressorti les hypothèses qui nous permettaient de les vérifier, nous aboutissons à l'énoncé d'une ébauche de notre théorème central qui, sous vingt-deux hypothèses sur la donnée de Segal proto-facile portée par  $\mathcal{C}$ , nous assure l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante sur les  $\mathcal{C}$ -précategorias avec pour cofibrations les monomorphismes et pour équivalences faibles les morphismes qui deviennent des équivalences de  $\mathcal{C}$ -categorias par catégorisation, les fibrations étant définies comme il se doit par la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales. Comme cela fait beaucoup d'hypothèses, dont certaines modifient l'énoncé de certaines autres quand elles sont prises globalement, nous allons remanier ces hypothèses en les comparant aux diverses notions de données de Segal existantes, ce qui donnera de nouvelles définitions qui permettront d'énoncer de manière plus synthétique le théorème central et conclura du même coup le cinquième chapitre.

Nous terminons cette thèse par un sixième chapitre consacré à l'application du théorème à la donnée de Segal définissant la notion de catégorie de Segal afin de retrouver la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante de la prépublication *Descente pour les  $n$ -champs* d'Hirschowitz-Simpson. La donnée de Segal qui nous donnera les catégories de Segal est constituée par la catégorie des ensembles simpliciaux avec pour objets régaux les ensembles simpliciaux quelconques, pour alliances d'objets régaux les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux, c'est-à-dire les morphismes dont la réalisation géométrique induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie, et pour foncteur  $\tau_0$  la composée du foncteur réalisation géométrique avec la foncteur composante connexe.

Si les vingt premières hypothèses de l'ébauche du théorème central sont facilement vérifiées, les deux dernières, consistant en l'existence d'un intervalle  $\bar{J}$  caractérisant l'équivalence d'objets dans une catégorie de Segal muni de certaines propriétés, nécessitent l'introduction de la notion de groupoïde

de Segal. Les groupoïdes de Segal sont des catégories de Segal dont tous les morphismes sont inversibles à homotopie près. On peut en outre définir des groupes d'homotopie pour ces groupoïdes de Segal qui caractérisent les équivalences entre groupoïdes de Segal. Toutefois pour notre intervalle, il faut construire une paire de foncteurs adjoints entre les groupoïdes de Segal et les espaces topologiques qui préservent l'homotopie. Ce couple est constitué d'une réalisation géométrique des précatégories de Segal et d'un foncteur singulier, comme c'est le cas pour la paire d'équivalences de Quillen entre les ensembles simpliciaux et les espaces topologiques. Pour montrer la préservation de l'homotopie par cette paire, nous définissons les notions de catégorie topologique et de groupoïde topologique de manière très similaire à celles de catégorie de Segal et groupoïde de Segal. Nous obtenons finalement le fait qu'un morphisme de groupoïdes de Segal est une équivalence de catégories de Segal si et seulement si sa réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie faible. Ce résultat nous permet de montrer que notre intervalle  $\bar{J}$  existe et vérifie les deux dernières hypothèses de l'ébauche du théorème central. Ainsi notre théorème central appliqué à la donnée de Segal sur les ensembles simpliciaux ci-dessus nous redonne bien la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante qu'Hirschowitz et Simpson ont construite pour les catégories de Segal dans leur prépublication *Descente pour les  $n$ -champs*.

Avant de commencer la thèse proprement dite, je voudrais souligner le fait que ce travail nécessite encore quelques améliorations. La principale consiste à exprimer les deux dernières hypothèses du théorème central concernant l'intervalle  $\bar{J}$  caractérisant l'équivalence d'objets des  $\mathcal{C}$ -catégories en terme d'hypothèses directes sur la catégorie de base  $\mathcal{C}$ . En effet dès que l'on arrivera à faire cela, toutes les hypothèses du théorème central seront directement vérifiables sur la catégorie de base  $\mathcal{C}$ . Ceci non seulement permettra d'appliquer plus facilement le théorème central à d'autres exemples que celui traité dans cette thèse, mais aussi à amorcer une autre amélioration qui consiste à montrer que la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante des  $\mathcal{C}$ -précatégories vérifie elle-même les hypothèses du théorème central. Dans ce cas, en effet, nous aurions démontré le pas de la récurrence permettant de définir les  $n$ - $\mathcal{C}$ -catégories et de leur construire une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Je termine en remerciant mon directeur de thèse Jean-Michel Lemaire pour sa gentillesse et son appui, André Hirschowitz et Carlos Simpson pour leur aide permanente et leur encadrement, André Joyal et Georges Maltsiniotis pour avoir accepté de rapporter cette thèse, Bernhard Keller et Bertrand Toen pour leur participation à mon jury, Nadja Hohweiller

pour ses précieux conseils concernant le nouveau chapitre de la thèse et pour finir Clemens Berger et mes collègues, de bureau, de l'étage et de l'équipe, pour leurs encouragements et leur soutien sans faille.

....

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Catégories faibles enrichies sur une catégorie</b>	<b>23</b>
1.1	Objets discrets . . . . .	25
1.2	$\mathcal{C}$ -précatégories . . . . .	28
1.3	$\mathcal{C}$ -catégories . . . . .	31
1.4	Équivalences de $\mathcal{C}$ -catégories . . . . .	34
1.5	Problème de la catégorisation . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Engendrement</b>	<b>43</b>
2.1	Rappels sur les relèvements de diagrammes . . . . .	46
2.2	Morphismes I-injectifs et I-cofibrations . . . . .	50
2.3	Argument du petit objet . . . . .	52
2.4	Plan d'addition de cellules . . . . .	56
2.5	Plans d'addition de cellules I-injectivants . . . . .	63
2.6	Plan I-injectivant marqué . . . . .	68
2.7	I-injectivisation et équivalence d'objets I-injectifs . . . . .	75
2.8	Rationalisation des plans d'addition de cellules . . . . .	80
2.9	Plan rationnel $HCat$ . . . . .	85
2.10	Exemples particuliers de plans d'addition de cellules à usage pour les $\mathcal{C}$ -précatégories . . . . .	90
2.11	Application de l'I-injectivisation aux colimites d'objets I-injectifs.	95
2.12	Lemmes techniques sur l'I-injectivisation . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Engendrement des <math>\mathcal{C}</math>-catégories</b>	<b>103</b>
3.1	$\mathcal{C}$ -catégories faciles et équivalences faciles . . . . .	105
3.2	La construction $\Theta$ . . . . .	109
3.3	Flèches génératrices des $\mathcal{C}$ -catégories faciles . . . . .	116
3.4	Construction $Cat$ . . . . .	124
<b>4</b>	<b>Préservation du type d'homotopie par catégorisation</b>	<b>133</b>
4.1	Propriétés des équivalences de $\mathcal{C}$ -catégories . . . . .	135

4.2	Constructions Reg et Seg . . . . .	142
4.3	Construction RS . . . . .	148
4.4	Construction Cat(1,m) . . . . .	152
4.5	Construction Bigcat . . . . .	160
4.6	Préservation du type d'homotopie par la construction Cat . .	165
<b>5</b>	<b>Structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante sur les <math>\mathcal{C}</math>-précatégories</b>	<b>170</b>
5.0	Rappels sur la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante . . . . .	173
5.1	Stabilité des équivalences faibles par rétracts . . . . .	176
5.2	Ensembles générateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ . . . . .	179
5.3	$\mathcal{I}$ engendre les cofibrations de $\mathcal{C}$ -précatégories . . . . .	182
5.3.1	Stabilité des cofibrations dans une catégorie de modèles fermée . . . . .	182
5.3.2	Astuce ensembliste . . . . .	184
5.3.3	Caractérisation des $\mathcal{I}$ -cofibrations . . . . .	187
5.3.4	Stabilité des équivalences faibles dans une catégorie de modèles fermée . . . . .	192
5.3.5	Les morphismes $\mathcal{I}$ -injectifs sont des équivalences faibles . . . . .	195
5.4	Stabilité des iso-cofibrations triviales . . . . .	201
5.4.1	Caractérisation des iso-équivalences de $\mathcal{C}$ -catégories . .	201
5.4.2	Equivalence faible niveau par niveau . . . . .	203
5.4.3	Sommes amalgamées d'iso-cofibrations triviales . . . .	205
5.4.4	Colimites séquentielles d'iso-cofibrations triviales . . .	207
5.5	Produit cartésien de $\mathcal{C}$ -catégories . . . . .	212
5.5.1	$\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées . . . . .	212
5.5.2	Catégorisation réduite . . . . .	218
5.5.3	Equivalence de $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées . .	226
5.5.4	Produit d'équivalence faibles des $\mathcal{C}$ -précatégories . . . .	231
5.6	Stabilité des cofibrations triviales . . . . .	239
5.6.1	Stabilité par somme amalgamée de certaines cofibrations triviales . . . . .	239
5.6.2	Stabilité des cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie . . . . .	245
5.6.3	Stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée	248
5.7	$\mathcal{J}$ engendre les cofibrations triviales . . . . .	252
5.7.1	Lemmes techniques sur Cat . . . . .	252
5.7.2	Sous-cofibrations triviales à sources et buts $\alpha'$ -petits . .	257

5.7.3	Engendrement des cofibrations triviales par $\mathcal{J}$ . . . . .	264
5.8	Théorème central . . . . .	268
5.8.1	Ebauche du théorème central . . . . .	268
5.8.2	Remaniement des hypothèses du théorème central et nouvelles définitions . . . . .	271
5.8.3	Enoncé du théorème central . . . . .	275
<b>6</b>	<b>Catégories de Segal</b> . . . . .	<b>278</b>
6.1	Vérification des premières hypothèses du théorème central . . . . .	280
6.2	Groupeïde de Segal . . . . .	283
6.2.1	Groupes d'homotopie d'un groupeïde de Segal . . . . .	283
6.2.2	Proto-groupeïde de Segal . . . . .	286
6.3	Théorie homotopique des groupeïdes de Segal . . . . .	290
6.3.1	Réalisation géométrique . . . . .	290
6.3.2	Foncteur singulier des espaces topologiques vers les groupeïdes de Segal . . . . .	293
6.3.3	Groupeïde topologique . . . . .	299
6.3.4	Caractérisation par réalisation géométrique des équivalences de groupeïdes de Segal . . . . .	306
6.4	Catégorie de modèles fermée sur les précatégories de Segal . . . . .	310
<b>7</b>	<b>Projet de thèse et compétences</b> . . . . .	<b>316</b>
7.1	En amont de la thèse ... . . . .	318
7.2	Au cours de la thèse ... . . . .	320
7.3	En aval de la thèse ... . . . .	324
7.4	En guise de conclusion ... . . . .	327



.....

# Chapitre 1

## Catégories faibles enrichies sur une catégorie

Dans ce chapitre, nous allons définir une notion de catégorie enrichie faible inspirée par les définitions de  $n$ -nerfs de [6] et de  $n$ -catégories de Segal de [2]. Cette définition repose essentiellement sur le fait que toute petite catégorie correspond bi-univoquement à un ensemble simplicial dit nerf de catégorie, ayant la propriété que certains morphismes, dits morphismes de Segal, sont des isomorphismes. L'idée est donc de regarder non plus seulement des préfaisceaux de la catégorie simpliciale  $\Delta$  vers la catégorie des ensembles mais des préfaisceaux de la catégorie simpliciale  $\Delta$  vers une catégorie quelconque  $\mathcal{C}$ . Comme on désire ne travailler qu'avec des catégories enrichies dont l'espace des objets forme un ensemble, on demandera à ces préfaisceaux de  $\Delta$  vers  $\mathcal{C}$  que leur espace d'objets soit un ensemble et on appellera  $\mathcal{C}$ -précatégories de tels préfaisceaux.

Puis en supposant que la catégorie  $\mathcal{C}$  est munie d'une notion d'équivalence, on demandera que les morphismes de Segal des  $\mathcal{C}$ -précatégories soient des équivalences de  $\mathcal{C}$  pour que ces  $\mathcal{C}$ -précatégories soient des catégories faibles enrichies sur  $\mathcal{C}$ . Toutefois, dans les exemples de  $n$ -catégories faibles de [6] et [2], qui sont en fait des catégories faibles enrichies sur les  $n - 1$ -précatégories, on demande aux  $n$ -catégories faibles non seulement que leurs morphismes de Segal soient des équivalences mais aussi que niveau par niveau ce soient des  $n - 1$ -catégories. Aussi définira-t-on sur  $\mathcal{C}$  une notion de donnée de Segal qui consistera essentiellement à munir  $\mathcal{C}$  de notions de catégories de  $\mathcal{C}$  et d'équivalences entre ces catégories de  $\mathcal{C}$ , ce que nous nommerons respectivement objets régaux et alliances d'objets régaux. Munie d'une donnée de Segal sur  $\mathcal{C}$ , nous pourrons alors définir les  $\mathcal{C}$ -catégories qui seront donc des  $\mathcal{C}$ -précatégories qui niveau par niveau sont des objets régaux et dont les morphismes de Segal sont des alliances d'objets régaux.

Nous débuterons donc ce chapitre en regardant à quelles conditions sur la catégorie  $\mathcal{C}$  la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie est bien définie. Ces conditions sont essentiellement dues au fait de demander aux  $\mathcal{C}$ -précatégories d'avoir un espace d'objets qui est un ensemble, ce qui conduira aux notions d'objet discret et de catégorie discrétisante.

## 1.1 Objets discrets

Par objet discret, nous voulons modéliser le fait qu'un objet d'une catégorie  $\mathcal{C}$  ressemble à un ensemble. Comme, dans la catégorie des ensembles, tout ensemble est isomorphe à un coproduit sur son cardinal de l'objet final, nous proposons donc la définition suivante.

**Définition 1.1.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet final. Un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est un objet discret si :*

$$X = \coprod_{* \rightarrow X} *$$

Cependant on aimerait beaucoup que ces objets discrets se comportent comme les ensembles. On va donc définir un foncteur ensemble sous-jacent de  $\mathcal{C}$  vers la catégorie des ensembles et un foncteur objet discret de la catégorie des ensembles vers  $\mathcal{C}$  qui auront vocation à être une équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles et la sous-catégorie des objets discrets de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 1.1.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet final et les coproduits de l'objet final. On définit le couple suivant de foncteurs entre la catégorie  $\mathcal{C}$  et la catégorie des ensembles :*

*on note  $Enssj$  le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(*, -)$  qui à un objet discret associe l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final, noté  $*$ , vers l'objet discret.*

*on note  $Discret$  le foncteur qui à un ensemble associe le coproduit de l'objet final indexé par l'ensemble*

A partir de maintenant on identifiera un objet discret  $X$  avec l'ensemble des morphismes de l'objet final vers  $X$ .

**Lemme 1.1.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet final et les coproduits de l'objet final. On a toujours que  $Discret \circ Enssj$  est l'identité des objets discrets.*

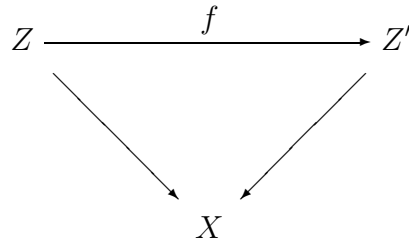
*Preuve :* par définition d'objet discret !

En revanche la composée  $Enssj \circ Discret$  n'est pas toujours naturellement isomorphe à l'identité des ensembles. En effet dans une catégorie pointée, les coproduits de l'objet final sont tous des objets finaux et donc  $Enssj \circ Discret$  est naturellement isomorphe au foncteur constant à valeur un singleton. Or nous voudrions que  $\mathcal{C}$  possède une sous-catégorie équivalente à celle des ensembles. En outre, pour manipuler plus facilement les futures  $\mathcal{C}$ -précatégories,

nous aimerions également que tout morphisme dont le but s'envoie dans un objet discret soit caractérisé par ses fibres en les points de l'objet discret.

**Notation :**

Soit  $Z \rightarrow X$  un morphisme vers un objet discret. Soit  $x$  un élément de  $X$ , on note  $Z(x)$  le produit fibré de  $Z$  par le morphisme  $x : * \rightarrow X$  et on l'appelle fibre de  $Z$  en  $x$ . Soit un diagramme :



On note  $f(x)$  le produit fibré, dans la catégorie des morphismes, de  $f$  par le morphisme  $x : * \rightarrow X$  et on l'appelle fibre de  $f$  en  $x$ .

**Définition 1.1.4** Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite discrétisante si elle admet un objet final, les coproduits de l'objet final, les fibres et possède les propriétés suivantes :

1) pour tout morphisme  $Z \rightarrow X$  vers un objet discret, on a

$$Z = \coprod_{x \in X} Z(x).$$

2)  $Enssj \circ Discret$  est naturellement isomorphe à l'identité de la catégorie des ensembles.

3) les objets discrets sont stables par limites.

Le dernière hypothèse est assez naturelle car, l'hypothèse 2) assurant qu'une catégorie discrétisante contient une sous-catégorie pleine équivalente à la catégorie des ensembles, on peut espérer que les limites et colimites de la catégorie des ensembles se retrouvent dans la sous-catégorie des ensembles discrets comme limites et colimites dans la catégorie discrétisante. Comme en outre, on peut remarquer que le foncteur  $Discret$  est un adjoint à gauche du foncteur  $Enssj$ , les colimites d'objets discrets sont automatiquement des objets discrets, c'est pourquoi l'hypothèse 3) ne requiert que la stabilité des objets discrets pour les limites.

La proposition suivante montre que la définition de catégorie discrétisante nous donne bien sur  $\mathcal{C}$  les propriétés désirées, à savoir que sa sous-catégorie d'objets discrets est équivalente à la catégorie des ensembles et que les morphismes au-dessus d'un objet discret sont caractérisés par leurs fibres.

**Proposition 1.1.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante.*

- Sa sous-catégorie des objets discrets est équivalente à la catégorie des ensembles, à travers les foncteurs  $Enssj$  et  $Discret$ .

- Pour tout diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Z' \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

on a :

$$f = \coprod_{x \in X} f(x).$$

*Preuve* : la première partie de la proposition découle de la propriété 2 de la définition de catégorie discrétisante et du lemme ci-dessus, la seconde partie est une vérification triviale qui découle de la propriété 1.

**Exemple 1.1.6** *La catégorie des ensembles, qu'on notera  $\mathcal{ENS}$ , est trivialement discrétisante.*

**Exemple 1.1.7**  *$\mathcal{ENSSIMP}$ , la catégorie des ensembles simpliciaux, est discrétisante.*

## 1.2 $\mathcal{C}$ -précatégories

Munis de la définition de catégorie discrétisante, nous pouvons maintenant définir la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie.

**Définition 1.2.1** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie discrétisante, on appelle  $\mathcal{C}$ -précatégorie tout préfaisceau  $A$  de la catégorie simpliciale  $\Delta$  vers  $\mathcal{C}$  dont l'espace  $A_0$ , dit l'ensemble des objets de  $A$ , est un objet discret de  $\mathcal{C}$ . On appelle  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux de  $\Delta$  vers  $\mathcal{C}$  d'objets les  $\mathcal{C}$ -précatégories.*

**Exemple 1.2.2** *Si on prend pour catégorie discrétisante  $\mathcal{ENS}$ , on obtient que la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories n'est autre que la catégorie des ensembles simpliciaux.*

En vue de réitérer la construction des  $\mathcal{C}$ -précatégories, il est intéressant de voir si la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories est elle-même discrétisante.

**Proposition 1.2.3** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie discrétisante, la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories est discrétisante.*

*Preuve :*

Par hypothèse,  $\mathcal{C}$  possède l'objet final, les coproduits de l'objet final et les fibres. Or les catégories de préfaisceaux à valeurs dans une catégorie possédant l'objet final, les coproduits de l'objet final et les fibres possèdent également l'objet final, les coproduits de l'objet final et les fibres, ces derniers étant calculés niveau par niveau. C'est en particulier le cas pour la catégorie des préfaisceaux de  $\Delta$  vers  $\mathcal{C}$ . En outre les fibres d'objets discrets dans  $\mathcal{C}$  sont encore des objets discrets et, par définition, l'objet final et ses coproduits sont des objets discrets. Donc l'objet final, les coproduits de l'objet final et les fibres niveau par niveau dans les préfaisceaux de  $\Delta$  vers  $\mathcal{C}$  préservent la condition que le niveau 0 est discret. D'où  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  possède l'objet final, les coproduits de l'objet final et les fibres, ces derniers étant calculés niveau par niveau.

Soit  $Z \rightarrow X$  un morphisme de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  dont le but est un objet discret. Comme  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est une catégorie de préfaisceaux,  $\coprod_{x \in X} Z(x)$  se calcule niveau par niveau, or pour tout entier  $n$ , on a  $Z_n = \coprod_{x \in X} Z_n(x)$  car  $\mathcal{C}$  est discrétisante. Ainsi  $\coprod_{x \in X} Z(x)$  n'est autre que  $Z$  et  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vérifie la propriété 1 de la définition 1.1.4.

On remarque facilement que se donner un morphisme dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  de l'objet final vers un coproduit de l'objet final équivaut à se donner un morphisme dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final vers le même coproduit de l'objet final, car pour un objet discret de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , tous les niveaux sont isomorphes au niveau 0. Ainsi il vient pour tout ensemble  $E$  :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{PC}} \left( *, \coprod_E * \right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} \left( *, \coprod_E * \right) \cong E$$

où l'isomorphisme est naturel en  $E$ , car  $\mathcal{C}$  vérifie la propriété 2 de la définition 1.1.4. On a donc montré la propriété 2 pour  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .

Pour montrer la stabilité des objets discrets par limite, il suffit de rappeler que les limites dans une catégorie de préfaisceaux sont les limites niveau par niveau. Or niveau par niveau les objets discrets sont stables par limites car  $\mathcal{C}$  est discrétisante. De plus nos objets étant discrets, leurs niveaux sont tous isomorphes. Donc nos limites d'objets discrets sont niveau par niveau des objets discrets et tous leurs niveaux sont isomorphes, ce qui en fait des objets discrets et montre la propriété 3 de la définition 1.1.4.

CQFD.

**Exemple 1.2.4** *Dans l'exemple précédent, on a vu qu' $\mathcal{ENSSIMP}$  la catégorie des ensembles simpliciaux n'est autre que  $\mathcal{ENS} - \mathcal{PC}$ . Par la proposition précédente, on obtient donc que la catégorie  $\mathcal{ENSSIMP}$  est discrétisante. Avec la catégorie discrétisante  $\mathcal{ENSSIMP}$ , les  $\mathcal{C}$ -précatégories sont les ensembles bi-simpliciaux dont l'espace des objets est discret.*

**Proposition 1.2.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante. Si  $\mathcal{C}$  est complète (respectivement cocomplète), alors  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est complète (respectivement cocomplète).*

*Preuve :*

Les catégories de préfaisceaux vers une catégorie complète (respectivement cocomplète) sont complètes (respectivement cocomplètes) avec les limites (respectivement les colimites) niveau par niveau. Et comme les limites (respectivement les colimites) de  $\mathcal{C}$  préservent la discrétude des objets, les limites (respectivement les colimites) niveau par niveau préservent la condition d'être discrètes au niveau 0. Par conséquent,  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est complète (respectivement cocomplète) avec les limites (respectivement les colimites) niveau par niveau. CQFD.



Munis de ces propositions, on peut définir par récurrence une notion de  $n$ - $\mathcal{C}$ -précatégorie.

**Proposition 1.2.6 (définition)** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie discrétisante, on appelle 1- $\mathcal{C}$ -précatégories les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Soit  $n$  un entier strictement supérieur à un et supposons définie la catégorie  $(n-1) - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $(n-1)$ - $\mathcal{C}$ -précatégories, on appelle alors  $n$ - $\mathcal{C}$ -précatégories les  $(n-1) - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$ -précatégories et  $n - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des préfaisceaux de  $\Delta$  vers  $(n-1) - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  d'objets les  $n$ - $\mathcal{C}$ -précatégories.*

*Si  $\mathcal{C}$  est complète (respectivement cocomplète) et que ses objets discrets sont stables par limites (respectivement par colimites), alors, pour tout entier  $n$ ,  $n - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est complète (respectivement cocomplète) et ses objets discrets sont stables par limites (respectivement par colimites).*

*Preuve :* c'est une démonstration par récurrence qui utilise les deux propositions précédentes à chaque étape. CQFD.

**Exemple 1.2.7** *En prenant pour catégorie discrétisante  $\mathcal{ENS}$ , on obtient les  $n$ -précatégories de Tamsamani de [5].*

**Exemple 1.2.8** *En prenant pour catégories discrétisante  $\mathcal{ENSSIMP}$ , on obtient les  $n$ -précatégories de Segal de [2]. On peut remarquer que comme la catégorie  $\mathcal{ENSSIMP}$  est en fait celle des 1-précatégories de Tamsamani, pour tout entier  $n$ , les  $n$ -précatégories de Segal ne sont autres que les  $n+1$ -précatégories de Tamsamani.*

### 1.3 $\mathcal{C}$ -catégories

Nous avons vu que pour définir une  $\mathcal{C}$ -précatégorie, il fallait juste que  $\mathcal{C}$  soit discrétisante. Mais pour définir une notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie, la seule donnée de  $\mathcal{C}$  ne suffit pas. Il faut pouvoir prendre en compte des notions de catégories et d'équivalences de catégories dans  $\mathcal{C}$ , que nous appellerons respectivement objets régaux et alliances d'objets régaux. Nous allons donc définir la notion de donnée de Segal qui prendra en compte ces éléments et à partir de laquelle la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie découlera. Comme en outre pour définir par la suite la notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories nous avons besoin de savoir si des objets d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie sont équivalents, nous allons demander aussi à la donnée de Segal un foncteur noté  $\tau_0$  qui a pour vocation d'associer à un objet régau l'ensemble des classes d'équivalence de ses objets.

**Définition 1.3.1** *Une donnée de Segal est un quadruplet  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_{eq}, \tau_0)$  constitué d'une catégorie  $\mathcal{C}$  discrétisante et possédant les produits fibrés de deux objets au-dessus d'un objet discret, d'une sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_c$  de  $\mathcal{C}$ , d'une sous-catégorie  $\mathcal{C}_{eq}$  de  $\mathcal{C}_c$ , ayant les mêmes objets que  $\mathcal{C}_c$ , et d'un foncteur  $\tau_0$  de  $\mathcal{C}_c$  vers la catégorie des ensembles, satisfaisant les propriétés suivantes :*

- 1)  $\mathcal{C}_c$  est replète et contient les objets discrets de  $\mathcal{C}$ .
- 2) Le produit fibré de deux objets de  $\mathcal{C}_c$  au-dessus d'un objet discret appartient à  $\mathcal{C}_c$ .
- 3)  $\mathcal{C}_{eq}$  contient les isomorphismes de  $\mathcal{C}_c$  et les produits fibrés, dans la catégories des morphismes de  $\mathcal{C}$ , de deux morphismes de  $\mathcal{C}_{eq}$  au-dessus d'un objet discret.
- 4) Etant donné un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\quad} & R' \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & X
 \end{array}$$

avec  $R$  et  $R'$  des objets régaux et  $X$  objet discret,  $R \rightarrow R'$  est un morphisme de  $\mathcal{C}_{eq}$  si et seulement si pour tout élément  $x$  de  $X$ , les morphismes induits  $R(x) \rightarrow R'(x)$  sont des morphismes de  $\mathcal{C}_{eq}$ .

- 5) La restriction du foncteur  $\tau_0$  aux objets discrets n'est autre que le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(*, -)$ .
- 6)  $\tau_0$  préserve le produit fibré de deux objets de  $\mathcal{C}_c$  au-dessus d'un objet discret.

7)  $\tau_0$  envoie les morphismes de  $\mathcal{C}_{eq}$  sur les bijections ensemblistes.

On appellera objets régaux les objets de  $\mathcal{C}_c$  et alliances d'objets régaux les morphismes de  $\mathcal{C}_{eq}$ . A partir de maintenant, par abus de notation nous noterons indifféremment  $\mathcal{C}$  la donnée de Segal  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_{eq}, \tau_0)$  et sa catégorie sous-jacente.

Au niveau des objets discrets, on aura pu remarquer qu'on leur a demandé d'être des objets régaux et que le foncteur  $\tau_0$  se restreint sur eux en le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(*, -)$ . Ainsi si l'on identifie les objets discrets avec leurs ensembles sous-jacents, on obtient que la restriction aux objets discrets de  $\tau_0$  n'est autre que l'identité. En outre les alliances d'objets discrets sont des alliances d'objets régaux et donc s'envoient par  $\tau_0$  sur les bijections d'ensembles. Or comme l'on vient de voir que la restriction du foncteur  $\tau_0$  aux objets discrets n'est autre que l'identité, on obtient que les alliances d'objets discrets sont des isomorphismes d'objets discrets. La réciproque est incluse dans la propriété 3) de donnée de Segal. Ainsi les alliances d'objets régaux entre objets discrets sont exactement les isomorphismes d'objets discrets.

**Exemple 1.3.2** Pour  $\mathcal{ENS}$ , on peut prendre la donnée de Segal suivante : la sous-catégorie  $\mathcal{ENS}_c$  est  $\mathcal{ENS}$  tout entière, les morphismes de  $\mathcal{ENS}_{eq}$  sont les bijections ensemblistes. Enfin pour  $\tau_0$ , on prend l'identité. Il est facile de voir que cette donnée est bien une donnée de Segal.

**Exemple 1.3.3** Pour  $\mathcal{ENSSIMP}$ , on peut prendre la donnée de Segal suivante : la sous-catégorie  $\mathcal{ENSSIMP}_c$  est  $\mathcal{ENSSIMP}$  tout entière, les morphismes de  $\mathcal{ENSSIMP}_{eq}$  sont les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux (i.e. les morphismes dont les réalisations induisent des équivalences sur les groupes d'homotopie). Enfin pour  $\tau_0$ , on prend la composée du foncteur réalisation géométrique par le foncteur composante connexe. Il est facile de voir que cette donnée est bien une donnée de Segal.

**Exemple 1.3.4**  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_{eq}, \tau_0)$  une donnée de Segal, il est assez facile de voir que si on remplace les alliances d'objets régaux par les isomorphismes de  $\mathcal{C}$  entre objets régaux, on obtient une nouvelle donnée de Segal plus stricte que la précédente. En effet, la seule chose à vérifier est la préservation des isomorphismes par fibre et par produit fibré au-dessus d'un objet discret, ce qui est vrai car  $\mathcal{C}$  est une catégorie discrétisante.

**Définition 1.3.5** Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal, on dit d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  qu'elle est une  $\mathcal{C}$ -catégorie si, pour tout entier  $m$  strictement positif,  $A_m$  est

un objet régale et si, pour tout entier  $m$  supérieur ou égal à deux, le morphisme de Segal

$$A_m \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$$

induit par les applications de  $\mathbf{1}$  dans  $\mathbf{m}$  qui à  $0$  et  $1$  associent  $i$  et  $i+1$  (pour  $i$  compris entre  $0$  et  $m-1$ ), est une alliance d'objets régaux. Un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories est un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

**Notations :**

$A_1(x, y)$  note la fibre en  $(x, y)$  de l'application  $A_1 \rightarrow A_0 \times A_0$  induite par les morphismes source et but. C'est donc l'objet régale des morphismes de  $A$  allant de  $x$  à  $y$ . Plus généralement,  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  note la fibre en  $(a_0, \dots, a_m)$  de l'application  $A_m \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  induite par les applications sommets de  $\mathbf{0}$  vers  $\mathbf{m}$  qui envoient  $0$  sur  $i$ , pour  $i$  compris entre  $0$  et  $m$ . On considère  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  comme l'objet régale des  $m$ -simplexes construits sur la suite de sommets  $(a_0, \dots, a_m)$ .

**Lemme 1.3.6** Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal, une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie si et seulement si, pour tout entier  $m$  strictement positif,  $A_m$  est un objet régale et si, pour tout entier  $m$  supérieur ou égal à deux, et pour tout  $m$ -uplet  $(a_0, \dots, a_m)$  d'objets de  $A$ , le morphisme

$$A_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow A_1(a_0, a_1) \times \dots \times A_1(a_{m-1}, a_m)$$

induit par le morphisme de Segal, est une alliance d'objets régaux.

*Preuve :* application directe de la propriété 4 de donnée de Segal au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A_m & \xrightarrow{\quad} & A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & & A_0 \times \dots \times A_0 \end{array}$$

où les morphismes diagonaux sont induits par les applications sommets de  $\mathbf{0}$  vers  $\mathbf{m}$  et de  $\mathbf{0}$  vers  $\mathbf{1} \amalg \mathbf{0} \dots \amalg \mathbf{0} \mathbf{1}$ .

CQFD.

## 1.4 Equivalences de $\mathcal{C}$ -catégories

Maintenant que nous avons une notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie, il nous faut aussi définir une notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. L'idée est encore une fois de s'inspirer du cas des petites catégories. Comme une équivalence de catégories est un foncteur essentiellement surjectif et pleinement fidèle, nous allons aussi demander de telles propriétés à nos équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Si la pleine fidélité peut se définir de manière très similaire à la pleine fidélité des foncteurs, à la différence près que nous ne demanderons pas un isomorphisme mais seulement une alliance, l'essentielle surjectivité fait quant à elle intervenir la notion d'équivalence entre objets d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie, notion qui est gérée par le foncteur  $\tau_0$ . Ainsi afin de définir la notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, construisons maintenant un foncteur  $\tau_0$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories. Pour cela nous commençons par définir un foncteur  $\tau_1$  des  $\mathcal{C}$ -catégories vers les ensembles simpliciaux. Ce foncteur aura en outre la propriété de tomber dans les nerfs de catégories.

**Définition 1.4.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. On définit le foncteur  $\tau_1$  de la sous-catégorie des  $\mathcal{C}$ -catégories vers la catégorie  $\mathcal{ENSSIMP}$  ainsi : pour tout entier  $m$ ,  $\tau_1(A)_m = \tau_0(A_m)$  et, pour tout  $f : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$ ,  $\tau_1(A)(f) = \tau_0(A(f))$ . Enfin pour  $F : A \rightarrow B$  morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories, on pose, pour tout entier  $m$ ,  $\tau_1(F)_m = \tau_0(F_m)$ .*

**Lemme 1.4.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. Le foncteur  $\tau_1$ , défini ci-dessus, a valeur dans la sous-catégorie des nerfs de petites catégories.*

*Preuve :*

Comme  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie et que par définition  $\tau_0$  préserve les produits fibrés de deux objets régaux au dessus d'un objet discret et envoie les alliances d'objets régaux sur des bijections d'ensembles, il vient que  $\tau_1(A)$  est un nerf de catégorie car ses morphismes de Segal sont bijectifs. Donc le foncteur  $\tau_1$  a valeurs dans les nerfs de petites catégories.

CQFD.

Ce foncteur  $\tau_1$ , qui transforme les  $\mathcal{C}$ -catégories en nerfs de petites catégories, permet de définir le foncteur  $\tau_0$  des classes d'équivalence d'objets d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie, car un tel foncteur existe naturellement pour les petites catégories. Par la suite, nous identifierons par abus de langage les petites catégories et leurs nerfs.

**Définition 1.4.3** Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. On définit  $\tau_0$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories comme la composée de  $\tau_1$  par le foncteur qui à une (petite) catégorie associe l'ensemble des classes d'équivalence de ses objets (ce foncteur n'est autre que le  $\tau_0$  des petites catégories).

Munis du foncteur  $\tau_0$  qui nous donne une notion d'équivalence entre objets d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie, nous pouvons désormais définir la notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Définition 1.4.4** Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. Un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories  $f : A \rightarrow B$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si l'application d'ensembles  $\tau_0(f) : \tau_0(A) \rightarrow \tau_0(B)$  est surjective (on dit alors que  $f$  est essentiellement surjective) et, si pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ , le morphisme  $f_1(x, y) : A_1(x, y) \rightarrow B_1(f(x), f(y))$  est une alliance d'objets régaux (on dit alors que  $f$  est pleinement fidèle).

Donnons maintenant les premiers exemples de données de Segal avec leurs notions de  $\mathcal{C}$ -catégories et d'équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories associées.

**Exemple 1.4.5** En prenant la donnée de Segal de l'exemple 1.3.2, on obtient pour  $\mathcal{C}$ -catégories les petites catégories, pour équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories les équivalences de catégories et pour  $\tau_0$  le foncteur qui à une catégorie associe l'ensemble des classes d'équivalence de ses objets.

**Exemple 1.4.6** En prenant maintenant sur la catégorie des ensembles simpliciaux la donnée de Segal de l'exemple 1.3.3, on obtient les notions de  $\mathcal{C}$ -préc-catégorie, de  $\mathcal{C}$ -catégorie et d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories qui ne sont autres que celles de précatégorie de Segal, de catégorie de Segal et d'équivalence de catégories de Segal introduite par Hirschowitz et Simpson dans [2].

Il est intéressant de constater, en particulier pour pouvoir itérer les constructions de  $\mathcal{C}$ -catégories et d'équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -préc-catégories forme une donnée de Segal avec les  $\mathcal{C}$ -catégories, les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories et le foncteur  $\tau_0$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Lemme 1.4.7** Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. Munie des notions de  $\mathcal{C}$ -catégorie, d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories et du foncteur  $\tau_0$  définis ci-dessus, la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -préc-catégories constitue une donnée de Segal.

*Preuve :*

D'après la proposition 1.2.3, la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est discrétisante et, par la proposition 1.2.5, elle possède les produits fibrés de deux  $\mathcal{C}$ -précatégories au-dessus d'un objet discret. La sous-catégorie des  $\mathcal{C}$ -catégories a été définie comme sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ . En outre, il est facile de voir que les isomorphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories et les composées d'équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient la définition d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, car  $\mathcal{C}_{eq}$  est une sous-catégorie contenant les isomorphismes, ce qui montre que la classe des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories donne lieu à une sous-catégorie de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -catégories ayant tous les objets et vérifiant la première partie de la propriété 3 de donnée de Segal.

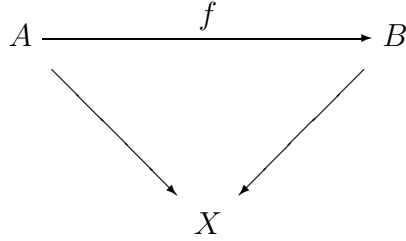
On remarque que si une  $\mathcal{C}$ -précatégorie est isomorphe à une  $\mathcal{C}$ -catégorie, alors chacun de ses niveaux est isomorphe à un objet régale et, comme  $\mathcal{C}_c$  est réplète, chaque niveau de notre  $\mathcal{C}$ -précatégorie est un objet régale. En outre il est facile de voir que pour notre  $\mathcal{C}$ -précatégorie isomorphe à une  $\mathcal{C}$ -catégorie, le morphisme de Segal est bien une alliance d'objets régaux car  $\mathcal{C}_{eq}$  contient les isomorphismes et est stable par composition. Ceci montre que toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie isomorphe à une  $\mathcal{C}$ -catégorie est une  $\mathcal{C}$ -catégorie, ce qui prouve la première partie de la propriété 1 des données de Segal. On remarque ensuite que les objets discrets de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont clairement des  $\mathcal{C}$ -catégories, car niveau par niveau ce sont des objets discrets et que les applications de Segal sont des isomorphismes. Ce qui prouve la seconde partie de la propriété 1.

En outre les notions de  $\mathcal{C}$ -catégorie et d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret, car le produit fibré au-dessus d'un objet discret est calculé niveau par niveau et que niveau par niveau on applique la propriété 2 et la seconde partie de la propriété 3 pour  $\mathcal{C}$ . Ainsi la propriété 2 et la seconde partie de la propriété 3 sont vérifiées.

On peut remarquer par construction de  $\tau_1$  que l'image par  $\tau_1$  d'un objet discret n'est autre que la catégorie discrète d'objets les morphismes de l'objet final de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vers l'objet discret et donc  $\tau_0$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories vérifie la propriété 5. Par composition de foncteurs préservant le produit fibré au-dessus d'un objet discret, le foncteur  $\tau_0$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories a lui aussi la propriété 6. La définition d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories entraîne que  $\tau_1(f)$  est une équivalence de petites catégories. Une des conséquences de la pleine fidélité de  $\tau_1(f)$  est que  $\tau_0(f)$  est injectif. D'où le foncteur  $\tau_0$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories envoie bien les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories sur des bijections et donc vérifie la

propriété 7.

Considérons le diagramme suivant dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  :



où  $X$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie discrète et  $f$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories. La seconde partie de la propriété 3, que l'on a montrée pour  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , entraîne que si  $f$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, alors toutes ses fibres  $f(x) : A(x) \rightarrow B(x)$  le sont. Supposons maintenant que pour tout élément  $x$  de  $X$ , les morphismes  $f(x) : A(x) \rightarrow B(x)$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme la catégorie des ensembles est discrétisante et que l'on a montré que  $\tau_0$  commute aux fibres, il vient que  $\tau_0(f)$  est le coproduit des  $\tau_0(f(x))$ . Or on a montré que  $\tau_0$  vérifie la propriété 7, donc tous les  $\tau_0(f(x))$  sont bijectifs et leur coproduit  $\tau_0(f)$  aussi, ce qui montre l'essentielle surjectivité de  $f$ . Pour montrer la pleine fidélité de  $f$ , on applique à  $f_1(a, a')$ , pour tout couple  $(a, a')$  d'objets de  $A$ , la propriété 4 de donnée de Segal vérifiée par  $\mathcal{C}$ . Soit donc  $x$  un élément de  $X$ . Si  $a$  et  $a'$  sont des objets de  $A(x)$ , alors  $f(a)$  et  $f(a')$  sont des objets de  $B(x)$ , et l'on a que la fibre en  $x$  de  $f_1(a, a')$  n'est autre que  $f(x)_1(a, a')$ , qui est une alliance. Sinon la fibre en  $x$  de  $f_1(a, a')$  est l'identité de l'ensemble vide, qui est bien une alliance. Donc par la propriété 4 vérifiée par  $\mathcal{C}$ ,  $f_1(a, a')$  est une alliance, ce qui montre la pleine fidélité de  $f$ . On a donc montré que  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vérifie la propriété 4.

CQFD.

Dans la démonstration du lemme, on a obtenu le résultat important suivant :

**Corollaire 1.4.8** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. Si le morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories  $f : A \rightarrow B$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, alors  $\tau_1(f)$  est une équivalence de petites catégories et  $\tau_0(f)$  est une bijection d'ensembles.*

Un autre corollaire de ce lemme est que l'on peut définir les  $n$ - $\mathcal{C}$ -catégories.

**Corollaire 1.4.9** *Si  $\mathcal{C}$  est une donnée de Segal, on appelle 1- $\mathcal{C}$ -catégories les  $\mathcal{C}$ -catégories et 1-équivalences les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories.*



Soit  $n$  un entier strictement supérieur à un et supposons définie la donnée de Segal  $(n - 1) - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $(n - 1) - \mathcal{C}$ -catégories, on appelle alors  $n - \mathcal{C}$ -catégories les  $(n - 1) - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$ -catégories,  $n$ -équivalences les équivalences de  $n - \mathcal{C}$ -catégories et on note  $n - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  la donnée de Segal sur la catégorie  $n - \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $n - \mathcal{C}$ -précatégories formée par les  $n - \mathcal{C}$ -catégories, les  $n$ -équivalences et le foncteur  $\tau_0$  des  $n - \mathcal{C}$ -catégories.

*Preuve* : c'est une démonstration par récurrence immédiate qui utilise le lemme précédent à chaque étape. CQFD.

**Exemple 1.4.10** En prenant la donnée de Segal de l'exemple 1.3.2 et en lui appliquant le corollaire ci-dessus, on obtient pour  $n - \mathcal{C}$ -catégories les  $n$ -nerfs, pour équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories les  $n$ -équivalences entre  $n$ -nerfs et pour  $\tau_0$  le foncteur de troncature tels que ces trois notions ont été définies dans [6]. En particulier, en appliquant seulement le lemme 1.4.7 à la donnée de Segal de l'exemple 1.3.2, on obtient que la catégorie des ensembles simpliciaux, munie des notions de catégories, d'équivalences de catégories et du foncteur  $\tau_0$  des classes d'équivalence d'objets, forme une donnée de Segal. Pour cette dernière, les  $\mathcal{C}$ -précatégories sont les ensembles bi-simpliciaux à espace d'objets discret, les  $\mathcal{C}$ -catégories sont les 2-nerfs et les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories sont les équivalences de 2-nerfs de [6]. Avec la donnée de Segal qui engendre les catégories de Segal, cela nous fait deux données de Segal différentes sur les ensembles simpliciaux.

**Exemple 1.4.11** Reprenons la donnée de Segal de l'exemple 1.3.2. On obtient par le lemme 1.4.7, une donnée de Segal sur les ensembles simpliciaux avec les catégories et les équivalences de catégories. Prenons maintenant la donnée de Segal plus stricte obtenue en remplaçant les équivalences de catégories par les isomorphismes, on obtiendra alors pour  $\mathcal{C}$ -catégories les 2-catégories strictes et pour équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories les morphismes essentiellement surjectifs et strictement pleinement fidèles. Par le lemme 1.4.7, ces notions forment une donnée de Segal sur les 2- $\mathcal{C}$ -précatégories de Tamsamani. Et comme précédemment, on peut considérer la donnée de Segal plus stricte sur les 2- $\mathcal{C}$ -précatégories en prenant les isomorphismes au lieu des équivalences de 2-catégories, on obtiendra alors les 3-catégories avec pour équivalences les morphismes essentiellement surjectifs et strictement pleinement fidèles. Et ainsi de suite...

Par récurrence, en strictifiant à chaque étape la donnée de Segal obtenue, c'est-à-dire en remplaçant les équivalences par les isomorphismes, on retrouve les  $n$ -catégories strictes.

*On remarque au passage que l'on vient de munir la catégorie des ensembles simpliciaux d'une troisième donnée de Segal qui engendre les 2-catégories strictes.*

**Exemple 1.4.12** *En prenant la donnée de Segal de l'exemple 1.3.3 et en lui appliquant le corollaire ci-dessus, on obtient pour  $n$ - $\mathcal{C}$ -catégories les  $n$ -catégories de Segal, pour équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories les équivalences de  $n$ -catégories de Segal et pour  $\tau_0$  le foncteur de troncature des  $n$ -catégories de Segal tels que ces trois notions ont été définies dans [2].*

*Comme on a déjà remarqué que les  $n$ - $\mathcal{C}$ -précatégories de Segal sont exactement les  $n+1$ - $\mathcal{C}$ -précatégories de Tamsamani, on obtient qu'il existe au moins trois données de Segal différentes sur la catégories des  $n$ - $\mathcal{C}$ -précatégories de Segal dont l'une va engendrer les  $n+1$ -catégories de Segal, l'autre les  $n+2$ -catégories strictes et la troisième les  $n+2$ -nerfs de Tamsamani.*

## 1.5 Problème de la catégorisation

Les catégories enrichies faibles ainsi définies ne sont pas stables par colimite. Pour s'en convaincre, considérons deux exemplaires de la catégorie ayant un seul morphisme et recollons les de telle sorte que les deux morphismes soient composables. Ce recollement correspond bien à la somme amalgamée dans les ensembles simpliciaux mais pas à celle des catégories car le résultat obtenu est une précatégorie avec deux morphismes composables sans composition correspondante. L'une des idées permettant de remédier à ce problème est de catégoriser le résultat obtenu. Ainsi on définirait les colimites de catégories comme les catégorisées des colimites des précatégories sous-jacentes.

On s'est donc ramener à un problème de catégorisation. On cherche donc un foncteur, notons-le  $Cat$ , muni d'une transformation naturelle notée  $can$  de l'identité vers  $Cat$ , qui à toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie associe une  $\mathcal{C}$ -catégorie. Bien évidemment on voudrait que la  $\mathcal{C}$ -catégorie associée par ce foncteur soit la minimale, c'est à dire que tout morphisme d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie dans une  $\mathcal{C}$ -catégorie se factorise par la catégorisation de la  $\mathcal{C}$ -précatégorie.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & B \text{ catégorie} \\
 & \searrow^{can_A} & \nearrow \exists \\
 & & Cat(A)
 \end{array}$$

En outre on aimerait aussi que la catégorisation donne une  $\mathcal{C}$ -catégorie associée équivalente à la  $\mathcal{C}$ -précatégorie de départ au sens suivant : soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie, le morphisme  $Cat(can_A) : Cat(A) \rightarrow Cat(Cat(A))$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Ceci nous donnerait d'ailleurs une notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -précatégories. On pourra en effet poser qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories est une équivalence si sa catégorisation l'est.

Comme il est assez difficile de trouver une telle catégorisation, en suivant l'idée de [5], nous allons ramener ce problème à un problème de relèvement de diagramme. S'il existe en effet une famille  $I$  de flèches telle que les objets ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $I$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, une bonne façon d'avoir ces propriétés de relèvement est de construire la catégorisation comme une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées des flèches de  $I$ , ce que nous appellerons un plan infini d'addition de cellules de  $I$ .

Dans cette optique nous allons tout d'abord traiter de ces problèmes de relèvement et de ceux d'engendrement qui leur sont liés avant de chercher par rapport à quelles flèches nos  $\mathcal{C}$ -catégories pourraient se relever.

...

## Chapitre 2

# Engendrements

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord rappeler certaines définitions et certains résultats classiques sur les relèvements de diagrammes. Une des définitions principales est celle d'objet I-injectif qui est un objet ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à l'ensemble de flèches I. En effet le but de ce chapitre est de donner des constructions rendant I-injectifs les objets qui ne le sont pas. Pour ce faire, nous allons utiliser certaines techniques apparaissant dans l'argument du petit objet de Quillen qui permet de répondre en partie à notre problème de rendre I-injectif. L'un des points clefs de cet argument, outre la notion de petitesse, est le procédé de colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches de I, ce que nous appellerons plan d'addition de cellules.

Nous donnerons alors une formalisation de plan d'addition de cellules et nous donnerons des conditions pour lesquelles ces plans d'addition de cellules  $P$  I-injectivisent, c'est-à-dire répondent aux trois critères suivants :

- pour tout objet  $A$ ,  $P(A)$  est I-injectif,
- tout morphisme  $A \rightarrow B$  vers un objet I-injectif se factorise à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$ ,
- pour tout objet  $A$ , l'image par  $P$  du morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une équivalence d'objets I-injectifs, si l'on possède une notion naturelle d'équivalence entre objets I-injectifs.

Si les deux premiers critères sont simples à traiter, ce n'est pas le cas du troisième qui nous obligera d'une part à trouver un procédé rendant I-injectif avec la propriété d'avoir unicité des factorisations des morphismes à but I-injectifs. Pour cela, nous ferons intervenir la notion de marquage d'un relèvement. D'autre part, nous allons montrer que, muni d'un tel procédé et en supposant l'existence d'un autre procédé d'I-injectivisation qui ne vérifie la propriété de stabilité homotopique que pour les objets I-injectifs, le procédé I-injectivant à factorisation unique vérifie bien les trois critères.

Comme l'une des utilités de l'I-injectivisation est aussi de pourvoir les objets I-injectifs de colimites, nous allons terminer ce chapitre en comparant les plans d'addition de cellules via un procédé de rationalisation des plans et appliquer cette comparaison à certains types de plans qui sont stables lorsqu'on les compose avec l'un de leurs sous-plans. Avec ces plans, on pourra comparer

la colimite des I-injectifs avec l'I-injectivisation de la colimite, ce qui nous permettra d'obtenir une bonne caractérisation d'équivalence pour les colimites d'objets quelconques en termes de colimites de leurs I-injectifs.



## 2.1 Rappels sur les relèvements de diagrammes

Comme l'une des propriétés que l'on demande à la catégorisation est une propriétés de relèvement, nous allons préciser cette notion dans la définition suivante prise dans [1] :

**Définition 2.1.1** Soient  $i : A \rightarrow B$  et  $p : C \rightarrow D$  deux morphismes tels que pour tous les carrés commutatifs du type suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow i & \nearrow \exists & \downarrow p \\
 B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

la flèche en pointillé existe et fait commuter les deux parties du diagramme. On dira alors que :

- cette flèche est un relèvement de ce diagramme,
- $i$  a la propriété de relèvement à gauche par rapport à  $p$ ,
- $p$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $i$ ,
- $C$  a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $i$ , si  $D$  est un objet final.

Pour la suite, nous aurons souvent besoin de certaines sommes amalgamées ou de certains produits fibrés. Pour simplifier les appellations, nous prendrons toujours en suivant [1] la convention suivante.

**Définition 2.1.2** Soit un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & C \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{b} & D
 \end{array}$$

- Si ce carré est cocartésien, on dit que  $g$  est la somme amalgamée de  $f$  le long de  $a$ .

- Si ce carré est cartésien, on dit que  $f$  est le produit fibré de  $g$  le long de  $b$ .

Les flèches ayant des propriétés de relèvement sont stables par certaines limites et colimites, ce que nous rappelons ci-dessous.

### Lemme 2.1.3

- Les classes de flèches ayant une propriété de relèvement à gauche contiennent les isomorphismes et sont stables par composition, par rétract, par somme amalgamée le long d'un morphisme, par colimite séquentielle transfinie et par coproduit dans la catégorie des morphismes.

- Les classes de flèches ayant une propriété de relèvement à droite contiennent les isomorphismes et sont stables par composition, par rétract, par produit fibré le long d'un morphisme et par produit dans la catégorie des morphismes.

*Preuve :*

Nous devons juste montrer la stabilité par coproduit (resp. produit) dans la catégorie des morphismes car le reste de la preuve se trouve dans l'ouvrage d'Hirschhorn [1]. Soient  $J$  un ensemble et  $(f_j : A_j \rightarrow B_j)_{j \in J}$  une famille de morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport à un morphisme  $p$  fixé. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in J} A_j & \xrightarrow{a} & C \\ \coprod_{j \in J} f_j \downarrow & & \downarrow p \\ \coprod_{j \in J} B_j & \xrightarrow{b} & D \end{array}$$

Notons  $i_j$  le morphisme canonique de  $A_j$  dans  $\coprod_{j \in J} A_j$  et  $i'_j$  le morphisme canonique de  $B_j$  dans  $\coprod_{j \in J} B_j$ . Comme chaque  $f_j$  se relève par rapport à  $p$ , il vient que pour tout  $j$ , il existe un morphisme  $\phi_j : B_j \rightarrow C$  tel que  $p \circ \phi_j = b \circ i'_j$  et  $\phi_j \circ f_j = a \circ i_j$ . Par propriété universelle du coproduit  $\coprod_{j \in J} B_j$ , il existe un unique morphisme  $\phi : \coprod_{j \in J} B_j \rightarrow C$  tel que pour tout  $j$ , on ait  $\phi \circ i'_j = \phi_j$ . On obtient donc les égalités suivantes :  $p \circ \phi \circ i'_j = p \circ \phi_j = b \circ i'_j$  et  $\phi \circ \coprod_{j \in J} f_j \circ i_j = \phi \circ i'_j \circ f_j = \phi_j \circ f_j = a \circ i_j$ . Et par propriété universelle des coproduits  $\coprod_{j \in J} B_j$  et  $\coprod_{j \in J} A_j$ , il vient que  $p \circ \phi = b$  et  $\phi \circ \coprod_{j \in J} f_j = a$  et donc que  $\phi$  est un relèvement pour le diagramme  $(\coprod_{j \in J} f_j, a, b, p)$ . On a donc montré que les morphismes ayant une propriété de relèvement à gauche sont stables par coproduit dans la catégorie des morphismes. Dualement on aura

que ceux ayant une propriété de relèvement à droite sont stables par produit dans la catégorie des morphismes.

CQFD.

On remarquera au passage que pour la somme amalgamée (resp. le produit fibré) dans la catégorie des morphismes, on n'a généralement pas de morphisme induit par les relèvements de chaque membre de la somme amalgamée (resp. du produit fibré) car la non-unicité des relèvements est une obstruction à leur compatibilité avec la somme amalgamée (resp. le produit fibré). D'où la définition et le lemme suivants.

**Définition 2.1.4** Soient  $i : A \rightarrow B$  et  $p : C \rightarrow D$  deux morphismes tels que pour tous les carrés commutatifs du type suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & C \\
 \downarrow i & \nearrow \exists & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{\quad} & D
 \end{array}$$

la flèche en pointillé existe et fait commuter les deux parties du diagramme. On dira alors :

- si  $i$  est muni d'un choix de relèvements pour chaque diagramme du type ci-dessus avec  $p$  fixé, que  $i$  est marqué à gauche par rapport à  $p$ .
- si  $p$  est muni d'un choix de relèvements pour chaque diagramme du type ci-dessus avec  $i$  fixé, que  $p$  est marqué à droite par rapport à  $i$ .

On obtient alors une catégorie dont les objets sont les morphismes marqués et les morphismes les carrés commutatifs compatibles avec le marquage.

**Lemme 2.1.5**

- La catégorie des morphismes marqués à gauche par rapport à un ensemble de flèches est stable par colimites.
- La catégorie des morphismes marqués à droite par rapport à un ensemble de flèches est stable par limites.

*Preuve :*

Comme conséquence du lemme précédent, ces catégories sont stables respectivement par coproduit et produit. Il suffit donc de montrer qu'elles sont stables respectivement par co-égalisateur et par égalisateur pour avoir le résultat.

Soit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_0 & \xrightarrow{f_0} & B_0 & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & C_0 & \xrightarrow{x} & X \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow p \\
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & C_1 & \xrightarrow{y} & Y \\
 & \xrightarrow{f'_1} & & & & & 
 \end{array}$$

où  $c$  est le morphisme universel du co-égalisateur  $C_0$  de  $f_0, f'_0$  vers le co-égalisateur  $C_1$  de  $f_1, f'_1$ . Comme  $a$  est marqué par rapport à  $p$ , il vient avec un morphisme  $\phi : A_1 \rightarrow X$  tel que  $p \circ \phi = y \circ \tilde{f}_1 \circ f_1 = y \circ \tilde{f}_1 \circ f'_1$  et  $\phi \circ a = x \circ \tilde{f}_0 \circ f_0 = x \circ \tilde{f}_0 \circ f'_0$ . De même comme  $b$  est marqué par rapport à  $p$ , il vient avec un morphisme  $\psi : B_1 \rightarrow X$  tel que  $p \circ \psi = y \circ \tilde{f}_1$  et  $\psi \circ b = x \circ \tilde{f}_0$ . Or les morphismes  $f$  et  $f'$  sont compatibles avec les marquages et donc il vient  $\psi \circ f_1 = \phi = \psi \circ f'_1$ . Par la propriété universelle du co-égalisateur  $C_1$ , il existe un morphisme  $\chi : C_1 \rightarrow X$  tel que  $\chi \circ \tilde{f}_1 = \psi$ . On obtient donc les égalités suivantes :  $p \circ \chi \circ \tilde{f}_1 = p \circ \psi = y \circ \tilde{f}_1$  et  $\chi \circ c \circ \tilde{f}_0 = \chi \circ \tilde{f}_1 \circ b = \psi \circ b = x \circ \tilde{f}_0$ . Par la propriété universelle des co-égalisateurs  $C_1$  et  $C_0$ , il vient que  $p \circ \chi = y$  et  $\chi \circ c = x$ . Donc  $\chi$  est un relèvement pour le diagramme  $(c, x, y, p)$  et c'est celui qui marquera  $c$  par rapport à  $p$ . On a donc montré que la catégorie des morphismes marqués à gauche par rapport à un morphisme fixé est stable par co-égalisateur. Et on aura dualement la stabilité des morphismes marqués à droite par égalisateur.

CQFD.

## 2.2 Morphismes $I$ -injectifs et $I$ -cofibrations

Parmi la multitude de flèches ayant des propriétés de relèvement, certaines nous intéressent plus que d'autres. En effet, souvent nous allons nous fixer un ensemble  $I$  de flèches et regarder la classe des flèches se relevant à droite par rapport à  $I$  et celle des flèches se relevant à gauche par rapport à ces dernières. C'est pourquoi nous rappelons les définitions de  $I$ -injectifs et de  $I$ -cofibrations ainsi que certaines de leurs propriétés, toujours en suivant [1].

**Définition 2.2.1** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ .

- 1) Un morphisme est  $I$ -injectif s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de  $I$ .
- 2) Un objet est  $I$ -injectif si son unique morphisme vers l'objet final est  $I$ -injectif.
- 3) Un morphisme est une  $I$ -cofibration s'il a la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes  $I$ -injectifs.

**Lemme 2.2.2** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ .

- Les morphismes  $I$ -injectifs forment une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  contenant les isomorphismes et stable par rétract, par produit fibré le long d'un morphisme et par produit dans la catégorie des morphismes.

- Les  $I$ -cofibrations forment une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  contenant les isomorphismes et les morphismes de  $I$  et qui est stable par rétract, par somme amalgamée le long d'un morphisme, par colimite séquentielle transfinie et par co-produit dans la catégorie des morphismes.

*Preuve* : application directe du lemme 2.1.3

**Lemme 2.2.3** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $I$  et  $K$  des ensembles de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Si les morphismes  $I$ -injectifs sont exactement les morphismes  $K$ -injectifs alors les  $I$ -cofibrations sont exactement les  $K$ -cofibrations

Nous arrivons maintenant à l'une des définitions les plus importantes de cette partie, celle de famille génératrice d'une sous-catégorie de morphismes.

**Définition 2.2.4** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{C}'$  une sous-catégorie ayant les mêmes objets. Soit  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . On dit que  $I$  engendre  $\mathcal{C}'$  si  $\mathcal{C}'$  est la sous-catégorie des  $I$ -cofibrations.

La définition de famille génératrice d'une classe de morphismes que l'on vient de donner n'est très intuitive. En fait, quand on parle d'une famille de flèches engendrant certains morphismes, on pense à des morphismes fabriqués comme colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées des flèches génératrices. Ceci suggère donc que les I-cofibrations sont des colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées d'éléments de I. Mais pour avoir ce résultat, on se sert de l'argument du petit objet de Quillen.

## 2.3 Argument du petit objet

L'argument du petit objet de Quillen permet de résoudre le problème suivant. On se donne une catégorie  $\mathcal{C}$  cocomplète et une famille  $I$  de morphismes de  $\mathcal{C}$  et l'on cherche à factoriser tous morphismes de  $\mathcal{C}$  en une  $I$ -cofibration suivie d'un morphisme  $I$ -injectif. Un des corollaires de ce résultat est que  $I$  engendre les  $I$ -cofibrations au sens auquel on s'attend. Pour arriver à cette factorisation, l'idée de l'argument du petit objet consiste à limiter la taille des flèches de  $I$ , ce que l'on modélise par la notion de petitesse que nous allons rappeler. Mais auparavant rappelons les définitions de  $\lambda$ -séquence et de cardinal régulier.

**Définition 2.3.1** *Un cardinal  $\alpha$  est régulier si, pour toute famille d'ensembles  $(A_i)_{i \in I}$  telle que le cardinal de  $I$  et les cardinaux des  $A_i$ , pour  $i \in I$ , sont strictement inférieurs à  $\alpha$ , le cardinal de la réunion  $\cup_{i \in I} A_i$  est strictement inférieur à  $\alpha$ .*

**Définition 2.3.2** *Soient  $\mathcal{A}$  une catégorie admettant les colimites séquentielles transfinites et  $\mathcal{F}$  une famille de morphismes de  $\mathcal{A}$ . Soit  $\lambda$  un ordinal.*

*Une  $\lambda$ -séquence de morphismes de  $\mathcal{F}$  est un foncteur  $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  tel que, pour tout ordinal  $\beta < \lambda$ , le morphisme  $X_\beta \rightarrow X_{\beta+1}$  appartient à  $\mathcal{F}$  et, pour tout ordinal limite  $\beta < \lambda$ , le morphisme  $\text{colim}_{\gamma < \beta} X_\gamma \rightarrow X_\beta$  est un isomorphisme.*

**Définition 2.3.3** *Soit  $\alpha$  un cardinal régulier et  $\mathcal{F}$  une famille de morphismes d'une catégorie  $\mathcal{A}$  admettant les colimites séquentielles transfinites, un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  est  $\alpha$ -petit par rapport à  $\mathcal{F}$  si pour tout  $\lambda$  cardinal régulier strictement plus grand qu' $\alpha$  et pour toute  $\lambda$ -séquence de morphismes de  $\mathcal{F}$   $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots$ , on a :*

$$\text{colim}_{\beta < \lambda} \text{Hom}(A, X_\beta) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(A, \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta)$$

*On dit que  $A$  est  $\alpha$ -petit s'il est  $\alpha$ -petit par rapport à tous les morphismes de  $\mathcal{A}$ .*

Afin de montrer qu'un objet est petit, voici quelques résultats techniques, inspirés de [1], sur la stabilité de la petitesse vis-à-vis de certaines opérations ainsi que quelques résultats sur la petitesse des  $\mathcal{C}$ -précatégories.

**Lemme 2.3.4** *Soient  $\alpha$  un cardinal régulier et  $\mathcal{A}$  une catégorie admettant les coproduits et les colimites séquentielles transfinites. Soit  $I$  un ensemble d'indices de cardinal strictement inférieur à  $\alpha$  et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $\mathcal{A}$   $\alpha$ -petits alors  $\coprod_{i \in I} A_i$  est  $\alpha$ -petit.*

**Lemme 2.3.5** *Soient  $\alpha$  un cardinal régulier et  $\mathcal{A}$  une catégorie admettant les coproduits et les colimites séquentielles transfinies. Soit  $F$  un foncteur d'une petite catégorie  $\mathcal{I}$  vers la catégorie  $\mathcal{C}$  tel que pour tout objet  $i$  de  $\mathcal{I}$  l'objet  $F(i)$  de  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ -petit. Alors la colimite de  $F$ ,  $\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i)$ , est  $\alpha'$ -petite, avec  $\alpha'$  un cardinal plus grand qu' $\alpha$  et que le cardinal de l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{I}$ .*

**Lemme 2.3.6** *Soit  $\alpha$  un cardinal régulier strictement plus grand qu' $\aleph_0$ . Soit  $A$  un préfaisceau de  $\Delta$  vers une catégorie  $\mathcal{C}$  admettant les colimites séquentielles transfinies, si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  est  $\alpha$ -petit alors  $A$  est  $\alpha$ -petit.*

On va maintenant énoncer la définition qui précise que, sous certaines conditions, un ensemble de flèches permet l'argument du petit objet de Quillen

**Définition 2.3.7** *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie admettant les colimites séquentielles transfinies. Soit  $E$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{A}$ , on dit que  $E$  permet l'argument du petit objet si, pour tout morphisme de  $E$ , il existe un cardinal régulier  $\alpha$  tel que la source du morphisme est  $\alpha$ -petite par rapport à  $E$ .*

Un des cas les plus fréquents d'ensembles de flèches permettant l'argument du petit objet provient d'ensembles de flèches dont les sources et buts sont petits. On dira de ces flèches qu'elles sont petites ou limitées. Bien entendu, de tels ensembles permettent l'argument du petit objet, ce qu'énonce le lemme suivant.

**Lemme 2.3.8** *Soient  $\alpha$  un cardinal régulier et  $\mathcal{A}$  une catégorie admettant les colimites séquentielles transfinies. Soit  $E$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{A}$  dont les sources et buts sont  $\alpha$ -petits, alors  $E$  permet l'argument du petit objet.*

Comme on l'a déjà dit plus haut, l'argument du petit objet sert à obtenir la factorisation de toute flèche en une I-cofibration suivie d'un morphisme I-injectif pour un ensemble I assez petit. Ce fait est énoncé dans le théorème suivant dont on trouvera la démonstration dans [1].

**Théorème 2.3.9 (L'argument du petit objet)** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie co-complète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  permettant l'argument du petit objet. Alors tout morphisme de  $\mathcal{C}$  se factorise de manière fonctorielle en une I-cofibration suivie d'un morphisme I-injectif.*



L'un des corollaires de ce théorème qui nous intéresse le plus est celui qui nous donne la caractérisation des I-cofibrations en termes de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées de flèches de I lorsque I est assez petit. Mais en fait, les I-cofibrations ne sont pas toujours de telles colimites même si I est assez petit, car en général ce sont des rétracts de telles colimites. Aussi vais-je tout d'abord rappeler la notion de rétract d'un morphisme avant d'énoncer le corollaire sur l'engendrement.

**Définition 2.3.10** Soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  deux morphismes, on dit que  $f$  est un rétract de  $g$  s'il existe un tel diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{r} & A \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{j} & D & \xrightarrow{s} & B
 \end{array}$$

avec  $r \circ i = Id_A$  et  $s \circ j = Id_B$

**Corollaire 2.3.11** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  permettant l'argument du petit objet. Alors les I-cofibrations sont exactement les rétracts de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées de morphismes de  $I$ .

Grâce à ce corollaire nous savons que les morphismes engendrés par un bon ensemble I, ce que l'on appelle des I-cofibrations, s'expriment en termes de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées d'éléments de I. De plus, si l'on regarde la démonstration du théorème 2.3.9 donnée dans [1], on s'aperçoit que pour construire la factorisation d'une flèche quelconque  $f : A \rightarrow B$  en une I-cofibration suivi d'un morphisme I-injectif, on va en fait rajouter à  $A$  toutes les flèches de I rendant commutatif le diagramme suivant et répéter ce procédé un nombre transfini de fois.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & A \\
 \downarrow \in I & & \downarrow f \\
 Y & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

On remarque donc que cette construction est encore du type colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées d'éléments de  $I$ . C'est en outre cette méthode que nous allons utiliser pour catégoriser nos  $\mathcal{C}$ -précatégories une fois explicité l'ensemble  $I$  de flèches pour lequel nos  $\mathcal{C}$ -catégories sont des objets  $I$ -injectifs. C'est la raison pour laquelle nous allons consacrer la prochaine partie à l'étude de ces procédés que nous appellerons plans d'addition de cellules, du fait de leur similarité d'avec la construction des complexes cellulaires.

## 2.4 Plan d'addition de cellules

Dans cette partie, nous allons donner un formalisme permettant d'étudier les procédés d'addition transfinie de flèches. Nous commençons d'abord par définir les plans simples ou plans à un pas avant de s'attaquer aux plans finis et infinis.

**Définition 2.4.1** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un plan  $P$  d'addition de cellules à un pas pour  $X$  (ou plus simplement plan simple pour  $X$ ) est un ensemble de couples  $(D, \alpha_D)$  où  $\alpha_D$  est un cardinal et  $D = (d, \phi_D)$  est un diagramme comme suit :

$$\begin{array}{ccc} S_{\phi_D} & \xrightarrow{d} & X \\ \phi_D \downarrow & & \\ B_{\phi_D} & & \end{array}$$

où  $\phi_D$  est un morphisme de  $\Phi$ . On note  $P(X)$  le résultat du plan d'addition, défini de la manière suivante :

$$P(X) = X \coprod_{\coprod_{D \in P} \coprod_{\alpha_D} S_{\phi_D}} \left( \coprod_{D \in P} \coprod_{\alpha_D} B_{\phi_D} \right)$$

Donnons un premier exemple de plan d'addition de cellules simple qui sera très utile pour la suite.

**Définition 2.4.2** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\lambda$  un cardinal (transfini ou pas). On définit alors  $e_{\Phi, \lambda}$  le plan d'addition de cellules à un pas qui, pour un objet  $X$  quelconque de  $\mathcal{C}$ , est constitué par l'ensemble des couples  $(D, \lambda)$  où  $D = (d, \phi_D)$  avec  $\phi_D$  appartient à  $\Phi$  et  $d$  ayant pour but  $X$ .

Une fois les plans simples d'addition de cellules définis, on peut facilement définir les plans d'addition de cellules finis comme composées des plans simples et les plans d'addition de cellules infinis comme colimites de plans simples. En voici les définitions précises.

**Définition 2.4.3** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Un plan  $P$  à deux pas sur  $X$  est une suite  $(P_i)_{1 \leq i \leq 2}$  tel que  $P_1$  est un plan simple sur  $X$  et  $P_2$  un plan simple sur  $P_1(X)$ . Le résultat  $P(X)$  n'est autre  $P_2(P_1(X))$ . On notera parfois ce plan  $P_2 \circ P_1$ , ce qu'on appellera composition (naïve) de plans simples. Par récurrence, on définit de la même manière les plans finis comme composition d'un nombre fini de plans simples.

**Définition 2.4.4** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $\lambda$  un cardinal transfini. Un plan  $P$  infini d'addition de cellules sur  $X$  est une suite des plans simples  $(P_\beta)_{\beta < \lambda}$  telle qu'il existe une  $\lambda$ -séquence  $(X_\beta)_{\beta < \lambda}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $X_0$  n'est autre que  $X$ ,
- pour tout  $\beta < \lambda$ ,  $X_{\beta+1}$  est le résultat du plan simple  $P_\beta$  sur  $X_\beta$ ,
- pour tout  $\gamma \leq \lambda$  ordinal limite,  $X_\gamma$  est la colimite des  $X_\beta$  pour  $\beta < \gamma$ .

Le résultat  $P(X)$  du plan infini  $P$  est soit  $P_{\lambda-1}(X_{\lambda-1})$ , si  $\lambda$  n'est pas un cardinal limite, soit la colimite des  $X_\beta$ , pour  $\beta < \lambda$  si  $\lambda$  est un cardinal limite. En outre, on dit que  $\lambda$  est la longueur du plan  $P$ .

Pour simplifier les écritures, nous allons prendre les conventions suivantes : soit  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan d'addition de cellules sur  $A$  de longueur  $\lambda$ . On pose  $P_0(A) = A$  puis, pour tout ordinal  $\beta \leq \lambda$ , on note  $P_\beta(A)$  le résultat du plan  $(P_\alpha)_{\alpha < \beta}$ . Ainsi les diagrammes de  $P_\beta$  sont des diagrammes sur  $P_\beta(A)$ .

Lors d'un plan fini ou infini d'addition de cellules, il se peut que l'on rajoute la même cellule à plusieurs étapes du plan. Or ceci obscurcit la compréhension de l'opération effectuée par le plan d'addition de cellules. Certains plans d'addition de cellules cependant n'ont pas ce défaut, i.e. les cellules  $D$  ne seront ajoutées qu'à un seul moment donné de la construction et exactement  $\alpha_D$  fois dans toute la construction, c'est ce que l'on appellera des plans rationnels.

**Définition 2.4.5** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan d'addition de cellules sur  $X$  de longueur un certain cardinal  $\lambda$ . On dit que  $P$  est un plan d'addition de cellules rationnel si, pour tout ordinal  $\beta \leq \lambda$  et pour tout diagramme  $D$  de  $P_\beta$ , l'extension de  $D$  à  $P(X)$  n'est pas l'extension à  $P(X)$  d'un diagramme de  $P_\alpha$  avec  $\alpha < \beta$ .

On a vu dans la définition de plan d'addition fini de cellules la composition des plans simples. Mais on peut composer en fait n'importe quel plan.

**Définition 2.4.6** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $P$  un plan fini ou infini sur  $X$  et  $Q$  un plan fini ou infini sur  $P(X)$ . La composition naïve des plans  $P$  et  $Q$  est le plan noté  $Q \circ P$  obtenu par concaténation des suites de plans simples de  $P$  et  $Q$ .*

Cette composition a de bonnes propriétés : elle est associative et admet comme identités les plans vides ou ceux dont tous les coefficients  $\alpha_D$  sont nuls. Toutefois, on l'appelle "naïve" car lorsque l'on applique le plan  $Q$  à  $P(X)$  on pourra ré-additionner des cellules déjà additionnées à  $X$  par  $P$ . Aussi afin de mieux contrôler l'addition des cellules lors d'une composition de plans, on va définir une nouvelle composition dite rationnelle, qui nous donnera une construction simple de plans rationnels, notion dans laquelle le phénomène décrit ci-dessus n'aura plus lieu.

**Définition 2.4.7** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ ,  $P$  un plan fini ou infini sur  $X$  et  $Q$  un plan simple sur  $P(X)$ . Notons  $(X_\beta)_{\beta \leq \lambda}$  la suite correspondant à  $P$ . La composition rationnelle des plans  $P$  et  $Q$  est le plan noté  $Q * P$  obtenu comme composition naïve du plan  $P$  avec le plan  $Q'$  défini ainsi : un diagramme  $D$  de  $Q$  appartient à  $Q'$  si et seulement si  $d$  ne se factorise pas par l'un des  $X_\beta$ , pour  $\beta < \lambda$ .*

L'un des intérêts de cette composition rationnelle est que le plan  $Q * P$  est moralement un plan rationnel. Toutefois ceci n'est pas vrai en général. Considérons par exemple pour  $X$  un ensemble simplicial construit avec trois segments  $f, g, h$  tel que  $g$  et  $h$  soient précomposables par  $f$ . Considérons le plan simple  $P$  sur  $X$  consistant à rajouter le triangle de faces principales  $f, g$  et considérons le plan simple  $Q$  sur  $P(X)$  consistant à rajouter le triangle de faces principales  $f, h$  et à identifier  $g$  et  $h$  en un même segment noté  $i$ . La composition naïve des plans  $P$  et  $Q$  n'est autre que leur composition rationnelle et le résultat de cette composition rationnelle  $(Q * P)(X)$  consiste en deux triangles collés le long de leurs faces principales  $f, i$ . Ainsi au final une même cellule, ici le triangle de face principale  $f, i$ , a été additionnée deux fois mais à deux moments différents de la construction. Aussi ce plan  $Q * P$  issu d'une composition rationnelle n'est pas un plan rationnel. Le principal empêchement vient du fait que l'une des cellules, celle qui identifie les segments, n'est pas

un monomorphisme, ce qui amène au final à identifier deux diagrammes qui au départ étaient différents.

Nous allons donc montrer que sous certaines hypothèses sur  $\Phi$  concernant les monomorphismes, les plans d'addition de cellules obtenus à partir de compositions rationnelles sont bien des plans d'addition rationnels au sens défini précédemment.

**Proposition 2.4.8** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations soient des monomorphismes. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan fini ou infini sur  $X$  dont toutes les compositions le composant sont des compositions rationnelles. Un tel plan sera appelé plan à compositions rationnelles.*

*Alors  $P$  est un plan d'addition rationnel.*

*Preuve :*

Pour montrer que  $P$  est un plan d'addition de cellules rationnel sur  $X$ , nous allons montrer par l'absurde qu'il vérifie la définition de plan rationnel. Notons  $\lambda$  la longueur du plan  $P$ . Soit  $\beta \leq \lambda$  un ordinal et soit  $D$  un diagramme de  $P_\beta$ . Supposons par l'absurde que l'extension de ce diagramme à  $P(X)$  est égale à l'extension à  $P(X)$  d'un diagramme  $D'$  de  $P_\alpha$  pour un certain ordinal  $\alpha < \beta$ . On remarque que le morphisme naturel de  $P_\beta(X)$  vers  $P(X)$  est une colimite séquentielle finie ou transfinie de sommes amalgamées le long d'un morphisme de flèches de  $\Phi$ . Par le lemme 2.2.2, il vient que les colimites séquentielles de sommes amalgamées le long d'un morphisme d'éléments de  $\Phi$  sont des  $\Phi$ -cofibrations, donc des monomorphismes par hypothèse sur  $\Phi$ . On en déduit que le diagramme  $D$  sur  $P_\beta(X)$  n'est autre que l'extension du diagramme  $D'$  à  $P_\beta(X)$ . Or par hypothèse sur  $P$ , la composition du plan simple  $P_\beta$  sur  $P_\beta(X)$  avec le plan  $(P_\gamma)_{\gamma < \beta}$  sur  $X$  est une composition rationnelle, or par définition même de composition rationnelle ceci contredit le fait que le diagramme  $D$  sur  $P_\beta(X)$  est égal à l'extension à  $P_\beta(X)$  du diagramme  $D'$  de  $P_\alpha$  avec  $\alpha < \beta$ . On a donc bien montré par l'absurde que  $P$  est un plan rationnel d'addition de cellules.

CQFD.

**Exemple 2.4.9** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations soient des monomorphismes.*

*Considérons le plan d'addition de cellules  $e_{\Phi, \lambda}$ , si l'on compose simplement  $e_{\Phi, \lambda}$  avec lui-même, on va remettre une deuxième fois toutes les cellules ajoutées la première fois. Si en revanche, on compose rationnellement  $e_{\Phi, \lambda}$  avec lui-même, on ne mettra à la seconde étape que les cellules qui n'ont pas déjà été mises à la première.*

Dans ces définitions, la notion de plan dépend de l'objet sur lequel le plan doit agir. Toutefois on peut définir des plans pour tous les objets de la catégorie, auquel cas on peut se demander si cette collection de plans est fonctorielle. Nous allons donc définir la notion de plan fonctoriel.

**Définition 2.4.10** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $P = (P_A)_{A \in \mathcal{C}}$  une collection de plans d'addition de cellules, on dit que  $P$  est un plan d'addition de cellules fonctoriel si  $P$  induit un foncteur, encore noté  $P$ , de la catégorie  $\mathcal{C}$  dans elle-même tel que, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $P(A)$  est le résultat  $P_A(A)$  du plan d'addition  $P_A$ .*

La fonctorialité des plans d'addition de cellules se comporte bien vis-à-vis des compositions de plans et peut se reconnaître pour les plans non simples par la fonctorialité des plans simples qui les composent.

**Lemme 2.4.11** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . On a les résultats suivants :*

- si  $P$  et  $Q$  sont des plans d'addition de cellules fonctoriels alors leurs composées naïve et rationnelle sont fonctorielles,
- si  $P = (P_\beta)_{\beta < \lambda}$  est un plan d'addition transfinie de cellules dont tous les plans simples sont fonctoriels, alors  $P$  est un plan d'addition de cellules fonctoriel.

*Preuve :* cela découle directement du fait que les foncteurs sont composables et possèdent les colimites. CQFD.

Il est intéressant de donner une condition suffisante simple pour qu'une collection de plans d'addition de cellules constitue un plan d'addition de cellules fonctoriel. Pour cette condition, nous utiliserons la notion d'extension de plans d'addition de cellules le long d'un morphisme que nous allons tout d'abord définir.

**Définition 2.4.12** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan d'addition de cellules sur  $A$ . On appelle plan d'addition de cellules étendu par  $f$  le plan d'addition de cellules sur  $B$  constitué par l'extension par  $f$  des diagrammes du plan  $P$  pris avec la même cardinalité que dans  $P$ .*

**Lemme 2.4.13** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $P = (P_A)_{A \in \mathcal{C}}$  une collection de plans d'addition de cellules de même longueur. Si pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , l'extension par  $f$  du plan d'addition de cellules  $P_A$  sur  $A$  est un sous-ensemble du plan d'addition de cellules  $P_B$  sur  $B$ , alors  $P$  est un plan d'addition fonctoriel.*

*Preuve :*

D'après le lemme 2.4.11, pour montrer qu'une collection de plans non simples de même longueur est fonctorielle, il suffit de montrer que chaque collection de plans simples qui la compose est fonctorielle. Donc on va montrer le lemme pour une collection  $P = (P_A)_{A \in \mathcal{C}}$  de plans simples. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Le morphisme  $f$  induit une fonction non nécessairement injective, encore notée  $f$ , de l'ensemble  $D_A$  des diagrammes du plan  $P_A$  vers l'ensemble  $D_B$  des diagrammes du plan  $P_B$  obtenue en étendant les diagrammes sur  $A$  par  $f$ . Comme l'extension de  $P_A$  par  $f$  est un sous-ensemble de  $P_B$ , ceci signifie que les diagrammes de  $B$  provenant par  $f$  de diagrammes de  $A$  sont pris avec la même cardinalité que leurs antécédents. On en déduit le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{D \in P_A} \coprod_{\alpha_D} X & \longrightarrow & \coprod_{D' \in P_B} \coprod_{\alpha_{D'}} X \\ \downarrow \coprod_{D \in P_A} \coprod_{\alpha_D} \phi_D & & \downarrow \coprod_{D' \in P_B} \coprod_{\alpha_{D'}} \phi_{D'} \\ \coprod_{D \in P_A} \coprod_{\alpha_D} Y & \longrightarrow & \coprod_{D' \in P_B} \coprod_{\alpha_{D'}} Y \end{array}$$

dans lequel on envoie par l'identité les sources et buts d'une flèche  $\phi_D$  d'un diagramme  $D \in D_A$  sur ceux de la flèche  $\phi_{f(D)}$  de l'extension  $f(D) \in D_B$  du diagramme  $D$  par  $f$ . On déduit de ce diagramme le cube commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{D \in P_A} \coprod_{\alpha_D} X & \longrightarrow & \coprod_{D' \in P_B} \coprod_{\alpha_{D'}} X & & \\ \downarrow \coprod_{D \in P_A} \coprod_{\alpha_D} \phi_D & \searrow & \downarrow \coprod_{D' \in P_B} \coprod_{\alpha_{D'}} \phi_{D'} & \searrow & \\ & A & & B & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \coprod_{D \in P_A} \coprod_{\alpha_D} Y & \longrightarrow & \coprod_{D' \in P_B} \coprod_{\alpha_{D'}} Y & & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & P_A(A) & \xrightarrow{\exists!} & P_B(B) & \end{array}$$

où les faces verticales gauche et droite sont des diagrammes cocartésien. Il est facile de voir que si dans le cube on prend pour  $f$  l'identité de  $A$ , le morphisme



du bas est l'identité. De plus, si l'on a deux morphismes composables  $f$  et  $g$ , on obtient deux cubes commutatifs qui se juxtaposent rendant le grand cube total commutatif, ce qui entraîne que la composée des morphismes induits par  $f$  et  $g$  est bien le morphisme induit par la composée  $f \circ g$ . Posons alors, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $P(A) = P_A(A)$  et, pour tout morphisme  $f$ , notons  $P(f)$  le morphisme induit par le cube. On a donc que  $P$  ainsi défini est bien un foncteur de la catégorie  $\mathcal{C}$  dans elle-même, ce qui montre le résultat. CQFD.

**Lemme 2.4.14** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète,  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  et  $\lambda$  un cardinal.  $e_{\Phi, \lambda}$  est un plan d'addition de cellules fonctoriel. De plus tout plan fini ou transfini d'addition de cellules dont tous les plans simples sont du type  $e_{\Phi, \lambda}$  est fonctoriel.*

*Preuve :* Pour montrer le premier résultat il suffit d'appliquer le critère du lemme 2.4.13. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ , l'extension de  $e_{\Phi, \lambda, A}$  n'est autre que le plan simple d'addition de cellules constitué par les couples  $(D, \lambda)$  où  $D$  décrit les extensions par  $f$  de diagrammes de  $\Phi$  pour  $A$ . Or ces couples sont bien des couples du plan simple  $e_{\Phi, \lambda, B}$ , ce qui montre que  $e_{\Phi, \lambda}$  vérifie la condition suffisante pour être un plan d'addition de cellules fonctoriel.

Le second résultat résulte du premier auquel on applique le lemme 2.4.11. CQFD.

Le formalisme du rajout de cellules ayant été précisé, nous sommes maintenant en mesure de donner un procédé qui permettra de catégoriser les  $\mathcal{C}$ -précatégories.

## 2.5 Plans d'addition de cellules I-injectivants

On peut en effet reformuler le problème de la catégorisation en termes de plans d'addition de cellules et d'objets I-injectifs. Supposons en effet que nous ayons exhibé une famille  $I$  de morphismes dont les objets I-injectifs sont les  $\mathcal{C}$ -catégories. Le problème devient alors de rendre I-injectif un objet qui ne l'est pas. L'idée la plus répandue pour faire cela est de rajouter les flèches de  $I$  jusqu'à rendre l'objet I-injectif, c'est-à-dire d'appliquer à l'objet un plan d'addition de cellules. Ainsi l'équivalent en termes de plan d'addition de cellules et d'objets I-injectifs du problème de la catégorisation est de trouver un plan d'addition de cellules  $P$  fonctoriel vérifiant :

- i) tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  dont le but est I-injectif se factorise à travers  $P(A)$ ,
- ii) pour tout objet  $A$ ,  $P(A)$  est I-injectif,
- iii) si l'on possède une notion d'équivalence d'objets I-injectifs, pour tout objet  $A$ , l'image par  $P$  du morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une équivalence d'objets I-injectifs.

Tout plan fonctoriel d'addition de cellules résolvant ce problème sera appelé plan I-injectivant ou I-injectivisation.

Comme on l'a dit plus haut, l'idée que nous allons suivre pour résoudre ce problème d'I-injectivisation est de construire un plan d'addition de flèches de  $I$ . Or il est assez facile de voir, avec les définitions d'objets I-injectifs et de I-cofibrations, que tout plan d'addition de flèches de  $I$  est une I-cofibration et donc, par propriété de relèvement à gauche par rapport aux objets I-injectifs, vérifie le i). C'est ce que nous donne le lemme suivant.

**Lemme 2.5.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan d'addition de cellules de  $I$  sur  $A$ . Alors le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une I-cofibration. En particulier pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  vers un objet I-injectif  $B$ , il existe un morphisme de  $P(A)$  vers  $B$  qui précomposé avec le morphisme naturel de  $A$  vers  $P(A)$  redonne  $f$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & \nearrow \exists & \\
 P(A) & & 
 \end{array}$$

*Preuve :*

Tout d'abord il convient de remarquer que le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches de  $I$ . Or les flèches de  $I$  sont des  $I$ -cofibrations et les  $I$ -cofibrations sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie d'après le lemme 2.2.2. Donc le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est bien une  $I$ -cofibration. En outre par définition de  $I$ -cofibration,  $A \rightarrow P(A)$  possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes  $I$ -injectifs et donc en particulier par rapport aux objets  $I$ -injectifs. CQFD.

Ce lemme nous a donc permis d'avoir une infinité de solutions pour le problème i) de l' $I$ -injectivisation. Il suffit que le plan d'addition de cellules rajoute des flèches de  $I$  à la source d'un morphisme vers un objet  $I$ -injectif pour factoriser ce morphisme à travers le résultat du plan appliqué à la source. Toutefois on peut aussi bien rajouter à chaque étape du plan une partie quelconque de  $I$  ou bien avoir une partition de  $I$  et un plan qui à chaque étape rajoute les flèches d'un certain nombre d'éléments de la partition de  $I$ . Nous allons donc donner une définition générale qui permet de modéliser de tels plans.

**Définition 2.5.2** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(\Phi_k)_{k \in K}$  une partition de  $\Phi$ . Donnons nous une fonction  $t$  d'un cardinal  $T$  quelconque vers l'ensemble des parties de  $K$ . On appelle plan d'addition de cellules suivant l'ordre  $t$  tout plan  $P$  de longueur  $T$  tel que, pour tout ordinal  $\tau < T$ , les diagrammes apparaissant dans  $P_\tau$  ne sont obtenus qu'à partir des flèches des  $\Phi_k$  avec  $k$  décrivant  $t(\tau)$ . On notera  $t^{-1}(k)$  pour  $k \in K$  l'ensemble des ordinaux  $\tau < T$  pour lesquels  $t(\tau)$  contient  $k$ .*

Pour résoudre le problème ii) de l' $I$ -injectivisation, l'idée est de rajouter autant de fois que nécessaire les flèches de  $I$  pour rendre les objets quelconques  $I$ -injectifs. On se demande alors quelles conditions doit vérifier un plan d'addition de flèches de  $I$  pour que son résultat soit  $I$ -injectif. Comme les plans ont chacun une certaine longueur, si l'ensemble  $I$  est petit par rapport à cette longueur, toutes flèches d'une source d'un morphisme de  $I$  vers le résultat du plan se factorisera à travers l'une des étapes du plan. Deux cas se présente alors : soit le diagramme à cette étape possède déjà un relèvement, et dans ce cas c'est bon, soit le diagramme à cette étape n'en possède pas. Or si l'on veut que le diagramme se relève pour le résultat du plan, il faudra qu'il se relève

pour une étape ultérieure du plan. Ces considérations nous amènent au lemme suivant qui nous donne une condition suffisante pour qu'un plan d'addition suivant un ordre ait son résultat I-injectif.

**Lemme 2.5.3** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $(\Phi_k)_{k \in K}$  une partition de  $\Phi$  et  $\alpha$  un cardinal régulier pour lequel les sources des morphismes de  $\Phi$  sont  $\alpha$ -petites.*

*Soit  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Donnons nous une fonction  $t$  d'un cardinal régulier  $T$  strictement supérieur à  $\alpha$  vers l'ensemble des parties de  $K$  et un plan d'addition de cellules  $P$  sur  $A$  suivant l'ordre  $t$ . Si  $P$  vérifie la propriété suivante : pour tout ordinal  $\tau < T$ , pour tout  $k \in K$  et pour tout diagramme  $D$  sur  $P_\tau(A)$  fabriqué avec une flèche de  $\Phi_k$  qui ne se relève pas dans  $P_\tau(A)$ , il existe  $\tau' \in t^{-1}(k)$  tel que  $\tau' \geq \tau$  et que le diagramme  $D$  étendu à  $P_{\tau'}(A)$  appartienne au plan  $P_{\tau'}$ , alors  $P(A)$  est  $\Phi$ -injectif.*

*Preuve :*

Soit  $P$  un plan sur  $A$  vérifiant la condition du lemme. Montrons que  $P(A)$  est  $\Phi$ -injectif. Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & P(A) \\ \phi \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Comme par hypothèse la source  $X$  de  $\phi$  est  $\alpha$ -petite et que  $A \rightarrow P(A)$  est une colimite séquentielle transfinie de longueur  $T$  cardinal régulier strictement supérieur à  $\alpha$ , il existe un ordinal  $\tau < T$  tel que  $g$  se factorise par  $P_\tau(A)$ . Soit le diagramme se relève dans  $P_\tau(A)$  et, par extension à  $P(A)$ , on obtient que le diagramme ci-dessus se relève. Soit le diagramme ne se relève pas dans  $P_\tau(A)$ , et dans ce cas, par la propriété de  $P$ , il vient qu'il existe  $\tau' \geq \tau$  tel que  $t(\tau')$  contienne l'indice de la partie de  $\Phi$  à laquelle appartient  $\phi$  et que la restriction du diagramme à  $P_{\tau'}(A)$  appartienne au plan  $P_{\tau'}$ . Ainsi  $P_{\tau'+1}(A)$  se relève par rapport à  $\phi$ , et par extension à  $P(A)$ , on obtient que  $P(A)$  se relève aussi, ce qui montre que le diagramme considéré se relève.

CQFD.

**Corollaire 2.5.4** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $(\Phi_k)_{k \in K}$  une partition de  $\Phi$  et  $\alpha$  un cardinal régulier*

pour lequel les sources des flèches de  $\Phi$  sont  $\alpha$ -petites.

Soit  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Donnons nous une fonction  $t$  d'un cardinal régulier  $T$  strictement supérieur à  $\alpha$  vers l'ensemble des parties de  $K$  et un plan d'addition de cellules  $P$  sur  $A$  suivant l'ordre  $t$ .

Supposons que  $t$  vérifie que pour tout  $\tau < T$  et pour tout  $k \in t(\tau)$  il existe  $\tau' \geq \tau$  tel que  $\tau'$  appartienne à  $t^{-1}(k)$ . Si  $P$  vérifie la propriété suivante :

pour tout ordinal  $\tau < T$ , le plan  $P_\tau$  contient tous les diagrammes obtenus à partir des morphismes de  $\Phi_k$ , pour  $k$  décrivant  $t(\tau)$ , qui ne se relèvent pas dans  $P_\tau(A)$ , alors  $P(A)$  est  $\Phi$ -injectif.

*Preuve :*

Montrons que sous les conditions du corollaire le plan  $P$  vérifie la condition du lemme précédent. Soit donc un ordinal  $\tau < T$  et un diagramme  $D$  sur  $P_\tau(A)$  obtenu à partir d'un morphisme d'un  $\Phi_k$  avec  $k \in t(\tau)$  qui ne se relève pas dans  $P_\tau(A)$ . Par propriété de  $t$ , il existe un ordinal  $\tau' \geq \tau$  tel que  $k$  appartienne à  $t(\tau')$ . Prenons le plus petit  $\tau'$  vérifiant cela. En outre par propriété de  $P$ , il vient que  $P_{\tau'}$  contient tous les diagrammes obtenus avec  $\Phi_k$  (car  $k \in t(\tau')$ ) ne se relevant pas dans  $P_{\tau'}(A)$ , c'est en particulier le cas pour  $D$  étendu à  $P_{\tau'}(A)$ , par minimalité de  $\tau'$ . Ainsi  $P$  vérifie la condition du lemme et donc  $P(A)$  est  $\Phi$ -injectif.

CQFD.

Donnons deux exemples de plans d'addition de cellules qui vérifient les propriétés i) et ii) de l'I-injectivisation.

**Lemme 2.5.5** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\alpha$ -petites pour un certain cardinal régulier  $\alpha$ . Soient  $\alpha'$  le plus petit cardinal régulier supérieur à  $\alpha$  et  $\lambda$  un cardinal quelconque.

Notons  $E_{\Phi,\lambda}$  le plan d'addition de cellules fonctoriel de longueur  $\alpha'$  dont tous les plans simples sont  $e_{\Phi,\lambda}$  et notons  $E'_{\Phi,\lambda}$  le plan d'addition de cellules fonctoriel de longueur  $\alpha'$  obtenu à partir des compositions rationnelles et dont tous les plans simples sont  $e_{\Phi,\lambda}$ .

Alors, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ ,  $E_{\Phi,\lambda}(A)$  et  $E'_{\Phi,\lambda}(A)$  sont  $\Phi$ -injectifs et tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  dont le but est  $\Phi$ -injectif se factorise à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow E_{\Phi,\lambda}(A)$  et aussi à travers  $A \rightarrow E'_{\Phi,\lambda}(A)$ .

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que comme  $E_{\Phi,\lambda}$  et  $E'_{\Phi,\lambda}$  sont des plans d'addition de morphismes de  $\Phi$ , par le lemme 2.5.1, les morphismes naturels  $A \rightarrow E_{\Phi,\lambda}(A)$

et  $A \rightarrow E'_{\Phi,\lambda}(A)$  sont des  $\Phi$ -cofibrations qui donc ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux objets  $\Phi$ -injectifs. Ceci prouve la seconde partie du lemme.

Pour montrer que les résultats des plans  $E_{\Phi,\lambda}$  et  $E'_{\Phi,\lambda}$  sont  $\Phi$ -injectifs, il suffit de montrer que ces plans vérifient le corollaire 2.5.4. Tout d'abord on remarque que dans notre cas il n'y a pas de partition de  $\Phi$ , ce qui revient à dire que la partition n'a qu'un élément. Du coup la fonction  $t$  correspondant à nos plans n'est autre que la fonction constante du cardinal  $\alpha'$  dans l'ensemble des parties du singleton à valeur le singleton. Ainsi  $t$  vérifie de manière triviale la condition du corollaire 2.5.4. Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout ordinal  $\beta < \alpha'$ , les plans simples  $(E_{\Phi,\lambda})_\beta$  et  $(E'_{\Phi,\lambda})_\beta$  contiennent tous les diagrammes obtenus avec des morphismes de  $\Phi$  qui ne se relèvent pas dans  $(E_{\Phi,\lambda})_\beta(A)$  et  $(E'_{\Phi,\lambda})_\beta(A)$ . Or les plans simples  $(E_{\Phi,\lambda})_\beta$  et  $(E'_{\Phi,\lambda})_\beta$  sont en fait les plans  $e_{\Phi,\lambda}$  qui par définition contiennent tous les diagrammes possibles obtenus à partir de  $\Phi$ . Si dans  $(E_{\Phi,\lambda})_\beta$ , on a bien tous les diagrammes possibles sur  $(E_{\Phi,\lambda})_\beta(A)$ , en revanche par rationalité des compositions de  $E'_{\Phi,\lambda}$ , dans  $(E'_{\Phi,\lambda})_\beta$  on ne garde que les diagrammes qui ne relèvent pas dans  $(E'_{\Phi,\lambda})_\beta$ . Dans les deux cas la propriété du corollaire 2.5.4 est vérifiée, ce qui nous donne que les résultats des plans  $E_{\Phi,\lambda}$  et  $E'_{\Phi,\lambda}$  sont bien  $\Phi$ -injectifs. CQFD.

On a donc exhibé deux plans d'addition de cellules qui vérifient les propriétés i) et ii) des plans I-injectivants. Le problème consiste maintenant à savoir s'ils vérifient ou non la propriété iii) concernant les équivalences. En fait cette propriété iii) est la plus difficile à obtenir. En nous inspirant des idées de [5] pour résoudre ce problème, nous allons chercher deux plans d'addition de cellules particuliers vérifiant i) et ii). Le premier aura une propriété d'unicité de relèvement par rapport aux objets I-injectifs et le second aura la propriété iii) mais uniquement pour les objets I-injectifs. Nous allons donc construire le premier plan et montrer que, si l'on suppose l'existence du second, le premier vérifie iii).

## 2.6 Plan I-injectivant marqué

L'idée pour trouver un plan d'addition I-injectivant est de construire un plan vérifiant les propriétés i) et ii) mais avec pour la propriété de factorisation i) l'unicité de cette factorisation. Bien évidemment on ne pourra pas obtenir une telle propriété avec un objet I-injectif quelconque qui en général n'a pas la propriété de se relever de manière unique par rapport aux I-cofibrations. Cependant la notion de marquage déjà vu auparavant va nous permettre d'aboutir à l'unicité des relèvements. Afin de mieux manipuler cette notion de marquage, nous allons donner une définition d'objet partiellement I-marqué.

**Définition 2.6.1** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Un objet partiellement I-marqué est un couple  $(A, \mu)$ , où  $A$  est un objet quelconque de  $\mathcal{C}$  et  $\mu$  une fonction d'un ensemble de diagrammes solides sur  $A$  du type suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 Y & & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \in I \\
 \\
 \in \mu
 \end{array}$$

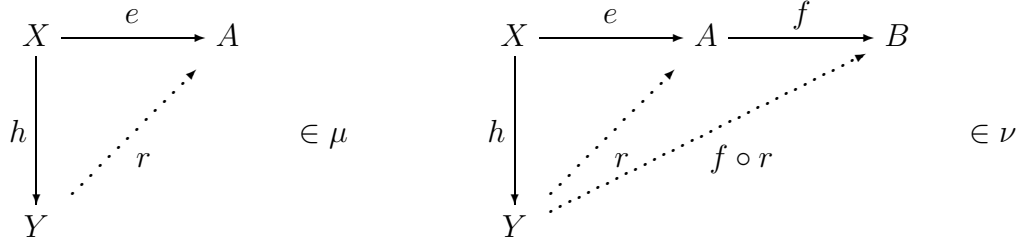
qui associe à chaque diagramme solide de cet ensemble un relèvement, que l'on dira marqué. Par abus de langage, on dira d'un diagramme qu'il appartient à  $\mu$  pour dire qu'il appartient au domaine de définition de la fonction  $\mu$  et donc qu'on lui a choisi un relèvement.

On remarque que si  $A$  est totalement marquée (i.e.  $\mu$  contient tous les diagrammes des flèches de  $I$  vers  $A$ ) alors  $A$  a bien évidemment la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les flèches de  $I$ , ce qui fait de  $A$  un objet I-injectif pour lequel tous les relèvements sont marqués, c'est ce qu'on va appeler un objet I-injectif marqué.

**Définition 2.6.2** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Un objet I-injectif marqué est un couple  $(A, \mu)$ , où  $A$  est un objet I-injectif et  $\mu$  une fonction de l'ensemble des diagrammes solides de flèches de  $I$  vers  $A$  qui à chaque diagramme solide associe un relèvement, qui sera le relèvement marqué.

Les notions d'objet totalement marqué et d'objet I-injectif marqué sont équivalentes, comme on l'a vu plus haut. Il nous reste donc à définir ce que sont les morphismes d'objets partiellement marqués.

**Définition 2.6.3** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  entre les objets partiellement marqués  $(A, \mu)$  et  $(B, \nu)$  est un morphisme d'objets partiellement marqués si, pour tout diagramme de  $\mu$ , son prolongement par  $f$  est un diagramme de  $\nu$ . On dit alors que le morphisme préserve le marquage.  
 Un morphisme d'objets  $I$ -injectifs marqués n'est autre qu'un morphisme d'objets partiellement  $I$ -marqués.



On obtient ainsi deux catégories :  $\mathcal{C}_m$ , la catégorie des objets partiellement marqués et sa sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_{I\text{-injm}}$  des objets  $I$ -injectifs marqués. Tout d'abord, remarquons qu'un même objet  $I$ -injectif peut avoir plusieurs marquages différents et ainsi peut donner lieu à plusieurs objets  $I$ -injectifs marqués, il en va de même pour les objets quelconques. Ainsi nos deux nouvelles catégories ne sont pas des sous-catégories de  $\mathcal{C}$ . En revanche, elles sont toutes deux munies d'un foncteur Oubli vers  $\mathcal{C}$  qui est fidèle mais n'est pas plein car tout morphisme ne préserve pas nécessairement le marquage. En outre on a vu que la notion d'objets  $I$ -injectifs n'est pas stable par limite mais en revanche celle d'objets  $I$ -injectifs marqués l'est.

**Lemme 2.6.4** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie complète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . La catégorie  $\mathcal{C}_{I\text{-injm}}$  des objets  $I$ -injectifs marqués avec les morphismes préservant les marquages possède les limites.

*Preuve* : application directe du lemme 2.1.5 !

Cette notion de marquage va nous permettre de construire un plan d'addition de cellules qui à un objet quelconque associera un objet  $I$ -injectif marqué et factorisera de manière unique tout morphisme à but  $I$ -injectif marqué. Non seulement ce plan sera fonctoriel mais il servira d'adjoint au foncteur Oubli des objets  $I$ -injectifs marqués vers les objets quelconques de  $\mathcal{C}$ .

Commençons tout d'abord par remarquer que si un plan d'addition de cellules rajoute plusieurs fois la même cellule il ne pourra pas en général factoriser



de manière unique un morphisme à valeur dans un objet I-injectif marqué. Par exemple considérons l'ensemble  $I = \{A \rightarrow B\}$  et l'objet  $C = B \coprod_A B$ . Ce dernier est bien I-injectif et on peut le marquer de deux manières selon l'exemplaire  $B$  que l'on choisit. Choisissons un marquage. Considérons maintenant le morphisme naturel  $A \rightarrow C$  et le plan  $e_{I,2}$ . Alors  $e_{I,2}(A)$  n'est autre que  $C$  et on le marque en choisissant un exemplaire de  $B$ . Sur les quatre morphismes possibles de  $C$  dans lui-même laissant  $A$  invariant, il y en a deux qui préservent le marquage : celui qui envoie l'exemplaire non marqué de  $B$  sur le non marqué et celui qui l'envoie sur le marqué.

Cet exemple montre qu'un plan d'addition de cellules rajoutant plusieurs fois la même flèche et donc en particulier tout plan d'addition de cellules non rationnel n'a pas en général la propriété de factoriser de manière unique les morphismes à but I-injectif marqué. Le lemme suivant nous donne de bons candidats pour cette factorisation unique.

**Lemme 2.6.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $A$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan d'addition de cellules de  $I$  sur  $A$  rationnel et dans lequel à chaque étape les diagrammes à rajouter ne sont pris qu'une fois. Alors  $P(A)$  a un marquage partiel naturel et tout morphisme  $A \rightarrow B$  vers un objet I-injectif marqué se factorise de manière unique à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  en un morphisme préservant le marquage.*

*Preuve :*

Soit  $f : A \rightarrow (B, \nu)$  un morphisme vers un objet I-injectif marqué. Notons  $\lambda$  la longueur du plan et définissons par récurrence (transfinie) sur  $\beta \leq \lambda$  à la fois le marquage  $\mu$  de  $P(A)$  et le relèvement préservant le marquage de  $A \rightarrow P(A)$  par rapport à  $B$ .

Pour  $\beta$  nul,  $P_0(A)$  n'est autre que  $A$  qu'on laisse sans marquage, i.e.  $\mu_0 = \emptyset$ . Le relèvement est dans ce cas  $f$  qui préserve bien le marquage.

Supposons maintenant que, pour  $\beta < \lambda$ ,  $P_\beta(A)$  est partiellement marqué par  $\mu_\beta$  et qu'il existe un morphisme préservant le marquage  $(P_\beta(A), \mu_\beta) \rightarrow (B, \nu)$  qui précomposé par le morphisme naturel  $A \rightarrow P_\beta(A)$  redonne  $f$ . Le résultat  $P_{\beta+1}(A)$  du plan simple  $P_\beta$  appliqué à  $P_\beta(A)$  n'est autre que la somme amalgamée de  $P_\beta(A)$  par les diagrammes de  $P_\beta$ . Comme le plan est rationnel, les extensions à  $P(A)$  de ces diagrammes ne sont pas les extensions à  $P(A)$  des diagrammes des plans simples précédents mais peuvent être celles de diagrammes déjà relevés dans  $A = P_0(A)$ . Or comme  $\mu_0$  est vide, les diagrammes qui se relèvent déjà dans  $A$  ne sont pas marqués. Ainsi aucune des extensions

à  $P(A)$  des diagrammes de  $P_\beta$  n'est l'extension à  $P(A)$  d'un diagramme déjà marqué. De plus par hypothèse sur  $P$ , les diagrammes de  $P_\beta$  ne sont pris qu'une fois. Ainsi tous les diagrammes de  $P_\beta$  peuvent être marqués sans ambiguïté ni incohérence dans  $P_{\beta+1}(A)$  avec pour relèvements marqués les morphismes naturels des buts des flèches de  $I$  dans la somme amalgamée  $P_{\beta+1}(A)$ . On peut donc construire  $\mu_{\beta+1}$  comme réunion de  $\mu_\beta$  avec les marquages naturels des diagrammes de  $P_\beta$ . En outre  $(B, \nu)$  étant un objet  $I$ -injectif marqué, il existe un relèvement marqué de  $B$  par rapport aux extensions par  $f$  de tous les diagrammes de  $P_\beta$ . Par propriété universelle de la colimite  $P_{\beta+1}(A)$ , il vient qu'il existe un morphisme de  $P_{\beta+1}(A)$  vers  $B$  qui d'une part précomposé par le morphisme naturel de  $P_\beta(A) \rightarrow P_{\beta+1}(A)$  redonne le morphisme préservant le marquage  $P_\beta(A) \rightarrow B$  et qui d'autre part préserve les marquages par construction. Enfin par propriété du morphisme  $P_\beta(A) \rightarrow B$ , le morphisme de  $P_{\beta+1}(A)$  vers  $B$  ainsi obtenu redonne bien  $f$  lorsqu'on le précompose par le morphisme naturel  $A \rightarrow P_{\beta+1}(A)$ , ce qui finit de montrer l'hypothèse au rang  $\beta + 1$ . On remarque au passage qu'avec ces marquages le morphisme naturel  $P_\beta(A) \rightarrow P_{\beta+1}(A)$  préserve le marquage.

Soit maintenant  $\beta \leq \lambda$  un ordinal limite (si  $\lambda$  est un cardinal transfini). Supposons donc construits pour tout  $\alpha < \beta$  un marquage  $\mu_\alpha$  pour  $P_\alpha(A)$  et un morphisme préservant le marquage  $(P_\alpha(A), \mu_\alpha) \rightarrow (B, \nu)$  qui précomposé par le morphisme naturel  $A \rightarrow P_\alpha(A)$  redonne  $f$ . Comme  $P_\beta(A)$  est la colimite séquentielle transfinie des  $P_\alpha(A)$  pour  $\alpha < \beta$ , définissons alors  $\mu_\beta$  comme la réunion des  $\mu_\alpha$  pour  $\alpha < \beta$ . En outre par propriété universelle de la colimite séquentielle transfinie, il existe un morphisme de  $P_\beta(A)$  vers  $B$  qui précomposé par les morphismes naturels  $P_\alpha(A) \rightarrow P_\beta(A)$  redonnent les morphismes préservant le marquage  $(P_\alpha(A), \mu_\alpha) \rightarrow (B, \nu)$ . Par construction ce morphisme préserve le marquage et précomposé par  $A \rightarrow P_\beta(A)$  redonne  $f$ , ce qui montre l'hypothèse de récurrence pour les ordinaux limites. On remarque là encore que les morphismes naturels  $P_\alpha(A) \rightarrow P_\beta(A)$  préservent les marquages grâce à notre définition de  $\mu_\beta$ .

Par récurrence transfinie, on a bien montré qu'il existe un marquage naturel  $\mu$  sur  $P(A)$  et qu'il existe un morphisme préservant le marquage de  $P(A)$  vers  $B$  qui précomposé par le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  redonne  $f$ .

Montrons maintenant par l'absurde que le morphisme préservant le marquage de  $P(A)$  vers  $B$  qui précomposé par le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  redonne  $f$  est unique. Supposons qu'il existe deux tels morphismes. Posons  $\beta$  le plus petit ordinal inférieur ou égal à  $\lambda$  pour lequel les précompositions

de ces morphismes par le morphisme naturel  $P_\beta(A) \rightarrow P_\lambda(A)$  sont différentes. Notons-les  $f_1, f_2$ . Cet ordinal existe bien car l'ensemble des ordinaux vérifiant cette propriété est non vide du fait qu'il contient  $\lambda$ . Supposons que  $\beta$  est un ordinal limite (uniquement si  $\lambda$  est un cardinal transfini), alors pour tout  $\alpha < \beta$  les précompositions de  $f_1$  et  $f_2$  par le morphisme naturel  $P_\alpha(A) \rightarrow P_\beta(A)$  sont des morphismes identiques par minimalité de  $\beta$ . Mais donc par propriété universelle de la colimite séquentielle transfinitie  $P_\beta(A)$ , les morphismes  $f_1$  et  $f_2$  sont identiques, ce qui contredit la définition de  $\beta$ . Supposons alors que  $\beta$  n'est pas un ordinal limite. Soit  $\beta$  est nul, ce qui donnerait que  $f_1 = f_2 = f$ , ce qui est absurde, soit  $\beta$  admet un prédécesseur. Par minimalité de  $\beta$ , on sait que les précompositions de  $f_1$  et  $f_2$  par le morphisme naturel  $P_{\beta-1}(A) \rightarrow P_\beta(A)$  sont des morphismes identiques. Comme  $P_\beta(A)$  est la somme amalgamée de  $P_{\beta-1}(A)$  par les diagrammes de  $P_{\beta-1}$ , regardons ce qui se passe au niveau des diagrammes. On remarque en outre que les morphismes  $f_1$  et  $f_2$  préservent le marquage comme composés de morphismes préservant le marquages par le morphisme naturel  $P_\beta(A) \rightarrow P(A)$  qui préserve le marquage, comme on l'a vu dans la première partie de la démonstration. Par définition du marquage des diagrammes de  $P_{\beta-1}$ , par rationalité de  $P$  et du fait que  $f_1$  et  $f_2$  préservent le marquage, il vient que les restrictions de  $f_1$  et  $f_2$  aux buts des flèches de  $I$  apparaissant dans les diagrammes de  $P_{\beta-1}$  sont identiques et valent le relèvement marqué dans  $\nu$  pour ces flèches. Ainsi par propriété universelle de la somme amalgamée  $P_\beta(A)$ , il vient que  $f_1$  et  $f_2$  sont égaux, ce qui contredit la définition de  $\beta$ .

On a donc montré par l'absurde l'unicité de la factorisation de  $f$  à travers  $A \rightarrow P(A)$  par un morphisme préservant le marquage.

CQFD.

Après avoir donné un critère pour qu'un plan d'addition de cellules factorise de manière unique à travers un morphisme préservant le marquage les morphismes à but  $I$ -injectif marqué, donnons un exemple de plan vérifiant ce critère.

**Corollaire 2.6.6** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $I$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $I$ -cofibrations soient des monomorphismes. Tout plan d'addition de cellules  $P$  obtenu par des compositions rationnelles et dont tous les plans simples sont  $e_{I,1}$  vérifie les propriétés suivantes :*

- pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $P(A)$  a un marquage partiel naturel,
- tout morphisme  $A \rightarrow B$  vers un objet  $I$ -injectif marqué se factorise de manière unique à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  en un morphisme préservant le marquage.

*Preuve :*

Comme par la proposition 2.4.8,  $P$  est rationnel car obtenu par des compositions rationnelles, il suffit de voir qu'à chaque étape les diagrammes n'apparaissent qu'avec la cardinalité un, ce qui est bien le cas ici car à chaque étape le plan simple n'est autre que  $e_{I,1}$ . On peut donc appliquer le lemme précédent à  $P$ , ce qui nous donne le résultat.

CQFD.

En réunissant ce corollaire avec le lemme 2.5.5, on obtient un plan d'addition de cellules satisfaisant les propriétés i) et ii) de la I-injectivisation avec en prime l'unicité pour i) quand on considère les objets I-injectifs marqués.

**Proposition 2.6.7** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\alpha$ -petites pour un certain cardinal régulier  $\alpha$  et tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soit  $\alpha'$  le plus petit cardinal régulier supérieur à  $\alpha$ .*

*Notons  $E_\Phi$  le plan d'addition de cellules fonctoriel de longueur  $\alpha'$  obtenu par des compositions rationnelles et dont tous les plans simples sont  $e_{\Phi,1}$ .*

*Alors, pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$ ,  $E_\Phi(A)$  est un objet  $\Phi$ -injectif marqué et tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  dont le but est  $\Phi$ -injectif marqué se factorise de manière unique à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow E_\Phi(A)$  en un morphisme préservant le marquage.*

*Preuve :*

Le plan ici noté  $E_\Phi$  n'est autre que le plan  $E'_{\Phi,1}$  qui d'après le lemme 2.5.5 rend I-injectifs les objets auxquels on l'applique. En outre  $E_\Phi$  étant obtenu par des compositions rationnelles et uniquement composé de plans simples  $e_{\Phi,1}$ , on peut lui appliquer le corollaire précédent, ce qui termine de montrer la proposition.

CQFD.

**Corollaire 2.6.8** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\alpha$ -petites pour un certain cardinal régulier  $\alpha$  et tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soit  $\alpha'$  le plus petit cardinal régulier supérieur à  $\alpha$ .*

*Notons  $E_\Phi$  le plan d'addition de cellules fonctoriel de longueur  $\alpha'$  obtenu par des compositions rationnelles et dont tous les plans simples sont  $e_{\Phi,1}$ .*

*Alors  $E_\Phi$  est un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}_{I-injm}$  qui est adjoint à gauche du foncteur  $Oubli$ , i.e. on a un isomorphisme naturel en  $A$  et  $(B, \nu)$  induit par le morphisme naturel  $A \rightarrow E_\Phi(A)$  :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{I-injm}}(E_\Phi(A), (B, \lambda)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{Oubli}((B, \nu)))$$

*Preuve* : cela découle directement de l'unicité de la factorisation par un morphisme préservant le marquage de tout morphisme à but un objet I-injectif marqué. CQFD.

Comme on l'a vu plus haut, le point fort de cette construction particulière est que si l'on exhibe un plan d'addition de cellules vérifiant les propriétés i) et ii) de l'I-injectivisation mais aussi la propriété iii) pour les objets I-injectifs, alors notre construction vérifiera aussi iii), ce qui en fera un procédé d'I-injectivisation.

## 2.7 I-injectivisation et équivalence d'objets I-injectifs

Maintenant que l'on a un plan d'addition de cellules  $E_I$  fonctoriel, vérifiant les propriétés i) et ii) de l'I-injectivisation et qui assure l'unicité de la factorisation du i) pour les objets I-injectifs marqués, il ne nous reste plus qu'à montrer que  $E_I$  vérifie la propriété iii), à savoir que pour tout objet  $A$ , l'image par  $E_I$  du morphisme naturel  $A \rightarrow E_I(A)$  est une équivalence d'objets I-injectifs, lorsqu'on s'est donné une telle notion. Pour cela on va supposer que l'on connaît un plan d'addition de cellules fonctoriel  $P$  vérifiant i) et ii) tel que, pour tout objet  $A$  I-injectif, le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une équivalence d'objets I-injectifs.

**Proposition 2.7.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\alpha$ -petites pour un certain cardinal régulier  $\alpha$  et tel que les  $\Phi$ -cofibrations soient des monomorphismes. Soit  $\alpha'$  le plus petit cardinal régulier supérieur à  $\alpha$ . Considérons sur  $\mathcal{C}$  une notion d'équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs vérifiant les propriétés suivantes :*

- pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes composables entre objets  $\Phi$ -injectifs, si parmi  $f, g, g \circ f$  deux morphismes sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, alors le troisième morphisme aussi,
- pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes composables entre objets  $\Phi$ -injectifs, si la composée  $g \circ f$  est l'identité et que la composée  $f \circ g$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, alors  $f$  et  $g$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs,
- les isomorphismes entre objets  $\Phi$ -injectifs sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs.

Notons  $E_\Phi$  le plan d'addition de cellules fonctoriel de longueur  $\alpha'$  obtenu par des compositions rationnelles et dont tous les plans simples sont  $e_{\Phi,1}$ .

Soit  $P$  un plan d'addition de cellules de  $\Phi$  fonctoriel vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $P(A)$  est  $\Phi$ -injectif,
- tout morphisme  $A \rightarrow B$  dont le but est  $\Phi$ -injectif se factorise à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$ ,
- pour tout objet  $A$   $\Phi$ -injectif, le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs.

Alors  $E_\Phi$  est une  $\Phi$ -injectivisation, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes :

- i) pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $E_\Phi(A)$  est  $\Phi$ -injectif,
- ii) tout morphisme  $A \rightarrow B$  dont le but est  $\Phi$ -injectif se factorise à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow E_\Phi(A)$ ,
- iii) pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ , l'image par  $E_\Phi$  du morphisme naturel  $A \rightarrow E_\Phi(A)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs.

De plus pour tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$  entre objets  $I$ -injectifs, on aura l'équivalence suivante :

$f$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs si et seulement si  $E_\Phi(f)$  l'est.

*Preuve :*

Par propriété du plan  $P$ , pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $P(A)$  est  $\Phi$ -injectif. Choisissons-lui un marquage. Il est facile de voir alors que pour la propriété de factorisation par  $P(A)$  de tout morphisme de  $A$  vers un but  $\Phi$ -injectif marqué, il existe un morphisme marqué de  $P(A)$  vers  $B$  préservant le marquage et réalisant la factorisation voulue. En effet,  $P(A)$  étant une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches de  $\Phi$ , il suffit d'envoyer les flèches marquées de  $P(A)$  sur celles marquées de  $B$  et d'utiliser la propriété de relèvement à droite de  $B$  pour les flèches de  $\Phi$  qui ne porte pas le marquage de  $P(A)$ . On remarque cependant qu'une telle factorisation par un morphisme marqué n'est pas unique du fait de la présence dans  $P(A)$  de flèches de  $\Phi$  ne portant pas le marquage.

La construction  $E_\Phi$  vérifie les propriétés i) et ii) de la  $\Phi$ -injectivisation par la proposition 2.6.7. De plus par cette proposition, tout morphisme à valeur dans un objet  $\Phi$ -injectif marqué admet une factorisation marquée unique à travers  $E_\Phi$ . Il ne reste donc plus qu'à montrer iii). Pour cela on va tout d'abord comparer les plans  $P$  et  $E_\Phi$ , ce qui nous permettra de montrer que  $E_\Phi$  vérifie lui aussi la troisième propriété de  $P$ . C'est de là que découlera la propriété iii) pour  $E_\Phi$ .

Pour la suite, choisissons un objet  $A$  quelconque de  $\mathcal{C}$  et notons  $e_A$  le morphisme naturel de  $A$  vers  $E_\Phi(A)$  et  $p_A$  le morphisme naturel de  $A$  vers  $P(A)$ . Fixons un choix de marquage pour  $P(A)$ . D'après ce qui précède, il existe un morphisme  $pe_A$  de  $P(A)$  vers  $E_\Phi(A)$  préservant le marquage et tel que  $pe_A \circ p_A = e_A$ . De plus par propriété de  $E_\Phi(A)$ , il existe un unique morphisme  $ep_A$  de  $E_\Phi(A)$  vers  $P(A)$  préservant le marquage et tel que  $ep_A \circ e_A = p_A$ . Considérons l'égalité suivante :  $pe_A \circ ep_A \circ e_A = pe_A \circ p_A = e_A$ . Or par propriété d'unicité de factorisation marquée par  $e_A$ , il vient que  $pe_A \circ ep_A$  n'est

autre que  $Id_{E_\Phi(A)}$ . Considérons maintenant l'égalité suivante :  $ep_A \circ pe_A \circ p_A = ep_A \circ e_A = p_A$ . Si  $A$  est  $\Phi$ -injectif, alors par propriété de  $P$ , on a que  $p_A$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Ici on a que  $p_A$  et  $(ep_A \circ pe_A) \circ p_A = p_A$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs. Par la première propriété des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, il vient que  $ep_A \circ pe_A$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. On a donc que  $pe_A \circ ep_A$  est une identité et que  $ep_A \circ pe_A$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Alors par la seconde propriété des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, il vient que  $ep_A$  et  $pe_A$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, lorsque  $A$  est  $\Phi$ -injectif.

Supposons encore que  $A$  est  $\Phi$ -injectif. Considérons l'égalité  $ep_A \circ e_A = p_A$ . Deux des trois morphismes sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs : en effet  $p_A$  est une équivalence par propriété de  $P$  et  $ep_A$  est une équivalence par ce qui précède. Par la première propriété des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, il vient que le troisième morphisme  $e_A$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Ceci montre que pour tout objet  $A$   $\Phi$ -injectif, le morphisme naturel  $e_A : A \rightarrow E_\Phi(A)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs.

Supposons maintenant  $A$  quelconque. Appliquons la propriété de factorisation par  $e_{E_\Phi(A)}$  à l'identité de  $E_\Phi(A)$ . On obtient un unique morphisme  $r : E_\Phi(E_\Phi(A)) \rightarrow E_\Phi(A)$  préservant le marquage et tel que  $r \circ e_{E_\Phi(A)} = Id_{E_\Phi(A)}$ . Comme  $E_\Phi(A)$  est  $\Phi$ -injectif, par le résultat précédent, il vient que  $e_{E_\Phi(A)}$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Comme l'identité en est aussi une, par la première propriété des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, on obtient que  $r$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{e_A} & E_\Phi(A) & \xrightarrow{Id} & E_\Phi(A) \\
 \downarrow e_A & & \downarrow e_{E_\Phi(A)} & \nearrow r & \\
 E_\Phi(A) & \xrightarrow{E_\Phi(e_A)} & E_\Phi(E_\Phi(A)) & & 
 \end{array}$$

Par ce diagramme, on obtient l'égalité suivante :  $r \circ E_\Phi(e_A) \circ e_A = r \circ e_{E_\Phi(A)} \circ e_A = Id \circ e_A = e_A$ . Par unicité de la factorisation marquée par  $e_A$ , il vient que  $r \circ E_\Phi(e_A)$  n'est autre que l'identité de  $E_\Phi(A)$ . Or l'identité et  $r$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, donc, toujours par la première propriété des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, on a bien que  $E_\Phi(e_A)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Ceci montre la propriété iii) de la  $\Phi$ -injectivisation pour  $E_\Phi$ . Comme  $E_\Phi$  a déjà les propriétés i) et ii), on a donc montré que  $E_\Phi$  est bien



une  $\Phi$ -injectivisation.

Pour terminer, considérons un morphisme  $f : A \rightarrow B$  quelconque entre objets  $\Phi$ -injectifs. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ e_A \downarrow & & \downarrow e_B \\ E_\Phi(A) & \xrightarrow{E_\Phi(f)} & E_\Phi(B) \end{array}$$

Comme  $A$  et  $B$  sont  $\Phi$ -injectifs, par ce qui précède, on a que les morphismes  $e_A$  et  $e_B$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs. En appliquant à ce diagramme la première propriété des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, il vient que  $f$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs si et seulement si  $E_\Phi(f)$  l'est, ce qui montre le dernier résultat de la proposition.

CQFD.

Au passage, on remarque lors de cette démonstration l'utilité de l'unicité de la factorisation du plan  $E_\Phi$ . En effet, dans la démonstration, on montre d'abord que  $E_\Phi$  vérifie que pour tout objet  $\Phi$ -injectif  $A$ , le morphisme naturel  $e_A : A \rightarrow E_\Phi(A)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. A ce moment-là,  $E_\Phi$  et  $P$  ont alors les mêmes propriétés à l'exception de l'unicité de la factorisation. Or c'est précisément grâce à cette dernière propriété que l'on montre que  $E_\Phi$  vérifie iii).

En outre la dernière propriété de la proposition nous permet d'étendre la notion d'équivalence pour les objets  $\Phi$ -injectifs aux objets quelconques.

**Corollaire 2.7.2** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, définissons une notion de  $\Phi$ -équivalence comme suit :*

*un morphisme  $f$  quelconque de  $\mathcal{C}$  est une  $\Phi$ -équivalence si  $E_\Phi(f)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs.*

*Alors ces  $\Phi$ -équivalences vérifient les propriétés suivantes :*

- *pour tout couple de morphismes composables  $(f, g)$ , si parmi  $f, g, g \circ f$  deux morphismes sont des  $\Phi$ -équivalences, alors le morphisme restant aussi. On appellera cette propriété de la  $\Phi$ -équivalence la propriété du "trois pour deux".*
- *pour tout couple de morphismes composables  $(f, g)$ , si  $f \circ g$  est l'identité et  $g \circ f$  une  $\Phi$ -équivalence, alors  $f$  et  $g$  sont des  $\Phi$ -équivalences.*

- les isomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont des  $\Phi$ -équivalences.
- pour les morphismes d'objets  $\Phi$ -injectifs, les notions de  $\Phi$ -équivalence et d'équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs se confondent.

*Preuve :*

Soient  $f$  et  $g$  deux morphismes composables. Supposons que parmi  $f, g, g \circ f$  deux morphismes sont des  $\Phi$ -équivalences, ceci signifie que parmi  $E_\Phi(f), E_\Phi(g)$  et  $E_\Phi(g) \circ E_\Phi(f)$  les deux morphismes correspondant sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs. Or par propriété de l'équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, ceci nous donne que le troisième morphisme est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, donc que le troisième morphisme parmi  $f, g, g \circ f$  est une  $\Phi$ -équivalence.

Si cette fois  $f \circ g$  est l'identité et  $g \circ f$  est une  $\Phi$ -équivalence, alors comme  $E_\Phi$  est un foncteur,  $E_\Phi(f) \circ E_\Phi(g)$  est l'identité et  $E_\Phi(g) \circ E_\Phi(f)$  une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs. Or par propriété de l'équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, ceci nous donne que  $E_\Phi(f)$  et  $E_\Phi(g)$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, donc que  $f$  et  $g$  sont des  $\Phi$ -équivalences.

Soit  $f$  un isomorphisme de  $\mathcal{C}$ . Comme  $E_\Phi$  est un foncteur rendant  $\Phi$ -injectif, alors  $E_\Phi(f)$  est un isomorphisme entre objets  $\Phi$ -injectifs. Par la troisième propriété vérifiée par les équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, il vient que  $E_\Phi(f)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, donc que  $f$  est une  $\Phi$ -équivalence.

La proposition 2.7.1 montre que, pour tout morphisme  $f$  entre objets  $\Phi$ -injectifs,  $f$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs si et seulement si  $E_\Phi(f)$  l'est, c'est-à-dire si et seulement si  $f$  est une  $\Phi$ -équivalence. Ainsi pour les morphismes d'objets  $\Phi$ -injectifs, les notions de  $\Phi$ -équivalence et d'équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs sont confondues.

CQFD.

Comme pour la catégorisation, un des avantages de l'I-injectivisation est de pouvoir définir des sortes de colimites pour les objets I-injectifs. Il est alors intéressant de pouvoir comparer la colimite des I-injectivisés avec la I-injectivisation de la colimite. Dans les deux cas, il s'agit toujours de plans d'addition de cellules. Ainsi, il serait utile de pouvoir comparer les plans d'addition de cellules entre eux, ce que nous allons faire dans les sections suivantes, par l'intermédiaire de la notion de rationalisation de plans d'addition de cellules.

## 2.8 Rationalisation des plans d'addition de cellules

Comme la notion de plan rationnel permet de mieux comprendre l'opération d'addition finie ou infinie de cellules, on va montrer que l'on peut réduire tout plan d'addition à un plan rationnel, ce qui nous permettra de mieux le manipuler. Pour cela nous avons besoin d'un lemme technique sur la commutativité des colimites séquentielles transfinites avec les sommes amalgamées.

**Lemme 2.8.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $\lambda$  un cardinal transfini et  $A = \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} (A_\beta)$  une  $\lambda$ -séquence d'objets de  $\mathcal{C}$ . Soit  $P$  un plan simple sur  $A$  dont tous les diagrammes se factorisent par l'un des  $A_\beta$ . Pour tout  $\beta < \lambda$ , notons  $P_\beta$  le plan simple défini ainsi : un diagramme  $D$  de  $P$  est dans  $P_\beta$  si et seulement si  $\beta$  est le plus petit indice tel que  $d$  se factorise par  $A_\beta$ . Et notons  $P_{<\beta}$  le plan simple réunion des plans simples  $P_\alpha$  pour  $\alpha < \beta$ .*

*Posons maintenant  $A'_0 = A_0$  et, pour tout  $\beta < \lambda$ , posons :*

$$A'_\beta = A_\beta \coprod_{\coprod_{D \in P_{<\beta}} \coprod_{\alpha_D} S_{\phi_D}} \left( \coprod_{D \in P_{<\beta}} \coprod_{\alpha_D} B_{\phi_D} \right).$$

*On a alors l'égalité suivante :*

$$\left( \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} A_\beta \right) \coprod_{\coprod_{D \in P} \coprod_{\alpha_D} S_{\phi_D}} \left( \coprod_{D \in P} \coprod_{\alpha_D} B_{\phi_D} \right) \cong \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} A'_\beta$$

*Preuve :*

En utilisant les propriétés universelles des sommes amalgamées, des coproduits et des colimites séquentielles transfinites, on exhibe un unique morphisme de la somme amalgamée vers la colimite et un unique morphisme de la colimite vers la somme amalgamée. Toujours en utilisant les propriétés universelles, on montre que ces morphismes sont inverses l'un de l'autre.

CQFD.

**Proposition 2.8.2** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Alors tout plan d'addition de cellules fini ou infini est rationalisable dans le sens suivant. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan quelconque sur  $X$ . Notons  $(X_\beta)_{\beta < \lambda}$  sa suite associée. Alors il existe un plan rationnel  $Q$  sur  $X$ , dont*

la suite associée sera notée  $(Z_\beta)_{\beta \leq \lambda}$  et, pour tout  $\beta \leq \lambda$ , des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $X_\beta$  vers  $Z_\beta$  tels que le morphisme entre  $P.(X)$  et  $Q.(X)$  soit un isomorphisme et que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X = X_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_\beta & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_\lambda = P.(X) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \cong \\
 = & & & & & & & & \\
 X = Z_0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_\beta & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_\lambda = Q.(X)
 \end{array}$$

*Preuve :*

Soit  $\lambda$  un cardinal transfini quelconque. Montrons que tout plan de longueur inférieure ou égale à  $\lambda$  est rationnalisable en un plan à compositions rationnelles, par récurrence transfinie sur la longueur du plan. En effet comme par hypothèse les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes, par la proposition 2.4.8, les plans à compositions rationnelles sont des plans rationnels. On va donc montrer la proposition dans le cas plus fort des plans à compositions rationnelles. Si le plan est à un pas alors il est nécessairement à composition rationnelle car non constitué de composition de plans simples.

Supposons la proposition vraie pour tout plan à  $\beta$  pas où  $\beta < \lambda$  est un ordinal quelconque. Soit  $P.$  un plan sur  $X$  à  $\beta + 1$  pas. Notons  $(X_\alpha)_{\alpha \leq \beta+1}$  la  $\beta + 1$ -séquence associée. Par définition de plan d'addition, on a que  $P.(X)$  est la somme amalgamée de  $X_\beta$  par un coproduit de cellules indexé par  $P_\beta$ . Or  $X_\beta$  est le résultat d'un plan à  $\beta$  pas donc, par hypothèse, il existe un plan à composition rationnelle à  $\beta$  pas  $Q.$ , dont la  $\beta$ -séquence associée sera notée  $(Z_\alpha)_{\alpha \leq \beta}$ , et, pour tout  $\alpha \leq \beta$ , des morphismes de  $X_\alpha$  vers  $Z_\alpha$  dans  $X/\mathcal{C}$  tel que celui entre  $X_\beta$  et  $Q.(X)$  est un isomorphisme. Avec les notations du lemme précédent, il vient que la somme amalgamée de  $X_\beta$  par un coproduit de cellules indexé par  $(P_\beta)_{<\beta}$  est isomorphe dans  $X/\mathcal{C}$  à la somme amalgamée

de  $Z_\beta$  par un coproduit de cellules indexé par  $P'$ , extension de  $(P_\beta)_{<\beta}$  par l'isomorphisme de  $X_\beta$  à  $Z_\beta$ . L'existence de morphismes de  $X_\alpha$  vers  $Z_\alpha$  assure que les diagrammes de  $P'$  se factorisent par les  $Z_\alpha$  pour  $\alpha < \beta$ . Par le lemme précédent, cette somme amalgamée est isomorphe dans  $X/\mathcal{C}$  à une colimite séquentielle transfinie de  $Z'_\alpha$ . Par définition,  $Z'_{\alpha+1}$  est la somme amalgamée de  $Z_{\alpha+1}$  par un coproduit de cellules indexé par  $P'_{<\alpha+1}$ . Or  $Z_{\alpha+1}$  est lui-même la somme amalgamée de  $Z_\alpha$  par un coproduit de cellules indexé par  $Q_\alpha$ . Donc  $Z'_{\alpha+1}$  est la somme amalgamée de  $Z_\alpha$  par un coproduit de cellules indexé par  $P'_{<\alpha+1}$  et  $Q_\alpha$ . Comme la somme amalgamée de  $Z_\alpha$  par un coproduit de cellules

indexé par  $P'_{<\alpha}$  n'est autre que  $Z'_\alpha$ , il vient que  $Z'_{\alpha+1}$  est la somme amalgamée de  $Z'_\alpha$  par un coproduct de cellules indexé par  $P'_\alpha$  et  $Q_\alpha$ . Posons donc  $Q'_\alpha$  le plan simple réunion de  $P'_\alpha$  et  $Q_\alpha$ . On vient donc de montrer que la suite des  $Q'_\alpha$  n'est autre que le plan associé à la  $\beta$ -séquence des  $Z'_\alpha$ .

Montrons que pour tout  $\alpha < \beta$  les diagrammes de  $Q'_\alpha$  ne se factorisent pas par  $Z'_\gamma$ , pour  $\gamma < \alpha$ . Soit  $D$  un diagramme de  $Q'_\alpha$  qui se factorise par  $Z'_\gamma$ , avec  $\gamma \leq \alpha$ , comme en outre ce diagramme a valeur dans  $Z_\alpha$ , alors il se factorise par le produit fibré de  $Z'_\gamma$  par  $Z_\alpha$  sur  $Z'_\alpha$  qui n'est autre que  $Z_\gamma$ . Or si  $D$  est un diagramme de  $Q_\alpha$ , comme  $Q_\alpha$  est un plan à compositions rationnelles, alors  $\gamma$  n'est autre que  $\alpha$  et si  $D$  est dans  $P'_\alpha$ , par définition même de  $P'_\alpha$ , on a donc  $\gamma$  égal à  $\alpha$ . Ceci montre que la suite des  $Q'_\alpha$  forme un plan sur  $X$  dont toutes les compositions sont rationnelles. En outre on a montré qu'il est isomorphe dans  $X/\mathcal{C}$  à la somme amalgamée de  $X_\beta$  par un coproduct de cellules indexé par  $\left(P_\beta\right)_{<\beta}$  et muni de morphismes de  $X_\alpha$  vers  $Z'_\alpha$ , pour tout  $\alpha \leq \beta$ . On termine en posant :  $Q'_\beta$  est l'extension par cet isomorphisme de  $\left(P_\beta\right)_\beta$  et  $Z'_{\beta+1}$  la somme amalgamée de  $Z'_\beta$  par un coproduct de cellules indexé par  $Q'_\beta$ . Par un argument similaire à ce qui précède en utilisant la définition de  $\left(P_\beta\right)_\beta$ , on montre que les diagrammes de  $Q'_\beta$  ne se factorisent pas par  $Z'_\gamma$ , avec  $\gamma < \beta$ , ainsi le plan  $Q'_\beta$  à  $\beta + 1$  pas est à compositions rationnelles. En outre comme la somme amalgamée de  $X_\beta$  par un coproduct de cellules, indexé par  $\left(P_\beta\right)_{<\beta}$ , et  $Z'_\beta$  sont isomorphes dans  $X/\mathcal{C}$ , il vient que  $P(X)$  et la somme amalgamée de  $Z'_\beta$  par  $Q'_\beta$  sont isomorphes dans  $X/\mathcal{C}$ . On a donc montré que  $P$  a pour rationalisation le plan à compositions rationnelles  $Q'_\beta$ , i.e. que  $P$  est rationalisable.

Supposons la proposition vraie pour tout plan d'addition de cellules de longueur strictement inférieure à  $\beta$ , pour  $\beta < \lambda$  ordinal limite. Soit  $P$  un plan sur  $X$  à  $\beta$  pas. Notons  $(X_\alpha)_{\alpha \leq \beta}$  la  $\beta$ -séquence associée. Par définition de plan infini, on a que  $P(X)$  est la colimite des  $X_\alpha$  pour  $\alpha < \beta$ . Construisons par récurrence transfinie sur  $\alpha < \beta$  une suite de couples de plans infinis  $(Q_{\alpha,\cdot}, P_{\alpha,\cdot})_{\alpha < \beta}$  dont les séquences associées sont notées respectivement  $(Z_{\alpha,\gamma})_{\gamma \leq \alpha}$  et  $(X_{\alpha,\gamma})_{\gamma > \alpha}$  vérifiant les propriétés suivantes : les plans  $Q_{\alpha,\cdot}$  sont à compositions rationnelles, ces couples de plans sont munis de morphismes entre eux dans  $X/\mathcal{C}$ , ceux de  $X_{\gamma,\alpha}$  vers  $Z_{\alpha,\alpha}$  et ceux de  $X_{\gamma,\beta}$  vers  $X_{\alpha,\beta}$ , pour

tout  $\gamma < \alpha$ , sont des isomorphismes.

Pour  $\alpha$  nul,  $Q_{\alpha..}$  sera un plan vide et  $P_{\alpha..}$  le plan  $P$ . Supposons construits ces couples jusqu'au rang  $\alpha$ , alors le plan composé  $P_{\alpha,\alpha} \circ Q_{\alpha..}$  est un plan à  $\alpha + 1$  pas. Comme  $\alpha < \beta$  et que  $\beta$  est un ordinal limite, par hypothèse de récurrence, la proposition s'applique. Notons alors  $Q_{\alpha+1..}$  le plan à compositions rationnelles rationalisation de  $P_{\alpha,\alpha} \circ Q_{\alpha..}$ , cette rationalisation vient avec des morphismes dans  $X/\mathcal{C}$  entre la séquence de  $P_{\alpha,\alpha} \circ Q_{\alpha..}$  et celle de  $Q_{\alpha+1..}$ , tels que celui de  $X_{\alpha,\alpha+1}$  vers  $Z_{\alpha+1,\alpha+1}$  est un isomorphisme. On pose alors  $P_{\alpha+1..}$  l'extension de  $P_{\alpha..+1}$  par cet isomorphisme. On obtient donc bien que le morphisme entre  $P_{\alpha..} \circ Q_{\alpha..}(X)$  et  $P_{\alpha+1..} \circ Q_{\alpha+1..}(X)$  est un isomorphisme. Supposons ces plans construits pour tout  $\gamma < \alpha$ , ordinal limite. Alors on définit  $Q_{\alpha,\gamma}$  comme la réunion des plans  $Q_{\delta,\gamma}$  pour tout  $\gamma < \delta < \alpha$  et  $Z_{\alpha,\gamma}$  comme la colimite séquentielle transfinie des  $Z_{\delta,\gamma}$  pour tout  $\gamma < \delta < \alpha$ . Il est facile de voir d'une part que, par un résultat similaire à celui du lemme précédent,  $Q_{\alpha..}$  est bien le plan infini associé à la suite des  $(Z_{\alpha,\gamma})_{\gamma < \alpha}$  et d'autre part que, par interversion des colimites, le  $Z_{\alpha,\alpha}$  ainsi obtenu est isomorphe dans  $X/\mathcal{C}$  à tous les  $X_{\gamma,\alpha}$ , pour  $\gamma < \alpha$ . La compatibilité de ces isomorphismes entraîne que les extensions par ces isomorphismes des plans  $P_{\gamma,+\alpha-\gamma}$  donnent lieu à un unique plan que l'on notera  $P_{\alpha..}$ . On a donc les morphismes des  $X_{\gamma,\beta}$  vers  $X_{\alpha,\beta}$  sont des isomorphismes. Enfin le plan  $Q_{\alpha..}$  est bien à compositions rationnelles car un diagramme de  $Q_{\alpha,\gamma}$  ne peut pas se factoriser par un  $Z_{\alpha,\gamma'}$ , avec  $\gamma' < \gamma < \alpha$ , car il appartient en fait à l'un des  $Q_{\delta,\gamma}$ , pour un certain  $\delta < \alpha$ , et donc s'il se factorise par  $Z_{\alpha,\gamma'}$ , il se factoriserait aussi par  $Z_{\delta,\gamma'}$ , ce qui contredirait la rationalité des compositions du plan  $Q_{\delta..}$ . On a donc bien le résultat cherché par récurrence transfinie sur  $\alpha < \beta$ .

Ainsi pour tout ordinal  $\gamma < \beta$ , on a une suite de plans simples  $(Q_{\alpha,\gamma})_{\gamma < \alpha < \beta}$  et une  $\beta$ -séquence d'objets  $(Z_{\alpha,\gamma})_{\gamma < \alpha < \beta}$ . Posons  $Q^\gamma$  le plan simple réunion de cette suite de plans simples et  $Z^\gamma$  la colimite de la  $\beta$ -séquence des  $Z_{\alpha,\gamma}$ . Il est facile de voir, en utilisant un résultat similaire au lemme précédent, que la suite des  $Q^\gamma$  forme un plan infini dont  $(Z^\gamma)_{\gamma \leq \beta}$  est la  $\beta$ -séquence associée, où  $Z^\beta$  note la colimite de la  $\beta$ -séquence. Nous allons donc montrer que d'une part le plan infini des  $Q^\gamma$  est à compositions rationnelles et qu'il existe un isomorphisme dans  $X/\mathcal{C}$  entre  $P(X)$  et  $Z_\beta$ .

Soient  $\gamma < \beta$  un ordinal et  $D$  un diagramme de  $Q^\gamma$  tel que  $d$  se factorise par un  $Z^{\gamma'}$ , avec  $\gamma' \leq \gamma$ . Comme  $Q^\gamma$  est une réunion de plans simples, il existe un ordinal  $\alpha$  tel que  $D$  soit en fait un diagramme de  $Q_{\alpha,\gamma}$ . Donc  $d$  a pour but

$Z_{\alpha,\gamma}$ . Or comme  $d$  se factorise par  $Z^\gamma$ , alors  $d$  se factorise par  $Z_{\alpha,\gamma'}$ . Or  $D$  est un diagramme de  $Q_{\alpha,\gamma}$  et par hypothèse  $Q_{\alpha,\cdot}$  est à compositions rationnelles donc  $\gamma'$  est égal à  $\gamma$ . Ceci montre que le plan infini des  $Q^\gamma$  est à compositions rationnelles.

Par interversion des colimites, on a que la colimite des  $X_{\alpha,\beta}$  pour  $\alpha < \beta$  n'est autre que celle des  $Z^\gamma$  pour  $\gamma < \beta$ . Or le morphisme de  $X_\beta$  dans cette colimite est une colimite séquentielle transfinie d'isomorphismes par construction, donc on a bien que le morphisme dans  $X/\mathcal{C}$  de  $X_\beta$  vers  $Z^\beta$  est un isomorphisme.

Donc le plan  $P$  à  $\beta$  pas est bien rationalisable. Donc par récurrence transfinie sur  $\beta \leq \lambda$ , on a bien montré que tout plan infini d'au plus  $\lambda$  pas est rationalisable.

CQFD.

Il est intéressant mais aussi utile pour la suite d'énoncer un corollaire, tiré directement de la démonstration de rationalisation des plans d'addition de cellules, qui donne une construction explicite de rationalisation des plans d'addition infinie de cellules.

**Corollaire 2.8.3** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$  un plan quelconque sur  $X$ . Notons  $(X_\beta)_{\beta \leq \lambda}$  sa suite associée. Alors il possède comme rationalisation le plan à compositions rationnelles  $Q$  sur  $X$ , dont la suite associée sera notée  $(Z_\beta)_{\beta \leq \lambda}$ , défini de la manière suivante.*

*Pour tout couple d'ordinaux  $\alpha, \beta$  inférieur à  $\lambda$ , notons  $(P_\alpha)_\beta$  l'ensemble des couples  $(D', \alpha_{D'})$  tel que  $D'$  se factorise par  $Z_\beta$  mais pas par  $Z_\gamma$  pour  $\gamma < \beta$ , où les  $D'$  sont les extensions par  $X_\alpha \rightarrow Z_\alpha$  des diagrammes  $D$  de  $P_\alpha$  et où  $\alpha_{D'}$  est la cardinalité de  $D$  dans  $P_\alpha$ .*

*On définit alors  $Q_\beta$  comme la colimite des plans  $(P_\alpha)_\beta$  pour  $\alpha < \lambda$ .*

*Preuve :* C'est le plan à compositions rationnelles associé à  $P$ , construit par récurrence transfinie dans la démonstration de la proposition précédente. CQFD.

Cette notion de rationalisation des plans d'addition de cellules nous permettra de comparer les plans d'addition de cellules, car il découle de la proposition de rationalisation des plans d'addition de cellules que deux plans d'addition de cellules sont isomorphes si et seulement si leurs rationalisations le sont.

## 2.9 Plan rationnel $HCat$

Dans cette partie, nous allons construire un plan d'addition de cellules rationnel  $HCat_\lambda$  qui sera le modèle de certains plans d'addition de cellules rationnels. En fait, il s'agit d'un plan du type  $E'_{\Phi, \lambda}$  au sens du lemme 2.5.5, mais dont le nombre d'exemplaires d'une même cellule qu'il rajoute à chaque fois n'est autre que le cardinal de sa longueur. Un tel plan d'addition de cellules a la bonne propriété que composé avec un de ses sous-plans, il donne un nouveau plan équivalent à lui-même. Donnons d'abord sa définition explicite.

**Définition 2.9.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\lambda$  un ordinal transfini limite. On définit  $HCat_\lambda$  par récurrence transfinie. Posons  $e_\lambda^0$  le plan à un pas  $e_{\Phi, Card(\lambda)}$ . Supposons construit le plan  $e_\lambda^\beta$ , pour  $\beta < \lambda$ , alors on pose  $e_\lambda^{\beta+1} = e_{\Phi, Card(\lambda)} * e_\lambda^\beta$ . Supposons construits les plans  $e_\lambda^\alpha$  pour tout  $\alpha < \beta$  avec  $\beta$  cardinal limite, on définit alors le plan  $e_\lambda^\beta$  comme colimite des  $e_\lambda^\alpha$ , pour  $\alpha < \beta$ . Ainsi par récurrence transfinie, on a donc défini pour tout  $\beta < \lambda$  les plans  $e_\lambda^\beta$ .*

*On définit donc le plan  $HCat_\lambda$  comme colimite des  $e_\lambda^\beta$  pour  $\beta < \lambda$ . Par définition même,  $HCat_\lambda$  est un plan à compositions rationnelles, et donc un plan rationnel si les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes par proposition 2.4.8.*

Ces plans rationnels d'addition de cellules  $HCat_\lambda$  sont différents uniquement en fonction de leur longueur. Toutefois pour certaines longueurs, ces plans d'addition de cellules sont quand même identiques.

**Lemme 2.9.2** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\mu$ -petites, pour un certain ordinal  $\mu$ . Soit  $\lambda$  un ordinal transfini limite dont le cardinal est supérieur à  $\mu$ . Alors pour tout ordinal limite  $\lambda'$  ayant même cardinalité que  $\lambda$ , on a un isomorphisme dans  $X/\mathcal{C}$  entre  $HCat_\lambda$  et  $HCat_{\lambda'}$*

*Preuve :*

On remarque tout d'abord que, par définition de composition rationnelle, si un plan est vide alors les seuls plans composables rationnellement avec lui sont également vides. On remarque aussi que les deux plans  $HCat_\lambda$  et  $HCat_{\lambda'}$  ne diffèrent que par leur longueur. Comparons les au plan  $HCat_{Card(\lambda)}$  qui ne diffère des deux autres lui aussi que par sa longueur. On remarque qu'à l'étape  $Card(\lambda)$  des trois plans  $HCat(X)$ , par petitesse des sources des morphismes de  $\Phi$ , tous les diagrammes de  $\Phi$  à valeur dans  $X_{Card(\lambda)}$  se factorisent par des



$X_\beta$  pour  $\beta < \text{Card}(\lambda)$ . Ceci entraîne que le plan simple des trois  $HCat(X)$  au niveau  $\text{Card}(\lambda)$  est vide et donc de même pour les suivants, ce qui montre que les plans  $HCat_\lambda$  et  $HCat_{\lambda'}$  sont isomorphes au plan  $HCat_{\text{Card}(\lambda)}$ .  
CQFD.

Avant de voir les propriétés de stabilité de notre plan rationnel d'addition de cellules  $HCat$  vis-à-vis de ses sous-plans, définissons ce que l'on entend par sous-plan d'un plan d'addition de cellules.

**Définition 2.9.3** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soient  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $P$ , et  $R$ , des plans d'addition de cellules sur  $X$  non nécessairement de même longueur. Notons  $X_\beta$  la  $\beta$ -ième étape du plan  $P$ , appliqué à  $X$ .

On dit que le plan  $P$  est un sous-plan de  $R$ , si :

- pour tout  $\beta$ , il existe un monomorphisme de  $X_\beta$  vers  $R(X)$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & R(X) \\ \downarrow & \nearrow & \\ X_\beta & & \end{array}$$

Notons alors  $P'_\beta$  (respectivement  $R'_\gamma$ ) les extensions à  $R(X)$  des plans simples  $P_\beta$  (respectivement  $R_\gamma$ ).

- la réunion des  $P'_\beta$  est un sous-ensemble de la réunion des  $R'_\gamma$ .

Cette définition quelque peu compliquée de sous-plan traduit le fait que l'on considère comme sous-plan d'un plan d'addition de cellules donné  $R$ , tout plan prenant dans un ordre quelconque et avec un cardinal plus petit certaines des cellules du plan  $R$ . Cependant la longueur du sous-plan peut être plus grande que la longueur du plan mais il ne faut pas que le sous-plan ajoute plus de cellules que le plan  $R$ , ou qu'il ajoute des cellules différentes. Un moyen simple de vérifier cela est de regarder les extensions des cellules à  $R(X)$  et de comparer alors l'ensemble des cellules à rajouter du sous-plan avec celui de  $R$ . Montrons maintenant la stabilité des plans de type  $HCat_\lambda$  par rapport à leurs sous-plan.

**Proposition 2.9.4** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\nu$ -petites, pour un certain ordinal  $\nu$ , et tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soient  $\lambda$  un ordinal limite transfini dont le cardinal est supérieur à celui de  $\nu$  et  $P$  un sous-plan à compositions rationnelles de  $HCat_\lambda$  de longueur  $\mu$  tel que  $Card(\mu) \leq Card(\lambda)$ . Alors le plan composé  $HCat_\lambda \circ P$  se rationalise en  $HCat_\lambda$ .*

*Preuve :*

Afin de simplifier les notations, notons  $(X_\beta)_{\beta < \mu + \lambda}$  la  $\mu + \lambda$ -séquence associée à  $HCat_\lambda \circ P$ , notons  $(e_\beta)_{\beta < \mu}$  les plans simples composant  $P$  et  $(e_\beta)_{\mu \leq \beta < \mu + \lambda}$  ceux composant  $HCat_\lambda$ . Notons enfin  $Q$  la rationalisation de  $HCat_\lambda \circ P$  obtenue par le corollaire 2.8.3 et  $(Z_\beta)_{\beta < \mu + \lambda}$  sa  $\mu + \lambda$ -séquence associée.

Montrons dans un premier temps que  $Q_\beta$  est isomorphe à la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{\mu + \lambda}$ . Notons donc  $A$ , respectivement  $B$ , leurs ensembles sous-jacents des diagrammes. Comme pour tout  $\alpha < \mu + \lambda$ , les diagrammes de  $(e_\alpha)_\beta$  sont des diagrammes de  $\Phi$  à valeur dans  $Z_\beta$  ne se factorisant pas par  $Z_\delta$  pour  $\delta < \beta$ , on a bien l'inclusion de  $A$  dans  $B$ . Soit  $D$  un diagramme quelconque de  $\Phi$  à valeur dans  $Z_\beta$  ne se factorisant pas par  $Z_\delta$  pour  $\delta < \beta$ . On peut donc étendre  $D$  à  $Z_{\mu + \lambda}$  qui est isomorphe à  $X_{\mu + \lambda}$ . Comme par hypothèse, les sources des morphismes de  $\Phi$  est  $\nu$ -petites et que  $\lambda$  est un ordinal limite supérieur à  $\nu$ , l'extension de  $D$  à  $X_{\mu + \lambda}$  se factorise par un certain  $X_\gamma$ , avec  $\gamma$  minimal. Or, si  $\gamma \neq \mu$ ,  $e_\gamma$  contient tous les diagrammes de  $\Phi$  à valeur dans  $X_\gamma$  ne se factorisant pas par  $X_\delta$  pour  $\delta < \gamma$  et donc en particulier l'extension de  $D$  à  $X_{\mu + \lambda}$ . Et si  $\gamma = \mu$ , alors comme  $e_\mu$  contient tous les diagrammes de  $\Phi$  à valeur dans  $X_\mu$ , il contient en particulier l'extension de  $D$ . Ceci montre bien dans les deux cas que  $D$  appartient à  $(e_\gamma)_\beta$  donc à  $Q_\beta$ . Et donc les ensembles  $A$  et  $B$  sont isomorphes.

Pour avoir l'isomorphisme entre  $Q_\beta$  et la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{\mu + \lambda}$ , il suffit donc de montrer que tous les diagrammes ont dans  $Q_\beta$  le cardinal  $Card(\mu + \lambda) = Card(\lambda)$ .

Soit  $D$  un diagramme de  $Q_\beta$ , donc il appartient à un certain  $(e_\alpha)_\beta$ , avec  $\alpha$  minimal. Il est donc l'extension d'un diagramme  $D'$  de  $\Phi$  à valeur dans  $X_\alpha$ . Considérons deux cas.

Si  $\alpha < \mu$ , comme  $P$  est à compositions rationnelles,  $D'$  n'apparaît dans  $P$  qu'à l'étape  $\alpha$ . Or à l'étape  $\mu$  du plan composé, on s'autorise à reprendre des diagrammes existants, donc  $D'$  apparaît aussi dans  $e_\mu$  mais il n'apparaît plus au-delà par rationalité des compositions de  $HCat_\lambda$ . Or le cardinal associé à  $D'$  dans  $e_\mu$  est  $Card(\lambda)$  et celui dans  $e_\alpha$  est inférieur à  $Card(\lambda)$  car  $P$  est un sous-plan de  $HCat_\lambda$ . Ainsi le cardinal associé à  $D$  dans  $Q_\beta$  est bien  $Card(\lambda)$ .

Si  $\alpha \geq \mu$ , comme  $\alpha$  est minimal, cela signifie que  $D'$  ne se factorise pas par  $X_\gamma$  pour  $\gamma < \alpha$ . De plus comme  $HCat_\lambda$  est à compositions rationnelles,  $D'$  n'apparaît pas dans les  $e_\gamma$  pour  $\gamma > \alpha$ . Donc  $D'$  n'apparaît que dans  $e_\alpha$  où son cardinal est  $Card(\lambda)$ . Ainsi le cardinal associé à  $D$  dans  $Q_\beta$  est bien  $Card(\lambda)$ . Donc dans les deux cas, le cardinal associé à  $D$  dans  $Q_\beta$  est bien  $Card(\lambda)$ , ce qui montre que  $Q_\beta$  est isomorphe à la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{\mu+\lambda}$ , pour tout  $\beta < \mu + \lambda$ . Il s'en déduit que  $Q$  est isomorphe à  $HCat_{\mu+\lambda}$  dans  $X/\mathcal{C}$ .

On conclut en remarquant que comme les sources des morphismes de  $\Phi$  sont  $\nu$ -petites, que  $\lambda$  est un ordinal limite dont le cardinal est supérieur à celui de  $\nu$  et que  $Card(\mu + \lambda) = Card(\lambda)$  par hypothèse, le lemme 2.9.2 nous donne un isomorphisme dans  $X/\mathcal{C}$  entre  $HCat_{\mu+\lambda}$  et  $HCat_\lambda$ . Ceci montre bien que  $HCat_\lambda$  est la rationalisation de  $HCat_\lambda \circ P$ .

CQFD.

Bien évidemment ce résultat est intéressant pour le plan  $HCat$  mais ce résultat est en fait plus général qu'il n'y paraît. En effet tout plan d'addition de cellules dont la rationalisation est de la forme  $HCat$  vérifie aussi un tel résultat de stabilité vis-à-vis de ses sous-plans. C'est ce que l'on va énoncer dans le corollaire suivant.

**Corollaire 2.9.5** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\nu$ -petites, pour un certain ordinal  $\nu$ , et tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soient  $\lambda$  un ordinal limite transfini dont le cardinal est supérieur à celui de  $\nu$ ,  $R$ , un plan infini dont la rationalisation est  $HCat_\lambda$  et  $P$ , un sous-plan de  $R$ , de longueur  $\mu$  tel que  $Card(\mu) \leq Card(\lambda)$ . Alors le plan composé  $R \circ P$  se rationalise en  $HCat_\lambda$ . On en déduit donc que, sous ces hypothèses, le plan composé  $R \circ P$  et le plan  $R$  sont isomorphes dans  $X/\mathcal{C}$  car ils ont même rationalisation.*

*Preuve :*

Comme tout plan se rationalise en plan à compositions rationnelles, il vient que  $P$  est isomorphe dans  $X/\mathcal{C}$  à un plan à compositions rationnelles  $P'$  de même longueur  $\mu$ . En outre comme  $P$  est un sous-plan de  $R$ , c'est aussi un sous-plan de sa rationalisation  $HCat_\lambda$  et donc la rationalisation  $P'$  de  $P$  est bien un sous-plan de  $HCat_\lambda$ . D'où il vient que le plan composé  $R \circ P$  est isomorphe dans  $X/\mathcal{C}$  au plan composé  $HCat_\lambda \circ P'$  qui vérifie bien les hypothèses de la proposition précédente, ce qui permet ainsi de conclure.

CQFD.

Grâce à ce corollaire, on obtient le résultat fondamental suivant : pour tout plan infini d'addition de cellules dont la rationalisation est un  $HCat$ , on peut faire d'abord une partie (éventuellement tout) du plan puis faire ensuite le plan tout entier sur ce que l'on a obtenu et on aboutit au final à la même chose que si l'on avait fait directement tout le plan dès le début. Nous allons voir des conséquences de ce résultat pour les plans d'addition de cellules que nous utiliserons dans la suite de cette thèse pour les  $\mathcal{C}$ -précatégories.

## 2.10 Exemples particuliers de plans d'addition de cellules à usage pour les $\mathcal{C}$ -précatégories

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux plans d'addition de cellules qui formalisent ceux qui interviennent dans la construction *Bigcat* des  $\mathcal{C}$ -précatégories. En effet, nous avons déjà construit toute une machinerie pour la catégorisation. Mais on a vu que pour avoir l'invariance d'homotopie par catégorisation, il nous fallait exhiber un autre procédé de catégorisation ayant la propriété de préserver le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. C'est ce que fera *Bigcat*. L'idée de cette construction peut s'exprimer en termes de plans d'addition de cellules de la manière suivante. On a une partition de l'ensemble des cellules  $\Phi$ . Pour certains groupements des éléments de la partition qu'on notera  $\Psi$ , on a un plan d'addition de cellules qui a pour vocation de vérifier la propriété iii) pour les objets  $\Phi$ -injectifs tout en étant une étape de la  $\Psi$ -injectivisation. On construit alors un nouveau plan d'addition qui combine ces plans d'addition de cellules pour chaque groupement ayant cette propriété. Ce nouveau plan aura alors les propriétés voulues. Donnons les formalisations de ces plans d'addition de cellules.

**Définition 2.10.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $\Psi$  un sous-ensemble de  $\Phi$  et  $\lambda$  un ordinal transfini limite. Soit  $Raj_\Psi$  un sous-plan (donc fonctoriel) de  $e_{\Psi,1}$ . On définit  $Cat_{\Psi,\lambda}$  par récurrence transfinie. Posons  $Cat_{\Psi,\lambda}^0$  le plan simple  $e_{\Psi,1}$ . Supposons construit le plan  $Cat_{\Psi,\lambda}^\beta$ , pour  $\beta < \lambda$ , alors on pose  $Cat_{\Psi,\lambda}^{\beta+1} = Raj_\Psi \circ Cat_{\Psi,\lambda}^\beta$ . Supposons construits les plans  $Cat_{\Psi,\lambda}^\alpha$  pour tout  $\alpha < \beta$  avec  $\beta$  cardinal limite, on définit alors le plan  $Cat_{\Psi,\lambda}^\beta$  comme colimite des  $Cat_{\Psi,\lambda}^\alpha$ , pour  $\alpha < \beta$ . Ainsi par récurrence transfinie, on a donc défini pour tout  $\beta < \lambda$  les plans  $Cat_{\Psi,\lambda}^\beta$ . On définit donc le plan  $Cat_{\Psi,\lambda}$  comme colimite des  $Cat_{\Psi,\lambda}^\beta$  pour  $\beta < \lambda$ . En général,  $Cat_{\Psi,\lambda}$  n'est pas un plan rationnel.*

Il est important de remarquer que si le plan d'addition de cellules  $Cat_{\Psi,\lambda}$  commence par un plan simple tel  $e_{\Psi,1}$  qui prend en compte toutes les flèches de  $\Psi$ , il peut se poursuivre par des plans simples qui ne prennent pas toutes les flèches de  $\Psi$  et qu'on a appelés  $Raj_\Psi$ .

**Définition 2.10.2** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(\Phi_k)_{k \in K}$  une partition de  $\Phi$ . Donnons nous une fonction  $t$  d'un ordinal limite  $T$  quelconque vers l'ensemble des parties de  $K$  telle que, pour tout  $k$  dans  $K$ , on ait les propriétés suivantes :*

- pour tout ordinal  $\tau < T$ , il existe un ordinal  $\tau \leq \tau' < T$  tel que  $t(\tau')$  contienne  $k$ ,

- le cardinal de l'ensemble  $t^{-1}(k)$  est égal au cardinal de  $T$ .

On définit  $BCat(t)$  comme le plan d'addition de cellules suivant l'ordre  $t$  qui pour tout ordinal  $\tau < T$  a pour plan d'addition de cellules  $Cat_{\cup_{k \in t(\tau)} \Phi_k, T}$ . Le plan  $BCat(t)$  est de longueur  $T^2$  et, en général, ce n'est pas un plan rationnel.

Tout d'abord vérifions que ces plans d'addition de cellules ont bien les propriétés attendues.

**Lemme 2.10.3** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ . Soient  $(\Phi_k)_{k \in K}$  une partition de  $\Phi$  et  $\alpha$  un cardinal régulier pour lequel les sources des flèches de  $\Phi$  sont  $\alpha$ -petites.

Donnons nous une fonction  $t$  d'un ordinal limite  $T$  de cardinal un cardinal régulier strictement supérieur à  $\alpha$  vers l'ensemble des parties de  $K$  telle que, pour tout  $k$  dans  $K$ , on ait les propriétés suivantes :

- pour tout ordinal  $\tau < T$ , il existe un ordinal  $\tau \leq \tau' < T$  tel que  $t(\tau)$  contienne  $k$ ,

- le cardinal de l'ensemble  $t^{-1}(k)$  est égal au cardinal de  $T$ .

Alors le plan d'addition de cellules  $BCat(t)$  vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $BCat(t)(A)$  est  $\Phi$ -injectif,

- tout morphisme  $A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$  à but  $\Phi$ -injectif se factorise par le morphisme naturel  $A \rightarrow BCat(t)(A)$ .

*Preuve :*

Le morphisme naturel  $A \rightarrow BCat(t)$  se construit comme colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches de  $\Phi$ , donc c'est une  $\Phi$ -cofibration. Ainsi le morphisme naturel  $A \rightarrow BCat(t)$  a la propriété de relèvement à gauche par rapport aux objets  $\Phi$ -injectifs, ce qui montre la deuxième propriété.

Pour la première propriété, on va montrer que  $BCat(t)$  vérifie les hypothèses du corollaire 2.5.4. On remarque tout d'abord que par hypothèse sur  $t$ , la fonction  $t$  vérifie bien les hypothèses du lemme. En outre à chaque étape  $\tau < T$ , on applique de manière simple un plan du type  $Cat_{\Psi, T}$  qui par définition commence avec le plan simple  $e_{\Psi, 1}$ . Or ce dernier contient tous les diagrammes

obtenus à partir de  $\Psi$ , où ici  $\Psi$  n'est autre que la réunion des  $\Phi_k$  pour  $k$  décrivant  $t(\tau)$ . Ainsi  $BCat(t)$  vérifie bien les hypothèses du corollaire 2.5.4, ce qui montre la première propriété.

CQFD.

En plus de formaliser le plan Bigcat qui catégorise tout en préservant l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories, les plans de type  $BCat(t)$  ont la propriété de se rationaliser en  $HCat$ , ce qui aura pour conséquence de les rendre stables par précomposition avec un de leurs sous-plans.

**Proposition 2.10.4** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\mu$ -petites, pour un certain cardinal  $\mu$ , et tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soit  $(\Phi_k)_{i \in K}$  une partition de  $\Phi$ . Soient  $T$  un ordinal transfini limite dont le cardinal est un cardinal régulier strictement supérieur à  $\mu$  et  $t : T \rightarrow \mathcal{P}(K)$  une fonction telle que, pour tout  $k$  dans  $K$ , on ait les propriétés suivantes :*

- pour tout ordinal  $\tau < T$ , il existe un ordinal  $\tau \leq \tau' < T$  tel que  $t(\tau)$  contienne  $k$ ,

- le cardinal de l'ensemble  $t^{-1}(k)$  est égal au cardinal de  $T$ .

Alors le plan infini  $BCat(t)$  a pour rationalisation  $HCat_{T^2}$ .

*Preuve :*

D'après le corollaire 2.8.3,  $BCat(t)$ , dont la suite associée sera notée  $(X_\beta)_{\beta \leq T^2}$ , a pour rationalisation le plan  $Q$  dont la suite associée sera notée  $(Z_\beta)_{\beta \leq T^2}$  et tel que  $Q_\beta$  est la colimite des plans  $(BCat_\alpha)_\beta$ , où  $(BCat_\alpha)_\beta$  est l'ensemble des couples  $(D', \alpha_{D'})$  tel que  $D'$  se factorise par  $Z_\beta$  mais pas par  $Z_\gamma$  pour  $\gamma < \beta$ , où les  $D'$  sont les extensions par  $X_\alpha \rightarrow Z_\alpha$  des diagrammes  $D$  de  $BCat(t)_\alpha$  et où  $\alpha_{D'}$  est la cardinalité de  $D$  dans  $BCat(t)_\alpha$ .

Montrons que, pour tout  $\beta < T^2$ ,  $Q_\beta$  est isomorphe à la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{T^2}$  dans  $X/\mathcal{C}$ . Pour cela, explicitons  $Q_\beta$ . On remarque tout de suite que, par définition,  $(BCat_\alpha)_\beta$  est vide pour  $\alpha < \beta$ . Prenons sur  $T^2$  l'ordre lexicographique, la première coordonnée représentant la source de  $t$ . On remarque que si  $\alpha = (\gamma, \gamma') \geq \beta$ ,  $BCat(t)_\alpha$  n'est autre qu'un sous-plan de  $e_{\cup_{k \in t(\gamma)} \Phi_k, 1}$ . Ainsi dans ce cas,  $(BCat_\alpha)_\beta$  est l'ensemble des couples  $(D', 1)$  tel que  $D'$  se factorise par  $Z_\beta$  mais pas par  $Z_\delta$  pour  $\delta < \beta$ , où les  $D'$  sont les extensions par  $X_\alpha \rightarrow Z_\alpha$  des diagrammes  $D$  de  $\cup_{k \in t(\gamma)} \Phi_k$  pris à l'étape  $BCat(t)_\alpha$ . Ainsi l'ensemble sous-jacent des diagrammes de  $Q_\beta$ , ensemble qu'on notera  $A$ , est

un ensemble de diagrammes de  $\Phi$  à valeur dans  $Z_\beta$  mais pas dans  $Z_\delta$ , pour  $\delta < \beta$ , donc un sous-ensemble de l'ensemble  $B$  de tous les diagrammes de  $\Phi$  à valeur dans  $Z_\beta$  mais pas dans  $Z_\delta$ , pour  $\delta < \beta$ .

Montrons qu'en fait  $A$  et  $B$  sont en bijection. Considérons donc un diagramme  $D$  quelconque de  $\Phi$  à valeur dans  $Z_\beta$  mais ne se factorisant pas par  $Z_\delta$ , pour  $\delta < \beta$ . Alors le diagramme  $D$  peut s'étendre à  $Z_{T^2}$  qui est isomorphe à  $BCat(t)(X) = X_{T^2}$ . Or par hypothèse, les sources des morphismes de  $\Phi$  sont  $\mu$ -petites et  $T$  est un ordinal limite de cardinal un cardinal régulier strictement supérieur à  $\mu$ , alors il existe  $\alpha < T^2$  tel que l'extension de  $D$  à  $X_{T^2}$  se factorise par  $X_\alpha$ . Comme  $\Phi$  admet une partition en  $\Phi_k$  pour  $k \in K$ , il existe un  $k \in K$  tel que  $D$  soit un diagramme de  $\Phi_k$ . En outre on peut écrire  $\alpha$  sous la forme  $(\gamma, \gamma')$ . Or par hypothèse sur  $t$ , il existe  $\gamma \leq \epsilon < T$  tel que  $t(\epsilon)$  contienne  $k$ . Considérons alors  $BCat(t)_{(\epsilon, 0)}$ , ce plan étant de la forme  $e_{\Psi, 1}$  contient tous les diagrammes de  $\Phi_k$  à valeur dans  $X_{(\epsilon, 0)}$  donc en particulier ceux à valeur dans  $X_\alpha$ , car  $\alpha \leq (\epsilon, 0)$  par ordre lexicographique, et par conséquent ce plan contient l'extension de  $D$  à  $X_{T^2}$ . Ceci montre bien que  $D$  appartient à  $(BCat(t)_{(\epsilon, 0)})_\beta$  et donc à  $Q_\beta$ . On a donc montré que les ensembles  $A$  et  $B$  sont bien en bijection.

Comme ce sont les ensembles sous-jacents des diagrammes respectivement de  $Q_\beta$  et de la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{T^2}$  qui sont en bijection, pour montrer que  $Q_\beta$  et la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{T^2}$  sont isomorphes, il suffit de montrer que les cardinaux des diagrammes sont les mêmes. Comme le cardinal de tout diagramme de la  $\beta$ -ième étape de  $HCat_{T^2}$  est  $Card(T^2) = Card(T)$ , il ne reste plus qu'à montrer que le cardinal de chaque diagramme de  $Q_\beta$  est  $Card(T)$ .

Soit donc  $D$  un diagramme de  $Q_\beta$ , ce diagramme appartient à un certain  $(BCat(t)_\alpha)_\beta$ , avec  $\alpha$  minimal. Si on écrit  $\alpha$  sous la forme  $(\gamma, \gamma')$ , ce diagramme est l'extension par  $X_\alpha \rightarrow Z_\alpha$  d'un diagramme  $D'$  appartenant à  $\cup_{k \in t(\gamma)} \Phi_k$  à valeur dans  $X_\alpha$ . Notons  $k$  l'indice de la partie de  $\Phi$  à laquelle appartient  $D'$ . Alors  $D'$  appartient au moins à tous les plans  $BCat(t)_{\alpha'}$  tel que  $\alpha' \geq \alpha$  et  $\alpha' = (\epsilon, 0)$  avec  $\epsilon$  décrivant  $t^{-1}(k)$  et au plus à tous les plans  $BCat(t)_{\alpha'}$  tel que  $\alpha' \geq \alpha$  et  $\alpha' = (\epsilon, \epsilon')$  avec  $\epsilon$  décrivant  $t^{-1}(k)$  et  $\epsilon'$  quelconque. En effet ces plans sont des sous-plans quelconques d'un plan simple de type  $e_{\Psi, 1}$ , plan simple prenant une seule fois tous les diagrammes de  $\Phi_k$  à valeur dans  $X_{\alpha'}$  donc en particulier à valeur dans  $X_\alpha$  car  $\alpha \leq \alpha'$ . Ainsi le cardinal associé à  $D$  dans  $Q_\beta$  est compris entre celui des ordinaux  $\epsilon > \gamma$  de  $t^{-1}(k)$ , qui par hypothèse sur  $t$  n'est autre que  $Card(T)$ , et celui des ordinaux  $\alpha' = (\epsilon, \epsilon')$  avec



$\epsilon \geq \gamma$  décrivant  $t^{-1}(k)$  et  $\epsilon'$  quelconque, qui par hypothèse sur  $t$  n'est autre que  $Card(T^2) = Card(T)$ .

CQFD.

Comme on l'a dit plus haut, la stabilité de ces plans  $BCat(t)$  vis-à-vis de la composition avec leurs sous-plans nous intéressent particulièrement lorsqu'on veut faire des colimites d'objets  $\Phi$ -injectifs et comparer la colimite des  $\Phi$ -injectivisés avec la  $\Phi$ -injectivisation de la colimite. Nous allons donc traiter de ce problème dans la section suivante.

## 2.11 Application de l'I-injectivisation aux colimites d'objets I-injectifs.

Nous nous intéressons maintenant à comparer l'I-injectivisation des colimites avec les colimites des objets I-injectivés. En fait nous aimerions en particulier savoir s'il y a une I-équivalence au sens du corollaire 2.7.2 entre les deux. Pour cela, nous allons supposer que le plan d'addition de cellules vérifiant les propriétés i) et ii) de la I-injectivisation ainsi que la propriété iii) pour les objets I-injectifs est de la forme  $BCat(t)$ . En effet, dans ce cas le morphisme naturel d'un objet quelconque  $A$  dans le résultat du plan sera une I-équivalence. De là et du fait que  $BCat(t)$  se rationalise en  $HCat$ , il découlera que tout morphisme naturel d'un objet  $A$  quelconque dans le résultat d'un sous-plan de  $BCat(t)$  est encore une I-équivalence. Les colimites des I-injectivés étant des sous-plans de l'I-injectivisation des colimites, on pourra leur appliquer ce résultat. C'est pourquoi dans toute cette section, nous allons supposer les hypothèses suivantes.

**Hypothèses 2.11.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  dont les sources sont  $\alpha$ -petites pour un certain cardinal régulier  $\alpha$ , et tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soit  $\alpha'$  le plus petit cardinal régulier supérieur à  $\alpha$ . Donnons-nous une notion d'équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs vérifiant les propriétés suivantes :*

- pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes composables entre objets  $\Phi$ -injectifs, si parmi  $f, g, g \circ f$  deux morphismes sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs, alors le troisième morphisme aussi,
- pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes composables entre objets  $\Phi$ -injectifs, si la composée  $g \circ f$  est l'identité et que la composée  $f \circ g$  une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, alors  $f$  et  $g$  sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs.
- les isomorphismes entre objets  $\Phi$ -injectifs sont des équivalences d'objets  $\Phi$ -injectifs.

Notons  $E_\Phi$  le plan d'addition de cellules fonctoriel à compositions rationnelles de longueur  $\alpha'$  dont tous les plans simples sont  $e_{\Phi,1}$ .

Soit  $(\Phi_k)_{k \in K}$  une partition de  $\Phi$ . Soient  $T$  un ordinal transfini limite dont le cardinal est strictement supérieur à  $\alpha$  et  $t : T \rightarrow \mathcal{P}(K)$  une fonction telle que, pour tout  $k$  dans  $K$ , on ait les propriétés suivantes :

- pour tout ordinal  $\tau < T$ , il existe un ordinal  $\tau \leq \tau' < T$  tel que  $t(\tau)$  contienne  $k$ ,

- le cardinal de l'ensemble  $t^{-1}(k)$  est égal au cardinal de  $T$ .

Supposons que le plan d'addition de cellules fonctoriel  $BCat(t)$  suivant l'ordre  $t$  vérifie la propriété suivante :  
pour tout objet  $A$   $\Phi$ -injectif, le morphisme naturel  $A \rightarrow BCat(t)(A)$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs.

Sous ces hypothèses, le plan d'addition de cellules  $E_\Phi$  est bien une  $\Phi$ -injectivisation par la proposition 2.7.1, ce qui permet de définir la notion de  $\Phi$ -équivalence qui vérifie la propriété du "trois pour deux" d'après le corollaire 2.7.2. De plus sous ces hypothèses, par le lemme 2.10.3, le plan d'addition de cellules  $BCat(t)$  vérifie bien les propriétés i) et ii) de la  $\Phi$ -injectivisation. Montrons tout d'abord que sous ces hypothèses, pour tout objet  $A$  de la catégorie  $\mathcal{C}$ , le morphisme naturel  $A \rightarrow BCat(t)(A)$  est une  $\Phi$ -équivalence.

**Lemme 2.11.2** *Sous les hypothèses 2.11.1, pour tout objet  $A$  de la catégorie  $\mathcal{C}$ , le morphisme naturel  $A \rightarrow BCat(t)(A)$  est une  $\Phi$ -équivalence, c'est-à-dire que l'image par  $E_\Phi$  de ce morphisme est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs.*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que sous les hypothèses 2.11.1, on peut appliquer la proposition 2.10.4 à  $BCat(t)$ , ce qui nous permet d'obtenir que  $BCat(t)$  se rationalise en  $HCat_{T^2}$ . Or le plan à compositions rationnelles d'addition de cellules  $E_\Phi$  est un sous-plan de  $HCat_{T^2}$  donc de  $BCat(t)$  de longueur  $\alpha'$  avec  $Card(\alpha') \leq Card(T^2)$ . On peut alors appliquer le corollaire 2.9.5, qui nous donne pour tout objet  $A$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E_\Phi(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BCat(t)(A) & \xrightarrow{\cong} & BCat(t)(E_\Phi(A)) \end{array}$$

Le corollaire 2.9.5 nous certifie la commutativité de ce diagramme ainsi que l'isomorphisme entre  $BCat(t)(A)$  et  $BCat(t)(E_\Phi(A))$ . En outre par la proposition 2.7.1, le morphisme naturel  $A \rightarrow E_\Phi(A)$  est une  $\Phi$ -équivalence et  $E_\Phi(A)$  est  $\Phi$ -injectif. Par hypothèse sur  $BCat(t)$ , il vient que le morphisme naturel  $E_\Phi(A) \rightarrow BCat(t)(E_\Phi(A))$  est une équivalence d'objets  $\Phi$ -injectifs, ce qui par le corollaire 2.7.2 revient à dire que c'est une  $\Phi$ -équivalence. Comme par corollaire 2.7.2, les isomorphismes sont des  $\Phi$ -équivalences et les  $\Phi$ -équivalences vérifient la propriété du "trois pour deux", il vient que le morphisme

naturel  $A \rightarrow BCat(t)(A)$  est une  $\Phi$ -équivalence.  
 CQFD.

Munis de cette propriété de stabilité homotopique de  $BCat(t)$ , montrons que tout sous-plan de  $BCat(t)$  conserve cette stabilité homotopique.

**Lemme 2.11.3** *Supposons vraies les hypothèses 2.11.1. Soit  $P$  un sous-plan de  $BCat(t)$  dont le cardinal de la longueur est inférieur au cardinal de la longueur de  $BCat(t)$ . Alors pour tout objet  $A$  de la catégorie  $\mathcal{C}$ , le morphisme naturel  $A \rightarrow P(A)$  est une  $\Phi$ -équivalence.*

*Preuve :*

Comme on l'a vu dans la démonstration précédente, le plan d'addition de cellules  $BCat(t)$  se rationalise en un  $HCat$ . Comme en outre, par hypothèse sur le sous-plan  $P$  de  $BCat(t)$ , le cardinal de la longueur du sous-plan  $P$  est inférieur à celui de la longueur de  $BCat(t)$ , le corollaire 2.9.5 s'applique et nous donne un isomorphisme dans  $X/\mathcal{C}$  entre  $BCat(t)(A)$  et  $BCat(t)(P(A))$  ainsi que le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & P(A) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 BCat(t)(A) & \xrightarrow{\cong} & BCat(t)(P(A))
 \end{array}$$

En outre, par le lemme précédent, les morphismes canoniques  $A \rightarrow BCat(t)(A)$  et  $P(A) \rightarrow BCat(t)(P(A))$  sont des  $\Phi$ -équivalences. Comme, par le corollaire 2.7.2, les  $\Phi$ -équivalences vérifient la propriété du "trois pour deux" et que les isomorphismes sont des  $\Phi$ -équivalences, on obtient que le morphisme  $A \rightarrow P(A)$  est aussi une  $\Phi$ -équivalence.  
 CQFD.

Comme le fait de prendre la colimite d'objets  $\Phi$ -injectivisés est en fait un sous-plan de la  $\Phi$ -injectivisation de la colimite, on peut donc appliquer le résultat que l'on vient de montrer afin de donner un critère utile pour montrer que les morphismes naturels des colimites sont des  $\Phi$ -équivalences.

**Lemme 2.11.4** *Supposons vraies les hypothèses 2.11.1.*

*Soit  $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur d'une petite catégorie d'indices  $\mathcal{I}$  vers la catégorie  $\mathcal{C}$ . Soit  $i$  un objet de  $\mathcal{I}$ . Alors le morphisme naturel  $F(i) \rightarrow \text{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i)$*

est une  $\Phi$ -équivalence si et seulement si le morphisme naturel  $E_\Phi(F(i)) \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} E_\Phi(F(i))$  en est une.

Soit  $h : F \rightarrow G$  une transformation naturelle entre foncteurs d'une petite catégorie d'indices  $\mathcal{I}$  vers la catégorie  $\mathcal{C}$ . Alors le morphisme universel, induit par  $h$ ,  $\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i) \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} G(i)$ , est une  $\Phi$ -équivalence si et seulement si le morphisme universel, induit par  $E_\Phi(h)$ ,  $\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} E_\Phi(F(i)) \rightarrow \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} E_\Phi(G(i))$  en est une.

*Preuve :*

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(i) & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ E_\Phi(F(i)) & \longrightarrow & \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} E_\Phi(F(i)) \end{array}$$

Par la proposition 2.7.1, la flèche verticale de gauche est une  $\Phi$ -équivalence. En outre la flèche verticale de droite consiste à additionner des cellules de  $\Phi$  sur chacun des  $F(i)$ , or ceci est un sous-plan de  $BCat(t)$  appliqué à  $\operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i)$ . Comme en outre le cardinal de la longueur de  $E_\Phi$  est inférieur à celui de  $BCat(t)$ , on peut appliquer le lemme 2.11.3 qui nous certifie que la flèche verticale de droite est une  $\Phi$ -équivalence. Par le corollaire 2.7.2, les  $\Phi$ -équivalences vérifient la propriété du "trois pour deux", ce qui nous donne que la flèche horizontale du haut est une  $\Phi$ -équivalence si et seulement si la flèche horizontale du bas l'est.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} F(i) & \xrightarrow{\operatorname{colim} h} & \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} G(i) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} E_\Phi(F(i)) & \xrightarrow{\operatorname{colim} E_\Phi(h)} & \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} E_\Phi(G(i)) \end{array}$$

Par le même argument de sous-plan que dans la première partie de la preuve, on montre que les deux flèches verticales sont des  $\Phi$ -équivalences, et on en conclut, avec l'aide de la propriété du "trois pour deux" des  $\Phi$ -équivalences,

que la flèche horizontale du haut est une  $\Phi$ -équivalence si et seulement si la flèche horizontale du bas l'est.

CQFD.

Ce lemme de reconnaissance du caractère  $\Phi$ -équivalence des morphismes naturels des colimites nous sera très utile lorsque dans la suite de cette thèse, nous montrerons la stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie. Nous allons donc terminer ce chapitre par quelques petits lemmes techniques sur la  $\Phi$ -injectivisation qui seront également nécessaires pour la suite de cette thèse.

## 2.12 Lemmes techniques sur l'I-injectivisation

Dans la suite de cette thèse, nous aurons à montrer des résultats qui nécessitent de connaître les propriétés de stabilité de l'I-injectivisation par rapport aux monomorphismes, aux intersections de sous objets et à la petitesse.

**Lemme 2.12.1** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont les monomorphismes. Soient  $\Psi$  un sous-ensemble de  $\Phi$  et  $\lambda$  un cardinal quelconque (transfini ou non). Soit enfin  $X \rightarrow Y$  un monomorphisme de  $\mathcal{C}$ . Alors  $e_{\Psi,\lambda}(X \rightarrow Y)$  est encore un monomorphisme.*

*De même, pour tout plan d'addition  $P$ , dont les plans simples sont du type  $e_{\Psi,\lambda}$ ,  $P(X \rightarrow Y)$  est un monomorphisme.*

*Preuve :*

Tout d'abord, il est facile de voir que comme  $X \rightarrow Y$  est un monomorphisme, l'ensemble des diagrammes de  $\Psi$  à valeur dans  $X$  s'injecte par extension à travers  $X \rightarrow Y$  dans l'ensemble des diagrammes de  $\Psi$  à valeur dans  $Y$ . De plus, comme par hypothèse les  $\Phi$ -cofibrations sont les monomorphismes, on obtient d'une part que les flèches de  $\Phi$  sont des monomorphismes et que d'autre part les monomorphismes sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme et colimite séquentielle transfinie.

Considérons maintenant la somme amalgamée, notée  $Z$ , de  $e_{\Psi,\lambda}(X)$  avec  $Y$  au-dessus de  $X$ . Tout d'abord par commutation des sommes amalgamées, il vient que  $Z$  est isomorphe à la somme amalgamée de  $Y$  par l'ensemble des extensions le long de  $X \rightarrow Y$  des diagrammes de  $\Psi$  à valeur dans  $X$  pris chacun  $\lambda$  fois. Le morphisme canonique de  $e_{\Psi,\lambda}(X)$  vers la somme amalgamée  $Z$  est un monomorphisme comme somme amalgamée du monomorphisme  $X \rightarrow Y$  le long du morphisme  $X \rightarrow e_{\Psi,\lambda}(X)$ . En utilisant les remarques précédentes, on obtient que le morphisme universel de la somme amalgamée  $Z$  dans  $e_{\Psi,\lambda}(Y)$  est en fait le résultat d'un plan d'addition par les diagrammes de  $\Psi$  à valeur dans  $Y$  pris  $\lambda$ -fois qui ne sont pas extensions par  $X \rightarrow Y$  de diagrammes de  $\Psi$  à valeur dans  $X$ . Comme  $\Phi$  est un ensemble de monomorphismes, le morphisme cellulaire  $Z \rightarrow e_{\Psi,\lambda}(Y)$  est un monomorphisme comme somme amalgamée de monomorphismes. On en déduit que le morphisme  $e_{\Psi,\lambda}(X \rightarrow Y)$ , composée des monomorphismes  $e_{\Psi,\lambda}(X) \rightarrow Z$  et  $Z \rightarrow e_{\Psi,\lambda}(Y)$ , est bien un monomorphisme. En utilisant ce résultat ainsi que la préservation des monomorphismes par colimite séquentielle transfinie le long de colimites séquentielles transfinies de monomorphismes, on obtient le résultat pour  $P$ .

CQFD.

**Lemme 2.12.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète telle que les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection. Soit  $\Phi$  un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$  tel que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. Soient  $\Psi$  un sous-ensemble de  $\Phi$  et  $\lambda$  un cardinal quelconque (transfini ou non). Soient  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathcal{C}$ . Alors pour tout plan d'addition  $P$ , dont les plans simples sont du type  $e_{\Psi,\lambda}$ , on a :*

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

*Preuve :*

Par le lemme 2.12.1, les monomorphismes sont stables par tout plan  $P$ , d'addition de cellules composé de plans simples du type  $e_{\Psi,\lambda}$ . Donc  $P(A)$  et  $P(B)$  sont des sous-objets de  $P(C)$  et donc leur intersection a un sens. De plus  $P(A \cap B)$  est un sous-objet à la fois de  $P(A)$  et de  $P(B)$ , car  $A \cap B$  est inclus dans  $A$  et  $B$  et que le plan  $P$  préserve les monomorphismes. Ainsi  $P(A \cap B)$  est un sous-objet de  $P(A) \cap P(B)$ . Il ne reste donc plus qu'à montrer l'autre sens. Comme le plan  $P$  est la colimite des plans simples  $e_{\Psi,\lambda}$ , il suffit de montrer que  $e_{\Psi,\lambda}(A \cap B)$  contient  $e_{\Psi,\lambda}(A) \cap e_{\Psi,\lambda}(B)$ . La construction  $e_{\Psi,\lambda}$  est un procédé d'addition de cellules. Donc pour montrer que  $e_{\Psi,\lambda}(A) \cap e_{\Psi,\lambda}(B)$  est inclus dans  $e_{\Psi,\lambda}(A \cap B)$ , il suffit de montrer que les cellules du premier sont en fait des cellules du second. Or cela découle directement du fait que les diagrammes de flèches de  $\Phi$  apparaissant pour  $A$  n'apparaissent pour  $B$  que si les sources des flèches de  $\Phi$  s'envoient dans  $A \cap B$ . Ainsi on a montré que la construction  $e_{\Psi,\lambda}$  préserve l'intersection et donc par récurrence transfinie on pourra montrer que le plan  $P$  aussi préserve l'intersection.

CQFD.

**Lemme 2.12.3** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie cocomplète et  $\Phi$  un ensemble de flèches de  $\mathcal{C}$ . Supposons qu'il existe un cardinal transfini  $\alpha$  pour lequel les sources et buts de toutes les flèches de  $\Phi$  sont  $\alpha$ -petites. Soient  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux ordinaux quelconques et  $P$ , un plan d'addition de cellules fonctoriel de longueur  $\lambda$  et uniquement composé de plans simples du type  $e_{\Psi,\lambda'}$  avec  $\Psi$  un sous-ensemble de  $\Phi$ . Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\lambda$  et  $2^\alpha$ . Alors il existe un cardinal régulier  $\alpha''$  strictement supérieur à  $\alpha'$  tel que, pour tout objet  $\alpha'$ -petit  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $P(A)$  est  $\alpha''$ -petit.*

*Preuve :*

On rappelle que  $P(A)$  est la colimite d'une  $\lambda$ -séquence  $(A^\beta)_{\beta \leq \lambda}$  où  $A^{\beta+1} = e_{\Psi,\lambda'}(A^\beta)$ . Montrons par récurrence transfinie sur  $\beta \leq \lambda$  que  $A^\beta$  est  $\alpha^{(\beta)}$ -petit pour un cardinal régulier  $\alpha^{(\beta)} > \alpha'$  qui ne dépend pas de  $A$ . Le cas  $\beta = 0$  est



vrai car  $A^0$  n'est autre que  $A$  qui est par hypothèse  $\alpha'$ -petit. Supposons le cas  $\beta$  montré et montrons le cas  $\beta + 1$ . Comme  $A^{\beta+1} = e_{\Psi, \lambda}(A^\beta)$  et que, par hypothèse de récurrence,  $A^\beta$  est  $\alpha^{(\beta)}$ -petit, il suffit de montrer que le plan simple  $e_{\Psi, \lambda'}$  préserve la petitesse. Or  $e_{\Psi, \lambda'}(A^\beta)$  consiste en une somme amalgamée de  $A^\beta$  par un coproduit de flèches de  $\Psi$ , sous-ensemble de  $\Phi$ , chacune de ces flèches étant prise  $\lambda'$  fois. Ce coproduit est petit car la sous-famille  $\Psi$  de la famille  $\Phi$  est un ensemble par hypothèse et que la collection des morphismes à but fixé et à source indexée par un ensemble est un ensemble. Par hypothèse sur  $\Phi$ , les sources et buts des flèches de  $\Phi$  sont  $\alpha$ -petits, donc en particulier  $\alpha^{(\beta)}$ -petits car  $\alpha^{(\beta)} > \alpha' > \alpha$ . Ainsi  $e_{\Psi, \lambda'}(t^\beta)$  est la colimite d'un petit diagramme dont tous les objets sont  $\alpha^{(\beta)}$ -petits. D'après le lemme 2.3.5, une telle colimite est  $\alpha^{(\beta+1)}$ -petite pour un cardinal régulier  $\alpha^{(\beta+1)}$  strictement plus grand que  $\alpha^{(\beta)}$  et que le cardinal de l'ensemble des morphismes de la petite catégorie indexant le diagramme. Or ce cardinal dépend de  $\alpha^{(\beta)}$ , du cardinal de l'ensemble  $\Psi$  et du cardinal de  $\lambda'$ , ces trois cardinaux étant indépendants de  $A$ , ce qui montre que  $e_{\Psi, \lambda'}(A^\beta) = A^{\beta+1}$  est bien  $\alpha^{(\beta+1)}$ -petit avec  $\alpha^{(\beta+1)} > \alpha'$  cardinal régulier indépendant de  $A$ . Ainsi est prouvée l'hypothèse de récurrence au rang  $\beta + 1$ . Supposons maintenant l'hypothèse vraie pour tout ordinal  $\gamma < \beta$  avec  $\beta \leq \lambda$  ordinal limite et montrons qu'elle est aussi vraie pour  $\beta$ . Posons  $\alpha^{(\beta)}$  le plus petit cardinal régulier majorant l'ensemble  $\{\alpha^{(\gamma)}, \gamma < \beta\}$ , qui existe par propriété des cardinaux et qui est indépendant de  $A$  car  $\beta$  et les  $\alpha^{(\gamma)}$  le sont. Comme  $A^\beta$  est la colimite des  $\alpha^{(\gamma)}$ -petits  $A^\gamma$  pour  $\gamma < \beta$  et que  $\beta \leq \lambda$  est strictement inférieur à  $\alpha^{(\beta)}$  car  $\alpha^{(\beta)} > \alpha^{(0)} = \alpha' > \lambda$ , par régularité de  $\alpha^{(\beta)}$ , il vient que la colimite  $A^\beta$  est  $\alpha^{(\beta)}$  petite avec  $\alpha^{(\beta)} > \alpha'$  cardinal régulier indépendant de  $A$ , ce qui montre le cas  $\beta$  ordinal limite. Par récurrence transfinitive, on a donc montré que, pour tout  $\beta \leq \lambda$ ,  $A^\beta$  est  $\alpha^{(\beta)}$ -petit, avec  $\alpha^{(\beta)} > \alpha'$  cardinal régulier indépendant de  $A$ . Donc ceci est vrai en particulier pour  $A^\lambda = P(A)$ , ce qui est le résultat attendu en prenant pour  $\alpha''$  le cardinal  $\alpha^{(\lambda)}$ .  
CQFD.

Nous avons dans ce chapitre fait une mise au point sur la théorie des plans d'addition de cellules qui nous a fourni les outils nécessaires pour I-injectiviser. Si donc nous trouvons un ensemble I de flèches pour lequel les objets I-injectifs sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, en appliquant les constructions d'I-injectivisation exhibées dans ce chapitre, nous serons à même de catégoriser nos  $\mathcal{C}$ -précatégories. Aussi le but du prochain chapitre est de trouver un ensemble de morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories I pour lequel les  $\mathcal{C}$ -précatégories I-injectives sont des  $\mathcal{C}$ -catégories.

## Chapitre 3

# Engendrement des $\mathcal{C}$ -catégories

A la fin du premier chapitre, nous avons expliqué l'intérêt d'avoir un procédé de catégorisation des  $\mathcal{C}$ -catégories, mais nous avons également parlé des difficultés d'en obtenir un. L'idée principale pour construire une catégorisation est de caractériser certaines  $\mathcal{C}$ -catégories en terme d'objets I-injectifs. Autrement dit, on cherche à exhiber une famille de morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories telle que les objets ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux morphismes de cette famille sont des  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme cette caractérisation des  $\mathcal{C}$ -catégories par une propriété de relèvement par rapport à une famille de morphismes n'est pas vraie en général, on va devoir s'intéresser à une notion un peu plus forte de  $\mathcal{C}$ -catégories qui aura le bon goût de se relever par rapport à certaines flèches. Ce faisant, nous allons faciliter la construction d'un procédé de catégorisation.

Comme les  $\mathcal{C}$ -catégories sont définies à partir d'une donnée de Segal, on peut aisément imaginer que si dans cette donnée de Segal, on a déjà des notions d'objets régaux et d'alliances d'objets régaux caractérisées par une propriété de relèvement alors ce sera aussi le cas au niveau des  $\mathcal{C}$ -catégories et des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Aussi allons-nous dans un premier temps définir les données de Segal proto-faciles pour lesquelles objets régaux et alliances d'objets régaux sont caractérisés par des propriétés de relèvement, et définir les notions de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et d'équivalences faciles à partir de telles données de Segal.

Afin de remonter au niveau des  $\mathcal{C}$ -précatégories les propriétés de relèvements des objets régaux et des alliances d'objets régaux et ainsi montrer que nos  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et nos équivalences faciles sont caractérisées par des propriétés de relèvement, nous allons dans un second temps définir une construction  $\Theta$  permettant de traduire les diagrammes des  $\mathcal{C}$ -précatégories en diagrammes dans  $\mathcal{C}$  et réciproquement. Dans un troisième temps, nous utiliserons cette construction pour montrer que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont bien caractérisées par une propriété de relèvement, ce qui nous conduira à la construction  $Cat$  qui transformera toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie en  $\mathcal{C}$ -catégorie facile.

### 3.1 $\mathcal{C}$ -catégories faciles et équivalences faciles

Comme on l'a écrit plus haut, les notions de  $\mathcal{C}$ -catégorie et d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories n'ont pas de caractérisation simple par propriété de relèvement. Nous allons donc introduire une notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile et d'équivalence facile qui admettront une caractérisation par relèvement vis-à-vis de certaines flèches. Mais comme on l'a vu précédemment nous devons d'abord demander à la donnée de Segal  $\mathcal{C}$  d'avoir une famille d'objets régaux et une famille d'alliances d'objets régaux caractérisées par des propriétés de relèvement. Plus précisément, on va rajouter à la donnée de Segal deux familles de morphismes, notées  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , telles que les objets  $\mathcal{F}_1$ -injectifs soient des objets régaux et les morphismes  $\mathcal{F}_2$ -injectifs des alliances d'objets régaux. C'est ce qu'on appellera une donnée de Segal proto-facile.

**Définition 3.1.1** *Une donnée de Segal proto-facile est un triplet  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  constitué d'une donnée de Segal  $\mathcal{C}$  et de deux familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  de morphismes de  $\mathcal{C}$  qui sont des ensembles satisfaisant les propriétés suivantes :*

8) *Les objets de  $\mathcal{C}$  ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$  sont des objets régaux et sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

9) *Les objets discrets de  $\mathcal{C}$  ont la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$ .*

10) *Les morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_2$  et dont la source et le but sont des objets régaux ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$  sont des alliances d'objets régaux et le produit fibré, dans la catégorie des morphismes, de deux tels morphismes au-dessus d'un objet discret a encore la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_2$ .*

Les objets de  $\mathcal{C}$  ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$  sont appelés objets régaux faciles de  $\mathcal{C}$  et les morphismes entre objets régaux faciles ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_2$  sont appelés alliances faciles d'objets régaux faciles.

On pourra remarquer au passage qu'il y a plusieurs choix possibles pour les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Ainsi une même donnée de Segal pourra donner lieu à plusieurs données de Segal proto-faciles.

**Exemple 3.1.2** Avec la donnée de Segal pour  $\mathcal{ENSSIMP}$  de l'exemple 1.3.3, on obtient une donnée de Segal proto-facile en prenant la famille vide pour  $\mathcal{F}_1$  et, pour  $\mathcal{F}_2$ , celle des inclusions des bords des simplexes standards dans ces derniers, qui forme bien un ensemble. On a alors que tout ensemble simplicial est un objet régéal facile et que les alliances faciles sont les équivalences faibles qui sont aussi des fibrations de Kan.

**Exemple 3.1.3** Toujours avec la donnée de Segal pour  $\mathcal{ENSSIMP}$  de l'exemple 1.3.3, on obtient une donnée de Segal proto-facile en prenant la famille vide pour  $\mathcal{F}_1$  et, pour  $\mathcal{F}_2$ , la famille suivante : pour tout entier  $n$ , on prend d'une part l'unique morphisme du vide vers le  $n$ -simplexe  $\Delta[n]$  et d'autre part l'unique morphisme du coproduit de deux exemplaires de  $\Delta[n]$  vers  $\Delta[n]$  induit par les identités. On a alors que tout ensemble simplicial est un objet régéal facile et que les alliances faciles sont uniquement les isomorphismes d'ensembles simpliciaux.

Si au lieu de prendre le vide pour  $\mathcal{F}_1$ , on prend la famille des inclusions des cornes des simplexes dans ces derniers, alors on aura une troisième donnée de Segal proto-facile avec pour objets régéaux les ensembles simpliciaux fibrants de Kan.

Ces notions d'objet régéal facile et d'alliance facile d'objets régéaux faciles d'une part vont constituer pour  $\mathcal{C}$  une nouvelle donnée de Segal, comme le montre le lemme ci-dessous, mais d'autre part vont nous permettre de définir les notions de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile et d'équivalence facile de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles.

**Lemme 3.1.4** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile.

Alors la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  avec sa sous-catégorie pleine d'objets régéaux faciles, sa classe d'alliances faciles et son foncteur  $\tau_0$  vérifie toutes les propriétés d'une donnée de Segal.

*Preuve*

La propriété 9 de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  assure que les objets discrets sont des objets régéaux faciles de  $\mathcal{C}$  et le lemme 2.1.3 prouve que tout objet isomorphe à un objet régéal facile est un objet régéal facile, ce qui nous donne la propriété 1. La propriété 8 de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  assure que les objets régéaux faciles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret, ce qui montre la propriété 2. De même la propriété 10 de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  assure que les alliances faciles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret dans la catégorie des morphismes, ce qui montre la seconde partie de la propriété 3. Par le lemme 2.1.3, les alliances faciles sont stables par composition et les isomorphismes sont des

alliances faciles, ce qui montre que la classe des alliances faciles est stable par composition et vérifie la première partie de la propriété 3. Par propriété 10 de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ , les alliances faciles sont stables par fibre, ce qui nous donne le premier sens de l'équivalence de la propriété 4. Considérons un morphisme d'objets régaux faciles dont toutes les fibres sont des alliances faciles. Le fait que  $\mathcal{C}$  soit discrétisante entraîne que tout diagramme de relèvement de ce morphisme vis-à-vis de la famille  $\mathcal{F}_2$  n'est autre que le coproduit de ses fibres. On obtient alors le relèvement attendu en prenant le coproduit dans la catégorie des morphismes des relèvements de chaque fibre (cf preuve du lemme 2.1.3), ce qui montre l'autre sens de la propriété 4. La propriété 8 de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  assure que le foncteur  $\tau_0$  est bien défini sur la sous-catégorie pleine des objets régaux faciles de  $\mathcal{C}$ , qui est une sous-catégorie pleine des objets régaux de  $\mathcal{C}$ , et donc que  $\tau_0$  se restreint à la catégorie des objets régaux faciles en conservant les propriétés 5 et 6. Comme par propriété 10 de  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ , les alliances faciles sont des alliances d'objets régaux,  $\tau_0$  garde aussi la propriété 7. CQFD.

Comme on vient de le voir une donnée de Segal proto-facile engendre une donnée de Segal avec les objets régaux faciles et les alliances faciles. Pour cette donnée de Segal, on a bien évidemment l'existence de notions de  $\mathcal{C}$ -catégories et d'équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, que l'on appellera respectivement  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles.

**Définition 3.1.5** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile.*

*Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile si pour tout entier  $m$  strictement positif  $A_m$  est un objet régau facile dans  $\mathcal{C}$  et si pour tout entier  $m$  supérieur ou égal à deux le morphisme de Segal  $A_m \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  est une alliance facile d'objets régaux faciles. Un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles est un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories.*

**Définition 3.1.6** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile.*

*Un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles  $f : A \rightarrow B$  est une équivalence facile de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles si  $f_0 : A_0 \rightarrow B_0$  est surjective et, si pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ , le morphisme  $f_1(x, y) : A_1(x, y) \rightarrow B_1(f(x), f(y))$  est une alliance facile d'objets régaux faciles.*

Si ces  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et ces équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles ont vocation à être caractérisées par des propriétés de relèvement, il faut au minimum que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles soient en particulier des  $\mathcal{C}$ -catégories et que les équivalences faciles soient en particulier des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Lemme 3.1.7** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile. Les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont des  $\mathcal{C}$ -catégories et les équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve* : immédiat en utilisant les propriétés 8 et 10.

La notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile a été introduite essentiellement afin de permettre de caractériser les  $\mathcal{C}$ -précatégories qui sont des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles en terme de relèvement par rapport à une certaine famille de flèches, ce qui permettra de construire une opération de catégorisation des  $\mathcal{C}$ -précatégories basée sur ces relèvements. En vue d'exhiber cette famille de flèches, nous allons introduire une construction fonctorielle  $\Theta$  qui permet d'exprimer les diagrammes de  $\mathcal{C}$ -précatégories en diagrammes de  $\mathcal{C}$  et réciproquement. Ainsi les caractérisations par relèvement des objets régaux faciles et des alliances faciles entraîneront de telles caractérisations pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et les équivalences faciles.

## 3.2 La construction $\Theta$

Par le lemme de Yoneda, on sait que les morphismes entre ensembles simpliciaux du  $n$ -simplexe  $\Delta[n]$  vers un ensemble simplicial  $A$  correspondent exactement aux éléments de l'ensemble  $A_n$ . Comme nos  $\mathcal{C}$ -précatégories sont des objets simpliciaux sur la catégorie  $\mathcal{C}$ , on cherche une construction bifonctorielle  $\Theta$  respectant les colimites qui à un ensemble simplicial  $E$  et à un objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  associe une  $\mathcal{C}$ -précatégorie et telle que les morphismes de  $\Delta[n]\Theta C$  vers une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  correspondent aux morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $C$  vers  $A_n$ . Si  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles, en prenant pour  $C$  le point  $*$ , on retrouve le résultat découlant de Yoneda sur les ensembles simpliciaux.

L'idée pour construire  $\Delta[n]\Theta C$  muni de cette propriété est de considérer  $\Delta[n]$  comme une  $\mathcal{C}$ -précatégorie discrète et de remplacer son  $n$ -simplexe non dégénéré par  $C$  et de répercuter ce changement à toute la  $\mathcal{C}$ -précatégorie par les applications de faces et de dégénérescences. Comme en outre on désire que  $*\Theta C$  commute aux colimites, nous allons définir  $\Theta$  ainsi : à un ensemble simplicial  $X$  et à un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$ , on associe une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $X\Theta Y$  formée sur la  $\mathcal{C}$ -précatégorie discrète  $X$  avec les mêmes objets que  $X$  mais dans laquelle chaque simplexe de  $X$  non dégénérescence d'un point est remplacé par  $Y$ .

**Définition 3.2.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits. Soit  $X$  un ensemble simplicial et  $Y$  un objet de  $\mathcal{C}$ , on définit la  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $X\Theta Y$  ainsi :*

$$(X\Theta Y)_0 = X_0 \text{ et, pour } n > 0, (X\Theta Y)_n = X_0 \amalg \left( \amalg_{X_n \setminus s^n(X_0)} Y \right)$$

où  $s^n : X_0 \rightarrow X_n$  est induite par l'unique application de  $\mathbf{n}$  vers  $\mathbf{0}$ .

On notera  $Y^x$  l'exemplaire de  $Y$  associé à l'élément  $x \in X_n \setminus s^n(X_0)$ .

Soit  $f$  un morphisme de  $\Delta$  de  $\mathbf{m}$  vers  $\mathbf{n}$ . Définissons le morphisme induit  $f^* : (X\Theta Y)_n \rightarrow (X\Theta Y)_m$ . Sur la composante  $X_0$  de  $(X\Theta Y)_n$ ,  $f^*$  induit l'identité. Pour la composante  $Y^x$ , il y a deux cas. Si  $X(f)(x)$  n'est pas dégénérescence d'un point, alors  $f^*$  induit l'identité entre  $Y^x$  et  $Y^{X(f)(x)}$ . Sinon  $X(f)(x)$  est la dégénérescence d'un point  $a \in X_0$  et alors  $f^*$  induit l'application constante à valeur  $a$  de  $Y^x$  vers  $X_0$ . On vérifie aisément que  $X\Theta Y$  ainsi défini est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie.

Nous allons maintenant faire de la construction  $\Theta$  définie ci-dessus un bifoncteur  $*\Theta* : \mathcal{NSSIMP} \times (\mathcal{C} - \mathcal{PC}) \rightarrow \mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .



**Définition 3.2.2** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits.

- Soient  $X$  un ensemble simplicial et  $g : Y \rightarrow Y'$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories, on définit  $X\Theta g : X\Theta Y \rightarrow X\Theta Y'$  de la manière suivante :

$$(X\Theta g)_0 = Id_{X_0} \text{ et, pour } n > 0, (X\Theta g)_n = Id_{X_0} \coprod \left( \coprod_{X_n \setminus s^n(X_0)} g \right).$$

- Soient  $Y$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie et  $f : X \rightarrow X'$  un morphisme d'ensembles simpliciaux, on définit  $f\Theta Y : X\Theta Y \rightarrow X'\Theta Y$  de la manière suivante :

$(f\Theta Y)_0$  est l'application  $f_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  et, pour  $n$  strictement positif, on définit  $(f\Theta Y)_n$  sur chacune des composantes de  $(X\Theta Y)_n$ . Sur  $X_0$ ,  $(f\Theta Y)_n$  est l'application  $f_0$ . Pour  $x \in X_n \setminus s^n(X_0)$  tel que  $f_n(x)$  n'est pas dégénérescence d'un point,  $(f\Theta Y)_n$  est l'identité de  $Y^x$  vers  $Y^{f_n(x)}$ . Pour  $x \in X_n \setminus s^n(X_0)$  tel que  $f_n(x)$  est dégénérescence d'un point  $a' \in X'_0$ ,  $(f\Theta Y)_n$  est l'application constante à valeur  $a'$  de  $Y^x$  dans  $X'_0$ .

**Lemme 3.2.3** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits.

$*\Theta*$  :  $\mathcal{ENSSIMP} \times (\mathcal{C} - \mathcal{PC}) \rightarrow \mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est un bifoncteur préservant les sommes amalgamées en chacune de ses composantes.

*Preuve :*

Il est facile de vérifier que, pour tout ensemble simplicial  $X$  et pour tout objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$ ,  $X\Theta*$  et  $*\Theta Y$  sont des foncteurs et que l'on a la propriété suivante : pour tout  $f : X \rightarrow X'$  morphisme d'ensembles simpliciaux et pour tout  $g : Y \rightarrow Y'$  morphisme de  $\mathcal{C}$ , on a l'égalité  $f\Theta Y' \circ X\Theta g = X'\Theta g \circ f\Theta Y$ .

La vérification de la préservation de la somme amalgamée en chacune des variables est immédiate à partir de la définition, car la somme amalgamée des  $\mathcal{C}$ -précatégories est la somme amalgamée niveau par niveau.

CQFD.

A partir de maintenant nous allons essentiellement appliquer cette construction  $\Theta$  à deux types d'ensembles simpliciaux.

**Définition 3.2.4**

- Pour tout entier  $m$ , on définit  $\Delta[m]$  comme l'ensemble simplicial représenté par  $\mathbf{m}$ .

- Pour tout entier  $m$  strictement positif, on définit  $\Upsilon(m)$  comme la somme amalgamée de  $m$  exemplaires de  $\Delta[1]$  au-dessus de  $\Delta[0]$  en alternant but et source. On note  $i_m : \Upsilon(m) \rightarrow \Delta[m]$  l'inclusion canonique.

On peut se représenter  $\Delta[m]$  comme un  $m$ -simplexe mais aussi comme une catégorie engendrée par  $m$  morphismes composables entre  $m + 1$  points distincts. Et l'on peut se représenter  $\Upsilon(m)$  comme une suite de  $m$  morphismes composables entre  $m+1$  points distincts. Ainsi  $\Delta[m]$  est la catégorie associée à  $\Upsilon(m)$ .

Nous allons maintenant montrer que le bifoncteur  $\Theta$  a bien la propriété que l'on voulait, à savoir que les morphismes de  $\Delta[m]\Theta C$  vers une  $\mathcal{C}$ -précaturgorie  $A$  correspondent aux morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $C$  vers  $A_m$ .

**Proposition 3.2.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits et les produits fibrés au-dessus d'un objet discret.*

1) *Il existe un isomorphisme naturel en  $X$  et en  $A$  entre l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$ -précaturgories de  $\Delta[m]\Theta X$  vers  $A$  et l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $A_m$  tels que le morphisme composé*

*$X \rightarrow A_m \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  est constant (i.e. se factorise par l'objet final de  $\mathcal{C}$ ), où le morphisme  $A_m \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  est induit par les  $m+1$  applications sommets de  $\mathbf{0}$  vers  $\mathbf{m}$ .*

2) *Il existe un isomorphisme naturel en  $X$  et en  $A$  entre l'ensemble des morphismes de  $\mathcal{C}$ -précaturgories de  $\Upsilon[m]\Theta X$  vers  $A$  et l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  tels que le morphisme composé  $X \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  est constant, où le morphisme  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  est induit par les  $m+1$  applications sommets de  $\mathbf{0}$  vers  $\mathbf{1} \amalg_{\mathbf{0}} \dots \amalg_{\mathbf{0}} \mathbf{1}$ .*

3) *Les deux isomorphismes ci-dessus sont compatibles avec l'inclusion  $i_m : \Upsilon(m) \rightarrow \Delta[m]$ .*

*Preuve :*

1) Tout d'abord, on remarque que  $(\Delta[m]\Theta X)_n$  est le coproduit de  $\Delta[m]_0$  avec un exemplaire de  $X$  pour chaque morphisme de  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbf{m}$  ne se factorisant pas par  $\mathbf{0}$ . En outre, pour se donner un morphisme de  $\Delta[m]\Theta X$  vers  $A$ , il faut se donner pour chaque entier  $n$  des morphismes de  $(\Delta[m]\Theta X)_n$  vers  $A_n$  compatibles avec la structure simpliciale. Or pour se donner un morphisme de  $(\Delta[m]\Theta X)_n$  vers  $A_n$ , il faut et il suffit de se donner un morphisme de  $\Delta[m]_0$  vers  $A_n$  et un morphisme de  $X^f$  dans  $A_n$  pour tout morphisme  $f$  de  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbf{m}$  ne se factorisant pas par  $\mathbf{0}$ . Par respect de la structure simpliciale, on obtient

les carrés commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 X^{Id_{\mathbf{m}}} \longrightarrow A_m & & \Delta[m]_0 \longrightarrow A_0 & & X^{Id_{\mathbf{m}}} \longrightarrow A_m \\
 \downarrow Id_X & & \downarrow Id_{\Delta[m]_0} & & \downarrow *_i \\
 X^f \longrightarrow A_n & & \Delta[m]_0 \longrightarrow A_n & & \Delta[m]_0 \longrightarrow A_0 \\
 & & \downarrow s^n & & \downarrow A(\delta^i)
 \end{array}$$

où  $*_i$  désigne l'application constante à valeur  $i$  et  $\delta^i$  l'application  $i$ -ème sommet de  $\mathbf{0}$  vers  $\mathbf{m}$  envoyant  $0$  sur  $i$ .

Ainsi le premier diagramme montre qu'un morphisme de  $X^f$  dans  $A_n$  est entièrement déterminé par  $f$  et la donnée d'un morphisme de  $X^{Id_{\mathbf{m}}}$  dans  $A_m$ . Quant au morphisme de  $\Delta[m]_0$  vers  $A_n$ , le deuxième diagramme montre qu'il est entièrement déterminé par la donnée d'un morphisme de  $\Delta[m]_0$  vers  $A_0$ , c'est-à-dire par la donnée de  $m+1$  objets de  $A$  ( $a_0, \dots, a_m$ ). En outre le troisième diagramme montre le morphisme  $X^{Id_{\mathbf{m}}}$  dans  $A_m$  composé avec les morphismes induits par les  $m+1$  sommets de  $\mathbf{m}$  est constant. Ainsi se donner un morphisme de  $\Delta[m] \Theta X$  vers  $A$ , c'est se donner un morphisme de  $X$  dans  $A_m$  tel que la composée avec le morphisme  $A_m \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  est constant et a pour valeur le  $m+1$ -uplet d'objets de  $A$  images du morphisme de  $\Delta[m]_0$  vers  $A_0$ . Un autre manière de le formuler est de dire que la donnée d'un morphisme de  $\Delta[m] \Theta X$  vers  $A$  n'est autre que la donnée d'un morphisme de  $X$  vers  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  pour un certain  $(a_0, \dots, a_m)$   $m+1$ -uplet d'objets de  $A$ . Avec ce qui précède, on peut aisément construire l'isomorphisme cherché et montrer qu'il est naturel en  $X$  et  $A$ .

2) La démonstration est presque identique à celle du 1). Cette fois-ci, l'objet  $(\Upsilon(m) \Theta X)_n$  est le coproduit de  $\Upsilon(m)_0$  avec un exemplaire de  $X$  pour chaque morphisme de  $\mathbf{n}$  dans  $\mathbf{m}$  se factorisant par l'un des morphismes de faces principales de  $\mathbf{1}$  dans  $\mathbf{m}$  qui à  $0$  et  $1$  associe  $i$  et  $i+i$ , pour  $i$  compris entre  $0$  et  $m-1$ . Pour des raisons similaires à celles du 1), se donner un morphisme de  $\Upsilon(m) \Theta X$  vers  $A$ , c'est se donner  $m$  morphismes de  $X$  vers  $A_1$ , un pour chaque face principale, et tel que leurs composées avec le morphisme  $A_1 \rightarrow A_0 \times A_0$ , induit par source et but, sont constantes et ont pour valeur les deux objets correspondants par l'application de  $\Upsilon(m)_0$  vers  $A_0$ . Là encore, l'isomorphisme s'en déduit aisément et il est immédiat de vérifier sa naturalité en  $X$  et  $A$ .

3) Ici aussi, il s'agit d'une simple vérification. Il faut juste remarquer que l'on passe de la donnée de  $X \rightarrow A_m$  pour  $\Delta[m] \Theta X \rightarrow A$  à celle de  $X \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  pour  $\Upsilon(m) \Theta X \rightarrow A$  en composant la première donnée

par le morphisme de Segal de  $A$  au cran  $m$ .  
*CQFD.*

On peut reformuler la proposition ci-dessus en disant que, pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  et pour tout entier  $n$ , le foncteur des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers les ensembles qui à une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  associe le coproduit, sur les  $m + 1$ -uplets  $(a_0, \dots, a_m)$  d'objets de  $A$ , des ensembles de morphismes de  $C$  vers  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  est représenté par  $\Delta[m]\Theta C$ . De même, celui qui à  $A$  associe le coproduit, sur les  $m + 1$ -uplets  $(a_0, \dots, a_m)$  d'objets de  $A$ , des ensembles de morphismes de  $C$  vers  $A_1(a_0, a_1) \times \dots \times A_1(a_{m-1}, a_m)$  est représenté par  $\Upsilon(m)\Theta C$ .

Comme on l'a vu, le fait que les  $\mathcal{C}$ -précatégories aient leurs ensembles d'objets discrets entraîne une condition de constance sur les morphismes de  $X$  vers  $A_m$  pour qu'ils proviennent d'un morphisme de  $\Delta[m]\Theta X$  vers  $A$ . Il en est de même avec  $\Upsilon(m)$ . Afin de simplifier cette condition de constance, donnons une condition sur  $X$  pour laquelle tout morphisme de  $X$  vers  $A_m$  ou  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  vérifie la constance sur le produit des  $A_0$  de la proposition 3.2.5. Cette condition sera une généralisation de la connexité.

**Définition 3.2.6** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie admettant un objet final. Un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est connexe s'il vérifie la propriété que tout morphisme de  $X$  vers un objet discret se factorise par l'objet final.*

**Lemme 3.2.7** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits et les produits fibrés au-dessus d'un objet discret. Soient  $X$  un objet quelconque de  $\mathcal{C}$  et  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie. Tout morphisme dans  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $A_m$  ou  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  se factorisant à travers un objet connexe vérifie la condition de la proposition 3.2.5 et donc correspond univoquement à un morphisme de  $\Delta[m]\Theta X$  ou de  $\Upsilon(m)\Theta X$  vers  $A$ .*

*Preuve :*

On étend le morphisme de  $X$  vers  $A_m$  ou  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  à l'objet discret  $A_0 \times \dots \times A_0$  en composant par les morphismes induits par les applications sommets. Comme le morphisme de  $X$  vers  $A_m$  ou  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  se factorise à travers un objet connexe  $X'$ , son extension se factorise en un morphisme de  $X$  vers  $X'$  suivi d'un morphisme de  $X'$  vers  $A_0 \times \dots \times A_0$ . Par définition d'objet connexe, le morphisme de l'objet connexe  $X'$  vers l'objet discret  $A_0 \times \dots \times A_0$  se factorise à travers l'objet final et donc l'extension à  $A_0 \times \dots \times A_0$  du morphisme de  $X$  vers  $A_m$  ou  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  aussi, comme composée d'un morphisme

se factorisant à travers l'objet final. Ceci montre que le morphisme de  $X$  vers  $A_m$  ou  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  vérifie la condition de la proposition 3.2.5. CQFD.

Montrons maintenant que, dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , la notion de connexité possède une caractérisation simple.

**Lemme 3.2.8** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  est connexe si et seulement si, pour tout couple d'objets  $(a, b)$  de  $A$ , il existe un entier  $m$  et une suite d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  de  $A$  allant de  $a$  à  $b$  tel que, pour  $i$  allant de 0 à  $m-1$ ,  $A_1(a_i, a_{i+1})$  est non vide. (On dira alors que  $a$  et  $b$  sont reliés.)*

**Preuve :**

Soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie vérifiant la caractérisation ci-dessus et montrons que  $A$  est connexe. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories avec  $B$  discret. Soient  $a$  et  $a'$  deux objets de  $A$ . Par hypothèse sur  $A$ , alors il existe une suite  $(a_0, \dots, a_m)$  d'objets de  $A$  allant de  $a$  à  $a'$ , pour un certain  $m$ , et tel que, pour  $i$  allant de 0 à  $m-1$ ,  $A_1(a_i, a_{i+1})$  est non vide. Donc son image par  $f$ ,  $B_1(f(a_i), f(a_{i+1}))$ , est non vide. Or  $B$  est discret donc il vient que  $f(a_i)$  et  $f(a_{i+1})$  sont égaux. Comme les  $f(a_i)$  sont égaux deux-à-deux, alors ils sont tous égaux à un certain objet  $b$  de  $B$ . En particulier,  $a$  et  $a'$  ont même image par  $f$ . Donc  $f_0$  est constante (à valeur  $b$ ). De ce fait, tous les  $A_n(a_0, \dots, a_n)$  ont pour image  $B_n(b, \dots, b)$  et donc  $A_n$  qui en est le coproduit (car  $\mathcal{C}$  est discrétisante) aussi et ceci quelque soit  $n$ . Donc  $A$  a pour image le sous-ensemble  $\{b\}$  de  $B$  et donc  $f$  est constant à valeur  $\{b\}$ . Ce qui montre que  $A$  est connexe.

Soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie ne vérifiant pas la caractérisation ci-dessus et montrons que  $A$  n'est pas connexe. Par hypothèse, il existe deux objets  $a$  et  $a'$  de  $A$  tels que pour tout entier  $m$  et pour toute suite d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  allant de  $a$  à  $a'$ , on a qu'il existe  $i$  entre 0 et  $m-1$  tel que  $A_1(a_i, a_{i+1})$  soit vide. En particulier, ceci entraîne que tout objet relié à  $a$  n'est pas relié à  $a'$  et réciproquement. On va construire un morphisme de  $A$  vers  $* \coprod *$  de la manière suivante. On envoie tous les objets reliés à  $a$  sur un exemplaire de l'objet final, notons-le  $*_1$ , et les autres objets sur l'autre exemplaire de l'objet final, notons-le  $*_2$ . Comme dans un  $m$ -simplexe tous les sommets sont reliés entre eux par les arêtes, par ce qui précède, il vient que les  $m$ -simplexes sont de deux types uniquement : ceux dont tous les sommets sont reliés à  $a$  et ceux dont aucun sommet n'est relié à  $a$ . On envoie donc les premiers sur  $*_1$  et les

seconds sur  $*_2$ . Ceci nous définit bien un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories de  $A$  vers  $* \coprod *$  qui par construction ne se factorise pas par l'objet final, ce qui montre que  $A$  n'est pas connexe.

CQFD.

**Exemple 3.2.9** *Dans  $\mathcal{ENSSIMP}$ , la notion de connexité est caractérisé par le lemme ci-dessus car les ensembles simpliciaux sont des  $\mathcal{C}$ -précatégories avec pour  $\mathcal{C}$  la catégorie des ensembles.*

Grâce à cette notion de connexité et à sa caractérisation simple, nous allons pouvoir utiliser plus facilement les propriétés de la construction  $\Theta$  qui nous permettra de caractériser les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et les équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles par des propriétés de relèvements vis-à-vis de flèches construites à partir des  $\Delta[m]\Theta X$ , des  $\Upsilon(m)\Theta X$  et des familles de flèches caractérisant objets régaux faciles et alliances faciles.

### 3.3 Flèches génératrices des $\mathcal{C}$ -catégories faciles

Par définition, une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile a ses niveaux qui sont des objets régaux faciles et ses morphismes de Segal qui sont des alliances faciles d'objets régaux faciles. Ainsi si  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, pour tout entier  $m$ ,  $A_m$  est un objet régau facile donc possède la propriété de relèvement à droite par rapport à la famille  $\mathcal{F}_1$ . Par la construction  $\Theta$  précédente (et sous certaines conditions de connexité), ceci revient à dire que  $A$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches de la forme  $\Delta[m]\Theta f$  où  $f$  décrit  $\mathcal{F}_1$ . Il reste donc à formuler par propriété de relèvement que les morphismes de Segal sont des alliances faciles. C'est ce que va faire la construction  $Boit_m(g)$  que nous donnons ci-dessous.

**Définition 3.3.1** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits et les sommes amalgamées. Soient  $m$  un entier et  $g : E \rightarrow F$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . On définit la flèche  $Boit_m(g)$  de la manière suivante. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Upsilon(m)\Theta E & \xrightarrow{i_m\Theta E} & \Delta[m]\Theta E \\
 \Upsilon(m)\Theta g \downarrow & & \downarrow \\
 \Upsilon(m)\Theta F & \longrightarrow & B(m, g) \\
 & \searrow i_m\Theta F & \downarrow \Delta[m]\Theta g \\
 & & \Delta[m]\Theta F
 \end{array}$$

$\exists! Boit_m(g)$

On note  $B(m, g)$  la somme amalgamée de  $\Upsilon(m)\Theta F$  avec  $\Delta[m]\Theta E$  au-dessus de  $\Upsilon(m)\Theta E$ . L'extérieur du diagramme commute car  $*\Theta*$  est un bifoncteur, donc il existe un unique morphisme de  $B(m, g)$  vers  $\Delta[m]\Theta F$  que l'on a noté  $Boit_m(g)$ .

**Lemme 3.3.2** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits, les produits fibrés au-dessus d'un objet discret et les sommes amalgamées. Soient  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie,  $m$  un entier et  $g : E \rightarrow F$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ . Con-

sidérons le diagramme commutatif suivant :

$$(II) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & A_m \\ \downarrow g & \nearrow \exists & \downarrow \text{Segal} \\ F & \xrightarrow{\quad} & A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \end{array}$$

Si le but de  $g$  est connexe, alors ce diagramme équivaut au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B(m, g) & \xrightarrow{\quad} & A \\ \downarrow \text{Boit}_m(g) & \nearrow \exists & \\ \Delta[m]\Theta F & & \end{array} \quad (II')$$

*Preuve :*

Comme le but de  $g$  est connexe, en appliquant le lemme 3.2.7 et la proposition 3.2.5, la partie solide du diagramme (II) devient :

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon(m)\Theta E & \xrightarrow{i_m\Theta E} & \Delta[m]\Theta E \\ \downarrow \Upsilon(m)\Theta g & & \downarrow \\ \Upsilon(m)\Theta F & \xrightarrow{\quad} & B(m, g) \\ & \searrow & \nearrow \exists! \\ & & A \end{array}$$

Comme la partie solide du diagramme (II) équivaut à la commutativité de la partie extérieure du diagramme ci-dessus, il existe bien un unique morphisme de  $B(m, g)$  vers  $A$ . C'est ce morphisme qui traduit donc la partie solide du diagramme (II). Comme  $F$  est connexe, en appliquant le lemme 3.2.7 et la proposition 3.2.5 au relèvement du diagramme (II), on obtient le relèvement du diagramme (II').

CQFD.



Avec cette nouvelle construction  $Boit_m(g)$  qui représente au niveau des  $\mathcal{C}$ -précatégories ce qui se passe au niveau des morphismes de Segal et avec la construction  $\Delta[m]\Theta*$  qui représente au niveau des  $\mathcal{C}$ -précatégories ce qui se passe au niveau  $m$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories, nous sommes en mesure de donner les flèches génératrices des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles.

**Définition 3.3.3** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées. On définit la famille  $\mathcal{FG}1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles de type 1 comme la famille des morphismes de la forme  $\Delta[m]\Theta f$ , avec  $m$  un entier strictement positif et  $f$  une flèche de  $\mathcal{F}_1$ . On définit la famille  $\mathcal{FG}2$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles de type 2 comme la famille des morphismes de la forme  $Boit_m(g)$ , avec  $m$  un entier supérieur ou égal à deux et  $g$  une flèche de  $\mathcal{F}_2$ . On note  $\mathcal{FG}_1$  la réunion des deux familles  $\mathcal{FG}1$  et  $\mathcal{FG}2$ .

On appelle les morphismes de  $\mathcal{FG}1$  les flèches génératrices de type 1, car ce sont celles qui caractérisent la condition 1) de la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile. Et les morphismes de  $\mathcal{FG}2$  sont nommés les flèches génératrices de type 2 car ce sont celles qui caractérisent la condition 2) de la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile. La famille  $\mathcal{FG}_1$ , réunion des familles  $\mathcal{FG}1$  et  $\mathcal{FG}2$ , est nommée famille des flèches génératrices des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, car ce sont bien par rapport à ces flèches que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles se relèvent, comme le montre la proposition ci-dessous.

**Proposition 3.3.4** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ .

Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile si et seulement si elle a la propriété de relèvement à droite par rapport à la famille  $\mathcal{FG}1$  et par rapport à la famille  $\mathcal{FG}2$ .

*Preuve :*

Tout d'abord, explicitons la définition de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile. Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile si :

- 1) pour tout entier  $m$ ,  $A_m$  est une catégorie facile dans  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$ .

- 2) pour tout entier  $m$  supérieur ou égal à deux, le morphisme de Segal  $A_m \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  est une équivalence facile d'objets régaux faciles, c'est-à-dire possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches de la famille  $\mathcal{F}_2$ .

La condition 1) se traduit par le diagramme suivant :

$$(I) \quad \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A_m \\ f \downarrow & \nearrow \exists & \\ D & & \end{array} \quad f \in \mathcal{F}_1$$

La condition 2) se traduit par le diagramme suivant :

$$(II) \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A_m \\ g \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow \text{Segal} \\ F & \longrightarrow & A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \end{array} \quad g \in \mathcal{F}_2$$

Comme les sources et buts des flèches de  $\mathcal{F}_1$  sont connexes, en appliquant successivement le lemme 3.2.7 et la proposition 3.2.5, le diagramme (I) équivaut au diagramme suivant :

$$(I') \quad \begin{array}{ccc} \Delta[m] \Theta C & \longrightarrow & A \\ \Delta[m] \Theta f \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta[m] \Theta D & & \end{array}$$

Ceci montre que la condition 1) est vérifiée si et seulement si le diagramme (I') se relève.

Comme en outre les buts des flèches de  $\mathcal{F}_2$  sont connexes alors par le lemme précédent, il vient que le diagramme (II) équivaut au diagramme (II') du lemme précédent. Ceci montre que la condition 2) est vérifiée si et seulement si le diagramme (II') se relève.

CQFD.

**Exemple 3.3.5** Pour les familles de flèches prises dans l'exemple 3.1.2 pour  $\mathcal{ENSSIMP}$ , on a que leurs buts sont connexes car les  $m$ -simplexes standards sont connexes au sens de l'exemple 3.2.9.

Passons maintenant à la caractérisation par relèvement des équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles.

**Définition 3.3.6** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits. On définit la famille  $\mathcal{FG}_2$  des flèches génératrices d'équivalences faciles comme la famille constituée de l'inclusion  $\emptyset \rightarrow *$  et des morphismes  $\Delta[1]\Theta g$ , avec  $g$  une flèche de  $\mathcal{F}_2$ .

**Proposition 3.3.7** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et telle que les buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_2$  soient connexes. Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles est une équivalence facile de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles si et seulement si  $f$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux flèches de la famille  $\mathcal{FG}_2$ .

*Preuve :*

Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles est une équivalence facile de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles si :

- 1')  $f_0$  est surjective,
- 2') pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ , le morphisme dans  $\mathcal{C}$   $f_1(x, y) : A_1(x, y) \rightarrow B_1(f(x), f(y))$  est une équivalence facile d'objets régaux faciles dans  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire se relève à droite par rapport aux flèches de la famille  $\mathcal{F}_2$ .

La condition 1') se traduit simplement par le diagramme suivant :

$$(III) \quad \begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ * & \longrightarrow & B \end{array}$$

La condition 2') se traduit par le diagramme suivant :

$$(IV) \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A_1(x, y) \\ \downarrow g & \nearrow \exists & \downarrow f_1(x, y) \\ F & \longrightarrow & B_1(f(x), f(y)) \end{array} \quad g \in \mathcal{F}_2$$

Comme les buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_2$  sont connexes, en utilisant le lemme 3.2.7 et la proposition 3.2.5, le diagramme (IV) équivaut au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[1]\Theta E & \longrightarrow & A \\
 \Delta[1]\Theta g \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\
 \Delta[1]\Theta F & \longrightarrow & B
 \end{array} \quad (IV')$$

CQFD.

Les deux propositions précédentes nous assurent donc que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et les équivalences faciles sont caractérisées par des propriétés de relèvement. Ainsi on a muni la donnée de Segal des  $\mathcal{C}$ -catégories de deux familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  définissant par relèvement les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et les équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Il est alors tout naturel de se demander si avec ces familles la donnée de Segal des  $\mathcal{C}$ -catégories n'est pas une donnée de Segal proto-facile. Pour cela on va d'abord montrer que les propriétés de connexité que l'on demande aux familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont aussi valables sur  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$ .

**Lemme 3.3.8** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes non vides ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ . Alors les sources et buts de  $\mathcal{FG}_1$  sont connexes non vides ainsi que les but de  $\mathcal{FG}_2$ .*

*Preuve :*

Tout d'abord remarquons qu'en dehors de l'inclusion  $\emptyset \rightarrow *$ , dont le but est bien connexe et non vide, la famille  $\mathcal{FG}_2$  est de la forme  $\Delta[1]\Theta g$ . Remarquons ensuite que  $(\Delta[m]\Theta X)_1(x, y)$  et  $(\Upsilon(m)\Theta X)_1(x, x+1)$  ne sont autres qu'un exemplaire de  $X$  (celui qui est associé à l'application de  $\mathbf{1}$  dans  $\mathbf{m}$  qui à 0 et 1 associe  $x$  et  $y$ , respectivement  $x$  et  $x+1$ ). Donc si  $X$  est non vide, il vient que  $\Delta[m]\Theta X$  et  $\Upsilon(m)\Theta X$  sont connexes. Leurs ensembles d'objets étant non vides, ils sont eux-mêmes non vides. Comme par hypothèse sur la donnée de Segal proto-facile, pour tout morphisme  $f : C \rightarrow D$  dans  $\mathcal{F}_1$ ,  $C$  et  $D$  sont connexes non vides, alors  $\Delta[m]\Theta f : \Delta[m]\Theta C \rightarrow \Delta[m]\Theta D$  a bien sa source et son but connexes et non vides. Ceci montre que les flèches de  $\mathcal{FG}_1$  ont leurs sources et buts connexes non vides. De même, les buts des flèches  $g : E \rightarrow F$  de  $\mathcal{F}_2$  sont

connexes et non vides, donc les buts des flèches  $\Delta[1]\Theta g : \Delta[1]\Theta E \rightarrow \Delta[1]\Theta F$  et  $Boit_m(g) : B(m, g) \rightarrow \Delta[m]\Theta F$  ont aussi leurs buts connexes et non vides. Ainsi les buts de flèches de  $\mathcal{FG}_2$  sont connexes non vides. Enfin on remarque que  $B(m, g)_1(x_i, x_{i+1})$  n'est autre qu'un exemplaire de  $F$  et donc  $B(m, g)$  est connexe non vide. Ainsi les sources et buts des flèches de  $\mathcal{FG}_2$  sont connexes non vides.

CQFD.

**Lemme 3.3.9** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes non vides ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ . Alors la donnée de Segal  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  définie dans le lemme 1.4.7 munie des familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  constitue une donnée de Segal proto-facile.*

*Preuve :*

Montrons tout d'abord que les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  sont des ensembles. Comme  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est une donnée de Segal proto-facile, les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont par définition des ensembles. Or  $\mathcal{FG}_1$  est constituée des flèches de type  $\Delta[n]\Theta f$  et  $Boit_m(g)$  avec  $f$  décrivant  $\mathcal{F}_1$ ,  $g$  décrivant  $\mathcal{F}_2$  et  $m$  et  $n$  décrivant  $\mathbb{N}$ . Donc  $\mathcal{FG}_1$  est donc bien un ensemble comme réunion dénombrable d'ensembles. De même, comme  $\mathcal{FG}_2$  est constituée des flèches de type  $\Delta[1]\Theta g$  avec  $g$  décrivant  $\mathcal{F}_2$  et de la flèche  $\emptyset \rightarrow *$ , c'est un ensemble comme réunion d'ensembles. Donc les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  sont des ensembles.

Par la proposition 3.3.4, les  $\mathcal{C}$ -précatégories ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à la famille  $\mathcal{FG}_1$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et donc des  $\mathcal{C}$ -catégorie par le lemme 3.1.7, ce qui donne la première partie de la propriété 8. De même par la proposition 3.3.7, les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à la famille  $\mathcal{FG}_2$  sont des équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et donc des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories par le lemme 3.1.7, ce qui donne la première partie de la propriété 10. Comme les produits fibrés au-dessus d'un objet discret dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  ou dans sa catégorie de morphismes se calculent niveau par niveau et que les objets régaux faciles et les équivalences faciles d'objets régaux faciles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret, par les propriétés 8) et 10) de la donnée de Segal proto-facile  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ , on obtient que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et les équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret. Comme par les lemmes 3.3.4 et 3.3.7, les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont les objets ayant la propriété de relèvement

à droite par rapport à  $\mathcal{FG}_1$  et les équivalences faciles de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{FG}_2$ , les secondes parties des propriétés 8 et 10 sont donc bien vérifiées. Par le lemme 3.3.8, les sources des morphismes de la famille  $\mathcal{FG}_1$  sont connexes et donc tout morphisme de la source d'un morphisme de  $\mathcal{FG}_1$  vers un objet discret se factorise par l'objet final. De fait les  $\mathcal{C}$ -précatégories discrètes ont la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{FG}_1$ , ce qui donne la propriété 9.

CQFD.

Nos  $\mathcal{C}$ -catégories faciles étant caractérisées par une propriété de relèvement par rapport à une famille de flèches, on va donc pouvoir appliquer toute la machinerie développée au chapitre précédent pour obtenir le procédé de catégorisation tant recherché.

### 3.4 Construction Cat

Nous avons montré dans la section précédente que la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile est simple à manipuler car elle est caractérisée par des propriétés de relèvements. En effet, on a montré que les  $\mathcal{C}$ -précatégories  $\mathcal{FG}_1$ -injectives correspondent exactement aux  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. L'idée pour catégoriser est donc de prendre la  $\mathcal{FG}_1$ -injectivisation des  $\mathcal{C}$ -précatégories. Ainsi on obtiendra une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile associée à travers laquelle tout morphisme de notre  $\mathcal{C}$ -précatégorie vers une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile se factorisera. La seule ombre à ce tableau idyllique est que l'on veut que ce procédé préserve l'homotopie, ce que l'on est incapable de montrer directement. Aussi a-t-on vu au chapitre précédent l'intérêt d'une I-injectivisation possédant la propriété d'unicité de la factorisation des morphismes à but I-injectifs. Comme au chapitre précédent, on va construire une telle  $\mathcal{FG}_1$ -injectivisation en se servant de la notion de marquage partiel des  $\mathcal{C}$ -précatégories, qui n'est autre que la notion d'objet partiellement  $\mathcal{FG}_1$ -marquée.

**Définition 3.4.1** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ . Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée est la donnée d'un couple  $(A, \mu)$ , où  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie et  $\mu$  une fonction d'un ensemble de diagrammes solides de type (I') et (II') pour  $A$  qui associe à chaque diagramme solide de cet ensemble un relèvement, que l'on dira marqué. Par abus de langage, on dit qu'un diagramme appartient à  $\mu$  pour dire qu'il appartient au domaine de définition de la fonction  $\mu$  et donc qu'on lui a choisi un relèvement.*

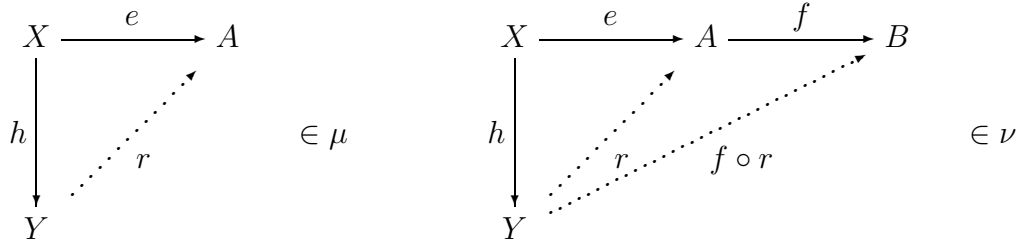
On remarque que si  $A$  est totalement marquée (i.e.  $\mu$  contient tous les diagrammes des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles vers  $A$ ) alors  $A$  a bien évidemment la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, ce qui fait de  $A$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile pour laquelle tous les relèvements sont marqués, c'est ce qu'on appelle une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée.

**Définition 3.4.2** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ . Une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée est la donnée d'un couple  $(A, \mu)$ , où  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile et  $\mu$  une fonction de l'ensemble*

des diagrammes solides de type (I') et (II') pour  $A$  qui à chaque diagramme solide associe un relèvement.

Les notions de  $\mathcal{C}$ -précatorie totalement marquée et de  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée sont équivalentes, comme on l'a vu plus haut. Il nous reste donc à définir ce que sont les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatories partiellement marquées.

**Définition 3.4.3** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ . Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  entre les  $\mathcal{C}$ -précatories partiellement marquées  $(A, \mu)$  et  $(B, \nu)$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatories partiellement marquées si, pour tout diagramme de  $\mu$ , son prolongement par  $f$  est un diagramme de  $\nu$ . On dit que le morphisme préserve le marquage. Un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories marquées n'est autre qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatories partiellement marquées.



On obtient ainsi deux catégories :  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}_m$ , la catégories des  $\mathcal{C}$ -précatories partiellement marquées et sa sous-catégorie pleine  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_m$  des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées. Tout d'abord, remarquons qu'une même  $\mathcal{C}$ -catégorie facile peut avoir plusieurs marquages différents et ainsi peut donner lieu à plusieurs  $\mathcal{C}$ -catégories marquées, il en va de même pour les  $\mathcal{C}$ -précatories. Ainsi nos deux nouvelles catégories ne sont pas des sous-catégories de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ . En revanche, elles sont toutes deux munies d'un foncteur Oubli vers  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  qui est fidèle mais n'est pas plein car tout morphisme ne préserve pas le marquage. En outre on a vu que la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile n'est pas stable par limite mais en revanche celle de  $\mathcal{C}$ -catégories marquées l'est.

**Lemme 3.4.4** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  possède les coproduits, les limites et les sommes amalgamées et telle que les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  soient connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ . La catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_m$  des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées avec les morphismes préservant les marquages possède les limites.



*Preuve* : application directe du lemme 2.1.5 !

Cette notion de marquage va nous permettre de définir un procédé de catégorisation qui à une  $\mathcal{C}$ -précatégorie va associer une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée, procédé qui non seulement sera fonctoriel mais servira d'adjoint au foncteur Oubli des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories. On nommera ce procédé  $\text{Cat}$ . Pour définir  $\text{Cat}$ , on va se servir de la construction  $E_\Phi$  définie au chapitre précédent avec pour  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$ . Toutefois si l'on veut que le procédé ainsi défini  $\mathcal{FG}_1$ -injectivise bien, c'est-à-dire catégorise bien, il faut que les flèches de  $\Phi$ , ici de  $\mathcal{FG}_1$ , ait des propriétés de petitesse et que les  $\Phi$ -cofibrations soient des monomorphismes. Le lemme suivant nous montre que si les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  de la donnée de Segal proto-facile ont leurs sources et buts petits alors  $\mathcal{FG}_1$  aussi.

**Lemme 3.4.5** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente possède les coproduits et les sommes amalgamées et vérifie les deux propriétés suivantes :*

*-les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  sont connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ ,*

*-il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3.*

*Alors tout morphisme de  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  a aussi sa source et son but  $\alpha$ -petits.*

*Preuve* :

Par construction,  $(\Delta[m]\Theta X)_n$  et  $(\Upsilon(m)\Theta X)_n$  sont des sommes amalgamées d'un ensemble fini avec un coproduit fini d'exemplaire de  $X$ . Si  $X$  est  $\alpha$ -petit alors  $(\Delta[m]\Theta X)_n$  et  $(\Upsilon(m)\Theta X)_n$  aussi, par le lemme 2.3.4 et, comme on a pris  $\alpha$  régulier et strictement supérieur à  $\aleph_0$ , par le lemme 2.3.6,  $\Delta[m]\Theta X$  et  $\Upsilon(m)\Theta X$  sont  $\alpha$ -petits ainsi que  $B(m, g)$ , somme amalgamée des précédents, si  $g$  est  $\alpha$ -petite. Comme, par ailleurs, l'inclusion  $\emptyset \rightarrow *$  a sa source et son but  $\aleph_0$ -petits, les ensembles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  ont bien leurs morphismes ayant les sources et buts  $\alpha$ -petits.

CQFD.

Un des corollaires de ce lemme est que la famille  $\mathcal{FG}_1$  permet l'argument du petit objet. Ainsi les  $\mathcal{FG}_1$ -cofibrations sont des rétracts de colimites séquentielles transfinites de sommes amalgamées de flèches de  $\mathcal{FG}_1$ . Montrons alors que si les rétracts de colimites séquentielles transfinites de sommes

amalgamées de flèches de  $\mathcal{F}_1$  et de  $\mathcal{F}_2$  sont des monomorphismes, alors les  $\mathcal{FG}_1$ -cofibrations sont des monomorphismes.

**Lemme 3.4.6** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente possède les colimites et vérifie les trois propriétés suivantes :*

*-les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  sont connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ ,*

*-il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3,*

*-les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes.*

*Alors les  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$ -cofibrations sont des monomorphismes.*

*Preuve :*

Par le lemme précédent, les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  permettent l'argument du petit objet et donc la famille réunion  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$  aussi. Ceci permet de caractériser les  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$ -cofibrations comme les rétracts de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées de flèches de  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$ . Or niveau par niveau, les flèches de  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$  sont des coproduits de flèches de  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ . Ainsi nos  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$ -cofibrations sont donc niveau par niveau des rétracts de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées de flèches de  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ , donc ce sont niveau par niveau des  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations. Or par hypothèse, les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes. Donc les  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$ -cofibrations sont niveau par niveau des monomorphismes. Comme  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est une catégorie de préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$ , les monomorphismes de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont les monomorphismes niveau par niveau. Ainsi les  $\mathcal{FG}_1 \cup \mathcal{FG}_2$ -cofibrations sont bien des monomorphismes dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ . CQFD.

**Exemple 3.4.7** *Les  $m$ -simplexes standards et leurs bords ayant un nombre fini de simplexes non dégénérés sont  $\aleph_0$ -petits et donc, avec les familles de flèches choisies dans l'exemple 3.1.2,  $\mathcal{ENSSIMP}$  vérifie l'hypothèse de petitesse de la proposition-définition de Cat ci-dessous.*

*En outre les familles de flèches de l'exemple 3.1.2 sont des monomorphismes. De plus dans  $\mathcal{ENSSIMP}$ ,  $\emptyset \rightarrow *$  est un monomorphisme et les monomorphismes sont stables par rétract, somme amalgamée le long d'un morphisme, coproduit et comilite séquentielle transfinie. Ainsi l'hypothèse concernant les monomorphismes de la proposition-définition de Cat ci-dessous est vérifiée également.*

Nous avons maintenant tous les éléments en main pour pouvoir donner la proposition-définition du procédé de catégorisation  $\text{Cat}$ .

**Proposition 3.4.8 (-définition)** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente est cocomplète et vérifie les trois propriétés suivantes :*

-les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  sont connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ ,

-il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3,

-les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes.

Il existe un foncteur  $\text{Cat}$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées muni d'une transformation naturelle  $\text{can}$  entre l'identité des  $\mathcal{C}$ -précatégories et la composée de  $\text{Cat}$  avec le foncteur  $\text{Oubli}$  des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories ayant la propriété universelle suivante :

pour tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie quelconque  $A$  vers une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée  $(B, \lambda)$ , il existe un unique morphisme  $\tilde{f}$  de  $\text{Cat}(A)$  vers  $B$  préservant le marquage et dont la précomposition par  $\text{can}_A$  est  $f$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \text{can}_A \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\
 \text{Cat}(A) & & 
 \end{array}$$

*Preuve :*

Nous allons prendre pour foncteur  $\text{Cat}$  le plan d'addition de cellules  $E_\Phi$  avec pour  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$ . Les hypothèses sur la donnée de Segal proto-facile permettent de vérifier les hypothèses des lemmes 3.4.5 et 3.4.6, ce qui nous donne que les morphismes de  $\Phi$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petit et que les  $\Phi$ -cofibrations sont des monomorphismes. On peut alors appliquer la proposition 2.6.7, qui nous dit que  $E_\Phi$  est un foncteur à valeur dans les objets  $\Phi$ -injectifs marqués et que tout morphisme  $A \rightarrow B$  à but  $\Phi$ -injectif marqué se factorise de manière unique à travers le morphisme naturel  $A \rightarrow E_\Phi(A)$  en un morphisme préservant le marquage. Or les objets  $\Phi$ -injectifs marqués ne

sont autres que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées, ce qui nous donne que  $Cat$  va dans les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées et vérifie la propriété universelle. Enfin la transformation naturelle  $can$  est induite par le morphisme naturel  $A \rightarrow E_{\Phi}(A)$ .  
CQFD.

Comme on a pu le faire remarquer au sujet du plan d'addition de cellules  $E_{\Phi}$ , la factorisation ci-dessus s'applique aussi bien pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles mais il n'y aura pas d'unicité de la factorisation à travers  $Cat(A)$ .

**Corollaire 3.4.9** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile dont la catégorie sous-jacente est cocomplète et vérifie les trois propriétés suivantes :*

- les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  sont connexes ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ ,
- il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3,
- les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes.

*La construction  $Cat$  est un foncteur de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vers  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_m$  qui est adjoint à gauche du foncteur  $Oubli$ , i.e. on a un isomorphisme naturel en  $A$  et  $(B, \lambda)$ , induit par le morphisme  $can_A$  :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_m}(Cat(A), (B, \lambda)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{PC}}(A, Oubli((B, \lambda)))$$

*De ce fait, le foncteur  $Cat$  préserve les colimites.*

*Preuve :*

De la propriété universelle découle l'unicité à isomorphisme près de  $Cat(A)$ , ce qui entraîne que  $Cat$  est en fait un adjoint à gauche du foncteur  $Oubli$  des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Enfin comme foncteur adjoint à gauche,  $Cat$  préserve les colimites.

CQFD.

On prendra bien garde que, contrairement aux limites, les colimites dans  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_m$  ne sont pas les colimites niveau par niveau dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories sous-jacentes avec pour marquage la colimites des marquages. Par exemple, pour les (petites) catégories, une colimite niveau par niveau de nerfs de catégories n'est pas un nerf de catégorie en général.

Nous avons désormais un procédé de catégorisation  $\text{Cat}$  ayant de bonnes propriétés mais pas encore celle de préserver le type d'homotopie. Toutefois, il est intéressant de récapituler les hypothèses faites sur la donnée de Segal proto-facile qui ont permis la construction  $\text{Cat}$ . Cela donnera lieu à la définition de donnée de Segal pré-facile et à une proposition montrant que, pour toute donnée de Segal pré-facile, il existe une catégorisation de type  $\text{Cat}$ .

**Définition 3.4.10** *Une donnée de Segal pré-facile est un triplet  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  constitué d'une donnée de Segal  $\mathcal{C}$ , dont la catégorie sous-jacente est co-complète, et de deux familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  de morphismes de  $\mathcal{C}$  qui sont des ensembles satisfaisant les propriétés suivantes :*

8) *Les objets de  $\mathcal{C}$  ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$  sont des objets régaux et sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

9) *Les objets discrets de  $\mathcal{C}$  ont la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$ .*

10) *Les morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_2$  et dont la source et le but sont des objets régaux ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_1$  sont des alliances d'objets régaux et le produit fibré, dans la catégorie des morphismes, de deux tels morphismes au-dessus d'un objet discret a encore la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{F}_2$ .*

11) *Les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$  sont connexes non vides ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ .*

12) *Il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3.*

13) *Les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes.*

On remarque qu'ici nous avons demandé en hypothèse 11) en plus de la connexité des sources et buts des flèches génératrices leur non vacuité. Si la non vacuité des sources et buts des flèches génératrices est superflue pour assurer l'existence de  $\text{Cat}$ , en revanche c'est l'une des hypothèses permettant d'assurer que la donnée de Segal des  $\mathcal{C}$ -catégories munie des familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  est une donnée de Segal proto-facile. Montrons maintenant qu'une donnée de Segal pré-facile donne bien lieu à un foncteur  $\text{Cat}$ .

**Proposition 3.4.11** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Alors il existe un foncteur  $Cat$  de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vers  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_m$  qui est adjoint à gauche du foncteur  $Oubli$ , i.e. on a un isomorphisme naturel en  $A$  et  $(B, \lambda)$  :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_m}(Cat(A), (B, \lambda)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{PC}}(A, Oubli((B, \lambda)))$$

*De ce fait, le foncteur  $Cat$  préserve les colimites.*

*Preuve :* c'est juste une reformulation du corollaire précédent.

On a déjà vu que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  munie des  $\mathcal{C}$ -catégories, des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories et des familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  forme une donnée de Segal proto-facile. Il est donc intéressant de savoir si cette donnée de Segal proto-facile est aussi une donnée de Segal pré-facile.

**Lemme 3.4.12** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile.*

*Alors la donnée de Segal  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  définie dans le lemme 1.4.7 munie des familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  constitue une donnée de Segal pré-facile.*

*Preuve :*

On a déjà montré dans le lemme 3.3.9 qu'avec les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$ , la donnée de Segal sur  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -catégories et équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories forme une donnée de Segal proto-facile. Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est cocomplète et que les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  vérifient les propriétés 11), 12) et 13).

Tout d'abord, comme  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est une catégorie de préfaisceaux sur la catégorie  $\mathcal{C}$  qui est cocomplète par hypothèse, alors  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est cocomplète. En outre, par hypothèse, les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  vérifient la propriété 11) de connexité, donc, par le lemme 3.3.8, les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  aussi. De même, par hypothèse, les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  vérifient la propriété 11) ainsi que la propriété 12) sur la petitesse, donc, par le lemme 3.4.5, les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  vérifient aussi la propriété 12). Enfin les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  vérifient par hypothèse les propriétés 11), 12) et 13), donc, par le lemme 3.4.6, les familles  $\mathcal{FG}_1$  et  $\mathcal{FG}_2$  vérifient bien la propriété 13) concernant les monomorphismes.

CQFD.

Grâce à notre nouvelle notion de donnée de Segal pré-facile, nous avons assuré l'existence d'un foncteur de catégorisation  $Cat$  adjoint au foncteur  $Oubli$  des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Cependant nous ne savons toujours pas si ce procédé préserve le type d'homotopie, c'est-à-dire si pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  l'image par  $Cat$  du morphisme naturel  $can_A : A \rightarrow Cat(A)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. C'est l'objet du chapitre suivant que de résoudre ce problème.

...

## Chapitre 4

# Préservation du type d'homotopie par catégorisation



Nous avons construit le procédé de catégorisation  $\text{Cat}$  qui est un adjoint au foncteur Oubli des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Cependant, pour que cette construction soit une bonne catégorisation, nous lui demandons de préserver le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories. Plus précisément, nous voulons que, pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$ , l'image par  $\text{Cat}$  du morphisme naturel  $\text{can}_A : A \rightarrow \text{Cat}(A)$  soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Or il est très difficile de montrer directement ce résultat. En nous appuyant sur la proposition 2.7.1, nous savons que si les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient certaines propriétés, dont celle de "trois pour deux", et si nous trouvons un procédé de catégorisation préservant l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories, alors notre construction  $\text{Cat}$  préservera le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories.

C'est pourquoi nous allons débiter ce chapitre par montrer les propriétés que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories doivent vérifier pour satisfaire les hypothèses de la proposition 2.7.1. Puis nous poursuivrons cette partie par la recherche d'une nouvelle catégorisation que l'on nommera  $\text{Bigcat}$  qui aura justement la propriété de préserver le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme cette recherche est assez compliquée, nous allons tout d'abord donner des constructions simples qui non seulement se comportent bien pour la composition finie et transfinie mais aussi formalisent la somme amalgamée avec les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. La bonne compréhension de ces constructions nous mènera à des plans d'addition de certaines flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles qui ont la faculté de préserver l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Nous pourrons alors définir  $\text{Bigcat}$  comme un plan d'addition formé de tels plans. Nous terminerons ce chapitre par l'application de la proposition 2.7.1 au triplet  $\text{Cat}$ ,  $\text{Bigcat}$ , équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories.

## 4.1 Propriétés des équivalences de $\mathcal{C}$ -catégories

Commençons cette section en rappelant brièvement la définition d'une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Un morphisme  $f : A \rightarrow B$  entre  $\mathcal{C}$ -catégories est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si :

- l'application d'ensembles  $\tau_0(f) : \tau_0(A) \rightarrow \tau_0(B)$  est surjective,
- pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ , le morphisme  $f_1(x, y) : A_1(x, y) \rightarrow B_1(f(x), f(y))$  est une alliance d'objets régaux.

Parmi les propriétés demandées aux équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories par la proposition 2.7.1, deux concernent des propriétés du genre "trois pour deux" et une demande que les isomorphismes soient des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Nous avons déjà cette propriété par le lemme 1.4.7. Toutefois on va ici montrer un résultat plus général qui nous assure que les équivalences niveau par niveau, c'est-à-dire les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories qui niveau par niveau sont des alliances d'objets régaux, sont bien des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Ce résultat sera souvent très utile car dans de nombreux cas où l'on aura à montrer qu'un morphisme est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, en particulier pour montrer que Bigcat préserve l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories, on pourra se réduire à montrer que le morphisme est niveau par niveau une alliance d'objets régaux.

**Définition 4.1.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal.*

*On appelle équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories niveau par niveau tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories  $f$  tel que :*

- $f_0$  est une bijection d'ensembles,
- pour tout entier  $m > 0$ ,  $f_m$  est une alliance d'objets régaux.

**Lemme 4.1.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal. Alors les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories niveau par niveau sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve :*

Soit  $f : A \rightarrow B$  une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories niveau par niveau. Comme  $f_0$  est une bijection et que, pour tout entier  $m > 0$ ,  $f_m$  est une alliance d'objets régaux, alors, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\tau_0(f_n)$  est une bijection car  $\tau_0$  envoie les alliances d'objets régaux et les bijections d'objets discrets sur des bijections ensemblistes. Ainsi  $\tau_1(f)$  est un isomorphisme de catégories, ce qui entraîne que  $\tau_0(f)$  est une bijection. Donc  $f$  est bien essentiellement surjective.

Soit  $(a, a')$  un couple d'objets de  $A$ . Comme  $f_1(a, a')$  n'est autre que le produit fibré de  $f_1$  et de l'identité de l'objet final au-dessus de l'isomorphisme  $f_0 \times f_0$  et que les alliances d'objets régaux sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret, il vient que  $f_1(a, a')$  est une alliance d'objets régaux, et

donc  $f$  est bien pleinement fidèle.  
 CQFD.

Un des cas particuliers de ce lemme concerne les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories qui sont niveau par niveau des isomorphismes de  $\mathcal{C}$ . Comme les isomorphismes d'objets régaux sont des alliances d'objets régaux, les isomorphismes niveau par niveau sont bien des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories niveau par niveau, donc par le lemme ce sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Ceci est une autre manière de montrer que les isomorphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, ce qui est l'une des trois hypothèses sur les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories de la proposition 2.7.1. Montrons maintenant les deux autres qui sont du type "trois pour deux".

**Lemme 4.1.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *La catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée dont tous les objets sont cofibrants.*
- 2) *Les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux.*
- 3) *Le foncteur  $\tau_0$  est tel que, pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\tau_0(C)$  est un quotient de l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final vers  $C$ .*
- 4) *Il existe un objet régau contractile  $K$  muni de deux morphismes de l'objet final vers  $K$  notés  $0$  et  $1$ , et ayant la propriété suivante : pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de l'objet final vers un objet régau  $C$  tel que leurs images par  $\tau_0$  soient égales, il existe un morphisme de  $K$  vers  $C$  envoyant  $0$  sur  $f$  et  $1$  sur  $g$ .*
- 5) *Les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sont stables par produit dans la catégorie des morphismes de  $\mathcal{C}$ .*
- 6) *Le produit fibré d'une équivalence faible entre objets régaux le long d'une fibration est une équivalence faible.*

*Alors les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient la propriété de "trois pour deux", i.e. pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories composables, si deux morphismes parmi  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, alors le morphisme restant est aussi une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve :*

Soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories. Supposons d'abord que  $f$  et  $g$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. On a donc

par propriété du foncteur  $\tau_0$  que  $\tau_0(f)$  et  $\tau_0(g)$  sont des bijections et donc  $\tau_0(g \circ f) = \tau_0(g) \circ \tau_0(f)$  est une bijection comme composée de bijections, ce qui rend  $g \circ f$  essentiellement surjective. En outre, pour tout couple  $(a, a')$  d'objets de  $A$ , on a  $f_1(a, a')$  et  $g_1(f(a), f(a'))$  alliances d'objets régaux et donc, par hypothèse 2), ce sont des équivalences faibles. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée et donc vérifie l'axiome "trois pour deux", il vient que  $(g \circ f)_1(a, a')$  est une équivalence faible entre objets régaux, et par 2), une alliance d'objets régaux. D'où  $g \circ f$  est pleinement fidèle. On a donc montré que si  $f$  et  $g$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, alors  $g \circ f$  aussi.

Supposons maintenant que  $g \circ f$  et  $g$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Alors on a  $\tau_0(g \circ f)$  et  $\tau_0(g)$  bijectifs, ce qui entraîne que  $\tau_0(f)$  aussi. De même, pour tout couple  $(a, a')$  d'objets de  $A$ ,  $(g \circ f)_1(a, a')$  et  $g_1(f(a), f(a'))$  sont des alliances d'objets régaux et donc par 2) des équivalences faibles, d'où, par l'axiome "trois pour deux" vérifié par la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ ,  $f_1(a, a')$  est aussi une équivalence faible entre objets régaux, donc par 2) une alliance d'objets régaux. Ceci montre que si  $g \circ f$  et  $g$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, alors  $f$  aussi.

Supposons enfin que  $g \circ f$  et  $f$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme pour le cas précédent, on a  $\tau_0(g \circ f)$  et  $\tau_0(f)$  bijectifs, ce qui entraîne que  $\tau_0(g)$  aussi et donc que  $g$  est essentiellement surjective. On veut maintenant montrer que pour tout couple  $(b, b')$  d'objets de  $B$ ,  $g_1(b, b')$  est une alliance d'objets régaux. On remarque tout d'abord que comme  $f$  est essentiellement surjective, il existe  $a$  et  $a'$  objets de  $A$  tels que  $f(a)$  soit équivalent à  $b$  et  $f(a')$  équivalent à  $b'$ . Or  $f_1(a, a')$  et  $(g \circ f)_1(a, a')$  sont des alliances d'objets régaux et donc par 2) des équivalences faibles, d'où, par l'axiome "trois pour deux" vérifié par la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ ,  $g_1(f(a), f(a'))$  est aussi une équivalence faible entre objets régaux, donc par 2) une alliance d'objets régaux. Nous cherchons donc à transmettre cette propriété à  $g_1(b, b')$  à travers les équivalences d'objets  $f(a) \sim b$  et  $f(a') \sim b'$ .

Pour ce faire, nous allons construire, pour tout objet  $x$  de  $A$ , un foncteur  $F$  de la catégorie comma  $(x, \tau_1(A))$  vers  $Ho - \mathcal{C}$  la catégorie homotopique de  $\mathcal{C}$ , qui à un objet  $y$  de  $(x, A)$  associe le remplacement fibrant de  $A_1(x, y)$ , que l'on notera  $A_1^f(x, y)$ . Soit  $f$  un morphisme de l'objet final vers  $A_1(y, z)$  représentant d'une classe de  $(x, \tau_1(A))$ , nous voulons définir  $F(f)$ .

Considérons le morphisme de Segal  $A_2(x, y, z) \rightarrow A_1(x, y) \times A_1(y, z)$ , c'est une équivalence faible du fait que  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie et en utilisant le lemme 1.3.6 et 2). Comme les morphismes de  $A_1(x, y)$  et de  $A_1(y, z)$  vers leurs remplacements fibrants sont des équivalences faibles, par hypothèse 5), le morphisme produit  $A_1(x, y) \times A_1(y, z) \rightarrow A_1^f(x, y) \times A_1^f(y, z)$  est une équivalence faible et, par l'axiome "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , sa précomposition par le morphisme de Segal est aussi une équivalence faible. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, on peut décomposer l'équivalence faible  $A_2(x, y, z) \rightarrow A_1^f(x, y) \times A_1^f(y, z)$  en une cofibration triviale suivie d'une fibration, qui par l'axiome "trois pour deux" sera aussi triviale. Notons  $A'_2(x, y, z)$  l'objet par lequel l'équivalence se factorise. Posons  $A_2(x, y, f)$  le produit fibré de la fibration  $A'_2(x, y, z) \rightarrow A_1^f(y, z)$  le long du morphisme  $*$   $\rightarrow A_1^f(y, z)$  induit par  $f$ . Par produit fibré le long d'un morphisme d'une fibration,  $A_2(x, y, f)$  est fibrant. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A_2(x, y, f) & \longrightarrow & A'_2(x, y, z) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_1^f(x, y) & \longrightarrow & A_1^f(x, y) \times A_1^f(y, z) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & A_1^f(y, z)
 \end{array}$$

Le diagramme du bas est cartésien et par définition de  $A_2(x, y, f)$  le diagramme total est cartésien. Donc le diagramme du haut est aussi cartésien et donc  $A_2(x, y, f) \rightarrow A_1^f(x, y)$  est une fibration triviale comme produit fibré de la fibration triviale  $A'_2(x, y, z) \rightarrow A_1^f(x, y) \times A_1^f(y, z)$  le long d'un morphisme. En outre  $A_2(x, y, z) \rightarrow A'_2(x, y, z)$  étant une cofibration triviale, le morphisme  $A_2(x, y, z) \rightarrow A_1^f(x, z)$  s'étend à  $A'_2(x, y, z)$ , et l'on obtient un morphisme  $A_2(x, y, f) \rightarrow A_1^f(x, z)$ . Considérons donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A_2(x, y, f) & \xrightarrow{\sim} & A_1^f(x, y) \\
 \downarrow & \searrow \text{dotted} & \\
 A_1^f(x, z) & & \exists F(f)
 \end{array}$$

Comme par hypothèse 1), dans  $\mathcal{C}$  tous les objets sont cofibrants et que les objets  $A_2(x, y, f)$ ,  $A_1^f(x, y)$  et  $A_1^f(x, z)$  sont fibrants, ce diagramme existe bien dans la catégorie homotopique  $Ho-\mathcal{C}$ . En outre  $A_2(x, y, f) \rightarrow A_1^f(x, y)$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ , donc sa classe dans  $Ho-\mathcal{C}$  est un isomorphisme. En composant sa classe inverse par la classe de  $A_2(x, y, f) \rightarrow A_1^f(x, z)$ , on obtient une classe qu'on notera  $F(f)$  de  $A_1^f(x, y)$  vers  $A_1^f(x, z)$ , que l'on peut concevoir comme la composition homotopique au but par  $f$ .

Montrons maintenant que  $F(f)$  est indépendant du choix du représentant pour la classe de  $f$ . Soit donc  $g$  un autre morphisme de l'objet final vers  $A_1(y, z)$  ayant même image que  $f$  par  $\tau_0$ , donc représentant la même classe que  $f$  dans  $(x, \tau_1(A))$ . Comme  $A_1(y, z)$  est un objet régéal comme fibre de l'objet régéal  $A_1$ , par hypothèse 4), il existe un morphisme de l'objet régéal contractile  $K$  vers  $A_1(y, z)$  envoyant 0 sur  $f$  et 1 sur  $g$ . Soit  $K'$  l'objet fibrant par lequel  $K \rightarrow A_1(y, z) \rightarrow A_1^f(y, z)$  se factorise en cofibration triviale suivie d'une fibration. Posons  $P$  l'objet fibrant produit fibré de  $A_2(x, y, z) \rightarrow A_1^f(y, z)$  le long de  $K' \rightarrow A_1^f(y, z)$ . Par produit fibré d'une fibration le long d'un morphisme,  $P \rightarrow K'$  est une fibration. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A_2(x, y, f) & \longrightarrow & * \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 P & \longrightarrow & K' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_2(x, y, z) & \longrightarrow & A_1^f(y, z)
 \end{array}$$

Le diagramme du bas et le diagramme total sont cartésiens par définition de  $P$  et  $A_2(x, y, f)$ . Donc le diagramme du haut est cartésien et par suite le morphisme  $A_2(x, y, f) \rightarrow P$  est le produit fibré de  $* \rightarrow K'$  induit par 0 le long de  $P \rightarrow K'$ . Comme  $K$  et donc  $K'$  est contractile, par hypothèse 6),  $A_2(x, y, f) \rightarrow P$  est une équivalence faible comme produit fibré d'une équivalence faible le long d'une fibration. il en va de même pour  $A_2(x, y, g) \rightarrow P$  (induit par 1). On obtient ainsi dans  $Ho-\mathcal{C}$  un isomorphisme entre  $A_2(x, y, f)$  et  $A_2(x, y, g)$  qui entraîne l'égalité de  $F(f)$  et  $F(g)$ . Ainsi  $F(f)$  est indépendant du choix d'un représentant pour la classe de  $f$ .

Pour montrer que  $F$  est un foncteur, on remarque tout d'abord que, pour tout  $f : y \rightarrow z$  et  $g : z \rightarrow w$ , il existe " $g \circ f$ " :  $y \rightarrow w$  tel que la classe de " $g \circ f$ " soit la composée de la classe de  $f$  avec celle de  $g$ , car  $(x, \tau_1(A))$  est une catégorie. On définit alors une équivalence faible  $A_3(x, y, f, g) \rightarrow A_1^f(x, y)$  comme on l'a fait pour  $A_2(x, y, f) \rightarrow A_1^f(x, y)$  qui permet de montrer, comme pour l'indépendance du choix de  $F(f)$ , que  $F(g) \circ F(f)$  et  $F("g \circ f")$  sont égales. De même, on construira une équivalence faible  $A_2(x, y, Id_y) \rightarrow A_1^f(x, y)$ , dont l'inverse homotopique est induit par l'application de dégénérescence, et qui permet de montrer que  $F$  préserve l'identité.

On a ainsi montré que  $F$  est un foncteur. On en déduit que si  $f : * \rightarrow A_1(y, z)$  est une équivalence entre  $y$  et  $z$  alors il existe  $g : * \rightarrow A_1(z, y)$  tel que la composée des classes de  $f$  et de  $g$  ainsi que celle des classes de  $g$  et de  $f$  sont les identités et donc  $F(f)$  et  $F(g)$  induisent des isomorphismes entre  $A_1^f(x, y)$  et  $A_1^f(x, z)$  dans  $Ho - \mathcal{C}$ . On montre de manière symétrique que si  $x$  et  $x'$  sont deux objets équivalents de  $A$  et  $y$  un objet fixé de  $A$ , alors  $A_1^f(x, y)$  et  $A_1^f(x', y)$  sont isomorphes dans  $Ho - \mathcal{C}$ .

Or nous avons que  $b \sim f(a)$  et  $b' \sim f(a')$ , donc par ce qui précède on a dans  $Ho - \mathcal{C}$  des isomorphismes entre  $B_1^f(b, b')$  et  $B_1^f(f(a), f(a'))$  et entre  $C_1^f(g(b), g(b'))$  et  $C_1^f(g \circ f(a), g \circ f(a'))$ . Or on a vu que  $g_1(f(a), f(a'))$  est une équivalence faible, donc par l'axiome "trois pour deux" son remplacement fibrant  $g_1^f(f(a), f(a')) : B_1^f(f(a), f(a')) \rightarrow C_1^f(g \circ f(a), g \circ f(a'))$  est aussi une équivalence faible, et donc sa classe dans  $Ho - \mathcal{C}$  est un isomorphisme. On obtient donc que la classe de  $g_1^f(b, b') : B_1^f(b, b') \rightarrow C_1^f(g(b), g(b'))$  dans  $Ho - \mathcal{C}$  est un isomorphisme, donc que le remplacement fibrant de  $g_1(b, b')$  est une équivalence faible et par l'axiome "trois pour deux" que  $g_1(b, b')$  elle-même est une équivalence faible entre objets régaux, ce qui par 2) en fait une alliance d'objets régaux.  $g$  est donc pleinement fidèle et comme on a déjà montré son essentielle surjectivité,  $g$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. On a ainsi montré que si  $f$  et  $g \circ f$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories alors  $g$  aussi. CQFD.

**Corollaire 4.1.4** *Sous les hypothèse du lemme 4.1.3, soient  $f$  et  $g$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories tels que  $f \circ g$  soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories et  $g \circ f$  soit l'identité, alors  $f$  et  $g$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve :* Par functorialité de  $\tau_0$ , on a que  $\tau_0(f) \circ \tau_0(g)$  est une bijection donc que  $\tau_0(f)$  est surjectif.

On a en outre que, pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de la source de  $f$ ,  $f_1(x, y) \circ g_1(f(x), f(y))$  est une alliance d'objets régaux, donc, par hypothèse 2), une équivalence faible, et que  $g_1(f(x), f(y)) \circ f_1(x, y)$  est l'identité. Comme par hypothèse,  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, il vient que  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible entre objets régaux, et par 2) une alliance d'objets régaux. Donc  $f$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories et, par le lemme 4.1.3 que l'on vient de montrer,  $g$  aussi est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. CQFD.

Nous venons donc de montrer que sous des hypothèses assez fortes sur la catégorie  $\mathcal{C}$ , comme la structure de catégorie de modèles fermée par exemple, les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient les hypothèses de la proposition 2.7.1. Il ne nous reste donc plus qu'à trouver une construction catégorisante préservant l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories pour pouvoir appliquer cette proposition. Pour cela nous allons définir de nouvelles constructions formalisant différemment les sommes amalgamées par les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles.



## 4.2 Constructions Reg et Seg

Afin de construire une catégorisation dont on saura montrer la propriété de préservation d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories, nous allons essayer de comprendre comment les plans d'addition de flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles agissent niveau par niveau sur les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Les flèches génératrices se répartissent en deux types : le type 1 a pour fonction de forcer les niveaux des  $\mathcal{C}$ -précatégories à être des objets régaux, on dira que ces flèches régalisent, et le type 2 a pour fonction de forcer les morphismes de Segal des  $\mathcal{C}$ -précatégories à être des alliances d'objets régaux, on dira que ces flèches ségalisent. Aussi va-t-on donner deux constructions Reg et Seg qui permettront de comprendre comment la régalisation et la ségalisation se passent au niveau de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

Commençons par la construction Reg. Comme le but est de régaler un niveau particulier d'une  $\mathcal{C}$ -précategorie, il va donc falloir remplacer ce niveau par son remplacement régale. Aussi la construction Reg va-t-elle construire une nouvelle  $\mathcal{C}$ -précategorie à partir d'une  $\mathcal{C}$ -précategorie dont on aura modifier l'un des niveaux.

**Définition 4.2.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, finiment cocomplète et ayant les produits d'objets discrets. Soient  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précategorie,  $p$  un entier strictement positif,  $B$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $f : A_p \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  des morphismes de  $\mathcal{C}$  tels que  $g \circ f : A_p \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  soit induit par les applications sommets. On définit la  $\mathcal{C}$ -précategorie  $\text{Reg}(A, f, g)$  de la manière suivante :*

$$\text{Reg}(A, f, g)_0 = A_0 \text{ et, pour } q \text{ strictement positif,}$$

$$\text{Reg}(A, f, g)_q = A_q \coprod_{\coprod_{\Delta(q,p)^0} A_p} \left( \coprod_{\Delta(q,p)^0} B \right)$$

où  $\Delta(q, p)^0$  est l'ensemble des applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{p}$  qui ne se factorisent pas par  $\mathbf{0}$ . On notera  $B^x$  l'exemplaire de  $B$  associé à l'application  $x : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ . Soit  $y : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$  un morphisme de  $\Delta$ . On définit le morphisme induit  $y^* : \text{Reg}(A, f, g)_q \rightarrow \text{Reg}(A, f, g)_r$  ainsi. Sur la composante  $A_q$  de  $\text{Reg}(A, f, g)_q$ ,  $y^*$  est le morphisme  $A(y) : A_q \rightarrow A_r$ . Pour la composante  $B^x$ , il y a deux cas. Si  $x \circ y : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$  ne se factorise pas par  $0$ , alors  $y^*$  induit l'identité de  $B^x$  à  $B^{x \circ y}$ . Sinon  $x \circ y$  se factorise en  $\delta_i \circ \sigma^r$ , où  $\delta_i : \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p}$  est l'application  $i$ -ème sommet et  $\sigma^r : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$  l'unique application de  $\mathbf{r}$  vers  $\mathbf{0}$ . Alors  $y^*$  est la

composée suivante :

$$B^x \xrightarrow{g} A_0 \times \dots \times A_0 \xrightarrow{\pi_i} A_0 \xrightarrow{A(\sigma^r)} A_r$$

où  $\pi_i$  est la  $i$ -ème projection. On pourra aisément vérifier que ceci définit bien le morphisme  $y^*$  et que  $\text{Reg}(A, f, g)$  est bien une  $\mathcal{C}$ -précatorie munie d'un morphisme naturel  $A \rightarrow \text{Reg}(A, f, g)$ .

Le principe de la construction Seg est semblable à celui de la construction Reg. Cette fois il s'agit de ségaliser un morphisme de Segal particulier d'une  $\mathcal{C}$ -précatorie. Disons que l'on veut ségaliser le morphisme de Segal de niveau  $m$ . Pour cela on va remplacer le niveau  $m$  par un objet qui sera en alliance avec le but du morphisme de Segal de niveau  $m$ . La construction Seg pour  $m$  va donc construire une nouvelle  $\mathcal{C}$ -précatorie à partir d'une  $\mathcal{C}$ -précatorie dont on aura modifier le niveau  $m$  de manière à le mettre en alliance avec le but du morphisme de Segal de niveau  $m$ .

**Définition 4.2.2** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, finiment cocomplète et ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets. Soient  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatorie,  $m$  un entier strictement supérieur à un,  $Q$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $f : A_m \rightarrow Q$  et  $g : Q \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  des morphismes de  $\mathcal{C}$  tels que  $g \circ f : A_m \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  soit le morphisme de Segal. On définit la  $\mathcal{C}$ -précatorie  $\text{Seg}(A, f, g)$  de la manière suivante :

$$\text{Seg}(A, f, g)_0 = A_0 \text{ et, pour } q \text{ strictement positif,}$$

$$\text{Seg}(A, f, g)_q = A_q \coprod_{\coprod_{\Delta(q,m)^1} A_m} \left( \coprod_{\Delta(q,m)^1} Q \right)$$

où  $\Delta(q, m)^1$  est l'ensemble des applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{m}$  qui ne se factorisent pas par les applications de faces principales, i.e. les applications de  $\mathbf{1}$  vers  $\mathbf{m}$  qui à 0 et 1 associe respectivement  $i$  et  $i + 1$ , pour  $i$  compris entre 0 et  $m - 1$ . On notera  $Q^x$  l'exemplaire de  $Q$  associé à l'application  $x : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{m}$ . Soit  $y : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$  un morphisme de  $\Delta$ . On définit le morphisme induit  $y^* : \text{Seg}(A, f, g)_q \rightarrow \text{Seg}(A, f, g)_r$  ainsi. Sur la composante  $A_q$  de  $\text{Seg}(A, f, g)_q$ ,  $y^*$  est le morphisme  $A(y) : A_q \rightarrow A_r$ . Pour la composante  $Q^x$ , il y a deux cas. Si  $x \circ y : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{m}$  ne se factorise pas par les applications de faces principales, alors  $y^*$  induit l'identité de  $Q^x$  à  $Q^{x \circ y}$ . Sinon  $x \circ y$  se factorise en  $fp_i \circ \tau$ , où  $fp_i : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{m}$  est l'application  $i$ -ème face principale et  $\tau : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{1}$  une application dégénérée de  $\mathbf{r}$  vers  $\mathbf{1}$ . Alors  $y^*$  est la composée suivante :

$$Q^x \xrightarrow{g} A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \xrightarrow{\pi_{i+1}} A_1 \xrightarrow{A(\tau)} A_r$$

où  $\pi_{i+1}$  est la  $i+1$ -ème projection. On pourra aisément vérifier que ceci définit bien le morphisme  $y^*$  et que  $\text{Seg}(A, f, g)$  est bien une  $\mathcal{C}$ -précategorisation munie d'un morphisme naturel de  $A \rightarrow \text{Seg}(A, f, g)$ .

Le but des constructions  $\text{Reg}$  et  $\text{Seg}$  est essentiellement de formaliser la régularisation et la ségularisation des  $\mathcal{C}$ -précategorisations. Aussi s'attend-on à ce que les sommes amalgamées par les flèches génératrices des  $\mathcal{C}$ -categorisations faciles s'expriment au moyen de ces constructions.

**Lemme 4.2.3** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soient  $m$  un entier strictement positif,  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précategorisation,  $f$  un morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $g$  un morphisme de  $\mathcal{F}_2$ . Alors il existe des morphismes  $\eta : A_m \rightarrow B$ ,  $\nu : B \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$ ,  $\phi : A_m \rightarrow P$  et  $\psi : P \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\nu \circ \eta$  soit le morphisme induit par les applications sommets,  $\psi \circ \phi$  soit le morphisme de Segal de  $A$  et tels que la somme amalgamée de  $A$  par  $\Delta[m]\Theta f$  soit égale à  $\text{Reg}(A, \eta, \nu)$  et la somme amalgamée de  $A$  par  $\text{Boit}_m(g)$  soit égale à  $\text{Seg}(A, \phi, \psi)$ .*

*Preuve :*

Par le lemme 3.2.7, il vient que la somme amalgamée de  $A$  par  $\Delta[m]\Theta f$  équivaut dans  $\mathcal{C}$  à la somme amalgamée de  $A_m(x_0, \dots, x_m)$  par  $f$ , pour un certain  $m$ -uplet  $(x_0, \dots, x_m)$ . Prenons donc pour  $\eta$  le morphisme naturel de  $A_m$  dans la somme amalgamée de  $A_m$  par  $f$  et pour  $\nu$  le morphisme universel de la somme amalgamée vers  $A_0 \times \dots \times A_0$  induit par les applications sommets de  $A$  et le morphisme constant du but de  $f$  vers  $A_0 \times \dots \times A_0$  à valeur  $(x_0, \dots, x_m)$ . Par construction,  $\nu \circ \eta$  est bien induit par les applications sommets. En utilisant la formule de simplification des sommes amalgamées suivante :

$$A \coprod_D \left( D \coprod_C B \right) = A \coprod_C B$$

on trouve facilement que, pour  $q$  entier strictement positif, le niveau  $q$  de la somme amalgamée de  $A$  par  $\Delta[m]\Theta f$  et  $\text{Reg}(A, \eta, \nu)_q$  sont tous deux égaux à la somme amalgamée de  $A_q$  par un coproduit de  $f$  indexé par  $\Delta(q, m)^0$ .

Par le lemme 3.2.7, un morphisme de la source de  $\text{Boit}_m(g)$  vers  $A$  équivaut

dans  $\mathcal{C}$  au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & A_m \\ \downarrow g & & \downarrow \text{Segal} \\ Y & \xrightarrow{\quad} & A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \end{array}$$

Considérons la somme amalgamée de ce diagramme, posons alors  $\phi$  le morphisme naturel de  $A_m$  dans la somme amalgamée et  $\psi$  le morphisme universel de la somme amalgamée vers  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$ . Par construction,  $\psi \circ \phi$  est bien le morphisme de Segal de  $A$ . En utilisant la formule de simplification des sommes amalgamées rappelée ci-dessus, on trouve facilement que, pour  $q$  entier strictement positif, le niveau  $q$  de la somme amalgamée de  $A$  par  $\text{Boit}_m(f)$  et  $\text{Seg}(A, \phi, \psi)_q$  sont tous deux égaux à la somme amalgamée de  $A_q$  par un coproduct de  $g$  indexé par  $\Delta(q, m)^1$ .  
CQFD.

Il est intéressant de constater que ces deux opérations Reg et Seg sont reliées entre elles : en effet faire une opération de type Reg sur  $A_m$  revient à faire une opération de type Reg sur  $A_1$  suivie d'une opération de type Seg sur  $A_m$ . Remarquons au passage que du fait qu'il y ait des applications de  $\mathbf{m}$  vers  $\mathbf{1}$  qui ne se factorisent pas par une face principale, l'opération Seg ne laisse pas  $A_1$  invariant.

**Lemme 4.2.4** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, finiment cocomplète et ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets. Soient  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie,  $m$  un entier strictement supérieur à un,  $P$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $\phi : A_m \rightarrow P$  et  $\psi : P \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  des morphismes de  $\mathcal{C}$  tels que  $\psi \circ \phi : A_m \rightarrow A_0 \times \dots \times A_0$  soit induit par les applications sommets. Alors il existe des objets  $B$  et  $Q$  de  $\mathcal{C}$ , des morphismes  $\eta : A_1 \rightarrow B$ ,  $\nu : B \rightarrow A_0 \times A_0$ ,  $\phi' : \text{Reg}(A, \eta, \nu)_m \rightarrow Q$  et  $\psi' : Q \rightarrow \text{Reg}(A, \eta, \nu)_1 \times_{\text{Reg}(A, \eta, \nu)_0} \dots \times_{\text{Reg}(A, \eta, \nu)_0} \text{Reg}(A, \eta, \nu)_1$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\nu \circ \eta : A_1 \rightarrow A_0 \times A_0$  soit l'application induite par les morphismes source et but,  $\psi' \circ \phi' : \text{Reg}(A, \eta, \nu)_m \rightarrow \text{Reg}(A, \eta, \nu)_1 \times_{\text{Reg}(A, \eta, \nu)_0} \dots \times_{\text{Reg}(A, \eta, \nu)_0} \text{Reg}(A, \eta, \nu)_1$  soit le morphisme de Segal et que l'on ait la relation suivante :*

$$\text{Reg}(A, \phi, \psi) = \text{Seg}(\text{Reg}(A, \eta, \nu), \phi', \psi')$$

*Preuve :*

Prenons pour  $B$  la somme amalgamée de  $A_1$  par le coproduct de  $\phi : A_m \rightarrow P$

indexé par les faces principales (qui induiront le morphisme du coproduit de  $A_m$  vers  $A_1$ ). On posera alors  $\eta$  le morphisme naturel de  $A_1$  dans la somme amalgamée  $B$  et  $\nu$  le morphisme universel de la somme amalgamée  $B$  vers  $A_0 \times A_0$  induit par les morphismes source et but de  $A_1$  vers  $A_0$  et les projections du morphisme  $\psi$ . Par construction, on a bien que  $\nu \circ \eta$  n'est autre que le morphisme induit par source et but.

Considérons maintenant la  $\mathcal{C}$ -précaturie  $Reg(A, \eta, \nu)$ . On remarque facilement que  $Reg(A, \eta, \nu)_1$  n'est autre que  $B$  et que le morphisme naturel du coproduit de  $P$  vers la somme amalgamée  $B$  induit un unique morphisme de  $P$  vers  $B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$ , qui n'est autre que  $Reg(A, \eta, \nu)_1 \times_{Reg(A, \eta, \nu)_0} \dots \times_{Reg(A, \eta, \nu)_0} Reg(A, \eta, \nu)_1$ . Prenons pour  $Q$  la somme amalgamée de  $P$  avec  $Reg(A, \eta, \nu)_m$  au-dessus de  $A_m$ , pour  $\phi'$  le morphisme naturel de  $Reg(A, \eta, \nu)_m$  dans la somme amalgamée  $Q$  et pour  $\psi'$  le morphisme universel de la somme amalgamée  $Q$  vers  $B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  induit par le morphisme de  $P$  vers  $B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  et par le morphisme de Segal de  $Reg(A, \eta, \nu)$ . Par construction, on a bien que  $\psi' \circ \phi'$  n'est autre que le morphisme de Segal de  $Reg(A, \eta, \nu)$ .

Pour montrer la relation entre Reg et Seg, on utilise la propriété suivante de simplification des sommes amalgamées :

$$A \coprod_D \left( D \coprod_C B \right) = A \coprod_C B$$

Par cette formule,  $Reg(A, \eta, \nu)_q$ , qui est la somme amalgamée de  $A_q$  par un coproduit de  $\eta : A_1 \rightarrow B$  indexé par  $\Delta(q, 1)^0$ , devient la somme amalgamée de  $A_q$  par un double coproduit de  $\phi : A_m \rightarrow P$ . Ce double coproduit, étant indexé par  $\Delta(q, 1)^0$  et les faces principales, n'est autre qu'un coproduit indexé par les applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{m}$  se factorisant par les faces principales mais pas par  $\mathbf{0}$ . Ceci montre que  $Reg(A, \eta, \nu)_q$  n'est autre que la somme amalgamée de  $A_q$  avec un coproduit de  $\phi : A_m \rightarrow P$  indexé par les applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{m}$  se factorisant par les faces principales mais pas par  $\mathbf{0}$ .

Toujours par la formule de simplification des sommes amalgamées écrite ci-dessus,  $Seg(Reg(A, \eta, \nu), \phi', \psi')_q$ , qui est la somme amalgamée de  $Reg(A, \eta, \nu)_q$  par un coproduit de  $\phi' : Reg(A, \eta, \nu)_m \rightarrow Q$  indexé par  $\Delta(q, m)^1$ , devient la somme amalgamée de  $Reg(A, \eta, \nu)_q$  par un coproduit de  $\phi : A_m \rightarrow P$  indexé par  $\Delta(q, m)^1$ . En utilisant l'expression simplifiée de  $Reg(A, \eta, \nu)_q$ , on obtient que  $Seg(Reg(A, \eta, \nu), \phi', \psi')_q$  est la somme amalgamée de  $A_q$  avec le coproduit d'un coproduit de  $\phi : A_m \rightarrow P$  indexé par  $\Delta(q, m)^1$  avec un coproduit

de  $\phi : A_m \rightarrow P$  indexé par les applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{m}$  se factorisant par les faces principales mais pas par  $\mathbf{0}$ . Or ce coproduct de coproduct de  $\phi$  se simplifie en un simple coproduct indexé par l'ensemble des applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{m}$  qui soit se factorisent par les faces principales mais pas par  $\mathbf{0}$  soit ne se factorisent pas par les faces principales (éléments de  $\Delta(q, m)^1$ ) donc pas par  $\mathbf{0}$  non plus. Or cet ensemble n'est autre que  $\Delta(q, m)^0$ , i.e. celui des applications de  $\mathbf{q}$  vers  $\mathbf{m}$  ne se factorisant pas par  $\mathbf{0}$ . Ainsi  $Seg(Reg(A, \eta, \nu), \phi', \psi')_q$  est donc la somme amalgamée de  $A_q$  par un coproduct de  $\phi : A_m \rightarrow P$  indexé par  $\Delta(q, m)^0$ , ce qui est par définition  $Reg(A, \phi, \psi)_q$ .  
CQFD.

Cette remarque fondamentale sur les constructions Reg et Seg nous invite à partir de maintenant à lier fortement les opérations Reg de niveau 1 et  $m$  avec l'opération Seg de niveau  $m$ . Nous allons donc dans la section suivante envisager une construction prenant en compte ces trois opérations.

### 4.3 Construction RS

Nous avons défini dans la section précédente deux constructions Reg et Seg dont on a vu les relations entre elles. Nous allons donc maintenant définir une nouvelle construction RS qui est en même temps une opération de type Reg sur le niveau 1 et de type Seg sur le niveau  $m$ . Cette opération aura la bonne propriété d'être stable par composition mais également de garder la trace de certains sous-objets des niveaux 1 et  $m$ . Ce dernier point est assez crucial car c'est lui qui va permettre de suivre les variations de l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories dans les plans d'addition de flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. C'est pourquoi nous allons définir tout d'abord la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1,m)$ -peinte qui permet de prendre en compte des parties, dites peintes, des niveaux 1 et  $m$ .

**Définition 4.3.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets et soit  $m$  un entier strictement supérieur à un. Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1,m)$ -peinte est la donnée d'un triplet  $(A, i, j)$  constitué d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  et de deux monomorphismes  $i : A_1^* \rightarrow A_1$  et  $j : A_m^* \rightarrow A_m$  tels que le morphisme de Segal de  $A$  se restreigne en un morphisme de  $A_m^*$  vers  $A_1^* \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1^*$ .*

*Un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes  $f : (A, i, j) \rightarrow (B, i', j')$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories tel que  $f(i)$  se factorise par  $i'$  et  $f(j)$  se factorise par  $j'$ .*

**Définition 4.3.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, finiment cocomplète et ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets. Soient  $m$  un entier strictement supérieur à un,  $(A, i, j)$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1,m)$ -peinte,  $B$  et  $P$  des objets de  $\mathcal{C}$  et  $\eta : A_1^* \rightarrow B$ ,  $\nu : B \rightarrow A_0 \times A_0$ ,  $\phi : A_m^* \rightarrow P$  et  $\psi : P \rightarrow B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  des morphismes de  $\mathcal{C}$  tels que  $\nu \circ \eta : A_1^* \rightarrow A_0 \times A_0$  soit le morphisme induit par source et but et  $\psi \circ \phi : A_m^* \rightarrow B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  soit la composée de la restriction à  $A_m^*$  du morphisme de Segal par le produit  $m$  fois du morphisme  $\eta$ . Posons  $\eta' : A_1 \rightarrow B'$  la somme amalgamée d' $\eta$  le long du monomorphisme  $i$ ,  $\nu' : B' \rightarrow A_0 \times A_0$  le morphisme universel induit par  $\nu$  et les morphismes source et but,  $\phi' : A_m \rightarrow P'$  la somme amalgamée de  $\phi$  le long du monomorphisme  $j$ ,  $\psi' : P' \rightarrow B' \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B'$  le morphisme universel induit par  $\psi$ , le morphisme de Segal et un produit  $m$  fois de  $\eta'$ ,  $\phi'' : \text{Reg}(A, \eta', \nu')_m \rightarrow P''$  la somme amalgamée de  $\phi'$  le long du morphisme naturel  $A_m \rightarrow \text{Reg}(A, \eta', \nu')_m$  et  $\psi'' : P'' \rightarrow B' \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B'$  le morphisme universel induit par  $\psi'$  et le morphisme de Segal de  $\text{Reg}(A, \eta', \nu')$ . On définit la  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1,m)$ -peinte  $(RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi), k, l)$  de la manière suivante :*

$$RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi) = \text{Seg}(\text{Reg}(A, \eta', \nu'), \phi'', \psi'')$$

avec  $k$  et  $l$  les monomorphismes naturels de  $B$  dans  $RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi)_1$ , respectivement de  $P$  dans  $RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi)_m$ . Il est facile de voir que ceci définit bien une  $\mathcal{C}$ -précategorisation  $(1, m)$ -peinte munie d'un morphisme naturel provenant de  $A$ .

Cette définition de la construction RS étant un peu complexe, donnons donc de la construction RS une expression plus simple.

**Lemme 4.3.3** *Sous les hypothèses et les notations de la définition précédente,  $RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi)_0$  n'est autre que  $A_0$  et, pour tout entier  $q$  strictement positif,  $RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi)_q$  est la somme amalgamée de  $A_q$  par le coproduit d'un coproduit de  $\eta$  indexé par  $\Delta(q, 1)^0$  avec un coproduit de  $\phi$  indexé par  $\Delta(q, m)^1$ . Les morphismes sont définis de manière similaire à ceux des constructions Reg et Seg.*

*Preuve* : directe après un petit calcul utilisant la formule de simplification des sommes amalgamées :

$$A \coprod_D \left( D \coprod_C B \right) = A \coprod_C B.$$

Comme on l'a annoncé plus haut, cette construction RS est stable par composition mais aussi par colimite séquentielle transfinie comme le montrent les deux lemmes suivants.

**Lemme 4.3.4** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, finiment cocomplète et ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets. Soient  $m$  un entier strictement supérieur à un,  $(A, i, j)$  une  $\mathcal{C}$ -précategorisation  $(1, m)$ -peinte,  $B, C, P$  et  $Q$  des objets de  $\mathcal{C}$  et  $\eta : A_1^* \rightarrow B, \nu : B \rightarrow A_0 \times A_0, \tilde{\eta} : B \rightarrow C, \tilde{\nu} : C \rightarrow A_0 \times A_0, \phi : A_m^* \rightarrow P, \psi : P \rightarrow B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B, \tilde{\phi} : P \rightarrow Q$  et  $\tilde{\psi} : Q \rightarrow C \times_{A_0} \dots \times_{A_0} C$  des morphismes de  $\mathcal{C}$  tels que  $\nu \circ \eta : A_1^* \rightarrow A_0 \times A_0$  soit le morphisme induit par source et but,  $\tilde{\nu} \circ \tilde{\eta} : B \rightarrow A_0 \times A_0$  soit le morphisme  $\nu, \psi \circ \phi : A_m^* \rightarrow B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  soit la composée de la restriction à  $A_m^*$  du morphisme de Segal par le produit  $m$  fois du morphisme  $\eta$  et  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi} : P \rightarrow C \times_{A_0} \dots \times_{A_0} C$  soit la composée du morphisme  $\psi$  par le produit  $m$  fois du morphisme  $\tilde{\eta}$ . Alors on a la relation suivante :*

$$RS(RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi), \tilde{\eta}, \tilde{\nu}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = RS(A, \tilde{\eta} \circ \eta, \tilde{\nu} \circ \nu, \tilde{\phi} \circ \phi, \tilde{\psi} \circ \psi)$$



*Preuve* : application directe de la formule de simplification des sommes amalgamées et du lemme décrivant explicitement  $RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi)_q$ .

**Lemme 4.3.5** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, cocomplète et ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets. Soient  $m$  un entier strictement supérieur à un,  $(A, i, j)$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1, m)$ -peinte,  $\lambda$  un cardinal transfini,  $\eta : A_1^* \rightarrow B$  la composée d'une  $\lambda$ -séquence dans  $\mathcal{C}$  de  $\eta_i : B^i \rightarrow B^{i+1}$  et  $\phi : A_m^* \rightarrow P$  la composée d'une  $\lambda$ -séquence dans  $\mathcal{C}$  de  $\phi_i : P^i \rightarrow P^{i+1}$ . Soient pour tout  $i$  inférieur ou égal à  $\lambda$  des morphismes  $\nu_i : B^i \rightarrow A_0 \times A_0$  et  $\psi_i : P^i \rightarrow B^i \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B^i$  de  $\mathcal{C}$  tels que, pour tout  $i$  cardinal non limite inférieur ou égal à  $\lambda$ ,  $\nu_i \circ \text{colim}_{j \leq i} \eta_j$  soit le morphisme induit par source et but et  $\psi_i \circ \text{colim}_{j \leq i} \phi_j$  soit le morphisme induit par le morphisme de Segal de  $A$  et par  $\text{colim}_{j \leq i} \eta_j$ , et tels que, pour tout  $i$  cardinal limite inférieur ou égal à  $\lambda$ , d'une part les morphismes  $\nu_i$  et  $\psi_i$  sont les morphismes universels induits respectivement par les  $\nu_j$  et les  $\psi_j$  (avec  $j$  strictement inférieur à  $i$ ), et d'autre part,  $\nu_i \circ \text{colim}_{j < i} \eta_j$  soit le morphisme induit par source et but et  $\psi_i \circ \text{colim}_{j < i} \phi_j$  soit le morphisme induit par le morphisme de Segal de  $A$  et par  $\text{colim}_{j < i} \eta_j$ . Posons  $RS^0 = A$ . Pour  $i$  cardinal inférieur strictement à  $\lambda$ , posons  $RS^{i+1} = RS(RS^i, \eta_i, \nu_i, \phi_i, \psi_i)$  avec  $B^{i+1}$  et  $P^{i+1}$  pour partie peinte. Pour  $i$  cardinal limite inférieur ou égal à  $\lambda$ , posons  $RS^i = \text{colim}_{j < i} RS^j$  avec pour partie peinte  $B^i$  et  $P^i$ . Alors on a les relations suivantes :*

-si  $\lambda$  est un cardinal limite,

$$\underline{\text{colim}}_{i < \lambda} RS^i = RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi),$$

-si  $\lambda$  n'est pas un cardinal limite,

$$\underline{\text{colim}}_{i \leq \lambda} RS^i = RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi).$$

*Preuve* : directe à partir de la forme explicite de  $RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi)$  en utilisant la commutativité des colimites.

La construction RS a été voulue comme une sorte de généralisation des opérations Reg et Seg. Nous allons montrer que les constructions Reg et Seg peuvent donc bien s'exprimer au moyen de la construction RS.

**Lemme 4.3.6** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante, finiment cocomplète et ayant les produits fibrés au-dessus d'objets discrets. Soient  $m$  un entier strictement supérieur à un et  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie. On peut exprimer les opérations Reg et Seg en terme d'opération RS de la manière suivante :*

- Soient  $f : A_1 \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow A_0 \times A_0$  tels que  $g \circ f$  soit induit par source et but,  $\text{Reg}(A, f, g)$  n'est autre que  $\text{RS}(A, \eta, \nu, \phi, \psi)$  avec  $f$  pour  $\eta$ ,  $g$  pour  $\nu$ , des identités pour  $i, j$  et  $\phi$ , et la composée du morphisme de Segal avec un produit  $m$  fois de  $f$  pour  $\psi$ .
- Soient  $f : A_m \rightarrow P$  et  $g : P \rightarrow A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  tels que  $g \circ f$  soit le morphisme de Segal,  $\text{Seg}(A, f, g)$  n'est autre que  $\text{RS}(A, \eta, \nu, \phi, \psi)$  avec  $f$  pour  $\phi$ ,  $g$  pour  $\psi$ , des identités pour  $i, j$  et  $\eta$ , le morphisme induit par source et but pour  $\nu$ .

*Preuve* : directe à partir de la forme explicite de  $\text{RS}(A, \eta, \nu, \phi, \psi)_g$ .

Comme on l'a déjà vu l'opération  $\text{Reg}$  au niveau  $m$  est la composée d'une opération  $\text{Reg}$  au niveau 1 avec une opération  $\text{Seg}$  au niveau  $m$ . Comme toutes deux sont des opérations  $\text{RS}$  et que l'opération  $\text{RS}$  est stable par composition, l'opération  $\text{Reg}$  au niveau  $m$  est aussi une opération  $\text{RS}$ .

Notre construction  $\text{RS}$  permet donc d'exprimer les constructions  $\text{Reg}$  et  $\text{Seg}$  qui expriment quant à elles les sommes amalgamées par les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. En outre cette construction  $\text{RS}$  permet de suivre à la trace certaines parties des niveaux 1 et  $m$ . C'est pourquoi nous allons donc regarder certains plans d'addition de flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles qui s'expriment au moyen de la construction  $\text{RS}$ , ce qui nous permettra de montrer qu'ils préservent l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories.

## 4.4 Construction $\text{Cat}(1, m)$

Comme on l'a vu dans les sections précédentes, les sommes amalgamées par des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles de type 1 pour les niveaux 1 et  $m$  et celles avec des flèches de type 2 pour le niveau  $m$  sont compatibles et s'expriment au moyen de la construction RS qui est stable par colimite séquentielle transfinie et garde la trace de parties peintes des niveaux 1 et  $m$ . Aussi va-t-on considérer le plan d'addition de cellules  $e_{\Phi, \lambda}$  avec pour  $\Phi$  la famille des flèches ci-dessus et montrer que ce plan n'est autre qu'une construction RS.

**Définition 4.4.1** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $m$  un entier strictement supérieur à un. Notons  $\Phi$  la famille de morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories constituée des flèches de type  $\Delta[1]\Theta f$ ,  $\Delta[m]\Theta f$  et  $\text{Boit}_m(g)$ , avec  $f$  dans  $\mathcal{F}_1$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}_2$ .

Soit  $(A, i, j)$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1, m)$ -peinte. Définissons le plan d'addition de cellules simple  $\text{Raj}(1, m)$  pour  $(A, i, j)$  comme le plan simple  $e_{\Phi, 1}$  appliqué à  $A$  mais dans lequel on ne garde que les diagrammes dont les sources des flèches de  $\Phi$  s'envoient dans les parties peintes de  $A$ .

**Lemme 4.4.2** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $m$  un entier strictement supérieur à un.

Pour toute  $(A, i, j)$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1, m)$ -peinte, il existe des morphismes  $\eta : A_1 \rightarrow B$ ,  $\nu : B \rightarrow A_0 \times A_0$ ,  $\phi : A_m \rightarrow P$  et  $\psi : P \rightarrow B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\nu \circ \eta$  soit induit par les morphismes source et but,  $\psi \circ \phi$  soit induit par le morphisme de Segal de  $A$  et par  $\eta$  et tels qu'on ait :

$$\text{Raj}(1, m)(A, i, j) = \text{RS}(A, \eta, \nu, \phi, \psi)$$

Cette égalité fait de  $\text{Raj}(1, m)(A, i, j)$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1, m)$ -peinte dont les parties peintes sont  $B$  et  $P$ . En outre  $\eta$  est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de  $A_1$  par les flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\phi$  une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de  $A_m$  par les flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .

*Preuve :*

Par définition,  $\text{Raj}(1, m)(A, i, j)$  est une somme amalgamée de  $A$  par un coproduit de flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, ce qui peut se mettre sous la forme d'une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées par une flèche génératrice de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Or on a vu au lemme 4.2.3 que les sommes amalgamées par des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles ne sont

autres que des opérations de type RS. Comme en outre les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles par lesquelles on fait les sommes amalgamées ont leurs sources s'envoyant dans les parties peintes de  $A$ , les opérations RS sont bien composables et  $Raj(1, m)(A, i, j)$  forme ainsi une colimite séquentielle transfinie d'opérations RS au sens du lemme 4.3.5 et donc, par ce lemme,  $Raj(1, m)(A, i, j)$  est bien une opération de type RS. La démonstration du lemme montre que le morphisme  $\eta$  (respectivement  $\phi$ ) est une colimite séquentielle transfinie des morphismes  $\eta_i$  (respectivement  $\phi_i$ ). Ces morphismes  $\eta_i$  et  $\phi_i$  proviennent de l'expression des sommes amalgamées par les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Une somme amalgamée par une flèche de type  $\Delta[1]\Theta f$ , où  $f$  appartient à la famille  $\mathcal{F}_1$ , est une opération RS avec pour  $\eta$  le morphisme naturel de  $A_1^*$  dans la somme amalgamée de  $A_1^*$  par  $f$  et pour  $\phi$  l'identité. Une somme amalgamée par une flèche de type  $\Delta[m]\Theta f$ , où  $f$  appartient à la famille  $\mathcal{F}_1$ , est une opération RS avec pour  $\eta$  le morphisme naturel de  $A_1^*$  dans la somme amalgamée de  $A_1^*$  par un coproduit de  $f$  et pour  $\phi$  le morphisme naturel de  $A_m^*$  dans la somme amalgamée de  $A_m^*$  par  $f$ . Enfin une somme amalgamée par une flèche de type  $Boit_m(g)$ , où  $g$  appartient à la famille  $\mathcal{F}_2$ , est une opération RS avec pour  $\eta$  l'identité et pour  $\phi$  le morphisme naturel de  $A_m^*$  dans la somme amalgamée de  $A_m^*$  par  $g$ . Ainsi  $\eta$  est bien une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées par des flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\phi$  une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées par des flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .  
CQFD.

Ainsi le plan simple  $Raj(1, m)$  transforme des  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes en  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes. Il serait très pratique que cette transformation soit fonctorielle.

**Lemme 4.4.3** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $m$  un entier strictement supérieur à un.*

*La construction  $Raj(1, m)$  est en fait un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes vers elle-même. De même, tout plan d'addition de cellules constitué de plans simples de type  $Raj(1, m)$  est un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes vers elle-même.*

*Preuve :*

Pour montrer le premier résultat il suffit d'appliquer le critère du lemme 2.4.13. Soit  $f : (A, i, j) \rightarrow (B, i', j')$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes, l'extension de  $Raj(1, m)_A$  n'est autre que le plan simple d'addition de cellules constitué par les couples  $(D, 1)$  où  $D$  est décrit les extensions par  $f$  de diagrammes de  $\Phi$  s'envoyant dans les parties peintes de  $A$ . Comme  $f$  est un

morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes, les extensions par  $f$  de diagrammes à valeur dans les parties peintes de  $A$  sont justement des diagrammes à valeur dans les parties peintes de  $B$ . Ceci montre que ces couples  $(D, 1)$  sont bien des couples du plan simple  $Raj(1, m)_B$ , d'où il vient que  $Raj(1, m)$  vérifie la condition suffisante pour être un plan d'addition de cellules fonctoriel. Le second résultat résulte du premier auquel on applique le lemme 2.4.11. CQFD.

Nous avons maintenant un plan d'addition de cellules fonctoriel  $Raj(1, m)$  qui est en fait une opération de type RS. Si l'on veut une  $\Phi$ -injectivisation qui soit aussi une opération du type RS, il suffit de prendre un plan d'addition de cellules composé uniquement de  $Raj(1, m)$  et qui soit de longueur suffisamment grande. Comme on a vu que l'opération RS est stable par colimite séquentielle transfinie, on obtiendra qu'un tel plan est encore de type RS.

**Définition 4.4.4** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $\alpha$  un cardinal transfini régulier strictement supérieur à celui qui assure la petitesse des sources et buts des flèches des familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Soient  $m$  un entier strictement supérieur à un et  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie. Nous allons définir  $Cat(1, m)(A)$  par récurrence transfinie.

Posons  $A^0 = A$  avec pour partie peinte  $A_1$  et  $A_m$ . Supposons  $(A^\beta, i_\beta, j_\beta)$  défini pour un ordinal  $\beta < \alpha$ , alors on pose :

$$A^{\beta+1} = Raj(1, m)(A^\beta, i_\beta, j_\beta),$$

ses parties peintes étant celle du lemme 4.4.2. Soit un ordinal limite  $\gamma < \alpha$ , supposons  $(A^\beta, i_\beta, j_\beta)$  défini pour tout ordinal  $\beta < \gamma$ , alors on pose :

$$(A^\gamma, i_\gamma, j_\gamma) = \left( \underset{\beta < \gamma}{\text{colim}} A^\beta, \underset{\beta < \gamma}{\text{colim}} i^\beta, \underset{\beta < \gamma}{\text{colim}} j^\beta \right)$$

Par récurrence transfinie, on a bien défini pour tout ordinal  $\beta < \alpha$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $(1, m)$ -peinte  $(A^\beta, i_\beta, j_\beta)$ . Posons donc :

$$Cat(1, m)(A) = \underset{\beta < \alpha}{\text{colim}} A^\beta$$

**Lemme 4.4.5** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soient  $m$  un entier strictement supérieur à un et  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie. Alors il existe des morphismes  $\eta : A_1 \rightarrow B$ ,  $\nu : B \rightarrow A_0 \times A_0$ ,  $\phi : A_m \rightarrow P$  et  $\psi : P \rightarrow$

$B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\nu \circ \eta$  soit induit par les morphismes source et but,  $\psi \circ \phi$  soit induit par le morphisme de Segal de  $A$  et par  $\eta$  et tels qu'on ait :

$$Cat(1, m)(A) = RS(A, \eta, \nu, \phi, \psi).$$

En outre  $B$  et  $P$  sont des objets régaux faciles,  $\psi$  une alliance facile,  $\eta$  est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de  $A_1$  par les flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\phi$  une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de  $A_m$  par les flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .

*Preuve :*

Par le lemme 4.4.2,  $Cat(1, m)(A)$ , étant une colimite séquentielle transfinie d'opérations  $Raj(1, m)$ , s'exprime comme une colimite séquentielle transfinie d'opérations RS au sens du lemme 4.3.5. Donc d'après ce lemme,  $Cat(1, m)(A)$  est une opération de type RS avec pour  $\eta : A_1 \rightarrow B$  (respectivement  $\phi : A_m \rightarrow P$ ) une colimite séquentielle transfinie des morphismes  $\eta$  (respectivement  $\phi$ ) apparaissant dans  $Raj(1, m)$ , eux-mêmes colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées par des flèches de  $\mathcal{F}_1$  (respectivement par des flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ ), ce qui nous donne la caractérisation des morphismes  $\eta$  et  $\phi$ .

Montrons que  $B$  est un objet régau facile, i.e. se relève par rapport à la famille  $\mathcal{F}_1$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{F}_1$  et  $x : X \rightarrow B$  un morphisme quelconque de  $\mathcal{C}$ . Comme par hypothèse  $X$  est petit pour un cardinal régulier strictement inférieur à  $\alpha$  et que  $B$  est une colimite séquentielle transfinie de  $B^i$ , pour  $i < \alpha$ ,  $x$  se factorise à travers  $B^\beta$  pour un certain  $\beta < \alpha$ . Ceci équivaut à un morphisme de  $\Delta[1]\Theta X$  vers  $A^\beta$  ne concernant que les parties peintes. Par définition de  $A^{\beta+1}$  comme  $Raj(1, m)(A^\beta, i_\beta, j_\beta)$ ,  $A^{\beta+1}$  est la somme amalgamée de  $A^\beta$  par toutes les flèches de type  $\Delta[1]\Theta h$ ,  $\Delta[m]\Theta h$  et  $Boit_m(g)$  dont les sources s'envoient dans les parties peintes, avec  $h$  dans  $\mathcal{F}_1$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}_2$ . Donc, par le lemme 4.4.2, sa partie peinte  $B^{\beta+1}$  est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées par des flèches de  $\mathcal{F}_1$ . En particulier, la somme amalgamée de  $A^\beta$  par  $\Delta[1]\Theta f$  correspond à un  $\eta$  qui n'est autre que le morphisme naturel de  $B^\beta$  dans la somme amalgamée de  $B^\beta$  par  $f$ . Donc on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & B^\beta \\ \downarrow f & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\exists \tilde{x}} & B^{\beta+1} \end{array}$$

L'extension de  $\tilde{x}$  à  $B$  est donc le relèvement attendu. Donc  $B$  se relève par rapport à la famille  $\mathcal{F}_1$ , ce qui en fait un objet régéal facile. On démontrera de même, en utilisant  $\Delta[m]\Theta f$ , pour  $f$  dans  $\mathcal{F}_1$ , que  $P$  est un objet régéal facile.

Montrons maintenant que  $\psi : P \rightarrow B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  est une alliance facile d'objets régéaux, i.e. se relève par rapport à la famille  $\mathcal{F}_2$ . On remarque que  $B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B$  est bien un objet régéal comme produit fibré d'objets régéaux au-dessus d'objets discrets. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & P \\ \downarrow g & & \downarrow \psi \\ Y & \xrightarrow{y} & B \times_{A_0} \dots \times_{A_0} B \end{array}$$

avec  $g$  dans  $\mathcal{F}_2$ ,  $x$  et  $y$  quelconques. Comme  $X$  et  $Y$ , par hypothèse, sont petits pour un cardinal régulier strictement inférieur à  $\alpha$  et que  $\psi$  est le morphisme universel induit par les  $\psi_i$  pour  $i < \alpha$ , ce diagramme se factorise à travers  $\psi_\beta$ , pour un certain  $\beta < \alpha$ . Ce nouveau diagramme correspond à un morphisme de la source du morphisme  $Boit_m(g)$  vers  $A^\beta$ . Par un argument similaire au précédent,  $P^{\beta+1}$  est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  et, en particulier, de  $g$  qui provient de la somme amalgamée de  $A^\beta$  par  $Boit_m(g)$ . De ce fait, l'extension du diagramme avec  $\psi_\beta$  en diagramme avec  $\psi_{\beta+1}$  possède un relèvement, i.e. une flèche de  $Y$  vers  $P^{\beta+1}$  faisant commuter les deux parties du diagramme, et son extension à  $P$  est bien un relèvement du diagramme de départ. Donc  $\psi$  se relève par rapport à la famille  $\mathcal{F}_2$ , ce qui en fait une alliance facile. CQFD.

Ce plan d'addition de cellules  $Cat(1, m)$  s'exprime donc en terme de construction RS mais avec de bonnes propriétés : en effet les parties peintes de  $Cat(1, m)$  sont des objets régéaux et la restriction du morphisme de Segal aux parties peintes est une alliance d'objets régéaux. Ce sont justement ces bonnes propriétés qui permettent à  $Cat(1, m)$  de préserver l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Lemme 4.4.6** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée,*

- 2) les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux,
- 3) la famille  $\mathcal{F}_1$  est incluse dans la classe des cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  et la famille  $\mathcal{F}_2$  dans celle des cofibrations,
- 4) les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.

Alors pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $C$  dont les morphismes de Segal sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ , on a que pour tout entier  $m \geq 2$ , le morphisme canonique  $C \rightarrow \text{Cat}(1, m)(C)$  est niveau par niveau une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$  et  $\text{Cat}(1, m)(C)$  conserve la propriété que ses morphismes de Segal sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ .

*Preuve :*

Soit  $C$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie dont tous les morphismes de Segal sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ . On a tout d'abord que  $\text{Cat}(1, m)(C)_0$  n'est autre que  $C_0$  car les flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont des isomorphismes au niveau des objets. Par le lemme 4.4.5, l'opération  $\text{Cat}(1, m)(C)$ , pour un entier  $m \geq 2$ , n'est autre qu'une opération du type RS avec  $B$  et  $P$  des objets régaux faciles,  $\eta$  une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$ ,  $\psi$  une alliance d'objets régaux et  $\phi$  une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de flèches des familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .

Comme par hypothèse la famille  $\mathcal{F}_1$  est incluse dans la classe des cofibrations triviales, classe qui, dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , est stable par colimite séquentielle transfinie et par somme amalgamée le long d'un morphisme, il vient que  $\eta$  est une cofibration triviale. De même les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  étant incluse dans la classe des cofibrations, classe stable dans  $\mathcal{C}$  par colimite séquentielle transfinie et par somme amalgamée le long d'un morphisme, il vient que  $\phi$  est une cofibration. Par hypothèse sur  $C$ , son morphisme de Segal  $C_m \rightarrow C_1 \times_{C_0} \dots \times_{C_0} C_1$  est une équivalence faible. En outre, les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret, donc le produit fibré  $m$  fois de  $\eta$  au-dessus de  $C_0$  est une équivalence faible. Par axiome "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , la composée du morphisme de Segal de  $C$  par ce produit fibré est encore une équivalence faible. Or par le lemme 4.4.5, cette composée est égale à  $\psi \circ \phi$  et comme  $\psi$  est une alliance facile, toujours par "trois pour deux",  $\phi$  est aussi une équivalence faible.



Pour tout entier  $q > 0$ , le morphisme canonique  $C_q \rightarrow \text{Cat}(1, m)(C)_q$  est la somme amalgamée de  $C_q$  par un coproduit multiple de  $\eta$  et de  $\phi$ , donc ce morphisme est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées de  $\eta$  et de  $\phi$ . Comme  $\eta$  et  $\phi$  sont des cofibrations triviales et que les cofibrations triviales sont stables par sommes amalgamées le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie, il vient que  $C_q \rightarrow \text{Cat}(1, m)(C)_q$  est une cofibration triviale.

Considérons pour finir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 C_q & \xrightarrow{\text{Segal}} & C_1 \times_{C_0} \dots \times_{C_0} C_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Cat}(1, m)(C)_q & \xrightarrow{\text{Segal}} & \text{Cat}(1, m)(C)_1 \times_{C_0} \dots \times_{C_0} \text{Cat}(1, m)(C)_1
 \end{array}$$

On vient de prouver que le morphisme vertical de gauche est une équivalence faible. En outre, par stabilité des équivalences faibles par produit fibré au-dessus d'un objet discret, le morphisme vertical de droite est aussi une équivalence faible. Comme par hypothèse les morphismes de Segal de  $C$  sont des équivalences faibles, alors par "trois pour deux" le morphisme de Segal de  $\text{Cat}(1, m)(C)$  aussi. CQFD.

Pour que notre construction  $\text{Cat}(1, m)$  soit parfaite, nous n'avons plus qu'à lui demander d'être fonctorielle, ce qui est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 4.4.7** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $m$  un entier strictement supérieur à  $n$ .*

*La construction  $\text{Cat}(1, m)$  est en fait un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers elle-même. De même tout plan d'addition de cellules constitué de plans d'addition de cellules de type  $\text{Cat}(1, m)$  est un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers elle-même.*

*Preuve :*

D'après le lemme 4.4.3, tout plan d'addition de cellules constitué de plans simples de type  $\text{Raj}(1, m)$  est un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes vers elle-même. C'est donc le cas de  $\text{Cat}(1, m)$ . Toutefois le plan d'addition de cellules  $\text{Cat}(1, m)$  part des  $\mathcal{C}$ -précatégories quelconques et

tombe dans les  $\mathcal{C}$ -précatégories quelconques. Or le fait d'associer à une  $\mathcal{C}$ -précatégorie quelconque la peinture des niveaux 1 et  $m$  tout entier est un procédé fonctoriel de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers celle des  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes. De même, l'oubli de la peinture est un foncteur des  $\mathcal{C}$ -précatégories peintes vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Ainsi  $Cat(1, m)$  est bien un foncteur des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers elles-mêmes.

Le second résultat résulte du premier auquel on applique le lemme 2.4.11. CQFD.

Nous avons donc trouvé un plan d'addition fonctoriel de flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles  $Cat(1, m)$  qui préserve l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Afin d'obtenir un procédé de catégorisation préservant l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories, il suffit de construire un plan d'addition qui prendra en compte tous les  $Cat(1, m)$ . C'est l'objet de la prochaine section.

## 4.5 Construction Bigcat

Grâce aux sections précédentes, nous avons pu exhiber un plan d'addition de flèches génératrices  $Cat(1, m)$  qui préserve le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Toutefois ce plan n'ajoute que certaines flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles et pas toutes. En revanche, si l'on considère l'ensemble des  $Cat(1, m)$  avec  $m$  décrivant les entiers strictement supérieurs à un, on obtient une famille de plans d'addition qui ensembles prennent toutes les flèches génératrices. Nous allons donc définir la catégorisation Bigcat comme un plan d'addition de cellules suivant un ordre et construit à partir des  $Cat(1, m)$ , c'est-à-dire comme un plan d'addition de cellules de la forme  $BCat(t)$ , où  $t$  va parcourir tous les entiers strictement supérieurs à un et ce un nombre suffisamment grand de fois pour assurer que le plan Bigcat catégorise.

**Définition 4.5.1** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $\alpha$  un cardinal régulier strictement supérieur au cardinal régulier pour lequel les sources et buts des flèches des familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites.*

*Notons  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Notons  $\Phi_1$  la famille constituée des flèches génératrices de la forme  $\Delta[1]\Theta f$  avec  $f \in \mathcal{F}_1$  et, pour tout entier  $m \geq 2$ , notons  $\Phi_m$  la famille constituée des flèches génératrices de la forme  $\Delta[m]\Theta f$  et  $Boit_m(g)$  avec  $f \in \mathcal{F}_1$  et  $g \in \mathcal{F}_2$ . On a bien une partition de  $\Phi$  en  $\Phi_m$  pour  $m \geq 1$ .*

*Posons  $T$  l'ordinal transfini  $\alpha \times \aleph_0$  et  $t$  la fonction qui à tout ordinal  $(\beta, n) < \alpha \times \aleph_0$  associe le couple d'entier  $(1, n + 2)$ .*

*On définit alors le plan d'addition de cellules Bigcat comme le plan d'addition de cellules suivant l'ordre  $t$  qui, à chaque étape  $\tau < T$ , a pour plan d'addition  $Cat(t(\tau))$ .*

Après avoir défini *Bigcat*, nous allons montrer qu'il s'agit bien d'une catégorisation.

**Proposition 4.5.2** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile.*

*Bigcat est un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers la catégories des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles vérifiant la propriété suivante :*

*pour tout morphisme  $f$  d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie quelconque  $A$  vers une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $C$ , il existe un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories non nécessairement unique de  $Bigcat(A)$  vers  $C$  dont la précomposée avec le morphisme naturel de  $A$  vers  $Bigcat(A)$  est le morphisme  $f$ .*

*Preuve :*

Tout d'abord, il est facile de voir que *Bigcat* est un foncteur car c'est une application directe du lemme 4.4.7. Pour avoir le reste de la proposition, il suffit

de montrer que les hypothèses du lemme 2.10.3 sont vérifiées : celles sur  $\Phi$  et celle sur  $t$ . Avant tout, on remarque que les plans du type  $Cat(1, m)$  sont des plans d'addition de cellules composés de plans simples de type  $Raj(1, m)$  qui sont des sous-plans de  $e_{\Phi_1 \cup \Phi_m, 1}$ . Or comme à la première étape de  $Cat(1, m)$  on prend pour parties peintes la totalité des niveaux 1 et  $m$ , le sous-plan  $Raj(1, m)$  à cette étape n'est autre que  $e_{\Phi_1 \cup \Phi_m, 1}$  tout entier. Ainsi les plans  $Cat(1, m)$  sont bien du type  $Cat_{\Psi, \lambda}$  et donc  $Bigcat$  est bien du type  $BCat(t)$ , ce qui justifie le fait d'utiliser le lemme 2.10.3.

Premièrement, par hypothèse  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est une donnée de Segal pré-facile. Donc les sources et buts des flèches des familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites pour un certain cardinal régulier strictement inférieur à  $\alpha$ . Par le lemme 3.4.5, ceci entraîne que les sources des flèches de la famille  $\mathcal{FG}_1 = \Phi$  sont petites par rapport à ce même cardinal. Comme en outre  $\Phi$  admet une partition, on a bien vérifié les hypothèses sur  $\Phi$ .

Comme  $T$  est le produit  $\alpha \times \aleph_0$  dont le cardinal est  $\alpha$ , on a bien que le cardinal de  $T$  est un cardinal régulier strictement supérieur au cardinal régulier pour lequel les sources des flèches de la famille  $\Phi$  sont petites. Par la suite, on mettra sur  $T$  l'ordre lexicographique.

Soit  $m \geq 1$  un entier. Montrons que pour tout ordinal  $(\beta, n) < T$ , il existe un ordinal  $\tau < T$  plus grand pour lequel  $t(\tau)$  contient  $m$ . Deux cas se présentent. Si  $m \geq n+2$ , alors l'ordinal  $(\beta, m-2)$  vérifie d'une part  $(\beta, n) \leq (\beta, m-2) < T$  et d'autre part  $t(\beta, m-2) = (1, m)$ . Sinon  $m < n+2$ . Comme  $\alpha$  est un cardinal transfini et que  $\beta$  est strictement inférieur à  $\alpha$  alors  $\beta+1$  est encore strictement inférieur à  $\alpha$ . Ainsi  $\tau = (\beta+1, m-2)$  est plus petit strictement que  $T$  mais aussi plus grand que  $(\beta, n)$ , car l'ordre est lexicographique. De plus ce  $\tau$  vérifie bien que  $t(\tau) = (1, m)$ . Ceci montre donc la première condition sur  $t$ .

Il est facile de voir avec notre  $t$  que, pour  $m \geq 2$ ,  $t^{-1}(m)$  n'est autre que l'ensemble des couples  $(\beta, m-2)$ , avec  $\beta < \alpha$ , dont le cardinal est  $\alpha = Card(T)$ . Pour  $m = 1$ ,  $t^{-1}(1)$  est en fait  $T$  tout entier, donc son cardinal est bien celui de  $T$ . Ceci montre la seconde condition sur  $t$ .

On peut donc appliquer le lemme 2.10.3 qui nous assure que le résultat de  $Bigcat$  est  $\Phi$ -injectif, c'est-à-dire est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, et que  $Bigcat$  a bien la propriété de factorisation de la proposition.

CQFD.

**Corollaire 4.5.3** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile. Soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie. Comme, par la proposition précédente,  $Bigcat(A)$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, on peut choisir de la marquer en prenant pour relèvements marqués les premiers qui apparaissent dans l'ordre de la construction. On obtient alors le résultat suivant :*

*tout morphisme de  $A$  vers une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée  $C$  se factorise à travers un morphisme préservant le marquage de  $Bigcat(A)$  vers  $C$ , cette factorisation n'étant pas nécessairement unique.*

*Preuve :* cela découle de la démonstration de la proposition. CQFD.

Notre nouvelle construction  $Bigcat$  est une catégorisation composée de plans  $Cat(1, m)$  dont on a vu qu'ils préservent l'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Il serait donc normal que  $Bigcat$  préserve cette propriété.

**Proposition 4.5.4** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée,*
- 2) *les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux,*
- 3) *la famille  $\mathcal{F}_1$  est incluse dans la classe des cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  et la famille  $\mathcal{F}_2$  dans celle des cofibrations,*
- 4) *les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

*Alors pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$ , le morphisme canonique  $A \rightarrow Bigcat(A)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories niveau par niveau et une cofibration niveau par niveau. En particulier  $A \rightarrow Bigcat(A)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve :*

Tout d'abord on observe que toutes les constructions apparaissant dans la construction  $Bigcat$  laissent invariant l'ensemble des objets. Ainsi le morphisme canonique induit l'identité sur l'ensemble des objets. Montrons par récurrence transfinie que pour tout ordinal  $\tau \leq T$ ,  $C \rightarrow Bigcat_\tau(C)$  est niveau par niveau une cofibration triviale et que les morphismes de Segal de  $Bigcat_\tau(C)$  sont des équivalences faibles dans  $\mathcal{C}$ . Pour  $\tau = 0$ , c'est vrai car  $Bigcat_0(C)$  n'est autre

que  $C$  qui est une  $\mathcal{C}$ -catégorie, donc ses morphismes de Segal sont des alliances d'objets régaux, ce qui par l'hypothèse 2) montre que ses morphismes de Segal sont des équivalences faibles dans  $\mathcal{C}$ .

Supposons la propriété vraie pour  $\tau < T$ , alors les morphismes de Segal de  $Bigcat_\tau(C)$  sont des équivalences faibles dans  $\mathcal{C}$ . Donc  $Bigcat_\tau(C)$  vérifie les hypothèses du lemme 4.4.6 et donc  $Bigcat_\tau(C) \rightarrow Cat(t(\tau))(Bigcat_\tau(C)) = Bigcat_{\tau+1}(C)$  est niveau par niveau une cofibration triviale et les morphismes de Segal de  $Cat(t(\tau))(Bigcat_\tau(C)) = Bigcat_{\tau+1}(C)$  sont des équivalences faibles. Comme par hypothèse de récurrence sur  $\tau < T$  le morphisme naturel  $C \rightarrow Bigcat_\tau(C)$  est niveau par niveau une cofibration triviale et que dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  les cofibrations triviales sont stables par composition, il vient que le morphisme  $C \rightarrow Bigcat_{\tau+1}(C)$  est niveau par niveau une cofibration triviale. On a donc montré l'hypothèse de récurrence pour  $\tau+1$ .

Soit  $\tau \leq T$  un ordinal limite et supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour tout  $\tau' < \tau$ . Comme  $C \rightarrow Bigcat_\tau(C)$  est niveau par niveau une colimite séquentielle transfinie de cofibrations triviales  $C \rightarrow Bigcat_{\tau'}(C)$  et que les cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  sont stables par colimite séquentielle transfinie, il vient que niveau par niveau  $C \rightarrow Bigcat_\tau(C)$  est une cofibration triviale. Et par un raisonnement identique à celui de la démonstration du lemme 4.4.6, on en déduit que les morphismes de Segal de  $Bigcat_\tau(C)$  sont des équivalences faibles, ce qui montre l'hypothèse de récurrence pour l'ordinal limite  $\tau$ .

Par récurrence transfinie, on a donc montré que pour tout ordinal  $\tau \leq T$  le morphisme naturel  $C \rightarrow Bigcat_\tau(C)$  est une cofibration triviale niveau par niveau et que les morphismes de Segal de  $Bigcat_\tau(C)$  sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ . C'est en particulier le cas pour  $\tau = T$ , et comme  $C$  et  $Bigcat(C)$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories,  $C \rightarrow Bigcat(C)$  est niveau par niveau une alliance d'objets régaux par l'hypothèse 2), donc c'est bien une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories niveau par niveau, et par le lemme 4.1.2, c'est aussi une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, ce qui montre la proposition.  
CQFD.

La construction  $Bigcat$  est donc non seulement un procédé de catégorisation mais aussi une opération qui préserve le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme nous avons déjà vu que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient la propriété de "trois pour deux", nous sommes maintenant en mesure d'appli-

quer la proposition 2.7.1, ce qui est l'objet de la prochaine section.

## 4.6 Préservation du type d'homotopie par la construction Cat

Afin de résoudre la problème de la catégorisation, nous cherchons à montrer que la construction Cat adjointe du foncteur oubli des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories préserve le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -précatégories. Or la proposition 2.7.1 nous certifie que Cat a bien cette propriété si les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient certaines propriétés et s'il existe une catégorisation préservant le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Dans les sections précédentes, nous avons justement montré que, sous certaines hypothèses sur la donnée de Segal pré-facile, les propriétés voulues pour les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories sont vérifiées et que la construction Bigcat catégorise en préservant le type d'homotopie des  $\mathcal{C}$ -catégories. Rassemblons donc ces hypothèses qui permettent d'appliquer la proposition 2.7.1, ce qui donnera la définition de donnée de Segal facile.

**Définition 4.6.1** *Une donnée de Segal pré-facile  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est dite facile si elle vérifie les hypothèses suivantes :*

- 1) *La catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée dont tous les objets sont cofibrants.*
- 2) *Les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux.*
- 3) *Le foncteur  $\tau_0$  est tel que, pour tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\tau_0(C)$  est un quotient de l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final vers  $C$ .*
- 4) *Il existe un objet régale contractile  $K$  muni de deux morphismes de l'objet final vers  $K$  notés  $0$  et  $1$ , et ayant la propriété suivante : pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de l'objet final vers un objet régale  $C$  tel que leurs images par  $\tau_0$  soient égales, il existe un morphisme de  $K$  vers  $C$  envoyant  $0$  sur  $f$  et  $1$  sur  $g$ .*
- 5) *Les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*
- 6) *Le produit fibré d'une équivalence faible entre objets régaux le long d'une fibration est une équivalence faible.*
- 7) *La famille  $\mathcal{F}_1$  est incluse dans la classe des cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  et la famille  $\mathcal{F}_2$  dans celle des cofibrations.*

Appliquons maintenant la proposition 2.7.1 au triplet Cat, Bigcat et équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories lorsque la donnée de Segal est facile.



**Théorème 4.6.2** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Alors il existe un foncteur  $\text{Cat}$  de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories vers la catégorie des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées qui est adjoint à gauche du foncteur  $\text{Oubli}$  des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories et vérifiant que pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  l'image par  $\text{Cat}$  du morphisme naturel  $\text{can}_A : A \rightarrow \text{Cat}(A)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve :*

Les hypothèses de la donnée de Segal assurent, par le lemme 4.1.3 et le corollaire 4.1.4, que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories vérifient les deux premières hypothèses de la proposition 2.7.1. En outre le fait que les isomorphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories est une conséquence directe du lemme 4.1.2. Ainsi toutes les hypothèses sur les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories sont vérifiées.

La proposition 3.3.4 a montré que les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont exactement les objets  $\mathcal{FG}_1$ -injectifs et la construction  $\text{Cat}$  définie comme le plan  $E_{\mathcal{FG}_1}$  est bien un adjoint à gauche du foncteur  $\text{Oubli}$ , car la donnée de Segal est facile, donc pré-facile, ce qui permet d'utiliser la proposition 3.4.11.

Enfin la proposition 4.5.4, dont les hypothèses sont vérifiées par la donnée de Segal facile, montre que le plan fonctoriel d'addition de flèches de  $\mathcal{FG}_1$  nommé  $\text{Bigcat}$  vérifie les deux premières propriétés de la  $\mathcal{FG}_1$ -injectivisation mais aussi la troisième pour les objets  $\mathcal{FG}_1$ -injectifs, c'est-à-dire pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Ceci termine de montrer que les hypothèses de la proposition 2.7.1 sont vérifiées.

On peut alors appliquer cette proposition qui assure que  $\text{Cat}$  est une  $\mathcal{FG}_1$ -injectivisation, en particulier vérifie la stabilité homotopique des  $\mathcal{C}$ -précatégories.

CQFD.

En fait l'application de la proposition 2.7.1 nous donne plus car elle nous dit que les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories si et seulement si leurs images par  $\text{Cat}$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Cette remarque va nous permettre d'étendre la notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories aux  $\mathcal{C}$ -précatégories en disant qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégorie est une équivalence si son image par  $\text{Cat}$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Définition 4.6.3** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. On dit d'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories que c'est une équivalence faible si son image par  $Cat$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

Par cette définition, nous allons pouvoir rapatrier sur les équivalences faibles les propriétés des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, comme le "trois pour deux" par exemple.

**Lemme 4.6.4** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile.

Les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories vérifient les propriétés suivantes :

- les isomorphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories sont des équivalences faibles,
- les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont des équivalences faibles si et seulement si ce sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories,
- soient  $f$  et  $g$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories composables, si parmi  $f, g, g \circ f$  deux morphismes sont des équivalences faibles alors le troisième aussi,
- soient  $f$  et  $g$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories composables, si  $f \circ g$  est l'identité et que  $g \circ f$  est une équivalence faible, alors  $f$  et  $g$  sont des équivalences faibles.

*Preuve :*

Comme pour la proposition 4.6.2, on démontre que les hypothèses du corollaire 2.7.2, qui sont les mêmes que celles de la proposition 2.7.1, sont vérifiées, ce lemme étant une conséquence directe du corollaire 2.7.2 car ici les  $\Phi$ -équivalences ne sont autres que les équivalences faibles.

CQFD.

En fait, si l'on regarde de plus près, Bigcat vérifie un résultat plus fort que celui demandé par la proposition 2.7.1. En effet, la proposition demande seulement la préservation de l'homotopie pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles alors que Bigcat préserve l'homotopie pour toutes les  $\mathcal{C}$ -catégories. Aussi si l'on refait la démonstration de la proposition 2.7.1 pour les  $\mathcal{C}$ -catégories quelconques, on obtient les résultats suivants.

**Lemme 4.6.5** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile.

- Pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie quelconque  $A$ , le morphisme naturel  $A \rightarrow Cat(A)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.
- Pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories quelconque  $f : A \rightarrow B$ , on a :  
 $f$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si et seulement si  $f$  est une équivalence faible.

*Preuve* : c'est la même démonstration que la proposition 2.7.1 en utilisant le fait que  $\text{Bigcat}$  préserve l'homotopie de toutes les  $\mathcal{C}$ -catégories et pas seulement des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles.

Il serait également intéressant de comparer la notion d'équivalence faible définie par  $\text{Cat}$  avec la notion d'équivalence faible qu'on aurait pu définir avec  $\text{Bigcat}$ .

**Lemme 4.6.6** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile.*

- *Pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$ , le morphisme naturel  $A \rightarrow \text{Bigcat}(A)$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories, c'est-à-dire son image par  $\text{Cat}$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

- *Pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f : A \rightarrow B$ , on a :*

*$f$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories si et seulement si  $\text{Bigcat}(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Ce qui signifie :*

*$\text{Cat}(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si et seulement si  $\text{Bigcat}(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve* :

La première partie du lemme est l'application directe du lemme 2.11.2 dont les hypothèses nommées hypothèses 2.11.1 ne sont autres que celles de la proposition 2.7.1 dont on a montré qu'elles sont vérifiées par la donnée de Segal facile.

Pour la seconde partie, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Bigcat}(A) & \xrightarrow{\text{Bigcat}(f)} & \text{Bigcat}(B)
 \end{array}$$

Par la première partie du lemme, les flèches verticales sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories. En appliquant le lemme 4.6.4, il vient que  $f$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories si et seulement si  $\text{Bigcat}(f)$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Or  $\text{Bigcat}(f)$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, donc toujours par le lemme 4.6.4,  $\text{Bigcat}(f)$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories si et seulement si c'est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, ce qui montre la seconde partie du lemme.

CQFD.

Nous avons finalement résolu notre problème de la catégorisation, à savoir trouver un procédé qui à une  $\mathcal{C}$ -précatégorie associe une  $\mathcal{C}$ -catégorie qui soit de même type homotopique qu'elle. Pour cela, on a facilité la donnée de Segal en lui adjoignant deux familles engendrant certains objets régaux et certaines alliances d'objets régaux. Bien sûr, comme on l'a fait remarquer à l'époque ce choix est arbitraire et rien ne nous dit que la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie facile n'est pas trop forte. C'est pourquoi pour éviter ce phénomène on a requis pour les catégorisations de préserver le type d'homotopie.

On a par la suite trouvé sous quelles hypothèses on a une telle catégorisation, c'est ce que l'on a appelé donnée de Segal facile, car elle facilite l'obtention d'une bonne catégorisation. Les hypothèses de cette donnée de Segal facile montre la marge que l'on a dans le choix des familles génératrices d'objets régaux faciles et d'alliances faciles d'objets régaux faciles qui permettront une bonne catégorisation.

On remarque aussi que les hypothèses des données de Segal faciles sont assez contraignantes car elles demandent à la catégorie  $\mathcal{C}$  de posséder une structure de catégorie de modèles fermée, ce qui est tout à fait normal puisque nous voulons manipuler des sortes d'équivalences faibles que sont les alliances d'objets régaux et nous assurer de leur stabilité par colimites. Par ailleurs, toutes les constructions catégorisantes sont en fait des I-injectivisations qui sont des processus caractéristiques de la structure de catégorie de modèles fermée.

Aussi allons nous dans le prochain chapitre nous intéresser à montrer que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  avec les monomorphismes et les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories forme une catégorie de modèles fermée. Ceci nous donnera un bon cadre théorique aux manipulations homotopiques sur les  $\mathcal{C}$ -précatégories.

## Chapitre 5

Structure de catégorie de  
modèles fermée engendrée de  
manière cofibrante sur les  
 $\mathcal{C}$ -précatégories

Après avoir présenté la notion de catégorie enrichie faible sur une catégorie  $\mathcal{C}$  dans un premier chapitre, nous nous sommes posés le problème de la catégorisation : trouver une construction fonctorielle qui à toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie associe une  $\mathcal{C}$ -catégorie en préservant le type d'homotopie. Les trois chapitres précédents ont été entièrement consacrés à la résolution de ce problème. A la fin du chapitre précédent, nous avons pu établir à quelles conditions sur  $\mathcal{C}$  ce problème possède une solution. Parmi ces conditions se trouve la structure de catégorie de modèles fermée et ce n'est pas un hasard. En effet la structure de catégorie de modèles fermée est un bon cadre pour traiter de l'homotopie, des remplacements fibrants et autres. Et c'est ce que l'on faisait en cherchant à résoudre le problème de la catégorisation, puisque l'on manipulait les notions d'alliances et d'objets régaux faciles, entre autres.

C'est la raison pour laquelle il paraît tout à fait indiquer de chercher à mettre sur la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories une telle structure de catégorie de modèles fermée. L'existence de cette structure est en fait une propriété de la catégorie et de trois classes de ses morphismes que l'on nomme cofibrations, équivalences faibles et fibrations. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la notion d'équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories s'étend aux  $\mathcal{C}$ -précatégories par l'intermédiaire de la catégorisation  $\text{Cat}$  et nous dirons d'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories que c'est une équivalence faible si son image par  $\text{Cat}$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Afin de simplifier les démonstrations, nous allons prendre pour cofibrations les monomorphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories, c'est-à-dire les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui niveau par niveau sont des monomorphismes de  $\mathcal{C}$ . Enfin comme c'est habituellement le cas dans ce genre de problème, nous définirons les fibrations de  $\mathcal{C}$ -précatégories comme les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes qui sont des équivalences faibles.

Le but de ce chapitre est donc de montrer que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories avec les cofibrations, équivalences faibles et fibrations ainsi définies est bien une catégorie de modèles fermée. Pour des raisons de commodité, nous démontrerons que c'est en fait une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Afin d'avoir en tête les axiomes de ces structures, nous débuterons ce chapitre par un rappel des définitions de ces structures ainsi que par l'énoncé du lemme de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Puis nous allons montrer au fur et à mesure de ce chapitre que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vérifie les différentes hypothèses de ce lemme. Ce qui nous amènera au théorème cen-

tral de la thèse qui énonce à quelles conditions sur la catégorie  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précatégories  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante avec les trois classes définies ci-dessus.

## 5.0 Rappels sur la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante

Dans cette partie, nous allons surtout faire des rappels concernant la structure de catégorie de modèles fermée due à Quillen dans [4] et celle de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. En particulier nous allons énoncer le lemme de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante de [1].

Commençons tout d'abord par rappeler la définition de catégorie de modèles fermée.

**Définition 5.0.1** *Une catégorie de modèles fermée est une catégorie  $\mathcal{M}$  munie de trois classes de morphismes, nommés respectivement les cofibrations, les équivalences faibles et les fibrations, et satisfaisant les axiomes suivants :*

*CM1 :  $\mathcal{M}$  est complète et cocomplète.*

*CM2 (axiome "trois pour deux") : si  $f$  et  $g$  sont deux morphismes composables dans  $\mathcal{M}$  et si deux morphismes parmi  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  sont des équivalences faibles alors le morphisme restant est aussi une équivalence faible.*

*CM3 : Les cofibrations, les équivalences faibles et les fibrations sont stables par rétracts.*

*CM4 : Les cofibrations ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales (morphismes à la fois fibrations et équivalences faibles). Les fibrations ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales (morphismes à la fois cofibrations et équivalences faibles).*

*CM5 : Tout morphisme de  $\mathcal{M}$  possède une factorisation (fonctorielle) en une cofibration triviale suivie d'une fibration ainsi qu'une factorisation (fonctorielle) en une cofibration suivie d'une fibration triviale.*

Parmi les catégories ayant une structure de catégorie de modèles fermée, certaines ont la propriété que leurs cofibrations et leurs cofibrations triviales sont engendrées par des ensembles de morphismes, au sens du deuxième chapitre. On dira alors que ces catégories ont une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante.

**Définition 5.0.2** *Une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante est une catégorie de modèles fermée  $\mathcal{M}$  pour laquelle :*



- il existe un ensemble de morphismes  $\mathcal{I}$  (appelé ensemble des cofibrations génératrices) permettant l'argument du petit objet et tel qu'un morphisme est une fibration triviale si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{I}$ .

- il existe un ensemble de morphismes  $\mathcal{J}$  (appelé ensemble des cofibrations triviales génératrices) permettant l'argument du petit objet et tel qu'un morphisme est une fibration si et seulement s'il a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $\mathcal{J}$ .

Il est assez courant parmi les catégories ayant la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante que leurs cofibrations soient en fait les monomorphismes. On dira, dans ce cas, que leur catégorie de modèles fermée est engendrée par monomorphismes.

**Définition 5.0.3** *Une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante pour laquelle les cofibrations sont exactement les monomorphismes.*

Comme nous l'avons annoncé plus haut, nous allons utiliser un lemme de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, que l'on trouve dans le papier d'Hirschhorn [1], afin de montrer que la catégorie des  $\mathcal{C}$ -précategorias, munie des équivalences faibles définies précédemment, est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes.

**Lemme 5.0.4 (de reconnaissance)** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie munie d'une classe de morphismes  $W$  (ses équivalences faibles) et de deux ensembles de morphismes  $I$  et  $J$ . Supposons que  $\mathcal{M}$  vérifie les propriétés suivantes :*

- 0)  $\mathcal{M}$  est complète et cocomplète,
- 1)  $W$  est stable par rétracts et satisfait à l'axiome "trois pour deux" : pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes composables, si deux morphismes parmi  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  sont dans  $W$  alors le morphisme restant est aussi dans  $W$ ,
- 2)  $I$  et  $J$  permettent l'argument du petit objet,
- 3) Toute  $J$ -cofibration est à la fois une  $I$ -cofibration et dans  $W$ ,
- 4) Tout morphisme  $I$ -injectif est à la fois  $J$ -injectif et dans  $W$ ,
- 5) L'une des deux propriétés suivantes est vraie :
  - les morphismes à la fois  $I$ -cofibrations et dans  $W$  sont des  $J$ -cofibrations,

- les morphismes à la fois  $J$ -injectifs et dans  $W$  sont  $I$ -injectifs.

*Alors il existe une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante sur  $\mathcal{M}$  avec  $W$  pour classe des équivalences faibles,  $I$  pour ensemble des cofibrations génératrices et  $J$  pour ensemble des cofibrations triviales génératrices.*

Munis de ce lemme de reconnaissance, nous allons maintenant pouvoir montrer que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  avec ses équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes en montrant qu'elle vérifie les six hypothèses du lemme de reconnaissance 5.0.4.

## 5.1 Stabilité des équivalences faibles par rétracts

Avant de commencer la vérification des hypothèses du lemme de reconnaissance 5.0.4 de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, récapitulons les définitions des cofibrations, équivalences faibles et fibrations des  $\mathcal{C}$ -précatégories.

### Définition 5.1.1 (rappel des équivalences faibles de $\mathcal{C}$ -précatégories)

Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. On dit d'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories que c'est une équivalence faible si son image par  $\text{Cat}$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Définition 5.1.2** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. On appelle cofibrations de  $\mathcal{C}$ -précatégories les monomorphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories, c'est-à-dire les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui niveau par niveau sont des monomorphismes de  $\mathcal{C}$ . On appelle cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -précatégories les monomorphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui sont également des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

**Définition 5.1.3** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. On appelle fibrations de  $\mathcal{C}$ -précatégories les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -précatégories. On appelle fibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -précatégories les fibrations de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui sont également des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

Après avoir mis au clair les définitions des classes de cofibrations, équivalences faibles et fibrations pour les  $\mathcal{C}$ -précatégories, nous sommes à même de débiter la vérification des hypothèses du lemme de reconnaissance 5.0.4 de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Pour cela, nous allons toujours nous mettre dans le cas où  $\mathcal{C}$  est munie d'une donnée de Segal facile.

L'hypothèse 0) consiste en la complétude et la cocomplétude de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ . Or comme on ne considère que les données de Segal faciles, la catégorie  $\mathcal{C}$  sous-jacente est toujours une catégorie de modèles fermée, donc elle est complète et cocomplète, ce qui par la proposition 1.2.5 assure que  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est complète et cocomplète.

L'hypothèse 1) demande aux équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories d'être stables par rétracts et par "trois pour deux". Comme le lemme 4.6.4 nous assure la propriété de "trois pour deux" des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories, il ne reste plus qu'à montrer leur stabilité par rétract.

**Lemme 5.1.4** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile vérifiant la propriété suivante :

les alliances d'objets régaux sont stables par rétracts.

Alors les équivalences faibles de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont stables par rétracts.

*Preuve :*

Par functorialité de Cat, montrer que les équivalences faibles sont stables par rétracts revient à montrer que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories entre  $\mathcal{C}$ -catégories marquées sont stables par rétracts.

Soient donc  $f : A \rightarrow B$  et  $g : C \rightarrow D$  deux morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories marquées tels que  $f$  soit un rétract de  $g$  et  $g$  soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Le fait que  $f$  est rétract de  $g$  et que  $\tau_0$  est un foncteur entraîne que  $\tau_0(f)$  est un rétract de  $\tau_0(g)$ . Or on a vu que les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories induisent des bijections par  $\tau_0$ . Donc  $\tau_0(g)$  est une bijection et comme les bijections ensemblistes sont stables par rétracts, il vient que  $\tau_0(f)$  est bijectif et donc que  $f$  est essentiellement surjectif.

Notons maintenant  $i, j, r,$  et  $s$  les morphismes intervenant dans la définition de rétracts. On a donc les égalités suivantes :

$$g \circ i = j \circ f, \quad f \circ r = s \circ g, \quad r \circ i = Id_A \text{ et } s \circ j = Id_B.$$

On remarque que pour tout couple  $(a, a')$  d'objets de  $A$ ,  $f_1(a, a') : A_1(a, a') \rightarrow B_1(f(a), f(a'))$  est un rétract de  $g_1(i(a), i(a')) : C_1(i(a), i(a')) \rightarrow D_1(g \circ i(a), g \circ i(a'))$  car on a les égalités suivantes :

$$g_1(i(a), i(a')) \circ i_1(a, a') = j_1(f(a), f(a')) \circ f_1(a, a')$$

$$f_1(a, a') \circ r_1(i(a), i(a')) = s_1(j \circ f(a), j \circ f(a')) \circ g_1(i(a), i(a'))$$

$$r_1(i(a), i(a')) \circ i_1(a, a') = Id_{A_1(a, a')}$$

$$s_1(j \circ f(a), j \circ f(a')) \circ j_1(f(a), f(a')) = Id_{B_1(f(a), f(a'))}.$$

Or par hypothèse, les alliances d'objets régaux sont stables par rétracts. Comme  $g$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, on a que  $g_1(i(a), i(a'))$  est une alliance d'objets régaux et, par conséquent,  $f_1(a, a')$  aussi comme rétract du précédent. Ceci montre que  $f$  est pleinement fidèle et comme on a déjà montré que  $f$  est essentiellement surjective, il vient que  $f$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

CQFD.

Bien évidemment si notre donnée de Segal pré-facile est facile, alors les alliances d'objets régaux sont des équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  et sont donc stables par rétracts, ainsi toute donnée de Segal facile vérifie les hypothèses de ce lemme, ce qui finit de montrer l'hypothèse 1) du lemme 5.0.4.

A partir de l'hypothèse 2), interviennent les ensembles générateurs des cofibrations et des cofibrations triviales, notés  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ . Nous allons donc les définir dans la section suivante.

## 5.2 Ensembles générateurs $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$

La structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante est basée sur le fait que les cofibrations et les cofibrations triviales sont engendrées par certains ensembles notés  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ . Comme nous avons déjà vérifié les deux premières hypothèses du lemme de reconnaissance 5.0.4, il nous reste à vérifier les quatre dernières qui traitent justement de ces ensembles générateurs, que nous devons donc définir. Bien que l'on ait pris comme cofibrations de  $\mathcal{C}$ -précategoriés les monomorphismes niveau par niveau, nous allons tant que faire se peut nous placer dans le cadre plus général où les cofibrations des  $\mathcal{C}$ -précategoriés sont les cofibrations niveau par niveau.

Pour trouver l'ensemble  $\mathcal{I}$  des cofibrations génératrices, on remarque tout d'abord que par définition les cofibrations sont niveau par niveau des cofibrations de  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, alors les cofibrations de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont niveau par niveau des colimites de sommes amalgamées par les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $f : A \rightarrow B$  une cofibration, tout d'abord c'est une injection au niveau des objets et donc, pour rajouter à  $A$  les éventuels objets que  $B$  a en plus, on prend la somme amalgamée de  $A$  par  $\emptyset \rightarrow *$ .

Supposons maintenant que jusqu'au rang  $n - 1$ ,  $f$  induise des isomorphismes. On veut alors rajouter à  $A_n$  ce qui lui manque pour devenir  $B_n$ , c'est-à-dire faire une colimite de somme amalgamée par les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$ . On remarque alors que quand on veut rajouter une cofibration génératrice  $g : X \rightarrow Y$  de  $\mathcal{C}$  à  $A_n$ , l'image de  $Y$  dans le bord de  $B_n$  est déjà dans le bord de  $A_n$  car  $f$  induit des isomorphismes jusqu'au rang  $n - 1$ . Ainsi si l'on suppose  $Y$  connexe, on obtient le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n]\Theta X & \coprod_{\partial\Delta[n]\Theta X} \partial\Delta[n]\Theta Y & \longrightarrow A \\ \text{Attach}_n(g) \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta[n]\Theta Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

Ces considérations nous conduisent à proposer la définition suivante pour l'ensemble générateurs des cofibrations  $\mathcal{I}$ .

**Lemme 5.2.1 (-définition)** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante munie d'une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante dont les cofibrations génératrices ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits, pour un cardinal*

régulier  $\alpha$  plus grand qu'  $\aleph_0$ . Notons  $\mathcal{I}$  l'ensemble constitué de  $\emptyset \rightarrow *$  et des flèches de type  $Attach_n(g) : \Delta[n] \Theta X \coprod_{\partial \Delta[n] \Theta X} \partial \Delta[n] \Theta Y \rightarrow \Delta[n] \Theta Y$  pour  $n > 0$  et  $g : X \rightarrow Y$  décrivant l'ensemble des cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{I}$  permet l'argument du petit objet au sens 2.3.7.

**Preuve :**

On remarque que, niveau par niveau, la source d'une flèche de type  $Attach_n(g)$  est la somme disjointe d'un ensemble fini avec un coproduit fini de  $X$  et un coproduit fini de  $Y$  et le but est la somme disjointe d'un ensemble fini avec un coproduit fini de  $Y$ . Par hypothèse,  $X$  et  $Y$  sont  $\alpha$ -petits alors, par le lemme 2.3.4, chaque niveau des extrémités de  $Attach_n(g)$  aussi. Et par lemme 2.3.6, car  $\alpha$  est régulier et strictement supérieur à  $\aleph_0$ , il vient que source et but de  $Attach_n(g)$  sont  $\alpha$ -petits. On a déjà vu que  $\emptyset$  et  $*$  sont aussi  $\alpha$ -petits. Donc par le lemme 2.3.8, on a bien que  $\mathcal{I}$  permet l'argument du petit objet.

CQFD.

Pour l'ensemble générateur des cofibrations triviales  $\mathcal{J}$ , nous allons suivre la démarche habituelle qui consiste à ne garder que les classes d'équivalence de cofibrations triviales petites par rapport à un cardinal fixé. L'avantage de cette démarche est que par définition même l'ensemble  $\mathcal{J}$  vérifie l'argument du petit objet.

**Lemme 5.2.2 (-définition)** *Sous les hypothèses et notations du lemme précédent, choisissons un cardinal  $\alpha'$  régulier et strictement supérieur à  $2^\alpha$ . Notons  $\mathcal{J}$  un ensemble de représentants de classe d'isomorphismes de morphismes à la fois cofibrations niveau par niveau et équivalences faibles dont les sources et buts sont  $\alpha'$ -petits, au sens de la proposition 5.7.7. Alors  $\mathcal{J}$  permet l'argument du petit objet.*

**Preuve :** application directe du lemme 2.3.8.

A part pour la partie concernant l'engendrement des cofibrations triviales par  $\mathcal{J}$ , il n'est pas nécessaire de savoir quel cardinal limite les cofibrations triviales de  $\mathcal{J}$  mais il suffit de savoir que les cofibrations triviales de  $\mathcal{J}$  sont limitées, c'est-à-dire que leurs sources et buts sont  $\beta$ -petits pour un cardinal  $\beta$  régulier et strictement supérieur à  $2^{\aleph_0}$ , afin que de savoir que  $\mathcal{J}$  permet l'argument du petit objet.

Dans cette partie, nous avons non seulement défini les ensembles générateurs des cofibrations et des cofibrations triviales mais aussi montrer qu'ils permettent l'argument du petit objet sous des hypothèses plus contraignante que celles de donnée de Segal facile car il est ici demandé à la catégorie  $\mathcal{C}$  d'être une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Néanmoins nous avons réglé le cas de l'hypothèse 2) du lemme de reconnaissance 5.0.4. Il ne reste donc plus que les hypothèses 3), 4) et 5). Or l'hypothèse 3) est assez difficile à démontrer et l'hypothèse 5) découle en partie de la 3). C'est pourquoi nous allons démontrer d'abord l'hypothèse 4), ce qui sera l'objet de la prochaine section.



## 5.3 $\mathcal{I}$ engendre les cofibrations de $\mathcal{C}$ -précatégories

L'hypothèse 4) du lemme de reconnaissance 5.0.4 de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante est en fait constituée de deux parties. Il faut en effet d'une part montrer que les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $\mathcal{I}$ -injectifs sont aussi  $\mathcal{J}$ -injectifs et d'autre part que ce sont des équivalences faibles. Pour montrer le premier point, il suffit de remarquer que l'ensemble  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble de la classe des cofibrations. Donc si l'on montre que  $\mathcal{I}$  engendre bien les cofibrations, c'est-à-dire que les cofibrations sont exactement les  $\mathcal{I}$ -cofibrations, alors tout morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif se relèvera par rapport aux cofibrations, donc en particulier par rapport à  $\mathcal{J}$ , ce qui en fera un morphisme  $\mathcal{J}$ -injectif.

Comme dans la section précédente, nous allons faire ces démonstrations le plus possible dans le cas où les cofibrations des  $\mathcal{C}$ -précatégories sont les cofibrations niveau par niveau et pas uniquement les monomorphismes. C'est pourquoi nous commencerons par rappeler des résultats de stabilité des cofibrations.

### 5.3.1 Stabilité des cofibrations dans une catégorie de modèles fermée

Pour la suite, il est important d'avoir à l'esprit quels résultats de stabilité les cofibrations vérifient dans une catégorie de modèles fermée, c'est ce qu'énonce le lemme suivant.

**Lemme 5.3.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée, alors les cofibrations de  $\mathcal{C}$  forment une sous-catégorie contenant les isomorphismes et stable par rétract, somme amalgamée le long d'un morphisme, colimite séquentielle transfinie et coproduit dans la catégorie des morphismes.*

*Preuve :*

Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations sont exactement les morphismes qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales et par le lemme 2.1.3 on a le résultat. CQFD.

Bien entendu cette stabilité des cofibrations dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  est encore valable pour les cofibrations niveau par niveau de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .

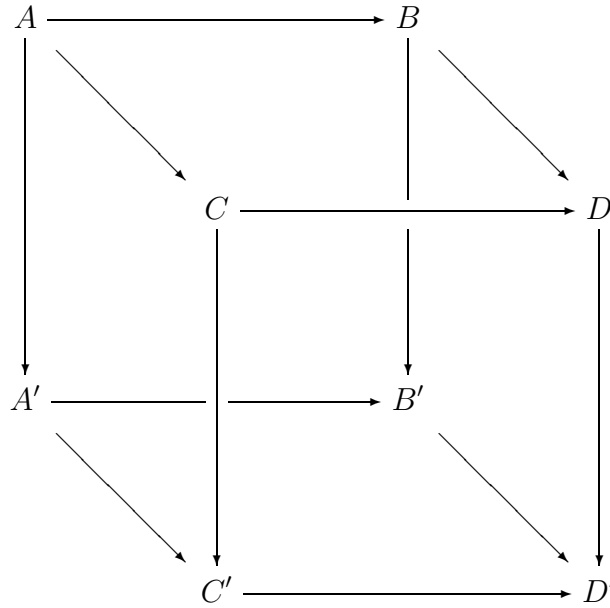
**Corollaire 5.3.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante munie d'une structure de catégorie de modèles fermée, alors les cofibrations niveau par niveau de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vérifient les propriétés du lemme précédent.*

*Preuve :*

Dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , les rétracts et les colimites sont calculées niveau par niveau. En outre les cofibrations de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont niveau par niveau des cofibrations de  $\mathcal{C}$ . D'où le résultat par le lemme précédent. CQFD.

Un autre résultat particulièrement important et utile est celui de la préservation des cofibrations par somme amalgamée dans la catégorie des morphismes. C'est ce qu'on appelle le lemme du cube pour les cofibrations. Nous allons le rappeler pour une catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  puis pour les cofibrations niveau par niveau de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .

**Lemme 5.3.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée, considérons le diagramme suivant :*



*où  $D$  et  $D'$  sont les sommes amalgamées  $B \amalg_A C$  et  $B' \amalg_{A'} C'$ . Si  $C \rightarrow C'$  et  $A' \amalg_A B \rightarrow B'$  sont des cofibrations, alors  $D \rightarrow D'$  est aussi une cofibration.*

*Preuve :* dans [1].

**Corollaire 5.3.4** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante munie d'une structure de catégorie de modèles fermée, alors les cofibrations niveau par niveau de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vérifient les propriétés du lemme précédent.*

*Preuve :* niveau par niveau on applique le lemme.

### 5.3.2 Astuce ensembliste

Après ces quelques rappels concernant la stabilité des cofibrations, nous allons démontrer deux lemmes techniques généraux qui servent lorsque l'on veut montrer qu'une famille de morphismes est bien engendrée par un ensemble donné.

**Lemme 5.3.5** *Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{C}'$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  ayant les mêmes objets, contenant les isomorphismes et telle que les isomorphismes ne se factorisent qu'en isomorphismes dans  $\mathcal{C}'$ . Supposons que pour tout morphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}'$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $\mathcal{C}$  par lequel  $j$  se factorise dans  $\mathcal{C}'$  est un ensemble. On a alors les résultats suivants :*

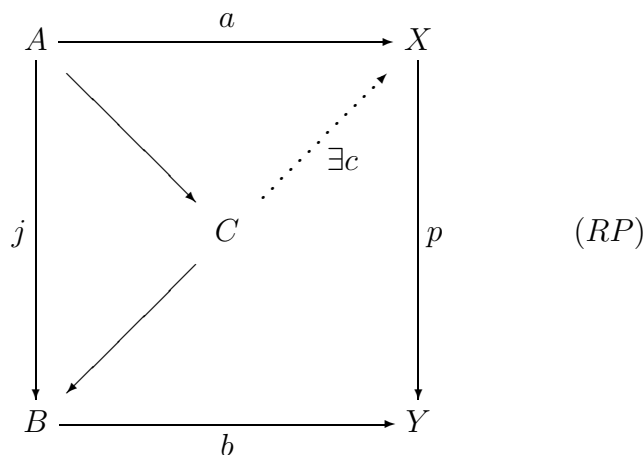
1) *La catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$  avec la sous-catégorie des morphismes qui niveau par niveau sont des morphismes de  $\mathcal{C}'$  possède également cette propriété.*

2) *Etant donné le carré commutatif suivant, noté  $(j, a, b, p)$  :*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & X \\
 j \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{b} & Y
 \end{array}$$

*avec  $j$  morphisme de  $\mathcal{C}'$ . Est aussi un ensemble la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes de couples  $(C, c)$  avec  $C$  objet factorisant  $j$  dans  $\mathcal{C}'$  et tels que la flèche pointillée  $c$  du diagramme ci-dessous*

existe et fait commuter le diagramme :



On dira que  $C$  réalise avec  $c$  un relèvement partiel du diagramme  $(j, a, b, p)$ .

*Preuve :*

Pour la première partie du lemme, il suffit de voir que la classe de représentants des classes d'isomorphismes de préfaisceaux factorisant un morphisme de préfaisceaux fixé dans la bonne sous-catégorie est une sous-classe de la réunion dénombrable des classes de représentants des classes d'isomorphismes d'objets de  $\mathcal{C}$  factorisant dans  $\mathcal{C}'$  un des niveaux du morphisme de préfaisceaux fixé. On obtient le résultat 1) en utilisant le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles est un ensemble et qu'une sous-classe d'un ensemble est un ensemble.

Pour un objet  $C$  factorisant  $j$  dans  $\mathcal{C}'$ , la classe des morphismes  $c$  de  $C$  vers  $X$  est un ensemble, par définition de catégorie. En outre par hypothèse, la classe des représentants des classes d'isomorphismes d'objets  $C$  factorisant  $j$  dans  $\mathcal{C}'$  est un ensemble. Donc l'union disjointe sur cette ensemble des ensembles de morphismes  $c$  est encore un ensemble. Or la classe des représentants des classes d'isomorphismes de couples réalisant le relèvement partiel s'identifie à une sous-classe de cette union disjointe, ce qui en fait un ensemble.

CQFD.

**Lemme 5.3.6** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $\mathcal{C}'$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$  vérifiant les hypothèses du lemme précédent. Si  $\mathcal{C}$  admet les colimites séquentielles transfinies, que  $\mathcal{C}'$  admet les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$  pour colimites séquentielles transfinies et si, pour tout carré commutatif  $(j, a, b, p)$  avec  $j$  morphisme de  $\mathcal{C}'$  et  $p$  fixé, l'ensemble contenant un représentant de chaque

classe d'isomorphismes de couples  $(C, c)$  réalisant un relèvement partiel du diagramme  $(j, a, b, p)$  et tels que l'objet  $C$  est non isomorphe à la source de  $j$  et factorise  $j$  dans  $\mathcal{C}'$ , est non vide, alors  $(j, a, b, p)$  admet un relèvement global.

*Preuve :*

Par propriété 2) du lemme précédent, les représentants des classes d'isomorphismes de couples  $(C, c)$  forment bien un ensemble. On ordonne cet ensemble de la manière suivante :  $(C, c)$  est inférieur à  $(C', c')$  s'il existe un morphisme  $g$  de  $\mathcal{C}'$  allant de  $C$  à  $C'$  tel que  $c' \circ g = c$ . Montrons que cet ensemble est inductif. Considérons une chaîne, i.e. un sous-ensemble totalement ordonné,  $(C_i, c_i)_{i \in I}$ . Posons

$$C = \operatorname{colim}_{i \in I} C_i \text{ et } c = \operatorname{colim}_{i \in I} c_i.$$

Comme chaque  $C_i$  factorise  $j$  dans  $\mathcal{C}'$  alors, par propriété de colimite et par hypothèse sur  $\mathcal{C}'$ ,  $C$  factorise  $j$  dans  $\mathcal{C}'$ . De même, comme chaque  $(C_i, c_i)$  réalise un relèvement partiel du diagramme  $(j, a, b, p)$ , alors, par propriété de colimite,  $(C, c)$  aussi. En outre  $C$  n'est pas isomorphe à la source de  $j$  sinon comme les isomorphismes ne se factorisent dans  $\mathcal{C}'$  qu'en isomorphismes alors chaque  $C_i$  serait isomorphe à la source de  $j$ , ce qui n'est pas le cas. Donc  $(C, c)$  appartient à l'ensemble et, comme colimite dans  $\mathcal{C}'$ , est plus grand que tous les  $(C_i, c_i)$ , il est donc la borne supérieure de la chaîne, ce qui montre que l'ensemble est inductif.

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble et l'on obtient qu'il existe un élément maximal  $(C', c')$ . Supposons que  $C'$  ne soit pas isomorphe au but de  $j$ , alors la partie basse du diagramme (RP) pour  $C'$  est un carré commutatif dont le morphisme de  $C'$  vers le but de  $j$  est dans  $\mathcal{C}'$ . Par hypothèse, il existe un couple  $(C'', c'')$  réalisant un relèvement partiel pour la partie basse de (RP), avec  $C''$  non isomorphe à  $C'$  et factorisant ce morphisme dans  $\mathcal{C}'$ . Mais  $C''$  factorise donc  $j$  dans  $\mathcal{C}'$ , n'est pas isomorphe à la source de  $j$ , sans quoi il serait isomorphe à  $C'$ , et avec  $c''$  réalise en fait un relèvement partiel de  $(j, a, b, p)$ . Donc  $(C'', c'')$  est dans l'ensemble et strictement supérieur à l'élément maximal  $(C', c')$ , ce qui est absurde. Donc l'élément maximal est bien isomorphe au but de  $j$  et donc  $(j, a, b, p)$  possède un relèvement global. CQFD.

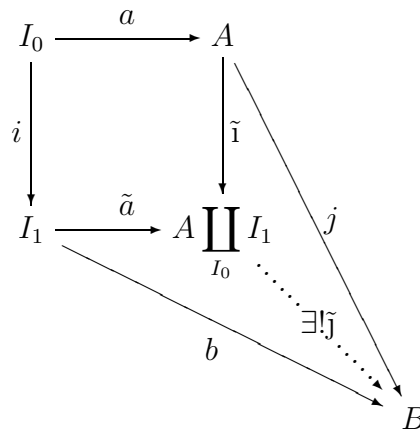
### 5.3.3 Caractérisation des $\mathcal{I}$ -cofibrations

Munis de ces lemmes techniques, nous pouvons désormais démontrer que  $\mathcal{I}$  engendre les cofibrations niveau par niveau. Pour cela nous allons d'abord montrer que la classe des cofibrations vérifie la propriété du lemme 5.3.6. Toutefois, nous ne savons montrer ce résultat que dans le cas où les cofibrations de  $\mathcal{C}$  sont les monomorphismes.

**Lemme 5.3.7** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante munie d'une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes vérifiant les propriétés suivantes :*

- les cofibrations génératrices ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits, pour un cardinal régulier  $\alpha$  plus grand qu'  $\aleph_0$ ,
- les cofibrations génératrices ont leurs buts connexes,
- les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection.

Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble défini dans le lemme 5.2.1. Alors pour toute cofibration niveau par niveau  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , qui n'est pas un isomorphisme, il existe un diagramme :



avec  $i$  appartenant à  $\mathcal{I}$  et tel que  $\tilde{i}$  et  $\tilde{j}$  sont des cofibrations niveau par niveau et que la somme amalgamée  $A \amalg_{I_0} I_1$  ne soit pas isomorphe à  $A$ .

*Preuve :*

Si  $j$  n'est pas injective au niveau des objets, il suffit de prendre  $\emptyset \rightarrow *$  pour  $i$  et  $b$  induit par un objet de  $B$  qui n'est pas dans l'image de  $A$  par  $j$  pour avoir le résultat. Sinon soit  $n$  l'entier tel que, pour tout  $m < n$ ,  $j_m$  est un isomorphisme

mais  $j_n$  n'est pas un isomorphisme. Comme  $j_n$  est une cofibration et que  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, alors il existe dans  $\mathcal{C}$  un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 I'_0 & \xrightarrow{a'} & A_n \\
 \downarrow i' & & \downarrow \tilde{i}' \\
 I'_1 & \xrightarrow{\tilde{a}'} & A_n \amalg_{I'_0} I'_1 \\
 & \searrow b' & \downarrow \tilde{j}_n \\
 & & B_n
 \end{array}$$

avec  $i'$  cofibration génératrice,  $\tilde{i}'$  et  $\tilde{j}_n$  des cofibrations et la somme amalgamée du diagramme non isomorphe à  $A_n$ . On étend ce diagramme aux bords de  $A_n$  et  $B_n$ .  $f$  étant un isomorphisme jusqu'au rang  $n-1$ , il induit un isomorphisme sur les bords de  $A_n$  et  $B_n$  et donc il existe un morphisme naturel de  $I'_1$  vers le bord de  $A_n$  faisant commuter le diagramme étendu, ce qui nous donne, par définition des flèches de type  $Attach_n(i')$  et par connexité des buts des cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$ , le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[n]\Theta I'_0 \amalg_{\partial\Delta[n]\Theta I'_0} \partial\Delta[n]\Theta I'_1 & \xrightarrow{a} & A \\
 \downarrow Attach_n(i') & & \downarrow \widetilde{Attach}_n(i') \\
 \Delta[n]\Theta I'_1 & \xrightarrow{\tilde{a}} & \tilde{A} \\
 & \searrow b & \downarrow \tilde{j} \\
 & & B
 \end{array}$$

où  $a$  et  $b$  sont induits respectivement par  $a'$  et  $b'$ . Comme la somme amalgamée de  $A_n$  par  $i'$  n'est pas isomorphe à  $A_n$ , il vient que la somme amalgamée  $\tilde{A}$  de  $A$  par  $Attach_n(i')$  n'est pas isomorphe à  $A$ . Comme niveau par niveau  $Attach_n(i')$  est un coproduit dans la catégorie des morphismes de cofibrations de  $\mathcal{C}$  ( $i'$  et l'identité) alors  $Attach_n(i')$  est bien une cofibration niveau par

niveau par lemme 5.3.1 et, par le corollaire 5.3.2, sa somme amalgamée le long de  $a$  aussi. Regardons de plus près le morphisme  $\tilde{j}$ . Pour  $m < n$ , on a  $\tilde{j}_m$  n'est autre que  $j_m$  donc une cofibration de  $\mathcal{C}$ . Au rang  $n$ , on a que  $\tilde{j}_n$  est  $\tilde{j}_n$  qui est une cofibration. Pour  $m > n$ , on va utiliser la notion de réunion de sous-objets. Comme  $j$  est une cofibration niveau par niveau et que l'on a supposé que les cofibrations de  $\mathcal{C}$  sont les monomorphismes, alors  $A_m$  est un sous-objet de  $B_m$ . On a montré en outre que  $\tilde{j}_n$  est une cofibration, donc de même il vient  $A_n \coprod_{I'_0} I'_1$  est un sous-objet de  $B_n$ . Or les relations entre faces et dégénérescences d'un objet simplicial entraînent que les dégénérescences sont des monomorphismes et donc, par chaque dégénérescence de  $B_n$  vers  $B_m$ ,  $A_n \coprod_{I'_0} I'_1$  est un sous-objet de  $B_m$ . Pour montrer que  $\tilde{j}_m$  est une cofibration, nous allons montrer que  $\tilde{A}_m$  est une réunion de sous-objets de  $B_m$ . Comme on a supposé que les réunions de sous-objets dans  $\mathcal{C}$  sont exactement les sommes amalgamées des sous-objets au-dessus de leur intersection, il suffit de montrer que  $\tilde{A}_m$  est une telle somme amalgamée. Or  $\tilde{A}_m$  est la somme amalgamée du sous-objet  $A_m$  par un coproduit de  $A_n \coprod_{I'_0} I'_1$  au-dessus d'un coproduit de  $A_n$ , ces coproduits étant indexés par les applications dégénérées de  $A_n$  dans  $A_m$ . On décompose cette multiple somme amalgamée en une suite de sommes amalgamées par un seul exemplaire de  $A_n \coprod_{I'_0} I'_1$  à chaque étape. Or à chaque étape, on vérifie que c'est bien une réunion de sous-objets en utilisant en particulier le fait que l'intersection dans  $B_m$  de  $A_m$  par  $A_n \coprod_{I'_0} I'_1$  n'est autre que  $A_n$  et celle entre deux exemplaires de  $A_n \coprod_{I'_0} I'_1$  est  $A_{n-1}$ . On obtient ainsi que  $\tilde{A}_m$  est une réunion de sous-objets de  $B_m$ , donc est lui-même un sous-objet de  $B_m$ , et ainsi  $\tilde{j}_m$ , étant l'inclusion du sous-objet, est une cofibration. Comme par ailleurs  $Attach_n(i')$  est élément de  $\mathcal{I}$ , on a montré le lemme dans le second cas.

CQFD.

Grâce à ce résultat, nous pouvons appliquer le lemme 5.3.6, qui nous permettra de montrer que les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs sont exactement ceux ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes, ce qui montrera la première partie de l'hypothèse 4) car les morphismes de  $\mathcal{J}$  sont des monomorphismes.

**Lemme 5.3.8** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie discrétisante munie d'une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes qui avec la sous-catégorie des monomorphismes vérifie les hypothèses suivantes :*

*-les cofibrations génératrices ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits, pour un cardinal régulier  $\alpha$  plus grand qu'  $\aleph_0$ ,*



- les cofibrations génératrices ont leurs buts connexes,
- les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,
- pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,
- les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ .

Alors les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs sont exactement ceux qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes. En particulier tout morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif est  $\mathcal{J}$ -injectif.

*Preuve :*

Les monomorphismes vérifient trivialement que les isomorphismes ne se factorisent qu'en isomorphismes dans la sous-catégorie des monomorphismes. Avec cette propriété et les hypothèses de ce lemme, on obtient que la catégorie  $\mathcal{C}$  vérifie les hypothèses du lemme 5.3.5. En appliquant la propriété 1) du lemme 5.3.5, on obtient que  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  et sa sous-catégorie des cofibrations niveau par niveau vérifie les hypothèses du lemme 5.3.5. De plus, les colimites de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  étant calculées niveau par niveau, on conserve sur  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  la propriété que les colimites séquentielles transfinies pour les cofibrations niveau par niveau sont celles de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .

Considérons maintenant le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & X \\
 j \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{b} & Y
 \end{array}$$

avec  $j$  une cofibration niveau par niveau et  $p$  un morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif. Si  $j$  est un isomorphisme, le diagramme admet un relèvement naturel. Sinon on

applique le lemme précédent et l'on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 I_0 & \xrightarrow{a} & A \\
 \downarrow i & & \downarrow \tilde{i} \\
 I_1 & \xrightarrow{\tilde{a}} & A \coprod_{I_0} I_1 \\
 & \searrow b & \downarrow \tilde{j} \\
 & & B
 \end{array}$$

$\dots \exists! \tilde{j} \dots$

avec  $i$  appartenant à  $\mathcal{I}$ ,  $\tilde{i}$  et  $\tilde{j}$  des cofibrations niveau par niveau et la somme amalgamée du diagramme, que l'on notera  $C$ , non isomorphe à  $A$ . Comme  $p$  est  $\mathcal{I}$ -injectif, il a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $i$  ainsi que par rapport à la somme amalgamée  $\tilde{i}$  de  $i$  le long de  $a$ , par le lemme 2.1.3. Donc  $C$  réalise un relèvement partiel du diagramme  $(j, a, b, p)$ . En appliquant le lemme 5.3.6, il vient que  $(j, a, b, p)$  a un relèvement global. Donc les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations niveau par niveau.

En outre les morphismes de  $\mathcal{I}$  sont niveau par niveau des coproduits de cofibrations élémentaires, donc ce sont des cofibrations niveau par niveau par lemme 5.3.1. De là il vient que les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations niveau par niveau se relèvent en particulier par rapport aux morphismes de  $\mathcal{I}$  et sont donc  $\mathcal{I}$ -injectifs.

Enfin comme par définition  $\mathcal{J}$  est constitué de monomorphismes niveau par niveau et que les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs se relèvent par rapport aux monomorphismes, alors ils se relèvent en particulier par rapport aux morphismes de  $\mathcal{J}$ , ce qui en fait des morphismes  $\mathcal{J}$ -injectifs.

CQFD.

De ce résultat découle le fait que l'ensemble  $\mathcal{I}$  engendre bien les monomorphismes, ce qui justifie son nom d'ensemble générateur des cofibrations.

**Corollaire 5.3.9** *Sous les hypothèses du lemme 5.3.8,  $\mathcal{I}$  engendre les monomorphismes, c'est-à-dire que les monomorphismes sont exactement les  $\mathcal{I}$ -cofibrations. En particulier, les monomorphismes sont des rétracts de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées de morphismes de  $\mathcal{I}$ .*

*Preuve* : Par le lemme 5.2.1,  $\mathcal{I}$  permet l'argument du petit objet et, par corollaire 2.3.11, il vient que les  $\mathcal{I}$ -cofibrations sont exactement les rétracts de colimites transfinies de sommes amalgamées de morphismes de  $\mathcal{I}$ . Or les morphismes de  $\mathcal{I}$  sont des cofibrations niveau par niveau et par le corollaire 5.3.2, les cofibrations niveau par niveau sont stables par rétract, somme amalgamée le long d'un morphisme quelconque et colimite séquentielle transfinie. D'où les  $\mathcal{I}$ -cofibrations sont des cofibrations niveau par niveau. En outre le lemme précédent montre que les cofibrations niveau par niveau ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs, ce qui en fait des  $\mathcal{I}$ -cofibrations, par définition même de  $\mathcal{I}$ -cofibrations. Donc les cofibrations niveau par niveau sont exactement les  $\mathcal{I}$ -cofibrations et donc  $\mathcal{I}$  engendre bien les cofibrations niveau par niveau.  
CQFD.

La première partie de l'hypothèse 4) étant traitée, il ne reste plus qu'à traiter la seconde. De même que la première partie portant sur les cofibrations avait nécessité des rappels, la seconde partie concernant les équivalences faibles demande elle aussi quelques rappels sur la stabilité des équivalences faibles par colimite dans une catégorie de modèles fermée.

### 5.3.4 Stabilité des équivalences faibles dans une catégorie de modèles fermée

La stabilité des équivalences faibles dans une catégorie de modèles fermée est un sujet assez délicat. Très souvent elle est couplée à des propriétés des cofibrations et à la notion de catégorie de modèles fermée propre à gauche.

**Définition 5.3.10** *Une catégorie de modèles fermée est propre à gauche si toute somme amalgamée d'une équivalence faible le long d'une cofibration est une équivalence faible.*

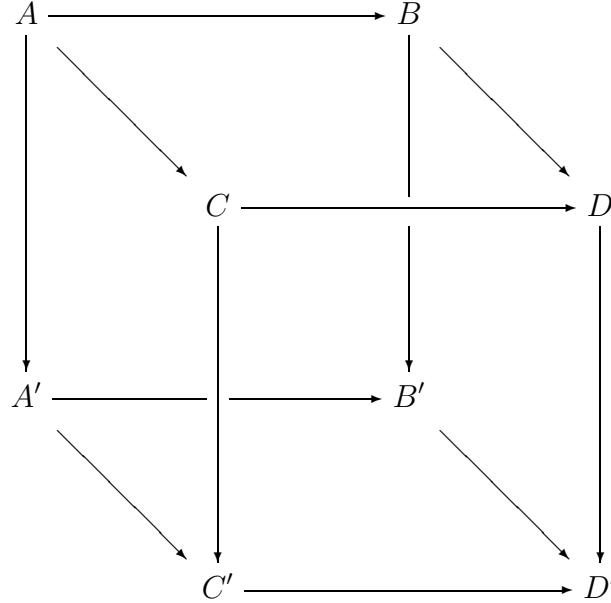
Une façon simple pour une catégorie de modèles fermée d'être propre à gauche est d'avoir tous ses objets cofibrants, ce qui est le cas de nos données de Segal faciles.

**Lemme 5.3.11** *Une catégorie de modèles fermée dont tous les objets sont cofibrants est propre à gauche.*

*Preuve* : dans [1]

Le premier résultat que nous allons énoncer est le lemme du cube qui concerne la stabilité des équivalences faibles par somme amalgamée dans la catégorie des morphismes. Ce lemme nécessite l'usage d'une catégorie de modèles fermée propre à gauche.

**Proposition 5.3.12** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée propre à gauche, considérons le diagramme suivant :*



où  $D$  et  $D'$  sont les sommes amalgamées  $B \amalg_A C$  et  $B' \amalg_{A'} C'$ .  
Si  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$  et  $C \rightarrow C'$  sont des équivalences faibles et si  $A \rightarrow C$  et  $A' \rightarrow C'$  sont des cofibrations, alors  $D \rightarrow D'$  est aussi une équivalence faible.

*Preuve :* dans [1].

Un autre résultat important est la stabilité des équivalences faibles par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des morphismes. Cette fois même le fait d'être propre à gauche ne suffit pas. Il faudra que la catégorie de modèles fermée soit, en plus d'être propre à gauche, simpliciale !

**Proposition 5.3.13** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée simpliciale propre à gauche. Soit  $\lambda$  un ordinal transfini et  $g : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  un morphisme de  $\lambda$ -séquences tel que pour tout ordinal  $\alpha < \lambda$ ,  $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  soit une équivalence faible et que les morphismes  $X_\alpha \rightarrow X_{\alpha+1}$  et  $Y_\alpha \rightarrow Y_{\alpha+1}$  soient des cofibrations, alors le morphisme induit  $\text{colim}_{\alpha < \lambda} X_\alpha \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} Y_\alpha$  est une équivalence faible.*

*Preuve* : dans [1].

De ce résultat découle la stabilité des équivalences faibles par coproduit dans la catégories des morphismes, résultat qui lui aussi nécessite la simplicialité et la propriété à gauche de la catégorie de modèles fermée.

**Corollaire 5.3.14** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants. Alors un petit coproduit d'équivalences faibles est une équivalence faible.*

*Preuve* :

Le coproduit étant petit, il est indexé par un ensemble, que l'on peut donc bien ordonner par le théorème de Zermelo. Ainsi notre coproduit est indexé par un ordinal que l'on notera  $\lambda$  et donc il donne lieu à un morphisme  $g : X \rightarrow Y$  de  $\lambda$ -séquences, chacune d'elles étant une colimite séquentielle transfinie de coproduits de deux flèches, i.e. de sommes amalgamées par des morphismes de source l'objet initial. Comme par hypothèse, dans  $\mathcal{C}$  tous les objets sont cofibrants, ces morphismes sont des cofibrations et, par stabilité des cofibrations par somme amalgamée le long d'un morphisme dans une catégorie de modèles fermée,  $g$  vérifie la deuxième condition de la proposition précédente. Montrons par récurrence transfinie que  $g$  vérifie aussi la première condition. Par hypothèse,  $g_0$  est une équivalence faible. Soit  $\alpha < \lambda$  un ordinal, supposons que l'on ait montré que  $g_\alpha$  est une équivalence faible. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \emptyset & \xrightarrow{\quad} & B & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & X_\alpha & \xrightarrow{\quad} & X_{\alpha+1} \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \emptyset & \xrightarrow{g_\alpha} & B' & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & Y_\alpha & \xrightarrow{\quad} & Y_{\alpha+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & Y_{\alpha+1}
 \end{array}$$

avec  $X_{\alpha+1}$  et  $Y_{\alpha+1}$  sommes amalgamées des faces horizontales du cube et  $B \rightarrow B'$  l'une des équivalences faibles du coproduit. Comme dans  $\mathcal{C}$ , tous les objets sont cofibrants, alors  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée propre à gauche et, par la proposition 5.3.12, il vient que  $g_{\alpha+1}$  est une équivalence faible. Soit  $\gamma < \lambda$  un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal  $\alpha < \gamma$ , on ait montré que  $g_\alpha$  est une équivalence faible. Alors  $g_\gamma$  est le morphisme induit par le morphisme de  $\gamma$ -séquence  $g$ , qui vérifie bien les hypothèses de la proposition 5.3.13. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale propre à gauche, il vient que  $g_\gamma$  est bien une équivalence faible. On a donc montré par récurrence transfinie que  $g$  vérifie aussi l'hypothèse 1) du lemme 5.3.13, d'où il vient que  $g_\lambda$  est une équivalence faible. Or  $g_\lambda$  est justement le coproduit d'équivalences.

CQFD.

### 5.3.5 Les morphismes $\mathcal{I}$ -injectifs sont des équivalences faibles

Comme l'on vient de montrer la première partie de l'hypothèse 4), il ne nous reste plus qu'à montrer la seconde partie à savoir que les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Pour cette démonstration, nous avons besoin du résultat intermédiaire suivant : si  $f : A \rightarrow C$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories surjectif sur les objets et tel que, pour tout entier  $q > 0$  et pour tout  $q + 1$ -uplet  $(a_0, \dots, a_q)$  d'objets de  $A$ , le morphisme  $f_q(a_0, \dots, a_q)$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ , alors le morphisme  $f$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser la construction Bigcat et suivre à chaque étape ce que devient le morphisme  $f$ .

**Lemme 5.3.15** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant la propriété suivante :*

*les cofibrations sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

*Alors pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f : A \rightarrow C$  surjectif sur les objets et tel que, pour tout entier  $q > 0$  et pour tout  $q$ -uplet  $(a_0, \dots, a_q)$  d'objets de  $A$ ,  $f_q(a_0, \dots, a_q) : A_q(a_0, \dots, a_q) \rightarrow C_q(f(a_0), \dots, f(a_q))$  est une équivalence faible, on a que, pour tout entier  $m \geq 2$ ,  $Cat(1, m)(A) \rightarrow Cat(1, m)(C)$  possède la même propriété que  $f$ .*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que, comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie discrétisante, tout morphisme et tout diagramme équivaut au coproduit de ses fibres. De

ce fait,  $Cat(1, m)(A)_q(a_0, \dots, a_q)$  n'est autre que la somme amalgamée de  $A_q(a_0, \dots, a_q)$  par un coproduit de  $\eta_A(a_i, a_j)$  et de  $\phi_A(a_{i_0}, \dots, a_{i_m})$ , où on a  $0 \leq i < j \leq q$  et  $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_m \leq q$  avec  $i_m \neq i_0 + 1$ . En outre  $\eta_A(a_i, a_j)$  et  $\psi_A(a_{i_0}, \dots, a_{i_m})$  sont des équivalences faibles comme produits fibrés au-dessus d'un objet discret d'équivalences faibles (respectivement  $\eta_A$  et  $\psi_A$ , d'après la démonstration du lemme 4.4.6). D'où pour la même raison, il en est de même pour le produit des  $\eta_A(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$  avec  $k$  entre 0 et  $m - 1$ . Ce raisonnement reste valable pour la  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $C$ .

Ensuite on remarque que si la source d'une flèche génératrice s'envoie dans  $A$  alors en composant par  $f : A \rightarrow C$  elle s'envoie aussi dans  $C$ . Ainsi toute somme amalgamée de  $A_q$ , pour un certain entier  $q$ , par un coproduit de flèches génératrices s'envoyant dans  $A_q$ , possède un morphisme vers le même type de sommes amalgamées pour  $C_q$ . De ce fait il existe un morphisme  $\eta_f$  de  $B_A$  vers  $B_C$  tel que l'on ait  $\eta_f \circ \eta_A = \eta_C \circ f_1$  et  $\nu_C \circ \eta_f = f_0 \times f_0 \circ \nu_A$ . De même il existe un morphisme  $\phi_f$  de  $P_A$  vers  $P_C$  tel que  $\phi_f \circ \phi_A = \phi_C \circ f_m$  et  $\psi_C \circ \phi_f = \eta_f \times_{f_0} \dots \times_{f_0} \eta_f \circ \psi_A$ . Par les égalités  $\eta_C(f(a_i), f(a_j)) \circ f_1(a_i, a_j) = \eta_f(a_i, a_j) \circ \eta_A(a_i, a_j)$  et  $\psi_C(f(a_{i_0}), \dots, f(a_{i_m})) \circ \phi_f(a_{i_0}, \dots, a_{i_m}) = \eta_f(a_{i_0}, a_{i_1}) \times \dots \times \eta_f(a_{i_{m-1}}, a_{i_m}) \circ \psi_A(a_{i_0}, \dots, a_{i_m})$  ainsi que par "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , on a que  $\eta_f(a_i, a_j)$  et  $\phi_f(a_{i_0}, \dots, a_{i_m})$  sont des équivalences faibles. Comme les morphismes  $\eta_A(a_i, a_j)$ ,  $\phi_A(a_{i_0}, \dots, a_{i_m})$ ,  $\eta_C(a_i, a_j)$  et  $\phi_C(a_{i_0}, \dots, a_{i_m})$  ainsi que leurs coproduits sont des cofibrations, alors par la proposition 5.3.12, il vient que  $Cat(1, m)(f)_q(a_0, \dots, a_q)$  est une équivalence faible. En outre, comme la construction  $Cat(1, m)$  laisse les objets invariants,  $Cat(1, m)(f)$  est bien surjective sur les objets.

CQFD.

**Proposition 5.3.16** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale,*
- 2) *les cofibrations sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

*Alors pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f : A \rightarrow C$  surjectif sur les objets et tel que, pour tout entier  $q > 0$  et pour tout  $q$ -uplet  $(a_0, \dots, a_q)$  d'objets de  $A$ ,  $f_q(a_0, \dots, a_q) : A_q(a_0, \dots, a_q) \rightarrow C_q(f(a_0), \dots, f(a_q))$  est une équivalence faible, on a que  $A \rightarrow C$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .*

*Preuve :*

Par récurrence transfinie, on montre que pour tout ordinal  $\beta \leq T$  le mor-

phisme  $f^\beta : A^\beta \rightarrow C^\beta$  a la même propriété que  $f$ , où  $f^\beta$  dénote la  $\beta$ -ième étape de  $Bigcat(f)$ . Le passage d'un ordinal  $\beta < T$  à son successeur  $\beta + 1$  est l'application directe du lemme précédent.

Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence vraie pour tout ordinal  $\gamma$  inférieur à un ordinal limite  $\beta \leq T$ . Comme les fibres des morphismes  $A_q \rightarrow A_q^\gamma$  et  $C_q \rightarrow C_q^\gamma$  sont des cofibrations (démonstration de la proposition 4.5.4), par la proposition 5.3.13, il vient que les fibres de  $f_q^\beta : A_q^\beta \rightarrow C_q^\beta$  sont des équivalences faibles. Comme en outre les constructions  $Cat(1, m)$  préservent les objets, le morphisme  $f^\beta$  reste surjectif, ce qui montre l'hypothèse de récurrence pour un ordinal limite.

Par récurrence transfinie, on a montré que pour tout ordinal  $\beta \leq T$  le morphisme  $f^\beta : A^\beta \rightarrow C^\beta$  a la même propriété que  $f$ . C'est donc en particulier le cas pour  $Bigcat(f) = f^T$ . Ainsi les fibres de  $Bigcat(f)_q : Bigcat(A)_q \rightarrow Bigcat(C)_q$  sont des équivalences faibles entre objets régaux, i.e. niveau par niveau ce sont des alliances d'objets régaux. C'est donc en particulier le cas pour les fibres de  $Bigcat(f)_1$  et comme  $Bigcat(A)$  et  $Bigcat(C)$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, il vient que  $Bigcat(f) : Bigcat(A) \rightarrow Bigcat(C)$  est pleinement fidèle. En outre comme  $Bigcat(f)$  est comme  $f$ , en particulier surjective sur les objets, alors  $Bigcat(f)$  est essentiellement surjective. Ainsi  $Bigcat(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, donc, par le lemme 4.6.6, ceci nous donne que  $f$  est une équivalence faible.

CQFD.

Ce résultat intermédiaire montré, nous sommes à même de terminer la vérification de l'hypothèse 4) du lemme de reconnaissance 5.0.4.

**Lemme 5.3.17** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,*
- 2) *les cofibrations génératrices ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits,*
- 3) *les cofibrations génératrices ont leurs buts connexes,*
- 4) *les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*
- 5) *pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,*



6) les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ .

Alors tout morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif est à la fois  $\mathcal{J}$ -injectif et une équivalence faible.

*Preuve :*

Les hypothèses que l'on fait sur la donnée de Segal facile permettent de vérifier les hypothèses du lemme 5.3.8. On obtient donc que tout morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif est  $\mathcal{J}$ -injectif.

Toujours d'après ce lemme, les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif. Ce morphisme est surjectif sur les objets. En effet soit  $b$  un objet de  $B$ , on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & A \\
 \downarrow & \nearrow \text{dotted arrow} & \downarrow f \\
 * & \xrightarrow{b} & B
 \end{array}$$

$\exists a$

Comme  $\emptyset \rightarrow *$  est un monomorphisme et que  $f$  est  $\mathcal{I}$ -injectif, le relèvement existe, ce qui signifie qu'il existe un objet  $a$  de  $A$  tel que  $f(a)$  est égal à  $b$ . Donc  $f$  est bien surjectif sur les objets.

Montrons maintenant que pour tout entier  $q > 0$  et pour tout  $q$ -uplet  $(a_0, \dots, a_q)$  d'objets de  $A$ ,  $f_q(a_0, \dots, a_q)$  est une fibration triviale. Considérons donc un diagramme commutatif du type suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & A_q(a_0, \dots, a_q) \\
 \downarrow i & \nearrow \text{dotted arrow} & \downarrow f_q(a_0, \dots, a_q) \\
 Y & \longrightarrow & B_q(f(a_0), \dots, f(a_q))
 \end{array}$$

$\exists$

avec  $i : X \rightarrow Y$  un monomorphisme de  $\mathcal{C}$ . Alors ce diagramme équivaut, par propriété de la construction  $\Theta$ , au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[q]\Theta X & \longrightarrow & A \\
 \Delta[q]\Theta i \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\
 \Delta[q]\Theta Y & \longrightarrow & B_q
 \end{array}$$

Comme  $\Delta[q]\Theta i$  est niveau par niveau un coproduit du monomorphisme  $i$ , il vient que  $\Delta[q]\Theta i$  est un monomorphisme niveau par niveau. Or  $f$  est  $\mathcal{I}$ -injectif, donc le relèvement existe, ce qui montre par équivalence des diagrammes que  $f_q(a_0, \dots, a_q)$  a la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes, qui sont justement les cofibrations, donc c'est une fibration triviale dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ .

On vient donc de montrer que tout morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif est surjectif sur les objets et que pour tout entier  $q > 0$  et pour tout  $q$ -uplet  $(a_0, \dots, a_q)$  d'objets de  $A$ ,  $f_q(a_0, \dots, a_q)$  est une fibration triviale donc en particulier une équivalence faible. Les monomorphismes étant stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret, toutes les hypothèses de la proposition précédente sont donc vérifiées et l'on obtient ainsi que  $f$  est lui-même une équivalence faible pour  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .

CQFD.

L'hypothèse 4) du lemme de reconnaissance 5.0.4 est donc vérifiée sous des hypothèses très fortes (et très lourdes) comme le fait que  $\mathcal{C}$  doit être une catégorie de modèles fermée simpliciale. Cependant quatre des six hypothèses du lemme de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante ont été vérifiées. On n'a donc plus le choix que de traiter l'hypothèse 3).

Cette hypothèse 3) est de loin la plus difficile à vérifier. On doit en effet montrer que toute  $\mathcal{J}$ -cofibration est à la fois une  $\mathcal{I}$ -cofibration et une équivalence faible, c'est-à-dire une cofibration triviale, vu que l'on a montré que les  $\mathcal{I}$ -cofibrations sont les monomorphismes. Comme on a vu que  $\mathcal{J}$  permet l'argument du petit objet, les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont en fait des rétracts de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées de flèches de  $\mathcal{J}$ . Il suffit donc de montrer que les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée et par colimite séquentielle transfinie pour montrer que les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont

des cofibrations triviales, la stabilité par rétract ayant déjà été montrée.

Les sections suivantes auront donc pour but de montrer cette stabilité. En général cette stabilité des cofibrations triviales est difficile à montrer. Toutefois dans le cas particulier des cofibrations triviales qui induisent un isomorphisme sur les objets, ce que nous appellerons iso-cofibrations triviales, cette stabilité est assez simple à montrer. C'est pourquoi nous allons tout d'abord nous intéresser à ces iso-cofibrations triviales.

## 5.4 Stabilité des iso-cofibrations triviales

### 5.4.1 Caractérisation des iso-équivalences de $\mathcal{C}$ -catégories

Nous cherchons à montrer que les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée et colimite séquentielle transfinie afin de montrer l'hypothèse 3) du lemme 5.0.4 de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Dans le cas particulier où ces cofibrations triviales induisent des isomorphismes sur les objets, cette stabilité est plus simple à montrer. En effet pour montrer ce résultat, par l'intermédiaire de la construction  $\text{Cat}$ , nous allons nous ramener à le montrer pour les iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories. Or les iso-cofibrations triviales entre  $\mathcal{C}$ -catégories sont exactement les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories qui niveau par niveau sont des cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ . Cette constatation permettra de remonter la stabilité des cofibrations triviales dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  aux iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories.

Mais commençons d'abord par donner les définitions d'iso-équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories et d'iso-cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Définition 5.4.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal.*

*Une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories qui induit un isomorphisme sur les objets sera nommée iso-équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Une iso-équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories qui est également un monomorphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories sera nommée iso-cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

Donnons aussi les définitions d'iso-équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories et d'iso-cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

**Définition 5.4.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal facile.*

*Une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui induit un isomorphisme sur les objets sera nommée iso-équivalence faible. Une iso-équivalence faible qui est également un monomorphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories sera nommée iso-cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -précatégories.*

Nous allons maintenant montrer que les iso-équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories sont exactement les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories qui niveau par niveau sont des alliances d'objets régaux.

**Proposition 5.4.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal telle que :*

-la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants,

-les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux,

Alors les trois propositions ci-dessous sont équivalentes :

i)  $A \rightarrow B$  est un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -catégories tel que, pour tout entier  $m$ ,  $A_m \rightarrow B_m$  est une alliance d'objets régaux.

ii)  $A \rightarrow B$  est un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -catégories tel que  $A_0 \rightarrow B_0$  est un isomorphisme et  $A_1 \rightarrow B_1$  est une alliance d'objets régaux.

iii)  $A \rightarrow B$  est une iso-équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

*Preuve :*

Montrons tout d'abord que iii) implique ii). Soit  $A \rightarrow B$  une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories telle que  $A_0 \rightarrow B_0$  soit un isomorphisme. Il suffit de montrer que  $A_1 \rightarrow B_1$  est une alliance d'objets régaux. Comme  $A_0 \rightarrow B_0$  est un isomorphisme, on identifiera les objets de  $A$  avec leurs images dans  $B$ . Par définition de catégorie discrétisante, le morphisme  $A_1 \rightarrow B_1$  n'est autre que le coproduit des morphismes  $A_1(a, a') \rightarrow B_1(a, a')$  pour  $a$  et  $a'$  décrivant  $A_0$ . Par hypothèse, comme  $A \rightarrow B$  une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, alors tous les morphismes  $A_1(a, a') \rightarrow B_1(a, a')$  sont des alliances d'objets régaux. En outre, d'après les hypothèses, on peut identifier les alliances d'objets régaux avec les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants, par corollaire 5.3.14,  $A_1 \rightarrow B_1$  est une alliance d'objets régaux comme coproduit d'alliances d'objets régaux.

Montrons maintenant que ii) implique i). Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -catégories tel que  $A_0 \rightarrow B_0$  est un isomorphisme et  $A_1 \rightarrow B_1$  est une alliance d'objets régaux. Soit  $m \geq 2$  un entier. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A_m & \xrightarrow{f_m} & B_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 & \longrightarrow & B_1 \times_{B_0} \dots \times_{B_0} B_1
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de Segal et la flèche du bas le produit fibré multiple de  $f_1$  au dessus de l'isomorphisme  $f_0$ . Par stabilité des alliances d'objets régaux par produit fibré au-dessus d'un objet discret, il vient que la flèche du bas est une alliance d'objets régaux. En outre  $A$  et  $B$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, donc leurs morphismes de Segal sont aussi des alliances d'objets régaux. Et par l'axiome "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , il vient que  $f_m$  est une alliance d'objets régaux.

Enfin le fait que i) implique iii) découle directement du lemme 4.1.2.

CQFD.

On remarque, d'après la démonstration, que pour toute catégorie de modèles fermée discrétisante, une équivalence niveau par niveau est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories (voir lemme 4.1.2). En revanche une iso-équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories n'est une équivalence niveau par niveau que dans une catégorie de modèles fermée discrétisante simpliciale dont tous les objets sont cofibrants.

Comme les monomorphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories sont les monomorphismes niveau par niveau, il découle directement de cette proposition que les iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories sont exactement les morphismes de  $\mathcal{C}$ -catégories qui sont niveau par niveau des monomorphismes et des alliances d'objets régaux. Ceci va nous permettre de montrer la stabilité des iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories par colimite en regardant uniquement ce qui se passe niveau par niveau. Cependant les colimites de  $\mathcal{C}$ -catégories ne sont pas des  $\mathcal{C}$ -catégories. Ainsi on obtiendra seulement à l'arrivée que les colimites d'iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories sont des morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui seront des cofibrations triviales niveau par niveau. Le but de la prochaine section est donc de montrer que ces cofibrations triviales niveau par niveau sont des cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

### 5.4.2 Equivalence faible niveau par niveau

Comme les iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories sont niveau par niveau des cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$  et que, dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée et colimite séquentielle transfinie, on va obtenir que les sommes amalgamées et les colimites séquentielles transfinies d'iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories sont niveau par niveau des cofibrations triviales. Or du fait que les colimites de  $\mathcal{C}$ -catégories ne sont pas en général des  $\mathcal{C}$ -catégories, on a donc à faire à des morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui niveau par niveau sont des cofibrations triviales, ce qui ne rentre pas dans le cadre de la proposition 4.1.2. Aussi allons-nous montrer dans

cette section que les morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories qui niveau par niveau sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  sont en fait des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Pour cela nous allons utiliser la construction Bigcat qui permet de suivre la trace de ces morphismes lors des étapes de la catégorisation.

**Lemme 5.4.4** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile telle que la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale.*

*Alors pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f : A \rightarrow C$  tel que pour tout entier  $q \geq 0$   $f_q : A_q \rightarrow C_q$  est une équivalence faible et pour tout entier  $m \geq 2$ ,  $Cat(1, m)(A) \rightarrow Cat(1, m)(C)$  est niveau par niveau une équivalence faible.*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que si la source d'une flèche génératrice s'envoie dans  $A$  alors en composant par  $f : A \rightarrow C$  elle s'envoie aussi dans  $C$ . Ainsi toute somme amalgamée de  $A_q$ , pour un certain entier  $q$ , par un coproduit de flèches génératrices s'envoyant dans  $A_q$ , possède un morphisme vers le même type de sommes amalgamées pour  $C_q$ . De ce fait il existe un morphisme  $\eta_f$  de  $B_A$  vers  $B_C$  tel que l'on ait  $\eta_f \circ \eta_A = \eta_C \circ f_1$  et  $\nu_C \circ \eta_f = f_0 \times f_0 \circ \nu_A$ . De même il existe un morphisme  $\phi_f$  de  $P_A$  vers  $P_C$  tel que  $\phi_f \circ \phi_A = \phi_C \circ f_m$  et  $\psi_C \circ \phi_f = \eta_f \times_{f_0} \dots \times_{f_0} \eta_f \circ \psi_A$ .

Comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 4.4.6, les morphismes  $\eta$  sont des cofibrations triviales. Comme par hypothèse  $f_1$  est une équivalence faible, par "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , il vient que  $\eta_f$  est une équivalence faible. Et donc son produit fibré  $m$ -fois au-dessus de l'isomorphisme  $f_0$  aussi. Toujours d'après la démonstration du lemme 4.4.6, les morphismes  $\psi$  sont des alliances faciles, donc des équivalences faibles et, par "trois pour deux", il vient que  $\phi_f$  est aussi une équivalence faible. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants, il vient par le corollaire 5.3.14 que les coproduits de  $\eta_f$  et de  $\phi_f$  sont des équivalences faibles, ainsi que les coproduits de  $f_1$  et  $f_m$ . Encore d'après la démonstration du lemme 4.4.6, les morphismes  $\eta$  et  $\phi$  sont des cofibrations donc leurs coproduits aussi. On a que  $Cat(1, m)(f)_q$  est la somme amalgamée dans la catégorie des morphismes de  $f_q$  par un coproduit de  $\eta_f$  et de  $\phi_f$  au-dessus d'un même coproduit de  $f_1$  et de  $f_m$ . En outre les coproduits de  $\eta_A$  et de  $\phi_A$  (respectivement  $\eta_C$  et  $\phi_C$ ) sont des cofibrations donc, par la proposition 5.3.12,  $Cat(1, m)(f)_q$  est une équivalence faible.

CQFD.

**Proposition 5.4.5** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile telle que la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale.*

*Alors pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f : A \rightarrow C$  tel que pour tout entier  $q \geq 0$   $f_q : A_q \rightarrow C_q$  est une équivalence faible,  $A \rightarrow C$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .*

*Preuve :*

Par récurrence transfinie, on montre que pour tout ordinal  $\beta < T$  le morphisme  $f^\beta : A^\beta \rightarrow C^\beta$  est niveau par niveau une équivalence faible, où  $f^\beta$  est la  $\beta$ -ième étape de  $Bigcat(f)$ . Le pas de la récurrence d'un ordinal  $\beta < T$  à l'ordinal  $\beta + 1$  est exactement le lemme précédent. Il ne reste qu'à comprendre le pas de la récurrence transfinie pour un ordinal limite  $\beta \leq T$ . Supposons donc que pour tout ordinal  $\gamma < \beta$ ,  $f^\gamma$  est niveau par niveau une équivalence faible. Comme en outre les morphismes  $A \rightarrow A^\gamma$  et  $C \rightarrow C^\gamma$  sont des cofibrations (démonstration de la proposition 4.5.4), par la proposition 5.3.13, il vient que  $f^\beta$  est niveau par niveau une équivalence faible, ce qui montre l'hypothèse de récurrence pour l'ordinal limite  $\beta$ .

On a donc bien montré par récurrence transfinie que pour tout ordinal  $\beta < T$  le morphisme  $f^\beta : A^\beta \rightarrow C^\beta$  est niveau par niveau une équivalence faible. C'est donc en particulier le cas pour  $f^T = Bigcat(f) : Bigcat(A) \rightarrow Bigcat(C)$ . Comme  $Bigcat(f)$  est niveau par niveau une équivalence faible entre objets régaux, i.e. niveau par niveau c'est une alliance d'objets régaux, et que  $Bigcat(A)$  et  $Bigcat(C)$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, alors par le lemme 4.1.2, il vient que  $Bigcat(f) : Bigcat(A) \rightarrow Bigcat(C)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, donc par le lemme 4.6.6,  $f$  est une équivalence faible. CQFD.

Maintenant que nous savons que les équivalences faibles niveau par niveau sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories, nous pouvons nous lancer dans les démonstrations de stabilité des iso-cofibrations triviales.

### 5.4.3 Sommes amalgamées d'iso-cofibrations triviales

Avant de montrer le lemme de stabilité des iso-cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme, on va montrer un petit lemme technique qui s'avèrera utile pour toutes ces questions de somme amalgamée de cofibrations triviales.



**Lemme 5.4.6** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Considérons la somme amalgamée  $B \amalg_A C$  de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Pour montrer que le morphisme canonique  $C \rightarrow B \amalg_A C$  est une équivalence faible, il faut et il suffit de montrer que le morphisme canonique  $\text{Cat}(C) \rightarrow \text{Cat}(B) \amalg_{\text{Cat}(A)} \text{Cat}(C)$  est une équivalence faible.*

*Preuve :*

C'est l'application directe du lemme 2.11.4 dont les hypothèses 2.11.1, qui sont en fait celles de la proposition 2.7.1, sont vérifiées par la donnée de Segal facile.

CQFD.

Ce lemme technique nous permet donc de démontrer la stabilité des iso-cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme uniquement en utilisant les iso-cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories. Or si  $\text{Cat}$  transporte bien les équivalences faibles sur les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, par définition même des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories, en revanche il faut s'assurer que  $\text{Cat}$  envoie bien les cofibrations sur les cofibrations, ce qui est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 5.4.7** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Alors les cofibrations sont préservées par la catégorisation  $\text{Cat}$ .*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que, la catégorisation  $\text{Cat}$  n'étant autre que le plan d'addition de cellules  $E_\Phi$ , ses plans simples sont du type  $e_{\Psi, \lambda}$ , avec pour  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Ensuite on rappelle que, comme la donnée de Segal est facile, alors par le lemme 3.4.6, les  $\mathcal{FG}_1$ -cofibrations sont des monomorphismes niveau par niveau donc des monomorphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories. En prenant donc pour ensemble  $\Phi$  la famille de monomorphismes  $\mathcal{FG}_1$ , il vient d'après le lemme 2.12.1 que les monomorphismes sont préservés par la catégorisation  $\text{Cat}$ .

CQFD.

**Lemme 5.4.8** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile telle que la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes.*

*Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories à la fois cofibration et iso-équivalence faible. Alors sa somme amalgamée le long d'un morphisme  $A \rightarrow C$  quelconque est aussi une cofibration et une iso-équivalence faible.*

*Preuve :*

Tout d'abord, on remarque que, comme les isomorphismes sur les objets sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme, le morphisme canonique  $C \rightarrow B \amalg_A C$  est un isomorphisme sur les objets. En outre les cofibrations sont des cofibrations niveau par niveau et, dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , les cofibrations sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme. Donc  $C \rightarrow B \amalg_A C$  est aussi une cofibration comme somme amalgamée niveau par niveau le long d'un morphisme d'une cofibration niveau par niveau. Il reste donc à montrer que c'est une équivalence faible, ce qui d'après le lemme 5.4.6 revient à montrer que  $Cat(C) \rightarrow Cat(B) \amalg_{Cat(A)} Cat(C)$  est une équivalence faible. Or ce morphisme est lui-même la somme amalgamée de  $Cat(A) \rightarrow Cat(B)$  le long de  $Cat(A) \rightarrow Cat(C)$ .

Comme par hypothèse les cofibrations sont les monomorphismes, par le lemme 5.4.7, il vient que  $Cat(A) \rightarrow Cat(B)$  est une cofibration. En outre  $Cat$  préserve les objets et donc  $Cat(A) \rightarrow Cat(B)$  est un isomorphisme sur les objets ainsi que sa somme amalgamée  $Cat(C) \rightarrow Cat(B) \amalg_{Cat(A)} Cat(C)$ . Enfin comme par hypothèse,  $A \rightarrow B$  est une équivalence faible alors  $Cat(A) \rightarrow Cat(B)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Finalement on obtient que  $Cat(A) \rightarrow Cat(B)$  est une cofibration et une iso-équivalence, et donc par la proposition 5.4.3, c'est une cofibration triviale niveau par niveau. Or la somme amalgamée dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est la somme amalgamée niveau par niveau. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$  sont stables par somme amalgamées le long d'un morphisme. Ainsi, on obtient que  $Cat(C) \rightarrow Cat(B) \amalg_{Cat(A)} Cat(C)$  est une cofibration triviale niveau par niveau, comme somme amalgamée niveau par niveau d'une cofibration triviale niveau par niveau. Comme c'est aussi un isomorphisme sur les objets, par la proposition 5.4.5, il vient que  $Cat(C) \rightarrow Cat(B) \amalg_{Cat(A)} Cat(C)$  est donc une équivalence faible, ce que l'on voulait démontrer.

CQFD.

#### 5.4.4 Colimites séquentielles d'iso-cofibrations triviales

Après avoir montré la stabilité des iso-cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme, nous allons regarder la stabilité des iso-cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie. Mais comme précédemment, nous allons tout d'abord donner un lemme pratique pour ces histoires de colimites séquentielles transfinies de cofibrations triviales.

**Lemme 5.4.9** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Considérons une  $\lambda$ -séquence  $(A_\alpha)_{\alpha < \lambda}$  de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Pour montrer que le morphisme canonique  $A_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha$  est une équivalence faible, il faut et il suffit de montrer que le morphisme canonique  $\operatorname{Cat}(A_0) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha)$  est une équivalence faible.*

*Preuve :*

Il s'agit à nouveau de l'application directe du lemme 2.11.4 dont les hypothèses 2.11.1 sont vérifiées par la donnée de Segal facile.

CQFD.

**Lemme 5.4.10** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile telle que la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes.*

*Soit  $(A_\alpha)_{\alpha < \lambda}$  une  $\lambda$ -séquence de  $\mathcal{C}$ -précatégories telle que pour tout  $\alpha < \lambda$  le morphisme  $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha+1}$  est à la fois une cofibration et une iso-équivalence faible. Alors le morphisme canonique  $A_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha$  est aussi une cofibration et une iso-équivalence faible.*

*Preuve :*

Tout d'abord, on remarque que, les isomorphismes sur les objets étant stables par colimite séquentielle transfinie, le morphisme  $A_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha$  est un isomorphisme sur les objets. En outre les cofibrations ne sont autres que les cofibrations niveau par niveau donc elles sont aussi stables par colimite séquentielle transfinie car cette colimite se calcule niveau par niveau et que,  $\mathcal{C}$  étant une catégorie de modèles fermée, les cofibrations de  $\mathcal{C}$  sont stables par colimite séquentielle transfinie. Donc  $A_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha$  est aussi une cofibration. Il reste donc à montrer que c'est une équivalence faible, ce qui d'après le lemme précédent revient à montrer que le morphisme  $\operatorname{Cat}(A_0) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha)$  est une équivalence faible. Or ce morphisme est lui-même la colimite séquentielle transfinie des  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(A_{\alpha+1})$ .

Comme par hypothèse les cofibrations sont les monomorphismes, par le lemme 5.4.7, il vient que  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(A_{\alpha+1})$  est une cofibration. En outre  $\operatorname{Cat}$  préserve les objets et donc  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(A_{\alpha+1})$  est un isomorphisme sur les objets, donc, par colimite séquentielle transfinie,  $\operatorname{Cat}(A_0) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha)$  aussi. Enfin comme par hypothèse,  $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha+1}$  est une équivalence faible alors  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(A_{\alpha+1})$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Finalement on obtient que  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(A_{\alpha+1})$  est une cofibration et une iso-équivalence, et donc par la proposition 5.4.3, c'est une cofibration triviale niveau par

niveau. Or les colimites séquentielles transfinites dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont les colimites séquentielles transfinites niveau par niveau. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$  sont stables par colimite séquentielle transfinie. Ainsi, on obtient que  $Cat(A_0) \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} Cat(A_\alpha)$  est une cofibration triviale niveau par niveau, comme colimite séquentielle transfinie niveau par niveau de cofibrations triviales niveau par niveau. Comme c'est aussi un isomorphisme sur les objets, par la proposition 5.4.5, il vient que  $Cat(A_0) \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} Cat(A_\alpha)$  est donc une équivalence faible, ce que l'on voulait démontrer.

CQFD.

Pour clore cette section, nous allons aussi donner un résultat de stabilité des iso-cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des morphismes, en commençant comme toujours par un petit lemme pratique.

**Lemme 5.4.11** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Considérons un morphisme de  $\lambda$ -séquences  $(A_\alpha)_{\alpha < \lambda} \rightarrow (B_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ . Pour montrer que le morphisme  $\text{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} B_\alpha$  est une équivalence faible, il faut et il suffit de montrer que le morphisme  $\text{colim}_{\alpha < \lambda} Cat(A_\alpha) \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} Cat(B_\alpha)$  est une équivalence faible.*

*Preuve :*

Il s'agit encore une fois de l'application directe du lemme 2.11.4 dont la donnée de Segal facile vérifie les hypothèses.

CQFD.

**Lemme 5.4.12** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,*
- 2) *les colimites séquentielles transfinites de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinites de  $\mathcal{C}$ .*

*Soit  $(A_\alpha)_{\alpha < \lambda} \rightarrow (B_\alpha)_{\alpha < \lambda}$  un morphisme de  $\lambda$ -séquences de  $\mathcal{C}$ -précatégories tel que pour tout  $\alpha < \lambda$  les morphismes  $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha+1}$  et  $B_\alpha \rightarrow B_{\alpha+1}$  sont des cofibrations et le morphisme  $A_\alpha \rightarrow B_\alpha$  est à la fois une cofibration et une iso-équivalence faible. Alors le morphisme  $\text{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} B_\alpha$  est aussi une cofibration et une iso-équivalence faible.*

*Preuve :*

Tout d'abord, on remarque que, les isomorphismes sur les objets étant stables par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des morphismes, le morphisme  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} B_\alpha$  est un isomorphisme sur les objets. En outre les cofibrations ne sont autres que les monomorphismes niveau par niveau donc elles sont aussi stables par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des cofibrations car cette colimite se calcule niveau par niveau et que, par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , les monomorphismes de  $\mathcal{C}$  sont stables par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des monomorphismes. Donc  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} A_\alpha \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} B_\alpha$  est aussi une cofibration. Il reste donc à montrer que c'est une équivalence faible, ce qui d'après le lemme précédent revient à montrer que le morphisme  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est une équivalence faible. Or ce morphisme est lui-même la colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des morphismes des  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_\alpha)$ . Comme par hypothèse les cofibrations sont les monomorphismes, par le lemme 5.4.7, il vient que les morphismes  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(A_{\alpha+1})$ ,  $\operatorname{Cat}(B_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_{\alpha+1})$  et  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  sont des cofibrations.

Ainsi le morphisme  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est la colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des cofibrations des  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_\alpha)$ . En outre  $\operatorname{Cat}$  préserve les objets et donc  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est un isomorphisme sur les objets, et, par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des morphismes,  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  aussi. Enfin comme par hypothèse,  $A_\alpha \rightarrow B_\alpha$  est une équivalence faible alors  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Finalement on obtient que  $\operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est une cofibration et une iso-équivalence, et donc par la proposition 5.4.3, c'est une cofibration triviale niveau par niveau. Or les colimites séquentielles transfinies dans la catégorie des cofibrations de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont les colimites séquentielles transfinies niveau par niveau dans la catégorie des cofibrations de  $\mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale propre à gauche, par la proposition 5.3.13, les cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$  sont stables par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie des cofibrations. Ainsi, on obtient que  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est une cofibration triviale niveau par niveau, comme colimite séquentielle transfinie niveau par niveau dans la catégorie des cofibrations niveau par niveau de cofibrations triviales niveau par niveau. Comme c'est aussi un isomorphisme sur les objets, par la proposition 5.4.5, il vient que  $\operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(A_\alpha) \rightarrow \operatorname{colim}_{\alpha < \lambda} \operatorname{Cat}(B_\alpha)$  est donc une équivalence faible, ce que l'on voulait démontrer. CQFD.

Jusqu'à présent, la stabilité par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie des cofibrations triviales n'a été démontrée que pour les iso-cofibrations triviales. Afin de la montrer pour toutes les cofibrations triviales, nous avons besoin d'un gros résultat sur le produit cartésien des  $\mathcal{C}$ -catégories, ce qui sera l'objet de la prochaine section.

## 5.5 Produit cartésien de $\mathcal{C}$ -catégories

Le but de cette section est de montrer que le produit cartésien de deux  $\mathcal{C}$ -précatégories est équivalent au produit cartésien de leurs catégorisations. De ce résultat va découler la stabilité des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories par produit cartésien qui permettra de terminer la démonstration de stabilité des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie. Lorsque l'on démontre que le produit cartésien de deux  $\mathcal{C}$ -précatégories est équivalent au produit cartésien de leurs catégorisations, on se ramène à montrer un résultat particulier d'équivalence entre des  $\mathcal{C}$ -précatégories. Ce résultat fait intervenir la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnées.

### 5.5.1 $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées

L'idée principale d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée est que son ensemble d'objet est muni d'un ordre total pour lequel il n'existe de morphisme entre deux objets que s'il existe une chaîne ordonnée d'objets adjacents reliés par un morphisme. Donnons en une définition plus précise.

**Définition 5.5.1** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée discrétisante. Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  est librement ordonnée si son ensemble d'objets  $A_0$  est fini et muni d'un ordre total vérifiant les trois propriétés suivantes :*

*i) pour toute suite d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  non ordonnée dans  $A$ ,  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  est l'ensemble vide,*

*ii) pour toute suite ordonnée d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  dans  $A$ , le morphisme  $A_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow A_1(a_0, a_m)$ , induit par l'application de  $\mathbf{1}$  dans  $\mathbf{m}$  qui à  $0$  et  $1$  associe  $0$  et  $m$ , est une équivalence faible dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ ,*

*iii) pour tout objet  $a$  de  $A$ ,  $A_1(a, a)$  est un point.*

*On dira que  $A$  est librement ordonnée stricte, si on demande pour la propriété ii) un isomorphisme au lieu d'une équivalence faible.*

Voici quelques exemples importants de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées.

**Lemme 5.5.2** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie discrétisante possédant les coproduits et les sommes amalgamées.*

*-Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  et pour tout entier  $m$ , les  $\mathcal{C}$ -précatégories  $\Delta[m] \Theta X$  et  $\Upsilon[m] \Theta X$  sont librement ordonnées strictes.*

-Pour tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$  et pour tout entier  $m \geq 2$ , la source du morphisme  $Boit_m(f)$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée stricte et les morphismes  $\Delta[m]\Theta f$  et  $Boit_m(f)$  sont des isomorphismes sur les objets préservant strictement l'ordre.

*Preuve :*

$\Delta[m]\Theta X$  a pour ensemble d'objets  $\text{Hom}_\Delta(\mathbf{0}, \mathbf{m})$ , qui est un ensemble fini à  $m + 1$  éléments. En identifiant les applications de  $\mathbf{0}$  dans  $\mathbf{m}$  avec leur image, on obtient ainsi un ordre total naturel sur  $\Delta[m]\Theta X_0$ . On obtient le même ordre sur les objets de  $\Upsilon[m]\Theta X$  et par suite sur ceux de la source de  $Boit_m(f)$ . Soient  $q > 0$  un entier et  $(x_0, \dots, x_q)$  une suite d'objets de  $\Delta[m]\Theta X_0$ . On remarque que la suite  $(x_0, \dots, x_q)$  s'identifie à une application de  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbf{m}$  si et seulement si cette suite est ordonnée et qu'elle s'identifie à une application de  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbf{m}$  se factorisant par  $\mathbf{0}$  si et seulement si tous les  $x_i$  sont identiques. En utilisant cette remarque ainsi que la définition de  $\Delta[m]\Theta X$ , il vient que  $\Delta[m]\Theta X_q(x_0, \dots, x_q)$  est l'ensemble vide si la suite n'est pas ordonnée, un point si elle est constante et  $X$  si la suite est ordonnée non constante. Dans ces deux derniers cas, le morphisme  $\Delta[m]\Theta X_q(x_0, \dots, x_q) \rightarrow \Delta[m]\Theta X_1(x_0, x_q)$  n'est autre que l'identité du point, respectivement de  $X$ . Ceci montre que  $\Delta[m]\Theta X$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée stricte.

Pour  $\Upsilon[m]\Theta X$ , on remarque qu'une suite  $(x_0, \dots, x_q)$  d'objets de  $\Upsilon[m]\Theta X_0$  s'identifie à une application de  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbf{m}$  se factorisant par une face principale si et seulement si la suite est ordonnée et que l'on ait :  $x_q = x_0 + 1$ . Avec cette remarque et la définition de  $\Upsilon[m]\Theta X$ , on obtient que  $\Upsilon[m]\Theta X_q(x_0, \dots, x_q)$  est le vide si la suite n'est pas ordonnée, un point si la suite est constante,  $X$  si la suite est ordonnée à extrémités adjacentes et le vide sinon. Dans ces trois derniers cas, le morphisme  $\Upsilon[m]\Theta X_q(x_0, \dots, x_q) \rightarrow \Upsilon[m]\Theta X_1(x_0, x_q)$  n'est autre que l'identité du point, respectivement de  $X$  et de l'ensemble vide. Ceci montre que  $\Upsilon[m]\Theta X$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée stricte.

Enfin avec les remarques ci-dessus et la définition de  $Boit_m(f)$ , on obtient que  $B(m, f)_q(x_0, \dots, x_q)$  est le vide si la suite n'est pas ordonnée, un point si la suite est constante,  $Y$  si la suite est ordonnée à extrémités adjacentes et  $X$  sinon. Dans ces trois derniers cas, le morphisme  $B(m, f)_q(x_0, \dots, x_q) \rightarrow B(m, f)_1(x_0, x_q)$  n'est autre que l'identité du point, respectivement de  $Y$  et de  $X$ . Ceci montre que la source de  $Boit_m(f)$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée stricte.

Pour finir, on termine en constatant que  $\Delta[m]\Theta f$  et  $Boit_m(f)$  induisent par définition l'identité sur les objets.



CQFD.

Comme il n'est pas toujours facile de maîtriser les  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées et encore moins de vérifier qu'un morphisme entre elles préserve l'ordre, nous allons donner une condition suffisante simple pour qu'un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées préserve l'ordre.

**Lemme 5.5.3** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée discrétisante tel qu'il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées. Si  $A$  a la propriété que, pour tout couple ordonné d'objets adjacents  $(a, a')$  dans  $A$ ,  $A_1(a, a')$  n'est pas isomorphe à l'ensemble vide, alors  $f$  est un morphisme préservant l'ordre des objets.*

*Preuve :*

Par l'absurde, si  $f$  ne préserve pas l'ordre des objets, il existe un couple ordonné d'objets adjacents  $(a, a')$  tel que le couple  $(f(a), f(a'))$  ne soit pas ordonné. Alors, comme  $B$  est librement ordonné, on a que  $B_1(f(a), f(a'))$  est l'ensemble vide, tandis que par hypothèse  $A_1(a, a')$  n'est pas isomorphe à l'ensemble vide. Ainsi  $f_1(a, a') : A_1(a, a') \rightarrow B_1(f(a), f(a'))$  envoie un objet non isomorphe à l'ensemble vide dans l'ensemble vide, ce qui contredit l'hypothèse sur  $\mathcal{C}$ .

CQFD.

La notion de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées est stable par certaines opérations. Nous allons dans le lemme suivant le montrer pour les opérations dont nous nous servirons par la suite.

**Lemme 5.5.4** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie de modèles fermée discrétisante simpliciale dont tous les objets sont cofibrants et dont les cofibrations et les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

1) *Si  $A$  et  $B$  est des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées alors  $A \times B$  aussi et si elles sont strictes alors  $A \times B$  également.*

2) *Soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : A \rightarrow C$  deux morphismes entre  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées préservant l'ordre des objets. Si  $f$  préserve strictement l'ordre des objets et que  $g$  est une cofibration induisant un isomorphisme sur les objets, alors la somme amalgamée  $B \amalg_A C$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée. Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont strictes, leur somme amalgamée aussi.*

3) Soient  $\beta$  un ordinal quelconque et  $A$  la colimite d'une  $\beta$ -séquence de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées  $(A_\alpha)_{\alpha < \beta}$  telle que, pour tout  $\alpha < \beta$ , les morphismes  $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha+1}$  soient des cofibrations niveau par niveau induisant un isomorphisme sur les ensembles d'objets préservant leur ordre. Alors  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée.

*Preuve :*

1) Tout d'abord on remarque que le produit des  $\mathcal{C}$ -précatégories n'est autre que le produit niveau par niveau. Ainsi l'ensemble des objets de  $A \times B$  est fini comme produit d'ensembles finis et on lui donnera comme ordre total l'ordre lexicographique :

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ si } a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq b').$$

Soient  $m > 0$  un entier et  $((a_0, b_0), \dots, (a_m, b_m))$  une suite de points de  $A \times B$ . On a l'égalité suivante :

$$(A \times B)_m((a_0, b_0), \dots, (a_m, b_m)) = A_m(a_0, \dots, a_m) \times B_m(b_0, \dots, b_m).$$

Si la suite n'est pas ordonnée, alors il existe un indice  $i$  entre 0 et  $m - 1$  tel que  $(a_i, a_{i+1})$  n'est pas ordonné ou bien  $a_i$  et  $a_{i+1}$  sont égaux et  $(b_i, b_{i+1})$  n'est pas ordonné. Comme  $A$  et  $B$  sont librement ordonnés, l'un des deux termes du produit est l'ensemble vide, ce qui entraîne que le produit aussi est l'ensemble vide, ce qui prouve i) pour  $A \times B$ .

Si la suite est ordonnée, comme  $A$  et  $B$  sont librement ordonnés, les morphismes  $A_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow A_1(a_0, a_m)$  et  $B_m(b_0, \dots, b_m) \rightarrow B_1(b_0, b_m)$  sont des équivalences faibles (respectivement des isomorphismes) donc leur produit aussi par stabilité des équivalences faibles (respectivement des isomorphismes) par produit, ce qui prouve ii) (respectivement ii)-strict) pour  $A \times B$ .

Si la suite est constante, comme  $A$  et  $B$  sont librement ordonnés,  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  et  $B_m(b_0, \dots, b_m)$  sont des points et donc leur produit aussi, ce qui montre iii) pour  $A \times B$ . Donc  $A \times B$  est librement ordonné (respectivement librement ordonné strict) si  $A$  et  $B$  le sont.

2) Tout d'abord on remarque que la somme amalgamée des  $\mathcal{C}$ -précatégories n'est autre que la somme amalgamée niveau par niveau. Comme  $g_0$  est un isomorphisme préservant l'ordre, on identifiera par la suite les objets de  $A$  avec leurs images dans  $C$ . En outre, l'isomorphisme  $g_0$  entraîne un isomorphisme entre  $B_0$  et  $B \coprod_A C_0$ , ce qui, d'une part, montre que  $B \coprod_A C_0$  est un ensemble fini et, d'autre part, munit ainsi  $B \coprod_A C_0$  de l'ordre total induit par celui de  $B_0$ .

Encore une fois, on identifiera les objets de  $B_0$  et de  $B \coprod_A C_0$  via cet isomorphisme. Soient  $m > 0$  un entier et  $(b_0, \dots, b_m)$  une suite d'objets de  $B \coprod_A C$ . Si  $b_0, \dots, b_m$  sont dans l'image de  $f_0$ , on a l'égalité suivante :

$$\left( B \coprod_A C \right)_m (b_0, \dots, b_m) = B_m(b_0, \dots, b_m) \coprod_{\left( \coprod_{a \in f^{-1}(b)} A_m(a) \right)} \left( \coprod_{a \in f^{-1}(b)} C_m(a) \right),$$

où  $a$  est une notation pour une suite d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  de  $A$  et où  $a \in f^{-1}(b)$  signifie que les images de  $a_0, \dots, a_m$  par  $f$  sont respectivement  $b_0, \dots, b_m$ . Sinon on a :  $\left( B \coprod_A C \right)_m (b_0, \dots, b_m) = B_m(b_0, \dots, b_m)$ , auquel cas i), ii) et iii) sont vérifiées car  $B$  les vérifie. Il reste donc à montrer que les trois propriétés sont vraies pour  $b_0, \dots, b_m$  dans l'image de  $f_0$ .

Tout d'abord on remarque que le fait que  $f$  préserve strictement l'ordre entraîne que  $f$  est injective et donc pour toute suite  $(b_0, \dots, b_m)$  dans l'image de  $f_0$ , il existe une unique suite  $(a_0, \dots, a_m)$  telle que son image par  $f$  soit  $(b_0, \dots, b_m)$ . Ainsi on obtient l'égalité suivante :

$$\left( B \coprod_A C \right)_m (b_0, \dots, b_m) = B_m(b_0, \dots, b_m) \coprod_{A_m(a_0, \dots, a_m)} C_m(a_0, \dots, a_m).$$

Si la suite n'est pas ordonnée, comme  $f$  préserve l'ordre, la suite  $(a_0, \dots, a_m)$  ayant pour image  $(b_0, \dots, b_m)$  par  $f$  ne sera pas non plus ordonnée. Comme  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont librement ordonnées, chaque terme de la somme amalgamée est vide, donc la somme amalgamée aussi, ce qui montre i). Si la suite est constante, comme  $f$  préserve strictement l'ordre, la suite  $(a_0, \dots, a_m)$  ayant pour image  $(b_0, \dots, b_m)$  par  $f$  l'est aussi. Comme  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont librement ordonnées, chaque terme de la somme amalgamée est un point, donc la somme amalgamée aussi, ce qui montre iii).

Si la suite est ordonnée mais non constante, comme  $f$  préserve l'ordre, la suite  $(a_0, \dots, a_m)$  ayant pour image  $(b_0, \dots, b_m)$  par  $f$  le sera aussi. Comme  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont librement ordonnées (respectivement librement ordonnées strictes), les morphismes  $A_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow A_1(a_0, a_m)$ ,  $B_m(b_0, \dots, b_m) \rightarrow B_1(b_0, b_m)$  et  $C_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow C_1(a_0, a_m)$  sont des équivalences faibles (respectivement des isomorphismes). Comme par hypothèse  $g$  est une cofibration niveau par niveau donc  $g_1$  et  $g_m$  sont des cofibrations de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ . Comme en outre, par hypothèse, les cofibrations sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret,  $g_1(a_0, a_m)$  et  $g_m(a_0, \dots, a_m)$  sont des cofibrations. Enfin, comme on a supposé que tous les objets de  $\mathcal{C}$  sont cofibrants,

en appliquant la proposition 5.3.12, on obtient que  $B \coprod_A C_m(b_0, \dots, b_m) \rightarrow B \coprod_A C_1(b_0, b_m)$  est une équivalence faible, ce qui montre ii). Le cas strict est plus facile car la somme amalgamée d'isomorphismes dans la catégorie des morphismes est un isomorphisme.

3) Tout d'abord on remarque que la colimite séquentielle transfinie des  $\mathcal{C}$ -précatégories n'est autre que la colimite séquentielle transfinie niveau par niveau. Comme pour tout ordinal  $\alpha < \beta$ , le morphisme  $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha+1}$  induit un isomorphisme au niveau des objets préservant l'ordre, on identifiera donc via ces isomorphismes les ensembles d'objets des  $A_\alpha$ . Ainsi l'ensemble des objets de  $A$  sera donc isomorphe à ceux-ci, ce qui permet de montrer qu'il est fini et muni d'un ordre total. Soit  $m > 0$  un entier et  $(a_0, \dots, a_m)$  une suite d'objets de  $A$ . On a l'égalité suivante :

$$A_m(a_0, \dots, a_m) = \underset{\alpha < \beta}{\text{colim}} (A_\alpha)_m(a_0, \dots, a_m).$$

Si la suite n'est pas ordonnée, comme les  $A_\alpha$  sont librement ordonnés, chaque terme de la colimite est l'ensemble vide et donc la colimite aussi, ce qui montre i) pour  $A$ . Si la suite est constante, pour la même raison, chaque terme de la colimite est le point et donc la colimite aussi, ce qui montre iii) pour  $A$ . Enfin si la suite est ordonnée mais non constante, alors comme les  $A_\alpha$  sont librement ordonnés, pour tout  $\alpha < \beta$ , les morphismes  $(A_\alpha)_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow (A_\alpha)_1(a_0, a_m)$  sont des équivalences faibles. Or par hypothèse, pour tout  $\alpha < \beta$ , les morphismes  $A_\alpha \rightarrow A_{\alpha+1}$  sont des cofibrations niveau par niveau donc les morphismes  $(A_\alpha)_1(a_0, a_m) \rightarrow (A_{\alpha+1})_1(a_0, a_m)$  et  $(A_\alpha)_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow (A_{\alpha+1})_m(a_0, \dots, a_m)$  sont des cofibrations, car les cofibrations sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret. Comme, par hypothèse,  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants, par la proposition 5.3.13, on obtient que  $A_m(a_0, \dots, a_m) \rightarrow A_1(a_0, a_m)$  est une équivalence faible, ce qui montre ii) pour  $A$ .

CQFD.

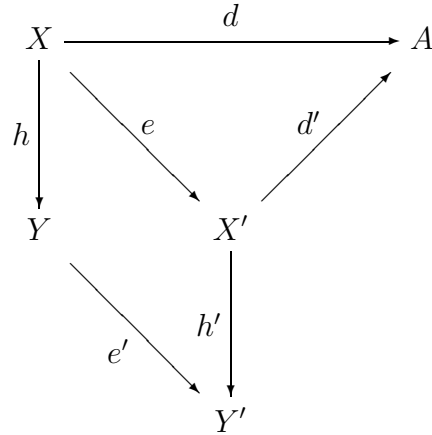
On remarque dans la démonstration que pour qu'une somme amalgamée de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées, le long d'une cofibration induisant un isomorphisme sur les objets, vérifie ii) et iii), il faut que le second morphisme préserve l'ordre strictement. Or lors des constructions  $\text{Cat}$  ou  $\text{Bigcat}$ , les sommes amalgamées par les flèches génératrices, qui sont des cofibrations induisant des isomorphismes sur les objets, n'ont pas cette propriété. De ce fait nos deux procédés de catégorisation ne préservent pas la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée. Dans la section suivante, nous allons construire

une autre catégorisation, dite réduite, qui préservera les  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées. Pour cela, nous regarderons de plus près les marquages des  $\mathcal{C}$ -catégories essentiellement au niveau des dégénérescences.

### 5.5.2 Catégorisation réduite

Lorsqu'on a défini le marquage des  $\mathcal{C}$ -précatégories, on a fait des choix arbitraires parmi les relèvements possibles d'un même diagramme. Mais on n'a jamais demandé que ces choix soient compatibles entre eux. C'est ce que l'on va demander à un marquage dit "canonique". La seule compatibilité entre les diagrammes qui pose problème dans la catégorisation d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie librement ordonnée est celle due aux applications de dégénérescence de la structure simpliciale. Aussi avant de définir la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégories marquées canoniquement, va-t-on définir tout d'abord celle de diagrammes dégénérés.

**Définition 5.5.5** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Soit  $(d, h)$  un diagramme de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  se factorisant par un diagramme  $(d', h')$  comme dans le diagramme commutatif suivant :



On dira que le diagramme  $(d, h)$  est une dégénérescence du diagramme  $(d', h')$  le long de  $(e, e')$  dans les cas suivants :

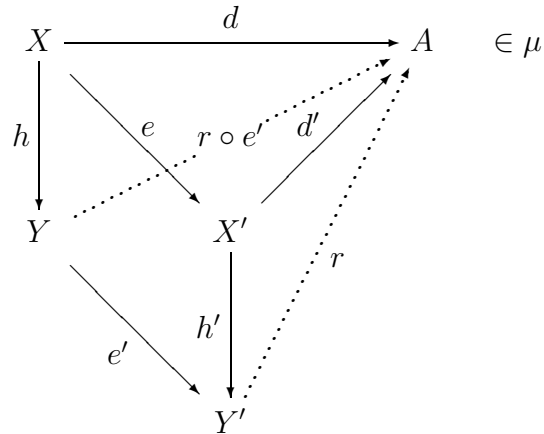
-si  $h$  est de la forme  $\Delta[m]\Theta f$ , avec  $f$  dans  $\mathcal{F}_1$ , et  $h'$  est soit un  $\Delta[k]\Theta f$ , avec  $0 < k < m$ , soit l'identité du point,

-si  $h$  est de la forme  $\text{Boit}_m(g)$ , avec  $g$  dans  $\mathcal{F}_2$ , et  $h'$  est soit un  $\text{Boit}_k(g)$ , avec  $1 < k < m$ , soit l'identité de  $\Delta[1]\Theta b(g)$ , soit l'identité du point.

**Définition 5.5.6** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée  $(A, \mu)$  est marquée canoniquement si, pour tout

diagramme  $(d, h)$  de  $\mu$  se factorisant par un diagramme  $(d', h')$  le long de  $(e, e')$ , on a :

- si  $h'$  est une flèche génératrice, alors le diagramme  $(d', h')$  est lui aussi dans  $\mu$  et le relèvement marqué de  $(d, h)$  est la composée de celui de  $(d', h')$  par  $e'$ ,
- si  $h'$  est une identité, alors le relèvement marqué de  $(d, h)$  est la composé  $d' \circ e'$ .



De même que la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée a donné lieu à celle de  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée, on a aussi une notion naturelle de  $\mathcal{C}$ -catégorie canoniquement marquée.

**Définition 5.5.7** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée  $(A, \mu)$  est marquée canoniquement si, en tant que  $\mathcal{C}$ -précatégorie, elle est marquée canoniquement au sens ci-dessus.

Il est important de voir que si un morphisme d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement vers une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée préserve le marquage alors la restriction du marquage de la  $\mathcal{C}$ -précatégorie but aux relèvements marqués induits par le marquage de la  $\mathcal{C}$ -précatégorie source est canonique.

On obtient avec ces définitions deux sous-catégories pleine de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}_m$  :  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}_{mc}$ , la sous-catégorie pleine des  $\mathcal{C}$ -précatégories partiellement marquées canoniquement et la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_{mc}$  des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées canoniquement. Tout d'abord, remarquons que par construction  $Cat$  et  $Bigcat$  ne sont pas canoniquement marqués car on y prend des sommes amalgamées pour des diagrammes dégénérés et que ces sommes amalgamées serviront de relèvements marqués pour ces diagrammes. Ensuite,  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}_{mc}$  et  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_{mc}$  sont

toutes deux munies d'un foncteur Oubli vers  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  qui est fidèle mais n'est pas plein car tout morphisme ne préserve pas le marquage. En outre la notion de  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée canoniquement est stable par limite.

**Lemme 5.5.8** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. La catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_{mc}$  des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées canoniquement avec les morphismes préservant les marquages est stable par limites.*

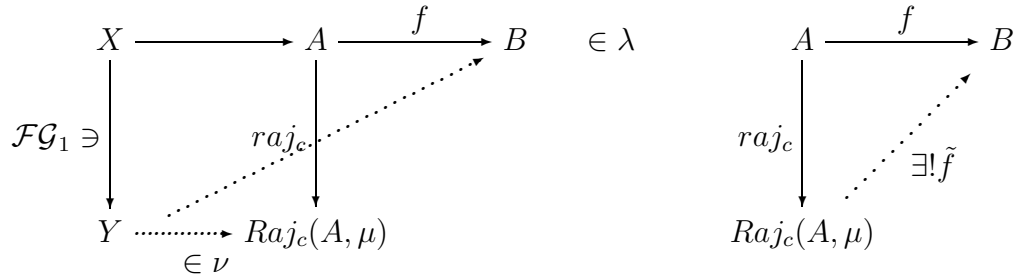
*Preuve* : application directe du lemme 2.1.5!

Cette notion de marquage canonique va nous permettre de définir un procédé de catégorisation réduite qui à une  $\mathcal{C}$ -précatégorie va associer une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée canoniquement, procédé qui non seulement sera fonctoriel mais servira d'adjoint au foncteur Oubli des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées canoniquement vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories.

Commençons par présenter une construction qui à une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement associe une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement ayant la propriété de se relever par rapport aux flèches qui ne se relevaient pas dans la première.

**Proposition 5.5.9 (-définition)** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Soit  $(A, \mu)$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement, il existe une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement  $(Raj_c(A, \mu), \nu)$  munie d'un morphisme  $raj_c : (A, \mu) \rightarrow (Raj_c(A, \mu), \nu)$  préservant le marquage, telle que :*

- 1) pour tout diagramme des flèches de  $\mathcal{FG}_1$  vers  $A$  n'appartenant pas à  $\mu$ , l'extension du diagramme par  $raj_c$  appartient à  $\nu$ ,
- 2) pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement  $(B, \lambda)$  et pour tout morphisme  $f$  de  $A$  vers  $B$  préservant le marquage tels que, pour tout diagramme des flèches de  $\mathcal{FG}_1$  vers  $A$  n'appartenant pas à  $\mu$ , l'extension du diagramme par  $f$  appartient à  $\lambda$ , il existe un unique morphisme  $\tilde{f}$  de  $Raj_c(A, \mu)$  vers  $B$  préservant le marquage et dont la précomposition par  $raj_c$  est  $f$ .



*Preuve :*

On construit  $Raj_c(A, \mu)$  de la manière suivante : on prend la somme amalgamée de  $A$  avec les flèches génératrices appartenant à des diagrammes non dégénérés et non inclus dans  $\mu$ . Quant à  $raj_c$ , il s'agit du morphisme naturel de  $A$  vers la somme amalgamée  $Raj_c(A, \mu)$ . Le marquage  $\nu$  de  $Raj_c(A, \mu)$  est défini ainsi : pour les diagrammes pour  $A$  appartenant à  $\mu$ , leurs extensions par  $raj_c$  appartiennent à  $\nu$ , et donc par construction  $raj_c$  préserve le marquage. Pour les diagrammes non dégénérés pour  $A$  n'appartenant pas à  $\mu$ , leurs extensions par  $raj_c$  ont pour relèvements marqués dans  $\nu$  les morphismes naturels des buts des flèches génératrices vers la somme amalgamée  $Raj_c(A, \mu)$ . Enfin pour les diagrammes dégénérés pour  $A$  n'appartenant pas à  $\mu$ , on a deux cas. S'ils sont dégénérescences de diagrammes de flèches génératrices, leurs extensions par  $raj_c$  ont pour relèvements marqués dans  $\nu$  ceux induits par les relèvements marqués des diagrammes non dégénérés dont ils sont les dégénérescences. Pour que cette dernière définition ait un sens, il faut que tout diagramme dégénéré ne soit la dégénérescence que d'un diagramme non dégénéré, ce qui est le cas ici. Si les diagrammes sont dégénérescences de diagrammes avec l'identité, les relèvements marqués dans  $\nu$  de leurs extensions par  $raj_c$  seront les extensions par  $raj_c$  des morphismes des buts des flèches génératrices vers  $A$  via l'objet de l'identité. Et donc par construction le marquage de  $(Raj_c(A, \mu), \nu)$  est canonique et  $(Raj_c(A, \mu), \nu)$  munie de  $raj_c$  vérifie bien la propriété 1). En outre, cette construction est bien définie car  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  est une catégorie admettant les coproduits et les sommes amalgamées calculées niveau par niveau.

Pour  $(B, \lambda)$  et  $f : A \rightarrow B$  vérifiant la condition de la propriété 2), le diagramme ci-dessus, avec  $f$  et  $B$  à la place de  $raj_c$  et  $Raj_c(A, \mu)$  et où le morphisme  $\coprod_{\substack{X \rightarrow Y \in \mathcal{FG}_1 \\ X \rightarrow A \notin \mu}} Y \rightarrow B$  est celui induit par la condition de la propriété 2) pour  $B$  et  $f$ , commute et donc il existe un unique morphisme de la somme amalgamée  $Raj_c(A, \mu)$  vers  $B$ . Ce morphisme précomposé par  $raj_c$  donne  $f$  et il préserve le marquage, car  $f$  et  $raj_c$  préservent le marquage de  $A$ , que précomposé par un relèvement de  $Raj_c(A, \mu)$  non induit par  $\mu$  (i.e. provenant de  $\coprod_{\substack{X \rightarrow Y \in \mathcal{FG}_1 \\ X \rightarrow A \notin \mu}} Y \rightarrow Raj_c(A, \mu)$ ) et non dégénéré, il devient le relèvement correspondant pour  $B$  (qui est une des composantes de  $\coprod_{\substack{X \rightarrow Y \in \mathcal{FG}_1 \\ X \rightarrow A \notin \mu}} Y \rightarrow B$ ) et enfin car  $B$  est marqué canoniquement. En outre, la préservation du marquage imposée au morphisme de  $Raj_c(A, \mu)$  dans  $B$ , le fait que  $Raj_c(A, \mu)$  est une somme amalgamée et que les  $\mathcal{FG}_1$ -cofibrations sont des monomorphismes entraînent comme pour  $E_\Phi$  que ce morphisme est uniquement déterminé par



la condition de la propriété 2) pour  $B$  et donc est unique, ce qui démontre la proposition-définition.  
 CQFD.

Tout d'abord remarquons que pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $C$  munie d'un morphisme  $g : A \rightarrow C$ , la construction ci-dessus fournit un morphisme de  $Raj_c(A, \mu)$  vers  $C$  dont la précomposition par  $raj_c$  redonne  $g$ . Toutefois il existe autant de tels morphismes que de marquages canoniques possibles sur  $C$ . Mais pour un marquage canonique fixé et à supposé que  $g$  préserve alors le marquage, il existe un unique morphisme de  $Raj_c(A, \mu)$  vers  $C$  dont la précomposition par  $raj_c$  redonne  $g$  et qui préserve le marquage (c'est une application directe de la proposition précédente aux  $\mathcal{C}$ -catégories marquées canoniquement).

Par ailleurs la propriété 2) de la proposition-définition assure l'unicité à isomorphisme près de la construction  $Raj_c$  et entraîne sa functorialité en  $(A, \mu)$ .

**Proposition 5.5.10 (-définition)** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie quelconque, il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée canoniquement  $Cat_c(A)$  munie d'un morphisme  $can_A^c : A \rightarrow Cat_c(A)$  et ayant la propriété universelle suivante :*

*pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée canoniquement  $(B, \lambda)$  munie d'un morphisme  $f$  issu de  $A$ , il existe un unique morphisme  $\tilde{f}$  de  $Cat_c(A)$  vers  $B$  préservant le marquage et dont la précomposition par  $can_A^c$  est  $f$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow can_A^c & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\
 Cat_c(A) & & 
 \end{array}$$

*Preuve :*

Soit  $\alpha$  un cardinal régulier strictement plus grand que le plus petit cardinal régulier pour lequel les sources et buts des flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites.

Nous allons construire  $Cat_c(A)$  par récurrence transfinie. Posons :

$$(A^0, \mu_0) = (A, \emptyset) \text{ et } can_0^c = Id_A$$

Supposons  $(A^\beta, \mu_\beta)$  et  $can_\beta^c : A \rightarrow A^\beta$  définis pour un ordinal  $\beta < \alpha$ , alors on pose :

$$(A^{\beta+1}, \mu_{\beta+1}) = (Raj_c(A^\beta, \mu_\beta), \nu) \text{ et } can_{\beta+1}^c = raj_c \circ can_\beta^c$$

Soit un ordinal limite  $\gamma < \alpha$ , supposons  $(A^\beta, \mu_\beta)$  et  $can_\beta^c : A \rightarrow A^\beta$  définis pour tout ordinal  $\beta < \gamma$ , alors on pose :

$$(A^\gamma, \mu_\gamma) = \left( \frac{\text{colim}_{\beta < \gamma} A^\beta, \text{colim}_{\beta < \gamma} \mu_\beta \right) \text{ et } can_\gamma^c = \frac{\text{colim}_{\beta < \gamma} can_\beta^c}{\beta < \gamma}$$

Par récurrence transfinie, on a bien défini pour tout ordinal  $\beta < \alpha$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée canoniquement  $(A^\beta, \mu_\beta)$  munie d'un morphisme  $can_\beta^c : A \rightarrow A^\beta$ . Posons donc :

$$Cat_c(A) = \left( \frac{\text{colim}_{\beta < \alpha} A^\beta, \text{colim}_{\beta < \alpha} \mu_\beta \right) \text{ et } can_A^c = \frac{\text{colim}_{\beta < \alpha} can_\beta^c}{\beta < \alpha}$$

Cette construction est bien définie car  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  admet les coproduits, les sommes amalgamées et les colimites séquentielles transfinies par proposition 1.2.5 et par construction  $Cat_c(A)$  est partiellement marquée canoniquement.

Montrons que  $Cat_c(A)$  est totalement marquée. Soit  $X \rightarrow Y$  une flèche de  $\mathcal{FG}_1$  et  $X \rightarrow Cat_c(A)$  un morphisme quelconque. Par le lemme 3.4.5,  $X$  source d'un morphisme de  $\mathcal{FG}_1$  est  $\alpha$ -petit, alors, par définition 2.3.3 de  $\alpha$ -petit, le morphisme  $X \rightarrow Cat_c(A)$  se factorise à travers un  $A^\beta$  pour un certain  $\beta < \alpha$ . On a alors deux cas. Si  $X \rightarrow Y$  possède un relèvement par rapport à  $A^\beta$  marqué dans  $\mu_\beta$  alors son extension par  $A^\beta \rightarrow Cat_c(A)$  est dans la colimite des  $\mu_\beta$  et donc est marqué pour  $Cat_c(A)$ . Si en revanche  $X \rightarrow Y$  ne se relève pas par rapport à  $A^\beta$ , alors par la propriété 1) de la construction  $Raj_c$ , son extension par  $A^\beta \rightarrow Raj_c(A^\beta, \mu_\beta) = A^{\beta+1}$  appartient à  $\mu_{\beta+1}$  et donc son extension par  $A^{\beta+1} \rightarrow Cat_c(A)$  est dans la colimite des  $\mu_\beta$  et donc est marqué pour  $Cat_c(A)$ . Ainsi  $Cat_c(A)$  est totalement marquée, ce qui fait de  $Cat_c(A)$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée.

Soit  $(B, \lambda)$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée canoniquement munie d'un morphisme  $f : A \rightarrow B$ . Construisons par récurrence transfinie le morphisme  $\tilde{f} : Cat_c(A) \rightarrow B$  faisant commuter le diagramme de la proposition. Au cran 0, on a bien  $f^0 : A^0 \rightarrow B$  qui n'est autre que  $f$  préservant le marquage et tel que  $f^0 \circ can_0 = f$ . Supposons construit  $f^\beta : A^\beta \rightarrow B$  préservant le marquage tel que  $f^\beta \circ can_\beta = f$  pour  $\beta < \alpha$ , alors par la propriété 2) de la construction  $Raj_c$ , il existe un morphisme  $f^{\beta+1} : Raj_c(A^\beta, \mu_\beta) = A^{\beta+1} \rightarrow B$  préservant le marquage et dont la précomposition par  $raj_c$  est  $f^\beta$  d'où il vient que :

$$f^{\beta+1} \circ can_{\beta+1} = f^{\beta+1} \circ raj_c \circ can_\beta = f^\beta \circ can_\beta = f$$

ce que l'on voulait.

Soit maintenant un ordinal limite  $\gamma < \alpha$  et supposons construit, pour tout  $\beta < \gamma$ ,  $f^\beta : A^\beta \rightarrow B$  préservant le marquage tel que  $f^\beta \circ \text{can}_\beta = f$ . Par propriété universelle de la colimite, il existe un morphisme  $f^\gamma : \text{colim} A^\beta = A^\gamma \rightarrow B$  préservant le marquage, colimite des marquages  $\mu_\beta$ , et telle que  $f^\gamma \circ \text{can}_\gamma = f$ . Par récurrence transfinie, on a donc pour tout  $\beta < \alpha$  des morphismes  $f^\beta : A^\beta \rightarrow B$  préservant le marquage tel que  $f^\beta \circ \text{can}_\beta = f$ . On définit alors  $\tilde{f} : \text{Cat}_c(A) \rightarrow B$  comme colimite des  $f^\beta$  pour  $\beta < \alpha$  et, par propriété de colimite,  $\tilde{f}$  préserve le marquage et précomposé par  $(\text{can}_c)_A$  redonne bien  $f$ . Cette construction est bien définie car  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  possède les coproduits, les sommes amalgamées et les colimites séquentielles transfinies. En outre, le fait d'imposer à  $\tilde{f}$  de préserver le marquage, allié au fait que les  $\mathcal{FG}_1$ -cofibrations sont des monomorphismes, entraîne l'unicité de  $\tilde{f}$  et ainsi  $\text{Cat}_c(A)$  vérifie la propriété universelle de la proposition.

CQFD.

On peut remarquer que la construction de la factorisation ci-dessus s'applique aussi bien pour les  $\mathcal{C}$ -catégories faciles mais, comme on l'a déjà remarqué pour la construction  $\text{Raj}_c$ , il n'y aura pas d'unicité de la factorisation à travers  $\text{Cat}_c(A)$ .

Comme la catégorisation  $\text{Cat}$ , la catégorisation réduite  $\text{Cat}_c$  est un adjoint à gauche du foncteur oubli des  $\mathcal{C}$ -catégories canoniquement marquées vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories.

**Corollaire 5.5.11** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. La construction  $\text{Cat}_c$  est un foncteur de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  vers  $\mathcal{C} - \mathcal{C}_{mc}$  qui est adjoint à gauche du foncteur  $\text{Oubli}$ , i.e. on a un isomorphisme naturel en  $A$  et  $(B, \lambda)$ , induit par le morphisme  $\text{can}_A^c$  :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{C}_{mc}}(\text{Cat}_c(A), (B, \lambda)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}-\mathcal{PC}}(A, \text{Oubli}((B, \lambda)))$$

*De ce fait, le foncteur  $\text{Cat}_c$  préserve les colimites.*

*Preuve :*

De la propriété universelle de  $\text{Cat}_c(A)$  découle son unicité à isomorphisme près, ce qui entraîne la functorialité de la construction  $\text{Cat}_c$  et la naturalité de  $\text{can}_A^c$  en  $A$ , mais aussi que  $\text{Cat}_c$  est en fait un adjoint à gauche du foncteur  $\text{Oubli}$  des  $\mathcal{C}$ -catégories marquées canoniquement vers les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Enfin comme foncteur adjoint à gauche,  $\text{Cat}_c$  préserve les colimites.

CQFD.

Comme nous venons de construire un troisième procédé de catégorisation, il est très utile de le comparer avec  $\text{Cat}$  notamment pour vérifier si les notions d'équivalences faibles induites par ces deux catégorisations sont les mêmes.

**Lemme 5.5.12** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile. Alors pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$ , le morphisme canonique  $\text{can}_A^c : A \rightarrow \text{Cat}_c(A)$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  et, pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f : A \rightarrow B$ ,  $f$  est une équivalence faible si et seulement si  $\text{Cat}_c(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.*

*Preuve :*

On peut modifier le marquage de  $\text{Bigcat}(A)$  afin qu'il devienne canonique. Dès lors il existe un unique morphisme préservant le marquage de  $\text{Cat}_c(A)$  vers  $\text{Bigcat}(A)$  factorisant  $\text{bcan}_A$ . De plus,  $\text{Cat}_c(A)$  étant une  $\mathcal{C}$ -catégorie marquée, il existe un morphisme (non nécessairement unique) préservant le marquage de  $\text{Bigcat}(A)$  vers  $\text{Cat}_c(A)$ . Comme pour  $\text{Cat}(A)$  (c'est-à-dire comme dans la démonstration de la proposition 2.7.1), on montre que ces morphismes sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories si  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, on en déduit par "trois pour deux" pour les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories que  $\text{can}_A^c : A \rightarrow \text{Cat}_c(A)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile.

Puis toujours de la même manière que pour  $\text{Cat}(A)$ , en utilisant la propriété universelle de  $\text{Cat}_c(A)$  et "trois pour deux" pour les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, on montre que pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$  l'image par  $\text{Cat}_c$  du morphisme canonique  $\text{can}_A^c$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Ceci montre que  $\text{Cat}_c$  est une bonne catégorisation.

En utilisant alors le lemme 2.11.2 avec la catégorisation  $\text{Cat}_c$ , on obtient que, pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $f$ ,  $\text{Cat}_c(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si et seulement si  $\text{Bigcat}(f)$  l'est. Or par le lemme 4.6.6,  $\text{Bigcat}(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories si et seulement si  $\text{Cat}(f)$  l'est, ceci montre la seconde partie du lemme.

Comme en outre on a déjà montré que, pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A$ , l'image par  $\text{Cat}_c$  du morphisme canonique  $\text{can}_A^c$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, la seconde partie du lemme que l'on vient de prouver montre que  $\text{can}_A^c$  est bien une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories.

CQFD.

Nous avons donc bien une nouvelle catégorisation  $\text{Cat}_c$  qui induit la même notion d'équivalence faible que  $\text{Cat}$ . Comme nous l'avons introduite afin de

préserver la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées, nous allons maintenant montrer que  $Cat_{\mathcal{C}}$  conserve bien cette notion.

### 5.5.3 Equivalence de $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées

L'utilité d'avoir considéré les marquages canoniques et d'avoir construit une catégorisation ne prenant plus de sommes amalgamées de diagrammes dégénérés est que cette catégorisation réduite préserve la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées et permettra ainsi de donner un critère pratique pour montrer qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées est une équivalence faible, notion difficile à manipuler par ailleurs. Commençons donc par montrer étape par étape que la catégorisation réduite  $Cat_{\mathcal{C}}$  préserve bien la notion de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées. Comme les hypothèses sur la donnée de Segal facile qui assurent ce résultat sont valables pour tous les autres résultats de cette partie, nous allons d'abord énoncer ces hypothèses.

**Hypothèses 5.5.13** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale,*
- 2) *il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,*
- 3) *les cofibrations sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret.*

**Lemme 5.5.14** *Supposons vraies les hypothèses 5.5.13.*

*Si  $(A, \mu)$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée et partiellement marquée canoniquement, alors  $Raj_{\mathcal{C}}(A, \mu)$  est librement ordonnée. De plus pour tout couple ordonné d'objets de  $A$  adjacents  $(a, a')$ , le morphisme  $(raj_A^c)_1(a, a') : A_1(a, a') \rightarrow Raj_{\mathcal{C}}(A)_1(a, a')$  est une cofibration triviale de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ .*

*Preuve :*

Par construction,  $Raj_{\mathcal{C}}(A)$  est une somme amalgamée de  $A$  par un coproduit de flèches génératrices qui sont toutes des isomorphismes sur les objets. Ainsi la construction  $Raj_{\mathcal{C}}$  laisse les objets invariants et donc  $Raj_{\mathcal{C}}(A)_0$  qui n'est autre que  $A_0$  est bien un ensemble fini totalement ordonné.

Comme  $Raj_{\mathcal{C}}(A)$  est une somme amalgamée de  $A$  par un coproduit de flèches génératrices indexé par les diagrammes non dégénérés et non inclus dans  $\mu$ ,

on peut le développer comme une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées par une flèche génératrice d'un diagramme non dégénéré et non inclus dans  $\mu$ . Non seulement ces flèches génératrices sont des cofibrations entre  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes induisant l'identité sur les objets, d'après le lemme 5.5.2, mais toute flèche génératrice  $h : X \rightarrow Y$  vérifie la propriété que, pour tout couple ordonné  $(x, x')$  d'objets adjacents de  $X$ ,  $X_1(x, x')$  n'est pas isomorphe à l'ensemble vide, car d'après la démonstration du lemme 5.5.2,  $X_1(x, x')$  n'est autre que la source d'une flèche de  $\mathcal{F}_1$  ou le but d'une flèche de  $\mathcal{F}_2$  qui sont non isomorphes à l'ensemble vide par hypothèse. Ainsi par le lemme 5.5.3, tout morphisme de la source d'une flèche génératrice vers  $A$  préserve l'ordre, et même strictement car n'apparaissent dans  $Raj_c(A, \mu)$  que celles des diagrammes non dégénérés. Ainsi la somme amalgamée par une flèche génératrice d'un diagramme non dégénéré et non inclus dans  $\mu$  vérifie les hypothèses du 2) du lemme 5.5.4, ce qui en fait une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée. Ainsi  $Raj_c(A, \mu)$  devient une colimite séquentielle transfinie de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées vérifiant les hypothèses du 3) du lemme 5.5.4, ce qui fait de  $Raj_c(A, \mu)$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie librement ordonnée.

Soit  $(a, a')$  un couple ordonné d'objets adjacents de  $A$ .  $Raj_c(A, \mu)_1(a, a')$  n'est autre que la somme amalgamée de  $A_1(a, a')$  par un coproduit de  $h_1(x, x')$ , avec  $h$  une flèche génératrice d'un diagramme  $(d, h)$  non dégénéré et non inclus dans  $\mu$  et  $x$  et  $x'$  des objets de la source de  $h$  s'envoyant par  $d$  sur  $a$  et  $a'$ . Comme on l'a vu ci-dessus,  $d$  préserve strictement l'ordre, donc est une injection au niveau des objets. Ceci entraîne que le couple  $(x, x')$  est unique et ordonné mais surtout que  $x$  et  $x'$  sont adjacents. Si  $h$  est de type  $\Delta[m]\Theta f$  alors  $h_1(x, x')$  n'est autre que  $f$ , qui étant dans  $\mathcal{F}_1$  est une cofibration triviale. Si  $h$  est de type  $Boit_m(g)$  alors  $h_1(x, x')$  n'est autre que l'identité du but de  $g$ , donc une cofibration triviale. Comme par hypothèse,  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants, par corollaire 5.3.14, le coproduit des  $h_1(x, x')$  est une équivalence faible et aussi une cofibration comme coproduit de cofibrations. Par stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , il vient que  $raj_1^c(a, a')$  est une cofibration triviale. CQFD.

**Lemme 5.5.15** *Supposons vraies les hypothèses 5.5.13.*

*Si  $A$  est une  $\mathcal{C}$ -précatégorie librement ordonnée alors  $Cat_c(A)$  est librement ordonnée. De plus pour tout couple ordonné d'objets de  $A$  adjacents  $(a, a')$ , le morphisme  $(can_A^c)_1(a, a') : A_1(a, a') \rightarrow Cat_c(A)_1(a, a')$  est une cofibration*

triviale de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ .

*Preuve :*

Il est facile de voir que la construction  $Cat_c$  laisse les objets invariants. Ainsi  $Cat_c(A)_0$  n'est autre que  $A_0$  ensemble fini totalement ordonné.

Par construction,  $Raj_c(A)$  est une somme amalgamée de  $A$  par un coproduit de cofibrations induisant l'identité sur les objets donc le morphisme naturel  $A \rightarrow Raj_c(A)$  est une cofibration induisant l'identité sur les objets. Par cette remarque et par le lemme précédent, il vient que  $Cat_c(A)$  est une colimite séquentielle transfinie de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées vérifiant les hypothèses du 3) du lemme 5.5.4, ce qui en fait une  $\mathcal{C}$ -catégorie librement ordonnée.

On conclut simplement en remarquant que  $(can_A^c)_1(a, a')$  est une colimite séquentielle transfinie de cofibrations triviales, d'après le lemme précédent, ce qui en fait une cofibration triviale par stabilité des cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ .

CQFD.

Nous avons donc montré que la catégorisation réduite préserve les  $\mathcal{C}$ -précatégories librement marquées mais aussi l'homotopie de leurs espaces de morphismes entre objets adjacents. C'est cette dernière propriété qui nous permettra de montrer qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées préservant l'ordre et induisant sur chaque espace de morphismes entre objets adjacents une équivalence faible est lui-même une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ -précatégories. Afin de montrer cette proposition, donnons un lemme qui permet de simplifier la démonstration de celle-ci.

**Lemme 5.5.16** *Supposons vraies les hypothèses 5.5.13.*

*Soient  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précategorie librement ordonnée et  $(x_0, \dots, x_m)$  une suite ordonnée d'objets de  $A$  deux-à-deux adjacents. Alors les morphismes*

$$Cat_c(A)_m(x_0, \dots, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_m),$$

$$Cat_c(A)_m(x_0, \dots, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_1) \times \dots \times Cat_c(A)_1(x_{m-1}, x_m) \text{ et}$$

$$A_1(x_0, x_1) \times \dots \times A_1(x_{m-1}, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_1) \times \dots \times Cat_c(A)_1(x_{m-1}, x_m)$$

*sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ .*

*Preuve :*

$A$  étant une  $\mathcal{C}$ -précategorie librement ordonnée, par le lemme précédent, on a que  $Cat_c(A)$  est librement ordonnée. D'où par le ii) des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées, on a que  $Cat_c(A)_m(x_0, \dots, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_m)$  est une

équivalence faible. Comme  $Cat_c(A)$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie,  $Cat_c(A)_m(x_0, \dots, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_1) \times \dots \times Cat_c(A)_1(x_{m-1}, x_m)$  est une alliance d'objets régaux, donc c'est une équivalence faible. Enfin comme les  $x_i$  sont deux-à-deux adjacents, par le lemme précédent, on obtient que les morphismes  $A_1(x_i, x_{i+1}) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_i, x_{i+1})$  sont des équivalences faibles et donc leur produit  $A_1(x_0, x_1) \times \dots \times A_1(x_{m-1}, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_1) \times \dots \times Cat_c(A)_1(x_{m-1}, x_m)$  aussi.  
CQFD.

**Proposition 5.5.17** *Supposons vraies les hypothèses 5.5.13.*

*Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme entre  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées qui induit un isomorphisme sur les objets préservant l'ordre et tel que, pour tout couple ordonné d'objets de  $A$  adjacents  $(a, a')$ ,  $f_1(a, a') : A_1(a, a') \rightarrow B_1(a, a')$  est une équivalence faible de  $\mathcal{C}$ , alors  $f$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .*

*Preuve :*

Pour montrer que  $f$  est une équivalence faible, d'après le lemme 5.5.12, il suffit de montrer que  $Cat_c(f)$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme la construction  $Cat_c$  laisse invariant les objets et que  $f$  est un isomorphisme sur les objets alors  $Cat_c(f)$  aussi, donc  $Cat_c(f)$  est essentiellement surjectif. Montrons maintenant que pour tout couple d'objets  $(a, a')$  de  $A$ , le morphisme  $Cat_c(f)_1(a, a')$  est une équivalence faible dans  $\mathcal{C}$ . Pour cela nous allons raisonner par disjonction des cas.

Si  $a$  et  $a'$  sont égaux, alors, comme  $Cat_c(A)$  et  $Cat_c(B)$  sont librement ordonnées, car  $A$  et  $B$  le sont, il vient par le iii) des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées que  $Cat_c(f)_1(a, a')$  n'est autre que l'identité du point.

Si  $a$  et  $a'$  sont distincts, comme  $A_0$  est totalement ordonné, on a soit  $a < a'$  soit  $a > a'$ . Dans ce deuxième cas, comme  $Cat_c(A)$  et  $Cat_c(B)$  sont librement ordonnées, car  $A$  et  $B$  le sont, il vient par le i) des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées que  $Cat_c(f)_1(a, a')$  n'est autre que l'identité de l'ensemble vide.

Il ne reste donc plus qu'à traiter le cas où  $a < a'$ . Nous diviserons ce cas en deux sous-cas. Tout d'abord si  $a$  et  $a'$  sont adjacents, alors  $(can_A^c)_1(a, a')$  et  $(can_B^c)_1(a, a')$  sont des équivalences faibles par le lemme 5.5.15 et  $f_1(a, a')$  est une équivalence faible par hypothèse sur  $f$ . Comme on a l'égalité  $Cat_c(f)_1(a, a') \circ (can_A^c)_1(a, a') = (can_B^c)_1(a, a') \circ f_1(a, a')$ , par "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , il vient que  $Cat_c(f)_1(a, a')$  est une équivalence faible.

Terminons donc par le cas  $a < a'$  avec  $a$  et  $a'$  non adjacents. Comme  $A_0$  est un ensemble fini et totalement ordonné, il existe une suite ordonnée  $(a_0, \dots, a_m)$



d'objets de  $A$  deux-à-deux adjacents telle que  $a_0 = a$  et  $a_m = a'$ . En appliquant le lemme précédent, il vient que  $Cat_c(A)_m(x_0, \dots, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_m)$  est une équivalence faible, de même pour  $B$ , et par "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , on obtient que  $Cat_c(f)_1(a, a')$  est une équivalence faible si et seulement si  $Cat_c(f)_m(a_0, \dots, a_m)$  l'est. De la même manière, le fait que  $Cat_c(A)_m(x_0, \dots, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_1) \times \dots \times Cat_c(A)_1(x_{m-1}, x_m)$  et  $A_1(x_0, x_1) \times \dots \times A_1(x_{m-1}, x_m) \rightarrow Cat_c(A)_1(x_0, x_1) \times \dots \times Cat_c(A)_1(x_{m-1}, x_m)$  soient des équivalences faibles, d'après le lemme précédent, montre, par "trois pour deux" dans  $\mathcal{C}$ , que  $Cat_c(f)_m(a_0, \dots, a_m)$  est une équivalence faible si et seulement si  $\prod Cat_c(f)_1(a_i, a_{i+1})$  l'est et que  $\prod Cat_c(f)_1(a_i, a_{i+1})$  est une équivalence faible si et seulement si  $\prod f_1(a_i, a_{i+1})$  l'est. Donc  $Cat_c(f)_1(a, a')$  est une équivalence faible si et seulement si  $\prod f_1(a_i, a_{i+1})$  l'est, par transitivité de l'équivalence logique. Or comme les  $a_i$  sont deux-à-deux adjacents, par hypothèse, les morphismes  $f_1(a_i, a_{i+1})$  sont des équivalences faibles ainsi que leur produit, dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ .  
CQFD.

Cette proposition sera utile pour démontrer la proposition sur le produit des équivalences faibles dans  $\mathcal{C}$  mais c'est également un critère très simple pour démontrer que certains morphismes sont des équivalences faibles. Ce critère va nous permettre en particulier de montrer que les flèches génératrices sont des cofibrations triviales.

**Corollaire 5.5.18** *Supposons vraies les hypothèses 5.5.13.*

*Les flèches génératrices de la famille  $\mathcal{FG}_1$  sont des cofibrations triviales de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ .*

*Preuve*

Comme à chaque niveau les flèches génératrices sont des coproduits de flèches de  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$  et que ces dernières sont des cofibrations par définition de la donnée de Segal facile, alors par stabilité des cofibrations par coproduit dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , il vient que les flèches génératrices sont des cofibrations niveau par niveau.

Par le lemme 5.5.2, les flèches génératrices sont des morphismes de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes qui induisent l'identité sur les objets. Donc par la proposition précédente, il suffit de montrer que, pour toute flèche génératrice  $h$  et pour tout couple ordonné  $(x, y)$  d'objets adjacents de la source de  $h$ ,  $h_1(x, y)$  est une équivalence faible.

Si  $h$  est du type  $\Delta[m]\Theta f$ , avec  $f$  dans  $\mathcal{F}_1$ , alors  $h_1(x, y)$  n'est autre que  $f$ , d'après la démonstration du lemme 5.5.2. Or  $f$  est une cofibration triviale,

donc une équivalence faible.

Si  $h$  est du type  $Boit_m(g)$ , avec  $g$  dans  $\mathcal{F}_2$ , alors  $h_1(x, y)$  n'est autre que l'identité du but de  $g$ , d'après la démonstration du lemme 5.5.2. Donc c'est une équivalence faible.

CQFD.

Comme nous avons maintenant en main tous les outils nécessaires pour montrer le résultat cherché sur le produit cartésien de  $\mathcal{C}$ -catégories, nous allons consacrer la prochaine partie à la démonstration de ce résultat.

#### 5.5.4 Produit d'équivalence faibles des $\mathcal{C}$ -précatégories

Le but de cette section est d'étudier le produit cartésien des  $\mathcal{C}$ -précatégories et son comportement vis-à-vis de la catégorisation. Avant d'énoncer le théorème de cette section, intéressons-nous au lemme technique suivant.

**Lemme 5.5.19** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile telle que la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes.*

*Soient  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$  et  $C \rightarrow C'$  des iso-cofibrations triviales. Supposons que le morphisme  $A' \amalg_A C \rightarrow C'$  soit une cofibration. Alors leur somme amalgamée  $B \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_{A'} C'$  est aussi une iso-cofibration triviale.*

*Preuve :*

Par le lemme 5.4.8, le morphisme  $C \rightarrow A' \amalg_A C$  est une iso-cofibration triviale comme somme amalgamée le long de  $A \rightarrow C$  de l'iso-cofibration triviale  $A \rightarrow A'$ . Par propriété universelle de la somme amalgamée  $A' \amalg_A C$ , il existe un morphisme  $A' \amalg_A C \rightarrow C'$  dont la précomposition par l'iso-cofibration triviale  $C \rightarrow A' \amalg_A C$  n'est autre que l'iso-cofibration triviale  $C \rightarrow C'$ . Par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  pour les isomorphismes sur les objets et pour les équivalences faibles, on obtient que  $A' \amalg_A C \rightarrow C'$  est une iso-équivalence faible. Or par hypothèse, c'est aussi une cofibration. Donc c'est une iso-cofibration triviale. En outre le morphisme  $B \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_B (B \amalg_A C)$  est une iso-cofibration triviale comme somme amalgamée le long de  $B \rightarrow B \amalg_A C$  de l'iso-cofibration triviale  $B \rightarrow B'$ , par lemme 5.4.8. Or  $B' \amalg_B (B \amalg_A C)$  n'est autre que  $B' \amalg_A C$ . Donc on a obtenu que le morphisme  $B \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_A C$  est une iso-cofibration triviale. Toujours par le lemme 5.4.8, le morphisme  $B' \amalg_A C \rightarrow (B' \amalg_A C) \amalg_{A'} \amalg_A C$  est une iso-cofibration triviale comme somme amalgamée le long de  $A' \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_A C$

de l'iso-cofibration triviale  $B \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_{A'} C'$ . Or  $(B' \amalg_A C) \amalg_{A'} \amalg_A C$  n'est autre que  $B' \amalg_{A'} C'$ . Donc le morphisme  $B' \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_{A'} C'$  est une iso-cofibration triviale. Enfin on remarque que le morphisme universel  $B \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_{A'} C'$  est une iso-cofibration triviale comme composée des iso-cofibrations triviales  $B \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_A C$  et  $B' \amalg_A C \rightarrow B' \amalg_{A'} C'$ .  
CQFD.

**Théorème 5.5.20** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,*
- 2) *les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits, pour un cardinal régulier  $\alpha$  plus grand qu'  $\aleph_0$ ,*
- 3) *les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,*
- 4) *les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*
- 5) *pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,*
- 6) *les colimites séquentielles transfinites de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinites de  $\mathcal{C}$ ,*
- 7) *il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme.*

*Soient  $A$  et  $B$  deux  $\mathcal{C}$ -précatégories. Alors le morphisme  $A \times B \rightarrow \text{Cat}(A) \times \text{Cat}(B)$  est une iso-cofibration triviale.*

Afin de démontrer ce théorème, nous allons tout d'abord faire les réductions suivantes.

**Lemme 5.5.21** *Supposons vraies les hypothèses du théorème 5.5.20.*

*Le théorème 5.5.20 équivaut au résultat suivant, qu'on notera (I) : pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $B$  et pour toute flèche  $C \rightarrow D$  génératrice de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, le morphisme  $C \times B \rightarrow D \times B$  est une iso-cofibration triviale.*

*Preuve :*

Le résultat (I) est un corollaire évident du théorème, donc il suffit de montrer

que le théorème découle du résultat (I) pour avoir l'équivalence cherchée. Supposons donc le résultat (I) vrai. Soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précategorie, pour tout morphisme de la source  $C$  d'une flèche génératrice de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles vers  $A$ , on obtient par lemme 5.4.8 que le morphisme  $A \times B \rightarrow (A \coprod_C D) \times B$  est une iso-cofibration triviale comme somme amalgamée le long de  $C \times B \rightarrow A \times B$  de l'iso-cofibration triviale  $C \times B \rightarrow D \times B$ . Or le morphisme  $A \times B \rightarrow \text{Cat}(A) \times B$  s'obtient comme une colimite séquentielle transfinie de tels morphismes et donc, par lemme 5.4.10, c'est une iso-cofibration triviale. De même, on peut montrer que  $\text{Cat}(A) \times B \rightarrow \text{Cat}(A) \times \text{Cat}(B)$  est une iso-cofibration triviale. Ainsi par composition,  $A \times B \rightarrow \text{Cat}(A) \times \text{Cat}(B)$  est encore une iso-cofibration triviale, ce qui montre le théorème. CQFD.

**Lemme 5.5.22** *Supposons vraies les hypothèses du théorème 5.5.20.*

*Le résultat (I) est équivalent au résultat (II) suivant :*

*pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , pour tout entier  $n$  et pour toute flèche  $E \rightarrow F$  génératrice de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles de type 2, le morphisme  $E \times \Delta[n] \Theta X \rightarrow F \times \Delta[n] \Theta X$  est une iso-cofibration triviale.*

*Preuve*

Il est facile de voir que le résultat (II) est un cas particulier du résultat (I). Il suffit donc de montrer que (II) implique (I). Tout d'abord, on peut remarquer que le résultat (I) est toujours vrai si la flèche génératrice  $C \rightarrow D$  est de type 1. En effet, dans ce cas, cette flèche est de la forme  $\Delta[m] \Theta C' \rightarrow \Delta[m] \Theta D'$ , avec  $C' \rightarrow D'$  un élément de  $\mathcal{F}_1$ , donc une cofibration triviale dans  $\mathcal{C}$ . Donc pour tout entier  $n$ , on a que  $C_n \rightarrow D_n$  est une cofibration triviale dans  $\mathcal{C}$  comme coproduit de cofibrations triviales dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ . Par hypothèse sur la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$ , il vient que  $(C \times B)_n \rightarrow (D \times B)_n$  est aussi une cofibration triviale comme produit des cofibrations triviales  $C_n \rightarrow D_n$  et  $Id_{B_n}$ . Comme en outre  $C \rightarrow D$  est un isomorphisme sur les objets alors  $C \times B \rightarrow D \times B$  aussi et, par la proposition 5.4.5, il vient que c'est aussi une cofibration triviale. Comme le résultat (I) est toujours vrai pour les flèches génératrices de type 1, on doit donc seulement montrer que (II) implique (I) pour les flèches génératrices de type 2. Par le corollaire 5.3.9, on a que les  $\mathcal{I}$ -cofibrations sont exactement les cofibrations. Donc les objets, étant tous cofibrants, sont des rétracts d'un objet qui est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées d'éléments de  $\mathcal{I}$  à partir de l'objet initial. Si  $B$  est un rétract de  $B'$ , alors  $E \times B \rightarrow F \times B$  est un rétract de  $E \times B' \rightarrow F \times B'$  de manière évidente. Comme les équivalences faibles de  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  sont stables par rétracts par lemme 5.1.4, il suffit

de montrer (I) pour les objets  $B$  colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées d'éléments de  $\mathcal{I}$ .

Montrons maintenant le résultat (\*) suivant : soient  $E \times A \rightarrow F \times A$ ,  $E \times B \rightarrow F \times B$  et  $E \times C \rightarrow F \times C$  des iso-cofibrations triviales, alors leur somme amalgamée  $E \times (B \coprod_A C) \rightarrow F \times (B \coprod_A C)$  aussi. Ce résultat découle du lemme 5.5.19 si l'on montre que  $(F \times A \coprod_{E \times A} E \times C) \rightarrow F \times C$  est une cofibration. Or on peut remarquer que le produit fibré de  $F \times A$  et  $E \times C$  au-dessus de  $F \times C$  n'est autre que  $E \times A$ . Donc par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , on obtient que niveau par niveau le morphisme de la somme amalgamée dans  $F \times C$  est une cofibration. Ce qui montre le résultat (\*).

Les  $\mathcal{C}$ -précatégories de la forme  $\partial\Delta[n]\Theta X$  sont des sommes amalgamées de  $\mathcal{C}$ -précatégories de la forme  $\Delta[m]\Theta X$ . Donc comme on suppose (II) vrai, on obtient par le résultat (\*) que (I) est vraie pour les  $\mathcal{C}$ -précatégories de la forme  $\Delta[m]\Theta X$  et  $\partial\Delta[n]\Theta X$ . En outre les sources et but des flèches de  $\mathcal{I}$  sont des sommes amalgamées de  $\mathcal{C}$ -précatégories de la forme  $\partial\Delta[n]\Theta X$  et  $\Delta[m]\Theta X$ , donc toujours par résultat (\*), on obtient que (I) est vrai pour les sources et but des flèches de  $\mathcal{I}$ . Donc toujours par (\*), on obtient que (I) est encore vrai pour les sommes amalgamées de sources et buts de flèches de  $\mathcal{I}$ . Par lemme 5.4.12, les colimites séquentielles transfinies d'iso-cofibrations triviales le long de cofibrations sont des iso-cofibrations triviales. Comme  $\mathcal{I}$  est contenu dans les cofibrations, les morphismes obtenus comme sommes amalgamées de  $E \times B$  ou de  $F \times B$  par les flèches de  $\mathcal{I}$  sont des cofibrations, donc par le lemme 5.4.12, (I) est vrai pour les colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées d'éléments de  $\mathcal{I}$ , donc, comme on l'a vu ci-dessus, pour leurs rétracts et finalement pour toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie, car ce sont toutes des rétracts de tels objets.

CQFD.

**Lemme 5.5.23** *Supposons vraies les hypothèses du théorème 5.5.20.*

*Le résultat (II) est équivalent au résultat (III) suivant :*

*pour tous objets  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{C}$  et pour tout entier  $m$  et  $n$ , le morphisme  $(\Upsilon(m)\Theta X) \times (\Delta[n]\Theta Y) \rightarrow (\Delta[m]\Theta X) \times (\Delta[n]\Theta Y)$  est une iso-cofibration triviale.*

*Preuve :*

Encore une fois (III) découle clairement de (II). Il suffit donc de montrer que (III) implique (II). Supposons donc (III) vrai. Soit  $E \rightarrow F$  une flèche génératrice de type 2, elle s'écrit donc  $(\Upsilon(m)\Theta F') \coprod_{\Upsilon(m)\Theta E'} (\Delta[m]\Theta E') \rightarrow$

$\Delta[m]\Theta F'$ , avec  $E' \rightarrow F'$  une cofibration de  $\mathcal{C}$ . On va appliquer le lemme 5.5.19 aux données suivantes :  $A = (\Upsilon(m)\Theta E') \times (\Delta[n]\Theta Y)$ ,  $A' = (\Delta[m]\Theta E') \times (\Delta[n]\Theta Y)$ ,  $B = B' = (\Delta[m]\Theta E') \times (\Delta[n]\Theta Y)$ ,  $C = (\Upsilon(m)\Theta F') \times (\Delta[n]\Theta Y)$ ,  $C' = (\Delta[m]\Theta F') \times (\Delta[n]\Theta Y)$ . On a bien par (III) que  $A \rightarrow A'$  et  $C \rightarrow C'$  sont des iso-cofibrations triviales, de même que  $B \rightarrow B'$  qui n'est autre que l'identité. On peut facilement remarquer que  $A' \times_{C'} C$  n'est autre que  $A$ , ce qui par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , nous donne que  $A' \coprod_A C \rightarrow C'$  est une cofibration. Donc par lemme 5.5.19, on obtient que  $B \coprod_A C \rightarrow B' \coprod_{A'} C'$  est une iso-cofibration triviale, i.e. que  $E \times \Delta[n]\Theta Y \rightarrow F \times \Delta[n]\Theta Y$  en est une. CQFD.

Après toutes ces réductions, nous aboutissons au fait que pour démontrer le théorème 5.5.20, il faut et il suffit de montrer le résultat (III). C'est donc ce que nous allons faire.

*Preuve du théorème 5.5.20*

Les lemmes précédents nous montrent que, pour démontrer le théorème, il faut et il suffit de démontrer le résultat (III). Tout d'abord on remarque que  $\Upsilon(m)\Theta X \rightarrow \Delta[m]\Theta X$  est une cofibration et un isomorphisme sur les objets donc son produit par l'identité de  $\Delta[n]\Theta Y$  aussi. Montrons donc que ce produit est une équivalence faible.

Posons  $A = (\Upsilon(m)\Theta X) \times (\Delta[n]\Theta Y)$  et  $B = (\Delta[m]\Theta X) \times (\Delta[n]\Theta Y)$ . Les ensembles d'objets de  $A$  et de  $B$  sont identiques et consistent en l'ensemble  $Ob$  des couples  $(i, j)$  avec  $0 \leq i \leq m$  et  $0 \leq j \leq n$ . Soit  $S$  un sous-ensemble de  $Ob$ , on note  $A\{S\}$  et  $B\{S\}$  les sous- $\mathcal{C}$ -précatégories pleines de  $A$  et de  $B$  ayant  $S$  pour ensemble d'objets.

On considère divers sous-ensembles de  $Ob$ . Les rectangles  $R$  de taille  $m' \times n'$  sont définis comme l'ensemble des couples  $(i, j)$  tel que  $0 \leq i \leq m'$  et  $0 \leq j \leq n'$ . Un rectangle de taille  $m' \times n'$  sera dit rogné de  $m''$  si les couples  $(i, j)$  tel que  $0 \leq i \leq m''$ , avec  $m'' < m'$  et  $j = n'$  n'y sont plus. Une queue est une suite de couples  $(i_k, j_k)_{0 \leq k \leq r}$  telle que  $i_{k-1} \leq i_k \leq i_{k+1}$  et  $j_{k-1} \leq j_k \leq j_{k+1}$ . Enfin un rectangle à queue de taille  $m' \times n'$  est la réunion d'un rectangle de taille  $m' \times n'$  avec une queue de premier terme  $(m', n')$  et de dernier terme  $(m, n)$ . De même on peut définir un rectangle rogné à queue.

Mettons sur  $Ob$  l'ordre lexicographique, ce qui fait de  $Ob$  un ensemble totalement ordonné. Montrons par récurrence sur  $(m', n')$  que pour tout rectangle  $R$  de taille  $m' \times n'$  à queue, le morphisme  $A\{R\} \rightarrow B\{R\}$  est une équivalence faible.

Le rang initial  $(0, 0)$  correspond aux queues allant de  $(0, 0)$  à  $(m, n)$ . Nous allons en fait montrer le résultat pour toutes les queues. Soit  $S$  une queue, montrons d'abord que  $A\{S\}$  et  $B\{S\}$  sont des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes. Tout d'abord, d'après le lemme 5.5.2, les  $\mathcal{C}$ -précatégories  $\Upsilon(m)\Theta X$ ,  $\Delta[m]\Theta X$  et  $\Delta[n]\Theta Y$  sont des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes. Il en est donc de même pour leurs produits  $A$  et  $B$  par le lemme 5.5.4, car on a munit  $Ob$  de l'ordre lexicographique. Comme  $A\{S\}$  et  $B\{S\}$  sont des sous- $\mathcal{C}$ -précatégories pleines des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes  $A$  et  $B$  et que  $S$  est muni de l'ordre induit par celui de  $Ob$ , alors ce sont aussi des  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes. On remarque en outre que pour  $x < y$  adjacents dans  $S$ , par définition de  $S$ , ceci signifie que si  $x = (i, j)$  alors  $y$  vaut soit  $(i, j + 1)$  soit  $(i + 1, j)$  soit  $(i + 1, j + 1)$ . Dans le premier cas,  $A_1(x, y)$  et  $B_1(x, y)$  valent tous les deux  $* \times Y$ , dans le deuxième  $X \times *$  et dans le troisième  $X \times Y$ , car  $\Upsilon(m)\Theta X$  et  $\Delta[m]\Theta X$  ont les mêmes composantes sur les morphismes principaux. Ceci montre que, pour tout couple ordonné  $(x, y)$  d'objets adjacents de  $S$ , on a que  $A\{S\}_1(x, y)$  et  $B\{S\}_1(x, y)$  sont égaux. On peut alors appliquer la proposition 5.5.17 au morphisme de  $\mathcal{C}$ -précatégories librement ordonnées strictes  $A\{S\} \rightarrow B\{S\}$  qui est l'identité sur l'ensemble des objets  $S$ , ce qui entraîne que  $A\{S\} \rightarrow B\{S\}$  est une équivalence faible et donc montre le rang  $(0, 0)$  de la récurrence.

Supposons montrée l'hypothèse de récurrence pour les rectangles à queue de taille  $m'' \times n''$ , avec  $(m'', n'')$  inférieur à  $(m', n')$ . Remarquons tout d'abord que si  $(m', n')$  est de la forme  $(0, n')$  ou  $(m', 0)$ , les rectangles à queue correspondant sont des queues allant de  $(0, 0)$  à  $(m, n)$ , et donc l'hypothèse de récurrence est vraie par le cas  $(0, 0)$ . Il faut donc montrer l'hypothèse de récurrence pour  $(m', n')$  avec  $m' > 0$  et  $n' > 0$ . Pour cela, nous allons nous servir des rectangles rognés. On remarque en effet que les rectangles à queue de taille  $m' \times n'$  rognés de  $m' - 1$  ne sont autres que les rectangles à queue de taille  $m' \times (n' - 1)$  pour lesquels l'hypothèse de récurrence est vérifiée. On remarque en outre que les rectangles à queue de taille  $m' \times n'$  rognés de 0 ne sont autres que les rectangles à queue de taille  $m' \times n'$  pour lesquels on veut montrer que l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Pour cela, on va montrer par récurrence sur  $1 \leq i \leq m'$  que l'hypothèse est vraie pour les rectangles à queue rognés de  $m' - i$  de taille  $m' \times n'$ . Le cran initial 1 a déjà été vu. Supposons l'hypothèse vraie pour une rognure de  $m' - i$  et montrons-la pour une rognure de  $m' - (i + 1)$ . Notons  $S$  un rectangle à queue rogné de  $m' - i - 1$ . Notons  $x$  l'extrémité de la rognure, i.e. le point  $(m' - i - 1, n')$ . Notons d'abord  $\bar{S}$  le sous-rectangle à queue de  $S$  de taille  $m' \times n'$  rogné de  $m' - i$ . Notons  $S^x$  le sous-rectangle à queue de  $S$  de

taille  $(m' - i - 1) \times (n' - 1)$  dont la queue passe par  $x$  et notons  $\bar{S}^x$  le sous-rectangle à queue de  $S$  de la même taille mais dont la queue évite  $x$  en passant directement de  $(m' - i - 1, n' - 1)$  à  $(m' - i, n')$ . On a donc que  $S$  n'est autre que la somme amalgamée de  $\bar{S}$  avec  $S^x$  au-dessus de  $\bar{S}^x$ . On en déduit que  $A\{S\}$  n'est autre que la somme amalgamée de  $A\{\bar{S}\}$  avec  $A\{S^x\}$  au-dessus de  $A\{\bar{S}^x\}$ , de même pour  $B\{S\}$ . Par hypothèse de récurrence, on a que les morphismes  $A\{\bar{S}^x\} \rightarrow B\{\bar{S}^x\}$ ,  $A\{\bar{S}\} \rightarrow B\{\bar{S}\}$  et  $A\{S^x\} \rightarrow B\{S^x\}$  sont des iso-cofibrations triviales, en outre  $A\{\bar{S}\} \times_{B\{\bar{S}\}} B\{\bar{S}^x\}$  n'est autre que  $A\{\bar{S}^x\}$ , ce qui par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , nous donne que  $A\{\bar{S}\} \coprod_{A\{\bar{S}^x\}} B\{\bar{S}^x\} \rightarrow B\{\bar{S}\}$  est une cofibration. Donc on peut appliquer le lemme 5.5.19 et on obtient que  $A\{S\} \rightarrow B\{S\}$  est une iso-cofibration triviale, ce qui montre l'hypothèse pour les rognures de taille  $m' - i - 1$ . Par récurrence, on obtient l'hypothèse vraie pour les rognures nulles donc pour les rectangles à queue de taille  $m' \times n'$ , ce qui montre l'hypothèse de récurrence au rang  $(m', n')$ . Et donc par récurrence, on obtient que  $A\{S\} \rightarrow B\{S\}$  est une équivalence faible pour les rectangles à queue de taille  $m \times n$ , donc pour  $S = Ob$ , ce qui signifie que  $A \rightarrow B$  est une équivalence faible. Comme en outre on a vu que c'est aussi une iso-cofibration, on a montré que c'est une iso-cofibration triviale. CQFD.

Le théorème sur le produit des catégorisations montré, nous pouvons maintenant en déduire la stabilité des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories par produit cartésien.

**Corollaire 5.5.24** *Supposons vraies les hypothèses du théorème 5.5.20. Soient  $A \rightarrow A'$  et  $B \rightarrow B'$  des équivalences faibles alors leur produit  $A \times B \rightarrow A' \times B'$  est aussi une équivalence faible.*

*Preuve :*

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & \longrightarrow & A' \times B' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Cat(A) \times Cat(B) & \longrightarrow & Cat(A') \times Cat(B')
 \end{array}$$

Par le théorème 5.5.20, les flèches verticales de ce diagramme sont des équivalences faibles. Donc par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , montrer que  $A \times B \rightarrow A' \times B'$  est une équivalence faible équivaut à montrer



que  $Cat(A) \times Cat(B) \rightarrow Cat(A') \times Cat(B')$ , qu'on notera  $f$ , est une équivalence faible.

Comme on l'a vu à la proposition 3.3.4, une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile est un objet ayant une propriété de relèvement à droite. Or par le lemme 2.1.3, les objets ayant une propriété de relèvement à droite sont stables par produit cartésien. Donc les produits  $Cat(A) \times Cat(B)$  et  $Cat(A') \times Cat(B')$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Ainsi  $f$  est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, par le lemme 4.6.5. Or  $f$  est le produit des morphismes  $Cat(A) \rightarrow Cat(A')$  et  $Cat(B) \rightarrow Cat(B')$ , qu'on notera respectivement  $f_1$  et  $f_2$ . Par hypothèse,  $f_1$  et  $f_2$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme  $\tau_0$  est un foncteur préservant les produits, on a que  $\tau_0(f) = \tau_0(f_1) \times \tau_0(f_2)$ . Or  $\tau_0(f_1)$  et  $\tau_0(f_2)$  sont des isomorphismes car  $f_1$  et  $f_2$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, donc  $\tau_0(f)$  est un isomorphisme, i.e.  $f$  est essentiellement surjective. De même  $f(x, y)$  est le produit de  $f_1(x, y)$  et de  $f_2(x, y)$  qui sont des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$  car  $f_1$  et  $f_2$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Or par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , le produit d'équivalences faibles est une équivalence faible, donc  $f(x, y)$  est une équivalence faible, i.e.  $f$  est pleinement fidèle. On a donc montré que  $f$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

CQFD.

Ce résultat sur la stabilité des équivalences faibles par produit cartésien est le dernier ingrédient dont on avait besoin pour pouvoir démontrer la stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie, ce que nous allons faire dans la prochaine section.

## 5.6 Stabilité des cofibrations triviales

Afin de montrer l'hypothèse 3) du lemme de reconnaissance 5.0.4 de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, nous devons montrer la stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie. Par functorialité de  $\text{Cat}$ , cela revient à le montrer pour les cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories. Or nous avons déjà un tel résultat pour les iso-cofibrations triviales. L'idée pour montrer que les sommes amalgamées le long d'un morphisme des cofibrations triviales sont des cofibrations triviales est de faire une récurrence transfinie sur la différence entre le nombre d'objets du but de la cofibration triviale et celui de sa source. Comme le résultat sur les iso-cofibrations triviales correspond au cas 0, cas de départ de la récurrence transfinie, nous allons tout d'abord chercher à montrer le pas de la récurrence qui fait passer d'un ordinal à son successeur.

### 5.6.1 Stabilité par somme amalgamée de certaines cofibrations triviales

Nous allons donc tenter de montrer que toute cofibration triviale, dont le but a un objet de plus que la source, est stable par somme amalgamée. Comme ce résultat va utiliser le théorème 5.5.20, nous allons énoncer ses hypothèses.

**Hypothèses 5.6.1** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,*
- 2) *les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits,*
- 3) *les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,*
- 4) *les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*
- 5) *pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,*
- 6) *les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ ,*

7) il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme.

Le fait qu'une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories ait son but possédant un objet de plus que sa source se produit en particulier si l'objet du but qui n'est pas dans l'image de la source est isomorphe à un objet dans l'image de la source. C'est en effet un cas particulier d'essentielle surjectivité. Un tel couple d'objet est représenté par l'intervalle des ensembles simpliciaux. Nous allons donc commencer par montrer que le morphisme naturel d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie vers sa somme amalgamée par l'intervalle des ensembles simpliciaux est bien une cofibration triviale.

**Lemme 5.6.2** *Supposons vraies les hypothèses 5.6.1.*

*Soit  $\bar{I}$  le groupoïde constitué de deux objets notés 0 et 1 et d'un isomorphisme entre eux noté  $u$ . Pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout objet  $a$  de  $A$ , le morphisme  $A \rightarrow A \amalg_0 \bar{I}$ , induit par l'identification de  $a \in A$  et de  $0 \in \bar{I}$ , est une cofibration triviale.*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que l'objet  $a$  de  $A$  définit un unique morphisme de  $\mathbf{0}$  vers  $A$ , de même l'objet 0 de  $\bar{I}$  définit un unique morphisme de  $\mathbf{0}$  vers  $\bar{I}$ . Notons alors  $B$  la somme amalgamée de  $A$  avec  $\bar{I}$  au-dessus de ces morphismes et notons  $i$ , respectivement  $j$ , le morphisme canonique de  $\bar{I}$ , respectivement de  $A$ , vers  $B$ . Ensuite on remarque que  $A \rightarrow A \amalg_0 \bar{I}$  est une cofibration comme somme amalgamée de la cofibration  $0 \rightarrow \bar{I}$  le long du morphisme  $0 \rightarrow A$ .

Posons  $h : \bar{I} \times \bar{I} \rightarrow \bar{I} \times \bar{I}$  le foncteur entre groupoïdes défini ainsi :  $h(0, 0) = (0, 0)$ ,  $h(0, u) = (0, u)$ ,  $h(0, u^{-1}) = (0, u^{-1})$ ,  $h(0, 1) = (0, 1)$ ,  $h(u, 0) = (u, 0)$ ,  $h(u, u) = (0, u)$ ,  $h(u, u^{-1}) = (u, u^{-1})$ ,  $h(u, 1) = (0, 1)$ ,  $h(u^{-1}, 0) = (u^{-1}, 0)$ ,  $h(u^{-1}, u) = (u^{-1}, u)$ ,  $h(u^{-1}, u^{-1}) = (0, u^{-1})$ ,  $h(u^{-1}, 1) = (0, 1)$ ,  $h(1, 0) = (1, 0)$ ,  $h(1, u) = (u^{-1}, u)$ ,  $h(1, u^{-1}) = (u, u^{-1})$ ,  $h(1, 1) = (0, 1)$ . On remarque que  $B \times \bar{I}$  n'est autre que la somme amalgamée de  $\bar{I} \times \bar{I}$  et de  $A \times \bar{I}$  au-dessus de  $0 \times \bar{I}$ .

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 0 \times \bar{I} & \xrightarrow{a \times Id} & A \times \bar{I} \\
 \downarrow 0 \times Id & & \downarrow j \times Id \\
 \bar{I} \times \bar{I} & \xrightarrow{i \times Id} & B \times \bar{I} \\
 & \searrow (i \times Id) \circ h & \downarrow j \times Id \\
 & & B \times \bar{I} \\
 & & \swarrow \exists! f
 \end{array}$$

Le diagramme étant commutatif, par universalité de la somme amalgamée  $B \times \bar{I}$ , il existe un unique morphisme  $f : B \times \bar{I} \rightarrow B \times \bar{I}$  tel que  $f|_{\bar{I} \times \bar{I}}$  soit la composée  $(i \times Id) \circ h$  et  $f|_{A \times \bar{I}}$  soit le morphisme  $j \times Id$ . En identifiant  $B$  avec  $B \times 0$ , notons  $i_0$ , respectivement  $i_1$ , les inclusions  $Id \times 0 : B \rightarrow B \times \bar{I}$  et  $Id \times 1 : B \rightarrow B \times \bar{I}$ . On calcule aisément que  $f \circ i_0$  n'est autre que  $i_0$  mais que  $f \circ i_1$  est le morphisme  $(j \circ r) \times 1$ , où  $r$  est la rétraction de  $B$  dans  $A$  définie ainsi. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{a} & A \\
 \downarrow 0 & & \downarrow j \\
 \bar{I} & \xrightarrow{i} & B \\
 & \searrow a \circ * & \downarrow Id \\
 & & B \\
 & & \swarrow \exists! r
 \end{array}$$

où  $*$  est l'unique morphisme de  $\bar{I}$  vers  $\mathbf{0}$ . Le diagramme étant commutatif, par universalité de la somme amalgamée  $B$ , il existe un unique morphisme  $r : B \rightarrow A$  tel que  $r \circ j = Id_A$  et  $r \circ i = a \circ *$ .

Posons maintenant  $g : B \times \bar{I} \rightarrow B$  comme étant la composée de  $f$  avec la première projection. On obtient facilement que  $g \circ i_0 = Id_B$  et que  $g \circ i_1 = j \circ r$ . Or les morphismes  $0 : 0 \rightarrow \bar{I}$  et  $1 : 0 \rightarrow \bar{I}$  sont évidemment des équivalences de

$\mathcal{C}$ -catégories. Par le corollaire 5.5.24, il vient que  $i_0 = Id \times 0$  et  $i_1 = Id \times 1$  sont aussi des équivalences faibles. Comme on a l'égalité  $g \circ i_0 = Id_B$ , par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , le morphisme  $g$  est aussi une équivalence faible. Toujours par cet axiome, on obtient que  $j \circ r = g \circ i_1$  est une équivalence faible. Ainsi les morphismes  $j$  et  $r$  ont la propriété suivante :  $r \circ j = Id$  et  $j \circ r$  est une équivalence faible, donc par le lemme 4.6.4,  $j$  et  $r$  sont des équivalences faibles.

CQFD.

Bien évidemment ce cas n'est pas le cas général pour l'essentielle surjectivité. Pour représenter bien comme il faut l'essentielle surjectivité d'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories, il faudrait un intervalle, qu'on notera  $\bar{J}$ , qui représentât un couple d'objets équivalents dans une catégorie. En supposant que l'on possède un tel intervalle  $\bar{J}$ , montrons alors que le morphisme naturel d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie vers sa somme amalgamée avec cet intervalle  $\bar{J}$  est une cofibration triviale.

**Lemme 5.6.3** *Supposons vraies les hypothèses 5.6.1 et supposons qu'il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :*

- pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,
- pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,
- notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

*Pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{L}$  vers  $A$ , le morphisme  $A \rightarrow A \coprod_{\bar{L}} \bar{J}$  est une cofibration triviale.*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que  $A \rightarrow A \coprod_{\bar{L}} \bar{J}$  est une cofibration comme somme amalgamée de la cofibration  $\bar{L} \subset \bar{J}$  le long de  $\bar{L} \rightarrow A$ .

Comme  $\bar{I}$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile dans laquelle 0 et 1 sont isomorphes, il existe un morphisme  $q : \bar{J} \rightarrow \bar{I}$  envoyant 0 sur 0 et 1 sur 1. Il existe donc un morphisme  $r : \bar{J} \rightarrow \bar{L} \times \bar{I}$  induit par  $p$  et  $q$ . Par corollaire 5.5.24, le morphisme produit  $Id \times 0 : \bar{L} \times 0 \rightarrow \bar{L} \times \bar{I}$  est une équivalence faible. Par la suite, on confondra  $\bar{L} \times 0$  et  $\bar{L}$ . Comme on a l'égalité  $pr_1 \circ (Id \times 0) = Id$ , par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , la première projection  $pr_1$  est une

équivalence faible. En outre comme on a  $pr_1 \circ r = p$  et que par hypothèse  $p$  est une équivalence faible, par l'axiome "trois pour deux", il vient que  $r$  est une équivalence faible. En outre il est facile de voir que  $r$  est un isomorphisme sur les objets, donc  $r$  est une iso-équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

Posons  $B$  comme étant la somme amalgamée de  $A$  avec  $\bar{L} \times \bar{I}$  au-dessus de  $\bar{L}$  et  $C$  la somme amalgamée de  $A$  avec  $\bar{J}$  au-dessus de  $\bar{L}$ . On applique le lemme 5.5.19 aux iso-équivalences faibles  $Id_{\bar{L}}$ ,  $Id_A$  et  $r$  qui en vérifient les hypothèses et on obtient que  $C \rightarrow B$  est une iso-équivalence faible.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{0} & \bar{I} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{L} & \xrightarrow{\quad} & \bar{L} \coprod_0 \bar{I} \\
 & \searrow Id \times 0 & \downarrow \exists! \\
 & & \bar{L} \times \bar{I}
 \end{array}
 \quad (0 \circ *) \times Id$$

Par le lemme précédent, le morphisme  $\bar{L} \rightarrow \bar{L} \coprod_0 \bar{I}$  est une équivalence faible et par le corollaire 5.5.24, le morphisme  $Id \times 0$  aussi. Par l'axiome "trois pour deux" pour  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , il vient que le morphisme  $\bar{L} \coprod_0 \bar{I} \rightarrow \bar{L} \times \bar{I}$  est une équivalence faible. En outre, ce morphisme est aussi une iso-cofibration, donc c'est une iso-cofibration triviale. Or sa somme amalgamée le long de  $\bar{L} \coprod_0 \bar{I} \rightarrow A \coprod_0 \bar{I}$  n'est autre que le morphisme  $A \coprod_0 \bar{I} \rightarrow B$  qui, par le lemme 5.4.8, est aussi une iso-cofibration triviale. Or par le lemme précédent, le morphisme  $A \rightarrow A \coprod_0 \bar{I}$  est une cofibration triviale, donc par "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , la composée  $A \rightarrow B$  aussi. Enfin on remarque que  $A \rightarrow B$  est la composée de  $A \rightarrow C$  avec l'équivalence faible  $C \rightarrow B$ , ce qui par "trois pour deux" nous montre que  $A \rightarrow C$  est une équivalence faible. CQFD.

Puisque la somme amalgamée d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie par l'intervalle  $\bar{J}$  revient à rajouter un objet à la  $\mathcal{C}$ -catégorie qui soit équivalent à l'un de ses objets et qu'en outre cette opération est une cofibration triviale, il en découle que prendre la somme amalgamée d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie quelconque par une cofibration

triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories dont le but a un objet de plus que la source va encore donner une cofibration triviale.

**Lemme 5.6.4** *Supposons vraies les hypothèses 5.6.1 et supposons qu'il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :*

- pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,
- pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,
- notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

*Soit  $A \rightarrow B$  une cofibration triviale entre  $\mathcal{C}$ -catégories faciles telle que  $B$  ait exactement un objet de plus que  $A$ , alors pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $C$  et pour tout morphisme de  $A$  vers  $C$ , le morphisme  $C \rightarrow C \amalg_A B$  est une cofibration triviale.*

*Preuve :*

Soit  $A'$  la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $B$  ayant pour objets les images de ceux de  $A$  par le morphisme  $A \rightarrow B$ . Ainsi on obtient que  $A \rightarrow A'$  est une iscofibration triviale. Par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , on obtient que  $A' \subset B$  est aussi une cofibration triviale avec  $B$  ayant un objet de plus que  $A'$ . Or  $C \amalg_A B$  est aussi la somme amalgamée de  $C \amalg_A A'$  et de  $B$  au-dessus de  $A'$ . Si on montre le lemme pour l'inclusion  $A' \subset B$ , on obtient que  $C \amalg_A A' \rightarrow C \amalg_A B$  est une équivalence faible. Or par le lemme 5.4.8,  $C \rightarrow C \amalg_A A'$  est aussi une équivalence faible car  $A \rightarrow A'$  est une iscofibration triviale. Et par "trois pour deux", leur composée  $C \rightarrow C \amalg_A B$  est une équivalence faible, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons donc le lemme pour l'inclusion  $A' \subset B$ . Soit  $A' \rightarrow D$  un morphisme quelconque. On remarque tout d'abord que  $D \rightarrow D \amalg_{A'} B$  est une cofibration comme somme amalgamée de la cofibration  $A' \subset B$  le long d'un morphisme.

Notons  $b$  l'objet de  $B_0 \setminus A'_0$ . Comme  $A' \subset B$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, il existe un objet  $a$  de  $A'$  tel que  $a$  soit équivalent à  $b$  dans  $B$ . Donc, comme  $B$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile, il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $B$  envoyant 0 et 1 respectivement sur  $a$  et  $b$ . La sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine  $\bar{L}$  de  $\bar{J}$  s'envoie par ce morphisme dans  $A'$  car  $A'$  est pleine et contient  $a$  l'image de 0.

Soit  $E$  la somme amalgamée  $A' \coprod_{\bar{L}} \bar{J}$ . Par propriété universelle de  $E$ , il existe un morphisme de  $E$  vers  $B$  factorisant celui de  $\bar{J}$  vers  $B$  car ce dernier envoie  $\bar{L}$  dans  $A'$ . Or par le lemme précédent,  $A' \rightarrow E$  est une cofibration triviale et comme  $A' \subset B$  est une équivalence faible, par "trois pour deux",  $E \rightarrow B$  aussi. En outre on peut remarquer que c'est un isomorphisme sur les objets. Comme  $B$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie, l'iso-équivalence faible  $E \rightarrow B$  se factorise par  $Cat(E)$ . Par la proposition 4.6.2, le morphisme canonique  $E \rightarrow Cat(E)$  est une iso-cofibration triviale. Et donc par "trois pour deux",  $Cat(E) \rightarrow B$  est une iso-équivalence faible entre  $\mathcal{C}$ -catégories. Par la proposition 5.4.3, c'est niveau par niveau une équivalence faible. Soit  $m$  un entier. En appliquant dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  propre à gauche le lemme du cube pour les équivalences faibles à  $Id_{A'_m}, Id_{D_m}$  et  $Cat(E)_m \rightarrow B_m$ , et les cofibrations  $A'_m \rightarrow Cat(E)_m$  et  $A'_m \rightarrow B'_m$  on obtient que  $(D \coprod_{A'} Cat(E))_m \rightarrow (D \coprod_{A'} B)_m$  est une équivalence faible. Comme en outre  $Cat(E) \rightarrow B$  est un isomorphisme sur les objets alors  $D \coprod_{A'} Cat(E) \rightarrow D \coprod_{A'} B$  aussi et donc c'est une iso-équivalence faible, par la proposition 5.4.5. Par le lemme précédent, le morphisme  $D \rightarrow D \coprod_{\bar{L}} \bar{J}$  est une cofibration triviale, or  $D \coprod_{\bar{L}} \bar{J}$  n'est autre que  $D \coprod_{A'} E$ . En outre, le morphisme  $D \coprod_{A'} E \rightarrow D \coprod_{A'} Cat(E)$  est une iso-cofibration triviale, comme somme amalgamée le long d'un morphisme de l'iso-cofibration triviale  $E \rightarrow Cat(E)$  par le lemme 5.4.8. Donc par "trois pour deux", les composées successives  $D \rightarrow D \coprod_{A'} Cat(E)$  puis  $D \rightarrow D \coprod_{A'} B$  sont des équivalences faibles, ce qui montre le lemme pour l'inclusion  $A' \subset B$ . CQFD.

Ce résultat montre donc la stabilité par somme amalgamée le long d'un morphisme des cofibrations triviales dont le but a un objet de plus que la source, ce que l'on peut considérer comme le pas de la récurrence transfinie permettant de passer d'un ordinal à son successeur. Nous devons donc maintenant regarder ce qu'il se passe pour les ordinaux limites, ce qui va correspondre à montrer la stabilité par colimite séquentielle transfinie des cofibrations triviales.

## 5.6.2 Stabilité des cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie

L'argument clef pour montrer la stabilité par colimite séquentielle transfinie des cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories est le fait que les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ -catégories le long de cofibrations restent des  $\mathcal{C}$ -catégories.



**Lemme 5.6.5** Soit  $\mathcal{C}$  une donnée de Segal telle que :

- la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale propre à gauche,
- les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de cofibrations sont des objets régaux,
- les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux.

Alors les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ -catégories le long de cofibrations niveau par niveau sont des  $\mathcal{C}$ -catégories.

*Preuve :* Soit  $(A^\alpha)_{\alpha < \lambda}$  une  $\lambda$ -séquence de  $\mathcal{C}$ -catégories telle que pour tout  $\alpha$  le morphisme  $A^\alpha \rightarrow A^{\alpha+1}$  soit une cofibration. Notons  $A^\lambda$  la colimite séquentielle transfinie des  $(A^\alpha)_{\alpha < \lambda}$ . On remarque tout d'abord que pour tout entier  $m$ ,  $A_m^\lambda$  est la colimite séquentielle transfinie des objets régaux  $A_m^\alpha$  où les morphismes  $A_m^\alpha \rightarrow A_m^{\alpha+1}$  sont des cofibrations. Par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , ceci nous donne que, pour tout  $m$ ,  $A_m^\lambda$  est un objet régau. Par stabilité des objets régaux par produit fibré au-dessus des objets discrets, les  $A_1^\lambda \times \dots \times A_1^\lambda$  sont aussi des objets régaux, mais également les colimites des  $A_1^\alpha \times \dots \times A_1^\alpha$ . On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_m^0 & \longrightarrow & A_m^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_m^\lambda \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 A_1^0 \times \dots \times A_1^0 & \longrightarrow & A_1^1 \times \dots \times A_1^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A_1^\lambda \times \dots \times A_1^\lambda
 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des cofibrations et les flèches verticales sont les morphismes de Segal. Comme pour tout  $\alpha < \lambda$ , les  $A^\alpha$  sont des  $\mathcal{C}$ -catégories, les morphismes de Segal sont des alliances d'objets régaux, donc des équivalences faibles. Et comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale propre à gauche, par la proposition 5.3.13, la colimite du diagramme ci-dessus est aussi une équivalence faible. Donc les morphismes de Segal de  $A^\lambda$  sont des équivalences faibles entre objets régaux, i.e des alliances d'objets régaux, et donc  $A^\lambda$  est bien une  $\mathcal{C}$ -catégorie.

CQFD.

Cette propriété assez inattendue des  $\mathcal{C}$ -catégories va nous permettre de démontrer assez aisément la stabilité des cofibrations triviales par colimite séquentielle transfinie.

**Proposition 5.6.6** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,
- 2) les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de cofibrations sont des objets régaux.

*Les cofibrations triviales sont stables par colimite séquentielle transfinie.*

*Preuve :* Soit  $(A^\alpha)_{\alpha < \lambda}$  une  $\lambda$ -séquence telle que pour tout  $\alpha$  le morphisme  $A^\alpha \rightarrow A^{\alpha+1}$  soit une cofibration triviale. Notons  $A^\lambda$  la colimite séquentielle transfinie des  $(A^\alpha)_{\alpha < \lambda}$ . On remarque tout d'abord que  $A^0 \rightarrow A^\lambda$  est une cofibration comme colimite séquentielle transfinie de cofibrations. Par le lemme pratique 5.4.9, pour montrer que  $A^0 \rightarrow A^\lambda$  est une équivalence faible, il faut et il suffit de montrer que  $Cat(A^0) \rightarrow \text{colim}_{\alpha < \lambda} Cat(A^\alpha)$  est une équivalence faible. D'après le lemme 5.4.7, les morphismes  $Cat(A^\alpha) \rightarrow Cat(A^{\alpha+1})$  sont des cofibrations. On peut donc appliquer le lemme précédent aux  $Cat(A^\alpha)$ , ce qui nous donne que  $\text{colim}_{\alpha < \lambda} Cat(A^\alpha)$  est une  $\mathcal{C}$ -catégorie. Notons cette  $\mathcal{C}$ -catégorie  $B$ . Ainsi on doit montrer que  $Cat(A^0) \rightarrow B$  est une équivalence faible entre  $\mathcal{C}$ -catégories, i.e. est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

Comme  $\tau_0(Cat(A^0) \rightarrow B)$  est la colimite des  $\tau_0(Cat(A^\alpha) \rightarrow Cat(A^{\alpha+1}))$  qui sont des bijections, car les  $Cat(A^\alpha) \rightarrow Cat(A^{\alpha+1})$  sont des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories, et que les bijections sont stables par colimite séquentielle transfinie, il vient que  $\tau_0(Cat(A^0) \rightarrow B)$  est une bijection et donc que  $Cat(A^0) \rightarrow B$  est essentiellement surjective.

Soit  $(x, y)$  un couple d'objets de  $Cat(A^0)$ . Comme les morphismes  $Cat(A^\alpha) \rightarrow Cat(A^{\alpha+1})$  sont des injections sur les objets, car ce sont des cofibrations, on notera encore  $(x, y)$  l'image du couple  $(x, y)$  dans les  $Cat(A^\alpha)$ . Or le morphisme  $Cat(A^0)_1(x, y) \rightarrow B_1(x, y)$  n'est autre que la colimite séquentielle transfinie des  $Cat(A^\alpha)_1(x, y) \rightarrow Cat(A^{\alpha+1})_1(x, y)$  qui sont des cofibrations triviales car les  $Cat(A^\alpha) \rightarrow Cat(A^{\alpha+1})$  sont des cofibrations et des équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories. Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations triviales sont stables par colimite séquentielle transfinie et donc  $Cat(A^0)_1(x, y) \rightarrow B_1(x, y)$  est une cofibration triviale, ce qui montre que  $Cat(A^0) \rightarrow B$  est pleinement fidèle.

CQFD.

Maintenant que nous avons montré le pas de la récurrence transfinie pour passer d'un ordinal à son successeur et aussi celui pour les ordinaux limites, il ne nous reste plus qu'à conclure la récurrence transfinie, autrement dit à prouver la stabilité par somme amalgamée le long d'un morphisme des cofibrations triviales.

### 5.6.3 Stabilité des cofibrations triviales par somme amalgamée

Comme de coutume, nous allons tout d'abord montrer la stabilité par somme amalgamée pour les cofibrations triviales de  $\mathcal{C}$ -catégories de laquelle va découler celle pour les  $\mathcal{C}$ -précatégories. Comme elle provient des deux pas de récurrence déjà montrés, nous allons recueillir les hypothèses faisant marcher ces deux pas.

**Hypothèses 5.6.7** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,
- 2) les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits,
- 3) les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,
- 4) les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,
- 5) pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,
- 6) les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ ,
- 7) il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,
- 8) les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de cofibrations sont des objets régaux,
- 9) il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :
  - pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,

- pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,
- notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Lemme 5.6.8** *Supposons vraies les hypothèses 5.6.7.*

*Les cofibrations triviales entre  $\mathcal{C}$ -catégories faciles sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories quelconque.*

*Preuve :*

Soit  $\lambda$  un cardinal transfini. Soit  $A \rightarrow B$  une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles telle que le cardinal de l'ensemble  $B_0 \setminus A_0$  est inférieur à  $\lambda$  et soit  $A \rightarrow C$  un morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories quelconque. Montrons par récurrence transfinie sur  $\beta \leq \lambda$  que  $C \rightarrow C \coprod_A B$  est une cofibration triviale. Le cas  $\beta = 0$  est celui des iso-cofibrations triviales, cas traité par le lemme 5.4.8. Supposons la propriété vraie au rang  $\beta$  et montrons-la pour  $\beta + 1$ . Soit  $B'_0$  un sous-ensemble de  $B_0$  contenant  $A_0$  et ayant un objet de moins que  $B_0$  et soit  $B'$  la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $B$  d'objets  $B'_0$ , en tant que sous-catégorie pleine d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile c'est encore une  $\mathcal{C}$ -catégorie facile. Ainsi le morphisme  $A \rightarrow B'$  est une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles telle que  $\text{Card}(B'_0 \setminus A_0) = \beta$  et donc par hypothèse de récurrence,  $C \rightarrow C \coprod_A B'$  est une cofibration triviale. En outre  $B' \subset B$  est une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles telle que  $\text{Card}(B_0 \setminus B'_0) = 1$ , donc par le lemme 5.6.4, pour tout morphisme de  $\mathcal{C}$ -catégories  $B' \rightarrow D$ , le morphisme  $D \rightarrow D \coprod_{B'} B$  est une cofibration triviale. C'est vrai en particulier pour  $D = C \coprod_A B'$ , ce qui donne que  $C \coprod_A B' \rightarrow C \coprod_A B$  est une cofibration triviale. Et par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$ , la composée  $C \rightarrow C \coprod_A B$  est une cofibration triviale, ce qui montre la propriété au rang  $\beta + 1$ .

Supposons la propriété vraie pour tous  $\gamma < \beta$ , avec  $\beta$  ordinal limite, et montrons-la pour  $\beta$ . On peut construire par récurrence transfinie une suite croissante de sous-ensembles  $(B_0^\gamma)_{\gamma \leq \beta}$  telle que  $B_0^0$  n'est autre que  $A_0$ , que  $B_0^{\gamma+1} = B_0^\gamma \coprod *$ , que  $B_0^\gamma = \bigcup_{\delta < \gamma} B_0^\delta$  pour  $\gamma$  ordinal limite et que  $B_0^\beta$  soit  $B_0$ . Ceci donne lieu à une suite croissante  $(B^\gamma)_{\gamma \leq \beta}$  de sous- $\mathcal{C}$ -catégories pleines de  $B$ , donc de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. On a pour tout  $\gamma < \beta$  que  $B^\gamma \rightarrow B^{\gamma+1}$  est une cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles telle que  $\text{Card}(B_0^{\gamma+1} \setminus B_0^\gamma) = 1$ , donc par le lemme 5.6.4, il vient que  $C \coprod_A B^\gamma \rightarrow (C \coprod_A B^\gamma) \coprod_{B^\gamma} B^{\gamma+1} = C \coprod_A B^{\gamma+1}$  est une cofibration triviale. On obtient ainsi que  $C \coprod_A B^0 \rightarrow C \coprod_A B$  est la colimite séquentielle transfinie des cofibrations triviales

$C \coprod_A B^\gamma \rightarrow C \coprod_A B^{\gamma+1}$ , ce qui, par la proposition 5.6.6, est bien une cofibration triviale. Comme par propriété au rang 0, le morphisme  $C \rightarrow C \coprod_A B^0$  est une cofibration triviale car  $A \rightarrow B^0$  est une iso-cofibration triviale de  $\mathcal{C}$ -catégories, la composée  $C \rightarrow C \coprod_A B$  est une cofibration triviale par "trois pour deux", ce qui montre la propriété au rang  $\beta$ .  
CQFD.

Maintenant que la stabilité par somme amalgamée le long d'un morphisme des cofibrations triviales est prouvée pour les  $\mathcal{C}$ -catégories, ce n'est plus qu'un jeu d'enfant de l'avoir pour les  $\mathcal{C}$ -précatégories.

**Proposition 5.6.9** *Supposons vraies les hypothèses 5.6.7.*

*Les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme quelconque.*

*Preuve :*

Soient  $A \rightarrow B$  une cofibration triviale et  $A \rightarrow C$  un morphisme quelconque. Tout d'abord on remarque que  $C \rightarrow C \coprod_A B$  est une cofibration comme somme amalgamée de la cofibration  $A \rightarrow B$  le long d'un morphisme. Il ne reste donc plus qu'à montrer que c'est une équivalence faible. Or par le lemme pratique 5.4.6, il vient que pour montrer que  $C \rightarrow C \coprod_A B$  est une équivalence faible, il faut et il suffit de montrer que  $Cat(C) \rightarrow Cat(C) \coprod_{Cat(A)} Cat(B)$  est une équivalence faible. Comme par hypothèse,  $A \rightarrow B$  est une cofibration, alors par le lemme 5.4.7,  $Cat(A) \rightarrow Cat(B)$  est une cofibration de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles, qui en outre est triviale car  $A \rightarrow B$  est une équivalence faible. Par le lemme précédent, on obtient que  $Cat(C) \rightarrow Cat(C) \coprod_{Cat(A)} Cat(B)$  est une équivalence faible.

CQFD.

Si l'on tire le bilan de cette section, nous avons prouvé que les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie. Par ailleurs, nous avons au préalable montré que les cofibrations et les équivalences faibles sont stables par rétracts. Ceci nous donne que les rétracts de colimites séquentielles transfinies de cofibrations triviales sont des cofibrations triviales. C'est donc en particulier le cas pour les flèches de  $\mathcal{J}$ , ce qui montre que les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont des cofibrations triviales. Or ce résultat n'est autre que l'hypothèse 3) du lemme de reconnaissance 5.0.4 de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante.

**Corollaire 5.6.10** *Supposons vraies les hypothèses 5.6.7.  
Les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont à la fois des  $\mathcal{I}$ -cofibrations et des équivalences faibles.*

*Preuve :*

Par définition,  $\mathcal{J}$  est contenu dans l'intersection de la classe des  $\mathcal{I}$ -cofibrations et de celle des équivalences faibles. Or cette intersection de classes est stable par rétracts, par somme amalgamée le long d'un morphisme d'après la proposition précédente, et par colimite séquentielle transfinie d'après la proposition 5.6.6. Comme la classe des  $\mathcal{J}$ -cofibrations est constituée des rétracts de colimites séquentielles transfinies de sommes amalgamées d'éléments de  $\mathcal{J}$ , car  $\mathcal{J}$  permet l'argument du petit objet, on obtient finalement que la classe des  $\mathcal{J}$ -cofibrations est incluse dans l'intersection de celle des  $\mathcal{I}$ -cofibrations avec celle des équivalences faibles.

CQFD.

Cinq sur les six hypothèses du lemme 5.0.4 ont été montrées. Il ne reste plus qu'à montrer la dernière, ce qui est l'objet de la section suivante.

## 5.7 $\mathcal{J}$ engendre les cofibrations triviales

La dernière hypothèse du lemme 5.0.4 de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, propose un choix. Soit on caractérise les morphismes  $\mathcal{I}$ -injectifs, soit l'on montre que  $\mathcal{J}$  engendre les cofibrations triviales. C'est cette deuxième possibilité que nous avons choisie. Comme nous avons montré dans la section précédente que les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont des cofibrations triviales, nous devons donc montrer l'autre sens. Ceci équivaut à montrer que les cofibrations triviales ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes  $\mathcal{J}$ -injectifs. Pour cela nous allons utiliser le même type de démonstration que lorsqu'on a montré que  $\mathcal{I}$  engendre les monomorphismes. Le seul problème qui va se poser dans cette méthode est de montrer les hypothèses du lemme technique 5.3.6. Mais tout d'abord commençons par donner quelques propriétés sur la catégorisation  $\text{Cat}$  qui seront utiles pour la résolution de ce problème.

### 5.7.1 Lemmes techniques sur $\text{Cat}$

Le premier résultat concerne la préservation par la catégorisation  $\text{Cat}$  de l'intersection des sous-objets.

**Lemme 5.7.1** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile telle que les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection.*

*Soient  $A$  et  $B$  deux sous- $\mathcal{C}$ -précatégories d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $C$ . Alors on a :*  

$$\text{Cat}(A \cap B) = \text{Cat}(A) \cap \text{Cat}(B)$$

*Preuve :*

Tout d'abord remarquons que  $\text{Cat}$  n'est autre que la construction  $E_\Phi$ , composée des plans simples  $e_{\Phi,1}$ , avec pour ensemble  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. D'autre part, comme on a supposé la donnée de Segal facile, le lemme 3.4.6 nous assure que les  $\mathcal{FG}_1$ -cofibrations sont des monomorphismes. Enfin avec l'hypothèse sur les réunions de sous-objets, toutes les hypothèses du lemme 2.12.2 sont vérifiées, ce qui nous donne le résultat voulu.

CQFD.

Le second résultat montre que la catégorisation  $\text{Cat}$  préserve la petitesse. Plus précisément, si l'on se donne un cardinal  $\alpha$ , il existe un cardinal  $\alpha'$  plus grand qu' $\alpha$  tel que la catégorisation par  $\text{Cat}$  de toute  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha$ -petite

est  $\alpha'$ -petite. il est important de remarquer que le cardinal  $\alpha'$  ne dépend que de  $\alpha$  et non pas de la  $\mathcal{C}$ -précategorisation  $\alpha$ -petite que l'on veut catégoriser.

**Lemme 5.7.2** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal pré-facile.*

*Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\alpha$ , où l'on note  $\alpha$  un cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites. Alors il existe un cardinal régulier  $\alpha''$  strictement supérieur à  $\alpha'$  tel que, pour toute  $\mathcal{C}$ -précategorisation  $\alpha'$ -petite  $A$ ,  $\text{Cat}(A)$  est  $\alpha''$ -petite.*

*Preuve :*

Comme dans la démonstration précédente, on rappelle que  $\text{Cat}$  n'est autre que le plan  $E_\Phi$ , avec pour  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Notons  $\beta$  le plus petit cardinal régulier pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont  $\beta$ -petites. Par le lemme 3.4.5, il vient que la famille  $\mathcal{FG}_1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles est encore  $\beta$ -petite. Alors le plan  $E_\Phi$  composé des plans simples  $e_{\Phi,1}$  est de longueur le plus petit cardinal régulier supérieur à  $\beta$ . Or par hypothèse celui-ci est inférieur ou égal à  $\alpha$ . Ainsi on a que  $\alpha'$ , étant par hypothèse strictement supérieur à  $2^\alpha$ , est bien strictement supérieur à deux puissance la longueur de  $\text{Cat}$  et aussi strictement supérieur à deux puissance le cardinal régulier pour lequel  $\mathcal{FG}_1$  est petit. Les hypothèses du lemme 2.12.3 étant vérifiées, on peut appliquer ce lemme qui nous donne le résultat désiré.

CQFD.

Le troisième résultat que nous allons donner concerne encore la petitesse mais cette fois il s'agit d'un résultat plus subtil. En effet on se donne une  $\mathcal{C}$ -précategorisation  $A$  quelconque et l'on cherche à montrer que si l'on connaît une sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation petite, notons-la  $C$ , de la catégorisée  $\text{Cat}(A)$ , alors il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation petite  $B$  de  $A$  dont la catégorisée  $\text{Cat}(B)$  contient  $C$ .

**Lemme 5.7.3** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile dont la catégorie sous-jacente est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes.*

*Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\alpha$ , où l'on note  $\alpha$  le plus petit cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites.*

*Pour toute  $\mathcal{C}$ -précategorisation  $t$  et pour toute  $p$  sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation  $\alpha'$ -petite de  $\text{Cat}(t)$ , il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation  $\alpha'$ -petite  $p'$  de  $t$  telle qu'on ait :*

*$p \subset \text{Cat}(p') \subset \text{Cat}(t)$ .*



*Preuve :*

Par construction,  $Cat(t)$  est la colimite séquentielle transfinie d'une  $\alpha$ -séquence de  $\mathcal{C}$ -précatégories partiellement marquées notée  $(t^\beta, \mu_\beta)_{\beta \leq \alpha}$  telle que  $(t^{\beta+1}, \mu_{\beta+1}) = e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$ , où l'on note  $\Phi$  la famille  $\mathcal{FG}_1$  des flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles. Montrons par récurrence transfinie sur  $\beta \leq \alpha$  que, pour tout  $\beta \leq \alpha$ , pour toute sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie partiellement marquée  $\alpha'$ -petite  $(p, \nu)$  de  $(t^\beta, \mu_\beta)$ , il existe  $p' \subset t$   $\alpha'$ -petit tel que  $(p, \nu) \subset Cat_{|\beta}(p') \subset (t^\beta, \mu_\beta)$ , où  $Cat_{|\beta}$  est une notation pour la construction  $Cat$  stoppée à l'étape  $\beta$ . Si  $\beta = 0$ , comme  $t^0$  n'est autre que  $t$ , pour  $p'$  il suffit de prendre  $p$ .

Supposons le résultat vrai au rang  $\beta < \alpha$ , montrons-le pour le rang  $\beta + 1$ . Soit donc  $(p, \nu) \subset (t^{\beta+1}, \mu_{\beta+1})$   $\alpha'$ -petit. On remarque que  $(t^{\beta+1}, \mu_{\beta+1}) = e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$ . Or par construction,  $e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$  est une somme amalgamée multiple de  $t^\beta$  par les diagrammes de flèches génératrices de  $\mathcal{C}$ -catégories faciles à valeurs dans  $t^\beta$  non contenus dans  $\mu_\beta$ .  $p$  étant une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite de  $e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$ ,  $p$  ne peut rencontrer qu'un cardinal  $\gamma < \alpha'$  de buts de flèches génératrices. Notons  $p''$  la réunion dans  $t^\beta$  de  $t^\beta \cap p$  et des images dans  $t^\beta$  des sources des flèches génératrices dont le but est rencontré par  $p$ . Par le lemme 3.4.5, comme les sources et buts des flèches de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites pour un cardinal régulier strictement inférieur à  $\alpha$  alors ceux des flèches génératrices aussi. On obtient donc bien une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie de  $t^\beta$  qui est bien  $\alpha'$ -petite comme réunion sur  $\gamma+1 < \alpha'$  de sous- $\mathcal{C}$ -précatégories  $\alpha'$ -petites. Prenons pour marquage de  $p''$  la restriction de celui de  $t^\beta$ . Par la démonstration du lemme 5.4.7,  $e_{\Phi,1}(p'', \mu'')$  est bien une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie de  $e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$ . En outre, elle contient  $t^\beta \cap p$  ainsi que les buts de toutes les flèches génératrices dont la source s'envoie dans  $p''$ , ce qui nous redonne bien tous les buts que rencontrent  $p$ . Donc  $e_{\Phi,1}(p'', \mu'')$  contient bien  $p$ . Quant à son marquage, il s'agit de la restriction de celui de  $e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$  à  $e_{\Phi,1}(p'', \mu'')$  qui contient la restriction du marquage de  $e_{\Phi,1}(t^\beta, \mu_\beta)$  à  $p$ , lui-même plus gros que  $\nu$ . On a donc montré qu'il existe  $(p'', \mu'') \subset (t^\beta, \mu_\beta)$   $\alpha'$ -petit tel que  $(p, \nu) \subset e_{\Phi,1}(p'', \mu'') \subset (t^{\beta+1}, \mu_{\beta+1})$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $(p'', \mu'') \subset (t^\beta, \mu_\beta)$ , il vient qu'il existe  $p' \subset t$   $\alpha'$ -petit tel que  $(p'', \mu'') \subset Cat_{|\beta}(p') \subset (t^\beta, \mu_\beta)$ . En appliquant la construction  $e_{\Phi,1}$  à ce résultat et en utilisant la préservation des cofibrations par catégorisation du lemme 5.4.7, il vient  $e_{\Phi,1}(p'', \mu'') \subset Cat_{|\beta+1}(p') \subset (t^{\beta+1}, \mu_{\beta+1})$ . Or on a vu plus haut que  $(p, \nu) \subset e_{\Phi,1}(p'', \mu'')$ . D'où il vient que  $(p, \nu) \subset e_{\Phi,1}(p'', \mu'') \subset Cat_{|\beta+1}(p') \subset (t^{\beta+1}, \mu_{\beta+1})$ , ce qui montre l'hypothèse au rang  $\beta + 1$ .

Supposons le résultat vrai pour tout  $\gamma < \beta$ , avec  $\beta \leq \alpha$  ordinal limite, et mon-

trons le pour le rang  $\beta$ . Soit donc  $(p, \nu) \subset (t^\beta, \mu_\beta)$   $\alpha'$ -petit. Comme  $(t^\beta, \mu_\beta)$  est la colimite séquentielle transfinie des  $(t^\gamma, \mu_\gamma)$ , on obtient que  $(p, \nu)$  est la colimite séquentielle transfinie des  $(p \cap t^\gamma, \nu \cap \mu_\gamma)$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à chaque  $(p \cap t^\gamma, \nu \cap \mu_\gamma)$   $\alpha'$ -petits car  $p$  l'est, on obtient une  $\beta$ -séquence de  $p_\gamma \subset t$   $\alpha'$ -petits tels que  $(p \cap t^\gamma, \nu \cap \mu_\gamma) \subset \text{Cat}_{|\gamma}(p_\gamma) \subset (t^\gamma, \mu_\gamma)$ . Posons  $p'$  la colimite séquentielle transfinie des  $p_\gamma$ . Comme chaque  $p_\gamma$  est inclus dans  $t$ , alors leur colimite  $p'$  aussi. En outre  $p'$  est  $\alpha'$ -petit comme colimite indexée par  $\beta \leq \alpha < \alpha'$  de  $\mathcal{C}$ -précategorisations  $\alpha'$ -petites. Comme la catégorisation préserve les cofibrations, par le lemme 5.4.7, pour tout  $\gamma < \beta$ , on obtient que  $\text{Cat}_{|\gamma}(p_\gamma) \subset \text{Cat}_{|\gamma}(p') \subset (t^\gamma, \mu_\gamma)$ . Donc on en déduit que pour tout  $\gamma < \beta$ ,  $(p \cap t^\gamma, \nu \cap \mu_\gamma) \subset \text{Cat}_{|\gamma}(p') \subset (t^\gamma, \mu_\gamma)$ . En outre  $A \rightarrow e_{\Phi,1}(A)$  est une cofibration comme somme amalgamée de cofibrations (les flèches génératrices) le long d'un morphisme par la démonstration du lemme 5.4.7, donc pour tout  $\gamma < \beta$ , on a que  $\text{Cat}_{|\gamma}(p') \subset \text{Cat}_{|\beta}(p')$ . Ainsi pour tout  $\gamma < \beta$ , on a que  $(p \cap t^\gamma, \nu \cap \mu_\gamma) \subset \text{Cat}_{|\beta}(p') \subset (t^\beta, \mu_\beta)$ , d'où, comme  $(p, \nu)$  est la colimite des  $(p \cap t^\gamma, \nu \cap \mu_\gamma)$ , il vient que  $(p, \nu) \subset \text{Cat}_{|\beta}(p') \subset (t^\beta, \mu_\beta)$ . Ceci montre l'hypothèse de récurrence au rang  $\beta$ .

Par récurrence transfinie, on a donc montré que l'hypothèse de récurrence est vraie pour tout  $\beta \leq \alpha$ . En particulier, elle est vraie au rang  $\alpha$ , ce qui donne le résultat suivant : pour toute sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation partiellement marquée  $\alpha'$ -petite  $(p, \nu)$  de  $\text{Cat}(t)$ , il existe  $p' \subset t$   $\alpha'$ -petit tel que  $(p, \nu) \subset \text{Cat}(p') \subset \text{Cat}(t)$ . Pour avoir le résultat du lemme, il suffit de remarquer que toute sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation  $p$  de  $\text{Cat}(t)$  est naturellement une sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation partiellement marquée de  $\text{Cat}(t)$  avec pour marquage la restriction à  $p$  de celui de  $\text{Cat}(t)$ .

CQFD.

Ce dernier résultat est très important car il assure que si l'on a des informations sur la catégorisée d'une  $\mathcal{C}$ -précategorisation qui sont contenues dans une sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation petite de cette catégorisée, alors nous sommes capable d'extraire de la  $\mathcal{C}$ -précategorisation de départ une sous- $\mathcal{C}$ -précategorisation petite dont la catégorisée contienne elle-aussi ces informations. Ceci est en particulier très utile si l'on veut montrer qu'un morphisme de  $\mathcal{C}$ -précategorisations est une cofibration triviale, car il faut en fait montrer que la catégorisée du morphisme est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégorisations. Or le résultat que l'on vient de montrer nous permettra de travailler directement sur la cofibration triviale et non sur sa catégorisée.

Un corollaire immédiat de ce résultat est que si deux objets d'une  $\mathcal{C}$ -précatégorie sont des objets équivalents dans la catégorisée, il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie petite de la  $\mathcal{C}$ -précatégorie de départ dont la catégorisée assure l'équivalence des deux objets. Pour cela, nous allons supposer de nouveau l'existence de l'intervalle  $\bar{J}$  représentant l'équivalence d'objets d'une  $\mathcal{C}$ -catégorie, mais nous lui demanderons aussi une propriété de petitesse afin de pouvoir lui appliquer le résultat que l'on vient de montrer.

**Corollaire 5.7.4** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile dont la catégorie sous-jacente est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes vérifiant les propriétés suivantes :*

1) *il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :*

a) *pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,*

b) *pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,*

c) *notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,*

2) *il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\bar{J}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{J}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{J}$ , où l'on note  $\alpha$  le plus petit cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites.*

*Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\alpha$ .*

*Soit  $A$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie et soient  $(x, y)$  un couple d'objets équivalents de  $Cat(A)$ . Alors il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite  $A'$  de  $A$  telle que  $(x, y)$  soient équivalents dans la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie  $Cat(A')$  de  $Cat(A)$ .*

*Preuve :*

Comme  $x$  et  $y$  sont équivalents dans  $Cat(A)$ , par propriété de  $\bar{J}^{pre}$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}^{pre}$  dans  $Cat(A)$  envoyant 0 et 1 sur  $x$  et  $y$ . Comme par hypothèse,  $\bar{J}^{pre}$  est  $\alpha$ -petit, donc son image  $J$  dans  $Cat(A)$  aussi et on peut lui appliquer le lemme précédent, ce qui nous donne qu'il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $A'$  de  $A$  qui d'une part est  $\alpha'$ -petite et d'autre part vérifie  $J \subset Cat(A') \subset Cat(A)$ . Ainsi le morphisme de  $\bar{J}^{pre}$  dans  $Cat(A)$  se factorise par  $Cat(A')$ . Par propriété de  $Cat$ , on obtient donc un morphisme de  $\bar{J}$ ,

catégorisation de  $\bar{J}^{pre}$ , dans  $Cat(A')$  envoyant 0 et 1 sur  $x$  et  $y$ , ce qui signifie que  $x$  et  $y$  sont équivalents dans  $Cat(A')$ .  
 CQFD.

Après tous ces lemmes techniques sur la catégorisation  $Cat$ , nous pouvons maintenant nous attaquer à la vérification des hypothèses du lemme technique 5.3.6 concernant les engendrement.

### 5.7.2 Sous-cofibrations triviales à sources et buts $\alpha'$ -petits

Le principal problème qui survient lorsque l'on veut montrer les hypothèses du lemme 5.3.6 pour  $\mathcal{J}$  est justement de pouvoir extraire d'une cofibration triviale quelconque une sous-cofibration triviale qui est dans  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire une sous-cofibration triviale petite. L'idée pour faire cela est de prendre une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie petite du but et de montrer que la restriction de la cofibration triviale à cette sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie petite est encore une cofibration triviale. Malheureusement ce n'est pas aussi simple car la restriction d'une cofibration triviale n'est en général pas une cofibration triviale. Il va donc falloir forcer cette propriété, ce que nous allons faire en deux temps. Tout d'abord, nous allons forcer l'essentielle surjectivité par l'intermédiaire d'une opération  $a(\cdot)$  qui conserve la petitesse et qui est essentiellement basée sur l'application du corollaire que l'on vient de montrer au sujet d'objets équivalents dans une  $\mathcal{C}$ -précatégorie.

**Lemme 5.7.5** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile dont la catégorie sous-jacente est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :*
  - a) *pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,*
  - b) *pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,*
  - c) *notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,*

2) il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\bar{J}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{J}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{J}$ , où l'on note  $\alpha$  le plus petit cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites.

Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\alpha$ .

Pour toute cofibration triviale  $f : s \rightarrow t$ , il existe une construction  $a(\cdot)$  qui à toute sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite  $p$  de  $t$  associe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite  $a(p)$  comprise entre  $p$  et  $t$  telle que le morphisme  $f|_{a(p)} : a(p) \cap s \rightarrow a(p)$  vérifie que pour tout objet  $y$  de  $p$ , il existe un objet  $x$  de  $a(p) \cap s$  tel que  $y$  soit équivalent à  $x$  dans  $Cat(a(p))$ .

*Preuve :*

Soit  $p$  une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite de  $t$  et soit  $y$  un objet de  $p$ . Comme  $f$  est une équivalence faible,  $Cat(f)$  est essentiellement surjective. Donc il existe un objet  $x$  de  $s$  tel que  $y$  et  $x$  soient équivalents dans  $Cat(t)$ . Par le corollaire précédent, il vient qu'il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite  $d(y)$  de  $t$  telle que  $x$  et  $y$  soient équivalents dans  $Cat(d(y)) \subset Cat(t)$ .

Posons maintenant  $a_y(p) = p \cup d(y)$ . Comme réunion de deux sous- $\mathcal{C}$ -précatégories de  $t$   $\alpha'$ -petites,  $a_y(p)$  est bien une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie de  $t$   $\alpha'$ -petite et qui par construction contient  $p$ . En outre comme par le lemme 5.4.7, les cofibrations sont stables par catégorisation,  $Cat(a_y(p))$  est comprise entre  $Cat(d(y))$  et  $Cat(t)$ , donc  $x$  et  $y$  sont équivalents dans  $Cat(a_y(p)) \subset Cat(t)$ . Enfin on remarque que  $x$  est un objet à la fois de  $s$  et de  $a_y(p)$ , car  $x$  appartient à  $d(y)$ . Donc le morphisme  $a_y(p) \cap s \rightarrow a_y(p)$  vérifie la propriété du lemme pour  $y$ .

Définissons enfin  $a(p)$  comme la réunion des  $a_y(p)$  pour  $y$  décrivant l'ensemble des objets de  $p$ . Comme  $p$  est  $\alpha'$ -petit, cet ensemble est de cardinal strictement inférieur à  $\alpha'$ . En outre comme chaque  $a_y(p)$  est une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite de  $t$  contenant  $p$ , par hypothèse sur  $\alpha'$ , il vient que  $a(p)$  est une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite de  $t$  contenant  $p$ . Montrons que  $a(p) \cap s \rightarrow a(p)$  vérifie la propriété du lemme. Soit  $y$  un objet de  $p$ . Par construction de  $a_y(p)$ , il existe  $x$  objet de  $a_y(p) \cap s$  donc de  $a(p) \cap s$  tel que  $x$  soit équivalent à  $y$  dans  $Cat(a_y(p)) \subset Cat(a(p)) \subset Cat(t)$ .

CQFD.

Après avoir traité de l'essentielle surjectivité, donnons une construction  $b(\cdot)$  qui va forcer la pleine fidélité des restrictions de cofibrations triviales tout en gardant stable la petitesse.

**Lemme 5.7.6** Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile dont la catégorie sous-jacente est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes telle que les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection.

Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\alpha$ , où l'on note  $\alpha$  le plus petit cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites.

Alors il existe  $\bar{\alpha}'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $\alpha'$  tel que pour toute cofibration triviale  $f : s \rightarrow t$ , il existe une construction  $b(\cdot)$  qui à toute sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie  $\alpha'$ -petite  $p$  de  $t$  associe une sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie  $\bar{\alpha}'$ -petite  $b(p)$  comprise entre  $p$  et  $t$  telle que le morphisme  $f|_{b(p)} : b(p) \cap s \rightarrow b(p)$  vérifie la propriété suivante : pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $s \cap p$ , il existe un objet  $\bar{\alpha}'$ -petit  $D$  compris entre  $Cat(p)_1(x, y)$  et  $Cat(t)_1(x, y)$  tel que  $D \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D$  est une sous-cofibration triviale à source et but  $\alpha'$ -petits de la cofibration  $Cat(f|_{b(p)})_1(x, y)$ .

*Preuve :*

Soit  $p$  une sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie  $\alpha'$ -petite de  $t$ . Pour tout couple de points  $(x, y)$  de  $s \cap p$ , comme  $f$  est une cofibration triviale,  $Cat(f)_1(x, y)$  est une cofibration triviale dans  $\mathcal{C}$ . Comme  $p$  est  $\alpha'$ -petit, alors par le lemme 5.7.2,  $Cat(p)$  est  $\alpha''$ -petite, avec  $\alpha'' > \alpha'$  cardinal régulier indépendant de  $p$ , et donc  $Cat(p)_1(x, y)$  aussi. En outre comme les cofibrations sont stables par catégorisation par le lemme 5.4.7,  $Cat(p)_1(x, y)$  est un sous-objet régéal de  $Cat(t)_1(x, y)$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, elle vérifie la proposition suivante. On applique alors la proposition suivante à la cofibration triviale de  $\mathcal{C}$   $Cat(f)_1(x, y) : Cat(s)_1(x, y) \rightarrow Cat(t)_1(x, y)$  et au sous-objet  $\alpha''$ -petit  $Cat(p)_1(x, y)$  de  $Cat(t)_1(x, y)$ . Il existe donc un objet  $\widetilde{\alpha}''$ -petit  $D_{x,y}$ , avec  $\widetilde{\alpha}'' > \alpha''$  un cardinal régulier indépendant de  $f$  et  $p$ , tel que  $D_{x,y}$  est compris entre  $Cat(p)_1(x, y)$  et  $Cat(t)_1(x, y)$ , tel que  $D_{x,y} \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D_{x,y}$  soit une sous-cofibration triviale de  $Cat(f)_1(x, y)$ . Considérons  $D'_{x,y}$  la somme amalgamée de  $Cat(p)$  par  $\Delta[1] \Theta D_{x,y}$  au-dessus de  $\Delta[1] \Theta Cat(p)_1(x, y)$ . Comme cette somme amalgamée n'est autre que la sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie de  $Cat(t)$  engendrée par les  $\widetilde{\alpha}''$ -petits  $Cat(p)$  et  $D_{x,y}$ , on obtient que  $D'_{x,y}$  est une sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie  $\widetilde{\alpha}''$ -petite de  $Cat(t)$ . En appliquant le lemme 5.7.3 à la sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie  $\widetilde{\alpha}''$ -petite  $D'_{x,y}$  de  $Cat(t)$ , il vient qu'il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie  $\widetilde{\alpha}''$ -petite  $b'_{x,y}(p)$  de  $t$  telle que  $D'_{x,y} \subset Cat(b'_{x,y}(p) \subset Cat(t))$ .

On pose maintenant  $b_{x,y}(p) = p \cup b'_{x,y}(p)$  qui est bien une sous- $\mathcal{C}$ -précaturégorie

gorie  $\widetilde{\alpha''}$ -petite de  $t$  comme réunion de telles  $\mathcal{C}$ -précatégories. En outre par construction,  $b_{x,y}(p)$  contient  $p$ . Par stabilité des cofibrations par catégorisation du lemme 5.4.7, il vient que  $Cat(b_{x,y}(p))$  contient  $Cat(b'_{x,y}(p))$  qui elle-même contenait  $D'_{x,y}$ . En outre  $(D'_{x,y})_1(x, y)$  contient  $D_{x,y}$ . Donc au final, on a que  $D_{x,y} \subset Cat(b_{x,y}(p))_1(x, y) \subset Cat(t)_1(x, y)$ .

On définit maintenant  $b(p)$  comme la réunion des  $b_{x,y}(p)$  pour  $x$  et  $y$  décrivant l'ensemble des objets de  $p$  dont le cardinal est strictement inférieur à  $\alpha'$  car  $p$  est  $\alpha'$ -petit. Donc par hypothèse sur  $\widetilde{\alpha''}$ , on obtient que  $b(p)$  est une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\widetilde{\alpha''}$ -petite de  $t$  contenant  $p$ . Montrons que  $f|_{b(p)} : b(p) \cap s \rightarrow b(p)$  a la propriété du lemme. Soit  $(x, y)$  un couple d'objets de  $s \cap p$ , alors comme on l'a vu ci-dessus, il existe un objet  $D_{x,y}$   $\widetilde{\alpha''}$ -petit compris entre  $Cat(p)_1(x, y)$  et  $Cat(t)_1(x, y)$  et tel que  $D_{x,y} \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D_{x,y}$  est une cofibration triviale. On remarque que la source et le but de cette dernière sont bien  $\widetilde{\alpha''}$ -petits car  $D_{x,y}$  et donc  $D_{x,y} \cap Cat(s)_1(x, y)$  sont  $\widetilde{\alpha''}$ -petits. Or  $D_{x,y}$  est inclus dans  $Cat(b_{x,y}(p))_1(x, y)$  donc dans  $Cat(b(p))_1(x, y)$ . Ainsi  $D_{x,y} \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D_{x,y}$  est bien une sous-cofibration triviale à source et but  $\widetilde{\alpha''}$ -petits de la cofibration  $Cat(b(p))_1(x, y) \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow Cat(b(p))_1(x, y)$  qui n'est autre que  $Cat(f|_{b(p)})_1(x, y)$  car  $Cat$  commute aux intersections par le lemme 5.7.1. Comme  $\widetilde{\alpha''}$  est indépendant de  $p$  et de  $f$  mais seulement de  $\alpha''$  qui lui même ne dépend que de  $\alpha'$ , en posant  $\widetilde{\alpha'} = \widetilde{\alpha''}$ , on a le résultat attendu. CQFD.

En appliquant un nombre transfini de fois les opérations  $a(\cdot)$  et  $b(\cdot)$ , nous allons transformer toute restriction de cofibration triviale en cofibration triviale et ce tout en préservant la petitesse. Si donc pour une cofibration triviale quelconque, on extrait de son but une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie petite, en appliquant un tel procédé à la restriction de la cofibration triviale à cette sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie petite, on obtiendra une sous-cofibration triviale petite de notre cofibration triviale de départ, résultat auquel nous voulions arriver.

**Proposition 5.7.7** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,*
- 2) *les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits, où l'on note  $\alpha$  le plus petit cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites,*

- 3) les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,
- 4) les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,
- 5) pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,
- 6) les colimites séquentielles transfinites de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinites de  $\mathcal{C}$ ,
- 7) il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,
- 8) les colimites séquentielles transfinites d'objets régaux le long de cofibrations sont des objets régaux,
- 9) il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :
  - a) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,
  - b) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,
  - c) notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,
- 10) il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\bar{J}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{J}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{J}$ .

Soit  $\alpha'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $2^\alpha$ .

Alors il existe  $\tilde{\alpha}'$  un cardinal régulier strictement supérieur à  $\alpha'$  tel que pour toute cofibration triviale  $f : s \rightarrow t$  et pour toute sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\alpha'$ -petite  $p$  de  $t$ , il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\tilde{\alpha}'$ -petite  $p'$  comprise entre  $p$  et  $t$  telle qu'on ait le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 s \cap p' & \xrightarrow{\subset} & p' \\
 \downarrow \subset & & \downarrow \subset \\
 s & \xrightarrow{\subset} & t
 \end{array}$$



où les flèches horizontales sont des équivalences faibles. Dans ce cas, l'inclusion de  $s \cap p'$  dans  $p'$  est dans  $\mathcal{J}$ , si  $\alpha'$  vaut le cardinal de la définition de  $\mathcal{J}$ , et la cofibration triviale  $s \rightarrow t$  se factorise à travers  $s \cup p'$  en deux cofibrations triviales.

*Preuve :*

Supposons que le cardinal  $\tilde{\alpha}'$  existe et qu'il existe  $p'$   $\tilde{\alpha}'$ -petit compris entre  $p$  et  $t$  vérifiant le diagramme ci-dessus. Montrons d'abord que  $s \cap p' \rightarrow p'$  est dans  $\mathcal{J}$ , si  $\alpha'$  vaut le cardinal de la définition de  $\mathcal{J}$ . On a déjà que  $s \cap \underline{p}' \rightarrow p'$  est une cofibration triviale. Or par hypothèse,  $p'$  et donc  $s \cap \underline{p}'$  sont  $\alpha'$ -petits donc  $s \cap p' \rightarrow p'$  est une cofibration triviale à source et but  $\alpha'$ -petits, i.e. un élément de  $\mathcal{J}$ .

Toujours avec la supposition ci-dessus, montrons maintenant que la cofibration triviale  $s \rightarrow t$  se factorise à travers  $s \cup p'$  en deux cofibrations triviales. Considérons le diagramme cocartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} s \cap p' & \xrightarrow{\subset} & p' \\ \subset \downarrow & & \downarrow \subset \\ s & \xrightarrow{\subset} & s \cup p' \end{array}$$

Comme les cofibrations triviales sont stables par somme amalgamée le long d'un morphisme par proposition 5.6.9 et que  $s \cap p' \rightarrow p'$  est une cofibration triviale, alors  $s \rightarrow s \cup p'$  est une cofibration triviale. En outre,  $s$  et  $p'$  sont des sous- $\mathcal{C}$ -précatégories de  $t$ , donc en utilisant le fait que  $s \cup p'$  soit la somme amalgamée de  $s$  et  $p'$  au-dessus de leur intersection, par hypothèse sur  $\mathcal{C}$ , il vient que le morphisme universel  $s \cup p' \rightarrow t$  est une inclusion donc une cofibration. Comme enfin la précomposition de ce morphisme par la cofibration triviale  $s \rightarrow s \cup p'$  n'est autre que la cofibration triviale  $s \rightarrow t$ , par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{C}$ , il vient que  $s \cup p' \rightarrow t$  est une équivalence faible. Donc  $s \cup p' \rightarrow t$  est bien une cofibration triviale et  $s \rightarrow t$  se factorise donc bien par  $s \cup p'$  en deux cofibrations triviales.

Définissons  $p'$  et  $\tilde{\alpha}'$  par récurrence. Soit  $p'_0 = p$  et  $\alpha'_0 = \alpha'$ . Supposons  $p'_n$  et  $\alpha'_n$  construits pour  $n \geq 0$ , alors on pose  $p'_{n+1} = b(a(p'_n))$  et  $\alpha'_{n+1} = \tilde{\alpha}'_n$ , au sens du lemme précédent. Enfin on définit  $p'$  comme la colimite des  $p'_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\tilde{\alpha}'$  comme le plus petit cardinal régulier majorant l'ensemble

$\{\alpha'_n, n \in \mathbb{N}\}$ , ce qui existe par les propriétés des cardinaux. Il est facile de voir qu'à chaque étape le cardinal défini dépend uniquement de  $\alpha'$ . On remarque, comme  $\tilde{\alpha}' > \aleph_0$  est régulier et est supérieur strictement à chaque  $\alpha'_n$ , que  $p'$  est  $\tilde{\alpha}'$ -petit comme réunion dénombrable de  $\mathcal{C}$ -précatégories  $\alpha'_n$ -petites. Comme  $p'$  est une réunion croissante de  $\mathcal{C}$ -précatégories comprises entre  $p$  et  $t$  alors  $p'$  aussi. Il ne reste donc qu'à montrer la propriété de  $s \cap p' \rightarrow p'$ . Comme c'est clairement une inclusion, montrons que c'est une équivalence faible, i.e. montrons que  $Cat(s \cap p') \rightarrow Cat(p')$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories.

Soit  $y$  un objet de  $p'$ . Comme  $p'$  est une colimite, il existe un entier  $n$  tel que  $y$  soit un objet de  $p'_n$ . Appliquons la construction  $a(\cdot)$  à  $p'_n$ , on obtient alors l'existence d'un objet  $x$  de  $a(p'_n) \cap s$  tel que  $x$  soit équivalent à  $y$  dans  $Cat(a(p'_n))$ . Comme  $b(a(p'_n))$  qui n'est autre que  $p'_{n+1}$  contient  $a(p'_n)$ , que  $p'$  contient  $p'_{n+1}$  et que les cofibrations sont stables par catégorisation par le lemme 5.4.7, il vient que  $x$  appartient à  $p' \cap s$  et que  $x$  est équivalent à  $y$  dans  $Cat(p')$ , ce qui montre l'essentielle surjectivité de  $Cat(s \cap p') \rightarrow Cat(p')$ .

Soit  $(x, y)$  un couple d'objets de  $p' \cap s$ . Il existe donc un entier  $n$  tel que ce couple appartienne à  $p'_n$  donc à  $a(p'_n)$ . On applique la construction  $b(\cdot)$  à tous les  $a(p'_m)$  pour  $m \geq n$  et, en utilisant la commutation de  $Cat$  avec l'intersection du lemme 5.7.1, l'on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
Cat(p'_m \cap s)_1(x, y) & \xrightarrow{\subset} & Cat(a(p'_m) \cap s)_1(x, y) & \xrightarrow{\subset} & D_{x,y}^m \cap Cat(s)_1(x, y) & \xrightarrow{\subset} & Cat(p'_{m+1} \cap s)_1(x, y) \\
\downarrow \subset & & \downarrow \subset & & \downarrow \cong & & \downarrow \subset \\
Cat(p'_m)_1(x, y) & \xrightarrow{\subset} & Cat(a(p'_m))_1(x, y) & \xrightarrow{\subset} & D_{x,y}^m & \xrightarrow{\subset} & Cat(p'_{m+1})_1(x, y)
\end{array}$$

Les flèches  $Cat(p'_m \cap s)_1(x, y) \rightarrow Cat(p'_m)_1(x, y)$  et  $D_{x,y}^m \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D_{x,y}^m$  alternant, on obtient que la colimite pour  $m \geq n$  des  $Cat(p'_m \cap s)_1(x, y) \rightarrow Cat(p'_m)_1(x, y)$ , qui n'est autre que  $Cat(p' \cap s)_1(x, y) \rightarrow Cat(p')_1(x, y)$ , est égale à la colimite des  $D_{x,y}^m \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D_{x,y}^m$ . En utilisant la proposition 5.3.13 dans  $\mathcal{C}$ , on obtient que la colimite des cofibrations triviales  $D_{x,y}^m \cap Cat(s)_1(x, y) \rightarrow D_{x,y}^m$  est une équivalence faible. Or comme cette dernière est égale à  $Cat(p' \cap s)_1(x, y) \rightarrow Cat(p')_1(x, y)$ , ceci montre que  $Cat(p' \cap s)_1(x, y) \rightarrow Cat(p')_1(x, y)$  est une équivalence faible et donc que  $Cat(s \cap p') \rightarrow Cat(p')$  est pleinement fidèle.

CQFD.

Nous avons donc démontré le résultat qui permet d'extraire de toute cofibration triviale une cofibration triviale petite, c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{J}$ . Nous avons donc maintenant en notre possession l'outil majeur permettant de vérifier les hypothèses du lemme 5.3.6 qui montrera l'engendrement des cofibrations triviales par  $\mathcal{J}$ .

### 5.7.3 Engendrement des cofibrations triviales par $\mathcal{J}$

Afin de démontrer la dernière hypothèse du lemme de reconnaissance 5.0.4 de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, nous devons vérifier les hypothèses du lemme 5.3.6 qui permettra de montrer que  $\mathcal{J}$  engendre les cofibrations triviales. Or nous venons de montrer l'argument de base qui permet de vérifier les hypothèses du lemme 5.3.6. Aussi va-t-on en récolter les hypothèses, qui serviront pour toute cette partie.

**Hypothèses 5.7.8** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facile vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,*
- 2) *les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits, où l'on note  $\alpha$  le plus petit cardinal régulier strictement plus grand que celui pour lequel les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont petites,*
- 3) *les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,*
- 4) *les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*
- 5) *pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,*
- 6) *les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ ,*
- 7) *il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,*
- 8) *les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de cofibrations sont des objets régaux,*
- 9) *il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{\mathcal{J}}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :*

a) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{\mathcal{J}}$  vers  $A$  envoyant  $0$  sur  $a$  et  $1$  sur  $b$ ,

b) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{\mathcal{J}}$  vers  $A$ , les images de  $0$  et  $1$  par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,

c) notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{\mathcal{J}}$  d'objet  $0$ , alors il existe un morphisme  $p : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \bar{L}$  envoyant  $0$  et  $1$  sur  $0$  qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,

10) il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\bar{\mathcal{J}}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{\mathcal{J}}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{\mathcal{J}}$ .

Sous ces hypothèses, nous savons donc extraire de toute cofibration triviale un élément de  $\mathcal{J}$ , ce qui entraîne que les flèches  $\mathcal{J}$ -injectives se relèvent aussi par rapport aux cofibrations triviales quelconques.

**Lemme 5.7.9** *Supposons vraies les hypothèses 5.7.8.*

*Les flèches  $\mathcal{J}$ -injectives sont exactement les flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales.*

*Preuve :*

Tout d'abord comme  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble de la classe des cofibrations triviales, les flèches ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales ont en particulier cette propriété vis-à-vis des éléments de  $\mathcal{J}$  donc sont  $\mathcal{J}$ -injectives. Il reste donc à montrer l'autre sens.

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ j \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

avec  $j$  une cofibration triviale et  $p$  une flèche  $\mathcal{J}$ -injective. Si  $j$  est un isomorphisme, le diagramme admet un relèvement naturel. Sinon il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $D$   $\alpha'$ -petite de  $B$  non incluse dans  $j(A)$  mais d'intersection non vide avec  $j(A)$ , où  $\alpha'$  est le cardinal de la définition de  $\mathcal{J}$ . Par la proposition précédente, il existe une sous- $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\tilde{\alpha}'$ -petite  $D'$  comprise entre  $D$  et  $B$  tel que  $A \cap D' \rightarrow D'$  soit une sous-cofibration triviale de  $j$  à

source et but  $\tilde{\alpha}'$ -petits. En particulier  $A \cap D' \rightarrow D'$  est un élément de  $\mathcal{J}$ . On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A \cap D' & \xrightarrow{\subset} & A & \xrightarrow{a} & X \\
 \downarrow \in \mathcal{J} & & \downarrow j & & \downarrow p \\
 D' & \xrightarrow{\subset} & B & \xrightarrow{b} & Y
 \end{array}$$

Comme  $p$  est  $\mathcal{J}$ -injective, le diagramme extérieur admet un relèvement  $\theta$ .  
 Considérons maintenant la réunion  $A \cup D'$ . Par hypothèse sur  $D$ , cette réunion n'est pas isomorphe à  $A$ . D'après la proposition précédente,  $j$  se factorise à travers  $A \cup D'$  en deux cofibrations triviales dont la première est l'inclusion canonique  $i_A : A \rightarrow A \cup D'$  et la seconde  $j' : A \cup D' \rightarrow B$ . Avec ce qui précède on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A \cap D' & \xrightarrow{\subset} & A & & \\
 \downarrow \in \mathcal{J} & & \downarrow i_A & \searrow a & \\
 D' & \xrightarrow{i'_D} & A \cup D' & & X \\
 & & \downarrow j' & \swarrow \exists! \phi & \\
 & & B & & 
 \end{array}$$

$\theta$  (arrow from  $D'$  to  $X$ )

Comme la partie extérieure du grand diagramme commute par propriété de  $\theta$  et que  $A \cup D'$  est une somme amalgamée, il existe un unique morphisme  $\phi$  de  $A \cup D'$  vers  $X$  tel que  $\phi \circ i_A = a$  et  $\phi \circ i_D = \theta$ . De là il vient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 p \circ \phi \circ i_A &= p \circ a = b \circ j = b \circ j' \circ i_A \\
 p \circ \phi \circ i'_D &= p \circ \theta = b \circ j' \circ i'_D
 \end{aligned}$$

Comme  $p \circ \phi$  et  $b \circ j'$  ont même valeur sur les injections canoniques, par propriété universelle de la somme amalgamée  $A \cup D'$ , on obtient que  $p \circ \phi = b \circ j'$ . Ainsi  $A \cup D'$  réalise un relèvement partiel du diagramme  $(j, a, b, p)$  avec  $A \cup D'$  non isomorphe à  $A$ . En appliquant le lemme 5.3.6, il vient que  $(j, a, b, p)$

possède un relèvement global. Ceci montre que les morphismes  $\mathcal{J}$ -injectifs ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales. CQFD.

Comme l'on vient de montrer que les morphismes  $\mathcal{J}$ -injectifs sont exactement ceux qui se relèvent par rapport aux cofibrations triviales, on obtient donc que les cofibrations triviales sont des  $\mathcal{J}$ -cofibrations, c'est-à-dire des morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux morphismes  $\mathcal{J}$ -injectifs. Comme avec l'hypothèse 3) du lemme de reconnaissance 5.0.4, on a montré que les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont des cofibrations triviales, on a donc bien que  $\mathcal{J}$  engendre les cofibrations triviales.

**Corollaire 5.7.10** *Supposons vraies les hypothèses 5.7.8.  $\mathcal{J}$  engendre les cofibrations triviales.*

*Preuve :*

Le lemme précédent montre que les cofibrations triviales ont la propriété de relèvement à gauche par rapport aux flèches  $\mathcal{J}$ -injectives. Donc par définition de  $\mathcal{J}$ -cofibrations comme flèches ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux flèches  $\mathcal{J}$ -injectives, les cofibrations triviales sont des  $\mathcal{J}$ -cofibrations. En outre le corollaire 5.6.10 montre que les  $\mathcal{J}$ -cofibrations sont des cofibrations triviales. Donc les cofibrations triviales sont exactement les  $\mathcal{J}$ -cofibrations, ce qui montre que  $\mathcal{J}$  engendre les cofibrations triviales. CQFD.

Avec ce résultat d'engendrement des cofibrations triviales par  $\mathcal{J}$ , qui mérite donc bien son nom d'ensemble des cofibrations triviales génératrices, nous venons de vérifier la dernière hypothèse du lemme 5.0.4 de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante. Nous pouvons donc maintenant donner le théorème central qui établit que la catégorie  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  des  $\mathcal{C}$ -précatégories avec les monomorphismes et les équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ -précatégories forme bien une catégorie de modèles fermée.

## 5.8 Théorème central

Comme la vérification des six hypothèses du lemme 5.0.4 de reconnaissance de la structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante a donné lieu à un bon nombre d'hypothèses, nous allons dans un premier temps les rassembler dans une ébauche de théorème sur la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante des  $\mathcal{C}$ -précatégories, puis les retravailler afin d'obtenir une meilleure formulation de ce dernier.

### 5.8.1 Ebauche du théorème central

En regroupant tous les résultats précédents, on obtient l'ébauche du théorème central suivante :

**Théorème 5.8.1 (-central (ébauche))** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile vérifiant les propriétés suivantes :*

*A) la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante simpliciale dont tous les objets sont cofibrants,*

*B) il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,*

*C) les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*

*D) les objets discrets sont stables par limites dans  $\mathcal{C}$ ,*

*E) les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de cofibrations sont des objets régaux,*

*F) le foncteur  $\tau_0$  est tel que, pour tout objet régale  $C$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\tau_0(C)$  est un quotient de l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final vers  $C$ ,*

*G) il existe un objet régale contractile  $K$  muni de deux morphismes de l'objet final vers  $K$  notés  $0$  et  $1$ , et ayant la propriété suivante : pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de l'objet final vers un objet régale  $C$  tel que leurs images par  $\tau_0$  soient égales, il existe un morphisme de  $K$  vers  $C$  envoyant  $0$  sur  $f$  et  $1$  sur  $g$ ,*

*H) les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes,*

*I) les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$ , ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ , sont connexes et non isomorphes à l'ensemble vide,*

J) il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3,

K) la famille  $\mathcal{F}_1$  est incluse dans la classe des cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  et la famille  $\mathcal{F}_2$  dans celle des cofibrations,

L) les alliances d'objets régaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régaux,

M) le produit fibré d'une équivalence faible entre objets régaux le long d'une fibration est une équivalence faible,

N) les cofibrations et les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret,

O) les cofibrations de  $\mathcal{C}$  sont les monomorphismes,

P) les isomorphismes ne se factorisent qu'en isomorphismes dans la sous-catégorie des cofibrations de  $\mathcal{C}$ ,

Q) les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des cofibrations de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ ,

R) pour toute cofibration  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $\mathcal{C}$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des cofibrations est un ensemble,

S) les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,

T) les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits,

U) il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :

a) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 sur  $a$  et 1 sur  $b$ ,

b) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de 0 et 1 par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,

c) notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,

V) il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\bar{J}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{J}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{J}$ .

Alors  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  admet une structure de catégorie de modèles fermée engendrée



de manière cofibrante avec pour équivalences faibles les morphismes dont la catégorisation est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, pour  $\mathcal{I}$  l'ensemble constitué de  $\emptyset \rightarrow *$  et des flèches de type  $\text{Attach}_n(g) : \Delta[n] \Theta X \amalg_{\partial \Delta[n] \Theta X} \partial \Delta[n] \Theta Y \rightarrow \Delta[n] \Theta Y$  pour  $n > 0$  et  $g : X \rightarrow Y$  décrivant l'ensemble des cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$ , et pour  $\mathcal{J}$  l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes à la fois cofibrations niveau par niveau et équivalences faibles dont les sources et buts sont petits par rapport à un cardinal régulier bien choisi.

*Preuve :*

D'après le lemme 5.0.4 de reconnaissance de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante, il y a cinq axiomes à montrer.

Tout d'abord il faut que  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  soit complète et cocomplète, ce qui est le cas d'après la proposition 1.2.5.

Le premier axiome est la stabilité des équivalences faibles par rétract donnée par le lemme 5.1.4 ainsi que l'axiome "trois pour deux" pour les équivalences faibles donné quant à lui par le lemme 4.6.4.

Le deuxième axiome est que  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  vérifient l'argument du petit objet, ce qui est montré par les lemmes 5.2.1 et 5.2.2.

Le troisième axiome est que toute  $\mathcal{J}$ -cofibration est à la fois une  $\mathcal{I}$ -cofibration et une équivalence faible, ce qui nous est donné par le corollaire 5.6.10.

Le quatrième axiome est que tout morphisme  $\mathcal{I}$ -injectif est à la fois  $\mathcal{J}$ -injectif et une équivalence faible, ce que montre le lemme 5.3.17.

Enfin le corollaire 5.7.10 montre l'une des deux propriétés équivalentes du dernier axiome, à savoir que les morphismes à la fois  $\mathcal{I}$ -cofibrations et équivalences faibles sont des  $\mathcal{J}$ -cofibrations.

CQFD.

Cependant il convient aussi de remarquer que certaines hypothèses permettent d'en éliminer d'autres. En effet, l'hypothèse O) demande que les cofibrations de  $\mathcal{C}$  soient des monomorphismes. De ce fait l'hypothèse P) ne porte plus que sur les monomorphismes et elle est donc trivialement vraie. Il en est de même pour la première partie de l'hypothèse N). De plus l'hypothèse B) entraîne que la flèche  $\emptyset \rightarrow *$  est un monomorphisme. L'hypothèse O) modifie aussi l'énoncé de l'hypothèse K), ce qui entraîne que les familles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont des familles de monomorphismes. Comme A) postule que  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations, qui par l'hypothèse O) sont exactement les monomorphismes, sont stables rétracts, sommes amalgamées et colimites séquentielles transfinies. Ainsi les  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \{\emptyset \rightarrow *\}$ -cofibrations sont des monomorphismes, ce qui rend triviale l'hypothèse H). En outre, si dans l'hypothèse A) l'on demande directement que la catégorie de modèles

fermée engendrée de manière cofibrante soit une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes, alors l'hypothèse O) devient redondante. Par ailleurs, le fait d'identifier les cofibrations et les monomorphismes changent la nature des hypothèses Q) et R) qui ne portent donc plus sur la structure de catégorie de modèles fermée mais directement sur la structure de catégorie de  $\mathcal{C}$ . Ainsi on peut trier ou modifier les hypothèses ci-dessus obtenues par regroupement des résultats précédents et donner de nouvelles définitions plus pertinentes au vu de ces hypothèses.

### 5.8.2 Remaniement des hypothèses du théorème central et nouvelles définitions

Tout d'abord, regroupons les hypothèses portant directement sur la catégorie de base  $\mathcal{C}$ . Comme on considère une donnée de Segal proto-facile sur  $\mathcal{C}$ , il faut que  $\mathcal{C}$  soit discrétisante et possède les produits fibrés de deux objets au-dessus d'un objet discret. Les hypothèses B), C) et D) portent également sur  $\mathcal{C}$  et les deux dernières supposent que  $\mathcal{C}$  est complète et cocomplète. Enfin comme on l'a vu ci-dessus, le fait pour le théorème central d'identifier cofibrations et monomorphismes entraîne que les hypothèses Q) et R) portent elles aussi sur  $\mathcal{C}$ . Avec toutes ces hypothèses ainsi qu'avec la définition de catégorie discrétisante, on peut définir une nouvelle notion de catégorie discrétisante directement utilisable pour le théorème central.

**Définition 5.8.2** *Une catégorie  $\mathcal{C}$  est une catégorie bien discrétisante si elle vérifie les propriétés suivantes :*

*-elle est complète et cocomplète,*

*-pour tout morphisme  $Z \rightarrow X$  vers un objet discret, on a*

$$Z = \coprod_{x \in X} Z(x),$$

*- $\text{Enssj} \circ \text{Discret}$  est naturellement isomorphe à l'identité de la catégorie des ensembles,*

*-les objets discrets sont stables par limites dans  $\mathcal{C}$ ,*

*-il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,*

*-les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*

-les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ ,

-pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble.

Regardons maintenant les hypothèses concernant uniquement la donnée de Segal. Ce sont les hypothèses E) et F). Parmi ces hypothèses, l'hypothèse F) donne une description concrète du foncteur  $\tau_0$ , aussi va-t-on donner la définition de donnée de Segal concrète à une donnée de Segal basée sur une catégorie bien discrétisante et vérifiant les hypothèses E) et F).

**Définition 5.8.3** Une donnée de Segal  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_{eq}, \tau_0)$  est dite concrète si :

-la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est bien discrétisante,

-les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de monomorphismes sont des objets régaux,

-le foncteur  $\tau_0$  est tel que, pour tout objet régau  $C$  de  $(\mathcal{C})$ ,  $\tau_0(C)$  est un quotient de l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final vers  $C$ .

Comme les hypothèses H), I) et J) sont déjà contenues dans la notion de donnée de Segal pré-facile, on va obtenir la notion de donnée de Segal pré-facilitée qui ne sera autre qu'une donnée de Segal concrète et pré-facile.

**Définition 5.8.4** Une donnée de Segal pré-facile  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est une donnée de Segal facilitée si la donnée de Segal sous-jacente est concrète,

On remarque que les hypothèses G), K), L) et M) sont des hypothèses demandées dans la définition de donnée de Segal facile. L'hypothèse N) n'y est qu'à moitié par sa partie concernant les équivalences faibles. Quant aux autres hypothèses de la donnée de Segal facile, elles sont déjà prises en charge dans les définitions précédentes. Ainsi une donnée de Segal facilitée sera simplement une donnée de Segal facile et pré-facilitée ou encore une donnée de Segal facile et concrète.

**Définition 5.8.5** Une donnée de Segal facile  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est dite donnée de Segal facilitée si la donnée de Segal pré-facile sous-jacente est une donnée de Segal pré-facilitée.

Ou ce qui revient au même :

Une donnée de Segal facile  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  est une donnée de Segal facilitée si la donnée de Segal sous-jacente est concrète,

L'hypothèse A) demande à la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  d'une donnée de Segal facilitée d'être une catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante simpliciale dont tous les objets sont cofibrants et l'hypothèse O) demande que les cofibrations soient les monomorphismes. On peut donc regrouper ces deux hypothèses en une, comme on l'avait déjà fait remarquer plus haut, en demandant à la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  d'être une catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes. En revanche, on n'a plus à demander que ses objets soient tous cofibrants, car ceci est déjà une hypothèse de la donnée de Segal facile.

Si l'on regarde les hypothèses concernant la catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes, on trouve les hypothèses S) et T) qui portent sur les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes. Comme le fait de demander à la catégorie de modèles fermée de base  $\mathcal{C}$  d'être engendrée par monomorphisme se justifie en ceci que cela permet de simplifier la démonstration de la structure de catégorie de modèles fermée sur les  $\mathcal{C}$ -précategorias et leurs équivalences faibles, nous allons définir une notion de donnée de Segal facilitante (pour la structure de catégorie de modèles fermée) qui prendra en charge ces hypothèses d'engendrement par monomorphismes.

**Définition 5.8.6** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facilitée, on dit qu'elle est facilitante si :*

- la catégorie de modèles fermée sous-jacente  $\mathcal{C}$  est catégorie de modèles fermée simpliciale engendrée par monomorphismes,
- les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,
- les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits.

Toutes les hypothèses ont été prises en charge par cette notion de donnée de Segal facilitante à l'exception des deux dernières hypothèses U) et V) qui concernent l'existence d'un bon intervalle  $\bar{J}$  pour représenter l'équivalence d'objets dans les  $\mathcal{C}$ -catégories. Aussi va-t-on définir la notion pour une donnée de Segal facilitante d'être munie d'un bon intervalle pour les  $\mathcal{C}$ -catégories.

**Définition 5.8.7** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facilitante, on dit qu'elle admet un bon intervalle pour les  $\mathcal{C}$ -catégories si :*

- il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés 0 et 1 et ayant les propriétés suivantes :

- a) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant  $0$  sur  $a$  et  $1$  sur  $b$ ,
- b) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de  $0$  et  $1$  par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,
- c) notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet  $0$ , alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant  $0$  et  $1$  sur  $0$  qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,
- il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précatégorie  $\bar{J}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{J}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{J}$ .

Avec toutes ces définitions, nous pouvons donner un énoncé plus simple du théorème central, puisqu'il suffit d'être une donnée de Segal facilitante munie d'un bon intervalle pour les  $\mathcal{C}$ -catégories afin de vérifier toutes les hypothèses de l'ébauche du théorème central.

### 5.8.3 Énoncé du théorème central

Voici donc le nouvel énoncé du théorème central qui est bien plus simple que celui de l'ébauche du fait qu'il prenne en compte les nouvelles définitions dégagées précédemment de l'analyse de la foule des hypothèses de l'ébauche du théorème central.

**Théorème 5.8.8 (central)** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal facilitante admettant un bon intervalle pour les  $\mathcal{C}$ -catégories. Alors  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  admet une structure de catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes avec pour équivalences faibles les morphismes dont la catégorisation est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, les ensembles générateurs des cofibrations et des cofibrations triviales étant respectivement les ensembles  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ .*

La preuve est bien évidemment celle de l'ébauche du théorème central. Bien que cet énoncé soit plus agréable à l'oeil que celui de l'ébauche, il est cependant extrêmement dense car derrière la notion de donnée de Segal facilitante se cache une multitude d'hypothèses que l'ébauche du théorème centrale, ô combien rebutante, a néanmoins l'avantage d'exposer clairement. Après le balayage des hypothèses triviales des sections précédentes, nous sommes en mesure de donner un meilleur énoncé de notre ébauche. Aussi c'est en fait le nouvel énoncé de l'ébauche du théorème central qui nous servira par la suite pour vérifier qu'une donnée de Segal proto-facile vérifie les hypothèses du théorème central.

**Théorème 5.8.9 (-central (ébauche 2))** *Soit  $(\mathcal{C}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  une donnée de Segal proto-facile vérifiant les propriétés suivantes :*

*A') la catégorie sous-jacente  $\mathcal{C}$  est une catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes simpliciale,*

*B') il n'existe aucun morphisme de but l'ensemble vide qui ne soit pas un isomorphisme,*

*C') les réunions de deux sous-objets sont exactement les sommes amalgamées de ces sous-objets au-dessus de leur intersection,*

*D') les objets discrets sont stables par limites dans  $\mathcal{C}$ ,*

*E') les colimites séquentielles transfinies d'objets régaux le long de monomorphismes sont des objets régaux,*

*F') le foncteur  $\tau_0$  est tel que, pour tout objet régale  $C$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\tau_0(C)$  est un quotient de l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de l'objet final vers  $C$ ,*

*G')* il existe un objet régéal contractile  $K$  muni de deux morphismes de l'objet final vers  $K$  notés  $0$  et  $1$ , et ayant la propriété suivante : pour tout couple  $(f, g)$  de morphismes de l'objet final vers un objet régéal  $C$  tel que leurs images par  $\tau_0$  soient égales, il existe un morphisme de  $K$  vers  $C$  envoyant  $0$  sur  $f$  et  $1$  sur  $g$ ,

*H')* les sources et buts des flèches de la famille  $\mathcal{F}_1$ , ainsi que les buts de la famille  $\mathcal{F}_2$ , sont connexes et non isomorphes à l'ensemble vide,

*I')* il existe un cardinal transfini régulier strictement supérieur à  $\aleph_0$ , que l'on notera  $\alpha$ , pour lequel tout morphisme de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  a sa source et son but  $\alpha$ -petits au sens 2.3.3,

*J')* la famille  $\mathcal{F}_1$  est incluse dans la classe des cofibrations triviales de la catégorie de modèles fermée engendrée par monomorphismes  $\mathcal{C}$  et la famille  $\mathcal{F}_2$  dans celle des cofibrations,

*K')* les alliances d'objets régéaux sont exactement les équivalences faibles de la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{C}$  entre objets régéaux,

*L')* le produit fibré d'une équivalence faible entre objets régéaux le long d'une fibration est une équivalence faible,

*M')* les équivalences faibles sont stables par produit fibré au-dessus d'un objet discret,

*N')* les colimites séquentielles transfinies de la sous-catégorie des monomorphismes de  $\mathcal{C}$  existent et sont les colimites séquentielles transfinies de  $\mathcal{C}$ ,

*O')* pour tout monomorphisme  $j : A \rightarrow B$  de  $\mathcal{C}$ , la classe contenant un représentant de chaque classe d'isomorphismes d'objets  $C$  par lequel  $j$  se factorise dans la sous-catégorie des monomorphismes est un ensemble,

*P')* les cofibrations génératrices de la catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante  $\mathcal{C}$  ont leurs buts connexes,

*Q')* les cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$  ont leurs sources et buts  $\alpha$ -petits,

*R')* il existe une  $\mathcal{C}$ -catégorie  $\bar{J}$  munie de deux objets notés  $0$  et  $1$  et ayant les propriétés suivantes :

a) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie facile  $A$  et pour tout couple d'objets équivalents  $a$  et  $b$  de  $A$ , il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant  $0$  sur  $a$  et  $1$  sur  $b$ ,

b) pour toute  $\mathcal{C}$ -catégorie  $A$  et pour tout morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$ , les images de  $0$  et  $1$  par ce morphisme sont des objets équivalents dans  $A$ ,

c) notons  $\bar{L}$ , la sous- $\mathcal{C}$ -catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet 0, alors il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{L}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui soit une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories,

S') il existe dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  une  $\mathcal{C}$ -précategorie  $\bar{J}^{pre}$   $\alpha$ -petite dont la catégorisation est  $\bar{J}$  et vérifiant également la propriété a) de  $\bar{J}$ .

Alors  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  admet une structure de catégorie de modèles fermée engendrée de manière cofibrante avec pour équivalences faibles les morphismes dont la catégorisation est une équivalence de  $\mathcal{C}$ -catégories, pour  $\mathcal{I}$  l'ensemble constitué de  $\emptyset \rightarrow *$  et des flèches de type  $Attach_n(g) : \Delta[n] \Theta X \coprod_{\partial \Delta[n] \Theta X} \partial \Delta[n] \Theta Y \rightarrow \Delta[n] \Theta Y$  pour  $n > 0$  et  $g : X \rightarrow Y$  décrivant l'ensemble des cofibrations génératrices de  $\mathcal{C}$ , et pour  $\mathcal{J}$  l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes à la fois cofibrations niveau par niveau et équivalences faibles dont les sources et buts sont petits par rapport à un cardinal régulier bien choisi.

Maintenant que nous avons obtenu une belle structure de catégorie de modèles fermée sur les  $\mathcal{C}$ -précategories, nous allons voir un exemple de  $\mathcal{C}$ -précategories ayant cette structure par vérification des hypothèses du théorème central.



## Chapitre 6

# Catégories de Segal

Comme on l'a vu dans l'exemple 1.3.3, la catégorie des ensembles simpliciaux, avec pour objets régaux les ensembles simpliciaux quelconques, pour alliances d'objets régaux les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux (i.e. les morphismes dont les réalisations géométriques induisent des isomorphismes sur les groupes d'homotopie) et pour  $\tau_0$  la composée des foncteurs réalisation géométrique et composante connexe, forme une donnée de Segal. Les  $\mathcal{C}$ -précatégories pour cette donnée de Segal sont les précatégories de Segal, les  $\mathcal{C}$ -catégories sont les catégories de Segal et les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories sont les équivalences de catégories de Segal, ces trois notions étant celles définies dans [2].

En outre avec pour  $\mathcal{F}_1$  la famille vide et pour  $\mathcal{F}_2$  la famille des inclusions des bords des simplexes standards dans ces derniers, la catégorie des ensembles simpliciaux forme une donnée de Segal proto-facile, ce que l'on a vu dans l'exemple 3.1.2. Pour cette donnée de Segal proto-facile, les objets régaux faciles sont les ensembles simpliciaux quelconques et les alliances faciles sont les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux qui sont aussi des fibrations de Kan.

Nous allons montrer que cette donnée de Segal proto-facile vérifie les hypothèses du théorème central afin d'obtenir une structure de catégorie de modèles fermée sur les précatégorie de Segal.

## 6.1 Vérification des premières hypothèses du théorème central

Afin de montrer que le théorème central s'applique au cas des précatégories de Segal, nous devons montrer que les dix-neuf hypothèses de l'ébauche 2 du théorème central sont vérifiées par la donnée de Segal proto-facile de l'exemple 3.1.2. Nous commencerons par montrer les dix-sept premières hypothèses, ce qui nous permettra par la suite d'utiliser tous les résultats de cette thèse ne faisant pas intervenir l'intervalle  $\bar{J}$ .

**Lemme 6.1.1** *La donnée de Segal proto-facile sur les ensembles simpliciaux définies dans l'exemple 3.1.2 vérifie les hypothèses A') à Q') de l'ébauche 2 du théorème central.*

*Preuve :*

L'hypothèse A') est un résultat classique sur les ensembles simpliciaux, voir en particulier [1]. En effet ceux-ci forment une catégorie de modèles fermée simpliciale dont tous les objets sont cofibrants avec pour cofibrations les monomorphismes et pour équivalences faibles les morphismes dont la réalisation géométrique induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie, or comme ceux-ci ne sont autres que les alliances d'objets régaux, ceci montre l'hypothèse K'). De plus cette catégorie de modèles fermée est engendrée de manière cofibrante avec pour cofibrations génératrices les inclusions des bords des simplexes standards dans ces derniers et pour cofibrations triviales génératrices les inclusions des cornes des simplexes standards dans ces derniers.

Comme la catégorie des ensembles simpliciaux est une catégorie de préfaisceaux d'ensembles dont les limites et colimites sont calculées niveau par niveau, les hypothèses B'), C') et D'), étant vérifiées par la catégorie des ensembles, sont donc vraies pour les ensembles simpliciaux. En outre comme on l'a vu ci-dessus, les cofibrations sont les monomorphismes. Or ceux-ci sont en fait les injections niveau par niveau, donc l'hypothèse N'), étant vérifiée avec les injections ensemblistes, est aussi vraie avec les cofibrations d'ensembles simpliciaux.

L'hypothèse E') est triviale car les objets régaux sont les ensembles simpliciaux quelconques et que la catégorie des ensembles simpliciaux est cocomplète. L'hypothèse F') découle de la définition du foncteur composante connexe  $\pi_0$  et du fait que les points de la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial sont exactement les morphismes de  $\Delta[0]$  vers cet ensemble simplicial.

L'hypothèse G') est vérifiée facilement si on prend pour  $K$  l'intervalle  $\bar{I}$ , i.e.

le nerf du groupoïde à deux objets et un unique isomorphisme entre ceux-ci.

Pour les hypothèses H'), I') et J'), la partie concernant la famille  $\mathcal{F}_1$  est triviale car  $\mathcal{F}_1$  est vide. La famille  $\mathcal{F}_2$  est formée par les inclusions des bords des simplexes standards dans ces derniers. Comme les cofibrations sont les monomorphismes, la famille  $\mathcal{F}_2$  est bien incluse dans la classe des cofibrations, ce qui montre la partie de l'hypothèse J') concernant  $\mathcal{F}_2$ . Les buts des flèches de  $\mathcal{F}_2$  sont les simplexes standards. Or ceux-ci sont connexes au sens de l'exemple 3.2.9 et non vides d'après l'exemple 3.3.5, ce qui montre la partie de l'hypothèse H') concernant  $\mathcal{F}_2$ . Enfin les sources et buts des flèches de  $\mathcal{F}_2$ , étant les simplexes standards et leurs bords, sont  $\alpha$ -petits pour  $\alpha = 2^{\aleph_0}$  d'après l'exemple 3.4.7, ce qui montre la partie de l'hypothèse I') concernant  $\mathcal{F}_2$ .

Comme les cofibrations génératrices ne sont autres que les inclusions des bords des simplexes standards dans ces derniers, l'ensemble des cofibrations génératrices est donc  $\mathcal{F}_2$ . Ainsi comme  $\mathcal{F}_2$  vérifie les hypothèses H') et J'), alors l'ensemble des cofibrations génératrices vérifie les hypothèses P') et Q').

Pour montrer l'hypothèse L'), considérons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow f \sim \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Appliquons le foncteur réalisation géométrique à ce diagramme. Comme le foncteur réalisation géométrique préserve les produits fibrés, on obtiendra encore un diagramme cartésien dans la catégorie des espaces topologiques. Comme  $f$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, sa réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie faible. Comme  $g$  est une fibration de la catégorie de modèles fermée des ensembles simpliciaux, sa réalisation géométrique est une fibration de la catégorie de modèles fermée des espaces topologiques. Comme dans la catégorie de modèles fermée des espaces topologiques tous les objets sont fibrants, cette catégorie de modèles fermée est propre à droite. Ainsi le produit fibré de l'équivalence d'homotopie faible  $|f|$  entre objets fibrants le long de la fibration  $|g|$  est une équivalence d'homotopie faible. Or ce produit fibré n'est autre que la réalisation géométrique de  $A \rightarrow C$  par préservation du produit fibré par réalisation géométrique, ce qui montre que

$A \rightarrow C$  est bien une équivalence faible et donc que l'hypothèse L') est vérifiée.

Le foncteur réalisation géométrique et les foncteurs des groupes d'homotopie  $\pi_i$  préservent les produits fibrés. Ainsi la réalisation géométrique du produit fibré de deux équivalences faibles n'est autre que le produit fibré de deux équivalences d'homotopie faibles. En appliquant à ce dernier les foncteurs  $\pi_i$ , on obtient des produits fibrés de deux isomorphismes qui sont donc eux-mêmes des isomorphismes. Ainsi la réalisation géométrique du produit fibré de deux équivalences faibles induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie et donc le produit fibré des deux équivalences faibles est une équivalence faible. Ceci montre l'hypothèse M').

Pour terminer les vérifications d'hypothèses, il reste juste à montrer que l'hypothèse O') est vraie et ceci n'est autre que le lemme 5.3.5, car comme on l'a fait remarquer plus haut la catégorie des ensembles simpliciaux est une catégorie de préfaisceaux d'ensembles et que la catégorie des ensembles vérifie l'hypothèse O').

CQFD.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer l'existence de l'intervalle  $\bar{J}$  pour les précatégories de Segal pour pouvoir appliquer le théorème central au cas des ensembles simpliciaux. Toutefois l'existence d'un tel intervalle nécessite la notion de groupoïde de Segal ainsi que l'équivalence des théories homotopiques de ces groupoïdes de Segal et des espaces topologiques.

## 6.2 Groupoïde de Segal

Pour montrer l'existence d'un bon intervalle  $\bar{J}$  pour les  $\mathcal{C}$ -catégories de Segal, nous allons introduire, plus précisément rappeler, la notion de groupoïde de Segal. En effet l'intervalle  $\bar{J}$  a pour vocation de représenter la notion d'équivalence d'objets dans une catégorie de Segal. Comme deux objets sont équivalents s'il existe un morphisme de l'un à l'autre qui est inversible à homotopie près, on voit apparaître le lien entre  $\bar{J}$  et la notion de groupoïde de Segal : l'intervalle  $\bar{J}$  devra être un groupoïde de Segal. Aussi avant de construire l'intervalle  $\bar{J}$  et de montrer que c'est un groupoïde de Segal, nous allons rappeler la définition de groupoïde de Segal et passer en revue les principales propriétés de ces derniers.

### 6.2.1 Groupes d'homotopie d'un groupoïde de Segal

Commençons tout d'abord par rappeler la notion de groupoïde de Segal définie dans [2].

**Définition 6.2.1** *Une catégorie de Segal  $A$  est un groupoïde de Segal si  $\tau_1(A)$  est le nerf d'un groupoïde au sens des catégories. Les morphismes de groupoïdes de Segal sont les morphismes de précatégories de Segal et les équivalences de groupoïdes de Segal sont les équivalences de catégories de Segal.*

Si la notion d'équivalence pour les groupoïdes de Segal est la même que pour les catégories de Segal, il existe cependant une caractérisation de l'équivalence entre groupoïdes de Segal par l'intermédiaire de la notion de groupes d'homotopie d'un groupoïde de Segal.

**Définition 6.2.2** *Soit  $A$  un groupoïde de Segal, on définit ses groupes d'homotopie de la manière suivante :*

- $\pi_0(A) = \tau_0(A)$ ,
- pour tout objet  $a$  de  $A$ ,  $\pi_1(A, a) = \pi_0(|A_1(a, a)|)$
- pour  $i > 1$  et pour tout objet  $a$  de  $A$ ,  $\pi_i(A, a) = \pi_{i-1}(|A_1(a, a)|, Id_a)$ .

Ces groupes d'homotopie de groupoïdes de Segal sont bien fonctoriels comme composées de foncteurs et, pour  $i > 1$ , ils sont bien munis d'une structure de groupes. Afin de montrer que ces groupes d'homotopie caractérisent les équivalences entre groupoïdes de Segal, nous allons introduire la notion de groupoïde de Segal simplement connexe pour laquelle une telle caractérisation a lieu.

**Définition 6.2.3** *Un groupoïde de Segal est simplement connexe si son  $\pi_0$  et tous ses  $\pi_1$  sont triviaux.*

**Lemme 6.2.4** *Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de groupoïdes de Segal. Si  $A$  et  $B$  sont simplement connexes, alors  $f$  est une équivalence de catégories de Segal si et seulement si  $\pi_0(f)$  est une bijection d'ensembles et que, pour tout  $i > 0$  et pour tout objet  $a$  de  $A$ ,  $\pi_i(f, a)$  est un isomorphisme.*

*Preuve :*

On a déjà vu que  $f$  est essentiellement surjective si et seulement si  $\tau_0(f)$  est une bijection ensembliste. Or  $\tau_0(f)$  n'est autre que  $\pi_0(f)$ . Ainsi l'essentielle surjectivité est caractérisée en terme de  $\pi_0$ .

Par définition,  $f$  est pleinement fidèle si et seulement si  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ . Or  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux si et seulement si  $\pi_0(|f_1(x, y)|)$  est une bijection et, pour tout  $j > 0$  et pour tout objet  $g$  de  $A_1(x, y)$ ,  $\pi_j(|f_1(x, y)|, g)$  est un morphisme de groupes. Ainsi on obtient que si  $f$  est pleinement fidèle, alors, pour tout objet  $a$  de  $A$ ,  $f_1(a, a)$  est une équivalence faible donc  $\pi_0(|f_1(a, a)|)$  est une bijection et, pour tout  $j > 0$ , les  $\pi_j(|f_1(a, a)|, Id_a)$  sont des isomorphismes de groupes, c'est-à-dire que, pour tout  $i > 0$ , les  $\pi_i(f_1(a, a), a)$  sont des isomorphismes.

Montrons que si pour tout  $i > 0$  et pour tout objet  $a$  de  $A$ ,  $\pi_i(f, a)$  est un isomorphisme et que  $\pi_0(f)$  est bijective, alors  $f$  est pleinement fidèle. Pour cela montrons que, pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ ,  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible. Deux cas se présentent.

Si  $A_1(x, y)$  est vide, alors nécessairement  $B_1(f(x), f(y))$  est vide. Sinon il existe un morphisme entre  $f(x)$  et  $f(y)$  et, comme  $B$  est un groupoïde de Segal, ce morphisme est une équivalence entre  $f(x)$  et  $f(y)$ , qui ont donc même image dans  $\tau_0(B)$ . Or  $\tau_0(f)$  est une bijection par hypothèse, donc  $x$  et  $y$  ont même image dans  $\tau_0(A)$  ce qui contredit la vacuité de  $A_1(x, y)$ .

Si  $A_1(x, y)$  est non vide, alors il existe un objet  $g$  de  $A_1(x, y)$  qui est une équivalence entre  $x$  et  $y$  car  $A$  est un groupoïde de Segal. En utilisant la démonstration du lemme 4.1.3, ceci entraîne que dans la catégorie homotopique des ensembles simpliciaux les remplacements fibrants  $A_1^f(x, y)$  et  $A_1^f(x, x)$  sont équivalents. De même, par l'équivalence  $f(g)$  dans  $B$  entre  $f(x)$  et  $f(y)$ , on obtient que  $B_1^f(f(x), f(y))$  et  $B_1^f(f(x), f(x))$  sont équivalents. Et par l'axiome "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée des ensembles

simpliciaux, il vient que le remplacement fibrant de  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible si et seulement si celui de  $f_1(x, x)$  l'est. Or tout ensemble simplicial est équivalent à son remplacement fibrant, d'où toujours par l'axiome "trois pour deux", les remplacements fibrants de  $f_1(x, y)$  et de  $f_1(x, x)$  sont des équivalences faibles si et seulement si  $f_1(x, y)$  et  $f_1(x, x)$  le sont. Par transitivité de l'équivalence logique, on a donc obtenu que  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible si et seulement si  $f_1(x, x)$  l'est.

Ainsi pour montrer que  $f$  est pleinement fidèle, on en est réduit à montrer que  $f_1(x, x)$  est une équivalence faible pour tout objet  $x$  de  $A$ . Pour cela il faut montrer que  $|f_1(x, x)|$  est une équivalence d'homotopie faible, i.e. que  $\pi_0(|f_1(x, x)|)$  est une bijection, ce qui est vrai car par hypothèse  $\pi_1(f, x) = \pi_0(|f_1(x, x)|)$  est une bijection, et que, pour tout objet  $h$  de  $A_1(x, x)$  et pour tout  $j > 0$ , les  $\pi_j(|f_1(x, x)|, h)$  sont des isomorphismes de groupes. On sait que c'est vrai quand  $h$  vaut l'identité de  $x$ , car par hypothèse les  $\pi_j(f, x) = \pi_j(|f_1(x, x)|, Id_x)$  sont des isomorphismes de groupes. Or  $A$  est simplement connexe donc il existe un chemin  $\gamma$  de  $Id_x$  vers  $h$  qui induit un isomorphisme de  $\pi_j(|A_1(x, x), Id_x|)$  vers  $\pi_j(|A_1(x, x), h|)$ , pour  $j > 0$ . L'image de ce chemin par  $|f_1(x, x)|$  induit un isomorphisme de  $\pi_j(|B_1(f(x), f(x)), Id_{f(x)}|)$  vers  $\pi_j(|B_1(f(x), f(x)), f(h)|)$ , pour  $j > 0$ . On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_j(|A_1(x, x), Id_x|) & \xrightarrow{\pi_{j+1}(f, x)} & \pi_j(|B_1(f(x), f(x)), Id_{f(x)}|) \\
 \downarrow \gamma * . * \gamma^{-1} & & \downarrow |f_1(x, x)|(\gamma) * . * |f_1(x, x)|(\gamma)^{-1} \\
 \pi_j(|A_1(x, x), h|) & \xrightarrow{\pi_j(|f_1(x, x), h|)} & \pi_j(|B_1(f(x), f(x)), f(h)|)
 \end{array}$$

Par hypothèse,  $\pi_{j+1}(f, x)$  est un isomorphisme de groupes et par ce qui précède les flèches verticales sont aussi des isomorphismes de groupes. On en déduit donc que  $\pi_j(|f_1(x, x), h|)$  est bien un isomorphisme de groupes, pour  $j > 0$ . Donc  $f_1(x, x)$  est une équivalence faible pour tout objet  $x$  de  $A$  et, par ce qui précède, ceci entraîne que pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ ,  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible et par conséquent que  $f$  est pleinement fidèle. CQFD.

On remarque en regardant la démonstration de près que pour  $f : A \rightarrow B$  morphisme de groupoïdes de Segal quelconques, on a :

- l'essentielle surjectivité de  $f$  équivaut à la bijectivité de  $\pi_0(f)$ ,



- si  $f$  est une équivalence de catégories de Segal, alors  $f$  induit des isomorphismes sur tous les  $\pi_i$ .

En revanche la réciproque n'est vraie que pour les groupoïdes de Segal simplement connexes.

Après ces quelques rappels, nous allons maintenant passer à la définition de l'intervalle  $\bar{J}$ .

## 6.2.2 Proto-groupeïde de Segal

Pour définir l'intervalle  $\bar{J}$ , nous allons en fait passer par la construction de la précatégorie de Segal  $\bar{J}^{pre}$  dont la catégorisation sera justement  $\bar{J}$ . Or cette précatégorie de Segal  $\bar{J}^{pre}$  doit représenter elle-aussi l'équivalence d'objets dans les catégories de Segal, donc, comme on l'a fait remarquer plus haut, elle représente en fait les morphismes inversibles à homotopie près. Cependant cette notion n'a de sens que dans les catégories de Segal, ce que  $\bar{J}^{pre}$  n'est pas. C'est la raison pour laquelle nous allons définir une notion de morphisme quasi-inversibles dans une précatégorie de Segal ainsi qu'une notion de proto-groupeïde de Segal qui permettront de comprendre ce qu'est un élément d'une précatégorie de Segal qui aura vocation à être inversible dans la catégorisation de cette précatégorie, mais aussi ce qu'est une précatégorie de Segal dont la catégorisation est un groupeïde de Segal.

**Définition 6.2.5** *Une précatégorie de Segal  $A$  est un proto-groupeïde de Segal si, pour tout élément  $u$  de  $A_1$  qui n'est pas l'arête extérieure d'un simplexe, il existe un élément  $v$  de  $A_1$ , deux éléments  $T_1$  et  $T_2$  de  $A_2$  et deux morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  de l'intervalle  $\bar{I}$  dans  $A_1$  tels que :*

$$-u = \delta_{0,1}(T_1) = \delta_{1,2}(T_2) \text{ et } v = \delta_{1,2}(T_1) = \delta_{0,1}(T_2),$$

$$-\alpha(0) = \delta_{0,2}(T_1) \text{ et } \alpha(1) = Id_{s(u)},$$

$$-\beta(0) = \delta_{0,2}(T_2) \text{ et } \beta(1) = Id_{s(v)}.$$

*On dira alors que l'élément  $u$  est proto-inversible.*

Il est clair que tout groupeïde de Segal est un proto-groupeïde de Segal. Nous allons maintenant montrer que les précatégories de Segal proto-groupeïdiques sont bien des précatégories de Segal dont la catégorisation est un groupeïde de Segal. Nous allons montrer ce résultat en plusieurs étapes. Supposons dans un premier temps que la catégorisation préserve la notion de proto-groupeïde, alors le résultat de la catégorisation est une catégorie de

Segal proto-groupeïdique. Montrons donc qu'une telle catégorie de Segal est en fait un groupeïde de Segal.

**Lemme 6.2.6** *Toute catégorie de Segal proto-groupeïdique est un groupeïde de Segal.*

*Preuve :*

Soit  $A$  une catégorie de Segal proto-groupeïdique. Soit  $\phi$  un morphisme de la catégorie  $\tau_1(A)$ . Deux cas se présentent.

Si  $\phi$  n'est pas une composée de morphismes de  $\tau_1(A)$ , alors ses représentants  $f$  dans  $A_1$  non plus. Et comme  $A$  est un proto-groupeïde,  $f$  est proto-inversible. Donc il existe  $v, T_1, T_2, \alpha, \beta$  le rendant proto-inversible. Or les morphismes  $\alpha, \beta : \bar{I} \rightarrow A_1$  signifient par propriété de  $\bar{I}$  que  $\delta_{0,2}(T_1) \sim Id_{s(f)}$  et  $\delta_{0,2}(T_2) \sim Id_{b(f)}$ . Donc dans  $\tau_1(A)$ , on obtient que  $\bar{v} \circ \bar{f} = Id_{b(f)}$  et  $\bar{f} \circ \bar{v} = Id_{s(f)}$ , i.e. que  $\phi = \bar{f}$  est inversible.

Si  $\phi$  est une composée, il existe un  $n$ -uplet de morphismes  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  qui ne sont pas des composés et tels que  $\phi$  en soit la composée. Comme  $A$  est proto-groupeïdique, d'après ce qui précède, les  $\phi_i$  sont des isomorphismes pour  $i$  de 1 à  $n$ . Donc leur composée  $\phi$  aussi.

Ainsi tous les morphismes de  $\tau_1(A)$  sont des isomorphismes et donc  $\tau_1(A)$  est un groupeïde.

CQFD.

Avec ce résultat, il ne reste donc plus qu'à prouver que la catégorisation préserve la notion de proto-groupeïde pour montrer que la catégorisation d'un proto-groupeïde de Segal est un groupeïde de Segal.

**Lemme 6.2.7** *Si  $A$  est un proto-groupeïde de Segal, alors  $Cat(A)$  est un groupeïde de Segal.*

*Preuve :*

Le procédé de catégorisation consiste en une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées par des flèches génératrices. Celles-ci sont de deux types. Comme, pour la donnée de Segal que l'on considère sur les ensembles simpliciaux, la famille  $\mathcal{FG}1$  est vide, regardons de plus près la famille  $\mathcal{FG}2$ . Cette dernière est formée par les flèches de type  $Boit_m(f)$  où  $f$  appartient à

$\mathcal{F}_2$ . En outre tous les morphismes du but de  $Boit_m(f)$  vers  $A$  (ou vers l'une des étapes de la catégorisation) correspondent à des diagrammes du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & A_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1 \end{array}$$

Or les éléments de  $A_1$  apparaissant dans ce diagramme sont les projections des images dans  $A_1 \times_{A_0} \dots \times_{A_0} A_1$  des objets de  $\partial\Delta[n]$  et de  $\Delta[n]$ . Comme  $\partial\Delta[n]$  et  $\Delta[n]$  ont les mêmes objets pour  $n > 0$ , seules les flèches de type  $Boit_m(f)$  avec  $f : \emptyset \rightarrow *$  modifient (en rajoutant) des éléments de  $A_1$ . Plus explicitement,  $Boit_m(\emptyset \rightarrow *)$  n'est autre que  $\Upsilon(m) \rightarrow \Delta[m]$  dont le rajout équivaut à donner une composée à un  $m$ -uplet de morphismes composables. On en conclut donc que les éléments de  $Cat(A)_1$  correspondent tous à des  $n$ -uplets d'éléments de  $A_1$  non composés d'autres éléments.

Soit  $\phi$  un morphisme de  $\tau_1(Cat(A))$ . Par ce qui précède, c'est la composée d'un  $n$ -uplet  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  de morphismes composables de  $\tau_1(A)$  qui ne sont pas des composés d'autres morphismes. Or ces derniers sont inversibles dans  $\tau_1(A)$  car  $A$  est un proto-groupeïde de Segal. Donc ils sont aussi inversibles dans  $\tau_1(Cat(A))$ . Comme toute composée d'inversibles est inversible,  $\phi$  est inversible, donc  $\tau_1(Cat(A))$  est un groupeïde.

CQFD.

Avec cette notion de proto-groupeïde de Segal, on peut mieux formuler l'existence et les propriétés de la précatégorie de Segal  $\bar{J}^{pre}$ . En outre si l'on demande que  $\bar{J}^{pre}$  soit un proto-groupeïde de Segal, alors, par le résultat que l'on vient de montrer, sa catégorisation  $\bar{J}$  sera bien un groupeïde de Segal.

**Proposition 6.2.8 (-définition)** *Il existe un proto-groupeïde de Segal  $\bar{J}^{pre}$  ayant deux objets notés 0 et 1 et un morphisme noté  $u$  de 0 à 1 et qui vérifie la propriété suivante :*

*pour toute précatégorie de Segal  $A$  et pour tout élément  $f$  de  $A_1$  proto-inversible, il existe un morphisme de  $\bar{J}^{pre}$  vers  $A$  envoyant  $u$  sur  $f$ .*

*Preuve :*

Donnons une construction pour  $\bar{J}^{pre}$ . On commence par prendre le coproduit de deux  $\Delta[0]$  notés 0 et 1. On prend ensuite la somme amalgamée de ce coproduit avec un coproduit de deux  $\Delta[1]$  notés  $u$  et  $v$  sur un coproduit de deux

$\Delta[0] \amalg \Delta[0]$  telle que  $s(u) = 0 = b(v)$  et  $b(u) = 1 = s(v)$ . Puis prenons la somme amalgamée de ce qui précède par un coproduit de deux  $\Delta[2]$  notés  $T_1$  et  $T_2$  sur un coproduit de deux  $\Delta[1] \amalg \Delta[1]$  telle que  $\delta_{0,1}(T_1) = u = \delta_{1,2}(T_2)$  et  $\delta_{1,2}(T_1) = v = \delta_{0,1}(T_2)$ . Enfin considérons la somme amalgamée de la construction précédente par un coproduit de deux  $\Delta[1] \Theta \bar{I}$  notés  $\alpha$  et  $\beta$  sur un coproduit de deux  $\Delta[1] \amalg \Delta[1]$  telle que  $\alpha \rightarrow (\delta_{0,2}(T_1), Id_0)$  et  $\beta \rightarrow (\delta_{0,2}(T_2), Id_1)$ . Il est facile de voir que  $\bar{J}^{pre}$  ainsi défini est bien un proto-groupeïde de Segal. La propriété de  $\bar{J}^{pre}$  est également évidente car il suffit d'envoyer  $u$  sur  $f$  et  $v, T_1, T_2, \alpha, \beta$  sur les éléments rendant  $f$  proto-inversible. CQFD.

Le proto-groupeïde de Segal  $\bar{J}^{pre}$  étant défini, on peut maintenant énoncer l'existence et les propriétés de sa catégorisation  $\bar{J}$ .

**Proposition 6.2.9 (-définition)** *Il existe un groupeïde de Segal  $\bar{J}$  ayant deux objets équivalents notés 0 et 1 vérifiant la propriété suivante : pour toute catégorie de Segal facile  $A$  et pour tout couple  $(a, b)$  d'objets de  $A$  équivalents, il existe un morphisme de  $\bar{J}$  vers  $A$  envoyant 0 et 1 sur  $a$  et  $b$ .*

*Preuve :*

Posons  $\bar{J} = Cat(\bar{J}^{pre})$ . Comme  $\bar{J}^{pre}$  est proto-groupeïdique par définition, sa catégorisation  $\bar{J}$  est bien un groupeïde de Segal, d'après le lemme précédent. En outre, le fait que  $u$  soit un morphisme proto-inversible entre 0 et 1 dans  $\bar{J}^{pre}$  assure que  $u$  est inversible à homotopie près dans  $\bar{J}$ , donc que 0 et 1 sont équivalents dans  $\bar{J}$ .

Soit  $A$  une catégorie de Segal facile et  $a$  et  $b$  deux de ses objets ayant la propriété d'être équivalents. Ceci signifie qu'il existe un morphisme  $f$  de 0 vers 1 qui est inversible à homotopie près, en particulier  $f$  est proto-inversible. Par définition de  $\bar{J}^{pre}$ , il existe donc un morphisme de  $\bar{J}^{pre}$  vers  $A$  envoyant  $u$  sur  $f$ , donc 0 et 1 sur  $a$  et  $b$ . Comme  $A$  est une catégorie facile, ce morphisme se factorise par  $Cat(\bar{J}^{pre}) = \bar{J}$ .

CQFD.

On a donc bien défini un intervalle  $\bar{J}$  qui reconnaît les objets équivalents d'une catégorie de Segal facile. Toutefois pour que cet intervalle vérifie la partie c) de l'hypothèse R') de l'ébauche 2 du théorème central, il va falloir au préalable montrer qu'une équivalence entre groupeïdes de Segal équivaut à une équivalence d'homotopie faible entre leurs réalisations géométriques.

## 6.3 Théorie homotopique des groupoïdes de Segal

L'idée pour montrer qu'il existe une équivalence de catégories de Segal entre l'intervalle  $\bar{J}$  et sa sous-catégorie de Segal pleine d'objet 0 est de travailler au niveau des réalisations géométriques de  $\bar{J}$  et de sa sous-catégorie de Segal pleine d'objet 0. Evidemment cela n'est réalisable que si l'on montre qu'une équivalence entre groupoïdes de Segal équivaut à une équivalence d'homotopie faible entre leurs réalisations géométriques. Afin de montrer ce résultat, nous allons montrer l'équivalence des théories homotopiques des groupoïdes de Segal et des espaces topologiques en nous inspirant de l'équivalence de théories homotopiques entre les ensembles simpliciaux et les espaces topologiques. Mais commençons tout d'abord par définir la réalisation géométrique des groupoïdes de Segal.

### 6.3.1 Réalisation géométrique

Comme les précatégories de Segal sont des ensembles bi-simpliciaux, il existe une réalisation géométrique naturelle les concernant.

**Définition 6.3.1** *Le foncteur réalisation géométrique  $|\cdot|$  des précatégories de Segal est la composée de l'inclusion des précatégories de Segal dans les ensembles bi-simpliciaux avec le foncteur réalisation géométrique des ensembles bi-simpliciaux.*

Comme nous voulons étudier de près la réalisation géométrique de l'intervalle  $\bar{J}$ , nous allons chercher un espace topologique simple avec lequel sa réalisation est homotope. Cependant comme  $\bar{J}$  est défini comme un catégorisé, il est vraiment difficile de calculer sa réalisation, ce qui n'est pas le cas du proto-groupoïde de Segal  $\bar{J}^{pre}$  dont il est le catégorisé. Commençons donc par trouver à quel espace est homotope  $\bar{J}^{pre}$ .

**Lemme 6.3.2**  *$|\bar{J}^{pre}|$  est homotope à une sphère.*

*Preuve :*

Comme le foncteur  $|\cdot|$  préserve les colimites par composée de foncteurs préservant les colimites, on obtient que  $|\bar{J}^{pre}|$  est la colimite des réalisations géométriques des éléments dont  $\bar{J}^{pre}$  est la colimite, à savoir deux points 0 et 1, deux segments  $u$  et  $v$ , deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  et deux disques  $\alpha$  et  $\beta$ , réalisations géométriques de  $\Delta[1]\Theta\bar{J}$ .

Montrons que  $|\bar{J}^{pre}|$  est isomorphe à un cylindre fermé. Considérons le cylindre ouvert  $\mathbb{R} \times [0, 1]/(x, y) \sim (x + 1, y)$ . Envoyons alors 0 sur le point  $(0, 1)$ , 1 sur le point  $(1/2, 0)$ ,  $u$  sur le segment  $\{t(0, 1) + t'(1/2, 0), t + t' = 1, 0 \leq t, t' \leq 1\}$ ,  $v$  sur le segment  $\{t'(1, 1) + t(1/2, 0), t + t' = 1, 0 \leq t, t' \leq 1\}$ ,  $T_1$  sur le triangle  $\{t(0, 1) + t'(1/2, 0) + t''(1, 1), t + t' + t'' = 1, 0 \leq t, t', t'' \leq 1\}$  et  $T_2$  sur le triangle  $\{t(1/2, 0) + t'(1, 1) + t''(3/2, 0), t + t' + t'' = 1, 0 \leq t, t', t'' \leq 1\}$ . Il est facile de voir d'une part que cela définit bien une application de  $|\bar{J}^{pre}|$  privé des deux disques  $\alpha$  et  $\beta$  vers le cylindre ouvert, et d'autre part que cette application est bijective. Le disque  $\alpha$  se colle sur  $|\bar{J}^{pre}|$  privé des deux disques de la manière suivante : le bord du disque se colle sur le cercle réalisation géométrique de  $\delta_{0,2}(T_1)$ . Or ce dernier s'envoie dans le cylindre sur le bord haut du cylindre ( $\{(t, 1), 0 \leq t \leq 1\}$ ). Ainsi le disque  $\alpha$  correspond au couvercle du haut du cylindre. De même, le disque  $\beta$  correspond au couvercle du bas du cylindre. Donc  $|\bar{J}^{pre}|$  est bien isomorphe à un cylindre fermé, i.e. avec ses couvercles, et ainsi  $|\bar{J}^{pre}|$  est bien homotope à une sphère.  
CQFD.

Bien entendu ceci ne répond pas à la question du type d'homotopie de la réalisation de  $\bar{J}$ . Néanmoins  $\bar{J}$  est la catégorisation de  $\bar{J}^{pre}$  et, comme la réalisation géométrique commute aux colimites, la réalisation géométrique de  $\bar{J}$  n'est autre que la "catégorisation" de la réalisation géométrique de  $\bar{J}^{pre}$ . Il faut donc montrer que cette "catégorisation" des réalisations géométriques conserve l'homotopie. Plus précisément, il s'agit de faire une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées à partir des réalisations géométriques des flèches génératrices des catégories de Segal faciles. Comme la catégorie des espaces topologiques est une catégorie de modèles fermée, il suffit de montrer que les réalisations géométriques des flèches génératrices des catégories de Segal faciles sont des cofibrations triviales d'espaces topologiques pour montrer que la "catégorisation" des réalisations géométriques conserve l'homotopie.

**Lemme 6.3.3** *La réalisation géométrique d'une flèche de  $\mathcal{FG}2$  est une cofibration triviale dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{TOP}$ .*

*Preuve :*

Tout d'abord on remarque que la réalisation géométrique préserve les cofibrations comme composée de foncteurs les préservant. Ainsi comme les flèches de  $\mathcal{FG}2$  sont des cofibrations, leurs réalisations géométriques également. Pour montrer que les réalisations géométriques des flèches de  $\mathcal{FG}2$  sont des équivalences d'homotopie faibles, on prendra bien garde de ne pas dire que c'est par préservation des équivalences faibles par réalisation géométrique, car un tel

résultat sur les précatégories de Segal n'existe pas. En revanche, on calculera explicitement ce que valent les réalisations des flèches de  $\mathcal{FG}2$  et on observera aisément que ce sont des inclusions d'espaces topologiques dont la source est un rétract par déformation du but. Ces calculs sont assez semblables, pour ne pas dire identiques, à ceux de Tamsamani dans [6]. Ainsi les réalisations des flèches de  $\mathcal{FG}2$  sont des équivalences d'homotopie faibles.  
CQFD.

Grâce à ce résultat, nous pouvons maintenant montrer que les réalisations géométriques d'une précatégorie de Segal et de sa catégorisation sont homotopes.

**Lemme 6.3.4** *Soit  $A$  une précatégorie de Segal. Alors  $|can_A| : |A| \rightarrow |Cat(A)|$  est une équivalence d'homotopie faible.*

*Preuve :*

Comme le foncteur réalisation géométrique préserve les colimites, la réalisation de  $can_A$  est la colimite séquentielle transfinie commençant avec la réalisation géométrique de  $A$  de sommes amalgamées le long d'un morphisme des réalisations géométriques des flèches génératrices. Ici les seules flèches génératrices appartiennent à  $\mathcal{FG}2$  car  $\mathcal{FG}1$  est vide. Or, d'après le lemme précédent les réalisations géométriques de ces flèches sont des cofibrations triviales dans  $TOP$ . Comme  $TOP$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations triviales sont stables par sommes amalgamées le long d'un morphisme et par colimite séquentielle transfinie. Donc la réalisation de  $can_A$  est une cofibration triviale, donc en particulier une équivalence d'homotopie faible.  
CQFD.

Comme nous avons déjà montré que la réalisation géométrique de  $\bar{J}^{pre}$  est homotope à une sphère, il découle de la préservation de l'homotopie des réalisations géométriques par catégorisation que la réalisation géométrique de l'intervalle  $\bar{J}$  est aussi homotope à une sphère.

**Corollaire 6.3.5**  *$|\bar{J}|$  est faiblement homotope à une sphère.*

*Preuve :*

Comme  $|\bar{J}^{pre}|$  est homotope à une sphère et que  $\bar{J}$  n'est autre que  $Cat(\bar{J}^{pre})$ , alors  $|\bar{J}|$  est faiblement homotope à une sphère par le lemme précédent appliqué à  $\bar{J}^{pre}$ .  
CQFD.

Avant de se préoccuper de montrer qu'il existe un morphisme entre l'intervalle  $\bar{J}$  et sa sous-catégorie pleine d'objet 0 dont la réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie, montrons tout d'abord que pour prouver qu'un morphisme de groupoïdes de Segal est une équivalence de catégories de Segal il faut et il suffit de montrer que sa réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie. Comme nous avons un foncteur réalisation géométrique des précatégories de Segal vers les espaces topologiques, définissons un foncteur singulier des espaces topologiques vers les précatégories de Segal.

### 6.3.2 Foncteur singulier des espaces topologiques vers les groupoïdes de Segal

Pour définir un foncteur singulier qui à tout espace topologique associe une précatégorie de Segal, comme pour la réalisation géométrique, on va remarquer que la catégorie des précatégories de Segal est une sous-catégorie pleine de celle des ensembles bi-simpliciaux.

**Définition 6.3.6** *Soit  $X$  un espace topologique. On définit  $SSing(X)$  de la manière suivante : on considère d'abord le foncteur covariant  $\Delta[\cdot] : \Delta \rightarrow \mathcal{ENSSIMP}$  qui à un entier  $n$  associe l'ensemble simplicial  $\Delta[n]$ . On prend son produit avec lui-même  $\Delta[\cdot] \times \Delta[\cdot] : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathcal{ENSSIMP} \times \mathcal{ENSSIMP}$  et on le compose avec le bi-foncteur covariant  $*\Theta* : \mathcal{ENSSIMP} \times \mathcal{ENSSIMP} \rightarrow \mathcal{ENSSIMP} - \mathcal{PC}$ . Puis on compose cela par le foncteur réalisation géométrique des précatégories de Segal  $|\cdot| : \mathcal{ENSSIMP} - \mathcal{PC} \rightarrow \mathcal{TOP}$  qui est covariant. Enfin on compose le tout avec le foncteur contravariant  $Hom_{\mathcal{TOP}}(\cdot, X) : \mathcal{TOP} \rightarrow \mathcal{ENS}$ . Le résultat de toutes ces compositions est un foncteur contravariant de  $\Delta \times \Delta$  vers  $\mathcal{ENS}$  que l'on notera  $Sing(X)$ .*

*On peut résumer par la formule suivante :*

$$SSing(X) = Hom_{\mathcal{TOP}}(|\Delta[\cdot] \Theta \Delta[\cdot]|, X)$$

Bien évidemment cette construction est bien fonctorielle et à valeurs dans les précatégories de Segal.

**Lemme 6.3.7** *La construction  $SSing(\cdot)$  est un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques vers celle des précatégories de Segal, appelé foncteur singulier.*

*Preuve :*

La functorialité de  $SSing(\cdot)$  vient de la functorialité de  $Hom_{\mathcal{TOP}}(|\Delta[\cdot] \Theta \Delta[\cdot]|, X)$



en  $X$ . Par construction  $SSing(X)$  est un ensemble bi-simplicial. Pour montrer que c'est une précatégorie de Segal, il faut montrer que  $SSing(X)_0$  est un ensemble discret. Pour cela il suffit de remarquer que par construction les  $\Delta[0] \Theta \Delta[m]$ , pour  $m \geq 0$ , sont tous égaux entre eux et valent  $\Delta[0]$  et que les applications entre eux induites par la catégorie simpliciale  $\Delta$  valent toute l'identité de  $\Delta_0$ . Comme  $Hom_{\mathcal{TOP}}(\cdot, X)$  est un foncteur à  $X$  fixé, il vient que tous les  $SSing(X)_{0,m}$  sont égaux entre eux et que les morphismes dus à la structure simpliciale en le second indice sont tous des identités. Ceci montre que  $SSing(X)_0$  est discret et donc que  $SSing(X)$  est une précatégorie de Segal pour tout espace topologique  $X$ .

CQFD.

Comme pour les ensembles simpliciaux le foncteur singulier est adjoint au foncteur réalisation géométrique, on s'attend à ce que ce soit aussi le cas ici. L'idée pour montrer cette adjonction est d'utiliser le lemme de Yoneda. Donnons donc une sorte de lemme de Yoneda pour les précatégories de Segal.

**Lemme 6.3.8** *Pour toute précatégorie de Segal  $A$  et pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers, l'ensemble  $A_{m,n}$  est naturellement isomorphe à l'ensemble des morphismes de précatégories de Segal allant de  $\Delta[m] \Theta \Delta[n]$  vers  $A$ .*

*Preuve :*

Par propriété de la construction  $\Theta$ , on a un isomorphisme naturel entre l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C} - \mathcal{PC}$  de  $\Delta[m] \Theta X$  vers  $A$  envoyant le  $m + 1$ -uplet d'objets  $(0, \dots, m)$  de  $\Delta[m] \Theta X$  sur le  $m + 1$ -uplet d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  de  $A$  et l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{C}$  de  $X$  vers  $A_m(a_0, \dots, a_m)$ . Ceci est en particulier vrai pour  $\mathcal{C} = \mathcal{ENSSIMP}$ . En outre, par Yoneda, l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{ENSSIMP}$  de  $\Delta[n]$  vers  $A_m(a_0, \dots, a_m)$  est naturellement isomorphe à l'ensemble  $(A_m(a_0, \dots, a_m))_n$  qui n'est autre que  $A_{m,n}(a_0, \dots, a_m)$ , par bi-simplicialité de  $A$ . Ceci montre que l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{ENSSIMP} - \mathcal{PC}$  de  $\Delta[m] \Theta \Delta[n]$  vers  $A$  envoyant le  $m + 1$ -uplet d'objets  $(0, \dots, m)$  de  $\Delta[m] \Theta X$  sur le  $m + 1$ -uplet d'objets  $(a_0, \dots, a_m)$  de  $A$  est naturellement isomorphe à l'ensemble  $A_{m,n}(a_0, \dots, a_m)$ . Comme l'ensemble  $A_{m,n}$  est le coproduit des  $A_{m,n}(a_0, \dots, a_m)$  avec  $(a_0, \dots, a_m)$  décrivant le produit  $m$  fois de l'ensemble  $A_0$  avec lui-même, il vient que l'ensemble des morphismes dans  $\mathcal{ENSSIMP} - \mathcal{PC}$  de  $\Delta[m] \Theta \Delta[n]$  vers  $A$  est naturellement isomorphe à l'ensemble  $A_{m,n}$ .

CQFD.

Comme par ce simili-lemme de Yoneda, un élément de  $A_{m,n}$  est représenté par la précatégorie de Segal  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$ , il vient que toute précatégorie de Segal n'est autre qu'une colimite de ces précatégories élémentaires  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$ .

**Corollaire 6.3.9** *Toute précatégorie de Segal  $A$  est naturellement isomorphe à la colimite des  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$ , pour  $m, n \in \mathbb{N}$ , indexé par les ensembles de morphismes de précatégories de Segal de  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$  vers  $A$ .*

*Preuve :* c'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme naturel du lemme précédent. CQFD.

De ce résultat découle l'adjonction entre le foncteur singulier et le foncteur réalisation géométrique des précatégories de Segal.

**Corollaire 6.3.10** *Le foncteur singulier  $SSing$  est adjoint à droite du foncteur réalisation géométrique.*

*Preuve :*

Soient  $A$  une précatégorie de Segal et  $X$  un espace topologique. Par le corollaire précédent,  $A$  est naturellement isomorphe à la colimite des  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$ . Donc comme  $|\cdot|$  est un foncteur préservant les colimites,  $|A|$  est naturellement isomorphe à la colimite des  $|\Delta[m]\Theta\Delta[n]|$ . Par propriété universelle de la colimite, il vient que  $Hom_{\mathcal{TOP}}(|A|, X)$  est naturellement isomorphe à la colimite des  $Hom_{\mathcal{TOP}}(|\Delta[m]\Theta\Delta[n]|, X)$ . Or cet ensemble n'est autre que  $SSing(X)_{m,n}$ , qui par le lemme précédent est naturellement isomorphe à l'ensemble des morphismes de précatégories de Segal de  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$  dans  $SSing(X)$ . Ainsi  $Hom_{\mathcal{TOP}}(|A|, X)$  est naturellement isomorphe à la colimite des  $Hom_{\mathcal{ENSSIMP-PC}}(\Delta[m]\Theta\Delta[n], SSing(X))$ . Par le corollaire précédent,  $A$  est isomorphe à la colimite des  $\Delta[m]\Theta\Delta[n]$ . Donc par propriété universelle de la colimite, il vient que la colimite des  $Hom_{\mathcal{ENSSIMP-PC}}(\Delta[m]\Theta\Delta[n], SSing(X))$  est naturellement isomorphe à  $Hom_{\mathcal{ENSSIMP-PC}}(A, SSing(X))$ .

On a donc bien que  $Hom_{\mathcal{TOP}}(|A|, X)$  est naturellement isomorphe à  $Hom_{\mathcal{ENSSIMP-PC}}(A, SSing(X))$ .

CQFD.

Cependant de même que le foncteur singulier des ensembles simpliciaux tombe dans les ensembles simpliciaux fibrants de Kan, le foncteur singulier  $SSing$  tombe dans les groupoïdes de Segal.

**Lemme 6.3.11** *Pour tout espace topologique  $X$ , la précatégorie de Segal  $SSing(X)$  est un groupoïde de Segal.*

*Preuve :*

On a déjà vu que  $SSing(X)$  est une précatégorie de Segal pour tout espace topologique  $X$ . Montrons tout d'abord que cette précatégorie de Segal est une catégorie de Segal facile, i.e. se relève par rapport aux flèches de la famille  $\mathcal{FG}2$ , puisque la famille  $\mathcal{FG}1$  est vide. Considérons alors un diagramme du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & SSing(X) \\ \downarrow f \in \mathcal{FG}_2 & & \nearrow \exists? \\ B & & \end{array}$$

Par adjonction des foncteurs  $SSing$  et  $|\cdot|$ , on obtient alors le diagramme équivalent suivant :

$$\begin{array}{ccc} |A| & \xrightarrow{|g|} & X \\ \downarrow |f| & & \nearrow \exists? \\ |B| & & \end{array}$$

Comme dans la démonstration de la préservation du type d'homotopie de la réalisation géométrique par catégorisation, en calculant explicitement les réalisations géométriques des flèches de  $\mathcal{FG}2$ , on trouve que ce sont des inclusions munies de rétractions qui en font des équivalences d'homotopie faibles. Soit  $r : |B| \rightarrow |A|$  la rétraction de  $|f|$ , on a donc que  $r \circ |f| = Id_{|A|}$ . Alors la composée  $|g| \circ r$  qui va de  $|B|$  vers  $X$  vérifie l'égalité suivante :

$$(|g| \circ r) \circ |f| = |g| \circ (r \circ |f|) = |g| \circ Id_{|A|} = |g|.$$

Donc  $|g| \circ r$  est un relèvement du second diagramme. Comme par adjonction des foncteurs  $SSing$  et  $|\cdot|$ , les deux diagrammes sont équivalents, alors le premier diagramme se relève, ce qui montre que  $SSing(X)$  se relève par rapport aux flèches de  $\mathcal{FG}2$ . Ainsi  $SSing(X)$  est une catégorie de Segal facile.

Montrons maintenant que  $SSing(X)$  un groupoïde de Segal, i.e. que  $\tau_1(SSing(X))$  est un groupoïde. Soit  $u$  un morphisme de  $\tau_1(SSing(X))$  et  $f$  un élément de  $SSing(X)_1$  représentant la classe  $u$ .  $f$  est donc une application

continue de  $|\Delta[1]\Theta\Delta[0]|$ , qui n'est autre que le segment  $[0, 1]$ , vers  $X$ , donc  $f$  est un chemin de  $X$ . Considérons alors  $f^{-1}$  le chemin inverse de  $f$ . Notons  $v$  sa classe dans  $\tau_1(SSing(X))$ . Comme les chemins composés  $f^{-1} \circ f$  et  $f \circ f^{-1}$  sont homotopes aux chemins constants  $Id_{s(f)}$  et  $Id_{b(f)}$ , dans  $\tau_1(SSing(X))$  ceci se traduit par le fait que  $v \circ u$  et  $u \circ v$  sont des identités, donc que  $u$  est inversible d'inverse  $v$ . On a donc montré que  $\tau_1(SSing(X))$  est un groupoïde, donc que  $SSing(X)$  est un groupoïde de Segal. CQFD.

Ainsi pour tout espace topologique  $X$ ,  $SSing(X)$  est un groupoïde de Segal. De ce fait, le groupoïde de Segal  $SSing(X)$  possède des groupes d'homotopie qu'il serait intéressant de comparer à ceux de l'espace topologique  $X$ .

**Lemme 6.3.12** *Pour tout espace topologique  $X$ , les groupes d'homotopie du groupoïde de Segal  $SSing(X)$  sont isomorphes naturellement à ceux de  $X$ .*

*Preuve :*

Pour commencer, remarquons que la réalisation géométrique de  $\Delta[1]\Theta\Delta[0]$  est le segment  $[0, 1]$ , qui est l'espace topologique caractérisant les chemins. La réalisation géométrique de  $\Delta[1]\Theta\Delta[1]$  est le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  quotienté par la relation suivante :  $(0, y) \sim (0, y')$  et  $(1, y) \sim (1, y')$ . Or cet espace topologique caractérise les homotopies de chemins à extrémités fixes. Pour  $n > 1$ , la réalisation géométrique de  $\Delta[1]\Theta\Delta[n]$  est le cylindre de base un  $n$ -simplexe  $[0, 1] \times [0, 1]^n$  quotienté par la relation suivante :  $(0, Y) \sim (0, Y')$  et  $(1, Y) \sim (1, Y')$ . Cet espace topologique caractérise les compositions de  $n$  homotopies entre  $n + 1$  chemins ayant les mêmes extrémités.

De ces constatations découlent les identifications suivantes :  $SSing(X)_{1,0}$  est l'ensemble des chemins de  $X$ ,  $SSing(X)_{1,1}$  est l'ensemble des homotopies de chemins de  $X$  à extrémités fixes et, pour  $n > 1$ ,  $SSing(X)_{1,n}$  est l'ensemble des compositions de  $n$  homotopies de chemins de  $X$  à extrémités fixes. Or ceci n'est autre que l'ensemble simplicial  $Sing(X^{[0,1]})$ , image de l'espace des chemins de  $X$  par le foncteur singulier des ensembles simpliciaux. De même, on obtient que l'ensemble simplicial  $SSing(X)_1(x, x)$  n'est autre que l'ensemble simplicial  $Sing(\Omega(X, x))$ , image de l'espace des lacets de  $X$  en  $x$  par le foncteur singulier des ensembles simpliciaux.

Comme on a vu au lemme précédent que  $SSing(X)$  est un groupoïde de Segal, on peut donc parler de ses groupes d'homotopie. Soit  $n > 1$ , on a par

définition des groupes d'homotopie d'un groupoïde de Segal que

$$\pi_n(SSing(X), x) = \pi_{n-1}(|SSing(X)_1(x, x)|, Id_x).$$

Or on a vu ci-dessus que  $SSing(X)_1(x, x)$  n'est autre que  $Sing(\Omega(X, x))$ . Comme en outre le couple de foncteurs  $(|\cdot|, Sing)$  forme une paire d'équivalences de Quillen entre la catégorie des ensembles simpliciaux et celle des espaces topologiques, la réalisation géométrique de  $Sing(\Omega(X, x))$ , donc de  $SSing(X)_1(x, x)$ , est naturellement isomorphe à  $\Omega(X, x)$ . Ainsi  $\pi_{n-1}(|SSing(X)_1(x, x)|, Id_x)$  est naturellement isomorphe au groupe  $\pi_{n-1}(\Omega(X, x), Id_x)$  qui n'est autre que  $\pi_n(X, x)$ , par propriété de  $\Omega(X, x)$ . On a donc montré que pour tout entier  $n > 1$ , les groupes d'homotopie  $\pi_n(SSing(X), x)$  et  $\pi_n(X, x)$  sont naturellement isomorphes. Et on montre de manière similaire que le groupe d'homotopie  $\pi_1(SSing(X), x)$ , qui par définition n'est autre que  $\pi_0(|SSing(X)_1(1, 1)|)$ , est naturellement en bijection avec  $\pi_0(\Omega(X, x))$ , qui n'est autre que  $\pi_1(X, x)$ . Ceci au passage munit  $\pi_1(SSing(X), x)$  d'une structure de groupe.

Comme on l'a vu précédemment,  $SSing(X)_1$  est en fait  $Sing(X^{[0,1]})$  et donc sa réalisation est naturellement isomorphe à  $X^{[0,1]}$ , car  $(|\cdot|, Sing)$  est une paire d'équivalences de Quillen. Ainsi  $\tau_1(SSing(X))_1$ , qui par définition vaut  $\pi_0(|SSing(X)_1|)$ , est naturellement en bijection avec  $\pi_0(X^{[0,1]})$ . Comme tout élément de  $\tau_1(SSing(X))_1$  est une classe représenté par un chemin de  $X$  et que toute classe est inversible car  $SSing(X)$  est un groupoïde de Segal, tout chemin représente dans  $\tau_1(SSing(X))$  une équivalence entre ses extrémités. Ceci montre que si deux points de  $X$  sont dans la même composante connexe, comme alors il existe un chemin les liant et que ce chemin représente une équivalence entre eux, par ce qui précède, alors ces deux points ont même classe dans  $\tau_0(SSing(X)) = \pi_0(SSing(X))$ . Réciproquement, si deux points de  $SSing(X)$  sont équivalents, il existe un isomorphisme dans  $\tau_1(SSing(X))$  qui est une classe dont tous les représentants sont des chemins liant ces deux points qui sont, par conséquent, dans la même composante connexe. Ainsi on a montré que le morphisme identique entre les objets de  $SSing(X)$  et les points de  $X$  induit une bijection entre les ensembles quotients  $\pi_0(SSing(X))$  et  $\pi_0(X)$ .

CQFD.

Ce résultat d'équivalence de notions homotopiques entre  $X$  et  $SSing(X)$  entraîne le fait que toute équivalence d'homotopie faible entre espaces topologiques donne lieu par le foncteur singulier  $SSing$  à une équivalence de catégories de Segal entre groupoïdes de Segal.

**Corollaire 6.3.13** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue d'espaces topologiques simplement connexes. Si  $f$  est une équivalence d'homotopie faible alors  $SSing(f)$  est une équivalence de catégories de Segal.*

*Preuve :*

Par le lemme précédent, les groupes d'homotopie des groupoïdes de Segal  $SSing(X)$  et  $SSing(Y)$  sont naturellement isomorphes à ceux de  $X$  et  $Y$ . Comme  $f$  est une équivalence d'homotopie faible, i.e. induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie de  $X$  et  $Y$ , ce résultat entraîne que  $SSing(f)$  induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie des groupoïdes de Segal  $SSing(X)$  et  $SSing(Y)$ . Toutefois comme on l'a vu au lemme 6.2.4, cela ne suffit pas à montrer que  $SSing(f)$  est une équivalence de catégories de Segal, sauf si  $SSing(X)$  et  $SSing(Y)$  sont simplement connexes. Or ceci est vrai car  $X$  et  $Y$  sont simplement connexes par hypothèse et que ces derniers ont mêmes groupes d'homotopie que  $SSing(X)$  et  $SSing(Y)$ .

CQFD.

Ici l'hypothèse de simple connexité est nécessaire car, dans ce cas, un morphisme de groupoïde de Segal induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie est une équivalence de catégories de Segal.

Grâce à ce résultat, nous avons fait un premier pas dans la démonstration de l'équivalence entre équivalences de groupoïdes de Segal et équivalences d'homotopie de leurs réalisations géométriques. Afin d'aller plus avant sur cette voie, nous avons besoin d'introduire la notion de catégories topologiques, car Segal a montré sur les groupoïdes topologiques un résultat fondamental pour ces histoires d'équivalence de théories homotopiques (voir [6]).

### 6.3.3 Groupoïde topologique

Pour définir la notion de catégorie topologique, nous devons tout d'abord nous donner une donnée de Segal sur les espaces topologiques. Comme nous voulons que les catégories topologiques ne soient pas trop éloignées des catégories de Segal, nous allons nous inspirer de la donnée de Segal définissant les catégories de Segal pour définir les éléments constitutifs de la donnée de Segal qui va définir les catégories topologiques.

**Proposition 6.3.14 (-définition)** *La catégorie  $TOP$  munie des notions suivantes forme une donnée de Segal :*

*-un espace topologique régéal est un espace topologique quelconque,*

-une alliance d'espaces topologiques régaux est une équivalence d'homotopie faible,

-le foncteur de troncature  $\tau_0$  des espaces topologiques régaux est le foncteur composante connexe  $\pi_0$ ,

Pour cette donnée de Segal, les  $\mathcal{C}$ -précatégories seront appelées les précatégories topologiques, les  $\mathcal{C}$ -catégories les catégories topologiques et les équivalences de  $\mathcal{C}$ -catégories les équivalences de catégories topologiques.

*Preuve* : les propriétés de donnée de Segal se vérifient très facilement.

De même que nous avons défini la notion de groupoïde de Segal pour les catégories de Segal, nous allons pareillement définir une notion de groupoïde topologique pour les catégories topologiques.

**Définition 6.3.15** Une catégorie topologique  $A$  est un groupoïde topologique si  $\tau_1(A)$  est le nerf d'un groupoïde au sens des catégories. Les morphismes de groupoïdes topologiques sont les morphismes de précatégories topologiques et les équivalences de groupoïdes topologiques sont les équivalences de catégories topologiques.

Comme le foncteur réalisation géométrique des ensembles simpliciaux permet de passer de la catégorie  $\mathcal{ENSSIMP}$  à la catégorie  $\mathcal{TOP}$  tout en préservant la notion de donnée de Segal, nous allons voir comment le foncteur induit des précatégories de Segal aux précatégories topologiques se comporte vis-à-vis des notions de catégorie, de groupoïde et d'équivalence.

**Lemme 6.3.16** Notons  $|\cdot|_{simp}$  le foncteur réalisation géométrique des ensembles simpliciaux. Ce foncteur induit un foncteur, que l'on notera identiquement, de la catégorie des précatégories de Segal vers la catégorie des précatégories topologiques préservant les notions de catégorie, d'équivalence de catégories, de groupoïde et de  $\tau_0$ . Plus précisément, on a :

- 1)  $A$  est une catégorie de Segal si et seulement si  $|A|_{simp}$  est une catégorie topologique,
- 2) pour toute catégorie de Segal  $A$ , on a que  $\tau_1(A) = \tau_1(|A|_{simp})$ , en particulier  $\tau_0(A) = \tau_0(|A|_{simp})$ ,
- 3) soit  $f$  est un morphisme de catégories de Segal,  $f$  est une équivalence de catégories de Segal si et seulement si  $|f|_{simp}$  est une équivalence de catégories topologiques,

4) soit  $A$  une catégorie de Segal,  $A$  est un groupoïde de Segal si et seulement si  $|A|_{simp}$  est un groupoïde topologique.

*Preuve :*

1) Soit  $A$  une précatégorie de Segal. La précatégorie topologique  $|A|_{simp}$  n'est autre que la composée du préfaisceau  $A$  avec le foncteur  $|\cdot|_{simp}$ . Comme le foncteur réalisation géométrique des ensembles simpliciaux préserve les produits fibrés, les morphismes de Segal de  $|A|_{simp}$  ne sont autres que les réalisations géométriques de ceux de  $A$ . Or ces derniers sont des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux par définition si et seulement si leurs réalisations géométriques sont des équivalences d'homotopie faibles. Ainsi les morphismes de Segal de  $A$  sont des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux si et seulement si les morphismes de Segal de  $|A|_{simp}$  sont des équivalences d'homotopie faibles, ce qui signifie que  $A$  est une catégorie de Segal si et seulement si  $|A|_{simp}$  est une catégorie topologique. Ceci montre la première partie du lemme.

2) Par définition, la catégorie  $\tau_1(A)$  est obtenue par composition du préfaisceau  $A$  par le foncteur  $\tau_0$  des ensembles simpliciaux. Or ce dernier n'est autre que la composée du foncteur réalisation géométrique des ensembles simpliciaux avec le foncteur composante connexe des espaces topologiques. On a donc l'égalité ci-dessous :

$$\tau_1(A) = \pi_0 \circ |\cdot|_{simp} \circ A = \pi_0 \circ |A|_{simp} = \pi_0(|A|_{simp}).$$

D'un autre côté, pour une catégorie topologique  $B$ , la catégorie  $\tau_1(B)$  est obtenue par composition du préfaisceau  $B$  par le foncteur  $\tau_0$  des espaces topologiques qui n'est autre que le foncteur composante connexe  $\pi_0$ . Par ce qui précède, comme  $A$  est une catégorie de Segal,  $|A|_{simp}$  est une catégorie topologique, donc la catégorie  $\tau_1(|A|_{simp})$  est la composée du préfaisceau  $|A|_{simp}$  par le foncteur  $\pi_0$ . On a donc l'égalité suivante :

$$\tau_1(|A|_{simp}) = \pi_0 \circ |A|_{simp} = \pi_0(|A|_{simp}).$$

En comparant les égalités, il vient que  $\tau_1(A)$  et  $\tau_1(|A|_{simp})$  sont égaux par définition même des  $\tau_1$ . Comme en outre  $\tau_0(A)$  est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de la catégorie  $\tau_1(A)$  et que  $\tau_0(|A|_{simp})$  est l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de la catégorie  $\tau_1(|A|_{simp})$ , l'égalité des deux catégories  $\tau_1(A)$  et  $\tau_1(|A|_{simp})$  entraîne celle des ensembles  $\tau_0(A)$  et  $\tau_0(|A|_{simp})$ , ce qui montre la deuxième partie du lemme.

4) En outre dire qu'une catégorie de Segal  $A$  est un groupoïde de Segal c'est



dire que  $\tau_1(A)$  est le nerf d'un groupoïde, et dire que la catégorie topologique  $|A|_{simp}$  est un groupoïde topologique c'est dire que  $\tau_1(|A|_{simp})$  est un nerf de groupoïde. Or l'égalité des catégories  $\tau_1(A)$  et  $\tau_1(|A|_{simp})$  entraîne que  $A$  est un groupoïde de Segal si et seulement si  $|A|_{simp}$  est un groupoïde topologique, ce qui montre la quatrième partie du lemme.

3) Soit  $f$  un morphisme de catégories de Segal. L'égalité entre les  $\tau_0$  des catégories de Segal et de leurs catégories topologiques réalisées entraîne l'égalité entre  $\tau_0(f)$  et  $\tau_0(|f|_{simp})$ . Ainsi on obtient que  $f$  est essentiellement surjective si et seulement si  $|f|_{simp}$  l'est. En outre comme la réalisation géométrique des ensembles simpliciaux préserve les produits fibrés, il vient que, pour tout couple d'objets  $(x, y)$  de la source de  $f$ ,  $(|f|_{simp})_1(x, y)$  n'est autre que la réalisation géométrique de  $f_1(x, y)$ . Ainsi on obtient que  $f_1(x, y)$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux si et seulement si  $(|f|_{simp})_1(x, y)$  est une équivalence d'homotopie faible, ce qui signifie que  $f$  est pleinement fidèle si et seulement si  $|f|_{simp}$  l'est. On a donc bien montré que  $f$  est une équivalence de catégories de Segal si et seulement si  $|f|_{simp}$  est une équivalence de catégories topologiques, ce qui montre la troisième partie du lemme. CQFD.

Nous venons donc de montrer que la notion d'équivalence de catégories de Segal est équivalente à celle d'équivalence de catégories topologiques. Ainsi le problème de l'équivalence entre équivalences de groupoïdes de Segal et équivalences d'homotopie faibles de leurs réalisations géométriques devient un problème d'équivalence entre équivalences de groupoïdes topologiques et équivalences d'homotopie faibles de leurs réalisations géométriques. Nous allons donc maintenant montrer que la réalisation géométrique d'une équivalence entre groupoïdes topologiques est une équivalence d'homotopie faible. Pour cela, définissons d'abord une réalisation géométrique des précatégories topologiques.

**Définition 6.3.17** *Comme les précatégories topologiques peuvent être vues comme des ensembles simpliciaux dont les niveaux admettent une structure topologique (compatible avec la structure simpliciale), on définit le foncteur  $|\cdot|_{top}$  de réalisation géométrique des précatégories topologiques de la manière suivante.*

*Soit  $A$  une précatégorie topologique, la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial sous-jacent à  $A$  est de la forme suivante :*

$$|A|_{simp} = \left( \prod_{n \geq 0} \Delta[n] \times A_n \right) / \sim$$

où la relation d'équivalence est induite de la structure simpliciale et où les  $A_n$  sont considérés comme des ensembles, i.e. des espaces topologiques discrets. Alors on pose :

$$|A|_{top} = \left( \prod_{n \geq 0} \Delta[n] \times A_n \right) / \sim$$

La formule est la même que pour  $|A|_{simp}$  mais cette fois les  $A_n$  gardent leurs topologies propres. Ces topologies étant compatibles avec la structure simpliciale qui engendre la relation d'équivalence  $\sim$ , la topologie quotient de  $|A|_{top}$  a bien un sens.

La réalisation géométrique des précatégories topologiques définie, nous pouvons montrer que les réalisations géométriques d'équivalences de catégories topologiques entre groupoïdes topologiques sont des équivalences d'homotopie faibles.

**Proposition 6.3.18** *Le foncteur  $|\cdot|_{top}$  vérifie les deux propriétés suivantes :*

- si  $f$  est une équivalence de catégories topologiques entre groupoïdes topologiques alors  $|f|_{top}$  est une équivalence d'homotopie faible,
- pour tout groupoïde topologique  $\Phi$ , on a un isomorphisme naturel entre  $\tau_0(\Phi)$  et  $\pi_0(|\Phi|_{top})$ .

*Preuve :*

Pour démontrer cette proposition, nous nous servirons du théorème de Segal cité dans [6] qui s'énonce ainsi :

*Si  $\Phi$  est un groupoïde topologique, alors :*

- pour tout objet  $x, y$  de  $\Phi$ , le morphisme naturel  $\Phi_1(x, y) \rightarrow \text{Chemin}_{x,y}(|\Phi|_{top})$  est une équivalence d'homotopie faible,
- l'injection naturelle  $\Phi_0 \rightarrow |\Phi|_{top}$  induit une bijection de  $\tau_0(\Phi)$  avec  $\pi_0(|\Phi|_{top})$ , qui n'est autre que  $\pi_0(|\Phi|_{top})$ .

La deuxième partie du théorème de Segal nous donne directement la seconde partie de la proposition. Il ne reste donc plus qu'à montrer la première partie de la proposition.

Soit  $f : \Phi \rightarrow \Psi$  une équivalence de catégories topologiques entre groupoïdes

topologiques. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \tau_0(\Phi) & \xrightarrow{\tau_0(f)} & \tau_0(\Psi) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \pi_0(|\Phi|_{top}) & \xrightarrow{\pi_0(|f|_{top})} & \pi_0(|\Psi|_{top})
 \end{array}$$

Comme  $f$  est une équivalence de catégories topologiques,  $f$  est essentiellement surjective, i.e.  $\tau_0(f)$  est une bijection ensembliste. Comme, en outre,  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des groupoïdes topologiques, on peut leur appliquer le théorème de Segal dont la seconde partie nous donne la bijectivité des deux flèches verticales. D'où  $|f|_{top}$  induit une bijection sur les  $\pi_0$ .

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi_1(x, y) & \xrightarrow{f_1(x, y)} & \Psi_1(f(x), f(y)) \\
 \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\
 Chemin_{x,y}(|\Phi|_{top}) & \longrightarrow & Chemin_{f(x),f(y)}(|\Psi|_{top})
 \end{array}$$

Comme  $f$  est une équivalence de catégories topologiques,  $f$  est pleinement fidèle, i.e.  $f_1(x, y)$  est une équivalence d'homotopie faible. En outre comme  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des groupoïdes topologiques, on peut leur appliquer le théorème de Segal dont la première partie nous donne le fait que les deux flèches verticales sont des équivalences d'homotopie faibles. Comme les équivalences d'homotopie faibles vérifient l'axiome "trois pour deux", le morphisme entre espaces de chemins est aussi une équivalence d'homotopie faible. En particulier si  $x = y$ , on obtient une équivalence d'homotopie faible entre les espaces de lacets  $\Omega(|\Phi|_{top}, x)$  et  $\Omega(|\Psi|_{top}, f(x))$ , i.e.  $|f|_{top}$  induit des isomorphismes des  $\pi_j(\Omega(|\Phi|_{top}, x), Id_x)$  vers les  $\pi_j(\Omega(|\Psi|_{top}, f(x)), Id_{f(x)})$  pour  $j \geq 0$ . Par ailleurs par propriétés des espaces de lacets, on a les égalités suivantes :

$$\pi_j(\Omega(|\Phi|_{top}, x), Id_x) = \pi_{j+1}(|\Phi|_{top}, x),$$

$$\pi_j(\Omega(|\Psi|_{top}, f(x)), Id_{f(x)}) = \pi_{j+1}(|\Psi|_{top}, f(x)).$$

Ainsi on a obtenu que  $|f|_{top}$  induit des isomorphismes de groupes sur les  $\pi_i$  pour  $i > 0$ . Comme on a vu précédemment que  $|f|_{top}$  induit une bijection

sur les  $\pi_0$ , on a bien que  $|f|_{top}$  est une équivalence d'homotopie faible, ce qui montre la première partie de la proposition.  
 CQFD.

Comme les notions d'équivalence de catégories topologiques et d'équivalence de catégories de Segal sont équivalentes, on obtient donc que tout morphisme de groupoïdes de Segal qui est une équivalence de catégories de Segal se réalise géométriquement en une équivalence d'homotopie faible.

**Corollaire 6.3.19** *Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de groupoïdes de Segal. Si  $f$  est une équivalence de catégories de Segal alors sa réalisation géométrique  $|f|$  est une équivalence d'homotopie faible.*

*Preuve :*

Soit  $f$  une équivalence de catégories de Segal entre groupoïdes de Segal, alors par le lemme 6.3.16, le morphisme de précatégories topologiques  $|f|_{simp}$  est une équivalence de catégories topologiques entre groupoïdes topologiques. Par la proposition précédente, il vient que  $||f|_{simp}|_{top}$  est une équivalence d'homotopie faible. Or le foncteur réalisation géométrique des ensembles bi-simpliciaux et le foncteur composé  $|\cdot|_{top} \circ |\cdot|_{simp}$  sont naturellement isomorphes. Donc la réalisation géométrique  $|f|$  de  $f$  est bien une équivalence d'homotopie faible.  
 CQFD.

On obtient également comme corollaire de la proposition précédente un résultat très utile pour la suite qui compare la troncature  $\tau_0$  d'un groupoïde de Segal avec le groupe d'homotopie  $\pi_0$  de sa réalisation.

**Corollaire 6.3.20** *Pour tout groupoïde de Segal  $A$ , on a un isomorphisme naturel entre  $\tau_0(A)$  et  $\pi_0(|A|)$ .*

*Preuve :*

Soit  $A$  un groupoïde de Segal. Par le lemme 6.3.16,  $|A|_{simp}$  est un groupoïde topologique et le foncteur  $|\cdot|_{simp}$  préserve les  $\tau_0$ . Ainsi  $\tau_0(A)$  est égal à  $\tau_0(|A|_{simp})$  qui par la proposition précédente est naturellement isomorphe à  $\pi_0(||A|_{simp}|_{top})$ . Comme  $|A|$  est homéomorphe à  $||A|_{simp}|_{top}$ , on a bien que  $\tau_0(A)$  est naturellement isomorphe à  $\pi_0(|A|)$ .  
 CQFD.

Nous avons désormais en main tous les atouts nous permettant de montrer qu'un morphisme de groupoïdes de Segal est une équivalence de catégories de Segal si et seulement si sa réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie faible. La démonstration de ce résultat fait l'objet de la partie suivante.

### 6.3.4 Caractérisation par réalisation géométrique des équivalences de groupoïdes de Segal

Afin de montrer l'équivalence entre équivalences de groupoïdes de Segal et équivalences d'homotopie faibles de leurs réalisations géométriques, nous allons démontrer toute une série de lemmes sur la préservation de la notion d'homotopie par réalisation géométrique comme par foncteur singulier. Débutons par le fait que tout groupoïde de Segal est équivalent au groupoïde de Segal résultant de l'application du foncteur singulier à sa réalisation géométrique.

**Lemme 6.3.21** *Pour tout groupoïde de Segal  $A$ , le morphisme naturel  $A \rightarrow SSing(|A|)$ , donné par l'unité de l'adjonction des foncteurs  $SSing$  et  $|\cdot|$ , est une équivalence de catégories de Segal*

*Preuve :*

Notons  $\eta$  le morphisme naturel de  $A$  vers  $SSing(|A|)$ . Montrons que c'est une équivalence de catégories de Segal. Calculons tout d'abord  $\tau_0(SSing(|A|))$ . Comme, d'après le lemme 6.3.11,  $SSing(|A|)$  est un groupoïde de Segal, par définition de son  $\pi_0$ , on a que  $\pi_0(SSing(|A|))$  n'est autre que  $\tau_0(SSing(|A|))$ . En outre, on a par le lemme 6.3.12 que les groupes d'homotopie de  $SSing(|A|)$  sont naturellement isomorphes à ceux de  $|A|$ . Ainsi  $\pi_0(SSing(|A|))$  est naturellement isomorphe à  $\pi_0(|A|)$  et donc  $\tau_0(\eta)$  n'est autre que le morphisme naturel de  $\tau_0(A)$  dans  $\pi_0(|A|)$  qui est une bijection par le corollaire précédent appliqué au groupoïde de Segal  $A$ . Ceci montre qu'  $\eta$  est essentiellement surjective.

Montrons qu' $\eta$  est aussi pleinement fidèle, i.e. que, pour tout couple  $(x, y)$  d'objets de  $A$ ,  $\eta_1(x, y)$  est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, donc que  $|\eta_1(x, y)|_{simp}$  est une équivalence d'homotopie faible. D'après la démonstration du lemme 6.3.12, on a que  $SSing(|A|)_1(x, y)$  n'est autre que l'ensemble simplicial  $Sing(Chemin_{x,y}(|A|))$ . Ainsi  $|\eta_1(x, y)|_{simp}$  est un morphisme de  $|A_1(x, y)|_{simp}$  dans  $|Sing(Chemin_{x,y}(|A|))|_{simp}$ . Or les foncteurs  $Sing$  et  $|\cdot|_{simp}$  réalisent une équivalence de Quillen entre les ensembles simpliciaux et les espaces topologiques. En particulier, le morphisme naturel de  $|Sing(Chemin_{x,y}(|A|))|_{simp}$  dans  $Chemin_{x,y}(|A|)$  induit par l'adjonction est une équivalence d'homotopie faible. Précomposée par  $|\eta_1(x, y)|_{simp}$  on obtient le morphisme naturel de  $|A_1(x, y)|_{simp}$  dans  $Chemin_{x,y}(|A|)$ . Comme la réalisation géométrique des ensembles simpliciaux commute aux produits fibrés, on a que  $|A_1(x, y)|_{simp}$  n'est autre que  $(|A|_{simp})_1(x, y)$  et comme  $|A|$  et  $||A|_{simp}|_{top}$  sont homéomorphes, on obtient que la composée de  $|\eta_1(x, y)|_{simp}$

par le morphisme d'adjonction n'est autre que le morphisme naturel de  $(|A|_{simp})_1(x, y)$  vers  $Chemin_{x,y}(|A|_{simp}|_{top})$ . Or  $A$  est un groupoïde de Segal donc par le lemme 6.3.16,  $|A|_{simp}$  est un groupoïde topologique. On peut donc lui appliquer le théorème de Segal que l'on a rappelé au début de la démonstration de la proposition précédente, ce qui nous donne que le morphisme naturel de  $(|A|_{simp})_1(x, y)$  vers  $Chemin_{x,y}(|A|_{simp}|_{top})$  est une équivalence d'homotopie faible. En outre ce morphisme n'est autre que la composée de  $|\eta_1(x, y)|_{simp}$  par le morphisme d'adjonction qui est une équivalence d'homotopie faible, donc, comme les équivalences d'homotopie faibles vérifient l'axiome "trois pour deux",  $|\eta_1(x, y)|_{simp}$  est aussi une équivalence d'homotopie faible. Ainsi  $\eta_1(x, y)$  est bien une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, ce qui montre la pleine fidélité d' $\eta$ . Comme on a déjà vu qu' $\eta$  est essentiellement surjective, on a bien montré qu' $\eta$  est une équivalence de catégories de Segal.  
CQFD.

Ce résultat a un corollaire très intéressant qui montre que les groupes d'homotopie des groupoïdes de Segal sont isomorphes à ceux de leurs réalisations géométriques.

**Corollaire 6.3.22** *Les groupes d'homotopie d'un groupoïde de Segal sont naturellement isomorphes à ceux de sa réalisation géométrique.*

*Preuve :*

Par le lemme précédent, pour tout groupoïde de Segal  $A$ , le morphisme naturel d'adjonction  $A \rightarrow SSing(|A|)$  est une équivalence de catégories de Segal. Or  $A$  est un groupoïde de Segal par hypothèse et  $SSing(|A|)$  est un groupoïde de Segal par le lemme 6.3.11, donc  $A \rightarrow SSing(|A|)$  est une équivalence de catégories de Segal entre groupoïdes de Segal. Par la remarque qui suit le lemme 6.2.4,  $A \rightarrow SSing(|A|)$  induit des isomorphismes au niveau des groupes d'homotopie des groupoïdes de Segal. En outre, d'après le lemme 6.3.12, les groupes d'homotopie de  $SSing(|A|)$  sont naturellement isomorphes à ceux de  $|A|$ . Ainsi les groupes d'homotopie du groupoïde de Segal  $A$  sont isomorphes à ceux de  $SSing(|A|)$ , car l'unité de l'adjonction est une équivalence de catégorie de Segal entre groupoïdes de Segal, et les groupes d'homotopie de  $SSing(|A|)$  sont naturellement isomorphes à ceux de  $|A|$  par le lemme 6.3.12. Par composition des isomorphismes naturels, on obtient bien que les groupes d'homotopie du groupoïde de Segal  $A$  sont naturellement isomorphes à ceux de  $|A|$ .  
CQFD.

On remarque au passage que la bijection naturelle des  $\pi_1$  des groupoïdes de Segal avec ceux de leurs réalisations géométriques munissent les  $\pi_1$  des groupoïdes de Segal d'une structure de groupe.

On en arrive alors au résultat tant attendu de l'équivalence entre les notions d'équivalence de groupoïdes de Segal et d'équivalence d'homotopie faible de leurs réalisations géométriques.

**Corollaire 6.3.23** *Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de groupoïdes de Segal simplement connexes, alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- i)  $f : A \rightarrow B$  est une équivalence de catégories de Segal,*
- ii)  $|f| : |A| \rightarrow |B|$  est une équivalence d'homotopie faible.*

*Preuve :*

On a déjà montré au corollaire 6.3.19 que i) implique ii). Montrons donc la réciproque. Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de groupoïdes de Segal simplement connexes dont la réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie faible. Montrons qu'alors  $f$  est une équivalence de catégories de Segal. Comme par hypothèse,  $|f|$  est une équivalence d'homotopie faible, elle induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie de  $|A|$  et de  $|B|$ . Or l'on a, d'après le corollaire précédent, que, comme  $A$  et  $B$  sont des groupoïdes de Segal, leurs groupes d'homotopie sont naturellement isomorphes à ceux de leurs réalisations géométriques. Ainsi  $f$  induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie des groupoïdes de Segal  $A$  et  $B$ . Or par hypothèse  $A$  et  $B$  sont simplement connexes donc on peut appliquer le lemme 6.2.4 à  $f$ , ce qui nous donne que  $f$  est bien une équivalence de catégories de Segal. On a donc montré que ii) implique i).

CQFD.

Encore une fois on constate que l'hypothèse de simple connexité intervient dans la démonstration de cette équivalence. Avant de clore cette partie, montrons le résultat dual à celui du lemme 6.3.21.

**Corollaire 6.3.24** *Pour tout espace topologique  $X$ , le morphisme naturel  $|SSing(X)| \rightarrow X$ , donné par la co-unité de l'adjonction des foncteurs  $SSing$  et  $|\cdot|$ , est une équivalence d'homotopie faible.*

*Preuve :*

Notons  $\epsilon$  la co-unité de l'adjonction. Montrons que c'est une équivalence d'homotopie faible. Considérons  $SSing(\epsilon)$ , c'est un morphisme de groupoïdes de

Segal de  $SSing(|SSing(X)|)$  vers  $SSing(X)$  d'après le lemme 6.3.11. Par ailleurs l'unité de l'adjonction  $\eta : SSing(X) \rightarrow SSing(|SSing(X)|)$  appliquée au groupoïde de Segal  $SSing(X)$  est une équivalence de catégories de Segal par le lemme 6.3.21. Or la composée  $SSing(\epsilon) \circ \eta$  n'est autre que l'identité de  $SSing(X)$ , car les foncteurs  $SSing$  et  $|\cdot|$  sont adjoints par le corollaire 6.3.10. Comme les hypothèses de A') à Q') de l'ébauche 2 du théorème central sont vérifiées par la donnée de Segal définissant les catégories de Segal, l'axiome "trois pour deux" est vrai pour les équivalences de catégories de Segal, ce qui entraîne que  $SSing(\epsilon)$  est une équivalence de catégories de Segal. Comme en outre c'est une équivalence de catégories de Segal entre groupoïdes de Segal, elle induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie de  $SSing(|SSing(X)|)$  et de  $SSing(X)$  d'après la remarque suivant le lemme 6.2.4. Or par le lemme 6.3.12, les groupes d'homotopie de  $SSing(|SSing(X)|)$  et de  $SSing(X)$  sont naturellement isomorphes à ceux de  $|SSing(X)|$  et de  $X$ . Ainsi  $\epsilon$  induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie de  $|SSing(X)|$  et de  $X$ , ce qui fait de  $\epsilon$  une équivalence d'homotopie faible.

CQFD.

Nous savons maintenant que, pour montrer qu'un morphisme de groupoïdes de Segal est une équivalence de catégories de Segal, il faut et il suffit de montrer que sa réalisation géométrique est une équivalence d'homotopie faible. Nous pouvons donc utiliser ce résultat pour montrer que l'intervalle  $\bar{J}$  est équivalent à sa sous-catégorie de Segal pleine d'objet 0, ce qui terminera la vérification des hypothèses du théorème central et ainsi montrera que les précatégories de Segal avec leurs équivalences faibles forment une catégorie de modèles fermée.



## 6.4 Catégorie de modèles fermée sur les pré-catégories de Segal

Afin de pouvoir appliquer l'équivalence entre équivalences de groupoïdes de Segal et équivalences d'homotopie faibles de leurs réalisations géométriques à l'intervalle  $\bar{J}$ , il faut tout d'abord s'assurer que ce dernier est bien simplement connexe.

**Lemme 6.4.1** *Le groupoïde de Segal  $\bar{J}$  est simplement connexe.*

*Preuve :*

Par définition,  $\bar{J}$  est un groupoïde de Segal. D'après le corollaire 6.3.22, les groupes d'homotopie des groupoïdes de Segal sont naturellement isomorphes à ceux de leurs réalisations géométriques. Or la réalisation géométrique de  $\bar{J}$  est faiblement homotope à une sphère par le corollaire 6.3.5. Comme la sphère est un espace topologique simplement connexe, alors la réalisation géométrique de  $\bar{J}$  aussi. Donc le  $\pi_0$  et les  $\pi_1$  de la réalisation géométrique de  $\bar{J}$  sont triviaux et, comme le  $\pi_0$  et les  $\pi_1$  de  $\bar{J}$  leur sont naturellement isomorphes, on a bien que  $\bar{J}$  a son  $\pi_0$  et ses  $\pi_1$  triviaux, ce qui en fait un groupoïde de Segal simplement connexe.

CQFD.

Nous pouvons donc bien appliquer l'équivalence des notions d'équivalences à l'intervalle  $\bar{J}$  et montrer au niveau de sa réalisation géométrique qu'il est bien en équivalence avec sa sous-catégorie de Segal pleine d'objet 0.

**Lemme 6.4.2** *Il existe un morphisme  $p : \bar{J} \rightarrow \bar{J}$  envoyant 0 et 1 sur 0 qui a la propriété d'être une équivalence de catégories de Segal.*

*Preuve :*

Tout d'abord définissons  $p$ . Pour ce faire, définissons un morphisme  $p^{pre}$  de  $\bar{J}^{pre}$  dans  $\bar{J}$ . Comme  $\bar{J}$  est une catégorie facile marquée, car c'est une catégorisation d'une pré-catégorie de Segal, nous ne parlerons que des éléments marqués quand on parlera de "composées". L'idée est de dire que 0 est équivalent à lui-même dans le groupoïde de Segal  $\bar{J}$  par l'intermédiaire de  $w$  et de son inverse  $w$ , où on note  $w$  l'élément  $\delta_{0,2}(T_1)$ . La composée  $w^2$  est homotope de deux façons à  $Id_0$ . On va considérer deux homotopies distinctes entre  $w^2$  et  $Id_0$ . La première est simplement  $\alpha * \alpha$ . La seconde est la composée des homotopies suivantes : on part de l'homotopie entre  $w^2$  et  $v \circ u \circ v \circ u$  puis on fait celle entre  $v \circ u \circ v \circ u$  et  $v \circ x \circ u$ , où  $x$  dénote  $\delta_{0,2}(T_2)$ , puis on fait

$Id_v * \beta * Id_u$  qui aboutit à  $v \circ Id_1 \circ u$ , puis on fait celle entre  $v \circ Id_1 \circ u$  et  $w$  et on termine par  $\alpha$ . Pour simplifier nous noterons  $\alpha \circ \beta$  cette homotopie. Ainsi le morphisme  $p^{pre} : \bar{J}^{pre} \rightarrow \bar{J}$  est défini ainsi : 0 et 1 s'envoient sur 0,  $u$  et  $v$  sur  $w$ ,  $T_1$  et  $T_2$  sur le triangle  $(w, w, w^2)$ ,  $\alpha$  sur  $\alpha * \alpha$  et  $\beta$  sur  $\alpha \circ \beta$ . Ceci définit bien un morphisme  $p^{pre}$  de  $\bar{J}^{pre}$  vers  $\bar{J}$ . Comme  $\bar{J}$  est une catégorie facile marquée, par propriété universelle de la catégorisation, ce morphisme se factorise de manière unique à travers  $can_{\bar{J}^{pre}}$ . Notons alors  $p$  l'unique morphisme de  $\bar{J}$  dans lui-même qui précomposé par  $can_{\bar{J}^{pre}}$  redonne  $p^{pre}$ .

Montrons que  $p$  ainsi défini est une équivalence de catégories de Segal. Comme, par le lemme précédent,  $p$  est un morphisme entre groupoïdes de Segal simplement connexes, d'après le corollaire 6.3.23, il faut et il suffit de montrer que  $|p|$  est une équivalence d'homotopie faible pour montrer que  $p$  est une équivalence de catégories de Segal. Comme  $|p^{pre}|$  se factorise en l'équivalence  $|can_{\bar{J}^{pre}}|$  suivie de  $|p|$ , par l'axiome "trois pour deux" dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{TOP}$ , montrer que  $|p|$  est une équivalence d'homotopie faible équivaut à montrer que  $|p^{pre}|$  en est une.

Pour cela, on va construire un objet intermédiaire entre  $\bar{J}^{pre}$  et  $\bar{J}$ . Pour faciliter la lecture, au lieu de dire par quelle flèche génératrice je fais la somme amalgamée, je dirai quelle composée ou quelle homotopie je veux rajouter. On part de  $\bar{J}^{pre}$  et on veut lui rajouter dans l'ordre : le morphisme composé  $w^2$ , l'homotopie composée  $\alpha * \alpha$ , les morphismes composés  $v \circ u \circ v \circ u$  et  $v \circ x \circ u$ , les homotopies entre  $v \circ u$  et  $w$ , entre  $u \circ v$  et  $x$ , puis entre  $v \circ u \circ v \circ u$  et  $w^2$ , entre  $v \circ u \circ v \circ u$  et  $v \circ x \circ u$ , puis l'homotopie composée  $Id_v * \beta * Id_u$ , puis l'homotopie composée  $\alpha \circ \beta$ . Notons  $\bar{J}'$  le résultat de ce sous-plan d'addition fini de  $Cat(\bar{J}^{pre})$ .

On remarque aisément que  $p^{pre}$  se factorise à travers l'inclusion de  $\bar{J}'$  dans  $\bar{J}$ . En outre comme  $\bar{J}'$  est construit à partir de  $\bar{J}^{pre}$  par des sommes amalgamées avec des flèches génératrices, dont on a vu que les réalisations géométriques sont des cofibrations triviales, et que la réalisation géométrique respecte les colimites, il vient que l'inclusion de  $|\bar{J}^{pre}|$  dans  $|\bar{J}'|$  est une cofibration triviale, comme suite de sommes amalgamées le long d'un morphisme de cofibrations triviales dans la catégorie de modèles fermée  $\mathcal{TOP}$ . Ceci montre que  $|\bar{J}'|$  est faiblement homotope à la sphère.

Regardons maintenant de près l'image de la sphère  $|\bar{J}^{pre}|$  dans  $|\bar{J}'|$ . Les deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  s'envoient sur le triangle  $(w, w, w^2)$ , le disque  $\alpha$  sur le disque

$\alpha * \alpha$  et le disque  $\beta$  sur le disque  $\alpha \circ \beta$ . Donc  $|\bar{J}^{pre}|$  s'envoie sur la sphère de grand cercle  $w^2$  et de calottes  $\alpha * \alpha$  et  $\alpha \circ \beta$  munie d'une collerette contractile qu'est  $(w, w, w^2)$ , et ceci en envoyant calottes sur calottes. Ainsi la co-restriction de  $|p^{pre}|$  à  $|\bar{J}'|$  est homotope à l'identité de la sphère.

Comme la réalisation géométrique préserve les colimites et que  $\bar{J}'$  est une partie de  $Cat(\bar{J}^{pre})$  qui n'est autre que  $\bar{J}$ , l'inclusion de  $|\bar{J}'|$  dans  $|\bar{J}|$  est une colimite séquentielle transfinie de sommes amalgamées le long d'un morphisme des réalisations géométriques des flèches génératrices. Or on a vu, dans la démonstration du fait que  $|can_A|$  est équivalence d'homotopie faible, que les réalisations géométriques des flèches génératrices sont des cofibrations triviales. Comme  $\mathcal{TOP}$  est une catégorie de modèles fermée, les cofibrations triviales sont stables par colimite séquentielle transfinie et par somme amalgamée le long d'un morphisme, d'où l'on tire que l'inclusion de  $|\bar{J}'|$  dans  $|\bar{J}|$  est une cofibration triviale. Par l'axiome "trois pour deux" dans  $\mathcal{TOP}$ , la composée  $|p^{pre}|$  est une équivalence d'homotopie faible, et comme  $|can_{\bar{J}^{pre}}|$  est une équivalence d'homotopie faible, toujours par "trois pour deux", il vient que  $|p|$  est une équivalence d'homotopie faible. On conclut que  $p$  est une équivalence de catégories de Segal entre groupoïdes de Segal simplement connexes par le corollaire 6.3.23.

CQFD.

Comme nous avons montré auparavant que l'intervalle  $\bar{J}$  vérifie les parties a) et b) de l'hypothèse R') de l'ébauche 2 du théorème central et que  $\bar{J}^{pre}$  vérifie l'hypothèse S'), ce dernier résultat finit de montrer que la donnée de Segal proto-facile définissant les catégories de Segal admet un bon intervalle pour les catégories de Segal.

**Corollaire 6.4.3** *La donnée de Segal facile sur les ensembles simpliciaux définie dans l'exemple 3.1.2 vérifie les hypothèses R') et S') de l'ébauche 2 du théorème central.*

*Preuve :*

Montrons d'abord l'hypothèse R'). La partie a) de l'hypothèse R') est vérifiée par définition de  $\bar{J}$ . Toujours par définition de  $\bar{J}$ , ses deux objets 0 et 1 sont équivalents. Donc leurs images par un morphisme de catégories de Segal quelconque sont encore équivalentes, ce qui montre la partie b) de l'hypothèse R').

Notons maintenant  $\bar{L}$  la sous-catégorie pleine de  $\bar{J}$  d'objet unique 0. L'inclusion de  $\bar{L}$  dans  $\bar{J}$  est une équivalence de catégories de Segal car d'une part,

comme 1 est équivalent à 0 dans  $\bar{J}$ , l'inclusion est essentiellement surjective, et d'autre part, comme  $\bar{L}$  est une sous-catégorie pleine de  $\bar{J}$ , l'inclusion est pleinement fidèle. Remarquons que l'équivalence  $p$  du lemme précédent se factorise par l'inclusion de  $\bar{L}$  dans  $\bar{J}$ . Par l'axiome "trois pour deux" pour les précatégories de Segal, qui est vrai car la donnée de Segal de l'exemple 3.1.2 vérifie les hypothèses A') à Q') de l'ébauche 2 du théorème central, il vient que le morphisme  $\bar{J} \rightarrow \bar{L}$  est une équivalence de catégories de Segal, ce qui montre la partie c) de l'hypothèse R').

Par définition de  $\bar{J}^{pre}$ ,  $\bar{J}^{pre}$  vérifie la partie a) de l'hypothèse R'). De plus, par construction,  $\bar{J}$  est la catégorisation de  $\bar{J}^{pre}$ . Pour montrer que l'hypothèse S') est vérifiée, il ne reste plus qu'à montrer que  $\bar{J}^{pre}$  est  $\alpha$ -petit. Par construction,  $\bar{J}^{pre}$  est une colimite constituée de deux  $\Delta[0]$ , de deux  $\Delta[1]$ , de deux  $\Delta[2]$  et de deux  $\Delta[1] \Theta \bar{I}$ . Or tous ces éléments sont dénombrables donc  $\alpha$ -petits car dans la démonstration du lemme 6.1.1 on a pris  $\alpha = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ . Comme colimite finie de précatégories de Segal  $\alpha$ -petites,  $\bar{J}^{pre}$  est  $\alpha$ -petit, ce qui termine la vérification de l'hypothèse S').

CQFD.

Ceci termine la vérification des dix-neuf hypothèses de l'ébauche 2 du théorème central par la donnée de Segal sur les ensembles simpliciaux qui engendrent la notion de catégorie de Segal. Ainsi le théorème central peut s'appliquer à cette donnée de Segal, ce qui montre que la catégorie des précatégories de Segal avec leurs équivalences faibles est une catégorie de modèles fermée.

**Théorème 6.4.4** *La catégorie des précatégories de Segal au sens [2] admet une structure de catégorie de modèles fermée avec pour cofibrations les monomorphismes et pour équivalences faibles les morphismes de précatégories de Segal dont la catégorisation est une équivalence de catégories de Segal au sens [2].*

*Preuve :*

D'après le lemme 6.1.1 et le corollaire précédent, la donnée de Segal protofacile sur les ensembles simpliciaux engendrant la notion de catégorie de Segal (celle de l'exemple 3.1.2) vérifie les hypothèses A') à S') de l'ébauche 2 du théorème central. On peut donc lui appliquer le théorème central, ce qui nous donne le résultat.

CQFD.

Ce résultat non seulement permet de démontrer l'existence de la catégorie de modèles fermée pour les catégories de Segal décrite dans [2] mais sert

également d'application d'une part de la théorie des catégories enrichies faibles développée dans cette thèse et d'autre part au théorème central munissant ces catégories enrichies faibles d'une catégorie de modèles fermée traduisant leurs théories homotopiques.

En bilan de tout ce long et fastidieux exposé, nous pouvons dire qu'il reste encore du travail à faire dans ce domaine. Tout d'abord, il serait intéressant de montrer que la catégorie de modèles fermée obtenue avec le théorème central en vérifie aussi les hypothèses. En effet, dans ce cas, nous pourrions directement munir les  $n$ -catégories enrichies faibles d'une structure de catégorie de modèles fermée. Ensuite il serait bon de montrer d'autres exemples d'applications du théorème central et (mais peut-être cela revient-il au même) de redémontrer le théorème central avec des hypothèses moins contraignantes. Si en effet nous pouvions nous débarrasser de l'hypothèse demandant aux cofibrations d'être les monomorphismes, nous pourrions alors appliquer le théorème au cas des  $n$ -catégories de Tamsamani, ce qui redémontrerait l'existence de la catégorie de modèles fermée sur ces catégories faibles démontrée dans [5]. Enfin il serait également intéressant de voir si l'on ne peut pas construire une théorie encore plus générale de catégories faibles enrichies en regardant ce qui se passe si l'on essaie de prendre une autre catégorie que la catégorie simpliciale  $\Delta$  comme catégorie de base pour la définition des catégories enrichies faibles.

Je conclurai ce travail tout d'abord en remerciant cordialement les courageux lecteurs qui auraient eu la témérité de lire tout ou partie de ma thèse. Mais également je consacrerai mon dernier chapitre à analyser les apports de mes quatre années de thèse en termes de compétences professionnelles.

....

## Chapitre 7

# Projet de thèse et compétences

Quatre ans de ma vie ont été consacrés presque entièrement à un seul projet : une thèse de Mathématiques Pures intitulée “Catégories enrichies faibles.” Je vais tenter d’expliquer en quelques mots le sujet de cette thèse qui a mobilisé le plus gros de mon énergie durant une si longue période.

Deux théories principales fondent actuellement les Mathématiques. Si la première nommée théorie des ensembles consiste en l’étude des objets mathématiques pris individuellement, la seconde plus récente, dite théorie des catégories, vise à modéliser les structures mathématiques. En effet la catégorie correspondant à une structure donnée est constituée par les objets mathématiques munis de cette structure et par les liens entre ces objets respectant la structure. En particulier, la structure de catégorie donne lieu à la catégorie des catégories dans laquelle les liens entre catégories forment eux aussi une catégorie. C’est un premier exemple de catégorie enrichie (ici sur les catégories). Plus généralement, une catégorie enrichie est une catégorie dont les liens forment une structure. L’adjectif faible rajouté au composé “ catégorie enrichie” signifie seulement que les liens de la catégorie considérée ne sont pas toujours composables. Le sujet de la thèse est donc d’une part de mettre en place une théorie des catégories enrichies faibles qui permette de définir une structure commune aux différents exemples rencontrés dans ce domaine et d’autre part de munir ces catégories enrichies faibles d’une structure permettant de faire des calculs dans cette théorie.

Si ce sujet a bien un intérêt au niveau de la recherche mathématique comme je vais le montrer plus loin, il est cependant très intéressant de se demander ce que moi j’ai bien pu retirer de cette expérience relativement longue. En particulier, une question se pose : en quoi ces quatre années consacrées à une thèse de Mathématiques Pures ont-elles pu m’être profitables au niveau de l’insertion professionnelle. Afin de faire un retour sur mes quatre ans de thèse et d’étudier plus en détail ces points importants, je vais tout d’abord exposer les motivations qui ont conduit à cette thèse. Puis je vais examiner les principales étapes du déroulement de la thèse et je terminerai par une mise au point sur les compétences acquises durant ces quatre années aussi bien dans le travail de la thèse même que dans les autres travaux que j’ai eu à faire durant cette période.



## 7.1 En amont de la thèse ...

Pour commencer, je vais analyser comment je me suis retrouvé à traiter un tel sujet. Pour tenter de dénouer les différentes causes qui ont abouti à la situation actuelle, je vais tout d'abord expliquer mes motivations personnelles concernant la thèse. Puis j'aborderai les motivations de l'équipe qui m'a accueilli.

Pour comprendre ce qui m'a poussé à faire une thèse de Mathématiques Pures concernant les catégories, il me faut remonter à la maîtrise. Ce fut en effet l'année dans mon cursus scolaire où j'entendis pour la première fois parler de la théorie des catégories. Mon goût pour la Logique et les fondements des Mathématiques, qui jusqu'alors furent mes principales motivations pour poursuivre des études supérieures en Mathématiques Pures, me firent tout de suite accrocher à cette théorie toute nouvelle pour moi et possédant une puissance à mes yeux infiniment plus grande que la théorie des ensembles que j'avais étudiée jusqu'alors. La matière nommée topologie algébrique, dans laquelle j'avais rencontré les catégories pour la première fois et qui était approfondie en DEA, me fit préférer la poursuite des études de Mathématiques à la préparation des concours de l'enseignement public qui constituait pour moi l'entrée dans la vie active.

C'est véritablement en DEA que le domaine de ma thèse allait se préciser. En effet en DEA le troisième trimestre correspond à la rédaction d'un mémoire. Ma nouvelle marotte qu'était pour lors la théorie des catégories me poussa à chercher un directeur de mémoire qui me permettrait de travailler dans ce domaine. Après quelques difficultés, je finis par trouver André Hirschowitz qui me proposa de travailler sur les articles de Carlos Simpson, le créateur d'une théorie de catégories faibles d'ordre supérieur. Le sujet du mémoire fut donc de lire et de rédiger une petite partie d'une pré-publication de Simpson. Mes capacités de compréhension d'articles mathématiques liées à ma capacité de vulgarisation des théories mathématiques amenèrent André Hirschowitz à me proposer de faire ma thèse sur les pré-publications de Simpson. Outre l'intérêt de cette proposition, ce fut la perspective d'obtenir le plus haut diplôme du cursus universitaire et le titre de docteur ès sciences qui fut déterminante dans mon choix de continuer mes études par une thèse de Mathématiques Pures plutôt que de me lancer dans la préparation des concours d'entrée à l'éducation nationale, même si cette dernière option constituait alors mon projet professionnel.

Considérons maintenant les motivations d'André Hirschowitz qui l'ont poussé à me proposer de faire une thèse sur les théories de Simpson. Tout d'abord il faut préciser qu'André Hirschowitz travaillait souvent en collaboration avec Carlos Simpson qui était encore à l'époque à Toulouse mais qui rejoignit l'équipe d'André Hirschowitz à Nice l'année d'après. L'année suivante, un de ses anciens élèves vint lui aussi à Nice, faisant ainsi de l'équipe niçoise une équipe à la pointe de la recherche sur les catégories faibles d'ordre supérieur, les champs supérieurs et leurs applications. Il est à noter à ce propos que l'équipe niçoise a organisé la première conférence internationale sur les catégories faibles d'ordre supérieur avec leurs applications à la géométrie algébrique.

Toutefois il existe aux USA, au Canada, au Royaume-Uni ou en Australie d'autres théories sur le même thème qui sont en intense développement avec des techniques et des résultats plus ou moins avancés selon les équipes. En outre, si l'équipe niçoise est l'une des plus avancées dans ce domaine, tous ses résultats et ses théories sont basés sur un théorème fondamental de Carlos Simpson non publié dans une revue mathématique et dont la preuve contient des passages qui n'ont pas fait l'objet d'une clarification. Aussi l'enjeu de ma thèse est de mettre au point la preuve de ce théorème et d'exploiter les idées de cette preuve pour formuler une théorie plus générale permettant une meilleure compréhension de ces théories de catégories faibles d'ordre supérieur. L'impact principal qui en est attendu par l'équipe niçoise est d'assurer par la publication de ma thèse un statut stable au théorème de Simpson et ainsi de permettre d'utiliser ses méthodes et d'avoir un accès plus compréhensible au travail de pionnier de Simpson qui, s'il reste non publié, se serait de lui-même condamné à disparaître dans l'oubli.

Il est donc clair que la conjonction simultanée de mon intérêt à faire une thèse dans le domaine des catégories avec celui d'André Hirschowitz de publier des travaux reprenant et exploitant les idées originales mais non publiées de la théorie des catégories faibles d'ordre supérieur de Simpson a été le point de départ d'un travail de quatre ans dont il est intéressant de connaître les différentes étapes afin de mieux comprendre ce que j'en ai retiré.

## 7.2 Au cours de la thèse ...

Je vais maintenant analyser le déroulement de la thèse. Pour débiter cette analyse, je commencerai par évaluer les risques et les avantages que comportait la thèse en elle-même. Puis je m'attarderai sur l'encadrement et le financement de la thèse avant de terminer par un exposé des principales étapes de la thèse.

Un des aspects importants et récurrents de ces quatre années passées à faire une thèse a été la gestion des risques inhérents à ce travail. Aussi est-il intéressant de se demander en quoi la thèse était-elle risquée et quels avantages comportait-elle qui purent m'éviter d'abandonner malgré de fréquentes crises de découragement. Bien évidemment déjà en DEA, mes camarades et moi-même avons été avertis de la difficulté intrinsèque aux thèses de Mathématiques Pures qui réside en une très grande abstraction. En revanche, ma thèse concernant essentiellement la démonstration généralisée d'un théorème à la preuve non formatée, le risque principal qui en découle est de pouvoir ne rien trouver. En effet contrairement à beaucoup d'autres thèses mathématiques, la mienne n'est pas une compilation, d'au plus une centaine de pages, de divers résultats plus au moins liés entre eux mais au contraire un immense édifice de trois cents pages dont le point culminant est la démonstration du théorème de Simpson. Si la preuve est fautive, incomplète ou si l'on n'arrive pas à prouver un des résultats intermédiaires, tout s'écroule. Le fait que cette thèse n'aboutisse qu'à un tout ou rien a été l'un des aspects de cette thèse des plus démoralisants. En outre l'un des corollaires de cette spécificité de ma thèse est que la thèse ne peut donner lieu à aucune autre publication qu'elle-même une fois achevée, ce qui est un handicap dans la recherche d'un poste de maître de conférence.

Heureusement la thèse comportait aussi des avantages qui m'ont permis de surmonter les graves moments de dépression. Tout d'abord, en elle-même la thèse concerne un domaine de la recherche mathématique récent en pleine ébullition et très porteur d'avenir mathématique. Ce domaine, comme on l'a vu précédemment, correspondait à un domaine qui m'intéressait. Même s'il a fallu faire la thèse pour prendre la véritable mesure de ce domaine, la théorie des catégories s'est avérée aussi passionnante que je l'espérais. En outre, il est important de remarquer que pendant ces quatre années de thèse, j'ai eu l'opportunité d'enseigner en DEUG première année. En effet, premier de ma promotion à l'issue du DEA, j'ai obtenu le poste de moniteur, c'est-à-dire d'apprenti enseignant-chercheur ayant une charge d'enseignement correspondant à un tiers de la charge d'enseignement d'un enseignant-chercheur titulaire. De plus

après mes trois années de monitorat, j'ai obtenu un poste d'ATER d'un an, c'est-à-dire un poste d'enseignant-chercheur temporaire avec une demi-charge d'enseignement. Or ces enseignements m'ont véritablement permis d'acquérir de l'assurance tout au long de ces quatre années. Face à la déstabilisation morale et psychique due à la thèse, le fait de pouvoir maîtriser un savoir et de l'enseigner à des étudiants à peine plus jeunes que moi-même a été très réconfortant, très intéressant et très enrichissant. En effet l'enseignement m'a toujours attiré. De plus j'ai eu la chance de pouvoir enseigner dans des équipes pédagogiques soudées qui avaient une véritable réflexion pédagogique et me permettaient souvent d'appliquer mes propres méthodes. Enfin à travers l'enseignement du raisonnement scientifique, j'ai pu enseigner mes domaines de prédilection, à savoir la Logique et les fondements des Mathématiques, ce qui me permettait d'ailleurs de faire un retour sur mon propre travail de thèse dont le domaine touche par certains endroits à ces domaines. Dans le même ordre d'idées, lors de groupes de travail au laboratoire de Mathématiques, on me demandait souvent d'exposer des sujets ayant trait à la théorie des catégories, ce qui me permettait d'approfondir mes connaissances dans ce domaine et m'a souvent aidé à certains endroits de la thèse tout en me redonnant confiance en moi-même.

Si les avantages apportés par la thèse ont pu contrebalancer l'incertitude liée aux risques inhérents à mon sujet de thèse, l'encadrement a lui aussi joué un grand rôle tout au long de la thèse. Comme je l'ai dit précédemment, plus j'avancais dans ma thèse et plus l'équipe d'André Hirschowitz a accueilli de spécialistes de la théorie de Simpson. Aussi puis-je dire que j'ai été très bien entouré : Simpson lui-même a été très souvent disponible, son ancien élève Toen n'a pas hésité à venir nous aider lorsque nous bloquions à certains endroits de la preuve du théorème de Simpson. Pour en revenir au déroulement de la thèse, c'est André Hirschowitz qui, m'ayant proposé une thèse sur la théorie de Simpson, a dirigé effectivement ma thèse même s'il n'est pas mon directeur officiel pour cette thèse. André Hirschowitz a toujours été très disponible, en particulier lorsque la thèse posait de graves problèmes même si, je dois l'avouer, j'ai toujours préféré trouver les solutions aux problèmes par moi-même plutôt que de lui demander de l'aide, sauf bien entendu dans les rares cas de blocage total sur certaines questions. Ceci s'est traduit par des réunions avec André Hirschowitz assez irrégulières et assez espacées dans le temps, phénomène amplifié par l'éloignement géographique de nos deux bureaux. Quant à Jean-Michel Lemaire qui m'a fait l'honneur de diriger officiellement ma thèse, je lui dois également beaucoup car, même s'il a suivi d'assez loin ma thèse dont

le domaine ne correspond pas à son domaine de recherche, il s'y est toutefois beaucoup intéressé, m'a soutenu lors de moments difficiles et a apporté sur ma thèse un point de vue extérieur au sujet qui m'a été très enrichissant.

Au vu de cet encadrement, il est naturel de se poser la question du coût de la thèse. Tout d'abord, considérons mon propre salaire. Pendant mes trois premières années, étant moniteur, j'ai reçu un double salaire : 6.100 F net par mois pour la thèse et 1.800 F net par mois pour les enseignements. Lors de ma quatrième année, j'ai été payé en tant qu'A.T.E.R. (Attaché Temporaire à l'Enseignement et à la Recherche) 7.400 F net par mois, ce salaire comprenant à la fois thèse et enseignement. Ajoutons à cela mes déplacements à des colloques et à des écoles d'été qui se montent à 8.500 F. Au total (avec les enseignements) mes quatre années sont revenues à environ 375.000 F net. André Hirschowitz m'a consacré un vingtième de son temps durant ces quatre années, ce qui se chiffre à environ 92.000 F net. Comme le temps passé par mon directeur de thèse, Simpson et les autres chercheurs de Nice m'ayant aidé est négligeable par rapport au temps passé avec André Hirschowitz et par ailleurs souvent inévaluable, on peut dire qu'au total la thèse aura coûté environ un demi-million de francs français ( $\cong 470.000F$ ). Il est à noter que ce coût ne prend pas en compte la fraction du budget d'infrastructure, de la bibliothèque et du réseau informatique du laboratoire, d'une part car cette fraction est difficilement évaluable et d'autre part car le budget du laboratoire ne m'a pas été communiqué.

Enfin je vais terminer cette partie par une brève description des principales étapes de la thèse. La première phase d'une durée d'environ un an fut surtout une phase d'apprentissage et d'approfondissement de la théorie de Simpson avec des essais de définition de nouvelles catégories faibles d'ordre supérieur. A la fin de cette période, l'idée de paramétrer les définitions déjà existantes de catégories faibles d'ordre supérieur m'obligea à revenir au théorème central de Simpson et à le comprendre en détail. Lors de cette lecture approfondie de ce théorème, je découvris une erreur dans la preuve, erreur qui fut très aisément rectifiée par Carlos Simpson et qui amena André Hirschowitz à me proposer de reprendre la preuve du théorème afin d'en exploiter les idées dans un cadre plus général. Ceci ouvre la deuxième phase consistant en la relecture et la compréhension du théorème de Simpson qui dura environ un an. La preuve comprise dans ses grandes lignes, la troisième phase d'aussi un an fut celle de la tentative de généralisation du théorème, ce qui nous amena aux principaux problèmes rencontrés pendant cette thèse et aussi à la période qui

faillit voir mon abandon. Après beaucoup d'énergie et de ténacité mais aussi grâce à l'important soutien d'André Hirschowitz, cette période se termina avec l'éclaircissement des derniers points obscurs dans la preuve de Simpson. Commença alors la quatrième phase de la thèse qui fut celle de la rédaction d'un théorème dont la preuve exploite les idées de la preuve de Simpson mais dans un cadre plus général et qui donna lieu à la création de la théorie des catégories enrichies faibles. Cette période d'un an fut aussi celle de la rédaction de la thèse. Au final, l'un des principaux problèmes rencontrés dans la preuve de Simpson laisse l'énoncé du théorème général de ma thèse incomplet dans le sens où la manière dont on a résolu le problème n'a pas été suffisamment bonne pour que mon théorème s'applique dans tous les cas que l'on voulait regarder. Ceci laisse encore du travail pour améliorer la thèse et c'est l'une des motivations qui m'ont poussé à demander une seconde année d'ATER.

Après avoir expliqué en quelques lignes les principales caractéristiques du déroulement de mes quatre années de thèse, je vais essayer de déterminer en quoi ces années m'ont été bénéfiques, en particulier pour mon avenir professionnel.

### 7.3 En aval de la thèse ...

Dans cette dernière partie, je vais analyser les retombées de ces quatre années de thèse essentiellement en termes de compétences acquises durant la thèse. J'essayerai au fur et à mesure de jauger l'impact de ces acquis sur mon avenir professionnel. Je commencerai par développer les compétences mises en oeuvre pour la thèse, puis celle pour l'enseignement, enfin j'exposerai quelques conséquences de mon initiative personnelle durant ces quatre années.

Bien évidemment, les premières retombées de la thèse auxquelles on pense naturellement s'expriment en terme de connaissances mathématiques : théories des ensembles, des catégories, des catégories faibles d'ordre supérieur, des faisceaux, des champs, des topoi, de l'homotopie et des catégories de modèles fermées. Ces savoirs sont en outre interdisciplinaires car certains ont trait aux fondements des Mathématiques et par là à la Logique, à l'Épistémologie et donc à la Philosophie. Mais ils sont aussi transversaux car ces mêmes savoirs ont à la fois une importance pour la recherche mathématique mais aussi pour l'enseignement de la méthodologie en première année de DEUG et permettent un retour didactique sur l'enseignement des Mathématiques en DEUG.

Comme cela est clair dans les nouvelles maquettes de DEUG, le savoir mathématique n'est pas seulement confiné dans un amas de connaissances mais il comporte également toute une méthodologie à la fois interdisciplinaire, comme la lecture suivie et l'analyse approfondie des articles, l'exposition d'une théorie déjà connue ou d'un travail de recherche, mais aussi une méthodologie caractéristique à la matière comme la rigueur mathématique, la démonstration d'un résultat mathématique et la mise en place d'une théorie globale généralisant des théories particulières existantes. Mais la principale compétence méthodologique que ma thèse nécessitait est de savoir faire une construction d'un degré de complexité énorme pour aboutir à un unique résultat (300 pages pour démontrer un seul théorème!), ce qui pose des problèmes de cohérence monstrueux et demande de bonnes prises de recul, entre autres. Cette dernière compétence est un atout assez rare qui me sera sûrement utile dans ma vie professionnelle ainsi d'ailleurs que les méthodes de base interdisciplinaires, et ce quel que soit mon devenir professionnel. Je dois rajouter à cela la faculté que j'ai acquise durant ces quatre années à gérer mais aussi à surmonter les dépresses profondes et courantes intrinsèques au travail d'un chercheur en Mathématiques Pures, dépresses que j'ai analysées dans la partie précédente. Cette ténacité face à de fréquents moments de démoralisation est, je le crois, une qualité assez recherchée dans la vie active.

Outre le travail de thèse, les enseignements menés durant ces quatre années ont eux aussi exigé des compétences particulières. Comme je l'ai déjà évoqué, j'ai eu l'occasion de participer à divers enseignements dans lesquels j'ai eu une part active au niveau de la pédagogie à adopter. J'ai également participé à la conduite de nouvelles méthodes pédagogiques qui ont nécessité une grande adaptabilité aux situations nouvelles ou inattendues, une capacité d'intégration à une équipe pédagogique ainsi qu'un apprentissage du travail en équipe, une remise en question permanente due au caractère interactif de ces méthodes et enfin un énorme investissement. La mise en place de ces méthodes m'a également amené à conduire une réflexion didactique et épistémologique et à échanger avec des philosophes et des didacticiens. La réussite de ces méthodes m'a aussi mené à devoir exposer lors de conférences sur l'enseignement et à écrire un article sur mon enseignement de la méthodologie en première année de DEUG.

Si tout ceci m'a donné une expérience à la fois unique et riche au niveau de l'enseignement, cette expérience liée d'une part à mes échecs répétés aux concours de l'enseignement secondaire et d'autre part à ce que vivent mes proches dans l'éducation nationale m'a plutôt convaincu de ne pas enseigner en-dessous du DEUG. Aussi mon projet professionnel initial (depuis la licence) d'intégrer l'éducation nationale s'est assez vite vu transmué en un nouveau projet : celui d'intégrer la fonction publique. Bien évidemment, la question qu'il est alors naturel de poser est pourquoi ne pas envisager le concours de maître de conférence. La réponse est aisée : c'est tout simplement parce que ce concours est un Nirvâna auquel tendent toutes les bonnes âmes alors que seules celles qui ont reçu la grâce pourront, non sans peine, y accéder (pour leur bonheur?).

A l'image de mes enseignements, ces quatre années ont montré que je suis capable de m'impliquer énormément mais aussi de faire preuve d'initiative : outre mon implication dans la thèse et les innovations mathématiques que j'ai apportées grâce à une bonne interaction avec l'équipe d'André Hirschowitz, en plus de mes initiatives pédagogiques dont j'ai déjà parlé, j'ai créé et animé divers groupes de travail soit avec des thésards mathématiciens sur les champs, les axiomatiques des ensembles, les cardinaux transfinis et les catégories enrichies faibles, soit avec des philosophes et des logiciens sur la théorie des catégories et des topoi et sur les logiques déviantes (intuitionnistes, modales, para-consistantes ...) Je pense que ma capacité d'intégration dans diverses



équipes en même temps ainsi que ma capacité à organiser des groupes de travail intra et inter-équipe seront des atouts importants pour ma future vie professionnelle.

Une autre grande preuve de mes capacités d'investissement, d'initiative mais aussi d'adaptabilité à de nouvelles situations est ma participation à la coordination de la première année de DEUG MASS ainsi que la responsabilité du module de méthodologie (UMED2). Ceci m'a obligé à apprendre à créer un emploi du temps, à gérer des salles, des horaires de modules et des horaires d'enseignants (avec leurs contraintes personnelles...) mais aussi à gérer les effectifs d'étudiants répartis en plusieurs groupes. En tant que responsable de module, j'ai dû aussi m'occuper de la mise en place d'un programme compatible avec les impératifs de la maquette, créer une équipe pédagogique, organiser les examens, gérer les notes et participer aux délibérations. Je pense que tout cet investissement purement bénévole de ma part (car non payé ni demandé par les statuts de moniteur ou d'ATER) est très important pour mon avenir professionnel que je vois en ce moment plutôt dans l'administration publique.

Il est donc aisé de constater au vu de ce qui précède que ces quatre années ont été très riches et très remplies et m'ont permis d'acquérir bon nombre de compétences dont certaines seront, je pense, très utiles pour mon avenir professionnel. Que peut-on donc tirer comme conclusion générale concernant cette thèse ?

## 7.4 En guise de conclusion ...

Pour résumer ce qui précède, je peux dire que la thèse m'a apporté une bonne culture mathématique mais aussi un avant-goût du travail administratif, du travail en équipe et des exposés à des colloques. J'ai pu aussi me découvrir des qualités jusqu'alors insoupçonnées telles l'initiative, l'intégration et l'adaptabilité qui se sont exprimées surtout dans les enseignements et les travaux d'ordre administratif, ce qui est assez encourageant pour mon avenir professionnel.

En conclusion, je dirai que la thèse m'a apporté un certain savoir-faire qui sera très certainement utile pour ce à quoi je me destine, à savoir la fonction publique, mais aussi un savoir et un diplôme que j'espère pouvoir valoriser dans ma future vie professionnelle. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que je n'ai pas du tout fait ma thèse en vue d'un quelconque projet professionnel, comme je l'ai expliqué dans la première partie. Néanmoins, j'ai pu retirer de ces quatre années un maximum d'expériences et d'enseignements personnels et surtout le sujet de ma thèse, sur lequel je n'avais pas d'idées réelles avant de ne l'aborder en thèse, s'est trouvé à la hauteur de mes espérances. Aussi, malgré de gros moments de "déprime", je peux réellement dire que je ne regrette absolument pas d'avoir fait cette thèse qui m'a permis véritablement de vivre une expérience somme toute courte mais si dense et, de toute manière, unique dans ma vie.

# Bibliographie

- [1] P.Hirschhorn. *Localization of Model Categories*, preprint.
- [2] A.Hirschowitz, C.Simpson. *Descente pour les  $n$ -champs*, preprint.
- [3] M.Hovey. *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, no. 63, American Mathematical Society, 1999.
- [4] D.G.Quillen. *Homotopical algebra*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [5] C.Simpson. *A closed model structure for  $n$ -categories, internal Hom,  $n$ -stacks and generalized Seifert-Van Kampen*, preprint.
- [6] Z. Tamsamani. *Sur des notions de  $n$ -catégorie et de  $n$ -groupoïde non-stricts via des ensembles multi-simpliciaux*. K-theory, 1999.

...

...

## Résumé :

Cette thèse est consacrée à la démonstration d'un théorème montrant l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée concernant les catégories faiblement enrichies. Il faut au préalable définir les notions de catégories faiblement enrichies et d'équivalence de catégories faiblement enrichies de telle manière que ces notions recouvrent diverses notions déjà existantes de catégories faibles d'ordre supérieur telles les catégories de Segal, les  $n$ -catégories de Tamsamani et les  $n$ -catégories strictes. Afin de démontrer notre théorème, nous devons mettre au point une théorie de plans d'addition de cellules sur le modèle de l'argument du petit objet à la Quillen. Nous terminons ce travail en montrant que notre théorème recouvre le cas des catégories de Segal. Ce dernier résultat nécessite de montrer une adjonction "groupoïde fondamental-réalisation géométrique" entre les groupoïdes de Segal et les espaces topologiques.

**English title :**  
**Weak enriched categories.**

## Abstract :

This thesis is devoted to the proof of a theorem showing the existence of a closed model category structure for weakly enriched categories. It requires first of all the definitions of weakly enriched categories and equivalences of weakly enriched categories such that these definitions recover some existing notions of higher order weak categories, for example Segal categories, Tamsamani  $n$ -categories and strict  $n$ -categories. In order to prove our theorem, we elaborate a theory of plans for cell addition following the approach of the small object argument *à la* Quillen. We conclude this work with the proof that our theorem recovers the case of Segal categories. This last result requires a fundamental groupoid-geometric realization adjunction between Segal groupoids and topological spaces.

**Discipline :** Mathématiques.

**Mots-clefs :** catégorie de modèles fermée, catégorie de Segal, catégorie enrichie, groupoïde fondamental,  $n$ -catégorie, réalisation géométrique.

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné U.M.R. 6621  
Université de Nice Sophia-Antipolis Parc Valrose 06108 Nice Cedex 2