HAL open science

Interfaces en grande déformation : oscillations, impacts, singularités

Elise Lorenceau

▶ To cite this version:

Elise Lorenceau. Interfaces en grande déformation : oscillations, impacts, singularités. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. Français. NNT : . tel-00003275

HAL Id: tel-00003275

https://theses.hal.science/tel-00003275v1

Submitted on 26 Aug 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'université de Paris VI

Spécialité : Physique des liquides

présentée et soutenue publiquement le 19 juin 2003 par :

Élise LORENCEAU

Interfaces en grande déformation : oscillations, impacts, singularités

---

Directeur de thèse :

David Quéré

Devant le jury composé de :

Mme Françoise Brochard-Wyart	
M. Christophe Clanet	
M. Jens Eggers	
M. Pierre-Gilles de Gennes	
M. Laurent Limat	Rapporteur
M. David Quéré	
M. Marc Rabaud	Rapporteur

Me voici à l'aube d'une nouvelle vie, (je quitte avec regret la vie estudiantine) et avant de partir, c'est avec plaisir que j'adresse mes remerciements à tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenue et encouragée pendant ces trois années de thèse.

Je remercie tout d'abord Pierre-Gilles de Gennes de m'avoir accueillie au laboratoire et d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Laurent Limat et Marc Rabaud ont été rapporteurs de ce travail. Je tiens à les remercier pour leur enthousiasme et leurs nombreuses suggestions. Je remercie également Françoise Brochard-Wyart que j'ai eu la chance d'avoir comme professeur en DEA et qui a également fait partie de mon jury. Une large partie de cette thèse est consacrée au problème des singularités, sujet sur lequel nous avons eu beaucoup d'échanges fructueux avec Jens Eggers. Je lui en sais gré.

J'ai eu la chance de faire la connaissance de Christophe Clanet (notre cousin de Marseille) au cours de mon stage de DEA et notre collaboration n'a cessé depuis lors. Je suis très heureuse qu'il ait fait partie de ce jury : Christophe a joué un rôle majeur dans ce travail, autant par son enthousiasme que par les sujets qu'il a initiés (sur les pertes de charge singulières et les problèmes d'impact). Merci pour tout Christophe, j'ai peu eu l'occasion de te le dire, mais j'ai beaucoup appris à tes côtés et ce fut un réel plaisir de travailler avec toi.

Je voudrais exprimer mon immense gratitude à David Quéré qui a merveilleusement dirigé ce travail, à la fois en me laissant une grande liberté et en étant remarquablement présent et attentif. Je le remercie pour son soutien et sa mobilisation lors du marathon de la rédaction, pour son humour et son optimisme (malgré l'invasion inquiétante de sa salle de manip par des 5/2), ses conseils avisés et sa mesure en toute chose – canalisatrice de mes tendances à l'excès. J'ai peu eu l'occasion de lui dire (à lui aussi), mais ces années passées au laboratoire ont été décisives pour moi : si je désire aujourd'hui continuer dans la voie de la recherche, Christophe et David y sont pour beaucoup. Merci pour votre amitié, votre confiance et surtout merci de nous renvoyer l'image de chercheurs heureux et épanouis auxquels on a envie de ressembler !

Je tiens aussi à remercier Yves Quéré qui m'a mise en contact avec son fils, David. Les discussions que nous avons eu avec Jean-Yves Ollitrault et Wendy Zhang ont été très instructives, merci.

Claudine Williams et plus généralement tout le personnel du laboratoire m'ont accueillie au labo pendant ces quatre années. Je suis spécialement redevable envers tous ceux qui sont passés dans l'équipe de David, les bien-nommées Quérettes, avec qui j'ai partage des moments inoubliables. Denis Richard (le Viking), l'ingénieux José Bico (spécialiste ès- bigouttes) et ma chère co-bureau, Pascale

*Aussillous, (dite aussi Wonder-Calou) m'ont accueillie à bras ouverts à mon arrivée. Puis, vinrent la-**jamais-trop**-gentille madame Anne-Laure Himbert-Biance (nos discussions de fin d'après midi dans la salle de manip vont beaucoup me manquer, Scarab !), Kiki-Bosley-Fred avec lequel j'ai eu la chance de travailler (merci pour tout : la vaisselle de la cuve, le bouquin, les tuts et tes multiples conseils...), Aurèl (spécialiste des soirées belotes), Frédéric petite Cheville (qui s'est senti très concerné par mes problèmes de bourrelet, je lui en sais très gré) et les petits jeunes : l'énergique Mathilde-la- torpille (qui réussit à me traîner à la piscine) et Etienne la star chantante de CNRS-MAG. Ce fut un plaisir pour moi de partager votre quotidien. Merci à tous pour votre amitié, votre gentillesse et votre patience.. Je confesse que je vous quitte le cœur un peu serré mais je compte bien ne pas me laisser oublier...*

Merci aussi Raymond Ober (spécialiste en tout, Raymond ne partez pas trop vite, vous nous êtes indispensable), Boo Boo (ex-aequo en gentillesse avec Anne-Laure et specialisée dans l'organisation de pot en tout genre), Anne-Marie Cazabat (merci pour le monitorat, merci de m'avoir recueillie dans tes locaux et merci pour ton soutien !), Elie Raphaël (merci pour les multiples tuyaux et conseils que tu m'as donnés et le temps précieux que tu m'as accordé avant ma soutenance. Bon courage pour la suite, cher professeur Rapou !), Marie-Pierre Valignat (qui m'a prêté son bureau), Olivier Bénichou (avec qui j'ai pu discuter du bon vieux temps), Achod Aradian (et ses conseils en mathematica), Martine Badeyan, la bouillante Josélita Labirin, Damien van Effenterre (compagnon de monitorat), Christophe Poulard (n'oublie pas d'arroser les plantes !), Damien Baigl (bon courage pour le sprint final), Florent Saulnier (jumeau de thèse), Ko Okumura (le seul japonais physicien francophone et moniteur de ski, au monde), Claire Laurens (une copine alto), Tatiana Schmatko, Josselin Vasquez (bon courage à tous deux pour la fin), Ahmed Hamraoui (désolée pour le téléphone..), Alexis-Martin Prévost (merci pour les remerciements), Marie Lamblet (l'étourdie), Georges Debrégeas (quasi-chef), Alexandre Kabla (compagnon-chanteur), Liliane Léger, Hubert Hervet, Gilles Jandeau, Lionel Bureau. Je remercie également Marie-France Jestin, dont l'ingéniosité n'a d'égal que mon incompétence pour toutes les questions administratives, Françoise David et Deborah Dépost toujours si disponibles. Daniel Détry a construit la machine des rouleaux, d'une robustesse à toute épreuve malgré tout ce que je lui ai fait subir, je lui en sais infiniment gré. Merci également à Michel Crasson, pour son sourire et ses visites, Gérard Barthélémy et Lahcene Cherfa pour toutes leurs réalisations. Merci aussi à Josette Come-Garry et Florence Bonamy pour leur aide à la bibliothèque.

Je remercie également mes amis qui m'ont donné de si gentilles preuves de leur attachement tout au long de ces quatre ans alors que je n'ai pas été très disponible (un merci tout spécial à Prune, Lucien, Iris and futur co, Félix, Héloise pour leur ... jeunesse d'esprit). Vous êtes tous les bienvenus à Boston !

J'ai la chance d'être entourée par une famille attentionnée et unie qui m'a soutenue tout au long de mes études. Bonne nouvelle : les concours, examens, oraux divers et soutenances en tout genre, c'est terminé ! Merci les parents (pour le pot de thèse, les 512 mega, la fête à Nesles, Pocamélix, votre soutien constant et pour tout le reste), merci les soeurs Camille (bon vent !) et Pauline (la grange va bien me manquer), merci Félix pour ton dessin du jour J et merci les pièces rapportées, Loïc et Laurent. Merci à mes grand-parents : Map, Mamie et Pip. Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude envers Félix Zobillon et Félicien Pipenbois : je leur serai éternellement redevable de m'avoir fait découvrir la physique et de m'avoir donné un peu de leur flamme. J'espère que mes petits cousins m'aideront à reprendre le flambeau familial !

Merci Emmanuel, ta présence embellit mes jours.

Enfin, j'ai une pensée émue pour Marc et Pap. Je sais qu'ils n'auraient pas été indifférents à ce travail : la curiosité du premier aurait été émoustillée par cette thèse et la fierté du second ma plus belle récompense.

Table des matières

Introduction **13**

I Colonnes liquides **17**

1 Oscillation de colonnes liquides **19**

1.1 Introduction 19

1.2 Résultats expérimentaux 20

1.2.1 Expérience 20

1.2.2 Oscillations à partir d'un tube vide 21

1.2.3 Début de la montée 22

1.2.4 Oscillations à partir d'un tube surrempli 25

1.3 Quelles sources de dissipation ? 26

1.3.1 Conservation de l'énergie 26

1.3.2 Dissipation visqueuse 27

1.3.3 Dissipation singulière 27

1.4 Modèle 30

1.4.1 Équations du mouvement 30

1.4.2 Les deux régimes d'amortissement 32

1.4.3 Tube surrempli 34

1.5 Déformation de l'interface 36

2 Dissipation singulière **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Mise en évidence expérimentale 40

2.2.1 Expériences 40

2.2.2 Premiers résultats 40

2.3 Modèle CC 42

2.4 Résultats 43

2.4.1 Angles ϕ_0 obtus 43

2.4.2 Angles ϕ_0 aigus . . . 45
2.4.3 Comparaison entre la théorie et les expériences . . . 47
2.5 Conclusion . . . 48

II Statique et dynamique de gouttes sur un tamis 49

3 Gouttes tombant dans un trou 53
3.1 Introduction . . . 53
3.2 Montage expérimental et résultats . . . 54
3.2.1 Expérience . . . 54
3.2.2 Premières observations : mise en évidence d'une vitesse seuil . . . 55
3.2.3 Caractéristique de la vitesse seuil . . . 57
3.3 Au seuil . . . 58
3.3.1 Les deux régimes de passage . . . 58
3.3.2 Interprétation . . . 60
3.3.3 Régime capillaro-inertiel . . . 60
3.3.4 Limites du régime capillaro-inertiel . . . 63
3.4 Au-delà du seuil . . . 65
3.4.1 Temps de pincement . . . 66
3.4.2 Longueur du doigt de liquide . . . 67
3.4.3 Volume éjecté . . . 69
3.5 Conclusion . . . 70

4 Gouttes tombant sur une fibre 73
4.1 Introduction . . . 73
4.2 Ce que peut soutenir une fibre . . . 74
4.2.1 Résultats expérimentaux . . . 74
4.2.2 Discussion et interprétation . . . 78
4.3 Ce que peut attraper une fibre . . . 83
4.3.1 Résultats expérimentaux . . . 83
4.3.2 Discussion . . . 88
4.4 Conclusion . . . 90

5 Gouttes sur une fibre conique 91
5.1 Introduction . . . 91
5.2 Fabrication de fibres coniques . . . 93
5.2.1 Capillaire de verre étiré . . . 93
5.2.2 Fibre de cuivre croquée . . . 94

5.3 Quelle force motrice ? . . . 96
5.3.1 Premiers résultats . . . 96
5.3.2 Forme d'une goutte sur une fibre . . . 96
5.3.3 Force tirant une goutte sur une fibre conique . . . 99
5.4 Dynamique . . . 102
5.4.1 Quelle dissipation ? . . . 103
5.4.2 Dynamique d'une goutte sur une fibre cylindrique inclinée . . . 108
5.4.3 Vitesse d'avancée d'une goutte le long d'une fibre conique . . . 109
5.5 Fibres coniques mouillées . . . 112
5.5.1 Film épais . . . 112
5.5.2 Film mince . . . 113
5.5.3 Séchage . . . 115
5.6 Interprétation énergétique - Étalement en mouillage total . . . 115
5.6.1 Substrat plan . . . 115
5.6.2 Fibre conique . . . 116
5.6.3 Substrat quelconque . . . 117
5.7 Conclusion . . . 117

III Fracture d'un liquide visqueux 121

6 Pointes liquides 125
6.1 Introduction . . . 125
6.2 Dispositifs expérimentaux . . . 126
6.2.1 Singularité à trois dimensions . . . 126
6.2.2 Singularité à deux dimensions . . . 128
6.3 Résultats expérimentaux . . . 131
6.3.1 Épaisseur entraînée e . . . 131
6.3.2 Profondeur d'enfoncement de la pointe . . . 133
6.3.3 Acuité de la pointe . . . 135
6.4 Discussion . . . 138
6.4.1 Forme de l'interface . . . 138
6.4.2 Argument dimensionnel . . . 140
6.4.3 Solution auto-similaire de la singularité . . . 141
6.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . 142
6.5 Conclusion . . . 144

7 Fracture de l'interface **145**

7.1 Introduction . . . 145

7.2 Modèle d'Eggers . . . 146

7.2.1 Les équations . . . 146

7.2.2 Renormalisation . . . 148

7.3 Expérience des rouleaux . . . 149

7.3.1 Mesure du seuil . . . 149

7.3.2 Résultats . . . 151

7.4 Stabilité du film . . . 155

7.4.1 Expérience . . . 155

7.4.2 Célérité de rétraction . . . 158

7.4.3 Interprétation . . . 159

7.4.4 Critère de stabilité de la lame . . . 162

7.4.5 Équivalence des deux critères . . . 165

7.5 Expérience du jet . . . 167

7.6 Conclusion . . . 169

8 Film d'air **171**

8.1 Introduction . . . 171

8.2 Différentes mesures de l'épaisseur du film d'air entraîné . . . 172

8.2.1 Bourrelet bordant le film . . . 172

8.2.2 Distribution de taille des bulles . . . 177

8.2.3 Profil de cisaillement . . . 178

8.2.4 Dynamique de formation de bulles . . . 181

8.3 Résultats . . . 183

8.3.1 Influence de la viscosité η_0 du film . . . 183

8.3.2 Bilan . . . 184

8.4 Discussion . . . 185

8.4.1 Modèle . . . 185

8.4.2 Analogie avec le problème de Landau-Levich . . . 187

8.4.3 Courbure de l'interface loin du film entraîné . . . 188

8.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . 191

8.4.5 Limites du modèle . . . 192

8.5 Conclusion . . . 195

Conclusion générale **199**

A Goutte sur une fibre **201**

A.1 Forme d'une goutte axisymétrique 201

A.1.1 Profil et surpression d'une goutte sur une fibre 201

A.1.2 Longueur, aire de contact, volume de la goutte 202

A.2 Stabilité de la forme axisymétrique 203

A.2.1 Roll-up 203

A.2.2 Influence de la gravité 205

B Forme du bourrelet **207**

B.1 Modèle 207

B.2 Résultats 208

B.3 Limites du modèle 209

B.3.1 Condition d'application de l'approximation linéaire 209

B.3.2 Limites 209

C Trompette **211**

C.1 Forme de la trompette 211

C.2 Longueur de la trompette visqueuse 213

C.3 Trompette peu visqueuse 213

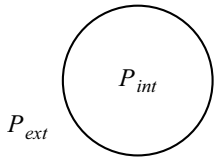
Bibliographie **214**

Introduction

À petite échelle, les liquides peuvent se comporter étrangement. Prenons un verre propre rempli d'eau. Au milieu du verre, l'interface entre l'eau et l'air est plane, perpendiculaire à la direction de la gravité alors qu'en regardant attentivement sur les bords du verre, on observe que le liquide fait l'ascension du solide en dépit de la pesanteur. Pour comprendre l'origine de ce phénomène, considérons un petit volume de liquide (de forme *a priori* quelconque) dans l'air. Les molécules de ce liquide s'attirent mutuellement comme en témoignent l'état condensé de ce liquide (au contraire d'un gaz qui aurait cherché à occuper le plus de place possible). Ces interactions inter-moléculaires pilotent le comportement du liquide à l'interface avec un autre milieu en lui donnant la forme qui va rendre minimum le nombre de molécules à l'interface. Cette condition de surface minimale, quand il n'y a pas d'autres forces, conduit à la forme sphérique. Couplée à la gravité, elle engendre des formes spéciales, comme celles des ménisques évoqués plus haut, ou des flaques sur le sol. On note γ l'énergie de surface ou tension interfaciale entre un liquide et l'air, et on appelle capillarité l'étude des interfaces entre deux milieux non miscibles. Notons que les effets capillaires souvent antagonistes de la gravité ne se manifestent pleinement que quand les forces de surface dominent les forces de pesanteur, soit en dessous d'une taille de l'ordre du millimètre, appelée longueur capillaire, notée κ^{-1} et donnée par l'expression (en notant ρ la masse volumique du liquide) :

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \mathrm{g}}} \tag{1}$$

Les conséquences de la tension de surface sont multiples : tout d'abord elle provoque une diminution de l'aire de l'interface entre deux milieux. Ensuite, elle met en surpression le fluide contenu du côté concave de l'interface (*cf.* figure 1), la surpression étant proportionnelle à la courbure c de



$$P_{int} = P_{ext} + \gamma c$$

Fig. 1: La surpression à l'intérieur d'une interface courbée est donnée par la loi de Laplace.

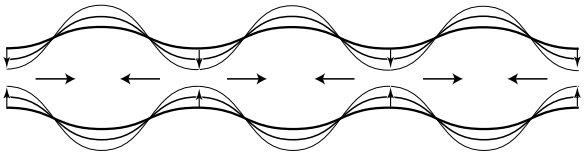


FIG. 2: Les zones de plus grandes courbures se vident dans celles de plus petites courbures, amplifiant ainsi la fluctuation initiale d'épaisseur.

l'interface et à la tension de surface γ (loi de Laplace). Enfin, elle peut également provoquer le fractionnement de liquide. L'instabilité de Rayleigh-Plateau qui met en jeu un cylindre de liquide dans l'air illustre bien ces trois tendances. Si le cylindre de liquide n'est pas trop long, il se résorbe comme un élastique étiré qu'on aurait brusquement laché, pour prendre une forme sphérique de moindre surface apparente. S'il est très long, il se fractionne : les zones de moindre rayon (en surpression) se vident dans celles plus épaisses et le cylindre de liquide se fragmente en plusieurs gouttes. Cette instabilité est schématiquement représentée sur la figure 2. La réalité est un peu plus complexe, d'une part parce que toutes les fluctuations d'épaisseur ne sont pas amplifiées également (celles de trop courte longueur d'onde sont stables et les cinétiques d'évolution des longueurs d'onde instables ne sont pas toutes égales), et d'autre part parce que les non-linéarités du système finissent par être dominantes et engendrer des structures secondaires, notamment des filaments et des gouttes satellites.

Dans l'étude de la capillarité, les interactions avec le solide doivent aussi être considérées. Le liquide peut en effet préférer le contact du solide par rapport à celui de la phase gazeuse et s'y étaler (comme le fait de l'eau le long des parois d'un verre propre). En fonction de l'affinité du liquide pour le solide, une goutte posée sur un substrat s'y étalera totalement, partiellement ou pas du tout. Pour quantifier cette tendance à l'étalement, il faut introduire les tensions de surface (énergie par unité de surface) relatives aux interfaces solide/liquide et solide/gaz (notées respectivement γ_{SL} et γ_{SV}). Pour prévoir si le liquide mouillera ou non le solide, il convient de calculer le paramètre d'étalement S qui compare les énergies de surface du solide sec (γ_{SV}) et du solide mouillé ($\gamma_{SL} + \gamma$) :

$$S = \gamma_{SV} - (\gamma_{SL} + \gamma) \tag{2}$$

Si le paramètre d'étalement est négatif, le mouillage est partiel, alors que s'il est positif, il est total. Ces situations sont schématisées sur la figure 3.

En mouillage partiel, l'angle θ_E que fait la ligne triple avec le solide est donné par la loi de Young-Dupré :

$$\cos\theta_E = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma} \tag{3}$$

Dans ce travail de thèse, notre cheminement fut à l'opposé du problème de Rayleigh-Plateau :

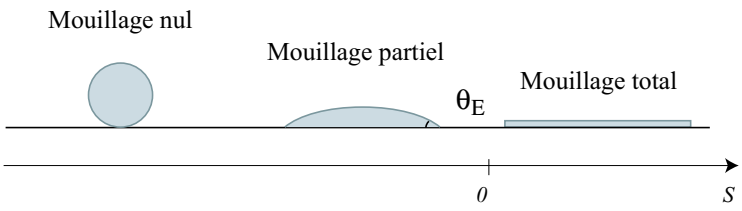


Fig. 3: Différentes situations de mouillage sur une surface plane.

nous sommes partis de situations où l'interface entre le liquide et l'air était minimale et l'avons brusquement augmentée afin de mettre en évidence des comportements singuliers de ces interfaces.

Il y a plusieurs façons d'augmenter une interface liquide/air. Une première solution consiste à étirer le liquide comme un élastique en utilisant un support solide : le liquide s'attache à une extrémité et il suffit alors de tirer de l'autre côté (en utilisant par exemple l'inertie du liquide) pour augmenter l'aire de l'interface entre les deux milieux. Cette solution a été mise en œuvre dans les deux premières parties de ce manuscrit. Nous avons tout d'abord considéré une colonne liquide s'engouffrant dans un tube, puis y oscillant sous l'effet de la gravité. Dans un premier chapitre, outre l'étude du comportement original de cet oscillateur ouvert, nous avons mis en évidence que l'interface plane est susceptible, dans la phase d'engouffrement d'engendrer l'éruption d'un ligament de liquide extrêmement fin. Cette étude nous a conduits à nous interroger sur les pertes de charge singulière apparaissant lorsqu'un liquide s'écoule dans un tuyau dont la section varie brusquement. Le deuxième chapitre est consacré à la détermination de ces pertes de charge en fonction de la géométrie de l'écoulement.

Dans la deuxième partie, nous considérons des situations d'impact de goutte sur une surface solide. Si le liquide mouille le solide, la goutte va s'étaler sur le substrat. Si la goutte tombe maintenant sur la même surface solide, mais percée de trous, le liquide qui ne rencontre pas de solide sous lui va continuer son chemin alors que celui qui rencontre le substrat va s'y agglomérer. Au total, la surface que la goutte expose à l'air s'en trouvera brusquement augmentée. Nous étudions ainsi dans les chapitres 3 et 4 l'impact sur les deux motifs élémentaires qui composent une grille : un trou et une fibre. Le cinquième chapitre est consacré à l'étude du comportement d'une goutte posée sur un substrat dont la courbure n'est pas homogène : une fibre conique.

La dernière partie est consacrée à une autre situation d'impact, qui est celle d'un liquide dans lui-même. Dans certaines conditions (que nous préciserons), une sorte de pointe peut se former à l'endroit du choc – une telle singularité impliquant un très fort rapport surface sur volume, en contradiction avec l'effet régularisateur de tension de surface. Nous consacrons le sixième chapitre à l'étude de la forme remarquable de cette interface. Dans les deux derniers chapitres, nous décrivons la lame d'air entraînée dans le liquide dans le cas d'impacts violents, auxquels la pointe précédemment évoquée ne peut résister.

Première partie

Colonnes liquides

Chapitre 1

Oscillation de colonnes liquides

Sommaire

1.1 Introduction **19**

1.2 Résultats expérimentaux **20**

1.2.1 Expérience 20

1.2.2 Oscillations à partir d'un tube vide 21

1.2.3 Début de la montée 22

1.2.4 Oscillations à partir d'un tube surrempli 25

1.3 Quelles sources de dissipation ? **26**

1.3.1 Conservation de l'énergie 26

1.3.2 Dissipation visqueuse 27

1.3.3 Dissipation singulière 27

1.4 Modèle **30**

1.4.1 Équations du mouvement 30

1.4.2 Les deux régimes d'amortissement 32

1.4.3 Tube surrempli 34

1.5 Déformation de l'interface **36**

1.1 Introduction

Les ruptures de symétrie dans les systèmes physiques engendrent souvent des situations intéressantes : il est possible par exemple d'induire des écoulements de petites quantités de fluide en modifiant les conditions aux limites de part et d'autre du système. Ici, nous nous intéressons à des oscillateurs liquides dont le comportement n'est pas symétrique entre la montée et la descente d'une oscillation. Un premier exemple d'un tel oscillateur est le suivant : un tube capillaire (de rayon inférieur au millimètre) est connecté à un réservoir de liquide. Si l'affinité du liquide pour la surface du tube est grande, le liquide monte par capillarité à l'intérieur du tube jusqu'à atteindre une

hauteur limite pour laquelle la force capillaire est équilibrée par le poids de la colonne de liquide : c'est la loi de Jurin. La dynamique de cette ascension étudiée tout d'abord par Washburn [162] (puis entre autres par les auteurs des références [14, 52, 127, 124, 150]) présente plusieurs régimes : sous certaines conditions, il est possible d'observer des oscillations amorties non symétriques de la colonne autour de cette position d'équilibre. Néanmoins, cette colonne étant extrêmement confinée (le rayon du tube est de l'ordre de la centaine de microns), la dissipation d'énergie d'origine visqueuse est très efficace et peu d'oscillations sont observables. Pour amplifier le régime inertiel de ces oscillations, deux stratégies sont donc envisageables : utiliser les liquides les moins visqueux (ce qui a déjà été fait dans [127]) ou utiliser un tube plus large, ce qui rend la force capillaire négligeable ! Dans ce chapitre, nous montrons que l'on peut étendre considérablement le régime inertiel des oscillations en utilisant une colonne oscillant sous l'effet de la gravité. Nous avons travaillé en DEA et en début de thèse sur ce système, en collaboration avec Christophe Clanet (IRPHE, Marseille), et avons poursuivi cette étude par des compléments sur les dissipations singulières qui feront l'objet du deuxième chapitre. Dans un premier temps, nous présentons le montage et les résultats expérimentaux. Puis, nous détaillons un modèle qui permet de rendre compte des observations expérimentales. Enfin, nous décrivons qualitativement les déformations de l'interface air-liquide sous certaines conditions.

1.2 Résultats expérimentaux

1.2.1 Expérience

Un tube transparent vertical, dont l'extrémité supérieure est obturée par une membrane étanche, est immergé dans un bain de liquide dont la viscosité et la masse volumique sont notées respectivement η et ρ. Les liquides utilisés sont de l'hexane ou de l'eau. À un instant pris par la suite comme l'instant initial, la membrane est violemment percée et le liquide s'engouffre à l'intérieur du tube originellement plein d'air. Cette explosion (sonore) perçue par un microphone déclenche une caméra rapide qui enregistre la position de l'interface air-liquide Z en fonction du temps T. Dans cette partie, la fréquence d'utilisation de la caméra est de l'ordre de 100 s^{-1}. Le tube dont la longueur totale L est de l'ordre du mètre, est immergé sur une profondeur H de l'ordre de la dizaine de centimètres. Le niveau du liquide dans le tube avant l'ouverture de la partie supérieure est noté B. Ce niveau peut être ajusté en soufflant ou aspirant de l'air dans le tube à l'aide d'une seringue. Le rayon du tube noté R, est de l'ordre du centimètre. Les effets capillaires sont donc négligeables puisque le nombre de Bond qui compare les effets de la gravité par rapport aux effets de tension de surface (donné par : $B_0 = (\rho g R^2)/\gamma$) est ici de l'ordre de 20. En outre, la viscosité du liquide est faible (c'est typiquement celle de l'eau) ce qui assure que le nombre de Reynolds Re qui compare les effets inertiels et les effets visqueux ($R_e = (\rho V R)/\eta$) est de l'ordre de 10^4. Notons que la longueur et la vitesse caractéristiques utilisées pour calculer le nombre de Reynolds sont le rayon du tube R

et la vitesse de chute d'une hauteur H, soit $V = \sqrt{gH}$.

Par la suite, les longueurs et le temps seront adimensionnés par la profondeur H d'enfoncement du tube, typiquement de l'ordre d'une dizaine de centimètres et par le temps de chute libre de cette hauteur $\sqrt{H/\mathrm{g}}$. Ces grandeurs, lorsqu'elles seront sans dimension seront notées en lettre minuscule $z = Z/H$ et $t = T/\sqrt{H/\mathrm{g}}$

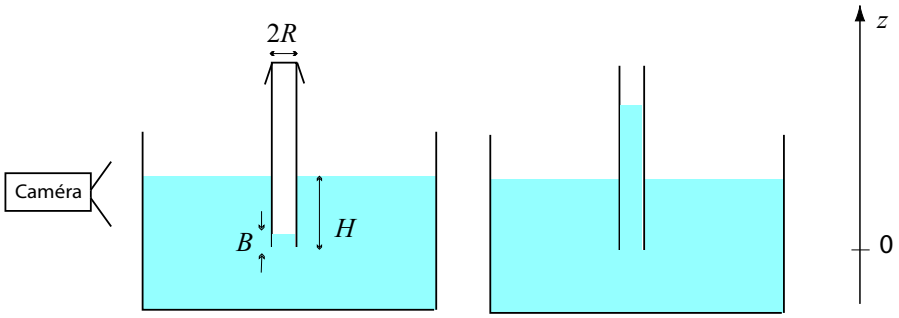


FIG. 1.1: Schéma expérimental de la colonne liquide.

1.2.2 Oscillations à partir d'un tube vide

Considérons la situation schématisée sur la figure 1.1. A $t = 0$, on perce la membrane et on suit la position de l'interface liquide/vapeur dans la colonne en fonction du temps. On reporte un exemple d'une telle variation sur la figure 1.1. Pour cette expérience, nous avons utilisé un tube de 1 cm de

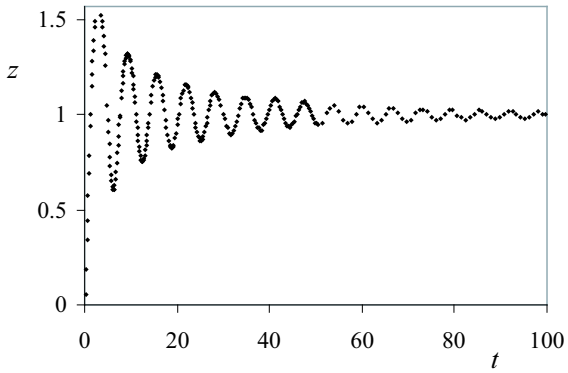


FIG. 1.2: Position de l'interface air liquide z en fonction du temps t. Le tube a un rayon de 1 cm et est immergé dans de l'hexane à 30 cm de profondeur. z est le niveau du liquide dans le tube normé par la profondeur d'enfoncement H et t est le temps normé par le temps de chute libre de cette hauteur $\sqrt{g/H}$

rayon R, immergé jusqu'à une profondeur H de 30 cm, dans de l'hexane dont la viscosité et la masse volumique valent respectivement $0,39$ mPa.s et 660 kg/m^3. Le niveau initial B du liquide dans le tube était de 3 mm. Après l'ouverture de la membrane, le niveau du liquide dans le tube augmente, dépasse la position d'équilibre et remonte jusqu'à atteindre environ 1.5 fois cette position. Puis le

niveau décroît pour atteindre un minimum et remonte une fois encore. On observe ainsi un grand nombre d'oscillations qui s'amortissent lentement avant d'atteindre la position d'équilibre $z = 1$. Ces oscillations sont visibles sur la figure 1.2 sur laquelle la position de l'interface air liquide z (sans dimension) est représentée en fonction du temps t (sans dimension).

Certaines caractéristiques des oscillations de ce système à masse variable méritent d'être précisées (*cf.* figure 1.2).

- Le premier maximum est rapidement atteint (la vitesse initiale est de l'ordre de 170 cm/s) et a pour coordonnées : $t = 3.0 \pm 0.5$ et $z = 1.52 \pm 0.01$.
- Un grand nombre d'oscillations amorties autour de la positions d'équilibre $z = 1$ sont observables. L'amortissement de ces oscillations n'est pas exponentiel : le rapport des amplitudes de deux oscillations successives (soit $\frac{z_{Mi}-1}{z_{Mi+1}-1}$) n'est pas constant et augmente avec le temps comme le montre le tableau 4.1.
- La pseudo-période des oscillations sur la figure 1.2 est de 6.3 ± 0.5. Elle reste constante à 5% près pour les cinq premières oscillations et augmente lentement après.
- Enfin, les oscillations sont légèrement dissymétriques : la courbure des deux premiers maxima est plus faible que celle des deux premiers minima. Au delà, cet effet est moins visible.

Numéro du maximum	1	2	3	4	5	6
Position du maximum z_M	1.52	1.32	1.22	1.16	1.12	1.10
$\frac{z_{Mi}-1}{z_{Mi+1}-1}$	0.61	0.68	0.73	0.77	0.84	

TAB. 1.1: Positions des maxima et rapport des amplitudes de deux maxima successifs.

1.2.3 Début de la montée

Régime de vitesse linéaire

Intéressons-nous aux tout premiers instants du phénomène. Après un régime transitoire de pure accélération, dont la durée est environ 0.1, soit typiquement 15 ms, le début de la montée est linéaire en temps, comme le montre la figure 1.3, où l'on a reporté les données qui correspondent aux temps courts ($t < 0.5$). Les données (pour $t > 0.1$) sont bien décrites par une droite dont la pente vaut, dans cette représentation adimensionnée, 1.00 ± 0.05, proche de 1. La vitesse avec laquelle le liquide s'engouffre dans le tube est donc de l'ordre de $\sqrt{gH}$. Ce fait apparemment anodin mérite d'être commenté : nous avons reporté sur la figure 1.4 la vitesse d'ascension V dans le tube exprimée en m/s en fonction de $\sqrt{gH}$, pour différents liquides et pour différentes profondeurs d'enfoncement du tube H dans le bassin. Il existe bien une relation linéaire entre ces deux grandeurs. La pente de cette droite vaut 1.01 ± 0.05 et non pas $\sqrt{2}$, comme l'aurait prédit une relation de conservation de l'énergie

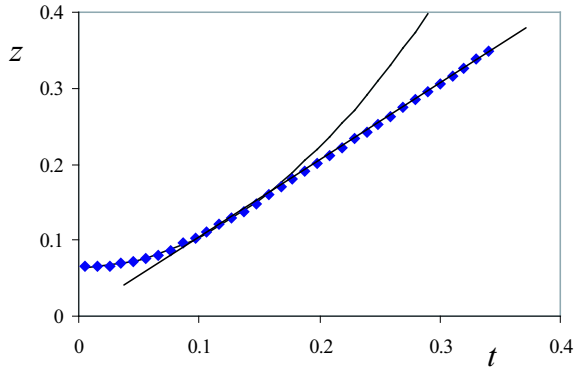


FIG. 1.3: Position de l'interface air liquide z en fonction du temps t pour les tout premiers instants.

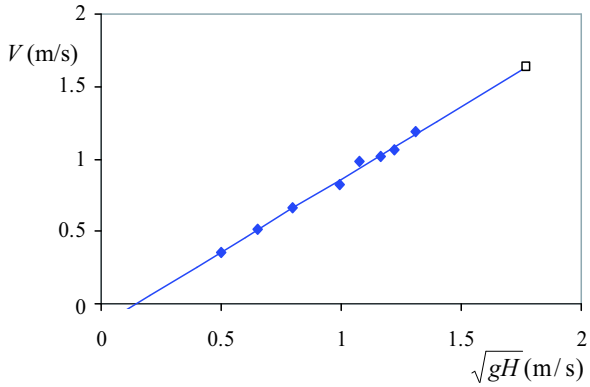


FIG. 1.4: Vitesse d'ascension dans le tube dans le régime linéaire en fonction de $\sqrt{gH}$ pour différents liquides : eau (♦) et hexane (□).

du type équation de Bernoulli. L'énergie n'est donc pas conservée dans ce système et la mesure de la vitesse d'ascension dans le tube doit permettre de quantifier ces pertes énergétiques dont l'origine n'est pas évidente comme nous le verrons dans le chapitre 2. Remarquons aussi que la régression linéaire sur la figure 1.4 ne passe pas par l'origine. Cette propriété s'explique simplement en étudiant le régime d'accélération initiale qui permet de faire passer la colonne d'une situation statique à un régime de vitesse constante V. La quantité de fluide accéléré lors de cette phase est plus importante que celle qui est effectivement dans le tube : l'accélération α déduite de l'ajustement de la position de l'interface aux premiers instants par une parabole d'équation $z = \alpha\, t^2/2 + b$ permet de remonter au volume de fluide initialement accéléré. Pour les données de la figure 1.3, $\alpha = 7.93$ et $b = 0.064$. Ceci donne une hauteur de fluide initiale $B = 1.92$ cm et une hauteur de fluide initialement accélérée $B' = 3.78$ cm. Il existe dans ce problème une longueur d'entrée, dont nous avons montré qu'elle est proportionnelle au rayon du tube [150]. C'est donc la quantité $\sqrt{g(H+R)}$ et non pas $\sqrt{gH}$ qu'il faudrait considérer. Nous nous placerons toujours dans la limite $R \ll H$ qui permet de confondre ces deux vitesses.

Oscillation parabolique

Reprenons la description des oscillations de la colonne de liquide. Après le régime de vitesse constante, les données de la figure 1.3 s'incurvent et le premier maximum est atteint en $z = 1.52$ à $t = 3.1$. Les données expérimentales sur la première période d'oscillation ont été comparées à un comportement parabolique (dont nous préciserons l'origine au paragraphe 1.3.1) d'équation $z(t) = -0.2t^2 + 1.2t - 0.2$ qui est maximum pour $t = 3$ en $z = 1.6$. L'accord est satisfaisant dans la phase de montée mais devient médiocre au-delà du maximum : il apparaît que les phases de montée et de descente sont dissymétriques. Ce point sera précisé au paragraphe 1.4.1.

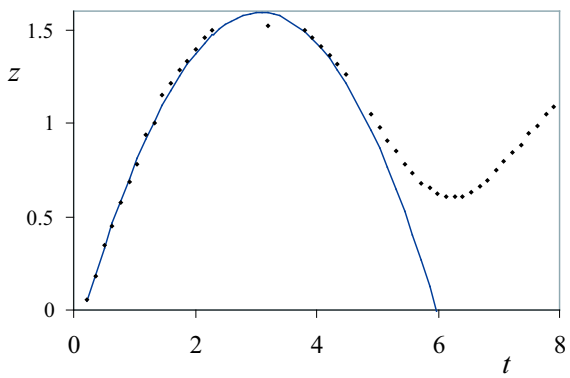


FIG. 1.5: Position de l'interface z en fonction du temps t . Les données expérimentales sont bien décrites jusqu'au maximum par une parabole d'équation $z(t) = -0.2t^2 + 1.2t - 0.2$.

1.2.4 Oscillations à partir d'un tube surrempli

Nous nous sommes aussi intéressés à la situation d'un tube surrempli comme schématisé sur la figure 1.6.

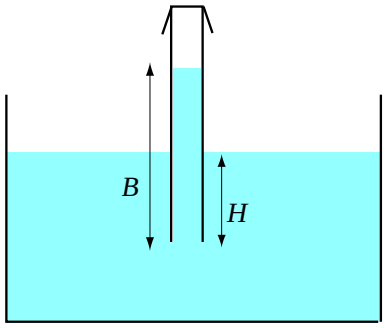


FIG. 1.6: Colonne liquide initialement surremplie ($B > H$).

Le tube est initialement rempli jusqu'à une hauteur B supérieure au niveau du liquide dans le bassin. Après l'ouverture de la membrane, la colonne va se vider dans le bassin et osciller autour de la position d'équilibre $z = 1$. Nous avons porté la position de l'interface z en fonction du temps t sur la figure 1.7. Les longueurs et les temps sont toujours adimensionnés par la hauteur H et le temps $\sqrt{H/g}$, afin d'avoir ici aussi $z = 1$ comme position d'équilibre. Dans cette expérience, le tube de 1 cm de rayon est rempli jusqu'à $B = 34$ cm et immergé à $H = 10$ cm de profondeur.

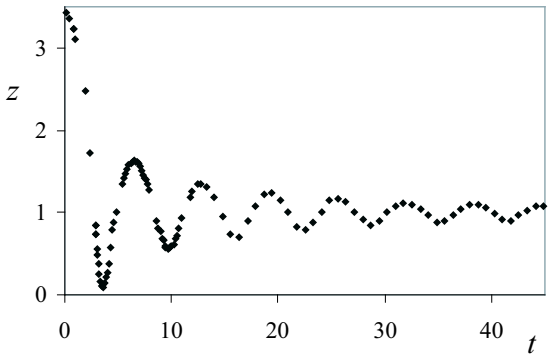


FIG. 1.7: Position de l'interface air liquide z en fonction du temps t partant d'une situation où le tube est surrempli. Le tube a un rayon de 1 cm et est immergé à 10 cm de profondeur.

Les caractéristiques du mouvement de l'interface air liquide de la figure 1.7 sont assez similaires à celles de la figure 1.2 : il est possible de voir un grand nombre d'oscillations amorties autour de la position d'équilibre $z = 1$ et la pseudo-période de ces oscillations est encore égale à 6.3 à 5% près. Il existe également un régime de vitesse constante qui n'est pas atteint avant $t = 2$ et le premier maximum atteint l'altitude $z = 1.64$ à $t = 6.5$. Enfin, la courbure du premier maximum

est beaucoup plus faible que celle du premier minimum comme il avait été remarqué sur la figure 1.1.

1.3 Quelles sources de dissipation ?

Ces résultats expérimentaux peuvent être interprétés en écrivant les équations qui régissent le mouvement de la colonne. C'est la différence de pression entre le haut et le bas de la colonne qui est à l'origine de ce mouvement. En bas du tube, la pression P_+ est donnée par les lois de l'hydrostatique, soit dans le cas schématisé sur la figure 1.1, $P_+ = P_0 + \rho g H$. Juste au-dessus de l'interface, la pression est égale à la pression atmosphérique : nous nous sommes en effet assurés que l'ouverture de la membrane était suffisamment rapide pour que l'équilibre mécanique soit établi dans toute la colonne quasi-instantanément, soit $P_- = P_0$. La force totale s'exerçant sur la colonne est donc cette différence de pression intégrée sur la surface de la colonne diminué de son poids :

$$F = \rho g \pi R^2 (H - Z) \tag{1.1}$$

1.3.1 Conservation de l'énergie

Commençons par écrire l'énergie de la colonne liquide [98, 127]. Cette énergie est la somme de deux termes : les énergies cinétique et potentielle de la colonne. Cette dernière s'obtient à partir de la force totale s'exerçant sur la colonne ($\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}Z = -F$), soit :

$$E_p = \frac{1}{2}\rho g \pi R^2 Z^2 - \rho g H \pi R^2 Z$$

Ainsi, l'énergie totale s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\rho \pi R^2 Z \dot{Z}^2 + \frac{1}{2}\rho g \pi R^2 Z^2 - \rho g H \pi R^2 Z$$

Sous forme adimensionnée (en normant les masses par celle de la colonne remplie soit $\rho g H \pi R^2$) cette énergie se réécrit :

$$e = \frac{1}{2} z \dot{z}^2 + \frac{1}{2} z^2 - z \tag{1.2}$$

Si l'énergie était conservée, sa valeur serait 0 (puisqu'à $t = 0$, $e = 0$) et l'équation 1.2 peut être intégrée afin de déterminer la trajectoire $z(t)$:

$$z(t) = \sqrt{2} t (1 - \frac{t}{4\sqrt{2}}) \text{ pour } t < 4\sqrt{2} \tag{1.3}$$

On trouve ainsi une succession d'oscillations paraboliques, représentées sur la figure 1.8.

Cette fonction a bien certaines des propriétés de la courbe expérimentale : la période de $4\sqrt{2}$ est assez proche de la valeur observée (6.3 ± 0.5) et la trajectoire sur la première demi-période est parabolique. Néanmoins, les deux courbes diffèrent nettement par d'autres points : le plus notable

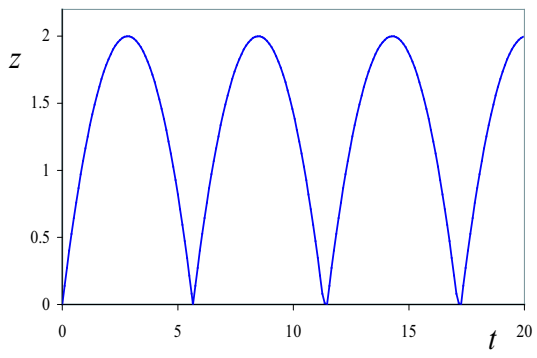


FIG. 1.8: Position de l'interface air liquide z en fonction du temps t calculée à partir de l'équation de conservation d'énergie 1.2.

est bien sûr que la conservation de l'énergie conduit à des oscillations non-amorties. En outre, la vitesse est discontinue chaque fois que $z = 0$. Ce dernier point s'explique simplement : en $z = 0$, la vitesse est maximum ? la masse de la colonne est nulle, il n'y a donc pas d'inertie et la colonne peut rebondir. Mais, d'autres différences par rapport à l'expérience existent aussi à temps court : la vitesse initiale que l'on déduit de l'équation 1.3 vaut $\sqrt{2}$ et est donc supérieure de 40% environ à la valeur observée. En outre, la position du premier maximum calculé à partir de l'équation 1.3 est 2, là aussi nettement plus importante que ce que montre l'expérience qui indique plutôt 1.5.

1.3.2 Dissipation visqueuse

Notons d'abord qu'une dissipation visqueuse ne saurait rendre compte des déviations observées. En effet, la diffusion de la quantité de mouvement des parois vers le centre du tube ne saurait intervenir avant le temps caractéristique $\tau = (\rho R^2)/\eta$ nécessaire pour établir un profil de vitesse parabolique dans le tube. Or ce temps, exprimé sans dimension, est dans nos expériences très long : $\tau = 170$ pour une colonne d'hexane de 1 cm de rayon. La dissipation visqueuse ne peut donc rendre compte de la différence entre les observations expérimentales et le calcul du paragraphe 1.3.1 aux temps courts ($t < 6.3$) : les amplitudes du premier maximum observé ($z = 1.52$) et calculé ($z = 2$) diffèrent de 30% et les pseudo-périodes de plus de 10% alors que dans les deux cas la précision des mesures est largement supérieure à ces écarts. En outre, les amplitudes des oscillations des premiers maxima sont indépendantes de la viscosité du fluide utilisé ; l'expérience réalisée avec de l'hexane ou de l'eau (pourtant trois fois plus visqueuse) donne les mêmes résultats à moins de 1 % près.

1.3.3 Dissipation singulière

Nous interprétons plutôt la dissipation d'énergie comme liée à la perte de charge singulière à l'entrée du tube parfois évoquée dans les ouvrages d'hydrodynamique classique [4]. Cette perte de charge apparaît lorsqu'un fluide (même de très faible viscosité) s'écoule dans un tuyau qui voit sa

section varier très brusquement. C'est effectivement le cas dans notre expérience où le tube et le bassin, dont les sections très différentes, sont connectés abruptement. Lors de la monté du fluide dans le tube, l'écoulement passe d'une région de large section, le bassin, à une région confinée, le tube. De même lors des mouvements descendants, l'écoulement passe brusquement d'une région de petite section, le tube, à une région très large, le bassin.
Le profil de vitesse d'un fluide newtonien (ou non) s'écoulant d'un réservoir vers un tube a été souvent étudié, une telle géométrie d'écoulement étant rencontrée dans de nombreux processus industriels. Citons entre autres [161, 38, 13, 4].

Cas d'un élargissement brusque

Nous reprenons ici le calcul exposé dans [4] de la perte de charge singulière au passage d'un élargissement soudain. La surface de contrôle S choisie est délimitée par les contours du récipient et les lignes pointillées du schéma gauche de la figure 1.10. La variation de quantité de mouvement projetée selon l'axe y à travers la surface de contrôle S vaut (en utilisant également la conservation du débit) :

$$\rho({V_2}^2 S_2 - {V_1}^2 S_1) = \rho V_2 S_2 (V_2 - V_1)$$

Il se développe des couches limites le long des parois BC et EF, mais nous faisons l'hypothèse que le nombre de Reynolds de l'écoulement (ici de l'ordre de 10^4) est suffisamment important pour que les composantes tangentielles du tenseur des contraintes qui y sont associées soient négligeables. En AB et CD, la résultante normale des contraintes est la pression P_1 et en EF est P_2. Le long de l'axe y, la variation de quantité de mouvement au travers de la surface de contrôle s'écrit donc :

$$\rho V_2 S_2 (V_2 - V_1) = P_1 S_1 + P_2 (S_2 - S_1) - P_2 S_2$$

Ce qui se simplifie en :

$$P_2 = P_1 + \rho V_2 (V_1 - V_2)$$

Comparons ce résultat avec la pression qui aurait été trouvée si l'élargissement avait été graduel. Il aurait alors été possible d'utiliser l'équation de Bernoulli, d'où l'on tire,

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho({V_1}^2 - {V_2}^2)$$

Il apparaît donc que la chute de pression $P_2 - P_1$ lors d'un brusque élargissement est inférieure à celle d'un élargissement très progressif et est égale à :

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho({V_1}^2 - {V_2}^2) - \rho V_2 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\rho\,(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \tag{1.4}$$

La perte de charge singulière au passage d'un brusque élargissement de section se trouve donc être proportionnelle à l'énergie cinétique volumique du fluide à la sortie de l'écoulement. L'énergie perdue est alors probablement dissipée par friction interne et mobilisée par de petites zones de recirculation.

Dans l'expérience des colonnes liquides, le rapport des sections est de l'ordre de 10^{-4}, si bien que nous prendrons par la suite :

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 \tag{1.5}$$

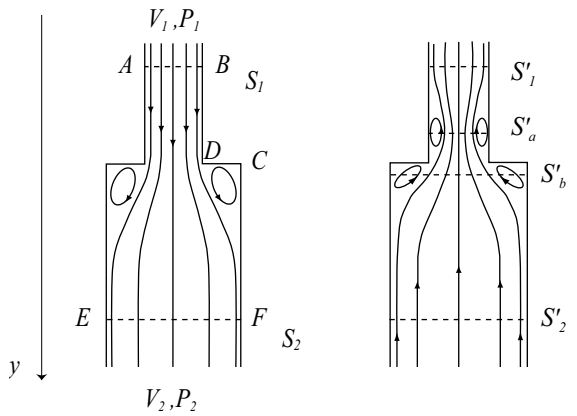


FIG. 1.9: Lignes de courant schématiques au passage de brusques élargissement et rétrécissement de sections. Les zones de recirculation sont schématisées dans les deux cas.

Cas d'un rétrécissement brusque

Le cas d'un rétrécissement brusque est à peine évoqué dans la littérature [24]. Il semblerait qu'il existe là encore une perte de charge singulière, elle aussi proportionnelle à l'énergie cinétique volumique dans le tube, mais dont la constante de proportionnalité est plus complexe. Il est en effet probable qu'une première perte de charge existe lors du passage du rétrécissement (*cf.* figure 1.10, le vortex situé entre les section S'_1 et S'_a localise une première zone de fluide mort). Les lignes de courant ne se recollant pas tout de suite sur la paroi du tube, il apparaît un autre vortex auquel une deuxième perte de charge est associée (entre les sections S'_a et S'_b). La présence d'un tel vortex est comparable au phénomène de *Vena Contracta* et a été étudiée notamment dans [158, 111]. Il est possible de voir ce deuxième vortex dans l'expérience des colonnes liquides oscillantes. Partons d'un tube initialement vide (*cf.* figure 1.1) immergé dans de l'eau sous lequel nous plaçons un cachet d'aspirine effervescent. Les bulles dégagées par le cachet servent de traceurs et sont piégées par les zones de recirculation comme on le voit sur la figure 1.10. En tout cas, on attend que la perte de charge dans ce cas d'un rétrécissement brusque soit aussi proportionnelle à l'énergie cinétique volumique à l'entrée du tube. On la note :

$$\Delta P = \frac{1}{2}K\ \rho {V_1}^2 \tag{1.6}$$

où K est une constante de proportionnalité comprise entre 0 et 1 qui devrait dépendre de la géométrie de l'écoulement. Un modèle permettant de préciser la valeur de K en fonction de la forme du récipient

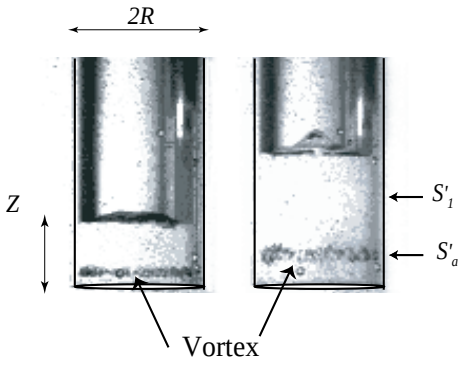


FIG. 1.10: Visualisation du vortex annulaire de recirculation (indiqué par une flèche) à l'aide de bulles au cours de la montée du fluide dans le tube. Cette zone de recirculation correspond à celle de la section S_b sur le schéma droit de la figure 1.10. Elle a la particularité de rester à la même cote pendant un certain temps. Ces deux photos ont été prises 40 et 70 ms après l'ouverture de la membrane. Le rayon du tube est 1 cm. Nous avons ajouté la position de la zone de rétrécissement notée S'_a sur la figure .

sera donné dans le chapitre 2. Dans la suite de ce chapitre nous prendrons $K = 1$, c'est-à-dire la même valeur que dans le cas d'un élargissement brusque (eq. 1.5).

1.4 Modèle

1.4.1 Équations du mouvement

La perte d'énergie associée à cette perte de charge singulière est toujours positive et s'écrit différemment selon que le liquide monte dans le tube ($\mathrm{d}z > 0$) ou descend ($\mathrm{d}z < 0$). En grandeur adimensionnée, on trouve ainsi [127] :

$$\mathrm{d}e = -\frac{1}{2}\,\dot{z}^2\mathrm{d}z \quad \text{pour la montée } (\mathrm{d}z > 0) \tag{1.7}$$

$$\mathrm{d}e = \frac{1}{2}\,\dot{z}^2\mathrm{d}z \quad \text{pour la descente } (\mathrm{d}z < 0) \tag{1.8}$$

En dérivant e par rapport à z dans l'équation 1.2 et en négligeant la dissipation visqueuse, nous obtenons les équations du mouvement :

$$z\ddot{z} + \dot{z}^2 = 1 - z \quad \text{pour la montée } (\mathrm{d}z > 0) \tag{1.9}$$

$$z\ddot{z} = 1 - z \quad \text{pour la descente } (\mathrm{d}z < 0) \tag{1.10}$$

Les équations 1.9 et 1.10 sont différentes selon le signe de $\mathrm{d}z$, ce qui explique qualitativement la dissymétrie observée sur les figures 1.2 et 1.7. Cette disymétrie se voit également si l'on regarde l'écoulement au bas du tube. Les phases de montée et descente sont très différentes : alors que l'aspiration du fluide se fait dans tout le volume, l'éjection de fluide se fait selon une direction précise. De la même façon, on éteint facilement la flamme d'une bougie en soufflant dessus et non en l'aspirant (comme nous l'a fait remarqué M. Rabaud).

Remarquons en outre que ces équations dérivées à partir de la conservation d'énergie ne sont rien d'autre que l'expression du principe fondamental de la dynamique, pour un système de masse variable M (proportionnelle z) soumis à une force F (proportionnelle à $1-z$, *cf.* équation 1.1). A la montée, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\,MV = F \tag{1.11}$$

qui est l'équation 1.9. Pour la descente, une loi similaire peut être écrite en tenant compte du transfert de quantité de mouvement associé à l'émission d'un jet éjecté du tube à une vitesse V. Ainsi l'équation 1.11, doit être modifiée en :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\,MV = F + \dot{M}V \tag{1.12}$$

qui est l'équation 1.10. Nous n'avons pas pris en compte de terme de la forme $\dot{M}V$ dans l'équation 1.11, puisque au cours des mouvements ascendants le fluide est aspiré dans tout le volume du récipient, ce qui suppose une vitesse d'aspiration quasi-nulle, alors que pour la descente, le jet est directionnel. Un flux de quantité de mouvement doit donc être associé à cette poussée. Il est amusant de remarquer que Johann Bernoulli lui-même, en étudiant le problème de la vidange d'un fluide d'un tube surrempli (*cf.* figure 1.6) était arrivé à la même équation 1.10 [6], en appliquant directement et de façon audacieuse le principe de Newton $M\mathrm{d}V/\mathrm{d}T = F$.

Les équations 1.10 et 1.9 peuvent être intégrées en introduisant deux constantes d'intégration A et B :

$$\frac{1}{2}z^2\dot{z}^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 = A \quad \text{pour la montée } (\mathrm{d}z > 0) \tag{1.13}$$

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 + z - \ln z = B \qquad \text{pour la descente } (\mathrm{d}z < 0) \tag{1.14}$$

Si le tube est d'abord vide, alors la constante A est nulle et l'équation 1.13 peut être intégrée en :

$$z(t) = t\left(1 - \frac{t}{6}\right) \quad \text{pour} \quad 0 < t < 3 \tag{1.15}$$

L'équation 1.15 est en très bon accord avec les observations de la figure 1.2 aux temps courts : le début de l'ascension est bien linéaire en temps ($z \sim t$ pour $t < 0.5$) et se fait à la vitesse $V = \sqrt{\mathrm{g}H}$ en parfait accord avec les observations de la figure 1.4. En outre, la première oscillation est bien une portion de parabole d'équation très proche de celle de la figure 1.5 et l'altitude du premier maximum $z_M = 1.5$ en accord avec les observations expérimentales. Cette forme de dissipation a donc bien la propriété de réduire la vitesse du fluide à temps court : elle est d'autant plus efficace que la vitesse de l'interface est grande comme c'est le cas aux premiers instants.

L'équation 1.9 exhibe de surcroît une propriété intéressante à l'instant initial, partant d'un tube initialement parfaitement vide ($B = 0$). A $t = 0$, la vitesse $\dot{z}$ et le niveau z sont nuls, ce qui conduit à une accélération vérifiant la condition : $z\ddot{z} = 1$ avec $z = 0$, soit une accélération infinie ! Cette

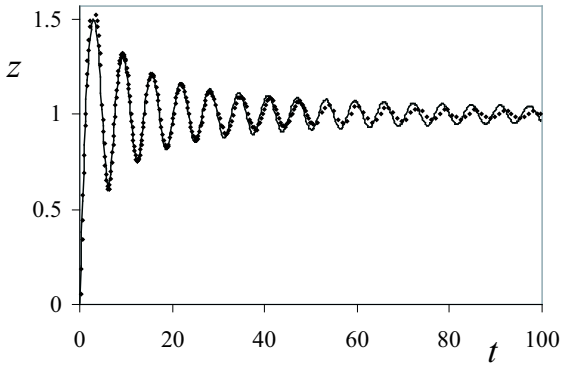


FIG. 1.11: Niveau de l'interface z en fonction du temps t pour un tube de 20 mm de diamètre. En trait plein le résultat de l'intégration numérique des équations 1.9 et 1.10 .

incohérence est levée en prenant en compte la longueur d'entrée du tube notée r (cette longueur d'entrée égale au rayon du tube est discutée au paragraphe 1.2). L'équation 1.9 devient ainsi :

$$(z + r)\ddot{z} + \dot{z}^2 = 1 - z \tag{1.16}$$

Cette équation n'est plus singulière à l'instant initial. En outre, le premier maximum atteint est légèrement plus élevé : on pose $x = z + r$, l'équation 1.16 donne alors ($r = R/H$ est une constante) :

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = 1 + r - x$$

Cette équation est également intégrable, le premier maximum ayant une altitude donnée par :

$$z_M = \frac{3}{2}(1 + r)$$

Dans l'expérience présentée au paragraphe 1.2, $r = 1/30$, ce qui donne : $z_M = 1.55$, tout à fait en accord avec les données.

Finalement, il est possible à l'aide d'un logiciel de calcul numérique d'intégrer les équation 1.10 et 1.9. Nous avons tracé sur la figure 1.11 ces données numériques sans paramètre ajustable et les points expérimentaux de la figure 1.2. L'adéquation entre les données théoriques et expérimentales est excellente jusqu'à $t = 60$. Au-delà il apparaît un décalage assez net, où à la fois la période (sous-estimée) et l'amplitude (sur-estimée) sont mal décrites par la théorie. Nous verrons au prochain paragraphe que la prise en compte de la dissipation visqueuse permet d'interpréter en partie ces écarts [127] [98].

1.4.2 Les deux régimes d'amortissement

Amortissement hyperbolique

Une des caractéristiques les plus remarquables des oscillations présentées sur les figures 1.2, 1.7 et 1.11 est leur persistance : il est possible d'en dénombrer plus d'une quinzaine sur la figure

1.2. Cette particularité est due à la source de dissipation du système. L'argument suivant permet de comprendre pourquoi cette source de dissipation induit un amortissement si lent. La puissance dissipée peut être calculée à partir des équations 1.2, 1.7 et 1.8 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(z\dot{z}^2 + (z-1)^2\right) = -|\dot{z}|\dot{z}^2$$

Sauf à temps court, le niveau de l'interface peut s'écrire comme $z(t) = 1 + \alpha(t)\sin t$, α étant une fonction d'amplitude très inférieure à un et dont le temps caractéristique de variation est très long devant 2π. Sur une période la valeur moyenne des quantités $|\dot{z}|\dot{z}^2$ et $z\dot{z}^2+(z-1)^2$ vaut respectivement $4|\alpha^3|/3\pi$ et α^2. Ainsi on obtient une équation d'évolution pour l'amplitude des oscillations :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t} = \frac{4|\alpha^3|}{3\pi}$$

Cette équation s'intègre en :

$$\alpha(t) = \pm\frac{3\pi}{2t} \tag{1.17}$$

Ce résultat n'est *a priori* valable que pour des oscillations de petite amplitude. Elle montre qu'alors l'amortissement est hyperbolique, ce qui permet de comprendre pourquoi ces oscillations sont si nombreuses. Ce caractère hyperbolique est en assez bon accord avec les amplitudes $\alpha_{M,m}$ des différents maxima ($\alpha_M = z_M - 1$) et minima ($\alpha_m = 1 - z_m$) successifs reportés sur la figure 1.12 en fonction du temps, en échelle logarithmique. En effet, les données sont correctement représentées par une droite de pente -1 sur une décade de temps environ. Aux temps courts, l'approximation linéaire exposée ci-dessus n'est pas valable ; aux temps longs, la dissipation visqueuse n'est plus négligeable et il convient pour décrire correctement les amplitudes atteintes de tenir compte de ce terme supplémentaire.

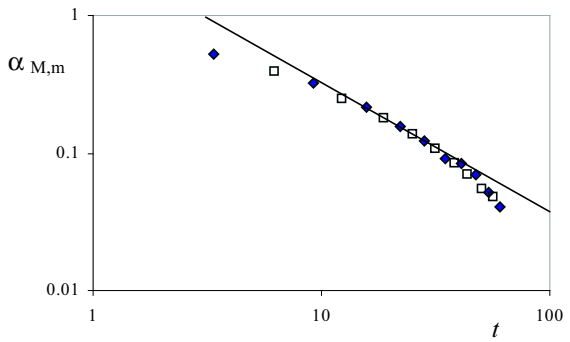


FIG. 1.12: Amplitude des maxima et minima par rapport à la position d'équilibre $z = 1$ en fonction du temps t en échelle logarithmique. La droite a une pente de -1.

Amortissement visqueux aux temps longs

Il est possible d'incorporer au modèle exposé ci-dessus la perte d'énergie issue de la friction visqueuse. La force de frottement exercée par le fluide sur le tube se calcule à partir de la contrainte sur les parois :

$$\vec{F} = \iint_{\text{paroi}} [\sigma] \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

En calculant la composante dans la direction de l'écoulement et en utilisant l'expression du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques, on obtient la puissance dissipée par tranche de fluide dz, sans unité :

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\Omega \dot{z}^2 \mathrm{d}z \tag{1.18}$$

Le terme Ω compare les effets visqueux et inertiels et s'écrit :

$$\Omega = \frac{16\eta\sqrt{H}}{\rho R^2 \sqrt{\mathrm{g}}}$$

Ainsi les équations du mouvement sont modifiées en :

$$z\ddot{z} + \dot{z}^2 = 1 - z - \Omega z \dot{z} \quad \text{pour la montée } (\mathrm{d}z > 0) \tag{1.19}$$

$$z\ddot{z} = 1 - z - \Omega z \dot{z} \quad \text{pour la descente } (\mathrm{d}z < 0) \tag{1.20}$$

Nous avons porté sur la figure 1.13 le résultat de l'intégration numérique des équations 1.20 et 1.19 (en gris), l'intégration numérique des équations 1.10 et 1.9 (en noir) et les points expérimentaux pour une colonne d'hexane oscillant à partir de la profondeur H=20 cm dans un tube de 0.5 cm de rayon. Il apparaît que pour ces expériences réalisées dans un tube de petite section, les équations 1.9 et1.10 s'écartent (logiquement) plus vite des données expérimentales que précédemment. On observe un décalage à la fois en fréquence et en amplitude. Les équations tenant compte de l'amortissement visqueux 1.19 et 1.20 sont plus proches des expériences pour ce qui est des amplitudes atteintes. Néanmoins, il reste toujours un décalage temporel : la prise en compte de la viscosité dans les équations 1.19 et 1.20 ne semble pas modifier la pseudo-période du mouvement. Ce résultat est troublant : la prise en compte de la viscosité dans les oscillations d'un tube en U tend à augmenter la pseudo-période des oscillations comme il a été montré dans [143], par exemple.

1.4.3 Tube surrempli

L'intégration numérique des équations 1.9 et 1.10, avec des conditions initiales différentes, permet d'interpréter les observations expérimentales de la figure 1.7. Ces données numériques (en trait plein noir) et les points expérimentaux sont tracés sur la figure 1.14. Il apparaît que l'intégration numérique des équations 1.9 et 1.10 sous-estime légèrement l'altitude du premier maximum . Or l'altitude du premier minimum est correcte et c'est donc au cours de l'ascension dans le tube après la première phase de descente que la perte de charge aurait été sur-évaluée. Nous tenterons d'expliquer ce point dans le chapitre 2

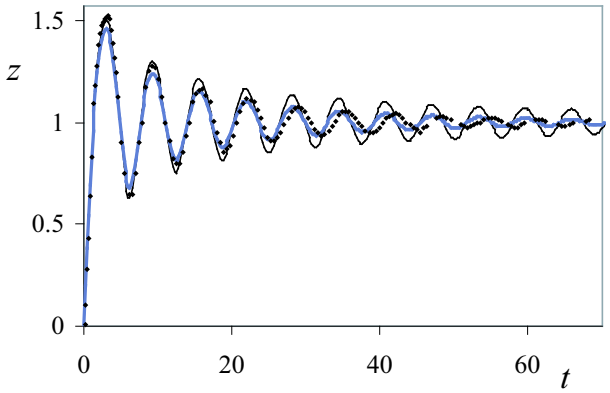


FIG. 1.13: Niveau de l'interface z dans le tube en fonction du temps t pour un tube de 0.5 cm de rayon. Le tube est enfoncé à 20 cm de profondeur dans le bassin. Les losanges noirs sont les points expérimentaux, la courbe en trait plein noir le tracé des équations 1.9 et 1.10, celle en gris, le tracé des équations 1.19 et 1.20.

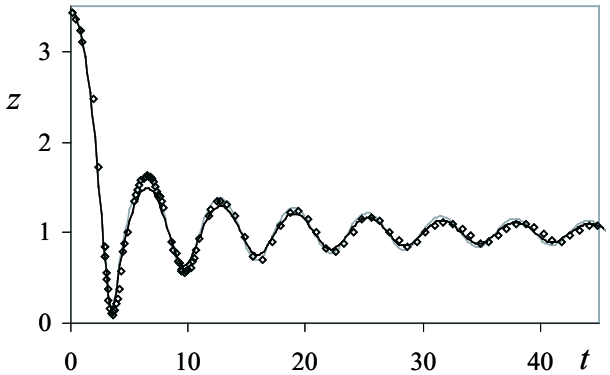


FIG. 1.14: Niveau de l'interface z en fonction du temps t pour un tube de 20 mm de diamètre. En trait plein noir le résultat de l'intégration numérique des équations 1.9 et 1.10.

1.5 Déformation de l'interface

Nous nous sommes concentrés jusqu'à maintenant sur le comportement global de la colonne. Il est

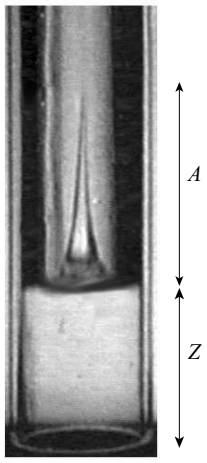


FIG. 1.15: Partant d'un tube vide, aux tout premiers instants de la montée ($R = 10$ mm, $H = 30$ cm et $B = 0$ mm, un doigt de liquide se forme au centre du tube.

intéressant de mentionner que l'interface liquide air peut, sous certaines conditions, être fortement pertubée comme le montre la figure 1.15 où l'on voit un doigt de liquide croître au centre du tube au début de la montée. Ce doigt peut atteindre des dimensions tout à fait conséquentes (environ 15 mm sur la figure 1.15) et disparaitre avant la phase d'ascension suivante. Cette structure locale ne modifie pas le comportement de l'oscillateur décrit dans les sections précédentes. Nous allons tenter d'expliquer qualitativement la formation de ce doigt. De façon relativement étonnante, la croissance de cette structure ne se fait pas instantanément. Aux premiers instants de l'ascension, l'interface air liquide reste (semble-t-il) plane et ce n'est qu'au bout de quelques dizaines de millisecondes que la croissance de la structure s'amorce, comme on le voit sur la figure 1.16, qui réprésente l'amplitude du doigt de liquide en fonction du temps. En outre, la taille maximum du doigt est très sensible à la hauteur initiale B de liquide dans le tube. Plusieurs scénarios peuvent être, envisagés pour interpréter l'apparition de ce doigt : la convergence des lignes de courant vers le centre du tube, ou une instabilité de Rayleigh-Taylor [155] [138] engendrée par la forte accélération subie par la colonne aux premiers instants, mais ces deux éventualités ne sont pas compatibles avec le retard à la formation observée. Afin de glaner plus d'informations, nous avons placé une caméra au-dessus du tube et enregistré l'évolution de l'interface entre l'instant d'ouverture de la membrane et celui d'apparition du doigt. Une telle séquence de photos prises toutes les 2.7 ms, pour un tube de 1 cm de rayon initialement rempli de 3 mm, le tube étant immergé à 20 cm de profondeur, est présentée sur la figure 1.17. Il apparaît que l'interface n'est pas plane comme le laissait penser les vues prises de côté mais creuse ! On observe au centre du tube un cratère circulaire dont le rayon diminue au cours du temps. Le doigt de liquide observé n'apparaît qu'après l'effondrement de cette cavité sur

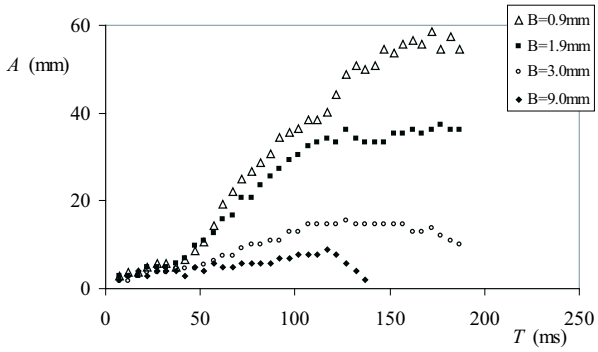


FIG. 1.16: Amplitude A du doigt de liquide en fonction du temps pour différentes hauteurs initiales B de fluide dans le tube.

FIG. 1.17: Série de photos vue de dessus. Un cratère présent au centre du tube se referme avant que n'apparaisse le jet de liquide (dernière photo). L'écart entre les photos est de 2.7 ms et le rayon du tube est de 1 cm.

elle-même (*cf.* dernière photo). De tels jets ont déjà été observés, notamment dans des expériences où un récipient cylindrique oscille verticalement à une fréquence imposée ; ces oscillations forcées (connues sous le nom d'instabilité de Faraday) engendrent des vagues stationnaires qui, lorsqu'elles atteignent une hauteur critique s'effondrent sur elle-même [169]. Là aussi, la fermeture d'une cavité emprisonne une bulle qui, remontant violemment à la surface, entraîne un doigt de liquide avec elle. Le doigt de liquide de l'expérience de Zeff *et al.* peut atteindre des dimensions de l'ordre du mètre et des vitesses de l'ordre de la dizaine de mètres par seconde. Morton *et al.* [109] ont également étudié numériquement l'apparition de tels jets en observant l'impact de gouttes sur des films épais du même liquide. Nous pensons que les mécanismes à l'origine de ces trois singularités sont identiques. Reste à comprendre pourquoi, dans notre expérience cette cavité se forme. Elle naît probablement de la contraction des lignes de courant liée au brusque rétrécissement de section du réservoir. Cette description très qualitative est bien sûr uniquement suggestive. Elle nous permet néanmoins de donner un premier exemple d'une notion que nous tenterons de préciser tout au long de ce mémoire : les singularités aux interfaces entre deux fluides.

Chapitre 2

Dissipation singulière

Sommaire

2.1 Introduction **39**

2.2 Mise en évidence expérimentale **40**

2.2.1 Expériences 40

2.2.2 Premiers résultats 40

2.3 Modèle CC **42**

2.4 Résultats **43**

2.4.1 Angles ϕ_0 obtus 43

2.4.2 Angles ϕ_0 aigus 45

2.4.3 Comparaison entre la théorie et les expériences 47

2.5 Conclusion **48**

2.1 Introduction

Il est apparu dans l'expérience des colonnes liquides que même pour des écoulements à haut nombre de Reynolds, une variation brutale de section du récipient dans lequel s'écoule un fluide entraîne des pertes énergétiques. Ces problèmes de perte charge singulière sont étudiés depuis près de 2 siècles. Boussinesq [17] ou Couette [46] par exemple, se sont intéressés à ces questions pour analyser précisément les données rhéologiques obtenues au moyen de viscosimètres capillaires. Par la suite, un grand nombre d'analyses théoriques et numériques ont été consacrées à l'analyse du profil de vitesse et de la longueur d'entrée existant dans ces systèmes. Une bibliographie très complète des problèmes de perte de charge singulière hydrodynamique a été rédigée par Fan et Hwang [60] qui ne citent pas moins de 145 références. Néanmoins, la plupart de ces analyses, rarement expérimentales (le plus souvent motivées par la possibilité de conduire des études rhéologiques [85]) concernent des écoulements à bas nombre de Reynolds. Ainsi, Boger [13] a-t-il fait une revue des différentes études concernant des écoulements viscoélastiques de fluide au travers de sections variant brusquement. En

outre, tous ces travaux (à de rares exceptions près [113]) ont été réalisés dans la même géométrie : un tube large connecté à un tube étroit. Dans ce chapitre, nous donnons une expression de la perte de charge singulière apparaissant lors d'un rétrécissement progressif de la section du bassin d'écoulement et présentons une série d'expériences sur ce thème.

2.2 Mise en évidence expérimentale

2.2.1 Expériences

Nous avons vu au chapitre 1, que la mesure de la vitesse d'ascension ou de descente dans le tube permettait d'évaluer les pertes énergétiques. Nous avons donc utilisé un dispositif similaire schématisé sur la figure 2.1, pour quantifier ces pertes lors d'un brusque rétrécissement de la conduite d'écoulement. Un réservoir transparent cylindrique de rayon $R_0 = 10$ cm est connecté *via* un raccord conique à un petit tube de rayon $R = 1$ cm. L'angle du raccord conique noté ϕ_0, est variable (entre 90° et 160°) et la longueur du petit tube notée l vaut 12 cm. Initialement, un bouchon obstrue le

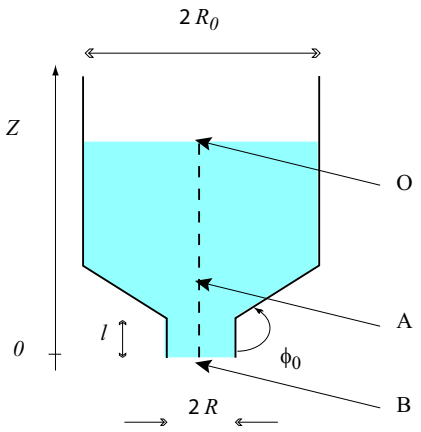


FIG. 2.1: Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la perte de charge singulière.

bas du réservoir (point B sur la figure 2.1). Le réservoir rempli d'eau jusqu'à une hauteur Z_0 se vide dès qu'on ôte le bouchon. Nous enregistrons au cours du temps, le niveau du liquide dans la partie large du tube (point O sur la figure 2.1).

2.2.2 Premiers résultats

La courbe expérimentale qui constitue la figure 2.2 montre le niveau de l'interface Z en fonction du temps T lors de la vidange du gros tube connecté au petit par une pièce conique de demi-angle au sommet $\phi_0 = 110°$.

Supposons d'abord que l'énergie est conservée. On peut alors calculer l'évolution de la position de cette interface au cours du temps en appliquant simplement l'équation de Bernoulli sur une ligne

de courant passant par les points O et B. Les lignes de courant en B étant parallèles, la pression en ce point sera égale à la pression atmosphérique P_0 :

$$\rho g Z + \frac{1}{2}\,\rho {V_0}^2 = \frac{1}{2}\,\rho {V_B}^2$$

La conservation du débit assure :

$$V_B = \frac{R_0^2}{R^2}\,V_0 = \frac{R_0^2}{R^2}\,\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T}$$

Ainsi, l'évolution de l'interface est donnée par la loi :

$$Z(T) = \left(\sqrt{Z_0} - \frac{R^2}{\sqrt{2}R_0^2}\sqrt{gT}\right)^2 \tag{2.1}$$

Dans l'équation 2.1, l'énergie cinétique volumique au niveau de l'interface supérieure $\frac{1}{2}\,\rho {V_0}^2$ a été négligée par rapport à celle à la sortie du tube. Le rapport de ces deux quantités s'écrit ${V_0}^2/{V_B}^2$ et vaut $R^4/{R_0}^4$ – il est donc inférieur à 1% dans nos expériences. Nous avons reporté sur la figure 2.2 les données expérimentales (en gris) et l'équation 2.1 (en noir).

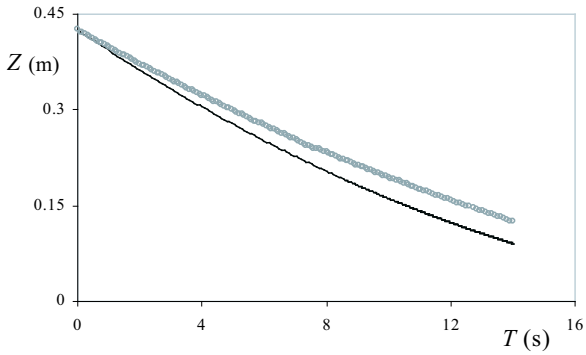


FIG. 2.2: Position de l'interface supérieure Z en fonction du temps T. Les points gris sont des points expérimentaux alors que le tracé en noir correspond à l'équation 2.1.

Il convient de remarquer plusieurs points sur la figure 2.2 :

- Le niveau de l'interface liquide/air est systématiquement au-dessus du tracé de l'équation 2.1. Ce décalage, toujours présent, ne peut être imputé à une incertitude expérimentale : l'écart relatif entre les deux courbes est de l'ordre de 15 %, alors que les mesures sont réalisées avec une incertitude inférieure à 3 %.
- La pente de la courbe expérimentale (c'est-à -dire la vitesse de vidange du bassin) est toujours plus faible que celle donnée par la conservation de l'énergie. Ce point avait déjà été observé sur la figure 1.4 : la vitesse d'ascension était égale à $\sqrt{\mathrm{g}H}$ et non $\sqrt{2\mathrm{g}H}$. Notons que la vitesse de vidange est de l'ordre de 2 cm/s et le débit volumique d'écoulement de l'ordre de 0.6 L/s.

Dans ce système simple, l'énergie n'est donc pas conservée. Pour interpréter ce résultat, il convient de prendre en compte les pertes énergétiques (que nous appelons ici perte de charge singulière)

et d'appliquer la conservation de la quantité de mouvement pour les évaluer. Cette démarche est classique. Même dans le cas de l'expérience de vidange de Torricelli [158] (vidange d'un tonneau percé par un petit trou, ce qui correspond à la figure 2.1 avec $l = 0$ et $\phi_0 = 90°$), il convient d'appliquer à la fois l'équation de Bernoulli et la conservation de la quantité de mouvement car le jet à la sortie du trou est contracté (*Vena Contracta*). Les lignes de courant à la sortie du tube ne sont plus parallèles, la pression dans le fluide à la sortie du tube n'est donc pas égale à la pression atmosphérique.

2.3 Modèle CC

Christophe Clanet a récemment proposé un modèle pour rendre compte de ces observations en analysant avec soin l'écoulement à l'entrée du tube (point A sur la figure 2.1).

Entre les points O et A, il est possible d'écrire, sur une ligne de courant passant par ces deux points, l'équation de Bernoulli. Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans la partie large du réservoir est en effet largement supérieur à 1 : le bassin fait 10 cm de rayon et la vitesse d'écoulement dans cette zone est de l'ordre de 2 cm/s (*cf.* figure 2.2). On en déduit $Re \sim 2.10^3$. En notant P_A, V_A et Z_A respectivement la pression, la vitesse et la position du point A et P_0 la pression atmosphérique, on obtient ainsi :

$$P_0 + \rho g(Z - Z_A) = P_A + \frac{1}{2}\,\rho {V_A}^2 \tag{2.2}$$

Entre l'entrée (point A sur la figure 2.1) et la sortie du tube (point B sur la même figure), le parallélisme des lignes de courant (imposé par l'écoulement dans le petit tube de longueur l) assure que la pression au point B est égale à la pression hydrostatique P_0. Il est possible d'écrire une pseudo-équation de Bernoulli :

$$P_A + \frac{1}{2}\,\rho {V_A}^2 + \rho g Z_A = P_0 + \frac{1}{2}\,\rho {V_B}^2 + \Delta P \tag{2.3}$$

où le saut de pression (ou perte de charge singulière) associé à la contraction des lignes de courant est noté ΔP. En combinant les équations 2.2 et 2.3, on trouve :

$${V_B}^2 = 2gZ - 2\frac{\Delta P}{\rho} \tag{2.4}$$

L'équation de Torricelli de conservation de l'énergie n'est donc valable que dans la limite où les pertes énergétiques sont très faibles devant la variation d'énergie cinétique des particules de fluide.

Appliquons maintenant la deuxième équation de conservation, celle de la quantité de mouvement entre les points A et B (*cf.* figure 2.3) pour obtenir une deuxième relation entre V_B et Z. On a :

$$\rho\pi R^2 {V_B}^2 = \int_\Sigma V^2 \cos(\pi - \phi)\mathrm{d}s + (P_A - P_0)\Sigma \tag{2.5}$$

Nous avons noté V la vitesse de l'écoulement sur la surface Σ et ϕ l'angle duquel tournent les lignes de courant avant et après la contraction. Pour intégrer l'équation 2.5, il faut connaître l'expression

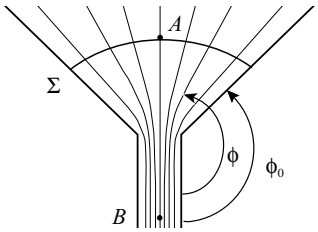


FIG. 2.3: Schéma illustrant la contraction des lignes de courant à l'entrée du petit tube.

de la vitesse V. L'entrée du tube a donc été modélisée comme un puits qui aspire le fluide avec un angle ϕ_0. Le champ de vitesse associé à ce puits ponctuel est radial et la vitesse V s'écrit comme (en notant r la distance à l'entrée du puits) :

$$V = \frac{\pi {R_0}^2}{4\pi r^2 \cos^2(\phi_0/2)} \, V_B \tag{2.6}$$

Il est alors possible de calculer l'intégrale de l'équation 2.5, et en utilisant les différentes équations écrites (de 2.2 à 2.6). Il vient :

$${V_B}^2 = \frac{2}{2 - \sin^4(\phi_0/2)} \, \mathrm{g}Z \tag{2.7}$$

L'équation 2.7 est satisfaisante : la vitesse d'écoulement est comprise entre $\sqrt{\mathrm{g}Z}$ et $\sqrt{2\mathrm{g}Z}$. Pour $\phi_0 = 180°$, les lignes de courant sont parallèles et nous retrouvons la solution de conservation de l'énergie donnée par l'équation de Bernoulli $V_B = \sqrt{2\mathrm{g}Z}$. En outre, elle assure que dès que qu'il y a une contraction ou un élargissement de section, la vitesse sera inférieure à $\sqrt{2\mathrm{g}Z}$. Enfin il apparaît que plus la contraction est lente (plus ϕ_0 s'approche de 180°), moindre est la perte énergétique. Par la suite, nous noterons α le préfacteur dans l'expression de la vitesse $V_B = \alpha\sqrt{\mathrm{g}Z}$. On a ainsi :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{2 - \sin^4(\phi_0/2)}} \tag{2.8}$$

Nous pouvons finalement déduire de l'équation 2.4 la perte de charge associée à une contraction d'angle ϕ_0 :

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho {V_B}^2 \left(1 - \sin^4(\phi_0/2)\right) \tag{2.9}$$

L'équation 2.9 est en bon accord avec la référence [4] et l'équation 1.6 puisque la perte de charge est bien proportionnelle à l'énergie cinétique volumique à la sortie de la contraction.

2.4 Résultats

2.4.1 Angles ϕ_0 obtus

La vérification de ce modèle peut se faire en mesurant la vitesse V_B de vidange du réservoir à la sortie du tube afin de vérifier qu'elle dépend effectivement de l'angle ϕ_0. Nous avons donc suivi

le niveau de l'interface air liquide au cours de la vidange d'un gros réservoir transparent connecté à un petit tube par l'intermédiaire d'une pièce conique d'angle variable. La vitesse de l'interface s'écrit comme $V_B = \alpha(\phi_0)\sqrt{gZ}$, la loi qui gouverne la vidange est alors donnée par (en utilisant la conservation du débit) :

$$\sqrt{\frac{Z}{Z_0}} = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \sqrt{\frac{g}{Z_0}}T \tag{2.10}$$

Nous avons donc porté sur la figure 2.4 la grandeur $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{Z}{Z_0}}$ en fonction du temps adimensionné $t = \sqrt{\frac{g}{Z_0}}T$ pour des pièces coniques d'angle différent. Les deux grandeurs reportées sur la figure 2.4

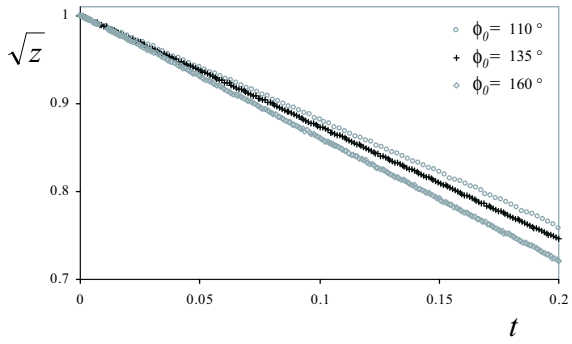


FIG. 2.4: Racine du niveau de l'interface en fonction du temps pour différents angles ϕ_0 (l'adimensionnement est donné dans l'éq. 2.10).

varient linéairement (ce qui montre que V_B est bien proportionnel à $\sqrt{gZ}$) et la pente de la régression linéaire entre ces deux grandeurs est proportionnelle à α en vertu de l'équation 2.10. Il convient enfin de remarquer que plus l'angle ϕ_0 est grand, plus la pente sur la figure 2.4 est importante, donc plus α est élevé.

Les mesures de α tirées de la vidange de réservoirs d'angle différent sont reportées sur le tableau 2.1. Nous avons rajouté dans la dernière colonne de celui-ci le point correspondant à $\phi_0 = 180°$

ϕ_0 (deg)	90	111	121	135	150	160	180
α	1.09	1.20	1.25	1.28	1.37	1.39	1.41
$\alpha_{\text{eq 2.8}}$	1.07	1.14	1.18	1.25	1.33	1.37	1.41

TAB. 2.1: Comparaison entre α mesuré et calculé à partir de l'équation 2.8

mesuré par Galilée [63] : $\alpha(180°) = \sqrt{2}$. L'accord entre valeurs mesurées et calculées est tout à fait correct. L'incertitude relative sur les mesures, de l'ordre de 5%, est essentiellement due à l'incertitude relative sur la mesure du rayon R dans la partie étroite (qui apparaît quadratiquement dans la formule 2.10).

2.4.2 Angles ϕ_0 aigus

ϕ_0 proche de 0

Le système expérimental présenté sur la figure 2.1 ne permet pas de vérifier la validité de l'équation 2.8 pour des angles inférieurs à 90°. En effet, lors de la vidange d'un récipient comme schématisé sur la figure 2.5, les lignes de courant n'épousent pas la forme du récipient. Celui-ci n'impose donc pas la géométrie de l'écoulement. Des zones de recirculation statiques apparaissent et le modèle n'est plus applicable tel quel. Il est néanmoins possible de mesurer α pour des angles petits

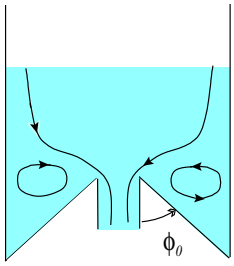


FIG. 2.5: Vidange d'un gros récipient connecté à un petit tube par une pièce conique d'angle ϕ_0 inférieur à 90°.

en utilisant le système expérimental du chapitre 1. Nous avions en effet mesuré la vitesse d'ascension du liquide dans la colonne partant d'un tube vide (*cf.* figure 1.4). Cette vitesse d'ascension est égale à $\sqrt{gH}(1.01 \pm 0.05)$. La tangente de l'angle d'aspiration ϕ_0 dans cette expérience est de l'ordre de R/H où R est le rayon du tube utilisé et H la profondeur à laquelle il est enfoncé. Ces données nous fournissent un point supplémentaire, pour $\phi_0 \simeq 6°$. On trouve alors $\alpha = 1.01 \pm 0.05$.

ϕ_0 proche de 50°

Afin de mesurer la perte de charge singulière pour un angle d'aspiration intermédiaire entre 0 et 50°, nous avons adapté l'expérience d'ascension gravitaire en chaussant le tube d'une collerette d'angle déterminé. Cette collerette permet de guider les lignes de courant selon l'angle voulu (*cf.* figure 2.6). Puis nous avons mesuré à l'aide d'une caméra rapide la vitesse d'ascension du fluide

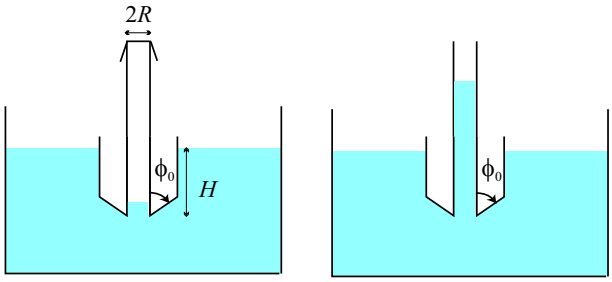


FIG. 2.6: Schéma de l'expérience des colonnes liquides modifiées : l'extrémité inférieure est chaussée d'une collerette visant à imposer un angle d'aspiration ϕ_0.

dans le tube. La cote de l'interface air liquide Z est reportée sur la figure 2.7 en fonction du temps T. Dans cette expérience, le tube (dont le diamètre intérieur fait 1 cm) est immergé à 10 cm de profondeur dans un bassin rempli d'eau. L'angle d'aspiration imposé par la collerette est de 50°. Après un régime de pure accélération (pour $0 < T < 0.02$ s), la vitesse de l'interface atteint une

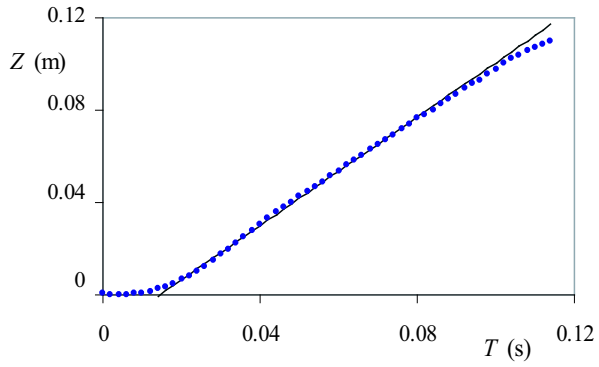


FIG. 2.7: Niveau de l'interface air/liquide Z en fonction du temps T pour l'expérience schématisée sur la figure 2.6.

valeur constante (pour 0.02 s $< T < 0.1$ s) avant de ralentir à nouveau (pour 0.1 s $< T$). Au delà de 0.1 s, le niveau du liquide dans le tube est au-dessus du niveau dans le bassin et la gravité s'oppose au mouvement. De la pente du tracé en trait plein de la figure 2.7, nous déduisons la vitesse maximale atteinte par l'interface au cours de cette expérience, qui est de 1.2 ± 0.1 m/s. Néanmoins, la forme de la courbe expérimentale (en S) ne nous permet pas une mesure très précise, l'incertitude venant pour une grosse part de la difficulté à déterminer le début et la fin du régime de vitesse constante. Pour améliorer la précision de mesure du paramètre α, nous opérons comme au paragraphe 1.2.3 et mesurons la vitesse d'ascension V en fonction de $\sqrt{gH}$ pour différentes profondeurs d'enfoncement du tube dans le bassin. Ces données sont présentées sur la figure 2.8 et sont bien décrites par une droite. De la pente de cette droite, nous déduisons une mesure du paramètre α pour un angle

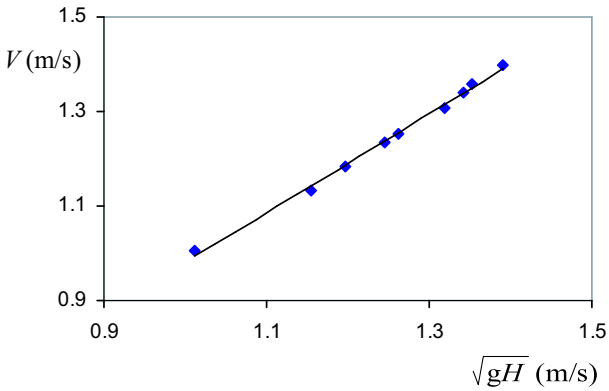


FIG. 2.8: Vitesse d'ascension du fluide dans le tube en fonction du $\sqrt{gH}$ pour un angle d'aspiration ϕ_0 de 50°.

d'aspiration $\phi_0 = 50°$: $\alpha(50°) = 1.05 \pm 0.06$.

2.4.3 Comparaison entre la théorie et les expériences

Nous avons rassemblé sur la figure 2.9 les données des paragraphes 2.4.1 et 2.4.2, ainsi que le tracé correspondant à l'équation 2.8. L'accord entre les données expérimentales et l'équation 2.8 est

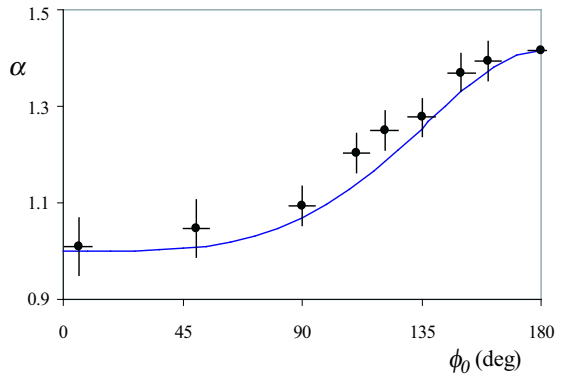


FIG. 2.9: Comparaison entre le calcul de α (trait plein éq. 2.8) et sa mesure en fonction de l'angle ϕ_0 d'aspiration.

très bon, d'autant plus qu'il n'y a aucun paramètre ajustable dans le tracé. Néanmoins, les mesures de α sont systématiquement au-dessus du tracé théorique : par rapport aux prédictions, la vitesse de vidange mesurée est trop rapide (de l'ordre de 3%) à ϕ_0 donné, où l'angle ϕ_0 mesuré est sous évalué (d'une dizaine de degrés) pour une vitesse donnée. Ce biais systématique peut avoir deux origines : soit la longueur de la zone de raccordement conique est trop courte et les lignes de courant n'ont pas le temps d'épouser la forme du bassin ce qui revient à augmenter l'angle ϕ_0 effectif (*cf.* figure 2.10) ; soit les couches limites développées le long des parois sont assez importantes pour décaler les lignes de courant vers le centre du tube, ce qui revient également à considérer un angle d'aspiration ϕ_0 plus important.

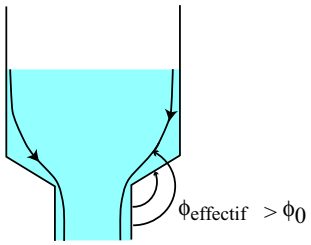


FIG. 2.10: La présence du récipient cylindrique supérieur peut empêcher les lignes de courant d'épouser totalement la forme du récipient.

La première hypothèse n'est pas parfaitement satisfaisante : une des expériences a été réalisée

dans un entonnoir transparent ($\phi_0 = 150°$), donc sans réservoir supérieur. L'angle ϕ_0 d'aspiration dans ce récipient est réellement celui des lignes de courant, quoique la mesure du paramètre α soit également au-dessus du tracé de l'équation 2.8. Pour la deuxième hypothèse, c'est l'ordre de grandeur de l'angle d'aspiration effectif qui n'est pas cohérent. Supposons que la couche limite commence à se développer dans la partie supérieure du raccord conique. Au bout de la distance x, la couche limite aura pour épaisseur δ :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta\ x}{\rho\ V}}$$

Ce décalage induira un variation d'angle $\delta\phi$:

$$\delta\phi \sim \frac{\delta}{x} \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho V x}}$$

En prenant : $V \sim 10$ cm/s, $x \sim 10$ cm on obtient pour l'eau ($\eta = 1$ mPa.s et $\rho = 1000$ kg/m^3) :

$$\delta\phi \sim 10^{-2} \text{ rad } \sim 0.5°$$

Ce décalage est trop faible pour expliquer la déviation observée – dont l'origine reste donc ici inexpliquée

2.5 Conclusion

Nous avons observé qu'un brusque rétrécissement de la section d'une conduite conduisait à une perte de charge singulière. Nous avons mesuré ces pertes pour différentes géométries d'écoulement et comparé ces résultats à un modèle hydrodynamique. Ce modèle qui repose sur la conservation de l'impulsion et non de l'énergie est cohérent avec nos expériences. Nous avons montré que plus le raccord entre les sections est progressif et moindre est la perte de charge. Ces résultats peuvent trouver un large champ d'application et notamment en microfluidique où en dépit du petit rayon des canaux, les nombres de Reynolds des écoulements peuvent atteindre des valeurs de l'ordre de 100 à cause des importants débits volumiques requis.

Deuxième partie

Statique et dynamique de gouttes sur un tamis

Introduction aux impacts

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'impact de gouttes sur des surfaces aérées comme peuvent l'être des grilles. Cette étude a été essentiellement motivée par le besoin de quantifier la quantité de fluide que peut retenir une grille lorsqu'une goutte tombe dessus. Pourquoi une grille ? Si c'est en vue de récupérer un liquide, une bassine ferait bien mieux l'affaire. Mais l'avantage d'une grille est qu'elle laisse passer la phase gazeuse. Ceci prend toute son importance dès que l'on pense à des applications comme les vêtements en gore-tex ou la récupération de la précieuse eau contenue dans la brume à l'aide de grands filets comme c'est actuellement le cas dans des villages arides de la Cordillère des Andes. Les gouttelettes d'eau piégées par le substrat solide s'y agglomèrent, ruissellent le long des mailles du filet pour finalement être récupérées par les habitants. De tels filtres peuvent être aussi utilisés afin de piéger le maximum de liquide (souvent polluant) contenu dans les aéorosols que les usines peuvent déverser dans l'atmosphère.

Le dimensionnement de nos expériences ne correspond toutefois à aucun des trois exemples exposés ci-dessus. Les motifs du substrat et les gouttes de liquides utilisés sont trop grands – environ dix à cent fois au-dessus des tailles mises en jeu dans la récupération d'aérosols. Certains de nos résultats demeurent peut-être à de telles échelles : nous nous sommes placés dans un cadre où les forces capillaires sont dominantes, ce qui est d'autant plus vrai aux petites tailles. D'autres mériteront d'être complétés et précisés en prenant en compte des effets supplémentaires (condensation, électrostatique).

Nous avons donc étudié l'impact de gouttes de liquide sur une grille en décomposant celle-ci selon deux motifs élémentaires : le trou et la fibre. Dans le premier chapitre de cette partie (chapitre 3), nous étudions l'impact d'une goutte dans un trou plus petit qu'elle. Nous mettons en évidence l'existence d'une vitesse seuil : en dessous de cette vitesse tout le liquide est piégé par le solide. Nous caractérisons cette vitesse dans certaines conditions d'expérience. Dans le deuxième chapitre (chapitre 4), nous étudions l'impact d'une goutte sur une fibre. Au contraire de la situation précédente, le volume de la goutte est un paramètre critique et nous cherchons notamment la taille de la plus grosse goutte que peut soutenir une fibre. Les gouttes plus petites que cette grosse goutte peuvent être ici aussi complètement capturées par le solide si elles sont assez lentes. Nous avons caractérisé la vitesse seuil de capture correspondante pour des liquides aux propriétés physico-chimiques proches de celles de l'eau. Dans le troisième chapitre de cette partie (chapitre 5) nous

mettons en évidence que des inhomogénéités de courbure de la grille peuvent induire des mouvements spontanés de liquide. Nous analysons cette force motrice en étudiant le mouillage d'une goutte sur un substrat modèle : la fibre conique.

Chapitre 3

Gouttes tombant dans un trou

Sommaire

3.1 Introduction **53**

3.2 Montage expérimental et résultats **54**

3.2.1 Expérience 54

3.2.2 Premières observations : mise en évidence d'une vitesse seuil 55

3.2.3 Caractéristique de la vitesse seuil 57

3.3 Au seuil **58**

3.3.1 Les deux régimes de passage 58

3.3.2 Interprétation 60

3.3.3 Régime capillaro-inertiel 60

3.3.4 Limites du régime capillaro-inertiel 63

3.4 Au-delà du seuil **65**

3.4.1 Temps de pincement 66

3.4.2 Longueur du doigt de liquide 67

3.4.3 Volume éjecté 69

3.5 Conclusion **70**

3.1 Introduction

Un certain nombre de procédés industriels mettent en jeu (volontairement ou non) l'impact de gouttes sur des surfaces solides. Les collisions entre des gouttes très rapides et des substrats causent, par exemple, de graves dégâts dans les turbines à vapeur. Au contraire, l'industrie des imprimantes à jet d'encre utilise les impacts et cherche à positionner, aussi précisément que possible, les gouttes d'encre afin d'avoir une image très résolue. Dans l'industrie agricole, connaître les mécanismes d'étalement d'une goutte d'insecticide sur une feuille permet de réduire significativement la quantité

de produit nécessaire par unité de surface. Bergeron *et al.* ont notamment montré que l'ajout de polymères à la solution permet d'éviter les rebonds de gouttes [5].

En conséquence, de nombreuses situations d'impact ont été étudiées expérimentalement et théoriquement. La plupart de ces études ont été menées dans des situations relativement simples : des gouttes de liquide pur sur des surfaces planes. Les choses n'en sont pas faciles pour autant : l'éventail des paramètres (rugosité [94], inclinaison[149], mouillabilité, température [84][36] et état de sécheresse du substrat [45], vitesse, taille de la goutte, viscosité, densité du liquide..) est tellement large qu'il existe un grand nombre de situations expérimentales différentes mais peu de lois clairement identifiées. L'article de Rein [133] fait une synthèse des études conduites sur l'impact normal d'une goutte de liquide simple sur une surface solide. Citons également le livre de Frohn et Roth [61] qui donne un grand nombre de détails sur les différents systèmes expérimentaux étudiés. Un plus petit nombre de travaux concerne l'impact de gouttes sur des surfaces complexes. Citons néanmoins les travaux de Yao *et al.* [78] qui ont étudié l'impact transverse de gouttes d'eau sur des fibres. Ces auteurs ont montré qu'en fonction de la vitesse des gouttes et de leur taille relative par rapport à celle de la cible, il existe différents cas : les gouttes grosses et rapides sont coupées en deux parties égales par la fibre et au contraire les gouttes petites et lentes y adhèrent. Une grosse goutte (qui naît de l'accumulation des impacts) finit par se détacher de la fibre. Hardalupas *et al.* [74] ont étudié l'impact de gouttes sur de grosse sphères solides et Rozhkov *et al.* [140] se sont intéressés aux impacts de gouttes sur de petits disques. Dans ces deux derniers exemples, la symétrie cylindrique est respectée si la trajectoire de la goutte et l'axe du substrat sont confondus.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'impact d'une goutte sur un substrat à symétrie sphérique : nous étudions la chute d'une goutte dans un trou. Nous commençons par montrer qu'il existe une vitesse seuil d'impact en dessous de laquelle la goutte est totalement capturée par la surface. Au-dessus du seuil, en revanche, une fraction de la goutte est éjectée sous le substrat. Nous caractérisons ce seuil et quantifions le volume et le nombre de gouttes éjectés.

3.2 Montage expérimental et résultats

3.2.1 Expérience

Une goutte en chute libre tombe sur une surface solide horizontale percée d'un petit trou circulaire (*cf.* figure 3.1). L'impact de la goutte sur la surface est filmé avec une caméra rapide (qui enregistre typiquement 1000 images par seconde). La goutte, dont le rayon R varie entre 0.7 et 1.5 mm, tombe à une vitesse V comprise entre 0 et 3 m/s. On note η la viscosité du liquide (elle variera dans cette étude de 0.5 à 500 mPa.s) et γ sa tension superficielle. La surface en acier inoxydable, de 0.25 mm d'épaisseur (notée e), est percée de trous (très éloignés les uns des autres) de rayon r compris entre 0.13 et 0.45 mm. Les trous sont bien cylindriques comme il apparaît sur la figure

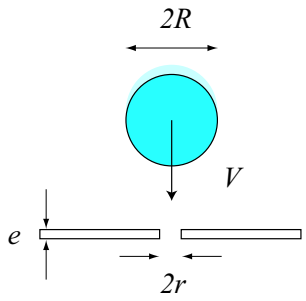


FIG. 3.1: Schéma de l'expérience : une goutte de rayon R tombe à vitesse V dans un trou de rayon r percé dans une surface horizontale d'épaisseur e.

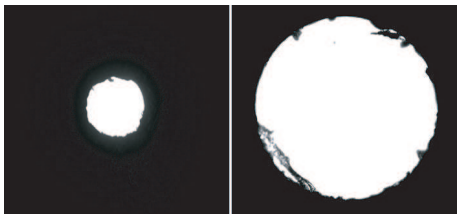


FIG. 3.2: Photos prises au microscope optique de deux trous percés dans une surface métallique de 250 µm d'épaisseur. Le rayon du trou de gauche est de 130 µm, contre 390 µm pour celui de droite. S'il apparaît que les trous sont bien circulaires, il est également visible que leurs bords sont très déchirés.

3.2 sur laquelle on voit deux trous de 130 et 390 µm de rayon aux bords relativement déchirés. Les liquides choisis mouillent (sauf exception) totalement la surface, c'est-à-dire qu'une goutte posée sur cette surface (à un endroit où il n'y a pas de trous) s'y étale complètement. Pour chaque expérience, nous nous sommes assurés *a posteriori* que la trajectoire de la goutte était bien confondue avec l'axe de symétrie du trou. Après impact, la goutte laisse en effet une large auréole circulaire sur la surface, qui, si les objets sont alignés, sera centrée sur le trou. La surface est essuyée (sauf exception) après chaque expérience.

3.2.2 Premières observations : mise en évidence d'une vitesse seuil

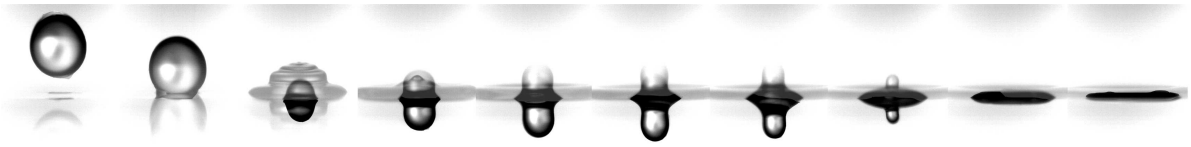


FIG. 3.3: Une goutte d'huile silicone peu visqueuse ($\eta = 0.5$ mPa.s, $\gamma = 16$ mN/m) tombe dans un trou de 390 µm de rayon percé dans une plaque de 250 µm d'épaisseur. Les photos sont prises toutes les 2 ms. La goutte est totalement capturée par la surface, même si un doigt de liquide apparaît transitoirement sous le trou. Noter qu'on voit sur les images le reflet de ce doigt ainsi que la figure d'impact de la goutte sur la face supérieure.

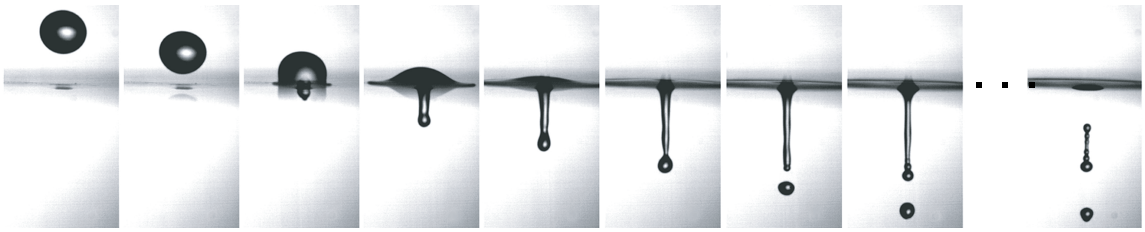


FIG. 3.4: Une goutte d'huile silicone peu visqueuse ($\eta = 0.5$ mPa.s, $\gamma = 16$ mN/m) tombe dans un trou de 270 µm de rayon percé dans une plaque de 250 µm d'épaisseur. Les photos sont prises toutes les 1 ms (sauf la dernière qui est prise 4 ms après l'avant-dernière). La goutte n'est pas totalement capturée par la surface, plusieurs fragments de liquide sont éjectés.

Plaçons un papier buvard sous la surface trouée et lâchons une goutte sur celle-ci. Si la goutte est lente, le buvard reste sec ; si elle est rapide une tache apparaît sur le buvard ; si elle est très rapide une myriade de petits points s'impriment sur le buvard. Selon la vitesse d'impact de la goutte, du liquide est donc éjecté, ou non, de la surface. Par la suite nous noterons V^* la vitesse seuil d'éjection. Notons également que plus la vitesse de la goutte est élevée (dès lors qu'elle est au-dessus du seuil), plus le liquide éjecté est fragmenté. Les séquences de photos présentées sur les figures 3.3 et 3.4 illustrent ces observations.

Sur la figure 3.3, une goutte d'huile silicone (de viscosité $\eta = 0.5\text{mPa} \cdot \text{s}$ et de tension $\gamma = 16$ mN/m) de 1.8 mm de rayon tombe dans un trou de 390 µm de rayon à une vitesse de 50 cm/s. Un doigt de liquide de même rayon que le trou apparaît transitoirement dans la direction verticale avant de se rétracter et de s'effondrer sur la surface. La goutte est totalement capturée par la surface ($V < V^*$). L'intervalle entre les photos successives de cette séquence est de 2 ms.

Sur la figure 3.4, une goutte identique tombe dans un trou de 270 µm de rayon à la vitesse de 60 cm/s. Elle n'est pas totalement capturée par la surface, un doigt de liquide de même rayon que le trou, qui se fractionne une première fois pour donner une grosse goutte et qui se brise par la suite en plusieurs gouttelettes, est éjecté dans la direction verticale ($V > V^*$). L'intervalle entre les photos successives (sur cette séquence) est de 1 ms sauf entre l'avant-dernière et la dernière pour lesquelles il vaut 4 ms. Dans les deux cas ($V < V^*$ et $V > V^*$), la présence du trou ne semble pas trop modifier l'étalement de la goutte sur la surface : on retrouve ainsi sur les photos 3.3 le scénario classique d'étalement (décrit dans [36]) : éjection à la base de la goutte d'une nappe de liquide, ondes capillaires à la surface du liquide créées par le choc qui donnent à la goutte cette curieuse forme de pyramide aztèque observée par Richard [135] (troisième photo de la figure 3.3).

3.2.3 Caractéristique de la vitesse seuil

Importance du positionnement

Dans cette expérience le positionnement relatif de la goutte et du trou est un paramètre critique. Un tout petit écart de position peut engendrer essentiellement deux effets :

- Tout d'abord, la vitesse seuil dépend fortement de la position de la goutte par rapport au centre du trou. Plus la trajectoire de la goutte est centrée sur l'axe du trou, plus cette vitesse seuil est basse. En effet, lors d'un impact, le liquide qui arrive verticalement part horizontalement. La composante verticale du vecteur vitesse diminue, or, c'est elle qui sert à faire passer le liquide dans le trou (*cf.* figure 3.5). Il s'ensuit qu'une goutte non centrée devra arriver plus vite qu'une goutte centrée sur le trou pour éjecter du liquide. Si la distance entre le centre de la goutte et le trou est supérieure au rayon de la goutte, la vitesse seuil devient infinie, le champ de vitesse du liquide passant au-dessus du trou étant dans ce cas purement horizontal. La figure 3.5, où nous notons l la distance entre le centre de la goutte et l'axe de symétrie du trou, illustre ces propos.

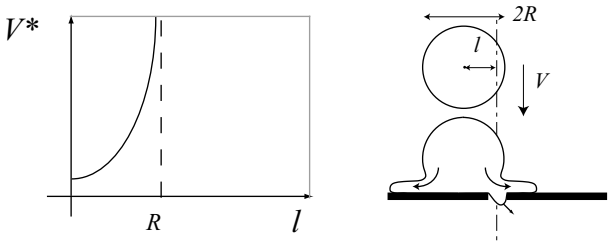


FIG. 3.5: Le premier dessin indique le sens de variation de la vitesse seuil en fonction de l'écart entre le centre de la goutte et du trou. Le deuxième dessin schématise deux lignes de courant au moment de l'impact. Le doigt de liquide éjecté a donc une composante de vitesse horizontale non nulle.

- Ensuite, un écart de positionnement modifiera la direction d'éjection du doigt de liquide comme il apparaît sur la figure 3.5.b. La composante horizontale du champ de vitesse du liquide passant dans le trou n'est pas nulle, ce qui rend l'éjection oblique. Cette propriété permet (comme celle évoquée au paragraphe 3.1) de vérifier *a posteriori* la position relative de la goutte et du trou. Si la goutte tombe trop à droite ou à gauche, alors le liquide éjecté le sera dans la direction opposé, ce qui sera visible sur le film. Si la goutte tombe en avant ou en arrière du trou, le liquide éjecté sortira du plan vertical de travail et apparaîtra flou sur le film. Nous avons donc travaillé en ouvrant au maximum le diaphragme de l'objectif pour diminuer la profondeur de champ du système optique, ce qui permet de détecter rapidement les erreurs de positionnement entre la goutte et le trou. Sur la séquence 3.6, une goutte d'huile silicone (de viscosité η de 0.5 mPa·s) décalée vers la droite et en arrière tombe dans un trou de 130 µm de rayon à la vitesse de 1 m/s. Elle éjecte sous le trou une petite goutte toute floue

(donc en avant) partant sur la gauche. La figure 3.6 est un exemple d'expérience ratée.

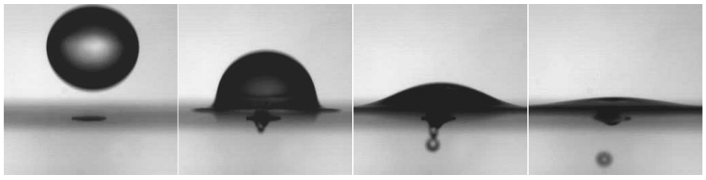


FIG. 3.6: Exemple d'une expérience où la trajectoire de la goutte et le trou ne sont pas alignés. La goutte tombe à droite et en arrière du trou. Le cylindre de liquide éjecté prend donc une direction vers la gauche et en avant, ce qui le rend flou. L'intervalle entre les photos est de 1 ms. La goutte fait 1.8 mm de rayon et le trou 130 µm de rayon.

Reproductibilité des mesures

La mesure de la vitesse critique entre les deux régimes (éjection ou pas) est nettement définie : dès lors que les gouttes sont bien centrées, la mesure est reproductible à 10 % près.

Par la suite, nous appellerons vitesse de capture (toujours notée V^*), le minimum de la courbe 3.5, c'est-à-dire la vitesse seuil entre les deux régimes (éjection ou non) pour une goutte dont la trajectoire est parfaitement centrée sur le trou.

3.3 Au seuil

3.3.1 Les deux régimes de passage

Nous cherchons ici à caractériser cette vitesse de capture. Lors de l'impact, l'inertie de la goutte tend à la faire passer au travers du trou alors que la friction visqueuse (le long des parois) et les forces capillaires (le doigt de liquide créant un excès de surface) s'opposent à ce mouvement. De ces trois contributions, il sort deux nombres sans dimension, construits sur le rapport des forces qui font passer la goutte dans le trou sur celles qui l'en empêchent. Le premier de ces nombres compare les effets inertiels aux effets visqueux – c'est le nombre de Reynolds, que nous choisissons d'écrire à la vitesse seuil, et avec le rayon du trou comme longueur caractéristique. Le second nombre, appelé nombre de Weber, compare l'importance des effets inertiels par rapport aux effets capillaires. On le construit avec les mêmes rayons et vitesses.

$$Re^* = \frac{\rho\, r V^*}{\eta} \tag{3.1}$$

$$We^* = \frac{\rho\, r V^{*2}}{\gamma} \tag{3.2}$$

Il est également possible de définir le nombre capillaire Ca^* au seuil qui compare l'importance relative des deux forces (visqueuse et capillaire) qui s'opposent au passage de la goutte dans le

trou :

$$Ca^* = \frac{\eta V^*}{\gamma} \tag{3.3}$$

Nous avons mesuré la vitesse seuil pour des trous de rayons différents et pour des liquides variés. Sur les figures 3.7 sont reportés le nombre capillaire seuil Ca^* associé à ces mesures en fonction du nombre de Reynolds seuil Re^*, ainsi que le nombre de Weber seuil We^*, également porté en fonction de Re^*. Les courbes de la figure 3.7 méritent plusieurs commentaires.

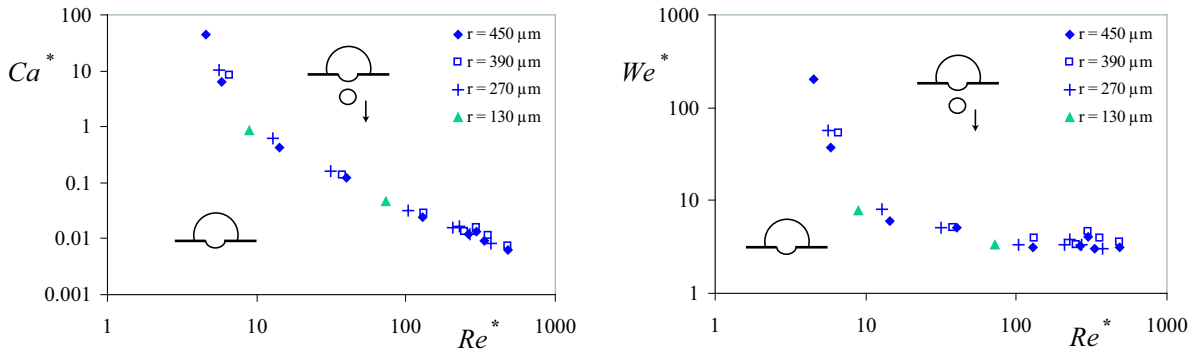


FIG. 3.7: Nombre capillaire Ca^* seuil en fonction du nombre de Reynolds seuil Re^* pour la courbe de gauche et nombre de Weber seuil We^* en fonction du nombre de Reynolds seuil Re^* pour la courbe de droite.

- La première courbe de la figure 3.7 compare l'importance relative des deux forces de freinage. Il apparaît que pour les petits nombres de Reynolds (Re^* inférieur à 10), le nombre capillaire seuil Ca^* est supérieur à un : l'intensité de la friction visqueuse est alors plus importante que celle des forces capillaires. La vitesse seuil est alors le résultat d'une compétition entre inertie et friction visqueuse, ce qui se traduit par un nombre de Reynolds constant sur la deuxième courbe de la figure 3.7 où il apparaît une asymptote verticale autour de $Re^* = 5$. Nous appelons ce régime *visco-inertiel*.

- Au contraire, pour les grands nombres de Reynolds ($Re^* > 50$), le nombre capillaire seuil de l'expérience atteint de très petites valeurs (typiquement inférieures à 0.1). L'intensité des forces capillaires dépasse alors celle des forces visqueuses et la vitesse seuil résulte de la seule compétition entre inertie et capillarité. Cette propriété se traduit par un nombre de Weber constant, comme on le voit sur la seconde courbe de la figure 3.7 où une asymptote horizontale d'équation $We^* = 3.5$ est visible. Nous appelons ce régime *capillaro-inertiel*.

- Notons également que les deux courbes délimitent des zones dans les plans (Ca^*, Re^*) et (We^*, Re^*) : dans les deux cas, du côté de l'origine, la vitesse est inférieure à la vitesse seuil et la goutte est totalement capturée par le substrat. De l'autre côté, (soit du côté où le rayon de courbure du tracé est positif), la goutte n'est pas totalement capturée par la surface.

3.3.2 Interprétation

Ces observations peuvent être interprétées plus quantitativement. Le rayon des doigts de liquide visibles sur les figures 3.3 et 3.4 est le même que celui du trou ; par conséquent, les forces capillaires s'opposant au passage de la goutte sont proportionnelles à γr. En outre, dans la limite des plaques très minces (dont l'épaisseur e est inférieure au rayon r du trou), la vitesse de l'écoulement est perturbée sur une longueur d'ordre r, ce qui engendre une force visqueuse de l'ordre de $\eta V r$. Pour les nombres de Reynolds intermédiaires ($5 < Re^* < 50$), ces deux contributions sont du même ordre de grandeur et leur somme, au seuil, compense les forces inertielles. L'inertie est proportionnelle à $\rho V^2 r^2$. Au seuil, l'équilibre de ces différentes forces s'écrit donc :

$$\rho\ V^{*2} r^2 \sim \eta\ V^* r + \gamma r \tag{3.4}$$

On en déduit (en ignorant tous les coefficients numériques) :

$$Re^* \sim \frac{We^*}{We^* - 1} \tag{3.5}$$

Ce type d'équation décrit bien les données de la figure 3.7 comme on le voit sur la figure 3.8, à condition d'ajuster les valeurs des asymptotes horizontales et verticales. À grand Re^*, les données

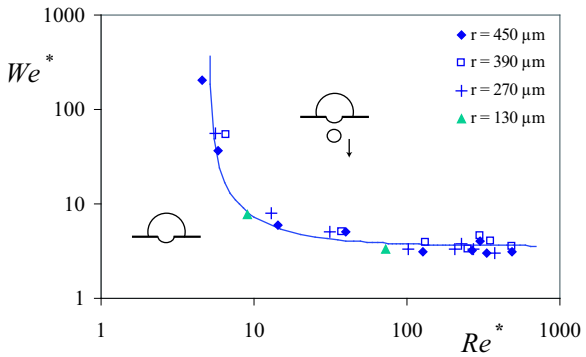


FIG. 3.8: Nombre de Weber seuil We^* en fonction du nombre de Reynolds seuil Re^* : la courbe en trait plein correspond au tracé de l'équation 3.6

tendent vers $We^* \simeq 3.5$. À petit Re^*, elles tendent vers $Re^* \simeq 5$ et la courbe tracée en trait plein sur la figure 3.8 est celle du type 3.6 qui vérifie ces deux limites :

$$Re^* = \frac{5.1 We^*}{We^* - 3.5} \tag{3.6}$$

Nous allons voir à présent qu'il est possible par des arguments simples de déterminer celle de ces valeurs numériques qui correspond au régime capillaro-inertiel.

3.3.3 Régime capillaro-inertiel

Dans le régime purement capillaire (c'est-à-dire pour des nombres capillaires Ca^* inférieurs à l'unité), la vitesse seuil est déterminée par une compétition entre inertie et capillarité. Il est possible

(tout comme dans les deux premiers chapitres) d'avoir deux approches : une approche énergétique ou impulsionnelle.

Approche énergétique

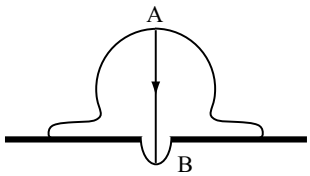


FIG. 3.9: Schéma de la formation du doigt de liquide au moment de l'impact.

Considérons une ligne de courant passant par les points A et B comme schématisée sur la figure 3.9. Au seuil, la pression de Laplace au point B égale à $\frac{2\gamma}{r}$ est compensée par la pression dynamique au point A égale à $\frac{1}{2}\,\rho V^{*2}$, en négligeant la surpression de Laplace dans la goutte. D'où l'équation pour la vitesse seuil :

$$V^* = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\rho r}} \tag{3.7}$$

Cette équation, qui implique au seuil un nombre de Weber égal à 4, est en très bon accord avec les données de la figure 3.8 pour lesquelles nous avons vu qu'en régime capillaro-inertiel, on tend vers un nombre de Weber constant égal à 3.5 ± 0.2. Notons néanmoins que l'application de la relation de Bernoulli au cours de l'impact d'une goutte sur un substrat est douteuse : l'écoulement n'a certainement pas atteint un régime permanent.

Approche impulsionnelle

Le rapport $\sqrt{\frac{\gamma}{\rho r}}$ de l'équation 3.7 est proportionnel à la vitesse de rétraction du bourrelet bordant une lame de liquide semi-infinie d'épaisseur r, comme l'a montré Taylor [156]. Ce modèle a été étendu au cas cylindrique par Clanet et Lasheras [40], qui ont calculé la vitesse d'une goutte pendante au bout d'un jet de liquide. Les forces de tension de surface font remonter la goutte vers le haut (afin de diminuer la surface air-liquide apparente) avec une intensité de $2\pi\gamma r$; ainsi, la conservation de l'impulsion de la goutte de masse M s'écrit (en notant Z les coordonnées le long de l'axe vertical ascendant *cf.* figure 3.10) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(M\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}T}\right) = 2\pi r\gamma \tag{3.8}$$

En calculant la masse $M = \rho\pi r^2 Z$ et en remarquant que le produit $Z\dot{Z}$ est égal à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{1}{2}Z^2\right)$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}T^2}\left(Z^2\right) = \frac{2r\gamma}{\rho r^2}$$

Équation qui s'intègre en :

$$Z = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho r}}\, T \tag{3.9}$$

Tant qu'on peut négliger la gravité, une goutte pendant d'un jet de liquide immobile se rétracte donc à la vitesse V :

$$V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho r}} \tag{3.10}$$

Ainsi, dans notre expérience, du liquide sera éjecté de la surface si la goutte tombe sur la surface avec une vitesse supérieure à la vitesse de rétraction d'un jet de liquide. On retrouve bien l'équation 3.7 au coefficient numérique près.

Cet écart entre les résultats donnés par une approche énergétique et impulsionnelle se retrouve souvent dans des problèmes de dynamique interfaciale en régime inertiel (éclatement d'un film de savon, démouillage inertiel, ascension capillaire) [26, 47, 68, 127]. Nous en avons déjà vu un exemple au chapitre 1 où il était apparu que les deux approches devenaient équivalentes à condition de prendre en compte les pertes de charges singulières du système. Nous allons tenter d'en tenir également compte dans ce problème.

Réconciliation des deux approches

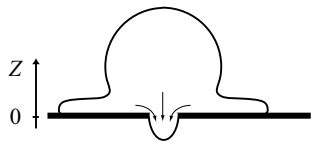


Fig. 3.10: Impact d'une goutte de liquide dans un trou. Du fait de la grande différence de section entre la goutte et le trou, il existe dans ce système une perte de charge singulière (dont l'expression est détaillée au chapitre 2).

La formation du doigt de liquide est finalement proche du problème des colonnes liquides oscillantes évoquées dans le chapitre 1. L'énergie E du doigt de liquide de rayon r soumis aux forces de rétraction capillaire d'intensité $2\pi\gamma r$ s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 Z\dot{Z}^2 - 2\pi\gamma r Z \tag{3.11}$$

Le fluide qui se retrouve dans le doigt de liquide a été aspiré dans tout le volume de la goutte comme schématisé sur la figure 3.10. Ce liquide voit donc, de la goutte au doigt, la section du bassin dans lequel il évolue varier très fortement. Il existe dans ce système une perte de charge singulière égale (comme nous l'avons vu au chapitre 2) à l'énergie cinétique volumique du fluide dans le doigt. Une perte d'énergie est associée à cette perte de charge :

$$\mathrm{d}E = -\frac{1}{2}\rho\pi R^2 \dot{Z}^2 \mathrm{d}Z \tag{3.12}$$

Ainsi en écrivant la variation de l'énergie définie par l'équation 3.11, on obtient :

$$\rho\pi R^2\left(\frac{1}{2}\dot{Z}^2 + Z\ddot{Z}\right)\mathrm{d}Z - 2\pi\gamma r\mathrm{d}Z = -\frac{1}{2}\rho\pi R^2\dot{Z}^2\mathrm{d}Z \tag{3.13}$$

Cette équation se simplifie en :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\pi R^2 Z\dot{Z}\right) = 2\pi r\gamma \tag{3.14}$$

et qui est égale à 3.8. Nous avons vu au chapitre 1 qu'une telle équation engendre des oscillations. Il n'est néanmoins pas possible de voir le doigt de liquide osciller autour de la position d'équilibre $Z = 0$, pour des liquides en mouillage total, la dissipation associée aux phases plus tardives d'étalement étant trop importante. En revanche, ces oscillations sont visibles pour des impacts de gouttes de liquide ayant moins d'affinité pour la surface que les huiles (situation de mouillage partiel). La séquence de photos présentée sur la figure 3.11 montre la chute d'une goutte d'eau de 2 mm de rayon dans un trou de 390 µm de rayon. L'intervalle entre les photos est de 1 ms. Un doigt de liquide croît et se rétracte juste après l'impact (photos 1 à 13), avant d'osciller avec une amplitude bien moindre qu'à sa première apparition.

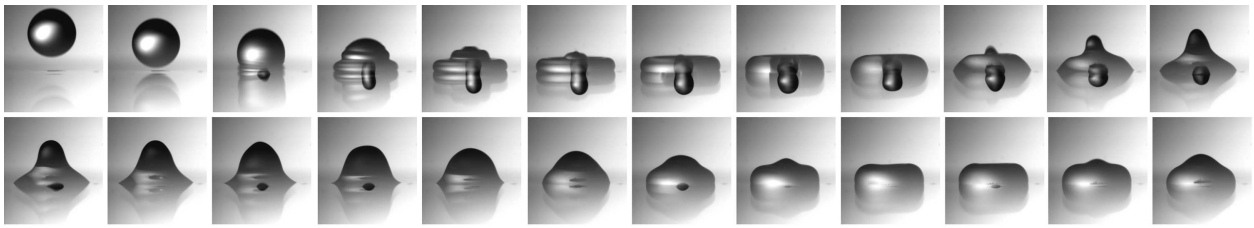


Fig. 3.11: Une goutte d'eau en mouillage partiel avec la plaque tombe dans un trou de 390 µm de rayon. Quelques oscillations du doigt de liquide autour de la position d'équilibre $Z = 0$ sont visibles.

Retour sur les données expérimentales

Nous avons reporté sur la figure 3.12 la vitesse seuil en fonction du rapport $\frac{\gamma}{\rho r}$ pour des gouttes de liquides variés tombant dans des trous de rayons différents percés dans une plaque de 250 µm d'épaisseur. La viscosité des liquides utilisés est inférieure à 5 mPa·s, ce qui assure que le nombre capillaire seuil Ca^* est inférieur à 0.1. Les données sont bien décrites par une loi de puissance d'exposant 0.5 en bon accord avec l'équation 3.10. Le coefficient numérique déduit de l'ajustement avec l'expérience vaut 1.78 – une valeur un peu supérieure à $\sqrt{2}$ (prévue par l'équation 3.10). Ce biais peut venir d'une surestimation du rayon r du doigt de liquide qui peut être plus petit que celui du trou.

3.3.4 Limites du régime capillaro-inertiel

Épaisseur de la plaque e

Nous avons également testé l'influence de l'épaisseur de la plaque, et mesuré la vitesse seuil de capture pour des gouttes d'huile silicone légère tombant dans des trous de différents rayons percés

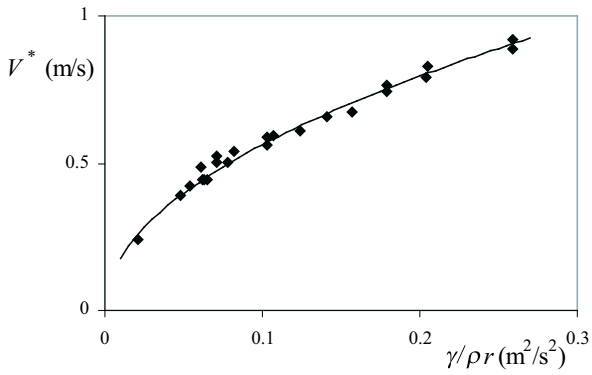


FIG. 3.12: Vitesse seuil V^* en fonction du rapport $\frac{\gamma}{\rho r}$. La courbe en trait plein est une loi de puissance d'exposant 0.5 et de préfacteur 1.78.

dans une plaque de 1.7 mm d'épaisseur (soit sept fois plus épaisse que la plaque du paragraphe précédent). Les données dans ce cas sont systématiquement au-dessus de celles obtenues avec la

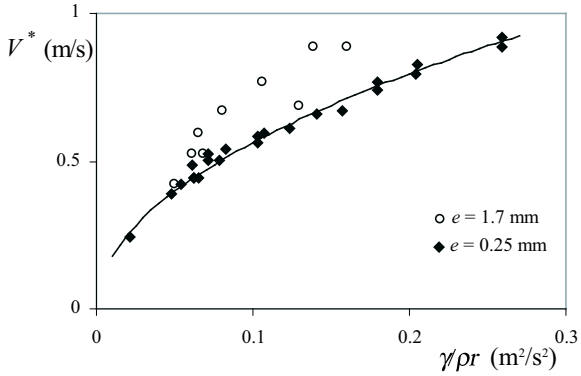


FIG. 3.13: Vitesse seuil V^* en fonction du rapport $\frac{\gamma}{\rho r}$ pour des plaques d'épaisseur de 1.7 mm (cercles) ou 0.25 mm (losange).

plaque fine. En outre, plus la vitesse d'impact est grande, plus l'écart entre les vitesses seuil pour les deux plaques augmente. Ceci est dû à la friction visqueuse le long du trou qui n'est plus négligeable pour une plaque épaisse. La puissance dissipée supplémentaire est d'autant plus importante que la vitesse est grande (elle est dimensionnellement proportionnelle à $\eta V^2 e$), ce qui peut expliquer l'écart observé pour les grandes vitesses.

Rayon de la goutte R

La vitesse seuil peut dépendre aussi du rayon (noté R) de la goutte qui tombe sur le trou. Notamment, si ce rayon est plus petit que celui du trou, il n'y a pas de capture possible. La vitesse seuil de capture V^* normée par la quantité $\sqrt{\gamma/\rho r}$ est représentée sur la figure 3.14 en fonction

du rayon du trou r normé par le rayon R de la goutte pour deux liquides différents (de l'eau et de l'huile silicone légère de viscosité η=0.5 mPa.s). Pour des trous de rayon trois fois plus petit

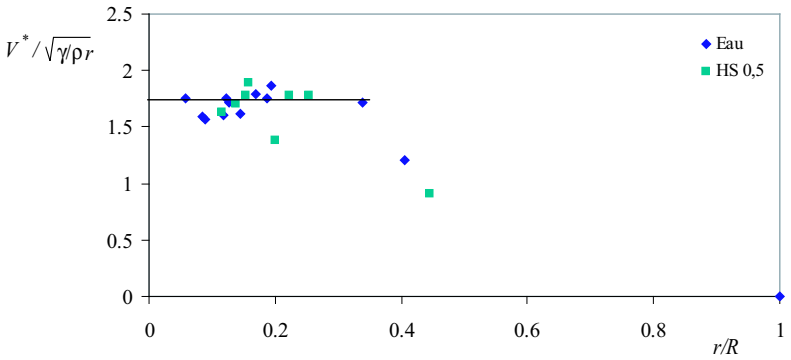


FIG. 3.14: Vitesse seuil V^* normée par $\frac{\gamma}{\rho r}$ en fonction du rapport du rayon du trou et de la goutte

que le rayon de la goutte, la vitesse seuil n'est pas affectée par la taille de la goutte. Au delà, on observe une déviation : la vitesse V^* est inférieure à celle donnée par la loi d'échelle de la figure 3.12. Cette décroissance s'explique simplement : plus la goutte est petite, plus elle se faufile facilement au travers du trou et plus elle est difficile à capturer. Nous avons rajouté (artificiellement, ce point n'est pas une mesure) le point situé à l'abscisse 1 : lorsque la goutte est parfaitement ajustée sur le trou, elle traverse la surface sans la toucher et il n'y a plus de capture possible.

Le domaine de validité du régime *capillaro-inertiel* s'inscrit donc dans deux limites : le substrat ne doit pas être trop épais (afin d'éviter les dissipations visqueuses supplémentaires) et la goutte doit constituer un réservoir de liquide suffisamment important : si son rayon normé par celui-du trou est inférieur à trois, alors la vitesse seuil n'est plus indépendante de cette taille. Elle s'écrit alors au premier ordre en r/R :

$$V^* \sim 1.7\sqrt{\frac{\gamma}{\rho r}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}\right] \tag{3.15}$$

α étant un nombre entier positif que nous n'avons pas déterminé. Nous discutons dans la conclusion générale de cette partie l'importance du rapport du rayon du trou sur celui de la goutte.

3.4 Au-delà du seuil

Nous considérons, dans ce paragraphe, le cas d'une goutte tombant sur le trou avec une vitesse supérieure à la vitesse seuil d'éjection V^*. Nous travaillons avec des plaques minces et des liquides peu visqueux ce qui nous place dans le régime capillaro-inertiel.

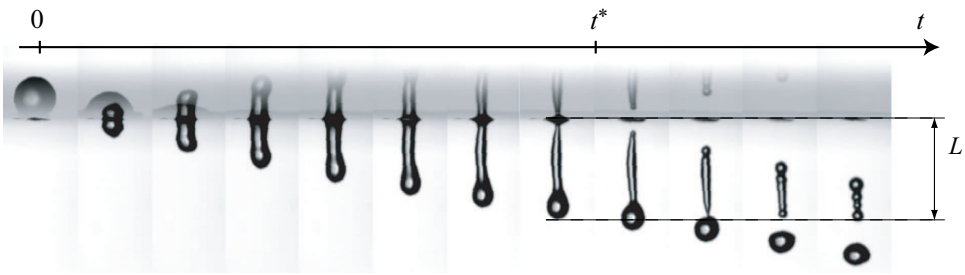


FIG. 3.15: Goutte d'huile silicone légère tombant dans un trou de 450 µm de rayon avec une vitesse de 1.12 m/s bien supérieure à la vitesse seuil $V^* = 0.39$ m/s. Un doigt de liquide est éjecté et se détache de la surface à l'instant t^*.

3.4.1 Temps de pincement

Nous nous intéressons au mécanisme de formation des gouttelettes éjectées de la surface (*cf.* figures 3.4 et 3.15). La dernière photo de la figure 3.4 suggère que ces gouttes proviennent de l'instabilité de Plateau-Rayleigh d'un cylindre de liquide. Cette instabilité vient de ce qu'un cylindre expose plus de surface à l'air qu'une succession de gouttelettes, ce qui est défavorable du point de vue des énergies de surface. Le temps nécessaire (noté t_R) pour fractionner un doigt de liquide de rayon r est obtenu en équilibrant le gradient de pression capillaire (de l'ordre de γ/r^2) avec l'inertie s'opposant à cette fragmentation (de l'ordre de $\rho r/{t_R}^2$), comme il apparaît dans la référence [129]. Ainsi le temps caractéristique de l'instabilité, appelé temps de Rayleigh et noté t_R, est-il proportionnel à :

$$t_R \sim \sqrt{\frac{\rho r^3}{\gamma}} \tag{3.16}$$

Nous avons mesuré le temps t^*, temps de pincement du cylindre défini sur la figure 3.15. Ce temps de pincement s'avère être peu dépendant de la vitesse d'impact de la goutte sur la surface trouée comme on le voit sur la figure 3.16, où t^* est porté en fonction de cette vitesse V. Par contre,

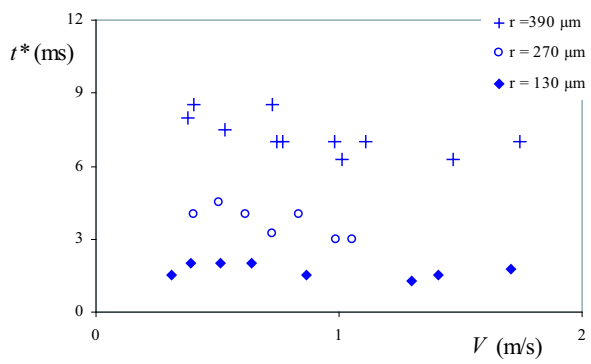


FIG. 3.16: Temps de pincement t^* en fonction de la vitesse d'impact de différentes gouttes tombant dans des trous de différents rayons.

il augmente fortement avec le rayon du trou dans lequel tombe la goutte. Cette croissance de t^* avec la dimension radiale du cylindre r est en accord qualitatif avec un temps de Plateau-Rayleigh (*cf* équation 3.16). Néanmoins, l'importante dispersion des données (qui vient de ce que la caméra rapide ne peut enregistrer plus d'une image par milliseconde, alors que les temps mesurés sont de l'ordre de quelques millisecondes) ne nous permet pas de faire une analyse plus quantitative.

3.4.2 Longueur du doigt de liquide

Taille maximale du cylindre

Il est plus facile de travailler avec une autre grandeur : la longueur L du doigt de liquide au moment du pincement, définie sur la figure 3.15. Cette longueur L est représentée en fonction de la longueur sur laquelle l'instabilité de Rayleigh-Plateau doit se faire, soit Vt_R, sur la figure 3.17. Il apparaît que ces deux longueurs sont proportionnelles (avec un coefficient de proportionnalité

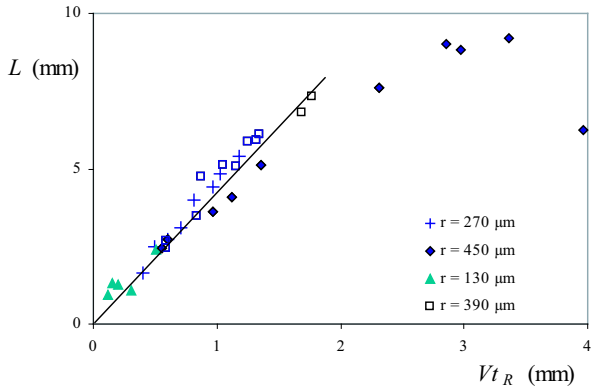


FIG. 3.17: Taille maximale du cylindre en fonction du produit de la vitesse d'impact et du temps de Rayleigh

de l'ordre de 4) tant que le doigt de liquide n'a pas atteint une taille supérieure à 8 mm. Au-delà, la relation linéaire n'est plus obéie, ce qui s'explique en regardant la figure 3.18. L'écoulement de

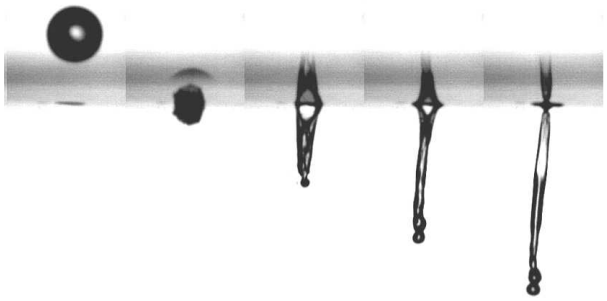


FIG. 3.18: Impact d'une goutte d'huile silicone légère très rapide ($V = 2m/s$) dans un trou de 450 µm de rayon.

liquide dans le doigt n'est plus laminaire, le jet est *twisté* (*cf* la troisième photo de la figure 3.18). Cet

effet est peut-être accentué par les aspérités présentes le long du trou (*cf.* figure 3.2) qui induisent probablement des perturbations de l'écoulement dans le doigt.

Néanmoins, pour les petits cylindres de liquide, toutes les données (correspondant à des rayons différents) se rassemblent sur la même figure. Ceci confirme ce qui apparaissait déjà sur la figure 3.16 : le cylindre de liquide croît à la vitesse V tant qu'il ne s'est pas pincé, c'est-à-dire jusqu'à avoir atteint la taille Vt_R. De plus, nous déduisons que pour des vitesses d'impact largement supérieures à la vitesse seuil, la vitesse de croissance du jet V_j n'est pas affectée par la traversé de l'interface, soit :

$$L = \int_0^{t_R} V_j \, \mathrm{d}t \sim Vt_R \tag{3.17}$$

Nombre de gouttes éjectées

Le nombre de gouttes éjectées de la surface peut finalement être déduit de ces considérations. Un cylindre de rayon r plus long que $2\pi r$ se fragmente spontanément en gouttes de liquide, une goutte apparaissant tous les $2\pi r$. Ce résultat est exact pour un cylindre de longueur $2\pi r$ mais légèrement modifié pour un cylindre infini pour lequel la longueur d'onde s'écrit $2\pi\alpha r$ où α est un peu supérieur à 1 [129]. Ainsi, le nombre N de gouttes théoriquement éjectées de la surface s'évalue simplement :

$$N \sim \frac{L}{2\pi r} + 1 \tag{3.18}$$

Le nombre n de gouttes effectivement éjectées de la surface est représenté en fonction de N sur la figure 3.19. L'accord entre les deux grandeurs est bon, en dépit de la discrétisation de l'axe

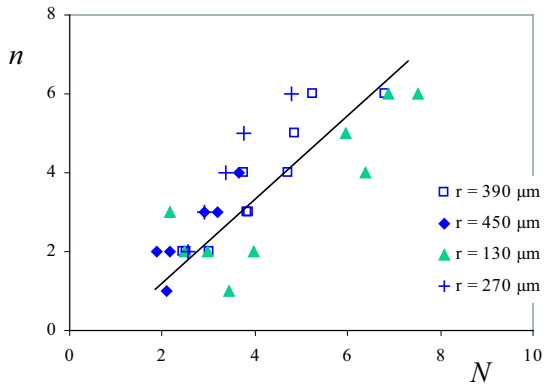


FIG. 3.19: Nombre de gouttes éjectées sous le trou en fonction du nombre attendu par l'équation 3.18

des ordonnées. La pente de la droite interpolant les données est égale à un. Cette analyse naïve nous permet donc de déterminer approximativement le nombre de gouttes éjectées de la surface, un paramètre de prime importance dans toutes les applications industrielles mettant en jeu de telles situations d'impact (la réduction des émissions satellites de gouttes d'encre permet par exemple d'augmenter la résolution des impressions sur papier dans l'industrie des imprimantes à jet d'encre).

En outre, ce calcul nous permet d'expliquer simplement une des constatations expérimentales du paragraphe 3.2.2, où nous avions remarqué que plus la vitesse d'impact est importante, plus le liquide éjecté est fractionné. En détaillant l'expression de la longueur L donnée au paragraphe 3.4.2 (*cf* équation 3.17), l'équation 3.18 devient en effet :

$$N \sim \frac{2V}{\pi V^*} + 1 \tag{3.19}$$

Ainsi plus la vitesse d'impact est élevée, plus le nombre de gouttes éjectées est grand, ce qui est aisément visible en plaçant un tissu sec sous la surface.

3.4.3 Volume éjecté

La dernière grandeur qu'il nous semble important de caractériser est le volume de liquide éjecté lors d'un impact rapide. Ce volume Ω sera (dès lors que la vitesse d'impact est supérieure à la vitesse seuil) de l'ordre de :

$$\Omega \sim r^2 L$$

En réinjectant l'expression de L déterminée au paragraphe 3.4.2 ($L \sim V t_R$), et en faisant apparaître la vitesse seuil $V^* \sim \sqrt{\gamma/\rho r}$, on obtient pour le volume éjecté :

$$\Omega \sim r^2 V \sqrt{\frac{\rho r^3}{\gamma}} \sim \left(\frac{V}{V^*}\right) r^3 \tag{3.20}$$

Nous avons évalué ce volume de liquide éjecté en mesurant le rayon de toutes les gouttes éjectées et avons reporté sur la figure 3.20 ce volume (normé par rayon du trou au cube), en fonction de la vitesse d'impact normé par la vitesse seuil. Les données sont là encore en bon accord avec nos

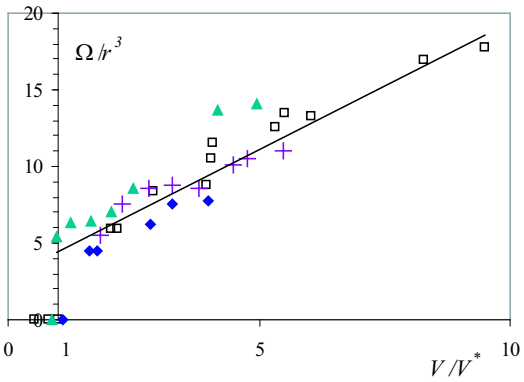


FIG. 3.20: Volume de liquide éjecté sous le trou divisé par le rayon du trou au cube, en fonction du rapport de la vitesse d'impact sur la vitesse seuil.

estimations : lorsque le rapport de la vitesse d'impact sur la vitesse seuil est supérieur à un ($V > V^*$), les points concernant des impacts dans des trous de rayons différents se rassemblent sur une même

courbe bien décrite par une droite de pente proche de un (de l'ordre de 1.5) ; dans la limite inverse ($V < V^*$), rien n'est injecté de la surface et $\Omega = 0$. Remarquons enfin que pour $V = V^*$, le volume éjecté vaut environ quatre fois le rayon du trou à la puissance trois. Juste au-dessus du seuil, le rayon R_0 de la goutte éjectée est donc de l'ordre de celui du trou :

$$\Omega = \frac{4}{3}\pi {R_0}^3 \simeq 4r^3 \quad \text{soit :} \quad R_0 \simeq r \tag{3.21}$$

Cette propriété des plus intéressantes est illustrée sur la figure 3.21. Juste au-dessus du seuil, une seule goutte de liquide est éjectée de la surface percée et la taille de cette goutte est égale à celle du trou, ce qui permet d'obtenir des gouttes bien calibrées dont le rayon est de l'ordre de la centaine de microns. On obtient un résultat très différent en statique : le rayon R de la goutte trop grosse pour être soutenue par un capillaire cylindrique (de rayon r) est seulement proportionnel au rayon du capillaire à la puissance 1/3. Or cette dépendance est beaucoup trop faible pour permettre d'obtenir des gouttes de très petite taille. Bien sûr, des méthodes plus performantes engendrent des gouttes de tailles sensiblement inférieures [37, 157], mais notre *droplet generator* a pour lui son prix particulièrement réduit !

Fig. 3.21: Série de photos illustrant l'éjection d'une goutte unique sous la surface. La goutte est calibrée par le trou (ici r = 390 µm). La goutte mère de 1.8 mm de rayon est d'huile silicone (de tension γ = 16 mN/m et de viscosité η = 0.5 mPa.s). La vitesse d'impact de 40 cm/s est légèrement supérieure à la vitesse seuil. L'intervalle entre les photos est de 2 ms.

3.5 Conclusion

Nous avons étudié l'impact d'une goutte dans un trou plus petit qu'elle et montré que selon sa vitesse plusieurs situations pouvaient se produire : les gouttes lentes sont totalement capturées alors qu'une fraction des gouttes rapides passe à travers la surface. Nous avons mesuré la quantité de liquide éjecté et le taux de fractionnement (c'est-à-dire le nombre de gouttes éjectées). Nous avons, en outre, montré que ce système permet de récupérer efficacement du liquide qui est sous forme d'aérosol et qu'il permet par ailleurs d'engendrer à peu de frais des petites gouttes calibrées. Un certain nombre de questions restent ouvertes : nous n'avons pas, par exemple, explicité le régime *visco-inertiel* et nous nous interrogeons également sur la possibilité d'engendrer un doigt de liquide stationnaire (en étudiant l'impact d'un jet dans un trou). Enfin, ce système expérimental pourrait permettre d'étudier certaines propriétés intéressantes des tensioactifs *via* l'impact de gouttes non pas

de liquide pur mais d'une solution savonneuse. Il devrait être possible de mettre en évidence comme dans les références [99, 110] l'existence d'une tension de surface dynamique et de la caractériser.

Chapitre 4

Gouttes tombant sur une fibre

Sommaire

4.1 Introduction **73**

4.2 Ce que peut soutenir une fibre **74**

4.2.1 Résultats expérimentaux 74

4.2.2 Discussion et interprétation 78

4.3 Ce que peut attraper une fibre **83**

4.3.1 Résultats expérimentaux 83

4.3.2 Discussion 88

4.4 Conclusion **90**

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions des situations d'impact sur le deuxième motif qui forme une grille : la fibre.

Si une goutte tient sur une fibre, c'est parce que le contact avec le solide lui permet de minimiser son énergie de surface. Il existe donc une force de sustentation dérivant de ce processus (dont l'expression est *a priori* compliquée) et à l'instar du chapitre 3, nous cherchons à quantifier ce que peut soutenir ou rattraper une fibre horizontale. Ces questions de capture statique ou dynamique de gouttes sur des fibres sont très différentes de celles qui se posent avec un trou. La quantité de fluide que peut retenir une surface percée d'un seul trou n'est pas limitée alors que, même si les conditions de mouillage de la goutte sont très favorables, la courbure de la fibre limite la quantité de liquide qu'elle peut supporter. Nous discutons principalement deux expériences : la première consiste à quantifier ce que peut soutenir une fibre en statique (*cf.* paragraphe 4.2), la seconde à définir et étudier ce que peut rattraper au mieux une fibre (*cf.* paragraphe 4.3). Nous définissons et caractérisons notamment la vitesse de capture d'une goutte par une fibre (comme au chapitre 3 dans le cas de l'impact d'une goutte sur une surface trouée).

4.2 Ce que peut soutenir une fibre

4.2.1 Résultats expérimentaux

Ce que soutient une petite fibre $12.5\ \mu\mathrm{m} < b < 500\ \mu\mathrm{m}$

Nous mesurons le volume Ω de la plus grosse goutte que peut retenir une fibre de rayon b, b variant entre 12.5 µm et 500 µm. Son volume est tel que si on l'accroît légèrement ou si on perturbe la goutte (à l'aide d'une seringue par exemple), elle choit. Cette grosse goutte est très sensible à la gravité et sa forme (visible sur les photos de la figure 4.4) n'est pas axisymétrique (cf annexe A). Le volume Ω des gouttes délicatement posées sur les fibres est contrôlé par des seringues micrométriques et rapporté à un rayon R_M tel que :

$$\Omega = \frac{4}{3}\pi {R_M}^3$$

Les gouttes sont faites d'huile silicone de viscosité variable (5 mPa.s $< \eta <$300 mPa.s) mais de même tension ($\gamma = 21$ mN/m) et masse volumique ($\rho = 970$ kg/m^{-3}). Le rayon de la plus grosse goutte est reporté en fonction du rayon de la fibre sur la figure 4.1 (échelles logarithmiques). Les données de

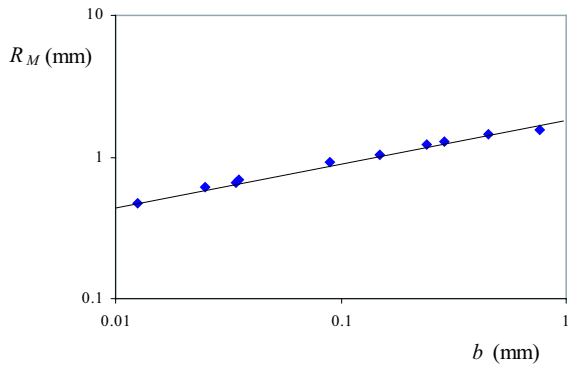


Fig. 4.1: Rayon de la plus grosse goutte que peut soutenir en statique une fibre horizontale de rayon b. Les gouttes sont d'huile silicone, de tension $\gamma = 20$ mN/m et de masse volumique ρ =970 kg/m^3 .

cette figure montrent que R_M est une fonction croissante du rayon de la fibre, et plus précisément qu'il est proportionnel à celui-ci à la puissance 1/3 : le trait plein de la figure 4.1 correspond au tracé de la fonction $R_M = 2\ b^{1/3}$.

Nous avons également testé l'influence de la longueur capillaire en conduisant la même expérience avec des liquides variés : huiles silicones, hexadécane, éthanol ou eau. Les longueurs capillaires correspondant à ces liquides ne sont pas identiques et sont portées dans le tableau 4.1. Nous avons rassemblé nos résultats sur la figure 4.2. Le rayon maximum R_M adimensionné par la longueur capillaire y est porté en fonction du rayon de la fibre b, également adimensionné par cette longueur, pour les différents liquides du tableau 4.1. Les rayons des fibres utilisées sont toujours compris entre 12.5 µm et 500 µm. Les données de la figure 4.2 obtenues avec différents liquides se rassemblent (remar-

Liquide	HS 0.5	HS	Ethanol	Hexadecane	Eau
Longueur capillaire (mm)	1.46	1.49	1.73	1.91	2.25

TAB. 4.1: Longueur capillaire des différents liquides utilisés (en mm). HS indique des huiles silicones.

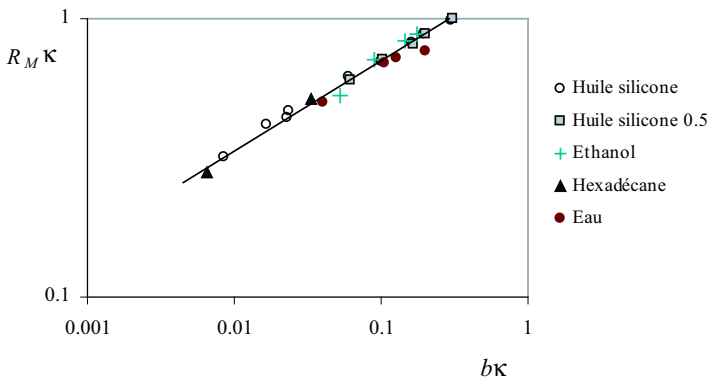


FIG. 4.2: Rayon de la plus grosse goutte adimensionné par la longueur capillaire en fonction du rayon de la fibre b également adimensionné par la longueur capillaire.

quablement bien) sur la même courbe, notamment les points des huiles silicones et de l'hexadécane dont les longueurs capillaires diffèrent de plus de 25%.

Nous pouvons conclure des données des figures 4.1 et 4.2 que :

- le rayon de la plus grosse goutte pouvant tenir sur une fibre horizontale augmente sur près de deux décades avec le rayon b de celle-ci, élevé à la puissance 1/3. La loi de puissance de la courbe 4.2 en trait plein a pour équation : $R_M\kappa = 1.53\ (b\kappa)^{0.33}$.
- la longueur capillaire joue également un rôle ; plus précisément, le rayon R_M est proportionnel à celle-ci à la puissance 2/3, selon l'équation ci-dessus.
- l'influence de l'angle de contact de mouillage noté θ_E sur la figure A.1 (en annexe), est faible. Les mesures avec de l'eau, qui ne mouille que partiellement nos fibres, sont en bon accord avec celles correspondant aux autres liquides en mouillage total avec la fibre. Notons néanmoins que la tension de surface eau/air a été prise égale à $\gamma = 50$ mN/m (au lieu de la valeur tabulée pour de l'eau pure 70 mN/m) : les gouttes d'eau sont en effet déposées sur des fibres de nylon susceptibles de relarguer des molécules tensio-actives. Ces molécules présentes à l'interface liquide/air peuvent diminuer sensiblement la valeur de la tension de surface, l'amenant typiquement à la valeur $\gamma = 50$ mN/m.

Nous trouvons donc pour R_M la loi de variation (dans l'intervalle 12.5 µm $< b <$ 500 µm) :

$$R_M = 1.53\ b^{1/3}\kappa^{-2/3} \tag{4.1}$$

Notons que ce résultat décrit également les données de Yao *et al.* [78] obtenues sur un intervalle de

rayons beaucoup plus limité.

Ce que soutient une plus grosse fibre $b \to 20$ mm

Nous avons complété les résultats du paragraphe 4.2.1 en travaillant avec des fibres de rayon b supérieur à 0.5 mm. Les résultats présentés sur la figure 4.3 reprennent ceux du paragraphe précédent. Pour des fibres de rayon supérieur à la longueur capillaire, la loi d'échelle discutée au

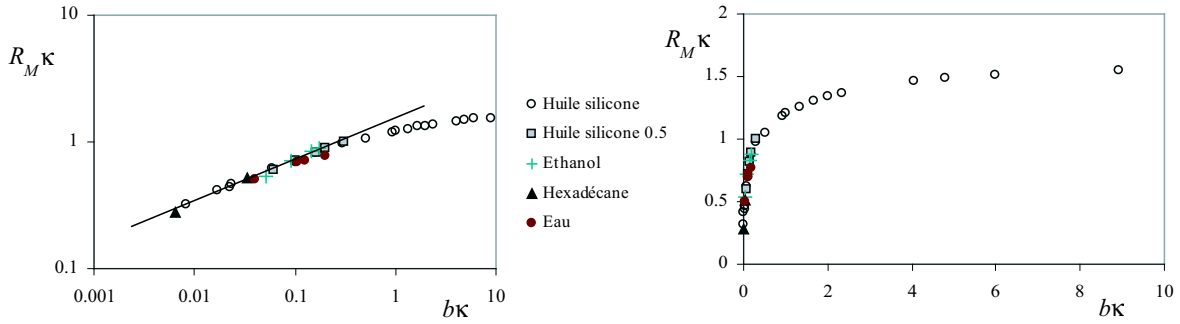


FIG. 4.3: Rayon de la plus grosse goutte adimensionné par la longueur capillaire en fonction du rayon de la fibre b également adimensionné par la longueur capillaire. L'échelle de la courbe de gauche est logarithmique, celle de la courbe de droite linéaire.

paragraphe 4.2.1 n'est plus valable : la croissance de R_M avec b se ralentit. Lorsque le rayon des fibres est plus grand que quatre fois la longueur capillaire ($b > 4\kappa^{-1}$), R_M devient indépendant de b et vaut près de 1.6 fois κ^{-1}.

Ce qui reste sur la fibre après la chute de la grosse goutte

Après la chute de la grosse goutte, il reste une petite quantité de liquide sur la fibre comme on le voit sur la figure 4.4. Nous avons mesuré le volume de liquide restant sur la fibre après que la

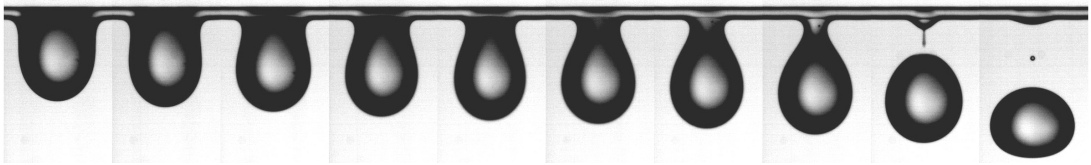


FIG. 4.4: Séquence de photos illustrant la chute d'une goutte d'une fibre de rayon 350 µm. La goutte d'huile silicone ($\eta = 20$ mPa.s) est légèrement plus grosse que ce que peut tenir cette fibre. L'intervalle entre les photos est de 1 ms.

grosse goutte a chu, pour des huiles silicones dont la viscosité varie de 5 mPa.s à 10 000 mPa.s. Le volume τ restant sur la fibre a été déterminé de deux façons :

- Pour des fibres de petits rayons (*i.e.* $b < 200$ µm), la quantité de liquide piégé sur la fibre est peu importante, la gravité est négligeable et la goutte prend une forme axisymétrique

(*cf.* annexe A). Ainsi, en mesurant le rayon de la fibre, la longueur et l'extension radiale de la goutte sur la fibre, son volume τ peut être déterminé grâce aux formules de Carroll [29] présentées en annexe A.

- Pour des fibres de plus grand rayon, la gravité n'est plus négligeable ce qui rend la gouttelette résiduelle asymétrique (*cf.* figure 4.4). Son volume τ a alors été déterminé en mesurant par pesée différentielle la masse d'un petit chiffon avant et après son imbibition par le liquide restant sur la fibre. L'incertitude sur la mesure du volume par cette méthode est plus grande (de l'ordre de 10 %).

Nous reportons le volume τ en fonction du rayon b de la fibre sur la figure 4.5. Le volume de liquide

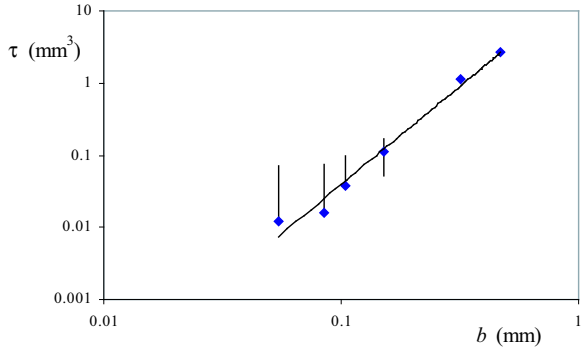


FIG. 4.5: Volume de liquide restant sur la fibre après la chute de la grosse goutte en fonction du rayon de la fibre en échelle logarithmique. La droite indique une pente 3.

qui reste sur la fibre apparaît être proportionnel au cube du rayon de celle-ci : les données sont bien décrites en échelle logarithmique par une courbe (tracée sur la figure 4.5) d'équation $\tau = 25b^3$. En outre, nous avons vérifié que ce résultat était indépendant de la viscosité : les résultats obtenus pour des liquides dont la viscosité est comprise entre 5 mPa.s et 10 000 mPa.s sont identiques. Pour ces huiles, la cinétique de détachement n'est pas différente au point de modifier sensiblement la quantité de liquide éjecté. Le volume du liquide restant sur la fibre est donc proportionnel au cube du rayon de la fibre.

$$\tau \simeq 25\ b^3 \tag{4.2}$$

Nous discuterons ces résultats au paragraphe 4.2.2.

Ce qui quitte la fibre

Des différents résultats du paragraphe 4.2.1, il est possible de déduire le rayon de la goutte qui tombe de la fibre. Nous notons ce rayon R_c :

$$\frac{4}{3}\pi {R_c}^3 = \frac{4}{3}\pi {R_M}^3 - \tau$$

Soit :

$$R_c = \left({R_M}^3 - \frac{3}{4\pi}\tau \right)^{1/3}$$

Pour de petites fibres (0.0125 mm$< b <$ 0.5 mm), nous connaissons les expressions de R_M et τ (*cf.* les équations 4.1 et 5.18). Ainsi, nous obtenons pour le rayon R_c :

$$R_c \simeq 1.53\ b^{1/3}\kappa^{-2/3} \left(1 - \frac{6}{\pi(1.53)^3}\ b^2\kappa^{-2} \right)^{1/3}$$

Le deuxième terme de la parenthèse (qui n'a pas de dimension) est d'autant plus grand que la fibre est grosse. Pour $b \sim 0.5$ mm, il apporte une correction au plus de l'ordre de 6% soit de l'ordre de grandeur de nos incertitudes expérimentales. Nous assimilerons donc par la suite les rayons de la plus grosse goutte tenant sur la fibre (R_M) et celui de la goutte quittant la fibre (R_c).

4.2.2 Discussion et interprétation

Gouttes pendant d'un embout cylindrique

Nous allons commencer par exposer les principaux résultats d'un problème très proche de celui considéré dans les paragraphes précédents : une goutte pendant d'un embout cylindrique vertical continûment alimentée par du liquide (schématisée sur la figure 4.6). Ces problèmes de goutte

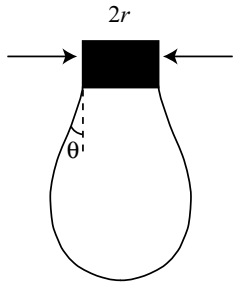


FIG. 4.6: Schéma d'une goutte de liquide sur le point de tomber d'un embout cylindrique de rayon r.

pendante ont fait l'objet de nombreuses études notamment au début du siècle : la mesure du volume de la goutte permet de déduire comme nous le verrons par la suite la tension de surface γ du liquide utilisé (méthode dite de la goutte pendante ou stalagmométrie). Signalons l'excellent ouvrage de Middleman [107] qui fait (entre autre) une revue des travaux consacrés à ces questions (dont certains aspects sont toujours d'actualité). Nous verrons qu'en dépit de l'apparente simplicité de ce problème, l'interprétation des mesures de taille de gouttes pendantes peut être plus complexes qu'il n'y paraît.

La goutte pendante de la figure 4.6 se détache lorsque l'intensité de son poids $\frac{4}{3}\rho g \pi R^3$ excède celle des forces qui la retiennent, *i.e.* les forces de tension de surface dont l'intensité $2\pi r\gamma\cos\theta$ est maximale quand $\theta = 0$. Ainsi, à l'équilibre on trouve la loi dite de Tate [153] :

$$\rho g \frac{4}{3}\pi {R_M}^3 = 2\pi r\gamma \quad \text{soit} \quad R_M = (3/2)^{1/3}\kappa^{-2/3}r^{1/3} \tag{4.3}$$

En mesurant la taille des gouttes qui tombent de l'embout il doit donc être possible de remonter (en utilisant l'équation 4.3) à la tension de surface γ. Dans la pratique, les choses ne sont pas aussi simples, essentiellement parce que le rayon R_M de l'équation 4.3 n'est pas le rayon R_c de la goutte qui tombe (comme nous l'avons vu au paragraphe 4.2.1). Or c'est justement le rayon R_c et non pas R_M qui est facile à mesurer. Une fraction de la goutte dont le volume est déterminé par la cinétique du détachement reste accrochée au capillaire. Cette cinétique quelquefois complexe peut faire apparaître une cascade autosimilaire de structure le long du filament reliant la goutte et le liquide piégé sur l'embout [145]. Rayleigh en 1899 montra dimensionnellement que le rayon de la goutte qui tombe de l'embout s'écrit, en introduisant une fonction arbitraire sans dimension h [130, 131] :

$$R_c = (3/2)^{1/3} h\,(r\kappa)\,\kappa^{-2/3} r^{1/3} \tag{4.4}$$

Harkins et Brown [76] ont mesuré cette fonction h pour de l'eau et du benzène en 1919 ; Wilkinson [166] a complété leurs mesures en 1972, en mesurant R_c pour de plus petits orifices de capillaire et pour des liquides de viscosités variées. Leurs résultats (légèrement modifiés : notre fonction h est différente de la véritable fonction de Harkins et Brown : $h = \left(\frac{3}{4\pi} f\right)^{1/3}$) sont présentés sur la figure 4.7. La fonction de Harkins et Brown modifiée h n'est pas constante, elle est comprise entre 1 et

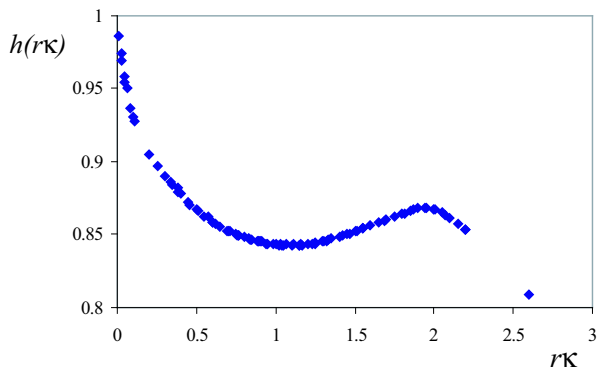


FIG. 4.7: La fonction de Harkins et Brown définie équation 4.4.

0.8 et est assez bien décrite par un polynôme d'ordre 3 (non tracé). Pour de très petits embouts ($r\kappa \to 0$), la taille des gouttes est largement inférieure à la longueur capillaire : les gouttes sont quasi-sphériques, la fonction h tend vers 1 et on retrouve la loi de Tate. Pour des embouts de rayon proche de la longueur capillaire, la fonction h, qui admet un minimum local en $r\kappa = 1$, est de l'ordre de 0.85. La présence de ce minimum permet d'appliquer une loi de Tate modifiée d'un facteur correctif de l'ordre de 85%. Au delà, la fonction h admet un maximum local autour de $r\kappa = 2$ avant de replonger vers de plus petites valeurs. Un grand nombre d'études théoriques [115], [106], ou expérimentales ont été consacrées à la compréhension de cette fonction ; certaines s'attachant à mesurer la courbure de l'interface au niveau du ménisque [64] ou se focalisant sur les effets de la viscosité [145], [167].

La précision de ces mesures a permis le développement de la stalagmométrie comme méthode de mesure de la tension de surface entre deux fluides. En guise de comparaison avec les expériences du paragraphe 4.2.1, notons que le rayon de la goutte R_c qui tombe d'un embout cylindrique vertical de rayon de l'ordre de la moitié de la longueur capillaire ($r\kappa \simeq 0.5$) s'écrit :

$$R_c = 0.87\ r^{1/3}\kappa^{-2/3} \tag{4.5}$$

La loi d'échelle est donc la même, mais le coefficient est nettement différent : une fibre horizontale retient $(1.5/0.87)^3 \simeq 5$ fois plus de liquide qu'un fibre verticale !

Gouttes pendant de petites fibres horizontales

Il est peu étonnant qu'on retrouve les mêmes lois d'échelle. Mises à part leurs géométries, les deux systèmes considérés sont très similaires. Les seuls ingrédients qu'il convient de prendre en compte pour déterminer R_M sont, dans les deux problèmes, la capillarité, la gravité et l'existence d'une longueur externe (le rayon de la fibre b ou celui de l'embout r). En tenant compte de ces trois ingrédients, on peut écrire pour la masse de la goutte M :

$$M = \gamma^\delta\ \mathrm{g}^\epsilon\ b^\zeta$$

Dimensionnellement (comme souligné par [131]), on obtient :

$$\begin{cases} \delta = 1 \\ \epsilon = -1 \\ \zeta = 1 \end{cases}$$

Ce qui est bien équivalent à : $R_M \sim \kappa^{-2/3} b^{1/3}$.

Gouttes pendant de grosses fibres

La saturation atteinte par le rayon de la plus grosse goutte pour de très grosses fibres peut également être discutée (*cf.* figure 4.3) : ces gouttes perdent le sentiment de la courbure du solide auquel elles sont attachées. Elles se sentent comme pendre d'un plafond, or le volume d'une goutte Ω_M sur le point de tomber d'une surface plane horizontale est [16, 107] :

$$\Omega_M \simeq 18.93\kappa^{-3} \tag{4.6}$$

La relation de proportionnalité avec la longueur capillaire au cube est peu étonnante (il n'y pas d'autre longueur caractéristique que la longueur capillaire dans le système). Le coefficient multiplicatif moins aisé à obtenir, a été calculé numériquement par Boucher *et al.* [16] et Padday *et al.* [115]. Leurs résultats sont tout à fait en accord avec nos données : de l'équation de 4.6, on obtient en remplaçant le volume Ω_M par son rayon :

$$R_M = 1.65\kappa^{-1}$$

ce qui concorde bien avec les résultats de la figure 4.3.

Force de sustentation capillaire

Dimensionnellement, les expériences de gouttes pendant d'un embout cylindrique et d'une fibre horizontale sont identiques, mais c'est la simplicité de la seule géométrie axisymétrique (*cf.* figure 4.8) qui permet d'écrire le bilan de forces (loi de Tate). Il existe une zone où la tangente à l'interface air/liquide est verticale, ce qui rend particulièrement aisée l'écriture des forces capillaires.

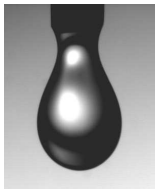


FIG. 4.8: Goutte d'huile silicone pendant d'un capillaire de rayon extérieur de 400 µm, et sur le point de tomber. Les zones de tangence verticale sont bien visibles.

Ce n'est plus le cas pour une goutte pendant d'une fibre horizontale : les zones de tangence verticale existent encore mais pas tout le long d'une section, comme on le voit sur la figure 4.9. Nous avons tenté de déterminer les forces capillaires à l'origine de la sustentation en étudiant la forme de ces ménisques (à l'image du remarquable travail de Orr et Scriven [114]), mais la géométrie de ces ménisques qui connectent une sphère (la goutte) à un cylindre (la fibre) est trop complexe.

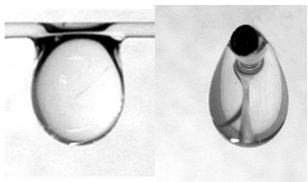


FIG. 4.9: Deux gouttes d'huile silicone pendant de fibres de différents rayons (350 µm à droite et 600 µm à gauche) vues sous deux angles différents. Deux ménisques visibles sur la photo de gauche sont inexistants sur celle de gauche.

De l'expression du rayon R_M (*cf* paragraphe 4.2.1), nous pouvons néanmoins remonter à la résultante des forces capillaires notée F_c qui équilibre le poids de la grosse goutte :

$$F_c = \frac{4}{3}\pi(1.53)^3 b\gamma \simeq 15\ b\gamma \tag{4.7}$$

Cette expression très semblable à celle de la loi de Tate est difficile à interpréter spontanément : elle fait bien intervenir une tension interfaciale et une longueur mais cette longueur ne correspond pas au périmètre de la section normale.

Nous avons toutefois tenté de comprendre cette expression pour des gouttes posées sur des fibres horizontales en mesurant la pression dans la goutte comme Guarandet *et al.* l'ont fait pour un embout cylindrique [64]. Nous nous sommes intéressés à l'évolution de la pression au point B (*cf.* figure 4.11) pour des volumes de liquide croissants (*cf.* figure 4.10). Joanny a montré [80] que

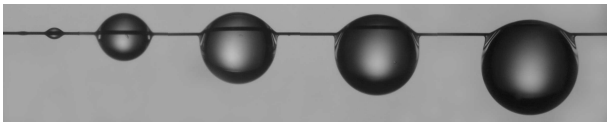


FIG. 4.10: Gouttes d'huile silicone 20 mPa.s de volume croissant posées sur une fibre de 12.5 µm de rayon.

les grosses gouttes sur de toutes petites fibres ($R >> b$) n'étaient pas loin d'être des sphères : la perturbation induite par la fibre s'étend sur une région dont la taille est le rayon du fil. Ainsi le bas de la goutte est-il sphérique et la mesure du rayon de cette sphère R donne la pression au sein de la goutte (point A sur la figure 4.11). La goutte est en équilibre, donc la pression en B est donnée par :

$$P_B = P_A - \rho g H = P_0 + \frac{2\gamma}{R} - \rho g H$$

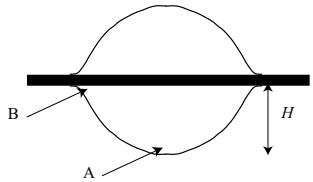


FIG. 4.11: Schéma d'une grosse goutte sur une petite fibre de rayon b.

Nous n'avons pas obtenu de résultats convaincants pour l'évolution de P_B. Cette tentative nous a néanmoins permis de nous interroger sur les problèmes de pression au sein d'une goutte sur une fibre : nous pensions que la pression au point B était une fonction décroissante du rayon de la fibre b. Plus la fibre est petite, plus cette zone devait-elle être, selon nous, confinée et plus petite devait être la pression en ce point. Une goutte posée sur une fibre de rayon variable devrait donc avancer vers les zones de plus faibles pressions, soit vers les plus petits rayons. Nous verrons ce qu'il en est au chapitre 5. Ce sont ces expériences qui sont à l'origine de notre travail sur les fibres coniques.

Volume restant sur la fibre

Nous discutons dans ce paragraphe la quantité de liquide restant sur la fibre après la chute de la grosse goutte. Les mesures correspondantes ont été exposées au paragraphe 4.2.1 où il est apparu que le volume de fluide restant τ est de l'ordre de 25 b^3. Un argument dimensionnel est là encore bienvenu : le volume de liquide qui reste sur la fibre est très petit (de l'ordre de 0.1 mm^3) or à ces échelles, la gravité est négligeable devant les forces capillaires (le volume correspondant à la longueur capillaire portée à la puissance 3 est de l'ordre de 3.5 mm^3). La seule longueur caractéristique du système à cette échelle est donc le rayon de la fibre, d'où la relation :

$$\tau \sim b^3 \tag{4.8}$$

Quelques remarques pour finir

- Si les différences de géométrie entre une goutte pendant d'une fibre horizontale et d'un embout cylindrique ne changent pas la loi d'échelle donnant la taille de la goutte R_M, elles modifient par contre fortement le coefficient multiplicatif de cette loi. Pour une fibre pendant d'un embout cylindrique compris entre 0.1 et 0.6 fois la longueur capillaire, le coefficient donné par la figure 4.7 est de l'ordre de 0.8, alors que pour une goutte pendant d'une fibre de même rayon il vaut 1.5 soit près de deux fois plus. Le volume d'une goutte pendant d'une fibre horizontale est 8 fois plus important que celui d'une goutte pendant de la même fibre placée verticalement. Cette propriété est intéressante : le volume d'une goutte tombant d'un capillaire cylindrique est une fonction croissante de son angle d'inclinaison. Il est minimum pour un angle de 0°, maximum pour un angle de 90° et varie d'un facteur 8 entre les deux. Il est donc possible d'obtenir des gouttes sur une large gamme de taille simplement en les faisant choir de fibres inclinées.

- En outre, nous pouvons, au vu de ces résultats, donner quelques idées pour obtenir par stalagmométrie des gouttes de liquide de petite taille. Tout d'abord, il convient de placer verticalement le solide au bout duquel pendra la goutte. Ensuite, la loi de Tate assure que le rayon de la goutte qui tombe est d'autant plus petit que la longueur capillaire, le rayon de l'embout et le cosinus de l'angle de mouillage θ sont petits. Une première solution consiste à diminuer ce cosinus (par exemple en traitant la surface du solide afin de la rendre *liquidophobe*). Ce n'est pas toujours possible. La deuxième solution (moins efficace) est de diminuer le rayon du solide, mais il peut être alors difficile d'y transférer du liquide si ce rayon est trop petit. Pour pallier cet inconvénient, nous proposons d'utiliser des fibres coniques (des fibres de rayon variable). Il est en effet facile d'y transférer (du côté des gros rayons) une petite quantité de liquide. Cette petite goutte dévalera (plus ou moins docilement comme nous le verrons au chapitre 5) le long de la fibre dès que celle-ci sera inclinée verticalement en orientant les petits rayons vers le bas et chutera de la fibre lorsque le rayon local de celle-ci sera trop petit pour la supporter. Nous n'avons pas trouvé de fibres coniques dans le commerce, mais nous verrons au chapitre 5 que la production de telles fibres peut se faire très facilement.

4.3 Ce que peut attraper une fibre

4.3.1 Résultats expérimentaux

Notre deuxième expérience, menée en collaboration avec C. Clanet consiste à faire tomber à vitesse V une goutte de liquide de rayon R sur une fibre horizontale de rayon b.

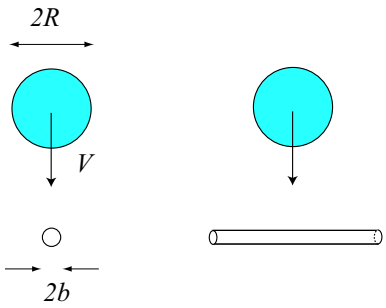


FIG. 4.12: Schéma de l'expérience : une goutte de rayon R tombe à la vitesse V sur une fibre horizontale de rayon b.

Quelques images

L'impact de la goutte sur la fibre est filmé avec une caméra rapide (qui enregistre typiquement 1000 images par seconde). La goutte dont le rayon R varie entre 0.8 et 1.5 mm tombe à une vitesse V comprise entre 0 et 3 m/s. Elle peut être constituée de différents liquides dont la viscosité η s'étale entre 0.5 et 500 mPa.s. La tension de surface entre le liquide et l'air sera notée γ. Le rayon de la fibre en nylon ou en métal varie entre 12.5 µm et 500 µm.

Cette expérience schématisée sur la figure 4.12, très proche de celle décrite au chapitre 3, nous a permis de mettre en évidence (comme au chapitre 3) l'existence d'une vitesse seuil de capture (noté V^{**}). Si la goutte tombe avec une vitesse inférieure à cette vitesse seuil ($V < V^{**}$), elle est complètement piégée par la fibre ; sinon, du liquide est éjecté sous la fibre ($V > V^{**}$). Ces deux situations sont illustrées sur les figures 4.13 et 4.14.

FIG. 4.13: Goutte d'huile peu visqueuse ($\eta = 5$ mPa.s) de 0.7 mm de rayon tombant sur une aiguille plantée dans un support (vue de face). La vitesse de chute est plus petite que la vitesse de capture, la goutte est totalement arrêtée. Notons que ces images sont séparées par 4 ms.

Sur la figure 4.13, une goutte d'huile peu visqueuse tombe sur une fibre avec une vitesse de 0.2 m/s. Elle est totalement capturée par la fibre ($V < V^{**}$). Au contraire, sur la figure 4.14 la vitesse de chute de la goutte, plus grande, est suffisante pour lui permettre de passer au travers de la fibre ($V > V^{**}$).

FIG. 4.14: Goutte d'huile peu visqueuse ($\eta = 5$ mPa.s) de 0.7 mm de rayon tombant sur une fibre. La vitesse de chute est plus grande que la vitesse de capture ($V > V^{**}$) et la goutte n'est pas totalement capturée. 2 ms sépare chaque image.

Importance du positionnement

Comme pour une goutte dans un trou, la position relative de la goutte et de la fibre est cruciale et bien évidemment, si la goutte rate la fibre elle ne sera jamais capturée. La situation de capture d'une goutte par une fibre sera presque complémentaire de celle exposée au chapitre 3.

- La vitesse seuil V^{**} dépend très fortement de la distance (notée l) entre la fibre et le centre de gravité de la goutte. La vitesse seuil de capture est d'autant plus grande que les objets sont alignés : elle est maximale si $l = 0$ et nulle dès que $l > R$ comme illustré sur la figure 4.15.

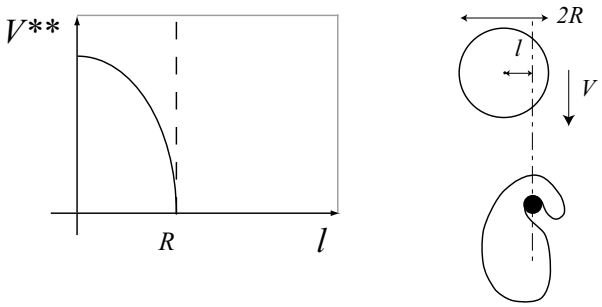


FIG. 4.15: Le premier dessin indique le sens de variation de la vitesse seuil en fonction de l'écart entre le centre de la goutte et la fibre. Le deuxième dessin schématise le déséquilibre entre les deux lobes de liquide éjectés si la goutte n'est pas centrée sur la fibre.

- Ensuite, si les deux objets ne sont pas centrés, les volumes des doigts de liquide éjectés (visibles sur la figure 4.14) ne seront pas égaux.

Par la suite, nous appellerons vitesse de capture (toujours notée V^{**}), le maximum de la courbe 4.15, c'est-à-dire la vitesse seuil entre les deux régimes (éjection ou non) pour une goutte dont la trajectoire est parfaitement centrée sur la fibre.

Premiers résultats

Les différents effets qui participent à la capture ou à l'éjection de liquide sous la fibre sont aisément identifiables (*cf.* chapitre 3). La capillarité et la résultante des forces de friction retiennent la goutte sur la fibre alors que son inertie et son poids l'en détachent. Nous pouvons, comme au chapitre 3, construire deux nombres sans dimension qui comparent l'importance relative des effets inertiels et visqueux d'une part et des effets inertiels et capillaires d'autre part : les nombres de Weber (We) et Reynolds (Re).

$$Re^{**} = \frac{\rho\ bV^{**}}{\eta} \tag{4.9}$$

$$We^{**} = \frac{\rho\ bV^{**2}}{\gamma} \tag{4.10}$$

Ces nombres sans dimension sont construits au seuil avec le rayon de la fibre comme longueur caractéristique. Nous avons mesuré la vitesse de capture pour des gouttes de différentes huiles visqueuses (toutes issues de seringues identiques) et avons reporté le nombre de Weber seuil de l'expérience en fonction du nombre de Reynolds seuil pour des gouttes de même rayon tombant à des vitesses différentes sur des fibres de rayon compris entre 250 et 350 µm.

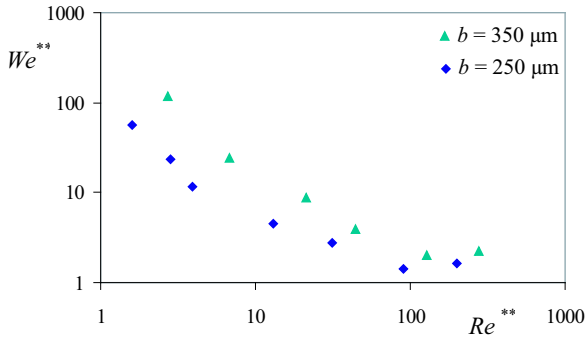


FIG. 4.16: Nombre de Weber seuil We^{**} en fonction du nombre de Reynolds seuil Re^{**} pour des gouttes d'huile silicone de même tension $\gamma = 20$ mN/m et de viscosité comprise entre 0.5 et 500 mPa.s. Les deux courbes correspondent à deux fibres de rayon différent.

La courbe de droite de la figure 3.7 et celle de la figure 4.16 se ressemblent : les nombres de Weber seuil de capture sur une fibre et dans un trou sont des fonctions décroissantes du nombre de Reynolds seuil. Ces deux tracés délimitent également deux zones dans le plan (We^*, Re^*) : pour des nombres de Weber et Reynolds en dessous des tracés expérimentaux, la goutte est totalement capturée par la fibre alors qu'au-dessus la capture est partielle. En outre, le nombre de Weber seuil pour une fibre atteint également une valeur constante pour des nombres de Reynolds supérieur à 100. Néanmoins, elles diffèrent nettement par d'autres points : le nombre de Reynolds seuil pour une fibre ne semble pas saturer à grand nombre de Weber, et surtout les deux courbes obtenues

pour des rayons b différents ne se rassemblent pas sur le même tracé. Cette dernière constatation est importante : elle indique (au contraire de ce qu'il était apparu pour des gouttes tombant dans un trou) que la vitesse seuil est définie avec au moins une autre longueur caractéristique que le rayon de la fibre. La longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ et la taille de la goutte qui tombe sont certainement des paramètres cruciaux dans cette expérience.

Nous nous sommes placés comme au chapitre 3 dans un régime où la dissipation par friction visqueuse est négligeable, soit pour des nombres de Reynolds seuil supérieurs à 50. Nous avons testé l'influence des autres longueurs du problème et avons, en particulier, mesuré la vitesse de capture V^{**} en fonction du rayon R de gouttes d'eau chutant sur des fibres de rayon b. Pour obtenir des gouttes d'eau de différentes tailles, nous avons utilisé une seringue de petit embout (typiquement de rayon inférieur à 300 µm). L'inclinaison de la seringue à des positions différentes par rapport à la verticale nous a permis d'obtenir des gouttes de tailles variées (pour les raisons exposées au paragraphe 4.2.2 : plus la seringue est inclinée et plus les gouttes qui en tombent sont petites. En outre, nous avons veillé à ce que la goutte tombe bien au centre de la fibre.

Les données sont rassemblées sur la figure 4.17. Celle-ci nécessite quelques commentaires :

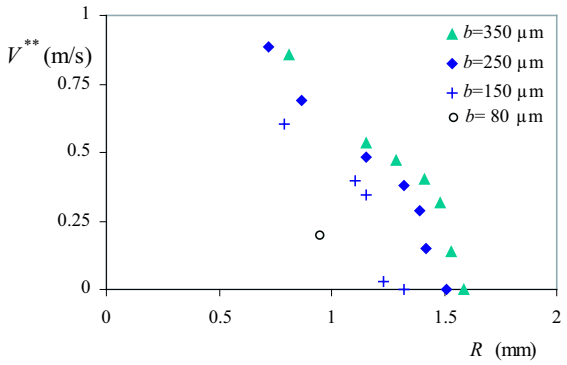


FIG. 4.17: Vitesse seuil de capture en fonction de la taille de gouttes d'eau tombant sur des fibres de rayons différents.

- Les vitesses de capture peuvent être élevées : pour une fibre de 250 µm de rayon, elles atteignent des valeurs supérieures à 0.7 m/s.
- Pour une fibre de rayon b donné, la vitesse seuil de capture est une fonction décroissante de la taille de la goutte. Elle semble diverger pour de très petites tailles de goutte et s'annule au contraire pour des gouttes trop grosses. Ce rayon maximal de la goutte d'eau est de l'ordre de 1.5 mm pour une fibre de 250 µm de rayon.
- Au-delà de ce rayon, il n'est plus possible de capturer les gouttes. Notons que ce rayon maximal augmente avec le rayon de la fibre, ce qui est en bon accord qualitatif avec les résultats du paragraphe précédent.
- Finalement, on observe que plus le rayon de la fibre est petit, plus la capture d'une goutte de

taille donnée est difficile.

4.3.2 Discussion

L'expression du rayon R_M de la plus grosse goutte tenant sur une fibre a été déterminée au paragraphe 4.2. Ce rayon, fixé par un équilibre entre la résultante des forces capillaires et le poids de la goutte, a pour expression (*cf.* équation 4.1) :

$$R_M = 1.53\ b^{1/3}\kappa^{-2/3}$$

Pour interpréter les données de la figure 4.17, nous utilisons l'expression des forces capillaires F_c

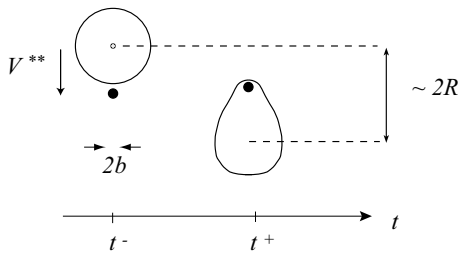


FIG. 4.18: Schéma illustrant la goutte et la fibre juste avant et après l'impact.

déterminée au paragraphe 4.2.2. Nous écrivons le théorème de l'énergie cinétique pour une goutte tombant sur la fibre entre les instants t^- et t^+ (*cf.* figure 4.18). Le travail du poids vaut :

$$W_P \simeq \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \mathrm{g}\ 2R$$

et celui des forces capillaires (en supposant que leur intensité est constante au cours de l'impact, ce qui n'a rien d'évident) :

$$W_{F_c} \simeq -15 b\gamma\ 2R$$

La variation d'énergie cinétique entre les instants t^- et t^+ est :

$$E_c(t^+) - E_c(t^-) = -\frac{1}{2}\rho V^{**2} R^3$$

On obtient donc l'équation :

$$\frac{1}{2}\rho V^{**2} R^3 = 30 b\gamma\ R - \frac{8}{3}\pi R^4 \rho \mathrm{g} \tag{4.11}$$

En introduisant le rayon R_M de la plus grosse goutte que peut soutenir la fibre b (qui vérifie l'équation $4/3\pi\rho \mathrm{g} {R_M}^3 = 15 b\gamma$), et une vitesse notée V_M telle que : $V_M = \sqrt{16 \mathrm{g} R_M/3\pi}$, l'équation 4.11, se simplifie en :

$$\frac{V^{**}}{V_M} = \sqrt{\frac{{R_M}^2}{R^2} - \frac{R}{R_M}} \tag{4.12}$$

Cette équation a des propriétés intéressantes qui sont en accord avec les observations de la figure 4.17 :

- La vitesse seuil de capture définie par l'équation 4.11 est une fonction décroissante du rayon de la goutte impactant.
- Elle diverge pour $R \to 0$ et elle est positive pour $R < R_M$.
- Enfin, elle s'annule effectivement pour $R = R_M$, comme $\sqrt{R_M - R}$.

La vitesse de capture V^{**} adimensionnée par la vitesse V_M est représentée en fonction du rapport du rayon de la goutte adimensionné par le rayon R_M sur la figure 4.19. Les gouttes tombant sur la fibre sont des gouttes d'eau et les fibres sont en nylon. Ce mélange n'est pas très heureux : il a déjà été observé que ces fibres sont susceptibles de relarguer des molécules tensio-actives pouvant abaisser la tension de surface de l'eau liquide. Nous avons donc pris comme tension interfaciale $\gamma = 50$mN/m. Ces données expérimentales ont déjà été présentées brutes sur la figure 4.17. Nous

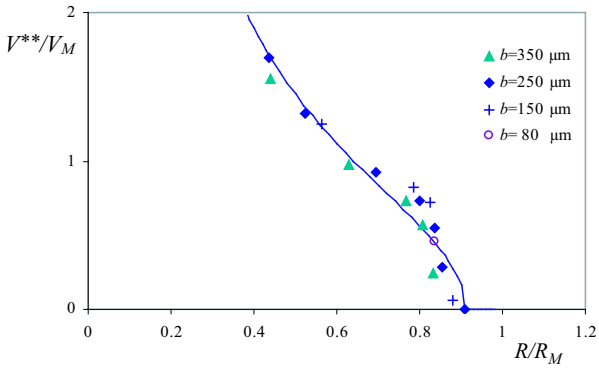


FIG. 4.19: Vitesse seuil de capture adimensionnée par la vitesse V_M en fonction du rapport du rayon de la goutte sur le rayon R_M. Le trait plein correspond au tracé de l'équation 4.12. Les gouttes sont des gouttes d'eau.

y avons également reporté (en trait plein) un tracé proche de celui de l'équation 4.12 avec deux paramètres ajustables α et β :

$$\frac{V^{**}}{V_M} = \sqrt{\alpha \frac{{R_M}^2}{R^2} - \beta \frac{R}{R_M}} \tag{4.13}$$

Une première constation s'impose : les différents points expérimentaux (obtenus pour des rayons de fibre différents) de la figure 4.17 se rassemblent sur la même courbe. En outre, le tracé de l'équation 4.13 décrit remarquablement bien les données avec $\alpha = 0.63$ et $\beta = 0.83$, valeurs qui sont toutes deux de l'ordre de 1. Le paramètre α correspond au travail des forces capillaires et est logiquement plus petit que 1 : dans l'équation 4.11, nous avions calculé ce travail en considérant que la force capillaire est constante durant l'impact et égale à sa valeur maximale. Le paramètre β correspond à l'intensité du travail du poids. Il n'y a pas de raison réellement valable qui explique pourquoi β serait plus petit que un, à part l'incertitude sur la valeur de R_M. Celle-ci a été calculée en utilisant l'équation 4.1 ; or cette équation, certainement correcte pour les liquides en mouillage total, ne l'est peut-être pas pour l'eau.

Ainsi dans une limite où la dissipation visqueuse est négligeable, la vitesse de capture d'une goutte par une fibre peut être déterminée en prenant en compte à la fois l'inertie de la goutte, son poids et les forces capillaires. Notons pour finir que la vitesse seuil V^{**} peut se réécrire en remplaçant R_M par son expression. On trouve ainsi

$$V^{**} = 7.4 \sqrt{\frac{\gamma}{\rho b}} \frac{b}{R} \sqrt{0.63 - 0.23 \frac{R^3}{b^3} b^2 \kappa^2} : \tag{4.14}$$

Nous reviendrons dans la conclusion générale de cette partie sur l'importance relative du rapport du rayon de la fibre sur celui du trou.

4.4 Conclusion

Nous avons étudié la possibilité de capturer des gouttes qui impactent sur des fibres horizontales. Cette expérience est assez différente de la chute d'une goutte dans un trou : la capture n'est ici possible que pour les petites gouttes et il est impossible de piéger sur une fibre une goutte en mouvement plus grosse que celle que peut soutenir statiquement une fibre (l'inertie de la goutte étant défavorable à la capture).

Nous avons donc commencé par déterminer la masse de la plus grosse goutte que peut soutenir une fibre. Cette masse est proportionnelle à celle pendant d'un embout cylindrique. Ce résultat n'est pas étonnant outre mesure : dimensionnellement, il n'est pas possible d'écrire autrement une masse faisant intervenir à la fois la densité de la goutte, les forces capillaires et la taille caractéristique du système (le rayon de la fibre ou de l'embout). Néanmoins, nous avons mis en évidence une forte différence des coefficients numériques, la plus grosse goutte pendant d'une fibre horizontale étant près de 5 fois plus lourde que celle pendant au bout d'une fibre. La géométrie du système est trop compliquée pour que nous soyons en mesure d'interpréter simplement cette valeur, mais cette observation nous a permis de mettre au point une technique très élémentaire pour obtenir des gouttes de différentes tailles. En outre, il convient de noter que l'imprécision de nos mesures ne nous a pas permis de tracer l'équivalent de la courbe de Harkins et Brown pour des gouttes pendant de fibres horizontales. Cette fonction, dans laquelle sont contenues toutes les informations relatives à la géométrie du système, est probablement compliquée, mais resterait intéressante à caractériser.

Puis nous avons mis en évidence qu'il existe une vitesse seuil de capture pour une goutte tombant sur une fibre. Cette vitesse, qui est maximale si la trajectoire de la goutte est centrée sur la fibre, fait *a priori* intervenir l'inertie de la goutte, la résultante des forces de friction, les forces capillaires et le poids de la goutte. Nous nous sommes intéressés à la limite *capillaro-inertielle*, c'est-à-dire à la limite où la dissipation visqueuse est négligeable. Ces résultats sont préliminaires : notre étude n'est pas systématique et il conviendrait (entre autre) de poursuivre ce travail pour des liquides mouillant réellement la fibre, de viscosités variées et en explorant une plage plus large de rayons de fibre.

Chapitre 5

Gouttes sur une fibre conique

Sommaire

5.1 Introduction **91**

5.2 Fabrication de fibres coniques **93**

5.2.1 Capillaire de verre étiré 93

5.2.2 Fibre de cuivre croquée 94

5.3 Quelle force motrice ? **96**

5.3.1 Premiers résultats 96

5.3.2 Forme d'une goutte sur une fibre 96

5.3.3 Force tirant une goutte sur une fibre conique 99

5.4 Dynamique **102**

5.4.1 Quelle dissipation ? 103

5.4.2 Dynamique d'une goutte sur une fibre cylindrique inclinée 108

5.4.3 Vitesse d'avancée d'une goutte le long d'une fibre conique 109

5.5 Fibres coniques mouillées **112**

5.5.1 Film épais 112

5.5.2 Film mince 113

5.5.3 Séchage 115

5.6 Interprétation énergétique - Étalement en mouillage total **115**

5.6.1 Substrat plan 115

5.6.2 Fibre conique 116

5.6.3 Substrat quelconque 117

5.7 Conclusion **117**

5.1 Introduction

Une petite goutte posée sur un substrat quelconque est modelée par les forces capillaires. Si ces forces ne sont pas équilibrées de part et d'autre de la goutte, elle peut bouger. De nombreux systèmes

mettent en jeu ces asymétries pour engendrer un mouvement spontané. Bouasse [15] suggéra qu'un index de liquide mouillant placé dans un capillaire conique devait avancer vers les zones de plus petits rayons. De la même façon, un index de liquide placé au milieu d'un tube dissymétrique, une moitié étant hydrophile et l'autre hydrophobe, avance comme l'a montré Weislogel [163]. Bain *et al.* [3] et Ondarçuhu *et al.* [144] inventèrent une version dynamique de l'expérience de Weislogel : des gouttes de liquide contenant un réactif trichlorosilane pouvant réagir sur du verre sont posées sur un tel substrat. Elles induisent elles-mêmes, au cours de leur mouvement, un contraste de mouillabilité en modifiant chimiquement les propriétés du substrat. Dans un esprit un peu différent, Bico étudia le mouvement spontané d'un double index de liquide (bigoutte) placé dans un tube capillaire [7, 8]. Une asymétrie entre l'avant et l'arrière du système peut également apparaître lorsque du liquide est placé dans un gradient de température. Brochard [20] et Homsy [101] ont décrit en détail le mouvement de gouttes sur une surface soumise à un tel gradient. Carroll étudia dans la référence [31] le mouillage d'une goutte sur un cheveu – modélisé par une fibre présentant une aspérité en coin périodique (image largement relayée par les publicitaires capillaires) – et y mentionne qu'une goutte peut se mouvoir spontanément avant d'atteindre une position d'équilibre lorsqu'une de ces extrémités s'ancre sur le coin de l'aspérité. Ce mouvement transitoire d'une goutte sur une fibre capillaire est alors dû aux variations locales de l'angle de contact de part et d'autre de la goutte.

De façon générale, les forces capillaires s'écrivent comme le produit d'une tension de surface (notée γ) par une longueur caractéristique l. Une goutte pourra bouger si elle est soumise soit à un gradient de tension de surface (comme dans les systèmes étudiés par Weislogel, Bain, Ondarçuhu, Bico, Brochard et Homsy), soit à un gradient de longueur (comme suggéré par Bouasse). Nous présentons dans ce chapitre un exemple de mouvement spontané induit par un gradient de longueur en plaçant une goutte mouillante sur une fibre conique – soit une fibre de rayon continûment variable. Sur un tel substrat une goutte avance spontanément vers les zones de plus faible courbure, c'est-à-

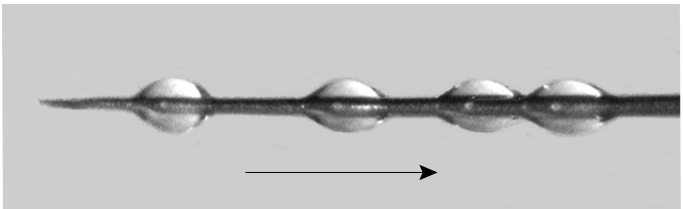


Fig. 5.1: Superposition des différentes positions d'une goutte d'huile silicone placée sur une fibre conique. La goutte est vue de dessus, les différentes photos sont espacées de 1.6 s.

dire vers les plus grands rayons comme on le voit sur la figure 5.1, sur laquelle nous avons superposé différentes images régulièrement espacées (toutes les 1.6 s). Nous observons également sur la figure 5.1 que la vitesse d'avancée de la goutte sur la fibre n'est pas constante. Nous verrons que cette vitesse ne dépend pas seulement de la conicité (le gradient de rayon) de la fibre, qui est ici à peu près constante.

Ce résultat reste valable à toutes les échelles inférieures à la longueur capillaire. Il explique notamment les propriétés auto-séchantes des pointes de microscope à force atomique (AFM), qui peuvent rester sèches même si elles ont été mises en contact avec du liquide. En outre, il peut être utilisé pour transférer sans moteur de petites quantités de liquides ou pour assécher certaines régions spécifiques de micro-systèmes.

Enfin, ce système modèle nous permet de compléter notre discussion sur le comportement d'une goutte sur un réseau hétérogène de fibres (ou une grille). Nous avons montré aux chapitres 3 et 4, que lors de l'impact d'une goutte sur une grille, le solide retenait toujours une fraction de liquide (même si la goutte tombe très rapidement) : ce liquide, piégé par le solide, est drainé des régions où la grille exhibe peu de surface (fibre) vers les régions de grandes surfaces (nœud entre plusieurs fibres). Il permet en outre de quantifier l'efficacité du séchage des régions fuies par la goutte.

Nous commençons par détailler les méthodes élaborées pour fabriquer des fibres coniques. Puis, nous caractérisons et mesurons la force motrice s'exerçant sur la goutte avant de nous intéresser à sa dynamique. Pour finir, nous étudions l'évolution de fibres coniques uniformément mouillées.

Notons que notre analyse a été conduite dans le cas de petites gouttes mouillantes posées sur des fibres dont le rayon est au plus la longueur capillaire. Les gouttes déposées sur les fibres sont donc axisymétriques. Ainsi, les résultats de Carroll et McHale, exposés dans l'annexe A, ont pu être utilisés pour déterminer les caractéristiques géométriques de telles gouttes.

5.2 Fabrication de fibres coniques

Le marché des fibres coniques n'ayant pas l'air d'être florissant, nous avons été obligé de les fabriquer nous mêmes.

5.2.1 Capillaire de verre étiré

Une première technique consiste à effiler des tubes en verre en les chauffant. Nous souhaitions obtenir les fibres les plus régulières, c'est-à-dire les plus droites et les plus coniques possibles. Cette méthode n'est pas très appropriée pour les deux raisons schématisées sur la figure 5.2 :

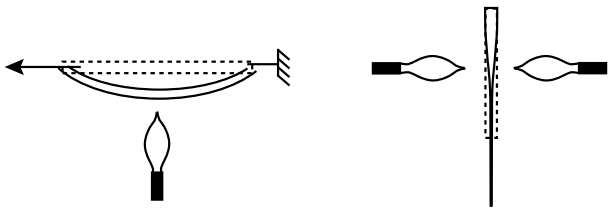


Fig. 5.2: Schémas illustrant deux techniques de fabrication de fibres conique en étirant des capillaires de verre et leurs inconvénients.

- si on tire la fibre horizontalement à la main en la chauffant par dessous, elle peut flamber sous son propre poids. L'objet obtenu ne sera alors pas droit.
- si on utilise la gravité pour étirer la fibre (en la lestant par exemple sur le bas), la forme obtenu ne sera pas conique, et aura plutôt une forme de trompette. Pour obtenir une fibre conique, il convient de l'étirer à vitesse constante plutôt qu'à accélération constante.

Les fibres obtenues ainsi ne sont pas assez régulières pour entreprendre une étude quantitative de la dynamique des gouttes posées sur celles-ci, mais elles permettent d'illustrer très facilement l'effet désiré.

5.2.2 Fibre de cuivre croquée

Expérience

Nous avons donc opté pour une solution chimique, proche de celle utilisée pour réaliser des pointes d'AFM [151, 108, 121, 9]. Une fibre cylindrique de cuivre d'un rayon initial de l'ordre de 200 µm est immergée dans un bain d'acide nitrique concentré (de l'ordre de 60 %). L'acide nitrique oxyde le cuivre métallique (Cu) en cations (Cu^{2+}) et la solution devient bleue. La fibre initialement immergée est progressivement tirée hors du bain à vitesse constante V comme illustré sur la figure 5.3 ; le bas de la fibre passe donc plus de temps dans le bain et est donc plus rongé par l'acide que le haut de celle-ci. Nous notons z l'axe vertical, dont l'origine est prise au bas de la fibre avant que

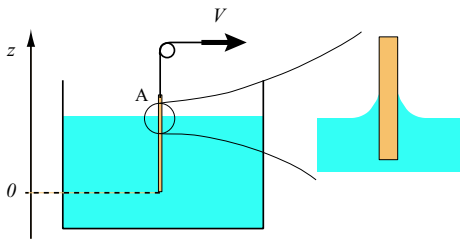


Fig. 5.3: Schéma du montage utilisé pour fabriquer des fibres coniques. Une fibre de cuivre est tirée hors d'un bain d'acide nitrique susceptible de la ronger. Le schéma de droite est un agrandissement de la zone de raccordement entre le bain et la fibre.

celle-ci ne soit tirée hors du bain. Le réservoir est suffisamment grand pour que la concentration globale en acide ne soit pas modifiée lors de l'attaque chimique. Pendant un temps $\mathrm{d}t$, l'acide nitrique attaque la fibre de rayon b sur une profondeur $\mathrm{d}b = b(t + \mathrm{d}t) - b(t) = -u\mathrm{d}t$, en notant u la vitesse d'attaque par l'acide (qui est constante si la concentration en acide est constante). Nous obtenons donc pour les variations de rayon b de la fibre en fonction de la position z :

$$b(z) = \frac{u}{V} z$$

Une fibre ainsi obtenue devrait avoir une forme conique dont la tangente du demi-angle au sommet α est donnée par :

$$\tan \alpha = \frac{u}{V} \tag{5.1}$$

ainsi, pour une composition du bain d'acide donné, il est possible de faire varier l'angle du cône obtenu en modifiant la vitesse de tirage hors du bain. Plus cette vitesse est lente et plus le gradient de rayon est grand. Notons de surcroît que les formes de fibres obtenues en tirant une fois la fibre du bain à la vitesse V ou deux fois à la vitesse $V/2$ doivent être identiques au vu des arguments donnés ci-dessus. Ce n'est pas tout à fait exact : l'attaque de la fibre de cuivre par l'acide peut être hétérogène au niveau du ménisque dynamique (point A sur la figure 5.3) comme mis en évidence par Bico *et al.* [9]. Nous avons donc préféré tirer rapidement nos fibres plusieurs fois du bain, qu'une seule fois, lentement.

Profil des fibres obtenues

Nous avons reporté sur la figure 5.4 le profil d'une fibre conique de 500 µm de rayon initial tirée trois fois à 1.5 mm/s hors d'un bain d'acide (concentré à 60 %). Ce profil a été extrait de photos prises avec un appareil numérique de haute résolution (typiquement 1600 par 1200 pixels) muni d'un objectif macro grossissant. Le gradient de rayon de la fibre de la figure 5.4 est à peu près

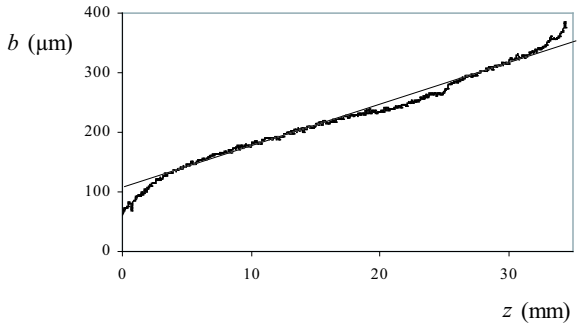


FIG. 5.4: Rayon local de la fibre conique b en fonction de la position z.

constant sauf pour les cinq premiers millimètres. Le rayon local augmente de 150 µm à 350 µm en 3 cm, ce qui donne un gradient moyen de l'ordre de $(7 \pm 1)10^{-3}$. Nous avons vérifié l'axisymétrie des fibres obtenues en prenant des photos sous différents angles de vues. Plus généralement, les gradients moyens de rayons des fibres obtenues par cette méthode sont compris entre 4.10^{-3} et 15.10^{-3}.

Par la suite, nous considérons que ces fibres sont coniques, et que le rayon local $b(z)$ et la position z sont des grandeurs proportionnelles.

5.3 Quelle force motrice ?

Nous avons tout d'abord cherché à caractériser précisément la force motrice s'exerçant sur des gouttes mouillant totalement les fibres de cuivre (obtenues comme décrit en 5.2.2).

5.3.1 Premiers résultats

La force à l'origine du mouvement se mesure très simplement en inclinant la partie pointue vers le bas : la gravité s'oppose au mouvement capillaire et ralentit la goutte. À l'équilibre, la goutte est

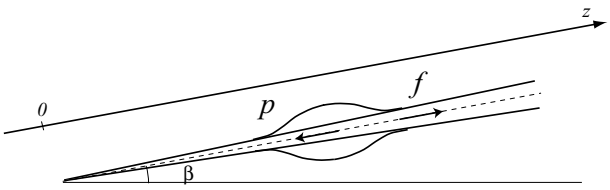


FIG. 5.5: A l'équilibre, la résultante f des forces capillaires et la projection p du poids sur l'axe de la fibre sont égales et opposées.

immobile et les deux forces sont égales. L'expérience est la suivante : nous déposons une goutte sur une fibre conique à une position proche de la pointe et inclinons rapidement la fibre d'un angle β_1. La goutte se déplace vers les grands rayons, ralentit avant de s'immobiliser à une position z_1. Puis, nous diminuons l'angle d'inclinaison de la fibre jusqu'à atteindre un angle β_2 sensiblement inférieur à β_1, la goutte se remet alors en mouvement, toujours vers les grands rayons et s'immobilise en une deuxième position z_2, plus éloignée de la pointe que ne l'est la position z_1. La force capillaire qui fait avancer une goutte sur une fibre dépend certainement de la conicité (le demi-angle au sommet de la fibre), mais aussi de la position z de la goutte. Le liquide est de l'huile silicone (de tension de surface $\gamma = 19.7$ mN/m et de densité 910 kg/m^3), a un volume de 3 mm^3 et la fibre est celle dont les caractéristiques ont été précisées au paragraphe 5.2.2. Remarquons que la fibre est métallique (haute énergie de surface) et est totalement mouillée par l'huile silicone($S > 0$). Nous montrons sur la figure 5.6, le sinus de l'angle d'équilibre $\sin\beta$ en fonction de la position z de la goutte. Il apparaît que l'angle d'équilibre est une fonction décroissante de la position z donc du rayon local b. Plus la goutte est proche de la pointe, et plus la force nécessaire pour équilibrer les forces capillaires doit être grande.

5.3.2 Forme d'une goutte sur une fibre

Observations

Il est possible de calculer, à partir des différentes formules de Carroll [29, 30, 32, 33] détaillées en annexe A, la longueur d'étalement, l'aire de l'interface liquide/air A, le volume Ω et la surpression ΔP à l'intérieur d'une goutte posée sur une fibre cylindrique, en fonction du rayon b de la

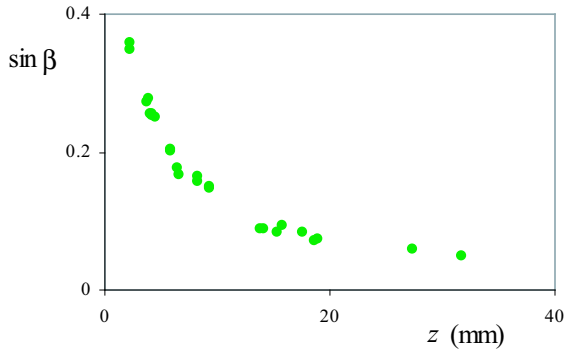


FIG. 5.6: Sinus de l'angle d'inclinaison d'équilibre en fonction de la position z de la goutte sur la fibre.

fibre et de son rayon maximal h (définis sur la figure 5.7). La surpression ΔP s'écrit d'une façon

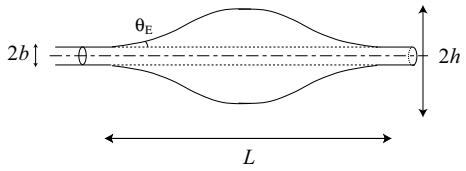


FIG. 5.7: Géométrie d'une goutte axisymétrique déposée sur une fibre cylindrique.

remarquablement simple :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{b+h} \tag{5.2}$$

cette formule est tout à fait cohérente avec la géométrie de la fibre :

- si le volume de la goutte tend vers zéro, alors h tend vers le rayon de la fibre et ΔP vers la surpression à l'intérieur d'un manchon de liquide de rayon b, soit : $\Delta P \to \gamma/b$.
- si le rayon b de la fibre tend au contraire vers zéro ($b \to 0$) pour une goutte de volume Ω donné, alors la surpression à l'intérieur de la goutte tend vers celle à l'intérieure d'une sphère de rayon h, soit : $\Delta P \to 2\gamma/h$.

Nous utiliserons par la suite les expressions analytiques de Carroll pour des gouttes en mouillage total sur des fibres coniques : nous supposerons en effet que le gradient de rayon (inférieur à 1%) ne modifie pas notablement la forme de la goutte. De la formule 5.2, nous obtenons pour des gouttes de volume donnée le gradient de pression capillaire au sein de la goutte :

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_\Omega = -\frac{2\gamma}{(b+h)^2}\left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}\right)_\Omega \tag{5.3}$$

Les Ω en indice dans l'équation ci-dessus signifient que les dérivations ont été menées à volume de goutte constant. C'est particulièrement important pour le deuxième terme de la parenthèse gauche de l'équation 5.3 : h et z (ou h et b) ne sont pas des paramètres indépendants puisqu'ils sont liés

par la conservation du volume Ω. Nous rappelons à l'annexe A que les formules de Carroll sont exprimées en fonction du rayon maximal de la goutte h et de celui de la fibre b. Expérimentalement, les paramètres indépendants sont le volume Ω et le rayon b. Pour aller plus loin, il nous a donc fallu inverser l'équation de Carroll donnant les variations de volume Ω en fonction de h et b, afin d'obtenir une relation donnant h en fonction du volume Ω et du rayon b. Ce calcul a été effectué à l'aide du logiciel de calcul numérique Mathematica. Celui-ci a cherché tous les couples (b, h) qui sont compatibles avec une condition de volume donné. Ceux-ci sont représentés sur la figure 5.8 en échelle logarithmique pour différents volumes. Dans chaque cas, la variation de h en fonction du

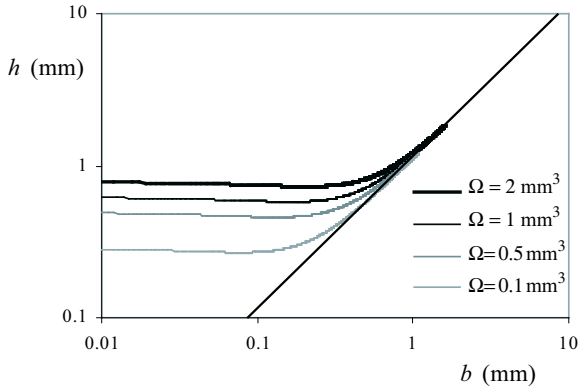


FIG. 5.8: Rayon maximal h de la goutte sur la fibre (calculé) en fonction du rayon b de celle-ci, pour des gouttes de différents volumes

rayon de la fibre se décompose en deux régimes bien distincts.

- Pour de petits rayons de fibre (nous préciserons par la suite ce que nous entendons par petit), le rayon maximal de la goutte h est une fonction constante, indépendante du rayon de la fibre b.
- Pour des fibres plus grosses, le rayon maximal de la goutte sur la fibre h est proportionnel à b. L'équation de la droite asymptote à la courbe (figure 5.8) est très proche de $h = b$. Remarquons également que ce deuxième régime asymptotique ($h \simeq b$) arrive d'autant plus tôt que le volume de la goutte est petit.

En complément, nous portons sur la figure 5.9 le rayon maximal de la goutte sur la fibre, cette fois en fonction du volume de la goutte pour une fibre de rayon constant b=150 µm. Il apparaît ici encore deux régimes (analogues à ceux de la figure 5.8) :

- h est constant à petit volume ;
- h augmente comme $\Omega^{1/3}$ à grand volume (la pente de la droite de la figure 5.9 vaut 0.33). La goutte est alors quasi-sphérique, comme Joanny l'a montré dans sa thèse [80] : les grosses gouttes sur des petites fibres sont presque des sphères, la perturbation introduite par la fibre

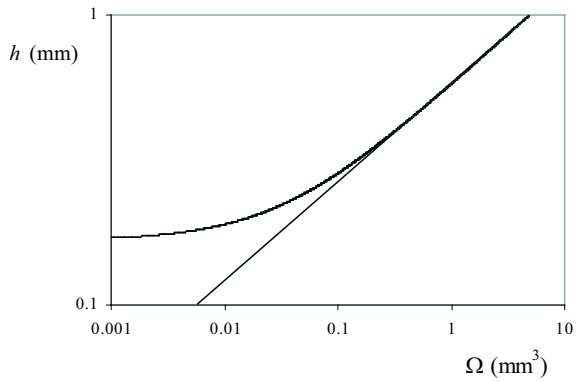


FIG. 5.9: Rayon maximal h (calculé) d'une goutte en fonction de son volume. La fibre fait 150 µm de rayon.

s'étendant sur une taille de l'ordre de son rayon. Ainsi, dans ces conditions, le rayon maximal h des grosses gouttes est-il simplement proportionnel à R_0 (en posant $\Omega = 4/3\pi {R_0}^3$), et donc à $\Omega^{1/3}$.

Conclusion

Les différents résultats asymptotiques des figures 5.8 et 5.9 se résument simplement sur la figure 5.10 : lorsque la taille initiale de la goutte est petite devant le rayon de la fibre ($R_0 < b$), le rayon de la goutte est de l'ordre du rayon de la fibre b ($h \simeq b$). La goutte est alors très étalée et ressemble à un manchon cylindrique. Dans la limite inverse ($R_0 > b$), la goutte est quasi-sphérique et son rayon maximal est beaucoup plus grand que b et proportionnel à R_0, ($h \simeq R_0$).

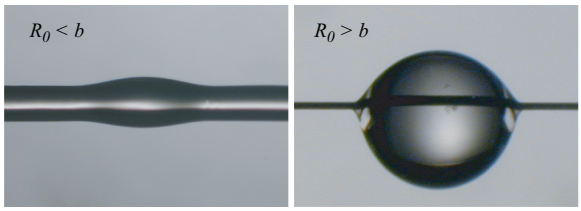


FIG. 5.10: Deux gouttes d'huile silicone dans les limites "petit" et "grand" volume. À gauche, on pose une goutte de rayon $R_0 = 80$ µm sur une fibre $b = 100$µm : la conformation apparaît être très étalée ($h \simeq b$). À droite, on pose une goutte de rayon $R_0 = 200$ µm sur une fibre $b = 12$ µm et la goutte est quasi-sphérique.

5.3.3 Force tirant une goutte sur une fibre conique

Le gradient de pression moteur du mouvement de la goutte sur une fibre conique (équation 5.3) se simplifie dans les deux régimes que nous venons de décrire.

Gouttes en manchon ($R_0 < b$)

Dans cette limite, le rayon maximal de la goutte sur la fibre s'écrit $h = b$, ce qui donne pour le gradient moteur :

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_\Omega = -\frac{\gamma}{b^2}\,\alpha \tag{5.4}$$

Cette formule peut être obtenue plus directement. La surpression capillaire au sein d'un film de rayon b vaut d'après la loi de Laplace : γ/b. Le gradient de pression capillaire dans un film conique sur une taille b s'écrit donc bien : $-\gamma/b^2\alpha$

En équilibrant ce gradient de pression et le gradient de pression dû à la gravité, on obtient l'expression suivante :

$$\sin\beta = \frac{\kappa^{-2}}{b^2}\,\alpha \tag{5.5}$$

L'équation 5.5 est en bon accord avec les données de la figure 5.6 : pour un demi-angle au sommet α donné, le sinus de l'angle d'équilibre est une fonction décroissante du rayon local de la fibre b et donc de la position z. Ainsi, à une position donnée de la goutte sur la fibre, il correspond un angle unique d'équilibre capable de contrecarrer l'intensité des forces capillaires.

Gouttes quasi-sphériques ($R_0 > b$)

Le rayon maximal h est alors proportionnel à R_0, indépendant du rayon local b (et donc de z). Ainsi, il vient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_\Omega = -\frac{2\gamma}{(b+R_0)^2}\,\alpha \tag{5.6}$$

En équilibrant ce gradient de pression capillaire avec le gradient de pression gravitaire $\rho g \sin\beta$, on obtient l'expression suivante, κ^{-1} désignant toujours la longueur capillaire :

$$\sin\beta = \frac{2\kappa^{-2}}{(b+R_0)^2}\,\alpha \tag{5.7}$$

Comparaison avec les données expérimentales

Nous vérifions la validité des expressions 5.5 et 5.7 en reportant sur la figure 5.11 en échelle logarithmique, le sinus de l'angle d'équilibre $\sin\beta$ en fonction du rayon de la fibre b pour deux petites gouttes de volumes différents. Ces données se rassemblent sur la même courbe. Elles sont bien décrites par une loi de puissance d'exposant -2 et de coefficient 7000 ± 1000 µm^2. Ces valeurs sont en bon accord avec l'équation 5.5 qui donne effectivement un exposant de -2 et un coefficient de $14\,000 \pm 2000$ µm^2. L'incertitude sur cette valeur calculée vient principalement de l'incertitude sur α de l'ordre de 15 %.

Nous avons également testé ce modèle pour les grosses gouttes. Le sinus de l'angle d'équilibre $\sin\beta$ est représenté en fonction de la somme du rayon de la fibre b et du rayon R_0 sur la figure 5.12, pour des grosses gouttes de différents volumes, (échelle logarithmique). Rappelons que R_0 est le

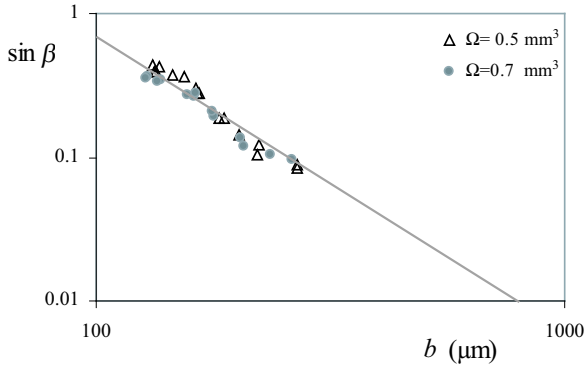


FIG. 5.11: Sinus de l'angle d'équilibre β en fonction du rayon de la fibre b en échelle logarithmique pour des gouttes de petit volume. La droite indique une loi de puissance d'exposant -2 et de coefficient 7000.

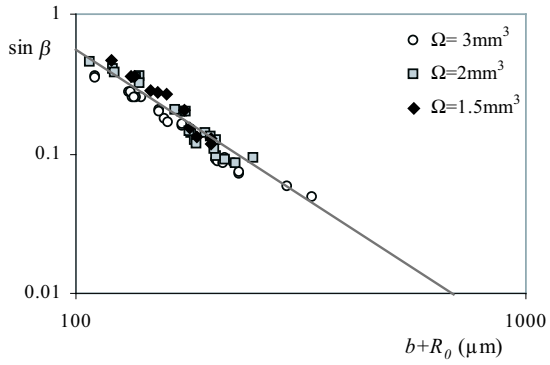


FIG. 5.12: Sinus de l'angle d'équilibre β en fonction de la somme du rayon de la fibre b et du rayon sphérique de la goutte R_0, en échelle logarithmique pour des gouttes de grands volumes.

rayon de la sphère de même volume que la goutte. Là encore, les données se rejoignent sur la même courbe et sont décrites par une loi de puissance d'exposant -2 et de coefficient 5500 ± 1500 µm^2. L'exposant de la loi d'échelle concorde tout à fait avec l'équation 5.7, mais le coefficient déduit de l'interpolation des données est largement sous estimé : nous tirons de l'équation 5.7 un coefficient de $28\ 000 \pm 4000$ µm^2, soit près de quatre fois plus. Plusieurs raisons peuvent expliquer cet écart :

- Tout d'abord, les gouttes correspondant aux données de la figure 5.12 ne sont pas réellement des grosses gouttes au sens du paragraphe 5.3.2 : R_0 est compris entre 700 µm et 900 µm alors que b peut atteindre au moins 150 µm.
- Ensuite, au cours du mouvement le long de la fibre, le rapport R_0/b diminue. Au début de l'avancée, le rayon de la fibre est petit et les gouttes ressemblent à des sphères, mais ce rayon grandissant, elles s'aplatissent en manchon.
- Enfin, la gravité n'est pas forcément négligeable, surtout pour les grosses gouttes pour lesquelles la condition $R_0 < \kappa^{-1}$ n'est pas nécessairement remplie. La goutte n'est alors plus axisymétrique, rendant ainsi caduques les formules de Carroll.

5.4 Dynamique

Nous nous intéressons à présent à la dynamique des gouttes sur les fibres coniques. Des gouttes de volumes variés (entre 0.2 mm^3 et 1 mm^3) de liquides de viscosité comprise entre 5 mPa.s et 100 mPa.s sont placées sur des fibres coniques de rayon moyen 150 µm. La fibre utilisée est celle dont le profil fait l'objet de la figure 5.4. La vitesse d'avancée des gouttes est mesurée et reportée sur la figure 5.13 cette vitesse en fonction de leur position sur la fibre pour plusieurs volumes. Il apparaît

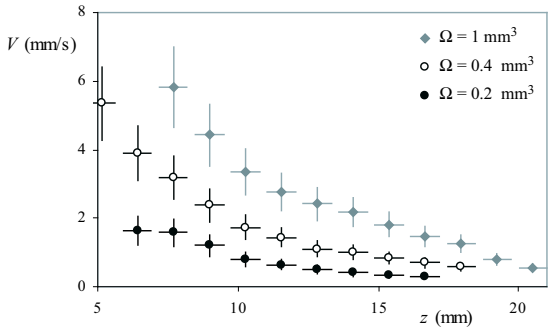


Fig. 5.13: Vitesse V de gouttes de différents volumes reportée en fonction de leur position sur la fibre z. Les gouttes sont toutes d'huile silicone de viscosité η =5 mPa.s

que la vitesse d'avancée est une fonction décroissante de la position : plus la goutte s'éloigne de la pointe, moindre est la vitesse V. En outre, pour une position donnée sur la fibre, la vitesse V est une fonction croissante du volume.

Cette dynamique semble non-triviale et pour l'étudier, il convient tout d'abord d'identifier précisément la résultante des forces de friction qui s'oppose au mouvement. Nous avons choisi d'étudier celle-ci séparément en caractérisant la vitesse de descente de gouttes sur des fibres cylindriques inclinées par rapport à l'horizontale. L'avantage de cette expérience est que la force motrice à l'origine du mouvement est parfaitement identifiée puisque la goutte se met en mouvement sous l'effet de son propre poids. Ces expériences sont proches de celles menées par Podgorski *et al.* sur la vitesse de dévalement d'une goutte sur un plan incliné [118]. Paradoxalement, le dévalement d'une goutte sur une fibre est plus facile à étudier que sur une géométrie plane pourtant plus simple : sur un substrat courbé, les gouttes existent même en mouillage total ($\theta_E = 0$), sans hystérésis qui les bloquerait. On peut ainsi caractériser la vitesse de très petites gouttes, ce qui n'est pas possible sur un plan. La cinétique de ces objets s'obtient simplement en équilibrant la force motrice et la résultante des forces de dissipation visqueuse.

5.4.1 Quelle dissipation ?

Régime visqueux

Nous avons commencé par vérifier que pour les liquides considérés, les forces de friction étaient bien d'origine visqueuse. Une fibre cylindrique de 100 µm de rayon – du même ordre de grandeur que le rayon moyen des fibres coniques utilisées – est inclinée d'un angle $\beta = 7°$ par rapport à l'horizontale. Une goutte placée sur cette fibre la dévalera. Nous mesurons la vitesse de descente V de gouttes de volume $\Omega = 0.6$ mm^3 pour des liquides de différentes viscosités cinématiques η/ρ et reportons ces mesures en échelle logarithmique sur la figure 5.14. Les points s'alignent sur

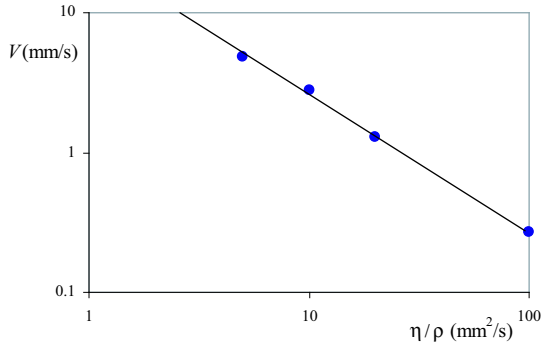


FIG. 5.14: Vitesse V de gouttes isovolumes ($\Omega = 0.6$mm^3) d'huile silicone de différentes viscosités reportée en échelle logarithmique en fonction de la viscosité cinématique η/ρ des liquides utilisés.

une droite de pente -1, signature d'un processus de dissipation visqueuse. Ceci peut également être vérifié en évaluant le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement. Pour des huiles de viscosité cinématique η/ρ entre 5 et 100 mm^2/s, ce nombre de Reynolds calculé en prenant R_0 (le

rayon d'une sphère de volume Ω) comme longueur caractéristique (de l'ordre de 1 mm) est compris entre 0.8 et 2 10^{-3}, inférieur à l'unité.

Dissipation visqueuse dans un coin

Dans un certain nombre d'expériences faisant intervenir l'avancée d'un liquide à vitesse V sur un substrat solide, l'énergie est majoritairement dissipée dans le coin liquide microscopique au niveau de la ligne triple [65, 67, 77]. Le profil de vitesse dans la couche fluide (schématisé sur la figure

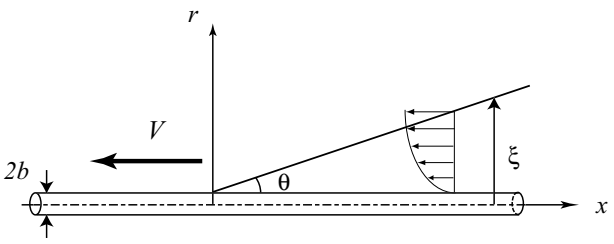


FIG. 5.15: Avancée d'un coin de liquide à vitesse V sur une surface solide.

5.15) est parabolique compte tenu des différentes conditions aux limites (vitesse tangentielle nulle en $r = b$ et contrainte nulle à l'interface liquide/air). Il s'écrit :

$$v(x) = -\frac{3}{2}\frac{V}{(\xi - b)^2}\left[\left(r^2 - b^2\right) - 2\xi\,(r - b)\right]$$

L'intégration de la contrainte visqueuse sur la fibre ($r = b$) donne la résultante des forces de friction visqueuse f_v par unité de ligne :

$$f_v = \int \sigma_{xr}|_{r=b}\mathrm{d}x = \eta \int \frac{3V}{\xi - b}\,\mathrm{d}x$$

Or x et $\xi - b$ sont reliés par l'angle θ, selon :

$$\xi - b = \theta x$$

L'intégrale divergeant à ses deux bornes, de Gennes a proposé d'introduire deux longueurs de coupure d'une part à grande échelle x_M (de l'ordre de la taille de la goutte, soit 1 cm) et d'autre part à petite échelle x_m (de l'ordre de l'épaisseur du film de prémouillage sur la fibre $b \sim 100$ Å) [67]. D'où :

$$f_v = \frac{3\eta V}{\theta}\ln\frac{x_M}{x_m} \tag{5.8}$$

Nous notons l le facteur logarithmique $l = \ln x_M/x_m$. L'équilibre entre cette force f_v par unité de ligne et la force motrice F donne :

$$2\pi b\frac{3\eta V}{\theta}\ln\frac{x_M}{x_m} = F \tag{5.9}$$

Pour finir, la puissance dissipée par les forces de friction visqueuse peut être déduite de 5.8 :

$$P = 2\pi b\frac{3\eta V^2}{\theta}\ \ln\frac{x_M}{x_m} \tag{5.10}$$

Celle-ci est inversement proportionnelle à l'angle du coin liquide : plus le milieu est confiné, plus cette dissipation est importante. Il nous reste alors à évaluer l'angle θ sur lequel se fait cette dissipation.

Dans quel coin : microscopique ?

Commençons par envisager une dissipation localisée dans le coin microscopique de liquide. La mise en mouvement d'une goutte modifie la valeur de l'angle de contact de mouillage : l'angle θ_E n'est plus donné par la relation de Young-Dupré statique. On parle alors d'angle dynamique (noté θ_d). Si la goutte avance (*cf.* figure 5.15), la condition de vitesse nulle à la paroi va avoir tendance à raidir l'interface et donc à augmenter l'angle de contact (appelé alors angle d'avancée), le liquide éloigné du solide avançant plus vite que celui au contact de la surface. Si la goutte recule, l'angle dynamique (appelé alors angle de reculée) diminuera au contraire. La mesure de l'angle de mouillage donne accès à la force motrice par unité de longueur f_l (notons que $F = 2\pi b f_l$) en utilisant la relation de Young-Dupré non compensée en mouillage total :

$$f_l = \gamma(1 - \cos\theta_d)$$

Dans la limite des petits angles dynamiques, l'expression ci-dessus se simplifie :

$$f_l = \gamma \frac{{\theta_d}^2}{2}$$

En équilibrant l'équation ci-dessus avec l'équation 5.8, on obtient la loi de Tanner [65, 77, 152] :

$$\theta_d = \left(6l\ \frac{\eta V}{\gamma}\right)^{1/3}$$

En réinjectant l'angle d'avancée obtenu ci-dessus dans l'équation 5.9, on obtient une relation entre la force motrice F et la vitesse d'avancée dans le cas où la dissipation est locale :

$$V = \frac{1}{6l\pi^{3/2}}\ \frac{\gamma}{\eta}\ \left(\frac{F}{\gamma b}\right)^{3/2} \tag{5.11}$$

Ou macroscopique ?

Mais une goutte qui avance sur une fibre peut-être vue globalement comme un coin macroscopique d'angle θ_g auquel on peut associer une dissipation spécifique. L'angle du coin de liquide peut être évalué géométriquement en supposant que le mouvement de la goutte ne modifie pas trop sa forme :

$$\theta_g \approx \frac{h-b}{L}$$

En réinjectant l'expression ci-dessus de θ dans l'équation 5.10, on obtient une deuxième relation entre la force motrice et la vitesse (les différentes longueurs sont définies sur la figure 5.7) :

$$V = \frac{1}{6\pi l}\left(\frac{h-b}{L}\right)\frac{F}{\eta b} \tag{5.12}$$

Dans ce régime de dissipation globale, la vitesse d'avancée de la goutte sur la fibre reste proportionnelle à l'inverse de la viscosité, comme pour une dissipation plus locale (éq. 5.11), en accord avec les résultats de la figure 5.14, mais varie linéairement avec la force motrice F, au lieu d'augmenter comme $F^{3/2}$.

Cut-off

Nous pouvons, pour finir, comparer les intensités respectives des puissances dissipées dans le coin microscopique et dans le volume de la goutte. Ces puissances dissipées (inversement proportionnelles à l'angle θ, *cf.* équation 5.10) sont du même ordre de grandeur lorsque les angles θ_d calculé à partir de la loi de Tanner et θ_g géométrique sont égaux, soit :

$$\frac{h-b}{L} \sim \left(6l\,\frac{\eta V}{\gamma}\right)^{1/3}$$

Cette expression dépend de la vitesse et peut se réécrire en introduisant une vitesse critique V_c telle que :

$$V_c = \frac{1}{6l}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{h-b}{L}\right)^3 \tag{5.13}$$

- Si $V > V_c$, l'angle dynamique est supérieur à l'angle géométrique et la dissipation se fait majoritairement en volume.
- Si $V < V_c$, l'angle dynamique est inférieur à l'angle géométrique et la dissipation se fait principalement dans le coin liquide microscopique.

Évaluons cette vitesse critique V_c. Les variations de l'angle géométrique $\theta_g \sim (h-b)/L$, calculées à partir des formules de Carroll sont reportées en fonction du volume de la goutte sur la figure 5.16 pour différents rayons de fibres. Il apparaît que θ_g est une fonction faiblement croissante du volume.

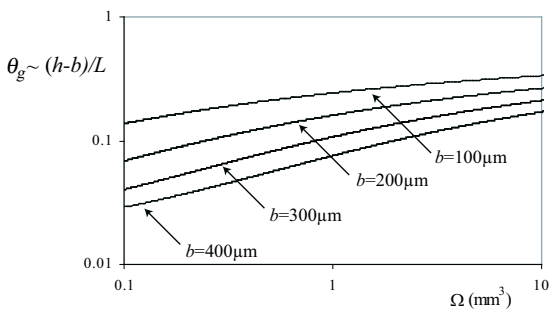


FIG. 5.16: Angle géométrique de la goutte $\theta_g \sim (h-b)/L$ calculé à partir des formules de Carroll pour des fibres de différents rayons.

En outre, pour des gouttes de volume fixé, cette grandeur est une fonction décroissante du rayon de la fibre. Ces données sont aisément interprétables en reprenant les résultats du paragraphe 5.3.2 : si le volume augmente à rayon de fibre donné, le rapport R_0/b augmente, la goutte se rapproche d'une

forme sphérique et l'angle θ_g augmente (jusqu'à saturer à la valeur 0.5, non atteinte sur le graphique 5.16). À l'inverse, si le volume est fixé et que le rayon de la fibre augmente, le rapport R_0/b diminue et la goutte évolue vers un manchon : l'angle θ_g diminue. En prenant 0.1 comme valeur de l'angle géométrique, il vient :

$$V_c \simeq \frac{\gamma}{\eta\, l}\ 1.7\ 10^{-4}$$

La valeur du coefficient l a été déterminée par Hoffman [77] qui a mesuré les variations de l'angle de contact dynamique d'un index de liquide poussé par un piston dans un tube capillaire sec en fonction du nombre capillaire. Il trouve une valeur de l'ordre de 15 pour le facteur logarithmique. La différence d'échelle entre x_M et x_m serait donc de l'ordre de $\exp(-15) \simeq 3\ 10^{-7}$. Si x_M est de l'ordre du centimètre (ce qui correspond à la taille de la goutte), x_m sera de l'ordre de 30 Å– une taille moléculaire.

En prenant la même valeur pour notre expérience, on trouve que la vitesse seuil V_c définie à l'équation 5.13 est de l'ordre de :

$$V_c \simeq 1\ 10^{-5} \frac{\gamma}{\eta} \tag{5.14}$$

Les huiles silicones utilisées, de tension de surface constante égale à 20 mN/m, ont des viscosités supérieures à 5 mPa.s (pour rester dans le régime visqueux). Ainsi le rapport γ/η est inférieur à 5 et

$$V_c \lesssim 0.05 \text{ mm/s} \tag{5.15}$$

Cette valeur est largement inférieure aux ordres de grandeur de vitesse de nos expériences qui sont plutôt de l'ordre du mm/s. La dissipation d'énergie se fait donc principalement dans le volume de la goutte. Par la suite, nous négligerons la dissipation dans le coin microscopique.

Pour conclure, retenons que la dissipation en volume est favorisée si :

- la vitesse de dévalement est importante et supérieure à la vitesse définie équation 5.13 ;
- le rayon de la fibre est grand, ce qui diminue l'angle géométrique ;
- le volume de la goutte est petit, ce qui diminue également l'angle géométrique ;
- le fluide est visqueux ;
- le facteur correctif $l = \ln(x_M/x_m)$ est grand, soit si le contraste de taille entre les deux échelles x_M et x_m est maximum. Nous verrons au paragraphe suivant que la longueur de coupure microscopique varie avec l'état de mouillage de la fibre : en la recouvrant d'un film de prémouillage, la valeur de l est sensiblement diminuée.

5.4.2 Dynamique d'une goutte sur une fibre cylindrique inclinée

Premiers résultats

Posons une goutte mouillante sur une fibre : le liquide rejoint la fibre avec un angle de contact nul. Il n'y a pas d'hystérésis et dès que la fibre est légèrement inclinée d'un angle β, la goutte se met en mouvement. La force motrice s'écrit : $F = \rho g \sin\beta$. L'équation 5.11 prédit donc une variation de la vitesse de dévalement avec le sinus de l'angle d'inclinaison à la puissance 3/2 alors que la relation 5.12 prédit une relation linéaire entre les deux grandeurs. Nous avons mesuré la vitesse de dévalement de gouttes ($\Omega = 0.5$ mm^3) d'huile silicone ($\eta = 20$ mPa.s) sur une fibre cylindrique de 110 µm en fonction de l'angle d'inclinaison du solide (que nous avons fait varier de 0 à 35°). Deux séries de résultats sont représentées sur la figure 5.17 en échelle logarithmique : les triangles noirs (▲) correspondent à des gouttes dévalant le long d'une fibre sèche alors que les cercles (○) à des gouttes dévalant le long d'une fibre mouillée par le passage préalable de plusieurs gouttes de même volume. L'épaisseur du film de liquide laissé par ces gouttes (que nous discuterons plus en détail au paragraphe 5.5) est de l'ordre de 2.0 ± 0.5 µm. Les deux séries de données sont convenablement

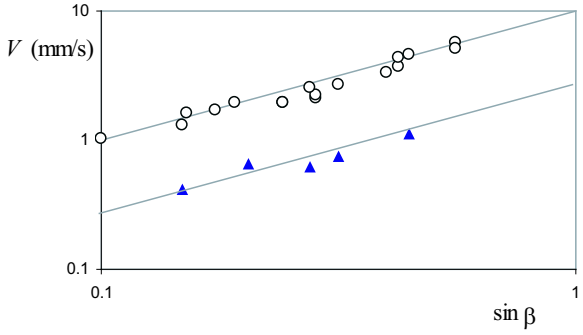


FIG. 5.17: Vitesse de dévalement d'une goutte le long d'une fibre de 110 µm de rayon inclinée d'un angle β, en fonction du sinus de cet angle. Les triangles noirs (▲) correspondent à des descentes le long d'une fibre sèche. Les cercles blancs (○) correspondent à des descentes le long d'une fibre prémouillée par le passage préalable d'une goutte de même volume. Les gouttes de 0.5 mm^3 sont d'huile silicone η=20mPa.s.

décrites par des lois d'échelles de pente 1. La vitesse est donc proportionnelle à la force motrice comme prédit par l'équation 5.12. Même pour des gouttes évoluant le long de fibres sèches, la dissipation visqueuse se fait bien majoritairement dans tout le volume de la goutte plutôt qu'au voisinage de la ligne de contact (éq. 5.11).

Si la loi d'échelle n'est pas modifiée par la présence du film sur la fibre, le facteur de proportionnalité l'est sévèrement : il passe de 2.3 pour les fibres sèches à 9 pour les fibres mouillées – augmentant donc d'un facteur proche de 4. La longueur de coupure aux petites échelles du facteur logarithmique de l'équation 5.12 passe probablement de l'épaisseur du film de prémouillage

($x_m \sim 10^{-10}$ m) à celle du film (soit $x_m \sim 10^{-6}$ m) ce qui donne en logarithme une variation de l'ordre de 4. Ainsi, ces expériences montrent qu'il est possible d'avoir accès à la longueur de coupure microscopique de la dissipation visqueuse en caractérisant la dynamique de gouttes sur des fibres inclinées. Il serait intéressant de mesurer ces variations de vitesse en contrôlant précisément l'épaisseur du film de mouillage.

Influence du volume de la goutte

Le volume de la goutte Ω dévalant sur la fibre joue sur la valeur de la vitesse. Nous avons évalué cette dépendance pour un angle d'inclinaison β donné de 7°. Les gouttes d'huile silicone de viscosité comprise entre 5 mPa.s et 100 mPa.s ont des volumes compris entre 0.2 et 1 mm^3. Nous reportons sur la figure 5.18 le rapport $\eta V/(\rho g \sin\alpha)$ en fonction du volume de la goutte Ω, comme nous y incite l'équation 5.12. Les données correspondant à différentes viscosités se retrouvent sur la

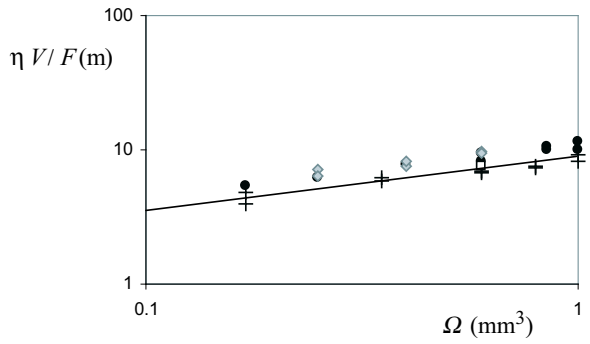


FIG. 5.18: Vitesse de gouttes de différents volumes et viscosités dévalant d'une fibre inclinée de 7°.

même courbe. Celles-ci peuvent être décrites par une loi de puissance d'exposant 0.34 ± 0.05. Cet exposant correspond à la variation de l'angle de contact géométrique avec le volume de la goutte $\theta_g \sim (h-b)/L$ reportée sur la figure 5.16 : pour une fibre de 110 µm de rayon et des volumes Ω compris entre 0.1 et 1 mm^3 les variations de ce rapport $(h-b)/L$ sont correctement décrites par une loi de puissance d'exposant de l'ordre de 0.35 ± 0.1.

Ces résultats confirment que la dissipation, pour cette gamme de vitesse, de volume et de taille de fibre se fait en volume : si ce n'était pas le cas, l'exposant attendu serait plutôt de l'ordre de 0.5 d'après l'équation 5.11 (la force motrice F étant proportionnelle au volume de la goutte).

5.4.3 Vitesse d'avancée d'une goutte le long d'une fibre conique

Nous pouvons à présent discuter la dynamique d'une goutte posée sur une fibre conique, en utilisant les résultats de la section 5.3 ; les volumes de goutte utilisés étant inférieurs à 1 mm^3, le

gradient de force capillaire est donc donné par l'équation 5.4 – d'où l'expression de la force motrice :

$$F = \frac{\gamma}{r^2}\Omega\alpha$$

En outre, la nature des liquides utilisés, les vitesses et volumes des gouttes nous assurent que la dissipation se fait ici encore largement en volume. Nous utiliserons donc également les résultats de l'équation 5.12 présentés dans la section 5.4. La vitesse d'avancée d'une goutte sur une fibre conique s'écrit ainsi :

$$V \sim \frac{\gamma}{\eta\, l}\left(\frac{h-b}{L}\right)\left(\frac{\Omega}{r^3}\right)\alpha \tag{5.16}$$

Nous allons vérifier la validité de cette équation en testant les dépendances en volume Ω et rayon de la fibre b de la vitesse V. La principale difficulté liée à cette comparaison vient de ce que l'angle géométrique $(h-b)/L$ dépend à la fois du rayon de la fibre et du volume de la goutte (*cf.* figure 5.16).

Influence du volume

Nous reportons sur la figure 5.19, en échelle logarithmique, la vitesse de gouttes de volumes variés mesurée à la même position z (donc pour un même rayon local de la fibre). Les différentes séries correspondent à des mesures réalisées à différentes positions équivalentes à des rayons de fibre compris entre 150 et 250 µm. Dans tous les cas, les données sont correctement décrites par une loi

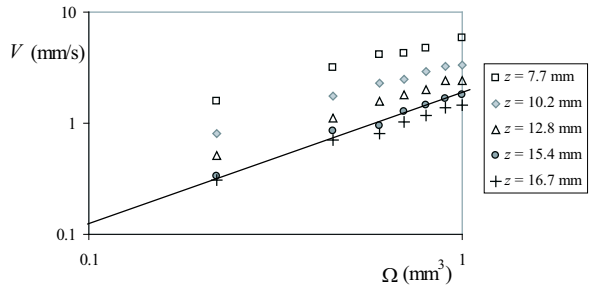


FIG. 5.19: Vitesse de gouttes avançant sur une fibre conique de demi-angle au sommet $\alpha = 7\ 10^{-3}$ en fonction du volume de la goutte. Les mesures ont été réalisées à différentes positions z des gouttes sur la fibre.

de puissance d'exposant 1.2 (qui correspond à la pente de la droite du tracé de la figure 5.19). Cet exposant, qui décrit la dépendance en volume, regroupe à la fois la dépendance en Ω de la force motrice et celle de l'angle géométrique $(h-b)/L$ de l'équation 5.16. Ce paramètre géométrique reporté sur la figure 5.16 en fonction du volume de la goutte est en effet une fonction légèrement croissante. Ce premier test semble donc être en bon accord avec les prédictions de l'équation 5.19.

Influence du rayon

La dépendance la plus forte de l'équation 5.16 est celle en rayon : celui-ci apparaît à la puissance -3, mais également dans l'expression de l'angle géométrique $\theta_g \sim (h-b)/L$. Nous avons indiqué sur la figure 5.20 les variations de cet angle géométrique en fonction du rayon de la fibre, à volume Ω constant. l'angle θ_g décroît avec le rayon de la fibre ce qui s'explique facilement en repassant aux

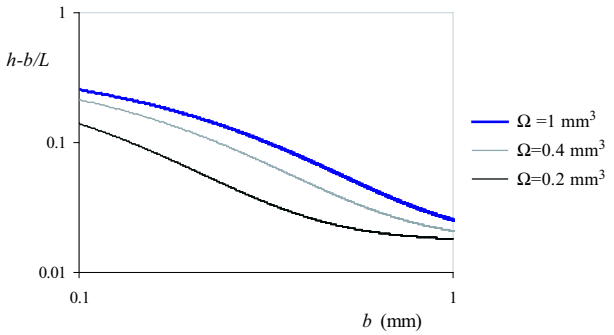


FIG. 5.20: Variation de l'angle géométrique $(h-b)/L$ (calculée) en fonction du rayon de la fibre b pour des gouttes de différents volumes.

deux formes asymptotiques d'une goutte sur une fibre : pour les petits rayons b, la goutte ressemble à une sphère et $\theta_g \to 0.5$ et pour les gros rayons, la goutte prend une forme de manchon et $\theta_g \to 0$. La décroissance est relativement forte (de l'ordre d'une puissance -1).

Pour tester la dépendance en rayon de l'équation 5.16, nous avons tracé la vitesse d'avancée de la goutte sur la fibre en fonction du produit $(h-b)/Lb^3$ calculé à volume constant sur la figure 5.21. Les trois séries de données correspondent à trois gouttes de différents volumes. Il apparaît que la vitesse

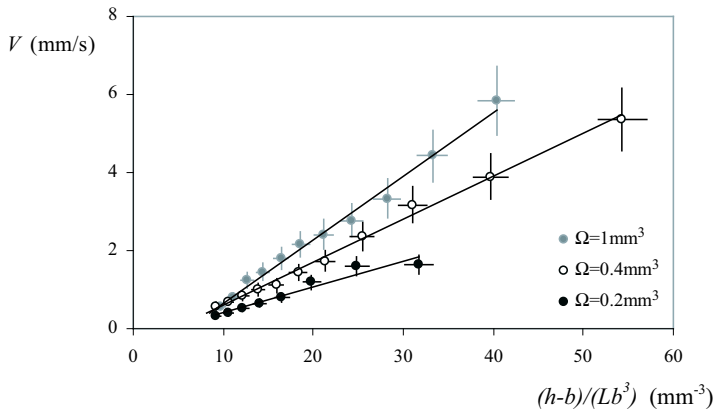


FIG. 5.21: Vitesse de la goutte en mm/s en fonction de la dépendance en rayon de l'équation 5.16, pour trois différents volumes.

d'avancée de la goutte est bien proportionnelle au produit $(h-b)/Lb^3$, comme prédit par l'équation

5.16. Nous avons également vérifié que les pentes de ces droites étaient bien proportionnelles au volume de la goutte en accord avec l'équation 5.16 et avec les résultats du paragraphe précédent.

Le dévalement d'une goutte sur une fibre (sous l'influence de son propre poids ou de la force capillaire) fait donc intervenir un processus de dissipation original puisque l'énergie est dépensée dans le volume de la goutte plutôt qu'au voisinage de la ligne de contact, cette source classique de dissipation apparaissant négligeable dans ce système. Sur une fibre conique, la forte sensibilité de la vitesse au rayon local de la fibre (en gros b^{-4}) explique le net ralentissement des gouttes au cours de leur progression. Elle montre aussi que le rayon est un paramètre de contrôle extrèmement efficace pour piloter cette vitesse.

5.5 Fibres coniques mouillées

Dans beaucoup de systèmes, lorsque du liquide rencontre un solide, il se dépose sur ce dernier sous la forme d'un film. C'est par exemple le cas, lorsqu'une fibre est verticalement tirée d'un bain [125], lorsqu'une goutte avance sur un substrat (et laisse derrière elle une traînée) ou lorsque de la vapeur se condense sur un solide. Nous décrivons dans ce paragraphe ce qu'il advient d'un film déposé sur un fibre conique. Ces résultats ont été obtenus avec l'aide d'Étienne Reyssat. Nous tirons la fibre conique hors d'un bain de liquide à vitesse constante notée V_o. L'épaisseur du film t laissée sur une fibre cylindrique est donnée par la relation [125] :

$$t \simeq 1.34b \left(\frac{\eta V_o}{\gamma}\right)^{2/3} \tag{5.17}$$

Sur une fibre conique, b n'étant pas constant, l'épaisseur du film t n'est pas homogène et augmente avec le rayon de la fibre (accentuant ainsi la conicité de la fibre).

5.5.1 Film épais

Nous partons de la fibre conique dont le profil est montré sur la figure 5.4 (son rayon varie donc typiquement de 100 à 300 µm), et la tirons à une vitesse de 1.5 cm/s d'un bain d'huile silicone ($\eta =$ 19 mPa.s et $\gamma = 20$ mN/m). L'épaisseur du film laissé sur la fibre varie donc entre 8 et 25 µm d'après l'équation 5.17. La figure 5.22 montre l'évolution de ce film. Comme attendu, le liquide se déplace vers les régions de plus petite courbure, mais ce mouvement est couplé à l'instabilité de Rayleigh-Plateau du film [128] : afin de diminuer son énergie interfaciale liquide/vapeur, le film se transforme spontanément en un chapelet de gouttelettes. Pour des épaisseurs de film très inférieures au rayon de la fibre ($t \ll b$), la longueur d'onde de l'instabilité est proportionnelle au rayon b. Ainsi la vitesse caractéristique d'apparition des gouttes s'écrit comme b/τ, en notant τ le temps caractéristique pour qu'une goutte apparaisse. Ce temps peut être évalué en équilibrant les forces de friction de

FIG. 5.22: Série de photos illustrant la déstabilisation et l'évolution d'un film non homogène déposé sur une fibre conique. L'intervalle entre les photos est de 5 s. L'épaisseur initiale du film d'huile silicone (η =20 mPa.s, γ = 21 mN/m) est comprise entre 8 et 25 µm.

l'ordre de $\eta b/\tau t^2$ et les forces capillaires en $\gamma t/b^3$ [35, 53]. Il est donc de l'ordre de :

$$\tau \sim \frac{\eta b^4}{\gamma t^3} \tag{5.18}$$

où t est donné par l'équation 5.17. Ce temps augmente donc avec le rayon de la fibre. C'est effectivement ce qu'on observe sur les photos de la figure 5.22 : les gouttes apparaissent d'abord du côté gauche, soit vers les plus petits rayons (première et deuxième photos). Toutes ces gouttes vont avancer le long de la fibre, mais la première goutte formée (située le plus près de la pointe) démarre avant les autres. En outre, elle est plus rapide que ses congénères (puisque situé le plus en amont, *cf.* équation 5.16) ; elle avance donc sur la fibre en les rattrapant et en les avalant une à une. Elle s'en trouve grossie ce qui tend à augmenter sa vitesse (toujours en vertu de l'équation 5.16). Ceci compense presque exactement sa décélération due à l'augmentation du rayon de la fibre : elle semble se mouvoir sur les photos de la figure 5.22 à vitesse presque constante.

Cette séquence de photos illustre finalement l'efficacité du séchage d'une surface conique mouillée : après un moment, presque tout le liquide a été transféré vers les régions les plus épaisses de la fibre.

5.5.2 Film mince

Si le film déposé sur la fibre est plus mince, le scénario sera légèrement différent. Nous reportons l'évolution d'un film de la même huile déposé en tirant la fibre d'un bain à une vitesse sensiblement inférieure : V_o est ici dix fois plus faible et l'épaisseur du film (4.5 fois plus petite) comprise entre 2

et 6 µm. La transformation du film en gouttelettes sous l'effet de l'instabilité de Rayleigh-Plateau

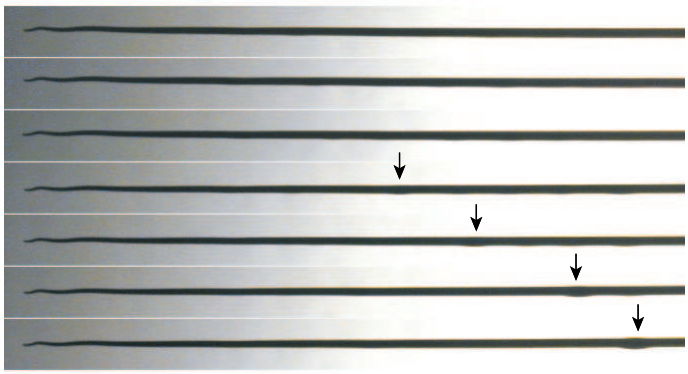


FIG. 5.23: Série de photos illustrant l'évolution d'un film mince déposé sur une fibre conique. L'intervalle entre les photos est de 120 s. L'épaisseur initiale du film est comprise entre 2 et 6 µm ($\eta = 20$ mPa.s, $\gamma = 20$mN/m). Les flèches indiquent la position d'une goutte se déplaçant le long de la fibre.

n'est plus visible. Le liquide se meut toujours vers les grands rayons, mais ici une seule goutte (dont le volume croît au cours du mouvement) est visible. La vitesse typique de l'écoulement V est obtenue en équilibrant le gradient de pression capillaire (*cf.* équation 5.4) avec la densité volumique de forces visqueuses de l'ordre de $\eta V/t^2$, d'où l'on tire :

$$V \sim \frac{\gamma}{\eta}\,\frac{t^2}{r^2}\,\alpha \tag{5.19}$$

Cette équation est identique à l'équation 5.16 en remarquant que $h - b$ et t sont une seule et même quantité et que le volume de la goutte Ω, qui a ici une forme de manchon s'écrit : $\Omega \sim tLb$. Le temps caractéristique τ^* nécessaire pour déplacer du liquide sur une distance b s'écrit :

$$\tau^* \sim \frac{\eta b^3}{\gamma \alpha t^2} \tag{5.20}$$

Ce temps caractéristique τ^* (*cf.* équation 5.20) de transport de liquide est plus petit que le temps caractéristique d'apparition des gouttes par l'instabilité de Rayleigh τ (*cf.* équation 5.18) dès que : $t < \alpha b$ – soit pour des films assez minces. Dans nos expériences, l'épaisseur du film déposé est proportionnelle au rayon de la fibre b et augmente avec la vitesse de tirage. La condition énoncée ci-dessus correspond donc à des tirages à faible vitesse V_o (en utilisant l'équation 5.17) :

$$V_o < \frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{\alpha}{1.34}\right)^{3/2}$$

Cette vitesse est de l'ordre du mm/s, et on comprend bien ainsi qu'à la vitesse de dépôt correspondant à cette expérience, l'instabilité de Rayleigh puisse être inhibée par le déplacement du fluide. Ce déplacement induit toutefois la formation d'une goutte unique, dont le grossissement témoigne du séchage progressif de la fibre.

5.5.3 Séchage

Remarquons pour finir que l'efficacité du séchage de la fibre peut être évaluée en comparant l'épaisseur t du film initialement déposé et celle t' du film laissé par la goutte. On peut d'abord calculer t' en mesurant le volume de la goutte qui avance (qui peut être déterminé grâce aux formules de Carroll) . Cette méthode n'est pas très heureuse car elle fait intervenir la différence de deux termes du même ordre de grandeur (le volume de liquide du film et le volume de la goutte à la fin du séchage). On peut aussi évaluer t' grâce à l'équation 5.17, et nous avons représenté sur la figure 5.24 l'efficacité du séchage, c'est-à-dire le rapport entre l'épaisseur du film restant et celle du film initial en fonction du numéro de la photo pour les deux vitesses de tirage ($V_o = 15$ cm/s et $V_o = 0.15$ cm/s). L'abscisse choisie est proportionnelle au temps et nous permet de comparer les deux expériences (l'intervalle de temps entre les photos des deux séries est très différent). Les

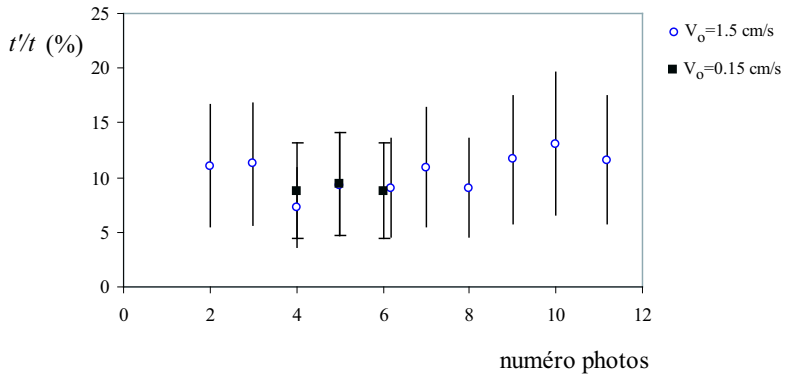


FIG. 5.24: Rapport de l'épaisseur du film laissé par la goutte collectrice et de celle du film initialement déposé.

efficacités de séchage sont de l'ordre de 90%, et varient peu au cours du temps, ce qui était prévisible puisque les gouttes avancent le long de la fibre à vitesse constante. En outre, elles sont du même ordre de grandeur dans les deux cas, ce qui est plus étonnant. Lorsque le film de liquide est très mince, il y a peu de matière à récupérer, mais cette récupération étant lente, la quantité de liquide restant derrière la goutte est très faible. Pour augmenter l'efficacité du séchage, il convient de ralentir la vitesse de la goutte collectrice, ce qui peut être fait simplement en inclinant la fibre afin d'utiliser la gravité comme frein.

5.6 Interprétation énergétique - Étalement en mouillage total

5.6.1 Substrat plan

Commençons par considérer une goutte s'étalant sur un substrat plan qu'elle mouille totalement. Tanner [152] ainsi que Lellah et Marmur [92] ont suivi expérimentalement (mais par des méthodes différentes) l'évolution de l'angle de contact θ_d d'une goutte s'étalant sur une surface en fonction du

temps t. Cet angle diminue avec le temps totalement indépendamment de la valeur du paramètre d'étalement (dès que celui-ci est positif). Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la goutte ne s'étale pas pour diminuer l'énergie de surface solide/vapeur du substrat : il existe à l'avant de la goutte un film microscopique précurseur. Ce film observé par Hardy [75] a déjà totalement recouvert le solide lorsque la goutte arrive [65]. Celle-ci s'étale donc plutôt pour minimiser son énergie de surface liquide/vapeur. Ceci peut sembler paradoxal : une crêpe très fine ne semble pas être la forme qui minimise la surface air/liquide d'un volume donné, sauf si l'on n'oublie pas le film précurseur. Puisque le liquide a déjà envahi tout le solide, autant augmenter l'épaisseur de ce film plutôt que faire des vagues (au sens propre). Remarquons que si la surface est infinie ce film ne s'étale pas jusqu'à atteindre une épaisseur moléculaire : les forces à longue portée (type Van der Waals) s'opposent à cet amincissement. L'épaisseur du film ultra-fin obtenu est fixée par l'équilibre entre ces forces et le paramètre d'étalement [65].

5.6.2 Fibre conique

Le même mécanisme permet de comprendre le mouvement spontané d'une goutte déposée sur une fibre conique. La fibre en métal est une surface de haute énergie, le paramètre d'étalement est positif (et supérieur à une valeur critique S_c, elle-même supérieure à zéro dont la valeur a été déterminée par Brochard-Wyard [19]). Dans ces conditions, un film précurseur se développe si l'on dépose une goutte. Il est donc favorable pour nos gouttes d'avancer vers les plus grands rayons : ceci leur permet de diminuer l'épaisseur e du film qui gaine la fibre (puisqu'aux grands rayons il y a plus de surface à couvrir), ce qui minimise l'énergie de surface liquide/vapeur (proportionnelle à $2\pi(b+e)$). Le moteur du mouvement est donc la tension interfaciale liquide/air. Cet argument est illustré sur la figure 5.25. Notons toutefois que les choses ne sont pas tout à fait aussi simples. Le film

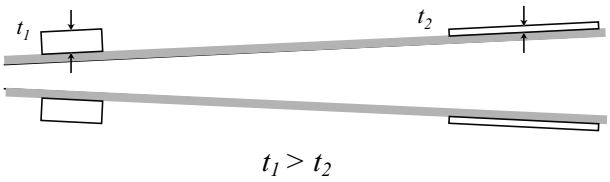


Fig. 5.25: Schéma illustrant l'élargissement d'un film déposé sur la fibre selon la position à laquelle la goutte s'étale.

précurseur très mince perd le sentiment de la courbure de la surface sur laquelle il repose, ainsi son épaisseur, donnée par un équilibre entre les forces à longue portée et le paramètre d'étalement, est constante et indépendante du rayon de la fibre [81]. Il est si fin (de l'ordre de la dizaine d'Angströms) que si l'on pose une grosse goutte sur une fibre de taille finie, le volume du film restera négligeable devant le volume de la goutte. Celle-ci coexistera avec le film microscopique [122] (une situation très différente de celle en géométrie plane) et à l'équilibre, les pressions dans le film et dans le réservoir seront égales. Sur une fibre conique, cet équilibre de pression ne pourra se faire : les courbures des

films en amont et en aval sont différentes. Plus le rayon de la fibre est petit et plus la pression dans le film est forte. La goutte sera donc propulsée vers les grands rayons, attirée par la faible valeur de la pression du film en ce point et poussée par la forte pression du film amont. De ce point de vue, une goutte sur une fibre conique, donc une goutte encadrée par deux films à des pressions différentes, est une situation très similaire à celle décrite par di Meglio pour mettre en évidence l'existence de ces films. Il a posé sur une fibre *cylindrique* deux gouttes de tailles différentes. Les gouttes mouillent la surface ($S > S_c$) et sont donc connectées par un film de mouillage. Ces gouttes ont des volumes différents et donc des pressions différentes, ce qui induit un écoulement de liquide des hautes pressions vers les basses pressions [105].

5.6.3 Substrat quelconque

Une goutte posée sur une surface courbe quelconque qu'elle mouille totalement doit également avoir la propriété de se mettre en mouvement. Si le paramètre d'étalement est suffisamment important, la goutte sera précédée par un film précurseur. Ce film de très faible épaisseur épouse la forme de la surface et si les hétérogénéités de rayons de courbure sont grandes devant l'épaisseur du film, il ne sent pas cette courbure et prend une épaisseur constante. La pression P en son sein sera donnée par la loi de Laplace où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface :

$$P = P_0 + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Cette pression P peut ne pas être homogène si la courbure moyenne de l'interface ne l'est pas induisant ainsi, comme dans le cas d'une fibre conique, des écoulements de fluide au sein du film et des éventuels mouvements d'un réservoir macroscopique. La pression interne P peut être supérieure (goutte sur une fibre conique) ou inférieure (index de liquide dans un capillaire conique) à la pression atmosphérique, mais dans les deux cas l'écoulement de liquide se fera des zones de plus forte pression vers les zones de plus basse pression.

5.7 Conclusion

Nous avons montré qu'une goutte placée sur un substrat conique se meut spontanément vers les régions de plus petite courbure. La force motrice responsable de ce mouvement est d'origine capillaire et donc proportionnelle à la tension de surface γ. Elle est aussi inversement proportionnelle au rayon de la fibre au carré. En outre, plus ce rayon est petit, moindre est la dissipation visqueuse, les gouttes posées sur des très fines fibres avancent donc doublement vite. Ce mouvement peut être utilisé pour assécher des solides ou pour récupérer de la vapeur se condensant sur une telle fibre. Notons que nous nous sommes cantonnés, dans cette analyse, aux situations de mouillage faisant intervenir des petites gouttes – soit des gouttes en conformation axisymétrique. Mais nos résultats demeurent

valables pour les gouttes déformées par la gravité, qui se déplacent également (et rapidement) sur des fibres coniques.

Nous n'avons pas considéré le cas du mouillage partiel, essentiellement à cause de l'hystérésis de l'angle de contact qui induit une force supplémentaire (difficile à maîtriser) s'opposant au mouvement. Néanmoins, nous avons vérifié qualitativement que les résultats principaux de ce chapitre demeurent (à condition toutefois que l'angle de mouillage reste inférieur à 90°) : les gouttes mouillant partiellement la fibre avancent vers les plus grands rayons et ce d'autant plus rapidement que le rayon local de la fibre est petit et que la goutte est grosse. Ce mouvement est parfois sporadique, la ligne de contact pouvant s'ancrer sur la fibre. Cette propriété de déplacement spontané sur des fibres coniques en mouillage partiel peut trouver un intérêt pratique : le processus du roll-up [1, 32, 104](discuté dans l'annexe A), qui consiste en la perte de la forme axisymétrique d'une goutte au profit d'une forme asymétrique (la goutte roule préférentiellement d'un côté de la fibre), se produit d'autant plus facilement que le rapport h/b est faible, donc que le rayon est grand. Ce processus est particulièrement utilisé dans le domaine de la détergence. La goutte, après avoir roulé d'un côté, adhère moins à la fibre, il est alors plus facile de l'en ôter. L'utilisation de fibres coniques peut renforcer ce processus en induisant la migration spontanée des gouttes vers les plus larges rayons avant qu'elles ne roulent et qu'elles soient détachées de la fibre par les molécules tensio-actives ou une agitation mécanique.

Conclusion sur les impacts

Dans cette partie, nous nous sommes d'abord intéressés à l'impact de gouttes de rayon millimétrique sur les deux motifs élémentaires qui composent une grille : un trou et une fibre cylindrique horizontale. Nous discutons dans cette conclusion de l'influence relative des différents tailles (celle du motif et celle de la goutte impactant) sur l'efficacité de la grille. Une grille efficace est de notre point de vue un support à même de retenir le plus de liquide possible à densité surfacique de solide donnée.

Il existe dans les deux situations d'impact considérées des vitesses de capture (notées V^* et V^{**}) et les gouttes allant plus lentement que ces vitesses sont totalement capturées par le motif. Notons toutefois que les dimensions relatives de la taille de la goutte impactant par rapport à celle du motif imposent des limites à ces régimes de capture. De ce point de vue, les deux motifs sont complémentaires : une goutte aussi grosse soit-elle est toujours capturée par le trou alors que les petites gouttes peuvent se faufiler au travers de celui-ci. Au contraire, les gouttes plus grosses que ce que peut soutenir la fibre dans une situation statique ne sont jamais piégées, alors que la capture des petites gouttes par la fibre se fait aisément. En outre, le positionnement relatif de la trajectoire de la goutte par rapport au motif joue un rôle inverse dans les deux situations : la goutte excentrée de plus de un rayon R se fait totalement capturer par le trou alors que la goutte excentrée de la fibre de plus de un rayon R ne se fait jamais piéger.

Le dimensionnement d'une grille efficace (c'est-à-dire susceptible de retenir le plus de liquide possible) se fait en fonction de ces limites. Pour commencer, fixons la densité surfacique à la valeur 1/2 ce qui impose que le rayon du trou et celui de la fibre soient égaux ($r = b$). Les expressions des vitesses seuil V^* et V^{**} sont alors normées par la même quantité : $\sqrt{\frac{\gamma}{\rho r}}$ (*cf.* les équations 3.15 et 4.14). Nous reportons sur la figure 5.26 les vitesses V^* et V^{**} normées par ce facteur pour une fibre de 0.1 mm de rayon, une longueur capillaire de 1.5 mm et des liquides de tension et viscosité telles que nous puissions utiliser les équations 3.15 et 4.14. Dans la région 1 la goutte est totalement capturée, alors que dans la région 3 elle ne l'est par aucun des deux motifs, dans la région 2 elle est seulement piégée par la fibre et au contraire dans la région 3 elle ne l'est que par le trou. La figure 5.26 indique que le rayon des gouttes susceptibles d'être piégées par la grille doit vérifier la relation :

$$0.7r^{2/3}\kappa^{2/3} < b/R < 1$$

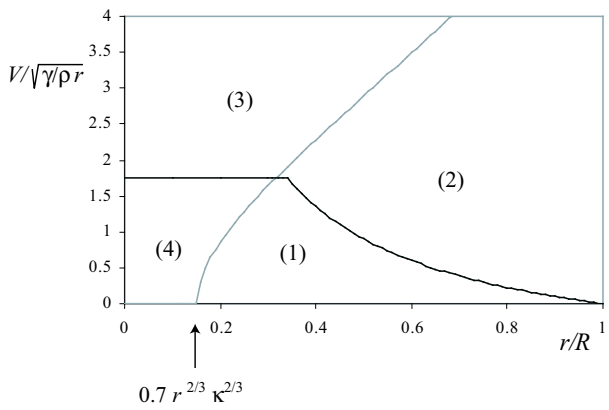


FIG. 5.26: Les deux vitesses seuil normées par $(\gamma/\rho r)^{1/2}$ en fonction de la taille caractéristique du motif r normé par le rayon de la goutte R. La courbe croissante grise est la vitesse seuil de capture par une fibre (éq. 4.14), la courbe décroissante en noir la vitesse seuil de capture par un trou (éq. 3.15). Une goutte dans la région (1) est capturée à la fois par le trou et par la fibre, dans la région (2), la capture se fait seulement par la fibre, dans la région (3), la goutte n'est pas capturée alors que dans la région (4) elle n'est capturée que par le trou.

Cette condition équivalente à :

$$b < R < 1.5\ b^{1/3}\kappa^{-2/3} \tag{5.21}$$

est facile à interpréter : la goutte doit être plus grosse que le trou mais moins grande que la plus grosse goutte que peut supporter une fibre. Plus l'intervalle défini par l'équation 5.21 est important, plus la grille est efficace : elle piégera des gouttes de tailles variées. En outre, il ressort que ses performances seront améliorées pour les liquides de forte tension et de faible densité afin que la longueur capillaire soit la plus grande possible. Remarquons finalement que ces courbes ont été tracées dans le cas très particulier où les gouttes tombent bien au centre du trou ou de la fibre. Ceci n'est évidemment pas toujours vrai. En moyenne, la vitesse seuil de capture par un trou est augmentée si la goutte tombe légèrement à côté (*cf.* figure 3.5) alors que la vitesse seuil de capture par une fibre est diminuée si la goutte ne tombe pas exactement sur le fil (*cf.* figure 4.15) ; l'étendue du domaine 1 s'en trouve donc augmentée.

Dans le dernier chapitre de cette partie, nous avons mis en évidence que les hétérogénéités de courbure de la grille peuvent induire des mouvement spontanés de liquide. Le fluide restant sur le substrat se meut spontanément vers les zones de plus grandes courbures. La grille a donc tendance à se régénérer et à s'autoassécher.

Il conviendrait d'étendre cette étude aux liquides visqueux qui n'ont pas été traités. Nous pouvons néanmoins prévoir que la prise en compte d'un terme de dissipation supplémentaire va augmenter les deux seuils en vitesse et rendre la capture de liquide par la grille plus efficace. Par contre, les mouvements spontanés de liquide sur une surface de courbure variable et par conséquent les propriétés auto-nettoyantes de la grille vont s'en trouver ralenties.

Troisième partie

Fracture d'un liquide visqueux

Introduction aux pointes liquides

Il y a plusieurs façons d'immerger un solide dans un liquide. Doucement, en plongeant lentement le solide dans le liquide (comme nous le faisons lorsque nous rentrons dans une mer trop froide), ou brutalement en emprisonnant de l'air derrière soi (qui n'a jamais fait de "bombes" en sautant en boule dans une piscine), ce qui provoque des éclaboussures et l'émission d'un jet vertical de liquide, ou enfin délicatement mais rapidement (lorsqu'on plonge). Dans les deux derniers cas, de l'air peut être entraîné dans le liquide soit en formant une cavité après l'impact ce qui conduit à l'émission de ce jet vertical (à l'image de ceux du chapitre 1), soit directement le long du solide, l'isolant ainsi du milieu fluide. Les nageurs professionnels ont compris l'intérêt de cette peau d'air : elle réduit considérablement la force de traînée. Ainsi les maillots de bain dernier cri sont-ils constitués d'une texture hydrophobe qui stabilise la couche d'air faisant ainsi gagner aux sportifs de précieuses millisecondes. L'entraînement d'air peut également être un processus limitant : dans toutes les opérations industrielles de dépôt de fluide, un solide entraîne un film de liquide dont l'épaisseur est modifiée par la vitesse du solide. Toutefois, il n'est pas toujours possible d'atteindre les épaisseurs voulues : à très haute vitesse, de l'air est entraîné entre le solide et le liquide ce qui rend le film non homogène. L'entraînement d'air par un solide a ainsi fait l'objet d'un certain nombre d'études (citons les travaux de Blake *et al.* [12], Burley *et al.* [28, 27] et plus récemment Simpkins [146]) mais reste encore mal compris, essentiellement parce qu'il combine des phénomènes se déroulant à des échelles différentes : l'échelle microscopique de la ligne triple et celle macroscopique de l'écoulement.

Dans cette partie qui se compose de trois chapitres, nous nous intéressons à l'entraînement d'air par un liquide beaucoup plus visqueux que lui. Nous commençons par étudier la géométrie de l'interface avant que l'air ne soit entraîné. Celle-ci est pointue, et nous montrons que la courbure de cette pointe peut atteindre des dimensions plus petites que toutes les échelles caractéristiques du système ce qui lui confère de curieuses propriétés. Puis, nous mesurons la vitesse pour laquelle une fine lame d'air est entraînée dans le liquide et la comparons à un modèle récemment proposé pour la déduire. Enfin nous mesurons l'épaisseur micronique de ce film essentiellement en fonction de la vitesse d'entraînement du solide et de la viscosité du liquide entraîné.

Chapitre 6

Pointes liquides

Sommaire

6.1 Introduction **125**

6.2 Dispositifs expérimentaux **126**

6.2.1 Singularité à trois dimensions 126

6.2.2 Singularité à deux dimensions 128

6.3 Résultats expérimentaux **131**

6.3.1 Épaisseur entraînée e 131

6.3.2 Profondeur d'enfoncement de la pointe 133

6.3.3 Acuité de la pointe 135

6.4 Discussion **138**

6.4.1 Forme de l'interface 138

6.4.2 Argument dimensionnel 140

6.4.3 Solution auto-similaire de la singularité 141

6.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux 142

6.5 Conclusion **144**

6.1 Introduction

Lorsqu'une goutte tombe d'un embout cylindrique ou d'un fil (*cf.* chapitre 4), elle s'en détache en émettant un filament qui se fractionne en plusieurs parties. Au cours de ce processus, la courbure de l'interface et la pression dans le filament peuvent atteindre des valeurs extrêmes en un temps fini. L'expérience de Zeff *et al.* [169] présentée au chapitre 1 est un autre exemple de singularité en un temps fini. L'extension de la zone singulière est petite devant toutes les longueurs caractéristiques du problème (longueur capillaire, dimension de l'expérience *etc..*). Ainsi, à ces échelles, la dynamique de rupture est auto-similaire : l'observation du profil de l'interface à différentes échelles et différents instants ne fait pas apparaître de nouveaux détails et le profil de l'interface est toujours donné par

la même équation, à condition de normaliser correctement les axes par une fonction ne dépendant que du temps.

Nous cherchons dans ce chapitre à créer des pointes liquides stationnaires aussi acérées que possible – c'est-à-dire des interfaces entre deux fluides dont le profil s'approche d'une singularité spatiale. Nous commençons par donner quelques exemples de systèmes expérimentaux mis en œuvre pour étudier ces écoulements singuliers. Il existe une littérature abondante sur ce sujet et notre présentation est donc loin d'être exhaustive. Nous présentons ensuite le système expérimental que nous avons utilisé et discutons les résultats obtenus en les comparant, en particulier, avec une analyse théorique due à Jeong et Moffatt [79].

6.2 Dispositifs expérimentaux

6.2.1 Singularité à trois dimensions

Les développements récents sur ces questions se sont appuyés sur plusieurs expériences, comme en particulier la fragmentation d'un jet et l'aspiration sélective, que nous décrivons brièvement.

Fragmentation d'un jet

La première de ces expériences, déjà évoquée dans l'introduction, dérive de la stalagmométrie (le fractionnement de liquide tombant d'un embout cylindrique) et a été largement étudiée. Une revue

Fig. 6.1: Une goutte d'eau et un filament de liquide se détache d'un capillaire. Noter la forme conique du filament près du point de détachement. Clichés X. Shi et S. Nagel [145].

des principaux résultats théoriques, analytiques et expérimentaux est donnée dans la référence [56]. Il a été observé que la forme de l'interface près du point de rupture dépend remarquablement peu du dimensionnement de l'expérience (du diamètre de l'embout cylindrique)[86]. La fission d'un jet d'eau se fait, par exemple, toujours de la même façon, indépendamment des conditions initiales : au point de rupture, il apparaît une pointe conique microscopique connectée à une goutte d'eau macroscopique (cette zone est entourée sur la figure 6.1). La fission d'un jet de liquide visqueux (du glycérol)

est également indépendante des conditions initiales, mais le profil de l'interface libre présente des caractéristiques différentes de celui de l'eau : de longs filaments de liquide apparaissent au niveau du point de rupture. Si dans cette expérience, les longueurs externes du problème n'interviennent pas, la viscosité par contre, introduit une longueur visqueuse $L_\eta = \eta^2/\rho\gamma$ interne au problème. Pour l'eau, L_η est de l'ordre de la dizaine de nanomètres alors que pour le glycérol (1000 fois plus visqueux), elle est de l'ordre du centimètre. Les solutions auto-similaires se manifestent lorsque la longueur caractéristique de l'écoulement (sa largeur ou le rayon de courbure à l'extrémité de l'interface) est inférieure à toutes les longueurs internes du système (celles issues de la géométrie du système et les longueurs déduites des propriétés du fluide comme les longueurs capillaire ou visqueuse). Il n'y a alors plus d'échelle caractéristique et l'examen attentif du profil à différentes résolutions spatiales ne fait pas apparaître de nouveaux détails : la forme de l'interface est indépendante de l'échelle à laquelle on la regarde. La dynamique auto-similaire de fission d'un jet d'eau n'est donc pas accessible expérimentalement : elle met en jeu des échelles spatiales et temporelles trop faibles pour être mesurées. Par contre, elle peut être étudiée pour des liquides visqueux tel que le glycérol. Des solutions auto-similaires de tels problèmes ont été obtenues analytiquement, numériquement [55, 56, 59, 97] et expérimentalement [42, 43]. La stabilité de telles solutions a été analysée [18], et il apparaît que le long filament se déstabilise sous l'influence d'un bruit extérieur en une succession d'étranglements auto-similaires [145].

L'inconvénient majeur de cette expérience est son caractère instationnaire : le caractère singulier de l'écoulement apparaît pendant très peu de temps. Il est donc difficile de l'étudier expérimentale–ment cette étude nécessitant des dispositifs expérimentaux très résolus spatialement et temporellement.

Aspiration sélective

Récemment, Cohen et Nagel ont étudié un système simple mettant en jeu une singularité stationnaire. Un bassin est rempli de deux liquides non miscibles de densités et viscosités différentes. Un tube capillaire de diamètre D, introduit par le haut du bassin et placé très près de l'interface entre les deux fluides, aspire le fluide supérieur. Cet écoulement déforme l'interface entre les deux milieux et crée une pointe sous le tube.

Cette pointe est stationnaire si le débit d'aspiration est constant. Sa hauteur dépend de ce débit et de la distance à laquelle le tube est placé. Lorsque le débit d'aspiration dépasse une valeur seuil à position donnée, la pointe craque et se déstabilise en un long filament à symétrie cylindrique continûment aspiré à travers le tube capillaire. Cohen *et al.* ont récemment étudié la forme de l'interface juste avant la transition pointe - filament, en fonction du débit d'aspiration [41, 44]. Ces auteurs ont montré que la forme en pointe est auto-similaire à condition de regarder à des échelles plus petites que les longueurs caractéristiques du système : la longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ de

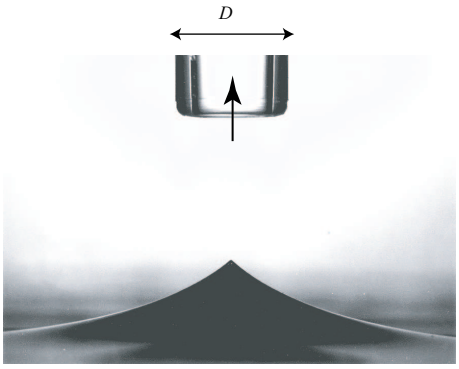


FIG. 6.2: L'aspiration d'air (indiquée par la flèche) au-dessus d'un bassin de liquide visqueux à travers un capillaire déforme l'interface. Une pointe stationnaire apparaît. Cliché I. Cohen et S. Nagel [44, 41].

l'ordre ici du millimètre, la longueur visqueuse $L_\eta = \eta^2/\rho\gamma$ de l'ordre du centimètre et le diamètre du capillaire égal à 15 mm. Ils ont déterminé expérimentalement la fonction auto-similaire du profil de l'interface, ce qui n'avait jamais été réalisé auparavant. Ils n'ont pas décelé de changement notable du profil de la pointe en variant la viscosité du fluide supérieur ce qui suggère que celle-ci n'est qu'une perturbation du second ordre de la fonction auto-similaire du profil de l'interface.

6.2.2 Singularité à deux dimensions

Plusieurs exemples de singularités à deux dimensions ont été étudiées analytiquement par Richardson et Moffatt [137, 79] ou Weiss qui a mis évidence l'existence d'une singularité au cours de l'impact d'une goutte sur une surface prémouillée [164]. Nous détaillons dans ce paragraphe l'exemple d'une singularité stationnaire à l'image de l' aspiration sélective, mais à deux dimensions.

Jet liquide

Un jet de liquide visqueux tombe à vitesse V dans un bain du même liquide. Le diamètre du jet D est millimétrique et le réservoir de liquide est suffisamment important pour être considéré comme infini. Les liquides utilisés sont des huiles silicones ou des mélanges de glycérol et d'eau. Les deux photographies de la figure 6.3 montrent les différentes situations qui apparaissent lorsqu'un jet de diamètre constant (ici égal à 4mm) tombe plus ou moins rapidement dans un bain de liquide. Pour de faibles vitesses d'impact (typiquement inférieures à 0.1 m/s), l'interface du bassin est peu modifiée par le jet : elle reste plate et c'est la base du jet qui s'élargit pour se fondre progressivement dans le bain. Pour des vitesses plus élevées (typiquement de l'ordre de 0.5 m/s), l'interface liquide/air est davantage déformée par le jet : un ménisque inversé creuse l'interface. Ce ménisque, dont la base est très acérée, s'enfonce sur près de 1.5 centimètres sous la surface et son influence se fait sentir radialement sur une distance comparable. Le rayon de courbure à la base du ménisque est très petit devant le diamètre du jet dont la courbure est négligeable : l'interface air/liquide ressemble à un

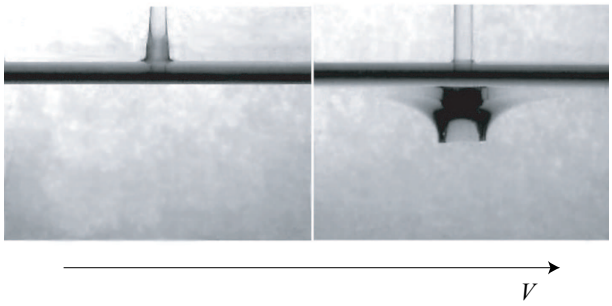


FIG. 6.3: Un jet de liquide de 4 mm de diamètre d'huile silicone visqueuse ($\eta = 1$ Pa.s) tombe dans un bain du même liquide à des vitesses différentes.

fil de rasoir légèrement courbé. Nous qualifierons cet objet de pointe liquide à 2 dimensions. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'acuité du ménisque de la figure 6.3 avant qu'il ne perfore la surface. Notons que Bin *et al.* et Lin *et al.* se sont intéressés au seuil pour lequel cette interface est perforée [11, 95].

Rouleau cylindrique horizontal

Pour observer la pointe liquide qui se forme à l'extrémité du ménisque, nous nous sommes inspirés d'une expérience proposée par Joseph *et al.* [82, 83]. Le dispositif, réminiscent d'une expérience de Taylor pour étudier la déformation de bulles dans des écoulements élongationnels [154], est schématisé sur la figure 6.4. Un rouleau cylindrique de 2 cm de rayon et de 12 cm de long est immergé à mi-hauteur dans un bain de liquide visqueux (le niveau H du liquide dans la cuve est de 10 cm). Le bassin fait 20 cm de large et 13 cm de profondeur. On note η et ρ la viscosité et la masse volumique du liquide le plus visqueux remplissant la cuve, η_0 et ρ_0 la viscosité et la masse volumique du fluide le moins visqueux surnageant au-dessus du liquide et $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ le contraste de masse volumique. Les deux fluides ne sont pas miscibles et leur tension interfaciale est notée γ. Par la suite, nous appellerons *liquide* le liquide le plus dense remplissant le bas de la cuve et *fluide* celui qui remplit le haut de la cuve. Le rouleau peut tourner autour de son axe et sa vitesse de rotation Ω est alors mesurée par un tachymètre. Il entraîne avec lui (sur le côté gauche de la figure 6.4.b) une couche de fluide en rotation solide, qui est d'autant plus épaisse que la vitesse de rotation est élevée. L'épaisseur de cette couche de liquide est notée e à l'apex du rouleau. Du côté droit du rouleau, le film rencontre le liquide du bassin avec une vitesse V et déforme l'interface selon une pointe schématisée sur la figure 6.4.b. Cette pointe s'enfonce dans le bassin d'une profondeur L. La séquence de photographies ci-dessous illustre l'évolution de cette pointe lorsque la vitesse de rotation des rouleaux augmente.

On remarque plusieurs points sur cette séquence de photographies :

- L'épaisseur de liquide e entraînée par le rouleau augmente avec la vitesse de rotation ; cette

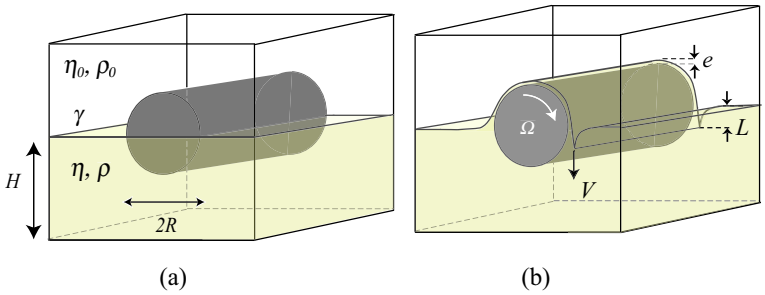


FIG. 6.4: Schéma de l'expérience. Une cuve dans laquelle est fixée un rouleau cylindrique pouvant tourner autour de son axe est remplie à mi-hauteur d'un liquide de masse volumique ρ et de viscosité η. Au-dessus surnage un fluide de masse volumique ρ_0 et de viscosité η_0. La tension entre les deux fluides est notée γ.

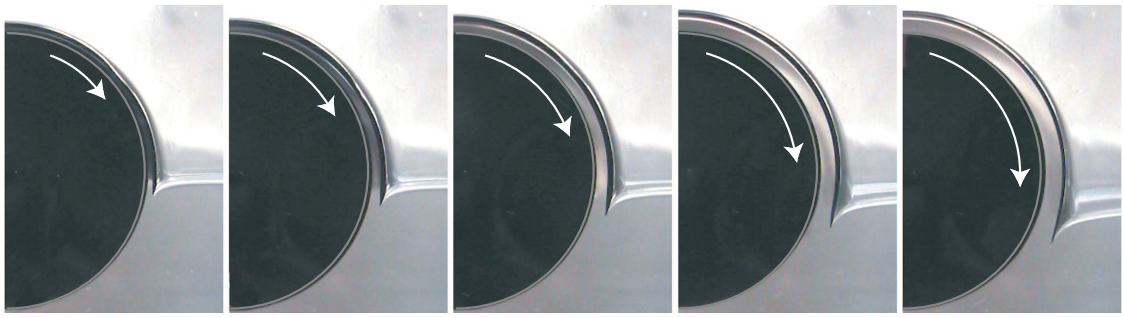


FIG. 6.5: Séquence de photographies illustrant la déformation d'une interface huile silicone/air à différentes vitesses de rotation du rouleau. Les vitesses au niveau de la pointe sont de 0.06 m/s, 0.10 m/s, 0.17 m/s 0.23 m/s et 0.30 m/s. Rappelons que le diamètre du rouleau fait 4 cm.

épaisseur atteint plusieurs millimètres sur la dernière photographie.

- Le ménisque s'enfonce de plus en plus profondément dans le bassin. L est donc d'autant plus importante que la vitesse de rotation est élevée. Elle est de l'ordre du centimètre sur la dernière photographie.
- La pointe est d'autant plus acérée que le rouleau tourne vite. Son rayon de courbure r est très petit, nettement inférieur au millimètre, et ne peut être évalué directement à partir de la figure 6.5.

La pointe liquide obtenue à l'aide de ce dispositif est bien invariante par translation le long de l'axe du rouleau comme le montre la figure 6.6. Sur cette photographie, la cuve est remplie d'huile silicone de viscosité $\eta = 0.97$ mPa.s et l'interface air/liquide apparaît réfléchissante : l'angle d'incidence est ici supérieur à l'angle de réflexion total qui est très faible (les indices des deux milieux sont très différents). Ce dispositif expérimental permet donc d'obtenir une pointe liquide à deux dimensions, comme l'ont remarqué Joseph *et al.* [82, 83]. Trois longueurs permettent de caractériser cette pointe, son écartement e par rapport au solide, sa profondeur d'enfoncement L dans le liquide et son rayon de courbure r à son extrémité inférieure. Nous quantifions l'évolution de ces trois longueurs en fonction de la vitesse V dans le paragraphe suivant.

FIG. 6.6: Photographie du rouleau et de la pointe liquide prise de trois-quart.

6.3 Résultats expérimentaux

6.3.1 Épaisseur entraînée e

Nous avons mesuré l'épaisseur e entraînée par le rouleau en fonction de sa vitesse de rotation Ω. La viscosité du fluide est élevée (η =0.97 Pa.s) et nous supposons que le film entraîné par le rouleau tourne avec celui-ci en rotation solide. La vitesse de rotation est alors reliée à la vitesse linéaire du

fluide à la surface du film par la relation (*cf.* figure 6.4) :

$$V = \Omega(R + e) \tag{6.1}$$

Ce problème est très proche du tirage d'un film de liquide par une plaque solide plane étudié par Landau et Levich [90, 50, 51]. Ceux-ci ont montré qu'à petite vitesse de tirage, l'épaisseur entraînée augmentait comme la vitesse de tirage à la puissance 2/3. Plus précisément, l'épaisseur finale du film e résulte d'une compétition entre les forces capillaires, la gravité et la viscosité. Elle s'écrit alors, Ca désignant le nombre capillaire $Ca = \eta V/\gamma$:

$$e \simeq \kappa^{-1} Ca^{2/3}$$

Ce régime en capillaire à la puissance 2/3 n'est valable que pour les nombres capillaires inférieurs à 0.001. À nombre capillaire plus élevé, la capillarité ne joue plus et l'épaisseur entraînée s'écrit comme :

$$e \sim \kappa^{-1} Ca^{1/2} \tag{6.2}$$

Ce deuxième régime est valable pour des nombres capillaires de l'ordre de 1. Notons que le bassin étant rempli à mi-hauteur, le solide entraînant le liquide est vertical au niveau du ménisque dynamique si bien qu'il n'est pas nécessaire de faire des corrections liées à l'inclinaison du solide.

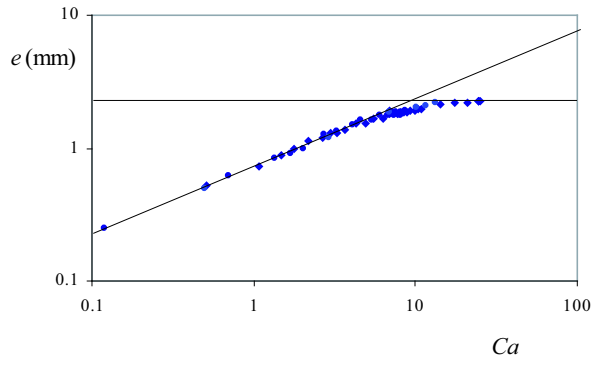


FIG. 6.7: Épaisseur e du film entraîné par le rouleau, mesurée au sommet du cylindre en fonction du nombre capillaire de l'écoulement, en échelle logarithmique.

L'épaisseur e du film entraîné est représentée en fonction du nombre capillaire sur la figure 6.7. Il apparaît que e augmente avec la racine carrée du nombre capillaire (conformément à l'équation 6.2) sur près de deux décades comme le souligne la droite en trait plein dont la pente est 0.5. Puis e sature à une valeur de l'ordre de 5 mm pour des nombres capillaires supérieurs à 5.

Nous ne discuterons pas plus en détail les variations de e. Retenons surtout que cette épaisseur croît lentement avec le nombre capillaire pour $Ca < 5$ et qu'elle est constante, de l'ordre de 5 mm, pour $Ca > 5$.

6.3.2 Profondeur d'enfoncement de la pointe

Influence de la vitesse d'entraînement

Nous avons également observé sur la figure 6.5 que le ménisque est d'autant plus enfoncé dans la cuve qu'il est entraîné rapidement. La profondeur d'enfoncement L est représentée en fonction de la vitesse d'entraînement V, calculée à l'aide de l'expression 6.1 sur la figure 6.8. La cuve est remplie à mi-hauteur d'huile silicone visqueuse (η=0.97 Pa.s). On voit que la hauteur de ce ménisque inversé

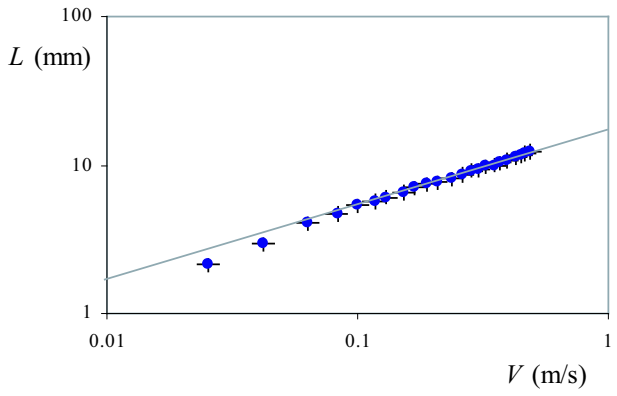


FIG. 6.8: Profondeur d'enfoncement du ménisque (en mm) en fonction de la vitesse linéaire d'entraînement. Les échelles sont logarithmiques et la droite de pente 1/2.

est bien une fonction croissante de la vitesse d'entraînement. Pour des vitesses supérieures à 0.1 m/s, les données sont bien ajustées par une loi de puissance d'exposant égal à 0.5 ± 0.05, alors que pour des vitesses inférieures à 0.1 m/s, les données sont en dessous de cet ajustement. L'incertitude de la mesure est ici de l'ordre de 10%.

Concentrons-nous sur ce ménisque inversé. La résultante des forces de friction le tire vers le bas de la cuve ; cette contrainte visqueuse est dimensionnellement de l'ordre de $\eta V/L$. La poussée d'Archimède (on cherche à faire rentrer un fluide peu dense, de l'air, dans un liquide mille fois plus dense) le remonte au contraire vers le haut de la cuve. La variation de pression associée à cette poussée est de l'ordre de $\Delta\rho g L$. La capillarité tend également à diminuer la taille de la pointe. Néanmoins, ses effets sont négligeables quand la profondeur d'enfoncement est bien supérieure à la longueur capillaire. L'équilibre des deux contraintes dominantes (visqueuse et gravitaire) conduit alors à la loi :

$$L \sim \sqrt{\frac{\eta V}{\Delta\rho g}} \tag{6.3}$$

La longueur L est donc dimensionnellement construite comme la longueur capillaire, dans l'expression de laquelle on a remplacé les effets de tension de surface par les effets visqueux. L'équation 6.3 est en bon accord avec les données de la figure 6.8 pour des vitesses d'entraînement supérieures à 0.1 m/s. L fait alors 5 mm et est donc sensiblement supérieure à la longueur capillaire $\kappa^{-1} =$

$\sqrt{\gamma/\Delta\rho g} \simeq 1.5$ mm. Notons que le coefficient numérique de la loi d'échelle de la figure 6.8 vaut 3 et est donc de l'ordre de l'unité. Il apparaît également sur la figure 6.8 que pour les vitesses inférieures à 0.1 m/s, la profondeur L devient comparable à la longueur capillaire et la capillarité qui s'oppose à toute augmentation de l'interface liquide/fluide diminue la profondeur d'enfoncement du ménisque.

Influence de la nature du liquide

Nous avons également testé la dépendance en viscosité de l'équation 6.3. Le rapport de la profondeur d'enfoncement et de la racine de la vitesse $L/\sqrt{V}$ est reporté sur la figure 6.9 en fonction du rapport de la viscosité et du contraste de densité $\eta/\Delta\rho$. Le fluide supérieur est toujours de l'air alors que le liquide inférieur est une huile silicone (représentée par un triangle) ou un mélange de glycérol et d'eau (représenté par un cercle). Les données sont là encore bien ajustées par une loi de

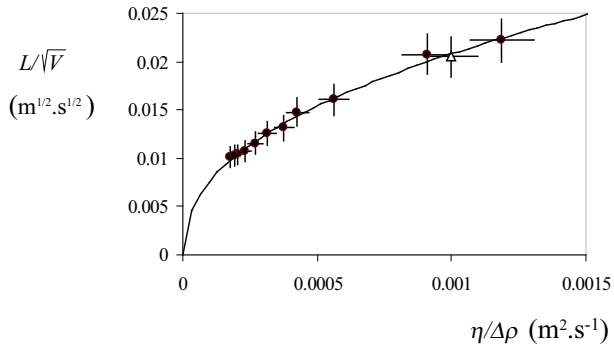


FIG. 6.9: Profondeur d'enfoncement du ménisque dans la cuve divisée par la racine carrée de la vitesse $L/\sqrt{V}$ en fonction du rapport de la viscosité du fluide sur le contraste de densité des deux liquides $\eta/\Delta\rho$. Le liquide est un mélange de glycérol et d'eau (•) ou de l'huile silicone 1000 fois plus visqueuse que l'eau (△).

puissance d'exposant 0.43 ± 0.06 et de coefficient égal à 0.42 de l'ordre de $1\sqrt{g} \sim 0.3$, tous deux en accord raisonnable avec l'équation 6.3.

Dans ces expériences, le fluide supérieur, également entraîné par cisaillement vers la pointe, a été tenu identique. La loi d'échelle de l'équation 6.3 reste-t-elle valable si η_0 augmente ? Nous avons mesuré la profondeur d'enfoncement L en remplissant la cuve de glycérol et d'huile silicone légère. La croissance de la profondeur d'enfoncement du ménisque L avec la vitesse V reste bien ajustée par une loi de puissance d'exposant proche de 1/2 (les données correspondant à ces expériences ne sont pas reportées). Pour vérifier que la longueur L est bien indépendante de la viscosité du fluide supérieur, le rapport $L\sqrt{\Delta\rho g/\eta V}$ est porté sur la figure 6.10 en fonction de η_0/η, rapport de la viscosité du fluide supérieur sur celle du liquide inférieur, en échelle semi-logarithmique. Nous concluons des données de la figure 6.10 que :

- Pour des fluides peu visqueux tels que $\eta_0/\eta < 0.01$, la loi d'échelle de l'équation 6.3 demeure : le rapport $L\sqrt{\Delta\rho g/\eta V}$ est indépendant de la viscosité du fluide utilisé (ligne horizontale sur la figure 6.10).

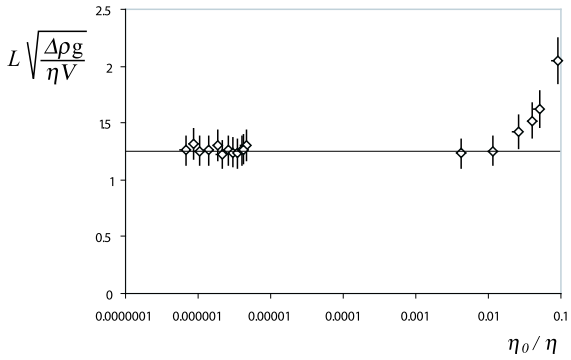


FIG. 6.10: Profondeur d'enfoncement du ménisque dans la cuve normée par la longueur définie par l'équation 6.3 $L\sqrt{\Delta\rho g/\eta V}$, en fonction de η_0/η, rapport de la viscosité du fluide et de celle du liquide .

- Lorsque le contraste de viscosité entre les deux milieux diminue $0.01 < \eta_0/\eta < 0.1$, le liquide entraîné en rotation solide par le rouleau est toujours le liquide inférieur mais la profondeur d'enfoncement du ménisque n'est plus indépendante de la viscosité du fluide entraîné et augmente nettement.
- Au-delà le contraste de viscosité entre les deux liquides n'est plus suffisant pour que le système soit bien défini : le liquide entraîné autour du rouleau n'est plus forcément le liquide inférieur (*cf.* figure 6.11). Les épaisseurs entraînées étant alors sensiblement du même ordre de grandeur, ce sont les propriétés de mouillage des liquides sur le solide qui déterminent lequel des deux fluides gaine le rouleau. Il peut même apparaître une pointe inversée par rapport à ce que nous avons décrit jusqu'ici, comme schématisé sur la figure 6.11.

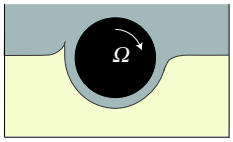


FIG. 6.11: Lorsque le fluide le plus visqueux se trouve en haut ou lorsque les viscosités des deux fluides sont proches et que les conditions de mouillage favorisent l'enduction du rouleau par le fluide supérieur, la pointe liquide est retournée par rapport à la situation étudiée.

En conclusion, notons que le ménisque s'enfonce dans la cuve d'une profondeur égale à la longueur visqueuse du système (définie équation 6.3). Ceci reste valable tant que cette longueur est plus grande que la longueur capillaire et tant que le contraste de viscosité entre les deux liquides est suffisant.

6.3.3 Acuité de la pointe

Nous étudions à présent les variations de la troisième longueur caractéristique du système : le rayon de courbure à l'extrémité de la pointe. Une lunette optique placée contre la paroi de la cuve

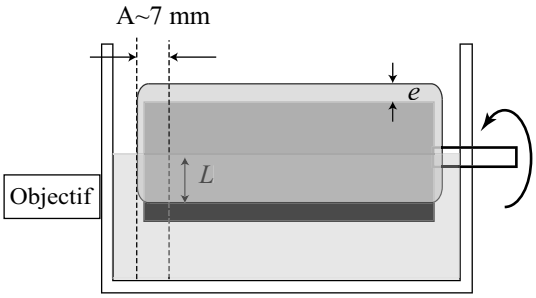


FIG. 6.12: Schéma du dispositif expérimental. La pointe liquide n'est pas collée à la paroi.

est équipée d'un appareil photographique numérique haute résolution (1200 par 1600 pixels). La distance de mise au point de la lunette est de 25 mm. La paroi de la cuve en plexiglas fait 8 mm d'épaisseur. Le rouleau n'est pas collé à la paroi et le bord de la pointe liquide est décalé d'environ 10 millimètres de celle-ci. Nous avons donc pu sonder le ménisque sur une profondeur (notée A sur la figure 6.12) de l'ordre de 5 à 7 mm. Deux photographies de la pointe d'air dans le glycérol sont montrées sur la figure 6.13, où un trait blanc indique 200 µm. Les vitesses d'entraînement

FIG. 6.13: Photographies du ménisque d'air pointant dans le glycérol. Le trait blanc correspond à 200 µm. La vitesse d'entraînement vaut 14 cm/s sur la photo de gauche et 22 cm/s sur la photo de droite.

sont respectivement de 14 et 22 cm/s. Nous observons, comme sur la figure 6.5, que la pointe est d'autant plus acérée que la vitesse d'entraînement est grande. Par ailleurs, son rayon de courbure (de l'ordre de 100 µm) est largement inférieur aux différentes longueurs caractéristiques du système : le dimensionnement de l'expérience (rayon et taille de la cuve) est de l'ordre de quelques cm, la longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ vaut 2 mm et la longueur visqueuse $L_\eta = \eta^2/\rho\gamma$ 15 mm. Nous avons analysé le contour de l'interface air/glycérol près de la pointe et avons déterminé son rayon de courbure en l'interpolant par une fonction parabolique du type $y = ax^2$. Nous notons ce rayon r et le reportons sur la figure 6.15 en fonction du nombre capillaire $Ca = \eta V/\gamma$. En effet, l'acuité du ménisque résultera d'une compétition entre entraînement visqueux et forces capillaires, les effets capillaires dominant largement la poussée d'Archimède à l'échelle de la pointe.

Il apparaît sur la figure 6.14 que le rayon de courbure r décroît fortement avec le nombre capillaire Ca : il passe de 300 µm pour $Ca = 0.5$ à 6 µm pour $Ca = 2.5$. L'incertitude expérimentale sur ces

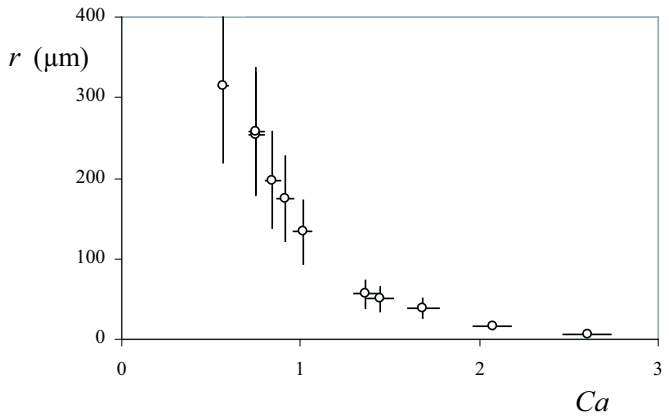


FIG. 6.14: Rayon de courbure du ménisque r en fonction du nombre capillaire $Ca = \eta V/\gamma$.

mesures, de l'ordre de 30%, a été déterminée en analysant une série de photos prises dans les mêmes conditions expérimentales. Elle est élevée : la pointe liquide, même si elle est bien définie, est en effet une structure dynamique et donc sensible aux variations de vitesse de rotation du rouleau, et aux fluctuations de l'épaisseur entraînée e. En outre, pour des nombres capillaires supérieurs à 3, l'air entraîné par cisaillement vers la pointe peut créer des perturbations importantes comme nous le verrons au chapitre 7.

Nous reportons sur la figure 6.15 en échelle semi-logarithmique les données de la figure 6.14 obtenues pour un couple air/glycérol, auxquelles nous ajoutons des données obtenues pour des couples air/huile silicone de viscosité 350 mPa.s et huile silicone de viscosité 0.5 mPa.s/glycérol. Les points expérimentaux de la figure 6.15 se rejoignent tous sur la même droite en échelle semi-

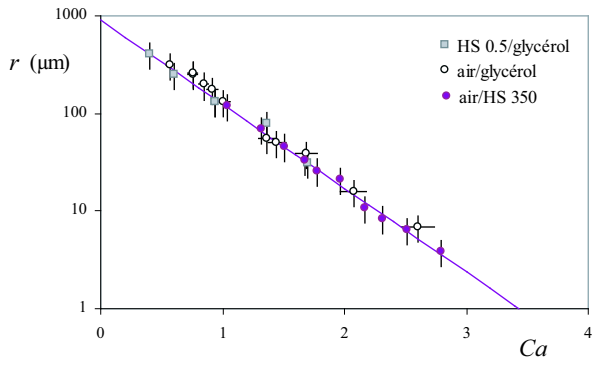


FIG. 6.15: Rayon de courbure de la pointe liquide r en fonction du nombre capillaire Ca en échelle semi-logarithmique.

logarithmique. Ces résultats appellent quelques commentaires :

- Le rayon de courbure pour une pointe à deux dimensions décroît exponentiellement avec le nombre capillaire de l'écoulement (en introduisant une longueur notée r_0 et un coefficient

multiplicatif sans dimension α) selon :

$$r = r_0 \exp(-\alpha Ca) \tag{6.4}$$

- La longueur r_0 et le coefficient α sont indépendants de la nature du liquide utilisé (liquide inférieur) puisque les points expérimentaux obtenus pour des couples air/glycérol et air/huile silicone 350 se superposent sur un même tracé.
- La longueur r_0 et le coefficient α sont également indépendants de la nature du fluide supérieur utilisé : les données expérimentales obtenues pour des couples air/glycérol et huile silicone 0.5/glycérol se superposent également sur le même tracé.
- La longueur r_0 et le coefficient α déduits des expériences 6.15 valent respectivement 900 µm $\pm$100 µm et 1.98 $\pm$ 0.06.

6.4 Discussion

6.4.1 Forme de l'interface

Jeong et Moffatt [79] ont analysé la forme de l'interface libre dans la géométrie à deux rouleaux contrarotatifs de l'expérience originale de Joseph [82, 83]. Les deux cylindres sont immergés à une distance d de la surface libre dans un liquide très visqueux (figure 6.16). Le fluide au-dessus est inviscide. Les auteurs déterminent complètement l'écoulement près de la pointe en modélisant les deux cylindres par un dipôle de vortex placé au point de coordonnés $(0, -d)$. En négligeant la

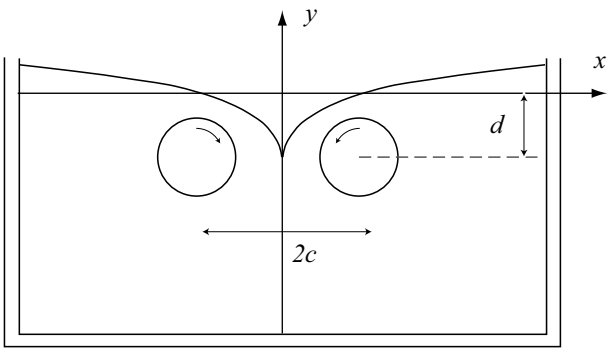


Fig. 6.16: Dispositif considéré par Jeong et Moffat.

gravité et en prenant en compte les effets capillaires, ils trouvent que les coordonnées de la surface libre définies sur la figure 6.16 et normées par la profondeur d'enfoncement des rouleaux d vérifient l'équation :

$$F(x, y) = x^2 y - (2a - y)(y + a + 1)^2 = 0 \tag{6.5}$$

où a est une fonction compliquée du nombre capillaire Ca, supérieure à $-1/3$, et asymptotiquement équivalente autour de $-1/3$ à la fonction ϵ :

$$a = -\frac{1}{3} + \epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon = +\frac{32}{3}\exp(-\pi Ca) \tag{6.6}$$

La fonction a n'atteint donc jamais la valeur $-1/3$, si l'on tient compte de la capillarité. La forme de l'interface évolue avec la valeur prise par la fonction a et donc avec le nombre capillaire de l'écoulement. Nous avons représenté sur la figure 6.17, différents profils de l'interface pour différentes valeurs de a. Il apparaît sur la figure 6.17 que la pointe liquide est d'autant plus effilée que le pa-

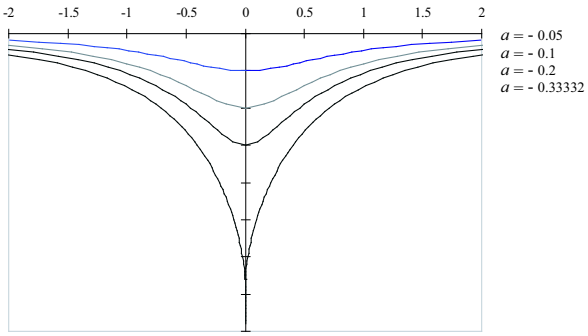


FIG. 6.17: Évolution de l'interface avec la fonction a, c'est-à-dire avec le nombre capillaire. Pour a=0, il n'y a pas de déformation ; puis a décroissant l'interface devient de plus en plus pointue. Pour a = -1/3 (soit pour Ca infini) la surface libre admet une singularité en $x = 0$.

ramètre a est petit (donc que le nombre capillaire est grand). Jeong et Moffatt distinguent essentiellement deux limites sur la figure 6.17 :

- Pour $a > -\frac{1}{3}$, la surface libre a une forme localement parabolique. L'ordonnée en $x = 0$ vaut $y = 2a$ et l'équation de la surface est approchée par :

$$x^2 \simeq -\frac{(3a+1)^2}{2a}(y - 2a) \tag{6.7}$$

  Le rayon de courbure non dimensionné r' au point $(0, 2a)$ est donc donné par l'équation :

$$r' \simeq -\frac{(3a+1)^2}{4a} \tag{6.8}$$

  Il reste non nul tant que $a \neq -\frac{1}{3}$. Ces résultats se retrouvent sur la figure 6.17 : pour $a = 0.05,\ 0.1,\ 0.2$ l'interface est parabolique au point de coordonnées $(0, 2a)$ avec un rayon de courbure positif.

- Pour $a \to -\frac{1}{3}$, le point $x = 0$ est de plus en plus singulier (*cf.* figure 6.17). En ce point, son rayon de courbure adimensionné r' vaut, en utilisant les expressions 6.6 et 6.8 :

$$r' \simeq \frac{3}{4}\,\epsilon^2 \simeq \frac{256}{3}\exp(-2\pi Ca) \tag{6.9}$$

Notons que la fonction ϵ est égale à la racine carrée du rayon de courbure r'. L'expression dimensionnée du rayon de courbure r s'obtient finalement en introduisant une longueur caractéristique externe du système l (que Moffat suggère être la profondeur d'enfoncement du dipôle d) :

$$r \simeq l\frac{256}{3}\exp(-2\pi Ca) \tag{6.10}$$

Le rayon de courbure à l'extrémité de la pointe décroît exponentiellement avec le nombre capillaire. La pointe peut donc devenir extrêmement effilée dès que la vitesse est de l'ordre de γ/η. L'apparition d'une pointe à une vitesse bien définie est conforme aux observations de Joseph, qui aurait plutôt interprété cela comme un phénomène critique – alors que la relation 6.10 indique (tout comme nos expériences) une décroissance continue.

6.4.2 Argument dimensionnel

Cette forte loi de décroissance peut être retrouvée dimensionnellement si l'on assimile l'extrémité de la pointe à un hémi-cylindre (figure 6.18). Les forces capillaires agissent sur cet objet avec une

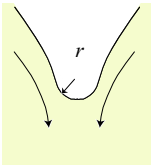


Fig. 6.18: Schéma de l'extrémité d'une pointe bidimensionnelle.

intensité par unité de ligne égale à deux fois la tension air/liquide, soit 2γ. La résultante des forces de friction f sur un cylindre placé dans un écoulement visqueux (perpendiculaire à son axe) se calcule dans l'approximation d'Oseen [88, 73, 72]. Elle est, par unité de ligne, proportionnelle au produit de la viscosité du liquide par la vitesse de l'écoulement corrigé d'un facteur logarithmique tendant vers l'infini quand le rayon du cylindre tend vers zéro :

$$f = -\frac{4\pi\eta V}{1/2 - C + \ln(l/r)} \tag{6.11}$$

où C désigne la constante d'Euler $C = 0.577$ et l une longueur caractéristique de l'écoulement qui est la longueur du cylindre s'il est de taille finie ou $l = 4\eta/\rho V$ s'il est de taille infini. Dans la limite où $\ln(l/r) \gg 1/2 - C$, l'équilibre de ces deux forces donne l'expression du rayon de courbure de la pointe liquide :

$$r \sim l\exp\left(-2\pi\frac{\eta V}{\gamma}\right) \tag{6.12}$$

Cette équation, proposée par Hinch [79], est tout à fait en accord avec les développements analytiques de Moffatt (*cf.* équation 6.10).

6.4.3 Solution auto-similaire de la singularité

La solution dérivée par Jeong et Moffatt pour $a \to -1/3$ (c'est-à-dire pour une interface singulière) a la propriété d'être une fonction auto-similaire. En posant $a = -1/3 + \epsilon$ et en normant x et y par des fonctions de la variable ϵ, $x = \epsilon^{3/2}\xi$ et $y = \epsilon\mu + 2a$ (ϵ est proportionnel à $\exp(-\pi\eta V/\gamma)$, d'après l'éq. 6.6 l'équation 6.5 devient alors :

$$\xi^2 = \frac{3}{2}\mu(\mu+3)^2 \tag{6.13}$$

Cette famille de solutions auto-similaires peut s'écrire plus généralement :

$$\xi = \sqrt{j\mu}(\mu + \sqrt{2/j}) \tag{6.14}$$

où j est une constante dont la valeur dépend des longueurs caractéristiques externes du problème (le rayon des rouleaux dans l'expérience de Joseph ou le diamètre du jet dans l'expérience d'impact d'un jet). On trouve les deux comportements asymptotiques de l'interface (toujours pour $a \to -1/3$) :

- Pour $\mu \ll 1$, donc au voisinage de la pointe, l'interface a une forme parabolique d'équation :

$$\mu \sim \xi^2 \tag{6.15}$$

  Le rayon de courbure de la pointe est alors donnée par l'équation 6.10.

- Pour $\mu \gg 1$, donc loin de la pointe, l'interface apparaît pointue. Nous disons alors qu'elle a une forme *cuspée* d'équation :

$$\mu \sim \pm|\xi|^{2/3} \tag{6.16}$$

  Notons que cette forme asymptotique a été également proposée par Joseph *et al.* [83, 82].

Le profil de l'interface pointue est représentée sur la figure 6.19.

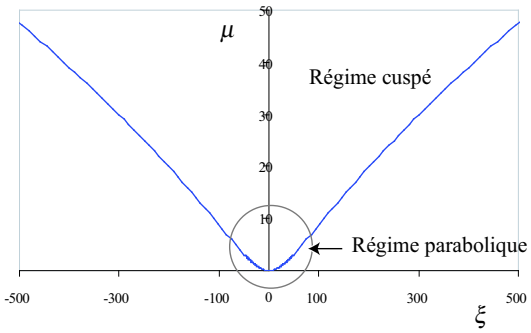


FIG. 6.19: Forme de la pointe liquide bidimensionnelle.

6.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Nous comparons ces résultats analytiques avec les résultats expérimentaux obtenus dans la section 6.3.3.

Décroissance exponentielle

L'accord qualitatif est très bon : nous avons bien mesuré une décroissance exponentielle du rayon de courbure de l'interface, en accord avec les équation 6.10 et 6.12.

Toutefois, le paramètre α déduit des données de la courbe 6.15 vaut 2 et est donc assez différent de la valeur 2π déduite de l'analyse de Jeong et Moffatt (ou de l'argument de Hinch). Nous voyons plusieurs raisons à cet écart :

- Tout d'abord, la géométrie étudiée par Jeong et Moffatt est différente de la nôtre. Nous avons en effet mesuré le rayon de courbure d'une pointe dimensionnelle induite par la rotation d'un seul rouleau et non de deux. Les conditions aux limites et la forme de l'interface ne sont donc pas symétriques. Nous pensons néanmoins que cette différence a peu d'importance : les échelles caractéristiques atteintes par le rayon de courbure de la pointe sont largement inférieures aux échelles externes du système. La forme de la pointe est auto-similaire et donc indépendante des conditions de son obtention.

- En outre, l'écoulement vertical au bout du rouleau (qui n'est pas collé à la paroi) peut induire des modifications de la géométrie de l'extrémité de la pointe. La résultante des contraintes de cet écoulement visqueux dirigée vers le bas tire sur l'extrémité de la pointe également vers le bas. Près des bords de la cuve, la pointe n'est pas exactement bidimensionnelle.

La longueur r_0 déduite des données expérimentales de la figure 6.15 est de l'ordre de 1 mm. Nous proposons deux interprétations (difficiles à discriminer) en utilisant l'argument dimensionnel du paragraphe 6.4.2.

- Si la longueur du cylindre est infinie, alors $4\eta/\rho V$ est le préfacteur de la décroissance exponentielle et vaut ici de l'ordre de 3 10^{-4}. Toutefois, cette expression suppose que l dépend de la vitesse, ce qui est en accord médiocre avec nos résultats expérimentaux, puisque nous n'observons aucune corrélation significative entre r_0 (mesuré pour différents couples de liquide) et la plage de vitesse explorée.

- Si le cylindre est de dimension finie, alors r_0 nous indique sa longueur qui est ici 1 mm environ, bien inférieure dans ce cas à celle de la cuve et indépendante des caractéristiques des fluides utilisées. La pointe n'est alors pas réellement bidimensionnelle.

Forme auto-similaire de la pointe

Une autre prédiction de Jeong et Moffatt concerne la forme de la pointe à deux dimensions (6.5 et 6.14). Nous avons mesuré cette forme à partir de photos identiques à celles de la figure 6.13. Une

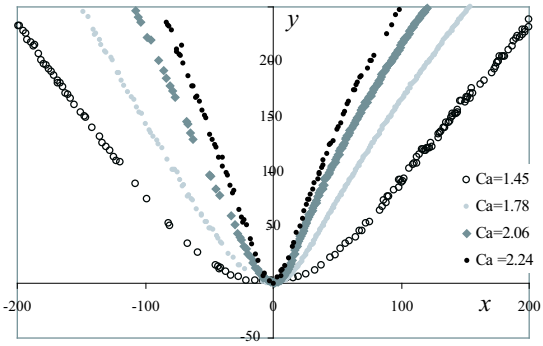


FIG. 6.20: Profil de la pointe pour différentes vitesses d'entraînement du rouleau. Les unités sont arbitraires et correspondent au grain de la photo.

série de profils obtenus avec de l'huile silicone 350 et de l'air est reportée sur la figure 6.20, pour différentes vitesses d'entraînement. Les nombres indiqués sur chaque axe correspondent à un nombre de pixels. Nous remarquons d'emblée deux points : tout d'abord, ces profils sont quasi-symétriques à cette échelle, en dépit de l'asymétrie de l'écoulement. Ensuite, plus le nombre capillaire est élevé, plus le rayon de courbure est petit, ce qui a déjà été observé figure 6.15.

À partir de ces profils interfaciaux, nous pouvons vérifier la validité de la forme auto-similaire donnée par Moffatt en réalisant le changement de variable indiqué avant l'équation 6.13 :

$$\xi = x \left[\exp\left(-\frac{\eta V}{\gamma}\right)\right]^{3/2} \tag{6.17}$$

$$\mu = y \left[\exp\left(-\frac{\eta V}{\gamma}\right)\right] \tag{6.18}$$

Nous représentons sur la figure 6.21 la variation de ξ en fonction de μ pour les différents profils de la figure 6.20. Ces profils correspondent à différents nombres capillaires d'entraînement et se superposent bien dans ce système de coordonnées. En outre, une équation du type de 6.14 les décrit parfaitement (trait plein noir sur la courbe 6.21). Ce résultat valide complètement l'approche de Jeong et Moffatt : pour des écoulements visqueux, le profil de la pointe liquide à deux dimensions est bien auto-similaire. Notons que le changement de variable indiqué par Moffatt n'est pas exactement celui que nous avons fait : il propose en effet de normer les profils par la fonction ϵ du rayon de courbure de l'équation 6.10 déterminé analytiquement $epsilon \sim \exp(-\pi Ca)$. Nous avons plutôt normé les équations 6.17 et 6.18 par la fonction ϵ du rayon de courbure mesuré expérimentalement $\epsilon \sim \exp(-Ca)$. La différence de facteur π déjà mentionnée persiste donc dans cette figure. Néanmoins, ce résultat confirme la validité de l'approche analytique : en normant les

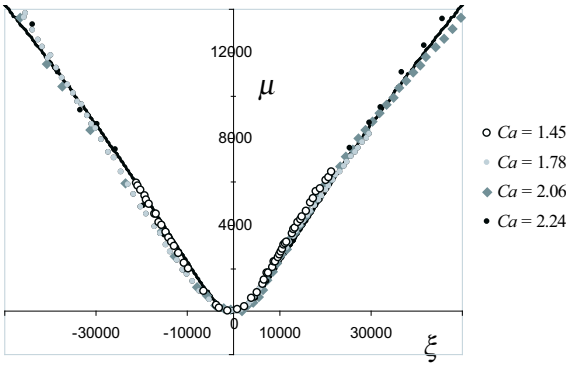


FIG. 6.21: Profil de la pointe pour différentes vitesses d'entraînement du rouleau dans le système de coordonnées (ξ, μ) donné par les équations 6.17 et 6.18 (les deux axes sont normalisés par le rayon de courbure de la pointe).

variables de longueur par rapport à la seule longueur accessible qui est le rayon de courbure de la pointe, nous avons montré expérimentalement que le profil est bien auto-similaire.

6.5 Conclusion

Nous avons réalisé un dispositif expérimental qui permet d'obtenir des pointes liquides, à partir d'un rouleau tournant à une interface et venant frapper le bain dont il s'est extrait. Au cours d'une expérience, plusieurs longueurs peuvent être définies : l'épaisseur entraînée par le rouleau, la profondeur du ménisque à l'endroit de l'impact (toutes deux de dimensions macroscopiques) et le rayon de courbure de la pointe liquide, qui est microscopique. Nous avons montré que les longueurs macroscopiques sont sensibles à la nature du liquide du bain, notamment à sa viscosité. En revanche, le rayon de courbure à l'extrémité de la pointe suit une loi de décroissance exponentielle indépendante de la viscosité du fluide supérieur, comme également observé par Cohen *et al.* dans les expériences d'aspiration sélective [44, 41]. Ces résultats sont en bon accord avec le modèle de Moffatt, à un coefficient numérique près. Ceci est probablement dû à ce que nous avons sondé le bord de la pointe et non son cœur. Nous avons par ailleurs vérifié que les différents profils obtenus pour différents nombres capillaires sont auto-similaires, en très bon accord avec les prédictions de Moffatt.

La loi de décroissance très forte du rayon de courbure soulève une question : quelles dimensions est-il possible d'atteindre ? Nous avons mesuré dans ce chapitre des rayons de courbure de l'ordre du micron pour des nombres capillaires allant jusqu'à 4. L'extrapolation de cette loi de décroissance donne des rayons de l'ordre de l'Angström pour des nombres capillaires de 8. Est-il possible d'atteindre ces échelles pour lesquelles les équations de l'hydrodynamique ne sont plus valables ?

Chapitre 7

Fracture de l'interface

Sommaire

7.1 Introduction **145**

7.2 Modèle d'Eggers **146**

7.2.1 Les équations 146

7.2.2 Renormalisation 148

7.3 Expérience des rouleaux **149**

7.3.1 Mesure du seuil 149

7.3.2 Résultats 151

7.4 Stabilité du film **155**

7.4.1 Expérience 155

7.4.2 Célérité de rétraction 158

7.4.3 Interprétation 159

7.4.4 Critère de stabilité de la lame 162

7.4.5 Équivalence des deux critères 165

7.5 Expérience du jet **167**

7.6 Conclusion **169**

7.1 Introduction

Le modèle de Jeong et Moffatt [79] brièvement décrit dans le chapitre 6 permet de comprendre la forme d'une pointe liquide bidimensionnelle obtenue (par exemple) en faisant impacter une tranche ou un jet de liquide sur un bain de même nature [82, 83]. Ce modèle est proposé dans la limite où le liquide remplissant le bassin est très visqueux alors que la viscosité du fluide environnant est nulle. Le profil de l'interface est bien décrit par une fonction autosimilaire et le rayon de courbure à l'extrémité inférieure de la pointe décroît exponentiellement avec le nombre capillaire de l'écoulement. Il a été démontré (nous n'avons pas discuté ce point) que les solutions proposées

dans ce modèle sont stables pour tous les nombres capillaires [79]. Expérimentalement, nous avons vérifié la validité de cette loi jusqu'à des nombres capillaires de l'ordre de 4. Nous présentons dans ce chapitre ce qu'il advient de cette pointe fluide pour des vitesses d'entraînement supérieures à $4\gamma/\eta$. Nous commençons par exposer un modèle récemment proposé par Eggers [57]. Ensuite, nous présentons les résultats expérimentaux obtenus avec Frédéric Restagno pour l'expérience du rouleau tournant et les comparons aux modèles de Moffatt et Eggers. Nous montrons ensuite que le seuil d'entraînement d'air correspond au seuil de stabilité du film, en mesurant la vitesse de rétraction du film. Enfin, nous conduisons la même analyse pour la deuxième expérience mettant en jeu des pointes liquides à deux dimensions : un jet tombant dans un bain de liquide visqueux en utilisant nos résultats et ceux de Lin [95].

7.2 Modèle d'Eggers

Nous présentons ici les grandes lignes d'un modèle récemment développé par Eggers [57]. À grand nombre capillaire, la pointe est très acérée et l'effet de la viscosité de l'air ne peut plus être négligé. L'air au-dessus de l'interface, entraîné par cisaillement, s'écoule vers l'étroite pointe liquide. Il ne peut s'accumuler dans cet espace confiné et s'échappe vers le haut, créant ainsi un écoulement de recirculation analogue à un écoulement de lubrification à l'intérieur de la pointe (figure 7.2). Le

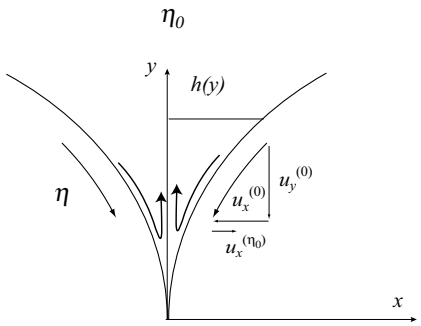


FIG. 7.1: Profil de la pointe.

profil de l'interface calculé par Moffatt est noté $h(y)$. Le champ de vitesse dans le fluide visqueux calculé sans tenir compte de l'écoulement d'air est noté $u^{(0)}$ et le champ de vitesse additionnel créé par la recirculation du fluide supérieur (l'air) $u^{(\lambda)}$, λ désignant le rapport η_0/η des deux viscosités.

7.2.1 Les équations

Eggers calcule analytiquement le profil de l'interface perturbée par l'écoulement du fluide supérieur. Il trouve que la pointe est détruite dès que le rayon de courbure de l'interface est plus petit qu'une valeur dépendant du rapport des deux viscosités. Nous présentons ici quelques arguments dimensionnels permettant de comprendre son calcul.

Forme auto-similaire de l'interface

Loin de la pointe, le profil de l'interface est donné par l'équation 6.5 du chapitre 6 (en normant $h(y)$ et y par une longueur caractéristique du problème comme la profondeur d'enfoncement du rouleau) :

$$h(y)^2 y - (2a - y)(y + a + 1)^2 = 0$$

qui se réécrit, comme nous l'avons déjà vu (équation 6.16), en posant $a = -1/3 + \epsilon$ et $y - 2a = Y$:

$$h(Y) \sim Y^{3/2} \tag{7.1}$$

Dans la limite où la viscosité du fluide supérieur est nulle, il existe donc une relation entre la pente du profil de l'interface (déterminée par Moffatt) et les composantes $u_x^{(0)}$ et $u_y^{(0)}$ du champ de vitesse non perturbé par l'écoulement de l'air :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{u_x^{(0)}}{u_y^{(0)}} \tag{7.2}$$

Cette relation est modifiée dès que la viscosité du fluide supérieur n'est pas nulle. Elle devient :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{u_x^{(0)} + u_x^{(\lambda)}}{u_y^{(0)}} \tag{7.3}$$

Écoulement de lubrification

En outre, les variations de pression p_{lub} peuvent être calculées en fonction de la vitesse de l'écoulement et de la largeur de la pointe [134], ce qui donne :

$$\frac{\partial p_{lub}}{\partial y} = 3\eta_0 \, \frac{u_y^{(0)}}{h^2(y)}$$

La largeur de la singularité variant comme $y^{3/2}$, on peut écrire, en notant $\lambda = \eta_0/\eta$:

$$p_{lub} \sim \lambda y^{-2} \tag{7.4}$$

Fracture

Le champ de vitesse associé à la recirculation de l'air $u^{(\lambda)}$ peut-être calculé analytiquement en utilisant des résultats sur les fractures. La pointe ressemble en effet à une fracture bidimensionnelle entrant dans un milieu fluide. Ce problème a été résolu analytiquement par Muskhelishvili [112] qui montre qu'il existe une relation de proportionnalité entre la perturbation en vitesse et la pression de lubrification donnée par l'équation :

$$u_x^{(\lambda)} = \int_0^\infty p_{lub}(y') m(y'/y) \mathrm{d}y$$

où m est une fonction définie par la relation :

$$m(x) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right)$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur courageux à la référence [112]. L'important pour nous est que la composante horizontale du champ de vitesse associé à l'écoulement d'air $u_x^{(\lambda)}$ s'écrive comme :

$$u_x^{(\lambda)} \sim p_{lub}\ y \tag{7.5}$$

7.2.2 Renormalisation

Eggers propose de renormaliser toutes les équations en utilisant comme variable auto-similaire $v = yr^{-1/2}$, r désignant le rayon de courbure de l'interface. L'équation 7.1 se réécrit en :

$$h \sim r^{3/4} v^{3/2}$$

On déduit de cette équation la variation de la pente :

$$\frac{\partial h}{\partial y} \sim r^{1/4} v^{1/2}$$

En outre, la composante verticale de la vitesse étant constante, on obtient en utilisant l'équation 7.2 et en oubliant la dépendance en v :

$$u_x^{(0)} \sim r^{1/4} \tag{7.6}$$

La pression de lubrification s'évalue simplement à partir de l'équation 8.5, ce qui donne :

$$p_{lub} \sim \lambda r^{-1}$$

L'équation 7.5, permet alors d'évaluer $u_x^{(\lambda)}$:

$$u_x^{(\lambda)} \sim \lambda r^{-1/2} \tag{7.7}$$

Ces deux vitesses $u_x^{(0)}$ et $u_x^{(\lambda)}$, de sens opposés (*cf.* figure 7.2), deviennent du même ordre de grandeur lorsque $r < r_c$ où r_c est donné par l'équation :

$$r_c \sim \lambda^{4/3} \tag{7.8}$$

Dès que la condition donnée par l'équation 7.8 est vérifiée, la pointe est détruite : ses parois s'élargissent ($u_x^{(\lambda)} > u_x^{(0)}$), supprimant ainsi la solution auto-similaire. Par ailleurs, le rayon de courbure de la pointe r est donné par la relation (équation 6.10) :

$$r \sim \exp\left(-2\pi Ca\right) \tag{7.9}$$

Des équations 7.8 et 7.9, il vient que la pointe liquide est détruite lorsque le nombre capillaire de l'écoulement dépasse une valeur seuil Ca_c qui dépend du rapport $\lambda = \eta_0/\eta$ des deux viscosités selon :

$$Ca_c \sim -\frac{2}{3\pi} \ln \lambda \tag{7.10}$$

Notons qu'en utilisant la variable de normalisation $w = yr^{-1}$ suggérée par Moffatt, le même raisonnement conduit à un résultat légèrement différent pour le rayon courbure critique de l'interface :

$$r_c \sim \lambda^{-2/3} \quad \text{d'où} \quad Ca_c \sim -\frac{1}{3\pi} \ln \lambda$$

Le modèle d'Eggers a été vérifié numériquement dans le cadre des résultats d'Antonovskii [2]. Notons également que son approche, qui mêle à la fois des résultats d'hydrodynamique (équation de la lubrification) et de fracture, a été aussi mise en œuvre en géophysique, notamment par Lister [96] et Spence [148].

7.3 Expérience des rouleaux

7.3.1 Mesure du seuil

Premiers résultats

La pointe liquide ne peut effectivement pas supporter des nombres capillaires trop élevés : lorsque la vitesse dépasse une valeur seuil V_c (de l'ordre de 30 cm/s), l'interface cède et une fine lame d'air est entraînée dans le bassin. Cette lame d'air, indiquée par une flèche, est visible sur la figure 7.2.

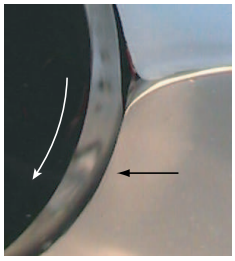


Fig. 7.2: Au-delà d'une vitesse seuil, la pointe bidimensionnelle étudiée au chapitre 6 cède et une mince lame d'air (soulignée par la flèche noire) est entraînée dans le bassin.

Nous pouvons également l'observer sur la figure 7.3 où elle apparaît de façon homogène sur toute la longueur du rouleau. Notons que, sur la figure 7.3, elle est vue sous un angle d'incidence relativement élevé, supérieur à l'angle de réflexion total et est donc totalement réfléchissante. Elle commence par suivre les lignes de courant de l'écoulement de liquide visqueux, s'enroule autour du cylindre avant de se déstabiliser à l'autre extrémité sous forme de bulles (ce qu'on ne voit pas très bien sur la figure 7.3). Nous discuterons par la suite, les propriétés de cette lame d'air, notamment sa stabilité, son épaisseur et sa forme. Néanmoins nous pouvons d'ores et déjà remarquer que ce système est très proche d'une plaque tirée verticalement hors d'un bain de liquide qu'elle mouille partiellement. Pour des faibles vitesses, la position de la ligne triple est fixe alors qu'au delà d'une vitesse seuil, elle ne trouve plus de position d'équilibre stable et la plaque entraîne un film liquide d'épaisseur finie [67, 123].

FIG. 7.3: Photographie du rouleau et de la lame d'air entraînée prise par en-dessous, et de trois-quart.

Liquide pollué

Le seuil d'entraînement d'air dans le liquide visqueux est affecté si le liquide de la cuve contient des petits objets à sa surface (petites particules, bulles). Ces objets advectés par l'écoulement rentrent en collision avec la pointe et la perturbent localement. L'interface est alors crevée localement, sur une zone qui s'agrandit si la vitesse est supérieure à la vitesse seuil $V > V_c$ et qui se rétracte dans le cas contraire ($V < V_c$). Cette petite lame d'air précurseur de l'entraînement global

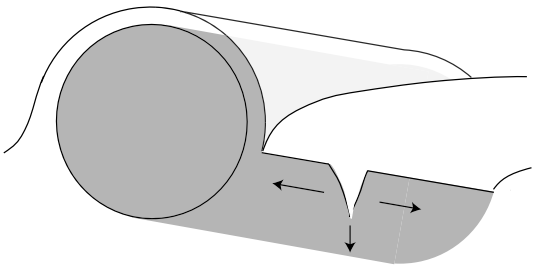


FIG. 7.4: L'interface est localement crevée par une fine lame d'air triangulaire. Si $V > V_c$, cette lame s'agrandit et envahit toute la largeur des rouleaux comme schématisé par le dessin à l'aide de flèches, si $V < V_c$ elle se rétracte et disparaît.

peut être localisée n'importe où sur la largeur des rouleaux. Dans ces conditions, la vitesse seuil d'entraînement de l'air dans la cuve est définie avec une précision inférieure à 10%.

Liquide propre

Au contraire, si le fluide de la cuve est très propre et homogène, l'incertitude sur la mesure de cette vitesse seuil est plus grande. La pointe liquide existe alors plus longtemps et elle est métastable. Le précurseur de l'entraînement général est également une petite lame d'air qui peut être localisée n'importe où dans la largeur. Nous observons également qu'à l'approche du seuil d'entraînement

d'air dans du glycérol, les bords de la pointe frissonnent (c'est-à-dire oscillent avec une petite amplitude). En observant la lame d'air à l'aide d'une lunette optique, nous voyons qu'elle émet de manière sporadique des filaments de liquide très fin, pratiquement invisibles à l'œil (*cf.* figure 7.5). Ce filament est très proche de celui observé par Taylor [154] en plaçant une goutte de liquide

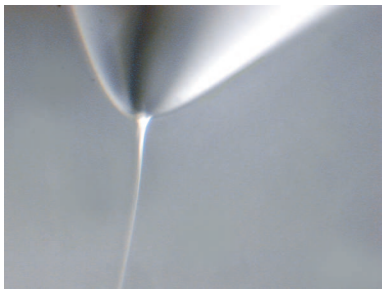


FIG. 7.5: Pointe liquide à une interface d'air et de glycérol émettant de manière sporadique un filament d'air (tridimensionnel) très fin.

dans un écoulement élongationnel. En outre, il a été récemment montré [146] dans une expérience de tirage d'une fibre dans un bain que ces filaments sont des signes précurseurs d'un entraînement d'air plus global. Notons que nous observons ce phénomène en utilisant du glycérol comme liquide inférieur, mais plus rarement avec de l'huile. Ceci est peut être dû à la présence de molécules tensioactives, adsorbées à l'interface, et susceptibles d'abaisser localement la valeur de la tension et donc le seuil d'entraînement d'air. Ceci expliquerait pourquoi ce phénomène n'est visible que quand la cuve est propre : ces surfactants (adsorbés sur la surface pendant que les bulles du liquide remontent lentement) sont très rapidement précipités dans le liquide par la pointe. Cohen *et al.* [41] ont fait des observations similaires.

7.3.2 Résultats

Glycérol comme liquide inférieur

Nous avons mesuré le nombre capillaire au-delà duquel une lame du fluide supérieur stable est entraînée dans le bain liquide. Dans une première série d'expériences, le liquide inférieur est un mélange de glycérol et d'eau (plus ou moins dilué), dont la viscosité η est comprise entre 250 et 1500 mPa.s. Le fluide supérieur est de l'air $\eta_0 = 1.8\ 10^{-3}$ mPa.s ou des huiles (alcanes et huiles silicones) de différentes viscosités 0.3 mPa.s $< \eta_0 <$ 83 mPa.s. La tension interfaciale entre les deux milieux, mesurée pour chaque couple de liquide par la méthode de la goutte pendante, varie entre 62 mN/m (air/glycérol dilué) et 25 mN/m (huile silicone/glycérol). Le nombre capillaire seuil d'entraînement Ca_c est représenté en fonction du rapport des deux viscosités η_0/η sur la figure 7.6, par des disques noirs pleins (•) lorsqu'il s'agit du couple air/glycérol (plus ou moins dilué) et par des cercles (○)lorsqu'il s'agit du couple huile/glycérol. L'échelle est semi-logarithmique. Les

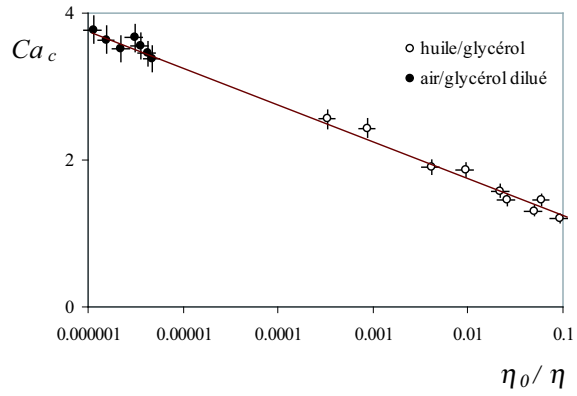


FIG. 7.6: Nombre capillaire seuil d'entraînement d'air Ca_c en fonction du rapport η_0/η des viscosités du fluide supérieur et du liquide inférieur, en échelle semi-logarithmique. La droite a pour équation $Ca_c = -0.22\ln(\eta_0/\eta) + 0.74$.

données expérimentales sont en excellent accord avec le modèle d'Eggers sur cinq décades : le nombre capillaire seuil décroît linéairement avec le logarithme du rapport des deux viscosités comme prédit par l'équation 7.10. Ainsi, plus les viscosités des deux fluides sont proches, plus il est facile d'entraîner une lame du fluide supérieur dans le bain. Ceci se comprend aisément : l'entraînement d'un liquide par un autre est optimum lorsque les viscosités sont égales (la condition de continuité de la contrainte au passage de l'interface fait en effet intervenir le rapport des viscosités des deux fluides). La droite tracée sur la figure 7.6 a pour équation $Ca_c = -0.22\ln(\eta_0/\eta)+0.74$. Plusieurs points méritent d'être notés.

- La pente de cette droite est en remarquable accord avec les prédictions d'Eggers [57] : l'équation 7.10 prédit en effet une valeur de $2/3\pi = 0.21$. Elle est, par contre, en désaccord avec les résultats expérimentaux du chapitre 6 : nous avions trouvé expérimentalement une loi de décroissance pour le rayon de courbure de la pointe liquide r certes exponentielle, mais avec un contraste numérique moins fort que celui prédit par Moffatt. La réunion de ces résultats expérimentaux et de la théorie d'Eggers prévoit une pente de 2/3, donc plus éloignée de la valeur déduite de la figure 7.6. Cet écart pourrait venir du caractère tridimensionnel de la pointe à proximité des bords de la cuve, que nous avons déjà discuté aux paragraphes 6.4.4 et 7.3.1.

- L'extrapolation des données de la figure 7.6 indique que le nombre capillaire seuil d'entraînement est nul pour des fluides dont les viscosités sont dans un rapport :

$$\eta/\eta_0 = \exp(0.74/0.22) = 30$$

  , donc pour un système où l'élément le plus visqueux est le fluide supérieur. Cette configuration est impossible à réaliser avec ce système expérimental : le rouleau entraîne toujours avec lui le liquide de plus grande viscosité (en négligeant les effets de mouillage qui peuvent induire

de petites corrections). Si ce liquide se trouve en haut, alors il se formera un ménisque à l'envers et le rôle des deux fluides sera inversé : le liquide entraînant sera le liquide du haut et le liquide entraîné celui du bas (figure 6.11). Il est donc impossible de travailler avec des fluides dont les viscosités sont dans un rapport supérieur à 1 et donc également impossible d'atteindre des nombres capillaires au seuil nuls ou négatifs. C'est rassurant : le nombre capillaire seuil d'entraînement de deux fluides non miscibles est nécessairement positif puisqu'il faut injecter de l'énergie dans le système pour créer de l'interface, celle-ci ne pouvant apparaître spontanément.

- Il conviendrait de vérifier que la valeur -0.22 de la pente de la courbe 7.6 ne dépend pas de certains paramètres comme la hauteur de remplissage de la cuve (ici jusqu'à la moitié du rouleau). Nous avons en effet observé que le nombre capillaire seuil d'entraînement diminue quand le rouleau est moins immergé.
- Les descriptions de Moffatt et d'Eggers négligent tout effet gravitaire. Les points correspondant à des couples air/glycérol et huile/glycérol (pour lesquels les contrastes de densité varient pourtant d'un facteur quatre) se rejoignent bien sur la même courbe. Nous aurions pu également vérifier cette hypothèse en mesurant le seuil d'entraînement pour un système pour lequel les effets de la gravité sont inversés, en plaçant un fluide dense mais peu visqueux en bas (de l'eau par exemple) et un fluide plus visqueux et moins dense au-dessus (de l'huile silicone) figure 6.11. Si la gravité ne joue aucun rôle, le nombre capillaire seuil d'entraînement d'un tel système doit se retrouver sur la courbe de la figure 7.6.

Huile silicone comme liquide inférieur

Dans une deuxième série d'expériences, nous avons changé la nature du liquide inférieur qui est désormais de l'huile silicone de diverses viscosités (95 mPa.s $< \eta <$ 970 mPa.s). Le liquide supérieur est de l'air ($\eta_0 = 1.2\ 10^{-3}$ mPa.s) ou de l'éthanol ($\eta_0 = 1.2$ mPa.s) non miscible avec les huiles. Sur la figure 7.7, nous ajoutons aux données de la figure 7.6 les points correspondant aux expériences menées avec de l'huile comme liquide inférieur. On remarque différents points :

- Le point correspondant au couple éthanol / huile silicone rejoint parfaitement les points expérimentaux obtenus avec le glycérol. Ceci mérite d'être noté : la tension interfaciale entre ces deux liquides est très faible $\gamma = 2 \pm 1$ mN/m. L'entraînement de l'éthanol dans l'huile se fait donc pour des vitesses extrêmement petites. Ceci confirme que le nombre capillaire est effectivement le nombre sans dimension à considérer pour décrire ces phénomènes.
- Les points correspondant aux données obtenues pour des couples air/huile peu visqueuse (95 mPa.s $< \eta <$ 160 mPa.s) rejoignent également la courbe du glycérol.
- Ce n'est plus le cas pour les couples air/huile silicone de viscosité 350 mPa.s et 970 mPa.s. Pour ce dernier, le nombre capillaire d'entraînement $Ca_c \sim 13$ est trois fois plus important que pour

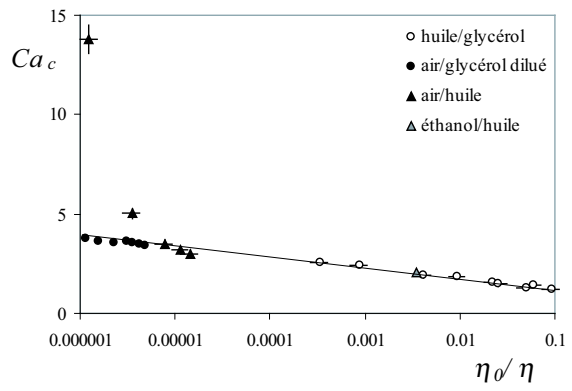


FIG. 7.7: Nombre capillaire seuil d'entraînement d'air Ca_c en fonction du rapport η_0/η des viscosités du fluide supérieur et du liquide inférieur, en échelle semi-logarithmique. La droite a pour équation $Ca_c = -0.22\ln(\eta_0/\eta) + 0.74$.

le glycérol ($Ca_c \sim 4$), ce qui ne signifie pas qu'il faut augmenter la vitesse d'un facteur trois : les tensions de surface sont dans un rapport inverse du même ordre. Cet écart entre huile silicone et glycérol pourrait être dû au caractère non-newtonien des huiles. Elles proviennent de la société Rhodia qui indique que la viscosité de l'huile silicone 970 mPa.s est, par exemple, divisée par deux pour un taux de cisaillement de l'ordre 100 000 s^{-1}. Cette valeur semble énorme, mais nous avons vu au chapitre 6 que les dimensions caractéristiques de la pointe liquide pouvaient facilement atteindre des valeurs de l'ordre du micron. La vitesse seuil d'entraînement de l'huile silicone 970 mPa.s est de l'ordre de 0.5 m/s. Le gradient de cisaillement (noté $\dot{\gamma}$) peut donc atteindre des valeurs aussi élevées que $\dot{\gamma} \sim 0.5/10^{-6} \sim 500000\ s^{-1}$ suffisantes pour diminuer la viscosité de l'huile considérée (et par conséquent le nombre capillaire d'entraînement) d'un facteur deux ou trois.

Résumé La vitesse seuil d'entraînement d'un liquide dans un autre est donc, dans la géométrie de l'expérience de Joseph, parfaitement décrite par les prédictions d'Eggers et varie comme :

$$V_c \sim \frac{\gamma}{\eta} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) \tag{7.11}$$

C'est une fonction décroissante de la viscosité η à η_0 donné (l'argument du logarithme est toujours supérieur à un) : plus le liquide est visqueux et plus l'entraînement d'air se fait facilement. Retenons que cette décroissance est (un peu) plus faible qu'une décroissance en $1/\eta$, signature d'un entraînement se faisant à nombre capillaire constant. Nous nous proposons à présent d'étudier la stabilité du film entraîné.

7.4 Stabilité du film

Une lame d'air statique dans du liquide n'est pas stable et se rétracte spontanément sous l'effet de la tension de surface (qui s'oppose à cet excès de surface) pour former finalement des bulles qui remontent lentement à la surface. Néanmoins, le film d'air est visible, comme on le voit par exemple sur la figure 7.3. Qu'advient-il de ce film si on le perce ? Le rayon du trou ainsi formé croît-il jusqu'à envahir tout le film ?

7.4.1 Expérience

Nous avons crevé le film d'air (ou de liquide) afin de suivre l'évolution du rayon de ces trous au cours du temps. Notons que le retrait spontané d'un film fluide d'une surface (solide ou liquide) est appelé démouillage et a été étudié très complètement par F. Brochard-Wyart et son équipe dans les années 90. Ils ont mis en évidence qu'un film métastable de liquide visqueux déposé sur un substrat solide démouillait : si un trou nuclée, il s'ouvre à vitesse constante dans le film et est bordé d'un bourrelet qui collecte le liquide [21, 22, 66, 132]. Ils ont également étudié le démouillage d'un film de liquide sur un substrat fluide, la difficulté consiste alors à prendre en compte les écoulements dans le substrat lui-même [100]. Enfin, ils ont étudié le "démouillage" de films nus, c'est-à-dire sans tensioactifs et très visqueux : on parlera alors plutôt d'éclatement [48]. Une revue de ces travaux est donnée dans la référence [69].

Zone de rétraction

Le film d'air est perforé à l'aide d'un fil rigide disposé par rapport au film comme l'indique la figure 7.8. Le rouleau solide est mis en rotation à vitesse constante et nous maintenons solidement

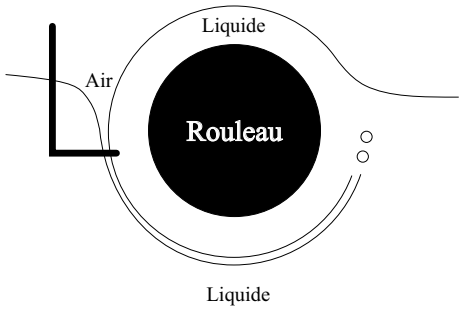


FIG. 7.8: Une tige solide qui perfore la lame est placée dans la cuve.

le fil métallique afin qu'il ne soit pas advecté par le liquide en rotation. Le rayon du fil est égal à 1 mm. Le fil crève la lame d'air qui disparaît localement faisant apparaître une zone de rétraction (ou de démouillage) triangulaire. Une photographie de la lame d'air ainsi perturbée est montrée sur la figure 7.9 où le liquide qui remplit la cuve est du glycérol. Cette photographie a été prise tôt après le début de l'entraînement d'air afin que le liquide ne soit pas trop contaminé par les bulles issues

de la déstabilisation de la lame. La photographie est prise au flash, ainsi le temps d'exposition est relativement court (inférieur à 1/30 s), ce qui permet de voir les fluctuations de position du film d'air essentiellement localisées au bas du rouleau. De telles fluctuations ont également été mises en évidence dans le cas d'une lame de liquide en mouvement dans de l'air par Clanet *et al.* [160, 159]. Nous notons ϕ l'angle d'ouverture de la lame. À vitesse de rotation du rouleau donnée et

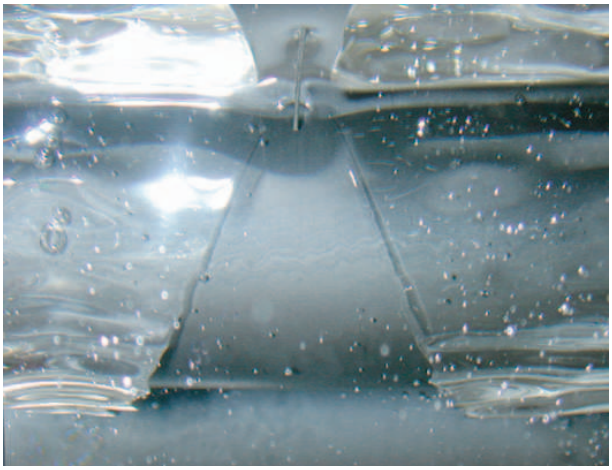


FIG. 7.9: Lame d'air qui se rétracte lorsqu'elle est perforée par un fil rigide. On aperçoit le reflet du film d'air perturbé dans la partie supérieure de la photographie. Elle est prise au flash avec un temps d'exposition inférieur à 1/30 s. Cet instantané permet d'observer des fluctuations de position de la lame d'air dans sa partie inférieure.

en maintenant le fil immobile, la zone de démouillage de la figure 7.8 est stationnaire. Notons que l'angle de la zone démouillée ϕ n'est pas modifié par la position du fil sur la lame : ϕ est indépendant de l'altitude à laquelle se trouve le fil.

Variation de l'angle de démouillage avec la vitesse d'entraînement

En revanche, ϕ dépend de la vitesse d'entraînement du liquide V (définie sur la figure 6.4). L'angle ϕ est représenté sur la figure 7.10 en fonction de la vitesse d'entraînement V, pour une cuve

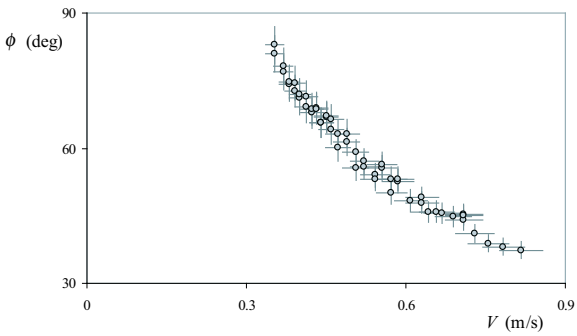


FIG. 7.10: Angle ϕ formé par la zone de rétraction en fonction de la vitesse d'entraînement V.

remplie de glycérol ($\eta = 1.1$ Pa.s). Le fluide entraîné est de l'air. Nous notons plusieurs points.

- L'angle ϕ n'est pas défini pour $V < 0.35$ m/s et $V > 0.85$ m/s. En-dessous d'une vitesse de 0.35 m/s, le nombre capillaire de l'écoulement n'a pas atteint la valeur seuil définie au paragraphe 7.3 et on n'entraîne pas d'air. En outre, il n'est pas possible de dépasser la valeur de 0.9 m/s la puissance des moteurs entraînant le rouleau étant limitée.
- L'angle ϕ est une fonction décroissante de la vitesse d'entraînement V : plus celle-ci est grande, plus la zone de démouillage est fermée. ϕ décroît ainsi de 82° à 37°.
- L'angle ϕ est défini à 10% près. L'incertitude de mesure a été évaluée en prenant plusieurs photographies de la zone de rétraction à la même vitesse.

Variation de l'angle de rétraction avec la nature du liquide

L'ouverture de la zone de rétraction dépend également de la nature du liquide qui soutient le film. Nous reportons sur la figure 7.11, les données de la figure 7.10 auxquelles nous avons ajouté des mesures de l'angle de rétraction en fonction de la vitesse obtenue avec des mélanges d'eau et de glycérol de différentes viscosités. Les constatations du paragraphe précédent peuvent être

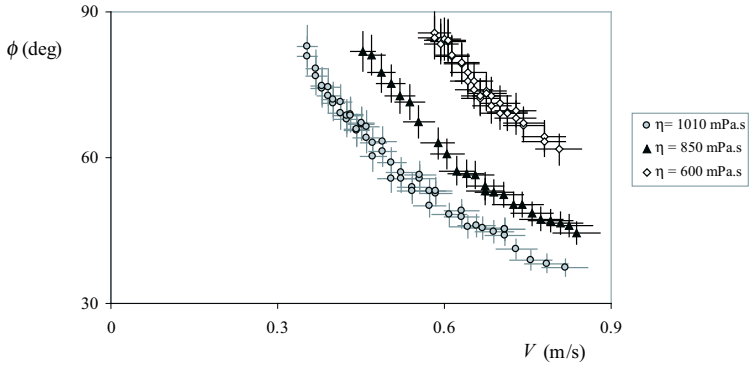


FIG. 7.11: Angle ϕ formé par la zone de rétraction en fonction de la vitesse d'entraînement V pour différents mélanges d'eau et de glycérol.

complétées.

- L'angle de rétraction ϕ est une fonction décroissante de la vitesse d'entraînement V pour tous les liquides utilisés.
- Plus la viscosité du fluide est élevée, plus la plage sur laquelle l'angle ϕ est définie est grande, puisque la vitesse seuil d'entraînement est une fonction décroissante de la viscosité du liquide.
- En outre, à vitesse d'entraînement constante, l'angle d'ouverture de la zone démouillée est d'autant plus grand que la viscosité du liquide dans lequel le film d'air est advecté est petite.

7.4.2 Célérité de rétraction

Si un trou nuclée dans un film instable, son rayon sera une fonction croissante du temps (*cf.* les travaux de Brochard-Wyart *et al.* qui ont mesuré la vitesse d'ouverture d'un trou dans un film de liquide posé sur un substrat solide, liquide ou même suspendu [100, 23, 132, 66, 22, 21, 69]). Nous notons c la vitesse de rétraction à laquelle s'ouvre le trou. Nous allons voir que l'angle observé est lié au rapport de cette vitesse c et de la vitesse d'advection V.

Cône de Mach

Plaçons-nous dans le référentiel lié au liquide en mouvement. Le fil métallique se déplace alors dans le film à une vitesse $-V$. Si ce point se meut à une vitesse inférieure à la vitesse de rétraction, alors le rayon du trou qu'il a engendré va croître en amont du fil jusqu'à envahir tout le film (*cf.* schéma central de la figure 7.12). En revanche, si ce point se meut à une vitesse supérieure à la célérité de démouillage, le trou engendré se déplacera plus vite que la vitesse à laquelle il croît. Il ne pourra provoquer la résorption totale du film, puisqu'il ne pourra pas atteindre le film qui est devant l'obstacle. Il apparaît en aval de ce point un sillage. Cet effet est schématisé sur la figure 7.12 où le trou est représenté à des intervalles de temps constant par une succession de cercles concentriques. Ce phénomène est très classique et se retrouve dans bien des domaines de la physique (propagation

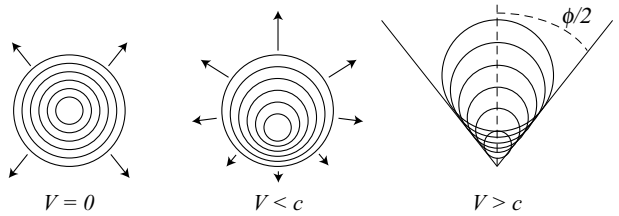


Fig. 7.12: Schéma illustrant les différentes situations selon la valeur de la vitesse V d'advection par rapport à la vitesse de démouillage. Si le solide est immobile, le centre du trou est également immobile. Si le solide est en mouvement à une vitesse inférieure à la vitesse de démouillage, alors le trou peut envahir tout le film (notamment la partie du film qui est devant l'obstacle solide). Enfin si le solide va plus vite que la vitesse de croissance du trou, le trou ne peut envahir tout le film et seule une zone triangulaire de demi-angle au sommet $\phi/2$ démouille.

d'onde de compression dans des écoulements supersoniques, effet Cerenkov). Nous déduisons de la figure 7.12 la relation exprimée pour la première fois par Taylor [156] entre le demi-angle au sommet $\phi/2$ et les vitesses V et c :

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{c}{V} \tag{7.12}$$

Cet effet apparaît fréquemment en matière molle et peut être par exemple utilisé pour avoir accès à des composantes locales du champ de vitesse [140, 160, 25]. Notons qu'une zone triangulaire de démouillage apparaît également lorsqu'un film de liquide est tiré sur un solide que ce liquide ne mouille que partiellement [12, 117].

Mesure de la célérité de démouillage

Nous pouvons déduire de la formule 7.12 la célérité de rétraction d'une lame d'air suspendue dans un liquide, la vitesse V d'advection et le demi-angle au sommet $\phi/2$ étant tous deux mesurés et connus. Nous avons donc représenté sur la figure 7.13 la quantité $c = V\sin(\phi/2)$ en fonction de la vitesse d'advection V. La droite tracée sur la figure 7.13 est la première bissectrice. Nous

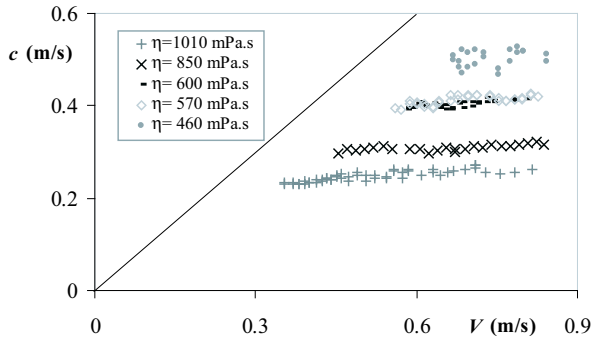


FIG. 7.13: Célérité de rétraction c d'un film d'air advecté dans des liquides de viscosités variées, en fonction de la vitesse d'entraînement V. La droite tracée est la première bissectrice. Elle met en évidence que la célérité de rétraction est toujours inférieure à la vitesse d'entraînement.

remarquons que :

- Les deux vitesses sont du même ordre de grandeur, environ 0.5 m/s.
- La célérité de rétraction est indépendante de la vitesse d'entraînement V (on note toutefois une très légère croissance).
- La célérité de rétraction dépend de la viscosité du liquide dans lequel la lame d'air est soutenue. Elle est d'autant plus grande que le liquide est peu visqueux.
- Enfin, c est toujours inférieur à la vitesse d'entraînement. Dans la gamme de vitesses V explorées, le film d'air est donc stable puisque les éventuels trous pouvant nucléer en son sein sont évacués par l'écoulement avant d'avoir eu le temps d'envahir tout le film.

7.4.3 Interprétation

Bilan des forces

Ces résultats peuvent être interprétés à la lueur de récentes études sur le démouillage entre deux liquides. Brochard-Wyart *et al.* [100, 23] ont placé un film de liquide sur un substrat d'un autre liquide. Le paramètre d'étalement est négatif (c'est-à-dire que les forces de surface ont tendance à minimiser l'interface commune entre les deux liquides). Ces auteurs ont montré que si un trou assez grand est percé dans son film, le rayon de celui-ci croît à vitesse constante et son extrémité est bordé par un bourrelet qui collecte le liquide. La force motrice est d'origine capillaire ou gravitaire,

mais l'expression de la dissipation (qui équilibre la capillarité pour donner une vitesse constante) peut être complexe. Selon la nature des liquides et l'épaisseur du film, Brochard-Wyart *et al.* ont identifié théoriquement quatre situations : un régime inertiel (la vitesse d'ouverture dépend alors de l'épaisseur du film), un régime où la dissipation est visqueuse et se fait dans le film, un régime où la dissipation visqueuse se fait dans le substrat liquide et enfin un régime viscoélastique [69]. La prise en compte des effets visqueux (dans le régime ou la dissipation se fait principalement dans le substrat liquide) n'est pas triviale [100] : le mouvement du liquide contenu dans le film engendre un champ de vitesse non nul dans le substrat liquide. Or le bourrelet de liquide bordant le film en train de démouiller peut être assimilé à un cylindre semi-infini et c'est l'écoulement du film du substrat visqueux autour de ce bourrelet qui crée une force de traînée (dont nous avons déjà vu une expression au chapitre 6 [73]). On montre ainsi que la célérité de démouillage doit être corrigée par un facteur logarithmique faisant intervenir l'épaisseur du bourrelet et une autre longueur [100].

Nous conduisons la même analyse dans le cas du film d'air. Nous montrerons au chapitre 8 que le film d'air entraîné dans le bain est également bordé d'un bourrelet. La résultante des forces capillaires tire le bourrelet perpendiculairement au bord de la lame avec une intensité égale à 2γ, alors que la force de traînée visqueuse sur le bourrelet (qui peut être assimilée à un cylindre infini) s'oppose au mouvement.

La composante du champ de vitesse de l'écoulement du fluide autour du bourrelet sur l'axe perpendiculaire à la lame s'écrit $V\sin(\phi/2)$. La force de traînée visqueuse sur un cylindre a donc une intensité égale à (comme vu au chapitre 6) :

$$\frac{4\pi\eta V\sin(\phi/2)}{(C-1/2-\ln(l/\xi_M))}$$

où ξ_M est le rayon du bourrelet, C la constante d'Euler ($\simeq 0.57$) et l est la longueur du cylindre s'il est de taille finie [72] ou $4\eta/\rho V$ s'il peut être considéré comme infini [72, 73]. En écrivant l'égalité des deux forces et en remplaçant le produit $V\sin(\phi/2)$ par c, on obtient :

$$c = \frac{\gamma}{2\pi\eta}\ln\frac{l}{\xi_M} \tag{7.13}$$

Expression de la célérité de rétraction

Pour conduire une analyse plus détaillée, il convient de connaître l'expression de l : est-ce une dimension de la cuve (et alors c est proportionnelle au rapport γ/η) ou une longueur calculée à partir des grandeurs caractéristiques de l'écoulement (l est alors une fonction de la vitesse d'entraînement V ou de la viscosité η, et l'expression de c est plus compliquée) ? Nous portons sur la figure 7.14 la célérité de rétraction moyenne c extraite de la figure 7.13 en fonction du rapport γ/η. Les liquides utilisés sont des mélanges eau/glycérol de viscosité variable, ou des huiles silicones ($\eta = 970, 340, 97$ mPa.s). Les mesures s'alignent sur une droite de pente très proche de 4 sauf pour le dernier point de la courbe. Il convient de noter que la mesure de c pour ce point n'a pas été réalisée dans les mêmes

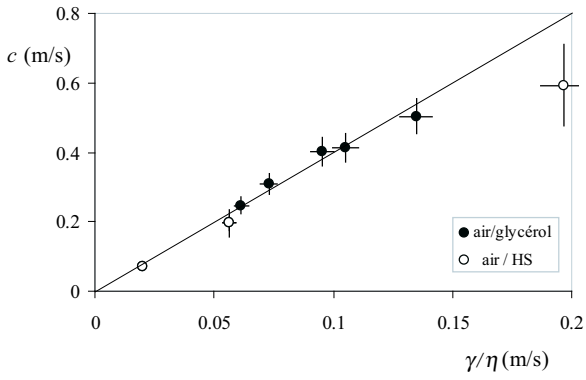


FIG. 7.14: Célérité de rétraction c en fonction de la vitesse du rapport γ/η .

conditions que pour le reste des points : c'est la vitesse de croissance du rayon d'un trou (observée dans une expérience d'impact de jet) et non le produit $V\sin(\phi/2)$ qui a été reportée sur la figure 7.14 au point d'abscisse 0.2. Devons-nous lui accorder le même crédit qu'aux autres points ?

- Si non, alors c vaut $4\gamma/\eta$. En réinjectant ce facteur 4 dans l'équation 7.13, nous obtenons que le facteur logarithmique $\ln(l/\xi_M)$ vaut environ 25 et donc que le rapport l/ξ_M est alors égal à 10^{11}, ce qui est parfaitement déraisonnable. Notons que dans ce cas, l/ξ_M est indépendant de la viscosité, l désignant la longueur du cylindre de taille finie et ξ_M son rayon [72].
- Si oui, alors la célérité de rétraction n'est pas simplement proportionnelle au rapport γ/η et la dépendance en viscosité est moins forte que $1/\eta$. Dans l'équation 7.13, l'expression de la longueur l peut faire intervenir les paramètres de l'écoulement à condition de considérer le cylindre comme infini. Alors, $l = \eta/\rho V$ [73] ce qui conduit à une correction en logarithme de la viscosité dans l'expression de la célérité 7.13, qui devient alors proportionnelle à $\gamma/\eta\ln(\eta)$. Nous reportons sur la figure 7.15 en échelle semi-logarithmique, le produit $\eta c/\gamma$ (qui est un nombre capillaire construit avec la célérité de rétraction comme vitesse caractéristique, noté Ca_d) en fonction de l'inverse de la viscosité du liquide $(1/\eta)$.

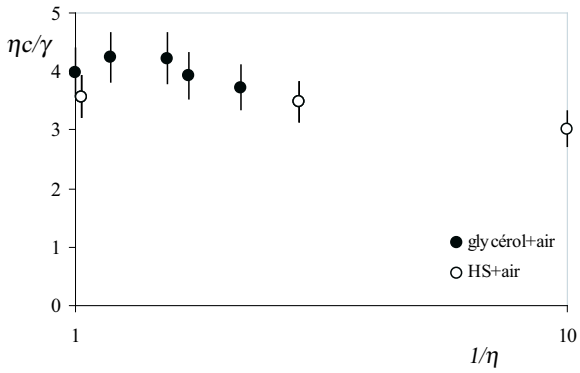


FIG. 7.15: Produit $\eta c/\gamma$ en fonction de l'inverse de la viscosité du fluide $1/\eta$ en échelle semi-logarithmique

Il est difficile de conclure : le produit $\eta c/\gamma$ est-il indépendant de la viscosité η ? Il semble que oui si l'on tient compte du dernier point ; néanmoins cette courbe n'est pas très satisfaisante, la dépendance en viscosité étant testée sur seulement une décade.

7.4.4 Critère de stabilité de la lame

Critère

L'existence de cette vitesse de rétraction fournit un critère simple d'existence de la lame. Pour que la lame existe, il faut qu'elle soit advectée rapidement, plus vite que la vitesse à laquelle un trou grandit dans le film. Il faut donc que la célérité de rétraction soit inférieure à la vitesse d'entraînement V :

$$c < V \tag{7.14}$$

Lorsque ces deux vitesses sont égales, le film est à la limite de sa stabilité : un trou dans le film grossit aussi vite qu'il est advecté, l'angle d'ouverture de la zone de rétraction atteint alors la valeur limite de 180°. La condition $c < V$ se reporte également sur le nombre capillaire : pour que le film d'air soit stable, il faut que Ca soit supérieur à un nombre capillaire seuil Ca_d construit avec la célérité de rétraction comme vitesse caractéristique :

$$Ca > Ca_d = \frac{\eta c}{\gamma} \tag{7.15}$$

Comparaison avec le seuil d'entraînement d'air

Ce critère de stabilité de la lame est *a priori* différent du seuil d'entraînement d'air étudié au chapitre 7. Rappelons que l'entraînement d'air se produit lorsque le rayon de courbure à l'extrémité de la pointe devient plus petit qu'une valeur seuil qui dépend du rapport des viscosités des deux fluides en présence. La pression dans la pointe est alors trop importante et le liquide visqueux se fracture. Quoique ces deux seuils mettent en jeu des mécanismes différents, il nous a semblé utile de les comparer : le critère de stabilité de la lame peut-il devenir un facteur limitant la formation du film d'air ou est-il toujours vérifié au seuil d'entraînement ? Nous portons donc sur la figure 7.16 le nombre capillaire construit avec la célérité de rétraction (données de la figure 7.15 représentées par le symbole •) ainsi que le nombre capillaire seuil d'entraînement d'air (données de la figure 7.6 représentées par le symbole △), en fonction du rapport des viscosités η_0/η. À notre grande surprise, ces deux seuils se rassemblent sur la même courbe. Pour pousser la comparaison plus avant, nous avons étudié la rétraction d'un film de fluide (autre que l'air) entraîné par un liquide plus visqueux.

Rétraction d'un film de liquide

Les différents fluides constituant le film sont des huiles de viscosités variables (η_0 compris entre 3.5 et 85 mPa.s). Le liquide visqueux inférieur est du glycérol. Au-dessus de la vitesse seuil d'en-

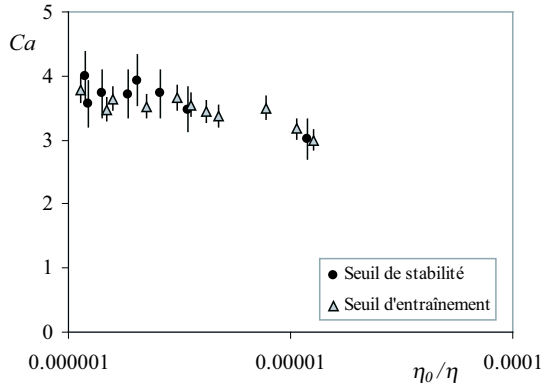


FIG. 7.16: Comparaison des deux critères : seuil d'existence du film et seuil d'entraînement d'air (étudié au chapitre 7). Le nombre capillaire correspondant au seuil de stabilité du film est représenté par des cercles (•) en fonction du rapport η_0/η de la viscosité du fluide supérieur sur celle du liquide, alors que celui correspondant au seuil d'entraînement l'est avec des triangles (△).

traînement, un film d'huile est entraîné dans le glycérol. De la même façon qu'au paragraphe 7.4.1, nous avons percé le film de liquide à l'aide d'un obstacle immobile et mesuré l'angle d'ouverture de la zone rétractée en fonction de la vitesse d'entraînement pour des huiles de différentes viscosités. La figure 7.18 montre les résultats.

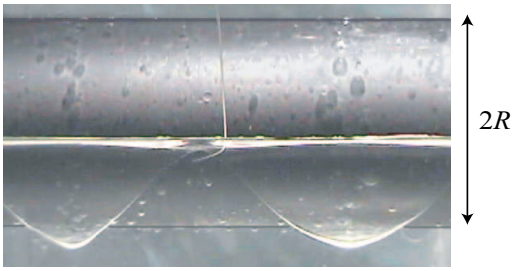


FIG. 7.17: Rétraction d'un film d'huile silicone ($\eta_0 = 23$ mPa.s) dans un bain de glycérol ($\eta = 850$ mPa.s).

On y retrouve des caractéristiques de la figure 7.10 : l'angle d'ouverture de la zone de rétraction est une fonction décroissante de la vitesse d'entraînement. En revanche, on voit que la célérité de rétraction dépend également de la nature du liquide constituant le film. Ceci est d'autant plus marqué que la vitesse d'entraînement est élevée : à petite vitesse, les différentes courbes semblent se rejoindre sur le même tracé. En outre, les angles d'ouverture près du seuil d'entraînement sont beaucoup plus grands dans le cas d'une rétraction entre deux liquides plutôt que dans le cas air - liquide. Nous pouvons déduire des données de la figure 7.18, et en utilisant la formule 7.12, la célérité c de rétraction d'un film liquide entraîné dans un liquide visqueux. Nous portons c en fonction de V sur la figure 7.19. La figure 7.19 appelle aussi quelques commentaires.

- La célérité de rétraction pour un fluide visqueux est à peu près constante pour les petites

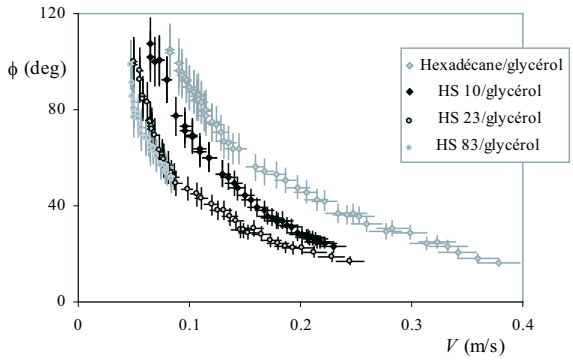


FIG. 7.18: Angle ϕ formé par la zone de rétraction en fonction de la vitesse d'entraînement V pour différents films d'huile dans du glycérol ($\eta = 850$ mPa.s)

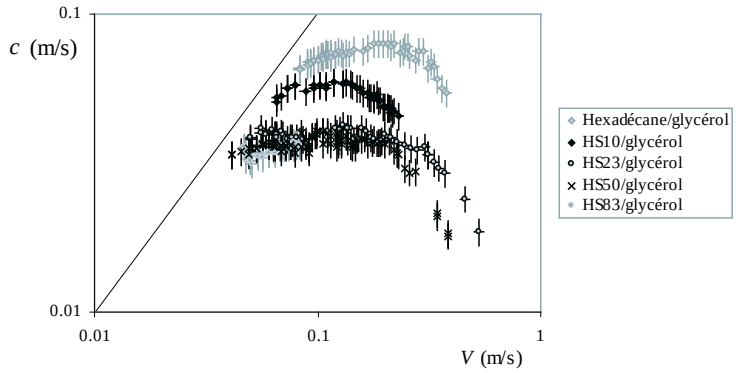


FIG. 7.19: Célérité de rétraction c en fonction de la vitesse d'entraînement V en échelle logarithmique. La viscosité du liquide du film est modifiée alors que le liquide dans lequel baigne ce film reste identique. La droite tracée est la première bissectrice. On voit que la célérité de rétraction est toujours inférieure à la vitesse d'entraînement.

vitesses. Elle laisse apparaître une légère décroissance pour les grandes vitesses d'entraînement.

- Elle dépend de la viscosité du liquide constituant le film. Moins ce liquide est visqueux, plus la rétraction est rapide. En outre, nous pouvons constater que pour des liquides relativement visqueux, la célérité de rétraction ne dépend plus de la nature du film. Ce point a été également constaté par les auteurs de la référence [100].

Nous verrons au chapitre 8 que l'épaisseur de liquide entraîné est une fonction croissante de la vitesse d'entraînement. Ceci explique probablement cette décroissance : Brochard-Wyart *et al.* [23] ont en effet montré que la célérité de démouillage est une fonction décroissante de l'épaisseur du film ou du bourrelet dans les régimes inertiel et visco-inertiel.

7.4.5 Équivalence des deux critères

Résultat

Nous complétons la courbe de la figure 7.16 en y ajoutant les données obtenues au paragraphe précédent. Nous portons ainsi le nombre capillaire seuil d'entraînement d'un film de liquide dans un bain de liquide plus visqueux (données de la figure 7.6 représentées par le symbole △) et le nombre capillaire calculé avec la célérité de rétraction comme vitesse caractéristique (données complétées de la figure 7.15 représentées par le symbole •) en fonction du rapport des viscosités η_0/η. Toutes

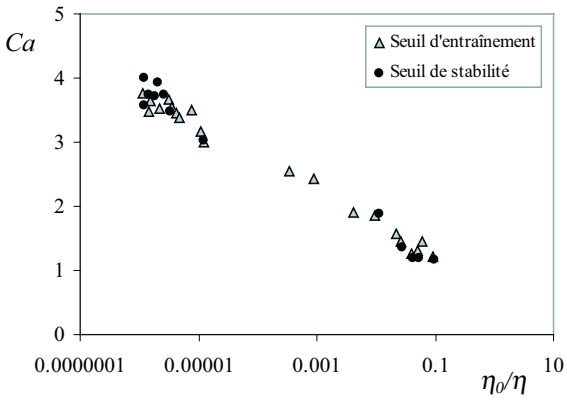


Fig. 7.20: Comparaison des deux critères : seuil d'existence et seuil d'entraînement (étudié au chapitre 7) d'un film de liquide . Le nombre capillaire correspondant au seuil de stabilité du film est représenté en fonction du rapport de la viscosité du fluide supérieur par rapport à celle du liquide inférieur η_0/η à l'aide de cercles •, alors que celui correspondant au seuil d'entraînement est reporté à l'aide de triangles.

les données obtenues au paragraphe précédent se superposent également sur le même tracé, d'où

l'on déduit aux incertitudes de mesure près :

$$Ca_c = Ca_d \tag{7.16}$$

Il semble donc impossible distinguer les deux critères : le film de liquide est entraîné à son seuil de stabilité. Notons que les deux seuils sont mesurés de façon très différente : le seuil d'entraînement est repéré visuellement – c'est la plus petite vitesse pour laquelle un film est entraîné – alors que le seuil de stabilité vient de la mesure de la célérité de rétraction du film – elle-même déduite de l'angle d'ouverture de la zone ou le fluide s'est retiré.

Discussion

Ce résultat est inattendu :

- Du point de vue expérimental, les deux mesures ne sont pas équivalentes : nous avons déterminé comme vitesse seuil d'entraînement de liquide la vitesse V_c pour laquelle la lame est drainée dans le bassin. À cette vitesse, le film est effectivement stable, ce qui nous faisait penser que $c < V_c$, ce qui conduit à l'inégalité $Ca_d < Ca_c$ (rappelons que Ca_d est le nombre capillaire en dessous duquel le film n'est plus supersonique : un trou peut complètement envahir le film). En outre, nous notons que le nombre capillaire de rétraction Ca_d dépend de la viscosité du liquide supérieur, ce qui n'apparaît pas dans la discussion.
- Du point de vue théorique, les analyses conduite par Moffatt et Brochard-Wyart sont proches : dans les deux cas, les résultats peuvent être interprétés comme un bilan entre forces capillaires et force de traînée d'un cylindre semi-infini autour duquel s'écoule un liquide visqueux. Le système trouve toujours une position d'équilibre puisque la géométrie de l'extrémité du film ou de la pointe s'adapte aux contraintes imposées (en diminuant son rayon de courbure ou en modifiant son angle d'ouverture). En revanche, le modèle d'Eggers introduit un ingrédient supplémentaire : il tient compte de l'écoulement de recirculation du liquide au-dessus de la pointe. La force supplémentaire induite par cet écoulement va briser l'équilibre entre les forces capillaire et visqueuse et sélectionner une vitesse d'entraînement d'air. Les deux analyses ne sauraient donc donner le même résultat. Nous pouvons néanmoins faire une remarque : dans l'expérience de rétraction, nous avons omis de discuter la dimension latérale du bourrelet (le rayon du cylindre semi-infini). Or cette taille est corrélée à l'épaisseur du film entraîné, elle-même très certainement sélectionnée par un mécanisme tenant compte de l'écoulement du fluide supérieur (et donc de la viscosité η_0). En réinjectant cette épaisseur du film d'air dans l'analyse de Brochard-Wyart, les résultats devraient concorder.
- Dans le cas du mouillage forcé d'un solide non-mouillant par un liquide visqueux, les calculs de de Gennes [67] sur le seuil d'entraînement et de Brochard-Wyart *et al.* [22] sur la vitesse de démouillage montrent une même loi d'échelle, mais un coefficient numérique légèrement

différent (de l'ordre de 10%). Il est finalement possible que nous soyons ici dans le même cas, et qu'une semblable petite différence échappe à nos mesures.

Conclusion

La célérité de rétraction d'un film de liquide advecté dans un liquide plus visqueux est donc donné par un subtil équilibre entre les forces capillaires et visqueuses. Nous avions d'abord espéré mettre en évidence un régime de rétraction inertielle ([23]) : la célérité de rétraction aurait alors été proportionnelle à l'épaisseur de la lame ce qui nous aurait fourni une méthode de mesure simple de cette épaisseur. Ce n'est pas le cas, mais nous avons montré que les seuils d'entraînement et de stabilité de la lame étaient identiques.

7.5 Expérience du jet

Nous discutons ici l'expérience proche de l'impact à vitesse V d'un jet visqueux (dont le diamètre est noté D) sur un bain de même nature. Si le jet est rapide, il se forme à la base du jet un ménisque inversé dont l'extrémité peut être très effilée (photographie de gauche de la figure 7.21). À plus grande vitesse encore, ce jet a la propriété de crever l'interface entraînant alors avec lui une fine lame d'air cylindrique (photographie de droite de la figure 7.21). Les travaux de Lin et Donelly

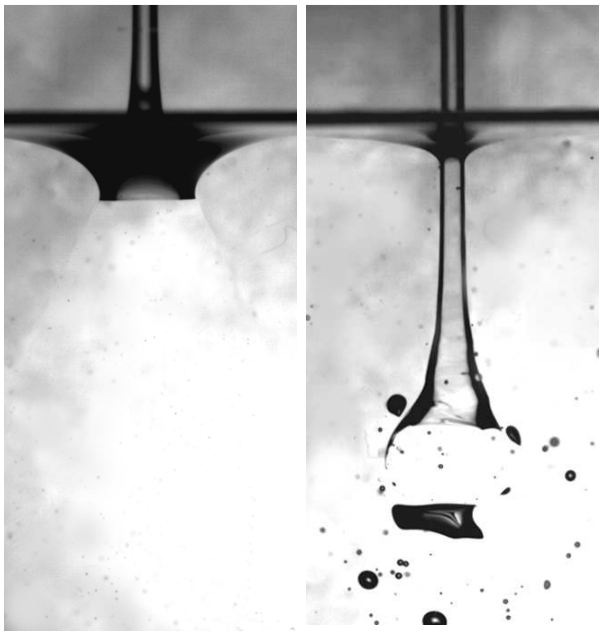


Fig. 7.21: Un jet d'huile silicone ($\eta = 970$ mPa.s) de 3 mm de diamètre tombe dans un bain du même liquide visqueux. Sur la photographie de gauche, la vitesse du jet est inférieure à la vitesse seuil (0.3 m/s). L'interface se déforme de façon visible, sans qu'il y ait entraînement d'air. Sur la photographie de droite, la vitesse du jet est suffisante pour craquer l'interface. Une fine lame d'air qui prend la forme d'une trompette est entraînée dans le bain de liquide. Sa longueur atteint plusieurs centimètres. À son bout la lame d'air se fractionne et engendre des bulles de taille variable.

[95] fournissent un grand nombre de données sur ce problème. Ces auteurs ont en effet étudié la vitesse seuil d'entraînement d'air dans le bassin V_c en fonction du diamètre du jet D, de la viscosité du liquide η, la tension interfaciale entre le liquide et le fluide γ (de l'air), la présence ou non de surfactants. Le liquide utilisé est en général un mélange de glycérol et d'eau. Ils ont proposé une relation empirique pour la formation du jet faisant intervenir les nombres de Reynolds Re_c (qui compare les effets inertiels et les effets visqueux) et le nombre de Weber We_c (qui compare les effets inertiels et capillaires), construits tous deux au seuil et avec le diamètre du jet comme longueur caractéristique. Cette relation s'écrit :

$$We_c \simeq 10\ {Re_c}^{0.74} \tag{7.17}$$

On peut également l'écrire en introduisant le nombre capillaire seuil Ca_c, égal au rapport du nombre de Weber sur le nombre de Reynolds :

$$Ca_c \simeq 10 \left(\frac{\rho D V_c}{\eta}\right)^{-0.26} \tag{7.18}$$

Ces résultats ne sont pas incompatibles avec les travaux de Moffatt et d'Eggers. Nous déduisons de cette loi empirique le nombre capillaire seuil d'entraînement et nous le reportons en fonction du rapport η_0/η de la viscosité du fluide (de l'air) normée par celle du bassin. Des données extraites de la référence [95] ainsi que des mesures réalisées par nos soins (pour des jets d'huile silicone de 4 mm de diamètre de viscosité variable) sont reportées sur la figure 7.22 sur laquelle est tracée le nombre capillaire seuil Ca_c en fonction du rapport des deux viscosités η_0/η. Les données sont,

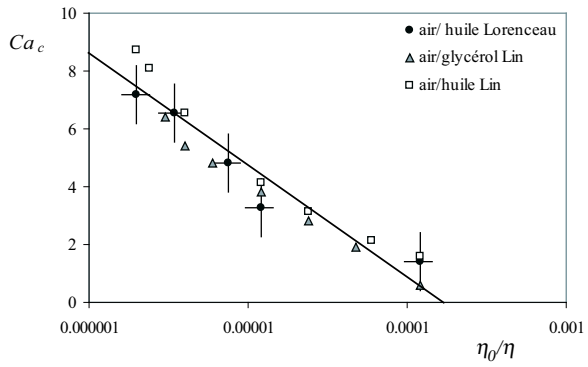


FIG. 7.22: Nombre capillaire seuil d'entrainement d'air en fonction du rapport de la viscosité de l'air sur celle du liquide contenu par le bassin. Le diamètre du jet est égal à 3 ± 0.5 mm.

comme pour l'expérience des rouleaux (*cf.* figure 7.6), bien décrites par une droite de pente négative d'équation $Ca_c = -1.6 \ln(\eta_0/\eta) - 13.7$. L'entraînement se fait ici encore d'autant plus facilement que le contraste en viscosité des deux milieux est faible. Plusieurs points méritent cependant d'être notés.

- L'équation de la courbe en trait plein indique que le nombre capillaire seuil d'entraînement est nul pour des fluides dont le rapport de viscosités est de l'ordre de $\eta_0/\eta \sim 10^{-3}$ (très facile à atteindre en utilisant de l'air et une huile silicone légère). Ceci est très surprenant et différent de ce que nous avions vu au paragraphe 7.3.2 où il était apparu qu'on ne pouvait accéder à de telles valeurs du nombre capillaire seuil d'entraînement. Il existe cependant une grande différence entre les résultats expérimentaux des figures 7.6 et 7.22 : dans l'expérience du rouleau, les plus faibles rapports de viscosité ($\eta_0/\eta \sim 10^{-1}$) ont été obtenus en utilisant deux liquides visqueux (η_0=83 mPa.s et η=900 mPa.s), alors que pour l'expérience du jet ils correspondent à deux fluides peu visqueux : de l'air ($\eta_0 = 1.2\ 10^{-3}$ mPa.s) et des huiles silicones légères ($\eta = 10$ mPa.s). Les effets inertiels dans l'écoulement du liquide sous la pointe ne sauraient être ici négligeables : le nombre de Reynolds seuil calculé en utilisant le diamètre du jet comme longueur caractéristique ($Re_c = \rho V D/\eta$) vaut environ 100. Ce point a été remarqué par Lin qui a fait intervenir le nombre de Reynolds dans l'équation 7.17. La prise en compte des effets inertiels peut rendre caduque l'approche de Moffatt (dont la loi résulte d'un équilibre entre forces capillaires et visqueuses).
- La pente de la droite la plus proche des données expérimentales vaut -1.6. Rappelons que pour l'expérience du rouleau cette pente vaut -0.22 . Elle est donc près de sept fois plus grande dans l'expérience du jet que dans celle du rouleau. Deux raisons peuvent expliquer ce décalage. Pour les petites valeurs du rapport η_0/η, nous avons déjà vu que les valeurs du nombre capillaire seuil d'entraînement sont majorés puisque la viscosité effective des huiles silicones diminue à cause du caractère non-newtonien de ces liquides. En outre, cette forte valeur s'explique peut-être également en tenant compte de l'inertie du liquide, qui a le même effet que la viscosité : elle entraîne également le ménisque vers le bas, ce qui diminue la vitesse et le nombre capillaire seuils d'entraînement. Cet effet se fait surtout sentir pour les petites viscosités c'est-à-dire pour les petits rapports η_0/η. Surestimer les points à gauche du graphique et sous-estimer ceux qui sont à droite a bien pour effet d'augmenter nettement la valeur de la pente de la droite sur la figure 7.22.
- Nous n'avons pas étudié l'entraînement d'air dans le régime inertiel, quoiqu'une littérature fournie (origine de l'écume dans la mer) y soit consacrée.

7.6 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre au seuil d'entraînement d'un fluide dans un autre. La pointe liquide exhibée au chapitre 6 ne peut supporter des courbures trop importantes : l'écoulement du liquide supérieur, obligé de recirculer dans cet espace étroit, maintient une pression au-dessus de la pointe qui peut atteindre des valeurs suffisantes pour percer l'interface et entraîner une mince couche du fluide supérieur à l'intérieur du bain. Cette interprétation est due à Eggers

dans un modèle dont nous avons présenté les principaux éléments. Nous avons vérifié l'accord de ce modèle avec nos données, issues de l'expérience du rouleau tournant décrite au chapitre 6. Les résultats expérimentaux qui en sont issus se trouvent être en excellent accord avec les prédictions d'Eggers. Nous avons également montré que le seuil d'entraînement d'air peut être déterminé en mesurant la célérité de rétraction du film de liquide advecté. La deuxième expérience d'impact d'un jet de liquide visqueux dans un bain du même liquide est en moins bon accord avec le modèle d'Eggers. Ceci est peut-être à des effets inertiels qui n'ont pas été pris en compte. Dans le prochain chapitre, nous nous intéressons aux propriétés du film de liquide entraîné dans le bain.

Chapitre 8

Film d'air

Sommaire

8.1 Introduction **171**

8.2 Différentes mesures de l'épaisseur du film d'air entraîné **172**

8.2.1 Bourrelet bordant le film 172

8.2.2 Distribution de taille des bulles 177

8.2.3 Profil de cisaillement 178

8.2.4 Dynamique de formation de bulles 181

8.3 Résultats **183**

8.3.1 Influence de la viscosité η_0 du film 183

8.3.2 Bilan 184

8.4 Discussion **185**

8.4.1 Modèle 185

8.4.2 Analogie avec le problème de Landau-Levich 187

8.4.3 Courbure de l'interface loin du film entraîné 188

8.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux 191

8.4.5 Limites du modèle 192

8.5 Conclusion **195**

8.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 7 qu'un liquide (en jet ou porté par un rouleau tournant) tombant dans un bain, peut entraîner avec lui une mince lame de fluide. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés de ce film – notre objectif principal étant d'en mesurer l'épaisseur. Plusieurs enjeux ont motivé ce travail. Tout d'abord, du point de vue pratique, il est capital de savoir comment varie la quantité d'air entraîné dans le liquide afin de se prévenir des fâcheuses conséquences que les bulles issues de la déstabilisation du film peuvent occasionner (lorsqu'on remplit un moule d'une matière

polymère visqueuse, par exemple). Ensuite, d'un point de vue plus fondamental, la compréhension du mécanisme qui sélectionne l'épaisseur de ce film est très motivante, l'étude de structure dynamique se révélant souvent très riche (exemple : tirage des films de Landau).

Lorsque le fluide entraîné est un liquide, l'épaisseur du film est de l'ordre du millimètre et sa mesure ne pose pas de problème. En revanche, s'il s'agit d'un gaz (comme de l'air), l'épaisseur devient beaucoup plus faible, de l'ordre de la dizaine de microns. Une mesure directe n'est alors plus possible. Pour avoir accès à l'épaisseur d'un film d'air, nous avons donc mené à bien plusieurs expériences. Nous avons commencé notre étude par des mesures interférométriques qui nous ont permis d'avoir accès au profil du film sur ses bords. Ensuite, la connaissance du profil de vitesse de part et d'autre du film, la mesure de la distribution de taille et le suivi de la dynamique de formation des bulles présentes dans le bassin nous ont permis d'évaluer les variations d'épaisseur du film d'air avec les différents paramètres du système. L'ensemble de ces résultats a été obtenu avec l'aide de F. Chevy. Nous les comparons avec un modèle récemment proposé par Eggers.

8.2 Différentes mesures de l'épaisseur du film d'air entraîné

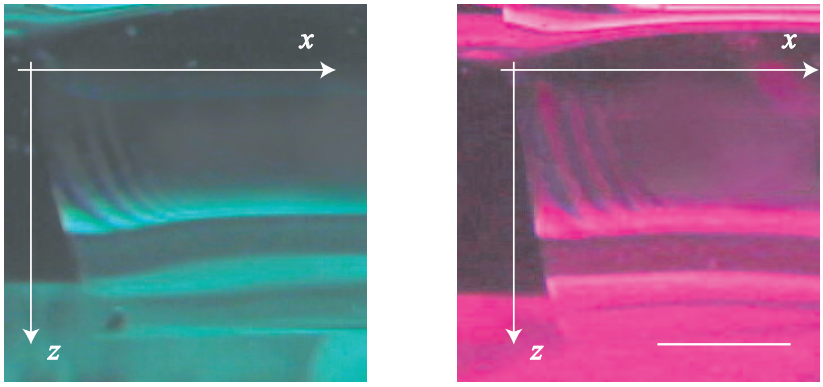
8.2.1 Bourrelet bordant le film

Interférences

Nous avons tenté d'observer les interférences entre deux rayons se réfléchissant sur les faces externe et interne du film d'air. Si ces faces sont parallèles, les rayons réfléchis le sont aussi et les interférences localisées à l'infini. Ce dispositif classiquement qualifié de lame à faces parallèles donne une mesure des variations d'épaisseur de la lame d'air, mais nous n'avons pas réussi à observer ces interférences à l'infini.

En revanche, il est très facile d'observer en éclairant avec une lame à décharge, une irisation du bord de la lame. À cet endroit, les faces du film ne sont plus parallèles et le dispositif est alors équivalent à un coin d'air avec des interférences localisées sur la lame. Il est alors facile d'avoir accès à son profil, et Clanet *et al.* ont ainsi obtenu le profil d'un film d'eau se propageant dans l'air [160]. Nous avons observé ces interférences en utilisant la lumière des néons qui est une lampe à décharge basse pression (vapeur de mercure) et en plaçant un filtre à gélatine (centré sur une longueur d'onde λ_0) sur le récepteur (un appareil photo numérique), afin d'augmenter la longueur de cohérence de la source (en éliminant les autres raies de la lampe) et de travailler avec une longueur d'onde relativement bien définie. Deux figures d'interférences obtenues sur un bord de la lame d'air sont montrées sur la figure 8.1. Sur ces photographies, la lame d'air est enroulée autour du rouleau qui est ici vu dans le sens de la largeur. La cuve est remplie d'huile silicone (η =970 mPa.s). On aperçoit sur le bord du film (qui s'est rétracté d'un angle $\phi/2$) des franges qui sont parallèles à la lame sur la partie supérieure puis qui s'incurvent vers la droite. Le filtre placé sur la photo de gauche est

centré sur $\lambda_0 = 520$ nm, (transmettant plus de 10% de l'intensité lumineuse entre $\lambda_{min} = 460$ nm et $\lambda_{max} = 560$ nm), et le filtre de la photo de droite laisse passer 100% de l'intensité du rayonnement dont la longueur d'onde est supérieure à 560 nm. Nous notons x la distance horizontale au bord



Filtre vert λ_0 =520 nm , $\Delta\lambda$= 160 nm Filtre rouge 100% transmission λ_0 >560 nm

FIG. 8.1: Deux figures d'interférences localisées sur le bord de la lame d'air. Sur la photographie de gauche, un filtre vert centré sur la longueur d'onde $\lambda_0 = 520$ nm est placé devant l'objectif, alors sur la photographie de droite il est centré sur 560 nm. Les franges ne restent pas parallèles au bord de la lame mais s'incurvent vers l'intérieur du film. Le trait blanc sur la figure de droite correspond à 1 cm.

de la lame, z la profondeur d'enfoncement dans la cuve et ξ l'épaisseur de la lame. À partir de ces figures d'interférences, nous avons déterminé un profil moyen du film entraîné.

Profil du bord du film

Les deux profils Dans la limite des petits angles, les franges noires du coin d'air sont des franges d'égale épaisseur. Elles représentent donc les lignes de niveau de la surface, comme figuré sur la figure 8.2. En outre, entre deux franges noires, la variation du chemin optique δl est de λ_0. Cette

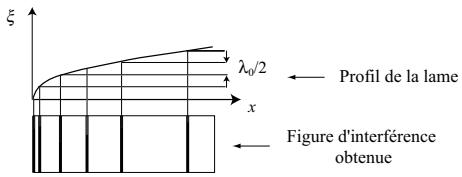


FIG. 8.2: Schéma des franges d'égale épaisseur du coin d'air.

variation de chemin optique n'est pas trop différente, en éclairage normal et dans la limite des coins d'air aigus, du double de la variation d'épaisseur du coin d'air entre les deux franges (l'indice optique de la lame vaut 1, puisque c'est de l'air). Ainsi entre deux franges noires (espacées d'une distance δx, x étant la distance au bord de la lame défini sur la figure 8.1), la lame d'air s'épaissit ou s'amincit de $\lambda_0/2$. La méthode est ambiguë : il n'est pas possible de savoir si l'épaisseur de la

lame augmente ou diminue avec x. Deux profils possibles de la lame d'air sont représentés sur la figure 8.3 : un profil croissant (c'est alors un bourrelet qui termine la lame) et un profil décroissant (la lame a alors une forme de doigt). Ces profils sont moyennés, n'oublions pas que le film n'est pas statique, son épaisseur ξ et sa position x sont donc sujettes à des fluctuations et les valeurs absolues d'épaisseur ξ représentées sur ce graphique sont arbitraires : nous n'avons accès par cette méthode qu'à des variations d'épaisseur et non à une mesure absolue.

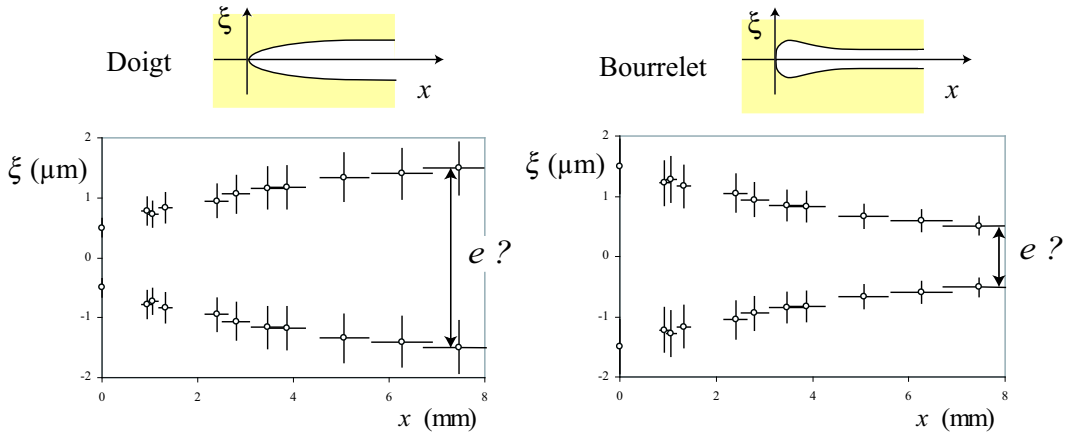


FIG. 8.3: Profils de la lame d'air reconstruits à partir des figures d'interférence. Les échelles des axes des abscisses et des ordonnées sont très différentes. Il n'est pas possible *a priori* de faire la distinction entre la forme du bourrelet et celle du doigt.

Bourrelet Nous pensons néanmoins que le profil en forme de doigt n'existe pas pour deux raisons.

- Tout d'abord, dans cette géométrie, la courbure à l'extrémité de la pointe atteindrait de très fortes valeurs, créant ainsi de forts gradients de pression de Laplace.
- Ensuite, les franges d'interférence ne restent pas parallèles aux bords de la lame : elles dévient vers l'intérieur du film. Cette déviation est d'autant plus importante que la lame est enfoncée dans la cuve (pour les grands z). Or la lame d'air change elle aussi d'inclinaison par rapport à l'éclairage avec la profondeur, en s'écartant de plus en plus de la direction verticale (elle s'enroule en effet autour du rouleau, *cf.* figure 7.3). Ainsi, plus le rayon incident tombe sur la couche d'air à une position profonde dans la cuve, plus le déphasage entre le rayon réfracté et le rayon réfléchi sur la lame est grand. Ceci est schématisé sur la figure 8.4 : les rayons qui frappent la lame d'air à une position basse doivent la traverser de biais, elle leur semble donc être plus épaisse. Or, les franges d'interférence sont des franges d'égale épaisseur du point de vue du chemin optique. Ainsi les franges les plus basses correspondent aux films les plus épais (du point de vue du chemin optique). En remontant ces franges, on peut en déduire que dans la zone où elles sont parallèles au bord de la lame, plus on s'approche du bord, plus le film d'air est épais. Il a donc plutôt la forme d'un bourrelet que d'un doigt. Les interférences que

nous voyons correspondent à la phase de décroissance d'épaisseur du bourrelet. Notons qu'il n'est pas possible ici de voir la croissance du bourrelet (en $x = 0$) : dans cette zone, les franges sont probablement trop resserrées pour être visibles. Nous supposerons dans la suite de ce manuscrit que la lame est bien bordée par un bourrelet.

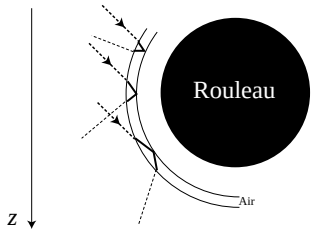


FIG. 8.4: Le déphasage entre les rayons réfléchis et réfractés (proportionnel à la distance parcouru par le rayon réfracté dans la lame) est d'autant plus grand que le rayon incident tombe à une position basse (grand z).

La présence d'un bourrelet à l'extrémité du bord libre d'un film est classique et se rencontre souvent dans les situations de démouillage. Brochard-Wyart *et al.* [100, 23] ont observé de tels bourrelets en déposant un film de liquide sur un substrat liquide : si les conditions de mouillage ne sont pas favorables, le film se perce de trous bordés d'un bourrelet dont le rayon croît avec le temps (voir aussi [116]). Podgorski *et al.* [117] ont également observé qu'un film s'écoulant le long d'un substrat solide et démouillant localement de celui-ci (créant ainsi une arche sèche) était bordé d'un bourrelet. Enfin, ces bourrelets sont également visibles le long d'un trou ou d'un sillage bordant l'extrémité d'un film liquide en chute libre dans l'air (cette situation étant l'inverse de la nôtre du point de vue du liquide et du gaz)[91].

Interprétation

Ces données ont été interprétées en cherchant une perturbation de la région plane, de la forme $\xi = \xi_0 \exp(ikx)$, dans l'approximation linéaire de l'équation de Navier-Stokes. Des éléments du calcul correspondant sont données dans l'annexe B. La taille caractéristique Δx sur laquelle la protubérance du bourrelet s'atténue est proportionnelle à la longueur visqueuse $L_\eta = \eta^2/(\rho\gamma)$. Ce résultat peut être retrouvé par un argument dimensionnel puisque la longueur visqueuse est la seule longueur pertinente à cette échelle, si l'on néglige l'écoulement d'air au-dessus du fluide. Cette

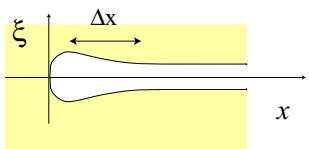


FIG. 8.5: La protubérance du bourrelet d'air s'étend sur une longueur nommée Δx.

longueur Δx a été déduite des expériences d'interférences présentées ci-dessus : c'est la distance sur

laquelle on voit des interférences. Au-delà les faces du film sont trop parallèles et l'interfrange trop grand pour être mesuré. Nous l'avons représentée en fonction de la longueur visqueuse L_η pour trois liquides : deux huiles silicones ($\eta = 970$ et 350 mPa.s et $\gamma = 21$ mN/m) et du glycérol ($\eta = 800$ mPa.s et $\gamma = 50$mN/m) sur la figure 8.6. L'accord est satisfaisant mais il conviendrait pourtant de

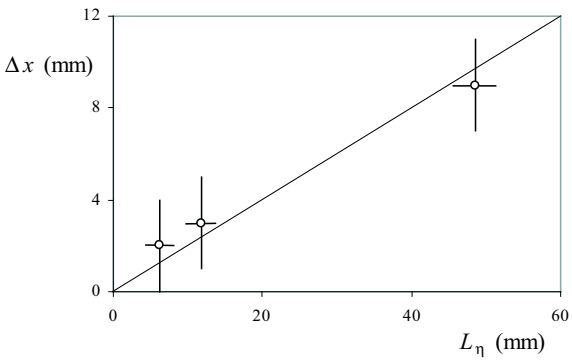


FIG. 8.6: Taille caractéristique Δx sur laquelle décroît le bourrelet en fonction de la longueur visqueuse $L_\eta = \eta^2/(\rho\gamma)$.

reprendre cette expérience avec un plus grand nombre de liquides et avec une source de plus grande longueur de cohérence (source laser) : c'est la géométrie de la lame qui doit faire disparaître les interférences (faces parallèles) et non la perte de cohérence du signal (rappelons que le nombre de franges visibles est proportionnel à la longueur de cohérence de la source, particulièrement élevée pour un laser). Nous en concluons néanmoins que la lame d'air se termine par un bourrelet dont la protubérance décroît sur une taille proportionnelle à la longueur visqueuse du liquide.

Épaisseur du film

L'épaisseur du film d'air entraîné peut être évaluée à partir de ces résultats. Lorsque le film d'air est percé, il se rétracte sur une zone triangulaire (*cf.* chapitre 7) bordé par un bourrelet qui collecte le fluide (air ou liquide) du film. Nous ne connaissons pas la surface totale du bourrelet (l'épaisseur du

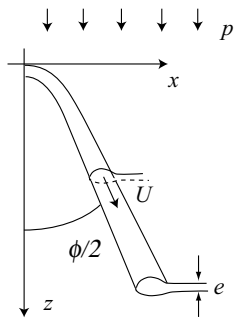


FIG. 8.7: En plaçant un obstacle dans la lame de fluide, celle-ci se rétracte sur une zone triangulaire. Le film est bordé d'un bourrelet qui collecte le fluide contenu dans la lame. dévié.

film étant inconnue), mais nous pouvons avoir accès à l'excès de surface qu'il implique en intégrant l'expression de son profil (*cf.* figure 8.3). En écrivant une conservation de la masse (à l'image des travaux de Podgorski *et al.* [117]) et en notant U la vitesse d'écoulement du fluide dans le bourrelet à une position x, S l'excès de surface du bourrelet à la même position (surface hachurée sur la figure 8.8), e l'épaisseur du film en x et p la vitesse d'écoulement du liquide dans le film en x, on obtient :

$$e = \frac{SU}{px}$$

où S, U et p sont *a priori* des fonctions de la position x. Faisons l'hypothèse que la vitesse

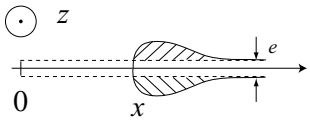


FIG. 8.8: Une conservation de la masse permet d'avoir un ordre de grandeur de l'épaisseur du film entraîné.

d'écoulement dans le bourrelet est identique à celle du film coulant en amont de la zone démouillée (schématisée sur la figure 8.8), soit $U \sim p$. On obtient alors un ordre de grandeur de e à partir du profil du bourrelet présenté figure 8.3 avec $S \sim 16700$ µm^2 et $x \sim 800$µm :

$$e = \frac{S}{x} \sim 20\mu\text{m} \tag{8.1}$$

Nous allons préciser cette valeur dans les paragraphes suivants. Notons toutefois que la relation ci-dessus n'implique pas que l'épaisseur e du film est une fonction décroissante de la profondeur x, puisque l'excès de surface est également une fonction de la variable x (probablement croissante : quand x croît, l'extension de la zone rétractée grandit, le bourrelet collecte plus de fluide et son excès de surface s'en trouve augmenté).

8.2.2 Distribution de taille des bulles

Nous nous sommes également intéressés à la taille des bulles issues de la déstabilisation de la lame d'air. La cuve étant remplie de glycérol, nous mettons le rouleau en rotation rapide afin d'entraîner un film d'air pendant plusieurs minutes. Elle se remplie alors de bulles de toutes tailles (quelques microns à plusieurs millimètres). Nous laissons le liquide de la cuve reposer deux heures : les grosses bulles auront alors le temps de remonter à la surface (la vitesse de remontée, donnée par la loi de Stokes, est de l'ordre de $\rho g R^2/\eta$ et différencie donc nettement les grosses des petites). Nous plaçons alors une lunette (de moindre grossissement que celle du chapitre 6, afin d'augmenter la distance de mise au point) devant la cuve et prenons des photographies du contenu du bassin à divers endroits (mais à la même profondeur). Nous mesurons le rayon et la quantité des bulles restant dans la cuve. Nous comptons environ 300 bulles et portons sur la figure 8.9 l'histogramme du rayon des bulles d'air dans du glycérol (après avoir entraîné une lame d'air à la vitesse de 0.35 m/s) en fonction du

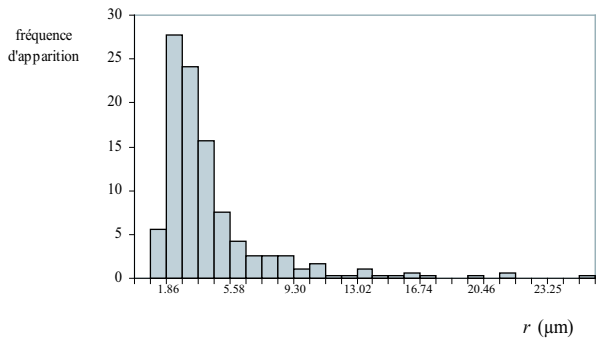


FIG. 8.9: Histogramme d'apparition d'une bulle de rayon r. Le pas de cet histogramme de 0.93 µm correspond à deux pixels sur les photographies.

rayon r. Cette distribution est relativement piquée et centrée sur des bulles de 3.5 µm de rayon. Le pic de cette distribution donne un ordre de grandeur de l'épaisseur entraînée : les plus petites bulles proviennent de la déstabilisation de la lame d'air (sans avoir coalescées avec d'autres bulles) : ainsi leurs rayons doivent-ils être corrélés à l'épaisseur du film. Nous n'avons pas poussé plus avant cette technique pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le traitement des données est long et fastidieux. Ensuite, nous ne connaissons pas le mécanisme de déstabilisation de la lame liquide. Alors que la version bidimensionnelle de ce problème, qui est la cassure d'un jet pour donner des gouttes, a donné lieu à un grand nombre de travaux, peu d'études ont été consacrées à la transformation d'un film de liquide en gouttes (dont l'exemple le plus connu est la formation d'une couronne de liquide lorsqu'une goutte tombe sur une film du même liquide [54]). Yarin [168] et Zaleski [62, 71] ont toutefois proposé des modèles visant à étudier la stabilité d'un bourrelet bordant une fine lame de liquide dans l'air et Clanet *et al.* ont étudié la distribution de taille des gouttes issues d'une lame d'eau dans de l'air [160]. Nous pouvons difficilement utiliser leurs résultats : la situation que nous nous proposons d'étudier est totalement inversée du point de vue du gaz et du liquide par rapport à la leur.

8.2.3 Profil de cisaillement

Principe de la mesure

L'épaisseur e du film d'air peut également être évaluée en étudiant le profil de vitesse dans le liquide. L'écoulement d'air (ou de liquide) ne saurait être un écoulement bouchon dans les deux situations expérimentales étudiées (expériences du rouleau et du jet) : dans les deux cas, il existe une forte asymétrie entre l'intérieur du jet (où la couche de liquide en rotation solide avec le rouleau entraîne le film d'air) alors que le liquide dans le reste du bain est quasi-statique. Nous notons V la vitesse d'entraînement le long de l'interface rapide, U la vitesse le long de l'interface lente et L la longueur caractéristique sur laquelle décroît le profil de vitesse du côté du bain statique (*cf.* figure

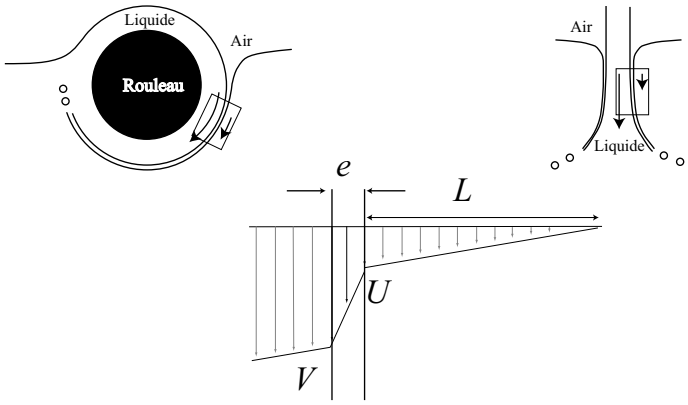


FIG. 8.10: Le film d'air est cisaillé dans son épaisseur e.

8.10). La conservation de la contrainte tangentielle entre les deux côtés de l'interface assure :

$$\eta \frac{U}{L} = \eta_0 \frac{V - U}{e} \tag{8.2}$$

Il est possible d'avoir accès en suivant la position de traceurs au cours du temps, aux grandeurs U, L et V. La longueur L peut en particulier être facilement visualisée en éclairant de biais le dispositif expérimental par une nappe de lumière (laser) et en prenant une photographie à long temps de pose du dispositif expérimental. Les bulles présentes dans le bain, réfléchissent la nappe de lumière, ce qui permet de matérialiser leurs trajectoires comme on le voit sur la figure 8.12 pour les deux dispositifs (jet et rouleau). L'équation 8.2 permet alors de déduire l'épaisseur du film entraîné. Notons que,

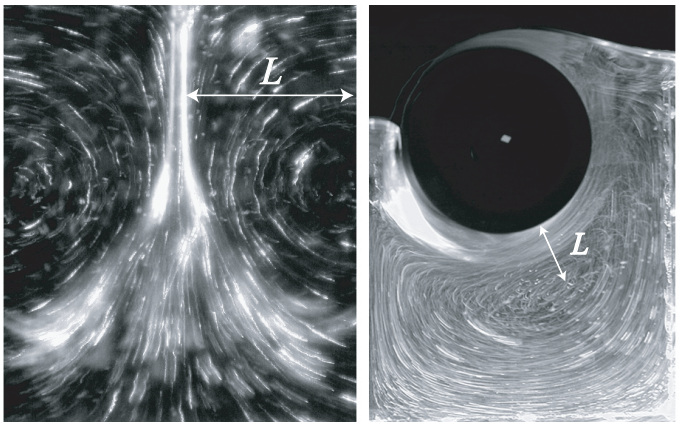


FIG. 8.11: Photo posée des deux dispositifs, matérialisant la trajectoire de bulles présentes dans le bain de liquide (de l'huile silicone $\eta = 0.97$ Pa.s dans les deux cas). Ceci met en évidence la longueur de cisaillement L. Sur les deux photos, le film d'air entraîné n'apparaît pas très distinctement : il est flou à cause du long temps de pose.

par cette méthode, la mesure de l'épaisseur e microscopique se rapporte à la mesure d'une longueur macroscopique L (de l'ordre du centimètre) ; le raccordement entre les deux échelles s'effectue par le fort contraste de viscosité entre les deux interfaces, de l'ordre ici de 10^6. Notons également que cette technique de mesure de l'épaisseur qui s'applique à la fois à l'expérience du rouleau et à celle

du jet fait l'hypothèse que le profil de vitesse dans le bain est linéaire. Nous avons vérifié que cette hypothèse n'est pas trop fausse (incertitude inférieur à 30%) en suivant l'évolution de plusieurs bulles placées sur une même ligne ce qui nous a permis de remonter au profil de vitesse effectif.

Premiers résultats

Nous avons ainsi évalué l'épaisseur d'un film d'air entraîné par un jet d'huile silicone de viscosité $\eta = 0.35$ Pa.s. L'épaisseur e en µm est représentée en fonction de la vitesse d'entraînement V sur la figure 8.12. Celle-ci est déterminée précisément à l'aide de traceurs (des bulles d'air) piégées dans le jet d'huile silicone. Les mesures sont très bruitées, mais permettent néanmoins de conclure que

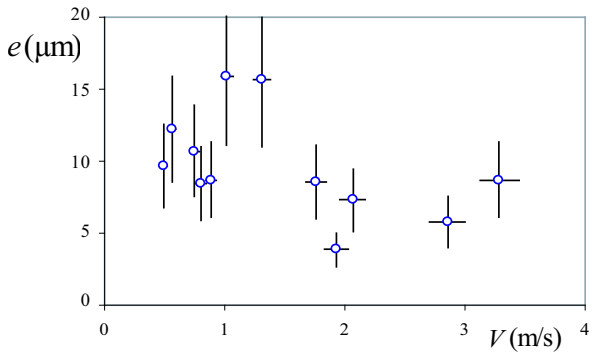


Fig. 8.12: Épaisseur e du film d'air entraîné par un jet d'huile silicone ($\eta = 0.35$ Pa.s) en fonction de la vitesse d'entraînement V. L'épaisseur du film est mesurée par la méthode de cisaillement.

l'épaisseur entraînée est de l'ordre de 10 µm (même ordre de grandeur qu'au paragraphe précédent) et qu'elle semble ne pas dépendre trop fortement de la vitesse d'entraînement. La principale source d'incertitude vient de la mesure de la longueur L.

Il convient à ce stade d'être prudent : nous utilisons la viscosité de l'air dans notre analyse pour déterminer l'épaisseur entraînée. Or cette épaisseur est faible. Pour que l'équation 8.2 soit correcte, il faut que e demeure bien supérieur au libre parcours moyen des molécules à cette température. Si cette condition n'est pas vérifiée, l'expression de la viscosité macroscopique η_0 définie à partir des multiples collisions entre les molécules du gaz parfait n'est plus valable. On entre alors dans le régime ballistique de Knudsen (pour plus de précisions, *cf.* référence [72]). Le libre parcours moyen l de molécules de diamètre d est donné dans le modèle du gaz parfait par la relation (on note P la pression atmosphérique, T la température et k la constante de Boltzmann) :

$$l = \frac{kT}{P\sqrt{2}\ \pi\ d^2}$$

Dans les conditions normales de température et de pression, on trouve que l est de l'ordre de 0.2 µm, cent fois moins que l'épaisseur mesurée. L'équation 8.2 est donc à la limite de son domaine d'application.

8.2.4 Dynamique de formation de bulles

La dernière technique envisagée consiste à observer les bulles qui se forment à l'extrémité de la nappe liquide. L'air entraîné dans le film se retrouve dans les bulles, ainsi en appliquant une simple conservation de volume, il est possible de remonter à l'épaisseur du film d'air.

Du manchon aux bulles

La séquence de photos présentée sur la figure 8.13, obtenue à l'aide d'une caméra rapide (qui enregistre 1000 images par secondes), illustre la dynamique de la trompette. L'air présent dans la zone grisée évolue d'un manchon très mince épaisseur à des bulles. Le liquide est de l'huile silicone ($\eta = 0.35$ Pa.s) et l'intervalle entre les photos est de 4 ms. Le nombre, le rayon des bulles r_b ainsi que la longueur w et le rayon R du manchon dont elles sont issues sont mesurés ce qui nous permet de remonter à l'épaisseur e du film :

$$e \simeq \frac{1}{2\pi R w} \sum_{bulles} \frac{4}{3} \pi {r_b}^3 \tag{8.3}$$

Premiers résultats

L'épaisseur e du film entraîné par un jet d'huile silicone ($\eta = 0.35$ Pa.s) est représentée en fonction de la vitesse d'entraînement V (disques noirs •) sur la figure 8.14. Nous notons plusieurs points.

- Cette méthode de mesure donne le même ordre de grandeur que précédemment (paragraphe 8.2.3) : $e \sim 10$ µm pour l'épaisseur d'un film d'air advecté dans de l'huile silicone ($\eta = 0.35$ Pa.s). En outre, les mesures sont moins dispersées en utilisant la conservation du volume plutôt qu'en évaluant le taux de cisaillement dans le film.
- Toutefois, il convient de vérifier que la loi de conservation est valable : l'air, gaz compressible, initialement dans le manchon dont la courbure est faible se retrouve dans les bulles, plus confiné et quelques cm plus bas. La gravité et la tension de surface diminuent donc le volume de celles-ci. En différenciant la relation des gaz parfaits (la quantité de matière et le nombre de moles sont constants), on trouve que les variations relatives de volume et de pression sont égales en valeur absolue ($\Delta V/V = \Delta P/P$). Or la variation de pression d'origine capillaire vaut $\Delta P_c \sim \gamma/r_b \sim 200$ Pa avec $r_b \sim 200m$ et celle gravitaire $\Delta P_g \sim \rho g \Delta z \sim 100$ Pa, où Δz est la variation de profondeur de l'ordre du cm. On obtient ainsi :

  $$\frac{\Delta V}{V} \sim 3\ 10^{-3}$$

  les variations de pression sont donc largement négligeables.
- Enfin, pour remonter à l'épaisseur du film d'air dans la géométrie du manchon, nous suivons l'évolution d'une vague dans la tranche d'air. Il n'est pas évident que cette perturbation se

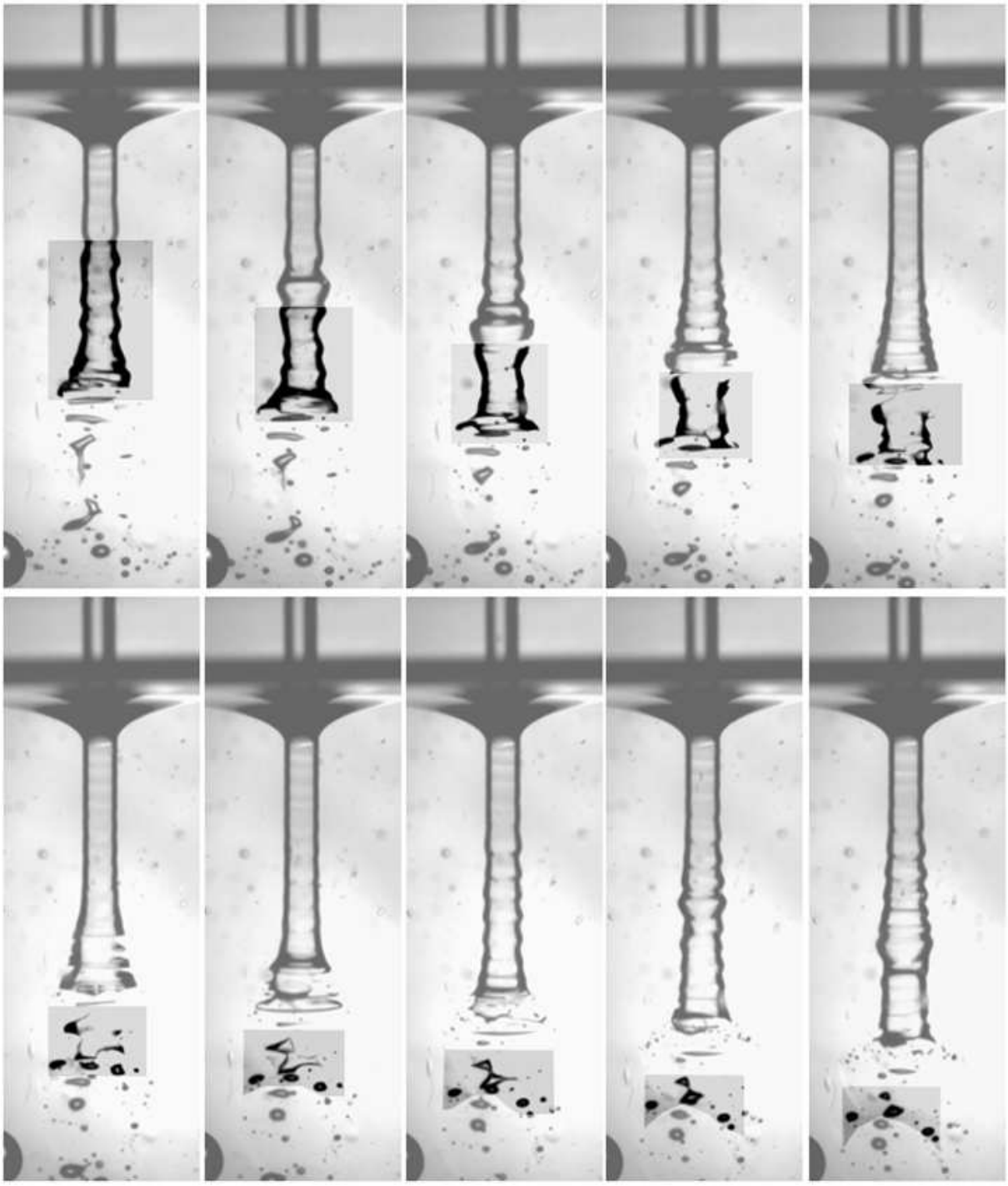


FIG. 8.13: Évolution d'une tranche d'air (en grisé) qui se déstabilise pour former des bulles. L'intervalle entre les photos est de 4 ms. La longueur de la trompette est de l'ordre de 15 mm. Le jet de 1.5 mm de diamètre d'huile silicone ($\eta = 0.35$ Pa.s) tombe à 1.76 m/s dans un bain du même liquide. Nous remarquons que la trompette est ondulée, nous discutons ce point dans l'annexe C.

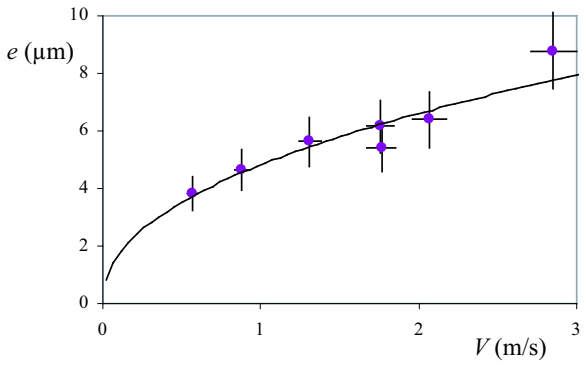


FIG. 8.14: Épaisseur du film d'air entraîné par un jet d'huile silicone (η = 0.35 Pa.s) en fonction de la vitesse d'entraînement V, mesurée par la conservation du volume d'air.

déplace à la même vitesse que l'air qui s'écoule dans le film. Nous avons mesuré la vitesse u de déplacement d'une vague et comparé celle-ci à la vitesse V du jet de liquide. Ces mesures sont

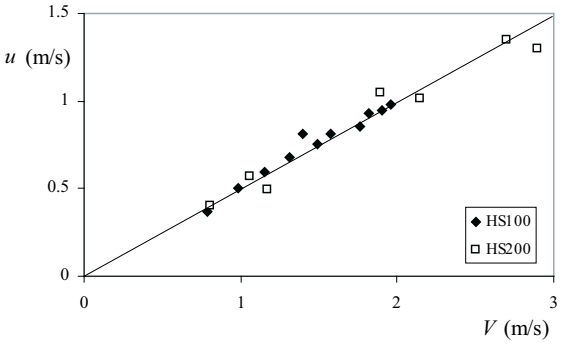


FIG. 8.15: Vitesse de déplacement d'une vague en fonction de la vitesse du jet de liquide pour deux huiles silicones de différente viscosité. La pente de la droite tracée vaut 1/2.

représentées sur la figure 8.15 pour deux huiles silicones différentes ($\eta = 97$ et 160 mPa.s). Les perturbations du film d'air se déplacent à $V/2$ donc à la même vitesse que l'air du film cisaillé entre l'huile du jet qui évolue à V et celle du bain statique.

On trouve ainsi que l'épaisseur entraînée est une fonction croissante de la vitesse d'entraînement. Les données sont correctement décrites par une loi d'échelle d'exposant proche de 0.45 représentée en trait continu sur la figure 8.14.

8.3 Résultats

8.3.1 Influence de la viscosité η_0 du film

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'épaisseur d'air entraîné par un jet liquide est une fonction croissante de la vitesse. Nous avons également vérifié ce point lorsque le film entraîné est

liquide. La cuve contenant le rouleau est remplie de glycérol ($\eta = 0.9$ Pa.s) et d'huile silicone (8 mPa.s $< \eta_0 <$ 36 mPa.s). Nous portons sur la figure 8.16 l'épaisseur e du film d'huile ici mesurée optiquement en fonction de la vitesse V. Notons qu'à la différence de la figure 8.14, e est ici millimétrique (et non micrométrique) : un film d'huile est nettement plus épais qu'un film d'air. Nous

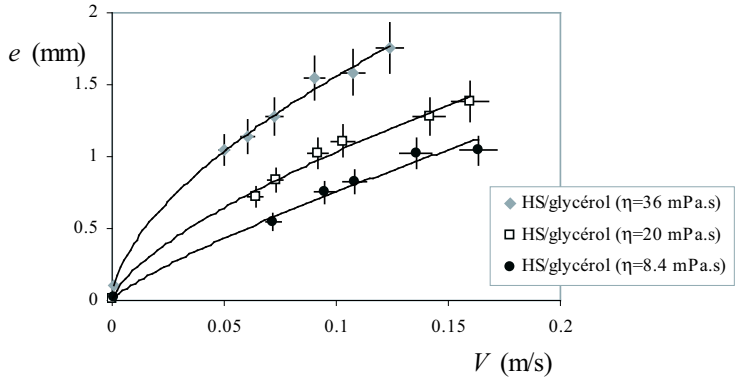


FIG. 8.16: Épaisseur e d'un film d'huile silicone entraîné par du glycérol en rotation solide autour d'un rouleau en fonction de la vitesse d'entraînement V pour différentes huiles. Les ajustements sont du type V^α, avec $0.6 < \alpha < 0.8$.

remarquons également que l'épaisseur e est une fonction croissante de la vitesse d'entraînement V, les données étant correctement décrites sur un tout petit intervalle de vitesse (moins d'une demi-décade) par une loi de puissance d'exposant compris entre 0.6 et 0.8. Enfin, on confirme là que le film e est d'autant plus épais que la viscosité η_0 est élevée : à vitesse d'entraînement donnée, le film est environ deux fois plus épais quand la viscosité est multipliée par quatre.

8.3.2 Bilan

Nous collectons l'ensemble de ces données sur la figure 8.17. L'épaisseur du film e au seuil d'entraînement (c'est-à-dire pour V aussi petit que possible) est représentée en fonction de la viscosité η_0. La viscosité du liquide inférieur est maintenue presque constante : nous utilisons du glycérol $\eta = 0.9$ Pa.s lorsque le liquide surnageant est une huile (losanges pleins ♦) et de l'huile silicone $\eta = 0.97$ Pa.s lorsque le liquide au dessus est de l'air (cercles blancs ∘). Ainsi, la tension interfaciale fluide/liquide est, elle aussi, presque constante $\gamma \sim 20$ mN/m pour les données rassemblées sur la figure 8.17. L'épaisseur e du film est une fonction croissante de la viscosité du fluide qui le constitue. Les données sont bien décrites sur près de 5 décades par une loi de puissance d'exposant 0.6 ± 0.1 et de coefficient 0.13 (lorsque e est exprimée en mm et η_0 en mPa.s). L'épaisseur e est donc une fonction croissante à la fois de la viscosité du liquide qui constitue le film η_0 ($e \sim {\eta_0}^{0.6\pm0.1}$) et de la vitesse d'entraînement V ($e \sim V^{0.7\pm0.1}$).

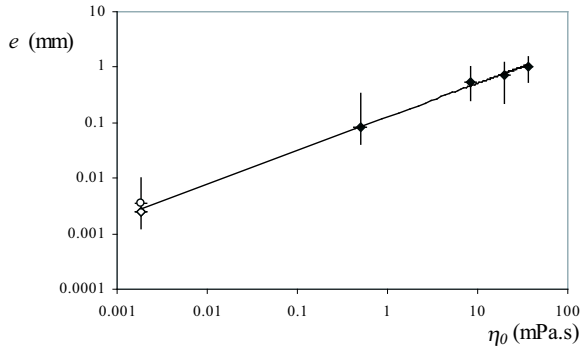


FIG. 8.17: Épaisseur e du film entraîné en fonction de sa viscosité η_0, en échelle logarithmique. Les mesures de l'épaisseur sont faites à la vitesse seuil d'entraînement d'air. La courbe en trait plein a pour équation $e(\text{mm}) = 0.13\eta_0(\text{mPa.s})^{0.57}$.

8.4 Discussion

8.4.1 Modèle

Eggers a récemment proposé un modèle [58] visant à prédire l'épaisseur du film entraîné dans la limite où le rapport des viscosités η_0/η est très inférieur à un. Il décompose l'écoulement en trois régions distinctes : une zone loin du film, la région d'entrée où les parois de l'interface se resserrent fortement et le film lui même.

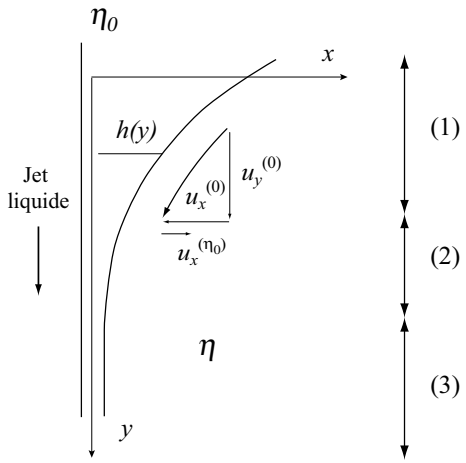


FIG. 8.18: Eggers décompose l'écoulement en trois régions distinctes. Loin du film (1), près de celui-ci (2) et le film lui-même (3).

Les équations

Le bilan de contrainte normale sur l'interface s'écrit (en notant ${\sigma_n}^{air}$ et ${\sigma_n}^{(0)}$ les composantes normales à la surface du tenseur des contraintes respectivement dans l'air et dans le liquide, γ la

tension de surface et κ la courbure de l'interface) :

$$\sigma_n{}^{air} = \gamma\kappa + \sigma_n{}^{(0)} \tag{8.4}$$

La courbure κ est donnée dans la limite des interfaces presque planes par $\kappa = -h''$, où h'' est la dérivée seconde de h par rapport à y (*cf.* figure 8.18). En outre, Eggers calcule le gradient de contrainte dans l'air en utilisant les résultats de la théorie de lubrification, notant f le flux volumique d'air à travers le film :

$$\left(\sigma_n{}^{air}\right)' = \frac{\partial p_{lub}}{\partial y} = 3\eta_0 \left(\frac{u_y^{(0)}}{h^2(y)} - \frac{f}{h^3(y)}\right) \tag{8.5}$$

En prenant la dérivée de l'équation 8.4 et en y injectant l'expression de la dérivée de la contrainte normale dans l'air, il obtient :

$$\left(\sigma_n{}^{(0)}\right)' + 3\eta_0 \left(\frac{u_y^{(0)}}{h^2(y)} - \frac{f}{h^3(y)}\right) = -\gamma h''' \tag{8.6}$$

Eggers montre en particulier que l'équation 8.6 est cohérente avec une variation de h de l'ordre de $\eta_0^{2/3}$ dans la région (3) alors que l'extension selon l'axe y de la zone (2) est de l'ordre de $\eta_0^{1/3}$.

Analyse dimensionnelle

Dans la région (1), le film est épais et la contrainte externe due à l'écoulement d'air peut être négligée. L'équation 8.6 se simplifie alors en :

$$h''' = -\frac{\left(\sigma_n{}^{(0)}\right)'}{\gamma} \tag{8.7}$$

Or h''' tend vers zéro quand le rapport des deux viscosités tend vers zéro. Le terme de droite de l'équation est donc négligeable et h s'écrit comme :

$$h = a(x - x_0)^2 \tag{8.8}$$

Cette expression de h est valable tant que la pression de lubrification est négligeable. Au-delà, Eggers cherche une solution autosimilaire de la fonction h, celle-ci étant très inférieure à toutes les longueurs externes de l'expérience :

$$h = \lambda^\alpha H\left(\frac{x - x_0}{\lambda^\beta}\right) \tag{8.9}$$

En réinjectant cette expression dans l'équation 8.6, et en raccordant cette solution avec l'expression parabolique de h (*cf.* équation 8.8), il trouve : $\alpha = 2/3$ et $\beta = 1/3$. Il termine en calculant l'expression de la fonction H et trouve finalement que l'épaisseur h^* du film entraîné dans la région (3) s'écrit comme :

$$h^* = \frac{0.667}{a}\left(\frac{\eta_0 V}{\gamma}\right)^{2/3} \tag{8.10}$$

où a est la courbure de l'interface dans la zone (1). Notons que l'épaisseur h^* est la moitié de l'épaisseur e discutée expérimentalement. L'approche d'Eggers n'est évidemment pas sans rappeler le problème du film liquide entraîné par le tirage d'une plaque solide hors d'un bain de liquide [90, 50, 51] dont nous donnons quelques éléments dans le paragraphe suivant.

8.4.2 Analogie avec le problème de Landau-Levich

Rappelons quelques résultats du problème de Landau-Levich [90, 49]. Une plaque solide est immergée dans un liquide qui la mouille totalement. Lorsque la plaque est immobile, un ménisque (dont la hauteur et le rayon de courbure au niveau de la ligne triple sont de l'ordre de la longueur capillaire) se forme sur celle-ci. Cette plaque est alors tirée du bain à vitesse constante et entraîne avec elle un film de liquide. Le processus de dépôt peut être décrit par trois zones : 1) très au-dessus du réservoir, un film de lubrification d'épaisseur constance e_{LL} 3) loin de la plaque dans le bain de liquide, un ménisque peu perturbé par le processus d'entraînement (de courbure de l'ordre de κ) 2) entre ces deux zones, une région intermédiaire de raccordement d'extension λ appelée ménisque dynamique (figure 8.19). L'épaisseur e_{LL} du film entraîne résulte d'un compromis entre la viscosité,

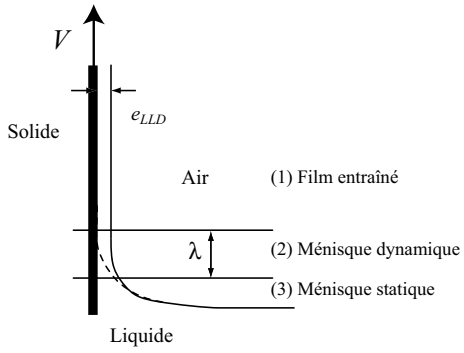


FIG. 8.19: Problème de Landau-Levich.

la capillarité et l'inertie du liquide. Cette épaisseur est donc une fonction du nombre capillaire et du nombre de Weber. Dans la limite ou le nombre de Weber est très inférieur à un, on peut trouver une expression analytique exacte de l'épaisseur entraînée : nous présentons la théorie de Landau-Levich et nous verrons les analogies et différences existant entre les deux problèmes d'entraînement.

Le calcul de Landau-Levich

L'extension λ du ménisque dynamique provient d'un équilibre entre la viscosité qui entraîne le film et la capillarité qui s'oppose à cet excès de surface. La pression dans le film est la pression atmosphérique et la dépression dans le ménisque statique est $\gamma\kappa$. L'épaisseur du ménisque dynamique est de l'ordre de e_{LL}, ainsi en équilibrant forces visqueuse et capillaire, on obtient dimensionnellement :

$$\frac{\eta V}{{e_{LL}}^2} \sim \frac{\gamma\kappa}{\lambda}$$

Dans la zone où les ménisques dynamique et statique se raccordent, les pressions (et donc les courbures) sont égales :

$$\frac{e_{LL}}{\lambda^2} \sim \kappa$$

De ces deux équations, on tire la loi dite de Landau-Levich :

$$e_{LL} \sim \kappa^{-1} Ca^{2/3} \tag{8.11}$$

Nous comprenons pourquoi la longueur caractéristique du problème est la longueur capillaire : le ménisque à l'interface entre l'air et le liquide est en dépression, ainsi il agit comme une lèvre qui vient racler le liquide entraîné par le solide, déterminant ainsi (en la limitant) l'épaisseur finale du film (cette image nous a été suggérée par C. Clanet).

Retenons ce résultat : l'épaisseur du film entraîné est calculée en partant de la forme du ménisque statique et est liée à la courbure κ de ce ménisque au niveau de la zone de raccordement. À la lueur de ces arguments, nous voyons que l'épaisseur e entraînée par une fibre de rayon b très inférieur à la longueur capillaire peut être immédiatement calculée : elle est proportionnelle au nombre capillaire à la puissance 2/3 et à l'inverse de la courbure du ménisque, égale à $1/b$ (*cf.* annexe A) . On trouve alors [165, 70, 34, 126] :

$$e \sim bCa^{2/3} \tag{8.12}$$

Entraînement d'air

Le problème du jet (ou du rouleau) liquide qui entraîne de l'air est comparable au problème de Landau, à ceci près que c'est le jet liquide qui joue le rôle du solide, que le film est fait d'air, entraîné dans du liquide (au lieu d'être liquide et entraîné dans l'air). Toutefois, l'équation 8.10 obtenue par Eggers qui donne l'épaisseur h^* du film d'air entraîné est tout à fait comparable à l'équation 8.11 : h^* est proportionnel au nombre capillaire à la puissance 2/3, celui-ci étant également calculé avec la viscosité du fluide entraîné (en général de l'air) et à une longueur $1/a$ qui est le rayon de courbure de l'interface loin du film entraîné. Toutefois, Eggers ne précise pas ce que vaut cette longueur : varie-t-elle avec la viscosité des deux fluides, la vitesse d'entraînement, les propriétés interfaciales entre les deux milieux ? En outre, est-elle, comme dans le problème de Landau, comparable à l'inverse de la courbure du ménisque dans la situation statique dont le pendant doit-ici être l'absence d'entraînement d'air ?

8.4.3 Courbure de l'interface loin du film entraîné

Nous nous intéressons donc aux variations de la courbure a d'une interface perturbée par l'entraînement d'un film d'air.

Profondeur d'enfoncement de la pointe avant l'entraînement

Avant l'entraînement d'air, la pointe s'enfonce dans le liquide d'une profondeur L qui dépend de la viscosité du liquide et de la vitesse d'impact selon (éq. 6.3) :

$$L \sim \sqrt{\frac{\eta V}{\Delta\rho \mathrm{g}}} \tag{8.13}$$

Ainsi, si l'on suppose, comme dans le problème de Landau-Levich, que l'entraînement d'air ne perturbe pas trop la forme de ce ménisque inversé, alors la longueur $1/a$ est proportionnelle à L et dépend donc de la viscosité et de la vitesse d'entraînement.

Du ménisque inversé à la trompette

Pour vérifier ce point, nous superposons sur la figure 8.20, deux photographies prises à l'aide d'une caméra rapide montrant l'interface air-liquide avec ou sans entraînement d'air. La trompette est quasi-stationnaire : une fois cette longueur atteinte, elle ne croît plus, son extrémité est statique et l'air s'échappe de cette structure sous forme de bulles. Nous notons immédiatement que l'inter-

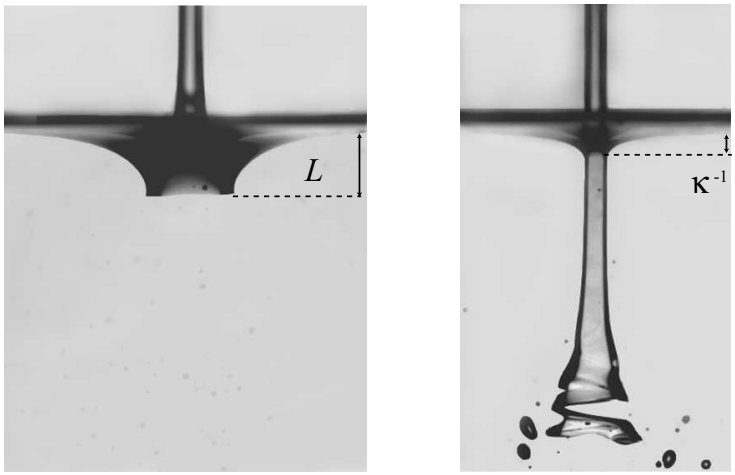


Fig. 8.20: Juxtaposition de deux photos montrant les interfaces liquide-air en-deçà et au-delà du seuil d'entraînement de l'air. La trompette d'huile silicone ($\eta = 0.97$ Pa.s) fait 30 mm de long. Les deux photos sont à la même échelle et montrent que le ménisque se rétracte brusquement.

face libre est profondément modifiée par l'entraînement d'air : lorsque la pointe cède, le ménisque inversé (de longueur L avant l'entraînement d'air) rétrécit et se rétracte : sa taille décroît de façon spectaculaire et passe de 8 mm avant l'entraînement d'air à 2 mm une fois l'interface perforée. Cette description qualitative nous permet d'avancer dans notre discussion : l'entraînement d'air modifie profondément la forme de l'interface libre et il semble peu probable que les courbures de l'interface avant et après l'entraînement soit corrélées. En cela, ce problème est différent de celui de Landau-Levich en mouillage partiel, car la situation dynamique d'entraînement ne peut être traitée comme une perturbation de la situation où il n'y a pas d'entraînement.

Influence de la vitesse

Toutefois, ce résultat ne donne aucune indication sur une éventuelle dépendance de a avec la vitesse d'impact du jet. Pour quantifier cette évolution, nous avons relevé le profil de l'interface

air/liquide (qui est ici une huile silicone $\eta = 100$ mPa.s), une fois le film entraîné dans le liquide. Ces différents profils, obtenus pour huit vitesses d'impact du jet différentes (comprises entre 0.7 et 2.2 m/s), sont représentés sur la figure 8.21. L'axe vertical est pris descendant, le bord du jet est en $r = 0$ et l'interface libre non perturbée est en $z = 0$. Nous avons également tracé l'équation donnant

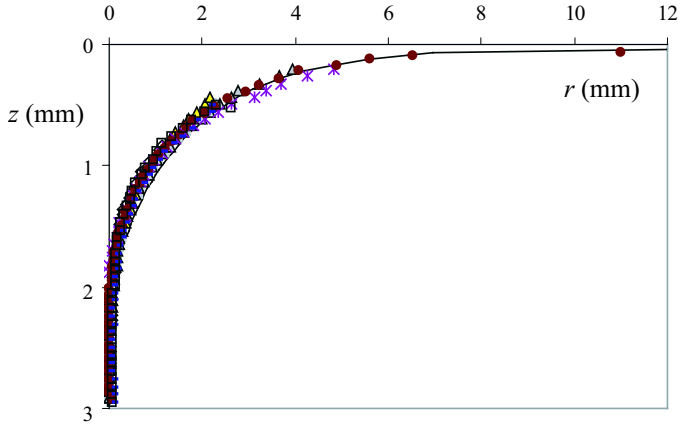


FIG. 8.21: Superposition des différents profils de l'interface air/huile silicone en amont de la trompette correspondant à différentes vitesses. La courbe en trait plein est l'équation du ménisque statique d'un liquide en mouillage nul sur un solide vertical. Chaque type de symbole indique un profil correspondant à une vitesse différente entre 0.7 et 2.2 m/s.

le profil explicite d'un ménisque *statique* de liquide en mouillage nul sur une plaque verticale [89]. Toutes les courbes se superposent remarquablement bien en dépit du contraste de vitesse existant entre elles. Le ménisque fait environ 2 mm de hauteur et s'étend sur près de 10 mm, ce qui correspond parfaitement aux dimensions d'un ménisque statique d'huile (de 20 mN/m de tension) sur un plan solide vertical. Le profil de l'interface est donc indépendant de la vitesse et donné par la loi de la statique (en notant c sa courbure) :

$$\gamma c = (\rho - \rho_0) g z \tag{8.14}$$

En conséquence, la courbure de l'interface en haut du ménisque ($z \sim \kappa^{-1}$) s'écrit, comme dans le problème de Landau, comme l'inverse de la longueur capillaire. On en déduit l'épaisseur du film d'air :

$$e = 2h^* \sim \kappa^{-1} \left(\frac{\eta_0 V}{\gamma} \right)^{2/3} \tag{8.15}$$

Interprétation

Dans notre problème, le liquide visqueux joue deux rôles *a priori* antagonistes : c'est lui qui entraîne l'air et il est alors aussi indéformable qu'un solide (ce qui est possible à cause du fort contraste de viscosité entre les deux milieux). Mais il est également à l'interface avec l'air au niveau

du ménisque et limite l'épaisseur entraînée en jouant le rôle de racleur précédemment évoqué. Il est

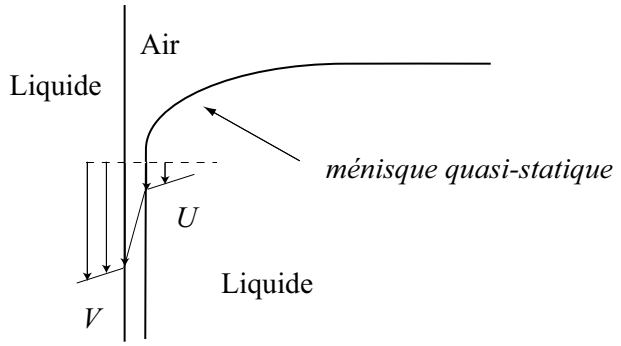


FIG. 8.22: Profil de vitesse dans le problème de l'entraînement d'air.

donc à la fois solide indéformable et liquide. Ces deux situations ne sont pourtant pas contradictoires (figure 8.22). Au niveau du jet, le liquide tombe en bloc, les effets visqueux dominent par rapport aux effets capillaires (le nombre capillaire construit avec la vitesse $V \sim 1$ m/s et la viscosité du liquide visqueux $\eta = 1$ Pa.s vaut : $Ca = \eta V/\gamma \sim 50$) et le jet entraîne de l'air avec lui. Du côté libre de l'interface, le liquide visqueux quasi-statique est peu affecté par l'écoulement d'air nettement plus fluide. La vitesse caractéristique dans le bain est de l'ordre de 1 mm/s et le nombre capillaire $Ca \sim 5\ 10^{-2}$ (pour un fluide de viscosité $\eta = 1$ Pa.s). Les effets visqueux sont négligeables, seules les propriétés statiques du liquide sont mobilisées et la forme de l'interface libre est celle adoptée par un fluide statique rejoignant un film d'air, et donc en mouillage nul. Les deux milieux dynamique et statique sont efficacement isolés par le film d'air qui canalise tout le cisaillement imposé par les conditions aux limites de part et d'autre de sa surface : $v = V$ pour le jet et $v = 0$ pour le bain. L'importance du film d'air est donc double : cisaillé dans son épaisseur, il connecte les deux milieux et entraîné par le jet quasi-solide, il en épouse la forme assurant la condition de raccord avec le liquide "solide".

Notons que la longueur caractéristique du problème est bien la longueur capillaire (éq. 8.11) en dépit de la géométrie cylindrique du jet, proche de celle d'une fibre (éq. 8.12) puisque le rayon du jet n'est pas assez petit par rapport à la longueur capillaire pour que sa courbure influe sur celle du ménisque.

8.4.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Nos mesures de l'épaisseur entraînée sont en bon accord avec ce modèle de Landau modifié.

- La longueur capillaire étant de l'ordre du millimètre et le nombre capillaire d'entraînement (calculé avec la viscosité de l'air $\eta_0 = 1.8\ 10^{-6}$ Pa.s, une vitesse d'entraînement V de l'ordre de 0.5 m/s et une tension de 20 mN/m) valant $5\ 10^{-5}$, nous pouvons donner un ordre de grandeur de l'épaisseur calculée dans l'équation 8.15 : $h^* \sim 2\ 10^{-6}$m, soit $e = 2h^* \simeq 4$ µm en

bon accord avec nos mesures.

- L'épaisseur e mesurée est bien une fonction croissante de la viscosité η_0, l'exposant de la loi de puissance entre ces deux grandeurs étant égal à 0.6 ± 0.05 proche de ce que prévoit l'équation 8.15.
- En outre, nous avons vérifié la croissance de e avec la vitesse d'entraînement V, le fluide entraîné étant de l'air ou des huiles silicones. L'exposant de la loi de croissance s'est trouvé être égal à 0.7 ± 0.1 en bon accord avec l'équation 8.15.
- Nous n'avons pas conduit d'étude systématique sur l'influence de la tension de surface (qui intervient faiblement, à la puissance $-1/6$ dans l'équation 8.15), ni sur l'influence du rayon du jet. Ce travail qui, si ces deux grandeurs s'avéraient être sans influence sur l'épaisseur entraînée, validerait totalement notre approche, reste à faire.
- Nous n'avons pas vérifié la cohérence des préfacteurs numériques de l'équation 8.10, la dispersion de nos mesures étant trop élevée pour conduire une telle analyse.

8.4.5 Limites du modèle

Lorsque la vitesse d'impact du jet liquide est trop grande, des déviations à la loi de Landau devraient être observées. Tout d'abord, l'inertie du fluide entraîné peut finir par ne plus être négligeable, ce qui conduit comme nous allons le voir à un épaississement du film. Ensuite, la condition de quasi-stationnarité du bain liquide peut être violée si le film liquide n'isole plus suffisamment le bain du jet. Enfin, lorsque le nombre capillaire est proche de un, la loi de Landau cesse d'être valable, et la gravité doit être prise en compte (loi de Derjaguin).

Influence de l'inertie

Pour les grandes vitesses de tirage (qui correspondent ici à des grandes vitesses d'impact du jet), il a été montré dans le cadre du problème de Landau que les effets inertiels tendent à épaissir le film entraîné [141, 142, 147]. Nous cherchons dans ce paragraphe dans quelle mesure ils doivent être pris en compte dans le problème de l'entraînement d'air. L'inertie a tendance à projeter le fluide dans le bain, à l'inverse des effets capillaires qui l'empêchent d'y rentrer. Raisonnons aux dimensions, en supposant ici encore que le ménisque du bain liquide est quasi-statique. L'équation de Navier-Stokes s'écrit en notant η_0 et ρ_0 la viscosité et la masse volumique du fluide entraîné :

$$-\rho_0 \frac{V^2}{\lambda} \simeq -\frac{\gamma\kappa}{\lambda} + \eta_0 \frac{V}{e^2}$$

En outre, la longueur du ménisque est modifiée et se calcule en écrivant le raccord des pressions entre les ménisques statiques et dynamiques :

$$\gamma\kappa - \frac{\gamma e}{\lambda^2} \sim \rho_0 V^2$$

En rassemblant ces deux équations, on obtient :

$$e \sim \kappa^{-1} \frac{Ca^{2/3}}{(1 - We)} \tag{8.16}$$

où les nombres capillaire et de Weber (qui compare les effets de l'inertie par rapport aux effets capillaires) sont calculés avec les caractéristiques du liquide entraîné. À basse vitesse d'impact, l'inertie est négligeable et on retrouve l'équation 8.15. À mesure que l'inertie augmente, l'épaisseur s'écarte de cette loi par valeur supérieure et diverge lorsque le nombre de Weber est de l'ordre de l'unité, soit lorsque $V = V^*$ donné par :

$$V^* = \sqrt{\frac{\gamma\kappa}{\rho_0}} \tag{8.17}$$

V^* est de l'ordre de 3 m/s pour une huile silicone de 20 mN/m de tension. À ce stade, rappelons que les mesures d'épaisseur n'ont pas toutes été réalisées à vitesse d'impact du jet constante. En particulier, e n'a pu être mesuré que pour des vitesses supérieures à la vitesse seuil d'entraînement V_c dont nous avons donné une expression au paragraphe 7 :

$$V_c \sim \frac{\gamma}{\eta} \ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) \tag{8.18}$$

La vitesse seuil d'apparition du film d'air est d'autant plus élevée que la viscosité du bain est petite. Nous avons mesuré l'épaisseur d'air entraînée pour différentes viscosités du bain (10 mPa.s< η <1000 mPa.s) au seuil d'apparition de la lame d'air. La vitesse est alors donnée par l'équation 8.18 et nous calculons le nombre capillaire Ca_0 du fluide entraîné à partir de cette vitesse. L'épaisseur mesurée e (en µm) est représentée sur la figure 8.23 en fonction du nombre capillaire Ca_0. La ligne en trait continu est la loi de Landau (abstraction faite du coefficient numérique). Pour les petits nombres capillaires Ca_0 (ce qui correspond aux petites vitesses d'impact), l'épaisseur du film est en accord avec le modèle de Landau alors que pour les grands nombres capillaires Ca_0 (ce qui correspond aux grandes vitesses d'impact), le film s'épaissit et s'écarte de la loi de Landau-Levich. Nous interprétons cet épaississement comme un effet de l'inertie du fluide qui tend bien à le projeter dans le bain.

Écoulement dans le jet

En outre, la condition de quasi-stationnarité du liquide du bain induit des conditions sur l'écoulement du jet. Cette condition est vérifiée dès que $U < \gamma/\eta$. Nous avons vu figure 8.10 que les vitesses de part et d'autre de la lame était liées par l'équation :

$$\eta_0 \frac{V - U}{e} \sim \eta \frac{\partial v}{\partial r} \tag{8.19}$$

où $\partial v/\partial r$ est le gradient de vitesse dans le jet. On obtient une expression de U, la vitesse dans le bain :

$$U = V - e\frac{\eta}{\eta_0}\frac{\partial v}{\partial r} \tag{8.20}$$

Ainsi, la vitesse U dans le bain est d'autant plus faible que :

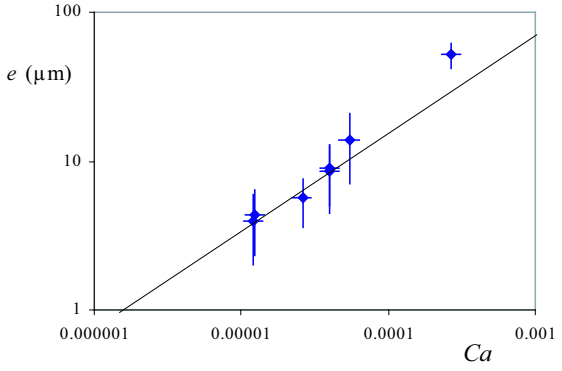


FIG. 8.23: Épaisseur du film entraîné en fonction du nombre capillaire du fluide entraîné. Pour chaque point, le liquide du bain est une huile silicone de viscosité différente. Plus le nombre capillaire est élevé, moindre est la viscosité du bain.

- La vitesse d'impact est faible.
- L'épaisseur du film entraîné est élevée, ce qui isole d'autant mieux les deux liquides.
- Le gradient de vitesse dans le jet est élevé, c'est-à-dire le profil de vitesse dans le jet s'apparente le plus possible à un profil de Poiseuille.
- Le contraste de viscosité entre les deux liquides est grand.

Nous discutons ces deux derniers points. Dans nos expériences, du liquide tombe d'une hauteur plus ou moins grande d'un embout cylindrique. À la sortie du tube, le profil de vitesse est donc un profil de type Poiseuille. Le liquide est immobile sur les bords du jet. Celui-ci tombe alors dans l'air et le profil se déstabilise et se raidit pour tendre vers un écoulement bouchon. Le gradient de vitesse dans le jet dépend donc du temps qu'il a passé dans l'air et de son rayon initial : plus le jet est large, et plus la quantité de mouvement doit diffuser sur une grande longueur pour que le profil se raidisse. La condition de quasi-stationnarité du liquide du bassin sera donc d'autant mieux vérifiée que la chute du jet dans le liquide a été courte et que le rayon du jet est grand. Le rôle de la viscosité du liquide du bain est complexe : elle influe sur la vitesse seuil d'apparition du film d'air, elle détermine le critère de quasi-stationnarité du bain (puisque la vitesse du liquide dans le bain doit-être inférieure à γ/η) et enfin intervient dans l'expression de la vitesse du bain du liquide.

Grand nombre capillaire : loi de Derjaguin

Nous avons également mesuré l'épaisseur de films d'huile silicone qui se sont trouvés être de l'ordre du millimètre. Pour ces huiles $\eta_0 \sim 50$ mPa.s, la vitesse d'impact $V \sim 5$ cm/s assure que le nombre capillaire d'entraînement est de l'ordre de 0.1. Or quand on se rapproche de Ca =1, l'épaisseur et l'extension du ménisque deviennent de l'ordre de la longueur capillaire et le ménisque dynamique envahit le ménisque statique. Les effets liés à la capillarité sont alors négligeables devant la gravité et l'épaisseur du film entraîné devient indépendante de la tension de surface. En cherchant

une solution de la forme $e \sim \kappa^{-1} Ca^n$, comme suggéré par Derjaguin [93], on trouve pour éliminer γ : $n = 1/2$. Ainsi, pour $Ca \sim 1$, on obtient

$$e \sim \kappa^{-1}\sqrt{Ca} \tag{8.21}$$

L'entraînement d'un film d'huile par du glycérol devrait plutôt vérifier la loi de Derjaguin (éq. 8.4.5) plutôt que la loi de Landau-Levich (éq 8.11). Cette correction est faible (l'exposant passe de 2/3 à 0.5). Nous notons toutefois sur les trois derniers points de la figure 8.17 que la croissance de l'épaisseur avec la viscosité du fluide entraîné est moins élevée que celle tracée en trait plein d'exposant égal à 0.57-.

Lorsque la condition de quasi-stationnarité du liquide du bain n'est plus vérifiée, la validité des modèles tombent et le mécanisme d'entraînement d'air est totalement différent : l'air n'est plus entraîné sous forme de film mais directement sous forme de bulles ce qui fait perdre à l'écoulement son caractère quasi-stationnaire. Notons que l'entraînement d'air par un liquide peu visqueux suscite toujours un grand nombre de questions [11, 39, 120, 170].

8.5 Conclusion

Nous avons tenté de mesurer l'épaisseur du film de fluide entraîné par un liquide visqueux en mouvement. Cette épaisseur est de l'ordre du millimètre lorsque le fluide entraîné est liquide et du micromètre lorsqu'il est gazeux. L'épaisseur du film gazeux a été déterminée par différentes méthodes : interférométrique, dynamique et en observant l'apparition de bulles. Quoique nos résultats soient entachés de fortes incertitudes expérimentales, nous pouvons dégager trois tendances : l'épaisseur e du film est une fonction croissante de la vitesse V et de la viscosité du fluide η_0, et elle est relativement indépendante de celle du liquide lorsque celui-ci est suffisamment visqueux ($\eta > 0.2$ Pa.s). Nous avons montré que ce problème qui semble à première vue très complexe se résout simplement : le film d'air cisaillé dans son épaisseur *isole* le liquide en mouvement du bain qui démouille le film d'air. Nous avons montré que la forme de l'interface libre est alors celle d'un ménisque statique. Cette constatation nous a permis de comparer le film de fluide entraîné par le jet liquide au film de liquide entraîné par une surface solide (problème de Landau-Levich). Dans les deux cas, la dépression au niveau du ménisque air-liquide sélectionne l'épaisseur entraînée en la limitant. Toutefois, il existe des différences entre les deux problèmes, la plus notable étant que l'entraînement d'air modifie profondément l'écoulement de liquide et ne peut être interprétée comme une perturbation de la situation sans entraînement.

Conclusion sur les pointes liquides

Nous avons étudié deux dispositifs expérimentaux permettant d'engendrer des pointes liquides bidimensionnelles, qui mettent tous deux en jeu l'impact d'un film ou jet de liquide sur un bain statique. Nous avons mesuré le rayon de courbure à l'extrémité de la pointe qui se forme à l'endroit de l'impact, et montré qu'il décroît exponentiellement avec le nombre capillaire, en accord avec un modèle classique de Jeong et Moffatt. En outre, en accord avec ce même modèle, nous avons observé que le profil de la pointe est auto-similaire, indépendant de l'échelle à laquelle on le considère. Seule la viscosité du liquide inférieur importe alors, les différentes lois exhibées s'étant révélées être indépendantes de celle du liquide supérieur. Toutefois, il n'est pas possible d'engendrer des pointes liquides aussi aigues qu'on le désire, en dépit de cette loi de décroissance dramatique. Lorsque le nombre capillaire dépasse une valeur seuil (de l'ordre de 4), la pointe fluide cède et une fine lame du fluide supérieur est entraînée dans le liquide visqueux. La viscosité de ce fluide ne peut alors plus être ignorée et nous avons montré que le nombre capillaire seuil d'entraînement en dépend logarithmiquement. Au-delà d'une vitesse d'impact seuil, il convient en effet, comme proposé par Eggers, de tenir compte de l'écoulement de recirculation du fluide dans la pointe. Cet écoulement crée une pression additionnelle qui peut-être suffisante pour la faire craquer. Nos observations expérimentales sont en accord quantitatif avec cette théorie d'Eggers. Mentionnons toutefois qu'il n'apparaît dans ce modèle aucune longueur caractéristique, alors que nous avons observé que le seuil d'entraînement dépend de la profondeur d'enfoncement. Nous aimerions clarifier ce point et notamment déterminer l'influence des différentes longueurs du système, comme la profondeur d'enfoncement et le rayon du rouleau qui emmène le liquide impactant. Nous nous sommes finalement intéressés à ce qui fixe l'épaisseur de la mince lame de fluide entraînée dans le bain visqueux à grand nombre capillaire. Cette épaisseur se trouve être une fonction croissante de la vitesse d'impact et de la viscosité du fluide supérieur. Ces résultats expérimentaux sont en bon accord avec un modèle proposé par Eggers dont la démarche est analogue à celle de Landau et Levich sur l'épaisseur d'un film entraîné hors d'un bain liquide par une plaque solide. Ce résultat à première vue surprenant est justifié par le pouvoir isolant du film d'air, qui sépare le jet impactant du bain, rendant ce dernier quasi-statique à l'endroit de l'impact : un ménisque se forme, en mouillage nul puisque le bain rejoint un film d'air – et le problème apparaît ainsi absolument similaire à celui de Landau, où une région quasi-statique est déformée pour produire l'entraînement.

Conclusion générale

Nous avons discuté dans ce travail diverses situations dynamiques dominées par la tension de surface – c'est-à-dire pour lesquelles le rapport surface sur volume était élevé. Nous avons même tenté d'exalter ces comportements en allant vers des situations singulières (où ce rapport diverge), comme peuvent l'être des pointes liquides. Nous avons en particulier envisagé deux cas : 1) celui d'une pointe de fluide peu visqueux dans un liquide visqueux engendrée par l'impact d'un liquide dans lui-même (comme cela peut se produire sur les bords d'une vague d'étrave). Nous avons montré comment un équilibre entre forces visqueuses et capillaires pilote la courbure d'une telle pointe – qui suit une loi remarquable, puisqu'exponentielle, en fonction du rapport de ces forces (appelé nombre capillaire). Une telle loi engendre une vitesse caractéristique d'apparition de la pointe, mais implique aussi que celle-ci ne peut résister à des vitesses d'impact plus grandes (qui induiraient des courbures quasi-infinies). Comme l'a souligné Eggers, la pression de lubrification engendrée dans cette région ultra-confinée par le fluide supérieur (de l'air dans bien des cas) sera alors grande, et suffisante pour faire céder la pointe : l'air dès lors s'engouffre dans le liquide visqueux, et le fracture. 2) Nous avons également envisagé le cas d'une pointe liquide obtenue en couvrant de liquide une pointe solide. Alors un écoulement des zones pointues vers les courbures plus faibles s'installe, et assèche la région singulière. La cinétique d'une goutte posée sur un tel dispositif est très dépendante du rayon local du cône solide, et ceci engendre un ralentissement du mouvement à mesure que la goutte progresse.

Un autre axe de notre travail a concerné des situations où l'on engendre des doigts de liquide – comme il peut s'en former lorsqu'un liquide impacte avec vigueur une passoire. Sous certaines conditions, le liquide peut passer dans les trous, et engendrer des doigts que nous avons caractérisé. Un autre cas est celui d'un liquide qui s'engouffre dans un tube – on peut voir ce liquide comme un vaste doigt contraint géométriquement par la présence du tube, dont nous avons caractérisé les oscillations de ce doigt que nous nous sommes principalement intéressés. Mais, dans cet exemple aussi, des situations singulières sont apparues : d'une part, cet oscillateur (au moment où il est de masse nulle) peut être singulier ; et d'autre part parce que des structures secondaires, comme l'éruption d'un jet au moment de où le liquide s'engouffre dans le tube, se superposent aux structures principales.

On voit sur ces différents exemples la richesse des comportements singuliers. Il resterait à les

relier à ceux déjà observés dans d'autres géométries – nous pensons par exemple à "l'aspiration sélective" qui permet d'engendrer des pointes liquides, voire des jets très fins sur des surfaces liquides si on aspire à distance avec un flux suffisamment important. Une vision unifiée de ces différents phénomènes, et une caractérisation plus précise des structures dynamiques qui sont engendrées (rayon du filament émis, épaisseur du film d'air dans la fracture d'un liquide) restent à construire.

Annexe A

Goutte sur une fibre

L'étude de la forme d'une goutte sur une fibre a été principalement développée en vue de trouver une méthode de mesure de l'angle de contact sur un tel substrat. Les résultats que nous présentons dans cette annexe sont les fruits des travaux de Carroll [29, 30, 32, 33, 35] et McHale [102, 103, 104].

Si la gravité est négligeable, c'est-à-dire si la longueur capillaire est grande devant la taille de la fibre, alors la goutte est modelée par les forces capillaires. Si le liquide est mouillant, elle s'enroule alors autour de la fibre et adopte une forme axisymétrique. Il est alors possible de calculer analytiquement sa courbure, sa longueur, son volume, l'aire interfaciale liquide/air et la position de son point d'inflexion. Lorsque le rayon de la fibre devient non négligeable devant la taille de la goutte, celle-ci perd le sentiment de la courbure du substrat et préfère adopter une forme non-axisymétrique. Une telle forme est également choisie quand le liquide est peu mouillant et la transition entre ces deux configurations (axisymétrique et non-axisymétrique) est appelée roll-up.

A.1 Forme d'une goutte axisymétrique

A.1.1 Profil et surpression d'une goutte sur une fibre

La condition d'équilibre d'une goutte sur une fibre, en l'absence de tout effet de gravité, est que la pression au sein de la goutte soit homogène. La surpression constante K dans une goutte est

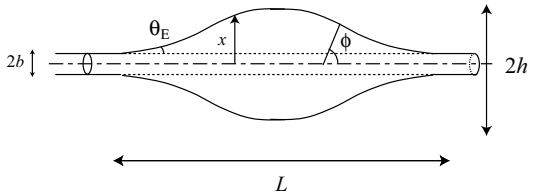


Fig. A.1: Goutte sur une fibre cylindrique horizontale.

donnée par la formule de Laplace en notant R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux en un

point de la surface :

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = K$$

Les rayons R_1 et R_2 s'expriment simplement avec les notations de la figure A.1 et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\cos\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} + \frac{\sin\phi}{x} = K \tag{A.1}$$

On intègre en introduisant une deuxième constante d'intégration K' :

$$x \sin\phi = \frac{1}{2} K x^2 + K' \tag{A.2}$$

Ces deux constantes d'intégration peuvent être déterminées en écrivant les conditions aux limites :

$$\text{En } x = b, \qquad \phi = \pi/2 - \theta \tag{A.3}$$

$$\text{En } x = h, \qquad \phi = \pi/2 \tag{A.4}$$

On en déduit l'expression de la surpression au sein de la goutte en introduisant le paramètre $n = h/b$

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{b} \frac{n - \cos\theta_E}{n^2 - 1} \tag{A.5}$$

Cette expression se simplifie en mouillage total ($\theta_E = 0$). On trouve alors :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{b + h} \tag{A.6}$$

Puis, en utilisant l'équation A.2 et la définition de l'angle ϕ : $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\tan\phi$, on va pouvoir écrire le profil de la goutte en fonction du paramètre x. On introduit :

$$a = \frac{h\cos\theta_E - b}{h - b\cos\theta_E}$$

Notons que a se simplifie notablement en mouillage total (a vaut alors 1). On obtient le gradient de profil :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2 + ahb}{\sqrt{(h^2 - x^2)(x^2 - a^2b^2)}} \tag{A.7}$$

Quand $a = 1$ ($\theta_E = 0$), on retrouve une expression proposée par Princen [119]. Au prix d'un changement de variable ($x^2 = h^2(1 - k^2 \sin^2\varphi)$ et $k^2 = (h^2 - a^2b^2)/h^2$) et de l'introduction d'intégrales elliptiques de première et seconde espèce, l'équation A.7 peut être intégrée :

$$z = \pm \left[abF(\varphi, k) + hE(\varphi, k) \right] \tag{A.8}$$

A.1.2 Longueur, aire de contact, volume de la goutte

La longueur de la goutte sur la fibre s'écrit à partir de l'équation A.8 :

$$L = 2|z(x = b)| = 2[abF(\varphi, k) + hE(\varphi, k)] \tag{A.9}$$

L'aire de l'interface liquide/air peut se calculer à partir de l'équation :

$$A(z) = 2\pi \int_{-z}^{z} x \mathrm{d}s$$

et se trouve être égale à :

$$A(z) = 4\pi(ab + h)hE(\varphi, k) \tag{A.10}$$

Le volume de la goutte est déterminé à partir de :

$$\Omega(z) = \pi \int_{-z}^{z} x^2 \mathrm{d}z$$

qui s'intègre en :

$$\Omega(z) = \frac{2\pi h}{3}\left[(2a^2b^2 + 3ahb + 2h^2)E(\varphi, k) - a^2b^2F(\varphi, k) + \frac{x}{h}(h^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{A.11}$$

L'équation précédente a également été obtenue par Roe [139] pour des gouttes en mouillage total (soit pour $a = 1$).

Les formules A.9, A.10, A.11 sont donc écrites en fonction des variables h et b. Pour trouver les variations de h en fonction du volume de la goutte Ω et de b, il nous a donc fallu inverser l'équation du volume et chercher l'ensemble des couples (h, b) vérifiant la condition désirée de volume.

A.2 Stabilité de la forme axisymétrique

A.2.1 Roll-up

Mais des gouttes posées sur des fibres peuvent également adopter des conformations non-axisymétriques, même lorsque les effets de la gravité sont négligeables. C'est le cas pour les gouttes ne mouillant pas totalement la fibre (angle de contact supérieur à 90°) ou pour des gouttelettes sur des fibres épaisses. Ces gouttes n'adoptent plus une conformation axisymétrique pour des raisons

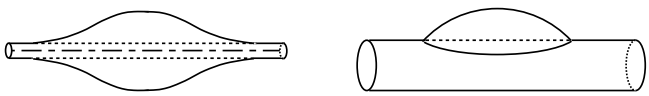


FIG. A.2: Les deux conformations que peut adopter une goutte sur une fibre en l'absence de gravité.

interfaciales (*cf.* figure A.2), et roulent sur un côté de la fibre. Adam le premier [1] a souligné l'intérêt de provoquer cette transition afin d'activer le processus de détergence. Les gouttes ayant roulé sur la fibre y adhèrent moins et il est alors beaucoup plus facile de les enlever. Carroll puis McHale ont analysé cette transition et déterminé le domaine de stabilité des deux formes [32, 103].

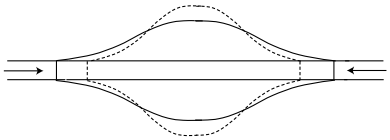


FIG. A.3: Perturbation axisymétrique de la goutte.

Condition de métastabilité

Carroll [32] a étudié la métastabilité de la forme axisymétrique à partir des formules détaillées ci-dessus. Il a considéré une petite perturbation axisymétrique δn ($\delta n > 0$) de la position de la goutte. La pression au sein de la goutte est modifiée par cette perturbation d'une quantité :

$$\delta\ \Delta P = \gamma \left(-\frac{\mathrm{d}R_1^{-1}}{\mathrm{d}n} + \frac{\mathrm{d}R_2^{-1}}{\mathrm{d}n} \right)$$

À l'apex de la goutte, le rayon de courbure R_2 vaut h, il est donc possible à partir de l'équation A.5 de calculer l'expression du deuxième rayon de courbure R_1 :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{b} \left(\frac{n^2 - 2n\cos\theta + 1}{n(n^2-1)} \right)$$

La quantité $\delta\ \Delta P$ peut alors être calculée, elle s'annule lorsque n et θ_E vérifient la condition :

$$2n^3 \cos\theta_E - 3n^2 + 1 = 0 \tag{A.12}$$

Il considère maintenant une petite perturbation non-axisymétrique pour laquelle R_2 augmente et R_1 diminue en haut de la goutte (point A sur la figure A.4) et varient dans le sens inverse au point B. Si $\delta\Delta P > 0$ au point A, l'écoulement aura alors lieu du haut vers le bas de la goutte (dans le sens de la flèche indiquée sur la figure A.4) jusqu'à ce que la goutte ait complètement basculé d'un côté de la fibre. L'équation A.12 partage donc le plan en deux zones. Si ce polynôme est positif, alors $\delta\Delta P < 0$, les gouttes sont stables ; sinon elles sont instables.

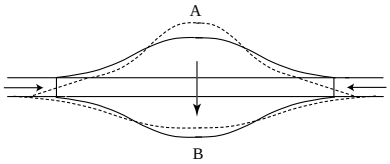


FIG. A.4: Perturbation non-axisymétrique de la goutte.

Condition de stabilité

Cette condition n'est pas une condition de stabilité au sens où elle ne ne sélectionne pas la conformation de plus basse énergie. L'obtention de l'énergie libre de la conformation axisymétrique est aisée grâce aux formules de Carroll exposées ci-dessus. Pour la conformation non-axisymétrique,

le calcul n'est pas analytique. L'énergie libre de cette conformation a néanmoins été obtenue par McHale [103] par un calcul d'éléments finis.

Les deux conditions (métastabilité et stabilité) sont reportées sur la figure A.5. En mouillage

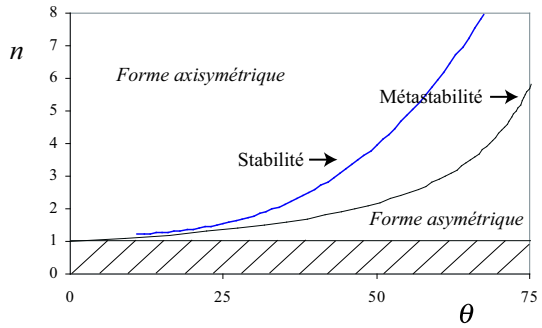


FIG. A.5: Domaine de stabilité des gouttes axisymétriques en coordonnées (θ, n). Aucune goutte ne correspond au domaine hachuré.

total, la conformation stable est toujours la conformation axisymétrique.

A.2.2 Influence de la gravité

Lorsque la gravité n'est plus négligeable, ce diagramme de stabilité est modifié : il apparaît une troisième conformation, également asymétrique, favorisée pour les gouttes de grand volume. À notre connaissance, peu d'articles sont consacrés à l'étude de gouttes (sur des fibres) déformées par la gravité. Signalons toutefois le travail de Kumar *et al.* qui ont calculé la forme d'une goutte sensible à la gravité sur une fibre inclinée verticalement [87].

Annexe B

Forme du bourrelet

Nous exposons ici les éléments d'un modèle pour rendre compte de la forme de l'interface libre au bout du film d'air. Nous nous plaçons dans les repères suivants.

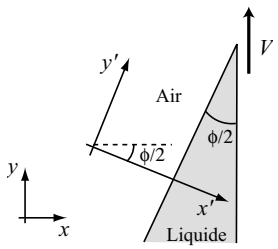


FIG. B.1: Inclinaison de la surface libre par rapport à la vitesse d'écoulement.

B.1 Modèle

Considèrons les ondes de surface se propageant à l'interface air/liquide. Le fluide s'écoule autour de l'interface et sa vitesse à l'infini vaut $V\sin(\phi/2)$. On note $\xi(x)$ la position de l'interface. On

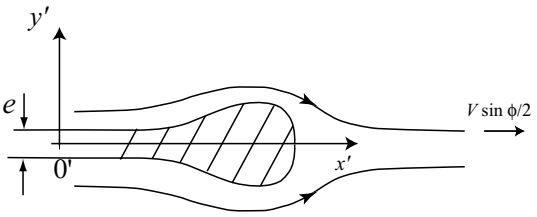


FIG. B.2: Profil de la surface libre autour de laquelle s'écoule le fluide visqueux.

cherche une perturbation stationnaire de la surface libre sous la forme :

$$\xi = \xi_0 \ \mathrm{e}^{ik'x'} = \xi_0 \ \mathrm{e}^{ik_x x + ik_y y}$$

Les repères (O, x, y) et (O', x', y') sont décalés d'un angle $\phi/2$, ainsi :

$$k_y = -\frac{k_x}{\mathrm{cotg}(\phi/2)}, \quad k = \frac{k_y}{\sin(\phi/2)} \quad \text{et} \quad k' = -k$$

Négligeons la viscosité et la densité de l'air. L'équation de dispersion des ondes capillaires et gravitaires pour un fluide inviscide contenu dans un bassin de profondeur infini s'écrit, en l'absence de pression extérieure [136, 10] et en notant la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$, k le vecteur d'onde de la perturbation, γ la tension interfaciale entre les deux liquides et V la vitesse de l'écoulement :

$$\gamma\frac{k^3}{\rho} + (i\vec{k}\cdot\vec{V} - 2\nu k^2)^2 - 4\nu^2 k^3 q = 0 \tag{B.1}$$

avec

$$q(\vec{k}) = \sqrt{k^2 - i\vec{k}\cdot\vec{V}/\nu} \tag{B.2}$$

En posant $v = V\eta/\gamma$ et $\tilde{k} = k\eta^2/(\rho\gamma)$, on obtient :

$$\tilde{k}^3 + \left(iv\tilde{k}_y - 2\tilde{k}^2\right)^2 - 4\tilde{k_y}^3\sqrt{\tilde{k}^2 - iv\tilde{k}_y} = 0 \tag{B.3}$$

En utilisant ensuite $\tilde{k} = \tilde{k}_y/\sin(\phi/2)$, et posant $\epsilon = v\sin(\phi/2)$ on trouve :

$$\tilde{k} + \left(i\epsilon - 2\tilde{k}\right)^2 - 4\tilde{k}\sqrt{\tilde{k}^2 - i\epsilon\tilde{k}} = 0 \tag{B.4}$$

B.2 Résultats

Pour $\epsilon \sim 4$ (ϵ est l'inverse du rapport de la célérité de démouillage sur la vitesse d'entraînement et a été déterminé expérimentalement au chapitre 8 pour un film d'air entraîné dans un liquide visqueux), on déduit de l'éq. B.4 les parties réelles et imaginaires de k. La partie réelle est non nulle, ce qui fait que la solution va être oscillante. En réinjectant dans l'expression de ξ, on obtient le profil représenté sur la figure B.3. Nous notons qu'au départ ($x\gamma\rho/\eta^2 \sim 7$) le profil est extrêmement

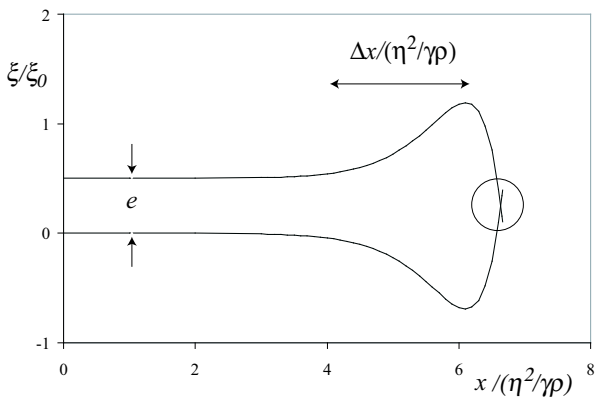


Fig. B.3: Profil calculé du bord de la lame.

raide : les interférences au bord de la lame sont beaucoup trop serrées pour être visibles. Puis,

le bourrelet atteint son épaisseur maximale avant de décroître lentement pour rejoindre le film d'épaisseur constante e. La distance caractéristique sur laquelle décroît ce bourrelet est de l'ordre de 2. Ainsi cette décroissance se fera sur une distance notée Δx de l'ordre de :

$$\Delta x \simeq 2\frac{\gamma\rho}{\eta^2}$$

B.3 Limites du modèle

B.3.1 Condition d'application de l'approximation linéaire

ξ varie comme $\xi_0 \mathrm{e}^{-ikx'}$ dont le module $|k| \sim \xi_0 \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(k)x'}$ diverge à l'infini. Or l'équation de dispersion ci-dessus a été obtenue en faisant un développement linéaire au premier ordre de l'équation de Navier-Stokes. On peut quitter le régime linéaire pour deux raisons :

- soit le rayon de courbure de l'interface ne peut plus être approximé par la dérivée seconde de ξ, ce qui est équivalent à $\xi k \sim 1$. Ceci se produit pour

$$x_1 \sim \frac{1}{\mathrm{Im}(k)} \ln\left(\frac{1}{k\xi_0}\right)$$

- soit ξ est de l'ordre de l'épaisseur de la lame et les faces inférieures et supérieures du film doivent se raccorder. Ceci se produit pour

$$x_2 \sim \frac{1}{\mathrm{Im}(k)} \ln\left(\frac{e}{\xi_0}\right)$$

Or on a $e \sim 100$ µm et $k \sim \gamma\rho/\eta^2$. En prenant $\gamma \sim 10^{-1}$ N/m, $\rho \sim 1000$ et $\eta \sim 1$, on obtient $1/\kappa \sim 10^{-2} \gg 10^{-4}$. Ce sera donc à cause du raccordement entre les surfaces que l'approximation linéaire ne sera plus valable et non à cause de sa trop grande courbure (la zone correspondante est encadrée sur la figure B.3).

B.3.2 Limites

Les résultats de ce calcul doivent être nuancés. Tout d'abord, le signe de ξ_0 qui permet de faire la différence entre une lame terminée par un bourrelet ou par un doigt (la possibilité d'existence de ces deux profils est évoquée au chapitre 8) n'est pas donné. Nous avons représenté, figure B.3, une lame terminée par un bourrelet parce que nous pensons qu'il est plus réaliste. Toutefois le calcul présenté dans cette annexe ne démontre pas son existence (on retrouve l'autre profil en changeant le signe de ξ_0). Ensuite, nous avons négligé l'écoulement d'air dans le film qui peut induire des modifications de ce profil : la présence du bord libre conduit à une modification de la direction globale de l'écoulement (d'un angle $\phi/2$), donc peut-être de la valeur de cette vitesse et de la pression dynamique due à ce flux d'air.

Annexe C

Trompette

Nous présentons dans cette annexe quelques études préliminaires sur les dimensions de la trompette. Nous cherchons à déterminer sa taille en régime stationnaire, une fois sa phase de croissance terminée.

C.1 Forme de la trompette

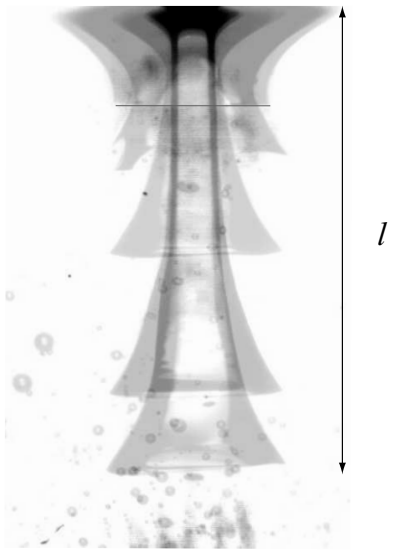


Fig. C.1: Phase de la croissance de la trompette dans de l'huile silicone visqueuse $\eta = 970$ mPa.s. La taille l maximale de la trompette est ici de 1.5 cm, et les images sont espacées d'environ 200 ms.

Nous commençons par considérer le film comme une interface qui isole les deux milieux : la contrainte tangentielle de part et d'autre du film n'est pas conservée, la faible viscosité de celui-ci lui permettant de supporter tout le cisaillement. Nous nous intéressons à la phase d'apparition de la trompette. Celle-ci croît lentement, à une vitesse de l'ordre de 20 mm/s. La figure C.1 illustre cette

évolution. Nous observons qu'au cours de sa progression, la trompette s'allonge et qu'elle rétrécit, et que l'amplitude de la déformation au niveau de la surface diminue. En outre, l'extrémité inférieure est évasée (d'où son nom de trompette). Nous mesurons la vitesse V du jet, qui est isolé du reste du bassin par le film d'air. Cette vitesse est mesurée à l'aide de particules et s'avère être beaucoup plus rapide que la vitesse de croissance de la trompette : $V \sim 1$ m/s. Ainsi pendant le temps nécessaire à une particule pour dévaler le jet, la trompette est quasi-statique. Si le débit volumique Q du jet est conservé, alors, V et r sont liés par :

$$Q = \pi r^2 V \tag{C.1}$$

Le rayon r de la trompette est relevé en fonction de z à divers instants et la vitesse V est mesurée aux mêmes instants. Nous reportons sur la figure C.2 à la fois la vitesse V du jet en fonction de la position z et $Q/(\pi r^2)$, en fonction de z. Le débit Q est ajusté pour faire correspondre la vitesse mesurée et la vitesse déduite de la conservation du débit volumique. L'accord entre les différentes

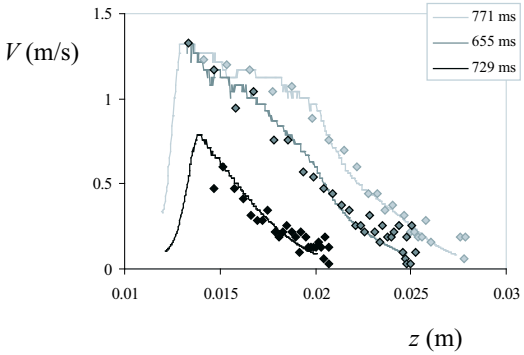


Fig. C.2: Vitesse V du jet en fonction de la position z ainsi que la vitesse déduite de la conservation du débit à différents instants qui correspondent aux trois dernières photos de la figure C.1.

courbes est excellent : le rayon de la trompette et la vitesse du jet sont effectivement corrélées par la relation C.1 et le débit vaut ici 2.3 10^{-6} m^3/s. Nous comprenons donc d'où vient cette forme curieuse : la trompette s'élargit car la vitesse du jet ralentit. Il lui faut pour rentrer dans le bain pousser le fluide statique en lui communiquant de l'impulsion. La relation C.1 assure que lorsque la vitesse du jet est nulle, le rayon de la trompette tend vers l'infini, ce qui limite son extension en profondeur. Toutefois, une telle limite n'est jamais atteinte : la taille maximale de la trompette est donnée par la condition de stationnarité du bord libre : la vitesse d'advection du fluide doit être égale à la célérité de rétraction du bord libre donnée par l'équation 7.13 (dont l'expression est peut-être plus complexe que ce que nous avons vu au chapitre 7, car de l'air s'échappe régulièrement de la structure sous forme de bulles). Pour déterminer la taille maximale de la trompette, suffit-il de connaître l'évolution de la vitesse du jet ?

C.2 Longueur de la trompette visqueuse

On peut écrire une relation simple pour déterminer l'évolution de la vitesse v du jet une fois qu'il est isolé par le film d'air, en équilibrant l'inertie du jet et la friction visqueuse :

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \simeq \eta\triangle\vec{v}$$

En faisant l'hypothèse d'un profil bouchon dans le jet (il est isolé par une lame d'air) et en négligeant les composantes radiales du champ de vitesse, nous simplifions la relation ci-dessus en introduisant l, la longueur pour laquelle la vitesse du jet est nulle (l est donc la longueur de la trompette) :

$$\rho\frac{v^2}{l} \sim \eta\frac{v}{l^2} \tag{C.2}$$

Il vient donc :

$$l \sim \frac{\eta}{\rho v} \tag{C.3}$$

Cette relation est inattendue : la trompette serait d'autant plus courte que la vitesse d'impact est faible. Nous avons testé la dépendance de la longueur l de la trompette avec la vitesse d'impact. La

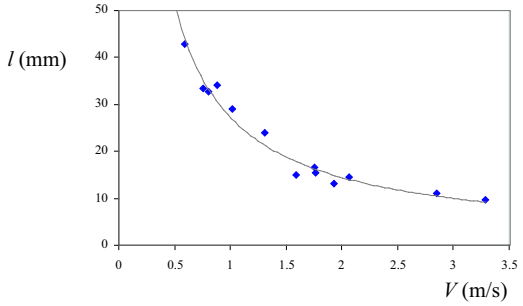


FIG. C.3: Longueur de la trompette en fonction de la vitesse d'impact dans de l'huile silicone $\eta = 350$ mPa.s. Les données sont ajustées par une loi de puissance d'exposant -0.92.

longueur de la trompette, une fois sa phase de croissance terminée est reportée en fonction de la vitesse d'impact sur la figure C.3. Les données sont bien ajustées par une loi de puissance d'exposant -0.92 en bon accord, à notre grand étonnement, avec l'équation C.3. Notons que le rayon du jet n'est pas constant dans cette expérience : nous avons travaillé à débit constant, et le jet est donc d'autant plus mince que sa vitesse est élevée. La dépendance en viscosité de la relation C.3 a été également testé : elle n'est pas vérifiée, la longueur de la trompette n'est pas proportionnelle à la viscosité du jet. Le mécanisme sélectionnant la longueur de cette structure est donc plus complexe que ce que prédit le calcul présenté ci-dessus.

C.3 Trompette peu visqueuse

À petite viscosité $\eta = 100$ mPa.s, la dynamique de cet objet devient plus torturée comme on peut le voir sur la figure C.4. La structure reste cylindrique jusqu'à 3 mm sous la surface libre. Passé cette

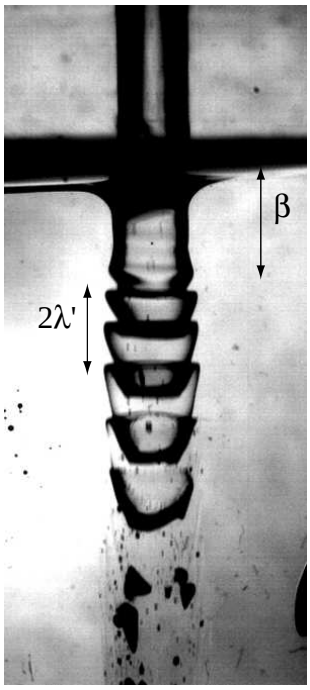


FIG. C.4: Pseudo-trompette d'huile silicone ($\eta = 100$ mPa.s). Le jet fait 3mm de diamètre et tombe dans le bain avec une vitesse de l'ordre de 2 m/s.

profondeur, des perturbations du cylindre apparaissent. Celui-ci se met à onduler et l'amplitude de ses perturbations croît avec la profondeur. Nous remarquons en outre que très vite, celles-ci ne sont plus symétriques : l'interface se raidit, les bosses des vagues (loin du centre du jet) étant advectées moins vite que les creux et prend une forme en "N". On observe finalement un déferlement de cette vague et le film d'air se brise. Deux longueurs semblent être plus pertinentes que la longueur de la trompette : la longueur caractéristique de croissance des perturbations (notée β sur la figure C.4) et la longueur d'onde de ces perturbations (notée λ' sur la figure C.4). Nous avons relevé que ces longueurs dépendent toutes deux de la vitesse d'impact et de la viscosité du liquide ambiant. Nous interprétons ces données en considérant les perturbations de la colonne liquide isolée par le film d'air sous l'effet du cisaillement ou sous l'effet des forces de tension de surface. L'analyse des données collectées reste à faire.

Bibliographie

[1] N. K. Adam. Detergent action and its relation to wetting and emulsification. *J. Soc. Dyers Colour.*, 53 :122–129, 1937.

[2] L.K. Antonovskii. Formation of a pointed drop in Taylor's four roller mill. *J. Fluid Mech.*, 327 :325–341, 1996.

[3] C. Bain, G. Burnett-Hall, and R. Montgomerie. Rapid motion of liquid drops. *Nature (London)*, 372 :414–415, 1994.

[4] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

[5] V. Bergeron, D. Bonn, J.-Y. Martin, and L. Vovelle. Controlling droplet deposition with polymer additives. *Nature (London)*, 405 :772–775, 2000.

[6] J. Bernoulli. *Hydraulics.* Dover publications, New York, 1968.

[7] J. Bico. *Mécanismes d'imprégnation : surfaces texturées, bigouttes, poreux.* Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2000.

[8] J. Bico and D. Quéré. Self-propelling slugs. *J. Fluid Mech.*, 467 :101–127, 2002.

[9] J. Bico, J. Vierling, J. Vigano, and D. Quéré. Self-similar etching. *J. Colloid Interface Sci.*, soumis, 2003.

[10] F. Biesel. Calcul de l'amortissement d'une houle dans un liquide visqueux de profondeur finie. *La houille blanche*, Septembre-octobre :630–634, 1949.

[11] A.K. Bin. Gas entrainment by plunging liquid jets. *Chem. Eng. Sci.*, 15 :367, 1993.

[12] T.D. Blake and K.J. Ruschak. A maximum speed of wetting. *Nature (London)*, 282 :489–491, 1979.

[13] D. V. Boger. Viscoelastic flows through contractions. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19 :157–82, 1987.

[14] C.H. Bosanquet. *Phil. Mag.*, 45 :525, 1923.

[15] H. Bouasse. *Capillarité, phénomènes superficiels.* Delagrave, Paris, 1924.

[16] E. A. Boucher and M. J. B. Evans. Pendant drop profiles and related capillary phenomena. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 346 :349–374, 1975.

[17] J. Boussinesq. *Compt. Rend.*, 110 :1160–1238, 1890.

[18] M.P. Brenner, X.D. Shi, and S.R. Nagel. Iterated instabilities during droplet fission. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :3391, 1994.

[19] F. Brochard. Spreading of liquid drops on thin cylinders : The manchon/droplet transition. *J. Chem. Phys.*, 84 :4664–4672, 1986.

[20] F. Brochard. Motion of droplets on solid surfaces induced by chemical or thermal gradients. *Langmuir*, 5 :432–438, 1989.

[21] F. Brochard-Wyart and P.-G. de Gennes. *Adv. in Coll. and Interf. Sci.*, 39 :1, 1992.

[22] F. Brochard-Wyart, J.-M. di Meglio, and D. Quéré. Etude du retrait d'un film non mouillant déposé sur un plan ou une fibre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304 :553–558, 1987.

[23] F. Brochard-Wyart, P. Martin, and C. Redon. Liquid/liquid dewetting. *Langmuir*, 9 :3682–3690, 1993.

[24] E. A. Brun and A. Martinot-Lagarde. *Mécanique des fluides 2.* Dunod, Paris, 1968.

[25] P. Brunet. *Structure et dynamique non-linéaire de liquides tombants.* Yhèse de doctorat, Université de Paris VI, 2002.

[26] A. Buguin, L. Vovelle, and F. Brochard-Wyart. Shocks in inertial dewetting. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :1183–1186, 1999.

[27] R. Burley and R.P.S. Jolly. Entrainment of air into liquids by a high speed continuous solid surface. *Chem. Eng. Sci.*, 39 :1357–1372, 1984.

[28] R. Burley and B.S. Kennedy. An experimental study of air entrainment at a solid/liquid/gaz interface. *Chem. Eng. Sci.*, 31 :901–911, 1976.

[29] B. J. Carroll. The accurate measurement of contact angle, phase contact areas, drop volume and laplace excess pressure in drop-on-fiber systems. *J. Colloid Interface Sci.*, 57 :488–495, 1976.

[30] B. J. Carroll. The equilibrium of liquid drops on smooth and rough circular cylinders. *J. Colloid Interface Sci.*, 97 :195–200, 1984.

[31] B. J. Carroll. Droplet formation and contact angles of liquides on mammalian hair fibres. *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1*, 85 :3853–3860, 1985.

[32] B. J. Carroll. Equilibrium conformations of liquid drops on thin cylinders under forces of capillarity : a theory for the roll-up process. *Langmuir*, 2 :248–250, 1986.

[33] B. J. Carroll. Comment on "spreading of liquid droplets on cylindrical surfaces : accurate determination of contact angle.". *J. Appl. Phys.*, 70 :493–494, 1991.

[34] B. J. Carroll and J. Lucassen. Capillarity-controlled entrainment of liquid by a thin cylindrical filament. *Chem. Eng. Sci.*, 28 :23–30, 1973.

[35] B. J. Carroll and J. Lucassen. Effect of surface dynamics on the process of droplet formation from supported and free cylinders. *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 1*, 70 :1228–1239, 1974.

[36] S. Chandra and C. T. Avedisian. On the collision of a droplet with a solid surface. *Proc. R. Soc. London A*, 432 :13–41, 1991.

[37] A. U. Chen and O. A. Basaran. A new method for significantly reducing drop radius without reducing nozzle radius un drop on demand drop production. *Phys. Fluids*, 14 :1–4, 2002.

[38] E. B. Christiansen, S. J. Kelsey, and T. R. Carter. Laminar tube flow through an abrupt contraction. *AIChE J.*, 18 :372–380, 1972.

[39] C. Clanet and J.C. Lasheras. Depth of penetration of bubbles entrained by a plunging water jet. *Phys. Fluids*, 9 :1864–1866, 1997.

[40] C. Clanet and J.C. Lasheras. Transition from dripping to jetting. *J. Fluid. Mech.*, 383 :307–326, 1999.

[41] I. Cohen. Scaling dependence on the fluid viscosity ration in the selective withdrawal transition. *Preprint Physics/0201037*, 2002.

[42] I. Cohen, M.P. Brenner, J. Eggers, and S.R. Nagel. Two fluid drop snap-off problem : Experiments and theory. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :1147–51, 1999.

[43] I. Cohen and S.R. Nagel. Testing for scaling behavior dependence on geometrical and fluid parameters in the two fluid drop snap-off problem. *Phys. Fluids*, 13(12) :3533–41, 2001.

[44] I. Cohen and S.R. Nagel. Scaling at the selective withdrawal transition through a tube suspended above the fluid surface. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :074501, 2002.

[45] G. E. Cossali, A. Coghe, and M. Marengo. The impact of a single drop on a wetted solid surface. *Experiments in Fluids*, 22 :463–472, 1997.

[46] M. M. Couette. *Ann. Chim. Phys.*, 21(6) :433–452, 1890.

[47] F.E.C. Culick. *J. Appl. Phys.*, 31 :1128, 1960.

[48] G. Debregeas, P. Martin, and F. Brochard-Wyart. *Phys. rev. Lett.*, 75 :3686, 1995.

[49] B.V. Derjaguin. *Acta Physicochim URSS*, 12 :181, 1940.

[50] B.V. Derjaguin. On the thickness of the liquid film adhering to the walls of a vessel after emptying. *Acta Physicochim URSS*, 20 :349–352, 1943.

[51] B.V. Derjaguin and S.M. Levi. *Film coating theory.* The focal press, Londres, 1964.

[52] A.A. Duarte, D.E. Strier, and D.H. Zanette. The rise of a liquid in a capillary tube revisited : A hydrodynamical approach. *Am. J. Phys.*, 64 :413–418, 1996.

[53] J. H. Dumbleton and J. J. Hermans. Capillary instability of a thin annular layer of liquid around a solid cylinder. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 9 :466–469, 1970.

[54] H. Edgerton. *Stopping time.* Harry N. Abrams, New-York, 1987.

[55] J. Eggers. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :3458–3460, 1993.

[56] J. Eggers. Non linear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Mod. Phys.*, 69 :865–930, 1997.

[57] J. Eggers. Air entrainment through free-surface cusps. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :4290–94, 2001.

[58] J. Eggers. Formation of an air sheet. *Communication privée*, 2003.

[59] J. Eggers and T. F. Dupont. Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier-stokes equation. *J. Fluid Mech.*, 262 :205–221, 1994.

[60] L. T. Fan and C. L. Hwang. Bibliography of hydrodynamic entrance region flow. *Kansas State Univ. Bull.*, 50(3) :1–17, 1966.

[61] A. Frohn and N. Roth. *Dynamics of droplets.* Springer, Berlin, 2000.

[62] J. M. Fullana and S. Zaleski. Stability of a growing end rim in a liquide sheet of uniform thickness. *Phys. Fluids*, 11 :952–954, 1999.

[63] G. Galilei. *Dialogues concerning two new sciences.* Dover publications, New York, 1954.

[64] J. P. Garandet, B. Vinet, and P. Gros. Considerations on the pendant drop method : a new look at tate's law and harkin's correction factor. *J. Colloid Interface Sci.*, 165 :351–354, 1994.

[65] P.-G. De Gennes. Wetting : statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 57 :827–863, 1985.

[66] P.-G. De Gennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 303 :1275, 1986.

[67] P.-G. De Gennes. Deposition of a langmuir-blodgett layers. *Colloid Polymer Sci.*, 264 :463–465, 1986.

[68] P.-G. De Gennes. Mechanics of soft interface. *Faraday Discuss*, 104 :1–8, 1996.

[69] P.-G. De Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.* Belin, Paris, 2002.

[70] F.S. Goucher and H. Ward. The thickness of liquid films formed on solid surfaces under dynamic conditions. *Phil. Mag.*, 44 :1002–14, 1922.

[71] D. Gueyffier and S. Zaleski. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 326 :839–844, 1998.

[72] E. Guyon, J.-P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique.* InterEditions/Edition du CNRS, Paris, 1994.

[73] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics.* Noordhoff international publishing, Leyden, 1973.

[74] Y. Hardalupas, A. M. Taylor, and J. H. Wilkins. Experimental investigation of sub-millimeter droplet impingement on to spherical surfaces. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20 :477–485, 1999.

[75] W. B. Hardy. *Phil. Mag.*, 38 :49, 1919.

[76] W. D. Harkins and F. E. Brown. The determination of surface tension (free surface energy), and the weight of falling drops : the surface tension of water and benzene by the capillary height method. *J. Am. Chem. Soc.*, 41 :499–524, 1919.

[77] R. Hoffman. A study of the advancing interface. *J. Colloid Interface Sci.*, 50 :228–241, 1975.

[78] L. S. Hung and S. C. Yao. Experimental investigation of the impaction of water droplets on cylindrical objects. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 :1545–1559, 1988.

[79] Jae-Tack Jeong and H.K. Moffatt. Free-surface cusps associated with flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 241 :1–22, 1992.

[80] J.-F. Joanny. *Le Mouillage : Quelques Problèmes Statiques et Dynamiques.* Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1985.

[81] J.-F. Joanny and P.-G. de Gennes. Structure statique des films de mouillage et des lignes de contact. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 299 :279–283, 1984.

[82] D.D. Joseph. Understanding cusped interfaces. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 44 :127–148, 1992.

[83] D.D. Joseph, J. Nelson, M. Renardy, and Y. Renardy. Two-dimensional cusped interfaces. *J. Fluid Mech.*, 223 :383–409, 1991.

[84] A. Karl and A. Frohn. Experimental investigation of interaction processes between droplets and hot wall. *Phys. Fluids*, 12 :785–796, 2000.

[85] J. Kestin, M. Sokolov, and W. Wakeham. Theory of capillary viscometers. *Appl. Sci. Res.*, 27 :241–264, 1973.

[86] T.A. Kowalewski. On the separation of droplets from a liquid jet. *Fluid Dyn. Res.*, 17 :121–145, 1996.

[87] A. Kumar and S. Hartland. Shape of a drop on a vertical fiber. *J. Colloid Interface Sci.*, 124 :67–76, 1988.

[88] H. Lamb. *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1932.

[89] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique des fluides.* Mir, Moscou, 1982.

[90] L.D. Landau and V.G. Levich. Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta physicochimica URSS*, 17 :42, 1942.

[91] N. Legrand, P. Brunet, J.-M. Flesselles, and L. Limat. Perturbations of a liquid curtain near break-up. In *Advances in coating processes*, 2001.

[92] M. Lellah and A. Marmur. *J. Colloid Interface Sci.*, 82 :518–525, 1981.

[93] V.G. Levich. *Physical hydrodynamics.* Prentice-hall, 1962.

[94] A. Levin and P. V. Hobbes. Splashing of water drops on solid and wetted surfaces : Hydrodynamics and charge separation. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 269 :555–585, 1971.

[95] T.J. Lin and H.G. Donelly. *AIChE J.*, 12 :563, 1966.

[96] J.R. Lister. Buoyancy-driven fluid fracture : similarity solutions for the horizontal and vertical propagation of fluid-filled cracks. *J. Fluid Mech.*, 217 :213–239, 1990.

[97] J.R. Lister and H.A. Stone. Capillary break-up of a viscous thread surrounded by another viscous fluid. *Phys. Fluids*, 10 :2758–2769, 1999.

[98] E. Lorenceau, D. Quéré, J.-Y. Ollitrault, and C. Clanet. Gravitationnal of a liquid column in a pipe. *Phys. Fluids*, 14 :1985–92, 2002.

[99] P. Marmottant, E. Villermaux, and C. Clanet. Transient surface tension of an expanding liquid sheet. *J. Colloid Interface Sci.*, 230 :29–40, 2000.

[100] P. Martin, A. Buguin, and F. Brochard-Wyart. Bursting of a liquid film on a liquid substrate. *Europhys. Lett.*, 28 :421–426, 1994.

[101] A. Mazouchi and G.M. Homsy. Thermocapillary migration of long bubbles in a cylindrical capillary tubes. *Phys. Fluids*, 12 :542–549, 2000.

[102] G. McHale, N. A. Käb, M. I. Newton, and S. M. Rowan. Wetting of a high-energy fiber surface. *J. Colloid Interface Sci.*, 186 :453–461, 1997.

[103] G. McHale and M. I. Newton. Global geometry and the equilibrium shapes of liquid drops on fibers. *Colloids and Surfaces A*, 206 :79–86, 2002.

[104] G. McHale, M. I. Newton, and B. J. Carroll. The shape and stability of small liquid drops on fibers. *Oil & Gas science and technology*, 56 :47–54, 2001.

[105] J.-M. Di Meglio. Mise en évidence d'un film mouillant sur des fibres textiles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 303 :437–439, 1986.

[106] D. H. Michael. Meniscus stability. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 13 :189–215, 1981.

[107] S. Middleman. *Modeling axisymmetric flows.* Academic Press, San Diego, 1995.

[108] S. Mononobe and O. Motoichi. Fabrication of a pencil-shaped fiber probe for near-fields optics by selective chemical etching. *J. Light Wave Tech.*, 14 :2231–2235, 1996.

[109] D. Morton, M. Rudman, and L. Jong-Leng. An investigation of the flow regimes resulting from splashing drops. *Phys. Fluids*, 12 :747–763, 2000.

[110] N. Mourougou-Candoni, B. Prunet-Foch, F. Legay, M. Vignes-Adler, and K. Wong. Influence of dynamic surface tension on the spreading of surfactant solutions impacting onto a low surface-energy solid substrate. *J. Colloid Interface Sci.*, 192 :129–141, 1997.

[111] A. V. Rama Murthy and D. V. Boger. Developing velocity profiles on the downstream side of a contraction for inelastic polymer solutions. *Trans. Soc. Rheo.*, 15 :709–730, 1970.

[112] N.I. Muskhelishvili. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Noordhohh, Groningen, 1953.

[113] H. Nguyen and D. V. Boger. The kinetics and stability of die entry flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 5 :353–368, 1979.

[114] F.M. Orr, L.E. Scriven, and A.P. Rivas. Pendular rings between solids : Meniscus properties and capillary force. *J. Fluid. Mech.*, 67 :723–742, 1975.

[115] J. F. Padday and A. R. Pitt. Measurements of the forces between a metal surface and mica across liquids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 275 :489–528, 1974.

[116] P.Lambooy, K.C. Phelan, O. Haugg, and G. Krausch. Dewetting at the liquid-liquid interface. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :1110–1113, 1996.

[117] T. Podgorski, J.-M. Flesselles, and L. Limat. Dry arches within flowing films. *Phys. Fluids*, 11 :845, 1999.

[118] T. Podgorski, J.-M. Flesselles, and L. Limat. Corners, cursps, and pearls in running drops. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :036102, 2001.

[119] H.M. Princen. *Surface and colloid science.* (E. Matijevic Ed.) Vol II Interscience, New-York, 1969.

[120] A. Prosperetti, H.N. Oguz, and A.M. Lezzi. Examples of air entraining flows. *Phys. Fluids*, 4 :649, 1992.

[121] B.A.F. Puygranier and P. Dawson. Chemical etching of optical fibre tips-experiment and model. *Ultramicroscopy*, 85 :235, 2000.

[122] D. Quere. *Fibres et capillaires mouillés.* Thèse de doctorat, Paris VI, 1989.

[123] D. Quéré. Sur la vitesse minimale d'étalement forcé en mouillage partiel. *C. R. Acad. Sci. Série II*, 313 :313–318, 1991.

[124] D. Quéré. Inertial capillarity. *Europhys. Lett.*, 39 :533–538, 1997.

[125] D. Quéré. Fluid coating on a fiber. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 31 :347–384, 1999.

[126] D. Quéré, J.-M. di Méglio, and F. Brochard-Wyart. Making van der waals films on fibers. *Europhys. Lett.*, 10 :335–340, 1989.

[127] D. Quéré, É. Raphaël, and J. Y. Ollitrault. Rebounds in a capillary tube. *Langmuir*, 15 :3679–3682, 1999.

[128] Lord Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. Roy. Soc.*, 10 :4–13, 1878.

[129] Lord Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Phil. Mag.*, 34 :145–154, 1892.

[130] Lord Rayleigh. Investigations in capillarity. *Phil. Mag.*, 48 :321–330, 1899.

[131] Lord Rayleigh. The principle of similitude. *Nature (London)*, 95 :66–68, 1915.

[132] C. Redon, F. Brochard-Wyart, and F. Rondelez. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :715, 1991.

[133] M. Rein. Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dyn. Res.*, 12 :61–93, 1993.

[134] O. Reynolds. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 177 :157, 1886.

[135] D. Richard. *Situations de mouillage nul.* PhD thesis, Paris VI, 2000.

[136] D. Richard and E. Raphaël. Capillary-gravity waves : The effect of viscosity on wave resistance. *Europhys. Lett.*, 48 :49–52, 1999.

[137] S. Richardson. Two-dimensionnal bubbles in slow viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 33 :476–493, 1968.

[138] R. D. Richtmyer. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Comm. Pure Applied Math.*, 13 :297–319, 1960.

[139] R. J. Roe. Wetting of fine wires and fibers by a liquid film. *J. Colloid Interface Sci.*, 50 :70–79, 1975.

[140] A. Rozhkov, B. Prunet-Foch, and M. Vignes-Adler. Impact of water drops on small targets. *Phys. Fluids*, 14 :3485–3501, 2002.

[141] A. De Ryck and D. Quéré. Quick forced spreading. *Europhys. Lett.*, 25 :187, 1993.

[142] A. De Ryck and D. Quéré. Inertial coating of a fibre. *J. Fluid. Mech.*, 311 :219, 1996.

[143] L. A. Sackmann. Le pendule liquide instrument de démonstration et de recherche. *Cahiers de Physique*, 34, 1950.

[144] F. Domingues Dos Santos and T. Ondarçuhu. Free running droplets. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :2972, 1995.

[145] X. D. Shi, M. P. Brenner, and S. R. Nagel. A cascade of structure in a drop falling from a faucet. *Science*, 265 :219, 1994.

[146] P. G. Simpkins and V. J. Kuck. Air entrapment in coatings by way of a tip streaming meniscus. *Nature (London)*, 403 :641, 2000.

[147] A.J. Soroka and J.A. Tallmadge. A test of the inertial theory for plate withdrawal. *A.I.Ch.E. Journal*, 17 :505, 1971.

[148] D. A. Spence, P. W. Sharp, and D. L. Turcotte. *J. Fluid Mech.*, 174 :135, 1987.

[149] C. D. Stow and M. G. Hadfield. An experimental investigation of fluid flow resulting from the impact of a water drop with an unyielding dry surface. *Proc. R. Soc. London A*, 373 :419–33, 1993.

[150] J. Szekeley, A. W. Neumann, and Y. K. Chuang. The rate of capillary penetration and the applicability of the washburn equation. *J. Colloid Interface Sci.*, 35 :273–78, 1971.

[151] K. M. Takahashi. Meniscus shape on small diameter fibers. *J. Colloid Interface Sci.*, 134 :181–185, 1990.

[152] L. H. Tanner. The spreading of silicon oil drops on horizontal surfaces. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 12 :1473–1484, 1979.

[153] T. Tate. On the magnitude of a drop of liquid under different circumstances. *Phil. Mag.*, 27 :176–181, 1864.

[154] G.I. Taylor. The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 146 :501–523, 1934.

[155] G.I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 101 :192–196, 1950.

[156] G.I. Taylor. The dynamics of thin sheets of fluid. iii. disintegration of fluid sheets. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 253 :313–321, 1959.

[157] G.I. Taylor. Disintegration of water drops in an electric field. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 280 :383–395, 1964.

[158] E. Torricelli. *De motu gravium naturaliter accelerato.* Firenze, 1643.

[159] E. Villermaux and C. Clanet. Life of a flapping liquid sheet. *J. Fluid Mech.*, 462 :341–363, 2002.

[160] E. Villermaux and C. Clanet. Life of a smooth liquid sheet. *J. Fluid Mech.*, 462 :307–340, 2002.

[161] J. S. Vrentas and J. L. Duda. Flow of a newtonian fluid through a sudden contraction. *Appl. Sci. Res.*, 28 :241–260, 1973.

[162] E.W. Washburn. The dynamics of capillary flow. *Phys. Rev.*, 17 :273–283, 1921.

[163] M. M. Weislogel. Steady spontaneous capillary flow in partially coated tubes. *AICHE J.*, 43 :645–665, 1997.

[164] D. A. Weiss and A. L. Yarin. Single drop impact onto liquid films : neck distortion, jetting, tiny bubble entrainment and crown formation. *J. Fluid Mech.*, 385 :229–254, 1999.

[165] D.A. White and J.A. Tallmadge. A theory of withdrawal of cylinders from liquid baths. *AICHE J.*, 12 :333–339, 1966.

[166] M. C. Wilkinson. Extended use of, and comments on, the drop-weight (drop volume) technique for the determination of surface and interfacial tensions. *J. Colloid Interface Sci.*, 40 :14–26, 1972.

[167] S. D. R. Wilson. The slow dripping of a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 190 :531–570, 1988.

[168] A.L. Yarin and D.A. Weiss. Impact of drops on solid surfaces, self-similar capillary waves and splashing as a new type of kinematic discontinuity. *J. Fluid Mech.*, 283 :141–173, 1995.

[169] B.W. Zeff, B. Kleber, J. Finberg, and D.P. Lathrop. Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature (London)*, 403 :401–404, 2000.

[170] Y. Zhu, H.N. Oguz, and A. Prosperetti. Air entrainment by impinging liquid jets. *J. Fluid Mech.*, 401 :151–177, 2000.

Résumé Nous avons considéré trois expériences mettant en jeu des interfaces fortement déformées. Tout d'abord, nous étudions une colonne liquide susceptible d'osciller sous l'effet de la gravité. Outre le comportement original de cet oscillateur ouvert, nous voyons qu'une bulle piégée dans le liquide provoque, en s'effondrant, l'éruption d'un doigt de liquide. De surcroît, cette géométrie d'écoulement induit une perte de charge singulière dont nous proposons une expression qui peut permettre d'optimiser des raccords hydrauliques. Ensuite, nous considérons des situations d'impact de gouttes sur une grille. Nous étudions successivement l'impact d'une goutte dans un trou, sur une fibre et l'évolution d'une goutte posée sur une fibre conique (modèle de surface à courbure variable). Nous caractérisons la vitesse seuil de capture par cette grille en fonction de son dimensionnement, ce qui peut s'avérer utile dans la récupération d'aéorosols. Enfin, nous nous intéressons à l'impact d'un jet de liquide sur un bain de même nature, situation qui se rencontre fréquemment lorsqu'on cherche à remplir un contenant ou un moule. Nous mesurons le rayon de courbure de l'interface air-liquide à l'endroit de l'impact et montrons qu'il décroît exponentiellement avec la vitesse d'impact. À plus grande vitesse, l'interface ne peut supporter ce degré de confinement élevé et une fine lame d'air (qui se déstabilise en bulles) est entraînée dans le bain. Nous mesurons la vitesse seuil d'apparition de cette structure et l'épaisseur micronique du film entraîné.

Mots-clés : Interfaces, perte de charge singulière, impact, mouillage, fibre, singularité, autosimilarité, entraînement d'air.

Abstract We consider three experiments which deal with liquid-air interfaces. First, we report gravity oscillations of a liquid column partially immersed in a bath. We stress some peculiarities of this open system and describe a second order phenomenon which is the eruption of a jet at the beginning of the rise. We also focus on the sources of dissipation, which is found to be dominated by the entrance and exit effects, and give an analytical expression for it which takes into account the geometry of the system. This study can be useful to optimize the pressure drop at the connection of two tubes of different radii. Then, we are interested in the way a filter (a grid for example) can stop the liquid phase of an aerosol passing through it. We decompose this complex problem in three model situations : 1) impact of drop on a solid with small holes ; 2) capture of a large drop by a small fibre ; 3) for irregular grids, behaviour of a drop on a conical fibre. Eventually, we study the impact of a jet of a viscous fluid in a bath of the same liquid. We measure the radius of curvature of the liquid air-interface where the impact occurs. We show that it decreases exponentially with the capillary number. Above a threshold speed, capillary can not overtake this high confinement and a thin sheet of air is dragged into the bath by the jet, in a trumpet-like form. We measure the threshold speed for which a film of air is dragged into the pool and the thickness of the film.

Key-Words :Interfaces, singular pressure drop, impact, wetting, fibre, singularity, self-similar structure, air entrainment.