



HAL
open science

Determination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh-Benard-Poiseuille

Denis Martinand

► **To cite this version:**

Denis Martinand. Determination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh-Benard-Poiseuille. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2003. Français. NNT : . tel-00003461

HAL Id: tel-00003461

<https://theses.hal.science/tel-00003461>

Submitted on 2 Oct 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
présentée
devant l'UNIVERSITÉ LYON I CLAUDE BERNARD
U.F.R. DE MÉCANIQUE
pour l'obtention
du DIPLÔME DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 31 janvier 2003
par M. Denis MARTINAND

**Détermination analytique des
modes globaux tridimensionnels
en écoulement de convection
mixte du type
Rayleigh–Bénard–Poiseuille**

Sous la direction de

M. Philippe CARRIÈRE
M. Peter MONKEWITZ

Jury : M. Philippe CARRIÈRE
M. Jean-Noël GENGE
M. Patrick HUERRE rapporteur
M. Peter MONKEWITZ
M. Nigel PEAKE rapporteur
M. Jean PLATTEN président
M. Julian SCOTT invité

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Philippe Carrière pour sa compétence, la patience et la disponibilité avec lesquelles il la met au service des autres et son espoir touchant mais vain de me mettre à la course à pied ; ainsi que Peter Monkewitz qui a si bien su allier rigueur scientifique et encadrement amical et qui m'a accueilli au Laboratoire de Mécanique des Fluides. À ce même titre, je remercie Denis Jeandel et Michel Lance de m'avoir accueilli au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique. J'adresse aussi des remerciements tous particuliers à Jean-Noël Gence, dont la présence surprise dans le jury n'a fait qu'officialiser l'intérêt et le soutien chaleureux qu'il a apportés à mes recherches et mes enseignements, ainsi qu'à Julian Scott, pour toutes ces discussions et ces conseils tout au long de ces trois ans. Je tiens bien sûr à remercier les rapporteurs, Patrick Huerre et Nigel Peake, du courage et de la bonne volonté qui leur ont été nécessaires pour se plonger dans ce manuscrit et dont les avis et remarques particulièrement justes et constructifs me furent très utiles. Je remercie enfin Jean Platten pour avoir accepté de présider ce jury et y avoir apporter autant d'humour que de culture et de finesse scientifiques.

Dans ces remerciements, je ne voudrais pas oublier Manu et Fabien, qui, non contents de m'éclairer de leur expérience, sont en plus devenus des amis. J'ai aussi eu la chance de rencontrer, à Lyon comme à Lausanne, une sacrée bande de thésards et d'ex-(futur-?)thésards, compagnons de fortune ou d'infortune suivant les jours, aussi enthousiastes pour parler science ou football que pour une virée à vélo, à ski ou au bout d'une corde, en haut du Mont Blanc ou à la cafétéria, merci à tous (liste complète et photos compromettantes sur simple demande, règlement par chèque, joindre une enveloppe timbrée). Je n'oublie pas non plus les amis de plus longue date, croisés au quartier Latin, à Gerland ou à Ecublens, au coin d'une montagne ou d'un terrain de rugby. Je voudrais aussi tout particulièrement remercier Mme Held, dont la maison est devenue l'un des piliers de la science romande.

Le soutien psychologique sans faille est à mettre au crédit de ma chère Mère et de sa subjectivité bienveillante sur la valeur réelle de mon travail ; quant au coaching didactique et efficace de mon cher Père, il sait tout ce que je lui dois et à quel point je lui en suis reconnaissant.

Je pense enfin très fort à ma Frédé qui a plus connu de cette thèse les mauvais cotés que les bons et qui n'a pourtant jamais perdu patience.

*À Papé, pour ces longues promenades
où l'on apprenait à voir le monde et à aimer les Hommes.*

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Un exemple d'instabilité thermo-convective : la convection de Rayleigh–Bénard	3
1.1.1	Mécanisme fondamental	3
1.1.2	Les premiers résultats : de Rumford à Rayleigh	5
1.1.3	Au-delà de la linéarité et de l'homogénéité, les résultats récents	12
1.2	Écoulement de Rayleigh–Bénard–Poiseuille et instabilités localisées	17
1.2.1	La stabilité homogène	18
1.2.2	Instabilités convectives et absolues	21
1.2.3	Instabilités globales	25
1.3	Modes globaux faiblement non parallèles	27
1.3.1	Principes de la modélisation	28
1.3.2	Résultats déjà obtenus	29
1.4	Objectifs	31
2	Modes globaux tridimensionnels en formalisme d'enveloppe	33
2.1	Présentation	33
2.I.1	Introduction	37
2.I.2	Finite $R = O(1)$ Reynolds number	40
2.I.3	Envelope equation for infinitesimal R	44
2.I.3.1	Envelope equations for $R = O(\epsilon^{3/2})$	44
2.I.3.2	Envelope equations for $R = O(\epsilon)$	47
2.I.4	Discussion	48
2.II.1	Introduction	51
2.II.2	WKB expansion	53
2.II.3	Double turning point region	55
2.II.4	Numerical simulations	59
2.II.4.1	Circular bumps with variable unstable area	61
2.II.4.2	Elliptical bumps with variable aspect ratio	62
2.II.4.3	Swept elliptical bumps	64
2.II.5	Discussion	64
2.2	Commentaires	75
2.2.1	Critère de sélection et approximation du mode global	75
2.2.2	Simulation du régime non linéaire	75

3	Modes globaux tridimensionnels de l'équation de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq.	79
3.1	Présentation	79
3.I.1	Introduction	81
3.I.2	Basic state	82
3.I.3	WKB expansion	84
3.I.3.1	Zeroth order homogeneous problem and dispersion relation	86
3.I.3.2	First order problem and amplitude equation	87
3.I.3.3	Gauge choices, WKB breakdowns and other catastrophes: the construction of a global mode	88
3.I.4	Inner solution and selection criterion	90
3.I.4.1	Amplitude equation close to the double turning-point	90
3.I.4.2	Complex frequency selection criterion	91
3.I.4.3	Matching of the inner and outer solutions	92
3.I.5	Results and illustrations	94
3.I.5.1	Global mode temperature field	95
3.I.5.2	Critical stability	96
3.2	Commentaires	107
3.2.1	Critère de sélection et construction d'un mode global	107
3.2.2	Validité du formalisme d'enveloppe	107
4	Conclusions et perspectives	111
A	Equation d'enveloppe	113
A.1	Successive solutions of the multiple scale analysis at finite R	113
A.1.1	Solution of the first order problem	113
A.1.2	Adjoint problem	114
A.1.3	Second order solvability condition	115
A.1.4	Solution of the second order problem	116
A.1.5	Third order solvability condition	118
A.2	The multiple scale analysis at infinitesimal R	119
A.2.1	Reynolds number of order $O(\epsilon^{3/2})$	119
A.2.2	Reynolds number of order $O(\epsilon)$	120
B	Equation de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq	123
B.1	Basic state expansion	123
B.2	Local properties of the zeroth order stability problem	125
B.3	Solution in the double turning point region and selection criterion	128
B.4	Evaluation of global modes	131
B.4.1	Eigenmode of the local stability problem	131
B.4.2	Calculation of the turning points	132

Chapitre 1

Introduction

1.1 Un exemple d'instabilité thermo-convective : la convection de Rayleigh–Bénard

1.1.1 Mécanisme fondamental

La situation générale est celle d'un fluide présentant une densité allant croissant avec l'altitude et manifestant dès lors un caractère potentiellement instable. La poussée d'Archimède créée par cette différence de densité tend à faire monter le fluide le plus léger et descendre le plus lourd. Un tel déséquilibre s'obtient par exemple dans un fluide dont la masse volumique diminue avec la température placé entre deux plaques horizontales, la plaque inférieure étant plus chaude que celle supérieure. Il s'établit dans le fluide des variations spatiales — des gradients — de température qui induisent des variations de densité. Ce système physique couple ainsi un problème de stabilité mécanique lié aux variations de densité et un problème de transport de chaleur lié aux variations de température. Si en un point une perturbation initiale positive de température apparaît, la poussée d'Archimède induit un mouvement ascendant du fluide. Si la perturbation est négative, la poussée d'Archimède induit un mouvement descendant. Il en résulte un apport convectif local de particules fluides venant des couches inférieures plus chaudes dans le premier cas, des couches supérieures plus froides dans le second qui renforcent la perturbation initiale et entretiennent le mouvement. Le déplacement ascendant ou descendant se transmet ainsi jusqu'à ce que le fluide rencontre une interface. La conservation de la masse implique alors un mouvement du fluide parallèle à cette interface. Ce déplacement horizontal se fait jusqu'à ce que le fluide rencontre une nouvelle zone de mouvement ascendant s'il se trouve sur l'interface inférieure ou descendant s'il se trouve sur l'interface supérieure. Le raccordement par ces déplacements horizontaux d'une zone d'ascension et d'une zone de descente forme alors des rouleaux (bidimensionnels) ou des cellules (tridimensionnelles) contrarotatifs, suivant les caractéristiques géométriques et physiques du système. Il apparaît donc un mouvement d'ensemble régulier et auto-organisé au sein du fluide. Cependant, celui-ci ne peut s'établir que si les mécanismes amortissants que sont la conductivité thermique (qui diffuse la perturbation de température) et la viscosité (qui atténue la perturbation de vitesse) ne sont pas trop importants. Ces mécanismes microscopiques de diffusion sont

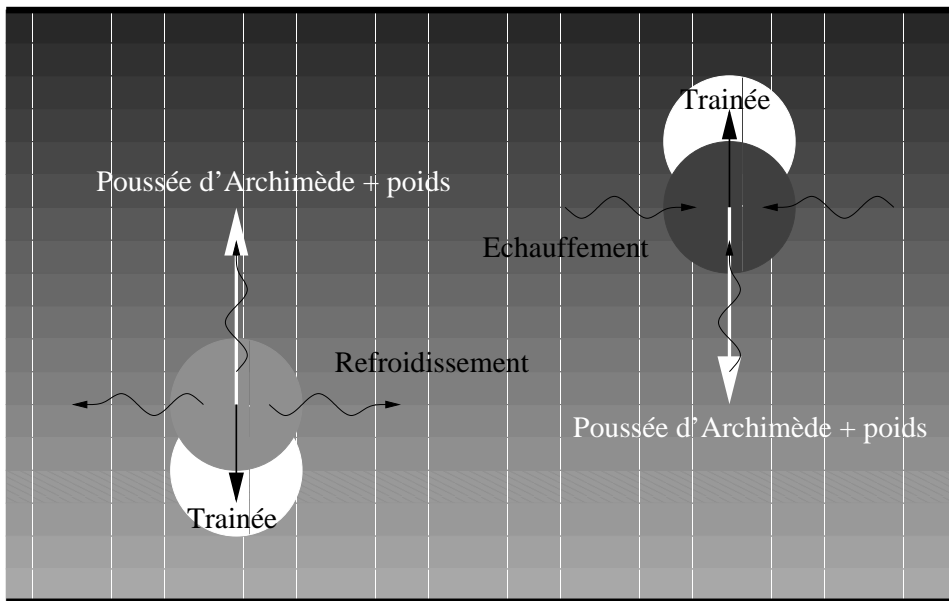


FIG. 1.1 – Schéma de principe de la convection de Rayleigh–Bénard. Les flèches blanches donnent les poussées d’Archimèdes différentielles, moteur du mouvement et les flèches noires les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction, entraves au mouvement.

d’autant plus importants que les gradients de température et de vitesse sont élevés. Un mouvement du fluide a lieu lorsque la différence de température excède une certaine valeur, appelée *seuil critique d’instabilité*. La taille — la longueur d’onde — des rouleaux est aussi contrainte par ces deux mécanismes de diffusion d’énergie. Considérons en effet des rouleaux très serrés. Les forts gradients de vitesse et de température entre les rouleaux permettent de fortes diffusions de quantité de mouvement et de chaleur qui, en réduisant les déséquilibres moteurs, entravent le mouvement. D’autre part, si on considère des rouleaux très écartés, le frottement pariétal, lié au mouvement horizontal du fluide au niveau des plaques, devient de plus en plus important et freine le mouvement. Les rouleaux ne doivent donc être ni trop serrés ni trop allongés. En pratique, les rouleaux présentent en effet un rapport d’aspect autour de un.

On peut aussi donner une description de l’organisation du système physique en termes de transfert de chaleur. Au-dessous du seuil critique d’instabilité, le transfert de chaleur est purement conductif, par transmission microscopique de l’agitation thermique. Ce mode de transport peu efficace est suffisant pour un flux de chaleur faible entre les plaques chaude et froide. Au-dessus, un ensemble de rouleaux contrarotatifs apparaît et le transfert de chaleur devient convectif, par transport macroscopique de l’agitation thermique. Ce mode de transport est plus efficace et permet des flux de chaleur plus élevés, mais son établissement est gêné par les phénomènes diffusifs générés par les mouvements du fluide. Microscopiquement, le transfert de chaleur au niveau des parois se fait toujours par diffusion mais le mouvement de convection permet d’accroître les gradients de température pour rendre cette diffusion plus efficace. Au seuil d’apparition des mouvements, le système physique en transport conductif devient instable, ce qui signifie que dans le bruit de fond,

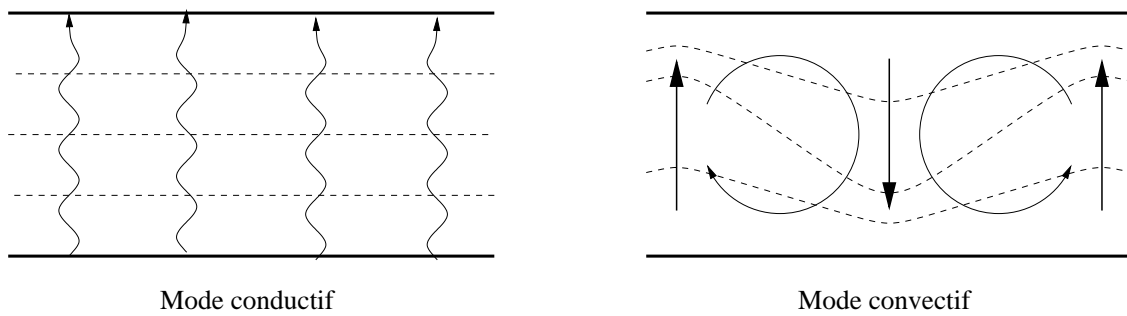


FIG. 1.2 – Comparaison schématique des modes de transfert de chaleur conductif (à droite) et convectif (à gauche). Les flèches ondulantes représentent une diffusion de chaleur, celles rectilignes un déplacement de fluide. Les lignes discontinues représentent les isothermes attendues dans les deux situations.

invariablement présent dans toute réalisation pratique, certaines structures des champs de vitesse, température et pression, qui sont les variables à considérer, se trouvent amplifiées au cours du temps.

1.1.2 Les premiers résultats : de Rumford à Rayleigh

Parmi les trois modes de transfert de chaleur, par conduction, convection ou rayonnement, le mode convectif est historiquement le premier à être utilisé à des fins pratiques. On trouve ainsi dans les ruines des maisons romaines des systèmes de chauffage central amenant de l'air chaud d'un foyer dans les pièces. Même si le terme *convection* apparaît en 1834

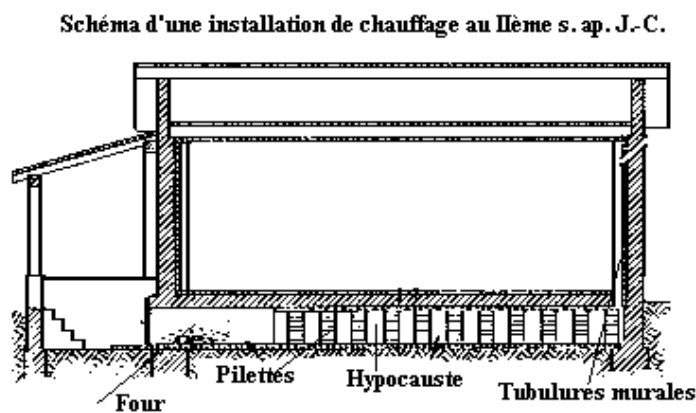


FIG. 1.3 – Système de chauffage central par convection d'air chaud dans les villas romaines.

dans les textes de Prout (81), son étude qualitative débute avec Rumford en 1797 (85). Ce lien notable entre mouvement et transport de chaleur est sûrement l'une des causes de la théorie calorique de Carnot (22), interprétant la chaleur comme un fluide passant d'un corps à un autre. Alors qu'au début du dix-neuvième siècle la théorie calorique est mise en défaut par Rumford, Joule ou Clausius, les liens entre mouvements de fluides et transport de chaleur ne font quasiment plus l'objet d'explications et de recherches. En

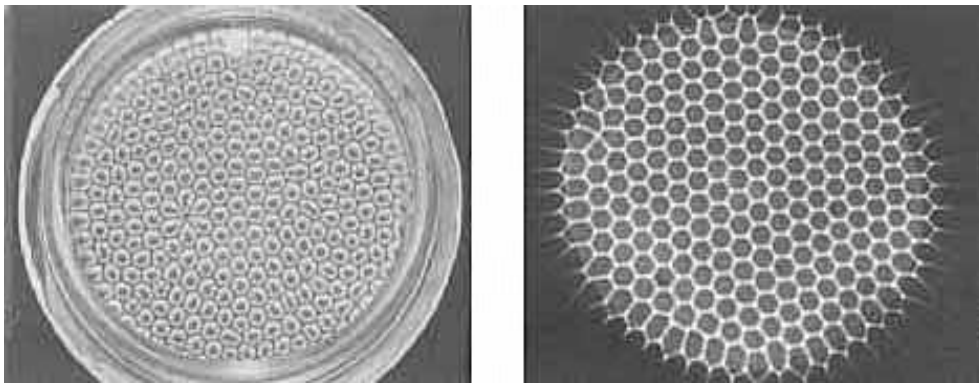


FIG. 1.4 – Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de Bénard observées par Koschmieder et Pallas (47).

1882, Thomson observe la formation de structures régulières au sein d'un fluide chauffé par le bas et animé d'un mouvement de convection (98). Les études quantitatives de ces structures attendront 1901 et les expériences de Bénard (7; 8) dans lesquelles une fine couche de blanc de baleine liquide contenue dans un récipient est chauffée par dessous. Bénard caractérise les structures spatiales organisées en cellules hexagonales comme celles de la figure 1.4 et l'interface formée par le fluide et l'air mais pas la température minimum nécessaire à la mise en mouvement.

Ces premières expériences ne rencontrent guère d'écho, mais Rayleigh y trouve tout de même un intéressant champ d'application aux calculs de stabilité linéaire, déjà utilisés en mécanique des fluides par Orr, Sommerfeld et Kelvin sur les couches de cisaillement. En partant des équations de Navier–Stokes et en se plaçant dans l'approximation de Boussinesq (13), Rayleigh propose en 1916 (83) un calcul de la différence de température et de la longueur d'onde critiques pour un mouvement de convection s'organisant en rouleaux bi-dimensionnels au sein d'une couche infinie de fluide contenue entre deux interfaces planes horizontales infinies aux températures imposées et le long desquelles le fluide peut glisser librement. L'accord entre résultats expérimentaux et prévisions analytiques est bon et le phénomène est baptisé écoulement de Rayleigh–Bénard (RB). Cet accord nous apparaît maintenant pour le moins fortuit, la modélisation de Rayleigh n'étant pas idoine pour décrire l'expérience de Bénard. D'une part, le liquide repose sur un support solide imposant l'adhérence du fluide sur la surface inférieure. En 1940, Pellew et Southwell (74) déterminent la différence de température critique et la longueur d'onde des rouleaux au seuil de l'instabilité pour une couche confinée entre deux parois sur lesquelles le fluide ne peut glisser, situation plus proche de celles observées et obtenues en pratique, même si ce n'est pas exactement celle de l'expérience originelle. D'autre part les variations de la tension superficielle avec la température, nommées effet Marangoni thermique, sont à prendre en compte pour une interface se déformant, ce qui est le cas dans l'expérience de Bénard. Cet effet s'ajoute à la poussée d'Archimède, atténuée par la minceur de la couche fluide, pour mettre en mouvement et organiser le fluide. Cet effet, qui ne sera mis en évidence par Pearson qu'en 1958 (73), explique notamment l'établissement d'hexagones et non de rouleaux, le phénomène étant baptisé convection de Bénard–Marangoni.

Équations de Navier–Stokes et approximation de Boussinesq

¹ Afin de mener à bien des calculs prédictifs concernant les phénomènes de convection thermique, il est nécessaire de spécifier la modélisation du fluide et les équations vérifiées par les champs de grandeurs physiques le décrivant. Ces équations sont l'expression des conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. En nous plaçant à un point de vue local, la conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.1)$$

où ρ et \mathbf{U} sont respectivement les champs de masse volumique et de vitesse. En limitant cette étude aux fluides newtoniens, pour lesquels le tenseur des contraintes visqueuses dépend linéairement du tenseur des déformations, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} &= \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \left(\frac{\mu}{3} + \mu_c \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) \\ &+ \nabla \mu \left(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right) - \left(\frac{2}{3} \nabla \mu - \nabla \mu_c \right) \nabla \cdot \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où \mathbf{g} est le champ de gravité, P la pression, μ la viscosité de cisaillement, μ_c celle de compression et T dénote une matrice transposée. D'une manière plus générale, le fluide considéré présente une relation linéaire entre les flux de grandeurs extensives (la chaleur, la quantité de mouvement...) et les gradients des grandeurs intensives (la température, la déformation). Ceci implique que le flux de chaleur dans le fluide vérifie la loi de Fourier :

$$\mathbf{J} = -\chi \nabla \Theta, \quad (1.3)$$

où \mathbf{J} est le flux de chaleur, χ la conductivité thermique et Θ la température. La conservation de l'énergie exprimée pour le fluide s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial c_v \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla (c_v \Theta) = \nabla \cdot (\chi \nabla \Theta) - P \nabla \cdot \mathbf{U} + \Phi, \quad (1.4)$$

où c_v est la capacité calorifique à volume constant par unité de volume et Φ la production de chaleur due à la dissipation d'énergie par viscosité. Enfin, le fluide vérifie une équation d'état donnant sa masse volumique en fonction de sa pression et de sa température.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse formulée par Boussinesq (13) et Oberbeck (67), à savoir que les propriétés physiques ne varient pas avec la température à l'exception de la densité lorsque les variations de celle-ci créent des forces de gravitation. Lorsque ceci est le cas, l'équation d'état est linéarisée autour d'un état ($\Theta_{\text{réf}}, \rho_{\text{réf}}$) de référence :

$$\rho = \rho_{\text{réf}} (1 - \alpha (\Theta - \Theta_{\text{réf}})), \quad (1.5)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique à pression constante. C'est la faiblesse de ce coefficient qui justifie dans le cas de variations de température limitées l'hypothèse de Boussinesq–Oberbeck, dont on trouvera un exposé plus détaillé notamment dans le livre de Chandrasekhar (28). Négliger les variations de ρ dans les

¹Les paragraphes bordés d'une bande sombre et imprimés en petits caractères présentent les développements mathématiques des résultats donnés dans ce chapitre.

termes autres que $\rho \mathbf{g}$ conduit à considérer le fluide comme incompressible, celui-ci vérifiant alors l'équation de Navier–Stokes. De plus, le terme de dissipation visqueuse Φ est lui aussi négligé dans l'équation de conservation de l'énergie (1.4). On obtient alors comme équations vérifiées par P , \mathbf{U} et Θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{U} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho_{\text{réf}}} \nabla P - \alpha (\Theta - \Theta_{\text{réf}}) \mathbf{g} - \nu \nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta - \kappa \nabla^2 \Theta = 0, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

où $\nu = \mu/\rho_{\text{réf}}$ est la viscosité cinématique et $\kappa = \chi/(\rho_{\text{réf}} c_v)$ la diffusivité thermique, supposées indépendantes de la température. À partir du système (1.6), la pression considérée est la pression corrigée de la pression hydrostatique : $P \rightarrow P - \rho_{\text{réf}} g z$. Le système d'équations différentielles doit être complété de conditions aux limites traduisant la géométrie du système décrit. On choisit à partir de ce point d'aligner l'axe des z avec la verticale, en plaçant les interfaces aux plans $z = \pm h/2$ avec h la hauteur du système et de réserver les axes des x et des y pour les directions horizontales. Les conditions aux limites sont données au niveau des deux interfaces horizontales et, en règle générale, imposent les valeurs ou les flux de quantité de mouvement et de chaleur à ces endroits. Dans le cas où les températures Θ_{inf} et Θ_{sup} , sur les plaques inférieure et supérieure respectivement, ainsi qu'une vitesse nulle sont imposées aux interfaces, une solution stationnaire simple est celle pour laquelle il n'y a que conduction de la chaleur, c'est à dire avec $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_b = \text{cste.} + \int_{-h/2}^z \rho_{\text{réf}} \alpha (\Theta - \Theta_{\text{réf}}) g dz, \\ \mathbf{U}_b = \mathbf{0}, \\ \Theta_b = (\Theta_{\text{inf}} - \Theta_{\text{sup}}) (1/2 - z/h) + \Theta_{\text{sup}}. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Une telle solution reste valable pour des conditions aux limites imposant un flux de quantité de mouvement nul aux parois. Une telle solution purement conductive ne s'observe en pratique que pour un flux de chaleur, c'est-à-dire pour une différence $\Theta_{\text{inf}} - \Theta_{\text{sup}}$, faible. Lorsque le flux de chaleur augmente, le mécanisme adopté par le système pour transférer la chaleur de la plaque du bas vers la plaque du haut devient convectif et la solution précédente (1.7), bien que toujours possible mathématiquement, n'est plus observée. Cette disparition d'une solution stationnaire pour une autre est l'objet d'une analyse de stabilité.

Stabilité linéaire de la convection de Rayleigh–Bénard

Une analyse de stabilité linéaire donne le comportement d'un écoulement vis-à-vis d'une perturbation d'énergie infiniment petite. La convection de RB constitue un cas d'école de ce type d'analyse, dont on rappelle ici les principales étapes.

Les champs de vitesse, de pression et de température sont écrits comme la somme des champs de base stationnaires (1.7) et de fluctuations beaucoup plus petites :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P_b + p, \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_b + \mathbf{u}, \\ \Theta = \Theta_b + \theta. \end{array} \right. \quad (1.8)$$

En réinjectant ces champs dans le système (1.6), on peut légitimement linéariser les termes faisant apparaître les fluctuations dans les équations obtenues. On exprime ainsi le problème de stabilité linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b + \frac{1}{\rho_{\text{réf}}} \nabla p - \alpha (\theta - \theta_{\text{réf}}) \mathbf{g} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta_b - \kappa \nabla^2 \theta = 0, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

dont on va chercher l'évolution temporelle. La mise en équations du problème passe ensuite par une adimensionnalisation des grandeurs physiques par des grandeurs de référence caractéristiques des phénomènes mis en jeu. Les longueurs sont adimensionnées par h , la distance entre les plans, qui sont alors situées en $z = \pm 1/2$, les temps par h^2/κ le temps caractéristique de diffusion thermique, et par conséquent les vitesses par κ/h . Les pressions sont adimensionnées par $\rho_{\text{réf}} \kappa \nu / h^2$ et les températures par $\kappa \nu / (\alpha g h^3)$ après avoir choisi $\Theta_{\text{réf}} = \Theta_{\text{sup}}$. Afin de réduire le nombre de paramètres du problème, on considère le double rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (la deuxième équation du système (1.9), simplifié par la conservation de la masse). On obtient ainsi pour la convection de RB un sous-système de deux équations linéaires aux dérivées partielles vérifié par w , la composante suivant z de la vitesse, et θ exclusivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{-1} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} - \left(\nabla^4 w + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \mathcal{R} w - \nabla^2 \theta = 0, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

dans lequel apparaissent les nombres de Prandtl $P = \nu/\kappa$ et de Rayleigh $\mathcal{R} = \alpha g (\Theta_{\text{inf}} - \Theta_{\text{sup}}) h^3 / (\kappa \nu)$ qui paramétriseront à eux seuls le comportement physique de l'écoulement. Afin de simplifier la modélisation mathématique du problème, on considère le système infini, homogène et isotrope dans les directions x et y . Dans ces conditions, il est justifié de chercher les solutions w et θ sous la forme de modes de Fourier en x et y , oscillant à une fréquence ω pouvant être complexe, $\Im(\omega)$ représentant le taux de croissance de la perturbation :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \tilde{w}(z) \exp i(k_x x + k_y y - \omega t) + \text{c.c.}, \\ \theta = \tilde{\theta}(z) \exp i(k_x x + k_y y - \omega t) + \text{c.c.}, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

où k_x et k_y sont les composantes du vecteur d'onde. Les fonctions $\tilde{w}(z)$ et $\tilde{\theta}(z)$ sont solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -P^{-1} i \omega \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{w} + \left(\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right)^2 \tilde{w} - k^2 \tilde{\theta} \right) = 0, \\ -i \omega \tilde{\theta} - \mathcal{R} \tilde{w} + \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \tilde{\theta} = 0. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Notons que dans le système (1.12), k_x et k_y n'interviennent qu'à travers $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ le carré de la norme du vecteur d'onde. Ceci est directement lié à l'isotropie du système qui ne saurait privilégier une direction particulière par ce vecteur. La direction de ce dernier est par conséquent arbitraire. Au système (1.12) on adjoint

des informations sur le comportement physique du fluide au contact des parois, c'est-à-dire des conditions aux limites sur les plans $z = \pm 1/2$. Considérons ici des situations physiques où les températures sont imposées aux parois. Ces températures étant déjà prises en compte dans l'écoulement de base, la fluctuation vérifie donc $\tilde{\theta}(\pm 1/2) = 0$. Concernant la vitesse \mathbf{u} , les parois sont supposées imperméables, ce qui impose $\tilde{w}(\pm 1/2) = 0$.

Historiquement, le premier calcul de stabilité fut mené à bien par Rayleigh dans le cas d'une condition de glissement libre sur les parois. Cette condition impose par application de l'équation de conservation de la masse $\partial_z^2 \tilde{w} = 0$. Dans ce cas, les fonctions \tilde{w} et $\tilde{\theta}$ sont de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \tilde{w}(z) &= w_n \sin(n\pi z) \\ \tilde{\theta}(z) &= \theta_n \sin(n\pi z). \end{cases} \quad (1.13)$$

On parle de fonctions propres du système (1.12). Pour que de telles fonctions propres non triviales existent, on doit vérifier qu'à n fixé, il existe une valeur ω_n pour ω telle que pour tout k , la *relation de dispersion*

$$(i\omega_n + (n^2\pi^2 + k^2)) \left(i\omega_n (n^2\pi^2 + k^2) + P (n^2\pi^2 + k^2)^2 \right) - \mathcal{R}P k^2 = 0 \quad (1.14)$$

est vérifiée. Cette valeur ω_n est la valeur propre associée à la fonction propre $(w_n \sin(n\pi z), \theta_n \sin(n\pi z))$. La relation (1.14) donne ω_n en fonction de k , \mathcal{R} et P .

- Si $\Im(\omega_n) < 0$, le taux de croissance est négatif et la perturbation amortie, la solution conductive est stable.
- Si $\Im(\omega_n) = 0$, on parle de stabilité *marginale*, la perturbation n'étant dans ce cas limite ni amplifiée ni amortie.
- Si $\Im(\omega_n) > 0$, le taux de croissance de la perturbation est positif et on a donc mis en évidence une instabilité susceptible de se développer dans le système, la solution conductive est donc instable.

La stabilité marginale est atteinte pour un nombre de Rayleigh $\mathcal{R}_{\text{marg}}$ fonction de k :

$$\mathcal{R}_{\text{marg}}(k) = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2}. \quad (1.15)$$

Notons que ce seuil est indépendant du nombre de Prandtl P . Le premier mode destabilisé est obtenu pour $n = 1$, $\mathcal{R}_{\text{marg}}(k)$ étant alors minimum pour $k_{\text{crit}} = \pi/\sqrt{2}$ et valant $\mathcal{R}_{\text{crit}} = 27\pi^4/4 \simeq 657.5$, valeur critique au-delà de laquelle une instabilité est susceptible de se développer.

L'étude précédente permet donc une résolution analytique complète mais modélise une situation de glissement libre sur les parois rarement observée dans la nature et de plus très difficile à reproduire en laboratoire. La situation la plus fréquente en pratique, étudiée par Pellew et Southwell, présente des conditions aux limites de non-glissement pour la vitesse au contact des parois, c'est-à-dire $u(z = \pm 1/2) = v(z = \pm 1/2) = 0$, ce qui conduit par conservation de la masse à $\partial_z \tilde{w}(\pm 1/2) = 0$. En cherchant une solution stationnaire et marginale telle que $\omega = 0$, \tilde{w} vérifie une équation du sixième ordre :

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^3 + k^2 \mathcal{R} \right) \tilde{w} = 0 \quad (1.16)$$

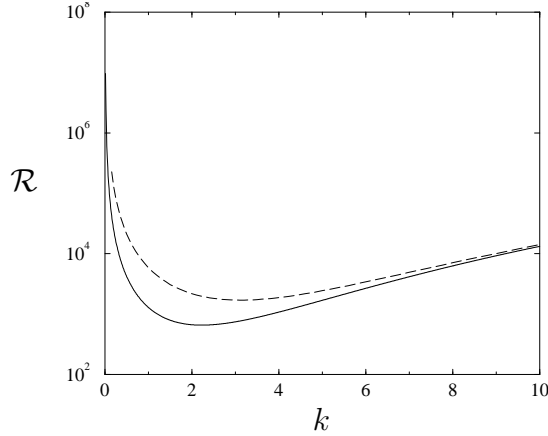


FIG. 1.5 – Courbes de stabilité marginale $\mathcal{R}_{\text{marg}}$ en fonction de k avec des conditions aux limites de glissement libre (trait continu) et de non glissement (trait discontinu) au contact des parois, pour les courbes $\mathcal{R}_{\text{marg}}(k)$ donnant les valeurs minimums de $\mathcal{R}_{\text{crit}}$.

pour laquelle on cherche une solution sous la forme :

$$\tilde{w}(z) = \sum_{m=0}^2 w_m \cos(q_m z), \quad (1.17)$$

où les paramètres q_m sont racines de $(q_m^2 + k^2)^3 - k^2 \mathcal{R} = 0$. Les conditions aux limites sur \tilde{w} , $\partial_z \tilde{w}$ et $\tilde{\theta}$ conduisent à un système de trois équations à trois inconnues w_m qui n'a de solution non triviale que si son déterminant s'annule. Ceci fournit une *relation de dispersion implicite* entre k et \mathcal{R} . On déduit numériquement de cette relation une famille infinie et discrète de courbes $\mathcal{R}_{\text{marg}} = f(k)$. Cette relation, elle aussi indépendante de P , conduit à $k_{\text{crit}} \simeq 3.116$ et $\mathcal{R}_{\text{crit}} \simeq 1707.76$.

Le calcul de la stabilité marginale en écoulement de RB est relativement aisé, même si il peut réclamer une résolution finale numérique, car la géométrie considérée reste simple. D'autre part, le bon accord entre ces calculs linéaires et les résultats expérimentaux obtenus dans des systèmes de grande extension horizontale a assuré leur gloire académique. Ce calcul repose pourtant sur des hypothèses très restrictives de fluctuations de faible énergie et d'invariance du système par toute translation ou rotation conservant les conditions aux limites sur les plaques horizontales. Ces conditions ne sont bien évidemment pas satisfaites par les expériences ou les systèmes naturels.

Depuis ces premiers pas il y a un siècle, la convection thermique fait l'objet de recherches et d'une littérature toujours plus conséquentes, dont les motivations sont apparues au fur et à mesure. La convection thermique revêt d'une part une importance propre en tant qu'explication physique sous-jacente à de nombreux phénomènes naturels et industriels mettant en jeu des transferts de chaleur. Les phénomènes de convection

thermique se retrouvent au sein du Soleil ou des planètes, possédant un cœur à l'activité thermique intense due à la radioactivité et une surface chauffée par le rayonnement solaire, et qui baignent dans un univers glacial. Concernant la Terre par exemple, les mouvements verticaux et horizontaux de l'atmosphère sont imposés par des transferts de chaleur convectifs, tout comme les mouvements des océans. Plus récemment, la tectonique des plaques a trouvé un moteur dans les mouvements de convection thermique du manteau terrestre chargés de transférer vers l'extérieur la chaleur produite par les éléments radioactifs du manteau et du noyau terrestres. Au sein de ce noyau métallique, on cherche toujours à mettre en évidence les couplages entre convection thermique et induction magnétique afin d'expliquer la dynamo et le champ magnétique terrestres. Ces thèmes sont présentés, par exemple, dans l'ouvrage dirigé par Nataf et Sommeria (64). D'un point de vue industriel, le transfert de chaleur et le couplage de ce transfert avec le mouvement d'un fluide sont utilisés abondamment. L'étude des échanges thermiques au sein des réacteurs de centrales nucléaires est très révélateur des niveaux de compréhension et de prédiction actuellement demandés dans des écoulements de convection thermique. Par son importance cruciale en matière de sécurité, ce problème a généré un important développement d'outils et de méthodes informatiques.

Le phénomène de convection thermique dans des situations physiques simples présente d'autre part l'intérêt d'être depuis plusieurs décennies le cobaye privilégié des études expérimentale, théorique et numérique des phénomènes de dynamique des textures, du chaos déterministe et de la transition vers la turbulence. L'ouvrage de Manneville (55) met bien en avant ce rôle de jalon de la convection thermique. Des méthodes d'analyse de stabilité de plus en plus complexes ont été développées afin d'établir pourquoi les résultats linéaires et homogènes sont pertinents, puis quelles structures apparaissent à mesure que l'on s'éloigne des conditions critiques.

1.1.3 Au-delà de la linéarité et de l'homogénéité, les résultats récents

Lors du calcul de stabilité précédent, les fluctuations sont supposées être d'une énergie faible comparée à celle de l'écoulement de base et les termes non linéaires sont négligés dans les équations (1.6) lorsque les champs sont décomposés suivant (1.8). Le calcul linéaire est donc en toute rigueur valable lorsque le système se trouve exactement à la situation critique, où une perturbation est marginale. D'autre part, le calcul est mené à bien dans un système supposé d'extension infinie et le mode le plus instable a été cherché sous la forme d'un mode de Fourier homogène dans les directions horizontales.

Dans une situation instable, au moins un mode de perturbation manifeste une croissance exponentielle et l'hypothèse de fluctuation faible n'est très rapidement plus vérifiée dès que le système est au-delà des conditions critiques. Il devient nécessaire de décrire la dynamique non-linéaire des perturbations au sein de l'écoulement afin de trouver un mécanisme saturant la croissance des instabilités. Le calcul analytique de solutions exactes non linéaires est généralement impossible et on doit se contenter de chercher un développement de cette solution. Ce développement se cherche en puissances croissantes d'un petit paramètre évaluant l'écart au seuil critique du système.

Ce système ne peut avoir de solution que si les hypothèses du théorème de Fredholm sont vérifiées, à savoir que le membre de droite de (1.23) doit être orthogonal aux solutions du système adjoint à (1.10) homogène. Après avoir introduit le produit scalaire :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \tilde{w}(z) \\ \tilde{\theta}(z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{w}'(z) \\ \tilde{\theta}'(z) \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \left(P^{-1} \left(k^2 \tilde{w} \tilde{w}' + \frac{d\tilde{w}}{dz} \frac{d\tilde{w}'}{dz} \right) + \tilde{\theta} \tilde{\theta}' \right) dz, \quad (1.24)$$

cette condition d'orthogonalité fournit une condition de solvabilité dans le cas des conditions aux limites de glissement libre. On déduit de cette condition de solvabilité :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 = 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \tau_1} = 0, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_1} = 0, \\ w_2 = 0, \\ \theta_2 = 2\pi (\pi^2 + k_{\text{crit}}^2) \frac{A \bar{A} \sin(2\pi z)}{2\pi (\pi^2 + k_{\text{crit}}^2)}. \end{cases} \quad (1.25)$$

Il est alors nécessaire d'étudier le problème à l'ordre $O(\epsilon^3)$. Le système linéaire avec second membre obtenu à cet ordre doit, comme le précédent (1.23), satisfaire une condition de compatibilité. On obtient alors l'équation vérifiée par l'amplitude A des fluctuations (1.22) :

$$(1 + P^{-1}) \frac{dA}{d\tau_2} = \frac{\mathcal{R}_2 (\pi^2 + k_{\text{crit}}^2)}{\mathcal{R}_{\text{crit}}} A - \frac{1}{2} |A|^2 A. \quad (1.26)$$

Le coefficient du terme d'ordre trois de l'équation (1.26) garantit la saturation à une certaine valeur de l'amplitude A . L'analyse précédente a été menée par souci de simplicité pour une paire de vecteurs d'onde opposés alignés avec l'axe des x . L'étude complète fait intervenir une superposition de vecteurs d'ondes différents et permet alors de justifier l'apparition des rouleaux infinis de nombre d'onde k_{crit} au détriment de toute autre structure régulière au voisinage de $\mathcal{R}_{\text{crit}}$. Les structures déterminées par l'analyse de stabilité linéaire dans les conditions critiques sont donc aussi celles obtenues par sélection non linéaire lorsque l'on s'écarte faiblement de ces conditions. Ce résultat est obtenu de façon analytique par Malkus et Veronis (54) dans le cas de conditions aux limites libres et de façon semi-analytique par Schlüter, Lortz et Busse (87) dans celui de conditions de non-glissement.

L'équation d'amplitude a le grand avantage de proposer un formalisme mathématique beaucoup plus simple que celui des équations de Navier–Stokes et de la chaleur, tout en conservant la description d'une bonne partie de la physique de la convection. Cette modélisation simplifiée a donc été utilisée pour introduire et étudier les effets de modulations spatiale et temporelle lentes de l'amplitude. Celle-ci est alors baptisée enveloppe et devient une fonction complexe des coordonnées horizontales et du temps modulant les rouleaux obtenus linéairement au seuil critique. On cherche donc l'amplitude du système dynamique réduit sous la forme d'une enveloppe variant lentement dans les directions horizontales et le temps.

Équation d'enveloppe

Cette variation spatiale lente peut se voir comme un autre effet de l'écart aux conditions critiques. En effet, lorsque pour la convection de RB \mathcal{R} s'éloigne de $\mathcal{R}_{\text{crit}}$, une bande de vecteurs d'onde passe leur seuil de stabilité marginale. On peut alors chercher une instabilité dans cette bande sous la forme :

$$w(x, y, zt) = A\tilde{w}(z) \exp(ik_{\text{crit}}x + i\epsilon\delta kx) + \text{c.c.}, \quad (1.27)$$

(et sous une forme similaire pour θ) où $\epsilon\delta k$ est l'écart au vecteur d'onde critique, avec ϵ petit. On peut, de façon plus générale, chercher une solution à l'équation (1.19) sous la forme :

$$w(x, y, z, t) = A(x, y, t) \tilde{w}(z) \exp(ik_{\text{crit}}x) + \text{c.c.}, \quad (1.28)$$

où $A(x, y, t)$ est une fonction lentement variable de x et y . Cette approche a été menée par Newell et Whithead en 1969 (65) et Segel la même année (89). Un développement multi-échelle mené maintenant sur les coordonnées spatiales et temporelle conduit à l'équation de Newell-Whitehead-Segel pour le premier ordre significatif en ϵ :

$$\tau_0 \frac{\partial A}{\partial \tau_2} = A + \xi_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2ik_{\text{crit}}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right)^2 A - g|A|^2 A, \quad (1.29)$$

où τ_0 et ξ_0 sont des constantes. Dans cette équation, on a introduit les variables lentes $\tau_2 = \epsilon^2 t$, $X = \epsilon x$ et $Y = \epsilon^{1/2} y$ décrivant l'évolution de l'enveloppe. L'équation (1.29) est une équation non linéaire et aux dérivées partielles, ces deux caractères n'étant pas indissociables et impliquant chacun leurs propriétés.

Ce formalisme d'enveloppe permet une étude des processus de sélection non-linéaire des instabilités et par ce moyen une étude des instabilités secondaires de grande longueur d'onde pouvant apparaître sur les rouleaux obtenus au seuil critique lorsqu'on s'éloigne de ce seuil. Ces rouleaux deviennent alors instables à travers leur amplitude ou leur phase vis-à-vis de perturbations liées aux invariances par translation, par rotation et galiléenne du système physique. Des rouleaux croisés, instabilité de compression/dilatation ou instabilité d'Eckhaus, instabilité de torsion ou zig-zag font leur apparition. En plus de \mathcal{R} et de k , P intervient aussi maintenant pour caractériser toute une zoologie de structures entourant le domaine de stabilité des rouleaux (19; 21; 20), appelé ballon de Busse et qui semble indiquer la préférence de la convection thermique pour le rugby plutôt que le football. L'existence de ce domaine de stabilité pour les rouleaux prévus par la théorie linéaire explique son accord avec les premiers résultats expérimentaux et l'intérêt porté dès lors à la convection thermique.

La recherche d'instabilités linéaires sous la forme de modes de Fourier est motivée par l'hypothèse d'extension infinie du système dans les direction horizontales. Or si cette hypothèse est naturelle lorsque la taille du système est comparée à celle d'une particule fluide, elle est beaucoup plus incertaine si elle est comparée à la taille caractéristique des instabilités — à leur longueur d'onde. Le formalisme d'enveloppe a été utilisé pour prendre en compte les effets de confinement du système et les défauts apparaissant dans les structures de convection. Les travaux réalisés depuis plus d'une décennie sur les structures

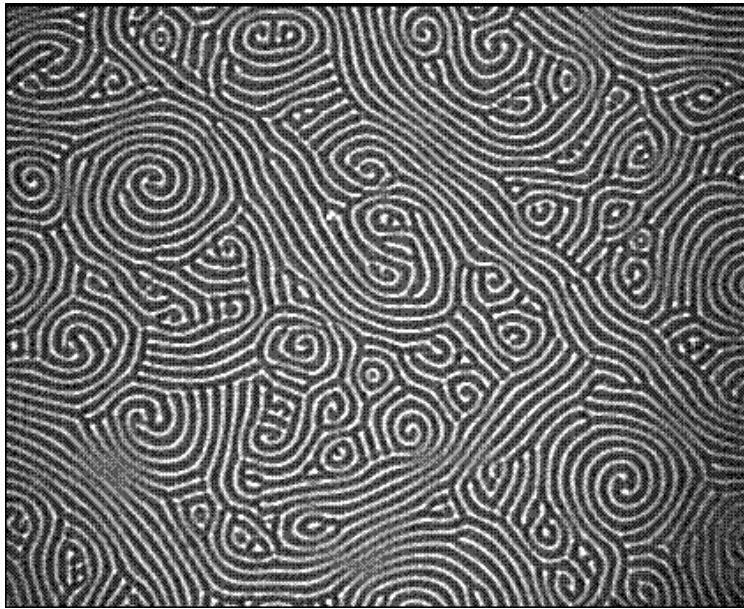


FIG. 1.6 – Structures convectives de Spiral Defect Chaos obtenues expérimentalement par Bodenschatz (12) dans une fine couche de dioxyde de carbone sous pression, confinée horizontalement.

chaotiques en spirales (Spiral Defect Chaos) montrées dans la figure 1.6 et d'autres textures toutes aussi psychédéliques sont passés en revue par Bodenschatz, Pesch et Ahlers (12), entre autres.

Cependant, le formalisme d'enveloppe n'est pas une solution miracle car en règle générale, les dépendances spatiales de l'enveloppe ne sont pas intégrables pour un système quelconque, ce qui limite son champ d'application. Malgré ces réserves, le formalisme d'enveloppe a généré suffisamment de résultats intéressants sur la convection de RB pour être étendu à d'autres types d'écoulements. Les écoulements plan-parallèles, ou couches de cisaillement présentent des instabilités de nature visqueuse et ont fait l'objet d'une analyse de stabilité linéaire puis des dérivations d'une équation d'amplitude par Stuart (97) et d'enveloppe par Stewartson et Stuart (95). Mais en règle générale, ce sont souvent des considérations heuristiques quant au comportement attendu de l'instabilité qui guident l'écriture d'une équation d'enveloppe pour un système physique. Ainsi la recherche d'ondes propagatives, que l'on rencontrera en convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille, conduit à écrire l'équation d'enveloppe sous la forme d'une équation de Ginzburg–Landau à coefficients complexes, mais la dérivation d'une telle équation à partir des équations de conservation originales n'est pas toujours d'une rigueur toute germanique.

Enfin, notons que seuls des écoulements fortement corrélés dans la direction z ont été abordés jusqu'ici. En continuant de s'éloigner du seuil, la dépendance de l'écoulement dans cette direction perd elle aussi sa cohérence et l'écoulement entre dans le cadre de la turbulence développée, plus proche de l'image que l'on se fait d'une casserole en ébullition ($\mathcal{R} \simeq 10^9$) ou de la convection dans l'atmosphère. Il faut tout de même noter dans ce dernier cas une forte corrélation dans la direction verticale, comme on le voit dans la figure 1.7.

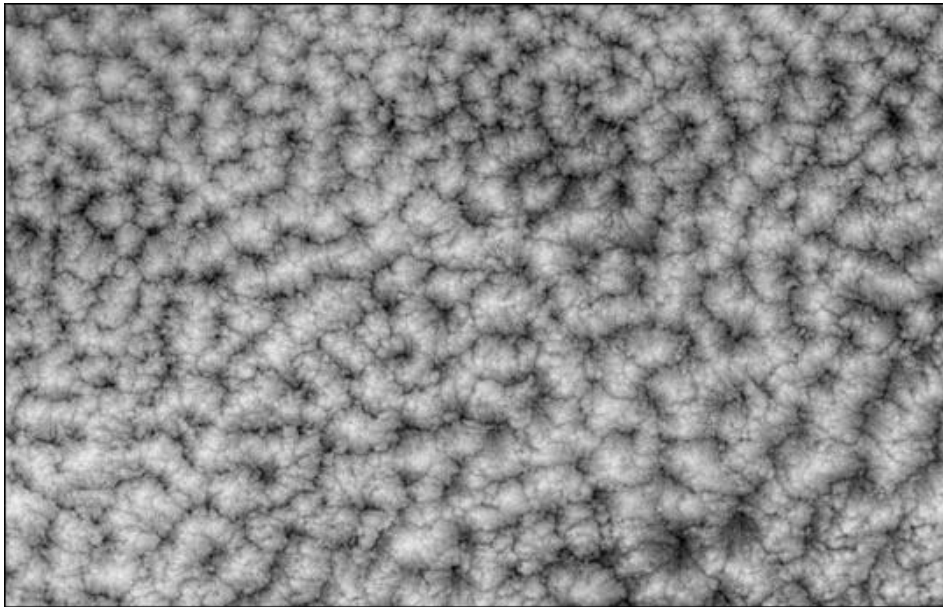


FIG. 1.7 – Exemple de convection dans l’atmosphère au-dessus de l’Océan Pacifique Sud-Est. Bien que les conditions placent ce système très au-delà du seuil critique d’instabilité, les structures restent fortement corrélées dans la direction verticale et présentent un caractère cellulaire. Cette photographie issue de (1) prise le 19 novembre 2001 par le capteur MISR du satellite Terra montre une organisation de cette convection, soumise à un vent faible, en cellules d’une dizaine de kilomètres.

1.2 Écoulement de Rayleigh–Bénard–Poiseuille et instabilités localisées

Nous avons jusqu’ici présenté des systèmes fermés. Bien que la géométrie soit considérée comme infinie dans les directions x et y , l’organisation des instabilités se fait en cellules n’échangeant pas de matière entre elles et les particules fluides gardent des positions moyennes fixes. Cette situation ne se présente en fait que rarement en dehors des laboratoires. Les systèmes ouverts, pour lesquels les particules fluides vont entrer puis sortir du système sont bien plus fréquentes. À partir de l’écoulement de RB, un débit moyen horizontal entre les plaques est obtenu en pratique en maintenant un gradient de pression horizontal. On parle alors de convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille (RBP). L’existence de ce gradient lève l’isotropie du système en faisant apparaître une direction privilégiée alignée avec ce vecteur. On ne considère ici que des cas où l’écoulement de Poiseuille est stable, c’est à dire où le cisaillement dû à cet écoulement ne suffit pas à entraîner le développement d’instabilités de nature purement visqueuse ou inertielle. Le rôle de l’écoulement de Poiseuille est donc de modifier l’établissement d’instabilités thermo-convectives. On décrit ici un système physique différent de l’écoulement de RB présentant un courant de dérive relié à la courbure des rouleaux, mis en évidence par Siggia et Zippelius (90) dans les systèmes confinés, l’écoulement moyen restant imposé par des conditions externes et le système supposé de grandes dimensions.

Les premières études expérimentales de la convection de RBP furent motivées par l'explication de la formation des nuages en stries, comme on peut le voir sur la figure 1.8. On observe dans ces expériences la formation sous l'action d'un écoulement de cisaillement de rouleaux convectifs dont l'axe est orienté parallèlement ou orthogonalement à cet écoulement, suivant l'intensité de ce dernier. Ces résultats qualitatifs sont résumés par Brunt (18). Étant obtenus pour des situations expérimentales proches des seuils d'instabilité, ils ne sont de toute façon que peu exploitables pour la description de nuages. Les applications industrielles d'un tel écoulement sont moins belles à observer mais d'un intérêt économique certain. Les techniques d'épitaxie par Dépôt de Vapeurs Chimiques (CVD), par exemple, sont très courantes dans l'industrie des semi-conducteurs. Les conditions de fabrication, où un gaz inerte chargé en réactifs est injecté entre des substrats chauffés sur lesquels se dépose une mince couche par pyrolyse peuvent entrer dans le cadre des phénomènes d'instabilité thermo-convective. Ces instabilités, si elles se développent dans l'écoulement de gaz, influent directement sur l'épaisseur de la couche se déposant. De tels phénomènes sont présentés, entre autre, par Jensen, Einset et Fotiadis (42). Le refroidissement des semi-conducteurs est un autre champ d'application de la convection de RBP. Des revues complètes voient régulièrement le jour, faisant la synthèse des et le lien entre les résultats théoriques, expérimentaux et numériques ainsi que le point sur l'avancement des applications pratiques du domaine. On pourra par exemple se référer à celles de Platten et Legros (79), de Kelly (45) et de Nicolas (66).

1.2.1 La stabilité homogène

En considérant le système de RBP comme invariant par translation horizontale, on peut, comme dans le cas de Rayleigh–Bénard, chercher des solutions en modes de Fourier, avec un état de base composé de la solution conductive pour la température et de l'écoulement de Poiseuille pour la vitesse. Cette analyse a été conduite par Gage et Reid (36) pour $P = 1$ et généralisée par Platten (78). Elle conclut que le premier mode linéairement instable est celui des rouleaux longitudinaux (LR) dont l'axe est aligné avec l'écoulement moyen. En supposant ces rouleaux infinis, leur champ de vitesse, porté uniquement par e_y et e_z et indépendant de x , n'est pas couplé par les termes non-linéaires au champ de vitesse longitudinal de l'écoulement moyen. La dynamique de ces rouleaux est donc indépendante du champ de vitesse de base. Le seuil d'apparition de ces rouleaux longitudinaux ne dépend donc pas de l'intensité de l'écoulement de Poiseuille, caractérisé par le nombre de Reynolds R . On retrouve comme $\mathcal{R}_{\text{crit}}$ pour les LR celui obtenu en convection de RB. À mesure que l'on passe des LR à des rouleaux transversaux (TR), le seuil critique à R fixé se trouve à un $\mathcal{R}_{\text{crit}}$ de plus en plus élevé, et ceci pour tout P , comme on peut le voir sur la figure 1.9.

Stabilité linéaire de la convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille homogène

Considérons la situation de RB à laquelle on ajoute un gradient de pression horizontal. Ce gradient de pression génère un écoulement laminaire horizontal, cette situation académique étant nommée écoulement de Poiseuille. En repartant des

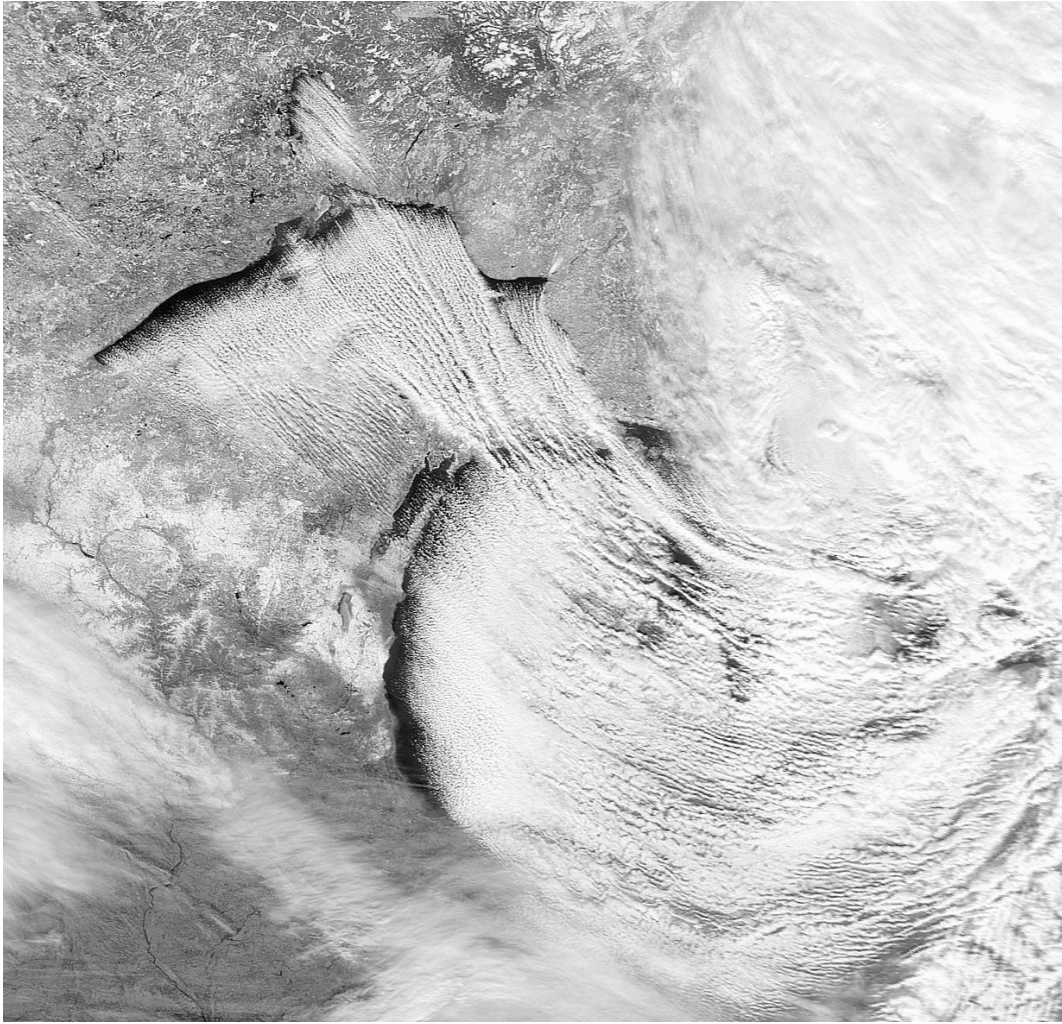


FIG. 1.8 – Formation de nuages au-dessus des lacs Majeur et Michigan. En rencontrant la chaleur et l’humidité des lacs, le vent froid de Nord-Ouest provoque la convection atmosphérique, la formation de nuages structurés en stries longitudinales et d’importante chutes de neige (Lake effect). Cette photographie, tirée de (1) a été prise par le capteur SeaWiFS du satellite OrbView-2 le 5 décembre 2000. L’étude de la formation de telles stries est à l’origine historique des premières recherches sur la convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille. Malheureusement, les conditions physiques de l’atmosphère sont très au-delà du domaine abordé par les théories de stabilité.

équations (1.6) et en tenant compte de cet écoulement moyen que l'on choisit aligné avec \mathbf{e}_x , la solution de base, de conduction de température, devient :

$$\begin{cases} P_b &= \text{cste} - \frac{8U_{\max}\nu\rho_{\text{réf}}}{h^2}x + \int_{-h/2}^z \rho_{\text{réf}}\alpha(\Theta_b - \Theta_{\text{réf}})gdz, \\ \mathbf{U}_b &= U(z)\mathbf{e}_x = U_{\max}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\mathbf{e}_x, \\ \Theta_b &= (\Theta_{\text{inf}} - \Theta_{\text{sup}})(1/2 - z/h) + \Theta_{\text{sup}}, \end{cases} \quad (1.30)$$

où U_{\max} est la valeur maximum de la vitesse. L'étude de stabilité linéaire de cet écoulement se fait en décomposant les champs suivant (1.8). Les grandeurs physiques sont adimensionnalisées comme en convection de RB, sauf le champ de vitesse de base qui est imposé par la diffusion de quantité de mouvement et adimensionnalisé par U_{\max} . On travaille à nouveau avec le double rotationnel de l'équation de conservation de quantité de mouvement, et le système est à nouveau considéré d'extension horizontale infinie. On cherche donc les fluctuations sous la forme de modes de Fourier en x et y oscillants à une fréquence ω . Le système (1.12) devient alors :

$$\begin{cases} -P^{-1}i\omega\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{w} + ik_xR\left(U\left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{w} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\tilde{w}\right) \\ \quad + \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)^2\tilde{w} - k^2\tilde{\theta} = 0, \\ -i\omega\tilde{\theta} - \mathcal{R}\tilde{w} + ik_xRPU\tilde{\theta} + \left(k^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{\theta} = 0, \end{cases} \quad (1.31)$$

où le comportement physique du système est caractérisé par le nombre de Reynolds $R = U_{\max}h/\nu$ en plus de \mathcal{R} et P . La stabilité marginale de tels modes peut s'exprimer sous la forme d'une relation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{marg}}(P, R, k_x, k_y)$. Une autre façon de mettre en équations ce problème de stabilité est de l'exprimer dans un repère où l'axe des x n'est plus aligné avec l'écoulement de Poiseuille mais avec le vecteur d'onde des rouleaux de convection. Dans ce repère, on a alors $\mathbf{U}_b = V \cos \phi \mathbf{e}_x + V \sin \phi \mathbf{e}_y$, $k_y = 0$ et $v = 0$, ϕ étant l'angle fait entre l'écoulement de base et le vecteur d'onde. Le problème d'instabilité est alors bidimensionnel, le système (1.31) devenant :

$$\begin{cases} -P^{-1}i\omega\left(k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{w} + ik_xR\cos\phi\left(U\left(k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{w} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\tilde{w}\right) \\ \quad + \left(k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)^2\tilde{w} - k_x^2\tilde{\theta} = 0, \\ -i\omega\tilde{\theta} - \mathcal{R}\tilde{w} + ik_xR\cos\phi PU\tilde{\theta} + \left(k_x^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\tilde{\theta} = 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

pour lequel la stabilité marginale s'exprime par une relation de la forme $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{marg}}(P, R \cos \phi, k_x)$. La courbe critique pour ϕ quelconque se déduit de celle pour $\phi = 0$, obtenue avec des rouleaux transversaux (TR). Les rouleaux longitudinaux (LR), caractérisés par $\phi = \pi/2$ présentent une courbe critique indépendante du nombre de Reynolds et pour laquelle le Rayleigh critique est celui obtenu au minimum sur k_x de $\mathcal{R}_{\text{marg}}(P, k_x)$, donc en convection de RB. Ce changement de repère est la transformation de Squire, introduite initialement pour les écoulements de cisaillement. Elle nous permet de limiter la résolution numérique du problème de

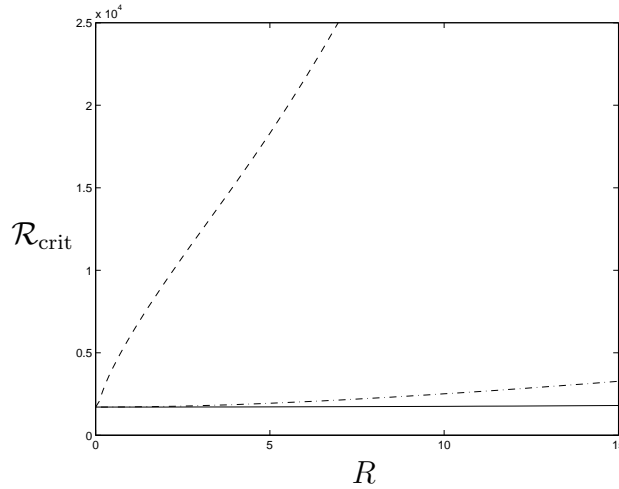


FIG. 1.9 – Courbes critiques $\mathcal{R}_{\text{crit}}$ pour les rouleaux transversaux ($\phi = \pi/2$ en fonction de R pour $P = 0.71$ (trait plein), $P = 7$ (trait mixte) et $P = 450$ (trait discontinu). Les courbes critiques pour les rouleaux d'orientation $\phi \neq \pi/2$ se déduisent de celles-ci par le changement de variable $R \rightarrow R \cos \phi$.

stabilité aux seuls TR. On observe sur les résultats numériques que, le nombre de Rayleigh critique $\mathcal{R}_{\text{crit}}$ étant pour tout nombre de Prandtl P une fonction croissante du nombre de Reynolds R , la situation la plus instable pour les TR est atteinte pour $R = 0$. Réciproquement, les premiers rouleaux à être destabilisés sont donc toujours les LR.

1.2.2 Instabilités convectives et absolues

Cette modélisation invariante par translation du système peut difficilement décrire le comportement d'instabilités se développant dans des situations où, en pratique, la présence de limites latérales est d'autant plus sensible que l'écoulement moyen est important. D'une manière générale, l'approche théorique héritée des problèmes de stabilité d'écoulements fermés prend en compte des perturbations présentant un vecteur d'onde réel et une fréquence complexe, ce qui constitue un problème de stabilité temporelle. Les études expérimentales des écoulements ouverts mettent souvent en avant leurs propriétés de réponse spatiale à une excitation, en considérant des perturbations avec un vecteur d'onde complexe et une fréquence réelle, ce qui constitue un problème spatial de réponse. Il est nécessaire de mélanger les deux approches, en faisant intervenir un vecteur d'onde et une fréquence complexes, pour déterminer quelle analyse est adaptée à l'étude des instabilités se développant dans un écoulement ouvert. Afin de clarifier qualitativement ces instabilités, intéressons-nous à la réponse impulsionnelle du système, c'est-à-dire à la réponse à un pic de Dirac en temps et en espace qui permet d'envisager une situation causale inhomogène à partir de laquelle on souhaite décomposer toute condition initiale. La vigueur d'une instabilité thermo-convective est influencée par le niveau du gradient

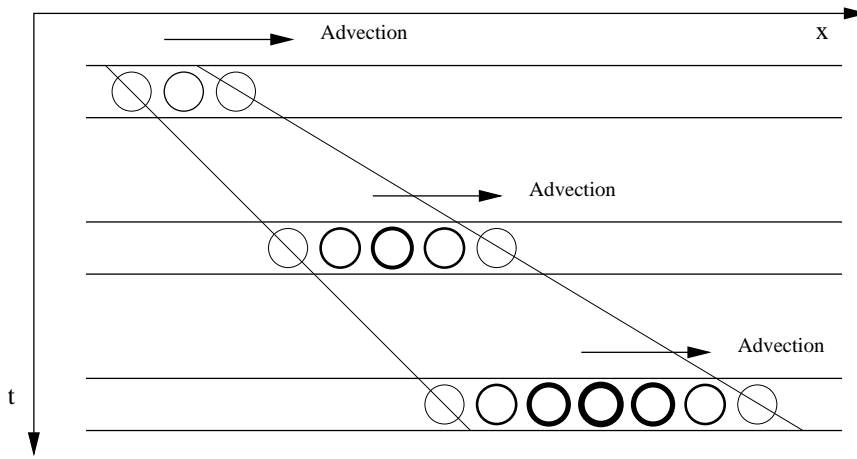


FIG. 1.10 – Évolution spatio-temporelle d’une instabilité convective. L’épaisseur des rouleaux est liée à l’amplitude locale des fluctuations. L’étalement de l’instabilité n’est pas suffisant pour contrer l’advection.

de température imposé, e.g. du nombre de Rayleigh. L’instabilité s’étale autour de l’origine du pic de Dirac et elle subit un effet d’advection par l’écoulement moyen qui tend à l’entraîner en aval. Il y a donc une compétition entre la croissance, dans l’espace et dans le temps, de l’instabilité et son advection. Le système peut alors présenter trois types de comportement.

- L’énergie totale de la perturbation décroît dans le temps, le système est stable et d’une tristesse confondante.
- L’énergie totale de la perturbation croît dans le temps, mais son étalement n’est pas suffisant pour contrer l’advection vers l’aval. En un point fixe du référentiel d’étude, l’amplitude de la perturbation décroît, le système est dit convectivement instable (bien qu’advectivement instable prêterait moins à confusion). Une telle instabilité est une réponse à un forçage externe, susceptible d’imposer sa fréquence.
- L’énergie totale de la perturbation croît dans le temps et son étalement est suffisamment rapide pour contrer l’advection vers l’aval. En un point fixe du référentiel d’étude, l’amplitude de la perturbation croît et le système est dit absolument instable. Un système absolument instable se présente comme un oscillateur pour lequel une instabilité se développe dans le temps et l’espace à une fréquence qui est l’objet d’un critère de sélection qui lui est propre.

La signature des instabilités obtenues pour des systèmes convectivement ou absolument instable est différente. Par sa nature extrinsèque “d’amplificateur”, un système convectivement instable présente un signal dont le spectre temporel est large, imposé par les perturbations qui lui sont appliquées. Par sa nature intrinsèque “d’oscillateur”, un système absolument instable présente un spectre temporel piqué, possédant des fréquences propres, les instabilités étant déclenchées lorsque le mode propre concerné est présent dans les perturbations appliquées au système. La réponse impulsionnelle est le bon outil d’étude de ces comportements, car mathématiquement, un pic de Dirac en x , y et t excite tous les modes de Fourier de ces variables.

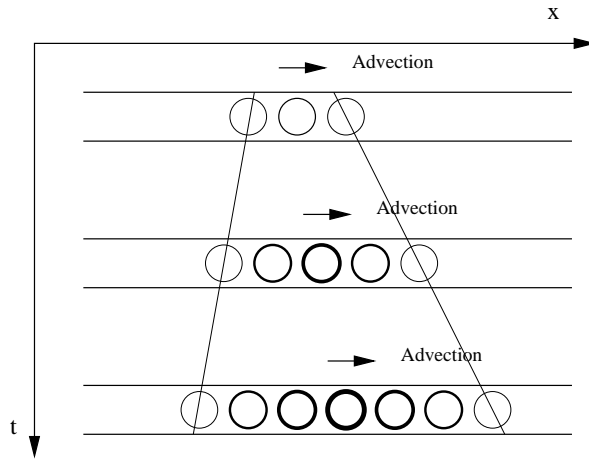


FIG. 1.11 – Évolution spatio-temporelle d’une instabilité absolue. L’étalement de l’instabilité est suffisant pour contrer l’advection.

Dans un cas bidimensionnel, considérons l’instabilité comme une onde dont la fréquence ω et le nombre d’onde k sont liés par une relation de dispersion

$$\mathcal{D}(\omega, k; \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (1.33)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est l’ensemble des paramètres physiques du système. On atteint une situation d’instabilité convective lorsque les paramètres $\boldsymbol{\sigma}$ permettent au taux de croissance associé à une onde se déplaçant à la vitesse de groupe v_g d’être positif pour au moins une valeur de v_g , soit :

$$\Im(\omega(k, \boldsymbol{\sigma})) \geq 0 \text{ avec } \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_g. \quad (1.34)$$

Les conditions critiques d’instabilité absolue sont ensuite obtenues lorsque la relation (1.34) est vérifiée pour :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0 \quad (1.35)$$

La caractérisation d’instabilités par l’étude de la réponse impulsionnelle a d’abord été développée pour la physique des plasmas (15; 10; 11), autre grand champ d’application d’instabilités en milieux continus. Ces notions ont été systématiquement développées pour les problèmes de stabilité hydrodynamique par Huerre et Monkewitz (37). Dans le cas de la convection RBP étudiée par Carrière et Monkewitz en 1999 (24), seuls les TR sont susceptibles de devenir absolument instables. La figure 1.12 donne l’évolution des \mathcal{R} de transition stable/convectivement instable et convectivement instable/absolument instable en fonction de R pour les TR.

Instabilités convectives et absolues en convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille

En repartant du problème de RBP homogène, l’analyse de stabilité convective/absolue se fait en remplaçant les membres de droite nuls des équations (1.31) par les transformées de Fourier de pics de Dirac en x , y et t . La variation en z du

forçage ne change rien à la méthode de calcul mais les résultats en dépendent. On cherche maintenant une solution de la forme :

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{w}(z) \\ \tilde{\theta}(z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t) + \text{c.c.}, \quad (1.36)$$

où le vecteur d'onde et la fréquence sont complexes. Le vecteur $(\tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z))$ est la transformée de Fourier en x , y et t de la fonction de Green du système $\mathbf{G}(x, y, z, t)$. Les conditions aux limites sont celles du calcul de Pellew et Southwell pour la convection de RB. La solution du système (1.31) forcé s'exprime sous la forme d'un développement en fonctions propres $(\tilde{w}_n(k_x, k_y; z), \tilde{\theta}_n(k_x, k_y; z))$ associées aux valeurs propres $\omega_n(k_x, k_y)$ du système homogène. La condition de normalisation de ces fonctions propres qui utilise le produit scalaire (1.24) doit être choisie avec soin, le système (1.31) étant un problème aux valeurs propres généralisé non auto-adjoint. En omettant la dépendance en k_x et k_y , les solutions $(\tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z))$ se mettent alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}(z) \\ \tilde{\theta}(z) \end{pmatrix} = \sum_n \frac{\lambda_n}{i(\omega_n - \omega)} \begin{pmatrix} \tilde{w}_n(z) \\ \tilde{\theta}_n(z) \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

où les coefficients λ_n dépendent de la variation suivant z du forçage. La transformation de Fourier inverse en temps se fait dans l'espace des ω complexes en choisissant comme contour d'intégration une ligne parallèle à l'axe réel située au-dessus de toutes les singularités $\omega_n(k_x, k_y)$ et fermée dans le demi-plan $\Im(\omega) > 0$ pour $t < 0$ et dans le demi-plan $\Im(\omega) < 0$ pour $t > 0$. La condition de causalité, qui stipule que la fonction de Green est nulle pour $t < 0$, est ainsi satisfaite, et cette fonction de Green est intégrée en temps par la méthode des résidus. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \begin{pmatrix} \tilde{w}_n(z) \\ \tilde{\theta}_n(z) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \exp(-i\omega_n t + ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Si un observateur se déplace sur un rayon de propagation vérifiant $x/t = a$ et $y/t = b$, seul un mode dont l'énergie se propage à la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y$ est susceptible de voir son amplitude croître le long de ce rayon. L'énergie des autres modes tend à s'écarter de ce rayon. Trouver de tels modes revient à trouver dans l'espace de Fourier (k_x, k_y) les points selle de $\omega_n - k_y b$, fonction de k_y , soit

$$\left. \frac{\partial \omega_n}{\partial k_y} \right|_{k_x} = b, \quad (1.39)$$

et parmi ces points selle, ceux qui le sont aussi pour $\omega_n - k_x a$, fonction de k_x , soit

$$\left. \frac{\partial \omega_n}{\partial k_x} \right|_{k_y} = a. \quad (1.40)$$

La relation de dispersion doit nécessairement présenter des points de l'espace de Fourier (k_x^s, k_y^s) où les conditions (1.39) et (1.40) sont vérifiées pour que l'intégration de la fonction de Green soit possible. Le comportement asymptotique pour des temps

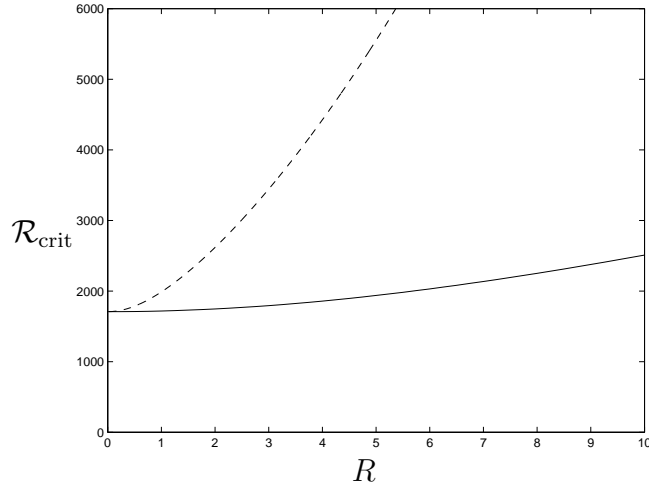


FIG. 1.12 – Courbes critiques $\mathcal{R}_{\text{stable/convectif}}$ (trait plein) et $\mathcal{R}_{\text{convectif/absolu}}$ (trait discontinu) pour les rouleaux transversaux en fonction de R pour $P = 7$.

longs de la fonction de Green est alors donné par méthode de la plus forte pente (“steepest descent”) et donne :

$$\mathbf{G}(x, y, z, t) \simeq \frac{-i}{2\pi t} \sum_n \left(\frac{\partial^2 (\omega_n - k_y b)^s}{\partial k_y^2} \frac{\partial^2 (\omega_n - k_y b - k_x a)^s}{\partial k_x^2} \right)^{-1/2} \lambda_n^s \begin{pmatrix} \tilde{w}_n^s(z) \\ \tilde{\theta}_n^s(z) \end{pmatrix} \times \exp(-i\omega_n^s t + ik_x^s x + ik_y^s y). \quad (1.41)$$

L’existence de solutions pour les conditions (1.39) et (1.40) suivant les valeurs données à a et b décrit la nature des instabilité de l’écoulement. L’instabilité est de nature convective lorsque pour au moins un rayon (a, b) il existe n tel que $\Im(\omega_n - k_y b - k_x a) > 0$. L’instabilité est absolue si pour le rayon $(a, b) = (0, 0)$ il existe n tel que $\Im(\omega_n) > 0$. Les seuils critiques d’instabilité convective et absolue sont fonction des nombres de \mathcal{R} , de R et de P . Le calcul des seuils critiques d’instabilité montre que les LR sont les premiers rouleaux convectivement instables, pour un Rayleigh critique égal à celui de la convection de RBP homogène et que seuls les TR sont susceptibles de devenir absolument instables pour un Rayleigh critique qui augmente avec le carré de R .

1.2.3 Instabilités globales

L’étude du caractère convectif ou absolu d’une instabilité présente le grand intérêt de distinguer entre les comportements extrinsèque et intrinsèque d’un écoulement ouvert. Cette différenciation n’a rien d’artificiel et apparaît de façon flagrante dans l’observation des systèmes naturels ou expérimentaux. Cependant, la portée pratique de l’analyse de stabilité convective/absolue est limitée. D’une part, les systèmes ouverts obtenus naturellement ou artificiellement sont en pratique inhomogènes, ne serait-ce que du fait de

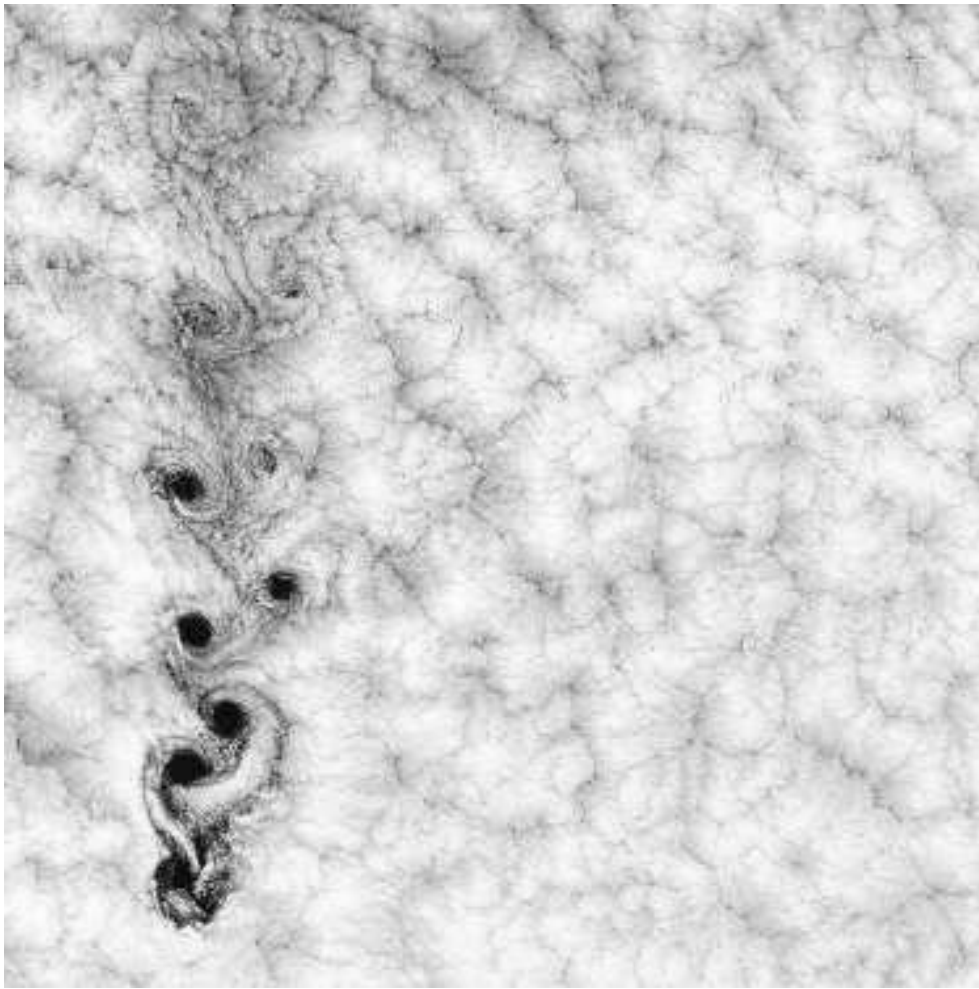


FIG. 1.13 – Développement d’une allée de Bénard–von Kármán dans le sillage de l’île d’Alejandro Selkirk culminant à 1640 m au large des côtes chiliennes, aperçu dans une couche de nuages agissant comme traceur. Cette photographie couvrant une zone de 180 km de côté, issue de (1), a été prise le 15 septembre 1999 par le capteur ETM+ du satellite Landsat 7.

leur taille finie. D’autre part, il serait impossible d’extraire du signal obtenu d’un système absolument instable la contribution d’instabilités convectives déclenchées en amont. Les limites du caractère convectif ou absolu proviennent donc du fait qu’on s’intéresse à une réponse impulsionnelle en supposant de plus qu’autour du pic initial, aucune perturbation n’existe. La présence généralisée de bruits dans tout système réel n’est guère compatible avec cette hypothèse d’une perturbation très particulière. Il est donc souhaitable de chercher à décrire une instabilité sur l’ensemble du domaine et de déterminer les conditions dans lesquelles son comportement s’affranchit de la perturbation initiale pour mettre en évidence un caractère spatio-temporel propre au système, comme celui que l’on peut observer dans un sillage où se développe une allée de von Kármán (figure 1.13) étudiée, entre autre, par Provansal, Mathis et Boyer en 1987 (82). Ce comportement ne peut se décrire dans un système homogène où l’on ne pourrait faire la différence entre les contributions

d’instabilités convectives et absolues. On doit donc s’intéresser à des systèmes inhomogènes. Si l’on considère un système autonome, avec des conditions aux limites et un écoulement de base stationnaires, l’analyse de stabilité linéaire se présente comme un problème de recherche de fonctions propres et des valeurs propres — les fréquences complexes — qui leur sont associées. On appelle *mode global* une telle instabilité présentant un caractère synchronisé, pour laquelle les champs de grandeurs physiques se mettent sous la forme $A(x, y, z) B(t)$.

La mise en évidence d’un comportement intrinsèque dans un système requiert que les modes et valeurs propres possibles soient dénombrables et isolés, un mode étant sélectionné par son taux de croissance plus élevé que les autres. L’analyse de stabilité linéaire de la convection de RB a fait apparaître comme conséquence du confinement de l’instabilité suivant la direction z une discrétisation du spectre ω_n . On peut similairement chercher à imposer des conditions aux limites sur la perturbation dans les directions horizontales en imposant des variations pertinentes de l’écoulement de base dans les directions x et y ; on parle alors d’écoulement non parallèle. Une quantification du spectre liée à ces conditions aux limites pourrait être ainsi mise en évidence. Dans certains cas, cette quantification va permettre de dégager un critère de sélection du mode global et corrolairement des conditions critiques d’apparition de ce type d’instabilité. L’inhomogénéité de l’écoulement de base présente donc deux intérêts. D’une part, sa prise en compte permet de décrire des situations plus proches de celle rencontrées en pratique. D’autre part, pour peu que ces variations horizontales présentent les bonnes propriétés, elles vont permettre la description globale du comportement d’un écoulement ouvert.

1.3 Modes globaux faiblement non parallèles

Alors que les modes globaux et leurs conditions critiques d’apparition ne sont accessibles qu’expérimentalement et numériquement pour des variations quelconques de l’écoulement de base, le cas d’écoulements faiblement non parallèles est l’objet d’une modélisation analytique fructueuse. Des variations spatiales lentes de l’écoulement de base permettent d’appliquer efficacement les résultats obtenus pour des écoulements parallèles et les instabilités ondulatoires qui s’y développent.

On rencontre fréquemment, dans différents domaines de la Physique, des ondes se propageant dans un milieu variant lentement. Par variation lente, on entend que la longueur caractéristique de variation est très supérieure à la longueur d’onde. Dans ces conditions, l’onde “voit” un milieu homogène et a le temps de s’adapter aux variations de ce milieu. En partant de résultats sur l’équation de l’eikonale obtenus par Debye (on pourra se plonger dans le livre de Jammer (40) pour un historique), cette hypothèse a été formalisée dans les années trente. Historiquement, les développements Wentzel–Kramers–Brillouin–Jeffreys(–van Vleck–Maslov–...) (WKBJ) ont été d’abord développés explicitement et rigoureusement en mécanique quantique afin de retrouver dans la limite semiclassique $\hbar \rightarrow 0$ le comportement classique à partir des lois quantiques (16; 17; 41; 48; 58; 99; 102). Ce problème quantique de la limite semiclassique a alors un équivalent en terme d’onde lorsque la longueur d’onde de de Broglie de la solution de l’équation de Schrödinger est petite devant les échelles classiques, qui peuvent être, entre autre, celles des variations

spatiales du potentiel. Le développement ainsi formulé est bien l'équivalent pour des ondes de matière des ondes électro-magnétiques se propageant dans un milieu lentement variable, pour lesquelles l'équation de l'eikonale de l'optique géométrique est la situation limite de l'optique ondulatoire lorsque la longueur d'onde devient infiniment petite. Les développements WKBJ sont maintenant courants dans toutes les études des milieux continus propageant des ondes. On continue de les trouver bien entendu en optique et en mécanique quantique. On les retrouve en acoustique et en sismologie où l'étude de la propagation des ondes de compression et de cisaillement permet d'étudier la structure interne de la Terre, de l'écorce jusqu'au noyau. On les retrouve aussi en magnétohydrodynamique dans l'étude d'instabilités au sein des étoiles ou dans les plasmas nécessaires à la fusion nucléaire.

1.3.1 Principes de la modélisation

La nature convective ou absolue devient ici une caractéristique locale du système à partir de laquelle on va analyser le comportement d'ensemble des instabilités synchronisées. On parlera d'instabilité convective locale lorsque les caractéristiques locales de l'écoulement de base placent le système au-delà du seuil critique d'instabilité convective et en-deçà du seuil absolu. Similairement, on parlera d'instabilité absolue locale lorsque ces caractéristiques placent le système au-delà du seuil critique absolu. Nous nous limiterons à étudier des situations physiques "bien posées", c'est-à-dire des systèmes stables sauf dans un domaine compact et connexe comme représenté dans la figure 1.14. On s'affranchit ainsi de cas pathologiques difficiles à modéliser, comme ceux décrits par Hunt et Crighton en 1991 (39) ou Yakubenko en 1997 (105), dans un domaine partout convectivement instable où la causalité ne peut être exprimée.

Il a été vu précédemment que la convection de RBP peut présenter dans certaines conditions une vitesse de groupe nulle pour les TR. Dans un système dont les caractéristiques varient lentement dans l'espace, on peut donc trouver des lieux où la condition (1.35) est vérifiée par les TR. En mécanique quantique, de tels lieux sont appelés points tournants et correspondent à un rebroussement de la trajectoire d'une particule associée à une onde de densité de présence. Un tel phénomène ne peut être décrit par un développement WKBJ car il implique une variation brusque du comportement de l'onde. À proximité d'un tel point, le mode global doit être cherché par le biais d'un développement intermédiaire pouvant décrire ces variations rapides. La nature et la modélisation de tels points sont traitées de façon complète dans l'ouvrage de Wasow (101). Dans une situation présentant une seule direction lentement inhomogène, la présence de deux tels points peut se voir comme une contrainte dans cette direction du mode d'instabilité et être liée à une quantification des modes admis, la comparaison des taux de croissances pouvant conduire à un critère de sélection. Notons qu'un tel critère est aussi accessible avec un double point tournant, obtenu lorsque ces deux points tournants se rejoignent. De tels points tournants ne peuvent exister que si le système se trouve localement au-delà de la limite d'instabilité absolue, rendant possible la condition (1.35). L'existence d'un domaine d'instabilité absolue est donc une condition nécessaire à l'établissement d'un mode global. On commence alors à voir comment s'organise celui-ci : le domaine absolument instable se comporte comme un oscillateur excité assurant un apport suffisant d'énergie à l'instabilité pour croître et contrer

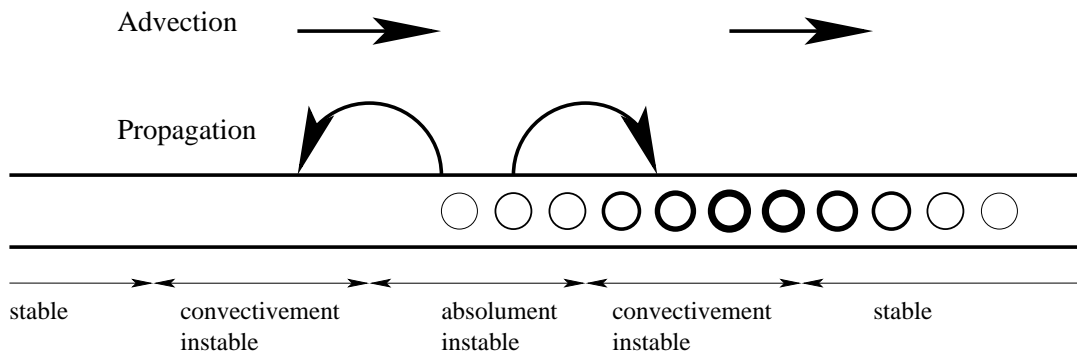


FIG. 1.14 – Action des différents mécanisme intervenant simultanément dans le développement d’un mode global linéaire. L’épaisseur des rouleaux est ici aussi représentative de l’amplitude locale des fluctuations.

l’advection vers l’aval par l’écoulement moyen. Le domaine convectivement instable assure un apport d’énergie au mode, mais ne peut qu’amplifier les perturbations provenant de la zone absolument instable. Le domaine stable amortit l’instabilité. Le mode global est comme un naufragé sur une île déserte : dans l’océan — le domaine stable — il se noie et déperit. Sur la plage — le domaine convectivement instable — il survit à condition que le vent lui amène sa subsistance du centre de l’île — le domaine absolument instable — où poussent les cocotiers.

En hydrodynamique, les premières références à de tels comportements instables sont faites en 1974 par Drazin, d’abord sur l’équation modèle de Ginzburg–Landau (33), puis sur l’instabilité de Kelvin–Helmoltz (32). Des critères de construction des instabilités globales liés aux propriétés locales ont été présentés en 1983 par Soward et Jones (94) pour un écoulement entre deux sphères concentriques, en 1984 par Pierrehumbert (77) et en 1988 par Bar-Sever et Merkine (6) pour les instabilités baroclines dans les écoulements géophysiques et en 1985 par Koch (46) pour les instabilités dans les sillages.

1.3.2 Résultats déjà obtenus

Jusqu’à maintenant, toutes les analyses de stabilité en mode globaux ont été menées à bien sur des systèmes présentant une seule direction inhomogène. Après avoir été développée et appliquée sur l’équation modèle de Ginzburg–Landau par Huerre, Monkewitz, Chomaz et le Dizès entre autres (31; 50), l’analyse en mode global est utilisée sur des problèmes plus complets tels les couches de cisaillement (61). L’analyse en mode globaux de la convection de RBP faiblement inhomogène dans une direction a été menée par Carrière et Monkewitz en 2001 (25).

Modes globaux en convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille pour un chauffage inhomogène dans une direction

L’hypothèse de départ, permettant l’analyse WKBJ, est celle d’une variation lente du problème de stabilité. Cette variation prend ici la forme d’une variation unidimensionnelle du champ de température de la plaque inférieure, ce qui se traduit

par la définition d'un nombre de Rayleigh local $\mathcal{R}(X)$ présentant un maximum choisi en $X = 0$. Comme dans le cas de l'équation d'enveloppe, on introduit une variable spatiale lente, déduite de la variable physique par $X = \varepsilon x$, où ε est un petit paramètre caractéristique des variations lentes de la température sur la plaque inférieure (et non plus un écart au seuil critique). L'écoulement de base est modifié par ces variations lentes par rapport au cas homogène et cherché sous la forme d'un développement en puissances croissantes de ε . À l'ordre $O(\varepsilon^0)$, on retrouve les champs de base du problème homogène. On cherche la perturbation en TR, avec $\mathbf{k} = k e_x$, ceux-ci étant les seuls à devenir absolument instables. Les champs de cette perturbation sont donc exprimés sous la forme d'un développement WKBJ :

$$\begin{pmatrix} w(X, z, t) \\ \theta(X, z, t) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{w}_0(X, z) \\ \tilde{\theta}_0(X, z) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(X, z) \\ \tilde{\theta}_1(X, z) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \right] \times \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int k(X, \omega) dX - i\omega t\right) + \text{c.c.}, \quad (1.42)$$

où la fréquence complexe est décomposée en $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2)$. On souhaite que la correction de fréquence $\varepsilon\omega_1$ prenne en compte l'inhomogénéité de l'écoulement de base et permette de déterminer le mode le plus instable pour ce formalisme. À partir des développements de l'écoulement de base et de la fluctuation, on obtient, comme pour l'équation d'enveloppe, des problèmes de stabilité d'ordres successifs en ε . À l'ordre $O(\varepsilon^0)$, on retrouve ainsi le problème de stabilité homogène vérifié par le premier ordre du développement (1.42). D'autre part, en tout point la relation de dispersion homogène est vérifiée par les valeurs locales de \mathcal{R} et k et ω_0 . La solution de ce problème est cherchée sous la forme du produit d'une amplitude fonction de X et d'une fonction propre du problème homogène :

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_0(X, z) \\ \tilde{\theta}_0(X, z) \end{pmatrix} = A(X) \begin{pmatrix} \tilde{w}_0(z) \\ \tilde{\theta}_0(z) \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

À l'ordre $O(\varepsilon)$, la condition de solvabilité du problème inhomogène obtenu conduit à une équation différentielle vérifiée par l'amplitude $A(X)$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{dA}{dX} + A \left(-i\omega_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial k}{\partial X} + \eta_1(X) \frac{\partial \omega}{\partial X} + \eta_2(X) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X} \right) = 0. \quad (1.44)$$

À un point tournant où $\partial_k \omega = 0$, l'équation précédente est singulière et l'approximation WKBJ n'est par conséquent plus valable. Lorsqu'un tel point tournant se trouve au maximum de $\mathcal{R}(X)$, on est en présence d'un double point tournant, qui devrait permettre d'établir un critère de sélection du mode global. Dans ce cas d'un double point tournant, on introduit la variable intermédiaire $\chi = \varepsilon^{1/2} x$, l'écoulement de base est développé en puissances successives de $\varepsilon^{1/2}$ et la solution dans cette région interne est cherchée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} w^t(\chi, z, t) \\ \theta^t(\chi, z, t) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \tilde{w}_0^t(\chi, z) \\ \tilde{\theta}_0^t(\chi, z) \end{pmatrix} + \varepsilon^{1/2} \begin{pmatrix} \tilde{w}_{1/2}^t(\chi, z) \\ \tilde{\theta}_{1/2}^t(\chi, z) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \tilde{w}_1^t(\chi, z) \\ \tilde{\theta}_1^t(\chi, z) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{3/2}) \right] \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}} k^t \chi - i\omega t\right) + \text{c.c.} \quad (1.45)$$

La notation ^t signifie que les différentes fonctions sont évaluées au double point tournant. Le problème homogène doit être vérifié à l'ordre $O(\varepsilon^0)$, ce qui impose la fréquence du mode propre au double point tournant $\omega_0 = \omega^t$ vérifiant la relation de dispersion et la condition (1.35) ainsi que le premier ordre de la solution interne cherché sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_0^t(\chi, z) \\ \tilde{\theta}_0^t(\chi, z) \end{pmatrix} = A(\chi) \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_0^t(z) \\ \tilde{\theta}_0^t(z) \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

L'ordre $O(\varepsilon^{1/2})$ est automatiquement vérifié et l'ordre $O(\varepsilon)$ conduit à l'équation satisfaite par l'amplitude au voisinage du double point tournant :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \chi^2} + A \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big| ^t \right)^{-1} \left(2\omega_1 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \Big| ^t \right) = 0. \quad (1.47)$$

Cette équation n'a de solution amortie pour $\chi \rightarrow \pm\infty$ que si le mode le plus instable présente une correction de fréquence

$$\varepsilon\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big| ^t \right)^{1/2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \Big| ^t. \quad (1.48)$$

On a ainsi mis en évidence un critère de sélection tenant compte des mécanisme de l'instabilité à travers ω_0 et de l'inhomogénéité à travers $\varepsilon\omega_1$. Ce critère découle de la construction même des modes globaux, ce qui lui confère bien le caractère intrinsèque recherché.

L'analyse en modes globaux a été appliquée, comme il a été présenté, dans ce paragraphe, à l'étude de la convection de RBP. Ce n'est pas, bien entendu, son seul champ d'application et depuis une dizaine d'années, cette description rencontre un succès certain. Sans dresser de liste exhaustive, les modes globaux se retrouvent dans l'interprétation des résultats expérimentaux ou numériques obtenus sur les couches de mélange avec un contre-courant ((96)), sur le sillage derrière un cylindre dans le régime de Bénard–von Kármán ((86)) ou derrière une aile profilée ((104)), sur les jets inhomogènes ((60)), sur la couche limite se développant sur un disque en rotation ((51; 52)). En lien avec la géophysique, les modes globaux ont été introduits dans l'étude de la dynamo solaire ((59)) et dans celle de la convection dans une sphère en rotation ((43)). Toutes ces études concernent des variations lentes unidimensionnelles des paramètres physiques du système étudié.

1.4 Objectifs

L'objet de ce travail est de généraliser à deux directions inhomogènes, s'ajoutant à celle de confinement, le calcul de mode globaux tridimensionnels, synchronisés, par développement WKBJ de l'amplitude. Les appellations bi- et tridimensionnel se révèlent ambiguës car elles ne précisent pas si l'on parle des directions de propagation de l'instabilité en temps qu'onde ou si l'on parle des dépendances spatiales de l'instabilité en ajoutant aux directions de propagation celle de confinement. Cette exposé essaiera, dans la mesure du possible, de lever cette ambiguïté en précisant à quoi s'applique les termes bi-

et tridimensionnel. On cherche donc à établir que de la présence d'un double point tournant, bidimensionnel, dans ce développement découlent une quantification de la fréquence tenant compte de l'inhomogénéité de l'écoulement de base et un critère de sélection du mode le plus instable. Par mode le plus instable, il est sous entendu que ceci est vrai parmi les modes obtenus *par ce formalisme*. Le passage d'un problème de propagation unidimensionnelle à un problème bidimensionnel soulève des problèmes mathématiques. Ces problèmes sont suffisamment ardues pour qu'une telle généralisation n'ait, à notre connaissance, encore jamais été faite en hydrodynamique ou en tout autre domaine de la Physique. Un cas unidimensionnel présente une relation de la forme (1.33) qui constitue une équation algébrique, non linéaire si le système est dispersif. Un cas bidimensionnel présente une relation de la forme :

$$\mathcal{D}(\omega, k_x, k_y, \sigma) = 0, \quad (1.49)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\mathcal{D}\left(\omega, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \sigma\right) = 0, \quad (1.50)$$

à savoir une équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire, vérifiée par la phase $\phi(x, y, t)$. De même les équations d'amplitude (1.44) et (1.47) vont devenir des équations aux dérivées partielles. Comment dès lors modifier le critère de sélection pour tenir compte de cette dimension supplémentaire ? Comment d'autre part imposer les bonnes conditions aux limites sur le vecteur d'onde et l'amplitude afin d'obtenir une solution physiquement acceptable et déterminer de façon unique les champs de k_x , k_y et A ?

Dans le chapitre 2, une telle approche est appliquée à une équation d'enveloppe dérivée rigoureusement sur la convection de RBP pour des conditions proches des conditions critiques à de faibles nombres de Reynolds. Les conditions critiques obtenues par le critère de sélection analytique ainsi qu'une approximation du mode global le plus instable donnée par le premier terme du développement de ce dernier autour du double point tournant sont comparées aux résultats numériques de simulations de l'équation d'enveloppe. Le comportement du vecteur d'onde loin du point tournant, en lien avec les conditions aux limites requises pour le mode global, est décrit. Ces deux aspects sont présentés sous la forme de deux articles destinés à être soumis à une revue scientifique.

Dans le chapitre 3, présenté sous une forme susceptible d'être publiée rapidement, cette approche est appliquée au cas plus général des équations de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq pour un nombre de Reynolds quelconque. Cette situation plus générale permet de revenir sur et de présenter de façon complète comment, à partir de l'existence d'un double point tournant bidimensionnel, le critère de sélection et l'approximation de l'amplitude du mode global le plus instable sont calculés. Une étude paramétrique de l'évolution des conditions critiques avec les caractéristiques physiques et géométriques de l'écoulement de base est faite et l'approximation de l'amplitude du mode global trouvé le plus instable est représentée.

Chapitre 2

Modes globaux tridimensionnels en formalisme d'enveloppe

2.1 Présentation

Les équations de Navier–Stokes, même exprimées dans le cadre de l’approximation de Boussinesq (1.6), restent d’un formalisme mathématique particulièrement ardu. Il s’agit en effet d’équations aux dérivées partielles en temps et en espace, non linéaires. Aucun cadre général n’existant pour ce genre de problème, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d’obtenir des modélisations mathématiquement abordables. Comme il a été présenté dans l’introduction, le formalisme d’enveloppe s’est révélé particulièrement fructueux dans l’étude de la convection de RB au voisinage du seuil d’instabilité pour des systèmes confinés. Ce formalisme conserve, pour des conditions proches des conditions critiques, une bonne partie de la dynamique linéaire et non linéaire du système. Cette modélisation doit *a priori* conduire, en convection de RBP, à une enveloppe solution d’une équation de type Ginzburg–Landau à coefficients complexes. Cette équation étant récurrente dans de nombreux domaines de la Physique et des systèmes dynamiques, elle fait l’objet de recherches mathématiques propres et ses solutions sont maintenant bien documentées. On pourra à ce propos se référer à l’article de synthèse publié par Aranson et Kramer en 2002 (5). Cependant, la dérivation rigoureuse de cette équation d’enveloppe n’a jusqu’à aujourd’hui jamais été faite en convection de RBP. Celle proposée ici est en partie antérieure à cette thèse, ces résultats antérieurs se trouvant dans (23). Sa présentation complète est l’objet du premier article présenté dans ce chapitre.

Ce calcul de l’équation d’enveloppe est mené à bien pour des rouleaux d’orientation quelconque avec un R fini, de l’ordre de l’unité, puis avec un R infinitésimal. Pour des R finis, l’amplification des LR est établie dans le repère se déplaçant à la vitesse de groupe. Après le calcul de l’équation d’enveloppe pour des rouleaux d’orientation quelconque à des R infinitésimaux, une analyse de stabilité convective/absolue est faite sur cette équation et il est alors établi que seuls les TR sont susceptibles de devenir absolument instables dans le référentiel d’étude.

L’équation d’enveloppe obtenue pour des TR à R infinitésimaux

$$\partial_t A = (r(x, y) - \rho^2) A - \rho(c + \eta) \partial_x A + i\rho\eta \partial_y^2 A + (\partial_x - i\partial_y^2)^2 A - A^2 \bar{A} \quad (2.1)$$

est ensuite utilisée pour introduire le calcul de modes globaux imposés par un double point tournant bidimensionnel en convection de RBP. Les variations de r entraînent la stabilité locale de l'écoulement sauf dans un domaine bidimensionnel compact où r présente un maximum. Le formalisme d'enveloppe a l'avantage de proposer un problème de stabilité scalaire et une relation de dispersion analytique donnant explicitement la fréquence en fonction du vecteur d'onde et des paramètres physiques de l'écoulement. S'inspirant des résultats déjà obtenus dans les cas unidimensionnels, on cherche à construire un mode global à partir d'un double point tournant, sous la forme d'un développement WKBJ

$$A(X, Y, t) = (A_0(X, Y, \omega) + \varepsilon A_1(X, Y, \omega) + O(\varepsilon^2)) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi(X, Y, \omega) - i\omega t\right), \quad (2.2)$$

avec $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2)$, $\partial_X \Phi = a$ et $\partial_Y \Phi = b$, se raccordant à un développement intermédiaire

$$\begin{aligned} A(\chi, v, t) &= (A_0(\chi, v) + \varepsilon^{1/2} A_{1/2}(\chi, v) + \varepsilon A_1(\chi, v) + O(\varepsilon^{3/2})) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}} (a^t \chi + b^t v) - i(\omega_0 + \varepsilon\omega_1) t\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dans la zone interne autour du point tournant. Dans un cas bidimensionnel, ce double point tournant correspond à un point où les deux composantes de la vitesse de groupe s'annulent et où le nombre de Rayleigh réduit $r(x, y)$ apparaissant dans l'équation (2.1) présente un maximum local. Après avoir imposé les variations spatiales $r(x, y)$, la relation de dispersion locale

$$\omega = i(r - \rho^2) + \rho c a + \rho \eta (a + b^2) - i(a + b^2)^2 \quad (2.4)$$

et la condition de point tournant

$$\begin{cases} \partial_a \omega = 0, \\ \partial_b \omega = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

qui y sont vérifiées impliquent la valeur du vecteur d'onde (a^t, b^t) et la fréquence complexe $\omega^t = \omega_0$ du mode le plus instable à ce point. Le caractère borné du développement central impose l'expression de son premier ordre

$$A_0(x, y) = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha x^2 + \varepsilon\beta y^2 + 2\varepsilon\delta xy}{2}\right), \quad (2.6)$$

ainsi que la correction de la fréquence complexe :

$$\varepsilon\omega_1 = -i\varepsilon\alpha - \rho c\varepsilon\beta. \quad (2.7)$$

La fréquence totale, en conduisant au mode le plus instable, et corrolairement aux conditions critiques de l'écoulement, permet donc d'établir un critère de sélection pour les modes ainsi construits. Le calcul complet du développement WKBJ qui nécessite d'intégrer dans le plan (X, Y) amplitude et phase n'a pas été réalisé à ce stade. Le critère de sélection et le premier ordre de la solution interne (2.3) sont quant à eux beaucoup plus accessibles

analytiquement et simples d'utilisation. Ils sont comparés aux résultats de simulations numériques directes de l'équation d'enveloppe à travers les champs d'amplitude et une étude paramétrique des conditions critiques.

Le calcul analytique des modes globaux imposés par un double point tournant bidimensionnel sur l'équation d'enveloppe et les simulations numériques des situations ont été réalisés au cours de la thèse. Les simulations numériques ont été faites à l'aide d'un code de différences finies pré-existant et modifié afin d'y intégrer les variations de $r(x, y)$. Les calculs analytiques et numériques des modes globaux se développant sur une bosse bidimensionnelle de température ainsi que la comparaison des résultats font l'objet du deuxième article présenté dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, les composantes a et b sont celles du vecteur d'onde de l'enveloppe, qui n'est pas celui de l'instabilité, celui-ci restant égal à k_c sa valeur au seuil critique pour $R = 0$. Enfin le paramètre ϵ du premier article quantifie l'écart au seuil d'instabilité alors que le paramètre ε du second article quantifie l'inhomogénéité du paramètre $r(x, y)$.

2.I.1 Introduction

The destabilisation of a motionless horizontal fluid layer heated from below, the so-called Rayleigh–Bénard (RB) problem, has received considerable attention in the past century since the original observations of (7) and may now be considered well understood. The linear stability analysis of an infinitely extended, uniformly heated layer developed by (83), generalised to the case of no-slip condition at the horizontal boundaries by (74), was always found to give a satisfactory prediction of the critical temperature difference for the appearance of convective cells in large aspect ratio containers (see 91; 47). An explanation for such an agreement is provided by the coincidence of the threshold for monotonic stability, as predicted by an energy method (92; 93; 44), with the threshold for linear instability which excludes any kind of sub-critical bifurcation. In addition, its absolute nature in the sense of (15) ensures that the instability invades the whole fluid layer, once the temperature difference between top and bottom boundary has reached a super-critical value. The question of the convection pattern selection, which remains unanswered at the linear stage, was first explored by means of amplitude equations, often termed Stuart–Landau equations after the rigorous derivation by (97) of the (49) conjecture in parallel flows. Generalising the previous work of (54), (87) showed that the stable roll pattern for convection between rigid walls successfully corresponds to the usually observed pattern, while hexagonal cells or still more exotic patterns may be encountered due to temperature dependence of the viscosity, for instance, as in (72) (see 103, for experimental evidence of the zoology of possible patterns). In this context, geometrical constraints imposed by the finite extent of the experimental apparatus have a strong influence on the final orientation and the local details of the pattern. Allowing slow spatial variations in the original multiple scale analysis, (65) and (89) used the envelope equation formalism to predict the spatial modulation of the amplitude, in particular, the preferential alignment of rolls parallel to the shorter side of a rectangular “box”.

Considering now cases where a mean shear flow, e.g. a Poiseuille flow in the present paper, is imposed on the differentially heated fluid layer, the destabilisation scenario becomes more complicated. The linear stability analysis of (36) has shown that the loss of horizontal isotropy induces a dependency of the critical temperature difference, i.e. the critical Rayleigh number $\mathcal{R}_c^{(\varphi)}$, on the roll orientation φ , where φ is the angle between the horizontal wavevector and the streamwise direction. For longitudinal rolls (LR), i.e. rolls with their axes aligned with the streamwise direction, $\mathcal{R}_c^{(\pi/2)}$ is easily found to be independent of the Reynolds number R , characterising the mean flow, while for any other direction, $\mathcal{R}_c^{(\varphi)}$ is found to be an increasing function of R ¹. Consequently, longitudinal rolls were always considered to be the preferred pattern in Rayleigh–Bénard–Poiseuille convection (henceforth abbreviated as RBP convection) and, indeed, were repeatedly observed in early experiments (3; 68; 35). However, the existence of travelling transverse roll (TR) convection in some regions of the $\mathcal{R} - R$ parameter space is now well established experimentally (53; 69; 70; 71; 88; 106; 29). This pattern has also been obtained from “direct” numerical simulations of the full set of incompressible Navier–Stokes equations under the usual Boussinesq approximations (see, for instance, 88; 30). TR convection is

¹Strictly speaking, the analysis of (36) is only valid when the Prandtl number is unity. Later studies suggested that the results are relevant for arbitrary Prandtl numbers, see for instance (62; 63).

thus a possible state of the RBP system, but it is not obvious why it can appear in spite of the lower instability threshold of LR convection. It seems that TR's are preferentially observed at low values of R (on which this paper will concentrate).

To illustrate the added difficulties of the RBP problem as compared to the pure Rayleigh–Bénard case, one has to go a step beyond the linear stability analysis. Following the original work of (84), (45) proposed to model the problem by means of two real amplitude equations of the kind:

$$\frac{dA_{\perp}}{dt} = (r - \rho^2)A_{\perp} - A_{\perp}^3 - (1 + \beta^2)A_{\perp}A_{\parallel}^2, \quad (2.I.1a)$$

$$\frac{dA_{\parallel}}{dt} = rA_{\parallel} - A_{\parallel}^3 - (1 + \beta^2)A_{\parallel}A_{\perp}^2, \quad (2.I.1b)$$

where A_{\perp} and A_{\parallel} are the amplitudes of the transverse and longitudinal rolls, respectively, while r and ρ are, up to real multiplicative constants, equal to $\epsilon^{-2}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_c^{(\pi/2)})$ and $\epsilon^{-1}R$, respectively, with ϵ being a small expansion parameter. The real coefficient β is directly related to the interaction coefficient appearing in the RB problem (see 87, for a quantitative evaluation) since the mean shear does not influence the nonlinear interactions at this order (note that β depends on the Prandtl number P). The main features of system (2.I.1) are shown in figure 2.I.1. For $r \leq 0$, $A_{\perp} = A_{\parallel} = 0$ is the stable solution. As r becomes positive, this solution becomes unstable and pure LR's emerge as a stable solution. TR's appear when $r > \rho^2$, but are unstable as long as $r < \rho^2(1 + \beta^{-2})$. Finally, for $r \geq \rho^2(1 + \beta^{-2})$, both LR's and TR's are stable with the final state strongly dependent on the initial condition. This state always consists of either LR's or TR's since a combined pattern with $A_{\perp} \neq 0$ and $A_{\parallel} \neq 0$ is unstable as in the case of the pure RB problem. Hence, nonlinear mechanisms increase the difference between the (linear) critical Rayleigh numbers for LR's and TR's but nevertheless allow stable TR convection for sufficiently large values of \mathcal{R} . The preceding analysis remains valid for an arbitrary orientation φ of the roll with amplitude $A^{(\varphi)}$, provided ρ is replaced by $\rho \cos \varphi$ and the appropriate value of β is used.

The dependence of the final orientation of the roll pattern on the initial condition in the spatially homogeneous problem modelled by amplitude equations (2.I.1) may be roughly considered the temporal equivalent of the dependence of the final pattern on spatial constraints and inhomogeneities in a real laboratory experiment. The presence of lateral walls, as well as system in and outlet and spatial imperfections of the temperature profile on the upper and lower plates, for instance, are known to strongly influence the pattern selection. As in the RB case, such effects may be modelled by allowing slow spatial variations of the amplitude (and possibly of one or more parameters) in the multiple scale analysis used to derive envelope equations. Such an analysis has been performed by (100) for a RBP system in which a streamwise linear variation of the Rayleigh number is allowed. Walton's rigorous derivation of envelope equations highlights the main difficulties inherent in this approach which arise from the difference of the relevant scalings for different roll orientations. This is partly related to the convective nature of the RBP instability at marginality and the possible, orientation dependent transition to absolute instability for super-critical Rayleigh numbers (63; 24). In the following, we extend the analysis of (100), by including slow variations of the amplitude in the transverse direction and more

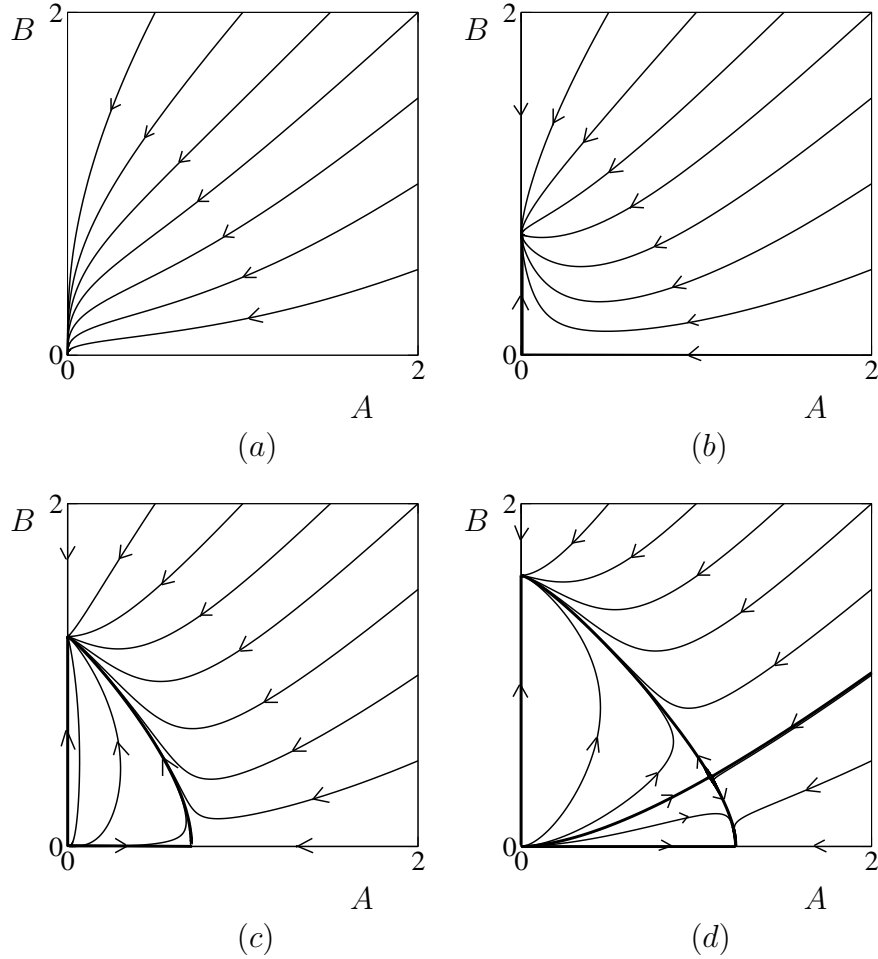


Figure 2.I.1: Phase-space trajectories of (2.I.1) for different values of r . (a): $r \leq 0$, the origin is the only sink. (b): $0 < r \leq \rho^2$, the origin is a saddle point and the point $A_{\perp} = 0$, $A_{\parallel} = r^{1/2}$ corresponding to LR's becomes a sink. (c): $\rho^2 < r \leq \rho^2(1 + \beta^{-2})$, the origin is a source, the “pure LR point” remains a sink and a saddle point emerges on the TR-axis. (d): $r > \rho^2(1 + \beta^{-2})$, the saddle point on the TR-axis becomes a sink while a new saddle point, corresponding to a combination of TR's and LR's, emerges.

general variations of the Rayleigh number. According to our previous work (see 24), transition from convective to absolute instability only involves TR's. In contrast to this previous study, in which the stability problem was treated numerically, we are seeking here analytical solutions. In section 2.I.2, we derive envelope equation describing LR's for $O(1)$ Reynolds numbers and examine their stability properties. In section 2.I.3, analytical solutions are developed in the limit of small Reynolds numbers which allow an explicit determination of the Green function and hence are particularly useful to understand the different behaviour of LR's and TR's. They also provide the starting point for a global mode analysis with two directions of wave propagation, presented in part II of the article. A general discussion of the results is proposed in section 2.I.4.

2.I.2 Finite $R = O(1)$ Reynolds number

The fluid layer, of depth h in the vertical z -direction, is assumed to be of infinite extent in the horizontal x - and y -directions and subjected to a pressure gradient in the x -direction so that a mean Poiseuille flow is established with non-dimensional velocity and pressure fields

$$\mathbf{U}_p = \tilde{U}_p(z) \mathbf{e}_x = (1 - 4z^2) \mathbf{e}_x, \quad (2.I.2a)$$

$$\Pi_p = -\frac{8}{R}x + \text{const.} \quad (2.I.2b)$$

In (2.I.2), the Reynolds number R is defined as

$$R = \frac{U_m h}{\nu}, \quad (2.I.3)$$

where U_m is the maximum of the Poiseuille velocity profile and ν is the kinematic viscosity of the fluid. Without loss of generality, the temperature of the upper wall is assumed to be at a constant value T_{*r} relative to which the temperature in the fluid is defined (here and in the following a $*$ denotes a dimensional quantity). Temperature differences are scaled with respect to the quantity $\nu K / (g\alpha h^3)$ with g the gravitational acceleration, α the thermal expansion coefficient and K the thermal diffusivity of the fluid. We assume that the (dimensional) lower wall temperature T_*^+ departs only slightly from the critical temperature for linear instability in the absence of through-flow. Introducing the critical Rayleigh number $\mathcal{R}_c^{(\pi/2)}$ for LR's (and the RB problem) and a small parameter ϵ , one can write

$$T_*^+ = T_{*r} + \frac{\nu K}{g\alpha h^3} (\mathcal{R}_c^{(\pi/2)} + \epsilon^2 \mathcal{R}_2), \quad (2.I.4)$$

where the small departure from criticality $\epsilon^2 \mathcal{R}_2$ can depend slowly on the x - and y -coordinates. For an $O(1)$ Reynolds number, as considered in this section, the appropriate scaling for the slow spatial coordinates is

$$x_1 = \epsilon x, \quad (2.I.5a)$$

$$y_1 = \epsilon y. \quad (2.I.5b)$$

In addition, the following successively slower time scales are introduced:

$$t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t. \quad (2.I.6)$$

To facilitate the distinction between different scalings, we denote the original $O(1)$ spatial and time coordinates x, y and t by x_0, y_0 and t_0 .

As usual, the non dimensional velocity \mathbf{U} , pressure Π and temperature T fields are expanded as

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \epsilon \mathbf{u}_1 + \epsilon^2 \mathbf{u}_2 + \epsilon^3 \mathbf{u}_3 + \text{h.o.t.}, \quad (2.I.7a)$$

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \text{h.o.t.}, \quad (2.I.7b)$$

$$T = T_0 + \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \epsilon^3 \theta_3 + \text{h.o.t.}, \quad (2.I.7c)$$

with

$$T_0 = \mathcal{R}_c^{(\pi/2)} \left(\frac{1}{2} - z \right), \quad \Pi_0 = \frac{\mathcal{R}_c^{(\pi/2)}}{2} z(1-z) + \text{const.} \quad (2.I.8)$$

Details of the derivation and the solution of the successive problems are given in appendix A.1. According to the linear stability analysis, for an $O(1)$ Reynolds number, only LR's are unstable since the Rayleigh number is $\mathcal{R}_c^{(\pi/2)}$ at leading order. The solution $\mathbf{v}_1 = (p_1, \mathbf{u}_1, \theta_1)^T$ may thus be written

$$\mathbf{v}_1 = A \exp(ik_c y_0) \mathbf{V}_1(z) + \text{c.c.}, \quad (2.I.9)$$

with \mathbf{V}_1 given in appendix A.1 and c.c. denoting the complex conjugate. The amplitude A in (2.I.9) is an implicit function of the slow variables $A = A(x_1, y_1, t_1, t_2)$.

As detailed in appendix A.1, a non trivial equation is obtained from the solvability condition of the problem at order $O(\epsilon^2)$ due to the convective nature of the instability:

$$\partial_{t_1} A + R c \partial_{x_1} A = 0. \quad (2.I.10)$$

As recognised early on by (95), the solution of (2.I.10) is a wave propagating at group velocity Rc :

$$A = A(\chi_1, y_1, t_2) \quad \text{with} \quad \chi_1 = x_1 - Rc t_1. \quad (2.I.11)$$

Our numerical evaluation of c gives:

$$c = P \frac{0.4718 + 1.375P}{0.8012 + 1.566P}, \quad (2.I.12)$$

in agreement with the results of (100) so that Rc is strictly positive except in the limits $R \rightarrow 0$ or $P \rightarrow 0$. Thus, the instability remains convective and, as a consequence, the next order approximation describes the evolution of the wave in the frame of reference moving at the group velocity. It is noteworthy that this envelope formalism cannot capture a transition from convective to absolute instability, even if it existed, for an $O(1)$ Reynolds number since it would involve at least an $O(1)$ difference between the critical Rayleigh number for convective instability and the Rayleigh number for convective-absolute transition (the ansatz (2.I.4) only allows an $O(\epsilon^2)$ difference). This is in full agreement with our previous analysis of this problem where no convective-absolute transition was detected for LR's for $R = O(1)$ and physically relevant values of the Rayleigh number (24).

At the next order, the following envelope equation for the complex amplitude A is obtained

$$\tau \partial_{t_2} A = \mu \mathcal{R}_2 A + \alpha R^2 \partial_{\chi_1}^2 A + i\eta R \partial_{\chi_1} \partial_{y_1} A + \xi \partial_{y_1}^2 A - \lambda A^2 \bar{A}. \quad (2.I.13)$$

The numerical values for the various constants appearing in equation (2.I.13) are (cf appendix A.1):

$$\tau = P^{-1} (0.8012 + 1.566P), \quad (2.I.14a)$$

$$\mu = 0.018, \quad (2.I.14b)$$

$$\alpha = 10^{-2} (\tau P)^{-2} (0.004359 + 0.004804P + 0.4436P^2 + 0.0735P^3 + 0.0849P^4), \quad (2.I.14c)$$

$$\eta = (\tau P)^{-1} (0.05523 + 0.01103P + 0.04263P^2), \quad (2.I.14d)$$

$$\xi = 4.555. \quad (2.I.14e)$$

$$\lambda = 0.7753 - \frac{0.005229}{P} + \frac{0.009228}{P^2}. \quad (2.I.14f)$$

The Landau constant λ is taken from (87). All these coefficients are strictly positive for any non-zero value of the Prandtl number. By the simple change of variables:

$$t_2 \rightarrow \tau^{-1} t_2, \quad A \rightarrow \lambda^{1/2} A, \quad \chi_1 \rightarrow R^{-1} \alpha^{-1/2} \chi_1, \quad y_1 \rightarrow \xi^{-1/2} y_1, \quad \eta \rightarrow (\alpha \xi)^{-1/2} \eta, \quad (2.I.15)$$

and by setting

$$r = \mu \mathcal{R}_2, \quad (2.I.16)$$

(2.I.13) is reduced to the generic form:

$$\partial_{t_2} A = r A + \partial_{\chi_1}^2 A + i\eta \partial_{\chi_1} \partial_{y_1} A + \partial_{y_1}^2 A - A^2 \bar{A}, \quad (2.I.17)$$

where the influence of the Reynolds number is now hidden in the redefinition of χ_1 . Equation (2.I.13) is relevant for $O(1)$ values of R sufficiently below the critical Reynolds number for Tollmien-Schlichting type instabilities where, according to (34), an additional equation would have to be introduced.

Equation (2.I.17) has the classical phase winding solutions

$$A_0 = (r - a^2 - b^2)^{1/2} \exp(i(a\chi_1 + by_1 - \eta abt_2 + \phi_0)), \quad (2.I.18)$$

with wavenumbers a and b in the directions of χ_1 and y_1 and ϕ_0 an arbitrary constant phase, provided $r > a^2 + b^2$. The linear stability of such a solution is investigated by adding a small perturbation B to the solution A_0 :

$$A = A_0 + B(\chi_1, y_1, t_2) \exp(i(a\chi_1 + by_1 - \eta abt_2 + \phi_0)). \quad (2.I.19)$$

The equation for B , linearised around A_0 , is obtained as

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} B = & - (r - a^2 - b^2) (B + \bar{B}) + (-\eta b + 2ia) \partial_{\chi_1} B + (-\eta a + 2ib) \partial_{y_1} B \\ & + \partial_{\chi_1}^2 B + i\gamma \partial_{\chi_1}^2 \partial_{y_1} B + \partial_{y_1}^2 B. \end{aligned} \quad (2.I.20)$$

With the ansatz

$$B = B_1 \exp(i(a'\chi_1 + b'y_1 - \omega't_2)) + \bar{B}_2 \exp(-i(a'\chi_1 + b'y_1 - \bar{\omega}'t_2)), \quad (2.I.21)$$

where B_1 and B_2 are two complex constants, one obtains a dispersion relation which is quadratic in ω' and yields the eigenvalues

$$\omega'_{\pm} = \sigma q k' - i(r' + q^2) \pm i(r'^2 + q^2(2k'\zeta + i\eta'q)^2)^{-1/2}. \quad (2.I.22)$$

In (2.I.22), the following abbreviations have been introduced for convenience:

$$\begin{aligned} k'^2 &= a^2 + b^2, \quad r' = r - k'^2, \quad q^2 = a'^2 + b'^2, \quad \eta' = \eta q^{-2} a' b', \quad \zeta = (k'q)^{-1}(aa' + bb'), \\ \sigma &= \eta(k'q)^{-1}(ab' + ba'). \end{aligned} \quad (2.I.23)$$

The root ω'_- of (2.I.22) has an imaginary part which remains negative since A_0 exists only for $r' > 0$. For the phase winding solution to be stable, $\Im(\omega'_+)$ has to be negative as well, which is the case if the real part of the square root in (2.I.22) is smaller than $r' - q^2$. After some algebra, this condition may be expressed as:

$$\begin{aligned} & q^2 [(1 + \eta'^2)q^6 + 2(r' + (r' - 2k'^2\zeta^2)(1 + \eta'^2))q^4 \\ & + (r'^2(1 + \eta'^2) + 4r'(r' - 2k'^2\zeta^2))q^2 + 2r'^2(r' - 2k'^2\zeta^2)] > 0. \end{aligned} \quad (2.I.24)$$

Clearly, the coefficients of the polynomial in q^2 are positive as long as $r' > 2k'^2\zeta^2$. On the other hand, when $r' < 2k'^2\zeta^2$ the last coefficient is negative, implying negative values of the polynomial in some regions around $q = 0$. In terms of the original r , phase winding solutions are thus stable if $r > (1 + 2\zeta^2)k'^2$. Since ζ is the cosine of the angle between the wavevector of the phase winding solution and of the perturbation, the most restrictive condition is obtained for $\zeta = 1$, for which the Eckhaus criterion is recovered:

$$k'^2 < \frac{r}{3}. \quad (2.I.25)$$

This simply means that the most dangerous instability of a given phase winding solution of (2.I.17) has the same wavevector orientation as the solution itself.

Provided (2.I.25) is satisfied, the envelope equation (2.I.17) thus predicts the existence of stable longitudinal convection rolls, which may be slowly modulated in the horizontal direction, above the RB threshold of $\mathcal{R}_c^{(\pi/2)} \approx 1707$. This result fully agrees with the known experimental observations at moderately large Reynolds numbers. Considering that equation (2.I.17) is only valid in a moving frame of reference, the temporal evolution in (2.I.17) mimics the spatial evolution (amplification) of finite amplitude inlet perturbations into LR's. This naturally leads to the question of what happens when other kinds of perturbations, more specifically TR's, are also amplified. This question implies that the critical Rayleigh number is of the same order for all wavevector orientation, meaning that, in the present formalism, the analysis must be restricted to small Reynolds numbers. This is the subject of the following section.

2.I.3 Envelope equation for infinitesimal R

2.I.3.1 Envelope equations for $R = O(\epsilon^{3/2})$

The multiple scale analysis must be modified when considering values of R of the order of some power of the small parameter ϵ . As already remarked by (100), two different scalings for R , corresponding to different behaviour of the system, can be chosen. The very low Reynolds number limit may be investigated by setting

$$R = \epsilon^{3/2} R_{3/2}. \quad (2.I.26)$$

With this scaling, the $O(\epsilon)$ problem reduces to the Rayleigh-Bénard problem in the absence of mean through-flow. Hence, no mode orientation is selected at the linear stage and the analysis may be performed for a roll of arbitrary orientation φ , recalling that φ has been defined as the angle between the horizontal wavevector and the streamwise direction. It is then more convenient to use x' and y' axes normal and tangential to the roll axis, respectively. The relevant scalings for these coordinates are

$$x'_1 = \epsilon x', \quad y'_{1/2} = \epsilon^{1/2} y', \quad (2.I.27)$$

while the appropriate time scales are

$$t_{3/2} = \epsilon^{3/2} t, \quad t_2 = \epsilon^2 t. \quad (2.I.28)$$

At first order, the roll solution $\mathbf{v}_{1,\varphi} = (p_{1,\varphi}, \mathbf{u}_{1,\varphi}, \theta_{1,\varphi})^T$ is given by

$$\mathbf{v}_{1,\varphi} = A_\varphi \exp(i k_c (x'_0 - R_{3/2} c \cos \varphi t_{3/2})) \mathbf{V}_{1,\varphi}(z) + \text{c.c.}, \quad (2.I.29)$$

with c given by (2.I.12) and $A_\varphi = A_\varphi(x'_1, y'_{1/2}, t_2)$. Note that, as expected, roll modes (except LR's) are travelling waves in the presence of a mean shear, with phase speed proportional to R and to $\cos \varphi$ (see 62). The analysis detailed in appendix A.2.1 yields the envelope equation for A_φ :

$$\tau \partial_{t_2} A_\varphi = \mu \mathcal{R}_2 A_\varphi + \tau R_{3,2} c \sin \varphi \partial_{y'_{1/2}} A_\varphi + \xi \left(\partial_{x'_1} + (2i k_c)^{-1} \partial_{y'_{1/2}}^2 \right)^2 A_\varphi - \lambda A_\varphi^2 \bar{A}_\varphi, \quad (2.I.30)$$

which is just the Newell-Whitehead-Segel equation (see 65; 89) obtained for zero through-flow with an additional convection term proportional to the Reynolds number times the sine of the angle between the wavevector and the streamwise direction. The definition of the various coefficients appearing in (2.I.30) is the same as in the previous section. Thus, (2.I.30) may be simplified by the following change of variables:

$$t_2 \rightarrow \tau^{-1} t_2, \quad A_\varphi \rightarrow \lambda^{1/2} A_\varphi, \quad x'_1 \rightarrow \xi^{-1/2} x'_1, \quad y'_{1/2} \rightarrow (2k_c \xi^{-1/2})^{1/2} y'_{1/2}. \quad (2.I.31)$$

Setting furthermore

$$\tilde{c} = \tau c \left(\frac{\alpha k_c}{2} \xi^{1/2} \right)^{-1/2}, \quad \rho = \alpha^{1/2} k_c R_{3/2}, \quad (2.I.32)$$

where the coefficient α has been introduced for coherence with the future equation (2.I.42), equation (2.I.30) becomes

$$\partial_{t_2} A_\varphi = r A_\varphi + \rho \tilde{c} \sin \varphi \partial_{y'_{1/2}} A_\varphi + \left(\partial_{x'_1} - i \partial_{y'_{1/2}}^2 \right)^2 A_\varphi - A_\varphi^2 \bar{A}_\varphi, \quad (2.I.33)$$

with r as defined by (2.I.16).

Since, in the local stability analysis of (2.I.33), the additional convective term only contributes to the oscillatory part of the instability mode, the critical values for local instability are the same as for the Newell-Whitehead-Segel equation. For the analysis of the nature of the instability, convective or absolute, it is convenient to go back to the Green function rather than trying to directly apply the (15) criterion (see 14; 24, for its application in the case of two wave propagation directions). After successive Fourier transforms in the $y'_{1/2}$ (wavenumber b), x'_1 (wavenumber a) and t_2 (frequency $-\omega$) directions, the response of the linear part of (2.I.33) to an impulse $\delta(x'_1)\delta(y'_{1/2})\delta(t_2)$ is easily found to be

$$\hat{\hat{G}}(a, b, \omega) = \left(-i\omega - r - ib\rho\tilde{c}\sin\varphi + (a + b^2)^2 \right)^{-1}. \quad (2.I.34)$$

The inverse Fourier transform in time is performed, as usual, along a contour in the complex ω -plane which is a straight line parallel to the real axis located above all the singularities (i.e., such that $\Im(\omega) > r$) to satisfy the causality condition. Closing the contour in the lower ω -plane and evaluating residues, one obtains for $t_2 > 0$

$$\hat{\hat{G}}(a, b, t_2) = -\exp\left(\left(r - ib\rho\tilde{c}\sin\varphi + (a + b^2)^2\right)t_2\right). \quad (2.I.35)$$

Since the argument of the exponential is a quadratic form in a , the inverse Fourier transform of $\hat{\hat{G}}$ in the a -direction can be performed analytically (see 27, p. 22):

$$\hat{G}(x'_1, b, t_2) = -\frac{1}{2(\pi t_2)^{1/2}} \exp\left[\left(r - \left(\frac{1}{2}\frac{x'_1}{t_2}\right)^2 + ib\rho\tilde{c}\sin\varphi - ib^2\frac{x'_1}{t_2}\right)t_2\right]. \quad (2.I.36)$$

Finally, the Green function in physical space is obtained by inverting the Fourier transform in the b -direction (27, p. 38) with the result

$$\begin{aligned} G(x'_1, y'_{1/2}, t_2) &= -\frac{\exp(-i\pi/4)}{4\pi t_2} \left(\frac{x'_1}{t_2}\right)^{-1/2} \exp\left[\left(r - \left(\frac{1}{2}\frac{x'_1}{t_2}\right)^2\right)t_2\right] \\ &\quad \times \exp\left[i\left(\frac{x'_1}{4t_2}\right)^{-1} \left(\rho\tilde{c}\sin\varphi + \frac{y'_{1/2}}{t_2}\right)^2 t_2\right]. \end{aligned} \quad (2.I.37)$$

The convective/absolute nature of the instability is determined by the limiting behaviour of $G(x'_1, y'_{1/2}, t_2)$ as $t_2 \rightarrow \infty$ along the particular ray $x'_1/t_2 = y'_{1/2}/t_2 = 0$. Considering the clearly singular limit $x'_1/t_2 \rightarrow 0$ in (2.I.37) yields

$$\lim_{x'_1/t_2 \rightarrow 0} G(x'_1, y'_{1/2}, t_2) = -\frac{1}{2\pi^{1/2}t_2} \exp(rt_2) \delta\left(t_2^{1/2} \left(\rho\tilde{c}\sin\varphi + \frac{y'_{1/2}}{t_2}\right)\right). \quad (2.I.38)$$

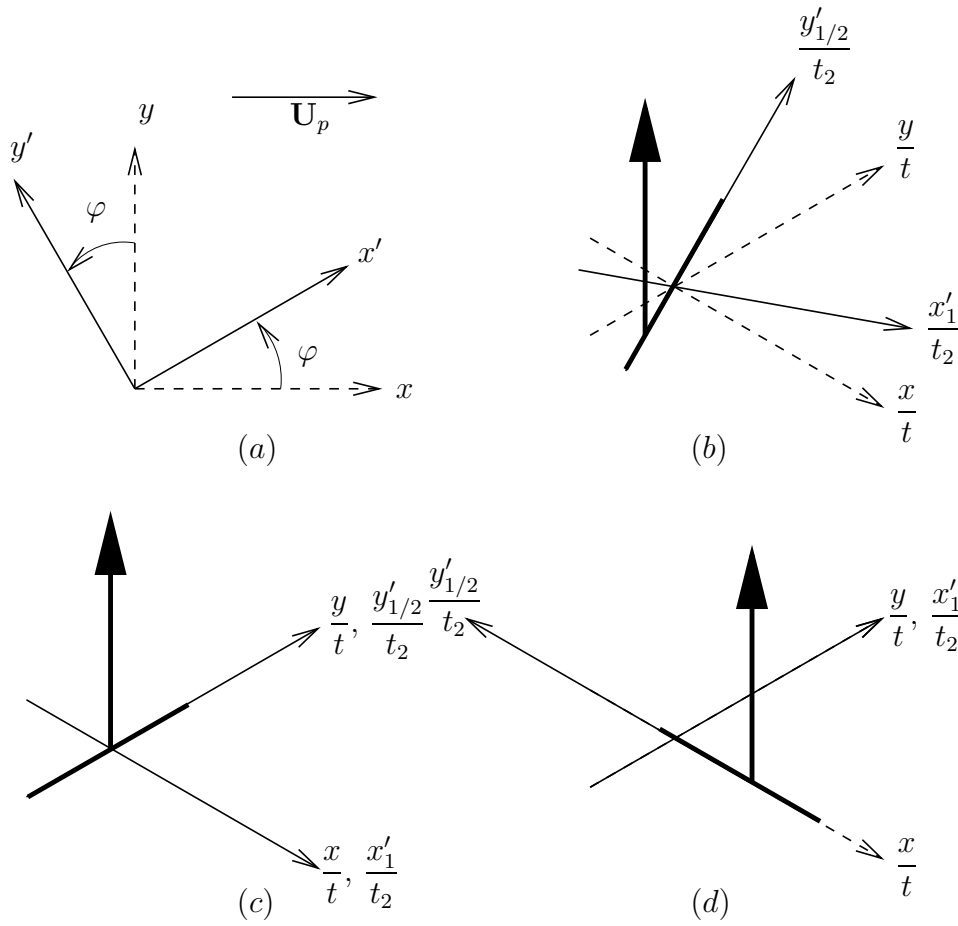


Figure 2.I.2: Sketch of the impulse response for $R = O(\epsilon^{3/2})$. Only the response along the ray $x'_1/t_2 = 0$ is represented, where the Dirac delta function is symbolised by a vertical arrow. (a), Definition of the x' - and y' -directions. (b), impulse response for arbitrary φ . (c), $\varphi = 0$ (TR's). (d), $\varphi = \pi/2$ (LR's).

Hence, along the ray $x'_1/t_2 = 0$, G is a Dirac delta function moving at velocity $-\rho\tilde{c}\sin\varphi$ along the $y'_{1/2}$ -direction. Thus, the impulse response is 0 along the ray $x'_1/t_2 = y'_{1/2}/t_2 = 0$ for all modes except TR's, since in this case $\sin\varphi = 0$ and the delta function remains stationary while experiencing unbounded growth in t_2 . The different possibilities are sketched in figure 2.I.2.

Therefore, the key result obtained from the envelope equation (2.I.33) is that, in the presence of even a weak mean Poiseuille through-flow, all instability modes except transverse rolls are convectively unstable, in agreement with our earlier findings (24). Further investigations based on (2.I.33) therefore do not appear to be of interest and we seek further insight into the problem by increasing R to $O(\epsilon)$ as detailed in the next subsection.

2.I.3.2 Envelope equations for $R = O(\epsilon)$

The Reynolds number is increased by modifying (2.I.26) to

$$R = \epsilon R_1, \quad (2.I.39)$$

which requires the introduction of the additional time scale $t_1 = \epsilon t$ in order to allow rolls to travel at speeds of order $O(R)$. The oscillatory behaviour of rolls is thus promoted to the time scale t_1 :

$$\mathbf{v}'_{1,\varphi} = A_\varphi \exp(i k_c (x'_0 - R_1 c \cos \varphi t_1)) \mathbf{V}_{1,\varphi}(z) + \text{c.c.} \quad (2.I.40)$$

As detailed in appendix A.2.2, the solvability condition at order $O(\epsilon^{5/2})$ implies that (cf the previous subsection for the justification of the frame of reference $v'_{1/2}$)

$$A_\varphi = A_\varphi(x'_1, v'_{1/2}, t_2), \quad \text{with } v'_{1/2} = y'_{1/2} + R_1 c \sin \varphi t_{3/2}. \quad (2.I.41)$$

This leads at the next order in ϵ to the envelope equation

$$\begin{aligned} \tau \partial_{t_2} A_\varphi &= (\mu \mathcal{R}_2 - \alpha R_1^2 k_c^2 \cos^2 \varphi) A_\varphi - R_1 (\tau c + k_c \eta) \cos \varphi \partial_{x'_1} A_\varphi + \frac{i}{2} R_1 \eta \cos \varphi \partial_{v'_{1/2}}^2 A_\varphi \\ &+ \xi \left(\partial_{x'_1} + (2i k_c)^{-1} \partial_{v'_{1/2}}^2 \right)^2 A_\varphi - \lambda A_\varphi^2 \bar{A}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.I.42)$$

which describes the spatio-temporal behaviour of A_φ in a frame of reference moving at the group velocity $-R_1 c \sin \varphi$ along the $y'_{1/2}$ -direction. With the change of variables (2.I.31), the redefinitions

$$c \rightarrow \tau c k_c^{-1} (\alpha \xi)^{-1/2}, \quad \eta \rightarrow (\alpha \xi)^{-1/2} \eta, \quad \rho = \alpha^{1/2} k_c R_1, \quad (2.I.43)$$

and r as defined by (2.I.16), (2.I.42) may be rewritten as

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} A_\varphi &= (r - \rho^2 \cos^2 \varphi) A_\varphi - \rho (c + \eta) \cos \varphi \partial_{x'_1} A_\varphi + i \rho \eta \cos \varphi \partial_{v'_{1/2}}^2 A_\varphi \\ &+ \left(\partial_{x'_1} - i \partial_{v'_{1/2}}^2 \right)^2 A_\varphi - A_\varphi^2 \bar{A}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.I.44)$$

Envelope equation (2.I.44) is an extension of the amplitude equation of (84) and consequently has the same critical values of the control parameter for local instability, i.e.:

$$r_{\varphi,c} = \rho^2 \cos^2 \varphi. \quad (2.I.45)$$

In other terms, the critical Rayleigh number depends on both the square of the Reynolds number and the square of the cosine of the wavevector angle. All instability modes, including TR's, are now of convective type at marginality. According to subsection 2.I.3.1, no transition to absolute instability occurs when $\varphi \neq 0$. For TR's, on the other hand, equation (2.I.44) predicts such a transition. Indeed, proceeding as in section 2.I.3.1, the

following expression for the Green function associated with (2.I.44) is obtained in the particular case $\varphi = 0$:

$$G(x'_1, y'_{1/2}, t_2) = -\frac{\exp(-i\pi/4)}{4\pi t_2} \left(\frac{x'_1}{t_2} - \rho c\right)^{-1/2} \exp \left[\left\{ r - \rho^2 \left(1 + \frac{(c + \eta)^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \frac{x'_1}{t_2} \left(\frac{x'_1}{t_2} - \rho \frac{c + \eta}{2} \right) \right\} t_2 \right] \exp \left[i \left(4 \left(\frac{x'_1}{t_2} - \rho c \right) \right)^{-1} \left(\frac{y'_{1/2}}{t_2} \right)^2 t_2 \right]. \quad (2.I.46)$$

At sufficiently low positive values of $r - \rho^2$, the instability is convective since the growing part of the wave packet described by (2.I.46) is entirely contained between the two rays given by $x'_1/t_2 = \rho(c + \eta) \pm 2(r - \rho^2)^{1/2}$. Increasing r while holding ρ fixed thus leads to a transition to absolute instability when $r > r_a$ with

$$r_a - \rho^2 = \rho^2 \frac{(c + \eta)^2}{4}. \quad (2.I.47)$$

2.I.4 Discussion

Including both streamwise and transverse wave propagation directions, the analysis of section 2.I.3 has revealed the subtle behaviour of the linear impulse response of the RBP system at low Reynolds numbers. In particular, it has allowed to completely determine the convective or absolute nature of any instability pattern. Returning to figure 2.I.2, the Green function which, in the $y'_{1/2}$ -direction (i.e. the roll axis direction), remains a Dirac delta function located at a negative value of $y'_{1/2}/t_2$, prevents any upstream propagation of the impulse response and thus any possibility of a convective/absolute transition, except for TR's. Due to the singular nature of the Green function, the determination of saddle-points of the dispersion relation becomes singular as the $y'_{1/2}/t_2$ -axis is approached, as only one saddle-point, corresponding to the location of the Dirac delta function, subsists along this axis. The analytical determination of the Green function, made possible in the simplified framework of envelope formalism, clarifies our previous analysis of the general case (24), which used steepest descent techniques to evaluate the asymptotic behaviour of the Green function and where the disappearance of the saddle-point for $x/t \rightarrow 0$ left some uncertainty about the effective behaviour of the Green function. For the particular case of TR's, the present results also confirm the result of (63).

More generally, the study highlights the complexity of the competition between LR's and TR's in the RBP system. On the one hand, for any non-zero value of the Reynolds number, the smallest critical Rayleigh number for convective instability always pertains to LR's. Furthermore, LR's are found to be a possible stable finite amplitude pattern. Owing to their convective nature, LR's are however expected in a real experiment of finite length to appear as a result of spatial streamwise amplification of external noise at the inlet. The critical Rayleigh number for convective instability of TR's, on the other hand, is increasing with the square of the Reynolds number. Nevertheless, as the TR instability becomes absolute for sufficiently high values of the Rayleigh number, TR

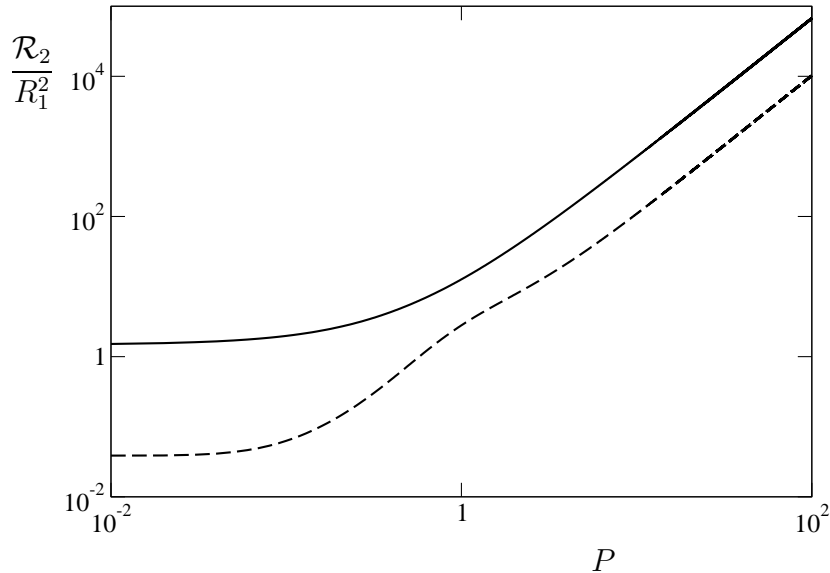


Figure 2.I.3: Ratio between the distance to the critical Rayleigh number \mathcal{R}_2 for TR's (dotted line, finite amplitude stability curve; solid line, convective-absolute transition) and the square of the Reynolds number R_1 as a function of the Prandtl number P .

patterns can invade the entire RBP cell, including the vicinity of the inlet, irrespective of the level of external noise in the experiment. This is believed to explain the experimentally observed transition from LR to TR pattern in RBP convection when the Rayleigh number is increased at a fixed low value of the Reynolds number (see 53; 69; 70; 71; 88; 106; 29).

A more complete exploration of such a transition in the somewhat unrealistic spatially homogeneous case would require interactions between TR's and LR's. Due to the disparity of the relevant spatial scalings, it is at this point not clear how to include such interactions in the envelope equation formalism. Nevertheless, one can compare the critical Rayleigh numbers for stability of finite amplitude TR's with respect to LR's, as given in the introduction, and for the transition to absolute instability. Since both the Rayleigh numbers are quadratic functions of the Reynolds number in the limit studied, we show the ratio \mathcal{R}_2/R_1^2 as a function of the Prandtl number P in figure 2.I.3. It first shows the rapid increase of the absolute Rayleigh number with P , in agreement with our previous results (24). Second, the stability curve always stays below the convective-absolute transition which suggests that absolutely unstable, finite amplitude TR's, are stable with respect to LR's. It is noted however that this result is restricted to low Reynolds numbers. At larger R , there is no evidence that the last conclusion remains true. Indeed, in most experiments no TR patterns have been found at higher Reynolds number. Finally, rolls with arbitrary orientation $0 < \varphi < \pi/2$ do not play a major role in this scenario, since such rolls are at most convectively unstable like LR's but have a smaller growth rate.

With the homogeneous case essentially clarified, the analysis has to be extended to

include spatial inhomogeneities in order to better model real experiments. A first analysis of this kind has been carried out by (25) in the framework of the Navier–Stokes equations for TR’s varying slowly in the streamwise direction (i.e. without transverse variation). Equation (2.I.44) now offers a simplified framework to extend the so-called global mode analysis to the case of base states which are varying slowly in both horizontal directions and give rise to roll patterns with two wave propagation directions. This program is the subject of part II of the present article.

The financial supports of the ERCOFTAC Leonhard Euler Center, the Direction des Relations Internationales of the CNRS (Ph. C.) and the DERTT of the Région Rhône-Alpes (D. M.) are gratefully acknowledged.

2.II.1 Introduction

The Ginzburg–Landau equation with an advection term and variable coefficients has widely served as a model equation for the study of synchronised one-dimensional global modes (see 38; 31; 50; 76, among others). A two-dimensional Ginzburg–Landau equation in Rayleigh–Bénard–Poiseuille (RBP) convection at low Reynolds numbers, that is the mixed convection in a horizontal fluid layer heated from below with a superimposed one-directional Poiseuille through-flow, has been rigorously derived by envelope formalism in Part I of this paper (26) which will henceforth simply be referred to as “I” (correspondingly, equation numbers preceded by “I” refer to Part I). The complex envelope A of transverse roll (TR) patterns, i.e. with the axes of the rolls perpendicular to the Poiseuille flow, in particular, is governed by equation (I3.20), with $\cos \phi = 1$:

$$\partial_t A = (r - \rho^2) A - \rho(c + \eta) \partial_x A + i\rho\eta \partial_y^2 A + (\partial_x - i\partial_y)^2 A - A^2 \bar{A}, \quad (2.II.1)$$

where t denotes time and x and y the streamwise and transverse coordinates, respectively. The entire analysis and discussion in the present paper will be carried out in the coordinates defined in I, which have been scaled and transformed according to (I3.2)–(I3.3) and (I3.6). It suffices to recall here that the main characteristic of these coordinate definitions is the scaling of y like $x^{1/2}$. The transformed coordinates serve to simplify the presentation as much as possible, but the reader is warned that, as a consequence, the recovery of the global mode envelope in physical coordinates is somewhat involved. The real control parameters r and ρ are the rescaled Rayleigh and Reynolds numbers, respectively, while c and η are two positive (real) functions of the Prandtl number P . In the case of spatially uniform r and ρ , the threshold for convective instability is obtained from the linearised version of (2.II.1) as $r_c = \rho^2$; the boundary of absolute instability is $r_a = \rho^2 (1 + (c + \eta)^2 / 4)$ (see I3.23).

To understand the relation between the instability of a spatially uniform (parallel) system and localized instabilities associated with spatial non-uniformities, it is useful to start with the simplest possible model. It consists of keeping the rolls homogeneous in the y -direction parallel to their axes, i.e. $\partial_y \equiv 0$ in (2.II.1), and confining the solution to a domain of finite streamwise extent by requiring $A = 0$ at the boundaries $x = 0$ and $x = L$, while keeping r and ρ constant. In this case, the marginally unstable solutions of the linearised version of (2.II.1) are $A = \sin(n\pi x/L) \exp(\rho(c + \eta)/2)$, and the corresponding critical values of the Rayleigh number are

$$r_c^{(n,L)} = \rho^2 \left(1 + \frac{(c + \eta)^2}{4} \right) + \frac{(n\pi)^2}{L^2}. \quad (2.II.2)$$

It is noteworthy that for $L \rightarrow \infty$, $r_c^{(n,L)} \rightarrow r_a$ so that only local absolute instability gives rise to linear instability in a streamwise confined domain. However, as r exceeds the lowest $r_c^{(1,L)}$, modes with increasingly larger n become unstable and the solution develops strong gradients near the domain boundaries as it grows nonlinearly, thereby violating the assumptions for the derivation of the envelope equation (2.II.1) (see also the analogous phenomenon in the Ginzburg–Landau model for vortex shedding from a finite length cylinder, discussed in section III of 4). Furthermore, vanishing perturbations at

both domain boundaries are not very realistic physically: in an experiment, perturbations swept into the test section are difficult to minimize and at the outflow boundary they are often substantial.

These problems can be alleviated by assuming a spatial variation of the control parameters in an infinite domain in such a manner that the system is linearly stable everywhere, except in a region of finite extent. Assuming for instance the parabolic variation $r = r^{(\max)} - x^2/L^2$ in (2.II.1) where the y -derivatives are still omitted, the critical value $r_c^{(\max)}$ for linear instability is found to be

$$r_c^{(\max)} = \rho^2 \left(1 + \frac{(c + \eta)^2}{4} \right) + \frac{1}{L}. \quad (2.II.3)$$

Again, equation (2.II.3) behaves like $r_c^{(n,L)}$ in the limit of $L \rightarrow \infty$, i.e. $r_c^{(\max)} \rightarrow r_a$.

To represent physical reality, however, the spatial variation of the parameter r should mimic the experimental condition of a fully developed Poiseuille flow with constant temperature entering the differentially heated part of the apparatus. For this, fully analytical solutions of equation (2.II.1) reduced to its x -variation are no longer adequate for a realistic shape of $r(x)$. One has to resort to an asymptotic analysis based on matched WKBJ expansions as in (61), for instance. Within this framework, the selection criterion for the most unstable global (synchronized and self-excited) mode is obtained from the matching of the WKBJ expansions through turning points.

For the RBP problem, a first analysis of this type has been carried out in (25) for a purely streamwise variation of the Rayleigh number, i.e. for the two-dimensional case with only one wave propagation direction. The present study aims at extending the ideas and asymptotic methods used in the classical two-dimensional global mode analysis to the RBP system with two wave propagation directions, i.e. to the case where the Rayleigh number $r(x, y)$ in the full, two-dimensional, equation (2.II.1) varies slowly in both the streamwise and transverse directions.

The inclusion of the transverse parameter variation in the analysis of a thermal convection system such as the RBP system is essential to arrive at a physically realistic model, since convection patterns are known to be very sensitive to the presence of lateral walls, for instance. We note in passing that the through-flow profile in any real RBP cell also varies with y near the lateral walls. Moreover, in real systems non-uniformities of the temperature, for instance, are hardly one-dimensional, as assumed in (25), but take the form of ‘hot spots’ of various shapes. It is the aim of the present analysis to elucidate the conditions for which such a ‘hot spot’ within a RBP cell leads to a localized convection roll pattern. The influence of side walls on the through-flow and on the roll pattern, however, will not be considered. This amounts to assuming that the lateral extent of the RBP cell is large compared to the size of the hot spot and that the physical side walls are located within zones of local stability, which may be compared to the ‘viscous sponges’ used near (outflow) boundaries in numerical analysis.

The following global mode analysis is based on the envelope equation (2.II.1), which offers an attractive alternative to the major complications of an analysis based on the original conservation equations. The main simplification is that it allows to work with an explicit rather than an implicit (numerically defined) local dispersion relation. Fur-

thermore, numerical solutions of equation (2.II.1) are easily obtained to compare with analytical predictions, in particular providing a good test for the mode selection criteria to be developed.

The material is organized as follows: §2.II.2 is devoted to the WKBJ approximations and a discussion of the associated turning points. Next, the frequency selection criterion for global modes, associated with a double turning point in two dimensions, is derived in §2.II.3. Analytical predictions of global mode frequency and growth rate as well as the envelope amplitude in the neighborhood of the double turning point are then compared in §2.II.4 with numerical simulations of the envelope equation with hot spots in the form of Gaussian bumps introduced through the spatial variations of the reduced Rayleigh number r . The last section, finally, is devoted to a general discussion of the relevance of the global mode analysis, and touches on some aspects of the complete global mode construction which involves matching of outer WKBJ expansions (outer in both the x and y directions !) and the inner solution in the turning point region.

2.II.2 WKBJ expansion

The linear global mode analysis is governed by the linearised version of (2.II.1):

$$\partial_t A = (r - \rho^2) A - \rho(c + \eta) \partial_x A + i\rho\eta \partial_y^2 A + (\partial_x - i\partial_y^2)^2 A. \quad (2.II.4)$$

As in our previous work for the two-dimensional (i.e. one-dimensional in terms of wave propagation direction) problem (see 25), the spatial inhomogeneities are imposed through the x - and y -dependence of the reduced Rayleigh number r . In order to obtain a well-posed global mode problem, r is taken to be at a subcritical value sufficiently far from a central region, where a single maximum is reached for $x = y = 0$. Local instability arises in (2.II.4) when $r > \rho^2$.

The presence of the fourth derivative in y prevents the analytical solution of (2.II.4) for meaningful variations of r . Assuming that r varies on a typical length scale much larger than $O(1)$, i.e. the cell height, the solution of (2.II.4) can be approximated by WKBJ expansion. For this, we introduce the coordinates $X = \varepsilon x$ and $Y = \varepsilon y$, slow relative to the original x and y coordinates of (2.II.1) and assume that $r = r(X, Y)$. The WKBJ expansion of a perturbation with complex frequency ω on the trivial steady state solution of (2.II.4) can then be written in the form:

$$A(X, Y, t) = (A_0(X, Y, \omega) + \varepsilon A_1(X, Y, \omega) + O(\varepsilon^2)) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi(X, Y, \omega) - i\omega t\right). \quad (2.II.5)$$

As in the one-dimensional case, the frequency is *a priori* expanded as $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2)$. The necessity of this expansion will become clear in the construction of the global mode. The components of the wavevector in the x and y -directions, henceforth denoted as $a(X, Y, \omega)$ and $b(X, Y, \omega)$ respectively, are related to the phase $\Phi(X, Y, \omega)$ by:

$$a(X, Y, \omega) = \partial_X \Phi, \quad b(X, Y, \omega) = \partial_Y \Phi, \quad (2.II.6)$$

with the continuity condition:

$$\partial_Y a = \partial_X b. \quad (2.II.7)$$

Conversely, Φ may be determined from a and b using:

$$\Phi(X, Y, \omega) = \int_0^X a(p, Y) dp + \int_0^Y b(0, q) dq = \int_0^X a(p, 0) dp + \int_0^Y b(X, q) dq, \quad (2.II.8)$$

where the arbitrary value of $\Phi(0, 0, \omega)$ is taken to be 0. Introducing the WKBJ expansion (2.II.5) in (2.II.4), a local dispersion relation is recovered at leading order:

$$\omega = i(r - \rho^2) + \rho c \partial_X \Phi + \rho \eta (\partial_X \Phi + (\partial_Y \Phi)^2) - i(\partial_X \Phi + (\partial_Y \Phi)^2)^2, \quad (2.II.9)$$

or, equivalently, in terms of a and b :

$$\omega = i(r - \rho^2) + \rho c a + \rho \eta (a + b^2) - i(a + b^2)^2. \quad (2.II.10)$$

The two-dimensional local dispersion relation (2.II.9) is now a nonlinear, first order partial differential equation on Φ . As in the one-dimensional case, (2.II.9), or equivalently (2.II.10) and (2.II.7), defines a complete family of solutions among which only some are physically relevant (namely those satisfying condition 2.II.12). Following the general methodology in (61), the partial differential equation for A_0 is obtained at order $O(\varepsilon)$ in the WKBJ expansion:

$$\partial_a \omega \partial_X A_0 + \partial_b \omega \partial_Y A_0 + A_0 \left(-i\omega_1 + \frac{1}{2} \partial_a^2 \omega \partial_X a + \frac{1}{2} \partial_b^2 \omega \partial_Y b + \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \omega (\partial_Y a + \partial_X b) \right) = 0. \quad (2.II.11)$$

This equation breaks down where $\partial_a \omega = \partial_b \omega = 0$, i.e. when the group velocity vanishes. As far as the dispersion relation (2.II.10) is concerned, such a turning point for the amplitude equation (2.II.11) does exist in Fourier (a, b) -space. Inspired by the one-dimensional case, this turning point is assumed to govern the behaviour of the global mode. A local analysis around this turning point is thus required and will be carried out in §2.II.3. As in the one-dimensional case, the vanishing of the group velocity is related to branch changes of the wavevector, these branch changes being necessary to enforce the boundary conditions for the global mode. The subcritical values of $r(x, y)$ sufficiently far from the central region require $A(X, Y, t)$ to be bounded as $|X| \rightarrow \infty$ or $|Y| \rightarrow \infty$. Thus, Φ has to satisfy:

$$\Im(\Phi(X, Y, \omega)) \rightarrow +\infty \text{ as } |X| \rightarrow \infty \text{ or } |Y| \rightarrow \infty. \quad (2.II.12)$$

Condition (2.II.12) may be equivalently expressed as:

$$\forall Y, \Im(a) < 0 \text{ as } X \rightarrow -\infty \text{ and } \Im(a) > 0 \text{ as } X \rightarrow +\infty, \quad (2.II.13a)$$

$$\forall X, \Im(b) < 0 \text{ as } Y \rightarrow -\infty \text{ and } \Im(b) > 0 \text{ as } Y \rightarrow +\infty, \quad (2.II.13b)$$

assuming the complex nature of a and b . The main difficulty in the calculation of the WKBJ expansion is that the group velocity and the wavevector have two components. The simultaneous treatment of the branch changes for both components of the wavevector is required to uniquely express and evaluate the first order of the WKBJ expansion (2.II.5). This implies that the decay of the global mode far from the locally unstable area needs to be considered in both the x - and y -direction, leading to the far field values of the imaginary parts of a and b shown in figure 2.II.1. These requirements on the imaginary parts must be added to the required existence of several solution branches for a and b . The matchings of the different solution branches for a or b will be the main topic of §2.II.5.

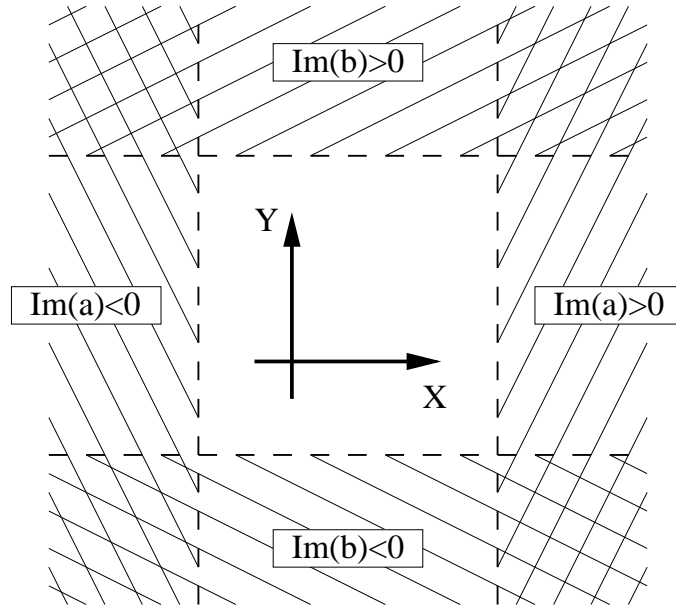


Figure 2.II.1: Regions of positive/negative imaginary parts of the wavenumbers a and b in the physical (X, Y) -space. Far from the central region, r has been assumed to correspond to regions of local stability.

2.II.3 Double turning point region

A turning point is defined by the conditions:

$$\partial_a \omega = \partial_b \omega = 0. \quad (2.II.14)$$

This turning point is two-dimensional by nature, and the two equations of (2.II.14) define a simple two-dimensional turning point. Together with (2.II.10), (2.II.14) defines the values ω^t , a^t and b^t at a turning point, identified by the superscript t's. From

$$\rho(c + \eta) - 2i(a^t + b^{t2}) = 0 \quad (2.II.15a)$$

and

$$2b^t \left(\rho\eta - 2i(a^t + b^{t2}) \right) = 0, \quad (2.II.15b)$$

it follows that:

$$a^t = -\frac{i}{2}\rho(c + \eta), \quad b^t = 0, \quad (2.II.16)$$

and the local value of the frequency at this turning point is finally obtained as:

$$\omega^t = ir^t - i\rho^2 \left(1 + \frac{(c + \eta)^2}{4} \right) = i(r^t - r_a), \quad (2.II.17)$$

where the local critical value for absolute instability r_a is given by (I3.23). As discussed in (50) the selection criterion could at this point be imposed by a set of simple turning

points with a common value of r or by the coalescence of these turning points in a double turning point. The location (X^t, Y^t) of such a double two-dimensional turning point is defined by (2.II.14) and, in addition,

$$\partial_X \omega^t = \partial_Y \omega^t = 0. \quad (2.II.18)$$

The parametric dependence of ω^t on X and Y via $r^t(X, Y)$ implies that the double turning point is located at the maximum of r^t , i.e. at

$$X^t = Y^t = 0. \quad (2.II.19)$$

As $\Im(\omega^t)$ is proportional to r^t , the local growth rate is largest at the double turning point. Therefore, it is reasonable to assume that this double turning point provides the selection criterion for the global mode. Possible global modes associated with a set of simple turning points will not be considered in this study.

In a direct extension of the one-dimensional case (see 38), two inner variables $\chi = \varepsilon^{-1/2}X$ and $v = \varepsilon^{-1/2}Y$ are introduced in the vicinity of the double turning point, and the perturbation is sought in the form:

$$\begin{aligned} A(\chi, v, t) = & \left(A_0(\chi, v) + \varepsilon^{1/2}A_{1/2}(\chi, v) + \varepsilon A_1(\chi, v) + O(\varepsilon^{3/2}) \right) \\ & \times \exp \left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}} (a^t \chi + b^t v) - i(\omega_0 + \varepsilon \omega_1) t \right), \end{aligned} \quad (2.II.20)$$

while r is expanded as:

$$r = r^t + \frac{\varepsilon}{2} \left(\partial_X^2 r^t \chi^2 + \partial_Y^2 r^t v^2 + 2\partial_X \partial_Y r^t \chi v \right) + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (2.II.21)$$

For r to have a true maximum at the origin, one must assume that:

$$\partial_X^2 r^t < 0, \quad \partial_Y^2 r^t < 0 \quad \text{and} \quad (\partial_X \partial_Y r^t)^2 < \partial_X^2 r^t \partial_Y^2 r^t. \quad (2.II.22)$$

Inserting the expansions (2.II.20) and (2.II.21) in the governing equation (2.II.4), the homogeneous problem is recovered at order $O(\varepsilon^0)$. Furthermore, the dispersion relation (2.II.10) implies $\omega_0 = \omega^t$. At order $O(\varepsilon^{1/2})$ the stability equation is satisfied without loss of generality by $A_{1/2} = 0$ while, at order $O(\varepsilon)$, the following second order partial differential equation for A_0 is obtained:

$$\partial_X^2 A_0 - i\rho c \partial_v^2 A_0 + A_0 \left(i\omega_1 + \frac{1}{2} (\chi^2 \partial_X^2 r^t + v^2 \partial_Y^2 r^t + 2\chi v \partial_X \partial_Y r^t) \right) = 0. \quad (2.II.23)$$

It is seen that separation of variables is possible in (2.II.23) if the principal axes of the temperature bump are aligned with the coordinates, i.e. in cases where $\partial_X \partial_Y r^t = 0$. In this situation, the selection criterion and envelope equation become identical to the one-dimensional case (see 25). More general solutions for swept hot spots can be found by first introducing the substitution:

$$A_0 = F(\chi, v) \exp \left(-\frac{\alpha \chi^2 + \beta v^2 + 2\delta \chi v}{2} \right). \quad (2.II.24)$$

The α , β and δ in (2.II.24) are solutions of:

$$-\alpha^2 + i\rho c\delta^2 = \frac{1}{2}\partial_X^2 r^t, \quad (2.II.25a)$$

$$i\rho c\beta^2 - \delta^2 = \frac{1}{2}\partial_Y^2 r^t, \quad (2.II.25b)$$

$$(-\alpha + i\rho c\beta)\delta = \frac{1}{2}\partial_X\partial_Y r^t. \quad (2.II.25c)$$

Thus, the governing equation for F is:

$$\partial_X^2 F - i\rho c\partial_v^2 F - 2(\alpha\chi + \delta v)\partial_\chi F + 2i\rho c(\beta v + \delta\chi)\partial_v F + F(i\omega_1 + i\rho c\beta - \alpha) = 0. \quad (2.II.26)$$

For $\omega_1 = -i\alpha - \rho c\beta$, (2.II.26) has the particular solution $F = \text{const.}$. Introducing the substitution:

$$\zeta = d\chi^2 + ev^2 + 2\delta\chi v, \quad (2.II.27)$$

with d and e given by:

$$de = \delta^2, \quad (2.II.28a)$$

$$id - \rho ce = i\alpha - \rho c\beta, \quad (2.II.28b)$$

equation (2.II.26) is transformed into an equation of the degenerate hypergeometric kind (see 80, equation 2.1.2.103, p. 143) for $F(\zeta)$:

$$(id + \rho ce)\zeta d_\zeta^2 F - \frac{1}{2}(2(id + \rho c\beta)\zeta - id - \rho ce)d_\zeta F - \frac{1}{4}(\omega_1 + i\alpha + \rho c\beta)F = 0. \quad (2.II.29)$$

Note that the system (2.II.28) generally has two solutions (d_1, e_1) and (d_2, e_2) for given values of α , β and δ , thereby generating two independent variables ζ_1 and ζ_2 (corresponding to the independence of the original variables χ and v). Focusing on one variable ζ and omitting the subscript, the solution of (2.II.29) is given by:

$$F(\zeta) = C_1 M\left(\mathbf{a}, \frac{1}{2}, \frac{\zeta}{\lambda}\right) + C_2 \left(\frac{\zeta}{\lambda}\right)^{1/2} M\left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\zeta}{\lambda}\right), \quad (2.II.30)$$

with C_1 and C_2 two free constants,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4} \frac{\omega_1 + i\alpha + \rho c\beta}{id + \rho c\beta}, \quad \lambda = \frac{id + \rho ce}{id + \rho c\beta} \quad (2.II.31)$$

and M being the Kummer function (see 2).

The two-dimensional function $F(\chi, v)$ is thus transformed into the sum of two independent one-dimensional functions $F_1(\zeta_1)$ and $F_2(\zeta_2)$ which can be studied in a similar fashion as in the one-dimensional case (see, again, 38; 25). The decay of the global mode as $|x| \rightarrow \infty$ or $|y| \rightarrow \infty$ requires that A_0 is a decaying function of $|\chi|$ and $|v|$. A solution $(\alpha_+, \beta_+, \delta_+)$ of (2.II.25) consistent with this requirement has to satisfy:

$$\Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0 \quad \text{and} \quad \Re(\delta)^2 < \Re(\alpha)\Re(\beta). \quad (2.II.32)$$

Moreover, for large $|\zeta|$ the Kummer function M increases more rapidly than the exponential term of (2.II.24) except when it reduces to Hermite polynomials. This is the case when $2\mathbf{a} = -n$, with n zero or a positive integer. Hence, the following relation is obtained for the $O(\varepsilon)$ frequency

$$\omega_1^{(1,2)} = -i\alpha_+ - \rho c\beta_+ + 2n(id_{1,2} + \rho c\beta_+). \quad (2.II.33)$$

This defines two infinite sets of global modes in the directions ζ_1 and ζ_2 given by d_1 and d_2 , respectively, which correspond to a discrete frequency spectra. The two sets are connected at $n = 0$, where the two solutions d_1 and d_2 coalesce. As remarked by (38), n cannot be too large without conflicting with the hypothesis of the slow $O(\varepsilon^{1/2})$ variation of $A_0(\chi, v)$. In this case, first order turning points with an $O(1)$ separation would have to be considered as in (50). In the situation where n is small and (2.II.22) satisfied, i.e. all our hypotheses are satisfied, one can reasonably expect that the finite size of the absolutely unstable domain reduces the growth of the instability relative to the local parallel system with the maximum absolute growth rate and results in a stabilizing correction ω_1 for all n . This requires

$$\Im(-i\alpha_+ - \rho c\beta_+) < 0 \text{ and } \Im(id_{1,2} + \rho c\beta_+) < 0. \quad (2.II.34)$$

In the example where $\partial_{X,Y}^2 r^t = 0$, the coefficients are given by

$$\alpha_+ = \left(\frac{-\partial_X^2 r^t}{2}\right)^{1/2}, \quad \beta_+ = \frac{1+i}{2} \left(\frac{-\partial_Y^2 r^t}{\rho c}\right)^{1/2}, \quad d_1 = \alpha_+ + i\rho c\beta_+, \quad d_2 = 0. \quad (2.II.35)$$

This leads to:

$$-i\omega_1^{(1)} = -(2n+1) \left(\frac{-\partial_X^2 r^t}{2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} (-\rho c\partial_Y^2 r^t)^{1/2} + \frac{i}{2} (-\rho c\partial_Y^2 r^t)^{1/2}, \quad (2.II.36a)$$

$$-i\omega_1^{(2)} = - \left(\frac{-\partial_X^2 r^t}{2}\right)^{1/2} - \frac{2n+1}{2} (-\rho c\partial_Y^2 r^t)^{1/2} + \frac{i(2n+1)}{2} (-\rho c\partial_Y^2 r^t)^{1/2}. \quad (2.II.36b)$$

Thus, all coefficients have a stabilizing effect so that the most unstable global mode is the one with $n = 0$ and $F = \text{const.}$, i.e. with a Gaussian shape for the amplitude in both the χ - and v -direction. In the case where $\partial_X\partial_Y r^t \neq 0$, the solution is more complicated and explicitly given in (56). In the present study, we have investigated the solutions of (2.II.33) for specific values of the parameters covering the range used in the numerical simulation of §2.II.4. In this range of parameter values it was always possible to find solutions $(\alpha_+, \beta_+, \delta_+)$ satisfying (2.II.32) and (2.II.34), but so far it has not been established that the latter conditions are always matched. In all cases considered, $n = 0$ was always found to be the most unstable global mode. As a last step, to relieve the reader, the selection criterion and the envelope are reexpressed in terms of original coordinates x and y . The correction at $O(\varepsilon)$ for the frequency is then

$$\varepsilon\omega_1 = -i\varepsilon\alpha - \rho c\varepsilon\beta. \quad (2.II.37)$$

The envelope approximation in the inner region of the most unstable mode previously evaluated is

$$A_0(x, y) = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha x^2 + \varepsilon\beta y^2 + 2\varepsilon\delta xy}{2}\right), \quad (2.II.38)$$

with $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$ and $\varepsilon\delta$ the solutions of the following system (2.II.39) which satisfies the conditions (2.II.32) and (2.II.34).

$$-(\varepsilon\alpha)^2 + i\rho c(\varepsilon\delta)^2 = \frac{1}{2}\partial_x^2 r^t, \quad (2.II.39a)$$

$$i\rho c(\varepsilon\beta)^2 - (\varepsilon\delta)^2 = \frac{1}{2}\partial_y^2 r^t, \quad (2.II.39b)$$

$$(-\varepsilon\alpha + i\rho c\varepsilon\beta)\varepsilon\delta = \frac{1}{2}\partial_x\partial_y r^t. \quad (2.II.39c)$$

2.II.4 Numerical simulations

In this section, the quality of the analytical description of the global mode developed in §2.II.3 is assessed by comparison with numerical solutions of equation (2.II.4). For this, we use a Prandtl number of $P = 7$ corresponding to the coefficient values $c = 11.27$ and $\eta = 0.101$, as derived in I (I2.11 and I2.13d modified by I3.19). Furthermore, the spatial variation of the parameter $(r - \rho^2)(x, y)$ is assumed to be a two-dimensional Gaussian bump with, in the most general case, a swept elliptical planform:

$$(r - \rho^2)(x, y) = -1 \quad (2.II.40)$$

$$+ 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{\cos^2\psi}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\sigma_2^2}\right) - \frac{y^2}{2}\left(\frac{\sin^2\psi}{\sigma_1^2} + \frac{\cos^2\psi}{\sigma_2^2}\right) - \frac{xy}{2}\sin 2\psi\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right),$$

where ψ is the angle between the x axis and the principal axis “1” of characteristic length σ_1 . For simplicity, the function $(r - \rho^2)(x, y)$ is kept unchanged, while the reduced Reynolds number ρ is reduced below its critical value ρ_{crit} which therefore depends on σ_1 , σ_2 and ψ only. The local stability properties are then best characterized in terms of $(r - \rho^2)$. Where $(r - \rho^2)(x, y) < 0$ the system is locally stable (LS). For $0 < (r - \rho^2)(x, y) < \rho^2(c + \eta)^2/4$, the system is locally convectively unstable (LCU) and, finally, it is locally absolutely unstable (LAU) for $(r - \rho^2)(x, y) > \rho^2(c + \eta)^2/4$. As a LAU region is necessary to destabilize a global mode of the type considered here, the critical parameter ρ_{crit} must be smaller than $\rho_a = 2/(c + \eta) = 0.1759$.

The numerical calculations are performed in a square domain $(x, y) \in [-50, 50; -50, 50]$ with a spatial mesh size of $\Delta x = \Delta y = 0.5$. A centred second order spatial scheme is used on this grid and time is advanced by an explicit first order Euler scheme with a time step of $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$. When starting a numerical simulation from a white noise initial condition, the dominant eigenstate emerges only after a substantial transient. This transient growth does not affect the asymptotic behaviour of the numerical simulation as far as the final growth rate and eigenstate are concerned. This is particularly evident for a damped instability, where saturation does not alter the linear dynamics. As seen in figure 2.II.2(a), this transient corresponds in our system to a temporary increase of the mean

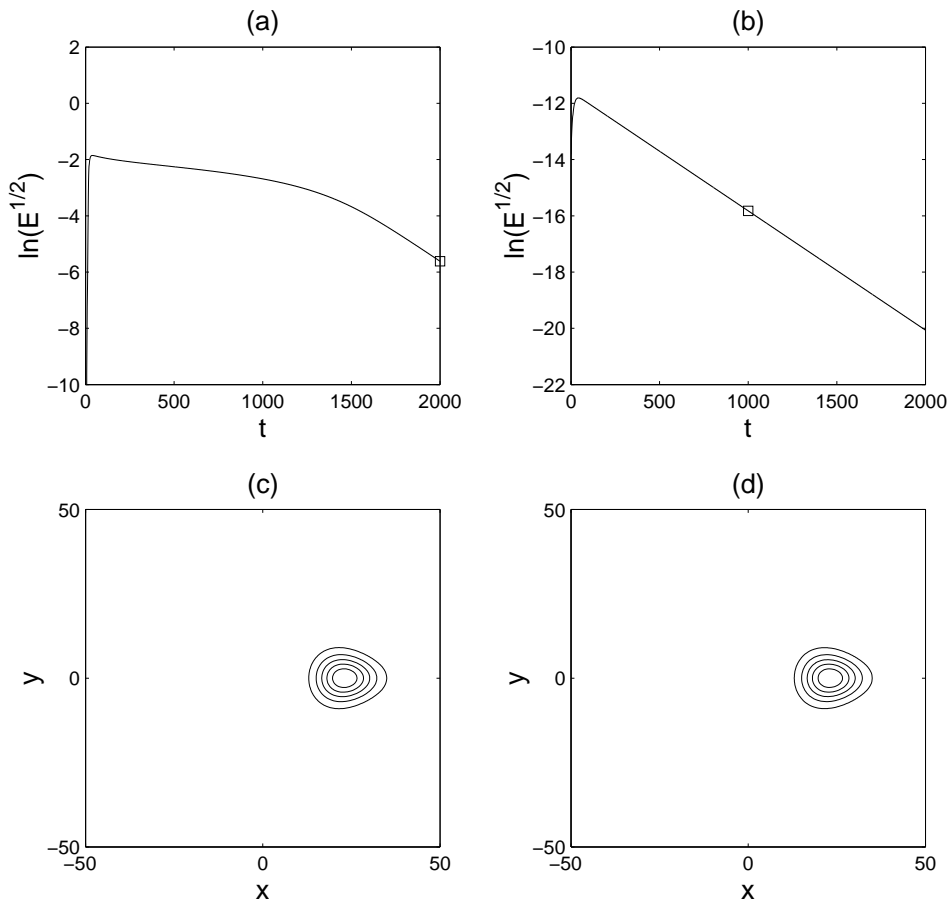


Figure 2.II.2: Comparison between the evolution of white noise (a) and (c) and of the dominant analytical mode (b) and (d), with an initial mean amplitude of 10^{-6} in both cases. $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$ and $\rho = 0.1627$. The two top figures show the space-averaged amplitude and the times (\square) of the amplitude “snapshots” in the bottom figures.

perturbation energy by several orders of magnitude. The asymptotic behaviour being our only concern, it is desirable to eliminate this large transient. For this, the analytical expression (2.II.38) of the most amplified or least damped linear mode in the “summit” region of the temperature bump, as obtained in §2.II.3, is used as the initial condition for the computation. Figure 2.II.2(b) clearly shows that this initial condition dramatically reduces the duration and magnitude of the transient growth (note the different vertical scales). As it should be, the asymptotic decay rate is the same in both cases, equal to 4.2×10^{-3} . Furthermore, the asymptotic perturbation (eigenstate) in figure 2.II.2(c) obtained from white noise is identical to the perturbation in figure 2.II.2(d) obtained with analytical initial condition. For the circular bump of figure 2.II.2, this asymptotically dominant numerical eigenstate is egg-shaped with a gradually rising front and an advected downstream tail.

In unstable cases, the asymptotic saturated states are independent of the initial conditions, but are of minor interest as this long time behaviour is dominated by the nonlinear effects independently of the linear growth rate. The transient growth starting from white

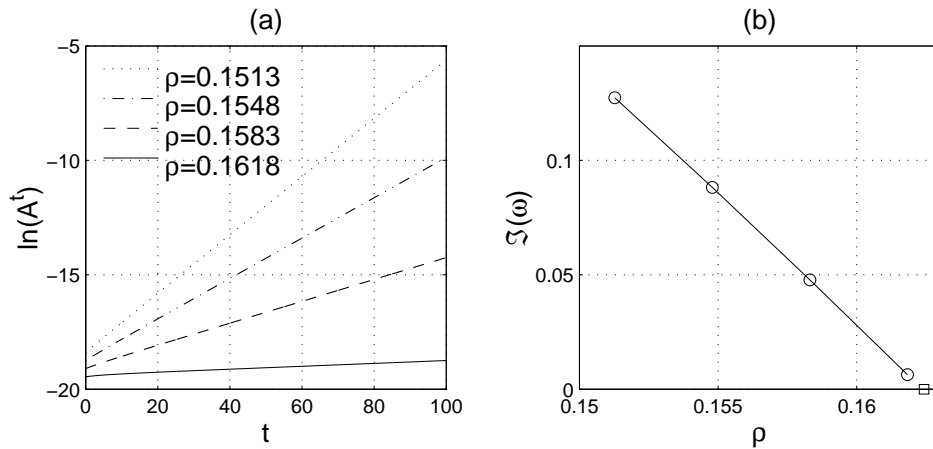


Figure 2.II.3: Evaluation of the numerical $\rho_{\text{crit}}^{\text{num}}$ for $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$. (a): evolution of the amplitude at the centre of the cell for different values of ρ . (b): growth rates (\circ) extracted from (a) with linear extrapolation to $\rho_{\text{crit}}^{\text{num}} = 0.1624$ (\square).

noise merges into the saturated state due to the nonlinear term of (2.II.1) before the exponentially growing dominant linear eigenmode can emerge by selective amplification. This purely exponential growth, which is the object of comparison, can only be isolated by initiating the simulations with the analytical mode.

To further test the global mode analysis in §2.II.3, the analytical and numerical values for the critical Reynolds number ρ_{crit} are compared. The analytical $\rho_{\text{crit}}^{\text{ana}}$ is obtained by finding the zero of the function $\Im(\omega = \omega^t + \omega_1)$ of ρ (cf. equations 2.II.17 and 2.II.37) for the given bump shape $(r - \rho^2)(x, y)$. The numerical value $\rho_{\text{crit}}^{\text{num}}$ is extrapolated from the linear growth rates of the envelope amplitude at the centre of the cell for three unstable values of ρ and the same $(r - \rho^2)(x, y)$ function, as shown in figure 2.II.3.

Next, the numerical and analytical envelope fields for a given set of parameters σ_1 , σ_2 , ψ and ρ are compared. Using (2.II.38), (2.II.16), (2.II.17) and (2.II.37), the envelope field is analytically approximated by the expression for the envelope of the most unstable global mode in the double turning point region:

$$A(x, y) = A_0(x, y) \exp(i a^t x + i b^t y - i(\omega^t + \varepsilon \omega_1) t). \quad (2.II.41)$$

This analytical expression of the envelope does not incorporate the WKBJ expansion and variation of the wavevector far from the temperature bump “summit”.

The bump (2.II.40) is characterised by three geometrical features: its characteristic size, its aspect ratio and its angle ψ with the x -axis. The first feature is investigated with circular bumps of variable size. The second one is investigated with symmetric bumps with constant $\sigma_1 \sigma_2$ and variable aspect ratio. The last dependency is investigated with bumps of fixed aspect ratio and variable sweep angle.

2.II.4.1 Circular bumps with variable unstable area

As $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ is increased, the analytical and numerical critical values of ρ increase and the convective/absolute threshold ρ_a is approached, as expected when the size of the

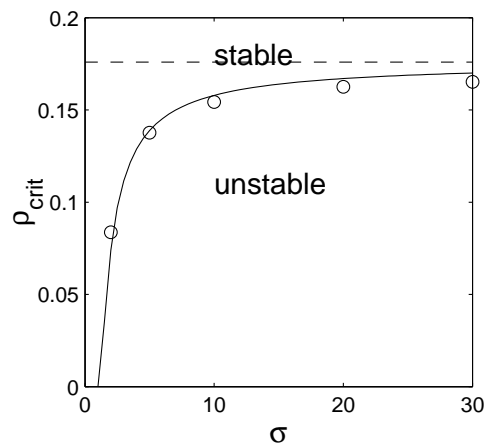


Figure 2.II.4: Comparison between analytical (—) and numerical (\circ) critical values of ρ versus the bump size $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. The dashed line is the convective/absolute threshold $\rho_a = 0.1759$ for the homogeneous case.

unstable domain is increased. As seen in figure 2.II.4, the agreement between the numerical simulations and the selection criterion is good. For small values of σ , the analytical assumption of slow spatial variations of (2.II.40) is barely satisfied and the agreement between numerical and analytical results deteriorates, the latter underpredicting ρ_{crit} . For large values of σ , the remaining small difference between the numerical and analytical results is due to the rather coarse mesh used for the numerical simulation. It was checked for $\sigma = 20$, that the refinement of this mesh makes $\rho_{\text{crit}}^{\text{ana}}$ and the limit of $\rho_{\text{crit}}^{\text{num}}$ as the mesh size tends to zero coincide.

Considering now the amplitude distribution, the location of the roll packet just downstream of the LAU region are similar for the analytical approximation and the numerical simulation, but the two amplitude distributions are conspicuously different. As seen in figure 2.II.5, the peak of the analytical approximation is wider than in the numerical simulation, does not present an advected tail and its maximum is shifted upstream.

2.II.4.2 Elliptical bumps with variable aspect ratio

The next step is to consider bumps with different aspect ratios σ_1/σ_2 aligned with the x -direction. The analytical selection criterion is seen in figure 2.II.6 to agree well with the numerical results. We note that high and low values of σ_1/σ_2 violate the assumption of slow variation. The effect is that low values of σ_2 cause the selection criterion to overpredict the critical value of ρ whereas low values of σ_1 lead to an underprediction. This discrepancy turns out to be severe for $\varepsilon \sim O(1)$. For $\sigma_1 = 1$, for instance, the system is analytically found to be always stable, i.e. $\rho_{\text{crit}}^{\text{ana}} = 0$, whereas it is numerically unstable below $\rho_{\text{crit}}^{\text{num}} = 0.0777$.

It is noteworthy that for a constant characteristic area of the unstable domain, the confinement effect in the y -direction is as stabilising as the confinement in the x -direction, despite the advective effect of the mean flow that could be expected to stabilise preferentially bumps which are short in the x -direction. Hence, the most unstable situation is

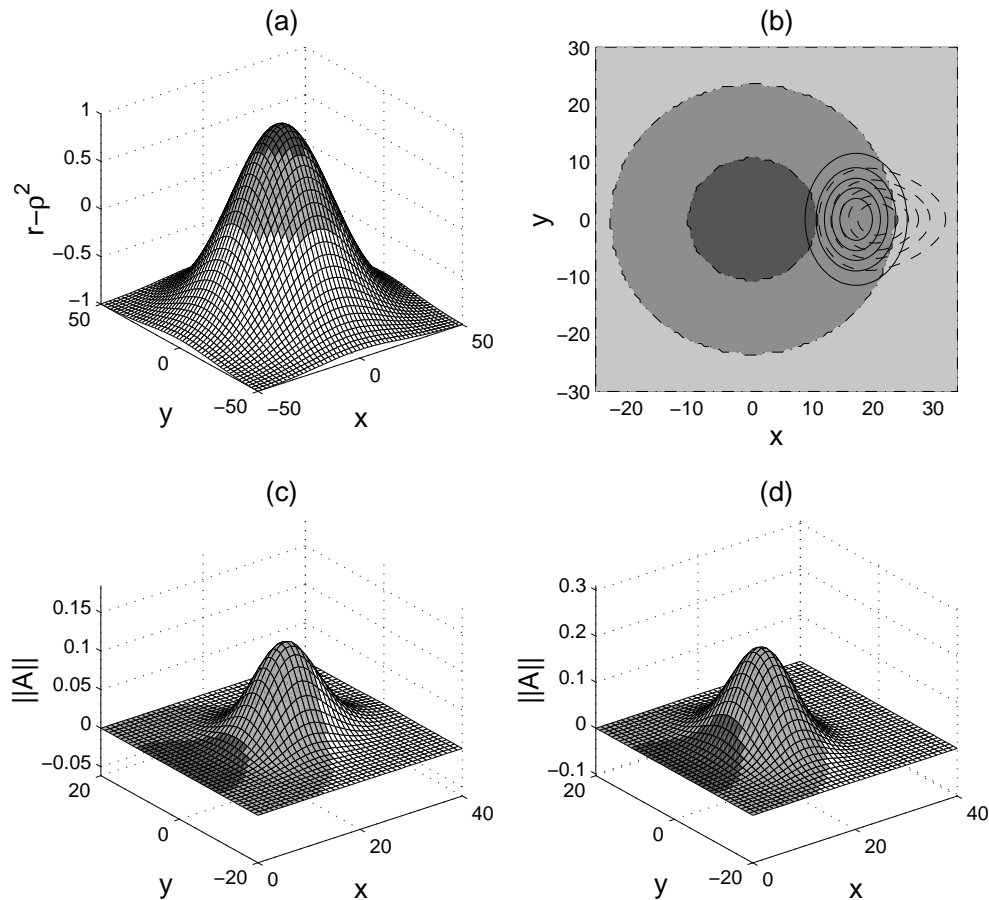


Figure 2.II.5: Comparison between analytical approximation and numerical simulation of the envelope amplitude, with $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$, $\rho = 0.1513$, $\varepsilon\alpha = 0.05$, $\varepsilon\beta = 0.0272 + i0.0272$, $\varepsilon\delta = 0$ and $\omega = -0.0459 + i0.1816$. The amplitudes are shown at $t = 60$ where the initial mean amplitude is 10^{-6} in both cases. (a): $(r - \rho^2)$ as a function of x and y . (b): comparison of analytical (—) and numerical (- -) amplitude contours. (c) and (d): three-dimensional representations of numerical and analytical amplitudes, respectively. In the four figures, the darkest shade marks the LAU region, the intermediate shade the LCU region and the lightest shade the LS region.

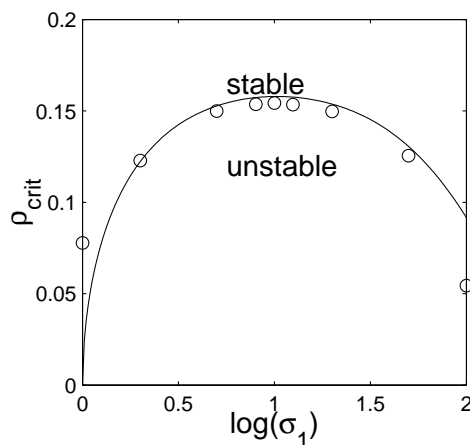


Figure 2.II.6: Comparison between analytical (—) and numerical (○) critical values of ρ as functions of σ_1 , with $\sigma_1\sigma_2 = 100$.

attained for the circular bump.

2.II.4.3 Swept elliptical bumps

A swept elliptical bump completely breaks the symmetries in the y -direction and is therefore of interest to validate the selection criterion imposed by a double-turning point at the top of the bump. As seen in figure 2.II.7, the analytical selection criterion agrees well with the numerical values of the threshold ρ_{crit} and provides the correct dependence on the sweep angle ψ . From figure 2.II.7 it is seen that ψ has only a strong effect on the oscillation period of the instability with ψ , as the variation of T is of the order of magnitude of the period, with a significant decrease when the bump is elongated in the x -direction. We also note that the agreement between analytical and numerical periods improves with the characteristic size of the bump in the x -direction, i.e. when $\psi \rightarrow \pi/2$ in figure 2.II.7(b).

Concerning the envelope shape, the position of the global mode is well captured by the analysis. As seen in figure 2.II.8, the maximum of the envelope amplitude is located on the boundary between the LCU and LS regions, as for a global mode associated with a one-dimensional $r(x)$ bump (see for instance 25). In the transverse direction, the maximum is located close to the most downstream point of the boundary between the LAU and LCU regions.

2.II.5 Discussion

Before discussing the relevance of the analytical approximation of the global mode and its possible improvements, the reader is again reminded that the x and y coordinates used here are scaled and transformed as specified in section 3 of I. So again, the global mode shapes shown in this section do not correspond directly to the shapes that would be observed in physical space.

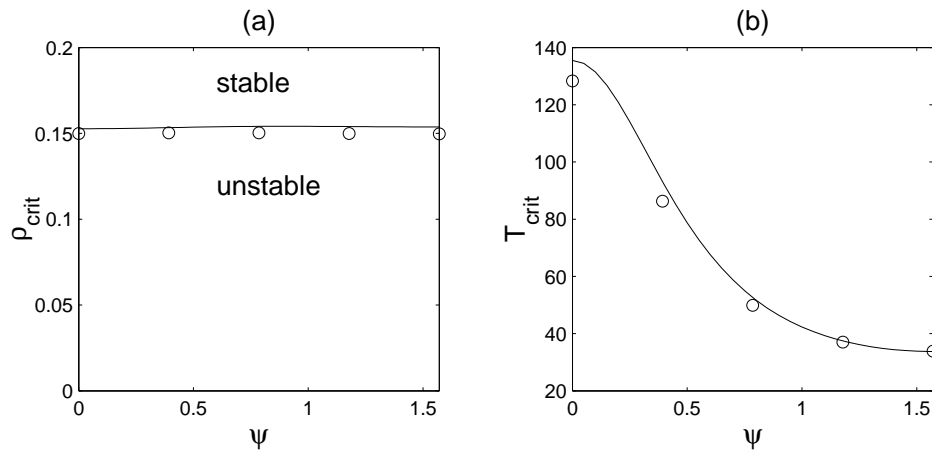


Figure 2.II.7: Comparison between (a) analytical (—) and numerical (○) critical values of ρ and (b) oscillation periods at the numerical and analytical stability threshold, respectively, as functions of ψ ($\sigma_1 = 5$ and $\sigma_2 = 20$).

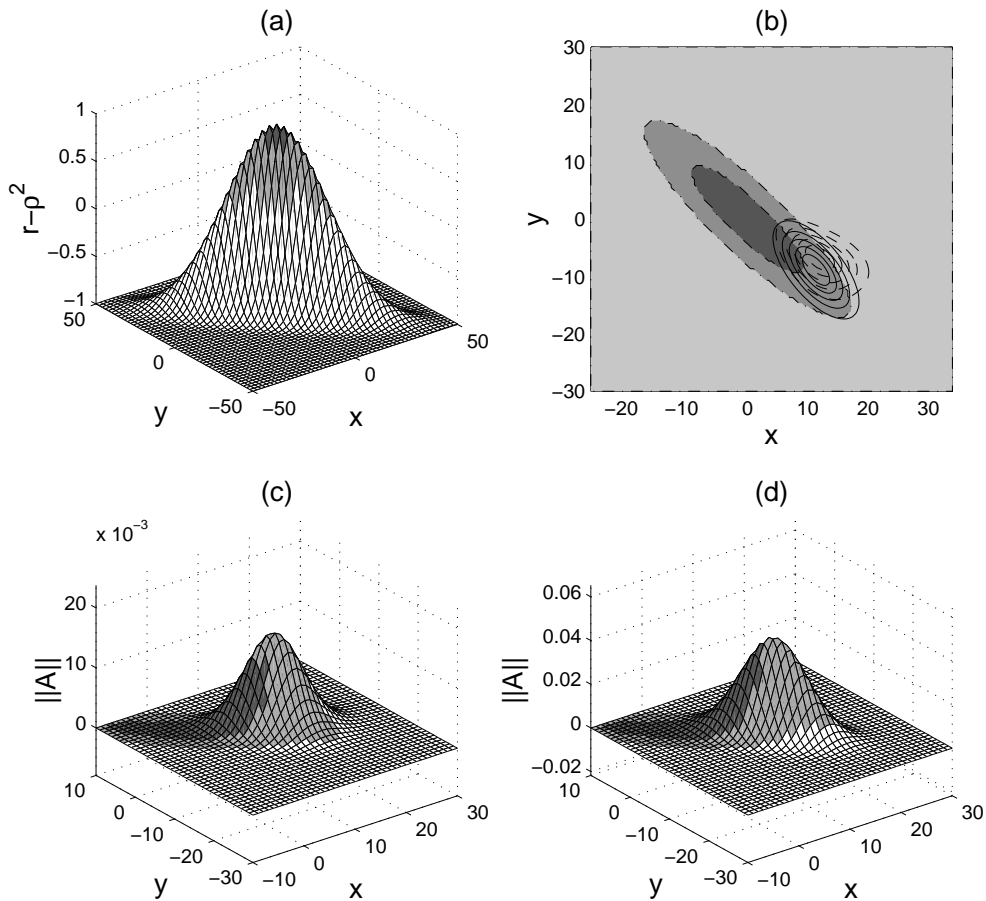


Figure 2.II.8: Comparison between analytical approximation and numerical simulation of the envelope amplitude, with $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 20$, $\psi = \pi/4$, $\rho = 0.1407$, $\varepsilon\alpha = 0.1218 + i0.0214$, $\varepsilon\beta = 0.0848 + i0.0668$, $\varepsilon\delta = 0.0660 + i0.0328$ and $\omega^t + \varepsilon\omega_1 = -0.1131 + i0.1323$. The other parameters and conventions are as in figure 2.II.5.

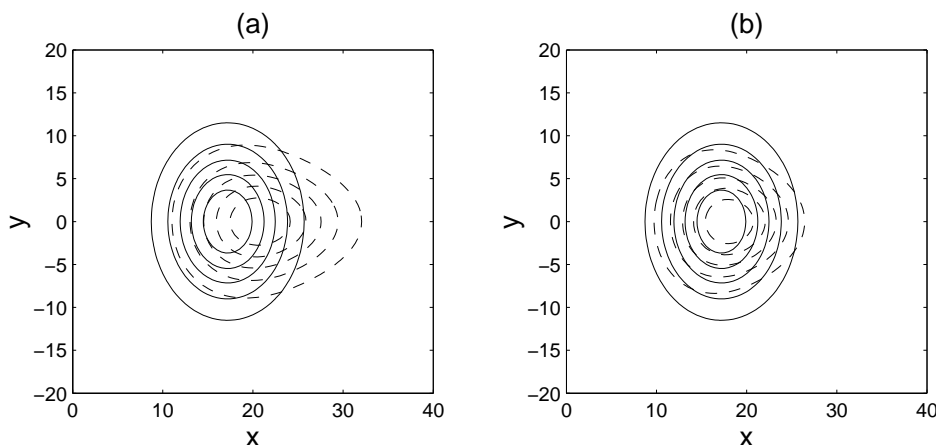


Figure 2.II.9: Comparison between the analytical approximation (—) and the numerical simulation (- -) of the envelope amplitude using (a) a Gaussian and (b) a parabolic ($r - \rho^2$)-bump. The parameters are as in figure 2.II.5.

As shown in the previous section, in particular figures 2.II.4, 2.II.6 and 2.II.7, the frequency selection criterion obtained from the analytical approximation agrees well with the numerical simulations provided ε is small. Furthermore, as this criterion derives directly from the dispersion relation, the global mode frequency and growth rates are relatively easy to evaluate. However, the inner region approximation (2.II.38), obtained from (2.II.23), yields only the general shape and location of the "convection roll packet". A closer look at figures 2.II.5 and 2.II.8 reveals obvious differences between the analytical approximation and the numerical simulation discussed in the following.

A first consequence of extending the inner region solution (2.II.38) to the whole domain is that the coefficient $(r - \rho^2)(x, y)$ in (2.II.23) behaves as the parabola (2.II.21) fitting the Gaussian bump (used for the computations) at its maximum. The further from the center of the bump the rolls are, the more their degree of instability ($r - \rho^2$) is underpredicted by the parabolic approximation. To investigate to what degree this difference is responsible for the larger downstream extent of the roll packet — the advected tail — in the numerical simulations, computations with the parabolic function (2.II.21) for $(r - \rho^2)(x, y)$ have been carried out. As seen in figure 2.II.9, this partially reduces the downstream extent of the numerical global mode and moves the numerical and analytical amplitude maxima together. To explain the remaining difference, it must be kept in mind that, according to the inner region asymptotics, the analytical wavevector (a, b) is equal to (a^t, b^t) everywhere in the domain, whereas the simulations use the full dependence of the wave numbers on r for both the Gaussian and parabolic ($r - \rho^2$) bumps. Improving the accuracy of the analytical approximation away from the top of the bump would require the WKBJ expansions in the outer regions where the wavenumbers vary with r . As stated in §2.II.2, the complete expression of the amplitude in the outer region requires the partial matching of expansions valid on different spatial branches of a or b . The main complication of these matchings is that the branch switching of one component of the wavevector depends on the other component. Since the complete WKBJ approximation of the wavevector field remains at the moment an open problem, we can only attempt to outline the issues at

stake. Specifically, the discussion will be limited to the matching of solution branches in the Fourier (a, b) -space, where we show how the global mode can be constructed in principle. The proposed construction may however not be unique and, furthermore, the translation of trajectories in (a, b) -space into WKB integration paths in the complex (X, Y) -space is far from trivial and may not be possible in some cases. Nevertheless, the numerical simulations suggest that the proposed global mode construction is possible for the examples in this paper.

With wave propagation in both the X and Y directions, the spatial branches of each component of the wavevector are surfaces parametrized by the other component, e.g. $a(X, Y, b, \omega)$ and $b(X, Y, a, \omega)$. Considering the construction of a WKB solution outlined in §2.II.2 and §2.II.3, the calculation of the phase $\Phi(X, Y)$ requires the knowledge of where the wavevector has to switch from one solution surface of the dispersion relation to another. What has already been established is that the boundedness of the amplitude imposes on the imaginary parts of the wavevector components the conditions (2.II.13), summarised in figure 2.II.1. Unlike in the one-dimensional case, these conditions do not lead in a straightforward manner to the choice of the correct branch of the wavevector. With ω given by the selection criterion at the double-turning point, the dispersion relation (2.II.10) yields a as a function of b :

$$a_{\pm} = -b^2 - \frac{i}{2}\rho(c + \eta) \pm (i\rho cb^2 - (r^t - r))^{1/2}. \quad (2.II.42)$$

The two solutions merge for $\partial_a \omega = 0$, i.e. $i\rho cb^2 - (r^t - r) = 0$, and the two associated branch points are:

$$a_{\text{bp1}} = i \left(\frac{r^t - r}{\rho c} - \frac{\rho}{2}(c + \eta) \right), \quad (2.II.43a)$$

$$b_{\text{bp1}} = \left(\frac{r^t - r}{2\rho c} \right)^{1/2} (1 - i), \quad (2.II.43b)$$

and

$$a_{\text{bp2}} = i \left(\frac{r^t - r}{\rho c} - \frac{\rho}{2}(c + \eta) \right), \quad (2.II.44a)$$

$$b_{\text{bp2}} = - \left(\frac{r^t - r}{2\rho c} \right)^{1/2} (1 - i). \quad (2.II.44b)$$

As depicted in figure 2.II.10, the branch cuts are chosen along the Stokes lines in the b -plane, satisfying $\Im(a_+) = \Im(a_-)$ and joining b_{bp1} to b_{bp2} via infinity, so as to exclude the point $b = 0$. These branch cuts, on which the imaginary parts of the a 's are folded and the real parts discontinuous, cannot be crossed by a path in (a, b) -space. Hence, one can only switch from one a -solution surface to the other through one of the branch points. A consequence of the choice of branch cuts in the b -plane is the relation $\Im(a_1) \geq \Im(a_2)$, where the equal sign applies only at the branch points. However, $\Im(a)$ can change sign on any given solution surface and the condition (2.II.13) is therefore not sufficient to determine the correct branch of a in the different regions of physical (X, Y) -space in figure 2.II.1. Progress can be made by considering b as a function of a :

$$b_{\pm, \pm} = \pm \left(-a - \frac{i}{2}\rho\eta \pm \left(\frac{\rho^2}{4} ((c + \eta)^2 - \eta^2) - (r^t - r) - i\rho ca \right)^{1/2} \right)^{1/2}. \quad (2.II.45)$$

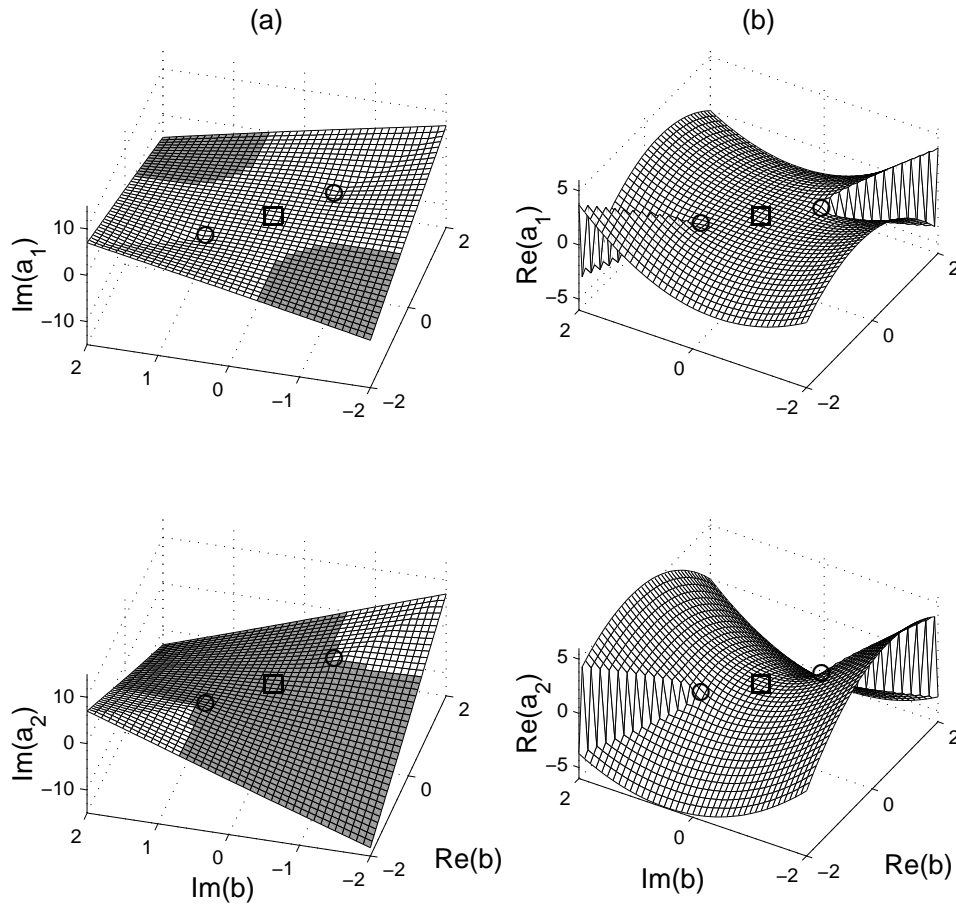


Figure 2.II.10: Imaginary (a) and real (b) parts of $a_1(b)$ (top figures) and $a_2(b)$ (bottom figures) including branch points $\partial_a \omega = 0$ (\circ) and $\partial_b \omega = 0$ with $b = 0$ (\square) for $r - \rho^2 = -1$, $r^t - \rho^2 = 1$, $\rho = 0.175$, and c and η as given in §2.II.4. The regions of negative imaginary part are shown in a darker shade.

As (2.II.10) is second order in b^2 , a choice of branch cut for the root of b^2 along the positive real b -axis produces two solutions with $\Im(b) > 0$ and two other solutions with $\Im(b) < 0$. These four solution surfaces are connected at four branch points given by $\partial_b \omega = 0$:

$$a_{\text{bp}3} = -i \left(\frac{\rho}{2} (c + \eta) + (r^t - r)^{1/2} \right), \quad (2.II.46a)$$

$$b_{\text{bp}3} = 0, \quad (2.II.46b)$$

$$a_{\text{bp}4} = -i \left(\frac{\rho}{2} (c + \eta) - (r^t - r)^{1/2} \right), \quad (2.II.47a)$$

$$b_{\text{bp}4} = 0, \quad (2.II.47b)$$

$$a_{\text{bp}5} = i \left(\frac{r^t - r}{\rho c} - \frac{\rho^2}{4\rho c} ((c + \eta)^2 - \eta^2) \right), \quad (2.II.48a)$$

$$b_{\text{bp}5} = \left(\frac{r^t - r}{2\rho c} - \frac{\rho c}{8} \right)^{1/2} (1 - i) \quad (2.II.48b)$$

and

$$a_{\text{bp}6} = i \left(\frac{r^t - r}{\rho c} - \frac{\rho^2}{4\rho c} ((c + \eta)^2 - \eta^2) \right), \quad (2.II.49a)$$

$$b_{\text{bp}6} = - \left(\frac{r^t - r}{2\rho c} - \frac{\rho c}{8} \right)^{1/2} (1 - i). \quad (2.II.49b)$$

Proceeding now to the branch cuts in the a -plane, they are again chosen along Stokes lines which allows to sort the solutions b , for all a , according to their imaginary parts

$$\Im(b_1) > \Im(b_2) > 0 > \Im(b_3) > \Im(b_4), \quad (2.II.50)$$

as depicted in figure 2.II.11. These Stokes lines in the a -plane are defined by $\Im(b_{+,+}) = \Im(b_{+,-})$ and $\Im(b_{-,-}) = \Im(b_{-,+})$. They are determined implicitly by the relation (2.II.50) since no analytical representation has been found for them. Nevertheless, it follows from (2.II.46)–(2.II.49) that the surfaces b_2 and b_3 are connected by the branch points $a_{\text{bp}3}$ and $a_{\text{bp}4}$ with $b(a) = 0$.

When choosing the appropriate root of b , one is faced with the additional difficulty that, even if the imaginary parts did not change sign on any solution surface, there are for each sign two roots of b to choose from. Hence, the sign of the imaginary part is again not a sufficient criterion for the correct choice of the branch of b . By considering specific paths joining different regions of physical space in figure 2.II.1 (related to regions of wavenumber space by virtue of 2.II.13), the proper choice of a - and b -branches can nevertheless be specified.

Consider for instance a path connecting in Fourier space the ($\Im(a) > 0, \Im(b) < 0$) and ($\Im(a) > 0, \Im(b) > 0$) regions of figure 2.II.1 sufficiently far from the inner region such that $r \approx r_\infty$ along the entire path. If this path crosses a region in Fourier space where the imaginary part of a is negative, the growth factor $\exp(-\Im(a) X/\varepsilon)$ in this region becomes exponentially large as the path is shifted toward $X \rightarrow +\infty$. With the path on

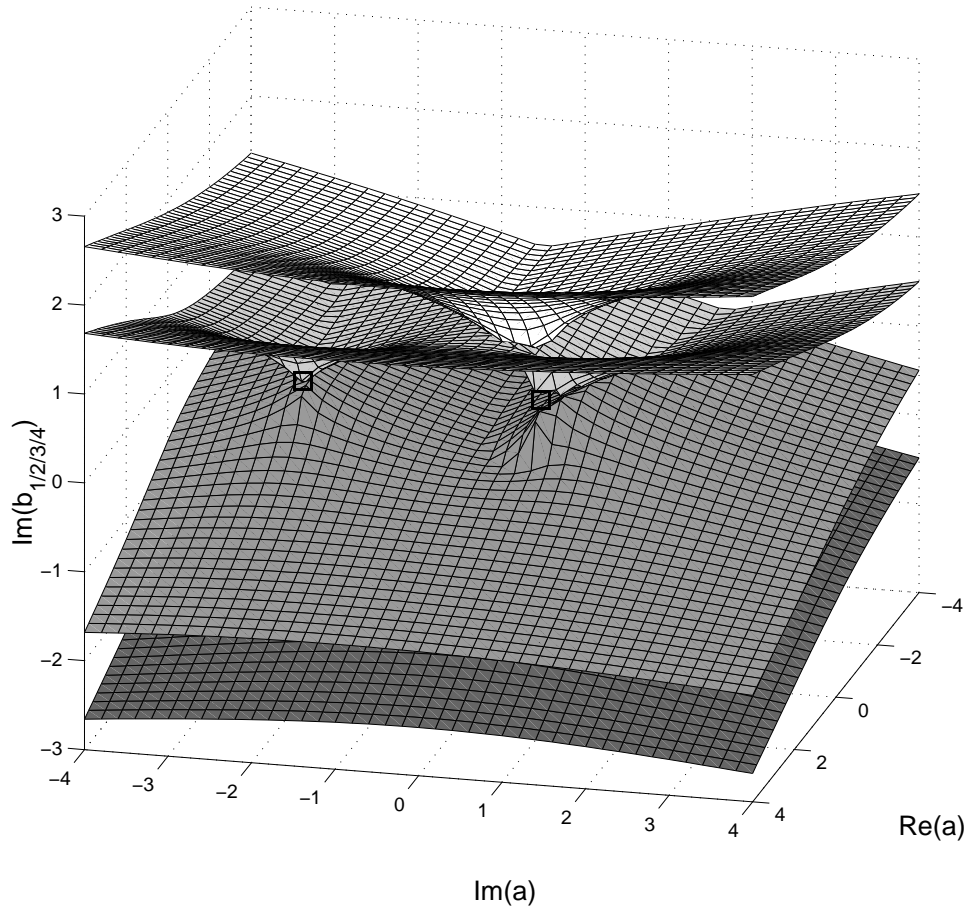


Figure 2.II.11: Imaginary parts of the four surfaces $b_1(a)$ – $b_4(a)$ (progressively shaded darker) and branch points for $\partial_b \omega = 0$ with $b = 0$ (\square). Parameters as in figure 2.II.10.

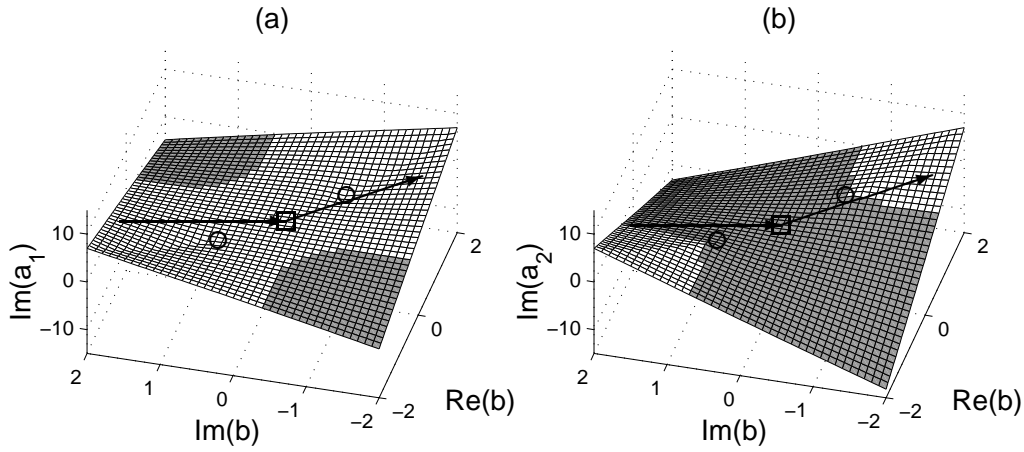


Figure 2.II.12: Imaginary parts of the two surfaces $a_1(b)$ (a) and $a_2(b)$ (b) including branch points $\partial_a \omega = 0$ (\circ) and $\partial_b \omega = 0$ with $b = 0$ (\square). Parameters and conventions (regions of $\Im(a) < 0$ shown in darker shade) as in figure 2.II.10. On both branches a path joining the $(\Im(a) > 0, \Im(b) < 0)$ and $(\Im(a) > 0, \Im(b) > 0)$ regions is shown schematically.

the a_2 branch, such a region of $\Im(a) < 0$ exists around the point $b = 0$, which has to be crossed to change the sign of the imaginary part of b (see figure 2.II.12(b)). It is thus clear that $\Im(a) < 0$ can only be avoided by a path on the a_1 -surface, which is therefore the relevant a -branch for $X \rightarrow +\infty$ (see figure 2.II.12(a)). Similarly, a_2 is the relevant branch for $X \rightarrow -\infty$.

Next, two paths connecting the $(\Im(a) < 0, \Im(b) < 0)$ and $(\Im(a) > 0, \Im(b) > 0)$ regions of figure 2.II.1 are considered, one staying in remote regions where $r - \rho^2 \approx -1$ with a detour through the $(\Im(a) < 0, \Im(b) > 0)$ region, the other going directly through the two-dimensional double turning point at the origin where $r - \rho^2 \approx 1$. In order to have a uniquely defined phase, these two paths have to end up on the same wavenumber branches.

As seen in figure 2.II.13, the shape of the solution surfaces a_1 and a_2 is only slightly modified with regard to r . The main difference between figures 2.II.13(a) ($r - \rho^2 = 1$) and (b) ($r - \rho^2 = -1$) is in (a) the complete separation of the surfaces by the branch cuts originating from the branch points (a_{bp1}, b_{bp1}) , (a_{bp2}, b_{bp2}) , (a_{bp3}, b_{bp3}) and (a_{bp4}, b_{bp4}) which all coalesce at $b = 0$. The first path through the two-dimensional turning point at $b = 0$ shown in figure 2.II.13(a) switches from the a_2 - to the a_1 -branch and from a b -branch with $\Im(b) < 0$ to a b -branch with $\Im(b) > 0$. Considering that only the surfaces b_2 and b_3 are connected by branch points which merge into the two-dimensional turning point at the coordinate origin as $r \rightarrow r^t$ and that $\Im(b_2) > 0 > \Im(b_3)$ by virtue of relation (2.II.50), the relevant branches of b far from the central region are b_2 for $Y \rightarrow \infty$ and b_3 for $Y \rightarrow -\infty$. Hence, the same branch switches occur on the two paths in figure 2.II.13 as required.

In summary, the solution surfaces are uniquely determined by three conditions: the first condition specifies the sign of the imaginary parts of the two wavenumbers to make certain that the global mode is locally stable far from the central region. The second condition specifies that only the branches of the dispersion relation connected by branch

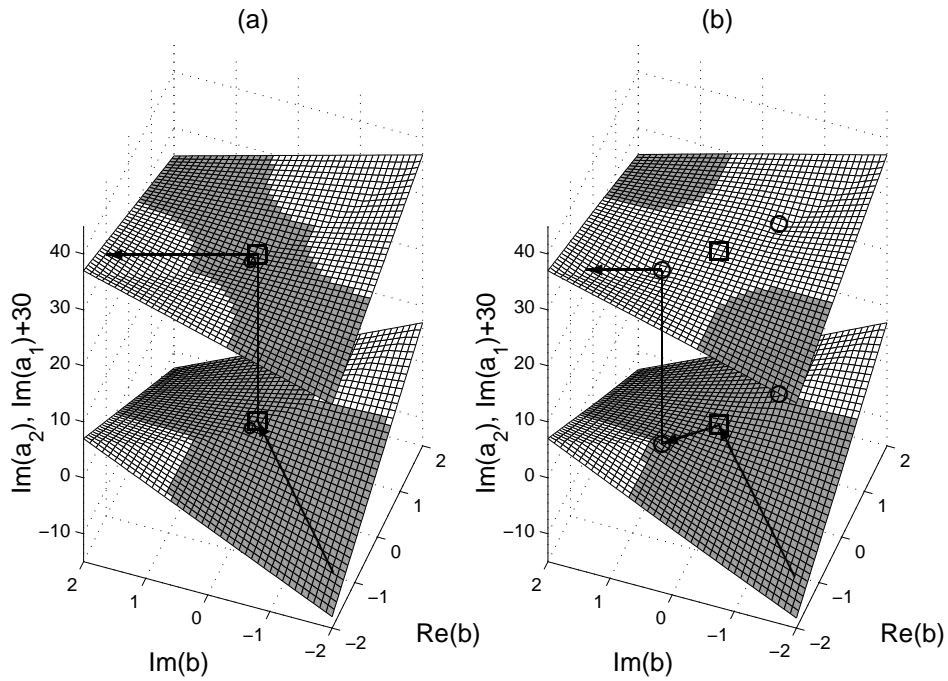


Figure 2.II.13: Imaginary parts of the two surfaces $a_1(b)$ and $a_2(b)$ including branch points $\partial_a \omega = 0$ (\circ) and $\partial_b \omega = 0$ with $b = 0$ (\square) for $r - \rho^2 = 1$ (a) and $r - \rho^2 = -1$ (b). The surface $\Im(a_1)$ is arbitrarily shifted upward for clarity's sake. The other parameters and conventions as in figure 2.II.10. Also shown are the paths connecting the $(\Im(a) < 0, \Im(b) < 0)$ and $(\Im(a) > 0, \Im(b) > 0)$ regions via the two-dimensional turning point (a) and via the $(\Im(a) < 0, \Im(b) > 0)$ region (b).

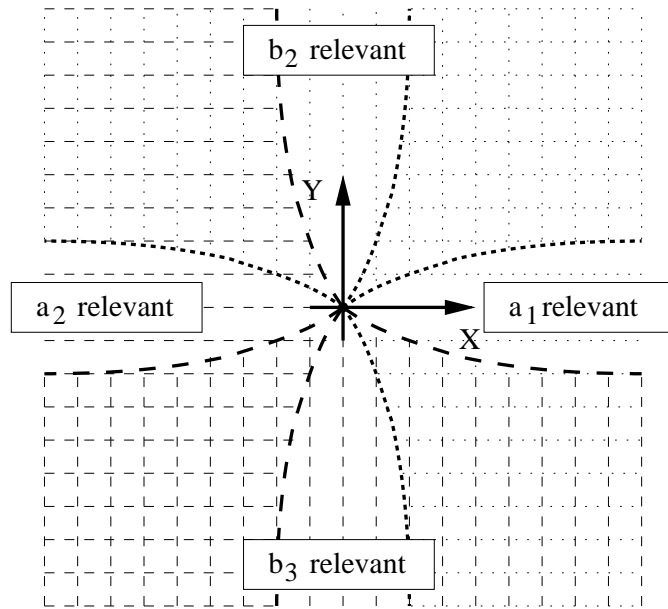


Figure 2.II.14: Relevant branches of a and b in physical space. The domains of relevance are bounded by dashed and dotted lines, which merge at the two-dimensional double turning point.

points which coalesce into the two-dimensional double turning point are relevant. This ensures that the branch switches on different paths in physical space are consistent. The last condition specifies that adjacent regions with the same sign of $\Im(a)$ or $\Im(b)$ must be connectible in Fourier space by a path along which this sign never changes. These three conditions yield the diagram of figure 2.II.14.

The next step to evaluate the leading order WKB expansion in the entire (X, Y) -space would be the determination of the fields $a(X, Y)$ and $b(X, Y)$, where the location of the branch points in the (X, Y) -space is known from their dependence on $r(X, Y)$. This complex task will have to be the subject of future studies.

The financial supports of the ERCOFTAC Leonhard Euler Center, the Direction des Relations Internationales of the CNRS (Ph. C.) and the DERTT of the Région Rhône-Alpes (D. M.) are gratefully acknowledged. We also would like to thank J. F. Scott for several helpful discussions.

2.2 Commentaires

2.2.1 Critère de sélection et approximation du mode global

Le formalisme d’enveloppe, en permettant une solution analytique au problème de stabilité local et en fournissant une relation de dispersion explicite et analytique, a permis de présenter le calcul d’un mode global en limitant les difficultés mathématiques. Le caractère plus engageant de l’équation dynamique découlant de ce formalisme a d’autre part rendu accessible une simulation numérique de l’enveloppe et une validation du critère de sélection, dans la gamme de paramètres choisis, par la comparaison entre les résultats analytiques et numériques. Concernant l’étude paramétrique des conditions critiques, découlant directement pour le calcul analytique du critère de sélection, l’accord se révèle excellent. D’autre part, les limitations de l’approximation de la solution par le premier ordre du développement interne sont établies. Le calcul complet de la solution sous la forme d’un développement WKBJ, qui permettrait de dépasser ces limitations, reste cependant à ce stade une question ouverte.

2.2.2 Simulation du régime non linéaire

La simulation numérique de l’équation d’enveloppe, en intégrant un terme non linéaire d’ordre trois, permet d’autre part d’étudier le comportement de l’instabilité lorsque la solution est saturée par ces non-linéarités. L’évolution dans le temps d’une instabilité, obtenue par simulation numérique, est représentée dans les figures 2.1 pour le cas d’une bosse circulaire et 2.2 pour le cas d’une bosse elliptique tournée. Les deux simulations font apparaître la formation d’un front raide à l’amont de l’instabilité. Celui-ci tend à remonter en aval de l’écoulement pour s’accrocher à la frontière entre les domaines d’instabilité locale convective/absolue (LCU/LAU). Ce comportement est à relier aux travaux de Pier et Huerre ((76; 75)) concernant les modes globaux non linéaires unidimensionnels (dont la variation lente ne se fait que dans une direction) et leur critère de sélection et plus particulièrement les modes “zéléphants”. Le front devenant maintenant bidimensionnel, quelle est la nature et où se situe son lieu d’accrochage? Reste-t-il sur la frontière LCU/LAU et en quel point précisément? Quelle est d’autre part la forme de ce front? Sa courbure suit-elle celle de la frontière LCU/LAU? L’extension de ces critères de sélection non linéaires à des cas bidimensionnels n’a pas été faite et constitue certainement un problème digne d’intérêt.

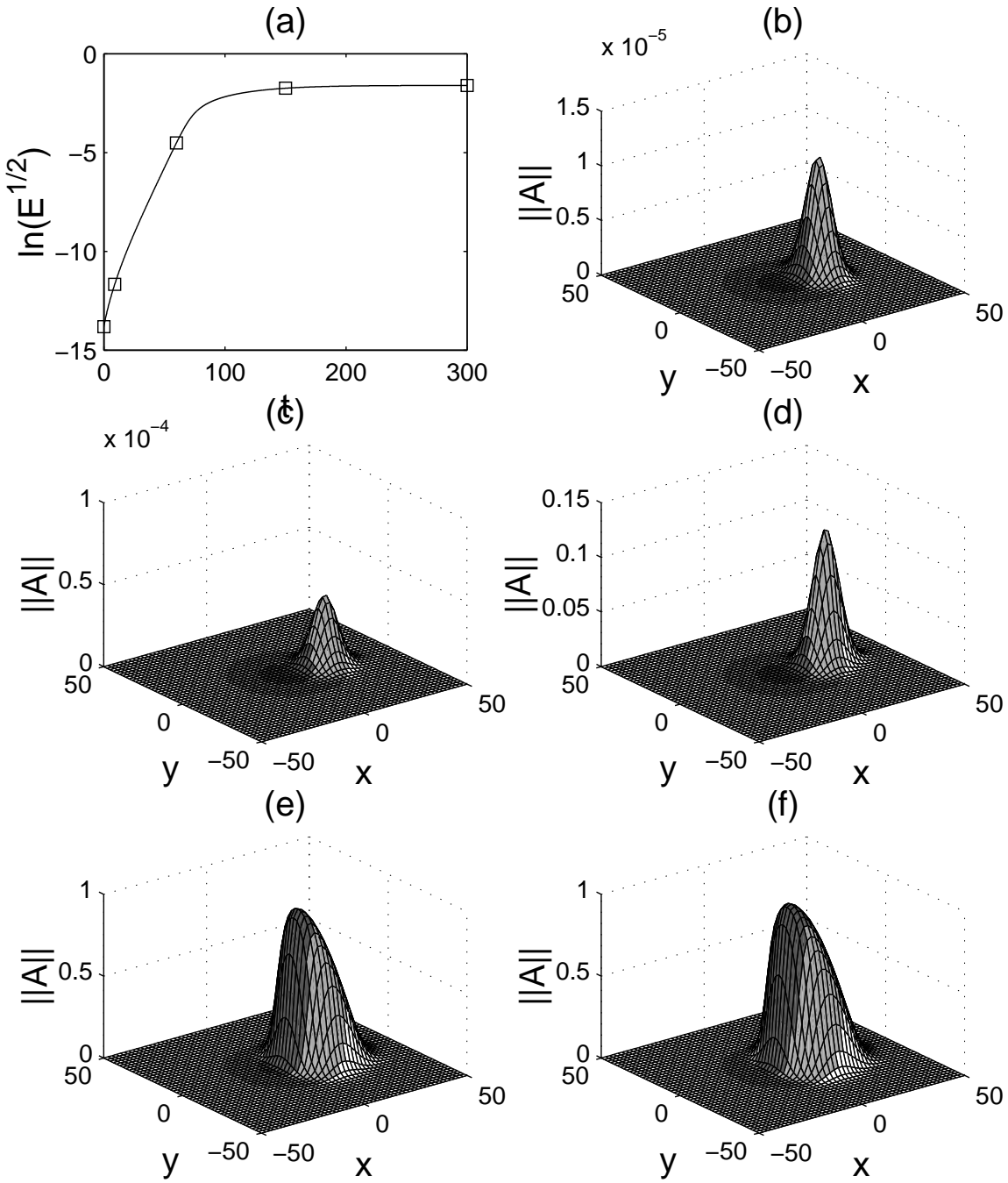


FIG. 2.1 – Simulation numérique de l'évolution temporelle de l'instabilité obtenue avec $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$ et $\rho = 0.1609$, initialisée par le mode linéaire analytique. Les carrés de la figure (a) correspondent aux temps des figures (b) ($t = 0$), (c) ($t = 5$), (d) ($t = 60$), (e) ($t = 150$) et (f) ($t = 300$).

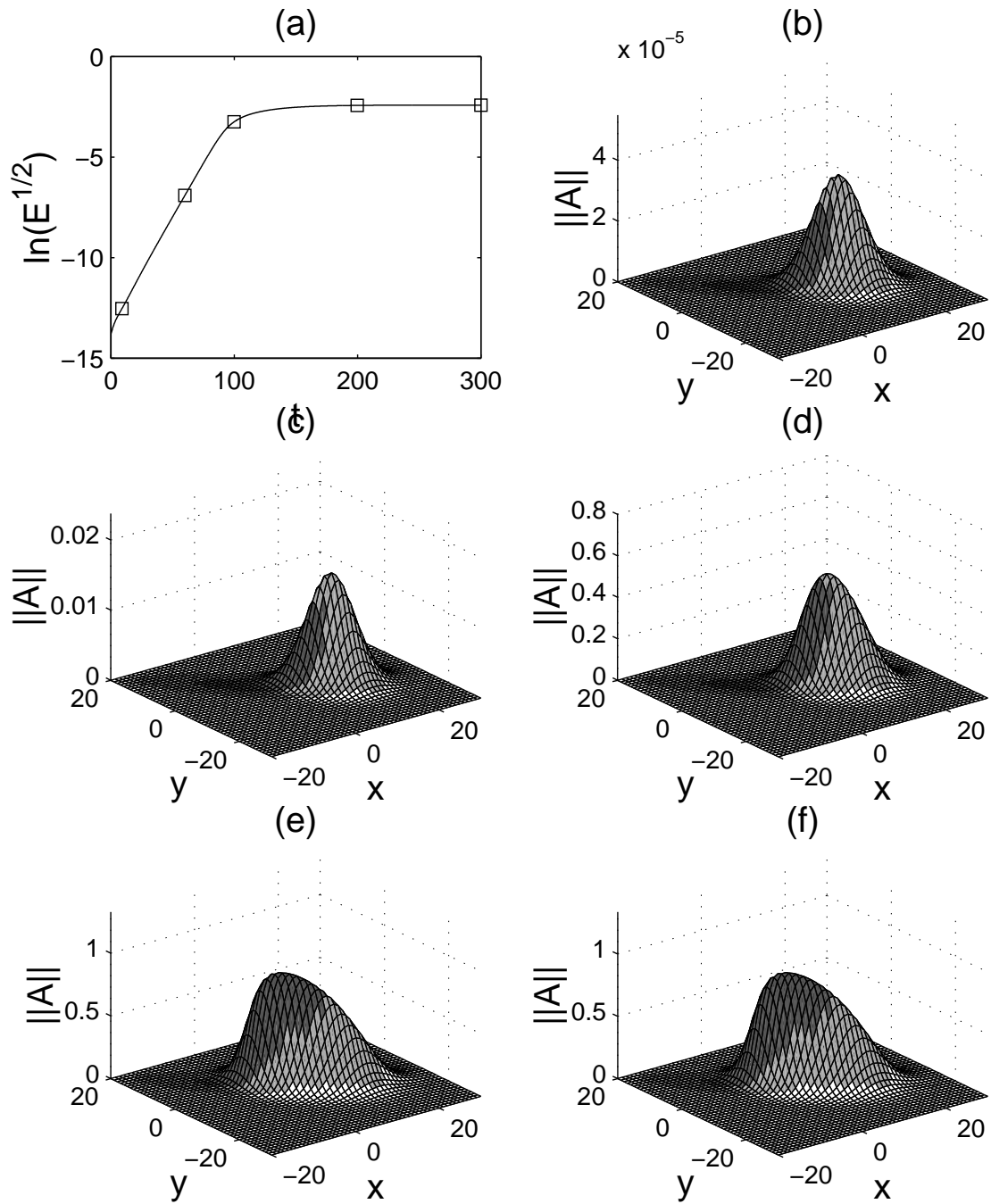


FIG. 2.2 – Simulation numérique de l'évolution temporelle de l'instabilité obtenue avec $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 20$, $\psi = \pi/4$ et $\rho = 0.1407$, initialisée par le mode linéaire analytique. Les carrés de la figure (a) correspondent aux temps des figures (b) ($t = 5$), (c) ($t = 60$), (d) ($t = 100$), (e) ($t = 200$) et (f) ($t = 300$).

Chapitre 3

Modes globaux tridimensionnels de l'équation de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq.

3.1 Présentation

Le formalisme d'enveloppe a permis une simplification des calculs du critère de sélection et de l'approximation de la solution interne du mode global tridimensionnel le plus instable. Cependant, ce formalisme ne s'applique qu'à des situations présentant de faibles valeurs de \mathcal{R} ($O(\epsilon)$, avec ϵ mesurant l'écart au \mathcal{R} critique homogène) et de R ($O(\epsilon^{1/2})$). Afin d'accroître le champ des situations physiques considérées, il est nécessaire de revenir aux équations de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq. À la différence du formalisme d'enveloppe, le problème de stabilité est alors vectoriel, la relation de dispersion est une relation implicite qui, dans le cas de la convection de RBP n'est accessible que numériquement. Cette mise en équation de la convection de RBP donne un problème suffisamment général pour que les calculs du critère de sélection et des modes globaux auxquels elle donne lieu puissent être généralisés assez directement à d'autres mécanismes d'instabilité présentant une faible inhomogénéité spatiale bidimensionnelle. Ce chapitre se présente sous la forme d'un texte susceptible de devenir rapidement un article soumis à une revue scientifique.

L'introduction revient donc à nouveau sur une présentation générale des modes globaux, plus particulièrement dans le cas de la convection de RBP. La modélisation de cette convection par les équations de Navier–Stokes nécessite de déterminer l'écoulement stationnaire de base, qui est exprimé sous la forme des deux premiers ordres d'un développement en puissances de ε (avec ε quantifiant la faible inhomogénéité spatiale, rapport entre la distance entre les plaques supérieure et inférieure et la distance caractéristique des inhomogénéités). Puis la perturbation est cherchée sous la forme d'un développement WKBJ où l'amplitude est développée en puissances de ε :

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{v}}_0(X, Y, z; \omega) + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_1(X, Y, z; \omega) + O(\varepsilon^2)) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi(X, Y; \omega) - i\omega t\right) + \text{c.c.}, \quad (3.1)$$

avec $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2)$ et le vecteur d'onde $(\partial_X \Phi, \partial_Y \Phi)$ vérifiant localement la relation

de dispersion homogène :

$$\omega_0 = \omega(\partial_X \Phi, \partial_Y \Phi, \mathcal{R}). \quad (3.2)$$

Le premier ordre de ce développement vérifie l'équation d'amplitude :

$$\frac{\partial A}{\partial X} \partial_{k_x} \omega(X, Y; \omega_0) + \frac{\partial A}{\partial Y} \partial_{k_y} \omega(X, Y; \omega_0) + A(-i\omega_1 + \Gamma(X, Y; \omega_0)) = 0, \quad (3.3)$$

obtenue en utilisant les propriétés locales du problème de stabilité homogène. Ce développement ne peut conduire seul à un critère de sélection du mode le plus instable, mais il est aussi susceptible de ne plus être légitime aux points tournant, où la relation de dispersion vérifie :

$$\begin{cases} \partial_{k_x} \omega = 0, \\ \partial_{k_y} \omega = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

À nouveau, seules les situations présentant un “maximum d'instabilité”, lié à une bosse de \mathcal{R} , au sein d'un domaine stable sont considérées. On s'intéresse de plus aux modes globaux générés par un double point tournant situé au sommet de cette bosse. La perturbation est alors cherchée sous la forme d'un développement intermédiaire en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ au voisinage de ce double point tournant, dont le premier ordre de l'amplitude est :

$$A = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha}{2}x^2 - \frac{\varepsilon\beta}{2}y^2 - \varepsilon\delta xy\right). \quad (3.5)$$

Le problème homogène en ce point impose la valeur de ω_0 . Le caractère borné de l'approximation au premier ordre de cette solution interne entraîne une quantification des modes admis et de la correction $\varepsilon\omega_1$ ainsi qu'un critère de sélection du mode global le plus instable ainsi construit. Ce critère de sélection et le mode global le plus instable approximé par le premier ordre du développement interne servent enfin à une étude paramétrique et une description des modes globaux d'instabilité sur une bosse de \mathcal{R} présentant une variation gaussienne dans deux directions. Une telle étude est faite en résolvant numériquement le problème homogène au double point tournant par un code spectral dans la direction normale aux plaques.

3.I.1 Introduction

Practical inhomogeneous unstable flows commonly reveal temporally synchronised instabilities. Furthermore, the selected behaviour can be intrinsic and independent of the initial perturbation as it is observed in the von Kármán vortex shedding regime in wakes ((82), among others). In order to theoretically retrieve this self-tuned instability at the linear stage, a selection criterion should flow from the mathematical construction of such an unstable mode. This selection criterion is a consequence of both the physical mechanisms feeding the instability and the inhomogeneity of the system — or equivalently the inhomogeneity of the basic state. In homogeneous situations, the instabilities are sought as Fourier modes in the homogeneous directions and the physical mechanisms can be reduced to scalar parameters in the governing equations and the related dispersion relation. In inhomogeneous situations, the physical mechanisms appear as functions of the spatial coordinates, as well as the wavevector. Therefore, the frequency cannot be derived from an algebraic dispersion relation. Due to these inhomogeneities, the behaviour of such a mode is labelled global, as it is expected to result from the variation of the instability mechanism over the entire domain.

Whereas an arbitrary variation of the basic state is usually only accessible to stability analysis through experiments or numerical simulations, the description of slowly varying systems can be coped with analytically. Slow variation permits indeed to consider local stability properties as the limit case of a description taking the inhomogeneity into account by means of an expansion, just as the eikonal equation of geometrical optics is the limit of physical optics for small wavelengths. For historical reasons, such an expansion is termed WKB for Wentzel–Kramers–Brillouin–Jeffreys (see (9)). Whereas the amplitude of this expansion varies slowly spatially, it behaves locally as the result of the homogeneous problem, taking into account the local stability properties of this latter. The impulse response analysis, introduced in hydrodynamics in (37), by distinguishing between convective — advected downstream — and absolute — spreading upstream — instabilities in open flows, turns out to be particularly useful to link the local behaviour to the global one. In this study, we will seek a synchronised instability, rising on a slowly varying basic state locally stable except in a compact region. A developing instability can only be sustained by this compact unstable region, which should impose the behaviour to the rest of the system. Beyond the local absolute instability threshold, the group velocity, flowing from the dispersion relation of the instability can vanish at some points of the physical domain. These points are called turning points. Their existence has been related to selection criteria and intrinsic behaviour of the instability, first for arbitrary dynamic equations ((38; 31; 50)), then for more realistic flows as, for instance, spatially developing shear flows ((61)) and more recently Rayleigh–Bénard–Poiseuille (RBP) convection ((25)). This flow, in which Rayleigh–Bénard thermal instability is affected by low Reynolds number laminar Poiseuille flow, is also addressed in the present study. In RBP convection, a compact unstable region can be realised by means of a spatially-dependent heating, presenting a temperature bump related to a local Rayleigh number. The stability of this situation has been studied through analysis of global modes governed by a double turning point, located at the maximum of the Rayleigh number as a function of the streamwise coordinate. Expressed by means of an intermediate expansion in the

neighborhood of the turning point, the global mode is prescribed to be bounded far from the unstable region, implying a quantification of the complex frequency and a selection criterion. Only situations presenting a single slowly inhomogeneous direction have been addressed so far.

It is therefore interesting to enlarge the selection criterion and the global mode calculation to situations presenting two slowly inhomogeneous directions. The present study aims at developing the ideas presented in (57) concerning the envelope equation formalism and generalises it to RBP convection governed by Navier–Stokes equation in the Boussinesq approximation. Two issues are of crucial interest: how can this global mode be constructed and does this construction imply a selection criterion for the instability. The mathematical formalism being more general than the envelope equation, the calculations of both the selection criterion and the global mode are presented step by step.

Owing to the inhomogeneity, the slowly varying basic state can no longer be analytically expressed and is therefore expanded in powers of a small parameter introducing the different spatial scales in §3.I.2. In §3.I.3, the instability is expressed as a WKBJ expansion of the preceding small parameter, leading to the local dispersion relation satisfied by the wavevector, the frequency and the physical parameters, and to the equation satisfied by the leading order amplitude of the global mode. The possibility of extracting a selection criterion from the turning points, and more precisely from a two-dimensional double turning point of the WKBJ expansion is outlined. The frequency selection criterion is extracted from an intermediate expansion of the instability in the neighbourhood of the two-dimensional double turning point and how this inner solution can be used to compute the whole WKBJ solution is explained in §3.I.4. Finally, this selection criterion and the intermediate inner expansion are used to illustrate the critical conditions and the spatial features of the global mode in §3.I.5.

3.I.2 Basic state

We consider a flow imposed by an horizontal pressure gradient and bounded by two horizontal walls with a constant temperature Θ_u^\dagger on the upper wall and a slowly varying two-dimensional inhomogeneous one on the lower wall, given by $\Theta_l^\dagger(x^\dagger, y^\dagger)$. Here and in the following, the \dagger denotes a dimensional quantity. Function $\Theta_l^\dagger(x^\dagger, y^\dagger)$ presents an absolute maximum $\Theta_{l,0}^\dagger$ at $x^\dagger = y^\dagger = 0$ and tends to its lower bound $\Theta_{l,\infty}^\dagger$ as $x^\dagger \rightarrow \pm\infty$ or $y^\dagger \rightarrow \pm\infty$. As we focus on slowly spatially varying temperature bumps, slow variables X^\dagger and Y^\dagger are introduced. Slow and rapid variables are linked by $X^\dagger = \varepsilon x^\dagger$ and $Y^\dagger = \varepsilon y^\dagger$, ε being a small parameter. The pressure gradient is oriented along the x -direction. The velocity, pressure and temperature fields — \mathbf{U}^\dagger , P^\dagger and Θ^\dagger respectively — are solutions of the continuity, Navier–Stokes and heat equations under the Boussinesq approximations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{U}^\dagger = 0, \\ \partial_{t^\dagger} \mathbf{U}^\dagger + (\mathbf{U}^\dagger \cdot \nabla) \mathbf{U}^\dagger + \frac{1}{\rho} \nabla P^\dagger - \alpha (\Theta^\dagger - \Theta_r^\dagger) g \mathbf{e}_z - \nu \nabla^2 \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{0}, \\ \partial_{t^\dagger} \Theta^\dagger + (\mathbf{U}^\dagger \cdot \nabla) \Theta^\dagger - \kappa \nabla^2 \Theta^\dagger = 0, \end{array} \right. \quad (3.I.1)$$

with the following boundary conditions:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^\dagger(z^\dagger = \pm h/2) = \mathbf{0}, \\ \Theta^\dagger(z^\dagger = h/2) = \Theta_u^\dagger, \\ \Theta^\dagger(z^\dagger = -h/2) = \Theta_l^\dagger(X^\dagger, Y^\dagger), \end{cases} \quad (3.I.2)$$

where h is the distance between the walls, ρ the density, g the gravitational acceleration, ν the kinematic viscosity, α the thermal expansion coefficient and κ the thermal diffusivity at the reference temperature $\Theta_r^\dagger = \Theta_u^\dagger$.

The steady laminar solution, where $\mathbf{U}^\dagger = (U^\dagger, V^\dagger, W^\dagger)$, hereafter considered as the basic state, is expressed as an expansion in ε :

$$\begin{cases} P_b^\dagger(x, X, Y, z) = P_0^\dagger(x, X, Y, z) + \varepsilon P_1^\dagger(X, Y, z) + O(\varepsilon^2), \\ \mathbf{U}_b^\dagger(X, Y, z) = \mathbf{U}_0^\dagger(X, Y, z) + \varepsilon \mathbf{U}_1^\dagger(X, Y, z) + O(\varepsilon^2), \\ \Theta_b^\dagger(X, Y, z) = \Theta_0^\dagger(X, Y, z) + \varepsilon \Theta_1^\dagger(X, Y, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.I.3)$$

for a pressure gradient aligned with the x -direction. Loosing their † , the lengths are non-dimensionalised by h . Owing to the pressure gradient imposing the motion at order $O(\varepsilon^0)$, the first term of the expansion for \mathbf{U}_b^\dagger is non-dimensionalised by $U_m^\dagger \mathbf{U}_0$ with U_m^\dagger the maximum velocity in the cell imposed by a given pressure gradient. The other terms of this expansion, dominated by the horizontal gradient of temperature, are non-dimensionalised by $\kappa U_i/h$, and consequently the time by $h^2 t/\kappa$. The pressure is non-dimensionalised by $\rho \nu \kappa P_i/h^2$. The first term of the temperature expansion is non-dimensionalised by $\nu \kappa \Theta_0/(\alpha g h^3) + \Theta_u^\dagger$, the other terms by $\nu \kappa \Theta_i/(\alpha g h^3)$. To characterise the flow, we introduce the Reynolds number: $R = U_m^\dagger h/\nu$, the Prandtl number: $P = \nu/\kappa$, and, based on the local temperature difference between the upper- and lower-walls, a local Rayleigh number $\mathcal{R}(X, Y)$ whose lower bound is $\mathcal{R}_\infty = (\alpha g h^3) (\Theta_{l,\infty}^\dagger - \Theta_u^\dagger) / (\nu \kappa)$ and upper bound is $\mathcal{R}_0 = (\alpha g h^3) (\nu \kappa) (\Theta_{l,0}^\dagger - \Theta_u^\dagger) / (\nu \kappa)$.

As evaluated in appendix B.1, the order $O(\varepsilon^0)$ is:

$$\begin{cases} P_0 = \widetilde{P}_0(z) \mathcal{R} - 8RPx + \frac{1}{40} [\mathcal{R} - \mathcal{R}_\infty]; \\ \quad \quad \quad \widetilde{P}_0(z) = \frac{z}{2}(1-z), \\ U_0 = \widetilde{U}_0(z); \\ \quad \quad \quad \widetilde{U}_0(z) = 1 - 4z^2, \\ V_0 = 0, \\ W_0 = 0, \\ \Theta_0 = \widetilde{\Theta}_0(z) \mathcal{R}; \\ \quad \quad \quad \widetilde{\Theta}_0(z) = \frac{1}{2} - z. \end{cases} \quad (3.I.4)$$

The homogeneous Poiseuille flow for the velocity, aligned with the streamwise x -direction, and the pure conduction solution for the temperature are recovered at order $O(\varepsilon^0)$.

The order $O(\varepsilon)$ is:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = RP\widetilde{P}_1(z)\partial_X\mathcal{R} + H; \\ \widetilde{P}_1(z) = \frac{z}{480}(16z^5 - 16z^4 - 20z^3 + 40z^2 + 7z + 25), \\ U_1 = -\partial_X\mathcal{R}\widetilde{U}_1(z), \\ V_1 = -\partial_Y\mathcal{R}\widetilde{U}_1(z); \\ \widetilde{U}_1(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{z^2}{24} - \frac{z}{12} - \frac{7}{480}\right), \\ W_1 = 0, \\ \Theta_1 = -RP\partial_X\mathcal{R}\widetilde{\Theta}_1(z); \\ \widetilde{\Theta}_1(z) = \frac{1}{120}\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)(24z^3 - 20z^2 - 14z + 25). \end{array} \right. \quad (3.I.5)$$

A basic state velocity component in the spanwise y -direction appears at order $O(\varepsilon)$. The only remaining unknown function is $H(X, Y)$ in P_1 , whose expression is given by the order $O(\varepsilon^2)$ of system (3.I.1). Nevertheless, as P_1 will not appear in the following formulation of the stability problem, it is not necessary to know $H(X, Y)$ explicitly. The first order corrections in terms of the physical coordinates are recovered by replacing ∂_X and ∂_Y by $\varepsilon^{-1}\partial_x$ and $\varepsilon^{-1}\partial_y$ in (3.I.5).

Expressions (3.I.4) and (3.I.5) remains valid whatever the slow function \mathcal{R} of x and y is. To illustrate the calculation of the basic state and forthcoming calculations of global modes, we consider the following lower wall temperature:

$$\begin{aligned} \Theta_l^\dagger(x^\dagger, y^\dagger) &= \Theta_{l,\infty}^\dagger + \left(\Theta_{l,0}^\dagger - \Theta_{l,\infty}^\dagger\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{x^{\dagger 2}}{2}\left(\frac{\cos^2\psi}{\sigma_1^{\dagger 2}} + \frac{\sin^2\psi}{\sigma_2^{\dagger 2}}\right) - \frac{y^{\dagger 2}}{2}\left(\frac{\sin^2\psi}{\sigma_1^{\dagger 2}} + \frac{\cos^2\psi}{\sigma_2^{\dagger 2}}\right) - \frac{x^\dagger y^\dagger}{2}\sin 2\psi\left(\frac{1}{\sigma_1^{\dagger 2}} - \frac{1}{\sigma_2^{\dagger 2}}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.I.6)$$

where ψ is the angle between the x -axis and the principal direction “1” of the elliptic planform of this temperature bump. The considered flow is sketched in figure 3.I.1. In terms of the slow non-dimensional coordinates X and Y , the local Rayleigh number is therefore:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y) &= \mathcal{R}_\infty + (\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_\infty) \\ &\times \exp\left(-\frac{X^2}{2}\left(\frac{\cos^2\psi}{\Sigma_1^2} + \frac{\sin^2\psi}{\Sigma_2^2}\right) - \frac{Y^2}{2}\left(\frac{\sin^2\psi}{\Sigma_1^2} + \frac{\cos^2\psi}{\Sigma_2^2}\right) - \frac{XY}{2}\sin 2\psi\left(\frac{1}{\Sigma_1^2} - \frac{1}{\Sigma_2^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.I.7)$$

Using equation (3.I.7), the first two orders of the basic state are evaluated and presented in figure 3.I.2. For the parameter chosen, the first order is seen to be much smaller than the zeroth order.

3.I.3 WKBJ expansion

Decomposing the total flow into the sum of the basic steady state $\widetilde{\mathbf{V}} = (P_b, U_b, V_b, W_b, \Theta_b)$ and a time-dependent perturbation $\widetilde{\mathbf{v}} = (p, u, v, w, \theta)$, the instability is sought as a synchronised global mode, with a complex frequency ω constant in the whole physical domain,

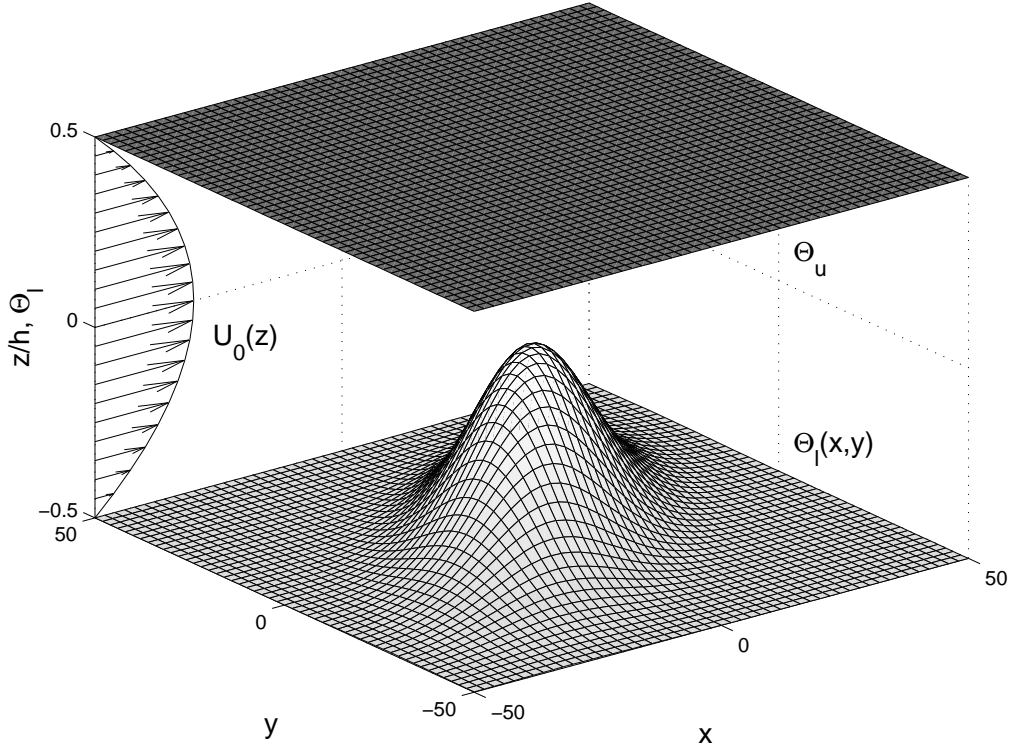


Figure 3.I.1: Physical non-dimensionalised situation, with a mean Poiseuille flow and a temperature bump on the lower wall with geometric characteristics $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 10$ and $\psi = \pi/4$.

but unknown at the moment. As the dynamics of this instability is intrinsic, this frequency must emerge as a consequence of the global mode construction itself. Owing to the slow spatial variation of the basic state, we assume that the global mode can be constructed as a WKB expansion (as stated in (9) for instance) whose validity and domain of relevance will be discussed at the end of this section. The perturbation is thus expanded in powers of ε :

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{v}}_0(X, Y, z; \omega) + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}_1(X, Y, z; \omega) + O(\varepsilon^2)) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \Phi(X, Y; \omega) - i\omega t\right) + \text{c.c.}, \quad (3.I.8)$$

with

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2) \quad (3.I.9)$$

the complex frequency. The wavevector is defined by

$$\mathbf{k}(X, Y; \omega) = \nabla \Phi(X, Y; \omega). \quad (3.I.10)$$

Its components are noted k_x and k_y and its norm k . It will be established in the next section why ω has to and can be expanded in powers of ε in the context of the construction of a global mode. At this point, this expansion is simply assumed to avoid presenting the same calculus twice with different expressions for ω . The stability equations at the different orders in ε are deduced from system (3.I.1) non-dimensionalised as stated in §3.I.2 and linearised about the basic state.

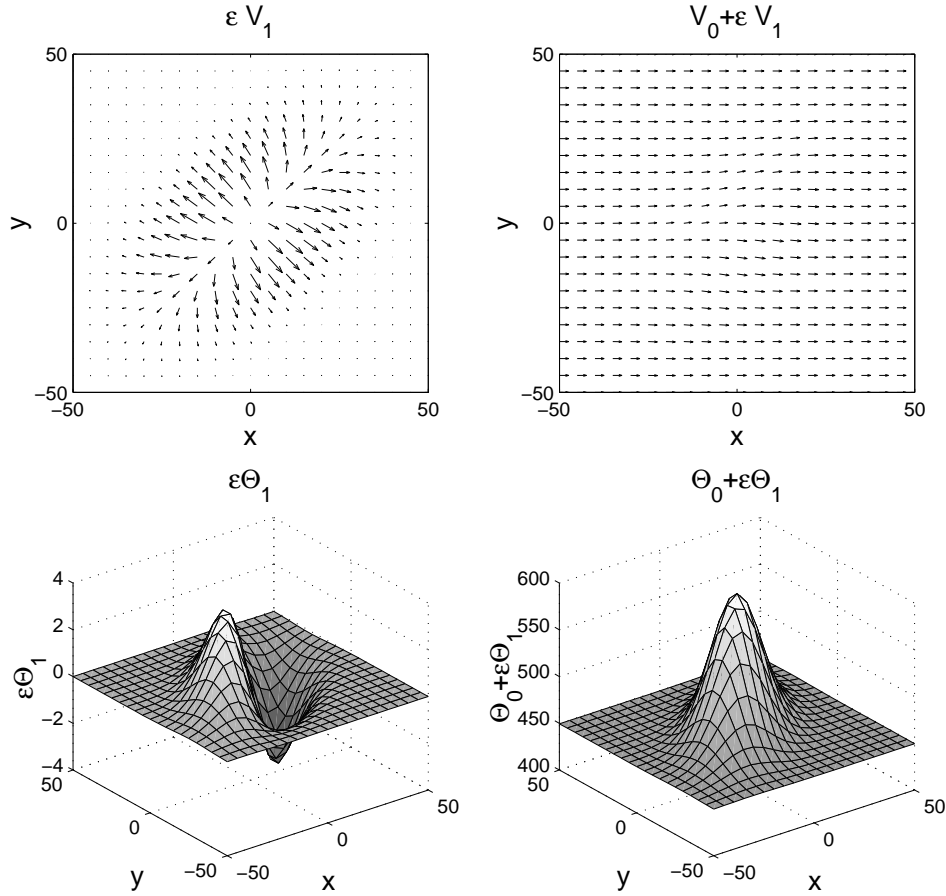


Figure 3.I.2: first order ($\varepsilon\mathbf{V}_1$ and $\varepsilon\Theta_1$) and sum of the first two orders ($\mathbf{V}_0 + \varepsilon\mathbf{V}_1$ and $\Theta_0 + \varepsilon\Theta_1$) of the basic state, at $z = 0$, with $R = 0.63$, $P = 7$, $\mathcal{R}_\infty = 1500$, $\mathcal{R}_0 = 2000$, $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 10$ and $\psi = \pi/4$.

3.I.3.1 Zeroth order homogeneous problem and dispersion relation

The homogeneous problem

$$\left\{ \begin{array}{l} -ik_x u_0 - ik_y v_0 - \partial_z w_0 = 0, \\ -iP^{-1}\omega_0 u_0 + iRU_0 k_x u_0 + R\partial_z U_0 w_0 + ik_x p_0 + k^2 u_0 - \partial_z^2 u_0 = 0, \\ -iP^{-1}\omega_0 v_0 + iRU_0 k_x v_0 + ik_y p_0 + k^2 v_0 - \partial_z^2 v_0 = 0, \\ -iP^{-1}\omega_0 w_0 + iRU_0 k_x w_0 + \partial_z p_0 + \theta_0 + k^2 w_0 - \partial_z^2 w_0 = 0, \\ -i\omega_0 \theta_0 + iPRU_0 k_x \theta_0 - \mathcal{R}(X, Y) w_0 + k^2 \theta_0 - \partial_z^2 \theta_0 = 0, \end{array} \right. \quad (3.I.11)$$

is recovered at order $O(\varepsilon^0)$ with the following boundary conditions:

$$u_0(z = \pm 1/2) = v_0(z = \pm 1/2) = w_0(z = \pm 1/2) = \theta_0(z = \pm 1/2) = 0. \quad (3.I.12)$$

The wavevector components k_x and k_y , ω and \mathcal{R} are linked by the local dispersion relation deduced from (3.I.11) and the boundary conditions at $z = \pm 1/2$:

$$\mathcal{D}(k_x, k_y, \mathcal{R}, \omega, R, P) = 0. \quad (3.I.13)$$

Considering R and P fixed and solving (3.I.13) for ω leads to a multiple-valued function of the other parameters. Restricting this function to the most unstable eigenmode maximising $\Im(\omega)$ yields

$$\omega = \omega(k_x, k_y, \mathcal{R}). \quad (3.I.14)$$

As long as $\partial_\omega \mathcal{D} \neq 0$, this most unstable temporal eigenvalue remains simple. Furthermore, the continuity of the phase imposes:

$$\partial_Y k_x = \partial_X k_y. \quad (3.I.15)$$

Relations (3.I.14) and (3.I.15) are equivalent to the first order non-linear partial differential equation

$$\omega = \omega(\partial_X \Phi, \partial_Y \Phi, \mathcal{R}). \quad (3.I.16)$$

The unstable region is assumed to be confined. The vanishing of solution far from this region is imposed by the boundary conditions

$$\Im(\Phi) \rightarrow 0 \text{ as } X \rightarrow \pm\infty \text{ or } Y \rightarrow \pm\infty \quad (3.I.17)$$

as $\exp(i\Phi(X, Y; \omega)/\varepsilon)$ is dominant for $\varepsilon \rightarrow 0$. For k_x and k_y , condition (3.I.17) amounts to:

$$\begin{cases} \forall Y, \Im(k_x) < 0 \text{ as } X \rightarrow -\infty \text{ and } \Im(k_x) > 0 \text{ as } X \rightarrow +\infty \\ \forall X, \Im(k_y) < 0 \text{ as } Y \rightarrow -\infty \text{ and } \Im(k_y) > 0 \text{ as } Y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.I.18)$$

The order $O(\varepsilon^0)$ of the global mode is sought as:

$$\tilde{v}_0 = A(X, Y) \widehat{v}_0(k_x(X, Y; \omega_0), k_y(X, Y; \omega_0), \mathcal{R}(X, Y), \omega_0; z), \quad (3.I.19)$$

where $\widehat{v}_0 = (\widehat{p}_0, \widehat{u}_0, \widehat{v}_0, \widehat{w}_0, \widehat{\theta}_0)$ is the most unstable solution of the homogeneous local problem at station (X, Y) with $\omega(k_x, k_y, \mathcal{R}) = \omega_0$. The selection criterion for ω_0 will be specified in the next section. In (3.I.19), A is the leading order amplitude, henceforth referred to simply as the amplitude. It is fruitful at this point to introduce the partial derivatives of the local stability problem with respect to k_x , k_y , ω and \mathcal{R} , following (61). The solvability conditions of these systems of equations provide expressions for the derivatives of the eigenfunction \widehat{v}_0 and ω , as listed in appendix B.2.

3.I.3.2 First order problem and amplitude equation

The amplitude equation governing the variations of $A(X, Y)$ is deduced from the stability problem at order $O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \tilde{v}_1 = & -A\omega_1 \mathcal{L}_\omega \widehat{v}_0 + i \frac{\partial A}{\partial X} \mathcal{L}_{k_x} \widehat{v}_0 + i A \mathcal{L}_{k_x} \partial_X \widehat{v}_0 + i \frac{\partial A}{\partial Y} \mathcal{L}_{k_y} \widehat{v}_0 + i A \mathcal{L}_{k_y} \partial_Y \widehat{v}_0 \\ & + \frac{1}{2} i A \partial_X k_x \mathcal{L}_{k_x k_x} \widehat{v}_0 + \frac{1}{2} i A \partial_Y k_y \mathcal{L}_{k_y k_y} \widehat{v}_0 + A \widetilde{U}_1 (k_x \partial_X \mathcal{R} + k_y \partial_Y \mathcal{R}) \mathcal{L}_\omega \widehat{v}_0 \\ & + A R P \widetilde{\Theta}_1' \partial_X \mathcal{R} \mathcal{L}_R \widehat{v}_0 - A \begin{pmatrix} 0 \\ P^{-1} \widetilde{U}_1' \partial_X \mathcal{R} \widehat{w}_0 \\ P^{-1} \widetilde{U}_1' \partial_Y \mathcal{R} \widehat{w}_0 \\ 0 \\ \partial_X \mathcal{R} \widetilde{\Theta}_0 \widehat{u}_0 + \partial_Y \mathcal{R} \widetilde{\Theta}_0 \widehat{v}_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.I.20)$$

where the operator \mathcal{L} and its derivatives are given in appendix B.2. As a synchronised mode is considered, the spatial variation of $\widehat{\mathbf{v}}_0$ can be written as:

$$\nabla \mathbf{v}_0 = \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 \nabla k_x + \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 \nabla k_y + \partial_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0 \nabla \mathcal{R}. \quad (3.I.21)$$

Using relations (B.26–B.28) and (B.42–B.46), the amplitude equation is deduced from the solvability condition of equation (3.I.20).

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X} \partial_{k_x} \omega + \frac{\partial A}{\partial Y} \partial_{k_y} \omega + A \left[-i\omega_1 + \frac{1}{2} \partial_X k_x \partial_{k_x}^2 \omega + \frac{1}{2} \partial_Y k_y \partial_{k_y}^2 \omega + \partial_Y k_x \partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega \right. & (3.I.22) \\ & + \partial_X \mathcal{R} (\partial_{k_x} \partial_{\mathcal{R}} \omega + \partial_{k_x} \omega L_{\mathcal{R}} \partial_{\omega} \widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{\mathcal{R}} \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0) \\ & + \partial_Y \mathcal{R} (\partial_{k_y} \partial_{\mathcal{R}} \omega + \partial_{k_y} \omega L_{\mathcal{R}} \partial_{\omega} \widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{\mathcal{R}} \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0) \\ & + \partial_X \mathcal{R} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\widetilde{U}_1 P^{-1} k_x \left(\widehat{u}_0 \widehat{u}_0^* + \widehat{v}_0 \widehat{v}_0^* + \widehat{w}_0 \widehat{w}_0^* + P \widehat{\theta}_0 \widehat{\theta}_0^* \right) \right. \\ & \quad \left. - i P^{-1} \widetilde{U}_1' \widehat{w}_0 \widehat{u}_0^* - i \widetilde{\Theta}_0 \widehat{u}_0 \widehat{\theta}_0^* - i R P \widetilde{\Theta}_1' \widehat{w}_0 \widehat{\theta}_0^* \right] dz \\ & + \partial_Y \mathcal{R} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\widetilde{U}_1 P^{-1} k_y \left(\widehat{u}_0 \widehat{u}_0^* + \widehat{v}_0 \widehat{v}_0^* + \widehat{w}_0 \widehat{w}_0^* + P \widehat{\theta}_0 \widehat{\theta}_0^* \right) \right. \\ & \quad \left. - i P^{-1} \widetilde{U}_1' \widehat{w}_0 \widehat{v}_0^* - i \widetilde{\Theta}_0 \widehat{v}_0 \widehat{\theta}_0^* \right] dz \left. \right] = 0. \end{aligned}$$

Equation (3.I.22), rather cumbersome, is abbreviated as:

$$\frac{\partial A}{\partial X} \partial_{k_x} \omega (X, Y; \omega_0) + \frac{\partial A}{\partial Y} \partial_{k_y} \omega (X, Y; \omega_0) + A (-i\omega_1 + \Gamma (X, Y; \omega_0)) = 0. \quad (3.I.23)$$

Expressing an approximation of the solution of the linear stability analysis as a WKBJ expansion, truncated to the leading order, requires to solve equations (3.I.16) and (3.I.23).

3.I.3.3 Gauge choices, WKBJ breakdowns and other catastrophes: the construction of a global mode

Owing to the slow variations of \mathcal{R} with x and y , the global mode is first sought as the leading order of a WKBJ expansion. This approximation introduces a function $\Phi (X, Y; \omega_0)$, solution of the dispersion relation (3.I.16), and a leading order amplitude $A (X, Y)$, solution of (3.I.23). Both these equations are first order partial differential equations with complex coefficients and can be integrated along their characteristics. Parametrised by the curvilinear coordinate S — scaling as X and Y — a characteristic (X_c, Y_c) of equation (3.I.23) is a solution of:

$$\begin{cases} X_c'(S) = \partial_{k_x} \omega^S, \\ Y_c'(S) = \partial_{k_y} \omega^S, \end{cases} \quad (3.I.24)$$

the superscript S meaning that the different functions are evaluated at $(X_c(S), Y_c(S))$. The characteristics of the dispersion relation expressed in the form (3.I.16) are also solutions of (3.I.24) and the solution $\Phi (X, Y; \omega_0)$ is expressed in terms of the wavevector satisfying (3.I.10). Since equation (3.I.16) is non-linear, its characteristics (3.I.24) and

its solution $\Phi(X, Y; \omega_0)$ are completely linked, i.e., the characteristics cannot be given independently of the solution. Along these characteristics, the variations of k_x , k_y and A are given by:

$$\begin{cases} d_S k_x &= -\partial_{\mathcal{R}} \omega^S \partial_X \mathcal{R}^S, \\ d_S k_y &= -\partial_{\mathcal{R}} \omega^S \partial_Y \mathcal{R}^S \end{cases} \quad (3.I.25)$$

and

$$d_S A = -A(-i\omega_1 + \Gamma(X_c(S), Y_c(S))). \quad (3.I.26)$$

Two questions are still left unanswered. First, the uniqueness of the solutions of equations (3.I.16) and (3.I.23) must be answered by solving a Cauchy problem and choosing an appropriate gauge, i.e. by requiring the values of (k_x, k_y) and A on a curve intersecting all the characteristics, such that the limit conditions (3.I.17) are satisfied. Finally, as $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$ remains arbitrary, no selection criterion can be extracted from the WKBJ expansion. It is therefore necessary to consider situations where the WKBJ expansion is not valid in the whole domain.

Equations (3.I.23) and (3.I.14) break down at points (X^t, Y^t) where

$$\partial_{k_x} \omega^t = \partial_{k_y} \omega^t = 0. \quad (3.I.27)$$

Following the convention, these points are called turning points. Condition (3.I.27) can be satisfied if the system is locally beyond the convective/absolute instability threshold. The superscript t is used to specify that the different quantities are evaluated at such a turning point. In addition to the local dispersion relation (3.I.14), the conditions (3.I.27) yields the value of the wavevector, k_x^t and k_y^t , and the local frequency ω^t at the turning point as functions of $\mathcal{R}(X^t, Y^t)$. Physically, a turning point induces the reflection of an incident wave. A set of turning points delimiting a simply connected domain in the physical space is thus associated through boundary conditions in the horizontal plan to a resonance condition and a quantization of the frequency. If this quantization implies a finite upper bound for $\Im(\omega)$, a selection criterion of the most unstable mode ensues.

Condition (3.I.27) also means that the group velocity vanishes at a turning point. The energy can be seen as radiating from this point, imposing the local behaviour of the instability — for instance the frequency — to the entire neighbourhood of the turning point. Following previous results on one-dimensional inhomogeneous situations ((25)), we restrict this study to global modes governed by a two-dimensional double turning point. In the present problem, the latter is located at the maximum of $\mathcal{R}(X, Y)$, i.e. at the top of the temperature bump $X^t = Y^t = 0$ where:

$$\partial_X \mathcal{R}^t = \partial_Y \mathcal{R}^t = 0. \quad (3.I.28)$$

As equation (3.I.23) breaks down at this double turning point, the construction of the global mode requires a particular analysis in this region. The inner solution in the vicinity of the double turning point — the WKBJ expansion becoming in retrospect the outer solution — is expressed by means of an intermediate expansion. This one is expected to imply a selection criterion and the means to construct the whole WKBJ solution of the most unstable global mode, i.e. to solve the Cauchy problem for partial differential equations (3.I.16) and (3.I.23).

3.I.4 Inner solution and selection criterion

3.I.4.1 Amplitude equation close to the double turning-point

Following the exact results in the one-dimensional inhomogeneous case (see (9; 50)), the amplitude A is expanded in powers of $\varepsilon^{1/2}$ where equation (3.I.23) breaks down at the double turning point. New variables χ and φ defined by $\chi = \varepsilon^{1/2}x$ and $\varphi = \varepsilon^{1/2}y$ are introduced and the basic state is expanded about the double-turning point $(X, Y) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} U_b(\chi, \varphi, z) = \widetilde{U}_0(z) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ V_b(\chi, \varphi, z) = O(\varepsilon^{3/2}), \\ \Theta_b(\chi, \varphi, z) = -\frac{1}{2} + \widetilde{\Theta}_0(z) \mathcal{R}^t \\ \quad + \varepsilon \widetilde{\Theta}_0(z) \left(\frac{\chi^2}{2} \partial_X^2 \mathcal{R}^t + \chi \varphi \partial_X \partial_Y \mathcal{R}^t + \frac{\varphi^2}{2} \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \right) + O(\varepsilon^{3/2}). \end{cases} \quad (3.I.29)$$

As $\partial_X \mathcal{R}^t = \partial_Y \mathcal{R}^t = 0$, the velocities contain no terms of order $O(\varepsilon^{1/2})$ and $O(\varepsilon)$ while the temperature contains no order $O(\varepsilon^{1/2})$ term. The inner solution for the perturbation is sought in the form:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{v}}^t &= (\widetilde{\mathbf{v}}_0^t(\chi, \varphi, z) + \varepsilon^{1/2} \widetilde{\mathbf{v}}_{1/2}^t(\chi, \varphi, z) + \varepsilon \widetilde{\mathbf{v}}_1^t(\chi, \varphi, z) + O(\varepsilon^{3/2})) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}} (k_x^t \chi + k_y^t \varphi) - i\omega t\right) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.I.30)$$

where the exponential comes from the leading order of $\Phi(X, Y; \omega_0)$ expanded around the turning point.

At order $O(\varepsilon^0)$, the homogeneous problem is recovered:

$$\mathcal{L}^t \widetilde{\mathbf{v}}_0^t = \widetilde{\mathbf{0}}. \quad (3.I.31)$$

This implies that the solution $\widetilde{\mathbf{v}}_0^t$ can be written in the form:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_0^t = A(\chi, \varphi) \widehat{\mathbf{v}}_0^t(k_x^t, k_y^t, \mathcal{R}^t, \omega_0; z), \quad (3.I.32)$$

with

$$\omega_0 = \omega(k_x^t, k_y^t, \mathcal{R}_0). \quad (3.I.33)$$

In (3.I.32), $\widehat{\mathbf{v}}_0^t$ is therefore the solution of the homogeneous stability problem expressed at the top of the bump. The frequency ω_0 is imposed by the physical mechanisms responsible for the instability at the double turning point. It does not take into account the inhomogeneity of system, which can only appear in the correction $\varepsilon\omega_1$.

At order $O(\varepsilon^{1/2})$, the following system of equations is obtained:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^t \widetilde{\mathbf{v}}_{1/2}^t &= i \frac{\partial A}{\partial \chi} \mathcal{L}_{k_x}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t + i \frac{\partial A}{\partial \varphi} \mathcal{L}_{k_y}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t \\ &= -i \frac{\partial A}{\partial \chi} \mathcal{L}^t \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0^t - i \frac{\partial A}{\partial \varphi} \mathcal{L}^t \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0^t, \end{aligned} \quad (3.I.34)$$

As a consequence of condition (3.I.28), the solvability condition for equation (3.I.34) is always satisfied. Thus, $\widetilde{\mathbf{v}}_{1/2}^t$ can be chosen as:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_{1/2}^t = -i \left(\frac{\partial A}{\partial \chi} \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \frac{\partial A}{\partial \varphi} \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0^t \right). \quad (3.I.35)$$

At order $O(\varepsilon)$, the following system is obtained:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^t \widetilde{\mathbf{v}}_1^t &= -A \left(\omega_1 \mathcal{L}_\omega^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \left(\frac{\chi^2}{2} \partial_X^2 \mathcal{R}^t + \chi \varphi \partial_X \partial_Y \mathcal{R}^t + \frac{\varphi^2}{2} \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \right) \mathcal{L}_\mathcal{R}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t \right) \\ &+ \frac{\partial^2 A}{\partial \chi^2} \left(\mathcal{L}_{k_x}^t \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{k_x k_x}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \left(\mathcal{L}_{k_y}^t \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{k_y k_y}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t \right) \\ &+ \frac{\partial^2 A}{\partial \chi \partial \varphi} \left(\mathcal{L}_{k_x}^t \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \mathcal{L}_{k_y}^t \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0^t \right). \end{aligned} \quad (3.I.36)$$

Introducing relations (B.28) and (B.42–B.44) expressed at the point (0, 0) into the solvability condition of system (3.I.36) yields the following amplitude equation in the inner region:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \chi^2} \partial_{k_x}^2 \omega^t + \frac{\partial^2 A}{\partial \chi \partial \varphi} \partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} \partial_{k_y}^2 \omega^t \\ &+ A \left[\omega_1 - \partial_{\mathcal{R}} \omega^t \left(\frac{\chi^2}{2} \partial_X^2 \mathcal{R}^t + \chi \varphi \partial_X \partial_Y \mathcal{R}^t + \frac{\varphi^2}{2} \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.I.37)$$

The coefficients of the second order partial differential equation (3.I.37) are imposed by the local solution of the homogeneous problem at the double turning point. If the physically relevant solutions of equation (3.I.37) with $A \rightarrow 0$ for $\chi \rightarrow \pm\infty$ or $\varphi \rightarrow \pm\infty$ are physically acceptable only for certain values of ω_1 , a selection criterion for the global mode will be found.

3.I.4.2 Complex frequency selection criterion

The solution of equation (3.I.37) is sought in the form:

$$A(\chi, \varphi) = F(\chi, \varphi) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \chi^2 - \frac{\beta}{2} \varphi^2 - \delta \chi \varphi \right), \quad (3.I.38)$$

with α , β and δ solutions of:

$$\begin{cases} \alpha^2 \partial_{k_x}^2 \omega^t + \delta^2 \partial_{k_y}^2 \omega^t - \partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_{\mathcal{R}} \omega^t = 0, \\ \beta^2 \partial_{k_y}^2 \omega^t + \delta^2 \partial_{k_x}^2 \omega^t - \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \partial_{\mathcal{R}} \omega^t = 0, \\ \alpha \delta \partial_{k_x}^2 \omega^t + \beta \delta \partial_{k_y}^2 \omega^t - \partial_X \partial_Y \mathcal{R}^t \partial_{\mathcal{R}} \omega^t = 0. \end{cases} \quad (3.I.39)$$

The most unstable mode is obtained for $F = \text{const.}$, as explain in appendix B.3, under the condition

$$\Im \left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \pm \left(\left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha - \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \right)^2 + 4 \delta^2 \partial_{k_x}^2 \omega^t \partial_{k_y}^2 \omega^t \right)^{1/2} \right) < 0. \quad (3.I.40)$$

The coefficients α , β and δ are given by

$$\alpha = \epsilon_1 \frac{(\partial_{\mathcal{R}} \omega^t)^{1/2} (\partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_x}^2 \omega^t + \epsilon_2 \lambda)}{\partial_{k_x}^2 \omega^t \left(\partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_x}^2 \omega^t + \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_y}^2 \omega^t + 2\epsilon_2 \lambda \right)^{1/2}}, \quad (3.I.41)$$

$$\beta = \epsilon_1 \frac{(\partial_{\mathcal{R}} \omega^t)^{1/2} (\partial_Y^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_y}^2 \omega^t + \epsilon_2 \lambda)}{\partial_{k_y}^2 \omega^t \left(\partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_x}^2 \omega^t + \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_y}^2 \omega^t + 2\epsilon_2 \lambda \right)^{1/2}}, \quad (3.I.42)$$

$$\delta = \epsilon_1 \frac{(\partial_{\mathcal{R}} \omega^t)^{1/2} \partial_X \partial_Y \mathcal{R}}{\left(\partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_x}^2 \omega^t + \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_y}^2 \omega^t + 2\epsilon_2 \lambda \right)^{1/2}}, \quad (3.I.43)$$

with

$$\lambda = \left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \partial_{k_y}^2 \omega^t \left(\partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_Y^2 \mathcal{R}^t - (\partial_X \partial_Y \mathcal{R}^t)^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (3.I.44)$$

and (ϵ_1, ϵ_2) the only set $(\pm 1, \pm 1)$ so as to satisfy the boundedness of $A(\chi, \varphi)$, i.e. to satisfy the conditions

$$\begin{cases} \Re(\alpha) > 0, \\ \Re(\beta) > 0, \\ \Re(\delta)^2 < \Re(\alpha) \Re(\beta). \end{cases} \quad (3.I.45)$$

In terms of the coordinates x and y , the amplitude of this mode is therefore:

$$A = \exp \left(-\frac{\varepsilon \alpha}{2} x^2 - \frac{\varepsilon \beta}{2} y^2 - \varepsilon \delta xy \right), \quad (3.I.46)$$

where $\varepsilon \alpha$, $\varepsilon \beta$ and $\varepsilon \delta$ are deduced from α , β and δ by replacing ∂_X and ∂_Y by ∂_x and ∂_y . The correction of the frequency is equal to:

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega_1 &= \frac{1}{2} \partial_{k_x}^2 \omega^t \varepsilon \alpha + \frac{1}{2} \partial_{k_y}^2 \omega^t \varepsilon \beta \\ &= \frac{\epsilon_1}{2} (\partial_{\mathcal{R}} \omega^t)^{1/2} \left(\partial_x^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_x}^2 \omega^t + \partial_y^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_y}^2 \omega^t + 2\epsilon_2 \varepsilon \lambda \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.I.47)$$

Condition (3.I.40) finally implies $\Im(\varepsilon \omega_1) < 0$, which means, roughly speaking, that the inhomogeneity presenting a local maximum of \mathcal{R} has a damping effect relative to the local absolute growth rate at the double turning point.

3.I.4.3 Matching of the inner and outer solutions

Expanding k_x and k_y in the outer region around $(X, Y) = (0, 0)$ leads to:

$$\begin{cases} k_x = k_x^t + \partial_X k_x^t X + \partial_Y k_x^t Y, \\ k_y = k_y^t + \partial_X k_y^t X + \partial_Y k_y^t Y. \end{cases} \quad (3.I.48)$$

Assuming

$$\partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^t = 0, \quad (3.I.49)$$

the matching of the outer expression of the global mode with the inner one requires:

$$\begin{cases} \partial_X k_x^t &= i\alpha, \\ \partial_Y k_y^t &= i\beta, \\ \partial_Y k_x^t &= \partial_X k_y^t = i\delta. \end{cases} \quad (3.I.50)$$

The relevance of condition (3.I.49) will be discussed in §3.I.5. Close to the inner region, system (3.I.24) tends to:

$$\begin{cases} X'_c &= i\partial_{k_x}^2 \omega^t (\alpha X_c + \delta Y_c), \\ Y'_c &= i\partial_{k_y}^2 \omega^t (\delta X_c + \beta Y_c). \end{cases} \quad (3.I.51)$$

The eigenvalues of system (3.I.51) are

$$r_{\pm} = \partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \pm \left(\left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha - \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \right)^2 + 4\delta^2 \partial_{k_x}^2 \omega^t \partial_{k_y}^2 \omega^t \right)^{1/2}, \quad (3.I.52)$$

condition (3.I.40) implies $\exp(r_+ S) \rightarrow 0$ and $\exp(r_- S) \rightarrow 0$ as $S \rightarrow -\infty$. The double turning point is thus a stagnation point for a set of characteristics. The existence of characteristics avoiding the turning point, and consequently not originating from it, remains a question, even if this situation seems physically surprising. Such a characteristic would indeed connect two points infinitely far away from the unstable region.

The inner expression of the amplitude (3.I.38) provides the means to solve the Cauchy problem of equation (3.I.23) by imposing the value of the amplitude on a closed — complex — curve surrounding the double turning point. This curve, for instance $x^2 + y^2 = \text{const.}$ with $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, can be chosen so as to intersect, as required in section 3.I.3, all the characteristics originating from the double turning point. System (3.I.50) similarly provides the gauge on this curve to evaluate the characteristics given by (3.I.24) and solve (3.I.14) along these characteristics. The behaviour of the WKBJ expansion along a characteristic is thus enslaved to the inner solution imposed by the double turning point and the ensuing selection criterion. For all that the global mode in \mathbb{R}^2 can be deduced from the integration in \mathbb{C}^2 along the characteristics originating from the double turning point, the instability exhibits an intrinsic nature.

The matching condition of the inner solution with the outer WKBJ solution finally imposes the value of $\varepsilon\omega_1$ which is a function of the physical and geometrical features at the top of the temperature bump. This frequency correction vanishes only in very special situations we do not elaborate further. With the complex frequency ω being now known up to the order ε and including a correction due to inhomogeneity, this construction yields the most unstable mode and the corresponding critical physical and geometrical parameters.

To ensure the consistency of the global mode construction, it is necessary to check case by case that condition (3.I.40) is satisfied with the values ε_1 and ε_2 given by conditions (3.I.45). Establishing conditions (3.I.40) directly from the dispersion relation physical properties, system (3.I.39) and condition (3.I.45) would improve the robustness of the global mode analysis, but has not yet been possible. We note finally that the consistency of the global mode construction outlined here does not exclude other possibilities such as global modes associated with distinct simple turning points whose construction should be extended from (50). Different selection criteria, involving linear or non-linear dynamics as in (76), can presumably be established and should be compared with this one.

3.I.5 Results and illustrations

As stated in appendix B.4, the frequency approximation $\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$ and the coefficients $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, and $\varepsilon\delta$ are evaluated numerically using the selection criterion presented in §3.I.4. For swept elliptical temperature bumps defined by equation (3.I.6) and figure 3.I.1, the evaluation of the complex frequency as a function of the geometrical bump parameters σ_1 , σ_2 and ψ and the physical parameters \mathcal{R}_0 , \mathcal{R}_∞ , R and P yields the critical value of one of these parameters as a function of the others. For practical reasons, the Reynolds number is chosen here as the critical parameter with instability for $R < R_{\text{crit}}$, while $\mathcal{R}(x, y)$ and P are considered given. Besides the critical conditions, the inner amplitude (3.I.38) deduced from the values of $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, and $\varepsilon\delta$ given by (3.I.41)–(3.I.43) provides a first approximation of the global mode:

$$\tilde{\mathbf{v}} \approx \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha x^2}{2} - \frac{\varepsilon\beta y^2}{2} - \varepsilon\delta xy\right) \exp(ik_x^t x + ik_y^t y - i\omega t) \hat{\mathbf{v}}_0^t(z) + \text{c.c.}, \quad (3.I.53)$$

taking into account the relevant physical mechanisms and inhomogeneity and revealing many features of the global mode Expression (3.I.53) leads to a spatial variation of the magnitude of the global mode averaged in the z -direction, proportional to:

$$\begin{aligned} & \left\| \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha x^2}{2} - \frac{\varepsilon\beta y^2}{2} - \varepsilon\delta xy\right) \exp(ik_x^t x + ik_y^t y) \right\| = \\ & \exp\left(-\frac{\Re(\varepsilon\alpha) x^2}{2} - \frac{\Re(\varepsilon\beta) y^2}{2} - \Re(\varepsilon\delta) xy\right) \exp(-\Im(k_x^t) x - \Im(k_y^t) y). \end{aligned} \quad (3.I.54)$$

In expression (3.I.53) the amplitude and the complex wavevector are both evaluated at the double turning point. Therefore, the maximum of the magnitude (3.I.55) of the inner solution is engendered by the shift downstream and in the spanwise direction, due to the imaginary part of the wavevector, of the maximum of norm of the amplitude. As stated before, only situations with local stability far from the bump are considered. This is enforced by choosing $\mathcal{R}_\infty = 1500$ in all the examples.

Next, the search for turning points is simplified by the fact that in (3.I.11), k_y only appears as k_y^2 . Consequently, for $k_y = 0$:

$$\partial_{k_y} \omega = \partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega = 0 \quad (3.I.55)$$

and a set of two-dimensional turning points with $k_y = 0$ can be found, corresponding to transverse rolls for the inner solution. Indeed, seeking them as stated in appendix B.4, the numerical solutions of the homogeneous problem at the double turning point were always found to satisfy $k_y = 0$. This result is fully consistent with the convective nature of instabilities in the homogeneous RBP problem except the transverse rolls exhibiting a transition to absolute instability found in (24). Physically, such a solution means that the orientation of the rolls is thus mainly imposed by the presence of mean flow and the local absolute nature of the instability at the double-turning point. The behaviour of the instability therefore differs from the confinement effect due to walls, as studied with envelope equation formalism in confined Rayleigh–Bénard geometries in (89; 65), which forces the wavevector to be parallel to the largest side of the convection cell. As

the inhomogeneity of the temperature does not appear at order $O(\varepsilon^0)$, the rolls are expected to keep their transverse orientation in the double-turning point region whatever the geometrical parameters of the bump are. Moreover, a double-turning point verifying $k_y = 0$ ensures that condition (3.I.49) is satisfied, and the calculations of $\varepsilon\omega_1$, $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$ and $\varepsilon\delta$ as stated in §3.I.4 possible.

3.I.5.1 Global mode temperature field

The temperature field given by relation (3.I.53) is represented in figure 3.I.3 for the critical global mode on a circular bump. Figure 3.I.3 confirms that the critical instability is a first

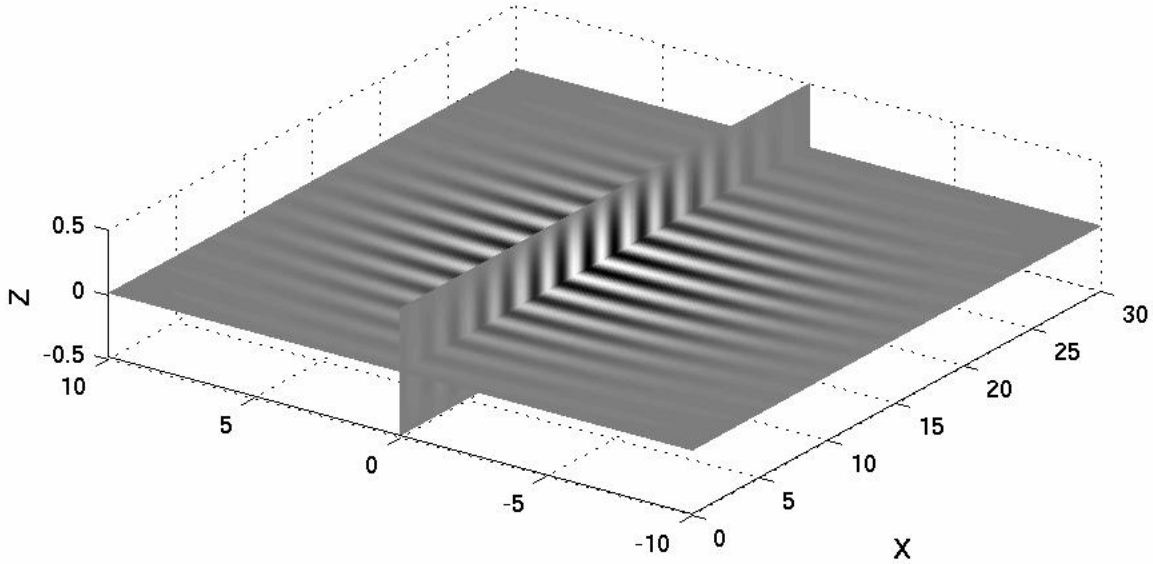


Figure 3.I.3: Temperature field of the turning point region approximation of the critical global mode, for $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$, $\mathcal{R}_0 = 1800$, $P = 7$ implying $R_{\text{crit}} = 0.505$. The darker shades correspond to low temperatures and lighter shades to high temperatures of the instability.

harmonic in the z -direction as found in Rayleigh–Bénard convection. Leaving aside the eigenfunctions $\hat{v}_0(z)$, the horizontal spatial variation of the global mode is represented for different physical (figure 3.I.4) and geometrical (figure 3.I.5) parameters. Figure 3.I.4 for the circular temperature bumps, highlights the advection of the peak magnitude. This advection increases with \mathcal{R}_0 and R_{crit} while the size of the wave packet is only weakly affected. Over the range of \mathcal{R}_0 and R_{crit} considered, an increase of the wavenumber is also observed. Figure 3.I.5 for the swept elliptical temperature bumps, reveals that the orientation and aspect ratio of the wave packet correspond roughly to the temperature bump. Again, the inner solution magnitude peak is advected downstream and, in the swept cases, also shifted in the spanwise direction. Comparing figures 3.I.5(a) and 3.I.5(d), the streamwise location of the magnitude maximum is seen to vary dramatically with the geometrical features of the temperature bump whereas R_{crit} varies only slightly. More precisely, the relevant quantity to explain the location of the magnitude maximum

is the boundary between stable and convectively unstable domains. The peak magnitude is found indeed close to the boundary expressed for the parabolic expansion fitting the $\mathcal{R}(x, y)$ function at the double turning point. This expansion is used in equation (3.I.37) to evaluate the inner solution depicted in figures 3.I.4 and 3.I.5 and the location of the maximum should therefore be compared with the boundary for the parabolic expansion. As seen in figures 3.I.4(d) and 3.I.5(a) where the stable/convectively unstable boundaries for $\mathcal{R}(x, y)$ and its parabolic fit are conspicuously distant in the region nearby the magnitude maximum, the inner solution and the parabolic fit are misleading as far the location of the instability is concerned. The more distant from the double turning point the maximum magnitude, the more needed the WKB expansion for both the amplitude and the wavevector to correct the inner solution. Another aftermath of representing the global mode by its inner approximation is the limitation of the variation of wavevector to its first order expansion about the turning point (3.I.48). Owing to this expansion, the curvature of the TR is already seen in figures 3.I.4 and 3.I.5. Taking into account the WKB evolution of the wavevector could increase this curvature and modify the actual pattern of the global mode. Another consequence of increasing the curvature is the emergence of long scale pressure gradients aligned with the wavevector, these pressure gradients being known to trigger chaotic behaviors in confined systems ((90)). Leaving this limitation aside, a more detailed study of the dependence of the global mode on physical and geometrical parameters is the topic of the next paragraph.

3.I.5.2 Critical stability

In addition to the dependence of R_{crit} on parameters, several other quantities are accessible at the global stability threshold and provide useful informations on critical global modes: the period $2\pi/\Re(\omega)$, the real part of the wavenumber $\Re(k_x^t)$ and the physically (observed) phase velocity $(v_\phi^t)_{\text{phys}} = \Re(\omega)/\Re(k_x^t)$ combining the two previous quantities are expressed at the double turning point. Besides, the location of the instability is roughly given by the location of the maximum magnitude of the inner solution. Taking into account $k_y^t = 0$, (3.I.55) yields an approximation of the location of this maximum:

$$\begin{cases} x_{\text{max}} &= -\frac{\Re(\varepsilon\beta) \Im(k_x^t)}{\Re(\varepsilon\alpha) \Re(\varepsilon\beta) - \Re(\varepsilon\delta)^2}, \\ y_{\text{max}} &= \frac{\Re(\varepsilon\delta) \Im(k_x^t)}{\Re(\varepsilon\alpha) \Re(\varepsilon\beta) - \Re(\varepsilon\delta)^2}. \end{cases} \quad (3.I.56)$$

The critical Reynolds number and the above quantities at the stability threshold are given in figure 3.I.6 for four different geometries and $P = 7$. As far as these geometries are concerned, the variations of the threshold and the critical quantities are only very slightly dependent on the geometrical features of the bump, except for the location of the maximum. In figure 3.I.6(a), the relation $R_{\text{crit}}^2 \propto (\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_{0,\text{min}})$ obtained in the homogeneous situation (see (24)) is almost reproduced. This latter behaviour is slightly modified by the inhomogeneity — implying for instance $\mathcal{R}_{0,\text{min}} > \mathcal{R}_{\text{crit}} = 1707.76$ — because of the correction $\varepsilon\omega_1$. In figure 3.I.6(b), the period, expressed as a function of R_{crit} , is diverging for $R_{\text{crit}} \rightarrow 0$, consistent with the zero frequency at marginal stability of the

classical Rayleigh–Bénard system. In figure 3.I.6(c), the real part of the wavevector has a maximum around $\mathcal{R}_0 \approx 3000$. Explaining this maximum requires to consider the physical reasons of the increase or decrease of the roll spacing. Reducing the viscous dissipation due to wall shear stress is obtained for a decreasing spacing, whereas reducing the thermal dissipation due to temperature gradients between the rolls is obtained for an increasing spacing. The increase of $\Re(k_x)$ (i.e. the decrease of the spacing), by minimising the viscous dissipation, therefore reveals the growing importance of viscosity in the dissipative phenomenon, whereas the decrease of $\Re(k_x)$ reveals the growing importance of the thermal dissipation. The physical phase velocity in figure 3.I.6(d), expressed also as a function of R_{crit} , reveal its linear dependence with R_{crit} . Finally, the location of the maximum is given by figures 3.I.6(e) and 3.I.6(f) (the value of y_{max} being nonzero only for swept bumps). For given \mathcal{R}_0 , x_{max} does not only increase with the mean flow given by the value of R but also with the streamwise length characterising the bump $\mathcal{R}(x, y)$. As stated in the previous paragraph, beyond the values of \mathcal{R} and R , the location of the maximum has to be related to local properties of stability and convective instability.

Focusing on fluid properties, three different values of P are considered for a fixed aspect ratio and orientation of the bump considering in figure 3.I.7 the same quantities than figure 3.I.6. Figure 3.I.7(a) reveals a destabilisation, i.e. an increasing value of R_{crit} , as P is decreased, which also affects the divergence of T_{crit} as $R_{\text{crit}} \rightarrow 0$ shown in figure 3.I.7(b). In figure 3.I.7(c), the real part of the wavenumber has a maximum for both $P = 7$ and $P = 70$. This maximum increases and moves towards larger values of \mathcal{R}_0 as P increases. This trend for viscosity-dominated situations, whereas $\Re(k_{\text{crit}})$ only decreases for thermal diffusivity-dominated situations is in agreement with the explanation provided in the previous paragraph. In figure 3.I.7(d), the dependence of the physical phase velocity with R_{crit} remains almost linear and increases with P . Finally, the streamwise and spanwise locations of the maximum of the magnitude are given by figures 3.I.7(e) and 3.I.7(f). Whereas the rapid increase of x_{max} with \mathcal{R}_0 is independent of P , the subsequent slow evolution is affected in the sense that x_{max} is shifted to higher values as P is decreased.

Albeit limited in figure 3.I.6, the variations of the critical quantities with the geometrical features of the bump are investigated in a wider range. First, the characteristic size of the bump $(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$, left constant in figure 3.I.6, is varied for circular bumps in figure 3.I.8. As $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ is increased, the size of the absolutely unstable domain grows and the basic flow becomes more unstable. The homogeneous situation where R_{crit} of the global mode is equal to the convective/absolute threshold $R_{c/a}$ as a function of \mathcal{R}_0 is recovered for very large temperature bumps as seen in figure 3.I.8(a). The divergence of the period T_{crit} for $R_{\text{crit}} \rightarrow 0$ in figure 3.I.8(b) is almost independent of \mathcal{R}_0 for the range of investigated σ . The almost linear relationship between $(v_\phi^t)_{\text{phys}}$ and R_{crit} is also found to be independent of \mathcal{R}_0 in figure 3.I.8(d). Figures 3.I.8(e) and 3.I.8(f), focusing on x_{max} as a function of σ and R_{crit} as $y_{\text{max}} = 0$, confirms the dependence of the location of the maximum on R , \mathcal{R}_0 and the characteristic dimension of the bump. This latter dependence explains the fact that in figure 3.I.8(f), global modes for high values of R_{crit} and \mathcal{R}_0 and small value of σ are less advected downstream than global modes with higher values of σ , i.e. lower values of R_{crit} .

Keeping its characteristic size fixed, the influence of the bump aspect ratio σ_1/σ_2 is investigated in figure 3.I.9 and the effect of the sweep angle ψ is investigated in figure

3.I.10. Considering two different orientations of the bump, the variation of the aspect ratio reveals the existence of a maximum R_{crit} in figure 3.I.9(a). Owing to the invariance $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$, $\sigma_2 \leftrightarrow \sigma_1$ and $\psi \leftrightarrow -\psi$, the results obtained for $\psi = \pi/4$ in figure 3.I.9 are symmetric about $\log(\sigma_1/\sigma_2) = 0$, the most unstable situation being obtained at this value. Considering the case $\psi = 0$, the increase of the characteristic length of the bump in the streamwise direction for increasing σ_1/σ_2 destabilises the flow. For large values of $\log(\sigma_1/\sigma_2)$ nevertheless, a confinement effect in the spanwise direction is noticeable, leading to a maximum instability value for the aspect ratio $\sigma_1/\sigma_2 \simeq 2.88$.

As expected from figure 3.I.9, figure 3.I.10 confirms that the larger the aspect ratio, the larger the variations with the bump orientation ψ . The variation of R_{crit} in 3.I.10(a) is due the opposite influence of the characteristic dimension in the streamwise direction and the spanwise confinement. It is seen in figures 3.I.10(b), 3.I.10(c) and 3.I.10(d) that T_{crit} , $\Re(k_x^t)$ and $(v_\phi^t)_{\text{phys}}$ are almost independent of the geometrical parameters. Finally, in figures 3.I.10(e) and 3.I.10(f), the location of the maximum of the magnitude is found to follow the evolution of the elliptic bump planform, e.g. $|y_{\text{max}}|$ is 0 for $\psi = 0$ and $\psi = \pi/2$ and has a maximum in between. This feature completes the increase of the streamwise location of this maximum with the characteristic streamwise length of the bump already observed.

In summary, it is seen in figures 3.I.6–3.I.9 that the behaviour of the global mode described by T_{crit} , $\Re(k_x^t)$ and $(v_\phi^t)_{\text{phys}}$ depends mainly on the physical parameters \mathcal{R}_0 , R and P , taken into account at the order $O(\varepsilon)$ of the global mode approximation. The geometrical parameters are involved in the value of the critical Reynolds number R_{crit} only when the aspect ratio of the bump becomes large and influence mainly the location and shape of the global mode by the location of the boundary between stable and convectively unstable regions, as seen in figures 3.I.4 and 3.I.5.

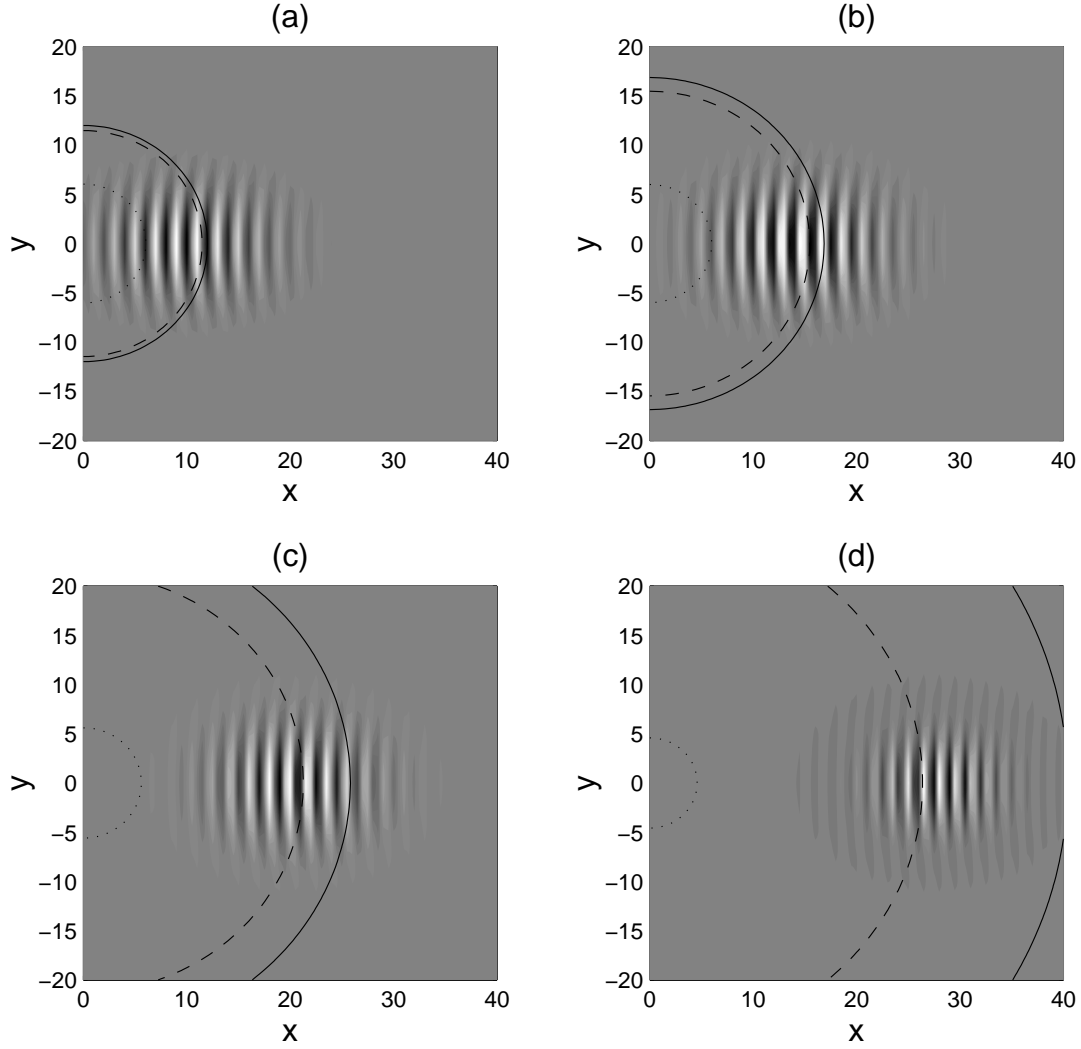


Figure 3.I.4: Temperature field of the turning point region approximation of the critical global modes obtained with $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$ and $P = 7$, for $\mathcal{R}_0 = 1750$ and $R_{\text{crit}} = 0.312$ (a), $\mathcal{R}_0 = 1800$ and $R_{\text{crit}} = 0.505$ (b), $\mathcal{R}_0 = 2000$ and $R_{\text{crit}} = 0.986$ (c) and $\mathcal{R}_0 = 4000$ and $R_{\text{crit}} = 3.519$ (d). The local stability properties are superimposed for both the real $\mathcal{R}(x, y)$ function and its parabolic fit at the double turning point. Considering the $\mathcal{R}(x, y)$ function defined by equation (3.I.6) and figure 3.I.1 the stable/convectively unstable boundary (solid lines) and the convectively unstable/absolutely unstable boundary (dotted line) are superimposed. Considering the parabolic fit of $\mathcal{R}(x, y)$ used in the inner region and expansion (3.I.29), the stable/convectively unstable boundary (dashed line) is superimposed.

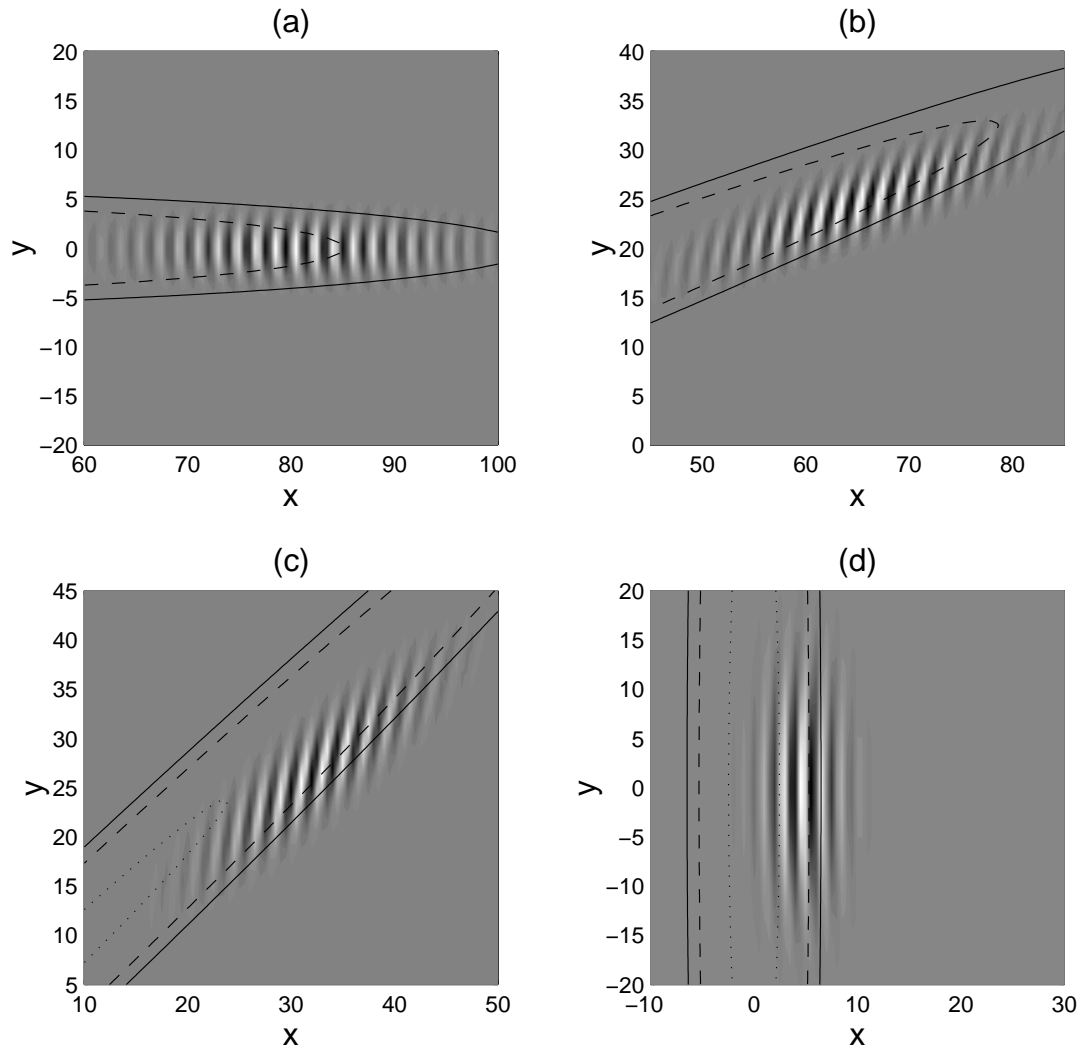


Figure 3.I.5: Temperature field of the turning point region approximation of the critical global modes obtained with $\sigma_1 = 80$, $\sigma_2 = 5$, $P = 7$ and $\mathcal{R}_0 = 2000$, for $\psi = 0$ and $R_{\text{crit}} = 0.978$, $\psi = \pi/8$ and $R_{\text{crit}} = 0.966$, $\psi = \pi/4$ and $R_{\text{crit}} = 0.938$ and $\psi = \pi/2$ and $R_{\text{crit}} = 0.907$. The different lines are defined as in figure 3.I.4.

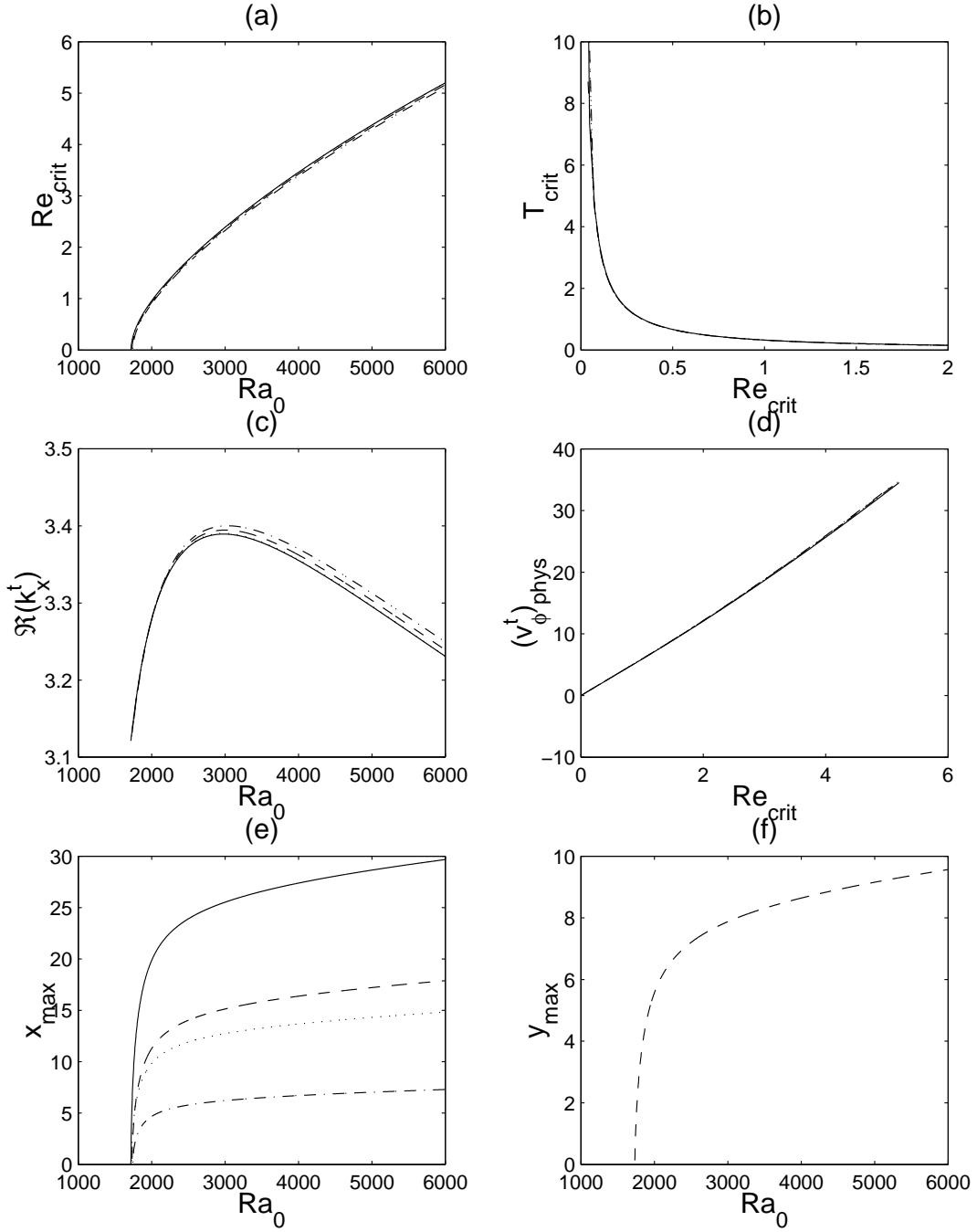


Figure 3.I.6: Critical global mode features, for $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 5$ and $\psi = 0$ (solid line), $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 5$ and $\psi = \pi/4$ (dashed line), $\sigma_1 = 20$, $\sigma_2 = 5$ and $\psi = \pi/2$ (dotdashed line) and $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 10$ (dotted line). (a): $R_{crit}(Ra_0)$, (b): $T_{crit}(R_{crit})$, (c): $\Re(k_x^t)(Ra_0)$, (d): $(v_\phi^t)_{phys}(R_{crit})$, (e): $x_{max}(Ra_0)$ and (f): $y_{max}(Ra_0)$.

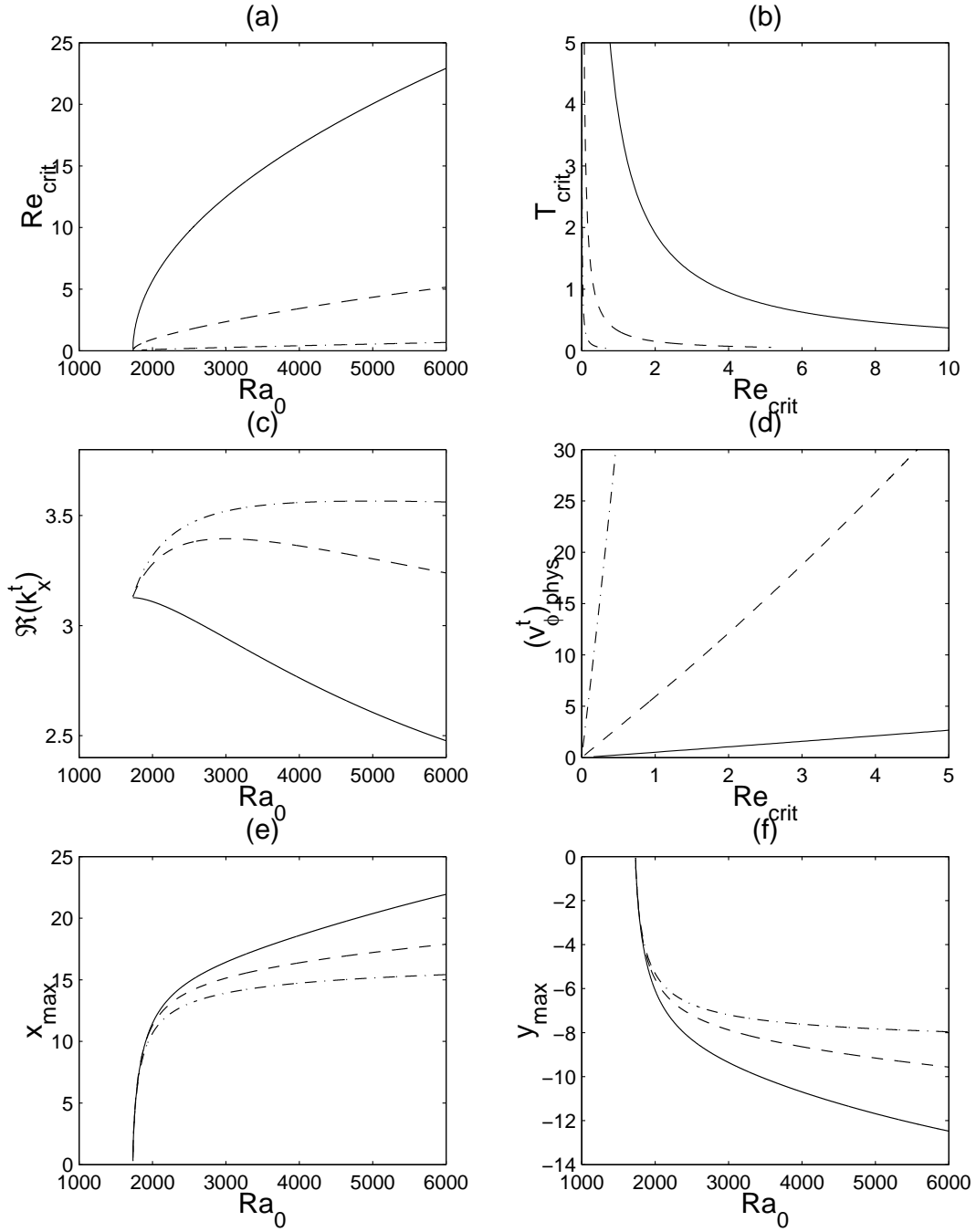


Figure 3.I.7: Critical global mode features for different Prandtl numbers $P = 0.7$ (solid line), $P = 7$ (dashed line) and $P = 70$ (dotdashed line) with $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 20$ and $\psi = \pi/4$. The same functions as in figure 3.I.6 are represented.

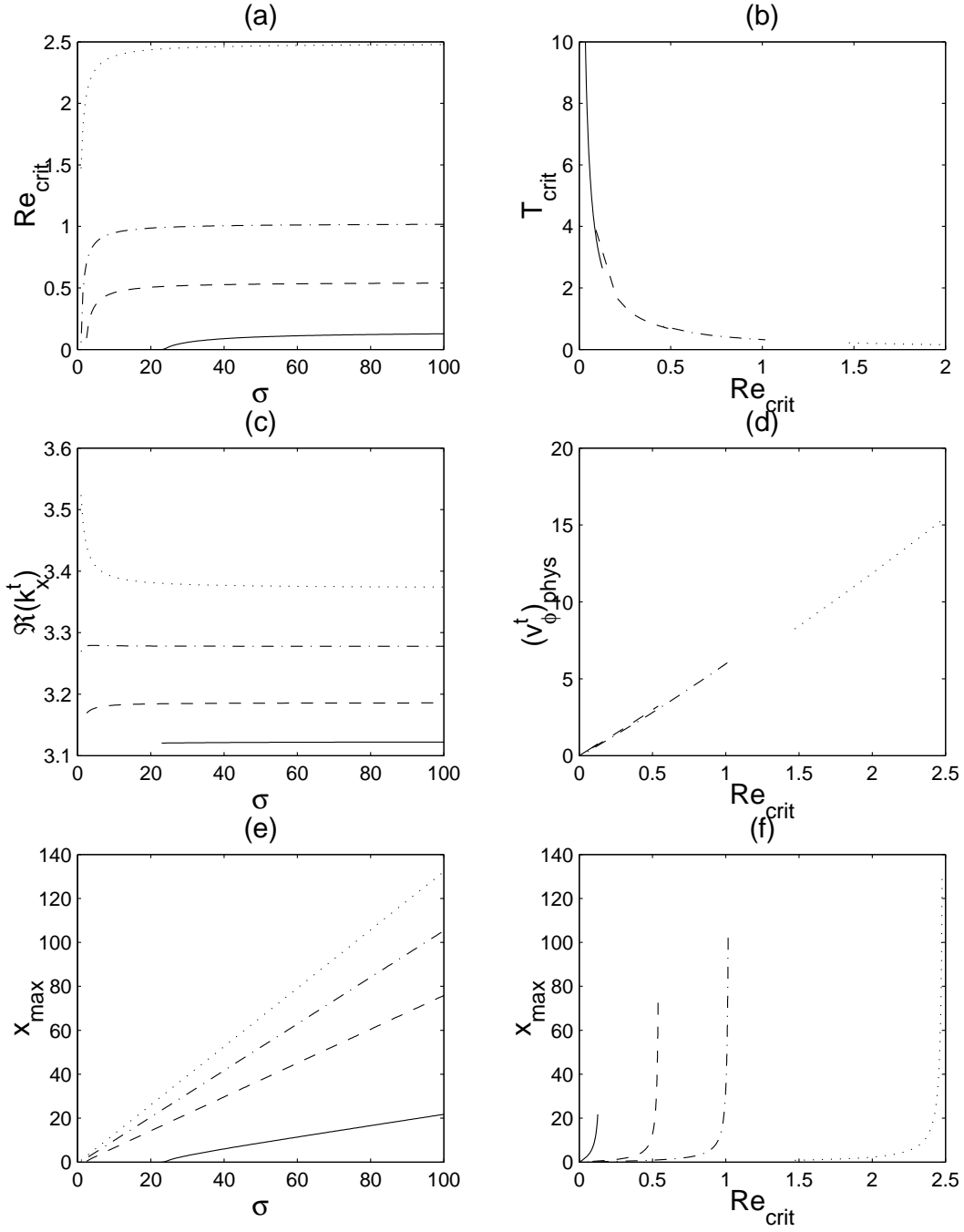


Figure 3.I.8: Critical global mode features as functions of $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ for $\mathcal{R}_0 = 1715$ (solid line), 1800 (dashed line), 2000 (dotdashed line) and 3000 (dotted line). The quantities of figure 3.I.6 are expressed as functions of σ instead of \mathcal{R}_0 , except (f): $x_{\text{max}}(\mathcal{R}_{\text{crit}})$

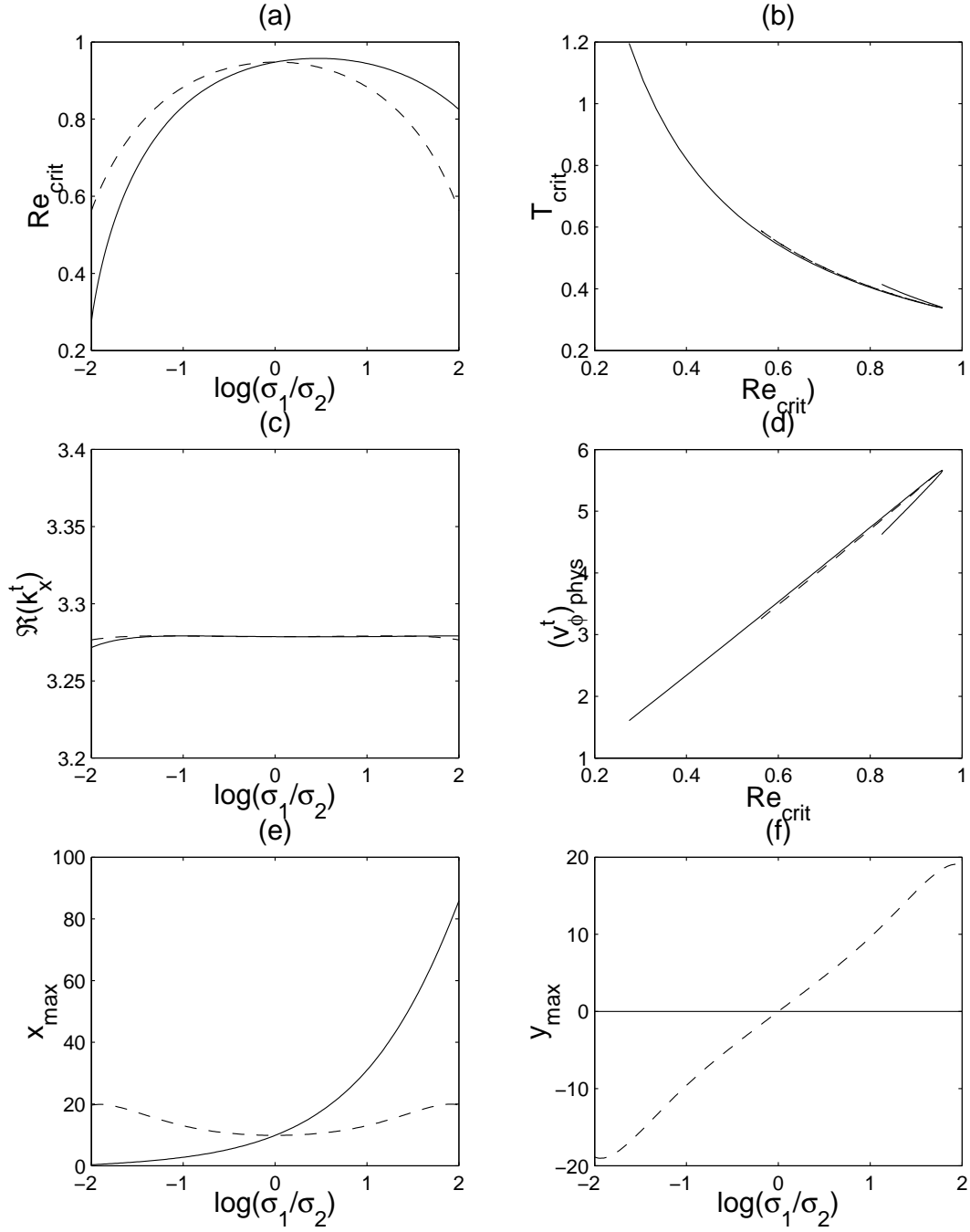


Figure 3.I.9: Critical global mode features as functions of $\log(\sigma_1/\sigma_2)$ for $\psi = 0$ (solid line) and $\pi/4$ (dashed line). In both cases, $\mathcal{R}_0 = 2000$. The quantities of figure 3.I.6 are expressed as functions of $\log(\sigma_1/\sigma_2)$ instead of \mathcal{R}_0 .

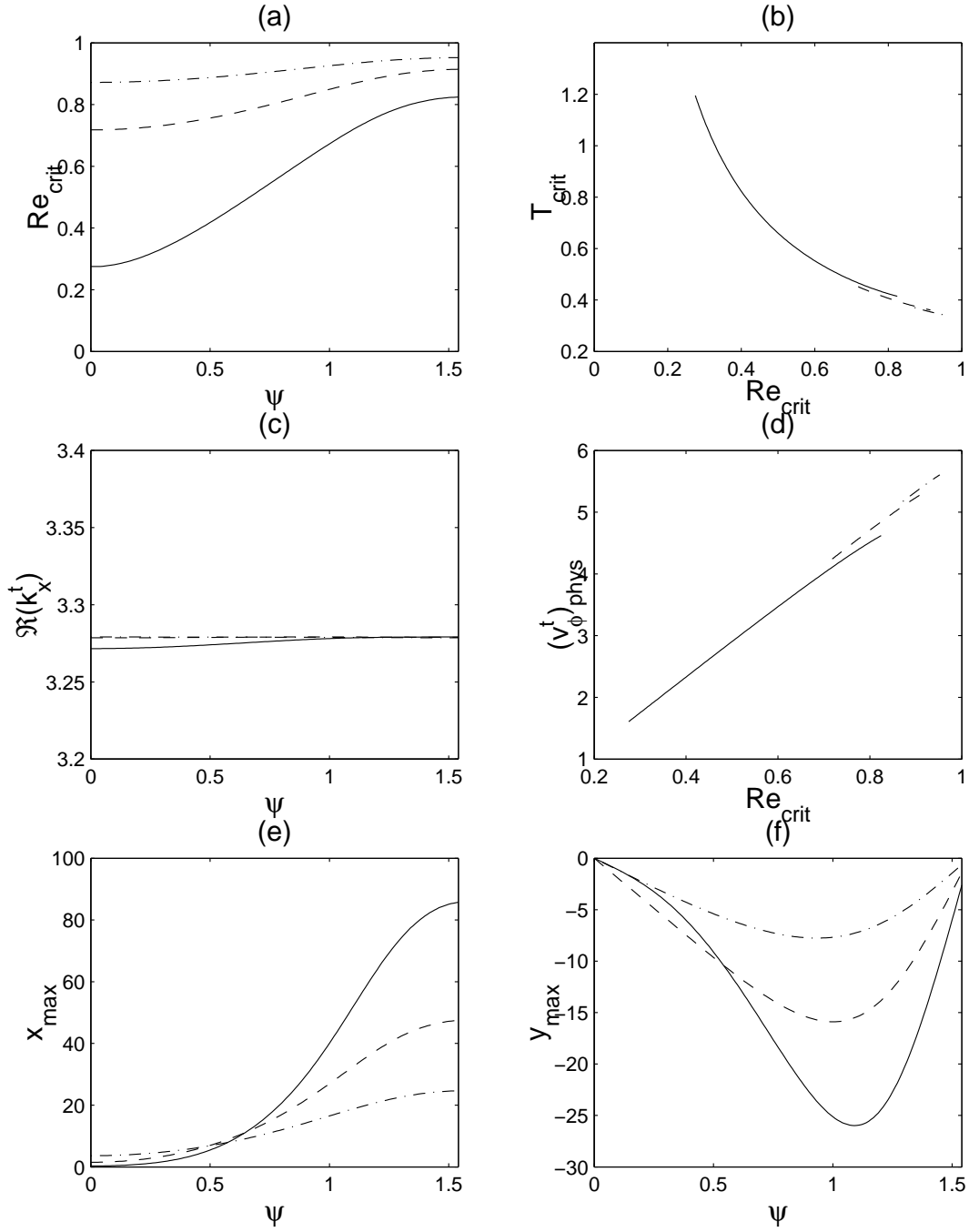


Figure 3.I.10: Critical global mode features as functions of ψ , for $\sigma_1/\sigma_2 = 1/100$ (solid line), $2/50$ (dashed line) and $4/25$ (dotdashed line). In all cases, $\mathcal{R}_0 = 2000$. The quantities of figure 3.I.6 are expressed as functions of ψ instead of \mathcal{R}_0 .

3.2 Commentaires

3.2.1 Critère de sélection et construction d'un mode global

La modélisation de la convection de RBP par l'équation de Navier–Stokes a donc permis d'aborder tous les aspects nécessaires à la détermination du critère de sélection et de l'approximation au premier ordre de la solution interne d'un mode global tridimensionnel imposé par un double point tournant bidimensionnel. Le critère de sélection mis en évidence et l'approximation de la solution interne du mode global prennent à nouveau, comme dans le cas du formalisme d'enveloppe, une forme très abordable pour peu que l'on sache résoudre le problème homogène au double point tournant. Ce calcul peut être mené à bien pour autant que les α , β et γ de l'équation

$$A = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha}{2}x^2 - \frac{\varepsilon\beta}{2}y^2 - \varepsilon\delta xy\right). \quad (3.6)$$

conduisent à une solution bornée pour A et vérifient la condition

$$\Im\left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \pm \left(\left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha - \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta\right)^2 + 4\delta^2 \partial_{k_x}^2 \omega^t \partial_{k_y}^2 \omega^t\right)^{1/2}\right) < 0. \quad (3.7)$$

Cette dernière condition garantie, d'une part, que la quantification des fréquences admises conduit à une borne supérieure à la partie imaginaire de ces fréquences et par conséquent à un critère de sélection et, d'autre part, que la correction $\varepsilon\omega_1$ a un effet stabilisant sur la solution du problème homogène au double point tournant. Une étude approfondie des conséquences sur la relation de dispersion des caractéristiques physiques du mécanisme d'instabilité — e.g. la croissance de $\Im(\omega)$ avec \mathcal{R} — devrait permettre d'établir cette condition pour toute instabilité localisée, mais ceci n'a pu encore être obtenu.

On est d'autre part capable de construire une approximation de ce mode global sous la forme du premier ordre d'un développement WKBJ en intégrant son vecteur d'onde et son amplitude le long des caractéristiques des équations (3.2) et (3.3) dans l'espace \mathbb{C}^2 pour les directions de faible inhomogénéité. Rien ne permet cependant de savoir si cette intégration permet, et à quel coût en calculs, d'exprimer la solution dans \mathbb{R}^2 . Il manque donc un lien entre le travail fait dans le paragraphe 2.II.5 concernant le comportement du vecteur d'onde loin du point tournant et celui fait dans le paragraphe 3.I.3 concernant l'intégration de ce même vecteur d'onde à partir de la solution interne.

3.2.2 Validité du formalisme d'enveloppe

Un autre intérêt des résultats obtenus sur l'équation de Navier–Stokes est de les comparer à ceux obtenus par le formalisme d'enveloppe afin d'évaluer la pertinence et le champ d'application de ce dernier. Du fait des échelles différentes sur x et y , seules des enveloppes obtenues sur des situations symétriques ont un équivalent réel simple, avec une bosse de température ellipsoïdale. Un exemple de comparaison est donné par les figures 3.1 et 3.2. L'exemple considéré dans la figure 3.1 met en avant le bon accord entre formalisme d'enveloppe et équations de Navier–Stokes complètes. On remarque qu'en plus

des limitations dues aux différentes échelles en x et y , les situations décrites par le formalisme d'enveloppe restent très proches des conditions critiques de RB pour des valeurs très faibles de R , ce qui restreint fortement le champ d'application d'un tel formalisme. Du fait de l'évolution $\mathcal{R} \sim O(\epsilon)$ et $R \sim O(\epsilon^{1/2})$, les situations instables en particulier se trouvent rapidement hors d'atteinte lorsque l'écart au seuil critique s'accroît. D'autre part, lorsque l'on s'écarte de ces conditions critiques, l'accord entre formalisme d'enveloppe et équations de Navier–Stokes pour des modes stables se dégrade, comme on peut le voir sur la figure 3.2.

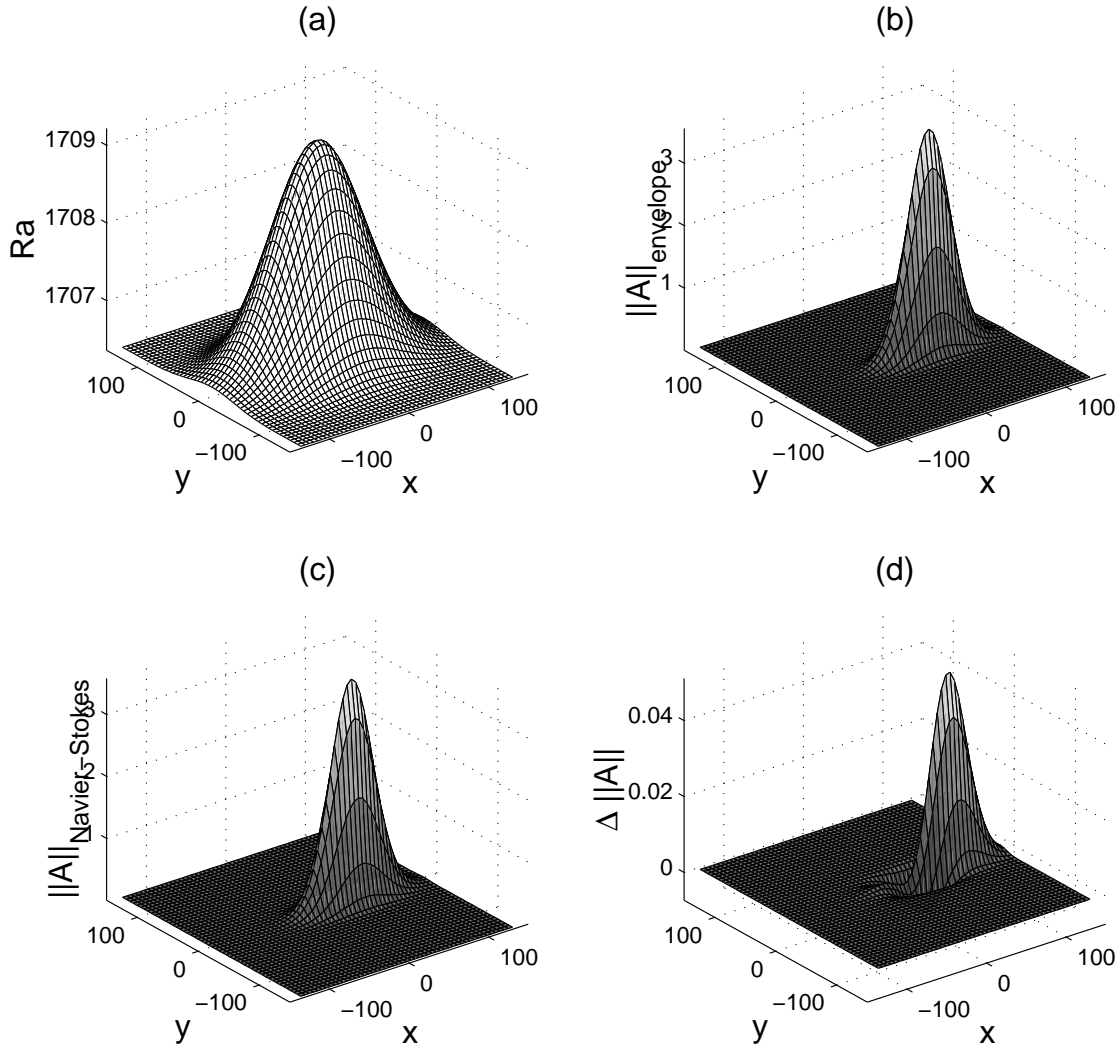


FIG. 3.1 – Comparaison des solutions centrales en formalisme d’enveloppe (b) et par l’équation de Navier–Stokes dans l’approximation de Boussinesq (c). La situation décrite en formalisme d’enveloppe est donnée par $r_0 = 1$, $r_\infty = -1$, $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 25$ et $\rho = 0.14$, avec $k_{\text{crit}} = 3.116$ et $\mathcal{R}_{\text{crit}} = 1707.76$. L’écart au seuil critique défini en 2.I.2 est fixé à $\epsilon = 0.5$. La situation réelle correspond alors à $R = 0.0535$, et un champ $\mathcal{R}(x, y)$ (a) avec $\sigma_1 = 53.2$, $\sigma_2 = 36.5$, $\mathcal{R}_0 = 1709.2$ et $\mathcal{R}_\infty = 1706.4$. La différence relative au maximum de l’amplitude est de l’ordre de 0.01.

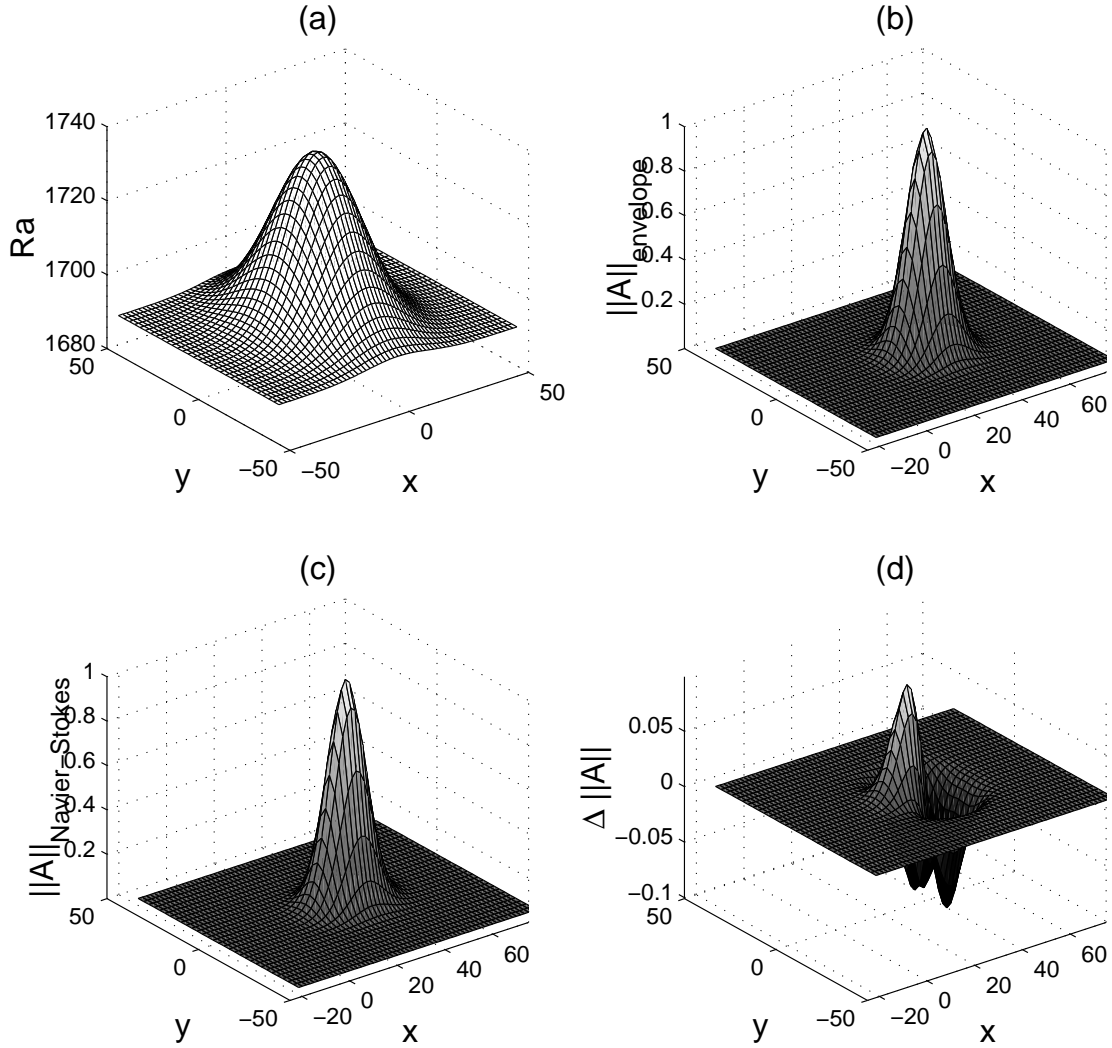


FIG. 3.2 – Comparaison des solutions centrales en formalisme d’enveloppe (b) et par l’équation de Navier–Stokes dans l’approximation de Boussinesq (c). La situation décrite en formalisme d’enveloppe dont l’écart au seuil critique est fixé à $\epsilon = 2$, les autres paramètres étant ceux de la figure 3.1. La situation réelle correspond alors à $R = 0.7649$, et un champ $\mathcal{R}(x, y)$ (a) avec $\sigma_1 = 13.3$, $\sigma_2 = 18.3$, $\mathcal{R}_0 = 1736.3$ et $\mathcal{R}_\infty = 1690.6$. La différence relative au maximum de l’amplitude est de l’ordre de 0.1.

Chapitre 4

Conclusions et perspectives

Au terme de ce travail, la généralisation à deux directions faiblement inhomogènes des méthodes et des résultats obtenus pour une seule direction concernant les modes globaux se développant sur un îlot d'instabilité et imposés par un double point tournant paraît donc justifiée et possible. Les principes de sélection et de construction d'un tel mode tridimensionnel, localisé et synchronisé ont été énoncés et, dans la mesure du possible, appliqués. Un tel mode a été à nouveau cherché sous la forme d'un développement WKBJ, à présent dans les deux directions inhomogènes. La présence d'un double point tournant bidimensionnel au sommet de la bosse de température a conduit à chercher la solution au voisinage de ce point sous la forme d'un développement intermédiaire dont le caractère borné a imposé une quantification de la fréquence du mode global, tenant compte du problème homogène de stabilité au point tournant et des inhomogénéités spatiales. Cette quantification a donné un critère de sélection du mode présentant le taux de croissance le plus élevé. Enfin, le premier ordre de la solution obtenue au voisinage du double point tournant devrait permettre d'intégrer le premier ordre de l'amplitude et la phase du développement WKBJ le long de courbes rayonnant dans l'espace complexe autour de ce point.

Les résultats obtenus sur le formalisme d'enveloppe ont permis de valider le critère de sélection obtenu par comparaison des nombres de Reynolds critiques obtenus analytiquement et numériquement par simulation de l'équation dynamique. D'autre part, le premier ordre de la solution au voisinage du point tournant, obtenu analytiquement, a été utilisé comme approximation du mode global et comparé lui aussi au champ de l'instabilité obtenu par simulation numérique. Cette approximation s'est révélée pertinente pour localiser le mode global, mais déjà moins pour en prédire avec précision les variations spatiales.

De tels modes globaux ont ensuite été cherchés pour les équations de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq. L'application du critère de sélection, nécessitant maintenant une résolution numérique du problème de stabilité homogène, conduit à un effet limité de l'inhomogénéité sur la fréquence du mode global. On met tout de même en évidence un effet stabilisant d'un rétrécissement de la zone instable dans la direction transverse à l'écoulement. La localisation du mode global, obtenu à nouveau par le premier ordre de la solution au voisinage du point tournant, est quant à elle beaucoup plus sensible aux inhomogénéités de la température et suit la position de la frontière aval entre les

domaines convectivement instable et stable.

Bien que les calculs ayant conduit au critère de sélection et à l'approximation centrale du mode global soient, il faut bien l'avouer, peu engageants, ceux-ci sont directs et simples d'utilisation pour peu que l'on sache résoudre le problème homogène au double point tournant.

Au bout de ces trois ans, certaines questions restent toujours ouvertes et d'autres sont apparues en cours de route. Dans la première catégorie, le calcul complet, et dans un temps compatible avec l'espérance de vie moyenne, du développement WKBJ reste à faire. Les résultats pour l'amplitude et la phase de ce développement, que l'on sait obtenir le long des caractéristiques complexes, ne sont pas directement utilisables dans le plan physique. Le problème du choix des branches du vecteur d'onde physiquement acceptables dans différents domaines du plan physique reste par conséquent lui aussi posé. Toujours parmi les sujets qui n'ont pas eu le temps d'être abordés au cours de cette thèse, une simulation numérique des équations de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq apporterait des éléments de validation de la construction du mode global dans un cadre plus général et pour des paramètres physiques plus étendus que les éléments obtenus sur le formalisme d'enveloppe. D'un point de vue strictement numérique, cette simulation est ardue. On cherche en effet une solution instationnaire, tridimensionnelle, présentant des variations lentes et rapides, d'un écoulement avec un grand rapport d'aspect. À ce stade, il semble plus à propos de justifier par des résultats numériques ou expérimentaux les résultats analytiques plutôt que de chercher à en renforcer la validité mathématique en établissant, par exemple, le caractère général de l'existence du mode global le plus instable ainsi calculé ou le rayon de convergence du développement WKBJ.

Parmi la deuxième catégorie de questions, la simulation numérique de l'équation d'enveloppe a permis d'observer un comportement non linéaire de l'instabilité mettant en évidence la formation d'un front. De tels fronts ont déjà été prédits et un critère de sélection non linéaire explicité dans des situations à une direction inhomogène. Il serait maintenant intéressant de chercher de tels fronts bidimensionnels, ainsi que leurs dynamiques, pour l'équation d'enveloppe à deux directions inhomogènes obtenue au cours de la thèse. Cette recherche pourrait, en préambule, nécessiter d'étudier les modes globaux tridimensionnels imposés par des ensembles de simples points tournants. D'autre part, les effets de courbure, pour peu que celle-ci soit faible, des fronts de flamme dans les instabilités thermo-diffusives pourraient présenter des analogies intéressantes avec les fronts non-linéaires rencontrés en convection de Rayleigh–Bénard–Poiseuille.

Annexe A

Equation d'enveloppe

A.1 Successive solutions of the multiple scale analysis at finite R

In the following, the notation $\mathcal{D} = d/dz$ is used throughout.

A.1.1 Solution of the first order problem

At first order, the set of linear homogeneous equations for $\mathbf{v}_1 = [p_1, \mathbf{u}_1, \theta_1]^T$ and its associated eigenvalue $-i\omega$ is given by

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{v}_1 = 0, \quad (\text{A.1})$$

where $\mathcal{L}_0 \mathbf{v}_1$ is defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \mathbf{v}_1 = & \left[-\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1, -i\omega P^{-1} \mathbf{u}_1 + R(U_p \partial_{x_0} \mathbf{u}_1 + \mathcal{D}U_p (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_x) + \nabla_0 p_1 - \theta_1 \mathbf{e}_z \right. \\ & \left. -\nabla_0^2 \mathbf{u}_1, -i\omega \theta_1 + RPU_p \partial_{x_0} \theta_1 - \mathcal{R}_c^{(\pi/2)} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_z - \nabla_0^2 \theta_1 \right]^T \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

and ∇_0 stands for

$$\nabla_0 = (\partial_{x_0}, \partial_{y_0}, \partial_z)^T. \quad (\text{A.3})$$

The boundary conditions for \mathbf{v}_1 in (A.1) are

$$\mathbf{u}_1(z = \pm 1/2) = \theta_1(z = \pm 1/2) = 0. \quad (\text{A.4})$$

For LR's as in (2.I.9), (A.1) reduces to the usual RB problem, except for a non-zero component of the velocity in the x -direction. The z -dependence of LR modes is thus of the form

$$\mathbf{V}_1 = [P_1, Rk_c^{-2}U_1, ik_c^{-1}V_1, W_1, \Theta_1]^T, \quad (\text{A.5})$$

with W_1 as originally determined by (74):

$$W_1 = \sum_{n=1}^{n=3} C_n \cosh q_n z. \quad (\text{A.6})$$

In the present paper, we use the following numerically determined values for the constants:

$$\mathcal{R}_c^{(\pi/2)} = 1707.76177, k_c = 3.116323555, \quad (\text{A.7a})$$

$$C_1 = 1.0, C_2 = -0.0307641793 + i 0.0519556612, C_3 = \overline{C_2}, \quad (\text{A.7b})$$

$$q_1 = i 3.973704179, q_2 = 5.194390868 - i 2.125870478, q_3 = \overline{q_2}. \quad (\text{A.7c})$$

The functions V_1 , P_1 and Θ_1 are then deduced from W_1 by the following relations:

$$V_1 = \mathcal{D}W_1, \quad (\text{A.8a})$$

$$P_1 = (k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1) V_1(z), \quad (\text{A.8b})$$

$$\Theta_1 = k_c^2 (k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1)^2 W_1(z). \quad (\text{A.8c})$$

The function U_1 satisfies the equation:

$$(k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1) U_1 = W_1 \mathcal{D}U_p. \quad (\text{A.9})$$

The solution has the form:

$$U_1 = D_0 \sinh(k_c z) + \sum_{n=1}^{n=3} E_n z \cosh q_n z + F_n \sinh q_n z, \quad (\text{A.10})$$

where the E_n and F_n are given by

$$E_n = 8k_c^2 C_n (k_c^2 - q_n^2)^{-1}, F_n = 16k_c^2 q_n C_n (k_c^2 - q_n^2)^{-2} \quad (\text{A.11})$$

and the value of D_0 is determined by imposing $U_1(1/2) = 0$.

A.1.2 Adjoint problem

Proceeding to higher orders in the expansion requires the determination of the adjoint mode. In the present case, the appropriate scalar product is

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \lim_{X, Y \rightarrow \infty} \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{v}_i \cdot \overline{\mathbf{v}}_j dx dy dz. \quad (\text{A.12})$$

With this definition, the adjoint operator of \mathcal{L}_0 in (A.1) is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^* \mathbf{v}_1^* &= [-\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1^*, i\overline{\omega} P^{-1} \mathbf{u}_1^* - R(U_p \partial_{x_0} \mathbf{u}_1^* - \mathcal{D}U_p (\mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z) + \nabla p_1^* - \mathcal{R}_c^{(\pi/2)} \theta_1^* \mathbf{e}_z \\ &\quad - \nabla_0^2 \mathbf{u}_1^*, i\overline{\omega} \theta_1^* - R P U_p \partial_{x_0} \theta_1^* - \mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{e}_z - \nabla_0^2 \theta_1^*]^\top. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

The eigenvalue $-\mathrm{i}\omega$ vanishes identically for longitudinal rolls at criticality and thus one easily finds the adjoint longitudinal roll mode

$$\mathbf{v}_1^* = \exp(\mathrm{i}k_c y_0) \mathbf{V}_1^*(z), \quad (\text{A.14})$$

where \mathbf{V}_1^* is given by

$$\mathbf{V}_1^* = [P_1, 0, \mathrm{i}k_c^{-1} V_1, W_1, \mathcal{R}_c^{(\pi/2)-1} \Theta_1]^\top. \quad (\text{A.15})$$

A.1.3 Second order solvability condition

At order $O(\epsilon^2)$, the non homogeneous problem for $\mathbf{v}_2 = [p_2, \mathbf{u}_2, \theta_2]^T$ is

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{v}_2 = \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_1), \quad (\text{A.16})$$

where $\mathcal{S}_2(\mathbf{v}_1)$ reads:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_1) = & \left[\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_1, -P^{-1} (\partial_{t_1} \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla_0) \mathbf{u}_1) - RU_p \partial_{x_1} \mathbf{u}_1 - \nabla_1 p_1 + 2 \partial_{y_1} \partial_{y_0} \mathbf{u}_1, \right. \\ & \left. -\partial_{t_1} \theta_1 - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_0 \theta_1 - RPU_p \partial_{x_1} \theta_1 + 2 \partial_{y_1} \partial_{y_0} \theta_1 \right]^T \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

and ∇_1 stands for

$$\nabla_1 = (\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, 0)^T. \quad (\text{A.18})$$

The boundary conditions for \mathbf{v}_2 in (A.16) are

$$\mathbf{u}_2(z = \pm 1/2) = \theta_2(z = 1/2) = 0, \quad \theta_2(z = -1/2) = \mathcal{R}_2. \quad (\text{A.19})$$

Since LR's are stationary, the condition for the solvability of (A.16) reduces to

$$\langle \mathcal{S}_2(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1^* \rangle = 0, \quad (\text{A.20})$$

which leads to

$$\partial_{t_1} A + \partial_{k_x} \omega|_c \partial_{x_1} A + \partial_{k_y} \omega|_c \partial_{y_1} A, \quad (\text{A.21})$$

where we used the notation

$$\partial_{k_x} \omega|_c = \partial_{k_x} \omega|_{k_x=0, k_y=k_c}, \quad \partial_{k_y} \omega|_c = \partial_{k_y} \omega|_{k_x=0, k_y=k_c}. \quad (\text{A.22})$$

Note that quadratic interaction does, as usual, not provide any resonant terms in (A.21). Since LR's are the most amplified modes, one has

$$\partial_{k_x} \omega_i|_c = \partial_{k_y} \omega_i|_c = 0, \quad (\text{A.23})$$

and, since all modes with $k_x = 0$ are stationary, one also has

$$\partial_{k_y} \omega_r|_c = 0. \quad (\text{A.24})$$

On the other hand, the real part of the frequency is found to depend on the value of k_x , so that:

$$\partial_{k_x} \omega_r|_c = Rc \neq 0, \quad (\text{A.25})$$

which is consistent with the convective nature of LR's. The associated group velocity is found to depend linearly on the Reynolds number R , with the coefficient c in (2.I.10) given by

$$\begin{aligned} c &= \tau^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\left(k_c^{-2} V_1^2 + (W_1^2 + P \mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}} \Theta_1^2) \right) U_b - k_c^{-2} V_1 W_1 \mathcal{D}U_p \right] dz \\ &\cong \tau^{-1} (0.4718 + 1.375P), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

and

$$\tau = P^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} \left[k_c^{-2} V_1^2 + W_1^2 + P \mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}} \Theta_1^2 \right] dz \cong P^{-1} (0.8012 + 1.566P). \quad (\text{A.27})$$

A.1.4 Solution of the second order problem

The solution \mathbf{v}_2 of (A.16) is sought in the form:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 = & A^2 \mathbf{V}_{2,2}(z) \exp(2ik_c y_0) + (\partial_{\chi_1} A \mathbf{V}_{2,x}(z) + \partial_{y_1} A \mathbf{V}_{2,y}(z)) \exp(ik_c y_0) \\ & + \frac{1}{2} A \bar{A} \mathbf{V}_{2,0}(z) + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{R}_2}{2} z(1-z), 0, 0, 0, \mathcal{R}_2 \left(\frac{1}{2} - z \right) \right]^T + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

where A depends on the variables χ_1 , y_1 and t_2 which are related to t_1 and x_1 by

$$\partial_{t_1} = -Rc \partial_{\chi_1}, \quad \partial_{x_1} = \partial_{\chi_1}. \quad (\text{A.29})$$

In (A.28), $\mathbf{V}_{2,2}$ is the column vector

$$\mathbf{V}_{2,2} = \left[(2Pk_c^2)^{-1} (V_1^2 - W_1 \mathcal{D}V_1) + P_{2,2}, (2k_c)^{-2} R U_{2,2}, ik_c^{-1} V_{2,2}, W_{2,2}, \Theta_{2,2} \right]^T, \quad (\text{A.30})$$

and $\mathbf{V}_{2,0}$ is

$$\mathbf{V}_{2,0} = \left[P_{2,0}, k_c^{-2} R U_{2,0}, 0, 0, \Theta_{2,0} \right]^T. \quad (\text{A.31})$$

It then follows that $W_{2,2}$ and $\Theta_{2,2}$ satisfy

$$(\mathcal{D}^2 - 4k_c^2)^2 W_{2,2} - 4k_c^2 \Theta_{2,2} = 2P^{-1} (W_1 \mathcal{D}^3 W_1 - \mathcal{D}W_1 \mathcal{D}^2 W_1), \quad (\text{A.32a})$$

$$(\mathcal{D}^2 - 4k_c^2) \Theta_{2,2} - \mathcal{R}_c^{(\pi/2)} W_{2,2} = W_1 \mathcal{D}\Theta_1 - \Theta_1 \mathcal{D}W_1, \quad (\text{A.32b})$$

and $\Theta_{2,0}$ satisfies

$$\mathcal{D}^2 \Theta_{2,0} = 2\mathcal{D} (W_1 \Theta_1), \quad (\text{A.33})$$

which are similar to the equations in the absence of a mean through-flow. Consequently, the solutions are those given by (87). This is also true for the remaining functions $V_{2,2}$, $V_{2,0}$, $P_{2,2}$, $P_{2,0}$. Furthermore it is found that $U_{2,2}$ and $U_{2,0}$ do not provide resonant terms in the compatibility condition at third order, so that their determination is unnecessary.

Similarly, we define $\mathbf{V}_{2,x}$ as the column vector

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{2,x} = & \left[Rk_c^{-2} [(P^{-1}c - U_p)V_1 + W_1 \mathcal{D}U_p + P_{2,x}], k_c^{-2} (V_1 + R^2 k_c^{-2} U_{2,x}), \right. \\ & \left. iRk_c^{-3} (U_1 + V_{2,x}), Rk_c^{-2} W_{2,x}, Rk_c^{-2} \Theta_{2,x} \right]^T. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

The set of governing equations for $W_{2,x}$ and $\Theta_{2,x}$ is thus obtained as

$$(k_c^{-2} \mathcal{D}^2 - 1)^2 W_{2,x} - k_c^{-2} \Theta_{2,x} = (U_p - P^{-1}c) (k_c^{-2} \mathcal{D}^2 - 1) W_1 - k_c^{-2} W_1 \mathcal{D}^2 U_p, \quad (\text{A.35a})$$

$$(k_c^{-2} \mathcal{D}^2 - 1) \Theta_{2,x} + k_c^{-2} \mathcal{R}_c^{(\pi/2)} W_{2,x} = P (U_p - P^{-1}c) \Theta_1, \quad (\text{A.35b})$$

and the solution $W_{2,x}$ is found to be

$$W_{2,x} = \sum_{n=1}^{n=3} z(z^2 G_{n,x} + H_{n,x}) \sinh(q_n z) + (z^2 I_{n,x} + C_{n,x}) \cosh(q_n z). \quad (\text{A.36})$$

Eliminating $\Theta_{2,x}$ in (A.35) allows to determine the coefficients $G_{n,x}$, $H_{n,x}$ and $I_{n,x}$ as functions of the C_n 's, q_n 's, k_c , P and c . They are however not listed here as the expressions are too long. The $C_{n,x}$'s, finally, are obtained by imposing the boundary conditions

$$W_{2,x}(1/2) = \Theta_{2,x}(1/2) = 0, \quad (\text{A.37})$$

and the orthogonality condition

$$\sum_{n=1}^{n=3} C_n C_{n,x} = 0. \quad (\text{A.38})$$

$\Theta_{2,x}$ is then obtained by relation (A.35a), and $V_{2,x}$ and $P_{2,x}$ by

$$V_{2,x} = \mathcal{D}W_{2,x}, \quad (\text{A.39a})$$

$$P_{2,x} = (k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1) V_{2,x}. \quad (\text{A.39b})$$

Next the unknown function $U_{2,x}$ is governed by

$$(k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1) U_{2,x} = W_{2,x} \mathcal{D}U_p + U_1(U_p - P^{-1}c). \quad (\text{A.40})$$

and the solution $U_{2,x}$ may be written as

$$\begin{aligned} U_{2,x} = & \sum_{n=1}^{n=3} [(J_{n,x}z^4 + K_{n,x}z^2 + L_{n,x}) \sinh q_n z + z(M_{n,x}z^2 + N_{n,x}) \cosh q_n z] \\ & + z(J_{0,x}z^2 + K_{0,x}) \cosh k_c z + (L_{0,x} + D_{0,x}) \sinh k_c z. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

The coefficients in (A.41) are obtained by inserting (A.41) into (A.40) except for the coefficient $D_{0,x}$ which is obtained by imposing $U_{2,x}(1/2) = 0$.

Finally, we define $\mathbf{V}_{2,y}$ as the column vector

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{2,y} = & 2 [ik_c^{-1}(k_c^{-2}\mathcal{D}^2 V_1 + P_{2,y}), iRk_c^{-3}U_{2,y}, -k_c^{-2}(V_1/2 + V_{2,y}), ik_c^{-1}W_{2,y}, \\ & ik_c^{-1}\Theta_{2,y}]^T, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

and the set of equations governing $W_{2,y}$ and $\Theta_{2,y}$ is given, as in the absence of a mean through-flow, by

$$(k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1)^2 W_{2,y} - k_c^{-2}\Theta_{2,y} = - (k_c^{-4}\mathcal{D}^4 - 1) W_1, \quad (\text{A.43a})$$

$$(k_c^{-2}\mathcal{D}^2 -) \Theta_{2,y} + k_c^{-2}\mathcal{R}_c^{(\pi/2)}W_2^{(y)} = -\Theta_1. \quad (\text{A.43b})$$

The solution $W_{2,y}$ is sought in the form

$$W_{2,y} = \sum_{n=1}^{n=3} H_{n,y} z \sinh q_n z + C_{n,y} \cosh q_n z, \quad (\text{A.44})$$

where the coefficients $H_{n,y}$ are obtained after eliminating $\Theta_{2,y}$ in (A.43), and the $C_{n,y}$ are determined in the same way as the $C_{n,x}$'s. $\Theta_{2,y}$ is then obtained from (A.43a) and $V_{2,y}$ and $P_{2,y}$ from

$$V_{2,y} = \mathcal{D}W_{2,y}, \quad (\text{A.45a})$$

$$P_{2,y} = (k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1) V_{2,y}. \quad (\text{A.45b})$$

The remaining function $U_{2,y}$ satisfies:

$$(k_c^{-2}\mathcal{D}^2 - 1) U_{2,y} = W_{2,y} \mathcal{D}U_p - U_1. \quad (\text{A.46})$$

It is sought in the form

$$U_{2,y} = \sum_{n=1}^{n=3} [(K_{n,y}z^2 + L_{n,y}) \sinh q_n z + zN_{n,y} \cosh q_n z] + zK_{0,y} \cosh k_c z + D_{0,y} \sinh k_c z, \quad (\text{A.47})$$

where the coefficients are obtained by inserting (A.47) into (A.46), except for $D_{0,y}$ which is obtained by imposing the boundary condition $U_{2,y}(1/2) = 0$.

A.1.5 Third order solvability condition

At order $O(\epsilon^3)$, the following non homogeneous problem for $\mathbf{v}_3 = (p_3, \mathbf{u}_3, \theta_3)^T$ is obtained

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{v}_3 = \mathcal{S}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \quad (\text{A.48})$$

where $\mathcal{S}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = & [\nabla_1 \cdot \mathbf{u}_2, -P^{-1}(\partial_{t_2} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{u}_1) \\ & + R(P^{-1}c - U_p) \partial_{\chi_1} \mathbf{u}_2 - \nabla_1 p_2 + \nabla_1^2 \mathbf{u}_1 + 2\partial_{y_1} \partial_{y_0} \mathbf{u}_2, -\partial_{t_2} \theta_1 \\ & - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_0 \theta_2 - \mathbf{u}_2 \cdot \nabla_0 \theta_1 - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_1 \theta_1 + RP(P^{-1}c - U_p) \partial_{\chi_1} \theta_2 \\ & + \nabla_1^2 \theta_1 + 2\partial_{y_1} \partial_{y_0} \theta_2]^T, \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

with ∇_1 now denoting

$$\nabla_1 = (\partial_{\chi_1}, \partial_{y_1}, 0)^T. \quad (\text{A.50})$$

Homogeneous boundary conditions are imposed at $z = \pm 1/2$ for \mathbf{u}_3 and θ_3 .

The envelope equation (2.I.13) is obtained from the solvability condition:

$$\langle \mathcal{S}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1^* \rangle = 0. \quad (\text{A.51})$$

The various coefficients in (2.I.13) are given by

$$\mu = \mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}} \int_{-1/2}^{1/2} W_1 \Theta_1 dz, \quad (\text{A.52a})$$

$$\xi = 4 \int_{-1/2}^{1/2} [W_1(W_1 - W_{2,y}) + \mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}} \Theta_1(\Theta_1 - \Theta_{2,y}) - k_c^{-4} V_{2,y} \mathcal{D}^2 V_1] dz, \quad (\text{A.52b})$$

$$\begin{aligned} \alpha = & k_c^{-2} \int_{-1/2}^{1/2} [P^{-1}c - U_p] [k_c^{-2} V_1 V_{2,x} + W_1 W_{2,x} + P \mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}} \Theta_1 \Theta_{2,x}] dz \\ & + k_c^{-4} \int_{-1/2}^{1/2} V_1 W_{2,x} \mathcal{D}U_p dz, \end{aligned} \quad (\text{A.52c})$$

$$\begin{aligned}
\eta &= 2k_c^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} [P^{-1}c - U_p] \left[k_c^{-2}V_1(V_1 + V_{2,y}) + W_1W_{2,y} + P\mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}}\Theta_1\Theta_{2,y} \right] dz \\
&+ 2k_c^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} \left[W_1W_{2,x} + \mathcal{R}_c^{(\pi/2)^{-1}}\Theta_1\Theta_{2,x} + k_c^{-4}V_{2,x}\mathcal{D}^2V_1 \right] dz \\
&+ 2k_c^{-3} \int_{-1/2}^{1/2} V_1 [W_1 + W_{2,y}] \mathcal{D}U_p dz. \tag{A.52d}
\end{aligned}$$

A.2 The multiple scale analysis at infinitesimal R

A.2.1 Reynolds number of order $O(\epsilon^{3/2})$

The successive problems at $O(\epsilon)$, $O(\epsilon^{3/2})$, $O(\epsilon^2)$ are identical to the ones obtained in the absence of through-flow. Thus $\mathbf{V}_{1,\varphi}$ in (2.I.29) is given by

$$\mathbf{V}_{1,\varphi} = (P_1, ik_c^{-1}V_1, 0, W_1, \Theta_1)^T, \tag{A.53}$$

with P_1 , V_1 , W_1 and Θ_1 as in appendix A.1. The $O(\epsilon^{3/2})$ solution $\mathbf{v}_{3/2,\varphi}$ is obtained as

$$\mathbf{v}_{3/2,\varphi} = \partial_{y'_{1/2}} A_\varphi \exp\left(ik_c(x'_0 - R_{3/2}c \cos \varphi t_{3/2})\right) [0, k_c^{-2}V_1 \mathbf{e}_{y'}, 0]^T + \text{c. c.}, \tag{A.54}$$

and the $O(\epsilon^2)$ solution $\mathbf{v}_{2,\varphi}$ as

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{2,\varphi} &= A_\varphi^2 \mathbf{V}_{2,2,\varphi}(z) \exp\left(2ik_c(x'_0 - R_{3/2}c \cos \varphi t_{3/2})\right) + (2ik_c^{-1} \partial_{x'_1} A_\varphi \mathbf{V}_{2,x',\varphi}(z) \\
&+ k_c^{-2} \partial_{y'_{1/2}}^2 A_\varphi \mathbf{V}_{2,y',\varphi}(z)) \exp\left(ik_c(x'_0 - R_{3/2}c \cos \varphi t_{3/2})\right) \\
&+ \frac{1}{2} A_\varphi \overline{A_\varphi} \mathbf{V}_{2,0,\varphi}(z) + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{R}_2}{2} z(1-z), 0, 0, 0, \mathcal{R}_2 \left(\frac{1}{2} - z\right) \right]^T + \text{c. c.}, \tag{A.55}
\end{aligned}$$

where

$$\mathbf{V}_{2,2,\varphi} = [(2Pk_c^2)^{-1}(V_1^2 - W_1\mathcal{D}V_1) + P_{2,2}, ik_c^{-1}V_{2,2}, 0, W_{2,2}, \Theta_{2,2}]^T, \tag{A.56a}$$

$$\mathbf{V}_{2,x',\varphi} = [k_c^{-2}\mathcal{D}^2V_1 + P_{2,y}, ik_c^{-1}(V_1/2 + V_{2,y}), 0, W_{2,y}, \Theta_{2,y}]^T \tag{A.56b}$$

$$\mathbf{V}_{2,y',\varphi} = [k_c^{-2}\mathcal{D}^2V_1 + P_{2,y}, ik_c^{-1}(V_1 + V_{2,y}), 0, W_{2,y}, \Theta_{2,y}]^T \tag{A.56c}$$

$$\mathbf{V}_{2,0,\varphi} = [P_{2,0}, 0, 0, 0, \Theta_{2,0}]^T, \tag{A.56d}$$

with all scalar functions of z as defined in appendix A.1.

At order $O(\epsilon^{5/2})$, $\mathbf{v}_{5/2,\varphi} = [p_{5/2,\varphi}, \mathbf{u}_{5/2,\varphi}, \theta_{5/2,\varphi}]^T$ has to satisfy the following inhomogeneous linear problem

$$\mathcal{L}_{0,0} \mathbf{v}_{5/2,\varphi} = \mathcal{S}_{5/2}(\mathbf{v}_{1,\varphi}, \mathbf{v}_{3/2,\varphi}, \mathbf{v}_{2,\varphi}), \tag{A.57}$$

where $\mathcal{L}_{0,0}$ is the linear operator \mathcal{L}_0 evaluated at $R = 0$ and $\mathcal{S}_{5/2}(\mathbf{v}_{1,\varphi}, \mathbf{v}_{3/2,\varphi}, \mathbf{v}_{2,\varphi})$ is given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{5/2} &= \left[0, -P^{-1} \left(\partial_{t_{3/2}} \mathbf{u}_{1,\varphi} + \mathbf{u}_{1,\varphi} \cdot \nabla'_0 \mathbf{u}_{3/2,\varphi} \right) - \partial_{y'_{1/2}} p_2 \mathbf{e}_{y'} - R_{3/2} U_p \cos \varphi \partial_{x'_0} \mathbf{u}_{1,\varphi} \right. \\
&- R_{3/2} \mathcal{D}U_p (\mathbf{u}_{1,\varphi} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_x + \left(2\partial_{x'_1} \partial_{x'_0} + \partial_{y'_{1/2}}^2 \right) \mathbf{u}_{3/2,\varphi}, -\partial_{t_{3/2}} \theta_{1,\varphi} \\
&\left. - R_{3/2} P U_p \cos \varphi \partial_{x'_0} \theta_{1,\varphi} \right]^T, \tag{A.58}
\end{aligned}$$

with

$$\nabla'_0 = (\partial_{x'_0}, 0, \partial_z)^T. \quad (\text{A.59})$$

The solvability condition of (A.57) leads to a non trivial equation which yields the oscillatory behaviour of A_φ on the time scale $t_{3/2}$, with frequency given by equation (2.I.29). The solution $\mathbf{v}_{5/2,\varphi}$ is found to be

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{5/2,\varphi} = & -ik_c^{-1}A_\varphi\partial_{y'_{1/2}}A_\varphi\mathbf{V}_{5/2,2,\varphi}(z)\exp(2ik_c(x'_0 - R_{3/2}c\cos\varphi t_{3/2})) \\ & + \left(ik_c^{-1}R_{3/2}A_\varphi\mathbf{V}_{5/2,x',\varphi}(z) + (2k_c^{-2}\partial_{x'_1}\partial_{y'_{1/2}}A_\varphi - ik_c^{-3}\partial_{y'_{1/2}}^3A_\varphi)\mathbf{V}_{5/2,y',\varphi}(z) \right) \\ & \times \exp(ik_c(x'_0 - R_{3/2}c\cos\varphi t_{3/2})) \\ & + \bar{A}_\varphi\partial_{y'_{1/2}}A_\varphi\mathbf{V}_{5/2,0,\varphi}(z) + \frac{1}{48}\partial_{y'_{1/2}}\mathcal{R}_2\left(\frac{1}{4} - z^2\right)\left(\frac{z^2}{2} - z + \frac{1}{8}\right) + \text{c. c.}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

where

$$\mathbf{V}_{5/2,2,\varphi} = [0, 0, ik_c^{-1}V_{2,2}, 0, 0]^T, \quad (\text{A.61a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{5/2,x',\varphi} = & [(P^{-1}c - U_p)V_1 + W_1\mathcal{D}U_p + P_{2,x})\cos\varphi, ik_c^{-1}V_{2,x}\cos\varphi, \\ & ik_c^{-1}U_1\sin\varphi, W_{2,x}\cos\varphi, \Theta_{2,x}\cos\varphi]^T, \end{aligned} \quad (\text{A.61b})$$

$$\text{and } \mathbf{V}_{5/2,y',\varphi} = [0, 0, ik_c^{-1}(V_1 + V_{2,y}), 0, 0]^T. \quad (\text{A.61c})$$

The determination of $\mathbf{V}_{5/2,0,\varphi}$ is not necessary for the present purpose.

Finally, at order $O(\epsilon^3)$, the inhomogeneous linear problem to be solved is

$$\mathcal{L}_{0,0}\mathbf{v}_{3,\varphi} = \mathcal{S}_3(\mathbf{v}_{1,\varphi}, \mathbf{v}_{3/2,\varphi}, \mathbf{v}_{2,\varphi}, \mathbf{v}_{5/2,\varphi}), \quad (\text{A.62})$$

where $\mathcal{S}_3(\mathbf{v}_{1,\varphi}, \mathbf{v}_{3/2,\varphi}, \mathbf{v}_{2,\varphi}, \mathbf{v}_{5/2,\varphi})$ is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 = & \left[\partial_{x'_1}(\mathbf{u}_{2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{x'}) + \partial_{y'_{1/2}}(\mathbf{u}_{5/2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'}), -P^{-1} \left\{ \partial_{t_2}\mathbf{u}_{1,\varphi} + \partial_{t_{3/2}}\mathbf{u}_{3/2,\varphi} + \mathbf{u}_{2,\varphi} \cdot \nabla'_0\mathbf{u}_{1,\varphi} \right. \right. \\ & + \mathbf{u}_{1,\varphi} \cdot \nabla'_0\mathbf{u}_{2,\varphi} + (\mathbf{u}_{1,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{x'})\partial_{x'_1}\mathbf{u}_{1,\varphi} + (\mathbf{u}_{3/2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'})\partial_{y'_{1/2}}\mathbf{u}_{1,\varphi} \left. \right\} - \partial_{x'_{1/2}}p_{2,\varphi}\mathbf{e}_{x'} \\ & - \partial_{y'_{1/2}}p_{5/2,\varphi}\mathbf{e}_{y'} - R_{3/2}U_p\cos\varphi\partial_{x'_0}\mathbf{u}_{3/2,\varphi} + R_{3/2}U_p\sin\varphi\partial_{y'_{1/2}}\mathbf{u}_{2,\varphi} + \partial_{x'_1}^2\mathbf{u}_{1,\varphi} \\ & + \left(2\partial_{x'_1}\partial_{x'_0} + \partial_{y'_{1/2}}^2 \right) \mathbf{u}_{3/2,\varphi}, -\partial_{t_2}\theta_{1,\varphi} - \mathbf{u}_{2,\varphi} \cdot \nabla'_0\theta_{1,\varphi} - \mathbf{u}_{1,\varphi} \cdot \nabla'_0\theta_{2,\varphi} \\ & - (\mathbf{u}_{1,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{x'})\partial_{x'_1}\theta_{1,\varphi} - (\mathbf{u}_{3/2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'})\partial_{y'_{1/2}}\theta_{1,\varphi} - R_{3/2}P U_p\sin\varphi\partial_{y'_{1/2}}\theta_{1,\varphi} \\ & \left. + \partial_{x'_1}^2\theta_{1,\varphi} + \left(2\partial_{x'_1}\partial_{x'_0} + \partial_{y'_{1/2}}^2 \right) \theta_{2,\varphi} \right]^T. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

The solvability condition for (A.62) then leads to the envelope equation (2.I.30).

A.2.2 Reynolds number of order $O(\epsilon)$

For $R = O(\epsilon)$ the problems at order $O(\epsilon)$ and $O(\epsilon^3/2)$ remain identical to the ones given in appendix A.2.1. At $O(\epsilon^2)$, however, the solution $\mathbf{v}'_{2,\varphi}$ must be modified to include Reynolds-dependent terms:

$$\mathbf{v}'_{2,\varphi} = \mathbf{v}_{2,\varphi} + ik_c^{-1}R_1A_\varphi\mathbf{V}_{5/2,x',\varphi}(z)\exp(ik_c(x'_0 - R_1c\cos\varphi t_1)), \quad (\text{A.64})$$

where the same notation is used as in the previous section. At order $O(\epsilon^{5/2})$, the right hand side of the linear, inhomogeneous problem for $\mathbf{v}'_{5/2,\varphi}$ becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{5/2} = & \left[\partial_{y'_{1/2}}(\mathbf{u}'_{2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'}), -P^{-1} \left(\partial_{t_{3/2}} \mathbf{u}'_{1,\varphi} + \mathbf{u}'_{1,\varphi} \cdot \nabla'_0 \mathbf{u}'_{3/2,\varphi} + \partial_{t_1} \mathbf{u}'_{3/2,\varphi} \right) - \partial_{y'_{1/2}} p'_{2,\varphi} \mathbf{e}_{y'} \right. \\ & + R_1 U_p \sin \varphi \partial_{y'_{1/2}} \mathbf{u}'_{1,\varphi} - R_1 U_p \cos \varphi \partial_{x'_0} \mathbf{u}'_{3/2,\varphi} + \left(2\partial_{x'_1}^2 \partial_{x'_0} + \partial_{y'_{1/2}}^2 \right) \mathbf{u}'_{3/2,\varphi}, \\ & \left. - \partial_{t_{3/2}} \theta'_{1,\varphi} + R_1 P U_p \sin \varphi \partial_{y'_{1/2}} \theta'_{1,\varphi} \right]^T. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

The solvability condition yields the following equation for the envelope A_φ

$$\partial_{t_{3/2}} A_\varphi = R_1 c \sin \varphi \partial_{y'_{1/2}} A_\varphi, \quad (\text{A.66})$$

with its solution given by (2.I.41). Then, $\mathbf{v}'_{5/2,\varphi}$ is found as

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{5/2,\varphi} = & -ik_c^{-1} A_\varphi \partial_{v'_{1/2}} A_\varphi \mathbf{V}_{5/2,2,\varphi}(z) \exp(2ik_c(x'_0 - R_1 c \cos \varphi t_1)) \quad (\text{A.67}) \\ & + k_c^{-2} \left(-R_1 \mathbf{V}'_{5/2,x',\varphi}(z) + (2\partial_{x'_1} - ik_c^{-1} \partial_{v'_{1/2}}^2) \mathbf{V}_{5/2,y',\varphi}(z) \right) \partial_{v'_{1/2}} A_\varphi \\ & \quad \times \exp(ik_c(x'_0 - R_1 c \cos \varphi t_1)) \\ & + \bar{A}_\varphi \partial_{v'_{1/2}} A_\varphi \mathbf{V}_{5/2,0,\varphi}(z) + \frac{1}{48} \partial_{v'_{1/2}} \mathcal{R}_2 \left(\frac{1}{4} - z^2 \right) \left(\frac{z^2}{2} - z + \frac{1}{8} \right) + \text{c. c.}, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_{5/2,x',\varphi} = & \left[(P^{-1}c - U_p)V_1 + W_1 \mathcal{D}U_p + P_{2,x} \right] \sin \varphi, ik_c^{-1}(V_{2,x} + U_1) \sin \varphi, \\ & -ik_c^{-1}(V_{2,x} + U_1) \cos \varphi, W_{2,x} \sin \varphi, \Theta_{2,x} \sin \varphi \Big]^T. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Finally, at order $O(\epsilon^3)$, the right hand side of the linear, inhomogeneous problem is

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_3 = & \left[\partial_{x'_1}(\mathbf{u}'_{2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{x'}) + \partial_{v'_{1/2}}(\mathbf{u}'_{5/2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'}), -P^{-1} \left\{ \partial_{t_2} \mathbf{u}'_{1,\varphi} + \partial_{t_1} \mathbf{u}'_{2,\varphi} + \mathbf{u}'_{2,\varphi} \cdot \nabla'_0 \mathbf{u}'_{1,\varphi} \right. \right. \\ & + \mathbf{u}'_{1,\varphi} \cdot \nabla'_0 \mathbf{u}'_{2,\varphi} + (\mathbf{u}'_{1,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{x'}) \partial_{x'_1} \mathbf{u}'_{1,\varphi} + (\mathbf{u}'_{3/2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'}) \partial_{v'_{1/2}} \mathbf{u}'_{1,\varphi} \left. \right\} - \partial_{x'_1} p'_{2,\varphi} \mathbf{e}_{x'} \\ & - \partial_{v'_{1/2}} p'_{5/2,\varphi} \mathbf{e}_{y'} - R_1 (P^{-1}c - U_p) \sin \varphi \partial_{v'_{3/2}} \mathbf{u}'_{3/2,\varphi} - R_1 U_p \cos \varphi \left(\partial_{x'_0} \mathbf{u}'_{2,\varphi} \right. \\ & + \partial_{x'_1} \mathbf{u}'_{1,\varphi} \Big) + R_1 \mathcal{D}U_p (\mathbf{u}'_{2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_x + \partial_{x'_1}^2 \mathbf{u}'_{1,\varphi} + \left(2\partial_{x'_1} \partial_{x'_0} + \partial_{v'_{1/2}}^2 \right) \mathbf{u}'_{3/2,\varphi}, \\ & - \partial_{t_2} \theta'_{1,\varphi} - \partial_{t_1} \theta'_{2,\varphi} - \mathbf{u}'_{2,\varphi} \cdot \nabla'_0 \theta'_{1,\varphi} - \mathbf{u}'_{1,\varphi} \cdot \nabla'_0 \theta'_{2,\varphi} - (\mathbf{u}'_{1,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{x'}) \partial_{x'_1} \theta'_{1,\varphi} \\ & - (\mathbf{u}'_{3/2,\varphi} \cdot \mathbf{e}_{y'}) \partial_{v'_{1/2}} \theta'_{1,\varphi} - R_1 P U_p \cos \varphi \left(\partial_{x'_1} \theta'_{1,\varphi} + \partial_{x'_0} \theta'_{2,\varphi} \right) + \partial_{x'_1}^2 \theta'_{1,\varphi} \\ & \left. + \left(2\partial_{x'_1} \partial_{x'_0} + \partial_{v'_{1/2}}^2 \right) \theta'_{2,\varphi} \right]^T, \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

from which the envelope equation (2.I.42) is deduced.

Annexe B

Equation de Navier–Stokes dans l’approximation de Boussinesq

B.1 Basic state expansion

The order $O(\varepsilon^0)$ of system (3.I.1), written in a non-dimensionalised form, is:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z W_0 = 0, \\ \partial_x P_0 - PR\partial_z^2 U_0 + PR^2 W_0 \partial_z U_0 = 0, \\ RW_0 \partial_z V_0 - \partial_z^2 V_0 = 0, \\ PR^2 W_0 \partial_z W_0 + \partial_z P_0 - \Theta_0 - PR\partial_z^2 U_0 = 0, \\ \partial_z^2 \Theta_0 - RP\partial_z \Theta_0 = 0, \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

with the following boundary conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_0(z = \pm 1/2) = \mathbf{0}, \\ \Theta_0(z = 1/2) = 0, \\ \Theta_0(z = -1/2) = \mathcal{R}. \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

The solution of system (B.1), involving two unknown functions $F(X, Y)$ and $G(X, Y)$, is:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = \frac{z}{2}(1-z)\mathcal{R} + Fx + G, \\ U_0 = \frac{F}{8RP}(4z^2 - 1), \\ V_0 = 0, \\ W_0 = 0, \\ \Theta_0 = (1/2 - z)\mathcal{R}. \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

The order $O(\varepsilon)$ of system (3.I.1) yields:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z W_1 = -RP\partial_X U_0, \\ \partial_z^2 U_1 = \partial_X P_0, \\ \partial_z^2 V_1 = \partial_Y P_0, \\ \partial_z^2 W_1 - \Theta_1 + \partial_z P_1 = 0, \\ \partial_z^2 \Theta_1 = RPU_0 \partial_X \Theta_0, \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

with the following boundary conditions:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1(z = \pm 1/2) = \mathbf{0}, \\ \Theta_1(z = \pm 1/2) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

System (B.4) leads to a solution involving functions F , G in (B.3) plus a new unknown function $H(X, Y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = \frac{z}{3840} (16z^6 - 16z^5 + 20z^3 - 40z^2 - 13z + 35) F \partial_X \mathcal{R} + H, \\ U_1 = \frac{1}{96} \partial_X \mathcal{R} (z - 1/2) (z + 1/2) (4z^2 - 8z + 1) \\ \quad + \frac{1}{2} \partial_X G (z - 1/2) (z + 1/2), \\ V_1 = \frac{1}{96} \partial_Y \mathcal{R} (z - 1/2) (z + 1/2) (4z^2 - 8z + 1) \\ \quad + \frac{1}{2} \partial_Y G (z - 1/2) (z + 1/2), \\ W_1 = 0, \\ \Theta_1 = \frac{1}{960} (z - 1/2) (z + 1/2) (24z^3 - 20z^2 + 26z - 35) F \partial_X \mathcal{R}. \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

From the solution W_1 , it follows that F has to be a function of Y only. Furthermore, for fixed Y and $|X| \rightarrow 0$, the homogeneous U_0 must be recovered in (B.3). The only F satisfying these conditions is a constant, i.e. $F = -8RP$.

At order $O(\varepsilon^2)$, the continuity equation is:

$$\partial_z W_2 = -\partial_X U_1 - \partial_Y V_1. \quad (\text{B.7})$$

From the boundary conditions:

$$W_2(z = \pm 1/2) = 0, \quad (\text{B.8})$$

G is readily deduced as:

$$G = \frac{1}{40} (\mathcal{R} - \mathcal{R}_\infty). \quad (\text{B.9})$$

B.2 Local properties of the zeroth order stability problem

For the following, we introduce the operator $\mathcal{L}(k_x, k_y, \mathcal{R}(X, Y), \omega)$:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & -ik_x & -ik_y & -\partial_z & 0 \\ & -iP^{-1}\omega & & & \\ ik_x & +iRk_xU_0 & 0 & R\partial_z\widetilde{U}_0 & 0 \\ & +k^2 - \partial_z^2 & & & \\ ik_y & 0 & -iP^{-1}\omega & 0 & 0 \\ & & +iRk_xU_0 & & \\ & & +k^2 - \partial_z^2 & & \\ \partial_z & 0 & 0 & -iP^{-1}\omega & -1 \\ & & & +iRk_xU_0 & \\ & & & +k^2 - \partial_z^2 & \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{R}(X, Y) & -i\omega \\ & & & & +iRPk_xU_0 \\ & & & & +k^2 - \partial_z^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

to abbreviate system (3.I.11) to:

$$\mathcal{L}\widetilde{\mathbf{v}}_0 = \widetilde{\mathbf{0}}. \quad (\text{B.11})$$

It is also useful to introduce the partial derivatives of this local stability problem with respect to k_x , k_y , ω and \mathcal{R} :

$$\mathcal{L}_{k_x} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & iRU_0 + 2k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iRU_0 + 2k_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iRU_0 + 2k_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & iRP U_0 + 2k_x \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{L}_{k_y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 2k_y & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_y \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{L}_{k_x k_x} = \mathcal{L}_{k_y k_y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

$$\mathcal{L}_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iP^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iP^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iP^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

and

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

The derivatives of the local stability problem at order $O(\varepsilon^0)$, where ω is considered as a function of k_x , k_y and \mathcal{R} by virtue of the dispersion relation (3.I.14), lead to:

$$\mathcal{L}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0, \quad (\text{B.17})$$

$$\mathcal{L}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0, \quad (\text{B.18})$$

$$\mathcal{L}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0, \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\partial_{k_x}^2\widehat{\mathbf{v}}_0 &= -\mathcal{L}_{k_x k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_x}^2\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 - 2\mathcal{L}_{k_x}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - 2\partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 - 2\partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_{k_x}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - 2(\partial_{k_x}\omega)^2\mathcal{L}_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\partial_{k_y}^2\widehat{\mathbf{v}}_0 &= -\mathcal{L}_{k_y k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_y}^2\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 - 2\mathcal{L}_{k_y}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - 2\partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 - 2\partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_{k_y}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - 2(\partial_{k_y}\omega)^2\mathcal{L}_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\partial_{k_x}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 &= -\partial_{k_x}\partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{L}_{k_x}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{L}_{k_y}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - \partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_{k_x}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - \partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_{k_y}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - 2\partial_{k_x}\omega\partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\partial_{k_x}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 &= -\partial_{k_x}\partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{L}_{k_x}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{L}_{\mathcal{R}}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - \partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_{k_x}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - \partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_x}\omega\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\ &\quad - 2\partial_{k_x}\omega\partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

and

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\partial_{k_y}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 &= -\partial_{k_y}\partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{L}_{k_y}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{L}_{\mathcal{R}}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
&\quad -\partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_{k_y}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
&\quad -\partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 - \partial_{k_y}\omega\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
&\quad -2\partial_{k_y}\omega\partial_{\mathcal{R}}\omega\mathcal{L}_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

With the internal product

$$L(\widetilde{\mathbf{v}}) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{v}}) \cdot \overline{\widehat{\mathbf{v}}_0^*} dz, \tag{B.25}$$

where $\overline{\widehat{\mathbf{v}}_0^*}$ is the complex conjugate ($-$) solution of the adjoint ($*$) local stability problem, the solvability conditions of equations (B.17–B.24) can be written as:

$$L_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \tag{B.26}$$

$$L_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \tag{B.27}$$

$$L_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{\mathcal{R}}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
L_{k_x k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x}^2\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2L_{k_x}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{k_x}\omega L_\omega\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ 2\partial_{k_x}\omega L_{k_x}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2(\partial_{k_x}\omega)^2 L_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0,
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
L_{k_y k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2L_{k_y}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{k_y}\omega L_\omega\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ 2\partial_{k_y}\omega L_{k_y}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2(\partial_{k_y}\omega)^2 L_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0,
\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{k_x}\partial_{k_y}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{k_x}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x}\omega L_\omega\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ \partial_{k_y}\omega L_{k_x}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{k_y}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y}\omega L_\omega\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ \partial_{k_x}\omega L_{k_y}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{k_x}\omega\partial_{k_y}\omega L_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0,
\end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{k_x}\partial_{\mathcal{R}}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{k_x}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x}\omega L_\omega\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ \partial_{\mathcal{R}}\omega L_{k_x}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{\mathcal{R}}\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{\mathcal{R}}\omega L_\omega\partial_{k_x}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ \partial_{k_x}\omega L_{\mathcal{R}}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{\mathcal{R}}\omega\partial_{k_x}\omega L_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0
\end{aligned} \tag{B.32}$$

and

$$\begin{aligned}
\partial_{k_x}\partial_{k_y}\omega L_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{k_y}\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y}\omega L_\omega\partial_{\mathcal{R}}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ \partial_{\mathcal{R}}\omega L_{k_y}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + L_{\mathcal{R}}\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{\mathcal{R}}\omega L_\omega\partial_{k_y}\widehat{\mathbf{v}}_0 \\
+ \partial_{k_y}\omega L_{\mathcal{R}}\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{\mathcal{R}}\omega\partial_{k_y}\omega L_\omega\partial_\omega\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0.
\end{aligned} \tag{B.33}$$

The solution of the homogeneous problem $\widehat{\mathbf{v}}_0$ can be normalised by $L_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 1$. As $\partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0$, $\partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0$, $\partial_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0$ and $\partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0$ are defined respectively by:

$$\mathcal{L} \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0, \quad (\text{B.34})$$

$$\mathcal{L} \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0, \quad (\text{B.35})$$

$$\mathcal{L} \partial_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0 \quad (\text{B.36})$$

and

$$\mathcal{L} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = -\mathcal{L}_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0. \quad (\text{B.37})$$

they are known up to an arbitrary multiple of $\widehat{\mathbf{v}}_0$. Thus, the additional four conditions can always be imposed:

$$L_\omega \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.38})$$

$$L_\omega \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$L_\omega \partial_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0 \quad (\text{B.40})$$

and

$$L_\omega \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0. \quad (\text{B.41})$$

With these normalisations, (B.29–B.33) reduce to:

$$L_{k_x k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x}^2 \omega + 2L_{k_x} \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{k_x} \omega L_{k_x} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.42})$$

$$L_{k_y k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y}^2 \omega + 2L_{k_y} \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_{k_y} \omega L_{k_y} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \quad (\text{B.43})$$

$$\begin{aligned} \partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega + L_{k_x} \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y} \omega L_{k_x} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 \\ + L_{k_y} \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x} \omega L_{k_y} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

$$\begin{aligned} \partial_{k_x} \partial_{\mathcal{R}} \omega + L_{k_x} \partial_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{\mathcal{R}} \omega L_{k_x} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 \\ + L_{\mathcal{R}} \partial_{k_x} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_x} \omega L_{\mathcal{R}} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

and

$$\begin{aligned} \partial_{k_y} \partial_{\mathcal{R}} \omega + L_{k_y} \partial_{\mathcal{R}} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{\mathcal{R}} \omega L_{k_y} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 \\ + L_{\mathcal{R}} \partial_{k_y} \widehat{\mathbf{v}}_0 + \partial_{k_y} \omega L_{\mathcal{R}} \partial_\omega \widehat{\mathbf{v}}_0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

B.3 Solution in the double turning point region and selection criterion

With the expressions for α , β and δ given in §3.I.4, the equation governing the function $F(\chi, \varphi)$ in (3.I.38) is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_{k_x}^2 \omega^t \frac{\partial^2 F}{\partial \chi^2} + \frac{1}{2} \partial_{k_y}^2 \omega^t \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \partial_{k_x}^2 \omega^t (\alpha \chi + \delta \varphi) \frac{\partial F}{\partial \chi} \\ - \partial_{k_y}^2 \omega^t (\delta \chi + \beta \varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha - \frac{1}{2} \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \right) F = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

In order to transform this partial differential equation into an equivalent set of ODE's, the following ansatz for $F(\chi, \varphi)$ is made:

$$F(\chi, \varphi) = G(d\chi^2 + e\varphi^2 + 2f\chi\varphi) = G(\zeta), \quad (\text{B.48})$$

with $\zeta = d\chi^2 + e\varphi^2 + 2f\chi\varphi$. With this, B.47 is transformed into the following equation for $G(\zeta)$:

$$(\zeta + b_2)G'' + (-a_1\zeta + b_1)G' + (a_0\zeta + b_0)G = 0, \quad (\text{B.49})$$

where the coefficients $d, e, f, a_0, b_0, a_1, b_1$ and b_2 have to be solutions of:

$$\begin{cases} \partial_{k_x}^2 \omega^t d^2 + \partial_{k_y}^2 \omega^t f^2 = \frac{d}{2}, \\ \partial_{k_x}^2 \omega^t f^2 + \partial_{k_y}^2 \omega^t e^2 = \frac{e}{2}, \\ \partial_{k_x}^2 \omega^t df + \partial_{k_y}^2 \omega^t ef = \frac{f}{2}, \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

$$b_2 = 0, \quad (\text{B.51})$$

$$\begin{cases} 2\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha d + \partial_{k_y}^2 \omega^t \delta f = a_1 d, \\ 2\partial_{k_y}^2 \omega^t \beta e + \partial_{k_x}^2 \omega^t \delta f = a_1 e, \\ \partial_{k_x}^2 \omega^t \delta d + \partial_{k_y}^2 \omega^t \delta e + (\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta) f = a_1 f, \end{cases} \quad (\text{B.52})$$

$$b_1 = \partial_{k_x}^2 \omega^t d + \partial_{k_y}^2 \omega^t e, \quad (\text{B.53})$$

$$a_0 = 0, \quad (\text{B.54})$$

$$b_0 = \omega_1 - \frac{1}{2}\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha - \frac{1}{2}\partial_{k_y}^2 \omega^t \beta. \quad (\text{B.55})$$

The case $d = e = f = 0$ implies $F(\chi, \varphi) = \text{const.}$ and therefore

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \frac{1}{2}\partial_{k_y}^2 \omega^t \beta. \quad (\text{B.56})$$

Otherwise, system (B.52) has to degenerate, implying:

$$\begin{aligned} a_1 &= \partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \\ &+ s \left(\left(\partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha - \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \right)^2 + 4\delta^2 \partial_{k_x}^2 \omega^t \partial_{k_y}^2 \omega^t \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

with $s = -1, 0, +1$. The case $s = 0$ leads to $d = e = f = 0$, implying $F(\chi, \varphi) = \text{const.}$ and ω_1 given by (B.56). For $s = \pm 1$ the third equation of system (B.50) implies

$$\partial_{k_x}^2 \omega^t d + \partial_{k_y}^2 \omega^t e = \frac{1}{2} \quad (\text{B.58})$$

or

$$f = 0. \quad (\text{B.59})$$

In the latter case, $\delta = 0$ is a necessary condition to obtain two non-trivial solutions:

$$d = 0, s = -1 \text{ and } \partial_{k_x}^2 \omega^t e = \frac{1}{2} \quad (\text{B.60})$$

or

$$e = 0, s = 1 \text{ and } \partial_{k_y}^2 \omega^t d = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.61})$$

In both cases, (B.58) leads to $b_1 = 1/2$ and equation (B.49) becomes:

$$\zeta G'' + \left(\frac{1}{2} - a_1 \zeta \right) G' + b_0 G = 0, \quad (\text{B.62})$$

where the two different cases $s = \pm 1$ correspond to two different variables ζ_1 and ζ_2 . Omitting the subscript, the solution of equation (B.62) is expressed in terms of degenerate hypergeometric functions:

$$G(\zeta) = C_1 M \left(-\frac{b_0}{a_1}, \frac{1}{2}; a_1 \zeta \right) + C_2 \zeta^{1/2} M \left(-\frac{b_0}{a_1} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; a_1 \zeta \right). \quad (\text{B.63})$$

The two-dimensional function $F(\chi, \varphi)$ is thus transformed into the superposition of two independent one-dimensional functions $G_1(\zeta_1)$ and $G_2(\zeta_2)$. To prevent $A(\chi, \varphi)$ to grow faster than the exponential term in (3.I.38) as $\chi \rightarrow \pm\infty$ or $\varphi \rightarrow \pm\infty$, the functions M must be Hermite polynomials, which is possible if and only if:

$$2 \frac{b_0}{a_1} = n, \quad (\text{B.64})$$

with n a natural integer. Hence,

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \frac{1}{2} \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta + \frac{n}{2} a_1. \quad (\text{B.65})$$

This defines two infinite sets of global modes, in the directions linked to $s = \pm 1$, with a common member for $n = 0$. Large values of n are excluded as they would lead to variations of $A(\chi, \varphi)$ faster than the assumed variations on an $O(\varepsilon^{1/2})$ scale. Furthermore, the finite extent of the absolutely unstable domain should reduce the growth of the instability relative to the absolute growth rate at the top of the bump, i.e. ω should be a decreasing function of ε . The physical and mathematical consistency of the selection criterion and global mode construction requires condition (3.I.40) to hold. The least stable mode is then obtained for $n = 0$, implying $b_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \partial_{k_x}^2 \omega^t \alpha + \frac{1}{2} \partial_{k_y}^2 \omega^t \beta \\ &= \frac{\epsilon_1}{2} (\partial_{\mathcal{R}}^2 \omega^t)^{1/2} \left(\partial_X^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_x}^2 \omega^t + \partial_Y^2 \mathcal{R}^t \partial_{k_y}^2 \omega^t + 2\epsilon_2 \Lambda \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

and

$$M \left(0, \frac{1}{2}; a_1 \zeta \right) = 1. \quad (\text{B.67})$$

The case $F = \text{const.}$ is then recovered and the amplitude $A(\chi, \varphi)$ given by:

$$A = \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \chi^2 - \frac{\beta}{2} \varphi^2 - \delta \chi \varphi \right). \quad (\text{B.68})$$

B.4 Evaluation of global modes

B.4.1 Eigenmode of the local stability problem

Locally, the zeroth order of the global mode is the solution of the homogeneous RBP linear stability problem with $\mathcal{R} = \mathcal{R}(X, Y)$. Taking the double curl of the momentum equation and using the continuity equation, a system of two coupled equations involving w the vertical component of the perturbation velocity and θ the perturbation temperature is obtained:

$$\begin{cases} -P^{-1}\partial_t\nabla^2w - R(U_0\nabla^2 - d_z^2U_0)\partial_xw + (\partial_x^2\theta + \partial_y^2\theta) + \nabla^4w = 0, \\ \partial_t\theta + RPU_0\partial_x\theta - \mathcal{R}w - (\partial_x^2\theta + \partial_y^2\theta) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.69})$$

with the following boundary conditions:

$$w(\pm 1/2) = \partial_z w(\pm 1/2) = \theta(\pm 1/2) = 0 \quad (\text{B.70})$$

The solution is sought in the normal mode form:

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(z) \\ \theta(z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t) + \text{c.c.}, \quad (\text{B.71})$$

leading to the system of ordinary equation in z

$$\mathcal{A}X = \omega\mathcal{B}X, \quad (\text{B.72})$$

with

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} ik_x R(U_0(k^2 - d_z^2) + d_z^2 U_0) + (k^2 - d_z^2)^2 & -k^2 \\ -\mathcal{R} & ik_x RPU_0 + (k^2 - d_z^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.73})$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} iP^{-1}(k^2 - d_z^2) & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (\text{B.74})$$

and

$$X = \begin{pmatrix} w(z) \\ \theta(z) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.75})$$

Using the continuity equation and the definition of the vorticity, the remaining components of the velocity u and v are deduced from w and ω_z , the z -component of the vorticity $\boldsymbol{\omega}$ by:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{k^2} (ik_x d_z w - ik_y \omega_z), \\ v = \frac{1}{k^2} (ik_y d_z w - ik_x \omega_z), \end{cases} \quad (\text{B.76})$$

where ω_z is solution of the generalised Squire equation:

$$d_z \omega_z + (i\omega P^{-1} - iRk_x U_0(z) - k^2) \omega_z = iRk_y d_z U_0 w \quad (\text{B.77})$$

with the boundary conditions:

$$\omega_z(\pm 1/2) = 0 \quad (\text{B.78})$$

B.4.2 Calculation of the turning points

At the double-turning point, the problem (B.72) is solved using a tau-collocation spectral method with Chebychev polynomials in the z -direction. For given R , P and \mathcal{R}^t , this turning point is defined in the complex (k_x, k_y) space by the condition (3.I.28) and dispersion relation (3.I.14). Using the internal product (B.25) with X normalised by $BX=1$, the solvability conditions of the derivatives of problem (B.72) with respect to k_x and k_y leads to:

$$\begin{cases} \partial_{k_x} \omega = A_{k_x} X - B_{k_x} X, \\ \partial_{k_y} \omega = A_{k_y} X - B_{k_y} X, \end{cases} \quad (\text{B.79})$$

with A_{k_x} , B_{k_x} , A_{k_y} and B_{k_y} defined analogous to appendix B.2. Numerically, the turning point is found by a Newton method where the $(i+1)$ -th iteration of (k_x, k_y) is deduced from the i -th value by:

$$\begin{cases} k_x^{(i+1)} = k_x^{(i)} + \frac{\partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^{(i)} \partial_{k_y} \omega^{(i)} - \partial_{k_y}^2 \omega^{(i)} \partial_{k_x} \omega^{(i)}}{\partial_{k_x}^2 \omega^{(i)} \partial_{k_y}^2 \omega^{(i)} - (\partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^{(i)})^2}, \\ k_y^{(i+1)} = k_y^{(i)} + \frac{\partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^{(i)} \partial_{k_x} \omega^{(i)} - \partial_{k_x}^2 \omega^{(i)} \partial_{k_y} \omega^{(i)}}{\partial_{k_x}^2 \omega^{(i)} \partial_{k_y}^2 \omega^{(i)} - (\partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^{(i)})^2}. \end{cases} \quad (\text{B.80})$$

The second order derivatives of ω with respect to k_x and k_y are given by the solvability conditions of second order derivatives of the stability problem:

$$\begin{cases} \partial_{k_x}^2 \omega = 2A_{k_x} \partial_{k_x} X + A_{k_x k_x} X - 2\partial_{k_x} \omega (B_{k_x} X + B \partial_{k_x} X) - 2\omega B_{k_x} \partial_{k_x} X \\ \quad - \omega B_{k_x k_x} X, \\ \partial_{k_y}^2 \omega = 2A_{k_y} \partial_{k_y} X + A_{k_y k_y} X - 2\partial_{k_y} \omega (B_{k_y} X + B \partial_{k_y} X) - 2\omega B_{k_y} \partial_{k_y} X \\ \quad - \omega B_{k_y k_y} X, \\ \partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega = A_{k_x} \partial_{k_y} X + A_{k_y} \partial_{k_x} X + A_{k_x k_y} X - \partial_{k_x} \omega (B_{k_y} X + B \partial_{k_y} X) \\ \quad - \partial_{k_y} \omega (B_{k_x} X + B \partial_{k_x} X) - \omega (B_{k_x} \partial_{k_y} X + B_{k_y} \partial_{k_x} X). \end{cases} \quad (\text{B.81})$$

It is checked that, in all the case studied, the double turning-point condition (3.I.28) imposes $k_y^t = 0$, and therefore $\partial_{k_x} \partial_{k_y} \omega^t = 0$. The value of ω_0 is given by the resolution of problem (B.69) at the double turning point. The evaluation of $\varepsilon\omega_1$, $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$ and $\varepsilon\delta$, leading to the inner solution (3.I.38), requires the value of

$$\partial_{\mathcal{R}} \omega^t = A_{\mathcal{R}}^t X^t \quad (\text{B.82})$$

in addition to the values of system (B.81) at the double turning point. To expressed the selection criterion in terms of the critical Reynolds number R_{crit} , the latter is determined by a Newton method on $\mathfrak{S}(\omega)$, where the $(i+1)$ -th iteration of R is given by:

$$R^{(i+1)} = R^{(i)} - \frac{\mathfrak{S}(\omega^{(i)})}{\mathfrak{S}(\partial_R \omega^{(i)})}, \quad (\text{B.83})$$

where

$$\partial_R \omega = A_R X, \quad (\text{B.84})$$

with A_R defined as in appendix B.2

Bibliographie

- [1] <http://earthobservatory.nasa.gov>.
- [2] M. ABRAMOVITZ et I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, 1964.
- [3] M. AKIYAMA, G. J. HWANG, et K. C. CHENG. Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates. *J. Heat Transfer*, 93 :335–341, 1971.
- [4] P. ALBARÈDE et P. A. MONKEWITZ. A model for the formation of oblique shedding and "chevron" patterns in cylinder wakes. *Phys. Fluids A*, 4(4) :744–756, 1992.
- [5] I. S. ARANSON et L. KRAMER. The world of the complex Ginzburg–Landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74 :99–143, 2002.
- [6] Y. BAR-SEVER et L. O. MERKINE. Local instabilities of weakly nonparallel large scale flows : WKB analysis. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 41 :233–286, 1988.
- [7] H. BÉNARD. Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. gén. Sci. pur. appl.*, 11 :1261–1271, 1309–1328, 1900.
- [8] H. BÉNARD. *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences de Paris, 1901.
- [9] C. M. BENDER et S. A. ORSZAG. *Advanced mathematical methods for scientifics and engineers*. McGraw-Hill, New-York, 1978.
- [10] A. BERS. Linear waves and instabilities. Dans C. DEWITT et J. PEYRAUD, éditeurs, *Physique des Plasmas*, pages 117–215. Gordon & Breach, New York, 1975.
- [11] A. BERS. Space-time evolution of plasma instabilities – absolute and convective. Dans M. N. ROSENBLUTH et R. Z. SAGDEEV, éditeurs, *Handbook of Plasma Physics*, volume 1, pages 451–517. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [12] E. BODENSCHATZ, W. PESCH, et G. AHLERS. Recent developments in Rayleigh–Bénard convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :709–778, 2000.

- [13] J. BOUSSINESQ. *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courants de convection.* Gauthier-Villars, 1903.
- [14] L. BREVDO. Three-dimensional absolute and convective instabilities, and spatially amplifying waves in parallel shear flows. *Z. Angew. Math. Phys.*, 42 :911–942, 1991.
- [15] R. J. BRIGGS. *Electron-Stream Interaction With Plasmas.* MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.
- [16] L. BRILLOUIN. La mécanique ondulatoire de Schrödinger ; une méthode générale de résolution par approximations successives. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 183 :24–26, 1926.
- [17] L. BRILLOUIN. Remarques sur la mécanique ondulatoire. *J. Phys. Radium*, VII(12) :353–368, 1926.
- [18] D. BRUNT. Experimental cloud formation. Dans *Compendium of Meteorology*, pages 1255–1262. American Meteorological Society, Boston, 1951.
- [19] F. H. BUSSE. Non linear properties of thermal convection. *Rep. Prog. Phys.*, 41 :1929–1967, 1978.
- [20] F. H. BUSSE. Fundamental of thermal convection. Dans W. R. PELTIER, éditeur, *Mantle Convection : Plate Tectonics and Global Dynamics*, pages 23–95. Gordon & Breach, Montreux, 1989.
- [21] F. H. BUSSE et R. M. CLEVER. Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number. *J. Fluid Mech.*, 91, 1979.
- [22] S. CARNOT. *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu et sur les Machines Propres à Développer cette Puissance.* Bachelier, Paris, 1824.
- [23] Ph. CARRIÈRE. Instabilités en convection mixte. Mélange par advection chaotique. Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard Lyon I, 2000.
- [24] Ph. CARRIÈRE et P. A. MONKEWITZ. Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh–Bénard–Poiseuille convection. *J. Fluid Mech.*, 384 :243–262, 1999.
- [25] Ph. CARRIÈRE et P. A. MONKEWITZ. Transverse-roll global modes in a Rayleigh–Bénard–Poiseuille system with streamwise variable heating. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 20 :751–770, 2001.
- [26] Ph. CARRIÈRE, P. A. MONKEWITZ, et D. MARTINAND. Envelope equation for the Rayleigh–Bénard–Poiseuille system. Part I : Spatially homogeneous case. submitted to *J. Fluid Mech.*, 2003.
- [27] D. C. CHAMPENEY. *Fourier Transforms and their Physical Applications.* Academic Press, 1973.

- [28] S. CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, Oxford, 1961.
- [29] M. Y. CHANG, C. H. YU, et T. F. LIN. Flow visualization and numerical simulation of transverse and mixed vortex roll formation in mixed convection of air in a horizontal flat duct. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40(8) :1907–1922, 1997.
- [30] S. S. CHEN et A. S. LAVINE. Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39(1) :1–11, 1996.
- [31] J.-M. CHOMAZ, P. HUERRE, et L. G. REDEKOPP. A Frequency Selection Criterion in Spatially Developing Flows. *Stud. App. Math.*, 84 :119–144, 1991.
- [32] P. G. DRAZIN. Kelvin–Helmoltz instability of a slowly varying flow. *J. Fluid Mech.*, 65 :781–797, 1974.
- [33] P. G. DRAZIN. On a model of instability of a slowly-varying flow. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 27 :69–86, 1974.
- [34] K. FUJIMURA et R. E. KELLY. Interaction between longitudinal convection rolls and transverse waves in unstably stratified plane Poiseuille flow. *Phys. Fluids*, 7(1) :68–79, 1995.
- [35] K. FUKUI, M. NAKAJIMA, et H. HUEDA. The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26(1) :109–120, 1983.
- [36] K. S. GAGE et W. H. REID. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 33 :21–32, 1968.
- [37] P. HUERRE et P. A. MONKEWITZ. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.*, 159 :151–168, 1985.
- [38] P. HUERRE et P. A. MONKEWITZ. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :473–537, 1990.
- [39] R. E. HUNT et D. G. CRIGHTON. Instability of flows in spatially developing media. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 435 :109–128, 1991.
- [40] M. JAMMER. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. McGraw–Hill, New York, 1966.
- [41] H. JEFFREYS. On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order. *Proc. London Math. Soc. (2nd ser.)*, 23 :428–436, 1925.
- [42] K. F. JENSEN, E. O. EINSET, et D. I. FOTIADIS. Flow phenomena in chemical vapor deposition of thin films. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23 :197–233, 1991.

- [43] C. A. JONES, A. M. SOWARD, et A. I. MUSSA. The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, 405 :157–179, 2000.
- [44] D. D. JOSEPH. *Stability of Fluid Motions*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [45] R. E. KELLY. The onset and development of thermal convection in fully developed shear flows. *Adv. Appl. Mech.*, 31 :35–112, 1994.
- [46] W. KOCH. Local instability characteristics and frequency determination of self-excited wake flows. *J. Sound Vibration*, 99 :53–58, 1985.
- [47] E. L. KOSCHMIEDER et S. G. PALLAS. Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. *Int. J. heat Mass Transfer*, 17 :991–1002, 1974.
- [48] H. A. KRAMERS. Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung. *Z. Phys.*, 39 :828–840, 1926.
- [49] L. LANDAU. On the Problem of Turbulence. Dans *Collected Papers of L. D. Landau*, page 387. Gordon and Breach, New York, 1944.
- [50] S. LE DIZÈS, P. HUERRE, J.-M. CHOMAZ, et P. A. MONKEWITZ. Linear global modes in spatially developing media. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 354 :169–212, 1996.
- [51] R. J. LINGWOOD. Absolute instability of the boundary layer on a rotating disk. *J. Fluid Mech.*, 299 :17–33, 1995.
- [52] R. J. LINGWOOD. An experimental study of absolute instability of a rotating-disk boundary-layer flow. *J. Fluid Mech.*, 314 :373–405, 1996.
- [53] J. M. LUIJKX, J. K. PLATTEN, et J.-C. LEGROS. On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24(7) :1287–1291, 1981.
- [54] W. V. R. MALKUS et G. VERONIS. Finite amplitude cellular convection. *J. Fluid Mech*, 4 :225–260, 1958.
- [55] P. MANNEVILLE. *Structures dissipatives, Chaos et Turbulence*. Commissariat à l’Energie Atomique, Gif-sur-Yvette, 1991.
- [56] D. MARTINAND. *Détermination analytique des modes globaux tridimensionnels en écoulement de convection mixte du type Rayleigh–Bénard–Poiseuille*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I, 2003.
- [57] D. MARTINAND, Ph. CARRIÈRE, et P. A. MONKEWITZ. Envelope equation for the Rayleigh–Bénard–Poiseuille system. Part II : Linear global modes in the case of two-dimensional non-uniform heating. submitted to *J. Fluid Mech.*, 2003.
- [58] V. P. MASLOV et M. V. FEDORIUK. *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics*. D. Reidel, Dordrecht, 1981.

- [59] N. MEUNIER, M. R. E. PROCTOR, D. D. SOKOLOV, A. M. SOWARD, et S. M. TOBIAS. Asymptotic properties of a nonlinear $\alpha\omega$ -dynamo wave : period, amplitude and latitude dependence. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 86 :249–285, 1997.
- [60] P. A. MONKEWITZ, D. W. BECHERT, B. BARSIKOW, et B. LEHMANN. Self-excited oscillations and mixing in heated round jets. *J. Fluid Mech.*, 213 :611–639, 1990.
- [61] P. A. MONKEWITZ, P. HUERRE, et J.-M. CHOMAZ. Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 288 :1–20, 1993.
- [62] H. W. MÜLLER. *Thermische Konvektion in Horizontaler Scherströmung*. Thèse de doctorat, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1990.
- [63] H. W. MÜLLER, M. LÜCKE, et M. KAMPS. Transversal convection patterns in horizontal shear flow. *Phys. Rev. A*, 45 :3714–3726, 1992.
- [64] H. C. NATAF et J. SOMMERIA, éditeurs. *La Physique et la Terre*. Belin – C.N.R.S Edition, Paris, 2000.
- [65] A. C. NEWELL et J. A. WHITEHEAD. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38 :279–303, 1969.
- [66] X. NICOLAS. Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas. *Int. J. Therm. Sci.*, 2002. A paraître.
- [67] A. OBERBECK. Ueber die Wärmeleitung des Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Ann. Phys. Chem.*, 7 :271–292, 1879.
- [68] S. OSTRACH et Y. KAMOTANI. Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below. *J. Heat Transfer*, 97 :220–225, 1975.
- [69] M. T. OUAZZANI, J. P. CATALGIRONE, G. MEYER, et A. MOJTABI. Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32(2) :261–269, 1989.
- [70] M. T. OUAZZANI, J. K. PLATTEN, et A. MOJTABI. Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes–II. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 33(7) :1417–1427, 1990.
- [71] M. T. OUAZZANI, J. K. PLATTEN, H. W. MÜLLER, et M. LÜCKE. Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à température différentes–III. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38(5) :875–886, 1995.
- [72] E. PALM. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. *J. Fluid Mech.*, 38 :183–192, 1960.

- [73] J. R. A. PEARSON. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 73 :215–240, 1958.
- [74] A. PELLEW et R. V. SOUTHWELL. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc. A*, 176 :312–343, 1940.
- [75] B. PIER et P. HUERRE. Nonlinear self-sustained structures and fronts in spatially developing wake flow. *J. Fluid Mech.*, 435 :145–174, 2001.
- [76] B. PIER, P. HUERRE, et J.-M. CHOMAZ. Bifurcation to fully nonlinear synchronized structures in slowly varying media. *Physica D*, 148 :49–96, 2001.
- [77] R. T. PIERREHUMBERT. Local and global baroclinic instability of zonally varying flows. *J. Atmos. Sci.*, 41 :2141–2162, 1984.
- [78] J. K. PLATTEN. A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients. *Int. J. Eng. Sci.*, 9 :855–869, 1971.
- [79] J. K. PLATTEN et J.-C. LEGROS. *Convection in Liquids*. Springer, Berlin, 1984.
- [80] A. D. POLYANIN et V. F. ZAITSEV. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.
- [81] W. PROUT. *Bridgewater Treatises*. W. Pickering, London, 1834.
- [82] M. PROVANSAL, C. MATHIS, et L. BOYER. Bénard-vonKármán instability : transient and forced regimes. *J. Fluid Mech.*, 182 :1–22, 1987.
- [83] Lord RAYLEIGH. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.*, 32 :529–546, 1916.
- [84] F. M. RICHTER. Convection and the large scale circulation of the mantle. *Geophys. Res.*, 78 :8735–8745, 1973.
- [85] Count RUMFORD. *Of the Propagation of Heat in Fluids. Complete Works*, volume 1. American Academy of Art and Sciences, Boston, 1870.
- [86] C. SCHÄR et R. B. SMITH. Shallow-water flow past isolated topography. Part II. Transition to vortex shedding. *J. Atmos. Sci.*, 50 :1401–1428, 1993.
- [87] A. SCHLÜTER, D. LORTZ, et F. H. BUSSE. On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 23 :129–144, 1965.
- [88] E. SCHRÖDER et K. BÜHLER. Three-dimensional convection in rectangular domains with horizontal throughflow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38(7) :1249–1259, 1995.
- [89] L. A. SEGEL. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 38 :203–224, 1969.
- [90] E. D. SIGGIA et A. ZIPPELIUS. Pattern selection in rayleigh–bénard convection near threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :835–838, 1981.

- [91] P. L. SILVESTON. Aärmedurchgang in waagerechten flüssigkeitsschichten. *Forsch. Ingenieurwes.*, 24 :29–32, 59–69, 1958.
- [92] V. S. SOROKIN. Variational method in the theory of convection. *Prikl. Mat. Mekh.*, 17 :39, 1953.
- [93] V. S. SOROKIN. Stationary motions in a fluid heated from below. *Prikl. Mat. Mekh.*, 18 :197, 1954.
- [94] A. M. SOWARD et C. A. JONES. The linear stability of the flow in the narrow gap between two concentric rotating spheres. *Q. J. Mech. appl. Math.*, 36(1) :19–42, 1983.
- [95] K. STEWARTSON et J. T. STUART. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 48 :529–545, 1971.
- [96] P. J. STRYKOWSKI et D. L. NICCUM. The stability of countercurrent mixing layers in circular jets. *J. Fluid Mech.*, 227 :309–343, 1991.
- [97] J. T. STUART. Non-linear mechanics of disturbances in parallel flows : part I. *J. Fluid Mech.*, 9 :353–370, 1960.
- [98] J. THOMSON. On a changing tessellated structure in certain liquids. *Proc. Phil. Soc. Glasgow*, 13 :464–468, 1882.
- [99] J. H. van VLECK. The correspondance principle in the statistical interpretation of quantum mechanics. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 14 :178–188, 1928.
- [100] I. C. WALTON. The effect of a shear flow on convection in a layer heated non-uniformly from below. *J. Fluid Mech.*, 154 :303–319, 1985.
- [101] W. WASOW. *Linear Turning Point Theory*. Springer, New York, 1985.
- [102] G. WENTZEL. Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik. *Z. Phys.*, 38 :518–529, 1926.
- [103] D. B. WHITE. The planforms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity. *J. Fluid Mech.*, 191 :247–286, 1988.
- [104] B. M. WOODLEY et N. PEAKE. Global linear stability analysis of thin aerofoil wakes. *J. Fluid Mech.*, 339 :239–260, 1997.
- [105] P. A. YAKUBENKO. Global capillary instability of an inclined jet. *J. Fluid Mech.*, 346 :181–200, 1997.
- [106] C. H. YU, M. Y. CHANG, C. C. HUANG, et T. F. LIN. Structures of moving transverse and mixed rolls in mixed convection of air in a horizontal plane channel. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40(2) :333–346, 1997.

Cette étude concerne la détermination analytique de l'évolution spatio-temporelle des modes linéaires d'instabilité thermo-convective dans une couche de fluide horizontale chauffée par le bas (système de Rayleigh–Bénard) et soumise à un gradient de pression (écoulement de Poiseuille). L'originalité réside dans l'inhomogénéité de la température de la plaque inférieure présentant une bosse bidimensionnelle. Cette inhomogénéité et le flux moyen de l'écoulement de Rayleigh–Bénard–Poiseuille ainsi obtenu rompent les symétries du problème de convection pure et amène à considérer des modes spatialement localisés d'instabilité en rouleaux. Un mode synchronisé se développant sur une telle configuration est appelé mode global. L'échelle spatiale caractéristique des variations de la bosse de température étant supposée grande devant celle de la longueur d'onde des rouleaux, les modes globaux sont cherchés sous la forme de modes propres dans la direction de confinement, modulés par un développement WKBJ bidimensionnel dans les directions horizontales lentement variables. Un tel développement ne peut être valable aux points où la vitesse de groupe de l'instabilité s'annule, ou points tournants. Au voisinage d'un tel point situé au sommet de la bosse de température, le caractère borné de la solution, cherchée sous la forme d'un développement intermédiaire, impose un critère de sélection donnant taux de croissance (ou de façon équivalente seuil critique), fréquence et vecteur d'onde du mode global. Cette étude généralise à des cas bidimensionnels les méthodes utilisées et les résultats obtenus pour des inhomogénéités unidimensionnelles. Une telle approche est d'abord appliquée à une équation dynamique simplifiée obtenue par le formalisme d'enveloppe. Les résultats analytiques sont comparés à des simulations numériques de cette équation. Puis ces modes globaux sont déterminés pour un écoulement décrit par les équations de Navier–Stokes dans l'approximation de Boussinesq.

Mots clés : convection thermique, instabilités convectives et absolues, modes globaux.

Analytical evaluation of three-dimensional global modes in mixed Rayleigh–Bénard–Poiseuille convection flow.

This analytical study deals with the spatio-temporal evolution of linear thermo-convective instabilities in a horizontal fluid layer heated from below (the Rayleigh–Bénard system) and subject to a horizontal pressure gradient (Poiseuille flow). The novelty consists of a spatially inhomogeneous temperature, in the form of a two-dimensional bump imposed on the lower plate, while the upper plate is kept at a constant temperature. The inhomogeneous boundary temperature and the mean flow of the Rayleigh–Bénard–Poiseuille system break the symmetries of the classical Rayleigh–Bénard system. The instabilities of interest are therefore spatially localised packets of convection rolls. If a mode of this type is synchronised, it is called a global mode. Assuming that the characteristic scale of the spatial variation of the lower plate temperature is large compared to the wavelength of the rolls, global modes are sought in the form of eigenmodes in the confined vertical direction, modulated by a two-dimensional WKBJ expansion in the slowly-varying horizontal directions. Such an expansion breaks down at points where the group velocity of the instability vanishes, i.e. at WKBJ turning points. In the neighbourhood of one such point, located at the top of the temperature bump, the boundedness of the solution imposes a selection criterion for the global modes which provides the growth rate (or equivalently the critical threshold), the frequency and the wave vector of the most amplified global mode. This study thus generalises to two-dimensional cases the methods used and the results obtained for one-dimensional inhomogeneities. The analysis is first applied to a simplified governing equation obtained by an envelope formalism and the analytical results are compared with numerical solutions of the amplitude equation. The formalism is finally applied to the Rayleigh–Bénard–Poiseuille system described by the Navier–Stokes equations with the Boussinesq approximation.

Key words: thermal convection, convective and absolute instabilities, global modes.

Discipline: Mécanique.

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique UMR 5509
École Centrale de Lyon, Université Lyon I, INSA Lyon
36, avenue Guy de Collongue
69131 ECULLY CEDEX