



**HAL**  
open science

# Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles

Damien Chablat

► **To cite this version:**

Damien Chablat. Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 1998. Français. NNT : . tel-00003471

**HAL Id: tel-00003471**

**<https://theses.hal.science/tel-00003471v1>**

Submitted on 15 Oct 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE  
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR  
DE NANTES

Année 1998

Thèse de **Doctorat**

Discipline : Sciences de l'Ingénieur

Spécialité : Génie Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

**Damien CHABLAT**

le 6 novembre 1998

à l'École Centrale de Nantes

**Domaines d'unicité et parcourabilité**  
**pour les manipulateurs pleinement parallèles**

Jury :

Rapporteur	Jean-Pierre Merlet	Directeur de recherche INRIA, Sophia Antipolis
Rapporteur	Jean-Paul Lallemand	Professeur, LMS, Poitiers
Examineur	Patrick Chedmail	Professeur, IRCyN, Nantes
Examineur	Claude Reboulet	Chercheur ONERA, CERT, Toulouse
Examineur	Jorge Angeles	Professeur, Université Mc Gill, Montréal
Examineur	Philippe Wenger	Chargé de recherche CNRS, IRCyN, Nantes

Directeur de thèse : Philippe Wenger

Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes, UMR 6597

1, rue de la Noë, B.P. 92101, 44321 Nantes Cedex 3

N° ED 82-333

---

Il ne faut jamais avoir peur d'aller trop loin,  
car la vérité est au-delà.

**Marcel Proust**

## **REMERCIEMENTS**

Ce travail a été réalisé pendant mes trois années de thèse à l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes dirigé par Michel Guglielmi.

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de recherche Philippe Wenger qui a su m'intégrer dans l'équipe CMAO-Productique de l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes. Ses qualités scientifiques et humaines m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie très sincèrement les membres de mon jury et surtout mes rapporteurs, Jean-Paul Lallemand et Jean-Pierre Merlet d'avoir accepté de relire ce mémoire.

Je remercie Jorge Angeles pour m'avoir fait confiance en travaillant avec moi pendant son séjour à Nantes et pour les contacts que nous avons pu établir pendant toute ma thèse.

Je n'oublie pas mes collègues de thèse et principalement Laurent pour ses lumières en informatique et Fouad pour les nombreux déjeuners de travail.

Mes derniers remerciements iront pour ma famille et surtout pour mon épouse Virginie qui m'ont soutenu pendant mes études et surtout ces trois années de thèse.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE.....</b>	<b>14</b>
<b>1. CINÉMATIQUE ET CONCEPTION DES MANIPULATEURS PARALLÈLES .....</b>	<b>17</b>
1.1. Introduction.....	17
1.2. Les manipulateurs pleinement parallèles.....	17
1.3. Configurations et postures.....	24
1.4. Espace articulaire et espace opérationnel .....	26
1.5. Les modèles géométriques inverse et direct .....	27
1.5.1. <i>Le modèle géométrique inverse</i> .....	27
1.5.2. <i>Le modèle géométrique direct</i> .....	28
1.6. L'ensemble articulaire et l'espace de travail .....	30
1.6.1. <i>L'ensemble articulaire</i> .....	30
1.6.2. <i>L'espace de travail</i> .....	32
1.7. Singularités .....	34
1.7.1. <i>Méthode analytique</i> .....	34
1.7.2. <i>Méthode géométrique</i> .....	40
1.7.3. <i>Conclusion</i> .....	41
1.8. Objectifs des domaines d'unicité.....	42
1.9. Conclusion.....	44
<b>2. LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES SIMPLES .....</b>	<b>45</b>
2.1. Introduction.....	45
2.2. Rappel : Les aspects pour les manipulateurs sériels.....	46
2.3. Les aspects pour les manipulateurs pleinement parallèles simples .....	48
2.3.1. <i>Définition</i> .....	48
2.3.2. <i>Application au manipulateur plan 2-RPR</i> .....	49
2.3.3. <i>Application au manipulateur plan 3-RPR</i> .....	51
2.4. Rappel : Les domaines d'unicité pour les manipulateurs sériels.....	55
2.5. Les domaines d'unicité pour les manipulateurs pleinement parallèles simples .....	57
2.5.1. <i>Problématique</i> .....	57
2.5.2. <i>Les surfaces caractéristiques</i> .....	60

---

2.5.3. Les régions de base et les composantes de base.....	61
2.5.4. Les régions associées.....	65
2.5.5. Les plus grands domaines d'unicité .....	65
2.5.6. Application au manipulateur plan 3- <u>RPR</u> .....	66
2.6. Changement de mode d'assemblage : Interprétation .....	70
2.6.1. Trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage.....	71
2.6.2. Trajectoire singulière de changement de mode d'assemblage.....	75
2.6.3. Application à la planification de trajectoires.....	76
2.7. Conclusion .....	78
<b>3. LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES : CAS GÉNÉRAL.....</b>	<b>79</b>
3.1. Introduction.....	79
3.2. Les modes de fonctionnement .....	80
3.2.1. Définition .....	80
3.2.2. Exemples .....	81
3.3. Problématique.....	82
3.3.1. Utilisation de la notion d'aspects au sens de la définition 21.....	84
3.3.2. Utilisation de la notion d'aspects au sens de Borrel.....	86
3.3.3. Conclusion.....	89
3.4. La notion d'aspect généralisé .....	89
3.4.1. Les aspects généralisés.....	90
3.4.2. <i>W</i> - aspect .....	90
3.4.3. <i>Q</i> - aspect.....	91
3.4.4. Application au manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	91
3.4.5. Application des modes de fonctionnement et des aspects généralisés .....	95
3.4.6. Application au manipulateur plan 3- <u>RRR</u> .....	101
3.4.7. Application au manipulateur spatial Delta .....	105
3.5. Les domaines d'unicité .....	109
3.5.1. Changement de mode d'assemblage.....	109
3.5.2. Les surfaces caractéristiques.....	111
3.5.3. Les régions de base et domaines de base .....	112
3.5.4. Les domaines d'unicité les plus grands.....	113
3.5.5. Conclusion.....	113

---

3.6. Conclusion.....	113
<b>4. PRISE EN COMPTE DES COLLISIONS : LES ASPECTS LIBRES.....</b>	<b>115</b>
4.1. Introduction.....	115
4.2. Rappel : Influence des obstacles pour les manipulateurs sériels .....	116
4.2.1. <i>Espace de travail libre et espace des configurations libres</i> .....	116
4.2.2. <i>Les aspects libres</i> .....	117
4.3. Influence des obstacles pour les manipulateurs parallèles.....	118
4.3.1. <i>Volume du manipulateur</i> .....	118
4.3.2. <i>Collisions internes</i> .....	119
4.3.3. <i>Collisions externes</i> .....	120
4.3.4. <i>Les espaces libres</i> .....	121
4.3.5. <i>Application au manipulateur <math>\underline{RR}</math>-<math>\underline{RRR}</math></i> .....	122
4.4. Les aspects libres .....	124
4.4.1. <i>Définition</i> .....	125
4.4.2. <i>Les <math>W</math> - aspects libres</i> .....	125
4.4.3. <i>Les <math>Q</math> - aspects libres</i> .....	126
4.4.4. <i>Exemple : Application au manipulateur <math>\underline{RR}</math>-<math>\underline{RRR}</math></i> .....	126
4.5. Conclusion.....	129
<b>5. LA PARCOURABILITÉ POUR LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES.....</b>	<b>130</b>
5.1. Introduction.....	130
5.2. La parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles .....	131
5.2.1. <i>Définitions</i> .....	131
5.2.2. <i>Caractérisation de la <math>N</math> - parcourabilité</i> .....	133
5.2.3. <i>Caractérisation de la <math>T</math> - parcourabilité</i> .....	140
5.3. Conclusion.....	146
<b>6. CONCLUSION GÉNÉRALE.....</b>	<b>148</b>
<b>7. PERSPECTIVES .....</b>	<b>150</b>
<b>8. BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>151</b>
<b>9. ANNEXES .....</b>	<b>159</b>

9.1. Modèles géométriques du manipulateur 5 barres plans.....	159
9.1.1. Représentation.....	159
9.1.2. Modèle géométrique inverse.....	159
9.1.3. Modèle géométrique direct.....	159
9.1.4. Singularités.....	160
9.2. Modèles géométriques du manipulateur 3- <u>R</u> RR plan.....	162
9.2.1. Représentation.....	162
9.2.2. Modèle géométrique inverse.....	163
9.2.3. Modèle géométrique direct.....	163
9.2.4. Singularités.....	163
9.3. Les $2^K$ arbres.....	165
9.3.1. Structures de données.....	165
9.3.2. Numérotation des noeuds.....	167
9.3.3. Construction de l'arbre.....	168
9.3.4. Simplification de la représentation des Octrees.....	170
9.3.5. Recherche de voisins et calcul de la frontière.....	173
9.3.6. Calcul des composantes connexes.....	176
9.3.7. Projection dans des espaces de dimensions inférieures.....	178
9.4. Calcul des surfaces caractéristiques.....	178
9.5. Calcul de l'espace de travail et du domaine articulaire.....	179
9.6. Les étapes de la création des domaines d'unicité.....	180
9.7. Problèmes de planification de trajectoires pour les manipulateurs pleinement parallèles :	
Application au manipulateur plan 5 barres.....	180
9.7.1. Les algorithmes exhaustifs.....	181
9.7.2. Les algorithmes heuristiques.....	182



## TABLE DES ILLUSTRATIONS

### Figures

Figure 1 : Plate-forme de Gough (1947).....	14
Figure 2 : Manipulateur sériel.....	18
Figure 3 : Manipulateur possédant une chaîne cinématique fermée.....	18
Figure 4 : Manipulateur pleinement parallèle simple à 3 degrés de liberté de type 3-RPR.....	20
Figure 5 : Manipulateur pleinement parallèle léger à 3 degrés de liberté de type 3-RRR.....	22
Figure 6 : Manipulateur hybride à trois degrés de liberté.....	22
Figure 7 : Changement de mode d'assemblage d'un manipulateur 3-RRR.....	25
Figure 8 : Changement de posture d'un manipulateur 3-RRR.....	25
Figure 9 : Calcul du modèle géométrique inverse.....	27
Figure 10 : Manipulateur pleinement parallèle à 6 degrés de liberté avec position et orientation de la plate-forme mobile découplée d'après [Khalil 96].....	30
Figure 11 : Manipulateur pleinement parallèle plan à 2-RPR.....	31
Figure 12 : Espace de travail d'un manipulateur pleinement parallèle 2-RPR.....	31
Figure 13 : Ensemble articulaire d'un manipulateur pleinement parallèle 2-RPR.....	31
Figure 14 : Exemple de singularité parallèle.....	36
Figure 15 : Exemple de singularité sérielle.....	37
Figure 16 : Exemple de singularité structurelle.....	38
Figure 17 : Singularité d'une plate-forme de Gouth pour une position donnée d'après [Khalil 96].....	38
Figure 18 : Singularité d'une plate-forme de Gouth pour une orientation donnée d'après [Khalil 96].....	38
Figure 19 : Géométrie et paramètres du syntaxeur développé par Reboulet extrait de [Leguay-Durand 98].....	39
Figure 20 : Définition d'une droite de Plücker.....	40
Figure 21 : Variété de Grassmann de dimension 5.....	41
Figure 22 : Singularité de type 5a.....	41
Figure 23 : Singularité de type 5b.....	41
Figure 24 : Relations entre l'ensemble articulaire et l'espace opérationnel.....	42
Figure 25 : Application bijective.....	44
Figure 26 : Postures coude haut, coude bas.....	46
Figure 27 : Les aspects dans l'espace de travail d'un manipulateur plan à deux articulations rotoïdes.....	47
Figure 28 : Manipulateur parallèle plan à 2-RPR.....	49
Figure 29 : Singularité parallèle d'un manipulateur 2-RPR.....	51
Figure 30 : Aspects d'un manipulateur 2-RPR.....	51
Figure 31 : Ensemble articulaire du manipulateur 3-RPR.....	53
Figure 32 : Espace de travail du manipulateur 3-RPR.....	53
Figure 33 : Singularité parallèle du manipulateur parallèle plan de type 3 - RPR.....	54
Figure 34 : Modélisation octree des singularités parallèles d'un manipulateur 3-RPR.....	54
Figure 35 : Modélisation octree des aspects d'un manipulateur 3-RPR.....	55

Figure 36 : Représentation des singularités dans l'espace articulaire d'un manipulateur $\underline{RRR}$	56
Figure 37 : Une singularité à deux branches dans le domaine articulaire .....	57
Figure 38 : Les 6 modes d'assemblage du manipulateur plan 3- $\underline{RPR}$ .....	58
Figure 39 : Cycle de changement de posture du manipulateur 3- $\underline{RPR}$ .....	59
Figure 40 : 3 solutions du modèle géométrique direct dans l'aspect $WA_1$ .....	59
Figure 41 : Construction des surfaces caractéristiques .....	61
Figure 42 : Décomposition de l'espace de travail en régions de base .....	62
Figure 43 : Décomposition de l'ensemble articulaire $Q$ en composantes de base .....	64
Figure 44 : Les régions associées dans l'espace de travail .....	65
Figure 45 : Modélisation octree des singularités parallèles et de la surface caractéristique $S_{C1}$ d'un manipulateur 3- $\underline{RPR}$ .....	67
Figure 46 : Modélisation octree des régions de base .....	67
Figure 47 : Modélisation octree des composantes de base .....	68
Figure 48 : Modélisation octree des 6 domaines d'unicité .....	69
Figure 49 : 6 composantes de base coïncidentes dans l'ensemble articulaire .....	70
Figure 50 : Les 6 régions de base dans l'espace de travail .....	70
Figure 51 : Les 6 composantes de base dans l'espace articulaire du manipulateur 3- $\underline{RPR}$ .....	72
Figure 52 : Configuration articulaire admettant 6 solutions au modèle géométrique direct ....	72
Figure 53 : Trajectoires de changement de mode d'assemblage .....	75
Figure 54 : Rebond sur une singularité parallèle de l'ensemble articulaire .....	76
Figure 55 : Deux configurations dans deux aspects différents de l'espace de travail .....	76
Figure 56 : Planification de trajectoires .....	77
Figure 57 : Manipulateur Delta .....	82
Figure 58 : Manipulateur Hexa .....	82
Figure 59 : Manipulateur à boucle fermée plan de type $\underline{RR-RRR}$ .....	83
Figure 60 : Étude du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ possédant un déterminant de la matrice jacobienne sérielle positif .....	85
Figure 61 : Étude du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ possédant un déterminant de la matrice jacobienne sérielle négatif .....	85
Figure 62 : Les 4 modes de fonctionnement d'un manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	87
Figure 63 : Mode de fonctionnement n°1 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	88
Figure 64 : Mode de fonctionnement n°2 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	88
Figure 65 : Mode de fonctionnement n°3 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	88
Figure 66 : Mode de fonctionnement n°4 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	89
Figure 67 : Aspect 1 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	93
Figure 68 : Aspect 2 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	93
Figure 69 : Aspect 3 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	93
Figure 70 : Aspects 4 et 5 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	94
Figure 71 : Aspect 6 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	94
Figure 72 : Aspects 7 et 8 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	94
Figure 73 : Aspect 9 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	95
Figure 74 : Aspect 10 du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	95
Figure 75 : Singularité parallèle du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	96
Figure 76 : Espace de travail sans singularité parallèle du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	96
Figure 77 : Ensemble articulaire sans singularité parallèle du manipulateur $\underline{RR-RRR}$ .....	96

Figure 78 : Modes de fonctionnement et singularité parallèle du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	97
Figure 79 : Configurations singulière et isotrope de la matrice jacobienne parallèle d'un manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	99
Figure 80 : Courbes d'iso-conditionnement de la matrice jacobienne parallèle d'un manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ pour deux modes de fonctionnement différents.....	99
Figure 81 : Configurations isotrope et singulière de la matrice jacobienne sérielle d'un manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	100
Figure 82 : Manipulateur plan 3- $\underline{RRR}$ .....	102
Figure 83 : Espace de travail du manipulateur plan 3- $\underline{RRR}$ .....	103
Figure 84 : Ensemble articulaire du manipulateur plan 3- $\underline{RRR}$ .....	103
Figure 85 : 6 solutions du modèle géométrique direct d'un manipulateur pleinement parallèle plan 3- $\underline{RRR}$ .....	104
Figure 86 : Les 16 W-aspects du manipulateur 3- $\underline{RRR}$ .....	105
Figure 87 : Manipulateur spatial Delta.....	106
Figure 88 : Espace de travail du manipulateur Delta.....	107
Figure 89 : Ensemble articulaire du manipulateur Delta.....	107
Figure 90 : Configurations singulières du manipulateur Delta dans l'espace articulaire .....	108
Figure 91 : Configuration singulière du manipulateur Delta.....	109
Figure 92 : Changement de mode d'assemblage pour un manipulateur parallèle 3- $\underline{RRR}$ .....	110
Figure 93 : Variation de la valeur des déterminants le long de la trajectoire .....	111
Figure 94 : Description d'un manipulateur sériel.....	117
Figure 95 : Description d'un manipulateur parallèle.....	119
Figure 96 : Modélisation volumique du manipulateur plan $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	120
Figure 97 : Exemple de collision interne.....	120
Figure 98 : Exemple de collision externe.....	121
Figure 99 : Espace de travail et espace de travail libre.....	123
Figure 100 : Ensemble articulaire du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	123
Figure 101 : Ensemble articulaire libre du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	123
Figure 102 : Configurations du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ proches d'une collision interne.....	124
Figure 103 : Exemple de projection d'un volume sur un plan .....	124
Figure 104 : Aspects libres 1 et 2 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	127
Figure 105 : Aspects libres 3 et 4 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	127
Figure 106 : Aspects libres 5 et 6 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	127
Figure 107 : Aspects libres 7 et 8 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	128
Figure 108 : Aspects libres 9 et 10 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	128
Figure 109 : Aspects libres 11 et 12 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	128
Figure 110 : Aspects libres 13 et 14 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	129
Figure 111 : Aspects libres 15 et 16 du manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ .....	129
Figure 112 : Trajectoire discrète $T_d$ .....	131
Figure 113 : Trajectoire continue $T_c$ .....	133
Figure 114 : Espace de travail .....	137
Figure 115 : Ensemble articulaire.....	137
Figure 116 : Premier domaine de configurations accessibles lorsque $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ .....	138
Figure 117 : Second domaine de configurations accessibles lorsque $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ .....	138
Figure 118 : Espace de travail N - parcourable d'un manipulateur $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ lorsque	

---

$-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ .....	139
Figure 119 : Espace de travail libre du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	139
Figure 120 : Ensemble articulaire libre du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	139
Figure 121 : Les 2 domaines de configurations accessibles lorsque $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ et avec test de collision.....	140
Figure 122 : Aspect généralisé 1 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	143
Figure 123 : Aspect généralisé 2 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	143
Figure 124 : Aspect généralisé 3 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	143
Figure 125 : Aspect généralisé 4 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	143
Figure 126 : Aspect généralisé 5 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	144
Figure 127 : Aspect généralisé 6 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	144
Figure 128 : Aspect généralisé 7 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	144
Figure 129 : Aspects généralisés 8 et 9 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	144
Figure 130 : Aspect libre 1 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	145
Figure 131 : Aspect libre 2 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	145
Figure 132 : Aspect libre 3 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	146
Figure 133 : Aspect libre 4 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	146
Figure 134 : Aspect libre 5 du manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	146
Figure 135 : Exemple de singularité parallèle .....	161
Figure 136 : Représentation des singularités parallèles dans l'espace de travail .....	161
Figure 137 : Exemple de singularité sérielle .....	162
Figure 138 : Singularité sérielle pour un manipulateur pleinement parallèle 3 - <u>RRR</u> .....	165
Figure 139 : Représentation en mémoire d'un quadtree.....	166
Figure 140 : Image quadtree d'un C en profondeur 3.....	166
Figure 141 : Coloration des noeuds.....	167
Figure 142 : Numérotation des noeuds d'un $2^k$ arbre.....	168
Figure 143 : Ordre de balayage de Morton.....	169
Figure 144 : Simplification de l'octree.....	171
Figure 145 : Directions principales d'un quadtree.....	173
Figure 146 : Recherche de voisin dans un quadtree .....	174
Figure 147 : Différents voisins possibles dans un quadtree .....	176
Figure 148 : Recherche des composantes connexes.....	177
Figure 149 : Les étapes de la création des surfaces caractéristiques .....	179
Figure 150 : Les étapes de la création des domaines d'unicité.....	180
Figure 151 : Recherche d'une trajectoire par une méthode exhaustive.....	181
Figure 152 : Trajectoire de changement de mode d'assemblage d'un manipulateur <u>RR-RRR</u> .....	182
Figure 153 : Recherche d'une trajectoire par une méthode heuristique .....	183

**Tableaux**

Tableau 1 : Comparatif entre manipulateur sériel et manipulateur parallèle..... 23

Tableau 2 : Dimensions du manipulateur pleinement parallèle plan 3-RPR étudié ..... 52

Tableau 3 : 6 solutions du modèle géométrique direct du manipulateur 3-RPR ..... 58

Tableau 4 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié..... 83

Tableau 5 : Les 4 modes de fonctionnement d'un manipulateur RR-RRR ..... 86

Tableau 6 : Nombre d'aspects généralisés en fonction du mode de fonctionnement..... 92

Tableau 7 : Dimensions du manipulateur pleinement parallèle plan 3-RRR étudié..... 103

Tableau 8 : Dimensions du manipulateur Delta étudié..... 107

Tableau 9 : Trajectoire de changement de mode d'assemblage ..... 110

Tableau 10 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié pour les espaces libres ..... 122

Tableau 11 : Nombre d'aspects libres en fonction du mode de fonctionnement..... 126

Tableau 12 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié pour la N - parcourabilité ..... 137

Tableau 13 : Domaines T - parcourables du manipulateur RR-RRR à partir des aspects  
généralisés..... 142

Tableau 14 : Domaines T - parcourables du manipulateur RR-RRR à partir des aspects libres..... 145

Tableau 15 : Numérotation des cubes..... 170

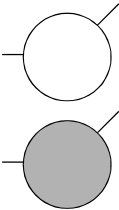
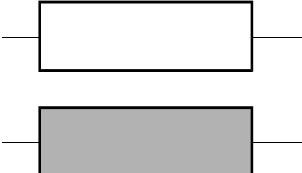
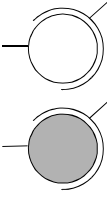
Tableau 16 : Définition des couleurs supplémentaires de l'octree ..... 171

## NOTATIONS

$\pi_Q$ :	Projection sur l'ensemble articulaire ;
$\pi_W$ :	Projection sur l'espace de travail ;
$\mathbf{A}$ :	Matrice jacobienne parallèle ;
$\mathbf{A}_i$ :	Aspect ;
$\mathbf{B}$ :	Matrice jacobienne sérielle ;
$EA_n$ :	Espace articulaire lié aux articulations motorisées ;
$E_L$ :	Espace libre ;
$EO_m$ :	Espace opérationnel lié aux déplacements de la plate-forme mobile ;
$Mf_i$ :	Mode de fonctionnement ;
$\mathbf{q}$ :	Vecteur de coordonnées articulaires associées aux articulaires motorisées,
$Q$ :	Ensemble articulaire,
$QA b_i$ :	Région de base ;
$QI$ :	Espace des configurations libres ;
$RA_i$ :	Régions associées ;
$S$ :	Surface des configurations singulières ;
$S_C$ :	Surface caractéristique, ou pseudo singularités,
$V_{ce}(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ :	Volume des collisions externes $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ ;
$V_{ci}(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ :	Volume des collisions internes $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ ;
$V_m(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ :	Volume occupé par le manipulateur dans la configuration $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ ;
$W$ :	Espace de travail,
$WA_i$ :	Aspect d'un manipulateur parallèle ;
$\overline{WA}$ :	Frontière des aspects ;
$WA b_i$ :	Composante de base ;
$WI$ :	Espace de travail libre ;
$Wu_k$ :	Domaine d'unicité ;
$\mathbf{X}$ :	Vecteur des coordonnées opérationnelles permettant de définir la configuration de la plate-forme mobile du manipulateur,

## SCHÉMATIQUE

Pour permettre la compréhension des différents mécanismes, nous allons utiliser les conventions de représentation suivantes :

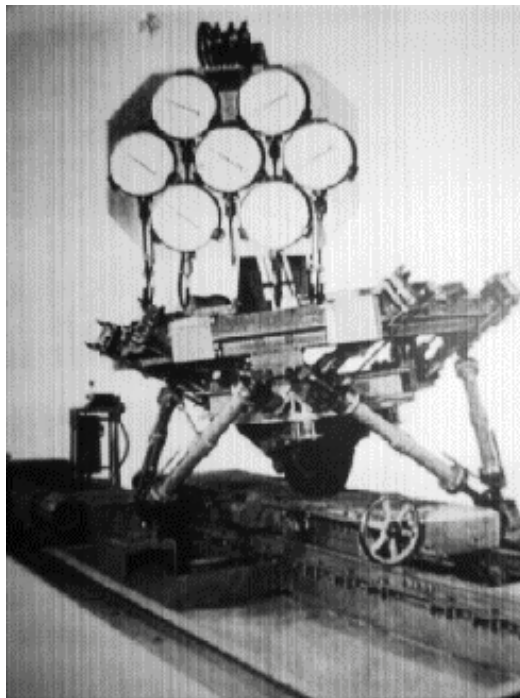
Nom	Schéma de l'articulation	
Pivot ou rotoïde		<p>non motorisée R</p> <p>motorisée <u>R</u></p>
Prismatique		<p>non motorisée P</p> <p>motorisée <u>P</u></p>
Sphérique		<p>non motorisée S</p> <p>motorisée <u>S</u></p>

## MOYENS INFORMATIQUES

Les applications informatiques présentées dans ce mémoire ont été programmées en C++ et pascal objets. La programmation C++ a été réalisée sur station de travail Silicon Graphique R4400 à 200Mz possédant 170Mo de mémoire vive. Dans le pire des cas et pour une précision en profondeur 7 des modèles octrees, les temps de calcul n'excèdent pas l'heure. La complexité des algorithmes étant polynomiale, ces temps peuvent être multipliés par 8 lorsque l'on augmente de un la précision d'un octree. L'utilisation de bibliothèques standards (OpenGL, Glut), nous permet d'utiliser ses programmes sur d'autres ordinateurs tels que des DEC Alpha et des compatibles PC sous Windows 95.

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un des objectifs de base en robotique est de pouvoir déplacer des objets selon des trajectoires prescrites. La plupart des manipulateurs développés dans ce but sont de type sériel, c'est-à-dire qu'ils sont formés par la disposition en série d'articulations et de segments (chaînes cinématiques simples). À l'origine, leur conception s'inspire du bras humain, les manipulateurs anthropomorphes. Par la suite, une nouvelle architecture de manipulateur est apparue pour tester les pneumatiques. Ce manipulateur connu sous le nom de plate-forme de Gough [Gough 57] est un manipulateur parallèle (Figure 1). Il est constitué d'un ensemble de chaînes cinématiques simples, lui donnant une plus grande rigidité. Pourtant, ce n'est que vers la fin des années 70 et au début des années 80, que les manipulateurs parallèles ont commencé à attirer l'attention des mécaniciens et des roboticiens en tant qu'alternative possible aux structures sérielles. Pour augmenter encore les performances de ces manipulateurs, des architectures hybrides se sont développées qui allient les atouts des manipulateurs sériels et parallèles tout en minimisant leurs défauts.



*Figure 1 : Plate-forme de Gough (1947)*



Le but de ce travail est l'étude de la parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles. Nous suivrons la démarche déjà utilisée pour l'étude des manipulateurs sériels. Ainsi, nous chercherons à définir la notion d'aspect [**Borrel 86**], à trouver les domaines d'unicité [**El Omri 96**] et à étudier l'influence des obstacles sur la parcourabilité de l'espace de travail [**Wenger 89**].

Les principaux problèmes des manipulateurs pleinement parallèles abordés dans ce mémoire sont la multiplicité des solutions du modèle géométrique direct et inverse et la présence de configurations singulières à l'intérieur de l'espace de travail. Longtemps, on a pensé que trouver les singularités permettaient de séparer les solutions du modèle géométrique direct [**Hunt 93**]. Ainsi, tout domaine de l'espace de travail non singulier serait associé à un seul mode d'assemblage, c'est-à-dire à une solution du modèle géométrique direct. Malheureusement, Innocenti a montré qu'un changement de mode d'assemblage non singulier pouvait exister au même titre qu'un changement de posture non singulier pour les manipulateurs sériels cuspidaux [**Innocenti 92**].

L'interprétation de ce problème et la gestion des solutions des modèles géométriques direct et inverse sont les objectifs principaux de ce mémoire. Nous souhaitons disposer d'outils permettant d'analyser la parcourabilité des manipulateurs pleinement parallèles dans leur espace de travail.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

Dans le 1<sup>er</sup> chapitre, nous rappellerons quelques définitions liées à la cinématique et à la conception des manipulateurs pleinement parallèles. Ainsi, après avoir situé ce type de manipulateur par rapport à toutes les morphologies de manipulateurs, nous étudierons leurs cinématiques et leurs singularités. Le problème de la gestion des solutions des modèles géométriques direct et inverse sera énoncé.

Dans le 2<sup>nd</sup> chapitre, nous étudierons le cas particulier des manipulateurs parallèles possédant une seule solution à leur modèle géométrique inverse. Nous chercherons à caractériser les plus grands domaines de l'espace de travail exempts de toute singularité : les

*aspects*. Puis, nous déterminerons les plus grands domaines d'unicité liés aux modèles géométriques direct et inverse. Ainsi, nous définirons précisément les opérateurs géométriques liés aux modèles géométriques direct et inverse. Nous proposerons un algorithme hiérarchique pour l'analyse de trajectoires dans l'espace de travail.

Dans le 3<sup>e</sup> chapitre, nous étendrons les définitions énoncées dans le chapitre 2 aux manipulateurs pleinement parallèles, pouvant avoir plusieurs solutions au modèle géométrique inverse. Celles-ci seront séparées en introduisant la notion de modes de fonctionnement. Ainsi, nous définirons les aspects généralisés et leurs projections dans l'espace de travail et l'ensemble articulaire. Nous présenterons les avantages que l'on peut obtenir en utilisant tous les modes de fonctionnement d'un manipulateur pleinement parallèle.

Dans le 4<sup>e</sup> chapitre, nous étudierons l'influence des collisions internes et externes sur les manipulateurs pleinement parallèles. Leur espace de travail et leur ensemble articulaire seront alors renommés espace de travail libre et ensemble articulaire libre. Par la suite, nous définirons les aspects libres ainsi que leur projection dans l'espace de travail et l'ensemble articulaire.

Dans le 5<sup>e</sup> chapitre, nous énoncerons les conditions nécessaires et suffisantes pour la définition de la parcourabilité dans l'espace de travail. Nous étudierons deux types de trajectoires, les trajectoires discrètes et les trajectoires continues. Nous caractérisons alors les domaines N - parcourables et T - parcourables.

Dans le 6<sup>e</sup> chapitre, nous résumerons notre contribution pour l'analyse des manipulateurs pleinement parallèles. Puis, nous exposerons, dans le 7<sup>e</sup> chapitre, les perspectives de recherches ouvertes par ce travail.

Ce mémoire sera illustré par des exemples de manipulateurs pleinement parallèles à deux ou trois degrés de liberté. Nous n'utiliserons pas de manipulateurs à 6 degrés de liberté car l'exploitation de leur espace de travail et de leur ensemble articulaire est plus difficile à montrer sur papier.

# 1. CINÉMATIQUE ET CONCEPTION DES MANIPULATEURS PARALLÈLES

## 1.1. INTRODUCTION

Nous nous intéresserons dans ce travail aux mécanismes articulés, que nous nommerons « manipulateurs » par abus de langage, même si les applications visées ne se limitent pas à la manipulation d'objets.

Pour analyser la parcourabilité des manipulateurs, il est nécessaire de connaître leurs propriétés géométriques et cinématiques, leur espace de travail et leurs configurations singulières [Chedmail 98].

Dans ce chapitre, nous allons rappeler et introduire quelques définitions permettant de comprendre les manipulateurs dans le cas général avec leurs applications et le vocabulaire que nous utiliserons. Puis, nous présenterons les deux classes de manipulateurs que nous allons étudier dans ce mémoire.

## 1.2. LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES

Pour permettre une meilleure compréhension des manipulateurs étudiés dans ce mémoire, nous allons rappeler ici quelques définitions couramment rencontrées dans la littérature. Nous porterons notre attention sur des manipulateurs ayant leurs applications principales dans les domaines suivants : applications médicales, spatiales, industrielles, simulateurs, machines outils, etc. [Merlet 97].

### **Définition 1 : Les chaînes cinématiques simples**

C'est une chaîne cinématique dont chaque membre possède un degré de connexion (nombre de liaisons mécaniques) inférieur ou égal à deux [Gosselin 88]. Un manipulateur sériel est formé d'une chaîne cinématique simple dont la base et l'organe effecteur possèdent un degré de connexion de un (c'est-à-dire qu'il n'est relié qu'à un seul corps) et les autres éléments un degré de connexion de deux.

Ainsi, chaque corps  $c_i$  est relié par ses deux « extrémités » à un seul corps, et la base  $B$  et l'effecteur  $P$  ne sont liés qu'à un seul corps  $c_i$  (Figure 2).

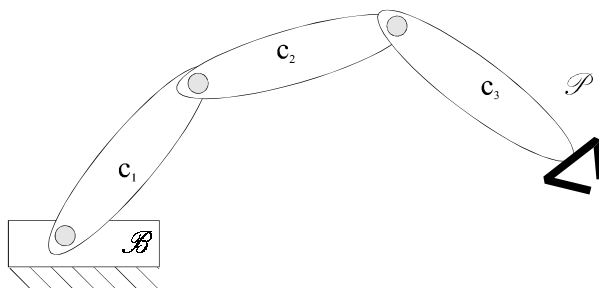


Figure 2 : Manipulateur sériel

Ces manipulateurs sont actuellement les plus utilisés. Pour les robots manufacturiers, on rencontre, par exemple, les morphologies suivantes : les robots anthropomorphes, cylindriques, sphériques, cartésiens, etc.

De très nombreuses études ont été réalisées sur ces manipulateurs. Dans les domaines liés à l'analyse de la parcourabilité de manipulateurs sériels, nous pouvons citer [Denavit 55] pour la modélisation cinématique, [Borrel 86] pour les aspects, [Wenger 89] pour les aspects libres et [El Omri 96] pour les domaines d'unicité.

### **Définition 2 : Les chaînes cinématiques fermées**

C'est une chaîne cinématique dont l'un des membres, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à trois [Merlet 97].

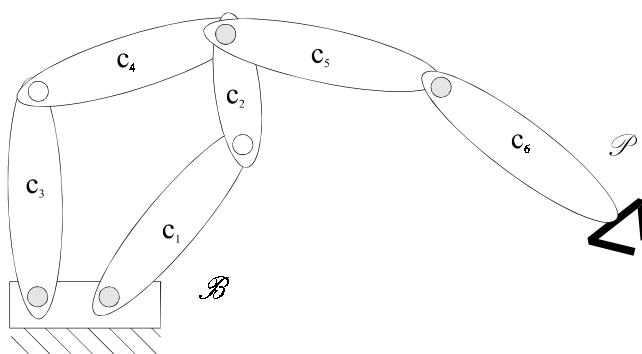


Figure 3 : Manipulateur possédant une chaîne cinématique fermée

Dans notre exemple (Figure 3), les corps  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  forment une chaîne cinématique fermée. Ces manipulateurs sont intrinsèquement plus rigides que les manipulateurs sériels.

**Définition 3 : Les manipulateurs parallèles**

Ce sont des manipulateurs, en chaîne cinématique fermée, constitués d'un organe terminal à  $n$  degrés de liberté et d'une base fixe, reliés entre eux par des chaînes cinématiques indépendantes [Merlet 97].

Cette définition restreint considérablement les possibilités de conception des manipulateurs possédant des chaînes cinématiques fermées. Nous pouvons par exemple remarquer que ce type de manipulateur ne possède qu'un seul organe terminal. En faisant varier le nombre et la topologie des chaînes du manipulateur, nous obtenons un grand nombre de manipulateurs parallèles. De plus, nous pouvons trouver des manipulateurs parallèles redondants pour lesquels le nombre d'actionneurs est supérieur au nombre de degrés de liberté commandés de la plate-forme mobile, ce qui permet de supprimer des configurations singulières [Leguay-Durand 98], [Kock 98].

**Définition 4 : Une chaîne cinématique élémentaire, la jambe**

En parlant d'un manipulateur parallèle, une chaîne cinématique élémentaire est une chaîne cinématique reliant la base fixe à l'effecteur du manipulateur. On appelle aussi celle-ci, *jambe* d'un manipulateur [Angeles 97].

Contrairement aux manipulateurs sériels, toutes les articulations ne sont pas forcément motorisées. Leur placement est un problème important lors de la conception car les configurations singulières du manipulateur sont dépendantes du choix des articulations motorisées.

Un manipulateur parallèle est donc constitué de jambes, d'une plate-forme mobile et d'une base fixe. Ces jambes peuvent posséder plusieurs degrés de liberté. Ainsi, dans [Hunt 83], on trouve les différentes combinaisons d'articulations permettant d'obtenir une jambe possédant le nombre de degré de liberté souhaité. Aussi, Merlet propose toutes les jambes possibles d'un manipulateur plan à trois degrés de liberté [Merlet 96]. Et Leguay-Durand optimise le choix de chaîne cinématique pour obtenir un manipulateur à 3 degrés de

liberté [Leguay-Durand 98].

### **Définition 5 : Les manipulateurs pleinement parallèles**

Ce sont des manipulateurs comportant autant de jambes que l'effecteur présente de degrés de liberté. Chaque jambe comporte au plus un actionneur. De plus, aucun segment d'une jambe ne doit être relié à plus de deux corps (chaîne cinématique série) [Pierrot 91]. Ces manipulateurs sont donc non redondants.

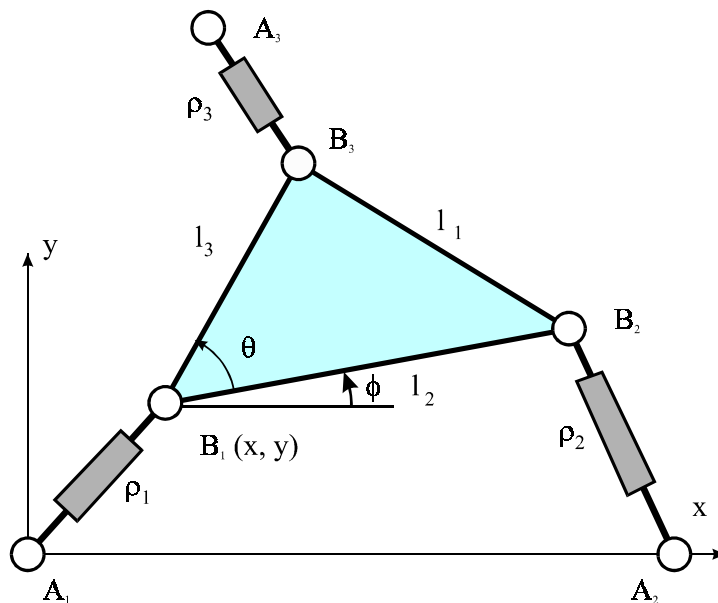


Figure 4 : Manipulateur pleinement parallèle simple à 3 degrés de liberté de type 3-RPR

La figure 4 présente un manipulateur pleinement parallèle possédant 3 degrés de liberté, 3 jambes et 3 articulations prismatiques motorisées ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ).

Plusieurs formules ont été proposées pour reconnaître un manipulateur pleinement parallèle. Ainsi, Gosselin les caractérise en utilisant la relation suivante [Gosselin 88] :

$$p(n - 6) = -6$$

où

- $p$  est le nombre de jambes ;
- $n$  est le nombre de solides constituant une jambe (les jambes étant supposées identiques).

On peut aussi utiliser la formule donnée par [Earl 83] qui définit un indice de parallélisme  $d$  :

$$d = \frac{k}{l - 1}$$

où

- $k$  est le nombre de boucles indépendantes ;
- $l$  est le nombre de degrés de liberté de la plate-forme mobile.

L'indice de parallélisme est égal à 1 pour un manipulateur parallèle et 0 pour un manipulateur série. Malheureusement, il existe des exemples mettant en défaut cette formule où l'on trouve un indice de parallélisme égal à 1 pour un manipulateur non pleinement parallèle [Bajpai 86].

Dans la suite de ce mémoire, nous découplerons l'ensemble des manipulateurs pleinement parallèles en deux classes :

- les manipulateurs pleinement parallèles possédant une seule solution au modèle géométrique inverse et plusieurs au modèle géométrique direct que nous appellerons *manipulateurs pleinement parallèles simples* ;
- les manipulateurs pleinement parallèles possédant plusieurs solutions au modèle géométrique direct et inverse que nous appellerons *manipulateurs pleinement parallèles*.

### **Définition 6 : Les manipulateurs à boucles fermées pleinement parallèles légers**

Ce sont des mécanismes parallèles dont les actionneurs sont solidaires du bâti du manipulateur [Pierrot 91].

Ainsi, l'inertie des pièces en mouvement est moindre car les actionneurs sont fixes. Le manipulateur est donc capable d'engendrer des vitesses et des accélérations importantes. Parmi les manipulateurs pleinement parallèles légers, on peut citer le Delta [Clavel 88], l'Hexa [Pierrot 91], etc..

Dans la figure 5, les articulations motorisées sont les pivots  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  placés sur la base du manipulateur.

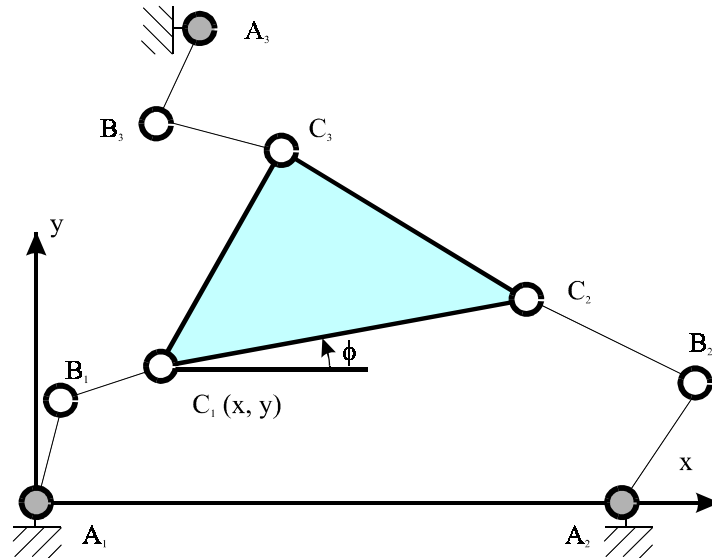


Figure 5 : Manipulateur pleinement parallèle léger à 3 degrés de liberté de type 3-RRR

### **Définition 7 : Les manipulateurs hybrides**

Ce sont des manipulateurs possédant une structure sérielle dans laquelle on a inséré une ou plusieurs boucles fermées (Figure 6).

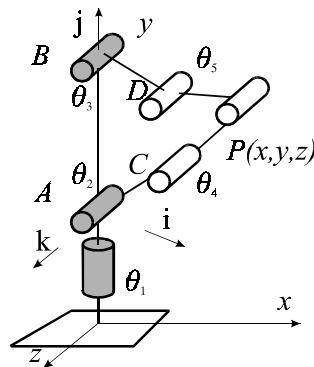


Figure 6 : Manipulateur hybride à trois degrés de liberté

L'insertion de ces boucles permet d'augmenter la rigidité du manipulateur et d'en diminuer le poids. Ainsi, dans le manipulateur Hitachi-HPR [Dombre 88], la présence d'un parallélogramme permet de déplacer la motorisation du deuxième axe tout en augmentant sa rigidité. Pour les manipulateurs parallèles, il est possible de leur ajouter en série, par exemple,



un poignet sphérique ou de les assembler sur une chaîne sérielle [Chablat 98c]. Ce type de manipulateur a été étudié en particulier par [Bajpai 86], [Lallemand 97] et [Leguay-Durand 97].

### Conclusion

Le tableau 1 regroupe les propriétés des manipulateurs sériels et des manipulateurs parallèles.

<b>Manipulateur sériel</b>	<b>Robot parallèle</b>
= Succession de segments en série de la base vers l'effecteur	= Tout segment au contact de la base et de l'effecteur
= Chaîne cinématique ouverte	= Chaîne cinématique fermée
+ Important espace de travail	- Espace de travail restreint
- Faible précision	+ Grande précision
- Faible charge transportable	+ Lourde charge transportable
- Faible rigidité	+ Très rigide

*Tableau 1 : Comparatif entre manipulateur sériel et manipulateur parallèle*

Dans la suite de notre étude, nous étudierons uniquement les manipulateurs pleinement parallèles. Les applications de ces manipulateurs sont multiples. Bien que leurs applications initiales soient les simulateurs de vol et les testeurs de pneumatiques [Gough 57], ils ont fait leur apparition dans les domaines où vitesse, accélération et précision sont essentielles. On trouve par exemple ces manipulateurs dans le domaine de la télé-opération avec des manipulateurs à retour d'efforts [Long 92].

Une autre application, plus récente encore, est l'utilisation pour les machines outils de manipulateurs parallèles. En effet, pour accroître la production des centres d'usinage, les vitesses d'avance et les vitesses de rotation de broche ont augmenté considérablement. Cette nouvelle technologie est « l'usinage grande vitesse » [Neugebauer 98]. Parmi ces nouvelles machines d'usinage, l'Hexapode est l'une des plus connue. D'importants problèmes

subsistent, au niveau de la planification de trajectoires et de l'implantation des logiciels de simulation et de CFAO. Cependant, les qualités intrinsèques des manipulateurs parallèles doivent permettre d'atteindre les objectifs de l'usinage grande vitesse (grandes vitesses et accélérations). De plus, la structure parallèle de ces nouvelles machines peut sensiblement faire baisser les coûts de maintenance (toutes les jambes et tous les moteurs sont identiques) et surtout la masse des machines outils qui n'ont fait que s'accroître ces dernières années.

### **1.3. CONFIGURATIONS ET POSTURES**

Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques définitions liées aux manipulateurs parallèles. En effet, certains termes utilisés pour les manipulateurs sériels peuvent être incomplets lorsqu'on les utilise pour les manipulateurs parallèles.

Ainsi, le terme de *configuration* peut posséder des significations différentes.

#### **Définition 8 : Configuration articulaire**

Nous appellerons *configuration articulaire*  $\mathbf{q}$  d'un manipulateur l'ensemble des  $n$  coordonnées généralisées, liées aux articulations motorisées, notées  $q_1, \dots, q_n$  tel que  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ . Cependant, une configuration articulaire ne permet pas de définir de manière unique la position et l'orientation c'est-à-dire la configuration de la plate-forme mobile si le manipulateur possède plusieurs solutions au modèle géométrique direct ou *plusieurs modes d'assemblage*.

#### **Définition 9 : Configuration de la plate-forme mobile**

Nous appellerons *configuration de la plate-forme mobile*  $\mathbf{X}$  d'un manipulateur, l'ensemble des  $m$  coordonnées généralisées, notées  $X_1, \dots, X_m$ , permettant de définir la position et l'orientation de la plate-forme mobile, tel que  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_m]^T$ . Cependant, la configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}$  ne permet pas de définir la *posture*, c'est-à-dire la position et l'orientation de tous les solides constituant les jambes si le manipulateur possède plusieurs solutions au modèle géométrique inverse.

**Définition 10 : Changement de mode d'assemblage**

Les différents *modes d'assemblage* d'un manipulateur parallèle sont dus à l'existence de plusieurs solutions au modèle géométrique direct. Il est ainsi possible d'associer plusieurs modes d'assemblage pour les mêmes configurations articulaires. Un changement de mode d'assemblage revient à changer de solution du modèle géométrique direct (Figure 7).

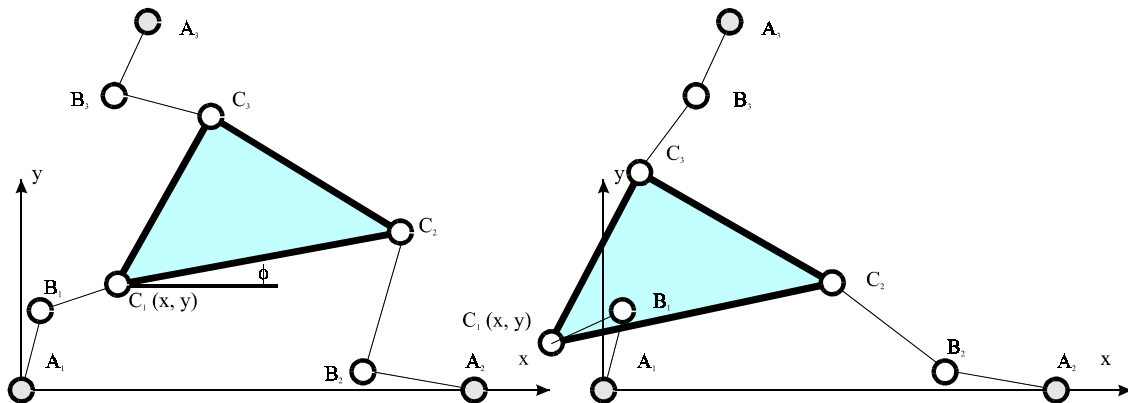


Figure 7 : Changement de mode d'assemblage d'un manipulateur 3-RRR

**Définition 11 : Changement de posture**

Les différentes *postures des jambes* d'un manipulateur parallèle sont dues à l'existence de plusieurs solutions au modèle géométrique inverse. Nous associons ainsi plusieurs postures pour la même configuration de la plate-forme mobile du manipulateur. Un changement de posture revient à changer de solution du modèle géométrique inverse (Figure 8).

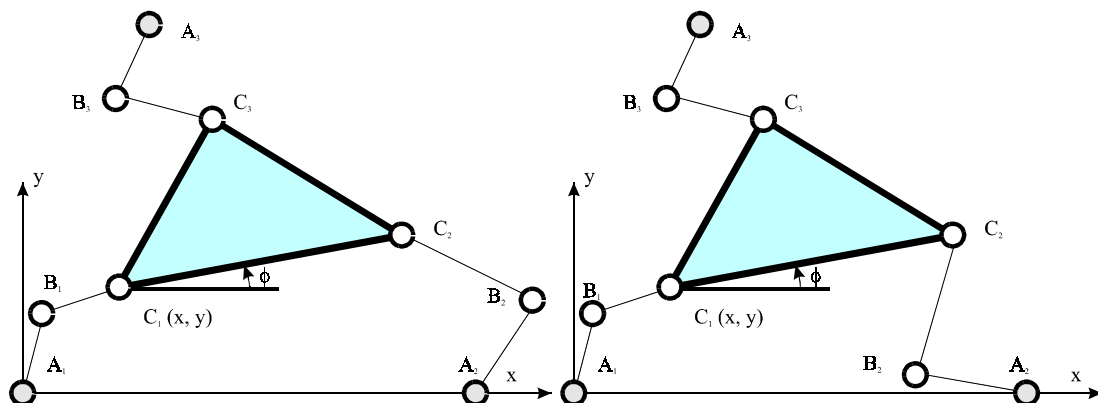


Figure 8 : Changement de posture d'un manipulateur 3-RRR

**Définition 12 : Configuration d'un manipulateur**

Nous appellerons *configuration*  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  d'un manipulateur, l'ensemble des  $n + m$  coordonnées généralisées, notées  $(q_1, \dots, q_n, X_1, \dots, X_m)$ . Ainsi, pour les manipulateurs pleinement parallèles et en-dehors de toute configuration singulière, une configuration  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  permet de définir la situation de tous les solides le constituant, c'est-à-dire les jambes et la plate-forme mobile.

Pour simplifier l'écriture, nous parlerons simplement de configuration pour désigner la configuration d'un manipulateur.

**1.4. ESPACE ARTICULAIRE ET ESPACE OPÉRATIONNEL**

On peut définir une relation entre les entrées  $(\mathbf{q})$ , c'est-à-dire les variables articulaires motorisées et les sorties  $(\mathbf{X})$ , c'est-à-dire les configurations de la plate-forme mobile d'un manipulateur de la manière suivante :

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = 0 \tag{1}$$

Cette définition peut être appliquée à tout type de manipulateur, qu'il soit sériel ou parallèle. On note :

- $EA_n$  l'espace articulaire lié aux articulations motorisées  $\mathbf{q}$  ( $n$  désigne le nombre d'articulations motorisées) ;
- $EAP_r$  l'espace articulaire lié aux articulations passives  $\mathbf{q}_r$  ( $r$  désigne le nombre d'articulations passives) ;
- $EO_m$  l'espace opérationnel lié aux configurations de la plate-forme mobile ( $m$  désigne le nombre de degré de liberté de la plate-forme mobile).
- $EC_{n+m}$  l'espace des configurations du manipulateur défini sur le produit cartésien de  $EA_n$  et  $EO_m$  de dimension  $n + m$ .

On pourrait faire une distinction supplémentaire en ce qui concerne l'espace articulaire lié aux articulations motorisées  $EA_n$  car les articulations motorisées ne sont pas forcément les

articulations sur lesquelles sont placées les capteurs de positions [Baron 98].

À partir de la relation (1), on peut calculer le modèle géométrique direct et inverse du manipulateur et ses configurations singulières. Lors de la résolution de ces modèles, les articulations passives  $q_p$  sont éliminées. Cependant, il peut être intéressant de les faire apparaître si l'on doit tenir compte des limites articulaires propres à chaque type d'articulation ou lorsque des singularités particulières apparaissent [Zlatanov 98], [Leguay-Durand 98].

## 1.5. LES MODÈLES GÉOMÉTRIQUES INVERSE ET DIRECT

La résolution des modèles géométriques direct et inverse est un problème important de la robotique et plus généralement de l'étude des manipulateurs. Le modèle géométrique inverse d'un manipulateur parallèle doit permettre de trouver l'ensemble des configurations articulaires permettant de placer la plate-forme du manipulateur dans la configuration voulue. Alors que le modèle géométrique direct doit permettre de trouver l'ensemble des configurations de la plate-forme mobile du manipulateur en fonction d'une configuration articulaire donnée.

### 1.5.1. LE MODÈLE GÉOMÉTRIQUE INVERSE

La résolution du modèle géométrique inverse ne pose généralement pas de problème. Dans le cas de certains manipulateurs possédant des articulations prismatiques motorisées (Figure 9 a), nous obtenons unicité de solutions pour le modèle géométrique inverse. Sinon, il peut exister plusieurs solutions à ce modèle (Figure 9 b).

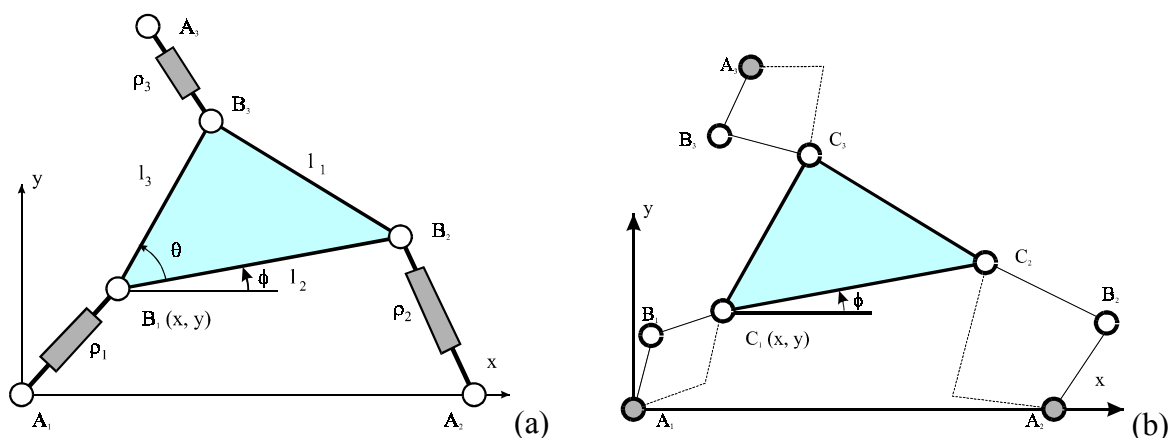


Figure 9 : Calcul du modèle géométrique inverse

Pour calculer le modèle géométrique inverse, on écrit un système d'équations non-linéaires dont chaque équation est associée à une jambe du manipulateur.

Chaque jambe est caractérisée par une origine  $A_i$  et une extrémité  $B_i$ . La configuration  $\mathbf{X}$  de la plate-forme mobile permet de définir la position des points extrêmes de chaque jambe. On peut ainsi écrire le modèle géométrique inverse pour chaque jambe  $A_i B_i = H(\mathbf{X})$ . Ce modèle peut devenir ardu dans le cas de manipulateurs spatiaux si la structure des jambes est complexe. Cependant, la résolution de ce problème est simplifiée par le fait que généralement, toutes les jambes d'un manipulateur pleinement parallèle sont identiques.

### 1.5.2. LE MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

La résolution du modèle géométrique direct des manipulateurs pleinement parallèles est un problème complexe. Sa difficulté est comparable à celle du modèle géométrique inverse pour les manipulateurs sériels. Ainsi, de nombreuses recherches ont été réalisées pour résoudre les problèmes suivants :

- la recherche du nombre maximal de solutions réelles ;
- la recherche rapide d'une solution à partir d'une configuration connue ;
- la simplification du modèle par l'ajout de capteurs additionnels.

#### **Recherche du nombre maximal de solutions réelles**

Dans un premier temps, on a cherché le nombre de solutions du modèle géométrique direct pour un manipulateur parallèle général. Ainsi, Ronga a démontré que le nombre maximum de solutions est de 40 [Ronga 92] et Dietmaier a récemment trouvé pour une plate-forme de Gough 40 modes d'assemblage [Dietmaier 98].

Pour des manipulateurs particuliers, et à partir du polynôme caractéristique issu du système d'équations obtenu pour la résolution du modèle géométrique inverse, il est possible de connaître le nombre de solution du modèle géométrique direct. Ainsi, pour le manipulateur 3-RPR, Gosselin propose d'utiliser le théorème de Bezout et Sturm [Gosselin 94]. De ce nombre de solutions dépend le nombre maximum de mode d'assemblage de la plate-forme

mobile que l'on se propose de gérer.

### **Recherche rapide d'une solution à partir d'une configuration connue**

Pour améliorer la résolution du modèle géométrique direct, des méthodes numériques ont été étudiées pour permettre de trouver, à partir d'une configuration donnée et compte tenu d'une modification des coordonnées articulaires, la configuration de la plate-forme mobile [Gosselin 96]. Cependant, des problèmes de continuité se posent lorsque la configuration du manipulateur est proche d'une configuration singulière. Dans ce cas, il est possible que l'algorithme de résolution change le manipulateur de mode d'assemblage. Ainsi, Chételat décrit un algorithme numérique permettant d'éviter ce problème [Chételat 97].

### **Simplification du modèle par ajout de capteurs additionnels**

Pour simplifier la résolution du modèle géométrique inverse, Merlet propose d'ajouter des capteurs additionnels sur les articulations passives [Merlet 93]. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de savoir où positionner les capteurs additionnels, d'en connaître le nombre. Ces études doivent permettre, dans certains cas, d'avoir une solution explicite du modèle géométrique direct et ainsi en permettre une résolution en temps réel [Tancredi 95] [Baron 94]. Il devient alors possible de connaître le mode d'assemblage courant et donc la configuration du manipulateur. Cependant, l'ajout de capteurs augmente le coût du manipulateur. C'est pourquoi, il est indispensable de connaître la précision à donner à chaque capteur pour obtenir la précision demandée sur la position et l'orientation de la plate-forme mobile.

### **Notes**

- a) Lors de la résolution du modèle géométrique inverse d'un manipulateur sériel, il est possible de découpler la position et l'orientation lorsque le manipulateur est pourvu d'un poignet sphérique. Pour tenter de simplifier la résolution du modèle géométrique direct des manipulateurs parallèles, des recherches ont été conduites afin de découpler l'orientation et la position de la plate-forme mobile [Innocenti 91].

Ainsi, Khalil étudie un manipulateur parallèle spatial (Figure 10) où la position est donnée par les trois articulations prismatiques ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ ) et l'orientation par ( $\rho_4, \rho_5, \rho_6$ ) [Khalil 96]. On peut également citer le 2-delta qui n'est pas un manipulateur pleinement parallèle mais hybride qui permet de découpler la position et l'orientation de la plate-forme mobile en utilisant deux manipulateurs delta [Lallemand 97].

b) Dans la suite de notre étude, nous utiliserons les modèles géométriques directs de manipulateurs connus. Lorsqu'il n'existe pas de solutions analytiques, nous utiliserons l'algorithme de Laguerre pour trouver les racines réelles de ce polynôme [Press 90].

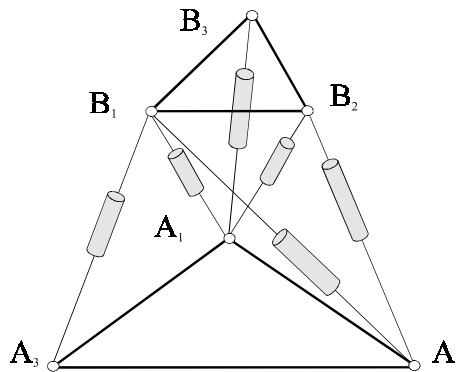


Figure 10 : Manipulateur pleinement parallèle à 6 degrés de liberté avec position et orientation de la plate-forme mobile découplée d'après [Khalil 96]

## 1.6. L'ENSEMBLE ARTICULAIRE ET L'ESPACE DE TRAVAIL

### 1.6.1. L'ENSEMBLE ARTICULAIRE

L'ensemble articulaire  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble des positions articulaires motorisées permettant d'assembler le manipulateur.

$$\square \mathcal{Q} \subset EA_n$$

$$\square \mathcal{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} \in EA_n / \mathbf{q}_p \in EAP_r \\ \exists \mathbf{X} \in EO_m / F(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \forall i \leq n \quad \mathbf{q}_{i \min} \leq \mathbf{q}_i \leq \mathbf{q}_{i \max} \\ \forall j \leq r \quad \mathbf{q}_{p_j \min} \leq \mathbf{q}_{p_j} \leq \mathbf{q}_{p_j \max} \end{array} \right\}$$

Le calcul de l'ensemble articulaire est, à notre connaissance, peu abordé dans la



littérature. Dans notre étude, nous serons amenés à le calculer pour définir les domaines d'unicité ainsi que les aspects généralisés. Contrairement aux manipulateurs sériels, l'ensemble articulaire des manipulateurs pleinement parallèles n'est pas un hyper-parallélogramme rectangle engendré par les variations des différentes articulations motorisées. De plus, cet ensemble n'est pas toujours connexe. C'est pourquoi nous parlons d'ensemble articulaire et non de domaine articulaire.

Ainsi, le manipulateur pleinement parallèle 2-RPR (Figure 11) à deux degrés de liberté, peut avoir un ensemble articulaire non connexe pour certaines dimensions [Alexandre 96] (Figure 12 et 13). Dans cet exemple, les articulations motorisées sont les pivots A et B, dont les valeurs articulaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  peuvent varier de 0 à  $2\pi$ . Les articulations prismatiques ( $\rho_1$  et  $\rho_2$ ) constituent alors les seules butées de ce manipulateur.

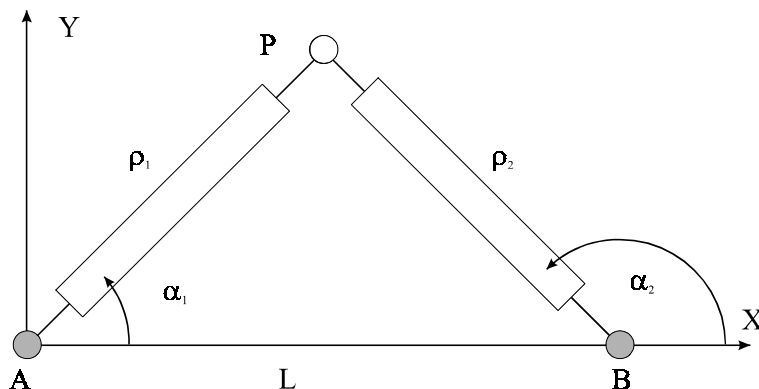


Figure 11 : Manipulateur pleinement parallèle plan à 2-RPR

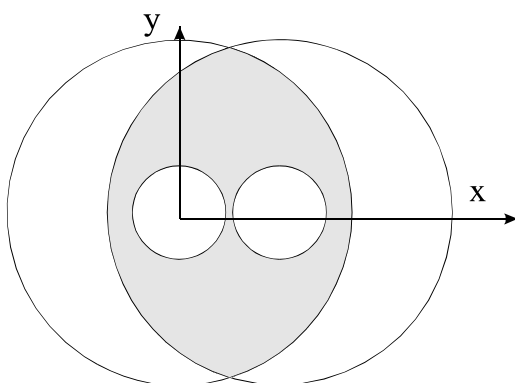


Figure 12 : Espace de travail d'un manipulateur pleinement parallèle 2-RPR

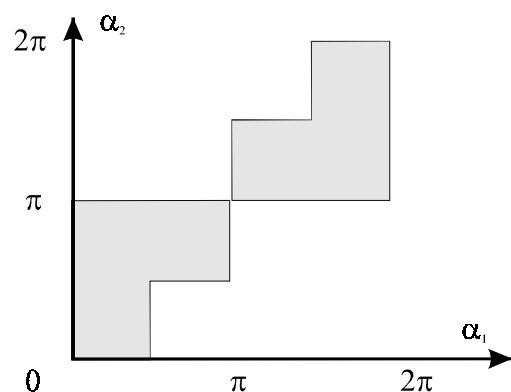


Figure 13 : Ensemble articulaire d'un manipulateur pleinement parallèle 2-RPR

### 1.6.2. L'ESPACE DE TRAVAIL

L'*espace de travail*  $W$  définit l'ensemble des configurations accessibles de la plate-forme mobile. Il se caractérise par l'ensemble des positions et orientations accessibles par un repère lié à la plate-forme mobile :

- $W \subset EO_m$
- $\forall \mathbf{X} \in W, \exists \mathbf{q} \in Q, F(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = 0$

On remarque que le terme « espace de travail » bien que couramment employé n'est pas complètement adapté car il ne s'agit pas d'un espace mais d'un ensemble. Nous aurions pu nommer l'espace de travail « ensemble opérationnel », cependant dans ce mémoire nous conserverons le terme courant d'espace de travail.

Il existe plusieurs projections de l'espace de travail :

- l'espace de travail maximal, qui correspond à l'ensemble des positions accessibles par la plate-forme mobile pour au moins une orientation de celle-ci ;
- l'espace de travail dextre, qui correspond à l'ensemble des positions accessibles par la plate-forme mobile pour toutes les orientations de celle-ci ;
- l'espace de travail à orientation constante, qui correspond à l'ensemble des positions accessibles par la plate-forme mobile pour orientation de celle-ci donnée ;

Dans notre étude, nous utiliserons l'espace de travail et non ses projections. Cependant, nous pourrions nous intéresser à l'espace de travail dextre. Ainsi, il pourrait être intéressant de caractériser les domaines de l'espace de travail où la plate-forme mobile puisse réaliser toutes les trajectoires pour n'importe quelle orientation.

Pour calculer ces différents types d'espaces de travail, on peut utiliser les trois méthodes suivantes :

- méthode géométrique [Merlet 97] ;
- méthode algébrique [Jo 89] [Haugh 95] ;

- méthode algébrique par discrétisation [**Chablat 97**].

Les méthodes géométriques permettent de calculer rapidement la frontière de l'espace de travail. Elles peuvent intégrer les contraintes liées aux limites articulaires et des collisions entre segments. Dans le cas des manipulateurs plans ou spatiaux, il est possible de trouver la frontière de l'espace de travail, pour une orientation et une hauteur données [**Merlet 97**]. Cependant, la reconstruction de l'espace de travail totale est difficile. Cette méthode est le plus souvent utilisée pour calculer des espaces de travail de manipulateurs dont les articulations motorisées sont des articulations prismatiques. Nous utilisons cette méthode pour le calcul de l'espace de travail du manipulateur pleinement parallèle RR-RRR.

Les méthodes algébriques sont plus difficiles à appliquer car elles augmentent la dimension du problème en introduisant des variables supplémentaires. Elles consistent à résoudre un problème d'optimisation en introduisant des pénalités aux frontières [**Jo 89**]. Nous ne les utiliserons pas dans ce mémoire.

La troisième méthode, que nous employons, utilise le modèle géométrique direct et inverse pour calculer l'ensemble des configurations que le manipulateur peut atteindre. Ces données sont enregistrées dans une structure hiérarchique (quadtree pour deux dimensions et octree pour trois dimensions). Cette méthode bien que coûteuse numériquement et en place mémoire est très facile à programmer. De plus, en utilisant l'algorithme présenté en annexe 9.5, on peut connaître une borne maximale du temps de calcul car on connaît le nombre de calcul du modèle géométrique inverse effectués pour calculer par exemple l'espace de travail. Cependant la méthode de calcul de ces ensembles n'est pas le thème central de ce travail. Nous aurions pu, par exemple, appliquer la méthode introduite par Merlet qui utilise des boîtes pour calculer l'espace de travail ou les singularités [**Merlet 98**]. Notre but premier est de disposer d'outils simples permettant d'effectuer des analyses de connexité et des tests d'appartenance rapides sur ces ensembles. C'est pour ces raisons que nous utilisons des quadtrees et des octrees.

## 1.7. SINGULARITÉS

Pour tous les manipulateurs, de type sériel ou parallèle, on trouve des configurations dites *singulières* où le nombre de degrés de liberté de la plate-forme mobile est différent de la dimension de l'espace opérationnel dans lequel il évolue. Ainsi, un manipulateur pleinement parallèle peut gagner ou perdre un ou plusieurs degré(s) de liberté.

De plus, ces configurations peuvent se situer sur la frontière de l'espace de travail, comme pour les manipulateurs sériels ainsi qu'à l'intérieur. Ce sont ces singularités qui seront les plus perturbantes pour la génération de trajectoires. Ainsi, au voisinage de ces singularités, on rencontre les problèmes suivants :

- Une augmentation importante des efforts dans les articulations pouvant endommager la structure du manipulateur ;
- Une perte de rigidité du manipulateur qui peut se traduire par une instabilité de la plate-forme mobile, c'est-à-dire des mouvements incontrôlés de celle-ci alors que les articulations motorisées sont bloquées.

Pour rechercher ces configurations singulières, il existe deux approches. La première méthode est une méthode analytique fondée sur l'étude des matrices jacobienne du manipulateur. La seconde méthode est une méthode géométrique utilisant la géométrie de Grassmann.

### 1.7.1. MÉTHODE ANALYTIQUE

La méthode analytique repose sur l'étude de l'équation (1) et nous utiliserons l'approche retenue par [Gosselin 90] pour les identifier. Ainsi, par une dérivation au premier ordre de l'équation (1), nous obtenons l'équation suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Avec :

$$\square \mathbf{t} \equiv \begin{bmatrix} \varpi \\ \dot{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \text{ dans le cas des manipulateurs plans, où } \varpi \text{ représente la vitesse de rotation plane}$$

et  $\dot{\mathbf{c}}$  la vitesse de déplacement dans le plan ;

- $\mathbf{t} \equiv [\boldsymbol{\omega}]$  dans le cas des manipulateurs sphériques, où  $\boldsymbol{\omega}$  représente le vecteur rotation ;
- $\mathbf{t} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{c}} \end{bmatrix}$  dans le cas des manipulateurs spatiaux, où  $\boldsymbol{\omega}$  représente le vecteur rotation et  $\dot{\mathbf{c}}$  la vitesse de déplacement dans l'espace ;
- $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 ; \dot{q}_2 ; \dots ; \dot{q}_m]^T$  représente le vecteur des vitesses articulaires liées aux articulations motorisées ;
- $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux matrices jacobiennes et  $\mathbf{0}$  le vecteur nul de dimension  $m$ . Dans la suite de ce mémoire, nous nommerons la matrice  $\mathbf{A}$ , matrice *jacobienne parallèle* et la matrice  $\mathbf{B}$ , matrice *jacobienne sérielle*. À partir de l'étude de ces deux matrices, Gosselin propose de définir trois types de configurations singulières [Gosselin 90].

**Notes :**

- a) Pour les manipulateurs pleinement parallèles simples, la matrice jacobienne sérielle est une matrice diagonale où chaque terme est associé à la longueur des articulations prismatiques ;
- b) Dans la plupart des études réalisées sur les manipulateurs pleinement parallèles, on écrit souvent l'équation (2) :  $\mathbf{t} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$  avec  $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ .

Ce formalisme, emprunté aux manipulateurs sériels, ne permet pas de distinguer les différents types de configurations singulières. De plus, cette notation utilise implicitement l'inversion de la matrice jacobienne parallèle qui n'est pas toujours inversible.

Pour permettre une meilleure compréhension de notre travail, nous avons introduit le vocabulaire suivant pour appeler les singularités des manipulateurs parallèles.

**Définition 13 : Les singularités parallèles**

Les *singularités parallèles* sont dues à la perte de rang de la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire lorsque  $\text{Det}(\mathbf{A}) = 0$ . Dans ce cas, il est possible de déplacer la plate-forme

mobile alors que les articulations motorisées sont bloquées. Dans ces configurations, le manipulateur gagne un ou plusieurs degré(s) de liberté. Ces singularités sont propres aux manipulateurs parallèles.

Des singularités parallèles existent à l'intérieur de l'espace de travail ce qui est particulièrement gênant lorsque l'on souhaite planifier des trajectoires. Cependant, nous verrons dans le chapitre 3.4.1 que dans certains cas, nous pouvons éviter ces singularités .

Pour le manipulateur à 5 barres de la figure 14, lorsque les pivots C, D et P sont alignés, on peut provoquer un déplacement infinitésimal du point P suivant une direction perpendiculaire à (C, D) alors que les articulations motorisées A et B sont bloquées.

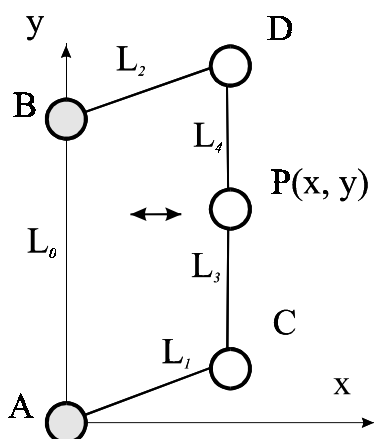


Figure 14 : Exemple de singularité parallèle

#### **Définition 14 : Les singularités sérielles**

Les *singularités sérielles* sont dues à la perte de rang de matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire lorsque  $\text{Det}(\mathbf{B}) = 0$ . Dans ce cas, il n'est pas possible d'engendrer certaines vitesses de la plate-forme mobile. Les singularités sérielles représentent les limites de l'espace de travail [Merlet 97]. Dans ces configurations, le manipulateur perd un ou plusieurs degré(s) de liberté.

Pour le manipulateur à 5 barres de la figure 15, lorsque les pivots A, C et P ou B, D et P sont alignés, il n'est pas possible de produire une vitesse suivant l'axe (A, P). Nous nommons ce type de singularité, *singularité sérielle*, car le même phénomène existe pour les manipulateurs

sériels.

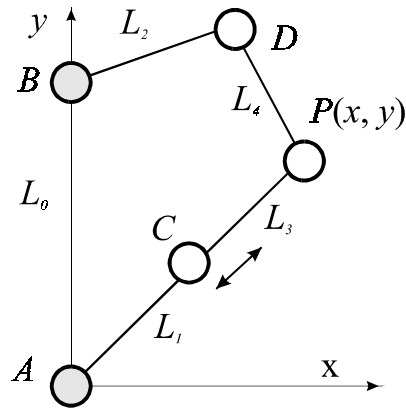


Figure 15 : Exemple de singularité sérielle

### **Définition 15 : Les singularités parallèles / sérielles**

Les singularités parallèles / sérielles sont dues à la perte de rang simultanée des matrices jacobiniennes **A** et **B**. Dans ce cas, il est possible de déplacer de manière infinitésimale la plate-forme mobile alors que les articulations motorisées sont bloquées et inversement.

### **Note**

Il existe un autre type de singularités, les *singularités structurelles*, qui apparaissent pour des dimensions particulières des manipulateurs. Dans ce cas, pour des configurations articulaires particulières, le modèle géométrique direct admet une infinité de solutions c'est-à-dire une infinité de configurations pour la plate-forme mobile.

Pour le manipulateur à 5 barres de la figure 16, lorsque les points C et D coïncident, il existe une infinité de positions pour le point P alors que les pivots A et B sont bloqués.

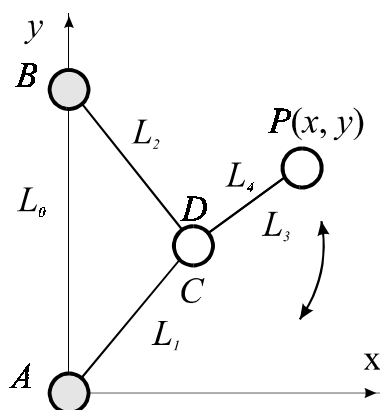


Figure 16 : Exemple de singularité structurelle

De nombreuses études utilisent les matrices jacobiennes pour déterminer les configurations singulières des manipulateurs parallèles. Parmi celles-ci, on peut citer [Gosselin 90], [Gosselin 95], [Sefrioui 93], [Mohammadi 95] pour les manipulateurs plans et [Ma 91], [Dheeman 97] et [Khalil 96] pour les manipulateurs spatiaux.

Ainsi, Sefrioui représente les singularités d'un manipulateur plan RPR simplifié pour des orientations données [Sefrioui 93]. Khalil représente les singularités parallèles d'une plate-forme de Gouth pour une position donnée (Figure 17) ou pour une orientation donnée (Figure 18) de la plate-forme mobile [Khalil 96]. Cependant, il est difficile de calculer toutes les configurations singulières de ce manipulateur et surtout de les représenter.

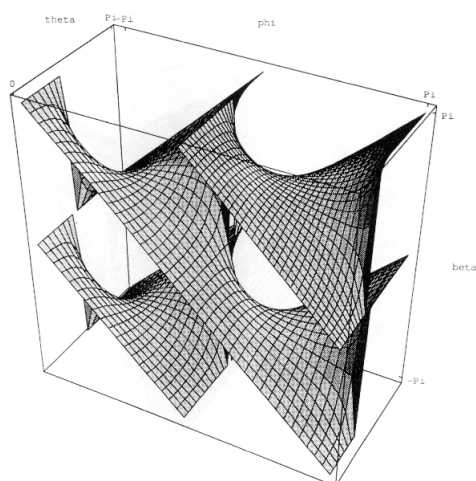


Figure 17 : Singularité d'une plate-forme de Gouth pour une position donnée d'après [Khalil 96]

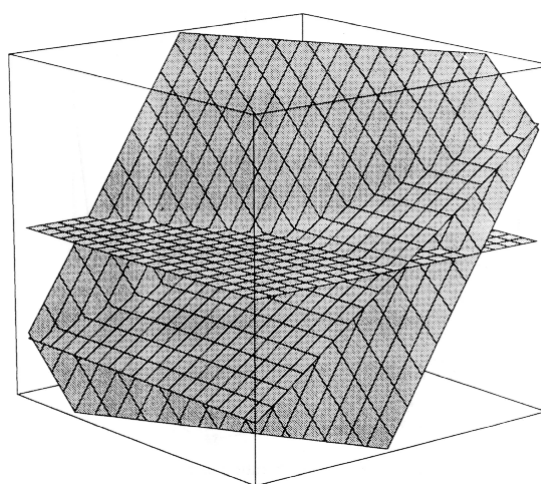


Figure 18 : Singularité d'une plate-forme de Gouth pour une orientation donnée d'après [Khalil 96]



### Limites de la méthode

Nous venons d'inventorier les différentes singularités des manipulateurs que l'on peut trouver en étudiant les matrices jacobiennes issues de l'équation (1). Ainsi, si l'on prend en compte toutes les articulations, c'est-à-dire l'espace, les articulations motorisées, les articulations passives, on trouve des singularités particulières qui se traduisent par une mobilité d'une partie du manipulateur, les jambes [Zlatanov 98]. De plus, si l'on n'étudie que les déplacements dans l'espace de la tâche, il peut exister des singularités non définissables à partir des matrices jacobiennes. Ainsi, pour le syntaxeur développé par Reboulet (Figure 19), manipulateur à trois degrés de liberté en translation, Leguay-Durand montre qu'il existe des singularités pour lesquelles des rotations de la plate-forme apparaissent [Leguay-Durand 98]. La nature des mouvements induits par ces singularités n'est pas définie car l'écriture des dérivés partiels ne se fait que par rapport aux variables de son espace opérationnel, c'est-à-dire X, Y et Z.

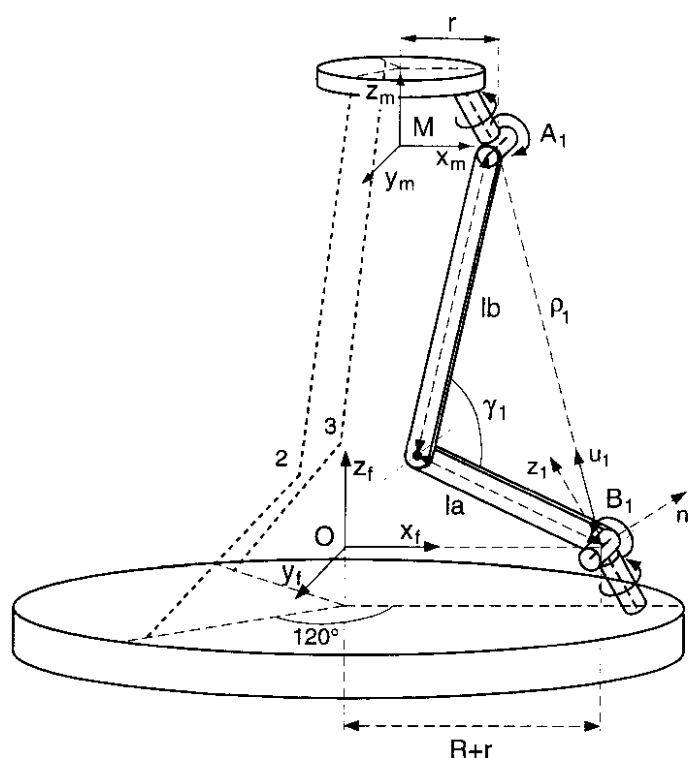


Figure 19 : Géométrie et paramètres du syntaxeur développé par Reboulet extrait de [Leguay-Durand 98]

### 1.7.2. MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

Les limites de la méthode analytique sont dues à la complexité de la matrice jacobienne parallèle lorsque l'on étudie des mécanismes spatiaux à 6 degrés de liberté. Pour résoudre ce problème, Merlet a utilisé la géométrie de Grassmann qui repose sur l'utilisation des vecteurs de Plücker [Merlet 89].

#### Vecteurs de Plücker

Pour construire un vecteur de Plücker [Plücker 1865], on considère deux points  $M_1$  et  $M_2$  placés sur une droite, ainsi qu'une origine  $O$  placée dans un repère orthonormé  $(X, Y, Z)$  (Figure 20). Un vecteur de Plücker de dimension 6 est défini tel que :

$$P_r = \begin{bmatrix} M_1 M_2 \\ OM_1 \wedge OM_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

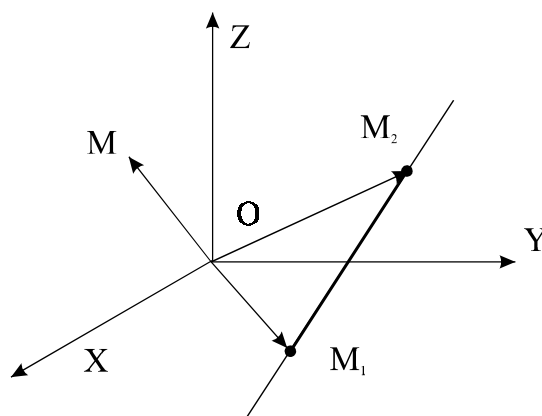


Figure 20 : Définition d'une droite de Plücker

En étudiant la matrice jacobienne parallèle  $A$ , on retrouve l'expression des vecteurs de Plücker associée à la géométrie du manipulateur. Aussi, la géométrie de Grassmann nous permet-elle de trouver les configurations singulières du manipulateur. En effet, Grassmann a montré que la dépendance linéaire des vecteurs de Plücker induit des relations géométriques sur les droites associées. Ainsi, la dégénérescence de la matrice jacobienne parallèle implique donc une dépendance linéaire de ces vecteurs. Pour un manipulateur à 6 degrés de liberté possédant une matrice jacobienne parallèle de dimension 6, on peut étudier les variétés de dimension inférieure.

### Application

Pour un manipulateur pleinement parallèle à 6 degrés de liberté, Murareci interprète toutes les singularités issues de l'étude des différentes variétés de Grassmann [Murareci 97]. La variété de Grassmann de dimension 5 (Figure 21), nommée complexe, est engendrée lorsque toutes les lignes sont concourantes avec une ligne de l'espace.

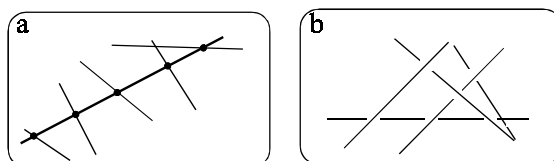


Figure 21 : Variété de Grassmann de dimension 5

Pour un manipulateur spatial à 6 degrés de liberté, Collins représente les deux variétés de Grassmann de dimension 5 (Figures 22 et 23) [Collins 95].

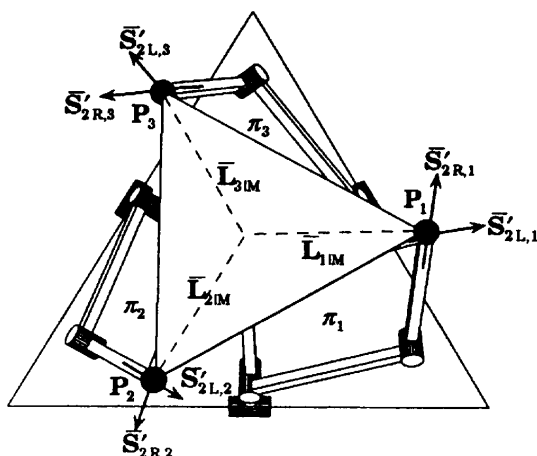


Figure 22 : Singularité de type 5a

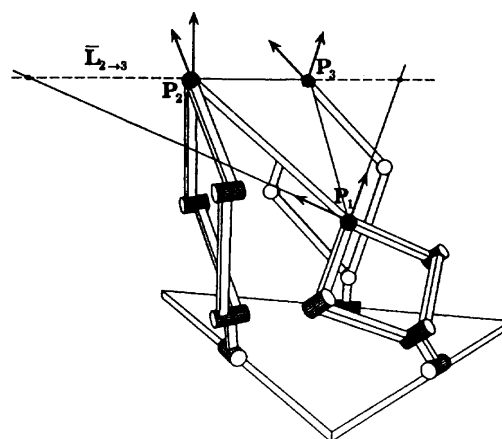


Figure 23 : Singularité de type 5b

### 1.7.3. CONCLUSION

Dans ce paragraphe, nous venons de présenter deux méthodes permettant de caractériser les configurations singulières des manipulateurs parallèles. Dans la suite de notre étude, nous étudierons les singularités en utilisant la méthode algébrique. Cependant, il est possible d'utiliser la méthode géométrique pour trouver les configurations singulières si la complexité des matrices jacobiniennes ne permet pas un calcul rapide de celles-ci.

## 1.8. OBJECTIFS DES DOMAINES D'UNICITÉ

Nous venons de voir dans les paragraphes précédents que les manipulateurs pleinement parallèles pouvaient admettre plusieurs solutions à leurs modèles géométriques direct et inverse. L'un des objectifs de ce mémoire est la définition d'un opérateur géométrique c'est-à-dire une fonction entre l'ensemble articulaire  $Q$  appartenant à l'espace articulaire lié aux articulations motorisées  $EA_n$  et l'espace de travail  $W$  appartenant à l'espace opérationnel  $EO_m$  (Figure 24). Nous allons rappeler les différents types de relations que nous pouvons établir entre ces deux ensembles.

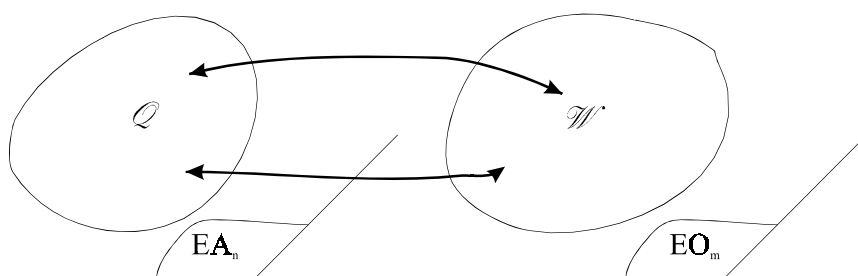


Figure 24 : Relations entre l'ensemble articulaire et l'espace opérationnel

### **Définition 16 : Produit cartésien de deux ensembles**

On appelle *produit cartésien* d'un ensemble  $E$  par un ensemble  $F$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  dont le premier élément appartient à  $E$  et le second élément à  $F$ . On a donc :

$$E \times F = \left\{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \right\}$$

Dans notre étude, nous poserons le produit cartésien  $W \times Q$  entre l'espace de travail  $W$  et l'ensemble articulaire  $Q$ . On a donc :

$$W \times Q = \left\{ (X, q) \mid X \in W, q \in Q \right\}$$

### **Définition 17 : Relation binaire**

On appelle relation binaire  $R$  d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$  une proposition vraie pour certains couples de l'ensemble produit  $E \times F$ , fausse pour les autres.

L'ensemble des couples vérifiant la relation est le *graphe* de la relation :

$$G = \left\{ (x,y) \in E \times F \mid x R y \right\}$$

Les modèles géométriques direct et inverse définissent une relation binaire entre les éléments de l'espace de travail  $W$  et l'espace articulaire  $Q$ . L'ensemble des couples  $(X, q)$  est l'ensemble des configurations du manipulateur telles que  $F(X, q) = 0$ . On rappelle qu'une configuration du manipulateur, définie par  $(X, q)$  est donnée par une configuration articulaire à laquelle est associée un mode d'assemblage (voir paragraphe 1.3, définition 12).

### **Définition 18 : Application**

Soient deux ensembles  $E$  et  $F$ . On appelle *application* de  $E$  vers  $F$  toute relation fonctionnelle  $f$  qui à tout élément  $x$  de  $E$  fait correspondre un élément unique  $y$  de  $F$ . On note :

$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

Pour les manipulateurs pleinement parallèles simples, on peut écrire la relation suivante :

$$q = g(X) \text{ où } g \text{ est l'opérateur géométrique inverse.}$$

Cependant, dans le cas général, il n'est pas possible de définir une telle notation. Aussi, nous allons définir les modes de fonctionnement (Paragraphe 3.2) des manipulateurs pleinement parallèles pour gérer les postures de chaque jambe et pour pouvoir établir une telle relation.

### **Définition 19 : Application bijective**

L'application  $f$  est bijective si tout élément de  $F$  est l'image par  $f$  d'un élément unique de  $E$ . On dit alors que  $f$  établit une bijection entre les ensembles  $E$  et  $F$ . Si  $f$  est une application bijective de  $E$  sur  $F$ , il existe une application bijective de  $F$  sur  $E$ , noté  $f^{-1}$ , appelée application inverse de  $f$  (Figure 25).

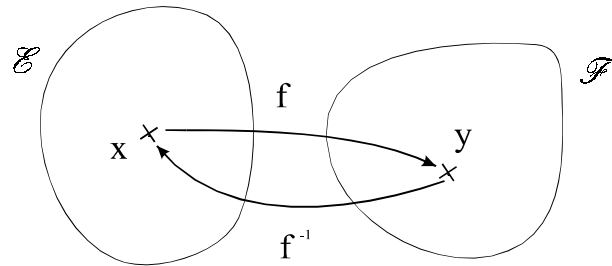


Figure 25 : Application bijective

Pour les manipulateurs parallèles, on ne peut établir une telle relation que si les modèles géométriques direct et inverse admettent une seule et unique solution. Or, les manipulateurs pleinement parallèles admettent plusieurs solutions à leur modèle géométrique direct et inverse. Nous allons donc, dans les chapitres 2 et 3, caractériser les domaines d'unicité permettant de définir une application bijective entre l'espace de travail  $\mathcal{W}$  et l'ensemble articulaire  $\mathcal{Q}$ .

## 1.9. CONCLUSION

Nous venons de rappeler dans ce chapitre quelques définitions que nous allons utiliser dans notre étude des manipulateurs pleinement parallèles. Pour caractériser les domaines de l'espace de travail exempts de configurations singulières, le calcul des modèles géométriques direct et inverse sera abondamment utilisé.

## 2. LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES SIMPLES

### 2.1. INTRODUCTION

Nous avons vu dans le paragraphe 1.2 qu'il existait deux types de manipulateurs pleinement parallèles. Nous allons, pour commencer, étudier les manipulateurs pleinement parallèles simples. Le but de ce chapitre est de définir les domaines d'unicité pour ce type de manipulateurs parallèles.

Pour définir ces domaines, Borrel a introduit la notion d'aspect pour les manipulateurs sériels [Borrel 86]. À l'intérieur de ces domaines, il est possible de réaliser des trajectoires continues sans rencontrer de configurations singulières. La résolution de ce problème permet de faciliter considérablement la planification des trajectoires.

Nous allons écrire la définition des aspects pour les manipulateurs pleinement parallèles simples et en donner ses limites. Cette définition ne s'applique que pour ce type de manipulateur mais elle permet de mieux comprendre le problème, car elle est duale de celle qui s'applique aux manipulateurs sériels.

Depuis [Innocenti 92], nous savons que les aspects ainsi obtenus ne permettent pas d'obtenir les plus grands domaines d'unicité de l'espace de travail. Ainsi, nous verrons qu'il est possible de changer de mode d'assemblage sans rencontrer de configuration singulière. Pour résoudre ce problème, nous définissons les surfaces caractéristiques pour découper les aspects précédemment trouvés et obtenir les plus grands domaines d'unicité de ces manipulateurs.

Nous terminerons ce chapitre par un inventaire des différents types de trajectoires pouvant être exécutées dans l'espace de travail.

Ce chapitre synthétise les résultats que nous avons présentés dans [Wenger 97a], [Wenger 97b] et [Wenger 98].

## 2.2. RAPPEL : LES ASPECTS POUR LES MANIPULATEURS SÉRIELS

Avant de rappeler la définition de la notion d'aspect, nous allons reposer le problème. La multiplicité des solutions au modèle géométrique inverse d'un robot sériel s'illustre facilement par l'exemple du robot anthropomorphe. En effet, celui-ci admet deux postures « coude haut » et « coude bas » (Figure 26). Il est nécessaire de choisir, avant d'effectuer une trajectoire continue, dans quelle posture le manipulateur doit se trouver. Ainsi, si l'on ne prend pas en compte cette contrainte, il peut-être nécessaire que le manipulateur change de posture et par conséquent quitte sa trajectoire initiale.

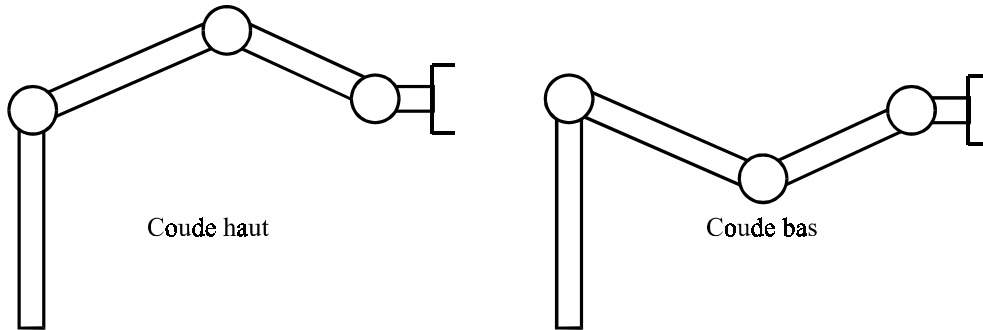


Figure 26 : Postures coude haut, coude bas

Pour un manipulateur sériel à  $n$  degrés de liberté, Borrel définit les aspects de la manière suivante [Borrel 86] :

### Définition 20 : Les aspects [Borrel 86].

Soit  $D$  le domaine articulaire accessible :

$$D = \left\{ \mathbf{q} \mid q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max}, \forall i \in [1, n] \right\} \quad (4)$$

On appelle aspect, pour un choix donné de coordonnées opérationnelles  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_m]$ , les domaines  $A_j$  de  $\mathbf{R}^n$  tels que :

- $A_j \subset D$  ;
- $A_j$  est connexe ;
- $\forall \mathbf{q} \in A_j$ , aucun des mineurs  $m$  extrait de  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_i}(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{q}_i}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  n'est nul, sauf si ce



mineur est nul partout sur  $D$ .

Pour les manipulateurs sériels non redondants, les aspects ainsi définis sont les plus grands domaines de  $D$  exempts de toute singularité. À l'intérieur de ces domaines, il est donc possible d'effectuer des trajectoires continues.

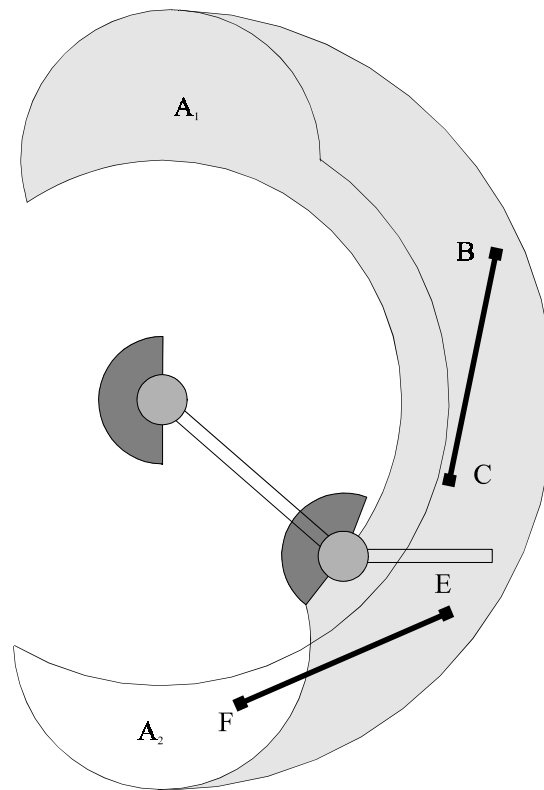


Figure 27 : Les aspects dans l'espace de travail d'un manipulateur plan à deux articulations rotoïdes

Pour le manipulateur plan à deux articulations rotoïdes de la figure 27, nous avons deux aspects  $A_1$  et  $A_2$ . La trajectoire BC est réalisable dans n'importe quel aspect, alors que la trajectoire EF ne peut être réalisée de manière continue que dans l'aspect  $A_2$ .

### **Cas des manipulateurs sériels cuspidaux :**

On rappelle qu'un manipulateur sériel est dit cuspidal lorsqu'il peut changer de posture sans franchir une singularité. Dans le cas des manipulateurs sériels non cuspidaux [Wenger 96], les aspects permettent la définition des fonctions  $f$  et  $f^{-1}$  associées aux modèles géométriques direct et inverse respectivement. Les domaines d'unicité de ces manipulateurs

sont équivalents aux aspects. En revanche, pour les manipulateurs cuspidaux, les domaines d'unicité doivent être redéfinis (voir paragraphe 2.4).

## **2.3. LES ASPECTS POUR LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES SIMPLES**

### **2.3.1. DÉFINITION**

Contrairement aux manipulateurs sériels, les manipulateurs parallèles peuvent admettre plusieurs solutions au modèle géométrique direct. Ainsi, nous cherchons à définir un opérateur géométrique permettant d'associer à un vecteur articulaire  $\mathbf{q}$ , une seule configuration de l'organe effecteur  $\mathbf{X}$  dans l'espace de travail.

La résolution de ce problème doit permettre de connaître la position de l'organe effecteur. Pour des architectures particulières, Tancredi et Baron ont montré qu'il est possible d'avoir unicité de solution en utilisant des capteurs additionnels [Tancredi 95], [Baron 98], pour différencier les positions des différentes solutions du modèle géométrique direct.

Jusqu'à présent, aucune définition des aspects n'existait pour les manipulateurs parallèles. Cependant, une définition équivalente a été utilisée dans [Khalil 96] pour un cas particulier de manipulateur parallèle.

#### **Définition 21 : Les aspects [Wenger 97]**

On appelle aspects  $WA_i$  d'un manipulateur pleinement parallèle simple, les plus grands domaines de  $W$  tel que :

- $WA_i \in W$ ;
- $WA_i$  est connexe ;
- $\forall \mathbf{X} \in WA_i, \text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$ .

En d'autres termes, les aspects sont les plus grands domaines de l'espace de travail exempt de toute singularité. L'ensemble des aspects  $WA_i$  peut être obtenu en soustrayant de l'espace de travail les configurations singulières  $S$  et effectuons une analyse de connexité.

$\{WA_i\} = CC \{W \div S\}$  où  $CC$  = composantes connexes et où  $\div$  désigne la différence entre ensembles.

Nous présenterons pour le manipulateur 3-RPR, une méthode utilisant les modèles octrees, pour construire les aspects des manipulateurs parallèles. La représentation octree est obtenue en divisant récursivement l'espace, occupé par un objet, en huit cellules de tailles égales appelées octant [Meagher 81]. Il existe trois catégories d'octants : *noir* qui indique que l'octant est à l'intérieur de l'objet, *blanc* qui précise qu'il est à l'extérieur de l'objet et *gris* quand il y a occupation partielle de l'octant par l'objet. Ainsi, la modélisation d'un volume est réalisée par un ensemble de cubes de tailles différentes. Les plus petits cubes étant proches de la frontière de l'objet, leur taille définit la précision de l'octree. Cette modélisation est particulièrement adaptée pour la représentation de volumes complexes et pour réaliser des opérations booléennes ou topologiques. Leur structure possédant un graphe, il est possible de réaliser des études de connexité. Les octrees ont été utilisés avec succès dans plusieurs applications en robotique [Faverjon 84], [Garcia 86], [El Omri 96]. Pour mémoire, quelques définitions et algorithmes sont rappelés en annexe 9.3.

### 2.3.2. APPLICATION AU MANIPULATEUR PLAN 2-RPR

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser un manipulateur plan 2-RPR (figure 28) pour illustrer la notion d'aspect. Ce manipulateur a été étudié par [Alexandre 96]. Une synthèse dimensionnelle a ainsi été formulée pour classifier ce type de manipulateur en fonction de ses dimensions et des aspects qui en découlent.

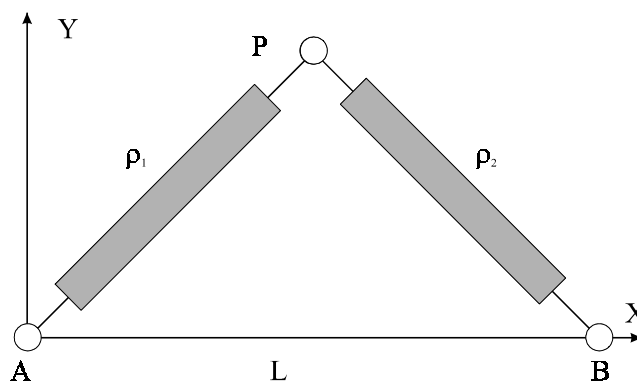


Figure 28 : Manipulateur parallèle plan à 2-RPR

Ce manipulateur plan possède deux degrés de liberté, ses variables d'entrée sont les longueurs des articulations prismatiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et ses variables de sortie sont la position du point P, X et Y.

$$\begin{cases} \rho_1^2 = X^2 + Y^2 \\ \rho_2^2 = (X - L)^2 + Y^2 \end{cases} \quad (5)$$

où L désigne la distance entre les deux pivots A et B.

Les butées articulaires donnent les inéquations  $\rho_{i \min} \leq \rho_i \leq \rho_{i \max}$  avec  $i = (1, 2)$ .

La résolution du modèle géométrique direct est simple ; il admet deux solutions placées symétriquement par rapport à l'axe AB. Alors que le modèle géométrique inverse ne possède qu'une seule solution.

### Les configurations singulières

À partir de l'équation (5), on peut écrire le modèle cinématique pour en extraire ses singularités.

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

avec :

$$\square \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x - 2L & 2y \end{bmatrix}$$

$$\square \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2\rho_1 & 0 \\ 0 & -2\rho_2 \end{bmatrix}$$

L'étude des configurations singulières du manipulateur 2-RPR peut se faire à partir de l'étude des matrices jacobiennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Les singularités sérielles apparaissent lorsque les longueurs des articulations prismatiques  $\rho_1$  ou  $\rho_2$  sont égales à 0. Les singularités parallèles de ce manipulateur sont les configurations pour lesquelles les articulations A, B et P sont alignées (Figure 29).

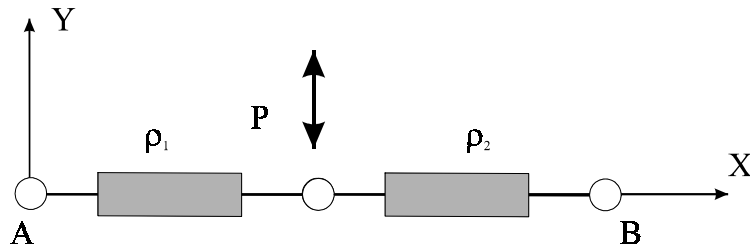


Figure 29 : Singularité parallèle d'un manipulateur 2-RPR

### Les aspects

En connaissant la position des configurations singulières de ce manipulateur, on peut en déduire que, pour les dimensions choisies, il existe seulement deux aspects  $WA_1$  et  $WA_2$  (Figure 30).

On vérifie que dans l'espace de travail, les deux aspects  $WA_1$  et  $WA_2$  sont bien distincts et que leur frontière commune est un ensemble de configurations singulières parallèles. La trajectoire AB est réalisable dans l'aspect  $WA_1$  alors que la trajectoire CD est entre les deux aspects  $WA_1$  et  $WA_2$ ; elle ne peut pas être réalisée de manière continue sans rencontrer de configuration singulière.

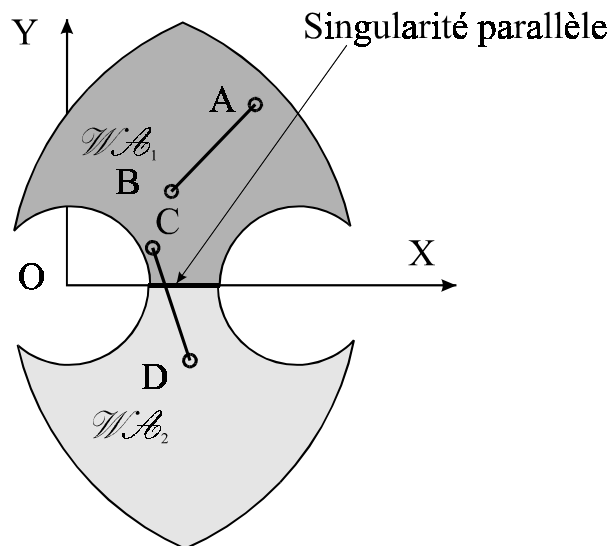


Figure 30 : Aspects d'un manipulateur 2-RPR

### 2.3.3. APPLICATION AU MANIPULATEUR PLAN 3-RPR

Notre deuxième exemple est un manipulateur plan pleinement parallèle possédant 3 chaînes RPR (Figure 4). Les articulations motorisées sont les trois articulations prismatiques.

La position et l'orientation de la plate-forme mobile sont les sorties de ce manipulateur. Ce manipulateur a été fréquemment étudié en particulier par [Merlet 97], [Gosselin 92] et [Innocenti 92]. Avec cet exemple, nous étudierons les 6 solutions du modèle géométrique direct. Nous pourrons ainsi constater que les aspects sont bien les plus grands domaines exempts de singularités parallèle et sérielle mais qu'ils ne définissent pas des domaines d'unicité.

La mise en équation de ce manipulateur est donnée par exemple dans [Gosselin 92] :

$$\begin{cases} \rho_1^2 = x^2 + y^2 \\ \rho_2^2 = (x + l_2 \cos(\phi) - c_2)^2 + (y + l_2 \sin(\phi))^2 \\ \rho_3^2 = (x + l_3 \cos(\phi + \theta) - c_3)^2 + (y + l_3 \sin(\phi + \theta) - d_3)^2 \end{cases} \quad (7)$$

Pour notre étude, nous étudierons ce manipulateur en utilisant les mêmes dimensions que dans [Innocenti 92] et [Merlet 97], ceci afin de retrouver les mêmes résultats (Tableau 2)

$A_1 = (0.0, 0.0)$	$A_2 = (15.9, 0.0)$	$A_3 = (0.0, 10.0)$
$l_1 = B_2 B_3 = 16,5$	$l_2 = B_1 B_2 = 17,0$	$l_3 = B_3 B_1 = 20,8$

Tableau 2 : Dimensions du manipulateur pleinement parallèle plan 3-RPR étudié

Les limites des articulations prismatiques sont celles choisies par [Innocenti 92] :

$$10.0 \leq \rho_i \leq 32.0 \text{ pour } i=(1, 2, 3)$$

Les unités n'ont pas d'importance dans cet exemple.

La modélisation de l'espace de travail et de l'espace articulaire est obtenue en utilisant une technique d'enrichissement [Chablat 96] (voir en annexe, paragraphe 9.3.3). Nous parcourons l'espace opérationnel (fonction de X, Y et  $\phi$ ), en utilisant le modèle géométrique inverse de ce manipulateur puis nous vérifions l'appartenance à l'ensemble articulaire. Ce calcul nous permet d'enrichir deux octrees représentant l'un l'espace de travail, l'autre l'ensemble articulaire. Nous constatons que l'ensemble articulaire n'est pas complet. C'est-à-dire que pour tout vecteur  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)^T$ , il n'existe pas de vecteur  $(X, Y, \phi)^T$  associé à cette configuration du manipulateur. Ceci traduit le fait que pour certaines valeurs de  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , il

n'est pas possible de relier la plate-forme mobile avec la plate-forme fixe.

Les figures 31 et 32 montrent l'ensemble articulaire et l'espace de travail de ce manipulateur, respectivement.

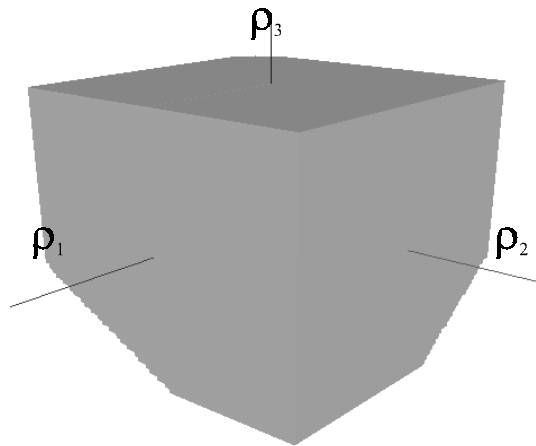


Figure 31 : Ensemble articulaire du manipulateur 3-RPR

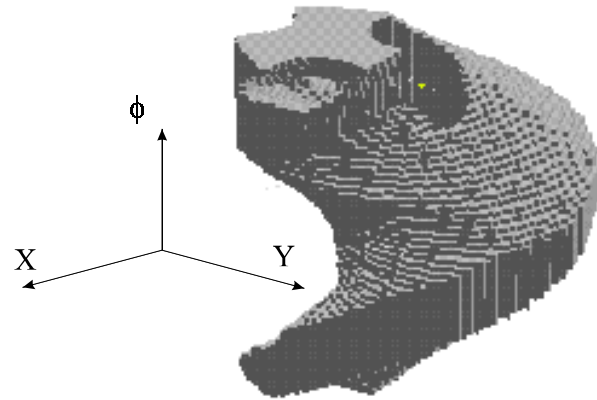


Figure 32 : Espace de travail du manipulateur 3-RPR

### Configurations singulières

- a) Les singularités parallèles : de telles configurations sont atteintes lorsque l'axe passant par les trois articulations prismatiques se croisent en un seul point (Figure 33) ;
- b) Les singularités sérielles : elles correspondent aux configurations pour lesquelles la condition suivante est satisfaite :  $\rho_1 = 0$  ou  $\rho_2 = 0$  ou  $\rho_3 = 0$ . En pratique, on considère que ces singularités sont atteintes lorsque l'une des articulations prismatiques est en butée [Gosselin 90].

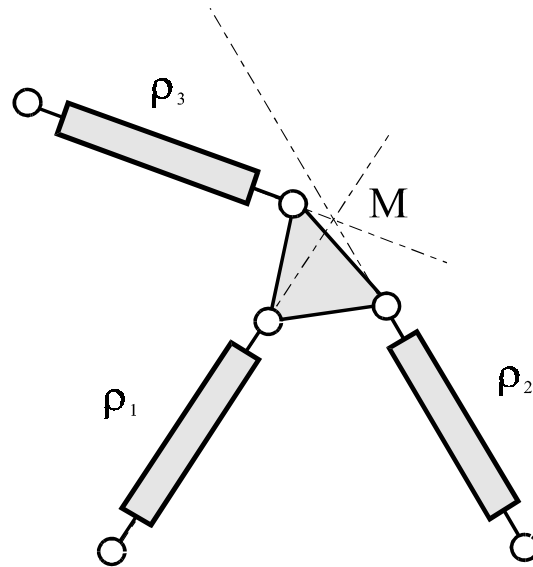


Figure 33 : Singularité parallèle du manipulateur parallèle plan de type 3 - RPR

On peut modéliser la surface définie par les singularités parallèles en utilisant un modèle octree (Figure 34). Cette modélisation est bien sûr approximative, car, nous modélisons ainsi une surface par un volume ; elle est très dépendante de la précision de calcul choisie.

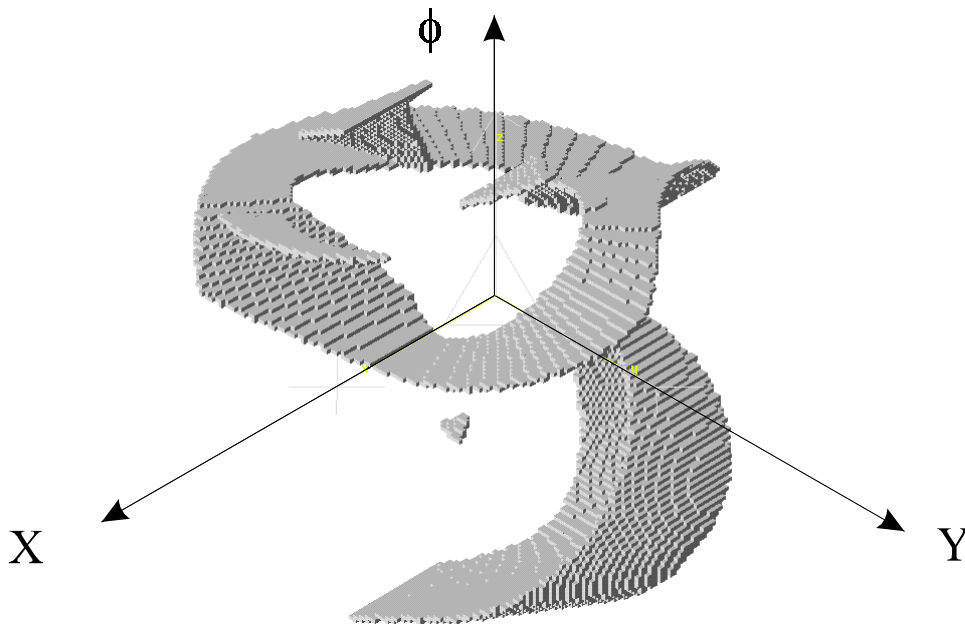


Figure 34 : Modélisation octree des singularités parallèles d'un manipulateur 3-RPR

### Les aspects

Pour le manipulateur étudié, nous obtenons deux aspects ( $WA_1$  et  $WA_2$ ), où  $\text{Det}(\mathbf{A}) > 0$  et  $\text{Det}(\mathbf{A}) < 0$ , respectivement (Figure 35). La surface définie par les singularités



parallèles est la frontière commune aux deux aspects. Pour des valeurs de butées des articulations prismatiques différentes, nous aurions pu trouver plus de deux aspects pour ce manipulateur, car les régions correspondant à  $\text{Det}(\mathbf{A}) > 0$  et  $\text{Det}(\mathbf{A}) < 0$  peuvent ne pas être connexes.

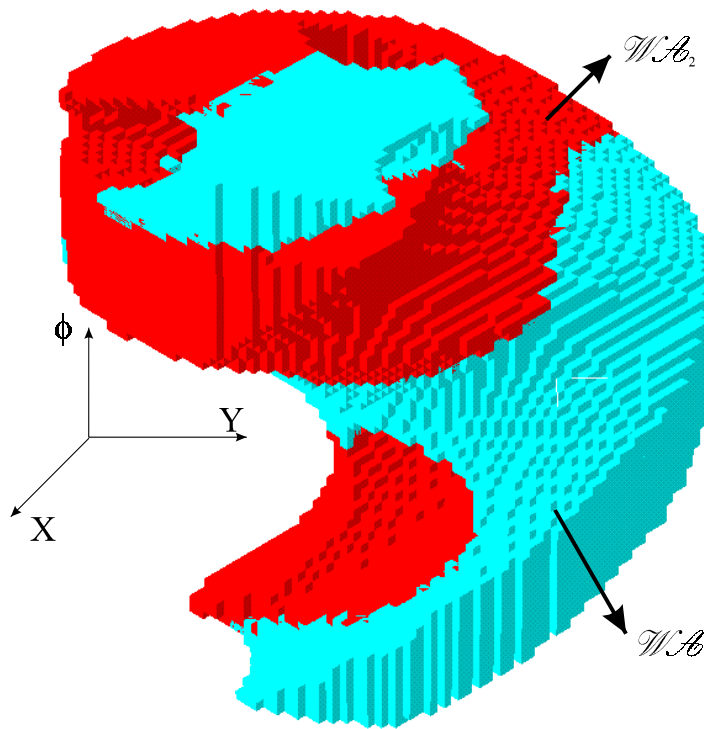


Figure 35 : Modélisation octree des aspects d'un manipulateur 3-RPR

#### 2.4. RAPPEL : LES DOMAINES D'UNICITÉ POUR LES MANIPULATEURS SÉRIELS

Pour les manipulateurs sériels, les aspects et les aspects libres permettent de définir des domaines de l'ensemble articulaire exempts de singularité. Longtemps, on a cru qu'il n'existait qu'une seule solution au modèle géométrique inverse dans chaque aspect. En d'autres termes, on pensait que les singularités séparaient les solutions du modèle géométrique inverse. Les travaux de [Parenti 88] puis de [Burdick 91] ont permis de mettre en évidence ce problème. Wenger a alors introduit la notion de surfaces caractéristiques pour définir les domaines d'unicité de ces manipulateurs et ainsi expliquer comment et pourquoi il est possible de changer de solution du modèle géométrique inverse sans rencontrer de

configuration singulière [Wenger 92]. Ces manipulateurs ont été appelés manipulateurs cuspidaux à cause de l'existence de points « cusps » dans l'espace de travail [El Omri 96].

### Cas du robot manipulateur RRR

Pour les manipulateurs à 3 degrés de liberté, le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  ne dépend que de la deuxième et de la troisième articulation ( $q_2, q_3$ ). Il est donc possible de représenter les singularités dans un plan.

Soit l'étude d'un manipulateur RRR, sans butée articulaire dont les paramètres géométriques de Denavit et Hartenberg modifiés sont : ( $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1.5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ ). Il est possible de factoriser le déterminant de la matrice jacobienne [El Omri 96].

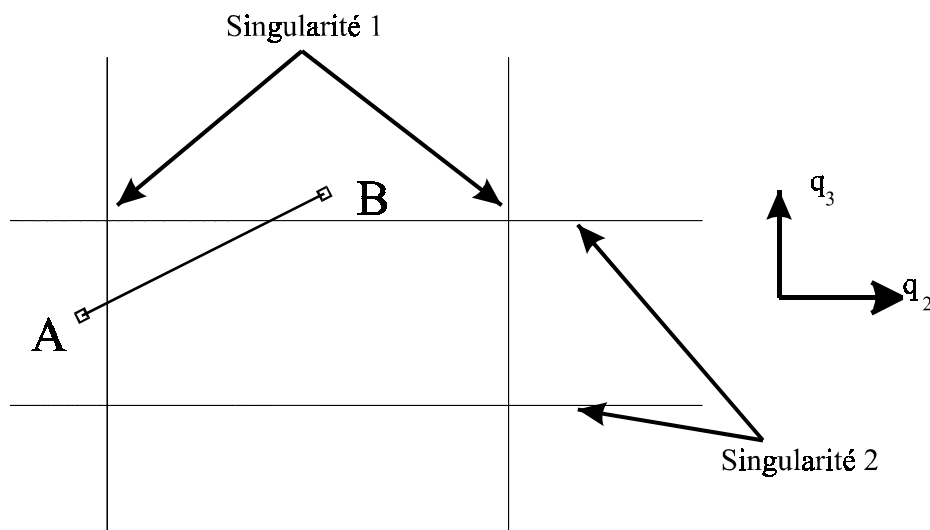


Figure 36 : Représentation des singularités dans l'espace articulaire d'un manipulateur RRR

Les configurations singulières associées à  $\det(\mathbf{J}) = 0$  sont quatre droites dépendants de  $q_1$  et  $q_2$  respectivement (Figure 36).

La trajectoire AB est singulière car elle rencontre obligatoirement des configurations singulières.

En modifiant les paramètres géométriques de Denavit et Hartenberg modifiés, en posant  $d_2 \neq 0$ , nous obtenons une morphologie possédant des configurations singulières différentes

( $d_2 = 0.1$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1.5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ ). On obtient alors une seule singularité composée de deux branches (Figure 37).

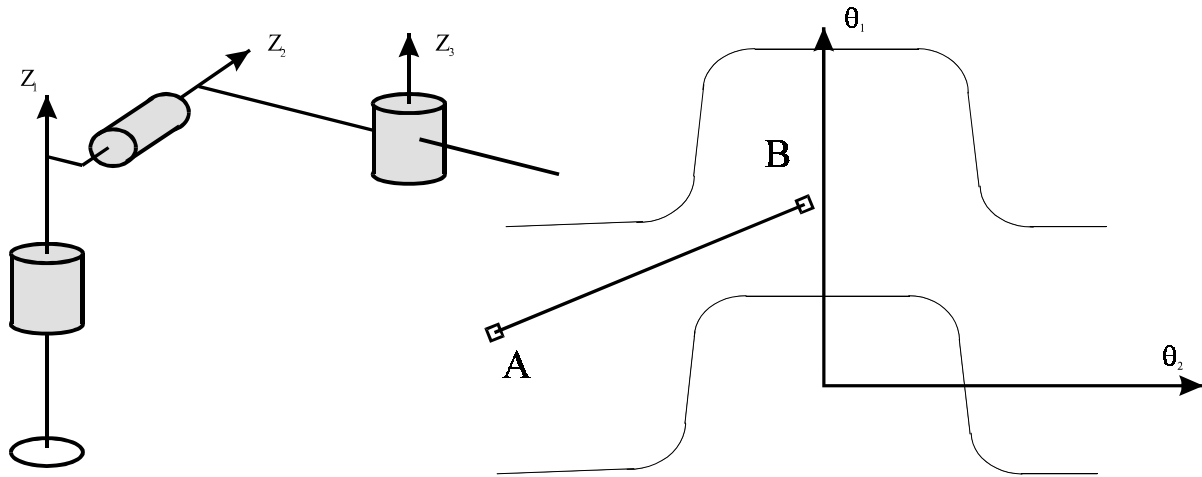


Figure 37 : Une singularité à deux branches dans le domaine articulaire

Ainsi, la trajectoire AB relie deux solutions du modèle géométrique inverse mais ne rencontre pas de configuration singulière. Une telle trajectoire non singulière permet au manipulateur de changer de posture, c'est-à-dire de changer de solution du modèle géométrique inverse.

Les surfaces caractéristiques permettent de diviser le domaine articulaire en régions de base et l'espace de travail en composantes de base. En réunissant certaines régions de base, on peut définir les plus grands domaines d'unicité [Wenger 96].

## 2.5. LES DOMAINES D'UNICITÉ POUR LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES SIMPLES

### 2.5.1. PROBLÉMATIQUE

Pour un manipulateur plan de type 3 - RPR, Innocenti a montré qu'il était possible pour un robot parallèle de changer de mode d'assemblage sans passer par une singularité [Innocenti 92]. Ce résultat a été obtenu par simulation numérique et aucune interprétation n'est donnée. Il est donc nécessaire d'étudier ce problème pour comprendre ce qui se passe lorsque l'on change de mode d'assemblage.

Pour les variables articulaires suivantes,  $\rho_1 = 15.0$ ,  $\rho_2 = 15.4$  et  $\rho_3 = 12.0$ , le manipulateur

admet 6 solutions au modèle géométrique direct (Tableau 3 et figure 38) .

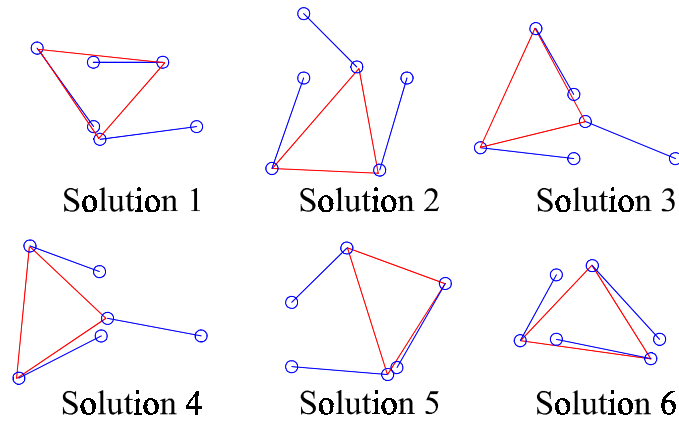


Figure 38 : Les 6 modes d'assemblage du manipulateur plan 3-RPR

	<b>x</b>	<b>y</b>	<b><math>\phi</math></b>
1	-8.715	12.183	-0.987
2	-5.495	-13.935	-0.047
3	-14.894	1.596	0.244
4	-13.417	-6.660	0.585
5	14.920	-1.337	1.001
6	14.673	-3.013	2.133

Tableau 3 : 6 solutions du modèle géométrique direct du manipulateur 3-RPR

La trajectoire de changement de mode d'assemblage proposée par [Innocenti 92] (Figure 39) est définie numériquement. Elle permet effectivement au manipulateur de changer de mode d'assemblage sans franchir de singularité. Mais, on a pu vérifier que certaines configurations intermédiaires étaient proches d'une singularité.

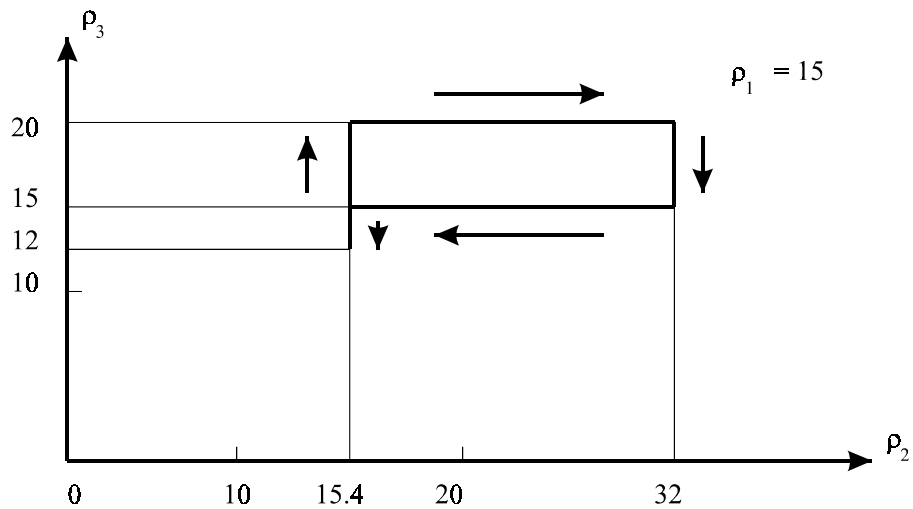


Figure 39 : Cycle de changement de posture du manipulateur 3-RPR

En calculant les aspects pour ce manipulateur, nous avons constaté que les solutions -2-, -3-, -6- étaient dans le même aspect ( $WA_1$ ) (Figure 40). Par suite, il est possible de relier non seulement deux solutions du modèle géométrique direct mais trois. De même, il existe une trajectoire dans  $WA_2$  permettant de relier les solutions -1-, -4- et -5-. En effet, en utilisant les propriétés de l'octree, on peut facilement trouver une trajectoire entre n'importe quelle solution appartenant à un aspect.

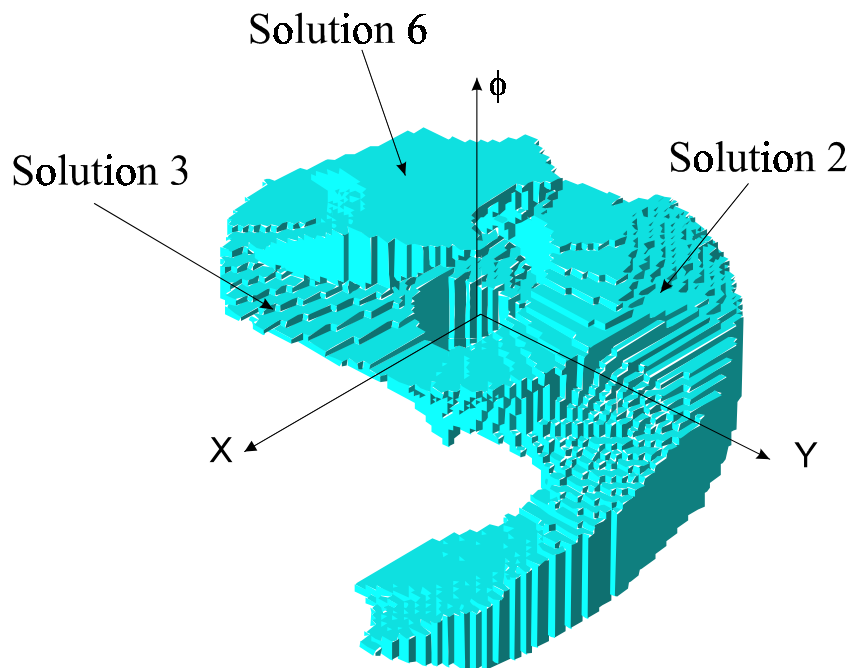


Figure 40 : 3 solutions du modèle géométrique direct dans l'aspect  $WA_1$

### 2.5.2. LES SURFACES CARACTÉRISTIQUES

Nous avons vu précédemment que les singularités parallèles ne permettaient pas de séparer les solutions du modèle géométrique direct dans l'espace de travail. Cependant, les configurations singulières d'un mécanisme correspondent à des racines doubles du modèle géométrique direct et d'autres racines réelles qui possèdent des propriétés intéressantes que nous allons exploiter dans ce paragraphe.

Nous nous proposons de définir une notion équivalente des surfaces caractéristiques définies par [Wenger 92] pour les robots sériels et de l'appliquer aux manipulateurs pleinement parallèles. Ces surfaces doivent séparer les solutions du modèle géométrique direct à l'intérieur des aspects (Figure 41).

#### **Définition 22 :**

Soit  $WA$  un aspect de l'espace de travail  $W$ . On définit les surfaces caractéristiques de l'aspect  $WA$ , notées  $S_C(WA)$  de la manière suivante :

$$S_C = g^{-1} \left( g(\overline{WA}) \right) \cap WA \quad (8)$$

où :

- $g$  désigne l'opérateur géométrique inverse défini par  $\mathbf{q} = g(\mathbf{X})$  ;
- $g^{-1}$  est une notation. Soit  $B \subset Q$  :

$$g^{-1}(B) = \left\{ \mathbf{X} \in W / g(\mathbf{X}) \in B \right\}$$

Les frontières  $\overline{WA}$  qui limitent l'aspect  $WA$  sont :

- les frontières engendrées par les butées articulaires ;
- les singularités parallèles.

La figure 41 montre le principe d'obtention des surfaces caractéristiques. Pour chaque aspect, on considère leurs frontières qui correspondent aux configurations singulières et aux butées articulaires. Pour ce faire, nous avons développé un algorithme permettant d'extraire la

frontière d'un modèle octree. Celle-ci est constituée de cubes dont les dimensions correspondent à la précision maximale obtenue lors du calcul de l'octree. En calculant sur cette frontière le modèle géométrique inverse, on obtient une configuration articulaire  $\mathbf{q}$ . Puis, à partir de cette configuration articulaire  $\mathbf{q}$ , on résout le modèle géométrique direct. On obtient naturellement la configuration de la plate-forme mobile initiale (configuration singulière) mais aussi un ensemble d'autres configurations régulières.

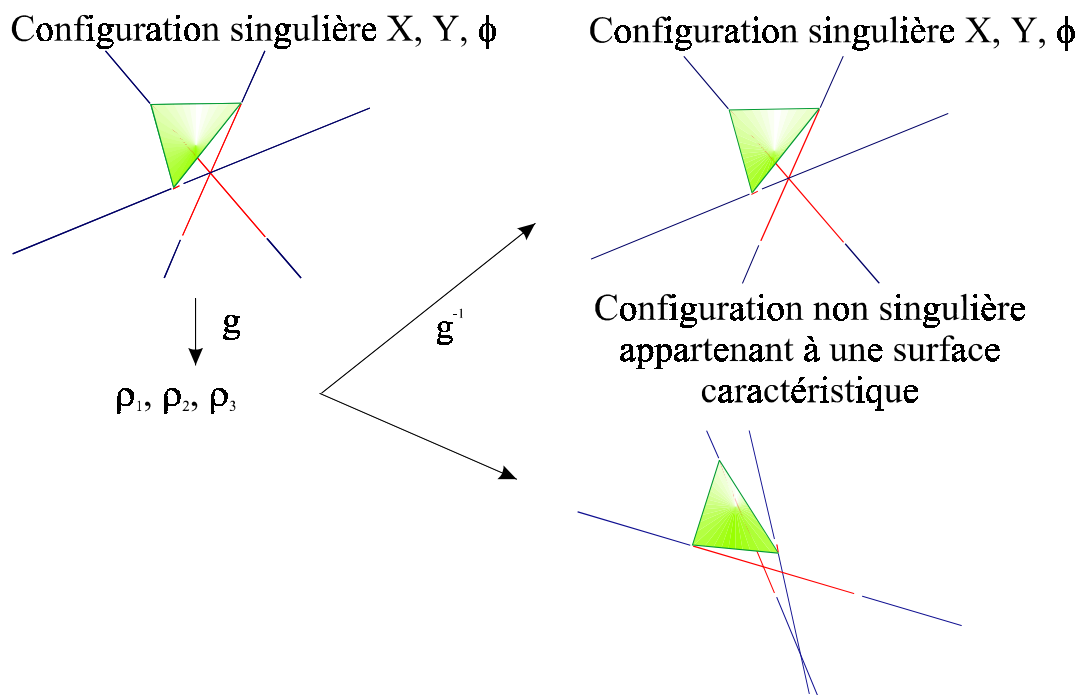


Figure 41 : Construction des surfaces caractéristiques

Pour former une surface caractéristique, nous réunissons l'ensemble de ces configurations appartenant à l'aspect initial.

En résumé, en partant de la frontière  $\overline{WA}$  d'un aspect  $WA$  et en résolvant successivement le modèle géométrique inverse et direct, nous obtenons la frontière initiale  $\overline{WA}$  plus un ensemble de surfaces, les surfaces caractéristiques, permettant de subdiviser l'aspect  $WA$ .

### 2.5.3. LES RÉGIONS DE BASE ET LES COMPOSANTES DE BASE

Le but des *surfaces caractéristiques* est de subdiviser les aspects pour séparer les solutions du modèle géométrique direct. Les domaines ainsi obtenus seront appelés *régions de base* dans l'espace de travail et leur image dans l'ensemble articulaire, les *composantes de*

base.

**Définition 23 : Les régions de base**

Soit  $WA$  un aspect. On définit les *régions de base*, notées  $\{WA b_i, i \in I\}$  comme les composantes connexes de  $WA_i \doteq S_C(WA)$ . Les régions de base réalisent une partition de l'espace de travail  $WA$  :

$$WA = \left( \bigcup_{i \in I} WA b_i \cup S_C(WA) \right) \tag{9}$$

L'espace de travail est donc découpé par les singularités parallèles en aspects, et eux-mêmes subdivisés en régions de base à l'aide des surfaces caractéristiques (Figure 42).

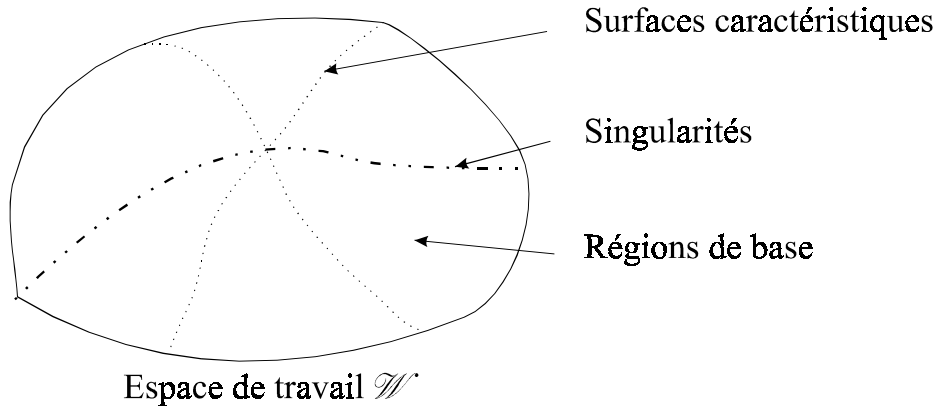


Figure 42 : Décomposition de l'espace de travail en régions de base

**Définition 24 : Les composantes de base**

Les *composantes de base*  $QA b_i$  sont les images par le modèle géométrique inverse des régions de base, telles que  $QA b_i = g(WA b_i)$ . Soit  $WA$  un aspect et  $QA$  son image par l'opérateur  $g$ , on a :

$$QA = \left( \bigcup_{i \in I} QA b_i \cup g(S_C(WA)) \right) \tag{10}$$

**Théorème 1 :**

*En d'autres termes, les régions de base sont les domaines d'unicité pour le modèle géométrique direct.*



**Démonstration :**

La démonstration est analogue à celle qui a été élaborée pour les manipulateurs sériels cuspidaux [Wenger 92]. Elle s'inspire d'une démonstration proposé dans [Chilov 75] sur l'extension du théorème des fonctions implicites.

On définit la fonction  $F$  de  $WA \times QA$  dans  $QA$  de la façon suivante :

$$\forall (X, q) \in WA \times QA / F(X, q) = g(X) - q \quad (11)$$

où  $F$  est une fonction continue et différentiable sur  $WA \times QA$ .

Soit  $QA b_i$  une composante de base quelconque et soit  $WA b_i$  une région de base telle que  $QA b_i = g(WA b_i)$ . On considère un point arbitraire  $(X_0, q_0)$  défini sur le produit cartésien de  $WA b_i$  et  $QA b_i$  tel que  $F(X_0, q_0) = 0$ . On a donc nécessairement  $\text{Det}\left(\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, q_0)\right) \neq 0$ , c'est-à-dire que le manipulateur n'est pas en singularité parallèle.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de  $U$  de  $X_0$  dans  $WA b_i$  et un voisinage de  $V$  de  $q_0$  dans  $QA b_i$  tels que, pour tout  $q$  de  $V$ , l'équation  $F(X, q)$  admet une seule solution  $X = f(q)$  dans  $U$ .

Soit une autre fonction  $f_1$  solution de l'équation  $F(f_1(q), q) = 0$  et telle que  $f_1(q_0) = f(q_0)$ . Comme  $q_0$  n'est l'image ni d'une butée, ni d'une singularité,  $f_1$  est définie en  $q_0$ , et  $\text{Det}\left(\frac{\partial F}{\partial X}(f_1(q_0), q_0)\right) \neq 0$ . Si l'on montre que  $f_1(q) = f(q)$  pour tout  $q$  de  $QA b_i$ , le théorème 1 sera prouvé.

Soit  $C$  un domaine de l'ensemble articulaire défini tel que  $C = \left\{ q \in QA b_i / f_1(q) = f(q) \right\}$ . Nous allons montrer que  $C = QA b_i$ . Le domaine  $C$  est non vide car il contient  $q_0$ .  $C$ 'est une partie fermée de  $QA b_i$  car c'est l'ensemble des racines de l'équation  $f_1(q) - f(q) = 0$ .

Or  $\text{Det}\left(\frac{\partial F}{\partial X}(f_1(q), q)\right) \neq 0$  en tout point  $q$  de  $C$ , puisque  $QA b_i$  (et donc  $C$ ) ne contient pas de point image d'une singularité parallèle. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites,  $C$  possède un voisinage de chacun de ses points ; il est alors une partie ouverte de  $QA b_i$ . Comme  $QA b_i$  est un domaine connexe, il ne peut pas contenir de parties ouvertes ou fermées

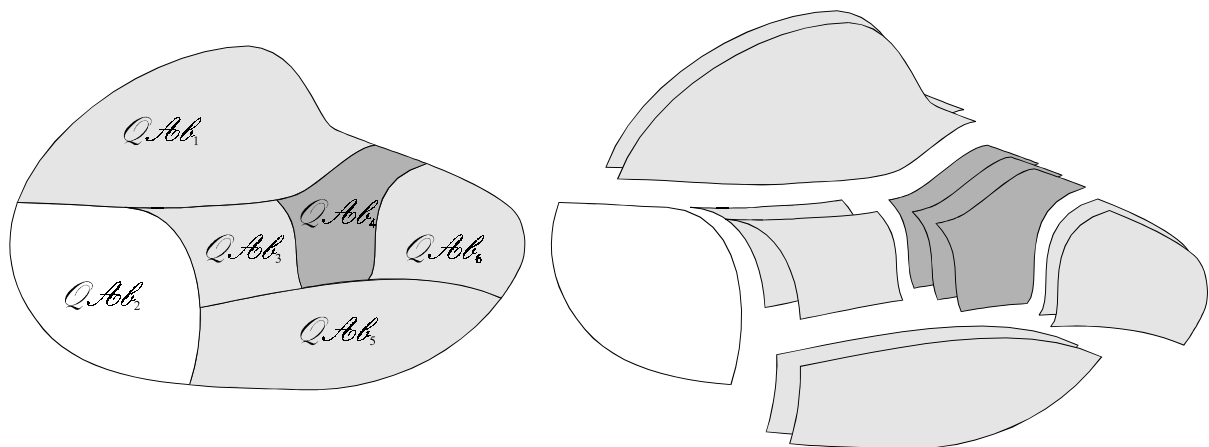
autres que l'ensemble vide et lui-même. Comme  $C$  est non vide, on en déduit que  $C = QA b_i$ .

En résumé, tout point d'une composante de base quelconque,  $QA b_i$  a un seul antécédent dans la région de base  $WA b_i$  dont il est l'image, ce qui démontre le théorème 1.

**Conséquence du théorème 1 :**

Les composantes de base, images des régions de base d'un même aspect, sont soit disjointes soit confondues. Les frontières des composantes de base correspondent à des configurations articulaires qui ont pour particularité d'engendrer les configurations singulières de la plate-forme mobile et les configurations associées aux surfaces caractéristiques.

Le nombre de composantes de base confondues est fonction du nombre de solutions du modèle géométrique direct (Figure 43).



*Figure 43 : Décomposition de l'ensemble articulaire  $Q$  en composantes de base*

**Conclusion**

Nous venons de caractériser des domaines de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire pour lesquels on peut établir une bijection entre ces deux espaces. Ceci permet de répondre aux objectifs des domaines d'unicité donnés dans le paragraphe 1.8.

### 2.5.4. LES RÉGIONS ASSOCIÉES

Pour permettre une meilleure compréhension des domaines d'unicité, nous introduisons les régions associées qui correspondent à l'ensemble des régions de base obtenu par le modèle géométrique direct à partir des composantes de base confondues.

**Définition 25 :**

Soit  $QA b_i$  une composante de base. D'après la proposition 1, ces domaines sont soit disjoints soit confondus. Il existe donc des empilements de composantes de base dans l'ensemble articulaire. Les régions de base qui correspondent à des composantes de base associées seront appelées régions associées  $RA_k$  (Figure 44).

$$RA_k = \left\{ WA b_i, WA b_i = g^{-1}(QA b_i) / \text{les } QA b_i \text{ soient confondues} \right\} \quad (12)$$

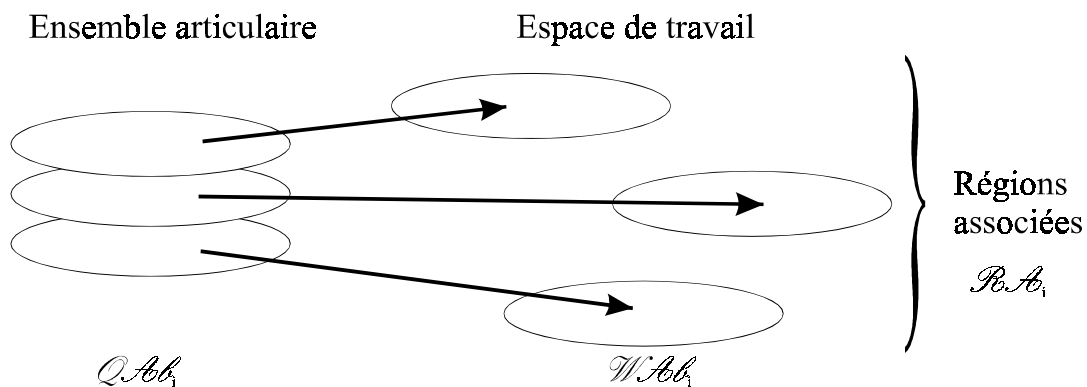


Figure 44 : Les régions associées dans l'espace de travail

### 2.5.5. LES PLUS GRANDS DOMAINES D'UNICITÉ

Le théorème 1 permet de caractériser les domaines de l'espace de travail possédant une seule solution au modèle géométrique direct mais se ne sont pas les plus grands. Le théorème 2 suivant a pour but de définir les plus grands domaines d'unicité de l'opérateur géométrique : tout autre domaine d'unicité est alors inclus dans l'un d'eux. Pour plus de légèreté, les plus grands domaines d'unicité seront appelés simplement les domaines d'unicité.

**Théorème 2 :**

*Les domaines d'unicité  $Wu_k$  sont les domaines obtenus comme la réunion de*

*l'ensemble  $\left( \cup_{i \in I'} \mathbf{WA} b_i \right)$ , des régions de base adjacentes d'un même aspect dont les images respectives par  $g$  sont disjointes, et du sous-ensemble  $\mathbf{S}_C(I')$  des surfaces caractéristiques qui séparent ces composantes de base :*

$$\mathbf{Wu}_k = \left( \cup_{i \in I'} \mathbf{WA} b_i \right) \cup \mathbf{S}_C(I') \quad (13)$$

avec  $I' \subset I$  tel que  $\forall i_1, i_2 \in I', g(\mathbf{WA} b_{i_1}) \cap g(\mathbf{WA} b_{i_2}) = \emptyset$

**Démonstration :**

Les ensembles  $\mathbf{Wu}_k$  sont bien des domaines d'unicité. En effet, les régions de base constitutives sont des domaines d'unicité et leurs images sont disjointes, et il en est de même des frontières séparant les domaines de base. D'autre part, les images des frontières entre régions de base adjacentes ne peuvent être incluses dans l'image d'une région de base constitutive, car on sait que les composantes de base sont soit confondues, soit disjointes, mais ne peuvent se recouvrir partiellement. Par ailleurs, les ensembles  $\mathbf{Wu}_k$  sont bien les plus grandes parties connexes des aspects où le nombre de solutions est unique. En effet, par construction, et puisque les composantes de base sont soit disjointes, soient confondues, et qu'il en est ainsi de leurs frontières communes, toute autre partie de l'aspect qui contient  $\mathbf{Wu}_k$  est soit une partie disjointe de  $\mathbf{Wu}_k$ , soit telle que l'image est incluse dans  $g(\mathbf{Wu}_k)$ .

**2.5.6. APPLICATION AU MANIPULATEUR PLAN 3-RPR**

La figure 45 illustre pour l'aspect  $\mathbf{WA}_1$ , le modèle octree de la surface caractéristique associée. De la même manière, nous calculons la surface caractéristique associée à  $\mathbf{WA}_2$ . La méthode utilisée est donnée en annexe dans le paragraphe 9.4.

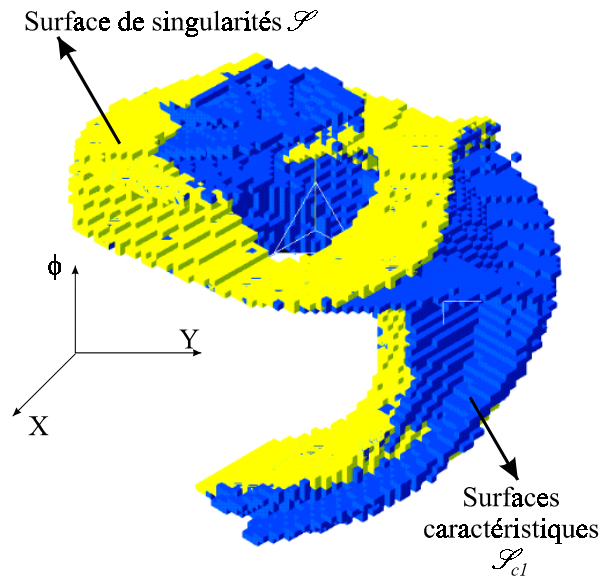


Figure 45 : Modélisation octree des singularités parallèles et de la surface caractéristique  $S_{c1}$  d'un manipulateur 3-RPR

Pour obtenir les régions de base (Figure 46), nous devons effectuer une opération booléenne de type différence entre les surfaces caractéristiques  $S_C$  et les aspects  $WA_i$ . La décomposition de chaque  $WA_i$  est réalisée par une analyse de connexité. Nous obtenons ainsi 28 régions de base pour cet exemple.

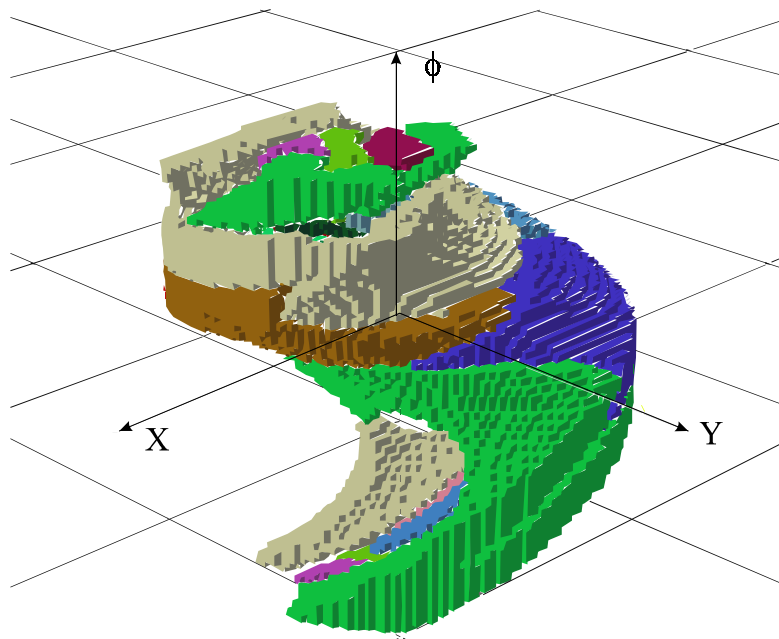


Figure 46 : Modélisation octree des régions de base

A partir de ces régions de base, nous obtenons les composantes de base (Figure 47) en

calculant le modèle géométrique inverse sur les modèles octrees  $WA b_i$ . Ce calcul ne pose pas de problème car le manipulateur ne possède qu'une seule solution au modèle géométrique inverse. Ainsi, nous calculons, l'image du centre de chaque cube constituant l'octree, pour une profondeur maximum, c'est-à-dire la précision de calcul de l'octree.

Nous trouvons ainsi les composantes de base qui sont des domaines où le manipulateur admet 2 solutions au modèle géométrique direct (2 composantes de base superposées), 4 solutions au modèle géométrique direct ( $5 \times 4$  composantes de base superposées) et 6 solutions au modèle géométrique direct (6 composantes de base superposées).

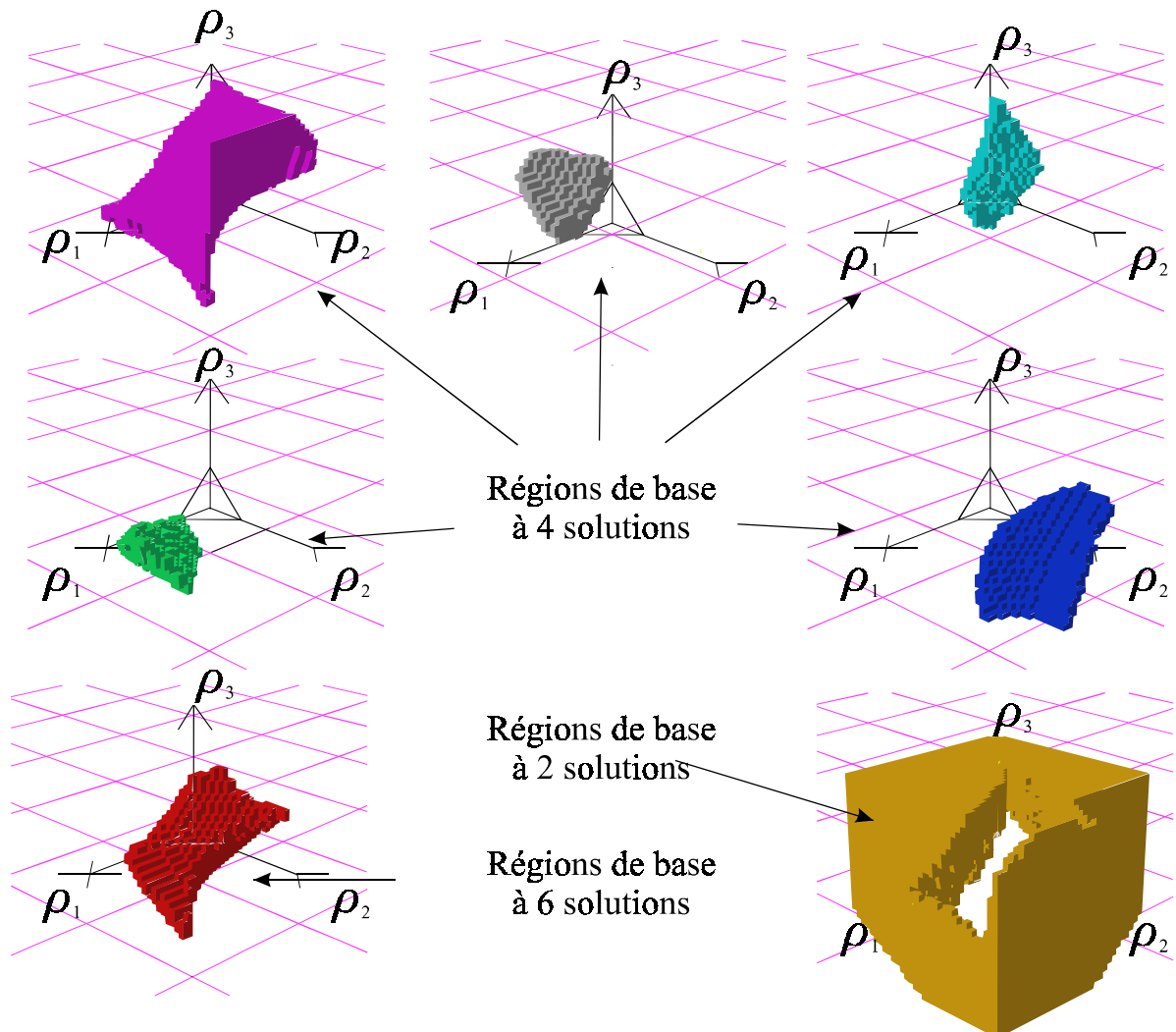


Figure 47 : Modélisation octree des composantes de base

Pour créer les domaines d'unicité, nous devons regrouper les régions de base adjacentes

ayant des composantes de base disjointes et adjacentes. Cette opération doit être vérifiée par visualisation des modèles octrees car la précision de notre modélisation ne nous permet pas toujours d'obtenir des composantes de base parfaitement disjointes.

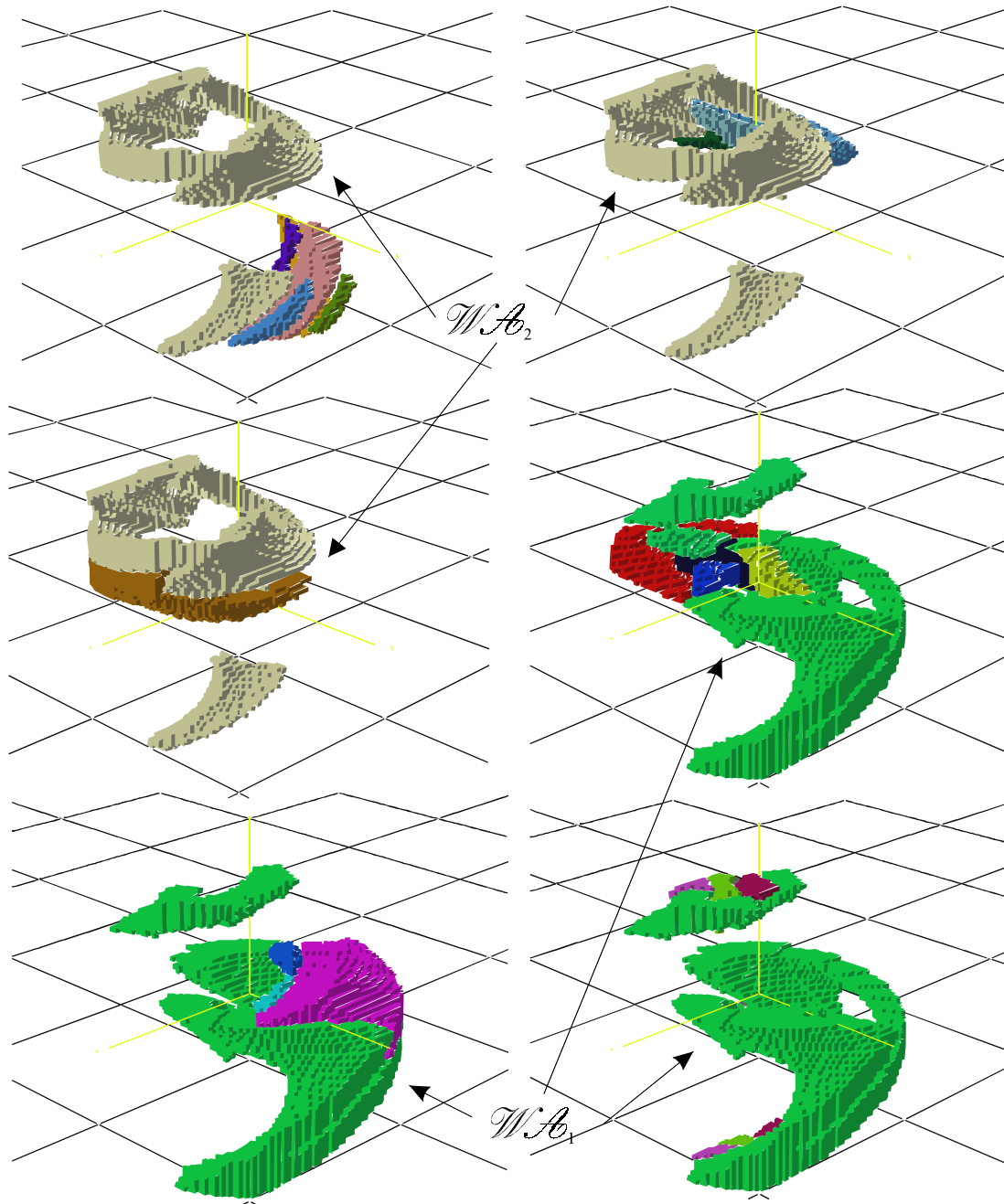


Figure 48 : Modélisation octree des 6 domaines d'unicité

Nous trouvons 6 domaines d'unicité (Figure 48), c'est-à-dire autant que le nombre de solutions au modèle géométrique direct. Ceci résulte du fait que nous avons seulement 2

aspects et qu'il existe au moins une configuration articulaire  $\mathbf{q}$  pour laquelle il existe 6 solutions au modèle géométrique direct. Ces 6 solutions sont réparties dans les deux aspects  $WA_1$  et  $WA_2$ , 3 dans l'un et 3 dans l'autre. Nous avons un problème symétrique qui s'explique par l'absence de limites sur les articulations passives.

On remarque que les 6 composantes de base coïncidentes (Figure 49), c'est à dire le domaine de l'ensemble articulaire possédant 6 solutions au modèle géométrique direct, ont pour image, dans l'espace de travail, 6 régions de base réparties aux frontières de ses aspects  $WA_1$  et  $WA_2$  (Figure 50). De plus, les régions de base associées sont séparées par des singularités parallèles. Nous verrons que cette propriété est importante pour l'analyse des changements de mode d'assemblage non singuliers (Voir paragraphe 2.6).

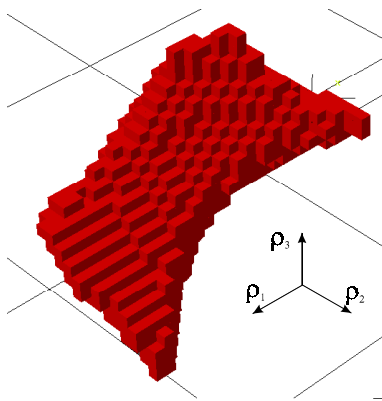


Figure 49 : 6 composantes de base coïncidentes dans l'ensemble articulaire

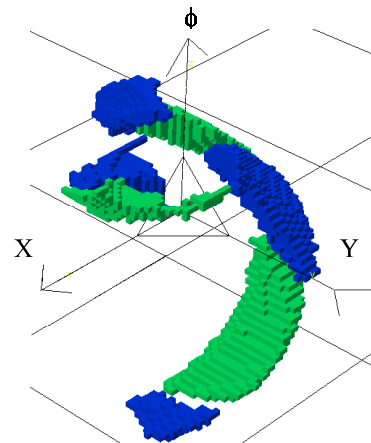


Figure 50 : Les 6 régions de base dans l'espace de travail

## 2.6. CHANGEMENT DE MODE D'ASSEMBLAGE : INTERPRÉTATION

La notion de mode d'assemblage est couramment associée aux solutions du modèle géométrique direct. Ainsi, nous avons l'habitude de dire qu'il est nécessaire d'effectuer un changement de mode d'assemblage pour changer de solution du modèle géométrique direct. En pratique, un changement de mode d'assemblage peut se produire pendant l'exécution d'une trajectoire entre deux configurations qui ne sont pas forcément associées à la même configuration articulaire.

Des trajectoires singulières ou non singulières de changement de mode d'assemblage



sont possibles. Pour illustrer nos résultats, nous utiliserons le manipulateur plan 3-RPR précédemment étudié. Nous commençons l'analyse avec les trajectoires non singulières de changement de mode d'assemblage. Puis, nous étudierons les trajectoires singulières de changement de mode d'assemblage en nous appuyant sur les travaux de [Nenchev 97] qui a montré récemment que les manipulateurs parallèles pouvaient, sous certaines conditions, franchir des singularités parallèles.

### **2.6.1. TRAJECTOIRE NON SINGULIÈRE DE CHANGEMENT DE MODE D'ASSEMBLAGE**

Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment un manipulateur parallèle change de mode d'assemblage sans rencontrer de singularités. Pour commencer, nous allons examiner la structure topologique de l'espace de travail. Nous avons vu que les singularités divisent l'espace de travail en aspects et les surfaces caractéristiques créent une partition de chaque aspect pour former les régions de base. Les singularités divisent aussi l'ensemble articulaire en composantes de base dont plusieurs sont empilées les unes sur les autres (revoir la figure 43). Chaque empilement de  $p$  composantes de base coïncidentes correspond à un domaine de l'ensemble articulaire où le modèle géométrique direct admet  $p$  solutions. Ces  $p$  solutions représentent les modes d'assemblages admissibles et sont réparties dans  $p$  régions de base associées qui sont disjointes et non adjacentes.

Dans la figure 51, l'ensemble articulaire est composé d'un domaine avec 6 composantes de base coïncidentes, quatre domaines avec 4 composantes de base coïncidentes et un domaine avec 2 composantes de base coïncidentes.

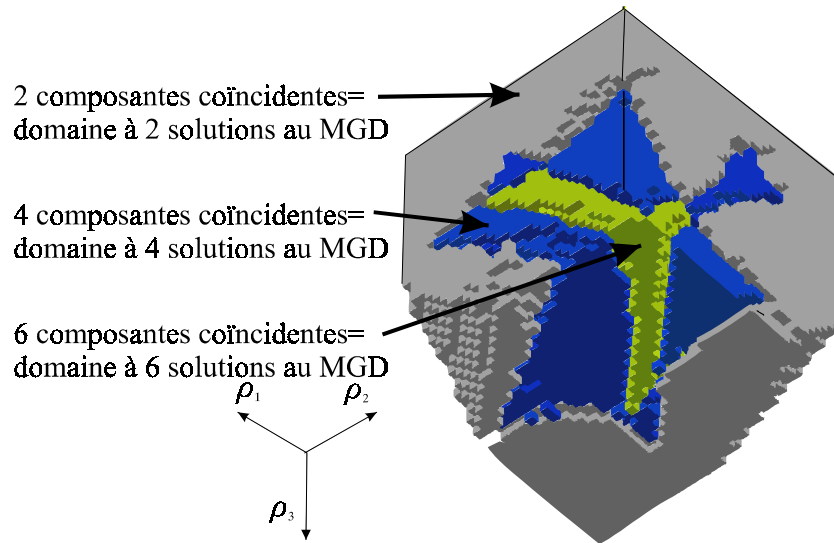


Figure 51 : Les 6 composantes de base dans l'espace articulaire du manipulateur 3-RPR

Dans l'espace de travail, les régions de base, images de ces composantes de base, sont séparées et distribuées dans les deux aspects. Si l'on choisit une configuration dans le domaine comportant 6 composantes de base coïncidentes, on va trouver 6 solutions au modèle géométrique direct. Ces 6 solutions sont réparties dans 6 régions de base distinctes, correspondant à 3 régions associées dans chaque aspect.

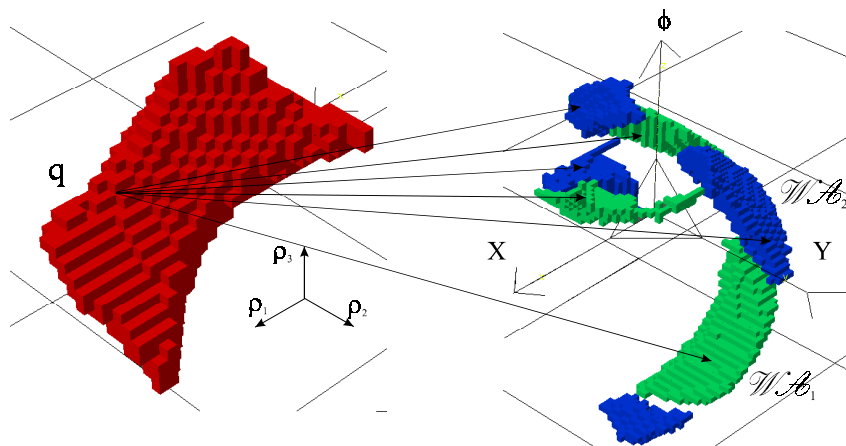


Figure 52 : Configuration articulaire admettant 6 solutions au modèle géométrique direct

Les domaines d'unicité sont composés de composantes de base qui ne sont pas associées (Paragraphe 2.5.5, théorème 2). Par définition, il y a une correspondance unique entre un domaine d'unicité et les composantes de base de l'ensemble articulaire. La figure 48 représente les différents domaines d'unicité obtenus pour le manipulateur étudié : nous avons, 3 domaines d'unicité pour chaque aspect ( $WA_1$  et  $WA_2$ ). La propriété importante d'un

domaine d'unicité est que tout déplacement de la plate-forme mobile peut être exécuté entièrement dans un domaine d'unicité sans jamais changer de mode d'assemblage. Puisque les domaines d'unicité sont, par définition, les ensembles maximaux associés à un mode d'assemblage, nous pouvons dire que, par conséquent, les domaines d'unicité sont les plus grands domaines de l'espace de travail où tous les déplacements de la plate-forme mobile du manipulateur peuvent être réalisés en ne changeant jamais de mode d'assemblage.

Les régions associées sont les régions qui ne peuvent pas être reliées sans changer de mode d'assemblage. Cela veut dire que si la plate-forme mobile doit effectuer une trajectoire entre deux régions associées, la seule façon d'exécuter cette tâche est d'exécuter une trajectoire de changement de mode d'assemblage.

La question qui se pose est de savoir s'il est toujours possible de définir une trajectoire entre deux régions associées. La réponse est oui si et seulement si ces deux régions appartiennent à une même composante connexe de l'espace de travail. On peut donc résumer le résultat suivant [Wenger 98].

**Théorème 3 :**

*Chaque aspect de l'espace de travail est composé de plusieurs domaines d'unicité qui sont associés à un unique mode d'assemblage. Soit deux points dans un aspect ; il est toujours possible de définir une trajectoire entre ces points s'ils appartiennent à une même composante connexe. Ces deux points peuvent toujours être reliés sans changer de mode d'assemblage s'ils appartiennent à un même domaine d'unicité. Une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage doit être exécutée si les deux points sont dans deux régions associées appartenant à deux domaines d'unicité distincts.*

Ce résultat est très important, car suivant l'emplacement des configurations à atteindre dans l'espace de travail, ces trajectoires ne devront pas être planifiées de la même manière. Dans le cas où les deux configurations sont dans un même domaine d'unicité, toutes les trajectoires continues sont faisables dans ce domaine puisque, par définition, il y a une

bijection entre un domaine d'unicité et les composantes de base de l'ensemble articulaire. Alors que le problème est différent si les deux configurations appartiennent à deux domaines d'unicité distincts d'un même aspect (c'est-à-dire dans deux régions associées). En effet, dans ce cas, le manipulateur doit effectuer un changement de mode d'assemblage.

Maintenant, nous allons expliquer comment une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage peut être réalisée. Quand une trajectoire doit être exécutée entre deux régions associées, une trajectoire spécifique doit être exécutée dans l'espace articulaire. Cette trajectoire doit pouvoir relier les deux composantes de base coïncidentes de l'espace articulaire qui correspond aux deux régions associées dans l'espace de travail.

On peut observer que, comme pour les régions de base des manipulateurs cuspidaux [Wenger 96], les composantes de base coïncidentes ne sont pas reliées directement par leur frontière. Ainsi, pour relier deux composantes de base coïncidentes, il est nécessaire de traverser des composantes adjacentes où le nombre de solutions du modèle géométrique direct est inférieur. Donc, une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage n'est pas une simple trajectoire à l'intérieur de l'ensemble articulaire. Cette trajectoire part d'une composante de base, traverse une composante de base adjacente intermédiaire et finalement rentre dans une autre composante de base (laquelle est en fait coïncidente à la première). Dans l'espace de travail, une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage traverse au moins deux surfaces caractéristiques (lesquelles sont associées aux frontières des composantes de base de l'ensemble articulaire) et une région de base qui n'est pas associée à une autre région de base. Une telle trajectoire est illustrée par une courbe en trait fort dans la figure 53. Dans la même figure, la courbe en pointillés montre la trajectoire dans l'espace de travail qui résulterait d'une trajectoire directement planifiée dans l'espace articulaire. Cette trajectoire part de la configuration initiale mais ne peut atteindre sa cible puisque le mode d'assemblage n'a pas changé. D'un point de vue pratique, cela veut dire que les trajectoires devront être planifiées dans l'espace de travail plutôt que l'ensemble articulaire.

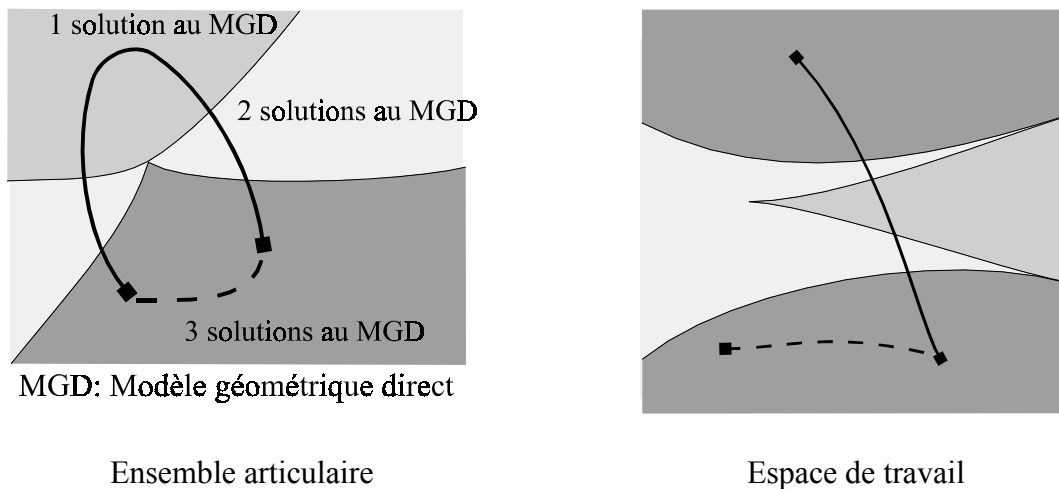


Figure 53 : Trajectoires de changement de mode d'assemblage

### 2.6.2. TRAJECTOIRE SINGULIÈRE DE CHANGEMENT DE MODE D'ASSEMBLAGE

Une trajectoire singulière de changement de mode d'assemblage implique de traverser une singularité parallèle où le manipulateur gagne un degré de liberté. Longtemps, on a admis qu'une telle trajectoire n'était pas possible, car dans une configuration singulière, on perd le contrôle de la plate-forme mobile. Cependant, Nenchev a montré récemment qu'il était possible de contrôler le mouvement d'un manipulateur parallèle au passage de ces singularités. Dans ce cas, si la trajectoire à effectuer peut être paramétrée, alors il est possible de réécrire le modèle cinématique du manipulateur [Nenchev 97a]. La dimension de ce modèle est inférieure à celle du modèle utilisé couramment. Ce modèle permet d'assurer la continuité du modèle géométrique inverse. Ainsi, une trajectoire de changement de mode d'assemblage sera possible si les vitesses des articulations passives ne s'annulent pas ou si l'on utilise une commande dynamique [Nenchev 97b]. Une trajectoire singulière de changement de mode d'assemblage sera nécessaire quand les deux configurations à relier sont localisées dans deux aspects distincts de l'espace de travail.

Lorsque la plate-forme mobile du manipulateur rencontre une configuration singulière, il peut être montré que la trajectoire correspondante «rebondie» contre une frontière de l'ensemble articulaire qui est l'image de la surface de singularité de l'espace de travail (Figure

54). En effet, pour une configuration donnée du manipulateur proche d'une configuration singulière, Innocenti a montré qu'il existait deux modes d'assemblage dans l'espace de travail qui sont localisés symétriquement de part et d'autre de la singularité et ces deux configurations se confondent sur la singularité (pour le modèle géométrique direct, une singularité est une racine double du polynôme caractéristique) [Innocenti 92]. Donc, une trajectoire singulière de changement de mode d'assemblage engendre une trajectoire qui lie, dans l'espace articulaire, deux composantes de base coïncidentes directement par leur frontière (Figure 55). Cette trajectoire articulaire est analogue à une trajectoire cartésienne singulière d'un manipulateur série « Puma » quand il change de posture « coude haut » à « coude bas ».

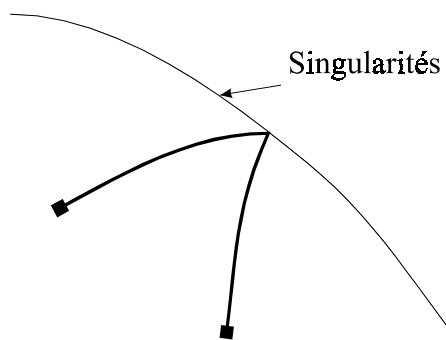


Figure 54 : Rebond sur une singularité parallèle de l'ensemble articulaire

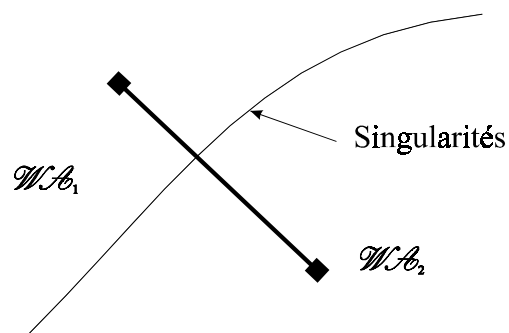


Figure 55 : Deux configurations dans deux aspects différents de l'espace de travail

### 2.6.3. APPLICATION À LA PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES

À partir des résultats précédents, nous proposons dans la figure 56, un algorithme regroupant les étapes à analyser pour la planification de trajectoires.

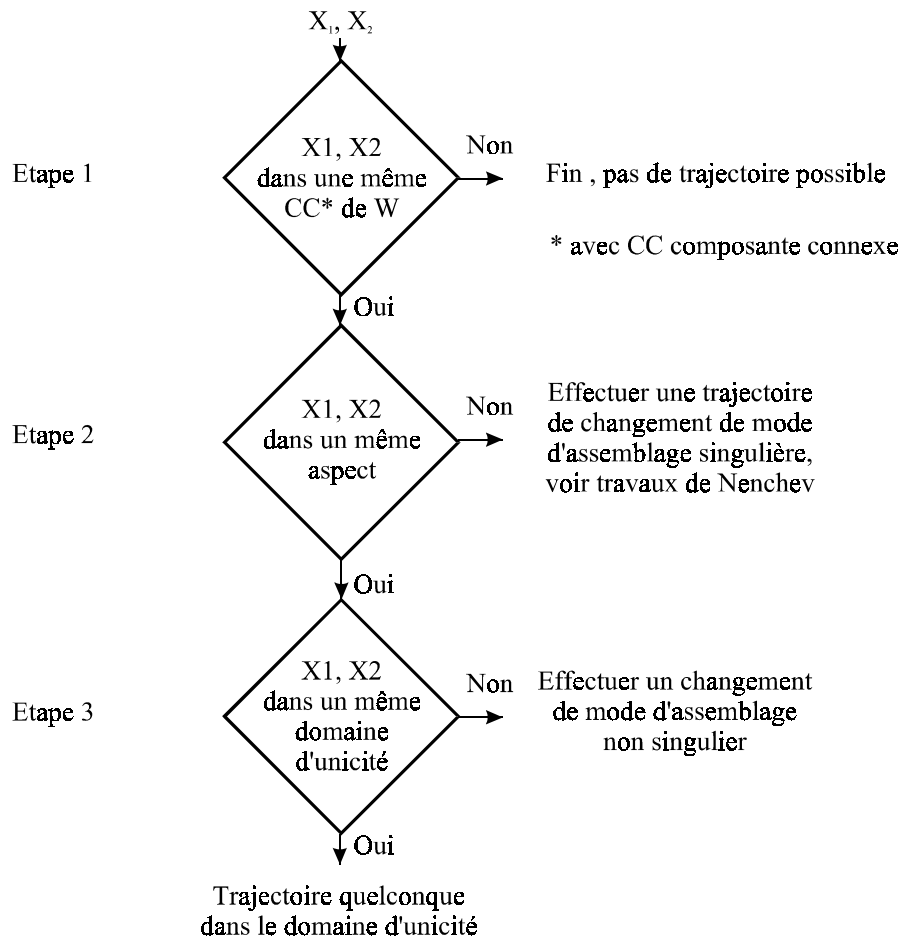


Figure 56 : Planification de trajectoires

Étape 1 : on doit vérifier si les configurations initiale et finale du mécanisme appartiennent à un même domaine connexe de l'espace de travail. Cette condition peut facilement être vérifiée avec le modèle de l'octree de l'espace de travail en utilisant une analyse de connexité [Samet 82]. Si la réponse est non, alors aucune trajectoire ne peut être trouvée. Dans le cas contraire la trajectoire est possible.

Étape 2 : on doit vérifier si les configurations initiale et finale du mécanisme appartiennent à un même aspect. Si la réponse est non, alors le manipulateur doit effectuer une trajectoire singulière de changement de mode d'assemblage ; dans ce cas, l'analyse de [Nenchev 97b] doit être utilisée pour vérifier si une telle trajectoire est possible.

Étape 3 : on doit vérifier si les configurations initiale et finale du mécanisme appartiennent à un même domaine d'unicité. Si la réponse est non, alors une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage doit être exécutée. Cette trajectoire doit être

construite dans l'espace de travail. Pour le calcul de la trajectoire correspondante dans l'espace articulaire, la méthode la plus simple est de calculer le modèle géométrique inverse pour une série de configurations en découpant la trajectoire dans l'espace de travail. Dans le cas contraire, la trajectoire est plus simple puisque le manipulateur ne change pas de domaine d'unicité. Dans ce cas, il est possible de calculer la trajectoire dans l'ensemble articulaire. Celle-ci pourra être optimisée afin de minimiser le temps de cycle ou les vitesses instantanées sur les articulations motorisées.

Dans tous les cas, la recherche d'une trajectoire faisable peut être accomplie à partir d'outils classiques utilisant les modèles octrees [Faverjon 84]. L'algorithme  $A^*$  peut par exemple être utilisé en choisissant un critère pertinent pour optimiser la trajectoire.

## 2.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié les *manipulateurs pleinement parallèles simples*. Nous avons défini la notion d'aspect pour ces manipulateurs comme étant les plus grands domaines de l'espace de travail exempts de toute configuration singulière [Wenger 97]. À partir des résultats d'Innocenti [Innocenti 92], nous avons pu expliquer comment une trajectoire non singulière de changement de mode d'assemblage était possible. Puis à l'aide des surfaces caractéristiques, nous avons subdivisé l'espace de travail en composantes de base pour former les domaines d'unicité.

La première application possible des aspects est l'analyse de parcourabilité de l'espace de travail (Voir chapitre 5). Nous avons présenté un algorithme permettant de définir les différentes étapes à étudier pour planifier une trajectoire (singulière et non singulière) dans l'espace de travail [Wenger 98]. Cet algorithme permet de décomposer le problème en 3 étapes qui caractérisent la complexité de la trajectoire. Nous avons vu qu'il peut être nécessaire de connaître la structure de l'ensemble articulaire si les deux configurations de la plate-forme mobile sont situées dans deux domaines d'unicité différents. Cet algorithme peut-être facilement programmé et intégré dans un logiciel de planification de trajectoires grâce à une modélisation octree de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire.



### 3. LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES : CAS GÉNÉRAL

#### 3.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre 2, nous avons défini les aspects et les plus grands domaines d'unicité des manipulateurs pleinement parallèles simples. Le but de ce chapitre est d'étendre ces définitions pour les manipulateurs parallèles possédant plusieurs solutions aux modèles géométriques direct et inverse. Pour simplifier notre modèle, nous allons définir les modes de fonctionnement pour séparer les solutions du modèle géométrique inverse.

À notre connaissance, aucune recherche n'a été faite pour définir les aspects pour ces manipulateurs. Pour introduire notre définition, nous allons étudier, pour un cas simple de manipulateur parallèle, l'utilisation de la notion d'aspect telle que nous venons de l'écrire dans le chapitre 2, puis la définition des aspects définie par [Borrel 86]. Ainsi, nous pourrions expliquer les problèmes rencontrés pour la caractérisation des plus grands domaines exempts de singularités parallèle et sérielle. À partir de cet exemple, nous concluons que l'on ne peut pas définir les aspects uniquement dans l'ensemble articulaire ou dans l'espace de travail.

En utilisant les modes de fonctionnement, nous définirons les aspects généralisés comme étant les plus grands domaines du produit cartésien de l'ensemble articulaire et de l'espace de travail sans singularité parallèle ni sérielle. Les domaines ainsi trouvés ne pouvant être utilisés directement, nous définirons leurs projections dans l'ensemble articulaire et dans l'espace de travail.

Puis, nous verrons qu'il est possible de changer de mode d'assemblage sans passer par une configuration singulière (singularité sérielle ou parallèle), c'est-à-dire qu'il peut exister plusieurs solutions du modèle géométrique direct, pour un même mode de fonctionnement dans un même aspect. Nous serons donc amenés à rechercher les plus grands domaines d'unicité pour ces manipulateurs parallèles. Ce chapitre synthétise les résultats que nous avons présentés dans [Chablat 98a] et [Chablat 98b].

### 3.2. LES MODES DE FONCTIONNEMENT

#### 3.2.1. DÉFINITION

Pour simplifier l'étude des manipulateurs pleinement parallèles et pour étendre la notion d'aspect, nous allons définir la notion de mode de fonctionnement. Nous avons vu que les manipulateurs pleinement parallèles possèdent des jambes indépendantes. Nous pouvons en déduire la forme de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$ , pour un manipulateur à  $n$  degrés de liberté (Équation 14) où chaque terme  $B_{jj}$  est associé à une jambe du manipulateur. Son annulation provoque l'apparition d'une singularité sérielle.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & B_{jj} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_{nn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

#### **Définition 26 : Les modes de fonctionnement**

Un mode de fonctionnement, noté  $Mf_i$  est l'ensemble des configurations du mécanisme  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  pour lesquelles  $B_{jj}$  ( $j = 1$  à  $n$ ) ne change pas de signe et ne s'annule pas [Chablat 98b].

Soit :

$$Mf_i = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{Q} \mid \text{signe}(B_{jj}) = \text{constante pour } j=1 \text{ à } n \text{ et } \det(\mathbf{B}) \neq 0 \right\} \quad (15)$$

L'ensemble des modes de fonctionnement  $Mf = \{Mf_i\}$ ,  $i \in I$  est donc obtenu en utilisant toutes les permutations de signe de chaque terme  $B_{jj}$ . S'il existe des contraintes sur les articulations (limites articulaires ou collisions internes) alors les modes de fonctionnement ne sont pas toujours tous accessibles.

Dans le théorème 4, nous montrons que les modes de fonctionnement permettent de séparer les solutions du modèle géométrique inverse dans le cas où les jambes ne sont pas cuspidales. C'est-à-dire que les solutions sont bien séparées par les singularités sérielles. On peut trouver dans [Wenger 93] la liste des chaînes sérielles non cuspidales les plus courantes. Changer de

mode de fonctionnement revient à effectuer un changement de posture pour l'une des jambes.

**Théorème 4 :**

*Les modes de fonctionnement séparent les solutions du modèle géométrique inverse si et seulement si les jambes du manipulateur sont non cuspidales.*

**Démonstration :**

Si une jambe du manipulateur est cuspidale alors le manipulateur peut exécuter une trajectoire de changement de posture sans rencontrer de configuration singulière. Dans ce cas, aucun terme de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$  ne s'annule. Réciproquement, si aucune jambe n'est cuspidale alors une trajectoire de changement de postures, implique obligatoirement de passer par une ou plusieurs configurations singulières où le déterminant de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$  s'annule.

Pour un mode de fonctionnement  $Mf_i$ , le manipulateur n'admet qu'une seule solution au modèle géométrique inverse. On peut donc définir une application permettant d'associer une coordonnée opérationnelle  $\mathbf{X}$  à une coordonnée articulaire  $\mathbf{q}$ .

$$g_i(\mathbf{X}) = \mathbf{q} \tag{16}$$

La notation suivante permet de définir l'ensemble des images dans  $\mathcal{W}$  d'une posture donnée de  $\mathcal{Q}$ , équation 17, où l'indice  $i$  représente l'indice associé au mode de fonctionnement  $Mf_i$  :

$$g_i^{-1}(\mathbf{q}) = \left\{ \mathbf{X} \mid (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in Mf_i \right\} \tag{17}$$

**3.2.2. EXEMPLES**

Le robot Delta (Figure 57), manipulateur à 3 degrés de liberté, admet 2 postures pour chaque jambe, soit au total  $2^3 = 8$  modes de fonctionnement et le robot Hexa (Figure 58), manipulateur à 6 degrés de liberté, possède  $64 = 2^6$  modes de fonctionnement (2 postures pour chaque jambe).

La multiplicité des modes de fonctionnement des manipulateurs parallèles complique leur commande. Cependant, certaines contraintes peuvent interdire un changement de mode de fonctionnement. Pour le manipulateur Delta par exemple, si le plan de travail est placé tel qu'aucune jambe ne puisse être en singularité sérielle, tous les mouvements de la plate-forme mobile se feront dans un seul mode de fonctionnement.

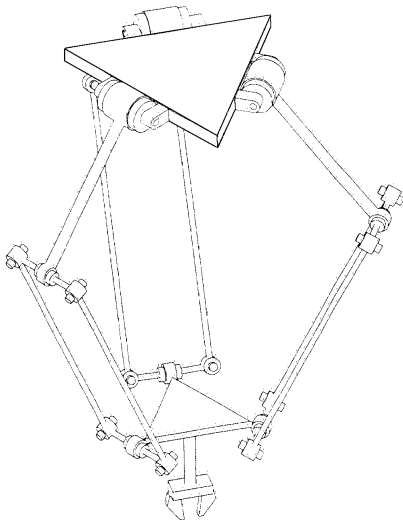


Figure 57 : Manipulateur Delta

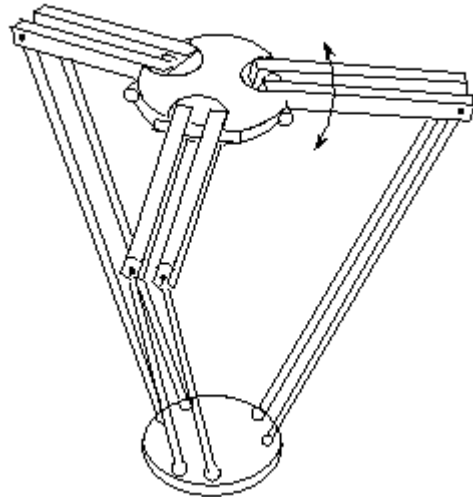


Figure 58 : Manipulateur Hexa

### 3.3. PROBLÉMATIQUE

Nous avons défini la notion d'aspect pour les manipulateurs parallèles simples dans le chapitre 2. Le but de ce paragraphe est de présenter par un exemple simple, les problèmes rencontrés pour étendre cette définition aux manipulateurs parallèles possédant plusieurs solutions à leurs modèles géométriques direct et inverse.

Pour illustrer notre propos, nous utiliserons un manipulateur plan à deux degrés de liberté de type  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$  (Figure 59). Ce mécanisme comporte seulement une boucle fermée et la plate-forme mobile est placée en  $C$ . Les pivots  $A$  et  $B$  sont des articulations motorisées (associés aux variables articulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement) alors que les pivots  $C$ ,  $D$  et  $P$  sont des articulations passives. Dans notre étude, nous ne placerons pas de limites sur les articulations motorisées et passives (variation sur  $[-\pi ; \pi]$ ).

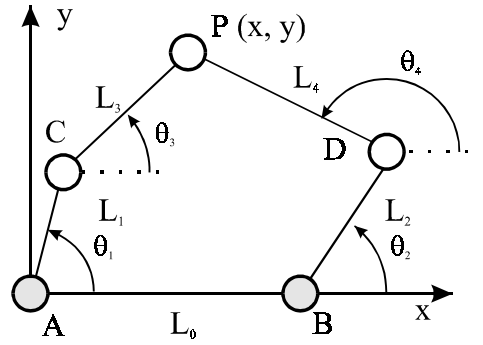


Figure 59 : Manipulateur à boucle fermée plan de type RR-RRR

Pour notre étude, nous avons choisi d'étudier le mécanisme possédant les dimensions du tableau 4.

$L_0 = 9$	$L_1 = 8$	$L_2 = 5$
$L_3 = 5$	$L_4 = 8$	

Tableau 4 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié

L'étude de la cinématique de ce manipulateur nous amène à la résolution des modèles géométriques direct et inverse. On peut facilement écrire le système (18) pour décrire son fonctionnement.

$$\begin{cases} (x - L_1 \cos(\theta_1))^2 + (y - L_1 \sin(\theta_1))^2 = L_3^2 \\ (x - L_2 \cos(\theta_2) - L_0)^2 + (y - L_2 \sin(\theta_2))^2 = L_4^2 \end{cases} \quad (18)$$

Ce manipulateur possède 2 solutions au modèle géométrique direct et 4 solutions au modèle géométrique inverse. Le développement complet de ce calcul est donné dans [Chablat 98b].

Pour trouver les matrices jacobiniennes **A** et **B**, on écrit la vitesse du point P :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\theta}_3 \mathbf{E} (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \\ \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{d}} + \dot{\theta}_4 \mathbf{E} (\mathbf{p} - \mathbf{d}) \end{cases}$$

où

- **E** est la matrice de rotation définie dans le plan,  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;
- **c** et **d** représentent le vecteur position des points *C* et *D* respectivement.

Ainsi, l'expression des matrices jacobiniennes **A** et **B** est la suivante :

$$\square \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \\ (\mathbf{p} - \mathbf{d}) \end{bmatrix}$$

$$\square \mathbf{B} = \begin{bmatrix} L_1 L_3 \sin(\theta_3 - \theta_1) & 0 \\ 0 & L_2 L_4 \sin(\theta_4 - \theta_2) \end{bmatrix}$$

### 3.3.1. UTILISATION DE LA NOTION D'ASPECTS AU SENS DE LA DÉFINITION 21

Pour commencer, nous allons tenter d'appliquer la définition des aspects pour les manipulateurs parallèles simples (Définition 21). Dans le cas du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ , pour une configuration articulaire  $\mathbf{q}$  donnée, il est possible d'associer deux modes d'assemblage, les deux solutions du modèle géométrique direct.

On obtient deux ensembles, l'un où le déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$  est positif et l'autre où il est négatif. On remarque que les ensembles sont identiques tant dans l'ensemble articulaire que dans l'espace de travail (Figures 60 et 61). Les singularités parallèles sont les limites de l'ensemble articulaire. Pour ces configurations articulaires, il n'existe qu'une solution au modèle géométrique direct. La position de l'image de ces configurations dans l'espace de travail est identique. Cependant, pour une position donnée du point  $P$ , il peut exister des configurations du manipulateur qui soient en configurations singulières et d'autres en configurations régulières. En effet, pour chaque configuration du point  $P$ , il existe 4 solutions pour le modèle géométrique inverse qui sont situées à l'intérieur de l'ensemble articulaire. Ainsi, on peut dire que les singularités parallèles ne constituent pas des frontières permettant de diviser l'espace de travail en aspects.

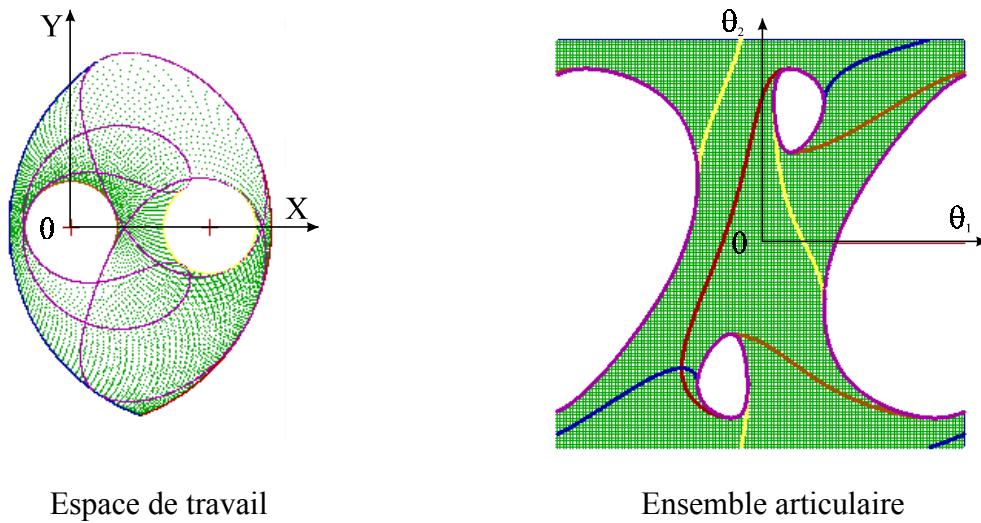


Figure 60 : Étude du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$  possédant un déterminant de la matrice jacobienne sérielle positif

Les singularités sérielles, dans l'ensemble articulaire, sont placées symétriquement par rapport à l'axe des pivots  $A_1$  et  $A_2$  lorsque le déterminant de la matrice jacobienne parallèle  $A$  est positif ou négatif.

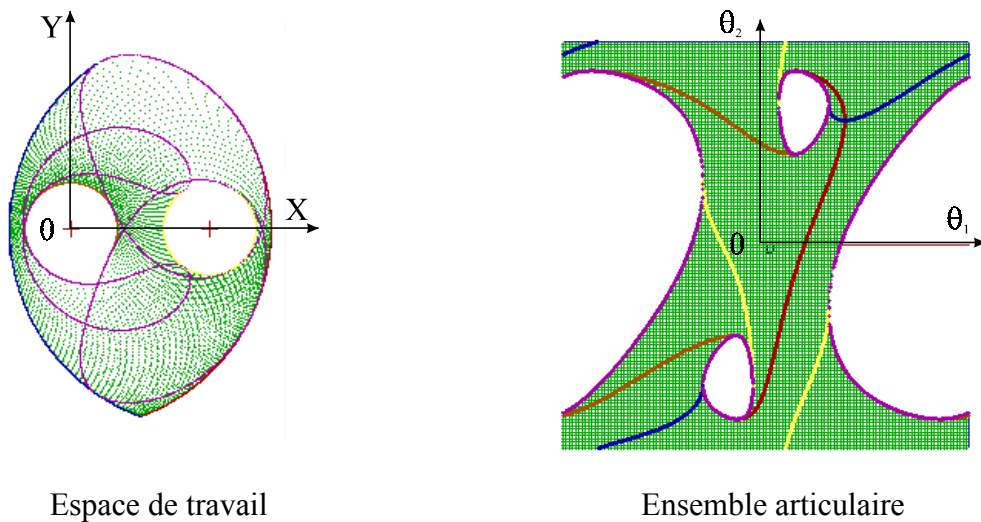


Figure 61 : Étude du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$  possédant un déterminant de la matrice jacobienne sérielle négatif

En conclusion, l'utilisation du signe du déterminant de la matrice jacobienne parallèle  $A$  ne permet pas de décomposer l'espace de travail en aspects, car, on ne peut pas distinguer les 4 solutions du modèle géométrique inverse. Nous devons donc rechercher une autre formulation de la notion d'aspect pour résoudre ce problème.

### 3.3.2. UTILISATION DE LA NOTION D'ASPECTS AU SENS DE BORREL

Nous allons tester la définition de la notion d'aspect définie au sens de [Borrel 86] (Définition 20). La valeur du déterminant de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$  est fonction, comme pour la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$ , de la configuration articulaire  $\mathbf{q}$  et de la configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}$ . Pour une position du point P, il est possible d'associer 4 solutions du modèle géométrique inverse. On calcule la valeur du déterminant de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$  pour toutes ces solutions, c'est-à-dire tous les modes de fonctionnement de ce manipulateur.

#### Exemple

Le manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$  possède deux jambes indépendantes, on peut donc associer deux modes de fonctionnement pour chaque jambe (Figure 62) pour une même position du point P. Ainsi, il existe 4 modes de fonctionnement ( $Mf_1, Mf_2, Mf_3, Mf_4$ ) définis dans le tableau 5.

$B_{ii}$	$Mf_1$	$Mf_2$	$Mf_3$	$Mf_4$
$B_{11}=L_1 \sin(\theta_1) (x - L_1 \cos(\theta_1)) - L_1 \cos(\theta_1) (y - L_1 \sin(\theta_1))$	positif	négatif	positif	négatif
$B_{22}=L_2 \sin(\theta_2)(x - L_2 \cos(\theta_2) - c_2) - L_2 \cos(\theta_2)(y - L_2 \sin(\theta_2))$	positif	négatif	négatif	positif

Tableau 5 : Les 4 modes de fonctionnement d'un manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

Pour chaque mode de fonctionnement, on calcule les « aspects » de l'ensemble articulaire dont le découpage est donné par le signe de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{B}$ .

Les singularités sérielles associées à un mode de fonctionnement sont situées sur la frontière de l'ensemble articulaire, comme les singularités parallèles, mais aussi sont présentes à l'intérieur. De plus, ces domaines ne sont pas disjoints, c'est-à-dire qu'ils se recouvrent partiellement. On peut aussi avoir deux solutions du modèle géométrique inverse, associées à une position du point P, appartenant à un mode de fonctionnement.



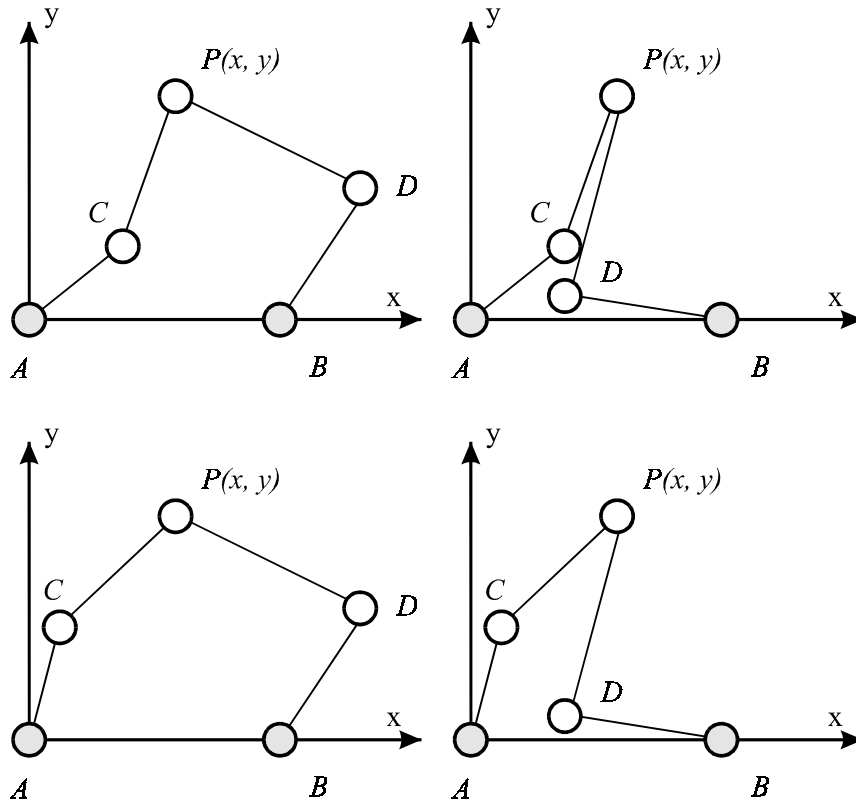
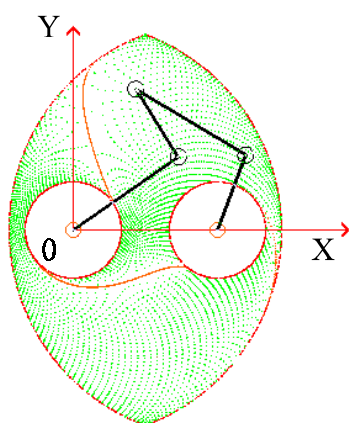


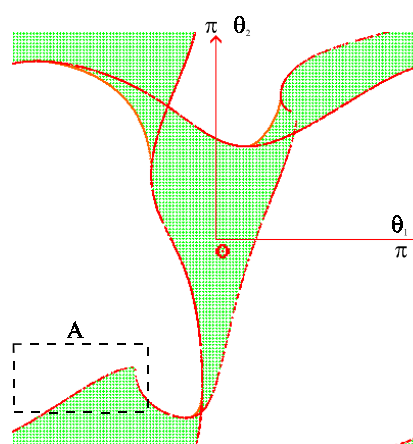
Figure 62 : Les 4 modes de fonctionnement d'un manipulateur RR-RRR

Dans l'espace de travail, les « aspects » ainsi calculés sont divisés par les singularités parallèles. On ne peut donc pas utiliser cette formulation pour planifier des trajectoires car il existe, à l'intérieur de ces domaines, des configurations pour lesquelles il est difficile de contrôler le déplacement de la plate-forme mobile. Aussi, on remarque la symétrie des figures 63 - 64 et des figures 65 - 66.

On remarque que, dans l'ensemble articulaire, les modes de fonctionnement ne sont pas disjoints. En effet, la région A par exemple se retrouve partiellement sur les 4 figures.

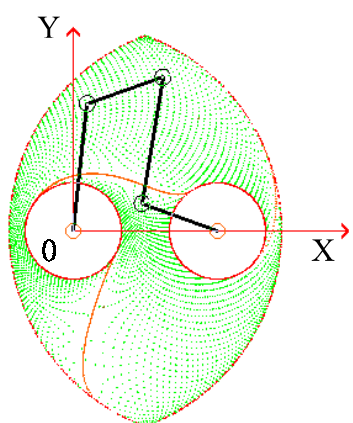


Espace de travail

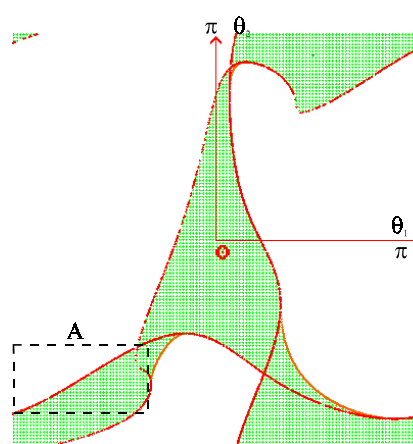


Ensemble articulaire

Figure 63 : Mode de fonctionnement n°1 du manipulateur RR-RRR

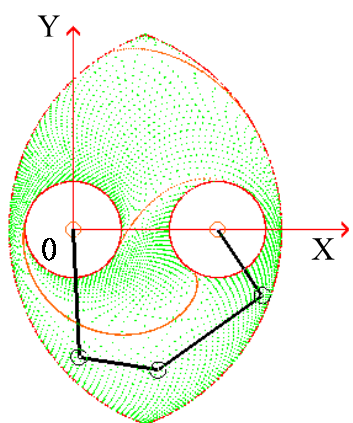


Espace de travail

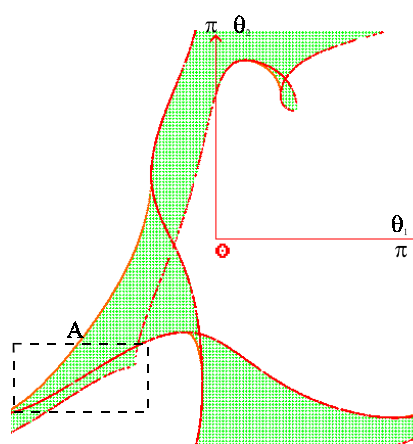


Ensemble articulaire

Figure 64 : Mode de fonctionnement n°2 du manipulateur RR-RRR



Espace de travail



Ensemble articulaire

Figure 65 : Mode de fonctionnement n°3 du manipulateur RR-RRR

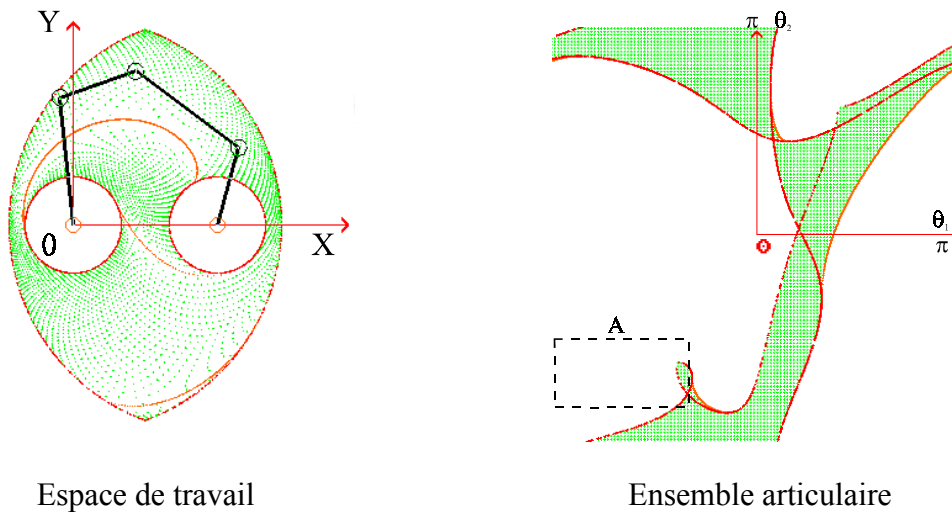


Figure 66 : Mode de fonctionnement n°4 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

On en déduit que les aspects définis par Borrel (Définition 20) ne peuvent pas diviser l'ensemble articulaire en domaines disjoints car, pour le manipulateur parallèle  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$ , les domaines ainsi définis se recouvrent partiellement, ils ne sont donc pas des plus grands domaines sans singularité.

### 3.3.3. CONCLUSION

Nous avons vu que les définitions des aspects définis pour les manipulateurs parallèles simples et les aspects au sens de Borrel sur un manipulateur parallèle possédant plusieurs solutions aux modèles géométriques direct et inverse ne peuvent pas s'appliquer dans le cas général, car aucune définition n'est capable de définir des domaines exempts de singularités sérielle et parallèle, ni dans l'ensemble articulaire, ni dans l'espace de travail.

Nous allons donc définir les aspects de ces manipulateurs dans le produit cartésien de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire pour trouver des domaines exempts de toute configuration singulière.

### 3.4. LA NOTION D'ASPECT GÉNÉRALISÉ

Nous avons défini dans le paragraphe 2.3.1, les aspects pour les manipulateurs parallèles possédant une seule solution au modèle géométrique inverse. Dans le paragraphe 3.3.1 et 3.3.2, nous avons vu qu'il n'était pas possible de définir les aspects uniquement dans l'espace

de travail ou dans l'ensemble articulaire pour les manipulateurs possédant plusieurs solutions aux modèles géométriques direct et inverse. À l'aide des modes de fonctionnement, nous allons définir les aspects pour ces manipulateurs que nous nommerons aspects généralisés.

### 3.4.1. LES ASPECTS GÉNÉRALISÉS

#### **Définition 27 : Les aspects généralisés**

On appelle aspects généralisés  $\mathbf{A}_{ij}$  d'un manipulateur pleinement parallèle, les plus grands domaines de  $\mathbf{W} \times \mathbf{Q}$  tels que :

- $\mathbf{A}_{ij} \subset \mathbf{W} \times \mathbf{Q}$  ;
- $\mathbf{A}_{ij}$  est connexe ;
- $\mathbf{A}_{ij} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{Q} / \det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ et } \det(\mathbf{B}) \neq 0 \right\}$   
 $= \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in \mathbf{M}f_i \text{ tel que } \det(\mathbf{A}) \neq 0 \right\}$

En d'autres termes, les aspects généralisés sont les plus grands domaines définis sur le produit cartésien de l'ensemble articulaire et de l'espace de travail exempts de tout type de singularité. Cependant, les aspects généralisés ne peuvent pas être représentés graphiquement à cause de leurs dimensions. Pour notre étude, nous utilisons une extension de la modélisation octree, généralisée aux espaces de dimension  $n$ , pour calculer les aspects généralisés.

#### **Note :**

Les aspects généralisés ainsi définis peuvent s'appliquer aux manipulateurs parallèles simples, dans ce cas, il n'existe qu'un seul mode de fonctionnement. Ils peuvent aussi s'appliquer aux manipulateurs sériels non cuspidaux, dans ce cas le déterminant de la matrice jacobienne parallèle ne s'annule jamais. Dans chacun des cas, on s'intéressera à leur projection dans l'espace de travail et dans l'ensemble articulaire respectivement.

### 3.4.2. $\mathbf{W}$ - ASPECT

Pour utiliser les aspects généralisés, nous allons les projeter sur l'espace de travail pour former les  $\mathbf{W}$ - aspects.

**Définition 28 : Les  $W$ - aspects**

La projection  $\pi_W$  des aspects généralisés sur l'espace de travail donne les domaines  $WA_{ij}$  tels que :

- $WA_{ij} \subset W$  ;
- $WA_{ij}$  est connexe.

Les domaines  $WA_{ij}$  sont appelés les  $W$ - aspects, ils sont les plus grands domaines connexes de l'espace de travail, pour un mode de fonctionnement donné  $Mf_i$ , exempts de singularités sérielle et parallèle.

**3.4.3.  $Q$ - ASPECT**

De même, nous allons projeter les aspects généralisés sur l'ensemble articulaire pour former les  $Q$ - aspects.

**Définition 29 : Les  $Q$ - aspects**

La projection  $\pi_Q$  des aspects généralisés sur l'ensemble articulaire donne les domaines  $QA_{ij}$  tels que :

- $QA_{ij} \subset Q$  ;
- $QA_{ij}$  est connexe.

Ces domaines sont appelés les  $Q$ - aspects, ils sont les plus grands domaines connexes de l'ensemble articulaire, pour un mode de fonctionnement donné  $Mf_i$ , exempts de singularités sérielle et parallèle.

**3.4.4. APPLICATION AU MANIPULATEUR RR-RRR**

Nous allons appliquer la définition des aspects généralisés au manipulateur RR-RRR étudié dans le paragraphe 3.3. Nous verrons à la fin de ce paragraphe l'intérêt d'exploiter les différents aspects généralisés pour éviter les singularités parallèles. Il n'est naturellement pas possible de représenter ces aspects généralisés puisqu'ils sont définis dans un hyperespace de dimension 4. On représentera séparément leurs projections respectives, c'est-à-dire les  $W$ -

Aspects et les  $Q$ -Aspects.

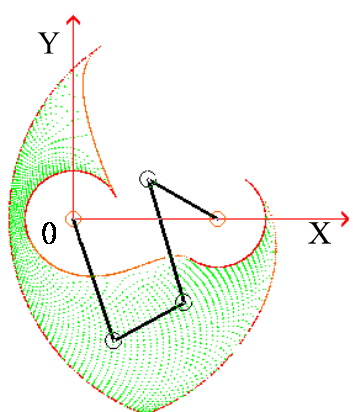
**Les aspects généralisés**

Nous représenterons donc leurs projections dans l'espace de travail et l'ensemble articulaire pour chaque mode de fonctionnement  $Mf_i$ . L'ensemble des résultats est synthétisé dans le tableau 6. Puis nous représenterons, pour chaque mode de fonctionnement, les aspects généralisés associés. Pour les dimensions du manipulateur étudié, il peut exister un ou deux aspects généralisé(s) pour chaque mode de fonctionnement (Figures 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74).

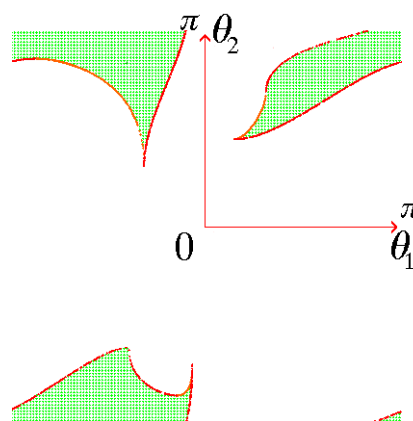
Figure	67	68	69	70	71	72	73	74
$\det(\mathbf{A})$	P	P	P	P	N	N	N	N
$\mathbf{B}_{11}$	P	P	N	N	P	P	N	N
$\mathbf{B}_{22}$	P	N	N	P	N	P	P	N
Nombre d'aspects généralisés	1	1	1	2	1	2	1	1

*Tableau 6 : Nombre d'aspects généralisés en fonction du mode de fonctionnement*

Comme dans le paragraphe 3.3.2, on remarque la symétrie des aspects par rapport à l'axe Y. Nous regroupons ainsi les aspects généralisés suivant les paires suivantes : 67-73, 68-74, 69-71, 70-72. Si leurs projections dans l'espace de travail et dans l'ensemble articulaire se recouvrent partiellement, leur définition dans  $W \times Q$  permet de définir des domaines distincts.

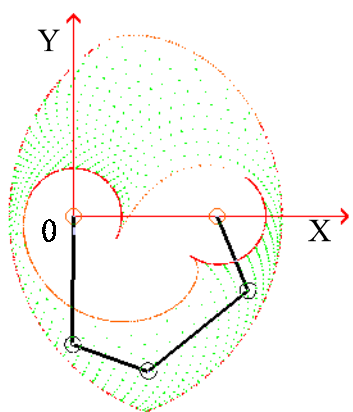


Espace de travail

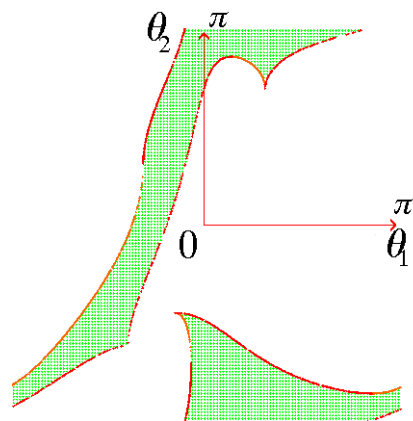


Ensemble articulaire

Figure 67 : Aspect 1 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

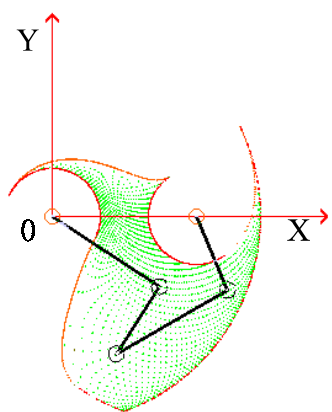


Espace de travail

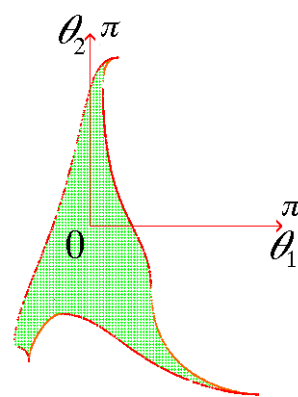


Ensemble articulaire

Figure 68 : Aspect 2 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

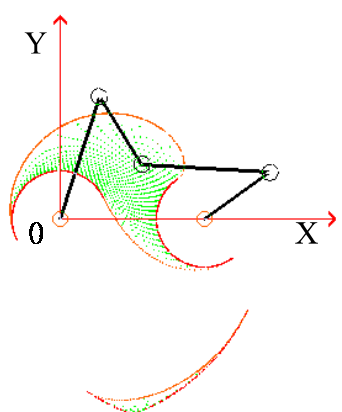


Espace de travail

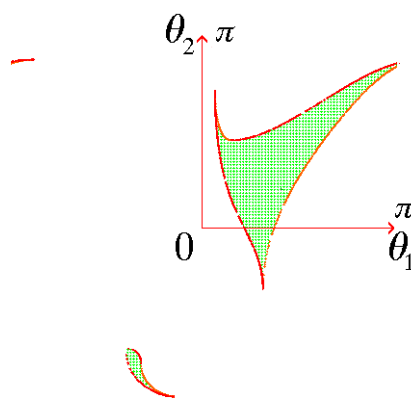


Ensemble articulaire

Figure 69 : Aspect 3 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

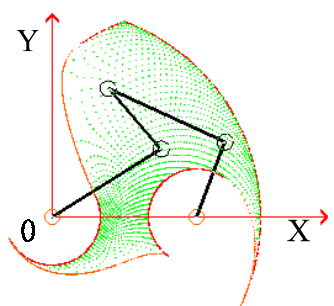


Espace de travail

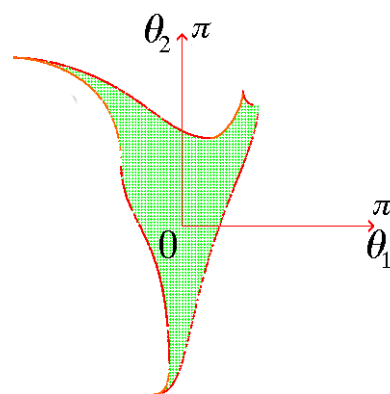


Ensemble articulaire

Figure 70 : Aspects 4 et 5 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

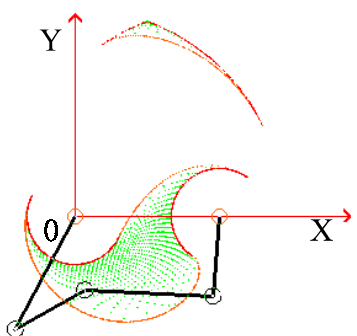


Espace de travail

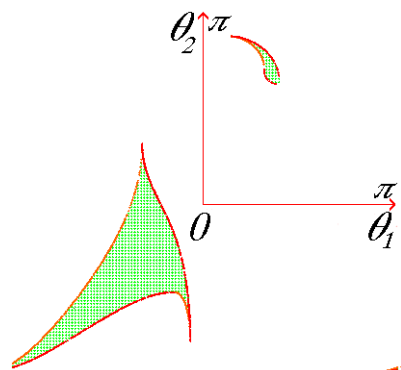


Ensemble articulaire

Figure 71 : Aspect 6 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$



Espace de travail



Ensemble articulaire

Figure 72 : Aspects 7 et 8 du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$



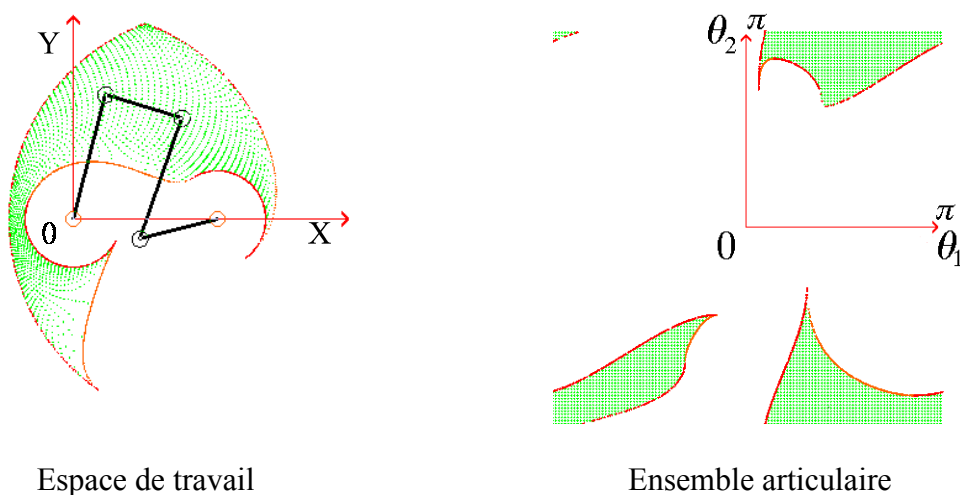


Figure 73 : Aspect 9 du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

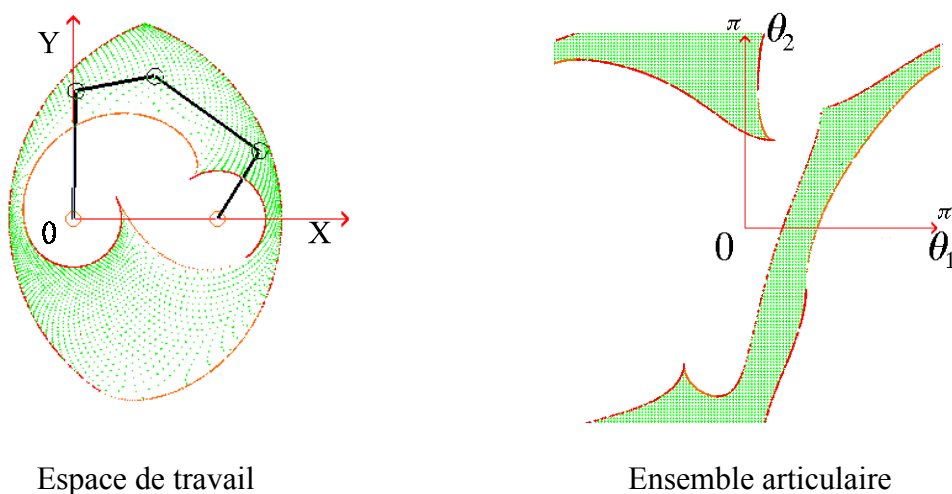


Figure 74 : Aspect 10 du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

### 3.4.5. APPLICATION DES MODES DE FONCTIONNEMENT ET DES ASPECTS GÉNÉRALISÉS

Il existe deux façons de s'affranchir des singularités parallèles. La plus courante est d'éliminer ces singularités par conception. La seconde est d'éviter ces singularités en exploitant tous les aspects généralisés. On montre ci-après que la deuxième solution peut-être préférable.

- **Élimination des singularités parallèles de l'espace de travail**

Pour ce manipulateur, deux types de singularités parallèles doivent être éliminés : lorsque C et D coïncident ou lorsque les points C, D et P sont alignés.

Pour éviter que les points C, D coïncident (Figure 75), il faut et il suffit que  $L_3 \neq L_4$  ou bien que si  $L_3 = L_4$  alors  $L_1 + L_2 < L_0$ . Ce type de configuration est du à la symétrie du manipulateur.

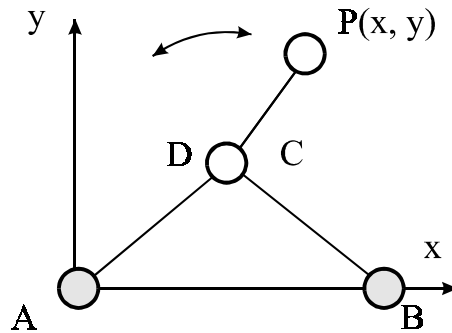


Figure 75 : Singularité parallèle du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

De la même manière, pour éviter les autres configurations singulières, c'est à dire lorsque les points C, D et P sont alignés, nous posons la condition suivante,  $L_3 + L_4 - L_1 - L_2 > L_0$  et  $L_3 = L_4$ . Ainsi, nous obtenons un espace de travail sans aucune singularité parallèle (Figures 76) et son ensemble articulaire associé (Figures 77).

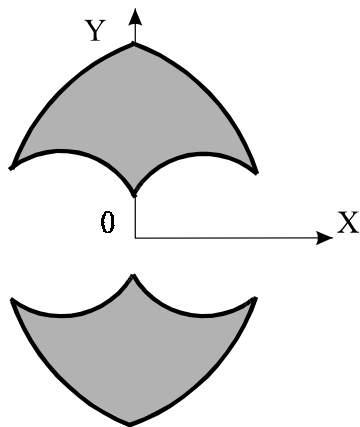


Figure 76 : Espace de travail sans singularité parallèle du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

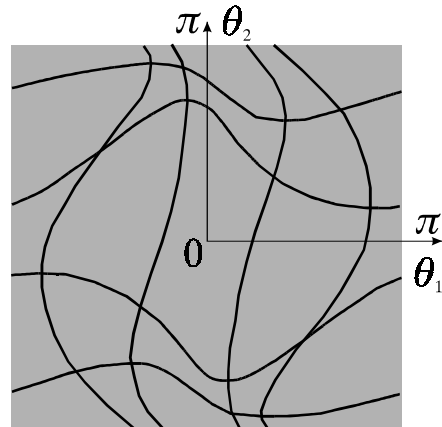


Figure 77 : Ensemble articulaire sans singularité parallèle du manipulateur  $\underline{RR}\text{-}\underline{RRR}$

De telles contraintes sur les dimensions du manipulateur entraînent une diminution importante de son espace de travail. L'utilisation de tous les modes de fonctionnement du manipulateur doit permettre d'éviter les singularités parallèles.

- **Changement de mode de fonctionnement pour éviter les singularités parallèles**

En fonction du mode de fonctionnement choisi, la position des singularités parallèles change dans l'espace de travail. Dans la figure 78, nous avons représenté deux modes de fonctionnement associés à un point P de l'espace opérationnel. La configuration de gauche est une configuration singulière parallèle, alors que la configuration de droite est une configuration régulière pour le manipulateur. Par ailleurs, pour exécuter une tâche dans un environnement fortement contraint, il peut-être nécessaire de changer de mode de fonctionnement. Le manipulateur peut ainsi atteindre des points situés dans les deux aspects associés à deux modes de fonctionnement différents.

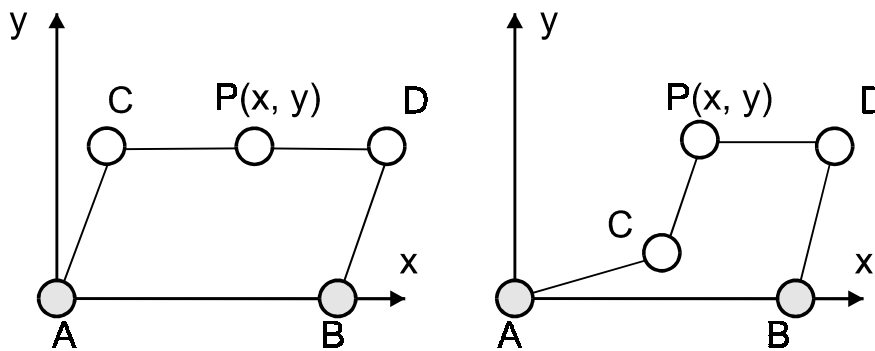


Figure 78 : Modes de fonctionnement et singularité parallèle du manipulateur RR-RRR

- **Le conditionnement des matrices jacobienne**

Si la position des singularités parallèles est fonction des modes de fonctionnement, il est possible de choisir un mode fonctionnement en fonction des valeurs du conditionnement des matrices jacobienne. Dans ce paragraphe, nous introduisons pour le manipulateur RR-RRR un critère local basé sur l'étude du conditionnement des matrices jacobienne parallèle ou sérielle. Ainsi, en fonction de la tâche à exécuter, nous choisirons le mode de fonctionnement le plus approprié.

**Définition :**

Nous étudions le conditionnement  $\mathcal{K}(\mathbf{M})$  d'une matrice  $\mathbf{M}$  de dimension  $m \times n$ , avec

$m \leq n$ , comme étant le rapport entre la plus grande valeur propre  $\sigma_1$  et la plus petite valeur propre  $\sigma_s$  de la matrice  $\mathbf{M}$ .

$$\mathcal{K}(\mathbf{M}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_s}$$

Les valeurs propres  $\{\sigma_k\}_m^1$  de la matrice  $\mathbf{M}$  sont définies comme étant les racines de la matrice non négative semi-définie positive  $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$  de dimension  $m \times m$ .

Pour le manipulateur plan RR-RRR, nous définissons le conditionnement de la matrice jacobienne parallèle et sérielle [**Chablat 98b**]. L'utilisation d'un manipulateur symétrique ( $L_1 = L_2$  et  $L_3 = L_4$ ) nous a permis de trouver une expression sans dimension pour ces deux matrices.

### Conditionnement de la matrice jacobienne parallèle

Pour calculer le conditionnement de la matrice jacobienne parallèle, nous avons besoin du produit  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ .

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = L_3^2 \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta_3 - \theta_4) \\ \cos(\theta_3 - \theta_4) & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de ce produit sont les suivantes

$$\alpha_1 = 1 - \cos(\theta_3 - \theta_4) \text{ et } \alpha_2 = 1 + \cos(\theta_3 - \theta_4)$$

Nous définissons le conditionnement de la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$  comme :

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}}}$$

où  $\alpha_{\min} = 1 - |\cos(\theta_3 - \theta_4)|$  et  $\alpha_{\max} = 1 + |\cos(\theta_3 - \theta_4)|$ . Après simplification, nous obtenons l'expression suivante :

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}) = \frac{1}{|\tan((\theta_3 - \theta_4) / 2)|}$$

Ainsi, le conditionnement de la matrice jacobienne parallèle est minimum, c'est-à-dire égal à 1, lorsque  $|\theta_3 - \theta_4| = \pi / 2$  modulo  $\pi$ . Inversement, le conditionnement de la matrice jacobienne parallèle tend vers l'infini lorsque  $|\theta_3 - \theta_4| = \pi$  modulo  $\pi$ . Les configurations pour

lesquelles  $K(A) = 1$  sont appelées configurations isotropes alors que les configurations pour lesquelles  $K(A) = +\infty$  sont les singularités parallèles du manipulateur (Figure 79).

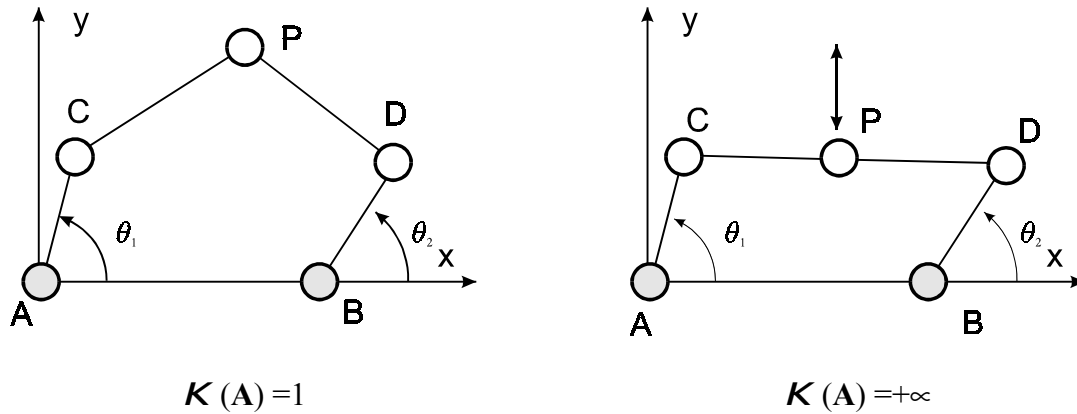


Figure 79 : Configurations singulière et isotrope de la matrice jacobienne parallèle d'un manipulateur RR-RRR

La position des courbes d'iso-conditionnement est fonction du mode de fonctionnement choisi, le conditionnement associé au point P est différent. Dans la figure 80 a), le conditionnement est moyen alors que dans la figure 80 b), le manipulateur est en configuration isotrope.

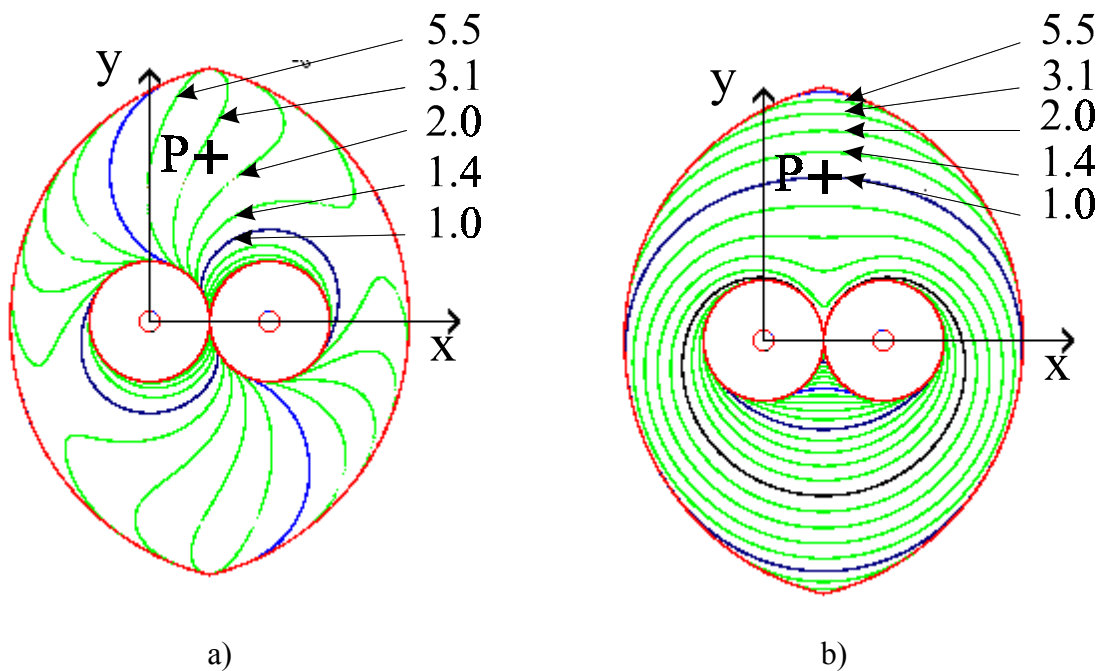


Figure 80 : Courbes d'iso-conditionnement de la matrice jacobienne parallèle d'un manipulateur RR-RRR pour deux modes de fonctionnement différents

**Conditionnement de la matrice jacobienne sérielle**

La matrice jacobienne sérielle **B** étant diagonale, les valeurs propres de cette matrice  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont simplement les valeurs absolues de la diagonale :

$$\beta_1 = |\sin(\theta_3 - \theta_1)| \text{ et } \beta_2 = |\sin(\theta_4 - \theta_2)|$$

Le conditionnement de la matrice jacobienne sérielle **B** est défini tel que :

$$K(\mathbf{B}) = \sqrt{\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}}$$

où la valeur de  $\beta_{\max}$  et  $\beta_{\min}$  est fonction de l'inégalité suivante. Si  $|\sin(\theta_3 - \theta_1)| < |\sin(\theta_4 - \theta_2)|$  alors

$$\beta_{\min} = |\sin(\theta_3 - \theta_1)| \text{ et } \beta_{\max} = |\sin(\theta_4 - \theta_2)|$$

sinon

$$\beta_{\min} = |\sin(\theta_4 - \theta_2)| \text{ et } \beta_{\max} = |\sin(\theta_3 - \theta_1)|$$

Le conditionnement de la matrice jacobienne sérielle est minimum lorsque  $|\sin(\theta_3 - \theta_1)| = |\sin(\theta_4 - \theta_2)| \neq 0$ . Inversement, il tend vers l'infini lorsque  $|\sin(\theta_3 - \theta_1)| = |\sin(\theta_4 - \theta_2)| = k\pi$ . Les configurations pour lesquelles  $K(\mathbf{B}) = 1$  sont les configurations isotropes et les configurations pour lesquelles  $K(\mathbf{B}) = +\infty$  sont les singularités sérielles du manipulateur. Ces configurations sont représentées dans les figures 81 a) et b).

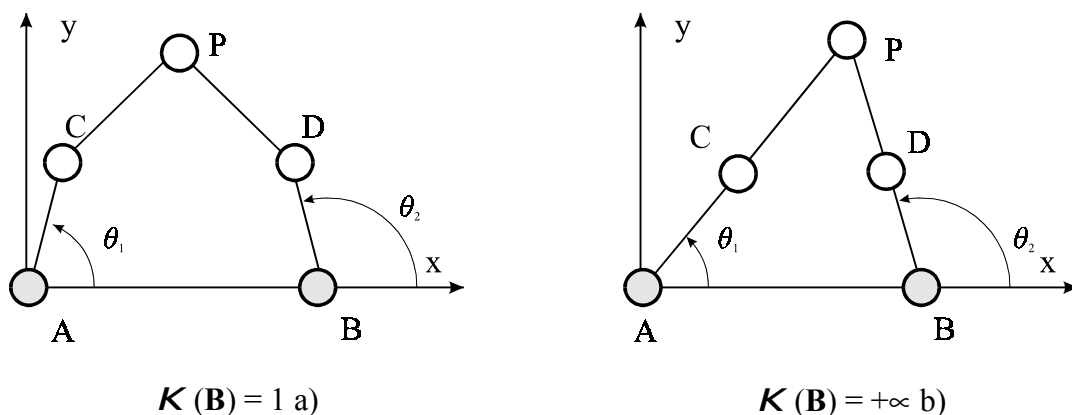


Figure 81 : Configurations isotrope et singulière de la matrice jacobienne sérielle d'un manipulateur RR-RRR

**Note :**

- Pour les manipulateurs pleinement parallèles, il est possible d'utiliser le conditionnement de la matrice jacobienne parallèle, sérielle  $AB^T$  [Kock 98] selon la tâche à exécuter.
- Pour les manipulateurs possédant à la fois des degrés de mobilité de translation et de rotation, il est nécessaire de normaliser les dimensions des matrices jacobiennes pour les valeurs propres des matrices jacobiennes puissent être comparées. Pour un manipulateur à 6 degrés de liberté, les dimensions des valeurs propres sont soit en mètres soit en radians.

- **Conclusion**

On peut conclure que l'utilisation des différents modes de fonctionnement permet de s'affranchir des problèmes des singularités parallèles présentes à l'intérieur de l'espace de travail. Il est donc intéressant d'utiliser tous les modes de fonctionnement d'un manipulateur parallèle en effectuant des trajectoires de changement de postures entre les aspects généralisés. La gestion des modes de fonctionnement permet d'augmenter les performances d'un manipulateur pleinement parallèle en lui donnant la possibilité d'exploiter au mieux son espace de travail (Voir la N - parcourabilité, chapitre 5.2.2).

### **3.4.6. APPLICATION AU MANIPULATEUR PLAN 3-RRR**

Nous allons introduire un nouvel exemple possédant 3 degrés de liberté. Nous avons choisi le manipulateur 3-RRR (Figure 82) qui a été étudié en particulier par [Gosselin 88] et [Merlet 97]. Il possède plusieurs solutions aux modèles géométriques inverse et direct. Sa morphologie est proche de celle du manipulateur de type 3-RPR étudié par [Wenger 97a] pour lequel il est montré qu'il est possible de changer de mode d'assemblage sans passer par une singularité.

L'équation 19 permet la résolution du modèle géométrique inverse de ce manipulateur.

$$\begin{aligned} (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} - L_i \cos(\alpha_i))^2 + \\ (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} - L_i \sin(\alpha_i))^2 = M_i^2 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (19)$$

Les trois articulations motorisées sont les trois pivots  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .

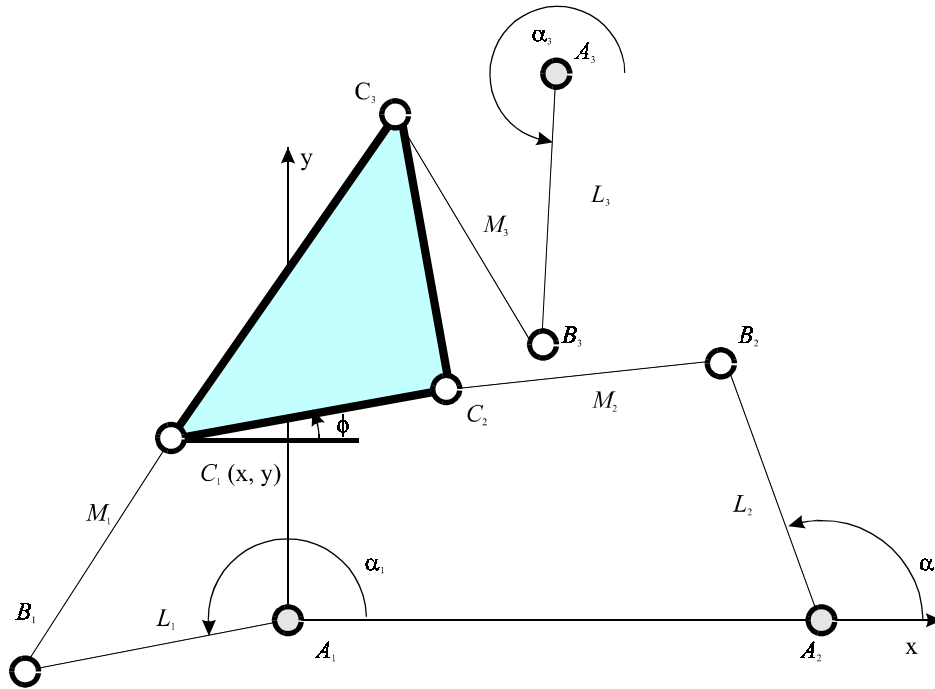


Figure 82 : Manipulateur plan 3-RRR

La résolution de ce problème est abordée par [Gosselin 88]. On peut résoudre le problème du modèle géométrique direct de ce manipulateur, en utilisant les résultats obtenus pour le manipulateur pleinement parallèle 3 - RPR (Figure 4). On calcule les coordonnées des points  $C_i$  à partir de la méthode de résolution du manipulateur 3 - RPR, en fixant les longueurs des articulations prismatiques égales aux longueurs des segments  $M_i$ . On a donc le même nombre de solutions que pour le manipulateur 3 - RPR, c'est-à-dire 6.

### Dimensions

Nous avons choisi des dimensions (Tableau 7), pour le manipulateur étudié, permettant d'avoir 8 modes de fonctionnement et 6 solutions au modèle géométrique direct (Figure 85).



$A_{1x} = -10,0$	$A_{2x} = 10,0$	$A_{3x} = 0,0$
$A_{1y} = -10,0$	$A_{2y} = -10,0$	$A_{3y} = 10,0$
$C_{1x} = 0,0$	$C_{2x} = 10,0$	$C_{3x} = 10,0$
$C_{1y} = 0,0$	$C_{2y} = 0,0$	$C_{3y} = 10,0$
$L_1 = 10,0$	$L_2 = 10,0$	$L_3 = 10,0$
$M_1 = 10,0$	$M_2 = 10,0$	$M_3 = 10,0$

Tableau 7 : Dimensions du manipulateur pleinement parallèle plan 3-RRR étudié

Nous avons modélisé l'espace de travail (Figure 83) et l'ensemble articulaire (Figure 84) en utilisant une représentation octree. Ce manipulateur admet jusqu'à 6 solutions réelles pour son modèle géométrique direct (Figure 85). Cependant toutes les configurations articulaires n'admettent pas 6 solutions. Nous avons étudié l'ensemble articulaire de ce manipulateur pour  $\alpha_i = [-\pi ; \pi]$ .

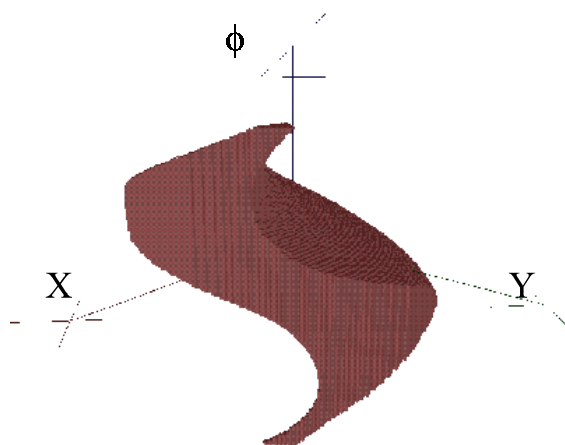


Figure 83 : Espace de travail du manipulateur plan 3-RRR

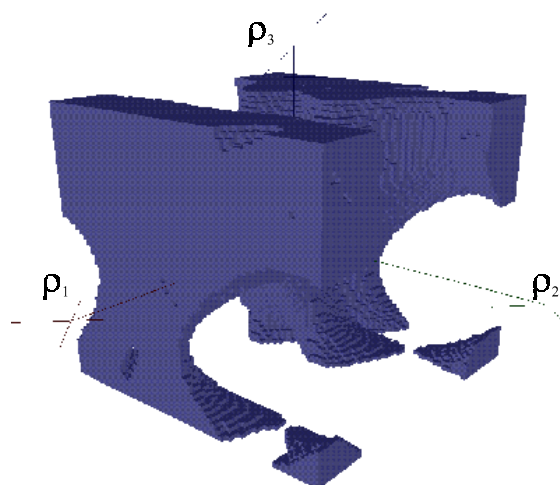


Figure 84 : Ensemble articulaire du manipulateur plan 3-RRR

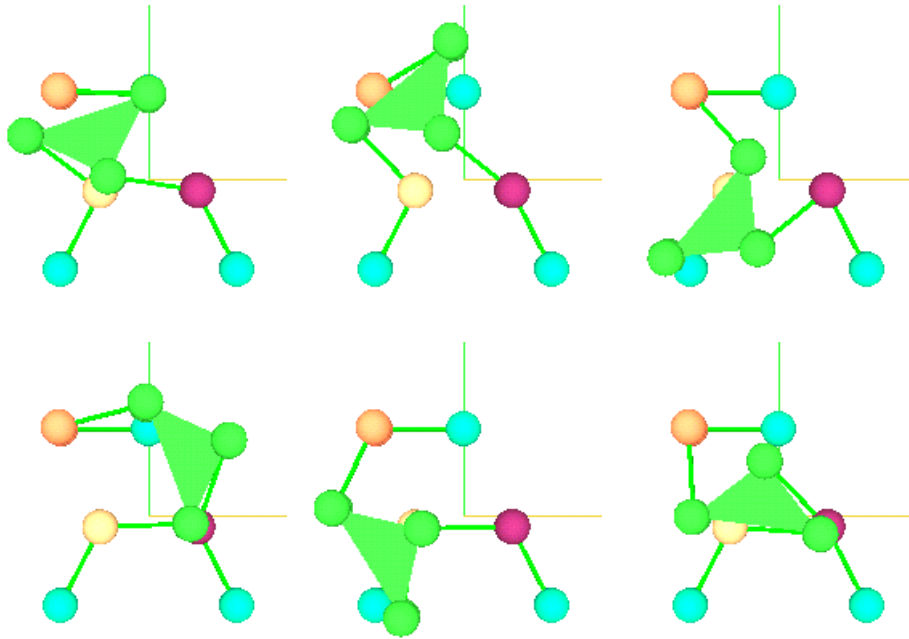


Figure 85 : 6 solutions du modèle géométrique direct d'un manipulateur pleinement parallèle plan 3-RRR

### Les aspects

En utilisant la définition des aspects généralisés, nous avons calculé, pour tous les modes de fonctionnement, les  $\mathcal{W}$ -aspects du manipulateur pleinement parallèle plan 3-RRR étudié. Nous avons ainsi trouvé 16 aspects généralisés dont nous avons représenté, dans la figure 86, leurs projections dans l'espace de travail. Les domaines ainsi obtenus se recouvrent partiellement, cependant pour un mode de fonctionnement donné, tous les  $\mathcal{W}$ -aspects sont exempts de singularités parallèle et sérielle.

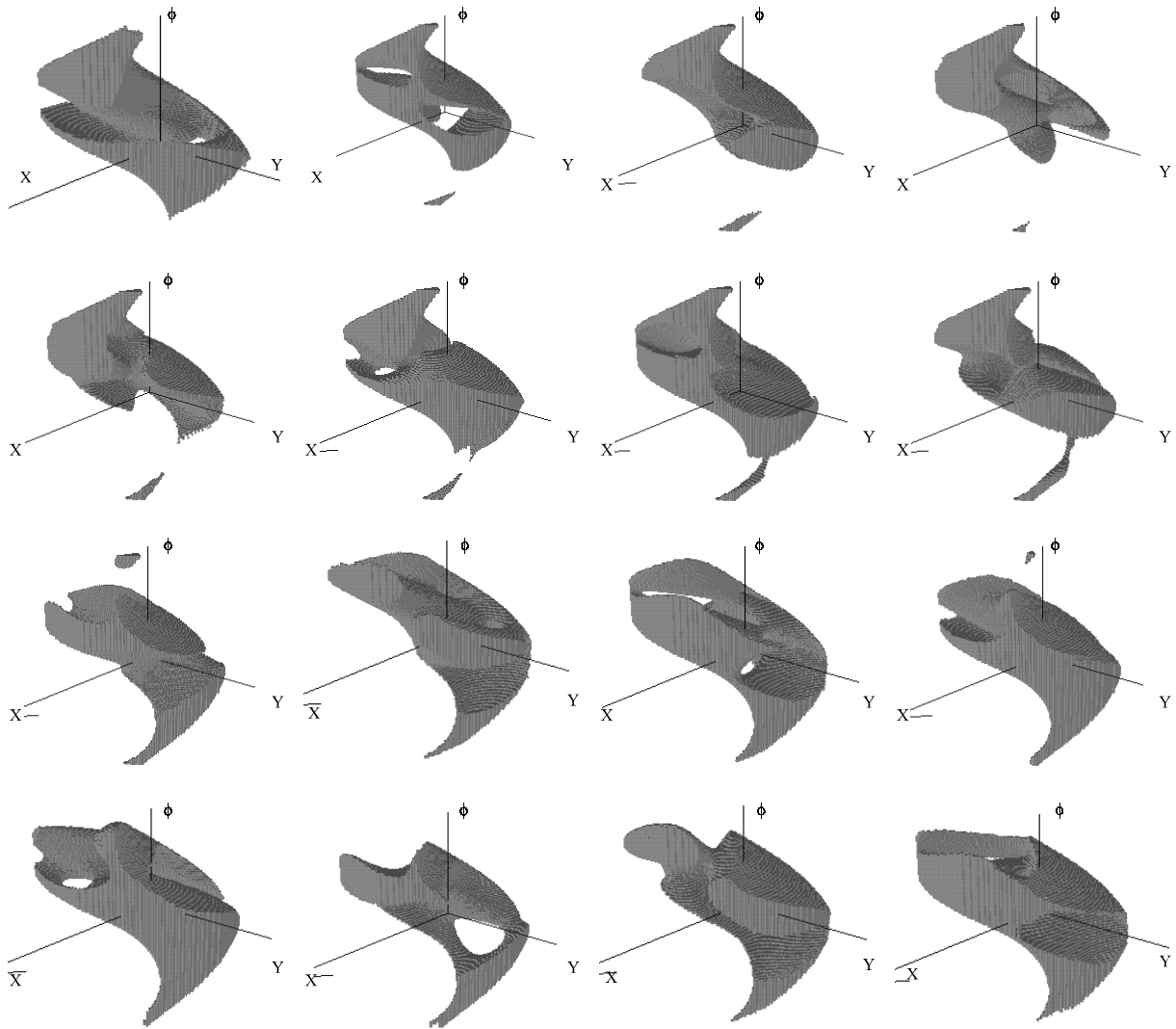


Figure 86 : Les 16  $W$ -aspects du manipulateur 3-RRR

### 3.4.7. APPLICATION AU MANIPULATEUR SPATIAL DELTA

Notre dernier exemple d'application des aspects généralisés est un manipulateur spatial. Nous avons choisi le manipulateur Delta conçu par Clavel [Clavel 88]. Le but de cet exemple est de montrer que la notion d'aspect généralisé ne s'applique pas uniquement aux manipulateurs pleinement parallèles plans.

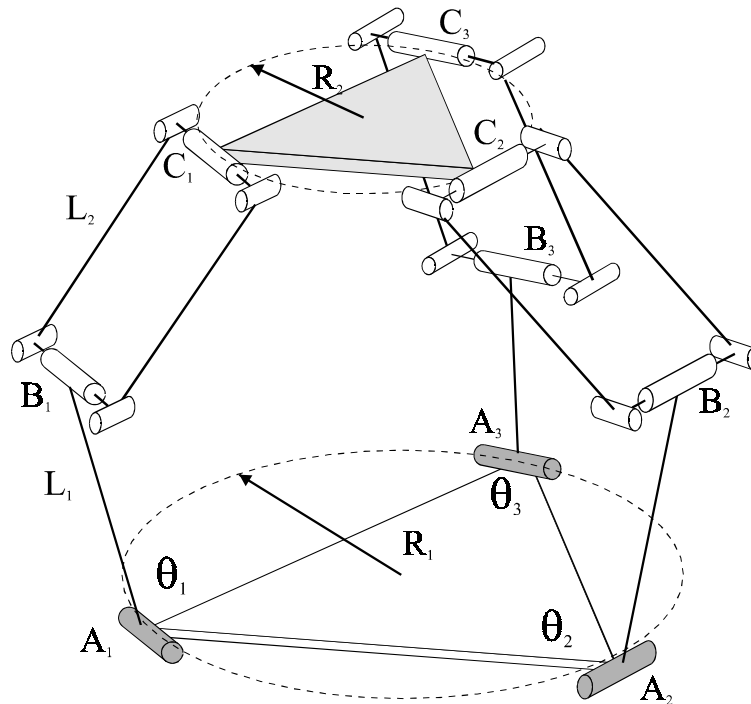


Figure 87 : Manipulateur spatial Delta

Ce mécanisme à trois degrés de liberté ( $X, Y, Z$ ) possède 3 articulations motorisées ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) placées en  $A_1, A_2$  et  $A_3$  (Figure 87). Il est constitué de 3 jambes comportant un parallélogramme qui permet à la plate-forme mobile de rester horizontale. De nombreuses variantes de ce mécanisme ont été étudiées pour former des manipulateurs à 6 degrés de liberté [Pierrot 91] et [Mianowski 98].

Nous utilisons un manipulateur symétrique, c'est-à-dire possédant des dimensions identiques pour chacune des jambes et les trois articulations rotoïdes de la base et de la plate-forme mobile placées sur un cercle de rayon  $R_1$  et  $R_2$  respectivement, réparties à  $120^\circ$ . Ainsi, nous obtenons les propriétés suivantes :

- 2 solutions au modèle géométrique direct ;
- 8 solutions au modèle géométrique inverse.

Les singularités parallèles de ce mécanisme sont les configurations pour lesquelles les points  $B_1, B_2, B_3$  et  $P$  sont coplanaires. Dans ces configurations, le manipulateur gagne un degré de liberté suivant un axe perpendiculaire au plan  $(B_1, B_2, B_3)$ .

Les dimensions du manipulateur utilisées dans ce paragraphe sont regroupées dans le tableau 8.

$R_1$	$R_2$	$L_1$	$L_2$
1.8	0.3	2.4	2.8

Tableau 8 : Dimensions du manipulateur Delta étudié

Nous utilisons les octrees pour modéliser l'espace de travail et l'ensemble articulaire de ce manipulateur (Figures 88 et 89).

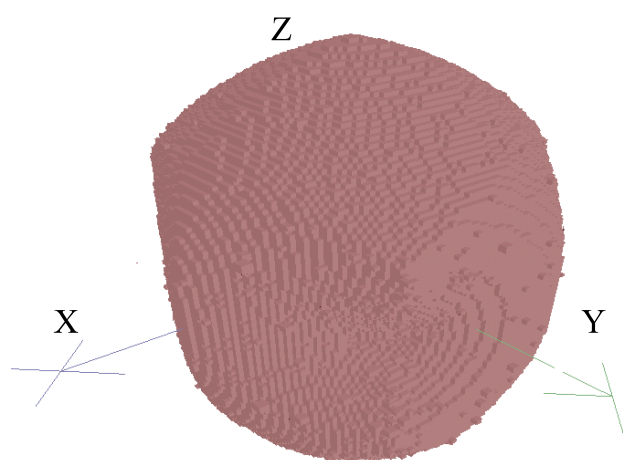


Figure 88 : Espace de travail du manipulateur Delta

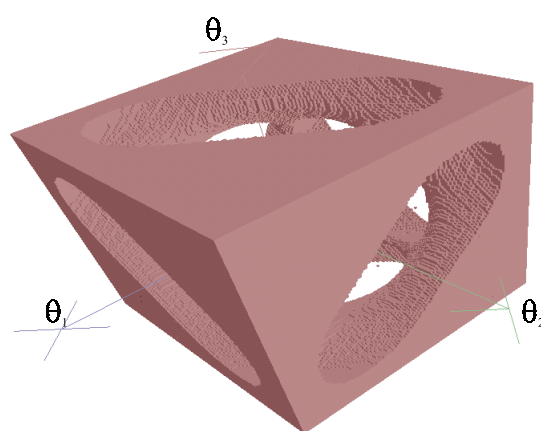


Figure 89 : Ensemble articulaire du manipulateur Delta

Puis, nous cherchons les singularités parallèles que nous représentons dans l'espace opérationnel et dans l'espace articulaire (Figure 90). Il est difficile de calculer précisément la totalité de la surface. C'est pourquoi, il peut arriver que le modèle octree soit incomplet (Présence de petit cube isolés).

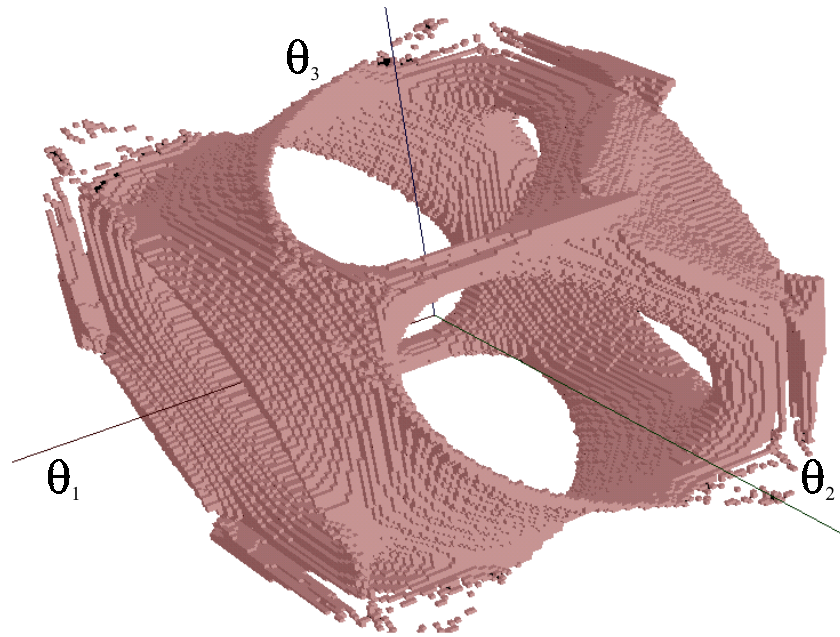
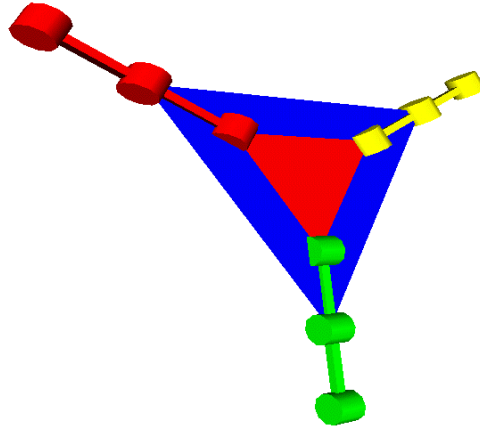


Figure 90 : Configurations singulières du manipulateur Delta dans l'espace articulaire

Nous remarquons que la position de ces configurations singulières est fonction du mode de fonctionnement. Nous pouvons généraliser les remarques que nous avons faites pour le manipulateur plan 3-RPR à propos de son ensemble articulaire. Les singularités parallèles constituent, avec les limites articulaires, les frontières de l'ensemble articulaire. Il existe donc des configurations articulaires pour lesquelles il n'est pas possible d'assembler le manipulateur. Comme pour le manipulateur 4 barres plan (contraintes de Grashof), il existe des conditions sur les dimensions permettant d'associer, pour toutes configurations articulaires, un mode d'assemblage pour le manipulateur [Clavel 88]. Si l'on pose  $R_1 + L_1 = R_2 + L_2$ , alors le manipulateur est en configuration singulière lorsque  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi$  (Figure 91) ce qui sépare les solutions du modèle géométrique direct symétriquement par rapport au plan formé par les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .



*Figure 91 : Configuration singulière du manipulateur Delta*

Dans cette configuration (Figure 91), les jambes et la plate-forme mobile sont coplanaires avec la base du manipulateur ; celui-ci ne peut résister à aucune force exercée suivant l'axe Z.

S'il n'existe pas de limites sur les articulations motorisées ou passives, les domaines accessibles par le manipulateur dans chacun de ses 8 modes de fonctionnement sont identiques. Cependant, pour un manipulateur réel, nous devons introduire des limites sur ces articulations à cause de contraintes technologiques. De plus, la position des configurations singulières présentes à l'intérieur de l'espace de travail est fonction du mode de fonctionnement.

### **3.5. LES DOMAINES D'UNICITÉ**

Nous venons de définir les aspects généralisés comme étant les plus grands domaines définis sur le produit cartésien de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire sans singularité parallèle ni sérielle. Le but de ce paragraphe est de définir les domaines d'unicité des manipulateurs pleinement parallèles. À partir du manipulateur 3-RRR, nous verrons que les aspects ne sont pas les domaines d'unicité.

#### **3.5.1. CHANGEMENT DE MODE D'ASSEMBLAGE**

Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'il est possible de réaliser une trajectoire permettant de changer de mode d'assemblage sans passer par une singularité parallèle ou une singularité sérielle. Le manipulateur pleinement parallèle 3-RRR étudié est identique à celui

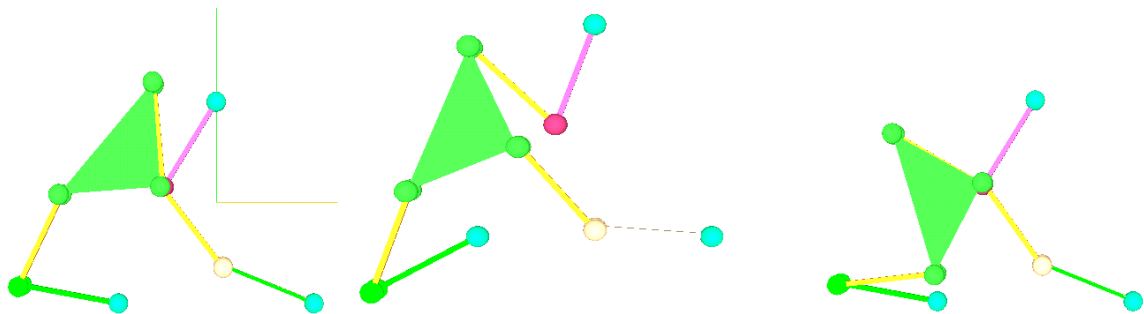
du paragraphe 3.4.6. Nous définissons cette trajectoire à partir de la modélisation d'un aspect parallèle généralisé  $WA_i$ .

La trajectoire réalisée est une interpolation linéaire dans l'espace de travail entre configurations de la plate-forme mobile données dans le tableau 9.

	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b><math>\phi</math> (rad)</b>
<b>Point 1</b>	-15,468	0,781	0,073
<b>Point 2</b>	-15,468	-7,091	0,500
<b>Point 3</b>	-9,902	-7,091	1,081

Tableau 9 : Trajectoire de changement de mode d'assemblage

La configuration de départ et la configuration d'arrivée de cette trajectoire, ainsi qu'une configuration intermédiaire sont représentées dans la figure 92.



Configuration de départ -1-      Configuration intermédiaire      Configuration d'arrivée -2-

Figure 92 : Changement de mode d'assemblage pour un manipulateur parallèle 3-RRR

Nous avons calculé la valeur des différents déterminants (**A** et **B**) durant cette trajectoire. Nous pouvons ainsi vérifier qu'aucun d'entre eux ne s'annule (Figure 93 : En ordonnée, nous avons normé les valeurs de  $\text{Det}(\mathbf{A})$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{22}$  et  $B_{33}$ ). Nous rappelons aussi que les singularités parallèles sont les configurations pour lesquelles les droites  $B_i C_i$  ont un point commun.



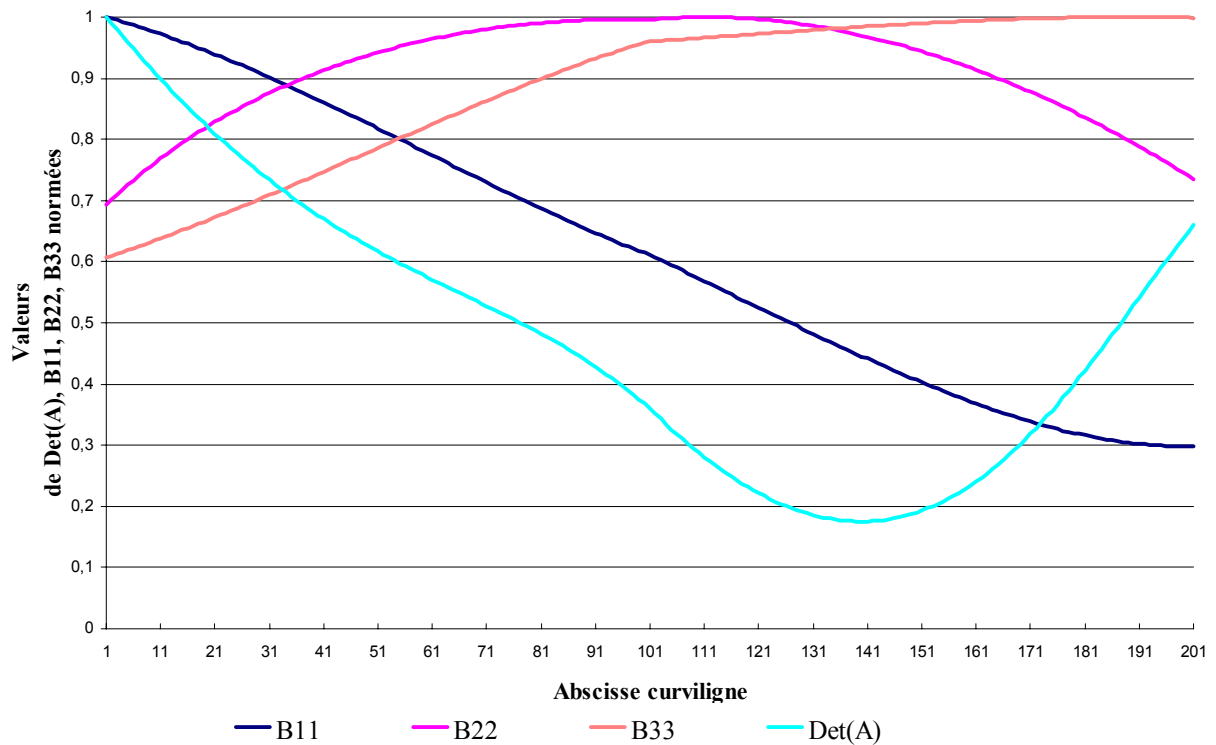


Figure 93 : Variation de la valeur des déterminants le long de la trajectoire

La trajectoire de changement de mode d'assemblage ainsi définie est donc non singulière. Ceci signifie que les singularités parallèles, comme pour les manipulateurs pleinement parallèles simples, ne séparent pas les solutions du modèle géométrique direct. Nous allons donc définir leurs domaines d'unicité.

### 3.5.2. LES SURFACES CARACTÉRISTIQUES

Nous avons défini les surfaces caractéristiques pour diviser les aspects et ainsi former les domaines d'unicité des manipulateurs parallèles simples. En utilisant les modes de fonctionnement et les aspects généralisés, nous allons étendre cette définition aux manipulateurs pleinement parallèles possédant plusieurs solutions au modèle géométrique inverse.

#### Définition 30 : Les surfaces caractéristiques

Soit  $WA_{ij}$  un  $W$ -aspect de travail  $W$ . On définit les surfaces caractéristiques du  $W$ -aspect  $WA_{ij}$ , notées  $S_C(WA_{ij})$ , comme l'image réciproque dans  $WA_{ij}$  de l'image des frontières  $\overline{WA_{ij}}$  qui délimitent  $WA_{ij}$ .

$$S_C(WA_{ij}) = g_i^{-1} \left( g_i(\overline{WA_{ij}}) \right) \cap WA_{ij} \quad (20)$$

où  $g_i$  et  $g_i^{-1}$  sont définies respectivement avec les équations (16) et (17).

**Remarque :**

Cette définition suppose que les jambes ne sont pas cuspidales. Dans le cas contraire, il serait nécessaire de définir des surfaces caractéristiques dans l'ensemble articulaire pour séparer les solutions du modèle géométrique inverse.

### 3.5.3. LES RÉGIONS DE BASE ET DOMAINES DE BASE

**Définition 31 : Régions de base**

Soit  $WA_{ij}$  un  $W$ -aspect d'un mode de fonctionnement  $Mf_i$  appartenant à l'espace de travail  $W$ . On définit les régions de base, notées  $WA_{ijk}$ , ( $k \in K$  ensemble des régions de base), comme étant les composantes connexes de  $WA_{ij} \dot{-} S_C(WA_{ij})$  ( $\dot{-}$  désigne la différence entre ensembles). Les composantes de base réalisent une partition de  $WA_{ij}$  :

$$WA_{ij} = \left( \bigcup_{k \in K} WA_{ijk} \right) \cup S_C(WA_{ij}) \quad (21)$$

**Définition 32 : Composantes de base**

Soit  $QA_{ijk} = g_i(WA_{ijk})$ ,  $QA_{ijk}$  est un domaine de l'ensemble articulaire  $Q$  qu'on appelle composante de base. Soit  $WA_{ij}$  un  $W$ -aspect et  $QA_{ij}$  son image par  $g_i$ , on a :

$$QA_{ij} = \left( \bigcup_{k \in K} QA_{ijk} \right) \cup g_i(S_C(WA_{ij})) \quad (22)$$

**Théorème 5 :**

*En d'autres termes, les régions de base sont les domaines d'unicité pour le modèle géométrique direct.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle donnée dans le chapitre 2.5.5 pour le cas des manipulateurs parallèles possédant une seule solution au modèle géométrique inverse.

**Conséquence :**

Les composantes de base, images des régions de base d'un même aspect généralisé, pour un mode de fonctionnement donné, sont soit disjointes soit confondues.

**3.5.4. LES DOMAINES D'UNICITÉ LES PLUS GRANDS**

Le théorème 5 permet de caractériser les domaines de l'espace de travail possédant une seule solution au modèle géométrique direct. Le théorème 6 suivant a pour but de définir les domaines d'unicité les plus grands de l'opérateur géométrique : tout autre domaine d'unicité est alors inclus dans l'un d'eux.

**Théorème 6 :**

*Les domaines d'unicité  $Wu_{i k}$  sont les domaines obtenus comme la réunion de l'ensemble  $(\cup_{j \in J'} WA b_{ij})$  des régions de base adjacentes, d'un même  $W$ -aspect  $WA_{ij}$  dont les images respectives par  $g_i$  sont disjointes, et du sous-ensemble  $S_C(J')$  des surfaces caractéristiques qui séparent ces composantes de base :*

$$Wu_{i k} = (\cup_{j \in J'} WA b_{ij}) \cup S_C(WA b_{ij}) \quad (23)$$

avec  $J' \subset J$  tel que  $\forall j_1, j_2 \in J', g_i(WA b_{i j_1}) \cap g_i(WA b_{i j_2}) = \emptyset$

**3.5.5. CONCLUSION**

Nous avons défini les domaines d'unicité pour les manipulateurs pleinement parallèles possédant plusieurs solutions aux modèles géométriques direct et inverse. Ces domaines permettent de séparer les solutions du modèle géométrique direct pour les manipulateurs pleinement parallèles qui peuvent changer de mode d'assemblage sans rencontrer de configuration singulière.

**3.6. CONCLUSION**

Nous venons de définir les aspects généralisés comme étant les plus grands domaines définis sur le produit cartésien de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire. Puis, nous

avons défini les aspects libres. Enfin, nous avons caractérisé les domaines d'unicité des manipulateurs parallèles dans le cas général. Ces définitions sont particulièrement adaptées pour l'optimisation de la conception des manipulateurs parallèles et vont nous permettre de définir la mobilité de ces manipulateurs.

## **4. PRISE EN COMPTE DES COLLISIONS : LES ASPECTS LIBRES**

### **4.1. INTRODUCTION**

Nous venons de définir les aspects généralisés pour les manipulateurs pleinement parallèles. Cependant cette définition ne prend pas en compte les collisions pouvant se produire entre le manipulateur et son environnement (collisions externes) ou entre les corps du manipulateur (collisions internes). L'objectif de ce chapitre est de définir les aspects libres et leurs projections dans l'ensemble articulaire et dans l'espace de travail.

Nous avons vu que le principal défaut des manipulateurs parallèles est la taille réduite de leur espace de travail. Ce défaut est dû principalement à la présence de singularités à l'intérieur de l'espace de travail, qui oblige le concepteur à poser des limites articulaires sévères sur les articulations motorisées.

La deuxième contrainte est d'éviter les collisions. Dans ce cas, contrairement aux manipulateurs sériels, la commande des manipulateurs parallèles doit garantir, pour la planification de trajectoires, l'absence de deux types de collisions. Nous devons donc connaître la situation de chaque corps du manipulateur associé à un mode de fonctionnement pour pouvoir définir son volume occupé dans une configuration donnée. À partir de cela, nous définissons deux types de collisions : les collisions internes qui ne dépendent que du manipulateur et les collisions externes qui sont fonction de l'environnement.

Pour la modélisation de l'espace de travail, de nombreuses études intègrent le problème des collisions entre segments et les limites des articulations actives et passives. Cependant, il est nécessaire d'effectuer une modélisation volumique du manipulateur pour connaître tous les problèmes dus aux collisions internes. La méthode que nous présentons permet aussi de prendre en compte les collisions avec l'environnement.

Ce chapitre synthétise les résultats que nous avons présentés dans [Chablat 98d].

## 4.2. RAPPEL : INFLUENCE DES OBSTACLES POUR LES MANIPULATEURS SÉRIELS

Pour définir les aspects des manipulateurs sériels, Borrel a défini les plus grands domaines de l'espace de travail exempt de toute configuration singulière [Borrel 86]. Malheureusement cette définition ne tient pas compte des obstacles présents dans le champ d'action du manipulateur. L'influence de ces objets sur l'espace de travail est difficile à prévoir. Pour définir l'espace de travail libre d'un manipulateur, il est nécessaire d'étudier toutes les configurations des différents corps du manipulateur pouvant entrer en collision avec l'environnement.

Nous allons rappeler les définitions de l'espace des configurations libres et de l'espace de travail libre permettant de formuler les aspects libres des manipulateurs sériels.

### 4.2.1. ESPACE DE TRAVAIL LIBRE ET ESPACE DES CONFIGURATIONS LIBRES

Pour définir l'espace des configurations libres et l'espace de travail libre des manipulateurs sériels, il est nécessaire de définir le volume occupé par tous les solides le constituant.

On désigne par  $\mathcal{M}(\mathbf{q})$  le volume représenté par le manipulateur sériel dans la configuration  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_n]^T$  (Figure 94).

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = b \cup \left( \cup_{i=1, n} c_i(q_1, \dots, q_i, q_n) \right) \quad (24)$$

où :

- $b$  est le corps de base du manipulateur ;  $c_i$  désigne le corps lié à l'articulation numéro  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $c_n$  est l'organe terminal du manipulateur.

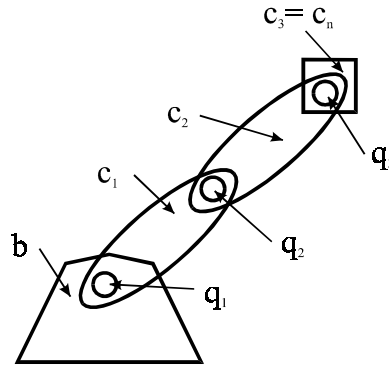


Figure 94 : Description d'un manipulateur sériel

### Espace des configurations libres

On appelle espace des configurations libres, l'ensemble des configurations d'un manipulateur sériel tel que :

$$QI = \left\{ \mathbf{q} \in Q / M(\mathbf{q}) \cap O = \emptyset \right\} \quad (25)$$

où :

- $O = \cup_{k=1, N_0} \text{Obst}(k)$  l'ensemble de tous les obstacles de l'environnement ;
- $Q$  le domaine articulaire accessible.

### Espace de travail libre

On appelle espace de travail libre, l'image par le modèle géométrique direct  $f$  de l'espace des configurations libres. On note  $WI$  :

$$WI = f(QI) \quad (26)$$

L'espace de travail libre est l'ensemble des configurations accessibles par l'organe terminal du manipulateur, tel qu'aucune partie du manipulateur ne soit en collision avec les objets de l'environnement.

#### 4.2.2. LES ASPECTS LIBRES

Pour prendre en compte les obstacles présents dans l'environnement du manipulateur, [Wenger 89] a introduit la notion d'aspect libre.

**Définition 33 : Les aspects libres**

La définition des aspects libres utilise la définition des aspects [Borrel 86]. Les aspects libres  $\mathbf{A}_{jk}$  [Wenger 89] sont définis par :

$$\mathbf{A}_{jk} = \text{CC} \left\{ \mathbf{A}_j \cap \mathbf{OI} \right\}$$

où CC signifie composantes connexes.

Pour chaque composante connexe  $\mathbf{A}_{jk}$ , leur image dans l'espace de travail est défini par :

$$\forall j \in J, \forall k \in I(j), \mathbf{WA}_{jk} = f(\mathbf{A}_{jk})$$

où chaque domaine  $\mathbf{WA}_{jk}$  est connexe.

**4.3. INFLUENCE DES OBSTACLES POUR LES MANIPULATEURS PARALLÈLES**

**4.3.1. VOLUME DU MANIPULATEUR**

Pour définir l'espace de travail libre de toute collision, nous devons connaître le volume occupé par l'ensemble des corps du manipulateur pour chacune de ses configurations.

**Définition 34 : Volume du manipulateur**

Soit  $V_m(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ , le volume du manipulateur pleinement parallèle dans la configuration  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  (Figure 95) :

$$V_m(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = \mathbf{b} \cup \left( \bigcup_{k=0, n \times m - 1} \mathbf{c}_k(\mathbf{X}, \mathbf{q}) \right) \cup \mathbf{pl}(\mathbf{X}) \quad (27)$$

où,

- $\mathbf{b}$  est le volume de la base du manipulateur pleinement parallèle ;
- $\mathbf{pl}(\mathbf{X})$  est le volume de la plate-forme mobile du manipulateur pleinement parallèle dans la configuration  $(\mathbf{X})$  ;
- $\mathbf{c}_k(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  avec  $k = m \times i + j$  est le volume du corps  $j$  de la jambe  $i$  où  $n$  est le nombre de



jambes et  $m$  le nombre de corps de la jambe  $i$  du manipulateur pleinement parallèle étudié.

La position de chaque corps est donnée par le modèle géométrique inverse.

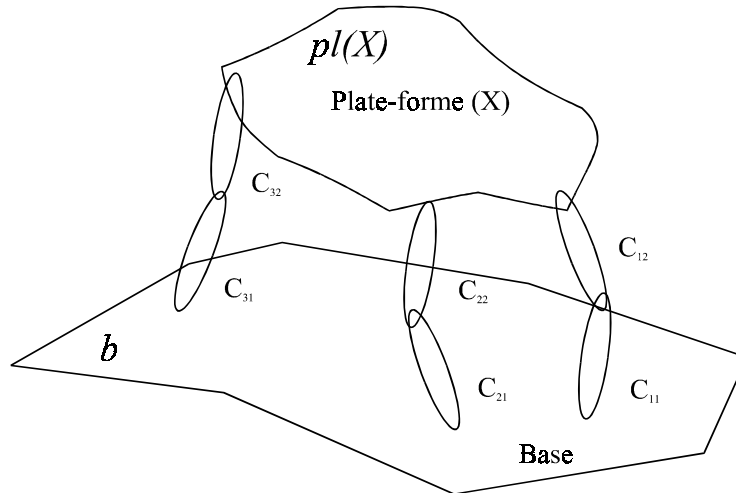


Figure 95 : Description d'un manipulateur parallèle

### 4.3.2. COLLISIONS INTERNES

À partir de la modélisation du manipulateur, nous cherchons à connaître si pour une configuration donnée, aucun des corps le constituant est en collision avec un autre corps du manipulateur. Nous définissons ainsi le volume des collisions internes. Dans un fonctionnement normal, ce volume sera évidemment nul. De plus, à partir de la modélisation du manipulateur, un volume de sécurité peut être prévu en décalant les frontières des volumes de chaque corps d'une distance de sécurité.

Pour illustrer notre propos, nous utilisons le manipulateur plan RR-RRR dont les différents corps sont disposés sur deux niveaux (Figure 96). Les collisions internes se produisant entre les corps d'un même niveau. Le principal problème posé par cette modélisation est la représentation des articulations où les corps sont tangents. Ainsi, entre les deux niveaux, il y a tangence mais pas collision.

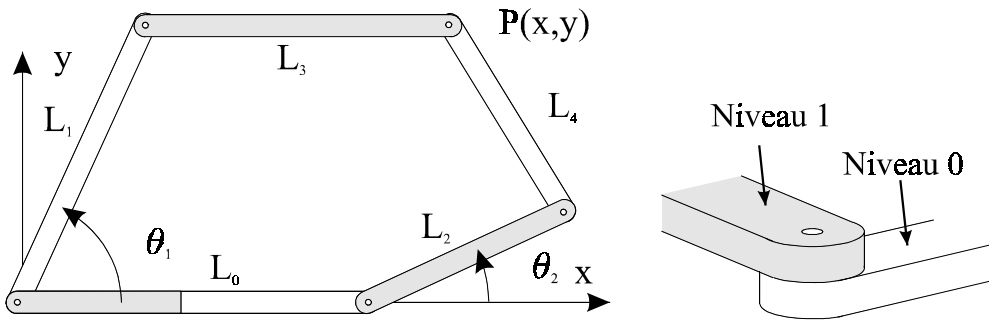


Figure 96 : Modélisation volumique du manipulateur plan RR-RRR

**Définition 35 : Les collisions internes**

Soit  $V_{ci}(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ , le volume des *collisions internes*, c'est-à-dire l'ensemble de tous les volumes en collisions entre les corps du manipulateur dans la configuration  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  (Figure 97).

(28)

où

- $V_{cb}(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = \cup_{i=0, n \times m - 1} (\mathbf{c}_i \cap \mathbf{b})$ , volume des collisions corps / base ;
- $V_{cp}(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = \cup_{i=0, n \times m - 1} (\mathbf{c}_i \cap \mathbf{pl}(\mathbf{X}))$ , volume des collisions corps / plate-forme ;
- $V_{cc}(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = \cup_{i=0, n \times m - 1} (\cup_{j=i, n \times m - 1} (\mathbf{c}_i \cap \mathbf{c}_j))$ , volume des collisions corps / corps.

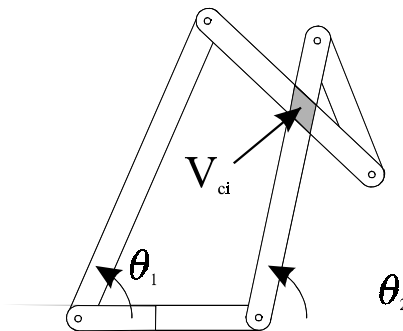


Figure 97 : Exemple de collision interne

**4.3.3. COLLISIONS EXTERNES**

Pour établir une étude exhaustive des différentes collisions possibles, nous allons prendre en compte les objets présents dans l'environnement. Nous définissons le volume des collisions externes à partir de la modélisation du manipulateur et de son environnement.

**Définition 36 : Les collisions externes**

Soit  $V_{ce}(\mathbf{X}, \mathbf{q})$ , le volume des *collisions externes*, c'est à dire l'ensemble des volumes en collision entre le manipulateur et les obstacles de son environnement **Obst** (Figure 98).

$$V_{ce}(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = V_m(\mathbf{X}, \mathbf{q}) \cap \text{Obst} \quad (29)$$

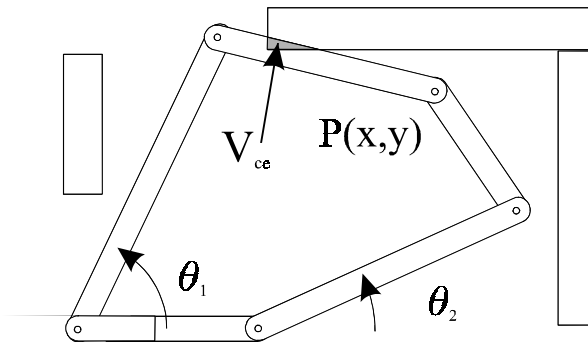


Figure 98 : Exemple de collision externe

Les collisions internes et externes des manipulateurs parallèles pourraient être calculées en utilisant les fonctions de test de collision des logiciels de CAO-Robotique du commerce. Cependant, il est encore parfois difficile de modéliser, dans ces logiciels, des manipulateurs parallèles possédant plusieurs solutions au modèle géométrique direct et inverse. En effet, leur structure est particulièrement adaptée pour des manipulateurs sériels possédant une seule solution au modèle géométrique direct.

**4.3.4. LES ESPACES LIBRES**

À partir des différentes modélisations que nous venons d'introduire, nous allons intégrer les contraintes de collisions dans la modélisation de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire. Cependant, étant donné que les configurations du manipulateur sont définies dans le produit cartésien de l'espace de travail  $W$  et de l'ensemble articulaire  $Q$ , nous définirons un espace libre dans ce produit cartésien avant de les projeter sur  $W$  et  $Q$ .

**Définition 37 : Espace libre**

On définit l'*espace libre*  $E_L$  d'un manipulateur pleinement parallèle comme l'ensemble des configurations  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  accessibles sans collision interne ni externe :

$$E_L = \{(\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in W \times Q \mid V_{ce} = \emptyset \text{ et } V_{ci} = \emptyset\} \quad (30)$$

Une *configuration libre*  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  est une configuration  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  pour laquelle le manipulateur est libre de toute collision interne ou externe.

L'espace libre étant définis sur  $W \times Q$ , il n'est pas applicable directement. Nous définissons l'espace de travail libre  $W_L$  comme la projection de l'espace libre sur l'espace de travail puis l'ensemble articulaire libre  $Q_L$  comme la projection de l'espace libre sur l'ensemble articulaire.

**Définition 38 : L'espace de travail libre**

La projection  $\pi_W$  de l'espace libre  $E_L$  sur l'espace de travail donne l'*espace de travail libre*  $W_L$  :

$$W_L = \pi_W(E_L) \quad (31)$$

**Définition 39 : L'ensemble articulaire libre**

La projection  $\pi_Q$  de l'espace libre  $E_L$  donne l'*ensemble articulaire libre*  $Q_L$  :

$$Q_L = \pi_Q(E_L) \quad (32)$$

**4.3.5. APPLICATION AU MANIPULATEUR RR-RRR**

Pour illustrer les précédentes définitions, nous utilisons le manipulateur plan 5 barres RR-RRR que nous avons modélisé dans la figure 96. Les dimensions du manipulateur utilisées pour ce calcul sont regroupées dans le tableau 10.

$L_0 = 5$	$L_1 = 8$	$L_2 = 8$
$L_3 = 5$	$L_4 = 5$	

Tableau 10 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié pour les espaces libres

Pour cet exemple, nous avons calculé son espace de travail et son espace de travail libre, son ensemble articulaire (Figure 100) et son ensemble articulaire libre (Figure 101). Ce dernier est bien sûr plus petit que l'ensemble articulaire puisqu'il est limité par les collisions

internes (pour  $\theta_1 \approx 0$  et  $\theta_2 \approx \pi$ ). On remarque cependant que son espace de travail libre associé est identique à celui de l'espace de travail (Figure 99).

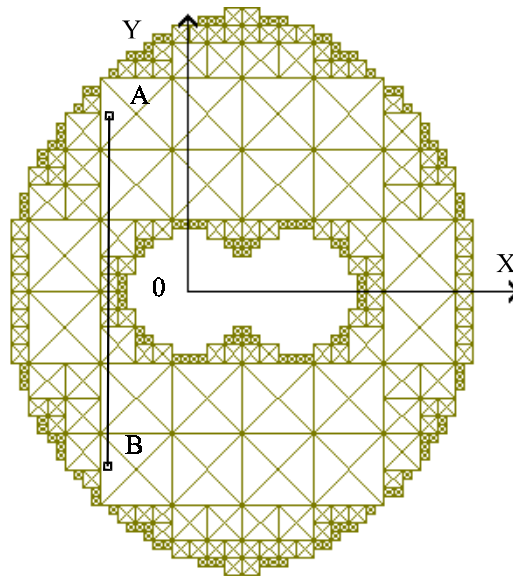


Figure 99 : Espace de travail et espace de travail libre

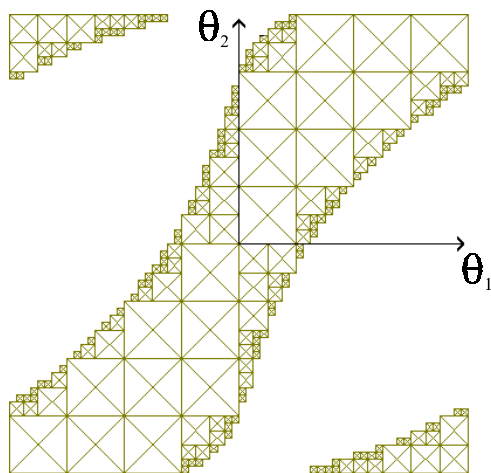


Figure 100 : Ensemble articulaire du manipulateur RR-RRR

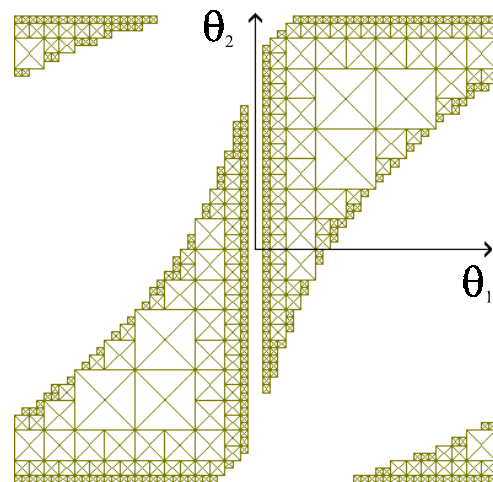


Figure 101 : Ensemble articulaire libre du manipulateur RR-RRR

Or, malgré cela, n'importe quelle trajectoire n'est pas faisable dans l'espace de travail. Par exemple, la trajectoire AB, pour la conception retenue, est impossible à cause d'une collision entre l'une des barres et la base fixe (Figure 102). Ce qui signifie qu'aucune trajectoire ne peut relier des configurations de la plate-forme mobile situées symétriquement par rapport à l'axe X.

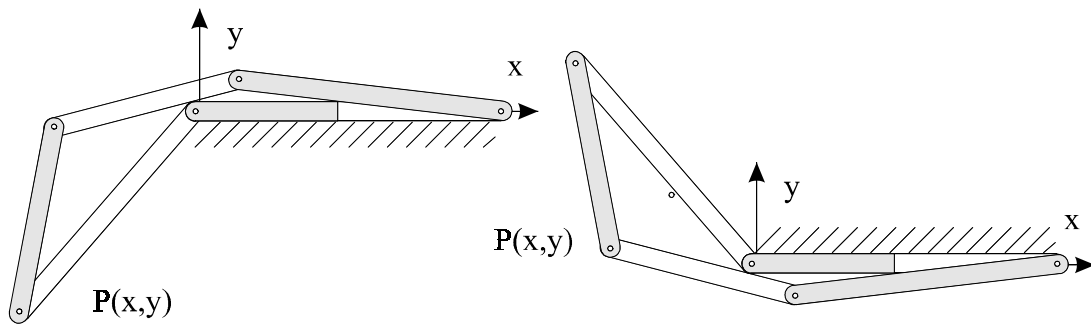


Figure 102 : Configurations du manipulateur  $RR-RRR$  proches d'une collision interne

La connexité de l'espace de travail libre peut facilement s'expliquer en regardant la figure 103. Dans ce cas, on projette un solide sur deux plans. En partant de deux volumes distincts, on obtient une surface sur chaque face projetée ; il en est de même pour la projection de l'espace libre sur l'espace de travail et l'ensemble articulaire.

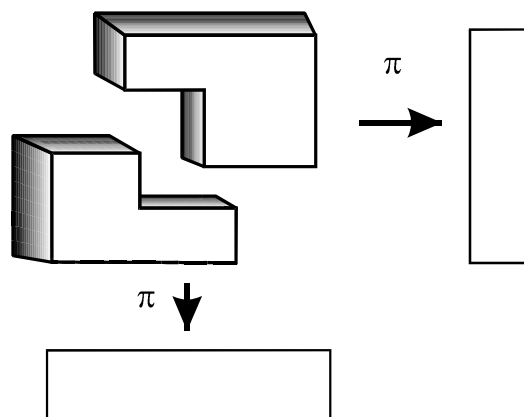


Figure 103 : Exemple de projection d'un volume sur un plan

En réalité, l'espace libre  $W \times Q$  du manipulateur n'est pas connexe.

#### 4.4. LES ASPECTS LIBRES

Les projections de l'espace libre (espace de travail libre et ensemble articulaire libre) ne permettent pas de conclure sur la parcourabilité de ces espaces. En effet, ils ne prennent pas en compte les problèmes liés aux singularités parallèles. La notion d'aspect définie dans les paragraphes 2.3 et 3.4 ne prend pas en compte les problèmes liés aux collisions. Nous allons donc introduire une contrainte supplémentaire dans chaque définition pour ainsi définir la notion d'aspect libre.

#### 4.4.1. DÉFINITION

Pour définir les aspects libres, nous allons utiliser les définitions des aspects données dans les paragraphes 2.3 et 3.4. Cette définition peut s'appliquer aussi bien aux manipulateurs possédant une ou plusieurs solutions au modèle géométrique inverse, car les premiers ne sont qu'un cas particulier de manipulateurs parallèles ne possédant qu'un seul mode de fonctionnement.

##### **Définition 40 : Les aspects libres**

Les aspects libres  $\mathbf{A}_{Lij}$  sont définis comme étant les plus grands ensembles de  $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  tels que :

- $\mathbf{A}_{Lij} \subset \mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  ;
- $\mathbf{A}_{Lij}$  est connexe;
- $\mathbf{A}_{Lij} = \{(\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in \text{Mf}_i \mid \det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ et } \mathbf{V}_{ce} = \emptyset \text{ et } \mathbf{V}_{ci} = \emptyset\}$

Les aspects libres  $\mathbf{A}_{Lij}$  sont les plus grands domaines connexes de  $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  exempts de singularité (parallèle et sérielle) et de collision (interne et externe).

#### 4.4.2. LES $\mathcal{W}$ - ASPECTS LIBRES

Nous allons projeter les aspects libres sur l'espace de travail pour former les  $\mathcal{W}$ - aspects libres.

##### **Définition 41 : Les $\mathcal{W}$ - aspects libres**

La projection  $\pi_{\mathcal{W}}$  de l'aspect libre  $\mathbf{A}_{Lij}$  sur l'espace de travail  $\mathcal{W}$  donne les  $\mathcal{W}$ - aspects libres  $\mathcal{W}\mathbf{A}_{Lij}$  :

- $\mathcal{W}\mathbf{A}_{Lij} = \pi_{\mathcal{W}}\mathbf{A}_{Lij}$  ;
- $\mathcal{W}\mathbf{A}_{Lij}$  est connexe.

Les  $\mathcal{W}$ - aspects libres  $\mathcal{W}\mathbf{A}_{Lij}$  sont donc les plus grands domaines connexes de l'espace de travail sans singularité ni collision.

### 4.4.3. LES $Q$ - ASPECTS LIBRES

Nous allons projeter les aspects libres sur l'ensemble articulaire pour former les  $Q$ - aspects libres.

#### **Définition 42 : Les $Q$ - aspects libres**

La projection  $\pi_Q$  de l'aspect libre  $\mathbf{A}_{Lij}$  sur l'ensemble articulaire  $Q$  donne les  $Q$ - aspects libres  $QA_{Lij}$  :

- $QA_{Lij} = \pi_Q \mathbf{A}_{Lij}$  ;
- $QA_{Lij}$  est connexe.

Les  $Q$ - aspects libres  $QA_{Lij}$  sont donc les plus grands domaines connexes de l'ensemble articulaire sans singularité ni collision.

### 4.4.4. EXEMPLE : APPLICATION AU MANIPULATEUR RR-RRR

Nous allons dans ce paragraphe calculer les aspects libres du manipulateur défini dans le paragraphe 4.2.2.

Figure	104	105	106	107	108	109	110	111
det(A)	P	P	P	P	N	N	N	N
$\mathbf{B}_{11}$	P	P	N	N	P	P	N	N
$\mathbf{B}_{22}$	P	N	N	P	N	P	P	N
Nombre d'aspects libres	2	2	2	2	2	2	2	2

*Tableau 11 : Nombre d'aspects libres en fonction du mode de fonctionnement*

Nous obtenons 16 aspects généralisés (Tableau 11) dont nous calculons leur projection dans l'espace de travail et l'ensemble articulaire. Nous les regroupons par mode de fonctionnement dans les figures suivantes.



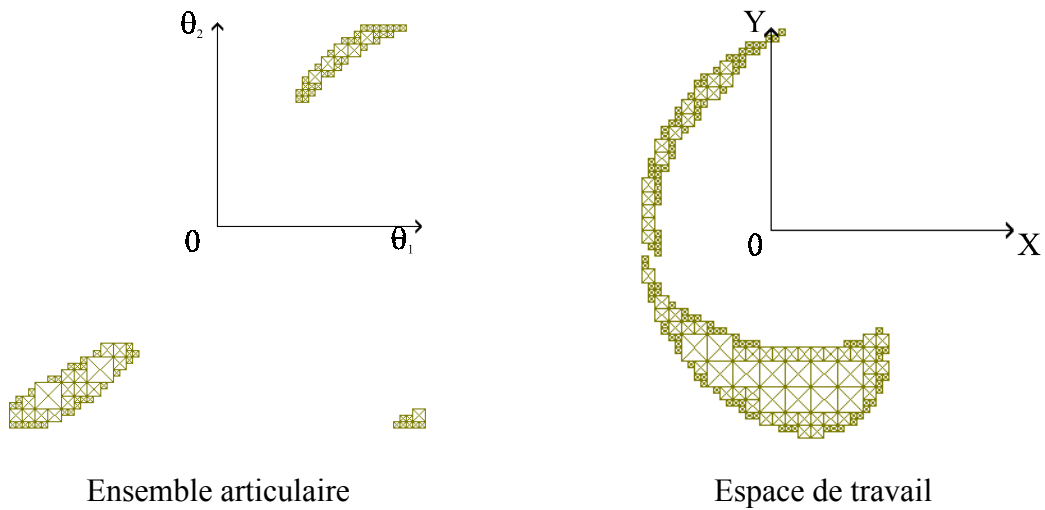


Figure 104 : Aspects libres 1 et 2 du manipulateur RR-RRR

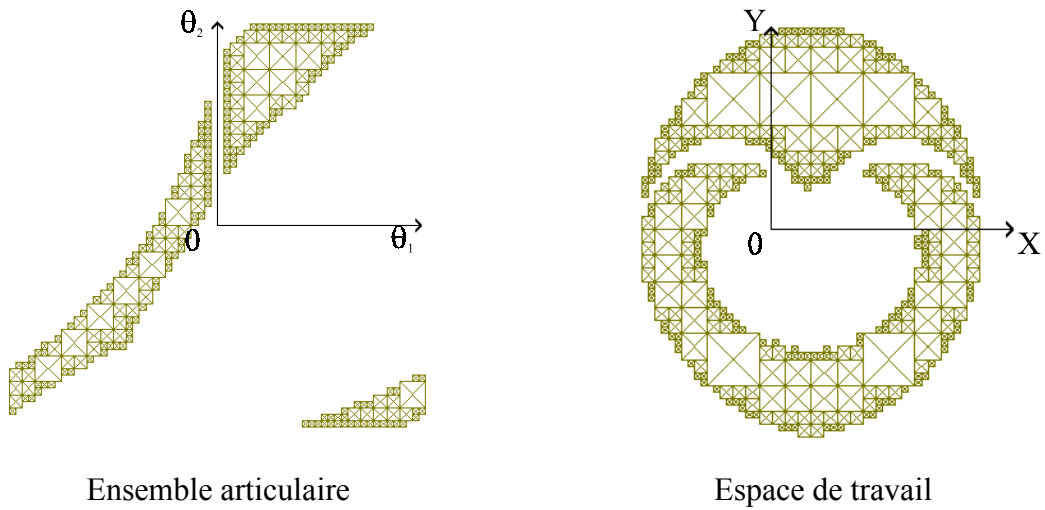


Figure 105 : Aspects libres 3 et 4 du manipulateur RR-RRR

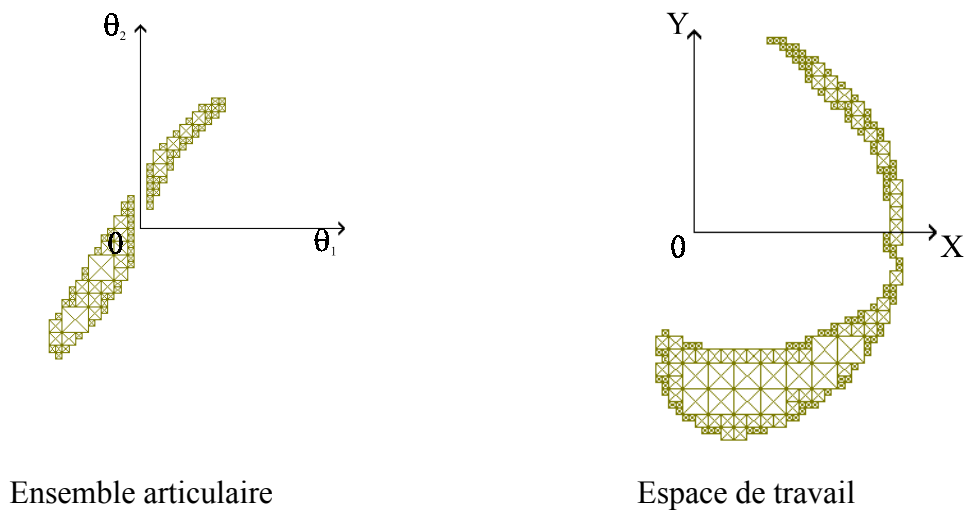
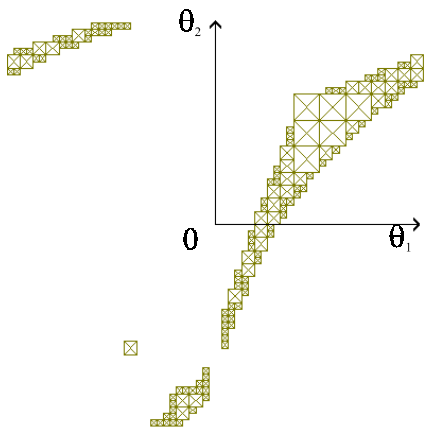
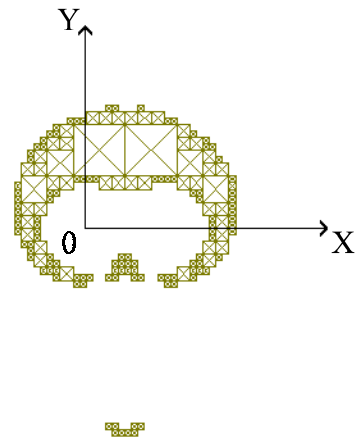


Figure 106 : Aspects libres 5 et 6 du manipulateur RR-RRR

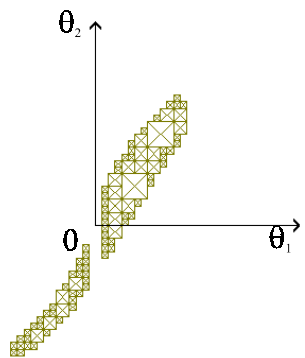


Ensemble articulaire

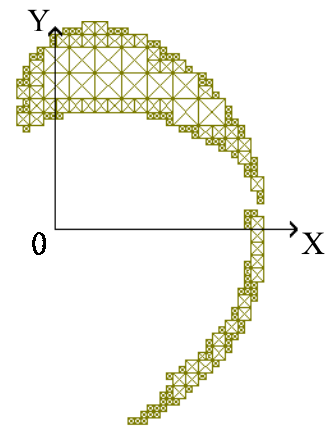


Espace de travail

Figure 107 : Aspects libres 7 et 8 du manipulateur RR-RRR

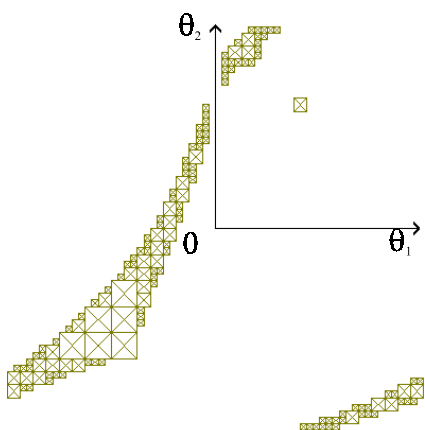


Ensemble articulaire

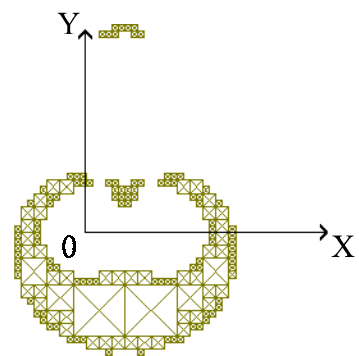


Espace de travail

Figure 108 : Aspects libres 9 et 10 du manipulateur RR-RRR



Ensemble articulaire



Espace de travail

Figure 109 : Aspects libres 11 et 12 du manipulateur RR-RRR

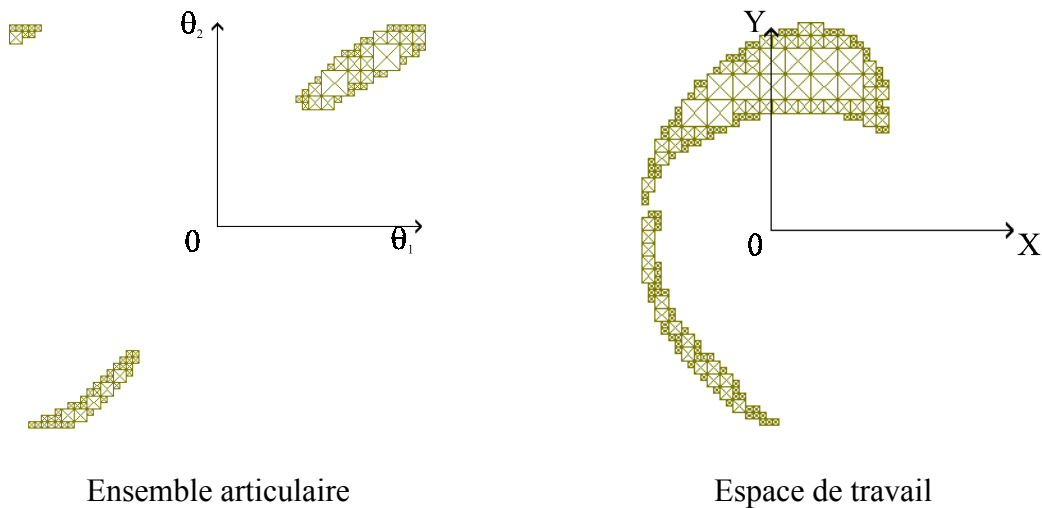


Figure 110 : Aspects libres 13 et 14 du manipulateur RR-RRR

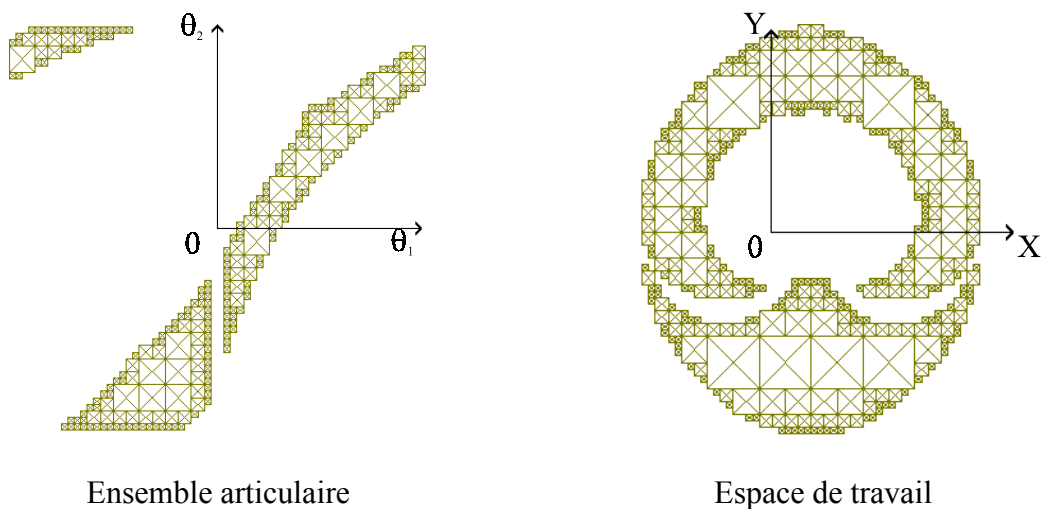


Figure 111 : Aspects libres 15 et 16 du manipulateur RR-RRR

#### 4.5. CONCLUSION

Dans ce paragraphe, nous avons étendu les définitions des aspects et des aspects généralisés définis dans les paragraphes 2.3 et 3.4. Ainsi, nous pouvons connaître l'influence des collisions internes et externes sur l'espace de travail et l'ensemble articulaire. Nous avons défini les aspects libres comme étant les plus grands domaines définis sur le produit cartésien de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire sans singularité parallèle ni sérielle et sans collision interne ni externe [Chablat 98d].

Nous utiliserons ces domaines pour définir les domaines T - parcourables (5.2.3).

## 5. LA PARCOURABILITÉ POUR LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES

### 5.1. INTRODUCTION

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons caractérisé les domaines d'unicité des manipulateurs pleinement parallèles. Ainsi, il est possible de définir une application bijective associée aux modèles géométriques direct et inverse. Nous allons utiliser ces résultats pour analyser, de manière rigoureuse, les problèmes de parcourabilité dans l'espace de travail. Nous pouvons exprimer la notion de parcourabilité de deux manières différentes selon la complexité de la tâche à exécuter.

Cette approche est générale, car elle permet d'analyser la parcourabilité de l'espace de travail et non de garantir ou de planifier une trajectoire particulière dans l'espace de travail [Dasgupta 98]. Le calcul initial est certes plus complexe, mais il n'est réalisé qu'une seule fois.

La tâche la plus simple qu'un manipulateur peut être amené à réaliser, est définie par un nombre quelconque de configurations de l'espace opérationnel à relier. Nous définirons ainsi une trajectoire discrète.

Une tâche plus complexe que l'on peut demander à un manipulateur, est la réalisation de trajectoires où l'on souhaite une continuité en position et en orientation. Nous définirons ainsi une trajectoire continue.

Pour ces deux types de trajectoires, nous allons définir, comme cela avait été fait pour les manipulateurs sériels [Wenger 91], des conditions de parcourabilité dans l'espace de travail. La « N - parcourabilité » sera associée à la réalisation de trajectoires discrètes et la « T - parcourabilité » à la réalisation de trajectoires continues.

Pour illustrer ces définitions, nous les appliquerons à un manipulateur 5 barres et nous utiliserons des méthodes classiques de planification de trajectoires. Nous poserons les problèmes à résoudre pour réaliser et optimiser des trajectoires dans l'espace de travail pour

les manipulateurs pleinement parallèles.

## 5.2. LA PARCOURABILITÉ POUR LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES

### 5.2.1. DÉFINITIONS

L'analyse de la parcourabilité de l'espace de travail nous conduit à étudier les différentes trajectoires possibles dans l'espace opérationnel. Nous allons, dans les paragraphes suivants, définir géométriquement deux types de trajectoires et poser quelques hypothèses concernant leurs réalisations.

#### Définition 43 : Les trajectoires discrètes

Une *trajectoire discrète*  $T_d$  est une trajectoire définie par  $p$  configurations de l'espace opérationnel. Elle est définie à partir des éléments suivants :

- Une origine  $\mathbf{X}_O$  ;
- Une extrémité  $\mathbf{X}_E$  ;
- Un ensemble de configurations de la plate-forme mobile à atteindre,  $T_d = \{\mathbf{X}_O, \dots, \mathbf{X}_i, \dots, \mathbf{X}_E\}$  avec  $i \in [1, p]$ ,  $\mathbf{X}_O = \mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_E = \mathbf{X}_p$

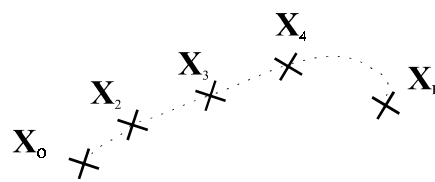


Figure 112 : Trajectoire discrète  $T_d$

Entre chaque configuration  $\mathbf{X}_i$  à atteindre, aucune trajectoire n'est définie.

#### Hypothèse 1 :

*Lors d'une trajectoire discrète, le manipulateur ne peut pas franchir de singularité parallèle.*

En effet, la réalisation d'une trajectoire franchissant une singularité parallèle suppose

l'emploi d'une commande dynamique car le manipulateur gagne un ou plusieurs degré(s) de liberté. Pour ce faire, l'utilisation d'une telle commande suppose que le paramétrage utilisé assure la continuité du modèle géométrique direct, ce qui n'est pas toujours possible [Nenchev 97a]. Notre étude étant purement cinématique, nous appliquerons donc l'hypothèse 1.

On dira donc qu'une trajectoire discrète  $T_d$  est réalisable s'il existe un chemin continu de l'ensemble des configurations  $W \times Q$  qui ne rencontre pas de singularité parallèle tel que sa projection sur l'espace de travail passe par toutes les configurations de la plate-forme mobile définies par  $T_d$ .

**Remarque :**

Pour les manipulateurs possédant plusieurs solutions à leur modèle géométrique inverse, nous pouvons effectuer une trajectoire de changement de mode de fonctionnement entre chaque configuration. Ces trajectoires auront pour but d'éviter les configurations singulières présentes à l'intérieur de l'espace de travail. Pendant l'exécution de ces trajectoires de changement de mode de fonctionnement, le manipulateur rencontre une singularité sérielle mais le contrôle de la plate-forme mobile n'est pas perdu.

**Définition 44 : Les trajectoires continues**

Une *trajectoire continue*  $T_C$  est un arc paramétré de l'espace opérationnel  $EO_m$ . Elle est définie à partir des éléments suivants :

- Une origine  $X_O$  ;
- Une extrémité  $X_E$  ;
- Un arc paramétré, continu et dérivable par morceaux  $\exists \lambda : [0, 1] \rightarrow EO_m, T_C = \lambda([0, 1])$  où  $\lambda$  est une fonction continue sur  $[0,1]$  et dérivable par morceaux sur cet intervalle.

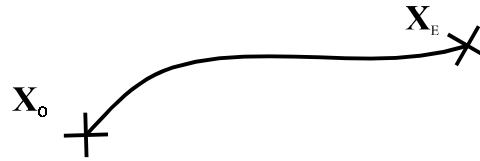


Figure 113 : Trajectoire continue  $T_C$

En d'autres termes, nous définissons une *trajectoire continue*, par une origine  $X_0$  et une extrémité  $X_E$ , et un arc paramétré  $T_C$  de longueur finie (l'origine et l'extrémité peuvent être confondues auquel cas la trajectoire est fermée).

### **Hypothèse 2 :**

*Lors d'une trajectoire continue, le manipulateur ne peut franchir ni une singularité parallèle ni singularité sérielle.*

En effet, nous souhaitons une continuité en position et orientation lors de la réalisation de trajectoires continues. Cette propriété ne peut pas être garantie pour n'importe quelle trajectoire franchissant une singularité parallèle ou sérielle.

Une trajectoire continue  $T_C$  sera dite réalisable s'il existe un chemin continu de l'ensemble des configurations  $W \times Q$  qui ne rencontre ni singularité parallèle et ni singularité sérielle et dont la projection sur l'espace de travail est la trajectoire continue  $T_C$ .

### **5.2.2. CARACTÉRISATION DE LA N - PARCOURABILITÉ**

Le but de ce paragraphe est de garantir la faisabilité de toute trajectoire discrète dans l'espace de travail. Nous allons définir pour cela la N - parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles.

#### **Définition 45 : La N - parcourabilité**

Un domaine de l'espace de travail sera dit N - parcourable si toute trajectoire discrète de ce domaine est réalisable [Wenger 91].

À cause de la dépendance entre l'espace de travail et l'espace articulaire, nous définissons des domaines intermédiaires que nous nommons domaines de configurations accessibles. Dans une trajectoire discrète, seules les configurations de la plate-forme mobile

sont données. S'il existe plusieurs modes de fonctionnement pour chacune de ces configurations, nous serons amenés à trouver un critère pour en choisir un.

**Définition 46 : Domaines de configurations accessibles**

Nous définissons les *domaines de configurations accessibles*  $D_{CAj}$  comme étant les plus grandes parties connexes de  $W \times Q$  (espace de travail et domaine articulaire) exempts de singularité parallèle et de collision interne ou externe.

- $D_{CAj} \in W \times Q$
- $D_{CAj}$  est connexe
- $D_{CAj} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \text{ tel que } \det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ et } \mathbf{V}_{ce} = \emptyset \text{ et } \mathbf{V}_{ci} = \emptyset \right\}$

En effet, nous avons posé comme hypothèse qu'un manipulateur ne pouvait pas franchir une singularité parallèle. Ainsi, à partir d'une configuration appartenant à un mode d'assemblage donné, un domaine de configurations accessibles représente l'ensemble des configurations que le manipulateur peut atteindre sans rencontrer de configuration singulière ni provoquer une collision interne ou externe.

**Notes :**

- Les domaines de configurations accessibles ne sont pas exempts de singularité sérielle. Le manipulateur peut donc effectuer une trajectoire de changement de mode de fonctionnement à l'intérieur de ces ensembles. Le cas échéant, il peut même effectuer un changement de mode d'assemblage non singulier ;
- Pour un manipulateur pleinement parallèle simple, la projection d'un domaine de configurations accessibles est un aspect libre car ces manipulateurs ne peuvent pas changer de mode de fonctionnement.

**Proposition 1 :**

Pour qu'une trajectoire discrète  $T_d = \left\{ \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p \right\}$  de l'espace de travail libre  $W_L$  soit réalisable, il faut et il suffit que :



$$\forall \mathbf{X}_i \in \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p\}, \exists \mathbf{q}_i \in \mathcal{Q}, \exists \mathcal{D}_{CAj} \text{ tel que } (\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i) \in \mathcal{D}_{CAj} \quad (33)$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que pour chaque configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$  de la trajectoire discrète  $T_d$ , il existe une configuration  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q})$  appartenant à un même domaine de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$ .

**Démonstration :**

En effet, si pour toutes les configurations de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il existe une configuration articulaire  $\mathbf{q}_i$  telle que  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i) \in \mathcal{D}_{CAj}$  alors la trajectoire est réalisable, car, par définition, un domaine de configurations accessibles est un domaine connexe et exempt de singularité parallèle.

Si pour une configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il n'existait pas de configuration articulaire  $\mathbf{q}_i$  telle que  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i) \in \mathcal{D}_{CAj}$  alors le manipulateur doit franchir une singularité parallèle pour changer de domaine de configurations accessibles. Ce qui est contraire à notre hypothèse 1.

**Notes :**

- Pour une même configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$ , il peut exister plusieurs configurations articulaires  $\mathbf{q}$  telles que chaque configuration  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q})$  appartient à un même domaine de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$ .
- Le choix de la configuration articulaire associée à une configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$ , peut-être réalisé en utilisant un des critères suivants : temps de cycle, précision du manipulateur, rigidité, etc. . En effet, les trajectoires de changement de mode de fonctionnement peuvent être pénalisantes pour le temps de cycle. Cependant, certaines postures du manipulateur permettent de garantir un meilleur positionnement de la plate-forme mobile.

**Théorème 7 :**

La projection  $\pi_{\mathcal{W}}$  des domaines de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$  sur l'espace de

travail  $\mathcal{W}$  donne les domaines N - parcourables  $\mathcal{W}_{NPj}$  :

$$\square \mathcal{W}_{NPj} = \pi_{\mathcal{W}} \mathcal{D}_{CAj};$$

$\square \mathcal{W}_{NPj}$  est connexe.

Les domaines N - parcourables sont donc les plus grands domaines connexes de l'espace de travail sans singularité parallèle ni collision.

**Démonstration :**

La projection d'un domaine connexe donne un domaine connexe. En vertu de la proposition 1, les domaines de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$  sont bien les domaines où n'importe quelle trajectoire discrète est réalisable. Leur projection sur un espace de dimension inférieure donne donc les domaines N - parcourables.

**Remarque :**

Les domaines N - parcourables ne sont pas directement exploitables pour planifier des trajectoires discrètes puisqu'il est nécessaire de choisir une configuration articulaire pour chaque configuration de la plate-forme mobile garantissant l'appartenance à un même domaine de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$ .

En revanche, les domaines N - parcourables offrent des informations globales intéressantes sur les performances d'un manipulateur puisqu'ils définissent les plus grands domaines exploitables pour définir des trajectoires discrètes.

**Conséquence :**

L'espace de travail libre  $\mathcal{W}_L$  est N - parcourable si et seulement si :

$$\exists \mathcal{W}_{NPj} \text{ tel que } \mathcal{W}_{NPj} = \mathcal{W}_L \tag{34}$$

**Exemple : Calcul des domaines N - parcourables de l'espace de travail**

Pour illustrer les domaines de configurations accessibles, nous allons étudier le manipulateur RR-RRR (Figure 59) utilisé dans le chapitre 3 en modifiant ses dimensions et

ses débattements articulaires (Tableau 12) et nous supposons qu'il n'existe pas de collisions entre les segments. L'introduction de butées réduit considérablement l'ensemble articulaire (Figure 115). Nous allons étudier l'espace de travail (Figure 114), pour savoir s'il est N - parcourable.

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$\theta_{1 \min}$	$\theta_{1 \max}$	$\theta_{2 \min}$	$\theta_{2 \max}$
8.0	5.0	7.0	0.0	$\pi$	0.0	$\pi$

Tableau 12 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié pour la N - parcourabilité

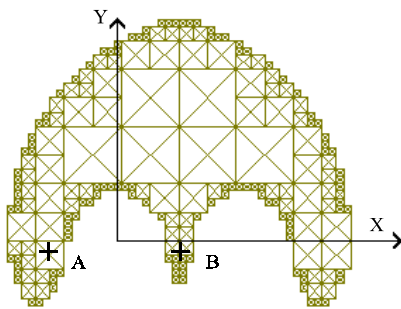


Figure 114 : Espace de travail

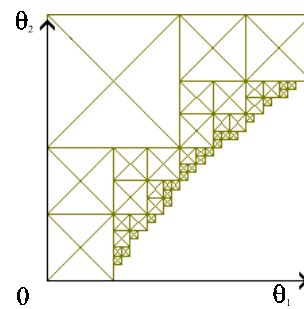


Figure 115 : Ensemble articulaire

Nous obtenons deux domaines de configurations accessibles (Figures 116 et 117). Leur projection sur l'ensemble articulaire est identique alors que leur projection sur l'espace de travail est différente et surtout plus petite que l'espace de travail du manipulateur. Ce qui revient à dire que l'espace de travail n'est pas N - parcourable. Par exemple, il n'est pas possible de relier les points A et B. En effet, toutes les configurations de la plate-forme mobile ne possèdent pas 4 solutions au modèle géométrique inverse à cause de l'introduction de butées sur les articulations motorisées. Pour les configurations de la plate-forme mobile A et B, il n'existe qu'une configuration articulaire A\* et B\* dans l'ensemble articulaire.

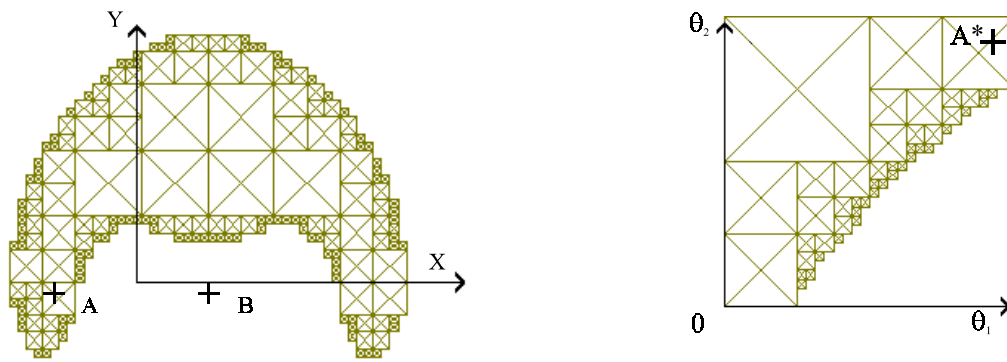


Figure 116 : Premier domaine de configurations accessibles lorsque  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

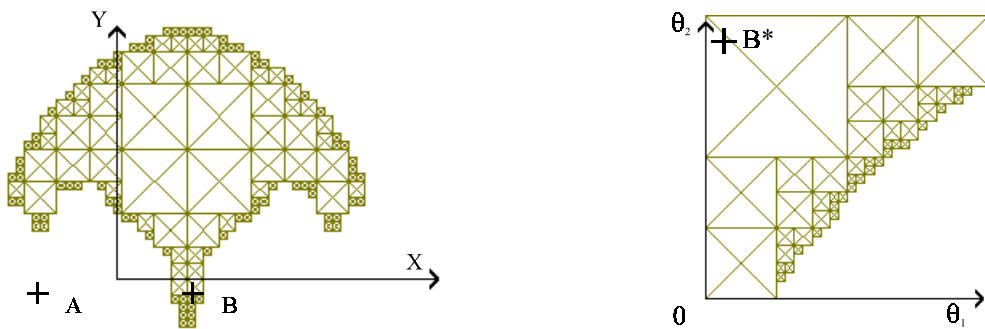


Figure 117 : Second domaine de configurations accessibles lorsque  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

**Remarque :**

Contrairement aux manipulateurs sériels, on remarque que l'espace de travail peut ne pas être N - parcourable en l'absence d'obstacle.

Si l'on modifie les valeurs des butées articulaires, en posant  $\theta_{1 \min} = -\pi$  et  $\theta_{2 \min} = -\pi$ , nous obtenons un espace de travail connexe (Figure 118). Pour chaque configuration de la plate-forme mobile, il existe 4 configurations articulaires qui définissent deux domaines de configurations admissibles. Ces domaines étant égaux à l'espace de travail, par définition, nous pouvons dire que l'espace est N - parcourable.

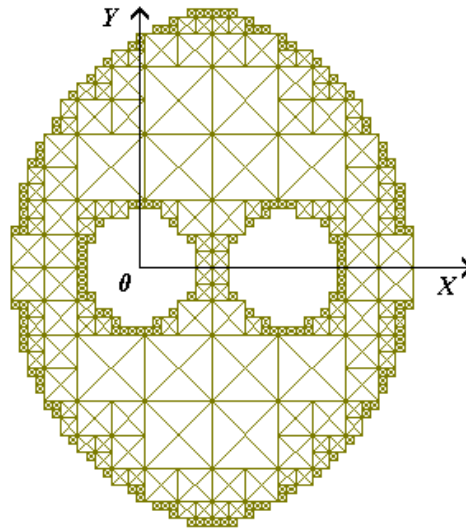


Figure 118 : Espace de travail  $N$  - parcourable d'un manipulateur  $\underline{RR-RRR}$  lorsque  $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

**Exemple : Calcul des domaines  $N$  - parcourables de l'espace de travail libre**

Nous reprenons l'étude du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$  défini dans le tableau 12 en utilisant le modèle décrit dans la figure 96 et vérifiant l'absence de collisions entre segments. Son espace de travail libre (Figure 119) est plus petit que l'espace de travail (Figure 114). Ainsi, aucun des points définis dans l'exemple précédent ne sont accessibles (Figure 120) bien que l'ensemble articulaire libre soit égal à l'ensemble articulaire.

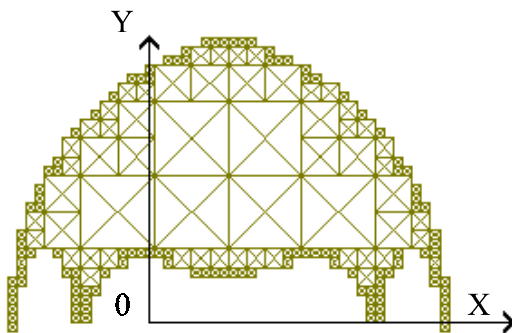


Figure 119 : Espace de travail libre du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

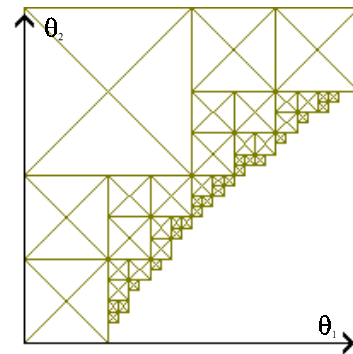


Figure 120 : Ensemble articulaire libre du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

Nous avons deux domaines de configurations accessibles (Figure 121).

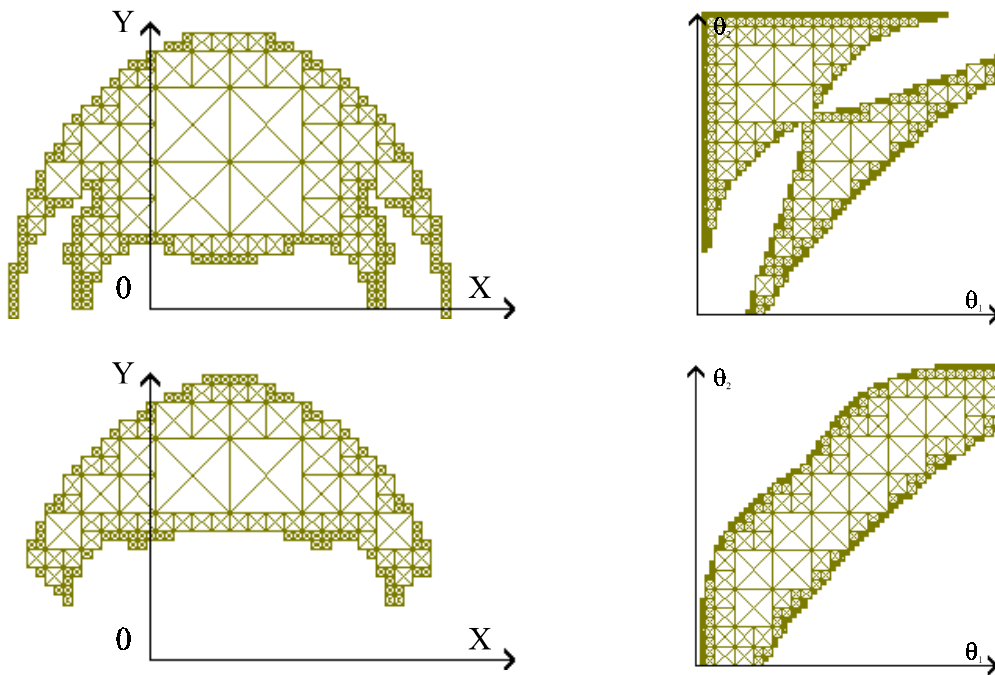


Figure 121 : Les 2 domaines de configurations accessibles lorsque  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$  et avec test de collision

Ces domaines sont bien plus petits que leur projection dans l'espace de travail libre et l'ensemble articulaire libre. De plus, il existe des configurations articulaires pour lesquelles le manipulateur possède qu'un seul mode d'assemblage. Si la taille des domaines N-parcourable sont très proches, on remarque qu'il n'est pas possible de poser des limites articulaires fixes pour atteindre l'ensemble des configurations des domaines de configurations accessibles.

### 5.2.3. CARACTÉRISATION DE LA T - PARCOURABILITÉ

Le but de ce paragraphe est de garantir la faisabilité de toute trajectoire continue dans l'espace de travail. Nous allons définir la T - parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles, dans le cas général.

#### **Définition 47 : La T - parcourabilité**

Un domaine de l'espace de travail sera dit T - parcourable si toute trajectoire continue de ce domaine est réalisable [Wenger 91].

Nous avons émis comme hypothèse qu'une trajectoire continue ne pouvait pas passer

par une singularité sérielle ou parallèle. Nous utilisons donc la définition des aspects libres  $\mathbf{A}_{Lij}$  et plus particulièrement leurs projections dans l'espace de travail pour définir la T - parcourabilité.

**Proposition 2 :**

Pour qu'une trajectoire continue  $T_C = \{ \mathbf{X}_t, t \in [0, 1] \}$  de l'espace de travail libre  $\mathcal{W}_L$  soit réalisable, il faut et il suffit que :

$$\forall t \in [0 ; 1], \exists \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \text{ tel que } (\mathbf{X}_t, \mathbf{q}) \in \mathbf{A}_{Lij} \quad (35)$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que pour chaque configuration  $\mathbf{X}_t$  de la plate-forme mobile, il existe une configuration  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q})$  appartenant à un même aspect généralisé  $\mathbf{A}_{Lij}$ .

**Démonstration :**

En effet, si pour toutes les configurations de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_t$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il existe une configuration articulaire  $\mathbf{q}$  tel que  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q}) \in \mathbf{A}_{Lij}$  alors la trajectoire est réalisable car, par définition, un aspect libre est un domaine connexe sans singularité parallèle ni sérielle et libre de toute collision. Ce qui est conforme à l'hypothèse 2.

Si pour une configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_t$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il n'existait pas de configuration articulaire  $\mathbf{q}$  tel que  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q}) \in \mathbf{A}_{Lij}$  alors le manipulateur devrait franchir une ou plusieurs singularités parallèles ou sérielles pour changer d'aspect libre. Ce qui est contraire à notre hypothèse 2.

**Note :**

Pour une configuration de la plate-forme  $\mathbf{X}_t$ , il n'existe qu'une configuration articulaire associée à la configuration  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q})$  appartenant à un même aspect libre  $\mathbf{A}_{Lij}$ . Cependant, il peut exister plusieurs aspects généralisés dans lesquels il est possible de planifier la même trajectoire  $T_C$ .

**Théorème 8 :**

La projection  $\pi_W$  des aspects libres  $\mathbf{A}_{Lij}$  sur l'espace de travail  $W$  donne les domaines T - parcourables  $W_{TPj}$  qui sont aussi les  $W$ - aspects libres  $WA_{Lij}$ .

Ce résultat découle de la définition des  $W$ - aspects libres.

**Conséquence :**

L'espace de travail libre  $W_L$  est T - parcourable si et seulement si :

$$\forall WA_{ij}, WA_{ij} = W_L \tag{36}$$

C'est à dire, si et seulement si, il existe un aspect libre  $\mathbf{A}_{Lij}$  tel que sa projection sur l'espace de travail soit égale à l'espace de travail.

**Note :**

Pour le manipulateur RR-RRR étudié, la recherche des domaines T - parcourables revient donc à étudier les aspects généralisés définis dans le paragraphe 3.4.4.

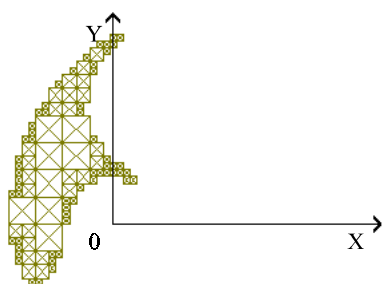
**Exemple : Détermination des domaines T - parcourables à partir des aspects généralisés**

On calcule les espaces T - parcourables en projetant les aspects généralisés sur l'espace de travail. Les aspects généralisés sont regroupés dans le tableau 13 en fonction de leur mode de fonctionnement et du signe du déterminant de la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$ .

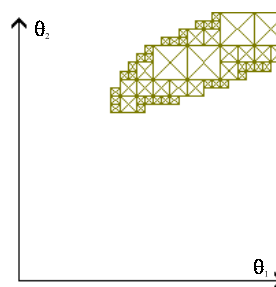
Figure	122	123	124	125	126	127	128	129
$Mf_i$	1	2	3	4	1	2	3	4
Det( $\mathbf{A}$ )	positif	positif	positif	positif	négatif	négatif	négatif	négatif
Nombre d'aspects	1	1	1	1	1	1	1	2

*Tableau 13 : Domaines T - parcourables du manipulateur RR-RRR à partir des aspects généralisés*



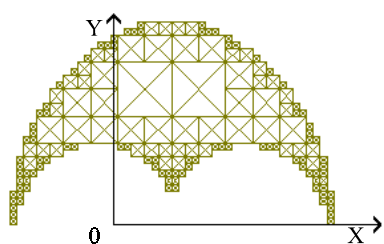


Espace de travail

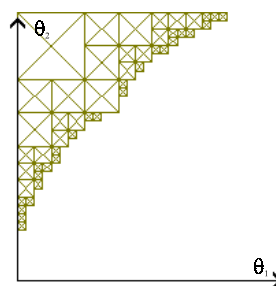


Ensemble articulaire

*Figure 122 : Aspect généralisé 1 du manipulateur RR-RRR*

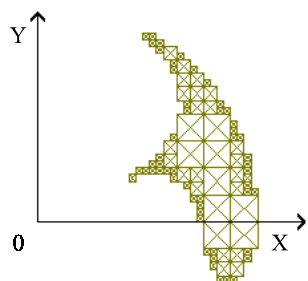


Espace de travail

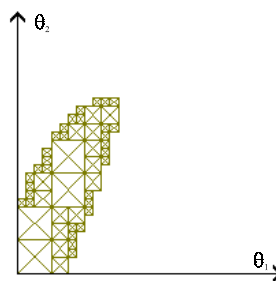


Ensemble articulaire

*Figure 123 : Aspect généralisé 2 du manipulateur RR-RRR*

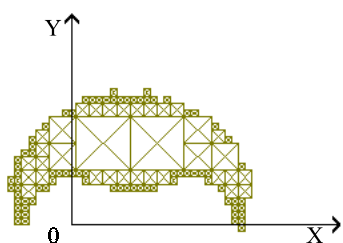


Espace de travail

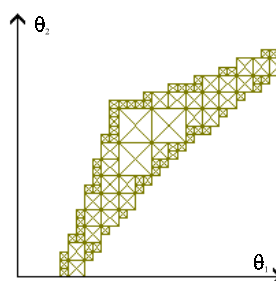


Ensemble articulaire

*Figure 124 : Aspect généralisé 3 du manipulateur RR-RRR*

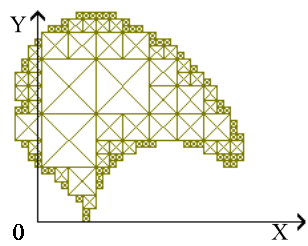


Espace de travail

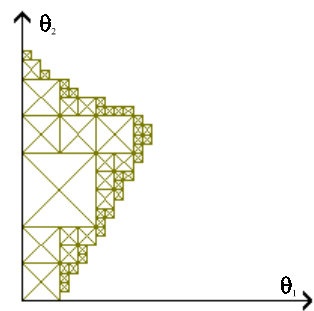


Ensemble articulaire

*Figure 125 : Aspect généralisé 4 du manipulateur RR-RRR*

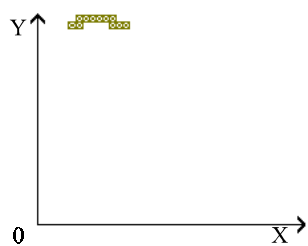


Espace de travail

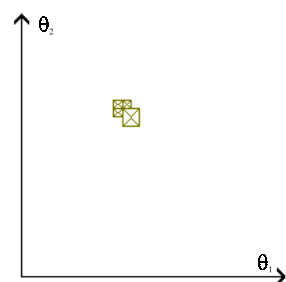


Ensemble articulaire

Figure 126 : Aspect généralisé 5 du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

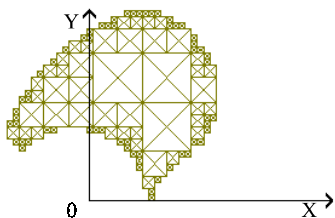


Espace de travail

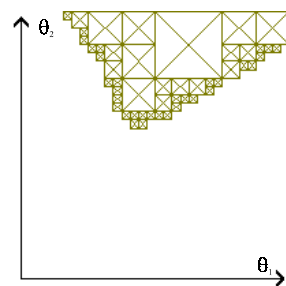


Ensemble articulaire

Figure 127 : Aspect généralisé 6 du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

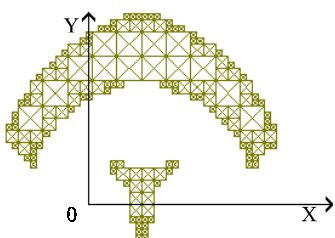


Espace de travail

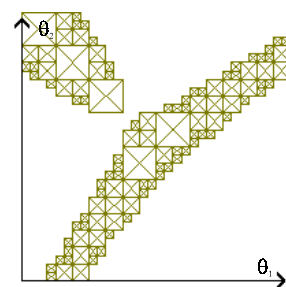


Ensemble articulaire

Figure 128 : Aspect généralisé 7 du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$



Espace de travail



Ensemble articulaire

Figure 129 : Aspects généralisés 8 et 9 du manipulateur  $\underline{RR-RRR}$

La projection des aspects généralisés dans l'espace de travail permet de déterminer les domaines T - parcourables de l'espace de travail. Aussi, le W - aspect représenté dans la figure 123 est le plus grand domaine T - parcourable de l'espace de travail.

**Exemple : Détermination des domaines T - parcourables à partir des aspects libres**

Maintenant, on calcule les espaces T - parcourables du manipulateur RR-RRR en projetant les aspects libres sur l'espace de travail. Les aspects libres sont regroupés dans le tableau 14 en fonction de leur mode de fonctionnement et du signe du déterminant de la matrice jacobienne parallèle **A**.

Figure	130	131	132	133	134
$Mf_i$	2	3	1	3	4
Det(A)	positif	positif	négatif	négatif	négatif
Nombre d'aspects libres	1	1	1	1	1

Tableau 14 : Domaines T - parcourables du manipulateur RR-RRR à partir des aspects libres

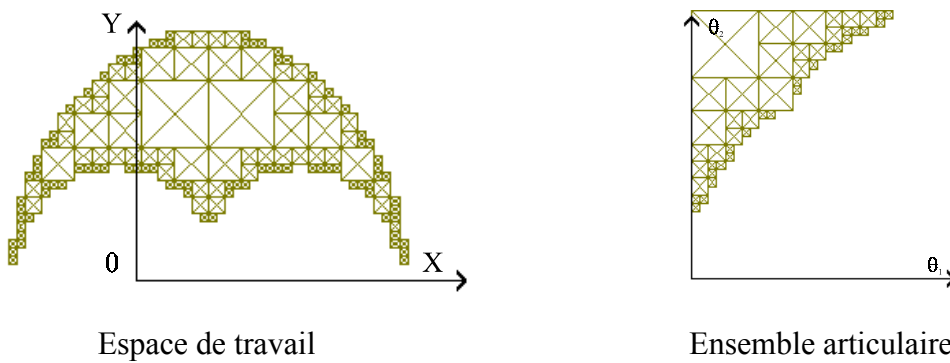


Figure 130 : Aspect libre 1 du manipulateur RR-RRR

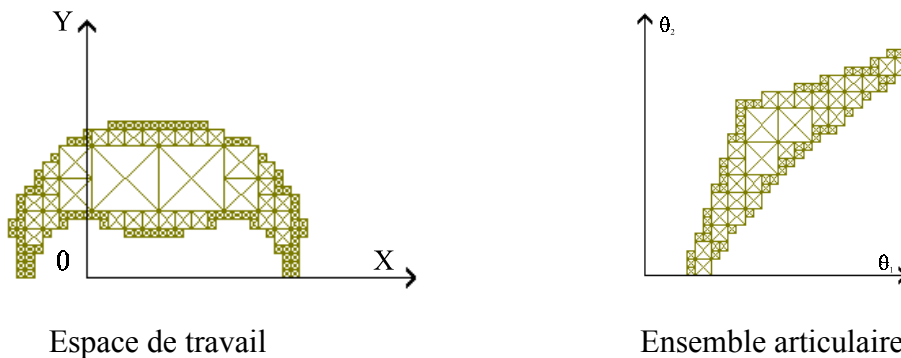


Figure 131 : Aspect libre 2 du manipulateur RR-RRR

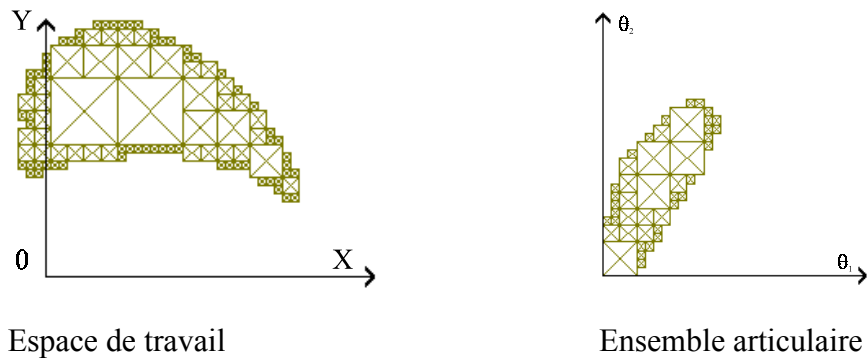


Figure 132 : Aspect libre 3 du manipulateur RR-RRR

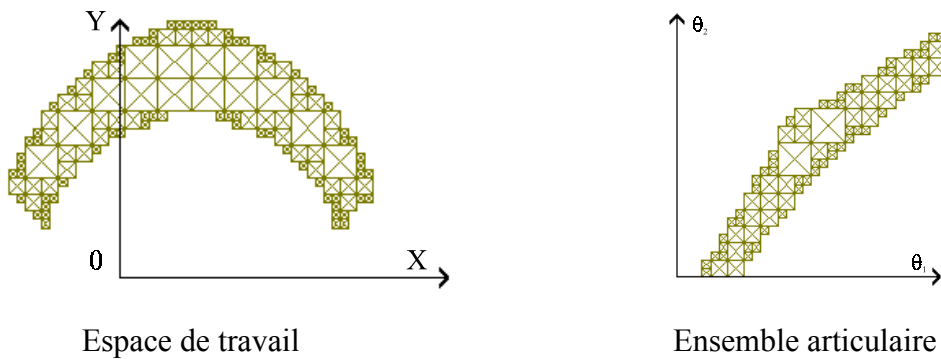


Figure 133 : Aspect libre 4 du manipulateur RR-RRR

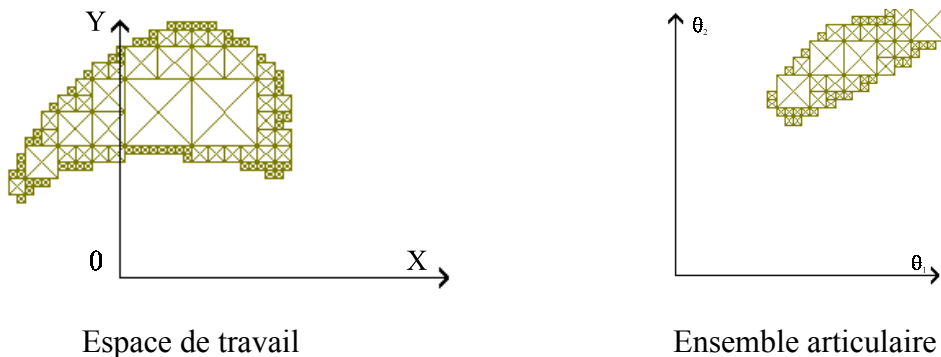


Figure 134 : Aspect libre 5 du manipulateur RR-RRR

Le W - aspect libre représenté dans la figure 130 est le plus grand domaine T - parcourable de l'espace de travail en l'absence de collision. Il existe des modes de fonctionnement auxquels ne sont associés aucun W - aspect libre, toutes les configurations étant en collision permanente.

### 5.3. CONCLUSION

Nous venons d'étudier la parcourabilité des manipulateurs pleinement parallèles permettant la réalisation de trajectoires continues et discrètes. L'étude des singularités

parallèles et sérielles nous a permis de définir les domaines nécessaires à l'étude de la parcourabilité. Nous avons ainsi défini les domaines de configurations accessibles pour caractériser les domaines N - parcourables et nous avons utilisé les aspects généralisés pour caractériser la T - parcourabilité. Ainsi, nous pouvons savoir si, dans l'espace de travail, n'importe quelle trajectoire discrète ou continue est faisable. Cependant, pour la planification de trajectoires pour les manipulateurs pleinement parallèles, il est nécessaire d'associer un mode de fonctionnement. Ce problème existe aussi pour les manipulateurs sériels lorsque l'on doit choisir une posture.

Nous présentons en annexe 9.7, les problèmes liés à la planification de trajectoires dans le produit cartésien de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire.

## 6. CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif final du travail que nous venons de présenter était l'étude de la parcourabilité dans l'espace de travail pour les manipulateurs pleinement parallèles. Nous avons décomposé l'étude de ces manipulateurs en deux groupes selon le nombre de solutions au modèle géométrique inverse : les manipulateurs pleinement parallèles simples, c'est-à-dire ayant une seule solution au modèle géométrique inverse, puis les manipulateurs pleinement parallèles qui ont plusieurs solutions au modèle géométrique inverse dans le cas général.

Pour ces deux types de manipulateurs, nous avons défini les plus grands domaines sans singularité parallèle ni sérielle, c'est-à-dire les aspects [Wenger 97] et les aspects généralisés [Chablat 98a] respectivement. Ces définitions n'avaient jamais été établies pour les manipulateurs pleinement parallèles. Elles sont utiles pour analyser la T - parcourabilité de l'espace de travail.

Pour séparer les solutions du modèle géométrique inverse, nous avons introduit les modes de fonctionnement [Chablat 98a] pour les manipulateurs pleinement parallèles possédant des jambes non cuspidales. Cette approche permet de définir une fonction entre l'espace opérationnel et l'espace articulaire. Nous avons montré qu'une gestion appropriée des modes de fonctionnement permettait au manipulateur d'éviter les singularités parallèles présentes dans l'espace de travail.

Nous avons montré que les aspects ne permettaient pas de séparer les solutions du modèle géométrique direct, car il est possible de réaliser des trajectoires de changement de mode d'assemblage non singulières. Ainsi, nous avons caractérisé les domaines d'unicité de ces manipulateurs en définissant la notion de surfaces caractéristiques pour subdiviser les aspects. Les surfaces caractéristiques permettent de définir les composantes de base et les régions de base qui, à leur tour, permettent de caractériser les domaines d'unicité. À partir de cette étude, nous avons proposé un algorithme [Wenger 98] permettant d'analyser la faisabilité d'une trajectoire dans l'espace de travail.

Pour permettre d'appliquer la définition des aspects généralisés à des manipulateurs réels, nous avons introduit les contraintes liées aux collisions. Nous avons défini deux types de collisions (internes et externes) [Chablat 98d]. Nous avons défini l'espace de travail libre et l'ensemble articulaire libre. Puis, nous avons caractérisé les plus grands domaines sans singularité ni collision que nous nommons aspects libres. Ainsi, il est possible de mieux comprendre les limites de l'espace de travail d'un manipulateur réel.

À partir de toutes ces définitions, nous avons étudié la faisabilité de trajectoires continues et discrètes. Pour caractériser la N - parcourabilité, nous avons défini les domaines de configurations accessibles en posant comme hypothèse qu'une trajectoire discrète ne pouvait pas franchir de singularité parallèle. Par la suite, nous définissons les domaines N - parcourables de l'espace de travail et il est ainsi possible de savoir si l'espace de travail d'un manipulateur pleinement parallèle est N - parcourable. Pour caractériser la T - parcourabilité, nous avons utilisé la définition des aspects libres en posant comme hypothèse qu'une trajectoire continue ne pouvait pas franchir de singularité. La projection des aspects libres sur l'espace de travail permet de définir les domaines T - parcourables.

Cette étude pourra être utilisée dans les logiciels de CAO-robotique pour permettre une meilleure utilisation des manipulateurs parallèles. En effet, la détermination des domaines d'unicité permet d'analyser les trajectoires dans l'espace de travail et l'analyse de la parcourabilité permet de garantir la faisabilité des trajectoires discrètes et continues.

## 7. PERSPECTIVES

Les perspectives de ce travail peuvent se décomposer en trois grandes voies.

Nous avons défini les domaines d'unicité pour les manipulateurs pleinement parallèles pour permettre de séparer les solutions du modèle géométrique direct. Cependant, nous ne savons pas reconnaître si un manipulateur est capable de changer de mode d'assemblage sans passer par une configuration singulière. En des termes plus abusifs, par analogie avec les manipulateurs sériels, nous ne connaissons pas de condition nécessaire permettant de dire si le manipulateur étudié est un manipulateur pleinement parallèle « cuspidal » ou non. Nous avons cependant remarqué, dans l'ensemble articulaire, des surfaces comparables à celles présentes dans l'espace de travail des manipulateurs sériels.

Nous avons défini les domaines N - parcourables et T - parcourables de l'espace de travail. La suite de ce travail est l'exploitation de ces domaines en vue de la planification de trajectoires. Le problème est difficile, car la dimension de l'espace à étudier est importante. De plus, ces domaines étant définis sur le produit cartésien de l'espace opérationnel et de l'espace articulaire, les dimensions ne sont pas homogènes.

La dernière voie de recherche est l'application des aspects, pour la synthèse de mécanisme. En effet, les aspects libres présentent des propriétés plus riches que le simple calcul de l'espace de travail. Il est possible de les utiliser pour le placement adapté et la conception optimale de tels manipulateurs.



## 8. BIBLIOGRAPHIE

- [Alexandre 96] Alexandre J-C., « Analyse cinématique des Mécanismes à Chaîne Fermée », Diplôme d'Études Approfondies de Génie Mécanique, Nantes, Septembre 1996.
- [Angeles 97] Angeles J., « Fundamentals of Robotic Mechanical Systems », Theory, Methods and Algorithms, Springer, 1997.
- [Bajpai 86] Bajpai A, Roth B., « Workspace and Mobility of a Closed-Loop Manipulator », The International Journal of Robotic Research, Vol. 5, No 2, pp. 131-142, 1986.
- [Baron 94] Baron L., Angeles J., «The Decoupling of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators using Redundant Sensors », IEEE International Conference of Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 974-979.
- [Baron 98] Baron L., Angeles J., « The Hip-Point Measurement Subspace of Parallel Manipulators under Joint-Sensor Redundancy », 12<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium, RoManSy, Paris, July 1998.
- [Borrel 86] Borrel P., « A Study of Manipulator Inverse Kinematic Solutions With Application to Trajectory Planning and Workspace Determination », Proceedings IEEE International Conference on Robotic and Automation, pp. 1180-1185, 1986.
- [Burdick 91] Burdick J. W., « A Classification of a 3D Regional Manipulator Singularities and Geometries », Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2670-2675, Sacramento, California, April 1991.
- [Chablat 96] Chablat D. Wenger Ph., « Domaines d'unicité pour les robots parallèles », Rapport Interne du Laboratoire d'Automatique de Nantes, n°96.13, 1996.
- [Chablat 97] Chablat D. Wenger Ph., « Domaines d'unicité pour les robots parallèles : Cas général », Rapport Interne du Laboratoire d'Automatique de Nantes, n°97.7, 1997

- [Chablat 98a]** Chablat D., Wenger Ph., « Working Modes and Aspects in Fully-Parallel Manipulator », Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1964-1969, May 1998.
- [Chablat 98b]** Chablat D. , Wenger Ph., Angeles J., « The Isoconditioning Loci of A Class of Closed-Chain Manipulators », IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1970-1976, May 1998.
- [Chablat 98c]** Chablat D. , Wenger Ph., Angeles J., « The Kinematic Design of a 3-DOF Hybrid Manipulator », 2<sup>nd</sup> International Conference On Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Compiègne, France, Mai 1998.
- [Chablat 98d]** Chablat D., Wenger Ph., « Moveability and Collision Analysis for Fully-Parallel Manipulators », 12<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium, RoManSy, Paris, July, 1998.
- [Chedmail 98]** Chedmail P., Dombre E., Wenger Ph., « La CAO en robotique : outils et méthodologie », Hermes, Paris, 1998.
- [Chételat 97]** Chételat O., « Algorithme Numérique pour les Changements de Coordonnées des Mécanismes Articulés », Thèse de doctorat, Lausanne, 1997.
- [Chilov 75]** Chilov G., « Analyse Mathématique : Fonction de plusieurs variables réelles », 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> parties, édition MIR, Moscou, 1975.
- [Clavel 88]** Clavel R., « DELTA, a Fast Robot with Parallel Geometry », Proceedings of the 18<sup>th</sup> International Symposium of Robotic Manipulators, IFR Publication, pp. 91-100, 1988.
- [Collins 95]** Collins C. L., Long G. L., « The Singularity Analysis of an In-Parallel Hand Controller Force-Reflected Teleoperation », IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 11, No 5, October 1995.
- [Dasgupta 98]** Dasgupta B., Mruthyunjaya T. S., « Singularity-Free Path Planning for the Stewart Platform Manipulator », Mechanism and Machine Theory, Vol. 33, N° 6, pp. 711-725, 1998.
- [Denavit 55]** Denavit J., Hartenberg R.S., « A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanism Based on Matrices », Transaction Of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, June 1955, pp. 215-221.

- [Dheeman 97]** Dheeman B., Ashitava G., « Singularity Analysis of Platform-Type Multi-Loop Spatial Mechanisms », *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, pp. 375-389, 1997.
- [Dietmaier 98]** Dietmaier P., « The Stewart-Gough Platform of General Geometry Can Have 40 Real Postures », *Advances in Robot Kinematics : Analysis and Control*, Kluwer Academic Publishers, July 1998.
- [Dombre 88]** Dombre E., Khalil W., « Modélisation et Commande des Robots », Hermès, Paris, 1988.
- [Earl 83]** Earl C. F., Rooney J., « Some Kinematics Structures for Robot Manipulator Designs », *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, pp. 15-22, Mars 1983.
- [El Omri 96]** El Omri J., « Analyse Géométrique et Cinématique des Mécanismes de Type Manipulateur », Thèse de Doctorat, Nantes, Février 1996.
- [Faverjon 84]** Faverjon B., « Obstacle avoidance using an octree in the configuration space of a manipulator », *Proceedings IEEE International Conference on Robotic and Automation*, pp. 504-510, 1984.
- [Garcia 86]** Garcia G., Wenger P., Chedmail P., « Computing moveability areas of a robot among obstacles using octrees », *International Conference on Advanced Robotics*, Columbus, Ohio, USA, June 1989.
- [Gosselin 88]** Gosselin C. M., « Kinematic Analysis, Optimisation and Programming of Parallel robotic Manipulators », Thèse de doctorat, McGill, 1988.
- [Gosselin 90]** Gosselin C. M., Angeles J., « Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains », *IEEE, Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 6, pp. 281-290, June 1990.
- [Gosselin 92]** Gosselin C. M., Sefrioui J., Richard M. J., « Solutions polynomiales au problème de la cinématique des manipulateurs parallèles plans à trois de gré de liberté », *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 27, pp. 107-119, 1992.
- [Gosselin 94]** Gosselin C. M., Merlet J-P, « The Direct Kinematics of Planar Manipulators : Special Architecture and Number of Solutions », *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, N° 8, pp. 1083-1097, 1994.

- [Gosselin 95]** Gosselin C. M., Wang J., « Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators », 9<sup>th</sup> World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Vol. 3, Milano, Italy, August/September 1995.
- [Gosselin 96]** Gosselin C. M., « Parallel Computational Algorithms for the Kinematics and Dynamics of Planar and Spatial Parallel Manipulators », ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, pp. 22-28, March 1996.
- [Gough 57]** Gough V. E., « Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance », Proceedings Auto Div. Inst. Mech. Eng, 1956-1957.
- [Haugh 95]** Haugh R. J., Adkins F. A.; Luh C. M., « Domain of Operation and Interference for Bodies in Mechanisms and Manipulators », In J-P. Merlet, B. Ravani editor, Computational Kinematics, pp. 193-202, Kluwer, 1995
- [Hunt 78]** Hunt K. H., « Geometry of Mechanisms », Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [Hunt 83]** Hunt K. H., « Structural Kinematics of In Parallel-Actuated Robot-Arms », Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 105, pp. 705-712, December 1983.
- [Hunt 93]** Hunt K. H, Primrose E. J. F., « Assembly Configurations of some In-Parallel-Actuated Manipulators », Mechanism and Machine Theory, Vol. 28, N° 1, pp. 31-42, 1993.
- [Innocenti 92]** Innocenti C., Parenti-Castelli V., « Direct Kinematic of the 6-4 Fully Parallel Manipulator with Position and Orientation Uncoupled », European Robotics and Intelligent Systems Conference, Corfou, June 1991.
- [Innocenti 92]** Innocenti C., Parenti-Castelli V., « Singularity-free evolution from one configuration to another in serial and fully-parallel manipulators », Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, ASME 1992.

- [Innocenti 94]** Innocenti C., Parenti-Castelli V., « Symbolic-Form Forward Kinematics of a 5-4 Fully-Parallel Manipulator », *Advances in Robot Kinematics and Computed Geometry*, pp. 429-438, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [Jo 89]** Jo D. Y., Haug E. J., « Workspace analysis of closed-loop mechanisms with unilateral constraints », *ASME Design Automation Conference*, March 1989.
- [Khalil 96]** Khalil W., Murareci D., « Kinematic Analysis and Singular Configurations of a Class of Parallel Robots », *Mathematics and Computers in Simulation*, pp. 377-390, 1996.
- [Kock 98]** Kock S., Schumacher W., « A Parallel x-y Manipulator with Actuation Redundancy for High-Speed and Active-Stiffness Applications », *Proceedings IEEE International Conference on Robotic and Automation*, pp. 2295-2300, Leuven, Belgium, May 1998.
- [Lallemand 94]** Lallemand J. P., Zegloul S. « Robotique : aspects fondamentaux », Masson, 1994.
- [Lallemand 97]** Lallemand J. P., Goudali A., Zegloul S., « The 6-Dof 2-Delta parallel robot », *Robotica97*, Vol. 15, pp. 407-416, 1997.
- [Leguay-Durand 97]** Leguay-Durand S., Reboulet C., « Optimal Design of a Redundant Spherical Parallel Manipulator », *Robotica*, Vol. 15, pp. 399-405, 1997.
- [Leguay-Durand 98]** Leguay-Durand S., « Conception et Optimisation de Mécanismes Parallèles à Mobilités Restreintes », Thèse de Doctorat, Toulouse, Juin 1998.
- [Long 92]** Long G. L., Collins C. L., « A Pantograph Linkage Parallel Platform Master Hand Controller for Force-Reflexion », *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 390-395, Nice, France, 1992.
- [Ma 91]** Ma O., Angeles J. « Architecture Singularities of Platform Manipulators », *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp.1542-1547, Sacramento, California, April 1991.

- [Meagher 81]** D. Meagher, « Geometric Modelling using Octree Encoding », Technical Report IPL-TR-81-005, Image Processing Laboratory, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York 12181, 1981.
- [Merlet 89]** Merlet J-P., « Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry », The International Journal of Robotics Research, Vol. 8, N° 5, October 1989.
- [Merlet 93]** Merlet J-P., « Closed-Form Resolution of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators using Extra Sensors Data », IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. 1, pp. 200-204, Atlanta, Georgia, May 1993.
- [Merlet 96]** Merlet J-P., « Direct Kinematics of Planar Parallel Manipulators », Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3744-3749, Minneapolis, Minnesota, April 1996.
- [Merlet 97]** Merlet J-P., « Les robots parallèles », 2<sup>e</sup> édition, HERMES, Paris, 1997.
- [Merlet 98]** Merlet J-P., « Determination of the Presence of Singularities in 6D Workspace of a Gough Parallel manipulator », Advances in Robot Kinematics : Analysis and Control, Kluwer Academic Publishers, pp. 39-48, 1998.
- [Morton 66]** Morton G. M., « A Computer Oriented Geodetic Data Base and a new Techinche in File Sequencing », IBM Ltd, Ottawa, Canada, 1986.
- [Mianowski 98]** Mianowski K., « Dextrous Fully Parallel Manipulator with Six Degrees of Freedom », 12<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium, RoManSy, Paris, July 1998.
- [Minoux 83]** Minoux M., « Programmation mathématique », Tome 2, Dunod, 1983.
- [Mohammadi 95]** Mohammadi Daniali H. R., Zsombor-Murray P. J., Angeles J. « Singularity Analysis of a General Class of Planar Parallel Manipulators », Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, Vol. 2, pp. 1547-1552, May 1995.

- [Murareci 97]** Murareci O. D., « Contribution à la Modélisation Géométrique et à l'Étalonnage des Robots séries et Parallèles », Thèse de Doctorat, Nantes, Mars 1997.
- [Nenchev 97a]** Nenchev, D.N., Uchiyama, M., « Singularity-Consistent Path Planning and Motion Control Through Instantaneous Self-Motion Singularities of Parallel-Link Manipulators », *Journal of Robotic Systems*, Vol. 14 (1), pp. 27-36, 1997.
- [Nenchev 97b]** Nenchev, D.N., Bhattacharya, S., Uchiyama, M., « Dynamic Analysis of Parallel Manipulators under the Singularity-Consistent Parameterization », *Robotica*, Vol. 15, pp. 375-384, 1997.
- [Neugebauer 98]** Neugebauer R., Schwaar M., Wieland F., « Accuracy of Parallel Structured of Machine Tools », *Proceedings of the International Seminar on Improving Tool Performance*, Vol. 2, pp. 521-531, Spain, 1998.
- [Parenti 88]** Parenti C. V., Innocenti C., « Position Analysis of Robot Manipulator : Regions and Subregions », *ARK 88*, pp. 150-158, Ljubljana, Yugoslavia, 1988.
- [Pierrot 91]** Pierrot F., « Robot Pleinement Parallèle Légers : Conception, Modélisation et Commande », Thèse de Doctorat, Montpellier, Avril 1991.
- [Plücker 1865]** Plücker J., « On a new Geometry of Space », *Philosoph. Trans.*, N° 155, pp.725-791, 1865.
- [Press 90]** Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., « Numerical Recipes », Cambridge University Press, 1990.
- [Ronga 92]** Ronga F., Vust T., « Stewart Platforms without Computer ? », Preprint, 1992.
- [Samet 82]** Samet, H., « Neighbour Finding Techniques for Images Represented by Quadtrees », *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 18, pp. 37-57, 1982.
- [Sefrioui 93]** Sefrioui J., Gosselin C. M., « Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators », *Robotic and Autonomous Systems*, 209-224, 1993.

- [Tancredi 95] Tancredi L., « De la simplification et la résolution du modèle géométrique direct des robots parallèles », Thèse, INRIA Sophia Antipolis, 1995.
- [Wenger 89] Wenger Ph., « Aptitude d'un Manipulateur à Parcourir son espace de Travail en Présence d'Obstacles », Thèse de Doctorat, Nantes, Octobre 1989.
- [Wenger 91] Wenger Ph., Chedmail P., « Ability of a robot to travel through its free-workspace in an environment with obstacles », The Int. Journal of Robotic Research, Vol. 10(3), pp. 214-227, Juin, 1991.
- [Wenger 92] Wenger Philippe, « A new general formalism for the kinematic analysis of all non redundant manipulators », Proceedings IEEE Robotics and Automation, pp. 442-447, Nice, France, 1992.
- [Wenger 93] Wenger Ph., « A Classification of Manipulator Geometries Based on Singularity Avoidance Ability », ICAR'93, pp. 649-654, Tokyo, Japon, 1993.
- [Wenger 96] Wenger Ph., El Omri J., « Changing Posture for Cuspidal Robot Manipulators », Proceedings IEEE Robotics and Automation, pp.3173-3178, Meneapolis, Minnesota, April, 1996.
- [Wenger 97a] Wenger Ph., Chablat D., « Definition Sets for the Direct Kinematics of Parallel Manipulators », 8<sup>th</sup> International Conference Advanced Robotics, pp. 859-864, 1997.
- [Wenger 97b] Wenger Ph., Chablat D., « Uniqueness Domains in the Workspace of Parallel Manipulators », Syroco 1997, Nantes.
- [Wenger 98] Wenger Ph., Chablat D., « Workspace and Assembly modes in Fully-Parallel Manipulators : A Descriptive Study », Advances in Robot Kinematics : Analysis and Control, Kluwer Academic Publishers, pp. 117-126, 1998.
- [Zlatanov 98] Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B., « Identification and classification of the singular configurations of mechanisms », Mechanism and Machine Theory, Vol. 33, N°6, pp.743-760, 1998.



## 9. ANNEXES

### 9.1. MODÈLES GÉOMÉTRIQUES DU MANIPULATEUR 5 BARRES PLANS

#### 9.1.1. REPRÉSENTATION

Nous avons utilisé un manipulateur plan à deux degrés de liberté de type RR-RRR. Ce mécanisme comporte seulement une boucle fermée et la plate-forme mobile est placée en C. Les pivots  $A_1$  et  $A_2$  sont des articulations motorisées alors que les pivots  $B_1$  et  $B_2$  et C sont des articulations passives.

L'étude de la cinématique de ce mécanisme nous amène à la résolution du modèle géométrique direct et du modèle géométrique inverse. Nous pouvons facilement écrire le système (37) pour décrire le fonctionnement de ce mécanisme.

$$\begin{cases} (x - L_1 \cos(\theta_1))^2 + (y - L_1 \sin(\theta_1))^2 = L_3^2 \\ (x - L_2 \cos(\theta_2) - L_0)^2 + (y - L_2 \sin(\theta_2))^2 = L_4^2 \end{cases} \quad (37)$$

#### 9.1.2. MODÈLE GÉOMÉTRIQUE INVERSE

Nous pouvons découpler les deux équations du système (37) pour obtenir les solutions en  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

$$x^2 - 2xL_1 \cos(\theta_1) + y^2 - 2yL_1 \sin(\theta_1) + L_1^2 - L_3^2 = 0 \quad (38a)$$

$$x^2 - 2x(L_2 \cos(\theta_2) + L_0) + y^2 - 2yL_2 \sin(\theta_2) + L_2^2 - L_4^2 = 0 \quad (38b)$$

Nous obtenons ainsi deux équations du second degré. Le nombre maximum de solutions est donc de quatre. Ces deux équations étant indépendantes, nous aurons au maximum 2 racines doubles.

#### 9.1.3. MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

Le modèle géométrique direct possède 2 solutions placées symétriquement par rapport à l'axe  $B_1B_2$ . Nous pouvons écrire le polynôme caractéristique de ce manipulateur (Équation 39).

$$4(a^2 + b^2) Y^2 - 2bcY - 4a^2 L_3^2 + c^2 = 0 \quad (39)$$

Avec :

$$X = x - L_1 \cos(\theta_1), Y = y - L_1 \sin(\theta_1)$$

$$a = L_1 \cos(\theta_1) - L_2 \cos(\theta_2) - L_0, b = L_1 \sin(\theta_1) - L_2 \sin(\theta_2), c = L_4^2 - L_3^2 - b^2 - a^2$$

#### 9.1.4. SINGULARITÉS

A partir de l'équation (1), nous pouvons définir les matrices jacobienes du manipulateur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x - L_1 \cos(\theta_1) & y - L_1 \sin(\theta_1) \\ x - L_2 \cos(\theta_2) - c_2 & y - L_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (40a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} L_1 \sin(\theta_1) (x - L_1 \cos(\theta_1)) & 0 \\ -L_1 \cos(\theta_1) (y - L_1 \sin(\theta_1)) & L_2 \sin(\theta_2) (x - L_2 \cos(\theta_2) - L_0) \\ 0 & -L_2 \cos(\theta_2) (y - L_2 \sin(\theta_2)) \end{bmatrix} \quad (40b)$$

#### Les singularités parallèles

Les singularités parallèles représentent les limites du domaine articulaire.

$$\det(\mathbf{A}) = (x - L_1 \cos(\theta_1)) (y - L_2 \sin(\theta_2)) - (x - L_2 \cos(\theta_2)) (y - L_1 \sin(\theta_1))$$

Soit les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{B_1 C_1} = \begin{pmatrix} x - L_1 \cos(\theta_1) \\ y - L_1 \sin(\theta_1) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{B_2 C_2} = \begin{pmatrix} x - L_2 \cos(\theta_2) - L_0 \\ y - L_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{A}) = 0$  si  $\overrightarrow{B_1 C_1} \wedge \overrightarrow{C_1 B_2} = \vec{0}$ , c'est-à-dire lorsque les points  $B_1 C_1 B_2$  sont alignés (Figure 135 et figure 136).

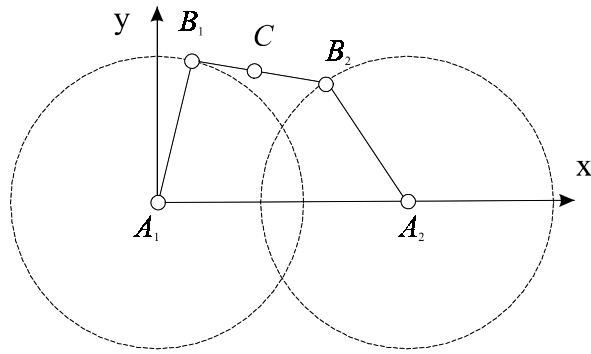


Figure 135 : Exemple de singularité parallèle

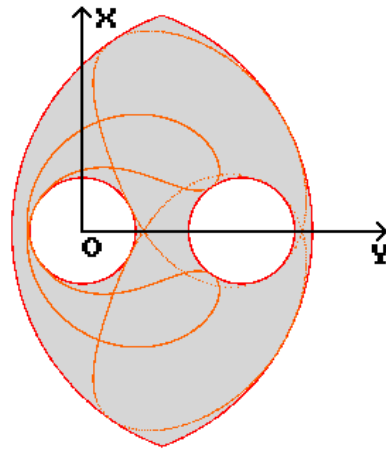


Figure 136 : Représentation des singularités parallèles dans l'espace de travail

### Les singularités sérielles

Pour connaître les singularités sérielles, nous utilisons une approche géométrique pour expliquer leurs positions.

Soit les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A_i B_i} = \begin{pmatrix} L_i \cos(\theta_i) \\ L_i \sin(\theta_i) \end{pmatrix}, \overrightarrow{B_1 C_1} = \begin{pmatrix} x - L_1 \cos(\theta_1) \\ y - L_1 \sin(\theta_1) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{B_2 C_2} = \begin{pmatrix} x - L_2 \cos(\theta_2) - L_0 \\ y - L_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B}) = 0 \text{ si } \begin{cases} L_1 \sin(\theta_1)(x - L_1 \cos(\theta_1)) - L_1 \cos(\theta_1)(y - L_1 \sin(\theta_1)) \\ \text{ou} \\ L_2 \sin(\theta_2)(x - L_2 \cos(\theta_2) - L_0) - L_2 \cos(\theta_2)(y - L_2 \sin(\theta_2)) \end{cases} \quad (41)$$

Soit si  $\overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{0}$ , c'est-à-dire lorsque les points  $A_1B_1C_1$  sont alignés (Figure 137).

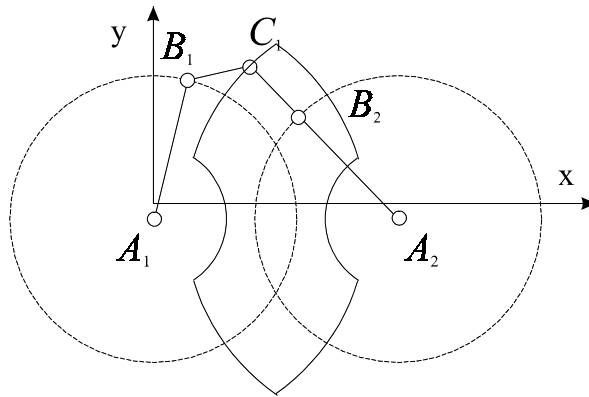


Figure 137 : Exemple de singularité sérielle

### Calcul des singularités sérielles

A partir du résultat précédent, nous pouvons déterminer les conditions géométriques nécessaires à la détermination des différentes configurations singulières. Nous pouvons dénombrer 4 types de singularités :

- a) Alignement de  $A_1B_1C_1$  avec  $\|\overrightarrow{A_1C_1}\| = L_1 + L_3$
- b) Alignement de  $A_1B_1C_1$  avec  $\|\overrightarrow{A_1C_1}\| = L_1 - L_3$
- c) Alignement de  $A_2B_2C_1$  avec  $\|\overrightarrow{A_2C_1}\| = L_2 + L_4$
- d) Alignement de  $A_2B_2C_1$  avec  $\|\overrightarrow{A_2C_1}\| = L_2 - L_4$

Dans ces configurations, nous pouvons exprimer  $\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$  ou  $\theta_1$  en fonction de  $\theta_2$ .

## **9.2. MODÈLES GÉOMÉTRIQUES DU MANIPULATEUR 3-RRR PLAN**

### **9.2.1. REPRÉSENTATION**

Le manipulateur 3-RRR possède plusieurs solutions au modèle géométrique inverse et au modèle géométrique direct. Sa morphologie est proche de celle du manipulateur de type 3-RPR étudié par [Innocenti 92] pour lequel il est montré qu'il est possible de changer de mode d'assemblage sans passer par une singularité.

### 9.2.2. MODÈLE GÉOMÉTRIQUE INVERSE

L'équation 42 permet la résolution du modèle géométrique inverse de ce manipulateur.

$$\left( \begin{array}{l} (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} - L_i \cos(\alpha_i))^2 + \\ (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} - L_i \sin(\alpha_i))^2 \end{array} \right) = M_i^2 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (42)$$

### 9.2.3. MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

La résolution de ce problème est abordée par [Gosselin 92]. Nous pouvons résoudre le problème du modèle géométrique direct de ce manipulateur, en utilisant les résultats obtenus pour le manipulateur à boucle fermée de type 3 - RPR [Chablat 96]. Nous calculons les coordonnées des points  $C_i$  à partir de la méthode de résolution du manipulateur 3 - RPR, en fixant les longueurs des articulations prismatiques égales aux longueurs des segments  $M_i$ . Nous avons donc le même nombre de solutions que pour le manipulateur 3 - RPR, c'est-à-dire 6 solutions.

### 9.2.4. SINGULARITÉS

#### Étude des singularités parallèles

Les singularités parallèles se produisent lorsque  $\det(\mathbf{A}) = 0$ .

$$\frac{\partial \left( \begin{array}{l} (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} - L_i \cos(\alpha_i))^2 + \\ (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} - L_i \sin(\alpha_i))^2 \end{array} \right)}{\partial x} = P_{i1} \text{ pour } i = 1, 2, 3. \quad (43a)$$

$$\frac{\partial \left( \begin{array}{l} (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} - L_i \cos(\alpha_i))^2 + \\ (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} - L_i \sin(\alpha_i))^2 \end{array} \right)}{\partial y} = P_{i2} \text{ pour } i = 1, 2, 3. \quad (43b)$$

$$\frac{\partial \left( \begin{array}{l} (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} - L_i \cos(\alpha_i))^2 + \\ (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} - L_i \sin(\alpha_i))^2 \end{array} \right)}{\partial \phi} = P_{i3} \text{ pour } i = 1, 2, 3. \quad (43c)$$

En utilisant les équations 43, nous pouvons ainsi écrire  $\det(\mathbf{A})$  :

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$  est fonction des variables d'entrée  $\theta$  c'est-à-dire de  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$ .

### Étude des singularités sérielles

Les singularités sérielles se produisent lorsque  $\det(\mathbf{B}) = 0$ .

$$\frac{\partial \left( \begin{array}{l} (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} - L_i \cos(\alpha_i))^2 + \\ (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} - L_i \sin(\alpha_i))^2 \end{array} \right)}{\partial \alpha_i} = 2L_i \begin{pmatrix} \sin(\alpha_i) (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix}) + \\ \cos(\alpha_i) (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy}) \end{pmatrix} = Q_{ii} \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

Nous pouvons ainsi écrire  $\det(\mathbf{B})$  :

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (45)$$

L'expression du déterminant est la suivante :

$$\det(\mathbf{B}) = \prod_1^3 2L_i \begin{pmatrix} \sin(\alpha_i) (x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix}) + \\ \cos(\alpha_i) (y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy}) \end{pmatrix}$$

Pour interpréter les configurations singulières de ce type, nous posons les expressions suivantes :

$$\overrightarrow{A_i C_i} = \begin{pmatrix} x + C_{ix} \cos(\phi) - C_{iy} \sin(\phi) - A_{ix} \\ y + C_{ix} \sin(\phi) + C_{iy} \cos(\phi) - A_{iy} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{A_i B_i} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_i) \\ \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}$$

Chaque facteur du déterminant s'annule lorsque  $\overrightarrow{A_i C_i} \wedge \overrightarrow{A_i B_i} = \vec{0}$ , c'est-à-dire lorsque les points  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  sont alignés, pour  $i = 1, 2, 3$  (Figure 138).

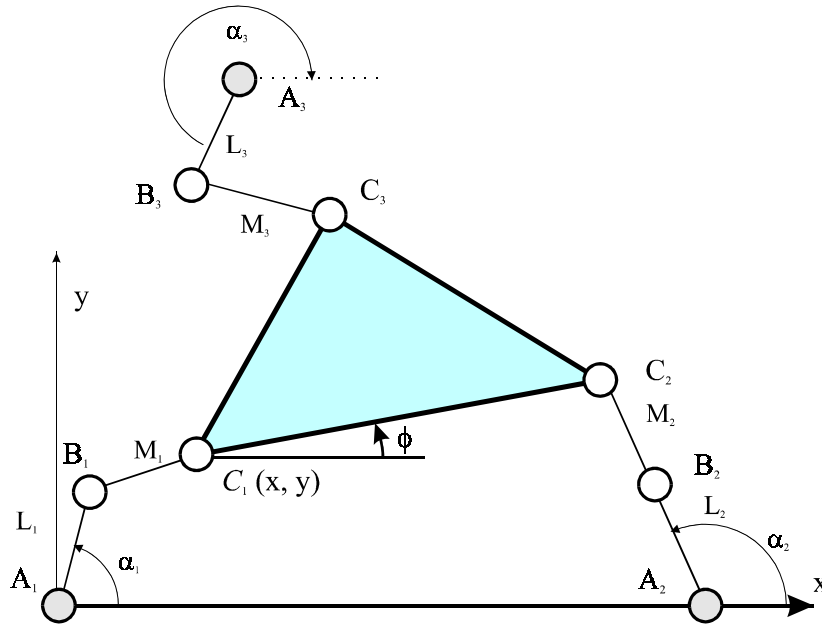


Figure 138 : Singularité sérielle pour un manipulateur pleinement parallèle 3 - RRR

### 9.3. LES $2^K$ ARBRES

Nous avons utilisé une structure de données particulière pour modéliser tous les ensembles que nous avons caractérisés dans cette thèse. Dans ce chapitre, nous allons présenter les algorithmes que nous avons utilisés. La bibliographie nous montre généralement des applications utilisant des quadrees ou des octrees. Ces arbres sont adaptés pour représenter des ensembles en dimension 2 et 3. Nous avons généralisé ces structures de données pour représenter des ensembles de dimensions  $K$  que nous appellerons  $2^K$  arbres.

#### 9.3.1. STRUCTURES DE DONNÉES

Les quadrees, les octrees et les  $2^K$  arbres utilisent le même principe de découpage de l'espace pour modéliser des ensembles de dimensions différentes. Pour illustrer notre propos, nous allons montrer la structure de données des quadrees et sa généralisation aux octrees et aux  $2^K$  arbres.

- **Les quadrees**

Les quadrees sont une structure de données hiérarchisées qui permet en subdivisant l'espace en éléments de tailles différentes, de représenter toutes formes planes comprises dans

une surface rectangulaire. Les informations permettant de caractériser un quadtree sont les suivantes :

- a) Un centre ;
- b) Une largeur et une hauteur permettant de former la surface rectangulaire englobant l'objet à modéliser ;
- c) Une profondeur qui caractérise la précision de l'arbre.

Pour permettre de comprendre cette représentation, il est nécessaire de représenter en mémoire des données ainsi que son interprétation physique. La représentation mémoire des quadtrees est une généralisation des arbres binaires. Ils comprennent des noeuds comportant chacun quatre fils. La modélisation de la surface repose sur l'utilisation d'un code de couleur attaché à chaque noeud. Les structures de données traditionnelles utilisent généralement 3 couleurs. Il existe ainsi des noeuds blancs, gris et noirs.

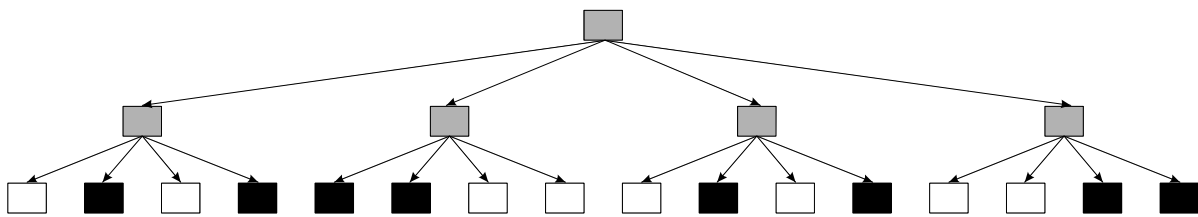


Figure 139 : Représentation en mémoire d'un quadtree

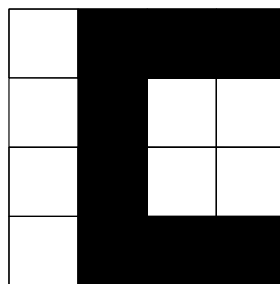


Figure 140 : Image quadtree d'un C en profondeur 3

- **Les octrees**

Les octrees permettent de représenter des ensembles dans un espace de dimension 3. La codification des couleurs est identique à celle d'un quadtree (Figure 141).



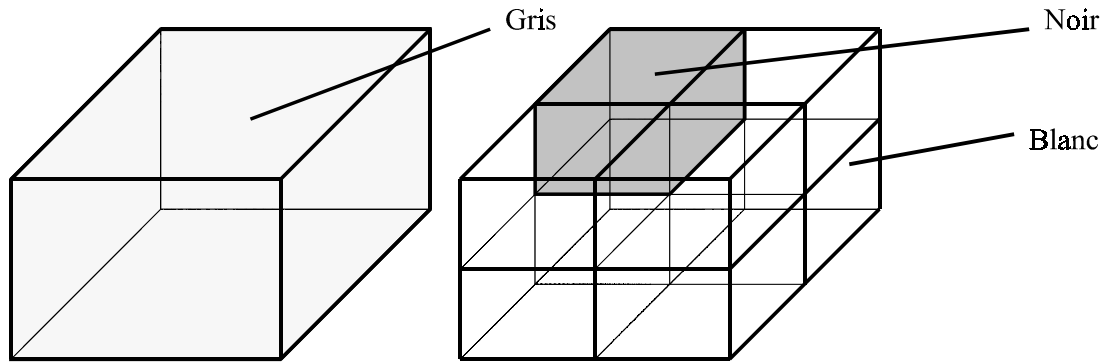


Figure 141 : Coloration des noeuds

- **Les  $2^K$  arbres**

La structure informatique d'un  $2^K$  permet de s'adapter à n'importe quelle dimension. Nous utilisons la structure suivante :

```
Structure Noeud_N :      Short      couleur, dim_n
                        Noeud_N     fils[dim_n]
```

Pour notre compilateur, la présence dans chaque noeud de sa dimension ne prend de place supplémentaire. En effet, toutes les structures mémoires sont codées sur des multiples de 4 octets. La valeur d'un *short* nécessaire à coder la couleur d'un noeud, permet de stocker sa dimension sur les 2 octets adjacents. Le tableau *fils* est un pointeur sur une adresse dont la taille est définie dynamiquement. De plus, les coordonnées des centres de chaque noeud sont recalculés pour chaque nouveau point mais ne sont pas mémorisés. Leur taille est enregistrée dans un tableau commun, en fonction du niveau dans l'arbre.

### 9.3.2. NUMÉROTATION DES NOEUDS

Nous devons utiliser une numérotation des noeuds pour faciliter la création et la relecture de l'arbre. Cette numérotation doit aussi simplifier la recherche de voisin et être généralisable entre les quadrees, les octrees et les  $2^K$  arbres. Sur chaque axe, nous affectons une valeur égale à zéro ou à  $2^K$  avec  $K$  le numéro de l'axe. Ainsi, pour un quadree, la numérotation varie de 0 à 3 (Figure 142).

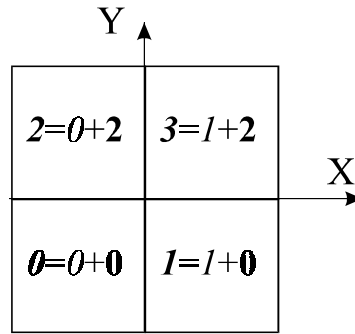


Figure 142 : Numérotation des noeuds d'un  $2^K$  arbre

La fonction *Numero\_fils* permet de trouver le numéro d'un point (*l\_point*) en fonction de la position centre du cube courant (*m\_point*). Il est seulement nécessaire de connaître la dimension de l'arbre.

```

Fonction Numero_fils(point_n &l_point, point_n &m_point)
  Pour i = 0 , num = 0 à i < dim_n ; i++
    Si l_point[i] > m_point[i]
      num += tab_2[i];
    Fin si
  Fin pour
  Retourne la valeur du noeud : num
Fin Numero_fils

```

### 9.3.3. CONSTRUCTION DE L'ARBRE

La méthode optimale de construction d'un  $2^K$  arbre est définie à partir de la forme sous laquelle se mémorise l'arbre. L'approche la plus intéressante consiste à tester successivement l'ensemble des noeuds présents à la profondeur maximale selon un ordre de numérotation ceci afin de permettre au plus tôt un regroupement de noeuds et donc une simplification du  $2^K$  arbre. Cet algorithme se base sur l'ordre de balayage de Morton [**Morton 66**] (Figure 143).

L'utilisation de cet algorithme pour le calcul de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire permet, en utilisant le modèle géométrique inverse et direct respectivement, d'obtenir des simplifications rapides et de garantir la qualité du résultat. Cependant, si l'on souhaite par exemple calculer l'espace de travail et de l'ensemble articulaire en une seule opération avec le modèle géométrique inverse, alors la précision à donner à l'ensemble articulaire devra être inférieure à celle de l'espace de travail. En effet, les pas de calcul à utiliser dans ces deux espaces sont différents. Ce problème est important lorsque l'on souhaite

calculer les composantes de base à partir des régions de base en utilisant le modèle géométrique inverse.

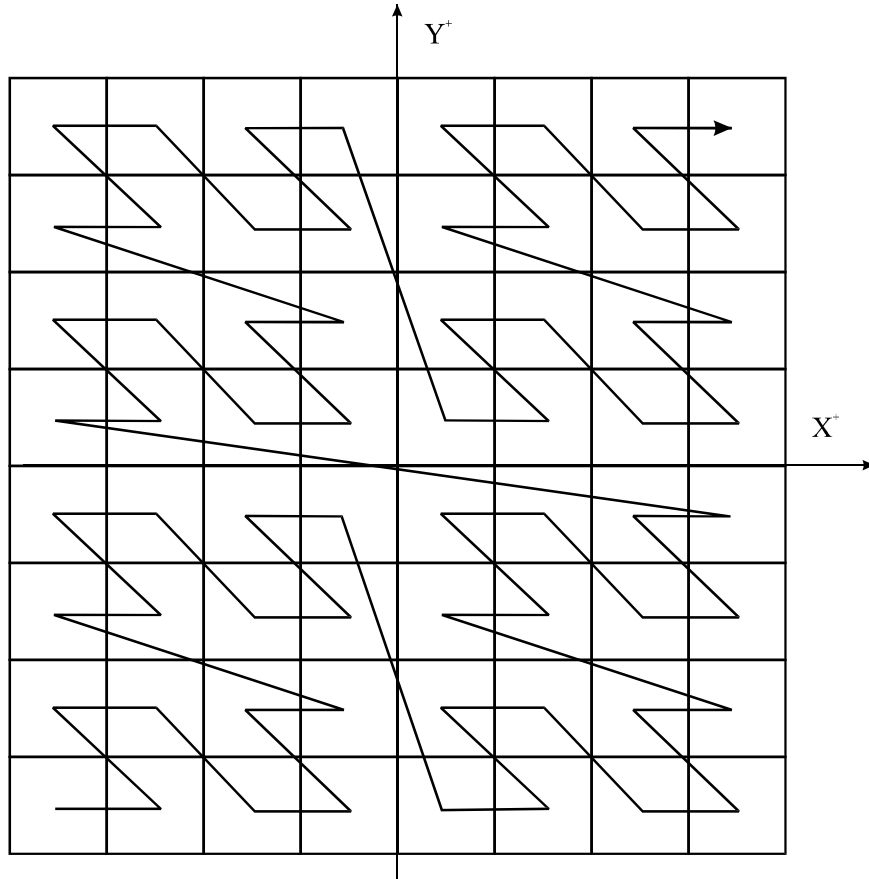


Figure 143 : Ordre de balayage de Morton

Si l'on souhaite utiliser un algorithme parcourant l'espace non récursif, il est possible de construire point à point l'arbre. Nous utilisons alors la fonction `Nouveau_point`. Cette procédure est récursive et permet d'insérer un noeud noir n'importe où dans l'arbre. Il est cependant nécessaire d'ajouter une procédure permettant de simplifier automatiquement cette structure. En effet, dès que tous les fils d'un noeud deviennent NOIRS, alors on change sa couleur, GRIS vers NOIR et l'on supprime tous les fils en libérant ainsi la mémoire de la station.

*Procédure Nouveau\_Noeud(L\_Point : Point ; L\_Noeud : Noeud)*

*Initialisation*

*Stop = 0*

*Niveau = 1*

*Courant = L\_Noeud*

*Fin Initialisation*

*Tant que (Niveau ≤ Profondeur) et (Stop = 0)*

*Numéro\_Fils = Numéro\_Fils\_Noeud(Courant, L\_Point)*

*{ Détermine le numéro du fils du noeud courant }*

*Selon Courant->Couleur*

*NOIR :*

*Stop = 1 { Fin de la procédure }*

*BLANC :*

*Si Niveau = Profondeur Alors*

*Courant->Couleur = NOIR*

*Si non*

*Niveau = Niveau + 1*

*Initialise\_Fils*

*Courant = Courant->Fils[Numéro\_Fils]*

*Fin Si*

*GRIS :*

*Courant = Courant->Fils[Numéro\_Fils]*

*Niveau = Niveau + 1*

*Fin\_Selon*

*Fin Tant Que*

*Fin Nouveau\_Noeud*

### 9.3.4. SIMPLIFICATION DE LA REPRÉSENTATION DES OCTREES

Un Octree est composé de cubes de différentes tailles. Pour accélérer son affichage, nous utilisons des entités élémentaires différentes, des parallélépipèdes rectangles. Nous allons réunir les cubes coplanaires par îlots de quatre. Pour reconnaître les noeuds noirs des autres, nous allons introduire lors de la lecture un codage binaire (Tableau 15).

Numéro du noeud	Codage	Numéro du noeud	Codage
0	1	4	16
1	2	5	32
2	4	6	64
3	8	7	128

*Tableau 15 : Numérotation des cubes*

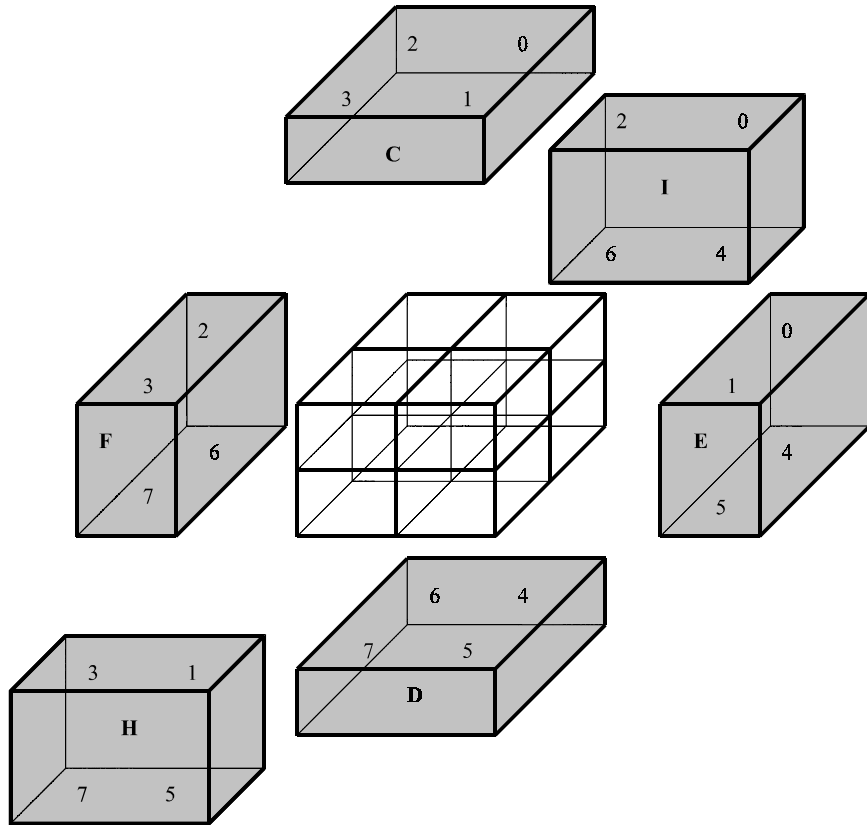


Figure 144 : Simplification de l'octree

Facette	Codage
0-1-2-3-4-5-6-7	$1+2+4+8+16+32+64+128= 255$
0-1-2-3	$1+2+4+8= 13 = C$
4-5-6-7	$16+32+64+127= 240 = D$
0-1-4-5	$1+2+32+64= 51 = E$
2-3-6-7	$4+8+64+128= 204 = F$
1-3-5-7	$2+8+32+128= 170 = H$
0-2-4-6	$1+4+16+64= 85 = I$

Tableau 16 : Définition des couleurs supplémentaires de l'octree

---

*Procédure Simplifie\_Noeud(L\_Noeud : Noeud)*

*Simplifie = 0*

*Pour I allant de 0 à 7 faire*

*Si L\_Noeud->Fils[I]->Couleur = GRIS alors*

*Simplifie\_Noeud(L\_Noeud->Fils[I])*

*Fin Si*

*Si L\_Noeud->Fils[I]->Valeur = NOIR alors*

*Simplifie = simplifie + 2<sup>i</sup>*

*Fin Si*

*Si Simplifie = 255 Alors*

*L\_Noeud->Couleur = Noir*

*Pour I allant de 0 à 7 faire*

*Done\_Noeud(L\_Noeud->Fils[I])*

*Fin Pour*

*Sinon Si (Simplifie & 13) = 13 Alors*

*L\_Noeud->Fils[0]->Couleur= C*

*L\_Noeud->Fils[1]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[2]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[3]->Couleur= Blanc*

*Sinon Si (Simplifie & 240) = 240 Alors*

*L\_Noeud->Fils[4]->Couleur= D*

*L\_Noeud->Fils[5]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[6]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[7]->Couleur= Blanc*

*Sinon Si (Simplifie & 51) = 51 Alors*

*L\_Noeud->Fils[0]->Couleur= E*

*L\_Noeud->Fils[1]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[4]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[5]->Couleur= Blanc*

*Sinon Si (Simplifie & 204) = 204 Alors*

*L\_Noeud->Fils[2]->Couleur= F*

*L\_Noeud->Fils[3]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[6]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[7]->Couleur= Blanc*

*Sinon Si (Simplifie & 170) = 170 Alors*

*L\_Noeud->Fils[1]->Couleur= H*

*L\_Noeud->Fils[3]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[5]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[7]->Couleur= Blanc*

*Sinon Si (Simplifie & 85) = 85 Alors*

*L\_Noeud->Fils[0]->Couleur= I*

*L\_Noeud->Fils[2]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[4]->Couleur= Blanc*

*L\_Noeud->Fils[6]->Couleur= Blanc*

*Fin Si*

*Fin Simplifie\_Noeud*

Avec pour constantes :

C= 13    D= 240    E= 51    F= 204    H= 170    I= 85

### **Remarque**

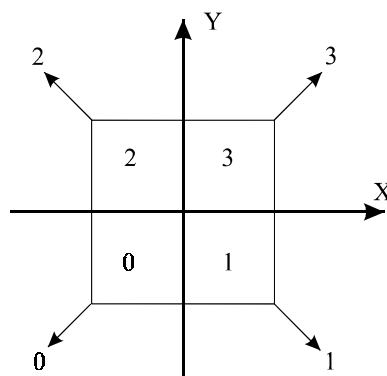
Cette simplification nous a permis d'obtenir une compression de données d'environ 30 %. Elle n'augmente pas la taille des fichiers de données. Nous l'utilisons uniquement pour l'affichage, car, nous n'avons pas modifié les autres algorithmes (connexité, surface) pour tenir compte de cette modification. De plus, elle ne peut s'appliquer qu'aux octrees et par extrapolation aux quadrees.

### **9.3.5. RECHERCHE DE VOISINS ET CALCUL DE LA FRONTIÈRE**

Pour définir les surfaces caractéristiques permettant de calculer les composantes de base et les régions de base, il est nécessaire de calculer la frontière d'un  $2^K$  arbre. S'il est aisé de réaliser des opérations topologiques (union, intersection, différence, etc.) sur ces modèles la recherche des noeuds voisins est un problème difficile. Nous allons dans le paragraphe suivant expliquer notre démarche.

- **Notations**

À partir d'un modèle quadtree, il est possible de généraliser notre démarche aux  $2^K$  arbres. Nous définissons les notations utilisées pour les quadrants d'un carré ainsi que les notations des différentes directions de recherches possibles.



*Figure 145 : Directions principales d'un quadtree*

Les directions « X » et « Y » sont dites directions cardinales et « 0 », « 1 », « 2 » et « 3 »

sont les directions diagonales. Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes intéressés uniquement aux directions cardinales. En effet, les directions diagonales n'ont pas de sens si les dimensions associées aux axes sont différentes (distance et angle). Nous avons donc, pour un  $2^K$  arbre,  $2 \times K$  directions à étudier. L'utilisation de la numérotation binaire permet d'écrire un programme généralisable à n'importe quelle dimension. Deux problèmes se posent alors, le noeud voisin est issu de la subdivision du même cube (ils ont un côté commun), ou d'un autre cube. Les directions de recherche (par exemple  $X^+$  ou  $X^-$ ) seront cependant traitées différemment. Dans la figure 146, nous représentons un quadtree en profondeur 3.

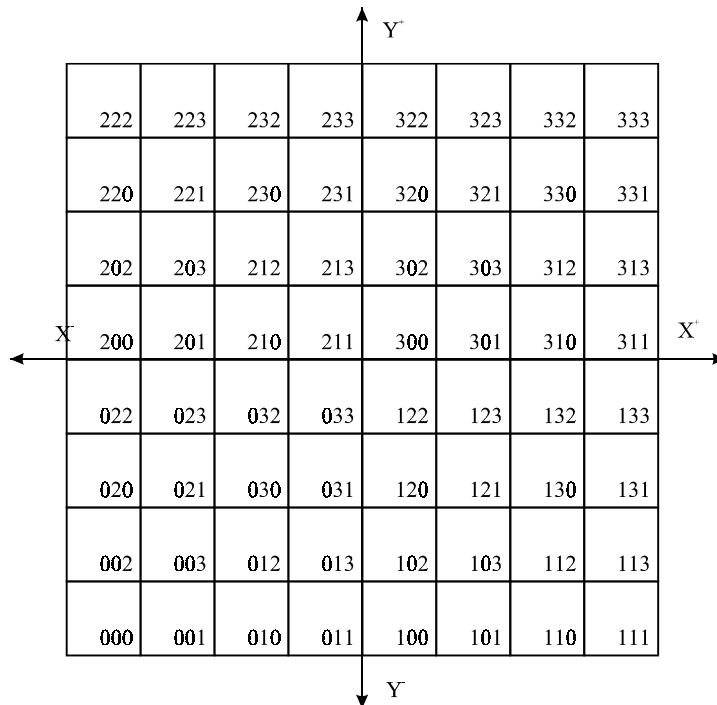


Figure 146 : Recherche de voisin dans un quadtree

- **Direction  $X^+$  :**

Nous allons donner deux exemples. Soit le noeud numéro 100, en recherchant dans la direction  $X^+$ , nous devons trouver le noeud numéro 101. Nous effectuons une opération binaire sur le bit le plus faible, c'est-à-dire 0 pour tester s'il existe un voisin issu du même noeud parent :  $0 \& 2^0 = 0 \neq 2^0$ . Le code du noeud voisin est donné par  $100 + 2^0 = 101$ . Dans ce cas la recherche est finie. Maintenant, nous prenons un exemple plus complexe, le noeud



033. Nous effectuons le même calcul,  $3 \& 2^0 = 1 = 2^0$ . Dans ce cas, il est nécessaire de trouver un noeud parent commun, c'est-à-dire 0. Pour obtenir le code du voisin, nous effectuons les opérations suivantes :  $0 + 2^0 = 1$ ,  $3 - 2^0 = 2$  et  $3 - 2^0 = 2$ , soit le code 122. Pour le code du noeud en commun, nous effectuons une addition et pour les autres une soustraction. Ces opérations peuvent être généralisées à toutes les directions cardinales.

- **Direction  $X^-$  :**

Comme pour la direction  $X^+$ , nous allons donner deux exemples. Soit le noeud numéro 101, en recherchant dans la direction  $X^-$ , nous devons trouver le noeud numéro 100. Le test est le suivant :  $1 \& 2^0 = 1 = 2^0$ . Le code du noeud voisin est donné par  $101 - 2^0 = 100$ . Dans ce cas la recherche est finie. Pour le noeud 300, la recherche est différente. Nous effectuons le même calcul,  $0 \& 2^0 = 0 \neq 2^0$ . Dans ce cas, il est nécessaire de trouver un noeud parent commun, c'est-à-dire 3. Pour obtenir le code du voisin, nous effectuons les opérations suivantes :  $3 - 2^0 = 2$ ,  $0 + 2^0 = 1$  et  $0 + 2^0 = 1$ , soit le code 211. Pour le code du noeud en commun, nous effectuons une soustraction et pour les autres une addition.

**Note :**

L'utilisation, d'un code binaire permet de généraliser la recherche de voisin pour un  $2^K$  arbre. Cependant, dans l'exemple que nous avons étudié, tous les noeuds noirs étaient au même niveau. Ainsi, nous pouvons avoir, avec les simplifications, un noeud noir possédant plusieurs voisins ou un noeud noir possédant un voisin d'un niveau supérieur (Figure 147). Le noeud 3 possède dans la direction  $X^-$ , les noeuds 233, 213 et 211. Alors que dans la direction  $X^+$ , le noeud 213 possède comme voisin, le noeud numéro 3.

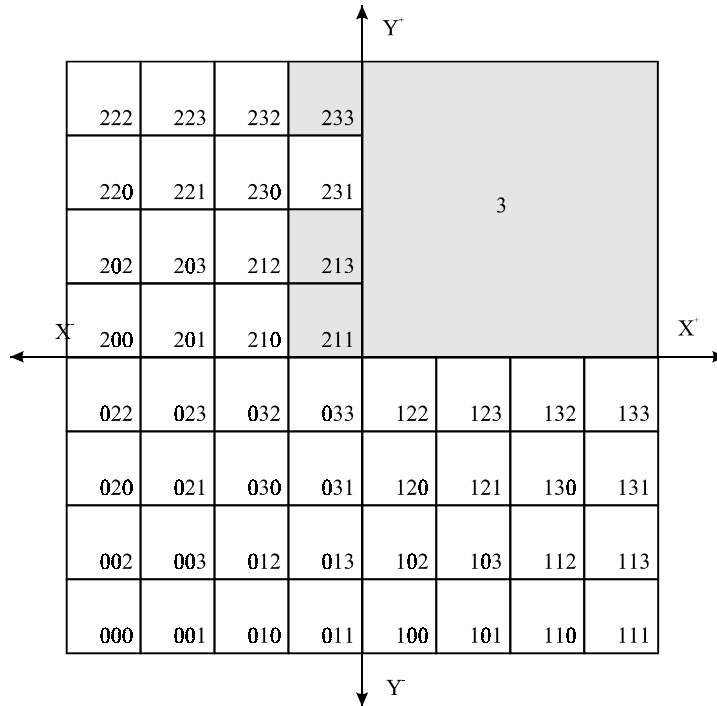


Figure 147 : Différents voisins possibles dans un quadtree

- **Calcul de la frontière**

Nous calculons la frontière d'un  $2^K$  arbre lorsque, nous souhaitons calculer les singularités et les surfaces caractéristiques. Dans ces deux cas, nous souhaitons obtenir le modèle le plus proche d'une surface. Nous recherchons donc les noeuds les plus petits possibles. Pour ce faire, nous utilisons notre algorithme de recherche de voisins. Un cube est sur la frontière s'il existe, parmi les directions cardinales, une direction pour laquelle le noeud ne possède pas de voisin. Cette procédure est longue et nécessite beaucoup de mémoire car aucune simplification n'est possible.

### 9.3.6. CALCUL DES COMPOSANTES CONNEXES

Le calcul des composantes connexes d'un  $2^K$  arbre doit permettre de trouver les composantes de base après soustraction des surfaces caractéristiques d'un aspect donné. Pour ce faire, nous rajoutons à notre structure de données, un code permettant de numéroter, pour chaque noeud, la composante connexe auquel il appartient.



### 9.3.7. PROJECTION DANS DES ESPACES DE DIMENSIONS INFÉRIEURES

Pour permettre la représentation des  $2^K$  arbres avec  $K$  supérieur à 3, nous projetons ces arbres dans des espaces de dimension inférieure. Ainsi, un aspect généralisé du manipulateur Delta est de dimension 6 ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, X, Y, Z$ ). Les W - aspects et Q - aspects sont obtenus en projetant sur les axes ( $X, Y$  et  $Z$ ) et ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ). Pour ce faire, nous utilisons deux fonctions.

La fonction *Projection\_point* permet de transformer un vecteur de dimension  $N$  en un vecteur de dimension  $M$ , en ne conservant que les données appartenant à l'espace de projection. Cette transformation est construite à partir du vecteur base qui contient des 1 pour les axes à garder et des 0 pour les autres.

```
Fonction Projection_point( point_n &base, point_n &l_point, point_n &m_point)
  Pour i = 0 et j = 0 à i < l_point.dim_n ; i++
    Si base[i] = 1 alors
      m_point[j++] = l_point[i];
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Projection_point
```

La fonction *Projection\_arbre* est une fonction récursive qui parcourt l'arbre à projeter. Le résultat est stocké dans l'arbre cible.

```
Fonction Projection_arbre( noeud_n *courant, point_n &base, int dim_p, point_n actuel,
tree_n&cible, int niveau)
  Selon (courant->couleur)
    BLANC:
      Fin
    GRIS:
      Pour i = 0 à i < tab_2[dim_n] ; i++)
        calcul_fils(i, actuel, tmp, niveau);
        Projection_arbre(&courant->fils[i],base,dim_p,tmp,cible, niveau+1);
      Fin pour
      Fin
    NOIR:
      Projection_point(base, tmp, projection);
      cible.nouveau_point(projection);
      Fin
  Fin Selon
Fin Projection_arbre
```

### 9.4. CALCUL DES SURFACES CARACTÉRISTIQUES

Le calcul des surfaces est un problème difficile, si l'on applique la définition, il est

nécessaire de calculer le modèle géométrique inverse puis le modèle géométrique direct. Les étapes de la création des surfaces caractéristiques sont regroupées dans la figure 149.

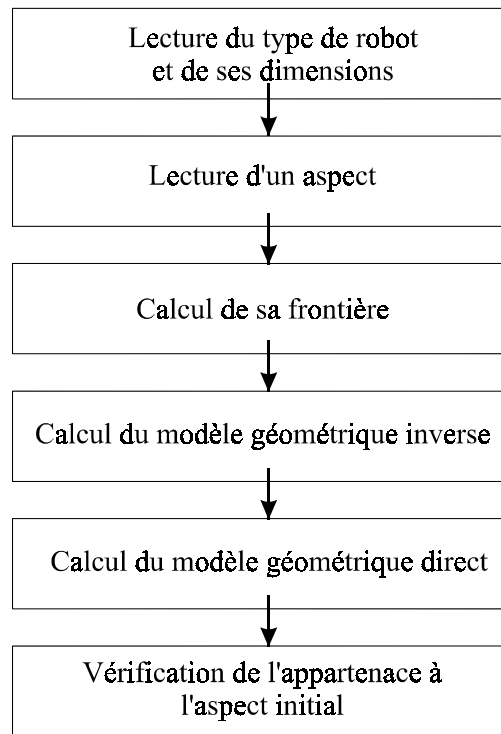


Figure 149 : Les étapes de la création des surfaces caractéristiques

## 9.5. CALCUL DE L'ESPACE DE TRAVAIL ET DU DOMAINE ARTICULAIRE

L'utilisation des  $2^K$  arbres, nous a conduit à utiliser des méthodes particulières pour calculer l'espace de travail et l'ensemble articulaire des manipulateurs parallèles. Dans un premier temps, nous parcourons l'espace sur chaque variable afin de former soit une configuration articulaire, soit une configuration de la plate-forme mobile. Puis, nous calculons le modèle géométrique direct et inverse respectivement. Le calcul du modèle géométrique inverse est beaucoup plus rapide que le modèle géométrique direct dans lequel nous devons résoudre une équation polynomiale.

Lorsque l'on augmente la dimension des ensembles à calculer, il est nécessaire d'utiliser des stratégies de calcul plus évoluées. Nous avons retenu l'algorithme de Morton qui permet de simplifier rapidement l'arbre calculé.

## 9.6. LES ÉTAPES DE LA CRÉATION DES DOMAINES D'UNICITÉ

Pour calculer les domaines d'un robot parallèle, nous pouvons décomposer notre démarche en étapes élémentaires (Figure 150).

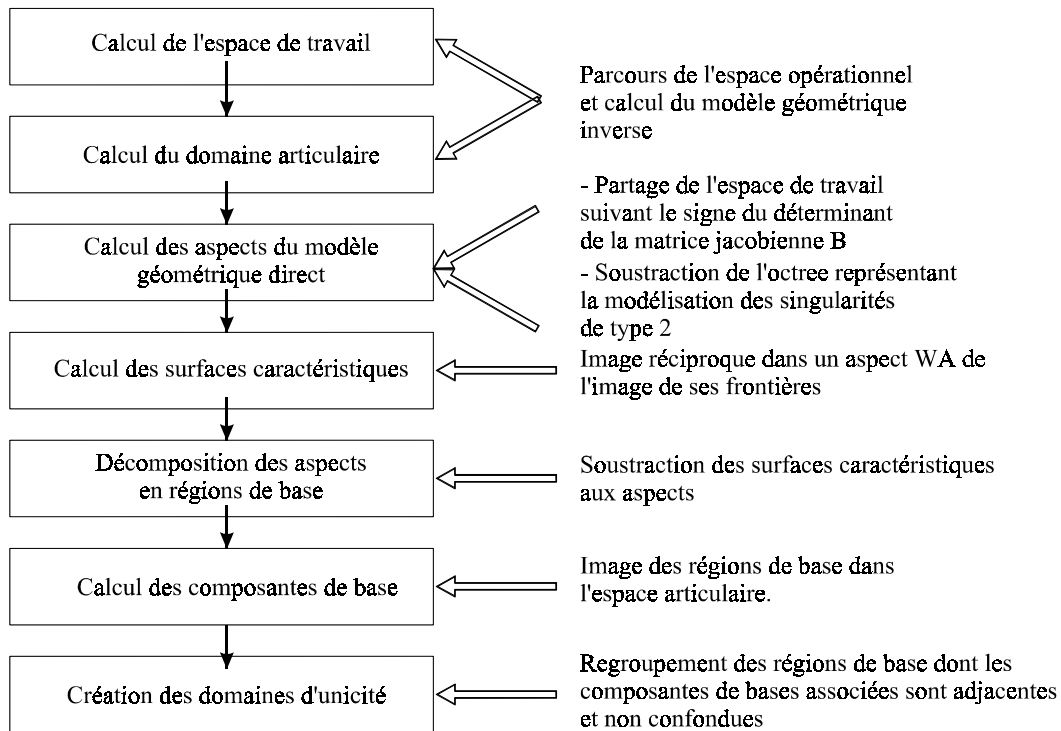


Figure 150 : Les étapes de la création des domaines d'unicité

## 9.7. PROBLÈMES DE PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES POUR LES MANIPULATEURS PLEINEMENT PARALLÈLES : APPLICATION AU MANIPULATEUR PLAN 5 BARRES

Nous avons défini la N - parcourabilité et la T - parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles dans le paragraphe 5.2. Nous allons dans ce paragraphe présenter l'algorithme de planification de trajectoires que nous avons utilisé et les problèmes à résoudre pour la réalisation optimale de trajectoires, pour définir des trajectoires discrètes ou continues dans l'espace de travail.

Nous illustrons notre propos à l'aide du manipulateur à 5 barres (Figure 59) utilisé dans le chapitre 3. La connaissance de son espace de travail libre et de son ensemble articulaire libre, nous permet d'utiliser des algorithmes utilisant une approche globale. L'utilisation

d'une méthode globale permet de garantir l'existence ou la non existence d'une solution [Lallemand 94].

Pour résoudre ce problème, nous utiliserons des contraintes géométriques et cinématiques et nous présenterons un algorithme exhaustif. Puis nous énoncerons les problèmes à résoudre pour utiliser un algorithme heuristique (type A\* [Minoux 83]). Pour choisir un mode de fonctionnement, nous utiliserons, comme critère local, la valeur du conditionnement de la matrice jacobienne parallèle.

### 9.7.1. LES ALGORITHMES EXHAUSTIFS

Pour trouver un chemin, à l'intérieur du modèle octree d'un domaine de configurations accessibles ou d'un aspect libre, on utilise un algorithme exhaustif de recherche. Cet algorithme nous permet de trouver une trajectoire non optimisée et n'utilisant que la connexité du modèle octree (Figure 151).

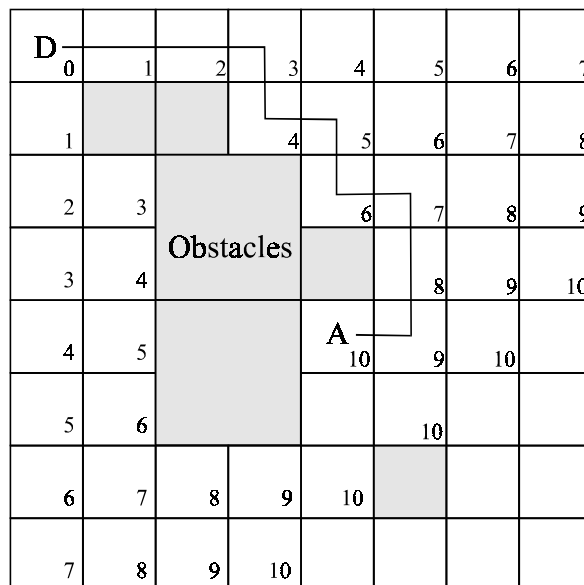


Figure 151 : Recherche d'une trajectoire par une méthode exhaustive

Dans un  $2^n$  arbre, on part du noeud associé à la configuration origine, puis on numérote les noeuds voisins en explorant les directions cardinales. Ainsi, dans le plan, un noeud possède 4 voisins, dans l'espace, un noeud possède 6 voisins et dans un arbre de dimension  $n$ ,  $2 \times n$  voisins. L'algorithme s'arrête lorsqu'un des noeuds exploré est le noeud extrémité de la

trajectoire. Dès lors, il suffit de revenir en arrière dans l'exploration, pour trouver un chemin dans le  $2^n$  arbre.

Pour le manipulateur 5 barres étudié, les axes de l'ensemble des configurations libres sont  $(X, Y)$  pour les déplacements dans l'espace opérationnel et  $(\theta_1, \theta_2)$  pour les déplacements dans l'espace articulaire. Les dimensions de ces deux espaces n'étant pas homogènes, il n'est donc pas possible de calculer une distance euclidienne entre deux centres appartenant à deux noeuds d'un  $2^n$  arbre. Le nombre de noeuds à numéroté est fonction non seulement de la « distance » entre le noeud origine et le noeud extrémité de la trajectoire mais aussi de la précision utilisée pour le calcul du domaine de configurations accessibles. Cet algorithme nous a permis de faire de la planification de trajectoire dans un espace possédant des dimensions non homogènes et sans établir de fonction associée au coût du déplacement dans cet espace.

Nous avons calculé une trajectoire de changement de mode d'assemblage dans  $W \times Q$ , puis nous l'avons représentée dans l'ensemble articulaire et dans l'espace de travail (Figure 152). Cette trajectoire de l'espace de travail permet de relier les points  $P_1$  et  $P_2$  (notés  $P_{12}$  dans l'espace de travail) qui sont associés à deux configurations articulaires différentes.

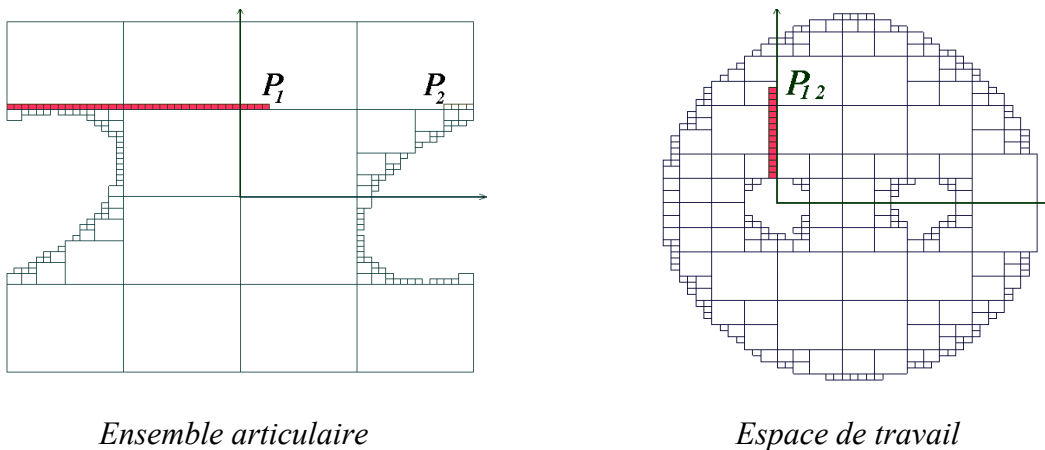


Figure 152 : Trajectoire de changement de mode d'assemblage d'un manipulateur RR-RRR

### 9.7.2. LES ALGORITHMES HEURISTIQUES

L'utilisation d'un algorithme exhaustif entraîne un nombre d'exploration très important et la recherche du chemin s'effectue de manière aveugle. Les algorithmes heuristiques



permettent de limiter le nombre d'explorations en utilisant les connaissances attribuées à chaque noeud. L'algorithme le plus connu est l'algorithme  $A^*$  que nous allons rappeler brièvement.

La recherche d'une trajectoire par l'algorithme  $A^*$  explore de manière discrète l'espace. Pour chaque noeud, l'exploration permet de trouver, dans chaque direction de l'espace, des noeuds voisins. Pour chacun d'entre eux, il est nécessaire de calculer une fonction coût permettant d'atteindre l'extrémité de la trajectoire. Seul, le noeud possédant le coût le plus faible sera conservé pour la prochaine exploration. Si l'algorithme atteint un minimum local, alors il remonte sur un noeud antérieur et explore un noeud possédant un coût plus important.

L'utilisation de cet algorithme diminue considérablement le nombre d'explorations. La comparaison entre la figure 151 et 153 nous montre facilement la différence. Avec le premier algorithme, nous avons exploré 42 noeuds alors que dans le second seulement 20. La différence revient dans le calcul d'une fonction coût associée au déplacement du manipulateur. Dans notre cas, l'espace défini par l'arbre  $2^4$  est composé de deux longueurs appartenant à l'espace opérationnel et de deux angles appartenant à l'espace articulaire liés aux articulations motorisées.

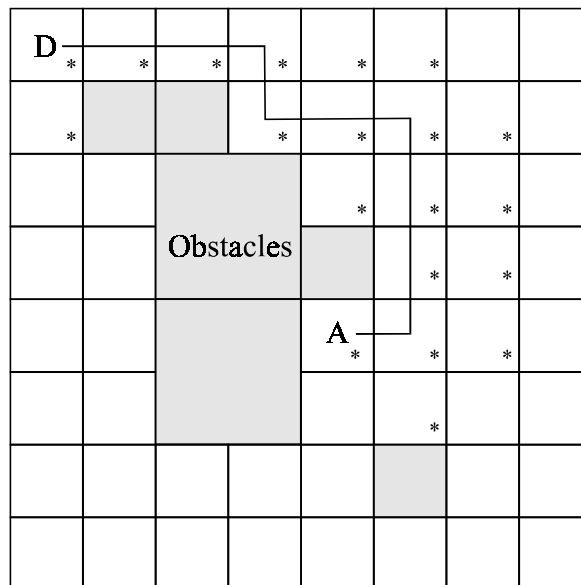


Figure 153 : Recherche d'une trajectoire par une méthode heuristique

Habituellement, le critère utilisé est la distance entre la configuration courante et

l'extrémité de la trajectoire. Dans le cas d'une trajectoire discrète de changement de mode de fonctionnement, ce critère ne peut pas être utilisé car la trajectoire ainsi décrite s'éloigne de la configuration courante (l'origine) pour y revenir (l'extrémité). Une solution intermédiaire serait de placer une configuration intermédiaire qui serait placée sur une configuration singulière. Cependant, il n'est pas facile de trouver facilement cette configuration sachant que la méthode optimale consisterait à minimiser la longueur de la trajectoire.