HAL
open science

Representations p-adiques et equations differentielles

Laurent Berger

To cite this version:

Laurent Berger. Representations p-adiques et equations differentielles. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT : . tel-00003571

HAL Id: tel-00003571

https://theses.hal.science/tel-00003571v1

Submitted on 14 Oct 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de

l'UNIVERSITÉ PARIS 6

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

présentée par

Laurent BERGER

pour obtenir le grade de

Docteur de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

soutenue le 17 Mai 2001 devant le jury composé de :

M. Pierre Berthelot	
M. Bruno Chiarellotto	Rapporteur
M. Gilles Christol	
M. Pierre Colmez	Directeur
M. Jean-Marc Fontaine	Rapporteur
M. Jean-Pierre Wintenberger	

Laurent Berger

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Laurent Berger
MS 050 Brandeis University, PO Box 549110, Waltham MA 02454-9110.
E-mail : `laurent@brandeis.edu`
Url : `http://www.unet.brandeis.edu/~laurent`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11Gxx, 11Sxx, 12H25, 13K05, 14F30.

***Mots clefs*. —** P´eriodes p-adiques, repr´esentations p-adiques ordinaires, semi-stables, cristallines, de de Rham, monodromie p-adique, ´equations diff´erentielles p-adiques, isocristaux surconvergents, th´eorie de Hodge p-adique.

17 Mai 2001

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Laurent Berger

Résumé. — Dans cet article, on montre comment associer à toute repr´esentation p-adique V, via la th´eorie des (φ, Γ_K)-modules de Fontaine, une ´equation diff´erentielle p-adique $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, c'est-à-dire un module à connexion sur l'anneau de Robba.

Cette construction permet de faire le lien entre la th´eorie des (φ, Γ_K)-modules et la th´eorie de Hodge p-adique. On montre par exemple comment construire $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ directement à partir de $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, ce qui permet de reconnaître les repr´esentations semi-stables ou cristallines ; la connexion est alors unipotente ou triviale. Alli´ee à des techniques de la th´eorie des ´equations diff´erentielles p-adiques, l'´etude du module $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ permet en outre de donner une nouvelle d´emonstration d'un th´eorème de Sen caract´erisant les repr´esentations $\mathbf{C}_p$-admissibles.

Finalement on peut utiliser les r´esultats pr´ec´edents pour ´etendre au cas d'un corps r´esiduel parfait quelconque des r´esultats de Hyodo ($H^1_g = H^1_{st}$), de Perrin-Riou (sur la semi-stabilit´e des repr´esentations ordinaires), de Colmez (les repr´esentations absolument cristallines sont de hauteur finie), et de Bloch et Kato (si $r \gg 0$, alors l'exponentielle de Bloch-Kato $\exp_{V(r)}$ est un isomorphisme) dont les d´emonstrations (dans le cas d'un corps r´esiduel fini) reposaient sur des consid´erations de dimensions de groupes de cohomologie galoisienne.

***Abstract* (p-adic representations and differential equations).** — In this paper, we associate to every p-adic representation V a p-adic differential equation $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, that is to say a module with a connection over the Robba ring. We do this via the theory of Fontaine's (φ, Γ_K)-modules.

This construction enables us to relate the theory of (φ, Γ_K)-modules to p-adic Hodge theory. We explain how to construct $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ and $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ from $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, which allows us to recognize semi-stable or crystalline representations; the connection is then either unipotent or trivial. Along with techniques from the theory of p-adic differential equations, the study of $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ allows us to give a new proof of Sen's theorem characterizing $\mathbf{C}_p$-admissible representations.

Finally we can use the previous results to extend to the case of arbitrary perfect residue fields some results of Hyodo ($H^1_g = H^1_{st}$), of Perrin-Riou (the semi-stability of ordinary representations), of Colmez (absolutely crystalline representations are of finite height), and of Bloch and Kato (if $r \gg 0$, then Bloch-Kato's exponential $\exp_{V(r)}$ is an isomorphism), whose proofs (for a finite residue field) relied on the study of dimensions of Galois cohomology groups.

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier Pierre Colmez, qui a dirig´e ce travail, pour avoir partag´e avec moi ses id´ees et ses connaissances, et pour m'avoir consacr´e beaucoup de son temps et de son ´energie. Son cours sur les fonctions L p-adiques a ´et´e mon introduction aux anneaux de p´eriodes, et m'a donn´e envie d'explorer cette voie. Je suis très heureux qu'il ait accept´e de diriger mon m´emoire de DEA, puis ma thèse, sur ce sujet.

Durant mes recherches, Gilles Christol a r´epondu à mes nombreuses questions sur les ´equations diff´erentielles p-adiques ; je suis content qu'en plus, il fasse partie de mon jury, et je l'en remercie. Bruno Chiarellotto et Jean-Marc Fontaine se sont acquitt´es d'une tâche peu s´eduisante : ils ont accept´e d'être les rapporteurs de ce travail, et de plus de faire partie du jury. Je leur en suis très reconnaissant. Pierre Berthelot a r´epondu à mes questions sur la cohomologie rigide ; je le remercie, ainsi que Jean-Pierre Wintenberger, d'être membre de mon jury.

Pendant les trois ans qu'il m'a fallu pour mener à bien ce travail, j'ai ´et´e soutenu financièrement par plusieurs institutions, que je remercie de leur accueil :

(1) L'École Normale Sup´erieure de la rue d'Ulm, où j'´etais dans ma dernière ann´ee de scolarit´e ;
(2) l'University of Massachusetts, Amherst, dont le d´epartement de math´ematiques, dirig´e par Don St. Mary, m'a très gentiment accueilli pendant une ann´ee ;
(3) le d´epartement de math´ematiques de Brandeis University, dirig´e par Gerald Schwarz, où je vais rester faire ma coop´eration en travaillant avec Fred Diamond.

Je voudrais aussi remercier pour leur soutien et leur aide : Jeff Achter, Christophe Breuil, Clifton Cunningham, Fred Diamond, Adrian Iovita, Peter Norman et Glenn Stevens.

Il en va de même pour ma famille et mes amis, et bien sûr pour Mirela.

Enfin, je tiens particulièrement à remercier Nicolas Tosel, qui m'a appris tant de math´ematiques.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements vii

Introduction 11

0.1. G´en´eralit´es et notations 11

0.2. Th´eorie de Hodge p-adique et (φ, Γ_K)-modules 12

0.3. Structures diff´erentielles sur les (φ, Γ_K)-modules 13

0.4. Extensions de repr´esentations semi-stables 14

0.5. Plan de l'article 15

I. Rappels et notations 17

I.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et ses sous-anneaux 17

I.2. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et ses sous-anneaux 19

I.3. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}$ et ses sous-anneaux 20

II. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ 23

II.1. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ 23

II.2. Plongement des $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ dans $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ 27

II.3. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ 29

II.4. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log}$ et leurs plongements dans $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ 31

II.5. Action de H_K sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ 33

II.6. L'anneau $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 34

III. Application aux représentations p-adiques 37

III.1. R´egularisation par le Frobenius 37

III.2. Repr´esentations semi-stables 38

III.3. Repr´esentations cristallines et repr´esentations de hauteur finie 41

IV. Propriétés de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ 45

IV.1. L'op´erateur ∇ 45

IV.2. Inversion de $1-\gamma_K$ 47

IV.3. Dualit´e dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 49

V. Structures différentielles sur les (φ,Γ_K)-modules 51

V.1. L'op´erateur ∇_V 51

V.2. Application aux repr´esentations semi-stables 53

V.3. Les modules $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ 54

V.4. Repr´esentations $\mathbf{C}_p$-admissibles 56

VI. Extensions de représentations semi-stables 61

VI.1. Cohomologie galoisienne et (φ,Γ_K)-modules 62

VI.2. R´eduction au cas où k est alg´ebriquement clos 63

VI.3. Semi-stabilit´e des repr´esentations ordinaires 65

VI.4. Extensions de repr´esentations semi-stables 66

VI.5. L'exponentielle de Bloch-Kato 70

Diagramme des anneaux de périodes 73

Index des notations 75

Bibliographie 77

INTRODUCTION

0.1. Généralités et notations

Dans tout cet article k est un corps parfait de caract´eristique p, et F est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. Soit K une extension finie totalement ramifi´ee de F, ce qui fait que le corps r´esiduel de $\mathcal{O}_K$ s'identifie à k et que le corps K est complet pour la valuation v_p qui ´etend celle de F. Soit $\mathbf{C}_p$ le compl´et´e d'une clôture alg´ebrique $\overline{K}$ de K. On s'int´eressera aux repr´esentations p-adiques V du groupe de Galois absolu $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ c'est-à-dire aux $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie d munis d'une action lin´eaire et continue de G_K.

J-M. Fontaine a construit dans [**20**] une ´equivalence de cat´egories $V \mapsto \mathbf{D}(V)$ entre la cat´egorie de toutes les repr´esentations de G_K et la cat´egorie des (φ, Γ_K)-modules ´etales (le foncteur inverse est not´e $D \mapsto \mathbf{V}(D)$). Un (φ, Γ_K)-module est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local $\mathbf{B}_K$ de dimension 2 muni d'une action semi-lin´eaire d'un Frobenius φ et d'une action semi-lin´eaire de Γ_K commutant à celle de φ. Un tel module est ´etale si φ est de pente 0 (« unit root »). Le corps $\mathbf{B}_K$ est isomorphe (non canoniquement) à l'anneau des s´eries $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ en l'ind´etermin´ee T où la suite a_k est une suite born´ee d'´el´ements de F et $\lim_{k\to+\infty} a_{-k} = 0$. L'action de φ et de Γ_K est assez compliqu´ee en g´en´eral mais si K est non-ramifi´e ($K = F$), alors on peut choisir T de telle sorte que $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$ (dans le corps du texte, T est ´egal à un ´el´ement π_K construit via la th´eorie du corps des normes et l'action de φ et de Γ_K provient d'une action naturelle ; si $K = F$, on a $\pi_K = \pi = [\varepsilon] - 1$).

L'anneau $\mathbf{B}_K$ est assez d´esagr´eable mais il contient l'anneau $\mathbf{B}_K^\dagger$ des s´eries surconvergentes, c'est-à-dire l'anneau des s´eries $A(T) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ où la suite a_k est une suite born´ee d'´el´ements de F et il existe $r < 1$ tel que la s´erie $A(T)$ converge sur une couronne non-vide du type $\{z \in \mathbf{C}_p, r < |z| < 1\}$. Le th´eorème principal de [**6**] est que tout (φ, Γ_K)-module ´etale provient

par extension des scalaires d'un « module surconvergent » ; plus pr´ecis´ement on a le r´esultat suivant

Théorème 0.1. — *Si D est un (φ, Γ_K)-module étale, alors l'ensemble des sous-$\mathbf{B}_K^\dagger$-modules libres de type fini stables par φ et Γ_K admet un plus grand élément $D^\dagger$ et on a $D = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger$.*

Le fait que l'ensemble des sous-$\mathbf{B}_K^\dagger$-modules libres de type fini stables par φ et Γ_K admet un plus grand ´el´ement est un r´esultat de Cherbonnier [**5**], et moyennant ce r´esultat, le th´eorème est ´enonc´e dans [**6**] de manière duale (via le foncteur $D \mapsto \mathbf{V}(D)$) sous la forme « toute repr´esentation de G_K est surconvergente ». Grâce à ce r´esultat, on va pouvoir tensoriser au-dessus de $\mathbf{B}_K^\dagger$ avec l'anneau de Robba $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$ (apparaissant dans les th´eorie des ´equations diff´erentielles p-adiques), constitu´e des s´eries $A(T) \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ telles que $a_k \in F$ et qu'il existe $r < 1$ tel que la s´erie $A(T)$ converge sur une couronne non-vide du type $\{z \in \mathbf{C}_p, r < |z| < 1\}$ (sans condition de croissance au voisinage de $\{z \in \mathbf{C}_p, |z| = 1\}$). Ceci va nous permettre, si V est une repr´esentation p-adique de G_K, d'une part de retrouver les invariants $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ associ´es à V par la th´eorie de Hodge p-adique et, d'autre part, en utilisant l'action infinit´esimale de Γ_K, d'associer à V un module à connexion $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$ sur l'anneau de Robba $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$. Cet article rassemble un certain nombre de r´esultats que l'on peut obtenir via l'´etude de ce module à connexion : caract´erisation des repr´esentations absolument cristallines, semi-stables, de de Rham et $\mathbf{C}_p$-admissibles et applications à la conjecture de « monodromie p-adique ».

0.2. Théorie de Hodge p-adique et (φ, Γ_K)-modules

Soient $\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger[\log(T)]$ (anneau muni des actions ´evidentes de φ et de Γ_K), $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\log}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\log,K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$. Si V est une repr´esentation p-adique de G_K, soient $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ les modules associ´es à V par la th´eorie de Hodge p-adique. Le premier r´esultat est que l'on peut retrouver ces modules

Théorème 0.2. — *Si V est une représentation p-adique de G_K, alors*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{D}_{\log}^\dagger(V)[1/t])^{\Gamma_K} \quad \textit{et} \quad \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)[1/t])^{\Gamma_K}.$$

De plus :

(1) *si V est une représentation semi-stable, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t]$$

(2) *si V est une représentation cristalline, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$$

Dans l'´enonc´e ci-dessus le t qui apparaît est un ´el´ement de $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ sur lequel Γ_K agit via $\gamma(t) = \chi(\gamma)t$ et tel que $\varphi(t) = pt$; si $K = F$, on a $t = \log(1+T)$.

Les modules $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ sont naturellement munis d'un Frobenius φ, d'un op´erateur de monodromie N et d'une filtration. Le th´eorème pr´ec´edent permet de retrouver les actions de φ et N, mais la recette permettant de retrouver la filtration est suffisament peu ragoûtante pour ne pas être explicit´ee dans cet article.

Un corollaire de ce th´eorème est le r´esultat suivant :

Corollaire 0.3. — *Si V est une représentation cristalline de G_F, alors V est de hauteur finie.*

Ce r´esultat avait ´et´e conjectur´e par Fontaine (voir [**20, 40**]) et d´emontr´e par Colmez de manière très d´etourn´ee (la d´emonstration utilisait deux versions [**11, 7**] de la d´emonstration de la loi de r´eciprocit´e conjectur´ee par Perrin-Riou [**29**]) dans le cas d'un corps r´esiduel fini. La d´emonstration donn´ee dans cet article utilise à la place le th´eorème ci-dessus et un r´esultat d'analyse p-adique d´emontr´e par Kedlaya [**25**]. Signalons que Benois [**2**] a par ailleurs d´emontr´e la loi de r´eciprocit´e de Perrin-Riou pour les repr´esentations cristallines de hauteur finie ce qui, combin´e avec le r´esultat ci-dessus, fournit une d´emonstration de cette loi de r´eciprocit´e dans le cas g´en´eral, n'utilisant que la th´eorie des (φ_K, Γ_K)-modules, r´ealisant ainsi un programme de Fontaine.

0.3. Structures différentielles sur les (φ, Γ_K)-modules

Soit γ un ´el´ement de Γ_K assez proche de 1. La s´erie qui d´efinit $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ converge vers un op´erateur diff´erentiel ∇ ; si $K = F$ on a $\nabla = \log(1+T)(1+T)\frac{d}{dT}$. Si $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ est l'anneau des s´eries convergeant sur la couronne $\{p^{-1/e_K r_n} \leqslant |z| < 1\}$ (où $e_K = [K_\infty : F_\infty]$ et $r_n = (p-1)p^{n-1}$), alors ∇ stabilise $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ pour n assez grand et on dispose de plus de morphismes injectifs $\iota_n : \mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K} \to K_n[[t]]$ qui v´erifient $\iota_n \circ \nabla = t\frac{d}{dt} \circ \iota_n$.

Ce qui pr´ecède correspond au cas de la repr´esentation triviale et, plus g´en´eralement, si V est une repr´esentation p-adique de G_K et si γ est un ´el´ement de Γ_K assez proche de 1, la s´erie qui d´efinit $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ converge vers un op´erateur diff´erentiel ∇_V de $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ au-dessus de $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ muni de ∇. Plus pr´ecis´ement, si n est assez grand, ∇_V stabilise le sous-module $\mathbf{D}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}(V)$

ce qui permet d'associer à toute repr´esentation p-adique de G_K un module diff´erentiel sur une couronne.

En localisant en $\zeta - 1$ (où ζ est un racine primitive d'ordre p^n de l'unit´e), ce qui revient à consid´erer l'application $\iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}(V) \to (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$, on retombe sur le module diff´erentiel consid´er´e par Fontaine dans [**21**, chap. 3], ce qui permet en particulier de retrouver le module $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ à partir du noyau de cette connexion. En utilisant l'application $\theta : \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \mathbf{C}_p$, on retombe sur le module de Sen ; la connexion devenant un op´erateur K_n-lin´eaire dont les valeurs propres sont les « poids de Hodge-Tate g´en´eralis´es ». En particulier, V est $\mathbf{C}_p$-admissible (ce qui ´equivaut à V de Hodge-Tate et tous ses poids de Hodge-Tate sont nuls) si et seulement si cet op´erateur est nul. Utilisant ce fait et des techniques d'´equations diff´erentielles p-adiques (plus pr´ecis´ement un th´eorème de Tsuzuki [**8, 39**]) on obtient une d´emonstration du r´esultat suivant, dû à Sen [**33**], qui caract´erise les repr´esentations $\mathbf{C}_p$-admissibles :

Théorème 0.4. — *Si V une représentation p-adique de G_K, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *V est $\mathbf{C}_p$-admissible ;*
(2) *le sous-groupe d'inertie de G_K agit sur V à travers un quotient fini.*

Finalement, il sort essentiellement du th´eorème 0.2 que

Théorème 0.5. — *Soit V une représentation p-adique, alors il existe n tel que la restriction de V à $G_{K(\mu_{p^n})}$ est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si ∇_V est une connexion unipotente (respectivement triviale) sur $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$.*

0.4. Extensions de représentations semi-stables

Si l'on combine les diff´erentes techniques ´evoqu´ees ci-dessus et le calcul de la cohomologie galoisienne des repr´esentations p-adiques [**22, 7**] on peut d´emontrer les deux r´esultats suivants :

Théorème 0.6. — (1) *Toute représentation ordinaire de G_K est semi-stable ;*
(2) *une extension de deux représentations semi-stables qui est de de Rham est elle-même semi-stable (« $H^1_g = H^1_{st}$ »).*

Ces deux r´esultats ´etaient connus dans le cas d'un corps r´esiduel fini, où on peut les d´eduire de calculs de dimension de groupes de cohomologie galoisienne (ce qui n'est plus possible si le corps r´esiduel n'est pas fini).

Le premier avait ´et´e d´emontr´e dans ce cas là par Perrin-Riou [**28, 29, 30**] comme corollaire des calculs de Bloch et Kato [**4**] et le deuxième par Hyodo [**23, 27**]. Le même genre de m´ethodes permet de montrer que si V est une repr´esentation semi-stable de G_K, alors quand $r \gg 0$, l'exponentielle de Bloch-Kato $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \to H^1(K, V(r))$ est un isomorphisme, r´esultat d´emontr´e par Bloch et Kato dans le cas d'un corps r´esiduel fini via des arguments de dimension.

Mentionnons que l'on conjecture que toute repr´esentation de de Rham est potentiellement semi-stable (conjecture de « monodromie p-adique » [**19**]) ce qui a ´et´e d´emontr´e par Fontaine (non publi´e) en dimension 2. Le (2) du th´eorème 0.6 permet de ramener cette conjecture au cas irr´eductible. On peut esp´erer que les techniques d´evelopp´ees dans ce texte permettront de ramener cette conjecture aux conjectures du même nom de la th´eorie des ´equations diff´erentielles p-adiques [**16, 25, 38, 1**].

0.5. Plan de l'article

Cet article comporte six chapitres (§) subdivis´es en n°. Le premier § est consacr´e à des rappels sur les repr´esentations p-adiques et les anneaux de Fontaine. Dans le deuxième on donne la construction des anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$, qui sont fondamentaux pour ce qui suit. On donne dans le troisième § une application de ces constructions : comment retrouver $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ à partir du (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}(V)$. Le quatrième § est consacr´e à l'´etude de la connexion ∇ sur l'anneau $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, ce qui permet de d´efinir dans le cinquième § l'´equation diff´erentielle associ´ee à une repr´esentation p-adique ; on donne des applications à la th´eorie de Fontaine et à la th´eorie de Sen. Enfin dans le sixième § on montre que les constructions pr´ec´edentes permettent de d´emontrer que certaines repr´esentations sont semi-stables.

Le th´eorème 0.2 est la r´eunion du th´eorème III.6 et de la proposition III.7. Le corollaire 0.3 est l'objet du th´eorème III.9, le th´eorème 0.4 correspond à la proposition V.11 et le th´eorème 0.5 à la proposition V.6. Le premier point de 0.6 est d´emontr´e dans le n° VI.3 et le deuxième point dans le n° VI.4. Cet article comporte deux appendices pour le rendre plus lisible : un diagramme des anneaux de p´eriodes, et un index des notations.

CHAPITRE I

RAPPELS ET NOTATIONS

Ce § est entièrement constitu´e de rappels sur la th´eorie des repr´esentations p-adiques. On se reportera à [**6, 7, 11, 18, 19, 20**] ou aussi [**14**] pour la d´emonstration des faits qui sont rappel´es ici. Pour ce qui est de la th´eorie des ´equations diff´erentielles p-adiques et des isocristaux surconvergents, le lecteur pourra se reporter à [**9, 10, 16, 25, 38, 39**].

La principale strat´egie pour ´etudier les repr´esentations p-adiques d'un groupe G est de construire des $\mathbf{Q}_p$-algèbres topologiques B munies d'une action du groupe G et de structures suppl´ementaires de telle manière que si V est une repr´esentation p-adique, alors $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ est un B^G-module qui h´erite de ces structures, et que le foncteur qui à V associe $D_B(V)$ fournisse des invariants int´eressants de V. On dit qu'une repr´esentation p-adique V de G est *B-admissible* si on a $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq B^d$ en tant que G-modules.

I.1. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et ses sous-anneaux

Soit k un corps parfait de caract´eristique p, F le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur k et K une extension finie totalement ramifi´ee de F. Soit $\overline{F}$ une clôture alg´ebrique de F et $\mathbf{C}_p = \widehat{\overline{F}}$ sa compl´etion p-adique. On pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, c'est aussi le groupe des automorphismes continus K-lin´eaires de $\mathbf{C}_p$. Le corps $\mathbf{C}_p$ est un corps complet alg´ebriquement clos de corps r´esiduel $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} = \overline{k}$. On pose aussi $K_n = K(\mu_{p^n})$ et K_∞ est d´efini comme ´etant la r´eunion des K_n. Soit H_K le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$ le groupe de Galois de K_∞/K qui s'identifie via le caractère cyclotomique à un sous groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$.

Soient

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbf{C}_p = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots) \mid (x^{(i+1)})^p = x^{(i)}\}$$

et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$. Si $x = (x^{(i)})$ et $y = (y^{(i)})$ sont deux ´el´ements de $\widetilde{\mathbf{E}}$, alors on d´efinit leur somme $x + y$ et leur produit xy par :

$$(x+y)^{(i)} = \lim_{j\to\infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j} \text{ et } (xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}$$

ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{E}}$ un corps de caract´eristique p dont on peut montrer qu'il est alg´ebriquement clos. Si $x = (x^{(n)})_{n\geqslant 0} \in \widetilde{\mathbf{E}}$ soit $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$. C'est une valuation sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ pour laquelle celui-ci est complet ; l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$ est $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et l'id´eal maximal est $\mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}} = \{x \in \widetilde{\mathbf{E}}, v_{\mathbf{E}}(x) > 0\}$. Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ l'anneau $W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[1/p] = \{\sum_{k\gg -\infty} p^k[x_k],\ x_k \in \widetilde{\mathbf{E}}^+\}$ où $[x] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est le relèvement de Teichmüller de $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. Cet anneau est muni d'une application $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}^+ \to \mathbf{C}_p$ d´efinie de la manière suivante :

$$\theta\left(\sum_{k\geqslant 0} p^k[x_k]\right) = \sum_{k\geqslant 0} p^k x_k^{(0)}$$

Soient $\varepsilon = (\varepsilon^{(i)}) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ avec $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, $\pi = [\varepsilon] - 1$, $\pi_n = [\varepsilon^{p^{-n}}] - 1$, $\omega = \pi/\pi_1$ et $q = \varphi(\omega) = \varphi(\pi)/\pi$. Alors $\ker(\theta)$ est l'id´eal principal engendr´e par ω. De même soit $\widetilde{p} = (p^{(n)}) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ avec $p^{(0)} = p$, alors $\ker(\theta)$ est aussi engendr´e par $[\widetilde{p}] - p$.

Remarquons que ε est un ´el´ement de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ tel que $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon - 1) = p/(p-1)$. On pose $\mathbf{E}_F = k((\varepsilon - 1))$ et on d´efinit $\mathbf{E}$ comme ´etant la clôture s´eparable de $\mathbf{E}_F$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ ainsi que $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E} \cap \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\mathfrak{m}_{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cap \mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ l'anneau des entiers et l'id´eal maximal de $\mathbf{E}$. On renvoie à [**7**, p. 243] pour une application de la th´eorie du corps de normes [**42**] à la construction d'une application ι_K : $\varprojlim \mathcal{O}_{K_n} \to \widetilde{\mathbf{E}}^+$ de la limite projective des $\mathcal{O}_{K_n}$ relativement aux applications normes dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ dont la principale propri´et´e est la suivante :

Proposition I.1. — *L'application ι_K induit une bijection de $\varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$ sur l'anneau des entiers $\mathbf{E}_K^+$ de $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{H_K}$.*

On remarquera que la proposition ci-dessus est ´enonc´ee dans [**7**, I.1.1] avec la restriction suppl´ementaire que $K/\mathbf{Q}_p$ est finie mais ceci n'est pas n´ecessaire (en revanche il est important que K/F soit finie).

De plus on peut montrer de la même manière que $\mathbf{E}_K$ est une extension finie s´eparable de $\mathbf{E}_F$ de degr´e $e_K = [K_\infty : F_\infty]$ et de groupe de Galois H_F/H_K et que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K)$ s'identifie à H_K. Enfin $\mathbf{E}_K^+$ est un anneau de valuation discrète de la forme $k[[\overline{\pi}_K]]$ où $\overline{\pi}_K = \iota_K(\varpi_K)$ est l'image d'une suite ϖ_K d'uniformisantes compatibles pour les normes des $\mathcal{O}_{K_n}$.

I.2. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et ses sous-anneaux

L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est d´efini comme ´etant le compl´et´e pour la topologie $\ker(\theta)$-adique de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ (on remarquera que $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est complet pour cette topologie) :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_{n \geqslant 0} \widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker(\theta)^n)$$

c'est un anneau de valuation discrète, d'id´eal maximal $\ker(\theta)$; la s´erie qui d´efinit $\log([\varepsilon])$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un ´el´ement t, qui est un g´en´erateur de l'id´eal maximal, ce qui fait que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$ est un corps, muni d'une action de G_F et d'une filtration d´efinie par $\mathrm{Fil}^i(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) = t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour $i \in \mathbf{Z}$.

On dit qu'une repr´esentation V de G_K est de de Rham si elle est $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-admissible ce qui ´equivaut à ce que le K-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$.

L'anneau $\mathbf{B}_{\max}^+$ est d´efini comme ´etant

$$\mathbf{B}_{\max}^+ = \{\sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{\omega^n}{p^n} \text{ où } a_n \in \widetilde{\mathbf{B}}^+ \text{ est une suite qui tend vers } 0\}$$

et $\mathbf{B}_{\max} = \mathbf{B}_{\max}^+[1/t]$. On peut d'ailleurs remplacer ω par n'importe quel g´en´erateur de $\ker(\theta)$, par exemple $[\widetilde{p}] - p$. Cet anneau se plonge canoniquement dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ (les s´eries d´efinissant ses ´el´ements convergent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$) et en particulier il est muni de l'action de Galois et de la filtration induites par celles de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, ainsi que d'un Frobenius φ, qui ´etend l'application $\varphi : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}^+$ d´eduite de $x \mapsto x^p$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. On remarquera que φ ne se prolonge pas par continuit´e à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On pose $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = \cap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$ (on remarquera que l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ est l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+$ de [**11**]). La notation s'explique par le fait que l'on a un isomorphisme [**3**] $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ = H^0_{\mathrm{rig}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}, W(k))$.

On dit qu'une repr´esentation V de G_K est cristalline si elle est $\mathbf{B}_{\max}$-admissible ou, ce qui revient au même, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[1/t]$-admissible ; ceci ´equivaut à ce que le F-espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. Alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un Frobenius et d'une filtration induits par ceux de $\mathbf{B}_{\max}$, et $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = K \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ce qui fait qu'une repr´esentation cristalline est aussi de de Rham.

La s´erie qui d´efinit $\log(\overline{\pi}^{(0)}) + \log([\overline{\pi}]/\overline{\pi}^{(0)})$ (après avoir choisi $\log(p)$ et où $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$) converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un ´el´ement $\log[\overline{\pi}]$ qui est transcendant sur $\mathrm{Frac}\,\mathbf{B}_{\max}^+$ et on pose $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} = \mathbf{B}_{\max}[\log[\overline{\pi}]]$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[\log[\overline{\pi}]]$. On dit qu'une repr´esentation V est semi-stable si elle est $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$-admissible ou, ce qui revient au même, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+[1/t]$-admissible ; ceci ´equivaut à ce que le

F-espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. Alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est muni d'un Frobenius, d'une filtration et d'un op´erateur de monodromie $N = -d/d \log[\tilde{\pi}]$ qui v´erifie $N\varphi = p\varphi N$ (voir [**37**] pour une justification du signe « $-$ »), et $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = K \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$. De plus V est cristalline si et seulement si elle est semi-stable et $N = 0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$. On utilisera aussi le F-espace vectoriel $\mathbf{D}^+_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$.

I.3. L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}$ et ses sous-anneaux

Soit $\widetilde{\mathbf{A}}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[1/p]$. Soit $\mathbf{A}_F$ le compl´et´e de $\mathcal{O}_F[\pi, \pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ pour la topologie de celui-ci, c'est aussi le compl´et´e p-adique de $\mathcal{O}_F[[\pi]][\pi^{-1}]$. C'est un anneau de valuation discrète complet dont le corps r´esiduel est $\mathbf{E}_F$. Soit $\mathbf{B}$ le compl´et´e de l'extension maximale non ramifi´ee de $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[1/p]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$. On d´efinit alors $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^+$. Ces anneaux sont munis d'une action de Galois et d'un Frobenius d´eduits de ceux de $\widetilde{\mathbf{E}}$. On pose $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{H_K}$ et $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[1/p]$. Quand $K = F$ les deux d´efinitions coïncident.

Si V est une repr´esentation p-adique de G_K soit $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$. On sait [**20**] que $\mathbf{D}(V)$ est un $\mathbf{B}_K$-espace vectoriel de dimension $d = \dim(V)$ muni d'un Frobenius et d'une action r´esiduelle de Γ_K qui commutent (c'est un (φ, Γ_K) module) et que l'on peut r´ecup´erer V grâce à la formule $V = (\mathbf{D}(V) \otimes_{\mathbf{B}_K} \mathbf{B})^{\varphi=1}$.

Le corps $\mathbf{B}$ est une extension totalement ins´eparable (« radicielle ») de degr´e p de $\varphi(\mathbf{B})$. Le Frobenius $\varphi : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ est injectif, mais n'est donc pas surjectif, et il est utile d'en d´efinir un inverse à gauche par la formule : $\psi(x) = \varphi^{-1}(p^{-1} \operatorname{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x))$.

Tout ´el´ement de $\widetilde{\mathbf{B}}$ peut s'´ecrire de manière unique sous la forme $\sum_{k \gg -\infty} p^k[x_k]$ où les x_k sont des ´el´ements de $\widetilde{\mathbf{E}}$. On d´efinit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,0} = \widetilde{\mathbf{B}}^+$ et, si $r > 0$, on pose

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} = \{x \in \widetilde{\mathbf{B}}, \lim_{k \to +\infty} v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{pr}{p-1}k = +\infty\}$$

Si $r \in \mathbf{R}$ on d´efinit $n(r)$ comme ´etant le plus petit entier n tel que $r \geqslant_n r = p^{n-1}(p-1)$. La s´erie $\sum_{k \gg -\infty} p^k[x_k]$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ si et seulement si la s´erie $\sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$ converge dans $\mathbf{C}_p$. On en d´eduit notamment pour n entier tel que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$ une application injective $\iota_n = \varphi^{-n} : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ qui envoie $\sum_{k \gg -\infty} p^k[x_k]$ sur la somme de la s´erie $\sum_{k \gg -\infty} p^k[x_k^{p^{-n}}]$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Soient $\mathbf{B}^{\dagger,r} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \cup_{r \geqslant 0} \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ et $\mathbf{B}^{\dagger} = \cup_{r \geqslant 0} \mathbf{B}^{\dagger,r}$.

Enfin $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ est l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ tels qu'en plus, $v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{pr}{p-1}k \geqslant 0$, $\mathbf{A}^{\dagger,r} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r} \cap \mathbf{A}$, et $\mathbf{A}^{\dagger} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger} \cap \mathbf{A}$ où $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$.

Remarque I.2. — La notation adopt´ee ici diffère un peu de celle de [**6, 7**]. Ce que nous appelons $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ (repectivement $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}$) y est not´e $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r-}$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$).

On dit qu'une repr´esentation p-adique V est surconvergente si $\mathbf{D}(V)$ possède une base sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ constitu´ee d'´el´ements de $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$. Rappelons le r´esultat principal [**6, 7**] à ce sujet :

Théorème I.3. — *Toute représentation V de G_K est surconvergente, c'est-à-dire qu'il existe $r(V)$ tel que $\mathbf{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r(V)}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r(V)}(V)$. De plus il existe $s(V)$ tel que $\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^{\dagger,s(V)}(V)$.*

Si on applique le deuxième point à la repr´esentation triviale, on en d´eduit par exemple qu'il existe $s(\mathbf{Q}_p)$ tel que $\mathbf{B}_K^{\psi=1} \subset \mathbf{B}_K^{\dagger,s(\mathbf{Q}_p)}$. On a d'autre part une description assez pr´ecise des anneaux $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$, comme le montre la proposition suivante :

Proposition I.4. — *Il existe $n(K) \in \mathbf{N}$ et $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n(K)}}$ dont l'image modulo p est une uniformisante $\overline{\pi}_K$ de $\mathbf{E}_K$. Si $r \geqslant r_{n(K)}$, alors tout élément $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ peut s'écrire $x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$ où $a_k \in F$ et où la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ est holomorphe et bornée sur la couronne ouverte $\{p^{-1/e_K r} < |T| < 1\}$ et converge sur le bord intérieur.*

Afin de montrer le th´eorème I.3 un ingr´edient important est la construction d'applications de « d´ecompl´etion » R_m que nous allons d´ecrire plus en d´etail. On a des inclusions $\mathbf{B}_K^{\dagger,r} \subset \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$ et pour $m \geqslant 1$ $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger,r}) \subset \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$, qui v´erifient [**6**, III.2] :

Proposition I.5. — *Ces inclusions admettent des sections continues $R_0 : \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ et pour $m \geqslant 1$ $R_m : \widetilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \to \varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger,r})$. Soit $R_m^* = R_m - R_{m-1}$. Alors il existe $n_0(K)$ tel que si $n \geqslant n_0(K)$, $a \in \mathbf{Z}$, $x \in \pi^a \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r_n}$, alors :*

$$R_0(x) \in \pi^a \mathbf{A}_K^{\dagger,r_n} \quad et \quad R_m^*(x) \in \pi^a \varphi^{-m}((\mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n+m}})^{\psi=0})$$

On a de plus les propriétés suivantes :

(1) $R_0 \circ \varphi^m = \varphi^m \circ R_m$;
(2) *R_m et les R_k^* pour $k \geqslant m+1$ sont $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger})$-linéaires ;*
(3) *si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger}$, alors $x = \lim_{m\to+\infty} R_m(x)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K$.*

CHAPITRE II

LES ANNEAUX $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ ET $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$

Soit $\alpha < 1$ et $\mathcal{B}^{\alpha}_{F}(X)$ l'ensemble des s´eries$\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X^k$ avec $a_k \in F$ une suite born´ee telle que tout $\rho \in [\alpha; 1[$ on ait $\lim_{k\to\pm\infty} |a_k|\rho^k = 0$. Les rappels du § pr´ec´edent montrent que, si $r \in \mathbf{R}$ et $\alpha(K, r) = p^{-1/e_K r}$, l'application $f \mapsto f(\pi_K)$ de $\mathcal{B}^{\alpha(K,r)}_{F}$ dans $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{K}$ est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{H}^{\alpha}_{F}(X)$ l'ensemble des s´eries$\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X^k$ avec $a_k \in F$ et telles que tout $\rho \in [\alpha; 1[$, $\lim_{k\to\pm\infty} |a_k|\rho^k = 0$. Alors $\cup_{\alpha<1}\mathcal{H}^{\alpha}_{F}$ est l'anneau de Robba à coefficients dans F dont il a ´et´e question dans l'introduction. Afin de faire le lien entre repr´esentations p-adiques et ´equations diff´erentielles, on va d´efinir un anneau$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \supset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ tel que $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})^{H_K}$ contienne $\mathcal{H}^{\alpha(K,r)}_{F}(\pi_K)$. Si $f(X) \in \mathcal{H}^{\alpha}_{F}(X)$ et I est un intervalle compact $\subset [\alpha; 1[$, on pose $V_I(f) = \inf v_p(f(z))$, $|z| \in I$. Alors $\mathcal{B}^{\alpha}_{F}(X)$ est muni de la topologie de Fr´echet d´efinie par l'ensemble des $V_I$et son compl´et´e pour cette topologie s'identifie à $\mathcal{H}^{\alpha}_{F}(X)$. Il est donc naturel de chercher $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ sous la forme d'un sous-anneau du compl´et´e d$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ pour une topologie ressemblant à celle qui est d´efinie par les V_I : c'est l'objet de ce §.

II.1. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_I$

Dans toute ce §, r et s sont deux ´el´ements de $\mathbf{N}[1/p] \cup \{+\infty\}$ tels que $r \leqslant s$. Rappelons que pour $n \geqslant 0$ on a pos´e $p_n = (p-1)p^{n-1}$. Dans toute la suite, on notera $[x]^r$ pour $[x^r]$, même si r n'est pas entier. On convient que $p/[\overline{\pi}]^{+\infty} = 1/[\overline{\pi}]$ et que $[\overline{\pi}]^{+\infty}/p = 0$. Soient

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} = \widetilde{\mathbf{A}}^{+}\{\frac{p}{[\overline{\pi}]^r}, \frac{[\overline{\pi}]^s}{p}\} := \widetilde{\mathbf{A}}^{+}\{X, Y\}/([\overline{\pi}]^r X - p,\ pY - [\overline{\pi}]^s,\ XY - [\overline{\pi}]^{s-r})$$

$\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;s]} = \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}[1/p]$ où, si A est un anneau complet pour la topologie p-adique, $A\{X, Y\}$ d´enote la compl´etion p-adique de $A[X, Y]$ c'est-à dire que $A\{X, Y\} = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} X^i Y^j\}$ où a_{ij} est une suite qui tend vers 0 selon le filtre des compl´ementaires des parties finies.

Lemme II.1. — *Soit $A = \widetilde{\mathbf{A}}^{+}\{X, Y\}$ et $I = ([\overline{\pi}]^r X - p,\ pY - [\overline{\pi}]^s,\ XY - [\overline{\pi}]^{s-r})$. Alors*

(1) $I \cap p^n A = p^n I$;
(2) *I est fermé dans A pour la topologie p-adique.*

Démonstration. — Le (2) suit du (1) puisque I est complet pour la topologie p-adique et que le (1) montre qu'une suite d'´el´ements de I qui tend vers 0 dans A tend vers 0 dans I. Montrons donc le (1). Soit $f(X,Y) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} X^i Y^j \in p^n A$ ce qui revient à dire que $p^n | a_{ij}$. Quitte à modifier f par des ´el´ements de $p^n(XY - [\overline{\pi}]^{s-r}) \subset p^n I$ on peut supposer que $f(X,Y) = \sum_i a_i X^i + \sum_j b_j Y^j$ où p^n divise a_i et b_j. Si $f(X,Y) \in I$ c'est que l'on peut ´ecrire $f(X,Y) = a(X,Y)([\overline{\pi}]^r X - p) + b(X,Y)(pY - [\overline{\pi}]^s) + c(X,Y)(XY - [\overline{\pi}]^{s-r})$ et les relations $Y([\overline{\pi}]^r X - p) = [\overline{\pi}]^r (XY - [\overline{\pi}]^{s-r}) - (pY - [\overline{\pi}]^s)$ et $X(pY - [\overline{\pi}]^s) = p(XY - [\overline{\pi}]^{s-r}) - ([\overline{\pi}]^r X - p)[\overline{\pi}]^{s-r}$ montrent que quitte à modifier $c(X,Y)$ on peut supposer que $a(X,Y) = a(X,0)$ et $b(X,Y) = b(0,Y)$. On voit alors que $c(X,Y) = 0$ et donc finalement que $f(X,Y) = a(X)([\overline{\pi}]^r X - p) + b(Y)(pY - [\overline{\pi}]^s)$. Montrons que $a(X) \in p^n A$ (la preuve pour $b(Y)$ est la même). Posons $a(X) = \sum_i c_i X^i$. On a alors $a_0 = -pc_0$ et $a_i = [\overline{\pi}]^r c_{i-1} - pc_i$ ce qui fait si $i \geqslant 0$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$, alors p^n divise $c_{i+j}[\overline{\pi}]^r - pc_{i+j+1}$ et donc aussi $\sum_{j=0}^{n-1} [\overline{\pi}]^{r(n-1-j)} p^j (c_{i+j}[\overline{\pi}]^r - pc_{i+j+1}) = [\overline{\pi}]^{rn} c_i - p^n c_{i+n}$ et donc p^n divise c_i dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. □

Corollaire II.2. — *L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ est séparé pour la topologie p-adique (il est clairement complet). De plus on a une application naturelle surjective $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ dans le complété p-adique de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$ dont le noyau est l'image de l'adhérence de I dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ et donc nul, ce qui fait que $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ s'identifie aussi au complété p-adique de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$.*

Lemme II.3. — *Tout élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ peut s'écrire de la manière suivante :*

$$\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^r}\right)^k a_k + \sum_{k>0} \left(\frac{[\overline{\pi}]^s}{p}\right)^k b_k$$

avec (a_k), (b_k) deux suites de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ qui convergent vers 0 (cette écriture est bien sûr non-unique).

Démonstration. — C'est une cons´equence imm´ediate de la d´efinition. On se contentera de remarquer que

$$\left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^r}\right)^k \cdot \left(\frac{[\overline{\pi}]^s}{p}\right)^\ell = \begin{cases} [\overline{\pi}]^{k(s-r)} \left(\frac{[\overline{\pi}]^s}{p}\right)^{\ell-k} & \text{si } k \leqslant \ell \\ [\overline{\pi}]^{\ell(s-r)} \left(\frac{p}{[\overline{\pi}]^r}\right)^{k-\ell} & \text{si } k \geqslant \ell \end{cases}$$

□

Lemme II.4. — *Si ρ et σ sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ qui vérifient $v_{\mathbf{E}}(\rho) = pr/(p-1)$ et $v_{\mathbf{E}}(\sigma) = ps/(p-1)$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} = \widetilde{\mathbf{A}}^+\{p/[\rho], [\sigma]/p\}$.*

Démonstration. — C'est ´evident. □

Remarquons que si on a $r_1 \leqslant r_2 \leqslant s_2 \leqslant s_1$, alors il y a une inclusion (les deux anneaux en pr´esence sont intègres et ont même corps des fractions) :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^{r_1}}, \frac{[\overline{\pi}]^{s_1}}{p}] \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^{r_2}}, \frac{[\overline{\pi}]^{s_2}}{p}]$$

Lemme II.5. — *Cette inclusion se prolonge en un morphisme $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r_1;s_1]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{[r_2;s_2]}$ qui est toujours injectif.*

Démonstration. — Le morphisme du haut se factorise en $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r_1;s_1]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{[r_1;s_2]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{[r_2;s_2]}$ et on peut donc supposer $r_1 = r_2$ ou $s_1 = s_2$. Supposons par exemple $r_1 = r_2 = r$ (l'autre cas se traite de la même manière). Alors il suffit de montrer que le morphisme compos´e $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s_1]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s_2]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;r]}$ est injectif (tout ceci pour simplifier la notation). On va donc montrer que si $s \geqslant r$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;r]}$ est injectif. Soient $\alpha = [\overline{\alpha}]$ et $\beta = [\overline{\beta}]$ avec $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) = r$ et $v_{\mathbf{E}}(\overline{\beta}) = s - r$ de telle sorte que $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} = \widetilde{\mathbf{A}}\{X, Y\}/(\alpha X - p, pY - \alpha\beta, XY - \beta)$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;r]} = \widetilde{\mathbf{A}}\{X, Y\}/(\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$. Le fait que l'application naturelle $f(X, Y) \mapsto f(X, \beta Y)$ du premier anneau dans le second est injective est ´equivalent au fait que si $f(X, \beta Y) \in (\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$, alors $f(X, \beta Y)$ appartient à l'id´eal de $\widetilde{\mathbf{A}}\{X, \beta Y\}$ engendr´e par $(\alpha X - p, pY\beta - \alpha\beta, XY\beta - \beta)$, ce que nous allons maintenant d´emontrer.

Commençons par remarquer que quitte à modifier $f(X, Y)$ par des ´el´ements de l'id´eal $(\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$ on peut supposer (en remplaçant XY par 1) que $f(X, \beta Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i X^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j \beta^j Y^j$. Supposons que l'on ait $f(X, \beta Y) = a(X, Y)(\alpha X - p) + b(X, Y)(pY - \alpha) + c(X, Y)(XY - 1)$. Les relations $Y(\alpha X - p) = \alpha(XY - 1) - (pY - \alpha)$ et $X(pY - \alpha) = p(XY - 1) - (\alpha X - p)$ montrent que l'on peut supposer, quitte à modifier $c(X, Y)$, que $a(X, Y) = a(X, 0) := a(X)$ et $b(X, Y) = b(0, Y) := b(Y)$. Comme $f(X, \beta Y)$ ne contient pas de terme en XY c'est alors que $c(X, Y) = 0$. On a donc montr´e que $f(X, \beta Y) = a(X)(\alpha X - p) + b(Y)(pY - \alpha)$. Posons $b(Y) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j Y^j$. Pour terminer la d´emonstration il faut montrer que b_j est un multiple de β^{j+1}. Un calcul facile montre que si $j \geqslant 1$, alors $\delta_j \beta^j = (pb_{j-1} - \alpha b_j)$ ce qui fait que β^j divise $pb_{j-1} - \alpha b_j$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et donc que β^{j+1} divise $\sum_{k=0}^{n} p^{n-k}\alpha^k(pb_{j+k} - \alpha b_{j+k+1}) = p^{n+1}b_j - \alpha^{n+1}b_{j+n+1}$. Reste à choisir n assez grand pour que β^{j+1} divise α^{n+1} ce qui montre alors que β^{j+1} divise b_j. □

On utilise ces injections pour d´efinir, si I est un intervalle de $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$: $\widetilde{\mathbf{B}}_I = \cap_{[r;s] \subset I \cap \mathbf{R}} \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$.

Soient $I \subset J$ deux intervalles ferm´es, ce qui fait que $\widetilde{\mathbf{B}}_J \subset \widetilde{\mathbf{B}}_I$, on d´efinit une valuation p-adique V_I sur $\widetilde{\mathbf{B}}_J$ en d´ecidant que $V_I(x) = 0$ si et seulement si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_I - p\widetilde{\mathbf{A}}_I$ et que l'image de V_I est $\mathbf{Z}$. Par d´efinition $\widetilde{\mathbf{B}}_I$ muni de V_I est un espace de Banach p-adique. De plus le compl´et´e de $\widetilde{\mathbf{B}}_J$ pour V_I s'identifie a $\widetilde{\mathbf{B}}_I$.

Remarque II.6. — Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ est un anneau on a notamment $V_I(xy) \geqslant V_I(x) + V_I(y)$.

Le but de cette partie est de d´egager quelques propri´et´es de ces anneaux. Commençons par remarquer que le groupe de Galois G_F agit sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et que cette action s'´etend à l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$ et le stabilise, ce qui fait que l'action de G_F s'´etend par continuit´e à une action par isom´etries sur son compl´et´e p-adique et par suite à tous les $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_I$.

De même le Frobenius φ s'´etend en un morphisme

$$\varphi : \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^r}, \frac{[\overline{\pi}]^s}{p}] \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^{pr}}, \frac{[\overline{\pi}]^{ps}}{p}]$$

et se prolonge donc en une application de $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{pI}$ pour tout I.

Lemme II.7. — *Si $I \subset [r; +\infty]$, alors $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \subset \widetilde{\mathbf{B}}_I$ et si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ s'écrit $x = \sum_{k \gg 0} p^k[x_k]$, alors la valuation*

$$W_I(x) = \inf_{\alpha \in I} \inf_{k \in \mathbf{Z}} k + \frac{p-1}{p\alpha} v_{\mathbf{E}}(x_k)$$

vérifie $V_I(x) = \lfloor W_I(x) \rfloor$ où $\lfloor a \rfloor$ est le plus grand entier $\leqslant a$.

Démonstration. — Le premier point suit de la d´efinition et de plus si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ v´erifie $W_I(x) \geqslant 0$, alors la somme qui le d´efinit converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ ce qui fait que $V_I(x) \geqslant 0$. Reste à montrer que si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_I$, alors $W_I(x) \geqslant 0$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ est le compl´et´e p-adique de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$ il suffit de montrer que $W_I(x) \geqslant 0$ si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$, si $x = p/[\overline{\pi}]^r$ et si $x = [\overline{\pi}]^s/p$ ce qui est clair. Comme $W_I(p) = 1$ on en d´eduit que $\lfloor W_I(\cdot) \rfloor$ est une valuation p-adique dont l'image est $\mathbf{Z}$ et telle que $W_I(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_I$ ce qui fait que $V_I(x) = \lfloor W_I(x) \rfloor$. □

Exemple II.8. — Beaucoup de ces anneaux sont d´ejà connus :

(1) $\widetilde{\mathbf{A}}_{[0;r_0]} = \mathbf{A}^+_{\max}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_0]} = \mathbf{B}^+_{\max}$;
(2) $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;+\infty[}$;
(3) $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}_{[0;+\infty]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;+\infty]}$;
(4) $\widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{[+\infty;+\infty]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{B}}_{[+\infty;+\infty]}$;
(5) $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r} = \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;+\infty]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} = \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$.

Démonstration. — Le (2) est une cons´equence du (1) et du fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}^+_{\max})$. Les (3) et (4) sont ´evidents, et le (5) est contenu dans [**6**, remarque II.1.3]. Reste à montrer le (1) qui suit du fait que par d´efinition $\mathbf{A}^+_{\max} = \widetilde{\mathbf{A}}^+\{[\widetilde{p}]/p - 1\}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{[0;r_0]} = \widetilde{\mathbf{A}}^+\{[\widetilde{p}]/p\}$ (et $A\{X\} = A\{X-1\}$ puisque $A[X] = A[X-1]$). □

Lemme II.9. — *On a $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}/(p) = \widetilde{\mathbf{E}}^+[X, \overline{\pi}^{s-r}X^{-1}]/(\overline{\pi}^s, \overline{\pi}^r X)$. Notamment si $r = s$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;r]}/(p) = \widetilde{\mathbf{E}}^+/(\overline{\pi}^r)[X, X^{-1}]$.*

Démonstration. — Soit $A = \widetilde{\mathbf{A}}^+\{X, Y\}$ et $I = (XY - [\overline{\pi}]^{s-r}, p - X[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s - pY)$ de telle sorte que $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ s'identifie à A/I et donc que $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}/(p) = (A/I)/(p)$. On a une suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ et la multiplication par p induit un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & A/I \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & I/p \arrow[r] & A/p \arrow[r] & (A/I)/p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et comme A/I est sans p-torsion, le lemme du serpent montre que $(A/I)/p$ s'identifie au quotient du A/p par l'image de I dans ce dernier. Dans notre situation on a $A/p = \widetilde{\mathbf{E}}^+[X, Y]$ et l'image de I s'identifie à $(XY - \overline{\pi}^{s-r}, -X\overline{\pi}^r, \overline{\pi}^s)$ d'où le lemme. □

II.2. Plongement des $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

On va maintenant d´efinir des morphismes de $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On va montrer que si $r_n \in I$, alors l'application φ^{-n} r´ealise une injection de $\widetilde{\mathbf{B}}_I$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Pour cela, soit $J_n = [r_n; r_n]$ avec $n \geqslant 0$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$, alors on peut ´ecrire

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{k\geqslant 0} a_k \left(\frac{p}{[\widetilde{p}]}\right)^k + \sum_{j\geqslant 0} b_j \left(\frac{[\widetilde{p}]}{p}\right)^j \\
&= \sum_{k\geqslant 0} a_k \left[\left(\frac{p}{[\widetilde{p}]} - 1\right) + 1\right]^k + \sum_{j\geqslant 0} b_j \left[\left(\frac{[\widetilde{p}]}{p} - 1\right) + 1\right]^j \\
&= \sum_{\ell\geqslant 0} \left(\frac{p}{[\widetilde{p}]} - 1\right)^\ell \sum_{k\geqslant \ell} \binom{k}{\ell} a_k + \sum_{m\geqslant 0} \left(\frac{[\widetilde{p}]}{p} - 1\right)^m \sum_{j\geqslant m} \binom{j}{m} b_j
\end{aligned}$$

et comme les a_j et b_k tendent vers 0, les s´eries $\sum_{k\geqslant \ell} \binom{k}{\ell} a_k$ et $\sum_{j\geqslant m} \binom{j}{m} b_j$ convergent dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et la s´erie du haut est donc convergente pour la topologie $\ker(\theta)$-adique et converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un ´el´ement $\iota_0(x) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Proposition II.10. — *Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_{J_n}$ on pose $\iota_n(x) = \iota_0(\varphi^{-n}(x))$. L'application $x \mapsto \iota_n(x)$ est un morphisme injectif de $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_n}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et si $J_n \subset I$, alors le noyau du morphisme composé $\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{A}}_I \to \mathbf{C}_p$ est* $\ker(\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{A}}_I \to \mathbf{C}_p) = ([\widetilde{p}^{p^n}]/p - 1)\widetilde{\mathbf{A}}_I$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $\ker(\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{A}}_I \to \mathbf{C}_p) \subset ([\widetilde{p}^{p^n}]/p - 1)\widetilde{\mathbf{A}}_I$ (l'autre inclusion est imm´ediate) ; il suffit de le faire pour $n = 0$ car φ^{-n} est une bijection de

$\widetilde{\mathbf{A}}_I$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}_{p^{-n}I}$ et donc de $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_n}$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$. Soit donc $I = [r; s]$ avec $r \leqslant 1 \leqslant s$ et $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_I$ tel que $\theta \circ \iota_0(x) = 0$. On peut ´ecrire

$$\begin{aligned}
x = \sum_{k\geqslant 0} a_k \left(\frac{p}{[\widetilde{p}]^r}\right)^k + \sum_{j\geqslant 0} b_j \left(\frac{[\widetilde{p}]^s}{p}\right)^j \\
= \sum_{\ell\geqslant 0}\left(\frac{p}{[\widetilde{p}]^r} - [\widetilde{p}^{1-r}]\right)^{\ell} \sum_{k\geqslant \ell}\binom{k}{\ell}[\widetilde{p}^{1-r}]^{k-\ell}a_k \\
+ \sum_{m\geqslant 0}\left(\frac{[\widetilde{p}]^s}{p} - [\widetilde{p}^{s-1}]\right)^{m} \sum_{j\geqslant m}\binom{j}{m}[\widetilde{p}^{s-1}]^{j-m}b_j \\
= \sum_{\ell\geqslant 1}\left(\frac{p}{[\widetilde{p}]^r} - [\widetilde{p}^{1-r}]\right)^{\ell} \sum_{k\geqslant \ell}\binom{k}{\ell}[\widetilde{p}^{1-r}]^{k-\ell}a_k \\
+ \sum_{m\geqslant 1}\left(\frac{[\widetilde{p}]^s}{p} - [\widetilde{p}^{s-1}]\right)^{m} \sum_{j\geqslant m}\binom{j}{m}[\widetilde{p}^{s-1}]^{j-m}b_j + \sum_{k\geqslant 0}(a_k[\widetilde{p}^{1-r}]^k + b_k[\widetilde{p}^{s-1}]^k).
\end{aligned}$$

les deux premiers termes ´etant des s´eries convergeant dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ (ne pas oublier que $a_k \to 0$ et $b_j \to 0$) et dont la somme est dans le noyau de $\theta \circ \iota_0$, et le troisième terme ´etant un ´el´ement de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ (même argument pour la convergence) qui est annul´e par θ et qui s'´ecrit donc $([\widetilde{p}] - p)y$ avec $y \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$. Montrons que $x - \sum_{k\geqslant 0}(a_k[\widetilde{p}^{1-r}]^k + b_k[\widetilde{p}^{s-1}]^k) = ([\widetilde{p}]/p - 1)z$ avec $z \in \widetilde{\mathbf{A}}_I$. On a

$$\begin{aligned}
x - \sum_{\ell\geqslant 0}(a_\ell[\widetilde{p}^{1-r}]^\ell + b_\ell[\widetilde{p}^{s-1}]^\ell) = \\
\sum_{\ell\geqslant 1} a_\ell\left(\left(\frac{p}{[\widetilde{p}]^r}\right)^{\ell} - [\widetilde{p}^{1-r}]^\ell\right) + \sum_{\ell\geqslant 1} b_\ell\left(\left(\frac{[\widetilde{p}]^s}{p}\right)^{\ell} - [\widetilde{p}^{s-1}]^\ell\right) = \\
\left(\frac{[\widetilde{p}] - p}{p}\right)\left(-\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{p}{[\widetilde{p}]^r}\right)^k \sum_{\ell\geqslant k} a_\ell[\widetilde{p}^{1-r}]^{\ell-k} + [\widetilde{p}^{s-1}]\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{[\widetilde{p}^s]}{p}\right)^j \sum_{\ell\geqslant j+1} b_\ell[\widetilde{p}^{s-1}]^{\ell-j-1}\right)
\end{aligned}$$

comme le montre un petit calcul, ce qui montre l'assertion quant au noyau de $\theta \circ \iota_0$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}_I$.

Enfin montrons que ι_n est injectif. On se ramène imm´ediatement au cas où $n = 0$. Si $\iota_0(x) = 0$ avec $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$, alors $\theta \circ \iota_0(x) = 0$ et donc x est divisible par $[\widetilde{p}]/p - 1$. Comme ι_0 est un morphisme d'anneau et que $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est intègre, c'est que $x = ([\widetilde{p}]/p - 1)x_1$ avec $\iota_0(x_1) = 0$ et $x_1 \in \widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$. En it´erant ce proc´ed´e on en d´eduit que $x \in \cap_{n=0}^{+\infty}([\widetilde{p}]/p - 1)^n\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$. Reste donc à montrer que $\cap_{n=0}^{+\infty}([\widetilde{p}]/p - 1)^n\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0} = 0$. L'image de cette intersection dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}/(p)$ s'identifie à $\cap_{n=0}^{+\infty}(X - 1)^n\widetilde{\mathbf{E}}^+/(\widetilde{p})[X, X^{-1}]$ qui est nulle. On en d´eduit qu'un ´el´ement de $\cap_{n=0}^{+\infty}([\widetilde{p}]/p - 1)^n\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ est infiniment divisible par p et donc nul. □

Corollaire II.11. — *Si $r_n \in I$, alors ι_n réalise une injection de $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_I$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.*

Remarque II.12. — Le noyau de $\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}_I \to \mathbf{C}_p$ est $\ker(\theta \circ \iota_n) = \varphi^{n-1}(q)\widetilde{\mathbf{B}}_I$. En effet, $([\widetilde{p}^{p^n}] - p) = \varphi^n([\widetilde{p}] - p)$, $\varphi^{n-1}(q) = \varphi^n(\omega)$ et on sait que $[\widetilde{p}] - p$ et ω engendrent le même id´eal de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$.

Lemme II.13. — *Les inclusions naturelles de* $\mathbf{A}^+_{\max}$ *et* $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0}$ *dans* $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ *induisent une suite exacte* $0 \to \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathbf{A}^+_{\max} \oplus \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{J_0} \to 0$.

Démonstration. — La flèche est $\mathbf{A}^+_{\max} \oplus \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} \to \widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ est surjective car il suffit de d´ecomposer une ´ecriture d'un ´el´ement de $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ en deux. Ensuite $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est contenu dans l'intersection de $\mathbf{A}^+_{\max}$ et de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0}$ et il reste donc à montrer que l'inclusion

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} \cap \mathbf{A}^+_{\max}$$

est aussi une surjection. On va d'abord montrer que c'est vrai modulo $p\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ (on remarquera que modulo p la flèche n'est plus injective). Rappelons que les anneaux $\mathbf{A}^+_{\max}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0}$ s'identifient à $\widetilde{\mathbf{A}}^+\{X\}/(pX - [\widetilde{p}])$ et à $\widetilde{\mathbf{A}}^+\{Y\}/([\widetilde{p}]Y - p)$ et que $\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}/(p) = \widetilde{\mathbf{E}}^+/(\widetilde{p})[X, X^{-1}]$. L'image de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0}$ dans cet anneau s'identifie à $\widetilde{\mathbf{E}}^+/(\widetilde{p})[X]$ et celle de $\mathbf{A}^+_{\max}$ à $\widetilde{\mathbf{E}}^+/(\widetilde{p})[1/X]$ ce qui fait que l'image de leur intersection (qui est un sous-ensemble de l'intersection de leurs images) est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{E}}^+/(\widetilde{p})$ et donc que la flèche $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} \cap \mathbf{A}^+_{\max}$ est surjective modulo $p\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$. Si l'on prend x dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} \cap \mathbf{A}^+_{\max}$ il existe donc $y \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que $x - y \in p\widetilde{\mathbf{A}}_{J_0}$. Cela veut dire que $x - y \in p\mathbf{A}^+_{\max}$ d'une part et $\in p\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} + [\widetilde{p}]\widetilde{\mathbf{A}}^+$ d'autre part (il suffit d'appliquer le lemme II.9 à tous ces anneaux). Comme p divise $[\widetilde{p}]$ dans $\mathbf{A}^+_{\max}$ il existe $z \in [\widetilde{p}]\widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que $x - y - z \in p(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0} \cap \mathbf{A}^+_{\max})$. On conclut en it´erant ce proc´ed´e (comme $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est complet pour la topologie p-adique). □

II.3. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$

Dans ce n° on introduit les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$.

Définition II.14. — Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ sont d´efinis par

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty[} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} = \cup_{r \geqslant 0}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$$

On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ de la topologie de Fr´echet d´efinie par l'ensemble des V_I où I parcourt l'ensemble des intervalles ferm´es de $[r; +\infty[$. On d´efinit aussi $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ comme ´etant l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ pour la valuation $V_{[r;r]}$.

Proposition II.15. — *On a* $\ker(\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}} \to \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}$.

Démonstration. — Étant donn´ee la remarque II.12 il suffit de montrer que $\ker(\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}_I \to \mathbf{C}_p) = ([\widetilde{p}^{p^n}]/p-1)\widetilde{\mathbf{B}}_I$ pour tout $I \subset [r_n; +\infty[$ ce qui suit de II.10. □

Lemme II.16. — *On a une suite exacte*

$$0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^{+} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \to 0$$

Démonstration. — On va d'abord montrer que si $r_n \geqslant r$, alors on a

$$0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^{+} \to \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} \to \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]} \to 0$$

il est clair que tout ´el´ement de $\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]}$ s'´ecrit comme somme d'´el´ements des deux autres et il faut v´erifier que deux ´ecritures diff´erentes diffèrent par un ´el´ement de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ ce qui revient à montrer que $\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} = \widetilde{\mathbf{B}}^{+}$, ou encore en appliquant φ^{-n} que $\widetilde{\mathbf{B}}_{[rp^{-n};+\infty]} \cap \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_0]} = \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ ce qui suit du lemme II.13.

Montrons maintenant le lemme. Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$, alors pour tout n on peut ´ecrire (puisque $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]}$) : $x = a_n + b_n$ avec $a_n \in \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$ et $b_n \in \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]}$. Remarquons que $x = a_{n+1} + b_{n+1}$ est une autre ´ecriture de ce type (puisque $a_{n+1} \in \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$ et $b_{n+1} \in \widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]}$) et donc que $b_{n+1} - b_n \in \widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ ce qui fait que quitte à modifier a_{n+1} et b_{n+1} par des ´el´ements de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ on peut supposer que $a_n = a_{n+1}$ et $b_n = b_{n+1}$ ce qui fait que $x = a + b$ avec $a \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ et $b \in \cap_{n=0}^{+\infty}\widetilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} = \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$. □

Proposition II.17. — *L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ est complet pour sa topologie de Fréchet et contient $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ comme sous-anneau dense.*

Démonstration. — Le fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ est complet suit du fait que chacun des $\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$ est complet pour $V_{[r;s]}$. Ensuite montrons que $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ est dense. Soit $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et $r < s < t$ trois r´eels. Alors comme $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{[r;t]}$, on peut l'´ecrire comme

$$x_n + \sum_{k>n} b_k \left(\frac{[\overline{\pi}]^t}{p}\right)^k$$

avec $x_n \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ si $n \gg 0$. On a alors

$$x - x_n \in \left(\frac{[\overline{\pi}]^t}{p}\right)^n \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;t]} \subset \left(\frac{[\overline{\pi}]^t}{p}\right)^n \widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$$

et un petit calcul montre qu'alors $V_{[r;s]}(x - x_n) \geqslant n(t/s - 1)$. Un argument d'extraction diagonale permet de trouver une suite qui converge vers x pour la topologie de Fr´echet. □

Corollaire II.18 **(Principe du maximum)**. — *Pour $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et $I = [s; t] \ni r$, on a $V_I(x) = \inf\{V_{[s;s]}(x); V_{[t;t]}(x)\}$.*

Démonstration. — Un petit argument montre que c'est vrai avec W_I à la place de V_I pour $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$; on conclut par densit´e et continuit´e. □

Lemme II.19. — *Si a est un élement de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ qui vérifie $\lambda = v_{\mathbf{E}}(a) > 0$, alors la topologie définie par V_I sur $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ est plus fine que la topologie $[a]$-adique c'est-à-dire que si $V_I(y_i) \to +\infty$, alors $y_i \to 0$ pour la topologie $[a]$-adique. De plus les topologies $[a]$-adiques et $V_{[r;r]}$-adiques sont équivalentes.*

Démonstration. — Soit (y_i) une suite telle que $V_I(y_i) \geqslant n$ pour $i \geqslant i_0$ et soit $m \leqslant \frac{nrp}{\lambda(p-1)}$. Alors un petit calcul montre que $V_I(y_i[a]^{-m}) \geqslant 0$ pour $i \geqslant i_0$ et donc $V_{[r;r]}(y_i[a]^{-m}) \geqslant 0$ pour $i \geqslant i_0$ ce qui revient à dire que $y_i \in [a]^m\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ pour $i \geqslant i_0$ et donc que y_i tend vers 0 pour la topologie $[a]$-adique.

De même si $y \in [a]^m\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$, alors $V_[r;r](y) \geqslant \frac{(p-1)m\lambda}{pr}$ et donc les deux topologies sont ´equivalentes. On prendra garde au fait que cela n'est plus vrai si I n'est plus r´eduit à $[r;r]$. □

Corollaire II.20. — *L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ est complet pour la valuation $V_{[r;r]}$.*

Démonstration. — Dans [**6**, II.1.2] on montre que $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ est s´epar´e complet pour la topologie $[a]$-adique si $v_{\mathbf{E}}(a) > 0$. □

II.4. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log}$ et leurs plongements dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$

Ce n° est consacr´e à la construction d'un anneau$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ qui est à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ ce que $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est à $\mathbf{B}_{\max}$. On commence par construire une application logarithme.

Proposition II.21. — *Il existe une et une seule application $x \mapsto \log[x]$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[X]$ qui vérifie $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$, $\log[x] = 0$ si $x \in \overline{k}$, $\log[\overline{\pi}] = X$ et*

$$\log[x] = \sum_{n>0}(-1)^{n-1}\frac{([x]-1)^n}{n} \text{ si } v_p(x^{(0)}-1) \geqslant 1$$

Démonstration. — Soit U_1 l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $v_p(x^{(0)}-1) \geqslant 1$. Pour $x \in U_1$ la s´erie $\log[x] = \sum_{n>0}(-1)^{n-1}([x]-1)^n/n$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\max}$ et $\log[xy] = \log[x]+\log[y]$ par un argument de s´eries formelles. On en d´eduit notamment que $\log[x] = \varphi(\log[x]/p)$ ce qui fait que l'image de U_1 par log est en fait incluse dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ est tel que $v_p(x^{(0)}-1) > 0$, alors il existe n tel que $x^{p^n} \in U_1$ et le log s'´etend donc à l'ensemble des x tels que $v_p(x^{(0)}-1) > 0$. Ensuite soit $x \in (\widetilde{\mathbf{E}}^+)^*$. On peut ´ecrire $x = x_0(1+y)$ avec $x_0 \in \overline{k}$ et $y \in \mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}^+}$ de manière unique ce qui montre que log s'´etend à $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^*$. Enfin $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau de valuation et le choix de $\log[\overline{\pi}]$ achève de d´eterminer le log. □

Proposition II.22. — *Il existe une et une seule application* $\log : \widetilde{\mathbf{A}}^{+} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[X]$ *telle que* $\log([x]) = \log[x]$, $\log(p) = 0$ *et* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Démonstration. — Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ est exactement divisible par p^a, alors il existe r tel que l'on peut ´ecrire $x = \beta[\overline{x/p^a}](1 - pz)$ avec $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ et la s´erie

$$\log(1 - pz) = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{(pz)^n}{n}$$

converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ qui est complet pour la topologie p-adique ce qui permet d'´etendre log par multiplicativit´e à $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ (et aussi à $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$). □

On pose $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}[X]$ muni de l'action de G_F et du Frobenius donn´es par $\varphi(X) = pX$ et $g(X) = X + \log([g(\overline{\pi})/\overline{\pi}])$ ce qui fait que l'on peut prolonger l'application $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \to \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ pour n assez grand par $\iota_n(X) = p^{-n}\log[\overline{\pi}]$. La proposition suivante montre que ι_n est injectif et commute aux actions de G_F et de Frobenius (là où ce-dernier est d´efini), et dès lors on ´ecrira $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}]]$. Soit aussi $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} = \cup_{r \geqslant 0}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log}$.

Proposition II.23. — *L'application* $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}[X] \to \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ *qui étend* ι_n *par* $\iota_n(X) = p^{-n}\log[\overline{\pi}]$ *est injective, commute à l'action de Galois et sa restriction à* $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}$ *est* φ^{-n}.

Démonstration. — Les deux derniers points sont triviaux. Pour montrer le premier, il suffit de montrer que l'´el´ement $\log[\overline{\pi}]$ est transcendant sur le corps des fractions de $\iota_n(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$ et cela revient au même de montrer que $u = \log([\widetilde{p}])$ est transcendant sur $\iota_n(\mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$. Montrons tout d'abord que $u \notin \iota_n(\mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$. Soit $\beta = 1 - [\widetilde{p}]/p$ et S l'anneau des ´el´ements de $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ qui appartiennent à $F \otimes_{\mathcal{O}_F} \widetilde{\mathbf{A}}^{+}[[\beta]]$. Rappelons que Fontaine a montr´e que $u \notin \mathrm{Frac}\,S$ (cf [**18**, 4.3.2]). La d´emonstration de la proposition II.10 montre que si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_0}_{\mathrm{rig}}$, alors $\iota_0(x) \in S$ et donc si $u \in \iota_n(\mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$, alors on a $x, y \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_0}_{\mathrm{rig}}$ tels que $\iota_0(y) = \iota_0(x)u$ (puisque $\varphi^{-n}(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_0}_{\mathrm{rig}}$) et le r´esultat de Fontaine montre que cela n'est pas possible et donc que $u \notin \iota_n(\mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$.

Montrons maintenant que u est transcendant sur $\iota_n(\mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$ pour tout n. Un petit calcul montre qu'il existe $\eta : G_F \to \mathbf{Q}_p$ tel que $g(u) = u + \eta(g)t$. Soit $u^d + x_{d-1}u^{d-1} + \cdots + x_0 = 0$ le polynôme minimal de u. Alors en appliquant g et en comparant les coefficients il vient $g(x_{d-1}) = x_{d-1} + d\eta(g)t$ ce qui fait que $x_{d-1} - du$ s'identifie à un ´el´ement de $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ stable par G_F et donc que $u = d^{-1}(x_{d-1} - c) \in \iota_n(\mathrm{Frac}\,\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}})$ et on vient de voir que cela est impossible. □

Par la proposition II.22 il existe un ´el´ement $\log(\pi) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ (remarquons que l'on a $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\log(\pi)]$ puisque la s´erie qui d´efinit $\log([\pi]/\pi)$ converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_0}$). On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ de

l'op´erateur de monodromie N d´efini par

$$N\left(\sum_{k=0}^{d} a_k \log(\pi)^k\right) = -\sum_{k=0}^{d} k a_k \log(\pi)^{k-1}$$

c'est-à-dire que $N = -d/d\log(\pi)$. Un calcul facile montre que N commute à l'action de G_F.

Remarque II.24. — L'´el´ement $\log(\pi)$ est plus agr´eable que $\overline{\log}[\pi]$, par exemple $\mathrm{Res}_n(\log(\pi)) \in F_n[[t]]$ si $n \geqslant 1$. Notamment $\mathrm{Res}_X(\log(\pi)) = \log(\pi)$ où Res_X est l'application construite dans [**11**, V.4] et X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ tel que $X + p^{-1}\mathbf{Z}_p = X$.

II.5. Action de H_K sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$

Dans ce n° on d´ecrit les invariants de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ sous l'action de H_K. Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})^{H_K}$.

Lemme II.25. — *Soit I un intervalle qui contient $[0; r]$ et $J = I \cap [r; +\infty]$. On a une suite exacte* $0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{K} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{I} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{J} \to 0$.

Démonstration. — On a vu que l'on a une suite exacte $0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^{+} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}_{I} \to \widetilde{\mathbf{B}}_{J} \to 0$ et en prenant les invariants par H_K on trouve

$$0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{K} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K} \oplus \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{I} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{J} \xrightarrow{\delta} H^1(H_K, \widetilde{\mathbf{B}}^{+})$$

et pour montrer le lemme il suffit de montrer que $\delta = 0$. Soit $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{J}$, alors il existe n tel que $\delta(x) \in H^1(H_K, p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}^{+})$ et donc $\delta(p^n x[\overline{\pi}]) \in H^1(H_K, W(\mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}^{+}}))$. Or ce dernier espace de cohomologie est nul ([**11**, IV.2.4] appliqu´e à la repr´esentation triviale) et on en d´eduit que $\delta(x) = p^{-n}[\overline{\pi}]^{-1}\delta(p^n x[\overline{\pi}]) = 0$. □

Corollaire II.26. — *Dans le cas où $I = [0; +\infty[$, on obtient la suite exacte :*

$$0 \to \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{K} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K} \oplus (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}})^{H_K} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to 0$$

Lemme II.27. — *Si $x \in (\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{max}})^{H_K}$, alors il existe une suite bornée a_i d'éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{K}$, telle que $x = \sum_{i \geqslant 0} a_i(\omega/p)^i$ (la série convergeant dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{[0;s]}$ avec s assez petit).*

Démonstration. — On se ramène imm´ediatement à montrer que si $x \in (\mathbf{A}^{+}_{\mathrm{max}})^{H_K}$, alors il existe une suite a_i d'´el´ements de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{K}$, telle que $x = \sum_{i \geqslant 0} a_i(\omega/p)^i$. On va d'abord montrer que $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{K} \to \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$ est surjective. Si $K = F$, c'est bien connu (on se ramène à montrer que c'est vrai modulo p, et cela r´esulte alors du fait que les $\{\dot{\varepsilon}, i \in \mathbf{Z}[1/p] \cap [0; 1[\}$ forment une base de $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{F}/(\varepsilon - 1)\widetilde{\mathbf{E}}^{+}_{F}$ (voir [**6**, III.2.1])) ; ensuite soient $\iota_K(\varpi_K)$ l'´el´ement construit dans la proposition I.1, $\varpi_n = \iota_K(\varpi_K)^{(n)}$, et $\mathfrak{a} = \{x \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}, v_p(x) \geqslant 1/p\}$. Rappelons [**7**, p. 243] que si $n \gg 0$ et $x \in \mathcal{O}_{K_{n+1}}$, alors $N_{K_{n+1}/K_n}(x) - x^p \in \mathfrak{a}$. Comme $v_{\mathbf{E}}(\iota_K(\varpi_K)) = \frac{p}{(p-1)e_K}$ on a, pour

$n \gg 0$, $v_p(\varpi_n) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)e_K}$ et donc, si $n \gg 0$, alors ϖ_n est ´egal modulo $\mathfrak{a}$ à une uniformisante de $\mathcal{O}_{K_n}$. Ceci implique que l'application $\mathcal{O}_{F_n}[\varpi_n] \to \mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$ est surjective, et donc que $\mathcal{O}_{\widehat{F}_\infty}[\varpi_n]_{n\geqslant 0} \to \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$ est surjective (puisqu'elle l'est modulo $\mathfrak{a}$ et que les deux $\mathcal{O}_{\widehat{F}_\infty}$-modules en pr´esence sont complets pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique). Comme $\varpi_n = \theta \circ \varphi^{-n}(\iota_K(\varpi_K))$, ceci montre que $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+_K \to \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$ est surjective. Soit maintenant $x \in (\mathbf{A}^+_{\max})^{H_K}$. On d´efinit deux suites x_i et a_i de $(\mathbf{A}^+_{\max})^{H_K}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+_K$ de la manière suivante : $x_0 = x$, et si $i \geqslant 0$, alors comme $\theta(x_i) \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$, il existe $a_i \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_K$ tel que $\theta(x_i) = \theta(a_i)$. Ceci montre que $x_i - a_i$ est dans le noyau de θ et est donc divisible par ω/p dans $\mathbf{A}^+_{\max}$. On pose $x_{i+1} = (p/\omega)(x_i - a_i)$. Il est clair qu'alors, $x = \sum_{i\geqslant 0} a_i(\omega/p)^i$. □

On peut d'ailleurs montrer que $a_i \to 0$, en effet si $x \in \mathbf{A}^+_{\max}$ alors il existe une suite $\alpha_i = o(i)$, telle que $x \in p^{-\alpha_i}\widetilde{\mathbf{A}}^+ + (\omega/p)^i\mathbf{A}^+_{\max}$. Un petit calcul montre que cela force $a_i \to 0$.

Proposition II.28. — *L'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_K$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ pour la topologie de Fréchet de ce dernier.*

Démonstration. — Cela revient à montrer que si l'on se fixe un intervalle $I = [0; r_n]$ avec $n \gg 0$, alors pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ il existe une suite $x_j \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_K$ telle que $V_I(x - x_j) \to +\infty$. Étant donn´ee la d´ecomposition du corollaire II.26 il suffit de le faire pour $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{[0;r_{n+m}]}$ avec $m \gg 0$. On se fixe m tel que $V_I(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1) > 0$ (c'est possible car pour tout I compact, $\varphi^{n+m-1}(q/p) \to 1$ pour V_I). Le lemme II.27 auquel on applique φ^{n+m} montre que tout ´el´ement $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{H_K}_{[0;r_{n+m}]}$ s'´ecrit $x = \sum_{i\geqslant 0} x_i(\varphi^{n+m-1}(q/p))^i$ où x_i est une suite born´ee de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_K$ et donc que $x = \sum_{i\geqslant 0} y_i(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$ où y_i est une suite born´ee de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_K$. Comme $V_I(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1) > 0$, la suite $(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$ tend vers 0 pour V_I et donc, pour montrer la proposition, il suffit de prendre $x_j = \sum_{i=0}^{j} x_i(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$. □

II.6. L'anneau $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$

Soit $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ le compl´et´e de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_K$ pour la topologie de Fr´echet. On va donner une description nettement plus agr´eable des $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. On a d´ejà vu qu'il existe $n(K) \in \mathbf{N}$ et $\pi_K \in \mathbf{A}^{\dagger,r_{n(K)}}_K$ dont l'image modulo p est une uniformisante de $\mathbf{E}_K$ et que si $r \geqslant r_{n(K)}$, alors tout ´el´ement $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_K$ peut s'´ecrire $x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\pi_K^k$ où $a_k \in F$ et où la s´erie $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$ est holomorphe et born´ee sur la couronne ouverte $\{p^{-1/e_Kr} < |T| < 1\}$ et converge sur le bord int´erieur.

L'anneau $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$ est alors muni de la topologie induite par celle de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ qui devient la topologie de la convergence sur les couronnes d´efinies par un intervalle compact ce qui fait que $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ est le compl´et´e de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_K$ pour cette topologie et donc que

Proposition II.29. — *Soit $\mathcal{H}^{\alpha}_{F}(X)$ l'ensemble des séries $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X^k$ avec $a_k \in F$ et telles que tout $\rho \in [\alpha; 1[$, $\lim_{k\to\pm\infty} |a_k|\rho^k = 0$ et soit $\alpha(K,r) = p^{-1/e_K r}$. Alors l'application $\mathcal{H}^{\alpha(K,r)}_{F} \to \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ qui à f associe $f(\pi_K)$ est un isomorphisme.*

On d´efinit aussi $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\log(\pi)]$, cet anneau est stable par les actions de φ et de Γ_K ´etant donn´e que $\varphi(\log(\pi)) = \log(\varphi(\pi)) = p\log(\pi) + \log(\varphi(\pi)/\pi^p)$ et $\gamma(\log(\pi)) = \log(\pi) + \log(\gamma(\pi)/\pi)$ et que les s´eries qui d´efinissent $\log(\varphi(\pi)/\pi^p)$ et $\log(\gamma(\pi)/\pi)$ convergent dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$.

Rappelons que dans [**6**, III.2] (voir aussi la première section, proposition I.4) il est d´efini une section R_0 de l'inclusion $\mathbf{B}^{\dagger}_{K} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{K}$ qui a la propri´et´e que si $r \geqslant r_{n(K)}$, alors R_0 est une application $\mathbf{A}^{\dagger,r}_{K}$-lin´eaire de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{K}$ dans $\mathbf{A}^{\dagger,r}_{K}$, ainsi que des applications R_m et R^*_m qui ont des propri´et´es similaires.

Lemme II.30. — *Pour tous $a \in \mathbf{Z}[1/p]$ et $r > r_{n(K)}$, $r \in \mathbf{N}[1/p]$ on a $R_m([\overline{\pi}]^a \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{K}) \subset [\overline{\pi}]^a \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{K}$.*

Démonstration. — Quand $a \in \mathbf{Z}$ et $r = r_n$ c'est le contenu de I.5 car c'est vrai avec π à la place de $[\overline{\pi}]$ et $\pi/[\overline{\pi}]$ est une unit´e de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ pour $r \geqslant 1$ [**6**, II.1.5]. Comme $R_0 \circ \varphi^m = \varphi^m \circ R_m$ et que $\varphi(\overline{\pi}) = \overline{\pi}^p$ on passe de $a \in \mathbf{Z}$ à $a \in \mathbf{Z}[1/p]$. Enfin $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{K}$ est l'intersection des $[\overline{\pi}]^{-kr}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r_{n(K)}}_{K} + p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,+\infty}_{K}$ et chacun des termes est stable par R_m. □

Lemme II.31. — *Si $r \geqslant r_{n(K)}$, alors pour $I \ni r$, $R_m : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K}$ vérifie l'inégalité $V_I(R_m(x)) \geqslant V_I(x)$.*

Démonstration. — Nous allons donc montrer que si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K}$ v´erifie $V_{[r;s]}(x) \geqslant 0$, alors on a $V_{[r;s]}(R_m(x)) \geqslant 0$. Par le lemme II.18 on se ramène au cas où $r = s$ et donc $I = [r; r]$. Le lemme II.7 montre que l'intersection de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K}$ avec $\widetilde{\mathbf{A}}_I$ est la r´eunion des $[\overline{\pi}]^k p^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{K}$ ce qui implique par le lemme II.30 que $R_m(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_I) \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{K} \cap \widetilde{\mathbf{A}}_I$. On a donc $V_I(R_m(x)) \geqslant 0$ si $V_I(x) \geqslant 0$ ce qui montre le lemme. □

Le lemme pr´ec´edent montre en particulier que R_0 s'´etend en une section continue de l'inclusion de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. On prolonge les R_m en une section de l'inclusion de $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$ en posant $R_m(t^{-i}) = t^{-i}$ d'une part et $R_m(\log(\pi)) = \log(\pi)$ d'autre part (voir la remarque II.24).

Remarque II.32. — Quand $K_\infty = F_\infty$ la restriction de R_0 à $(\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}})^{H_F} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig},F}$ n'est autre que l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ de [**11**, V.7.1]. De même $R_m = \mathrm{Res}_{p^{-m}\mathbf{Z}_p}$.

Démonstration. — Pour le cas de R_0, il suffit de voir que les deux applications sont continues, $\mathcal{O}_F[[\pi]]$-lin´eaires et que si $i \in \mathbf{Z}[1/p]$, alors $R_0([\varepsilon^i]) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}([\varepsilon^i])$. Ensuite la formule $R_m = \varphi^{-m} \circ R_0 \circ \varphi^m$ permet de conclure. □

Lemme II.33. — *Soit $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_K$. Alors pour tous $a, b \in \mathbf{N}$ il existe m tel que $R_m(x) - x \in \pi^a \mathbf{A}^+_K + p^b \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_K$.*

Démonstration. — On a vu dans la proposition I.5 que si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_K$, alors $x = \lim_m R_m(x)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_K$. La topologie de $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ est d´efinie par le fait que $\{\pi^a \mathbf{A}^+_K + p^b \widetilde{\mathbf{A}}_K\}$ forment une base de voisinages de z´ero. On en d´eduit que si m est assez grand, alors $R_m(x) - x = \pi^a r^+ + p^b r^-$ avec $r^+ \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_K$ et $r^- \in \widetilde{\mathbf{A}}_K$ ce qui fait que $R_m(x) - x - p^a r^+ \in p^b \widetilde{\mathbf{A}}_K \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_K = p^b \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_K$ d'où le lemme. □

Proposition II.34. — *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, alors* $\lim_{m \to +\infty} R_m(x) = x$.

Démonstration. — Soit $N \in \mathbf{N}$ et $I \subset [r; +\infty[$. Il existe $y \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_K$ tel que $V_I(x - y) \geqslant N$. Il existe c tel que $y \in p^{-c} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_K$ et par le lemme pr´ec´edent il existe alors m tel que $V_I(R_m(y) - y) \geqslant N$. Enfin $V_I(R_m(x - y)) \geqslant V_I(x - y)$ par II.31 ce qui fait que $V_I(R_m(x) - x) \geqslant \inf\{V_I(x - y); V_I(y - R_m(y)); V_I(R_m(y) - R_m(x))\} = N$. □

CHAPITRE III

APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES

Ce § est consacr´e à l'application des constructions de la section pr´ec´edente à la caract´erisation des repr´esentations p-adiques semi-stables (et cristallines) en termes du (φ, Γ_K)-module qui leur est associ´e.

III.1. Régularisation par le Frobenius

Le Frobenius φ est une bijection de $\widetilde{\mathbf{B}}_I$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{pI}$ et induit donc une bijection de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig}}$ ainsi que de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,pr}_{\log}$ puisque $\varphi(\log[\overline{\pi}]) = p \cdot \log[\overline{\pi}]$.

Lemme III.1. — *Soit h un entier positif. Alors*

$$\cap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,p^{-s}r} = \widetilde{\mathbf{A}}^{+} \ et \ \cap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,p^{-s}r}_{\mathrm{rig}} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$$

Démonstration. — Montrons le premier point : comme $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$ il s'´ecrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\geqslant 0} p^k[x_k]$ et de même $p^{hs}x = \sum p^{k+hs}[x_k]$. Comme $p^{hs}x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,p^{-s}r}$ c'est que

$$v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{rp^{1-s}}{p-1}(k+hs) \geqslant 0$$

ce qui implique que

$$v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant -\frac{(k+hs)r}{p^{s-1}(p-1)}$$

et donc (en laissant tendre s vers $+\infty$) que $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant 0$ ce qui fait que $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$.

Passons au deuxième point. Pour tout s on peut ´ecrire $x = a_s + b_s$ avec $a_s \in p^{-hs}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,p^{-s}r}$ et $b_s \in \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$. Par le lemme II.13 on a $a_s - a_{s+1} \in \widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ et d'autre part $a_s - a_{s+1} \in p^{-h(s+1)}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,p^{-s}r}$ ce qui fait que $a_s - a_{s+1} \in p^{-h(s+1)}\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ et que quitte à modifier a_{s+1} on peut supposer que $a_s = a_{s+1} = a$. On a alors $a \in \cap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,p^{-s}r} = \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ et donc $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$. $\square$

***Proposition III.2* (Régularisation par le Frobenius)**. — *Soit r et u deux entiers positifs et $A \in \mathrm{M}_{u\times r}(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_u(F)$ telle que $A = P\varphi^{-1}(A)$. Alors $A \in \mathrm{M}_{u\times r}(\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log})$.*

Démonstration. — Soit $A = (a_{ij})$ et $a_{ij} = \sum_{n=0}^{d} a_{ij,n}\log[\overline{\pi}]^n$. Soit $h_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $p^{h_0}P \in \mathrm{M}_u(\mathcal{O}_F)$ et $h = h_0 + d$. L'hypothèse reliant A et P peut s'´ecrire :

$$p_{i1}\varphi^{-1}(a_{1j}) + \cdots + p_{iu}\varphi^{-1}(a_{uj}) = a_{ij} \qquad \forall i \leqslant u,\ j \leqslant r$$

et comme $\varphi^{-1}(\log[\overline{\pi}]^n) = p^{-n}\log[\overline{\pi}]^n$, on en d´eduit que si $a_{ij,n} \in p^{-c}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$, alors comme $p^{h_0}p_{ik} \in \mathcal{O}_F$ et $\varphi^{-1}(a_{ik,n}) \in p^{-c}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r/p}_{\mathrm{rig}}$, on a $a_{ij,n} \in p^{-h-c}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r/p}_{\mathrm{rig}}$. On itère ce proc´ed´e et il en sort que $a_{ij,n} \in \cap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs-c}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,rp^{-s}}_{\mathrm{rig}}$. On est en mesure d'appliquer le lemme III.1 à $p^c a_{ij,n}$ et la proposition suit. □

III.2. Représentations semi-stables

Soient $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\log,K} = \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\log(\pi)]$ et

$$\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V) \ \text{ et } \ \mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$$

Le th´eorème I.3 montre que $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ et $\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V)$ sont des $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$- et $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$- modules libres de rang $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. Si M est un G_F-module soit $M(i)$ le tordu de M par χ^i (twist de Tate).

Proposition III.3. — *On a*

$$\{x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log},\ g(x) = \chi^i(g)x,\ \forall g \in G_K\} = \begin{cases} Ft^i \ si\ i \geqslant 0\,; \\ 0\ si\ i < 0. \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $V_i^n = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\log}(i))^{G_K}$. C'est un F-espace vectoriel de dimension finie (puisque ι_n r´ealise une injection de V_i^n dans $(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}})^{G_K} = K$) stable par Frobenius et la proposition III.2 implique que $V_i^n = (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}(i))^{G_K}$ ce qui fait que [**18**] $V_i^n = F$. Comme $V_i = \cup_{n=0}^{+\infty} V_n^i$ cela d´emontre le r´esultat. □

Soit $\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$, rappelons que $\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$. Si V a ses poids de Hodge-Tate n´egatifs, alors $\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{st}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et en g´eneral $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = t^{-d}\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{st}}(V(-d))(d)$ pour d assez grand.

Proposition III.4. — *Si V est une représentation p-adique, alors $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est un F-espace vectoriel de dimension finie, et le morphisme induit par l'inclusion de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$*

$$\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{st}}(V) \to (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est un isomorphisme de (φ, N)*-modules.*

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{N}$, alors $D_n = (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est un F-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant [K : F]d$, car ι_n r´ealise une injection de D_n dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, qui est un K-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant d$. Ceci montre qu'entre $[K : F]d + 1$ ´el´ements de $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$, il y a toujours une relation de d´ependance F-lin´eaire, et donc que $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est un F-espace vectoriel de dimension $\leqslant [K : F]d$.

Passons maintenant au deuxième point. Soient $v_1, \cdots, v_r$ et $d_1, \cdots, d_u$ des $\mathbf{Q}_p$- et F- bases de V et $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$. Il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_{r\times u}(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log})$ telle que $(d_i) = A(v_i)$ (les (d_i) et (v_i) sont des vecteurs colonnes). Soit P la matrice de φ dans la base (d_i) (qui est inversible car $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ est une bijection). On a alors $\varphi(A) = PA$ et donc $A = \varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(A)$; la proposition III.2 montre que $A \in \mathrm{M}_{r\times u}(\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log})$ et donc que $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \subset (\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}^{+}_{\mathrm{st}}(V)$, ce qui permet de conclure. □

Une repr´esentation V à poids n´egatifs est donc semi-stable si et seulement si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$-admissible et elle est cristalline si et seulement si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$-admissible, c'est-à-dire si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$-admissible et que ses p´eriodes sont tu´ees par N.

De plus, si les poids de Hodge-Tate de V ne sont pas n´egatifs, alors en tordant V on en d´eduit que V est semi-stable si et seulement si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}[1/t]$-admissible et elle est cristalline si et seulement si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[1/t]$-admissible.

Proposition III.5. — *Si V est semi-stable on a un isomorphisme de comparaison :*

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

Démonstration. — Ceci r´esulte du fait que dans ce cas on a d´ejà :

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

il suffit alors de tensoriser les deux membres par $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}[1/t]$ au-dessus de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}[1/t]$. □

Théorème III.6. — *Si V est une représentation p-adique, alors*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V)[1/t])^{\Gamma_K} \ \ \textit{et} \ \ \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$$

Notamment V est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si $(\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ (respectivement $(\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$) est un F-espace vectoriel de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$.

Démonstration. — Le deuxième point est une cons´equence imm´ediate du premier. Ensuite comme $\mathbf{D}^{\dagger}_{\log}(V)[1/t] \subset (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ (et que $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \subset (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$) les

r´esultats pr´ec´edents montrent que $(\mathbf{D}^\dagger_{\log}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ (respectivement $(\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$) est inclus dans $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ (respectivement dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$).

Montrons donc que $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset (\mathbf{D}^\dagger_{\log}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset (\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$. Il suffit de s'occuper du cas semi-stable car le cas cristallin en suit en faisant $N = 0$. Soit $r = \dim_F(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V))$. On peut supposer (quitte à tordre) les poids de Hodge-Tate de V n´egatifs puisque l'on a invers´e t partout. On sait qu'alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ et de plus $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log,K} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$ puisque $\mathbf{D}^\dagger(V)$ a « la bonne dimension ». On en d´eduit que si l'on choisit une base $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\{d_i\}$ une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$, alors la matrice $M \in \mathrm{M}_{r\times d}(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log,K})$ d´efinie par $(d_i) = M(e_i)$ est de rang r et v´erifie $\gamma_K(M)G - M = 0$ où $G \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^\dagger_K)$ est la matrice de γ_K dans la base $\{e_i\}$.

Les op´erateurs R_m introduits pr´ec´edemment sont $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log,K}$-lin´eaires et commutent à Γ_K (puisque c'est vrai sur $\mathbf{B}^\dagger_K[\log(\pi)]$ et qu'on ´etend R_m par continuit´e) ce qui fait que $\gamma_K(R_m(M))G - R_m(M) = 0$. De plus, $R_m(M) \to M$ et si $M \in \mathrm{M}_{r\times d}(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\log,K})$, alors $R_m(M) \in \mathrm{M}_{r\times d}(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\log,K})$. Soit $N = \varphi^m(R_m(M))$. On a alors $\gamma_K(N)\varphi^m(G) = N$ et comme les actions de φ et Γ_K commutent sur $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ on a $\varphi(G) = \gamma_K(P)GP^{-1}$ (P est la matrice de φ et est inversible car φ est surconvergent et $\mathbf{B}^\dagger_K$ est un corps) ce qui fait que si $Q = \varphi^{m-1}(P)\cdots\varphi(P)P$, alors $\varphi^m(G) = \gamma_K(Q)GQ^{-1}$ et donc $\gamma_K(NQ)G = (NQ)$. La matrice NQ d´etermine r ´el´ements de $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ qui sont fix´es par γ_K. Il reste à montrer que ces ´el´ements sont libres sur F quand m est assez grand. Mais comme $R_m(M) \to M$, la matrice NQ va être de rang r pour m assez grand (puisque M est de rang r) et donc d´eterminer un sous-module libre de $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$. A fortiori le F-espace vectoriel engendr´e par les ´el´ements d´etermin´es par NQ va être de dimension r et donc ´egal à $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$. □

Proposition III.7. — *On a les isomorphismes de comparaison suivants :*

(1) *si V est une représentation semi-stable, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$$

(2) *si V est une représentation cristalline, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$$

Si de plus V a ses poids de Hodge-Tate négatifs, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset \mathbf{B}^\dagger_{\log,K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$.

Démonstration. — Encore une fois on ne s'occupe que du cas semi-stable, le cas cristallin s'obtenant en faisant $N = 0$. On peut supposer que V a ses poids de Hodge-Tate n´egatifs car cela revient à multiplier par une puissance de t le terme de gauche. On sait qu'alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset$

$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ et que

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$$

ce qui montre que si l'on choisit des bases $\{d_i\}$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$, alors $(e_i) = B(d_i)$ avec $B \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K}[1/t])$; la proposition III.6 implique d'autre part que $(d_i) = A(e_i)$ avec $A \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t])$. Comme $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ on a $A \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log,K})$ et donc finalement $A \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K})$ et de plus $AB = \mathrm{Id}$. On peut alors appliquer l'op´erateur R_0 qui est $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$-lin´eaire pour trouver $AR_0(B) = \mathrm{Id}$ ce qui fait que $B = R_0(B)$ et que B a donc ses coefficients dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$.

Le fait que $A \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K})$ implique que $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ et le fait que $B \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t])$ implique que $\mathbf{D}^{\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t] = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$. □

Proposition III.8. — *Soit V une représentation semi-stable et soit M la matrice de passage d'une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ à une base de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$. Alors il existe $r \in \mathbf{Z}$ et $\lambda \in \mathbf{B}^{\dagger}_K$ tels que* $\det(M) = \lambda t^r$.

Démonstration. — Le d´eterminant de la matrice de passage est ´egal au coefficient de la matrice de passage pour le d´eterminant de V et il suffit donc de montrer l'assertion en dimension 1. Une repr´esentation semi-stable de dimension 1 est cristalline et est donc de la forme $\omega\chi^r$ où ω est un caractère non-ramifi´e et χ est le caractère cyclotomique. La p´eriode de ω est alors un ´el´ement $\beta \in W(\overline{k})$, ce qui fait que $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = F \cdot \beta t^{-r}$ et $\mathbf{D}^{\dagger}(V) = \mathbf{B}^{\dagger}_K \cdot \beta$ d'où le r´esultat. □

III.3. Représentations cristallines et représentations de hauteur finie

Dans ce n° , on se place dans le cas $K = F$ et V est une repr´esentation cristalline de G_F. On dit qu'une repr´esentation p-adique V de G_F est de hauteur finie si $\mathbf{D}(V)$ possède une base sur $\mathbf{B}_F$ form´ee d'´el´ements de $\mathbf{D}^{+}(V) = (\mathbf{B}^{+} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}$. Un r´esultat de Fontaine [**20**] (voir aussi [**12**, III.2]) montre que V est de hauteur finie si et seulement si $\mathbf{D}(V)$ possède un sous-$\mathbf{B}^{+}_F$-module libre de type fini stable par φ de rang ´egal à $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. L'objet de ce n° est de d´emontrer le r´esultat suivant :

Théorème III.9. — *Si V est une représentation cristalline de G_F, alors V est de hauteur finie.*

Démonstration. — Fixons une base $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ ainsi qu'une base $\{d_i\}$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et soit U la matrice de passage de l'une à l'autre c'est-à-dire que $(e_i) = U(d_i)$. La matrice U est à coefficients dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},F}[1/t]$. De plus si l'on remplace V par $V(1)$, alors on peut remplacer d_i par $t^{-1}d_i(1)$ et donc U par tU ce qui fait que quitte à tordre suffisamment V on peut supposer

que U est à coefficients dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},F}$, ce que l'on fait maintenant. Soit $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},F}$ l'anneau des s´eries formelles $\sum_{k\geqslant 0} a_k\pi^k$ où $a_k \in F$ et $\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ est de rayon de convergence 1. Nous aurons besoin d'un r´esultat de Kedlaya [**25**, 4.3] (la formulation originale de Kedlaya est $U = VW$ mais on s'y ramène en transposant) :

Proposition III.10. — *Si U est une matrice à coefficients dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},F}$, alors il existe V dans $\mathrm{Id}+\pi\,\mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},F})$ et W dans $\mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{\dagger}_F)$ telles que $U = WV$.*

Remarquons qu'on a n´ecessairement $\det(W) \neq 0$ et comme $\mathbf{B}^{\dagger}_F$ est un corps cela implique que W est inversible. Soit P la matrice de φ dans la base $\{e_i\}$ (qui a ses coefficients surconvergents), D la matrice de φ dans la base $\{d_i\}$ (qui est donc à coefficients dans F) et G la matrice de γ_F (un g´en´erateur de Γ_F) dans la base $\{e_i\}$ (elle est aussi surconvergente). Un petit calcul montre que, si $\{f_i\}$ est la base de $ddag(V)$ d´eduite de $\{e_i\}$ par $(f_i) = W^{-1}(e_i)$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) = \varphi(V)DV^{-1} = \varphi(W^{-1})PW$$
$$\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\gamma_F) = \gamma_F(V)V^{-1} = \gamma_F(W^{-1})GW$$

Les coefficients de la matrice $\varphi(V)DV^{-1}$ sont dans $\mathrm{Frac}\,\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},F}$. D'autre part les coefficients de $\varphi(W^{-1})PW$ sont dans $\mathbf{B}^{\dagger}_F$. On en d´eduit que dans la base $\{f_i\}$, la matrice de φ a ses coefficients dans $\mathrm{Frac}\,\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},F}$ d'une part et dans $\mathbf{B}^{\dagger}_F$ d'autre part. C'est donc [**12**, II.12] que $\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) \in \mathrm{M}_d(\mathrm{Frac}\,\mathbf{B}^{+}_F)$. De plus si $v = \det(V)$, alors $\det(\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi)) = \varphi(v)\det(D)v^{-1}$ et comme $V \in \mathrm{Id}+\pi\,\mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},F})$ on a $v \in 1+\pi\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},F}$. Les coefficients de $\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi)$ n'ont donc pas de pôles en z´ero ce qui fait qu'il existe $\lambda \in \mathbf{B}^{+}_F$ non-divisible par π tel que $\lambda\,\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}^{+}_F)$. Pour les même raisons, $\mathrm{Mat}_{\{f_i\}}(\gamma_F) \in \mathrm{M}_d(\mathrm{Frac}\,\mathbf{B}^{+}_F)$.

Soit D le $\mathbf{B}^{+}_F$-module engendr´e par les f_i. On vient de voir que $\lambda\varphi(D) \subset D$ où $\lambda \in \mathbf{B}^{+}_F$ n'est pas divisible par π et que le $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}^{+}_F)$-module engendr´e par D est stable par Γ_F.

Lemme III.11. — *Si D est un $\mathbf{B}^{+}_F$-module libre de type fini tel que le $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}^{+}_F)$-module engendré par D est stable par Γ_F et $\lambda \in \mathbf{B}^{+}_F - \pi\mathbf{B}^{+}_F$ est tel que $\lambda\varphi(D) \subset D$, alors il existe $D' \subset D$ un sous-module libre de type fini stable par φ et Γ_F qui est de rang maximal.*

Pour montrer que la repr´esentation V est de hauteur finie il suffit donc, grâce au r´esultat de Fontaine, de montrer le lemme ce que nous faisons maintenant. Le lemme est d´emontr´e dans [**12**] (c'est la r´eunion des ´enonc´es III.8 à III.15) mais l'une des ´etapes utilise de manière cruciale que k est fini et il nous faut la contourner [(1)].

[(1)] Il s'agit du lemme III.9. On remarquera d'ailleurs que ce lemme aurait plutôt d'être ´enonc´e de la manière suivante : « *Soit M un $\mathbf{B}^{+}_K$-module libre de rang fini muni d'une action de Γ tel que le $\mathrm{Frac}\,\mathbf{B}^{+}_K$-module $M \otimes_{\mathbf{B}^{+}_K} \mathrm{Frac}\,\mathbf{B}^{+}_K$ soit muni d'une action de φ commutant à celle de Γ et telle qu'il existe $a \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\varphi(M) \subset \pi^{-a}M$. Alors $\varphi(M) \subset M$.* » C'est cet ´enonc´e qui est d´emontr´e et utilis´e dans la suite de [**12**].

On va d'abord montrer que l'on peut supposer que $\Gamma_F(D) \subset D$. Soit $G = \langle \gamma_F \rangle$; on renvoie à la cons´equence du corollaire III.15 de [**12**] pour la construction, sous l'hypothèse que le Frac($\mathbf{B}_F^+$)-module engendr´e par D est stable par Γ_F, de $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_F^+$ tels que pour tout $\gamma \in G$ on ait $\gamma(\alpha D) \subset \beta D$. Comme $\gamma(\pi)/\pi$ est inversible dans $\mathbf{B}_F^+$, on peut supposer que π ne divise pas α ; en effet, l'inclusion $\alpha D \subset \beta D$ implique que si π divise α, alors π divise β. Soit alors $G \cdot \alpha D$ le sous-$\mathbf{B}_F^+$-module de βD engendr´e par les $\gamma(\alpha d)$ où $\gamma \in G$, $d \in D$. Comme $\mathbf{B}_F^+$ est noetherien (car principal), comme βD est de type fini, et comme $G \cdot \alpha D$ est r´eunion croissante de sous-modules de type fini de βD, c'est que $G \cdot \alpha D$ est en fait r´eunion d'un nombre fini de $\gamma(\alpha D)$. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ et $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in G$ tels que $G \cdot \alpha D = \sum \gamma_i(\alpha D)$. De plus $G \cdot \alpha D$ est stable par G et donc par continuit´e il est stable par Γ_F. Ensuite comme $\lambda\varphi(D) \subset D$ on a $\lambda\alpha \cdot \varphi(\alpha D) \subset \alpha D$. Soit $\mu = \prod_{i=1}^n \gamma_i(\lambda\alpha)$, on voit que $\mu\varphi(\gamma_i(\alpha D)) \subset \gamma_i(\alpha D)$ pour tout i et donc que $\mu\varphi(G \cdot \alpha D) \subset G \cdot \alpha D$ et que π ne divise pas μ. Ceci montre que l'on peut se ramener au cas où D est stable par Γ_F.

On suppose donc maintenant que D est un $\mathbf{B}_F^+$-module libre de type fini stable par Γ_F et que $\lambda \in \mathbf{B}_F^+ - \pi\mathbf{B}_F^+$ est tel que $\lambda\varphi(D) \subset D$. L'id´eal I des $\delta \in \mathbf{B}_F^+$ tels que $\delta\varphi(D) \subset D$ est stable par Γ_F et par [**12**, III.8] il est de la forme $(\pi^a \prod_{i=0}^n \varphi^i(q)^{\beta_i})$. De plus comme $\lambda \in I$ et que π ne divise pas λ c'est que $a = 0$. Soit alors $\alpha = \pi^{\beta_0+\cdots+\beta_n} q^{\beta_1+\cdots+\beta_n} \cdots \varphi^{n-1}(q)^{\beta_n}$. Un petit calcul montre que $\varphi(\alpha D) \subset \alpha D$ et que αD est stable par Γ_F. On peut donc prendre $D' = \alpha D$ et ceci achève la d´emonstration du lemme et donc du th´eorème III.9. $\square$

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS DE $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$

L'anneau $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est isomorphe (canoniquement si $K = F$) à l'anneau de Robba utilis´e dans la th´eorie des ´equations diff´erentielles p-adiques. Ce § est consacr´e à la d´emonstration de quelques unes de ses propri´et´es relatives à l'action de Γ_K : on d´efinit aussi des op´erateurs diff´erentiels qui seront utiles pour la suite.

IV.1. L'opérateur ∇

Dans ce n° , γ est un ´el´ement de Γ_K et $n(\gamma) = v_p(1-\chi(\gamma))$. On suppose que $n(\gamma) \geqslant 1$ et que $r \geqslant r_{n(K)}$.

Lemme IV.1. — *Si $I = [r;s]$ est un intervalle fermé de $[r;+\infty[$, alors il existe $n(I) \in \mathbf{N}$, tel que pour $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, on ait $V_I((1-\gamma)x) \geqslant V_I(x)+1$ dès que $n(\gamma) \geqslant n(I)$.*

Démonstration. — Par densit´e et lin´earit´e on se ramène au cas où $x = \pi_K^k$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Alors si $k \geqslant 0$

$$\gamma(\pi_K^k) - \pi_K^k = \pi_K^k\left(\frac{\gamma(\pi_K^k)}{\pi_K^k} - 1\right) = \pi_K^k\left(\frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1\right)\left(\frac{\gamma(\pi_K^{k-1})}{\pi_K^{k-1}} + \cdots + 1\right)$$

et sinon

$$\gamma(\pi_K^{-k}) - \pi_K^{-k} = \pi_K^{-k}\left(\frac{\pi_K^k}{\gamma(\pi_K^k)} - 1\right) = \pi_K^{-k}\left(\frac{\pi_K}{\gamma(\pi_K)} - 1\right)\left(\frac{\pi_K^{k-1}}{\gamma(\pi_K^{k-1})} + \cdots + 1\right)$$

Comme on a $V_I(xy) \geqslant V_I(x) + V_I(y)$ (voir la remarque II.6), le lemme r´esulte du fait que $V_I(\gamma(\pi_K)/\pi_K - 1) \geqslant 1$ si $n(\gamma)$ est assez grand ; en effet, $\gamma(\pi_K)/\pi_K - 1$ tend vers 0 quand γ tend vers 1. □

Si $I = [r;s]$, soit $\mathbf{B}^I_K$ l'anneau des s´eries formelles en π_K qui convergent sur la couronne de rayons int´erieurs et ext´erieurs $\alpha(K,r)$ et $\alpha(K,s)$. Le lemme pr´ec´edent montre que si γ est assez

proche de 1, la s´erie d'op´erateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(1-\gamma)^n}{n}$$

converge vers un op´erateur continu $\nabla_I : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to \mathbf{B}^I_K$, et un petit argument de s´eries formelles montre que $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ ne d´epend pas du choix de γ. Notamment $\nabla_{I_1}(x) = \nabla_{I_2}(x)$ si $I_k = [r; s_k]$. On en d´eduit que la valeur commune des $\nabla_I(x)$ appartient à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, et que l'op´erateur $x \mapsto \nabla(x)$, où $\nabla(x)$ est la valeur commune des $\nabla_I(x)$, est continu pour la topologie de Fr´echet.

De même, si γ est assez proche de 1, alors la s´erie d'op´erateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))(1-\gamma)} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(1-\gamma)^{n-1}}{n}$$

converge vers un op´erateur continu $\nabla/(1-\gamma) : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to \mathbf{B}^I_K$, et un petit argument de s´eries formelles montre que

$$\frac{\nabla}{1-\gamma_K} = \frac{1-\gamma}{1-\gamma_K}\cdot\frac{\nabla}{1-\gamma}$$

ne d´epend pas du choix de γ et d´efinit aussi un op´erateur de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ dans lui-même, continu pour la topologie de Fr´echet. Il est clair que

$$(1-\gamma_K)\frac{\nabla}{1-\gamma_K} = \nabla.$$

Lemme IV.2. — *La restriction de ∇ à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ vérifie $\nabla = t\cdot\partial$ où $\partial(x) = (1+\pi)dx/d\pi$.*

Remarque IV.3. — Attention au fait que ces notations ne sont pas compatibles avec [**7**]. Ce qui est not´e ∂ chez nous est not´e ∇ dans [**7**].

Démonstration. — Dans [**7**] il est d´emontr´e que l'image de $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K$ par $\iota_n = \varphi^{-n}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est contenue dans $K_n[[t]]$ si $n \geqslant n(K)$. L'image par φ^{-n} de $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ a la même propri´et´e par continuit´e. Comme φ^{-n} est injectif et que ∇, $t\partial$ commutent à φ il suffit de montrer que $\nabla - t\partial$ est nul sur $K_n[[t]]$ ce qui est ´evident. □

Montrons que ∂ est « presque » surjective :

Proposition IV.4. — *La connexion ∂ réalise une surjection*

(1) *de $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} + F\cdot\log(\pi_K)$ dans $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$;*
(2) *de $\mathbf{B}^\dagger_{\log,K}$ dans lui-même.*

Démonstration. — Tout d'abord si e_K est l'indice de ramification de K_∞/F_∞, $\log(\pi/\pi_K^{e_K})$ est une s´erie surconvergente ce qui fait que $\mathbf{B}^\dagger_{\log,K} = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[\log(\pi_K)]$. Rappelons que $\mathbf{B}^\dagger_K$ est un corps, et on peut donc se fixer $r \geqslant r_{n(K)}$ tel que $\partial(\pi_K)$ et $1/\partial(\pi_K)$ appartiennent à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$.

Soit $F(\pi_K) \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. Posons $F(\pi_K)/\partial(\pi_K) = \sum a_n \pi_K^n$, alors

$$F(\pi_K) = \sum_{n\neq -1} \frac{a_n}{n+1}(n+1)\pi_K^n \partial\pi_K + a_{-1}\frac{\partial\pi_K}{\pi_K} = \partial\left(\sum_{n\neq -1}\frac{a_n}{n+1}\pi_K^{n+1} + a_{-1}\log(\pi_K)\right)$$

ce qui montre que $F(\pi_K) = \partial G(\pi_K)$ avec $G(\pi_K) \in \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} + F\cdot\log(\pi_K)$ pour $s > r$.

Ensuite la formule

$$\partial(G_j(\pi_K)\log^j(\pi_K)) = (\partial G_j)(\pi_K)\partial\pi_K \log^j(\pi_K) + G_j(\pi_K)\, j \log^{j-1}(\pi_K)\partial\pi_K/\pi_K$$

montre que si on sait faire (1), alors une r´ecurrence permet de faire (2) ce qui montre la proposition. □

Remarque IV.5. — Si $\partial(y) = x$ et $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\log,K}$, alors on ne peut pas dire que $y \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\log,K}$ mais en revanche $y \in \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\log,K}$ pour tout $s > r$.

IV.2. Inversion de $1-\gamma_K$

En utilisant les r´esultats du fl pr´ec´edent on d´etermine l'image de $1-\gamma_K$: $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t] \to \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$.

Proposition IV.6. — *Soit $x \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$. Alors il existe $a \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ et $b \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ tels que $x = a + (1-\gamma_K)b$.*

Démonstration. — Soit $j \in \mathbf{N}$ tel que $x = t^{-j}x_j$ avec $x_j \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ Un petit calcul qui repose sur le fait que $\nabla\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \subset t\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ montre qu'il existe $x_{j-1} \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ tel que $x = -j^{-1}\nabla(x_j t^{-j}) + x_{j-1}t^{-(j-1)}$ ce qui montre (par r´ecurrence) que l'on peut ´ecrire $x = \nabla z + y$ avec $z \in t^{-j}\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ et $y \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$. La proposition suit alors du fait que $\nabla z = (1-\gamma_K)\frac{\nabla}{1-\gamma_K}(z)$. □

Lemme IV.7. — *Soit $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ tel que pour tout $n \gg 0$ on ait $x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$. Alors $x \in t\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$.*

Démonstration. — Soit $s = r_{n_0}$ tel que $x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Rappelons que $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ s'identifie (non canoniquement) à un anneau de s´eries formelles en π_K. Soit $Q_n(\pi_K) = \varphi^{n-1}(q)$. On a $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \cap \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K} = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ car une s´erie est divisible $Q_n(\pi_K)$ si et seulement si les z´eros de la première ont un ordre $\geqslant$ à ceux de la seconde, ce que l'on

peut v´erifier localement. De même, comme les $\phi^{-1}(q)$ sont premiers entre eux, l'hypothèse du lemme est ´equivalente au fait que, pour tout $n \gg 0$, on ait $x \in \phi(\pi)/\varphi^{n_0-1}(\pi)\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} = \varphi^n(\pi)\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ comme $\varphi^{n_0-1}(\pi)$ est inversible dans $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$. On peut donc ´ecrire $x = \phi(\pi)p^{-n}x_n$ et on va montrer que la suite $\{x_n\}$ converge dans $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$. Les $x_n \in \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ v´erifient la relation :

$$\frac{\varphi^n(\pi)}{p^n}x_n - \frac{\varphi^{n+1}(\pi)}{p^{n+1}}x_{n+1} = 0 \text{ et donc } (x_n - x_{n+1}) + x_{n+1}\left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right) = 0$$

On en d´eduit que si I est un intervalle contenu dans $[s; +\infty[$, alors

$$V_I(x_n - x_{n+1}) = V_I\left(x_{n+1}\left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right)\right) \geqslant V_I(x_{n+1}) + V_I\left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right) \tag{1}$$

On se fixe I un intervalle compact et comme $\lim_{n\to+\infty} V_I(1 - \varphi^n(q)/p) = +\infty$ sur toute couronne du type $\{|z| \in I\}$, on peut supposer que $V_I(1 - \varphi^n(q)/p) > 0$ pour n assez grand. Alors l'in´egalit´e (1) montre que $V_I(x_n - x_{n+1}) > V_I(x_{n+1})$ et donc que $V_I(x_n) = V_I(x_{n+1})$. Les x_n ont donc tous la même valuation pour n assez grand. Enfin l'in´egalit´e 1 et le fait que $\lim_{n\to+\infty} V_I(1 - \varphi^n(q)/p) = +\infty$ impliquent que $\lim_{n\to+\infty} V_I(x_n - x_{n+1}) = +\infty$ et donc que la suite x_n converge.

Ceci ´etant vrai pour tout I, la suite x_n converge pour la topologie de Fr´echet vers une limite $y \in \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ et un calcul imm´ediat montre que $x = ty$. □

Remarque IV.8. — On peut aussi dire que xt^{-1} est une fonction m´eromorphe sans pôles, et cela la force à être holomorphe, c'est-à-dire que $xt^{-1} \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$. Cela suit de r´esultats g´en´eraux de Lazard [**26**] sur les fonctions analytiques.

Proposition IV.9. — *Soit $r > 0$ et $n \geqslant n(r)$. Alors*

$$\ker(\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$$

$$\ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$$

Démonstration. — Le premier point est une cons´equence imm´ediate de II.15. Pour le deuxième si $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ est tel que $\theta \circ \iota_n(x) = 0$, alors $x = \varphi^{n-1}(q)y$ avec $y \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et alors $x = \varphi^{n-1}(q)R_0(y)$ ce qui fait que $y = R_0(y)$ et donc que $y \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. □

Lemme IV.10. — *Soit $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et $\gamma \in \Gamma_K$ avec $n = n(\gamma) \geqslant n(r)$. Si $\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(x)) = 0$, alors*

$$y = \frac{1-\gamma}{1-\gamma_K}x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$$

Démonstration. — Ceci r´esulte de la proposition pr´ec´edente et du fait que $\frac{1-\gamma}{1-\gamma_K} = \mathrm{Tr}_{K_n/K}$. □

Proposition IV.11. — *Soit* $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ *et* $n_0 \geqslant n(r)$. *On suppose que pour tout* $n \geqslant n_0$ *on a* $\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(x)) = 0$. *Alors* $x \in (1-\gamma_K)\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$.

Démonstration. — Le lemme pr´ec´edent montre que $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ pour tout $n \geqslant n_0$ et donc que $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x \in t\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$. Posons $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x = ty$. Par la proposition IV.4 il existe $z \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$ tel que $y = \partial z$ et alors $x = (1-\gamma_K)z$: en effet $\nabla(x-(1-\gamma_K)z) = 0$ et cela montre que $x-(1-\gamma_K)z \in F$. Comme $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}$ agit par un multiple de l'identit´e sur F et que $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x$ et $\nabla(z)$ sont dans $t\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ on a bien $x-(1-\gamma_K)z = 0$. □

IV.3. Dualité dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$

On montre que l'accouplement de dualit´e classique sur les anneaux de Robba est compatible aux extensions $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K_2}/\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K_1}$.

Proposition IV.12. — *Soit* $x = X(\pi_K) = \sum x_j \pi_K^j \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$. *Par la proposition IV.4 on peut écrire* $x = \partial(y + a\log(\pi_K))$. *On pose* $\mathrm{res}_0(x) = ae_K$.

Alors $\mathrm{res}_0(x)$ *ne dépend pas des choix faits (de* K, *de* π_K*) et l'application* $x, y \mapsto \langle x, y\rangle = \mathrm{res}_0(xy)$ *est bilinéaire et induit une dualité parfaite entre* $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ *et lui-même (c'est-à-dire que toute* $f \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ *détermine une forme linéaire* $g \mapsto \langle g, f\rangle$ *dont la restriction à chaque* $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ *est continue, et réciproquement si on se donne une telle forme linéaire, alors elle provient d'une* $f \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$*).*

Démonstration. — Si π_K et π_L sont deux uniformisantes associ´ees aux corps K et L, alors $\log(\pi_K^{e_K}) - \log(\pi_L^{e_L}) \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},KL}$ ce qui montre que que $\mathrm{res}_0(x)$ ne d´epend pas des choix faits. Ensuite les formules explicites de IV.4 montrent que

$$\mathrm{res}_0(H(\pi_K)) = e_K a_{-1}\left(\frac{H(\pi_K)}{\partial(\pi_K)}\right)$$

et donc que si $\mathrm{res}_0(x\pi_K^j) = 0$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$, alors $x = 0$. Reste à voir que si λ est une forme lin´eaire continue sur chaque $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ à valeurs dans F, alors il existe y dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ tel que $\lambda(x) = \langle x, y\rangle$ pour tout x. Soit

$$y_j = \lambda\left(\pi_K^{-j-1}\frac{\partial\pi_K}{e_K}\right)$$

et $y = \sum y_j \pi_K^j$. Un petit calcul qui utilise encore la formule de IV.4 rappel´ee ci-dessus montre que si $y \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, alors on a bien $\lambda(x) = \langle x, y\rangle$. Il suffit donc de montrer que $y \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$. Soit $\alpha \geqslant r$ et $I = [\alpha;\alpha]$. La forme lin´eaire λ est continue pour la topologie de Fr´echet sur chaque

$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ c'est-à-dire qu'elle est continue pour chacune des semi-normes et il existe donc $C(I)$ telle que $v_p(\lambda x) \geqslant V_I(x) - C(I)$ ce qui fait que

$$v_p(y_j) \geqslant V_I\left(\pi_K^{-j-1}\frac{\partial \pi_K}{e_K}\right) - C(I) \geqslant \frac{-j}{e_K\alpha} - C'(I)$$

ce qui montre que $y \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$. □

On pourra d'ailleurs rapprocher la proposition pr´ec´edente de [**16**, 5.1] ou encore de [**10**].

CHAPITRE V

STRUCTURES DIFFÉRENTIELLES SUR LES (φ, Γ_K)-MODULES

Dans le § pr´ec´edent on a fait l'´etude de $(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}, \nabla)$. Ce § est consacr´e à la construction de l'´equation diff´erentielle associ´ee à une repr´esentation V, qui est un module à connexion au-dessus de $(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}, \nabla)$. On donne ensuite des applications aux repr´esentations semi-stables et à la th´eorie de Sen.

V.1. L'opérateur ∇_V

Dans tout ce n° , V est une repr´esentation p-adique de G_K. Rappelons que l'on a pos´e $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$ et notamment que $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \subset (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$. Le lemme de r´egularisation par le Frobenius montre qu'on a $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})^{\varphi=1} \subset (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$ et donc que l'on r´ecupère V par la formule $V = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V))^{\varphi=1}$. On choisit une base $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et on prolonge les op´erateurs R_m à $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$ par $R_m(\sum \lambda_i \otimes e_i) = \sum R_m(\lambda_i) \otimes e_i$. Comme R_m est $\mathbf{B}^\dagger_K$-lin´eaire, le prolongement ne d´epend pas du choix de la base $\{e_i\}$. Nous aurons besoin du r´esultat suivant qui est un corollaire imm´ediat de la proposition II.15 :

Lemme V.1. — *Soit $r > 0$ et $n \geqslant n(r)$. Alors*

$$\ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$$
$$\ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$$

Démonstration. — La proposition II.15 montre que si $\theta \circ \iota_n(x) = 0$, alors $x = \varphi^{n-1}(q)y$ avec $y \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$. On a alors $x = \varphi^{n-1}(q)R_0(y)$ et donc $y = R_0(y) \in \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$. Enfin pour le deuxième point il suffit d'utiliser le fait qu'un ´el´ement de $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K$ divisible par $\varphi^{n-1}(q)$ dans $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ l'est dans $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K$. □

On va munir $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ d'une connexion ∇_V (au-dessus de $(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}, \nabla)$) c'est-à-dire d'un op´erateur ∇_V tel que $\nabla_V(\lambda \cdot x) = \nabla(\lambda) \cdot x + \lambda \cdot \nabla_V(x)$.

On se fixe une base $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ et si $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ s'´ecrit $x = \sum x_i \otimes e_i$ avec $x_i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, alors on pose (si I est tel que $r \in I$) : $V_I(x) = \inf_i V_I(x_i)$. La d´efinition d´epend de la base mais pas la topologie d´efinie par les V_I qui est ´equivalente à la topologie induite sur $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ par $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, ce qui montre d'ailleurs que $\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ est complet puisqu'il est ferm´e dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Dans cette partie γ est un ´el´ement de Γ_K et $n(\gamma) = v_p(1 - \chi(\gamma))$. On suppose que $n(\gamma) \geqslant 1$ et que $r \geqslant r_{n(K)}$.

Lemme V.2. — *Si $I = [r; s]$ est un intervalle fermé de $[r; +\infty[$, alors il existe $n(I, V) \in \mathbf{N}$, tel que pour $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$, on ait $V_I((1-\gamma)x) \geqslant V_I(x) + 1$ dès que $n(\gamma) \geqslant n(I, V)$.*

Démonstration. — Si $y \in \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$, alors $V_I((1-\gamma)y) \geqslant V_I(y) + 1$, quand $n(\gamma)$ est assez grand, puisque l'action de G_K est continue. On se fixe $n(\gamma)$ tel que $V_I((1-\gamma)e_i) \geqslant V_I(e_i) + 1$ pour tout i et le lemme r´esulte alors du lemme IV.1 (le cas de la repr´esentation triviale) puisque

$$(1-\gamma)(x_i \otimes e_i) = (1-\gamma)x_i \otimes \gamma(e_i) + x_i \otimes (1-\gamma)e_i$$

□

Si $I = [r; s]$, soit $\mathbf{B}^I_K$ l'anneau des s´eries formelles en π_K qui convergent sur la couronne de rayons int´erieurs et ext´erieurs $\alpha(K, r)$ et $\alpha(K, s)$. Le lemme pr´ec´edent montre que si γ est assez proche de 1, la s´erie d'op´erateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(1-\gamma)^n}{n}$$

converge vers un op´erateur continu $\nabla_{I,V} : \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \to \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^I_K$, et un petit argument de s´eries formelles montre que $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ ne d´epend pas du choix de γ. Notamment $\nabla_{I_1,V}(x) = \nabla_{I_2,V}(x)$ si $I_k = [r; s_k]$. On en d´eduit que la valeur commune des $\nabla_{I,V}(x)$ appartient à $\mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$, et que l'op´erateur $x \mapsto \nabla_V(x)$, où $\nabla_V(x)$ est la valeur commune des $\nabla_{I,V}(x)$, est continu pour la topologie de Fr´echet.

Exemple V.3. — Un calcul facile montre par exemple que $\nabla_{\mathbf{Q}_p(r)} = t\partial + r$ sur $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(\mathbf{Q}_p(r))$.

Lemme V.4. — *Soit $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ tel que pour tout $n \gg 0$ on ait $x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}(V)$. Alors $x \in t\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.*

Démonstration. — Après le choix d'une base de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ cela suit imm´ediatement de IV.7. □

V.2. Application aux représentations semi-stables

Un cristal sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est un $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module libre muni d'un Frobenius et d'une connexion qui commutent, la connexion ´etant au-dessus de ∇. Commençons par d´efinir ce qu'est un cristal unipotent. On remarquera que cela ne d´epend pas de l'´eventuelle structure de Frobenius. Soit donc M un $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang fini d muni d'une connexion ∇_M au-dessus de ∇.

Proposition V.5. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) ∇_M *est triviale sur* $M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$, *c'est-à-dire qu'il existe* $e_0, \cdots, e_{d-1} \in M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$ *tels que* $\nabla_M e_i = 0$ *et* $\oplus e_i \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t] = M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$ *;*

(2) *il existe* d *éléments* $f_0, \cdots, f_{d-1}$ *de* M *qui forment une base de* $M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ *sur* $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ *et tels que* $\nabla_M(f_i) \in t \cdot \langle f_{i-1}, \cdots, f_0\rangle$ *où* $\langle\cdot\rangle$ *dénote le* $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$*-module engendré.*

Démonstration. — Commençons par montrer que (1) implique (2). L'op´erateur de monodromie $N = 1 \otimes N$ laisse stable le F-espace vectoriel engendr´e par les e_i, car le (1) implique que les e_i engendrent le noyau de ∇_M agissant sur $M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$, et un calcul direct montre que N commute à ∇_M (car N commute à l'action de G_F) et donc stabilise son noyau : on peut alors supposer que $N(e_i) \in \langle e_{i-1}, \cdots, e_0\rangle$ car N est nilpotent. On peut ´ecrire de manière unique $e_i = \sum_{j=0}^{d-1} \log^j(\pi) d_{ji}$. Montrons que $f_i = d_{0,i}$ est une famille qui satisfait la condition de (2). Le fait que $\nabla_M(e_i) = 0$ et $N(e_i) \in \langle e_{i-1}, \cdots, e_0\rangle$ implique respectivement que

$$\nabla_M(d_{0,i}) = d_{1,i}\frac{t(1+\pi)}{\pi} \text{ et } d_{1,i} \in \langle d_{0,i-1}, \cdots, d_{0,0}\rangle$$

ce qui fait que $\nabla_M(d_{0,i}) \in t\langle d_{0,i-1}, \cdots, d_{0,0}\rangle$. Montrons enfin que les f_i engendrent $M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$. Soit $m \in M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$, par hypothèse on peut ´ecrire $m = \sum \mu_i e_i$ et donc $m = \sum \lambda_i f_i + n \cdot \log(\pi)$ où λ_i est le terme constant de μ_i et comme $m \in M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ on a n´ec´essairement $n = 0$.

Montrons maintenant l'implication r´eciproque. On va montrer par r´ecurrence que l'on peut prendre $e_i = \sum_{j=0}^{i} f_j a_{ji}$ avec $a_{ji} \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$ et $a_{ii} = 1$. En rang 1 il n'y a rien à montrer. En rang d, ∇_M induit une connexion sur $(\oplus f_i \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})/f_0\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ qui satisfait les mêmes conditions et il existe donc $e'_1, \cdots, e'_{d-1}$ tels que $\nabla_M(e'_i) = \alpha_i f_0$. Un calcul imm´ediat montre que $\alpha_i \in t\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$ et donc qu'il existe $\beta_i \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}$ tel que $\nabla(\beta_i) = \alpha_i$. On pose alors $e_0 = f_0$ et $e_i = e'_i - \beta_i f_0$, ce qui achève la r´ecurrence. La matrice de passage des f_i aux e_i est triangulaire avec des 1 sur la diagonale et on en d´eduit que les e_i engendrent bien $M \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\log,K}[1/t]$. □

Un cristal qui satisfait les conditions de la proposition pr´ec´edente est dit unipotent.

Proposition V.6. — *Soit V une représentation p-adique et $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ le cristal qu'on lui a associé. Alors il existe n tel que la restriction de V à G_{K_n} est semi-stable (respectivement cristalline) à poids négatifs si et seulement si $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ est unipotent (respectivement trivial).*

Démonstration. — On a vu que V est une repr´esentation semi-stable de G_{K_n} si et seulement si

$$\mathbf{D}^\dagger_{\log}(V) = \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$$

a une base d'´el´ements stables par γ_{K_n}. Si V est semi-stable, alors ∇_V est donc triviale, c'est-à-dire que si $e_0, \cdots, e_{d-1}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$, alors ils satisfont le (1) de la proposition pr´ec´edente en raison du th´eorème de comparaison :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t] = \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$$

R´eciproquement si $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ est unipotent, alors les $e_0, \cdots, e_{d-1}$ engendrent un F-espace vectoriel sur lequel $\log(\gamma)$ agit trivialement ce qui fait que Γ_K agit à travers un quotient fini et donc que les e_i sont stables par $\gamma_K^{p^n}$ pour n assez grand et forment alors une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_n)$ si V_n est la restriction de V à G_{K_n}.

On dit aussi dans ce cas que la connexion est unipotente. De plus V est cristalline si et seulement si on peut choisir les f_i tels que $\nabla_M(f_i) = 0$ et la connexion est alors triviale. □

V.3. Les modules $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$

Rappelons que Sen a montr´e [**33**] que si V est une repr´esentation p-adique, alors l'ensemble des sous-K_∞-espaces vectoriels de dimension finie de $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ stables par Γ_K admet un plus grand ´el´ement $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ et que $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V) = \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. De plus si $\gamma \in \Gamma_K$ est suffisament proche de 1, alors la s´erie qui d´efinit $\log(\gamma)$ converge en tant que s´erie d'op´erateurs $\mathbf{Q}_p$-lin´eaires de $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ et l'op´erateur $\Theta_V = \log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ est un op´erateur K_∞-lin´eaire qui ne d´epend pas de γ. Soit $\mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)^{G_{K_n}}$; alors si n est assez grand $\mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V)$ est un K_n-espace vectoriel stable par Θ_V tel que $\mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V) \otimes_{K_n} K_\infty = \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$.

D'autre part Fontaine a montr´e dans [**21**] que l'ensemble des sous-$K_\infty[[t]]$-modules libres de type fini de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ stables par Γ_K contient un plus grand ´el´ement ; nous le noterons $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$ dans cet article et on a $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_\infty[[t]]} \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. De plus si $\gamma \in \Gamma_K$ est suffisament proche de 1, alors la s´erie qui d´efinit $\log(\gamma)$ converge en tant que s´erie d'op´erateurs $\mathbf{Q}_p$-lin´eaires de $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$ et l'op´erateur $\nabla_V = \log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$ est un op´erateur qui ne d´epend pas de γ et qui v´erifie $\nabla_V(ax) = a\nabla_V(x) + \nabla(a)x$ ce qui montre que ∇_V est une connexion sur $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$; on l'´etend à $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V) = K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty[[t]]} \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$.

On peut retrouver $(\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V), \Theta_V)$ à partir de $(\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V), \nabla_V)$ via l'application $\theta : \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \mathbf{C}_p$ comme nous le verrons ci-dessous. Rappelons [**7**] que l'application $\iota_n = \varphi^{-n}$ envoie $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K$ dans $K_n[[t]] \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et envoie donc $\mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V)$ dans un sous $K_n[[t]]$-module de $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$.

Proposition V.7. — *L'application de $K_\infty((t)) \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K} \mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V)$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ déduite de ι_n est un isomorphisme de $K_\infty((t))$-modules avec connexion, si n est assez grand.*

Démonstration. — On prend $n \geqslant n_0$ tel que $\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K) \subset K_n[[t]]$. Il est clair qu'alors

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K)} \iota_n(\mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V))$$

est un sous $K_\infty[[t]]$-module libre de type fini de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ stable par Γ_K.

Montrons que c'est $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$ pour $n \gg 0$. On a une application $\theta : \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ est un K_∞-espace vectoriel de dimension $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. On en d´eduit une application

$$\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$$

dont le noyau est $\varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V)$ par le lemme V.1 ce qui fait que $\theta \circ \iota_n$ r´ealise une injection d'un $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K/\varphi^{n-1}(q)$ module de rang d dans $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ et son image est un K_n-espace vectoriel V_n de dimension d stable par Γ_K. Un petit calcul montre que des ´elements de $K_\infty \otimes_{K_n} V_n$ li´es sur K_∞ le sont d´ejà sur K_n et donc que $K_\infty \otimes_{K_n} V_n$ est de dimension maximale et donc est ´egal à $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$. Cela implique que le d´eterminant de l'injection

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_K)} \iota_n(\mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V)) \hookrightarrow \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$$

n'est pas divisible par t et donc (comme $K_\infty[[t]]$ est un anneau local d'id´eal maximal (t)) par le lemme de Nakayama que l'injection ci-dessus est en fait un isomorphisme. □

Corollaire V.8. — *Par extension des scalaires on en déduit que l'application*

$$K_\infty((t)) \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$$

déduite de ι_n est aussi un isomorphisme de $K_\infty((t))$-modules avec connexion, si n est assez grand.

Grâce à ces calculs on peut retrouver $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ à partir de $\mathbf{D}^\dagger(V)$, la proposition suivante se trouve dans [**21**, prop. 3.25].

Proposition V.9. — *Si V est une représentation p-adique de G_K, alors $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est le noyau de la connexion ∇_V opérant sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$. En particulier, V est de de Rham si et seulement si ∇_V est la connexion triviale.*

Démonstration. — L'action de ∇_V sur $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est triviale et de plus si $r \gg 0$, alors $t^r K_\infty[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un sous-$K_\infty[[t]]$-module de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ libre de type fini et stable par Γ_K ce qui montre que $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est bien inclus dans le noyau de ∇_V agissant sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$.

La th´eorie g´en´erale des modules à connexion montre que le noyau de ∇_V sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ est un K_∞-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant \dim_{K_\infty((t))}(\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V))$; il est aussi stable par Γ_K et provient donc par extension des scalaires d'un K_n-espace vectoriel stable par Γ_K pour $n \gg 0$. L'action de Γ_K sur ce K_n-espace vectoriel est discrète car $\nabla_V = 0$ (cf [**35**, chap. V]) et donc quitte à augmenter n l'action de Γ_{K_n} est triviale et cet espace est donc inclus dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V_n) = K_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ où V_n est la restriction à G_{K_n} de V, ce qui fait que le noyau de la connexion agissant sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ est inclus dans $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. On a donc bien que $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est le noyau de ∇_V sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(V)$. □

V.4. Représentations $\mathbf{C}_p$-admissibles

La th´eorie de Sen permet de caract´eriser facilement les repr´esentations $\mathbf{C}_p$-admissibles :

Proposition V.10. — *Si V est une représentation p-adique, alors V est $\mathbf{C}_p$-admissible si et seulement si $\Theta_V = 0$.*

Démonstration. — Si V est $\mathbf{C}_p$-admissible, alors on a $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \widehat{K}_\infty \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V) = K_\infty \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est muni de la connexion triviale.

R´eciproquement, si $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ est muni de la connexion triviale, alors l'action de Γ_K est discrète sur $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ et V est donc $\mathbf{C}_p$-admissible. □

La proposition suivante est due à Sen [**33**] et est un cas particulier de r´esultats assez g´en´eraux sur la caract´erisation de l'algèbre de Lie de l'image de I_K pour une repr´esentation p-adique en terme de l'op´erateur Θ_V :

Proposition V.11. — *Soit V une représentation p-adique $\mathbf{C}_p$-admissible. Alors la restriction de V à I_K est potentiellement triviale.*

Le but de ce n° est de donner une d´emonstration de cette proposition qui repose sur la th´eorie des ´equations diff´erentielles p-adiques. Comme on ne s'int´eresse qu'à la restriction de V à I_K, on suppose dans tout ce n° que k est alg´ebriquement clos. Si L est une extension finie de K,

soient

$$\delta_{\pi_L} = \frac{\pi_L}{\partial \pi_L}\partial \text{ et } \mu = p\varphi\left(\frac{\partial \pi_L}{\pi_L}\right)\frac{\pi_L}{\partial \pi_L},$$

ce qui fait que $\delta_{\pi_L}(f(\pi_L)) = g(\pi_L)$ où $g(X) = X \cdot dg/dX$. Nous aurons besoin du r´esultat suivant de Tsuzuki [**39**, 5.1.1] :

Théorème V.12. — *Soient L une extension finie de K, $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L)$ tel que $|A - \mathrm{Id}| < |\varepsilon^{(1)} - 1|$ et $C' \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$ tel que $\delta_{\pi_L} A + AC' = \mu\varphi(C')A$, alors il existe $Y \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$ tel que $\delta_{\pi_L} Y + YC' = 0$ et $Y = \varphi(Y)A$.*

Corollaire V.13. — *Soit L une extension finie de K, $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L)$ tel que $|A - \mathrm{Id}| < |\varepsilon^{(1)} - 1|$ et $C \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$ tel que $\partial A + AC = p\varphi(C)A$, alors il existe $Y \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$ tel que $\partial Y + YC = 0$ et $Y = \varphi(Y)A$.*

Le corollaire suit imm´ediatement du th´eorème en posant $'C = \frac{\pi_L}{\partial \pi_L}C$. Ce th´eorème va nous permettre de montrer que si V est une repr´esentation telle que $\mathbf{D}^\dagger(V)$ est munie d'une connexion surconvergente ∂_V, alors V et ∂_V sont triviales.

Lemme V.14. — *Soit $\partial : \mathbf{B}_K^\dagger \to \mathbf{B}_K^\dagger$ défini par $\partial(x) = (1+\pi)\frac{dx}{d\pi}$. Si V est une représentation p-adique de G_K et $\partial_V : \mathbf{D}^\dagger(V) \to \mathbf{D}^\dagger(V)$ est un opérateur différentiel au-dessus de $(\mathbf{B}_K^\dagger, \partial)$ tel que $\partial_V \circ \varphi = p\varphi \circ \partial_V$. Alors le sous-groupe d'inertie de H_K agit à travers un quotient fini sur V.*

Démonstration. — Consid´erons V en tant que repr´esentation de G_L; le module $\mathbf{D}^\dagger(V)$ est un $\mathbf{B}_L^\dagger$ module libre de rang fini muni d'un Frobenius ´etale et de la connexion ∂_V ; de plus quitte à remplacer L par une extension finie on peut trouver une base de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ dans laquelle la matrice de Frobenius est aussi proche de Id que l'on veut (en effet soit $r > 0$; la repr´esentation V a un r´eseau T stable par G_K dont on fixe une base et comme le morphisme qui d´efinit la repr´esentation est continu on peut supposer quitte à augmenter L que son image dans $\mathrm{GL}(T)$ est comprise dans $1 + p^r\,\mathrm{M}_d(\mathbf{Z}_p)$ auquel cas T/p^rT est la repr´esentation triviale de H_L ce qui fait que le (φ, Γ_L)-module qui lui est associ´e est trivial et donc que le Frobenius sur $\mathbf{D}^\dagger(T)$ est trivial modulo p^r).

Le corollaire au th´eorème de Tsuzuki (V.13) appliqu´e à $A = \mathrm{Mat}(\varphi)$ et $C = \mathrm{Mat}(\partial)$ nous donne alors une matrice Y qui d´efinit une base $y_1, \cdots, y_d$ de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ telle que $\varphi(y_i) = y_i$ ce qui fait que la restriction de V à H_L est triviale et donc que la restriction de V (comme repr´esentation de G_K) à l'inertie de H_K est potentiellement triviale. □

Lemme V.15. — *Si la connexion ∇_V de $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ vérifie $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)) \subset t\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, alors l'opérateur $\partial_V = t^{-1}\nabla_V$ vérifie $\partial_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset \mathbf{D}^\dagger(V)$.*

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathbf{D}^\dagger(V)$ sur $\mathbf{B}_K^\dagger$, telle que la matrice de φ v´erifie $Q = \mathrm{Mat}(\varphi) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$. C'est aussi une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$. Soit $D = \mathrm{Mat}(\partial_V) \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger)$. On remarquera que $\partial Q \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ puisque ∂ pr´eserve $\mathbf{B}_K^\dagger$. Le fait que ∇_V et φ commutent montre que $p\varphi(D)Q = \partial Q + QD$. Soit $H = D + Q^{-1}\partial Q$. L'´equation pr´ecedente s'´ecrit alors

$$H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = -pQ^{-1}\varphi(Q^{-1}\partial(Q))Q$$

et $-pQ^{-1}\varphi(Q^{-1}\partial(Q))Q \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger)$. Le r´esultat que l'on cherche à ´etablir est que H et donc D a ses coefficients dans $\mathbf{B}_K^\dagger$. Il suffit donc de montrer le fait suivant : si $H \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger)$ v´erifie $H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = R \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$, alors en fait $H \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$, ce que nous faisons maintenant. Soient $|\cdot|_I$ les normes correspondant aux valuations V_I ; on les ´etend à $\mathrm{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ en d´ecidant que $|M|_I = \sup |m_{ij}|_I$. Un ´el´ement x de $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ est dans $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ si et seulement si la suite des $|x|_I$ (avec $I \subset [r; +\infty[$) est born´ee, et il en est donc de même pour les matrices à coefficients dans ces anneaux. Comme $Q \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$, on a $|QM|_I = |MQ|_I = |M|_I$ et donc aussi $|Q^{-1}M|_I = |MQ^{-1}|_I = |M|_I$. Fixons r tel que Q, Q^{-1}, et D aient leurs coefficients dans $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r/p}$. Dans notre cas $H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = R$ et il existe une constante C telle que pour tout I, on ait : $|R|_I \leqslant C$. On a alors $H = R + pQ^{-1}\varphi(H)Q$ et donc $H \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r/p})$ d'une part, et $|H|_I \leqslant C + p^{-1}|H|_{p^{-1}I}$ d'autre part, ce qui fait que si $\delta = |H|_{[p^{-1}r, pr]}$, alors $|H|_{[r;s]} \leqslant C + p^{-1}(\delta + |H|_{[r;p^{-1}s]})$ et donc si $r \leqslant p^{-h}s \leqslant pr$, alors

$$|H|_{[r;s]} \leqslant (C + p^{-1}\delta)(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-h})|H|_{[r;p^{-h}s]} \leqslant \frac{C+\delta}{1-1/p} + \delta$$

ce qui fait que H est à coefficients surconvergents. □

Lemme V.16. — *La connexion Θ_V sur $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ est triviale si et seulement si $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$.*

Démonstration. — Si $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$, alors comme $(\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V), \Theta_V)$ est l'image par $\theta \circ \iota_n$ de $(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r_n}(V), \nabla_V)$, c'est que $\Theta_V = 0$.

R´eciproquement si $\Theta_V = 0$, alors pour tout $n \gg 0$ on a

$$\nabla_V(\mathbf{D}^{\dagger,r_n}(V)) \subset \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r_n}(V) \to \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r_n}(V)$$

par le lemme V.1, et le lemme V.4 permet de conclure. □

Démonstration de la proposition V.11. — Comme on s'int´eresse à la restriction de V à l'inertie, on peut supposer que le corps r´esiduel k de K est alg´ebriquement clos, ce que l'on fait maintenant. On a vu qu'une repr´esentation V est $\mathbf{C}_p$-admissible si et seulement si le module $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ qui lui est associ´e par la th´eorie de Sen est muni de la connexion triviale et on a montr´e

que cette connexion est l'image par θ de celle qui existe sur $\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$. Le lemme V.16 montre que dans ce cas $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$.

Le lemme V.15 montre alors que $t^{-1}\nabla_V$ est une connexion surconvergente sur $\mathbf{D}^\dagger(V)$. Le lemme V.14 montre ensuite que la restriction de V à (l'inertie de) H_K est potentiellement triviale. Enfin comme V est $\mathbf{C}_p$-admissible, $\mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V)$ s'identifie (quitte à restreindre, et comme on a suppos´e k alg´ebriquement clos) à $K_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ muni de la connexion triviale ce qui fait que l'action de Γ_K est discrète. En recollant les morceaux on voit que la restriction de V à I_K est potentiellement triviale. $\square$

CHAPITRE VI

EXTENSIONS DE REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES

Dans ce §, on utilise les r´esultats qui relient les (φ, Γ_K)-modules et la th´eorie de Hodge p-adique pour d´emontrer que certaines repr´esentations sont semi-stables. On d´emontre deux tels r´esultats. Soient

$$\begin{aligned}
H^1_e(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\
H^1_f(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\
H^1_{st}(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\
H^1_g(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))
\end{aligned}$$

Le premier r´esultat est un r´esultat de Perrin-Riou (dans le cas où k est un corps fini ; cf [**28, 29, 30**]) qui suit des calculs de Bloch et Kato sur la dimension des espaces $H^1_f(K, \mathbf{Q}_p(r))$ pour $r \geqslant 1$:

Théorème VI.1. — *Si V est une représentation ordinaire, alors V est semi-stable.*

Le deuxième est un corollaire du fait dû à Hyodo (toujours dans le cas où k est un corps fini ; cf [**18, 17**]) que si V est semi-stable, alors $H^1_g(K, V) = H^1_{st}(K, V)$:

Théorème VI.2. — *Soient X et Y deux représentations p-adiques semi-stables et V une extension de X par Y. Si V est de de Rham, alors V est elle-même semi-stable.*

C'est une cons´equence de la conjecture de « monodromie p-adique » (et permet d'ailleurs de r´eduire la d´emonstration de cette dernière au cas irr´eductible). D'autre part, il n'est pas dur de montrer qu'une repr´esentation ordinaire est de de Rham, et le th´eorème VI.1 est donc une cons´equence du th´eorème VI.2.

Le reste de ce § est consacr´e à la d´emonstration de ces th´eorèmes, le premier ´etant d´emontr´e en VI.3 et le second en VI.4. La bijectivit´e de l'exponentielle de Bloch-Kato $\exp_{V(r)}$ fait enfin l'objet de VI.5.

VI.1. Cohomologie galoisienne et (φ, Γ_K)-modules

La première ´etape est de disposer de constructions explicites des extensions de V. Ces extensions sont d´ecrites par le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(K, V)$. Celui-ci admet une description explicite en termes de (φ, Γ_K)-modules : c'est un r´esultat de Herr, voir [**7, 22**], dont nous rappelons les r´esulats qui nous serons utiles.

Soit Δ_K le sous groupe de torsion de Γ_K ; comme Γ_K s'injecte dans $\mathbf{Z}_p^*$ on a que Δ_K est un groupe fini dont le cardinal divise $p-1$ et on pose

$$p_\Delta = \frac{1}{|\Delta_K|} \sum_{\delta \in \Delta_K} \delta$$

ce qui fait que si M est un $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$-module, alors p_Δ est un projecteur de M dans M^{Δ_K}. Soit γ un g´en´erateur de Γ_K/Δ_K (par exemple l'image de γ_K).

Soit $\mathbf{D}'(V) = \mathbf{D}(V)^{\Delta_K}$. Si α est une application $\mathbf{D}'(V) \to \mathbf{D}'(V)$ qui commute à Γ_K, soit $C_{\alpha,\gamma}(K, V)$ le complexe suivant :

$$0 \to \mathbf{D}'(V) \xrightarrow{f} \mathbf{D}'(V) \oplus \mathbf{D}'(V) \xrightarrow{g} \mathbf{D}'(V) \to 0$$

où $f(x) = ((\alpha-1)x, (\gamma-1)x)$ et $g(x, y) = (\gamma-1)x - (\alpha-1)y$.

La proposition suivante rassemble les r´esultats de [**7**] dont nous aurons besoin :

Proposition VI.3. — *La cohomologie du complexe $C_{\varphi,\gamma}(K, V)$ s'identifie à la cohomologie galoisienne de V. De plus :*

(1) *soient $(x, y) \in Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K, V))$ et $b \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ une solution de l'équation $(\varphi - 1)b = x$, alors*

$$\sigma \mapsto c(\sigma) = \frac{\overline{\sigma} - 1}{\gamma - 1} y - (\sigma - 1)b$$

est un cocycle sur G_K à valeurs dans V ;

(2) *l'application de $Z^1(C_{\varphi,\gamma}(K, V))$ dans $H^1(K, V)$ que l'on en déduit induit un isomorphisme $H^1(C_{\varphi,\gamma}(K, V)) \to H^1(K, V)$;*

(3) *l'application $(x, y) \mapsto (-\varphi(x) + (1-\gamma)^{-1}(\varphi\psi(y) - y), y)$ de $H^1(C_{\psi,\gamma}(K, V))$ dans $H^1(C_{\varphi,\gamma}(K, V))$ est un isomorphisme ;*

(4) *l'application qui à $(x, y) \in Z^1(C_{\psi,\gamma}(K, V))$ associe l'image de x dans $\mathbf{D}'(V)/(\psi - 1)$ induit la suite exacte*

$$0 \to \frac{\mathbf{D}'(V)^{\psi=1}}{1-\gamma} \to H^1(K, V) \to \left(\frac{\mathbf{D}'(V)}{\psi - 1}\right)^{\Gamma} \to 0$$

On en d´eduit notamment une application $h^1 : \mathbf{D}'(V)^{\psi=1} \to H^1(K, V)$ qui peut être d´ecrite de la manière suivante. Soit $y \in \mathbf{D}'(V)^{\psi=1}$, et $b \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ tel que $(1-\gamma)(1-\varphi)b = (1-\varphi)y$. Alors si $\overline{\sigma}$ est l'image de $\sigma \in G_K$ dans $(G_K/H_K)/\Delta_K$ on a

$$h^1(y) = \left[\sigma \mapsto \frac{\overline{\sigma}-1}{\gamma-1}y + (1-\sigma)b\right]$$

Proposition VI.4. — *Soient E une extension de V et $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ tel que $h^1(y)$ est un cocyle qui correspond à la classe de E dans $H^1(K, V)$. S'il existe $r \in \mathbf{R}$ et*

$$z \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\log,K}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$$

tel que $y = (1-\gamma_K)z$, alors E est semi-stable. De plus E est cristalline si on peut prendre $z \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{D}^\dagger(V)$.

Démonstration. — Rappelons que

$$h^1(y) = \left[\sigma \mapsto \frac{\overline{\sigma}-1}{\gamma_K-1}y + (1-\sigma)b\right]$$

de plus on sait que $\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^\dagger(V)$ [7] et $1-\varphi : \mathbf{B}^\dagger \to \mathbf{B}^\dagger$ est surjectif ce qui fait que $b \in \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. On en d´eduit que si $z = (1-\gamma_K)y$ comme dans l'´enonc´e de la proposition alors $h^1(y)(g) = (g-1)(z-b)$ et donc le cocycle est trivial dans $\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_K} \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$ ce qui fait que E est $\mathbf{B}^\dagger_{\log}[1/t]$-admissible et donc semi-stable. L'argument est similaire dans le cas cristallin (ou alors il suffit de voir que dans ce cas E est semi-stable et de plus $N = 0$). □

VI.2. Réduction au cas où k est algébriquement clos

Soit I_K le sous-groupe d'inertie de G_K. Les r´esultats principaux de ce n° sont qu'on ne perd pas d'information en faisant la restriction de V à I_K d'une part et que l'on a interêt à le faire d'autre part.

Lemme VI.5. — *Soit W une représentation p-adique de G_K ; alors W est cristalline (respectivement semi-stable) si et seulement si sa restriction à I_K est cristalline (respectivement semi-stable).*

Démonstration. — Si W est une repr´esentation cristalline (respectivement semi-stable) de G_K, sa restriction à I_K l'est aussi.

Montrons l'autre implication. Soit $P = W(\overline{k})[1/p]$ et $D(W) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_F W)^{I_K}$, c'est un P-espace vectoriel de dimension d. Il suffit de v´erifier que $D(W)^{G_K/I_K}$ est un F-espace vectoriel de dimension d puisque cela implique que $(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_F W)^{G_K}$ est de dimension maximale (et de même avec $\mathbf{B}_{\max}$).

Lemme VI.6. — *Le groupe de cohomologie $H^1(G_K/I_K, \mathrm{GL}_d(P))$ est nul.*

Montrons d'abord que le lemme implique le r´esultat : $D(W)$ d´etermine de la manière suivante un ´el´ement du H^1: si l'on choisit une base $e_1, \cdots, e_d$, alors $[s \mapsto \mathrm{Mat}(s)]$ est dans $H^1(G_K/I_K, \mathrm{GL}_d(P))$. Comme ce dernier groupe est trivial, il existe $A \in \mathrm{GL}_d(P)$ tel que $\mathrm{Mat}(s) = s(A)A^{-1}$. Soit $a_i = A^{-1}e_i$. Alors $a_1, \cdots, a_d$ forme une base de $D(W)$ qui est stable par G_K/I_K, ce qui montre le r´esultat voulu.

Reste à montrer le lemme ce que nous faisons maintenant : soit $c \in H^1(G_K/I_K, \mathrm{GL}_d(P))$ un cocycle. Comme c est continu il existe H un sous-groupe ouvert de $G = G_K/I_K$ tel que $c(h) \in 1 + p\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)$ pour tout $h \in H$. Il suffit de montrer que $c_{|H}$ est trivial, en effet dans la suite d'inflation restriction

$$1 \to H^1(G/H, \mathrm{GL}_d(P)^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, \mathrm{GL}_d(P)) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H, \mathrm{GL}_d(P))$$

le premier groupe est trivial par « Hilbert 90 », et donc si la restriction de c à H est triviale, c'est que c l'est d´ejà sur G. Ensuite on a pour chaque $i \geqslant 1$, on a une suite exacte

$$0 \to 1 + p^{i+1}\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P) \to 1 + p^i\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P) \to \mathrm{M}_d(\overline{k}) \to 0$$

d'où

$$H^1(H, 1 + p^{i+1}\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)) \to H^1(H, 1 + p^i\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)) \to H^1(H, \mathrm{M}_d(\overline{k}))$$

et le dernier terme est nul par « Hilbert 90 ». On en d´eduit pour chaque i l'existence de $A_i \in 1 + p^i\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)$ et de $c_{i+1} \in H^1(H, 1 + p^{i+1}\,\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P))$ tel que $c_i(s) = A_i c_{i+1}(s) s(A_i^{-1})$. Soit $A = \prod A_i$: il est clair que $c(s) = As(A^{-1})$. □

Ceci montre qu'on ne perd rien à se restreindre à I_K. Montrons maintenant que l'on y gagne :

Lemme VI.7. — *Si k est algébriquement clos, l'application h^1 est surjective.*

Démonstration. — Étant donn´ee la suite exacte

$$0 \to \frac{\mathbf{D}'(V)^{\psi=1}}{1-\gamma} \to H^1(K, V) \to \left(\frac{\mathbf{D}'(V)}{\psi - 1}\right)^{\Gamma} \to 0$$

il suffit de montrer que $\mathbf{D}'(V)/(\psi-1) = 0$ ou encore que $\mathbf{D}(V)/(\psi-1) = 0$ car si $a \in \mathbf{D}'(V) = (\psi-1)b$ avec $b \in \mathbf{D}(V)$, alors $a = (\psi-1)p_\Delta(b)$ et $p_\Delta(b) \in \mathbf{D}'(V)$. Quitte à tensoriser par $\mathbf{Q}_p$ il suffit de montrer que si T est un $\mathbf{Z}_p$-r´eseau de V stable par G_K, alors $\mathbf{D}(T) = (\psi-1)\mathbf{D}(T)$ et le lemme de Nakayama implique qu'il suffit de montrer que $\mathbf{D}(T/pT) = (\psi-1)\mathbf{D}(T/pT)$. On se fixe donc U une $\mathbf{F}_p$-repr´esentation. Soit $M = (\mathfrak{m}_E \otimes_{\mathbf{F}_p} U)^{H_K}$, c'est un r´eseau de $\mathbf{D}(U)$ stable par φ. Si $x \in M$, alors la s´erie $\sum_{n\geqslant 1} \varphi^n(x)$ converge vers un ´element y qui v´erifie $(\psi-1)y = x$ ce qui fait que $M \subset (\psi-1)M \subset (\psi-1)\mathbf{D}(U)$.

De plus (cf [**7**, d´emonstration de I.7.3]) il existe $b > 0$ tel que $\pi^{-b}M$ est stable par ψ et tel que $\mathbf{D}(U)/(\psi - 1)$ est un quotient de $\pi^{-b}M$. Soit $E = \pi^{-b}M/(\psi - 1)\pi^{-b}M$, c'est un $\overline{k}$-espace vectoriel de dimension finie (c'est un quotient de $\pi^{-b}M/M$ puisque $M \subset (\psi - 1)M \subset (\psi - 1)\pi^{-b}M$) stable par ψ dont $\mathbf{D}(U)/(\psi - 1)$ est un quotient. Pour finir la preuve il suffit donc de montrer que si E est un $\overline{k}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un op´erateur ψ qui est $\varphi^{-1} = \sigma^{-1}$-semi-lin´eaire, alors $\psi - 1 : E \to E$ est surjective, ce que nous faisons maintenant.

Soit $e_1, \cdots, e_d$ une base de E, et $x \in E$. Il existe $f \leqslant d$, que l'on peut supposer minimal, tel que $x, \psi(x), \cdots, \psi^f(x)$ sont li´es. Comme σ est bijectif (k est parfait), on peut ´ecrire $\sum_{i=0}^{f} \psi^i(\mu_i x) = 0$ où $\mu_0 \neq 0$ et pour tout $\alpha \in k$ on aura donc $\sum_{i=0}^{f} \alpha\psi^i(\mu_i x) = 0$ ce qui fait que

$$\sum_{i=0}^{f} \psi^i(\sigma^i(\alpha)\mu_i x) - \sum_{i=0}^{f}(\sigma^i(\alpha)\mu_i)x = -\sum_{i=0}^{f}(\sigma^i(\alpha)\mu_i)x$$

et donc, en utilisant le fait que $\psi^i - 1 = (\psi - 1)(\psi^{i-1} + \cdots + 1)$

$$(\psi - 1)\sum_{i=1}^{f}\sum_{j=0}^{i-1} \psi^j(\mu_i\sigma^i(\alpha)x) = \left(-\sum_{i=0}^{f}\sigma^i(\alpha)\mu_i\right)x$$

ce qui fait que pour montrer qu'il existe z tel que $(\psi - 1)z = x$ il suffit de montrer qu'il existe α tel que $\left(-\sum_{i=0}^{f}\sigma^i(\alpha)\mu_i\right) = 1$ ce qui revient à $1 + \alpha\mu_0 + \alpha^p\mu_1 + \cdots + \alpha^{p^f}\mu_f = 0$ et l'existence de α est ´equivalente à l'existence d'une racine du polynôme ci-dessus, existence qui r´esulte de l'hypothèse que k est alg´ebriquement clos. □

VI.3. Semi-stabilité des représentations ordinaires

Commençons par appliquer les r´esultats pr´ec´edents aux extensions de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p(j)$ avec $j \geqslant 1$ car ce cas est particulièrement simple.

Théorème VI.8. — *Si $j \geqslant 1$, alors toutes les extensions de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p(j)$ sont semi-stables. De plus si $j \geqslant 2$, elles sont cristallines.*

Démonstration. — Soit E une extension de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p(j)$. L'extension E est semi-stable si et seulement si sa restriction à I_K l'est, et on suppose donc que $k = \overline{k}$. Soit e_j une base de $\mathbf{Q}_p(j)$. Il existe alors $y = f(\pi_K) \otimes e_j \in \mathbf{B}_K^{\psi=1}(j)$ tel que $h^1(y)$ est un cocyle correspondant à la classe de E. On sait que $\mathbf{B}_K^{\psi=1} \subset \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ pour un certain r [**7**, III.3.2] et le corollaire IV.11 montre qu'il existe $g(\pi_K) \in \mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger,s}$ tel que $t^j f(\pi_K) = (1 - \gamma_K)g(\pi_K)$ ce qui fait que $y = (1 - \gamma_K)(g(\pi_K)t^{-j} \otimes e_j)$ et la proposition VI.4 montre qu'alors E est semi-stable ce qui ´etablit le premier point.

Montrons maintenant que si V est une repr´esentation cristalline qui a une extension semi-stable non cristalline, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1/p} \neq 0$ ce qui dans notre cas force $j = 1$.

Soit donc V cristalline et E une extension semi-stable de $\mathbf{Q}_p$ par V. On a une suite exacte

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(E) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Q}_p) \to 0$$

soit $\alpha \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(E)$ tel que son image dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Q}_p)$ est 1, une base fix´ee de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Q}_p)$. Alors $\beta = N(\alpha) \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ne d´epend pas du choix d'un tel α et $\beta \neq 0$ si et seulement si $\alpha \notin \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(E)$. Ensuite $\varphi(\alpha) - \alpha \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ car $\varphi = 1$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Q}_p)$ et donc $N(\alpha) = N\varphi(\alpha) = p\varphi N(\alpha)$ ce qui fait que β est un ´element non-nul de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ tel que $\varphi(\beta) = p^{-1}\beta$. □

Dans [**28**] il est d´emontr´e que la semi-stabilit´e des repr´esentations p-adiques ordinaires est une cons´equence de la proposition suivante :

Proposition VI.9. — *Soient V_1 et V_2 deux représentations p-adiques non-ramifiées. Soit V une représentation p-adique de G_K extension de $V_1(j)$ par $V_2(i)$. Si $i \geqslant j + 2$, la représentation p-adique V est cristalline. Si $i = j + 1$, la représentation p-adique V est semi-stable.*

Démonstration de la proposition. — Par le lemme VI.5, il suffit de montrer que V est cristalline (ou semi-stable) en tant que repr´esentation de I_K. Comme on a suppos´e V_1 et V_2 non ramifi´ees, leurs restrictions à I_K sont triviales et elles sont donc isomorphes à $\mathbf{Q}_p^{d_1}$ et $\mathbf{Q}_p^{d_2}$.

Ensuite il y a une bijection entre $\mathrm{Ext}^1(W_1, W_2)$ et $H^1(K, W_1^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} W_2)$, et $V_1(j)^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2(i) = \mathbf{Q}_p(i - j)^{d_1+d_2}$ dans ce cas. On peut donc appliquer le th´eorème VI.8 puisque on a suppos´e $i - j \geqslant 2$, ou $= 1$ respectivement ce qui permet de conclure comme $H^1(K, V \oplus W) = H^1(K, V) \oplus H^1(K, W)$. □

VI.4. Extensions de représentations semi-stables

Soient V et W deux repr´esentations semi-stables. Il est classique que l'on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Hom}(V, W), \mathbf{Q}_p) = H^1(K, \mathrm{Hom}(V, W)) = \mathrm{Ext}^1(V, W)$$

ce qui fait que pour montrer le th´eorème VI.2 on peut se restreindre au cas $W = \mathbf{Q}_p$ ce que nous faisons maintenant.

Soit donc V semi-stable et E une extension de $\mathbf{Q}_p$ par V. Par le lemme VI.5 on peut supposer que $k = \overline{k}$ et il existe alors $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ tel que $c = h^1(y)$ est un cocycle ´egal à la classe de E dans $H^1(K, V)$.

On a donc $y \in \mathbf{D}^\dagger(V)$ et $b \in \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ tels que

$$c(g) = \frac{\overline{g}-1}{\gamma_K - 1} y - (g-1)b$$

Rappelons que dans [**7**] est d´efinie une application $T_0 : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \to K((t))$ qui est une section continue, $K((t))$-lin´eaire et commutant à Γ_K de l'inclusion canonique et une application ∂_V : $K((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ qui à $\sum a_i t^i \otimes d_i$ associe $a_0 \otimes d_0$. Si m est assez grand on en d´eduit une application de $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$

$$\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset (\mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} \xrightarrow{\varphi^{-m}} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{\partial_V \circ T_0} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

qui est ind´ependante de $m \gg 0$ [**7**, IV.2.1] et que nous noterons res.

Proposition VI.10. — *La représentation E est de de Rham si et seulement si* $\mathrm{res}(y) = 0$.

Commençons par montrer un lemme qui est essentiellement le cas de la repr´esentation triviale :

Lemme VI.11. — *L'application $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \to K$ qui à $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K}$ associe le coefficient constant de $T_0(x)$ induit la suite exacte :*

$$0 \to K \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \xrightarrow{1-\gamma_K} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \to K \to 0$$

Démonstration. — On sait que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$ ce qui montre que le noyau de $1-\gamma_K$ est bien K.

Soit $\widehat{K}_\infty$ le compl´et´e p-adique de K_∞. Rappelons [**36**] que si $j \neq 0$, alors $1 - \chi^{-j}(\gamma_K)\gamma_K$ est inversible sur $\widehat{K}_\infty$. Dans le cas $j = 0$, on peut ´ecrire $\widehat{K}_\infty = K \oplus X$ où X est un sous-K-espace vectoriel sur lequel $1-\gamma_K$ est inversible.

Nous allons tout d'abord montrer que si $j \geqslant 1$, alors

$$1-\gamma_K : t^{-j}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t^{-j+1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K} \to t^{-j}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t^{-j+1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$$

est surjectif ce qui revient à montrer que

$$1-\chi^{-j}(\gamma_K)\gamma_K : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$$

est surjective. Cela suit du fait que l'application θ r´ealise une bijection Γ_K-´equivariante entre $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$ et $\widehat{K}_\infty$ et que $1-\chi^{-j}(\gamma_K)\gamma_K$ est inversible sur $\widehat{K}_\infty$.

On en d´eduit par r´ecurrence que si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K}$, alors on peut ´ecrire $x = x_0 + (1-\gamma_K)y_0$ avec $y_0 \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K}$ et $x_0 \in (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$. L'hypothèse que le coefficient constant de $T_0(x)$ est nul revient au fait que si l'on d´ecompose $\theta(x_0) \in \widehat{K}_\infty$ selon $\widehat{K}_\infty = K \oplus X$, alors la composante selon K est nulle. On va montrer que sous cette hypothèse $x \in (1-\gamma_K)\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K}$, ce qui d´emontre le lemme. Soit $j \geqslant 0$, on va montrer par r´ecurrence qu'il existe $x_j \in t^j(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$ et pour $j \geqslant 1$, $y_j \in t^j(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$ tels que $x = x_j + (1-\gamma_K)(y_0 + \cdots + y_j)$ ce qui implique que $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$ est

une s´erie qui converge pour la topologie t-adique (pour laquelle $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$ est complet) vers un y tel que $x = (1-\gamma_K)y$. Le cas $j = 0$ a d´ejà ´et´e fait. Le fait que la composante selon K de $\theta(x_0)$ est nulle implique que x_0 est dans l'image de

$$1-\gamma_K : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$$

ce qui s'occupe du cas $j = 1$ et la r´ecurrence est une cons´equence du fait que si $j \geqslant 1$, alors

$$1-\chi^j(\gamma_K)\gamma_K : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$$

est surjectif et donc aussi :

$$1-\gamma_K : t^j(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t^{j+1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K} \to t^j(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}/t^{j+1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{H_K}$$

□

Démonstration de la proposition VI.10. — Comme on a choisi m assez grand on a $\varphi^{-m}(b) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Étant donn´ee la suite exacte

$$0 \to K \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \xrightarrow{1-\gamma_K} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \to K \to 0$$

on a $\mathrm{res}(y) = 0$ si et seulement si $\varphi^{-m}(y)$ appartient à $(1-\gamma_K)\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{H_K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ ce qui fait que si $\mathrm{res}(y) = 0$, alors E est de de Rham car

$$c(g) = (g-1)((1-\gamma_K)^{-1}\varphi^{-m}(y) - \varphi^{-m}(b))$$

Montrons maintenant la r´eciproque ; on peut ´ecrire

$$\varphi^{-m}(y) = \varphi^{-m}(y) - \mathrm{res}(y) + \mathrm{res}(y) = (1-\gamma_K)z + \mathrm{res}(y)$$

et un petit calcul montre qu'alors $c(g) = (g-1)z + \log(\chi(\overline{g}))\cdot\mathrm{res}(y)$ et l'implication r´eciproque r´esulte du fait que si $\alpha \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ le cocyle $g \mapsto \log(\chi(\overline{g}))\alpha$ n'est pas trivial dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ (on peut d'ailleurs montrer que l'application $\alpha \mapsto [g \mapsto \log(\chi(\overline{g}))\alpha]$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ voir [**11**, III.5.2] pour ce r´esultat dû à Kato [**24**]). □

Lemme VI.12. — *Soit $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$, $y = \sum y_i \otimes d_i$ où $\{d_i\}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et $y_i \in \mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger}[1/t]$, tel que $\mathrm{res}(y) = 0$. On suppose qu'il existe i tel que l'on peut écrire y_i sous la forme $y_i = v_i + (1-\gamma_K)w_i$ avec $v_i \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$. Alors pour $n \gg 0$ on a $\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_i)) = 0$.*

Démonstration. — Soit Q la matrice de φ^{-1} dans la base $\{d_i\}$ et $Q^{(m)} = (q_{ij}^{(m)})$ celle de φ^{-m}. Alors

$$\iota_n(y) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} \iota_n(y_i)q_{ij}^{(n)} \otimes d_j$$

et donc

$$T_0(\iota_n(y)) = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} \mathrm{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(y_i))q_{ij}^{(n)} \otimes d_j$$

et comme $Q^{(n)}$ est inversible le fait que $\mathrm{res}(y) = 0$ implique que le coefficient constant $(\partial_0(\cdot))$ de $\iota_n(y_i) \in K_n[[t]]$ (ce que l'on est en droit de consid´erer si $n \gg 0$) v´erifie $\partial_0 \mathrm{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(y_i)) = 0$ et comme on a de toute façon $\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\iota_n((1-\gamma_K)w_i)) = 0$ c'est donc que $\partial_0 \circ \mathrm{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(v_i)) = 0$ et on a alors $\partial_0 \circ \mathrm{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(v_i)) = \mathrm{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_i)) = 0$. □

Démonstration du théorème VI.2. — Par III.6 on a un isomorphisme

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t] \to \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$$

et si E est l'extension de V correspondant à $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$, alors E est semi-stable si on peut ´ecrire $y = (1-\gamma_K)z$ avec $z \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$.

Le F-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est muni d'un op´erateur de monodromie nilpotent N et on se fixe une base $\{d_i\}$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ adapt´ee à N c'est-à-dire qu'il existe $0 = r_1, \cdots, r_k$ tels que pour tout i

$$N(d_{r_i+1}) = 0,\ N(d_{r_i+2}) = -d_{r_i+1}, \cdots,\ N(d_{r_{i+1}}) = -d_{r_{i+1}-1}$$

Comme $y \in \mathbf{D}^\dagger(V)$ on a $Ny = 0$ ce qui implique que si on ´ecrit $y = \sum d_i \otimes y_i$ avec $d_i \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et $y_i \in \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$, alors les y_i vont satisfaire

$$N(y_{r_i+1}) = 0,\ N(y_{r_i+2}) = y_{r_i+1}, \cdots,\ N(y_{r_{i+1}}) = y_{r_{i+1}-1}$$

On cherche à montrer que $y_i = (1-\gamma_K)z_i$ avec $z_i \in \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$. Pour simplifier les notations montrons cela pour $y_{r_1+1}, \cdots, y_{r_2}$ c'est-à-dire pour $y_1, \cdots, y_r$ où $r = r_2$.

Tout d'abord $N(y_1) = 0$ ce qui fait que $y_1 \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ et par la proposition IV.6 on peut ´ecrire $y_1 = v_1 + (1-\gamma_K)w_1$ avec $v_1 \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$. Ensuite comme $\mathrm{res}(y) = 0$, le lemme VI.4 montre que $\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_1)) = 0$ pour tout $n \gg 0$, et donc $v_1 \in (1-\gamma_K)\mathbf{B}^\dagger_{\log,K}$ par la proposition IV.11 ce qui fait qu'il existe $z_1 \in \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$ tel que $y_1 = (1-\gamma_K)z_1$.

Ensuite supposons que $y_{i-1} = (1-\gamma_K)z_{i-1}$ avec $z_i = \sum_j a_{ij} \log^j(\pi)$. Alors un petit calcul montre que

$$N\left(y_i + (1-\gamma_K)\sum_j \frac{a_{ij}}{j+1}\log^{j+1}(\pi)\right) = 0$$

et donc que

$$y_i = x_i - (1-\gamma_K)\sum_j \frac{a_{ij}}{j+1}\log^{j+1}(\pi) = x_i - (1-\gamma_K)u_i$$

avec $N(x_i) = 0$ ce qui fait que $x_i \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}[1/t]$ et par la proposition IV.6 on peut ´ecrire $x_i = v_i + (1-\gamma_K)w_i$ avec $v_i \in \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ et donc $y_i = v_i + (1-\gamma_K)(w_i - u_i)$. Ensuite comme pr´ec´edemment si $\mathrm{res}(y) = 0$, alors $\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_i)) = 0$ pour tout $n \gg 0$ et donc $v_i \in (1-\gamma_K)\mathbf{B}^\dagger_{\log,K}$ par la proposition IV.11 ce qui fait qu'il existe $z_i \in \mathbf{B}^\dagger_{\log,K}[1/t]$ tel que $y_i = (1-\gamma_K)z_i$.

Il est alors imm´ediat que $y = (1 - \chi_K) \sum d_i \otimes z_i$ et donc que E est semi-stable. □

VI.5. L'exponentielle de Bloch-Kato

Dans ce n° V est une repr´esentation semi-stable. Rappelons que les anneaux $\mathbf{B}_{\max}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reli´es par la suite exacte fondamentale (cf [**11**, III.5] et [**18**]) :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$

En tensorisant avec V et en prenant les invariants par G_K on obtient un d´ebut de suite exacte longue :

$$0 \to V^{G_K} \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \to ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \to H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$

Soit $H^1_e(K, V) = \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))$. On d´eduit de la suite exacte ci-dessus une application de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1_e(K, V)$ appel´ee exponentielle de Bloch-Kato, et not´ee $\exp_V$. D'autre part comme V est de de Rham on a

$$((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\operatorname{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

et [**4**, lemma 3.8.1] l'image de $\exp_V$ est $H^1_e(K, V)$ tout entier. Dans le cas où k est fini des calculs de dimension montrent que si $r \gg 0$, alors $H^1_e(K, V(r)) = H^1(K, V(r))$ et donc que $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \to H^1(K, V(r))$ est un isomorphisme (on remarquera que si $r \gg 0$, alors $\operatorname{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \{0\}$). Le but de ce n° est de montrer, sans condition sur k, que si $r \gg 0$, alors $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \to H^1(K, V(r))$ est un isomorphisme.

Lemme VI.13. — *Si V est une représentation semi-stable telle que $1 - \varphi : \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est surjectif et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$, alors $H^1_g(K, V) = H^1_e(K, V)$.*

Démonstration. — Soit $c \in H^1_g(K, V)$ et E l'extension de $\mathbf{Q}_p$ par V qui correspond à c. Le th´eorème VI.2 montre qu'il existe $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ tel que $c(g) = (g - 1)x$. Comme $c(g) \in V$ on a $(\varphi - 1)c(g) = 0$ et donc $\varphi(x) - x \in (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$. Il existe donc $y \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ tel que $\varphi(y) - y = \varphi(x) - x$ ce qui revient à $\varphi(x - y) = x - y$ et quitte à remplacer x par $x - y$ on peut donc supposer que $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Comme N commute à G_K on a $N(c(g)) = 0 = (g - 1)(N(x))$ et donc $N(x) \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$. De plus comme $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ on doit avoir $N(x) \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$ et donc $x \in \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ ce qui montre que $c(g) \in H^1_e(K, V)$. □

Lemme VI.14. — *Si r est assez grand, alors $V(r)$ satisfait les conditions du lemme précédent.*

Démonstration. — Rappelons que le Frobenius φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est bijectif. Soit M un $\mathbf{Z}_p$-r´eseau de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et $M_r = M(r)$. Comme $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(r)) = t^{-r}\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ on aura, pour r est assez grand

$\varphi^{-1}(M_r) \subset p^2 M_r$. Il est alors ´evident que $1-\varphi = -\varphi(1-\bar{\varphi}^{-1})$ est surjectif. Enfin si $r \gg 0$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(r))^{\varphi=1/p} = 0$ car les pentes de φ augmentent de 1 à chaque fois que l'on tord. □

Lemme VI.15. — *Si r est assez grand, alors $H^1(K, V(r)) = H^1_g(K, V(r))$.*

Démonstration. — Soit $c \in H^1(K, V(r))$ et E l'extension associ´ee à c. On sait que E est de de Rham si et seulement si sa restriction à I_K l'est et on suppose donc que $k = \bar{k}$. Il existe donc $y \in \mathbf{D}(V(r))^{\psi=1}$ tel que $c = h^1(y)$ et il suffit donc de montrer que si r est assez grand l'image de $\mathbf{D}(V(r))^{\psi=1}$ par $\mathrm{res} = \mathrm{res}_{V(r)}$ est nulle. Or

$$T_0 \circ \iota_m(\mathbf{D}(V)^{\psi=1}) \subset K((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

et donc si r est assez grand

$$T_0 \circ \iota_m(\mathbf{D}(V(r))^{\psi=1}) \subset tK[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r))$$

(puisque l'image de $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ engendre un $K[[t]]$-module de rang fini, ´etant contenue dans l'image de $\mathbf{D}^{\dagger,s(V)}(V)$) et l'image de $\mathrm{res}_{V(r)}$ est donc nulle. □

Théorème VI.16. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K, alors quand $r \gg 0$, l'exponentielle de Bloch-Kato $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \to H^1(K, V(r))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Les lemmes pr´ec´edents montrent que quitte à prendre $r \gg 0$, on a

$$H^1(K, V(r)) = H^1_g(K, V(r)) = H^1_e(K, V(r))$$

et $\exp_{V(r)}$ est donc surjective. D'autre part si $r \gg 0$, alors $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \{0\}$, ce qui montre que $\exp_{V(r)}$ est injective. C'est donc un isomorphisme. □

DIAGRAMME DES ANNEAUX DE PÉRIODES

Le diagramme ci-dessous r´ecapitule les relations entre les diff´erents anneaux de p´eriodes. Les flèches qui se terminent par $\twoheadrightarrow$ sont surjectives, la flèche en pointill´es $\dashrightarrow$ est une limite inductive de morphismes d´efinis sur des sous-anneaux ($\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\log} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$), et toutes les autres sont injectives.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \arrow[ddddd, bend left, "\theta"] \\
 & \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log} \arrow[urr, dotted] & \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{B}^+_{\mathrm{st}} \arrow[u] \\
 & \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}} \arrow[u] & \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{B}^+_{\max} \arrow[u] \\
\widetilde{\mathbf{B}} & \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \arrow[l] \arrow[u] & \widetilde{\mathbf{B}}^+ \arrow[l] \arrow[r, two heads, "\theta"] \arrow[u] & \mathbf{C}_p \\
\widetilde{\mathbf{A}} \arrow[u] \arrow[d, two heads] & \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger \arrow[l] \arrow[u] & \widetilde{\mathbf{A}}^+ \arrow[l] \arrow[r, two heads, "\theta"] \arrow[u] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p} \arrow[u] \arrow[d, two heads] \\
\widetilde{\mathbf{E}} & & \widetilde{\mathbf{E}}^+ \arrow[ll] \arrow[r, two heads, "\theta"] & \overline{k}
\end{tikzcd}
$$

Les trois anneaux de la colonne de gauche sont reli´es à la th´eorie des (φ, Γ_K)-modules. Les trois anneaux de la colonne de droite sont reli´es à la th´eorie de Hodge p-adique. Pour faire le lien entre ces deux th´eories, on passe d'un côt´e à un autre via tous les anneaux interm´ediaires. La situation id´eale est quand on peut se placer dans la colonne du milieu (par exemple : les repr´esentations de hauteur finie).

INDEX DES NOTATIONS

F, 17
G_K, 17
$H^1_*(K,V)$, 61
H_K, 17
I_K, 63
J_n, 27
K, 17
K_n, 17
K_∞, 17
$M(i)$, 38
N, 20, 33
R_m, 21
R^*_m, 21
T_0, 67
V_I, 23, 25
W_I, 26
$[\cdot]$, 18
$\mathbf{C}_p$, 17
Δ_K, 62
Γ_K, 17
Θ_V, 54
$\mathbf{A}^{\dagger,r}$, 21
$\mathbf{A}^\dagger$, 21
$\alpha(K,r)$, 23
$\widetilde{\mathbf{A}}$, 20
$\widetilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$, 23
$\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$, 21
$\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$, 21
$\widetilde{\mathbf{A}}^+$, 18
$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, 19
$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, 19
$\mathbf{B}^{\dagger,r}$, 20
$\mathbf{B}^\dagger$, 20
$\mathbf{B}_{\max}$, 19
$\mathbf{B}^+_{\max}$, 19
$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, 34
$\mathbf{B}^\dagger_{\log,K}$, 35
$\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, 19
$\widetilde{\mathbf{B}}$, 20
$\widetilde{\mathbf{B}}_I$, 25
$\widetilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$, 23
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$, 20
$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, 20
$\widetilde{\mathbf{B}}^+$, 18
$\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, 19
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$, 29
$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$, 33
$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}$, 29
$\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$, 19
$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\log}$, 32
$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}$, 32
χ, 17
$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, 19
$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, 19
$\mathbf{D}^\dagger(V)$, 21
$\mathbf{D}^+_{\mathrm{dif}}(V)$, 54
δ_{π_L}, 57
$\mathbf{D}(V)$, 20
$\mathbf{D}'(V)$, 62
$\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, 38
$\mathbf{D}^\dagger_{\log}(V)$, 38
$\mathbf{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$, 54
$\mathbf{D}^n_{\mathrm{Sen}}(V)$, 54
$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$, 20
$\mathbf{D}^+_{\mathrm{st}}(V)$, 38
$\mathbf{E}$, 18
$\mathbf{E}_F$, 18
$\mathbf{E}_K$,$\mathbf{E}^+_K$, 18
$\mathbf{E}^+$, 18
ε, 18
$\widetilde{\mathbf{E}}$, 18
$\widetilde{\mathbf{E}}^+$, 18
$\exp_V$, 70
$\widehat{K}_\infty$, 67
ι_K, 18
ι_n, 20, 32

log, 31
log(π), 32
log[$\overline{\pi}$], 19
$\mathbf{A}$, 20
$\mathbf{A}_F$, 20
$\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$, 20
$\mathbf{B}$, 20
$\mathbf{B}_F$, 20
∇, 46
∇_V, 52, 54
ω, 18
Res_X, 33
res, 67
$\overline{F}$, 17
∂, 46
φ, 19
π,π_n, 18
π_K, 21
$\overline{\pi}_K$, 18
ψ, 20
θ, 18
$\widetilde{p}$, 18
$v_{\mathbf{E}}$, 18
d, 19
e_K, 18
k, 17
$n(K)$, 21
$n(\gamma)$, 45
$n(r)$, 20
p_Δ, 62
q, 18
$r(V)$, 21
r_n, 20
$r_{n(K)}$, 21
$s(V)$, 21
t, 19

BIBLIOGRAPHIE

[1] Andr´e Y. : *Repésentations galoisiennes et opérateurs de Bessel p-adiques.* Pr´epublication n° 267 de l'Institut Math´ematique de Jussieu.

[2] Benois D. : *On Iwasawa theory of crystalline representations.* Duke Math. J. 104 (2000) 211–267.

[3] Berthelot P. : *Communication personnelle.*

[4] Bloch S., Kato K. : *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[5] Cherbonnier F. : *Représentations p-adiques surconvergentes.* Thèse de l'Universit´e d'Orsay, 1996.

[6] Cherbonnier F., Colmez P. : *Représentations p-adiques surconvergentes.* Invent. Math. 133 (1998), 581–611.

[7] Cherbonnier F., Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local.* J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 241–268.

[8] Christol G. : *About a Tsuzuki theorem.* À paraître (analyse p-adique, Dekker).

[9] Christol G., Mebkhout G. : *Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes.* À paraître dans Ast´erisque.

[10] Christol G., Robba P. : *Équations différentielles p-adiques. Applications aux sommes exponentielles.* Actualit´es Math´ematiques, Hermann, Paris, 1994.

[11] Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local.* Ann. of Math. 148 (1998), 485–571.

[12] Colmez P. : *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie.* J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.

[13] Colmez P. : *Fonctions L p-adiques.* S´eminaire Bourbaki, 1998/99, Ast´erisque 266 (2000) Exp. 851.

[14] Colmez P. : *Espaces de Banach de dimension finie.* Pr´epublication n° 263 de l'Institut Math´ematique de Jussieu.

[15] Colmez P., Fontaine J-M. : *Constructions des représentations p-adiques semi-stables.* Invent. Math. 140 (2000) 1–43.

[16] Crew R. : *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 31 (1998) 717–763.

[17] Emerton M., Kisin M. : *Extensions of crystalline representations.* Preprint (1999).

[18] Fontaine J-M. : *Le corps des périodes p-adiques.* P´eriodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), Ast´erisque 223 (1994) 59–111.

[19] Fontaine J-M. : *Représentations p-adiques semi-stables.* P´eriodes p-adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Ast´erisque 223 (1994) 113–184.

[20] Fontaine J-M. : *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[21] Fontaine J-M. : *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques.* Pr´epublication de l'Universit´e d'Orsay, 2000-24.

[22] Herr L. : *Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques.* Bull. Soc. Math. France 126 (1998) 563–600.

[23] Hyodo O. : $H^1_g = H^1_{st}$. Non publi´e.

[24] Kato K. : *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Arithmetic algebraic geometry, Lecture Notes in Mathematics 1553, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 50–63.

[25] Kedlaya K. : *Unipotency and semistability of overconvergent F-crystals.* Preprint, disponible comme math.AG/0102173.

[26] Lazard, M. : *Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.

[27] Nekov´ař J. : *On p-adic height pairings.* S´eminaire de Th´eorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[28] Perrin-Riou B. : *Représentations p-adiques ordinaires.* P´eriodes p-adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Ast´erisque 223 (1994) 185–220.

[29] Perrin-Riou B. : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local.* Invent. Math. 115 (1994) 81–161.

[30] Perrin-Riou B. : *Théorie d'Iwasawa et loi explicite de réciprocité.* Doc. Math. 4 (1999), 219–273 (electronic).

[31] Perrin-Riou B. : *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables.* Pr´epublication de l'Universit´e d'Orsay, 2000-8.

[32] Sen S. : *Ramification in p-adic Lie extensions.* Invent. Math. 17 (1972) 44–50.

[33] Sen S. : *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules.* Ann. of Math. 97 (1973) 160–170.

[34] Sen S. : *Continuous cohomology and p-adic Galois representations.* Invent. Math. 62 (1980/81) 89–116.

[35] Serre, J-P. : *Lie Algebras and Lie Groups.* Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1500. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[36] Tate J. : *p-divisible groups.* Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) 158–183 Springer, Berlin.

[37] Tsuji T. : *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case.* Invent. Math. 137 (1999), 233–411.

[38] Tsuzuki N. : *Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent F-isocrystals.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), 379–412.

[39] Tsuzuki N. : *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve.* Amer. J. Math. 120 (1998) 1165–1190.

[40] Wach N. : *Représentations p-adiques potentiellement cristallines.* Bull. Soc. Math. France 124 (1996), 375–400.

[41] Wach, N. : *Représentations cristallines de torsion.* Compositio Math. 108 (1997) 185–240.

[42] Wintenberger J-P. : *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.