



HAL
open science

Les gouttes enrobées

Pascale Aussillous

► **To cite this version:**

Pascale Aussillous. Les gouttes enrobées. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2002. Français. NNT: . tel-00003630

HAL Id: tel-00003630

<https://theses.hal.science/tel-00003630v1>

Submitted on 23 Oct 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de l'Université PARIS VI

Spécialité

Physique des Liquides

Présentée par

Pascale AUSSILLOUS

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'Université PARIS VI

Sujet :

Les gouttes enrobées

Soutenue le 14 novembre 2002 devant le jury composé de :

Mme CHARLAIX Élisabeth

Rapporteur

M. POULIQUEN Olivier

Rapporteur

M. DE GENNES Pierre-Gilles

Président

M. MAHADEVAN L.

M. ZALESKI Stéphane

M. QUÉRÉ David

Directeur de Thèse

Remerciements

Merci tout d'abord à Pierre-Gilles de Gennes et à Claudine Williams qui m'ont accueillie au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée du Collège de France, UMR 7125 du CNRS, où j'ai passé les 4 années de travail qui ont conduit à ce manuscrit.

Merci aux membres du jury : au président Pierre-Gilles de Gennes, à Stéphane Zaleski, L. Mahadevan et spécialement à Elisabeth Charlaix et Olivier Pouliquen qui ont accepté de rapporter ce travail. Merci surtout à David Quéré, qui m'a encadrée pendant ces années au laboratoire. Il a su me proposer des sujets à la fois d'aspect simple et riches, me guider et me conseiller tout en me donnant beaucoup de libertés. Merci d'avoir préservé mon moral par tant d'enthousiasme et quelques cachotteries...

Le laboratoire se renouvelle annuellement et l'équipe des Quérés a vu défiler quelques personnes au cours de ces quatre années. Tout d'abord lors de mon année de DEA, Denis Richard et José Bico m'ont accueillie à bras ouverts et m'ont appris les rouages du laboratoire ainsi que la recette jalousement gardée du traitement des lycopodes... Elise Lorenceau est ensuite arrivée et a été une co-bureau idéale pendant 3 ans. L'année suivante est celle de l'arrivée d'Anne-Laure Himbert, notre « petit scarabée » et la venue simultanée de Frédéric Restagno nous a permis de créer une équipe soudée dont l'entente a dépassé le cadre du travail. Au passage, merci Frédéric pour ta relecture et tous tes conseils avisés (je les ai presque tous suivis). Aurélie Lafuma et Frédéric Chevy sont venus compléter l'équipe lors de ma dernière année de thèse. Les échanges avec eux ont été très fructueux, du point de vue scientifique car ils viennent de domaines très différents mais aussi au sens propre du terme grâce à leurs bédéthèques et vidéothèques très fournies. J'ai également une pensée pour tous ceux qui sont passés dans l'équipe plus furtivement ou qui arrivent alors que je pars : Christophe Tordeux, les « petits X », Mathilde Callies... J'ai aussi eu l'occasion de travailler avec Alain de Ryck et Christophe Clanet, ce furent des moments très enrichissants et j'espère pouvoir poursuivre ces collaborations.

Le laboratoire dans son ensemble présente le grand avantage de la pluridisciplinarité. Un grand merci à Marie-Alice Guedeau-Boudeville (Booboo) et à Raymond Ober qui m'ont beaucoup apporté tant au niveau humain (je n'ai pas besoin de rappeler leur extrême gentillesse) qu'au niveau professionnel. Vous êtes tous les deux indispensables ! Merci aux chercheurs permanents du laboratoire : Elie Raphaël, Anne-Marie Cazabat, Marie-Pierre Valignat, Olivier Bénichou, Liliane Léger, Hubert Hervet, Claudine Williams et Pierre-Gilles de Gennes. Merci à tous les jeunes chercheurs que j'ai

côtoyés et qui sont pour beaucoup dans la vie du laboratoire : Damien Van Effenterre, Christophe Poulard, François Vandenbrouck, Mario Cachile, Olivier Théodoly, Mauricio Carbajal, Stéphanie Leroux, Tom Waigh, Amir Maldonado, Damien Baigl, R Emmelt Pit, Florent Saulnier, Ko Okamura, Ramin Golestanian, Achod Aradian, Claire Laurens, Tatiana Schmatko, Ahmed Hamraoui, Lionel Bureau, Gwendal Josse, Marie Lamblet. Merci à Georges Debrégeas et à Alexandre Kabla d'avoir attendu si patiemment.

Merci à l'équipe de l'atelier Daniel Détry, Gérard Barthélémy, Michel Crasson et enfin Lahcene Cherfa pour toutes les pièces réalisées et spécialement à Daniel pour avoir si bien poli mon plan incliné. Merci à Gilles Jandeau pour l'informatique. Merci à Françoise David et à Marie-France Jestin pour le temps passé à m'expliquer ce que l'on pouvait faire (et surtout ne pas faire) avec un bon de commande. Merci à Martine Badeyan, Joselita Labirin, Florence Bonamy et à Josette Come-Gary.

Merci aux moniteurs Paris XIII, Jérôme Lambert, Lino Ponce, Alexandre Amblard et Manuel Moragues, avec qui j'ai partagé les voyages à Villetaneuse et les horaires mouvants des TP.

Merci à toute ma famille qui m'a toujours soutenue et encouragée, même si ces années parisiennes ont rendu mon accent légèrement plus pointu.

Enfin, merci Etienne.

Table des matières

<i>Introduction</i>	11
<i>Chapitre I Gouttes enrobées : principe et statique</i>	15
I. Généralités sur le mouillage	17
1) La tension de surface	17
2) La longueur capillaire κ^{-1}	19
3) Le mouillage.....	19
4) Surfaces texturées, super-hydrophobie	20
II. Gouttes enrobées.....	21
1) Principe	21
2) Collage des grains.....	22
3) Occurrences naturelles	26
III. Théorie du Contact Statique.....	27
1) Crêpes gravitaires ($R_0 \gg \kappa^{-1}$)	28
2) Sphères ($R_0 \ll \kappa^{-1}$).....	29
3) Calculs numériques	30
IV. Mesures expérimentales	33
1) Résultats expérimentaux	34
2) Bilan	35
<i>Bibliographie</i>	37
<i>Chapitre II Gouttes enrobées visqueuses sur un plan faiblement incliné</i>	39
I. Description de l'expérience	41
II. Dévalement de crêpes	42
1) Résultats expérimentaux.....	42
2) Conditions aux limites.....	42
3) Limites du modèle.....	48

III. Dévalement de gouttes	51
1) Résultats expérimentaux	51
2) Modèle Mahadevan-Pomeau (MP).....	52
3) Limites du régime MP.....	55
IV. Conclusion.....	61
Bibliographie	63
Chapitre III <i>Forme des gouttes en rotation</i>	65
I. <i>Bibliographie</i>	67
1) <i>Expérience de Plateau</i>	68
2) <i>Modélisation de Rayleigh</i>	69
3) <i>Intégration numérique de Brown et Scriven</i>	72
4) <i>Expériences en apesanteur</i>	75
II. <i>Intégrations numériques et lois d'échelle</i>	77
1) <i>Équations et méthode d'intégration des formes axisymétriques</i>	77
2) <i>Résultats</i>	78
3) <i>Modèles</i>	81
III. <i>Formes expérimentales</i>	86
1) <i>Description des expériences</i>	86
2) <i>Résultats expérimentaux</i>	88
3) <i>Bilan</i>	89
<i>Bibliographie</i>	91
Chapitre IV <i>Gouttes enrobées : mouvement rapide sur plan incliné.</i>	93
I. <i>Liquides peu visqueux</i>	95
1) <i>Résultats expérimentaux</i>	95
2) <i>Discussion</i>	98
II. <i>Liquides visqueux sur plan fortement incliné</i>	102
1) <i>Relation vitesse angulaire/vitesse limite</i>	102
2) <i>Vitesse limite des gouttes enrobées</i>	104
3) <i>Discussion</i>	106
III. <i>Bilan</i>	107
<i>Bibliographie</i>	109

Chapitre V	Transformations	111
I.	De la roue à la cacahuète	113
	1) Instabilité des formes axisymétriques par rapport aux formes à 2 lobes	113
	2) Observations expérimentales	115
	3) Discussion	118
II.	Forme à 2 lobes : évolution hors-équilibre	119
	1) Description des expériences	119
	2) Modèle d'étirement	121
III.	Bilan	125
	Bibliographie	127
Chapitre VI	Manipulation de gouttes enrobées	129
I.	Effets de l'enrobage.....	131
	1) Non coalescence	131
	2) Division	133
II.	Champ électrostatique	134
	1) Expériences préliminaires.....	134
	2) Expérience de Washizu.....	137
III.	Champ magnétique.....	139
IV.	Bilan	140
	Bibliographie	141
Chapitre VII	Robustesse des gouttes enrobées	143
I.	Écrasement des gouttes enrobées.....	145
	1) Description de l'expérience.....	145
	2) Résultats expérimentaux	146
	3) Discussion	147
II.	Saut de gouttes.....	148
	1) Rebonds	148
	2) Sauts fatals aux gouttes.....	153
III.	Bilan	158
	Bibliographie	161
	Annexe VII-1 Rebonds de gouttes enrobées visqueuses dans la limite des faibles déformations.	163

Chapitre VIII	Tectites	167
I.	Présentation générale.....	169
II.	Description de l'expérience et allure des résultats	171
	1) Description de l'expérience.....	171
	2) Tectites de laboratoire.....	172
III.	Effet de la solidification	174
	1) Résultats expérimentaux dans le tambour	175
	2) Effet des temps caractéristiques dans les expériences sur plan incliné.....	177
IV.	Application aux tectites réelles.....	178
	1) Vitesse de rotation des tectites ?	178
	2) Tailles et formes des tectites	179
	3) Bilan	179
	Bibliographie	181
Chapitre IX	Bulles rampantes.....	183
I.	Principe et description de l'expérience	185
	1) Principe	185
	2) Description de l'expérience.....	185
	3) Forme statique des bulles.....	187
	4) Allure des résultats.....	189
II.	Modèles	190
	1) Crêpes	191
	2) Petites bulles.....	193
III.	Résultats expérimentaux.....	194
	1) Dépendance avec la taille de la bulle	194
	2) Dépendance avec l'inclinaison pour le régime crêpe	195
	3) Frottement visqueux ?.....	195
IV.	Crêpes solides	196
	1) Description de l'expérience.....	196
	2) Allure des résultats.....	197
	3) Discussion	199
V.	Bilan	201
	Bibliographie	203

<i>Conclusion</i>	205
<i>Complément Mouillage dynamique de tubes capillaires</i>	209
I. <i>Introduction</i>	211
II. <i>Dépôt visco-capillaire : les régimes Taylor-Bretherton</i>	212
III. <i>Le régime visco-inertiel</i>	214
1) <i>L'effet épaississant de l'inertie</i>	214
2) <i>Lois d'échelles</i>	214
3) <i>Discussion</i>	215
IV. <i>Le régime de couche limite</i>	218
V. <i>Conclusion</i>	219
<i>Bibliographie</i>	221

Introduction

Dans la feuille de patate douce

Elle enveloppe sa vie

La goutte d'eau

Kikaku

Isoler et piloter des gouttes sub-millimétriques de liquide est un challenge car à cette échelle, les forces capillaires prédominent et provoquent en général l'adhésion des gouttelettes sur les surfaces solides environnantes. Plusieurs solutions existent cependant pour résoudre, du moins partiellement, ce problème. Ainsi, les surfaces super-hydrophobes, que l'on retrouve chez certains insectes et plantes, permettent d'obtenir des gouttelettes quasi-sphériques. On peut également imaginer mettre les gouttes en lévitation de diverses manières (jet d'air, ondes acoustiques, caléfaction...). Mais, la manipulation de tels objets reste en général un obstacle : l'hystérésis de l'angle de contact colle les petites gouttes sur des surfaces super-hydrophobes et la présence des lignes de contact ralentit fortement les gouttes quand on les met en mouvement. En outre, la mise en mouvement des gouttes en lévitation nécessitent une technique sophistiquée (en effet, il faut déplacer le coussin élévateur avec la goutte). Nous proposons dans cette thèse une nouvelle méthode pour atteindre une situation de mouillage nul, tout en gardant un objet facile à manipuler.

En couvrant des gouttes de liquide d'une matière poudreuse hydrophobe (une pellicule d'argile ou de suie par exemple), on obtient des « gouttes enrobées » en situation de non mouillage : la poudre isole complètement le liquide du substrat sur lequel elle repose. La goutte prend alors la forme que lui impose sa tension superficielle, aux corrections dues à la gravité près : les petites gouttes enrobées, placés sur une surface plane comme du verre, sont parfaitement sphériques sauf à leur base, légèrement déformée par la gravité. Des gouttes plus grosses prennent une forme écrasée. De tels objets peuvent être vus comme des « solides mous », ou des « liquides à peau » : ils se déforment facilement comme des liquides mais restent intègres comme des solides. Ils présentent aussi la particularité de représenter une limite du mouillage d'un liquide sur un solide : celle du mouillage nul. Sur certaines surfaces super-hydrophobes, on peut obtenir des angles de contact très élevés (jusqu'à 170°) mais la limite extrême de 180° ne peut pas être atteinte. La goutte enrobée permet de franchir ce palier et de s'affranchir de tous les problèmes liés au mouillage en éliminant les lignes de contact.

Dans le premier chapitre de cette thèse, après avoir rappelé quelques généralités sur le mouillage, nous montrons comment obtenir des gouttes enrobées et discutons leur forme statique. Le deuxième chapitre présente leur mouvement à faible vitesse, c'est-à-dire sur des plans légèrement inclinés et pour des liquides visqueux. Dans ce chapitre, nous montrons comment les prédictions théoriques de Mahadevan et Pomeau sur les « gouttes roulantes » permettent de comprendre quantitativement la vitesse limite de ces gouttes.

Quand elles sont en mouvement, les gouttes enrobées se mettent spontanément à rouler. Or, l'étude des liquides en rotation présente une grande importance, par exemple dans l'analogie avec les corps célestes, qui a engendré de nombreuses recherches depuis plusieurs siècles. Dans le chapitre III, nous résumons quelques unes de ces études, expérimentales, théoriques et numériques. Ensuite, nous calculons numériquement une famille possible de formes d'équilibre de gouttes en rotation. Enfin, nous présentons quelques résultats expérimentaux, que notre système permet d'obtenir très simplement.

Dans le chapitre IV, nous nous consacrons au mouvement rapide des gouttes enrobées : celui des gouttes très peu visqueuses, ou des gouttes plus visqueuses sur un plan fortement incliné. Nous abordons ensuite, au chapitre V, le problème de la stabilité de ces gouttes, quand elles sont en rotation, et décrivons quelques unes des transformations qui peuvent intervenir entre les différentes configurations.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à la mise en mouvement des gouttes enrobées. En effet, dans l'objectif d'appliquer ce système à la micro-fluidique, il faut pouvoir contrôler le déplacement de ces objets. Il faut aussi en connaître la robustesse : cette étude est développée dans le chapitre VII.

Finalement, nous présentons deux études inspirées par le travail réalisé sur les gouttes enrobées. Le chapitre VIII est une approche expérimentale de l'étude des tectites : il s'agit de pierres d'origine extraterrestre qui sont des résidus de l'impact de météorites sur Terre dont les formes rappellent celles obtenues dans certaines conditions avec les gouttes enrobées. Dans le chapitre IX, nous développons une autre réalisation expérimentale du mouillage nul : celle de bulles d'air dans un liquide, sous un solide mouillé totalement. Nous tentons alors de caractériser la dynamique de telles bulles dans le champ de gravité.

Chapitre I

Gouttes enrobées : principe et statique

Table des matières

Chapitre I	Gouttes enrobées : principe et statique	15
I.	Généralités sur le mouillage	17
	1) La tension de surface	17
	2) La longueur capillaire κ^{-1}	19
	3) Le mouillage.....	19
	4) Surfaces texturées, super-hydrophobie	20
II.	Gouttes enrobées.....	21
	1) Principe	21
	2) Collage des grains.....	22
	3) Occurrences naturelles	26
III.	Théorie du Contact Statique.....	27
	1) Crêpes gravitaires ($R_0 \gg \kappa^{-1}$).....	28
	2) Sphères ($R_0 \ll \kappa^{-1}$).....	29
	3) Calculs numériques	30
IV.	Mesures expérimentales	33
	1) Résultats expérimentaux	34
	2) Bilan	35
	Bibliographie	37

I. Généralités sur le mouillage

Comprendre comment se comporte une goutte de liquide sur un solide est d'une grande importance pratique. Par exemple, par temps de pluie on préfère que les gouttes ruissellent sur nos vêtements afin que ceux-ci ne s'imbibent pas. Ou, pour garder un lavabo toujours propre, on applique des produits qui permettent d'évacuer la pellicule d'eau qui a tendance à rester et à faire des tâches. L'étude du mouillage permet de mieux comprendre ces phénomènes et éventuellement de les modifier. Nous allons rappeler dans ce chapitre quelques généralités sur le mouillage. Pour une introduction plus complète aux phénomènes capillaires, on peut se référer au livre d'Adamson [1] ou à celui de de Gennes, Brochard-Wyart, Quéré [2].

1) La tension de surface

Si l'on crée une interface entre deux milieux, les molécules placées à l'interface n'ont pas le même environnement que celui qu'elles auraient en volume. En particulier, elles subissent des forces attractives de leurs voisines (responsables de l'existence des phases condensées), qui ne sont pas les mêmes. Ceci induit une énergie spécifique aux molécules se trouvant à l'interface, et donc une énergie de surface positive pour l'interface considérée.

On note γ_{12} l'énergie interfaciale d'une surface entre deux milieux. C'est l'énergie à apporter pour créer une interface de surface unité entre les deux milieux. Plus particulièrement, on appellera énergie de surface ou énergie superficielle, l'énergie interfaciale entre une phase condensée et l'air environnant. Il est d'autant plus défavorable pour un milieu de créer une interface que les liaisons constitutives du milieu sont fortes. Ainsi, pour la plupart des huiles où les interactions sont de type Van der Waals, la tension de surface est de l'ordre de 20 mJ/m^2 , alors que pour l'eau, à cause des liaisons hydrogènes, elle est plus grande (72 mJ/m^2). On notera tout au long de ce manuscrit γ_{SL} l'énergie de surface solide/liquide, γ_{SV} celle entre le solide et la vapeur et γ celle entre le liquide et la vapeur.

Il est possible d'observer l'existence de l'énergie de surface par une expérience simple : on place un film de liquide dans un cadre possédant un côté mobile (deux interfaces liquide-air sont ainsi créées) et on tire dessus latéralement comme décrit dans la Figure 1. On s'aperçoit alors qu'il faut fournir un travail pour déplacer le côté mobile.

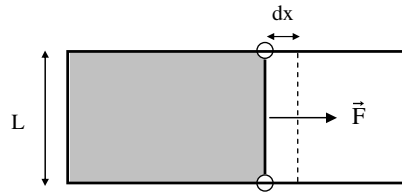


Figure 1 : Schéma d'une expérience de cadre mobile.

Durant cette expérience, on accroît la surface liquide/air. L'énergie apportée est donc de l'énergie de surface et le bilan d'énergie s'écrit $\delta W = 2\gamma L dx$. Ce bilan en énergie fait apparaître une force de norme $2\gamma L$. Ainsi l'énergie superficielle est aussi une force par unité de longueur, normale à la tige, et qui s'oppose à l'accroissement de surface. Cette force est en général appelée *force capillaire*.

La tension de surface joue un rôle prépondérant pour les systèmes déformables ; c'est à elle que l'on doit notamment la forme sphérique des bulles de savon. Pour créer une telle bulle, on souffle dans un film de savon. L'intérieur de la bulle est donc pressurisé et ce sont les forces capillaires qui sont responsables de ce saut de pression à la traversée de la surface courbe. Prenons l'exemple, un peu plus simple, d'une goutte sphérique comme représenté sur la Figure 2.

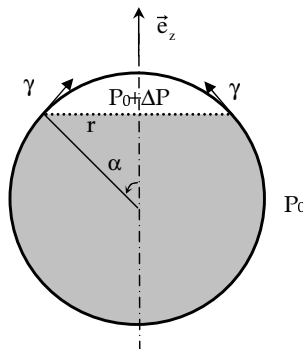


Figure 2 : L'intérieur d'une goutte est pressurisé.

Faisons un bilan des forces qui s'exercent sur la partie grisée, dans le schéma de la Figure 2. La tension de surface eau/air tire sur la ligne de longueur $2\pi r$ suivant la tangente à la sphère. Cela crée une force d'intensité $\gamma \sin \alpha 2\pi r$ selon l'axe des z . Cette force est équilibrée par la surpression dans la goutte qui s'appuie sur la surface modélisée par les pointillés : $\Delta P \pi r^2$. En considérant la relation géométrique $r = R \sin \alpha$ où R est le rayon de la goutte, on en déduit qu'il règne une surpression à l'intérieur de la goutte : $\Delta P = 2\gamma/R$.

De façon plus générale, la traversée d'une interface entre deux fluides s'accompagne d'une variation de pression égale au produit de la tension superficielle par la courbure de la surface (équation de Laplace) :

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

où R_1 et R_2 sont les deux rayons de courbures principaux [1].

2) La longueur capillaire κ^{-1}

La capillarité est prédominante pour des petits objets. Au dessus d'une certaine échelle κ^{-1} , la gravité devient prépondérante et les surfaces déformables sont planes. Cette longueur s'appelle la longueur capillaire. Pour l'estimer, prenons l'exemple d'une goutte d'eau sphérique de rayon R . La pression de Laplace s'écrit γ/R alors que la pression de la colonne d'eau varie en $\rho g R$. Finalement, la goutte ne sera pas déformée par la gravité si l'on a :

$$R \ll \kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (2)$$

Cette longueur vaut 2.7 mm pour l'eau et 1.5 mm pour les huiles silicones.

3) Le mouillage

Quand on dépose une petite goutte liquide sur un solide, deux situations peuvent se produire : s'il est énergétiquement plus favorable de remplacer une interface (solide/air) par deux interfaces (air/liquide et liquide/solide), alors la goutte s'étale complètement sur le solide et on est dans une situation de mouillage total.

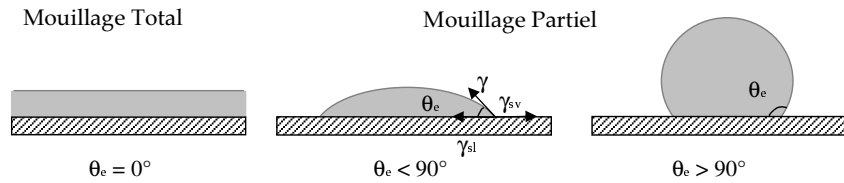


Figure 3 : Schéma des différentes situations de mouillage d'une goutte de liquide déposée sur un solide.

On définit le paramètre d'étalement $S = \gamma_{sv} - (\gamma_{sl} + \gamma)$. Le mouillage total correspond donc à $S > 0$. Dans le cas contraire, on parle de mouillage partiel ; la goutte prend alors la forme d'une calotte sphérique avec un angle θ_e de raccord au niveau du solide. Cet angle est donné par l'équilibre des forces de tension de surface au niveau de la ligne où les trois phases sont en contact (relation de Young) :

$$\cos \theta_e = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sl}}{\gamma}$$

Les phases liquide et solide étant toutes deux condensées, on a en général $\gamma_{sl} < \gamma_{sv}$, c'est-à-dire $\theta_e < 90^\circ$. En choisissant bien le couple liquide/solide (en prenant un liquide de haute énergie comme l'eau et un solide de très basse énergie comme certains plastiques), on arrive pour des surfaces lisses jusqu'à des angles de contact de 120° . Pour obtenir des angles plus élevés, il faut travailler avec des surfaces texturées.

4) Surfaces texturées, super-hydrophobie

Un angle de contact faible, voire nul, peut présenter de grands avantages car il favorise l'étalement (peinture, vernis, colle). Cependant, dans certaines situations, cela peut s'avérer néfaste : si l'eau mouillait trop les ailes des papillons, une goutte d'eau introduite entre les deux ailes engendrerait des ponts capillaires et une force de rappel insurmontable pour le papillon. Pour se prémunir de tels effets, la nature a doté le papillon d'ailes très repoussantes pour l'eau [3]. On parle de surfaces super-hydrophobes.

Une surface texturée amplifie le comportement d'un liquide sur un solide en mouillage partiel. En effet, le liquide qui ressent la texture et donc la rugosité r du solide (qui correspond à la surface totale sur la surface projetée) va adopter un angle de contact macroscopique θ^* défini par $\cos \theta^* = r \cos \theta$ (relation de Wenzel [4]) avec $r > 1$. Un liquide ayant un angle de Young sur surface lisse supérieur à 90° présentera ainsi un angle plus

élevé sur surface texturée. Cependant, si l'amplitude de la texture est suffisamment importante, de l'air est piégé dans les cavités sous la goutte (modèle Bico et collaborateurs [5]) et la surface correspond à une surface mixte solide/air. L'angle de contact macroscopique s'écrit dans ce cas :

$$\cos \theta^* = -1 + \phi_s (1 + \cos \theta_e) \quad (3)$$

où ϕ_s est la fraction de surface solide du matériau composite. On sait aujourd'hui fabriquer de telles surfaces et atteindre des angles de contact de l'ordre de 160 à 170° [4]-[7]. Mais la présence d'un solide sous la goutte empêche d'atteindre des valeurs supérieures [8]-[9] : du solide continue à être en contact avec la goutte ($\phi_s \neq 0$), et la formule 3 montre que θ^* ne peut atteindre 180°. Pour réaliser des surfaces supprimant le mouillage, nous avons imaginé le système décrit au paragraphe suivant.

II. Gouttes enrobées

1) Principe

Nous voulons créer une goutte de liquide sans aucun contact avec le support sur lequel elle repose. Plusieurs méthodes [10]-[18] sont déjà utilisées pour atteindre ce but : on peut par exemple mettre des gouttes en lévitation grâce à un jet d'air à travers un poreux ou, en microgravité, grâce à des ondes acoustiques. Il est également possible de mettre la goutte en caléfaction ou bien de retarder la coalescence d'une goutte de liquide sur un bain du même liquide de température différente ou en mouvement. L'inconvénient de toutes ces techniques est que la manipulation des gouttes ainsi formées est difficile. C'est pourquoi nous avons choisi de proposer une nouvelle méthode.

Pour cela, nous utilisons une poudre hydrophobe qui enrobe spontanément la goutte et l'isole du solide sur lequel elle repose. Grâce à cette méthode, il n'y a plus de contact entre la phase liquide et le solide et on ne peut plus à proprement parler de mouillage. On appellera l'objet ainsi créé une « goutte enrobée » (Figure 4). Notons que bien qu'elle ne soit pas directement en contact avec la phase fluide intérieure, la présence de la plaque solide joue un rôle déterminant dans la forme de la goutte enrobée ainsi créée.

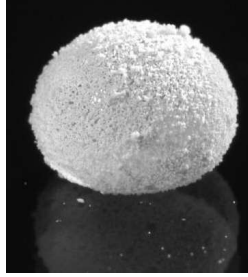


Figure 4 : Goutte enrobée posée sur un solide.

Le principe de fabrication de ces objets limitant les produits utilisables, il est intéressant de détailler ces derniers.

2) Collage des grains

Pour comprendre l'existence des gouttes enrobées, commençons par étudier le comportement d'une poudre hydrophobe déposée sur un réservoir d'eau. Chaque grain s'enfonce dans le liquide jusqu'à sa position d'équilibre. La taille des grains des poudres utilisées est très inférieure à la longueur capillaire ($20\ \mu\text{m}$ au maximum, à comparer à quelques millimètres), les forces de pesanteur sont donc négligeables par rapport à la force capillaire. Le grain se raccorde à la surface de liquide avec l'angle de contact θ_e , et on suppose que la surface libre du liquide est plane.

Calculons l'énergie ΔE du système liquide/grain à l'équilibre (le grain est enfoncé d'une distance z) par rapport à un grain au-dessus de la surface (Figure 5). On considère le grain lisse et sphérique.

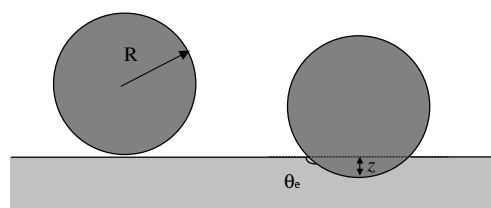


Figure 5 : schéma d'un grain lisse et sphérique s'enfonçant dans un réservoir de liquide.

La variation d'énergie superficielle liée à l'enfoncement du grain s'écrit :

$$\Delta E = -\pi R^2 \gamma (1 + \cos \theta_e)^2 \quad (4)$$

Cette énergie est toujours négative quelque soit l'angle de contact : il est toujours favorable pour le système que le grain se colle à la goutte. Sur la Figure 6, nous l'avons représentée en fonction de l'angle de contact : l'énergie gagnée est d'autant plus grande que l'angle de contact est petit.

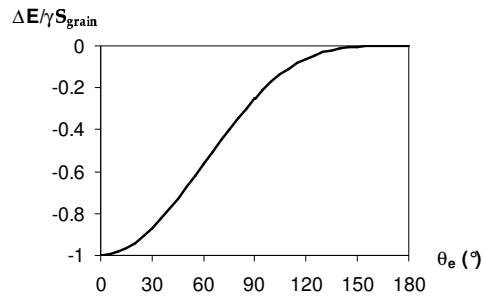


Figure 6 : Énergie de collage des grains normalisée par $\gamma 4\pi R^2$ en fonction de l'angle de contact θ_e liquide/grain.

Si le grain est en mouillage total ($\cos\theta_e = 1$), il pénètre complètement dans le liquide. S'il est en mouillage nul ($\theta_e = 180^\circ$), l'énergie gagnée au collage est nulle. Cependant, nous avons vu dans les généralités sur le mouillage que même avec des surfaces texturées, il y a toujours du contact solide/liquide et on ne peut pas atteindre le mouillage nul. Ainsi, quelque soit les propriétés de mouillage du grain utilisé, en mouillage partiel, il collera à la goutte.

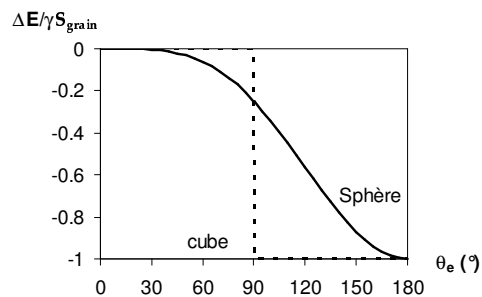


Figure 7 : Énergie d'émergence des grains normalisée par γS_{grain} en fonction de l'angle de contact θ_e liquide/grain pour un grain sphérique ou cubique.

Nous avons représenté sur la Figure 7 le gain d'énergie du système liquide/grain dans sa position d'équilibre par rapport à une immersion complète du grain $\Delta E_{\text{émergence}} = -\pi R^2 \gamma (1 - \cos\theta_e)^2$. Ce gain est très faible pour des petits angles de contact (inférieurs à 30°). Le grain s'enfoncera alors facilement, ce qui peut rendre fragile la goutte enrobée vis-à-vis des oscillations de sa surface (Figure 8) ou des chocs. On comprend ainsi l'intérêt qu'il peut y avoir à travailler avec des grains hydrophobes.

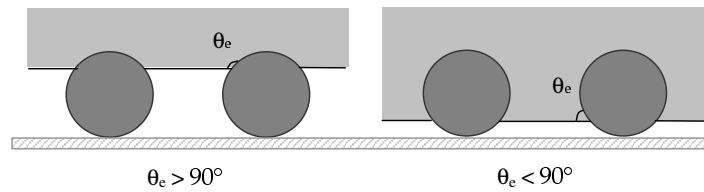


Figure 8 : Configurations possibles des grains sous la goutte enrobée suivant les propriétés de mouillage du système.

Sur la Figure 7, nous avons également représenté le gain d'énergie à l'émergence pour un grain cubique. Dans cette géométrie, mis à part le cas particulier où $\theta_e = 90^\circ$, le raccord de la ligne triple ne peut se faire qu'au niveau des coins du cube où par canthotaxie plusieurs angles sont autorisés. Seules les deux configurations présentées sur la Figure 9 sont alors possibles : soit le grain est totalement enfoncé ($\theta_e < 90^\circ$) soit il ne l'est pas du tout ($\theta_e > 90^\circ$).

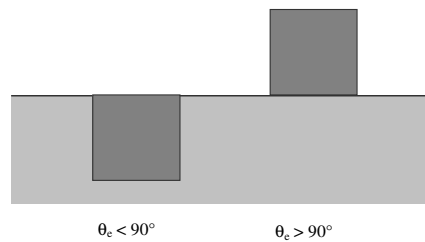


Figure 9 : Positions d'équilibres d'un grain cubique à une interface liquide/vapeur.

Là encore, on voit la nécessité d'utiliser des grains hydrophobes – et dans toute notre étude, nous nous plaçons dans ce cas.

Revenons à présent sur la configuration d'une goutte enrobée : les grains entourent complètement la goutte de liquide pour l'isoler du substrat sur lequel elle repose. Les grains ainsi disposés doivent soutenir le poids de la colonne de liquide au-dessus. Au maximum (dans le cas des grosses gouttes qui prennent la forme de crêpes, comme on le verra par la suite), cette hauteur est de deux fois la longueur capillaire et représente une surpression de $\rho g 2\kappa^{-1}$. Ce qui signifie un rayon de courbure de l'interface du liquide entre les grains $R \sim \kappa^{-1}/2$. Ce rayon de courbure est millimétrique : pour une distance inter-grains de l'ordre de grandeur de la taille des grains, il peut être considéré comme infiniment grand et la surface plane, ce qui justifie l'hypothèse faite précédemment.

Nous avons utilisé des poudres traitées chimiquement pour être hydrophobes. Nous nous

sommes donc limités aux liquides ayant des hautes tensions de surface comme les liquides polaires. Nous avons choisi de travailler avec une série de mélanges eau-glycérol. Le glycérol (1,2,3-pentan-3-ol) a des propriétés proches de celles de l'eau (tension de surface $\gamma = 63 \text{ mN/m}$ à 20°C ; densité 1.26) mais possède une viscosité plus de 1000 fois supérieure. Les mélanges eau-glycérol sont donc particulièrement intéressants pour observer et quantifier des forces de friction visqueuse.

Nous avons étudié deux poudres différentes. La première est une poudre de lycopodes (spores de fougère) préalablement traitée au fluoro-décyl-trichlorosilane. Les grains mesurent typiquement $30 \mu\text{m}$ et sont très poreux. Ainsi, après traitement, les propriétés de mouillage sont exacerbées : une goutte d'eau posée sur de tels grains présente un angle de contact très élevé.

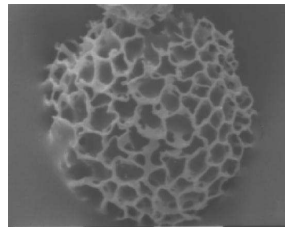


Figure 10 : Lycopode vu au microscope électronique (taille typique $30 \mu\text{m}$).

La deuxième poudre utilisée est une poudre de silice (SiO_2) traitée au dichloro-diméthylsilane ($\text{SiCl}_2(\text{CH}_3)_2$), dont la taille typique des grains est de 10 nm (100 nm à $10 \mu\text{m}$ pour les agrégats). Le rapport entre les tailles de grain des deux poudres peut donc atteindre un facteur 1000.

Réaliser une goutte enrobée est particulièrement aisé : on dépose une goutte de liquide sur un tas de poudre et elle s'enrobe spontanément. Il est alors possible d'observer au microscope la surface d'une telle goutte (Figure 11).

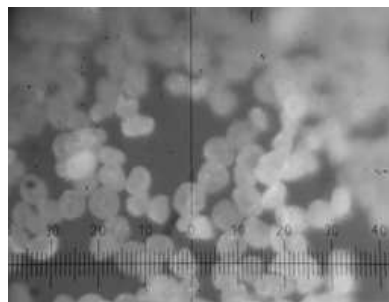


Figure 11 : Goutte enrobée de lycopodes vue au microscope (1 division = $5.6 \mu\text{m}$)

Les grains se disposent sur la surface liquide sur moins d'une monocouche, avec des zones nues de plusieurs taille de grain. Ceci est néanmoins suffisant pour obtenir une goutte de liquide intègre, sans contact avec la surface sur laquelle elle est posée, quelle que soit cette surface.

3) Occurrences naturelles

On trouve dans la nature quelques exemples de gouttes enrobées. La taille des insectes étant en général inférieure à la longueur capillaire de l'eau, ils sont continuellement confrontés aux problèmes liés au mouillage. Pour éviter qu'ils ne se retrouvent piégés par des ponts capillaires, la nature les a dotés pour la plupart de surfaces très hydrophobes. C'est, par exemple, ce qui permet aux araignées d'eau de flotter. Chez les pucerons, le système de la goutte enrobée a été sélectionné : pour leur permettre de se débarrasser de leurs excréments visqueux, leur corps produit des grains de cire. Ces grains recouvrent les excréments à leur sortie de l'anus, créant ainsi une goutte enrobée, facile à déplacer et à évacuer ce qui, du point de vue de l'hygiène, est fondamental pour leur survie. Ce sont d'ailleurs les soldats qui sont chargés de cette tâche, et l'exécutent en marchant sur la surface des gouttes, ou en les poussant, pour les faire rouler [19].

Pour des raisons comparables, c'est-à-dire éviter une contamination, certaines plantes sont dotées de feuilles auto-nettoyantes. C'est par exemple le cas du lotus. Ce sont en fait des feuilles super hydrophobes, grâce à leur composition et à leur texture. Cependant, le mécanisme de nettoyage est susceptible de faire intervenir des gouttes enrobées. En effet, les gouttes de pluie, en fuyant la super-hydrophobie de la plante, entraînent avec elles, en s'enrobant, les poussières hydrophobes qui la polluaient [20].

Enfin, un phénomène rencontré apparemment dans le sud-ouest pourrait être imputable aux gouttes enrobées : le *verglas d'été*. Une couche de pollen recouvrirait les routes, les rendant glissante comme du verglas en présence d'eau, peut-être par la formation de gouttes enrobées.

III. Théorie du Contact Statique

Quoique la phase intérieure de la goutte enrobée ne soit pas en contact avec le solide, la présence du solide induit une déformation de la goutte. En effet, ces gouttes étant molles, elles se déforment pour abaisser leur énergie potentielle de gravité et minimiser leur énergie. On peut alors définir une zone de *contact* statique. Elle correspond à un disque de rayon ℓ parallèle au support. La connaissance de la taille de cette zone est importante car c'est à travers ce contact que les forces de friction visqueuse vont opérer lors d'un mouvement. La taille de la zone de contact d'une goutte en situation de mouillage nul a été étudiée théoriquement par Mahadevan-Pomeau [21]. Nous présentons ici les résultats de leur modèle, ainsi que les données expérimentales obtenues.

La forme de la goutte résulte d'un équilibre entre la gravité qui l'aplatit et abaisse son centre de masse et la force capillaire qui tend à la rendre sphérique. Le nombre de Bond ($B_0 = \rho g R_0^2 / \gamma$) compare ces deux effets. Ici on travaille principalement à volume V imposé. La taille caractéristique est donc le rayon R_0 de la sphère de volume V :

$$R_0 = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3}$$

Pour $B_0 \ll 1$, les effets de la gravité sont négligeables et la forme de la goutte est proche de la sphère. Ceci correspond à $R_0 \ll \kappa^{-1}$ où $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma / \rho g}$ est la longueur capillaire. Pour $B_0 \gg 1$, la gravité devient importante et conduit à une forme de « crêpe » plate.



Figure 12 : Formes expérimentales de gouttes enrobées, en dessous de la longueur capillaire (petite goutte sphérique) et pour une taille de l'ordre de la longueur capillaire (grosse goutte légèrement aplatie).

Sur la Figure 12, l'effet aplatissant de la gravité est visible pour des gouttes de l'ordre de la longueur capillaire, alors que des gouttes plus petites sont sphériques. La longueur capillaire

est de l'ordre de 2.5 mm dans le cas des gouttes enrobées.

Nous allons à présent décrire plus précisément ces formes de gouttes en mouillage nul.

1) Crêpes gravitaires ($R_0 \gg \kappa^{-1}$)

Si on dépose une grosse quantité de liquide sur une surface qu'il mouille partiellement la goutte formée ressent principalement les effets gravitationnels [2] : elle est plate, sauf au niveau du raccordement avec le solide où l'on retrouve l'angle de contact statique donné par la relation de Young.

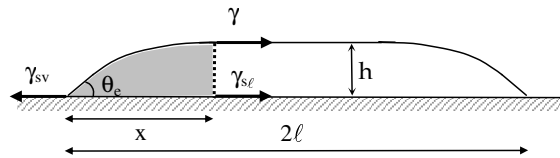


Figure 13 : Schéma d'une grosse goutte ($R_0 \gg \kappa^{-1}$) en mouillage partiel.

Sur la Figure 13, nous avons représenté une grosse goutte de symétrie cylindrique en mouillage partiel. Faisons le bilan des forces appliquées (forces capillaires et surpression hydrostatique) sur l'élément grisé de taille x qui comprend toute la couronne où la partie supérieure n'est pas plate. Dans le cas des grosses gouttes, on néglige l'extension x de cette zone par rapport à la zone de contact ℓ , et l'équilibre des forces s'écrit :

$$\gamma_{sv} 2\pi\ell + \rho g \frac{h^2}{2} 2\pi\ell \approx (\gamma + \gamma_{sl}) 2\pi\ell$$

En utilisant la formule de Young (équilibre des forces capillaires au niveau du contact entre les 3 phases), on en déduit l'épaisseur de la crêpe à l'équilibre :

$$h \approx \kappa^{-1} \sqrt{2(1 - \cos \theta_c)}$$

Cette épaisseur est indépendante du volume de la goutte. Pour des gouttes en mouillage nul, $\theta_c = 180^\circ$ et la hauteur de la crêpe vaut $2\kappa^{-1}$.

Connaissant la forme de la crêpe, on peut en déduire la taille de la zone de contact, à l'aide

de la conservation du volume ($\pi \ell^2 h \approx \frac{4}{3} \pi R_0^3$) :

$$\ell \approx \kappa^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} (R_0 \kappa)^{3/2} \quad (5)$$

2) Sphères ($R_0 \ll \kappa^{-1}$)

Effectuons le raisonnement sur une petite goutte en situation de mouillage nul déposée sur un solide. Pour des rayons inférieurs à la longueur capillaire, elle est pratiquement sphérique sauf au niveau de sa base où l'effet de la gravité la déforme et définit un disque de contact de rayon ℓ .

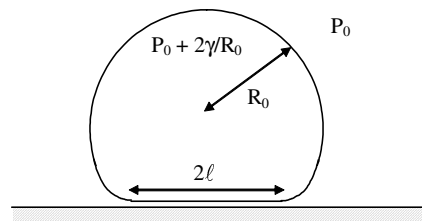


Figure 14 : Schéma d'une petite goutte, en dessous de la longueur capillaire.

Au repos, la pression dans la goutte est uniforme puisque la pression hydrostatique est négligeable. Si on appelle P_0 la pression extérieure, la pression dans la goutte est donnée par le saut de pression dû aux courbures de la sphère en son sommet :

$$P = P_0 + \frac{2\gamma}{R_0}$$

Comme la zone de contact est plane, la pression sous la goutte est la même que dans la goutte. Le solide ressent donc une surpression $\Delta P = 2\gamma/R_0$ qui correspond à sa réaction sur le disque de contact pour équilibrer le poids de la goutte :

$$\Delta P \pi \ell^2 \approx \frac{4}{3} \rho g \pi R_0^3$$

La taille de la zone de contact dans le cas des petites gouttes vaut ainsi :

$$\ell \approx \kappa^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} (R_0 \kappa)^2 \quad (6)$$

Cette loi a été proposée (sans coefficient numérique) par Mahadevan et Pomeau [21]. Elle montre que le rayon de contact varie comme R_0^2 , beaucoup plus vite donc que pour une goutte « usuelle » où il augmente comme R_0 . Remarquons aussi que les deux lois 5 et 6 se raccordent logiquement pour $R_0 \approx \kappa^{-1}$.

Les ingrédients de ces problèmes de statique sont simples et bien connus : la gravité et la capillarité. Nous allons donc essayer de valider ces modèles par l'intégration numérique des équations qui régissent la forme d'une goutte posée sur un solide en mouillage nul ($\theta_e = 180^\circ$).

3) Calculs numériques

La forme de la goutte résulte de l'équilibre entre les forces capillaires et le poids.

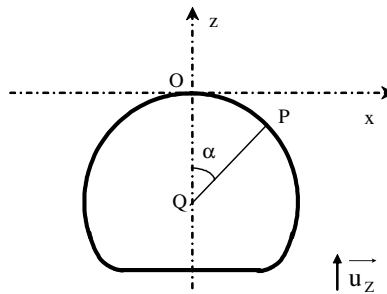


Figure 15 : Forme d'une goutte en mouillage nul : définition des paramètres utilisés lors de l'intégration.

En un point P quelconque, les deux rayons de courbure principaux sont δ (rayon de courbure de la méridienne) et PQ (la normale, terminant sur l'axe, car la goutte est axisymétrique). La surpression dans la goutte due aux forces capillaires est donnée par l'équation de Laplace (équation 7) :

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{PQ} \right) \quad (7)$$

La pression hydrostatique s'écrit :

$$P = P_0 - \rho g z \quad (8)$$

où P_0 est la pression dans la goutte en $z=0$ et dépend du volume initial de la goutte. Pour plus de commodité la pression extérieure est fixée à zéro. En coordonnées curviligne et cartésiennes, les courbures s'écrivent :

$$\frac{1}{\delta} = -\frac{d\alpha}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{1}{PQ} = -\frac{\sin \alpha}{x} \quad (9)$$

où s désigne l'abscisse curviligne et α l'angle entre la normale à la courbe et l'axe de révolution. Les équations 7, 8 et 9 permettent d'obtenir l'équation différentielle régissant la forme de la goutte (équation 10) :

$$-\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\sin \alpha}{x} = \frac{2}{a} - \frac{z}{\kappa^{-2}} \quad (10)$$

avec $dx/ds = \cos \alpha$, $dz/ds = \sin \alpha$; $a = P_0/\gamma$ est une longueur dépendant du volume qui représente le rayon de courbure moyen en haut de la goutte. De plus, les conditions aux limites imposent une tangente horizontale en haut et en bas de la goutte.

On intègre à partir du point O sur la Figure 15 (avec $\alpha(0)=0$) en incrémentant α grâce à l'équation différentielle jusqu'au point où $\alpha = \pi$. Là, on raccorde la courbe à l'axe des z par une droite horizontale. Si on impose $a \ll \kappa^{-1}$, la forme est pratiquement sphérique et a représente le rayon de la goutte. Dans le cas contraire, la goutte est très plate et ressemble à une crêpe. Le rayon initial de la goutte s'obtient finalement en calculant numériquement le volume.

La Figure 16 montre les formes numériques obtenues pour une longueur capillaire de 3 mm et différents volumes.

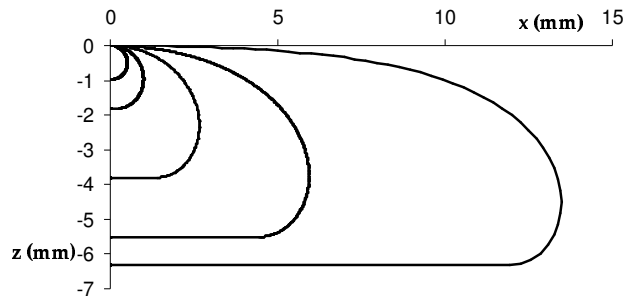


Figure 16 : Formes de goutte en mouillage nul intégrées numériquement pour $R_0=0.5, 1, 2.4, 4.8$ et 8.8 mm et une longueur capillaire de 3 mm.

À partir des formes intégrées, on relève la taille de la zone de contact et la hauteur de la goutte. Comme le suggèrent les équations 5 et 6, nous avons tracé sur la Figure 17 la taille de la zone de contact en fonction du rayon initial de la goutte en normalisant ces deux longueurs par la longueur capillaire.

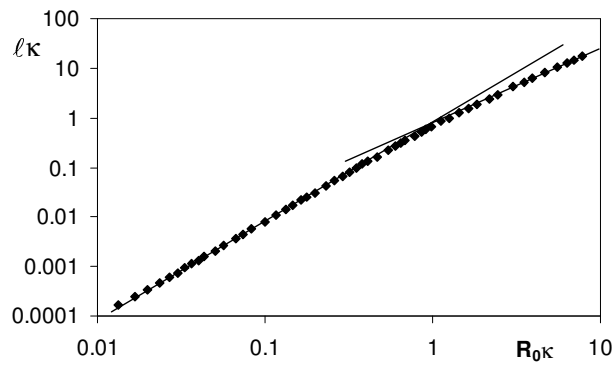


Figure 17 : Longueur de la zone de contact en fonction du rayon initial de la goutte, tous deux normalisés par la longueur capillaire. Les points sont déduits de l'intégration numérique de l'équation 10 et les droites correspondent aux équations 5 et 6.

Les courbes en trait plein ont pour pentes respectives 2 et 1.5, et un coefficient numérique $(2/3)^{0.5} \sim 0.82$ (équations 6 et 5). Les modèles présentés précédemment (les lois de puissance ainsi que les coefficients numériques) sont donc confirmés par l'intégration numérique.

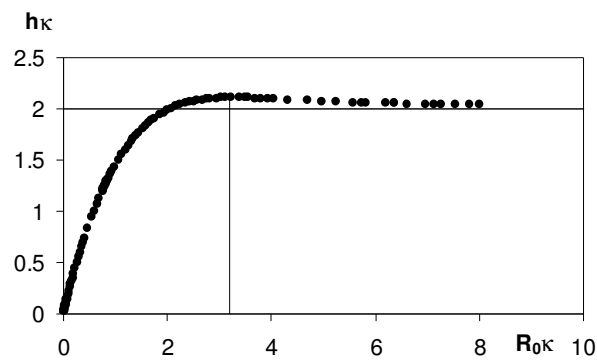


Figure 18 : Hauteur de la goutte en fonction de son rayon initial, tous deux normalisés par la longueur capillaire.

Sur la Figure 18, nous avons reporté la hauteur de la goutte en fonction du rayon initial. On observe que la hauteur tend vers $2 \kappa^{-1}$ par valeur supérieure pour les grands volumes (crêpes gravitaires). Curieusement, la goutte la plus épaisse n'est pas la crêpe gravitaire, mais une grosse goutte dont le rayon vaut $3.2 \kappa^{-1}$. Cette épaisseur maximale que peut prendre une goutte en mouillage nul est $2.1 \kappa^{-1}$. On peut utiliser expérimentalement la hauteur de la crêpe pour déterminer la longueur capillaire (au-delà de $R_0 \sim 3 \kappa^{-1}$, avec une surestimation maximale de 5%), et donc en déduire la tension superficielle liquide/air.

IV. Mesures expérimentales

Les mesures expérimentales consistent à relever la hauteur de la goutte et la taille de la zone de contact, à l'aide d'un microscope placé horizontalement, en fonction du volume de la goutte fabriquée.

À travers le microscope, on constate effectivement que la zone de contact n'est jamais ponctuelle même pour les très petites gouttes, comme en témoigne la Figure 19.

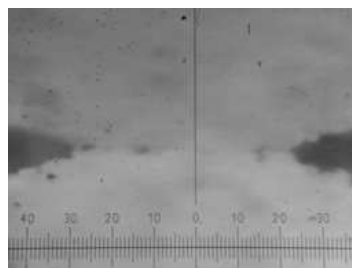


Figure 19 : Très petite goutte d'eau enrobée de lycopes. Vue de profil à travers la lunette (avec reflet dans la plaque de verre). Une division représente $5.6 \mu\text{m}$.

1) Résultats expérimentaux

Nous utilisons deux liquides (le glycérol et l'eau) sur deux types de solide (verre sans nettoyage poussé et téflon) et deux enrobages différents (lycopodes traités et silice traitée). La mesure de l'épaisseur des gouttes en fonction de leur taille nous permet de vérifier l'indépendance du comportement des gouttes enrobées vis-à-vis du solide. Elle nous donne aussi accès à la longueur capillaire du système qui pourrait être modifiée par la présence de la poudre.

La Figure 20 montre la hauteur de la goutte en fonction de son rayon initial, tous deux normalisés par la longueur capillaire. En outre, nous avons représenté sur cette figure le résultat du calcul numérique. La longueur capillaire utilisée est celle qui permet la superposition des données expérimentales sur cette courbe. Nous en déduisons des tensions de surface effectives pour les gouttes enrobées de lycopodes : $\gamma_{\text{eau+lyc}} = 51 \text{ mN/m}$ et $\gamma_{\text{gly+lyc}} = 45 \text{ mN/m}$. La poudre de lycopode change donc la tension de surface liquide/air du système (il est possible qu'elle largue des produits suite aux divers traitements). Pour la goutte d'eau enrobée de silice, la valeur de la tension de surface reste celle de l'eau pure : $\gamma_{\text{eau+sil}} = 72 \text{ mN/m}$. Notons enfin que comme on s'y attendait pour une situation de non-mouillage, le solide utilisé n'a pas d'influence.

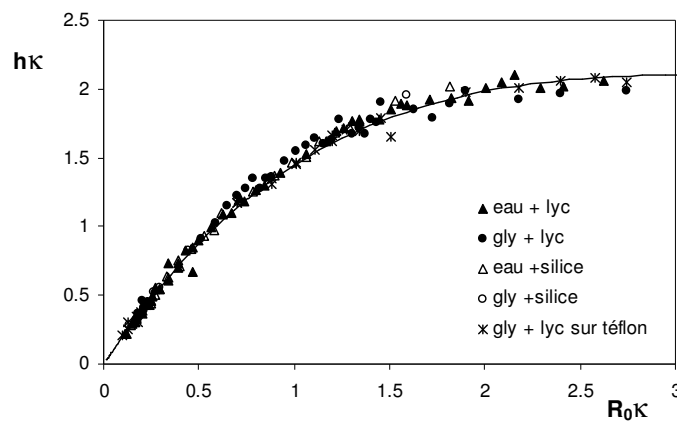


Figure 20 : Hauteur de la goutte en fonction du rayon initial tous deux normalisés par la longueur capillaire. Le trait plein correspond au calcul numérique (intégration de l'équation 10). Les quatre premières séries correspondent à des expériences sur du verre.

La mesure de la taille de la zone de contact confirme les modèles présentés, comme le montre la Figure 21.

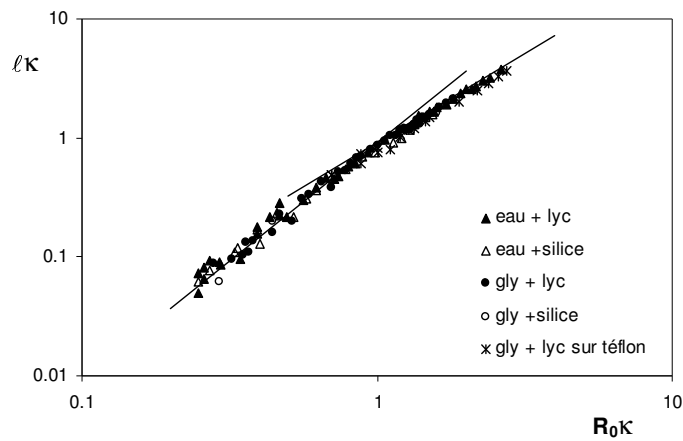


Figure 21 : Taille de la zone de contact en fonction du rayon de la goutte, tous deux normalisés par la longueur capillaire. Les traits pleins correspondent aux lois de puissance des équations 5 et 6 avec un coefficient numérique de 0,9.

Les courbes en traits pleins correspondent aux lois de puissance du modèle de Mahadevan-Pomeau et de la crêpe gravitaire (puissances respectives de 2 et 1.5 en fonction de la taille de la goutte). Les données expérimentales sont bien ajustées par les deux lois de puissances, avec un coefficient numérique de 0.91, proche du coefficient 0.82 attendu.

2) Bilan

Nous avons décrit dans ce chapitre des gouttes enrobées, assemblages de liquide et de grains hydrophobes, qui permettent de réaliser une situation de mouillage nul. Nous avons insisté sur la forme de tels objets. Pour des rayons faibles, les gouttes sont presque sphériques, sauf à leur base. La *zone de contact* varie comme le carré du rayon et diminue donc très vite avec lui. Les gros objets sont aplatis par la gravité et prennent la forme de crêpes dont l'épaisseur est indépendante du volume et égale à deux fois la longueur capillaire.

Nous allons maintenant étudier le mouvement de ces objets particuliers.

Bibliographie

- [1] ADAMSON A. W., « Physical Chemistry of Surfaces », John Wiley and Sons, New-York (1976).
- [2] DE GENNES P.-G., BROCHARD-WYART F. et QUÉRÉ D., « Gouttes, bulles, perles et ondes », collection ÉCHELLES, Belin (2002).
- [3] WAGNER T., NEINHUIS C. et BARTHLOTT W., « Wettability and Contaminability of Insect Wings as a Function of Their Surface Sculptures », *Acta Zoologica*, **77** (1996) 213.
- [4] WENZEL R. N., « Resistance of solid surfaces to wetting by water », *Ind. Eng. Chem.*, **28** (1936) 988 ; *J. Phys. Colloid Chem.*, **53** (1949) 1466.
- [5] BICO J., MARZOLIN C. et QUÉRÉ D., « Pearl Drops », *Europhysics Letters*, **47** (1999) 220.
- [6] SHIBUICHI S., ONDA T., SATOH N. et TSUJII K., « Super Water-Repellent Surfaces Resulting from Fractal Structure », *J. Phys. Chem.*, **100** (1996) 19512.
- [7] ONDA T., SHIBUICHI S., SATOH N. et TSUJII K., « Super Water-Repellent-Fractal Structure », *Langmuir*, **12** (1996) 2125.
- [8] RICHARD D., « Situations de Mouillage nul », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [9] BICO J., « Mécanismes d'imprégnation : surfaces textures, bigouttes, poreux », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [10] PEREZ M., « Mesure de viscosité sans contact par lévitation de gouttes sur film de gaz : application aux alliages métalliques », *thèse de l'Institut National de Science Appliquée de Lyon*, (2000).
- [11] WANG T.G., ANILKUMAR A.V., LEE C.P. et LIN K.C., « Bifurcation of rotating liquid drops : results from USML-1 experiments in Space », *J. Fluid Mech*, **276** (1994) 389.
- [12] LEE C.P., ANILKUMAR A.V., HMELO A.B. et WANG T.G., « Equilibrium of liquid drops under the effects of rotation and acoustic flattening : results from USML-2 experiments in Space », *J. Fluid Mech.*, **354** (1998) 43.
- [13] WANG T. G., TRINH E. H., CROONQUIST A. P. et ELLEMANT D. D., « Shapes of Rotating Free Drops: Spacelab Experimental Results », *Phys. Rev. Letters*, **56** (1986) 452.
- [14] LEIDENFROST J. G., « De aquae communis nonnullis qualitatibus tractatus », Duisburg (1756).
- [15] SREENIVAS K. R., DE P. K., et ARARAKERI J. H., « Levitation of a drop over a film flow », *J. Fluid Mech.*, **380** (1999) 297.

- [16] DELL'AVERSANA P. et NEITZEL G. P., « When Liquids Stay Dry », *Physics Today*, **51** (1998) 38.
- [17] DELL'AVERSANA P., BANAVAR J. R. et KOPLIK J., « Suppression of coalescence by shear and temperature gradients », *Physics of Fluids*, **8** (1996) 15.
- [18] DELL'AVERSANA P., TONTODONATO V. et CAROTENUTO L., « Suppression of coalescence and of wetting : the shape of the interstitial film », *Physics of Fluids*, **9** (1997) 2475.
- [19] PIKE N., RICHARD D., FOSTER W. et MAHADEVAN L., « How aphids lose their marbles », *Proc. R. Soc. Lond. B*, **269** (2002) 1211.
- [20] BARTHLOTT W. et NEINHUIS C., « Purity of the sacred lotus, or escape from contamination in biological surface », *Planta*, **202** (1997) 1.
- [21] MAHADEVAN L. et POMEAU Y., « Rolling droplets », *Physics of Fluids*, **11** (1999) 2449.

Photos 4 et 12 : crédit P. GOETGHELUCK

Chapitre II

Gouttes enrobées visqueuses sur un plan faiblement incliné

Table des matières

Chapitre II	Gouttes enrobées visqueuses sur un plan faiblement incliné	39
I.	Description de l'expérience	41
II.	Dévalement de crêpes	42
	1) Résultats expérimentaux	42
	2) Conditions aux limites.....	42
	3) Limites du modèle.....	48
III.	Dévalement de gouttes	51
	1) Résultats expérimentaux	51
	2) Modèle Mahadevan-Pomeau (MP).....	52
	3) Limites du régime MP.....	55
IV.	Conclusion.....	61
	Bibliographie	63

Dans ce premier chapitre sur la dynamique des gouttes enrobées, nous nous plaçons dans le cas des faibles pentes et des liquides visqueux. Nous espérons ainsi pouvoir étudier le mouvement dominé par les phénomènes de dissipation visqueuse.

La dynamique du dévalement d'une goutte en situation de mouillage nul a été étudié théoriquement par Mahadevan et Pomeau [1]. Elle a ensuite été décrite expérimentalement sur des surfaces super-hydrophobes par Richard et Quéré [2]. Néanmoins, cette étude est restée essentiellement qualitative. Ici nous proposons une étude quantitative de ce mouvement dans le cas des gouttes enrobées, c'est-à-dire dans la limite extrême du mouillage nul.

I. Description de l'expérience

On place une goutte enrobée visqueuse (mélange eau-glycérol pour le liquide) sur un plan faiblement incliné (Figure 1). Celui-ci est en métal bien poli pour éviter tout obstacle sur le trajet de la goutte. L'angle du plan étant faible, le mouvement est lent si bien que les gouttes gardent leur forme statique.

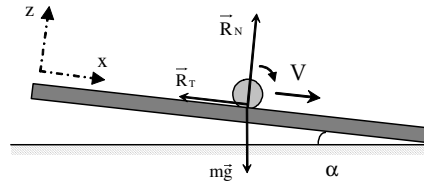


Figure 1 : Schéma descriptif de l'expérience de dévalement sur un plan incliné

Grâce aux grains, nous constatons que le mouvement est une rotation sans glissement. En filmant l'avancée de la goutte au cours du temps, on remarque que la goutte atteint une vitesse limite. Ceci signifie qu'il y a un frottement qui s'oppose à la gravité. Les expériences consistent à relever la vitesse limite de la goutte pour une pente et une viscosité données, et ce pour différentes tailles de goutte.

Le cas le plus simple est celui d'une nappe de liquide d'épaisseur constante, dont se rapproche beaucoup la crêpe gravitaire. Nous allons commencer par étudier son comportement sur le plan faiblement incliné et nous en profiterons pour discuter les conditions aux limites qui s'appliquent sur une goutte enrobée. Ensuite, nous nous

consacrerons au cas des petites gouttes.

II. Dévalement de crêpes

1) Résultats expérimentaux

Si l'on étudie la vitesse d'une grosse goutte enrobée sur une pente faible (par exemple 5° sur la Figure 2), en fonction de sa taille initiale, on s'aperçoit qu'elle n'en dépend pas. La vitesse est constante quel que soit le volume de la goutte (on notera V_0 cette constante). Néanmoins, V_0 dépend du liquide utilisé : plus la goutte est visqueuse, moins elle va vite (quand on multiplie la viscosité environ par deux, on divise la vitesse à peu près par la même valeur).

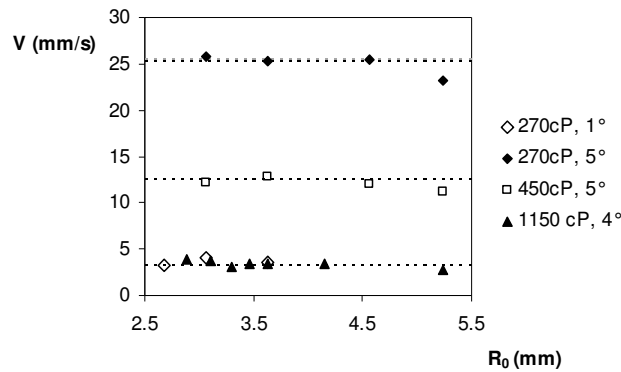


Figure 2 : Vitesse limite de crêpes enrobées de lycopodes sur un plan faiblement incliné pour trois liquides visqueux (270, 450 et 1150 cP) et deux inclinaisons 1° et 5° pour le liquide le moins visqueux.

De plus, les données avec le liquide de viscosité 270 cP montrent que V_0 dépend également de l'angle d'inclinaison : la crêpe enrobée est d'autant plus rapide que le plan est incliné (en multipliant la pente par 5, on multiplie sa vitesse à peu près de la même valeur).

2) Conditions aux limites

La crêpe est d'épaisseur constante et son rayon est grand par rapport à cette épaisseur : on peut la modéliser par une nappe de liquide de même épaisseur $h = 2\kappa^{-1}/(\cos\alpha)^{1/2}$. Étant donné que dans ce chapitre, nous étudions des mouvements où l'angle imposé est faible, nous noterons $\kappa^{\alpha-1} = \kappa^{-1}/(\cos\alpha)^{1/2}$.

- *Modèle*

On peut imaginer deux géométries différentes pour le film de liquide [3] : une surface supérieure libre ou solide (Figure 3).

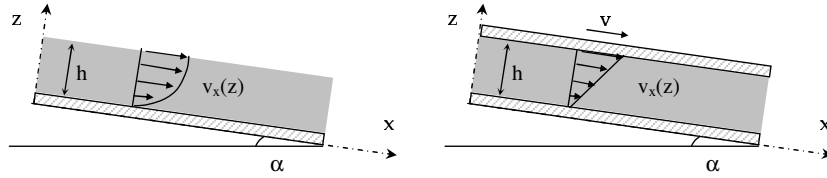


Figure 3 : Champ de vitesse pour l'écoulement d'une nappe liquide visqueuse sur un plan faiblement incliné avec une surface supérieure libre ou solide.

Pour étudier le mouvement d'une nappe de liquide de vitesse moyenne V_0 placée sur un plan incliné, on écrit l'équation de Navier-Stokes, en régime stationnaire. Dans la géométrie considérée, le mouvement est seulement selon Ox. Les deux projections donnent :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \sin \alpha \right) \quad (1)$$

$$P = P_0 - \rho g z \cos \alpha \quad (2)$$

La vitesse est nulle à la paroi inférieure $v_x(0)=0$.

Dans le cas d'un film libre, il y a continuité des contraintes visqueuses entre le liquide et l'air, c'est-à-dire une contrainte nulle à la surface $\partial v / \partial z (h) = 0$, alors que pour un film confiné, on peut imaginer un mouvement de type chenille et la surface supérieure avance à deux fois la vitesse moyenne $v_x(h) = 2V_0$.

On intègre ensuite l'équation 1 par rapport à z et on écrit la conservation du débit :

$$Q = V_0 h = \int_0^h v_x(z) dz .$$

On retrouve alors un mouvement type Poiseuille dans le premier cas $\left[v_x = -\frac{3V_0}{h^2} \left(\frac{z^2}{2} - zh \right) \right]$

et un mouvement type Couette dans le second $\left[v_x = 2V_0 \frac{z}{h} \right]$.

On calcule enfin la contrainte visqueuse ($\eta S \partial v_x / \partial z$) sur une surface solide ou deux, suivant le cas considéré. On peut finalement équilibrer cette force visqueuse, connaissant l'épaisseur de la crêpe, avec le poids du liquide et on obtient une vitesse moyenne stationnaire qui dépend uniquement des propriétés du liquide et de la pente imposée :

$$V_0 \approx \frac{4}{3} \frac{\gamma}{\eta} \tan \alpha, \text{ si l'écoulement est de type Poiseuille} \quad (3)$$

$$V_0 \approx \frac{\gamma}{\eta} \tan \alpha, \text{ si l'écoulement est de type Couette} \quad (4)$$

- *Conditions aux limites sur la goutte enrobée*

La surface de la goutte étant mi-libre, mi-solide, à cause des grains, nous nous sommes demandés si l'étude de la dynamique du dévalement permet de trancher entre ces deux comportements.

Dans un premier temps, nous avons vérifié les conditions aux limites sur une goutte de glycérol déposée sur une surface super-hydrophobe, c'est-à-dire en mouillage pratiquement nul. Nous avons ensuite étudié l'effet de l'enrobage par la poudre et comparé nos mesures à la situation de simple super-hydrophobie.

Crêpe en mouillage nul :

On place une crêpe de glycérol sur une surface super-hydrophobe fabriquée à partir d'une poudre de lycopodes traitée et collée sur un substrat lisse [4]-[5]. Puis, on détecte les conditions aux limites en mettant un marqueur sur la crêpe qui avance : sa vitesse doit être nulle à la paroi et égale à une fois et demie la vitesse du front (V_0) sur le haut de la goutte, d'après le calcul précédent du champ de vitesse dans le cas d'un film libre.

Le mouvement de la goutte au cours du temps est filmé. Dans la séquence de la Figure 4, les images de gauche correspondent au passage du marqueur sous la goutte qui dure 2.4 secondes. On remarque que sur ces trois images le marqueur ne bouge pas, ce qui illustre bien la condition de vitesse nulle sur le solide. Dans les images de droite, le marqueur est sur la surface supérieure de la goutte et il a besoin de deux fois plus de temps pour parcourir la goutte, ce qui correspond bien à l'hypothèse de contrainte nulle à la surface.

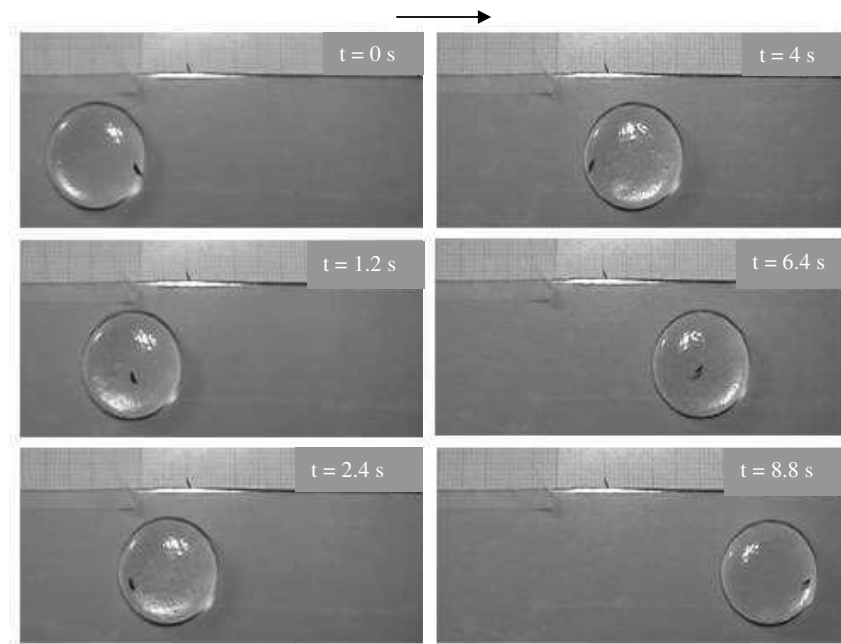


Figure 4 : Grosse goutte de glycérol sur une surface super hydrophobe (vue de dessus).
 À gauche, le marqueur est sous la goutte (il ne bouge pas) et à droite au dessus.
 On voit que le marqueur passe 2 fois plus de temps sur la goutte que dessous
 (respectivement 4.8 s et 2.4 s).

On peut confirmer cette étude par la mesure de la vitesse du marqueur sur la goutte en fonction de la vitesse du front pour plusieurs expériences (plusieurs angles).

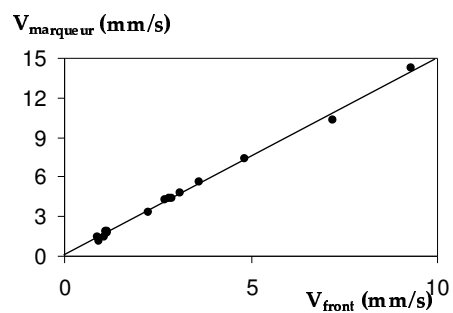


Figure 5 : Goutte de glycérol sur une surface super hydrophobe.
 Vitesse d'un marqueur en fonction de la vitesse V_0 du front ; la droite est de pente 1.5.

Le marqueur avance effectivement une fois et demie plus vite que le front. Nous pouvons en profiter pour vérifier la vitesse limite des crêpes en mouillage nul (équation 3).

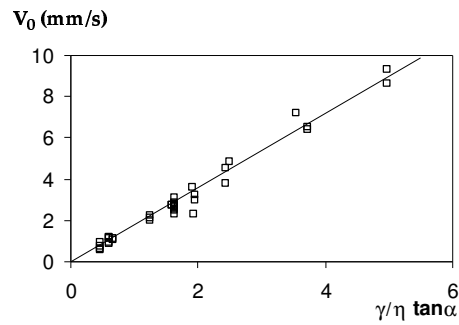


Figure 6 : Goutte de glycérol sur une surface super hydrophobe : La vitesse du front est portée en fonction de $\gamma/\eta \tan\alpha$, comme suggéré par l'équation 3.

On obtient une droite, ce qui montre que la loi d'échelle décrit bien le mouvement. Le coefficient numérique vaut 1.8, et est donc 35% supérieur à la prédiction de l'équation 3, établie pour un film infini dans les mêmes conditions. Cet écart est peut-être dû à un facteur de forme : dans cette expérience, nous n'avons pas une nappe infinie mais une crêpe de forme circulaire.

Crêpe enrobée :

Nous utilisons une goutte de glycérol enrobée d'une poudre de lycopode. L'enrobage de la goutte est relativement homogène, proche d'une monocouche. Le déplacement des grains les uns par rapport aux autres est limité et le mouvement de la goutte va ressembler à celui d'une chenille. Si l'on suit le mouvement d'un marqueur, il devrait donc passer autant de temps sous la goutte que dessus et une fois sur la goutte avancer deux fois plus vite que le front. Cependant, comme le recouvrement en solide n'est pas total, il se peut que la vitesse soit intermédiaire entre les deux modèles (Couette et Poiseuille).

Nous nous servons ici comme marqueurs des grains eux mêmes, que l'on suit dans le mouvement. Sur la série d'images de la Figure 7, on remarque que la crêpe enrobée avance à vitesse constante et qu'elle prend une forme originale, arrondie à l'avant et plate à l'arrière. Ce n'était pas le cas pour la crêpe de glycérol sur une surface super-hydrophobe. La présence de la poudre sur la surface influence donc le mouvement de la goutte.

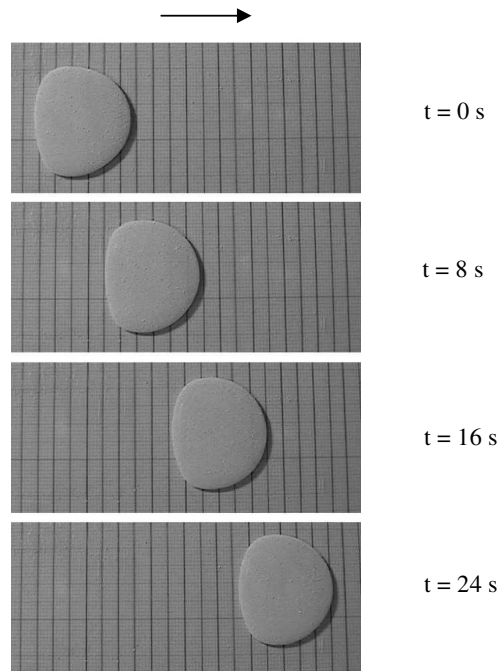


Figure 7 : Grosse goutte enrobée (lycopode) de glycérol, avançant sur un plan faiblement incliné.

Nous avons porté sur la Figure 8 à la fois la position du front de la goutte, et celle d'un marqueur à la surface, en fonction du temps.

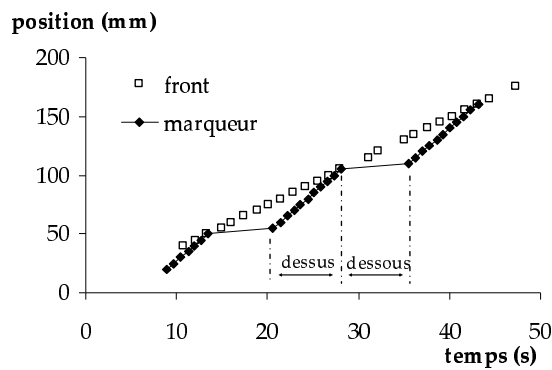


Figure 8 : Position du front de la goutte et d'un marqueur en fonction du temps.

On voit sur cette expérience que, quand il est dessus, le marqueur va pratiquement deux fois plus vite que la goutte. Quand la position du marqueur est la même que celle du front, il se retrouve sous la goutte. Une fois ressorti, on voit qu'il a passé à peu près autant de temps dessous que dessus.

Pour être plus quantitatif, la vitesse des grains supérieurs en fonction de celle de la goutte est tracée sur la Figure 9, pour plusieurs inclinaisons du plan. La vitesse sur le dessus de la goutte est légèrement inférieure à 2 fois la vitesse du front, puisqu'on relève un coefficient numérique de 1.85.

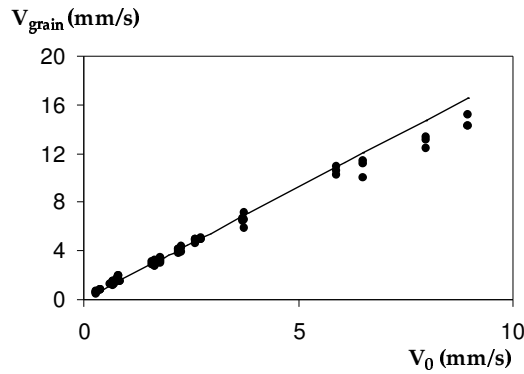


Figure 9 : Goutte de glycérol enrobée.
Vitesse d'un grain à la surface en fonction de la vitesse du front. La droite a pour pente 1.85.

Ce coefficient est intermédiaire entre celui d'une condition de surface libre (coefficient 1.5) et celui d'un mouvement en chenille (coefficient 2). La poudre solide peut se réarranger et encaisser un léger changement de vitesse entre le dessous et le dessus de la goutte. Cela nous amène à la conclusion que la condition à respecter pour le dessus de la goutte est une condition mixte entre les deux exposées.

3) Limites du modèle

D'après l'équation 4, la vitesse V_0 de la crêpe visqueuse varie comme $\gamma/\eta \tan\alpha$, à un coefficient numérique près (d'ordre un), qui dépend du recouvrement en poudre ainsi que de la géométrie de la goutte. La vitesse des grosses gouttes dépend donc seulement des propriétés du liquide utilisé (tension de surface et viscosité) et de la pente choisie pour le plan incliné.

- *Résultats expérimentaux*

Pour vérifier cette loi d'échelle et ses limites, nous effectuons une première série d'expérience avec un seul liquide (le plus visqueux à notre disposition, le glycérol pur) et plusieurs angles de descente. Nous prenons le volume le plus grand possible expérimentalement, c'est-à-dire des crêpes d'environ 1 cm à 2 cm de diamètre. La goutte atteint une vitesse limite V_0

constante. On porte sur les graphes qui suivent cette vitesse normalisée par γ/η en fonction de l'angle imposé.

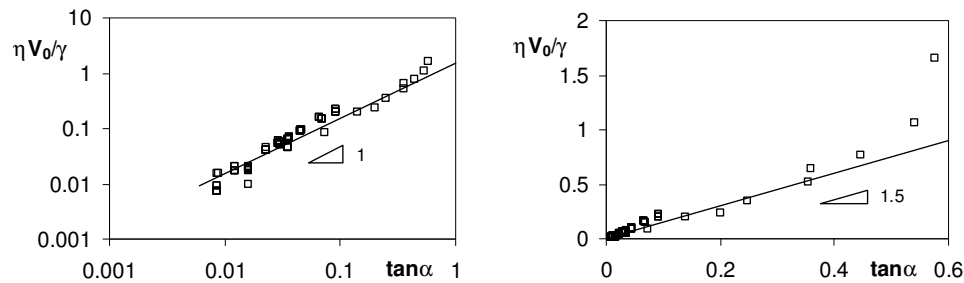


Figure 10 : Goutte enrobée de glycérol.
Vitesse du front normalisée en fonction de l'angle. Le trait plein correspond à $1.5 \tan \alpha$.

Nous observons bien une dépendance linéaire en $\tan \alpha$, avec un coefficient multiplicatif de 1.5, pour un angle inférieur à 20° ($\tan \alpha \sim 0.36$) dans le cas du glycérol. Pour des pentes supérieures, la goutte va plus vite que ce qui est prévu par le modèle. Il est possible que l'on n'ait pas utilisé des rayons de gouttes suffisants pour être en régime crêpe. En pratique, il est difficile de fabriquer des crêpes enrobées dont le rayon dépasse un centimètre. Mais il est surprenant de trouver une vitesse plus grande (de 50% environ) que celle d'une nappe d'épaisseur constante, à cause des effets de bord. Le plus souvent les bords de la goutte induisent une dissipation visqueuse supplémentaire qui tend à les ralentir. Ici cependant, le bord rejoint le substrat avec un angle de 180° et la goutte possède un mouvement de roulement qui peut-être joue un rôle dans cette observation.

Plaçons nous maintenant à faible pente (d'ordre 5°) : nous utilisons la série de mélanges glycérol-eau pour faire varier la viscosité.

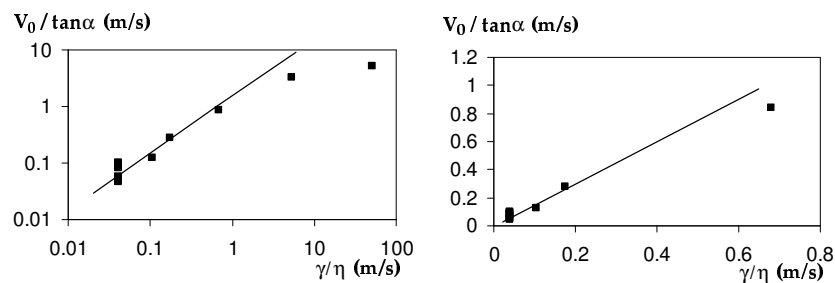


Figure 11 : Gouttes enrobées (mélange eau-glycérol, lycopodes). Vitesse de la goutte divisée par la tangente de l'angle imposé, en fonction de γ/η . Le trait plein correspond à $1.5 \gamma/\eta$.

Dans l'échelle linéaire, nous avons ôté les données qui s'écartent beaucoup de la variation linéaire car elles écrasent l'échelle et nous avons choisi de garder seulement le premier point déviant. Là encore, tant que la vitesse est faible, on observe un bon accord en loi d'échelle avec le modèle (équation 4), et on confirme un coefficient numérique de 1.5.

Cet accord est valable pour les liquides suffisamment visqueux. En dessous d'une certaine viscosité, la vitesse est plus faible que celle prévue par le modèle. Cela signifie qu'une autre source de dissipation doit alors être prise en compte. Pour une pente de 5°, cette limite en viscosité correspond à $\gamma/\eta \sim 0.6$ m/s et $\eta \sim 100$ cP. Il est intéressant d'essayer de définir les limites de ce régime.

- *Limites du régime crêpe*

Ce régime est valable si l'on a des crêpes, c'est-à-dire si $R_0 > \kappa^{*-1}$. En outre, la goutte doit garder sa forme statique : ni les forces inertielles, ni les forces visqueuses ne doivent modifier sa forme. Le mouvement à l'intérieur de la crêpe étant principalement un mouvement de cisaillement simple, la goutte ne ressent pas de force centrifuge. Dans ce modèle, ce sont les forces visqueuses dans toute la goutte qui sont censées dissiper. Donc la couche limite (δ) doit être pleinement développée, c'est à dire :

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\eta}{\rho}} \frac{\ell}{V} \geq h$$

où ℓ est la taille statique de la zone de contact donnée par $\ell \kappa^* \approx \sqrt{\frac{2}{3}} (R_0 \kappa^*)^{3/2}$. À la limite du régime, $V_0 \approx \frac{\gamma}{\eta} \tan \alpha$ et $h \approx \kappa^{*-1}$, ce qui donne comme condition :

$$\eta^2 \geq \frac{\gamma^2 \tan \alpha}{\ell g \cos \alpha}$$

Cette expression dépend légèrement de la taille de la goutte. Pour des gouttes enrobées, la réalisation de très grosses crêpes est difficile et on reste toujours dans des tailles de l'ordre du centimètre pour le diamètre. Pour un angle de 5° et une goutte de 1 cm de diamètre, on trouve une viscosité limite de l'ordre de 50 cP ou $\gamma/\eta \sim 1$ m/s, ce qui est le bon ordre de grandeur à partir duquel on observe des déviations à l'équation 4, sur la Figure 11. De plus un modèle en couche limite conduit ensuite à une vitesse limite dépendant peu de la

viscosité, ce qui semble être le cas.

D'autres modèles pourraient conduire à une vitesse limite indépendante de la viscosité, comme un mouvement limité par les frottements de l'air. Ceci donne une autre limite possible à ce mouvement visqueux : celle où les frottements de l'air deviennent plus importants que les frottements visqueux. Cette condition s'écrit :

$$\rho_a V^2 2\pi\ell^2 \leq \eta \frac{V}{h} 2\pi\ell^2$$

À la limite avec le régime visqueux, on a $V_0 \approx \frac{\gamma}{\eta} \tan \alpha$ et $h \approx 2\kappa^{*-1}$, soit :

$$\eta^2 > \rho_a \gamma \tan \alpha \kappa^{*-1}$$

Cette limite conduit à des conditions moins réalistes pour la pente de 5°. On trouve une viscosité limite de 4 cP, nettement inférieure aux 100 cP pour lesquels les déviations commencent. Ces régimes devraient en revanche être pertinents pour des crêpes enrobées constituées d'eau.

III. Dévalement de gouttes

Nous nous intéressons maintenant au mouvement de petites gouttes visqueuses, qui ont une forme quasi-sphérique, sur un plan faiblement incliné.

Nous présenterons d'abord l'allure des résultats expérimentaux, puis le modèle de Mahadevan-Pomeau [1] ainsi que les limites de ce régime. L'hypothèse principale dans laquelle nous nous plaçons dans ce paragraphe est comme précédemment que la goutte garde sa forme statique.

1) Résultats expérimentaux

Nous utilisons le liquide le plus visqueux à notre disposition (le glycérol pur) sur un plan incliné de 4° par rapport à l'horizontale. La position de la goutte en fonction du temps est mesurée et on s'assure que la vitesse limite est atteinte. Les vitesses, qui sont de l'ordre du

millimètre par seconde, sont mesurées en fonction de la taille de la goutte.

Sur la Figure 12, on peut distinguer deux régimes : si la vitesse limite des grosses gouttes est indépendante de leur taille, les petites gouttes, en revanche, vont d'autant plus vite qu'elles sont petites. Ceci est un comportement très inhabituel : en général, dans des mouvements dont la force motrice est le poids, plus les objets sont gros, plus leur vitesse terminale est importante. Ainsi des gouttes visqueuses placées sur un plan incliné en mouillage partiel sur des surfaces lisses vont d'autant plus vite qu'elles sont grosses [6]-[7].

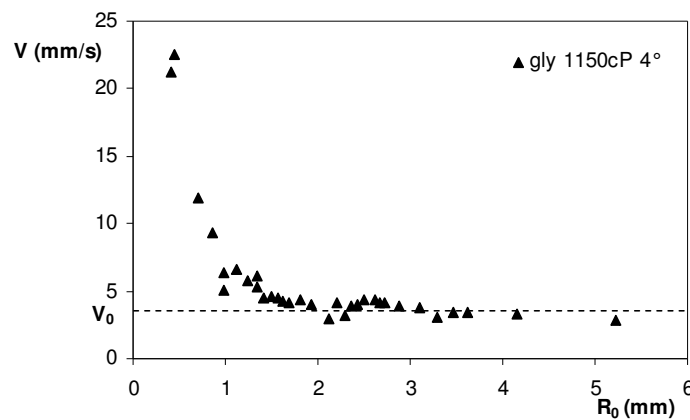


Figure 12 : Vitesse de gouttes de glycérol enrobées de lycopodes sur un plan incliné à 4°, en fonction du rayon de ces gouttes.

Sur la Figure 12 notons que dans le régime petites gouttes ($R_0 < 2$ mm), si la taille de la goutte est divisée par deux, sa vitesse double, alors que la vitesse des grosses gouttes atteint le palier décrit précédemment.

2) Modèle Mahadevan-Pomeau (MP)

Une petite goutte enrobée visqueuse de forme quasi-sphérique dévale lentement un plan incliné. Afin de minimiser les frottements visqueux, la goutte se met en rotation solide dans toute sa partie sphérique [1]. La dissipation se fait alors seulement dans la partie qui n'est pas en rotation solide, c'est-à-dire autour de la zone de contact statique de taille ℓ où la goutte est aplatie et déformée par rapport à la sphère (Figure 13).

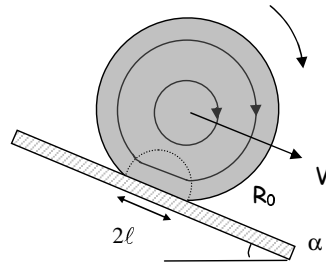


Figure 13 : Schéma des lignes de courant dans une goutte enrobée quasi-sphérique dévalant un plan faiblement incliné

Quand le mouvement est stationnaire, la vitesse de la goutte est déterminée par l'équilibre entre le gain d'énergie potentielle et la dissipation visqueuse dans la goutte. On suppose que l'on a un écoulement de Stokes non dissipatif dans la goutte en rotation solide et un cisaillement au niveau du contact. On suppose aussi que ce cisaillement se propage dans la goutte sur une hauteur ℓ , taille caractéristique de la zone de contact. Avec ces hypothèses, on peut représenter, comme sur la Figure 14, le champ de vitesse dans la goutte :

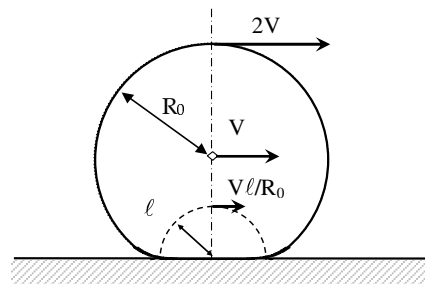


Figure 14 : vitesse sur l'axe central de la goutte

La puissance dissipée dans la goutte est de la forme $\eta \int_{\Omega} (\nabla \vec{u})^2 d\Omega$ où Ω correspond au volume de liquide dans lequel la dissipation a lieu. Ce volume est d'ordre ℓ^3 et le gradient de vitesse à la traversée de la région cisailée est d'ordre V/R_0 . Donc l'énergie dissipée est en $\eta (V/R_0)^2 \ell^3$ par unité de temps. En régime stationnaire, cette dissipation doit correspondre à la diminution d'énergie potentielle par unité de temps, qui vaut $mg \sin \alpha V$. On trouve ainsi une vitesse limite dans le cas des petites gouttes donnée par :

$$V \sim \frac{\rho g \sin \alpha R_0^5}{\eta \ell^3}$$

De plus, l'étude statique nous donne la taille de la zone de contact, $\ell \approx R_0^2 \kappa^*$ (équation I. 5)

où $\kappa^{*-1} = \kappa^{-1} / (\cos\alpha)^{0.5}$. La vitesse limite des petites gouttes est finalement donnée par l'équation 5 :

$$V \sim V_0 \frac{\kappa^{*-1}}{R_0} \quad (5)$$

où $V_0 \approx 1.5(\gamma/\eta)\tan\alpha$ est la vitesse de la crêpe.

Dans ce modèle les gouttes vont d'autant plus vite qu'elles sont petites, ce qui décrit bien qualitativement l'expérience de la Figure 12. Cet effet provient de la forme statique de la goutte dont la zone de contact est « anormalement » sensible à la taille de la goutte.

En outre, les deux modèles doivent se raccorder pour $R_0 = \kappa^{*-1}$, rayon limite entre les deux descriptions, ce qui nous permet de supposer que le coefficient numérique doit être proche de un.

Pour vérifier le modèle, on se place à faible pente (d'ordre 5°) et on utilise des liquides visqueux. La vitesse des gouttes est normalisée par V_0 et le rayon par la longueur capillaire. Sur la Figure 15, nous avons porté les résultats expérimentaux pour trois viscosités différentes (270, 450 et 1150 cP) et deux pentes (4 et 8°). On observe que toutes les courbes se superposent.

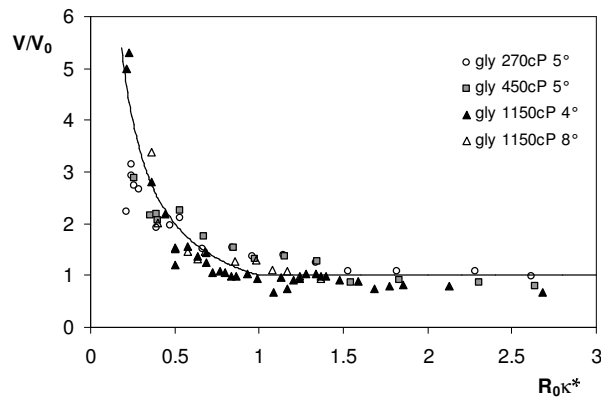


Figure 15 : Vitesse de dévalement de gouttes enrobées (mélanges eau-glycérol et lycopodes). La vitesse est normalisée par la vitesse de la crêpe $V_0 \approx 1.5(\gamma/\eta)\tan\alpha$, et portée en fonction du rayon de la goutte normalisé par la longueur capillaire. Le trait plein correspond à l'hyperbole donnée par l'équation 5 jusqu'à 1, puis à la constante 1.

Le modèle reporté en trait plein sur la courbe précédente (l'hyperbole jusqu'à un puis la constante un) décrit très bien les expériences. Ce comportement original (les petites gouttes vont plus vite que les grosses) provient donc de la dissipation visqueuse dans la zone de contact statique. Nous discutons à présent des limites.

3) Limites du régime MP

- *Observations expérimentales*

Sur la Figure 16, nous constatons que si la viscosité du liquide est trop faible, la vitesse croît avec le rayon de la goutte, au lieu de décroître comme précédemment.

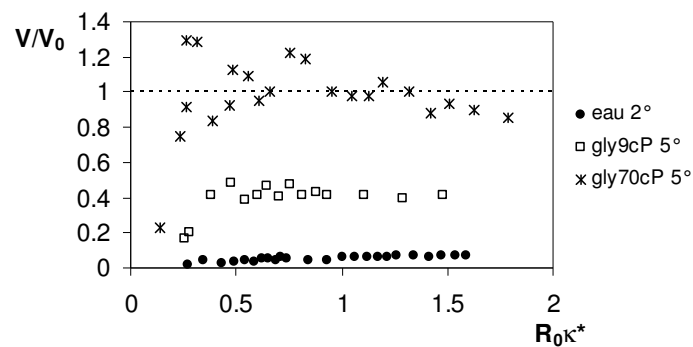


Figure 16 : Vitesse normalisée par la vitesse de la crête visqueuse ($V_0 \approx 1.5(\gamma/\eta)\tan\alpha$) en fonction du rayon de la goutte normalisé par la longueur capillaire pour des liquides peu visqueux. Le trait pointillé correspond au régime des crêtes visqueuses ($V=V_0$).

En outre, nous remarquons à nouveau que si à viscosité intermédiaire, le régime crête visqueuse existe encore, il disparaît pour des viscosités plus faibles.

De même, pour des pentes trop élevées, le modèle MP n'est plus valable, comme le montre la Figure 17 qui compare les vitesses de dévalement d'une goutte visqueuse sur deux pentes très différentes.

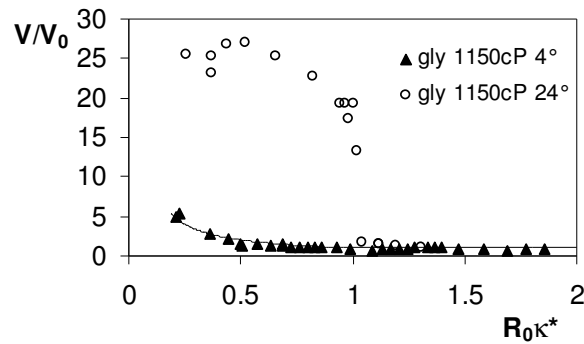


Figure 17 : Vitesse normalisée par la vitesse de la crête en fonction de la taille normalisée par la longueur capillaire pour une faible et une forte pente.

Pour les petites gouttes, les vitesses observées pour des pentes élevées (ici 24°) sont beaucoup plus importantes que les vitesses du régime Mahadevan-Pomeau (le mètre par seconde contre quelques centimètres par seconde). L'hypothèse que l'on garde la forme statique n'est plus valable dans ces conditions car on ne peut plus négliger la force centrifuge.

En effet si on observe alors les gouttes enrobées, on leur trouve des formes très éloignées de la sphère initiale. La Figure 18 montre une goutte enrobée de glycérol après un mètre de descente. La goutte a pris une forme à 2 lobes (une sorte de cacahuète) qui progresse en virevoltant et en rebondissant sur le substrat.

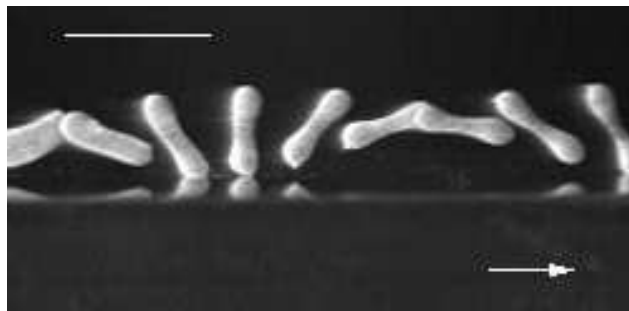


Figure 18 : Forme à 2 lobes des gouttes enrobées pour des fortes pentes. Le trait correspond à 1 cm et le mouvement va de gauche à droite sur un plan incliné à 35° . Le rayon initial est de 1.3 mm et 9 ms séparent chaque image.

Dans des conditions expérimentales très proche, on peut aussi observer un deuxième type de déformation, comme le montre la Figure 19.

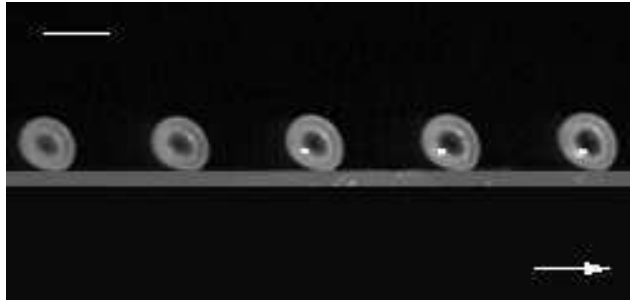


Figure 19 : Forme roue des gouttes enrobées pour des fortes pentes. Le trait correspond à 1 cm et le mouvement va de gauche à droite sur un plan incliné à 35°. Le rayon initial est de 2.5 mm et 23 ms séparent chaque image.

La goutte a maintenant pris la forme d'une roue. On serait même tenté d'employer le mot « anneau » pour décrire cette forme. Cependant l'analyse du niveau de gris de ces formes, en prenant une droite qui passe par tous les centres des roues de la Figure 19, nous montre (Figure 20) que les centres ne sont pas au même niveau que le fond de l'image et donc que les roues ne sont pas trouées. Il reste un mince film de liquide visqueux au centre de la forme.

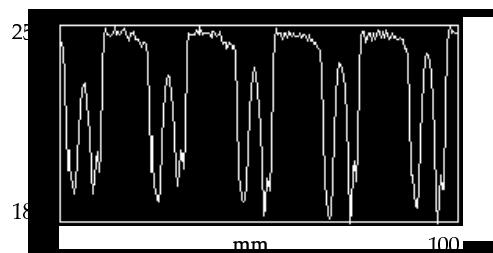


Figure 20 : Analyse des niveaux de gris de la forme roue de la Figure 19. L'échelle va du blanc (0) au noir (255).

L'étude détaillée de ces formes fera l'objet du chapitre III. Mais ces observations nous permettent déjà de préciser les limites du régime Mahadevan-Pomeau.

- *Limites du régime MP*

Nous sommes dans le cas des petites gouttes, pour lesquelles la gravité a pour seule conséquence de perturber faiblement la forme sphérique. Cette première condition s'écrit :

$$R_0 < \kappa^{-1}/(\cos\alpha)^{0.5}.$$

Nous avons fait l'hypothèse d'un écoulement de Stokes, dominé par la viscosité. Il faut donc avoir un nombre de Reynolds, qui compare inertie et force visqueuse, inférieur à un :

$$\text{Re} = \frac{\rho V R_0}{\eta} < 1$$

d'où l'on tire, en utilisant l'équation 5 :

$$\eta^2 > \rho \gamma \kappa^{-1} \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} = \eta_0^2 \quad (6)$$

Ceci est bien une condition de forte viscosité et de faible pente ($\alpha < \eta^2 / \rho \gamma \kappa^{-1}$ au premier ordre).

En outre, nous avons également fait l'hypothèse d'une goutte quasi-sphérique. Cela signifie que la goutte n'est pas déformée par la force centrifuge, qui doit être petite devant la force capillaire. Ceci implique une condition sur le nombre de Weber, qui compare inertie et capillarité :

$$\text{We} = \frac{\rho V^2 R_0}{\gamma} < 1$$

d'où :

$$\frac{R_0}{\kappa^{-1}} > \frac{\rho \gamma \kappa^{-1} \tan^2 \alpha}{\eta^2 \cos \alpha} \quad (7)$$

Il existe donc aussi une borne inférieure en rayon dans ce régime.

Il faut enfin que les forces visqueuses ne déforment pas la goutte, et donc qu'elles soient très inférieures aux forces capillaires ($\text{Ca} < 1$). Ce nombre doit être construit sur la zone de dissipation, et non sur toute la goutte comme pour les deux nombres sans dimension précédents. Il y a plusieurs échelles caractéristiques dans nos expériences, il faut donc justifier l'écriture du nombre capillaire.

La puissance visqueuse s'écrit $\eta(V/R_0)^2 \ell^3$ et le temps caractéristique de l'expérience est en ℓ/V , donc l'énergie visqueuse dissipé est en $E_\eta \approx \eta \frac{V}{R_0^2} \ell^4$.

L'énergie de rappel capillaire s'écrit $\gamma\delta^2$, où δ représente l'affaissement du centre de la goutte par rapport à la sphère [4].

Le nombre capillaire de cette expérience est donc : $Ca = \frac{E_\eta}{E_\gamma} \approx \frac{\eta V}{\gamma}$ car $\ell^2 \approx R_0 \delta$. D'où la condition :

$$\frac{R_0}{\kappa^{-1}} > \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (8)$$

La condition sur le nombre capillaire (équation 8) est plus sévère que celle sur le nombre de Weber (équation 7) tant que $\eta > \eta_0$, c'est-à-dire tant que la condition sur le nombre de Reynolds est respectée.

On a donc au final deux conditions pour observer le régime Mahadevan-Pomeau. La première concerne le liquide à utiliser pour une pente donnée :

$$\frac{\eta^2}{\rho\gamma\kappa^{-1}} > \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (9)$$

Par exemple pour une pente de 5° , il faut une viscosité supérieure à 120 cP pour pouvoir observer le régime Mahadevan-Pomeau, ce qui correspond bien à l'ordre de grandeur donné par les expériences.

La deuxième condition fait intervenir une gamme de tailles de goutte :

$$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} < \frac{R_0}{\kappa^{-1}} < \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (10)$$

Expérimentalement, on peut mesurer le rayon (R^*) auquel on observe une transition entre le régime MP et celui où les gouttes sont centrifugées et observer sa variation en fonction de $\tan\alpha/\cos^{1/2}\alpha$ (Figure 21).

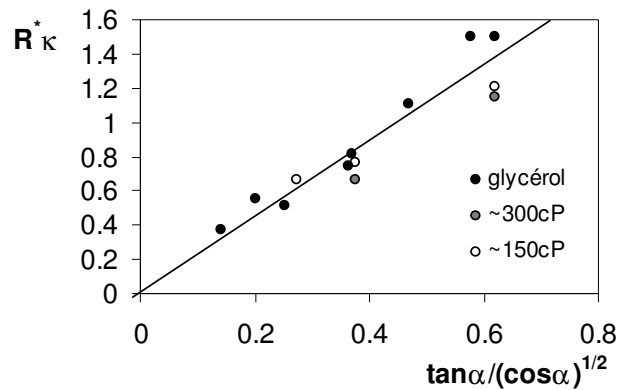


Figure 21 : Rayon de transition en fonction de la pente.

On trouve effectivement que le rayon à la transition est indépendant de la viscosité du liquide et semble ne varier qu'avec la pente imposée. La courbe en trait plein représente :

$$\frac{R^*}{\kappa^{-1}} = 2.3 \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Le modèle semble raisonnable même s'il n'est pas vraiment intuitif que la limite se fasse sur le nombre capillaire. Une interprétation possible est de dire qu'avec la taille limitée du contact MP, les frottements visqueux ne peuvent pas contrebalancer le poids avec des fortes pentes sans déformer la goutte. On atteint donc la limite du régime MP à cause d'une dissipation visqueuse trop faible dans la goutte. La goutte continue alors à accélérer puisque le régime stationnaire n'est pas atteint. En accélérant, les forces centrifuges déforment la goutte et minimisent la zone de contact et donc les frottements visqueux. La goutte accélère jusqu'à être soumise à une autre source de dissipation, par exemple le frottement de l'air. On cherchera dans le chapitre IV à quantifier et essayer de comprendre les dissipations dans les régimes rapides.

La condition sur le nombre capillaire peut aussi se traduire en terme de vitesse : il faut une vitesse $V < 0.5\gamma/\eta$ pour être dans le régime MP. Si on reprend les courbes du régime MP, cela correspond par exemple pour une goutte de glycérol de 1 mm à une transition pour une pente de 13° .

IV. Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que le mouvement des gouttes enrobées visqueuses sur un plan faiblement incliné est relativement bien compris. Les grosses gouttes, qui ont la forme d'une crêpe gravitaire sont soumises à un cisaillement sur leur épaisseur, ce qui conduit à une vitesse limite ne dépendant que des caractéristiques du liquide et de la pente.

Dans les petites gouttes, quasiment sphériques, la dissipation visqueuse intervient au niveau de la zone de contact (modèle MP). On obtient ainsi une vitesse limite inversement proportionnelle à la taille de la goutte : plus les gouttes sont petites, plus elles vont vite.

Nous avons étudié les limites de ces régimes. Ainsi, à forte pente les gouttes sont déformées par la force centrifuge et ressemblent à des « roues » ou à des « cacahuètes ». Ces formes méritent qu'on s'y intéresse plus en détail. La forme à 2 lobes par exemple peut surprendre de prime abord : si on fait tourner autour d'un axe une goutte de liquide, on ne s'attend pas à perdre l'axisymétrie, toutes les forces en jeu étant radiales. Il est donc intéressant de se pencher sur l'étude des gouttes en rotation, ce que nous allons faire dans le chapitre suivant.

Bibliographie

- [1] MAHADEVAN L. et POMEAU Y., « Rolling droplets », *Physics of Fluids*, **11** (1999) 2449.
- [2] RICHARD D. et QUÉRÉ D., « Drops rolling on a tilted non-wettable solid », *Europhysics Letters*, **48** (1999) 286.
- [3] GUYON É., HULIN J.-P. et PETIT L., « Hydrodynamique physique », Collection SAVOIRS ACTUELS, CNRS édition (deuxième édition 2001).
- [4] RICHARD D., « Situations de Mouillage nul », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [5] BICO J., « Mécanismes d'imprégnation : surfaces textures, bigouttes, poreux », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [6] ALLEN R.F. et BENSON P.R. « Rolling Drops on an Inclined Plane », *J. of Colloid and Interface Science*, **50** (1975) 250.
- [7] DUSSAN E. B. et DAVIS S. H., « On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface », *J. Fluid Mech*, **65** (1974) 71.
- [8] AUSSILLOUS P. et QUÉRÉ D., « Liquid marbles », *Nature*, **411** (2001) 924.

Chapitre III

Forme des gouttes en rotation

Table des matières

Chapitre III	Forme des gouttes en rotation	65
I.	Bibliographie	67
	1) Expérience de Plateau	68
	2) Modélisation de Rayleigh	69
	3) Intégration numérique de Brown et Scriven	72
	4) Expériences en apesanteur	75
II.	Intégrations numériques et lois d'échelle	77
	1) Équations et méthode d'intégration des formes axisymétriques	77
	2) Résultats	78
	3) Modèles	81
III.	Formes expérimentales	86
	1) Description des expériences	86
	2) Résultats expérimentaux	88
	3) Bilan	89
	Bibliographie	91

Les formes obtenues dans le chapitre précédent pour des gouttes enrobées visqueuses sur des fortes pentes (formes à 2 lobes et roues) méritent une discussion plus approfondie. Étant donné que le nombre de Weber associé, qui compare les forces centrifuges aux forces capillaires, est d'ordre 50, on peut penser que ces formes proviennent de la centrifugation. L'étude des gouttes en rotation est riche en bibliographie et nous ferons une revue rapide des connaissances dans ce domaine. Ensuite, nous calculerons numériquement les formes d'équilibre axisymétrique puis nous proposerons quelques modèles en loi d'échelle pour les formes observées. Enfin, nous présenterons les résultats expérimentaux obtenus.

I. Bibliographie

L'étude des formes des gouttes en rotation est un sujet qui intéresse depuis près de deux siècles physiciens et mathématiciens [1]-[18]. Quand on isole une goutte de liquide et qu'on la met en rotation, la force centrifuge qui tend à déformer la goutte s'oppose à la tension de surface qui tend à la garder sphérique. L'étude des formes des gouttes en rotation peut servir de modèle à celles des corps célestes où les forces de gravitation remplacent la capillarité. Cependant, ces forces sont en volume et non en surface, d'où des familles de solutions différentes. Si les premières études sur ce sujet remontent à Laplace [1], Plateau réalisa, dès 1842, des expériences afin d'isoler une goutte de liquide et la mettre en rotation [2]. Poincaré en 1885 étudia les formes d'équilibres des gouttes en rotation et montra la possibilité d'existence de formes asymétriques (à 2 lobes) ou de tores [3]. Enfin, pour conclure cette liste non exhaustive, Chandrasekhar (en 1964) décrivit théoriquement les formes de gouttes en rotation, en les rapprochant des formes des planètes et des anneaux de Saturne [4].

L'étude des gouttes en rotation a aussi intéressé la physique nucléaire [5]-[7]. En effet Niels Bohr en 1939 proposa un mécanisme de fission nucléaire analogue à la rupture d'une goutte de liquide en rotation [5] : en prenant pour modèle du noyau une goutte de liquide chargée, la fission peut être comparée à la division de la sphère de liquide en deux. La tension de surface joue alors le rôle des forces nucléaires à courte portée.

La difficulté expérimentale liée à ce problème est d'isoler une goutte de liquide des forces extérieures (gravité, mouillage sur un substrat...) pour obtenir une forme sphérique et de la mettre ensuite en rotation. Dans cette partie bibliographique, nous présenterons tout d'abord l'expérience historique de Plateau [2], puis nous décrirons deux solutions des formes

d'équilibre de gouttes en rotation : celle, analytique, de Rayleigh [8] datant de 1914 et celle, numérique, de Brown et Scriven [9] qui donnent un diagramme de phase très complet des formes d'équilibre et de leurs stabilités relatives. Enfin nous présenterons quelques résultats obtenus par Wang et collaborateurs lors d'expériences en microgravité [10]-[11].

1) Expérience de Plateau

Pour isoler une goutte de liquide, Plateau travaille avec une goutte d'huile d'olive qu'il immerge dans un mélange d'eau et d'alcool isodense [2]. Les gouttes d'huile font typiquement six centimètres de diamètre. Il utilise le dispositif représenté sur la Figure 1 ci-dessous pour mettre les gouttes en mouvement.

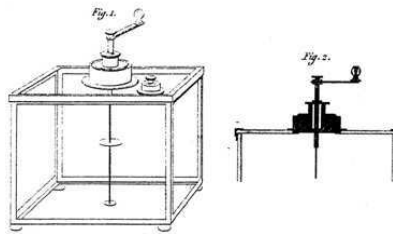


Figure 1 : Montage expérimental utilisé par Plateau pour mettre des gouttes d'huile en rotation en éliminant l'effet de la gravité.

Dans une cuve en verre, il place une tige métallique comprenant à mi hauteur un disque de diamètre typique de 3 cm. Cette tige est reliée à une manivelle permettant la mise en rotation de l'ensemble. Il remplit ensuite la cuve avec le mélange eau/alcool et introduit la goutte d'huile sur le disque et attend qu'elle se centre correctement dessus. Il met ensuite la goutte en rotation à l'aide de la manivelle, et fait les observations suivantes :

- À faible vitesse de rotation, de l'ordre du tour par seconde ou moins, on obtient des ellipsoïdes aplatis aux pôles et il fait une analogie prudente avec les formes des planètes en rotation.
- Pour des vitesses un peu plus importantes, de 2 à 3 tours par seconde, le liquide prend une forme d'anneau uni au disque par une pellicule très mince (équivalent aux roues non trouées que l'on observe avec les gouttes enrobées). Puis, quand le mouvement du disque est brusquement arrêté, la pellicule se rompt et un anneau parfait (faisant penser aux anneaux de Saturne) est obtenu pendant quelques instants avant qu'il ne se referme sur lui-

même. Le schéma de cet anneau est représenté sur la Figure 2.

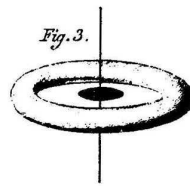


Figure 2 : Anneau observé et schématisé par Plateau.

- Si, une fois l'anneau formé, le mouvement du disque est repris alors l'anneau ne se ferme pas mais se divise en sphères tournant sur elles-mêmes et autour de l'axe, imitant ainsi le mouvement d'un système de planètes. La présence de très petites sphères conforte encore cette impression qualitative en simulant des satellites.

- Si le mouvement est maintenu trop longtemps, la masse d'huile se déforme et, dans le cas d'une vitesse élevée, de l'ordre du tour par seconde, les figures suivantes sont obtenues faisant suite à la forme roue :

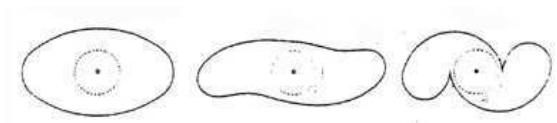


Figure 3 : formes observées et schématisées par Plateau.

Ces formes s'apparentent à celles à 2 lobes présentées dans le chapitre précédent.

Comme Bouasse [12] le fait remarquer dans son livre sur la capillarité, cette expérience est d'une interprétation difficile. En effet le mélange eau/alcool étant de même densité que l'huile, si tout tourne en bloc, la goutte d'huile devrait rester sphérique. Bouasse interprète l'effet de la force centrifuge comme étant due à la différence de viscosité : si cette différence entre l'huile et le mélange eau/alcool est suffisamment marquée, seule la goutte d'huile est entraînée.

2) Modélisation de Rayleigh

En 1914, partant des observations de Plateau, Rayleigh pose les équations correspondant aux formes d'équilibre axisymétriques et les intègre numériquement, en proposant des modèles

analytiques dans certaines limites [8]. Nous allons présenter ses calculs qui servent de base à notre intégration numérique des formes axisymétriques.

La forme de la goutte résulte de l'équilibre entre les forces capillaires et les forces centrifuges. On suppose que le mouvement se fait à vitesse angulaire ω constante dans toute la goutte.

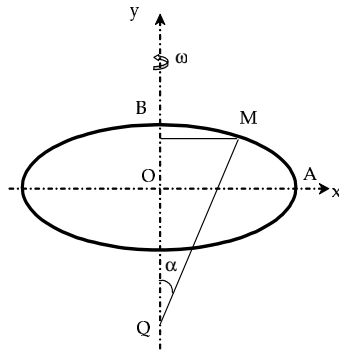


Figure 4 : Schéma explicatif du calcul des formes axisymétriques des gouttes en rotation.

On se place dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire ω . Dans ce référentiel, la goutte est immobile et on peut calculer la pression P en un point M quelconque de la surface en écrivant l'équilibre des forces :

$$P = \frac{\rho\omega^2 x^2}{2} + P_0 \quad (1)$$

où P_0 est la pression sur l'axe de rotation. De plus, en écrivant la loi de La place, on a :

$$P = P_{\text{ext}} + \gamma C \quad (2)$$

où P_{ext} est la pression atmosphérique et C la courbure de l'interface en M . On pose arbitrairement P_{ext} égale à 0 pour plus de commodité. La courbure C dans le cas d'une surface de révolution peut s'exprimer à partir de l'abscisse curviligne s définie le long d'une méridienne [19] :

$$C = \frac{d^2y/ds^2}{dx/ds} + \frac{1}{x} \frac{dy}{ds} \quad (3)$$

L'équation différentielle qui régit la forme axisymétrique de la goutte en rotation s'écrit alors

après une première intégration en s :

$$x \frac{dy}{ds} = \frac{\rho \omega^2 x^4}{8\gamma} + \frac{P_0 x^2}{2\gamma} + K \quad (4)$$

où K est une constante d'intégration. À partir de cette équation différentielle, on peut distinguer plusieurs cas.

- *Si la courbe rencontre l'axe de rotation :*

Au point B défini sur la Figure 4 ($x=0$) il y a une tangente horizontale, ce qui élimine la constante. Au point A sur l'équateur, la tangente est verticale ($dy/ds=1$). De plus, poser $OA = a$ permet d'éliminer la constante P_0 . On note finalement :

$$\Omega_R = \frac{\rho \omega^2 a^3}{8\gamma} \quad (5)$$

Il s'agit d'une sorte de nombre de Bond de rotation, défini à partir de la taille maximale de la goutte en rotation. On obtient ainsi l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{ds} = \Omega_R \frac{x^3}{a^3} + (1 - \Omega_R) \frac{x}{a} \quad (6)$$

Pour les faibles vitesses de rotation, cette équation peut s'intégrer si les puissances supérieures à Ω_R^2 sont négligées. On trouve alors que la goutte prend la forme d'un ellipsoïde de révolution. Le petit axe de l'ellipse s'écrit $a(1 - \Omega_R)$, au premier ordre en Ω_R et $a(1 - \Omega_R + \Omega_R^2)$ au deuxième ordre.

Le calcul de la pression sur l'axe montre que tant que $\Omega_R < 1$ les courbures au point B sont convexes et l'on obtient des formes plutôt ellipsoïdales. Quand $\Omega_R = 1$, la surface en B est plate. Enfin, quand $\Omega_R > 1$, les courbures en B changent de signe et les formes sont biconcaves.

En $\Omega_R = 2.4$, l'épaisseur de la forme biconcave sur l'axe de rotation est quasi nulle. Au delà, la courbe ne rencontre plus l'axe de rotation. Rayleigh considère alors, en s'inspirant des expériences de Plateau, que la forme est annulaire.

- Si la courbe ne rencontre pas l'axe de rotation ($\Omega > 2.4$) :

On doit garder la constante numérique K dans l'équation 4. On suppose qu'il existe a_1 et a_2 tels que l'on ait $dy/ds = 1$ en $x = a_2$ et $dy/ds = -1$ en $x = a_1$ (la forme se referme sur elle-même et comprend donc maintenant deux tangentes verticales dans le quart de plan où elle est décrite). La constante numérique, ainsi que P_0 , peuvent s'exprimer à l'aide de ces deux longueurs pour obtenir l'équation 7 :

$$x \frac{dy}{ds} = \frac{\rho\omega^2}{8\gamma} (x^2 - a_1^2)(x^2 - a_2^2) + \frac{x^2 - a_1 a_2}{a_2 - a_1} \quad (7)$$

3) Intégration numérique de Brown et Scriven

En 1980 Brown et Scriven proposent une intégration numérique des formes de gouttes en rotation ainsi qu'une analyse de stabilité [9].

- *Principe*

Le principe de leur calcul consiste à partir de l'équation de Laplace et à l'intégrer numériquement. Ils étudient ensuite les stabilités relatives des formes obtenues.

Ils font apparaître lors de leur traitement un nombre de Bond de rotation Ω_s comme nombre sans dimension caractéristique :

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 R_0^3}{8\gamma}} \quad (8)$$

Ce nombre est construit sur la taille initiale de la goutte et non pas sur sa taille maximale contrairement à celui utilisé par Rayleigh (équation 5).

- *Résultats numériques*

Numériquement, plusieurs familles sont obtenues pour la forme des gouttes en rotation.

La famille des formes axisymétriques évolue d'une forme de sphère parfaite à celle d'un ellipsoïde de révolution oblate puis vers des formes biconcaves quand la vitesse angulaire

augmente (Figure 5).

Au-dessus d'une vitesse maximum ($\Omega_{s_{\max}} = 0.7540$), on ne peut plus calculer de forme axisymétrique : les forces capillaires ne peuvent plus contrebalancer la surpression générée par les forces centrifuges. La famille axisymétrique ne s'achève pas à $\Omega_{s_{\max}}$ mais retourne vers des vitesses angulaires plus faibles. Elle se termine en $\Omega_{s_{\text{fin}}} = 0.7059$ où la forme biconcave n'a plus d'épaisseur sur l'axe de rotation.

Toutes les formes sur la partie ascendante dans la Figure 5 sont stables par rapport à une perturbation axisymétrique à vitesse angulaire constante tandis que la branche descendante est instable par rapport aux déformations axisymétriques qui envoient le liquide loin de l'axe de rotation et augmentent le moment angulaire à vitesse de rotation constante. Cependant ces perturbations ne conservent pas le moment angulaire et donc la branche descendante est stable par rapport à une perturbation axisymétrique pour une goutte isolée.

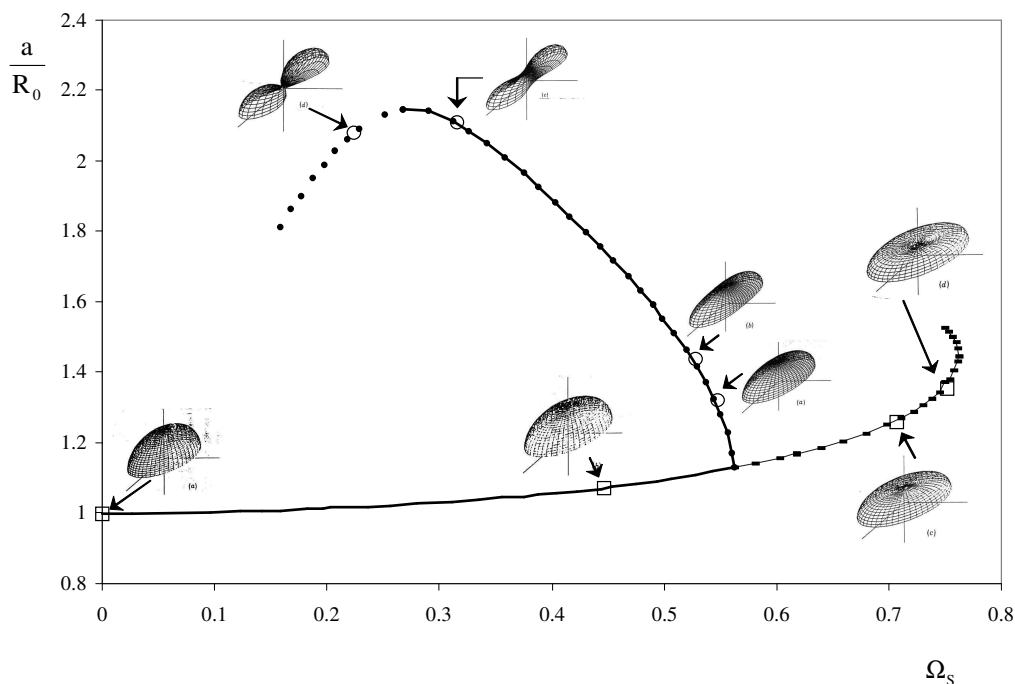


Figure 5 : Formes d'équilibres de gouttes isolées en rotations, familles axisymétrique et à 2 lobes. Taille maximale normalisée par la taille de la sphère en fonction du nombre de Bond de rotation Ω_s . Le trait plein représente les formes stables.

Une goutte n'est pas seulement soumise aux perturbations axisymétriques mais aussi à des perturbations asymétriques. Ces perturbations ne changent ni le moment angulaire, ni le moment d'inertie, et laissent la vitesse angulaire inaltérée. Donc la stabilité des gouttes à

vitesse angulaire constante ou isolée par rapport à ces perturbations est la même. Le calcul de stabilité montre que la goutte axisymétrique devient instable à partir de $\Omega_s = 0.5599$ vis-à-vis d'une famille à 2 lobes.

La famille à 2 lobes résulte d'une bifurcation sub-critique à partir de la famille axisymétrique. (Si on s'écarte un peu de la famille axisymétrique, on y retourne ; si on s'en écarte un peu trop, on diverge vers la famille à 2 lobes.) Quand on décroît la vitesse angulaire, les deux lobes deviennent de plus en plus prononcés et l'épaisseur sur l'axe de rotation diminue. Finalement, la goutte acquiert une forme d'haltère.

À faible vitesse de rotation, les lobes grossissent de manière sphérique excepté un bras court qui les retient entre elles. Dans le bras, les forces centrifuges sont négligeables, la pression est sensiblement uniforme et la surface a une courbure moyenne uniforme. De plus, le bras contribue très peu au moment d'inertie, au moment angulaire ou à l'énergie cinétique de la goutte très distordue.

Dans la famille à 2 lobes, il y a un maximum en taille pour $\Omega_s = 0.26$. Quand la vitesse angulaire approche d'une vitesse nulle les deux lobes tendent vers deux sphères identiques (l'énergie cinétique tend vers zéro et l'énergie de surface vers celle des deux sphères). À des vitesses en dessous de $\Omega_s = 0.187$, la famille à 2 lobes n'existe plus.

Les gouttes à 2 lobes à vitesse angulaire constante sont instables par rapport aux perturbations de même géométrie qui transforment symétriquement la goutte. Les gouttes à 2 lobes isolées sont stables au dessus de $\Omega_s = 0.26$ car les perturbations précédentes ne conservent pas le moment angulaire.

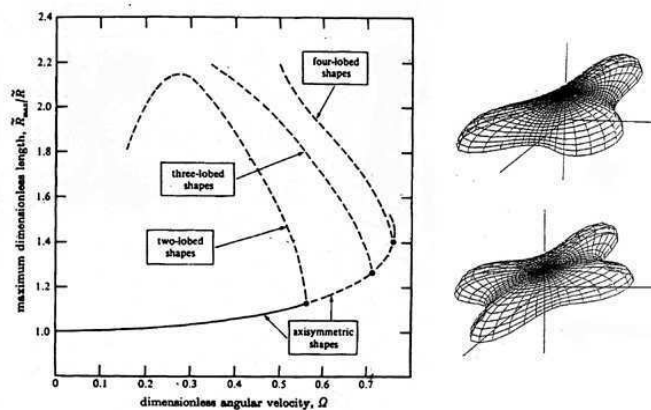


Figure 6 : Formes à 3 et 4 lobes.

À plus grande vitesse de rotation, Brown et Scriven ont montré qu'il pouvait aussi exister des formes à 3 ou 4 lobes, comme représentées sur la Figure 6. Ces formes sont plus stables que les formes axisymétriques plus rapides mais instables par rapport aux formes à 2 lobes. Elles ont néanmoins été observées expérimentalement par Ohsaka et Trinh [13] en empêchant les perturbations asymétriques de se développer.

4) Expériences en apesanteur

Deux séries d'expériences (USML1 et 2), développées par Wang, Lee et leurs collaborateurs, ont été menées dans l'espace avec la NASA [10]-[11]. Le principe est de maintenir en lévitation des gouttes de liquide et de les mettre en rotation, à l'aide d'ondes acoustiques.

- *USML1 (1994)*

Les expériences réalisées montrent un excellent accord avec les prédictions de Brown et Scriven (Figure 7).

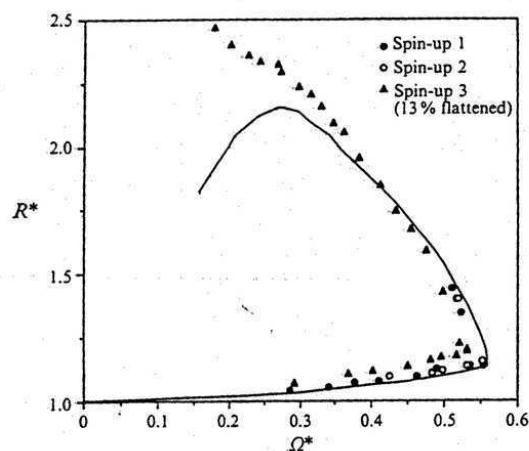


Figure 7 : Expérience réalisée par Wang et collaborateurs avec une goutte d'huile silicone de 2.8 cm^3 , R^* représente le rayon normalisé par celui de la sphère de même volume et $\Omega^* = \Omega/\Omega_c$.

La Figure 8 montre les formes stables qu'ils ont obtenu (axisymétriques et à 2 lobes). Les trois dernières images montrent l'évolution dynamique vers la rupture après une perte d'équilibre. Pendant la fission, le produit $R^{*2}\Omega^*$ est constant pour permettre la conservation du moment angulaire.

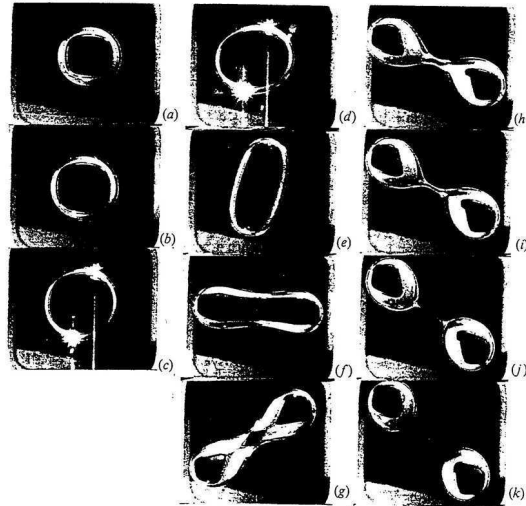


Figure 8 : Formes observées dans les expériences USML1. Les images a, b et c correspondent aux formes axisymétriques stables, d, e, f et g aux formes 2-lobes et h, i, j, k montrent une séquence de perte d'équilibre.

- *USML2 (1997)*

Cette étude concerne plus particulièrement l'effet d'un aplatissement préalable aux pôles. Cela conduit à un décalage de la bifurcation entre les formes axisymétriques et les formes à 2 lobes, ainsi qu'à une perte d'équilibre des formes axisymétrique vis-à-vis d'une perturbation axisymétrique.

Pendant la perte d'équilibre axisymétrique, le produit $R^*\Omega^*$ est approximativement constant. La Figure 9 suivante montre une bifurcation entre la famille axisymétrique et la famille à 2 lobes quand la vitesse angulaire augmente ainsi qu'une perte d'équilibre axisymétrique.

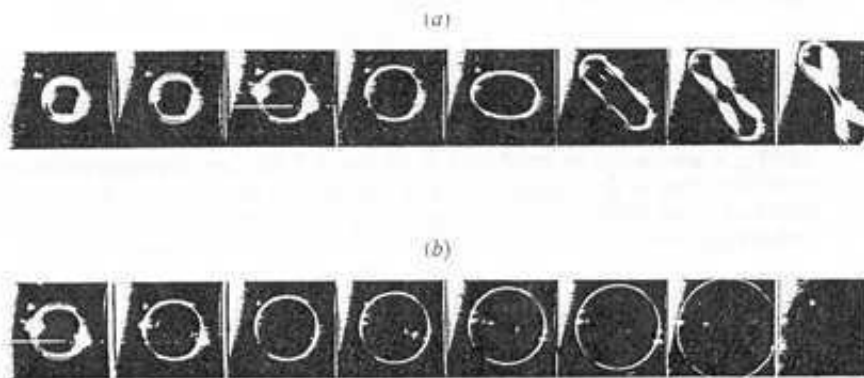


Figure 9 : Bifurcation entre la famille axisymétrique et la famille à 2 lobes quand la vitesse angulaire augmente (a) et perte d'équilibre axisymétrique (b).

II. Intégrations numériques et lois d'échelle

Suite à ces travaux, il nous à paru utile, partant des calculs de Rayleigh, d'essayer de retrouver les résultats numériques de Brown et Scriven, du moins pour les formes axisymétriques. En effet, pour les formes à 2 lobes, la deuxième courbure n'est pas aisée à exprimer du fait du manque de symétrie particulière. Nous proposons ensuite quelques modèles en loi d'échelle pour décrire les différentes formes axisymétriques et à 2 lobes.

1) Équations et méthode d'intégration des formes axisymétriques

D'après le calcul de Rayleigh, dans le cas de gouttes tournant à une vitesse angulaire ω tout en restant axisymétriques, le profil de la goutte est donné par l'équation différentielle du premier ordre (4) :

$$x \frac{dy}{ds} = \frac{\rho \omega^2 x^4}{8\gamma} + \frac{P_0 x^2}{2\gamma} + K \quad (9a)$$

où s est l'abscisse curviligne et K une constante d'intégration. On recherche la courbe $y(x)$, ce qui impose d'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{\sqrt{1 - (dy/ds)^2}} \quad (9b)$$

où dy/ds est donné par l'équation 9a. Il faut alors intégrer numériquement cette équation avec les conditions aux limites appropriées.

- Si la courbe rencontre l'axe de rotation :

On doit avoir une tangente horizontale en $x = 0$ ($dy/ds = 0$) et sur l'équateur, en $x = R_{\max}$, une tangente verticale ($dy/ds = 1$). Ces deux conditions aux limites permettent d'éliminer la constante et P_0 .

Comme la condition en $x = 0$ est contenue dans l'équation, elle sera toujours vérifiée. Pour intégrer, on impose la distance R_{\max} et la vitesse angulaire, puis on débute à partir du point $x = R_{\max}$ et $y = 0$. On intègre en imposant un pas dx constant. Une fois la courbe obtenue, on

calcule numériquement le volume de la forme : étant donné que c'est une forme de révolution, le volume s'obtient en calculant la surface de la forme dans le plan xy et en la multipliant par le parcours du centre de gravité pendant la révolution, soit $2\pi x_g$ (formule de Guldin). On en déduit finalement le rayon R_0 .

- *Si la courbe ne rencontre pas l'axe de rotation:*

Expérimentalement, une fois que la forme biconcave a atteint une épaisseur quasi nulle au centre, on obtient une sorte d'anneau avec la présence d'un film de liquide continu au centre (cette forme, que l'on appelle *roue*, est également observée par Plateau).

On va reprendre les hypothèses de Rayleigh pour le calcul de la forme de l'anneau en supposant maintenant que le raccord au centre se fait avec une tangente horizontale plutôt que verticale. On doit garder la constante numérique et on suppose qu'il existe R_1 et R_{\max} ($R_1 < R_{\max}$) tels que, sur l'axe on ait une tangente verticale en $x = R_{\max}$ ($dy/ds = 1$) et une tangente horizontale en $x = R_1$ ($dy/ds = 0$). L'équation différentielle s'écrit alors :

$$x \frac{dy}{ds} = \frac{\rho \omega^2}{8\gamma} (x^2 - R_1^2)(x^2 - R_{\max}^2) + R_{\max} \frac{(x^2 - R_1^2)}{R_{\max}^2 - R_1^2}$$

On impose ensuite les longueurs R_{\max} et R_1 et la vitesse angulaire, puis on intègre à partir du point $x = R_{\max}$, $y = 0$. Une fois la forme calculée, on fait varier R_1 pour obtenir la seule forme où $y(x=R_1) = 0$. On calcule alors numériquement le volume et le rayon R_0 .

2) Résultats

On travaille à taille maximale constante et on augmente graduellement la vitesse de rotation. La forme passe d'une sphère (à vitesse nulle), à un ellipsoïde aplati aux pôles, puis à une forme biconcave jusqu'à atteindre une épaisseur pratiquement nulle au centre.

La partie grisée présentée dans la Figure 10 correspond aux formes axisymétriques stables par rapport à la famille à 2 lobes (pour $\Omega_s > 0.56$) [9]. Comme les formes sont de plus en plus centrifugées, elles correspondent à des volumes de plus en plus faible.

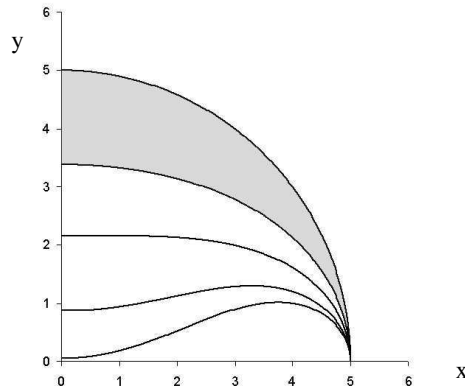


Figure 10 : Formes axisymétriques de gouttes en rotation pour de haut en bas $\Omega_s = 0 ; 0.56 ; 0.707 ; 0.75 ; 0.71$. La partie grisée correspond aux formes axisymétriques stables par rapport aux formes à 2 lobes.

On peut tracer les résultats dans la même représentation que Brown et Scriven soit $R_{\max}/R_0 = f(\Omega_s)$ avec $\Omega_s = \sqrt{\rho\omega^2 R_0^3 / 8\gamma}$ (Figure 11).

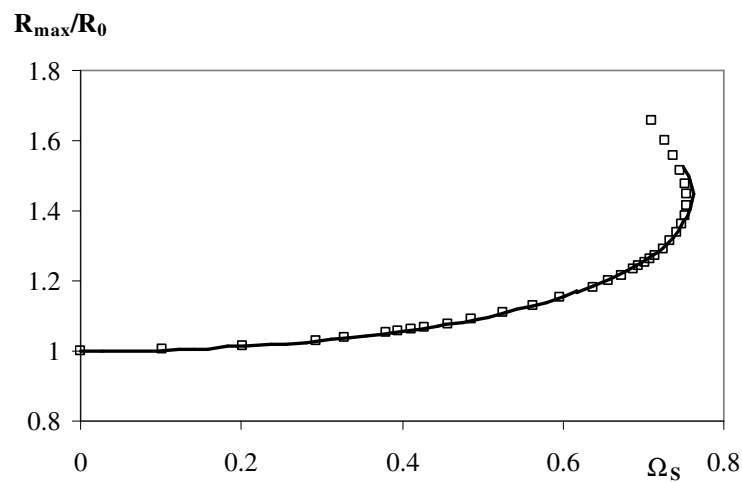


Figure 11 : Rayon maximal de la goutte en rotation normalisé par le rayon à vitesse nulle, en fonction du nombre de Bond de rotation Ω_s . Le trait noir correspond à l'intégration numérique de Brown et Scriven.

L'intégration numérique que nous avons faite est en très bon accord avec les résultats de Brown et Scriven.

Une fois que l'épaisseur quasi-nulle aux pôles a été atteinte, un anneau de liquide est centrifugé en laissant un mince film au centre (Figure 12).

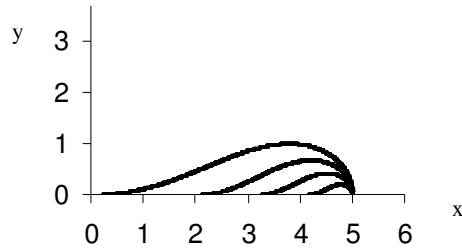


Figure 12 : Formes axisymétriques de gouttes en rotations avec un film mince au centre, pour $\Omega_s = 0.705 ; 0.666 ; 0.644 ; 0.627$ (de haut en bas).

Dans la représentation $R_{\max}/R_0 = f(\Omega_s)$, on obtient une série de point qui se raccorde aux points précédents. Nous avons représenté sur la Figure 13 les points correspondant à cette famille par des triangles, tandis que les carrés rappellent les résultats de la Figure 11.

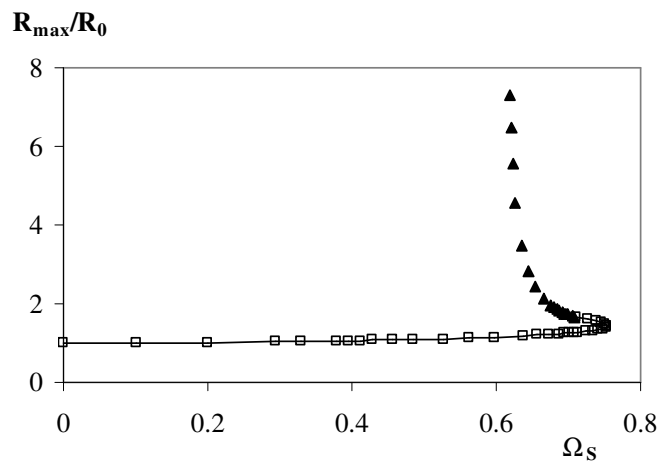


Figure 13 : Rayon maximal de la goutte en rotation en fonction du nombre de Bond de rotation Ω_s . Les carrés ouverts représentent les formes ellipsoïdes et biconcaves, les triangles noirs les formes annulaires avec un mince film central.

Pour une goutte de volume donné, la seule variable dans le nombre de Bond de rotation est la vitesse angulaire ω . En partant de la forme sphère, si on augmente cette vitesse, au départ il n'y a qu'une seule forme d'équilibre axisymétrique. Au-dessus d'une certaine limite (de l'ordre de $\Omega_s = 0.6$), deux formes d'équilibre peuvent exister, une forme biconcave et une forme roue. Et si l'on dépasse $\Omega_s = 0.75$, il n'y a plus de forme axisymétrique d'équilibre. La question que l'on peut se poser est de savoir ce qui se passe expérimentalement quand on augmente la vitesse de rotation.

Dans nos expériences, on n'impose pas la vitesse angulaire mais la vitesse tangentielle de la goutte : on peut augmenter de façon monotone cette vitesse, et observer toute les formes

d'équilibre obtenues si on suit la courbe de la Figure 13 sans se soucier du fait que Ω_s ne soit pas monotone.

Pour des expériences réalisées à vitesse angulaire donnée, une analyse de stabilité relative des formes roues et biconcaves serait nécessaire pour savoir quelle forme la goutte adopterait.

3) Modèles

Il nous a paru utile de compléter ces calculs numériques par des arguments physiques, permettant de définir plus clairement les grandes familles d'objets engendrés par la rotation.

(a) Formes axisymétriques

Pour les formes axisymétriques on peut distinguer quatre objets : les ellipsoïdes, le disque plat, les formes biconcaves et enfin l'anneau avec un film mince.

- Dans le cas des faibles vitesses de rotation, d'après le calcul de Rayleigh, les formes peuvent être considérées comme des ellipsoïdes de révolution de petit axe $OB = R_{\max}(1 - \Omega_R)$ au premier ordre et $OB = R_{\max}(1 - \Omega_R + \Omega_R^2)$ au deuxième ordre en Ω_R .

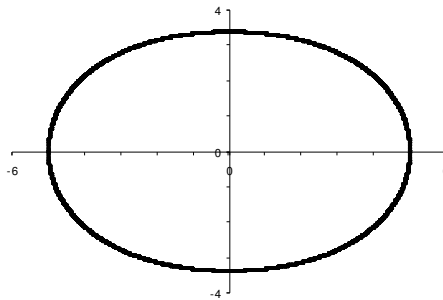


Figure 14 : Forme en ellipsoïde obtenue numériquement (deuxième forme sur la Figure 10, $\Omega_s = 0.56$).

où Ω_R est un nombre de Bond de rotation construit à partir du grand axe de la goutte :

$$\Omega_R = \frac{\rho\omega^2 R_{\max}^3}{8\gamma} = \Omega_s^2 \left(\frac{R_{\max}}{R_0} \right)^3.$$

En outre, la conservation du volume impose $\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi R_{\max}^2 \cdot OB$. On a donc, suivant l'ordre en Ω_R considéré, les équations qui suivent :

$$\Omega_S^2 = (R_0/R_{\max})^3 \left(1 - (R_0/R_{\max})^3\right) \text{ (ellipse 1)}$$

ou

$$\Omega_S^2 = \frac{1}{2} (R_0/R_{\max})^3 \left(1 - \sqrt{4(R_0/R_{\max})^3 - 1}\right) \text{ (ellipse 2)}$$

- Si l'on se place autour de la forme disque (Figure 15), on peut écrire l'équilibre entre la force de rappel capillaire et la force centrifuge.

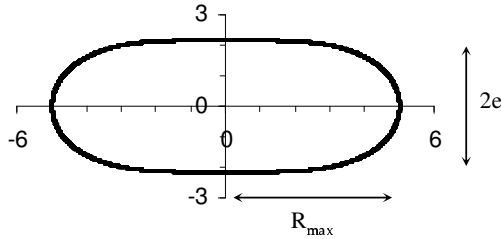


Figure 15 : Forme disque obtenue numériquement (troisième forme sur la Figure 10, $\Omega_S = 0.707$), et définition des longueurs utilisées.

Les bouts sont en surpression de Laplace $P = P_0 + \gamma/e$ (dans l'hypothèse $e \ll R_{\max}$, on néglige la deuxième courbure). Le disque est donc rappelé vers la forme sphérique par un gradient de pression γ/e^2 . En effet, le gradient de pression se fait sur la distance e car la partie plate arrive presque au bout. Cette force est équilibrée par la force centrifuge $\rho\omega^2 R_{\max}$. En écrivant la conservation du volume $R_{\max}^2 e \sim R_0^3$, on obtient finalement :

$$R_{\max} \sim R_0 \Omega_S^{2/3} \quad (10)$$

- Quand la forme disque commence à se pincer, le bilan des forces reste le même alors que la conservation du volume devient $R_{\max} e^2 \sim R_0^3$. Les formes équivalentes sont alors décrites par l'équation 11.

$$\Omega_S \sim \text{cste} \quad (11)$$

- Intéressons-nous à présent à la forme biconcave (Figure 16)

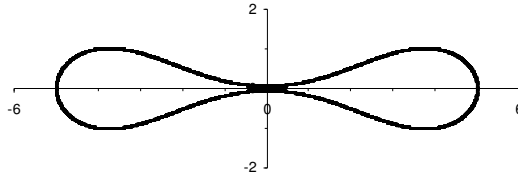


Figure 16 : Forme biconcave obtenue numériquement (dernière forme sur la Figure 10, $\Omega_S = 0.71$).

La différence entre le disque et cette forme réside dans l'écriture du gradient de pression de Laplace. Pour la forme biconcave, il se fait sur toute la goutte et l'on a $\nabla P \sim \gamma/eR_{\max}$. Par ailleurs, la conservation du volume s'écrit $R_{\max}e^2 \sim R_0^3$. En équilibrant le gradient de pression et la force centrifuge $\rho\omega^2R_{\max}$, cela donne :

$$R_{\max} \sim R_0 \Omega_S^{-4/3} \quad (12)$$

- Quand le film s'agrandit, l'anneau s'éloigne de l'axe (Figure 17).

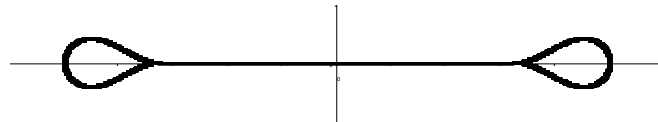


Figure 17 : Forme roue obtenue numériquement, correspondant à la troisième forme de la Figure 12 pour $\Omega_S = 0.644$.

Le gradient de pression se fait alors à nouveau sur la distance e ($\nabla P \sim \gamma/e^2$), alors que la conservation du volume reste celle de la forme biconcave ($R_{\max}e^2 \sim R_0^3$).

La loi d'échelle décrivant cette forme s'écrit alors :

$$\Omega_S \sim \text{cste} \quad (13)$$

(b) Formes à 2 lobes

Pour les formes à 2 lobes ayant une symétrie de révolution autour du deuxième axe (l'axe Ox sur le dessin de la Figure 18), on peut aussi construire un modèle en loi d'échelle.

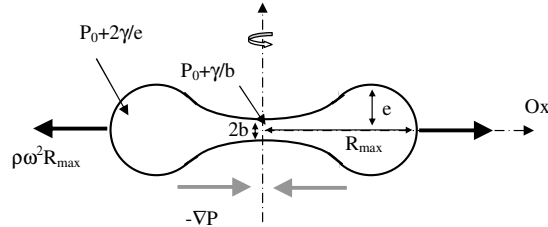


Figure 18 : Schéma des forces en équilibre dans la goutte sous forme à 2 lobes.

Cette forme peut être assimilée à deux lobes quasi-sphériques de rayon e reliés par un cylindre de rayon b . Cette forme est une forme d'équilibre tant qu'il y a un rappel capillaire pour s'opposer à la force centrifuge, c'est-à-dire tant que les deux lobes sont en surpression par rapport au cylindre. Cela se traduit par la condition $b > e/2$. Si le filament qui retient les deux lobes devient trop fin, alors il sera énergétiquement plus favorable en terme de surface de créer deux sphères séparées.

Ici, on suppose que l'on est dans le cas où $b \sim e$, le gradient de pression est alors en γ/eR_{\max} , la conservation du volume s'écrit $R_{\max}e^2 \sim R_0^3$ et l'équilibre entre le rappel capillaire et la force centrifuge donne :

$$R_{\max} \sim R_0 \Omega_S^{-4/3} \quad (14)$$

Pour des formes plus étirées, on suppose que tout le volume est dans les deux lobes. La conservation du volume devient $e^3 \sim R_0^3$ et on obtient :

$$R_{\max} \sim R_0 \Omega_S^{-1/2} \quad (15)$$

(c) Résumé

On peut comparer ces différentes lois d'échelles aux données numériques calculées. Les modèles sont présentés en traits pleins sur la Figure 19. On en retire alors les coefficients numériques ainsi que les domaines de validité.

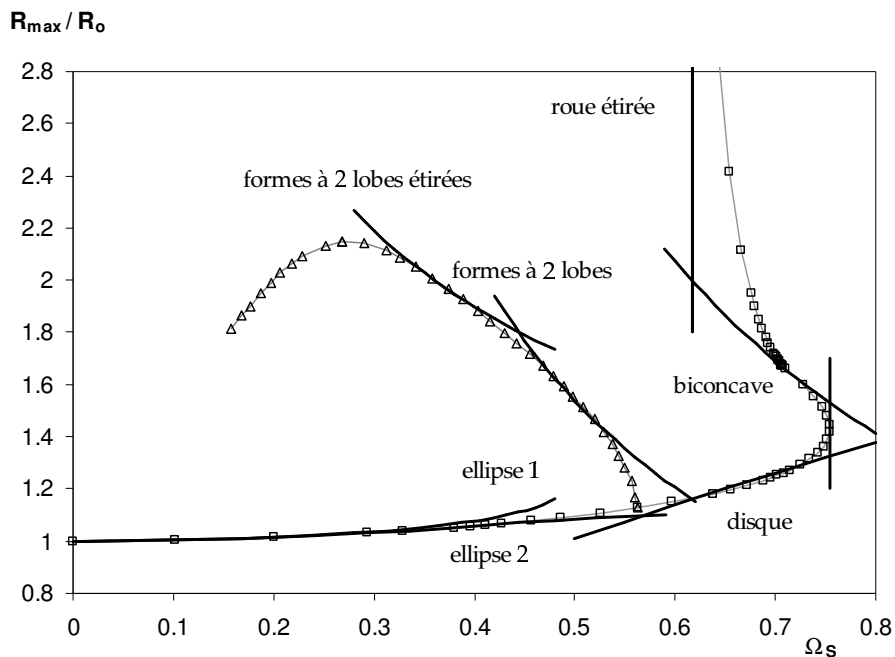


Figure 19 : Formes numériques et modèles en lois d'échelle.

Pour les formes ellipsoïdales, le développement au premier ordre rend compte des données numériques jusqu'à $\Omega_s = 0.3$ et l'ajustement est prolongé au deuxième ordre jusqu'à $\Omega_s = 0.5$. Avec un coefficient multiplicatif de 0.8, l'équation 10 pour la forme disque décrit les données numériques pour $0.6 < \Omega_s < 0.75$. Avec un coefficient multiplicatif de 1.05, l'équation 12 pour la forme biconcave décrit les données numériques pour $0.695 < \Omega_s < 0.74$. Entre les deux, La constante $\Omega_s = 0.755$ raccorde les deux modèles comme prévu par l'équation 11.

Enfin, pour la forme roue, on constate que les données numériques se rapprochent asymptotiquement d'une branche $\Omega_s = \text{cste}$ ($= 0.618$), en accord avec l'équation 13.

Dans le cas des formes à 2 lobes, l'équation 14 rend bien compte des données numériques, dans la fourchette $0.45 < \Omega_s < 0.54$, avec un coefficient numérique de 0.61. L'équation 15 permet elle de décrire les formes étirées pour $0.33 < \Omega_s < 0.42$ avec un coefficient numérique de 1.2.

Il faut maintenant vérifier que toutes ces formes correspondent bien à ce que donne l'expérience.

III. Formes expérimentales

Nous voulons comparer les formes obtenues expérimentalement à celles calculées numériquement. Pour cela, le mieux est de représenter les données expérimentales dans le diagramme de Brown et Scriven, en portant R_{\max} / R_0 (où R_{\max} est la taille maximum de la forme en rotation et R_0 le rayon de la forme sphérique) en fonction de $\Omega_s = \sqrt{\rho\omega^2 R_0^3 / 8\gamma}$. Connaissant les caractéristiques des liquides utilisés, il faut donc mesurer, à volume donné, R_{\max} et ω (vitesse de rotation angulaire). La mesure d'une vitesse de rotation angulaire pour une forme axisymétrique étant une chose relativement complexe, on pourrait imaginer mesurer la vitesse linéaire de la goutte et en déduire la vitesse angulaire par la relation $V = R_{\max}\omega$ valable pour une rotation solide. Cependant, comme on pourra le voir dans le chapitre suivant, cette relation n'est pas forcément vérifiée dans le cas de nos gouttes et il est préférable de s'en tenir aux mesures directes.

1) Description des expériences

Nous utilisons deux géométries différentes : un tambour tournant (Figure 20) qui permet d'accéder à des formes stationnaires, et un plan incliné sur lequel la goutte acquiert une vitesse constante après une distance d'accélération.

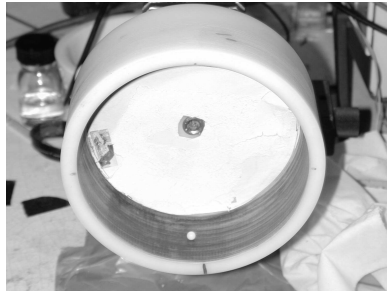


Figure 20 : Tambour tournant utilisé pour mettre les gouttes en rotation.

Cette distance d'accélération est inférieure à un mètre : si on suppose les gouttes soumises à l'accélération de la gravité, les vitesses obtenues après $L \sim 1$ m de descente ($V \sim \sqrt{2gL \sin \alpha}$) sont bien supérieures à celles observées dans le régime stationnaire. Dans les deux cas le mouvement est filmé avec une caméra rapide (après un mètre de descente pour les expériences sur plan incliné). Le rayon maximal est alors facilement mesurable. Dans le cas des formes à 2 lobes, on mesure l'inclinaison θ de l'axe passant par les deux lobes par rapport à une direction fixe (l'axe du plan incliné ou l'horizontale) en fonction du temps. En régime

permanent, on obtient une droite dont la pente donne la vitesse angulaire (Figure 21).

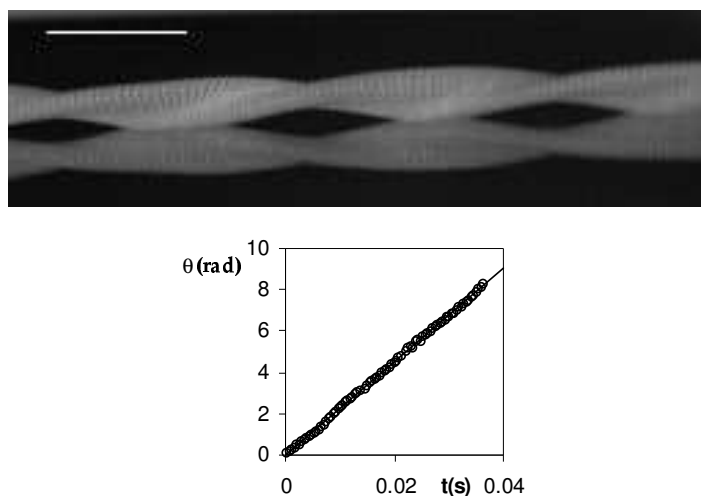


Figure 21 : Mouvement (de gauche à droite) d'une forme à 2 lobes de $5\mu\text{l}$ sur un plan incliné de 37° . Le trait blanc représente 1cm et il y a 0,44 ms entre chaque image. La position angulaire θ en fonction du temps est également reportée. Le trait plein indique 225 rad/s.

Dans le cas des formes axisymétriques, on ajoute des marqueurs sur les gouttes (par exemple de la limaille de fer mélangée à la poudre de lycopode utilisée pour l'enrobage) et on suit la position de plusieurs marqueurs en fonction du temps (Figure 22).

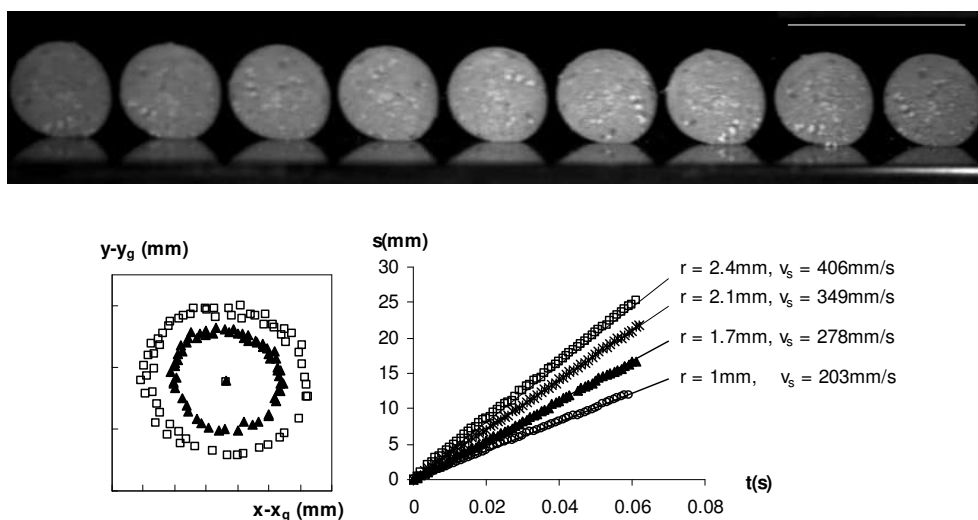


Figure 22 : Mesure de la vitesse angulaire d'une goutte axisymétrique ($R_0 = 1.9\text{ mm}$) dévalant un plan incliné de 27° . Il y a 8 ms entre chaque image et le trait blanc représente 1cm. En relevant la position des marqueurs au cours du temps, on peut voir que la goutte tourne en bloc. La pente de leurs abscisses curvilignes en fonction du temps donne accès à la vitesse angulaire de rotation qui vaut ici, en moyennant sur les 4 marqueurs, 176 rad/s.

L'abscisse curviligne est linéaire en temps pour chaque marqueur, ce qui donne leur vitesse tangentielle. La forme circulaire de leur mouvement autour du centre de gravité donne leur position radiale, ce qui permet d'obtenir la vitesse angulaire. Pour chaque expérience, nous faisons la moyenne sur quatre marqueurs. Ces mesures sont néanmoins relativement peu précises (l'erreur est d'ordre 10%).

On peut maintenant comparer les formes expérimentales à celles données par les différentes études numériques.

2) Résultats expérimentaux

Dans la Figure 23, nous comparons les données expérimentales aux intégrations numériques dans la représentation $R_{\max}/R_0 = f(\Omega_s)$, en différenciant les diverses formes observées (ellipsoïde, 2 lobes, disque et biconcave, et roue).

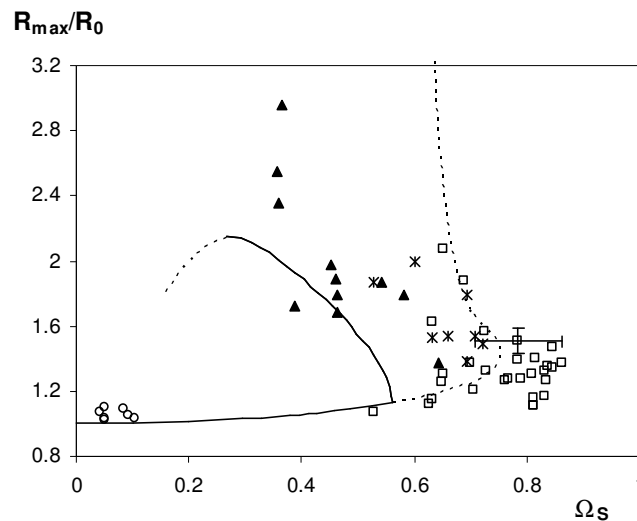


Figure 23 : Taille maximale de la goutte en rotation normalisée par R_0 en fonction du nombre de Bond de rotation (équation 8). Les traits pleins et pointillés représentent les intégrations numériques. Les ronds correspondent aux ellipsoïdes, les carrés aux disques et aux formes biconcaves, les étoiles aux roues et les triangles noirs aux formes à 2 lobes. Pour indication, nous avons tracé les barres d'erreurs d'une mesure.

Les données sont très dispersées. En effet, il n'est pas facile de mesurer précisément la vitesse de rotation. En outre, les données sont très sensibles aux erreurs sur les longueurs, et dans les expériences sur plan incliné, le suivi du mouvement implique un champ suffisamment grand et donc une perte de précision sur les distances.

Cependant on peut remarquer que les points expérimentaux se rassemblent bien autour des prédictions numériques pour toutes les formes représentées. De plus, les données expérimentales correspondent à plusieurs pentes pour les plans inclinés (de 10° à 50°) et plusieurs viscosités (de 300 à 1100 cP). Il apparaît que ces variations n'interviennent pas sur la dépendance de la taille de la goutte en fonction de la vitesse angulaire.

3) Bilan

On peut donc conclure que les formes observées résultent bien d'un équilibre entre forces centrifuges et capillaires, sans autre influence notable. La dépendance entre la vitesse angulaire et le rayon maximal de la goutte sera donc dans la suite supposée connue et donnée par l'intégration numérique ou les modèles présentés dans ce chapitre.

Il reste maintenant à essayer de comprendre ce qui fixe dans une expérience donnée la taille de la goutte ou la vitesse angulaire. La vitesse angulaire n'est pas une mesure facile et l'on préférerait mesurer directement la vitesse tangentielle de la goutte. Il faut donc relier cette vitesse aux données précédentes et se demander si l'on a une simple relation de rotation solide. Nous essayerons de répondre à ces questions dans le chapitre IV.

La Figure 23, qui présente les formes expérimentales obtenues, pose la question de la stabilité des différentes formes : on observe différents états axisymétriques (formes biconcaves et roues) qui selon Chandrasekhar et Brown et Scriven, devraient être instables par rapport aux formes à 2 lobes. Ces questions de stabilité et les possibles transformations entre les différentes formes seront discutées dans le chapitre V.

Bibliographie

- [1] LAPLACE P. S., *Cœuvres complètes de Laplace*.
- [2] PLATEAU J.A.F., « Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur », *Académie Royale de Bruxelles*, extrait du tome XVI des mémoires.
- [3] POINCARÉ H., « Capillarité » Cours de Physique Mathématique, *Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, (1885).
- [4] CHANDRASEKHAR S., « The Stability of a Rotating Liquid Drop », *Proc. R. Soc. Lond.*, **286** (1965) 1.
- [5] BOHR N. et WHEELER J.A., « The Mechanism of Nuclear Fission », *Phys. Rev.*, **55** (1939) 426.
- [6] BERINGER R. et KNOX W.J., « Liquid-Drop Nuclear Model with High Angular Momentum », *Phys. Rev.*, **121** (1960) 1195.
- [7] COHEN S., PLASIL F. et SWIATECKI W.J., « Equilibrium Configurations of Rotating Charged or Gravitating Liquid Masses with Surface Tension. II », *Annals of Physics*, **82** (1974) 557.
- [8] RAYLEIGH, « The Equilibrium of Revolving Liquid under Capillary Force », *Philosophical Magazine*, **28** (1914) 257.
- [9] BROWN R.A. et SCRIVEN L.E., « The Shape and Stability of Rotating Liquid Drops », *Proc. R. Soc. Lond.*, **371** (1980) 331.
- [10] WANG T.G., ANILKUMAR A.V., LEE C.P. et LIN K.C., « Bifurcation of rotating liquid drops : results from USML-1 experiments in Space », *J. Fluid Mech*, **276** (1994) 389.
- [11] LEE C.P., ANILKUMAR A.V., HMELO A.B. et WANG T.G., « Equilibrium of liquid drops under the effects of rotation and acoustic flattening : results from USML-2 experiments in Space », *J. Fluid Mech.*, **354** (1998) 43.
- [12] BOUASSE H., « Capillarité et phénomènes superficiels », Delagrave (1924).
- [13] OHSAKA K. et TRINH E. H., « Three-lobed Shape Bifurcation of Rotating Liquid Drops », *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000) 1700.
- [14] WANG T.G., TRINH E.H., CROONQUIST A.P. et ELLEMANT D.D., « Shapes of Rotating Free Drops: Spacelab Experimental Results », *Phys. Rev. Letters*, **56** (1986) 452.
- [15] BROWN R.A. et SCRIVEN L.E., « New Class of Asymmetric Shapes of Rotating liquid » *Physical Review Letters*, **45** (1980) 180.

- [16] ROSS D.K., « The Stability of a Rotating Liquid Mass Held Together by Surface Tension », *Aust. J. Phys.*, **21** (1968) 837.
- [17] ROSS D.K., « The Shape and Energy of a Revolving Liquid Mass Held Together by Surface Tension », *Aust. J. Phys.*, **21** (1968) 823.
- [18] LUYTEN P.J., « The Stability of a Rotating Liquid Drop Immersed in a corotating fluid with different density », *Proc. R. Soc. Lond.*, **414** (1987) 59.
- [19] ADAMSON A. W., « Physical Chemistry of Surfaces », John Wiley and Sons, New-York (1976).

Chapitre IV

Gouttes enrobées : mouvement rapide sur plan incliné.

Table des matières

Chapitre IV	Gouttes enrobées : mouvement rapide sur plan incliné.....	93
I.	Liquides peu visqueux.....	95
	1) Résultats expérimentaux.....	95
	2) Discussion.....	98
II.	Liquides visqueux sur plan fortement incliné.....	102
	1) Relation vitesse angulaire/vitesse limite.....	102
	2) Vitesse limite des gouttes enrobées.....	104
	3) Discussion.....	106
III.	Bilan.....	107
	Bibliographie.....	109

Comme nous l'avons vu, des gouttes enrobées visqueuses déposées sur un plan faiblement incliné atteignent une vitesse limite qui peut être décrite comme le résultat d'une dissipation visqueuse. Cette description n'est pas applicable dans le cas des liquides peu visqueux, ou aux fortes inclinaisons, même pour des liquides visqueux : la goutte est alors très déformée par les forces centrifuges et prend les formes décrites dans le chapitre précédent (roue, formes biconcaves ou formes à 2 lobes). Cependant, les expériences montrent que l'on atteint aussi dans ces deux cas un régime stationnaire, ce qui signifie que nous sommes en présence d'une autre source de friction. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à ces deux régimes et nous discutons les sources possibles de dissipation.

I. Liquides peu visqueux

Pour des faibles pentes et des viscosités assez grandes, la vitesse des gouttes est décrite par le modèle MP. Nous avons vu dans le chapitre II que le domaine de validité de ce régime est donné par l'équation 1 :

$$\frac{\eta^2}{\rho\gamma\kappa^{-1}} > \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (1)$$

Par exemple, pour une pente de 5°, il faut une viscosité supérieure à 120 cP pour pouvoir observer le régime MP. Nous avons étudié ce qui se passe pour une viscosité bien moindre, par exemple avec de l'eau (viscosité 1 cP).

1) Résultats expérimentaux

Nous filmons le mouvement d'une goutte d'eau enrobée de lycopes après un mètre de descente sur un plan incliné. La goutte a alors atteint un régime de vitesse constante.

L'évolution de cette vitesse est reportée sur la Figure 1 en fonction du rayon initial de la goutte et pour une pente très faible (2°). On remarque que la vitesse croît avec la taille de la goutte (contrairement au régime MP). Les vitesses atteintes dans cette expérience (de l'ordre de 20 cm/s) sont beaucoup plus grandes que celles obtenues avec des gouttes enrobées visqueuses (de l'ordre du centimètre par seconde pour du glycérol sur un plan incliné de 5°) mais ne sont pas 1000 fois plus grandes, comme l'est le rapport des viscosités.

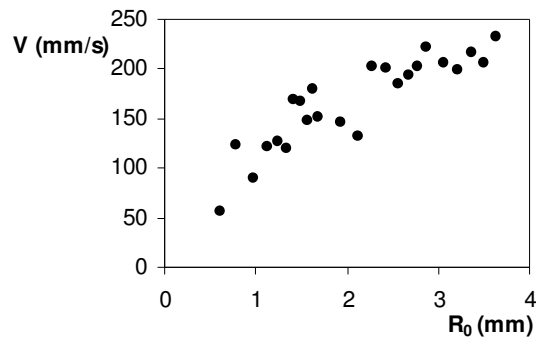


Figure 1 : Variation de la vitesse limite d'une goutte d'eau enrobée en fonction de sa taille, sur un plan incliné de pente 2° .

Si l'on se place en échelle logarithmique, on peut ajuster la dépendance de la vitesse avec la taille de la goutte par une loi de puissance (Figure 2). Ainsi, la vitesse semble obéir à la loi $V \propto c\sqrt{R_0}$ quelque soit la forme initiale de la goutte (sphère ou crêpe).

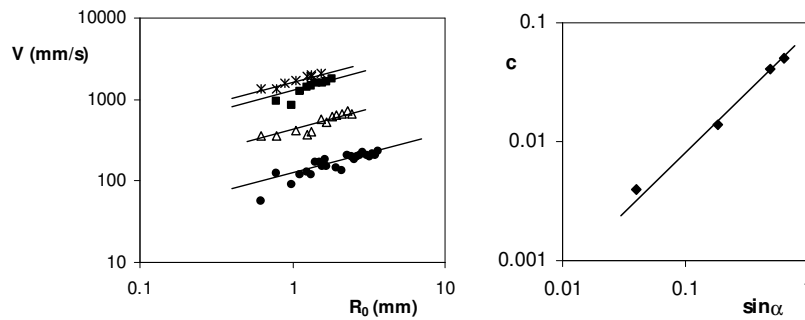


Figure 2 : Vitesse limite d'une goutte d'eau enrobée en fonction de sa taille sur un plan incliné de pente 2° (ronds noirs), 10° (triangles), 30° (carrés) et 40° (étoiles). Les traits pleins représentent la puissance 0,5 avec un coefficient c qui augmente comme $\sin\alpha$, avec un coefficient multiplicatif de 0,08 (en unités S. I.).

Pour la même expérience avec des pentes plus élevées (30° par exemple), on observe que la vitesse de la goutte obéit à la même loi mais avec un coefficient c supérieur. La Figure 2 montre que ce coefficient dépend linéairement du sinus de la pente du plan incliné.

Finalement, on peut ajuster toutes ces données par l'équation 2 :

$$V \propto 0.08 \sin \alpha \sqrt{R_0} \quad (2)$$

Cette équation suggère que la vitesse de la goutte est simplement proportionnelle au champ de pesanteur $g \sin \alpha$. La force de dissipation serait donc indépendante de α , un point assez

étonnant car la forme que prend la goutte d'eau enrobée dépend beaucoup de la vitesse de la goutte. Dans le montage de la Figure 3, nous montrons comment la forme d'une goutte d'eau enrobée placée dans un tambour tournant évolue quand la vitesse du tambour augmente. Cette évolution a déjà été observée par Denis Richard dans sa thèse sur les situations de mouillage nul [2].

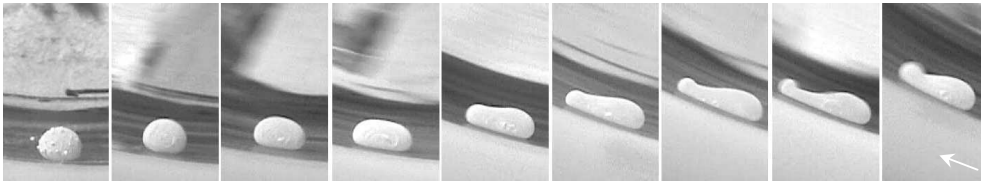


Figure 3 : Forme d'une goutte d'eau enrobée dans un tambour tournant à vitesse constante et croissant de gauche à droite. La flèche montre le sens de rotation du tambour. La première image est prise en statique. On remarque que quand la vitesse augmente, la goutte s'élève dans le tambour.

Au départ, la goutte (de taille initiale $R_0 = 1.7$ mm) a une forme sphérique, légèrement aplatie par la gravité et se place en bas du tambour. À faible vitesse (deuxième image), la goutte garde cette forme statique – comme pour les expériences réalisées sur un plan incliné de 2° . À mesure que la vitesse augmente, la goutte s'allonge dans le sens de la rotation et prend la forme d'un « ver ». Puis à grande vitesse, un appendice se forme à l'arrière et la goutte ressemble alors plutôt à une « baleine ». C'est cette forme qui est observée dans les expériences sur plan incliné à 30° ou 40° .

En outre, la goutte s'élève d'autant plus dans le tambour que la vitesse est grande. Même pour des vitesses très faibles et une forme quasi-statique, la position de la goutte est différente de celle à l'arrêt. Pour avoir un point de comparaison, on place une bille solide de densité proche de l'eau dans le tambour. Pour des vitesses comparables (voire deux fois plus élevées que celles utilisées dans la Figure 3), la bille en rotation reste toujours en bas du tambour.

Pour tester l'influence de la viscosité, nous avons utilisé une goutte enrobée composée d'un mélange eau-glycérol de viscosité neuf fois plus élevée que celle de l'eau. On relève la vitesse de la goutte en fonction de sa taille pour deux pentes très différentes (5° et 40°) et on la compare à l'équation 2. Sur la Figure 4, on voit que cette loi décrit relativement bien les données expérimentales pour la forte pente et pour les petites gouttes dans le cas de la pente de 5° (pour les grosses gouttes la vitesse semble saturer et il est possible que l'on ait alors un

effet de dissipation visqueuse par exemple dans une couche limite). La dissipation semble donc indépendante de la viscosité du liquide, dans cette limite de faibles viscosités.

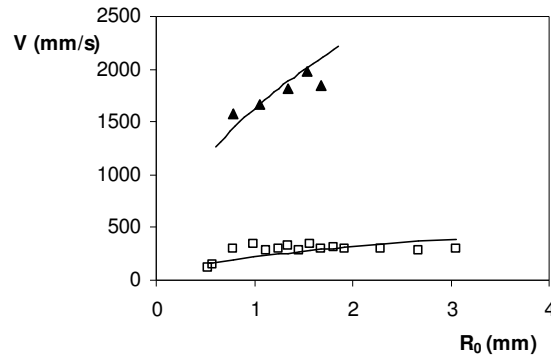


Figure 4 : Variation de la vitesse limite d'une goutte enrobée de viscosité 9 cP en fonction de sa taille, sur un plan incliné de pente 5° (carrés blancs) et 40° (triangles noirs). Les traits pleins représentent la loi empirique (2).

2) Discussion

Aidés par ces observations quantitatives, nous allons discuter différentes sources possibles de dissipation.

(a) Frottement visqueux dans la goutte ?

La goutte étant peu visqueuse, il est peu probable que la couche limite visqueuse soit complètement développée sur l'épaisseur de la goutte. On peut donc imaginer un frottement visqueux dans une couche limite à l'intérieur de la goutte. Plaçons nous dans le cas simple de la crêpe gravitaire d'extension $R \sim R_0^{3/2} \kappa^{1/2}$. L'épaisseur de la couche limite visqueuse s'écrit alors :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta R}{\rho V}}$$

En supposant que la dissipation visqueuse se fait dans le volume $\pi R^2 \delta$, la puissance dissipée s'écrit :

$$P_{\text{vis}} \sim \eta \left(\frac{V}{\delta} \right)^2 R^2 \delta$$

En l'équilibrant avec celle de pesanteur, on obtient :

$$V \sim \left(\frac{\rho g^2}{\eta} \right)^{1/3} \sqrt{R_0 \kappa^{-1}} \sin^{2/3} \alpha \quad (3)$$

Les exposants de cette loi pourraient permettre de décrire les données même si la dépendance en pente n'est pas parfaitement satisfaisante. L'ordre de grandeur des vitesses obtenues pour une goutte d'eau de taille capillaire semble correct (de l'ordre du mètre par seconde pour un plan incliné à 30°). La dépendance en viscosité est faible (puissance 1/3) mais reste trop importante vis-à-vis de nos résultats expérimentaux : multiplier la viscosité par neuf devrait diviser la vitesse par deux alors que l'eau et un liquide neuf fois plus visqueux obéissent à la même loi ($V \propto 0.08 \sin \alpha \sqrt{R_0}$).

Cela nous amène à penser que le frottement visqueux dans la goutte n'est pas le mécanisme dominant la friction.

(b) Frottement inertiel de l'air sur la goutte ?

La dissipation qui semble la plus naturelle dans cette expérience est celle liée à la résistance inertielle de l'air sur la goutte. Cette résistance sur une sphère de taille R_0 avançant à la vitesse V s'écrit dimensionnellement $\rho_a V^2 R_0^2$, où ρ_a est la masse volumique de l'air (1.29 kg/m³ à pression et température ambiante) [1]. Sur un plan incliné d'un angle α , l'équilibre avec le poids conduit à une vitesse limite donnée par l'équation 4 :

$$V \sim \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a} g \sin \alpha R_0} \quad (4)$$

Cette loi décrit correctement la dépendance de la vitesse de la goutte avec sa taille. En outre, l'ordre de grandeur des vitesses obtenues (pour une goutte de 1 mm de rayon et un plan incliné à 30°, on trouve $V \sim 2$ m/s) correspond bien aux observations.

Cependant, plusieurs faits nous font douter de la pertinence de ce modèle. D'abord, l'équation 4 ne décrit pas correctement la dépendance expérimentale de la vitesse terminale de la goutte avec la pente (Figure 2), même si nous n'avons pas tenu compte dans ce modèle de la forme réelle de la goutte, ce qui pourrait corriger ce manque. Une autre constatation qui

va à l'encontre de l'hypothèse d'un régime inertiel est le fait qu'une bille solide de densité proche de celle de l'eau reste en bas du tambour alors que la goutte enrobée peu visqueuse s'y élève notablement (la goutte d'eau enrobée de la Figure 3 atteint une position angulaire dans le tambour d'ordre 20 à 30°). Cela montre qu'en plus de la rotation, la goutte enrobée est soumise à un frottement que ne subit pas la bille solide. Denis Richard, dans sa thèse [2], a d'ailleurs montré que les gouttes d'eau sur un plan incliné super-hydrophobe atteignent un régime de vitesse limite (de l'ordre du mètre par seconde) qui n'est pas dû aux forces inertielles de l'air : en effet en se plaçant sous vide partiel, une goutte atteint la même vitesse limite, alors que la densité de l'air est divisée d'un facteur 2.

Il semble donc peu probable que la dissipation prépondérante dans cette expérience soit liée au frottement inertiel de l'air sur la goutte. Néanmoins, l'ordre de grandeur des vitesses atteintes laisse à penser que l'air joue un rôle. En effet, la viscosité de l'air ($\eta_a \approx 0.0182$ cP à 20°C) est très peu sensible à la pression (0.00001 cP par atmosphère à 20°C) et il est donc possible d'envisager un frottement visqueux de l'air sous la goutte.

(c) *Frottement visqueux de l'air sous la goutte ?*

Le solide a une influence non négligeable sur le mouvement de la goutte d'eau. En effet, la forme qu'elle adopte (ver ou baleine) n'est pas celle observée lors d'un mouvement de chute libre où, à de telles vitesses, la goutte garde une forme quasi-sphérique [3]-[5]. Il semble fortement possible qu'un film d'air s'intercale sous la goutte, et l'on peut tenter d'évaluer la dissipation qui lui est associée. Plusieurs arguments font penser que la dissipation dans ce film serait plutôt visqueuse qu'inertielle. D'abord, la couche limite visqueuse entraînée sous la goutte va être d'ordre $\delta \sim (\eta_a L / \rho_a V)^{0.5}$ où V est la vitesse de la goutte et η_a la viscosité de l'air ($1.85 \cdot 10^{-5}$ Pa.s). Pour une goutte millimétrique ($L \sim 1$ mm), on trouve $\delta \sim 100$ μ m - une distance supérieure à ce que l'on attend pour l'épaisseur du film d'air (quelques dizaines de micromètres, tout au plus). En outre, si l'écoulement se produisait à grand nombre de Reynolds, on attendrait une dépression de Bernoulli sous la goutte, à cause du resserrement des lignes de courant à cet endroit. Si l'on considère le fluide entraîné par la rotation de la goutte, la circulation créée tendrait aussi à mettre le dessous en dépression. Or, pour soutenir le poids de la goutte, on s'attend plutôt à ce que le film d'air soit en surpression.

On peut donc considérer comme une hypothèse plausible une dissipation visqueuse dans un film d'air sous la goutte. Nous sommes d'ailleurs confortés dans cette idée par le fait que des

expériences de retard à la coalescence d'une goutte de liquide sur un bain de même liquide [6]-[9] ont montré que l'entraînement d'un film d'air visqueux par le liquide en mouvement (à des vitesses comparables aux nôtres) pouvait expliquer ce phénomène de non-coalescence.

Dans ces hypothèses, nous nous attendons à une dissipation du type :

$$F \sim \eta_a \frac{\Delta V}{h_a} S \quad (5)$$

où h_a représente l'épaisseur d'air sous la goutte, ΔV la différence de vitesse entre le solide et la goutte et S la surface en regard entre les deux. Si la vitesse de rotation de la goutte est suffisamment faible on peut la négliger devant sa vitesse terminale et $\Delta V \sim V$. Il faut maintenant tenter d'estimer l'épaisseur du film d'air ainsi que la surface de contact.

- On peut considérer le problème équivalent à celui de Reynolds [1] sur la lévitation d'un solide légèrement incliné sous lequel de l'air s'écoule. Dans ce cas, une force de portance se développe pour soutenir le poids de la goutte et s'écrit :

$$F_p \sim \eta_a V \ell_y \frac{\ell_x^2}{h_a^2} \quad (6)$$

où ℓ_x et ℓ_y représentent la taille de la zone de contact liquide/air sous la goutte respectivement dans le sens de l'écoulement et dans la direction perpendiculaire. Pour simplifier le problème, supposons que le contact est circulaire. Alors, $\ell_x \sim \ell_y \sim S^{1/2}$ et en équilibrant la portance ainsi que la force de traînée, donnée par l'équation 5, avec les deux composantes du poids, et en faisant le rapport de ces deux équations, on obtient :

$$S \sim h_a^2 \tan^2 \alpha \quad (7)$$

- Pour h_a , on peut par exemple supposer qu'il s'agit d'une couche limite visqueuse construite sur la taille de la zone de contact :

$$h_a \sim \sqrt{\frac{\eta_a S^{1/2}}{\rho_a V}} \sim \frac{\eta_a}{\rho_a V \tan \alpha} \quad (8)$$

Les équations 7 et 8 injectées dans le bilan des forces (force de traînée/poids) conduit à une impasse, la vitesse s'éliminant.

Au lieu de construire la couche limite sur la taille de la zone de contact, on peut supposer que c'est la taille caractéristique de la goutte R_0 qui intervient. On trouve alors une vitesse dépendant à la puissance 6 du rayon et variant en $\sin^2 \alpha \tan^4 \alpha$.

Ces modèles ne décrivent pas du tout les données expérimentales. Le fait que les expériences obéissent à une loi empirique simple et indépendante de la forme mérite une réflexion plus poussée. Cependant la dissipation dans un film d'air nous semble quand même qualitativement plus plausible qu'une dissipation inertielle.

II. Liquides visqueux sur plan fortement incliné

A pente donnée, et au dessous d'un rayon critique $R^* \sim \kappa^{-1} \tan \alpha / \sqrt{\cos \alpha}$, le régime Mahadevan-Pomeau n'est plus valable et est remplacé par un régime rapide caractérisé par des formes centrifugées, axisymétriques ou à 2 lobes. Nous avons montré au chapitre III que ces formes sont des formes d'équilibre de gouttes en rotation et que leur taille et leur vitesse de rotation sont reliées entre elles et vérifient le diagramme de Brown et Scriven (figure III.5). Connaissant la vitesse angulaire de la goutte, nous avons donc accès à sa taille.

Cependant, dans les expériences menées, nous n'imposons pas la vitesse angulaire. Sur plan incliné, la goutte atteint un régime de vitesse constante, tandis que dans le tambour nous imposons cette vitesse limite. Il est donc important de connaître la relation entre la vitesse de la goutte et sa vitesse angulaire. En effet, cette vitesse fixe la forme de la goutte et donc influence *a priori* la loi de frottement.

Nous allons donc dans une première partie étudier la relation entre la vitesse angulaire de la goutte ω et sa vitesse de dévalement V . Puis nous étudierons la vitesse limite des gouttes enrobées en fonction des paramètres de l'expérience (pente, taille de la goutte).

1) Relation vitesse angulaire/vitesse limite

Nous avons montré au chapitre III que les formes roues et à 2 lobes correspondent à des formes de gouttes en rotation. Il serait donc logique d'attendre que vitesse de dévalement V

et vitesse de rotation ω soient simplement liées par la relation $V = R\omega$.

Les vitesses typiques de dévalement sont de l'ordre de deux mètres par seconde et les tailles R des objets engendrés de l'ordre du demi-centimètre, ce qui conduit à $\omega \sim 400$ rad/s, soit pour un rayon initial de deux millimètres, un nombre de Bond de rotation $\Omega_s = \sqrt{\rho\omega^2 R_0^3 / 8\gamma}$ de l'ordre de 2. Or, d'après le diagramme de Brown et Scriven, on ne peut pas dépasser une valeur de 0.7 pour les formes axisymétriques. Cette contradiction nous a longtemps arrêtés, et la solution est venue d'une mesure indépendante de la vitesse de dévalement et de celle de rotation V_R ainsi définie :

$$V_R = R\omega \quad (9)$$

La Figure 5 montre comment la vitesse de dévalement V et V_R sont liées expérimentalement l'une à l'autre.

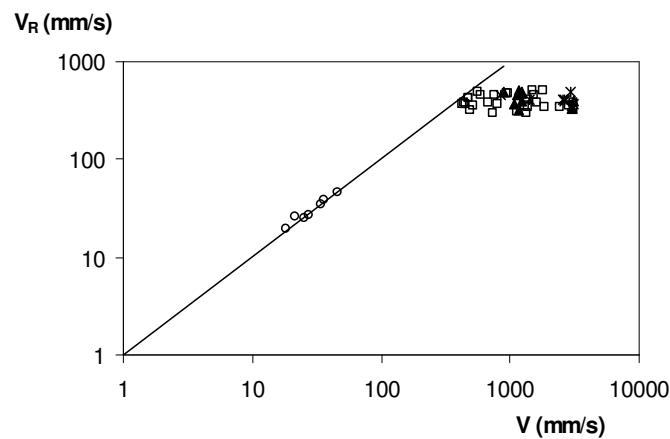


Figure 5 : Vitesse de rotation de la goutte enrobée définie par l'équation 9 en fonction de la vitesse de dévalement. Les ronds correspondent à la forme statique (sphère), les carrés aux disques et aux formes biconcaves, les étoiles aux roues et les triangles noirs aux formes à 2 lobes. Le trait plein représente la droite $V_R = V$.

À faible vitesse, les gouttes gardent leur forme statique et on a simplement $V = V_R$. On est dans une situation de rotation sans glissement. Mais quand la vitesse de la goutte dépasse un certain seuil, la vitesse V_R semble atteindre un palier. Cependant, les données sont très dispersées (quoique l'échelle logarithmique écrase un peu cet effet) et il est fort probable qu'à la fois la vitesse linéaire et la vitesse de rotation dépendent des paramètres des expériences (pente et taille de la goutte). Néanmoins, quand la vitesse augmente d'une décade (entre

0.4 m/s et 3 m/s), celle déduite de l'équation 9 reste entre 0.3 et 0.5 m/s. On est donc maintenant dans une situation de roulement avec glissement. La forme de la goutte (disque, biconcave, roue ou à 2 lobes) ne semble pas être un paramètre important dans cette courbe.

Comme nous l'avons vu, à pente et taille données, on observe une vitesse limite bien définie. Nous allons donc nous intéresser à la variation de la vitesse limite de la goutte avec les paramètres de l'expérience quand elle dévale sur un plan fortement incliné.

2) Vitesse limite des gouttes enrobées

Nous utilisons maintenant un plan fortement incliné et des liquides visqueux. Pour étudier la dépendance de la vitesse de la goutte avec sa taille, nous avons choisi de normaliser celle-ci par la taille critique $R^* \sim \kappa^{-1} \tan \alpha / \sqrt{\cos \alpha}$ en dessous de laquelle le régime rapide apparaît.

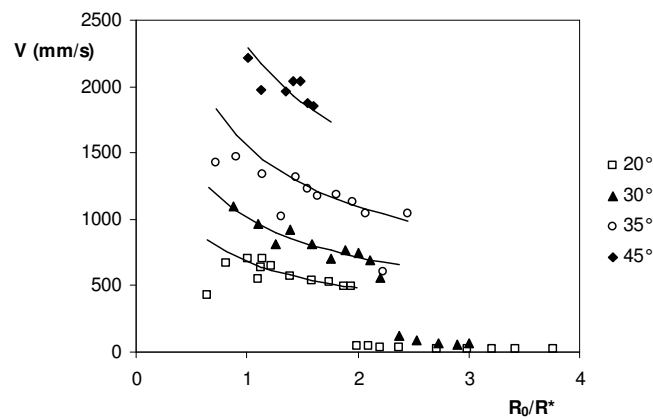


Figure 6 : Vitesse d'une goutte de glycérol ($\eta = 1150$ cP) en fonction de sa taille normalisée par R^* pour différentes inclinaisons. Les données sont ajustées dans le régime grande vitesse par $(R^*/R_0)^{0.5}$ (traits pleins).

Sur la Figure 6, le régime rapide correspond à $R_0/R^* < 2$ (voir chapitre III). Comme dans la situation MP, les gouttes en régime rapide vont d'autant plus vite qu'elles sont petites. Cependant, la dépendance en rayon est moins forte que dans le régime MP. De plus, la vitesse dépend de l'angle d'inclinaison du solide : les gouttes sont d'autant plus rapides que le solide est incliné. Finalement, on peut ajuster les données par une loi de puissance en taille du type :

$$V \sim \frac{f(\alpha)}{(R_0 \kappa)^{0.5}} \quad (10)$$

On étudie ensuite la dépendance du coefficient $f(\alpha)$ avec l'angle d'inclinaison du plan (Figure 7) :

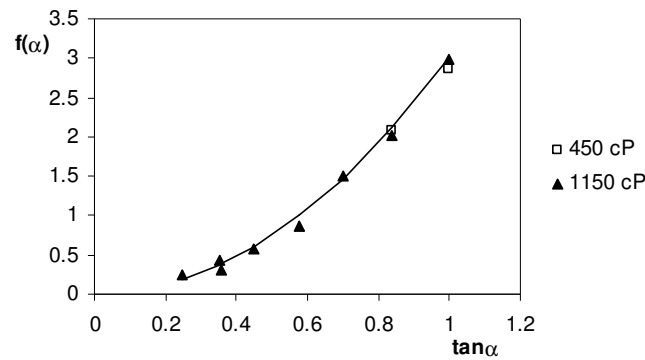


Figure 7 : Dépendance de la vitesse de la goutte avec l'angle d'inclinaison du plan. Le trait plein représente la puissance 2.

Si nous utilisons la tangente de l'angle, la courbe suit une loi de puissance : elle peut être ajustée par une parabole. On trouve alors une loi empirique pour décrire la vitesse limite des gouttes enrobées sous formes disque, biconcave, roue et à 2 lobes :

$$V \sim \frac{\tan^2 \alpha}{(R^* \kappa)^{0.5}} \left(\frac{R^*}{R_0} \right)^{0.5} \quad (11)$$

Sur la Figure 7, nous avons reporté les données obtenues avec du glycérol ainsi qu'avec un mélange eau-glycérol près de trois fois moins visqueux. Ces données se superposent ce qui laisse supposer que ce régime rapide est indépendant de la viscosité. Si pour une pente donnée, on observe la vitesse de la goutte en fonction de sa taille initiale pour plusieurs viscosités (Figure 8), on voit que entre 1 et 1200 cP les vitesses sont du même ordre de grandeur. Pour les petites viscosités (de 1 à 9 cP), les courbes se superposent et suivent la loi empirique de l'équation 2. Pour les grandes viscosités (de 450 à 1150 cP), les courbes se superposent également et suivent la loi empirique donnée par l'équation 11 à grand rayon et tendent à petit rayon vers celle des liquides peu visqueux. Enfin, pour des viscosités intermédiaires, le comportement est lui aussi intermédiaire entre les deux régimes.

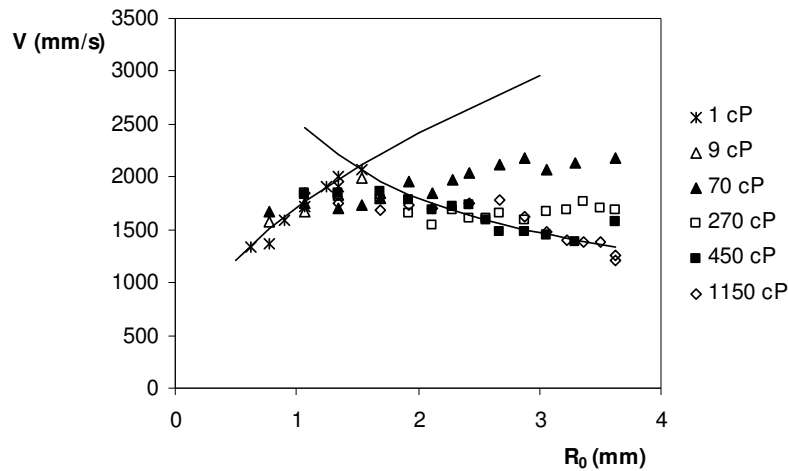


Figure 8 : Vitesse de la goutte en fonction de sa taille initiale pour un plan incliné à 40° et différentes viscosités. Les traits pleins représentent les lois empiriques données par les équations 2 et 11.

Il n'y a pas de donnée correspondant à des vitesses supérieures à 2.2 m/s car à de telles vitesses la goutte enrobée se rompt.

3) Discussion

Le fait que les vitesses soient comparables pour toute la gamme de viscosité que l'on a à notre disposition montre que les frottements mis en jeu sont comparables. Nous pensons donc que ces frottements interviennent dans un film d'air placé entre le solide et la goutte, et qu'ils correspondent à une dissipation visqueuse dans ce film. Une telle hypothèse peut alors expliquer le glissement de la goutte ainsi que la différence entre la vitesse limite de la goutte et sa vitesse de rotation.

A nouveau, on attend donc une force de frottement du type de l'équation 5 pour s'opposer au poids de la goutte :

$$\eta_a \frac{\Delta V}{h_a} S \sim \rho g \sin \alpha R_0^3 \quad (12)$$

où h_a représente l'épaisseur d'air sous la goutte, $\Delta V = V - V_R$ la différence de vitesse entre le solide et la goutte et S la surface sur laquelle la dissipation a lieu.

La différence importante entre une goutte d'eau et une de glycérol sur les plans fortement

inclinés réside dans le fait que contrairement aux gouttes peu visqueuses, les gouttes visqueuses sont en rotation solide et centrifugées (formes axisymétriques ou à 2 lobes). Cela peut expliquer la différence de comportement vis-à-vis de la taille de la goutte. La goutte en rotation solide est en équilibre, et la pression interne est connue. Plutôt que de considérer le problème équivalent à celui de Reynolds, il est possible de le voir comme un entraînement visqueux d'air par la plaque, contrebalancé par un gradient de pression, comme dans le problème de Landau-Levich [10]. Cependant, la faible taille de la zone de contact rend difficile l'application de ce genre de modèle. En outre, la connaissance de la dépendance de la vitesse de rotation de la goutte avec la vitesse tangentielle va être indispensable pour développer un modèle. Nous n'avons pas trouvé de loi susceptible de décrire correctement les expériences.

III. Bilan

Nous avons décrit ici le mouvement rapide des gouttes enrobées, qui montre des comportements intéressants. Quelle que soit la forme de la goutte (baleine, roue ou à 2 lobes), on obtient à inclinaison donnée des vitesses de dévalement comparables. La dépendance avec la taille de la goutte est faible mais opposée suivant que l'on ait un liquide peu visqueux (la vitesse croît alors avec le rayon) ou non.

Le glissement observé nous amène à penser qu'un film d'air de lubrification s'intercale entre la goutte et le solide. Dans ce film d'air, les frottements visqueux pourraient être responsables des vitesses limites observées mais nous n'avons pas de modèle simple à proposer pour les décrire.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier les transformations entre les différentes formes (axisymétriques, formes à 2 lobes et deux sphères séparées) qui peuvent intervenir avec des liquides visqueux centrifugés.

Bibliographie

- [1] GUYON É., HULIN J.-P. et PETIT L., « Hydrodynamique physique », Collection SAVOIRS ACTUELS, CNRS édition (deuxième édition 2001).
- [2] RICHARD D., « Situations de Mouillage nul », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [3] COTTON W. R. et GOKHALE N. R., « Collision, Coalescence, and Breakup of Large Water Drops in a Vertical Wind Tunnel », *J. of Geophysical Research*, **72** (1967) 4041.
- [4] PRUPPACHER H. R. et PITZER R. L., « A Semi-Empirical Determination of the Shape of Cloud and Rain Drops », *J. of the Atmospheric Sciences*, **28** (1971) 86.
- [5] ANDSAGER K., BEARD K. V. et LAIRD N. F., « Laboratory Measurements of Axis Ratios for Large Raindrops », *J. of the Atmospheric Sciences*, **56** (1999) 2673.
- [6] SREENIVAS K. R., DE P. K. et ARAKERI J. H., « Levitation over a film flow », *J. Fluid. Mech.*, **380** (1999) 297.
- [7] DELL'AVERSANA P. et NEITZEL G. P., « When Liquids Stay Dry », *Physics Today*, **51** (1998) 38.
- [8] DELL'AVERSANA P., BANAVAR J. R. et KOPLIK J. , « Suppression of coalescence by shear and temperature gradients », *Physics of Fluids*, **8** (1996) 15.
- [9] DELL'AVERSANA P., TONTODONATO V. et CAROTENUTO L., « Suppression of coalescence and of wetting: the shape of the interstitial film », *Physics of Fluids*, **9** (1997) 2475.
- [10] LANDAU L.D. et LEVICH B., *Acta Physicochim. USSR*, **17** (1942) 42.

Chapitre V

Transformations

Table des matières

<i>Chapitre V Transformations</i>	111
<i>I. De la roue à la cacahuète</i>	113
1) <i>Instabilité des formes axisymétriques par rapport aux formes à 2 lobes</i>	113
2) <i>Observations expérimentales</i>	115
3) <i>Discussion</i>	118
<i>II. Forme à 2 lobes : évolution hors-équilibre</i>	119
1) <i>Description des expériences</i>	119
2) <i>Modèle d'étirement</i>	121
<i>III. Bilan</i>	125
<i>Bibliographie</i>	127

Dans ce chapitre, nous allons étudier deux exemples de transformation entre les différentes formes décrites dans le chapitre III pour des gouttes visqueuses centrifugées. D'abord, nous allons observer le passage entre la famille axisymétrique (et plus spécialement les formes biconcaves ou roues) et celle à 2 lobes. Puis nous verrons l'évolution possible de la forme à 2 lobes en chute libre.

I. De la roue à la cacahuète

Nous avons vu dans le chapitre III comment Brown et Scriven [1] ont caractérisé numériquement les formes des gouttes en rotation et leur stabilité. Pour cela, ils se placent soit dans le cas d'une goutte isolée, soit dans celui d'une goutte tournant à vitesse angulaire constante. En particulier, ils ont étudié le comportement de la famille axisymétrique par rapport à une perturbation asymétrique. Les perturbations asymétriques ne changent ni le moment angulaire, ni le moment d'inertie et gardent la vitesse angulaire constante. Ils ont alors prédit dans les deux cas l'instabilité de la forme axisymétrique par rapport aux formes à 2 lobes, dès que le nombre $\Omega_s = \sqrt{\rho\omega^2 R_0^3 / 8\gamma}$ dépasse un seuil (égal à 0.56, ce qui correspond à une forme ellipsoïdale aplatie).

Néanmoins, nous avons également vu au chapitre III que l'on peut obtenir expérimentalement presque toutes les formes de la famille axisymétrique, de la sphère à la roue en passant par le disque et les formes biconcaves, ce qui semble contredire les conclusions de Brown et Scriven. Nous montrerons dans cette partie que l'on peut comprendre simplement le fait que les formes biconcaves et roues sont instables par rapport à une perturbation asymétrique. Nous testerons ensuite expérimentalement la stabilité de ces formes axisymétriques et discuterons des résultats.

1) Instabilité des formes axisymétriques par rapport aux formes à 2 lobes

Nous nous plaçons dans le cas des formes prédites instables par Brown et Scriven par rapport aux formes à 2 lobes. Prenons par exemple les formes biconcaves et roues (Figure 1). Comme nous l'avons vu dans le chapitre III, il s'agit d'une forme résultant de l'équilibre entre force centrifuge ($\rho\omega^2 R_{\max}$ par unité de volume) et rappel capillaire (γ/eR_{\max} par unité de volume).

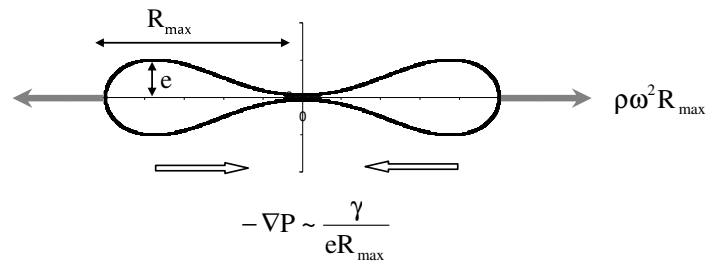


Figure 1 : Forme biconcave obtenue numériquement ($\Omega_g = 0.71$).

Supposons que l'on perturbe la goutte comme schématisé sur la Figure 2. La goutte a alors la forme d'une ellipse de grand axe R_1 légèrement supérieur au petit axe R_2 : $R_2 < R_{\max} < R_1$.

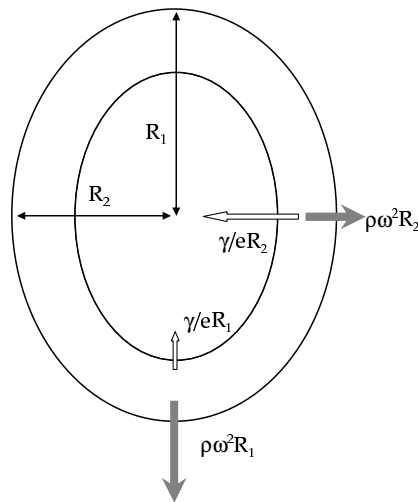


Figure 2 : Schéma d'une perturbation non-axisymétrique d'une forme roue.

Par rapport à la forme d'équilibre, la force de rappel capillaire est plus grande sur le petit axe et moins forte sur le grand axe, alors que c'est l'inverse pour la force centrifuge : la roue tend donc à se pincer de plus en plus et à se transformer en une forme à 2 lobes. Les roues et les formes biconcaves sont donc *a priori* instables par rapport à une perturbation asymétrique. Cet argument physique permet de justifier le résultat numérique de Brown et Scriven.

Ces perturbations conservent le moment d'inertie (J) et le moment angulaire (L) de la goutte ainsi que sa vitesse angulaire (ω), mais dans nos expériences, la goutte n'est pas isolée et nous n'imposons pas la vitesse angulaire.

Nous allons maintenant présenter les résultats d'expériences de visualisation de gouttes.

2) Observations expérimentales

La différence majeure entre nos expériences et celles de Wang et *al.* [2]-[3] ou avec les situations idéales dans lesquelles se placent Brown et Scriven est la présence d'un solide sur lequel « roule » la goutte. Nous nous sommes demandés si ce solide pouvait jouer un rôle dans la stabilité des formes roues et biconcaves et avons réalisé une expérience simple pour étudier son influence et se placer dans le cas idéal de la goutte isolée. Pour cela, il suffit de terminer le mouvement de la goutte dans l'air après l'avoir fait dévaler un plan incliné, comme on le voit sur la Figure 3.

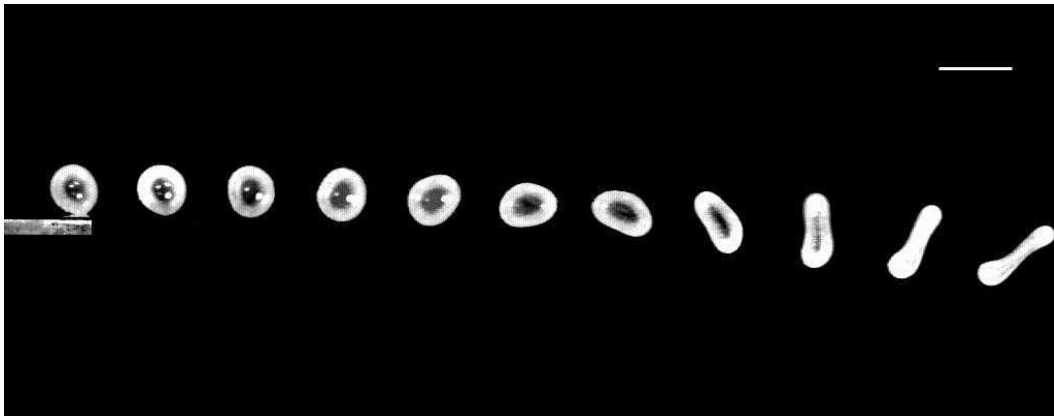


Figure 3 : Roue (glycérol) terminant son mouvement dans l'air après avoir dévalé un plan incliné à 40° . On observe une transformation spontanée en forme à 2 lobes. 5 ms séparent chaque image, la goutte a une taille initiale $R_0 = 1.9$ mm et le trait blanc représente 1 cm.

Sur cette figure, une goutte de glycérol enrobée de lycopode, de taille initiale $R_0 = 1.9$ mm dévale un plan incliné à 40° par rapport à l'horizontale. Elle arrive à la fin du tremplin sous la forme d'une roue. Immédiatement après avoir quitté le tremplin, la goutte amorce une transformation vers une forme à 2 lobes. Cette transformation se fait via un pincement comme on s'y attendait. En quelques dizaines de millisecondes, la goutte atteint son nouvel état. Comme prévu, une roue isolée est instable vis-à-vis d'une forme à 2 lobes. Les formes axisymétriques observées sont donc bien stabilisées par la présence du solide.

Nous pouvons suivre le mouvement de la goutte lors de cette transformation. Le mouvement du centre d'inertie de la goutte est un mouvement stationnaire sur le plan incliné et correspond à celui d'une chute libre une fois le tremplin quitté. Nous avons relevé la position angulaire du grand axe de la goutte et l'avons reportée sur la Figure 4 en fonction du temps.

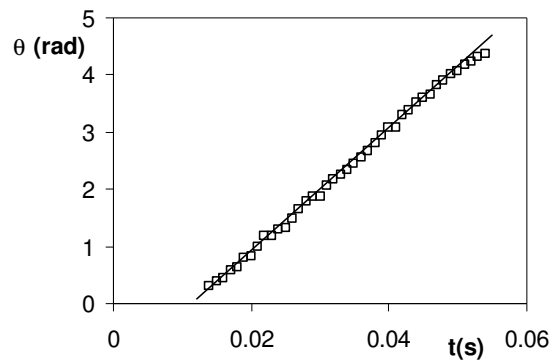


Figure 4 : Inclinaison du grand axe par rapport à l'horizontale en fonction du temps. Le trait plein représente une droite de pente 107 rad/s. La goutte a quitté le plan incliné à $t_0 = 0.01$ s.

La transformation se fait à vitesse angulaire constante, ici $\omega = 107$ rad/s. Comme décrit par Brown et Scriven, la perturbation dissymétrique conserve la vitesse angulaire de la goutte, le moment cinétique (L) (car la goutte est isolée dans cette expérience) et donc le moment d'inertie (J).

Sur la Figure 5, nous avons représenté la taille du petit axe ($L_{\min} = 2R_2$) en fonction du temps.

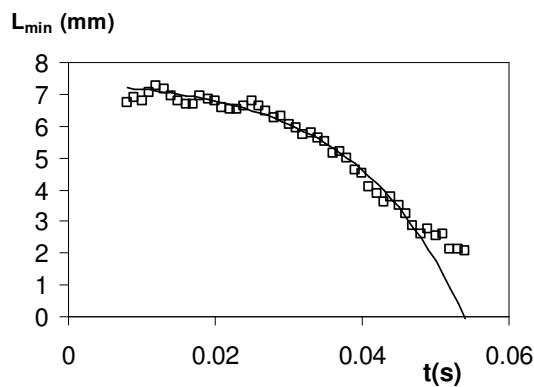


Figure 5 : Taille du petit axe (L_{\min}) en fonction du temps. Le trait plein représente une exponentielle de temps caractéristique $\tau = 15$ ms. La goutte quitte le plan incliné à $t_0 = 0.01$ s.

On observe que la taille du petit axe diminue avec le temps : la roue se pince. Afin de décrire la dynamique de l'instabilité, les données peuvent être ajustée par une courbe de relaxation exponentielle du type : $[2R_0 - A \exp(t/\tau)]$. Ceci donne accès à un temps caractéristique de transformation τ . Ici ce temps vaut 15 ms. On peut le comparer à celui que la goutte met pour faire un tour sur elle-même et qui vaut ici 59 ms. Ces deux temps sont du même ordre de

grandeur.

Dans le même esprit, on peut forcer la goutte enrobée à décoller à l'aide d'un obstacle placé sur son chemin (Figure 6).

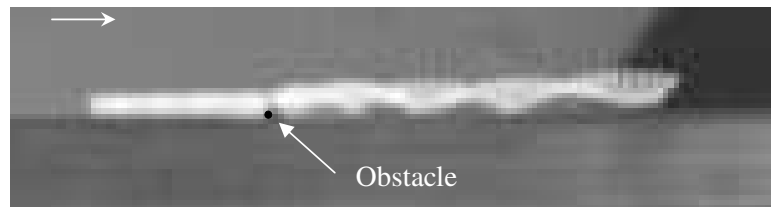


Figure 6 : Goutte de glycérol enrobée ($R_0 = 1.33$ mm) sur un plan incliné à 56° rencontrant un obstacle. 1,6 ms séparent chaque image.

Quand la goutte rencontre l'obstacle, elle décolle et se transforme en forme à 2 lobes qui continue ensuite son chemin en bondissant. On aboutit ainsi à la même conclusion : c'est la présence du plan incliné qui stabilise la goutte enrobée sous forme disque, biconcave ou roue.

Cependant, sur le plan incliné, les formes à 2 lobes peuvent aussi apparaître spontanément (Figure 7).



Figure 7 : Goutte de glycérol enrobée ($R_0 = 1.06$ mm) sur un plan incliné à 34° se transformant spontanément en forme à 2 lobes. 1,8 ms séparent chaque image.

Ici, la transformation s'est amorcée d'elle-même. Il est difficile de savoir si la transformation fait suite à un décollage de la goutte ou si elle a commencé avant, en faisant perdre à la goutte sa forme axisymétrique, ce qui conduit alors à un décollage. Il est important de noter que cette transformation est irréversible et que nous n'avons jamais observé de transformation spontanée d'une forme à 2 lobes vers une forme axisymétrique.

3) Discussion

La stabilité des formes disques, biconcaves et roues par rapport aux formes à 2 lobes semble provenir de la présence du solide dans nos expériences : si la goutte le quitte, une transformation irréversible en forme à 2 lobes s'effectue. Le solide n'empêche cependant pas totalement d'avoir des formes à 2 lobes et, expérimentalement, on constate que les petites gouttes ont plus facilement tendance que les grosses à adopter une forme à 2 lobes.

Ohsaka et Trinh [4] ont également réussi à explorer une famille théoriquement instable dans des expériences de goutte en rotation. Il s'agit de la branche des formes à 3 lobes. Cette branche apparaît après celle des formes à 2 lobes et est instable par rapport à cette famille. Pour ce faire, ils ont proposé deux expériences. La première consiste à reprendre l'expérience de Plateau (une goutte immergée dans un liquide de même densité) et à accroître rapidement la vitesse de rotation pour dépasser la zone de bifurcation à 2 lobes. D'après eux, c'est le mouvement différentiel du liquide à l'intérieur de la goutte qui empêche alors la perturbation de se développer avant d'atteindre la zone de bifurcation vers la forme à 3 lobes. La deuxième expérience consiste à utiliser des ondes acoustiques pour maintenir en lévitation une goutte de liquide et la faire tourner. Leur stratégie pour supprimer la bifurcation en forme à 2 lobes est d'appliquer une petite oscillation axisymétrique (de mode $n = 2$) à la goutte en rotation. Ils s'attendent alors à ce que l'inertie de l'oscillation empêche la croissance d'une fluctuation asymétrique qui conduirait aux formes à 2 lobes. Avec cette méthode, ils arrivent effectivement à générer des formes à 3 lobes qui se transforment spontanément en forme à 2 lobes si l'oscillation est supprimée.

Dans nos expériences, nous pouvons penser de la même façon que la croissance de la perturbation conduisant à des formes à 2 lobes est empêchée par la présence du solide. Le solide semble favoriser les formes axisymétriques (le centre de gravité est alors à distance constante du solide) par rapport à d'autres formes qui avanceraient par bond. Cependant le fait que le temps nécessaire à la goutte pour faire un tour sur elle-même soit du même ordre que celui de la transformation en 2 lobes montre que cette stabilisation est fragile. Ceci peut expliquer que les petites gouttes (les plus légères) puissent se transformer en forme à 2 lobes.

II. Forme à 2 lobes : évolution hors-équilibre

1) Description des expériences

Sur plan incliné, les formes à 2 lobes sont remarquablement stables comme le montre la Figure 8 où on observe un mouvement stationnaire sur plus de 10 cm.

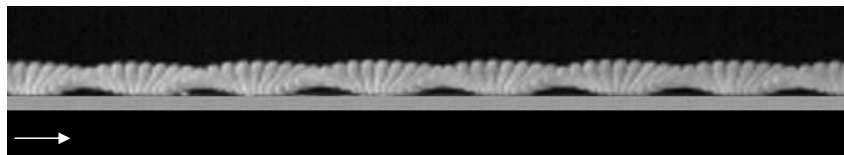


Figure 8 : Mouvement d'une forme à 2 lobes (200 cP, $R_0 = 1.33\text{mm}$) sur un plan incliné à 36° .
Le mouvement est stable sur plus de 10 cm.

À l'inverse, dans les expériences de tremplin, une fois transformée en forme à 2 lobes, la goutte continue à s'étirer et finit par se scinder en deux sphères (Figure 9). Nous nous intéressons dans cette partie à cette transformation.

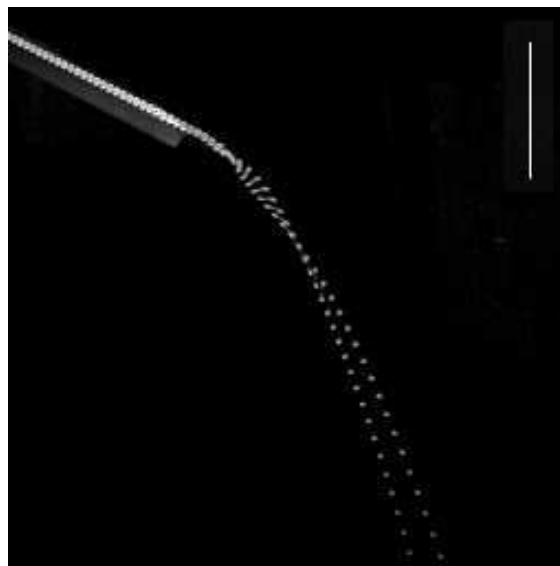


Figure 9 : Goutte de glycérol enrobée ($R_0 = 2.12\text{ mm}$) tombant d'un tremplin incliné à 27° . Le trait plein représente 10 cm et 6.6 ms séparent chaque image. La goutte qui a une forme axisymétrique sur le solide se transforme en l'air en forme à 2 lobes puis se sépare en deux sphères.

Au cours de cette expérience, on peut suivre en fonction du temps la position angulaire de la

forme à 2 lobes (Figure 10), ainsi que l'évolution de la taille maximale $L_M = 2R_1$ de la goutte ou de l'ensemble des deux sphères (Figure 11). La variation de la position du centre de gravité en fonction du temps suit une loi classique de chute libre avec une vitesse initiale non nulle.

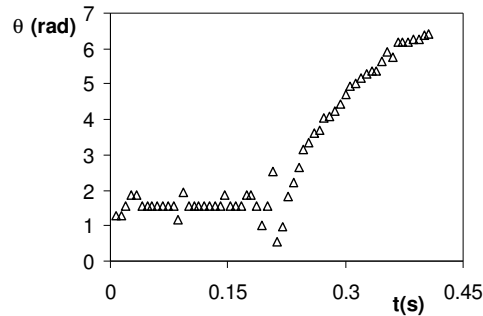


Figure 10 : Position angulaire (θ) d'une goutte de glycérol enrobée ($R_0 = 2.12$ mm) tombant d'un tremplin incliné à 27° (mouvement représenté sur la Figure 9).

La première partie de cette courbe correspond aux roues sur le plan incliné. Etant donné que nous n'avons pas posé de marqueur et que nous filmions de loin, nous n'avons pas tracé dans cette partie une position angulaire réelle mais une constante. Quand la goutte quitte le plan incliné, la position angulaire se met à varier. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la transformation en forme à 2 lobes dure typiquement quelques dizaines de millisecondes, une échelle très courte par rapport à l'échelle de temps de cette expérience et donc non visible sur cette courbe. On observe qu'au fur et à mesure de l'étirement de la forme à 2 lobes, la vitesse angulaire décroît comme on pouvait s'y attendre pour une goutte isolée à moment cinétique constant.

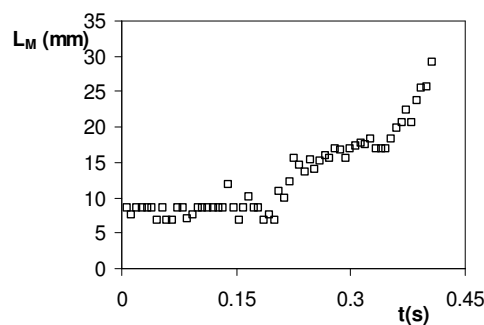


Figure 11 : Taille maximale (L_M) d'une goutte de glycérol enrobée ($R_0 = 2.12$ mm) tombant d'un tremplin incliné à 27° (mouvement représenté sur la Figure 9).

L'évolution de la taille de la goutte en fonction du temps se décompose en trois parties. La première, jusqu'à $t = 0.2$ s, correspond au plan incliné : la goutte est axisymétrique et de taille constante. Ensuite elle quitte le plan incliné et sa taille augmente d'abord très rapidement avant de saturer. On atteint alors la troisième partie de la courbe pour $t \geq 0.35$ s : l'évolution est linéaire en temps et correspond à l'éloignement des deux sphères séparées.

Nous allons maintenant essayer de proposer un modèle simple pour l'évolution de ces deux paramètres lors de l'étirement.

2) Modèle d'étirement

Lors de l'étirement, on peut considérer que la forme à 2 lobes est composée de deux sphères (de rayon $R_{1/2}$) contenant pratiquement toute la masse et d'un bras cylindrique de volume constant et de diamètre b qui s'étire en s'amincissant. La taille de la forme à 2 lobes est L_M et croît lors de la chute.

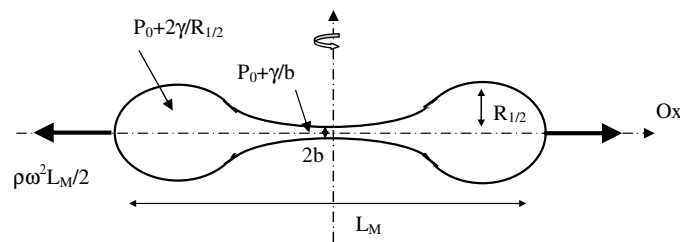


Figure 12 : Schéma d'une forme 2 lobes qui s'étire.

La goutte est isolée et son mouvement se fait donc à moment cinétique (L) constant. Avec les hypothèses précédentes, le moment d'inertie dépend simplement de la taille de la goutte et de sa masse :

$$J \sim mL_M^2$$

Le fait que la goutte soit isolée se traduit donc par la conservation du produit du carré de la taille de la goutte par la vitesse de rotation (équation 1).

$$L_M^2 \omega \sim L_0^2 \omega_0 \quad (1)$$

où L_0 et ω_0 sont la taille et la vitesse angulaire de la goutte sous sa forme à 2 lobes juste après

la transformation.

L'hypothèse d'un volume constant pour le bras se traduit par l'équation 2 :

$$L_M b^2 \sim L_0 b_0^2 \quad (2)$$

où b_0 représente l'épaisseur du bras quand la taille de la goutte est L_0 .

Deux forces contribuent principalement à l'étirement de la goutte. La première est la force capillaire qui tend à séparer la goutte en deux sphères : le bras fin est en surpression par rapport aux 2 lobes. Cette force s'écrit aux dimensions et en utilisant l'équation 2 :

$$f_{\text{cap}} \sim \frac{\gamma}{L_M b} R_{1/2}^3 \sim \frac{\gamma}{\sqrt{L_M L_0} b_0^2} R_{1/2}^3$$

La force centrifuge écarte aussi continuellement les deux lobes l'un de l'autre. En utilisant l'équation 1, cette force s'écrit :

$$f_{\text{centrifuge}} \sim m \omega^2 L_M \sim \rho R_{1/2}^3 \frac{(L_0^2 \omega_0)^2}{L_M^3}$$

Dans la comparaison entre la force centrifuge et la force capillaire, une longueur λ apparaît (équation 3).

$$\lambda \sim \left(\frac{\rho \omega_0^2}{\gamma} L_0^{9/2} b_0 \right)^{2/5} \quad (3)$$

En dessous de cette taille, la forme à 2 lobes s'accroît sous l'effet de la force centrifuge ; au-dessus, c'est la force capillaire qui est le moteur de l'étirement. En prenant les caractéristiques du glycérol ($\rho = 1260 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 0.05 \text{ N/m}$) et les valeurs suggérées par l'expérience précédente ($\omega_0 \sim 100 \text{ rad/s}$, $L_0 \sim 1 \text{ cm}$ et b_0 entre 0.1 et 1 mm), on trouve que cette taille caractéristique est de l'ordre de plusieurs centimètres. On considérera donc que la force centrifuge domine la force capillaire, dans ces expériences.

Deux forces peuvent freiner l'étirement : l'inertie de la goutte et les frottements visqueux à

l'intérieur du bras. L'inertie s'écrit :

$$f_{\text{inertie}} \sim m\ddot{L}_M$$

On peut calculer la puissance dissipée par le frottement visqueux à l'intérieur du bras lors de l'étirement :

$$P_{\text{vis}} \sim \eta \left(\frac{\dot{L}_M}{b} \right)^2 L_M b^2 \sim \eta L_M \dot{L}_M^2 \quad (4)$$

Pour écrire cette loi, on considère qu'il y a un cisaillement sur l'épaisseur du bras, à cause de la présence des grains solides (pour une surface libre, les conditions aux limites imposeraient une vitesse constante sur l'épaisseur du bras).

La puissance dissipée par la force d'inertie est négligeable devant celle dissipée par les frottements visqueux tant que le temps caractéristique τ_L d'évolution de la taille vérifie :

$$\tau_L \gg \frac{\rho R_0^3}{\eta L_M}$$

Pour une goutte de glycérol millimétrique au départ, le second terme de cette inégalité est au plus de l'ordre de la milliseconde. L'évolution de la forme étant relativement lente (de l'ordre du dixième de seconde), cette condition est toujours vérifiée et nous négligerons la force d'inertie par la suite. Lors de l'étirement, l'énergie fournie est donc dissipée par le frottement visqueux à l'intérieur du bras.

Tant que $L_M < \lambda$, la puissance visqueuse compense la puissance de la force centrifuge ($P_{\text{vis}} \sim f_{\text{centrifuge}} \dot{L}_M$). On trouve alors que la taille de la goutte croît avec le temps à la puissance 1/5 (équation 5). De plus, en utilisant la conservation du moment cinétique (équation 1) pour en déduire la dépendance de la vitesse angulaire avec le temps, puis en intégrant, on trouve que la position angulaire varie avec le temps à la puissance 3/5 (équation 6).

$$L_M \sim \left(\frac{\rho R_{1/2}^3 L_0^4 \omega_0^2}{\eta} \right)^{1/5} t^{1/5} \quad (5)$$

$$\theta \sim \left(\frac{\eta L_0 \omega_0^{1/2}}{\rho R_{1/2}^3} \right)^{2/5} t^{3/5} \quad (6)$$

Les coefficients de ces deux lois, avec les valeurs proposées précédemment et en écrivant $R_{1/2} \sim R_0$ sont respectivement d'ordre 2.10^2 et 30. Remarquons que l'évolution de ces deux grandeurs dépend peu de la viscosité du liquide.

Une fois les deux lobes séparés, le mouvement de chaque sphère est celui d'une chute libre et les deux lobes continuent de s'écarter l'un de l'autre suivant la loi donnée dans l'équation 7.

$$L_M - L_{rup} \sim L_{rup} \omega_{rup} (t - t_{rup}) \quad (7)$$

où L_{rup} et ω_{rup} sont respectivement la taille de la forme à 2 lobes et sa vitesse angulaire au moment de la rupture t_{rup} .

Nous pouvons maintenant essayer de confronter ce modèle aux résultats expérimentaux précédents (Figure 13).

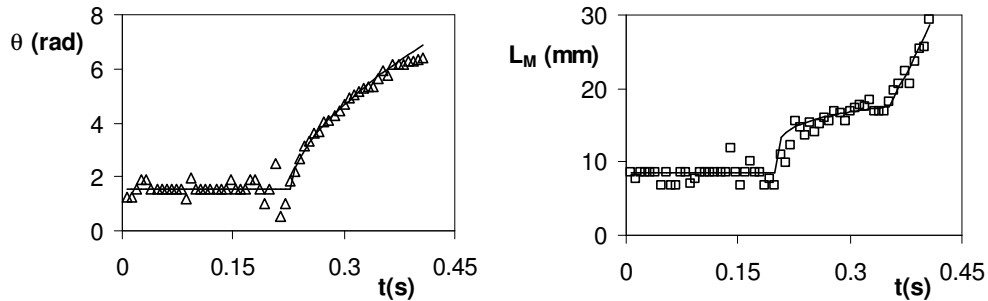


Figure 13 : Comparaison des données des Figure 10 et Figure 11 avec le modèle proposé. Chaque trait plein représente la dépendance temporelle suggérée par les équations 6, 5 et 7. Pour la position radiale il correspond à $14.8 (t-0.23)^{0.6}$, pour la taille de la goutte (en mm) à $13 (t-0.23)^{0.2}$ suivi de $210 (t-0.35)$ pour la dépendance linéaire.

Nous pouvons effectivement ajuster le mouvement angulaire de la goutte par une puissance $3/5$ du temps. Le coefficient obtenu est de 15, l'ordre de grandeur attendu. Nous pouvons également ajuster correctement la dépendance temporelle de la taille de la goutte par une loi de puissance $1/5$ (à l'exception cependant des premiers instants, où se produit la transformation). Le coefficient obtenu est de $1.3 \cdot 10^2$, également de l'ordre de grandeur attendu. Lorsque les deux lobes se sont séparés, une description linéaire ajuste bien la

dépendance temporelle de l'écartement des deux sphères avec le temps. Le coefficient obtenu est de 0.21 alors qu'en utilisant les lois que l'on vient d'obtenir et leur coefficient, sachant que $t_{rup} = 0.35$ s, on obtient $L_{rup} \omega_{rup} = 0.14$ m/s, le bon ordre de grandeur. Il serait intéressant de compléter ces premiers résultats par une étude plus systématique – permettant en particulier de vérifier la dépendance des coefficients avec les différents paramètres.

III. Bilan

En conclusion, nous avons vu dans ce chapitre que l'observation des formes axisymétriques est due à la présence du solide qui empêche les perturbations à 2 lobes de se développer. En l'absence du plan incliné, la transformation en forme à 2 lobes est immédiate et irréversible. Elle est suivie par l'étirement progressif de cette forme jusqu'à la rupture. La dynamique de cet étirement est bien décrite par un équilibre entre la force visqueuse (dans un bras de volume supposé constant) et la force centrifuge.

Dans le chapitre suivant, nous allons montrer comment on peut manipuler des gouttes enrobées.

Bibliographie

- [1] BROWN R.A. ET SCRIVEN L.E., « The Shape and Stability of Rotating Liquid Drops », *Proc. R. Soc. Lond.*, **371** (1980) 331.
- [2] WANG T.G., ANILKUMAR A.V., LEE C.P. ET LIN K.C., « Bifurcation of rotating liquid drops : results from USML-1 experiments in Space », *J. Fluid Mech.*, **276** (1994) 389.
- [3] LEE C.P., ANILKUMAR A.V., HMELO A.B. ET WANG T.G., « Equilibrium of liquid drops under the effects of rotation and acoustic flattening : results from USML-2 experiments in Space », *J. Fluid Mech.*, **354** (1998) 43.
- [4] OHSAKA K. ET TRINH E. H., « Three-lobed Shape Bifurcation of Rotating Liquid Drops », *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000) 1700.

Chapitre VI

Manipulation de gouttes enrobées

Table des matières

<i>Chapitre VI Manipulation de gouttes enrobées</i>	<i>129</i>
<i>I. Effets de l'enrobage.....</i>	<i>131</i>
1) <i>Non coalescence</i>	<i>131</i>
2) <i>Division</i>	<i>133</i>
<i>II. Champ électrostatique</i>	<i>134</i>
1) <i>Expériences préliminaires.....</i>	<i>134</i>
2) <i>Expérience de Washizu.....</i>	<i>137</i>
<i>III. Champ magnétique.....</i>	<i>139</i>
<i>IV. Bilan</i>	<i>140</i>
<i>Bibliographie</i>	<i>141</i>

Une goutte enrobée est un micro-réservoir de liquide qu'il peut être intéressant de manipuler. Dans ce chapitre, nous discutons successivement le caractère protecteur de l'enrobage, et la mise en mouvement de ces gouttes sous l'effet d'un champ.

I. Effets de l'enrobage

1) Non coalescence

On peut toucher la goutte enrobée avec un solide sans la détruire et sans qu'elle ne s'y colle. On le voit dans la séquence présentée sur la Figure 1, où l'on pousse une goutte d'eau enrobée de lycopes avec un petit bâton de carbone recouvert d'un film étirable de plastique.

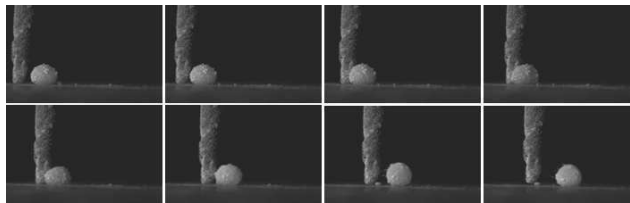


Figure 1 : Déplacement d'une goutte d'eau enrobée suite à un coup, 8 ms séparent chaque image.

La goutte se déplace facilement, sans fuir et sans se rompre. C'est en général de cette façon que nous guidons la goutte enrobée jusqu'au lieu des expériences (plan incliné, tambour, plongeur...). Ainsi, on peut projeter une goutte enrobée sur une autre comme dans la séquence qui compose la Figure 2.

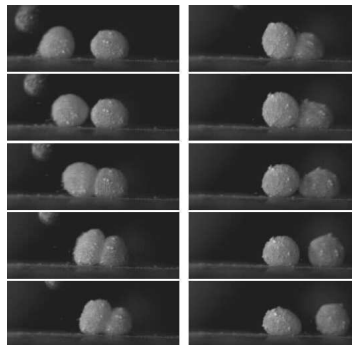


Figure 2 : Projection d'une goutte d'eau enrobée sur une autre, 4 ms séparent chaque image.

Les deux gouttes se déforment pour encaisser le choc mais ne coalescent pas. La couche de poudre protège les deux gouttes de liquide l'une de l'autre, dans la limite où le choc n'est pas trop violent. La robustesse proprement dite des gouttes enrobées sera discutée dans le chapitre suivant.

Dans la même gamme d'idées, on peut déposer une goutte enrobée sur un bain de liquide (à condition que ce soit un liquide potentiellement utilisable pour faire une goutte enrobée). Ceci est mis en évidence sur les photos suivantes pour une bille d'eau sur de l'eau. La goutte peut perdurer jusqu'à une minute, beaucoup plus longtemps donc que pour une goutte d'eau posée sur de l'eau, y compris en présence de tensioactifs, où le retard à la coalescence vaut typiquement 0.3 secondes [1].

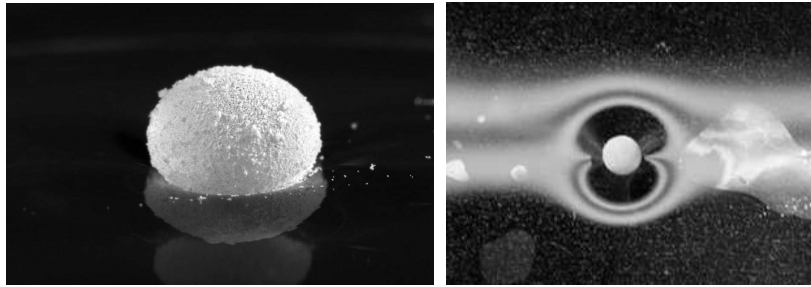


Figure 3 : Gouttes d'eau enrobées sur un bain d'eau, vues de profil et de dessus.

Les temps de vie de tels systèmes dépendent des liquides, mais aussi de la façon de déposer la goutte sur le bain, ce qui est assez difficile à effectuer de manière reproductible. Pour de l'eau sur de l'eau, on observe des temps de vie qui vont d'une fraction de seconde à la minute. Quand la coalescence a lieu, une petite goutte enrobée est souvent éjectée (Figure 4), probablement suivant le mécanisme observé par Thorrodsen [2].



Figure 4 : Petite goutte d'eau éjectée après la coalescence d'une grosse goutte.

En revanche, si nous utilisons un liquide dans lequel la poudre pénètre (de l'huile ou de l'alcool par exemple), la destruction de la goutte enrobée est immédiate. Cette propriété peut être utilisée pour détruire une goutte enrobée après son transport.

2) Division

Pour obtenir des petites gouttes, un des moyens utilisés est la division : on prépare une goutte puis on appuie dessus. La goutte se scinde alors en deux. On peut difficilement réaliser l'opération une deuxième fois : étant donné que l'on accroît la surface totale à chaque séparation, il n'y a plus assez de poudre pour enrober correctement les gouttes et elles se vident sur le solide.

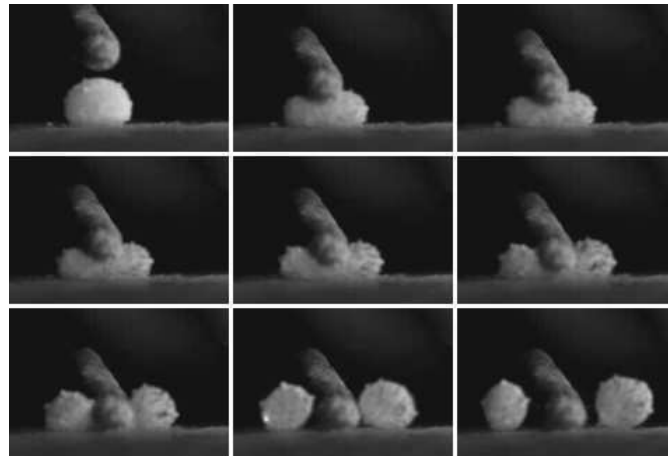


Figure 5 : Division d'une goutte d'eau enrobée, 4 ms séparent chaque image.

Pour les liquides volatils, comme l'eau, si nous attendons trop après la création de la goutte, il y a un surplus de poudre à la surface à cause de l'évaporation d'un peu de liquide. Sa « peau » est alors trop grande pour la goutte, ce qui empêche le liquide de prendre complètement sa forme statique. On peut nettoyer ce surplus en appuyant sur la goutte :

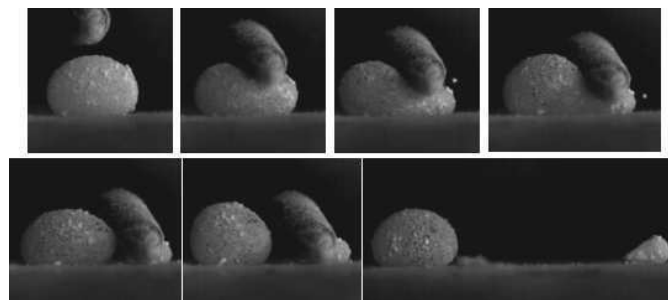


Figure 6 : Nettoyage d'une goutte d'eau enrobée, 8 ms séparent chaque image.

On extrait alors une petite goutte qui contient tout le surplus de poudre. La grosse goutte reprend la forme statique attendue alors que la forme de la petite dépend de son histoire. Pour les expériences quantitatives décrites dans les chapitres précédents, nous ne sommes pas gênés par l'évaporation et cet effet de peau, car nous utilisons la goutte immédiatement après sa fabrication.

Une application possible des gouttes enrobées concerne la microfluidique : elles permettent de déplacer sans fuite et avec peu de frottements une quantité donnée de liquide. La taille minimum de goutte que l'on peut faire dépend principalement de la taille des grains. En utilisant la poudre de lycopode de $20\ \mu\text{m}$ de diamètre, on peut créer sans difficulté des gouttes d'un demi millimètre de diamètre. On peut donc imaginer atteindre avec une poudre de $0.1\ \mu\text{m}$ des diamètres de quelques dizaines de micromètres.

Le problème est alors de mettre en mouvement ces objets. Nous avons vu qu'une pente (même très faible) le permet, mais ce procédé limite les mouvements à des trajectoires descendantes. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés qualitativement à l'effet d'un champ électrostatique ou d'un champ magnétique sur la goutte enrobée pour la transporter.

II. Champ électrostatique

1) Expériences préliminaires

L'expérience la plus simple consiste à soumettre une goutte enrobée (composée d'eau ou de glycérol) à un champ électrostatique. Pour créer ce champ, on prend par exemple un bâton de téflon (ici de 1 cm de diamètre) que l'on frotte sur un chiffon pour le charger.

Quand le cylindre chargé approche une goutte d'eau enrobée de lycopodes, on observe un mouvement avec des rebonds successifs (Figure 6).

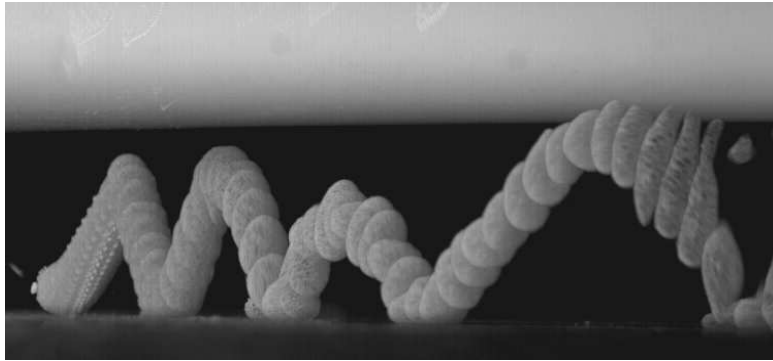


Figure 7 : Goutte d'eau enrobée de lycopodes soumise à un champ électrostatique. La goutte progresse entre son support (ici une plaque d'acier) et un barreau de téflon chargé (en blanc sur la photo). Superposition d'images espacées de 6 ms.

L'expérience est ici réalisée sur une plaque de métal mais nous observons ce phénomène avec n'importe quelle surface. Pour essayer de comprendre cette mise en mouvement, on raisonne en terme de potentiels, en considérant le liquide conducteur. La goutte est initialement au même potentiel que le solide. Il y a donc une grande différence de potentiel entre la goutte et le cylindre chargé. La goutte est attirée et la force développée est ici suffisante pour la soulever. À proximité de la surface, une décharge a lieu et la goutte se met au même potentiel que le cylindre. Elle redescend alors sous l'effet de son poids combiné avec la différence de potentiel avec la plaque métallique. Une fois qu'elle a rejoint cette dernière et s'est mise à nouveau à son potentiel, comme elle s'est aussi déplacée latéralement (on a donné un léger angle au cylindre), elle est de nouveau attirée par le cylindre, ce qui donne plusieurs rebonds. Le détail des déformations au moment de la décharge peut être observé avec une caméra rapide (Figure 8).

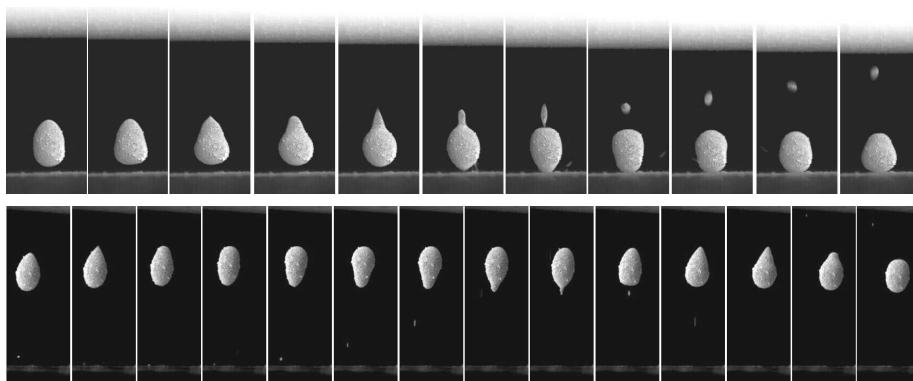


Figure 8 : Gouttes d'eau enrobées attirées par un champ électrostatique. On observe la formation d'une pointe ainsi que l'éjection d'une petite goutte. Dans la première séquence, il y a 2 ms entre chaque image et 1 ms dans la deuxième.

Au moment de chaque mise au potentiel, la goutte forme une pointe puis éjecte une petite

goutte. Cette pointe représente la forme d'équilibre d'une goutte soumise à un fort champ mise en évidence en particulier par Taylor dans les années soixante-dix [3]-[5].

En utilisant le bout du cylindre de Téflon et en se plaçant suffisamment loin, nous pouvons aussi diriger doucement la goutte sans la faire décoller (Figure 9).

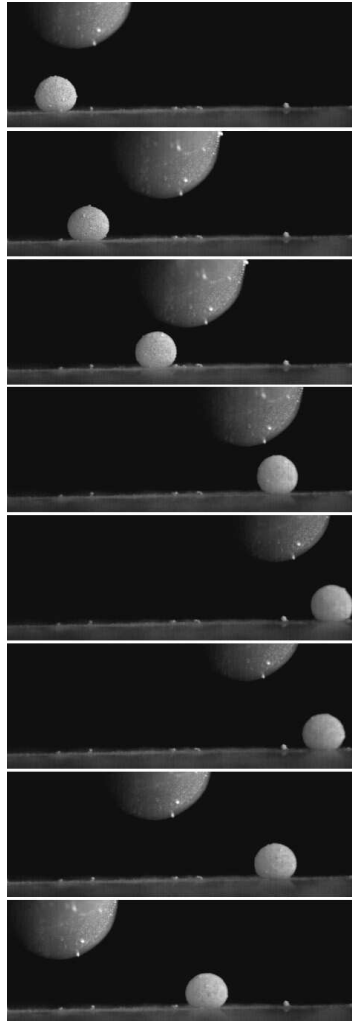


Figure 9 : Mouvement d'une goutte enrobée sous l'effet du déplacement d'un cylindre de téflon chargé. Il y a 120 ms entre chaque image.

Tous ces phénomènes sont observés indépendamment avec de l'eau ou du glycérol (Figure 10).

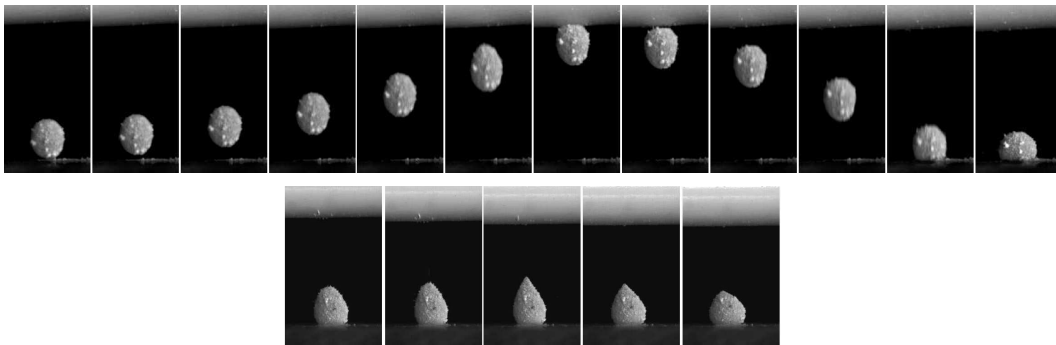


Figure 10 : Goutte enrobée de glycérol soumise à un champ électrostatique.
20 ms séparent chaque image dans la première séquence et 10 ms dans la deuxième.

On peut finalement imaginer utiliser un champ électrique contrôlé pour guider sélectivement des gouttes enrobées. Pour cela, nous pourrions nous inspirer de l'expérience réalisée par Washizu [6].

2) Expérience de Washizu

Le montage suivant a été réalisé par Washizu [6] pour des applications en microfluidique. En effet, il peut être parfois intéressant d'utiliser une goutte isolée, plutôt que des micro-canaux pour transporter des liquides, car ainsi on traite les échantillons de manière discrète et on évite le mélange par diffusion. En outre, les micro-pompes et les micro-valves sont parfois difficiles à mettre en œuvre. Le montage qu'il utilise permet d'éviter ces techniques. Pour guider des gouttes isolées dans des tubes, il existe déjà des techniques de pompes thermocapillaires : en chauffant un des ménisques de la goutte on crée un déséquilibre des forces capillaires et la goutte avance. Cependant cette technique implique des températures de 20 à 40 °C qui peuvent détruire certains composants des gouttes, notamment pour des applications en biologie.

Le principe moteur proposé ici est l'utilisation d'une capacitance variable entre la goutte et une électrode. Pour cela, Washizu utilise un réseau d'électrodes placé sous une couche d'isolant traité pour être hydrophobe en surface. Il applique ensuite séquentiellement une différence de potentiel de sorte que ce soit toujours l'électrode devant la goutte qui soit activée, les autres restant à la masse. Ce principe est schématisé sur la Figure 11 pour un système à 6 électrodes, celui de l'auteur en comportant 12 expérimentalement.

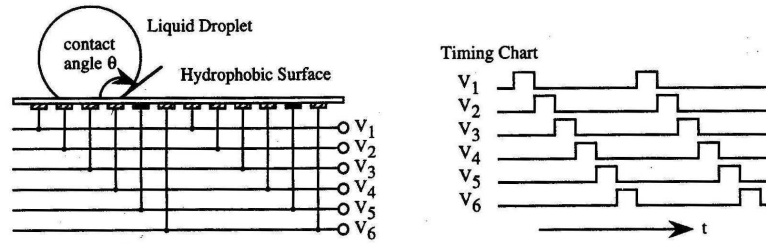


Figure 11 : Principe du montage de Washizu.

La goutte se déplace afin de maximiser la capacité du système et minimiser ainsi son énergie. La surface de la goutte peut être considérée comme une équipotentielle, de potentiel proche de celui des électrodes sous-jacentes, donc de la masse. La force de déplacement va être d'autant plus forte que l'espace entre la goutte et l'électrode est faible. L'auteur utilise donc une surface hydrophobe (105°) pour avoir un grand angle de contact.

Avec ce système, en appliquant une tension alternative de 400 Volt et de 60 Hz, les gouttes atteignent des vitesses de 0.4 mm/s. En créant des systèmes en forme de fourches comme dans la figure suivante, il arrive alors par exemple à guider les gouttes, à les faire fusionner ou à les séparer.

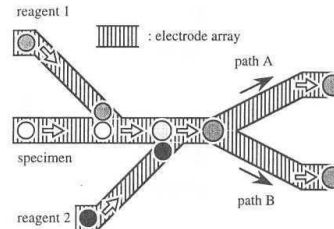


Figure 12 : Principe du micro réacteur de Washizu.

Torkkeli, Saarilahti et Häärä [7] ont utilisé le même montage avec des surfaces super-hydrophobes (angle de contact de 160° et hystérésis d'ordre 10°). Ils obtiennent alors des vitesses allant jusqu'à 1 cm/s pour un potentiel de 124 V. Nous pouvons alors penser qu'avec des gouttes enrobées nous atteindrions des vitesses plus rapides pour un potentiel plus faible. Les gouttes enrobées permettraient en outre d'éviter un des problèmes rencontrés par des gouttes usuelles, à savoir la poussière qui se dépose et qui bloque le mouvement.

Une autre technique utilisant l'électrostatique est proposé par Pollack, Fair et Shenderov [8]. Ils utilisent la variation de tension de surface solide/liquide avec le potentiel appliqué pour créer une dissymétrie (un angle de contact plus faible à l'avant de la goutte) et faire avancer

une goutte d'eau salée. Mais ce procédé semble difficilement applicable aux gouttes enrobées où le contact solide/liquide a été supprimé. Il est cependant intéressant de remarquer qu'ils obtiennent des vitesses de 3 cm/s avec typiquement 100 V.

III. Champ magnétique

Un autre champ moteur possible est un champ magnétique, à condition de préparer préalablement la goutte. Une première possibilité est d'enrober la goutte avec des particules magnétiques. Dans la séquence qui suit, nous utilisons un mélange de lycopodes et de limaille de fer légèrement graisseuse provenant de l'atelier de mécanique du laboratoire.

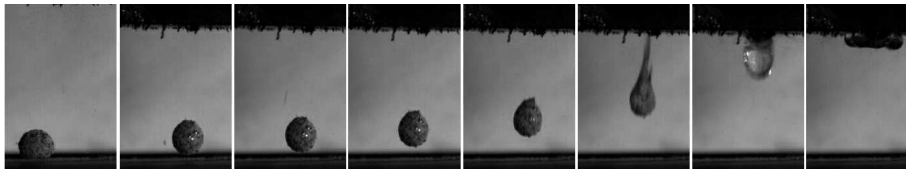


Figure 13 : Goutte d'eau enrobée de limaille de fer en contact avec un aimant. 6 ms séparent chaque image.

La goutte est suffisamment attirée par un aimant pour se soulever. Nous pouvons aussi placer de la poudre de fer (nous utilisons une poudre de 4 μm de diamètre) directement dans la goutte (Figure 14).

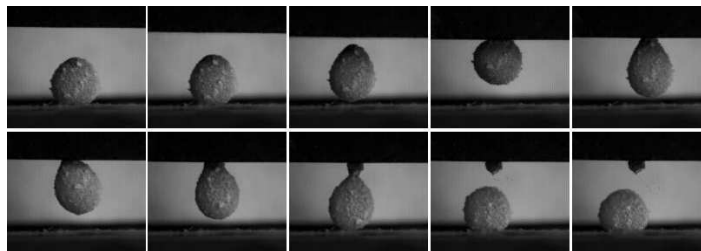


Figure 14 : Goutte d'eau contenant de la poudre de fer et enrobée de lycopodes. Il y a 20 ms entre chaque image.

La goutte est attirée par l'aimant et s'y colle. Les particules de fer migrent jusqu'à l'aimant, si bien que la goutte purifiée retombe sous son poids en abandonnant la poudre qu'elle contenait. L'expérience marche également avec une goutte de glycérol (Figure 15), mais la goutte reste collée à cause du mouvement très ralenti des particules.

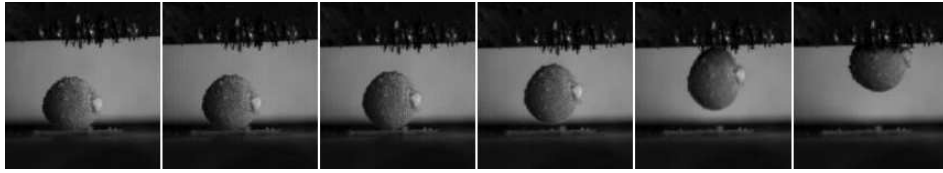


Figure 15 : Goutte de glycérol contenant de la limaille de fer enrobée de lycopodes.
8ms séparent chaque image.

Ce moteur pourrait être intéressant pour guider des gouttes de ferrofluides.

IV. Bilan

Nous avons vu dans ce chapitre que les gouttes enrobées peuvent subir des chocs mécaniques sans se rompre. De plus elles sont sensibles à un champ électrique ou éventuellement magnétique. L'utilisation de gouttes enrobées est donc possible dans des systèmes microfluidiques qui seraient guidés par d'autres champs que celui de la gravité. Il est cependant important de quantifier la robustesse des gouttes avant de telles utilisations, ce à quoi nous consacrons le prochain chapitre.

Bibliographie

- [1] AMAROUCHENE Y., CRISTOBAL G. et KELLY H., « Noncoalescing Drops », *Physical Review Letters*, **87** (2001) 206104.
- [2] THORODDSEN S. T. et TAKEHARA K., « The coalescence cascade of a drop », *Physics of Fluids*, **12** (2000) 1265.
- [3] TAYLOR G.I., « Disintegration of water drops in an electric field », *Proc. Roy. Soc. A*, **280** (1964) 383.
- [4] TAYLOR G.I., « The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field », *J. Fluid Mech.*, **22** (1965) 1.
- [5] HAO LI, HALSEY C. et LOBKOVSKY A., « Singular Shape of a Fluid Drop in an Electric or Magnetic Field. », *Europhysics letters*, **27** (1994) 575.
- [6] WASHIZU M., « Electrostatic Actuation of Liquid Droplets for Microreactor Applications », *IEEE Transactions on Industry Applications*, **34** (1998) 732.
- [7] TORKKELI A., SAARILAHTI J. et HÄÄRÄ A., « Electrostatic Transportation of Water Droplets on Superhydrophobic surfaces », *14th IEEE International Conference on Micro-Electro-Mechanical-Systems*. (2001) 475.
- [8] POLLACK M.G. et FAIR R.B. ET SHENDEROV A.D., « Electrowetting-based actuation of liquid droplets for microfluidic applications », *Applied Physics Letters*, **77** (2000) 1725.

Photos 3a et 4 : crédit P. GOETGHELUCK

Chapitre VII

Robustesse des gouttes enrobées

Table des matières

<i>Chapitre VII Robustesse des gouttes enrobées</i>	143
<i>I. Écrasement des gouttes enrobées</i>	145
1) <i>Description de l'expérience</i>	145
2) <i>Résultats expérimentaux</i>	146
3) <i>Discussion</i>	147
<i>II. Saut de gouttes</i>	148
1) <i>Rebonds</i>	148
2) <i>Sauts fatals aux gouttes</i>	153
<i>III. Bilan</i>	158
<i>Bibliographie</i>	161
<i>Annexe VII-1 Rebonds de gouttes enrobées visqueuses dans la limite des faibles déformations.</i>	163

Nous avons décrit dans les chapitres précédents un certain nombre d'utilisations possibles des gouttes enrobées. Néanmoins, afin de les utiliser de façon optimale, il faut connaître leur résistance. Pour cela, nous avons réalisé deux types d'expérience. Nous avons d'abord essayé d'observer ce qui se passe d'un point de vue statique : nous écrasons la goutte dans une presse et nous mesurons jusqu'à quel point elle résiste. Puis, nous avons réalisé une expérience dynamique (impact d'une goutte), plus représentative des situations rencontrées en pratique.

I. Écrasement des gouttes enrobées

1) Description de l'expérience

L'expérience d'écrasement consiste à placer une goutte enrobée de volume connu entre deux plaques. La plaque supérieure se déplace grâce à une vis micrométrique graduée au centième de millimètre, ce qui permet de réaliser un mouvement quasi-statique.

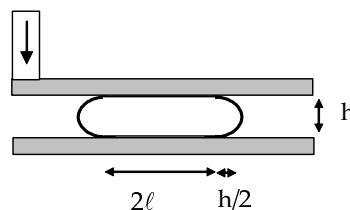


Figure 1 : Schéma de principe de l'écrasement quasi-statique.

Au fur et à mesure de l'écrasement, la goutte prend une forme de crêpe de plus en plus aplatie. En dessous d'une épaisseur limite, l'enveloppe de la goutte se rompt et le liquide s'étale sur une des plaques. On peut mesurer à l'aide de la vis micrométrique cette distance inter-plaques h_{\min} . De plus, la presse peut être placée sous microscope, afin d'observer ce qui se passe juste avant et au moment de la rupture. La Figure 2 montre une séquence d'écrasement de goutte vue de dessus au microscope. Sur cette séquence, on observe le grossissement de la zone écrasée qui apparaît sous la forme d'un disque plus lumineux que le reste de la goutte au fur et à mesure de l'écrasement (l'épaisseur de la goutte, qui d'après le schéma de la Figure 1 correspond à la largeur de la couronne sombre, diminue). Le microscope est focalisé sur la plaque et on voit nettement les grains de lycopodes figés contre

cette plaque.

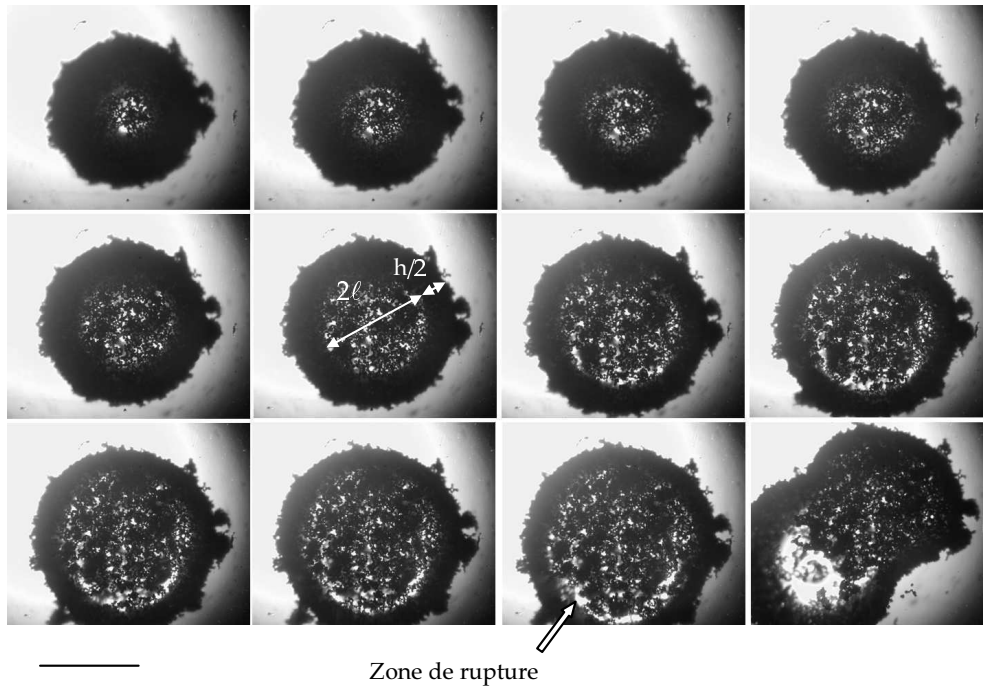


Figure 2 : Goutte d'eau enrobée (2 μ l) de plus en plus écrasée entre deux plaques. Le trait noir représente 1 mm. Nous avons indiqué le contact et l'épaisseur h , ainsi que la zone où la rupture de la goutte a lieu.

La rupture se fait sur le côté de la goutte. La zone de rupture est repérée par une flèche sur la Figure 2. Elle correspond à une zone déficitaire en poudre, les grains de la zone écrasée étant figés entre la goutte et la plaque solide, les réarrangements sont limités quand la zone de contact s'accroît. Une fois que le liquide est entré en contact avec une des plaques, il s'étale et la goutte se vide.

2) Résultats expérimentaux

Nous mesurons l'épaisseur minimale que peut accepter la goutte en fonction de son rayon initial R_0 pour deux liquides (eau et glycérol) et deux poudres (lycopodes de taille de grains 20 μ m et une poudre de silice silanisée de 10 nm). Nous utilisons pour la presse des plaques transparentes de plastique que l'on peut recouvrir de Téflon pour changer les propriétés de mouillage entre le liquide et les plaques.

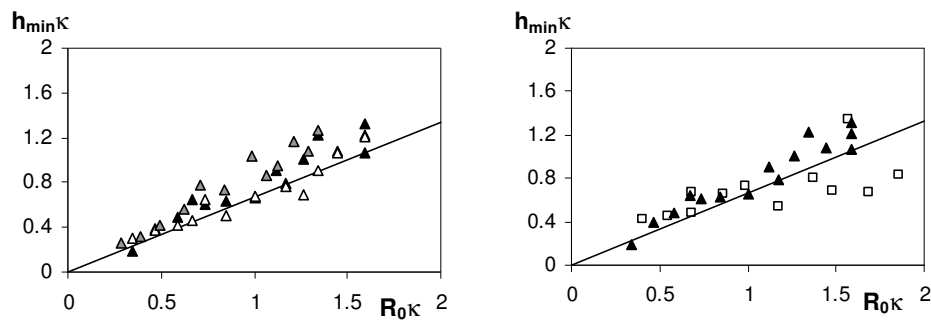


Figure 3 : Épaisseur minimale d'une goutte enrobée en fonction du rayon de la goutte, tous deux normalisés par la longueur capillaire. Les triangles représentent l'eau enrobée de lycopodes (en noir), de silice (en gris) et les blancs concernent les plaques recouvertes de téflon. Les carrés blancs représentent les gouttes de glycérol enrobées de lycopodes. Les droites dessinées correspondent à la pente $2/3$.

Quoique les données soient assez dispersées, on remarque que la rupture paraît peu dépendre de la poudre utilisée ou de la surface en regard de la goutte. Les grosses gouttes de glycérol semblent un peu plus résistantes que celle d'eau, mais cela est peut-être dû à l'amortissement des petites oscillations ou à un retard à la réorganisation des grains et à l'étalement du glycérol, visqueux, sur le solide. Pour les petites gouttes, l'ensemble des données se superpose, ce que l'on attend d'expériences statiques, qui ne devraient pas dépendre de la viscosité.

3) Discussion

L'existence de la goutte enrobée tient au fait que la poudre isole le liquide de la surface sur laquelle il repose. Le recouvrement en poudre est donc une donnée essentielle. En écrasant la goutte, on augmente la surface à quantité de poudre constante, si bien que l'on risque d'arriver à une situation où le recouvrement est insuffisant et la goutte cède. Dans cette hypothèse, on comprend que l'épaisseur minimale avant rupture ne dépende pas des propriétés de surface de la presse. En outre, l'observation des images d'écrasement semble montrer une taille caractéristique pour le trou en poudre de l'ordre du demi millimètre, grande donc par rapport à la taille des grains. Cela pourrait expliquer que la taille caractéristique de la poudre n'intervient pas dans la robustesse statique.

Pour indication, nous avons tracé dans les graphes de la Figure 3 la droite $h = 2/3 R_0$. Elle correspond à la conservation de la surface de la goutte sans prendre en compte les bouts de la crêpe finale, et en considérant la goutte sphérique initialement. Les données s'écartent peu de cette droite, pour avoir accès à l'accroissement de surface il faudrait prendre en compte la

forme exacte de la goutte. Une mesure plus accessible est celle de l'extension maximale relative que la goutte peut prendre $\xi^*/R_0 = (R_{\max} - R_0)/R_0$. Nous avons porté sur la Figure 4 cette extension pour une goutte d'eau, en fonction de sa taille.

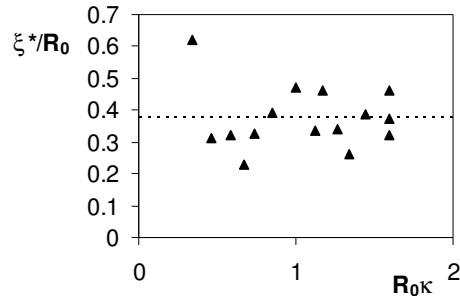


Figure 4 : Extension maximale ($\xi^* = R_{\max} - R_0$) d'une goutte d'eau enrobée en fonction de sa taille. Le trait pointillé représente la constante 0.38.

La taille maximale que peut prendre la goutte relativement à sa taille initiale semble constante ($\xi^*/R_0 \approx 0.38$). Dans l'hypothèse d'une goutte de forme finale ellipsoïdale, ceci correspond à un accroissement de surface $\Delta S/S_0 \approx (8/5) (\xi^*/R_0)^2$ (voir annexe VIII-1), soit environ 25%. Ceci explique que l'on peut diviser une goutte en deux (comme nous l'avons vu au chapitre VI), une telle division impliquant un accroissement de surface de 25%. En revanche, il est difficile de réaliser cette opération deux fois de suite, car 60% de surface en plus est créée par une double division.

Nous allons maintenant considérer la robustesse dynamique des gouttes enrobées, lors d'un choc contre une surface.

II. Saut de gouttes

L'expérience de saut consiste à laisser tomber d'une hauteur donnée une goutte enrobée. Suivant la taille de la goutte, le liquide qu'elle contient ou la poudre utilisée, la goutte enrobée rebondit ou reste collée à la surface.

1) Rebonds

La Figure 5 montre que la goutte enrobée peut rebondir de façon intègre suite à une chute.



Figure 5 : Rebond d'une goutte d'eau lycopodée de 50 μ L, sur un surface réfléchissante.

Sur les distances étudiées, la goutte est uniformément accélérée par le champ de pesanteur. Les hauteurs de chute et après rebond nous donnent ainsi les vitesses d'impact et de rebond.

- *Observations expérimentales*

Sur la Figure 6, le coefficient de restitution en vitesse est tracé en fonction de la vitesse d'impact de gouttes enrobées pour différents cas : nous faisons varier la poudre (lycopode ou silice), le rayon initial de la goutte (0.78 ou 1.33 mm) et la viscosité du liquide (1 cP, 10 cP ou 78 cP).

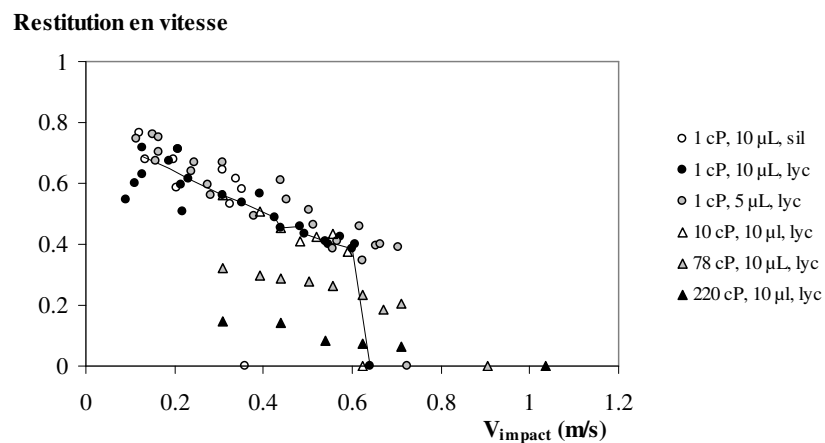


Figure 6 : Coefficient de restitution en vitesse de gouttes enrobées en fonction de la vitesse d'impact pour différents cas.

Sur cette figure, les points de restitution nulle correspondent à la rupture de la goutte. Toutes les courbes ont la même allure, indiquée par exemple pour une goutte d'eau de 10 μL enrobée de lycopodes.

On voit grâce aux expériences réalisées avec l'eau (1 cP, les ronds et les carrés sur la Figure 6) que le coefficient de restitution du rebond dépend peu du rayon de la goutte et semble indépendant de la poudre utilisée. En revanche, la vitesse d'impact maximale que peut subir la goutte sans se rompre est sensible à ces paramètres : la goutte est d'autant plus résistante qu'elle est petite ou que la poudre est grosse.

Pour les faibles viscosités (jusqu'à 10 cP), les courbes se superposent : la viscosité a peu d'effet. Ensuite, plus la viscosité augmente, moins la goutte rebondit. Au-dessus de 220 cP, les gouttes enrobées ne rebondissent plus. La goutte enrobée est d'autant plus robuste qu'elle est visqueuse.

- *Interprétation*

Contrairement à la robustesse des gouttes, le rebond ne dépend pas de la poudre utilisée, et très peu de la taille initiale de la goutte. Par contre, le rebond ainsi que la robustesse dépendent beaucoup de la viscosité à partir d'un certain seuil : jusqu'à 10 cP les gouttes rebondissent de la même façon et cèdent pour la même vitesse d'impact ; au-delà de 10 cP, plus les gouttes sont visqueuses, moins elles rebondissent et plus elles sont résistantes.

Ces observations nous amènent à penser que la robustesse dynamique de la goutte enrobée est liée à son étalement pendant l'impact. En effet, plus la goutte est visqueuse, plus elle dissipe d'énergie dans la phase étalement-rétraction et moins elle rebondit. De la même manière, l'extension maximale que prend la goutte dans l'étalement est d'autant plus petite que la goutte est petite car elle arrive avec une énergie cinétique plus faible. Ainsi, on peut supposer que ce qui limite la robustesse de la goutte est l'accroissement de surface lors de l'étalement.

Dans l'annexe VII-1, nous proposons un modèle simple pour décrire la phase d'étalement d'une goutte visqueuse à faible vitesse d'impact avec dissipation dans une couche limite. Nous obtenons une description de l'extension maximale ($\xi = R_{\max} - R_0$) de la goutte donnée par

l'équation 1 :

$$\frac{\xi}{R_0} = a(\text{Oh}) \sqrt{\frac{\text{We}}{2}} \quad (1)$$

où le coefficient a dépend seulement des caractéristiques de la goutte via le nombre d'Ohnesorge $\text{Oh} = (\eta^2 / \rho R_0 \gamma)^{1/2}$ et est donné par la résolution de l'équation 2 :

$$a^2 + \frac{\alpha}{12} \sqrt{\text{Oh}} a = \frac{5}{24} \quad (2)$$

dans la limite où $a\text{Oh} \ll 1$ et où α est un coefficient numérique. Le nombre d'Ohnesorge est défini comme le quotient de la force visqueuse par la moyenne géométrique de la force capillaire et de l'inertie : $\text{Oh} = (\text{Ca}/\text{Re})^{1/2}$. Il intervient quand il faut prendre en compte à la fois les forces visqueuses, la capillarité et l'inertie.

Nous avons alors tenté de valider ce modèle en mesurant l'extension maximale que prend la goutte enrobée lors d'un choc.

- *Étalement expérimental de gouttes enrobées lors d'un choc*

L'expérience consiste à filmer l'étalement d'une goutte enrobée de lycopodes, constituée de mélanges eau-glycérol de viscosité variable. Nous travaillons à taille de goutte constante ($R_0 = 1.33$ mm) et nous utilisons une caméra rapide (1000 images par seconde) pour suivre l'écrasement de la goutte vue de dessous. Nous avons alors accès au rayon maximal d'étalement de la goutte R_{max} ou à l'extension maximale de la goutte $\xi = R_{\text{max}} - R_0$.

Pour une goutte tombant en chute libre d'une hauteur H_f , l'équation 1 prévoit une extension ξ égale à :

$$\frac{\xi}{R_0} = a(\text{Oh}) \sqrt{\frac{H_f R_0}{\kappa^{-2}}} \quad (3)$$

On peut tracer cette extension en fonction du paramètre suggéré par l'équation 3, c'est-à-dire la hauteur de chute multipliée par le rayon R_0 (Figure 7). Les différentes courbes

correspondent à plusieurs viscosités (1, 9, 41 et 220 cP).

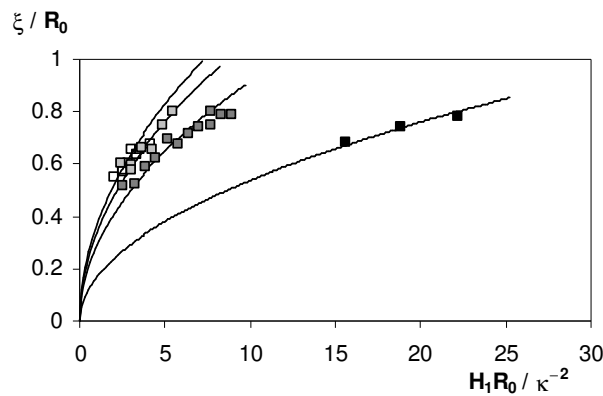


Figure 7 : Extension maximale de gouttes enrobées (normalisée par leur rayon) en fonction de la hauteur de chute multipliée par le rayon R_0 , quantité normalisée par le carré de la longueur capillaire pour des viscosités de 1, 9, 41 et 220 cP (des carrés les plus clairs aux plus foncés). Les traits correspondent aux fonctions racines carrées avec des coefficients différents.

On observe que l'extension est toujours inférieure au rayon de la goutte (même si elle s'en rapproche à grande vitesse d'impact, nous plaçant en limite du modèle qui impose des faibles déformations). Nous pouvons ajuster chaque série par une loi de puissance 1/2, en accord avec l'équation 3, avec un coefficient a qui dépend du liquide utilisé, en particulier à viscosité élevée.

Nous reportons dans le graphe qui suit la valeur expérimentale de a déduite de la Figure 7 en fonction du nombre d'Ohnesorge $Oh = \sqrt{\eta^2 / \rho R_0 \gamma}$ caractéristique de chaque série, et nous la comparons au coefficient déduit par le calcul de l'équation 2, en prenant pour α la valeur qui permet de représenter le mieux les données, c'est-à-dire $\alpha = 6.5$.

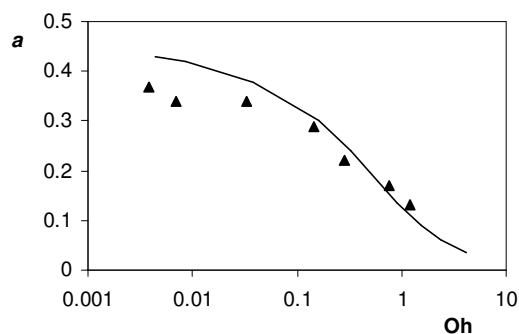


Figure 8 : Coefficient a tiré des expériences en fonction du nombre d'Ohnesorge. Le trait plein correspond à la résolution de l'équation 2 avec $\alpha = 6.5$.

Le trait plein représente de façon raisonnable les données expérimentales et leur sens de variation.

Pour décrire la robustesse proprement dite des gouttes enrobées, nous nous intéressons maintenant aux sauts fatals aux gouttes.

2) Sauts fatals aux gouttes

Si l'on fait tomber de trop haut une goutte enrobée, le liquide entre en contact avec le substrat et la goutte ne décolle pas.

Quand la goutte s'étale, la surface de la goutte augmente à nombre de lycopodes constant. L'idée est donc qu'il existe une taille maximale d'étalement de la goutte à partir de laquelle la poudre ne recouvre pas assez la goutte pour la maintenir isolée. Nous allons d'abord voir si cette idée est compatible avec les observations expérimentales puis développer un modèle à partir de nos données sur l'extension des gouttes lors des chocs.

- *Résultats expérimentaux*

Les expériences d'étalement réalisées précédemment donnent aussi accès à l'étalement maximal à la rupture. La Figure 9 montre que le rayon maximal R^* que peut encaisser une goutte enrobée de volume donné est indépendant de la viscosité.

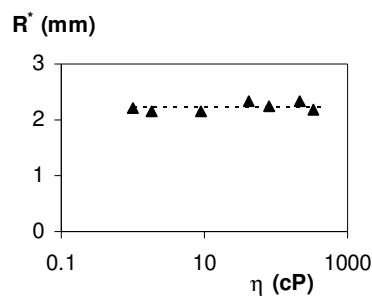


Figure 9 : Rayon maximal que peut prendre la goutte enrobée sans se rompre en fonction de sa viscosité pour $R_0 = 1.33$ mm.

La valeur du rayon maximal que peut encaisser une goutte enrobée de lycopodes de $10\mu\text{l}$ ($R_0 = 1.33$ mm) vaut $R^* = 2.22$ mm, quelle que soit sa viscosité. Ceci correspond à une

extension $\xi^*/R_0=0.67$. Cette valeur est constante, comme dans le cas des expériences statiques, mais plus élevée. Dans ces deux types d'expériences, la robustesse semble liée à un accroissement maximal de surface, mais la sensibilité est différente.

Dans une deuxième série d'expériences, nous relevons la hauteur maximale d'où peut choir une goutte enrobée sans se rompre, en fonction du liquide, de la poudre, de la taille de la goutte et du solide sur lequel la goutte impacte (figures 9 à 13).

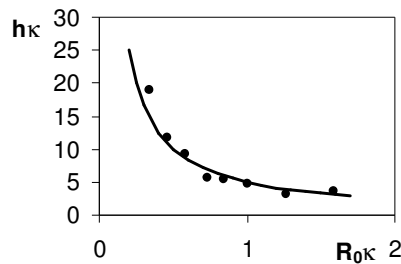


Figure 10 : Hauteur critique de saut d'une goutte d'eau enrobée de lycopodes en fonction du rayon de la goutte. Ces deux longueurs sont normées par la longueur capillaire et le substrat est en verre.

Sur la Figure 10, les données obtenues avec des gouttes d'eau enrobées sont représentées. On voit que les gouttes sont d'autant plus résistantes qu'elles sont petites. Ceci est cohérent avec le fait que l'énergie cinétique à l'impact dépend de la taille de la goutte. On remarque que les données peuvent être ajustées par une hyperbole, le trait plein correspondant à $h_k = 5/(R_0 \kappa)$.

Le coefficient numérique de l'ajustement par une hyperbole dépend de la nature du solide, comme on le voit sur le graphe de la Figure 11.

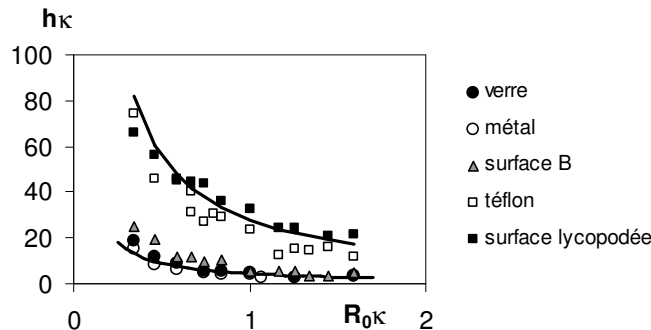


Figure 11 : Hauteur critique de saut pour des gouttes d'eau enrobées s'écrasant sur divers substrats (verre, métal, surface B, téflon, surface lycopodée).

La surface B est un enduit de façade allemand appelé Lotusan, qui a la particularité d'avoir vis-à-vis de l'eau un grand angle d'avancée et un angle de reculée faible. La surface lycopodée est une surface super-hydrophobe composée de lycopodes traités et collés sur une surface lisse [1].

Sur des surfaces partiellement mouillées par l'eau avec un angle de contact inférieur à 90° (sur le verre $\theta_e = 38^\circ$ et sur le métal $\theta_e = 60^\circ$), les courbes se superposent. Sur des surfaces hydrophobes (téflon et surface super-hydrophobe), le seuil est assez difficile à déterminer, mais la goutte est beaucoup plus résistante, avec un coefficient numérique de l'ordre 25. Il est remarquable que, contrairement à tout ce que nous avons établi jusqu'ici, le comportement observé ici dépende de la nature du substrat. Dans ces limites de fortes déformations, on pousse la goutte à exposer sa surface liquide au substrat. Il est donc logique que des substrats non-mouillants (pour lesquels des rebonds de gouttes non enrobées sont possible) permettent un rebond, bien au-delà de ce que permet un substrat mouillant. Le facteur qui semble important est en fait l'angle de reculée du liquide sur la surface car la surface B se rapproche plus du premier coefficient que du deuxième alors que son angle d'avancée est grand (supérieur à 90°) et son angle de reculée petit. On peut penser que dans ces expériences dynamiques, si l'angle de reculée est grand, la goutte va avoir lors de la rétraction assez d'inertie pour se recomposer après démouillage.

Revenons aux substrats mouillants (verre). Contrairement à ce qui se passe en écrasement statique, la poudre a un effet visible sur la robustesse des gouttes (Figure 12).

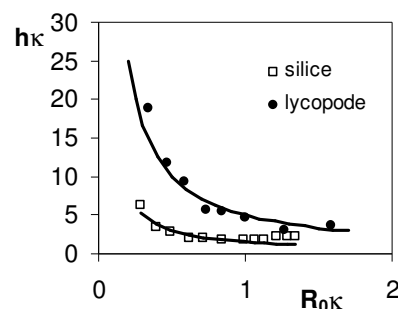


Figure 12 : Goutte d'eau enrobée sur du verre. Effet de l'enrobage (lycopode ou silice).

Plus la poudre est fine, plus le liquide est proche du solide et donc susceptible de le toucher. Ainsi ceci semble jouer un rôle en dynamique. Cependant, il y a seulement un facteur

d'ordre 3 entre les coefficients des deux hyperboles alors qu'il y a un facteur 100 voire 1000 en taille des grains composant les poudres : l'effet est visible mais ne condamne pas pour autant l'emploi de poudres fines.

Étudions pour finir l'influence de la viscosité en relevant la hauteur maximale que peut sauter une goutte d'un mélange eau-glycérol de composition variable en fonction du rayon de la goutte.

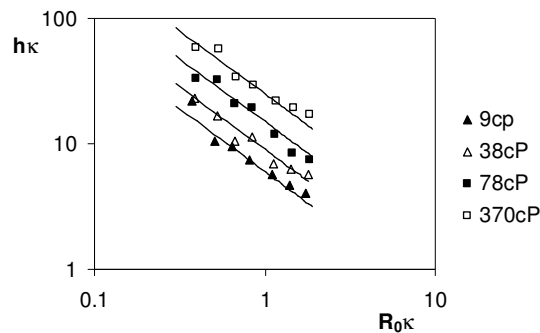


Figure 13 : Hauteur critique de chute pour différentes viscosités. Les droites ont une pente commune de -1.

Les gouttes enrobées sont d'autant plus résistantes qu'elles sont visqueuses. On peut à nouveau ajuster ces courbes par des hyperboles $h\kappa = p/(R_0\kappa)$, où p est un coefficient numérique dépendant du liquide utilisé, et ce jusqu'à 400 cP. Pour les très fortes viscosités (Figure 14), on a une sorte de saturation mais on se situe à des hauteurs de chute très élevées de l'ordre de 20 cm et la détermination rupture/non rupture n'est plus si facile à déterminer.

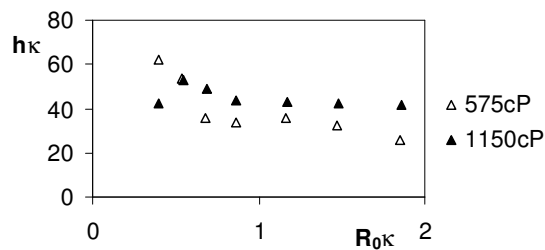


Figure 14 : Gouttes enrobées de liquide, hauteur critique de chute pour les fortes viscosités.

- *Modèle*

Pour des gouttes enrobées sur des surfaces à faible angle de reculée, on suppose que les gouttes vont se rompre pour une extension ξ^*/R_0 donnée, indépendante de la viscosité. De

l'équation 3, nous déduisons que la hauteur maximale de chute dépend de l'inverse du rayon de la goutte :

$$h\kappa = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\xi^*}{R_0} \right)^2 \frac{1}{R_0 \kappa} \quad (4)$$

où a dépend des caractéristiques de la goutte et est donné par l'équation 2.

Expérimentalement, nous avons vu que l'on peut effectivement ajuster par une hyperbole les courbes obtenues. On relève le coefficient $p = h_{\text{lim}} R_0 \kappa^2$ correspondant à chaque liquide et on le compare dans la Figure 15 au résultat de l'équation 4. Pour cela, on utilise la valeur $\xi^*/R_0 = 0.67$ trouvée expérimentalement dans les expériences de rebond. Le coefficient a quant à lui est obtenu soit en résolvant l'équation 2 avec $\alpha = 6.5$ (trait plein), soit en utilisant directement les valeurs expérimentales des expériences de rebond (triangles noirs).

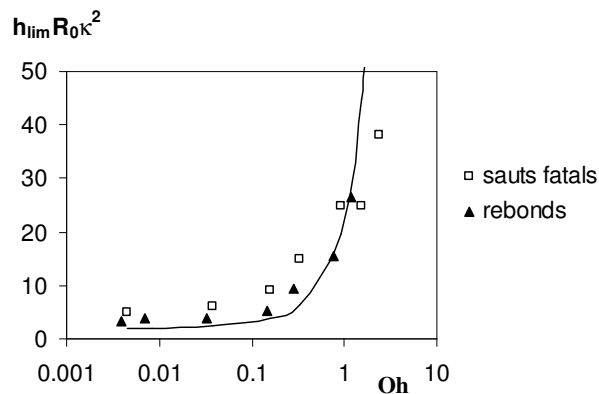


Figure 15 : Hauteur limite de chute (carrés blancs) que peut sauter une goutte enrobée de lycopode sur une surface mouillante en fonction du nombre d'Ohnesorge. Le trait plein et les triangles noirs représentent respectivement le modèle (avec $\alpha = 6.5$) et les données des expériences de rebonds avec $\xi^*/R_0 = 0.67$.

Les données expérimentales pour les sauts fatals et celles issues des expériences de rebonds se superposent relativement bien. On peut donc penser que l'idée d'une augmentation maximale de surface conduisant à la rupture est cohérente. Le modèle (résolution des équations 2 et 3, en trait plein sur la figure) ajuste de manière correcte l'ensemble des données.

III. Bilan

Dans ce chapitre, nous avons montré que ce qui limite la robustesse de la goutte enrobée est l'accroissement de surface à quantité de poudre constante. La goutte est alors d'autant plus robuste qu'elle est visqueuse (elle s'étale moins car l'énergie est dissipée par viscosité) et que les grains sont gros (cet effet est néanmoins faible). De plus, pour améliorer considérablement la robustesse des gouttes, on aura intérêt à travailler sur une surface hydrophobe (avec un grand angle de reculée).

Ces résultats expliquent que les formes à 2 lobes puissent avancer en rebondissant sans se briser. En effet, si l'on travaille par exemple avec un goutte de $10 \mu\text{L}$ ($R_0 = 1.33 \text{ mm}$), les résultats de la Figure 15 donnent accès aux vitesses limites en fonction de la viscosité, ce que nous avons représenté sur la Figure 16.

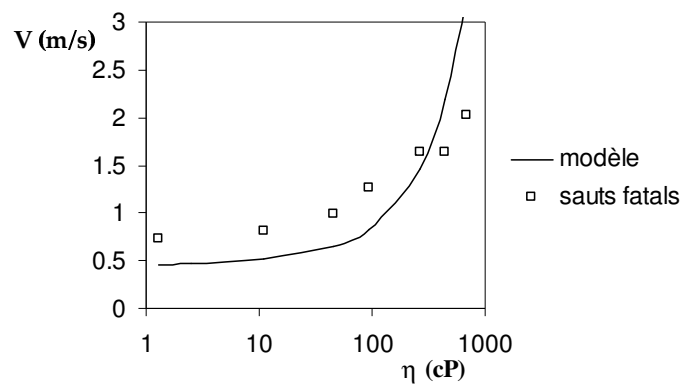


Figure 16 : Vitesse limite d'impact que peut supporter une goutte enrobée de $10 \mu\text{L}$. On compare les données obtenues à partir de saut et le modèle phénoménologique présenté dans ce chapitre.

Les formes à 2 lobes sont obtenues avec des viscosités supérieures à 200 cP . Elles peuvent donc encaisser sans se briser des chocs supérieurs à une vitesse d'impact de l'ordre de 2 m/s . C'est l'ordre de grandeur de la vitesse linéaire des cacahuètes sur le plan, la vitesse d'impact étant inférieure à cette vitesse.

La vitesse d'impact supportable par les gouttes enrobées dans la gamme de viscosité utilisée est de l'ordre du mètre par seconde. Dans le chapitre IV, nous avons constaté que sur une pente de 40° , les gouttes ne peuvent pas aller plus vite que 2.2 m/s sans se briser. Il est difficile d'estimer dans quelle direction la goutte subit un choc, mais c'est l'ordre de grandeur attendu par la robustesse. Dans des expériences de guidage contrôlé, par exemple

par un champ électrique, la goutte enrobée sera finalement suffisamment robuste pour éviter rupture ou coalescence.

Bibliographie

- [1] RICHARD D., « Situations de mouillage nul », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [2] REIN M., « Phenomena of liquid drop impact on solid et liquid surfaces », *Fluid Dynamics Research*, **12** (1993) 61.
- [3] CHANDRA S. et AVEDESIAN C. T., « On the collision of a droplet with a solid surface », *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 432** (1991) 13.
- [4] MESLER R. et SIGLER J., « The behavior of the gas film formed upon drop impact with a liquid surface », *J. of Colloid and Int. Sci.*, **134** (1990) 459.
- [5] SCHELLER L. et BOUSFIELD D. W., « Newtonian Drop Impact with a Solid Surface », *AIChE Journal*, **41** (1995) 1357.
- [6] STOW C. D. et HADFIELD M. G., « An experimental investigation of fluid flow resulting from the impact of a water drop with an unyielding dry surface », *Proc. R. Soc. Lond.*, **A373** (1981) 419.
- [7] FUKAI J., ZHAI Z., POULIKAKOS D., MEGARIDIS C. M. et MIYATAKE O., « Modelling of the deformation of a liquid droplet impinging upon a flat surface », *Physics of Fluids*, **A5** (1993) 2588.
- [8] AZIZ S. D. et CHANDRA S., « Impact, recoil and splashing of molten metal droplets », *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, **43** (2000) 2841.
- [9] HARTLEY G. S. et BRUNSKILL R. T., « Reflection of water drops from surfaces », *Surface Phenomena in Chemistry and Biology*, (1958) 214
- [10] RICHARD D. et QUÉRÉ D., « Bouncing water drops », *Europhysics letters*, **50** (2000) 769

Annexe VII-1

Rebonds de gouttes enrobées visqueuses dans la limite des faibles déformations.

Plusieurs modèles existent pour décrire la déformation d'une goutte de liquide impactant un solide (par exemple [1]-[10]). Cependant, ces modèles s'appliquent mal à notre géométrie et ne permettent pas de décrire les données. Nous avons donc développé un modèle simple pour des gouttes visqueuses très peu déformées.

On lâche une goutte enrobée d'une hauteur H_1 sans vitesse initiale. La goutte atteint le solide avec une vitesse V_1 . Pour les faibles déformations, le rebond peut être vu comme une oscillation [1] et au maximum de son étalement, la goutte prend une forme d'ellipsoïde :

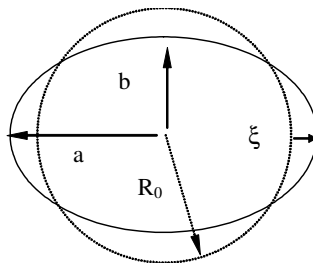


Figure 17 : Déformation en ellipsoïde de la goutte.

On appelle a et b le grand axe et le petit axe de l'ellipsoïde décrit sur la Figure 17. Pour des petites oscillations, on pose $a = R_0 + \xi$ et la surface de la goutte s'écrit :

$$S \approx 4\pi R_0^2 + \frac{32\pi}{5} \xi^2.$$

- *Dissipation visqueuse*

On considère que lors de la déformation de la goutte, il y a de l'énergie dissipée par la viscosité au niveau de la coque de poudre sur une épaisseur de couche limite δ . L'énergie dissipée par viscosité s'écrit alors :

$$E_{\text{vis}} \sim \eta \left(\frac{V_1}{\delta} \right)^2 R_0^2 \delta \frac{\xi}{V_1}$$

car le temps de la déformation est en ξ / V_1 . En outre, l'épaisseur de couche limite étant

d'ordre $\delta \approx \sqrt{\eta\xi/\rho V_1}$, on obtient :

$$E_{\text{vis}} = \alpha \sqrt{\eta\rho R_0^4 \xi V_1^3} \quad (5)$$

où α est un coefficient numérique.

- *Étalement de gouttes enrobées visqueuses*

À l'étalement, l'énergie cinétique initiale à l'impact (c'est-à-dire l'énergie potentielle E_{p1} de la goutte au départ de sa course) est stockée en énergie de surface et dissipée pendant l'écrasement :

$$E_{p1} + \gamma 4\pi R_0^2 = \gamma S + E_{\text{vis}}$$

On obtient ainsi une équation pour ξ :

$$\left(\frac{\xi}{R_0}\right)^2 + \frac{\alpha \sqrt{\eta\rho R_0}}{12 \gamma} \left(\frac{\xi}{R_0}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{E_{p1}}{m}\right)^{3/4} = \frac{5 E_{p1} \rho R_0}{24 m \gamma} \quad (6)$$

où m représente la masse de la goutte.

Si on observe la forme de cette équation et en notant $We = \rho V^2 R_0 / \gamma$ le nombre de Weber qui compare inertie et capillarité, on voit que l'on peut poser :

$$\frac{\xi}{R_0} = a \sqrt{\frac{\rho R_0 E_{p1}}{\gamma m}} = a \sqrt{\frac{We}{2}} \quad (7)$$

où le coefficient a est donné par la résolution de l'équation 8 :

$$a^2 + \frac{\alpha}{12} \sqrt{Oh} a = \frac{5}{24} \quad (8)$$

Oh est le nombre d'Ohnesorge qui ne dépend que des caractéristiques de la goutte :

$$Oh = \left(\frac{\eta^2}{\rho R_0 \gamma}\right)^{1/2} \quad (9)$$

Pour une goutte millimétrique de glycérol, ce nombre vaut typiquement 5 et pour de l'eau $5 \cdot 10^{-3}$.

Ce raisonnement reste valable tant que l'épaisseur de couche limite est très inférieure au rayon R_0 de la goutte. Ceci se traduit par la condition $aOh \ll 1$.

L'étalement varie en $R_0 We^{1/2}$ comme dans le cas discuté dans [1] de faibles déformations sans dissipation (cas des liquides peu visqueux où toute l'énergie cinétique est stockée en énergie de surface ; le terme en Oh est alors négligeable et le coefficient a constant), mais avec un coefficient multiplicatif qui dépend des propriétés de la goutte.

On ne peut faire aucune approximation pour résoudre l'équation 8 pour les liquides visqueux car tous les termes sont du même ordre de grandeur.

Chapitre VIII

Tectites

Table des matières

Chapitre VIII	Tectites	167
I.	Présentation générale	169
II.	Description de l'expérience et allure des résultats	171
	1) Description de l'expérience	171
	2) Tectites de laboratoire	172
III.	Effet de la solidification	174
	1) Résultats expérimentaux dans le tambour	175
	2) Effet des temps caractéristiques dans les expériences sur plan incliné	177
IV.	Application aux tectites réelles	178
	1) Vitesse de rotation des tectites ?	178
	2) Tailles et formes des tectites	179
	3) Bilan	179
	Bibliographie	181

Cette étude expérimentale et qualitative est le fruit d'une collaboration avec Linda Elkins-Tanton, José Bico et John Bush (Départements de Géologie, de Mechanical Engineering et de Mathématiques du MIT, à Boston) [1].

Les tectites sont des pierres de composition extraterrestre que l'on retrouve sur Terre dans des zones définies. Nous nous sommes intéressés aux formes que prennent certaines de ces pierres et nous avons essayé de les reproduire expérimentalement.

I. Présentation générale

Le terme tectite provient du mot grec *tektos* qui signifie « fondu ». Il est supposé que les tectites sont issues d'impacts sur Terre de très gros astéroïdes, datant de plusieurs millions d'années. Ce seraient des morceaux en fusion éjectés du météorite lors de l'impact et envoyés dans l'espace pour ensuite entrer à nouveau dans l'atmosphère et atteindre la surface de la Terre. Les tectites sont en général des objets vitreux de couleur verte à noire [2].

Taille et forme : Les tectites mesurent de quelques millimètres à 20 cm de diamètre. La plupart font typiquement 1 cm et pèsent quelques grammes. Elles peuvent être principalement classées en trois catégories. Les « formes de splash » ressemblent à des gouttes de liquide solidifiées. Elles apparaissent sous forme de sphères, de larmes, d'haltères et de disques. Ce sont les formes les plus communes des tectites. Les « formes ablatées » sont des « formes de splash » qui ont été modifiées par leur passage à travers l'atmosphère de la Terre. Elles portent les traces de fusion sur leur face avant et prennent entre autre des formes de « boutons » ou de « tores » [3]. Le dernier groupe est appelé « tectites de type Muong Nong ». Ce sont des objets avec une structure en couche. Ils peuvent être assez massifs, et le plus gros découvert pèse 12.8 kg. Dans la plupart des tectites, on trouve des bulles. Certaines contiennent du gaz piégé qui a une composition chimique très proche de celle de l'atmosphère et qui correspond à de l'air capturé par la tectite fondue.

Composition : La composition chimique des tectites est similaire à celle des roches ignées, enrichies en silicate et à certains types de roches sédimentaires. Elles sont composées en majorité de silice. Cependant, contrairement aux pierres terrestres « normales », elles contiennent très peu de matières volatiles comme l'eau. D'autres propriétés structurales et chimiques donnent à penser que ces pierres sont d'origine extraterrestre. La plupart des

tectites ont des bulles, preuve possible que la roche est passée par un état fondu, et presque toutes possèdent des particules de pure silice vitreuse. On peut aussi trouver des inclusions en nickel et en fer, typiques de certaines météorites et d'autres en coesite, une sorte de quartz formé à haute pression, souvent associé à des cratères d'impact.

Où trouver les tectites ? On trouve des tectites dans des zones bien définies, réparties un peu partout sur la surface de la Terre. Ces zones correspondent à la surface couverte par les matériaux éjectés des cratères d'impact et couvrent des millions de mètres carrés. Le nom donné aux tectites est dérivé de celui de la zone où elles sont trouvées.

On dénombre principalement sept zones connues. La plus grande recouvre une grande partie de l'Australie, le sud de l'Asie et une large portion de l'océan Indien. Les autres localisations sont l'Europe centrale, le sud-est des Etats-Unis (le plus vieux, 35 millions d'années), la Côte d'Ivoire, le désert de Libye, la Mauritanie et l'Asie Centrale. Tous les cratères n'ont cependant pas été retrouvés.

Sur la Figure 1, on peut voir une collection de tectites de « formes de splash ».



Figure 1 : Collection de tectites (source : Internet).

Nous nous focalisons ici sur les tectites en « formes de splash » (les plus fréquentes). La Figure 2 présente deux exemples de ces tectites, tirés du livre "Tektites and their origin" écrit par O'Keefe en 1976 [4].

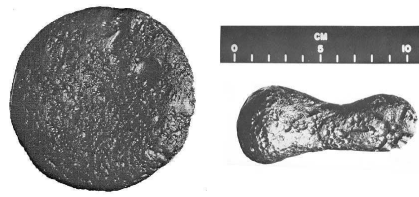


Figure 2 : Exemples de tectites, en disque biconcave ou à 2 lobes. La taille typique de ces objets est 10 cm.

Ces formes, qui peuvent être des sphères, des ellipsoïdes, des disques biconcaves ou des formes à deux lobes, ressemblent beaucoup aux formes que peuvent prendre les gouttes en rotation et sont décrites par la plupart des chercheurs comme telles. Les tectites retrouvées mesurent de quelques dizaines de microns à 5 cm pour les sphères et 15 cm pour les formes à 2 lobes. Dans ce chapitre, nous allons essayer de valider l'hypothèse que ces formes proviennent de la rotation des roches en fusion. Nous allons ensuite essayer de relier les formes obtenues avec les conditions de fabrication.

Pour simuler leur genèse, nous allons supposer que les tectites sont des gouttes de liquide en rotation quand elles naissent et qu'elles se solidifient au cours de leur mouvement, ce qui fixe leur forme. Nous avons choisi, à l'échelle du laboratoire, de travailler avec du métal fondu que l'on met en rotation et que l'on laisse solidifier pendant le mouvement.

II. Description de l'expérience et allure des résultats

1) Description de l'expérience

Pour étudier une goutte de liquide isolée en rotation, nous choisissons de mettre des gouttes en mouvement sur des solides (ce qui imiterait les tectites roulant sur le sol), et qui peuvent être sujettes à un décollage. Ainsi, nous pourrions observer les transitions entre les formes induites par de tels événements.

Le système que nous avons étudié est celui de gouttes de métal fondu. Nous utilisons de l'étain pur (tension de surface $\gamma \sim 530 \text{ mN.m}^{-1}$, densité $\rho \sim 7130 \text{ kg.m}^{-3}$ et température de fusion $T_m = 232 \text{ }^\circ\text{C}$) et travaillons sur des surfaces isolantes thermiquement (comme du bois).

La goutte chaude de liquide est dans une situation de non-mouillage et se solidifie avec le temps.

Pour fabriquer les gouttes, nous utilisons un fer à souder avec lequel nous faisons fondre un barreau d'étain, nous déversons ensuite les gouttes sur le substrat utilisé. Nous sommes ainsi limité, dans ce processus, par la longueur capillaire du système qui est de 2.7 mm.

Pour mettre les gouttes en rotation, nous avons utilisé deux géométries particulières. La première consiste en un plan incliné en bois sur lequel la goutte roule. Le deuxième type d'expériences utilise un tambour motorisé tournant à vitesse imposée (Figure 3).

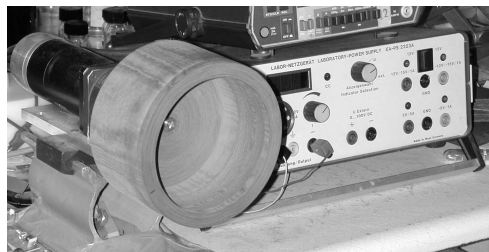


Figure 3: Tambour tournant motorisé en céleron (mélange de bois et de fibres).

Le tambour est en *céleron* (matériau composite mélange de bois et de fibres) qui est un excellent isolant thermique. Il possède une légère incurvation au centre pour que la goutte ne sorte pas du tambour pendant son mouvement. Ce montage permet d'atteindre des régimes stationnaires.

2) Tectites de laboratoire

En plaçant une goutte d'étain en fusion dans le tambour tournant à vitesse constante, nous pouvons observer les modifications des formes qu'elle prend ainsi que son état final après solidification. Dans le tambour, ces formes finales sont presque toujours biconcaves (elles peuvent même être percées au centre). Pour les gouttes descendant un plan incliné puis collectées dans un bain d'eau placé à son extrémité, deux types de forme ont été obtenues : des formes à 2 lobes et des formes axisymétriques (Figure 4).

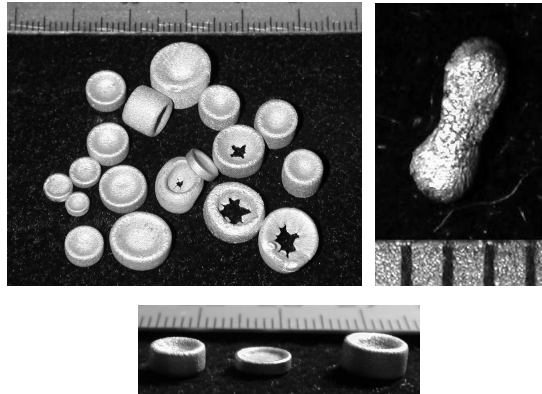


Figure 4: Formes solides obtenues avec de l'étain fondu. Dans la famille axisymétrique, certaines formes sont trouées.

La taille typique obtenue pour la famille axisymétrique est de l'ordre du centimètre ou moins et de quelques millimètres pour la famille à 2 lobes.

Nous pouvons aussi observer la dynamique de formation de ces tectites artificielles dans le tambour : nous fixons la vitesse de rotation du tambour puis nous plaçons une goutte d'étain en fusion. Nous travaillons dans une pièce à 25°C, donc la température de la goutte décroît avec le temps et sa viscosité augmente. Au début de l'expérience, la goutte, qui n'est pas assez visqueuse pour se mettre en rotation solide, prend la forme d'une crêpe (Figure 5) et reste proche du bas du tambour.

Quand la viscosité devient suffisamment élevée (c'est-à-dire quand le nombre de Reynolds $Re = \rho VR/\eta$ qui compare les effets inertiels aux effets visqueux devient petit), la goutte se met en rotation solide et sa forme évolue partant de la crêpe (ou d'une sphère pour les petites gouttes) vers le disque, avant de devenir biconcave.

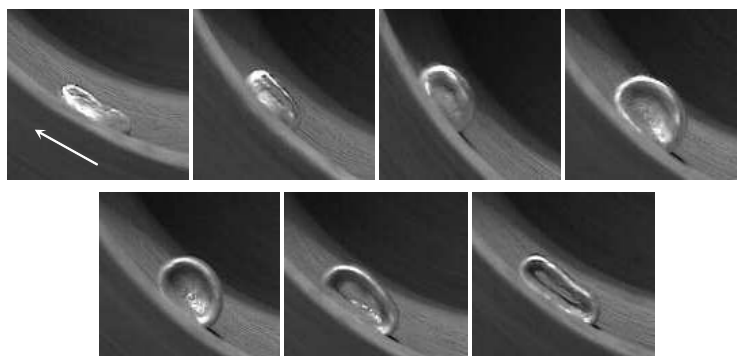


Figure 5: Transformation dynamique d'une goutte d'étain fondu qui solidifie dans un tambour tournant. Le temps entre chaque image est de 0,2 s. La flèche indique la direction de rotation du tambour et représente 1 cm.

À la fin de la solidification, un trou peut apparaître au centre de la forme biconcave. Si la goutte est encore suffisamment fluide comme dans la Figure 5, la roue immédiatement se pince sous l'effet de la gravité.

Pour obtenir des formes à 2 lobes, il est préférable de se placer dans la géométrie du plan incliné. Ainsi, dans les séquences de la Figure 6 on peut voir diverses formes obtenues sur un plan incliné à 30°.

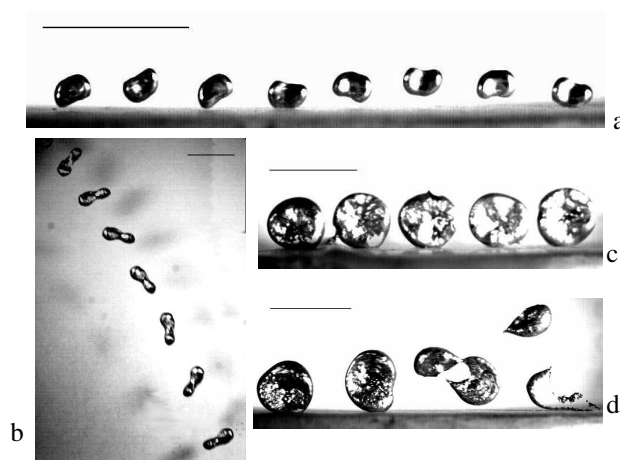


Figure 6 : Formes de gouttes d'étain solidifiant sur un plan incliné à 30° ou au-delà de ce plan, en chute libre (b). Le mouvement va de la gauche vers la droite. Les traits correspondent à 1 cm. Intervalle entre deux images : 8 ms (a), 10 ms (b), 12 ms (c), 16 ms (d).

Les deux premières séquences représentent des formes à 2 lobes sur le plan incliné ou dans l'air après avoir roulé sur le plan. La troisième séquence représente une forme biconcave et la dernière une forme biconcave qui amorce une transformation en forme à 2 lobes puis qui se troue par le centre et finalement éjecte en se pinçant une goutte ayant la forme d'une larme. C'est une forme que l'on retrouve dans les vraies tectites sous le nom de « tear-drop » (on en distingue quelques unes sur la photo de la Figure 1).

III. Effet de la solidification

Dans la Figure 5, la rotation solide apparaît typiquement après $t_r = 2$ s, un temps inférieur au processus de solidification qui est de 5 s. t_r est relativement facile à mesurer car il correspond

au moment où la goutte se met subitement à remonter dans le tambour (deuxième image) juste avant de se transformer sous l'effet de la centrifugation.

Les temps caractéristiques de mise en rotation solide et de solidification semblent tout deux important pour le comportement des gouttes et vont être étudiés plus en détail dans cette section.

1) Résultats expérimentaux dans le tambour

Lors de l'expérience décrite dans la Figure 5, où une goutte d'étain en fusion est placée dans un tambour tournant à vitesse constante, nous pouvons mesurer la position angulaire de la goutte en fonction du temps (Figure 7). Au début, elle oscille autour d'une position d'équilibre basse (d'ordre 10°) puis elle remonte subitement pour passer par un maximum au temps t_R que nous pouvons interpréter comme étant celui de mise en rotation. La goutte atteint alors une nouvelle position d'équilibre (vers 30°) avant de se pincer et de se solidifier au temps t_S .

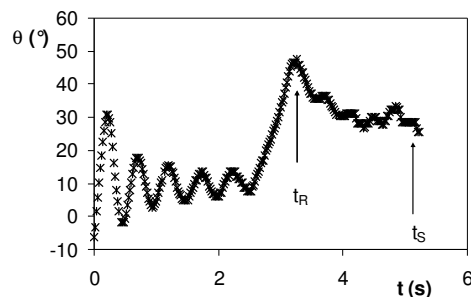


Figure 7 : Position angulaire de la goutte dans le tambour en fonction du temps. Les deux temps caractéristique t_R et t_S sont indiqués.

Toutes ces expériences ont été réalisées avec le même fer à souder et donc avec des températures initiales comparables pour les gouttes de métal en fusion. Dans la Figure 8, nous représentons ces deux temps caractéristiques en fonction du rayon de la goutte. Ces temps sont relativement courts, inférieurs à la dizaine de secondes. Le temps de mise en rotation solide augmente avec la taille de la goutte alors que celui de solidification semble indépendant de ce paramètre.

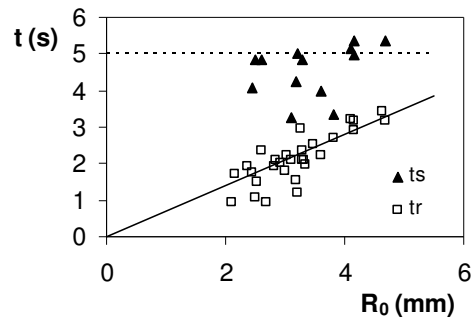


Figure 8: Temps de mise en rotation solide (t_R : carrés blanc) et de solidification (t_S : triangles noirs) en fonction du rayon initial de la goutte.

À mesure que le temps passe, la température de la goutte de métal liquide décroît et donc sa viscosité augmente. D'après les études sur les gouttes enrobées présentées dans les chapitres précédents, on s'attend à ce que la rotation solide commence quand la viscosité est assez grande pour obtenir un nombre de Reynolds d'ordre unité. Si nous prenons les valeurs des différents paramètres, ce critère donne une viscosité nécessaire à la rotation solide entre 10^3 et 10^4 mPa.s. Nous pouvons ainsi penser que le refroidissement sera d'autant plus rapide que la goutte est petite.

La dépendance du temps de mise en rotation solide avec le rayon de la goutte semble linéaire, nous choisissons de diviser les temps étudiés par le rayon pour étudier les variations avec la vitesse de la goutte (Figure 9).

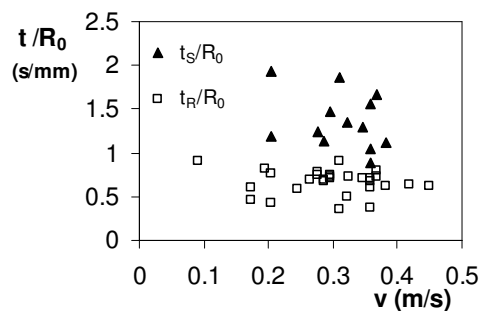


Figure 9: Temps d'apparition de la rotation solide (t_R : carrés blancs) et de solidification (t_S : triangles noirs) divisés par le rayon de la goutte, en fonction de la vitesse tangentielle du tambour.

La dépendance du temps de mise en rotation solide avec la vitesse tangentielle du tambour

est très faible. Le temps de solidification décroît légèrement avec la vitesse. Ceci est cohérent avec le fait que plus la goutte va vite, plus elle est étirée et présente de la surface.

2) Effet des temps caractéristiques dans les expériences sur plan incliné

Dans les expériences sur plan incliné, un autre temps intervient : c'est celui nécessaire pour atteindre la vitesse finale sous l'accélération de la gravité. Lors de l'étude de la chute libre au-delà d'un plan incliné, nous pouvons modifier différents paramètres (la longueur du plan incliné, la température du fer à souder et la taille de la goutte) afin d'observer les formes obtenues.

Dans le cas des gouttes enrobées, les gouttes centrifugées se transforment systématiquement en formes à 2 lobes quand elles quittent le plan incliné. Dans le cas des gouttes d'étain, la forme va dépendre de l'état d'avancement de la centrifugation et de la solidification. Sur la Figure 10 par exemple, la goutte qui avait sur le plan incliné la forme d'un disque biconcave s'est solidifiée au centre, à l'endroit le plus fin ; une fois en l'air, la partie liquide continue d'être centrifugée et commence à former deux lobes alors que le centre est figé.



Figure 10 : Chute libre d'une goutte d'étain après un plan incliné à 30°. Il y a 10 ms entre chaque image.

On obtient finalement une forme mixte entre les 2 lobes et le disque. Cette forme se retrouve dans les tectites naturelles.

Si la goutte n'a pas le temps d'être centrifugée avant la sortie du plan incliné, on obtient les mêmes formes que pour des gouttes peu visqueuses dévalant un plan incliné en situation de mouillage nul, c'est-à-dire des baleines avec un appendice qui peut se déplacer sur la goutte [5]. Un exemple de baleine est montré sur la Figure 11.

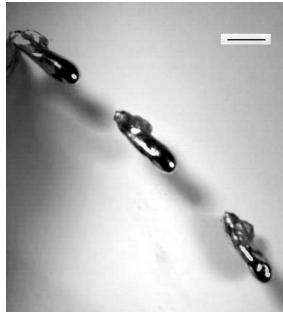


Figure 11 : Forme baleine à la sortie du plan incliné. Il y a 20 ms entre chaque image.

Dans cette configuration nous obtenons également des formes insolites qui semblent être des variantes de la situation précédente (Figure 12).

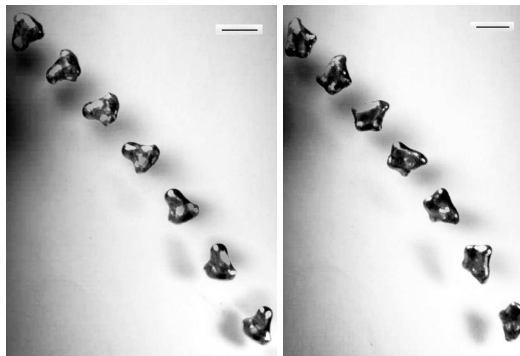


Figure 12 : Formes à 3 et 4 lobes à la sortie d'un plan incliné à 30°. Il y a 10 ms entre chaque image.

Nous pourrions appeler ces formes à 3 et à 4 lobes. Cette situation très particulière s'observe pour des gouttes qui solidifient partiellement avant de subir l'effet d'une rotation d'ensemble. Il ne semble pas que l'on observe ces formes pour des tectites naturelles.

Ces formes nous font penser aux formes d'équilibre à 3 et 4 lobes de gouttes en rotation prévues par Brown et Scriven et présentées au chapitre III.

IV. Application aux tectites réelles

1) Vitesse de rotation des tectites ?

Les vitesses tangentielles mises en jeu dans les expériences décrites ici sont assez faibles (typiquement autour de 0.3 m/s). Connaissant la taille des tectites réelles, nous pouvons en

déduire, à l'aide des formes d'équilibre de gouttes en rotation calculées numériquement, le nombre de Bond de rotation auquel la forme s'est figée. Connaissant la masse m des tectites, on remonte ainsi à la vitesse angulaire :

$$\omega = \Omega_s \sqrt{\frac{32\pi\gamma}{3m}}$$

En prenant $\gamma \sim 300$ mN/m et $\Omega_s \sim 0.7$ (valeur correspondant aux formes biconcaves), nous obtenons une vitesse de rotation de formation des tectites de l'ordre de 3.5 rad/s pour les plus grosses ($m \sim 400$ g). Cette valeur est relativement faible comparée aux vitesses d'éjection des gouttes lors de l'impact : les vitesses d'impact des météorites sont de l'ordre de 10 km/s mais l'éjection de gaz suite à ces impacts peut conduire à des vitesses beaucoup plus faibles pour les tectites [6]. Si nous supposons que les tectites, de taille capillaire, atteignent leur vitesse terminale de chute libre, nous pouvons l'estimer à 30 m/s. Ceci engendre des vitesses de rotation de l'ordre de 300 rad/s.

2) Tailles et formes des tectites

Suite à l'étude des formes des gouttes en rotation effectuée notamment dans les chapitres III et V, plusieurs choses nous surprennent quand on observe des tectites réelles. D'abord la taille qu'elles peuvent atteindre, jusqu'à 15 cm pour la famille des formes à 2 lobes par exemple. En laboratoire, nous sommes limité par la taille capillaire à cause de la technique de production des gouttes. La deuxième particularité des tectites est d'être parfois biconcaves. Nous avons vu au chapitre V que ces formes sont instables par rapport à celles à 2 lobes. Dans le cas des gouttes enrobées, nous arrivons à les stabiliser grâce à la présence du solide, mais qu'en est-il des tectites ? Est-ce un effet dû à la très grande viscosité de la pierre en fusion se solidifiant ? Ou a un comportement non newtonien de la roche en fusion ? La question reste ouverte.

3) Bilan

En conclusion, il est possible de reproduire au laboratoire certaines formes très remarquables adoptées par les tectites. Ceci semble donc confirmer l'hypothèse d'un couplage entre rotation et solidification, pour comprendre l'origine de ces formes. Mais certaines questions restent ouvertes. La plus fondamentale est celle de la grande taille des tectites et nécessite un système expérimental plus complexe pour mieux prendre en compte les conditions

naturelles. Une autre question non résolue est celle de la stabilité des formes biconcaves. Enfin, un certain nombre d'objets observés au laboratoire ne semblent pas exister dans la nature (formes trouées, baleines, formes à 3 ou 4 lobes), et nous ne comprenons pas encore le mécanisme précis de sélection de ces formes.

Bibliographie

- [1] ELKINS TANTON L. T., AUSSILLOUS P., BICO J., QUÉRÉ D. et BUSH J. W. M., « A laboratory model of tektites », soumis à *Meteoritics and Planetary Science* (2002).
- [2] [http://gamineral.org/Tektites .htm](http://gamineral.org/Tektites.htm), « Meteorites from Earth : the tale of tektites » par R. JAKIEL.
- [3] MCCOLL D. H., « A flanged toroidal tektite from Australia », *Meteoritics and Planetary Science*, **32** (1997) 981.
- [4] O'KEEFE J. A., « Tektites and Their Origin », Elsevier, New York, (1976).
- [5] D. RICHARD, « Situations de mouillage nul », *thèse de l'Université Paris VI*, (2000).
- [6] MELOSH H. J. et VICKERY A. M., « Melt droplet formation in energetic impact events », *Nature*, **350** (1991) 494.

Chapitre IX

Bulles rampantes

Table des matières

Chapitre IX	Bulles rampantes.....	183
I.	Principe et description de l'expérience.....	185
	1) Principe.....	185
	2) Description de l'expérience.....	185
	3) Forme statique des bulles.....	187
	4) Allure des résultats.....	189
II.	Modèles.....	190
	1) Crêpes.....	191
	2) Petites bulles.....	193
III.	Résultats expérimentaux.....	194
	1) Dépendance avec la taille de la bulle.....	194
	2) Dépendance avec l'inclinaison pour le régime crêpe.....	195
	3) Frottement visqueux ?.....	195
IV.	Crêpes solides.....	196
	1) Description de l'expérience.....	196
	2) Allure des résultats.....	197
	3) Discussion.....	199
V.	Bilan.....	201
	Bibliographie.....	203

Nous avons vu au chapitre II, que des gouttes enrobées visqueuses dévalant sur un plan faiblement incliné ont un comportement très inhabituel : les gouttelettes vont d'autant plus vite qu'elles sont petites, une fois le régime stationnaire atteint, alors que la vitesse des grosses gouttes est indépendante de leur taille. Ce comportement est lié à la forme statique des gouttes en mouillage nul. Il est intéressant de savoir si d'autres objets en mouillage nul, a priori de même forme statique, vont avoir le même comportement. Ainsi, dans ce chapitre, nous allons étudier la dynamique d'une bulle immergée dans un liquide visqueux et rampant sous un plan incliné totalement mouillé par le liquide.

I. Principe et description de l'expérience

1) Principe

Nous nous intéressons au mouvement d'une bulle d'air placée sous un plan incliné, dans un liquide visqueux qui mouille totalement le solide. On peut voir dans la Figure 1 que la bulle se raccorde tangentiellement au niveau du solide : un film liquide s'intercale entre elle et le solide. Nous sommes donc à nouveau dans une situation de mouillage nul, sans contact direct entre la bulle et le solide. Par rapport au cas étudié jusqu'ici, on a inversé le rôle de l'air et du liquide.



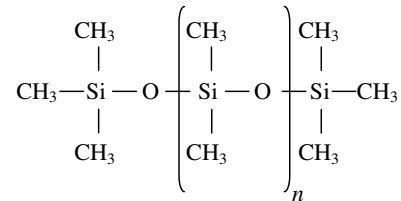
Figure 1 : Bulle sous un solide qu'elle ne « mouille » pas.

2) Description de l'expérience

Nous remplissons un réservoir de liquide dans lequel nous immergeons une plaque solide de plastique, transparente et graduée. Nous introduisons ensuite par en-dessous une bulle d'air de volume contrôlé ($= 4/3\pi R_0^3$). Pour satisfaire une condition de mouillage nul entre la bulle et le plan incliné, le liquide doit mouiller complètement le solide (le paramètre d'étalement $S = \gamma_{sv} - \gamma_{sl} - \gamma$ est positif). Nous avons ainsi choisi d'utiliser des huiles silicones

de la famille 47V (Rhodorsil), qui sont en mouillage total sur le solide utilisé.

La famille 47V correspond à des huiles de type polydiméthylsiloxanes terminées par des groupements méthyles. Leur viscosité dépend du degré de polymérisation n .



Nous avons à notre disposition une très large gamme de viscosité (de 1 à 2500000 cSt). Ce sont des liquides newtoniens sur une grande gamme de taux de cisaillement, en particulier dans nos conditions d'utilisation. Nous avons surtout utilisé les huiles 47V 300 et 47V 1000 (de viscosités cinématiques respectives 300 et 1000 cSt). Leur densité est de 0,97 et leur tension superficielle vaut 21,1 mN/m.

La Figure 2 représente le dispositif expérimental. Quand on incline la plaque solide d'un angle α faible (de 1 à quelques degrés), la bulle monte le long du solide.

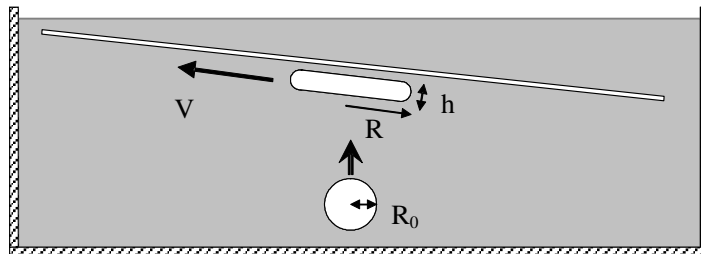


Figure 2 : Dispositif expérimental.

La Figure 3 montre une grosse bulle ramper ainsi. Comme le liquide est en mouillage total sur le solide, un film mince d'épaisseur e s'intercale entre la bulle et le solide. La bulle atteint un régime stationnaire de vitesse V constante. Toutes les bulles avancent, même les plus petites, de l'ordre de 100 μm , ce qui montre bien qu'il n'y a pas de mouillage - l'existence d'une ligne de contact bloquerait irrémédiablement des gouttes aussi petites sur des pentes aussi faibles.

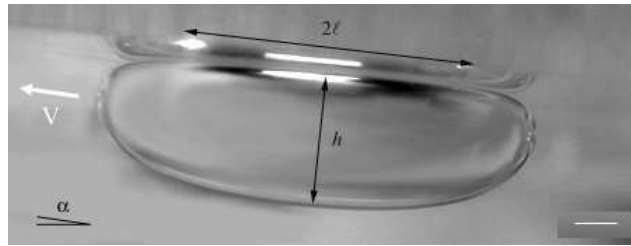


Figure 3 : Une bulle d'air (de volume 200 μl) en train de remonter un solide incliné dans un liquide visqueux totalement mouillant (huile silicone 970 mPa.s). Le trait représente 1.5 mm, la longueur capillaire.

3) Forme statique des bulles

La bulle est soumise aux forces capillaires qui tendent à minimiser sa surface et donc à la rendre sphérique et à la poussée d'Archimède qui tend à faire monter son centre de gravité. Dans le cas des grosses bulles (au dessus de la longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ qui est ici de 1.5 mm), nous sommes dans une situation exactement semblable à celle du mouillage nul, avec une crête d'épaisseur constante quel que soit le volume initial, et égale à $2\kappa^{-1}$. Comme dans le chapitre I, le rayon ℓ de la zone de contact définie sur la Figure 3 résulte simplement de la conservation du volume :

$$\ell \kappa \approx \sqrt{\frac{2}{3}} (R_0 \kappa)^{3/2} \quad (1)$$

où R_0 est le rayon initial de la bulle.

Dans le cas des petites bulles, effectuons le même genre de raisonnement que dans le cas du mouillage nul du chapitre I, mais en tenant compte de la pression hydrostatique extérieure. La bulle est pratiquement sphérique sauf au niveau de sa base où l'effet de la poussée d'Archimède la déforme et définit un disque de contact de rayon ℓ (Figure 4).

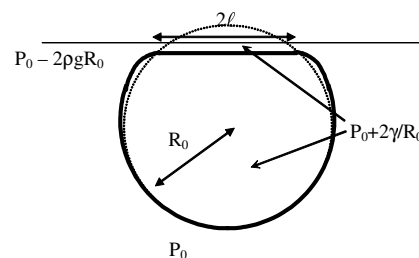


Figure 4 : Schéma d'une petite bulle, en dessous de la longueur capillaire.

La pression autour de la bulle est la pression hydrostatique dans le liquide et on appelle P_0 la pression au sommet de la sphère. Au repos, la pression dans la bulle est uniforme. Elle est donnée par le saut de pression dû aux courbures de la sphère :

$$P = P_0 + \frac{2\gamma}{R_0}$$

Comme la zone de contact est plane, la pression à l'intérieur du film de liquide qui isole la bulle est la même que dans la bulle. Dans le champ hydrostatique, il y a donc une surpression dans le film qui s'écrit :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R_0} + 2\rho g R_0 \approx \frac{2\gamma}{R_0}$$

En effet, dans le cas présent des petites bulles, le terme hydrostatique est négligeable devant celui lié aux forces capillaires. Or, c'est cette surpression dans la zone de contact qui équilibre la poussée d'Archimède totale de la goutte :

$$\Delta P \pi \ell^2 = \frac{4}{3} \rho g \pi R_0^3$$

On en déduit la taille de la zone de contact pour les petites bulles :

$$\ell \approx \kappa^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} (R_0 \kappa)^2 \quad (2)$$

Théoriquement, la forme statique de la bulle est donc exactement la même que celle des gouttes liquides en mouillage nul.

Nous pouvons vérifier ce résultat expérimentalement : comme pour les gouttes enrobées, la taille de la zone de contact des bulles avec le solide est mesurée au microscope. Les données sont reportées dans la Figure 5. Les deux droites représentent respectivement les pentes 2 et 1.5 avec le coefficient numérique $\sqrt{2/3}$. On trouve un bon accord avec le modèle.

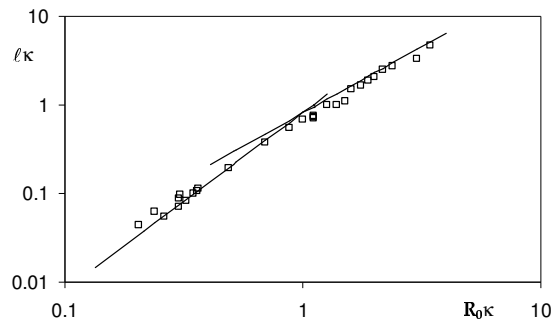


Figure 5 : Zone de contact dans les expériences de bulles. Les carrés correspondent aux mesures et les traits pleins aux équations 2 et 1.

Il est donc cohérent de parler de mouillage nul dans ces expériences de bulles rampantes. Nous allons maintenant nous intéresser au mouvement des bulles.

4) Allure des résultats

Nous mesurons la position x du ménisque avant de la bulle en fonction du temps, sur un trajet d'une dizaine de centimètres. Nous en déduisons la vitesse de la bulle ($V = dx/dt$). La bulle atteint un régime stationnaire de vitesse constante et, contrairement à ce qui se passe avec des gouttes enrobées, cette vitesse croît avec le rayon de la goutte.

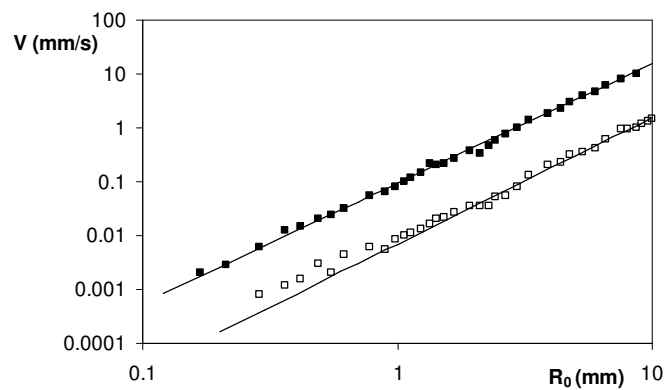


Figure 6 : Vitesse des bulles en fonction de leur rayon R_0 (carrés noirs : $\alpha = 5.7^\circ$, carrés ouverts : $\alpha = 1^\circ$). Pour les grosses gouttes ($R_0 > 1.5$ mm), les données suivent une loi d'échelle (en traits pleins). Les exposants mesurés sont 2.22 et 2.34, plus grands que 1.5, que donnerait une simple loi de Stokes.

Le moteur du mouvement est la poussée d'Archimède, qui s'écrit $\frac{4}{3} \pi \rho g R_0^3 \sin \alpha$. Il faut maintenant identifier l'endroit où se fait la dissipation visqueuse.

Si on néglige la présence de la plaque solide, la force visqueuse est de type Stokes : $F_1 \sim \eta VR$, où R est la taille maximale de la bulle ($R \sim R_0$ pour les petites bulles et $R \sim \ell \sim R_0^{3/2} \kappa^{1/2}$ pour les grosses). En égalant les deux forces, on obtient une loi de vitesse en $R_0^{3/2} \sin\alpha$ pour les crêpes et en $R_0^2 \sin\alpha$ pour les bulles sphériques. La Figure 6 montre que l'on peut effectivement modéliser le mouvement des crêpes (pour des rayons supérieurs à la longueur capillaire qui fait 1.5 mm) par une loi de puissance mais les exposants obtenus sont de l'ordre de 2.3. Pour les petites bulles, les données s'écartent de la loi précédente et pourraient être compatibles avec la puissance 2, et donc correspondre à une dissipation de type Stokes. On peut également tester la dépendance de la vitesse avec l'inclinaison du solide (Figure 7). La dépendance en $\sin\alpha$ n'est pas linéaire, ni pour les grosses, ni pour les petites bulles. On trouve plutôt des puissances en 1.4 ou 1.3.

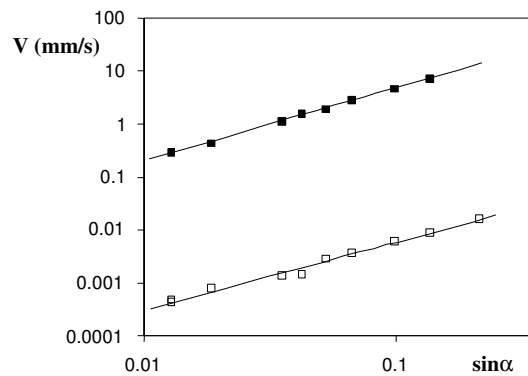


Figure 7 : Vitesse des bulles en fonction de la pente imposée ; carrés noirs : $R_0 = 6$ mm (crêpes) et carrés ouverts : $R_0 = 0.3$ mm (petites bulles). Les droites, de pentes respectives 1.4 et 1.3, montrent que la dépendance en $\sin\alpha$ n'est pas linéaire.

Ainsi, la dissipation visqueuse n'est pas semblable à celle des gouttes enrobées (les grosses bulles remontent plus vite que les petites) mais elle reste cependant originale, car on ne retrouve pas une simple loi de Stokes. Dans la partie suivante, nous allons prendre en compte la présence du plan incliné et décrire la dissipation visqueuse dans le film de lubrification qui s'intercale entre le solide et la bulle.

II. Modèles

Comme les vitesses sont faibles (au maximum le centimètre par seconde), on peut considérer que la bulle garde, sauf dans la région où le film se forme, une forme quasi-statique : les petites bulles sont pratiquement sphériques et ont une zone de contact de taille ℓ donnée par

l'équation 2 ; les grosses gouttes sont d'épaisseur constante, égale à $2\kappa^{-1}$ et la taille de la zone de contact est donnée par l'équation 1. La dissipation visqueuse provenant à la fois des frottements dans le volume et des frottements proches de la paroi, comparons d'abord ces deux contributions.

1) Crêpes

La dissipation dans le volume s'écrit $F_1 \sim \eta VR$, où $R \sim \ell \sim R_0^{3/2} \kappa^{1/2}$ est la taille maximale de la crêpe.

La dissipation visqueuse proche de la paroi est associée à la formation d'un film entre la bulle et le solide. Pour caractériser ce film, on travaille dans le référentiel où la bulle est fixe. Le problème revient à la création d'un film de lubrification entraîné par un solide avançant à la vitesse V . Ce problème est similaire à celui de l'entraînement d'un film de liquide par une plaque solide [1], ou à la déposition d'un film derrière une goutte avançant dans un tube [2]-[3] ou dans une cellule de Hele-Shaw [4].

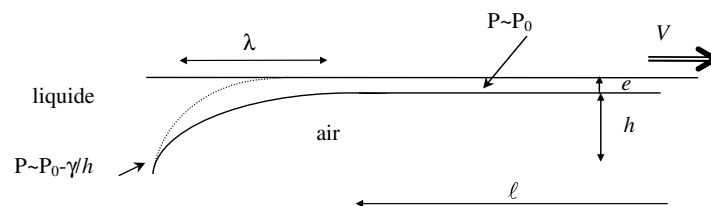


Figure 8 : Zoom de la région où le film de lubrification se forme, dessiné dans le référentiel où la goutte est fixe. λ est la longueur du ménisque dynamique et la ligne pointillée représente la position de l'interface liquide/air à vitesse nulle

À petit nombre capillaire ($Ca = \eta V / \gamma$), la bulle est légèrement déformée par le mouvement et le processus de dépôt peut être décrit par trois zones : un film de lubrification d'épaisseur constante e , un ménisque statique de courbure de l'ordre de h^{-1} (l'autre courbure, d'ordre ℓ^{-1} est négligeable pour les crêpes) et un ménisque dynamique de taille λ qui les connecte. Il n'y a pas de dissipation dans le film d'épaisseur e constante car il est avancé en bloc avec le solide.

Le ménisque dynamique provient d'un équilibre entre les forces capillaires qui s'opposent à la création du film de lubrification et les forces d'entraînement visqueux qui le créent. La différence de pression entre le film et le ménisque statique est de l'ordre de γ/h , c'est-à-dire

$\gamma\kappa$. Le ménisque dynamique a une épaisseur typique e et si l'on équilibre les deux forces, on obtient dimensionnellement :

$$\frac{\eta V}{e^2} \sim \frac{\gamma\kappa}{\lambda}$$

Au point où les ménisques dynamique et statique se raccordent, les pressions de Laplace et donc les courbures sont égales, ce qui permet d'estimer la longueur λ en fonction de l'épaisseur e :

$$\frac{e}{\lambda^2} \sim \kappa$$

Des deux équations précédentes, on tire la loi habituelle d'entraînement visqueux d'un film (Landau & Levich [1]) :

$$e \approx \kappa^{-1} \text{Ca}^{2/3}$$

La dissipation visqueuse a lieu principalement dans le ménisque dynamique, dont le périmètre vaut $2\pi\ell$. La force visqueuse s'écrit dimensionnellement : $F_2 \sim (\eta V/e)\lambda\ell$. Utilisant les deux équations précédentes, on en déduit la force de friction visqueuse F_2 dans le ménisque dynamique :

$$F_2 \sim \gamma\ell \text{Ca}^{2/3} \quad (3)$$

Si on écrit l'égalité entre cette force de friction et la poussée d'Archimède $\rho g \sin \alpha R_o^3$, en négligeant la force de Stokes ($F_2 \gg F_1$), on obtient finalement pour la vitesse de la crête :

$$V \sim \frac{\gamma}{\eta} (R_o \kappa)^{9/4} \sin^{3/2} \alpha \quad (4)$$

Ce modèle prévoit une dépendance non linéaire avec le rayon de la goutte (puissance 2.25) et avec la pente (puissance 1.5).

La condition pour établir cette équation ($F_2 \gg F_1$) est une condition de petit nombre capillaire. C'est une hypothèse déjà faite pour établir les équations dans le ménisque

dynamique et qui est satisfaite dans les expériences.

L'épaisseur déduite de ce modèle varie entre 10 μm et 100 μm , et est donc très supérieure à la rugosité du solide (typiquement 1 μm). À très faible vitesse, la force visqueuse F_2 devient très faible ainsi que l'épaisseur du film. Il se peut alors que la friction visqueuse associée avec le liquide compris dans la rugosité du solide devienne dominante. Ceci conduirait alors à une friction linéaire avec la vitesse, qui varierait linéairement avec la force motrice.

Une autre explication peut être proposée pour décrire la dissipation observée : l'arrière de la goutte peut être vu comme un coin de liquide avançant près d'un solide à la vitesse V . L'angle d'avancée obéit à la loi de Tanner [5] :

$$\theta^3 \approx \text{Ca} \ln \left(\frac{x_M}{x_m} \right) \quad (5)$$

Dans cette équation, les distances x_M et x_m correspondent aux bornes supérieures et inférieures du coin. On pourra prendre comme bornes h et e , si bien que le facteur logarithmique apparaît être d'ordre unité. En outre, même si e dépend de la vitesse, on s'autorisera à prendre ce facteur comme une constante, à cause de la faiblesse de la dépendance logarithmique. La puissance dissipée dans le coin, dont la longueur est d'ordre ℓ , est alors en $\eta (V^2 / \theta) \ln(x_M / x_m)$ et correspond à la force F_3 :

$$F_3 \sim \gamma \ell \text{Ca}^{2/3} \ln^{2/3} \left(\frac{x_M}{x_m} \right) \quad (6)$$

Cette force est similaire en loi d'échelle à la force F_2 (équation 3) et son intensité est comparable. Cependant, ce raisonnement concernant l'arrière de la bulle, il semble plus vraisemblable que la dissipation proviennet de la formation du film, à l'avant de la bulle.

2) Petites bulles

Le cas des petites bulles ($R_0 \kappa < 1$) est plus compliqué. Les longueurs e et λ dépendent uniquement de R_0 et du nombre capillaire. En utilisant les mêmes raisonnements que précédemment on a $F_1 \sim \eta V R_0 \sim \gamma R_0 \text{Ca}$ et $F_2 \sim \gamma \ell \text{Ca}^{2/3}$ avec $\ell \kappa \sim (R_0 \kappa)^2$. La condition $F_2 \gg F_1$ devient $\text{Ca}^{1/3} \ll R_0 \kappa$ et n'est pas forcément vérifiée. Les corrections dues à la force de

Stokes F_1 doivent être prises en compte. Si l'on équilibre la quantité $F_1 + F_2$ avec la force motrice $\rho g \sin \alpha R_0^3$, on obtient l'équation suivante pour la vitesse :

$$aCa + bCa^{2/3}(R_0\kappa) \sim \sin\alpha(R_0\kappa)^2 \quad (7)$$

où a et b sont des coefficients numériques.

Les solutions de l'équation 7 varient, en fonction de $R_0\kappa$, avec un exposant compris entre $3/2$ et 2 , et en fonction de $\sin\alpha$, avec un exposant entre 1 et $3/2$. Ceci correspond aux observations (Figures 6 et 7), mais il est hasardeux d'être plus quantitatif, la variation en nombre capillaire étant trop faible pour espérer tirer les comportements asymptotiques.

Ces modèles nous incitent donc à reprendre les expériences de façon plus systématique.

III. Résultats expérimentaux

1) Dépendance avec la taille de la bulle

Sur la Figure 9, plusieurs séries de données sont représentées, dans les coordonnées suggérées par les modèles : en ordonnée, le nombre capillaire $Ca = \eta V/\gamma$ (équivalent à la vitesse normalisée) et en abscisse, le rayon R_0 de la bulle normalisée par la longueur capillaire κ^{-1} . Les séries correspondent à différentes inclinaisons du solide ($\alpha = 0.7^\circ, 2^\circ$ et 5.7°).

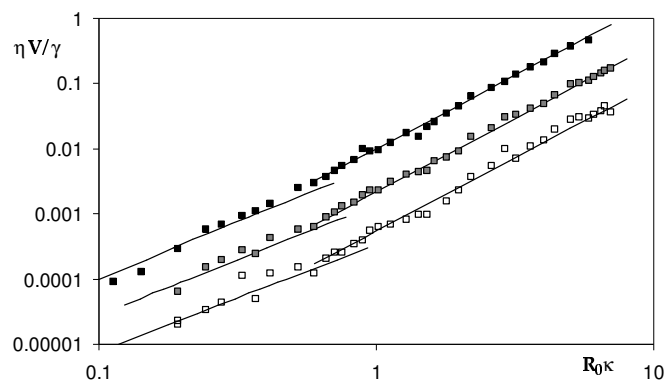


Figure 9 : Nombre capillaire $Ca = \eta V/\gamma$ en fonction de la taille de la bulle normalisée par la longueur capillaire. Les carrés ouverts, gris et noirs correspondent respectivement à $\alpha = 0.7, 2$ et 5.7° . Les traits pleins indiquent la puissance $9/4$ pour $R_0\kappa > 1$ et des solutions de l'équation 7 pour $R_0\kappa < 1$.

Dans le régime des crêpes ($R_0\kappa > 1$), les données sont bien décrites par une loi de puissance avec l'exposant $9/4$ prédit par l'équation 4.

Dans le régime des bulles sphériques ($R_0\kappa < 1$), nous avons ajusté les coefficients a et b de l'équation 7 pour rendre compte au mieux des données dans la gamme disponible (un ordre de grandeur en nombre capillaire Ca). On trouve alors $a = 5.0$ (plus grand que le coefficient de Stokes qui vaut 3 pour une bulle sphérique dans un milieu infini) et $b = 2.3$.

2) Dépendance avec l'inclinaison pour le régime crêpe

Pour vérifier la dépendance en inclinaison, nous mesurons le coefficient β de l'ajustement $Ca = \beta(R_0\kappa)^{9/4}$ pour chaque courbe sur la Figure 9. Nous traçons ensuite β en fonction de $\sin\alpha$ (Figure 10).

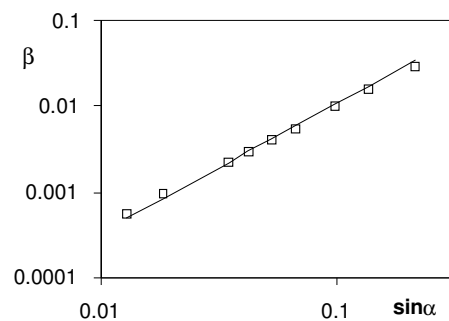


Figure 10 : Coefficient β en fonction du sinus de l'angle donné au solide. La ligne correspond à une pente $3/2$.

On observe que ce coefficient augmente avec la pente et suit une loi de puissance avec l'exposant 1.5 attendu par l'équation 4. Le coefficient numérique déduit de l'ajustement vaut 0.34.

3) Frottement visqueux ?

Enfin, nous vérifions que le frottement en jeu est visqueux en utilisant une deuxième huile, trois fois moins visqueuse que celle utilisée précédemment. Nous représentons cette fois les données dans les coordonnées suggérées par la loi d'échelle des crêpes : en ordonnée, nous traçons $Ca/\sin^{3/2}\alpha$ et en abscisse, le rayon normalisé par la longueur capillaire $R_0\kappa$.

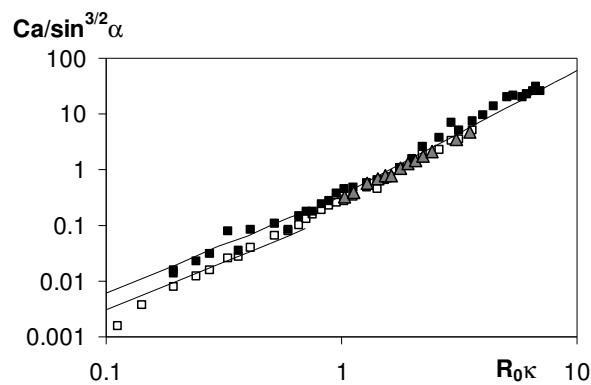


Figure 11 : Effet de la viscosité sur la vitesse de remontée des bulles (coordonnées suggérées par l'équation 4). Les carrés correspondent à de l'huile 1000 cP (inclinaisons : noir 0,7°, blanc 12°) et les triangles correspondent à de l'huile 350 cP pour une pente de 1,6°

Les données se superposent dans le régime crêpe quelle que soit l'inclinaison ou la viscosité utilisée.

IV. Crêpes solides

L'origine de la force visqueuse mesurée sur les bulles est liée au fait que celles-ci sont déformables. Nous nous sommes intéressés à ce qui se passe si on utilise dans les mêmes conditions des crêpes solides, donc non déformables.

1) Description de l'expérience

Nous utilisons pour le solide de la cire, qui est moins dense que l'huile. On engendre la crêpe en déposant une grosse goutte de cire sur le sol. On obtient ainsi une famille de crêpes solides de tailles variées présentées sur la Figure 12.

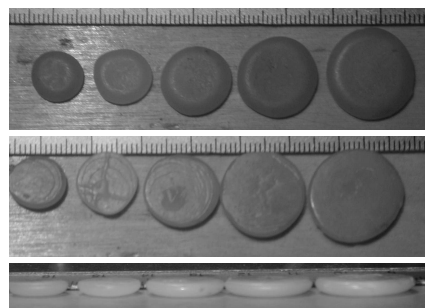


Figure 12 : Crêpes en cire de tailles variables ; vues de dessus, de dessous et de côté.

La cire liquide est hydrophobe et la hauteur des crêpes est bien calibrée et constante. Elle vaut en moyenne 2.8 mm, comme le montre la Figure 13, soit une valeur proche de $2\kappa^{-1}$ (qui est de 3.3 mm pour ce système). Ces formes correspondent donc à celle de situation de mouillage presque nul et, d'un point de vue statique, ces objets sont très proches des bulles utilisées précédemment.

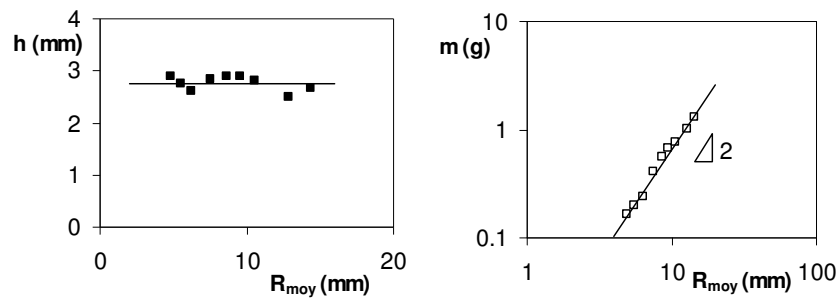


Figure 13 : Hauteur et masse des crêpes de cire en fonction de leur rayon.

La masse des crêpes varie comme le carré du rayon moyen ce qui permet de déduire une masse volumique de 755 kg/m^3 . Le moteur du mouvement, lié au contraste de densité avec l'huile, va donc être 4 fois plus faible que dans le cas des bulles.

Comme pour les bulles, la crêpe est plongée dans l'huile visqueuse et placée sous le solide (Figure 14).

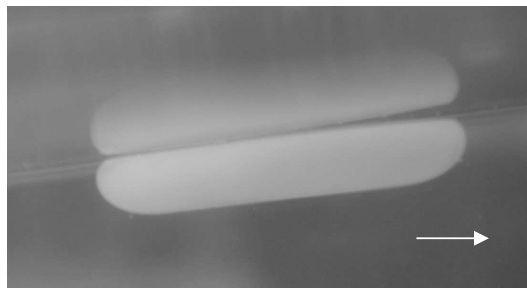


Figure 14 : Crêpe en cire avançant sous un plan incliné dans de l'huile silicone 1000 cP.

On incline ensuite le plan d'un angle faible et la vitesse stationnaire de la crêpe en cire est mesurée en fonction de sa taille et de l'angle d'inclinaison.

2) Allure des résultats

Si l'on mesure la position de la galette de cire en fonction du temps, on obtient une vitesse

limite constante, même si le mouvement semble moins régulier que dans le cas des bulles. On le voit sur la Figure 15, où l'on a reporté deux trajectoires.

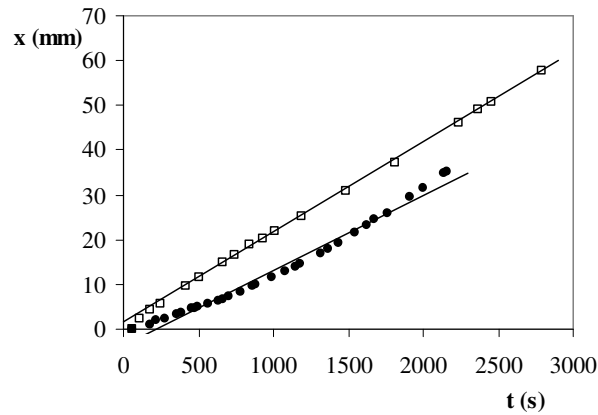


Figure 15 : Position de la crête en cire en fonction du temps. Carré blanc : $R_0=5.8$ mm, $\alpha = 5.7^\circ$. Rond noir : $R_0=3.96$ mm, $\alpha = 9.7^\circ$.

Les expériences sont réalisées sur des durées de l'ordre de 30 minutes et pour des parcours de plusieurs centimètres.

Comme précédemment, la vitesse croît avec l'angle d'inclinaison du solide et avec le rayon de la goutte. Cependant, la vitesse d'ascension est à présent proportionnelle au $\sin\alpha$ comme le montre la Figure 16.

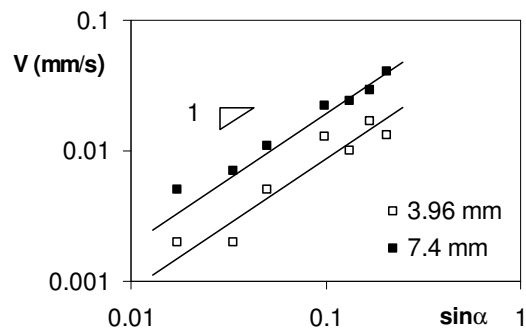


Figure 16 : Vitesse des crêtes solides en fonction du sinus de l'inclinaison du solide pour deux rayons : $R_0=3.96$ mm (carrés blancs) et $R_0=7.4$ mm (carrés noirs).

Nous pouvons enfin reporter la vitesse des crêtes en fonction de leur taille, comme sur la Figure 17.

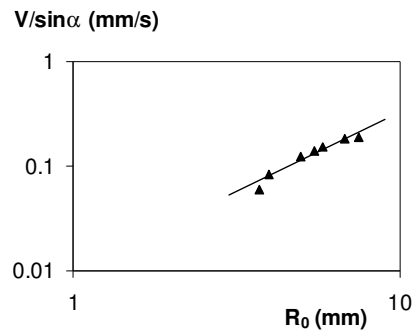


Figure 17 : Vitesse des crêpes solides en fonction du rayon de la goutte dont elles sont issues. Le trait représente la loi $10^{-2} R_0^{3/2}$ (équation 8).

Les données sont relativement dispersées car le mouvement est moins net que dans le cas des bulles. En particulier, pour les angles les plus faibles, la crêpe a tendance à s'arrêter puis à repartir. Nous pouvons néanmoins tenter d'ajuster les données par une loi de puissance, qui donne un exposant d'environ 1.5 et un coefficient numérique de 0.01.

L'origine de la dissipation pour les crêpes solides est donc bien différente de celle des bulles.

3) Discussion

Les observations expérimentales font penser à une loi de Stokes : $F_1 = c6\pi\eta VR$, où c est un facteur de forme et R le rayon de la bulle (par conservation du volume, on a $R \sim R_0^{3/2}/h^{1/2}$). En équilibrant la force de Stokes avec la poussée d'Archimède, on obtient :

$$V = \frac{1}{3\sqrt{3}c} \frac{h^{1/2}}{\eta} R_0^{3/2} \Delta\rho g \sin\alpha \quad (8)$$

Cette loi est bien linéaire en $\sin\alpha$ et varie comme $R_0^{3/2}$. En revanche, le coefficient déduit de l'expérience, donne $c \sim 70$, ce qui est grand par rapport à ce que l'on aurait attendu. De plus, la dissipation dans le film de lubrification doit maintenant être importante car on a un cisaillement simple type Couette :

$$F_4 \sim \frac{\eta V}{e_0} R^2 \quad (9)$$

où e_0 est l'épaisseur minimale du film de lubrification. Cependant, cette force reste

négligeable devant celle de type Stokes si l'équation 10 est satisfaite :

$$\frac{R}{e_0} \ll 6\pi c \quad (10)$$

En prenant une taille centimétrique pour la crêpe et en supposant l'épaisseur de liquide de l'ordre de la centaine de micromètres, il n'est pas impossible de réaliser cette condition. La difficulté de ce problème réside dans le fait que l'on ne sait pas ce qui fixe l'épaisseur du film de liquide.

- Si l'on suppose que l'on a atteint l'échelle r de rugosité des solides, $e_0 = r$ et l'équilibre dissipation visqueuse / poussée d'Archimède s'écrit :

$$\frac{\eta V}{r} R^2 \sim \rho g \sin \alpha R_0^3$$

Ceci donne une vitesse linéaire en $\sin \alpha$, mais indépendante du rayon de la goutte :

$$V \sim \frac{\rho g h}{\eta} r \sin \alpha \quad (11)$$

De plus, l'ordre de grandeur des vitesses donné par la Figure 17 donne $r \sim 25\mu\text{m}$. C'est une échelle trop élevée, qui ne correspond pas aux mesures que l'on peut faire par AFM de la rugosité de la cire ($r \sim 1\mu\text{m}$).

- Expérimentalement (Figure 14), nous avons l'impression que la crêpe de cire prend une légère inclinaison θ par rapport au plan solide sous lequel elle remonte.

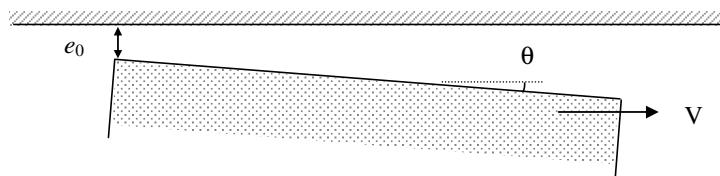


Figure 18 : Forme possible du film de lubrification.

Dans cette configuration, représentée par la Figure 18, une force de portance se crée qui équilibre la poussée d'Archimède verticale au plan et la crêpe atteint un régime

stationnaire [5]. Dans le cas où $R\theta \gg e_0$, les forces normales sont localisées dans la zone de faible épaisseur et en première approximation, la force de portance s'écrit :

$$F_p \sim \frac{\eta V}{e_0^2} R^3 \quad (12)$$

En égalant les forces de portance et de traînée aux composantes de la poussée d'Archimède, on obtient comme vitesse de crêpe :

$$V \approx \frac{\gamma}{\eta} \sin^2 \alpha (R_0 \kappa)^{3/2} \quad (13)$$

Ce modèle n'est pas satisfaisant du point de vue de la dépendance en pente. Cependant, dans cette géométrie, les coefficients numériques des lois d'échelles 9 et 12 peuvent être petits ($\sim 10^{-2}$). La condition de l'équation 10 est alors réalisée, et il est possible que la dissipation principale se fasse en volume.

Ces expériences avec des crêpes solides sont difficiles à interpréter car on ne sait pas ce qui fixe l'épaisseur sous la crêpe. Cependant elles confirment le fait que le comportement des bulles d'air provient de leur capacité à se déformer.

V. Bilan

Nous avons montré dans ce chapitre que deux situations de mouillage nul (gouttes enrobées et bulles) ne conduisent pas aux mêmes lois de dissipation. Les bulles dans un liquide visqueux sous un plan fortement incliné vont d'autant plus vite qu'elles sont grosses. Dans le cas des grosses bulles, la dissipation visqueuse a lieu dans un ménisque dynamique, résultant de la déformation de la bulle induite par le mouvement visqueux. Ce modèle est confirmé par le fait qu'une crêpe solide (donc ne pouvant pas se déformer) de même forme statique a un comportement très différent.

Bibliographie

- [1] LANDAU L. D. et LEVICH B., *Acta Physicochim. USSR*, **17** (1942) 42.
- [2] TAYLOR G. I., « Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube », *J. Fluid Mech.*, **10** (1961) 161.
- [3] BRETHERTON F. P., « The motion of long bubbles in tubes », *J. Fluid Mech.*, **10** (1961) 166.
- [4] PARK C. W. et HOMSY G. M., « Two-phase displacement in Hele Shaw cells: theory », *J. Fluid Mech.*, **139** (1984) 291.
- [5] GUYON É., HULIN J.-P. et PETIT L., « Hydrodynamique physique », Collection SAVOIRS ACTUELS, CNRS édition (nouvelle édition 2001).
- [6] AUSSILLOUS P. et QUÉRÉ D., « Bubbles creeping in a viscous liquid along a slightly inclined plane », *Europhysics Letters*, **59** (2002) 370.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à décrire les propriétés de « gouttes enrobées », c'est-à-dire de gouttes de liquide recouvertes d'une poudre hydrophobe qui les isole du substrat sur lequel elles reposent. Mais nous n'avons pas répondu à la question : à quoi peuvent servir les gouttes enrobées ? Détaillons ici quelques unes de leurs propriétés, qui peuvent donner un élément de réponse.

1. Ce sont des objets très peu adhérents. Au contraire des gouttes usuelles, une goutte enrobée se déplace même sous l'effet d'un champ ultra-faible, et indépendamment de la nature du substrat sur lequel on la pose.

2. Ce sont des objets mobiles. À cause de leur très faible contact avec leur support, les vitesses atteintes par les gouttes enrobées sont très supérieures à celle des gouttes usuelles – typiquement, de 100 à 1000 fois plus grandes. Ceci est particulièrement vrai dans la limite des liquides très visqueux, où la mobilité a la propriété d'augmenter quand la taille de la goutte diminue, à cause d'un contact réduit, conformément aux prédictions de Mahadevan-Pomeau. Pour des liquides moins visqueux, les lois dynamiques restent à établir.

3. Ce sont des objets intègres. Même à grande vitesse, leur carapace de poudre protège les gouttes enrobées de la fuite. Là encore, ce comportement se distingue des gouttes habituelles, qui abandonnent une traînée de liquide, dès qu'elles vont assez vite. Même dans les situations d'impact, pour peu que les vitesses en jeu soient inférieures (typiquement) au mètre par seconde, les gouttes enrobées gardent leur intégrité, absorbant les chocs grâce à leurs déformations internes.

4. Ce sont des objets manipulables. Outre leur relative robustesse, que nous venons d'évoquer, les gouttes enrobées, peuvent être transportées en appliquant divers champs (gravitaires, électriques, magnétiques). Il est donc aisé de les transporter de façon ciblée.

Au total, ces systèmes présentent donc d'intéressantes propriétés pour la microfluidique, qui est la science du transport des fluides à petite échelle. Si la poudre qui les couvre peut être un inconvénient dans certains cas (comment s'en débarrasser en bout de course ?), on peut imaginer dans d'autres de l'utiliser : les critères de couverture étant peu contraignants, la poudre peut avoir un second rôle - être un catalyseur si c'est à une micro-réaction chimique que l'on destine la goutte, une limaille si on souhaite la guider par un champ magnétique,

voire être l'objet même du transport : dans le cas où c'est la poudre que l'on souhaite transférer ainsi, on pourra provoquer l'évaporation du liquide qu'elle contient une fois la cible atteinte.

Mais les gouttes enrobées sont aussi, plus simplement, un système capillaire « pur » qui permet de réaliser sur Terre un certain nombre d'observations qu'on ne pouvait réaliser jusqu'ici qu'au prix (c'est le cas de le dire) d'expériences dans l'espace. Ainsi, sur la vieille question de la forme d'équilibre d'une goutte en rotation, ces systèmes ont permis des observations nouvelles qui pour la plupart demanderaient à présent un appui théorique ou numérique pour être comprises quantitativement.

Complément

Mouillage dynamique de tubes capillaires

Table des matières

Complément	Mouillage dynamique de tubes capillaires.....	209
I.	Introduction	211
II.	Dépôt visco-capillaire : les régimes Taylor-Bretherton	212
III.	Le régime visco-inertiel	214
	1) L'effet épaississant de l'inertie.....	214
	2) Lois d'échelles	214
	3) Discussion	215
IV.	Le régime de couche limite.....	218
V.	Conclusion.....	219
	Bibliographie	221

Le début de ce travail de thèse a vu la fin d'une étude réalisée lors de mon stage de DEA sur le mouillage dynamique de tubes capillaires. Nous allons succinctement rappeler les résultats obtenus.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la quantité de liquide laissée derrière elle par une goutte en mouvement dans un tube capillaire. Taylor [1] a montré que pour des liquides très visqueux avançant à faible vitesse, l'épaisseur du film de liquide est une fonction croissante et monotone du nombre capillaire. Nous allons comparer ce résultat à des expériences faites avec des liquides moins visqueux et des vitesses élevées, afin d'étudier l'effet de l'inertie sur ce système.

I. Introduction

On pousse avec de l'air une goutte de liquide mouillant dans un tube. Après le passage de la goutte, un film de liquide reste déposé sur les parois du tube (Figure 1). Nous appelons V la vitesse de dépôt, r le rayon du tube et h l'épaisseur du film déposé.

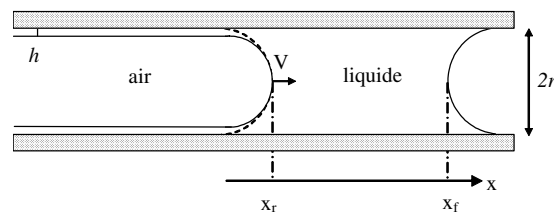


Figure 1 : Schéma de principe de l'expérience.

Nous utilisons des tubes transparents de polymère avec des rayons variant entre 0.4 et 1.5 mm et des liquides de faible tension de surface γ (d'ordre 20 mN/m) et de viscosité comprise entre 0.4 et 530 mPa.s. Pour connaître la quantité de liquide déposée, nous filmons le mouvement de la goutte (de longueur initiale de 5 à 10 cm) et l'évolution temporelle des positions x_r et x_f des ménisques arrière et avant de la goutte est mesurée. Nous en déduisons la vitesse de la goutte ($V = dx_r/dt$) ainsi que l'épaisseur du film [$h/r = 1 - (dx_f/dx_r)^{1/2}$].

Dans une première partie, nous décrivons le régime basse vitesse de dépôt étudié par Taylor et Bretherton [1]-[2]. Ensuite, nous présenterons les résultats obtenus avec des liquides peu visqueux, ce qui devrait nous permettre d'étudier l'influence de l'inertie sur l'épaisseur du film déposé.

II. Dépôt visco-capillaire : les régimes Taylor-Bretherton

Dans le cas où la goutte avance à faible vitesse, deux forces interviennent principalement dans le dépôt d'un film : la force visqueuse et la force capillaire. À cause de la viscosité du liquide et des conditions de non glissement du liquide sur les parois du tube, un film à tendance à se créer. Cependant, ce film déforme l'arrière de la goutte, ce à quoi les forces capillaires s'opposent. Comme les forces visqueuses et capillaires jouent des rôles antagonistes, le paramètre naturel à considérer est le nombre capillaire :

$$Ca = \frac{\eta V}{\gamma} \quad (1)$$

Pour les films minces ($h \ll r$) et lorsque l'inertie est négligeable, l'épaisseur du film a été calculée par Bretherton en utilisant les équations de lubrification en géométrie plane. Le film se forme dans un ménisque dynamique d'épaisseur d'ordre h et de longueur λ . À l'intérieur de ce ménisque dynamique, le fluide est en mouvement à cause de la différence de pression de Laplace $\Delta P = \gamma/r$ due à la différence de courbure entre le film et le ménisque statique. La force visqueuse équilibre le gradient de pression de Laplace le long du ménisque dynamique, si bien que l'on peut écrire :

$$\frac{\eta V}{h^2} \sim \frac{1}{\lambda} \frac{\gamma}{r} \quad (2)$$

Pour trouver λ , on raccorde les ménisques dynamiques et statiques en égalant les pressions de Laplace :

$$-\frac{\gamma}{r} - \frac{\gamma h}{\lambda^2} \sim -\frac{2\gamma}{r} \quad (3)$$

On obtient finalement :

$$h \sim r Ca^{2/3} \quad (4)$$

Cette équation est écrite pour des faibles nombres capillaires. Quand Ca augmente, il faut

remplacer r par $(r-h)$ dans les équations 2 et 3 et la loi de dépôt devient :

$$\frac{h}{r} \sim \frac{Ca^{2/3}}{1+Ca^{2/3}} \quad (5)$$

L'équation 5 signifie que l'épaisseur du film ne dépend que du nombre capillaire, et qu'elle est limitée par le confinement du tube. Ces deux résultats sont observés expérimentalement par Taylor pour plusieurs huiles visqueuses (Figure 2).

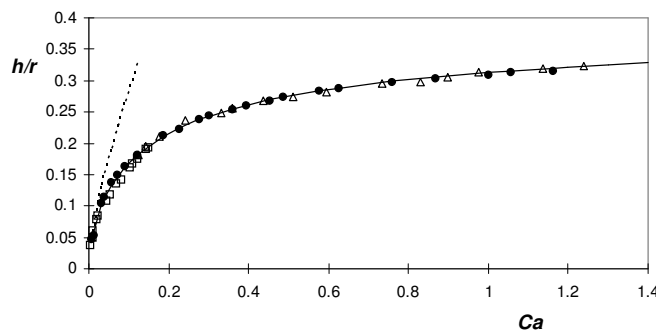


Figure 2 : Épaisseur du film normalisée par le rayon du capillaire en fonction du nombre capillaire pour des liquides visqueux. Les ronds noirs représentent les données de Taylor. Les carrés et les triangles ouverts représentent des données obtenues avec des huiles silicones de viscosité 2,6 et 531 mPa.s. Le trait en pointillé représente la loi de Bretherton et le trait plein est un ajustement de la forme (5) que l'on a appelé loi de Taylor ($h/r = 1,34Ca^{2/3}/(1+1,34*2,5 Ca^{2/3})$).

Les données sont bien ajustées par une loi qui a la forme de l'équation 5 : $h/r = 1,34Ca^{2/3}/(1+1,34*2,5 Ca^{2/3})$ où le coefficient 1,34 provient de l'étude réalisée par Bretherton et où le coefficient 2,5 est un coefficient numérique ajustable. Dans la suite, nous appellerons cette loi, qui sera la référence à laquelle comparer nos résultats, *loi de Taylor*. Des solutions numériques existent aussi, comme celles de Reinelt et Saffman [3], Martinez et Udell [4] et Giavedoni et Saita [5]-[6] ; elles reproduisent avec une très bonne précision ces données expérimentales.

La loi de Taylor est vérifiée pour des expériences effectuées à des vitesses modérées et pour des nombres capillaires dans l'intervalle [0,1-1]. Restant dans le même intervalle, l'utilisation de liquides peu visqueux (de l'ordre de 1 mPa.s, la viscosité de l'eau) conduit à des grandes vitesses de dépôt, ce qui nous amène à des régimes où l'inertie est susceptible de jouer un rôle.

III. Le régime visco-inertiel

1) L'effet épaississant de l'inertie

Le résultat de la même expérience faite à grande vitesse (jusqu'à 2 m/s) avec de l'éthanol est présenté sur le graphe de la Figure 3 et comparé à la loi de Taylor (en trait plein).

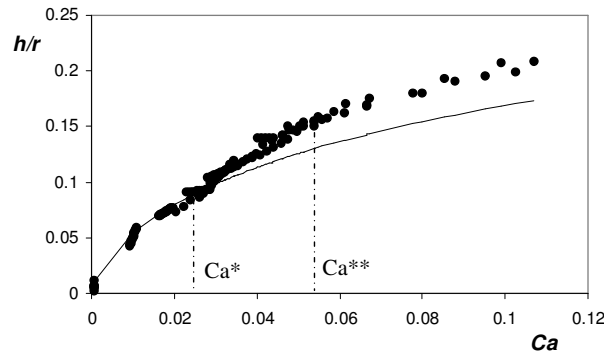


Figure 3 : Épaisseur du film normalisée par le rayon du tube en fonction du nombre capillaire pour de l'éthanol dans un tube de rayon 0.78 mm. Le trait plein représente la loi de Taylor.

On observe que l'épaisseur du film obéit à la loi de Taylor pour les faibles nombres capillaires (ici en dessous de 0.03). Ensuite, le film est plus épais. La différence avec la loi de Taylor augmente d'abord avec Ca puis sature à cause du confinement de l'expérience qui impose un régime de convergence. On note $[Ca^*, Ca^{**}]$ l'intervalle en nombre capillaire où l'épaisseur du film augmente plus vite avec Ca que la loi de Taylor.

2) Lois d'échelles

Nous allons définir le régime observé entre Ca^* et Ca^{**} . À cause de la vitesse élevée des expériences, nous suspectons l'inertie d'être responsable de l'effet d'épaississement par rapport à la loi de Taylor. En effet, le nombre de Weber qui compare inertie et capillarité ($We = \rho V^2 r / \gamma$) devient d'ordre 10. Dans des travaux précédents sur le mouillage des fibres, il a été trouvé que l'inertie conduit à l'épaississement d'un film entraîné [7]. Cet effet peut être compris en modifiant simplement les lois d'échelles 2 et 3 pour prendre en compte l'inertie et le fait que h n'est plus nécessairement négligeable devant le rayon du tube r . La transposition en loi d'échelle de l'équation de Navier-Stokes conduit à l'équation 6.

$$\frac{\eta V}{h^2} \sim \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\gamma}{r-h} \right) - \frac{1}{\lambda} \rho V^2 \quad (6)$$

où ρ est la densité du liquide. De même, le raccord des ménisques dynamique et statique s'écrit maintenant :

$$-\frac{\gamma}{r-h} - \frac{\gamma h}{\lambda^2} \sim -\frac{2\gamma}{r-h} + \rho V^2 \quad (7)$$

En éliminant λ dans l'équation 7, on obtient finalement :

$$\frac{h}{r} \sim \frac{Ca^{2/3}}{1 + Ca^{2/3} - We} \quad (8)$$

L'équation 8 montre comment l'inertie modifie l'équation 5. Le nombre sans dimension qui quantifie l'importance de l'inertie est le nombre de Weber, qui compare l'inertie avec la force capillaire :

$$We = \frac{\rho V^2 (r-h)}{\gamma}$$

L'équation 8 montre que les deux corrections que l'on peut apporter à la loi de Bretherton (équation 4) à des vitesses intermédiaires ou grandes sont antagonistes : la géométrie (terme en $Ca^{2/3}$ au dénominateur) favorise une convergence de l'épaisseur du film (comportement de Taylor), alors que l'inertie épaisit le film. Dans le cas du mouillage d'une fibre, au contraire, les deux corrections favorisent l'épaississement du film : le terme géométrique est de signe opposé ($-Ca^{2/3}$), ce qui explique que l'effet de l'inertie est beaucoup plus important (divergence de l'épaisseur du film [7]).

3) Discussion

Même si l'approche en loi d'échelle ne fournit pas une description quantitative des données, elle nous permet d'identifier le rôle joué par les différents paramètres. L'équation 8 montre par exemple que le rayon du tube est un paramètre de contrôle pour organiser les différents effets selon une hiérarchie : dans la loi de Taylor, le rayon du tube apparaît seulement comme une échelle pour l'épaisseur, alors que changer r affecte le nombre de Weber sans

modifier le nombre capillaire. Ainsi, l'effet de l'inertie reporté sur la Figure 3 doit dépendre de la valeur de r .

La Figure 4 montre l'épaisseur du film déposé en fonction du nombre capillaire pour une huile silicone légère ($\eta = 0.52 \text{ mPa.s}$) dans des tubes de différents rayons.

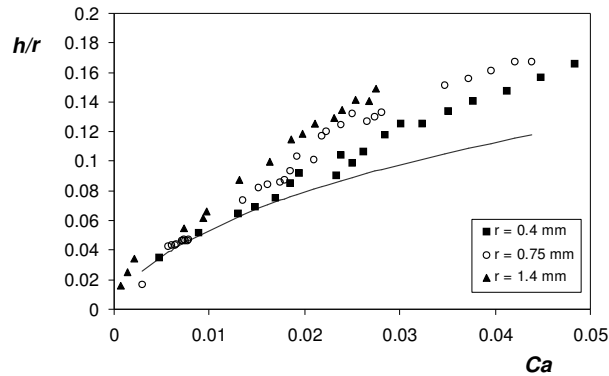


Figure 4 : Épaisseur du film déposé normalisée par le rayon du capillaire en fonction du nombre capillaire pour une huile silicone légère (0.5 mPa.s) et trois tubes de rayons différents (respectivement 0.4, 0.75 et 1.4 mm pour les carrés noirs, les ronds blancs et les triangles noirs.)

On observe que le rayon du tube influe sur l'épaisseur du film déposé : plus le tube est large, plus le seuil Ca^* est bas et la déviation par rapport à la loi de Taylor importante. Dans le même esprit on peut comparer les données de la Figure 3 et celles de la Figure 4 pour un même rayon (0.78 mm) et deux viscosités différentes (0.5 et 1.2 mPa.s). On trouve alors que plus la viscosité est faible, plus le seuil Ca^* est bas et plus l'effet est important.

L'équation 8 nous permet finalement d'obtenir une loi d'échelle pour les deux seuils. Comme l'inertie et la géométrie jouent des rôles antagonistes, l'effet épaisissant de l'inertie ne pourra être observé que pour des nombres de Weber du même ordre de grandeur que $Ca^{2/3}$. Le nombre seuil Ca^* est donc :

$$Ca^* \sim \left(\frac{\eta^2}{\gamma \rho r} \right)^{3/4} \quad (9)$$

Tous nos résultats peuvent être résumés sur la Figure 5 en traçant le seuil en nombre capillaire Ca^* au dessus duquel le régime visco-inertiel est observé, en fonction du nombre

sans dimension $\eta^2/\rho\gamma r$ qui apparaît dans l'équation 9. La pente $3/4$ est tracée en trait plein et ajuste bien les données.

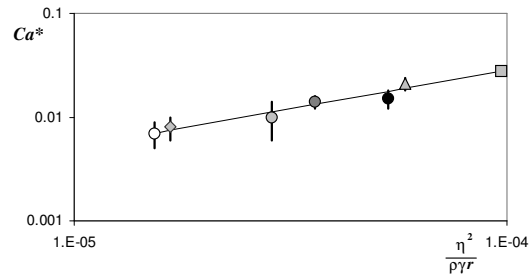


Figure 5 : Seuil en nombre capillaire Ca^* au dessus duquel le régime visco-inertiel est observé, en fonction du nombre sans dimension suggéré par l'équation 9. Le trait plein correspond à la pente $3/4$. Les données ont été obtenues avec différents tube ($r = 1.46, 0.78, 0.62$ et 0.42 mm : plus le symbole est foncé, plus le tube est petit) et différents liquides [heptane (losanges), huile silicone $\eta = 0,52$ mPa.s (ronds), décane (triangles) et éthanol (carrés)]

De même, un critère simple peut être proposé pour le deuxième seuil en nombre capillaire Ca^{**} au dessus duquel le régime visco-inertiel est dominé par l'effet de convergence dû à la géométrie. Dès que le nombre capillaire dépasse Ca^* , le terme en We domine celui en Ca dans le dénominateur de l'équation 8. On écrit alors simplement que la géométrie impose $h < r$, pour éviter que l'épaisseur du film ne diverge. Cette condition impose une limite supérieure Ca^{**} en nombre capillaire, donnée par la loi d'échelle :

$$Ca^{**} \sim \left(\frac{\eta^2}{\gamma\rho r} \right)^{1/2} \quad (10)$$

Ce seuil est effectivement plus grand que Ca^* tant que $Ca < 1$. D'ailleurs, le régime visco-inertiel sera observé s'il a lieu avant le régime de convergence de Taylor (*i.e.* avant $Ca = 1$), ce qui impose $\eta^2/\rho\gamma r \ll 1$. Ce régime correspond donc à des liquides peu visqueux dans des tubes relativement large (mais en dessous de la longueur capillaire, pour pouvoir négliger l'effet de la gravité).

Nous pouvons également déduire de nos expériences Ca^{**} : en divisant l'épaisseur du film par l'épaisseur de Taylor, nous obtenons une courbe, croissant de 1 à faible nombre capillaire, jusqu'à une valeur maximale (typiquement d'ordre 1.5) ; puis elle décroît à cause du confinement géométrique de l'expérience. Ca^{**} est définie comme étant la valeur du

nombre capillaire à ce maximum. Sur la Figure 6, nous avons reporté les valeurs obtenues de Ca^{**} en fonction du nombre sans dimension $\eta^2/\rho\gamma r$.

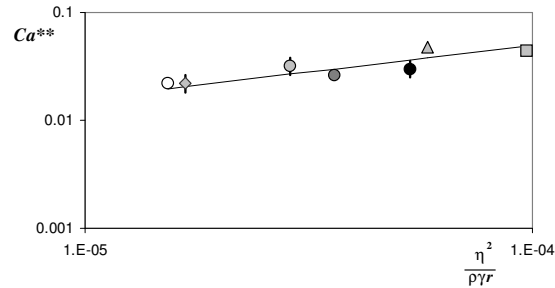


Figure 6 : Seuil en nombre capillaire Ca^{**} au dessus duquel l'effet de convergence dû au confinement de l'expérience domine l'effet visco-inertiel. Le trait plein représente la pente $\frac{1}{2}$. Les symboles sont les mêmes que ceux de la Figure 5.

Le comportement observé est en bon accord avec l'équation 10 (le trait plein indique la pente $\frac{1}{2}$), même si les données sont peu précises.

IV. Le régime de couche limite

Une autre limite naturelle doit être vérifiée. Les régimes visqueux et visco-inertiel présentés ci-dessus supposent implicitement que la couche limite visqueuse est complètement développée dans le ménisque dynamique. Dans les expériences de fibre, il a été montré que cette hypothèse n'est pas forcément vérifiée [7]. Si ce n'est pas le cas, l'épaisseur du film déposé est limitée par l'épaisseur de la couche limite visqueuse qui se développe quand la goutte avance. À l'arrière de la goutte, cette épaisseur est donnée simplement par un équilibre entre inertie et forces visqueuses, ce qui donne la loi classique de Prandtl : à un coefficient numérique près, l'épaisseur s'écrit :

$$\delta = \left(\frac{\eta L}{\rho V} \right)^{1/2} \quad (11)$$

où L est la taille de la goutte. Si δ est plus grande que l'épaisseur discutée dans les équations 4, 5 ou 8 (donc pour des faibles vitesses, des longues gouttes ou des liquides visqueux), alors les lois précédentes sont valables. Dans le cas contraire, la formation de la couche limite visqueuse limite le dépôt et l'équation 11 devient la loi donnant l'épaisseur du film. Comme

cela correspond à des régimes de grandes vitesses, le nombre de Weber sera en général bien supérieur à un et les effets capillaires négligeables.

Pour avoir une chance d'observer ce régime, nous avons procédé à une série d'expériences avec de l'heptane, un liquide de très faible viscosité (0.4 mPa.s), avançant dans un tube large (1.4 mm). Nous mesurons l'épaisseur h du film déposé et la comparons à l'épaisseur de couche limite δ . Sur la Figure 7, h est tracé en fonction de δ . Les données obtenues avec l'heptane sont comparées avec celle de l'éthanol en régime visco-inertiel. Nous avons de plus tracé la ligne $h = \delta$ en trait plein.

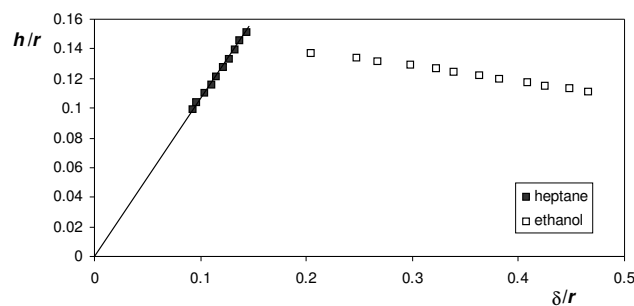


Figure 7 : Épaisseur h du film déposé à grande vitesse pour deux séries d'expériences (éthanol et heptane), en fonction de l'épaisseur de couche limite δ donnée par l'équation 11. Le trait plein représente la droite $h = \delta$.

Dans le régime visco-inertiel, on obtient une courbe décroissante : augmenter la vitesse augmente l'épaisseur du film (Figure 3) et diminue δ (équation 11). De plus les données sont en dessous de la droite $h = \delta$, ce qui correspond à une condition de validité de ce régime. En revanche, les données avec l'heptane obéissent à l'équation $h = \delta$. Ainsi, l'épaisseur du film déposé à haute vitesse est bien limitée par le développement de la couche limite visqueuse. Il resterait seulement à comprendre le coefficient numérique déduit des données de la Figure 7, égal à 1.

V. Conclusion

Grâce à une série d'expériences à grande vitesse, nous avons pu fournir des données nouvelles sur la quantité de liquide laissée derrière elle par une goutte avançant dans un tube.

Au-dessus d'un seuil en vitesse (de l'ordre du mètre par seconde), le film est plus épais que le film de Taylor, dont l'épaisseur est fixée par un équilibre entre les forces visqueuse et capillaire. Cet écart à la loi de Taylor est attribué à l'entraînement inertiel, mais l'analyse est compliquée par le fait qu'à l'effet visco-inertiel (épaississant) se superpose un effet de convergence (donc amincissant pour l'épaisseur) dû au confinement de la goutte dans le tube. Grâce à des arguments en loi d'échelle, nous pouvons décrire l'intervalle en nombre capillaire correspondant au régime visco-inertiel. Une solution numérique a été proposée depuis par A. de Ryck afin de décrire complètement les données expérimentales [8].

À des vitesses plus élevées, la taille finie de la goutte est responsable d'un nouveau régime : la goutte laisse alors derrière elle la couche limite visqueuse qui se développe sur sa propre taille. Dès lors, l'épaisseur devient une fonction décroissante de la vitesse de dépôt.

Bibliographie

- [1] TAYLOR G., « Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube », *J. Fluid Mech.*, **10** (1961) 161.
- [2] BRETHERTON F. P., « The motion of long bubbles in tubes », *J. Fluid Mech.*, **10** (1961) 166.
- [3] REINELT D. A. et SAFFMAN P. G., « The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel et tube », *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math. J. Sci. Stat. Comput.)*, **6** (1985) 542.
- [4] MARTINEZ M. J. et UDELL K. S., « Axisymmetric creeping motion of drops through circular tubes », *J. Fluid Mech.*, **210** (1990) 565.
- [5] GIAVEDONI M. D. et SAITA F. A., « The axisymmetric et plane cases of a gas phase steadily displacing a Newtonian liquid—A simultaneous solution of the governing equation », *Phys. Fluids*, **9** (1997) 2420.
- [6] GIAVEDONI M. D. et SAITA F. A., « The rear meniscus of a long bubble steadily displacing a Newtonian liquid in a capillary tube », *Phys. Fluids*, **1** (1999) 786.
- [7] DE RYCK A. et QUÉRÉ D., « Inertial coating of a fiber », *J. Fluid Mech.*, **311** (1996) 219.
- [8] DE RYCK A., « The effect of weak inertia on the emptying of a tube », *Phys. Fluids*, **14** (2002) 2102.

