



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité exacte d'équations dispersives issues de la mécanique.

Emmanuelle Crépeau

► **To cite this version:**

Emmanuelle Crépeau. Contrôlabilité exacte d'équations dispersives issues de la mécanique.. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2002. Français. NNT: . tel-00003637

**HAL Id: tel-00003637**

**<https://theses.hal.science/tel-00003637>**

Submitted on 24 Oct 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
N° D'ORDRE :

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD  
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE  
présentée  
pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY  
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Emmanuelle CREPEAU-JAISSON

Sujet : **CONTRÔLABILITÉ EXACTE D'ÉQUATIONS  
DISPERSIVES ISSUES DE LA MÉCANIQUE**

Rapporteurs : M. Jean-Pierre RAYMOND  
M. Enrique ZUAZUA

Soutenue le 6 décembre 2002 devant le jury composé de :

M. Jean-Michel CORON	Directeur de Thèse
M. Jean-Pierre PUEL	
M. Jean-Pierre RAYMOND	
M. Lionel ROSIER	Directeur de Thèse
M. Pierre ROUCHON	
M. Marius TUCSNAK	



## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Michel Coron et Lionel Rosier d'avoir encadré cette thèse. Les nombreux conseils qu'ils m'ont donnés au cours de ces trois années m'ont permis d'effectuer ces travaux dans d'excellentes conditions. Je leur suis également très reconnaissante de leur grande disponibilité et de leur soutien constant.

J'adresse également ma vive reconnaissance à Jean-Pierre Raymond et Enrique Zuazua d'avoir accepté d'être rapporteurs de ces travaux.

C'est un grand honneur pour moi que d'avoir Jean-Pierre Puel, Pierre Rouchon et Marius Tucsnak comme membres de mon jury. Je les en remercie.

Je tiens également à remercier les membres du laboratoire d'Analyse Numérique et EDP de l'université Paris-Sud et le personnel de la bibliothèque Jacques Hadamard pour leur accueil durant cette thèse.

Enfin j'adresse une pensée toute particulière à Pascal et mes parents pour leur présence et leurs encouragements. Merci à Aline pour son aide toujours précieuse en anglais et aux amis pour tous les bons moments passés ensemble.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Équation de Korteweg-de Vries.</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>11</b>
1.1	L'équation de KdV. . . . .	11
1.2	Quelques résultats antérieurs. . . . .	14
<b>2</b>	<b>Solutions stationnaires non nulles.</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Contrôlabilité exacte.</b>	<b>21</b>
3.1	Le problème de Cauchy homogène. . . . .	22
3.2	Résultats d'observabilité. . . . .	23
<b>4</b>	<b>Contrôlabilité de l'équation non linéaire.</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>35</b>
5.1	Introduction. . . . .	37
5.2	Search of a set of even stationary solutions. . . . .	39
5.3	Exact controllability with control on $y_x(t, k\pi)$ . . . . .	43
5.3.1	The homogeneous Cauchy problem . . . . .	44
5.3.2	Observability results. . . . .	48
5.4	Exact controllability of the nonlinear equation. . . . .	54
<b>II</b>	<b>Équation de Boussinesq.</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
6.1	L'équation de Boussinesq. . . . .	61
6.2	Quelques résultats antérieurs. . . . .	61
<b>7</b>	<b>Contrôle sur <math>y_x(L, t)</math>.</b>	<b>65</b>
7.1	Le problème de Cauchy homogène. . . . .	65
7.2	Observabilité et contrôlabilité du linéaire. . . . .	66
7.3	Contrôlabilité exacte du non linéaire. . . . .	70

<b>8</b>	<b>Contrôle sur <math>y_{xx}(L, t)</math>.</b>	<b>73</b>
8.1	Le problème de Cauchy homogène. . . . .	73
8.2	Observabilité du problème linéaire homogène. . . . .	74
8.3	Contrôlabilité exacte de l'équation linéaire. . . . .	75
8.4	Contrôlabilité du non linéaire. . . . .	76
<b>9</b>	<b>Annexe</b>	<b>79</b>
9.1	Introduction . . . . .	81
9.2	Exact controllability with control on $y_x(L, t)$ . . . . .	83
9.2.1	The homogeneous Cauchy problem. . . . .	83
9.2.2	Observability of the homogeneous problem and controllability of the linear equation. . . . .	84
9.2.3	Exact controllability of the nonlinear equation. . . . .	92
9.3	Exact controllability with control on $y_{xx}(L, t)$ . . . . .	95
9.3.1	The homogeneous Cauchy problem. . . . .	96
9.3.2	Observability of the homogeneous problem. . . . .	97
9.3.3	Exact controllability of the linear equation. . . . .	98
9.3.4	Exact controllability of the nonlinear equation. . . . .	102
<b>III</b>	<b>Études numériques.</b>	<b>105</b>
<b>10</b>	<b>Cas linéaire avec contrôle sur <math>y_{xx}(L, t)</math>.</b>	<b>107</b>
10.1	Contrôle dans $L^2(0, T)$ . . . . .	107
10.2	Contrôle dans $H^1(0, T)$ . . . . .	112
10.3	Vérification avec les différences finies. . . . .	117
<b>11</b>	<b>Cas non linéaire.</b>	<b>121</b>
11.1	Méthode spectrale. . . . .	121
11.2	Vérification avec les différences finies. . . . .	126
11.3	Cas non linéaire avec de grandes données initiales. . . . .	129
<b>12</b>	<b>Annexe : Résolution exacte du problème numérique.</b>	<b>133</b>
12.1	Cas du contrôle $L^2$ . . . . .	133
12.2	Cas du contrôle $H^1$ . . . . .	136
<b>IV</b>	<b>Conclusion et perspectives.</b>	<b>141</b>

## Introduction

De nombreux phénomènes apparaissant en mécanique sont modélisés par une équation aux dérivées partielles qui prend en compte les différentes caractéristiques du problème (conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement,...). Lorsqu'on peut agir sur ces systèmes, par exemple en injectant un liquide ou en contrôlant la vitesse de déplacement, on parle de contrôle du problème. La théorie du contrôle à laquelle nous allons nous intéresser est celle qui permet, en partant de données initiales connues d'arriver à des données finales elles aussi connues, en un temps  $T$  donné. Si on peut trouver un tel contrôle, le système est alors dit exactement contrôlable.

Dans cette thèse, nous étudions le problème de la contrôlabilité exacte d'équations aux dérivées partielles issues de la mécanique : l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) et l'équation de Boussinesq. Ces deux équations modélisent la propagation d'une onde de faible amplitude, en tenant compte de la non linéarité et des effets dispersifs.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la contrôlabilité exacte de l'équation de KdV. Étant donné un temps  $T > 0$ , une longueur de canal  $L > 0$  et des conditions initiales et finales  $y_0, y_T$ , existe-t-il un contrôle  $v$  et une fonction  $y$  tels que

$$y_t + y_x + yy_x + y_{xxx} = 0, \quad (1)$$

$$y(\cdot, 0) = y(\cdot, L) = 0, \quad (2)$$

$$y_x(\cdot, L) = v, \quad (3)$$

$$y(0, \cdot) = y_0, \quad (4)$$

et on ait  $y(T, \cdot) = y_T$  ?

Ce problème a déjà fait l'objet d'un article de Rosier [38]. Ce dernier obtient la contrôlabilité exacte de l'équation linéarisée (autour de 0) si et seulement si  $L$  appartient à l'ensemble  $\mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{N}$ , avec  $\mathcal{N} = \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + l^2 + kl}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^* \right\}$  et en déduit dans ce cas la contrôlabilité exacte de l'équation non linéaire.

L'objet de cette première partie est de regarder les cas où  $L \in \mathcal{N}$ . Comme on ne peut pas contrôler le linéarisé autour de zéro, on va contrôler le linéarisé autour d'une solution stationnaire de l'équation de KdV proche de zéro mais non nulle. Nous nous intéresserons donc aux questions suivantes,

- Autour de quelles trajectoires stationnaires peut-on linéariser l'équation de KdV ?
- Avons-nous un résultat de contrôlabilité exacte de l'équation linéarisée et dans quels espaces ?
- L'équation non linéaire est-elle contrôlable autour des solutions stationnaires ?

La deuxième partie concerne le problème de contrôle de l'équation de Boussinesq,

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0. \quad (5)$$

J.L. Lions [28] a déjà démontré que le linéarisé autour de 0 était contrôlable lorsque le



contrôle est  $y_{xx}(L, t)$  pour des temps de contrôle suffisamment grands et Zuazua [28] a démontré que le temps de contrôle pouvait être arbitrairement petit.

Le premier chapitre considère le cas où le contrôle est  $y_x(L, t)$ , i.e. étant donné un temps  $T > 0$ , une longueur de canal  $L > 0$ , des conditions initiales  $(y_0^0, y_0^1)$  et finales  $(y_T^0, y_T^1)$ , existe-t-il un contrôle  $v$  et une solution  $y$  tels que

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0, \quad (6)$$

$$y(0, \cdot) = y(L, \cdot) = y_x(0, \cdot) = 0, \quad (7)$$

$$y_x(L, \cdot) = v, \quad (8)$$

$$y(\cdot, 0) = y_0^0, \quad y_t(\cdot, 0) = y_0^1, \quad (9)$$

$$y(\cdot, T) = y_T^0, \quad y_t(\cdot, T) = y_T^1? \quad (10)$$

Le deuxième chapitre s'intéresse au cas où, comme dans [28], le contrôle est  $y_{xx}(L, t)$ , i.e. étant donné  $T, L > 0$  et  $(y_0^0, y_0^1), (y_T^0, y_T^1)$ , existe-t-il un contrôle  $v$  et une solution  $y$  tels que

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0, \quad (11)$$

$$y(0, \cdot) = y(L, \cdot) = y_{xx}(0, \cdot) = 0, \quad (12)$$

$$y_{xx}(L, \cdot) = v, \quad (13)$$

$$y(\cdot, 0) = y_0^0, \quad y_t(\cdot, 0) = y_0^1, \quad (14)$$

$$y(\cdot, T) = y_T^0, \quad y_t(\cdot, T) = y_T^1? \quad (15)$$

Nous démontrons qu'à chaque fois la réponse est positive en montrant la contrôlabilité du problème linéarisé à l'aide de la méthode d'unicité hilbertienne (H.U.M.) [27]. On obtient alors un contrôle pour tout temps  $T$  et dans des espaces de fonctions régulières pour des données suffisamment petites.

La troisième partie consiste en une étude numérique des résultats précédents, du point de vue linéaire et non linéaire. On illustre ainsi la contrôlabilité exacte de l'équation de Boussinesq par une série d'études graphiques. La méthode utilisée pour cette étude est une méthode spectrale, qui consiste à exprimer les solutions dans la base de vecteurs propres de l'opérateur  $A : y \mapsto -y_{xx} + y_{xxxx}$ , avec comme conditions aux limites,  $y(0) = y(L) = y_{xx}(0) = y_{xx}(L) = 0$ . Les solutions s'obtiennent alors par H.U.M. qui se traduit facilement en un algorithme.

Enfin, les annexes 5 et 9 regroupent l'article sur l'équation de KdV publié dans "The International Journal of Control" et celui sur l'équation de Boussinesq accepté pour publication dans le journal "Differential and Integral Equations". Toutes les démonstrations des première et deuxième parties se trouvent dans ces annexes.

Première partie  
Équation de Korteweg-de Vries.



# Chapitre 1

## Introduction.

### 1.1 L'équation de KdV.

Dans un premier temps, nous allons rechercher l'expression des équations des ondes en eau peu profonde et en déduire avec quelles approximations on retrouve l'équation de KdV, [45].

Considérons un fluide parfait, incompressible, et irrotationnel, de densité  $\rho$  constante, situé dans un canal à fond plat. On suppose que lorsque ce fluide est au repos, il a une hauteur moyenne dans le canal, notée  $h$ . La surface libre du liquide se trouve donc à une hauteur  $z = h + \eta$  où la hauteur  $z = 0$  représente le fond du canal.

$z$

$\eta(x, t)$

$h$

0

$x$

L'équation usuelle des ondes peut s'écrire sous la forme a-dimensionnée suivante où  $\phi$

représente le potentiel de vitesse du fluide :

$$\delta(\phi_{xx} + \phi_{yy}) + \phi_{zz} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2}((\phi_x)^2 + (\phi_y)^2) + \frac{\epsilon}{2\delta}(\phi_z)^2 + \eta = 0 \text{ en } z = 1 + \epsilon\eta, \quad (1.2)$$

$$\delta[\eta_t + \epsilon(\phi_x\eta_x + \phi_y\eta_y)] - \phi_z = 0 \text{ en } z = 1 + \epsilon\eta, \quad (1.3)$$

$$\phi_z = 0 \text{ en } z = 0. \quad (1.4)$$

où  $\epsilon = a/h$  en notant  $a$  l'amplitude de la vague et  $\delta = h^2/L^2$  en notant  $L$  la longueur du canal ou bien la longueur d'onde.

On se place dans le cas où  $\delta$  est petit, ce qui est une caractéristique de la théorie des ondes en eau peu profonde. On peut donc développer  $\phi$  comme une somme de termes en puissance de  $\delta$ .

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi_1 + \delta^2\phi_2 + \dots \quad (1.5)$$

On en déduit alors avec les équations (1.1) et (1.4) que  $(\phi_0)_z = 0$ , ce qui revient à dire que  $\phi_0$  ne dépend que de  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Donc  $\phi_0 = \phi_0(x, y, t)$ . Introduisons les fonctions  $u$  et  $v$  définies par

$$u(x, y, t) = (\phi_0)_x \text{ et } v(x, y, t) = (\phi_0)_y. \quad (1.6)$$

Les termes en  $\delta$  et  $\delta^2$  de l'équation (1.1) donnent respectivement

$$\phi_{0xx} + \phi_{0yy} + \phi_{1zz} = 0 \quad (1.7)$$

$$\phi_{1xx} + \phi_{1yy} + \phi_{2zz} = 0. \quad (1.8)$$

On intègre alors deux fois de suite l'équation (1.7) par rapport à  $z$ , en considérant la condition au bord (1.4). En omettant la constante d'intégration, on obtient aussi en utilisant (1.6),

$$\phi_1 = -\frac{z^2}{2}(u_x + v_y), \quad (1.9)$$

par conséquent  $\phi_1 = 0$  en  $z = 0$ . Il ne nous reste plus qu'à intégrer (1.8), en considérant la condition au bord (1.4), pour déterminer  $\phi_2$ . Il vient, toujours en omettant la constante d'intégration

$$\phi_2 = \frac{z^4}{24}((\Delta u)_x + (\Delta v)_y), \quad (1.10)$$

où  $\Delta$  représente le laplacien en dimension 2. On peut alors calculer les termes d'ordre 1 au maximum en  $\delta$  et en  $\epsilon$  de l'équation (1.2), représentant la surface libre du liquide.

$$(\phi_0 + \delta\phi_1)_t + \frac{\epsilon}{2}(u^2 + v^2) + \frac{\delta\epsilon}{2}(\phi_{1z})^2 + \eta = 0 \text{ en } z = 1 + \epsilon\eta. \quad (1.11)$$

On remplace alors  $z$  par  $1 + \epsilon\eta$  et  $\phi_1$  par l'expression trouvée en (1.9),

$$\phi_{0t} - \frac{\delta}{2}(u_{tx} + v_{ty}) + \frac{\epsilon}{2}(u^2 + v^2) + \eta = 0. \quad (1.12)$$

Calculons les termes d'ordre au maximum  $\delta^2$ ,  $\epsilon^2$  et  $\epsilon\delta$  de (1.3), pour  $z = 1 + \epsilon\eta$  de la même manière que précédemment.

$$[(\eta_t + \epsilon(u\eta_x + v\eta_y)) + (1 + \epsilon\eta)(u_x + v_y)] = \frac{\delta}{6}[u_{xxx} + v_{yyy}]. \quad (1.13)$$

En différenciant l'équation (1.12) par rapport à  $x$ , puis en différenciant cette même équation par rapport à  $y$ , on obtient deux équations

$$u_t - \frac{\delta}{2}(u_{txx} + v_{txy}) + \epsilon(uu_x + vv_x) + \eta_x = 0, \quad (1.14)$$

$$v_t - \frac{\delta}{2}(u_{txy} + v_{tyy}) + \epsilon(uu_y + vv_y) + \eta_y = 0, . \quad (1.15)$$

Les trois équations (1.13)-(1.15) constituent les équations a-dimensionnées des ondes en eau peu profonde.

Supposons que les termes  $\epsilon$  et  $\delta$  aient le même ordre de grandeur et conservons uniquement les termes en  $O(\epsilon, \delta)$  dans (1.13)-(1.15). On se place dans le cas où la dimension d'espace est égale à 2, donc dans le plan  $(x, z)$ . On a alors

$$u_t + \eta_x + \epsilon uu_x - \frac{1}{2}\delta u_{txx} = 0, \quad (1.16)$$

$$\eta_t + [u(1 + \epsilon\eta)]_x - \frac{1}{6}\delta u_{xxx} = 0. \quad (1.17)$$

Pour retrouver l'équation de Korteweg-de Vries, nous allons chercher des solutions sous la forme d'ondes se propageant dans le sens des  $x$  positifs. En négligeant les termes d'ordre  $\delta$  et  $\epsilon$ , on trouve

$$u = \eta, \quad (1.18)$$

$$\eta_t + \eta_x = 0. \quad (1.19)$$

Nous cherchons ici une solution corrigée au premier ordre en  $\epsilon$  et  $\delta$ , donc de la forme,

$$u = \eta + \epsilon A + \delta B + O(\epsilon^2 + \delta^2). \quad (1.20)$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions à déterminer. Les équations (1.16)-(1.17) deviennent alors

$$\eta_t + \epsilon A_t + \delta B_t + \eta_x + \epsilon\eta\eta_x - \frac{\delta}{2}\eta_{txx} = 0, \quad (1.21)$$

$$\eta_t + \eta_x + \epsilon A_x + \delta B_x + \epsilon\eta\eta_x - x - \frac{\delta}{6}\eta_{xxx} = 0. \quad (1.22)$$

Ces équations doivent être consistantes. Or au premier ordre,  $\eta_t + \eta_x = 0$ , donc  $A = \frac{-1}{4}\eta^2$  et  $B = \frac{1}{3}\eta_{xx}$ .

On obtient alors une unique équation en  $\eta$  régissant l'écoulement des fluides,

$$\eta_t + \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\eta\right)\eta_x + \frac{1}{6}\delta\eta_{xxx} = 0. \quad (1.23)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Korteweg-de Vries et fut découverte en 1895, [22]. Elle décrit l'évolution d'ondes dispersives de petite amplitude se propageant à droite.

Elle est principalement connue pour modéliser la propagation d'une vague de faible amplitude dans un canal uniforme. Mais de nombreuses applications dans des domaines physiques très différents ont été découvertes depuis 1960. Gardner et Morikawa ont découvert son application dans l'étude des collisions d'ondes hydromagnétiques [15]. Elle apparaît également dans l'étude des plasmas [4], dans l'étude des tiges élastiques [33] pour ne citer que quelques unes de ses applications, [32].

## 1.2 Quelques résultats antérieurs.

Un nombre important de travaux sur l'équation de KdV et le problème de Cauchy qui lui est associé ont été réalisés. On peut regrouper essentiellement en deux catégories les méthodes utilisées pour regarder le problème de Cauchy, l'inverse scattering method, [32], et la méthode basée sur des estimations d'énergie, [7], [20]. Ces résultats nous donnent que l'équation de KdV est localement bien posée dans  $H^s(\mathbb{R})$ , pour  $s > \frac{3}{4}$  et globalement bien posée pour  $s \geq 1$ .

La contrôlabilité exacte autour de 0 de l'équation de KdV a été récemment étudiée par Russell et Zhang, [40], [41] avec des conditions au bord périodiques.

$$y_t + yy_x + y_{xxx} = f(t, x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k}(t, 0) = \frac{\partial^k y}{\partial x^k}(t, 1), \quad 0 \leq k \leq 2, \quad (1.25)$$

le contrôle étant la fonction  $f$ , telle que  $\text{supp } f(t, \cdot) \subset [a, b] \subset [0, 1]$ .

Rosier a étudié dans [38] la contrôlabilité de l'équation de KdV quand le contrôle est  $y_x(\cdot, L)$ . Il a montré que l'équation était exactement contrôlable autour de zéro si la longueur  $L$  du domaine appartenait à un ensemble dense dans  $\mathbb{R}^+$ . Concernant la contrôlabilité du linéarisé, son résultat est le suivant.

**Théorème 1.1** (Rosier) Soit  $\mathcal{N} = \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2+kl}{3}}, k, l \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Alors, pour tout  $T > 0$ , et

tout  $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$ , pour tout  $y_0, y_T \in L^2(0, L)$ , il existe un contrôle  $h \in L^2(0, T)$  tel que la solution  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  de

$$y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \quad (1.26)$$

$$y(\cdot, 0) = y(\cdot, L) = 0, \quad (1.27)$$

$$y_x(\cdot, L) = h, \quad (1.28)$$

$$y(0, \cdot) = y_0 \quad (1.29)$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$ .

Pour démontrer ce résultat, Rosier a utilisé la Méthode d'Unicité Hilbertienne de J.L. Lions [27] et la méthode des multiplicateurs [21]. Il faut remarquer qu'il n'y a pas de résultat d'observabilité lorsque  $L \in \mathcal{N}$ , résultat nécessaire à la démonstration de la contrôlabilité avec H.U.M. De fait, Rosier a montré que pour  $L \in \mathcal{N}$ , le système (1.26) – (1.28) n'est pas contrôlable.

Il déduit ensuite la contrôlabilité exacte du problème non linéaire autour de zéro à partir du Théorème 1.1 de contrôlabilité du problème linéaire, à l'aide d'un argument de point fixe.

**Théorème 1.2** (Rosier) *Soit  $T > 0$  et  $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$ . Il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $y_0, y_T$  appartenant à  $L^2(0, L)$  avec*

$$\|y_0\|_{L^2(0,L)} < r_0, \|y_T\|_{L^2(0,L)} < r_0,$$

*il existe une fonction  $y(t, x)$  appartenant à  $C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  et un contrôle  $h$  appartenant à  $L^2(0, T)$  tels que*

$$y_t = -(y_x + yy_x + y_{xxx}) \text{ dans } \mathcal{D}'(0, T, H^{-2}(0, L)), \quad (1.30)$$

$$y(\cdot, 0) = y(\cdot, L) = 0 \text{ dans } L^2(0, T), \quad (1.31)$$

$$y_x(\cdot, L) = h \text{ dans } L^2(0, T), \quad (1.32)$$

$$y(0, \cdot) = y_0 \text{ et } y(T, \cdot) = y_T. \quad (1.33)$$

De récents travaux de Micu et Ortega [31] étudient la contrôlabilité exacte d'un système non linéaire de deux équations de KdV couplées. Ils démontrent d'une manière analogue à celle de [38] qu'il y a contrôlabilité exacte locale du système pour une longueur  $L$  dans un domaine dense de  $\mathbb{R}^+$ .

Le but de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité exacte de l'équation de Korteweg-de Vries, dans le cas où la longueur  $L$  du canal est critique, c'est à dire, lorsque  $L \in \mathcal{N}$ . Comme on ne peut pas obtenir le résultat de contrôlabilité exacte avec l'équation de KdV linéarisée autour de la solution nulle, l'idée est de linéariser l'équation de KdV autour d'une solution stationnaire, non nulle mais tout de même proche de 0. On étudiera alors la contrôlabilité de ce nouveau problème linéaire.

Par souci de simplification des écritures, nous supposons dans toute la suite que le domaine spatial est  $(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  au lieu de  $(0, L)$ .

L'étude se divise en 3 chapitres comme suit : dans le chapitre 2, on introduit l'ensemble des solutions stationnaires de l'équation de KdV non linéaire. Le chapitre 3 se divise en deux paragraphes. Dans le premier, on étudie le problème frontière linéaire, où seule la valeur de la dérivée spatiale première en  $x = \frac{L}{2}$  est supposée non nulle. Ensuite, dans le deuxième paragraphe, on démontre un résultat d'observabilité qui servira à démontrer la contrôlabilité exacte frontière du problème linéaire grâce à HUM. Dans le chapitre 4, on



déduit la contrôlabilité exacte frontière de l'équation de KdV non linéaire sur un domaine borné à partir du résultat précédent à l'aide d'un argument de point fixe.

Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à une publication dans le cas où  $L = 2k\pi$ . Cette publication est donnée dans l'annexe, au chapitre 5. Pour généraliser au cas où la longueur  $L$  du canal est dans  $\mathcal{N}$ , il suffit de remplacer les termes  $2k\pi$  par  $L$  dans cette annexe sauf pour le Lemme 3.5 qui nécessite une nouvelle démonstration, que nous donnons dans le chapitre 3.

# Chapitre 2

## Solutions stationnaires non nulles.

Dans ce chapitre nous allons déterminer les solutions stationnaires paires de l'équation de KdV pour  $L \neq 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le cas  $L = 2k\pi$  est traité en annexe 5.

Nous voulons linéariser l'équation de KdV autour de solutions stationnaires non nulles mais proches de zéros pour étudier la contrôlabilité exacte du nouveau problème linéaire. Nous allons donc chercher l'ensemble de ces solutions, donc les fonctions paires  $y : [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$yy_x + y_x + y_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

$$y\left(-\frac{L}{2}\right) = y\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (2.2)$$

Posons  $y_x(-\frac{L}{2}) = a$  et  $y_{xx}(-\frac{L}{2}) = b$ .

En intégrant l'équation (2.1) deux fois de suite entre 0 et  $x$ , on obtient

$$(y_x)^2 = -\frac{1}{3}(y^3 + 3y^2 - 6by - 3a^2) := P(y), \quad (2.3)$$

$$y\left(-\frac{L}{2}\right) = y\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (2.4)$$

Comme la solution est supposée proche de zéro,  $a$  et  $b$  sont proches de zéros mais non tous deux nuls (la solution serait alors nulle).

Le discriminant du polynôme  $P$ , (2.3), vaut  $\Delta = 9a^4 - 12a^2 - 24b^3 - 12b^2$  et comme  $a$  et  $b$  sont proches de zéros, il est strictement négatif. Donc, d'après le critère de Cardan,  $P$  a trois racines réelles distinctes,  $\gamma < \alpha < \beta$ .

Le système obtenu est alors le suivant,

$$3(y_x)^2 = -(y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma), \quad (2.5)$$

$$y\left(-\frac{L}{2}\right) = y\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad (2.6)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3, \quad (2.7)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -6b \quad (2.8)$$

$$\alpha\beta\gamma = 3a^2. \quad (2.9)$$

On en déduit donc que

$$\gamma < 0, \alpha < 0 \text{ et } \beta > 0$$

L'ensemble des solutions proches de zéros s'écrit alors sous la forme

$$f_{\alpha,\beta,\gamma} : x \mapsto (\beta - \alpha)cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x - C, m \right) + \alpha$$

avec

$$\begin{cases} \gamma < 0, \alpha < 0 \text{ et } \beta > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = -3 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -6b \\ \alpha\beta\gamma = 3a^2 \\ f_{\alpha,\beta,\gamma}(-\frac{L}{2}) = f_{\alpha,\beta,\gamma}(\frac{L}{2}) = 0 \\ C \text{ constante d'intégration réelle} \\ m \text{ est le module de la fonction elliptique } cn \text{ et vaut } m = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}. \end{cases}$$

La fonction elliptique  $cn(x, m)$  est une fonction paire et périodique en  $x$ , analytique par rapport à  $x$  et au module  $m$ . Elle vérifie en particulier  $-1 \leq cn(x, m) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $cn(0, m) = 0$ . De plus  $cn(x, m) \rightarrow \cos(x)$  quand  $m \rightarrow 0$ . On peut retrouver toutes ces propriétés dans [23].

Comme nous cherchons des solutions stationnaires paires, nous devons avoir

$$cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x - C, m \right) = cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x + C, m \right).$$

Par conséquent,  $C$  étant une constante d'intégration réelle, d'après Lawden [23], nous n'avons que deux cas à distinguer,

$$C = 2nK, C = (2n + 1)K,$$

où  $K$  est une fonction analytique de  $m$  et  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$ . Comme le cas  $L = 2k\pi$  a déjà été étudié en Annexe 5, nous nous bornons au cas où  $L \neq 2k\pi$ .

1. Si  $C = 2nK$ , alors  $f_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = (\beta - \alpha)cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x, m \right) + \alpha$ .

Comme  $\alpha + \beta + \gamma = -3$  et  $f_{\alpha,\beta,\gamma}(\frac{L}{2}) = 0$ , posons

$$F(\beta, \gamma) = (2\beta + \gamma + 3)cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma} L}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2}, \frac{2\beta + \gamma + 3}{\beta - \gamma} \right) - 3 - \beta - \gamma.$$

Nous allons chercher à appliquer le théorème des fonctions implicites à cette nouvelle fonction  $F$  pour  $\beta$  dans un petit ouvert autour de 0 et  $\gamma$  dans un petit ouvert autour de -3.

On a

$$\begin{cases} F(0, -3) = f_{0,0,-3}(\frac{L}{2}) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, -3) = -\sin^2(\frac{L}{4}). \end{cases}$$

Comme nous considérons le cas où  $L \neq 2k\pi$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, -3) \neq 0$ . On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à  $F$ . On obtient alors un ouvert  $\mathcal{O}_{-3}$  autour de -3 et un ouvert  $\mathcal{O}_0$  autour de 0, et une fonction  $\phi$  avec  $\gamma = \phi(\beta)$  telle que  $F(\beta, \phi(\beta)) = 0$ .

La fonction  $f_\beta = f_{-3-\beta-\phi(\beta), \beta, \phi(\beta)}$  est alors une fonction stationnaire paire, solution de l'équation de KdV, pour  $\beta > 0$  et  $\beta \in \mathcal{O}_0$ .

Comme  $\beta$  est proche de zéro, on a  $m = O(\beta)$  et on peut approcher  $f_\beta$  au premier ordre en  $\beta$  par

$$(2 + \phi'(0))\beta \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - (1 + \phi'(0))\beta + o(\beta).$$

Nous savons que  $\phi'(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, -3)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \beta}(0, -3) = \frac{2 \cos^2(\frac{L}{4}) - 1}{\sin^2(\frac{L}{4})}$ .

Donc, uniformément pour  $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ ,

$$f_\beta(x) = \beta \left( \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{L}{4})}{\sin^2(\frac{L}{4})} \right) + o(\beta), \text{ pour } \beta > 0, \beta \in \mathcal{O}_0. \quad (2.10)$$

2. Si  $C = (2n + 1)K$ , alors

$$f_{\alpha, \beta, \gamma}(x) = (\beta - \alpha) \left( 1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) \frac{sn^2\left(\frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x, m\right)}{dn^2\left(\frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x, m\right)} + \alpha.$$

où  $sn$  et  $dn$  sont des fonctions elliptiques, périodiques en  $x$  et analytiques par rapport à  $m$ . Elles vérifient en particulier

$$sn(x, m) \rightarrow \sin(x), \text{ et } dn(x, m) \rightarrow 1, \text{ lorsque } m \rightarrow 0.$$

Comme  $\alpha + \beta + \gamma = -3$  et  $f_{\alpha, \beta, \gamma}(\frac{L}{2}) = 0$ , posons

$$G(\alpha, \gamma) = \frac{(-3 - 2\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma)}{(-3 - \alpha - 2\gamma)} \frac{sn^2\left(\frac{\sqrt{-3 - \alpha - 2\gamma}}{2\sqrt{3}}\frac{L}{2}, \frac{-3 - 2\alpha - \gamma}{-3 - \alpha - 2\gamma}\right)}{dn^2\left(\frac{\sqrt{-3 - \alpha - 2\gamma}}{2\sqrt{3}}\frac{L}{2}, \frac{-3 - 2\alpha - \gamma}{-3 - \alpha - 2\gamma}\right)} + \alpha.$$

Nous cherchons comme précédemment à appliquer le théorème des fonctions implicites à cette nouvelle fonction  $G$  pour  $\alpha$  dans un petit ouvert autour de 0 et  $\gamma$  dans un petit ouvert autour de -3.

On a

$$\begin{cases} G(0, -3) = f_{0, 0, -3}(\frac{L}{2}) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma}(0, -3) = -\sin^2(\frac{L}{4}). \end{cases}$$

Comme  $L \neq 2k\pi$ ,  $\frac{\partial G}{\partial \gamma}(0, -3) \neq 0$ . On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à  $G$ . On obtient alors un ouvert  $\mathcal{O}'_{-3}$  autour de -3 et un ouvert  $\mathcal{O}'_0$  autour de 0, et une fonction  $\psi$  avec  $\gamma = \psi(\alpha)$  telle que  $G(\alpha, \psi(\alpha)) = 0$ .

La fonction  $f_\alpha = f_{\alpha, -3-\alpha-\psi(\alpha), \psi(\alpha)}$  est alors une fonction stationnaire paire, solution de l'équation de KdV, pour  $\alpha < 0$  et  $\alpha \in \mathcal{O}'_0$ .

Comme  $\alpha$  est proche de zéro, on a  $m = O(\alpha)$  et on peut approcher  $f_\alpha$  au premier ordre en  $\alpha$  par

$$(-2 - \psi'(0))\alpha \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \alpha + o(\alpha).$$

Nous savons que  $\psi'(0) = -\left(\frac{\partial G}{\partial \gamma}(0, -3)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(0, -3) = \frac{1-2\sin^2(\frac{L}{4})}{\sin^2(\frac{L}{4})}$ .

Donc, uniformément pour  $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ ,

$$f_\alpha(x) = \alpha \left( \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{L}{4})}{\sin^2(\frac{L}{4})} \right) + o(\alpha), \text{ pour } \alpha < 0, \alpha \in \mathcal{O}'_0. \quad (2.11)$$

On peut regrouper les deux solutions obtenues (2.10), (2.11) en une seule  $f_\epsilon$ , pour  $\epsilon$  proche de zéro, qui vérifie au premier ordre en  $\epsilon$ , uniformément pour  $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ ,

$$f_\epsilon(x) = \epsilon \left( \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{L}{4})}{\sin^2(\frac{L}{4})} \right) + o(\epsilon). \quad (2.12)$$

# Chapitre 3

## Contrôlabilité exacte.

Ce chapitre étudie la contrôlabilité exacte de l'équation de KdV linéarisée autour d'une des solutions stationnaires trouvées précédemment, notée  $f_\epsilon$ .

Plus précisément, la question que nous nous posons est la suivante :

Étant données deux fonctions  $y_0, y_T$  dans  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ , existe-t-il un contrôle  $h$  appartenant à l'espace  $L^2(0, T)$  tel que la solution  $y = y(t, x)$  du problème de KdV linéarisé autour de  $f_\epsilon$ ,

$$y_t + f'_\epsilon y + (1 + f_\epsilon)y_x + y_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

$$y\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right) = y\left(\cdot, \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (3.2)$$

$$y_x\left(\cdot, \frac{L}{2}\right) = h, \quad (3.3)$$

$$y(0, \cdot) = y_0. \quad (3.4)$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$  ?

Pour le résoudre, nous allons appliquer la Méthode d'Unité Hilbertienne (H.U.M.), [27]. Nous étudions dans le premier paragraphe, le problème adjoint, qui est rétrograde en temps

$$u_t + (1 + f_\epsilon)u_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.5)$$

$$u\left(t, -\frac{L}{2}\right) = u\left(t, \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (3.6)$$

$$u_x\left(t, -\frac{L}{2}\right) = 0, \quad (3.7)$$

$$u(T, x) = u_T(x). \quad (3.8)$$

Puis, dans le deuxième paragraphe 3.2, nous démontrerons les résultats d'observabilité nécessaires à l'application de H.U.M.

### 3.1 Le problème de Cauchy homogène.

Après avoir effectué le changement de variables,  $\tau = T - t$  et  $\xi = -x$  dans les équations (3.5)-(3.8), on remplace  $(\tau, \xi)$  par  $(t, x)$  pour une meilleure lisibilité et on obtient le problème homogène,

$$y_t + (1 + f_\epsilon)y_x + y_{xxx} = 0, \quad (3.9)$$

$$y\left(t, -\frac{L}{2}\right) = y\left(t, \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (3.10)$$

$$y_x\left(t, \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (3.11)$$

$$y(0, x) = y_0(x). \quad (3.12)$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy associé à ce problème homogène, nous allons appliquer la théorie des opérateurs perturbés, voir [35].

Définissons l'opérateur perturbé  $A_\epsilon$  par  $A_\epsilon\omega = -\omega''' - \omega'(1 + f_\epsilon)$  avec pour ensemble de définition

$$\mathcal{D}(A_\epsilon) = \left\{ \omega \in H^3\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right), \omega\left(-\frac{L}{2}\right) = \omega\left(\frac{L}{2}\right) = \omega'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \right\}.$$

On définit également l'opérateur  $\tilde{A}_\epsilon$  par  $\tilde{A}_\epsilon\omega = -\omega''' - \omega'(1 + f_\epsilon) + f'_\epsilon\omega$ , avec pour ensemble de définition  $\mathcal{D}(\tilde{A}_\epsilon) = \mathcal{D}(A_\epsilon)$ . On a alors le résultat d'existence suivant avec [35], voir la démonstration de la Proposition 5.5.

**Proposition 3.1** *L'opérateur  $A_\epsilon$  génère un semi-groupe fortement continu noté  $S_\epsilon(t)$  sur  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ , qui vérifie*

$$\|S_\epsilon(t)\| \leq e^{C_0 t}, \text{ avec } C_0 = \frac{1}{2} \|f'_\epsilon\|_\infty.$$

*L'opérateur  $\tilde{A}_\epsilon$  génère également un semi-groupe fortement continu sur  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ .*

Dans toute la suite de cette partie, on notera  $(S_\epsilon(t))_{t \geq 0}$  ( resp.  $(\tilde{S}_\epsilon(t))_{t \geq 0}$ ) le semi-groupe associé à l'opérateur  $A_\epsilon$  ( resp.  $\tilde{A}_\epsilon$ ), et  $B$  l'espace de Banach défini par

$$B = \mathcal{C}\left([0, T], L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right) \cap L^2\left(0, T, H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$$

muni de la norme suivante

$$\|y\|_B = \sup_{t \in [0, T]} \|y(t, \cdot)\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} + \left( \int_0^T \|y(t, \cdot)\|_{H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs, comme Rosier [38], ou Komornik [21], on obtient des inégalités intéressantes sur les solutions faibles de (3.9)-(3.12) (démonstration dans l'Annexe 5, Proposition 5.6).

**Proposition 3.2**

1. L'application  $y_0 \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \mapsto S_\epsilon(\cdot)y_0 \in B$  est continue.
2. Pour  $y_0$  dans  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ ,  $y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right)$  existe dans  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  et il existe une constante  $C(T)$  telle que pour tout  $y_0 \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ ,

$$\|y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right)\|_{L^2(0,T)} \leq \|y_0\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)}, \quad (3.13)$$

$$\|y_0\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)}^2 \leq C(T) \|S_\epsilon(\cdot)y_0\|_{L^2((0,T)\times\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right))}^2 + \|y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right)\|_{L^2(0,T)}^2. \quad (3.14)$$

Nous avons ainsi obtenu l'inégalité d'observabilité directe pour le problème de contrôle. Il nous reste maintenant à obtenir l'inégalité indirecte pour pouvoir appliquer H.U.M.

**3.2 Résultats d'observabilité.**

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer l'inégalité d'observabilité indirecte à l'aide d'outils de l'analyse de Fourier. Le résultat que nous cherchons est le suivant,

**Théorème 3.3** *Pour tout  $T > 0$ , il existe  $\epsilon_0 = \epsilon_0(T)$  tel que pour tout  $\epsilon \in ]-\epsilon_0, \epsilon_0[ \setminus \{0\}$ , il existe  $C = C(T, \epsilon) > 0$ , tels que pour tout  $y_0 \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ ,*

$$\|y_0\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} \leq C \|y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right)\|_{L^2(0,T)},$$

où  $y$  représente la solution de (3.9)-(3.12).

Comme la démonstration de ce théorème diffère beaucoup de celle réalisée dans l'article situé en Annexe 5, nous reprenons entièrement sa démonstration.

**DÉMONSTRATION :** Soit  $T > 0$  donné et  $\epsilon \neq 0$ . Supposons qu'il n'existe pas de tel  $C(T, \epsilon)$ , alors il existe une suite  $(y_0^n)_{n \geq 0}$  dans  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  telle que  $\|y_0^n\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} = 1$  pour tout  $n$  et  $\|y_x^n\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right)\|_{L^2(0,T)} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , avec  $y^n = S_\epsilon(\cdot)y_0^n$ . La suite  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2\left(0, T, H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ , d'après (5.23).

D'autre part,  $y_t^n = -(1 + f_\epsilon)y_x^n + y_{xxx}^n$  est borné dans  $L^2\left(0, T, H^{-2}\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ . Comme la première injection dans  $H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \hookrightarrow L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \hookrightarrow H^{-2}\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  est compacte, il s'ensuit d'un résultat de Simon [43] que l'ensemble  $\{y^n\}$  est relativement compact dans  $L^2\left(0, T, L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^2\left(0, T, L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ .

On déduit alors de (3.14) que  $(y_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ . Posons alors  $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0^n$  et  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0$ , d'après la proposition 3.2,  $y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right) \rightarrow y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right)$  dans  $L^2(0, T)$ . Ainsi,  $\|y_0\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} = 1$  et  $y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right) = 0$ .  $\square$

Démontrons maintenant qu'une telle fonction  $y_0$  n'existe pas.



**Lemme 3.4** *Pour tout  $T > 0$ , soit  $N_T$  l'espace des états initiaux  $y_0 \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  tels que la solution faible  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0$  de (3.9)-(3.12) vérifie  $y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right) = 0$  dans  $L^2(0, T)$ . Alors,  $N_T = \{0\}$  pour tout  $T > 0$  pourvu que  $\epsilon \neq 0$  soit assez petit.*

Pour démontrer ce lemme nous adaptons la démonstration de Rosier [38], Lemme 3.3, et [3]. On a clairement,  $T < T' \implies N_{T'} \subset N_T$ . Pour tout  $T > 0$ ,  $N_T$  est un espace vectoriel de dimension finie. En effet, si  $(y_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans la boule unité

$$\mathcal{B} = \{y \in N_T, \|y\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} \leq 1\},$$

le même argument que précédemment montre qu'il existe une sous-suite de  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge. Comme la boule unité est compacte, on en déduit que  $N_T$  est de dimension finie. Soit  $T' > 0$ . Pour montrer que  $N_{T'} = \{0\}$ , il suffit de trouver  $T$  tel que  $0 < T < T'$  et  $N_T = \{0\}$ . Comme l'application  $T \mapsto \dim(N_T) \in \mathbb{N}$  est décroissante, il existe  $T, \eta > 0$  tels que  $T < T + \eta < T'$  et  $\dim(N_T) = \dim(N_{T+\eta})$ .

Soit  $y_0 \in N_T$ ,  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0$  et  $0 < t < \eta$ . Comme  $S_\epsilon(\tau)(S_\epsilon(t)y_0) = S_\epsilon(t + \tau)y_0$  pour  $0 \leq \tau \leq T$  et  $y_0 \in N_{T+\eta}$ , on obtient

$$\frac{S_\epsilon(t)y_0 - y_0}{t} \in N_T.$$

Soit

$$M_T = \{\tilde{y} = S_\epsilon(\tau)\tilde{y}_0, 0 \leq \tau \leq T, \tilde{y}_0 \in N_T\} \subset C\left([0, T], L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right).$$

Or  $y \in H^1\left(0, T + \eta, H^{-2}\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ , donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t + \cdot) - y}{t} = y' \text{ dans } L^2\left(0, T, H^{-2}\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right).$$

D'autre part,  $\frac{y(t + \cdot) - y}{t} \in M_T$  pour tout  $t \in ]0, \eta[$  et  $M_T$  est de dimension finie, donc cet espace est fermé dans  $L^2\left(0, T, H^{-2}\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ . Il s'ensuit que  $y' \in C\left([0, T], L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$  et  $y \in C^1\left([0, T], L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$ . On peut alors écrire

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_\epsilon(t)y_0 - y_0}{t} \text{ dans } L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right).$$

Donc,

$$y_0 \in D(A_\epsilon), A_\epsilon(y_0) = y'(0) \in N_T \text{ et } y_x\left(\cdot, -\frac{L}{2}\right) \in C([0, T]).$$

Par conséquent,  $\left(\frac{dy_0}{dx}\right)_{x=-\frac{L}{2}} = y_x\left(0, -\frac{L}{2}\right) = 0$ .

Si  $N_T \neq \{0\}$ , l'application  $y_0 \in \mathbb{C}N_T \mapsto A_\epsilon(y_0) \in \mathbb{C}N_T$  a au moins une valeur propre ( $\mathbb{C}N_T$  représente ici le complexifié de  $N_T$ ). Donc il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $y_0 \in H^3\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \setminus \{0\}$  tels que

$$\begin{cases} \lambda y_0 = -(1 + f_\epsilon)y_0' - y_0''', \\ y_0\left(-\frac{L}{2}\right) = y_0\left(\frac{L}{2}\right) = y_0'\left(-\frac{L}{2}\right) = y_0'\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Nous avons alors besoin du résultat suivant,

**Lemme 3.5** *Il existe  $\epsilon_0 \neq 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in ]-\epsilon_0, \epsilon_0[$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  et pour tout  $y_0 \in H^3(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ ,*

$$\left( \begin{cases} \lambda y_0 = -(1 + f_\epsilon)y_0' - y_0''', \\ y_0(-\frac{L}{2}) = y_0(\frac{L}{2}) = y_0'(-\frac{L}{2}) = y_0'(\frac{L}{2}) = 0 \end{cases} \right) \implies y_0 = 0.$$

**DÉMONSTRATION** : Nous allons raisonner par l'absurde. Si le résultat du Lemme 3.5 est faux, alors il existe une suite  $(\epsilon_n, n \in \mathbb{N})$  avec  $\epsilon_n \neq 0$ ,  $\epsilon_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes et une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions dans  $H^3(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  tels que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\|y_n\|_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} = 1$  et on a

$$\begin{cases} \lambda_n y_n = -(1 + f_{\epsilon_n})y_n' - y_n''', \\ y_n(-\frac{L}{2}) = y_n(\frac{L}{2}) = y_n'(-\frac{L}{2}) = y_n'(\frac{L}{2}) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , notons  $u_n$  le prolongé de  $y_n$  par 0 en dehors de  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ . Il est clair que  $u_n \in H^2(\mathbb{R})$  et de plus on a

$$\lambda_n u_n + (1 + f_{\epsilon_n})u_n' + u_n''' = a_n \delta_{-\frac{L}{2}} - b_n \delta_{\frac{L}{2}} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (3.15)$$

avec  $a_n := y_n''(-\frac{L}{2})$ ,  $b_n := y_n''(\frac{L}{2})$ . Il nous faut alors distinguer deux cas : 1. Lorsque la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée et 2. lorsque  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

1. Si  $(\lambda_n)$  n'est pas bornée, on peut alors supposer que  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ .

Multiplions (\*) par  $\bar{y}_n$ , et effectuons une intégration par parties sur l'intervalle  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , on obtient alors,

$$\lambda_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |y_n|^2 = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (1 + f_{\epsilon_n})y_n' \bar{y}_n + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y_n'' \bar{y}_n'.$$

En prenant le conjugué de cette équation et en ajoutant les deux équations obtenues, nous avons,

$$(\lambda_n + \bar{\lambda}_n) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |y_n|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (f_{\epsilon_n})' |y_n|^2.$$

Or  $\|f_{\epsilon_n}'\|_{L^\infty(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $\|y_n\|_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} = 1$  on en conclut que  $\lambda_n + \bar{\lambda}_n \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Multiplions (\*) par  $x\bar{y}_n$ , et effectuons une intégration par parties sur l'intervalle  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , on obtient après calculs,

$$\begin{aligned} \lambda_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x |y_n|^2 &= - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x(1 + f_{\epsilon_n})y_n' \bar{y}_n + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y_n'' \bar{y}_n + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x y_n'' \bar{y}_n', \\ &= - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x(1 + f_{\epsilon_n})y_n' \bar{y}_n - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |y_n'|^2 + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x y_n'' \bar{y}_n'. \end{aligned}$$

En prenant le conjugué de cette équation comme précédemment et en ajoutant les deux équations obtenues, nous avons,

$$(\lambda_n + \bar{\lambda}_n) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x |y_n|^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x(1 + f_{\epsilon_n}))' |y_n|^2 - 3 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |y_n'|^2.$$

Mais,  $\|(x(1 + f_{\epsilon_n}))' - 1\|_{L^\infty(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} \rightarrow 0$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$  donc

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |y_n'|^2 \rightarrow \frac{1}{3} \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.16)$$

et par conséquent la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ . Ainsi, après extraction d'une sous suite si besoin est, on peut supposer que pour un certain  $y$  dans  $L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  avec  $\|y\|_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} = 1$ ,  $y_n \rightarrow y$  fortement dans  $L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ .

Divisons (\*) par  $\lambda_n$  et on obtient alors

$$y_n = -\frac{1 + f_{\epsilon_n}}{\lambda_n} y_n' - \frac{1}{\lambda_n} y_n''.$$

En prenant la limite de cette équation dans  $\mathcal{D}'(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  on obtient

$$y = 0,$$

ce qui contredit le fait que  $\|y\|_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} = 1$ .

2. Si  $(\lambda_n)$  est bornée, on peut supposer que  $\lambda_n \rightarrow \tilde{\lambda}$ . Après extraction d'une sous suite si besoin est,  $u_n \rightarrow \tilde{u}$  au sens des distributions et il existe un couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  et

$$\tilde{\lambda} \tilde{u} + \tilde{u}' + \tilde{u}'' = a \delta_{-\frac{L}{2}} - b \delta_{\frac{L}{2}}.$$

Ce problème est le même que celui étudié par Rosier, [38]. Rappelons le résultat qu'il a obtenu : si  $\tilde{\lambda} \neq \lambda_0$ , où  $\lambda_0$  représente la valeur propre qu'il a obtenue, il n'y a pas de solution à cette équation différentielle. Par conséquent, nous avons nécessairement  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ .

On peut de plus remarquer que notre opérateur revient en fait à la perturbation de l'opérateur  $A\omega = -\omega'' - \omega'$  par l'opérateur  $B_\epsilon\omega = -f_\epsilon\omega'$ , donc la famille d'opérateurs obtenue dépend de  $\epsilon$  de manière analytique. D'après la théorie de Kato [17], c'est une famille holomorphe. Comme  $A$  a une unique valeur propre (notée  $\lambda_0$ ), qui n'est pas dégénérée, on peut appliquer le théorème de Rellich-Kato (voir Reed-Simon [37], Théorème XII.8). Donc il existe pour  $\epsilon$  proche de 0 une unique valeur propre de  $A_\epsilon$  qui est isolée et non dégénérée et un vecteur propre correspondant qui est analytique en  $\epsilon$ . Par conséquent, on peut écrire, pour  $n$  assez grand,  $\lambda_n = \lambda_0 + \phi(\epsilon_n)$ , avec  $\phi$  analytique dans un voisinage de 0.

Grâce au théorème de Rellich-Kato [17], on peut écrire les vecteurs propres  $u_n$  et les valeurs propres  $\lambda_n$  de la manière suivante,  $u_n = c_0 u_0 + \epsilon_n u_1 + o(\epsilon_n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  avec  $\frac{o(\epsilon_n)}{\epsilon_n} \rightarrow 0$  dans  $L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  et  $\lambda_n = \lambda_0 + \epsilon_n \lambda_1 + o(\epsilon_n)$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . De plus, d'après (2.12), on connaît le développement des solutions stationnaires, pour  $L \neq 2k\pi$ ,  $f_{\epsilon_n}(x) = \epsilon_n \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{L}{4})}{\sin^2(\frac{L}{4})} + o(\epsilon_n)$ , uniformément pour  $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ . Le cas où  $L = 2k\pi$  a déjà été traité dans l'annexe 5.

L'équation (3.15) devient alors au premier ordre en  $\epsilon_n$  :

$$\lambda_0 u_1 + u_1''' + u_1' = a_1 \delta_{-\frac{L}{2}} - b_1 \delta_{\frac{L}{2}} - \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{L}{4})}{\sin^2(\frac{L}{4})} u_0' - \lambda_1 c_0 u_0. \quad (3.17)$$

Prenons la transformée de Fourier de (3.17)

$$\begin{aligned} & (\lambda_0 + (i\xi) + (i\xi)^3) \mathcal{F}(u_1)(\xi) = \\ & a_1 e^{i\frac{L}{2}\xi} - b_1 e^{-i\frac{L}{2}\xi} - \mathcal{F}\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{L}{4})} u_0'\right)(\xi) - \left(\lambda_1 c_0 - i\xi \tan^{-2}\left(\frac{L}{4}\right)\right) \mathcal{F}(u_0)(\xi), \end{aligned}$$

On déduit du théorème de Paley-Wiener, (voir Yosida [46]) que  $\mathcal{F}(u_1)$  est une fonction entière dans  $\mathbb{C}$ . Par conséquent, la fonction  $g$  définie par

$$g(\xi) = a_1 e^{i\frac{L}{2}\xi} - b_1 e^{-i\frac{L}{2}\xi} - \mathcal{F}\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{L}{4})} u_0'\right) - \left(\lambda_1 c_0 - i\xi \tan^{-2}\left(\frac{L}{4}\right)\right) \mathcal{F}(u_0)$$

s'annule en les zéros de  $(\lambda_0 + (i\xi) + (i\xi)^3)$ , notés  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . D'après [38], les valeurs que l'on considère ici s'écrivent sous la forme,

$$L = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}, \mu_0 = -\frac{1}{3}(2k + l) \frac{2\pi}{L}, \mu_1 = \mu_0 + k \frac{2\pi}{L}, \mu_2 = \mu_0 + (k + l) \frac{2\pi}{L},$$

avec  $k, l \in \mathbb{N}^*$ .

On a donc un système de trois équations à 3 inconnues,  $a_1$ ,  $b_1$  et  $\lambda_1$  à résoudre.

$$\begin{aligned} & a_1 e^{i\frac{L}{2}\mu_0} - b_1 e^{-i\frac{L}{2}\mu_0} - \mathcal{F}\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{L}{4})} u_0'\right)(\mu_0) - \\ & \quad \left(\lambda_1 c_0 - i\mu_0 \tan^{-2}\left(\frac{L}{4}\right)\right) \mathcal{F}(u_0)(\mu_0) = 0, \\ & (-1)^k (a_1 e^{i\frac{L}{2}\mu_0} - b_1 e^{-i\frac{L}{2}\mu_0}) - \mathcal{F}\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{L}{4})} u_0'\right)(\mu_1) - \\ & \quad \left(\lambda_1 c_0 - i\mu_1 \tan^{-2}\left(\frac{L}{4}\right)\right) \mathcal{F}(u_0)(\mu_1) = 0, \\ & (-1)^{k+l} (a_1 e^{i\frac{L}{2}\mu_0} - b_1 e^{-i\frac{L}{2}\mu_0}) - \mathcal{F}\left(\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{L}{4})} u_0'\right)(\mu_2) - \\ & \quad \left(\lambda_1 c_0 - i\mu_2 \tan^{-2}\left(\frac{L}{4}\right)\right) \mathcal{F}(u_0)(\mu_2) = 0. \end{aligned}$$

Soit encore, en notant  $\hat{u}_0$  la transformée de Fourier de  $u_0$ ,

$$a_1 e^{i\frac{L}{2}\mu_0} - b_1 e^{-i\frac{L}{2}\mu_0} - \mathcal{F}\left(\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{L}{4}\right)} u'_0\right)(\mu_0) - \left(\lambda_1 c_0 - i\mu_0 \tan^{-2}\left(\frac{L}{4}\right)\right) \hat{u}_0(\mu_0) = 0, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & -\sin^2\left(\frac{L}{4}\right) \lambda_1 c_0 (\hat{u}_0(\mu_1) - (-1)^k \hat{u}_0(\mu_0)) + i \cos^2\left(\frac{L}{4}\right) (\mu_1 \hat{u}_0(\mu_1) - (-1)^k \mu_0 \hat{u}_0(\mu_0)) - \\ & \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_1) + (-1)^k \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & -\sin^2\left(\frac{L}{4}\right) \lambda_1 c_0 (\hat{u}_0(\mu_2) - (-1)^{(k+l)} \hat{u}_0(\mu_0)) + i \cos^2\left(\frac{L}{4}\right) (\mu_2 \hat{u}_0(\mu_2) - (-1)^{k+l} \mu_0 \hat{u}_0(\mu_0)) - \\ & \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_2) + (-1)^{(k+l)} \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il nous suffit donc de vérifier si

$$\begin{aligned} d = & [\hat{u}_0(\mu_1) - (-1)^k \hat{u}_0(\mu_0)] \left[ \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_2) - (-1)^{(k+l)} \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_0) - \right. \\ & \left. i \cos^2\left(\frac{L}{4}\right) (\mu_2 \hat{u}_0(\mu_2) - (-1)^{k+l} \mu_0 \hat{u}_0(\mu_0)) \right] - \\ & [\hat{u}_0(\mu_2) - (-1)^{k+l} \hat{u}_0(\mu_0)] \left[ \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_1) - (-1)^k \mathcal{F}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) u'_0\right)(\mu_0) - \right. \\ & \left. i \cos^2\left(\frac{L}{4}\right) (\mu_1 \hat{u}_0(\mu_1) - (-1)^k \mu_0 \hat{u}_0(\mu_0)) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

peut s'annuler.

Toujours d'après [38], on a

$$\hat{u}_0(\xi) = i \frac{e^{i\frac{L}{2}(\xi-\mu_0)} - e^{-i\frac{L}{2}(\xi-\mu_0)}}{(\xi - \mu_0)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)}. \quad (3.22)$$

Il est donc aisé de calculer les valeurs de  $\hat{u}_0$  en  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

On a

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(\mu_0) &= \frac{-L^3}{(2\pi)^2(k+l)k} \\ \hat{u}_0(\mu_1) &= \frac{(-1)^k L^3}{(2\pi)^2 l k} \\ \hat{u}_0(\mu_2) &= \frac{(-1)^{k+l+1} L^3}{(2\pi)^2(k+l)l} \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer les valeurs de  $f(\xi) = \mathcal{F} \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) u'_0 \right)$  en  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .  
Or

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathcal{F} \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) u'_0 \right) (y) \\ &= \mathcal{F} \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) * (i\xi \hat{u}_0)(y) \end{aligned}$$

On a donc à calculer

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) (y - \xi) i\xi \hat{u}_0(\xi) \\ &= -2i \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi - 1) \right)}{2(y - \xi - 1)} + \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi + 1) \right)}{2(y - \xi + 1)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi) \right)}{2(y - \xi)} \right] \xi \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(\xi - \mu_0) \right)}{(\xi - \mu_0)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi - 1) \right) \xi \sin \left( \frac{L}{2}(\xi - \mu_0) \right)}{(y - \xi - 1)(\xi - \mu_0)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi - 1) \right) \sin \left( \frac{L}{2}(\xi - \mu_0) \right)}{(y - \xi - 1)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)} + \\ &\quad \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi - 1) \right) \sin \left( \frac{L}{2}(\xi - \mu_0) \right)}{(y - \xi - 1)(\xi - \mu_0)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)} \end{aligned}$$

Donc après mise sous forme de fractions rationnelles,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \left( \frac{L}{2}(y - \xi - 1) \right) \xi \sin \left( \frac{L}{2}(\xi - \mu_0) \right)}{(y - \xi - 1)(\xi - \mu_0)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2)} &= \frac{\pi}{2} \sin \left( \frac{L}{2}(y - 1 - \mu_0) \right) \\ &\quad \left[ \frac{1}{(y - 1 - \mu_1)(y - 1 - \mu_2)} + \frac{1}{(y - 1 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)} + \right. \\ &\quad \frac{1}{(y - 1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1)} + \frac{\mu_0}{(y - 1 - \mu_0)(y - 1 - \mu_1)(y - 1 - \mu_2)} + \\ &\quad \frac{\mu_0}{(y - 1 - \mu_0)(\mu_0 - \mu_1)(\mu_0 - \mu_2)} + \frac{\mu_0}{(y - 1 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_0)(\mu_1 - \mu_2)} + \\ &\quad \left. \frac{\mu_0}{(y - 1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_0)(\mu_2 - \mu_1)} \right] \end{aligned}$$

D'où, la valeur de  $f(y)$  en remplaçant  $-1$  par  $1$  puis par  $0$ .

On en déduit donc les valeurs de  $f$  en  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

$$f(\mu_0) = i \left[ \frac{L \sin(L/2)}{2k + l} + \frac{(2k + l)L^2}{6k(k + l)} \right], \quad (3.23)$$

$$f(\mu_1) = (-1)^k i \left[ \frac{L \sin(L/2)}{l - k} - \frac{(l - k)L^2}{6kl} \right], \quad (3.24)$$

$$f(\mu_2) = (-1)^{k+l+1} i \left[ \frac{L \sin(L/2)}{k+2l} + \frac{L^2(k+2l)}{6l(k+l)} \right]. \quad (3.25)$$

Il ne nous reste plus alors qu'à calculer

$$\begin{aligned} d = & \left[ \hat{u}_0(\mu_1) - (-1)^k \hat{u}_0(\mu_0) \right] \\ & \left[ f(\mu_2) - (-1)^{(l+k)} f(\mu_0) - i \cos^2 \left( \frac{L}{4} \right) (\mu_2 \hat{u}_0(\mu_2) - (-1)^{k+l} \mu_0 \hat{u}_0(\mu_0)) \right] \\ & - \left[ \hat{u}_0(\mu_2) - (-1)^{k+l} \hat{u}_0(\mu_0) \right] \\ & \left[ f(\mu_1) - (-1)^k f(\mu_0) - i \cos^2 \left( \frac{L}{4} \right) (\mu_1 \hat{u}_0(\mu_1) - (-1)^k \mu_0 \hat{u}_0(\mu_0)) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

et à démontrer qu'il ne s'annule pas lorsque  $k$  et  $l$  décrivent  $\mathbb{N}^*$ .

Or après calculs, on trouve que ce déterminant vaut,

$$d = \frac{-3i(-1)^l L^4}{16\pi^3 k l (k+l)} \left[ 4\pi \left( \sin \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{L}{2} \right) + L \left( \cos \left( \frac{L}{2} \right) + 1 \right) \right] \quad (3.27)$$

On en déduit donc que  $d$  ne s'annule jamais pour  $k$  et  $l$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ .

Nous avons ainsi achevé la démonstration du Lemme 3.5 et celle du Théorème 3.3.  $\square$

On a de plus le résultat suivant, (voir démonstration en Annexe 5, Proposition 5.10).

**Proposition 3.6** *Il existe une unique application linéaire*

$$\Psi : L^2 \left( -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right) \rightarrow B,$$

telle que pour tout  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$  et tout  $h \in \mathcal{C}^2([0, T])$  avec  $h(0) = 0$ ,  $\Psi(y_0, h)$  est l'unique solution classique du problème de Cauchy, (3.1)-(3.4).

Pour appliquer H.U.M., nous avons encore besoin de résultats d'observabilité pour le problème rétrograde homogène suivant (qui est bien posé)

$$u_t + (1 + f_\epsilon) u_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.28)$$

$$u \left( t, -\frac{L}{2} \right) = u \left( t, \frac{L}{2} \right) = 0, \quad (3.29)$$

$$u_x \left( t, -\frac{L}{2} \right) = 0, \quad (3.30)$$

$$u(T, x) = u_T(x). \quad (3.31)$$

Le changement de variables  $\tau = T - t$ ,  $\xi = -x$  transforme (3.28)-(3.31) en (3.9)-(3.12) et vice-versa.

D'après le théorème 3.3 et le résultat (3.13) on a le résultat suivant

**Théorème 3.7** Soit  $T > 0$ . Pour tout  $u_T \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  la solution faible de (3.28)-(3.31) appartient à  $B$ , la fonction  $u_x\left(\cdot, \frac{L}{2}\right)$  a un sens dans  $L^2(0, T)$  et il existe une constante  $C = C(T, \epsilon) > 0$  telle que pour tout  $u_T \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  on a

$$\|u_x\left(\cdot, \frac{L}{2}\right)\|_{L^2(0, T)} \leq \|u_T\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} \leq C \|u_x\left(\cdot, \frac{L}{2}\right)\|_{L^2(0, T)}.$$

Grâce aux inégalités du Théorème 3.7 nous avons les deux résultats d'observabilité. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de contrôlabilité du problème linéaire à l'aide de H.U.M. (voir démonstration en Annexe 5, Théorème 5.3)

**Théorème 3.8** Pour  $|\epsilon|$  proche de zéro mais non nul, pour tout  $T > 0$  et tout  $y_0, y_T \in L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  il existe un contrôle  $h \in L^2(0, T)$  tel que la solution faible

$$y \in C\left([0, T], L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right) \cap L^2\left(0, T, H^1\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)\right)$$

de

$$(CPb) \begin{cases} y_t + f'_\epsilon y + (1 + f_\epsilon)y_x + y_{xxx} = 0 \\ y(t, -\frac{L}{2}) = y(t, \frac{L}{2}) = 0 \\ y_x(t, \frac{L}{2}) = h(t) \\ y(0, x) = y_0(x) \end{cases}$$

vérifie  $y(T, \cdot) = y_T$ .





# Chapitre 4

## Contrôlabilité de l'équation non linéaire.

Nous démontrons maintenant que le problème suivant est exactement contrôlable dans un voisinage de  $f_\epsilon$ , pour  $\epsilon$  non nul et suffisamment proche de 0.

$$y_t + y_x + yy_x + y_{xxx} = 0, \quad (4.1)$$

$$y\left(t, -\frac{L}{2}\right) = y\left(t, \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (4.2)$$

$$y_x\left(t, \frac{L}{2}\right) = h(t) \quad (h \in L^2(0, T)), \quad (4.3)$$

$$y(0, x) = y_0(x). \quad (4.4)$$

Nous allons plus précisément démontrer que pour tout  $T > 0$ , il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \in ]-\epsilon_0, \epsilon_0[ \setminus \{0\}$ , il existe un nombre strictement positif  $r_0$ , tel que pour tout  $y_0, y_T$  appartenant à  $L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$  avec

$$\|y_0 - f_\epsilon\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} < r_0, \quad \|y_T - f_\epsilon\|_{L^2\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)} < r_0$$

il existe  $y$  dans l'espace  $B$  tel que (4.1)-(4.4) soient vérifiés et que  $y(T, x) = y_T(x)$ . Posons  $\tilde{y} = y - f_\epsilon$ ,  $\tilde{y}_0 = y_0 - f_\epsilon$ ,  $\tilde{y}_T = y_T - f_\epsilon$  et  $\tilde{h}(t) = h(t) - f'_\epsilon\left(\frac{L}{2}\right)$ . Alors les équations (4.1)-(4.4) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\tilde{y}_t + f'_\epsilon \tilde{y} + (1 + f_\epsilon) \tilde{y}_x + \tilde{y}_{xxx} = -\tilde{y}_x \tilde{y}, \quad (4.5)$$

$$\tilde{y}\left(t, -\frac{L}{2}\right) = \tilde{y}\left(t, \frac{L}{2}\right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\tilde{y}_x\left(t, \frac{L}{2}\right) = \tilde{h}(t), \quad (4.7)$$

$$\tilde{y}(0, \cdot) = \tilde{y}_0(x). \quad (4.8)$$

Pour montrer ce résultat nous allons appliquer un argument de point fixe à l'aide d'une application contractante.

Nous allons chercher  $\tilde{y}$  sous la forme  $\tilde{y} = \tilde{S}_\epsilon(t)y_0 + y_1 + y_2$ , où  $(\tilde{S}_\epsilon(t))_{t \geq 0}$  représente le semi-groupe associé à l'opérateur  $\tilde{A}_\epsilon$  du Chapitre 3.1, et  $y_1$  et  $y_2$  représentent les solutions respectives des problèmes non homogènes,

$$(1) \begin{cases} y_{1t} + f'_\epsilon y_1 + (1 + f_\epsilon)y_{1x} + y_{1xxx} = 0, \\ y_1(t, -\frac{L}{2}) = y_1(t, \frac{L}{2}) = 0, \\ y_{1x}(t, \frac{L}{2}) = \tilde{h}(t), \\ y_1(0, x) = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y_{2t} + f'_\epsilon y_2 + (1 + f_\epsilon)y_{2x} + y_{2xxx} = f, \\ y_2(t, -\frac{L}{2}) = y_2(t, \frac{L}{2}) = 0, \\ y_{2x}(t, \frac{L}{2}) = 0, \\ y_2(0, x) = 0. \end{cases}$$

avec  $f = -\tilde{y}\tilde{y}_x$ . Soit  $\psi_1 : h \in L^2(0, T) \mapsto y_1 \in B$ , l'application qui associe à  $h$  la solution faible de (1). D'après la proposition 3.6,  $\psi_1$  est linéaire et continue. La proposition qui suit concerne le second problème (2) (voir démonstration en Annexe 5, Proposition 5.12).

**Proposition 4.1** 1. *Il existe une constante  $C_1$  telle que*

$$\|yy_x - zz_x\|_{L^1(0, T, L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}))} \leq C_1(T) (\|y\|_{L^2(0, T, H^1)} + \|z\|_{L^2(0, T, H^1)}) \|y - z\|_{L^2(0, T, H^1)}$$

pour tout  $y, z \in L^2(0, T, H^1(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}))$ .

2. *Pour  $f \in L^1(0, T, L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}))$  la solution faible  $y_2$  de (2) appartient à  $B$  et de plus, l'application  $\psi_2 : f \mapsto y_2$  est continue.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de contrôlabilité exacte du problème non linéaire (voir démonstration en Annexe 5, Théorème 5.4).

**Théorème 4.2** *Soit  $T > 0$ . Pour  $\epsilon$  suffisamment proche de zéro mais non nul, il existe  $r_0 > 0$ , tel que, pour tout  $y_0, y_T \in L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  avec*

$$\|y_0 - f_\epsilon\|_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} < r_0, \text{ et } \|y_T - f_\epsilon\|_{L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})} < r_0,$$

il existe  $y \in C([0, T], L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})) \cap L^2(0, T, H^1(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}))$  vérifiant

$$\begin{cases} y_t + yy_x + y_x + y_{xxx} = 0 \text{ dans } D'(0, T, H^{-2}(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})) \\ y(t, -\frac{L}{2}) = y(t, \frac{L}{2}) = 0 \text{ dans } L^2(0, T) \\ y(0, x) = y_0(x) \end{cases}$$

et tel que  $y(T, \cdot) = y_T$ .

Nous avons donc obtenu la contrôlabilité exacte locale de l'équation de KdV autour d'une solution stationnaire non nulle.

# Chapitre 5

## Annexe

Cette annexe comporte l'article sur l'équation de KdV qui a fait l'objet d'une publication [11]. Nous donnons dans cet article toutes les démonstrations de la première partie pour une longueur critique  $L = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .



# Exact boundary controllability of the KdV equation around a nontrivial stationary solution.

The exact boundary controllability of the non-linear Korteweg-de Vries equation on bounded domains is studied. Only the first spatial derivative at the right endpoint is assumed to be controlled. In this case, the exact controllability has been shown by Rosier [38] when the length  $L$  of the domain is not in the set  $\mathcal{N} := \{2\pi\sqrt{\frac{k^2+kl+l^2}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^*\}$ . Here, we study the critical case  $L = 2k\pi$  where  $k \in \mathbb{N}^*$ , and we prove the exact controllability of the non-linear KdV equation for initial and final states closed to a non null small stationary solution.

## 5.1 Introduction.

The Korteweg-de Vries (KdV) equation reads as follows :

$$y_t + yy_x + y_x + y_{xxx} = 0. \quad (5.1)$$

It has been designed to serve as a model for propagation of small amplitude long water waves in a uniform channel and it also appears in the study of plasma physics, anharmonic lattices and elastic rods. The Cauchy problem without control has already been studied by Bona and Winther [6] for exemple. The exact controllability of the KdV equation has been proved for an internal control on a periodic domain (Russell and Zhang [40]). Recently, Rosier ([38]) has shown the boundary controllability of (5.1) on a bounded domain. To recall the main result proved by Rosier [38], we first need to introduce the set of critical lengths :

$$\mathcal{N} := \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}}; k, l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

**Theorem 5.1** (Rosier) *Let  $T > 0$  and  $L > 0$ . There exists  $r_0 > 0$  such that for any  $y_0, y_T$  in  $L^2(0, L)$  with*

$$\|y_0\|_{L^2(0,L)} < r_0, \|y_T\|_{L^2(0,L)} < r_0,$$

there exists a function  $y(t, x)$  in  $C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  fulfilling

$$y_t = -(y_x + yy_x + y_{xxx}) \text{ in } \mathcal{D}'(0, T, H^{-2}(0, L)), \quad (5.2)$$

$$y(\cdot, 0) = 0 \text{ in } L^2(0, T), \quad (5.3)$$

$$y(0, \cdot) = y_0, \quad y(T, \cdot) = y_T. \quad (5.4)$$

Moreover, if  $L \notin \mathcal{N}$ , then we may also require that  $y(\cdot, L) = 0$  and take  $y_x(\cdot, L) \in L^2(0, T)$  as a control function.

The aim of this paper is to show that a similar result holds in the critical case  $L = 2k\pi \in \mathcal{N}$ , near any even stationary solutions close to 0 but not 0; meaning that we only have to control  $y_x(\cdot, L)$  in order to get the exact controllability of (5.1) in a neighborhood of any stationary solution close to 0 but not 0. For the sake of simplicity, we assume that the spatial domain is  $(-k\pi, k\pi)$  instead of  $(0, 2k\pi)$ . Next result provides the set of stationary solutions of (5.1).

**Theorem 5.2** *The set of even stationary solutions near 0 of*

$$\begin{cases} y_t + yy_x + y_x + y_{xxx} = 0 \\ y(\cdot, k\pi) = y(\cdot, -k\pi) = 0 \end{cases}$$

is the set of functions

$$f_{\alpha, \beta, \gamma} : x \mapsto (\beta - \alpha)cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}x}{2\sqrt{3}}, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) + \alpha,$$

$$g_{\alpha, \beta, \gamma} : x \mapsto \alpha + (\beta - \alpha) \left( 1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) \frac{sn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}x}{2\sqrt{3}}, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)}{dn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}x}{2\sqrt{3}}, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)},$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  are such that

$$\begin{cases} \gamma < 0, \alpha < 0, \beta > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = -3 \\ f_{\alpha, \beta, \gamma}(k\pi) = 0 \end{cases}$$

Functions  $cn$ ,  $sn$  and  $dn$  are called the Jacobi's elliptic functions, see for exemple (Lawden [23]) for more informations about these functions. Let us recall that they are analytic and periodic.

We now study the linearized KdV equation around  $f_{\alpha, \beta, \gamma}$  where  $|\beta|$  is small enough but not zero, and so  $f_{\alpha, \beta, \gamma}$  is close to zero for the  $C^1$ -norm in  $[-k\pi, k\pi]$  in the next theorems.

**Theorem 5.3** *For  $|\beta|$  small enough but not zero, for every  $T > 0$  and for every  $y_0, y_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$ , there exists  $h \in L^2(0, T)$  such that the mild solution*

$$y \in C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi)) \cap L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi)) \text{ of}$$

$$(CPb) \begin{cases} y_t + f'_{\alpha,\beta,\gamma} y + (1 + f_{\alpha,\beta,\gamma}) y_x + y_{xxx} = 0 \\ y(t, -k\pi) = y(t, k\pi) = 0 \\ y_x(t, k\pi) = h(t) \\ y(0, x) = y_0(x) \end{cases}$$

satisfies  $y(T, \cdot) = y_T$ .

This theorem is proved by means of Hilbert Uniqueness Method (H.U.M.), [27]. The main result of this paper is the following one :

**Theorem 5.4** *Let  $T > 0$ . For  $|\beta|$  small enough but not zero, there exists  $r_0 > 0$ , such that, for all  $y_0, y_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$  with*

$$\|y_0 - f_{\alpha,\beta,\gamma}\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} < r_0, \quad \text{and} \quad \|y_T - f_{\alpha,\beta,\gamma}\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} < r_0,$$

there exists  $y \in C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi)) \cap L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$  satisfying

$$\begin{cases} y_t + yy_x + y_x + y_{xxx} = 0 \text{ in } D'(0, T, H^{-2}(-k\pi, k\pi)) \\ y(t, -k\pi) = y(t, k\pi) = 0 \text{ in } L^2(0, T) \\ y(0, x) = y_0(x) \end{cases}$$

and such that  $y(T, \cdot) = y_T$ .

This theorem is deduced from Theorem 5.3 and proved by means of Banach contraction fixed point theorem.

The paper is organized as follows : In Section 5.2, we derive a set of stationary solutions for (5.1). The Section 5.3 is divided into two subsections. In the first one, we consider a boundary initial value linear problem in which only the value of the first spatial derivative of the state function at  $x = k\pi$  is assumed to be nonnull. Next, in the second subsection, an observability result is given and used to show the exact boundary controllability of the linear KdV equation with these boundary conditions (Theorem 5.3). In Section 5.4, we derive from Theorem 5.3 the exact boundary controllability of nonlinear KdV equation on a bounded domain (Theorem 5.4).

## 5.2 Search of a set of even stationary solutions.

We want a solution  $y : [-k\pi, k\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  of

$$\begin{cases} yy_x + y_x + y_{xxx} = 0, \\ y(k\pi) = y(-k\pi) = 0. \end{cases}$$

Integrating this equation twice, we get

$$\begin{aligned} y_x^2 &= -\frac{y^3}{3} - y^2 + C_1 y + C_2 := -P(y), \\ y(k\pi) &= y(-k\pi) = 0, \end{aligned}$$



where  $C_1 = y_{xx}(k\pi)$  and  $C_2 = y_x^2(k\pi)$ . As we want a non null small solution,  $C_1$  and  $C_2$  are not far from zero but not both zero. The discriminant of the polynomial  $P \Delta = -4C_1^3 - 3C_1^2 + 9C_2^2 - 12C_2$  is strictly negative. Hence, thanks to the criteria of Cardan, we deduce that  $P$  has three distinct real solutions. The function  $P$  is a cubic polynomial and we get an elliptic integral. We will integrate it thanks to the theory of elliptic functions, (Lawden [23]).

We denote by  $\gamma < \alpha < \beta$ , the three distinct solutions of  $P$ .  
We get then

$$3y_x^2 = -(y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma), \quad (5.5)$$

$$y(k\pi) = y(-k\pi) = 0, \quad (5.6)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -3,$$

$$\alpha\beta\gamma = 3C_2.$$

Since  $C_2 = y_x^2(k\pi) \geq 0$ , we have

$$\gamma < 0 \text{ and } \alpha < 0, \beta > 0$$

We want a solution not far from zero so  $y$  has to be between  $\alpha$  and  $\beta$ . Thanks to the theory explained in ([23], 3.1), the solution in this case is

$$f_{\alpha,\beta,\gamma} : x \mapsto (\beta - \alpha)cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x - C, m \right) + \alpha \text{ with}$$

$$\begin{cases} \gamma < 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = -3 \\ f_{\alpha,\beta,\gamma}(k\pi) = f_{\alpha,\beta,\gamma}(-k\pi) = 0 \\ C \text{ is a real constant of integration} \end{cases}$$

where the modulus  $m$  of the elliptic function is  $m = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}$ .

**Remark 1.**  $cn(x, m)$  is called the cnoidal function, it is analytic in regard to  $x$  and in regard to  $m$ . This function is even, periodic and it satisfies  $-1 \leq cn(x, m) \leq 1$  for every  $x$  in  $\mathbb{R}$  and  $cn(0, m) = 1$ . If  $m = 0$  then  $cn(x, 0) = \cos(x)$ .

We want the even solutions and  $C$  is real so, thanks to ([23], chap.2),

$$C = 2nK, \text{ or } C = (2n + 1)K$$

where  $K$  is an analytic function of  $m$  and  $n$  is in  $\mathbb{N}$ . Hence we have only four cases to considerate. We consider the cases  $L = 2\pi + 2k\pi$  and  $L = 4k\pi$ .

1. If  $L = 2\pi + 4k\pi$

(a) If  $C = 2nK$ , then

$$cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x - C, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) = cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)$$

and  $f_{0,0,-3}(x) = 0$ .

We want a solution such that  $f_{\alpha,\beta,\gamma}((2k+1)\pi) = 0$ . Let

$$F(\beta, \gamma) = -3 - \beta - \gamma + (2\beta + \gamma + 3)cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma} L}{2\sqrt{3}} \frac{L}{2}, \frac{2\beta + \gamma + 3}{\beta - \gamma} \right),$$

for  $\beta$  in a small open subset containing zero and  $\gamma$  in a small open subset containing  $-3$ . We get then,

$$\begin{aligned} F(0, -3) &= f_{0,0,-3}((2k+1)\pi) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, -3) &= -1. \end{aligned}$$

Hence, we can apply the implicit function theorem in an open subset containing zero. We get an open subset around  $-3$ , another one around  $0$  and a function  $\phi$  where  $\gamma = \phi(\beta)$  such that  $F(\beta, \phi(\beta)) = 0$ .

So we get a stationary solution  $f_\beta = f_{-3-\beta-\phi(\beta),\beta,\phi(\beta)}$  of the KdV equation which is analytic with respect to  $x$  and  $\beta$ . As  $\beta$  is in a subset around  $0$ , the solution  $f_{-3-\beta-\phi(\beta),\beta,\phi(\beta)}$  is not far from  $0$  and we can write  $\beta = \epsilon$ . Then  $m = O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  and we can approach  $f_\epsilon$  in the first order in  $\epsilon$  by  $(2 + \phi'(0))\epsilon \cos^2(\frac{x}{2}) - (1 + \phi'(0))\epsilon + o(\epsilon)$  uniformly for  $x \in [-(2k+1)\pi, (2k+1)\pi]$ . But  $\phi'(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, -3)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \beta}(0, -3) = -1$ , hence

$$f_\epsilon(x) = \epsilon \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + o(\epsilon) \text{ uniformly for } x \in [-(2k+1)\pi, (2k+1)\pi].$$

(b) If  $C = (2n+1)K$ , then

$$cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}} x - C, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) = \left( 1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) \frac{sn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}} x, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)}{dn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}} x, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)},$$

and  $f_{0,0,-3}(x) = 0$ . We want a solution such that  $f_{\alpha,\beta,\gamma}((2k+1)\pi) = 0$ . Let

$$\begin{aligned} G(\alpha, \gamma) &= f_{\alpha,\beta,\gamma}((2k+1)\pi) \\ &= \alpha + \frac{(-3 - 2\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma)}{-3 - \alpha - 2\gamma} \frac{sn^2 \left( \frac{\sqrt{-3-\alpha-2\gamma} L}{2\sqrt{3}} \frac{L}{2}, \frac{-2\alpha-\gamma-3}{-3-\alpha-2\gamma} \right)}{dn^2 \left( \frac{\sqrt{-3-\alpha-2\gamma} L}{2\sqrt{3}} \frac{L}{2}, \frac{-2\alpha-\gamma-3}{-3-\alpha-2\gamma} \right)}, \end{aligned}$$

for  $\alpha$  in a small open subset containing zero and  $\gamma$  in a small open subset containing  $-3$ . We get then,

$$\begin{aligned} G(0, -3) &= f_{0,0,-3}((2k+1)\pi) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma}(0, -3) &= -1. \end{aligned}$$

Hence, we can apply the implicit function theorem on a small open subset containing zero. We get an open subset around  $-3$ , another one around  $0$  and a function  $\psi$  where  $\gamma = \psi(\alpha)$  such that  $G(\alpha, \psi(\alpha)) = 0$ .

So we get a stationary solution  $g_\alpha = f_{\alpha, -3-\alpha-\gamma, \psi(\alpha)}$  of the KdV equation which is analytic in regard to  $x$  and  $\alpha$ . As  $\alpha$  is in a subset around  $0$ , the solution is not far from  $0$  and we can write  $\alpha = -\epsilon$ . Then  $m = O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ .

As  $\psi'(0) = -(\frac{\partial G}{\partial \gamma}(0, -3))^{-1} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(0, -3) = -1$ , we can approach  $g_\epsilon$  in the first order in  $\epsilon$  by  $\epsilon \sin^2(\frac{x}{2}) - \epsilon + o(\epsilon)$  uniformly for  $x \in [-(2k+1)\pi, (2k+1)\pi]$ .

Hence

$$g_\epsilon(x) = -\epsilon \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + o(\epsilon) \text{ uniformly for } x \in [-(2k+1)\pi, (2k+1)\pi].$$

2. If  $L = 4k\pi$ .

(a) If  $C = 2nK$ , then

$$cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta-\gamma}}{2\sqrt{3}}x - C, \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} \right) = cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta-\gamma}}{2\sqrt{3}}x, \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} \right)$$

and  $f_{0,0,-3}(x) = 0$ .

We want a solution such that  $f_{\alpha,\beta,\gamma}(2k\pi) = 0$ . Let

$$\bar{F}(\alpha, \gamma) = \alpha + (-3 - 2\alpha - \gamma)cn^2 \left( \frac{\sqrt{-3-\alpha-2\gamma}}{2\sqrt{3}}x, \frac{-3-2\alpha-\gamma}{-3-\alpha-2\gamma} \right),$$

for  $\alpha$  in a small open subset containing zero and  $\gamma$  in a small open subset containing  $-3$ . We get then,

$$\begin{aligned} \bar{F}(0, -3) &= f_{0,0,-3}(2k\pi) = 0, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \gamma}(0, -3) &= -1. \end{aligned}$$

Hence, we can apply the implicit function theorem in an open subset containing zero. We get an open subset around  $-3$ , another one around  $0$  and a function  $\phi$  where  $\gamma = \phi(\alpha)$  such that  $\bar{F}(\alpha, \phi(\alpha)) = 0$ .

So we get a stationary solution  $f_\alpha = f_{\alpha, -3-\alpha-\phi(\alpha), \phi(\alpha)}$  of the KdV equation which is analytic with respect to  $x$  and  $\alpha$ . As  $\alpha$  is in a subset around  $0$ , the solution  $f_{\alpha, -3-\alpha-\phi(\alpha), \phi(\alpha)}$  is not far from  $0$  and we can write  $\alpha = -\epsilon$ . Then  $m = O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$  and we can approach  $f_\epsilon$  in the first order in  $\epsilon$  by  $(2 + \phi'(0))\epsilon \cos^2(\frac{x}{2}) - (1 + \phi'(0))\epsilon + o(\epsilon)$  uniformly for  $x \in [-2k\pi, 2k\pi]$ . But  $\phi'(0) = -(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \gamma}(0, -3))^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha}(0, -3) = -1$ , hence

$$f_\epsilon(x) = -\epsilon \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + o(\epsilon) \text{ uniformly for } x \in [-2k\pi, 2k\pi].$$

(b) If  $C = (2n + 1)K$ , then

$$cn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x - C, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) = \left( 1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right) \frac{sn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)}{dn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}x, \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma} \right)},$$

and  $f_{0,0,-3}(x) = 0$ . We want a solution such that  $f_{\alpha,\beta,\gamma}(2k\pi) = 0$ . Let

$$\begin{aligned} \bar{G}(\beta, \gamma) &= f_{\beta,\beta,\gamma}(2k\pi) \\ &= (-3 - \beta - \gamma) + \frac{(2\beta + \gamma + 3)(-2\gamma - \beta - 3)}{\beta - \gamma} \frac{sn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}2k\pi, \frac{2\beta + \gamma + 3}{\beta - \gamma} \right)}{dn^2 \left( \frac{\sqrt{\beta - \gamma}}{2\sqrt{3}}2k\pi, \frac{2\beta + \gamma + 3}{\beta - \gamma} \right)}, \end{aligned}$$

for  $\beta$  in a small open subset containing zero and  $\gamma$  in a small open subset containing -3. We get then,

$$\begin{aligned} \bar{G}(0, -3) &= f_{0,0,-3}(2k\pi) = 0, \\ \frac{\partial \bar{G}}{\partial \gamma}(0, -3) &= -1. \end{aligned}$$

Hence, we can apply the implicit function theorem on a small open subset containing zero. We get an open subset around -3, another one around 0 and a function  $\psi$  where  $\gamma = \psi(\beta)$  such that  $\bar{G}(\beta, \psi(\beta)) = 0$ .

So we get a stationary solution  $g_\beta = f_{-3-\beta-\gamma,\beta,\psi(\beta)}$  of the KdV equation which is analytic in regard to  $x$  and  $\beta$ . As  $\beta$  is in a subset around 0, the solution is not far from 0 and we can write  $\beta = \epsilon$ . Then  $m = O(\epsilon)$  as  $\epsilon \rightarrow 0$ .

As  $\psi'(0) = -(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \gamma}(0, -3))^{-1} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \alpha}(0, -3) = -1$ , we can approach  $g_\epsilon$  in the first order in  $\epsilon$  by  $\epsilon \sin^2(\frac{x}{2}) + o(\epsilon)$  uniformly for  $x \in [-2k\pi, 2k\pi]$ .

Hence

$$g_\epsilon(x) = \epsilon \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) + o(\epsilon) \text{ uniformly for } x \in [-2k\pi, 2k\pi].$$

We get then two families of solutions which are both analytics in regard to  $x$  and  $\epsilon$  for each  $L$ .

### 5.3 Exact controllability with control on $y_x(t, k\pi)$ .

In this section, we are concerned with the boundary controllability of the linearized KdV equation around the stationary solution  $f_\epsilon$ . To be precise, given any  $y_0, y_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$  we search for a control function  $h \in L^2(0, T)$  such that the solution  $y = y(t, x)$  of the Cauchy problem

$$y_t + f'_\epsilon y + (1 + f_\epsilon)y_x + y_{xxx} = 0, \tag{5.7}$$

$$y(t, -k\pi) = y(t, k\pi) = 0, \tag{5.8}$$

$$y_x(t, k\pi) = h(t), \tag{5.9}$$

$$y(0, x) = y_0(x). \tag{5.10}$$

satisfies  $y(T, x) = y_T(x)$ .

We will use the Hilbert Uniqueness Method (H.U.M), ([27]), so we have to study the backward problem :

$$u_t + (1 + f_\epsilon)u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.11)$$

$$u(t, -k\pi) = u(t, k\pi) = 0, \quad (5.12)$$

$$u_x(t, -k\pi) = 0, \quad (5.13)$$

$$u(T, x) = u_T(x). \quad (5.14)$$

In the first subsection, we study the backward problem and in the second subsection, we prove some observability results in order to apply H.U.M.

### 5.3.1 The homogeneous Cauchy problem

Performing the change of variables  $\tau = T - t$  and  $\xi = -x$  in (11)-(14) and replacing  $(\tau, \xi)$  by  $(t, x)$ , we get the following homogeneous problem :

$$y_t + (1 + f_\epsilon)y_x + y_{xxx} = 0, \quad (5.15)$$

$$y(t, -k\pi) = y(t, k\pi) = 0, \quad (5.16)$$

$$y_x(t, k\pi) = 0, \quad (5.17)$$

$$y(0, x) = y_0(x). \quad (5.18)$$

To investigate the forward homogeneous problem (15)-(18), we introduce the operator  $A_\epsilon \omega = -\omega''' - \omega'(1 + f_\epsilon)$ , with domain

$$\mathcal{D}(A_\epsilon) = \{\omega \in H^3(-k\pi, k\pi), \omega(-k\pi) = \omega(k\pi) = \omega'(k\pi) = 0\}.$$

**Proposition 5.5**  $A_\epsilon$  generates a strongly continuous semi-group  $S_\epsilon(t)$  on  $L^2(-k\pi, k\pi)$ , which satisfies

$$\|S_\epsilon(t)\| \leq e^{C_0 t}, \text{ with } C_0 = \frac{1}{2} \|f'_\epsilon\|_\infty.$$

**Proof of Proposition 5.5.** We first define the operator  $A_0$  on  $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_\epsilon)$  by  $A_0 \omega = -\omega'''$ .  $A_0$  is closed, and

$$(A_0 \omega, \omega) = \int_{-k\pi}^{k\pi} -\omega''' \omega dx = \int_{-k\pi}^{k\pi} \omega' \omega'' dx = -\frac{\omega'(-k\pi)^2}{2} \leq 0.$$

Hence  $A_0$  is dissipative. Let  $A_0^*$  denote the adjoint operator. It is easy to see that  $A_0^* \omega = \omega'''$  with domain  $\mathcal{D}(A_0^*) = \{\omega \in H^3(-k\pi, k\pi), \omega(-k\pi) = \omega(k\pi) = \omega'(-k\pi) = 0\}$ , and that  $(\omega, A_0^* \omega) = -\frac{\omega'(k\pi)^2}{2} \leq 0$  for all  $\omega \in \mathcal{D}(A_0^*)$ , hence  $A_0^*$  is dissipative too. So, thanks to Pazy ([35], cor. 4.4 Chap. 1),  $A_0$  generates a strongly continuous semi-group of contractions on  $L^2(-k\pi, k\pi)$ .

We define now a second operator  $B_\epsilon$  on  $\mathcal{D}(A_\epsilon)$  by  $B_\epsilon\omega = -(1 + f_\epsilon)\omega'$ . For every  $\omega$  in  $\mathcal{D}(A_\epsilon)$ ,

$$\begin{aligned} (B_\epsilon\omega, \omega) &= - \int_{-k\pi}^{k\pi} (1 + f_\epsilon)\omega'\omega dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-k\pi}^{k\pi} f'_\epsilon \omega^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|f'_\epsilon\|_\infty \|\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}^2. \end{aligned}$$

Hence  $B_\epsilon - CI$  is dissipative for  $C \geq \frac{1}{2} \|f'_\epsilon\|_\infty$ . Moreover,

$$\begin{aligned} \|(B_\epsilon - CI)\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} &\leq \|(1 + f_\epsilon)\omega'\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} + C \|\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \\ &\leq \|(1 + f_\epsilon)\|_\infty \|\omega'\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} + C \|\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}. \end{aligned}$$

But, we may associate with each  $\epsilon > 0$  a constant  $C(\epsilon) > 0$  in such a way that

$$\|\omega'\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \leq \epsilon \|\omega'''\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} + C(\epsilon) \|\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}(A_\epsilon).$$

Choosing  $\epsilon = 1/(2 \|1 + f_\epsilon\|_\infty)$ , we have

$$\|(B_\epsilon - CI)\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \leq \frac{1}{2} \|A_0\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} + Const \|\omega\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}.$$

It follows from the theory of semigroups ([35], cor. 3.3 chap. 3), that  $A_\epsilon - CI = A_0 + B_\epsilon - CI$  generates a strongly continuous semigroup of contractions on  $\mathcal{D}(A_\epsilon)$ , for each  $C \geq \frac{1}{2} \|f'_\epsilon\|_\infty$ . Hence,  $A_\epsilon$  generates a strongly continuous semigroup  $S_\epsilon(t)$  that satisfies

$$\|S_\epsilon(t)\| \leq e^{C_0 t}, \quad \text{with } C_0 = \frac{1}{2} \|f'_\epsilon\|_\infty. \quad (5.19)$$

As an obvious consequence the operator  $\tilde{A}_\epsilon\omega := A_\epsilon\omega - f'_\epsilon\omega$  with domain  $\mathcal{D}(\tilde{A}_\epsilon) := \mathcal{D}(A_\epsilon)$  generates also a strongly continuous semi-group on  $L^2(-k\pi, k\pi)$ .

From now on, we let  $(S_\epsilon(t))_{t \geq 0}$  (resp.  $(\tilde{S}_\epsilon(t))_{t \geq 0}$ ) denote the semi-group associated with the operator  $A_\epsilon$  (resp.  $\tilde{A}_\epsilon$ ), and  $B$  denote the Banach space defined by

$$B = \mathcal{C}([0, T], L^2(-k\pi, k\pi)) \cap L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi)),$$

endowed with the norm

$$\|y\|_B = \sup_{t \in [0, T]} \|y(t, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} + \left( \int_0^T \|y(t, \cdot)\|_{H^1(-k\pi, k\pi)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Using the multiplier method, as for example (Rosier [38]), (Komornik [21]), we will get useful estimates for the mild solutions of (5.15)-(5.18).

**Proposition 5.6** 1. The map  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi) \mapsto S_\epsilon(\cdot)y_0 \in B$  is continuous.

2. For  $y_0$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$ ,  $y_x(\cdot, -k\pi)$  makes sense in the space  $L^2(0, T)$  and there exists a constant  $C(T)$  such that for every  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi)$ ,

$$\|y_x(\cdot, -k\pi)\|_{L^2(0, T)} \leq \|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}, \quad (5.20)$$

$$\|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}^2 \leq C(T) \|S_\epsilon(\cdot)y_0\|_{L^2((0, T) \times (-k\pi, k\pi))}^2 + \|y_x(\cdot, -k\pi)\|_{L^2(0, T)}^2. \quad (5.21)$$

**Proof of Proposition 5.6.** Let  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi)$ . Then by (5.19)

$$\|S_\epsilon(\cdot)y_0\|_{C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))} \leq e^{C_0 T} \|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}. \quad (5.22)$$

We prove that  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0 \in L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$ . We first assume  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$ . Let  $q \in C^\infty([0, T] \times [-k\pi, k\pi])$ . Integrating by parts in

$$\int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} qy(y_t + y_{xxx} + f_\epsilon y_x + y_x) dx dt = 0,$$

using (5.15)-(5.18) and Fubini's theorem, we get :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} \left( q_t + q_{xxx} + q_x(1 + f_\epsilon) + qf'_\epsilon \right) \frac{y^2}{2} dx dt + \int_{-k\pi}^{k\pi} \left( q \frac{y^2}{2} \right) (T, x) dx - \\ & \int_{-k\pi}^{k\pi} q(0, x) \frac{y_0^2}{2}(x) dx + \int_0^T \left( q \frac{y_x^2}{2} \right) (t, -k\pi) dt + \frac{3}{2} \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} q_x y_x^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Choosing  $q(t, x) = (x + k\pi)$  leads to

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} \left[ (1 + f_\epsilon) + (x + k\pi)f'_\epsilon \right] y^2 dx dt + \int_{-k\pi}^{k\pi} (x + k\pi) \left[ y^2(T, x) - y_0^2(x) \right] dx \\ & + 3 \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y_x^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y_x^2 dx dt &= \frac{1}{3} \left\{ \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} [(1 + f_\epsilon) + (x + k\pi)f'_\epsilon] y^2 dx dt - \right. \\ & \left. \int_{-k\pi}^{k\pi} (x + k\pi) [y^2(T, x) - y_0^2(x)] dx \right\} \\ \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y_x^2 dx dt &\leq \frac{1}{3} \left\{ \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} [(1 + f_\epsilon) + (x + k\pi)f'_\epsilon] y^2 dx dt + 2k\pi \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Since  $f_\epsilon \in C^1$ , there exists a constant  $C > 0$  such that for every  $x \in [-k\pi, k\pi]$ ,

$$(1 + f_\epsilon(x)) + (x + k\pi)f'_\epsilon(x) \leq C.$$

Hence,

$$\int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y_x^2 dx dt \leq \frac{C e^{2C_0 T} T + 2k\pi}{3} \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx,$$

and

$$\|y\|_{L^2(0,T,H^1(-k\pi,k\pi))} \leq \sqrt{\frac{(3+C)e^{2C_0 T} T + 2k\pi}{3}} \|y_0\|_{L^2(-k\pi,k\pi)}. \quad (5.23)$$

By the density of  $\mathcal{D}(A_\epsilon)$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$ , the results extend to arbitrary  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi)$ .

Let us now prove (5.21). We also assume  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$ , and take  $q = 1$ . We get then

$$-\int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} f'_\epsilon y^2 dx dt + \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2(T, x) dx - \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx + \int_0^T y_x^2(t, -k\pi) dt = 0.$$

$$\int_0^T y_x^2(t, -k\pi) dt \leq \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx + \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} f'_\epsilon y^2 dx dt.$$

But,  $\int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} f'_\epsilon y^2 dx dt \leq \|f'_\epsilon\|_\infty T e^{2C_0 T} \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx$ . Hence

$$\int_0^T y_x^2(t, -k\pi) dt \leq (1 + \|f'_\epsilon\|_\infty T e^{2C_0 T}) \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx.$$

Hence there exists a unique continuous linear extension of the map

$$y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon) \mapsto y_x(\cdot, -k\pi) \in L^2(0, T)$$

to the whole space  $L^2(-k\pi, k\pi)$ . We take now  $q = T - t$  and get

$$\int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2 dx dt - \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} (T-t) f'_\epsilon y^2 dx dt - \int_{-k\pi}^{k\pi} T y_0^2(x) dx + \int_0^T (T-t) y_x^2(t, -k\pi) dt = 0.$$

Hence

$$\int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2 (1 - (T-t) f'_\epsilon) dx dt + \int_0^T (T-t) y_x^2(t, -k\pi) dt \right].$$

But,  $1 - (T-t) f'_\epsilon \in L^\infty([0, T], (-k\pi, k\pi))$ , hence for some constant  $C(T)$ ,

$$\int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx \leq C(T) \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2 dx dt + \int_0^T y_x^2(t, -k\pi) dt,$$

that is

$$\|y_0\|_{L^2(-k\pi,k\pi)}^2 \leq C(T) \|S_\epsilon(\cdot) y_0\|_{L^2((0,T) \times (-k\pi,k\pi))}^2 + \|y_x(\cdot, -k\pi)\|_{L^2(0,T)}^2. \quad (5.24)$$

**Remark 2.** The same computations show that there exists a constant  $\tilde{C}(T)$  such that the estimate

$$\|\tilde{S}_\epsilon(\cdot) y_0\|_{L^2(0,T,H^1(-k\pi,k\pi))} \leq \tilde{C}(T) \|y_0\|_{L^2(-k\pi,k\pi)} \quad (5.25)$$

holds for all  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi)$ .



### 5.3.2 Observability results.

In this section, we want to prove some observability result, using Fourier analysis.

**Theorem 5.7** *For every  $T > 0$ , there exist  $\epsilon_0 = \epsilon_0(T)$  and  $C = C(T) > 0$ , such that for every  $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) \setminus \{0\}$  and every  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi)$ ,  $\|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \leq C \|y_x(\cdot, -k\pi)\|_{L^2(0, T)}$  where  $y$  denotes the solution of (5.15)-(5.18).*

**Proof of Theorem 5.7.** Let  $T > 0$  be given. If there is no such  $C(T)$ , then there exists a sequence  $(y_0^n)_{n \geq 0}$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$  such that  $\|y_0^n\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} = 1$  for any  $n$  but  $\|y_x^n(\cdot, -k\pi)\|_{L^2(0, T)} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , where  $y^n = S_\epsilon(\cdot)y_0^n$ . The sequence  $(y^n)$  is bounded in  $L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$ , due to (5.23).

On the other hand,  $y_t^n = -(1 + f_\epsilon)y_x^n + y_{xxx}^n$  is bounded in  $L^2(0, T, H^{-2}(-k\pi, k\pi))$ . Since the first embedding in  $H^1(-k\pi, k\pi) \hookrightarrow L^2(-k\pi, k\pi) \hookrightarrow H^{-2}(-k\pi, k\pi)$  is compact, it follows from a result by Simon ([43]; cor.4) that the set  $\{y^n\}$  is relatively compact in  $L^2(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))$ . Without loss of generality, we may assume that  $(y^n)$  is convergent in  $L^2(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))$ .

We infer from (5.21) that  $(y_0^n)$  is a Cauchy sequence in the space  $L^2(-k\pi, k\pi)$ . Then let  $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0^n$  and  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0$ . By Proposition 5.6,  $y_x^n(\cdot, -k\pi) \rightarrow y_x(\cdot, -k\pi)$  in  $L^2(0, T)$ . Thus,  $\|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} = 1$  and  $y_x(\cdot, -k\pi) = 0$ .

We now show that such a function  $y_0$  does not exist.

**Lemme 5.8** *For every  $T > 0$ , we denote by  $N_T$  the space of the initial states  $y_0$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$  such that the mild solution  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0$  of (5.15)-(5.18) satisfies  $y_x(\cdot, -k\pi) = 0$  in  $L^2(0, T)$ . Then  $N_T = \{0\}$  for all  $T > 0$ , provided that  $\epsilon > 0$  be small enough.*

**Proof of Lemma 5.8.** We adapt arguments due to Rosier [38] and Bardos, Lebeau, Rauch [3] to our situation.

Obviously  $T < T' \implies N_{T'} \subset N_T$ . For every  $T > 0$ ,  $N_T$  is a finite-dimensional vector space. Indeed, if  $(y_0^n)$  is a sequence in the unit ball  $\{y \in N_T, \|y\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \leq 1\}$  the same argument as above shows that there exists a convergent subsequence. Since the unit ball is compact,  $N_T$  is finite dimensional. Let  $T' > 0$ . To prove  $N_{T'} = \{0\}$  it is sufficient to find  $T$ , such that  $0 < T < T'$  and  $N_T = \{0\}$ . Since the map  $T \mapsto \dim(N_T) \in \mathbb{N}$  is nonincreasing, there exist  $T, \eta > 0$  such that  $T < T + \eta < T'$  and  $\dim(N_T) = \dim(N_{T+\eta})$ . Let  $y_0 \in N_T$ ,  $y = S_\epsilon(\cdot)y_0$  and  $0 < t < \eta$ . Since  $S_\epsilon(\tau)(S_\epsilon(t)y_0) = S_\epsilon(t + \tau)y_0$  for  $0 \leq \tau \leq T$  and  $y_0 \in N_{T+\eta}$ , we get

$$\frac{S_\epsilon(t)y_0 - y_0}{t} \in N_T.$$

Let  $M_T = \{\tilde{y} = S_\epsilon(\tau)\tilde{y}_0, 0 \leq \tau \leq T, \tilde{y}_0 \in N_T\} \subset C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))$ . Since  $y \in H^1(0, T + \eta, H^{-2}(-k\pi, k\pi))$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t + \cdot) - y}{t} = y' \text{ in } L^2(0, T, H^{-2}(-k\pi, k\pi)).$$

On the other hand,  $\frac{y(t + \cdot) - y}{t} \in M_T$  for  $0 < t < \eta$  and  $M_T$  is finite dimensional, hence it is closed in  $L^2(0, T, H^{-2}(-k\pi, k\pi))$ . It follows that  $y' \in C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))$  and

$y \in C^1([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))$ . We may write

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_\epsilon(t)y_0 - y_0}{t} \text{ in } L^2(-k\pi, k\pi).$$

Hence

$$y_0 \in D(A_\epsilon), A_\epsilon(y_0) = y'(0) \in N_T \text{ and } y_x(\cdot, -k\pi) \in C([0, T]).$$

Thus  $(\frac{dy_0}{dx})|_{x=-k\pi} = y_x(0, -k\pi) = 0$ .

If  $N_T \neq (0)$ , the application  $y_0 \in \mathbb{C}N_T \mapsto A_\epsilon(y_0) \in \mathbb{C}N_T$  has at least one eigenvalue.

Hence there exist  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $y_0 \in H^3(-k\pi, k\pi) \setminus \{0\}$  such that

$$\begin{cases} \lambda y_0 = -(1 + f_\epsilon)y_0' - y_0''', \\ y_0(-k\pi) = y_0(k\pi) = y_0'(-k\pi) = y_0'(k\pi) = 0. \end{cases}$$

At this stage, we need the following result.

**Lemma 5.9** *There exists  $\epsilon_0 > 0$  such that for every  $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) \setminus 0$ , for every  $\lambda \in \mathbb{C}$  and for every  $y_0 \in H^3(-k\pi, k\pi)$ ,*

$$\left( \begin{cases} \lambda y_0 = -(1 + f_\epsilon)y_0' - y_0''', \\ y_0(-k\pi) = y_0(k\pi) = y_0'(-k\pi) = y_0'(k\pi) = 0 \end{cases} \right) \implies y_0 = 0.$$

**Proof of Lemma 5.9.** We argue by contradiction. If the statement in Lemma 5.9 is false, then there exist a sequence  $(\epsilon_n, n \in \mathbb{N})$  with  $\epsilon_n \neq 0$ ,  $\epsilon_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ , a sequence  $(\lambda_n)$  of complex numbers and a sequence  $(y_n)$  of functions in  $H^3(-k\pi, k\pi)$  such that, for each  $n$ ,  $\|y_n\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} = 1$  and it holds

$$\begin{cases} \lambda_n y_n = -(1 + f_{\epsilon_n})y_n' - y_n''', \\ y_n(-k\pi) = y_n(k\pi) = y_n'(-k\pi) = y_n'(k\pi) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

For each  $n$ , we denote by  $u_n$  the prolongation of  $y_n$  by 0 outside  $[-k\pi, k\pi]$ . Obviously,  $u_n \in H^2(\mathbb{R})$  and we have

$$\lambda_n u_n + (1 + f_{\epsilon_n})u_n' + u_n''' = a_n \delta_{-k\pi} - b_n \delta_{k\pi} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (5.26)$$

where  $a_n := y_n''(-k\pi)$ ,  $b_n := y_n''(k\pi)$ . We have to distinguish two cases : 1.  $(\lambda_n)$  is not bounded and 2.  $(\lambda_n)$  is bounded.

1. If  $(\lambda_n)$  is not bounded, we can assume that  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ .

Multiplying (\*) by  $\bar{y}_n$ , and integrating on  $[-k\pi, k\pi]$ , we get

$$\lambda_n \int_{-k\pi}^{k\pi} |y_n|^2 = - \int_{-k\pi}^{k\pi} (1 + f_{\epsilon_n})y_n' \bar{y}_n + \int_{-k\pi}^{k\pi} y_n'' \bar{y}_n'.$$

Taking the conjugate and adding these two equations, we obtain

$$(\lambda_n + \bar{\lambda}_n) \int_{-k\pi}^{k\pi} |y_n|^2 = \int_{-k\pi}^{k\pi} (f_{\epsilon_n})' |y_n|^2.$$

Since  $\|f'_{\epsilon_n}\|_{L^\infty(-k\pi, k\pi)} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ , we conclude that  $\lambda_n + \bar{\lambda}_n \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow +\infty$ . Multiplying (\*) by  $x\bar{y}_n$ , and integrating on  $[-k\pi, k\pi]$ , we get

$$\begin{aligned} \lambda_n \int_{-k\pi}^{k\pi} x|y_n|^2 &= - \int_{-k\pi}^{k\pi} x(1 + f_{\epsilon_n})y'_n\bar{y}_n + \int_{-k\pi}^{k\pi} y''_n\bar{y}_n + \int_{-k\pi}^{k\pi} xy''_n\bar{y}'_n, \\ &= - \int_{-k\pi}^{k\pi} x(1 + f_{\epsilon_n})y'_n\bar{y}_n - \int_{-k\pi}^{k\pi} |y'_n|^2 + \int_{-k\pi}^{k\pi} xy''_n\bar{y}'_n. \end{aligned}$$

Taking its conjugate and adding the two equations, we obtain

$$(\lambda_n + \bar{\lambda}_n) \int_{-k\pi}^{k\pi} x|y_n|^2 = \int_{-k\pi}^{k\pi} (x(1 + f_{\epsilon_n}))'|y_n|^2 - 3 \int_{-k\pi}^{k\pi} |y'_n|^2.$$

But  $\|(x(1 + f_{\epsilon_n}))' - 1\|_{L^\infty(-k\pi, k\pi)} \rightarrow 0$ , as  $n \rightarrow +\infty$ . It follows that

$$\int_{-k\pi}^{k\pi} |y'_n|^2 \rightarrow \frac{1}{3} \text{ as } n \rightarrow +\infty, \quad (5.27)$$

and  $(y_n)$  is bounded in  $H^1(-k\pi, k\pi)$ . Hence, extracting a subsequence if needed, we may assume that for some  $y$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$  with  $\int_{-k\pi}^{k\pi} |y|^2 = 1$ ,  $y_n \rightarrow y$  strongly in  $L^2(-k\pi, k\pi)$ .

We divide (\*) by  $\lambda_n$  and we get

$$y_n = -\frac{1 + f_{\epsilon_n}}{\lambda_n}y'_n - \frac{1}{\lambda_n}y'''_n.$$

We take the limit of this equation in  $\mathcal{D}'((-k\pi, k\pi))$  and we get

$$y = 0,$$

which contradicts  $\int_{-k\pi}^{k\pi} |y|^2 = 1$ .

2. If  $(\lambda_n)$  is bounded, then we can assume that  $\lambda_n \rightarrow \tilde{\lambda}$ . Extracting a subsequence if needed,  $u_n \rightarrow \tilde{u}$  in the sense of distributions, and we get that there exists a pair  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  such that  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  and

$$\tilde{\lambda}\tilde{u} + \tilde{u}' + \tilde{u}''' = a\delta_{-k\pi} - b\delta_{k\pi}.$$

Recall that if  $\tilde{\lambda} \neq 0$ , there is no solution of the last equation according to Rosier [38]. Thus  $\lambda_n \rightarrow 0$ . We have disturbed the operator  $A\omega = -\omega''' - \omega'$  with the operator  $B\omega = -f_\epsilon\omega'$ , hence this family depends on  $\epsilon$  analytically. Hence, it is a holomorphic family in the sense of Kato ([17]). As  $A$  has a unique eigenvalue (namely 0) which is not degenerate, we can apply the Rellich-Kato theorem. ([37], Theorem XII.8.) So there exist, for  $\epsilon$  near 0, a unique eigenvalue for  $A_\epsilon$  which is isolated and not degenerate and a corresponding eigenvector which is also analytic in  $\epsilon$ . Hence we may write (for  $n$  large enough)  $\lambda_n = \phi(\epsilon_n)$ , where  $\phi$  is analytic in a neighborhood of 0.

Thanks to Rellich-Kato theorem, we see that the eigenvector  $u_n$  and the eigenvalue  $\lambda_n$  can be written as  $u_n = c_0 u_0 + \epsilon_n u_1 + o(\epsilon_n)$  as  $n \rightarrow +\infty$  (here,  $u_0$  is the prolongation by 0 of  $y_0(x) = \cos x + 1$  and  $\frac{o(\epsilon_n)}{\epsilon_n} \rightarrow 0$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$ ) and  $\lambda_n = \epsilon_n \lambda_1 + o(\epsilon_n)$ , as  $n \rightarrow +\infty$ . Moreover,  $f_{\epsilon_n}(x) = \epsilon_n f(x) + o(\epsilon_n)$ , uniformly for  $x \in [-k\pi, k\pi]$ , with  $f(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$  if  $L = (2k+1)\pi$  and  $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$  if  $L = 4k\pi$ .

The equation (5.26) becomes, in the first order in  $\epsilon_n$  :

$$u_1''' + u_1' = a_1 \delta_{-k\pi} - b_1 \delta_{k\pi} - f(x) u_1' - \lambda_1 u_0. \quad (5.28)$$

Taking Fourier transform we get

$$((i\xi) + (i\xi)^3) \mathcal{F}(u_1)(\xi) = a_1 e^{ik\pi\xi} - b_1 e^{-ik\pi\xi} - \mathcal{F}(f(x)u_1') - \lambda_1 \mathcal{F}(u_0),$$

Let  $g(\xi) := a_1 e^{ik\pi\xi} - b_1 e^{-ik\pi\xi} - \mathcal{F}(f(x)u_1') - \lambda_1 \mathcal{F}(u_0)$ . Then  $\mathcal{F}(u_1)(\xi) = g(\xi)/(i\xi + (i\xi)^3)$ , and since  $Supp(u_1) \subset [-k\pi, k\pi]$ , we infer from Paley-Wiener theorem (see e.g. (Yosida [46])) that  $\mathcal{F}(u_1)$  is an entire function in  $\mathbb{C}$ . Therefore  $g(1) = g(-1) = 0$ . But a direct computation shows that

$$\begin{cases} g(-1) = -a_1 + b_1 + i\frac{k\pi}{2} - \lambda_1 k\pi \\ g(1) = -a_1 + b_1 - i\frac{k\pi}{2} - \lambda_1 k\pi, \end{cases}$$

which leads to a contradiction. This completes the proofs of Lemma 5.9 and of Theorem 5.7.

**Remark 3.** We can work with  $L \in \mathcal{N}$  everywhere except in this last section. Indeed, for  $L$  in  $\mathcal{N} \setminus \{2k\pi\}$ , we can not find the explicit solutions of (5.28).

**Proposition 5.10** *There exists a unique linear continuous map*

$$\Psi : L^2(-k\pi, k\pi) \rightarrow B,$$

such that for every  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$  and every  $h \in \mathcal{C}^2([0, T])$  with  $h(0) = 0$ ,  $\Psi(y_0, h)$  is the unique classical solution of (CPb).

**Proof of Proposition 5.10.** Let  $\mathcal{C}_0^2([0, T]) = \{h \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathbb{R}), h(0) = 0\}$ .

1. We assume  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$  and  $h \in \mathcal{C}_0^2([0, T])$ . Let  $\Phi \in \mathcal{C}^\infty([-k\pi, k\pi])$  be such that  $\Phi(-k\pi) = \Phi(k\pi) = 0$ ,  $\Phi'(k\pi) = -1$ . The change of function

$$z(t, x) = y(t, x) - (S_\epsilon(t)y_0)(x) + h(t)\Phi(x)$$

transforms (CPb) into

$$\begin{cases} z_t + z f'_\epsilon + z_x(1 + f_\epsilon) + z_{xxx} = g(t, x) := & -S_\epsilon(t)y_0 f'_\epsilon + h'(t)\Phi(x) \\ & + h(t)[\phi f'_\epsilon + \phi'(1 + f_\epsilon) + \phi'''](x), \\ z(t, -k\pi) = z(t, k\pi) = 0, \\ z_x(t, k\pi) = 0, \\ z(0, x) = 0. \end{cases}$$

Since  $g \in C^1([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))$ , thanks to Proposition 5.5 there exists a unique solution  $z$  in the space  $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{D}(A_\epsilon)) \cap C^1([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))$ . Hence, for  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$  and  $h \in \mathcal{C}_0^2([0, T])$ , (CPb) admits a unique classical solution

$$y \in \mathcal{C}([0, T], H^3(-k\pi, k\pi)) \cap C^1([0, T], L^2(-k\pi, k\pi)).$$

2. A priori estimates by multiplier method.

We assume that  $y_0 \in \mathcal{D}(A_\epsilon)$ ,  $h \in \mathcal{C}_0^2([0, T])$ . Let  $q \in C^\infty([0, T] \times [-k\pi, k\pi])$ .

Integrating by parts in

$$\int_0^S \int_{-k\pi}^{k\pi} qy \left( y_t + yf'_\epsilon + y_x(1 + f_\epsilon) + y_{xxx} \right) dxdt = 0,$$

we get

$$\begin{aligned} & - \int_0^S \int_{-k\pi}^{k\pi} \left( q_t + q_{xxx} + q_x(1 + f_\epsilon) - qf'_\epsilon \right) \frac{y^2}{2} dxdt + \\ & \int_{-k\pi}^{k\pi} \left( q \frac{y^2}{2} \right) (S, x) dx - \int_{-k\pi}^{k\pi} q(0, x) \frac{y_0^2}{2}(x) dx + \int_0^S \left( q \frac{y_x^2}{2} \right) (t, -k\pi) dt + \\ & \frac{3}{2} \int_0^S \int_{-k\pi}^{k\pi} q_x y_x^2 dxdt - \int_0^S \left( q \frac{y_x^2}{2} \right) (t, k\pi) dt = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Taking  $q=1$ , we obtain

$$\int_0^S \int_{-k\pi}^{k\pi} f'_\epsilon y^2 + \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2(S, x) dx - \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx + \int_0^S y_x^2(t, -k\pi) dt - \int_0^S h^2(t) dt = 0.$$

Let  $F(S) = \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2(S, x) dx + \int_0^S y_x^2(t, -k\pi) dt$ . Since there exists a positive constant  $K$  such that  $\|f'_\epsilon\|_{C([-k\pi, k\pi])} \leq K$ ,  $F(S) \leq \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx + \int_0^T h^2(t) dt + K \int_0^S F(t) dt$ . Using Gronwall's lemma, we get for each  $S \in [0, T]$

$$F(S) \leq \left[ \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2(x) dx + \int_0^T h^2(t) dt \right] e^{KS}.$$

It follows that

$$\|y\|_{C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))} \leq e^{\frac{KT}{2}} \|(y_0, h)\|, \quad (5.30)$$

where  $\|(y_0, h)\| = (\|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}^2 + \|h\|_{L^2(0, T)}^2)^{\frac{1}{2}}$ .

We take  $q(t, x) = x + k\pi$  and  $S = T$  in (5.29). We get

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} \left( (1 + f_\epsilon) - (x + k\pi) f'_\epsilon \right) y^2 + \int_{-k\pi}^{k\pi} (x + k\pi) y^2(T, x) dx - \int_{-k\pi}^{k\pi} (x + k\pi) y_0^2(x) dx - \\ & \int_0^T 2k\pi h^2(t) dt + 3 \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y_x^2 dxdt = 0. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y_x^2 dx dt &\leq \frac{1}{3} \left( \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} (1 + f_\epsilon - (x + k\pi)f'_\epsilon) y^2 dx dt + \int_{-k\pi}^{k\pi} (x + k\pi) y_0^2(x) dx \right) \\ &\leq \frac{1}{3} \left( Const \int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} y^2 dx dt + 2k\pi \int_{-k\pi}^{k\pi} y_0^2 dx \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Equation (5.31), combined with (5.30), yields

$$\| y \|_{L^2(0,T,H^1(-k\pi,k\pi))} \leq Const \| (y_0, h) \| .$$

Thus, thanks to the density of  $\mathcal{D}(A_\epsilon)$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$  and the density of  $C_0^2([0, T])$  in  $L^2(0, T)$ , the linear map  $(y_0, h) \in \mathcal{D}(A_\epsilon) \times C_0^2([0, T]) \mapsto y \in B$  may be extended in a unique manner to the whole space  $L^2(-k\pi, k\pi) \times L^2(0, T)$  to give a linear continuous map  $\Psi : L^2(-k\pi, k\pi) \times L^2(0, T) \rightarrow B$ .

To apply H.U.M. we need some observability result for the following backward (well-posed) homogeneous problem :

$$u_t + (1 + f_\epsilon)u_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.32)$$

$$u(t, -k\pi) = u(t, k\pi) = 0, \quad (5.33)$$

$$u_x(t, -k\pi) = 0, \quad (5.34)$$

$$u(T, x) = u_T(x). \quad (5.35)$$

The change of variables  $\tau = T - t$ ,  $\xi = -x$  transforms (5.32)-(5.35) into (15)-(18) and vice-versa.

From Theorem 5.7 and (5.20) we get the following result :

**Theorem 5.11** *Let  $T > 0$  and  $\epsilon \in (0, \epsilon_0(T))$ . For every  $u_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$  the mild solution of (5.32)-(5.35) belongs to  $B$ , the function  $u_x(\cdot, k\pi)$  makes sense in  $L^2(0, T)$ , and there exists  $C = C(T) > 0$  such that for every  $u_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$  we have,*

$$\|u_x(\cdot, k\pi)\|_{L^2(0,T)} \leq \|u_T\|_{L^2(-k\pi,k\pi)} \leq C \|u_x(\cdot, k\pi)\|_{L^2(0,T)}.$$

It remains to apply H.U.M.

**Proof of Theorem 5.3.** We may assume that  $y_0 = 0$ . Let  $(u_T, h) \in C_c^\infty(-k\pi, k\pi) \times C_c^\infty(0, T)$ , let  $u$  (resp.  $y$ ) be the classical solution of (5.32)-(5.35) (resp. (5.7)-(5.10)). Integrating by parts in

$$\int_0^T \int_{-k\pi}^{k\pi} u(y_t + f'_\epsilon y + y_x(1 + f_\epsilon) + y_{xxx}) dx dt = 0$$

we get

$$\int_{-k\pi}^{k\pi} u_T(x) y(T, x) dx = \int_0^T u_x(t, k\pi) h(t) dt.$$

This last formula is also true for any  $u_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$  and any  $h \in L^2(0, T)$ . Let  $\Lambda$  denote the linear continuous map

$$u_T \in L^2(-k\pi, k\pi) \longmapsto y(T, \cdot) \in L^2(-k\pi, k\pi),$$

where  $y$  stands for the solution of (CPb) associated with  $h = u_x(\cdot, k\pi) \in L^2(0, T)$ . It follows from Theorem 5.7 that

$$(\Lambda(u_T), u_T)_{L^2(-k\pi, k\pi)} = \|u_x(\cdot, k\pi)\|_{L^2(0, T)}^2 \geq C^{-2} \|u_T\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}^2.$$

Hence, thanks to Lax-Milgram theorem,  $\Lambda$  is invertible. The proof of Theorem 5.3 is complete.

**Remark 4.** If  $y_0 = 0$ , H.U.M yields a linear continuous selection of the control, namely the map

$$\Gamma : y_T \in L^2(-k\pi, k\pi) \longmapsto u_x(\cdot, k\pi),$$

where  $u$  denotes the solution of (5.32)-(5.35) associated with  $u_T = \Lambda^{-1}(y_T)$ .

## 5.4 Exact controllability of the nonlinear equation.

We prove that the following boundary-control system is exactly controllable in a neighborhood of  $f_\epsilon$ , provided that  $\epsilon \neq 0$  is small enough.

$$y_t + y_x + yy_x + y_{xxx} = 0, \quad (5.36)$$

$$y(t, -k\pi) = y(t, k\pi) = 0, \quad (5.37)$$

$$y_x(t, k\pi) = h(t) \quad (h \in L^2(0, T)), \quad (5.38)$$

$$y(0, x) = y_0(x). \quad (5.39)$$

More precisely, we show that for every  $T > 0$  there exists a positive number  $r_0$ , such that for every  $y_0, y_T$  in  $L^2(-k\pi, k\pi)$  with  $\|y_0 - f_\epsilon\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} < r_0$ ,  $\|y_T - f_\epsilon\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} < r_0$  we may find  $y$  in the space  $B$  such that (5.36)-(5.39) hold true. Setting  $\tilde{y} = y - f_\epsilon$ ,  $\tilde{y}_0 = y_0 - f_\epsilon$ ,  $\tilde{y}_T = y_T - f_\epsilon$  and  $\tilde{h}(t) = h(t) - f'_\epsilon(k\pi)$ , we see that (5.36)-(5.39) may be rewritten as

$$\tilde{y}_t + f'_\epsilon \tilde{y} + (1 + f_\epsilon) \tilde{y}_x + \tilde{y}_{xxx} = -\tilde{y}_x \tilde{y} \quad (5.40)$$

$$\tilde{y}(t, -k\pi) = \tilde{y}(t, k\pi) = 0, \quad (5.41)$$

$$\tilde{y}_x(t, k\pi) = \tilde{h}(t), \quad (5.42)$$

$$\tilde{y}(0, \cdot) = \tilde{y}_0(x). \quad (5.43)$$

We search for  $\tilde{y}$  in the form  $\tilde{y} = \tilde{S}_\epsilon(t)y_0 + y_1 + y_2$ , where  $(\tilde{S}_\epsilon(t))_{t \geq 0}$  denotes the semi-group associated with the operator  $\tilde{A}_\epsilon$  of Section 5.3.1,  $y_1$  and  $y_2$  are the respective solutions of two nonhomogeneous problems :

$$y_{1t} + f'_\epsilon y_1 + (1 + f_\epsilon) y_{1x} + y_{1xxx} = 0, \quad (5.44)$$

$$y_1(t, -k\pi) = y_1(t, k\pi) = 0, \quad (5.45)$$

$$y_{1x}(t, k\pi) = \tilde{h}(t), \quad (5.46)$$

$$y_1(0, x) = 0. \quad (5.47)$$

$$y_{2t} + f'_\epsilon y_2 + (1 + f_\epsilon) y_{2x} + y_{2xxx} = f, \quad (5.48)$$

$$y_2(t, -k\pi) = y_1(t, k\pi) = 0, \quad (5.49)$$

$$y_{2x}(t, k\pi) = 0, \quad (5.50)$$

$$y_2(0, x) = 0. \quad (5.51)$$

We have set  $f = -\tilde{y}\tilde{y}_x$ . Let  $\psi_1 : h \in L^2(0, T) \mapsto y_1 \in B$  be the map which associates with  $h$  the weak solution of (5.44)-(5.47). By Proposition 5.10,  $\psi_1$  is a linear continuous map. The following Proposition deals with equations (5.48)-(5.51).

**Proposition 5.12** 1. *There exists a constant  $C_1(T)$  such that*

$$\|yy_x - zz_x\|_{L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))} \leq C_1(T)(\|y\|_{L^2(0, T, H^1)} + \|z\|_{L^2(0, T, H^1)})\|y - z\|_{L^2(0, T, H^1)}$$

for all  $y, z \in L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$ .

2. *For  $f \in L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))$  the mild solution  $y_2$  of (5.48)-(5.51) belongs to  $B$ , and moreover, the map  $\psi_2 : f \mapsto y_2$  is continuous.*

**Proof of Proposition 5.12.**

1. The proof may be found in [38].
2. Let  $C(T) > 0$  be such that

$$\|\tilde{S}_\epsilon(t)y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \leq C(T)\|y_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}$$

for all  $y_0 \in L^2(-k\pi, k\pi)$  and all  $t \in [0, T]$ . Then

$$\|1_{[0, t]}(s)\tilde{S}_\epsilon(t-s)f(s, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \leq C(T)\|f(s, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \in L^1(0, T). \quad (5.52)$$

We deduce from Lebesgue's theorem that the mild solution  $y_2(t, \cdot) = \int_0^t \tilde{S}_\epsilon(t-s)f(s, \cdot)ds$  of (5.48)-(5.51) belongs to the space  $C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi))$ . Moreover, for all  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|y_2(t, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} &\leq C(T) \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} ds \\ &\leq C(T)\|f\|_{L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

Thus the linear map

$$f \in L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi)) \mapsto y_2 \in C([0, T], L^2(-k\pi, k\pi)) \quad (5.54)$$

is continuous. To show that this map is continuous from  $L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))$  into  $L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$ , it is sufficient to prove that :

$$\begin{aligned} \exists C_2 > 0, \forall f \in C^1([0, T], L^2(-k\pi, k\pi)), \\ \|y_{2x}\|_{L^2((0, T) \times (-k\pi, k\pi))} \leq C_2\|f\|_{L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))}. \end{aligned} \quad (5.55)$$



Integrating by parts in

$$\int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi(x+k\pi)y_2(y_{2t} + y_{2x}(1+f_\epsilon) + y_{2xxx})dxdt = \int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi(x+k\pi)y_2f dxdt,$$

we get

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi[(1+f_\epsilon) + (x+k\pi)f'_\epsilon]y_2^2 dxdt + \int_{-k\pi}^k \pi(x+k\pi)y_2^2(T,x) dx \\ + 3 \int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi y_{2x}^2 dxdt = 2 \int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi(x+k\pi)y_2f dxdt. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Hence,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi y_{2x}^2 dxdt &\leq \frac{4k\pi}{3} \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} \|y_2(t, \cdot)\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} dt \\ &+ \int_0^T \int_{-k\pi}^k \pi[(1+f_\epsilon) + (x+k\pi)f'_\epsilon]y_2^2 dxdt \\ &\leq C(T) \|f\|_{L^1(0, T, L^2(-k\pi, k\pi))}^2. \end{aligned} \quad (5.57)$$

The proof of Proposition 5.12 is complete.

We now prove Theorem 5.4.

Let  $\tilde{y}_0$  and  $\tilde{y}_T \in L^2(-k\pi, k\pi)$  be such that  $\|\tilde{y}_0\|_{L^2(-k\pi, k\pi)}, \|\tilde{y}_T\|_{L^2(-k\pi, k\pi)} < r$ ,  $r > 0$  being chosen later. Let  $F$  denote the nonlinear map

$$\begin{aligned} \tilde{y} \in L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi)) \mapsto F(\tilde{y}) = \tilde{S}_\epsilon(\cdot)\tilde{y}_0 + \psi_1 \circ \Gamma(y_T - \tilde{S}_\epsilon(T)\tilde{y}_0 \\ + \psi_2(\tilde{y}\tilde{y}_x)(T, \cdot)) + \psi_2(-\tilde{y}\tilde{y}_x) \in B. \end{aligned} \quad (5.58)$$

$\Gamma$  is defined in Remark 4,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  are defined at the beginning of this section.

$F$  is well-defined and continuous by Proposition 5.10, and Proposition 5.12. Each fixed point of  $F$  verifies (5.41) in  $\mathcal{D}'(0, T, H^{-2}(-k\pi, k\pi))$ -(5.43) and  $\tilde{y}(T, \cdot) = \tilde{y}_T$ . For proving the existence of such a fixed point, we apply Banach contraction fixed point theorem to the restriction of  $F$  to some closed ball  $\bar{B}(0, R)$  in  $L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$  ( $R$  will be chosen later). We need :

$$F(\bar{B}(0, R)) \subset \bar{B}(0, R), \quad (5.59)$$

$$\exists C_3 \in ]0, 1[, \forall \tilde{y}, \tilde{z} \in \bar{B}(0, R), \|F(\tilde{y}) - F(\tilde{z})\| \leq C_3 \|\tilde{y} - \tilde{z}\|, \quad (5.60)$$

where  $\|\cdot\|$  stands for the norm  $L^2(0, T, H^1(-k\pi, k\pi))$ .

Thanks to Remark 2, Propositions 5.10 and 5.12, we see that there exist two constants  $C_1, C_2 > 0$  such that for any  $\tilde{y} \in \bar{B}(0, R)$ ,

$$\|F(y)\| \leq C_1 R^2 + C_2 r.$$

On the other hand, for any  $\tilde{y}, \tilde{z} \in \bar{B}(0, R)$ ,

$$F(\tilde{y}) - F(\tilde{z}) = \psi_2(\tilde{z}\tilde{z}_x - \tilde{y}\tilde{y}_x) + \psi_1 \circ \Gamma(\psi_2(\tilde{y}\tilde{y}_x - \tilde{z}\tilde{z}_x)(T, \cdot)), \quad (5.61)$$

hence, by Proposition 5.12 there exists a constant  $C_3 > 0$  such that

$$\|F(\tilde{y}) - F(\tilde{z})\| \leq C_3 R \|\tilde{y} - \tilde{z}\|.$$

Thus (5.59) and (5.60) are fulfilled if  $C_1 R^2 + C_2 r \leq R$  and  $C_3 R < 1$ . Therefore it is sufficient to take  $R < 1/\max(C_1, C_3)$  and to pick  $r > 0$  small enough. The proof of Theorem 5.4 is achieved.



Deuxième partie  
Équation de Boussinesq.



# Chapitre 6

## Introduction

### 6.1 L'équation de Boussinesq.

Dans cette deuxième partie, nous allons étudier la contrôlabilité exacte d'une équation de Boussinesq généralisée. L'équation de Boussinesq classique, découverte par Boussinesq [8] en 1872 modélise la propagation d'ondes dispersives de faible amplitude. Elle s'écrit sous la forme d'une équation d'inconnue  $y$  où  $y$  représente le potentiel de vitesse de l'onde considérée,

$$y_{tt} - y_{xx} + by_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0 \quad (6.1)$$

Suivant que  $b$  soit positif ou négatif, cette équation s'appelle la bonne ou la mauvaise équation de Boussinesq. Le terme bon/mauvais se rapporte au problème de Cauchy suivant qu'il soit bien ou mal posé. On dérive de l'équation de Boussinesq généralisée l'équation suivante,

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = (a(y))_{xx} \quad (6.2)$$

où  $a$  représente une fonction suffisamment régulière et telle que  $a(0) = 0$ .

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au problème de contrôlabilité de la bonne équation qui apparaît en particulier dans la théorie des cordes non linéaires.

### 6.2 Quelques résultats antérieurs.

Bona et Sachs [5] se sont intéressés à l'étude de l'existence de solutions globales à cette équation et ont démontré que le problème était bien posé lorsqu'on prenait des conditions initiales dans les espaces de Sobolev,  $H^{s+2}(\mathbb{R}) \times H^{s+1}(\mathbb{R})$  pour  $s > \frac{1}{2}$ . Ils ont également montré la stabilité des ondes solitaires.

En ce qui concerne l'étude de la contrôlabilité de cette équation, de récents travaux ont été obtenus par Zhang [47]. Il a prouvé la contrôlabilité exacte de l'équation sur le domaine périodique  $S$ , cercle unité.

Il a démontré la contrôlabilité exacte globale lorsque le contrôle agit sur tout le domaine  $S$  et la contrôlabilité exacte locale lorsque le contrôle agit localement. Son résultat de contrôle local appliqué à notre problème est le suivant,

**Théorème 6.1** *Soit  $T > 0$  et  $s \geq 0$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall(\phi_0, \psi_0), (\phi_T, \psi_T) \in H^{s+2}(S) \times H^s(S)$  tels que*

$$\int_S \psi_0(x)dx = \int_S \psi_T(x)dx = 0, \text{ et } \int_S \phi_0(x)dx = \int_S \phi_T(x)dx \quad (6.3)$$

$$\|\phi_0\|_{s+2} + \|\phi_T\|_{s+2} < \delta \text{ et } \|\psi_0\|_s + \|\psi_T\|_s < \delta \quad (6.4)$$

*il existe une fonction de contrôle  $h \in L^2(0, T, H^s(S))$  telle que l'équation  $u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = Gh(x)$  admet une solution  $u \in \mathcal{C}([0, T], H^{s+2}(S)) \cap \mathcal{C}^1([0, T], H^s(S))$ , telle que*

$$u(x, 0) = \phi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_0(x), \quad (6.5)$$

$$u(x, T) = \phi_T(x), \quad u_t(x, T) = \psi_T(x), \quad (6.6)$$

où on a posé  $Gh(x, t) = g(x) (h(x, t) - \int_S g(y)h(y, t)dy)$  avec  $g$  une fonction régulière définie sur  $S$  et vérifiant  $\int_S g(x)dx = 1$ .

L'obtention de ces résultats découle de l'étude de l'équation à travers l'analyse de Fourier.

La contrôlabilité frontière quant à elle, a déjà été étudiée par Lions [28] pour l'équation linéarisée. Il a tout d'abord appliqué un contrôle sur la première dérivée spatiale à droite, puis sur la seconde dérivée spatiale toujours à droite. Ses résultats sont les suivants :

**Théorème 6.2** *Soit  $T > 2L$ , pour tout  $(y^0, y^1)$  dans  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ , il existe un contrôle  $v$  dans  $L^2(0, T)$  tel que la solution de*

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y(L, t) = 0, \\ y_x(L, t) = v(t), \\ y|_{t=0} = y^0, y_t|_{t=0} = y^1, \end{cases}$$

*vérifie  $y|_{t=T} = y_t|_{t=T} = 0$ .*

En ce qui concerne le contrôle sur la dérivée spatiale seconde, Lions a obtenu le théorème suivant, [28]

**Théorème 6.3** *Soit  $T > 2 \left( L + \frac{1}{2\lambda_0} \right)$ , où  $\lambda_0 > 0$  est tel que  $\lambda_0^2$  est la première valeur propre de  $-\Delta$  pour les conditions de Dirichlet. Alors, pour tout  $(y^0, y^1)$  dans  $L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , on peut trouver un contrôle  $(v_1, v_2)$  dans  $L^2(0, T) \times H^1(0, T)$  tel que si  $y$  est solution de*

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \\ y(L, t) = v_1(t), \\ y_{xx}(L, t) = v_2(t), \\ y|_{t=0} = y^0, y_t|_{t=0} = y^1, \end{cases}$$

*on a  $y|_{t=T} = y_t|_{t=T} = 0$ .*

Zuazua a montré dans [28] que les résultats de contrôlabilité de Lions s'étendent à tout temps  $T > 0$  arbitrairement petit. Dans un premier temps, nous allons démontrer la contrôlabilité exacte de l'équation de Boussinesq non linéaire avec un contrôle agissant sur  $y_x(L, t)$ , et des conditions initiales appartenant à l'espace  $H^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . Puis, dans un deuxième temps, nous démontrons la contrôlabilité exacte de l'équation de Boussinesq non linéaire avec un contrôle agissant sur  $y_{xx}(L, t)$  et des conditions initiales prises dans l'espace  $H^3(0, L) \times H_0^1(0, L)$ . Les principaux changements par rapport aux théorèmes de Lions et Zuazua sont

- l'espace de contrôle est plus régulier, puisque le contrôle trouvé va appartenir dans les deux cas à  $H^1(0, T)$ ,
- nous allons démontrer la contrôlabilité du problème non linéaire.

Dans le premier chapitre, nous étudions le problème avec contrôle sur la première dérivée spatiale. Nous démontrons tout d'abord que nous pouvons étendre le Théorème 6.2 à tout temps  $T > 0$  avec une preuve différente de celle de Zuazua, puis nous prouvons la contrôlabilité exacte du problème linéaire avec des données initiales prises dans des espaces plus réguliers. Enfin, nous terminons ce paragraphe par la démonstration du théorème de contrôlabilité du problème non linéaire. Dans le deuxième chapitre, nous travaillons de la même manière que dans le premier mais avec un contrôle sur la deuxième dérivée spatiale à droite. Nous démontrons donc tout d'abord l'extension du Théorème 6.3 puis la contrôlabilité dans un espace plus régulier. Enfin, nous prouvons le théorème de contrôlabilité du problème non linéaire.





# Chapitre 7

## Contrôle sur $y_x(L, t)$ .

Soit  $L$  un réel strictement positif qui symbolisera la longueur du domaine spatial à étudier. Nous allons appliquer la Méthode d'Unicité Hilbertienne (H.U.M.) au problème linéaire. Par conséquent, nous étudions dans un premier temps le problème linéaire homogène. Dans le deuxième chapitre, nous démontrons la contrôlabilité exacte du problème linéaire sur  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$  pour tout temps  $T > 0$  puis sur  $H^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . Enfin, dans le dernier paragraphe, nous démontrons la contrôlabilité exacte du problème non linéaire à l'aide du théorème du point fixe de Banach.

### 7.1 Le problème de Cauchy homogène.

Nous appliquons la théorie des opérateurs compacts au problème de Cauchy suivant, avec  $(y^0, y^1)$  appartenant à  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ .

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (7.1)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (7.2)$$

$$y_x(0, t) = y_x(L, t) = 0, \quad (7.3)$$

$$y(x, 0) = y^0(x), \quad y_t(x, 0) = y^1(x). \quad (7.4)$$

Posons  $V_0 = H_0^2(0, L)$  et  $\|v\|_{V_0} = \|v_{xx}\|_{L^2(0, L)}$ . Définissons un opérateur  $A$  par

$$Ay = -y_{xx} + y_{xxxx}, \quad (7.5)$$

de domaine  $D(A) = \{y \in V_0; Ay \in L^2(0, L)\}$  soit encore  $D(A) = \{y \in H^4(0, L), y(0) = y(L) = y_x(0) = y_x(L) = 0\}$ . Comme  $A$  admet un inverse borné, autoadjoint et compact,  $L^2(0, L)$  admet une base de fonctions propres de  $A$ . Soient  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  et  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  les fonctions propres et les valeurs propres associées de l'opérateur  $A$ . On a alors le résultat d'existence de solution et leur décomposition en série de Fourier qui suit, voir la démonstration de la proposition 9.5

**Théorème 7.1** *Pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ , la solution du problème homogène (7.1)-(7.4) s'écrit sous forme d'une série de Fourier comme*

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \phi_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{\phi_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right) \phi_k, \\ \phi_k^0 = (\phi^0, \phi_k)_{L^2}, \quad \phi_k^1 = (\phi^1, \phi_k)_{L^2}, \end{cases}$$

avec  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ .

L'obtention de cette décomposition des solutions en série de Fourier est très importante pour la suite. En effet, c'est elle qui va nous permettre d'obtenir les inégalités d'observabilité.

## 7.2 Observabilité et contrôlabilité du linéaire.

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'on peut étendre le Théorème 6.2 à tout  $T > 0$  avec H.U.M. Ensuite, nous appliquons une méthode due à Urquiza [44] pour prouver la contrôlabilité exacte dans  $H_2 \times L^2(0, L)$ , où  $H_2 = \{v \in H^2(0, L) : v(0) = v(L) = v_x(0) = 0\}$ .

Mais avant tout, il nous faut obtenir des inégalités d'observabilité. Comme la théorie des multiplicateurs que nous avons utilisé dans la première partie pour l'équation de KdV s'applique mal avec notre équation, nous allons utiliser une autre méthode. Nous allons chercher les vecteurs propres et les valeurs propres de  $A$  dans le but d'appliquer une inégalité de Ingham [16].

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ , on lui associe deux réels positifs,  $\alpha$  et  $\beta$  définis comme suit,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\lambda}+1}{2}}, \quad (7.6)$$

$\lambda$  étant la valeur propre associée au vecteur propre  $\phi$  considéré. Après quelques calculs, voir au paragraphe 9.2.2, on obtient deux suites de valeurs propres,  $(\lambda_{1,n})_{n \geq 1}$  et  $(\lambda_{2,n})_{n \geq 1}$ .

– La suite  $(\lambda_{1,n})_{n \geq 1}$  dont les termes correspondent aux solutions strictement positives de

$$\alpha \tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) = -\beta \tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right) \quad (7.7)$$

et ont pour fonctions propres associées

$$\phi_{1,n}(x) = f_{1,n} \left[ \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cos\left(\alpha\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) - \cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \cosh\left(\beta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) \right]. \quad (7.8)$$

Le lemme qui suit nous donne l'existence de la suite  $(\lambda_{1,n})_{n \geq 1}$ .

**Lemme 7.2** *Pour tout  $n \geq 1$ , (7.7) admet une unique solution  $(\alpha_{1,n}, \beta_{1,n})$  telle que*

$$\frac{\alpha_{1,n} L}{2} \in \left[ -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right] \quad (7.9)$$

*Il n'y a pas de solution de (7.7) avec  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .*

- La suite  $(\lambda_{2,n})_{n \geq 0}$  dont les termes correspondent aux solutions strictement positives de

$$\beta \tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) = \alpha \tanh \left( \frac{\beta L}{2} \right) \quad (7.10)$$

et ont pour fonctions propres associées

$$\phi_{2,n}(x) = f_{2,n} \left[ \sinh \left( \frac{\beta L}{2} \right) \sin \left( \alpha \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) - \sin \left( \frac{\alpha L}{2} \right) \sinh \left( \beta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \right]. \quad (7.11)$$

On peut également conclure à l'existence d'une telle suite avec le lemme qui suit (voir démonstration en Annexe 9 du Lemme 9.13).

**Lemme 7.3** *Pour tout  $n \geq 1$ , (7.10) a une unique solution  $(\alpha_{2,n}, \beta_{2,n})$  telle que*

$$\frac{\alpha_{2,n} L}{2} \in \left( -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad (7.12)$$

Les termes  $(f_{i,n})_{i=1,2}$  représentent les coefficients de normalisation des fonctions propres dans l'espace  $L^2(0, L)$ .

Nous allons étudier les suites de vecteurs propres et de valeurs propres précédentes plus en détails pour obtenir nos inégalités d'observabilité.

**Lemme 7.4** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_{1,n} < \lambda_{2,n}$ .*

Pour la démonstration du Lemme 7.4, on peut se référer au Lemme 9.8.

Nous pouvons, d'après le Lemme 7.4, regrouper les deux suites obtenues précédemment en une seule suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  strictement croissante de valeurs propres, avec

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{2k} = \lambda_{2,k} \\ \lambda_{2k-1} = \lambda_{1,k} \end{array} \right\} \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Soit  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions propres associée définie par

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{2k} = \phi_{2,k} \\ \phi_{2k-1} = \phi_{1,k} \end{array} \right\} \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Comme nous voulons appliquer une inégalité de Ingham, nous avons besoin des deux résultats qui suivent dont la démonstration se trouve en annexe.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = +\infty. \quad (7.13)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\phi_{nxx}(L) \neq 0$ , et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\phi_{nxx}(L)}{\omega_n} \right| = \frac{2}{\sqrt{L}} \quad (7.14)$$

avec  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ .

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que

1.  $\sum_{k=1}^{+\infty} (\omega_k \phi_k^0)^2$  est le carré d'une norme équivalente à  $\|\phi^0\|_{H^2(0,L)}$
2.  $\sum_{k=1}^{+\infty} (\phi_k^1)^2 = \|\phi^1\|_{L^2(0,L)}^2$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer l'inégalité de Ingham qui suit, cf [16], [2], à notre problème.

**Lemme 7.5** Soit  $(\mu_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  une suite de réels distincts deux à deux, tels que

$$\liminf_{|k| \rightarrow \infty} (\mu_{k+1} - \mu_k) = +\infty$$

et soit  $T > 0$ . Alors, il existe deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  strictement positives telles que pour toute suite  $(a_k)_k \in l^2(\mathbb{Z})$ , la série  $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\mu_k t}$  converge dans  $L^2(0, T)$  et vérifie

$$c_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\mu_k t} \right|^2 dt \leq c_2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2.$$

Soit  $(\phi_0, \phi_1) \in V_0 \times L^2(0, L)$  et  $\phi$  la solution du problème correspondant (7.1)-(7.4) (avec  $y^0 = \phi_0$ ,  $y^1 = \phi_1$ ). Nous appliquons le Lemme 7.5 à la fonction  $f(t) = \phi_{xx}(L, t) + \alpha$ , avec  $\alpha$  réel,  $a_0 = \alpha$ ,  $\mu_0 = 0$  et pour  $k \geq 1$

$$\begin{cases} \mu_k = -\mu_{-k} = \omega_k, \\ 2a_k = 2\bar{a}_{-k} = (\phi_k^0 - i\frac{\phi_k^1}{\omega_k})(\phi_{kxx}(L)). \end{cases}$$

Grâce à la remarque formulée précédemment et (7.13), on obtient pour tout temps  $T > 0$ , deux constantes  $c$  et  $d$  telles que

$$\begin{aligned} c \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ (\phi_k^0)^2 + \left( \frac{\phi_k^1}{\omega_k} \right)^2 \right] (\phi_{kxx}(L))^2 + |\alpha|^2 \right) \\ \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \\ \leq d \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ (\phi_k^0)^2 + \left( \frac{\phi_k^1}{\omega_k} \right)^2 \right] (\phi_{kxx}(L))^2 + |\alpha|^2 \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Grâce au résultat (7.14),

$$\bar{c}_1 \left( \alpha^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\omega_k \phi_k^0)^2 + (\phi_k^1)^2 \right) \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \bar{c}_2 \left( \alpha^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\omega_k \phi_k^0)^2 + (\phi_k^1)^2 \right). \quad (7.16)$$

Nous obtenons alors les inégalités d'observabilité, qui nous serviront pour appliquer H.U.M.

**Proposition 7.6** *Soit  $T > 0$ , il existe deux constantes strictement positives  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  telles que,*

$$\forall(\phi^0, \phi^1) \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L), \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 \left( \|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)}^2 + \alpha^2 \right) \\ \leq \int_0^T (\phi_{xx}(L, t) + \alpha)^2 dt \\ \leq \bar{c}_2 \left( \|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)}^2 + \alpha^2 \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

De plus, on peut définir les solutions du problème par transposition (voir par exemple Komornik [21], [Thm 2.5] et la démonstration de la Proposition 9.12),

**Proposition 7.7** *Soient  $v$  dans  $L^2(0, T)$  et  $(y^0, y^1)$  dans  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$  alors le problème non homogène*

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (7.18)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (7.19)$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad (7.20)$$

$$y_x(L, t) = v(t), \quad (7.21)$$

$$y(\cdot, 0) = y^0(\cdot), y_t(\cdot, 0) = y^1(\cdot), \quad (7.22)$$

*a une unique solution,  $y$  définie par transposition et telle que,*

$$y \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-2}(0, L)). \quad (7.23)$$

L'application linéaire définie par  $(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S)) \mapsto (\phi^0, \phi^1)$  est un isomorphisme sur l'espace  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . On en déduit donc de la Proposition 7.6 que l'application  $(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S)) \mapsto L_S(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S))$  est continue sur  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . On conclut comme d'habitude que si  $(y^0, y^1) \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$  et  $v \in C^\infty([0, T])$  alors  $y \in C([0, T]; H_1) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ . On obtient alors la Proposition 7.7 par densité, pour tout  $(y^0, y^1, v)$  dans l'espace  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L) \times L^2(0, T)$ .

Le résultat de contrôlabilité est le suivant, (voir la démonstration de la Proposition 9.13)

**Proposition 7.8** *Soit  $T > 0$  et  $(y^0, y^1) \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ . Alors il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  tel que la solution de (7.18)-(7.22) vérifie  $y(x, T) = y_t(x, T) = 0$ .*

Pour le démontrer, on applique la Méthode d'Unicité Hilbertienne [27]. Un corollaire immédiat de la Proposition 7.8 est le théorème suivant

**Théorème 7.9** *Soit  $T > 0$  et  $L > 0$ . Soit  $(y_0^0, y_0^1)$  et  $(y_T^0, y_T^1)$  dans  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$  alors il existe  $g \in L^2(0, T)$  et  $y \in C([0, T]; L^2(0, L))$  solution de*

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (7.24)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (7.25)$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad (7.26)$$

$$y_x(L, t) = g(t), \quad (7.27)$$

$$y(x, 0) = y_0^0(x), y_t(x, 0) = y_0^1(x) \quad (7.28)$$

et tels que  $y(\cdot, T) = y_T^0$  et  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .

Le Théorème 7.9 étend le théorème de contrôlabilité 6.2 de Lions à tout temps  $T > 0$ . Comme l'équation de Boussinesq n'a pas de vitesse finie de propagation, il est normal que le temps de contrôle ne dépende pas de la longueur du domaine.

Cependant, pour appliquer la méthode du point fixe de la première partie dans le but de démontrer la contrôlabilité exacte locale du problème non linéaire, il nous faut un résultat de contrôle dans des espaces plus réguliers. C'est à dire pour des conditions initiales prises dans  $H_1 \times L^2(0, L)$ , où  $H_1 = \{v \in H^2(0, L) : v(0) = v(L) = v_x(0) = 0\}$ . Pour avoir un tel résultat, on applique une méthode due à Urquiza [44], voir la démonstration en Annexe 9. On a alors le théorème de contrôle suivant,

**Théorème 7.10** *Pour tout  $T > 0$  et  $L > 0$ . Pour toutes données  $(y_0^0, y_0^1)$  et  $(y_T^0, y_T^1)$  dans  $H_1 \times L^2(0, L)$ , il existe  $g$  dans  $H^1(0, T)$  et  $y \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap H^2(0, T; H^2(0, L))$  solutions de*

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (7.29)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (7.30)$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad (7.31)$$

$$y_x(L, t) = g(t), \quad (7.32)$$

$$y(x, 0) = y_0^0(x), y_t(x, 0) = y_0^1(x). \quad (7.33)$$

et tels que  $y(\cdot, T) = y_T^0$  et  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .

### 7.3 Contrôlabilité exacte du non linéaire.

Nous allons démontrer dans ce nouveau paragraphe la contrôlabilité de l'équation de Boussinesq non linéaire, i.e que le système avec un contrôle frontière suivant est exactement contrôlable dans un voisinage de zéro.

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0, \quad (7.34)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (7.35)$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad (7.36)$$

$$y_x(L, t) = v(t), \quad (7.37)$$

$$y(x, 0) = y^0(x), y_t(x, 0) = y^1(x). \quad (7.38)$$

La stratégie appliquée est de trouver un bon espace de Hilbert et d'appliquer le Théorème du point fixe de Banach dans une boule fermée de cet espace afin de trouver une solution au problème non linéaire (voir par exemple Rosier [38]). On obtiendra alors la contrôlabilité exacte autour de la solution nulle.

Soient  $(y^0, y^1) \in H_1 \times L^2(0, L)$ ,  $v \in L^2(0, T)$  et  $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ . Afin de résoudre (7.34)-(7.38), on décompose la solution cherchée en somme de trois fonctions,

$$y = S^0(\cdot)(y^0, y^1) + y_1 + y_2$$

où  $S(\cdot) = (S^0, S^1)$  est le semi-groupe associé à l'opérateur  $A$  du paragraphe 7.1, et où  $y_1, y_2$  sont les solutions respectives des deux problèmes non homogènes suivants,

$$y_{1tt} - y_{1xx} + y_{1xxxx} = 0, \quad (7.39)$$

$$y_1(0, t) = y_1(L, t) = 0, \quad (7.40)$$

$$y_{1x}(0, t) = 0, \quad (7.41)$$

$$y_{1x}(L, \cdot) = v, \quad (7.42)$$

$$y_1(\cdot, 0) = 0, \quad (7.43)$$

$$y_{1t}(\cdot, 0) = 0, \quad (7.44)$$

$$y_{2tt} - y_{2xx} + y_{2xxxx} = f, \quad (7.45)$$

$$y_2(0, t) = y_2(L, t) = 0, \quad (7.46)$$

$$y_{2x}(0, t) = y_{2x}(L, t) = 0, \quad (7.47)$$

$$y_2(\cdot, 0) = 0, \quad (7.48)$$

$$y_{2t}(\cdot, 0) = 0. \quad (7.49)$$

On démontre (voir en annexe) qu'avec une fonction  $f$  suffisamment régulière, i.e  $f \in L^1(0, T, H^2(0, L))$ , la solution  $y_2 = \psi_2(f)$  de (7.39)-(7.44) appartient à  $L^2(0, T, H^2(0, L))$ . De plus, les applications  $\psi_1 : v \in H^1(0, L) \rightarrow y_1 \in L^2(0, T, H^2(0, L))$  et  $\psi_2$  sont linéaires continues.

On peut alors appliquer le théorème du point fixe dans une boule fermée  $B(0, R)$  de  $L^2(0, T, H^2(0, L))$  à l'application

$$F : y \in L^2(0, T, H^2(0, L)) \mapsto F(y)$$

avec

$$F(y) := S(\cdot)(y^0, y^1) + \psi_1 \circ \Gamma((y_T^0, y_T^1) - S(T)(y^0, y^1) + (\psi_2(y_x^2)(T, \cdot), \psi_{2t}(y_x^2)(T, \cdot)) + \psi_2(-y_x^2)).$$

où  $\Gamma$  est l'application qui à des données finales associe le contrôle de  $H^1(0, L)$  qui permet d'aller de  $(0, 0)$  à ces données finales.

L'application  $F$  est bien définie, continue et tout point fixe  $y$  de  $F$  vérifie l'équation non linéaire (7.34)-(7.38) et  $(y(T, \cdot), y_t(T, \cdot)) = (y_T^0, y_T^1)$ .



On montre alors, voir en annexe 9, qu'il existe un rayon  $R$  tel que

$$F(B(0, R)) \subset B(0, R) \quad (7.50)$$

et qu'il existe  $C_3 \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall y, z \in B(0, R), \|F(y) - F(z)\| \leq C_3 \|y - z\|,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme usuelle dans  $L^2(0, T, H^2(0, L))$ . On a alors le théorème de contrôlabilité suivant, voir la démonstration en Annexe 9.

**Théorème 7.11** *Soit  $L > 0$  et  $T > 0$ . Il existe  $r_0 > 0$ , tel que pour tout  $(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1)$  dans  $H_1 \times L^2(0, L)$  avec*

$$\|(y^0, y^1)\|_{H^2(0, L) \times L^2(0, L)} < r_0, \text{ et } \|(y_T^0, y_T^1)\|_{H^2(0, L) \times L^2(0, L)} < r_0,$$

*il existe  $v \in H^1(0, T)$  et  $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  vérifiant*

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx} - (y^2 + y_{xx})_{xx}, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 \text{ dans } L^2(0, T), \\ y_x(0, t) = 0, \\ y(x, 0) = y^0(x) \text{ et } y_t(x, 0) = y^1(x), \end{cases}$$

*et tel que  $y(\cdot, T) = y_T^0$  et  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .*

# Chapitre 8

## Contrôle sur $y_{xx}(L, t)$ .

Ce chapitre s'intéresse au cas où le contrôle est la dérivée seconde de  $y$  à droite. L'essentiel de ce chapitre, théorèmes et démonstrations suivent ce qui a déjà été fait au chapitre précédent.

Nous appliquons ici encore la Méthode d'Unicité Hilbertienne. Nous étudions dans un premier temps le problème de Cauchy homogène. Au paragraphe 8.2, nous démontrons une inégalité d'observabilité du même type que celle du paragraphe 7.2, puis nous prouvons la contrôlabilité exacte du problème linéaire avec des conditions initiales prises dans l'espace  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , puis dans  $H^3(0, L) \times H_0^1(0, L)$ . Enfin, nous démontrons la contrôlabilité exacte du non linéaire en appliquant un argument de point fixe.

### 8.1 Le problème de Cauchy homogène.

Considérons le problème de Cauchy suivant,

$$(*) \begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0, \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \\ \phi_{xx}(0, t) = \phi_{xx}(L, t) = 0, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi^0, \phi_t(\cdot, 0) = \phi^1. \end{cases}$$

Posons  $H_3 = \{\phi \in H^3(0, L); \phi(0) = \phi(L) = \phi_{xx}(0) = 0\}$ .

Avec la théorie variationnelle, on montre, voir démonstration au paragraphe 9.3.1 que si  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1 \times H^{-1}(0, L)$  alors  $(*)$  a une et une seule solution  $\phi$  appartenant à l'espace  $C(\mathbb{R}; H_0^1(0, L)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{-1}(0, L))$ , et cette solution dépend continûment des données initiales,  $(\phi^0, \phi^1)$  pour la topologie usuelle sur  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ .

On a la proposition suivante,

**Proposition 8.1** *Pour tout  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , la solution du problème homogène  $(*)$  s'écrit sous la forme d'une série de Fourier comme*

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\phi_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{\phi_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t)) \phi_k, \\ \phi_k^0 = (\phi^0, \phi_k)_{L^2}, \phi_k^1 = (\phi^1, \phi_k)_{L^2}, \end{cases}$$

avec  $\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi k}{L}x)$  et  $\omega_k = \frac{\pi k}{L} \sqrt{(\frac{\pi^2 k^2}{L^2} + 1)}$ . Les fonctions  $\phi_k$  sont les fonctions propres de l'opérateur associé à l'équation de Boussinesq linéaire.

## 8.2 Observabilité du problème linéaire homogène.

Dans ce paragraphe, nous adoptons une démonstration différente de celle de J.L. Lions dans [28], nous allons appliquer comme dans 7.2 une inégalité de Ingham pour prouver l'exacte contrôlabilité dans  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ . L'énergie  $E(t)$  de la solution du problème homogène (\*) s'écrit,

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u(\cdot, t)\|_1 + \|u(\cdot, t)\|_{L^2} + \|u'(\cdot, t)\|_{-1}),$$

avec  $\|u\|_1 = [\int_0^L (\partial_x u)^2]^{1/2}$  et  $\|u\|_{-1} = \|(-\partial_x^2)^{-1}u\|_1$ .

On a facilement que  $E(t) = E(0) = E_0$  pour tout  $t$  dans  $[0, T]$  et pour tout  $\phi$  vérifiant (\*).

Soit  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  et soit  $\phi$  la solution du problème homogène (\*) correspondant. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_{n+1} - \omega_n = +\infty$  et  $\omega_{n+1} > \omega_n$  on peut appliquer le Lemme 7.5 à  $f(t) = \phi_x(L, t) + \alpha$ , avec  $\alpha$  réel,  $a_0 = \alpha$ ,  $\mu_0 = 0$  et pour  $k \geq 1$

$$\begin{cases} \mu_k = -\mu_{-k} = \omega_k, \\ 2a_k = 2\bar{a}_{-k} = (\phi_k^0 - i\frac{\phi_k^1}{\omega_k})(-\phi_{kx}(L)). \end{cases}$$

Il existe alors, pour tout  $T > 0$  deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$c_1 \left( |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(\phi_k^0)^2 + (\frac{\phi_k^1}{\omega_k})^2] \phi_{kx}^2(L) \right) \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq c_2 \left( |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(\phi_k^0)^2 + (\frac{\phi_k^1}{\omega_k})^2] \phi_{kx}^2(L) \right).$$

Or  $\phi_{kx}(L) = (-1)^k \frac{\pi k}{L} \sqrt{\frac{2}{L}}$  donc on obtient

$$\begin{aligned} c_1 \left( \|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi^2 k^2}{L^3 \omega_k^2} (\phi_k^1)^2 + |\alpha|^2 \right) \\ \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \\ \leq c_2 \left( \|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi^2 k^2}{L^3 \omega_k^2} (\phi_k^1)^2 + |\alpha|^2 \right). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Comme  $\phi^1$  appartient à  $H^{-1}(0, L)$ , on a

$$\bar{c}_1 (\|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \alpha^2) \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \bar{c}_2 (\|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \alpha^2) \quad (8.2)$$

On en déduit l'inégalité d'observabilité.

**Proposition 8.2** *Soit  $T > 0$ , il existe deux constantes strictement positives  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  telles que,*

$$\begin{aligned} \forall(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \bar{c}_1(\|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)}^2 + \alpha^2) \\ \leq \int_0^T (\phi_x(L, t) + \alpha)^2 dt \\ \leq \bar{c}_2(\|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)}^2 + \alpha^2). \end{aligned} \quad (8.3)$$

### 8.3 Contrôlabilité exacte de l'équation linéaire.

Considérons tout d'abord le problème non homogène suivant

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (8.4)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \quad (8.5)$$

$$y_{xx}(L, t) = v(t), \quad (8.6)$$

$$y(x, 0) = y^0, \quad y_t(x, 0) = y^1. \quad (8.7)$$

Il est exactement contrôlable en un temps  $T$  si pour toutes conditions initiales  $(y^0, y^1)$  prises dans un certain espace, il existe un contrôle  $v$  tel que la solution  $y$  du problème (8.4)-(8.7) vérifie

$$y(x, T) = y_t(x, T) = 0.$$

Nous allons définir une solution faible du problème (8.4)-(8.7) par transposition, (voir par exemple Komornik [[21], Thm 2.5]), voir la démonstration de la proposition 9.19.

**Proposition 8.3** *Si  $v \in L^2(0, T)$  et  $(y^0, y^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  alors le problème non homogène (8.4)-(8.7) admet une unique solution  $y$  définie par transposition et telle que*

$$y \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, L)).$$

Nous pouvons alors démontrer la contrôlabilité exacte de notre problème à l'aide de la Méthode d'Unicité Hilbertienne, voir la démonstration de la proposition 9.20.

**Proposition 8.4** *Soit  $T > 0$  et  $(y^0, y^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ . Il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  tel que la solution du problème (8.4)-(8.7) vérifie  $y(x, T) = y_t(x, T) = 0$ , pour tout  $x$  dans  $[0, L]$ .*

De même que dans le premier chapitre, nous avons besoin d'un résultat de contrôle dans des espaces plus régulier pour pouvoir appliquer notre argument de point fixe au problème non linéaire. Le contrôle doit donc être pris dans  $H^1(0, T)$ , les conditions initiales seront alors plus régulières également, i.e. prises dans  $H_3 \times H_0^1(0, L)$ . Pour démontrer que le système est alors bien contrôlable, nous allons appliquer la méthode d'Urquiza à notre problème, i.e nous allons augmenter le nombre d'inconnues du problème et appliquer H.U.M. On obtient la contrôlabilité sur  $H_3 \times H_0^1(0, L)$  avec la Proposition 8.2.

**Théorème 8.5** *Soient  $T > 0$  et  $L > 0$ . Pour tout  $(y_0^0, y_0^1)$  et  $(y_T^0, y_T^1)$  dans  $H_3 \times H_0^1(0, L)$ , il existe un contrôle  $g$  appartenant à  $H^1(0, T)$  et une fonction  $y$  dans  $C([0, T], H_3)$  tels que*

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (8.8)$$

$$y(0, \cdot) = y(L, \cdot) = y_{xx}(L, \cdot) = 0, \quad (8.9)$$

$$y_{xx}(L, \cdot) = g, \quad (8.10)$$

$$y(\cdot, 0) = y_0^0, \quad y_t(\cdot, 0) = y_0^1, \quad (8.11)$$

et vérifient  $y(\cdot, T) = y_T^0$ , et  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .

## 8.4 Contrôlabilité du non linéaire.

Nous allons démontrer la contrôlabilité exacte autour de zéro du problème non linéaire, c'est à dire, que le problème de contrôle frontière suivant est exactement contrôlable dans un voisinage de zéro.

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0, \quad (8.12)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (8.13)$$

$$y_{xx}(0, t) = 0, \quad (8.14)$$

$$y_{xx}(L, t) = v(t), \quad (8.15)$$

$$y(x, 0) = y^0(x), \quad y_t(x, 0) = y^1(x). \quad (8.16)$$

La stratégie est exactement la même que dans le chapitre précédent, i.e nous allons trouver un espace de Hilbert où appliquer le théorème du point fixe de Banach. Afin de résoudre (8.12)-(8.16), on écrit  $y = \bar{S}^0(t)(y^0, y^1) + y_1 + y_2$  où  $\bar{S}(\cdot) = (\bar{S}^0, \bar{S}^1)$  désigne le semi-groupe associé à l'opérateur  $\bar{A}$  du paragraphe 8.2 et où  $y_1$  et  $y_2$  sont les solutions respectives des deux problèmes non homogènes suivants

$$y_{1tt} - y_{1xx} + y_{1xxxx} = 0, \quad (8.17)$$

$$y_1(0, t) = y_1(L, t) = 0, \quad (8.18)$$

$$y_{1xx}(0, t) = 0, \quad (8.19)$$

$$y_{1xx}(L, t) = v(t), \quad (8.20)$$

$$y_1(x, 0) = 0, \quad (8.21)$$

$$y_{1t}(x, 0) = 0. \quad (8.22)$$

$$y_{2tt} - y_{2xx} + y_{2xxxx} = f, \quad (8.23)$$

$$y_2(0, t) = y_2(L, t) = 0, \quad (8.24)$$

$$y_{2xx}(0, t) = y_{2xx}(L, t) = 0, \quad (8.25)$$

$$y_2(x, 0) = 0, \quad (8.26)$$

$$y_{2t}(x, 0) = 0, \quad (8.27)$$

Nous savons déjà que

$$y_2 \in C([0, T], H_3) \cap C^1([0, T], H_0^1(0, L)). \quad (8.28)$$

Nous allons maintenant introduire une fonction dont les points fixes seront solutions du problème. Tout d'abord, si  $(y_0, y_1) = 0$ , soit  $\Gamma$  l'application

$$\Gamma : (y_T^0, y_T^1) \in H_3 \times H_0^1(0, L) \mapsto u_x(\cdot, L) \in H^1(0, T)$$

où  $u$  est la solution du problème homogène rétrograde

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (8.29)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (8.30)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \quad (8.31)$$

$$u(\cdot, T) = u_T^0, \quad u_t(\cdot, T) = u_T^1, \quad (8.32)$$

avec  $(u_T, u_{tT}) = \Lambda^{-1}(y_T^0, y_T^1)$ .

Soit  $F$  l'application linéaire suivante,

$$F : y \in L^2(0, T, H_3) \mapsto F(y)$$

avec

$$F(y) := \bar{S}^0(\cdot)(y^0, y^1) + \psi_1 \circ \Gamma((y_T^0, y_T^1) - S(T)(y^0, y^1) + (\psi_2(y_{xx}^2)(\cdot, T), \psi_{2t}(y_{xx}^2)(\cdot, T)) + \psi_2(-y_{xx}^2)). \quad (8.33)$$

On peut aisément vérifier que  $F(y)$  appartient à  $L^2(0, T, H_3)$ .  $F$  est bien définie et continue. Chaque point fixe  $y$  de  $F$  vérifie l'équation non linéaire de Boussinesq et au temps  $T$  on a  $(y(T, \cdot), y_t(T, \cdot)) = (y_T^0, y_T^1)$ . Pour démontrer l'existence d'un point fixe de  $F$ , nous allons appliquer le théorème du point fixe de Banach à la restriction de  $F$  à une boule fermée  $\bar{B}(0, R)$  dans  $L^2(0, T, H_3)$ .

A l'aide d'estimés sur les normes des applications utilisés, on montre qu'il existe un rayon  $R$  tel que

$$F(\bar{B}(0, R)) \subset \bar{B}(0, R)$$

et qu'il existe  $C_3 \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall y, z \in \bar{B}(0, R), \quad \|F(y) - F(z)\| \leq C_3 \|y - z\|,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme dans  $L^2(0, T, H_3)$ .

Nous avons alors le théorème de contrôlabilité exacte locale de l'équation non linéaire.

**Théorème 8.6** *Soit  $L > 0$  et  $T > 0$ . Il existe  $r_0 > 0$ , tel que pour tout  $(y^0, y^1)$ ,  $(y_T^0, y_T^1)$  dans  $H_3 \times H_0^1(0, L)$  avec*

$$\|(y^0, y^1)\|_{H_3 \times H_0^1(0, L)} < r_0, \quad \text{et} \quad \|(y_T^0, y_T^1)\|_{H_3 \times H_0^1(0, L)} < r_0,$$

il existe  $v \in H^1(0, T)$  et  $y \in C([0, T], H_3) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$  vérifiant

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx} - (y^2 + y_{xx})_{xx}, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 \text{ dans } L^2(0, T), \\ y_{xx}(0, t) = 0, \\ y(x, 0) = y^0(x) \text{ et } y_t(x, 0) = y^1(x) \end{cases}$$

et tel que  $y(\cdot, T) = y_T^0$  et  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .

# Chapitre 9

## Annexe

Cette annexe comporte l'article sur l'équation de Boussinesq qui a été accepté pour publication dans le journal "Integral and Differential Equations". Nous donnons dans cet article toutes les démonstrations de la deuxième partie.





# Exact controllability of the Boussinesq equation on a bounded domain.

The purpose of this article is to study the exact boundary controllability of the classical Boussinesq equation. The control is applied to the first spatial derivative and then, to the second spatial derivative, both at the right endpoint. The exact controllability of the linearized problem is essentially proved by using the Hilbert Uniqueness Method. From this result, we deduce the exact boundary controllability for the nonlinear Boussinesq equations. The main improvements compared to existing results in the literature are the absence of restrictions on controllability time, the use of more regular spaces and the extension of the exact boundary controllability to the nonlinear Boussinesq equation.

## 9.1 Introduction

Classical Boussinesq equations are often used as models for the propagation of small amplitude, long waves on the water surface. They are perturbations of the linear wave equations and were discovered by Boussinesq [8]. In particular, they were the first models to take into account nonlinear and dispersive effects of waves propagation. They are often used to predict wave elevation in harbors [42] and wave interaction in the nearshore zone [34]. Boussinesq theory was the first one to provide a scientific explanation of the phenomenon of solitary waves, discovered by Scott-Russell. In this article, we consider an equation of Boussinesq type which may serve as model for nonlinear strings, see Bona and Sachs [5], named the “good Boussinesq equation”,

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0. \tag{9.1}$$

Recent controllability results have been obtained by B.Y. Zhang for a distributed control [47]. The boundary controllability of the linear Boussinesq equation has been investigated by J.L. Lions in [28]. Two kinds of boundary control have been considered. When  $y_x(L, t)$  is assumed to be controlled, the following result is proved in [28].

---

<sup>0</sup>AMS subject classification 93B05, 93B15, 93B52.

**Theorem 9.1** *Let  $T > 2L$ . For every  $(y^0, y^1)$  in  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ , there exists a control  $v$  in  $L^2(0, T)$  such that the solution of*

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = y(L, t) = 0, \\ y_x(L, t) = v(t), \\ y|_{t=0} = y^0, y_t|_{t=0} = y^1, \end{cases}$$

*satisfies  $y|_{t=T} = y_t|_{t=T} = 0$ .*

Alternatively, when  $y_{xx}(L, t)$  is controlled, the following result is also provided in [28].

**Theorem 9.2** *Let  $T > 2\left(L + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}}\right)$ , where  $\lambda_0$  denotes the first eigenvalue for the operator  $-\Delta$  with the Dirichlet boundary conditions. Then, for every  $(y^0, y^1)$  in  $L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , there exists a control  $(v_1, v_2)$  in  $L^2(0, T) \times H^1(0, T)$  such that the solution of*

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \\ y(L, t) = v_1(t), \\ y_{xx}(L, t) = v_2(t), \\ y|_{t=0} = y^0, y_t|_{t=0} = y^1, \end{cases}$$

*satisfies  $y|_{t=T} = y_t|_{t=T} = 0$ .*

In a first time, we prove the exact controllability of the nonlinear Boussinesq equation with control on  $y_x(L, t)$ , for initial data taken in  $H^2(0, L) \times L^2(0, L)$  and for every time  $T > 0$ . In a second time, we prove the exact controllability of the nonlinear Boussinesq equation with control on  $y_{xx}(L, t)$  with initial data taken in  $H^3(0, L) \times H_0^1(0, L)$  and for every time  $T > 0$ . The main changes compared to Theorem 1 and Theorem 2 are the following : there is no restriction on  $T$  and  $L$ , we use more regular spaces and we prove the exact controllability of the nonlinear Boussinesq equations. The main theorems are described below. First, we introduce two new spaces,

$$\begin{aligned} H_2 &= \{v \in H^2(0, L) : v(0) = v(L) = v_x(0) = 0\}, \\ H_3 &= \{v \in H^3(0, L) : v(0) = v(L) = v_{xx}(0) = 0\}. \end{aligned}$$

**Theorem 9.3** *Let  $L > 0$  and  $T > 0$ . There exists  $r_0 > 0$  such that, for every*

$$(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1) \text{ in } H_2 \times L^2(0, L) \quad (9.2)$$

*with*

$$\|(y^0, y^1)\|_{H^2(0, L) \times L^2(0, L)} < r_0 \text{ and } \|(y_T^0, y_T^1)\|_{H^2(0, L) \times L^2(0, L)} < r_0, \quad (9.3)$$

*there exist  $v \in H^1(0, T)$  and  $y \in C([0, T], H^2(0, L)) \cap C^1([0, T], L^2(0, L))$  satisfying*

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx} - (y^2 + y_{xx})_{xx}, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, \\ y_x(0, t) = 0, \\ y_x(L, t) = v(t), \\ y(x, 0) = y^0(x) \text{ and } y_t(x, 0) = y^1(x), \end{cases}$$

and such that  $y(\cdot, T) = y_T^0$  and  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .

**Theorem 9.4** *Let  $L > 0$  and  $T > 0$ . There exists  $r_0 > 0$  such that, for every*

$$(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1) \text{ in } H_3 \times H_0^1(0, L) \quad (9.4)$$

with

$$\|(y^0, y^1)\|_{H^3(0, L) \times H_0^1(0, L)} < r_0 \text{ and } \|(y_T^0, y_T^1)\|_{H^3(0, L) \times H_0^1(0, L)} < r_0, \quad (9.5)$$

there exist  $v \in H^1(0, T)$  and  $y \in C([0, T], H^3(0, L)) \cap C^1([0, T], H_0^1(0, L))$  satisfying

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx} - (y^2 + y_{xx})_{xx}, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0, \\ y_{xx}(0, t) = 0, \\ y_{xx}(L, t) = v(t) \\ y(x, 0) = y^0(x) \text{ and } y_t(x, 0) = y^1(x) \end{cases}$$

and such that  $y(\cdot, T) = y_T^0$  and  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$ .

The plan of the article is as follow. In Section 2, we study the problem with control on  $y_x(L, t)$ . In subsection 2.2, we first show that the result in Theorem 9.1 is still valid for any  $T > 0$ . Then we prove the exact controllability with initial data taken in  $H_2 \times L^2(0, L)$ . In subsection 2.3, we demonstrate the exact controllability of the nonlinear Boussinesq equation (Theorem 9.3). In Section 3, we study the problem with control on  $y_{xx}(L, t)$ . New energy inequalities are needed to prove (in section 3.2) the controllability of the linear equation with initial data taken in  $H_3 \times H_0^1(0, L)$ . Finally we prove in subsection 3.3 the exact controllability of the nonlinear Boussinesq equation (Theorem 9.4).

## 9.2 Exact controllability with control on $y_x(L, t)$ .

Let  $L$  be a positive number. Since we aim to apply the Hilbert Uniqueness Method to the linearized problem, we first have to study the homogeneous linear problem.

### 9.2.1 The homogeneous Cauchy problem.

We apply the theory of compact operators to the following Cauchy problem, with  $(\phi^0, \phi^1)$  in  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ .

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0, \quad (9.6)$$

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad (9.7)$$

$$\phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \quad (9.8)$$

$$\phi(\cdot, 0) = \phi^0, \quad \phi_t(\cdot, 0) = \phi^1. \quad (9.9)$$

Let  $V_0 = H_0^2(0, L)$  and  $\|v\|_{V_0} = \|v_{xx}\|_{L^2(0, L)}$ . We define the operator  $A$  as

$$A\phi = -\phi_{xx} + \phi_{xxxx},$$

with domain

$$D(A) = \{\phi \in V_0; A\phi \in L^2(0, L)\} \subset L^2(0, L);$$

that is,  $D(A) = \{\phi \in H^4(0, L), \phi(0) = \phi(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0\}$ . It is easy to check that  $A$  is a closed operator with dense domain in  $L^2(0, L)$ .

Let  $K = A^{-1}$ . It is obvious that  $K$  is a (bounded) selfadjoint and compact operator from  $L^2(0, L)$  into itself. We then deduce that  $L^2(0, L)$  has an orthonormal basis  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  of eigenvectors of  $K$ , i.e. for each  $n \geq 1$ ,  $K\phi_n = \mu_n \phi_n$  for some real number  $\mu_n$ . We have  $\mu_n > 0$ ,  $\mu_{n+1} \leq \mu_n$  and  $\mu_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow +\infty$ . Therefore, setting  $\lambda_n = 1/\mu_n$ , we have  $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$  and  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$ . We then deduce, by the variational theory ([29], Chapter 3, Theorem 8.2), that for any  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$  the homogeneous problem (9.6)-(9.9) has a unique solution  $\phi \in C(\mathbb{R}; H_0^2(0, L)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ , and the solution depends continuously on the initial data  $(\phi^0, \phi^1)$  for the usual topology on  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . More precisely, we have the following result

**Proposition 9.5** *For every  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ , the solution of the homogeneous problem (9.6)-(9.9) is decomposed in Fourier series as*

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \phi_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{\phi_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right) \phi_k, \\ \phi_k^0 = (\phi^0, \phi_k)_{L^2}, \quad \phi_k^1 = (\phi^1, \phi_k)_{L^2}, \end{cases}$$

with  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ .

## 9.2.2 Observability of the homogeneous problem and controllability of the linear equation.

In this section, we first apply the classical Hilbert Uniqueness Method to prove that the result in Theorem 9.1 is valid for every  $T > 0$ . Then, we apply a method due to José Urquiza (see [44]) to prove the exact controllability of the linear Boussinesq problem in  $H_2 \times L^2(0, L)$ . We first study the sequences of eigenvalues and eigenvectors of  $A$ , in order to obtain an observability inequality.

It is easy to check that the eigenvectors of  $A$  may be written as

$$\begin{aligned} \phi(x) &= a \cos\left(\alpha\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + b \sin\left(\alpha\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + c \cosh\left(\beta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) + d \sinh\left(\beta\left(x - \frac{L}{2}\right)\right), \\ \phi(0) &= \phi(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \end{aligned}$$

with

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2}} \quad \text{and} \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\lambda}+1}{2}}, \quad (9.10)$$

$\lambda$  being the corresponding eigenvalue. After some computations, we get the two following sequences of eigenvalues  $(\lambda_{1,n})_{n \geq 1}$  and  $(\lambda_{2,n})_{n \geq 1}$ .

–  $(\lambda_{1,n})_{n \geq 1}$  corresponds to the positive solutions of

$$\alpha \tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) = -\beta \tanh \left( \frac{\beta L}{2} \right) \quad (9.11)$$

and the associated eigenvectors take the form

$$\phi_{1,n}(x) = f_{1,n} \left[ \cosh \left( \frac{\beta L}{2} \right) \cos \left( \alpha \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) - \cos \left( \frac{\alpha L}{2} \right) \cosh \left( \beta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \right]. \quad (9.12)$$

The coefficients  $(f_{1,n})$  are chosen in such a way that the  $\phi_{1,n}$ 's are normalized in  $L^2(0, L)$ . The proof of the following lemma is left to the reader.

**Lemma 9.6** *For every  $n \geq 1$ , (9.11) has a unique solution  $\alpha_{1,n}$  such that*

$$\frac{\alpha_{1,n} L}{2} \in \left( -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right).$$

Notice that for  $n = 0$ , the solution  $\alpha_{1,0}$  would be negative, which is excluded (see (9.10)).

–  $(\lambda_{2,n})_{n \geq 1}$  corresponds to the positive solutions of

$$\beta \tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) = \alpha \tanh \left( \frac{\beta L}{2} \right) \quad (9.13)$$

and the associated eigenvectors take the form

$$\phi_{2,n}(x) = f_{2,n} \left[ \sinh \left( \frac{\beta L}{2} \right) \sin \left( \alpha \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) - \sin \left( \frac{\alpha L}{2} \right) \sinh \left( \beta \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \right]. \quad (9.14)$$

The coefficients  $(f_{2,n})$  are chosen in such a way that the  $\phi_{2,n}$ 's are normalized in  $L^2(0, L)$ .

**Lemma 9.7** *For every  $n \geq 1$ , (9.13) has a unique solution  $\alpha_{2,n}$  such that*

$$\frac{\alpha_{2,n} L}{2} \in \left( -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right),$$

Notice that for  $n = 0$ , the solution would be 0, which is excluded ( $\lambda_n = 1/\mu_n$ ).

PROOF : Let  $L > 0$ , we aim to prove that

$$f : \alpha \mapsto \sqrt{\alpha^2 + 1} \tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) - \alpha \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} L}{2} \right)$$

is increasing as long as  $\tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) > 0$ .

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) + \frac{L}{2} \sqrt{\alpha^2 + 1} \left( 1 + \tan^2 \left( \frac{\alpha L}{2} \right) \right) \\ &\quad - \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} L}{2} \right) - \frac{L}{2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} L}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

As  $\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) > 0$ ,

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &\geq \frac{L}{2}\sqrt{\alpha^2+1} + \frac{L}{2}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}}\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) \\
&\quad - \frac{L}{2}\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \tanh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) \\
&\geq \frac{L}{2\sqrt{\alpha^2+1}}\left(1 + \alpha^2\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) - \frac{2\sqrt{\alpha^2+1}}{L}\tanh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right)\right) \\
&\geq \frac{L}{2\sqrt{\alpha^2+1}}\left[1 - \tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right)\right] + \\
&\quad \frac{2}{L\sqrt{\alpha^2+1}}\left[\frac{L^2}{4}(\alpha^2+1)\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) - \frac{L}{2}\sqrt{\alpha^2+1}\tanh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

But  $1 - \tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) > 0$  for every  $\alpha \geq 0$ . Let  $y = \frac{L}{2}\sqrt{\alpha^2+1}$  then

$$\begin{aligned}
&\frac{L^2}{4}(\alpha^2+1)\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) - \\
&\quad \frac{L}{2}\sqrt{\alpha^2+1}\tanh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) = y^2\tanh^2(y) - y\tanh(y).
\end{aligned}$$

For  $y > 1.2$ ,  $y^2\tanh^2(y) - y\tanh(y) > 0$ ; hence,  $f$  is increasing on each interval where  $\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) > 0$  and  $\frac{\alpha L}{2} > 1.2$ .

If  $0 < \frac{\alpha L}{2} < \frac{\pi}{2}$  then

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) &\geq \frac{\alpha L}{2}, \\
\tanh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) &< \frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}.
\end{aligned}$$

Thus,  $\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \frac{\alpha L}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}L}{2}\right) > 0$ , which completes the proof of Lemma 9.7.

We study in more details both sequences of eigenvalues and the associated eigenvectors.

**Lemme 9.8** *For every  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_{1,n} < \lambda_{2,n}$ .*

PROOF : We first notice that for every  $n > 0$ ,

$$\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n} \in \left(\frac{[2(-\frac{\pi}{L} + 2n\frac{\pi}{L})^2 + 1]^2 - 1}{4}, \frac{[2(\frac{\pi}{L} + 2n\frac{\pi}{L})^2 + 1]^2 - 1}{4}\right).$$

Let  $n \in \mathbb{N}^*$  and  $\alpha, \beta$  be the constants associated with  $\lambda_{2,n}$ ,  $\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right)$ . Hence,  $\alpha \tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) + \beta \tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right) > 0$ . As the function  $\lambda \mapsto \alpha \tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) + \beta \tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right)$  is increasing on the interval in question, we can conclude that  $\lambda_{1,n} < \lambda_{2,n}$ .

We bring together the two sequences in one and only one by letting,  $\lambda_{2k-1} = \lambda_{1,k}$ ,  $\lambda_{2k} = \lambda_{2,k}$ , for any  $k \geq 1$  and by letting  $\phi_{2k-1} = \phi_{1,k}$ ,  $\phi_{2k} = \phi_{2,k}$ , for any  $k \geq 1$ .

Let  $n \in \mathbb{N}^*$ , we denote by  $\alpha_n$  and  $\beta_n$  the two numbers associated with  $\lambda_n$  according (9.10). First of all, we observe that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = +\infty$ . Indeed, we already know that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ , hence  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tanh\left(\frac{\beta_n L}{2}\right) = 1$ . But  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$ , so  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\alpha_{2k} L}{2}\right) = 1$  and  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\alpha_{2k-1} L}{2}\right) = -1$ . We deduce

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{2k} L}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{2k+1} L}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) &= 0, \end{aligned}$$

Thus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = +\infty. \quad (9.15)$$

Moreover, we have

**Lemme 9.9** *For every  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\phi_{nxx}(L) \neq 0$ , and*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\phi_{nxx}(L)}{\omega_n} \right| = \frac{2}{\sqrt{L}}$$

with  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ .

PROOF : Let  $k$  in  $\mathbb{N}^*$ ,

$$(\phi_{2k})_{xx}(L) = -f_{2,k}(\alpha_{2,k}^2 + \beta_{2,k}^2) \sinh\left(\frac{\beta_{2,k} L}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_{2,k} L}{2}\right).$$

Thanks to equation (9.13),  $(\phi_{2k})_{xx}(L) \neq 0$ . On the other hand,

$$(\phi_{2k-1})_{xx}(L) = -f_{1,k}(\alpha_{1,k}^2 + \beta_{1,k}^2) \cosh\left(\frac{\beta_{1,k} L}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha_{1,k} L}{2}\right),$$

hence, thanks to equation (9.11), we get  $(\phi_{2k-1})_{xx}(L) \neq 0$ . By integration, we get

$$\begin{aligned} f_{2k}^2 &= \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \left(\frac{1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) - \frac{L}{2}\right)}, \\ f_{2k-1}^2 &= \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \left(\frac{1}{\beta} \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \frac{L}{2}\right)}, \end{aligned}$$

so we easily get Lemma 9.9.



**Remark 1.**

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\omega_k \phi_k^0)^2 \text{ is the square of a norm equivalent to } \|\phi^0\|_{H^2(0,L)},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\phi_k^1)^2 = \|\phi^1\|_{L^2(0,L)}^2.$$

We can apply the following Ingham inequality (see for example [16], [2]) to our problem.

**Lemme 9.10** *Let  $(\mu_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  be a sequence of pairwise distinct real numbers such that*

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} (\mu_{k+1} - \mu_k) = +\infty$$

*and let  $T > 0$ . Then there exist two strictly positive constants  $c_1$  and  $c_2$  such that for every sequence  $(a_k)_k \in l^2(\mathbb{Z})$ , the series  $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\mu_k t}$  converges in  $L^2(0, T)$  and it satisfies*

$$c_1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\mu_k t} \right|^2 dt \leq c_2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2.$$

Let  $(\phi_0, \phi_1) \in V_0 \times L^2(0, L)$  and  $\phi$  be the solution of (9.6)-(9.9). We apply Lemma 9.10 to  $f(t) = \phi_{xx}(L, t) + \alpha$ , with  $\alpha$  real,  $a_0 = \alpha$ ,  $\mu_0 = 0$  and for  $k \geq 1$

$$\begin{cases} \mu_k = -\mu_{-k} = \omega_k, \\ 2a_k = 2\bar{a}_{-k} = (\phi_k^0 - i\frac{\phi_k^1}{\omega_k})(\phi_{kxx}(L)). \end{cases}$$

Thanks to (9.15), we get for every  $T > 0$  two constants  $c$  and  $d$  such that

$$\begin{aligned} c \left( |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(\phi_k^0)^2 + (\frac{\phi_k^1}{\omega_k})^2] \phi_{kxx}(L)^2 \right) \\ \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \\ \leq d \left( |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(\phi_k^0)^2 + (\frac{\phi_k^1}{\omega_k})^2] \phi_{kxx}^2(L) \right). \end{aligned}$$

Thanks to Lemma 9.9, there exist two constants  $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$  such that

$$\bar{c}_1 \left( \alpha^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\omega_k \phi_k^0)^2 + (\phi_k^1)^2 \right) \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \bar{c}_2 \left( \alpha^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\omega_k \phi_k^0)^2 + (\phi_k^1)^2 \right).$$

So using Remark 1, we get the following observability result.

**Proposition 9.11** *Let  $T > 0$ , there exist two strictly positive constants  $\bar{c}_1$  and  $\bar{c}_2$  such that,*

$$\forall(\phi^0, \phi^1) \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L), \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\bar{c}_1 \left( \|(\phi^0, \phi^1)\|_{V_0 \times L^2(0, L)}^2 + \alpha^2 \right) \leq \int_0^T (\phi_{xx}(L, t) + \alpha)^2 dt \leq \bar{c}_2 \left( \|(\phi^0, \phi^1)\|_{V_0 \times L^2(0, L)}^2 + \alpha^2 \right).$$

On the other hand, we have the following proposition (see also Komornik [[21], Thm 2.5]),

**Proposition 9.12** *Let  $v$  in  $L^2(0, T)$ ,  $(y^0, y^1)$  in  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ . Then the nonhomogeneous problem*

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \tag{9.16}$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \tag{9.17}$$

$$y_x(0, t) = 0, \tag{9.18}$$

$$y_x(L, t) = v(t), \tag{9.19}$$

$$y(\cdot, 0) = y^0, y_t(\cdot, 0) = y^1, \tag{9.20}$$

has a unique solution  $y$  (defined by transposition) fulfilling

$$y \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-2}(0, L)). \tag{9.21}$$

PROOF. Suppose that the solution  $y$  of (9.16)-(9.20) is regular enough. Let  $\phi$  be a solution of the homogeneous problem (9.6)-(9.9), with  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . Multiplying (9.6) by  $y$  and integrating by parts, we get for any  $S \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^L (\phi_t(x, S)y(x, S) - \phi(x, S)y_t(x, S))dx = \\ \int_0^S \phi_{xx}(L, t)v(t) + \langle (-y^1, y^0), (\phi^0, \phi^1) \rangle_{H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L), H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)} \end{aligned} \tag{9.22}$$

Let

$$\begin{aligned} L_S(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S)) = \\ \int_0^S \phi_{xx}(L, t)v(t) + \langle (-y^1, y^0), (\phi^0, \phi^1) \rangle_{H^{-2}(0, L) \times L^2(0, L), H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)}. \end{aligned}$$

The linear map,

$$(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S)) \longmapsto (\phi^0, \phi^1)$$

is an isomorphism from  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$  into itself. Hence we deduce from Proposition 9.11 that

$$(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S)) \longmapsto L_S(\phi(\cdot, S), \phi_t(\cdot, S))$$

is continuous on  $H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . Therefore, for any  $S \in [0, T]$ , equation (9.22) defines  $(y(\cdot, S), y_t(\cdot, S))$  as a unique element in  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ . We conclude as usual that if  $(y^0, y^1) \in L^2(0, L) \times V_0'$  and  $v \in C^\infty([0, T])$  then

$$y \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-2}(0, L)).$$

The proof of Proposition 9.12 is completed by a density argument.

The result of controllability is the following one.

**Proposition 9.13** *Let  $T > 0$  and  $(y^0, y^1) \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ . Then there exists a control  $v \in L^2(0, T)$  such that the solution of (9.16)-(9.20) satisfies  $y(x, T) = y_t(x, T) = 0$ .*

PROOF. We apply the Hilbert Uniqueness Method due to J.L.Lions [27]. We consider the map

$$\begin{aligned} \Lambda_{0,T} : V_0 \times L^2(0, L) &\rightarrow V_0' \times L^2(0, L) \\ (\phi^0, \phi^1) &\longmapsto (\psi_t(\cdot, 0), -\psi(\cdot, 0)) \end{aligned}$$

where  $\phi$  is the solution of the homogeneous problem (9.6)-(9.9), and  $\psi$  is the solution of the backward problem

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi_{xxxx} = 0, \tag{9.23}$$

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = \psi_x(0, t) = 0, \tag{9.24}$$

$$\psi_x(L, t) = \phi_{xx}(L, t), \tag{9.25}$$

$$\psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0. \tag{9.26}$$

Thanks to the time reversibility of (9.23)-(9.26) and Proposition 9.12,  $\Lambda_{0,T}$  is a well-defined continuous map from  $F = H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)$  into its dual  $F'$ . On the other hand,

$$\langle \Lambda_{0,T}(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1) \rangle_{F', F} = \int_0^T (\phi_{xx}(L, t))^2 dt.$$

Thanks to Proposition 9.11, this expression is the square of a norm on  $F'$  equivalent to the norm considered. Consequently,  $\Lambda_{0,T}$  is an isomorphism from  $F$  onto  $F'$ , and we conclude that the linear Boussinesq equation is exactly controllable in  $L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$ .

We now prove the exact controllability of the linear Boussinesq equation with initial data taken in  $H_2 \times L^2(0, L)$  and with a more regular control ( $H^1(0, T)$  instead of  $L^2(0, T)$ ), by means of a method due to José Urquiza [44].

**Proposition 9.14** *Let  $T > 0$  and  $(y^0, y^1) \in H_2 \times L^2(0, L)$ . Then there exists a control  $v \in H^1(0, T)$  such that the solution of (9.16)-(9.20) satisfies  $y(x, T) = y_t(x, T) = 0$ .*

PROOF : Given initial data  $(y^0, y^1) \in H_2 \times L^2(0, L)$  and a function  $v \in H^1(0, T)$ , with  $v(0) = y_x^0(L)$ , we look at the following problem

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (9.27)$$

$$y(0, \cdot) = y(L, \cdot) = 0, \quad (9.28)$$

$$y_x(0, \cdot) = 0, \quad (9.29)$$

$$y_x(L, \cdot) = v, \quad (9.30)$$

$$y(\cdot, 0) = y^0, \quad y_t(\cdot, 0) = y^1. \quad (9.31)$$

and we search  $v$  in such a way that  $y(\cdot, T) = y_t(\cdot, T) = 0$ . Letting  $y_t = z$ , we get the following problem,

$$z_{tt} - z_{xx} + z_{xxxx} = 0, \quad (9.32)$$

$$z(0, \cdot) = z(L, \cdot) = 0, \quad (9.33)$$

$$z_x(0, \cdot) = 0, \quad (9.34)$$

$$z_x(L, \cdot) = u, \quad (9.35)$$

$$z(\cdot, 0) = z^0, \quad z_t(\cdot, 0) = z^1, \quad (9.36)$$

where  $u = v_t \in L^2(0, T)$ , and  $(z^0, z^1) = (y^1, -Ay^0) \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$  ( recall that  $A$  is defined by  $Ay = -y_{xx} + y_{xxxx}$ , see Subsection 2.1). According to Proposition 9.12,  $y_t = z \in C([0, T]; L^2(0, L))$ ,  $z_t \in C([0, T]; H^{-2}(0, L))$  and  $y$  is solution of the following elliptic problem, with  $t$  viewed as a parameter,

$$-y_{xx} + y_{xxxx} = -z_t, \quad (9.37)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (9.38)$$

$$y_x(0, t) = 0, \quad (9.39)$$

$$y_x(L, t) = v(t). \quad (9.40)$$

Thanks to the continuity of the data in relation to  $t$  (namely,  $z_t$  and  $v$ ), we deduce that  $y \in C([0, T], H_2) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ . The problem is to find a function  $u \in L^2(0, T)$  such that the solution  $(z, v)$  of

$$z_{tt} - z_{xx} + z_{xxxx} = 0, \quad (9.41)$$

$$z(0, t) = z(L, t) = 0, \quad (9.42)$$

$$z_x(0, t) = 0, \quad (9.43)$$

$$z_x(L, t) = u(t), \quad (9.44)$$

$$z(\cdot, 0) = z^0, \quad z_t(\cdot, 0) = z^1, \quad (9.45)$$

$$v_t(t) = u(t), \quad v(0) = y_x^0(L), \quad (9.46)$$

satisfies  $z(\cdot, T) = z_t(\cdot, T) = 0$  and  $v(T) = 0$ . We look at the application

$$\Lambda : V_0 \times L^2(0, L) \times \mathbb{R} \rightarrow V_0' \times L^2(0, L) \times \mathbb{R}$$

$$(\phi^0, \phi^1, \alpha^0) \mapsto (\psi_t(\cdot, 0), -\psi(\cdot, 0), -\omega(0)),$$

where  $(\phi, \alpha)$  is the solution of the homogeneous problem

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0, \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \\ \phi_x(0, t) = 0, \\ \phi_x(L, t) = 0, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi^0, \phi_t(\cdot, 0) = \phi^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_t(t) = 0, \\ \alpha(0) = \alpha^0, \end{cases}$$

and  $(\psi, \omega)$  is the solution of the backward problem

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi_{xxxx} = 0, \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \\ \psi_x(0, t) = 0, \\ \psi_x(L, t) = \phi_{xx}(L, t) + \alpha(t), \\ \psi(\cdot, T) = 0, \psi_t(\cdot, T) = 0, \\ \omega_t = \phi_{xx}(L, t) + \alpha(t), \\ \omega(T) = 0. \end{cases}$$

$\Lambda$  is a linear continuous operator from  $F = H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathbb{R}$  into its dual space. As

$$\langle \Lambda(\phi^0, \phi^1, \alpha^0), (\phi^0, \phi^1, \alpha^0) \rangle_{F', F} = \int_0^T (\phi_{xx}(L, t) + \alpha^0)^2 dt,$$

we deduce from Proposition 9.11 that it is an isomorphism.

For every initial conditions  $(y^0, y^1)$  in  $H_2 \times L^2(0, L)$ , let  $(z^0, z^1) = (y^1, -Ay^0) \in L^2(0, L) \times H^{-2}(0, L)$   $(\phi^0, \phi^1, \alpha) = \Lambda^{-1}(z^1, -z^0, -y_x^0(L))$ ,  $u(t) = \phi_{xx}(L, t) + \alpha^0$  and  $v(t) = \int_0^t u(s) ds + y_x^0(L)$ . The solution  $y$  of (9.37)-(9.40) satisfies (9.27)-(9.31) and the control  $v$  belongs to  $H^1(0, T)$  and satisfies  $v(0) = y_x^0(L)$  and  $v(T) = 0$ .

### 9.2.3 Exact controllability of the nonlinear equation.

We now prove Theorem 9.3, i.e., the fact that the following boundary-control system is exactly controllable in a neighborhood of the null state

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0, \tag{9.47}$$

$$y(0, \cdot) = y(L, \cdot) = 0, \tag{9.48}$$

$$y_x(0, \cdot) = 0, \tag{9.49}$$

$$y_x(L, \cdot) = v, \tag{9.50}$$

$$y(\cdot, 0) = y^0, y_t(\cdot, 0) = y^1, \tag{9.51}$$

$$y(\cdot, T) = y_T^0, y_t(\cdot, T) = y_T^1, \tag{9.52}$$

with  $(y^0, y^1), (y_T^0, y_T^1) \in H_2 \times L^2(0, L)$  and  $v \in H^1(0, T)$ .

The strategy is as usual to find a good Hilbert space, and to apply the Banach fixed point theorem in order to find a solution for the nonlinear problem (see for example Rosier [38], Section 4).

Let  $y^0, y^1 \in H_2 \times L^2(0, L)$ ,  $v \in H^1(0, T)$  and  $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$ . In order to solve (9.47)-(9.52), we write  $y = S^0(\cdot)(y^0, y^1) + y_1 + y_2$  where  $S = (S^0, S^1)$  is the unitary group associated with the problem (9.6)-(9.9) of Section 2.1, and  $y_1, y_2$  are defined by

$$y_{1tt} - y_{1xx} + y_{1xxxx} = 0, \quad (9.53)$$

$$y_1(0, t) = y_1(L, t) = 0, \quad (9.54)$$

$$y_{1x}(0, t) = 0, \quad (9.55)$$

$$y_{1x}(L, \cdot) = v, \quad (9.56)$$

$$y_1(\cdot, 0) = 0, \quad (9.57)$$

$$y_{1t}(\cdot, 0) = 0, \quad (9.58)$$

$$y_{2tt} - y_{2xx} + y_{2xxxx} = f, \quad (9.59)$$

$$y_2(0, t) = y_2(L, t) = 0, \quad (9.60)$$

$$y_{2x}(0, t) = y_{2x}(L, t) = 0, \quad (9.61)$$

$$y_2(\cdot, 0) = 0, \quad (9.62)$$

$$y_{2t}(\cdot, 0) = 0. \quad (9.63)$$

**Proposition 9.15** *The map  $\phi \in L^2(0, T, H^2(0, L)) \mapsto (\phi^2)_{xx} \in L^1(0, T, L^2(0, L))$  is well-defined and continuous.*

PROOF : Let  $y, z \in L^2(0, T, H^2(0, L))$ ,

$$\begin{aligned} \| (y^2)_{xx} - (z^2)_{xx} \|_{L^1(0, T, L^2(0, L))} &= 2 \int_0^T \| yy_{xx} + (y_x)^2 - zz_{xx} - (z_x)^2 \|_{L^2(0, L)} dt \\ &\leq 2 \int_0^T \| yy_{xx} - zz_{xx} \|_{L^2(0, L)} dt + 2 \int_0^T \| (y_x)^2 - (z_x)^2 \|_{L^2(0, L)} dt \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} &\int_0^T \| yy_{xx} - zz_{xx} \|_{L^2(0, L)} dt \\ &\leq \int_0^T \| (y - z)y_{xx} \|_{L^2(0, L)} + \| z(y_{xx} - z_{xx}) \|_{L^2(0, L)}, \\ &\leq \int_0^T \| y - z \|_{L^\infty} \| y_{xx} \|_{L^2(0, L)} + \| z \|_{L^\infty} \| y_{xx} - z_{xx} \|_{L^2(0, L)}, \\ &\leq C_2 \left( \int_0^T \| y - z \|_{H^2(0, L)} \| y \|_{H^2(0, L)} + \int_0^T \| z \|_{H^2(0, L)} \| y - z \|_{H^2(0, L)} \right), \\ &\leq C_2 \left( \| y \|_{L^2(0, T, H^2(0, L))} + \| z \|_{L^2(0, T, H^2(0, L))} \right) \| y - z \|_{L^2(0, T, H^2(0, L))}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Hence, with  $z = 0$  we get  $yy_{xx} \in L^1(0, T, L^2(0, L))$  and letting  $z \rightarrow y$ , we readily get the continuity of the map  $y \mapsto yy_{xx}$ . On the other hand,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|(y_x)^2 - (z_x)^2\|_{L^2(0, L)} &= \int_0^T \|(y_x - z_x)(y_x + z_x)\|_{L^2(0, L)}, \\
&\leq \int_0^T \|y_x - z_x\|_{L^2(0, L)} \|y_x + z_x\|_{L^2(0, L)}, \\
&\leq \int_0^T \|y - z\|_{H^2(0, L)} \|y + z\|_{H^2(0, L)}, \\
&\leq \|y - z\|_{L^2(0, T, H^2(0, L))} \|y + z\|_{L^2(0, T, H^2(0, L))}.
\end{aligned} \tag{9.65}$$

Thus  $(y_x)^2 \in L^1(0, T, L^2(0, L))$  and the map  $y \mapsto (y_x)^2$  is continuous. So we get the continuity of the map  $\phi \in L^2(0, T, H^2(0, L)) \mapsto (\phi^2)_{xx} \in L^1(0, T, L^2(0, L))$ .

We now study the solutions  $y_1$  and  $y_2$  designed above. Let  $\psi_1 : v \in H^1(0, T) \mapsto y_1 \in C([0, T], H_2) \subset C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^2(0, L))$  be the map which associates with  $v$  the weak solution of (9.53)-(9.58). The map  $\psi_1$  is linear and continuous.

**Proposition 9.16** *For  $f \in L^1(0, T, L^2(0, L))$  the mild solution  $y_2$  of (9.59)-(9.63) fulfills*

$$(y_2, y_{2t}) \in C^0([0, T], H_0^2(0, L) \times L^2(0, L)).$$

Moreover, the map  $\psi_2 : f \mapsto (y_2, y_{2t})$  is continuous.

We now introduce a map whose fixed point is the solution of the problem. Assume that  $y^0 = y^1 = 0$ . Using Proposition 9.14 and the reversibility of (9.27)-(9.31) we obtain a continuous map

$$\Gamma : (y_T^0, y_T^1) \in H_2 \times L^2(0, L) \mapsto v \in H^1(0, T)$$

such that the solution  $y$  of (9.27)-(9.31) with  $y^0 = y^1 = 0$  fulfills  $y(\cdot, T) = y_T^0$  and  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$

Let  $F$  be the following map :

$$F : y \in L^2(0, T, H^2(0, L)) \mapsto F(y)$$

with

$$\begin{aligned}
F(y) &:= S^0(\cdot)(y^0, y^1) + \\
&\psi_1 \circ \Gamma((y_T^0, y_T^1) - S(T)(y^0, y^1) + (\psi_2((y^2)_{xx})(\cdot, T), (\psi_2((y^2)_{xx}))_t(\cdot, T)) + \psi_2(-(y^2)_{xx})).
\end{aligned}$$

$F(y) \in L^2(0, T, H^2(0, L))$ .  $F$  is well defined and continuous and each fixed point  $y$  of  $F$  satisfies the nonlinear equation (9.47)-(9.52) and  $(y(T, \cdot), y_t(T, \cdot)) = (y_T^0, y_T^1)$ . For proving the existence of some fixed point for  $F$ , we apply the Banach fixed point theorem to the restriction of  $F$  to some closed ball  $\bar{B}(0, R)$  in  $L^2(0, T, H^2(0, L))$ .

We need to show that

$$F(\bar{B}(0, R)) \subset \bar{B}(0, R) \quad (9.66)$$

and

$$\exists C_3 \in (0, 1), \forall y, z \in \bar{B}(0, R), \|F(y) - F(z)\| \leq C_3 \|y - z\|,$$

where  $\|\cdot\|$  denotes the norm in  $L^2(0, T, H^2(0, L))$ .

Let  $\|\cdot\|$  denote the norm in  $H^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . Let  $K_1$ , (resp.  $K_2, K'_2$ ) denote the norm of  $\psi_1$  (resp.  $\psi_2, \psi_2$ ) as a map from  $H^1(0, T)$  (resp.  $L^1(0, T, L^2(0, L))$ ) into  $L^2(0, T, H^2(0, L))$  (resp.  $L^2(0, T, H^2(0, L)), C([0, T], H^2_0(0, L) \times L^2(0, L))$ ).

And let  $K$  denote the norm of  $\Gamma$  as a map from  $H_2 \times L^2(0, L)$  into  $H^1(0, T)$ .

Assume that  $\|(y^0, y^1)\| \leq r$ ,  $\|(y^0_T, y^1_T)\| \leq r$ , ( $r$  will be precised afterwards). Let  $y, z \in L^2(0, T, H^2(0, L))$ , and suppose  $\|y\| \leq R$  and  $\|z\| \leq R$ .

Then, by (9.65)

$$\begin{aligned} \|F(y)\| &\leq C_0 \|(y_0, y_1)\| + K K_1 (\|(y^0_T, y^1_T)\| + \|(y^0, y^1)\| + K'_2 C_1 \|y\|^2) + K_2 C_1 \|y\|^2 \\ &\leq C_0 r + 2K_1 K r + (K_1 K K'_2 C_1 + K_2 C_1) R^2, \end{aligned}$$

where  $r$  is a real such that  $\|(y^0_T, y^1_T)\| \leq r$  and  $\|(y^0, y^1)\| \leq r$  and  $C_1 = 2(1 + C_2)$  with  $C_2$  defined in (9.64). Hence, (9.66) holds if  $(C_0 + 2K_1 K)r + (K_1 K K'_2 C_1 + K_2 C_1)R^2 \leq R$ .

But,

$$F(y) - F(z) = \psi_1 \circ \Gamma(\psi_2((y^2)_{xx} - (z^2)_{xx})(T, \cdot), \psi_{2t}((y^2)_{xx} - (z^2)_{xx})(T, \cdot)) + \psi_2((z^2)_{xx} - (y^2)_{xx}).$$

Hence,

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(z)\| &\leq 2(K_1 K K'_2 C_1 R \|y - z\| + C_1 K_2 R \|y - z\|) \\ &\leq 2C_1 R (K_1 K K'_2 + K_2) \|y - z\| \end{aligned}$$

We want  $F$  to be a contraction so we impose

$$(K_1 K K'_2 C_1 + C_1 K_2) R < \frac{1}{2}. \quad (9.67)$$

Let  $R$  be some positive number satisfying (9.67). We then take

$$r = \frac{R}{2(C_0 + 2K_1 K)}.$$

The proof of Theorem 9.3 is complete.

### 9.3 Exact controllability with control on $y_{xx}(L, t)$ .

In this section, we apply as often as possible the same methods as in section 2. Hence, most of the proofs will be omitted for an easier lecture, except if there are changes from section 2, and most of the notations of this section are coming from section 2. We apply



the Hilbert Uniqueness Method to the problem, hence we first study the homogeneous Cauchy problem ( subsection 9.3.1 ). In the second subsection, we prove some observability inequalities. In subsection 3.3, we shall prove the controllability on  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , and then we prove the exact controllability on  $H_3 \times H_0^1(0, L)$ , for every  $T > 0$ . Finally, we prove the exact boundary controllability of the nonlinear equation by means of the Banach fixed point theorem, as above.

### 9.3.1 The homogeneous Cauchy problem.

We study the following Cauchy problem,

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0, \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \\ \phi_{xx}(0, t) = \phi_{xx}(L, t) = 0, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi^0, \phi_t(\cdot, 0) = \phi^1. \end{cases}$$

We first apply the theory of closed operators.

Let us recall that  $H_3 = \{\phi \in H^3(0, L); \phi(0) = \phi(L) = \phi_{xx}(0) = 0\}$  and  $\|\phi\|_{H_3} = \|\phi_{xxx}\|_{L^2(0, L)}$ . We define the operator  $A$  by

$$A\phi = -\phi_{xx} + \phi_{xxxx},$$

with  $D(A) = \{\phi \in H_3; \phi_{xx} \in H^2(0, L)\}$ .  $D(A) = \{\phi \in H^4(0, L), \phi(0) = \phi(L) = \phi_{xx}(0) = \phi_{xx}(L) = 0\}$ . It is easy to see that  $A$  is linear continuous from  $D(A)$  with the  $H^4$ -topology into  $L^2(0, L)$ . With the same arguments as in section 2, we can prove that  $A$  admits a sequence of eigenvectors which is an orthonormal basis of  $L^2(0, L)$ .

Let  $\lambda$  be an eigenvalue of the operator  $-\Delta$  in the space  $H_0^1(0, L)$  and  $v$  the eigenvector associated. Then

$$\begin{aligned} v_{xxxx} - v_{xx} &= \lambda(\lambda + 1)v, \\ v(0) = v(L) &= v_{xx}(0) = v_{xx}(L) = 0. \end{aligned}$$

Hence, each eigenvector  $v$  of  $-\Delta|_{H_0^1(0, L)}$  is also an eigenvector of  $A$  and is associated with the eigenvalue  $\lambda(\lambda + 1)$ . But the space generated by the eigenvectors of  $-\Delta|_{H_0^1(0, L)}$  is dense in  $L^2(0, L)$ , hence  $A$  cannot have another eigenvectors.

Consequently, the eigenvalues of  $A$  are written  $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \left( \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + 1 \right)$  and are associated with the eigenvectors  $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ . Let  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ .

Let us consider the homogeneous problem

$$(*) \begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0, \\ \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \\ \phi_{xx}(0, t) = \phi_{xx}(L, t) = 0, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi^0, \phi_t(\cdot, 0) = \phi^1. \end{cases}$$

By the variational theory, we obtain that if  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  then  $(*)$  has a unique solution  $\phi \in C(\mathbb{R}; H_0^1(0, L)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{-1}(0, L))$ , and this solution depends continuously on the initial data  $(\phi^0, \phi^1)$  for the usual topology on  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ . We get then the following proposition.

**Proposition 9.17** *For every  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , the solution of the homogeneous problem  $(*)$  is written in Fourier series as*

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\phi_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{\phi_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t)) \phi_k, \\ \phi_k^0 = (\phi^0, \phi_k)_{L^2}, \quad \phi_k^1 = (\phi^1, \phi_k)_{L^2}, \end{cases}$$

and we get  $\phi \in C^0([0, T], H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T], H^{-1}(0, L))$ .

### 9.3.2 Observability of the homogeneous problem.

In this subsection, we adopt a quite different proof from the one given by Lions in [28], for proving the inequality of observability and the exact controllability in  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ . As we have the expression of the eigenvalues and eigenvectors, the proofs are easier than in section 2.

The energy  $E(t)$  of the solution of the homogeneous problem  $(*)$  is written

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|\phi_t(t)|^2 + |\phi_x(t)|^2 + |\phi_{xx}(t)|^2) dx.$$

We readily get that  $E(t) = E(0) = E_0$  for every  $t$  in  $[0, T]$  and for  $\phi$  satisfying  $(*)$ .

Let  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  and let  $\phi$  be the solution of the corresponding homogeneous problem  $(*)$ . As  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_{n+1} - \omega_n = +\infty$  and  $\omega_{n+1} > \omega_n$  we can apply Lemma 9.10 to  $f(t) = \phi_x(L, t) + \alpha$ , with  $\alpha$  real,  $a_0 = \alpha$ ,  $\mu_0 = 0$  and for  $k \geq 1$

$$\begin{cases} \mu_k = -\mu_{-k} = \omega_k, \\ 2a_k = 2\overline{a_{-k}} = (\phi_k^0 - i\frac{\phi_k^1}{\omega_k})(\phi_{kx}(L)). \end{cases}$$

We get then for every  $T > 0$  two constants  $c_1$  and  $c_2$  such that

$$\begin{aligned} c_1 \left( |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(\phi_k^0)^2 + (\frac{\phi_k^1}{\omega_k})^2] \phi_{kx}(L)^2 \right) \\ \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \\ \leq c_2 \left( |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} [(\phi_k^0)^2 + (\frac{\phi_k^1}{\omega_k})^2] \phi_{kx}(L)^2 \right). \end{aligned}$$

But  $\phi_{kx}(L) = (-1)^k \frac{\pi k}{L} \sqrt{\frac{2}{L}}$  hence we get

$$\begin{aligned} c_1 \left( |\alpha|^2 + \|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi^2 k^2}{L^3 \omega_k^2} (\phi_k^1)^2 \right) \\ \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \\ \leq c_2 \left( |\alpha|^2 + \|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\pi^2 k^2}{L^3 \omega_k^2} (\phi_k^1)^2 \right). \end{aligned}$$

But  $\phi^1 \in H^{-1}(0, L)$ , hence

$$\bar{c}_1 (\|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \alpha^2) \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \bar{c}_2 (\|\phi^0\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \alpha^2)$$

So we get the following proposition

**Proposition 9.18** *Let  $T > 0$ , there exist two strictly positive constants  $\bar{c}_1$  and  $\bar{c}_2$  such that,*

$$\begin{aligned} \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \bar{c}_1 (\|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(0,L) \times H^{-1}(0,L)}^2 + \alpha^2) \\ \leq \int_0^T (\phi_x(L, t) + \alpha)^2 dt \\ \leq \bar{c}_2 (\|(\phi^0, \phi^1)\|_{H_0^1(0,L) \times H^{-1}(0,L)}^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

### 9.3.3 Exact controllability of the linear equation.

We consider the nonhomogeneous problem

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (9.68)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \quad (9.69)$$

$$y_{xx}(L, t) = v(t), \quad (9.70)$$

$$y(\cdot, 0) = y^0, \quad y_t(\cdot, 0) = y^1. \quad (9.71)$$

It is exactly controllable at the time  $T$  if for every initial conditions  $(y^0, y^1)$  taken in a certain space, there exists a control  $v$  such that the solution  $y$  of the problem (9.68)-(9.71) satisfies

$$y(x, T) = y_t(x, T) = 0.$$

We aim to define a mild solution of (9.68)-(9.71) by transposition, (See Komornik [[21], Thm 2.5]).

**Proposition 9.19** *If  $v \in L^2(0, T)$  and  $(y^0, y^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  then the nonhomogeneous problem (9.68)-(9.71) admits a unique solution  $y$  defined by transposition and such that*

$$y \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, L)).$$

PROOF : Let  $\phi$  be the solution of the homogeneous problem (\*) with  $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ . Let  $y$  be a function in  $C^4([0, L] \times [0, T])$  satisfying (9.68)-(9.71). Multiplying equation (9.68) by  $\phi$  and integrating by parts on  $[0, L] \times [0, S]$ , with  $0 \leq S \leq T$ , we get

$$\begin{aligned} \int_0^L (\phi_t(x, S)y(x, S) - \phi(x, S)y_t(x, S))dx &= - \int_0^S \phi_x(L, t)v(t)dt + \\ &< (-y^1, y^0), (\phi^0, \phi^1) >_{H^{-1}(0, L) \times H_0^1(0, L), H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)}. \end{aligned}$$

Let  $L_S$  be the following linear operator

$$L_S(\phi^0, \phi^1) = - \int_0^S \phi_x(L, t)v(t)dt + < (-y^1, y^0), (\phi^0, \phi^1) >_{H^{-1}(0, L) \times H_0^1(0, L), H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)}.$$

We have

$$L_S(\phi^0, \phi^1) = \int_0^1 (\phi_t(S)y(S) - \phi(S)y_t(S))dx.$$

The linear application  $(\phi(S), \phi_t(S)) \mapsto (\phi^0, \phi^1)$  is an isomorphism from  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  into itself, hence we deduce that  $L_S$  is continuous on  $H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ . Thanks to Proposition 9.18 there exists a constant  $C > 0$  independent of  $y^0, y^1, v$  such that

$$\|(y(S), y_t(S))\|_{H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)} \leq C(\|v\|_{L^2(0, L)} + \|(y^0, y^1)\|_{H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)}),$$

for every  $S \in [0, T]$ . More else, if  $(y^0, y^1) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  and  $v \in C^\infty([0, T])$  with  $v(0) = 0$ , then  $y \in C([0, T]; H_0^1) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, L))$ . We deduce the result of regularity by density.

We can now prove the controllability of the problem.

**Proposition 9.20** *Let  $T > 0$  and  $(y^0, y^1) \in H^{-1}(0, L) \times H_0^1(0, L)$ . There exists a control  $v \in L^2(0, T)$  such that the solution of (9.68)-(9.71) satisfies  $y(x, T) = y_t(x, T) = 0$ , for every  $x$  in  $[0, L]$ .*

PROOF OF PROPOSITION 9.20. We apply H.U.M. That is, we consider the application

$$\Lambda_{0, T} : H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L) \longrightarrow H^{-1}(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

$$(\phi^0, \phi^1) \longrightarrow (\psi_t(\cdot, 0), -\psi(\cdot, 0))$$

where  $\phi$  is the solution of the homogeneous problem (\*) and  $\psi$  the solution of the backward problem

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi_{xxxx} = 0, \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = \psi_{xx}(0, t) = 0, \\ \psi_{xx}(L, t) = -\phi_x(L, t), \\ \psi(x, T) = 0, \psi_t(x, T) = 0. \end{cases}$$

Thanks to time reversibility of the backward problem and Proposition 9.19,  $\Lambda_{0,T}$  is a well defined continuous map from  $F = H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$  into its dual  $F'$ . On the other hand,

$$\langle \Lambda_{0,T}(\phi^0, \phi^1), (\phi^0, \phi^1) \rangle_{F', F} = \int_0^T (\phi_x(L, t))^2 dt.$$

Thanks to Proposition 9.18, this expression is the square of a norm on  $F$  equivalent to the norm considered. Hence  $\Lambda_{0,T}$  is an isomorphism from  $F$  onto  $F'$ , and the system is controllable.

It can be interesting to get a control in  $H^1(0, T)$ , with initial conditions taken in  $H_3 \times H_0^1(0, L)$  with  $H_3 = \{y \in H^3(0, L), y(0) = y(L) = y_{xx}(0) = 0\}$ . We still apply the method due to José Urquiza.

**Proposition 9.21** *Let  $T > 0$  and  $(y^0, y^1) \in H_3 \times H_0^1(0, L)$ . There exists a control  $v \in H^1(0, T)$  such that the solution of (9.68)-(9.71) satisfies  $y(x, T) = y_t(x, T) = 0$ , for every  $x$  in  $[0, L]$ .*

PROOF : Given  $(y^0, y^1) \in H_3 \times H_0^1(0, L)$  we consider the following problem

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \tag{9.72}$$

$$y(0, t) = y_{xx}(0, t) = y(L, t) = 0, \tag{9.73}$$

$$y_{xx}(L, t) = v(t), \tag{9.74}$$

$$y(\cdot, 0) = y^0, y_t(\cdot, 0) = y^1, \tag{9.75}$$

and we search  $v$  such that  $y(\cdot, T) = 0, y_t(\cdot, T) = 0$ . Letting  $y_t = z$ , we get the following problem

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + z_{xxxx} = 0, \\ z(0, \cdot) = z_{xx}(0, \cdot) = z(L, \cdot) = 0, \\ z_{xx}(L, \cdot) = u, \\ z(\cdot, 0) = z^0, z_t(\cdot, 0) = z^1, \end{cases}$$

with  $u = v_t \in L^2(0, T)$ ,  $(z^0, z^1) = (y^1, -Ay^0) \in H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L)$ , and  $A$  being the operator of Subsection 9.3.1. According to Proposition 9.20,  $y_t = z \in C([0, T], H_0^1(0, L))$ , and  $y$  is the solution of the following elliptic problem, with  $t$  viewed as a parameter and  $z_t \in C([0, T], H^{-1}(0, L))$ .

$$\begin{cases} -y_{xx} + y_{xxxx} = -z_t, \\ y(0, \cdot) = y_{xx}(0, \cdot) = y(L, \cdot) = 0, \\ y_{xx}(L, \cdot) = v. \end{cases}$$

From the regularity and the continuity of the data in relation to  $t$ , we deduce that  $y \in C([0, T], H_3)$ . The problem of controllability lies in the existence of a function  $u \in L^2(0, T)$  such that the solution  $(z, v)$  of

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + z_{xxxx} = 0, \\ z(0, \cdot) = z_{xx}(0, \cdot) = z(L, \cdot) = 0, \\ z_{xx}(L, \cdot) = u, \\ z(\cdot, 0) = z^0, z_t(\cdot, 0) = z^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t = u, \\ v(0) = y_{xx}^0(L), \end{cases}$$

satisfies  $z(\cdot, T) = z_t(\cdot, T) = 0$  and  $v(T) = 0$ . We consider the application

$$\Lambda_T : H_0^1(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times \mathbb{R} \rightarrow H^{-1}(0, L) \times H_0^1(0, L) \times \mathbb{R}$$

$$(\phi^0, \phi^1, \alpha^0) \mapsto (\psi_t(\cdot, 0), -\psi(\cdot, 0), -\omega(0))$$

where  $(\phi, \alpha)$  is the solution of the following homogeneous problem

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0, \\ \phi(0, \cdot) = \phi_{xx}(0, \cdot) = \phi(L, \cdot) = 0, \\ \phi_{xx}(L, \cdot) = 0, \\ \phi(\cdot, 0) = \phi^0, \phi_t(\cdot, 0) = \phi^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_t = 0, \\ \alpha(0) = \alpha^0, \end{cases}$$

and  $(\psi, \omega)$  is the solution of the backward problem

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi_{xxxx} = 0, \\ \psi(0, \cdot) = \psi_{xx}(0, \cdot) = \psi(L, \cdot) = 0, \\ \psi_{xx}(L, \cdot) = -\phi_x(L, \cdot) + \alpha, \\ \psi(\cdot, T) = 0, \psi_t(\cdot, T) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_t = -\phi_x(L, \cdot) + \alpha, \\ \omega(T) = 0. \end{cases}$$

We get then

$$(\Lambda(\phi^0, \phi^1, \alpha^0), (\phi^0, \phi^1, \alpha^0)) = - \int_0^T \phi_x(L) \psi_{xx}(L) dt - \alpha^0 \omega(0).$$

Hence,

$$(\Lambda(\phi^0, \phi^1, \alpha^0), (\phi^0, \phi^1, \alpha^0)) = \int_0^T (\phi_x(L) - \alpha^0)^2.$$

We get then the controllability on  $H_3 \times H_0^1(0, L)$  with Proposition 9.18.

### 9.3.4 Exact controllability of the nonlinear equation.

We prove Theorem 9.4, i.e the fact that the following boundary-control system is exactly controllable in a neighborhood of the null state.

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} + (y^2)_{xx} = 0, \quad (9.76)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \quad (9.77)$$

$$y_{xx}(0, t) = 0, \quad (9.78)$$

$$y_{xx}(L, t) = v(t), \quad (9.79)$$

$$y(x, 0) = y^0(x), y_t(x, 0) = y^1(x), \quad (9.80)$$

where  $(y^0, y^1) \in H_3 \times H_0^1(0, L)$  and  $v \in H^1(0, T)$ . The strategy is the same as in section 9.2.3, i.e to find a good Hilbert space, and to apply the fixed point theorem in order to find a solution for the nonlinear problem. In order to solve (9.76)-(9.80), we write  $y = \bar{S}^0(t)(y^0, y^1) + y_1 + y_2$  where  $\bar{S} = (\bar{S}^0, \bar{S}^1)$  is the unitary group associated with the operator  $A$  of Section 3.1 and  $y_1$  and  $y_2$  are the respective solutions of the two nonhomogeneous problems

$$y_{1tt} - y_{1xx} + y_{1xxxx} = 0, \quad (9.81)$$

$$y_1(0, t) = y_1(L, t) = 0, \quad (9.82)$$

$$y_{1xx}(0, t) = 0, \quad (9.83)$$

$$y_{1xx}(L, t) = v(t), \quad (9.84)$$

$$y_1(x, 0) = 0, \quad (9.85)$$

$$y_{1t}(x, 0) = 0. \quad (9.86)$$

$$y_{2tt} - y_{2xx} + y_{2xxxx} = f, \quad (9.87)$$

$$y_2(0, t) = y_2(L, t) = 0, \quad (9.88)$$

$$y_{2xx}(0, t) = y_{2xx}(L, t) = 0, \quad (9.89)$$

$$y_2(x, 0) = 0, \quad (9.90)$$

$$y_{2t}(x, 0) = 0, \quad (9.91)$$

**Proposition 9.22** *The map  $\phi \in L^2(0, T, H_3) \longmapsto (\phi^2)_{xx} \in L^1(0, T, H^1(0, L))$  is well-defined and continuous.*

PROOF : Let  $y, z \in L^2(0, T, H_3)$ ,

$$\begin{aligned} \|(y^2)_{xx} - (z^2)_{xx}\|_{L^1(0, T, H^1(0, L))} &= 2 \int_0^T \|yy_{xx} + (y_x)^2 - zz_{xx} - (z_x)^2\|_{H^1(0, L)} dt \\ &\leq 2 \int_0^T \|yy_{xx} - zz_{xx}\|_{H^1(0, L)} dt + 2 \int_0^T \|(y_x)^2 - (z_x)^2\|_{H^1(0, L)} dt \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|yy_{xx} - zz_{xx}\|_{H^1(0,L)} dt \\
& \leq \int_0^T \|(y-z)y_{xx}\|_{H^1(0,L)} + \|z(y_{xx} - z_{xx})\|_{H^1(0,L)} \\
& \leq \text{Const} \int_0^T \|y-z\|_{H^1(0,L)} \|y_{xx}\|_{H^1(0,L)} + \|z\|_{H^1(0,L)} \|y_{xx} - z_{xx}\|_{H^1(0,L)} \\
& \leq \text{Const} (\|y\|_{L^2(0,T,H_3)} + \|z\|_{L^2(0,T,H_3)}) \|y-z\|_{L^2(0,T,H_3)}
\end{aligned}$$

Hence, with  $z = 0$  we get  $yy_{xx} \in L^1(0, T, H^1(0, L))$  and letting  $z \rightarrow y$ , we readily get the continuity of the map  $y \mapsto yy_{xx}$ . On the other hand,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|(y_x)^2 - (z_x)^2\|_{H^1(0,L)} &= \int_0^T \|(y_x - z_x)(y_x + z_x)\|_{H^1(0,L)}, \\
&\leq \text{Const} \int_0^T \|y_x - z_x\|_{H^1(0,L)} \|y_x + z_x\|_{H^1(0,L)}, \quad (9.92) \\
&\leq \text{Const} \int_0^T \|y - z\|_{H_3(0,L)} \|y + z\|_{H_3(0,L)}, \\
&\leq \text{Const} \|y - z\|_{L^2(0,T,H_3)} \|y + z\|_{L^2(0,T,H_3)}.
\end{aligned}$$

Thus  $(y_x)^2 \in L^1(0, T, H^1(0, L))$  and the map  $y \mapsto (y_x)^2$  is continuous. So we get the continuity of the map  $\phi \in L^2(0, T, H_3) \mapsto (\phi^2)_{xx} \in L^1(0, T, H^1(0, L))$ .

We now study the solutions  $y_1$  and  $y_2$  designed above. Let  $\psi_1 : v \in H^1(0, T) \mapsto y_1 \in C([0, T], H_3) \subset L^2(0, T, H_3)$  be the map which associates with  $v$  the weak solution of (9.53)-(9.58). The map  $\psi_1$  is linear and continuous.

**Proposition 9.23** *For  $f \in L^1(0, T, H^1(0, L))$  the mild solution  $y_2$  of (9.59)-(9.63) fulfills*

$$(y_2, y_{2t}) \in C^0([0, T], H_3 \times H^1(0, L)).$$

Moreover, the map  $\psi_2 : f \mapsto (y_2, y_{2t})$  is continuous.

We now introduce a map whose fixed point is the solution of the problem. Assume that  $y^0 = y^1 = 0$ . Using Proposition 9.21 and the reversibility of (9.72)-(9.75) we obtain a continuous map

$$\Gamma : (y_T^0, y_T^1) \in H_3 \times H_0^1(0, L) \mapsto v \in H^1(0, T)$$

such that the solution  $y$  of (9.72)-(9.75) with  $y^0 = y^1 = 0$  fulfills  $y(\cdot, T) = y_T^0$  and  $y_t(\cdot, T) = y_T^1$

Let  $F$  be the following map :

$$F : y \in L^2(0, T, H_3) \mapsto F(y)$$



with

$$F(y) := \bar{S}^0(\cdot)(y^0, y^1) + \psi_1 \circ \Gamma((y_T^0, y_T^1) - \bar{S}(T)(y^0, y^1) + (\psi_2((y^2)_{xx})(\cdot, T), (\psi_2((y^2)_{xx}))_t(\cdot, T)) + \psi_2(-(y^2)_{xx})).$$

$F(y) \in L^2(0, T, H_3)$ .  $F$  is well defined and continuous and each fixed point  $y$  of  $F$  satisfies the nonlinear equation (9.76)-(9.80) and  $(y(T, \cdot), y_t(T, \cdot)) = (y_T^0, y_T^1)$ . For proving the existence of some fixed point for  $F$ , we apply the Banach fixed point theorem to the restriction of  $F$  to some closed ball  $\bar{B}(0, R)$  in  $L^2(0, T, H_3)$ .

We need to show that

$$F(\bar{B}(0, R)) \subset \bar{B}(0, R) \quad (9.93)$$

and

$$\exists C_3 \in (0, 1), \forall y, z \in \bar{B}(0, R), \|\|F(y) - F(z)\|\| \leq C_3 \|y - z\|,$$

where  $\|\|\cdot\|\|$  denote the norm in  $L^2(0, T, H_3)$ . Let  $\|\cdot\|$  denote the norm in  $H_3 \times H^1(0, L)$ . Let  $K_1$ , (resp.  $K_2, K_2'$ ) denote the norm of  $\psi_1$  (resp.  $\psi_2, \psi_2$ ) as a map from  $H^1(0, T)$  (resp.  $L^1(0, T, H^1(0, L))$ ) into  $L^2(0, T, H_3)$  (resp.  $L^2(0, T, H_3), C([0, T], H_3 \times H_0^1(0, L))$ ). And let  $K$  denote the norm of  $\Gamma$  as a map from  $H_3 \times H_0^1(0, L)$  into  $H^1(0, T)$ . Assume that  $\|y^0, y^1\| \leq r$ ,  $\|y_T^0, y_T^1\| \leq r$ , ( $r$  will be precised afterwards). Let  $y, z \in L^2(0, T, H_3)$ , and suppose  $\|\|y\|\| \leq R$  and  $\|\|z\|\| \leq R$ . Then, by (9.92)

$$\begin{aligned} \|\|F(y)\|\| &\leq C_0 \|(y_0, y_1)\| + K K_1 (\|(y_T^0, y_T^1)\| + \|(y^0, y^1)\| + K_2' C_1 \|y\|^2) + K_2 C_1 \|y\|^2 \\ &\leq C_0 r + 2K_1 K r + (K_1 K K_2' C_1 + K_2 C_1) R^2, \end{aligned}$$

where  $r$  is a real such that  $\|(y_T^0, y_T^1)\| \leq r$  and  $\|(y^0, y^1)\| \leq r$ . Hence, (9.93) holds if  $(C_0 + 2K_1 K)r + (K_1 K K_2' C_1 + K_2 C_1)R^2 \leq R$ .

But,

$$F(y) - F(z) = \psi_1 \circ \Gamma(\psi_2((y^2)_{xx} - (z^2)_{xx})(T, \cdot), \psi_{2t}((y^2)_{xx} - (z^2)_{xx})(T, \cdot)) + \psi_2((z^2)_{xx} - (y^2)_{xx}).$$

Hence,

$$\begin{aligned} \|\|F(y) - F(z)\|\| &\leq 2(K_1 K K_2' C_1 R \|y - z\| + C_1 K_2 R \|y - z\|) \\ &\leq 2C_1 (K_1 K K_2' + K_2) R \|y - z\| \end{aligned}$$

We want  $F$  to be a contraction so we impose

$$(K_1 K K_2' C_1 + C_1 K_2) R < \frac{1}{2}. \quad (9.94)$$

Let  $R$  be some positive number satisfying (9.94). We then take

$$r = \frac{R}{2(C_0 + 2K_1 K)}.$$

The proof of Theorem 9.4 is complete.

**Troisième partie**  
**Études numériques.**



# Chapitre 10

## Cas linéaire avec contrôle sur $y_{xx}(L, t)$ .

Dans le chapitre qui suit, nous montrons de manière numérique que le contrôle, donné par H.U.M., obtenu dans la deuxième partie permet bien de passer de toute condition initiale à toute condition finale en un temps  $T$ .

Une version préliminaire de cette partie a été présentée en conférence [12].

L'idée est de décomposer les solutions en série de Fourier dans la base de  $L^2(0, L)$  formée par les  $\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$ .

Nous allons donc récrire le problème de contrôle sous sa forme variationnelle et choisir comme fonctions multiplicatrices les  $\phi_k$ .

Dans tout ce qui suit nous prendrons  $L = 1$  où  $L$  est la longueur du domaine, et  $T = 1$  où  $T$  est le temps de contrôle.

### 10.1 Contrôle dans $L^2(0, T)$ .

Nous appliquons la méthode d'unicité hilbertienne utilisée précédemment de manière théorique comme algorithme de calcul pour trouver la solution numérique au problème de contrôle, en suivant l'idée de Rosier [39]. On veut donc calculer un contrôle  $g$  pour que la solution de

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y(1, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \\ y_{xx}(1, t) = g(t), \\ y|_{t=0} = y^0, y_t|_{t=0} = y^1, \end{cases}$$

vérifie  $y(\cdot, T) = 0$  et  $y_t(\cdot, T) = 0$ .

Comme nous voulons appliquer l'algorithme de H.U.M nous regardons l'application linéaire  $\Lambda : (u^0, u^1) \in H_0^1(0, 1) \times H^{-1}(0, 1) \mapsto (y_t(\cdot, 0), -y(\cdot, 0)) \in H^{-1}(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$  définie de la manière suivante :

Soit  $u$  la solution du problème de Cauchy,

$$(I) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x). \end{cases}$$

On considère alors  $y$  solution de

$$(II) \begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y(1, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \\ y_{xx}(1, t) = -u_x(1, t), \\ y|_{t=T} = 0, y_t|_{t=T} = 0, \end{cases}$$

D'après l'étude théorique réalisée au chapitre 8 l'application  $\Lambda$  est inversible.

Le problème est donc de trouver une base de dimension finie,  $N$ , de fonctions dans laquelle approcher les solutions de (I) et (II). On pourra alors calculer la matrice  $\Lambda_N$  associée à  $\Lambda$  dans cette base et résoudre le problème. D'après le chapitre 8, les fonctions propres associées à l'opérateur  $A$  défini par  $Au = u_{xxxx} - u_{xx}$  avec  $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^4(0, 1), u(0) = u(1) = u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0\}$  sont les  $\phi_k : x \mapsto \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . Ces fonctions  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  forment une base hilbertienne de  $L^2(0, 1)$ . Nous connaissons donc le développement en série de Fourier des solutions de (I),

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ u_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{u_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right] \phi_k(x), \quad (10.1)$$

où  $u_k^0 = (u^0, \phi_k)_{L^2(0,1)}$  et  $u_k^1 = (u^1, \phi_k)_{L^2(0,1)}$  pour  $k \geq 1$ .

Nous allons donc prendre comme base de dimension finie  $((\phi_k)_{k=1..N}, (\phi_k)_{k=1..N})$ .

L'algorithme que nous allons appliquer est le suivant :

Nous fixons un temps  $T$  et un entier  $N$ , et des conditions initiales  $(y^0, y^1)$ . Nous cherchons donc un contrôle qui nous permette d'aller de  $(y^0, y^1)$  à  $(0, 0)$  en un temps  $T$ .

– On cherche la matrice,  $\Lambda_N$ , associée à l'application  $\Lambda$  dans la base de dimension finie  $(\phi_k)_{k=1..N}$ . Cette recherche se déroule en deux temps :

1. Pour  $k = 1..N$ , on résout (I) avec comme conditions initiales,  $u(x, 0) = \phi_k(x)$  et  $u_t(x, 0) = 0$ .

On résout alors (II) à l'aide du changement de variables  $y = z + \theta g$ , où  $\theta = \frac{x^3 - x}{6}$ .

2. Pour  $k = 1..N$ , on résout (I) avec comme conditions initiales,  $u(x, 0) = 0$  et  $u_t(x, 0) = \phi_k(x)$ .

On résout alors (II) avec le même changement de variables que précédemment.

– On projette  $(y^0, y^1)$  sur l'espace de dimension finie engendré par les  $\phi_k$ , pour  $k = 1..N$ . On détermine alors  $(\phi^0, \phi^1)$  tels que  $\Lambda_N(\phi^0, \phi^1) = (y^1, -y^0)$ .

– On résout alors (I) avec comme données initiales  $(\phi^0, \phi^1)$ .

– Nous avons alors le contrôle recherché et la solution du problème (II) vérifie  $y(\cdot, 0) = y^0$ ,  $y_t(\cdot, 0) = y^1$ .

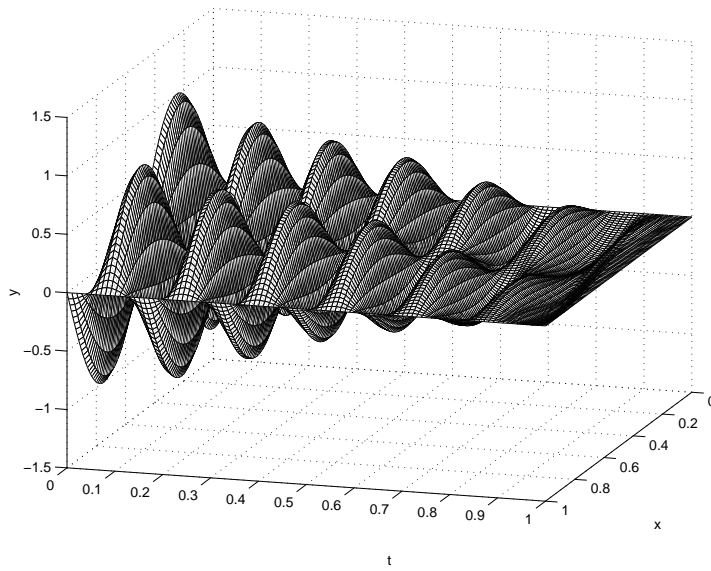


FIG. 10.1 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

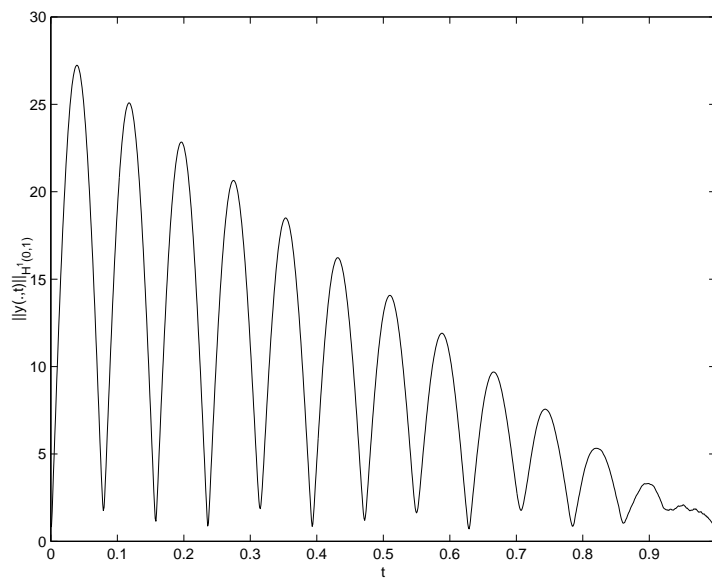


FIG. 10.2 – Variations de  $\|y(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

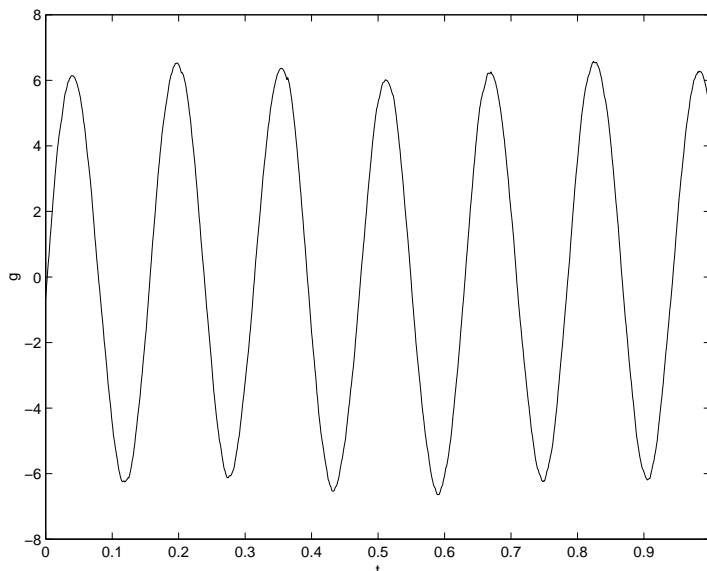


FIG. 10.3 – Variations du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

La résolution de ces différents points est donnée dans l'annexe qui suit.

Les figures (10.1) et (10.2) représentent la solution obtenue pour le problème de Boussinesq avec des données initiales  $(y^0, y^1) = (\sin(2\pi x), \sin(2\pi x))$  et des données finales à  $T = 1$  nulles et un nombre de fonctions propres  $N = 50$ . La figure (10.3) représentant le contrôle montre bien que le contrôle obtenu est seulement dans l'espace  $L^2(0, T)$ . En effet, il ne s'annule pas au temps  $T$  tandis que  $y_{xx}(1, T) = 0$ .

La figure (10.4) représente la solution obtenue pour le problème de Boussinesq avec des données initiales différentes de fonctions propres, mais qui s'annulent au bord et dont la dérivée seconde s'annule en 0,  $(y^0, y^1) = (x^3(x-1), x^3(x-1))$  et des données finales à  $T = 1$  nulles. La figure (10.6) représente le contrôle. On voit qu'au temps  $T = 0$  il est différent de  $6 = y_{xx}(1, 0)$  et au temps  $T$  il est différent de  $0 = y_{xx}(1, T)$ .

Le contrôle donné par la méthode d'unicité hilbertienne appartient donc juste à l'espace  $L^2(0, T)$ , on ne peut pas espérer une meilleure régularité. Nous allons donc implémenter la méthode donnant un contrôle  $H^1(0, T)$ .

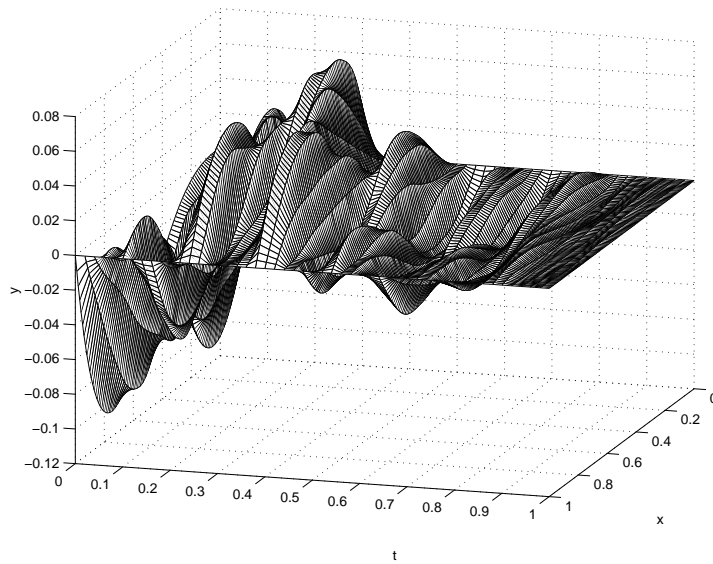


FIG. 10.4 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

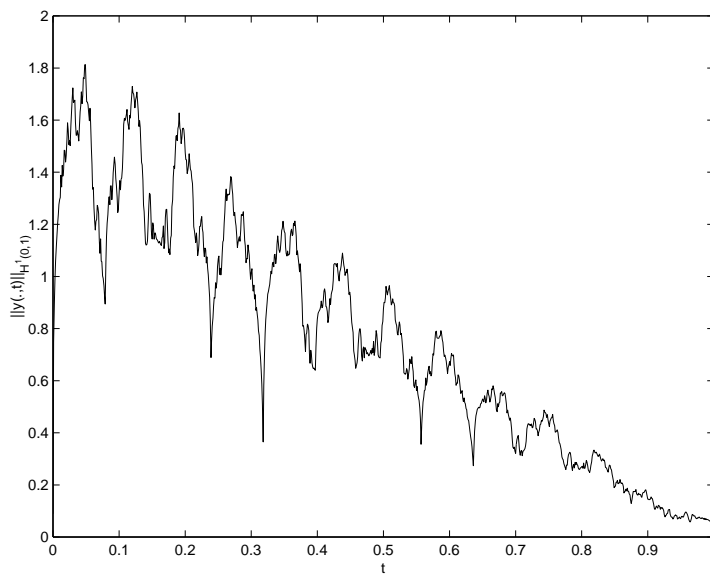


FIG. 10.5 – Variations de  $\|y(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .



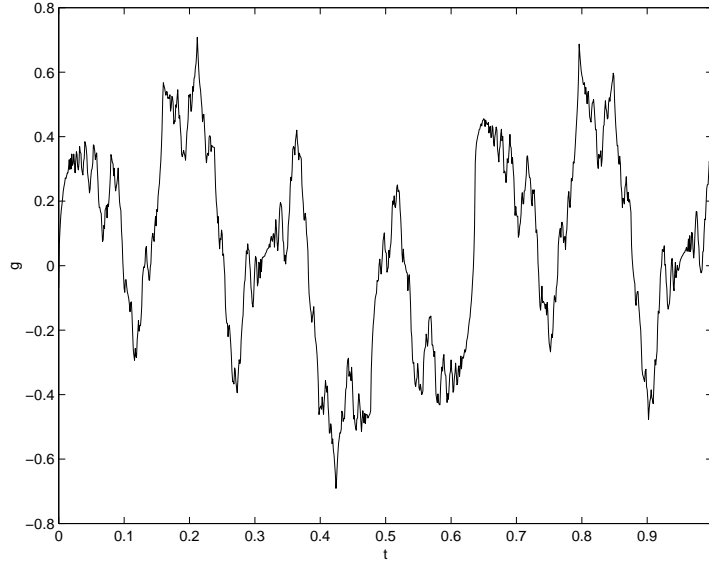


FIG. 10.6 – Variations du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

## 10.2 Contrôle dans $H^1(0, T)$ .

Le contrôle obtenu précédemment ne nous permet pas d'implémenter la méthode numérique pour trouver le contrôle du problème non linéaire. Nous allons donc dans ce paragraphe implémenter l'algorithme de calcul du contrôle dans l'espace  $H^1(0, T)$  correspondant au Théorème 8.5.

Nous procédons dans cette partie comme au chapitre précédent. Nous allons donc dans un premier temps chercher la matrice  $\bar{\Lambda}_N$  correspondant à la restriction à un sous-espace de dimension finie de l'application linéaire

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} : H_0^1(0, 1) \times H^{-1}(0, L) \times \mathbb{R} &\rightarrow H^{-1}(0, L) \times H_0^1(0, 1) \times \mathbb{R} \\ (u^0, u^1, \alpha^0) &\longmapsto (y_t(\cdot, 0), -y(\cdot, 0), -\omega(0)) \end{aligned}$$

définie de la manière suivante. Soit  $\alpha$  un réel et  $u$  la solution du problème de Cauchy

$$(I) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x). \end{cases}$$

On considère alors  $(y, \omega)$  solution de

$$(II) \begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y(1, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \\ y_{xx}(1, t) = -u_x(1, t) + \alpha, \\ y(x, T) = 0, y_t(x, T) = 0. \end{cases}$$

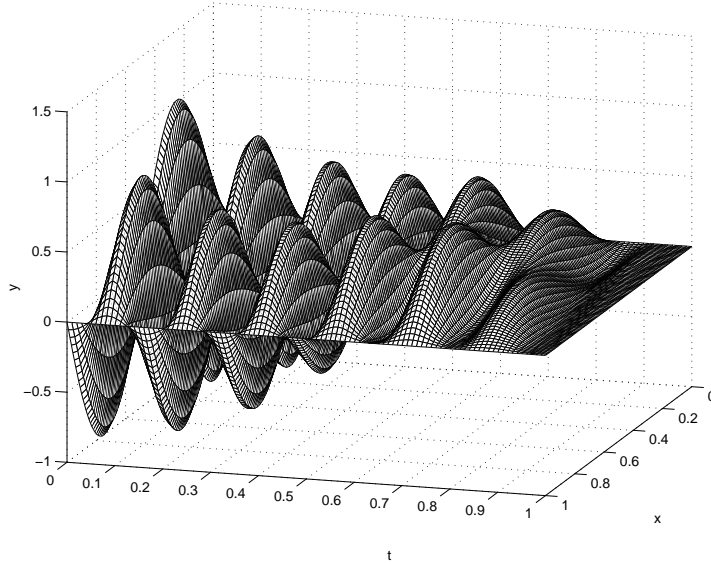


FIG. 10.7 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

$$\begin{cases} \omega_t = -u_x(1, t) + \alpha, \\ \omega(T) = 0 \end{cases}$$

D'après l'étude réalisée au chapitre 8.4, l'application  $\bar{\Lambda}$  est inversible.

L'algorithme est donc le suivant,

- Nous cherchons la matrice  $\bar{\Lambda}_N$  associée à l'application  $\bar{\Lambda}$  dans la base du sous-espace vectoriel de dimension  $2N + 1$ , formée par les vecteurs  $(\phi_k, 0, 0)$ ,  $(0, \phi_k, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  où  $\phi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$  comme précédemment.
- Étant données des conditions initiales  $(y^0, y^1)$ , soit  $(z^0, z^1) = (y^1, y_{xx}^0 - y_{xxxx}^0)$ . On projette  $(z^0, z^1)$  sur l'espace engendré par les  $\phi_k$  pour  $k = 1..N$ . On cherche alors  $(u^0, u^1, \alpha)$  tels que  $\Lambda_N(u^0, u^1, \alpha) = (z^1, -z^0, -y_{xx}^0(1))$ .
- On résout alors le problème (I) avec comme données  $(u^0, u^1)$ . Le contrôle cherché est alors  $g(t) = \int_0^t (-u_x(1, s) + \alpha) ds$ .
- Connaissant le contrôle, on trouve la solution  $y$  avec le chapitre précédent.

Les figures (10.7) et (10.10) représentent les solution du problème de Boussinesq avec un contrôle dans l'espace  $H^1(0, T)$ . Pour pouvoir comparer avec les figures (10.1) et (10.4) du paragraphe précédent nous avons pris les mêmes données initiales et le même temps  $T$ . Les figures (10.8) et (10.11) représentent le contrôle  $H^1$  obtenu dans les deux cas étudiés. On voit que cette fois, le contrôle vérifie bien la condition de compatibilité au bord,  $g(T) = 0 = y_{xx}(1, T)$ , et  $g(0) = y_{xx}(1, 0)$ . De plus la solution obtenue est bien plus lisse que celle obtenue avec le contrôle dans  $L^2(0, T)$ , or d'après le chapitre 8.3, la solution appartient à  $C([0, T], H_3)$ .

Comme la méthode d'unicité hilbertienne nous donne le contrôle qui minimise la norme  $L^2$  parmi les contrôles admissible, il est intéressant de comparer les normes  $L^2$  des différents contrôles obtenus. La figure (10.13) représente l'évolution des normes  $L^2$

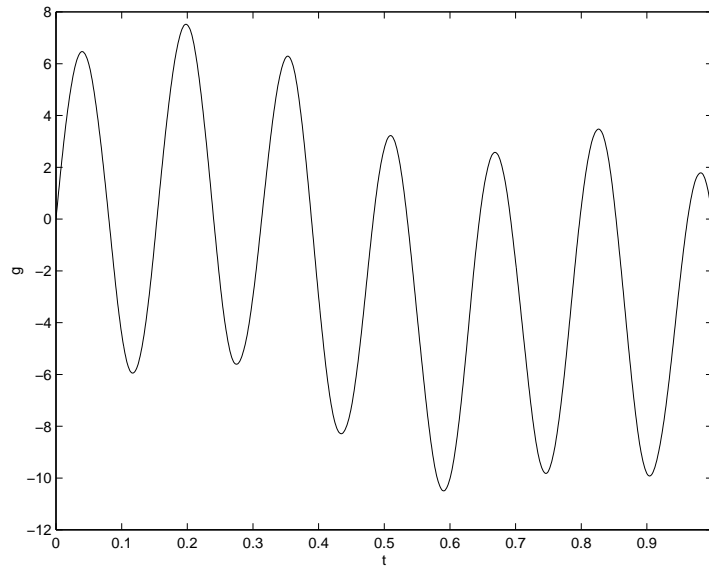


FIG. 10.8 – Variations du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1 = \sin(2\pi x)$ .

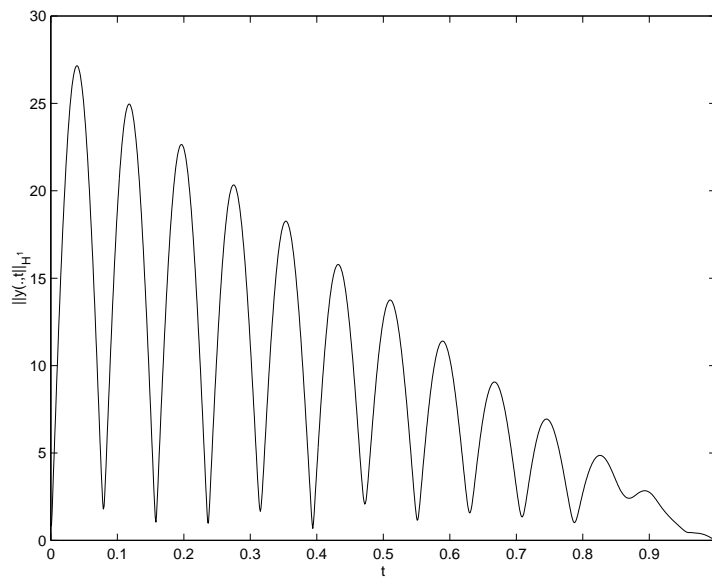


FIG. 10.9 – Variations de  $\|y(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1 = \sin(2\pi x)$ .

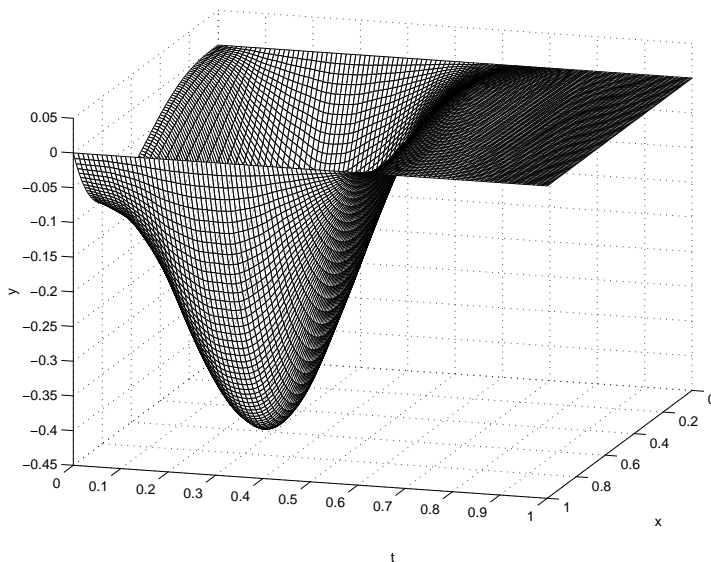


FIG. 10.10 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

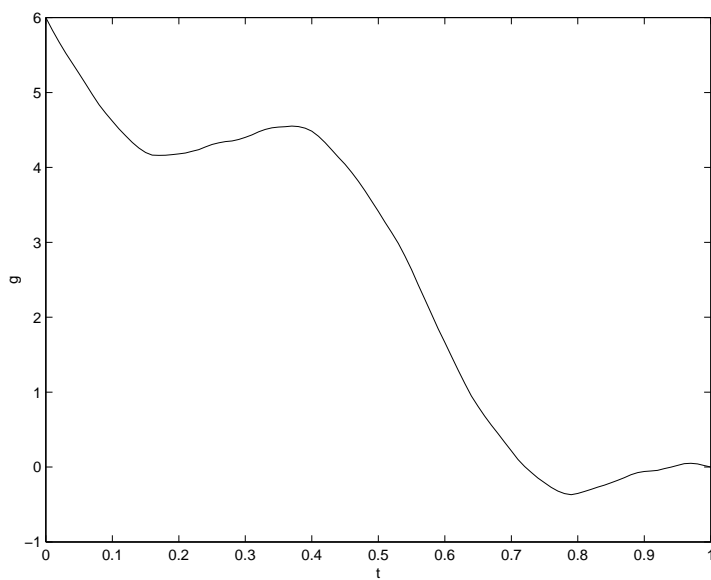


FIG. 10.11 – Variations du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

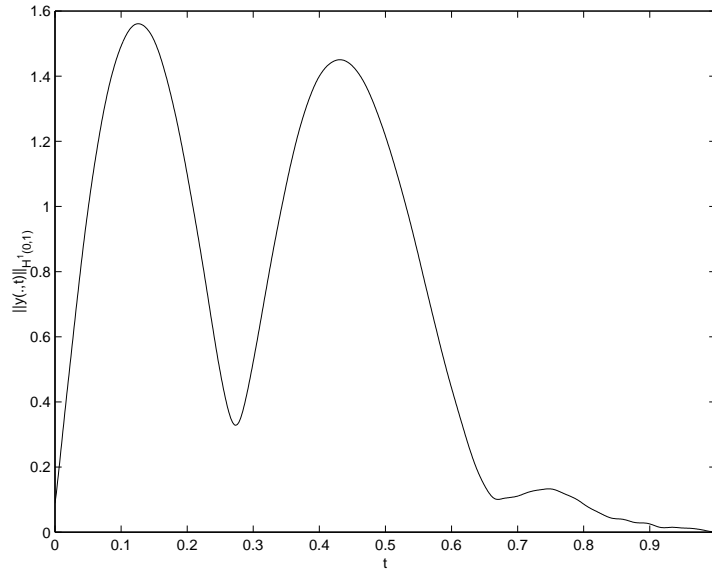


FIG. 10.12 – Variations de  $\|y(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  pour  $y^0(x) = x^3(x-1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x-1)$ .

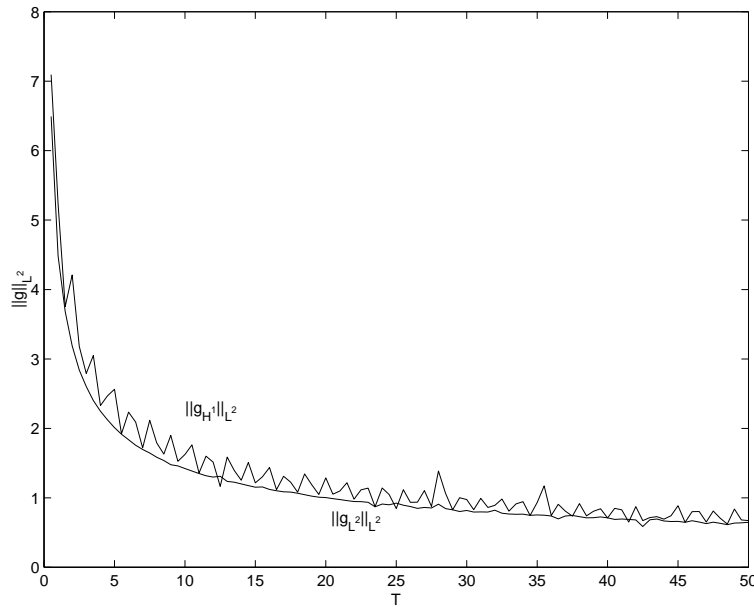


FIG. 10.13 – Variations de  $\|g\|_{L^2(0,T)}$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

des contrôles  $L^2$  et  $H^1$  avec différents temps finaux mais toujours les mêmes données initiales et finales. On voit bien que le contrôle  $L^2$  a une norme inférieure à celle du contrôle  $H^1$  et de plus ces normes décroissent en fonction du temps.

### 10.3 Vérification avec les différences finies.

Les deux méthodes que nous avons présentées sont spectrales. Il est intéressant pour valider nos résultats d'implémenter une méthode aux différences finies avec le contrôle obtenu par la méthode spectrale et de voir si la solution obtenue alors est bien la même que précédemment et tend à s'annuler au temps  $T$ .

Le problème que nous cherchons à discrétiser est le suivant, :

Étant donné un temps  $T$ , des conditions initiales  $(y^0, y^1)$  et un contrôle  $g$ , on cherche  $y$  solution de

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (10.2)$$

$$y(0, t) = y(1, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \quad (10.3)$$

$$y_{xx}(1, t) = g(t), \quad (10.4)$$

$$y(x, 0) = y^0(x) \quad y_t(x, 0) = y^1(x). \quad (10.5)$$

Pour discrétiser ce problème, nous nous inspirons de la méthode proposée par León et Zuazua, [25], pour l'équation des poutres. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on considère une partition de l'espace  $[0, 1]$ , notée  $P = \{x_0 = 0, \dots, x_j = jh, \dots, x_{N+1} = 1\}$  où  $h = 1/(N+1)$  est le pas d'espace. Pour rendre compte des conditions au bord, on introduit les points  $x_{-1} = x_0 - h$  et  $x_{N+2} = x_{N+1} + h$ . On note  $y_j(t)$  l'approximation de la solution du problème au point  $x_j$ . On pose également  $y_{-1} = -y_1$  et  $y_{N+2} = -y_N + g$ . On obtient alors la semi-discrétisation aux différences finies du problème,

$$y_j'' = \frac{-1}{h^4} (y_{j+2} - 4y_{j+1} + 6y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2}) + \frac{1}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

$$\text{pour } j = 1..N+1,$$

$$y_0 = y_{N+1} = 0,$$

$$y_{-1} = -y_1,$$

$$y_{N+2} = -y_N + h^2 g,$$

$$y_j(0) = y_j^0, \quad y_j'(0) = y_j^1$$

Soit  $\delta t$  le pas de temps, notons  $y_j^n = y(n\delta t, jh)$ . On approche alors le problème semi

discrétisé par

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\delta t)^2} (y_j^{n+1} - 2y_j^n + y_j^{n-1}) &= \frac{-1}{h^4} (y_{j+2}^{n+1} - 4y_{j+1}^{n+1} + 6y_j^{n+1} - 4y_{j-1}^{n+1} + y_{j-2}^{n+1}) \\ &\quad + \frac{1}{h^2} (y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}) \\ &\quad \text{pour } j = 1..N + 1, \\ &\quad y_0^{n+1} = y_{N+1}^{n+1} = 0, \\ &\quad y_{-1}^{n+1} = -y_1^{n+1}, \\ &\quad y_{N+2}^{n+1} = -y_N^{n+1} + h^2 g(n\delta t). \end{aligned}$$

Notons  $A$  la matrice tridiagonale définie par  $A(i, i) = -2$  et  $A(i, i + 1) = A(i, i - 1) = 1$  et désignons par  $Y^n$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  de composantes  $y_j^n$  et  $G^n$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  défini par  $G^n = (0, \dots, 0, g(n\delta t))$ . Le schéma s'écrit alors

$$\frac{1}{(\delta t)^2} (Y^{n+1} - 2Y^n + Y^{n-1}) = \left( \frac{1}{h^4} A^2 + \frac{1}{h^2} A \right) Y^{n+1} - \frac{1}{h^2} G^n.$$

On montre facilement avec [14] que ce schéma implicite décentré est inconditionnellement stable.

On programme donc cette méthode avec le contrôle  $g$  obtenu avec la méthode spectrale. Avec un pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$  et un pas d'espace  $h = 5 \cdot 10^{-3}$ , on s'aperçoit que la méthode des différences finies donne un résultat comparable à celui de la méthode spectrale 10.15. Le résultat obtenu avec la fonction  $\sin(2\pi x)$  est cependant beaucoup moins bon qu'avec la fonction polynomiale. Si on augmente le nombre de fonctions propres utilisées pour la décomposition de la méthode spectrale, sans changer le pas d'espace ni le pas de temps, le résultat obtenu avec les différences finies ne change pas. En revanche, lorsqu'on prend un pas d'espace plus fin, (10.16), le résultat se rapproche de celui obtenu avec la méthode spectrale (10.17), pour  $\delta t = 10^{-3}$  et  $h = 10^{-3}$ , on a  $\frac{\|y_{H1} - y_{dif.finiés}\|_{L^2(0,T,L^2(0,L))}}{\|y_{H1}\|_{L^2(0,T,L^2(0,L))}} = 2 \cdot 10^{-3}$ . On peut donc dire que la méthode spectrale que nous avons implémentée est juste.

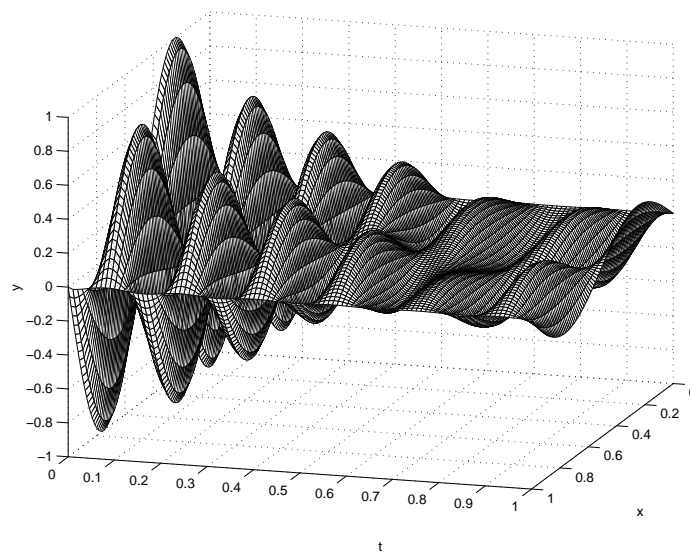


FIG. 10.14 – Variations de la solution avec la méthode des différences finies pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $t = 10^{-3}$ .

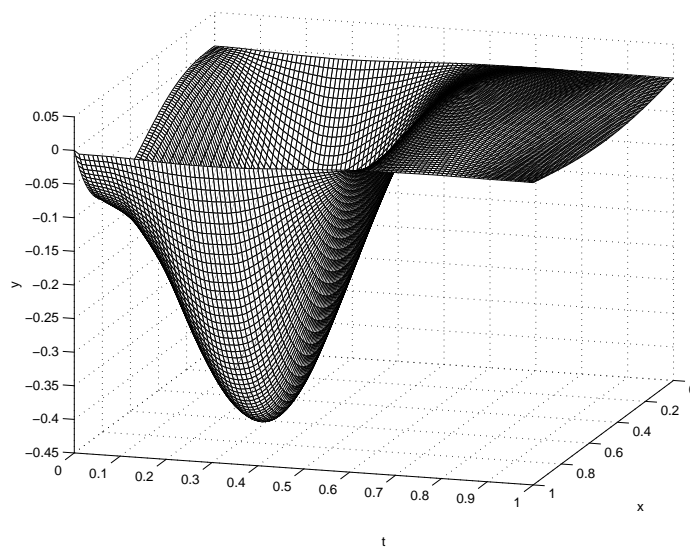


FIG. 10.15 – Variations de la solution avec la méthode des différences finies pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ ,  $h = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $t = 10^{-3}$ .



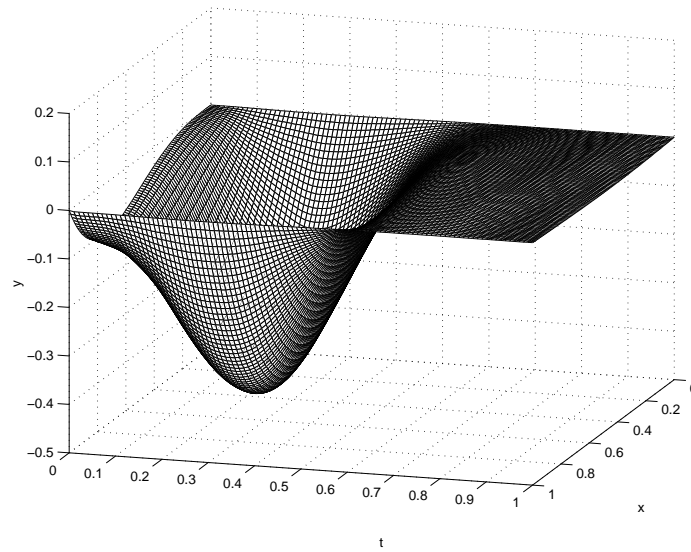


FIG. 10.16 – Variations de la solution avec la méthode des différences finies raffinée pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $t = 10^{-3}$ .

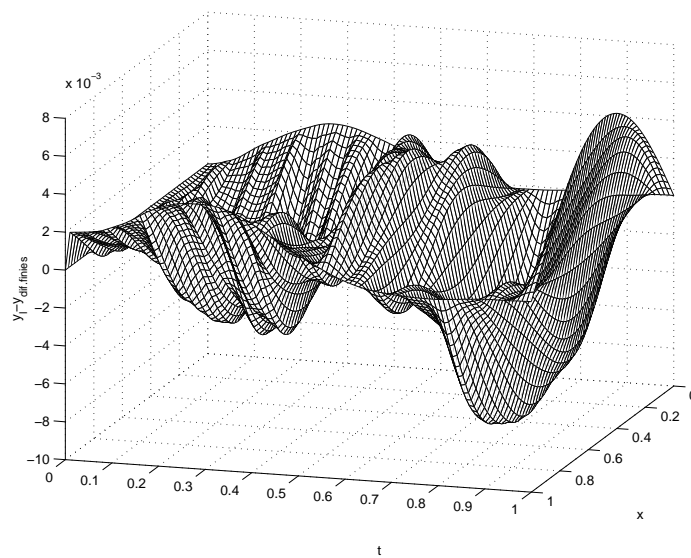


FIG. 10.17 – Différence entre la solution spectrale et la solution aux différences finies pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $t = 10^{-3}$ .

# Chapitre 11

## Cas non linéaire.

Nous allons dans cette partie nous intéresser à la modélisation du problème de Boussinesq non linéaire. Nous procédons comme dans la partie théorique en itérant la méthode d'unicité hilbertienne pour avoir une bonne approximation de notre contrôle et de notre solution comme point fixe.

### 11.1 Méthode spectrale.

L'algorithme est le suivant : Étant donné un temps  $T$ , des conditions initiales  $(y^0, y^1)$  et des conditions finales  $(y_T^0, y_T^1)$ .

- Soit  $y = 0$  notre fonction arbitraire de départ pour l'itération.
- Soit  $y_0$  solution du problème linéaire sans contrôle avec  $y(., T) = y_T^0$  et  $y_t(., T) = y_T^1$ .

$$\begin{cases} y_{0tt} - y_{0xx} + y_{0xxxx} = 0, \\ y_0(0, t) = y_0(1, t) = y_{0xx}(0, t) = y_{0xx}(1, t) = 0, \\ y_0(., T) = y_T^0, y_{0t}(., T) = y_T^1. \end{cases}$$

Tant que notre solution n'est pas stationnaire, on réitère le procédé

- On cherche  $y_2$  solution du problème linéaire sans contrôle avec un second membre égal à  $-(y^2)_{xx}$ .

$$\begin{cases} y_{2tt} - y_{2xx} + y_{2xxxx} = -(y^2)_{xx}, \\ y_2(0, t) = y_2(1, t) = y_{2xx}(0, t) = y_{2xx}(1, t) = 0, \\ y_2(x, T) = 0, y_{2t}(x, T) = 0. \end{cases}$$

- Enfin, on résout le problème avec contrôle pour avoir les bonnes conditions initiales à l'aide du contrôle  $H^1$  du paragraphe précédent. On cherche  $y_1$  solution de

$$\begin{cases} y_{1tt} - y_{1xx} + y_{1xxxx} = 0, \\ y_1(0, t) = y_1(1, t) = y_{1xx}(0, t) = 0, \\ y_{1xx}(1, t) = g(t), \\ y_1(x, 0) = y^0 - y_0(x, 0) - y_2(x, 0), y_{1t}(x, 0) = y^1 - y_{0t}(x, 0) - y_{2t}(x, 0), \\ y_1(x, T) = 0, y_{1t}(x, T) = 0. \end{cases}$$

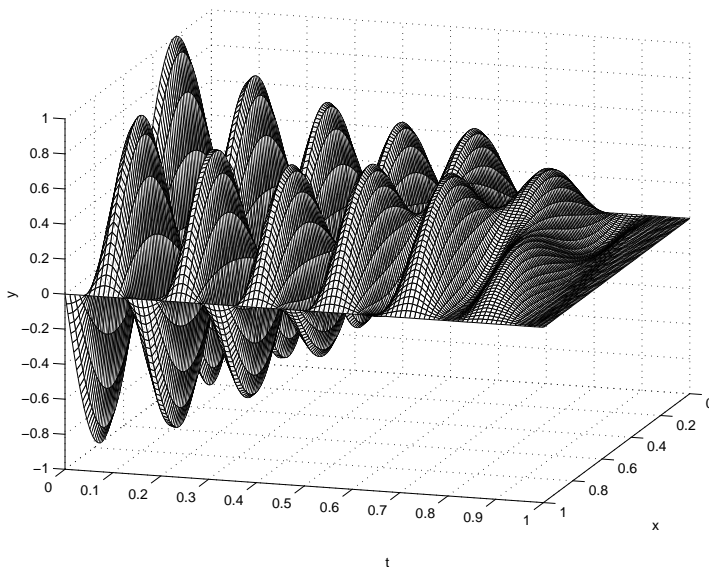


FIG. 11.1 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

- On regarde enfin la norme de la différence  $\epsilon = \|y - (y_0 + y_1 + y_2)\|_{L^2(0,T,H^3(0,L))}$ . Si  $\epsilon$  est “suffisamment” petit, on a terminé. Sinon on pose  $y = y_0 + y_1 + y_2$  et on réitère.

Les figures (11.1) et (11.5) représentent les solutions obtenues pour le problème de Boussinesq non linéaire. Ces solutions ont été obtenues au bout d’une dizaine d’itérations pour une erreur  $\epsilon \leq 10^{-3}$ . Pour des données initiales petites, la méthode converge donc très vite.

Les contrôles correspondants, en figures (11.2) et (11.6) diffèrent assez peu des contrôles des problèmes linéaires, figures (11.3) et (11.7). Pour voir l’influence du terme non linéaire sur les solutions, il faut prendre des conditions initiales et finales plus grandes. C’est ce que nous ferons ensuite.

Il est intéressant de remarquer que bien que le problème soit réversible en temps (en posant  $\bar{y}(x, t) = y(x, T - t)$ , et  $\bar{g}(t) = g(T - t)$ ), les solutions obtenues ne sont pas les mêmes. En effet, considérons l’exemple suivant,

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = -(y^2)_{xx}, \quad (11.1)$$

$$y(0, t) = y(1, t) = y_{xx}(0, t) = 0, \quad (11.2)$$

$$y_{xx}(1, t) = g(t), \quad (11.3)$$

$$y(x, 0) = x^3(x - 1), \quad y_t(x, 0) = x^3(x - 1), \quad (11.4)$$

$$y(x, 1) = 0, \quad y_t(x, 1) = 0. \quad (11.5)$$

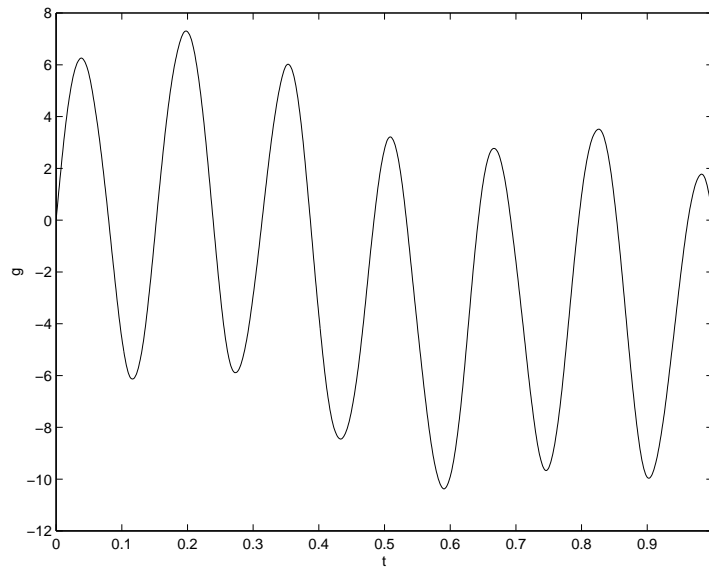


FIG. 11.2 – Variations du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

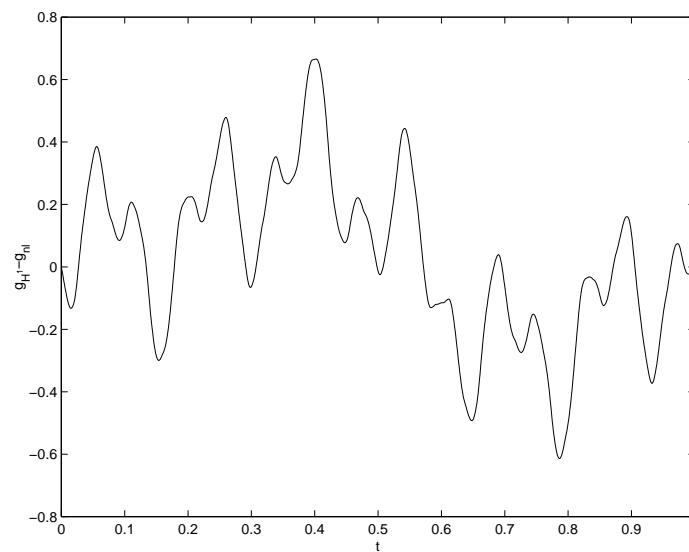


FIG. 11.3 – Différence entre le contrôle du linéaire et le contrôle du non linéaire pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

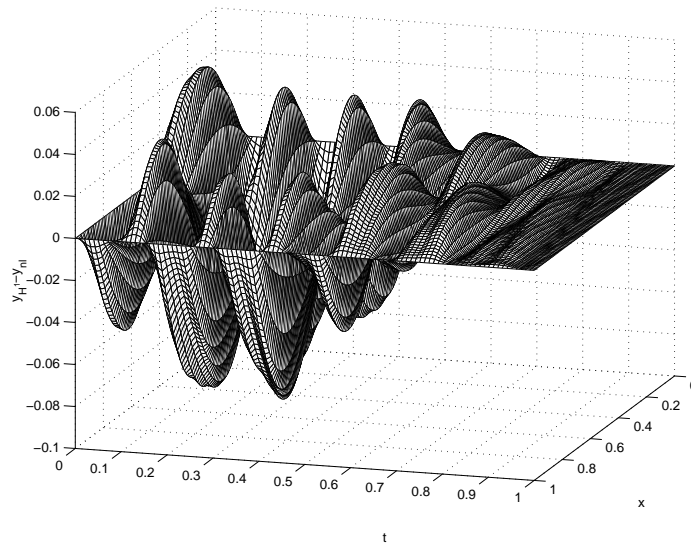


FIG. 11.4 – Différence entre la solution du linéaire et la solution du non linéaire pour  $y^0(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $y^1(x) = \sin(2\pi x)$ .

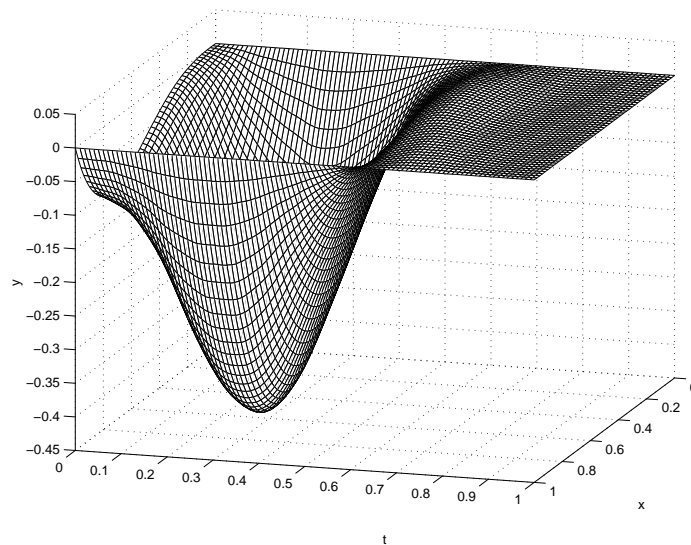


FIG. 11.5 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = x^3(x-1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x-1)$ .

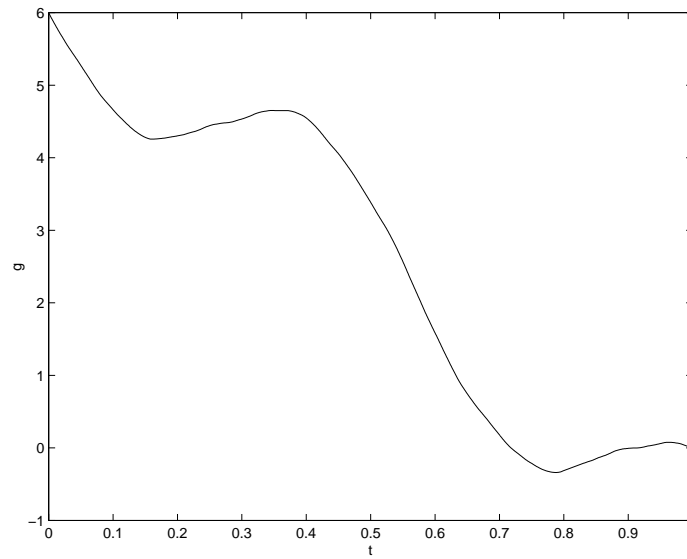


FIG. 11.6 – Variations du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

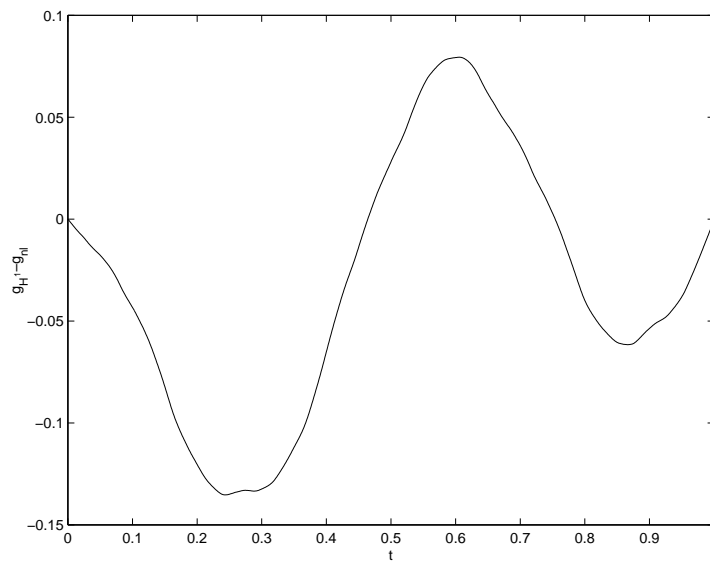


FIG. 11.7 – Différence entre le contrôle du linéaire et le contrôle du non linéaire pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

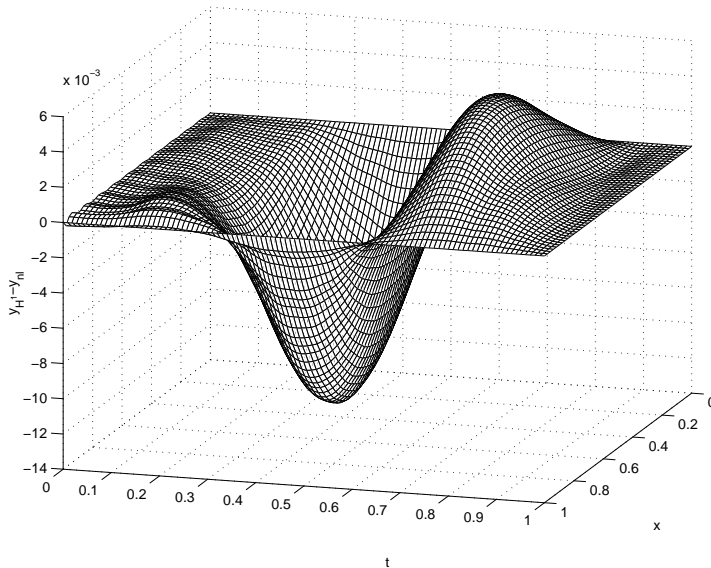


FIG. 11.8 – Différence entre la solution du linéaire et la solution du non linéaire pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

La solution obtenue par la méthode précédente est représentée en figure (11.5). Considérons maintenant le problème,

$$z_{tt} - z_{xx} + z_{xxxx} = -(z^2)_{xx}, \quad (11.6)$$

$$z(0, t) = z(1, t) = z_{xx}(0, t) = 0, \quad (11.7)$$

$$z_{xx}(1, t) = g(t), \quad (11.8)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = 0, \quad (11.9)$$

$$z(x, 1) = x^3(x - 1), \quad z_t(x, 1) = x^3(x - 1). \quad (11.10)$$

Nous remarquons que  $z(x, t) = y(x, 1 - t)$  est solution de ce problème. Or quand nous résolvons directement le deuxième problème avec la méthode exposée précédemment, nous trouvons la solution  $y(x, t) = z(x, 1 - t)$  représentée en figure (11.9).

Cette différence tient au fait que le contrôle  $u$  n'est pas le même dans les deux cas. Dans le premier cas, le contrôle vérifie  $g(0) = y_{xx}(1, 0)$ , et dans le deuxième cas, le contrôle ne vérifie pas  $g(0) = y_{xx}(1, 0)$ . Les deux contrôles obtenus répondent bien à la question.

## 11.2 Vérification avec les différences finies.

Il est intéressant de valider nos résultats précédents avec une méthode aux différences finies. Nous avons donc implémenté le schéma suivant inspiré par [25] :

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on considère une partition de l'espace  $[0, 1]$ , notée  $P = \{x_0 = 0, \dots, x_j = jh, \dots, x_{N+1} = 1\}$  où  $h = 1/(N + 1)$  est le pas d'espace. Pour rendre compte des

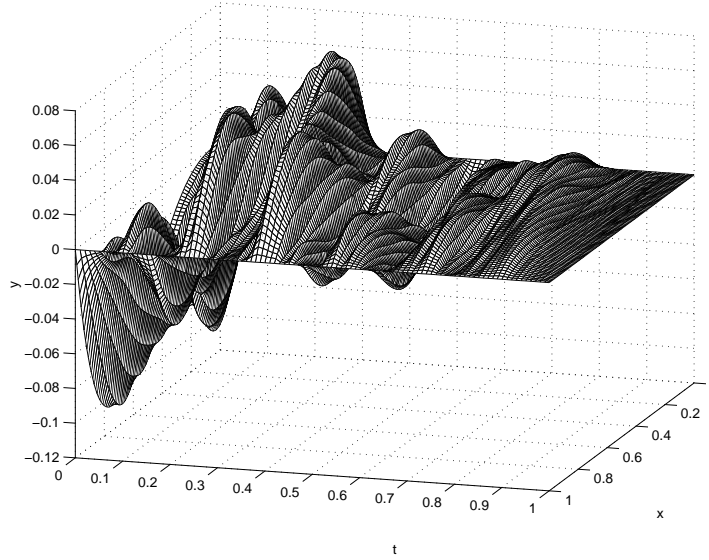


FIG. 11.9 – Variations de la solution  $y$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

conditions au bord, comme au paragraphe précédent, on introduit les points  $x_{-1} = x_0 - h$  et  $x_{N+2} = x_{N+1} + h$ . On note  $y_j(t)$  l'approximation de la solution du problème au point  $x_j$ . On pose également  $y_{-1} = -y_1$  et  $y_{N+2} = -y_N + g$ . On obtient alors la semi-discrétisation aux différences finies du problème,

$$y_j'' = \frac{-1}{h^4} (y_{j+2} - 4y_{j+1} + 6y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2}) + \frac{1}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} + y_{j+1}^2 - 2y_j^2 + y_{j-1}^2)$$

pour  $j = 1..N + 1$ ,

$$y_0 = y_{N+1} = 0,$$

$$y_{-1} = -y_1,$$

$$y_{N+2} = -y_N + h^2 g,$$

$$y_j(0) = y_j^0, y_j'(0) = y_j^1$$

Soit  $\delta t$  le pas de temps, notons  $y_j^n = y(n\delta t, jh)$ . On approche alors le problème semi-discrétisé par,

$$\frac{1}{(\delta t)^2} (y_j^{n+1} - 2y_j^n + y_j^{n-1}) = \frac{-1}{h^4} (y_{j+2}^{n+1} - 4y_{j+1}^{n+1} + 6y_j^{n+1} - 4y_{j-1}^{n+1} + y_{j-2}^{n+1})$$

$$+ \frac{1}{h^2} (y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1} - (y^2)_{j+1}^n + 2(y^2)_j^n - (y^2)_{j-1}^n) \text{ pour } j = 1..N + 1,$$

$$y_0^{n+1} = y_{N+1}^{n+1} = 0,$$

$$y_{-1}^{n+1} = -y_1^{n+1},$$

$$y_{N+2}^{n+1} = -y_N^{n+1} + h^2 g(n\delta t).$$



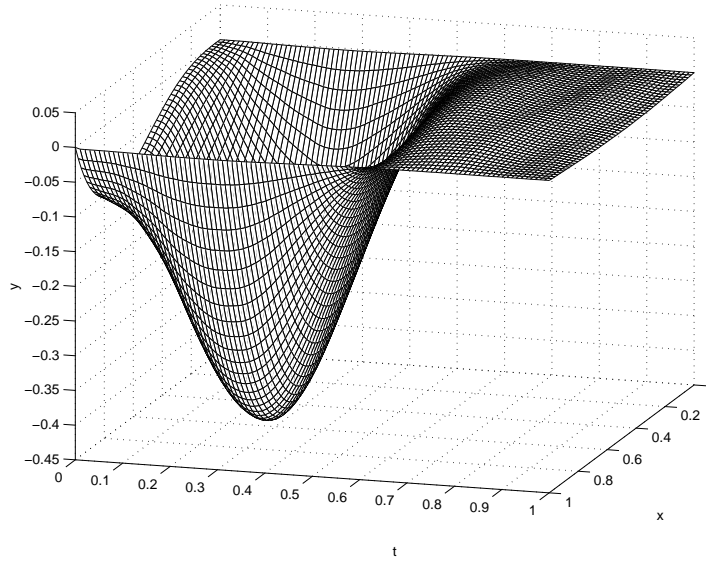


FIG. 11.10 – Variations de la solution avec la méthode des différences finies  $\delta t = 10^{-3}$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-2}$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

Compte tenu qu'on se place en des solutions proches de zéro, le terme non linéaire influe peu sur la stabilité du schéma. Ce dernier reste donc stable pour les pas de temps et d'espace choisis.

La figure (11.10) qui représente la solution obtenue avec ce schéma montre bien que le contrôle convient. Il faut néanmoins noter que le temps nécessaire à l'obtention de cette solution est bien plus long que le temps nécessaire au schéma spectral.

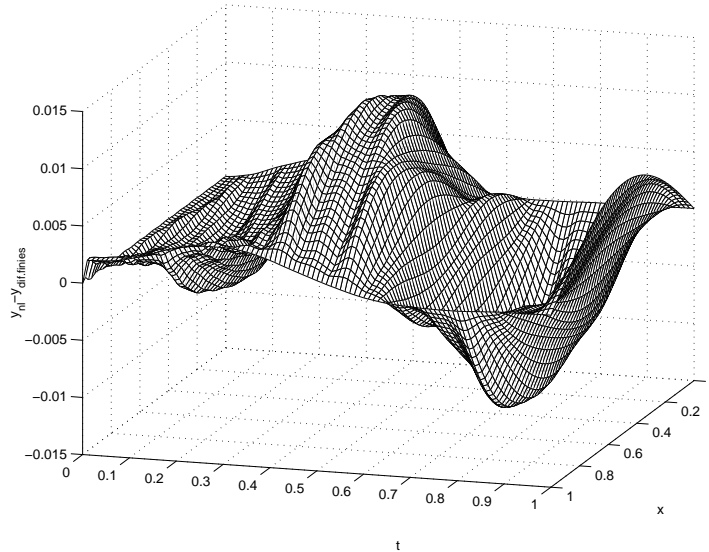


FIG. 11.11 – Différence entre la solution spectrale et la solution avec les différences finies pour  $\delta t = 10^{-3}$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-2}$  pour  $y^0(x) = x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

### 11.3 Cas non linéaire avec de grandes données initiales.

Pour pouvoir noter des différences importantes entre le cas linéaire et le cas non linéaire, il faut prendre des données initiales plus grandes, tout en faisant attention à ce que la méthode du point fixe soit toujours convergente. En effet, nous avons montré au paragraphe 8.4 que nous avons juste la contrôlabilité locale autour de zéro du non linéaire.

En prenant différentes données initiales, on s'aperçoit que la méthode converge numériquement pour des données très grandes, puisque la méthode converge toujours pour  $\|y_0\|_{H^3} + \|y_1\|_{H^1} = 400$ . En revanche pour  $y^0 = 45x^3(x - 1)$  et  $y^1 = x^3(x - 1)$ , il n'y a plus convergence de la méthode du point fixe.

Étudions un cas grand particulier.

En prenant  $y^0 = 40x^3(x - 1)$  et  $y^1 = x^3(x - 1)$ , nous avons toujours convergence de la méthode (mais plus lentement vingt itérations pour avoir  $\epsilon < 10^{-3}$ ), et nous voyons des différences entre le linéaire et le non linéaire. Les figures (11.12) et (11.13) représentent respectivement la solution du problème linéaire et la solution du problème non linéaire.

Pour bien illustrer la différence entre ces deux solutions et la nécessité d'itérer la méthode du point fixe pour obtenir la solution du problème non linéaire, le premier dessin de la figure (11.14) représente la solution obtenue avec la méthode des différences finies et le contrôle du problème linéaire; le deuxième dessin représente la solution obtenue toujours avec la méthode des différences finies mais le contrôle non linéaire. Il apparaît clairement que le contrôle donné par la méthode linéaire ne convient pas pour le non linéaire.

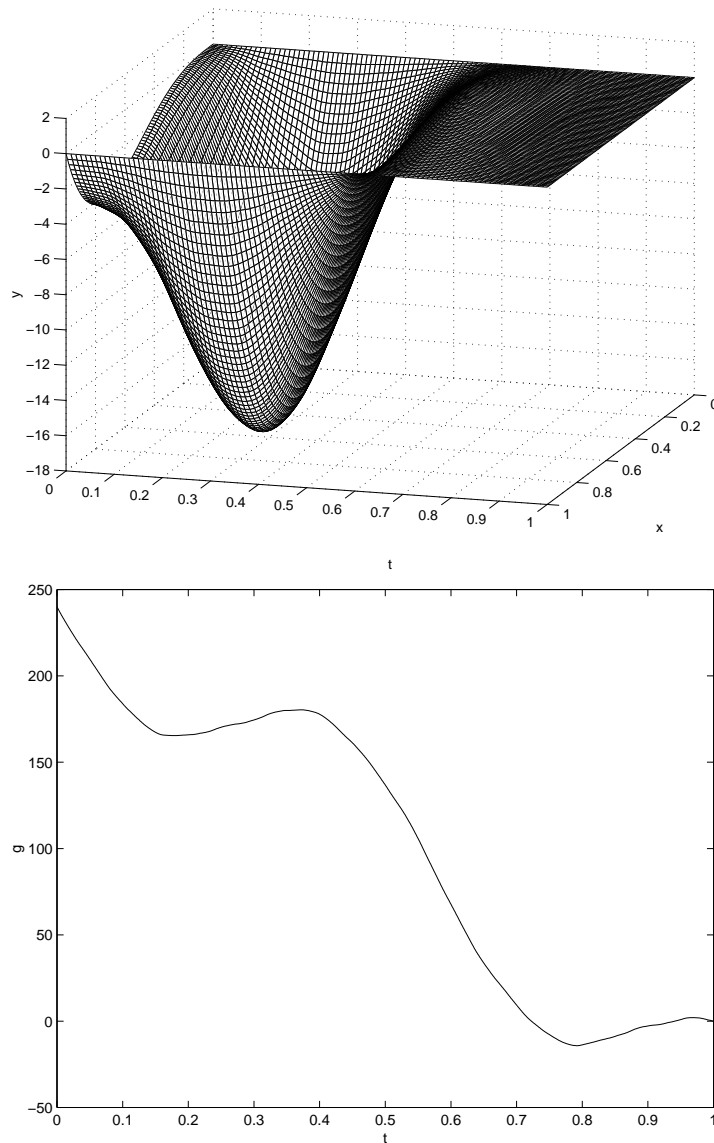


FIG. 11.12 – Variations de la solution  $y$  du problème linéaire et du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = 40x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

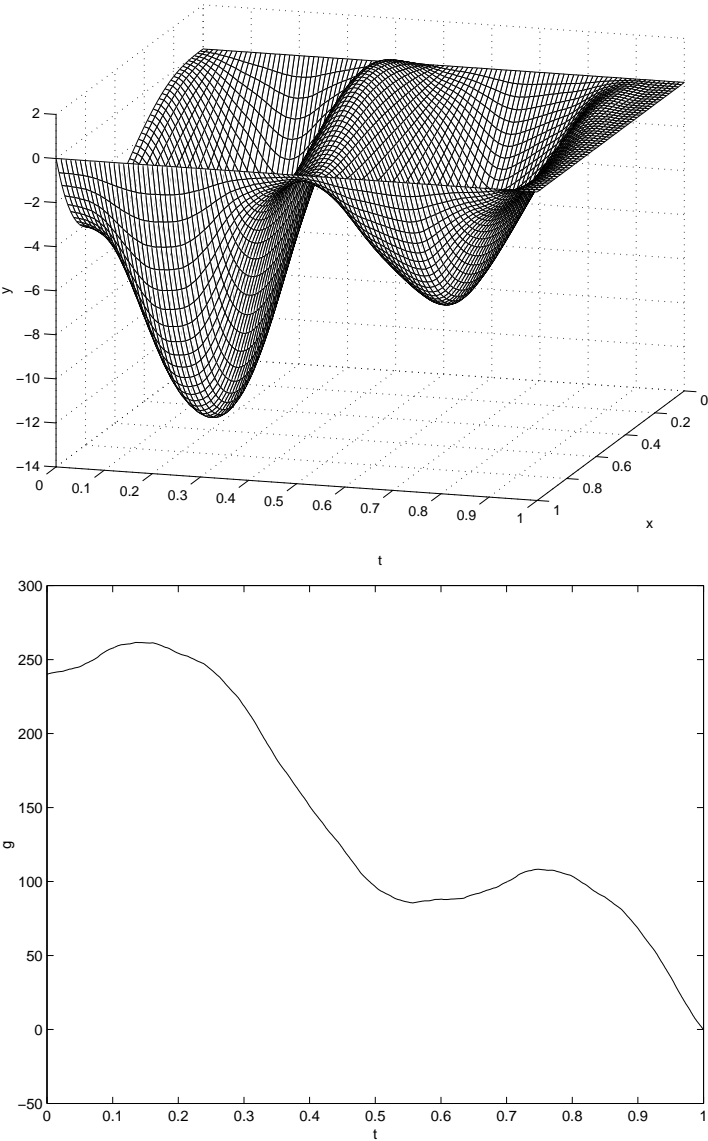


FIG. 11.13 – Variations de la solution  $y$  et du contrôle  $g$  pour  $y^0(x) = 40x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

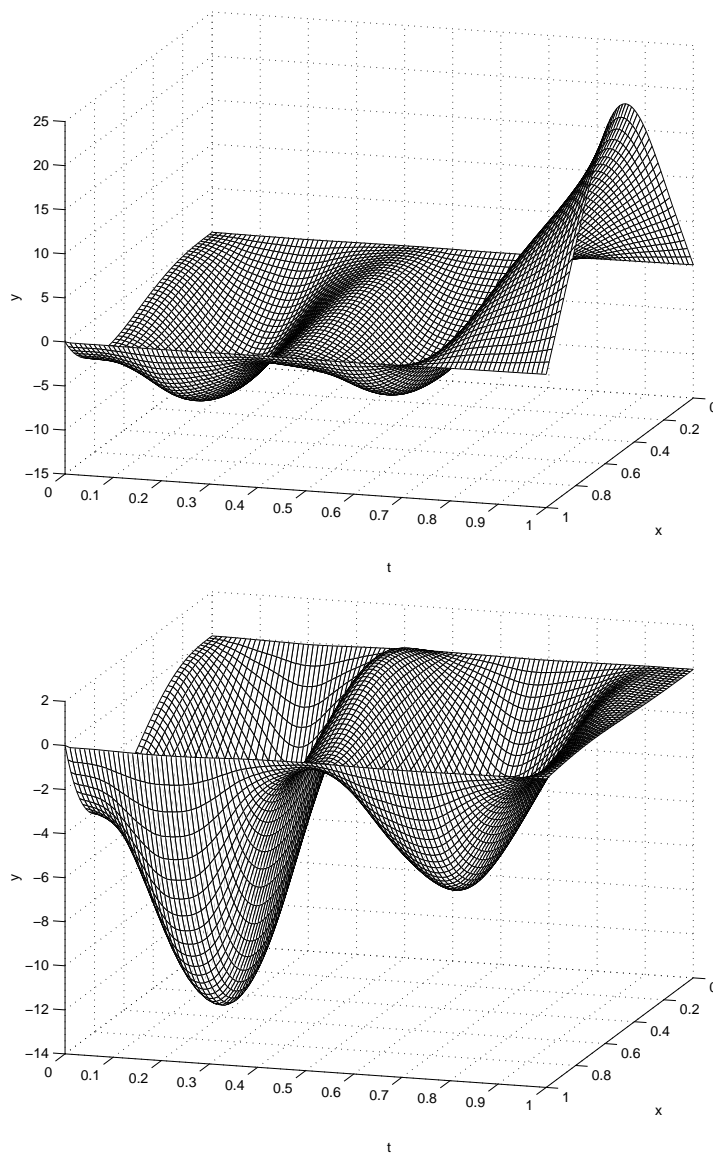


FIG. 11.14 – Variations de  $y$  avec le contrôle linéaire obtenu par la méthode spectrale puis avec le contrôle non linéaire pour  $y^0(x) = 10x^3(x - 1)$ ,  $y^1(x) = x^3(x - 1)$ .

# Chapitre 12

## Annexe : Résolution exacte du problème numérique.

Dans cette annexe, nous donnons les calculs permettant d'implémenter le programme de résolution du problème de contrôle de Boussinesq.

### 12.1 Cas du contrôle $L^2$ .

#### 1. Calcul de la matrice $\Lambda_N$ .

Pour  $k$  variant de 1 à  $N$ , on résout le système (I) suivant,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (12.1)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (12.2)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (12.3)$$

$$u(0, x) = \phi_k(x), u_t(0, x) = 0. \quad (12.4)$$

D'après l'étude théorique réalisée au chapitre 8.4, la solution de (I) est égale à

$$u(t, x) = \cos(\omega_k t) \phi_k(x) = \sqrt{2} \cos(\omega_k t) \sin(k\pi x). \quad (12.5)$$

Or par H.U.M, le contrôle vaut  $g(t) = -u_x(t, 1)$ , soit encore,

$$g(t) = \sqrt{2}(-1)^{k+1} k\pi \cos(\omega_k t). \quad (12.6)$$

Il nous reste alors à déterminer la valeur en  $t = 0$  de la solution du problème qui suit,

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (12.7)$$

$$y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad (12.8)$$

$$y_{xx}(t, 0) = 0, \quad (12.9)$$

$$y_{xx}(t, 1) = g(t), \quad (12.10)$$

$$y(T, x) = 0, y_t(T, x) = 0. \quad (12.11)$$

Comme  $g$  est suffisamment régulier, on fait un changement de variables pour remonter le contrôle,  $y = z + \theta g$ , avec  $\theta(x) = \frac{x^3 - x}{6}$ . Le nouveau problème (II) est alors de trouver une fonction  $z$  telle que,

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + z_{xxxx} = -\theta g_{tt} + \theta_{xx} g, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0, \\ z_{xx}(0, t) = z_{xx}(1, t) = 0, \\ z(x, T) = -\theta(x) u_x(1, T), \quad z_t(x, T) = -\theta(x) u_{xt}(1, T), \end{cases}$$

on pose alors  $y(x, t) = z(x, t) - \theta(x) u_x(1, t)$ .

Par la méthode de variations des constantes, on trouve,

$$y(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g(0) \theta_j + a_j \cos(\omega_j T) - \frac{b_j}{\omega_j} \sin(\omega_j T) + \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_i \theta_j) g(s) \frac{\sin(\omega_j s)}{\omega_j} \right) \phi_j(x),$$

$$y_t(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g'(0) \theta_j + a_j \omega_j \sin(\omega_j T) + b_j \cos(\omega_j T) - \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_i \theta_j) g(s) \cos(\omega_j s) \right) \phi_j(x),$$

avec les notations suivantes,

$$\begin{aligned} \theta_j &= (\theta, \phi_j)_{L^2(0,1)} = \frac{(-1)^j \sqrt{2}}{(j\pi)^3}, \\ \theta_{xxj} &= (\theta_{xx}, \phi_j)_{L^2(0,1)} = \frac{(-1)^{j+1} \sqrt{2}}{j\pi}, \\ a_j &= -u(T) \theta_j, \\ b_j &= -u_t(T) \theta_j. \end{aligned}$$

Comme nous savons que  $g(s) = \sqrt{2}(-1)^{k+1} k\pi \cos(\omega_k s)$ , nous pouvons calculer exactement les intégrales intervenant dans les expressions de  $y(0, x)$  et de  $y_t(0, x)$ .

Par conséquent nous avons résolu le premier problème. Passons au cas où  $u_0(x) = 0$  et  $u_1(x) = \phi_k(x)$ .

2. Ce cas se résout exactement comme le précédent. Pour  $k$  variant de 1 à  $N$ , on résout le système (I) suivant,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (12.12)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (12.13)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (12.14)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \phi_k(x). \quad (12.15)$$

D'après l'étude théorique réalisée au chapitre 8.4, la solution de (I) est égale à

$$u(t, x) = \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \phi_k(x) = \sqrt{2} \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \sin(k\pi x). \quad (12.16)$$

Or par H.U.M, le contrôle vaut  $g(t) = -u_x(t, 1)$ , soit encore,

$$g(t) = \sqrt{2}(-1)^{k+1} k\pi \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}. \quad (12.17)$$

Il nous reste alors à déterminer la valeur en  $t = 0$  de la solution du problème qui suit,

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (12.18)$$

$$y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad (12.19)$$

$$y_{xx}(t, 0) = 0, \quad (12.20)$$

$$y_{xx}(t, 1) = g(t), \quad (12.21)$$

$$y(T, x) = 0, \quad y_t(T, x) = 0. \quad (12.22)$$

On effectue le même changement de variables que précédemment, à savoir  $y = z + \theta g$ . Par la méthode de variations des constantes, on trouve,

$$y(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g(0)\theta_j + a_j \cos(\omega_j T) - \frac{b_j}{\omega_j} \sin(\omega_j T) + \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_j \theta_j) g(s) \frac{\sin(\omega_j s)}{\omega_j} \right) \phi_j(x),$$

$$y_t(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g'(0)\theta_j + a_j \omega_j \sin(\omega_j T) + b_j \cos(\omega_j T) - \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_j \theta_j) g(s) \cos(\omega_j s) \right) \phi_j(x),$$

avec les mêmes notations que précédemment.

Comme nous savons que  $g(s) = \sqrt{2}(-1)^{k+1} k\pi \frac{\sin(\omega_k s)}{\omega_k}$ , nous pouvons calculer exactement les intégrales intervenant dans les expressions de  $y(0, x)$  et de  $y_t(0, x)$ .

Nous avons donc obtenu l'expression de la matrice  $\Lambda_N$ .

3. Rappelons le problème que nous nous posons :

Etant donnés des conditions initiales  $(y^0, y^1)$ , peut-on trouver un contrôle  $g$  tel que la solution du problème de Boussinesq vaille  $(y^0, y^1)$  au temps 0 et  $(0, 0)$  au temps  $T$ ?



Numériquement, nous trouvons  $(u^0, u^1)$  tel que  $\Lambda(u^0, u^1) = (y^1, -y^0)$ . Il nous faut donc résoudre le problème (I) qui nous donne le contrôle cherché,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (12.23)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (12.24)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (12.25)$$

$$u(0, x) = u^0, \quad u_t(0, x) = u^1. \quad (12.26)$$

On sait que  $u$  se décompose en série de Fourier de la manière suivante,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N (u_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{u_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t)) \phi_k(x).$$

Le contrôle  $g$  s'exprime alors comme

$$g(t) = -u_x(1, t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{2} (-1)^{k+1} k \pi \left( u_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{u_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right).$$

Il ne nous reste plus alors qu'à résoudre le problème (II),

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (12.27)$$

$$y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad (12.28)$$

$$y_{xx}(t, 0) = 0, \quad (12.29)$$

$$y_{xx}(t, 1) = g(t), \quad (12.30)$$

$$y(T, x) = 0, \quad y_t(T, x) = 0. \quad (12.31)$$

Par la méthode de variations des constantes, on trouve,

$$y(t, x) = \sum_{j=1}^N \left( g(t) \theta_j + a_j \cos(\omega_j(T-t)) - \frac{b_j}{\omega_j} \sin(\omega_j(T-t)) - \int_t^T (\theta_{xxj} + \lambda_j \theta_j) g(s) \frac{\sin(\omega_j(t-s))}{\omega_j} ds \right) \phi_j(x).$$

avec toujours les mêmes notations que précédemment.

## 12.2 Cas du contrôle $H^1$ .

Pour calculer la matrice correspondant au contrôle  $H^1$ , nous implémentons la méthode proposée au paragraphe 8.3.

Nous commençons tout d'abord par calculer la matrice  $\bar{\Lambda}_N$ .

1. Pour  $k$  variant de 1 à  $N$ , on résout le système suivant,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (12.32)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (12.33)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (12.34)$$

$$u(0, x) = \phi_k(x), \quad u_t(0, x) = 0. \quad (12.35)$$

$$\alpha_t = 0, \quad (12.36)$$

$$\alpha(0) = 0. \quad (12.37)$$

D'après l'étude théorique réalisée au paragraphe 8.1, la solution de (I) est égale à

$$(u(t, x), \alpha) = (\cos(\omega_k t) \phi_k(x), 0) = (\sqrt{2} \cos(\omega_k t) \sin(k\pi x), 0). \quad (12.38)$$

Le contrôle vaut  $g(t) = -u_x(t, 1) + \alpha$ , soit encore,

$$g(t) = \sqrt{2}(-1)^{k+1} k\pi \cos(\omega_k t). \quad (12.39)$$

Par conséquent nous trouvons la même solution que précédemment,

$$y(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g(0)\theta_j + a_j \cos(\omega_j T) - \frac{b_j}{\omega_j} \sin(\omega_j T) \right. \\ \left. + \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_j \theta_j) g(s) \frac{\sin(\omega_j s)}{\omega_j} \right) \phi_j(x),$$

$$y_t(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g'(0)\theta_j + a_j \omega_j \sin(\omega_j T) + b_j \cos(\omega_j T) \right. \\ \left. - \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_j \theta_j) g(s) \cos(\omega_j s) \right) \phi_j(x),$$

avec les notations suivantes,

$$\theta_j = (\theta, \phi_j)_{L^2(0,1)} = \frac{(-1)^j \sqrt{2}}{(j\pi)^3},$$

$$\theta_{xxj} = (\theta_{xx}, \phi_j)_{L^2(0,1)} = \frac{(-1)^{j+1} \sqrt{2}}{j\pi},$$

$$a_j = -u(T)\theta_j,$$

$$b_j = -u_t(T)\theta_j.$$

Il nous faut encore résoudre le problème suivant,

$$w_t = -u_x(1, t) + \alpha, \quad (12.40)$$

$$w(T) = 0. \quad (12.41)$$

On trouve  $w(0) = (-1)^k \sqrt{2} k\pi \frac{\sin(\omega_k T)}{\omega_k}$ .

2. Pour  $k$  variant de 1 à  $N$ , on résout le système suivant,

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad (12.42)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (12.43)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = 0, \quad (12.44)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \phi_k(x). \quad (12.45)$$

$$\alpha_t = 0, \quad (12.46)$$

$$\alpha(0) = 0. \quad (12.47)$$

D'après l'étude théorique réalisée au paragraphe 8.1, la solution de (I) est égale à

$$(u(t, x), \alpha) = \left( \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \phi_k(x), 0 \right). \quad (12.48)$$

Le contrôle vaut  $g(t) = -u_x(t, 1) + \alpha$ , soit encore,

$$g(t) = \sqrt{2}(-1)^{k+1} k \pi \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}. \quad (12.49)$$

Par conséquent nous trouvons la même solution que dans le paragraphe précédent,

$$y(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g(0)\theta_j + a_j \cos(\omega_j T) - \frac{b_j}{\omega_j} \sin(\omega_j T) + \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_i \theta_j) g(s) \frac{\sin(\omega_j s)}{\omega_j} \right) \phi_j(x),$$

$$y_t(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( g'(0)\theta_j + a_j \omega_j \sin(\omega_j T) + b_j \cos(\omega_j T) - \int_0^T (\theta_{xxj} + \lambda_i \theta_j) g(s) \cos(\omega_j s) \right) \phi_j(x),$$

avec les mêmes notations.

Il nous faut encore résoudre

$$w_t = -u_x(1, t) + \alpha, \quad (12.50)$$

$$w(T) = 0. \quad (12.51)$$

On trouve  $w(0) = (-1)^k \sqrt{2} k \pi \frac{1 - \cos(\omega_k T)}{\lambda_k}$ .

3. Nous n'avons plus alors qu'à résoudre le même problème que ci-dessus avec  $u^0 = u^1 = 0$  et  $\alpha = 1$ , c'est à dire :

$$y_{tt} - y_{xx} + y_{xxxx} = 0, \quad (12.52)$$

$$y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad (12.53)$$

$$y_{xx}(t, 0) = 0, \quad (12.54)$$

$$y_{xx}(t, 1) = g(t), \quad (12.55)$$

$$y(T, x) = 0, \quad y_t(T, x) = 0, \quad (12.56)$$

avec  $g(x, t) = -u_x(1, t) + \alpha = 1$ . On trouve

$$y(0, x) = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\theta_{xxj}}{\lambda_j} + \theta_j \right) (1 - \cos(\omega_j T)) \phi_j(x), \quad (12.57)$$

$$y_t(0, x) = - \sum_{j=1}^N \left( \frac{\theta_{xxj}}{\lambda_k} + \theta_j \right) \omega_j \sin(\omega_j T) \phi_j(x). \quad (12.58)$$

et on résout

$$w_t = -\phi_x(1, t) + \alpha, \quad (12.59)$$

$$w(T) = 0. \quad (12.60)$$

On obtient,  $w(0) = -T$ .

Nous avons donc obtenu l'expression de la matrice  $\Lambda_N$  dans la base formée par  $((\phi_k), (\phi_j), 1)_{k=1..N, j=1..N}$ .

4. Il ne nous reste plus alors qu'à calculer l'expression du contrôle pour des données  $(y^0, y^1)$ . Posons  $(z^0, z^1, \beta) = (y^1, y_{xx}^0 - y_{xxxx}^0, y_{xx}^0(1))$ . On cherche numériquement,  $(u^0, u^1, \alpha)$  tels que  $\Lambda_N(u^0, u^1, \alpha) = (z^1, -z^0, -\beta)$ .

Le contrôle cherché  $v$  vaut alors  $v(t) = \int_0^t (-u_x(1, t) + \alpha) + y_{xx}^0(1)$ . Ce qui se calcule aisément.



**Quatrième partie**  
**Conclusion et perspectives.**



Dans la première partie de cette thèse, nous avons montré que le linéarisé de l'équation de KdV autour d'une solution stationnaire non nulle mais proche de zéro est contrôlable pour des données initiales et finales dans l'espace  $L^2(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ . On en a alors déduit, à l'aide d'un argument de point fixe, que le problème non linéaire est contrôlable autour de cette solution stationnaire.

Rappelons que le problème de la contrôlabilité locale de KdV autour de 0 (avec  $h$  comme contrôle) est ouvert pour  $L \in \mathcal{N}$ . Rosier a montré dans [38] que pour  $L$  appartenant à l'espace des longueurs critiques  $\mathcal{N}$ , le linéarisé de KdV autour de 0 n'est pas contrôlable. Mais cela n'implique rien pour le problème de KdV non linéaire. Notre Théorème 4.2 permet d'espérer que KdV est en fait contrôlable autour de 0.

La méthode de démonstration serait l'utilisation de la méthode du retour de Coron [9] telle qu'elle est employée par Coron dans [10]. Notre Théorème 4.2 correspond à la proposition 5 de [10]. Ce qui manque pour procéder est l'analogue de la proposition 6 de [10] dans notre situation, c'est à dire le problème suivant :

Soit  $\epsilon$  petit. Prenons comme contrôle, pour  $\gamma > 0$  petit,  $h(t) = f'_{\epsilon\gamma t}(\frac{L}{2})$  avec  $t \in [0, \frac{1}{\gamma}]$  et notre  $y_{\epsilon,\gamma}$  la solution correspondant à ce contrôle et démarrant de 0.

A-t-on

$$|y_{\epsilon,\gamma}(\frac{1}{\gamma}, \cdot) - f_{\epsilon\gamma t}|_{L^\infty([0, \frac{1}{\gamma}], L^2(0, L))} \rightarrow 0 \text{ quand } \gamma \rightarrow 0^+? \quad (12.61)$$

Rappelons que Rosier a montré que la contrôlabilité locale autour de 0 entraîne la contrôlabilité globale (en temps grand).

Une autre idée de démonstration serait une méthode utilisée en dimension finie, i.e trouver un analogue au Théorème 2.4 et à son corollaire 2.5 de Kawski [19]. En effet, on sait qu'on peut contrôler l'équation de KdV linéarisée autour de zéro dans toutes les directions sauf une. C'est-à-dire, pour le cas  $L = 2\pi$  et  $T > 0$ , si  $\int_0^{2\pi} y_0(1 - \cos(x))dx \neq 0$ , on ne peut pas trouver de contrôle  $g \in L^2(0, T)$  et de fonction  $y$  tels que

$$\begin{aligned} y_t + y_x + y_{xxx} &= 0, \\ y(\cdot, 0) &= y(\cdot, 2\pi) = 0, \\ y_x(\cdot, 2\pi) &= g, \\ y(0, \cdot) &= y_0, \quad y(T, \cdot) = 0. \end{aligned}$$

Il nous faudrait donc démontrer dans un premier temps que la fonction  $1 - \cos(x)$  est un vecteur tangent d'ordre 2 par exemple à l'espace des fonctions atteignables pour le non linéaire au bout d'un temps  $T$ . En reprenant les notations de Kawski, on aurait alors,

$$\begin{aligned} K_1 &= \{y \in L^2(0, 2\pi), \int_0^{2\pi} y(1 - \cos(x)) = 0\}, \\ K_2 &= L^2(0, 2\pi). \end{aligned}$$

On chercherait alors à démontrer un théorème analogue au Théorème 2.4 [19] pour conclure à la contrôlabilité exacte du non linéaire autour de zéro.



Dans la deuxième partie, nous avons montré que la bonne équation de Boussinesq est exactement contrôlable autour de zéro, lorsque le contrôle est appliqué en la première dérivée à droite ou en la deuxième dérivée à droite et pour des conditions initiales et finales dans  $H^2(0, L) \times L^2(0, L)$  pour le premier cas et dans  $H^3(0, L) \times H^1(0, L)$  pour le deuxième cas.

Un problème qui a été posé par Rouchon portant sur cette même équation de Boussinesq est le suivant : On considère le déplacement longitudinal d'un bac. Ce problème est analogue à celui étudié par Coron dans [10] avec les équations de Saint-Venant. Mais ici nous considérons l'équation de Boussinesq comme approximation. On obtient alors,

$$H_t(t, x) + (HV)_x(t, x) = 0, \quad (12.62)$$

$$V_t(t, x) + \left(gH + \frac{V^2}{2}\right)_x(t, x) + \frac{1}{2}[H_x(t, x)((V_x(t, x))^2 - V(t, x)V_{xx}(t, x) - V_{xt}(t, x))_x = -\ddot{D}(t), \quad (12.63)$$

$$V(t, 0) = 0, V(t, L) = 0, \quad (12.64)$$

$$V_{xx}(t, 0) = 0, V_{xx}(t, L) = 0, \quad (12.65)$$

où

1.  $L$  est la longueur du bac.
2.  $H(t, x)$  représente la hauteur du fluide au temps  $t$  et au point d'abscisse  $x$ .
3.  $V(t, x)$  représente la vitesse horizontale au temps  $t$  de la surface au point d'abscisse  $x$ .
4.  $D(t)$  représente la position du centre du bac au temps  $t$  par rapport à un repère absolu.
5.  $g$  est la constante gravitationnelle.

On considère dans ce système  $\ddot{D}$  comme le contrôle.

Le linéarisé autour de zéro de cette équation n'est pas contrôlable. L'idée serait de regarder comme [10] si en la linéarisant autour d'une solution stationnaire du type  $1 + \gamma(\frac{1}{2} - x)$ , elle est contrôlable. Il semble que la méthode utilisant les inégalités de Ingham ne convienne pas pour cette équation car les valeurs propres de l'opérateur associé ont une différence qui tend vers 0. Il faudrait donc plutôt orienter la recherche vers la méthode des multiplicateurs.

# Bibliographie

- [1] Abramovitz M., Stegun I., Handbook of mathematical functions, (Dover publications, Inc., New York),1972.
- [2] Baiocchi C., Komornik V., Loreti, P., *Ingham type theorems and applications to control theory*, Boll. Unione Math. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), **2**, (1999), 33-63.
- [3] Bardos C., Lebeau G., Rauch J., *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., **30**, (1992), 1024-1065.
- [4] Berezin Y.A., Karpman V.I., *Nonlinear evolution of disturbances in plasma and other dispersive media*, Soviet Physics JETP, **24**, (1967), 227-267.
- [5] Bona J.L., Sachs L., *Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation*, Commun. Math. Phys., **118**, (1988), 15-29.
- [6] Bona, J., Winther, R., *The Korteweg de Vries equation, posed in a quarter-plane*, SIAM J. Math. Anal., **14**,(1983), 1056-1106.
- [7] Bourgain J., *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations.*, II, The KdV-equation, Geom. Funct. Anal. **3**, **3**, (1993), 209-262.
- [8] Boussinesq J., *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl. (2), **17** (1872), 55-108.
- [9] Coron J.M., *Contrôlabilité Euler*, J. Math. Pures Appl. (1996)
- [10] Coron J.M., *Shallow water*, ESAIM : COCV, [www.emath.fr/cocv/](http://www.emath.fr/cocv/), **8**, (2002),
- [11] Crépeau E., *Exact controllability of the Korteweg-de Vries equation around a non trivial stationary solution*, Int. J. Control, **74**, (2001), 1096-1106.
- [12] Crépeau E., *Etude numérique de la contrôlabilité exacte de l'équation de Boussinesq linéaire*, session orale 10, SMAI' 2001, Pompadour, France, 2001.
- [13] Crépeau E., *Exact controllability of the Boussinesq equation on a bounded domain*, Diff. Int. Equations, to appear.
- [14] Dautray R., Lions J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*; tome 9, (Masson, Paris), 1984.

- [15] Gardner C.S., Morikawa G.K., *Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves*, Courant Inst. Math. Sci, Res. Rep. NYO-9082, 1960.
- [16] Ingham A.E., *Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series*, Math. Zeitschr., **41** (1936), 367-379.
- [17] Kato T., *Perturbation theory for linear operators*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York), 1996.
- [18] Kato T., *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Adv. in Math., Suppl. Stud. **8**, (1993), 93-128.
- [19] Kawski M., *High-order small time local controllability*, Pure App. Math, **133**, (1990), 431-467.
- [20] Kenig C.E., Ponce G., Vega L., *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc., **9**, (1996), 573-603.
- [21] Komornik V., *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, R.A.M, **36**, (John Wiley-Masson), 1994.
- [22] Korteweg D.J., De Vries G., *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag 5, **39**, (1895), 422-443.
- [23] Lawden D.F., *Elliptic functions and applications*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York), 1989.
- [24] Lebeau G., *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures Appl. **71**, (1992), 267-291.
- [25] León L., Zuazua E., *Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation*, To Appear.
- [26] Linares F., *Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation*, Journal of Differential Equations, **106** (1993), 257-293.
- [27] Lions J.L., *Contrôlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes distribués; Tome 1, Contrôlabilité exacte, Collection de recherche en mathématiques appliquées*, **8**, (Masson, Paris), 1988.
- [28] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes distribués; Tome 2, Recherche en Mathématiques Appliquées*, **8**, (Masson, Paris), 1988.
- [29] Lions J.L., Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications; Tome 1*, Dunod, Paris, 1968.
- [30] Liu F.L., Russell D., *Solutions of the Boussinesq equation on a periodic domain*, J. of Math. Analysis and Applications **194** (1995), 78-102.
- [31] Micu S., Ortega J.H., *On the controllability of a coupled system of two Korteweg-de Vries equations*, To appear.
- [32] Miura R., *The Korteweg-de Vries equation : A survey of results*, SIAM Rev., **18**, (1976), 416-459.

- [33] Nariboli G.A., *Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods*, Iowa State Univ., Engineering Res. Inst Preprint 442, (1969).
- [34] Nwogu O., *Nonlinear transformation of multi-directional waves in water of variable depth*, Draft manuscript, (1993).
- [35] Pazy A., *Semigroups of linear operators and application to differential equations*, (Springer-Verlag, New York), 1983.
- [36] Perla Menzala G., Vasconcellos C.F., Zuazua E., *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quarterly of applied Mathematics, to appear.
- [37] Reed M., Simon B., 1978, *Methods of modern mathematical physics ; Tome IV*, (Academic Press New York)
- [38] Rosier L., *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, *ESAIM : COCV*, [www.emath.fr/cocv/](http://www.emath.fr/cocv/), **2**, (1997) , 33-55.
- [39] Rosier L., *Exact boundary controllability for the linear Korteweg-de Vries equation - a numerical study*, ESAIM : Proceedings, **4**, (1998), 255-267.
- [40] Russel D.L., Zhang B.Y., *Controllability and stabilizability of the third-order linear equation on a periodic domain*, SIAM J. Control Optim, **31**,(1993), 659-673.
- [41] Russel D.L., Zhang B.Y., *Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **348**, No. 9, (1996).
- [42] Schroter A., Mayerle R., Kahlfeld A., Zielke W., *Assessment of a Boussinesq wave model for the design of a harbour*, International conference on Coastal and port Engineering in Developing Countries (1995), 741-753.
- [43] Simon J., *Compacts sets in the space  $L^p(0, T, B)$* , *Annali di matematica pura ed applicata (IV)*, vol. CXLVI, (1987) 65-96.
- [44] Urquiza J., *Contrôle d'équations des ondes linéaires et quasilinéaires*, Thèse de doctorat de l'université de Paris VI (2000).
- [45] Whitham G.B., *Linear and nonlinear waves*, (John Wiley New-York), 1974.
- [46] Yosida K., *Functional Analysis*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York), 1978.
- [47] Zhang B.Y., *Exact controllability of the generalized Boussinesq equation*, Int. Series of Numerical Mathematics, **126**, (1988) 297-311.

## RÉSUMÉ

Le sujet principal de cette thèse est l'étude de la contrôlabilité exacte de deux équations dispersives, l'équation de Korteweg-de Vries et la "bonne" équation de Boussinesq.

En ce qui concerne l'équation de Korteweg-de Vries, on étend un résultat de Rosier en montrant la contrôlabilité exacte en tout temps de l'équation non linéaire autour d'une solution stationnaire proche de zéro mais non nulle, ce pour des longueurs de domaine spatial critiques. Cette démonstration utilise en particulier la méthode d'unicité hilbertienne couplée avec la méthode des multiplicateurs et un théorème de point fixe.

Ensuite, nous étudions le problème de la contrôlabilité exacte de l'équation de Boussinesq pour deux contrôles différents. On utilise également la méthode d'unicité hilbertienne pour ces problèmes en appliquant une inégalité de Ingham. On obtient ainsi un résultat de contrôlabilité exacte pour des temps arbitrairement petits.

Nous implémentons ensuite cette méthode de façon numérique pour l'équation de Boussinesq avec un contrôle portant sur la dérivée seconde à droite, tant sur le problème linéaire que non linéaire.

## MOTS-CLÉS

EDP, contrôlabilité exacte d'un système linéaire, contrôlabilité exacte d'un système non linéaire, équation de Korteweg-de Vries, "bonne" équation de Boussinesq, HUM, approximation numérique.

## ABSTRACT

In this thesis, we study the exact controlability of two dispersive equations, the Korteweg-de Vries equation and the "good" Boussinesq equation.

First, for the Korteweg-de Vries equation, we extend a result of Rosier. We prove that for critical length, the nonlinear equation is exactly controllable in a neighbourhood of a small non nul stationary solution. This study uses the hilbert uniqueness method with the multiplier theory and a fixed point theorem.

Secondly, we study the exact controllability of the "good" Boussinesq equation with two different boundary controls. We use again the hilbert uniqueness method but with Ingham inequality.

Lastly, we apply this method for a numerical approach of the controllability of the Boussinesq equation both for linear and nonlinear equations. The control is applied to the second spatial derivative, at the right endpoint.

## KEY-WORDS

PDE, exact controllability of a linear system, exact controllability of a nonlinear system, Korteweg-de Vries, Boussinesq, HUM, numerical approximation.