



HAL
open science

**Corrélations dans les réseaux de fractures :
Carractérisation et conséquences sur les propriétés
hydrauliques**

Caroline Darcel

► **To cite this version:**

Caroline Darcel. Corrélations dans les réseaux de fractures : Carractérisation et conséquences sur les propriétés hydrauliques. Hydrologie. Université Rennes 1, 2002. Français. NNT : . tel-00003702v1

HAL Id: tel-00003702

<https://theses.hal.science/tel-00003702v1>

Submitted on 5 Nov 2003 (v1), last revised 10 Dec 2003 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° Ordre: 2595

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

Mention : Sciences de la Terre

PAR

Caroline Darcel

Équipe d'accueil : Géosciences Rennes, Université de Rennes 1

École doctorale : Sciences de la matière

Composante universitaire : UFR structure et propriétés de la matière

CORRELATIONS DANS LES RÉSEAUX DE FRACTURES :

CARACTÉRISATION ET CONSÉQUENCES

SUR LES PROPRIÉTÉS HYDRAULIQUES

SOUTENUE LE 18 JANVIER 2002 devant la commission d'examen

COMPOSITION DU JURY :

Mr Philippe Ackerer	rapporteur
Mr Benoit Noetinger	rapporteur
Mr Ghislain de Marsily	examineur
Mr Jesus Carrera	examineur
Mr Steve Pride	examineur
Mr Philippe Davy	directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Ce travail doit beaucoup à l'encadrement excellent de l'équipe des milieux fracturés de Rennes. Comment serais-je passée à travers le labyrinthe fractal des réseaux fracturés sans les explications et les conseils de Olivier Bour et Philippe Davy, qui m'ont apporté un soutien sans faille durant ces trois années. Un énorme merci aussi à Jean-Raynald De Dreuzy pour son aide en régime permanent, depuis l'époque des bugs et de l'apprentissage du numérique, en passant par la critique pointue des romans de J. Irving et par les voies à longue portée des écoulements souterrains. Merci enfin à Matthias Holschneider pour m'avoir indiqué le chemin qui menait au Fractal Generator. J'ai eu multifractal à la tête, mais quelle aventure!

Je remercie sincèrement G. De Marsily, B. Noetinger, P. Ackerer, J. Carrera et S. Pride pour avoir accepté de faire partie du jury de la thèse. Un grand merci aussi à tous les chercheurs du programme SCALFRAC pour leurs encouragements lors de mes premières phrases en anglais. Merci à ceux qui m'ont aidée à relire la thèse, à l'imprimer, à la relier et même à atteindre la poste le jour J de l'envoi aux rapporteurs. Je garde enfin un souvenir ému de toutes les virées à grande ou moyenne vitesse, en particulier celle de septembre dernier, ah oui, merci chers compagnons de voyage.

Merci Alain de m'avoir accueillie dans ton bureau; je suis maintenant familiarisée avec le langage sportif évolué, et c'est une chance car voilà, je peux aujourd'hui faire croire que la plongée sous marine n'a aucun secret pour moi, et cela sans avoir jamais eu à enfile la moindre combinaison de plongée. En plus dans ce bureau j'ai pu évoluer dans un environnement de plantes vertes magnifiques, en échange de quoi j'ai noté les messages téléphoniques du chercheur, mais vraiment c'était avec plaisir. C'est maintenant l'intermède culinaire : un grand merci au Restaurant Universitaire, pour toutes les saucisses-pizzas, quiches-frites, tartes-hamburger, les fromages panés, les nouilles au gras, le riz à l'huile, les haricots beurre, du gras, du gras, nous sommes cernés! Heureusement, pour accompagner toutes ces lourdeurs, les déjeuners étaient accompagnés de la compagnie fine et turbulente des thésards de Géosciences, adeptes des repas de midi quasi matinaux. Je suis ravie d'avoir partagé les pauses avec vous tous, Flo, Stéphanie, Marc, Katia, Laurie, Dimitri, la bande Saint Germain et tous les autres.

La légende dit qu'un thésard en période de rédaction devient un être débordant d'énergie, joyeux et à l'écoute du monde. Tout l'entourage hors labo en profite aussi, et se doit de baigner un peu dans l'ambiance. Les amis par exemple, en particulier ceux qui s'appellent Dave ou Lynda, mais aussi la famille. Chers parents, chère Anne, merci de votre attention sereine. Très cher Fanch, merci de m'avoir soutenue et supportée chaque jour durant toute cette période riche en soirées délirantes et rebondissantes. Encore merci à tous ceux qui m'ont encouragée et je n'en dirai pas plus !

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE **3**

1 RESEAUX DE FRACTURES, PROPRIETES HYDRAULIQUES ET CORRELATIONS SPATIALES **9**

1.1	GEOMETRIE DES RESEAUX FRACTURES	9
1.1.1	TYPES DE DISCONTINUITÉ	9
1.1.2	CROISSANCE DES RESEAUX DE FRACTURES	9
1.1.3	LOIS D'ECHELLE DANS LES RESEAUX DE FRACTURES	12
1.2	PROPRIETES HYDRAULIQUES	16
1.3	MODELES DE MILIEUX FRACTURES	19
1.3.1	APPROCHES DEVELOPPEES	19
1.3.2	PROPRIETES HYDRAULIQUES	24
1.4	MODELES CORRELES	26
1.4.1	MODELES CORRELES A COURTE PORTEE	27
1.4.2	MODELES DE CORRELATIONS A LONGUE PORTEE	29
1.5	METHODOLOGIE	39

2 CARACTERISATION ET MODELISATION DES CORRELATIONS SPATIALES **42**

2.1	CARACTERISATION GEOMETRIQUE D'UN RESEAU NATUREL: EXEMPLE DANS LE BASSIN DE HORNELEN	42
2.1.1	DISTRIBUTION DES LONGUEURS ET DISTRIBUTION SPATIALE DE DENSITE	42
2.1.2	CORRELATIONS POSITION – LONGUEUR	46
2.1.3	PROJET D'ARTICLE : FRACTURE NEIGHBORING , SHORT RANGE CORRELATIONS	47
2.1.4	BILAN	59
2.2	MODELE DE SYNTHETIQUE DE RESEAUX DE FRACTURES	60
2.2.1	DISTRIBUTION EN LOI DE PUISSANCE	60
2.2.2	DISTRIBUTION FRACTALE	60
2.2.3	CORRELATIONS CENTRE A FRACTURE	65
2.3	CONCLUSION	67

3 ETUDE STEREOLOGIQUE **71**

3.1	ANALYSE CLASSIQUE: DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE ET DENSITE SPATIALE UNIFORME	71
3.2	DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE ET CORRELATIONS SPATIALES	72
3.2.1	PROJET D'ARTICLE : STEREOLOGY OF FRACTAL FRACTURE NETWORKS	74

4 PROPRIETES HYDRAULIQUES DES RESEAUX CORRELES	102
4.1 INTRODUCTION	102
4.2 HYPOTHESES ET PARAMETRES DU MODELE	103
4.3 EFFET DE LA CORRELATION SUR LA CONNECTIVITE	104
4.3.1 PRINCIPAUX RESULTATS SUR LES RESEAUX NON CORRELES AVEC DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE	104
4.3.2 CONNECTIVITE DES RESEAUX CORRELES AVEC DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE	105
4.3.3 PROJET D'ARTICLE: CONNECTIVITY PROPERTIES OF STOCHASTIC FRACTURE NETWORKS WITH FRACTAL CORRELATIONS	107
4.3.4 PERSPECTIVES: CONNECTIVITE DES RESEAUX 3D CORRELES	133
4.4 EFFET DE LA CORRELATION SUR LA PERMEABILITE	135
4.4.1 PRINCIPAUX RESULTATS SUR LES RESEAUX NON CORRELES AVEC DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE	135
4.4.2 METHODE DE CALCUL DES FLUX ET DE LA PERMEABILITE	136
4.4.3 ORGANISATION DE L'ETUDE DU MODELE DE RESEAUX DE FRACTURES MULTI-PARAMETRE	140
4.4.4 PERMEABILITE DE LA STRUCTURE DE CORRELATION	144
4.4.5 PERMEABILITE DES RESEAUX DE PARAMETRES $A=D+1$	147
4.5 ESTIMATION A PRIORI DE L'EFFET DE LA CORRELATION SUR LES PROPRIETES DE TRANSPORT	153
4.6 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	154
<u>CONCLUSION GENERALE</u>	159
<u>ANNEXE 1</u>	163
<u>ANNEXE 2: BOUR&AL, A STATISTICAL SCALING MODEL FOR FRACTURE NETWORK GEOMETRY, WITH VALIDATION ON A MULTI-SCALE MAPPING OF A JOINT NETWORK (HORNELEN BASIN NORWAY)</u>	165
<u>ANNEXE 3: A CATACLASTIC SLIP BAND DISTRIBUTION IN NORMAL FAULT DAMAGE ZONE, NUBIAN SANDSTONES, SUEZ RIFT</u>	179
<u>REFERENCES</u>	217

INTRODUCTION

INTRODUCTION GENERALE

Les premiers modèles destinés à représenter les milieux fracturés datent des années soixante [Barenblatt *et al.*, 1960; Warren *et al.*, 1963]. A ce moment là, la problématique était axée sur l'exploitation de nappes pétrolifères. Le milieu était vu comme la superposition de deux milieux continus, à savoir la matrice et le réseau de fractures. Depuis, l'étude des propriétés hydrauliques des milieux fracturés s'est largement accrue, en relation directe avec les problématiques liées aux questions de sûreté pour la mise en place de sites de stockage souterrain de déchets radioactifs. Dans ce contexte, de nombreuses études ont été menées sur différents sites, contribuant à augmenter énormément la quantité de données ainsi que le développement des concepts de modélisation (Stripa en Suède [Neretnieks, 1993] [Witherspoon, 2000], Fanay-Augères en France [Cacas *et al.*, 1990], Mirror Lake [Hsieh *et al.*, 1993; Shapiro and Hsieh, 1994] et Yucca Mountain [Witherspoon, 2000] aux Etats-Unis).

De ces études il ressort que les propriétés hydrauliques des milieux fissurés sont très hétérogènes: les écoulements sont fortement chenalisés [Olsson, 1992; Tsang and Neretnieks, 1998]; la variabilité des mesures de perméabilité à petite et moyenne échelle est très élevée selon que les mesures sont effectuées sur des zones densément ou faiblement fracturées et selon la conductivité locale des fractures elles-mêmes. Des synthèses effectuées à partir de données recueillies sur différents sites montrent une apparente croissance de la perméabilité avec l'échelle d'observation, jusqu'à une échelle d'homogénéisation [Király, 1975; Clauser, 1992; Schulze-Makuch and Cherkauer, 1997]. Les valeurs avancées pour l'échelle d'homogénéisation dépendent du milieu étudié. Pour des milieux cristallins, elle serait de l'ordre de la dizaine à la centaine de mètres [Cacas *et al.*, 1990; Clauser, 1992]. Cependant, à chaque échelle de mesure correspond une méthode de mesure spécifique: échantillons extraits du milieu et mesurés en laboratoire aux petites échelles, essais de pompages mono ou multi-puits aux moyennes échelles et estimations des entrées et sorties de flux à l'échelle régionale. Ainsi, Hsieh, [1998] émet l'hypothèse que l'effet apparent de croissance de la perméabilité avec l'échelle puisse n'être en fait qu'un effet de biais d'échantillonnage. Le problème crucial ici est de savoir déterminer la représentativité d'une mesure, et de savoir si des mesures effectuées à une échelle donnée peuvent être extrapolées à une échelle supérieure: c'est la question du changement d'échelle. Toutes ces observations démontrent en premier lieu l'impossibilité d'appliquer directement les approches classiques employées pour les milieux poreux. Pour les milieux fracturés il n'existe pas à priori de séparation évidente entre une échelle d'hétérogénéités microscopiques et des variations macroscopiques. Ainsi, la notion classique de Volume Élémentaire Représentatif (VER) [Bear *et al.*, 1993], qui représente l'échelle théorique d'homogénéisation des hétérogénéités microscopiques d'un milieu, se trouve mise en défaut.

L'hétérogénéité des propriétés hydrauliques est directement reliée à l'hétérogénéité de la structure des réseaux de fractures. Ceci ont des propriétés géométriques complexes. Ils sont

généralement constitués de fractures distribuées sur une très large gamme de longueurs, typiquement plusieurs ordres de grandeurs (voir par exemple les synthèses récentes de [Odling *et al.*, 1999; Bonnet *et al.*, 2001]). Cette observation constitue déjà en soi un début d'explication de la complexité du fonctionnement hydraulique de ces milieux. Les nombreuses approches développées pour modéliser les propriétés hydrauliques des milieux fissurés traduisent bien la difficulté de représentation de ces milieux [National Research Council, 1996]. Il apparaît en tout cas que la compréhension du fonctionnement hydraulique des milieux fracturés passe par la prise en compte explicite des hétérogénéités du milieu, c'est à dire de la géométrie des réseaux de fractures.

Le travail de la thèse s'inscrit dans cette optique. Nous chercherons plus précisément à caractériser et à définir l'influence des corrélations spatiales des réseaux sur leurs propriétés hydrauliques. Il s'inscrit dans la continuité de précédents travaux qui ont porté sur la caractérisation de l'effet des paramètres géométriques longueurs et ouvertures sur les propriétés hydrauliques des milieux fracturés [Bour and Davy, 1997; Bour and Davy, 1998; de Dreuzy *et al.*, 2000; de Dreuzy *et al.*, 2001a]. Notre démarche est dans le cadre d'une approche hybride [National Research Council, 1996]: les conséquences, sur les propriétés hydrauliques, des différents paramètres géométriques des réseaux de fractures sont dans un premier temps évaluées dans une démarche de modélisation stochastique où les propriétés géométriques sont caractérisées en terme de distributions de probabilités. Cette première partie permet ensuite de déterminer quels sont les paramètres géométriques qui sont pertinents dans une démarche de modélisation des propriétés hydrauliques, et dans quelle mesure et pour quelles valeurs de paramètres des modèles simplifiés type milieux effectifs peuvent être appliqués.

Le thème central de la thèse c'est la notion de corrélation dans les réseaux fracturés. Cette notion est très vaste. Les corrélations dans les réseaux de fractures peuvent apparaître à divers niveaux: entre la longueur, l'ouverture ou l'orientation des fractures; entre les positions des fractures, ayant pour conséquence une répartition spatiale hétérogène de la densité. C'est en premier lieu les corrélations spatiales qui seront étudiées dans la thèse. S'appuyant sur des observations de terrain et sur des analyses de modèles analogiques, plusieurs auteurs [Davy *et al.*, 1990; Hansen *et al.*, 1991; Cowie *et al.*, 1995] soulignent la nature fractale des réseaux fracturés. Davy *et al* [1990] proposent un modèle où l'évolution de la densité de fracturation à travers les échelles est fractale, et où la distribution des longueurs est en loi de puissance. Les deux paramètres sont modélisés par des lois d'échelles selon:

$$N(l,r) \sim r^b l^{-a},$$

$N(l,r)$ donne le nombre de fractures dans une aire de rayon r et de longueur l . L'exposant a caractérise la distribution des longueurs en loi de puissance, et l'exposant b donne l'évolution du nombre de barycentres de fractures en fonction de l'échelle. La dimension fractale D du réseau est donnée par l'exposant b . Toutes les observations quant à la nature fractale des réseaux de fractures, et même à leur distribution de longueurs, ont été réalisées à partir de données mono ou bidimensionnelles [Bonnet *et al.*, 2001]. En effet, les fractures sont des objets approximativement planaires qui s'inscrivent dans l'espace physique tridimensionnel (3D) mais qui, le plus souvent, ne peuvent être observées que partiellement sur des affleurements (2D) ou le long de lignes d'échantillonnage ou carottes de forage (1D). Or il est crucial de pouvoir établir le lien entre les propriétés observées sur des échantillons partiels et les propriétés réelles d'un

réseau fracturé complet. Des travaux en ce sens ont déjà été menés, mais généralement pour une répartition spatiale uniforme de la densité de fracturation [Marrett and Allmendinger, 1991; Piggott, 1997; Berkowitz and Adler, 1998]. L'évolution et l'influence de la corrélation spatiale sur les propriétés géométriques apparentes des réseaux sera étudiée dans le cadre d'une analyse stéréologique.

Du point de vue de la modélisation des propriétés hydrauliques, les premiers modèles stochastiques de fractures discrètes [Long et al., 1982; Andersson et al., 1984; Andersson and Thunvik, 1986], dont la distribution spatiale était aléatoire, ont montré l'influence de la densité de fracturation. Lorsque les fractures sont d'extension finie (inférieure à la taille du système) la première question est celle de la connexion à l'échelle du système. Pour le cas de fractures infinitésimales, les propriétés hydrauliques des réseaux sont très bien décrites dans le cadre de la théorie de la percolation [Balberg et al., 1991]. Le seuil de percolation du système est atteint pour une densité critique [Robinson, 1983; Hestir and Long, 1990]. Les propriétés du réseau deviennent homogènes au-dessus de la longueur de corrélation. L'introduction d'une distribution locale de perméabilité associée aux fractures induit une augmentation de la longueur de corrélation [Charlaix et al., 1987]. Pour une distribution de longueurs de fractures en loi de puissance, la connectivité des réseaux augmente avec l'échelle d'observation [Bour and Davy, 1997; Bour and Davy, 1998]. Si le seul paramètre géométrique est la distribution des longueurs, la perméabilité décroît avec l'échelle en dessous de la longueur de corrélation et devient homogène à partir de la longueur de corrélation [de Dreuzy et al., 2001a]. Si elle est couplée avec une distribution d'ouvertures lognormale, alors la perméabilité croît de façon significative avec l'échelle jusqu'à une longueur d'homogénéisation au-dessus de laquelle elle devient constante [de Dreuzy et al., 2001b]. Dans tous ces modèles, la distribution des fractures est aléatoire. Or, comme le suggère Davy et al [1990], la distribution des longueurs de fracture suivant une loi de puissance peut aller de paire avec une distribution spatiale de la densité de nature fractale et l'effet d'une structure d'écoulement fractale peut conduire à des propriétés hydrauliques très différentes de celles des milieux homogènes [Halvin and Ben-Avraham, 1987].

L'ensemble du travail présenté dans la suite a pour thème principal les corrélations spatiales dans les milieux fracturés, leur caractérisation et leurs implications sur les propriétés hydrauliques des systèmes fracturés. La première partie (Chapitre 2 et 3) présente un modèle théorique de réseau de fractures basé sur celui de [Davy et al., 1990], à travers une validation sur un système fracturé naturel situé dans le bassin de Hornelen en Norvège [Odling, 1997], puis à travers le développement d'une méthode de génération spécifique. Une étude plus poussée de la structure spatiale sur ce système naturel montre que non seulement les positions des fractures sont corrélées entre elles (dimension fractale) mais qu'en plus la position des fractures est corrélée avec leur longueur dans un sens qui tend à homogénéiser la répartition des masses. L'analyse stéréologique pour ce modèle théorique est ensuite développée au long du Chapitre 3. La deuxième partie porte directement sur l'évaluation de l'implication de la corrélation fractale sur les propriétés hydrauliques des systèmes fracturés (Chapitre 4), à travers une étude de la connectivité puis de la perméabilité.

PARTIE 1

1 RESEAUX DE FRACTURES, PROPRIETES HYDRAULIQUES ET CORRELATIONS SPATIALES

1.1 GEOMETRIE DES RESEAUX FRACTURES

1.1.1 Types de discontinuité

Les fractures sont des discontinuités qui apparaissent dans un milieu lorsque la contrainte locale excède le seuil de rupture local. Les fractures sont classifiées en différents types, selon la nature du déplacement entre les plans de la fracture [Mattauer, 1973]:

- si le déplacement est dans le plan de fracture alors on parle de *faille* (mode II et III)
- si le déplacement est perpendiculaire au plan de fracture on parle de *joint* (mode I)

Nous utilisons le terme générique de *fracture* pour désigner à la fois les failles et les joints. Le terme de crack correspond à des fractures de petite taille.

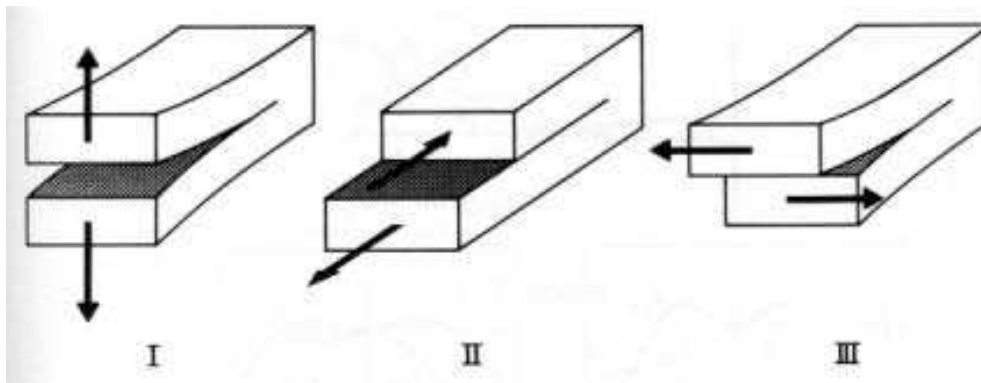


Figure 1: les trois modes de propagation des fractures. D'après [Scholz, 1990].

1.1.2 Croissance des réseaux de fractures

Pour un crack unique dans un milieu élastique homogène infini, le champ de contrainte peut être calculé selon l'expression [Jaegger and Cook, 1979]:

$$\sigma_{ij} = K_n (2\pi r)^{-1/2} f_{ij}(\theta)$$

où r est la distance à l'extrémité du crack, et θ l'angle avec l'extrémité du crack. K_n est le facteur d'amplification des contraintes, qui dépend du mode de propagation. Cette expression traduit la décroissance de la contrainte à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité de la fracture. Si la contrainte à proximité de la fissure dépasse le seuil de rupture, alors le crack se propage. Pour deux cracks dans un milieu élastique homogène, il est encore possible de prédire le comportement en fonction du champ de contrainte. Les deux fractures interagissent en fonction de leur disposition mutuelle. Si les deux fractures sont proches et parallèles, alors la croissance de l'une inhibe la croissance de l'autre, dans un rapport fonction de leur écartement et du rapport de leur longueur [Segall and Pollard, 1983b; Segall and Pollard, 1983a].

Dans le cas d'un ensemble de fractures qui interagissent, il devient impossible de calculer théoriquement la répartition du champ des contraintes. La croissance des réseaux peut cependant être simulée à partir de modèles analogiques ou de modèles numériques basés sur une équivalence avec des réseaux de fusibles [Arcangelis et al., 1989; Arcangelis and Hermann, 1989; Hermann and Arcangelis, 1990; Hansen et al., 1991; Reuschlé, 1992; Cowie et al., 1993; Cowie et al., 1995; Davy et al., 1995; Bonnet, 1997]. Le désordre joue un rôle primordial dans la structure finale d'un réseau [Hansen et al., 1991; Davy et al., 1995]. La forme initiale de la distribution des seuils de rupture locale peut conduire à une dimension fractale de 1 si la déformation se localise mais aussi à une dimension de 2 si elle est distribuée sur l'ensemble du réseau. Entre ces deux extrêmes, si la distribution est dominée par les faibles valeurs de seuil, alors la déformation se localise après une phase diffuse et le réseau est hétérogène caractérisé par une dimension fractale ($1 < D < 2$), comme illustré figure 2.

Sur un modèle équivalent de fusibles, l'étude des moments de la distribution des courants locaux avant la rupture macroscopique présente un caractère multifractal [Arcangelis et al., 1989; Hermann and Arcangelis, 1990; Roux and Hansen, 1990]. Cowie et al., 1993, et Cowie et al., 1995, utilisent également un modèle numérique de rupture sur un réseau de résistances pour simuler la nucléation et la croissance de failles dans une plaque tectonique, permettant de visualiser l'origine et l'évolution de la nature fractale des réseaux. Leurs résultats montrent que la dimension fractale évolue avec la croissance du réseau, et que lorsque les grandes failles commencent à dominer, alors la distribution des fractures dans le système a un caractère multifractal caractérisé par des dimensions généralisées $D_0 > D_1 > D_2$. Des expériences de croissance de réseau, analogique et numérique, montrent que la forme finale du réseau est fonction de la vitesse de croissance des fractures [Renshaw and Pollard, 1994].

Basé sur des observations de la déformation à l'échelle continentale et sur des expériences analogiques de déformation, Davy et al., 1990, interprètent les caractéristiques des réseaux de failles comme étant fractales, et proposent un modèle mathématique basé sur une double loi de puissance:

$$N(l, r) \sim r^b l^{-a},$$

où $N(l, r)$ est le nombre de fractures de longueur l présentes dans un sous-système de taille r , et a et b deux exposants. L'exposant a traduit la distribution en loi de puissance pour les

longueurs de fractures, et l'exposant b est la dimension fractale associée aux barycentres de fractures. La dimension fractale D du système est calculée: $D=b$ si $a>2$, et $D=b+2-a$ si $a<2$.

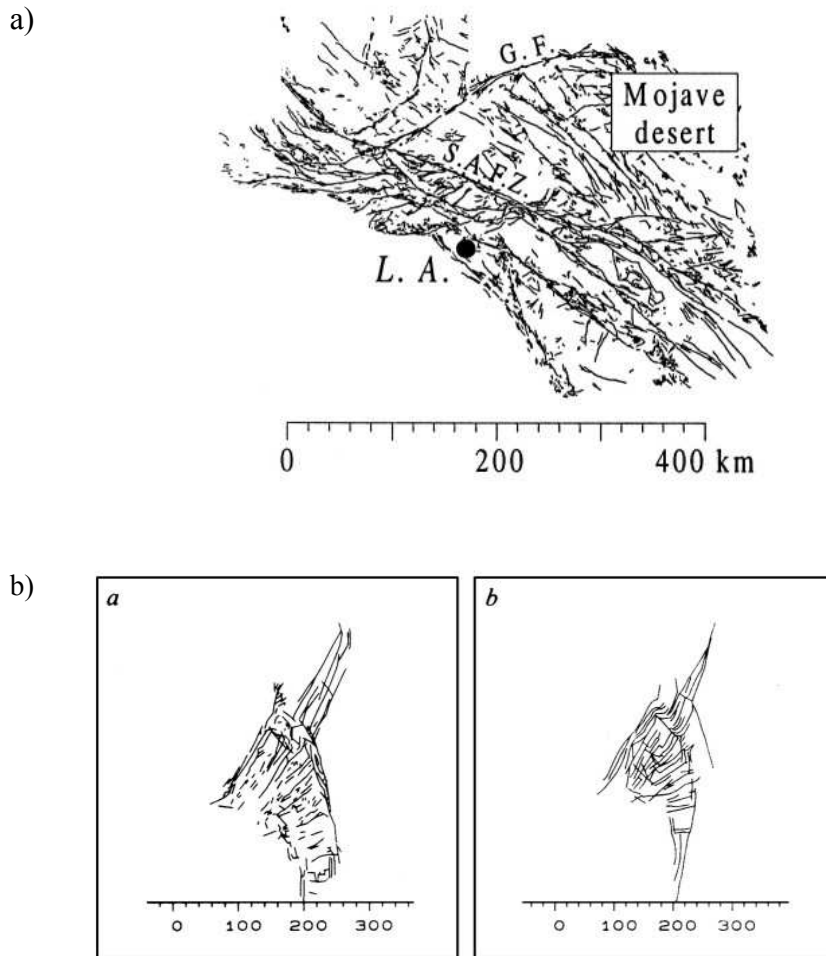


Figure 2: a) Carte de la partie Sud de la faille de San Andreas à l'échelle de plusieurs centaines de kilomètres (L.A.: Los Angeles, S.A.F.Z.: San Andreas Fault Zone, G.F.: Garlock fault). La dimension fractale D du réseau est environ égale à 1.65 ± 0.5 . D'après [Bour and Davy, 1999]. b) Expériences analogiques de croissance de réseaux de failles. La mesure de la dimension fractale pour les deux expériences est égale à 1.73 ± 0.05 . D'après [Davy et al., 1990].

Les réseaux de fractures sont le produit d'interactions complexes entre un milieu naturel soumis à des forces extérieures exercées sur le milieu durant un ou plusieurs événements dans le temps. Elles croissent en modifiant la distribution du champ de contraintes, qui à son tour influe sur la croissance de telle ou telle partie du réseau. Ainsi les fractures évoluent en interaction permanente avec le reste du système. En conséquence les réseaux ont très souvent une géométrie complexe avec notamment des longueurs de fractures distribuées sur plusieurs ordres de grandeurs. Ainsi, il est raisonnable d'attendre que l'histoire compliquée de la croissance d'un réseau de fractures conduise non seulement à une large distribution de fractures (très souvent observée), mais aussi à des corrélations entre les fractures, produisant une distribution de

densité spatiale hétérogène ([Davy *et al.*, 1990; Hansen *et al.*, 1991; Davy *et al.*, 1995]), et même des corrélations entre les différents paramètres des fractures.

1.1.3 Lois d'échelle dans les réseaux de fractures

Les réseaux de fractures présentent couramment un caractère self-similaire: ils semblent identiques à différentes échelles d'observations (figure 2). Cette observation générale traduit une absence de taille caractéristique pour les réseaux, en dehors des limites physiques du système. L'observation la plus directe du caractère multi-échelle des réseaux se fait sur la distribution des longueurs. L'aspect self-similaire conduit aussi à penser que les réseaux ont un caractère fractal, qui peut être déterminé sur la répartition spatiale des fractures. Une compilation complète de la caractérisation des lois d'échelles dans les réseaux de fractures est réalisée dans [Bonnet *et al.*, 2001].

Distribution des longueurs

Déterminer la nature de la distribution des longueurs de fractures d'après des données de terrain pose avant tout un problème d'échantillonnage et de mesure. La caractérisation d'une loi de puissance, de part sa nature, requiert des données relevées sur un minimum de deux ou trois ordres de grandeur ainsi qu'un nombre d'éléments de l'ordre de quelques centaines. A cause des problèmes de résolution et de taille finie des systèmes, une distribution non corrigée de ces effets peut apparaître comme étant exponentielle ou lognormale alors que la distribution sous-jacente est en loi de puissance. La meilleure façon de caractériser la distribution des longueurs d'un réseau de fractures est de faire un échantillonnage à différentes échelles et de recalculer les données pour obtenir une seule distribution [Castaing *et al.*, 1996; Odling, 1997].

Les données publiées sur la caractérisation de la distribution de longueurs ([Bonnet *et al.*, 2001] et références incluses) proviennent de modélisations analogiques, numériques et de données de terrain. Les résultats issus de simulations numériques [Cladouhos and Marrett, 1996; Cowie *et al.*, 1993; Cowie *et al.*, 1995] et de données expérimentales [Reches, 1986; Sornette, 1993; Davy *et al.*, 1995; Bonnet, 1997] montrent que la distribution des longueurs peut évoluer au cours de la croissance du réseau, et correspondre à une distribution exponentielle, lognormale ou en loi de puissance. Plusieurs expériences montrent que la distribution des longueurs tend vers une loi de puissance lorsque les fractures interagissent [Cladouhos and Marrett, 1996; Cowie *et al.*, 1993; Cowie *et al.*, 1995], et que la distribution en loi de puissance est limitée par la taille du domaine d'expérimentation [Cladouhos and Marrett, 1996]. Pour les réseaux naturels, dont la grande majorité est cartée en 2D, de nombreuses études tendent vers une distribution en loi de puissance, bien que certaines soient plus en faveur de distribution exponentielle ou lognormale. Odling *et al.* [1999] indiquent que, pour les réseaux de joints, la nature de la distribution des longueurs dépend de la stratification (*layering*): pour un milieu stratifié une distribution lognormale est plus appropriée alors que lorsque la stratification ne joue pas de rôle prédominant, une distribution en loi de puissance est mieux adaptée. La distribution en loi de puissance se caractérise par un exposant a , dont la valeur fixe la proportion de grandes fractures par rapport aux petites. La synthèse des exposants a réalisée par Bonnet *et al.* [2001], après restriction aux analyses issues d'un nombre pertinent de données, indique des valeurs allant de 1.7 à 2.75, avec un maximum autour de 2 (figure 3).

La loi de puissance apparaît comme un bon modèle pour représenter les distributions de longueurs d'un grand nombre de réseaux de fractures. Elle présente l'avantage de n'avoir pas de longueur caractéristique en dehors des limites physiques du système. Enfin, les variations de l'exposant a peuvent être le signe que les réseaux observés dans la nature sont à différents stades de maturité.

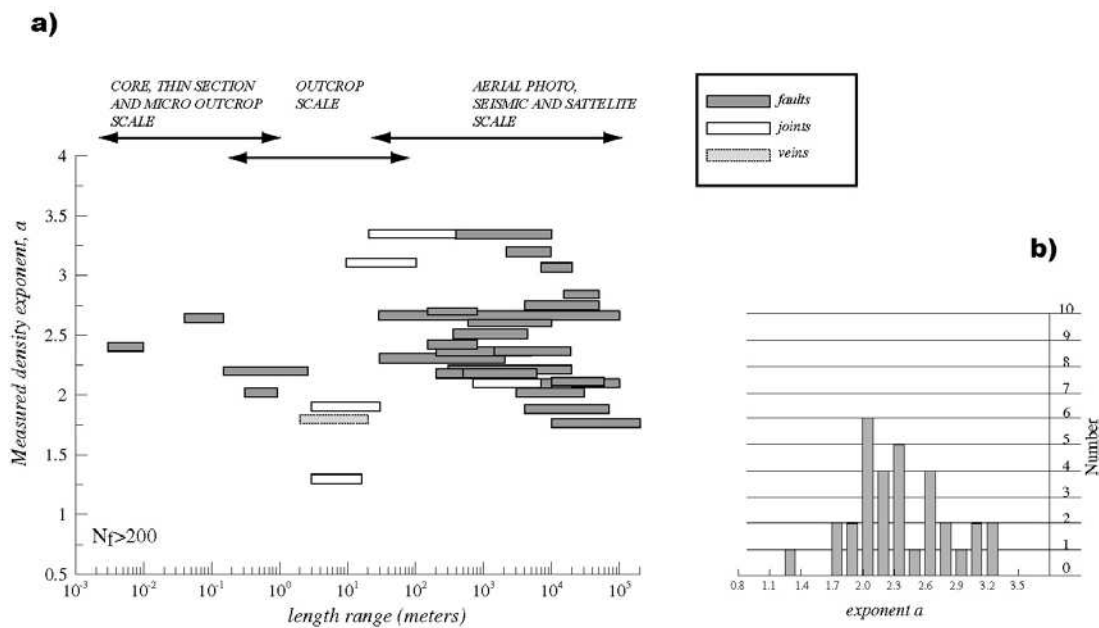


Figure 12

Figure 3: Variations de l'exposant a de la distribution des longueurs de fractures. D'après [Bonnet et al., 2001].

Distribution spatiale

En parallèle de la distribution des longueurs, le caractère fractal des réseaux de fractures peut être mis en évidence à travers la caractérisation de la répartition spatiale des fractures. La théorie fractale fournit en effet des outils adaptés à la mesure de l'hétérogénéité de la distribution de densité de fracturation à travers les échelles. Une revue complète portant sur la pertinence des méthodes de mesures et sur les valeurs de dimension fractale reportées dans la littérature est donnée toujours dans [Bonnet et al., 2001]. Nous revoyons ici plusieurs points importants ressortant de cette synthèse.

Tout d'abord, la notion de réseau fractal porte spécifiquement sur une corrélation spatiale entre les fractures conduisant à une distribution de densité hétérogène, indépendamment des autres paramètres géométriques: un réseau dont la distribution des longueurs est en loi de puissance n'est pas fractal si la distribution spatiale des fractures est uniforme. Comme c'est le cas pour toutes les lois d'échelles, la mesure d'une dimension fractale requiert en théorie une caractérisation sur plusieurs ordres de grandeur et un échantillonnage statistiquement

représentatif. La méthode la plus couramment employée pour mesurer la dimension fractale d'un réseau de fractures, dite méthode des boîtes (*box-counting*), est très sensible aux effets de bords et de taille finie, et est finalement mal adaptée aux réseaux de fractures [Viseck, 1992; Walsh and Watterson, 1993; Ouillon and Sornette, 1996; Bour, 1997; Bour et al., sous presse]. Viseck, [1992], Sornette [1993], Walsh and Watterson, [1993] et Bour et al. [sous presse] recommandent plutôt l'emploi de la fonction de corrélation pour mesurer la dimension fractale des réseaux naturels.

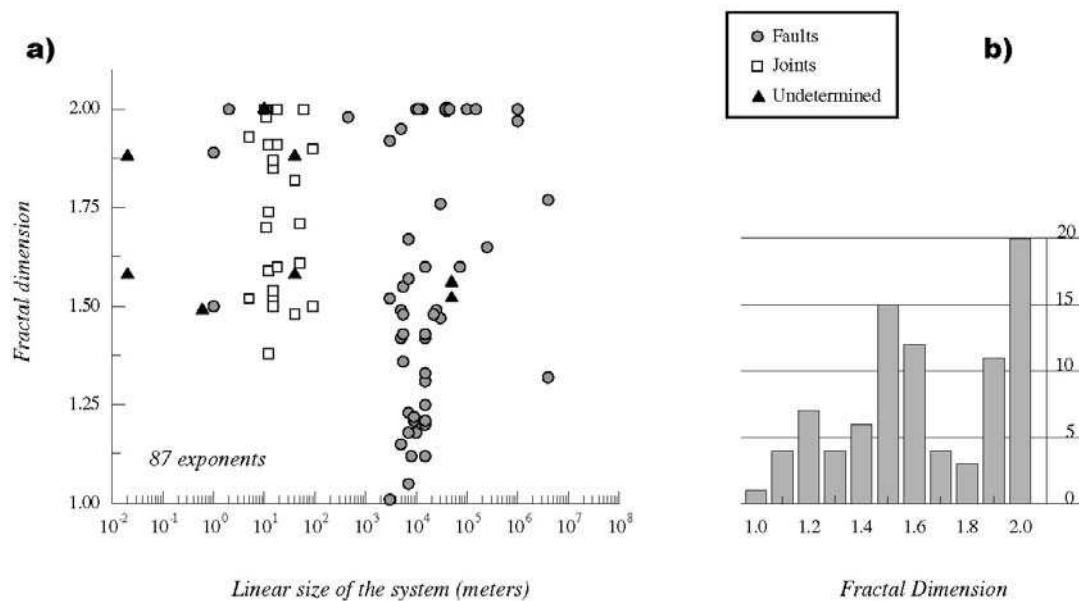


Figure 16

Figure 4: Compilation des valeurs de dimension fractale publiées. D'après [Bonnet et al., 2001]. Tableau détaillé donné en Annexe 1.

La dimension fractale est le plus souvent mesurée sur l'ensemble du réseau pris comme un tout ([Gillepsie et al., 1993; Walsh and Watterson, 1993; Barton, 1995; Berkowitz and Hadad, 1997] etc.). Une deuxième possibilité consiste à conserver la notion de fracture discrète en mesurant la dimension fractale sur l'ensemble des points donnés par les centres des fractures [Davy et al., 1990; Bour and Davy, 1999; Bour et al., sous presse]. La synthèse des valeurs de dimension fractale, associées à des réseaux de joints ou de failles, et reportées dans la littérature, indique selon les cas des dimensions allant de 1 à 2, c'est à dire couvrant tout le spectre de valeurs possibles (figure 4). De plus, certaines études indiquent en fait une transition entre la dimension topologique d'une fracture (1D) et la dimension du réseau (2D), sans gamme d'échelle intermédiaire présentant une dimension fractale distincte [Chilès, 1988; Odling, 1992; Gillepsie et al., 1993]. Pour des données 1D, les méthodes employées sont soit une méthode analogue au box counting en 1D (*Cantor Dust*), soit la méthode dite de *spacing interval method*, basée sur des mesures d'espacement entre les intersections d'un réseau fracturé avec un transect.

La première méthode, appliquée sur des données allant de l'échelle du centimètre à l'échelle du kilomètre confirment le caractère fractal des réseaux étudiés [Velde *et al.*, 1990; Merceron and Velde, 1991; Velde *et al.*, 1991; Ledésert *et al.*, 1993; Velde *et al.*, 1993]. Pour la seconde méthode, en théorie la distribution cumulée des espacements doit varier comme $C(s) \approx s^{-D}$, avec D la dimension fractale, si les espacements ont une distribution spatiale fractale. En étudiant cette distribution certains auteurs montrent des distributions plus ou moins fractales [Gillepsie *et al.*, 1993; Ouillon *et al.*, 1996], tandis que d'autres mettent en évidence des distributions cumulées suivant une loi exponentielle négative, signe d'une absence de corrélations [Brooks *et al.*, 1996; Genter and Castaing, 1997; Genter *et al.*, 1997; Odling *et al.*, 1999].

Toutes ces études ne permettent pas de clairement confirmer ou infirmer la nature fractale ou uniforme des réseaux de fractures. Il ressort en outre que les problèmes d'estimation de dimension fractale dominent les résultats obtenus lorsque la méthode utilisée est celle du box counting. Enfin, si le réseau est pris comme un tout, la plupart des résultats obtenus indiquent que la dimension est égale ou proche de 2, c'est-à-dire que les réseaux sont plutôt uniformes [Odling, 1992; Ouillon *et al.*, 1996; Berkowitz and Hadad, 1997]. En revanche, si la mesure est faite seulement sur la distribution des centres de fractures, une dimension fractale inférieure à celle du réseau pris comme un tout peut être mesurée [Bour, 1997; Bour *et al.*, sous presse]. Ce dernier résultat tend à montrer que l'évolution de la densité de fracturation (nombre de fractures) avec l'échelle est fractale, alors que l'ensemble du réseau est peut être uniforme. Une telle organisation impliquerait des corrélations entre la position, l'orientation et la longueur des fractures.

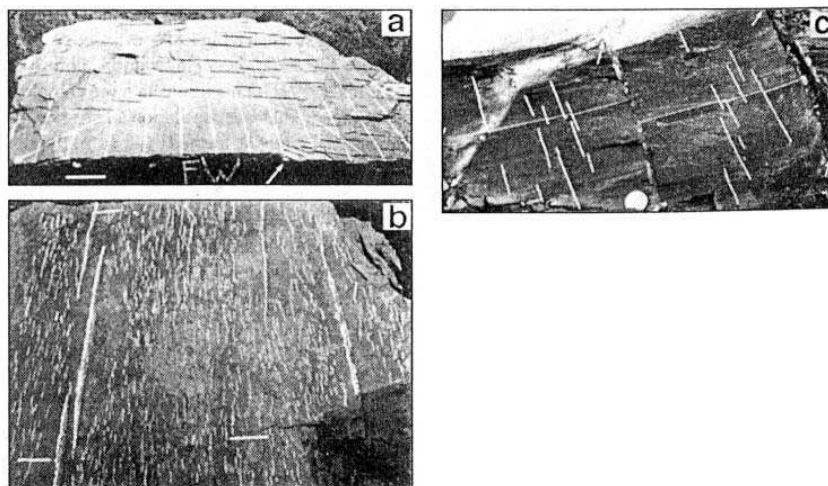


Figure 5: illustration de la zone d'écrantage autour des grandes structures .D'après [Ackermann and Schlische, 1997].

Corrélations de courte portée

Lors de la croissance des réseaux, les fractures interagissent. L'environnement local d'une fracture est la conséquence directe de ces interactions. Ainsi on peut penser que la position et l'orientation d'une fracture sont corrélées avec sa longueur. Plusieurs travaux montrent que

l'environnement local des fractures peut être corrélé avec la longueur des fractures [Segall and Pollard, 1983a; Ackermann and Schlische, 1997; Gupta and Scholz, 2000]. Ainsi Ackermann and Schlische [1997] montrent que les fractures ont tendance à être entourée d'une zone d'écran vide d'autres fractures, dont la taille dépend de la longueur des fractures (figure 5).

1.2 PROPRIETES HYDRAULIQUES

La caractérisation des propriétés hydrauliques des milieux fracturés est un thème de recherche actif depuis quelques dizaines d'années, largement motivé par l'étude de mise en place de sites de stockage de déchets nucléaires dans des milieux souterrains. Plusieurs pays ont mis en place des programmes de caractérisation de sites en milieu fracturé, afin de mieux connaître les propriétés de ces milieux; parmi eux on trouve le site de Stripa en Suède [Neretnieks, 1993] [Witherspoon, 2000], Fanay-Augères en France [Cacas et al., 1990], Mirror Lake [Hsieh et al., 1993; Shapiro and Hsieh, 1994] et Yucca Mountain [Witherspoon, 2000] aux Etats-Unis. Toutes ces études ont contribué à améliorer la compréhension de ces milieux. Quels que soient les sites considérés et les méthodes utilisées, le caractère général ressortant des mesures de propriétés hydrauliques est une très grande variabilité des valeurs de perméabilité.

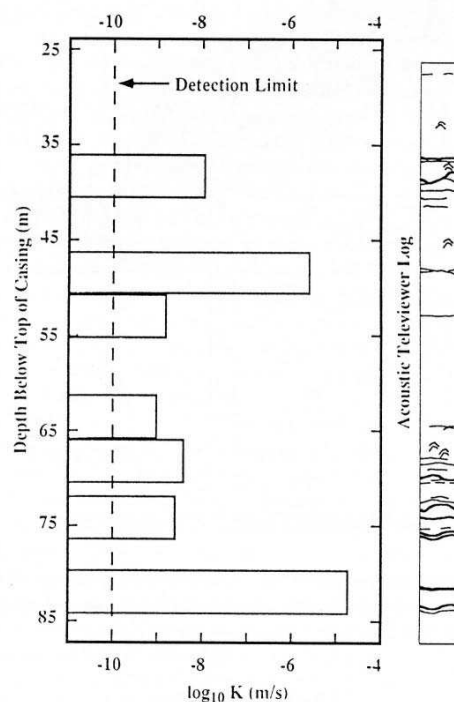
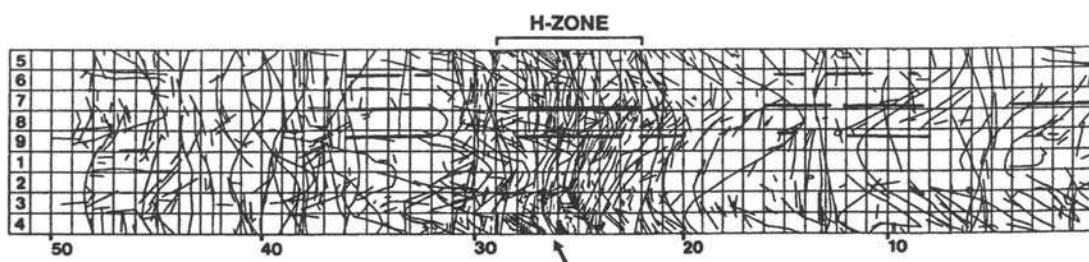


Figure 6: Gauche, conductivité hydraulique déterminée par des tests de packers dans un puits. Droite, fractures observées par caméra acoustique. Puits FSE11, site de Mirror Lake. D'après [Hsieh, 1998].

Cette variabilité est illustrée sur des données provenant du site de Mirror Lake [Shapiro and Hsieh, 1991], représentées sur la figure 6. La conductivité hydraulique à l'échelle de quelques

mètres est mesurée dans des puits par des tests de packer. Elle varie de plusieurs ordres de grandeurs tout au long d'un unique puits, les zones de forte perméabilité étant liées à la présence de fractures, mais toutes les zones fracturées n'étant pas forcément conductrices. Ensuite, non seulement la distribution de valeurs de conductivité hydraulique est très large, mais, en plus, les flux sont concentrés dans des zones très réduites du réseau de fractures. Ainsi sur le site de Fanay-Augères [Long *et al.*, 1991] observent que très peu de fractures sont conductrices. De même sur le site de Stripa, dans l'un des tunnels densément fracturé, l'écoulement est concentré à 80% dans une sous partie du réseau [Olsson, 1992]. [Tsang and Neretnieks, 1998] donnent une revue détaillée des observations de terrain et des travaux théoriques qui montrent une chenalisation importante des écoulements dans les réseaux de fractures, de l'échelle de la fracture à l'échelle d'un réseau. Les parois des fractures naturelles ne sont pas planes mais rugueuses, conduisant dès l'échelle de la fracture à une distribution locale d'ouvertures hétérogène (figure 8) et à un écoulement chenalisé. A l'échelle des réseaux de fractures, la chenalisation du flux peut être mise en évidence à travers des expériences de traçages [Abelin *et al.*, 1987], qui montrent des courbes de restitutions incompatibles avec un modèle de milieu homogène.



Figure(7): traces des fractures dans une galerie du site de Stripa en Suède. Les flux sont concentrés dans les fractures de la "H-zone". La flèche indique une fracture dans laquelle 80% du flux s'écoule. D'après [Olsson, 1992].

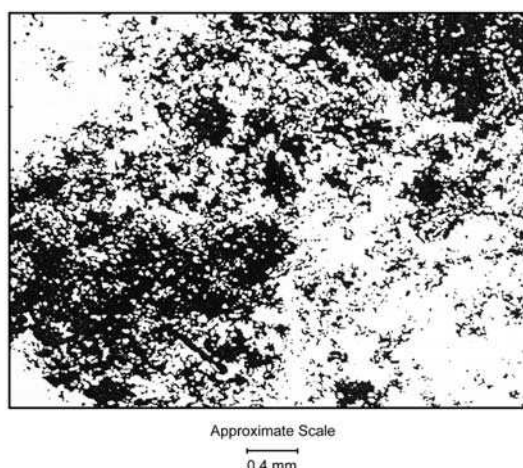


Figure 8: Echantillonnage de l'ouverture locale d'une fracture par injection de métal, sur le site granitique de Stripa. Les zones pénétrées par le métal sont en blanc. D'après [Pyrak-Nolte *et al.*, 1987].

L'hétérogénéité des écoulements pose la question de l'échelle d'homogénéisation. Des compilations de données ([Kiraly, 1975; Clauser, 1992; Garven, 1995; Schulze-Makuch and Cherkauer, 1997]) montrent une tendance générale de croissance de la perméabilité avec l'échelle de mesure jusqu'à une échelle d'homogénéisation. Pour des aquifères carbonatés, Schulze-Makuch and Cherkauer [1997] observent que la perméabilité croît jusqu'à une échelle de l'ordre de la dizaine de mètres, alors que Garven [1995] observe une échelle critique plus grande, de l'ordre de la dizaine de kilomètres. Pour des données provenant de milieu cristallin, Clauser [1992] met en évidence une longueur d'homogénéisation de l'ordre de la centaine de mètres. Classiquement on distingue trois grandes échelles de mesure: l'échelle du laboratoire, l'échelle du puits, et l'échelle régionale [Clauser, 1992]. Pour chacune de ces échelles les méthodes de mesures changent, ce qui peut amener un biais dans l'estimation des effets d'échelle. Par exemple, les échantillons analysés en laboratoire sont le plus souvent non fracturés, et donnent par conséquent une mesure de la perméabilité de la matrice plutôt que du réseau fracturé à petite échelle. Enfin, selon les études, les tendances observées entre l'échelle du puits et l'échelle régionale peuvent s'inverser [Hsieh, 1998]. Ainsi, les variations de perméabilité avec l'échelle de mesure pourraient être simplement la conséquence d'un échantillonnage incomplet [Hsieh, 1998].

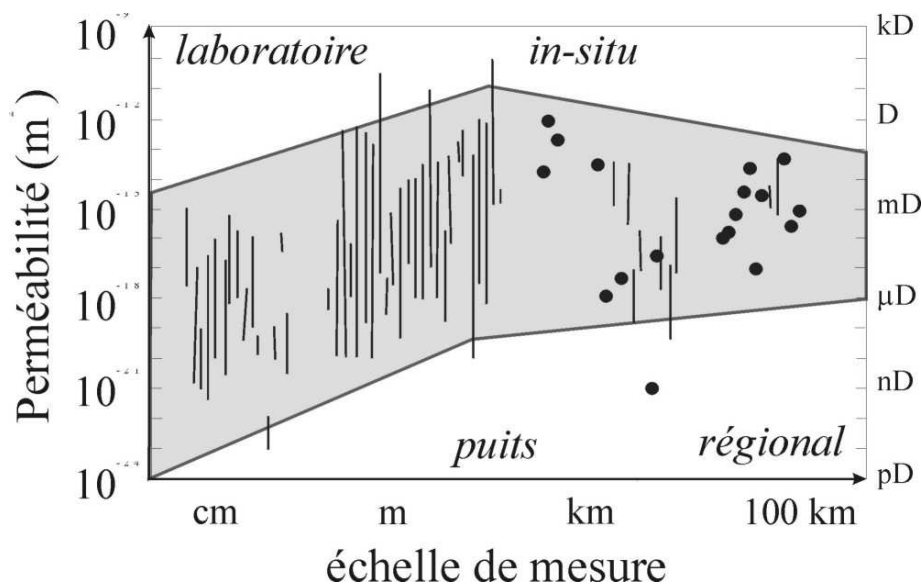


Figure 9: Effet d'échelle d'après [Clauser, 1992].

En résumé, les écoulements dans les milieux fracturés sont hétérogènes dès l'échelle de la fractures (figure 8) et jusqu'à l'échelle du réseau (figure 7). et la perméabilité semble dépendre de l'échelle de mesure. Il est donc difficile, voire impossible, de définir simplement une échelle d'homogénéisation, à partir de laquelle les méthodes classiques des milieux poreux puissent être appliquées. Tant que les causes cette variabilité ne sont pas clairement établies, il semble hypothétique de vouloir prédire le comportement hydraulique d'un milieu fracturé à une échelle supérieure à l'échelle de mesure.

1.3 MODELES DE MILIEUX FRACTURES

1.3.1 Approches développées

La diversité des approches développées pour modéliser les milieux fracturés traduit bien la difficulté de représenter les caractéristiques pertinentes de ces milieux dans des modèles théoriques. Ces milieux sont hétérogènes sur une large gamme d'échelles et leur échantillonnage exhaustif est impossible. Ainsi, à travers la modélisation il s'agit de déterminer quelles échelles d'hétérogénéités sont pertinentes pour pouvoir les prendre en compte dans des modèles simplifiés et pertinents. Les grands types de modèles se divisent en plusieurs classes, selon que les fractures sont prises explicitement en compte ou non (*approche discrète / approche continue*), et selon que la modélisation est basée sur une représentation *déterministe* ou *stochastique* du milieu [National Research Council, 1996]. L'approche classique suivie pour les milieux poreux, qui consiste à adopter une modélisation continue à partir d'une échelle d'homogénéisation bien caractérisée (Volume Elémentaire Représentatif [Bear et al., 1993]), est mise en défaut pour les milieux fracturés justement à cause de l'absence d'échelle caractéristique.

Modèles double porosité

Les modèles à double porosité, originellement introduits par [Barenblatt et al., 1960; Warren et al., 1963], sont historiquement les premiers à prendre en compte le milieu fracturé dans les modèles d'écoulements. Le milieu (fracturé) est assimilé à la somme de deux milieux poreux continus. Au milieu fracturé est associée une forte perméabilité, et une perméabilité faible est associée au milieu poreux. L'écoulement a lieu dans les deux milieux séparément, et les échanges ont lieu aux interfaces, en fonction de la différence de pression entre les milieux et d'un coefficient d'échange. Cette méthode souffre des mêmes inconvénients que l'approche continue classique, en ce sens qu'elle ne peut être appliquée qu'à des milieux bien connectés et homogénéisables. L'adaptation de la méthode aux milieux fracturés passe par une prise en compte de l'hétérogénéité du milieu. Le coefficient d'échange, noté α , dépend de la taille et de la forme des blocs matriciels. Noetinger et al., 2001, fait l'hypothèse que α est relié à la distribution des temps de diffusion des particules dans les blocs matriciels. Ainsi l'hétérogénéité du réseau de fractures pourrait être prise en compte dans la distribution des tailles des blocs matriciels.

Les modèles à double porosité présentent l'avantage d'introduire l'effet de la matrice dans la modélisation, alors qu'elle est par ailleurs souvent négligée en première approche. La modélisation directe de la matrice dans une approche discrète pose d'autres problèmes, liés à la prise en compte simultanée de phénomènes à des échelles de temps différentes (dans la matrice et dans les fractures) [Sudicky and McLaren, 1992; McKay et al., 1993; Dershowitz and Miller, 1995].

Approche déterministe ou stochastique

L'approche déterministe implique une connaissance approfondie du milieu étudié, puisqu'il est directement reproduit dans le modèle. Ce genre d'approche est peu réaliste pour le cas des

milieux fracturés, où la quantité de données disponibles est toujours insuffisante pour caractériser le milieu finement. Palliant cela, l'approche stochastique est basée sur une représentation statistique des propriétés du milieu. Le milieu est considéré comme étant une réalisation d'un modèle statistique sous-jacent, dont les propriétés sont des variables aléatoires. A partir du modèle statistique, de multiples réalisations peuvent être générées. Les propriétés hydrauliques sont au final calculées à partir des moyennes effectuées sur un grand nombre de réalisations du milieu. (p332,333 [*National Research Council*, 1996]). Ainsi les propriétés hydrauliques sont calculées en termes de distribution de probabilité, permettant ainsi une représentation directe de la variabilité intrinsèque des milieux fracturés.

Dans certains cas particuliers où le flux est majoritairement concentré dans un petit nombre de grandes structures, un couplage des deux approches peut donner un modèle efficace. Dans ce cas, les grandes structures sont prises en compte de façon déterministe et les petites de façon stochastique [*Carrera and Martinez-Landa*, 2000; *Lee et al.*, 2001]. Cette démarche peut être appliquée avec succès seulement si le rôle des grandes structures est clairement préétabli et dominant.

Approche continue ou discrète

L'*approche continue* considère le milieu fracturé comme un milieu poreux granulaire où les fractures sont les analogues des pores. Les méthodes appliquées sont alors celles des milieux poreux. Le modèle est basé sur l'estimation directe des propriétés hydrauliques, en supposant une échelle caractéristique (taille de bloc) en dessous de laquelle ces propriétés hydrauliques sont homogénéisables. La connexion du réseau de fractures est alors une condition nécessaire à l'application d'une approche milieu continu équivalent. Le problème de cette approche réside dans la supposition implicite d'une échelle d'homogénéisation: les propriétés sont homogènes à l'échelle de maillage du système. Or cette notion n'existe pas pour les milieux fracturés hétérogènes, où la notion de Volume Élémentaire Représentatif est souvent absente.

L'*approche discrète* repose sur la représentation directe de la géométrie du réseau de fractures et considère l'écoulement dans chaque fracture. Elle est étroitement liée à la notion de modélisation stochastique. La géométrie des réseaux est décrite par les distributions statistiques des paramètres géométriques des fractures et les propriétés hydrauliques sont estimées à partir du comportement moyen calculé sur de multiples réalisations. La résolution des écoulements et du transport sur un réseau discret peut être limitée par la taille des systèmes étudiés.

Selon [*Hsieh*, 1998], la question clé dans la modélisation n'est pas tant le choix entre une approche continue ou discrète que dans la détermination du niveau d'hétérogénéité ou de détail à inclure dans le modèle. En effet l'approche continue et l'approche discrète deviennent équivalentes si pour l'approche continue la maille élémentaire d'homogénéisation est inférieure ou de l'ordre de la taille des plus petites fractures du système. Les corrélations introduites par les grandes structures peuvent aussi être prises en compte dans l'approche continue [*Tsang*, 1996].

Modélisation à l'échelle d'une fracture

Dans le cas d'une approche discrète, il est nécessaire d'avoir un modèle d'écoulement adapté à l'échelle de la fracture. Les premiers modèles considéraient la fracture comme une plaque parallèle d'ouverture constante et d'extension donnée [Snow, 1965]. Ainsi, pour le cas d'une fracture constituée de deux plans parallèles décalés d'une distance o , o étant l'ouverture de la fracture, le flux Q dépend linéairement du gradient de charge (loi de Darcy) et du cube de l'ouverture selon l'expression:

$$Q = -w \frac{o^3}{12\mu} \cdot \nabla h = -K \cdot \nabla h,$$

où w est l'extension transversale de la fracture, μ la viscosité. La perméabilité K dépend du cube de l'ouverture, d'où le terme classiquement employé de loi cubique.

Le modèle de plaques parallèles d'ouverture constante ne correspond cependant pas à la réalité (figure 10): les fractures sont des surfaces très irrégulières d'ouverture variable [Power and Tullis, 1991]. La distribution d'ouvertures dépend de la rugosité, de l'écartement moyen entre les parois et de la corrélation entre les parois. La question est de savoir si la loi cubique reste valable si l'on prend une valeur représentative de la distribution des ouvertures dans le plan de fracture et quelle est cette valeur représentative. A condition de prendre en compte la chenalisation à l'échelle de la fracture et de définir judicieusement l'ouverture hydraulique, alors la loi cubique reste valable en première approximation [Brown et al., 1998; Mourzenko et al., 1999].

Paramètres géométriques des réseaux de fractures

Selon l'approche stochastique discrète, le réseau fracturé est vu comme un ensemble de fractures discrètes et individualisées, et la modélisation repose en premier lieu sur la caractérisation statistique des propriétés géométriques d'ensemble des fractures. Une fracture est définie par ses paramètres propres (forme, longueur, ouverture) et par sa localisation par rapport au reste du système (densité, position, corrélation, orientation).

Forme des fractures

En 2D les fractures sont systématiquement représentées par des segments de droite, même si dans la réalité elles peuvent être apparaître un peu courbées. La courbure est toujours faible devant l'extension longitudinale. En 3D les fractures sont représentées par des surfaces planes, et plusieurs modèles sont proposés quand elles sont d'extension finie: polygones [Huseby et al., 1997], disques [Dverstop and Andersson, 1989; Cacas et al., 1990] ou ellipses [de Dreuzy et al., 2000].

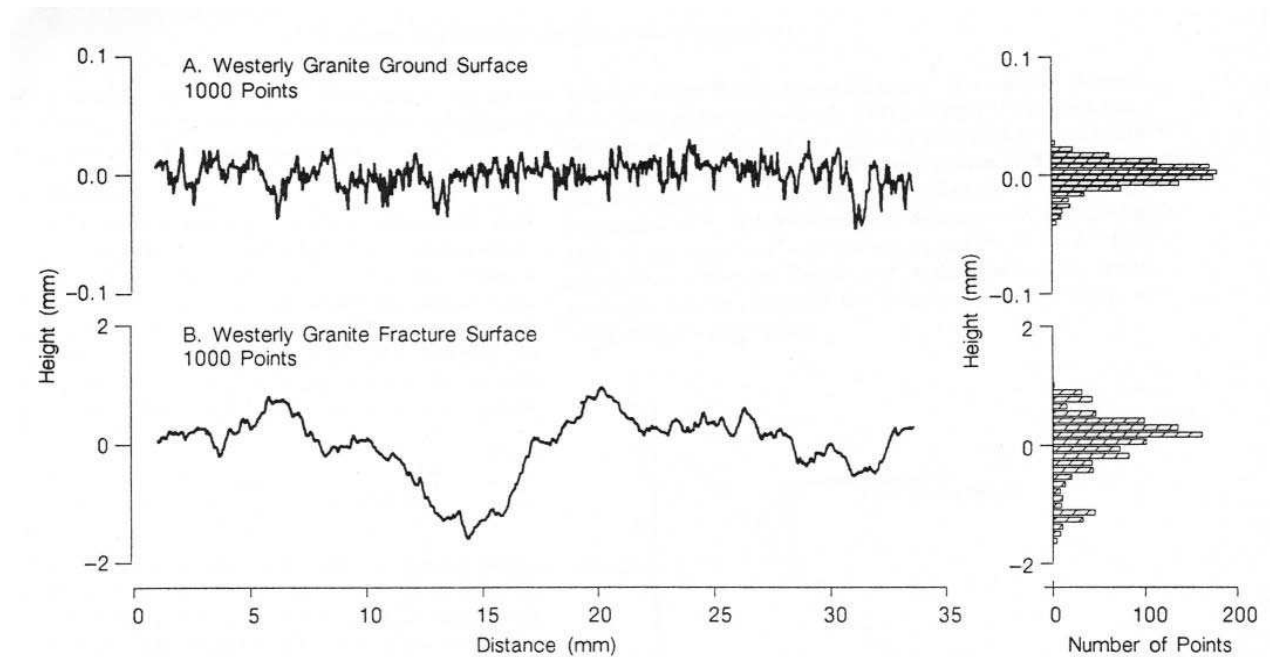


Figure 10: Distribution des ouvertures, hauteur entre les plans d'une fracture, pour deux types de fractures. (haut) fracture créée artificiellement, (bas) fracture naturelle, bien décrite par un modèle fractal. D'après [Power and Tullis, 1991].

Densité de fractures

La densité de fracturation peut être mesurée en terme de nombre de fractures, ou en terme de longueur cumulée, ou de masse de fracture.

Positions des fractures et corrélations spatiales

Le centre de la fracture est communément choisi pour représenter la position d'une fracture. L'hypothèse la plus souvent adoptée quant à la distribution des positions des fractures dans un système est la distribution poissonnienne [Long et al., 1982; Dverstop and Andersson, 1989; Cacas et al., 1990; de Dreuzy et al., 2001]. La prise en compte d'une répartition spatiale hétérogène des fractures est l'un des thèmes principaux de ce travail et sera détaillé dans la suite. Plus généralement, la prise en compte dans les modèles des corrélations, allant d'une répartition spatiale hétérogène à des corrélations entre les différents paramètres géométriques d'une fracture, est décrite plus loin.

Distribution des orientations

Les distributions d'orientations ne suivent pas de distribution spécifique. Elles peuvent être regroupées selon quelques directions préférentielles qui sont les réminiscences de l'histoire de la formation des réseaux en fonction des contraintes extérieures. Une distribution aléatoire peut aussi être choisie.

Distribution des ouvertures

Les distributions d'ouverture jouent un rôle très important puisqu'à l'échelle de la fracture la perméabilité dépend de l'ouverture au cube. Les ouvertures des fractures peuvent être mesurées directement et on parle d'ouverture géométrique, ou être déduites de mesures hydrauliques, on parle alors d'ouverture hydraulique. L'observation directe d'ouvertures géométriques conduit plutôt à une distribution en loi de puissance [Belfield and Sovich, 1994]. Cependant les fractures ne sont pas des surfaces planes aux parois lisses et la mesure de l'ouverture varie dans le plan de fracture; elle ne peut être reliée facilement à l'ouverture hydraulique. Les distributions d'ouvertures sont estimées à partir de tests hydrauliques et conduisent en général à une distribution lognormale [Dverstop and Andersson, 1989; Cacas et al., 1990].

Distribution des longueurs de fractures

Les premiers modèles de fractures discrètes considèrent des fractures de longueur infinie, c'est-à-dire connectant les bords des systèmes [Snow, 1965]. A l'opposé, de nombreux modèles considèrent des fractures de longueur constante et très inférieure à la taille du système [Robinson, 1983; Balberg, 1984; Robinson, 1984; Balberg et al., 1991]. Ces modèles simplifiés présentent l'avantage de pouvoir être traités théoriquement. Lorsqu'une distribution plus large de longueurs est prise en compte, c'est la distribution lognormale qui est le plus couramment utilisée [Andersson and Dverstop, 1987; Long and Billaux, 1987; Cacas et al., 1990]. Cependant de nombreuses études ont montré (Chapitre I) qu'une distribution en loi de puissance est plus à même de représenter la distribution des longueurs des réseaux de fractures. La valeur de l'exposant a de la loi de puissance ($n(l) \propto l^{-a}$) indique la proportion de petites fractures par rapport aux grandes. Les seules longueurs caractéristiques de la loi de puissance sont l_{\min} la longueur minimum et l_{\max} la longueur maximum. Si $a < 1$, cela implique que le nombre de fractures augmente avec leur longueur, ce qui n'est jamais observé sur le terrain et ne sera donc pas envisagé dans la suite. Lorsque $a \rightarrow 1$ toutes les fractures ont une longueur égale à l_{\max} et lorsque $a \rightarrow \infty$ toutes les fractures ont une longueur égale à l_{\min} . Entre les deux, la proportion de petites fractures par rapport aux grandes varie en fonction de a .

Approche hybride

Le problème avec l'approche milieu continu équivalent est de savoir à quelle échelle elle peut s'appliquer, et si cette échelle existe. Le problème avec l'approche discrète est qu'elle peut se révéler inutilement compliquée: pour un réseau très dense et bien connecté le calcul de l'écoulement par l'approche discrète peut se révéler fastidieux alors que, dans cet exemple, un modèle continu équivalent conviendrait beaucoup mieux. Les modèles d'écoulement ne sont en effet pas forcément sensibles à tous les détails du milieu.

L'approche hybride utilise l'information géométrique tout en donnant une simplification maximum des modèles [National Research Council, 1996]. L'approche est en deux temps. La première étape est théorique. Elle consiste à relier les propriétés géométriques des réseaux avec les propriétés de connectivité et de perméabilité afin de déterminer des modèles de comportement simplifiés. La deuxième étape consiste à estimer les paramètres des modèles précédents. L'approche *hybride* consiste alors à concevoir des modèles stochastiques de fractures discrètes pour pouvoir élaborer à grande échelle un modèle de comportement continu.

1.3.2 Propriétés hydrauliques

Dans le cadre de la modélisation stochastique discrète des réseaux de fractures, deux classes de propriétés sont considérées. Il s'agit d'un côté de la structure du réseau, et de l'autre de la perméabilité associée à chaque fracture.

Effet de la structure

Au niveau de la structure du réseau, c'est la distribution des longueurs qui est avant tout modélisée. Les fractures sont distribuées aléatoirement dans le système. Lorsque les fractures sont d'extension infinie [Snow, 1969] [Kiraly, 1975], toutes les fractures connectent les bords du système, et la question de la connectivité du réseau ne se pose pas. Si au contraire les fractures sont d'extension finie et inférieure à la taille du système alors la première question est celle de la connectivité du réseau [Long et al., 1982]: la condition nécessaire à l'observation d'un écoulement à travers un réseau de fractures est évidemment qu'il soit connecté (sous réserve que la roche encaissante soit imperméable). Les propriétés de connectivité de réseaux de fractures de longueur constante et inférieure à la taille du système sont traitées dans le cadre de la théorie de la percolation [Stauffer and Aharony, 1992] et des milieux effectifs [Kiraly, 1975; Sahimi, 1995]. Les travaux de Robinson, 1983, montrent que l'état de connexion d'un système dépend d'un unique paramètre, le paramètre de percolation, qui en 2D s'exprime comme $p=Nl^2/L^2$, où N est le nombre de fractures de longueur l dans un système de côté L . Lorsque le paramètre de percolation dépasse sa valeur au seuil, alors le réseau est connecté et sa perméabilité est non nulle. Quand le réseau est connecté, il a une structure fractale en dessous de la longueur de corrélation et sa perméabilité décroît comme $L^{-0.975}$, où L est la taille du système. Au dessus de la longueur de corrélation le réseau devient homogène et sa perméabilité est constante (figure 11). La longueur de corrélation est donc l'échelle minimale d'homogénéisation pour l'application de la théorie des milieux effectifs. L'application des concepts de la théorie de la percolation aux milieux fracturés est reprise par de nombreux auteurs [Hestir and Long, 1990; Balberg et al., 1991; Berkowitz and Balberg, 1993] (pour une revue complète voir [Adler and Thovert, 1999]). Le cas spécifique des réseaux ayant une distribution de longueurs en loi de puissance a été abordé par [Bour and Davy, 1997; Renshaw, 1999; de Dreuzy et al., 2001]. Les principaux résultats sont rappelés au Chapitre IV.

La prise en compte de distributions spécifiques d'orientations peut induire un changement sur la valeur du paramètre de percolation au seuil [Robinson, 1984], mais ne modifie pas le fait que le seuil est atteint pour une densité d'éléments constants. De plus, suivant Robinson, le nombre moyen d'intersections par fracture au seuil de percolation est invariant, quel que soit la distribution des orientations. La distribution des orientations n'influe donc les règles de connectivité que sur la valeur du seuil, mais pas sur le comportement général. Lorsque le flux s'écoulant dans un réseau connecté est calculé pour différentes distributions d'orientations, [de Dreuzy, 2000] montre que pour des densités proches du seuil de percolation le flux peut varier au maximum d'un facteur 2 ou 3, mais qu'au dessus d'une certaine densité de fracturation le flux n'est pas affecté par la nature de la distribution d'orientations.

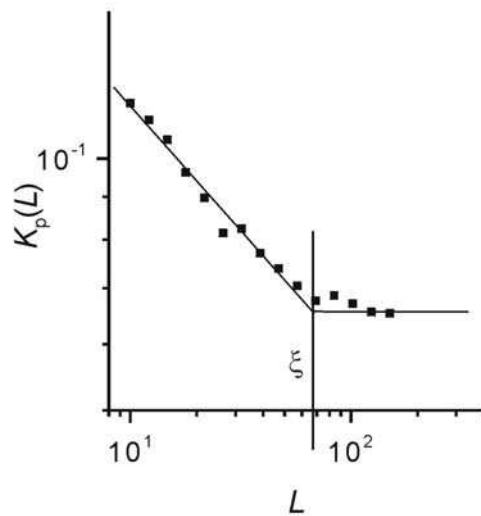


Figure 11: Illustration de l'évolution de la perméabilité $K(L)$ avec l'échelle pour des réseaux dominés par des fractures de longueurs infinitésimales, et pour une valeur du paramètre de percolation p légèrement supérieur à la valeur critique. $K(L)$ devient constante au dessus de la longueur de corrélation ξ . D'après [de Dreuzy *et al.*, 2001].

Effet de la distribution locale de perméabilité, distribution d'ouvertures

La distribution des perméabilités associées aux fractures d'un réseau est reliée à la distribution des ouvertures de fractures. Celle-ci est le plus souvent modélisée par une distribution lognormale [Dverstop and Andersson, 1989; Cacas *et al.*, 1990]. Pour des réseaux de fractures de longueur constante, dont la distribution de perméabilité suit une loi lognormale, on observe que les flux à travers le système sont fortement chenalisés, mais qu'il existe toujours une longueur de corrélation à partir de laquelle la perméabilité peut être donnée par la théorie des milieux effectifs [Charlaix *et al.*, 1987; Moreno and Tsang, 1994]. La longueur de corrélation dépend directement de la largeur finie de la distribution des perméabilités locales. La détermination de la perméabilité effective des milieux poreux fait l'objet de nombreux travaux, dont les références principales se trouvent dans les synthèses [Wen and Gómez-Hernández, 1996; Renard and Marsily, 1997], et ne seront pas rappelés ici.

Lorsqu'une distribution lognormale d'ouvertures est couplée avec une distribution de longueurs en loi de puissance, [Dreuzy, 2001 #157] montre que plusieurs régimes se dégagent. Si la distribution des longueurs de fractures est dominée par les petites fractures, alors au dessus du seuil de percolation la perméabilité décroît avec l'échelle jusqu'à atteindre une valeur limite, à partir de la longueur de corrélation. Lorsque la distribution des longueurs s'élargit, l'évolution de la perméabilité dépend en plus de la corrélation éventuelle entre les distributions de longueurs et d'ouvertures. Si la corrélation est nulle entre les deux distributions, alors la perméabilité croît avec l'échelle jusqu'à atteindre une valeur limite. Si la corrélation est positive, alors le régime dépend de l'exposant a de la distribution des longueurs: si $a > 2$ on retrouve le modèle de croissance de la perméabilité jusqu'à une valeur limite, et si $a < 2$, alors la perméabilité croît indéfiniment avec la taille des systèmes d'observations, ce qui n'est pas cohérent avec les observations générales [Clauser, 1992].

1.4 MODELES CORRELES

Les parties précédentes ont permis de situer la problématique générale de l'évaluation des propriétés hydrauliques dans les milieux fracturés. La première partie de ce chapitre (I.1) a montré que la structure géométrique des réseaux de fractures est complexe et multi-échelle. Cela implique certainement des corrélations entre les positions des fractures et que cette structure complexe influe largement sur les propriétés hydrauliques de ces milieux (I.2). Les grandes classes de modèles théoriques conçus pour représenter les caractéristiques pertinentes des réseaux ont été revus dans la partie I.3.

Nous abordons ici spécifiquement le traitement de la corrélation dans les modèles de réseaux de fractures et plus généralement les méthodes utilisées pour générer des champs corrélés. Des modèles très différents de réseaux de fractures ont été conçus pour représenter des corrélations entre fractures [Chilès and Marsily, 1993; National Research Council, 1996]. Le terme de corrélation ne correspond en effet pas à une définition précise en terme de modèle. Les corrélations peuvent être à courte ou longue portée. Toute corrélation à portée finie est dite à courte portée, dans la mesure où l'on étudie des systèmes théoriquement infinis. Au contraire les corrélations sont dites à longue portée si leur portée est comparable à la taille du système. Nous détaillons en particulier dans la suite les corrélations à longue portée qui sont reliées à la notion de fractale et de loi d'échelle. L'objet de cette partie est plus axé sur l'incorporation de la structure spatiale, que sur l'effet même des corrélations sur les propriétés hydrauliques.

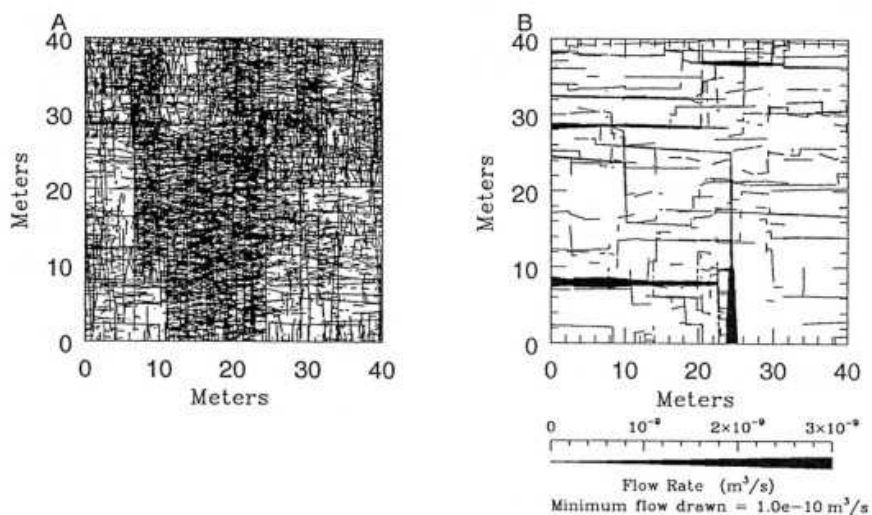


Figure 12: Modèle dit de *war zone*. a) Réalisation d'un réseau. On distingue des zones plus denses. b) flux calculé dans le réseau. D'après [Clemo and Smith, 1997]

1.4.1 Modèles corrélés à courte portée

Réseaux discrets à échelle caractéristique

Le terme de corrélation à courte portée désigne une corrélation dont la portée est finie. Dans ce cas, la géostatistique peut être utilisée pour reproduire une structure spatiale, comme le montrent *Long and Billaux* [1987] sur le site de Fanay-Augères. Le système considéré est découpé en blocs. A l'intérieur des blocs, les propriétés, dont la densité de fracturation, sont homogènes mais elles varient de bloc à bloc avec une corrélation issue d'un modèle de variogramme calé sur les données de terrain. Le modèle suppose donc l'existence d'une échelle caractéristique, la taille des blocs, en dessous de laquelle les propriétés sont homogènes et au-dessus de laquelle il existe une corrélation à portée finie. Une autre façon de corréler les fractures consiste à définir un lien de filiation entre des séries de fractures. Cela correspond au modèle dit *parent-daughter* [Billaux et al., 1989]. Dans ce modèle une première série de centres de fractures est générée, auxquels sont rattachés des centres dits *daughter*. Ainsi la position d'une fracture *daughter* est corrélée à la position de la fracture *parent* correspondante. De plus la densité de fractures *daughter* autour d'une *parent* peut varier dans l'espace et est définie selon un modèle de variogramme.

Un autre modèle, dit de *war zone*, repose sur le même principe. Une première série de fractures est générée. Ensuite certains couples de fractures sont sélectionnés tels que, dans l'espace délimité par le couple de fractures, la densité de fracturation est augmentée significativement [Clemo and Smith, 1997]. Pour ces modèles les corrélations sont le plus souvent de nature qualitative et surtout présupposent une unique échelle caractéristique de corrélation.

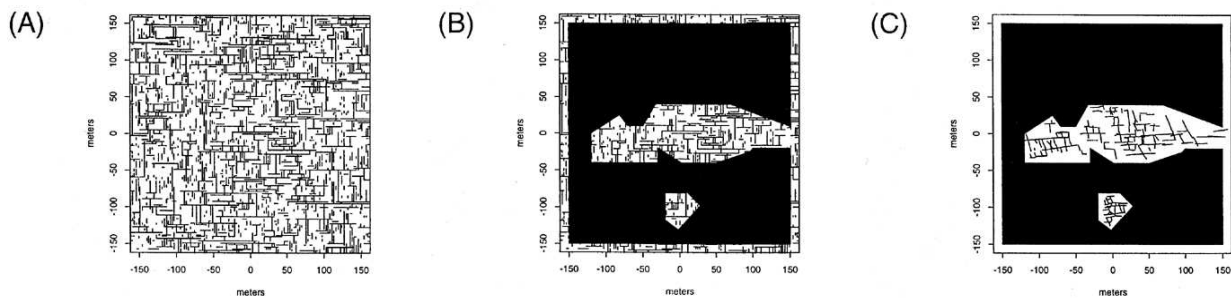


Figure 13: a) et b) réseau de fractures simulé selon le modèle génétique de [Hestir et al., 1998]. c) Pour comparaison le réseau naturel carté en 2D d'après [Keer and Chen, 1981]. En b) et c) seule la partie visible de la zone fracturée est montrée. D'après [Hestir et al., 1998].

Modèles génétiques

Pour les modèles génétiques, le réseau de fractures n'est pas généré directement dans son état final mais est construit pas à pas en simulant la croissance du réseau et les interactions entre fractures selon des règles simplifiées [Gringarten E., 1996; Gringarten, 1998; Hestir et al., 1998]. Ces procédés de génération sont basés sur des méthodes itératives. Dans certains cas les

fractures interagissent lors de la croissance, dans d'autres elles n'interagissent pas, ou seulement d'une série à l'autre mais pas entre les fractures d'un même groupe. La corrélation est avant tout qualitative. *Gringarten E.* [1996] et *Gringarten* [1998] proposent un algorithme de génération de fractures basé sur des règles simplifiées de propagation et d'interactions entre fractures, et sur des distributions d'orientations et de densité de fractures fixée au niveau de transects (figure 14). La hiérarchie vient des séries successives de fractures, chaque nouvelle interagissant avec celles déjà en place. Ainsi plusieurs épisodes tectoniques peuvent être simulés. Le modèle repose sur la prise en compte du maximum de données déterministes dans le but de générer des réseaux qui paraissent le plus réalistes possibles. La donnée la plus importante est la carte de densité (figure 14a), donnée dans le modèle au niveaux de transects. Les variations de densité sont simulées à partir des méthodes de géostatistiques.

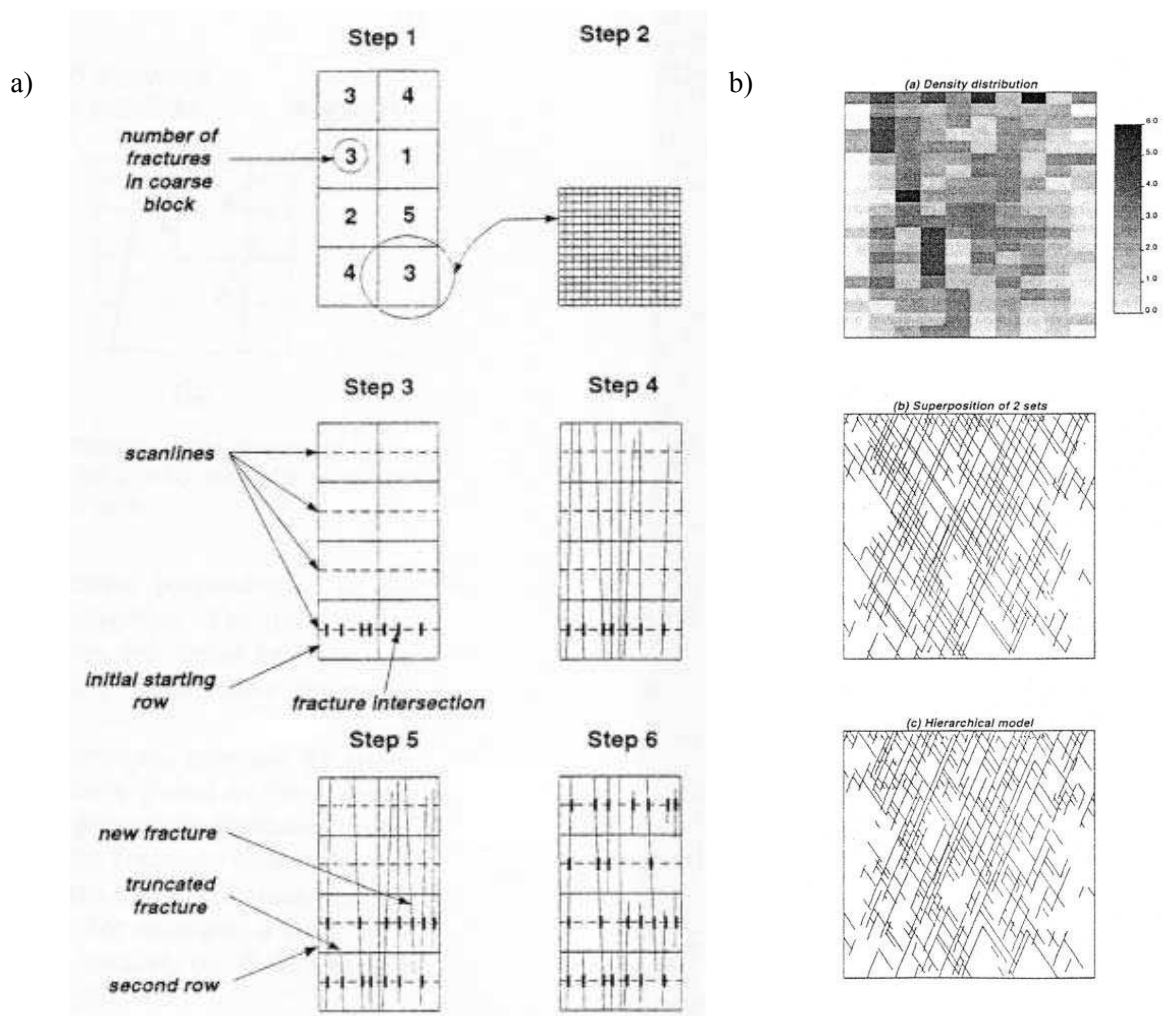


Figure 14: a) Etapes de l'algorithme de génération des fractures. b) (haut) Carte des densités, (milieu, bas) superposition de deux séries de fractures, (milieu) qui n'interagissent pas, (bas) qui interagissent selon un modèle hiérarchique. D'après [Gringarten, 1998].

Hestir et al. [1998] proposent un modèle de génération de réseau de fractures par croissance du réseau en fonction de règles mécaniques statistiques simplifiées. Les règles sont basées sur

les concepts mécaniques appliqués à un milieu homogène, isotrope et élastique. Les fractures se comportent comme si elles étaient indépendantes, parallèles, et le taux de croissance dépend de la contrainte aux extrémités des fractures, qui est lui-même proportionnel à la longueur des fractures. Sur la figure 14(a et b) un réseau simulé est constitué de 2 séries de fractures perpendiculaires résultants de deux épisodes différents. Les interactions entre fractures concernent la croissance de la deuxième série par rapport à la première.

Les modèles génétiques permettent de reproduire qualitativement l'hétérogénéité de la distribution spatiale des fractures à une échelle donnée, mais la corrélation est avant tout qualitative.

1.4.2 Modèles de corrélations à longue portée

Rappels: fractales et multifractales

Objet fractal

Mandelbrot définit un objet fractal comme un ensemble qui présente des irrégularités semblables à toutes les échelles [Mandelbrot, 1982]. De manière générale un objet fractal se définit comme étant un objet de dimension non entière et sans longueur caractéristique. La théorie fractale permet de décrire un grand nombre de phénomènes physiques, en particulier dans les géosciences [Korvin, 1992].

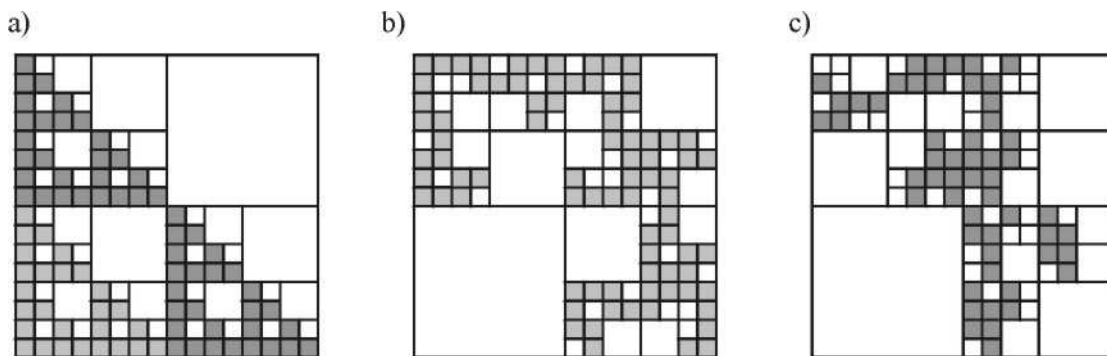


figure 15: a) fractale déterministe, tapis de Sierpinski, b) fractale homogène statistique, et c) fractale hétérogène statistique.

Une approche simple pour mesurer la dimension d'un objet consiste à appliquer une méthode classique de pavage, en comptant le nombre d'éléments nécessaires pour recouvrir un objet en fonction de la taille des éléments. Soit S un objet dans \mathfrak{R}^n et $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε nécessaires pour couvrir S . La dimension fractale de S , $d_F(S)$, est définie à partir du comportement en loi de puissance de $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-d_F(S)}$$

Ainsi, la dimension d'une droite est égale à 1, et la dimension d'un plan à 2. Pour un objet fractal classique tel que le tapis de Sierpinski (figure 15), à l'échelle $T/2^n$, si T la taille linéaire

du système, il faut $N_n(l_n)=3^n$ boîtes de taille $l_n=T/2^n$ pour recouvrir l'objet, ce qui conduit à une dimension fractale $D=\log(3)/\log(2)=1.58$. Le tapis de Sierpinski présenté (figure 15a) est un objet fractal *déterministe*: sa forme est entièrement déterminée par la donnée d'un initiateur (l'état initial) et d'un générateur (opération récurrente de découpage). Les fractales peuvent aussi être de nature *statistique*. On dit qu'une fractale statistique est homogène lorsque le rapport de masse est conservé d'une échelle à l'autre (figure 15b), et hétérogène lorsque le rapport de masse peut varier d'une échelle à l'autre (figure 15c) [Gouyet, 1992]. Les fractales statistiques constituent la majorité des objets fractals observés dans la nature [Korvin, 1992; Viseck, 1992].

Contrairement à la mesure de dimension fractale sur un objet régulier (ou déterministe), la mesure de dimension sur un objet fractal irrégulier (ou statistique) peut donner des résultats différents selon la méthode utilisée. Ainsi plusieurs définitions de la dimension fractale sont proposées dans la littérature [Feder, 1988; Gouyet, 1992]. La méthode de la fonction de corrélation est la mieux adaptée pour la caractérisation de fractales statistiques ([Viseck, 1992]). Cette méthode est basée sur la statistique des doublets de points de l'ensemble ([Grassberger and Procaccia, 1983]) et se définit comme suit: étant donnée une suite de points (x_j) dans un espace métrique X , on considère la fonction de comptage :

$$C(r, N) = \frac{1}{N^2} \text{card} \left\{ (i, j); |x_i - x_j| \leq r, i, j \leq N \right\}$$

où $\text{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble A et $|\cdot|$ la métrique de X . La limite

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} C(r, N)$$

$C(r)$ est la probabilité pour que deux points de la suite (X_j) soient séparés par une distance inférieure à r . La dimension de corrélation est alors donnée par

$$D_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

Mesures multifractales

La notion de fractale peut être élargie à la notion plus complexe de multifractale. Une mesure multifractale est reliée à la caractérisation de la distribution spatiale d'une quantité associée à un support [Feder, 1988]. On peut par exemple considérer la répartition de la densité de population sur les continents, ou plus simplement la répartition spatiale de la densité de fracturation dans un milieu fracturé. On définit une mesure μ sur son support S_μ . On appelle alors *exposant de singularité* au point $x_0 \in S_\mu$, la limite :

$$\alpha(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \mu(B_{x_0}(\varepsilon))}{\ln \varepsilon}$$

où $B_{x_0}(\varepsilon)$ désigne une boule centrée en x_0 et de taille ε . Le spectre $f(\alpha)$ des singularités associé à la mesure μ est la fonction qui, à tout α , associe la dimension fractale de l'ensemble des points x_0 tels que $\alpha(x_0)=\alpha$:

$$f(\alpha) = d_F \left(\left\{ x_0 \in S_\mu / \alpha(x_0) = \alpha \right\} \right)$$

Le spectre $f(\alpha)$ des singularités décrit la répartition statistique des exposants α sur le support de la mesure. $f(\alpha)$ est une quantité qui traduit le degré de régularité ou d'homogénéité d'une mesure fractale. Ainsi, si l'on pave le support de la mesure de "boîtes" de taille ε , alors le nombre de boîtes dont la mesure varie comme ε^α , pour un α donné, se comporte de la façon suivante:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}$$

le formalisme multifractal peut aussi être relié à une description thermodynamique des mesures multifractales. On considère la *fonction de partition*, qui pour tout $q \in \mathfrak{R}$, s'écrit comme:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon)$$

La fonction de partition $Z(q, \varepsilon)$ représente la somme des moments d'ordre q de la distribution de la mesure sur son support. On peut alors définir le spectre $\tau(q)$ à partir du comportement en loi de puissance de $Z(q, \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$Z(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{\tau(q)}$$

et le spectre des dimensions généralisées comme le rapport :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{(q-1)}$$

le spectre des singularités $f(\alpha)$, et le spectre des dimensions généralisées, notées D_q , sont reliés par une transformation de Legendre [Feder, 1988]. Le spectre multifractal caractérise le degré de régularité et d'homogénéité. Le spectre multifractal décrit le comportement des quantités globales, c'est à dire des valeurs moyennes statistiques de la mesure sur le support (par contraste avec les exposants de singularité, voir [Feder, 1988]).

La dimension D_0 (pour $q=0$) du spectre des dimensions généralisées est égale à la dimension du support physique, qui peut être lui-même fractal, mais pas obligatoirement. De plus, si $D_q=D_0$ pour toute valeur de q , cela signifie que la mesure est uniforme sur le support, ce qui correspond à la définition d'une fractale classique, ou monofractale. Enfin les dimensions D_q sont reliées au comportement des fonctions de corrélation à q -points [Grassberger and Procaccia, 1983; Hentschel and Procaccia, 1983]. En particulier, la dimension de corrélation est égale à la dimension d'ordre 2 du spectre des dimensions généralisées.

Génération de corrélations à longue portée

Nous passons ici en revue les différentes méthodes qui permettent de générer des corrélations à longue portée, dans un cadre qui dépasse la modélisation particulière associés aux milieux fracturés discrets. La prise en compte de l'hétérogénéité et de la corrélation dans l'estimation des propriétés hydrauliques des aquifères est en effet un champ de recherche actif, non seulement pour les systèmes fracturés, mais aussi pour l'hydrogéologie en général.

De nombreuses études ont montré que la distribution des transmissivités associée aux milieux souterrains est très hétérogène et présente des corrélations spatiales [Makse *et al.*, 1996a; Molz and Liu, 1997; Sahimi, 1998]. Les corrélations présentent souvent un caractère self-affine ($f(\lambda x) = \lambda^H f(x)$), qui peut être modélisé avec succès par des modèles fractals tels que les fBm (fractional Brownian motion), les fLm (fractional Lévy motion), ainsi que par les champs multifractals. Ces modèles induisent des corrélations à longue portée, i.e. dont la portée est comparable à la taille du système étudié. Leurs principales caractéristiques sont brièvement rappelées ici.

M. Sahimi / Physics Reports 306 (1998) 213–395

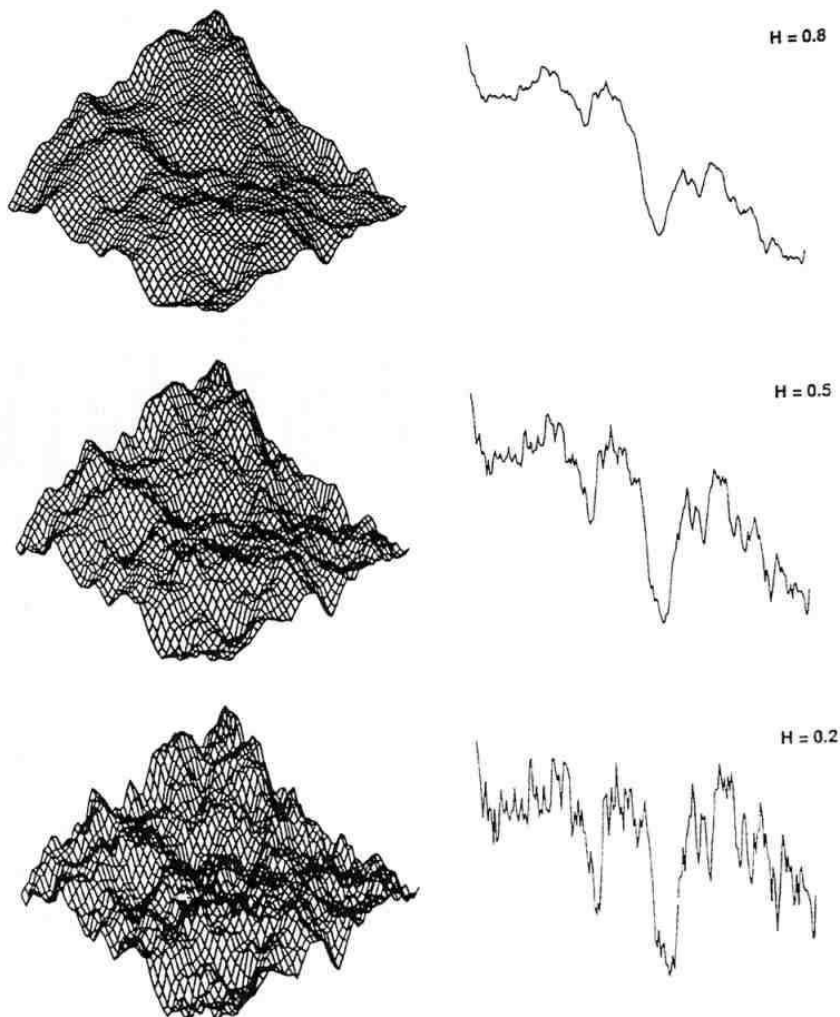


figure 16: surfaces 1D(droite) et 2D (gauche) générées par des mouvements Brownien fractionnaires (fBm) pour différentes valeurs de l'exposant de Hurst H. La dimension fractale D est donnée par $D=d-H$, avec d la dimension euclidienne. D'après [Sahimi, 1998].

Mouvement brownien fractionnaire, fBm

Un mouvement Brownien fractionnaire, $B_H(\mathbf{r})$, est un processus stochastique défini tel que:

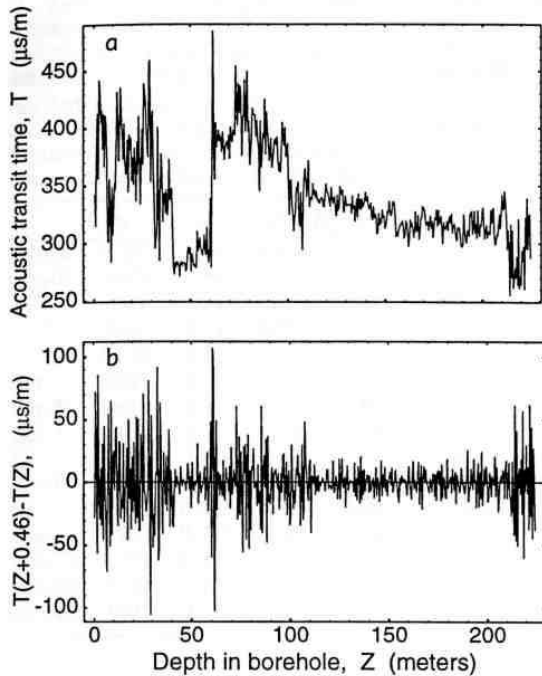
$$\langle B_H(\mathbf{r}) - B_H(\mathbf{r}_0) \rangle = 0$$

$$\langle [B_H(\mathbf{r}) - B_H(\mathbf{r}_0)]^2 \rangle \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{2H}$$

avec \mathbf{r} et \mathbf{r}_0 deux points arbitraires et $0 < H < 1$ l'exposant de Hurst. La distribution des incréments suit une distribution gaussienne. Si $H=1/2$, les incréments sont indépendants les uns des autres, ce qui correspond au mouvement brownien classique. Si $H > 1/2$, le fBm est positivement corrélé (persistance), et, pour $H < 1/2$, le fBm est négativement corrélé (anti-persistance). La dimension fractale d'une surface générée à partir d'un fBm dans un espace de dimension euclidienne d est donnée par $D=d-H$.

La figure 16 représente des surfaces fractales générées en 1D et 2D pour différentes valeurs de l'exposant H . Les fBm sont bien adaptés pour représenter des surfaces rugueuses de fractures et sont aussi utilisés pour modéliser des distributions de conductivité hydrauliques [Hewett, 1986; Molz and Boman, 1995]. Cependant ce processus ne permet pas toujours de rendre compte des mesures de terrain ([Painter, 1996 #18], [Boult et al., 1996]), qui présentent une variabilité encore plus grande pour la distribution des incréments.

a)



b)

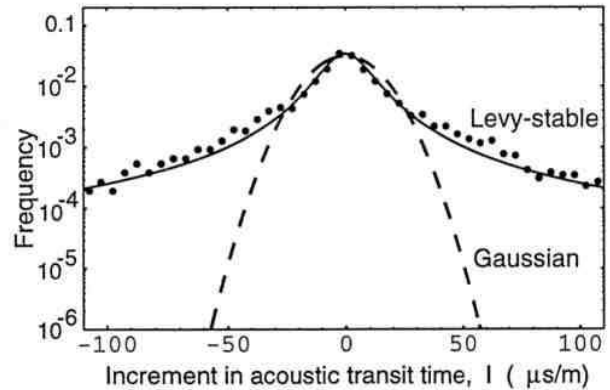


Figure 17: (gauche) a) temps de propagation, $T(Z)$, en fonction de la profondeur d'un puits (Wanaeal). $T=1/V$, ou V est la vitesse des ondes acoustiques. (b) incréments $I(Z)=T(Z+l)-T(Z)$, $l=0.46\text{m}$. (droite) histogramme expérimental des incréments $I(Z)$, comparé à une distribution stable de Lévy ($\alpha=1.11$ et $C=8.92$), et à la distribution Gaussienne qui ajuste le mieux la distribution. D'après [Painter and Paterson, 1994].

Fractional Lévy motion, fLm

Les fBm sont seulement un cas particulier de la classe de modèles plus générale que sont les fLm [Taqqu, 1987]. Les fLm ont un degré de variabilité beaucoup plus élevé que les fBm et sont basés sur les distributions stables de Lévy (figure 17). Elles sont paramétrées par l'indexe de Lévy α , tel que $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha=2$ correspondant au cas Gaussien. Les distributions stables de Lévy sont caractérisées par des queues de distribution qui décroissent lentement selon la probabilité $\Pr(|x| \geq s) \sim s^{-\alpha}$ pour s grand, et par une variance (et moments d'ordre supérieur) infinie. Une distribution de Lévy symétrique centrée à l'origine s'écrit comme:

$$p(x) = \int_0^{\infty} \exp[-(Ck)^{\alpha}] \cos(kx) dk$$

Les incréments $X(t+l)-X(t)$ d'un fLm sont caractérisés par une distribution de probabilité de Lévy symétrique, d'index α et de largeur $C=C_0|l|^H$. Si $H=1/\alpha$ alors les incréments sont indépendants. Si $H > 1/\alpha$ alors la corrélation est positive entre les incréments (persistance), et c'est le contraire si $H < 1/\alpha$ (antipersistence). Ces distributions sont souvent utilisées pour représenter l'hétérogénéité des propriétés de subsurface [Painter, 1995; Painter, 1996][Painter, 1996 #18]. Le principe de génération de distributions synthétiques est le même pour les fBm et fLm [Makse et al., 1996b; Molz and Liu, 1997]. La différence réside dans la génération des incréments, qui est classique pour les fBm, puisque cela correspond à une distribution gaussienne, et plus élaboré pour la distribution de Lévy [Mantega, 1994].

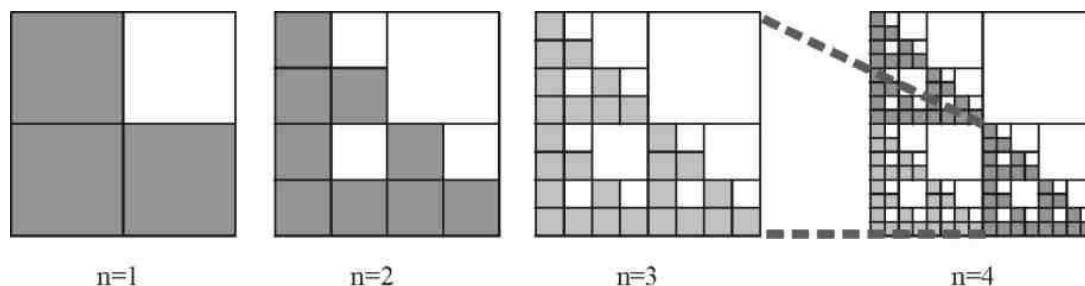


Figure 18 : premières étapes de la construction d'un tapis de Sierpinski. La dimension du fractal ainsi généré (zone en gris) est $D=1.58$.

Poussière de Cantor, Tapis de Sierpinski

Une structure fractale peut être générée à partir d'un principe de génération en cascades. C'est ce processus qui permet de générer des objets fractals déterministes classiques tels que une Poussière de Cantor [Barton, 1995] (1D) et un Tapis de Sierpinski (2D). Le principe, illustré figure 18, est de découper un bloc initial en div^d blocs égaux ($d=2$ et $div=2$ pour le Sierpinski), et de réitérer le processus sur une fraction finie N des blocs ainsi créés ($N=3$ pour le Sierpinski). La dimension de l'objet est donnée par $D=\log(N)/\log(div)$. A chaque division d'un bloc, la position des blocs qui vont rester intact peut être choisie aléatoirement (fractal statistique). La

méthode est directement généralisable en 3D. La proportion de pièces qui fragmentent d'une itération à l'autre peut être exactement constante (N entier), ou bien tirée en fonction de la probabilité de fractionner, ce qui permet d'obtenir n'importe quelle valeur de D , même si le générateur est basé sur une découpe en n cases fixes.

Le passage d'un Sierpinski à un réseau de fractures discrètes peut consister à positionner aléatoirement les fractures sur le fractal (cases en noir figure 18) et il en découle que la dimension fractale du réseau est celle du tapis de Sierpinski [Bour, 1997].

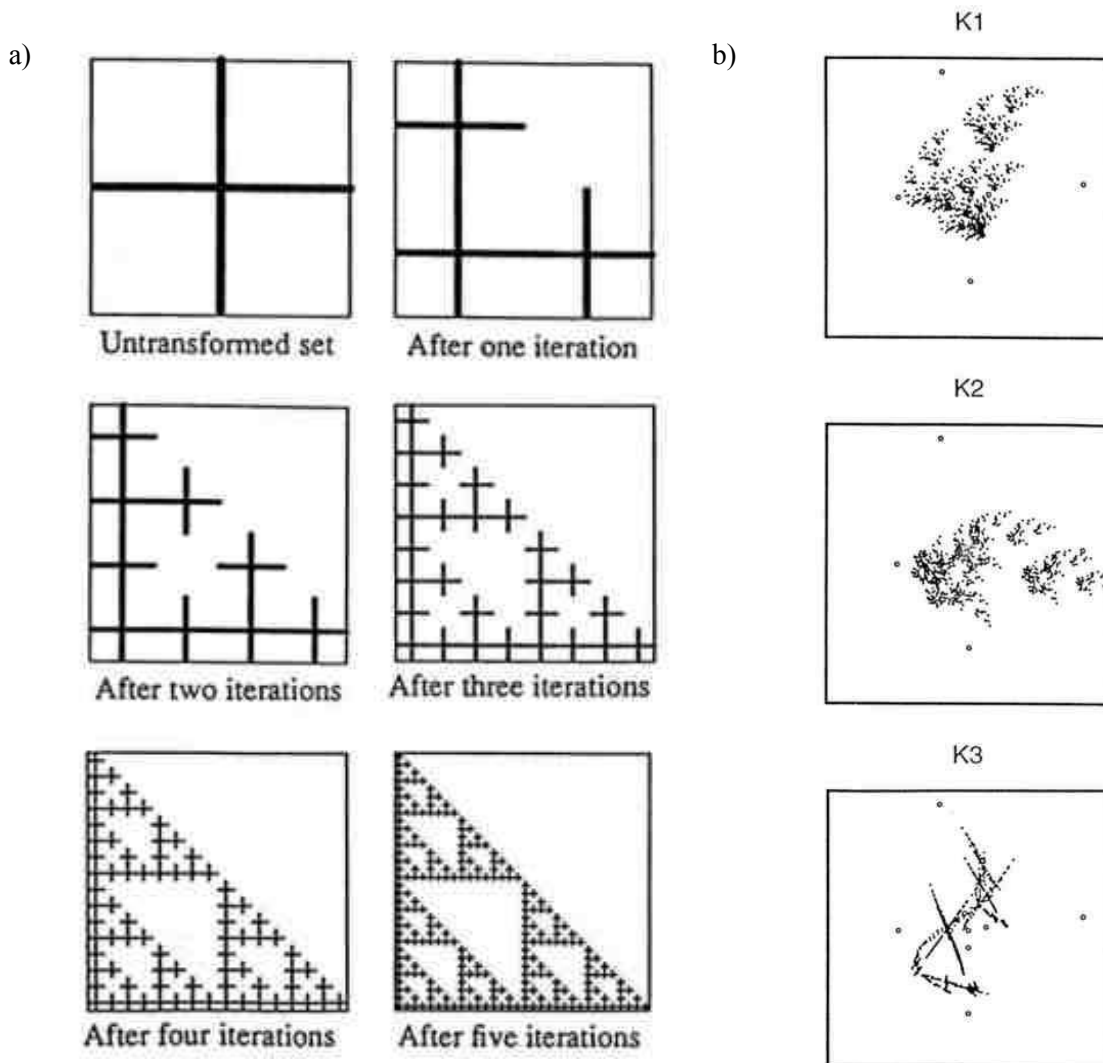


Figure 19: a) Génération d'un tapis de Sierpinski à partir d'un IFS en utilisant trois transformations affines et un objet de départ en croix. b) Résultats d'inversions de données par recuit simulé. Selon les paramètres de l'IFS la structure finale peut apparaître plus ou moins comme un ensemble d'éléments longilignes pouvant rappeler des fractures. D'après [Doughy, 1994].

Multifractales, cascades multiplicatives

Les processus précédents permettent d'obtenir des lignes fractales ($1 < D < 2$), des surfaces fractales ($2 < D < 3$), ainsi que des ensembles de points dont la dimension est inférieure à la ligne. Nous abordons maintenant la génération d'un ensemble à caractère multifractal.

Le principe de génération est le même que pour le Sierpinski décrit ci-dessus. Cependant, au lieu de définir à chaque étape quels blocs seront divisés à l'itération suivante et quels blocs seront laissés intacts, des poids différents sont attribués sur chaque bloc. L'opération est répétée sur chaque sous-partie, jusqu'à atteindre une échelle minimum fixée. A la fin, la quantité associée à chaque case est égale au produit des valeurs associées aux étages supérieurs. Le multifractal est caractérisé par la distribution de ses poids sur le support. Dans [Mukhopadhyay and Sahimi, 2000] les poids associés sont tirés aléatoirement dans une distribution uniforme entre $(1-a, 1+a)$ avec $a < 1$, à chaque itération, et pour chaque partie. Les poids peuvent aussi être des valeurs fixes [Meakin, 1987], ou provenir d'un tirage dans une distribution de Lévy [Belfield, 1998; Boufadel et al., 2000]. La distribution de poids est self-similaire à condition que les poids soient tirés selon une unique distribution lors de la génération. Enfin, c'est la distribution des poids sur l'objet qui a des caractéristiques multifractales et non pas la surface générée par l'ensemble des poids, si les poids sont vus comme des hauteurs.

Modèles corrélés longue portée

Les modèles suivants intègrent la notion de fractale dans la génération de fractures discrètes.

Les IFS (Iterated Function System), introduites par Barnsley [1988], désignent une méthode permettant de générer des systèmes self-similaires déterministes. Initialement cette méthode a été utilisée, avec le minimum de paramètres au départ, pour reproduire des géométries complexes telles que les feuilles des arbres, les nuages. Le principe en est le suivant: une série de transformations affines est appliquée à un objet de départ. Au bout d'un certain nombre d'itérations la structure converge vers un attracteur. Chaque fonction peut comprendre des translations, réflexions, rotations, contractions ou distorsions. Un tapis de Sierpinski peut être généré à partir d'un IFS comprenant trois transformations affines et une croix comme objet de départ (figure 19a).

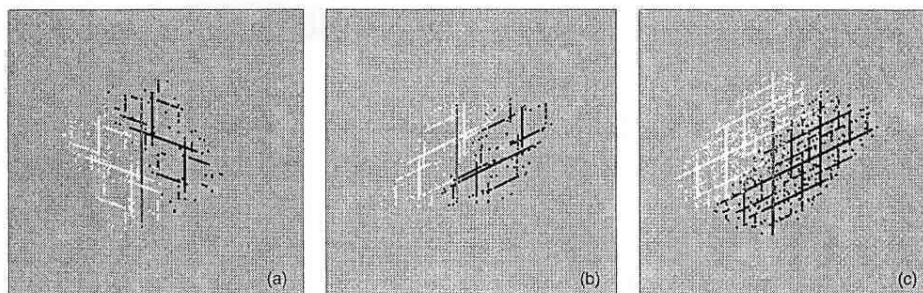


Figure 20: images de réseaux fracturés issues d'IFS selon différents paramètres de départ. D'après [Mohrlock and Liedl, 1996].

L'avantage de cette technique est qu'elle permet de générer une très large gamme de formes fractales différentes à partir d'un nombre restreint de données initiales qui sont les paramètres et

le nombre des transformations affines. Pour cette raison la technique a été employée pour réaliser de l'inversion de données hydrologiques [Doughthy, 1994]. Une méthode de recuit simulé permet de déterminer les paramètres d'un IFS qui reproduisent au mieux des données d'essais de pompage. La méthode est appliquée sur des données du site fracturé de Stripa, où l'IFS reproduit des hétérogénéités, mais pas explicitement des fractures discrètes (figure 19b). Selon les paramètres d'entrée une structure finale générée à partir d'un IFS peut avoir des caractéristiques plus ou moins typiques d'un réseau de fractures, comme illustré sur la figure 19b. Les IFS peuvent être appliqués directement à la génération de réseau de fractures, (figure 20), à condition de contraindre en conséquence les paramètres d'entrée [Mohrlock and Liedl, 1996].

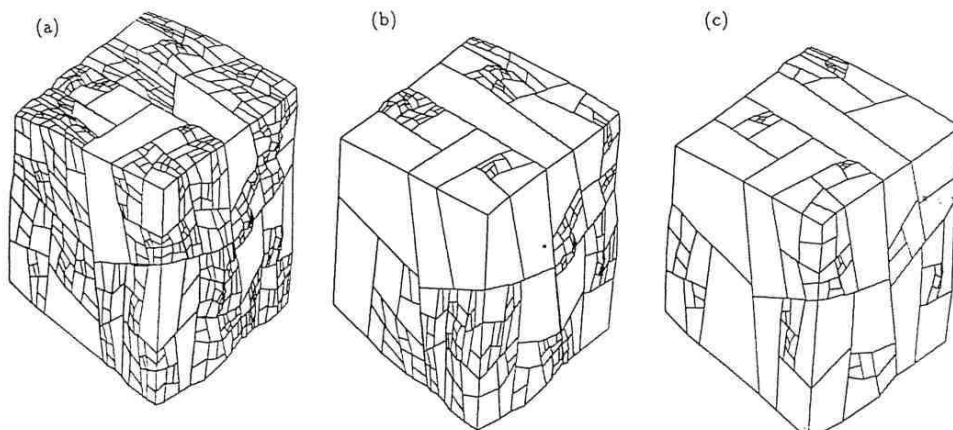


Figure 21: exemples de réseaux 3D générés avec les dimensions fractales a)2.78 b)2.65 et c)2.48. D'après [Acuna and Yorstos, 1995].

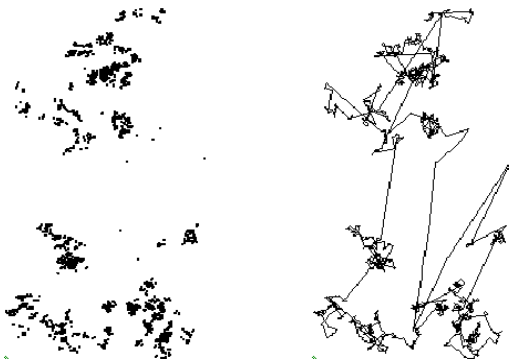
Acuna and Yorstos [1995] utilisent un couplage entre un processus de fragmentation et les techniques des IFS pour générer des réseaux de fractures discrètes. Les processus de fragmentation conduisent à des distributions d'éléments en loi de puissance [Turcotte, 1986]. Concrètement, une distribution de blocs en loi de puissance peut être obtenue en démarrant un processus de fragmentation et en autorisant seulement une fraction des fragments à rester entier à chaque itération du processus de fragmentation (encore l'exemple du Sierpinski, ou 1 bloc sur 4 n'est pas autorisé à fragmenter). C'est la probabilité de fragmenter qui donne la dimension fractale, et ce sont les techniques issues des IFS qui permettent de placer les fractures. Donc la dimension fractale peut être paramétrée, les réseaux sont stochastiques et non déterministes, bien qu'ils se ressemblent beaucoup, puisque les longueurs et orientations des fractures sont données par des IFS déterministes (figure 21). Ces réseaux sont connectés par définition.

Clemon and Smith [1997] utilisent les vols de Lévy pour générer les positions des fractures dans un système et imposent en plus que la longueur d'une fracture est proportionnelle au pas précédent. Le principe consiste à générer une suite d'incrémentes issus d'une distribution de Lévy (figure 17), puis à générer l'ensemble des positions des fractures selon la distribution des incréments, en prenant des orientations aléatoires. La distribution de centres ainsi générée est fractale si le système de génération est infini. Cependant les effets dus à la taille finie des systèmes ne permettent pas de prédire exactement la dimension fractale (si le marcheur aléatoire revient sur lui-même alors la distribution théorique des distances de centre à centre, en loi de

puissance, est perdue). En résumé, la méthode permet de générer (figure 22) des amas de fractures isolés, mais, en pratique, la dimension fractale n'est pas bien contrainte, à moins d'être en 1D et d'interdire le retour sur lui-même du marcheur qui définit les positions.

Les distributions de Lévy sont aussi utilisées pour modéliser des distributions d'espacements entre les intersections d'un réseau fracturé avec un transect [Belfield, 1998]. Belfield [1998] observe, sur des données acquises dans des puits (1D), des distributions d'espacements entre fractures qui ne correspondent pas au modèle poissonien classique, mais sont distribuées selon une loi de puissance. Une distribution spatiale calée sur ces données est intégrée dans la modélisation stochastique de fractures, en utilisant les outils multifractals et les distributions de Lévy. Un champ de contrainte multifractal est généré selon un processus de cascades multiplicatives, où les poids de la cascade sont tirés dans une distribution de Lévy (dont les paramètres sont fixés). Les positions des fractures sont alors tirées en fonction du champ de contrainte multifractal et en fonction de leur ouverture, qui est elle-même tirée dans une distribution de Lévy.

a)



b)

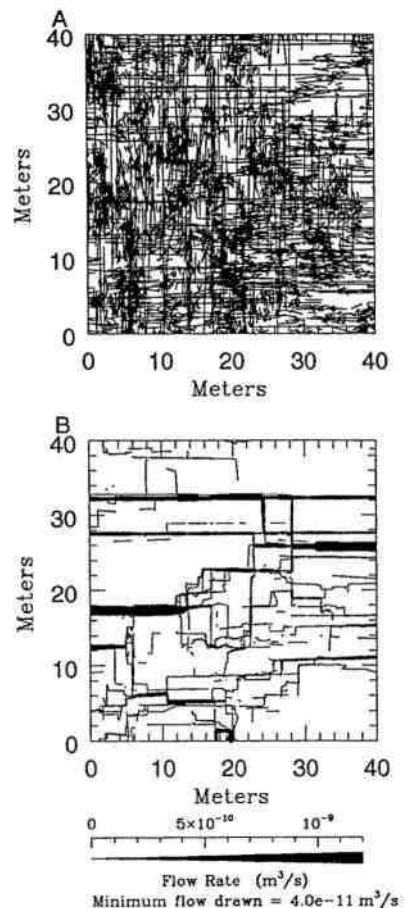


Figure 22: a) Exemple d'un vol de Lévy. Les distances entre deux points sont tirées dans une distribution de Lévy, et l'orientation est aléatoire d'un pas à l'autre. b) Réseau discret de fractures dont les positions suivent un Vol de Lévy, et flux correspondant d'après [Clemo and Smith, 1997].

1.5 METHODOLOGIE

Le travail présenté ici est centré sur la notion de corrélation spatiale dans les réseaux de fractures. Ce thème se décline sous deux aspects complémentaires qui sont d'une part la caractérisation des corrélations spatiales intrinsèques aux réseaux de fractures et d'autre part l'évaluation de leur influence sur les propriétés hydrauliques. Le premier volet porte donc sur la caractérisation: l'organisation spatiale des réseaux est-elle quantifiable et reproductible dans des modèles théoriques, comme peut l'être par exemple la distribution des longueurs de fractures, souvent modélisée par une loi de puissance. Le second volet pose la question de la pertinence de la prise en compte des corrélations spatiales dans la modélisation des propriétés hydrauliques des milieux fracturés.

Dans un premier temps les corrélations spatiales sont identifiées à partir d'un réseau naturel. Les données viennent du bassin de Hornelen en Norvège [Odling, 1997]. C'est en premier lieu la dimension fractale du réseau qui est clairement établie (Chapitre 2 et [Bour *et al.*, sous presse] en annexe). Sur ce réseau à l'organisation spatiale développée (dimension fractale et distribution de longueurs en loi de puissance), on cherche ensuite à explorer plus avant la structure spatiale de l'ensemble en caractérisant l'environnement local des fractures, et son évolution en fonction de la longueur des fractures (chapitre 2). Les corrélations spatiales illustrées sur le réseau de Hornelen ne sont pas toutes supportées par un modèle théorique sous-jacent. La dimension fractale du réseau, qui traduit l'évolution de la densité de fracturation en fonction de la taille du système d'observation, est elle pleinement intégrée au modèle théorique de [Davy *et al.*, 1990]. Dans la suite, c'est donc avant tout la nature fractale des réseaux de fractures que l'on désigne par le terme de corrélation spatiale. La corrélation spatiale est alors étudiée dans le cadre d'un modèle de réseau couplant une nature fractale pour la densité de fracturation (dimension fractale D) avec le modèle plus classique de distribution de longueurs en loi de puissance (exposant a). L'addition d'une distribution de perméabilité locale (ouvertures) associée aux fractures n'est pas intégrée directement mais peut servir de point de comparaison [Charlaix *et al.*, 1987; de Dreuzy *et al.*, 2001b] et l'étude ici est centrée sur l'effet de structure associé aux réseaux de fractures.

A ce niveau, la caractérisation des corrélations spatiales est encore incomplète: en effet, rien ne permet de dire a priori que les corrélations spatiales observées sur un affleurement (2D) sont le reflet d'une dimension fractale associée au réseau parent tridimensionnel, et non pas simplement un effet d'échantillonnage. De même, on ne sait pas si la dimension fractale associée à un réseau 2D peut être mesurée à partir d'un échantillon monodimensionnel. Pour répondre à ces questions une analyse stéréologique est nécessaire et elle est réalisée sur la base d'un développement théorique et d'une validation numérique (chapitre 3).

Pour les simulations numériques, il est nécessaire de développer un processus de génération de réseau synthétique dont la base théorique est donnée dans [Davy *et al.*, 1990; Bour *et al.*, sous presse]. On a revu dans la partie précédente des processus de génération de réseaux de fractures ayant des propriétés fractales, et un ensemble de méthodes qui permettent de générer des structures fractales. Parmi ces méthodes on choisit la plus adaptée dans le cadre de notre démarche de modélisation stochastique de réseaux de fractures discrètes (Chapitre 2).

L'étude des propriétés hydrauliques est abordée dans la dernière partie de la thèse (Chapitre 4). La matrice entourant les fractures est considérée en première approximation comme étant totalement imperméable. Une étude préliminaire de la connectivité seule est réalisée dans un premier temps. Elle permet de définir, dans l'espace des paramètres (a, D) , les zones pour lesquelles les réseaux peuvent être ou ne pas être connectés. En fonction de cette étude préliminaire l'influence des corrélations spatiales sur les propriétés hydrauliques est ensuite évaluée pour les gammes de réseaux qui peuvent être connectés. Toute cette partie porte sur des réseaux bidimensionnels. L'évaluation de l'influence des corrélations spatiales sur les propriétés hydrauliques des réseaux tridimensionnels n'est pas directement abordée ici.

PARTIE 2

2 CARACTERISATION ET MODELISATION DES CORRELATIONS SPATIALES

L'objet de ce chapitre est double. La première partie est consacrée à l'illustration de la caractérisation géométrique sur un réseau fracturé naturel. L'accent est porté sur la mise en évidence des corrélations spatiales et leur représentation éventuelle à travers un modèle théorique. La seconde partie du chapitre aborde une question plus technique, qui est celle de la génération de réseaux fracturés synthétiques intégrant des corrélations spatiales.

2.1 CARACTERISATION GEOMETRIQUE D'UN RESEAU NATUREL: EXEMPLE DANS LE BASSIN DE HORNELEN

La mise en évidence de corrélations spatiales est réalisée sur un réseau fracturé naturel, situé dans des grès du Dévonien dans le bassin de Hornelen (Norvège). Le système fracturé est constitué de joints. Il peut être considéré comme de type non stratifié [Odling *et al.*, 1999]. De tels systèmes présentent souvent une distribution de longueurs de fracture en loi de puissance, ainsi qu'une densité spatiale hétérogène [Odling *et al.*, 1999]. Le site présente une excellente exposition, permettant des observations depuis l'échelle du mètre jusqu'à l'échelle du kilomètre [Odling, 1997]. En conséquence la zone d'étude a été échantillonnée à plusieurs échelles par des méthodes différentes, allant de l'observation directe pour la plus petite carte (18x18m), à la photographie aérienne pour les plus grandes (de 90x90m à 720x720m) [Odling, 1997]. En tout, il y a 7 cartes pour des tailles allant de 18x18m à 720x720m et chacune contient plus de 2000 fractures (figure(1)). Ainsi, chaque échantillon représente une fenêtre d'observation du réseau global, dont la limite inférieure de résolution est donnée par la méthode d'échantillonnage et la limite supérieure par la taille du système. La distribution des longueurs de fractures a été étudiée par [Odling, 1997], puis revue dans une optique de modèle plus global par [Bour *et al.*, sous presse].

2.1.1 distribution des longueurs et distribution spatiale de densité

Les résultats décrits dans cette partie sont tirés de [Bour *et al.*, sous presse] (annexe 2). La distribution des longueurs de fracture ainsi que la répartition spatiale de la densité de fracturation sont étudiées dans l'optique de validation du modèle [Davy *et al.*, 1990]:

$$n(l, L) = \alpha L^D l^{-a} \text{ eq(1)}$$

où D_M est la dimension de masse associée aux centres de fractures et a l'exposant de la distribution des longueurs. Le facteur α est le terme de densité de fractures. Les distributions de longueurs de fracture ont été calculées séparément pour chacune des cartes et sont représentées sur les figures 3. La dimension de masse D_M est par définition l'exposant tel que, en moyenne, le nombre d'éléments dans un disque centré sur le fractal évolue comme $N(L) \sim L^{D_M}$, avec L le rayon du disque [Mandelbrot, 1982]. A condition de corriger des effets de résolution limitée, la mesure de la dimension de masse est équivalente à la mesure de dimension de corrélation [Bour *et al.*, sous presse]. La dimension de corrélation, notée D_c ou D_2 , se déduit directement de l'évolution de la fonction de corrélation à deux points, $C_2(r)$, [Viseck, 1992]. La fonction de corrélation a été calculée pour les 7 réseaux de Hornelen. Sur la figure 2, l'évolution de $C_2(r)$ est représentée après normalisation, donnant ainsi une mesure indépendante de l'échelle d'observation. L'ensemble des courbes, sur une gamme variant entre $L/20$ et $L/5$, s'alignent sur une droite évoluant comme $L^{1.8}$. Pour les plus petits réseaux, la gamme de stabilité de la dimension fractale est encore plus grande. On en déduit que la dimension $D_c=1.8$ traduit les propriétés fractales de l'ensemble de réseaux de Hornelen. Bour *et al.*, [sous presse], montrent de plus que $D_0 \approx D_c \approx D_q$ (D_q = dimension généralisée d'ordre q) sur chacun des 7 réseaux, validant ainsi l'hypothèse que le système fracturé de Hornelen peut dans son ensemble être considéré comme un monofractal, caractérisé par une unique dimension fractale $D=1.8 \pm 0.1$. Cependant, la mesure de D_0 étant très sujette aux effets de taille finie, l'hypothèse d'un réseau faiblement multifractal n'est pas totalement écartée.

Les distributions des longueurs mesurées indépendamment sur les 7 réseaux sont représentées sur la figure(3a). Ces distributions sont sensibles aux effets de taille finie et de résolution [Laslett, 1982; Pickering *et al.*, 1995; Clark *et al.*, 1999], qui peuvent être corrigés en partie. Cependant les réseaux traités séparément ne permettent d'observer la distribution des longueurs que sur au maximum 1 à 1.5 ordre de grandeur, ce qui empêche une mesure très précise. La normalisation des distributions de longueur est forcément dépendante du modèle de densité qui fixe la relation entre le nombre de fractures et la taille du système d'observation. Pour le réseau de Hornelen la densité de fracturation évolue comme L^D , avec $D=1.8$, c'est donc par ce terme que sont normalisées les distributions de longueurs (figure 3b). Mis à part les parties de courbes correspondant aux longueurs mal échantillonnées à cause des échelles de résolutions, les 7 distributions s'alignent bien selon une droite (pour une représentation dans un diagramme log-log), validant ainsi un modèle global de distribution en loi de puissance avec un exposant a pour la distribution des longueurs à peu près égal à 2.8, et une dimension fractale $D=1.8$.

Ainsi, l'analyse couplée des données sur l'ensemble des échantillons permet de valider le modèle $n(l,L) = \alpha L^{D_M} l^{-a}$ sur pratiquement 3 ordres de grandeur [Bour *et al.*, sous presse], et avec les paramètres $\alpha=3.5$, $a=2.75$ et $D_M = D=1.8$. Le fait que $a \approx D+1$ implique que, quelle que soit l'échelle d'observation L , le nombre de fractures dont la longueur est proportionnelle à βL est constant, c'est à dire que le système semble le même à chaque échelle, il est self-similaire.

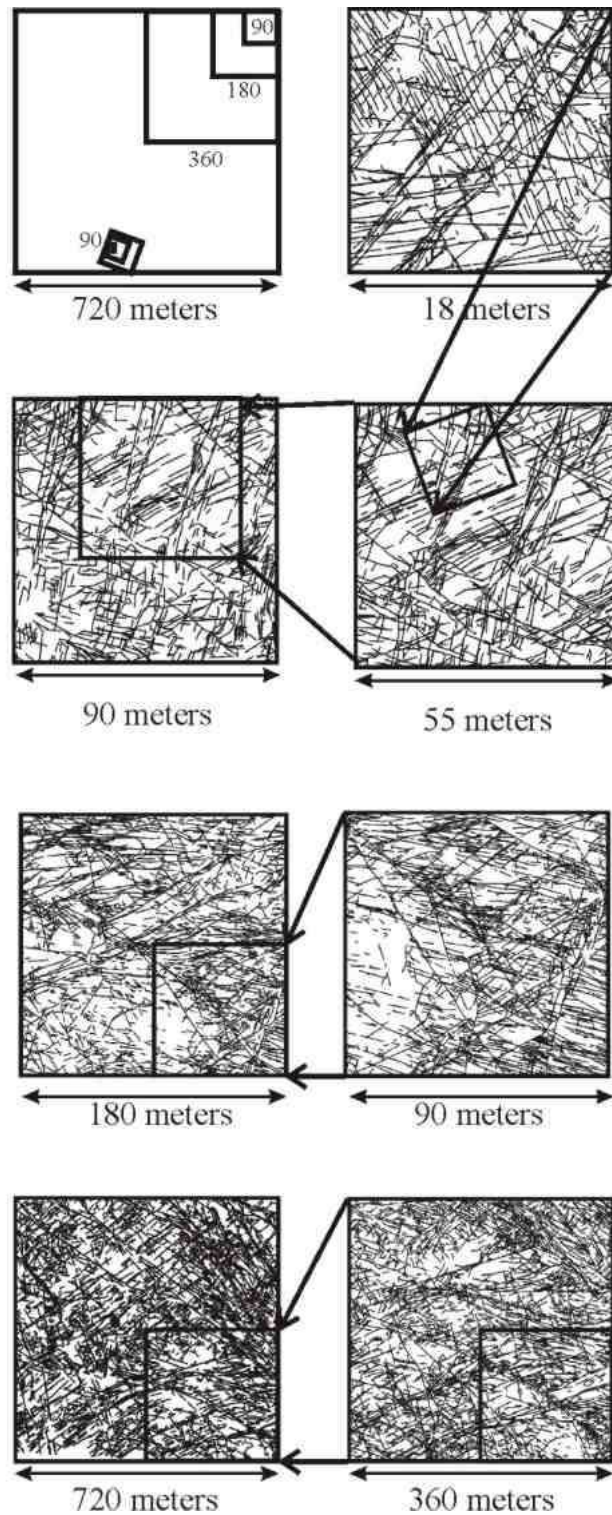


Figure 1: Cartes des sept réseaux fracturés provenant du bassin de Hornelen. Les procédures d'acquisition de chacune des cartes sont décrites dans [Odling, 1997].

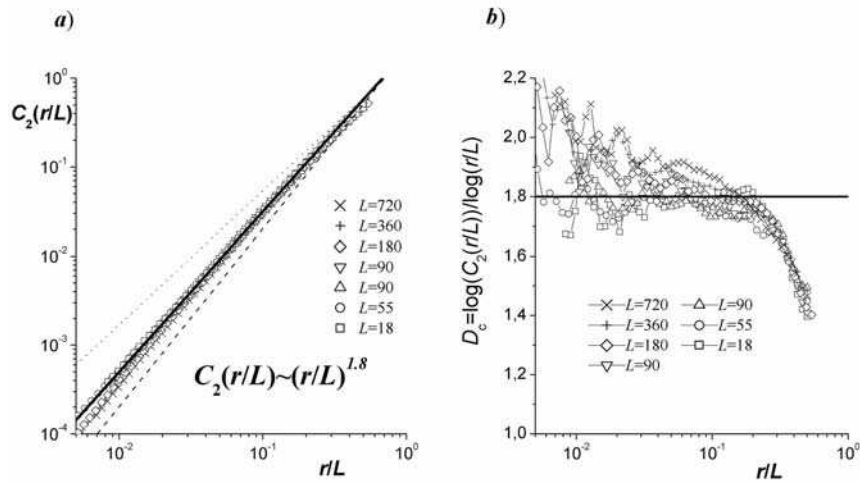


Figure 2: calculs de la fonction de corrélation à deux points pour les différents sous-réseaux. (carrés: $L=18\text{m}$, cercles, $L=55\text{m}$, triangles haut: $L=90\text{m}$, triangles bas, losanges: $L=180\text{m}$, croix droites: $L=360\text{m}$, croix penchées: $L=720\text{m}$). a) fonction de corrélation normalisée $C_2(r/L)$ en fonction de r/L . $C_2(r/L)$ est ajustée pour tous les réseaux par $C_2(r/L) \approx (r/L)^{D_c}$ (ligne noire) avec $D_c=1.8$. Les lignes en pointillés correspondent respectivement à $C_2(r/L) \approx (r/L)^2$ and $C_2(r/L) \approx (r/L)^{1.5}$. b) Variations des pentes locales $d(\log C_2(r/L))/d(\log(r/L))$ correspondantes. D'après [Bour et al., sous presse].

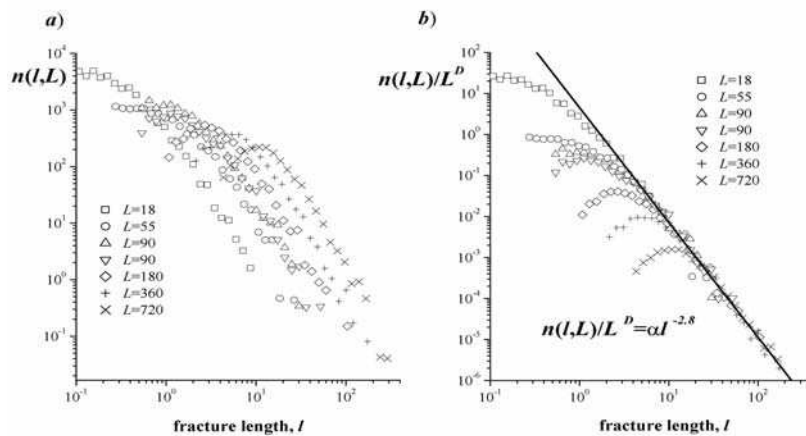


Figure 3: distributions des longueurs de fracture pour les différents réseaux (carrés: $L=18\text{m}$, cercles, $L=55\text{m}$, triangles haut: $L=90\text{m}$, triangles bas, losanges: $L=180\text{m}$, croix droites: $L=360\text{m}$, croix penchées: $L=720\text{m}$). a) Distributions non normalisées. b) distributions normalisées: la ligne continue correspond à une distribution en loi de puissance pour l entre 2 et 200 mètres avec $a=2.8$. D'après [Bour et al., sous presse].

2.1.2 corrélations position - longueur

Le réseau fracturé de Hornelen a une organisation spatiale forte, puisque sa distribution de longueurs de fracture, ainsi que la densité de fracturation (pour les centres de fractures) suivent des lois d'échelle dont les exposants sont définis sur plus de trois ordres de grandeurs. Ces deux propriétés sont incluses dans le modèle au premier ordre de l'équation 1. Un degré de corrélation spatiale supérieure impliquerait des corrélations entre les différents paramètres géométriques (position, longueur, ouverture, orientation). Plusieurs travaux ont montré la présence de corrélations entre longueur et position de fracture [Ackermann and Schlische, 1997; Bour and Davy, 1999]. Dans cette partie, nous nous attachons à mettre en évidence les éventuelles corrélations reliant la position d'une fracture avec ses autres paramètres géométriques, pour les données du réseau fracturé de Hornelen.

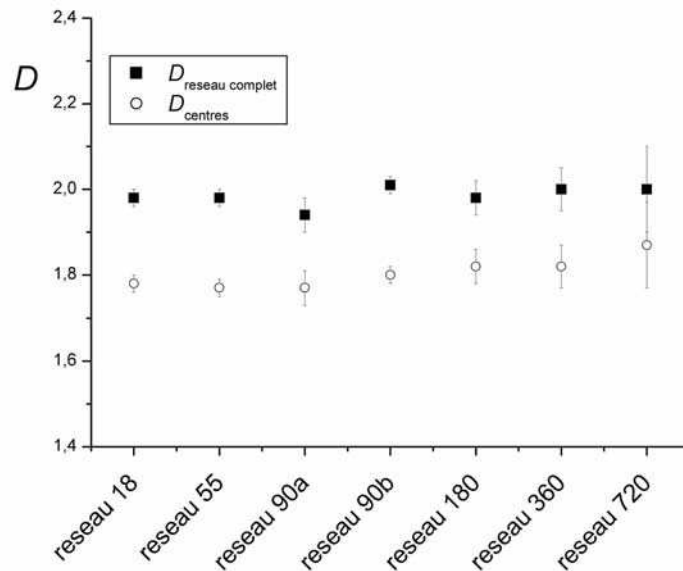


Figure 4: Dimension fractale calculée pour chacun des 7 réseaux de Hornelen, sur les centres de fractures (carrés pleins) et sur les centres de fractures pondérés de la masse de fracture (ronds vides).

Le premier indice allant dans le sens de la présence de corrélations entre la position et la longueur des fractures vient de l'écart observé sur la dimension fractale quand elle est calculée sur l'ensemble des centres ou sur l'ensemble des centres pondérés par la longueur des fractures [Bour, 1997]. En effet, la dimension observée sur le réseau total est quasiment égale à 2, traduisant ainsi une homogénéisation du système complet par rapport à la seule répartition des centres de fractures, qui a elle une dimension égale à 1.8 (figure 4). Des simulations réalisées en repositionnant aléatoirement les fractures sur les centres montrent qu'alors la dimension du réseau total reste équivalente à celle de la distribution des seuls centres. La valeur de dimension égale à 2 observée sur le réseau total traduit donc une homogénéisation du système, qui ne peut venir que d'une corrélation entre position et longueur des fractures.

Une étude statistique est alors menée pour caractériser directement la relation entre position et longueur des fractures. On emploie le terme de corrélation à courte portée dans le sens où c'est l'environnement local des fractures qui est directement caractérisé, par opposition aux lois d'échelles (longue portée) du modèle de l'équation 1.

2.1.3 Projet d'article : **Fracture neighboring , short range correlations**

par C. Darcel, O. Bour et P. Davy

Principe de l'étude. Caractériser les corrélations spatiales de réseaux de fractures par la caractérisation des corrélations entre les positions et les longueurs des fractures, à travers la détermination de l'environnement local des fractures et des distances centre à centre. Détermination de l'évolution de l'environnement local en fonction de la longueur des fractures et caractérisation de la dépendance d'échelle.

Plan. La partie (II) de l'article constitue un résumé de la première partie de ce chapitre. Elle donne une brève description des données exploitées (réseau de Hornelen), ainsi que du modèle théorique en double loi d'échelle qui leur est associé. La partie (III) décrit la méthode développée pour caractériser les corrélations locales. Dans la partie (IV), la méthode de caractérisation est appliquée aux données de terrain. Une interprétation des résultats obtenus est donnée dans la partie (V), suivie des conclusions (VI).

Résumé des résultats. Le système fracturé de Hornelen présente des corrélations statistiques entre la longueur et la position des fractures sous la forme:

$$d(l) \sim l^\beta \text{ eq(2)}$$

où $d(l)$ est la distance moyenne entre le centre d'une fracture de longueur l et son plus proche voisin. Cet effet est observé à toutes les échelles étudiées, depuis une limite naturelle inférieure aux alentours de 1m, jusqu'à la taille du système. L'étude de l'environnement spatial local autour des fractures indique qu'il existe en moyenne une zone d'écran de forme ellipsoïdale autour de chaque fracture, dont l'aire est positivement corrélée à la longueur de la fracture. Cette observation peut être interprétée comme la trace des interactions mécaniques entre fractures durant la croissance du réseau. Ce résultat implique aussi que statistiquement les grandes fractures sont plus isolées alors que les petites sont plus groupées. Ce comportement peut conduire à une homogénéisation du réseau considéré comme un ensemble des traces de fractures, par rapport à l'ensemble des centres de fractures.

Cross-correlation between length and position in fracture networks

C. Darcel, O. Bour, P. Davy

Géosciences Rennes, UMR 6118 CNRS, Université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Abstract. By analyzing local geometrical properties of a dense multiscale fracture pattern, we characterized statistically the correlations between the length and the position of a fracture. Apart from some resolution effects, we show that the mean distance between a fracture center and its nearest neighbor is correlated to its length l such as $d \sim l^{0.3}$. Likewise the average area around each fracture center free of other fracture has an ellipsoidal shape whose factor of anisotropy is correlated to l : the long axis, parallel to the fracture strike, is correlated to l such as $d \sim l^{0.25-0.3}$, whereas the short axis remains invariant, and about equal to the equivalent distance in a random fractal. At small scale, i.e. less than 1 m which is bed thickness, the shield area is isotropic. In addition to refining of geometrical model of fracture networks, such observations place some constraints on the stress interactions that prevail during fracture growth.

Introduction

Scaling-laws and fractal geometry are often found to be largely applicable models for many aspects of fracture system characterization [Bonnet *et al.*, 2001]. In particular, the spatial distribution of fractures as well as the fracture size distributions are expected to follow scaling laws. The size distributions are generally analyzed independently of the spatial distribution although it is well known from mechanical arguments that the length of a fracture is a critical parameter for fracture growth [Scholtz, 1990]. Only few studies have tried to characterize the possible relationships between the size of a fracture and its position within the fracture network. For instance, Segall and Pollard [1983] showed that for a sparse population of sub-parallel joints, the longer joints effectively restrain the shorter cracks from propagation, so that longer fractures tend to create a crack shield that inhibit the propagation of other fractures. Ackermann and Schlische [1997] found that smaller sub-parallel normal faults were anticlustered around larger structures. They related this spatial distribution to a stress-reduction shadow around the larger faults. A correlation between length and position has been also suggested for large-scale dense fracture networks such as the San-Andreas fault pattern [Bour and Davy, 1999].

All these observations suggest therefore a correlation between the length of a fracture and its distance to others. Here, we analyze in detail a multi-scale fracture pattern that has been sampled on outcrops of the Hornelen basin [Odling, 1997]. We aim at characterizing the local environment of the fractures by investigating the size and shape of the area surrounding each fracture.

Hornelen fracture data set

The Hornelen fracture pattern is representative of typical joint systems in massive rocks, systems that are wide-spread in nature [Odling, 1997]. The data set consists of seven embedded fracture maps (Figure 1) whose sizes go to 18x18 meters up to 720x720 meters. Each map represents a sub-sample of the whole Hornelen fracture pattern, with a lower bound controlled by the resolution scale of the mapping method and a higher bound given by the sample size [Odling, 1997].

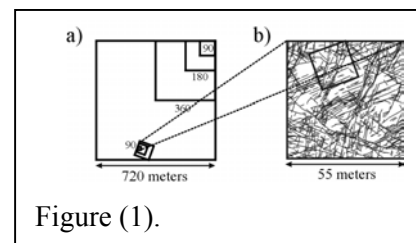


Figure (1).

This outstanding dataset has already been used to assess the first-order scaling model relevant to fracture networks [Bour *et al.* in press], which is a double power law in both space and length:

$$n(l, L) = \alpha L^D l^{-a} \quad (1)$$

where $n(l, L)dl$ is the number of fractures having a length between l and $l+dl$ in a box of size L , D is the fractal dimension of fracture centers, a the exponent of the frequency distribution of fracture lengths, and α a fracture density term [Davy *et al.*, 1990]. This double power-law model has been found to be valid over almost three orders of magnitude with $a=2.75$ and $D=1.8$ [Bour *et al.*, in press].

The first-order model gives is basically a density description. By studying correlation between length and density, we make a further step towards a description of fracture organization.

Methodology and theoretical developments

The most convenient and simple measure to characterize possible local correlations between fractures, is to consider the average center-to-center distance, $d_c(l)$, between a fracture of length l and its nearest neighbor [Bour and Davy, 1999].

For a random fractal object (Figure 2b and 2c), [Bour and Davy, 1999] showed that the mean minimal center to center distance between neighbors d_{\min} depends only on the system size L and on the number of fractures lying within that system :

$$d_{\min}(L) = C \frac{L}{(N(L))^{1/D}}, \quad (2)$$

where D is the fractal dimension, and C a constant of proportionality that equals 0.5 for $D=2$.

A dependence between $d_c(l)$ and l would obviously imply a correlation between the position of a fracture and its length. For instance, for space filling objects such as Apollonians [Mandelbrot, 1982], one expects a linear relationship between the size of an object and the distance to its nearest neighbor so that $d_c(l) \sim l$. In Figure 2a, we propose an example of fracture network where $d_c(l) \sim l$.

For the San-Andreas fault pattern Bour and Davy [1999] found :

$$d_c(l) \propto l^\beta, \quad (3)$$

with $\beta \sim 0.25$ implying that small fractures have their nearest neighbor located at smaller distances than larger ones. In the following, d_c is calculated for each fracture of the network and $d_c(l)$ is obtained through the averaging of d_c for the different fracture length classes.

To characterize the average shape and size of the area surrounding a fracture of length l , we calculate the average distance between the center of a fracture and the first intersection with another fracture in the direction θ defined with respect to fracture azimuth (Figure 3). This parameter, $d_f(\theta, l)$, that is measured all around fracture centers with $\theta \in [0, \pi]$, provides a direct estimation of the area around a fracture center into which no other fracture portion is lying. In practice, the distances $d_f(\theta, l)$ are calculated with a discrete step $\Delta\theta$ equal to 18° . The mean values of $d_f(\theta, l)$ are calculated for each θ over all fractures belonging to the same class of length. We arbitrarily fixed $\theta=0$ in the direction of the fractures strike ($d_f(0, l) = d_{//}(l)$) and $\theta=90^\circ$ in the direction perpendicular to the fracture ($d_f(\pi, l) = d_{\perp}(l)$), as it is illustrated in Figure 3b. Not that for a uniformly distributed fracture network, we expect the average size of the non-fractured blocks, r_{block} , to be expressed through the relation :

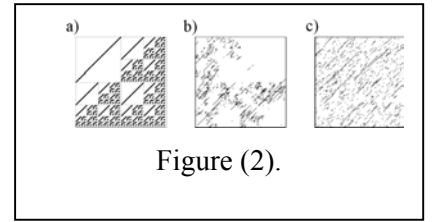


Figure (2).

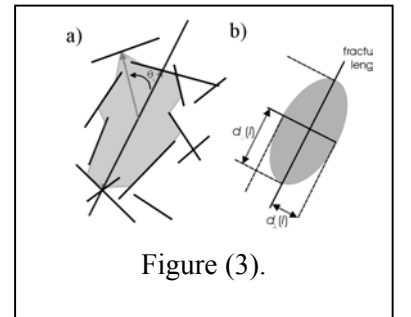


Figure (3).

$$r_{block} \propto \frac{L^2}{M(L)}, \quad (4)$$

where $M(L)$ is the cumulative length of the fractures included in the system of linear size L .

In the following, we compute the distances $d_c(l)$ and $d_f(\theta, l)$ for the different fracture maps and compare their variations with Equations (2), (3) and (4). Note that the measurements of $d_c(l)$ and $d_f(\theta, l)$, is meaningful only in a statistical sense when dealing with stochastic fracture networks such as natural systems.

Except for the appollonian case, the distances $d_c(l)$ and $d_f(\theta, l)$ should depend on the number of elements (see (3) and (4)). Therefore, it should depend on the map resolution scale that is defined as the scale below which fractures are not detected. For the Hornelen data set, the resolution scale is related to the map size [Odling, 1997]. For that reason, we calculate in the following $d_c(l, L)$ and $d_f(\theta, l, L)$ where L the system size of the different fracture maps, is a proxy to indicate the map dependency.

Results

Center-to-center distance between fractures

Variations of $d_c(l, L)$ for the seven maps of the Hornelen fracture pattern are displayed in Figure 4a. The offset of the different curves is simply due to the limit of resolution that varies from map to map. Since the number of fractures is approximately the same for the different fracture maps, the distances between fractures increases when one increases the size of the system. But, whatever the map considered, $d_c(l, L)$ is positively correlated with l , implying a correlation between the fracture position and the fracture length. For each fracture map, it is possible to model this correlation by a power-law such as $d_c(l, L) \sim l^\beta$, for the small fracture length range (Figure 4a). The exponents obtained for β are of about 0.3 ± 0.1 whatever the fracture map. The uncertainty depends strongly on the range of lengths assumed for the fit. But it is clear also that for each fracture map, the distances do not vary significantly with l for the large fracture length range.

Whatever the map, the power-law model is valid as long as $d_c(l, L)$ is about larger than $l/2$. In other words, the correlations between fracture appears to be hardly discernible when the distances between fractures are smaller than half of the fracture length. We believe that this effect is intrinsic to this point-to-point measure which put emphasis on the fracture center. If we assume that correlation exists, and that it concerns a particular point of the fracture (for instance the initial nuclei) which is not known a priori, then correlation is measurable only if the point-to-point distance is larger than fracture length. If not, the system should look like uncorrelated due to this uncertainty. This is indeed what is observed here.

To check the consistency of our results with all fracture maps, we plot the normalized curve : $d_c(l, L)/d_{\min}(L)$ versus $l/l_{\min}(L)$ (Figure 4b), where $d_{\min}(L)$ is the point-to-point distance in the absence of correlation (see equation 2 and previous paragraph), and l_{\min} is the smallest fracture length. l_{\min} is estimated from the total number of fractures $N(L)$ by assuming that model (1) is valid down to $l=l_{\min}$. Note that for a self-similar fracture pattern – i.e. if $a=D+1$ as it is for the Hornelen fractures [Bour *et al.*, in press] –, $d_{\min}(L)$ is equal to $l_{\min}(L)$ so that the normalization is similar for both axes. For all the fracture maps, we obtain a unique global model that follows $d_c(l) \sim l^{0.3}$ at small length over approximately one order of magnitude. For larger values of $l/d_{\min}(L)$, $d_c(l)$ is approximately constant in agreement with the uncorrelated case.

Local environment around fractures

We have calculated $d_f(\theta, l, L)$ (see previous paragraph) which is the distance free of fractures around a fracture of length l (figure 5a) in a direction θ , and for

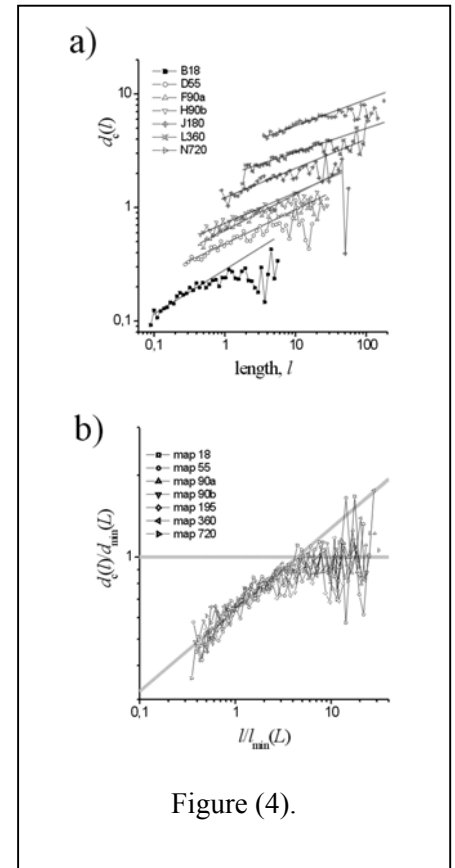


Figure (4).

a map L . Whatever map and fracture length, this distance about defines an ellipsoid whose long axis $d_{//}(l,L)$ is parallel to fracture strike. The short axis, noted $d_{\perp}(l,L)$, is obviously perpendicular to strike. The in-strike axis, $d_{//}(l,L)$ increases with fracture length as a power law: $d_{//}(l,L) \sim l^{\gamma}$, with $\gamma = 0.25 \pm 0.05$ for all maps except the 18x18m map for which the exponent is a bit smaller. In contrast the short axis $d_{\perp}(l,L)$ is about constant with l (Figure 5b) emphasizing an absence of correlation perpendicular to fracture strike. $d_{\perp}(l,L)$ is about equal to r_{block} defined in equation (4) (dotted lines Figure 5b), in agreement with an expected behaviour for uncorrelated systems.

From a mechanical point of view, the distance to other fractures defines a kind of shield area that surrounds a fracture, whose shape is illustrated in figure 5c. This shield area expresses both stochasticity (initial defaults for instance) and mechanical determinism due to stress interactions between fractures. The model of isolated fractures, with a stress enhancement at fracture tips and a stress decrease around fracture centre, would at least predict $d_{//} \sim l/2$, and d_{\perp} dependent on l [Segall and Pollard, 1983]. Clearly the results are inconsistent with such simple scheme and fracture interactions are likely to be dominated by much more complex interactions which produce long-range correlation responsible of fractal behaviour [Davy *et al.*, 1995]. The fact that d_{\perp} is constant with l and about equal to the average distance in random uncorrelated fractals casts some doubt on the existence of any mechanical shield area around fracture center. The increase of $d_{//}$ with l emphasizes that most of stress correlation are along fracture strike.

In terms of pure geometry, the smallest fractures mostly appear isolated and unconnected to others (Figure 5c) since there $d_{//}$ and d_{\perp} are larger than $l/2$, while the largest ones are connected. This result is consistent with theoretical predictions made on the power-law fractal model [Bour and Davy, 1997]. In absolute value, the fracture distance increases with fracture length, but much slower than l so that long fractures appear actually much clustered than small ones by reference to their length.

Despite resolution effects which can modify differently $d_{//}$ and d_{\perp} , we find that the isotropic point ($d_{//} = d_{\perp}$) is predicted for fracture length of about 1 m whatever the map. This point is directly measured on the smallest map ($L = 18$ m) for which $d_{//} = d_{\perp}$ whatever $l < 1$ m. We believe that this scale has a physical meaning: it corresponds to bed thickness [Odling, 1997], and direct observations at the outcrop scale show that fracturing is seldom below this scale.

Summary

We investigated the local correlations within the multi-scale fracture pattern of the Hornelen basin. We show that the fracture length and the fracture position are two geometrical parameters that are statistically correlated whatever the fracture maps analyzed. In average, the larger is a fracture, the larger is the distance to cover before encountering another fracture center. But our results suggest also that due to some intrinsic effects, the characterization of such correlations remains nevertheless limited to a certain fracture length range. The correlation between fracture length and position is also observed when analyzing the local environment of fractures. Whatever the maps and fracture lengths, The average area free of fractures around each fracture center has an ellipsoidal shape. The long axis is parallel to fracture strike, and is positively correlated to fracture length by a relationship of the form: $d_{//} \sim l^{0.25}$. In contrast the short axis, which is perpendicular to fracture strike, is uncorrelated with fracture length and about equal to the equivalent distance of a random fractal.

Such local correlations may be interpreted as remote consequences of the mechanical interactions between the fractures during fracture growth. However, before analyzing the consequences or the links of such local correlations with mechanical or hydraulic models of fracture networks, it remains necessary to provide a global geometric model that includes second-order correlations. It implies the full understanding of the role played by the scale of resolution on the parameters characterizing the local correlations. It remains also necessary to

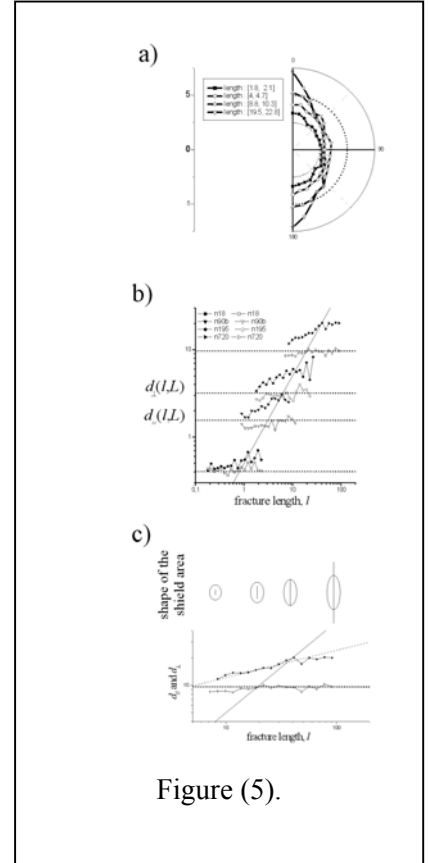


Figure (5).

confirm the possible existence of a critical length scale around 1 meter below which the crack shield is no more anisotropic.

Acknowledgements

We wish to thank our partners of the EC project SCALFRAC for fruitful discussions about the geometry of fracture networks. In particular, N. Odling is greatly thanked for having provided the data of the Hornelen fracture network. We wish to thank also the French CNRS and the European Community (contract SCALFRAC ENV4-CT97-0456 and contract SALTRANS EVKI-CT-2000-00062) for their financial support.

References

- Ackermann, R.V., and R.W. Schlische, Anticlustering of small normal faults around larger faults, *Geology*, 25 (12), 1127-1130, 1997.
- Bonnet, E., O. Bour, N. Odling, I. Main, B. Berkowitz, P. Davy, and P. Cowie, Scaling of Fracture Systems in Geological Media, *Reviews of Geophysics* 39(3), 347-383, 2001.
- Bour, O., and P. Davy, Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution, *Water Resources Research*, 33(7), 1567-1583, 1997.
- Bour, O., and P. Davy, Clustering and size distributions of fault patterns: theory and measurements, *Geophysical Research Letters*, 26 (13), 2001-2004, 1999.
- Bour, O., P. Davy, C. Darcel, and N. Odling, A statistical scaling model for fracture network geometry, with validation on a multi-scale mapping of a joint network (Hornelen Basin Norway), *in press*.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette, Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, *Nature*, 348 (6296), 56-58, 1990.
- Mandelbrot, B.B., *The fractal geometry of Nature*, 468 p. pp., W. H. Freeman, New York, 1982.
- Odling, N., Scaling and connectivity of joint systems in sandstones from western Norway, *Journal of Structural Geology*, 19 (10), 1257-1271, 1997.
- Scholz, C. H., *The mechanics of Earthquakes and faulting*, Cambridge University Press, 438p, 1990.
- Segall, P., and D. Pollard, Joint formation in granitic rock of the Sierra Nevada, *Geological Society of America Bulletin*, 94, 563-575, 1983.

Figure Captions

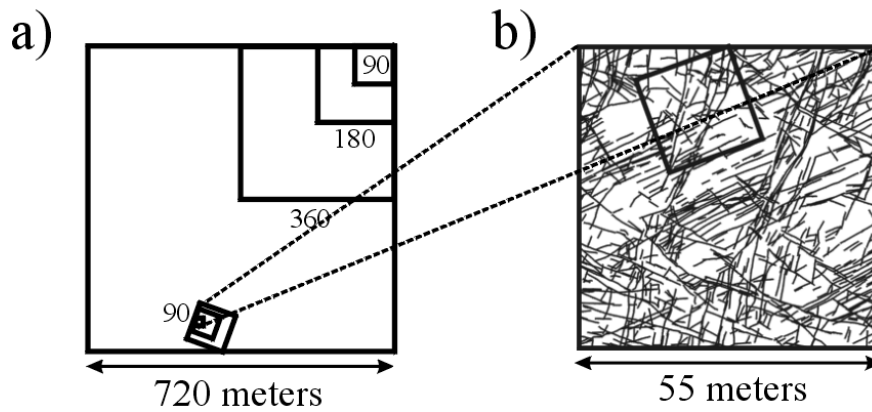


Figure (1). Sketch of the sampling procedure used to map the Hornelen fracture pattern [Odling, 1997]. a) Location of the seven fracture maps. All the maps are included within the largest system of size 720x720 meters. b) Fracture trace map that corresponds to a system size, L , equal to 55 meters.

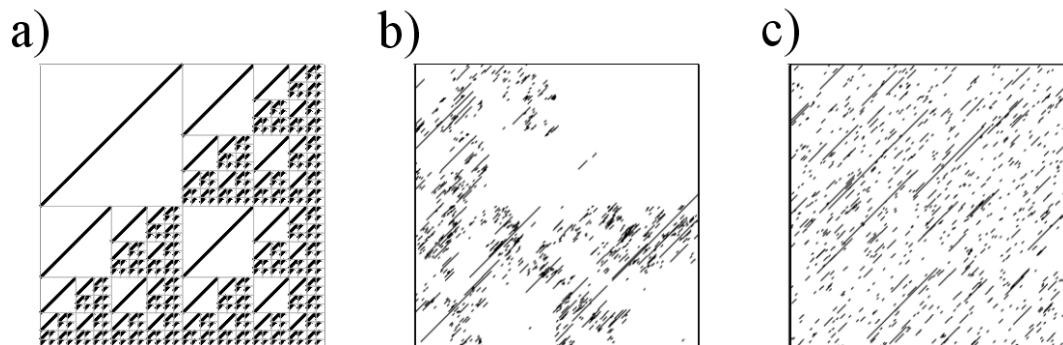


Figure (2). Examples of synthetic fracture networks following the same power-law fracture length distribution ($a \sim 2.6$), but with different spatial distributions. a) Deterministic fractal model ($D=1.585$). Fractures (solid thick lines) are located into squares (thin lines) whose distribution follows an Apollonian model. Note that each fracture has its nearest neighbor located at a distance proportional to its length, so that $d_c(l) \sim l$. b) Example of stochastic fractal fracture network with $D=1.585$ and without correlation between the length and position of fractures. c) Example of stochastic fracture network following a uniform distribution of fracture positions (fracture centers are located according to a Poisson process, $D=2$). As for b) the length and the position of a fracture are two independent geometrical parameters.

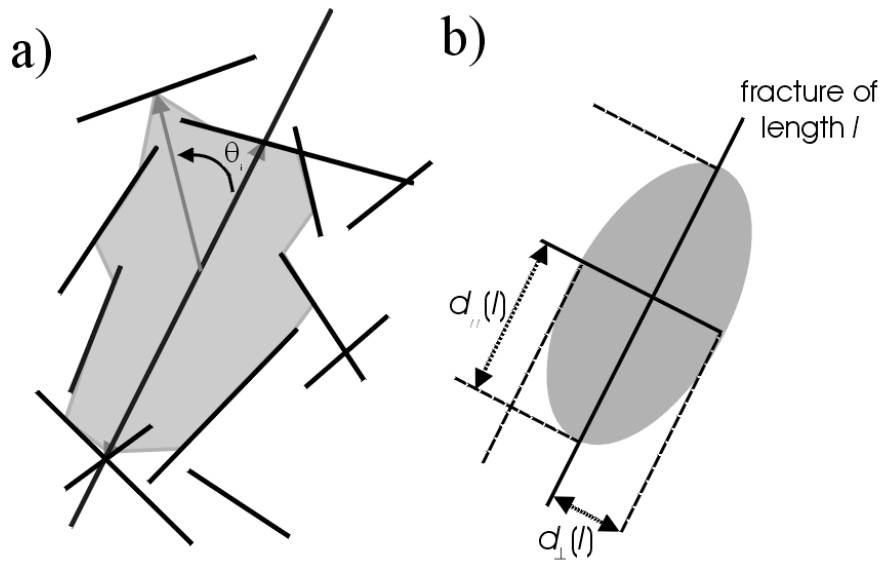


Figure (3). a) Characterization of the local environment around a fracture through the measure of the distance, $d_f(\theta, l)$, from the fracture center up to the first intersection with another fracture in a direction θ . By varying θ from 0 to π , one defines the shape of the zone around each fracture where no other fracture portion is lying (area in gray). b) The distances $d_{||}(l)$ and $d_{\perp}(l)$ are respectively defined as the distance along ($\theta=0^\circ$) and perpendicular ($\theta=90^\circ$) to the fracture strike.

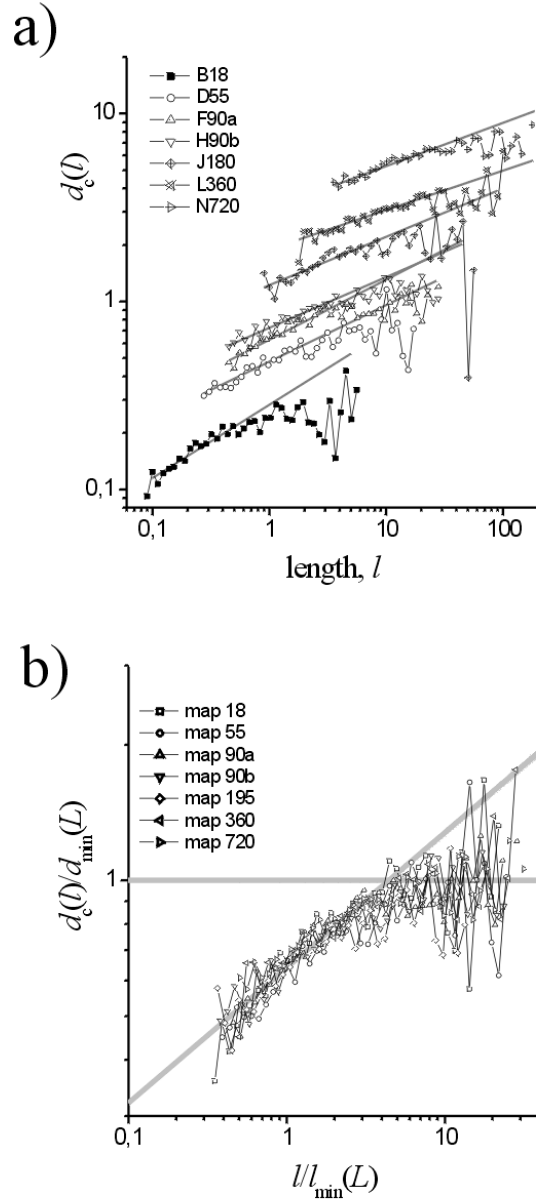


Figure 4. a) Computations of the average distance to the nearest neighbor, $d_c(l,L)$, for the seven fracture maps. The straight lines in gray correspond to power-law fits for the different fracture maps. The fits are performed over the fracture length range such that $d_c(l,L) < l/2$. b) Normalized distances $d_c(l,L)/d_{\min}(L)$ versus $l/d_{\min}(L)$.

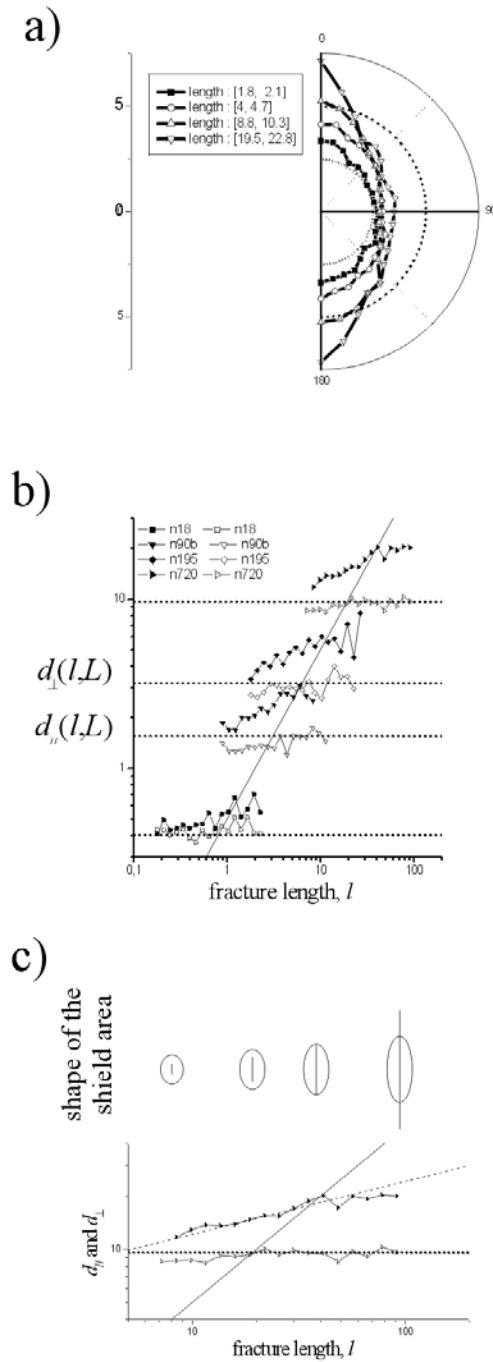


Figure 5. Characterization of the local environment around a fracture. a) Variations of the average area surrounding each fracture for different fracture lengths ($L=180$ meters). On the polar diagram, the average distance $d_i(\theta, l, L)$ is plotted as function of θ for different fracture length classes. The direction $\theta=0$ corresponds to the fracture strike, $d_{\parallel}(l, L)$. b) Variations of $d_{\perp}(l, L)$ and $d_{\parallel}(l, L)$ for different fracture maps. The results are presented only for four maps but similar results are obtained for all other fracture maps. Horizontal dotted lines correspond to the values of r_{block} (Equation (4)) calculated for the four fracture maps. c) Schematic representation of the shield area shape with respect to the fracture length, revealing the transition around the point $d_{\parallel}(l, L)=l/2$.

2.1.4 Bilan

Les précédents travaux ont montré que l'organisation spatiale du réseau fracturé naturel de Hornelen est complexe et présente les caractéristiques suivantes:

1. la distribution spatiale des centres de fractures est fractale, caractérisée par une dimension $D_M=1.8$ définie sur toute la gamme d'observation.
2. la densité fractale couplée avec la distribution des longueurs se retrouve dans le modèle de l'équation 1 où deux lois d'échelles sont couplées.
3. la distance moyenne au plus proche voisin, $d_c(l)$, augmente avec la longueur de fractures selon $d_c(l) \sim l^\beta$, avec $\beta=0.17$.
4. une zone d'écrantage autour des fractures de forme elliptique et dont le grand axe croît avec la longueur des fractures, alors que le petit axe reste quasiment constant.

Dans un cadre plus général, l'étape suivante consiste à développer un modèle de réseau synthétique qui reproduire les corrélations spatiales des réseaux naturels. Le modèle de réseau synthétique développé permettra dans un premier temps de compléter la caractérisation des corrélations spatiales dans des réseaux à travers une analyse stéréologique. Puis dans un second temps il servira de support à l'analyse de l'effet des corrélations spatiales sur les propriétés hydrauliques des systèmes fracturés.

2.2 MODELE DE SYNTHETIQUE DE RESEAUX DE FRACTURES

Dans la démarche de modélisation stochastique discrète, les paramètres géométriques sont tirés aléatoirement dans des distributions de probabilité.

Le modèle au premier ordre, qui donne le nombre de fractures de longueur l dans un système de taille L , est régi par l'équation 1. Il requiert la génération d'une distribution de longueurs en loi de puissance, ainsi que la génération d'une distribution spatiale de densité caractérisée par une dimension fractale D . Ces deux parties sont indépendantes. Le modèle ne prend pas en considération la distribution des orientations ou celles des ouvertures, mais celles-ci peuvent être rajoutées indépendamment sans problème particulier. Sous certaines conditions une corrélation entre longueur et ouverture de fracture peut être simplement ajoutée [de Dreuzy et al., 2001]. Le modèle au second ordre, qui inclut une corrélation entre la position et la longueur de fracture, est donné par l'équation 2. Il requiert la donnée du modèle de distribution des longueurs et d'un modèle de distribution des distances centre à centre. Il est donc relié à la distribution spatiale de densité. Les procédures de génération synthétique de réseau sont maintenant revues.

2.2.1 Distribution en loi de puissance

La génération d'une distribution $n(l)$ d'éléments l en loi de puissance se déduit d'une distribution uniforme, $u(l')$, par la relation:

$$u(l')dl' = n(l)dl$$

qui conduit, avec $u(l')=1$ et $n(l)\sim l^{-a}$, à:

$$l = l_{\min} l'^{1/(1-a)},$$

où l' est un nombre aléatoire entre $]0,1]$ et l_{\min} est la plus petite longueur générée. Il n'y a pas de limite supérieure.

2.2.2 Distribution fractale

Dans le cadre de l'approche discrète retenue ici, un principe général est de faire varier les paramètres (a,D,α) du modèle de l'équation 1, puis de produire pour chaque set (a,D,α) un grand nombre de réseaux synthétiques, dont les propriétés statistiques sont ensuite calculées. Celles-ci rendent compte alors de l'influence des différents paramètres (a,D,α) . Ce procédé implique plusieurs contraintes sur les qualités requises pour la méthode de génération. Le processus de génération doit en effet permettre de produire un ensemble stochastique de points, les centres des fractures, dont la dimension de masse D_M soit parfaitement prédéterminée. De plus on souhaite pouvoir générer un ensemble fractal dont la dimension D_M puisse prendre n'importe quelle valeur, pour des points inclus dans un espace de dimension euclidienne égale à 2 ou 3 (donc $D\leq 2$ ou $D\leq 3$). Enfin, afin de pouvoir manipuler indépendamment les différents

paramètres du modèle, la valeur de la dimension ne doit pas, au-dessus d'un seuil minimum, être affectée par la densité d'éléments présents dans le système, qui est fixée par α .

Dans le chapitre 1, plusieurs méthodes de génération de corrélations fractales ont été passées en revue. Les techniques des IFS sont à l'origine adaptées à la génération de structures fractales régulières à partir d'un minimum de données initiales. Cela ne correspond pas directement à notre objectif qui est de développer un processus de génération stochastique de dimension fractale préfixée. Le principe du vol de Lévy, utilisé par [Clemo and Smith, 1997], n'est pas retenu ici dans la mesure où la dimension fractale associée au vol de Lévy n'est bien contrainte que pour des systèmes infinis. De même, les procédés de génération de corrélation à longue portée par des fBm ou des fLm n'ont pas été retenus: par exemple, un fBm en 3D constitue une surface fractale dont la dimension fractale $D=3-H$ (H exposant de Hurst) est comprise entre 2 et 3. Il n'est pas possible de passer simplement de la surface fractale, décrite par l'ensemble des points $h(x,y,z)$, à un ensemble discret de points de dimension fractale donnée. Pour le fBm ce n'est pas la distribution des hauteurs en chaque point du plan (x,y) qui est fractale, mais bien la surface définie par le nuage de points $h(x,y,z)$. Au contraire, si l'on considère une distribution de poids $p(x,y,z)$ générée à partir d'un processus en cascades, alors la surface associée à l'ensemble des points $p(x,y,z)$ n'a pas de dimension fractale évidente, mais, par contre, la distribution des hauteurs ou des poids $p(x,y)$, en chaque point du plan, a des propriétés multifractales. Parmi ces différents procédés, nous avons donc choisi une adaptation de la méthode de génération par cascades multiplicatives. Elle permet de générer simplement une distribution de probabilité dont les moments sont contrôlés par les dimensions fractales du spectre multifractal. C'est en fonction de cette distribution de probabilité que les positions des centres de fractures seront tirées.

Le processus de génération est en deux temps: la première étape consiste à générer une distribution spatiale hétérogène contrainte par la valeur de dimension fractale imposée, la deuxième étape consiste ensuite à tirer les positions des fractures en fonction du champ de probabilité. Pour des raisons de commodité, toutes les illustrations dans la suite sont données pour des réseaux inscrits dans le plan, mais la méthode de génération est adaptée aussi bien au 2D qu'au 3D.

Génération du champ de probabilité fractal

Tout d'abord, le type géométrique de la cascade est déterminé, à savoir la forme et le nombre de divisions effectuées à chaque itération. Pour des raisons pratiques, nous choisissons un système initial carré ou cubique (de côté L), divisé lors de chaque itération en $n=b^d$ (pour un espace de dimension euclidienne d) sous-systèmes identiques de côté L/b (figure 5). Ainsi, le rapport de contraction l entre deux étapes est égal à $1/b$ et les sous-structures issues d'une division remplissent entièrement le système. Nous avons choisi $b=2$, alors, à chaque nouvelle itération, un bloc est divisé en $n=4$ carrés ou $n=8$ cubes, de côté L/b^i pour la $i^{\text{ème}}$ division.

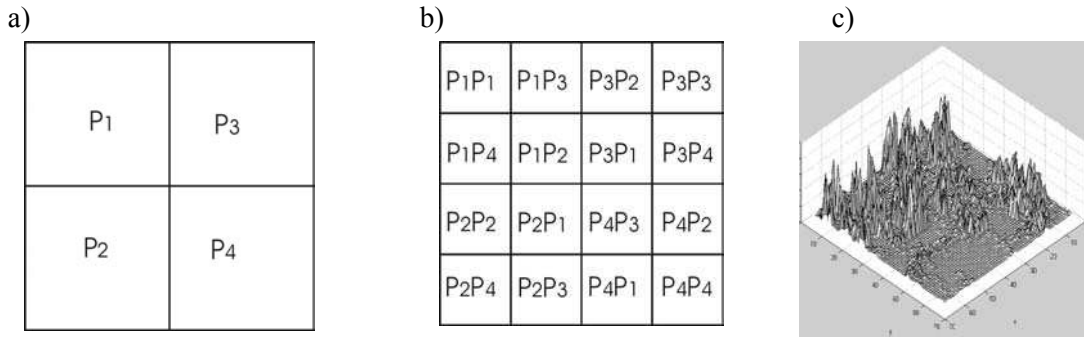


Figure 5: a) et b) Illustration des premières étapes de génération du champ de probabilité par cascade multiplicative. c) Champ de probabilité après plusieurs cascades.

Lors de chaque division un poids (une probabilité) est attribué à chaque bloc (figure 5a et 5b), qui est multiplié avec le poids de la case d'ordre supérieur correspondante. L'ensemble $\{P_i\}_{i=1..n}$ est l'ensemble des poids attribués lors d'une division. Ce sont les valeurs des $\{P_i\}_{i=1..n}$ qui permettent de contraindre la dimension fractale de la distribution. En effet, l'ensemble $\{P_i\}_{i=1..n}$ peut être relié aux valeurs des dimensions généralisées [Feder, 1988; Gouyet, 1992] par la relation:

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_i^q}{l^{\tau(q)}} = 1, \quad \tau(q) = D(q)/(q-1) \text{ eq(3)}$$

La dimension fractale associée au modèle (équation 1) est la dimension de masse D_M . On a vu plus haut que la dimension de masse est équivalente à la dimension de corrélation D_c ou dimension d'ordre 2 du spectre des dimensions généralisées. Dans la suite on notera simplement D cette dimension ($D=D_M=D_c=D_2$). L'équation 3 est complétée par l'équation qui assure la

normalisation unitaire de la distribution de probabilité. Cela fait donc deux équations pour contraindre l'ensemble $\{P_i\}_{i=1..n}$:

$$\sum_{i=1}^n P_i^2 = l^D \text{ eq(4)}$$

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \text{ eq(5)}$$

Les valeurs des $\{P_i\}_{i=1..n}$ sont tirées aléatoirement dans l'espace des possibilités conditionné par les deux équations ci-dessus. Une fois les valeurs des poids $\{P_i\}_{i=1..n}$ fixées, le champ de probabilité peut être généré en assignant lors de chaque itération les différents poids selon une permutation aléatoire. Ce processus de génération est très souple; les seules conditions qui doivent être respectées pour avoir la dimension D fixée sont les équations (4) et (5). Les poids peuvent être recalculés lors de chaque itération, ou seulement une fois pour toutes, de même que les permutations peuvent être fixées ou bien aléatoires. Le seul paramètre qui reste fixe est la

valeur de D . La cascade est itérée sur un nombre fixé d'échelles et, au final, une distribution spatiale multifractale est obtenue, comme illustré sur la (figure 5c).

Une variante du modèle consiste à forcer un nombre de cases à rester vide, c'est à dire à avoir un nombre fini de poids tels que $P_i=0$. Dans ce cas, la dimension du support de la distribution multifractale devient elle-même fractale, alors que si $P_i \neq 0 \forall i$, la dimension du support de la distribution est égale à la dimension euclidienne.

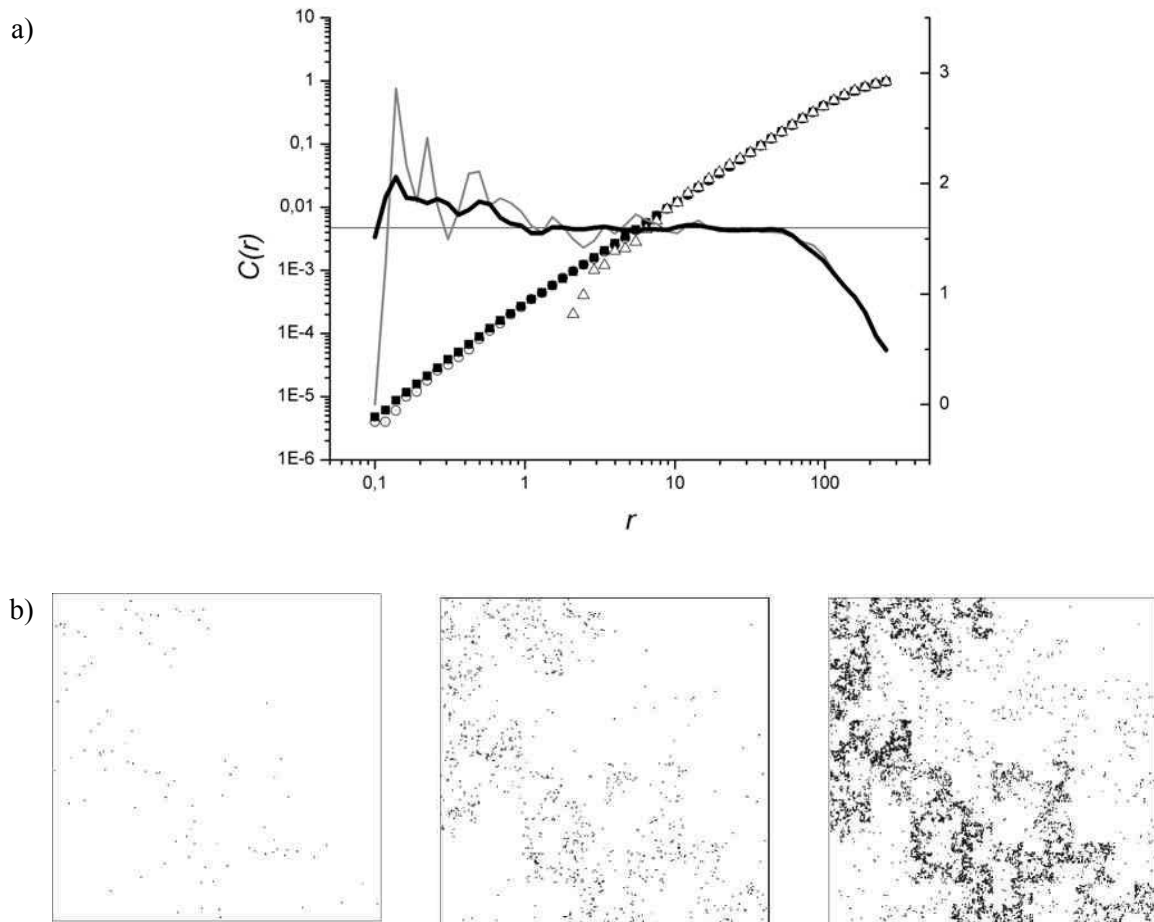


Figure 6: a) Evolution de la mesure de la dimension de corrélation ($C(r) \sim r^D$) en fonction du nombre de points pour les réseaux de (b). L'évolution de la pente locale correspondante est donnée sur l'axe de droite ($nf=8000$ $C(r)$:carrés pleins et pente locale trait épais, $nf=1000$ $C(r)$:ronds vides et pente locale trait fin, $nf=100$, $C(r)$:triangles vides et pente locale non représentée). b) Génération synthétique d'un ensemble de centres, pour $D=1.6$, $L=256$ et après 8 cascades. De gauche à droite le nombre de points nf est égal à 100, 1000 et 8000.

Enfin, si $P_i=0$ et $P_j=cste \forall j \neq i$, la distribution générée est uniforme sur un support fractal; elle est donc monofractale. Dans ce cas, si une seule case est vide lors de chaque division et que les permutations sont constantes, alors la procédure revient à générer un tapis de Sierpinski

(Chapitre 1). Enfin, le nombre d'itérations effectuées pour générer la distribution dépend du degré de raffinement nécessaire pour l'exploitation que l'on veut faire du modèle.

Génération de l'ensemble de points à dimension fixée

La deuxième étape de la génération consiste simplement à positionner les centres des fractures en fonction de la distribution de probabilité. Cette étape revient à échantillonner la distribution de probabilité et, par conséquent, un nombre minimum de points est nécessaire pour pouvoir mesurer la dimension fractale D sur l'ensemble des centres des fractures. L'évolution de la mesure de la dimension en fonction du nombre d'éléments générés dans le système est illustrée figure 6. La méthode utilisée est celle de l'intégrale de corrélation à deux points. Elle donne directement D . Théoriquement, la pente de la fonction de corrélation $C(r)$ doit varier comme r^D entre la taille du système, L , et la taille des blocs issus de la dernière division, $l_m=L/2^i$ pour i itérations. En pratique la dimension ne peut être mesurée jusqu'à la taille L du système, mais plutôt jusqu'à une taille de l'ordre de $L/4$. Cet effet est dû à la taille finie du système et à la prise de mesure dans ce système fini, mais pas à la méthode de génération.

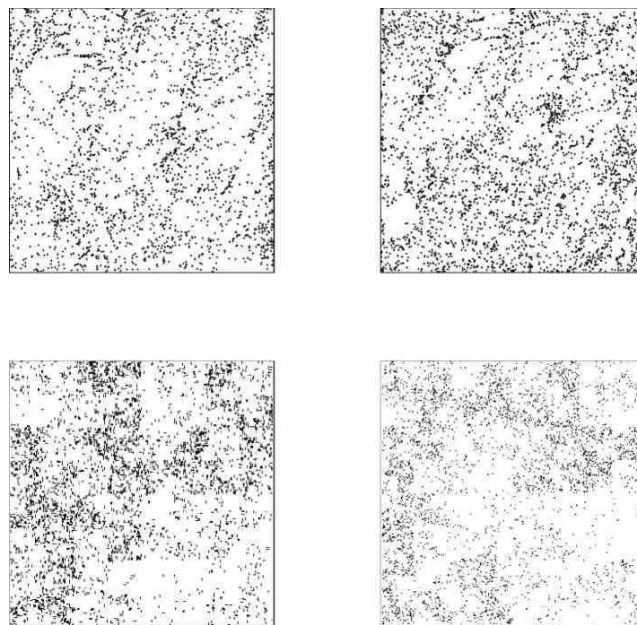


Figure 7: distributions de centres de fractures. En haut 2 réseaux de Hornelen et en bas deux réseaux synthétiques avec $D=1.8$

La structure de génération crée une organisation spatiale jusqu'à l'échelle des plus petits blocs (l_m). En conséquence, pour une échelle inférieure à la taille de ces blocs, les positions entre les points sont aléatoires et donc la dimension égale à 2. Ceci est illustré sur la figure 6b où pour le réseau à $n_f=8000$ centres, la dimension est égale à 2 en dessous de $l_m(=1)$, et égale à 1.6 au-dessus. Sur l'exemple de la figure 6, lorsque le nombre de centres diminue, la dimension reste bien définie sur toute la gamme pour $n_f=1000$, mais lorsque le nombre de points devient insuffisant, $n_f=100$ par exemple, la dimension n'est plus définie que sur une gamme réduite. Pour une dimension $D=1.6$, 1000 fractures sont suffisantes pour estimer la dimension fractale

sur plus de 2 ordres de grandeur. Un critère approximatif pour calculer le nombre d'éléments nécessaires pour échantillonner complètement une distribution est d'avoir un nombre de points $nf \approx 0.1 * (2^i)^D$. Ainsi, plus la dimension est faible, moins le nombre de points doit être important pour bien échantillonner la distribution. Enfin, il n'y a pas de limite supérieure pour le nombre de centres à placer dans le système; plus la densité de centres est forte, meilleure est l'estimation de la dimension fractale.

La figure 7 permet de comparer qualitativement des réseaux synthétiques de dimension $D=1.8$ avec la distribution des centres issue de deux des réseaux de Hornelen. Sur les réseaux naturels, les amas (ou *cluster*) peuvent apparaître légèrement orientés, alors que sur les réseaux synthétiques on n'observe pas de direction préférentielle. La structure régulière de la génération peut être devinée par endroits. Néanmoins, la méthode de génération synthétique reproduit bien l'effet global de *clustering* observé sur les réseaux naturels. L'augmentation de l'hétérogénéité de la distribution spatiale due à une diminution de la dimension fractale est illustrée pour des réseaux synthétiques sur la figure 8. Plus la dimension fractale est faible devant la dimension euclidienne dans laquelle s'inscrit le réseau, plus l'hétérogénéité est forte, plus les fractures sont concentrées dans des zones (*clusters*) restreintes, et ceci à toutes les échelles.

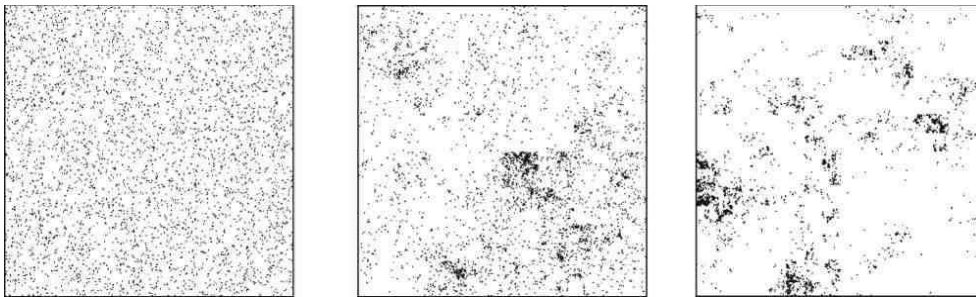


Figure 8: Evolution de l'hétérogénéité des distributions de centres en relation avec la valeur de la dimension fractale ($D=2$ à gauche, $D=1.6$ au milieu et $D=1.2$ à droite). Plus l'exposant est faible, plus les centres sont concentrés dans des zones restreintes (*clusters*) du système, et plus la taille des zones vides augmente.

2.2.3 Corrélations centre à fracture

La corrélation éventuelle entre la position et la longueur d'une fracture n'est pas prise en compte dans le modèle de l'équation 1. Dans le modèle synthétique, les deux paramètres peuvent être corrélés empiriquement à partir des deux distributions séparées. Une corrélation positive consiste à assigner les longueurs des fractures sur les centres possibles en fonction de la distribution des distances centre à centre (figure 9). Cependant cette corrélation ne répond pas explicitement à un modèle théorique.

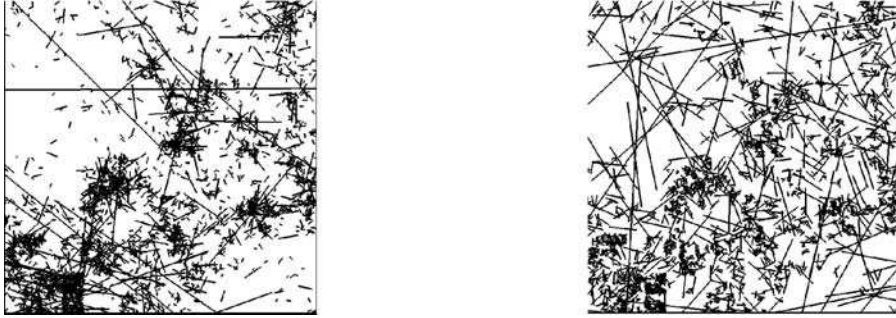


figure 9: Illustration de la corrélation entre la position et la longueur des fractures. (gauche) les positions et les fractures ne sont pas corrélés. (droite) Les centres de fractures sont classés en fonction de leur distance au plus proche centre voisin, la longueur de fracture est distribuée sur les centres selon une corrélation positive parfaite entre la longueur et la distance au plus proche voisin. La corrélation est empirique et n'est pas modélisée selon un modèle théorique.

Le modèle de corrélation entre position et longueur de fracture, proposé à partir des observations sur le réseau de Hornelen, est tel que la distance moyenne centre à centre entre une fracture de longueur l et son plus proche voisin, $d_c(l)$, varie comme:

$$d_c(l) \propto l^\beta, \text{ avec } 0 < \beta < 1.$$

Le cas $\beta=0$ correspond à une absence de corrélation. Le cas $\beta=1$ correspond au cas particulier d'un modèle appollonien [Mandelbrot, 1982]. Le schéma de la (figure 9) représente un appollonien en 2D. La distribution des tailles de blocs est en loi de puissance selon un exposant $\alpha=D+1$, où D est la dimension fractale associée à l'objet [Turcotte, 1992]. Ainsi, si dans cette configuration précise, dans chaque bloc est placé une fracture de longueur égale au côté du bloc, alors le modèle de corrélation position-longueur est valide avec $\beta=1$.

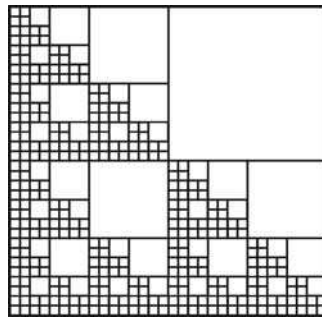


Figure 10: fractal appollonien de dimension D . La distribution des tailles de bloc suit une loi de puissance d'exposant $\alpha=D+1$.

Dans notre processus de génération, pour corréler quantitativement la distance centre à centre avec les longueurs de fractures, il faut à la fois connaître la distribution des longueurs et la distribution des distances centre à centre. Si la première ne pose pas de problème (loi de puissance), il n'en va pas de même pour la distribution des distances centre à centre. Pour un

système non corrélé, les distances centre à centre suivent une distribution de Rayleigh. Cependant, pour un système corrélé, la distribution dépend à la fois de la densité de fracturation et de la dimension spatiale des centres. La queue de la distribution peut être modélisée par une loi de puissance (figure 11), mais les courtes distances ne sont pas directement corrélées (distance inférieures à la taille des mailles). Selon la densité, la distribution des distances est dominée par le caractère fractal de la distribution spatiale (queue de distribution en loi de puissance) ou par les courtes distances non corrélées (figure 11). Pour une distribution spatiale fractale, la distribution des distances centre à centre dépend donc de la dimension fractale, de la densité de fracturation et du nombre de cascades. Elle n'est pas modélisable simplement indépendamment de la densité. En conséquence, la relation entre position et longueur dans le modèle synthétique reste empirique et ne correspond pas à un modèle théorique clairement établi.

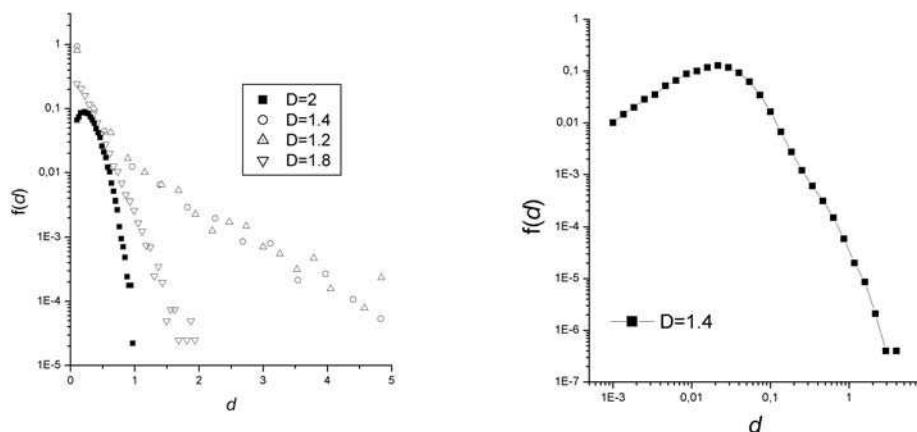


Figure 11: Distributions des distances au plus proche voisin. a) Variations en fonction de la dimension fractale. b) Pour $D=1.4$, distribution représentée sur un diagramme en log-log.

2.3 CONCLUSION

Des corrélations spatiales ont été caractérisées sur le réseau de Hornelen. Parmi ces corrélations, la nature fractale de la densité de fracturation correspond à un modèle théorique plus généralement proposé pour les réseaux de fractures [Davy *et al.*, 1990]. Des corrélations entre la position et la longueur des fractures ont aussi été mises en évidence sur le réseau de Hornelen, selon une tendance d'échelle qui conduit à la concentration des petites fractures entre elles et à l'isolement relatif des plus grandes structures. Cependant, ces corrélations ne seront pas étudiées plus avant, dans la mesure où elles ne peuvent répondre simplement à un modèle

théorique. Dans la suite, le terme de corrélation spatiale désignera donc la nature fractale de la distribution spatiale de densité, qui répond à un modèle théorique clairement établi et pour lequel nous avons développé une procédure de génération spécifique.

PARTIE 3

3 ETUDE STEREOLOGIQUE

La caractérisation de la géométrie des réseaux de fractures repose en grande partie sur de l'échantillonnage réalisé en 1D (carottages de puits, ligne d'échantillonnage ou transect) et en 2D (affleurements). En effet, les mesures directes en 3D posent des problèmes d'imagerie évidents et restent actuellement souvent limitées à la reconnaissance de grandes structures [Maerten et al., 2001; Kattenhorn and Pollard, 20014] ou à des échantillons de petite taille traités en laboratoire [Ledéseret et al., 1993; Gertsch, 1995]. En conséquence, la méthode quasi obligée pour caractériser un réseau en 3D consiste à passer par une analyse stéréologique à partir de données 1D ou 2D (figure 1). En pratique, le problème direct consiste à déduire les propriétés géométriques d'une population échantillonnée en fonction des propriétés de la population totale et de la dimension de l'échantillon. Le problème inverse consiste à déduire les propriétés de la population globale en fonction de celles de la population échantillonnée. La résolution du problème inverse repose sur celle du problème direct et sur le modèle de réseau de fractures admis.

3.1 ANALYSE CLASSIQUE: DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE ET DENSITE SPATIALE UNIFORME

L'analyse stéréologique n'est possible que si un modèle géométrique sous-jacent est supposé. Le modèle couramment admis est que les fractures sont des disques dont la distribution spatiale suit une loi de Poisson (pas de corrélation spatiale) et dont les orientations sont aléatoires [Warburton, 1980; Piggott, 1997; Berkowitz and Adler, 1998]. Dans ce cas, si la distribution des diamètres des disques inscrits dans l'espace euclidien $d=3$ suit une loi de puissance d'exposant a_d , alors la distribution des traces de fractures sur un plan suit aussi une loi de puissance d'exposant a_{d-1} et les deux exposants sont reliés par:

$$a_d = a_{d-1} + 1 \text{ eq(1)}$$

Cette relation s'étend aussi au cas 2D-1D [Marrett and Allmendinger, 1991; Borgos et al., 2000], si l'on considère en 1D la distribution des longueurs associée aux fractures qui intersectent une ligne d'échantillonnage. En effet, la probabilité d'intersection entre deux fractures de longueurs l et l' , incluses dans un système de taille L , est reliée à la notion de volume exclu [Balberg, 1984] et s'écrit comme le rapport du volume exclu entre les deux fractures sur l'aire totale:

$$p(l, l', L) = \frac{2 l \cdot l'}{\pi L^2}$$

Le nombre de fractures qui intersectent est alors donné par:

$$n_{1D}(l, L) = n_{2D}(l, L) \cdot p(l, l_t, L) \propto l^{-a_{2D} + 1}$$

Ainsi, pour une distribution initiale des diamètres de fracture en loi de puissance, l'équation (1) est vérifiée pour $d=2$ et $d=3$.

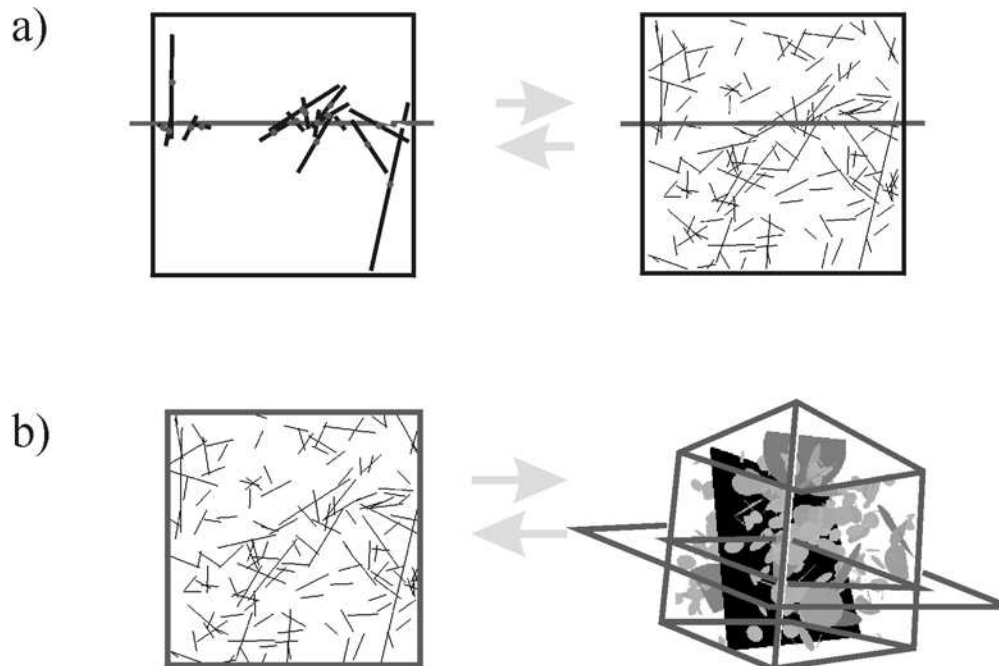


Figure 1: Illustration du principe de l'analyse stéréologique. a) passage 1D-2D. b) passage 2D-3D.

3.2 DISTRIBUTION DES LONGUEURS EN LOI DE PUISSANCE ET CORRELATIONS SPATIALES

Si les règles de stéréologie sont établies pour une distribution des longueurs de fracture en loi de puissance et pour un réseau de fractures uniformément distribué, il n'en va pas de même pour les réseaux de fractures corrélés. *Borgos et al.* [2000] sont les seuls, à notre connaissance, qui abordent l'effet de la corrélation sur l'analyse stéréologique. Ils perturbent tour à tour l'hypothèse sur la distribution des longueurs et celle sur l'uniformité spatiale et montrent que l'extrapolation des paramètres 2D à partir de données 1D n'est pas évidente.

Leur premier modèle de corrélation consiste à dire que, pour une population de fractures subparallèles échantillonnées le long d'un transect, la distribution des centres de fractures suit une loi de puissance au lieu d'être aléatoire. Ainsi le transect est dans une zone dense et la densité de fracturation décroît avec la distance. Dans ce cadre, ils montrent que $a_d - a_{d-1} < 1$. Cependant la corrélation est définie par rapport à la position du transect et non pas indépendamment, et la distribution spatiale du réseau dépend de la position de la traverse. Leur deuxième modèle de corrélation repose sur la notion de zone de fractures en échelon. Les fractures sont soit isolées, soit des sous-éléments de zones en échelon, selon la valeur du rapport

O/S (O : recouvrement et S : écart, voir figure 2). Ainsi, dans le modèle, une fraction des fractures est isolée alors que les autres sont organisées en échelon. La distribution des fractures seules ainsi que celle des segments dont sont faites les zones en échelon suivent une même loi de puissance (exposant β_S) et la distribution des zones en échelon suit aussi une loi de puissance, d'exposant inférieur β_A . Lors de l'échantillonnage en 1D, les zones en échelon sont vues comme des fractures uniques et, par conséquent, l'exposant apparent mesuré, β_C , est le résultat du mélange entre les deux distributions en loi de puissance. Donc si au niveau du transect échantillonné les fractures d'une zone en échelon ne sont pas individualisées mais vues comme une seule grande structure, alors l'exposant β_C ne reproduit ni exactement la distribution des fractures isolées, ni celle des zones en échelon, et la relation (1), avec l'analogie $a_d \equiv \beta_S$, ne tient pas. Le résultat obtenu donne au contraire encore $(a_d - a_{d-1}) < 1$. Cependant, dans cet exemple *Borgos et al.* [2000] ne considèrent pas uniquement une corrélation entre fractures, mais supposent de plus qu'en 2D le réseau est fait de deux types de structures ayant des caractéristiques distinctes, qui ne peuvent donc être estimées à partir d'un unique modèle en loi de puissance en 1D.

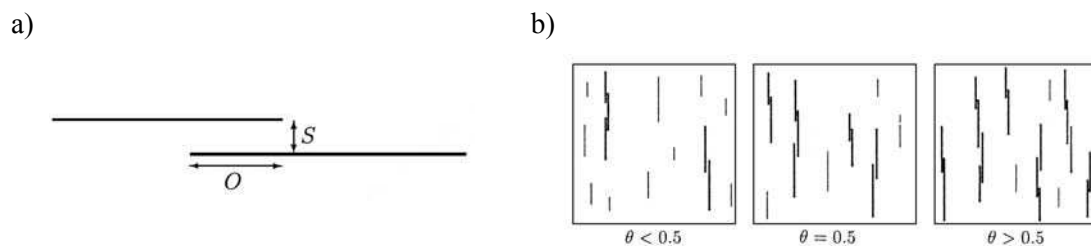


Figure 2: Définition des zones en échelon. a) Définition du recouvrement O et de la séparation S . b) Trois séries de fractures générées pour différentes valeurs du paramètre θ indiquant la proportion de structures de fractures reliées en échelon. Les lignes épaisses représentent les fractures qui se sont reliées avec un rapport O/S entre 3-8. D'après [*Borgos et al.*, 2000].

En contraste avec les travaux de [*Borgos et al.*, 2000], nous nous plaçons dans un cadre où toutes les fractures sont caractérisées par une unique distribution de longueurs (en loi de puissance) et où les corrélations spatiales sont quantifiées (dimension fractale D) et indépendantes de la position de plan ou de transect d'échantillonnage. Ainsi, le modèle théorique qui supporte l'étude stéréologique est celui déjà décrit dans le chapitre précédent, où la géométrie d'un réseau de fractures est caractérisée par deux lois d'échelles, l'une d'exposant a pour la distribution des longueurs de fracture et l'autre d'exposant (dimension fractale) D pour représenter l'évolution de la densité de fracturation avec l'échelle (corrélations spatiales). L'étude qui suit est centrée sur le rôle des corrélations dans l'analyse stéréologique, à la fois pour une transition 1D-2D et pour 2D-3D.

3.2.1 Projet d'article : **Stereology of fractal fracture networks**

Par C. Darcel, O. Bour et P. Davy

Principe et motivation de l'étude. L'étude a pour objectif de déterminer les relations entre les paramètres géométriques de réseaux de fractures (a_{d+1} , D_{d+1}) et les paramètres géométriques apparents mesurés sur des échantillons de dimension inférieures (a_d et D_d), où d est la dimension euclidienne de l'espace dans lequel s'inscrit le réseau fracturé, D la dimension fractale et a l'exposant de la distribution des longueurs. Il s'agit en particulier de déterminer dans quelle mesure les corrélations fractales des réseaux affectent les relations précédemment établis pour des réseaux à densité de fracturation uniforme ($D=d$).

Plan. Les caractéristiques du modèle théorique de réseau de fractures, ainsi que la méthode de génération de ces réseaux, sont rappelées dans la partie (II). La partie (III) définit le lien entre l'analyse stéréologique et la définition de la probabilité d'intersection entre des fractures. La partie (IV) porte sur l'établissement des propriétés de connectivité locale des réseaux de fractures corrélés, à travers la définition de la probabilité d'intersection entre deux fractures de longueurs identiques ou distinctes, puis de la détermination du nombre moyen d'intersection par fracture. La partie (V) porte directement sur l'analyse stéréologique des réseaux fracturés, et l'établissement des relations entre les paramètres géométriques a_{d+1} , D_{d+1} , a_d et D_d . La partie (VI) détaille les conséquences de l'analyse précédente par rapport aux mesures de terrain, en particulier pour le réseau naturel de Hornelen. Enfin, la dernière partie (VII) donne les conclusions de l'étude.

Résumé des résultats. La probabilité d'intersection entre deux fractures de longueurs données l et l' , $p(l, l' > l, L)$, dont le centre appartient à un système de Taille L , dépend explicitement de la valeur de la dimension fractale, sous la forme : $p(l, l' > l, L) \sim l'^D / L^D$. Il en découle que l'évolution du nombre moyen d'intersections par fracture dépend aussi de la dimension fractale et varie asymptotiquement comme l^D , où l est la longueur de fracture. En pratique, ce résultat implique que la valeur de la dimension fractale D peut être mesurée uniquement de l'évolution de $n_i(l, L)$. Cette mesure réalisée sur les données du réseau de Hornelen montre cohérence entre les valeurs D_{1D} et D_{2D} . Enfin, l'analyse stéréologique proprement dite conduit à la détermination des relations suivantes: $a_d = a_{d-1} + 1$ et $D_d = D_{d-1} + 1 \forall a_d > 2$. Lorsque $a_d < 2$, la présence de fractures dont la taille est de l'ordre de celle de l'échelle d'observation conduit à une répartition spatiale apparente homogène ($D=d-1$) de la densité de fracturation.

Stereological analysis of fractal fractures networks

C. Darcel, O. Bour, P. Davy

Géosciences Rennes, UMR 6118 CNRS, université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

Abstract. We assess the stereological rules inherent in fractal fracture networks. We first develop the general expression of the intersecting probability $p(l, l', L)$ between two populations of fractures of length l and l' , respectively. The analytical expression of $p(l, l', L)$ depends on the fractal dimension D , and on the size of the embedding domain L . We then derive the stereological function that gives the fracture distribution of $2d$ outcrops or $1d$ scan-lines, from the original three-dimensional ($3d$) distribution. We have especially developed the case of a fractal fracture network with a power-law length distribution, but our results can be extended to any other length distributions. The analytical results were checked with a numerical model that generates $3d$ discrete fractal fracture networks. We showed that the $2d$ ($1d$, resp.) length distributions is still a power law whose exponent (a) derives simply from the original $3d$ exponent by the relations $a_{3d}=a_{2d}+1$ ($a_{3d}=a_{1d}+2$, resp.) whatever the fractal dimension. The density distribution of fractures in $2d$ or $1d$ is still fractal, but with a fractal dimension that depends both on the original $3d$ one, and on the power-law length exponent a . Thus, the fractal dimension of $2d$ or $3d$ fracture networks cannot be straightly inferred from one-dimensional data sets for which a is unknown. We finally discuss the consistency of our results with natural systems.

Introduction

In fractured rocks of very low matrix permeability the complex geometry of fracture patterns is a critical point for understanding the overall flow and transport properties. However, the characterization of the geometry of three-dimensional ($3d$) fracture networks is severely limited by the virtual impossibility of locating, measuring, and analyzing reliable fracture data sets in-situ. Consequently most of the available data comes from $1d$ boreholes or $2d$ outcrops, whereas fracture systems should be characterized in $3d$ to provide a reliable basis for hydraulic properties modeling. The solution to that problem results in the assessment of the stereological rules that link $1d$ or $2d$ measurements with $3d$ ones. Up to now, the stereological analysis has been mainly focused on fracture networks with a given length distributions and a uniform density distribution [Marrett and Allmendinger, 1991; Piggott, 1997; Berkowitz and Adler, 1998].

However, numerous studies have demonstrated that fractures are spatially correlated, and that this correlation is well described by a fractal model [see Bonnet *et al.*, 2001, and references therein]. This scaling law plus the power-law length distribution form a general model for fracture network distribution [Davy *et al.*, 1990; Bour *et al.*, in press]. The role of the subsequent spatial clustering on the stereological rules has been poorly studied. Malinverno [1997] analyzed the possibility to estimate the volume distribution of turbidite beds from a power-law size distribution of bed thickness sampled through well-logs. Borgos *et al* [2000] extended this work to the extrapolation of $1d$ fracture size-frequencies distributions to higher dimensional samples. In particular, they analyzed the role of a non-uniform spatial distribution assuming that faults may be clustered in a self-similar way. For a power-law length distribution of fractures, their analytical results suggest that the difference between the length distribution exponents, a , measured in $2d$ and in $1d$ may be lower than 1, in contrast with previous works that assumed a uniform distribution of fracture density [Marrett and Allmendinger, 1991; Piggott, 1997; Berkowitz and Adler, 1998]. However, the rules for extrapolating a fractal dimension measured in d -dimensional space to higher dimensional space remains unknown.

In the present work, we aim at characterizing analytically and numerically the stereological rules for stochastic fractal fracture networks. We study more specially $3d$ disk networks whose length distribution is a power law for its relevance to natural fracture patterns. But our analytical results can be extrapolated to any other length distributions. Our analytical results are checked with a numerical model that reproduces the fractal spatial correlations over a large range of scales. In the following, we first describe the statistical and numerical model of fractal fracture networks. We then focus on the analysis of the intersection probability between fractures in such correlated fracture networks. This approach provides the analytical developments required to tackle the stereological analysis. We finally discuss the consistency and consequences of our results to natural systems.

Fracture network modeling

Statistical model of fracture network

The main geometrical properties of fracture networks may be described by a simple statistical model, originally proposed by [Davy *et al.*, 1990], that is based on a double power law :

$$n(l, L) = \alpha L^D l^{-a} \quad (1)$$

where $n(l, L)$ is the number of fractures whose length is in the range $[l, l+dl]$ and whose center belongs to a volume in $3d$ (or a surface in $2d$) of typical size L .

The three parameters of the model are a the characteristic exponent of the fracture length distribution, D the fractal dimension that fixes the spatial distribution of fracture densities and α the fracture density term. The smaller is the exponent a , the greater is the proportion of large fractures with respect to the smaller ones. The smaller is the fractal dimension D the higher is the clustering between fractures. In the model, D is equivalent to the correlation dimension [Bour *et al.*, in press]. The parameter α is the fractal density of fractures. The model has been validated on a natural fracture pattern, located in the Hornelen basin, for which it was obtained $D=1.8$ and $a=2.75$, exponents that are well defined from the metric up to the kilometric scale [Bour *et al.*, in press]. In $3d$, we assume a population of disk-shaped fractures, whose diameter distribution follows a power law. Therefore fracture traces in $2d$ are represented by straight segments. The model (1) does not describe the distribution of fracture orientations, but any specific orientation distribution can be added. In the following, we assume a uniform distribution of orientation, in the range $[-\pi, \pi]$. Equation (1) alone is a first-order model that says nothing about cross-correlation between fracture parameters. Although such correlation, for instance between fracture positions and fracture lengths, has been reported in some cases [Ackermann and Schlises, 1997; Bour and Davy, 1999], we do not consider it in this present study.

In the following we do consider only fractures that have their centers inside the considered volume (or surface) of typical size L . This assumption makes possible the calculation of very large system that are statistically relevant. It also makes the analytical developments simpler. The complete development that includes long fractures whose center is outside the considered volume is derived in the appendix. Note that, because of the power-law length distribution, this case is not rare and such finite-size effects has to be treated explicitly.

We consider in the following fracture networks having any fractal dimension D in the range $[1, 3]$. The range of variations of the length exponent a is kept to $[1, \infty]$ since an exponent a lower than 1 would imply more large fractures than small ones, in contrast with geological observations. When the exponent a tends towards infinity, all fractures have the same length.

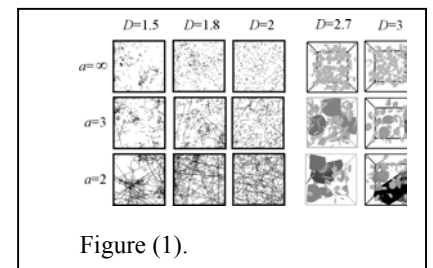
Fracture network generation method

The numerical model that we developed is versatile to generate discrete fracture networks that follow the statistical model described in (1). The method relies on a multiplicative cascade process that permits to produce a probability distribution of fracture density with any fractal dimension in the range $[1, 3]$ [see Darcel *et al.*, submitted]. The heterogeneous spatial density distribution is generated from a minimal scale arbitrarily fixed to 1 up to the system size L , that may vary up to $L=1024$ in $3d$. Fracture centers are then drawn randomly from this heterogeneous distribution.

The variety of fracture patterns that may be generated with the numerical model is illustrated in Figure 1. When a tends toward infinity, fractures are all of same length so that the clustering of fracture centers can be easily observed. When a is sufficiently small, the number of large fractures that may cross-cut the system size increases and may partly mask the fractal correlation between fracture centers. These geometrical features and their meaning are thoroughly discussed in Darcel *et al.* [submitted].

Stereology and local connectivity

In practice, the stereological analysis consists in relating the geometrical properties of a real $3d$ fracture network with the properties of its intersection with a $2d$ outcrop plane, or with a $1d$ scan-line. In the present work we assume for the $3d$ fracture networks a population of disk-shaped fractures whose diameter distribution follows a power law. Therefore fracture traces in $2d$ are represented by straight segments. The study is obviously focused on the stereological rules that permit the extrapolation of the scaling exponents of (1), e.g. the length distribution exponent a and the fractal dimension D . The easiest way to solve the



stereological problem is to derive the length distribution of the fractures that intersect a $2d$ outcrop plane, or a $1d$ scan-line, knowing the length distribution of the whole fracture network. This can be easily performed analytically if the probability $p(l,L)$ for a fracture of length l to intersect a transect of size L , is defined. Indeed, the length distribution in a $2d$ plane, or in a $1d$ transect, is simply given by the product $n(l,L)p(l,L)$ from which one should be able to derive the length distribution exponent a and the fractal dimension D .

Analyzing the probability of intersection between a fracture (disk or segment) and a sample of observation (plane or scan-line) of identical Euclidean dimension is somehow equivalent to analyze the probability of intersection between fractures of respective length l and L . Thus, the stereological issue is a particular case of the study of the connectivity between fractures of various lengths. For that reason, we first analyze the probability of intersection between fractures, the stereological analysis being studied in the next part of the paper. We first focus on the theoretical expression of the probability of intersection between fractures of the same length in a fractal network. We next derive the probability of intersection between fractures of different lengths. At last, we develop the stereological analysis, which becomes almost straightforward when previous relationships are stated.

Connectivity between fractures

Constant length fractures

The probability of intersection between fractures uniformly distributed in space is given through excluded area arguments [Balberg, 1984]. The excluded area (or excluded volume in $3d$) between two objects is defined as the area (or volume) around an object into which the center of the other object cannot be if overlapping between the two objects is not allowed. The normalization of the excluded area by the area of the system provides the probability of intersection between the two elements. Thus, in a $2d$ system of size L , two distinct fractures of length l and l' , have a probability of intersection given by [Balberg, 1984]:

$$p(l,l',L) = \frac{2 ll'}{\pi L^2} \quad (2)$$

For identical fractures, (2) leads to $p(l,L) \sim (l/L)^2$, meaning that the probability of intersection between fractures is simply proportional to the square of the fracture length.

In a fractal network, the probability of intersection should depend on the fractal dimension D due to fracture clustering (Figure 1). The probability of intersection between two fractures can be determined analytically: it is given by the ratio between the average number of intersections of a fracture, $n_i(l,L)$, and the total number of fractures in the system (N_{tot}). In average, the number of intersections on a fracture is equal to the number of fractures that are included within its own excluded area. This area should not depend on the fractal distribution of fracture density but only on the shapes and orientations of the objects. Indeed, if a fracture center lies within the excluded area of another fracture, both will intersect whatever the fractal dimension of the system. However, due to fracture clustering, $N(l)$, the average number of fracture centers included within the excluded area (or equivalently within an area of diameter l centered on a fracture center) is given by :

$$N(l) \propto N_{tot} \left(\frac{l}{L} \right)^D, \quad (3)$$

where N_{tot} is the total number of fractures included in the whole system of size L . Equation (3) corresponds simply to the definition of a fractal that states that the number of boxes of sizes l necessary to recover a fractal system of size L varies as $N_b(l) \sim (L/l)^D$ [Mandelbrot, 1982]. Assuming $n_i(l, L)$ to be proportional to $N(l)$, the probability of intersection between two fractures, $p(l, L) = n_i(l, L)/N_{\text{tot}}$, should be given by :

$$p(l, L) \propto \left(\frac{l}{L}\right)^D. \quad (4)$$

Equation (4) is in accordance with the uniform case ($D=2$), and with the fact that the intersection probability between fractures should increase when D decreases, due to fractal clustering (see the examples of synthetic fracture networks in Figure 1). The same reasoning applied in 3d leads to similar results with same expressions of (3) and (4).

To check equation (4), we analyzed numerically the evolution of $p(l, L)$ with l and L over a range where $l \ll L$, so that finite size effects are negligible. Results of numerical simulations for D varying within the range [1.3, 3] are plotted on Figure 2a. As expected, for the same system size, the probability of intersection increases as D decreases, in perfect agreement with the increase of fracture clustering when D decreases (Figure 2a). To characterize the variations of $p(l, L)$ with L , we derived for each curve the scaling exponent, D' and reported it as a function of D (Figure 2b). Results show that $D'=D$, in complete agreement with (4).

Distinct fracture lengths

Let's now consider the probability of intersection between fractures of distinct lengths, $p(l, l', L)$, in a fractal fracture network of dimension D . The analysis is first developed for 2d systems, with l' and l the lengths of the largest and smallest fracture, respectively.

The first remark which is useful to understand the following developments is that the orientation distribution "randomizes" fracture position with regards to connectivity. In other words, within the volume swapped by the orientation distribution, the connectivity does not depend on spatial correlation, but on the total number of fractures within. If both the large and the small fractures have a random orientation as it is assumed here, the "uncorrelated" domain, that is the one swapped by both orientation distributions, has an area (or a volume in 3d): $A_1 = \pi/4 * (l'+l)^2$ (Figure 3). On the other hand, the probability for a fracture to belong to A_1 depends on spatial correlation; according to Equation (3), it is proportional to $((l+l)/L)^D$. Then the probability of intersection within the area A_1 , for a fracture of length l to connect the fracture of length l' , must be characterized. In a rough approximation, we can consider that connectivity occurs if the center of the smallest fracture is at a distance smaller than $l/2$ from the largest one (Figure 3). This defines an area $A_2 = l * l' + \pi(l/2)^2$ for a random orientation distribution, and a probability of intersection proportional to A_2/A_1 . The exact calculation of A_2 can be done by following the method developed in [Balberg, 1984].

Eventually the intersection probability $p(l, l' > l, L)$ is given by the product of two terms: the probability for a fracture to belong to A_1 , and the probability of intersection within the area A_1 (equal to A_2/A_1). The general expression of $p(l, l' > l, L)$ is thus:

$$p(l, l' > l, L) \propto \left(\frac{l'+l}{L}\right)^D \frac{A_2}{A_1} = \frac{(l'+l)^{D-2}}{L^D} \left(l * l' + \pi \frac{l^2}{4}\right)$$

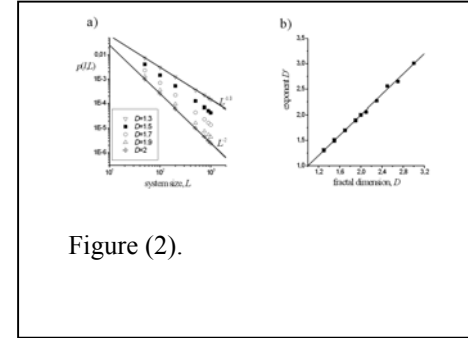


Figure (2).

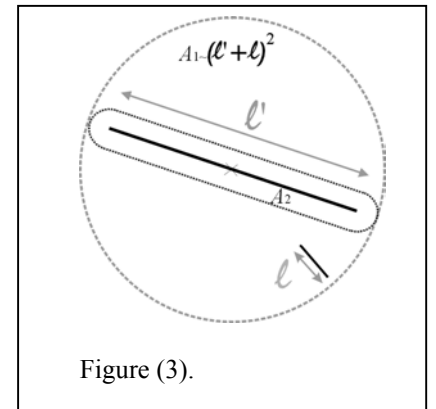


Figure (3).

This expression is in fact similar to classical excluded-volume concepts with both a density term (the first one in the previous equation), and the excluded-volume per fracture.

If l is supposed to be much smaller than l' , the expression becomes

$$p(l, l' > l, L) \propto \frac{l'^{D-1} l}{L^D} \quad (5)$$

In $3d$, the expression of A_2 and A_1 are respectively $\pi \frac{l'^2}{4} l + \pi l' \frac{l^2}{4}$, and $\frac{4}{3} \pi \left(\frac{l'+l}{2} \right)^3$, leading to the general expression:

$$p(l, l' > l, L) \propto \frac{(l'+l)^{D-3}}{L^D} (l'^2 l + l' l^2)$$

The expression is not symmetric with respect to l and l' , and thus this prediction is valid only if $l' > l$. If $l=l'$, it gives $p(l, l, L) \sim (l/L)^D$ as expected from (4).

Numerical computations of $p(l, l', L)$ have been performed in $2d$ for D between 1.3 and 2, and for systems of linear size $L=10^4$. For the different simulations, we generate two populations of fractures of respective length l_1 and l_2 . The length l_1 has always been kept constant with $l_1 \ll L$, while the length l_2 varies within the range $[l_{min}; L]$. Numerically, the probability of intersection, $p(l_1, l_2, L)$ is deduced from the average number of intersections, $n_i(l_1, l_2, L)$, that a fracture of length l_1 has with all fractures of length l_2 . To avoid finite-size effects, we compute the number of intersections by unit length so that portions of fractures that lies outside the system are not taken into account in the computations.

According to (5), the variation of $p(l_1, l_2, L)$ with l_2 is expected to change whether the ratio l_2/l_1 is smaller or larger than one. A typical example of result is illustrated on Figure 4 for which $D=1.3$. The two expected regimes are clearly identified for $(l_2/l_1) \ll 1$ and for $(l_2/l_1) \gg 1$. However the transition between the two regimes spans two orders of magnitude (Figure 4). To highlight the transition, we also plot the local logarithmic slope with l_2 ($d(\log(p(l_1, l_2, L)))/d(\log(l_2))$), which gives the apparent scaling of p with respect to l_2 (Figure 4, right-hand scale). Despite the broad transition, we obtain a result close to $p(l_1, l_2, L) \sim l_2^{-2}$ for $l_2 < 0.1l_1$, and close to $p(l_1, l_2, L) \sim l_2^{-D-1}$ for $l_2 > 10l_1$ in good agreement with (5).

Similar results were obtained whatever the fractal dimension D (Figure 5). The agreement between equation (5) and calculations is fairly good (Figure 5), even if the theoretical prediction slightly overestimates (underestimates, resp.) the scaling exponent if $l_2 \ll l_1$ ($l_2 \gg l_1$, resp.). We have not yet any explanation for this slight discrepancy, which increases when D decreases. We did check that the scaling exponents are really measured in the asymptotic regimes, and that this result is independent of the pre-fixed fracture length l_1 , and of the number of fractures used in the simulations.

Consequences on the connectivity of fractures of different lengths

In this section, we use previous results to derive the expression of the average number of intersections per fracture for a broad distribution of fracture lengths. We assume a length distribution such as (1) because it is representative of natural systems [Odling, 1997, Bour et al., in press]. The average number of intersections per fracture of length l is given by :

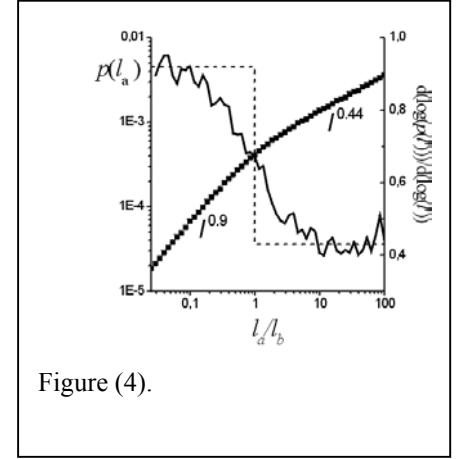


Figure (4).

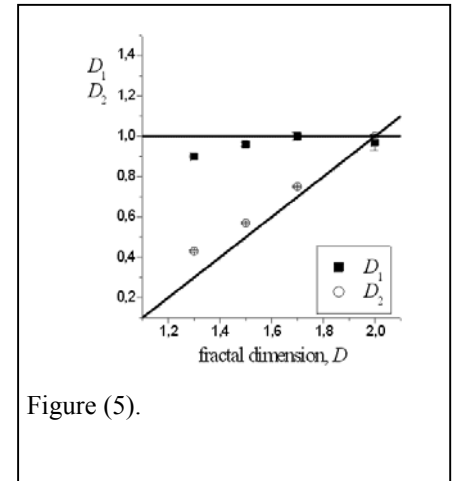


Figure (5).

$$n_i(l, L) = \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} p(l, l', L) \cdot n(l', L) dl',$$

where l_{\min} and l_{\max} are the smallest and largest fracture lengths in the system. According to previous result, the expression $p(l, l', L)$ changes whether l is larger, or smaller than l' . To derive analytical expressions for n_i , we use Equation (5) as a simplified model of the intersection probability between fractures. We call it “the step model” to recall that it predicts a sharp cross-over at $l=l'$.

With this hypothesis, n_i becomes for two-dimensional fracture systems :

$$n_i(l, L) \approx \int_{l_{\min}}^l \frac{l^{D-1} l'}{L^D} n(l', L) dl' + \int_l^L \frac{l'^{D-1} l}{L^D} n(l', L) dl' + \int_L^{l_{\max}} \frac{L^{D-1} l}{L^D} n(l', L) dl'$$

Combining the previous equation with (1) leads to :

$$n_i(l, L) = \alpha \left(l^{D-1} \left[\frac{l'^{-a+2}}{(-a+2)} \right]_{l_{\min}}^l + l \left[\frac{l'^{-a+D}}{(-a+D)} \right]_l^L + lL^{D-1} \left[\frac{l'^{-a+1}}{(-a+1)} \right]_L^{l_{\max}} \right) \quad (6)$$

Depending on the value of the length distribution exponent, a , Equation (6) may be simplified to the dominant terms so that :

$$\begin{aligned} n_i(l, L) &\sim l^{D-1} && \text{for } a > 2, \\ n_i(l, L) &\sim l^{D-a+1} && \text{for } D < a < 2 \quad (7) \\ n_i(l, L) &\sim 1 && \text{for } a < D. \end{aligned}$$

From Eqs. (6) and (7), we make the following comments:

- When fractures are uniformly distributed in space ($D=2$), the number of intersections is simply proportional to their lengths in agreement with previous developments [Bour and Davy, 1997].
- For a fractal fracture network, the behavior with l of $n_i(l, L)$ depends on the relative values of the exponents a and D . For $a > 2$, Equation (7) predicts that the evolution with l of $n_i(l, L)$ depends only on the fractal dimension D while it depends both on a and D for $D < a < 2$.
- When the length distribution exponent a is too small, e.g. lower than D , the number of intersections is simply proportional to the fracture length, like in the case of uniformly distributed fracture networks ($D=2$). Note that for a fractal network and for $a > D$, Equation (7) implies that small fractures have more intersections per unit length than larger ones.
- Equation (7) also suggests that it should be possible to derive the fractal dimension from the variations with l of $n_i(l, L)$. In the discussion, we propose such an application on field data. Note that similar results are obtained when taking into account in the calculations fractures whose centers are located outside the system (see Appendix).
- Equation (7) is an asymptotic regime of (6) that results from the dominance of one bound of the three integrals basic to this equation. It is valid only if the two bounds of the dominant integral are sufficiently different ($l \gg l_{\min}$ for $a > 2$; $l \ll L$ for $a < D$).

Same reasoning can be applied in 3d which leads to:

$$\begin{aligned}
n_i(l,L) &\sim l^{D-1} && \text{for } a > 2, \\
n_i(l,L) &\sim l^{D-a+1} && \text{for } (D-1) < a < 2, \\
n_i(l,L) &\sim l^2 && \text{for } a < D-1,
\end{aligned}$$

where $n_i(l,L)$ is the number of intersections on a $2d$ fracture and a and D are respectively the length exponent and the fractal dimension of the $3d$ fracture network. As for two-dimensional systems, small fractures are proportionally better connected than larger ones in fractal fracture networks as long as the length exponent a remains larger than $D-1$.

To check the preceding developments, we have computed the variation of the average number of intersections per fracture, $n_i(l,L)$ for $2d$ fractal fracture networks, for various values of D and a . For $a > 2$, equation (6) is dominated by the first term, and the scaling regime predicted by (7) is expected to occur if $l \gg l_{\min}$. Such behavior is indeed observed (figure 6a), with scaling exponents that are reasonably well predicted by the asymptotic equation (7), even if slightly underestimated. Note that these slight discrepancies are consistent with those measured from $p(l',L)$ (figure 5). For $a < D$, a linear variation of $n_i(l,L)$ with l is expected and observed (Figure 6b). As predicted, this scaling regime, which comes from the second term of (6), is valid in the limit of small lengths compared to the system size ($l \ll L$). For $D < a < 2$, we expect $n_i(l,L) \sim l^{D-a+1}$ from (7). In some cases, like for figure 6b, we do observe such a scaling. However, in most cases we have an intermediate regime for which the exponents are not well defined, and seem to vary between $D-1$ and 1 when a varies from 2 to D . For these intermediate regime there is no clear dominant term in (6), as long as a is close to 2 or close to D .

Despite slight discrepancies, we found that Equation (5) well predicts the intersection probability between fractures and the average number of intersections per fracture of length l . In the following section, we still use Equation (5) for deriving stereological rules for fractal fracture networks.

Stereological properties of fracture networks

Theoretical developments

For uniformly distributed fracture networks, the $3d$ fracture length distribution may be easily derived from plane-section observations. Indeed, the apparent fracture population of a d -parent network sampled on a $(d-1)$ -dimensional space ($2d$ plane, or $1d$ transect) is simply given by the product $n_d(l,L)p(l,L)$, where $p(l,L)$ is the probability of intersection between a fracture in the d -dimensional space and the sample of dimension $(d-1)$. We recall that, if d is the Euclidean dimension of space, any fractal dimension of fracture network D is less than d . For a uniform distribution of fracture densities (i.e. $D=d$), and for a power-law distribution of disk diameters in $3d$, $p(l,L)$ is simply proportional to the fracture length l , so that the length distribution of the fractures over the plane is also a power-law. The relationship between the exponents is summarized through [Marrett and Allmendinger, 1991] [Piggott, 1997; Berkowitz and Adler, 1998]:

$$a_d = a_{d-1} + 1. \quad (8)$$

The exponent of the $3d$ power-law length distribution a_{3d} is simply equal to $a_{2d}+1$, with a_{2d} the power-law exponent measured on any plane section. For a uniform distribution of fracture densities of the parent fracture network, D is simply equal to d so that we expect the distribution of fracture densities to be also uniform on lower dimensional sample, with $D_{3d}=3=D_{2d}+1=D_{1d}+2$.

For fracture networks spatially correlated, we expect some changes in the stereological rules since the probability of intersection between two elements is a

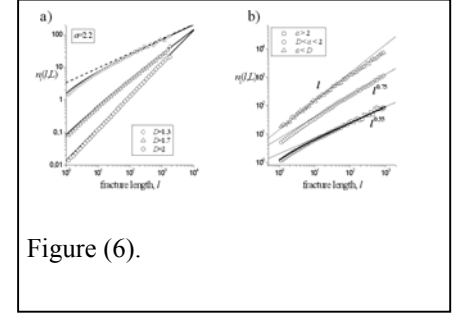


Figure (6).

function of the fractal dimension (5). In the following, we aim at characterizing the relationship for both exponents a and D measured on the parent and on the intersected fracture network. We first characterize the length distribution of the intersecting fracture network.

The length distribution that intersects a $1d$ system such as a scan-line of size L or a $2d$ plane of size L^2 is simply given by :

$$n_{d-1}(l, L) = p_d(l, L, L) \cdot n_d(l, L),$$

where $n_d(l, L)$ and $n_{d-1}(l, L)$ are respectively the parent and the intersecting fracture length distributions. $p_d(l, L, L)$ is the probability that a fracture of length l , belonging to a fracture network of fractal dimension D , intersects a sample of dimension $d-1$ and of size L . Assuming that a scan-line crossing a $2d$ fracture network can be assimilated to a large fracture of length L , $p_d(l, L, L)$ is given by (5). Thus, combining (1) and (5) for two-dimensional parent fracture networks leads to :

$$\begin{aligned} n_{1d}(l, L) &\approx \alpha L^{D_{2d}-1} l^{-a_{2d}+1} && \text{for } l < L, \text{ and} \\ n_{1d}(l, L) &\approx \alpha L^{D_{2d}} l^{-a_{2d}} && \text{for } l > L. \end{aligned}$$

The second equation expresses that a fracture larger than the system size always intersects the scan-line ($p_d(l, L, L)=1$). One can easily obtain the fracture length distribution that intersects a plane section :

$$\begin{aligned} n_{2d}(l, L) &\approx \alpha L^{D_{3d}-1} l^{-a_{3d}+1} + \alpha L^{D_{3d}-2} l^{-a_{3d}+2} && \text{for } l < L, \\ n_{2d}(l, L) &\approx \alpha L^{D_{3d}} l^{-a_{3d}} && \text{for } l > L. \end{aligned}$$

According to the previous developments, Equation (8) should hold whatever the fractal dimension D for fractures smaller than the system size. On the opposite, for fractures larger than the system size, the length-distribution exponent of the intersecting fracture network should be the same than the one of the parent distribution. Note that an additional complexity comes from fractures whose center lies outside the observation window, and which are not taken into account in the preceding developments. Their role is of course negligible for fractures having a length smaller than L with the same values of the length-distribution exponents. But, for fractures larger than L , it leads to a different expression (see Appendix).

The fractal dimension of the fracture centers cannot be simply inferred from the previous equations. It depends on the spatial distribution of all fractures whatever their length. But the derivation of D can be done by calculating analytically the number of fractures intersecting the sample of size L :

$$N(L) \approx \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} n(l, L) dl.$$

The scaling with L of $N(L)$ provides indeed the correlation dimension D (see below) [Bour *et al.*, in press]. Note that the derivation of D through $N(L)$ can be done easily only if the fractures having a length larger than the system size can be neglected in the computations of the fractal dimension.

For one-dimensional systems (scan-line), the analytical development of $N(L)$ leads to:

$$N_{1d}(L) \approx L^{D_{2d}-1} \quad \text{for } a_{2d} \geq 2 ,$$

$$N_{1d}(L) \approx L^{D_{2d}-a_{2d}+1} \quad \text{for } D_{2d} \leq a_{2d} .$$

We expect therefore the fractal dimension along the scan-line to be equal to $D_{2d}-1$ or to $D_{2d}-a_{2d}+1$, depending on the relative value of both D_{2d} and a_{2d} . For $a < D$, the fractal dimension D_{d-1} cannot be larger than the Euclidean dimension, here 1, which leads to the following stereological rules:

$$D_{1d} = D_{2d} - 1 \quad \text{for } a_{2d} \geq 2,$$

$$D_{1d} = D_{2d} - a_{2d} + 1 \quad \text{for } D_{2d} \leq a_{2d} \leq 2, \quad (9)$$

$$D_{1d} = 1 \quad \text{for } a_{2d} \leq D_{2d}.$$

Equation (9) is consistent with the derivation of $n_i(l,L)$ whatever a and D (7). Note that analytical developments would have predicted an unrealistic scaling $N_{1d}(L) \sim L^{-a+D+1}$ for $a < D$, with $D_{1d} > 1$. In this case which is never encountered in natural systems, N_{1d} is dominated by fractures larger than the system size, and the scaling of N_{1d} conveys boundary effects due to limited system size rather than underlying fracture correlation. We overcome this problem in numerical computations by computing the fractal dimension over a large intersecting fracture network of given size L .

For three-dimensional systems, we derive the following relationships between D_{2d} and D_{3d} :

$$D_{2d} = D_{3d} - 1 \quad \text{for } a_{3d} \geq 2,$$

$$D_{2d} = D_{3d} - a_{3d} + 1 \quad \text{for } D_{3d}-1 \leq a_{3d} \leq 2, \quad (10)$$

$$D_{2d} = 2 \quad \text{for } a_{3d} \leq D_{3d}-1.$$

To conclude, the fractal dimension of a $1d$ or a $2d$ fracture network is not necessarily equal to $D_{d+1}-1$, but can have any value in the range $[D_{d+1}-1, d]$, depending on the length exponent a . On the other hand, Equation (8) holds whatever the fractal dimension D , and it should be possible to simply derive the length distribution exponent.

Numerical validation

To verify the preceding developments, numerical simulations have been performed from *i*) a parent population of disc-shaped fractures ($3d$ network) and the corresponding population of $2d$ fracture traces on a planar outcrop (Figure 7), and *ii*) a parent population of $2d$ fracture lines and its $1d$ intersection with a straight scan-line (Figure 7). In both cases the linear size of the sample is equal to the system size L of the parent fracture network. The spatial fractal correlation is generated over 3 orders of magnitude, from a minimal scale equal to the length of the smallest fracture l_{\min} , fixed to 1 in practice, up to the system size L equal to 1024 and 512 for systems generated in $2d$ and $3d$, respectively. The number of fractures of the parent network is increased until a sufficient number intersects the $1d$ or $2d$ sample. Then, the statistical geometrical properties of intersecting fracture networks are calculated. In practice, the statistical parameters are averaged over at least 100 simulations whatever the set of parameters (D , a) investigated.

When the sample is a $1d$ scan-line, the sampled fracture network is theoretically made of the sole set of points that results from the intersection between the parent $2d$ fracture network and the scan-line. The correlation dimension can be easily derived over this set of points. To derive the fracture length exponent, the length of fractures that intersect the $1d$ scan-line is also registered. For well-bore data, this information is generally not available, but

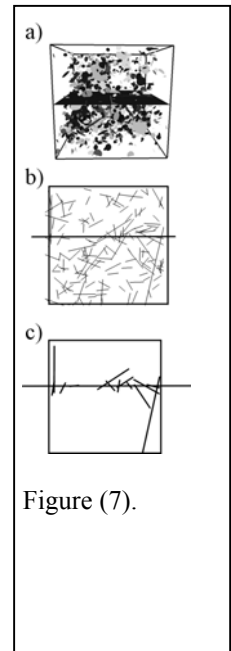


Figure (7).

might be deduced from fracture displacements if one assumes that there is a relationship between displacement and length [Borgos *et al.*, 2000].

A typical example of the fracture length distributions stemming from the $2d$ sampling of $3d$ fractal fracture networks is given in Figure 8a for a length exponent a_{3d} equal to 2.5. The sampled fracture length distribution follows a power law whose scaling exponent depends whether the fracture lengths l are smaller or larger than the system size L . As expected from the theoretical analysis, the length exponent a_{2d} is equal to a_{3d} when $l > L$ since the probability to intersect the sample is about 1. However, for the relevant part of the analysis, e.g. when $l < L$, the length exponent a_{2d} is equal to $a_{3d}-1$ (Figure 8b). The numerical simulations show that Equation (8), that predict $a_{d-1}=a_d-1$, still holds for any value of the fractal dimension D (Figure 8b). This result means simply that the intersection probability is proportional to fracture length whatever the fractal dimension of system. This result may not be valid if there is a correlation between fracture length and position as suggested by [Ackermann and Schlises, 1997; Bour and Davy, 1999].

To examine the expected dependency of the fractal dimension with the length exponent a (see Equations (9) and (10)), we computed the correlation dimension of the intersecting fracture networks from the pair correlation function $C(r)$, defined as the number of pair of points whose distance is smaller or equal to r [Viseck, 1992]. In a fractal system, $C(r)$ varies like r^D , where D is the fractal dimension. $C(r)$ is measured from the distribution of the centers of length traces in $2d$, and from the set of intersecting points along the scan-line in $1d$.

The method is illustrated in Figure 9a for different fractal dimensions of parent fracture networks. The correlation function $C(r/L)$ and the variation with r of the local slope $(d[\log(C(r/L))]/d[\log(r/L)])$, right-hand scale) are simultaneously represented. All the curves are normalized such that $C(1)=1$ for $r=L$ according to [Bour *et al.*, in press]. Over the example shown, all curves $C(r/L)$ can be fitted with power laws over almost two orders of magnitude. Finite-size effects are observed only if r/L is larger than 0.5.

In Figure 9b and 9c the derived fractal dimensions D_{d-1} are represented as a function of the parent fractal dimension D_d . The theoretical relation $D_{d-1}=D_d-1$, expected for $a_d > 2$ ((9) and (10)) is verified. The value of D_{d-1} is however slightly overestimated in a way that is consistent with the deviations observed in the connectivity between fractures (Figure 5). This discrepancy with theoretical predictions is less pronounced for D_{2d} vs D_{3d} (Figure 9b) than for D_{1d} vs D_{2d} (Figure 9c). In the worst case, e.g. for a close to 2 and D close to 1, the differences are about 0.2.

For $a_{3d} < D_{3d}-1$ (Figure 9b) or for $a_{2d} < D_{2d}$ (Figure 9c), we observe $D_{d-1}=d-1$, in agreement with previous analytical developments. In that cases, the number of intersections due to fractures having a length close or larger than the system size is very large leading to an apparent uniform density distribution of the fracture network.

In the intermediate regime, corresponding to $D_3-1 < a_3 < 2$ in $3d$, and to $D_2 < a_2 < 2$ in $2d$, we observe some variations of the derived fractal dimension that are approximately in agreement with previous analytical developments. The derived values of D_{d-1} are ranging between D_d-1 and $d-1$; however the precise determination of D_{d-1} is rather difficult in that intermediate range of a and D values, so that we do not obtain exactly the expected behavior $D_{d-1}=D_d-a_d+1$ ((9) and (10)).

To sum up, we have characterized the stereological rules in $2d$ or $3d$ that apply to the fracture model defined by (1). Results derive from the expression (5) that predicts the probability of intersection of a small fracture with a larger one, so that they can be extrapolated beyond the model (1).

Discussion : application to field data

The previous stereological analysis has shown that a $3d$ fracture length distribution can be theoretically derived from plane-section observations : a power-law distribution observed from plane-section fracture traces should result from a power-law distribution for $3d$ fracture lengths, even for stochastic fractal

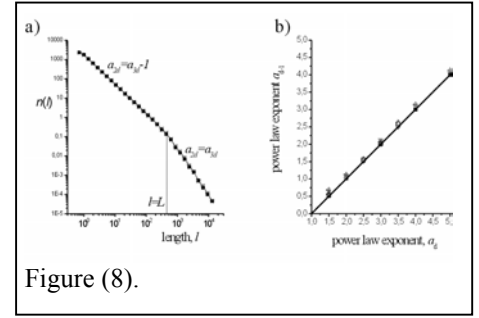


Figure (8).

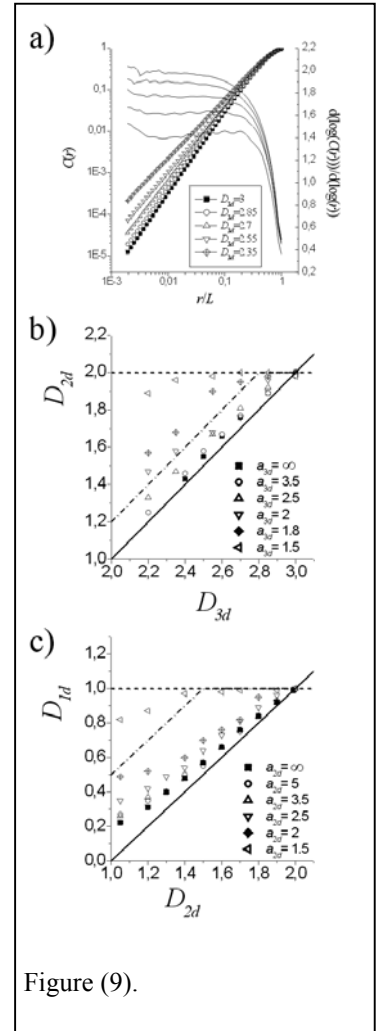


Figure (9).

fracture networks. The extrapolation in $3d$ is obtained by assuming that the probability to observe a fault trace in the plane section is proportional to the trace length l whatever the fractal dimension of the fracture network, as it is the case for uniform fracture networks. This is equivalent to assume that the trace length l is the characteristic length scale of the fracture, even for $3d$ correlated fracture networks. In contrast with *Borgos et al.* [2000] that used a different model, we did not find that spatial correlations between fractures are leading to different stereological rules than for uniformly distributed fracture networks. The exponent of the $3d$ power-law length distribution a_{3d} is thus expected to be equal to $a_{2d}+1$, with a_{2d} the power-law exponent measured on any plane section. We consequently expect a_{3d} to vary between 2 and 5 for natural fault networks [Segall and Pollard, 1983; Gudmunsson, 1987; Villemin and Sunwoo, 1987; Childs et al., 1990; Main et al., 1990; Scholz and Cowie, 1990; Gautier and Lake, 1993; Davy 1993; Odling, 1997]. Since a_{3d} is expected to be larger than 2 in most cases, we expect D_{3d} to be given through $D_{3d}=D_{2d}+1$. For instance, for the Hornelen fracture network, where we found $a_{2d}=2.75$ and $D_{2d}=1.80$ from outcrops data, we expect $a_{3d}=3.75$ and $D_{3d}\sim 1.80$. Note that since we found slight discrepancies between D_{2d} and $D_{3d}-1$ (Figure 9b) D_{3d} may be slightly lower than $D_{2d}+1$.

Such an extrapolation cannot be done easily from one-dimensional data sets since there is in general no information on fracture lengths. The extrapolation of measured fractal dimensions to two or three-dimensional systems is therefore speculative knowing that a_{2d} has been often measured close or lower to 2 [Bonnet et al., 2001]. However, in the absence of reliable three-dimensional data sets, a comparison between one and two-dimensional data sets can be nevertheless very useful to test the applicability of our results to natural systems. To our knowledge, there has never been such a direct comparison, the scaling laws being established either from one or two-dimensional data sets [Bonnet et al., 2001]. Here, we use a data set from the Hornelen basin that consists of seven two-dimensional fracture patterns mapped in the same area from the metric scale up to almost the kilometric scale [Odling, 1997]. Its main geometrical properties can be described at all scales by the simple model described in (1) with $a=2.75$, $D=1.8$ and $\alpha=3.5$ [Bour et al., in press]. For instance, considering the Hornelen fracture network described above ($a_{2d}=2.75$ and $D_{2d}=1.80$, [Bour et al., in press]), we thus expect that a measure of the fractal dimension D_{1d} along a scan-line should provide estimates of the $1d$ fractal dimension slightly larger than 0.8. To analyze the one-dimensional properties of the Hornelen fracture network, we could have built $1d$ data sets by drawing randomly $1d$ transects in the $2d$ fracture maps. However, due to the finite size of the system and to truncation effects, this methodology provides poor one-dimensional data sets that do not permit a robust statistical analysis. We thus applied the procedure suggested above from equation (7), that consists in computing the average number of intersections per fracture as a function of their length, $n_i(l, L)$. According to (7), it should provide the $1d$ fractal dimension, D_{1d} . Since the measurements of $n_i(l, L)$ is an average over the number of fractures of a given length, this procedure should provide a more reliable derivation of D_{1d} , that should also not be too sensitive to the under-sampling of small fractures. For each fracture map, we indeed obtain a data set that may be approximated by a power law (Figure 10a). A power-law fit over the whole range of lengths provides exponents that vary from 0.75 to 0.93, depending on the fracture data set. In most cases, the exponent derived is close to 0.84. Despite some variability in the measurements, note that all derived values are slightly larger than 0.8 (except one) and smaller than 1, as expected.

A proper normalization of the different curves should permit the comparison between maps in order to estimate the validity of a single power-law model for the whole data set. Due to sampling and resolution effects, the minimal cutoff fracture length, l_{\min} , observable on each map is dependent on the system size [Odling, 1997]. Assuming that l_{\min} varies proportionally to the system size L , equation (6) can be used to derive the variations with L of the average number of intersections per fracture so that $n_i(l, L)\sim l^{D-1}L^{-a+2}$. Therefore, the computed curves $n_i(l, L)/L^{-a+2}$ should be properly normalized for the different fracture maps.

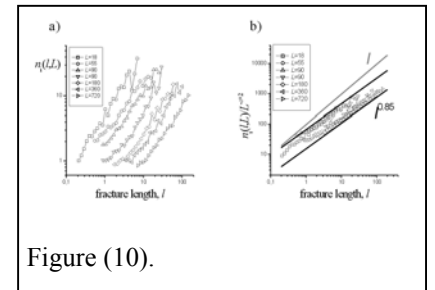


Figure (10).

The normalized curves are indeed approximately well lined up (Figure 10b). From the normalized curves, it appears clearly that the variation of $n_i(l, L)$ with l does not match the function $n_i(l, L) \sim l$ corresponding to $D_{1d}=1$. Although it remains difficult to estimate precisely D_{1d} , the best power-law model provides an estimate of D_{1d} slightly larger than 0.8 (Figure 10b). This result, obtained thanks to a new method for deriving the fractal dimension, appears therefore consistent with the previous analytical and numerical results.

In complement, we should point out that *Odling* [*unpublished results*] obtained $D_{1d} \sim 0.86$ on three large one-dimensional data sets also coming from the Hornelen Basin. The three data sets were obtained by measuring fracture intersections along three large scan-lines. Using also the two-point correlation function, *Du Bernard et al.* [in press] obtained one-dimensional values of D_{1d} ranging between 0.85 and 0.91 for five one-dimensional data sets sampled in the Suez rift.

Conclusion

To assess the stereological rules of fractal fracture networks, we first analyzed the connectivity properties between fractures. We show how the intersection probability of fractures of different lengths, $p(l, l', L)$, depends on the fractal dimension D . From the analytical expression of $p(l, l', L)$, we derive the expression of the stereological rules that extrapolate the parameters of the $3d$ length distribution from their measurements on $2d$ fracture networks. We assume a power-law length distribution of fractures but our results can easily be extended to other length distributions. Our analytical results were checked through a numerical model that permits to generate three-dimensional discrete fractal fracture networks.

We show that, for the length distribution exponent a , the relation $a_{d-1} = a_d - 1$ is valid whatever the fractal dimension D . In contrast, the extrapolation of the fractal dimension depends on the value of the length exponent a . For a_{2d} or a_{3d} larger than 2, we have a simple relation : $D_{d-1} = D_d - 1$. For $a_{2d} < D_{2d}$ or $a_{3d} < D_{3d} - 1$, we have $D_{d-1} = d - 1$, meaning that the fracture density distribution in the plane sample or along the scan-line is uniform. This peculiar behavior is due to the greater number of fractures having a size close or larger than the system size when the exponent a decreases towards 1. For such large fractures, the location of the intersection in the $2d$ plane or along the scan-line is no more related to the position of the parent fracture center. As a consequence, the intersecting fracture network (fracture traces in $2d$, and set of points in $1d$) is no more clustered (when $a_{2d} < D_{2d}$ or $a_{3d} < D_{3d} - 1$) although the parent fracture network is fractal. For $D_{2d} < a_{2d} < 2$ or $D_{3d} - 1 < a_{3d} < 2$, we observe an intermediate regime for which D_{d-1} varies between $D_d - 1$ and $d - 1$.

Our results show that in practice the derivation of the length exponent is required for extrapolating the fractal dimension in $2d$ or $3d$. It therefore severely limits the interest of one-dimensional data sets, such as well-bore data, for which only fracture densities distribution is available. Nevertheless, a fractal dimension measured in $1d$ with $D_{1d} < 1$, implies the fracture network to be fractal in $2d$ or in $3d$, even if the extrapolation of D_{2d} and D_{3d} is speculative.

We finally discuss the applicability of our results to natural systems. We found a good adequacy between our predictions and measurements made on few natural data sets. In addition, we propose also an original method for measuring the fractal dimension of natural data sets from the variations of the average number of fracture intersections per fracture of length l .

Appendix : Role of large fractures generated outside the system

To determine the influence of large fractures that have their center outside the observation window, and that nevertheless cross-cut the $2d$ outcrop or the $1d$ scan-line, we first derive the fracture length distribution, $n_{\text{obs}}(l, L)$, that is observed in a sub-domain of linear size L . We assume that all fractures belong to

a very large $2d$ domain of size Λ and we check for the length distribution, $n_{\text{obs}}(l, L)$, in a $2d$ sub-domain of size L . $n_{\text{obs}}(l, L)$ is given by :

$$n_{\text{obs}}(l, L) = n(l, \Lambda) \cdot p_{\cap}(l, L, \Lambda)$$

where $n(l, \Lambda)$ is the power-law length distribution of the fracture network in the system of size Λ and $p_{\cap}(l, L, \Lambda)$ is the probability of intersection between a fracture of length l and the sub-domain of observation of linear size L .

For fractures $l \ll L$, we assume that a fracture is observed within the sub-domain only if its center lies into the sub-domain. From the definition of a fractal object [Mandelbrot, 1982] that provides the scaling of the number of boxes of size L necessary to cover the fractal (see section **Connectivity between fractures, Constant length fractures**), it follows $p_{\cap}(l \ll L, L, \Lambda) \sim (L/\Lambda)^D$. For fractures $l \gg L$, a fracture whose center is outside the sub-domain has nevertheless a non negligible probability to intersect the sub-domain. Assuming that the probability that a sub-domain of size L intersects a large fracture of size $l \gg L$ is equivalent to the probability of intersection between two fractures of size l and L , $p_{\cap}(l \ll L)$ should be given by (5), so that $p_{\cap}(l \gg L) \sim (Ll^{D-1})/\Lambda^D$. Both expressions of p_{\cap} for $L \gg l$ and $L \ll l$ should therefore lead to :

$$n_{\text{obs}}(l, L) \propto L^{D_{2d}} l^{-a_{2d}} \quad \text{for } l \ll L$$

$$n_{\text{obs}}(l, L) \propto Ll^{-a_{2d}+D_{2d}-1} \quad \text{for } l \gg L.$$

Using these equations for deriving the average number of intersections per fracture, $n_i(l, L)$, we obtain the same scaling than in equation (7). For the stereological problem, the length distribution that intersects a $1d$ scan-line of size L is obviously modified for $l > L$, for which we have : $n_{1d}(l, L) = \alpha Ll^{a+D-1}$. However, taking into account this modification leads to equation (9) for the derivation of the fractal dimension through the computation of the total number of fractures along the scan-line.

Similar calculations may be done in $3d$. The length distribution, $n_{\text{obs}}(l, L)$, of a $3d$ sub-domain of size L , is thus given by :

$$n_{\text{obs}}(l, L) \propto Ll^{-a_{3d}+D_{3d}-1} \quad \text{for } l \ll L$$

$$n_{\text{obs}}(l, L) \propto Ll^{D_{3d}-a_{3d}-1} + L^2 l^{D_{3d}-a_{3d}-2} \quad \text{for } l \gg L.$$

Using now the probability of intersections between a fracture of length l and a fracture of length l' in a system of volume L^3 , $p(l, l', L)$ and knowing that $p(l, l', L) \sim 1$ for $l > L$, it provides the length distribution of fractures that intersect the $2d$ sample. The scaling of $N_{2d}(L)$ with L does not provide the fractal dimension D_{2d} for $a_{3d} < D_{3d}$, due to a too large proportion of long fractures having a length larger than the system size. For $a_{3d} < D_{3d}$ and especially for $a_{3d} < 2$, most fractures on the $2d$ sample have their center outside the system. The intersecting fracture networks are therefore equivalent to fracture networks made of fractures of infinite length for which $N_{2d}(L)$ varies linearly with L .

Notation

l	Fracture length.
L	Size of a sub-system of the fracture network.
$n(l, L)$	Density length distribution.
$N(L)$	Number of fractures included in a system of linear size L .

d	Euclidean dimension.
α	Scale-invariant fracture density term.
D	Fractal dimension.
a	Exponent of the density length distribution.
$p(l,l',L)$	Probability of intersection between two fractures of characteristic length l and l' in a system of characteristic linear size L .
$n_i(l,L)$	Averaged number of intersections on a fracture of length l .

Acknowledgments

M. Holschneider is greatly thanked for fruitful discussions in the first step of the study. We wish to thank also the French CNRS and the European Community (contract SCALFRAC ENV4-CT97-0456 and contract SALTRANS EVKI-CT-2000-00062) for their financial support.

References

- Ackermann, R.V., and R.W. Schlische, Anticlustering of small normal faults around larger faults, *Geology*, 25 (12), 1127-1130, 1997.
- Balberg, I., Excluded volume and its relation to the onset of percolation, *Physical Review B*, 30 (7), 3933-3943, 1984.
- Berkowitz, B., and P. Adler, Stereological analysis of fracture network structure in geological formations, *Journal of Geophysical Research*, 103 (B7), 15339-15360, 1998.
- Bernard, X.D., P. Labaume, C. Darcel, P. Davy, and O. Bour, Fracture distribution in normal fault damage zones, Nubian sandstones, Suez Rift, *Journal of Geophysical Research*, in press.
- Bonnet, E., O. Bour, N. Odling, I. Main, B. Berkowitz, P. Davy, and P. Cowie, Scaling of Fracture Systems in Geological Media, *Reviews of Geophysics*, 39 (3), 347-383, 2001.
- Borgos, H.G., P.A. Cowie, and H. Dawers, Practicalities of extrapolating 1D fault and fracture size-frequency distributions to higher dimensional samples, *Journal of Geophysical Research*, 105, 28377-28391, 2000.
- Bour, O., and P. Davy, Clustering and size distributions of fault patterns: theory and measurements, *Geophysical Research Letters*, 26 (13), 2001-2004, 1999.
- Bour, O., P. Davy, C. Darcel, and N. Odling, A statistical scaling model for fracture network geometry, with validation on a multi-scale mapping of a joint network (Hornelen Basin Norway), *Journal of Geophysical Research*, sous presse.
- Childs, C., J.J. Walsh, and J. Watterson, a method for estimation of the density of fault displacements below the limits of seismic resolution in reservoir formations., in *North Sea Oil and Gas Reservoirs II*, edited by A.T.T.e. al, pp. 309-318, Graham and Trotman, Norwell, Mass, 1990.
- Darcel, C., O. Bour, and P. Davy, cross-correlations between length and position in fracture networks, submitted to *Geophysical Research Letters*.
- Darcel, C., O. Bour, and P. Davy, Connectivity properties of 2D fracture networks with stochastic fractal correlations, to be submitted to *Water Resources Research*.
- Davy, P., On the frequency-length distribution of the San Andreas fault system., *JGR*, 98, 1993.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette, Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, *Nature*, 348 (6296), 56-58, 1990.
- Gautier, B.D.M., and S.D. Lake, Probabilistic modeling of faults below the limit of seismic resolution in Pelican field, North Sea, *Am. Ass. Petrol. Geol. Bull.*, 77 (5), 761-777, 1993.

Gundmunsson, A., Geometry, formation and development of tectonic fractures on the Reykjanes Peninsula, Southwest Iceland, *Tectonophysics*, 139, 295-308, 1987.

Main, I.G., P.G. Meredith, P.R. Sammonds, and C. Jones, Influence of fractal flaw distributions on rock deformation in the brittle field, in *Deformation mechanisms, Rheology and tectonics*, edited by R.J. Knipe, and E.H. Rutter, pp. 71-79, Geol. Soc. of London, London, 1990.

Malinverno, A., On the power law distribution of turbidite beds, *Basin Research*, 9, 263-274, 1997.

Mandelbrot, B.B., *The fractal geometry of Nature*, 468 p. pp., W. H. Freeman, New York, 1982.

Marrett, R., and R.W. Allmendinger, Estimates of strain due to brittle faulting: Sampling of fault populations, *J. Struct. Geol.*, 13, 735-738, 1991.

Odling, N., Scaling and connectivity of joint systems in sandstones from western Norway, *Journal of Structural Geology*, 19 (10), 1257-1271, 1997.

Piggott, A., Fractal relations for the diameter and trace length of disc-shaped fractures, *Journal of Geophysical Research*, B102, 18121-128125, 1997.

Scholz, C.H., and P. Cowie, Determination of total strain from faulting using slip measurements, *Nature*, 346, 837-838, 1990.

Segall, P., and D. Pollard, Joint formation in granitic rock of the Sierra Nevada, *Geological Society of America Bulletin*, 94, 563-575, 1983a.

Segall, P., and D. Pollard, Nucleation and growth of strike slip fault in granite, *J. Geophys. Res.*, 88, 555-568, 1983b.

Villemin, T., and C. Sunwoo, Distribution logarithmique self similaire des rejets et longueurs de failles: exemple du bassin Houiller Lorrain, *C. R. Acad. Sci.*, Ser. II, 305, 1309-1312, 1987.

Viseck, T., *Fractal growth phenomena*, 488 pp., World Scientific, London, 1992.

Warburton, P.M., A Stereological Interpretation of Joint Trace Data, *Int. J. Rock. Mech. Min.Sci. & Geomech. Abstract*, 17, 181-190, 1980a.

Warburton, P.M., Stereological Interpretation of Joint Trace Data: Influence of Joint Shape and Implications for Geological Surveys, *Int. J. Rock. Mech. Min.Sci. & Geomech. Abstract*, 17, 305-316, 1980b.

Figures captions

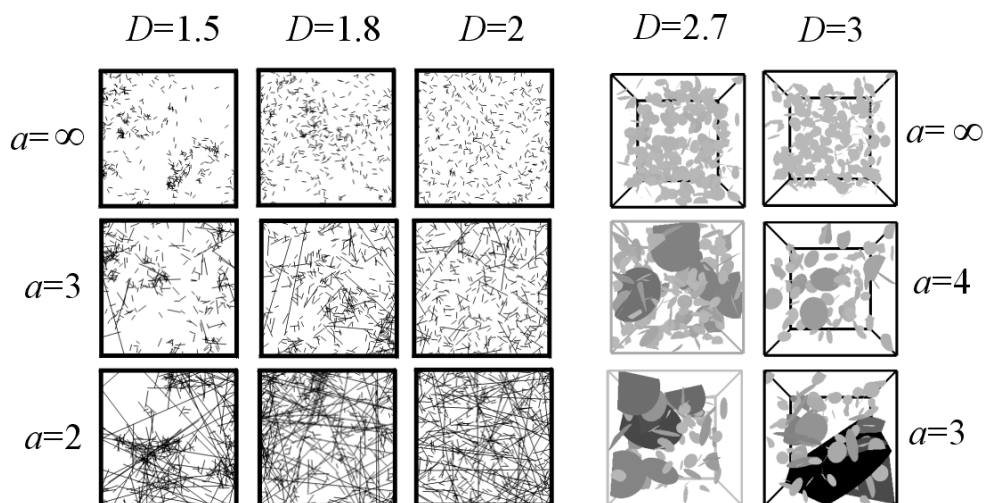


Figure (1). Examples of synthetic fracture networks generated with varying values of the exponent α (top to bottom) and of the fractal dimension D (left to right). The Euclidean dimension, d , is equal to 2 or 3. A decrease of α implies an increase of the proportion of large fractures. A decrease of D implies an increase of the clustering between fractures.

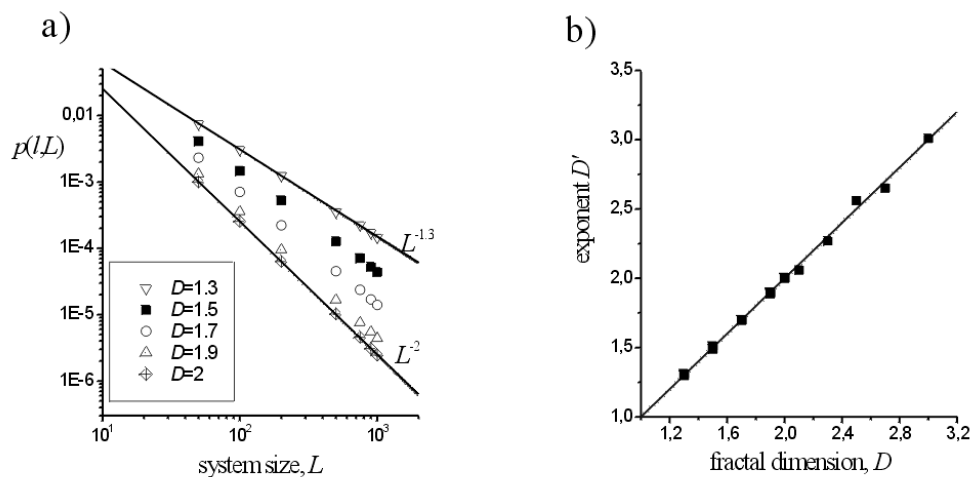


Figure (2). Probability of intersection between two fractures of length l , $p(l, L)$. a) Evolution of $p(l, L)$ for several values of D . Solid lines correspond respectively to $L^{-1.3}$ and L^{-2} . The probability $p(l, L)$ varies as $p(l, L) \sim L^{-D'}$ with D' equal to the fractal dimension D . b) Exponent D' as a function of D .

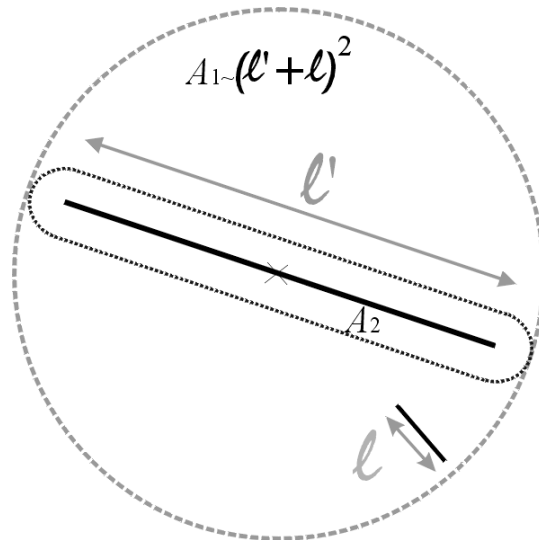


Figure (3). Representation of the areas A_1 and A_2 (dotted lines) used to determine the probability of intersection between fractures belonging to a fractal fracture network (Equation 5).

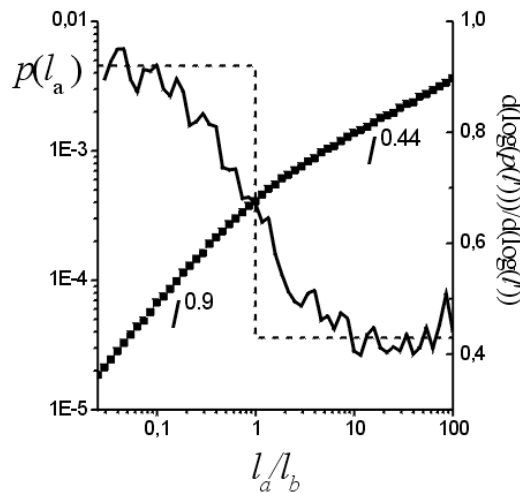


Figure (4). Computations of the intersection probability $p(l_a, l_b, L)$ between two fractures of length l_a and l_b for $D=1.3$. For the numerical computations, l_b has been arbitrarily fixed to 40 while l_a varies in the range $[1, 10000]$. Monte Carlo simulations were performed in a system of size $L=10000$, for networks having 1000 fractures of size l_a and 1000 fractures of size l_b . $p(l_a, l_b, L)$ is plotted as a function of the ratio l_a/l_b (black squares, left axis). The local variations of the slope of $\log(p(l_a, l_b, L))$ versus $\log(l_a/l_b)$ (e.g. $d(\log p(l_a, l_b, L))/d(\log(l_a/l_b))$) is also represented (thin irregular curve, right axis) to better present the two regimes. The dotted line represents the theoretical model of (5), based on the two end-member limits for $l_a \ll l_b$, and $l_a \gg l_b$.

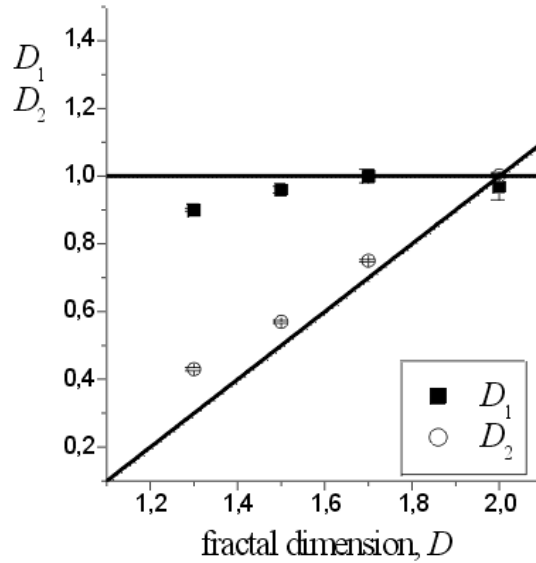


Figure (5). Numerical validation of expression (5) that relates the probability of intersection between two fractures of distinct lengths l_1 and l_2 to the fractal dimension D of the fracture network. For $l_1 \ll l_2$, $p(l_1, l_2, L)$ is expected to vary as $p(l_1, l_2, L) \sim l_1^{D_1} l_2^{D_2}$, with $D_1 \sim 1$ and $D_2 \sim D - 1$. The corresponding exponents D_1 and D_2 , derived from the numerical computations of $p(l_1 \ll l_2, l_2, L)$ (see Figure 4 for $D = 1.3$), are represented as a function of the fractal dimension D .

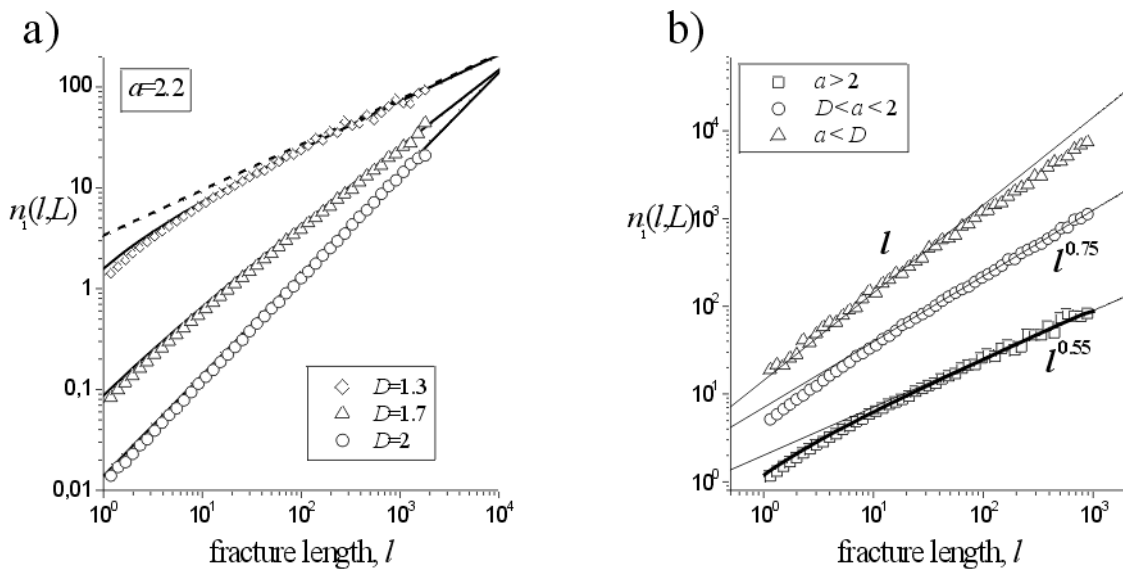


Figure (6). Scaling of $n_i(l, L)$, the average number of intersections per fracture, as a function of their length l , for several couples of parameters (a, D) . a) $a = 2.2$, $D = 1.3, 1.7$ and 2 . The solid lines represent the theoretical expression given by (6). The values used for the exponents are the ones found in Figure 5, that are slightly different than 1 and $D - 1$. For instance, the dotted line corresponds to $n_i(l, L) \sim l^{0.45}$ while the asymptotic behavior expected from equation (7) should be $n_i(l, L) \sim l^{0.3}$. b) $D = 1.45$ and $a = 1.4, 1.7$ and 2.4 . Straight lines correspond to $n_i(l, L) \sim l$, $n_i(l, L) \sim l^{0.75}$ and $n_i(l, L) \sim l^{0.55}$ for $a = 1.4, 1.7$ and 2.4 respectively. This scaling of $n_i(l, L)$ may be compared to the theoretical one given by equation (7).

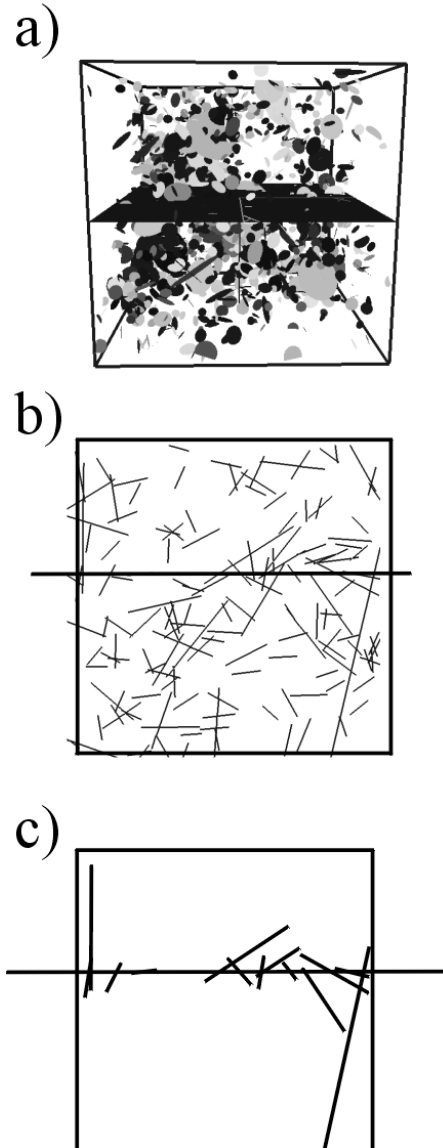


Figure (7). Schematic representation of the stereological analysis. a) A $3d$ network of disk-shaped fractures network is represented as well as a $2d$ horizontal plan (in black) along which fractures are sampled. b) A $2d$ fracture traces network that may results from the intersection between the $3d$ network and the $2d$ plane. The $2d$ fracture network may be also cross-cut by a horizontal scan-line ($1d$) leading to a $1d$ fracture network (c). In c) the length of the fractures that intersect the scan-line is also represented.

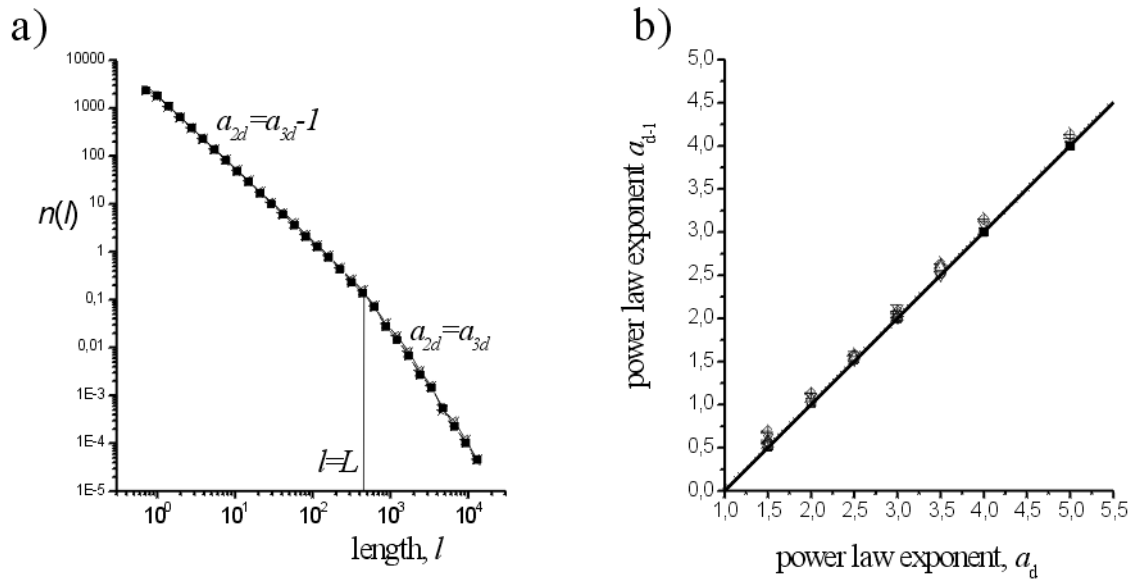


Figure (8). a) Example of a length distribution of a $2d$ trace fracture network resulting from the intersection of a $3d$ fracture network with a $2d$ plane. For $l < L$, the power-law length exponent a_{2d} is equal to $a_{3d}-1$, whereas $a_{2d}=a_{3d}$ for $l > L$, a_{3d} being the exponent of the power-law length distribution of the parent fracture network. b) Exponents a_{d-1} measured from the density length distribution (for $l < L$, see a). The computations are made for the transition $3d$ to $2d$ and for the transition $2d$ to $1d$. We have $a_d = a_{d-1} + 1$ whatever the fractal dimension D_d of the parent fracture network.

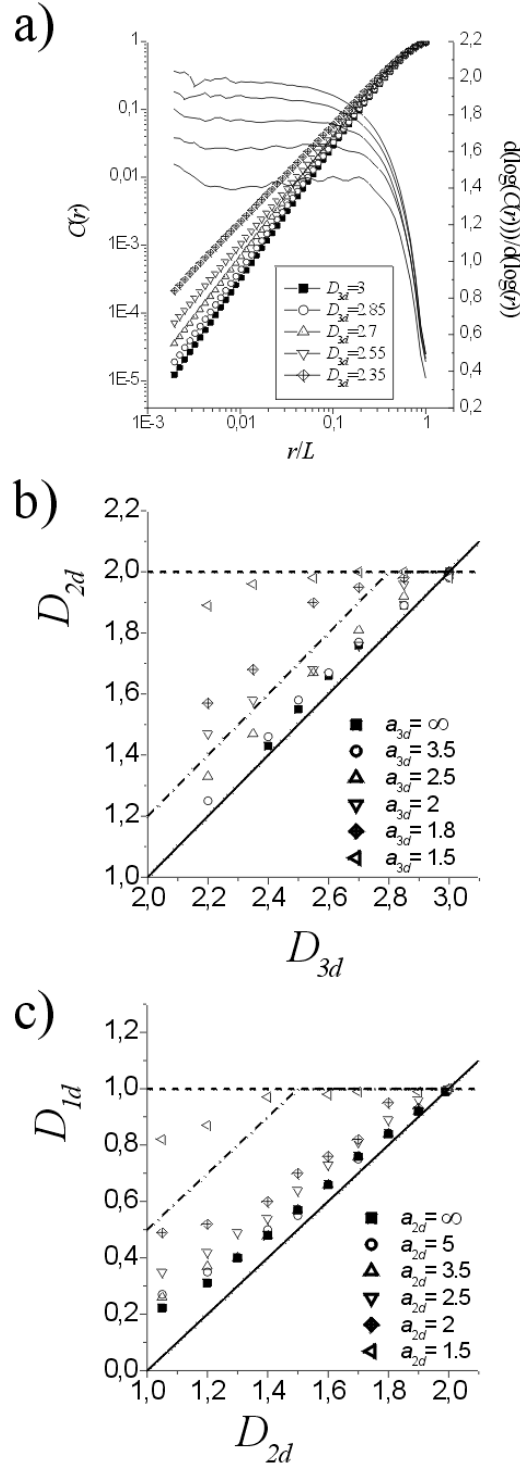


Figure (9). Derivation of the fractal dimension of fracture networks resulting from the $2d$ sampling of a $3d$ parent network ((a) and (b)), and from the $1d$ sampling of a $2d$ parent network (c). a) Computations of the correlation function $C(r/L)$ as a function of the ratio r/L where L is the system size. The value of D_{2d} may be estimated from the solid lines which give the local value of the slope (right-hand scale) of the $\log C(r) - \log r$ plot. From the highest curve ($D_{2d}=2$, right-hand scale) down to the lowest ($D_{2d}=1.45$), D_{3d} varies from 3 to 2.35). b) Derived value of D_{2d} as a function of D_{3d} . c) Derived value of D_{1d} as a function of D_{2d} . In b) and c), thick solid lines correspond to $D_{d-1} = D_d - 1$ while dashed horizontal line correspond to $D_{d-1} = d - 1$. In both case, the dash-dotted line corresponds to the theoretical value of D_{d-1} (see equations (9) and (10)) for $a_d=1.5$ (b) and $a_d=1.8$ (c).

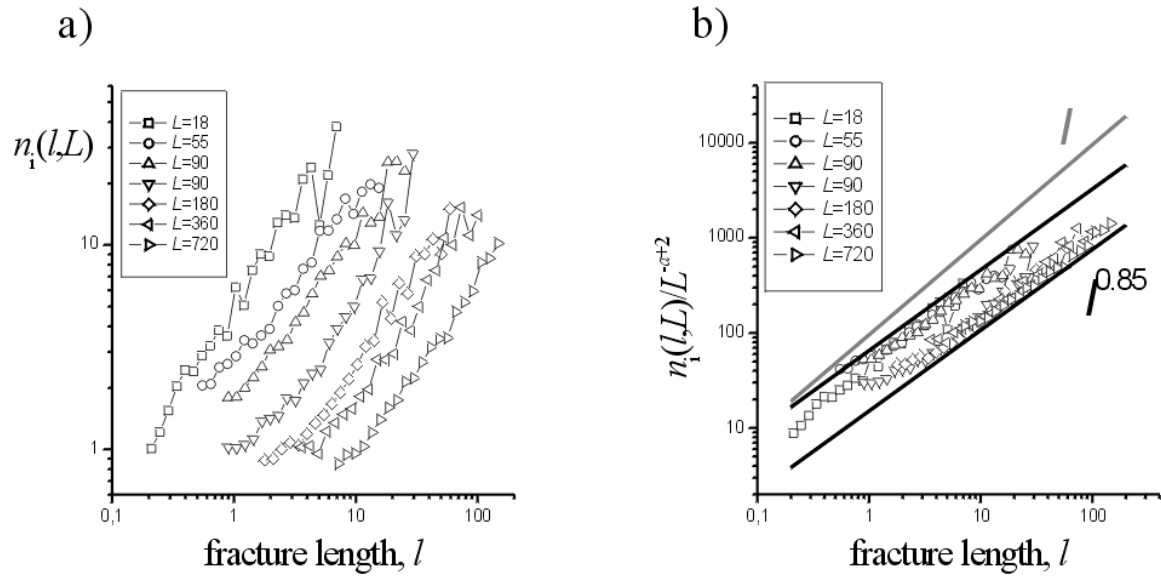


Figure (10). Evolution of the average number of intersections per fracture, $n_i(l, L)$, as a function of their length l , for the different fracture maps of the Hornelen Basin fracture network [Odling, 1997, Bour et al., in press]. (b) Same curves as in a) normalized by L^{-a+2} (see text).

PARTIE 4

4 PROPRIETES HYDRAULIQUES DES RESEAUX CORRELES

4.1 INTRODUCTION

La problématique générale liée à la modélisation hydraulique des milieux fracturés est de savoir s'il est possible de les modéliser avec les mêmes méthodes que les milieux poreux et sédimentaires ou s'il est nécessaire de mettre au point des méthodes de modélisation spécifiques. Cette question d'ordre pratique a une traduction théorique : quelle est l'influence des caractéristiques géométriques des milieux fracturés sur leurs propriétés hydrauliques ? De nombreuses observations géologiques ont révélé la très forte variabilité des caractéristiques physiques des fractures telles que leur longueur, leur orientation préférentielle, leur ouverture et leurs corrélations mutuelles. Parmi ces caractéristiques physiques, celles qui ont potentiellement l'effet le plus important sur le choix des modèles hydrauliques sont celles qui n'ont pas d'échelle caractéristique, échelle caractéristique à partir de laquelle une approche d'homogénéisation pourrait être appliquée. L'absence d'échelle caractéristique concerne en particulier deux propriétés géométriques des réseaux de fractures : la longueur des fractures et les corrélations entre fractures. Ces deux propriétés sont décrites par des lois puissance de sorte que le nombre de fractures $N(l, L)dl$ dont la longueur est entre l et $l+dl$ dans un système de taille L s'écrit :

$$N(l, L) = \gamma L^D (a - 1) \cdot \frac{l^{-a}}{l_{\min}^{-a+1}} \text{ for } l \in [l_{\min}, l_{\max}] \quad (1)$$

où γ est le terme de densité de fractures (nombre de centres de fracture par unité de volume fractal), a est l'exposant caractéristique de la distribution des longueurs de fractures, et D est la dimension fractale des barycentres de fracture qui fixe la dépendance d'échelle du nombre de fractures [Davy *et al.*, 1990; Bour *et al.*, sous presse]. L'exposant a est une mesure quantitative du nombre relatif de petites et de grandes fractures, puisqu'il fixe le ratio entre fractures de familles de tailles différentes l et l' , ratio égal à $(l'/l)^a$.

Des études précédentes ont montré les effets de la distribution des longueurs et des ouvertures de fractures sur la perméabilité et les structures d'écoulement des réseaux fracturés dans le cas bidimensionnel [de Dreuzy *et al.*, 2001a; de Dreuzy *et al.*, 2001b]. Le but de cette présente étude est de déterminer comment la structure de corrélation du réseau de fractures influence les propriétés de connectivité des réseaux et ensuite la perméabilité équivalente et les écoulements dans le milieu. Il s'agit en outre de déterminer quelle est l'importance de cet effet

comparativement aux effets des autres caractéristiques géométriques spécifiques aux milieux fracturés (distributions des longueurs, des ouvertures, des orientations) et si les effets de ces différentes propriétés sont indépendamment additionnables ou s'ils sont couplés.

4.2 HYPOTHESES ET PARAMETRES DU MODELE

Le modèle de milieu fracturé étudié est bidimensionnel. La matrice est considérée comme imperméable, ce qui est en accord avec les mesures de terrain au moins pour les milieux cristallins [Trimmer *et al.*, 1980]. Les orientations de fractures sont distribuées aléatoirement.

Les paramètres principaux du modèle sont les exposants caractéristiques de la distribution des longueurs et la dimension fractale du champ de corrélation, resp. a et D . Les autres paramètres du modèle concernent les dimensions et les densités. Les dimensions caractéristiques sont la taille du système L et les bornes inférieure et supérieure de la distribution des longueurs de fracture l_{\min} et l_{\max} . Les densités sont le nombre de centres de fracture par unité de surface fractale γ , la densité massique de fracture d et le paramètre de percolation p . En intégrant l'équation (1) entre les bornes de la distribution de longueurs on obtient que le nombre de fractures, $N(L)$, et la masse de fractures, $M(L)$, sont donnés par les expressions:

$$d = \gamma \frac{(a-1)}{l_{\min}^{-a+1}} \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} \text{Min}(l, L) \cdot l^{-a} \cdot dl$$

$$N(L) = \gamma L^D$$

$$M(L) \cong N(L) \left[\frac{a-1}{a-2} l_{\min} + L^{-a+2} \right]$$

ce qui entraîne les relations suivantes entre les densités γ et d :

$$d \sim \gamma L^{D-2} \quad (a > 2)$$

$$d \sim \gamma L^{D-a} \quad (a < 2)$$

Une seule de ces densités est nécessaire pour définir complètement le nombre de fractures du système. L'intérêt de la densité massique de fractures est d'être statistiquement invariante d'échelle. La densité massique de fractures est la somme cumulée des longueurs de fractures divisée par le carré de la taille du système. Si on prend un système de taille L et si on le subdivise en n^2 blocs de côté L/n , la densité massique moyenne des n^2 blocs est exactement égale à la densité massique du système initial de taille L , de part la linéarité de la densité massique par rapport aux longueurs de fractures.

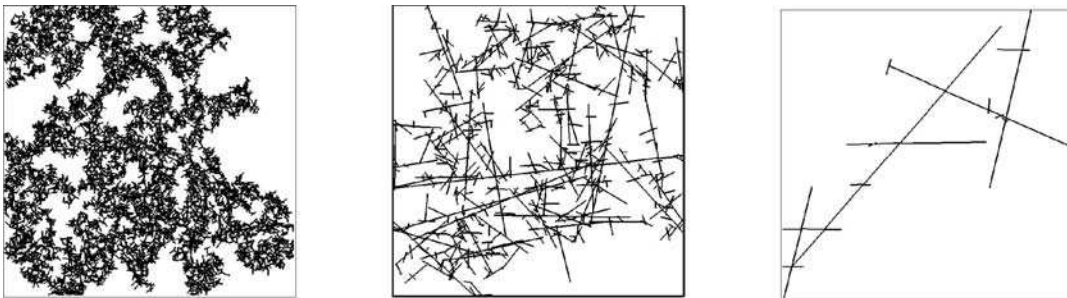
4.3 EFFET DE LA CORRELATION SUR LA CONNECTIVITE

4.3.1 Principaux résultats sur les réseaux non corrélés avec distribution des longueurs en loi de puissance

Les valeurs limites de l'exposant a de la distribution en loi de puissance, à savoir $a \rightarrow \infty$ et $a \rightarrow 1$, correspondent respectivement à un modèle de fractures de longueur constante égale à l_{\min} , et à un modèle de fractures infinies. Pour le modèle de fractures infinitésimales, les résultats de la théorie de la percolation sont applicables [Stauffer and Aharony, 1992]: la connectivité est décrite par un unique paramètre, le paramètre de percolation p . Il existe une valeur critique de ce paramètre appelée seuil de percolation en-dessous de laquelle les réseaux sont déconnectés et au-dessus de laquelle les réseaux sont connectés. Pour le modèle de fractures infinies toutes les fractures connectent statistiquement les extrémités du système. Entre ces deux modèles limites ($1 < a < \infty$), il existe une large variété de modèles (figure(1)). Bour and Davy [1997 et 1998] ont montré que, pour les modèles de distribution de longueurs en loi de puissance, la valeur du paramètre de percolation est constante au seuil, pour un paramètre de percolation qui s'exprime de la façon suivante:

$$\text{en 2D: } p = \frac{\int \text{Min}(L^2, l^2) \cdot n(l, L) dl}{L^2}$$

$$\text{en 3D: } p = \frac{\int \text{Min}(L^3, l^3) \cdot n(l, L) dl}{L^3}$$



Figure(1): amas infinis au seuil de percolation pour différentes valeurs de l'exposant a , a) $a = \infty$, b) $a = 2.5$, c) $a = 2$. ($L = 50$).

En 2D, le paramètre de percolation p est relié à l'expression de la densité massique d selon les expressions [de Dreuzy et al., 2001a]:

$$p \sim d \cdot L \quad a < 2$$

$$p \sim d \frac{L^{3-a}}{l_{\min}^{2-a}} \quad 2 < a < 3$$

$$p \sim d \cdot l_{\min} \quad 3 < a$$

Ainsi, lorsque $a > 3$ en 2D ($a > 4$ en 3D) on retrouve les règles de la percolation classique: le seuil de percolation est atteint pour une valeur critique de la densité de fracturation. Au contraire pour $a < 3$ en 2D, ($a < 4$ en 3D), la valeur du paramètre de percolation augmente avec l'échelle d'observation. En conséquence, un réseau apparemment déconnecté à petite échelle apparaît en fait connecté si l'échelle d'observation est suffisamment augmentée (figure 2). L'augmentation de la connexion avec la taille des systèmes est reliée à la probabilité d'observation de grandes fractures, qui augmente avec l'échelle d'observation.

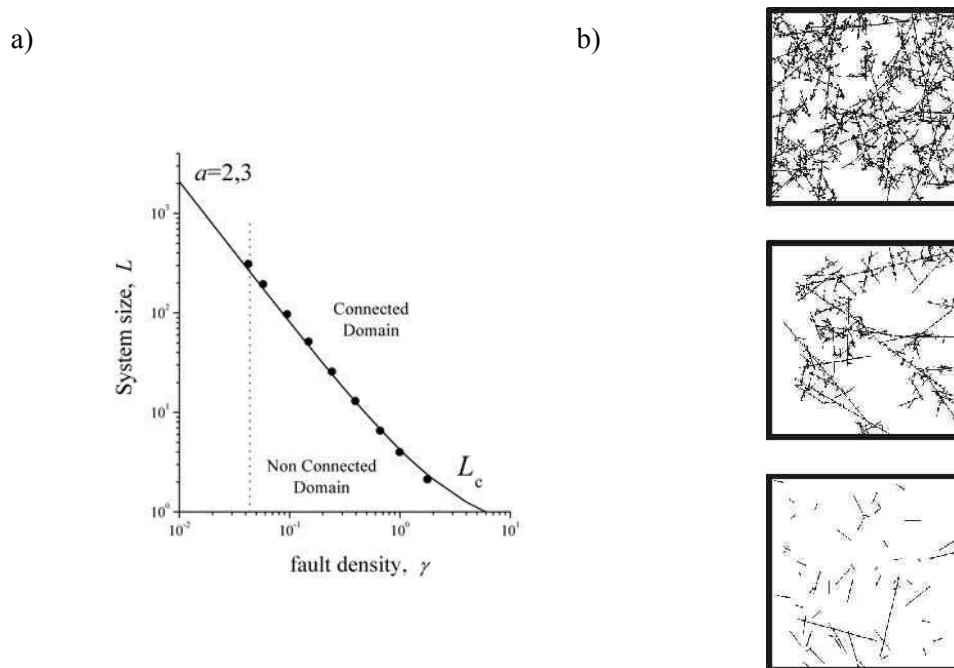


Figure 2: a) Evolution de la taille critique, L_c , de système pour laquelle le seuil de percolation est atteint dans un diagramme (γ, L) , pour $D=2$ et $a=2.3$. en trait continu: valeur théorique de L_c , en ronds pleins: valeurs L_c calculées à partir de simulations numériques, et en trait pointillé: évolution de l'état de connexion avec l'échelle. D'après *Bour and Davy, 1997*. b) Illustration de l'augmentation de la connexion avec l'échelle à densité constante, (en bas) réseau complet à $L=32$, (au milieu) amas infini au seuil de percolation $L=128$, (en haut) amas infini $L=256$.

4.3.2 connectivité des réseaux corrélés avec distribution des longueurs en loi de puissance

Les propriétés de connectivité des modèles de réseaux corrélés (éq 1), définis à la fois par une loi d'échelle pour la répartition spatiale des fractures (exposant D) et pour la distribution des longueurs de fractures (exposant a), sont encadrées par le comportement de plusieurs modèles limites:

- i) modèle de réseau non corrélé, revu plus haut: $D=2, a \in [1, \infty]$,
- ii) modèle corrélé avec fractures infinies: $D < 2, a < 2$,
- iii) modèle corrélé avec fractures infinitésimales: $D < 2, a \rightarrow \infty$.

Lorsque l'exposant a est inférieur à 2, quelle que soit la valeur de D la plupart des fractures ont une longueur supérieure à la taille du système, assurant ainsi la connectivité quelle que soit la position de leur centre dans le système.

Au contraire l'effet longueur est moindre lorsque $a \rightarrow \infty$, et c'est donc dans cette gamme que la structure de corrélation doit avoir un effet maximum. En effet, lorsque les réseaux sont constitués de petites fractures ($a \rightarrow \infty$), la connexion à l'échelle du système est donnée par la répartition spatiale et la densité des fractures et ne peut évidemment plus être fonction de la probabilité d'occurrence des grandes fractures, puisqu'il n'y en n'a pas. Si le réseau est vu comme une grille dont les mailles sont de la taille des fractures infinitésimales, alors l'étude du cas iii) peut être rapprochée du thème plus général de la percolation sur des systèmes présentant des corrélations à longue portée, qui est un champ de recherche actif ayant de nombreuses applications [Sahimi, 1998]. Dans ce cadre, les modèles les plus souvent utilisés pour représenter des corrélations à longue portée sont les mouvements browniens fractionnaires (fBm) [Sahimi and Mukhupadhyay, 1996], mais aussi les champs multifractals issus de processus de génération en cascade [Meakin, 1991; Paterson et al., 1996]. Il est montré que les corrélations ont un impact significatif au seuil de percolation sur les propriétés des systèmes et que le seuil lui-même peut être modifié. Les corrélations à longue portée induisent une variation de la nature de la transition, une modification des exposants de la percolation classique, impliquant par exemple un amas infini plus compact et un écart moindre entre le backbone et l'amas infini [Schmittbull et al., 1993] [Sahimi and Mukhupadhyay, 1996; Wagner et al., 1997].

L'analyse numérique et théorique des propriétés de connectivité des réseaux dont la distribution de densité est fractale et dont la distribution des longueurs est en loi de puissance (éq 1) est donnée dans la partie suivante, dans le projet d'article: **Connectivity properties of stochastic fracture networks with fractal correlations**, C. Darcel, O.Bour et P. Davy.

4.3.3 Projet d'article: **Connectivity properties of stochastic fracture networks with fractal correlations**

Par C. Darcel, O. Bour et P. Davy

Principe et motivation de l'étude. Nous présentons une étude numérique et théorique des propriétés de connectivité de réseaux de fractures dont les paramètres sont contrôlés par des lois d'échelles: la densité de fracturation d'un réseau (comptabilisé à travers le nombre de centres de fractures) est caractérisé par un exposant fractal, et la distribution des longueurs de fractures suit une loi de puissance ($n(l) \sim l^{-a}$). Ces deux caractéristiques sont présentes dans la plupart des réseaux fracturés étudiés. Elles induisent des corrélations à longue portée dont les conséquences sont cruciales sur les propriétés de connectivité de ces réseaux.

Plan. La partie (II) définit les bases de l'étude: le modèle théorique, la définition de la dimension fractale et de sa mesure, ainsi que la méthode de génération, et que les bases de la théorie de la percolation adaptée aux réseaux de fractures avec distribution des longueurs en loi de puissance. La partie (III) est centrée sur le cas limite de la connectivité de réseaux fait de fractures infinitésimales. Pour lesquels la percolation classique ne convient pas si $D < 2$. La partie (IV) porte sur l'étude de la connectivité avec à la fois des longueurs en loi de puissance et la densité fractale. Nombre moyen d'intersections par fracture, taille critique de système pour laquelle seuil de percolation est statistiquement atteint. Enfin la partie (V), c'est les conclusions de l'étude.

Résumé des résultats. Différents régimes de connectivité sont identifiés, selon les valeurs relatives des exposants D (dimension fractale) et a (distribution des longueurs). Lorsque $a < D+1$, la connectivité à l'échelle du système est entièrement dominée par l'exposant a de la distribution des longueurs de fractures. Dans ce case, la connectivité est en effet largement contrôlée par les fractures dont la taille est équivalente à la taille du système. On obtient que la connectivité croît avec l'échelle d'observation. Lorsque $a > D+1$, la connectivité est contrôlée par la fractures dont la taille est inférieure à celle de l'échelle d'observation. Ainsi, la corrélation spatiale exerce un fort contrôle sur la connectivité, qui conduit à une diminution de la connectivité à l'augmentation de l'échelle d'observation. Enfin, le cas self-similaire ($a = D+1$) correspond à la transition entre les deux régimes précédents. L'état de connectivité du système est alors invariant d'échelle et le seuil de percolation correspond donc à une densité critique de fracturation. Dans ce cas, le nombre moyen d'intersections par fracture est aussi invariant d'échelle.

Connectivity properties of 2D fracture networks with stochastic fractal correlations

C. Darcel, O. Bour, P. Davy, J.R. de Dreuzy

Géosciences Rennes, UMR 6118 CNRS, université de Rennes 1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex

Abstract. We present a theoretical and numerical study of the connectivity of fracture networks which follow two basic geometrical properties : a fractal density distribution for the fracture centers (dimension D), and a power law distribution for the fracture lengths (exponent a , $n(l) \sim l^{-a}$). Both geometrical properties, observed on most natural fracture patterns, introduce long range correlations that may be crucial on the network connectivity. Three different regimes of connectivity are identified depending on D and on a . For $a < D+1$, the fractal correlation of fracture centers does not play any role on network connectivity, which is actually dominated by the fracture length distribution. In this case, global connectivity is mostly ruled by the largest fractures whose length is of the order of the system size. The connectivity increases with scale. For $a > D+1$ the connectivity is ruled by fractures much smaller than the system size with a strong control of spatial correlation. The connectivity now decreases with system scale. Finally for the self-similar case ($a = D+1$), which corresponds to the transition between the two previous regimes, connectivity properties are scale-invariant : percolation threshold corresponds to a critical fractal density and the average number of intersections per fracture at threshold is also a scale invariant

I. Introduction

The connectivity of fractures, embedded in impermeable or low permeability geological formations, is a critical feature controlling fluid and chemical movement in these systems [Long and Billaux, 1987; Margolin *et al*, 1998]. The relationship between fracture-network connectivity and fracture geometrical properties has been intensively studied for the fracture length distribution [Berkowitz, 1995; Bour and Davy, 1997, 1998; Renshaw, 1999], and for the distribution of fracture orientations [Balberg, 1984; Balberg, 1991; Robinson, 1983; Robinson, 1984]. We lay a special emphasis on the recent results from Bour and Davy [1997, 1998] and Dreuzy *et al* [2000] which show that percolation theory does not necessarily apply on fracture networks whose length distribution is a power law. This length distribution model, which is characteristic of natural fracture systems ([Bonnet *et al*, 2001] and references herein), emphasizes the unlimited nature of fracture sizes which are observed from microns to 100's of kilometers. Associated with a random distribution of fracture positions, it provides a rich variety of behavior for connectivity properties, from classical percolation theory to superposition of infinite fractures (i.e. fractures of length larger than the system size) [Bour and Davy, 1998, 1997; Dreuzy *et al* 2000, 2001a, 2001b]. The nature of the connectivity model is fixed by the power-law length exponent a . For instance for 2D networks, if $a > 3$, connectivity is ruled by the smallest fractures, and the classical rules of percolation theory apply; if $a < 2$, the role of small fractures is negligible, and in terms of connectivity, the system is similar to the superposition of infinite fractures [Snow, 1969; Kiraly, 1975]; if $2 < a < 3$, both large and small fractures rule the connectivity, which is scale dependent in contrast to percolation theory.

All the previous studies mentioned above refer to a random distribution of fracture positions. This assumption is somehow in contradiction with direct observations since strong spatial correlation, like fracture clustering, exists at all scales in natural examples. Even if correlation models are still debated, the fractal model has been found to adequately represent correlation between natural fractures over scales ([Bonnet *et al*, 2001] and references herein). This property renders that the fracture density is generally decreasing with scale, the fractal dimension being exactly the scale exponent. The fractal model, that implies long range correlations at every scale, makes the application of classical homogenization technique questionable if not irrelevant.

Spatial correlation is likely to change the connectivity rules of networks. For instance, fracture clustering increases the fracture-to-fracture connectivity. On the opposite, a heterogeneous fracture distribution also produces areas of low connectivity. At the system scale, both effects are competing, and the consequences on the whole-network connectivity are not trivial.

The consequences of fractal correlation on fracture networks have never been studied, either on connectivity or on flow field. Several authors start with the assumption that the fractal correlation applies either to the permeability field [Sahimi and Mukhopadhyay, 1996], or to the flow field [Barker, 1988; Acuna and Yorstos, 1995]. But the correlation models they used do not necessarily render the basic correlation of the fracture network structure. Moreover unlike the fracture network, the fractal dimension of permeability or flow field has not really been quantified in field experiments.

In this paper, we aim at characterizing the connectivity properties of stochastic fractal networks. We use a fractal simulator to calculate the network connectivity. We first start with fracture networks of constant, but small, length. This simple case, close to classical assumptions made in percolation theory, should help to understand the very role of fractal correlation. We then deal with both fractal correlation and length distribution by treating the general fracture distribution model of [Bour *et al*, in press] which assumes both a power law for fracture-length distribution and fractal correlation for fracture centers.

II. Preliminary statements

II.1. Statistical model of fracture network

The fracture model that we focus on is based on the observation that most fracture networks are basically defined by two power laws : the length distribution and the fractal correlation. A basic first-order statistical model was initially proposed by Davy *et al*. [1990] to encompass these two scaling properties. It has been verified by Bour *et al*. [in press] on a large fracture network mapped from the metric scale up to almost the

kilometric scale in the Hornelen basin (Norway). The model gives the number of fractures $n(l,L)dl$ within an elementary volume of typical size L , and whose lengths are in the interval l and $l+dl$:

$$n(l,L)dl = \alpha L^D l^{-a} dl \quad \text{for } l \in [l_{\min}, l_{\max}], \quad (1)$$

where a is the exponent of the power law length distribution, D is the fractal dimension, α a fracture density term and $[l_{\min}, l_{\max}]$ is the fracture length range.

The first-order model describes the network as an ensemble of elementary fractures. Each fracture is defined by its size (length in 2D, or area in 3D), and by the position of a representative point, for instance the fracture center (for a complete discussion see [Bour *et al*, in press]). The length and the position of the fracture are drawn independently from a power-law distribution and from a fractal probability field (see next paragraph), respectively. In this study, no correlation has been considered between fracture length and position, although it has been observed [Clemo and Smith, 1997; Bour and Davy, 1999]. As we focus on the effect of the fracture length and fracture position distributions, simple assumptions have been considered for the other fracture characteristics. Fractures are idealized by straight segments in 2D. Fracture orientations are randomly distributed. The fracture aperture distribution has been bypassed as apertures do not change the connectivity state. All fractures have their center within the studied system (see [Bour and Davy, 1998] for an assessment of the role of fractures having their center outside the system while intersecting the studied system). Note that this fracture model encompasses the end-member model where all fractures have the same length, a case which corresponds to a power-law length exponent $a \rightarrow \infty$.

Another key parameter is the fracture density that is related to the total number of fractures, $N(L)$, present in a system of linear size L centered on the fracture network :

$$N(L) = \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} n(l,L)dl = \frac{\alpha l_{\min}^{-a+1}}{(a-1)} L^D \quad (2)$$

Two density parameters can be defined. First, the *apparent density*, that is the number of fractures per unit area, is equal to $\gamma_2 = N(L)/L^2$. It is straightforward that the *apparent density* of the fractal decreases as L^{D-2} when increasing the system size, L . In contrast the *fractal density* that we define as $\gamma_D = N(L)/L^D$ remains constant whatever the system size. It thus can be considered as a robust – i.e. scale-independent – characteristic of the fractal network. The fracture density term α in (1), that is proportional to γ_D , fixes the average number of fracture per unit “fractal” area [Bour *et al*, in press].

II.2. Definition and measure of the fractal dimension

Theoretically, the sole knowledge of D is not sufficient to fully characterize the fractal geometry of fracture networks. Indeed, a fractal object is characterized by an infinite set of generalized dimensions D_q , with $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_\infty$, called the multifractal spectrum [Hentschel and Procaccia, 1983; Feder, 1988]. By definition, the multifractal spectrum is related to a measure (here the local fracture density) on a support (the object itself). The multifractal spectrum fully characterizes its level of regularity and homogeneity. The multifractal spectrum describes the behavior of the global quantities, that is statistical averaged values of the measure on the geometrical support. The dimension $D_{q=0}$ of the multifractal spectrum is the dimension of the physical support, which can be either fractal or not. If $D_q = D_0$ whatever q , the measure is uniform on the support, and the system is a monofractal. If not, the system is said multifractal.

The fractal dimension D as defined in (1) is the mass dimension of the fracture center distribution and corresponds to the second-order dimension D_2 of the multifractal spectrum, also called correlation dimension D_c [Hentschel and Procaccia, 1983]. Indeed D_2 is defined by the scale dependency of the density-density or pair correlation function $C_2(r)$, which is the number of points whose mutual distance is less or equal to r [Viseck, 1992]:

$$C_2(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^2} \text{card} \left\{ (i,j); |x_i - x_j| \leq r, i, j \leq N \right\} \right)$$

$$\text{and } D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_2(r)}{\log r}$$

where N is the total number of points. Mathematically, this statistics over the pairs of points is equivalent to the average number of points included in a disk of radius r whose center is on the object. This is exactly the meaning of Equation (1).

II.3. Network generation

To generate a fractal spatial density distribution of fractures, we have implemented a method based on a multiplicative cascade process [Schertzer and Lovejoy, 1987; Meakin, 1991]. The principle of the multiplicative cascade process is a recursive operation of fragmentation of a generic shape in n subdomains. Then a probability P_i , with $i=1..n$, is attributed to each subdomain (Figure 1(a) and (b)). The fragmentation cascade can be iterated at infinity (practically set to 9 iterations); at each stage of the fragmentation process, a fragment takes one of the n probabilities P_i multiplied by the probability of the parent domain.

The set of probabilities P_i defines the multifractal spectrum of the generated probability field. In theory, if l is the scale ratio of the elementary fragmentation process (i.e. ratio between the size of the parent domain and of each fragmented subdomains, equal to 2 for the example of Figure 1), the dimensions D_q of the eventual probability field are related to the set $\{P_i\}_{i=1..n}$ by:

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_i^q}{(1/l)^{(q-1)D_q}} = 1 \quad (3)$$

Note that, for $q=1$, Equation (3) trivially expresses that the sum of a set of probabilities must be equal to 1. The method is flexible and allows us to generate a large range of fractal fields, from mono- to multi- fractal spectrum.

We choose a model with a fragmentation in 4 blocks of identical size ($l=2$ in (3)). We fix the dimension D_2 ($q=2$ in (3)) as the main characteristic of the generated probability field, but we let the other dimensions $\{D_q\}_{q>2}$ undetermined, which means that they can take whatever value between 1 and 2. Also we choose an isotropic fragmentation process, meaning that the probabilities $\{P_i\}_{i=1..4}$ are randomly permuted before being mapped on the subdomains. Once the fractal probability field is generated, fracture centers are stochastically drawn from the probability distribution. An example of a set of points generated from a probability field at $D=1.5$, and for 9 cascades is given in Figure 1(c). Figure 2 displays several synthetic fracture networks for different values of a and D . The smaller is D , the higher is the clustering, and the larger are empty areas. Note that the notion of ‘‘empty areas’’ refers to low probability areas that may nevertheless be eventually filled by fractures if the fracture density is increased enough.

In practice, the multiplicative cascade process is iterated over a sufficient range so that the fractal structure is defined from a minimal scale, equal to the smallest fracture length l_{\min} , up to the fracture system size. Note that under this minimal scale the density distribution remains homogeneous whatever the fractal dimension. Therefore both scaling laws, related to the density (D) and the fracture length distribution (a), are generated over the same range of scales. In the following, fracture networks are studied at the percolation threshold. In practice fractures are added to the system up to the percolation threshold (connected pathway between opposite sides of the system) is reached.

II.4. Synthesis of previous connectivity results

Up to now connectivity properties have been only studied for fracture networks randomly distributed, i.e. for $D=2$ in (1). First we briefly recall the main results obtained in that case. Robinson [1983] showed that systems made up of uniformly distributed cracks of constant length belong to the general framework of percolation theory [Stauffer and Aharony, 1992]. Percolation theory is a statistically-based approach, which relates the physical properties of a system (connectivity, permeability...) to an average geometrical measure, p called the parameter of percolation. For 2D networks made up of cracks of constant length l , the parameter of percolation p is:

$$p = \frac{Nl^2}{L^2} \quad (4)$$

where N is the number of cracks of length l in a system of area L^2 . In this particular case, p turns out to be equivalent to the number of elements per unit area times a correction

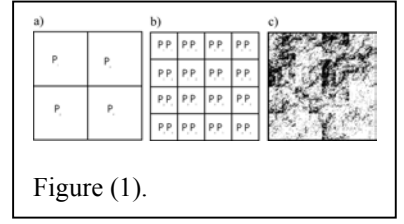


Figure (1).

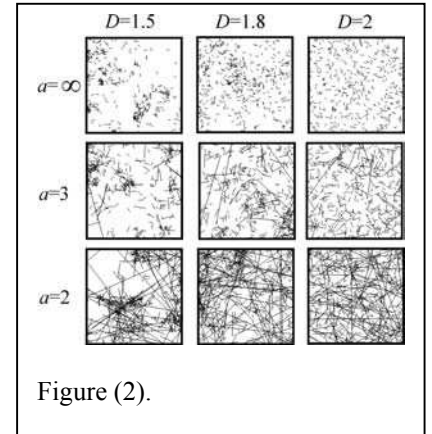


Figure (2).

factor, which is the size of the element to the square. For infinitely large systems, there exists a critical value of the parameter of percolation p_c called percolation threshold below which systems are not connected, and above which systems are always connected.

When dealing with atypical fracture geometry (for instance a widely-scattered length distribution), the challenge is to find a parameter of percolation that is a right measure of network connectivity, i.e. that does not depend on scale at connectivity threshold. For 2D random networks having a power-law fracture length distribution the right expression of the percolation parameter is [Bour and Davy 1997] :

$$p(L) = \int_{l_{\min}}^L \frac{n(l,L)l^2}{L^2} dl + \int_L^{l_{\max}} n(l,L) dl, \quad (5)$$

where L is the system size, $n(l,L)$ is the distribution given by (1), l_{\min} and l_{\max} are the lower and upper bounds of the fracture length distribution, respectively. The first term of (5) corresponds to the classical excluded volume concept [Balberg, 1984], and the latter one counts the number of fractures that are larger than the system size and that ensure the system connectivity by themselves. This expression has been proven to be very general and it can be extended to 3D square or elliptic fracture networks [Bour and Davy, 1998; Dreuzy et al, 2000].

In the case of the power-law length distribution, two connectivity regimes have been characterized, depending on the ratio of fractures larger and smaller than the system size, conditioning the relative weight of both terms in (5) (Figure 3). In the first case, the classical case described by percolation theory, the percolation threshold corresponds to a constant density of fractures γ , apart from minor finite-size effects at small L (Figure 3a). This case is valid whatever the power-law length distribution characterized by $a > 3$. In contrast, an exponent a smaller than 3 (in 2D), the connectivity increases with the system size (Figure 3b for $a=2.3$). In this second connectivity regime, systems are on average disconnected at small scale, and connected at larger ones. This result expresses the increasing control on connectivity by large fractures spanning the whole system, whose probability of occurrence increases with L . For $2 < a < 3$, both small and large fractures, expressed by the two terms of (5), rule the connectivity, whereas for $a < 2$ only large fractures, corresponding to the second term of (5), rule the connectivity. A more detailed discussion of these effects can be found in Bour and Davy [1997,1998] and Dreuzy et al.[2000]. In the following these results are used as a reference to investigate the coupled effect on connectivity of the power-law fracture length distribution, and of fractal correlations.

III. Connectivity properties of 2D fractal networks made up of small fractures of constant length

III.1. Tests of previous proposed expressions of the percolation parameter

First, we treat the case of 2D fractal fracture networks where all fractures have the same length $l=l_{\min}$. We choose $l_{\min}=1$ for simplicity and without loss of generality. Berkowitz et al. [2000] proposed the following expression for fractures of constant length l embedded in a system of linear size L ,

$$P_{fractal}(L, D) = \frac{Nl^D}{L^D}, \quad (6)$$

This trial expression for the percolation parameter relies on the fact that the probability to find a fracture in a fractal network is higher into a space of area L^D that is smaller than the embedding space L^2 . This clustering should lead to a higher connectivity between fractures so that the network connectivity should be reached for a fracture number smaller than in the uniform case. It implies therefore that connectivity properties should be improved through fractal correlations. This expression nevertheless assumes that the embedded fractal space provides surely a connected pathway to the opposite boundaries of the system, like for some other models of correlated fracture networks used in groundwater hydrology [Acuna and Yortsos, 1995; Doughty and Karasaki, 2002].

If (6) is the right expression of the percolation parameter, it should be constant at the percolation threshold, leading also to a constant fractal density ($\gamma_c(L,D)=N(L)/L^D$) at $p=p_c$. To test the relevance of this expression, numerical computations have been

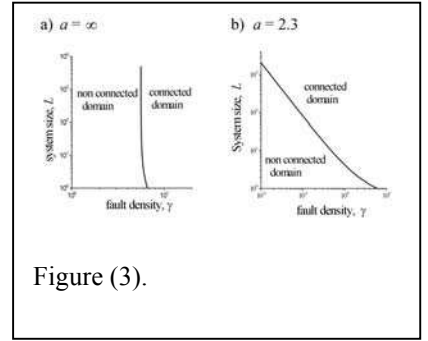


Figure (3).

performed to obtain the mean values of the fracture networks parameters, averaged over a large amount of simulated networks at evolving system sizes (from 10000 for the smallest system sizes, to 100 for the largest system sizes – 256 for $l=1$). The evolution of $\gamma_c(L,D)$ with the system size L is plotted in Figure 4 for several values of the fractal dimension D . For the case of uniformly distributed fracture networks (no correlation, $D=2$), as expected, the fracture density is the critical parameter. The transition between unconnected and connected systems occurs around a constant fracture density, and the transition width (see the error bars in Figure 4) vanishes at large system sizes, in perfect agreement with percolation theory [Robinson, 1983; Balberg, 1984; Stauffer and Aharony, 1992]. On the opposite, for $D<2$ the critical density $\gamma_c(L,D)$ increases with L at a rate that depends on D (Figure 4). Moreover, the width of the transition (represented by the error bars in Figure 4) does not decrease with the system size, in contradiction with classical percolation theory. By analyzing connectivity properties of long-range correlated systems, Prakash *et al.* [1992] and Schmittbuhl *et al.* [1993] have also observed that the width of the percolation transition remains finite even for infinitely large systems. It implies that the transition at threshold is no longer a second order phase transition and suggests that classical percolation theory is not applicable for describing connectivity properties of correlated fracture networks.

The change of the nature of the transition has also some consequences on the possible use of a percolation parameter expression to describe connectivity properties. Over the scale range investigated and when $D<2$, the critical density at the percolation threshold diverges exponentially. It ensues that neither of the previous definitions of the parameter of percolation given by (4) and (6) lead to a scale-invariant parameter at threshold. The trial parameter defined in (6), that takes explicitly account of the fractal dimension, varies in fact much faster than the classical one defined in (4). This result is somehow in contradiction with the intuitive idea that fractal correlations may increase the connectivity properties of the fracture network. In fact, for fractal networks (Figure 5 right column to be compared with the uniform distribution on the left column) many fractures concentrate in clusters without improving the global connectivity of the system. The global connectivity is rather controlled by the spatial repartition of low densities areas that disconnect the dense-fracture zones. Connectivity is thus ruled by the occurrence of a few fractures in the low-probability zones. In fractals, the proportion of these critical low-probability zones increases with the system size so that the critical density of fractures at threshold increases to maintain the connection through the increasing number of low-probability zones. This is why fractal networks are disconnected at large scale if the fractal density is kept constant (Figure 4). For a given fractal density, the higher is the clustering (small D), the smaller is the critical system size at which the fracture network appears disconnected.

III.2. Local density distribution at percolation threshold

To better characterize connectivity properties at threshold, and in particular to estimate how too high or too low values of the local fracture density may inhibit connectivity at the global scale, we computed the distribution of fracture density at the local scale. The question is to evaluate the relationships between the connectivity properties of the fracture network and the distribution of fracture densities depending on the fractal dimension D and on the system size L . For a fracture network whose fracture density distribution is uniform, the connectivity properties are not ruled by microscopic details, but are described by a macroscopic parameter, the percolation parameter defined in (4), that takes into account the global density of the fracture network. For stochastic fractal fracture networks, we saw in the previous section that none of the previous definitions of the macroscopic parameter of percolation given by (4) and (6) was providing an invariant at threshold. On the opposite, it seems that the spatial repartition of fractures (Figure 5), that tends to cluster fractures with high fracture densities, leads to disconnected fracture networks. A related question is therefore the link between the distribution of fracture density at the microscopic scale and a global parameter – if it exists – that may describe the fracture network connectivity at the global scale.

To compute fracture density distribution, we first define a relevant coarse-graining scale, that naturally corresponds to l_{\min} , the minimal fracture length and to the minimal scale, r_{\min} , below which there is no fractal correlation. For $r=r_{\min}$, the fracture density is unambiguously defined since the density distribution remains homogeneous whatever the fractal dimension. Thus, we used the scale $r=r_{\min}$ to define the mesh size of the grid that covers the fracture system. Within each mesh, the local fracture density α , equal to the cumulative fracture length divided by the mesh area, is computed. The method is

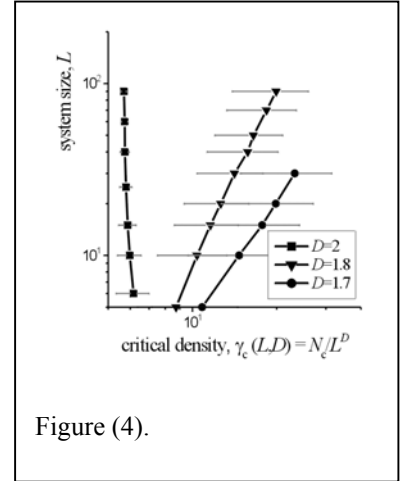


Figure (4).

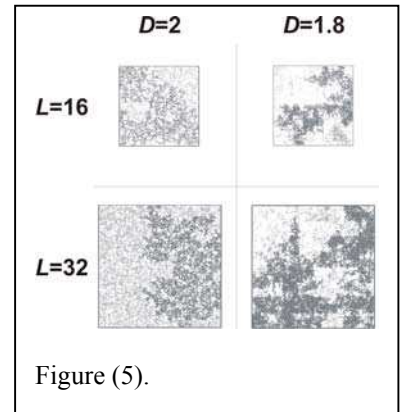


Figure (5).

illustrated in the case of uniform fracture networks ($D=2$) generated at the percolation threshold, Figure 6. The distribution of local densities is represented through the evolution of the parameter $n(\alpha)$, defined as the proportion of meshes having a fracture density larger than α . The curves $(\alpha, n(\alpha))$, corresponding to two uniform fracture networks of respective sizes $L=64$ and $L=128$ are plotted, in Figure 6b. Both curves overlap each other as expected for uniform fracture networks of constant infinitesimal lengths, since the percolation parameter at threshold (Equation (4)) is an invariant. Note that we may have some very slight variations of the curves $(\alpha, n(\alpha))$ for small system sizes due to some slight variations of p_c because of finite-size effects [Stauffer and Aharony, 1992]. Since the fracture density distribution is uniform, the distribution of the local densities is a gaussian whose mean value is equal to 5.6, the value of the percolation parameter at threshold for $l=1$. The curve $(\alpha, n(\alpha))$ is therefore trivially deduced from this gaussian. Note that for a uniform fracture density distribution, we have the percolation parameter at threshold defined in (4) that should be also relevant at the microscopic scale in average with 50% of the meshes that should have a local value of p larger than 5.6. In the following, we investigate if a similar local parameter may be defined for fractal fracture networks. In particular, we investigate through the variations of the curves $(\alpha, n(\alpha))$ if the percolation threshold is reached when a proportion of the system (e.g. $n_c(\alpha_c)$) is filled by a critical amount of fractures, α_c .

The curves $(\alpha(D), n(\alpha, D))$ have been computed at the percolation threshold for different fractal dimensions and at different system sizes (Figure 7). It is clear that the shape of the curves is strongly dependent on the fractal dimension (Figure 7a). For the same system size, the lower is the fractal dimension, the broader is the density distribution. The tails of the curve increase when D decreases in an asymmetric manner due to the increase of the proportion of zones of high fracture density. These zones are extremely well connected at the local scale but their contribution to the overall network connectivity is obviously not proportional to the fracture density. On the opposite, some zones for which $\alpha(D)$ is very low may be crucial for the network connectivity. Similar results are obtained when increasing the system size at constant fractal dimension. These results are perfectly consistent with the previous results obtained for the percolation parameter at threshold and on the role of low and high fracture density zones.

Interestingly, all curves intersect for the same common point : $\alpha_c \approx 5,6$, $n(\alpha_c) \approx 0.5$ whatever D (Figure 7a). Hence, the percolation threshold is reached for approximately the same couple of value $(\alpha_c, n(\alpha_c))$ whatever D . It means that the fracture network is connected in average when a critical proportion of space, $n(\alpha_c)$, is occupied by a fracture density larger than α_c . The relevance of this connectivity criteria for various system sizes is illustrated in Figure 7b for $D=1.7$. All the curves $[\alpha(D), n(\alpha, D)]$ do indeed intersect at a unique point. We thus conclude that there exists a critical spatial occupation rate, $n(\alpha_c, D)$, for which the percolation threshold is reached, independently of the system size. We do recognize that further work is necessary to completely assess the existence of such an invariant critical point $(\alpha_c(D), n(\alpha_c(D)))$ at percolation threshold for any D or L . Such a study relates to the models studied by [Meakin, 1991; Sahimi and Mukhopadhyay, 1996; Marrink, 2000] who analyzed the percolation transition on regular lattices with long-range correlations. It will be the subject of a separate work.

However, it explains why the density of correlated fracture networks increases with scale at percolation threshold (Figure 4). Indeed, although the proportion of meshes to be filled at threshold is constant ($n(\alpha_c)$), the contrast between areas of high and low probabilities increases when L increases (or D decreases). This difference between low-density and high-density areas explains the scale increase of the average density. Note that assuming the invariance of the point $(\alpha_c(D), n(\alpha_c(D)))$ at percolation threshold, it is possible to predict the critical density of fractures at threshold *a priori* directly from the spatial probability field. It avoids tedious intensive computations. Indeed, the number of fractures, N_c , necessary to reach percolation threshold is equal to the sum of the number of fractures necessary to statistically fill a proportion $n(\alpha_c)$ of the highest densities areas of the grid, with a density α_c . Such computations confirm the rapid divergence of the critical density with scale.

In summary, the results obtained on constant-length fracture networks show that the fractal property creates both clusters and anti-clusters, and that anti-clusters (i.e. holes or low-density areas) control the global connectivity. As a consequence, for a given fractal density, stochastic fractal fracture networks can hardly be connected and there exists a critical scale at which they are surely disconnected.

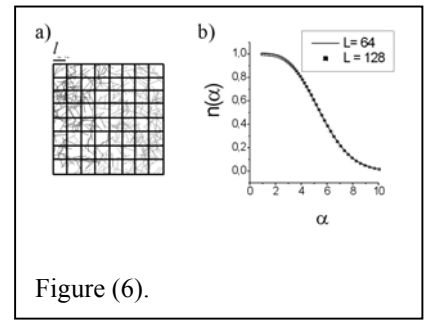


Figure (6).

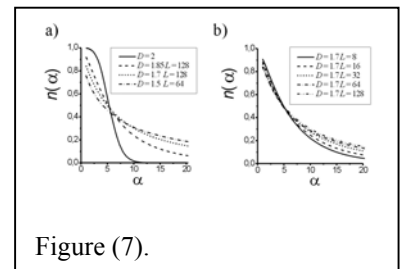


Figure (7).

IV. Connectivity of 2D fractal networks with a power-law length distribution

IV.1. Expected behavior at threshold

The introduction of a widely-scattered length distribution in the system leads to another kind of long-range correlation coming directly from fracture lengths. Indeed, a fracture induces by itself a potential connectivity over a scale that corresponds to its length. This effect can be dramatic if the probability to find fractures as large as the system size is not negligible. The power-law length distribution makes possible this configuration. For instance, if $a < 2$, the system is essentially connected by large fractures that spans the whole system [Bour and Davy, 1997]. For such small values of the exponent a , we do not expect fracture clustering to be relevant for assessing the global connectivity properties. For the complete fracture model with both a power-law length distribution and fractal correlations, the issue is thus to know which long-range correlation will be dominant, and to define the transition between a regime controlled by the length distribution (when the exponent a is small enough), and a regime controlled by the fractal correlations (when the exponent a is large enough, as it is for the constant-length model where $a = \infty$). In the following, we thus investigate the ranges of exponents a and D to characterize the behavior of networks at percolation.

We first consider the number of large fractures within the system, because of their key role in connectivity. If α and β are two constant coefficients close to 1, the number of fractures whose length is in the range $[\alpha L, \beta L]$ is:

$$N(\alpha L < l < \beta L) = \int_{\alpha L}^{\beta L} n(l, L) dl \propto L^{D-a+1}, \quad (7)$$

Equation (7) first shows that the self-similar property, that is the scale-invariance of fracture patterns, is achieved if and only if $a = D + 1$ since the scale-invariance of the number of structures observable at a given scale is a necessary condition for the self-similar property. This also means that a fractal property does not necessarily mean self-similarity, contrarily to an intuitive opinion.

If $a < D + 1$, $N(\alpha L < l < \beta L)$ increases with scale, leading to an increase of the number of large fractures, and thus to a necessary increase of the connectivity with scale. On the opposite, if $a > D + 1$, the probability to observe large fractures decreases with scale, so that connectivity is eventually ruled, for infinitely large systems, by fractures that are much smaller than the system size. This case is thus similar to the constant-length model described above; and we thus expect a decrease of the connectivity with scale due to fractal correlation (i.e. if $D < 2$) as shown in the previous section.

For $a = D + 1$, that corresponds to the self-similar case, the number of fractures whose length is of the order of L is independent of L . We thus expect the connectivity properties also to be scale-invariant. Indeed if the pattern is connected at a given scale, then it must be connected for larger systems. And if it is disconnected at a given scale, it must be disconnected for smaller systems.

To verify all these assumptions, we compute systems at percolation threshold for a large range of fracture density, power-law exponents and fractal dimensions.

IV.2. The percolation parameter

Figure 8 displays the evolution of the percolation parameter at threshold, $p_c(L)$, for various value of a and D . $p_c(L)$ was calculated from Equation (5). For $a < D + 1$, the percolation parameter $p_c(L)$ does not present significant variations with L , nor with a or D (Figure 8a). It is rather constant and can be used as a good criteria for defining the network connectivity. The width of the transition remains finite even for large systems implying that the transition at threshold is not a second-order phase transition. It suggests that percolation theory is not applicable for describing connectivity properties of correlated fracture networks for $a < D + 1$. Same results are obtained for $a < 3$ for random fracture networks [Bour and Davy, 1997].

For $a = D + 1$, the scaling with L of $p_c(L)$ does not depend on a and D but varies slightly with L (Figure 8c). The variations with L are nevertheless very small so that $p_c(L)$ can be considered as an invariant with L and D at percolation threshold over the range $a \leq D + 1$. The invariance of $p_c(L)$ combined with (5) implies that the critical number of fractures in the system at threshold, $N_c(L)$, is scaling with L such as:

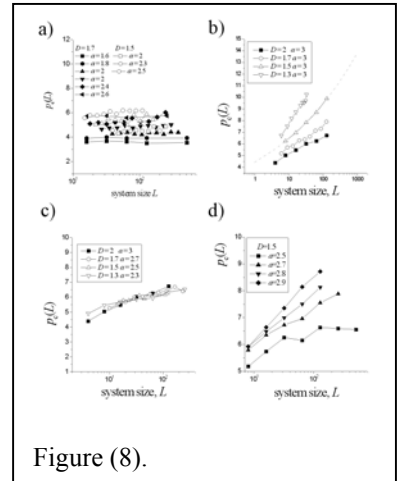


Figure (8).

$$N_c(L) \propto L^{a-1} \text{ for } 1 < a \leq D+1 \quad (8)$$

To verify (8), we computed $N_c(L)$ for a large range of a and D values, and derived its scaling with L . Results are in perfect agreement with (8) (Figure 9), confirming that $p_c(L)$ defined in (5) is scale-invariant for $1 < a \leq D+1$. Note that the peculiar scaling obtained at threshold (Equation (8)) comes from scale effects that are inherent to systems where the connectivity is controlled by both small and large fractures [Bour and Davy, 1997]. Nevertheless, we do not expect scale effects for the self-similar case ($a=D+1$); the critical density to reach the percolation threshold should be indeed independent of the system size $\gamma_c(L)=N_c(L)/L^D \sim L^0$. The implications of the scaling of the fracture density at threshold will be analyzed in a next section.

Finally, for $a > D+1$ and $D < 2$, variations of $p_c(L)$ are significant (Figure 8b and c). The larger is the difference between a and $D+1$, the larger is the scaling with L of $p_c(L)$. The scaling exponent of $p_c(L)$ also increases when D decreases. This result is in accordance with the fact that small fractures are supposed to rule the connectivity for $a > D+1$. If previous results obtained for constant-length fracture networks are extrapolated to the general case $a > D+1$, we indeed expect an increase with L of the fracture density at threshold $\gamma_c(L)=N_c(L)/L^D$ such as the one observed on Figure 4. We do observe such a scaling (Figure 12) that necessarily implies an increase with L of $p_c(L)$. Like for the constant-length fracture networks (i.e. $a=\infty$), the effect of D cannot be neglected when the exponent a is larger than $D+1$, and the percolation parameter defined in (5) is no more an invariant at the percolation threshold.

IV.3. The average number of intersection per fracture

The previous developments allowed us to define three different regimes of connectivity ($a < D+1$, $a = D+1$, $a > D+1$). In this part, we study the local connectivity properties of fractures, through the analysis of the average number of intersections per fracture, noted $I_c(L)$ (subscript c meaning at percolation threshold). This parameter, that is an invariant at the percolation threshold for random fracture networks made of fractures of unit length [Robinson, 1984; Hestir and Long, 1990; Berkowitz and Balberg, 1993], is often used to describe the connectivity properties of fracture networks. Note that it can be easily used to qualify natural examples. Moreover, the transport properties of fracture networks may be controlled by the local connectivity properties between fractures that greatly depend on fracture clustering.

The analytical expression of $I_c(L)$ may be derived knowing the expression of the fracture length distribution at threshold, $n_c(l, L)$ and of the probability of intersection between two fractures of different lengths, $p(l, l')$, [Bour and Davy, 1997]. Indeed the sum over l' of the product $p(l, l') \cdot n_c(l', L)$ provides the average number of intersections per fracture of length l . This quantity may be then summed to obtain the total number of intersections in the system that provides $I_c(L)$ once divided by $N_c(L)$, the number of fractures at threshold.

In another work [Darcel et al, submitted], we have shown that the intersection probability between two fractures of length l and l' , in a system of fractal dimension D , follows :

$$p(l, l' < l, L) \propto \frac{l' \cdot l^{D-1}}{L^D} \quad (9)$$

The expression of the fracture length distribution and of the critical number of fractures at threshold for different system sizes is determined clearly only for $a \leq D+1$ (see (8)). For that reason, we restrict our analysis to $a \leq D+1$. For $a > D+1$, $N_c(L)$ is anyway expected to diverge without the existence of an invariant so that $I_c(L)$ should also diverge. By combining (9) and (8), one obtains for $1 < a \leq D+1$:

$$I_c(L) \sim L^{1-a} \text{ for } 1 < a \leq (D+2)/2$$

$$I_c(L) \sim L^{a-1-D} \text{ for } (D+2)/2 \leq a \leq D+1$$

In Figure 10 we reported the scaling exponent of $I_c(L)$ at threshold, for $D=1.5$ (empty disks), $D=1.7$ (full squares) and $D=2$. Results are in excellent agreement with theoretical predictions. For $1 < a \leq (D+2)/2$, $I_c(L)$ is varying as the inverse of $N_c(L)$ meaning that the total number of intersections at threshold is independent of scale. We indeed checked

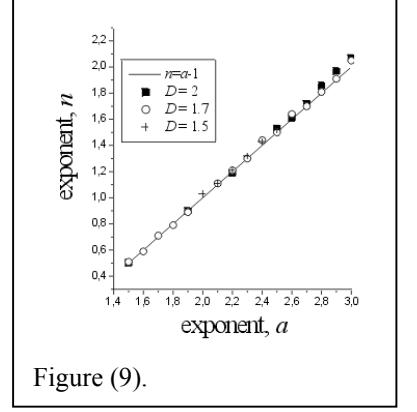


Figure (9).

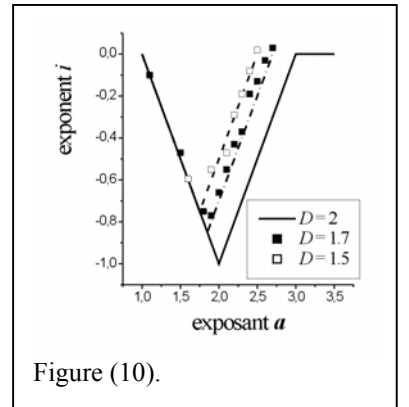


Figure (10).

that the total number of intersections is extremely small whatever the system size, in agreement with the fact that fracture networks are always connected by fractures having a size equal or larger than the system size for such a range of values of a and D .

For $(D+2)/2 \leq a < D+1$, the total number of intersections increases with system size, but not as fast as the number of fractures in the system so that $I_c(L)$ decreases with scale at threshold. Like for $1 < a \leq (D+2)/2$, this scaling is consistent with the fact that the occurrence probability of fractures having a length of the order or larger than the system size is increasing with L .

At last, $I_c(L)$ does not vary with L for $a=D+1$ in agreement with the self-similar nature of the network. Numerical computations confirm this scale-invariance whatever the couple of values of a and D as far as $a=D+1$ (Figure 11). Nevertheless, even for $a=D+1$, the average number of intersection per fracture is not an invariant since it depends on the fractal dimension D . The larger is D , the lower is the average number of intersections. This latest result, that is consistent with an increase of fracture clustering as the fractal dimension decreases, may have strong implications on the transport properties of fractal fracture networks.

IV.4. Scaling effects

The previous developments allowed us to define different regimes of connectivity depending on the respective values of a and D , above, at and below the critical value $a=D+1$. To verify such a typology, we calculated the critical system size at which percolation occurs, as a function of the fractal density, for $D=1.7$ and for a broad range of a values (Figure 12). As shown previously for constant fracture lengths (solid squares), the critical density diverges exponentially when increasing the system size for $a > D+1$. This trend is still obtained for $a=3$ and $D=1.7$ (up triangles), even if the increase is less pronounced. For $a=D+1$ ($D=1.7$ and $a=2.7$ here), the critical fractal density at threshold remains constant whatever the system size. At last, for $a < D+1$ (left triangles for $a=2$, diamonds for $a=2.5$) we notice a decrease of the critical density at percolation threshold when the system size increases, as it is the homogeneous case ($D=2$) when a is smaller than 3 [Bour and Davy, 1997].

These results have strong implications for the connectivity properties of natural fracture networks. For a given network, i.e. a given fractal fracture density, one expects the network to be better connected at small scale than at large scale if a is larger than $D+1$. On the opposite, we expect the connectivity to increase with scale for $a > D+1$. Interestingly, it is only for $a=D+1$ that the connectivity depends only on the fracture density. The latter case, that seems very peculiar, corresponds nevertheless to some natural examples [Bour et al, in press].

Finally, the critical scale, L_c , at which percolation occurs, can be predicted for $a < D+1$ from the threshold equality $p(l, L) = p_c$, and by combining (1) and (5):

$$\frac{l_{\min}^{3-a}}{a-3} L_c^{D-2} + \frac{2}{(3-a)(a-1)} L_c^{D+1-a} = \frac{p_c}{\gamma_c(a-1)} l_{\min}^{D+1-a}$$

that provides L_c for large system sizes through :

$$L_c = \left[\frac{(3-a)p_c}{2} l_{\min}^{-a+D+1} \frac{1}{\gamma_c} \right]^{\frac{1}{D+1-a}}. \quad (10)$$

This expression is plotted in Figure 13 and compared with numerical simulations for $a=2.3$. Numerical computations are in good agreement with theoretical predictions.

V. Conclusions

In this paper, we enlarged previous study of the connectivity properties of fracture patterns by studying the consequences of fractal clustering. According to recent measures on natural fracture outcrops, we considered networks that have two basic geometrical properties: a fracture-center density that is fractal, and a fracture length distribution that follows a power law l^a . Both geometrical properties, that are characteristic of most natural fracture patterns, introduce long-range correlations that may be crucial for the network connectivity. Different regimes of connectivity are

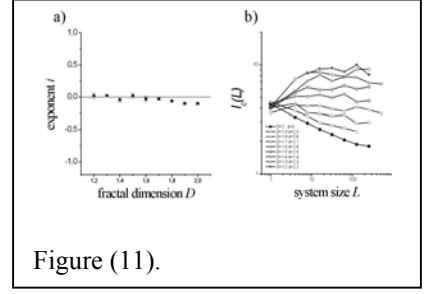


Figure (11).

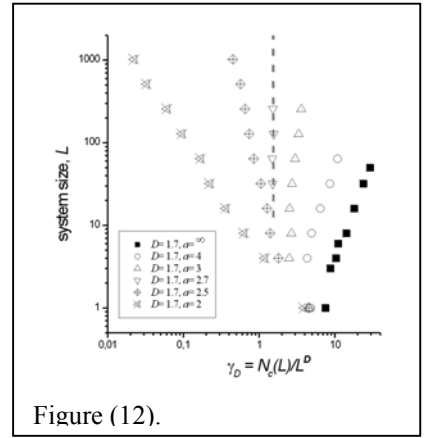


Figure (12).

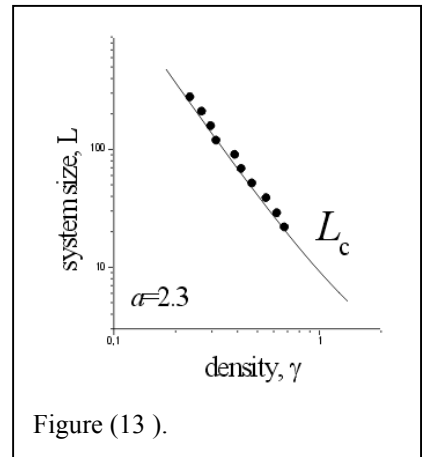


Figure (13).

identified depending on the fractal dimension D , and on the length-distribution exponent a .

For $a < D+1$, system connectivity is dominated by the fracture length distribution, with a negligible contribution of fractal correlations. The system connectivity is mostly ruled by the largest fractures whose length is of the order of, or larger than, the system size. The connectivity increases with scale so that one expects fracture networks to be always connected at large scale. The number of intersections per fracture, which may partly control transport properties of network, are dependent on the fractal dimension D .

For $a > D+1$ the connectivity is ruled by fractures much smaller than the system size, with a strong control by spatial correlation. The connectivity now decreases with system scale. This means that large systems are always disconnected, even if it can be connected at finite scale.

At last, the self-similar case ($a=D+1$) corresponds to the transition between these two regimes. The connectivity properties were found scale-invariant, so that the percolation threshold corresponds to a critical fractal density. The average number of intersections per fracture at threshold is also a scale invariant.

Acknowledgements

We wish to thank the French CNRS and the European Community (contract SCALFRAC ENV4-CT97-0456 and contract SALTRANS EVKI-CT-2000-00062) for their financial support.

References

- Acuna, J.A., and Y.C. Yortsos, Application of fractal geometry to the study of networks of fractures and their pressure transient, *Water Resources Research*, 31 (3), 527-540, 1995.
- Balberg, I., Excluded volume and its relation to the onset of percolation, *Physical Review B*, 30 (7), 3933-3943, 1984.
- Balberg, I., B. Berkowitz, and G.E. Drechsler, Application of a percolation model to flow in fractured hard rocks, *Journal of Geophysical Research*, 96 (B6(10)), 15-21, 1991.
- Barker, J.A., A Generalized Radial Flow Model For Hydraulic Test in Fractured Rock, *Water Resources Research*, 24 (10), 1796-1804, 1988.
- Berkowitz, B., Analysis of fracture connectivity using percolation theory, *Mathematical Geology*, 27 (4), 467-483, 1995.
- Berkowitz, B., and I. Balberg, Percolation Theory and Its Application to Groundwater Hydrology, *Water Resources Research*, 29 (4), 775-794, 1993.
- Berkowitz, B., O. Bour, P. Davy, and N. Odling, Scaling of fracture connectivity in geological formations, *Geophysical Research Letters*, 27 (14), 2000.
- Bonnet, E., O. Bour, N. Odling, I. Main, B. Berkowitz, P. Davy, and P. Cowie, Scaling of Fracture Systems in Geological Media, *Reviews of Geophysics*, 39 (3), 347-383, 2001.
- Bour, O., and P. Davy, Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution, *Water Resources Research*, 33 (7), 1567-1583, 1997.
- Bour, O., and P. Davy, On the connectivity of three dimensional fault networks, *Water Resources Research*, 34 (10), 2611-2622, 1998.
- Bour, O., and P. Davy, Clustering and size distributions of fault patterns: theory and measurements, *Geophysical Research Letters*, 26 (13), 2001-2004, 1999.
- Bour, O., P. Davy, C. Darcel, and N. Odling, A statistical scaling model for fracture network geometry, with validation on a multi-scale mapping of a joint network (Hornelen Basin Norway), *Journal of Geophysical Research*, sous presse.
- Clemo, T., and L. Smith, A hierarchical model for solute transport in fractured media, *Water Resources Research*, 33 (8), 1763-1783, 1997.
- Darcel, C., O. Bour, and P. Davy, stereology of fractal fracture networks, submitted to *Journal of Geophysical Research*.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette, Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, *Nature*, 348 (6296), 56-58, 1990.
- Doughty, C., Karasaki K., Flow and transport in hierarchically fractured rock, *Journal of Hydrology*, 263, issue 1- 4, 1 - 22, 2002.

- de Dreuzy, J.R., P. Davy, and O. Bour, Percolation threshold of 3D random ellipses with widely-scattered distributions of eccentricity and size, *Physical Review E*, 62, 5948-5952, 2000.
- de Dreuzy, J.R., P. Davy, and O. Bour, Hydraulic properties of two-dimensional random fracture networks following a power law length distribution: 1-Effective connectivity, *Water Resources Research*, 37 (8), 2065-2078, 2001a.
- de Dreuzy, J.R., P. Davy, and O. Bour, Hydraulic properties of two-dimensional random fracture networks following a power law length distribution: 2-Permeability, *Water Resources Research*, 37 (8), 2079-2095, 2001b.
- Feder, J., *Fractals*, 283 pp., Plenum, New York, 1988.
- Hentschel, H.G.E., and I. Proccacia, The infinite number of generalised dimensions of fractals and strange attractors, *Physica 8D*, 435-444, 1983.
- Hestir, K., and J.C.S. Long, Analytical Expression for the Permeability of Random Two-Dimensional Poisson Fracture Networks Based on Regular Lattice Percolation and Equivalent Media Theories, *Journal of Geophysical Research*, 95 (B13), 565-581, 1990.
- Kiraly, L., Rapport sur l'état actuel des connaissances dans le domaine des caractères physiques des roches karstiques, in *Hydrogeology of karstic terrains*, edited by A. Burger, and L. Dubertret, International association of hydrogeologists, Paris, 1975.
- Long, J.C.S., and D. Billaux, From Field Data to Fracture Network Modeling: An Example Incorporating Spatial Structure, *Water Resources Research*, 23 (7), 1201-1216, 1987.
- Margolin, G., B. Berkowitz, and H. Scher, Structure, flow, and generalized conductivity scaling in fracture networks, *Water Resources Research*, 34 (9), 2103-2121, 1998.
- Marrink, S.J., L. Paterson, and M.A. Knackstedt, Definition of percolation threshold on self-affine surfaces, *Physica A*, 280, 207-214, 2000.
- Meakin, P., Invasion percolation on substrates with correlated disorder, *Physica A*, 173², 305-324, 1991.
- Prakash, S., S. Havlin, M. Schwartz, and H.E. Stanley, Structural and long-range correlated percolation, *Physical Review A*, 46 (4), R1724-R1727, 1992.
- Renshaw, C.E., Connectivity of joints networks with power law length distributions, *Water Resources Research*, 35 (9), 2661-2670, 1999.
- Robinson, Connectivity of fractures systems - a percolation theory approach., *J. Phys. A : Math. Gen.*, 16 (3), 605-614, 1983.
- Robinson, Numerical Calculations of critical densities for lines and planes., *J. Phys. A : Math. Gen.*, 17, 2823-2830 1984.
- Sahimi, M., and S. Mukhupadhyay, Scaling properties of a percolation model with long-range correlations, *Phy. Rev. E*, 54 (4), 3870-3880, 1996.
- Schertzer, D., and S. Lovejoy, Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes, *JGR*, 92 (D8), 9693-9714, 1987.
- Schmittbull, J., S. Gentier, and S. Roux, Fields measurements of the Roughness of fault surfaces, *Geophysical Research Letters*, 20 (8), 639-641, 1993.
- Snow, D.T., Anisotropic permeability of fractured media, *Water Resources Research* (5), 1273-1289, 1969.
- Stauffer, D., and A. Aharony, *Introduction to percolation theory, second edition*, Taylor and Francis, Bristol, 1992.
- Viseck, T., *Fractal growth phenomena*, 488 pp., World Scientific, London, 1992.

Figure captions

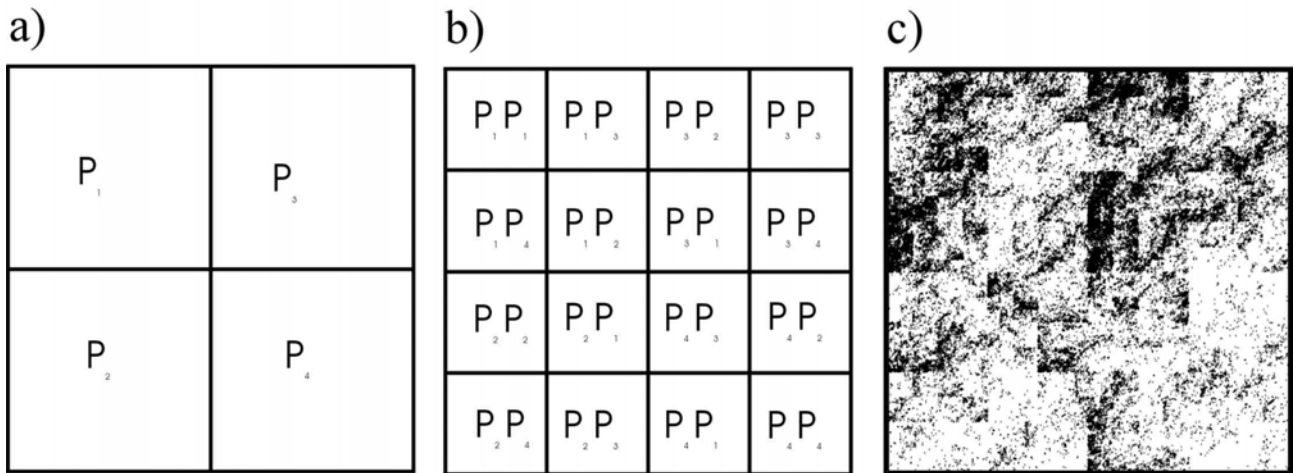


Figure 1. (a) and (b), first and second iterations of the multifractal field generation. (c) Example of a set of fracture positions obtained from a multifractal probability field with 9 successive iterations.

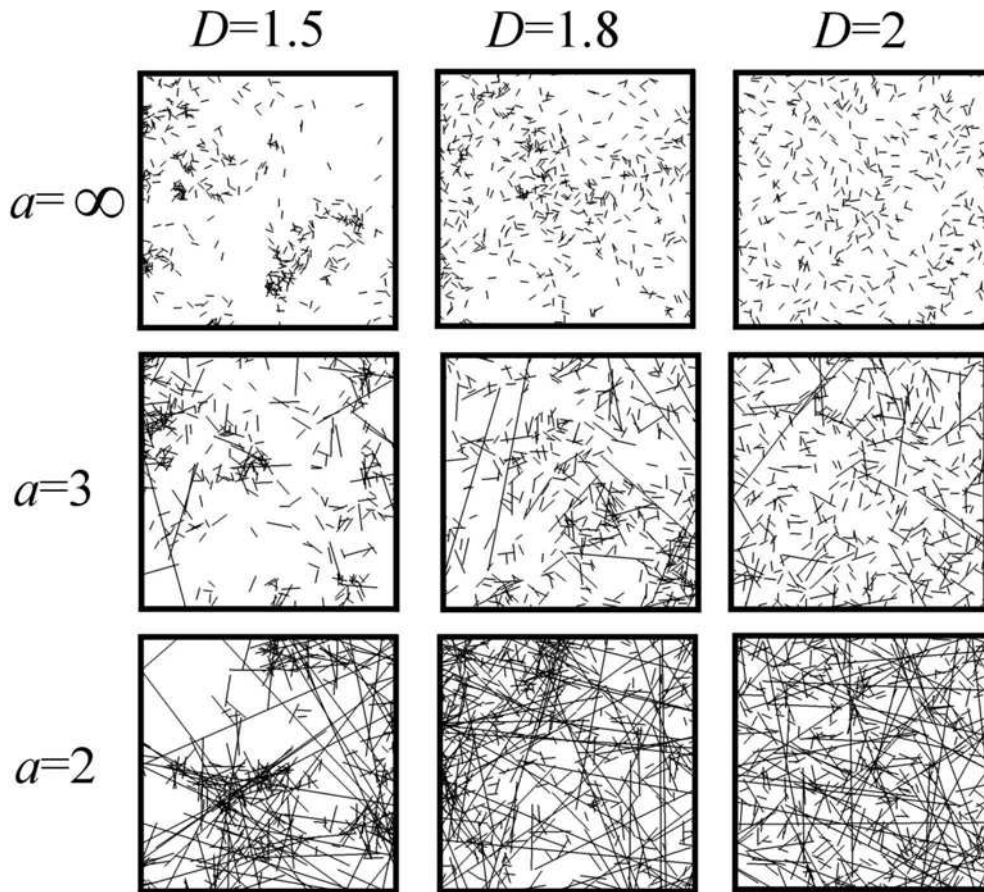


Figure 2. Examples of simulated fracture networks for several couples of parameters (a, D) . From left to right the fractal dimension increases reducing the clustering, up to $D=2$ that corresponds to a uniform, non correlated field. From top to bottom the proportion of large fractures compared to smaller ones increases, corresponding to a decrease of the power-law length exponent a .

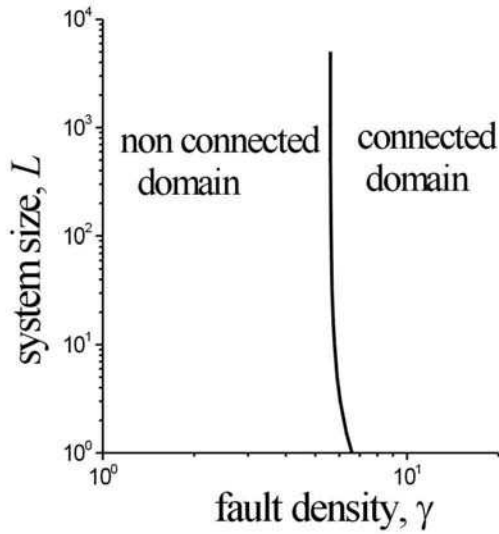
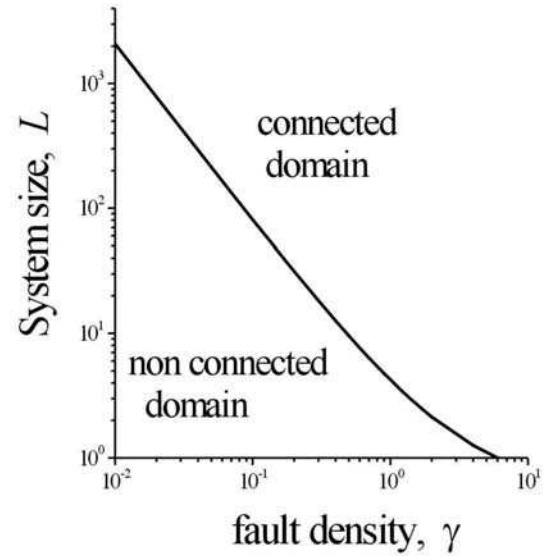
a) $a = \infty$ b) $a = 2.3$ 

Figure 3. Synthesis of the connectivity regimes obtained in the constant fracture length case (a) and in the widely-scattered power-law fracture length case ($a < 3$) (b) for homogeneous networks, $D=2$ (modified from *Bour and Davy* [1997]). Graphs represent the system size as a function of the fracture density γ for networks at the percolation threshold. At a given system size, i.e. on horizontal lines, systems are disconnected if the fracture density is smaller than the critical fracture density. Systems are thus disconnected on the left of the curves and, conversely connected on the right of the curves.

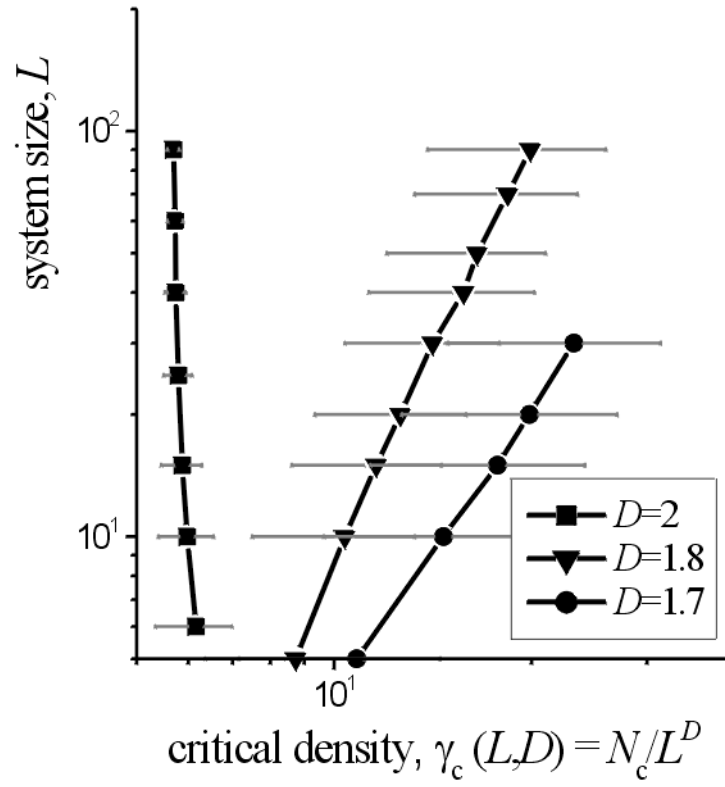


Figure 4. Same diagram as in Figure 3. Mean and standard deviation of the critical fracture density γ_c at threshold for $D=2$, $D=1.7$ and $D=1.5$.

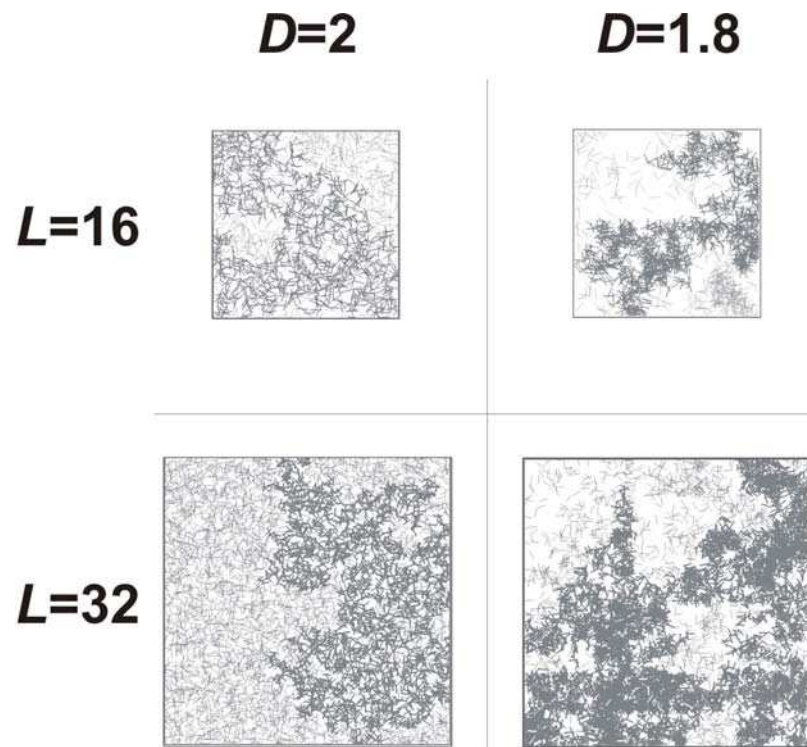


Figure 5. Fracture networks generated at the percolation threshold for system sizes increasing from $L=16$ (top) to $L=32$ (bottom). On the left side, the fracture center distribution is homogeneous ($D=2$) whereas on the right side it is fractal with $D=1.7$. Black fractures form the connected cluster whereas gray fractures form the isolated clusters. For $D=1.7$, a large amount of fractures concentrates in high-probability zones forming dense clusters without improving the system connectivity, whereas the system connectivity is controlled by the occupation of the low-probability zones.

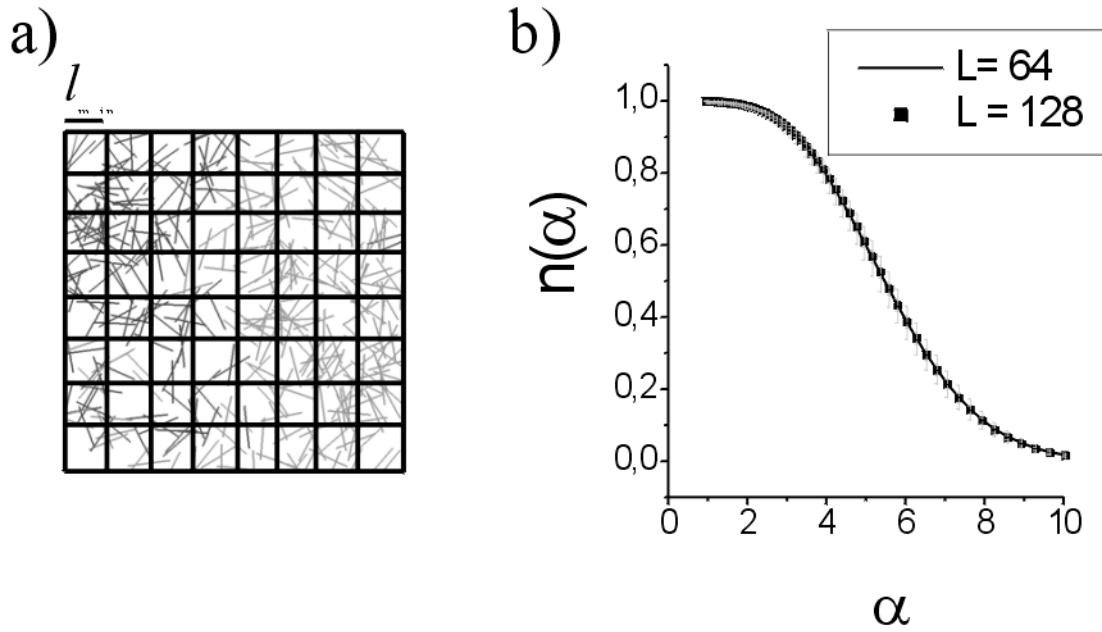


Figure 6. Method for computing the fracture density distribution. (a) A uniform fracture network at the percolation threshold for $L=8$, and for a constant fracture length $l=l_{\min}=1$. A grid of mesh size equal to l_{\min} is superposed on the network. (b) Proportion of meshes, $n(\alpha)$, whose fracture density is larger or equal to α for $D=2$ and for two system sizes.

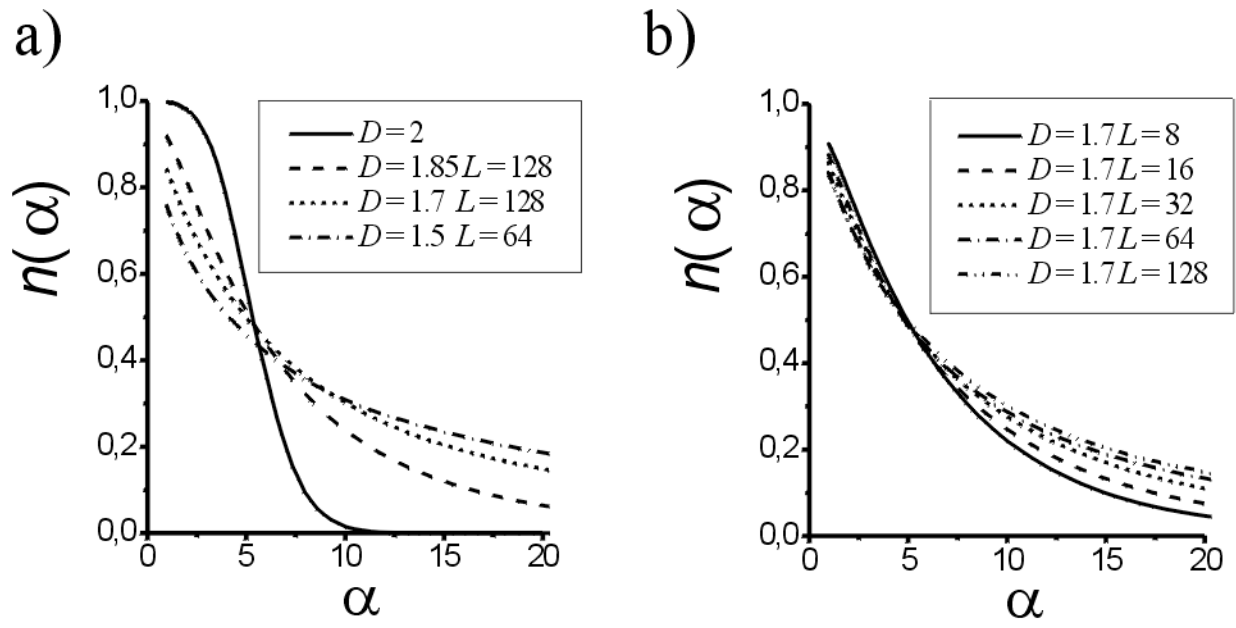


Figure 7. (a) Curves $(\alpha, n(\alpha))$ at percolation threshold for fracture networks generated at different system sizes. (b) curves $(\alpha, n(\alpha))$ at percolation threshold for different values of the fractal dimension.

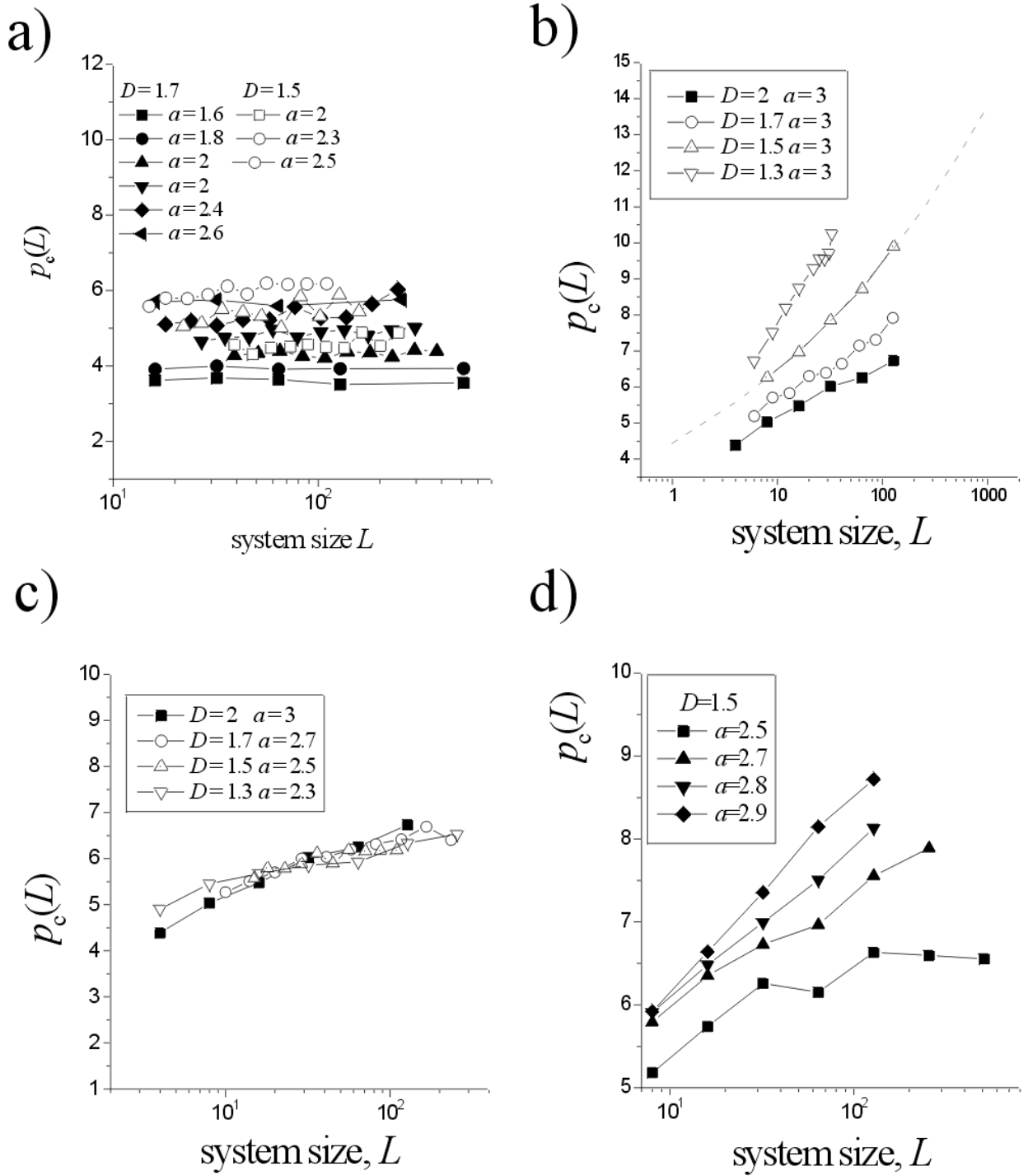


Figure 8. Computed values of the percolation parameter $p_c(L)$ at threshold (Equation 5) as a function of the system size L . (a) $a < D+1$. (b) $a > D+1$ ($a=3$, $D=1.3, 1.5, 1.7, 2$). (c) $a = D+1$ and (d) $a > D+1$ ($D=1.5$, $a=2.5, 2.7, 2.8, 2.9$).

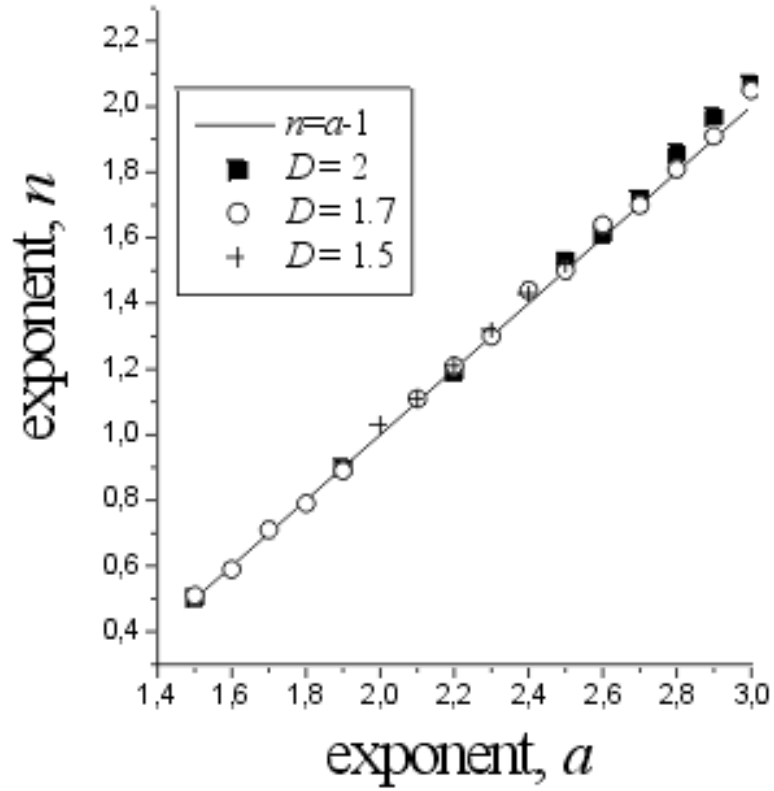


Figure 9. Exponents of the scale dependency of the number of fractures $N_c(L) \sim L^n$, depending on the length distribution exponent a , for $a \leq D+1$. $D=2$ (solid squares). $D=1.7$ (open disks). $D=1.5$ (open up triangles) and theoretical prediction $n=a-1$ (straight line).

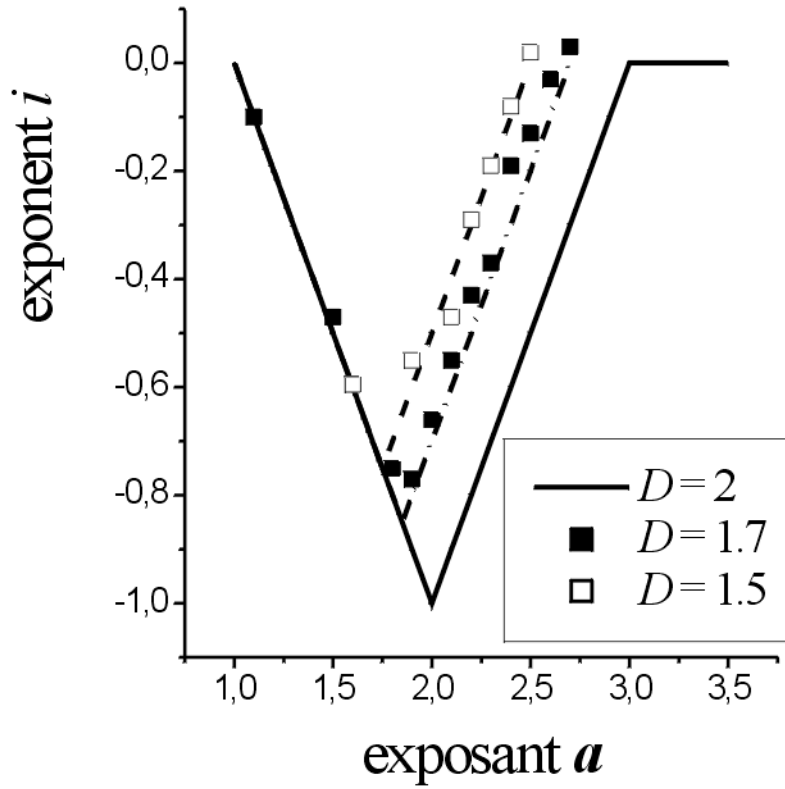


Figure 10. Exponent of the scale dependency of the average number of intersections per fracture at percolation threshold, $I_c(L) \sim L^i$, for different values of the fractal dimension. Straight lines correspond to theoretical predictions.

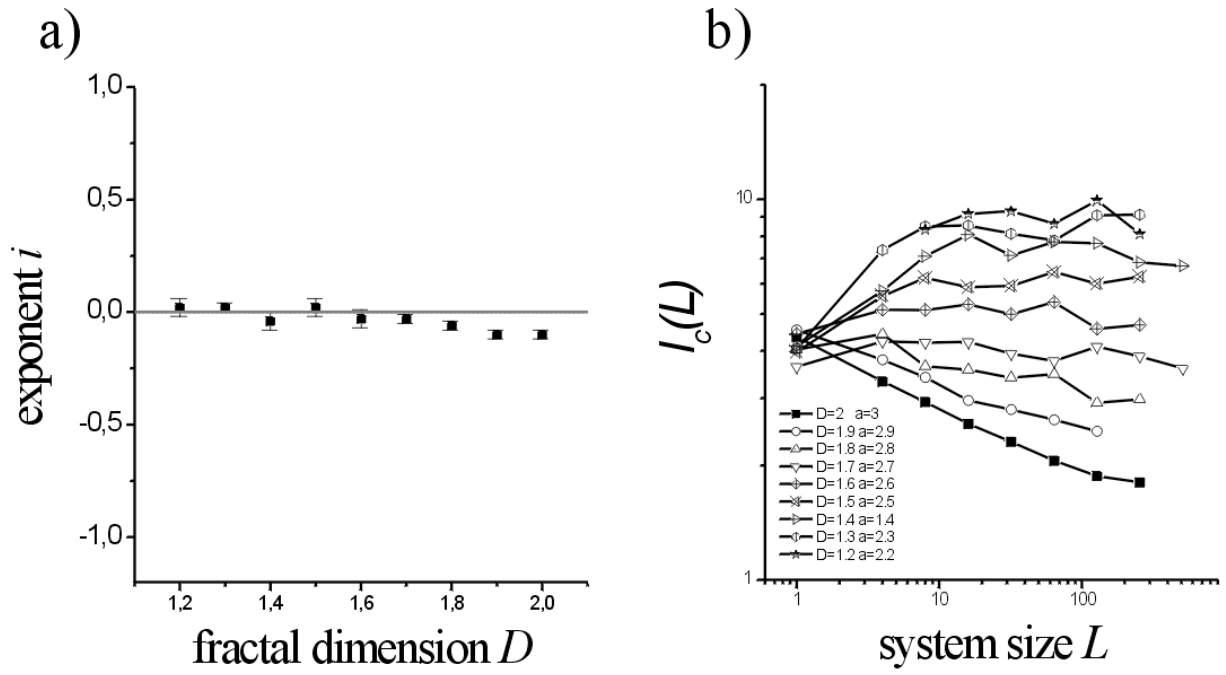


Figure 11. Exponent of the scale dependency of the average number of intersections per fracture at percolation threshold, $I_c(L) \sim L^i$ for the self-similar case $a=D+1$.

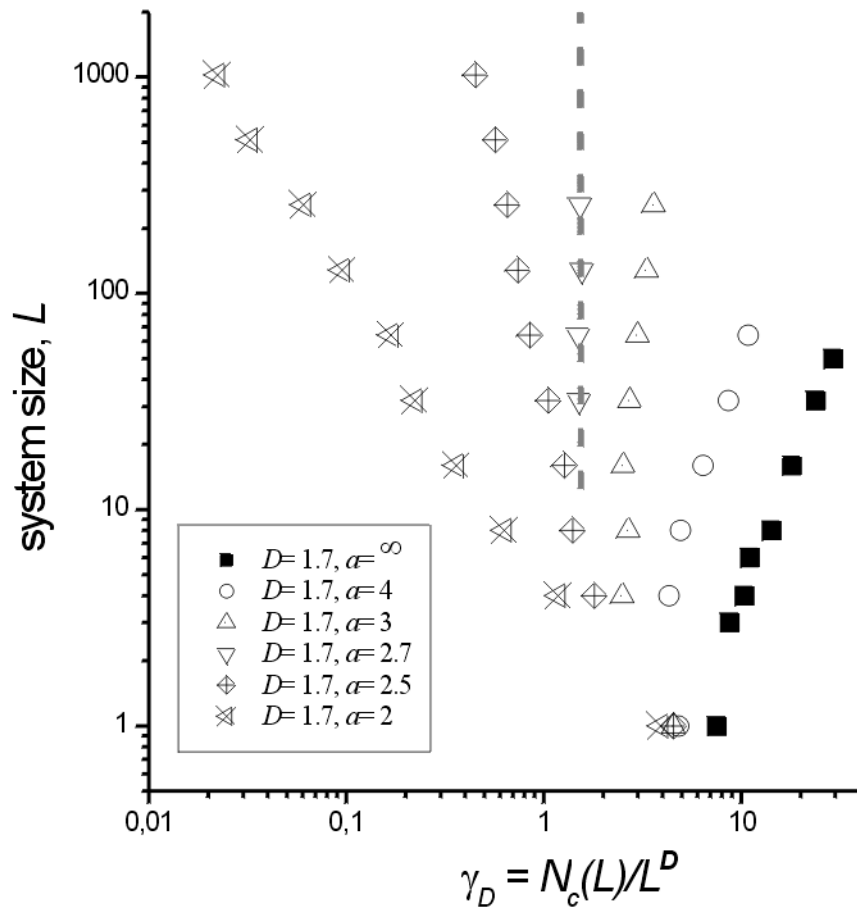


Figure 12. Plot of the critical scale at which percolation occurs, for different fractal density γ , for different values of a and for $D=1.7$.

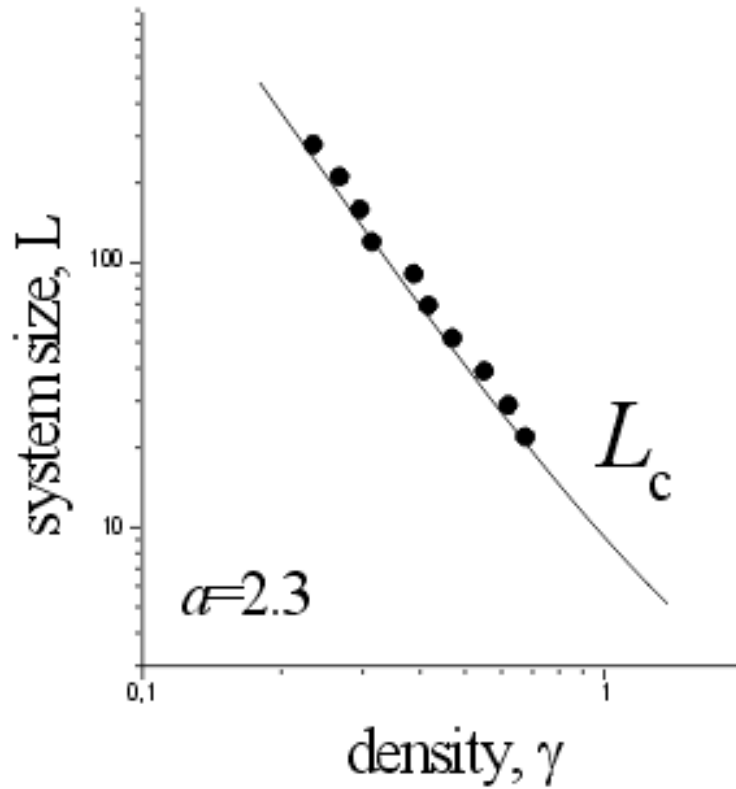


Figure 13. Critical system size at which percolation occurs, L_c , depending on the fracture density, γ for $\alpha=2.3$, and $D=1.5$. The solid gray curve that corresponds to theoretical predictions (Equation 10), is in good agreement with the numerical results (solid circles). For a given fracture density, fracture systems are on average connected when considering systems having a size larger than the critical system size L_c .

Les principaux résultats de l'étude, permettant de calibrer l'étude de la perméabilité, sont résumés dans la figure suivante:

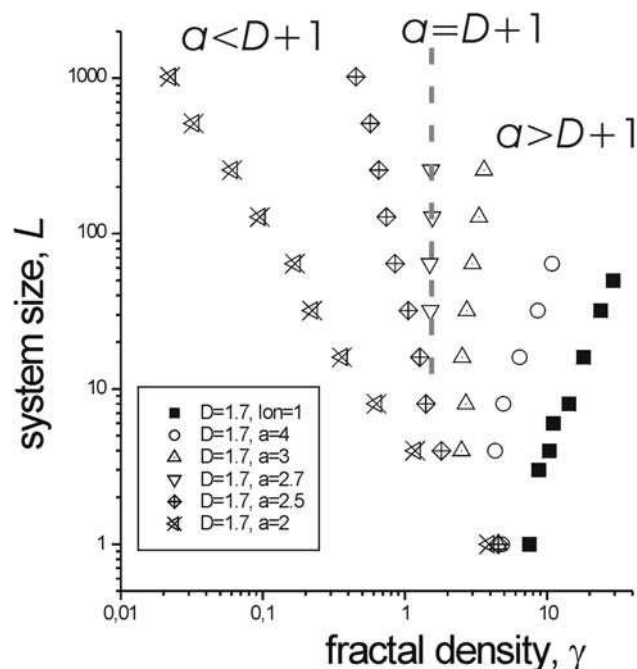


Figure 3: représentation dans un diagramme (γ, L) de la taille critique de système L_c , pour laquelle le seuil de percolation est atteint, en fonction de la densité fractale γ , pour une dimension fractale $D=1.7$ et $a \in [2, \infty]$. D'après projet d'article annexe 5.

Les propriétés de connectivité dépendent du rapport relatif des exposants a et D (figure 3). Pour $a < D+1$, la dimension fractale D associée à la distribution des centres ne joue aucun rôle sur la connectivité, qui est dominée par la distribution des longueurs de fractures. Dans ce cas, comme dans le cas homogène pour $a < 3$, la connectivité augmente avec la taille du système. Pour $a > D+1$, la connectivité est contrôlée par les petites fractures du système (inférieures à la taille du système) et donc par la corrélation spatiale. Dans ce cas la connectivité décroît avec la taille du système. Pour $a = D+1$, qui représente la transition entre les deux régimes précédents, l'état de connexion ne dépend pas de l'échelle d'observation mais seulement de la densité fractale; on retrouve alors un fonctionnement similaire au cas non corrélé avec $a > 3$, pour lequel la densité critique au seuil ainsi que le nombre moyen d'intersections par fracture sont des invariants.

4.3.4 Perspectives: connectivité des réseaux 3D corrélés

Les réseaux de fractures naturels, s'ils sont essentiellement étudiés à partir de données mono et bidimensionnelles (1D et 2D), s'inscrivent cependant dans un espace tridimensionnel (3D). Du point de vue de la structure géométrique, les réseaux peuvent se comporter comme des structures pseudo 2D ou 3D. Ceci dépend de leur extension verticale par rapport à leur extension

latérale. Si l'interprétation en fonction d'un modèle de réseau 2D peut convenir dans certains cas, l'étude du modèle 3D reste un objectif évident.

En 2D, la dimension fractale associée aux positions des fractures tend à déconnecter les réseaux à grande échelle, même si localement le nombre d'intersections est augmenté. Les zones de forte densité de probabilité sont déconnectées par des zones de faible probabilité. La première question qui se pose en 3D est de savoir si cet effet de déconnexion est toujours présent? En effet, l'*addition d'une dimension* augmente la coordinence entre les éléments. Par exemple, si l'on considère des mailles carrées en 2D ou des mailles cubiques en 3D et que les connexions n'ont lieu qu'entre arêtes communes, alors la coordinence est de 4 en 2D et de 6 en 3D. C'est aussi pour cette raison que les seuils de percolation sont plus faibles en 3D qu'en 2D.

Un argument en faveur de la diminution de la déconnexion se trouve dans les travaux traitant de la percolation d'invasion (*Invasion Percolation*, notée IP) dans les milieux corrélés. L'IP consiste à introduire un fluide dans une zone occupée par un autre fluide, les deux fluides étant non miscibles. Lors du processus d'IP, le fluide envahi peut se retrouver entièrement entouré de fluide envahissant, et donc bloqué. On parle de phénomène de piégeage (*trapping*). Ce phénomène est courant en 2D, alors qu'il n'apparaît que très rarement en 3D [Sheppard *et al.*, 1999; Knackstedt *et al.*, 2000]. Ainsi, il est possible que l'augmentation de la coordinence en 3D augmente la connectivité, et la déconnexion apparente en 2D pourrait n'être qu'un effet de stéréologie. Cette hypothèse doit être évidemment vérifiée.

Pour des raisons pratiques de temps et de limitation de la capacité de calcul, l'étude directe par simulations numériques de la connectivité en 3D n'a pas été réalisée au cours de la thèse. La connexion ou la déconnexion des réseaux avec la taille des systèmes en fonction de la dimension fractale nécessite en effet d'avoir des réseaux suffisamment grands pour que la corrélation puisse être caractérisée.

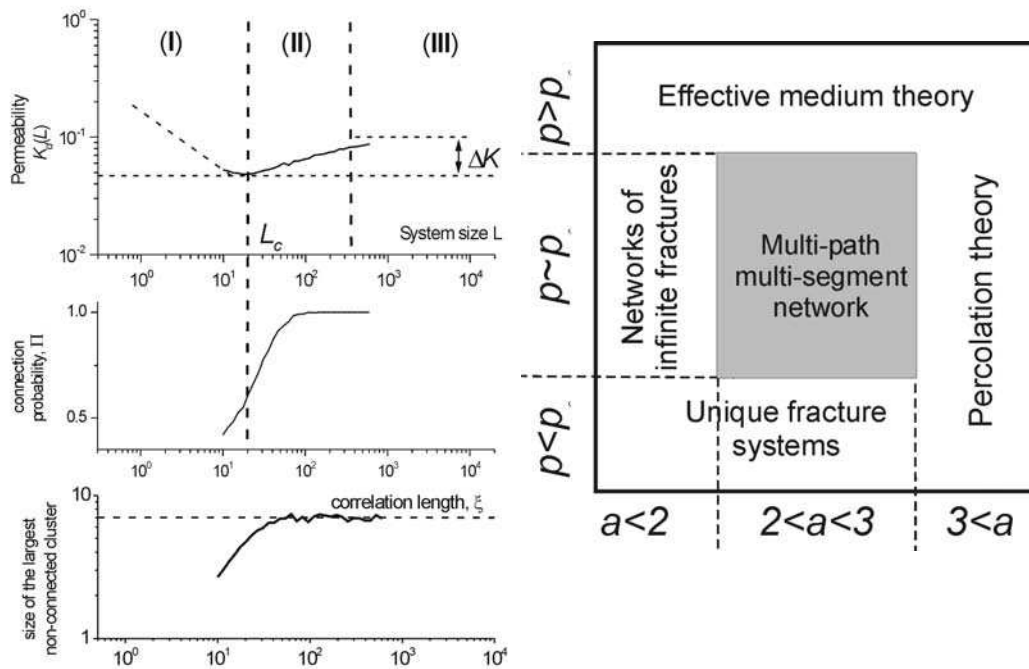
4.4 EFFET DE LA CORRELATION SUR LA PERMEABILITE

Une fois les règles de connectivité établies, la perméabilité peut être étudiée. L'objectif est de quantifier l'effet des caractéristiques géométriques des fractures sur les propriétés hydrauliques des milieux fracturés. Cet effet est parfaitement connu pour les modèles de fractures de longueur infinie ou infinitésimale¹, les milieux effectifs et plus généralement pour les réseaux de fractures sans corrélation et avec une distribution de longueurs de fracture en loi de puissance [de Dreuzy et al., 2001a]. La question est de savoir si les distributions des longueurs et des positions de fracture prises en compte simultanément induisent des comportements différents.

4.4.1 Principaux résultats sur les réseaux non corrélés avec distribution des longueurs en loi de puissance

Dans le cas des réseaux de fractures sans corrélation et avec une distribution de longueurs en loi de puissance, plusieurs comportements ont été identifiés. Lorsque $a > 3$, c'est la théorie de la percolation qui s'applique. Lorsque $a < 2$, ce sont les modèles de superposition de fractures infinies qui s'appliquent. Enfin, pour $2 < a < 3$ (figure(4a)), les règles de connectivité impliquent qu'en dessous d'une certaine échelle L_c les réseaux ne sont pas connectés et qu'au-dessus ils sont connectés. Au delà de l'échelle de connexion L_c , il existe une échelle d'homogénéisation, la longueur de corrélation ξ , voisine de L_c , au-dessus de laquelle la théorie des milieux effectifs est applicable [de Dreuzy et al., 2001a]. En dessous du seuil, la perméabilité des réseaux est nulle. Au-dessus du seuil, la perméabilité décroît pour des échelles de système inférieures à la longueur de corrélation puis devient constante au-delà. L'ensemble des résultats est résumé dans un diagramme (a, p) donnant le type de modèle équivalent en fonction des paramètres du réseau, figure (4b). L'effet d'échelle, ou accroissement de la perméabilité avec l'échelle d'observation, est fréquemment observé sur des observations de terrain [Hanor, 1993; National Research Council, 1996]. Il est illustré par des synthèses de perméabilité dans des roches cristallines et carbonatées effectuées respectivement par Clauser et Schulze-Makuch [Clauser, 1992; Schulze-Makuch and Cherkauer, 1997]. Les modèles précédents ne comprenant qu'une distribution de longueurs de fracture ne reproduisent pas cet effet d'échelle. En effet la perméabilité est soit décroissante soit constante.

¹ Fractures "infinies" et fractures infinitésimales sont respectivement des fractures dont la taille caractéristique est très supérieure ou très inférieure à la taille du système étudié. Les réseaux de fractures infinies sont pratiquement équivalents du point de vue de la perméabilité à une superposition de fractures indépendantes. Les réseaux de fractures infinitésimales rentrent dans le champ d'application de la théorie de la percolation.



Figure(4): a) Variation à densité massique constante $d(=0.4)$, pour $a=2.5$, et en fonction de la taille du système L , (en haut) de la perméabilité K_d , (au milieu) de la probabilité de connexion, et (en bas) de la taille de l'amas non connecté le plus grand (pratiquement égal à la longueur de corrélation). Trois régimes I, II et III sont définis. Pour les régimes I et III les modèles limites sont rappelés en pointillé. L'accroissement de la perméabilité au-dessus du seuil est un effet de bord. Son amplitude ΔK ne dépasse pas un facteur 2. b) Domaines de validité des modèles équivalents dans un diagramme (a,p) où a est l'exposant de la distribution des longueurs et p est le paramètre de percolation (d'après [de Dreuzy et al., 2001a]).

4.4.2 Méthode de calcul des flux et de la perméabilité

Résolution des équations d'écoulement dans un réseau de fractures

S'il n'existe pas d'amas connecté entre deux points du système, la perméabilité du système est dominée par la perméabilité de sa matrice (roche environnante non endommagée). Comme on étudie ici les effets du réseau de fractures avec une matrice de plusieurs ordres de grandeur moins perméable, la perméabilité équivalente est dominée pratiquement par la perméabilité de matrice. S'il existe un amas connecté entre deux points du système, un écoulement peut prendre place entre ces deux points. Pour rechercher les flux à l'échelle du réseau de fractures, on fait l'hypothèse d'un écoulement idéal dans les fractures alors assimilées à des plans parallèles. Dans ce système de plans parallèles, le flux total est proportionnel au gradient de charge, tout comme dans la loi de Darcy. Le coefficient de proportionnalité est analogue à la perméabilité multipliée par l'aire de la section transversale à l'écoulement. Ce coefficient de proportionnalité, que nous appellerons désormais perméabilité, est proportionnel au cube de l'ouverture de la

fracture ([Marsily, 1986]). La loi de diffusion de Darcy à l'échelle des fractures et l'équation de conservation de la matière permettent de discrétiser l'équation de diffusivité ($\nabla(K \cdot \nabla h) = 0$ avec K et h la perméabilité et la charge locales) sur la structure donnée par l'amas infini. La discrétisation conduit à un système d'équations de dimension égale au nombre de points du réseau. La méthode de résolution la plus efficace en 2D est la décomposition LU [de Dreuzy and Erhel, 2001].

Les réseaux étant de nature discrète, la structure de discrétisation de l'équation de diffusivité est le réseau lui-même, de sorte que la projection de l'équation sur la structure du réseau n'entraîne pas de perte de consistance [de Dreuzy and Erhel, 2001]. La seule source d'erreur est numérique et provient de la résolution du système linéaire.

Calcul de la perméabilité

Les conditions aux limites simulent celles du perméamètre. Deux faces opposées du système sont mises à des charges imposées h_0 et h_1 tandis que les deux autres faces sont imperméables (**figure 1**). De cette façon, le flux Q traversant le système est identique sur les limites perméables du système et s'exprime simplement en fonction du flux total Q traversant le système et de la différence de charges $\Delta h = h_1 - h_0$:

$$K = \frac{Q}{\Delta h}$$

Plus généralement pour un système de dimension d et de taille L (d étant égal à 1, 2 ou 3), l'expression de la perméabilité équivalente est :

$$K = \frac{Q}{\Delta h} \cdot L^{2-d}$$

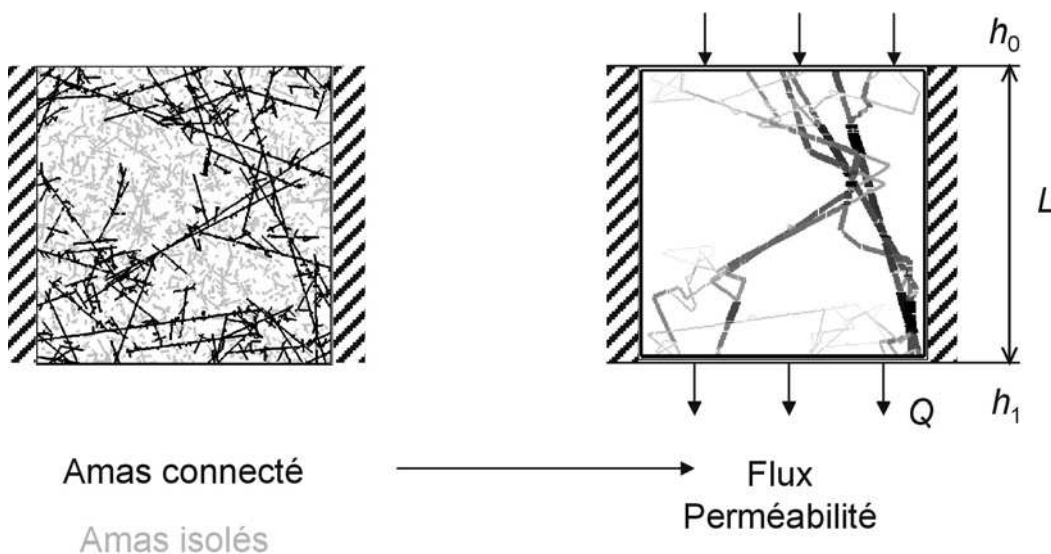


Figure 1 : Illustration du calcul des flux et des conditions aux limites utilisées pour le calcul de la perméabilité équivalente.

Approximation de la perméabilité des réseaux de très forte densité

La méthode de calcul des flux précédemment présentée permet de résoudre l'équation de diffusivité pour des réseaux contenant jusqu'à un demi-million de nœuds en quelques minutes sur un pentium ayant 1024 Mo de mémoire RAM. Le facteur limitant est la mémoire vive des ordinateurs. Dans le cas des réseaux corrélés, l'étude des modèles limites de réseaux de fractures aux fortes densités requiert la recherche des flux pour des réseaux ayant plusieurs millions de nœuds, donc bien au-delà des possibilités de la méthode de résolution complète précédemment décrite.

Nous avons mis au point une méthode approchée consistant à calculer les flux sur une grille régulière ayant les propriétés hydrauliques les plus proches possibles de celles du réseau de fractures mais pour lequel le calcul des flux est numériquement beaucoup plus simple. Pratiquement, la méthode consiste à discrétiser le réseau de fractures généré sur une grille régulière, à affecter une perméabilité aux mailles de la grille en fonction des fractures présentes dans la maille et à résoudre l'équation de diffusivité sur la grille. Ainsi, quel que soit le nombre de fractures, le calcul de la perméabilité est toujours possible. L'erreur issue de la discrétisation est directement fonction de la méthode d'affectation de la perméabilité aux mailles de la grille. Nous avons testé deux méthodes :

- La première méthode repose sur le modèle de fractures en série. En série, les inverses des perméabilités s'additionnent pour donner la perméabilité de maille. Cette méthode est très précise pour des réseaux proches du seuil de percolation mais devient très approximative pour des réseaux de forte densité.
- La deuxième repose sur le modèle de fractures en parallèle. Elle consiste à affecter une perméabilité égale à la moitié de la densité massique de fractures occupant la maille (le facteur $\frac{1}{2}$ provenant du fait qu'une fracture ne participe à la perméabilité que dans une seule direction alors que la perméabilité de la maille est bidirectionnelle).

La deuxième méthode donne aux fortes densités une précision très nettement meilleure que la première méthode. Elle a donc été retenue dans cette étude. Pour identifier simplement les deux perméabilités calculées, nous appelons *perméabilité de réseau* la perméabilité calculée sur le réseau et *perméabilité de grille* la perméabilité calculée sur la grille ou perméabilité approchée. Les résultats obtenus par les deux méthodes ont été comparés sur une large gamme de réseaux de taille et de densité limitées (**figure 6**). De cette étude, nous concluons que :

- les perméabilités obtenues sur le réseau et sur la grille mènent à des différences n'excédant pas un facteur 2 pour des réseaux générés avec des orientations aléatoires.
- l'écart décroît lorsque la densité augmente. Etant donné que le calcul sur le réseau n'est possible que pour des densités pas trop fortes, il n'a pas été possible de voir si cette approximation tendait vers zéro dans la limite des très fortes densités.
- l'écart est très nettement restreint lorsque l'orientation des fractures est fixée de façon à ce que les fractures soient parallèles et perpendiculaires à la direction du gradient de charge. L'écart ne dépasse pas 20% et diminue plus rapidement encore avec la densité.

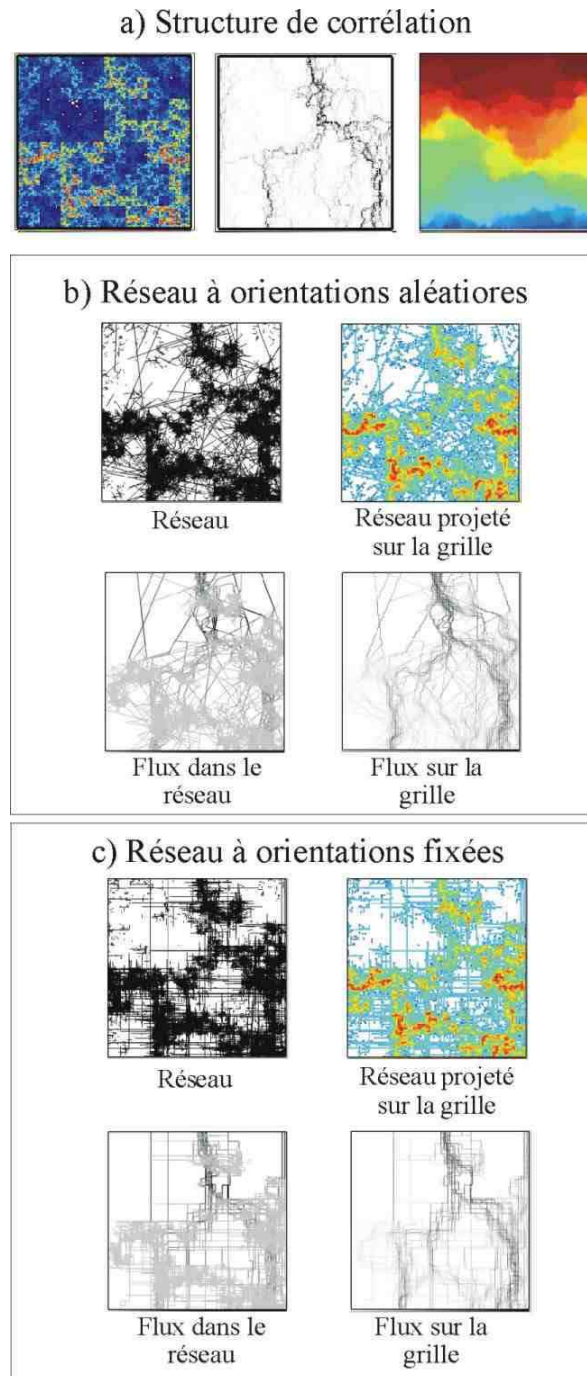


Figure 6 . Comparaison du calcul de perméabilité sur le réseau et sur une grille. Les réseaux ont été générés pour $a=2.5$, $D_c=1.5$, $\gamma=50$ et $L=128$. a) montre la structure de corrélation (à gauche), le flux sur cette structure (au centre) et le champ de charge (à droite). b) et c) montrent des réseaux générés avec cette structure de corrélation, réseaux ayant des orientations aléatoires pour b) et des orientations de fractures fixées pour c). On remarque en particulier que la structure de corrélation ainsi que les grilles obtenues ont globalement la même forme. Pour les réseaux générés avec une distribution aléatoire d'orientations, la différence de perméabilité entre les méthodes de calcul sur la grille et sur le réseau est de 40% alors que dans le cas des orientations fixées, elle n'est que de 5%.

L'erreur conséquente à la discrétisation est négligeable dans l'obtention des tendances d'échelle de la perméabilité lorsque les réseaux sont générés avec des orientations fixées (**figure 7**, comparaison entre les carrés et les triangles qui sont presque superposés). De plus nous avons vérifié que les tendances d'échelle sont les mêmes lorsque les orientations des fractures sont distribuées aléatoirement ou fixées. Par exemple, les deux exposants d'échelle τ , dans $K \sim L^{-\tau}$, ont la même valeur de 0.79 dans le cas présenté par la **figure 7**. Ainsi, aux fortes densités, les études seront effectuées sur des réseaux générés avec des orientations fixées avec la méthode de projection sur la grille et les résultats pourront être étendus à des réseaux générés avec des orientations aléatoires (figure 8).

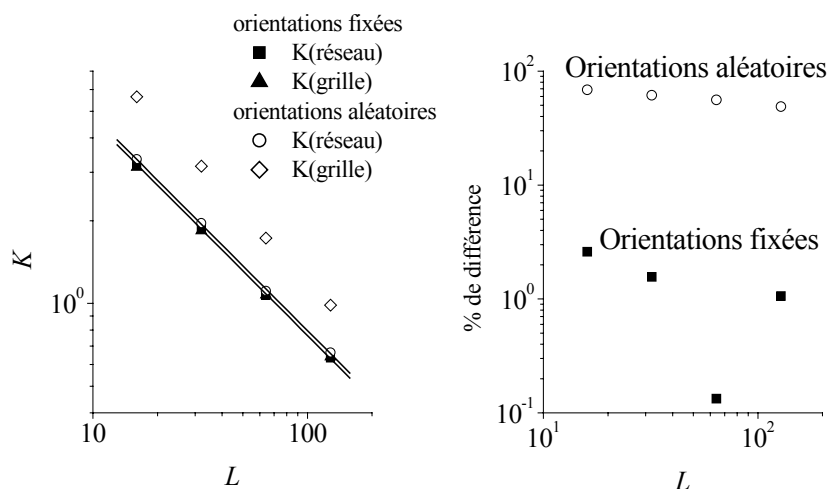


Figure 7: Comparaison des variations de la perméabilité (à gauche) et des différences en pourcentage des perméabilités calculées sur le réseau et sur la grille (à droite) avec l'échelle pour des réseaux ayant des orientations aléatoires et fixées (illustration de ces réseaux figure 6). Les paramètres des réseaux sont les mêmes que figure 6 : $a=2.5$, $D=1.5$, $\gamma=50$. L'approximation de la perméabilité du réseau par la perméabilité de la grille est d'un ordre de grandeur meilleure dans le cas des orientations fixées que dans le cas des orientations distribuées

4.4.3 Organisation de l'étude du modèle de réseaux de fractures multi-paramétré

Dans le modèle présenté, on recherche la perméabilité en fonction des exposants a et D , de la taille L et de la densité γ ou d . Une infinité de réseaux correspond à chaque valeur de cet ensemble de paramètres, ce qui demande à la fois des temps de calcul et d'analyse (de dépouillement) des données important. Pour optimiser ce temps, le domaine d'étude est restreint grâce à l'utilisation et à l'extension de quelques modèle limites simples :

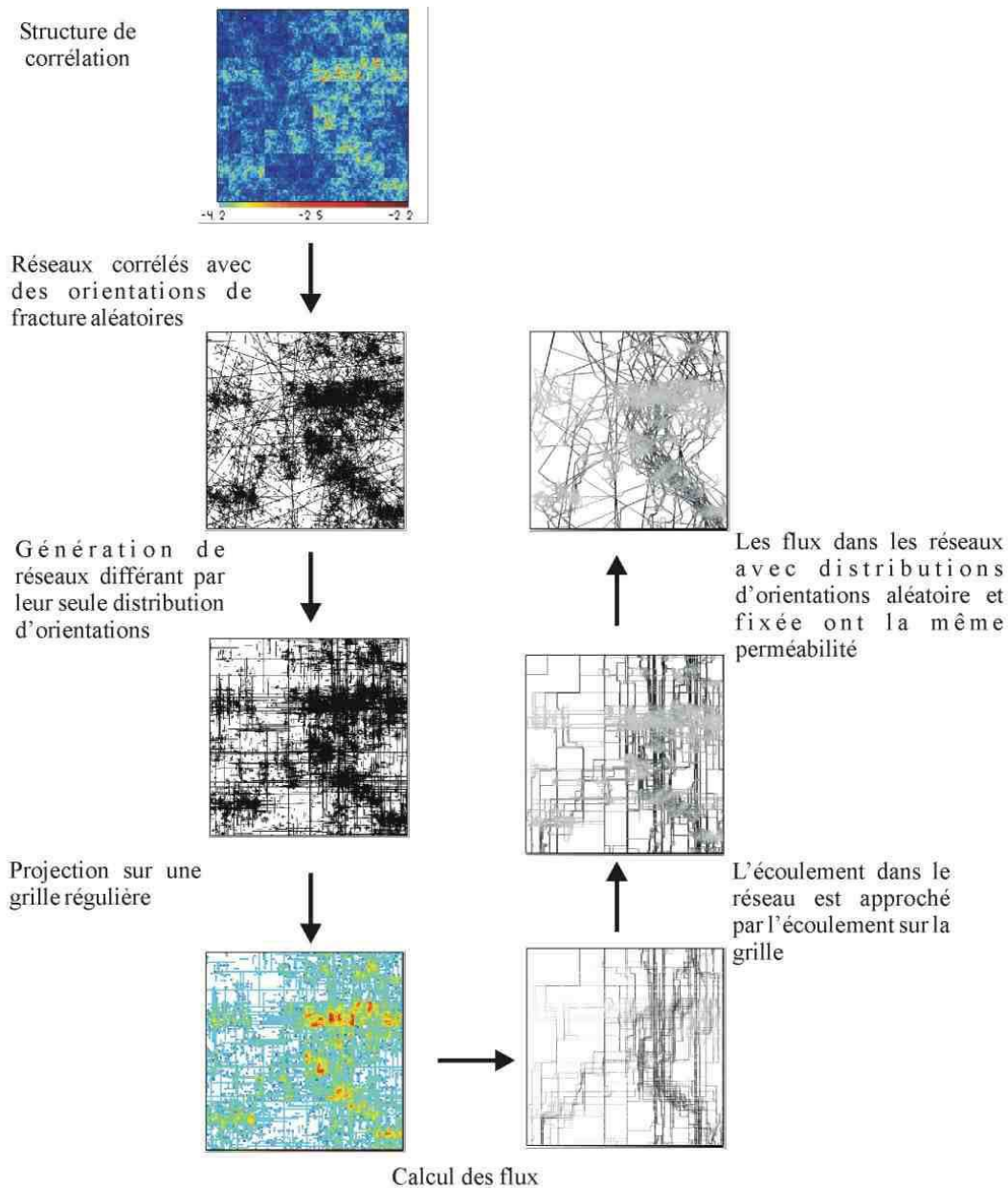


Figure 8: Illustration de la méthode de calcul approché des perméabilités sur les réseaux de fractures.

- **Le modèle de superposition de fractures "infinies"**. Il est constitué exclusivement de fractures plus grandes que la taille du système et qui traversent le système. La perméabilité de ces systèmes est proportionnelle à la somme des perméabilités des fractures incluses dans le système. Ce modèle est obtenu rigoureusement pour $a=1$. En effet, pour $a=1$ le ratio du nombre de fractures plus grandes que la taille du système L sur le nombre total de fractures $\ln(l_{\max}/L)/\ln(l_{\max}/l_{\min})$ est très proche de 1, car l_{\max} est très supérieur à la fois à L et à l_{\min} . Les fractures plus grandes que le système étant insensibles à la structure de corrélation du système, le modèle de fractures infinies

n'est pas influencé par la présence du champ de corrélation. Les résultats numériques montrent que les modèles pour lesquels a est compris entre 1 et 2 (zone bleue, **figure 9**) ne sont que très faiblement influencés par le champ de corrélation et ont qualitativement le même type de perméabilité que le modèle de superposition de fractures infinies. Dans le cas des réseaux pour lesquels $a=1.75$, la différence de perméabilité entre les réseaux non corrélés et corrélés avec $D=1.5$ n'excède pas 25% quelle que soient la densité et la taille du système (**figure 10**). Ce résultat est corroboré par le fait que pour $1 < a < 2$ la masse des fractures plus grandes que la taille du système ($L \int_L^{L_{\max}} N(l, L) dl$) est supérieure à la masse des fractures plus petites que la taille du système ($\int_{l_{\min}}^L l \cdot N(l, L) dl$).

- **Le modèle de fractures infinitésimales.** Il est constitué de fractures toutes "infinitement" petites devant la taille du système. En pratique les fractures sont toutes de taille l_{\min} correspondant à l'échelle de résolution minimale du réseau. Pour ce type de système, en absence de corrélation ($D=2$), la théorie de la percolation s'applique. En présence de corrélations ($D < 2$), les systèmes se déconnectent systématiquement lorsque l'échelle augmente et leur perméabilité devient alors nulle. Les réseaux de fractures infinitésimales sont obtenus pour $a \rightarrow \infty$. Les mêmes résultats de connectivité ont été obtenus pour $a > D+1$ de sorte que pour $D < 2$, la perméabilité devient nulle à partir de l'échelle de déconnexion.
- **Le modèle de réseaux non corrélés.** Le cas $D=2$ correspond aux réseaux non corrélés, qui sont donc des modèles limites des réseaux corrélés comme le montre la ligne orange (**figure 9**).

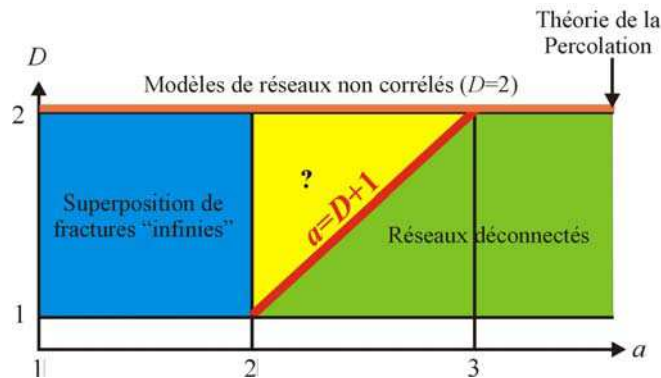


Figure 9 : Principaux modèles de perméabilité applicables en fonction des exposants caractéristiques de la distribution des longueurs a (en abscisse) et de la dimension fractale de la structure de corrélation D (en ordonnée).

Par extension des modèles limites, les résultats ont été déterminés dans tout le diagramme (a, D) hormis dans la zone centrale jaune (**figure 9**). Dans le triangle jaune, deux des trois limites sont connues : les limites pour $D=2$ et pour $a=2$. Pour ces deux gammes, il n'y a pas d'effet sensible de la corrélation. Il reste à étudier le cas $a=D+1$ en rouge sur la **figure 9**, qui est le cas pour lequel on s'attend à l'effet le plus important sur la corrélation sans déconnexion du système. On commence par étudier les modèles de la limite $a=D+1$.

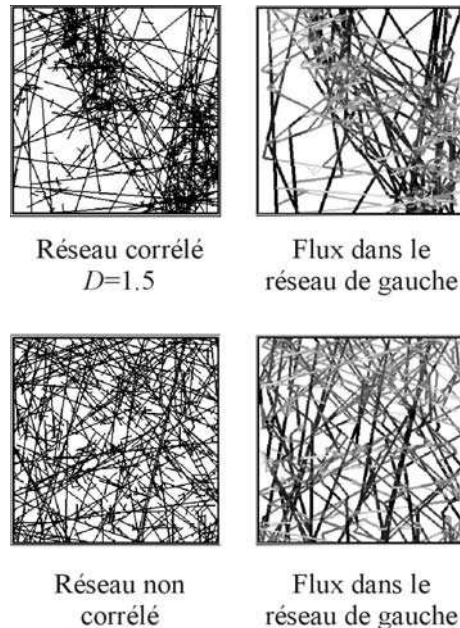


Figure 10 : Réseaux de fractures corrélés avec $D=1.5$ (haut) et non corrélés (bas) pour $a=1.75$ et $L=100$. Les deux réseaux ont été générés pour la même densité massique et leur perméabilité est la même à 1% près.

Pour chacun des ensembles de paramètres choisis, on effectue principalement deux études en fonction de la taille du système : une au seuil de percolation et une aux très fortes valeurs de densité. Les valeurs de très fortes densités sont fixées de façon à ce que, pour des valeurs moitié moins forte de ces densités, les tendances d'échelle soient identiques. De cette façon, on s'assure que les tendances obtenues aux fortes densités sont les valeurs limites.

Pour mener à bien l'étude de l'évolution de la perméabilité avec l'échelle sur les milieux corrélés, il reste enfin à déterminer le choix de la densité: doit-on prendre en compte la densité en masse de fractures (d) ou la densité en nombre de centres de fractures par unité de surface fractale (γ) ? Cette question est celle de la signification pratique des études en fonction de l'échelle à densité d et à densité γ fixées. Pour résoudre cette question, on a effectué une étude en sous-échantillonnant un grand réseau et des études à d et à γ constants : en premier lieu, on a effectué une étude de référence sur un réseau de grande taille ($L=512$) que l'on a subdivisé récursivement en sous-réseaux de tailles $L/2^n$ avec $n=1..4$. Cette étude donne l'évolution des caractéristiques géométriques et hydrauliques en fonction de l'échelle. Dans un deuxième temps, on a analysé l'évolution des mêmes caractéristiques géométriques et hydrauliques avec l'échelle en générant des systèmes à d puis à γ constant. Ces trois études ont un ancrage commun : à la taille maximale ($L=512$), tous les réseaux sont identiques. Les analyses ont été effectuées pour un modèle monofractal où la densité est constante sur le fractal et nulle en dehors du fractal, et sur le modèle multifractal général où seule la dimension de corrélation est fixée. Elles ont conduit aux mêmes résultats pour le monofractal et pour le multifractal (figure 11):

- La perméabilité des réseaux connectés est la même dans l'analyse par division et dans l'analyse à γ constant.

- La probabilité de connexion est constante pour l'analyse à γ constant.
- La probabilité de connexion croît comme une loi d'échelle, L^x , pour l'analyse par division de réseaux.
- L'analyse à d constante n'est pas simplement reliée aux analyses par division de réseau ou à γ constant.

L'étude par division peut donc se ramener à une étude classique de la perméabilité pour des réseaux générés à différentes échelles, à condition de prendre la densité fractale γ comme constante. Plus précisément, la perméabilité des réseaux obtenue dans une étude par division est égale à la perméabilité des réseaux connectés obtenue dans une étude à γ constant multipliée par l'évolution de la probabilité déduite de l'analyse par division de réseau. La probabilité de connexion est soit constante pour les grandes valeurs de densité, soit proche de zéro sous le seuil de connexion, soit dépendante de l'échelle (L^y) aux valeurs de densités intermédiaires.

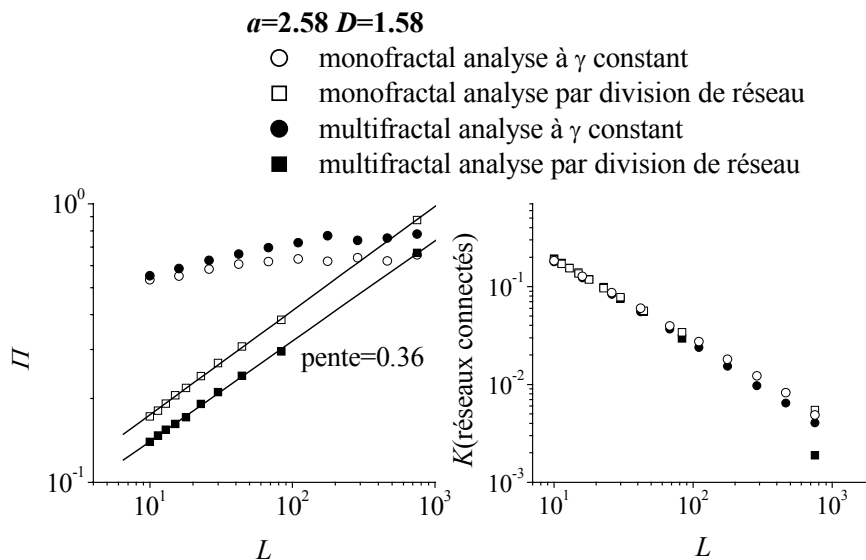


Figure 11 : Comparaison de la probabilité de connexion Π (à gauche) et de la perméabilité K (à droite) obtenues par division de réseau et à γ constant pour des réseaux légèrement au-dessus du seuil de percolation

4.4.4 Perméabilité de la structure de corrélation

Avant de coupler les deux effets de la distribution des longueurs en loi de puissance et de la structure fractale de la répartition spatiale, l'effet propre de la structure de corrélation spatiale est étudié, afin d'évaluer son impact éventuel sur l'évolution de la perméabilité avec l'échelle.

Dc=1.4 L=256

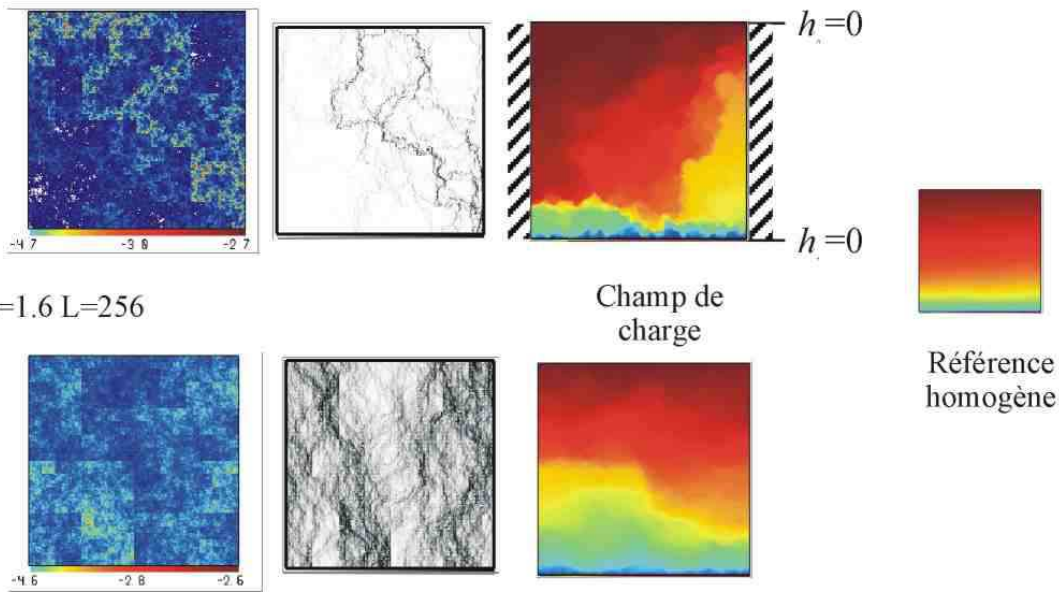


Figure 12. Champ de corrélation (à gauche), flux (au centre) et champ de charge (à droite) dans ce champ de corrélation avec des conditions aux limites de type perméamètre pour des grilles de taille $256=2^6$ et des dimensions de corrélation $D=1.4$ et 1.6 . Les échelles sont indiquées en bas des images pour le logarithme décimal de la perméabilité.

En attribuant une valeur de perméabilité proportionnelle à la densité locale sur chaque maille de la structure de corrélation, l'effet de la structuration spatiale peut être directement calculé sans considération des fractures discrètes. Le champ de perméabilité est obtenu simplement en multipliant la probabilité attribuée à chaque maille par le nombre de mailles. Des exemples du champ de probabilité du flux et du champ de charges correspondant sont donnés **figure 12**. Pour $D=1.4$, l'hétérogénéité de la distribution de perméabilité locale induit une forte chenalisation des flux et une grande irrégularité des iso-charges. Au contraire lorsque la corrélation est moins importante ($D=1.6$ puis $D=2$), le flux devient distribué plus régulièrement dans tout le système.

L'évolution de la perméabilité globale avec l'échelle et pour différentes valeurs de la dimension fractale peut être calculée à partir de simulations numériques ou par la méthode de renormalisation de King [King, 1989]. Le principe de la renormalisation de King est illustré figure 13.

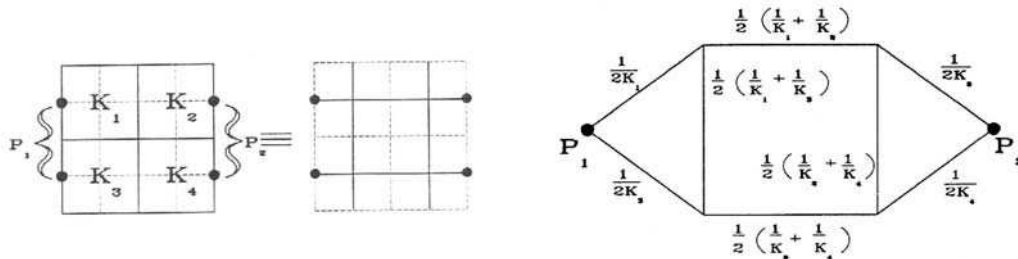


Figure 13 : cellule de renormalisation de King [King, 1989].

Les deux méthodes conduisent aux mêmes conclusions (figure 14): la perméabilité du système varie selon une loi de puissance de forme $K \sim L^{-\gamma}$, avec γ très proche de $2-D$. Lorsque $D=2$, on retrouve bien une perméabilité invariante d'échelle. Enfin la perméabilité décroît d'autant plus vite avec l'échelle que la dimension D est faible, i.e. lorsque les corrélations sont importantes.

Ces résultats peuvent s'interpréter comme suit: l'hétérogénéité de la répartition des perméabilités locales induit une forte chenalisation. Lorsque le flux est très chenalisé la perméabilité à l'échelle du système est dominée par le chemin dont la perméabilité est la plus forte. De plus, selon [Ambegaokar et al., 1971], si la perméabilité des liens (ou des mailles) qui constituent le chemin principal est très largement distribuée, alors la perméabilité du chemin est contrôlée par la perméabilité des liens les moins perméables constituant le chemin. Lorsque la dimension D diminue, la distribution des probabilités, donc la distribution des perméabilités locales, s'élargit, conduisant à une augmentation de la chenalisation, et simultanément accentuant le contrôle sur la perméabilité à l'échelle du système par les mailles de plus faible perméabilité dans les chemins d'écoulement. De même une augmentation de la taille du système implique un élargissement de la distribution de probabilités. Ainsi la décroissance d'échelle de la perméabilité selon un exposant $\gamma=2-D$ peut s'expliquer par une augmentation de la chenalisation avec l'échelle, et par un effet de contrôle par les liens/mailles les plus faibles de plus en plus marqué.

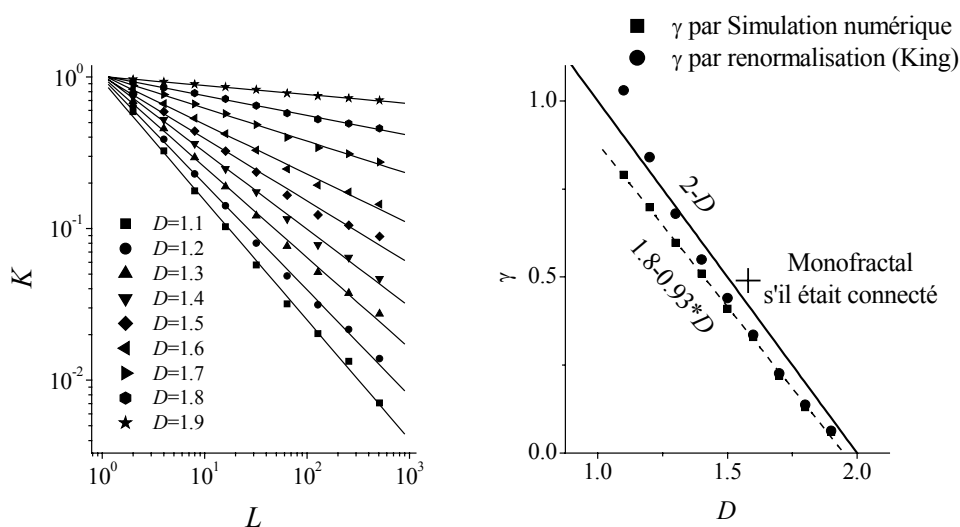


Figure 14. Perméabilité K du champ de corrélation obtenue par simulations numériques de type Monté-Carlo (à gauche). K est proportionnelle à $L^{-\gamma}$. Les valeurs de l'exposant γ sont présentées sur la figure de droite obtenues par simulation Monté-Carlo (carrés) et par la méthode de renormalisation de King. Les deux méthodes donnent des valeurs de γ très proches de $2-D$.

Les deux exposants a et D , qui sont les paramètres principaux du modèle, induisent une corrélation d'autant plus forte que leurs valeurs sont faibles et surtout ont des effets opposés.

Lorsque a diminue la proportion de grandes fractures augmente, diminuant l'effet de la corrélation. Au contraire, la structure de corrélation spatiale induit une décroissance de la perméabilité avec l'échelle, comme on l'a vu dans l'étude de la perméabilité de la structure de corrélation au chapitre précédent. Ainsi, lors de l'étude de la perméabilité des réseaux définis par les paramètres $(a, D)_{a=D+1}$ (ligne orange de la figure 9), une diminution de a entraîne une diminution de D (et vice-versa), augmentant simultanément les effets contraires des corrélations des longueurs et de la répartition spatiale. La question est de savoir si un effet l'emporte sur l'autre, ou s'ils se neutralisent. Cette question est abordée directement dans la partie qui suit.

4.4.5 Perméabilité des réseaux de paramètres $a=D+1$

Dans cette partie, on étudie les réseaux pour lesquels les valeurs de a et D sont telles que : $a=D+1$. On prendra comme base de référence les réseaux non corrélés pour lesquels a est donné et $D=2$. Les deux termes de corrélations du modèle, introduits respectivement par les fractures elles-mêmes et par la structure de corrélation des positions des fractures, sont des lois d'échelle; on s'attend donc à ce que l'évolution de la perméabilité avec la taille des systèmes soit aussi une loi d'échelle. Et en effet, quelles que soient la densité γ et la dimension de corrélation D , toutes les simulations montrent que la perméabilité K suit une loi d'échelle avec L ($K \sim L^{-\gamma}$) (**figure 15**).

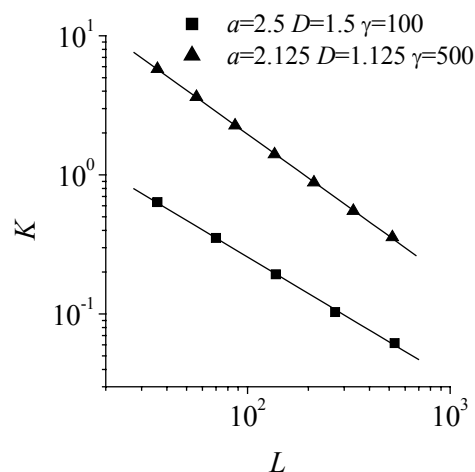


Figure 15. Exemples de variations de la perméabilité avec l'échelle.

L'étude porte sur deux régimes particuliers, c'est-à-dire les réseaux au seuil de percolation, et les réseaux très au-dessus du seuil de percolation pour lesquels un régime limite est atteint.

Au seuil de percolation

L'étude de la connectivité a permis de montrer que, tant que $a=D+1$, la densité fractale critique pour être au seuil de percolation est constante, et que le paramètre de percolation reste un bon estimateur de l'état de connexion. Pour cette gamme particulière de réseaux la valeur du paramètre de percolation est constante quelle que soit l'échelle d'observation.

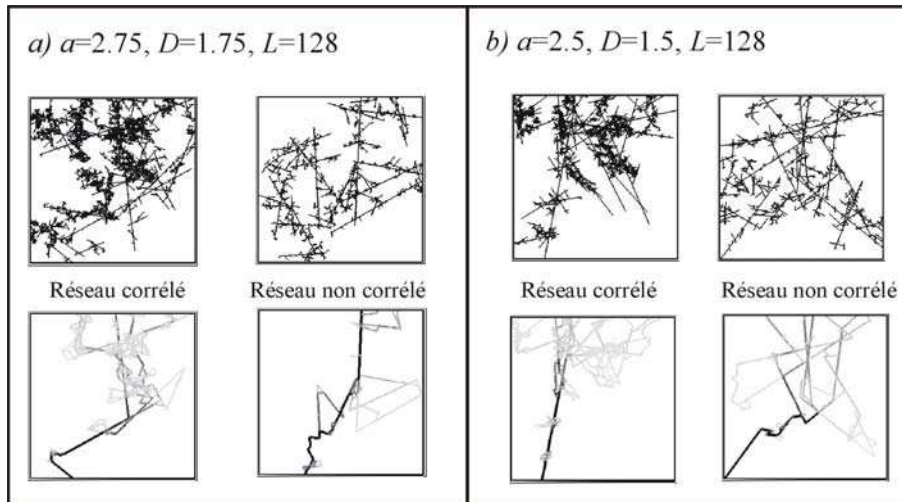


Figure 16. Exemples d'amas infinis associés à des réseaux corrélés et non corrélés au seuil de percolation.

La figure 16 représente les amas infinis associés à des réseaux générés au seuil de percolation, avec les paramètres ($D=1.75$, $a=2.75$) et ($D=1.5$, $a=2.5$) en comparaison avec des réseaux ayant la même distribution de longueurs mais non corrélés. On constate que la structure globale des amas infinis est définie par de grandes fractures, aussi bien pour les réseaux corrélés et les réseaux non corrélés, mais que sur l'amas infini des réseaux corrélés il se trouve beaucoup plus de petits amas concentrés. La présence de ces amas supplémentaires ne semble cependant pas influencer beaucoup sur la structure des écoulements qui reste essentiellement contrôlée par les grandes structures de l'amas infini.

Une étude systématique de l'évolution de la perméabilité au seuil de percolation en fonction de la taille des systèmes montre que, quel que soit le couple de paramètres ($D \leq 2$, $a=D+1$) ou ($D=2$, $a \leq 3$), la perméabilité au seuil de percolation varie comme une loi d'échelle d'exposant $\nu \in [-1; -0.9]$ (figure 17a). Donc, au seuil de percolation, l'évolution de la perméabilité avec l'échelle ne dépend pas de la valeur de D et la différence qualitative entre les amas infinis des réseaux corrélés et non corrélés n'a pas d'influence sur le flux.

La variation de la perméabilité avec l'échelle peut être expliquée à travers la caractérisation de la longueur cumulée de liens rouges, L_{LR} , dans les réseaux. Les liens rouges sont les parties de l'amas infini sans lesquelles le réseau ne serait pas connecté. Tant que $a < 3$, on observe que le produit $K * L_{LR}$ est quasiment constant (figure 17b), démontrant ainsi qu'au seuil la structure du backbone est dominée par les liens de plus faible perméabilité, i.e. les liens rouges. Les amas provenant de la structure de corrélation sont en comparaison très nettement plus perméables mais ne conditionnent finalement pas la perméabilité.

Par contre, lorsque $a \rightarrow \infty$ et $D=2$, ce ne sont plus les liens rouges qui expliquent l'évolution de la perméabilité (figure 17b, carrés pleins). La théorie de la percolation indique qu'au seuil $K \sim L^{-\mu/\nu=0.975}$ ([Stauffer and Aharony, 1992]); l'exposant 0.975, proche de 1, implique une évolution de la perméabilité des réseaux au seuil de percolation très proche de celle d'une fracture unique traversant tout le système ($K \sim L^{-1}$). Cependant, pour le cas des fractures infinitésimales ($a \rightarrow \infty$), la proportion de liens rouges diminue avec la taille du système avec un exposant de 0.75,

clairement différent de 0.975, expliquant la décroissance observée du produit K^*L_{LR} figure 17b. Les liens rouges ne sont alors plus le facteur déterminant de la perméabilité.

La perméabilité des réseaux est le résultat de deux caractéristiques qui font varier la perméabilité en sens inverse et se compensent de façon à produire l'exposant observé de 0.975. Il s'agit de la tortuosité qui fait diminuer la perméabilité et de la taille des bulbes (partie de l'amas infini délimité par des liens rouges consécutifs) qui fait augmenter la perméabilité.

Sur la gamme de réseaux caractérisés par la relation $a=D+1$, avec $a<3$, l'évolution de la perméabilité au seuil ne dépend que de la longueur cumulée des liens rouges qui évolue approximativement comme L^{-1} quelles que soient les valeurs de a et D .

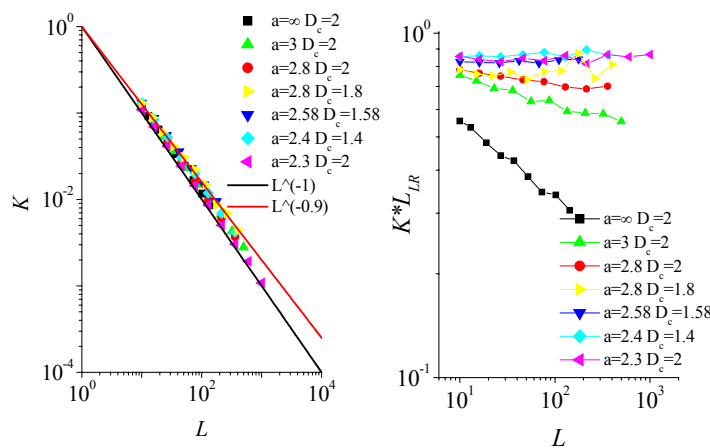


Figure 17: (gauche) Perméabilité K en fonction de l'échelle L au seuil de percolation. (droite) Produit de la perméabilité de la longueur des liens rouges montrant que pour $a<3$ et $D<2$, le facteur limitant de la perméabilité est la longueur des liens rouges si bien que la perméabilité des liens rouges mis bout à bout représentent au moins 70% de la perméabilité du réseau. Cette conclusion devient caduque lorsque $a>3$ (courbe noire) ou lorsque $D=2$ (courbe verte).

A très forte densité

A très forte densité, le modèle limite de perméabilité est recherché sous la forme:

$$K \sim d \cdot L^{-x}$$

où x est l'exposant qui caractérise l'écart au modèle homogène. Pour $x=0$, la perméabilité du système analysé a le même comportement d'échelle que les milieux non corrélés. L'exposant x traduit l'effet de la structure de corrélation s'il existe, alors que l'effet de la diminution relative de densité du réseau avec l'augmentation de l'échelle, dû à la nature fractale de la corrélation (1), se traduit entièrement dans la variation de d selon:

$$d \propto \gamma \cdot L^{D-2} \quad (a>2)$$

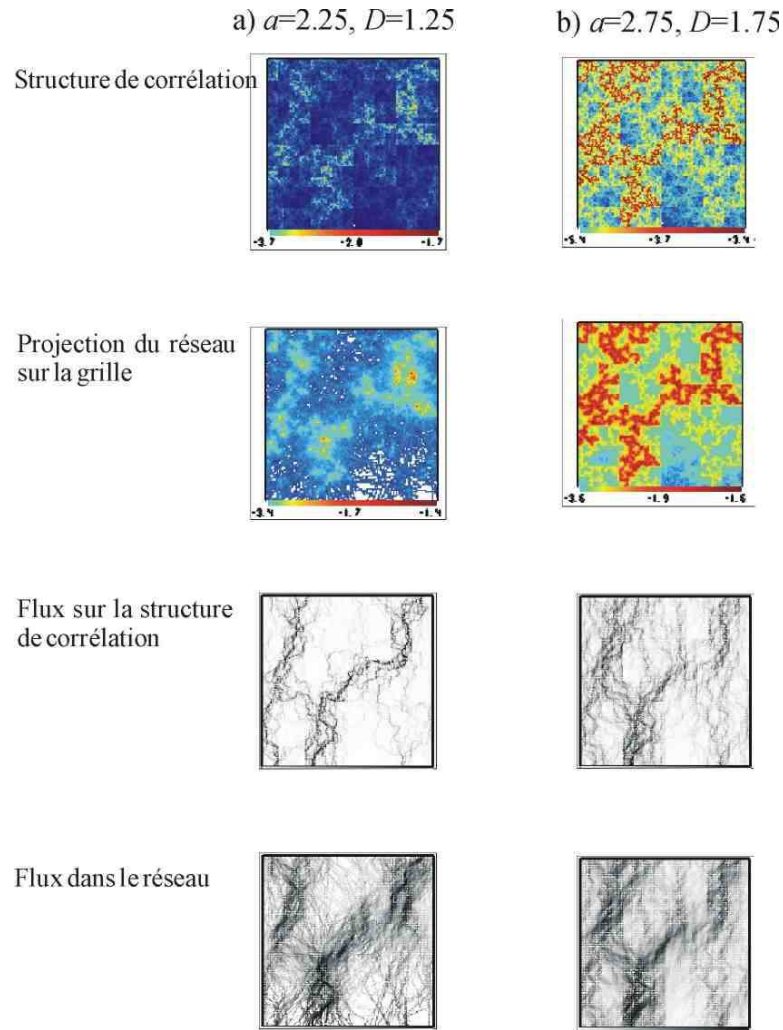


Figure 18. Exemples de réseaux pour des fortes densités de fractures $\gamma=500$ et $D=1.25$ ou 1.75 (nombre de fractures $=\gamma L^D$). La taille des réseaux est $L=128$. Les nombres inscrits sous l'échelle de couleur représentent le logarithme décimal de la valeur de la probabilité d'occupation pour les structures de corrélation et de la densité incluse dans les mailles divisée par la densité totale du système pour la projection des réseaux sur une grille.

Aux très fortes densités, la résolution complète de l'équation de diffusivité sur le réseau discret n'est pas possible et la méthode de projection du réseau discret sur une grille régulière, décrite plus haut (figure 8) et illustrée par la figure 18, est appliquée. Pour chacun des deux réseaux les structures de corrélation sont représentées en vis-à-vis de la projection sur la grille de la densité massique de fractures occupant chaque maille. On constate en premier lieu que les zones de forte densité massique (rouge sur les cartes) correspondent aux zones de forte probabilité de la structure de corrélation. C'est donc la structure de la corrélation qui contrôle la répartition massique des fractures dans le système et les grandes fractures, contrôlées par l'exposant α , ne permettent pas d'homogénéiser la distribution spatiale des masses. Cet effet est confirmé sur les cartes de flux calculées à partir de la structure de corrélation et à partir du champ de perméabilité issu de la projection sur la grille (figure 18). Quelle que soit la valeur de

a (et $D=a-1$), la répartition spatiale du flux sur la grille a la même structure générale que la répartition des flux calculée directement sur la structure de corrélation. On note cependant que les chemins sont plus dispersés au niveau de la grille. Enfin ce résultat est en apparence assez différent de ce qui est observé au seuil, où la structure des flux est dominée par la position des liens rouges.

A une échelle donnée, la structure spatiale des flux semble donc dominée par la structure de corrélation sous-jacente. Il reste à déterminer si cet effet apparent a un impact sur la valeur de la perméabilité à une échelle donnée en fonction de la corrélation, $K_L(D)$, et si cet effet induit un effet d'échelle notable (donc sur $K(L)$).

L'étude est réalisée dans le cas limite des réseaux à forte densité. Le modèle de comportement limite aux fortes densités est validé lorsque les mêmes tendances d'échelle sont observées pour une densité γ et 2γ . Cette validation est illustrée figure 19 pour les couples ($a=2.75, D=1.75$) et ($a=2.25, D=1.25$) et a été vérifiée plus largement pour toute la gamme des paramètres $a=D+1$. La figure 19 permet aussi de montrer que l'évolution de $K_L(D)$ est faible. A titre d'exemple, le rapport de perméabilités pour des réseaux corrélé et non corrélé à $L=58$, $K_{L=58}(D=1.75)/K_{L=58}(D=1.25)=1.2$ et le même rapport pour $L=256$, est égal à 1.4.

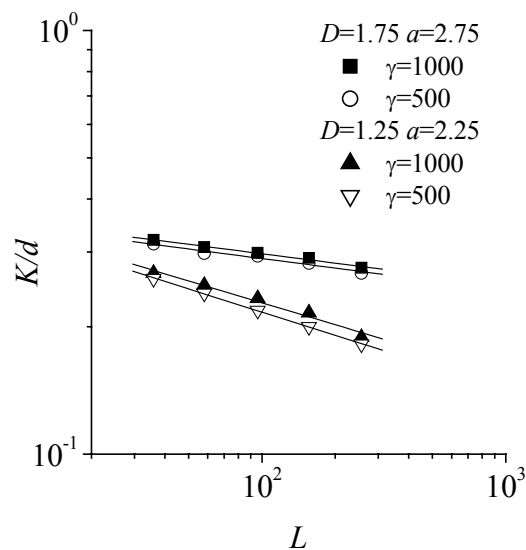


Figure 19. Perméabilité divisée par la densité en fonction de la taille L pour des densités γ de 500 et de 1000 et des dimensions de corrélation de 1.25 et 1.75 ($a=D+1$). Un exemple des réseaux étudiés pour $\gamma=500$ est donné par la figure 18.

Pour $a \in [2; 3]$ et $D=a-1$, les exposants x (dans $K \sim dL^{-x}$) ont été mesurés à partir des courbes d'évolution de la perméabilité avec l'échelle comme illustré sur la figure 19. Les résultats sont résumés dans un diagramme de synthèse (figure 20), pour des réseaux de densité $\gamma=500$ et $\gamma=1000$.

L'évolution de l'exposant x peut être contrainte par plusieurs modèles limites (droites en pointillés et continue figure 20). Pour des réseaux non corrélés, et quelle que soit la valeur de

l'exposant a , si la densité est assez forte alors la perméabilité ne dépend que de la densité d , et $x=0$ [de Dreuzy *et al.*, 2001a]. Par ailleurs, il est montré que la structure de corrélation tend à diminuer la perméabilité, c'est pourquoi la valeur limite $x=0$ pour les réseaux corrélés est une limite supérieure. La deuxième droite limite est donnée par l'évolution de x pour la structure de corrélation seule. C'est en effet dans ce cas que la réduction de perméabilité est potentiellement la plus forte. On a alors $x=D-2$ (indiqué en pointillés sur la figure 20). Enfin, si seules les fractures ayant une longueur supérieure à la taille du système, donc connectant statistiquement les extrémités du système, sont prises en compte, alors on peut montrer que $x=2-a$, qui est alors un minorant pour l'évolution de la perméabilité. De même, l'évolution de la perméabilité au seuil de percolation correspond à $x=2-a$. En conséquence, l'exposant x ne peut théoriquement évoluer que dans une zone restreinte délimitée par les trois comportements limites décrits ci-dessus.

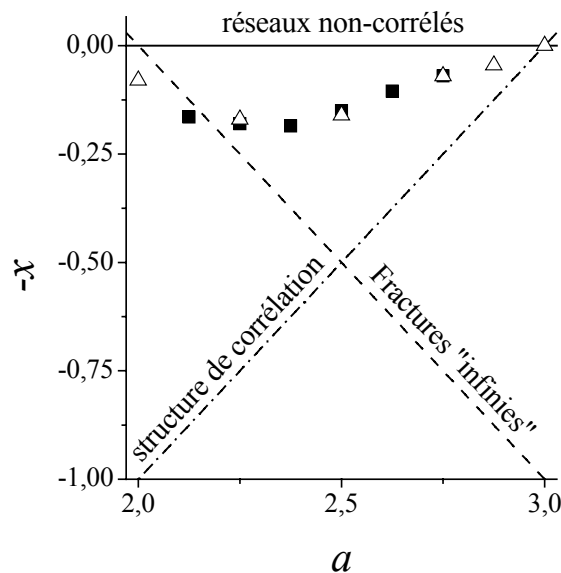


Figure 20. Exposant x donnant la différence entre réseaux corrélés et non corrélés : $K \sim dL^{-x}$. En cas d'absence d'influence de la corrélation, $x=0$. Les modèles simplifiés de perméabilité du modèle de superposition de fractures infinies (i.e. plus grandes que le système) et du modèle de perméabilité de la structure de corrélation sont représentés par les diagonales. Les valeurs obtenues pour des réseaux sont représentées par des triangles ($\gamma=500$) et des carrés ($\gamma=1000$).

Les résultats ne présentent pas de variation significative selon que $\gamma=500$ (triangles) ou $\gamma=1000$ (carrés), confirmant le fait que la variation de x avec a observée est bien un comportement limite. Pour $a=3$, le cas classique $x=0$ est bien atteint. Lorsque $a \rightarrow 2$, on observe un faible écart au modèle limite des fractures infinies puisque $x_{\text{mesuré}}$ est un peu supérieur à la valeur théorique $x=2-a$. Entre ces deux limites la valeur de x varie régulièrement jusqu'à atteindre un extrême ($x \approx 0.18$ pour $a \approx 2.4$). Les effets antagonistes dus à a et D ne se compensent donc pas exactement de la même façon sur l'ensemble du spectre de valeurs possibles. L'effet de la corrélation est maximum lorsque $D \approx 1.4$.

En résumé, aux très fortes densités l'effet de la corrélation spatiale (chenalisation observée figure 18) sur l'évolution de la perméabilité avec l'échelle est assez faible. Quels que soit les paramètres (a,D) on observe $x_{\max} < 0.20$. Ainsi, avec $x_{\max} = 0.2$, pour obtenir un écart d'un ordre de grandeur sur la perméabilité, $\Delta K_d = 10$, il faut une variation d'échelle égale à $\Delta L = 10^5$. L'effet est donc relativement négligeable.

4.5 ESTIMATION A PRIORI DE L'EFFET DE LA CORRELATION SUR LES PROPRIETES DE TRANSPORT

L'étude de l'effet de la corrélation fractale sur les propriétés de transport n'a pas été directement abordée au cours de la thèse. Cependant, les premiers travaux effectués sur les propriétés de connectivité et de perméabilité donnent certaines indications sur l'influence potentielle de la dimension fractale sur les propriétés de transport.

Suivant Redner [1987], dans des conditions d'advection pure (diffusion négligée) le temps de transit dans un backbone de masse M , et où le flux total est I , est $T = M/I$. Ce temps est indépendant de la distribution des vitesses et ne dépend que du flux total et de la masse totale. En connaissant la masse M et le flux I en fonction de l'échelle, on a l'évolution du temps de transit avec l'échelle.

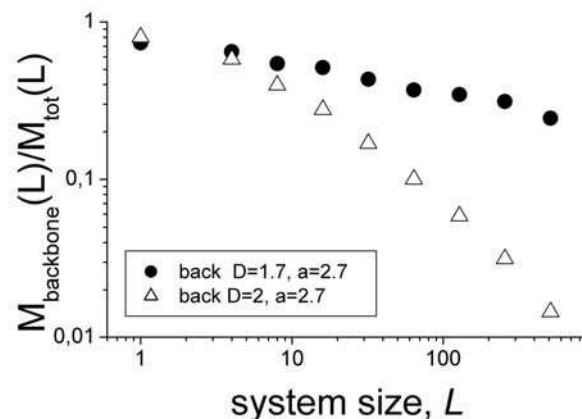


figure 21: Evolution de la proportion de masse de fractures (longueur cumulée) appartenant au backbone en fonction de la taille du système pour des réseaux générés au seuil de percolation. Pour les paramètres $(D=2.7, a=D+1=2.7)$ (ronds pleins), et $(D=2, a=2.7)$ (triangles vides). La masse du backbone est en proportion de la masse totale plus importante pour le fractal $(D=1.7)$ que pour le réseau homogène $(D=2)$.

En comparant qualitativement la structure spatiale au seuil de percolation d'un réseau fractal et d'un réseau homogène (figure 16), on remarque que la structure du backbone du réseau fractal est faite de liens rouges, mais aussi d'amas accrochés sur la structure de liens rouges. Ces amas ne sont pas observés sur le backbone du réseau homogène. Pour les réseaux fractals et homogènes on a montré plus haut qu'au seuil la proportion de liens rouges est équivalente. L'écart sur la masse du backbone, observé figure 21, indique donc une évolution de la masse des

blobs (parties délimitées par des liens rouges consécutifs) du backbone dépendante de la dimension fractale. Comme le flux I est le même au seuil de percolation pour des réseaux corrélés et non corrélés, le temps de transit d'un soluté traversant un backbone issu d'un réseau fractal est d'autant plus grand que la dimension fractale est faible au seuil de percolation. Au-dessus du seuil de percolation, on s'attend au même effet d'apparition de zones de vitesse très faibles dans les amas très denses du réseau et donc à une augmentation du temps de transit moyen des particules. Le temps de transit des particules est la seule caractéristique que l'on peut obtenir simplement à partir des seules caractéristiques géométriques du système. Les autres propriétés de la dispersion demandent la connaissance du champ de vitesse dans le réseau.

4.6 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

L'objet de cette étude était de déterminer l'effet d'une distribution spatiale fractale de la densité de fracturation sur les propriétés hydrauliques des réseaux de fractures. L'étude a été centrée sur l'effet structure du réseau, sur les effets couplés de la corrélation spatiale et de la distribution des longueurs de fractures, qui sont toutes deux modélisées par des lois d'échelles. Il s'agissait aussi de comparer cet effet aux effets des autres propriétés géométriques caractéristiques des réseaux discrets de fractures, telles que les distributions de longueurs, d'ouvertures ou d'orientation.

En 2D, les deux paramètres du modèle, D et a , induisent des corrélations d'autant plus fortes qu'ils sont faibles. Mais, alors qu'une diminution de a augmente la connectivité à travers l'augmentation de la proportion de grandes fractures, une diminution de D entraîne un accroissement du clustering, dont le pendant est une déconnexion entre les amas à l'échelle du système. Les deux effets se neutralisent lorsque $a=D+1$. Pour ce régime seulement (tant que $D<2$) le seuil de percolation est atteint pour une densité fractale constante. Lorsque $a>D+1$ la déconnexion des systèmes à grande échelle est systématique et d'autant plus rapide que a est fort (ou D faible). Pour $a\leq D+1$ les systèmes fracturés peuvent être connectés à grande échelle. L'effet de la corrélation est maximum si $a=D+1$. C'est donc sur ce couple de valeurs des paramètres que l'essentiel de l'étude de perméabilité a porté.

L'étude de la perméabilité a porté sur des réseaux au seuil de percolation et sur des réseaux à très forte densité. Au seuil de percolation, on a montré que $K\sim L^{-1}$ pour tous les couples de paramètres (a,D) , et que cette évolution de la perméabilité est contrôlée par la longueur des liens rouges tant que $a<3$. Lorsque $a<3$ et que les réseaux sont homogènes, la valeur du paramètre de percolation augmente avec l'échelle d'observation. Ainsi, lorsque l'échelle d'observation est assez grande pour que le réseau soit au-dessus du seuil on voit apparaître l'échelle d'homogénéisation. Au contraire, un réseau self-similaire ($a=D+1$) est dans le même état de connexion quelle que soit l'échelle. Donc en théorie un réseau self-similaire exactement au seuil de percolation voit sa perméabilité évoluer comme $K\sim L^{-1}$ jusqu'à l'infini bien que $a<3$. Enfin, dès que $a<D+1$, on doit retrouver un régime semblable au cas homogène et $a<3$.

Aux fortes densités la perméabilité évolue comme $K(L)\sim dL^{-x}$, avec $x<0.2$. L'effet de chenalisation (figure 18) dû à la structure spatiale fractale est quasiment compensé à chaque échelle par l'effet de l'exposant a . La seule question qui reste est celle de l'évolution de la densité avec l'échelle, i.e. doit-on choisir $d\sim \text{cte}$ ou $d\sim L^{D-2}$. En effet, si l'objet fractal occupe un

espace de dimension D , il s'inscrit dans l'espace euclidien et la question revient à une question de choix d'échantillonnage, illustrée figure 22. Si un observateur qui fait une mesure sait se placer sur le réseau fractal alors $d \sim L^{D-2}$ et sinon $d = \text{cte}$.

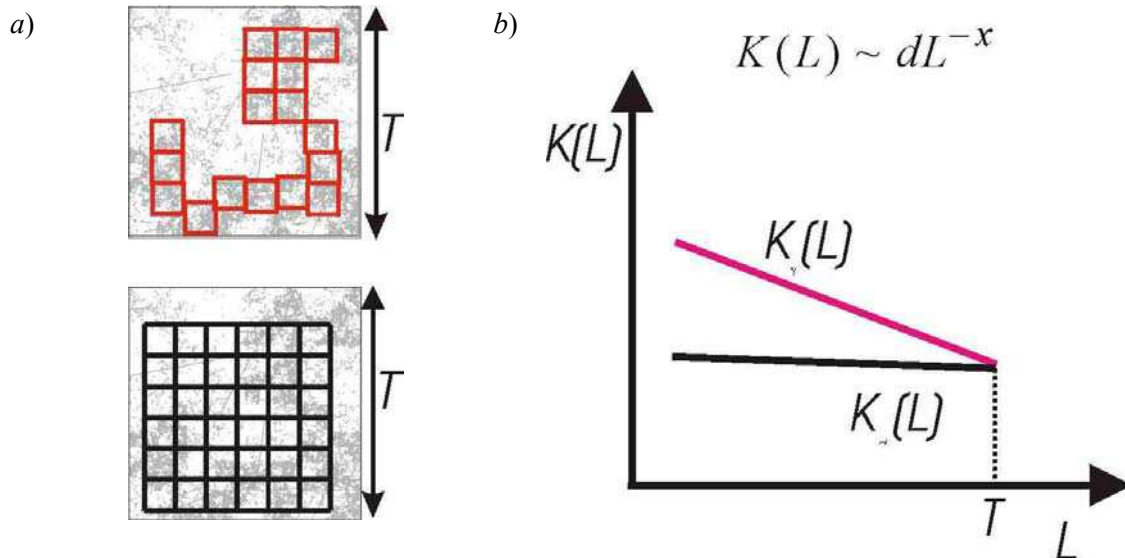


figure 22: Illustration du choix de l'échantillonnage. a) Mesure de perméabilité réalisée systématiquement dans le système euclidien (bas) et mesure de perméabilité réalisée sur le réseau fractal (haut). b) Evolution de la perméabilité avec l'échelle dans les deux cas précédents en fonction de la densité. Pour l'échantillonnage systématique $d \sim \text{cte}$, alors $K \sim L^{-x}$ et pour l'échantillonnage sur le fractal $d \sim L^{2-D}$, alors $K \sim L^{2-D-x}$. Le point d'intersection entre les deux courbes correspond à la taille totale du système T .

En résumé, ces études montrent que la corrélation spatiale fait décroître la perméabilité avec l'échelle, en contradiction avec les observations de terrain classiques de croissance de perméabilité avec l'échelle illustrées par les synthèses de *Clauser* [1992] pour les roches cristallines et de *Schulze-Makuch* [1997] pour les roches sédimentaires. La structure de corrélation provoque la chenalisation des écoulements dans des chenaux de moins en moins perméables avec la taille, induisant ainsi une décroissance de la perméabilité équivalente.

Toujours pour les modèles self-similaires ($a = D + 1$), la corrélation (exposant x uniquement) entraîne une variation d'un facteur 2 à 3 si l'échelle d'observation augmente de un à deux ordres de grandeurs. En comparaison, l'effet maximum de variation de la perméabilité dû à une distribution spécifique des orientations donne un facteur 3 pour un exposant a proche de 3 [*de Dreuzy*, 1999]. L'effet des orientations est donc du même ordre que celui de la corrélation spatiale, c'est à dire très faible. L'introduction de la distribution des ouvertures dans les réseaux de fractures multi-échelles ($a < 3$) entraîne par contre l'apparition d'effets d'échelle cette fois positifs sur la perméabilité [*de Dreuzy et al.*, 2001b; *de Dreuzy et al.*, submitted]. Pour de larges distributions des longueurs et des ouvertures de fractures, la perméabilité équivalente augmente au-dessus du seuil de connexion à cause de la chenalisation des flux dans des structures de plus

en plus perméables avec l'échelle. Cet effet peut modéliser l'effet d'échelle classique *Clauser* [1992], et domine la décroissance due à la corrélation spatiale.

Enfin, il sera intéressant dans la suite, de caractériser, au-delà de la perméabilité, quelles sont les différences structurelles de la chenalisation. Cette étude est prévue dans le cadre de l'analyse des propriétés de transport d'éléments dans les milieux corrélés. En effet, la dispersion est déterminée par le champ de vitesse (distribution et corrélation des vitesses) lui-même beaucoup plus sensible à la structure géométrique du backbone que la perméabilité équivalente, propriété moyenne qui filtre les détails du système [*Redner et al.*, 1987; *Koplik et al.*, 1988].

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

L'ensemble du travail présenté ici a cherché à déterminer la place des corrélations spatiales dans la géométrie des réseaux de fractures et leurs effets sur les propriétés d'écoulement.

Nous avons tout d'abord montré, à travers l'exemple du réseau fracturé naturel de Hornelen, que les réseaux de fractures ont une structure spatiale organisée: les fractures ne sont pas disposées de façon uniforme dans l'espace mais plutôt organisées sur plusieurs niveaux. La densité de fracturation évolue comme L^D avec L la taille du système et D la dimension fractale [Bour, sous presse #66]. Cela signifie que les fractures ne remplissent pas uniformément tout l'espace mais sont regroupées en amas à toutes les échelles. La nature fractale des réseaux est encore un sujet controversé [Bonnet, 2001 #120]. On a montré ici que l'objet fractal n'est pas le réseau dans son ensemble, mais plutôt l'ensemble des positions des fractures, dont la densité évolue avec la taille selon un exposant fractal.

Une étude de l'environnement local autour des fractures a ensuite permis de montrer qu'il existe en moyenne une zone d'écran de forme ellipsoïdale autour des fractures, qui peut être vue comme une réminiscence des interactions entre les fractures lors de la croissance du réseau. La distance entre une fracture et son plus proche voisin augmente en fonction de la longueur de la fractures selon un modèle empirique $d_c(l) \sim l^\beta$. Cet effet implique que statistiquement les plus grandes fractures sont dans des régions plus isolées du système alors que les plus petites sont plutôt regroupées en amas. Ceci peut induire une homogénéisation de la masse du réseau par rapport aux positions seules des fractures qui elles sont fractales.

Afin d'étudier la corrélation fractale des réseaux nous avons développé un procédé stochastique de génération qui permet d'obtenir des réseaux ayant n'importe quelle valeur de dimension fractale, en 2D comme en 3D.

Pour des réseaux s'inscrivant dans l'espace euclidien d et échantillonnés dans l'espace $d-1$, caractérisés par une distribution de longueurs en loi de puissance (exposant a) et une évolution fractale de la densité de fracturation (dimension D), l'analyse stéréologique a montré que:

- La probabilité d'intersection entre des fractures appartenant à un réseau fractal est fonction de la dimension fractale. Plus la dimension est faible plus le nombre local d'intersections sur les fractures augmente, puisque les fractures sont concentrées dans des zones restreintes.
- La relation $a_{d-1} = a_d - 1$, entre les exposants a de la distribution des longueurs, ne dépend pas de la dimension fractale associée au système.
- Tant que $a \geq 2$, on a théoriquement $D_{d-1} = D_d - 1$. Les simulations numériques valident cette relation, bien que la valeur D_{d-1} mesurée soit un peu supérieure à sa valeur théorique ($D_d - 1$). Ainsi la dimension fractale mesurée sur un affleurement de réseau de fractures traduit une corrélation spatiale du réseau complet, et peut être quantifié à partir de l'échantillon bidimensionnel.
- La dimension fractale d'un réseau peut être mesurée à partir de la mesure de l'évolution du nombre moyen d'intersections par fracture, représenté en fonction de la longueur des fractures. Cette méthode appliquée pour le réseau de Hornelen donne des résultats cohérents. Cela implique en plus que les corrélations supplémentaires entre la position et les longueurs des fractures ne viennent pas modifier les relations stéréologiques déduites du modèle à deux paramètres a et D .

Les deux lois d'échelle qui conditionnent le modèle, à travers les exposants a et D , produisent des corrélations d'autant plus fortes que leurs exposants sont faibles. L'analyse de la connectivité des réseaux fractals montre que ces corrélations induisent des effets contraires: une diminution de l'exposant a , reliée à une augmentation de la proportion de grandes fractures, entraîne une augmentation de la connectivité. Au contraire, une diminution de l'exposant D entraîne une augmentation de la concentration des fractures dans des zones restreintes et du même coup une augmentation des zones vides de fractures, qui induit finalement une diminution de la connectivité à l'échelle du système. Lorsque l'effet de D est prépondérant sur a cela conduit à une déconnexion des systèmes à grande échelle quelle que soit la densité. Pour $a = D + 1$, c'est à dire pour les réseaux self-similaires, les deux effets se compensent exactement. Dans ce cas, l'état de connectivité des réseaux ne dépend que de la densité fractale du réseau et ne dépend pas de l'échelle d'observation. Enfin, dès que l'effet de a devient prépondérant sur l'effet de D ($a \leq D + 1$), alors les règles de connectivité ne dépendent plus que de a . Le paramètre de percolation ([Bour, 1997 #59]) est alors un bon estimateur de l'état de connectivité du réseau, et toutes les règles, qui s'appliquent aux réseaux ayant une distribution de longueurs en loi de puissance et une répartition spatiale homogène, s'appliquent alors aux réseaux fractals.

L'étude de la perméabilité a été réalisée pour les réseaux conditionnés par la relation $a = D + 1$. Cela correspond à la valeur maximum de la corrélation fractale qui ne produit pas de déconnexion des réseaux. Nous avons montré que quelle que soit la gamme de densité étudiée, la valeur de D n'influe que peu pas du tout sur l'évolution de la perméabilité avec l'échelle. Au seuil de percolation, la perméabilité est entièrement contrôlée par la longueur des liens rouges. Pour des réseaux aux très fortes densités, la corrélation fractale induit une chenalisation des écoulements quelle que soit l'échelle, et la perméabilité varie comme $K \sim dL^{-x}$, où d est la densité classique et L la taille de système. La chenalisation n'induit qu'une faible dépendance de la perméabilité avec l'échelle: $x \leq 0.2$. Si l'on se place dans le cadre d'une étude de terrain, la

question qui se pose est de savoir si à une échelle donnée les mesures sont effectuées au hasard ($d=cte$) ou bien sur le fractal ($d \sim L^{D-2}$). C'est à ce niveau que la corrélation fractale peut influencer sur l'évolution de la perméabilité avec l'échelle.

En résumé, ces études montrent que la corrélation fractale fait décroître la perméabilité avec l'échelle, en contradiction avec les observations de terrain classiques de croissance de perméabilité avec l'échelle illustrées par les synthèses de *Cluser* [1992] et de *Schulze-Makuch* [1997]. Cependant, la décroissance de la connectivité avec l'échelle a été observée sur le site de Mirror Lake: à l'échelle de la centaine de mètres il apparaît des zones fortement fracturées avec une perméabilité élevée, alors qu'à l'échelle du bassin la perméabilité est plus faible car les zones densément fracturées ne sont pas connectées entre elles. Enfin, au niveau de l'évolution de la perméabilité avec l'échelle, l'effet structurel du réseau (orientations des fractures et organisation spatiale) est secondaire par rapport à l'effet de la distribution des longueurs, et à la distribution de perméabilité locale associée aux fractures (ouvertures).

Si la dimension fractale influence seulement faiblement la perméabilité des réseaux connectés, son influence devrait en revanche être plus perceptible au niveau des propriétés de transport (Chapitre 4) et devra être étudiée à la suite de ce travail. On s'attend en effet au moins à des temps de résidence d'autant plus longs que la dimension fractale est faible (Chapitre 4). Enfin, l'analyse stéréologique du chapitre 3 a montré que les corrélations 2D sont le signe de corrélations 3D. Il est évident que l'étude des propriétés hydrauliques des réseaux doit être poursuivie en 3D. Dans ce cas, les règles de connectivité pourraient être différentes.

ANNEXE 1

Reference	Type of Fractures	Size of the System, m	Method Used	Exponent ^a
<i>Aviles et al.</i> [1987]	San Andreas fault	$\sim 3 \times 10^3$	box-counting	$D = 1.01$
<i>Barton</i> [1995] and <i>Berkowitz and Hadad</i> [1997]	joints	~ 15	box-counting	1.52 (B), 1.85 (BH)
	joints	~ 12		1.38 (B), 1.74 (BH)
	joints	~ 15		1.50 (B), 1.87 (BH)
	joints	~ 50		1.61 (B), 1.71 (BH)
	joints	~ 12		1.59 (B), 1.91 (BH)
	joints	~ 15		1.54 (B), 1.87 (BH)
	joints	~ 11		1.70 (B), 1.98 (BH)
	joints	~ 90		1.50 (B), 1.90 (BH)
	joints	~ 18		1.60 (B), 1.91 (BH)
	shear band	~ 1		1.50 (B), 1.89 (BH)
	...	~ 40		1.58 (B), 1.88 (BH)
	joints	~ 5		1.52 (B), 1.93 (BH)
	faults	$\sim 5 \times 10^3$		1.49 (B), 1.95 (BH)
	joints	~ 40		1.48 (B), 1.82 (BH)
	faults	$\sim 3 \times 10^3$		1.52 (B), 1.92 (BH)
	faults	$\sim 4 \times 10^6$		1.32 (B), 1.77 (BH)
	...	~ 0.02		1.58 (B), 1.88 (BH)
<i>Bodin and Razack</i> [1999]	...	$\sim 50 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.56$
			mass method	$D_M = 1.52$
<i>Bour and Davy</i> [1999]	faults	$\sim 250 \times 10^3$	two-point correlation	$D_V = 1.65$
<i>Cello et al.</i> [1997]	faults	$\sim 15 \times 10^3$	box-counting	$D = 1.60$
<i>Chiles</i> [1988]	...	~ 10	box-counting	$D = 2$
<i>Gauthier and Lake</i> [1993]	faults	$\sim 10^3$	modified box-counting [from <i>LaPointe</i> , 1988]	$D = 2.53$
	faults	$\sim 10^3$		$D = 2.44$
	faults	$\sim 10^3$		$D = 2.20$
<i>Gillespie et al.</i> [1993]	faults	$\sim 38 \times 10^3$	box-counting and modified box-counting [from <i>LaPointe</i> , 1988]	results not distinguishable from random networks ($D = 2$)
	faults	~ 2		
	faults	$\sim 13 \times 10^3$		
	joints	15		
<i>Hirata</i> [1989]	faults	$\sim 25 \times 10^3$	box-counting	$D = 1.49$
	faults	$\sim 70 \times 10^3$		$D = 0.72$
	faults	$\sim 73 \times 10^3$		$D = 1.60$
	...	~ 0.6		$D = 1.49$
<i>LaPointe</i> [1988]	joints	3	modified box-counting	$D = 2.71$
	joints	15		$D = 2.51$
	joints	15		$D = 2.54$
	joints	20		$D = 2.69$
	joints	15		$D = 2.37$
<i>Matsumoto et al.</i> [1992]	faults	$\sim 7 \times 10^3$	box-counting	$D = 1.05$
		$\sim 8 \times 10^3$		$D = 1.12$
		$\sim 10 \times 10^3$		$D = 1.18$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.33$
		$\sim 7 \times 10^3$		$D = 1.23$
		$\sim 5 \times 10^3$		$D = 1.42$
		$\sim 9 \times 10^3$		$D = 1.21$
		$\sim 7 \times 10^3$		$D = 1.18$
		$\sim 5 \times 10^3$		$D = 1.15$
		$\sim 9 \times 10^3$		$D = 1.22$
		$\sim 2 \times 10^3$		$D = 0.85$
		$\sim 2 \times 10^3$		$D = 0.92$
		$\sim 2 \times 10^3$		$D = 0.95$
<i>Odling</i> [1992]	joints	18	box-counting	$D = 2$
<i>Okubo and Aki</i> [1987]	faults	$\sim 15 \times 10^3$	box-counting	$D = 1.12$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.20$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.25$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.21$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.42$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.43$
		$\sim 15 \times 10^3$		$D = 1.31$
<i>Walsh and Watterson</i> [1993]	joints	~ 11	box-counting	$D = 2.00$
Multifractal analysis				
<i>Asterberg et al.</i> [1996]	faults and joints	~ 450		$D_0 = 1.98, D_2 = 1.93$
<i>Giaquinta et al.</i> [1999]	faults	$\sim 30 \times 10^3$	correlation function	$D_0 = 1.76, D_2 = 1.65$
	faults	$\sim 7 \times 10^3$		$D_0 = 1.67, D_2 = 1.56$
	faults	$\sim 7 \times 10^3$		$D_0 = 1.57, D_2 = 1.45$
<i>Ouillon et al.</i> [1996]	joints	10		$D_0 = 2.0, D_2 = 2.0$
	joints	60		$D_0 = 2.0, D_2 = 2.0$
	faults	11×10^3		$D_0 = 2.0, D_2 = 2.0$
	faults	45×10^3		$D_0 = 2.0, D_2 = 1.88$
	faults	150×10^3		$D_0 = 2.0, D_2 = 1.89$
<i>Vignes-Adler et al.</i> [1991]	faults	$\sim 1 \times 10^6$	mass method	$D_M = 1.97$
		$\sim 250 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 2.0$
		$\sim 40 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.65$
		$\sim 10 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 2.00$
		$\sim 100 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 2.00$
		$\sim 30 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 2.00$
		$\sim 22 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.47, D_2 = 1.47$
		$\sim 5.5 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.48$
		$\sim 5.5 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.43, D_2 = 1.46$
		$\sim 5.5 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.36, D_2 = 1.46$
		$\sim 5.5 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.55, D_2 = 1.46$
		$\sim 5.5 \times 10^3$	box-counting	$D_0 = 1.48, D_2 = 1.46$

Only values measured on two-dimensional fracture networks have been reported.
^a B means from *Barton* [1995a], BH means from *Berkowitz and Hadad* [1997].

Compilation des valeurs de dimension fractale reportées dans la littérature pour des réseaux bidimensionnels. D'après [Bonnet et al., 2001].

**ANNEXE 2: BOUR&AL, A STATISTICAL
SCALING MODEL FOR FRACTURE NETWORK
GEOMETRY, WITH VALIDATION ON A MULTI-
SCALE MAPPING OF A JOINT NETWORK
(HORNELEN BASIN NORWAY)**

Journal of Geophysical Research, *in press*.

A statistical scaling model for fracture network geometry, with validation on a multi-scale mapping of a joint network (Hornelen Basin, Norway)

Olivier Bour¹, Philippe Davy¹, Caroline Darcel¹, and Noëlle Odling²

¹ Géosciences Rennes (CNRS UMR 6118) Campus de Beaulieu, Université Rennes 1, 35042 Rennes Cedex France

² Rock Deformation Research group, School of Earth Sciences, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK

Abstract. Fracture patterns are characterized by a complex geometry which involve a large length distribution, and non-homogeneous density distributions. Here we address the issue of the modeling of this complex geometry over scales, through a first-order model providing the characterization of the number of fractures of a given length and at a given scale. We propose that the simplest model is a power law in both space and fracture length, with three main parameters : the exponent a of a power-law length distribution, the fractal dimension D which fixes the scale-dependence of the number of fractures and the fracture density α . We verify the applicability of this model on seven fracture patterns mapped from the metric scale up to almost the kilometric scale in the Hornelen basin. The model efficiently describes fracture-network properties at all scales with a single set of parameters. For the Hornelen fracture networks, we found a simple relationship between basic exponents, $a=D+1$, implying that the fracture network is self-similar. Through this analysis, we present different methodological developments for deriving the basic exponents a and D , and for verifying the consistency of the model. Overall, the main methodological development is about the normalization of the measurements made from different scales of observation. Finally, we discuss both the limitations and the uses of such a model for analyzing the hydraulic and mechanical properties of fracture networks.

Introduction

Fractal concepts applied to fracture networks predict a generic relationship between fractures at all scales [Allègre *et al.*, 1982; King, 1983; Turcotte, 1986]. For the last fifteen years, such scaling concept has been largely debated from statistical studies of detailed fracture maps [see Bonnet *et al.*, 2001 and references therein]. A large number of works analyzed either the spatial distribution of fractures [Barton and Larsen, 1985; Okubo and Aki, 1987; La Pointe, 1988; Hirata 1989; Gautier and Lake, 1993; Ouillon *et al.*, 1996a] or their length distribution [Segall and Pollard, 1983; Gudmunsson, 1987; Villemin and Sunwoo, 1987; Childs *et al.*, 1990; Main *et al.*, 1990; Scholz and Cowie, 1990; Davy 1993; Odling, 1997] to test the power-law scaling model.

Despite these numerous analyses, the scientific community is still largely debating the statistical relevance of power-law models, due mainly to the difficulty of achieving a robust statistical analysis on limited data sets [Pickering *et al.*, 1995; Clark and Cox, 1999; Bonnet *et al.*, 2001]. In general, scaling-laws are obtained over only one order of magnitude which is clearly insufficient to demonstrate the fractal nature of fracture patterns [Feder, 1988]. Moreover, the methods used to achieve a statistical analysis are sometimes subject to discussion [see Bonnet *et al.*, 2001] and not all fracture patterns are characterized by a fractal geometry [Odling *et al.*, 1999]. More generally, there is currently no statistical model that globally describes the geometry of fracture networks, including the density term, the length and orientation distribution, spatial correlation, etc... Generally, fractal dimension or power-law length exponent are determined independently, and the general statistical model that should at least involve these two scaling parameters is not tested. There is clearly a need for determining a sound statistical model, at least for relating fracture geometry to mechanical or transport properties. Theoretical studies that investigate relationships

between geometry and physical properties [Ross, 1986; Turcotte, 1986; Marret and Allmendinger, 1991; Davy *et al.*, 1990; Acuna and Yortsos, 1995; Bour and Davy, 1997, 1998; Berkowitz *et al.*, 2000] use existing rudimentary geometrical models and clearly do not take into account the bulk complexity of fracture network geometry provided by structural geologists.

Here we address the issue of modeling this complex geometry over a range of scales, through a first-order statistical model. It consists firstly in qualifying a fracture with a number of properties such as its length, l , its orientation θ , its throw, t , etc... The first-order model gives the number of fractures having a length l , an orientation θ , etc... contained in an elementary volume of characteristic scale L . Second-order statistics would involve the spatial correlation between the different fracture parameters. An example of such correlation was given by [Bour and Davy, 1999] who showed statistically that small faults are more clustered than large ones. This is typically a second-order statistical property that relates local fault density and fault length.

We restrict our analysis to a first-order model that yields the number of fractures of a given length and at a given scale. We propose that the simplest first-order model involves at least three parameters : the exponent a of a power-law length distribution, the fractal dimension D which fixes the scale-dependence of the number of fractures and the fracture density α . We verify the applicability of this model on seven two-dimensional fracture patterns (Figure 1) from the metric scale up to almost the kilometric scale in the Hornelen basin.

Hornelen Data Set

The data set we used to test the model consist of seven two-dimensional fracture patterns mapped in the same area

from the metric scale up to almost the kilometric scale (Figure 1) [Odling, 1997]. Each map contains more than 2000 fractures (Table 1). The area from which the seven fracture maps were made contains a system of joints (tension fractures) in well indurated Devonian age sandstones of the Hornelen Basin in western Norway, some 500 km north of Bergen. The rocks are composed of sandstones which are organized firstly into beds of the order of 2 m thick and secondly into cycles some 100 to 200 m thick. The joints are mostly close to perpendicular to the sedimentary layering and the geometry of the joint system is easily seen, due to excellent exposure, both on the tops of sedimentary cycles and in cliff faces. Studies of this joint system [Odling, 1997] show that at outcrop scale single traces represent single joints, but at kilometer scale traces represent joint zones that are complex structures of well connected densely packed joints. The width of these joint zones correlates with trace length [Odling, 2001] and with their visual signature. The seven maps (Figure 1) were made from outcrop observations and aerial photographs at a range of resolutions. Thus each map represents a limited scale range of joint trace lengths controlled by the resolution of the image. It was found that the joints are vertically persistent with aspect ratios close to 1.0. Thus, in this case, the sedimentary layering has had only a minor influence on the development of the joint system which can be regarded as of 'non-stratabound' type [Odling *et al.*, 1999], i.e. close to a fracture system developed in a mechanically isotropic rock mass. Such systems often display power law fracture length distribution and a tendency to spatial distribution that is more clustered than a spatially random distribution [Odling *et al.*, 1999]. Thus this fracture system may be thought of as typical in style to joints systems in massive rocks, systems that are wide-spread in nature.

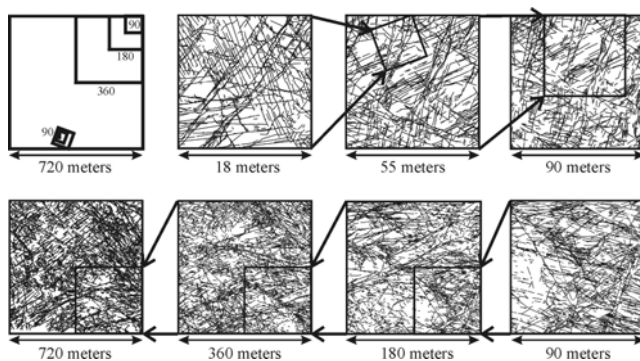


Figure 1. Maps of the seven fracture patterns from the Hornelen Basin [Odling, 1997]. The procedures used to map the different fracture patterns is described in Odling [1997].

Table 1 : Values of $N(L)$, the number of fractures included in the system, and $M(L)$, the cumulative length of fracture included in the system (meters) for the different fracture networks (L is the system size, in meters).

L	$N(L)$	$M(L)$
18	2123	1198
55	2565	4720
90	3429	8218
90	2440	7797
180	3137	17823
360	3992	40043
720	4092	80325

First-order model of fracture length and density

About the fractured system on which the statistical model applies.

The statistical properties that we are looking for require a clear definition of what we consider to be the fractured system. A clear and unambiguous definition of fractured system is the space, empty in general, created during the fracturing process. Nobody measures the fracture volume because fracture thickness is most of the times smaller than observation scale. Geologists rather define the fractured system as material surfaces that wrap the fractured volume. This definition is physically sound since most of fracturing theories are based on the energy necessary to create such surfaces. It is not totally unambiguous geometrically speaking, because these surfaces have a small-scale complexity (due to an intrinsic self-affine property or to the formation of a gouge) that make their measure scale-dependent if the resolution scale is very small (which is barely reached in practice). Classical box-counting methods or mass dimension were actually applied on this fractured-surface system, or on the 1D-trace networks defined by its intersection with the outcrop plane. Geologists generally go further, and consider the fractured system as a population of fractures that are individual elements, roughly planar, in which the displacement is supposed to be spatially coherent, that is predictable from place to place. A basic property such as fracture length, or fracture orientation, does make sense only if each fracture is individualized, which is not the case for the fractured-surface system defined above. This decomposition into individual elements is coherent with the physics of cracks, in which the stress and strain field due to the crack loading is related to the distance to crack tips, and to the crack surface.

The fracture-population system or the fractured surface system are obviously referring to the same fractured system; the differences lie only in the descriptors. The fracture-population system is characterized by a fracture density (number of fractures encountered in a material volume), a fracture-length distribution, a fracture-orientation distribution, fracture-to-fracture distances, ...; the fracture surface system is characterized by a surface density that is the total fracture surface in a material volume (whose unit is m^1 whatever the space dimension). The equivalence between these properties is not trivial : the surface fracture density is a function of the individual-fracture density (that is a first-order descriptor of this population) and of potential correlations between fracture length, position or orientation [Bour, 1997 ; Bour and Davy, 1999]. In this paper, we focus on the first-order model of the fracture-population system, that is the density of fractures having a length l . In a sense, this is the most basic descriptor of the fractured system because it does not contain any information on correlation between fracture properties. However it gives some basic but meaningful scaling properties on the fracture-position correlation, and on the length distribution. Note that we already found different scaling regimes between the fractured-surface system and the fracture-population system [Bour, 1997]. The fractured-surface network has a trivial dimension of about 2 [Odling, 1992; Bour, 1997] while the fractal dimension of fracture centers is about 1.8 (see below). We will address this issue in a next paper [Bour *et al.* in preparation].

Note finally that individualizing fractures from the mapped fracture traces is not an univocal exercise; for instance, splitting branching fracture patterns into several distinct fractures can be done in several ways. In the field, fractures and fracture tips are actually well-defined from their morphologic signature. Both the continuity of fracture plane with a roughly constant orientation, and the coherence of fracture aperture, well define individual fractures. Direct comparison with field observations were performed to verify that small-scale maps are representative of real fracture populations. Problems arising from branching pattern do exist, but cases for which the ambiguity cannot be solved are actually few, and do not affect significantly the measured statistical distributions.

A first-order model of fracture-population systems

The simplest geometrical model gives the number of fractures that have a length l , an orientation θ , etc.. per unit of material volume. Like for fracture length or orientation, defining the fracture position is thus a first, and necessary, step of building the fracture-population geometrical model. All points of fracture plane are *a priori* possible candidates; we take the fracture barycenter as the most “neutral” position compared to fracture tips for instance. Physically speaking, this convenient choice lays emphasis on the nature of spatial correlations at fracture birth, since the barycenter is likely the position of the very first nuclei in the ideal case of a fracture growing symmetrically from a material point. We have verified that the definition of a fracture position is not crucial for a scaling analysis: taking one arbitrary fracture tip, or the fracture barycenter, does not affect the scaling nature of the first-order statistical model that is described below.

To describe both the spatial and length distributions of fracture networks made from sand-box models, Davy *et al.* [1990] proposed that the density fracture length distribution is adequately modeled by a double power law:

$$n(l, L) = \alpha \cdot L^{D_M} l^{-a} \quad (1)$$

where $n(l, L)dl$ is the number of fractures having a length between l and $l+dl$ in a box of size L , D_M is the mass dimension of fracture barycenters, a the exponent of the frequency distribution of fracture lengths, and α a fracture density term. In the model, it is assumed that the length distribution of fractures follows a power-law, but equation 1 is valid whatever D_M , even for a non-fractal distribution of elements in a plane ($D_M=2$), or in a volume ($D_M=3$). The great advantage of the model presented in equation 1 is to allow the derivation of the fracture density term, α , which fixes the number of fractures of a given length per unit “fractal” area [Davy *et al.*, 1990]. Once validated, such a geometrical model can thus be used to derive the scaling of some properties of the fracture network, such as fracture density and fracture connectivity [Bour and Davy, 1997; 1998; Berkowitz *et al.*, 2000]. Note that equation 1 may be rewritten in the form that depends on N_t , the total number of fractures, l_{\min} , the smallest fracture detected in the system, and Λ , the size of the studied domain [Davy *et al.*, 1990]. However, since the latter parameters are quite difficult to measure in the field, we keep equation 1 in the form presented here, knowing that all parameters (α , L , D_M , a) may be measured or derived from a fracture population.

In the model, the scaling of the number of elements in a box of size L comes from the definition of the mass

dimension, D_M , that tells that in average, the number of elements lying in a disk or box of size L increases with L such as $N(L) \sim L^{D_M}$ [Mandelbrot, 1982]. A simple demonstration may also be obtained through the definition of the box-counting method [Mandelbrot, 1982]. Let's consider the sub-sampling in a box of size L of a fractal network made of N_t elements of elementary size r_{\min} . The number $N_b(L)$ of boxes of size L necessary to recover the fractal is given by :

$$N_b(L) = (\Lambda / L)^{D_0}, \quad (2)$$

where D_0 is the capacity dimension, and Λ is the size of the box for which the fractal is completely included in one box ($r_{\min} < L < \Lambda$). Thus the average number of elements included in a box of size L that contains some of the elements of the fractal is given by

$$N(L) = N_t / N_b(L) = N_t (L / \Lambda)^{D_0}. \quad (3)$$

Note that this latest equation that implies $D_M = D_0$ is valid only if the system is monofractal (see below).

To test the model (equation 1), we present in the following sections a statistical analysis of the geometry of the Hornelen fracture network mapped at different scales of observation (Figure 1). First, an analysis of the different maps is presented to determine the variability of the measurements from one map to another. The analysis of the fracture spatial distribution will be presented before the analysis of the length distribution because the normalization of the measurements requires the primary derivation of the mass dimension, D_M . In the last section of the paper, we present complementary developments that allow us to check the relevance of the model.

Measures on individual maps

Fractal dimension

Different methods of measurement can be used to characterize the fractal nature of a population of elements [Feder, 1988]. Among them, the box-counting method is certainly the most well known, and the most frequently used to derive the fractal dimension (here the capacity dimension D_0) of fracture patterns [see Bonnet *et al.*, 2001]. Nevertheless, because of several bias and pitfalls, the application of this method to natural systems can be a rather troublesome procedure [Vicsek, 1992; Walsh and Watterson, 1993; Ouillon and Sornette, 1996; Hamburger *et al.*, 1996; Bour, 1997]. Theoretically, for a fractal fracture pattern of size L , the number $N_b(r)$ of boxes of size r should follow equation 2. However, despite the large number of fractures in each map (more than 2000), measurements made by this method on fracture centers were systematically dominated by finite-size effects (Figure 2a). For large r , i.e. larger than the largest distance between two neighbors, $N_b(r)$ varies as $(L/r)^2$ meaning that all boxes are occupied by one or more fracture centers. This trivial scaling occurs for $r > 8$ m in the example shown in Figure 2a ($L=55$ m), and the dimension derived is that of the sampling domain instead of the dimension of the fracture network [Walsh and Watterson, 1993]. Another sampling effects occurs at very small r (< 0.3 m in Figure 2a), when most occupied boxes cover only one fracture center which leads to $N_b(r)$ being equal simply to the number of fractures in the system, N (Figure 2a).

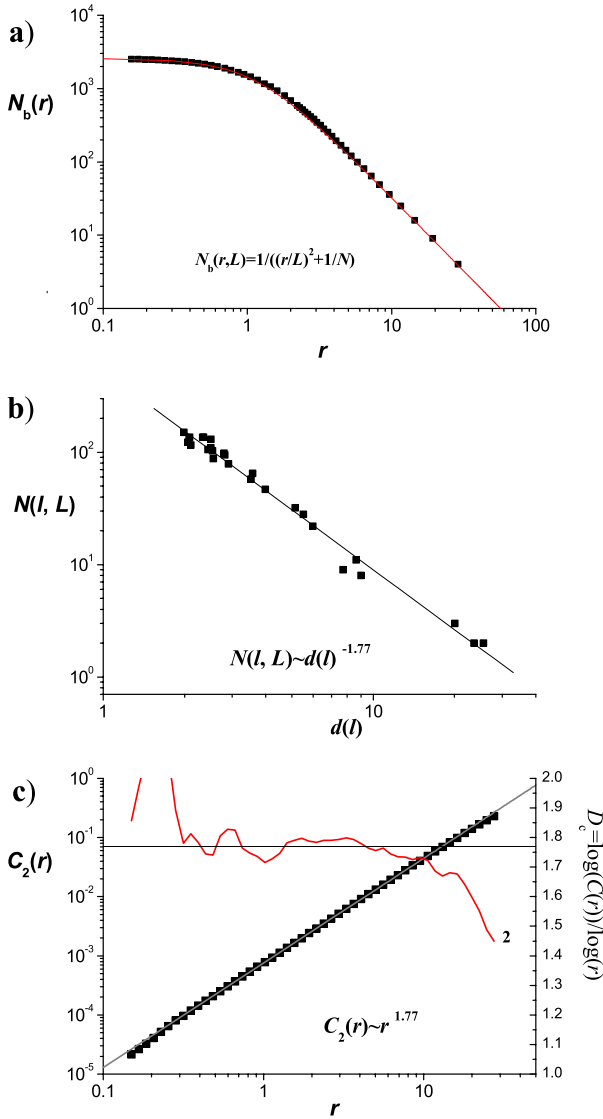


Figure 2. Analysis of the spatial distribution of the fracture pattern having a size L equal to 55 meters. a) Box-counting method : plot of the number of boxes necessary to cover the system, $N_b(r)$ versus r , the size of the boxes. Solid squares correspond to calculations while the solid curve corresponds to the function $f(r)=1/((r/L)^2+1/N)$ where N is the total number of fractures included in the system. b) Plot of the number of fractures having a length between l and $l+dl$ (here a logarithmic bin is chosen meaning that dl is proportional to l), $N(l, L)$, versus the average distance between these fractures, $d(l)$. $N(l, L)$ is fitted by $N(l, L) \approx \beta d(l)^{-D_0}$ (solid straight line) with $D_0=1.77 \pm 0.08$. Most of the uncertainty comes from the choice of the scale range chosen to perform the fit c) Computations of the two-point correlation function, $C_2(r)$ as a function of r . $C_2(r)$ is fitted by $C_2(r) \approx \alpha r^{D_c}$ (solid straight line) with $D_c=1.77 \pm 0.02$. The uncertainty may also be visually estimated from the curve labeled 2 which gives the local value of the logarithmic slope $d\{\log(C_2(r))\}/d\{\log(r)\}$ (right-hand scale).

The question now is to know if a dimension can be calculated in the intermediate scale range, that is between about 0.3 m and 8 m in the example shown in Figure 2a. The answer is intimately related to the modeling of finite-size effects. To illustrate this point, we draw in Figure 2a a simple “sampling” function that has the expected behavior at large and small r :

$$N_b' = \frac{1}{N^{-1} + (r/L)^2}$$

This function appears to efficiently model data over the whole range of scale, showing that sampling effects may remain dominant at all scales, prohibiting the derivation of a fractal dimension by this method. However the fact that $N_b(r)$ varies as $(L/r)^2$ at large scale does not statistically mean that the capacity dimension of the fracture network is 2 in regard to the small range of scales for which this relationship is valid.

We propose a modified method to derive the capacity dimension D_0 , that consists of calculating the average distance $d(l)$ between nearest centers of fractures having the same length. This method, which was initially proposed by *Bour and Davy* [1999], assumes that any subset of fracture centers remains fractal. The idea is that the number of disks necessary to cover the fractal will be equal to the number of sampled points if the disk radius is about the average of the distances between nearest points. Following equation 2, the number of sampled points N should scale with the distance between nearest points d as :

$$N \sim (L/d)^{D_0}. \quad (4)$$

We can select the subset of fractures at random or with respect to their length. We use the latter selection because it additionally provides helpful information to verify equation 1. Note that no assumptions are required for the length distribution. If the length distribution is a power law, equations (1) and (4) predict $d(l)$ to vary as : $d(l) \sim l^x$, with $x=(a-1)/D_0$.

We have thus calculated $N(l, L) = n(l, L)dl$, which is the number of fractures having a length in the range $[l, l+dl]$ and contained in a system having a typical size L , and $d(l)$ the average distance between fractures of same length l . Figure 2b shows that eq.(4) is verified with D_0 about 1.77 ± 0.08 . As in any scaling analysis, the uncertainty estimate on the fractal dimensions depend on the data scattering, on the choice of a fitting procedure (maximum likelihood, least-square regression, etc...), and on the scale range used to performed the fit. The latter point is often neglected in spite of the fact that this is the major cause of uncertainty. The values that are reported through the text are calculated by considering that the upper and lower bounds of the fitting model can vary.

Apparently, the procedure used to derive the capacity dimension D_0 seems to not have the drawbacks of the box-counting method and provides a simple but crude estimate of D_0 , knowing that its precise determination remains anyway a difficult challenge for natural systems [*Vicsek*, 1992; *Walsh and Watterson*, 1993; *Ouillon and Sornette*, 1996; *Hamburger et al.*, 1996; *Bonnet et al.*, 2001]. Note that the determination of the correlation dimension D_2 , which is presented below, is much more accurate.

To compute the fractal dimension of a natural system, the most efficient method according to [*Vicsek*, 1992] consists of calculating the so-called density-density or pair correlation function $C_2(r)$ defined as :

$$C_2(r) = 2N_p(r)/(N.(N-1)),$$

where $N_p(r)$ is the number of pairs of points whose distance is less than r [*Hentschel and Procaccia*, 1983] and N the total number of points. $C_2(r)$ is expected to scale with r such as r^{D_c} , where D_c is the correlation dimension. This method has been implemented on fracture barycenters [*Davy et al.*, 1990 ;

Sornette et al., 1993 ; Bour and Davy, 1999]. Theoretically, the correlation dimension D_c is identical to the mass dimension D_M ; the two-point correlation function provides therefore an accurate method to derive the mass dimension that fixes the scaling of the number of fractures in a box of size L in the model presented in equation 1. We indeed verified that both methods lead to similar results [Bour, 1997]. Note nevertheless that to obtain $D_c=D_M$ on the same scale range, resolution effects must be partly removed from the computations of the mass dimension. In particular, the computations of the number of elements lying in a disk of radius r should not include the fracture midpoint over which the disk is centered [Bour, 1997]. An example of the computation of the two-point correlation function is given in Figure 2c where the quality of the power-law fit may be appreciated from the local logarithmic slope also drawn on the figure ($d(\log(C_2))/d(\log(r))$ which is equal to D_c if C_2 is a power law). The power-law fit is valid over almost two decades with a dimension D_c of about 1.78 whatever the regression method. The uncertainty is less than 0.02, emphasizing the accuracy of this correlation method. It is mainly due to the choice of scale range on which the regression is applied.

In a monofractal object, the fractal dimension fully characterizes the variation with scale of the object density, and of its distribution moments $M_q(r) \sim r^{(q-1)D}$. In more complex objects, a single exponent is not sufficient to fully describe the scaling of the moments of the density distributions. These objects are defined as multifractal, and characterized by a set of generalized dimensions D_0, D_1, \dots, D_q that constitutes a decreasing series. The correlation dimension D_c is equal to D_2 , and the correlation integrals of triplets, quadruplets ... and n -tuplets provide D_3, D_4, \dots [Hentschel and Procaccia, 1983]. In the example shown in Figure 2, the generalized dimensions are found to be about equal (see also Table 2, $L=55$ meters), emphasizing that fracture barycenters seem to be monofractal. A more detailed discussion about the mono or multifractal nature of the Hornelen fracture network will be given in a next section.

Note that the previous results are valid whatever the point used to define fracture location (barycenter, fracture tips or any point taken at random in the fracture line) [Bour, 1997]. The reason comes from the fact that the derivation of two-point correlation dimension is statistically dominated by the numerous small fractures, for which the error in the determination of the precise spatial location is relatively insignificant. For the same reason, we also found that censoring effects (fractures that intersect the system boundaries), that have to be explicitly taking into account when deriving the length-distribution model [Pickering et al., 1995], did not affect the derivation of the fractal dimension.

Length distribution

The main problem arising when assessing a model of length distribution comes from truncating and censoring effects [Laslett, 1982; Pickering et al., 1995; Clark et al., 1999]. Truncating effects result from the scale of resolution which limits the observation of fractures to the ones that are greater than a given length. Below this resolution length, the proportion of fractures not detected depends on their length in some unknown function. As a consequence, any power-law model of length distribution will be limited by a lower cutoff.

A few procedures have been proposed to correct the measurements for censoring effects [Pickering et al., 1995;

Ouillon et al., 1996b; Clark et al., 1999]. Here we used a procedure derived from a previous work by Laslett [1982] which consists of estimating the probability of occurrence of a fracture of length l depending on the size of the window of observation, L [Bour and Davy, 1999]. The data corrected for finite-size effects can be fitted by a power law over about 1 to 1.5 decades with an exponent of about 2.8 in the example shown in Figure 3. The uncertainty in the exponent is strongly dependent on the scale range chosen to perform the fit. We estimate the uncertainty to be about 0.3-0.5 depending on the number of fractures.

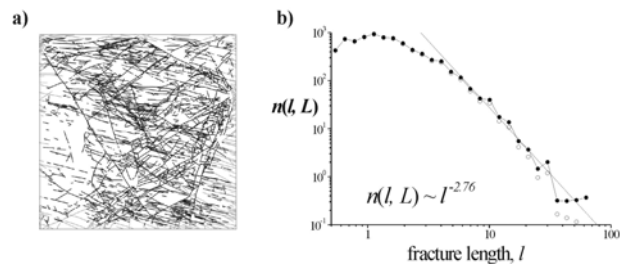


Figure 3. Density length distribution of the fracture pattern having a size $L=90$ meters. a) Fracture pattern. Fractures which intersect the boundaries and whose real length are not known are not taking into account in the calculations of the density length distribution (such fractures are represented in gray). By doing so, the corrections for censoring effects are simplified since the probability of a fracture to lie entirely in the system depends mainly on its length and on the system size [see Bour and Davy, 1999]. b) Density length distribution. Measurements corrected from censoring effects are in solid symbols while non-corrected measurements are in open symbols. Due to the truncation effects, the length distribution follows a power-law only for length larger than 5 meters. The solid straight line corresponds to a power-law regression for l ranging between 5 to 65 meters with $a=2.76$.

Comparison between maps

Table 2 summarizes the results obtained from the different maps of the Hornelen basin. We found very similar results for the different exponents that characterize the fracture networks. For the five smallest maps (L ranging from 18 to 180 meters), the generalized dimensions are similar, with a dimension of about 1.8. No significant variations with system size is detectable. With respect to the calculated uncertainties, it may be concluded that the system is monofractal since all generalized dimensions are about equal. However, taking into account the difficulty of deriving precisely the capacity dimension D_0 , we cannot exclude the possibility of a slight multifractal component in the fracture scaling pattern.

For the largest map ($L=720$ m), the dimensions D_q are larger than for other maps. But even the correlation dimensions are not very well defined, with a local logarithmic slope that systematically decreases with increasing r (Figure 5c). This systematic decrease make the determination of fractal dimensions extremely dependent on the choice of a scale range. At small scales, that is between 8 and 30 m, the apparent dimension D_2 is about 2; between 30 and 200 m, it is about 1.85. Note that we cannot invoke a physical change of the fracturing regime to explain this variation since the small-scale value is inconsistent with the one measured on other maps that also sample the same scale range (fig. 5a). A possible explanation is that the lines drawn from this large-scale map do not represent fractures but fracture zones. The correlation measured by the fractal dimension may thus have a

different physical meaning than for other maps. Another possible explanation is that the sampling procedure itself may alter correlation at small scales [Darcel *et al.*, in preparation]. The fact that such effect (a higher dimension at small scale) can be observed in all maps derived from aerial photographs, in a lesser measure however, seems to corroborate this statistical explanation.

The exponent of the power-law length distribution, a , varies from 2.5 up to 3.0 depending on the fracture network. With exponents a and D_c measured, it is possible to deduce the density term α from equation 1 for each fracture map. We find α varying from 2.8 to 8.3, which corresponds to a relatively low variability knowing that a small variation of a leads to a large variation of α (Table 2). Since close values of α , a , and D_c , are found for all fracture maps, it seems reasonable to look for a unique distribution law, such as in eq. 1, for the whole fracture network. This issue is addressed in the next section where we discuss the methods for normalizing the different data sets.

Table 2 : Values of the measured parameters for the different fracture networks. L size of the system (meters) ; D_0 capacity dimension ; D_c two-point correlation dimension ; D_3 three-point correlation dimension ; D_4 four-point correlation dimension ; a exponent of the power-law length distribution ; α fracture density term (calculated through equation 1 and using the table of values of D_c) ; α' fracture density term (calculated through equation 1 with $D_c=1.8$ for all fracture patterns). Uncertainties are mainly due to the choice of the scale range used to perform fit.

L	D_0	D_c	D_3	D_4	a	α	α'
18	1.80±0.1	1.78±0.02	1.76±0.03	1.76±0.05	2.73	3.94	3.72
55	1.77±0.08	1.77±0.02	1.75±0.03	1.74±0.03	2.66	3.73	3.31
90	1.80±0.05	1.77±0.02	1.74±0.03	1.73±0.05	2.53	2.80	2.45
90	1.80±0.1	1.80±0.04	1.79±0.04	1.79±0.05	2.76	4.50	4.50
180	1.82±0.1	1.82±0.04	1.80±0.03	1.79±0.03	2.74	3.75	4.16
360	1.85±0.1	1.82±0.05	1.82±0.05	1.82±0.05	3.00	8.27	9.30
720	1.88±0.1	1.87±0.1	1.87±0.10	1.84±0.10	2.85	3.96	6.28

Scale normalization

The question we address in this section is how to combine the measurements made on the different maps to check the relevance of a global statistical model for all fracture maps. We discuss the scale dependency of the measured parameters and the correct normalization that makes possible comparison between maps. Problems arise for parameters that depend on the resolution scale of maps, because the scale varies from map to map. For instance, the total number of fractures, the number of fractures smaller than a certain length, or the average distance between fractures are dependent on the resolution scale. Other parameters, like the cumulative number of fractures larger than a given length, depend only on the system size. For these parameters, the scaling with the system size L should be related to the statistical model of fracture distribution. Equation 4 is an example of such scaling normalization that relates the average distance between fractures to the system size and to the number of fractures. In the following paragraphs, ε refers to the resolution scale of maps, and L the typical length scale of the sampled domain.

Fractal dimension

According to equation 4, the number of fractures having a length between l and $l+dl$, that is $N(l,L)$ shown in Figure 2b, should only depend on the ratio $d(l)/L$. In Figure 4, we plot $N(l,L)$ as a function of the normalized fracture distance $d(l)/L$. The data collected from all maps string together along a single power law of exponent -1.8 ± 0.1 . The fit is good even for fractures clearly below the resolution scale of maps for which the number is underestimated. The reason being that, if equation 4 is valid for a network, it remains valid for any subset as long as the subset remains fractal. In that case, the underestimation of the element number is compensated for by an increase of the average distance in a way that follows equation 4. Note that an implicit condition for a subset to remain fractal is that the undersampling has no systematic bias (i.e. is made at random). We assume that this condition was fulfilled when mapping fracture patterns. In the following paragraph, we propose a normalization of the two-point correlation function that allows a much more precise scaling comparison between maps.

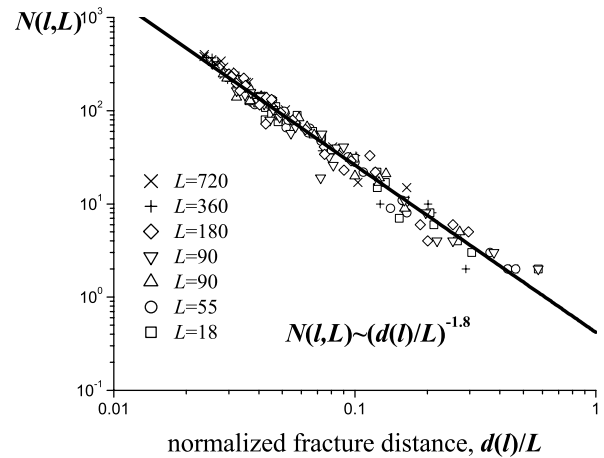


Figure 4. Computations of $N(l,L)$ as a function of the ratio $d(l)/L$ for all fracture patterns (squares : $L=18$ m., circles : $L=55$ m., up triangles : $L=90$ m., down triangles : $L=90$ m., diamonds : $L=180$ m., horizontal crosses : $L=360$ m., diagonal crosses : $L=720$ m.). $N(l,L)$ is fitted for all fracture patterns by $N(l,L) \approx (d(l)/L)^{-D_0}$ (thick solid straight line) with $D_0=1.8\pm 0.1$.

The correlation integral measure is based on the number of pairs of elements, $N_p(r)$ whose distance is less than r . This measure is clearly dependent on the total number of sampled points, and thus on the resolution scale ε of the map and on the system size L . In contrast, the function $C_2(r/L) = 2N_p(r/L)/(N(N-1))$ is independent of both ε and L at least in the range of scales where fractures are correctly sampled, that is for $r > \varepsilon$. This assessment has been verified numerically by varying both ε and L on one fracture map. Changing ε affects C_2 only for $r < \varepsilon$, and the normalization by $N(N-1)$ and r/L makes C_2 independent of the system size (this is obvious for $r=L$ since $C_2(1)=1$ whatever L). If D_c is identical for all maps, the measures $C_2(r/L)$ should scale with a single power law with an exponent D_c . In Figure 5b, we compare $C_2(r/L)$ for the different fracture maps. We observe that the different curves are mapped onto a single curve and are thus indistinguishable if $r > L/20$. Even finite-size effects, when r goes to L , are similar. For a scale range corresponding

to $L/20 < r < L/5$, the best fit for all fracture maps gives D_c of about 1.8 (Figure 5b) with an accuracy of about 0.04. The accuracy of the fit may be also appreciated from the local logarithmic slope drawn on the Figure 5c. For the four smallest maps ($L=18$ to $L=90$), the fit even appears valid from $L/200$ to $L/5$, which represents more than one order of magnitude for each map, and almost 3 orders of magnitude if the 4 maps are combined.

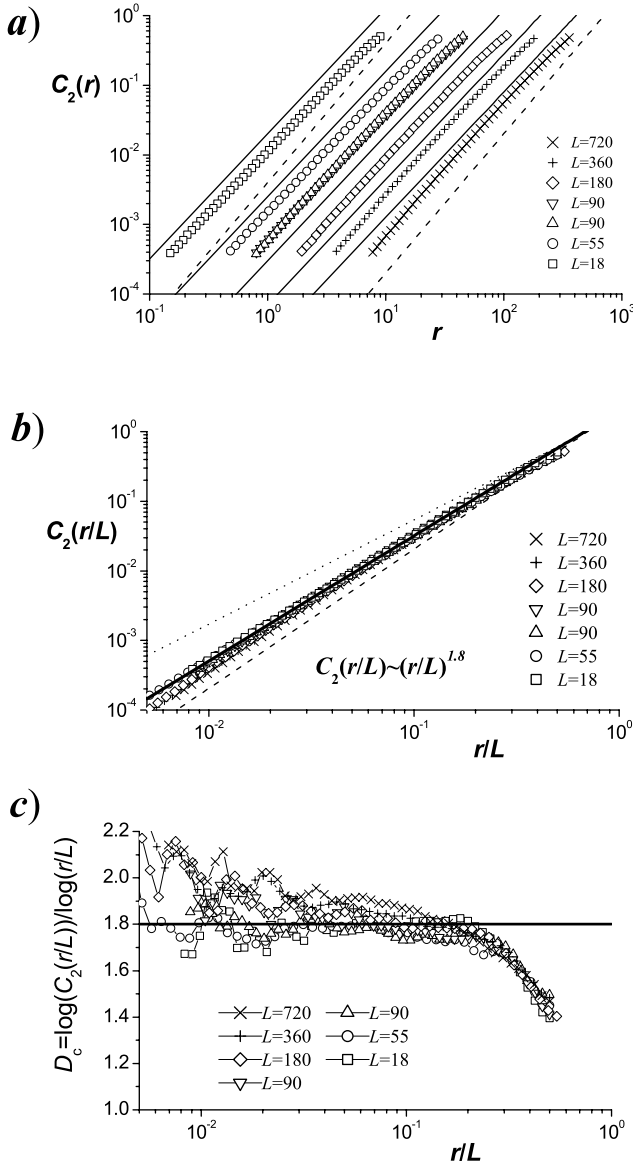


Figure 5. Computations of the two-point correlation functions for all fracture maps (squares : $L=18$ m., circles : $L=55$ m., up triangles : $L=90$ m., down triangles : $L=90$ m., diamonds : $L=180$ m., horizontal crosses : $L=360$ m., diagonal crosses : $L=720$ m.). a) Computations of the non normalized two-point correlation function, $C_2(r)$, as a function of r . Solid and dashed lines correspond respectively to $C_2(r) \approx (r)^{1.8}$ and $C_2(r) \approx (r)^{2.0}$. b) Computations of the normalized two-point correlation functions $C_2(r/L)$ as a function of r/L . $C_2(r/L)$ is fitted for all fracture patterns by $C_2(r/L) \approx (r/L)^{D_c}$ (thick solid straight line) with $D_c=1.8$. Dashed and dotted line correspond respectively to $C_2(r/L) \approx (r/L)^2$ and $C_2(r/L) \approx (r/L)^{1.5}$. c) Variations of the apparent logarithmic slope $d(\log C_2(r/L))/d(\log(r/L))$ for the different fracture patterns.

From the previous results, it seems that a representative value of D_c of about 1.8 can be reasonably used to describe the fractal properties of the Hornelen fracture network. Despite a larger uncertainty, we also found D_0 of about 1.8 (figure 4) with like most of all the generalized dimensions (Table 2). For notation simplicity, the fractal dimension D refers to the correlation dimension $D_c=D_2$ in the following text, knowing that the all other fractal dimensions are close or about equal to D .

Length distributions

The normalization of the length distribution is necessarily dependent on the density model that fixes the relationship between the number of fractures and the system size L . A common normalization model calculates the number of fractures per unit area [Heffer and Bevan, 1990; Yielding et al., 1992; Scholtz et al., 1993; Castaing et al., 1996; Odling, 1997]. This implicitly assumes that the density is constant whatever the observation scale. In the above paragraphs, we have shown that this assumption is not correct for the Hornelen basin, and that the density model has a fractal property with a dimension D of about 1.8. The different length distributions should then be normalized according to equation 1. In Figure 6, we plot $n(l,L)/L^D$ as a function of the fracture length l .

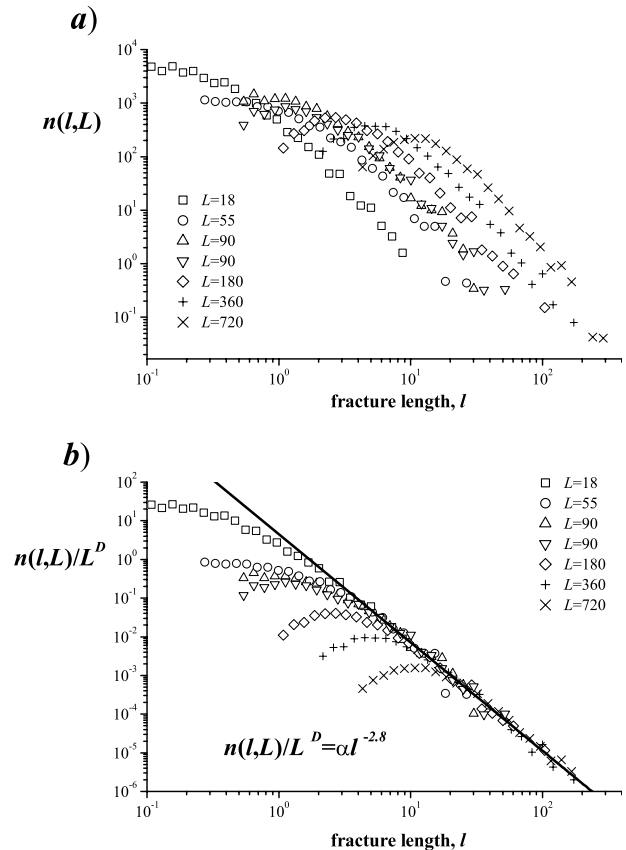


Figure 6. Density length distributions measured for the different fracture patterns (squares : $L=18$ m., circles : $L=55$ m., up triangles : $L=90$ m., down triangles : $L=90$ m., diamonds : $L=180$ m., horizontal crosses : $L=360$ m., diagonal crosses : $L=720$ m.). a) Non-normalized density length distributions. b) Normalized density length distribution : the solid straight line corresponds to a power-law regression for l ranging between 2 to 200 meters with $a=2.8$.

Except for lengths below the resolution scales, data all map onto a single power law characterized by an exponent $-a$, with a about 2.8. This scaling law is valid over more than two decades. The fractal density term (α in equation 1) is equal to about 4.5. According to the different measurements, it seems that the model presented in equation 1 represents adequately the length and spatial distribution of all fracture networks with only two basic exponents and one density term.

Other validations of the statistical model

Distance between fractures

We have shown that the average distance between nearest fracture centers of the same length fracture (i.e. in the interval $[l, l+d]$) should scale as l^x , where l is the fracture length and x , an exponent relating the length exponent a and the fractal dimension D_0 by :

$$x=(a-1)/D_0. \quad (5)$$

The average distance between fractures having the same length, $d(l)$, may be easily calculated for the different maps. It is independent of the scale resolution and of the system size, as long as all fractures of that length are sampled. A direct comparison of the curves $d(l)$ for the different maps is thus meaningful. We present the results in Figure 7 which show that d scales about linearly with l if we restrict the analysis to the lengths larger than the map resolution scales. A value slightly larger or smaller than $x=1$ is inconsistent with the whole set of measurements (dashed and dotted line, Figure 7). $x=1$ is consistent with $a=2.8$ and $D_0=1.8$, the values derived from independent analyses, and implies the self-similarity of the Hornelen fracture network (see also the last section).

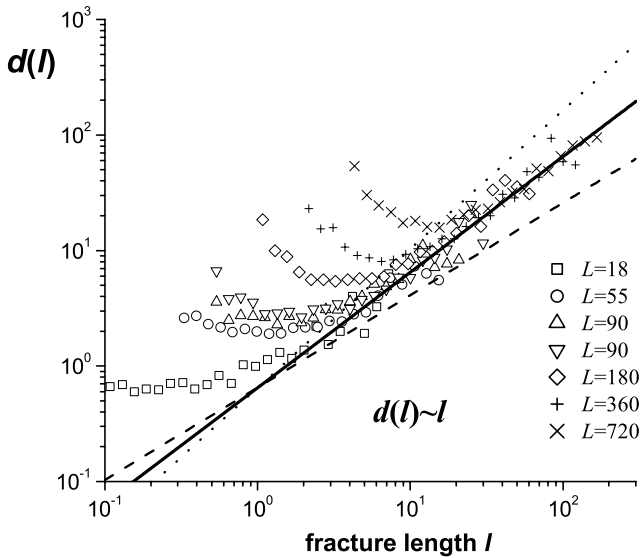


Figure 7. Distance distributions measured for the different fracture patterns (squares : $L=18$ m., circles : $L=55$ m., up triangles : $L=90$ m., down triangles : $L=90$ m., diamonds : $L=180$ m., horizontal crosses : $L=360$ m., diagonal crosses : $L=720$ m.). For each fracture pattern, the average distance between fractures having the same length, $d(l)$ is calculated and plotted versus the fracture length l . The solid straight line corresponds to a power-law model so that $d(l) \sim l^x$ with $x=1$. The dashed and dotted line correspond to power-law models with $x=0.8$ and 1.2 .

Limited observation of fracture lengths

To complete this analysis, we propose a procedure which is both a validation test of the power-law model through scale, and a way to derive the exponent a and the parameter α even when only a small part of the length distribution is correctly represented. The derivation of the exponent a is indeed a tricky exercise when dealing with scarce natural data. We know that censoring and truncation effects limits the range of length on which a power-law fit can be applied [Pickering et al., 1995; Clark et al., 1999]; but generally we do not know how much this limitation affects the derived exponent. The approach proposed here assumes that the density of fractures is correctly measured for only a given fracture length l_c . Given the difficulty of mapping detailed fracture networks, this corresponds to most of the sampling conditions for which the fracture length distribution is systematically curved when plotted on a bi-logarithmic graph due to large censoring and truncation effects, making impossible a reliable determination of the power-law length exponent.

If the fracture set is complete for fractures of length around l_c , it is possible to calculate the fracture length density $n(l_c, L) = N(l_c)/dl$ where $N(l_c)$ is the number of observed fractures whose length is in the range $[l_c, l_c+d]$. If the equation (1) is valid, a and α are related to $n(l_c, L)$ by :

$$\log(\alpha) = a \log(l_c) + \log(n(l_c, L)/L^D). \quad (6)$$

In the space $(a, \log(\alpha))$, (6) is the equation of a straight line whose slope is equal to $\log(l_c)$. The straight line gives the ensemble of solutions compatible with the measure $n(l_c, L)$. With different maps at different scales, we restrict the range of possible values of a and α . In practice, we draw different straight lines corresponding to (6) for different maps, these should all intersect in one point of the domain $(a, \log(\alpha))$ if the statistical model is valid through all scales.

We apply the method to the Hornelen data set for different values of l_c (Figure 8). Assuming $D=1.8$ and l_c systematically equal to 6% of the system sizes, all straight lines except one intersect on a unique point, defining precisely $a=2.75 \pm 0.05$ and $\alpha=3.5 \pm 0.5$. The method gives a much better accuracy than the normalized length distribution shown in Figure 6. The only curve that does not intersect the other ones is for the smallest system with $L=18$ meters for which the ratio $n(l_c, L)/L^D$ is relatively small. Odling [1997] argues that 1 m, that is the value chosen for l_c , is a possible physical limit to the power-law behavior for this fracture system. Reassigning l_c equal to 2 m (dashed line in fig.8) gives a line that is perfectly consistent with the others.

The choice of the relevant scale l_c remains the main difficulty in applying this method. In Figure 8b, we show a similar analysis with a larger value l_c of 10% of the system size. The straight lines do not intersect in a single point as in Figure 8a, but on a larger domain. The uncertainty on a is about 0.3 resulting from the small number of fractures, and to possible censoring effects. Similar poor results are obtained if l_c is too small. For instance, if $l_c=2\%$ of the system size, the uncertainty on a is still about 0.3, and is much larger than for $l_c=6\%$ of the system size. Thus, a trial and error approach may be used to determine the optimal values of l_c . This method validates the assumption that a unique statistical model may describe the fracture networks at all scales, because all curves intersect at a single value of a and α .

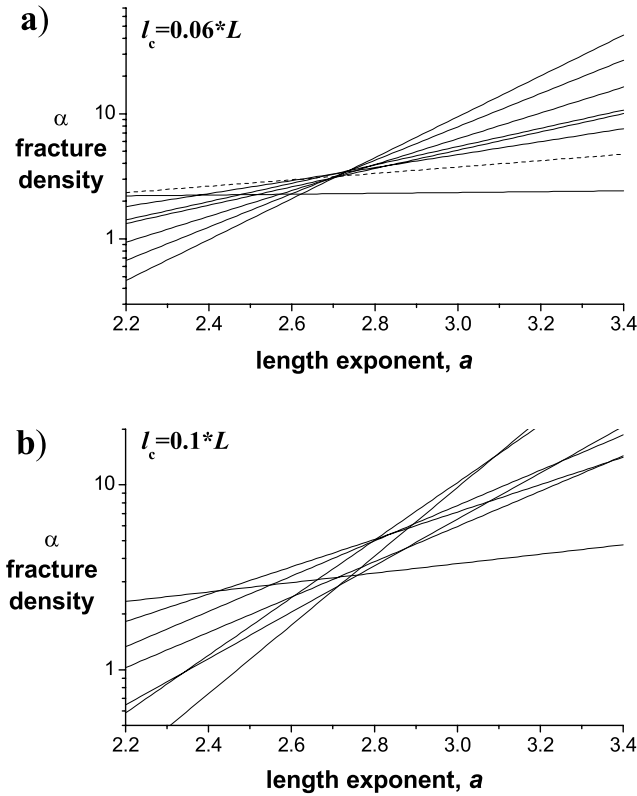


Figure 8. Plot of equation 6 for all fracture patterns using different values of l_c : a) $l_c=0.06L$, b) $l_c=0.1L$. The dashed line in Figure 8a corresponds to the smallest map ($L=18$ m) with $l_c=2$ m. The higher is the slope of the straight line, the larger is the size L of the map.

Discussion and conclusions

We have proposed and tested a first-order model of the geometry of natural fracture networks, that provides the average number of fractures of a given length at a given scale. This model involves three parameters: the exponent a of a power-law length distribution, the fractal dimension D which fixes the scale-dependence of the number of fractures and the fracture density α . We verify the applicability of this model on seven fracture patterns mapped from the metric scale up to almost the kilometric scale in the Hornelen basin. The model is found to efficiently describe the fracture-network properties at all scales with a single set of parameters, $a=2.75$, $D=1.8$ and $\alpha=3.5$.

The previous analysis of the data from Hornelen [Odling, 1997] normalized the length distribution with respect to the area of the sample L^2 (equivalent to assuming a fractal dimension of 2.0), and used the cumulative rather than the density length distributions. The individual length distributions were also corrected for censoring effects using a different method (the Kaplan-Meier method, see Odling [1997]). Although the normalization scheme used in Odling [1997] did not take into account the fractal nature of the system, this initial treatment appears to be internally consistent as the corrected normalized distributions lie along the same trend. The exponent derived from this initial analysis is equivalent to an exponent a of 3.1. This compares fairly well with the derived exponent a of 2.75 from the analysis in the present paper. The difference in values of a are mainly a result of the different normalization schemes used. Although

these two exponents are fairly close, they could, if used to predict behavior over a wide range of scales, lead to different conclusions about fracture density and fracture connectivity. These two approaches to analyzing the data elegantly illustrate the difficulty in quantifying scaling behavior of natural systems which requires an analysis of both the length and spatial distributions.

Once validated, such a geometrical model can be used to derive the scaling of some properties of the fracture network, such as fracture density and fracture connectivity [Bour and Davy, 1997; 1998; Berkowitz et al., 2000]. For instance, one can predict from equation 1 the evolution with scale of the number of fractures, $N(L)$, or of the cumulative length of fractures, $M(L)$ included in a system of size L . Indeed, $N(L)$ is given by

$$N(L) = \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} n(l, L) dl = \alpha \frac{L^D (l_{\min}^{-a+1} - l_{\max}^{-a+1})}{a-1}, \quad (7)$$

where l_{\min} and l_{\max} are respectively the smallest and the largest fracture contained in the system. For $a > 1$, the upper bound of the integral can be neglected so that $N(L)$ only depends on L and l_{\min} . Similar scaling have been determined experimentally by Castaing et al [1996] and by Odling [1997] who measured the variations with the system size or with the observation height, of the apparent fracture density per unit area. For instance, using the results of Odling [1997], we obtain a scaling for the normalized apparent density ($M(L)/L^2$) such as $M(L)/L^2 \sim L^{-0.86}$. This result is close to the one expected from equation 7 with $a=D+1$ which predicts $M(L)/L^2 \sim L^{-1}$ when l_{\min} is fixed to a given percentage of the system size. To verify the latter result on the different fracture maps, one must take care of the non-trivial variation of l_{\min} with L , the sample size, and of truncation effects which limit the range of length over which equation 1 is valid. For these reasons, we compute $N(L)$ and $M(L)$ only for fractures having a length larger than a length l_c fixed to a certain percentage of the map size. Here, we fixed $l_c=6\%$ in agreement with results obtained previously. Equation (7) then predicts that $N(L)$ and $M(L)$ vary with L as L^{-a+D+1} and L^{-a+D+2} , respectively. Indeed, we obtained $N(L) \sim L^0$ and $M(L) \sim L^1$ in agreement with derived values of a and D (Figure 9).

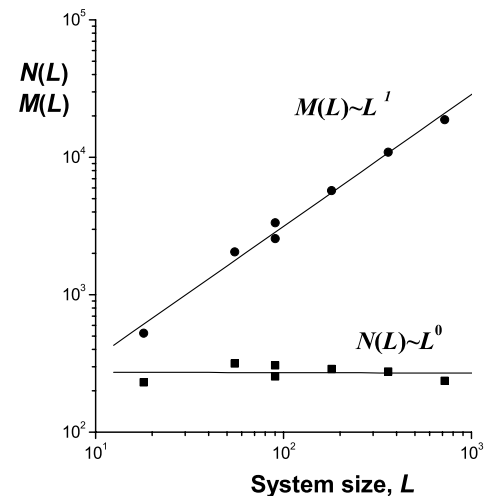


Figure 9. Scaling with L of $N(L)$ (squares) and of $M(L)$ (circles). $N(L)$ is the total number of fractures included in the system of size L and having a length larger than $l_c=L/15$. $M(L)$ is the total cumulative length of fractures having a length larger than $l_c=L/15$ which are included in the system of size L .

The fact that $a \approx D+1$ implies that the fracture network of the Hornelen basin is almost self-similar. Self-similar systems are defined as systems which are statistically similar at all scales so that a part of the system will look the same as the whole system once rescaled in length. For fracture networks following a large length distribution, it necessarily implies that both the spatial and length distributions are following scaling laws but also that the exponents of these scaling laws should be related through $a=D+1$. For $a \neq D+1$, the number of elements larger than αL , with α an arbitrary constant, depends on the system size L (equation 7) so that the system cannot look the same at all scales. Such a relationship ($a=D+1$) is verified for our fracture data sets, but also for the fragmentation model of *Turcotte* [1986].

From a methodological point of view, we present different methods for deriving the basic exponents a and D , and for verifying the consistency of the model. Note that despite the large number of fractures in each map (more than 2000), the box-counting method is found to be so sensitive to finite-size effects that the fractal dimension cannot be derived through this method. The two-point correlation function appears much more suitable for demonstrating the presence of fractal scaling for fracture patterns certainly because of the stochastic nature of such objects [*Vicsek*, 1992]. The main methodological issue concerns the normalization of statistical measures to make possible the inter-comparison between maps at different scales. The fractal dimension D_0 can be derived from the relationship between the number of fractures of a given length, and the average of the distances between nearest fracture centers (Figure 4). The normalized correlation integral $C_2(r/L)$ gives an accurate determination of the correlation dimension (Figure 5). The length distribution normalized by the fractal density L^D gives a power-law fit over several decades (Figure 6). Finally we proposed a new method to test the consistency of the statistical model over scales, and to determine accurately the length exponent a and the density term α (Figure 8).

To conclude, it should be pointed out that the model presented here is a first-order model that provides only the characterization of the number of fractures of a given length and at a given scale. This model can be also extended to predict the number of fractures of a given throw (or aperture) at a given scale if the throw (or aperture) distribution is known. The application of the model to one or three dimensional systems is straightforward. It can also be easily improved to incorporate the orientation distribution. However, possible correlation between the different geometrical parameters are not described through this model. An extended model which takes account of the observed correlation between local fracture density and fracture length [*Ackermann and Schlische*, 1997; *Bour and Davy*, 1999] will be presented in a future work.

Acknowledgements

We are grateful to Bill Belfield, Dave Sanderson and Patience Cowie for their constructive reviews which improved the quality of the manuscript. We also wish to thank the French CNRS and the European Community (contract SCALFRAC ENV4-CT97-0456 and contract SALTRANS EVKI-CT-2000-00062) for their financial support.

Notation

l	Fracture length.
$n(l,L)$	Density length distribution ($n(l,L)=N(l,L)/dl$).
$N(l,L)$	Frequency length distribution.
a	Exponent of the density length distribution.
α	Scale-invariant fracture density.
D	Fractal dimension.
D_0	Capacity dimension.
D_M	Mass dimension.
D_c	Correlation dimension.
L	Size of a sub-system of the fracture network.
Λ	Size of the whole system embedding the fracture network.
$d(l)$	Average distance between centers of fractures having the same length.
x	Exponent of the distance distribution $d(l)$.
N	Total number of fractures in the whole system of size Λ .

References

- Ackermann, R. V., and R. W. Schlische, Anticustering of small normal faults around larger faults, *Geology*, 25(12), 1127-1130, 1997.
- Acuna, J.A. and Yortsos, Y.C., Application of fractal geometry to the study of networks of fractures and their pressure transient, *Water Resour. Res.*, 31, 527-540, 1995.
- Allègre, C.J., J. L. Lemouel and A. Provost, Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake prediction, *Nature*, 297, 47-49, 1982.
- Barton, C. C. and E. Larsen, Fractal geometry of two-dimensional fracture networks at Yucca Mountain, southwestern Nevada. In *Proceedings of the International Symposium on Fundamentals of Rock Joints*, ed. O. Stephansson, pp. 77-84, Bjorkliden, Sweden, 1985.
- Berkowitz B., O. Bour, P. Davy and N. Odling, Scaling of fracture connectivity in geological formations, *Geophys. Res. Lett.*, 27(14), 2061-2064, 2000.
- Bonnet, E., O. Bour, N.E. Odling, P. Davy, I. Main, P. Cowie and B. Berkowitz, Scaling of Fracture Systems in Geological Media, *Reviews of Geophysics*, 39(3), 347-383, 2001.
- Bour, O., Transferts de fluides dans les milieux fracturés : effets d'échelle, *PhD. Thesis published in Mémoires de Géosciences Rennes n° 80*, Rennes, 288 p., 1997.
- Bour, O., and P. Davy, Connectivity of random fault networks following a power-law fault length distribution, *Water Resour. Res.*, 33(7), 1567-1583, 1997.
- Bour O., P. Davy, On the connectivity of three-dimensional fault networks, *Water Resour. Res.*, 34(10), 2611-2622, 1998.
- Bour O. and P. Davy, Clustering and size distribution of fault patterns: theory and measurements. *Geophys. Res. Lett.*, 26, 2001-2004, 1999.
- Castaing C., M.A. Halawani, F. Gervais, J.P. Chiles, A. Genter, B. Bourguin, G. Ouillon, J.M. Brosse, P. Martin, A. Genna, and D. Janjou, Scaling relationships in intraplate fracture systems related to Red Sea Rifting, *Tectonophysics*, 261, 291-314, 1996.
- Childs, C., J.J. Walsh, and J. Watterson, A method for estimation of the density of fault displacements below the limits of seismic resolution in reservoir formations, in *North Sea Oil and Gas reservoirs, II*, edited by A.T. Buller et al, pp. 309-318, Norw. Inst. of Technol., Graham and Trotman, London, 1990.
- Clark, R. M., S. J. D., Cox, and G. M. Laslett, Generalizations of power-law distributions applicable to sampled fault-trace length: model choice, parameter estimation and caveats, *Geophys. J. Int.*, 136, 357-372, 1999.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette, Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, *Nature*, 348, 56-58, 1990.
- Davy, P., On the frequency-length distribution of the San Andreas fault system, *J. Geophys. Res.*, 98, 12,141-12,151, 1993.
- Feder, J., *Fractals*, Plenum, New-York, pp.283, 1988.
- Gautier, B. D. M., and S. D. Lake, Probabilistic modeling of faults below the limit of seismic resolution in Pelican Field, North Sea,

- Offshore United Kingdom, *Am. Ass. Petr. Geol. Bull.*, 77, 761-777, 1993.
- Gudmunsson, A., Geometry, formation and development of tectonic fractures on the Reykjanes Peninsula, southwest Iceland, *Tectonophysics*, 139, 295-308, 1987.
- Hamburger, D., O. Biham, and D. Avnir, Apparent fractality emerging from models of random distributions, *Phys. Rev. E*, 53, 3342-3458, 1996.
- Heffer K.J., and T.G. Bevan, Scaling relationships in natural fractures: data, theory, and application. In *Proc. 2nd European Petroleum Conference*, pp. 367-376, Society of Petroleum Engineers, 367-376, reprint N° 20981, 1990.
- Hentschel, H.G.E., and I. Proccacia, The infinite number of generalised dimensions of fractals and strange attractors, *Physica 8D*, 435-444, 1983.
- Hirata, T., Fractal dimension of fault systems in Japan: fractal structure in rock fracture geometry at various scales, *Pure Appl. Geophys.*, 121, 157-170, 1989.
- King, G., The accommodation of large strains in the upper lithosphere of the earth and other solids by self-similar fault-system, *Pageoph*, 12, 761-815, 1983.
- LaPointe, P.R., A method to characterise fracture density and connectivity through fractal geometry, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech.*, 25, 421-429, 1988.
- Laslett, G. M., Censoring and edge effects in areal and line transect sampling of rock joint traces, *Math. Geol.*, 14(2), 125-140, 1982.
- Main, I.G., P.G. Meredith, P.R. Sammonds, and C. Jones, Influence of fractal flaw distributions on rock deformation in the brittle field, in *Deformation mechanisms, Rheology and tectonics*, edited by R.J. Knipe and E.H. Rutter, *Geol. Spec. Publ.*, 54, 71-79, Geol. Soc. of London, 1990.
- Mandelbrot, B.B., The fractal geometry of Nature, 468 p., *W.H. Freeman*, New York, 1982.
- Marrett, R. and R. Allmendinger, Estimates of strain due to brittle faulting: sampling of fault populations. *J. Struct. Geol.*, 13, 735-738, 1991.
- Odling, N.E., Network properties of a two dimensional fracture pattern, *Pageoph*, 138(1), 95-114, 1992.
- Odling, N.E., Scaling and Connectivity of joint systems in sandstones from western Norway. *J. Struct. Geol.*, 19, 10, 1257-1271, 1997.
- Odling N.E., P.A. Gillespie, B. Bourgine, C. Castaing, J.P. Chiles, N.P. Christensen, E. Fillion, A. Genter, C. Olsen, L. Thrane, R. Trice, E. Aarseth, J. Walsh and J.J. Watterson, Variations in fracture system geometry and their implications for fluid flow in fractured hydrocarbon reservoirs, *Petroleum Geosciences*, 5, 373-384, 1999.
- Odling, N.E., The scaling of hydraulic conductivity in rock fracture zones, *Geophys. Res. Lett.*, 28(15), 3019-3022, 2001.
- Okubo, P.G., and K. Aki, Fractal geometry in the San Andreas fault system, *J. Geophys. Res.*, 92, 345-355, 1987.
- Ouillon, G., C. Castaing, and D. Sornette, Hierarchical geometry of faulting, *J. Geophys. Res.*, 101, 5477-5487, 1996a.
- Ouillon, G., D. Sornette, A. Genter and C. Castaing, The imaginary part of rock jointing, *J. Physics I France*, 6, 1127-1139, 1996b.
- Ouillon, G., and D. Sornette, Unbiased multifractal analysis : application to fault patterns, *Geophys. Res. Lett.*, 23, 23, 3409-3412, 1996.
- Pickering, G., J. M. Bull, and D. J. Sanderson, Sampling power-law distributions, *Tectonophysics*, 248, 1-20, 1995.
- Ross, B., Dispersion in fractal fracture networks, *Water Resour. Res.*, 22, 5, 823-827, 1986.
- Scholz, C.H., and P. A. Cowie, Determination of total strain from faulting using slip measurements, *Nature*, 346, 837-839, 1990.
- Scholz C.H., N.H. Dawers, J.Z. Yu, M.H. Anders, and P.A. Cowie, Fault growth and fault scaling laws : Preliminary results, *J. Geophys. Res.*, 98, 21951-21961, 1993.
- Segall, P., and D. D. Pollard, Joint formation in granitic rock of the Sierra Nevada, *Geol. Soc. Am. Bull.*, 94, 563-575, 1983.
- Sornette, A., P. Davy, and D. Sornette, Fault growth in brittle-ductile experiments and the mechanics of continental collisions. *J. Geophys. Res.*, 98, 12111-12139, 1993.
- Turcotte, D.L., A fractal model for crustal deformation, *Tectonophysics*, 132, 261-269, 1986.
- Vicsek, T., *Fractal Growth Phenomena*, 488 pp., World Scientific, London, 1992.
- Villemin, T., and C. Sunwoo, Distribution logarithmique des rejets et longueurs de failles: Exemple du bassin houiller lorrain, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 305, 1309-1312, 1987.
- Walsh, J.J., and J. Watterson, Fractal analysis of fracture pattern using the standard box-counting technique: valid and invalid methodologies. *J. Struct. Geol.*, 15, 1509-1512, 1993.
- Yielding G., J.J. Walsh, and J. Watterson, The prediction of small scale faulting in reservoirs, *First Break*, N°10, 449-460, 1992.

**ANNEXE 3: A CATACLASTIC SLIP BAND
DISTRIBUTION IN NORMAL FAULT DAMAGE
ZONE, NUBIAN SANDSTONES, SUEZ RIFT**

Journal of Geophysical Research, *accepted*.

**Cataclastic slip band distribution in normal fault damage zones,
Nubian sandstones, Suez Rift**

X. Du Bernard¹ and P. Labaume

Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique (UMR 5559), BP 53X, 38041 Grenoble
cedex 9, France.

e-mail: Xavier.Du-Bernard@obs.ujf-grenoble.fr

C. Darcel, P. Davy and O. Bour,

Géosciences Rennes (UMR6118), Campus de Beaulieu (Bat15), 35042 Rennes cedex, France.

e-mail: cdarcel@univ-rennes1.fr

¹ Now at: Department of Geological and Environmental Sciences, Stanford University, Stanford, CA 94305-2115, U.S.A. e-mail:

xduberna@pangea.Stanford.EDU

Abstract

In this paper, we characterize the geometry of damage zones that form around the main slip planes of normal faults. Specifically, we examine five faults of varying throws that affect the Nubian sandstones along the Suez rift. To quantify the density of cataclastic slip bands (CSBs) associated with the main slip plane, we recorded the position of all visible CSBs along a scan-line perpendicular to the fault through to the damage zone. For each outcrop, the scan-line record is approximately 30 m long. Resulting density diagrams display concentrations of CSBs, and clearly indicate a widening of the damage zone with increasing throw. A correlation integral was calculated for each CSB population in order to analyze both the scaling property of the density distribution and potential correlation lengths. From centimeter- to meter-scale, representing two orders of magnitude, the correlation integral appears adequately modeled by a power law, emphasizing the fractal property for the CSB distribution. For the five faults, the calculated correlation dimension is constant within its error of determination, $D_c = 0.87 \pm 0.05$. The validity range of the fractal nature was derived from an adequate normalization of the correlation integral, and from a comparison with synthetic fractal fracture networks. It appears that a finite correlation length corresponding to the damage zone width is detectable for meter-scale throws; for larger throws, the correlation length is not detectable within the sampling domain.

1 Introduction

Many structural objects (fractures, veins, stylolites, etc...) constitute a zone of deformed rock around the main slip plane of a fault. This zone is defined as a "damage zone" [Jamison and Stearns, 1982; Chester and Logan, 1987; McGrath and Davison, 1995; Beach *et al.*, 1999] and is considered to be caused by either fault propagation, linkage or displacement along the fault [Peacock *et al.*, 2000]. Studying the structure of damage zones is important for understanding processes of fault growth, i.e. the modes of localization and propagation of rupture. An important application is to better constrain the geometry and evolution of fluid pathways around faults.

Studies of the damage zone are thereby common and have often focused on the geometrical aspect of the zone by providing structural maps, detailed cross-sections and micro-structural analyses of deformation mechanisms [Jamison and Stearns, 1982; Chester *et al.*, 1993; Antonellini and Aydin, 1994; McGrath and Davison, 1995; Schulz and Evans, 1998]. For the typical case of porous sandstones, the currently accepted model of the damage zone growth is based on the sequential development of cataclastic slip bands (CSBs) until the creation of a slip surface [Aydin and Johnson, 1978; Aydin and Johnson, 1983, Underhill and Woodcock, 1997] and it is supported by recent laboratory experiments [Mair *et al.*, 2000]. However, the field descriptions to date insufficiently describe the structure (size, organization) of the damage zone. Therefore, more quantitative analyses were performed to define in particular the width of the damage zone in respect to the displacement [Knott *et al.*, 1996; Beach *et al.*, 1997; Beach *et al.*, 1999; Fossen and Hesthammer, 2000]. By calculating fracture density along scan-

lines perpendicular to fault strike, previous authors were able to define fractured zone within a background level. Microfracture density recorded at the thin section scale can also be used to determine the width of the damage zone [Vermilye and Scholz, 1998]. However, all the widths determined by density measurements are quite subjective and strongly depend on the chosen background level. Recently, based on detailed maps of whole faults, *Shipton and Cowie* [2001] have presented a detailed 3D analysis focusing on the distribution of the CSB clusters to better characterize the internal structure of the damage zone and its growth processes. Here, by using the correlation function, we achieve a statistical analysis for characterizing first the spatial clustering of CSB populations and secondly the correlation length of the damage zone. Our approach is original in that we analyze the correlation properties of CSB distribution in the damage zone of faults with different degrees of maturity. By selecting five faults with meter- to kilometer-scale throws resulting from the same tectonic event, we can characterize the evolution of the fault structure and its heterogeneity with time.

The correlation dimension was first used to quantify the "strangeness" of strange attractors in low-dimensional non-linear systems exhibiting dynamical chaos [Grassberger and Procaccia, 1983], but has become popular in the analysis of laboratory acoustic emissions [Hirata *et al.*, 1987], earthquake epicenters [Hirata, 1989; Hirata and Imoto, 1991; Öncel *et al.*, 1996; Eneva, 1996] as well as fault scaling relationships [Davy *et al.*, 1990; Gianquinta *et al.*, 1999, Bour and Davy, 1999]. In this paper, we analyze the correlation properties of CSB positions recorded perpendicular to the damage zone trend. To assess the finite size effects of our natural data, we compare field data sets to synthetic fractal networks. Special attention is paid to scaling properties, which are the variation of

CSB density with system scale and on the potential existence of a correlation length scale. The goal is to determine the width of the damage zone, and how this width corresponds with throw and fault evolution.

The five studied faults affect the Nubian sandstones of the Suez rift (Egypt). The study area, located on the western coast of the Sinai Peninsula (Figure 1), provides an ideal setting in which to study damage zone structure because of the remarkable outcrop quality and the extension-only tectonic history.

2 Geological setting

2.1 The Suez rift and Nubian sandstones

The Gulf of Suez is an aborted arm of the Red Sea rift between the Sinai Peninsula and Africa (Figure 1). The Suez rift is a Neogene structure approximately 300 km long and 50 to 80 km wide that resulted from extension sub-perpendicular to the gulf borders [Colletta *et al.*, 1988]. Normal faults in the area mainly strike parallel to the rift axis at N140° (the "clysmic" direction defined by [Garfunkel and Bartov, 1977]) and define the boundaries of tilted blocks. Rifting began in early Miocene times (23.5 My) [Chénet and Letouzey, 1983; Garfunkel and Bartov, 1977] and essentially stopped with the transfer of the movement onto the Aqaba arm at the end of the Langhian (15 My) [Ridcharson and Arthur, 1988; Steckler *et al.*, 1988].

The Nubian sandstones were deposited on a cratonic domain from the Cambrian to the end of the early Cretaceous, and constitute the first deposits of the pre-rift sediments. This mainly sandy unit is up to 600 m thick and corresponds essentially to

continental deposits [Schütz, 1994]. The pre-rift marine formations that cover the Nubian sandstones comprise a 500-1000 m thick Cretaceous to Eocene succession of marine deposits that is subsequently overlain by conglomerate and evaporite syn-rift series in the center of the trough.

2.2 Normal faults studied

The five normal faults studied, all resulting from the rifting process, are located on the western coast of the Sinai Peninsula between the cities of Abu Zenima to the north and El Tur to the south. In Figure 2, these faults are projected onto two schematic cross-sections located in the northern and southern parts of the study area.

To the north, the Gebel Samra Fault has a throw of about 2.5 km, making it the largest structure studied. This fault represents the eastern border fault of the Suez rift. The Gebel Hazbar and Naqb Budra faults are located outside the rift at the east of the Gebel Samra fault and have throws of 5 meters and 30 meters, respectively. To the south, the Wadi Araba fault is located in the Gebel Araba tilted block, which forms the footwall of the Araba Range Fault. It is the smallest sampled structure, with a throw of about 3 m. The Gebel Heckma fault has approximately 250 meters throw and is located in the footwall of a major normal fault situated to the north of the Wadi Araba block. All five faults are located at the border of the rift, i.e. in areas with little to no syn-rift deposition. Therefore, we assume that burial of the Nubian sandstones in question did not exceed 1500 m, which corresponds to the maximum thickness of the overlying pre-rift series.

We have analyzed deformation of the Nubian sandstones on both sides of the smaller offset Naqb Budra, Gebel Hazbar and Wadi Araba faults. The Nubian sandstones outcrop only on the footwall side in the case of the two largest faults, Gebel Samra and Gebel Heckma. The exposure conditions of the selected faults are excellent. The damage zones are exposed with only limited gaps, and outcrop quality in the desert environment makes reliable observation of all macroscopic structures possible at an equivalent precision for all outcrops.

2.3 Deformation markers in the Nubian sandstones

Shallow burial and limited diagenesis of the Nubian sandstones has resulted in a friable high-porosity material. Both optical and scanning electron (SEM) microscope observations of thin sections and sample fragments reveal weak meniscus cements of kaolinite, and our image analysis results indicate porosities of up to 20%. The deformation features are typical of porous sandstones consisting almost exclusively of cataclastic slip bands (CSBs) [Antonellini *et al.*, 1994; Aydin and Johnson, 1978; Burhannudinnur and Morley, 1997a; Fowles and Burley, 1994; Main *et al.*, 2000; Mair *et al.*, 2000]. At the outcrop scale, the CSBs appear as microfaults with a few millimeters to a decimeter of slip (Figure 3a). Microscopic observation indicates that CSBs are up to a few millimeters thick and are characterised by strong grain crushing and compaction (Figure 3b). Previous authors have shown that grain size reduction and compaction typically result in a significant drop in porosity and permeability within the CSB as compared to the host sandstone [Antonellini and Aydin, 1994; Fowles and Burley, 1994; Underhill and Woodcock, 1987] (Figure 3b). Crushing, compaction and consolidation

render the CSBs more resistant to weathering than the host rock, which also makes them relatively easy to identify and examine in exhaustive detail. Due to their sub-vertical dip, the possibility remains that some of the CSBs may have evolved from preliminary joints form in sheared zones.

All the CSBs macroscopically associated to the main slip plane qualitatively define the damage zone (Figure 4). Damage zones in the Nubian sandstones range from a few meters to a few hundreds of meters wide [Beach *et al.*, 1999]. In the case of the Wadi Araba, Gebel Hazbar, Gebel Heckma and Gebel Samra faults, Schmidt lower hemisphere stereogram representations show that CSB strikes cluster around a main direction at N140° (Figure 4), suggesting that the faults are planar in structure. The damage zone at Naqb Budra features two associated CSBs sets with different average strikes (N030° and N155°).

Fault offset is primarily concentrated along one or two slip planes but some slip is also distributed among the surrounding CSBs. In the Wadi Araba damage zone, the occurrence of pre-faulting sedimentary markers (paleosol ferruginous bands) allows for an accurate determination of the offset accommodated by each CSB. The throw on the master fault is about 80 cm, whereas all throws are millimeter to centimeter-scale on the other CSBs. By summing the throws measured on each CSB, the cumulative throw across the entire damage zone is approximately 3.2 m. Due to the massive nature of sandstone bedding adjacent to the other four faults, precise offset determinations are rarely possible in these cases. Nevertheless, general bed geometry constraints indicate that most CSB offsets outside the master fault are less than a few tens of centimeters. Thus, the total

throw across these damage zones is estimated to approximately equal that on the major faults.

3 CSB density in the damage zone

3.1 Field data acquisition

To characterize the deformation distribution in each damage zone, we systematically plotted the CSBs cut by a scan-line across the fault. The scan-line was located on a vertical, bedding-normal outcrop, and within a single sand layer so as to negate the possible effects of petrophysical differences. We recorded the position, azimuth and dip of each CSB, as well as the throw and thickness when possible.

Due to outcrop topography, each scan-line is comprised of several rectilinear segments of different orientation. Therefore, CSB positions had to be projected onto an "ideal" scan-line oriented perpendicular to the fault zone trend to obtain the real distances between CSBs (Figure 5). Qualitative structural analysis suggests that CSBs tend to form genetically related, geometrically connected clusters of finite length. Therefore, the mode of projection must preserve the cluster organization. If each CSB were projected parallel to its azimuth, the cluster organization would be destroyed because all recorded CSBs are not parallel. Therefore we have chosen to project CSB position parallel to the average azimuth of the damage zone, as determined on bedding surfaces observed close to the scan-line.

Although all recorded positions are given with centimeter-scale precision, the lower limit of CSB position resolution at all five faults is estimated to about 5 cm, due to

difficulties in adjusting the tape measure parallel to the measured bed and between the individual measured segments. The outcrop conditions being identical for the five faults, the lower limit of resolution is thus the same for all measured populations.

3.2 Description of the CSB density around the main faults

For each fault, the CSB density is defined as the number of CSBs per meter in 0.2 m long bins plotted as a function of distance (Figure 6). On each diagram, the master fault position and the slip direction are indicated. These density diagrams illustrate three important features:

- 1) Damage zones of faults with throw of less than a few tens of meters (Wadi Araba, Gebel Hazbar and Naqb Budra) show high CSB concentrations (60 to 80 CSBs per meter) in well-defined clusters up to a few meters wide. For faults with hectometer- to kilometer-scale throw (Gebel Heckma and Gebel Samra), some peaks of density are visible, but are much less individualized than for smaller throws. In fact, the peak values are similar to those in the small throw fault zones, i.e. the apparently weaker clustering is due to the higher CSB density between clusters with larger throw.

- 2) CSB density decreases with distance from the master fault. However, due to the cluster existence, this decrease is irregular. For faults of small throw, CSB density drops off to background levels (qualitatively defined as 5 CSBs per meter) a few meters away from the master fault, thus defining the boundaries of the damage zone. For the Wadi Araba fault, the width of the damage zone is 13 m (3.5 m in the footwall and 9.5 m in the hanging wall). For the Gebel Hazbar and Naqb Budra faults, the footwall damage zone

widths are 2.5 m and 6 m, respectively. The hanging wall damage zone widths for these two faults exceed the scan-line lengths: 4 m for the Gebel Hazbar fault and 18 m for the Naqb Budra fault. At Naqb Budra, both observed CSB sets show an increase in CSB density with proximity to the master faults, indicating that both sets are genetically related to fault activity. For the Gebel Heckma and Gebel Samra faults, the Nubian sandstones are visible only in the footwall side, where the damage zone width exceeds the scan-line length of 22 m and 32 m, respectively. It is worth noting that outcrops located outside the observation area gaps suggest that the damage zone exceeds 32 m in width for the Naqb Budra fault hanging wall, and 70 m in width for the Gebel Samra fault footwall.

3) Where both sides of the faults were analyzed, the hanging wall displays both a higher CSB density and a wider damage zone than the footwall. This density asymmetry supports previous analysis regarding fracture frequency in normal fault damage zones affecting Nubian sandstones [*Knott et al.*, 1996].

4 Correlation analysis

4.1 Correlation integral scaling

Numerous studies have investigated the fractal nature of the fracture networks by using different methods for measuring the fractal dimension [*Bonnet et al.*, 2001]. In the particular case of the one-dimensional (1-D) analysis, several studies characterized the spatial distribution of fractures through a "spacing distribution" or "interval counting" (a 1-D application of the 2-D "box-counting") [*Brooks and Allmendiger*, 1996; *Gillespie et*

al., 1993; *Needham et al.*, 1996]. Actually, if the box-counting method is adapted for determinist fractal networks as Cantor dust or Von Koch curve, it can become a troublesome procedure when it is applied for statistical fractal networks [Vicsek, 1989]. For a natural system, the most efficient method for measuring scaling properties consists of calculating the correlation integral, which applies to a set of points [Vicsek, 1989]. By measuring the distances between each individual fracture and all the others, correlation analysis is robust with regard to the fracture density and describes precisely the distribution of fractures densities. Similar analyses in 2-D have already achieved excellent results to describe the spatial distribution of fracture center-points [Davy *et al.*, 1990; Bour, 1997; Bour and Davy, 1999; Gianquinta *et al.*, 1999].

To calculate the correlation integral, we use the discretized equation of *Grassberger and Procaccia*, [1983], adapted as:

$$C\left(\frac{r}{L}\right) = \frac{2}{N(N-1)L} \left(\sum_{i<j} \Theta(r - |x_i - x_j|) \right) \approx \left(\frac{r}{L}\right)^{D_c} \quad \text{Eq. 1}$$

where r is a distance, N is the total number of CSBs, L is the scan-line length, x is the CSB position and Θ is the Heaviside function (defined as $\Theta(X)=1$ if $X>0$ and $\Theta(X)=0$ if $X<0$). The correlation function measures the number of pairs of CSBs whose distances apart (x_i-x_j) is less than distance r . By varying r , we can plot in a logarithmic diagram the correlation integral versus the distance. The slope of the correlation integral line calculated by a linear regression gives the exponent D_c of the power law. For a linear distribution (1-D analysis), D_c varies from 1 (for CSBs homogeneously distributed along

the scan-line) to 0 (for CSBs localized at a single point). To check the validity of the power-law model, we calculate and plot the local logarithmic slope ($d \ln C(r)/d \ln r$), which is theoretically varying around the fractal dimension in the perfect fractal model.

The normalization by $N(N-1)$ and L makes the correlation integral independent of the system size (this is obvious for $r = L$ since $C(1) = 1$ whatever the value of L) and thus makes possible the comparison of different CSB populations. Characterizing the correlation degree allows us to distinguish a well-correlated synthetic population such as the Cantor dust $D_c = 0.63 \pm 0.02$ (theoretically, $D_c = \ln 2 / \ln 3 = 0.63$) from an uncorrelated synthetic population such as a random population $D_c = 0.99 \pm 0.01$ (theoretically, $D_c = 1$) (Figure 7).

4.2 Spatial distribution of CSBs

Figure 8 shows the correlation integral and local slope curves for the five faults studied. The data are compared to an average of 1000 synthetic realizations similar to this shown in Figure 9, which is conditioned to have the same statistical properties as the real data set by using a fractal generator [Darcel *et al.*, 2000]. Note that the synthetic data are considerably smoothed by the reductions in statistical fluctuation by averaging over a large number of realizations. Normalization (Eq.1) by the number of CSBs (N) and the scan-line length (L) allows us to compare directly all the different CSB populations.

Within statistical fluctuations, the local slope is constant over the scale range 10^{-3} - 10^{-1} units on Figure 8, at the exception of the Naqb Budra CSB population. These two orders of magnitude demonstrate that natural CSB distributions can undoubtedly be

described with a power law. A scale range of just one order could not exclude other possible distributions such as exponential or lognormal [see discussion in *Bonnet et al.*, 2001]. The correlation dimension is calculated by a regression of the integral within the part delimited by the local slope plateau. This bounded domain defines the scaling interval of validity where the correlation dimension calculated for natural datasets can be applied and corresponds to the fractal bandwidth defined by *Bonnet et al.* [2001]. The correlation dimension value for each fault is presented in Table 1.

The error of determination cannot be calculated lower than 0.05. First, the limits of the bandwidth where the correlation integral can be calculated are not obvious and their determination has a slight influence on the correlation dimension. Secondly, natural systems are not supposed to be exact deterministic fractal. They do have a stochastic component that comes from the fracturing process, which introduces some intrinsic variability around any geometrical model of natural data. By comparison with results from a stochastic fractal generator, we estimate the average uncertainty on the fractal dimension to be approximately 0.05 due to this stochastic component and to finite-size effects. As a consequence, the correlation dimension calculated for the five faults is constant within its error of determination, $D_c = 0.87 \pm 0.05$.

In the case of the Naqb Budra CSB population (Figure 8c), a short plateau of the local slope spanning just less than one order of magnitude for the small scales is identifiable yielding a D_c of 0.88 ± 0.05 . This lack of a wide plateau may be explained either by the mechanical interaction of the two CSB sets, or as an artifact of the projection method used to average the azimuth direction. However, when the correlation

integral technique is applied separately to both CSB sets, the local slope of each CSB set remains the same as for the total dataset, i.e. without displaying a clear long plateau.

4.3 Correlation length scale

On Figure 8, the fit between the natural and generated correlation integral curves is excellent for faults with large throw (Naqb Budra, Gebel Heckma and Gebel Samra). For the two smallest faults with meter-scale throw (Wadi Araba and Gebel Hazbar), although the slopes of integral straight line are the same, the synthetic correlation integral curves are systematically offset from the data. Knowing that the two populations have the same D_c and the same parameters (scan-line length and number of CSBs), the shift represents the existence of a correlation length scale (ξ) as shown by the following derivation. The correlation length represents the scale where CSBs are spatially correlated and thereby it may differ from the damage zone width that corresponds to all CSBs genetically related to the fault.

Assuming the length of the scan-line (L) is larger than the correlation length scale (ξ) and correlation length scale is the width of the damage zone, we know that the correlation integral is given by:

$$C(r) \approx \left(\frac{r}{\xi}\right)^{D_c} \quad \text{for } L > \xi$$

We can then introduce L by writing:

$$C(r) = \left(\frac{r}{L}\right)^{D_c} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{D_c} \quad \text{for } L > \xi$$

In this case $\left(\frac{L}{\xi}\right)^{D_c}$ represents the value of the shift between the correlation integrals of the natural CSB population and the model. Then ξ can be calculated by using the y-intercept in a log-log diagram where the equation represents a line:

$$\underbrace{\log C(r)}_Y = D_c \underbrace{\log \left(\frac{r}{L}\right)}_{D_c X} + D_c \underbrace{\log \left(\frac{L}{\xi}\right)}_A$$

Thus, ξ is obtained from $\xi = L 10^{-A/D_c}$ where A is the y-intercept of the model population in the logarithmic diagram.

For the Wadi Araba fault, the calculated correlation length scale is equal to 15 m. This value is close to the 13 m width of the damage zone defined from the density diagram (Figure 6a). In the Gebel Hazbar case, the calculated correlation length scale is equal to 8.5 m. This value is close to the 6 m width of the CSB concentration around the master fault (Figure 6b). However, this may be an underestimate, since the hanging wall was incompletely sampled.

This analysis allows us to determine the boundaries of the population of spatially correlated CSBs, which coincide with those of the qualitatively defined damage zones for the small faults. Because we were unable to completely sample the influence zone of larger throw faults, we could not calculate correlation length scales for them. In particular, we could not study the hanging wall of faults with kilometer-scale throw. Nevertheless, we can propose a lower bound of the correlation length scale that is at least

greater than the scan-line length. With this consideration, it appears that the correlation length increases from faults with meter-scale throw to larger faults.

5 Discussion

We consider the five studied faults as representative of different steps within a progressive damage zone formation process. This assumption is realistic because all the faults result from the same extensional tectonic event affecting the same lithology with similar burial histories. The conditions and the mechanisms of deformation are thus equivalent. Nevertheless, we cannot ignore the potential effects of varying rheological properties across the fault as offset progresses.

Our results first indicate that the correlation dimension is independent of fault throw i.e. the correlation dimension is constant for the five faults within the error of measurement. Therefore, the scaling properties of CSB distributions that remain identical during the fault growth can be considered as scale invariant. Nevertheless the scaling properties are limited up to the width of the damage zone, which plays the role of a correlation length. With our data collection, we can calculate a correlation length, which is equal to the damage zone width for the small faults. Our approach differs from that of *Beach et al.* [1999], which arbitrarily defines the damage zone as having a frequency greater than 5 CSBs per 0.5 m. On the other hand, we can just assume that this length is at least greater than scan-line length for the largest faults. From this, we conclude that the correlation length scales are greater for faults with decameter- to kilometer throw than for faults with meter-scale throw, but we are unable to constrain precisely this increase with our data. In particular, we cannot establish that the correlation length scale remains

equal to the damage zone width. Moreover by only considering location of CSBs, the results regarding correlation properties are established for the finite deformation within the damage zone and do not take in account the active sub-structure. For a better understanding of strain localization during fault development, it would be necessary to improve data collection by systematically recording additional information such as individual CSB throw.

Second, our results show that increased throw induces an increase of finite deformation. Based on the qualitative results of the CSB density diagrams, fault damage zone width increases systematically with increasing throw. Moreover, CSB density increases between CSB clusters as throw increases. Thus, throw appears to be a control on the growth of a damage zone. However, our conclusions are well controlled only for faults with small (up to decameter-scale) throws for which we could observe the whole damage zone and, due to the limited extent of our scan-lines, they remain speculative for those with larger throw. The widening of the damage zone with increasing throw matches the observations of *Beach et al.* [1999], but we cannot confirm the damage zone width limit of about 100 m observed by these authors for the largest throws.

Our results and those of *Beach et al.* [1997], *Beach et al.* [1999] and *Shipton and Cowie* [2001] suggest that the damage zone widens with increasing the throw on the master fault. Moreover, the density of the whole damage zone calculated as the ratio of the number of CSBs to the characteristic length (damage zone width for the small faults or scan-line length for the larger faults) is almost the same for the five faults. Therefore, even after a through-going slip surface develops, the subsequent deformation is accommodated along new CSBs within the damage zone as well as by slip on the master

fault. These results do not totally fit with the currently accepted model for porous sandstones that considers the creation of the slip surface as the last step of the fault zone development [Aydin and Johnson, 1978]. According to our analysis, the increase of both damage zone width and CSB density continues after the slip surface formation. The fact that deformation is not totally localized on this discrete surface can be related to the rotations and geometrical effects such as those described in faulted sandstones by Davis *et al.* [2000] and Steen and Andresen [1999].

6 Conclusions

This study of CSB distribution in the damage zones of faults affecting the Nubian sandstones of the Suez rift demonstrates that scaling properties do not depend on fault throw but correlation length and damage zone width increase with throw. On the basis of our 1-D quantitative field analysis, the main results can be summarized as follows:

1) CSB density diagrams allow us to qualitatively define fault damage zones from the concentration of CSBs around the main slip planes. According to these diagrams, CSB density decreases irregularly with increasing distance from the master fault, and the damage zone widens with increasing throw. Qualitatively, CSB density increases between CSB clusters as the throw increases, thus density peaks appear less individualized for faults with larger throws.

2) The correlation integral analysis can be used to characterize the degree of organization of CSBs within damage zones. CSB distribution can be described by a power law: $C(r) \sim a.r^{D_c}$. For the damage zones examined here, D_c lies in the range $D_c =$

0.87 ± 0.05 , and therefore does not vary significantly with throw. Finite size effects can be identified by comparing natural data with synthetic fractal networks. From this, the predictive distribution can be applied from centimeter- to meter-scales.

3) The existence of a correlation length scale (ξ) for faults of meter-scale throw has been demonstrated. The correlation length corresponds to the damage zone width. To our knowledge, it is the first time that a correlation length scale has been defined for a CSB distribution. Where unobstructed scan-line reaches to the boundaries of the damage zone, we can calculate a correlation length. Where it does not, typically for larger throw, we can only estimate a lower bound for the correlation length. The correlation length scale increases from faults with meter-scale throw to faults with larger throw.

Acknowledgments

This research was supported by IFP through a convention with LGIT, Joseph Fourier University (Grenoble). We are grateful to I. Moretti and B. Colletta for their confidence and their help on the field. We thank J.F. Gamond and J.R. Grasso for critical discussions and comments on these results. We would like to thank the two reviewers, Z. Shipton and G. Yielding, for their helpful comments. Thanks are also due to the Associate Editor I. Main whose constructive review and insightful suggestions have greatly improved the second draft of the manuscript.

References

- Antonellini, M., and A. Aydin, Effect of faulting on fluid flow in porous sandstones: petrophysical properties, *American Association of Petroleum Geologists*, 78 (3), 355-377, 1994.
- Antonellini, M., A. Aydin, and D. Pollard, Microstructure of deformation bands in porous sandstones at Arches National Park, Utah, *Journal of Structural Geology*, 16 (7), 941-959, 1994.
- Aydin, A., and A.M. Johnson, Developpement of fault as zone deformation bands and as slip surfaces in sandstone, *Pure Appl. Geophys.*, 116, 922-929, 1978.
- Aydin, A., and A.M. Johnson, Analysis of faulting in porous sandstones, *Journal of Structural Geology*, 5 (1), 19-31, 1983.
- Beach, A., J.L. Brown, A.I. Welbon, J.E. McCallum, P.J. Brockbank, and S.D. Knott, Characteristics of fault zones in sandstones from NW England: application to fault transmissibility, in *Geology of the Irish Sea and Adjacent Areas*, edited by N.J.e.a.e. Meadows, pp. 185-194, Geological Society, Special Publications, London, 1997.
- Beach, A., A.I. Welbon, P.J. Brockbank, and J.E. McCallum, Reservoir damage around faults: outcrop examples from Suez Rift, *Petroleum Geoscience*, 5, 109-116, 1999.
- Bonnet, E., O. Bour, N.E. Olding, P. Davy, I. Main, P.A. Cowie, and B. Berkowitz, Scaling of fracture systems in geological media, *Review of Geophysics*, 39 (3), 347-383, 2001.
- Bour, O., Transferts de fluides dans les milieux fracturés - Effets d'Echelle, Mémoire - Geosciences Rennes, Rennes, 1997.
- Bour, O., and P. Davy, Clustering and size distributions of fault pattern: theory and measurements, *Geophy. Res. Letters*, 26 (13), 2001-2004, 1999.
- Brooks, A.B., and R.W. Allmendiger, Fault spacing in the El Teniente Mine, central Chile: Evidence for non fractal geometry, *Journal of Geophysical Research*, 101, 13633-13653, 1996.
- Burhannudinnur, M., and C.K. Morley, Anatomy of growth fault zones in poorly lithified sandstones and shales: implications for reservoir studies and seismic interpretation: part 2, seismic reflection geometries, *Petroleum Geosciences*, 3, 225-231, 1997a.
- Chénet, P.Y., and J. Letouzey, Tectonique de la zone comprise entre Abu Durba et Gebel Mezzazat (Sinai, Egypte) dans le contexte de l'évolution du Rift de Suez, *Bull. Centres Rech. Explor.-Prod. Elf-Aquitaine*, 7 (1), 201-215, 1983.
- Chester, F.M., J.P. Evans, and R.L. Biegel, Internal structure and weakening mechanisms of the San Andreas Fault, *Journal of Geophysical Research*, 98, 771-786, 1993.

- Chester, F.M., and J.M. Logan, Composite planar fabric of gouge from the Punchbowl Fault, California, *Journal of Structural Geology*, 9 (5/6), 621-634, 1987.
- Colletta, B., P. Le Guellec, J. Letouzey, and I. Moretti, Longitudinal Evolution of the Suez Rift Structure (Egypt), *Tectonophysics*, 153, 221-233, 1988.
- Colletta, B., and I. Moretti, Analyse Structurale dans la région de Wadi Baba (Rift du golfe de Suez), I.F.P., 1985.
- Darcel, C., O. Bour, P. Davy, and J.R. de Dreuzy, A discrete geometrical model of fractured media for stochastic fluid flow simulation, in *XXV General assembly*, edited by E. meeting, Nice, 2000.
- Davis, G.H., A.P. Bump, P.E. Garcia, and S.G. Ahlgren, Conjugate Riedel deformation band, shear zones, *Journal of Structural Geology*, 22 (2), 169-190, 2000.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette, Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, *Nature*, 348, 56-58, 1990.
- Eneva, M., Effect of limited data sets evaluating the scaling properties of spacially distributed data: an example from mining-induced seismic activity, *Geophysical Journal International*, 124, 773-786, 1996.
- Eyal, M., Y. Bartov, A.E. Shimron, and Y.K. Bendor, Sinai - Geological map, Survey of Israel, 1980.
- Fossen, H., and J. Hesthammer, Possible absence of small faults in the Gulfaks Field, northern North Sea: implications for downscaling of faults in some porous sandstones, *Journal of Structural Geology*, 22, 851-863, 2000.
- Fowles, J., and S. Burley, Textural and permeability characteristics of faulted, high porosity sandstones, *Marine and Petroleum Geology*, 11 (5), 608-623, 1994.
- Garfunkel, Z., and Y. Bartov, The tectonics of Suez Rift., *Geol. Surv. Israel Bull.*, 71, 1977.
- Gianquinta, A., S. Boccaletti, M. Boccaletti, and L. Piccardi, Investigating the fractal properties of geological fault systems: The Main Ethiopian Rift case, *Geophys. Res. Letters*, 26 (11), 1633-1636, 1999.
- Gillespie, P.A., C.B. Howard, W. J.J., and J. Watterson, Measurement and charaterisation of spatial distributions of fractures, *Tectonophysics*, 226, 113-141, 1993.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica 9D*, 189-208, 1983.
- Hirata, T., A correlation between the b value and the fractal dimension of earthquakes, *Journal of Geophysical Research*, 94, 7507-7514, 1989.
- Hirata, T., and M. Imoto, Multifractal analysis of spatial distribution of microearthquakes in the Kanto region, *Geophysical Journal International*, 107, 155-162, 1991.
- Hirata, T., T. Satoh, and K. Ito, Fractal structure of spatial-distribution of microfracturing in rock, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 90, 369-374, 1987.

- Jamison, W.R., and D.W. Stearns, Tectonic Deformation of Wingate Sandstone, Colorado National Monument, *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, 66 (12), 2584-2608, 1982.
- Knott, S.D., A. Beach, P.J. Brockbank, J.L. Brown, J.E. McCallum, and A.I. Welbon, Spatial and mechanical controls on normal fault populations, *Journal of Structural Geology*, 18 (2/3), 359-372, 1996.
- Main, I., O. Kwon, B.T. Ngwenya, and S.C. Elphick, Fault sealing during deformation-band growth in porous sandstone, *Geology*, 28 (12), 1131-1134, 2000.
- Mair, K., I. Main, and S. Elphick, Sequential growth of deformation bands in the laboratory, *Journal of Structural Geology*, 22, 25-42, 2000.
- McClay, K., and S. Khalil, Extensional hard linkages, eastern Gulf of Suez, Egypt, *Geology*, 26, 563-566, 1998.
- McGrath, A.G., and I. Davison, Damage zone geometry around fault tips, *Journal of Structural Geology*, 17 (7), 1011-1024, 1995.
- Needham, T., G. Yielding, and R. Fox, Fault population description and prediction using examples from the offshore U.K., *Journal of Structural Geology*, 18 (2/3), 155-167, 1996.
- Öncel, A.O., I. Main, Ö. Aptekin, and P.A. Cowie, Spatial variations of the fractal properties of seismicity in the Anatolian fault zones, *Tectonophysics*, 257, 189-202, 1996.
- Peacock, D.C.P., R.J. Knipe, and D.J. Sanderson, Glossary of normal faults, *Journal of Structural Geology*, 22, 291-305, 2000.
- Ridcharson, M., and M.A. Arthur, The Gulf of Suez-northern red sea Neogen rift: a quantitative basin analysis, *Mar. & Petrol. Geol.*, 5 (247-270), 1988.
- Schulz, S.E., and J.P. Evans, Spatial variability in microscopic deformation and composition of the Punchbowl fault, southern California: implications for mechanisms, fluid-rock interaction, and fault morphology, *Tectonophysics*, 295, 223-244, 1998.
- Schütz, K.I., Structure and Stratigraphy of the Gulf of Suez, Egypt, *APPG Mem.*, 59, 57-96, 1994.
- Shipton, Z.K., and P.A. Cowie, Damage zone and slip-surface evolution over micrometre to kilometre scales in high-porosity Navajo sandstone, Utah, *Journal of Structural Geology*, 23, 1825-1844, 2001.
- Steckler, M.S., F. Berthelot, N. Lyberis, and X. LePichon, Subsidence in the gulf of Suez : Implications for rifting and plate kinematics, *Tectonophysics*, 153 (14), 249-270, 1988.
- Steen, Ø., and A. Andresen, Effects of lithology on geometry and scaling of small faults in Triassic sandstones, East Greenland, *Journal of Structural Geology*, 21, 1351-1368, 1999.

- Underhill, J.R., and N.H. Woodcock, Faulting mechanisms in high-porosity sandstones; New Red Sandstone, Arra, Scotland, in *Deformation of Sediments and Sedimentary Rocks*, edited by M.E. Jones, and R.M.F. Preston, pp. 91-105, Geological Society, Special Publications, London, 1987.
- Vermilye, J.M., and C.H. Scholz, The process zone: A microstructural view of fault growth, *Journal of Geophysical Research*, 103, 12,223-12,237, 1998.
- Vicsek, T., *Fractal Growth Phenomena*, 488 pp. pp., World Scientific, Singapore ; Teaneck, N.J, 1989.

Captions

Figure 1

Simplified structural map of the study area located on the eastern border of the Suez Rift (adapted from the Sinai Geological Map 1:500,000 by *Eyal et al.*, [1980]). White stars indicate the location of the five studied faults affecting Nubian sandstones with Wadi Araba (WA, throw ~ 3 m); (b) Gebel Hazbar (GHa, throw ~ 5 m); (c) Naqb Budra (NB, throw ~ 30 m); (d) Gebel Hekma (Ghe, throw ~ 250 m); (e) Gebel Samra (GS, throw ~ 2500 m).

Figure 2

Schematic cross sections of the eastern Suez rift border (adapted from *McClay and Khalil* [1998] and *Colletta and Moretti* [1985]). Section 1 is located in the northern part of the study area (Figure 1) and section 2 in the southern part. This cartoon shows the structural location of the five faults of interest; GHa: Gebel Hazbar; NB: Naqb Budra; GS: Gebel Samra; GHe: Gebel Hekma and WA: Wadi Araba.

Figure 3

(a) Cataclastic slip bands in the Nubian sandstones observed in outcrop. The thin ferromagnesian stripes (dark) provide the offset marker (a few millimeters to decimeter) for each band. (b) Microstructure of a cataclastic slip band (thin section microphotograph). The quartz grains appear white and the injected epoxy resin filling pores is dark. In the cataclastic band, the grain size and the porosity are drastically reduced compared to the host sandstone.

Figure 4

Studied outcrop of the Wadi Araba fault. The cartoon shows the main cataclastic slip bands qualitatively defining the damage zone around the master fault. The dotted black line represents the scan-line position used to record all visible CSBs. The Schmidt lower hemisphere stereogram shows that CSB strikes cluster round a main direction (N140°). The throw on the master fault is about 80 cm, whereas the cumulated throw of the entire damage zone is about 3.2 m.

Figure 5

Cartoon showing the method of data collection used in this study. To measure CSB positions, the transverse scan-line L_0 is located on an irregular vertical section. Positions are then projected onto an "ideal" scan-line L_1 perpendicular to the fault zone in order to obtain real distances between CSBs. To preserve cluster organization, each CSB is projected parallel to fault zone direction (1). Note that projection parallel to the CSB azimuth destroys the clusters (2).

Figure 6

Diagrams of CSB density for natural datasets of the five studied faults. Density is defined as the number of CSBs per meter within each 0.2 m wide segment. Vertical dashed lines indicate the limit of damage zones qualitatively defined as 5 CSBs per meter. For meter- to decameter-scale throws (a to c), CSB clusters are well-defined, whereas for larger throws (d and e) the CSB density increases between clusters.

Figure 7

Diagrams of CSB density and calculation of correlation integral for synthetic datasets. These synthetic populations are generated with the same features as the Wadi Araba fault, i.e. scan-line length = 30 m and CSB number = 236. In the Cantor Dust case,

CSB density shows several clusters (a) and the calculated D_c is 0.63 ± 0.02 (b); the high fluctuations of the associated local slope are due to the specific making process of this determinist population. In the random population, CSBs are homogeneously distributed, the CSB density does not show cluster (c), and the calculated D_c is 0.99 ± 0.01 (d), close to the theoretical value of 1.

Figure 8

Comparison of correlation integral diagrams of natural data and generated data for the five studied faults. Circles correspond to the correlation integral of natural population and the heavy line corresponds to the associated local slope. Black boxes represent the correlation integral of the generated population and the thin broken line represents the associated local slope. For each fault, averaging one thousand drawings using the same input parameters smoothes the local slope curve, reducing noise and emphasizing the plateau. Fit between both populations is excellent for hectometer and kilometer-scale throws. For meter-scale throws, however, the natural distribution is shifted on the small-scale side.

Figure 9

Comparison of CSB density diagrams of the natural population of the Wadi Araba fault (a) and one example of corresponding generated populations having the same scan-line length, CSB number and D_c (b). CSB distributions show clusters in both cases. Nevertheless, CSB clusters appear clearly focused around the main slip plane for the natural distribution whereas they are scattered along the scanline for generated data.

Table 1 Fault data

	Wadi Araba	Gebel Hazbar	Naqb Budra	Gebel Hekma	Gebel Samra
Estimated throw	3 m	5 m	30 m	250 m	2500 m
Damage zone *	15 m	≥ 8.5 m	>46 m	>22 m	>70 m
Scan-line length **	30 m	12 m	28 m	22 m	33 m
CSB number **	236	173	360	344	925
Calculated D_c	0.85	0.87	0.88	0.90	0.91

* At Naqb Budra and Gebel Samra, values include outcrop segments located beyond observation gaps and not sampled for statistical analyze.

** Scan-line length and cataclastic slip band (CSB) numbers are those used for statistical analysis and correspond to continuous outcrop intervals around the master fault(s).

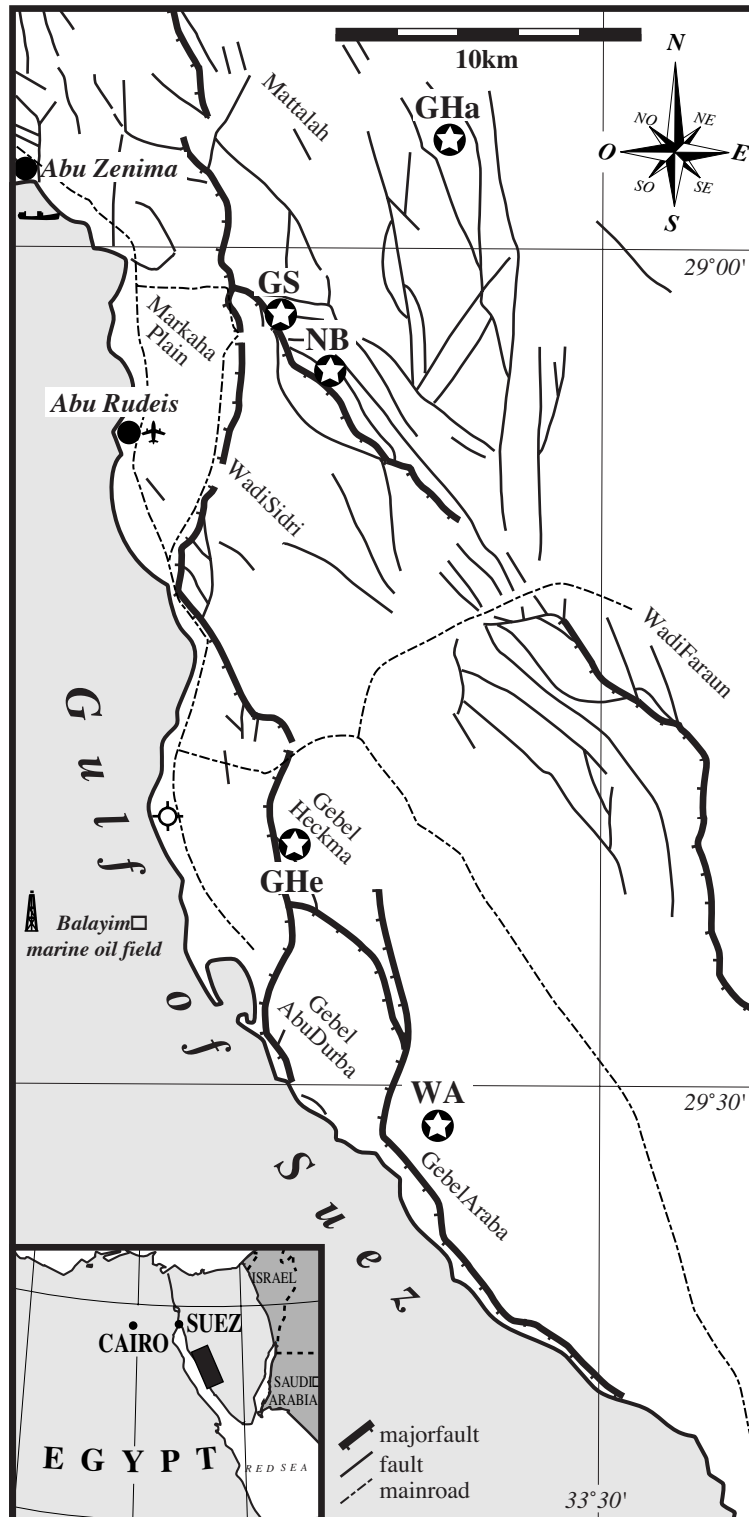


Figure 1

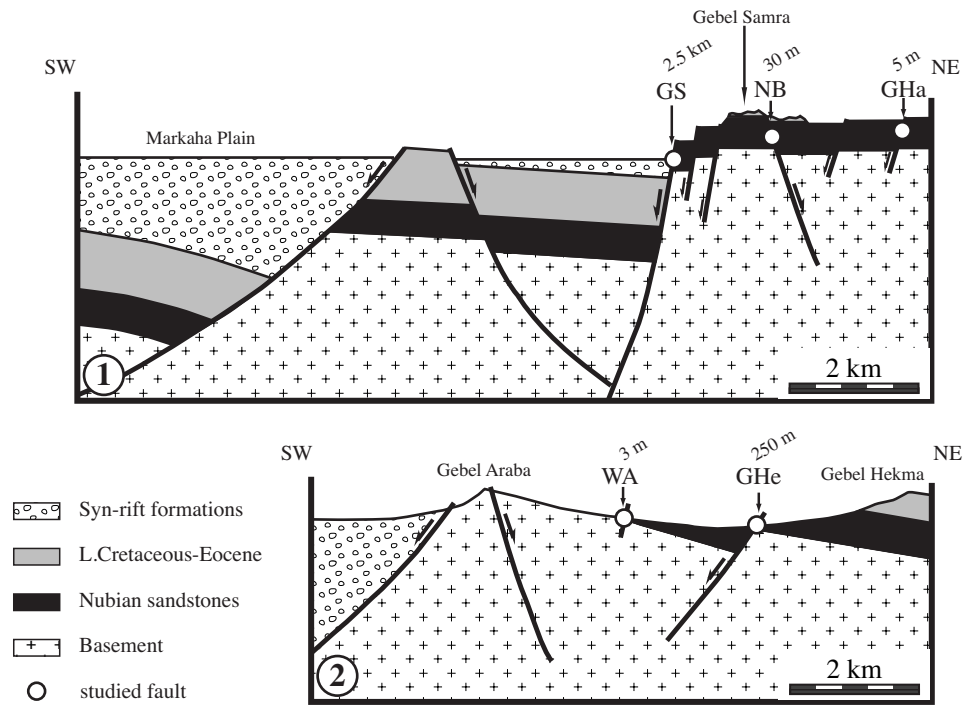


Figure 2

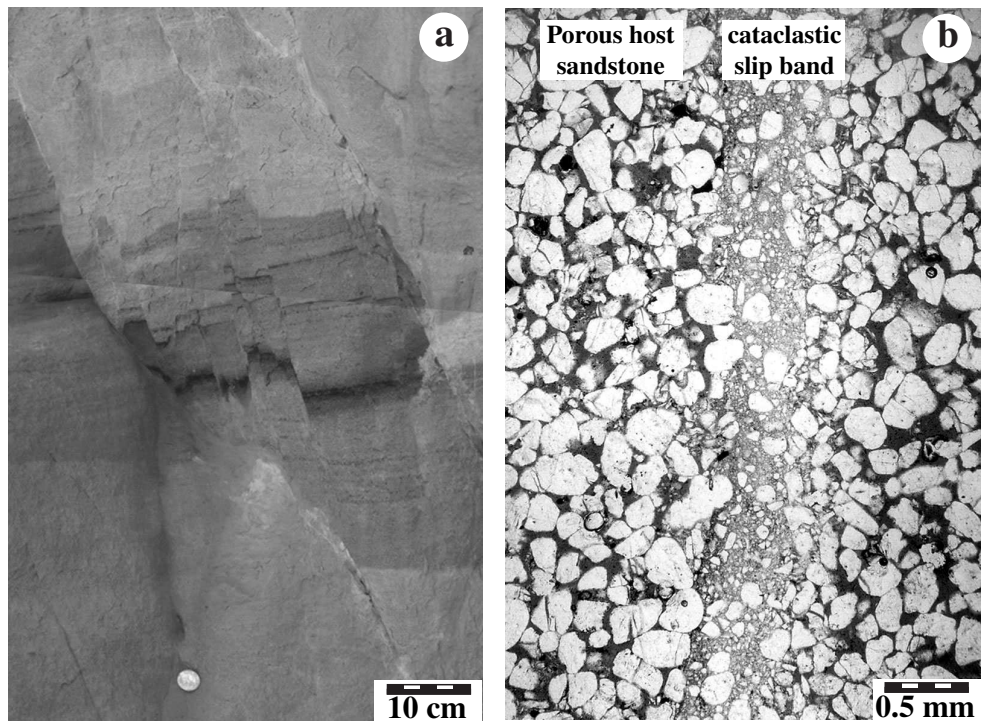


Figure 3

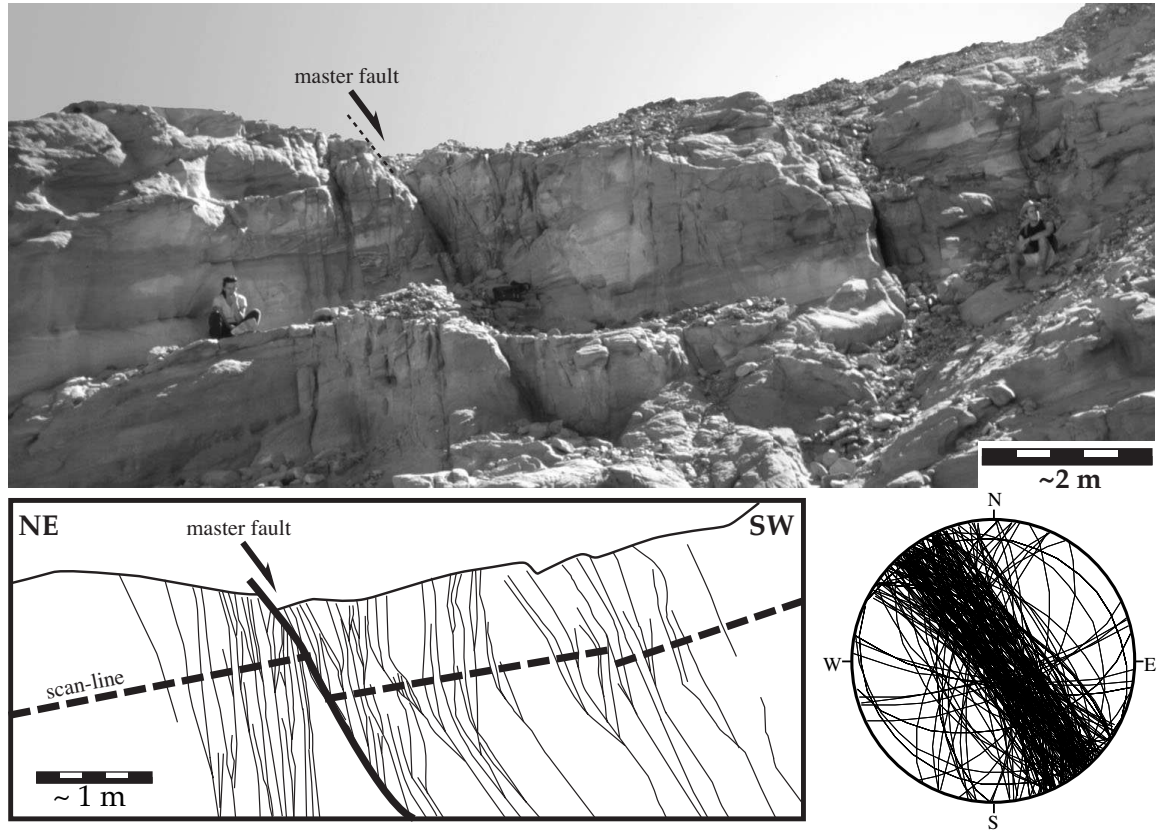


Figure 4

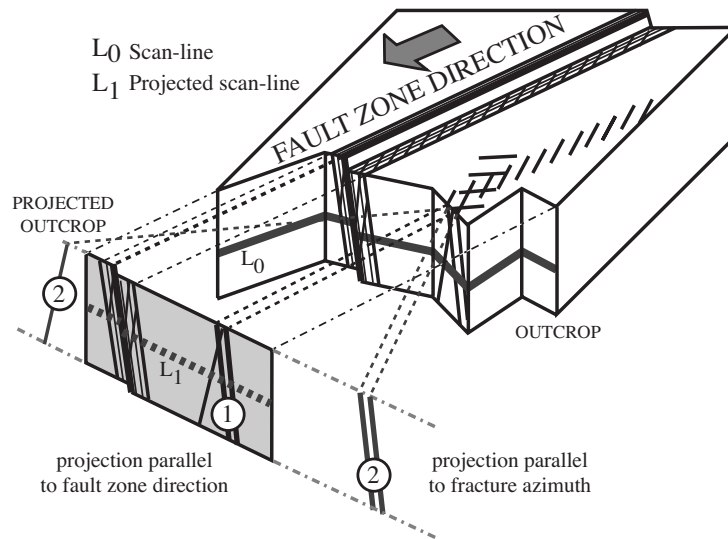


Figure 5

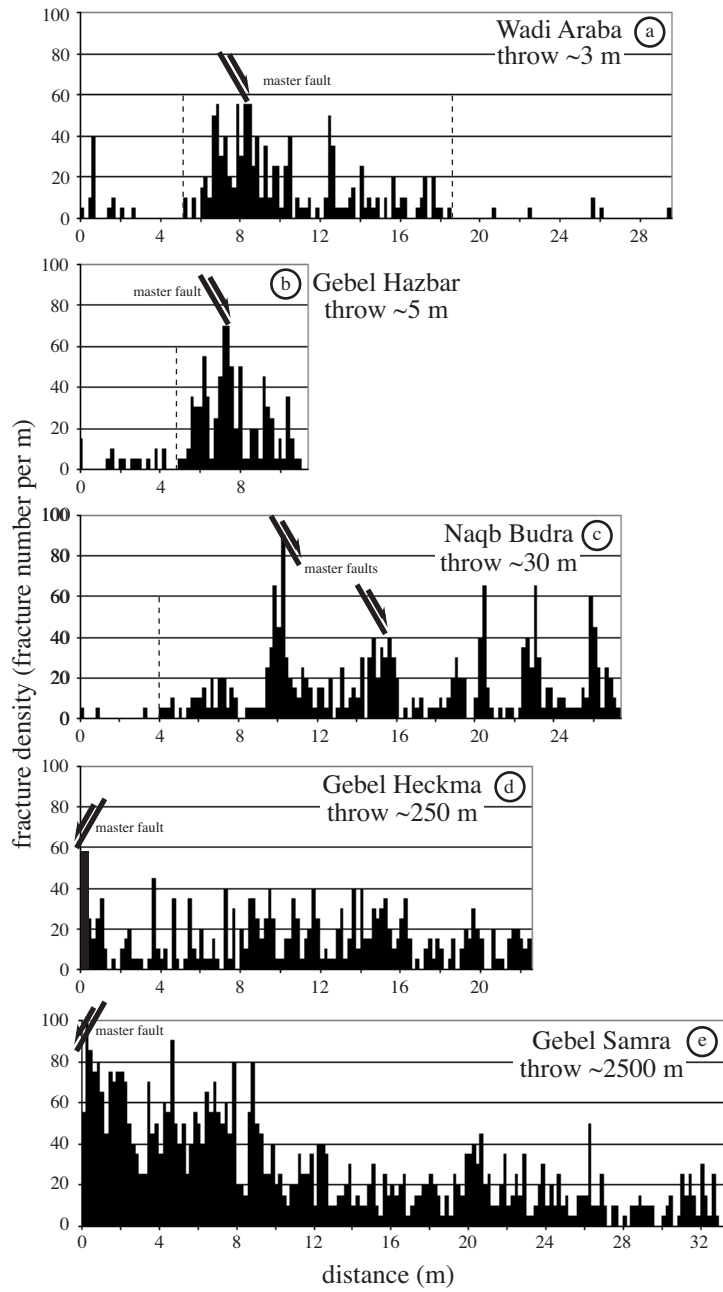


Figure 6

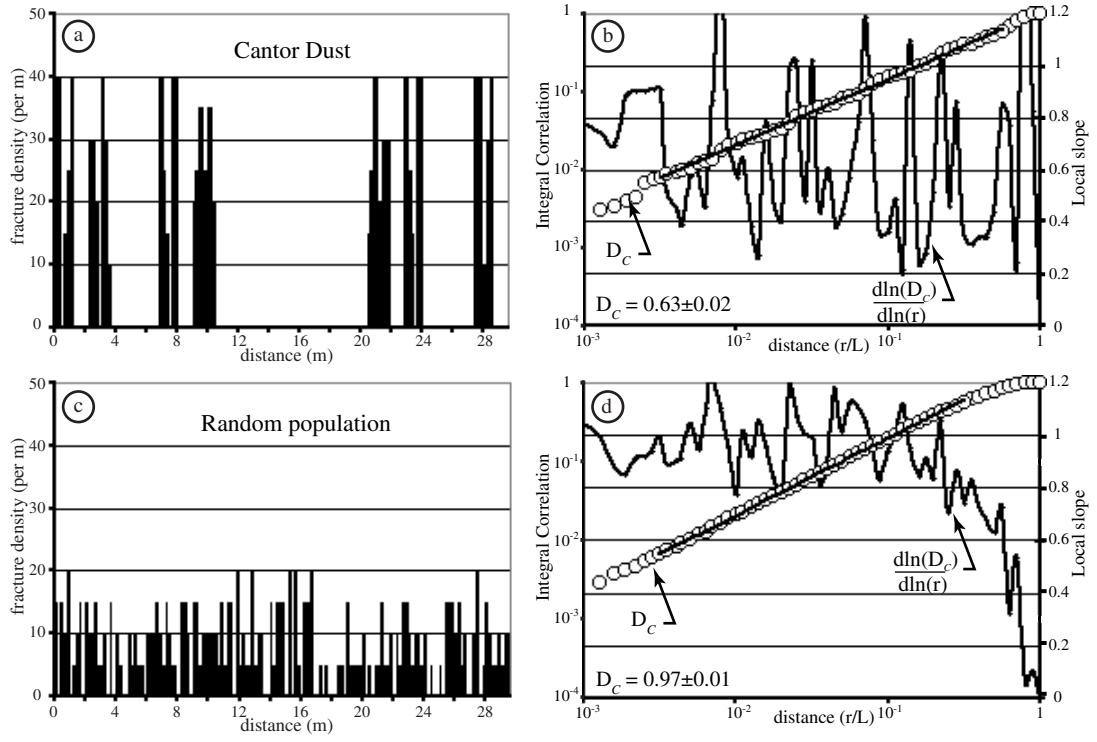


Figure 7

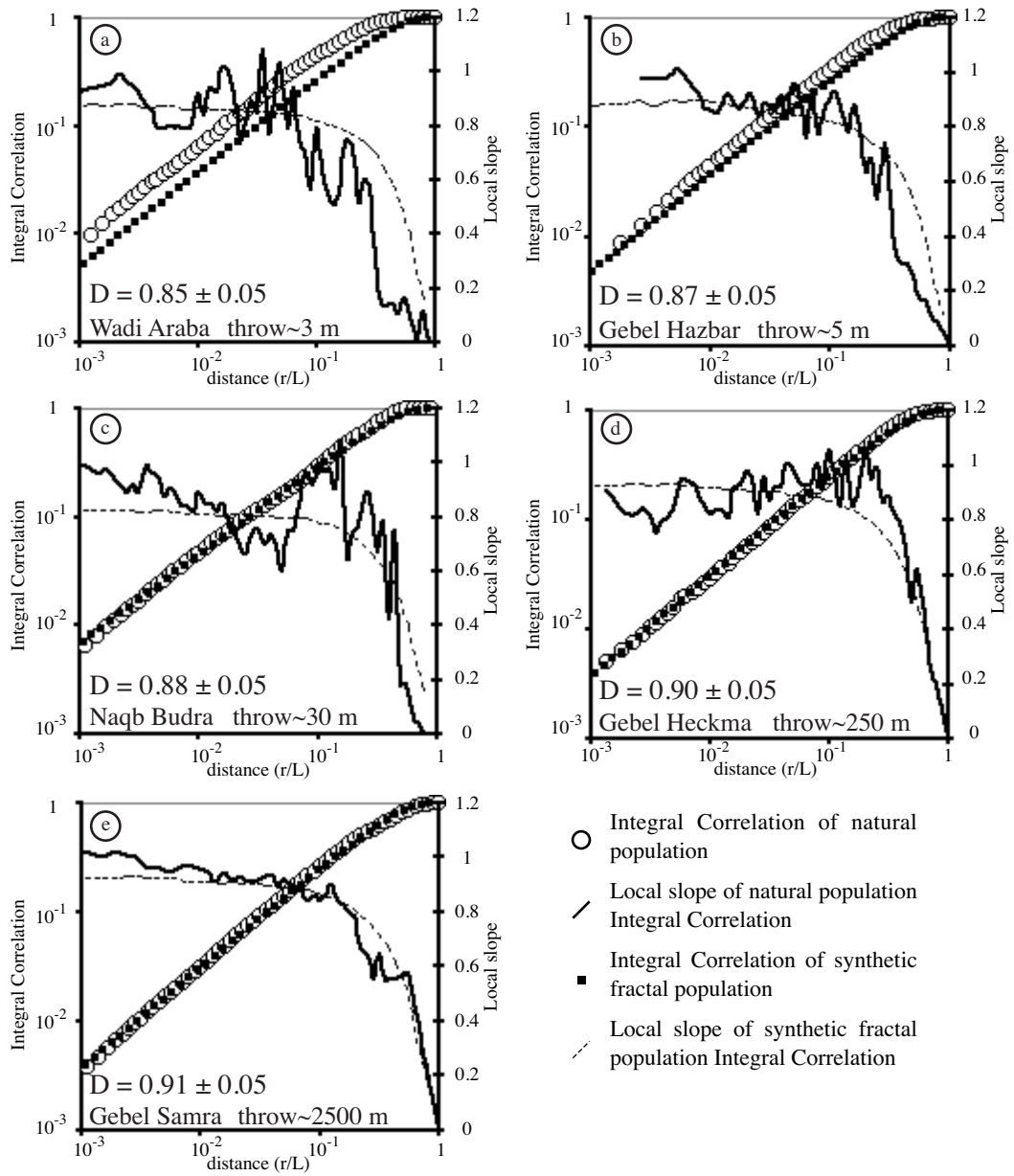


Figure 8

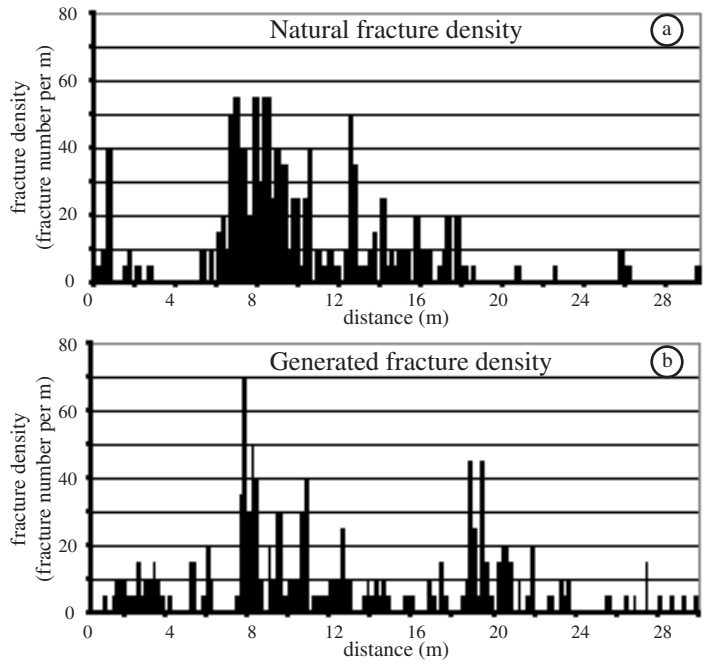


Figure 9

REFERENCES

- Abelin, H., L. Birgersson, J. Gidlund, L. Moreno, H. Neretnieks, H. Widen, and J. Agren, 3D migration experiment-report 3: performed experiments, results and evaluation, Stripa Proj. Tech. Rep. 87-21, Swed. Nucl. Fuel and Waste Manage. Co. (SKB), Stockholm, Sweden, 1987.
- Ackermann, R.V., and R.W. Schlische, Anticlustering of small normal faults around larger faults, *Geology*, 25 (12), 1127-1130, 1997.
- Acuna, J.A., and Y.C. Yorstos, Application of fractal geometry to the study of networks of fractures and their pressure transient ., , 1995.
- Adler, P.M., and J-F. Thovert, *Fractures and Fracture Networks*, 429 pp., Kluwer Academic Publishers, 1999.
- Andersson, J., and B. Dverstop, Conditional Simulations of Fluid Flow in Three-Dimensional Networks of Discrete Fractures, *Water Resources Research*, 23 (10), 1876-1886, 1987.
- Andersson, J., A.M. Shapiro, and J. Bear, A Stochastic Model of a Fractured Rock Conditioned by Measured Information, *Water Resources Research*, 20 (1), 79-88, 1984.
- Andersson, J., and R. Thunvik, Predicting Mass Transport in Discrete Fracture Networks With the Aid of Geometrical Filed Data, *Water Resources Research*, 22 (13), 1941-1950, 1986.
- Arcangelis, L.d., A. Hansen, H.J. Hermann, and S. Roux, scaling laws in fracture, *Phys. Rev. B.*, 40, 977-880, 1989.
- Arcangelis, L.d., and H.J. Hermann, scaling and multiscaling laws in random fuse networks, *Phys. Rev. B.*, 39, 2678-2684, 1989.
- Balberg, I., Exluded volume and its relation to the onset of percolation, *Physical Review B*, 30 (7), 3933-3943, 1984.
- Balberg, I., B. Berkowitz, and G.E. Drascher, Application of a percolation model to flow in fractured hard rocks, *Journal of Geophysical Research*, 96 (B6), 10,015-10,021, 1991.
- Barenblatt, G.I., I.P. Zheltov, and I.N. Kochina, Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, *J. Appl. Math.*, 24, 1286-1303, 1960.
- Barnsley, M.F., *Fractals everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.
- Barton, C.C., Fractal analysis of the scaling and spatial clustering of fractures, in *Fractal and their use in earth sciences*, edited by C.C. Barton, and P.R. LaPointe, Plenum Publishing Co, New York, 1995.
- Bear, J., C-F. Tsang, and G.d. Marsily, Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock, pp. 560, Academic Press, 1993.
- Belfield, W.C., Incorporating spatial distribution into stochastic modelling of fractures: multifractals and Lévy-stable statistics, *Journal of Structural Geology*, 20 (4), 473-486, 1998.
- Belfield, W.C., and J. Sovich, Fracture Statistics from Horizontal Wellbores, *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 34, 47-50, 1994.
- Berkowitz, B., and I. Balberg, Percolation theory and its application to groundwaterhydrology, *Water Resources Research*, 29 (4), 775-794, 1993.

- Berkowitz, B., and A. Hadad, Fractal and multifractal measures of natural and synthetic fracture networks, *Journal of Geophysical Research*, 102 (B6), 12205-12218, 1997.
- Billiaux, D., J.P. Chilès, K. Hestir, and J. Long, Three-dimensional statistical modelling of a fractured rock mass - an example from the Fanay-Augères Mine, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 26 (3/4), 281-299, 1989.
- Bonnet, E., La localisation de la déformation dans les milieux fragile-ductile: approche expérimentale et application à la lithosphère continentale, Université Rennes 1, Rennes, 1997.
- Bonnet, E., O. Bour, N. Odling, I. Main, B. Berkowitz, P. Davy, and P. Cowie, Scaling of Fracture Systems in Geological Media, *Reviews of Geophysics*, 39 (3), 347-383, 2001.
- Boufadel, M.C., S. Lu, F.J. Molz, and D. Lavallee, Multifractal scaling of the intrinsic probability, *Water Resources Research*, 36 (11), 3211-3222, 2000.
- Boult, P.J., K. Liu, S. Painter, and L. Paterson, Outcrop analog for sandy braided stream reservoirs, permeability patterns of the Triassic Hawkesbury sandstone, Sydney basin, Australia, *Am. Ass. Pet. Geol. Bull.*, 1996.
- Bour, O., Transfert de fluides dans les milieux fracturés, *Thèse de l'Université de Rennes, Mémoires de Géosciences-Rennes*, 1997.
- Bour, O., and P. Davy, Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution, *Water Resources Research*, 33 (7), 1567-1583, 1997.
- Bour, O., and P. Davy, On the connectivity of three dimensional fault networks, *Water Resources Research*, 34 (10), 2611-2622, 1998.
- Bour, O., and P. Davy, Clustering and size distributions of fault patterns: theory and measurements, *Geophysical Research Letters*, 26 (13), 2001-2004, 1999.
- Bour, O., P. Davy, C. Darcel, and N. Odling, A statistical scaling model for fracture network geometry, with validation on a multi-scale mapping of a joint network (Hornelen Basin Norway), *Journal of Geophysical Research*, sous presse.
- Brooks, B.A., R.W. Allmendinger, and I.G.d.l. Barra, Fault spacing in El Teniente mine, central Chile: evidence of nonfractal fault geometry, *J. Geophys. Res.*, 101, 13633-13653, 1996.
- Brown, S., A. Caprihan, and R. Hardy, Experimental observation of fluid flow channels in a single fracture, *Journal of Geophysical Research*, 103 (B3), 5125-5132, 1998.
- Cacas, M.C., E. Ledoux, G.d. Marsily, B. Tillie, A. Barbeau, E. Durand, B. Feuga, and P. Peudecerf, Modeling fracture flow with a stochastic discrete fracture network: calibration and validation. 1. The flow model, *Water Resources Research*, 26 (3), 479-489, 1990.
- Carrera, J., and L. Martinez-Landa, Mixed discrete-continuum models: a summary of experiences in test interpretation and model prediction, in *dynamics of fluid in fractured rock*, edited by B. Faybishenko, P.A. Witherspoon, and S.M. Benson, pp. 251-266, AGU, Washington, DC, 2000.
- Castaing, C., M.A. Halawani, F. Gervais, J.P. Chilès, A. Genter, B. Bourguine, G. Ouillon, J.M. Brosse, P. Martin, A. Genna, and D. Janjou, scaling relationships in intraplate fracture systems related to Red Sea Rifting, *Tectonophysics*, 261, 291-314, 1996.
- Charlaix, E., E. Guyon, and S. Roux, Permeability of a Random Array of Fractures of Widely Varying Apertures, *Transport in Porous Media*, 2, 31-43, 1987.
- Chilès, J.P., Fractal and geostatistical methods for modeling of a fracture network, *Mathematical Geology*, 20, 631-654, 1988.
- Chilès, J.P., and G.d. Marsily, Stochastic models of fracture systems and their use in flow and transport modelling, in *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rocks*, edited by J. Bear, C.-F. Tsang, and G.d. Marsily, pp. 169-236, Academic Press, 1993.
- Cladouhos, T.T., and R. Marrett, Are fault growth and linkage models consistent with power-law distributions of fault lengths?, *Journal of Structural Geology*, 18 (2/3), 281-293, 1996.

- Clauser, C., Permeability of crystalline rock, *Eos Trans. AGU*, 73 (21), 237-238, 1992.
- Clemo, T., and L. Smith, A hierarchical model for solute transport in fractured media, *Water Resources Research*, 33 (8), 1763-1783, 1997.
- Cowie, P.A., D. Sornette, and C. Vanneste, Multifractal scaling properties of a growing fault population, *Geophysical International Journal*, 122, 457-469, 1995.
- Cowie, P.A., C. Vanneste, and D. Sornette, Statistical Physics Model for the spatiotemporal evolution of faults, *JGR*, 98 (B12), 809-821, 1993.
- Davy, P., A. Hansen, E. Bonnet, and S.-Z. Zhang, Localization and fault growth in layered brittle-ductile systems: implications for deformations of the continental lithosphere, *Journal of Geophysical Research*, 100 (B4), 6281-6294, 1995.
- Davy, P., A. Sornette, and D. Sornette, Some consequences of a proposed fractal nature of continental faulting, *Nature*, 348 (6296), 56-58, 1990.
- de Dreuzy, J.R., Analyse des propriétés hydrauliques des réseaux de fractures, Université de Rennes, Rennes, 2000.
- de Dreuzy, J.R., P. Davy, and O. Bour, Percolation threshold of 3D random ellipses with widely-scattered distributions of eccentricity and size, *Physical Review E*, 62, 5948-5952, 2000.
- de Dreuzy, J.R., P. Davy, and O. Bour, Hydraulic properties of two-dimensional random fracture networks following a power law length distribution: 1-Effective connectivity, *Water Resources Research*, 37 (8), 2065-2078, 2001.
- Dershowitz, W., and I. Miller, Dual porosity fracture flow and transport, *Geophysical Research Letters*, 22 (11), 1441-1444, 1995.
- Doughy, C.J.C.S.L., Hydrologic characterization of heterogenous geologic media with an inverse method based on Iterated Functions Systems., , 1994.
- Dverstop, B., and J. Andersson, Application of the Discrete Fracture Network Concept With Field Data: Possibilities of Model Calibration and Validation, *Water Resources Research*, 25 (3), 540-550, 1989.
- Feder, J., *Fractals*, 283 pp., Plenum, New York, 1988.
- Garven, G., Continental-scale groundwater flow and geological processes, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 23, 89-117, 1995.
- Genter, A., and C. Castaing, Effets d'échelle dans la fracturation des granites, *C. T. Acad. Sci., Ser II Sci. Terr. Planet.*, 325, 439-445, 1997.
- Genter, A., C. Castaing, C. Dezayes, H. Tenzer, H. Traineau, and T. Villemin, Comparative analysis of direct (core) and indirect (borehole imaging tools) collection of data in the Hot Dry Soultz reservoir, *J. Geophys. Res.*, 102, 15419-15431, 1997.
- Gillepsie, P.A., C.B. Howard, J.J. Walsh, and J. Watterson, Measurement and characterisation of spatial distributions of fractures, *Tectonophysics*, 226, 113-141, 1993.
- Gouyet, J.F., *Physique et structures fractales*, Masson, 1992.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica*, 9, 198-208, 1983.
- Gringarten, E., Fracnet : stochastic simulation of fractures in layered systems., *Computers & Geosciences*, 1998.
- Gringarten E., 3-D geometric description of fractured reservoirs, *Mathematical Geology*, 28 (7), 881-893, 1996.
- Gupta, A., and C.H. Scholz, A model of normal fault interaction based on observations and theory, *Journal of Structural Geology*, 22, 865-879, 2000.

- Halvin, S., and D. Ben-Avraham, Diffusion in disordered media, *Advances in Physics*, 36 (6), 695-798, 1987.
- Hansen, A., E.L. Hinrichsen, and S. Roux, scale invariant disorder in fracture related breakdown phenomena, *Phys. Rev. B.*, 665-678, 1991.
- Hentschel, H.G.E., and I. Proccacia, The infinite number of generalised dimensions of fractals and strange attractors, *Physica 8D*, 435-444, 1983.
- Hermann, H.J., and L.d. Arcangelis, scaling in fracture, in *Disorder and Fracture*, edited by J.C. Charmet, S. Roux, and E. Guyon, Plenum Press, 1990.
- Hestir, K., and J. Long, Analytical expressions for the permeability of random two-dimensional Poisson fracture networks based on regular lattice percolation and equivalent media theories, *J. Geophys. Res.*, 95 (B13), 21565-21581, 1990.
- Hestir, K., J.S. Martel, S. Vail, J. Long, P. D'Onfro, and W.D. Rizer, Inverse hydrologic modeling using stochastic growth algorithm, *W.W.R.*, 1998.
- Hewett, T.A., Fractal distributions of reservoir heterogeneity and their influence on fluid transport, in *Proceedings of the 61st annual technical conference of the society of petroleum engineers*, Soc. Pet. Eng., Richardson, Tex., 1986.
- Hsieh, P.A., Scale Effects in Fluid Flow through Fractured Geologic Media, in *Scale dependance and scale invariance in hydrology*, edited by G. Sposito, pp. 335-353, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- Hsieh, P.A., A.M. Shapiro, C.C. Barton, F.P. Haeni, C.D. Johnson, C.W. Martin, F.L. Paillet, T.C. Winter, and D.L. Wright, Methods of characterizing fluid movement and chemical transport in fractured rock, in *Field Trip Guide Book for Northeastern United States*, edited by J.T. Chaney, and J.C. Hepburn, eds. Boulder, Colo.: Geological Society of America, 1993.
- Huseby, O., J.-F. Thovert, and P.M. Adler, Geometry and topology of fracture systems, *J. Phys. A*, 30, 1415-1444, 1997.
- Jaegger, J.C., and N.G.W. Cook, *Fundamentals of rock mechanics*, Ed. Hall, C. e., Londres, 1979.
- Keer, L.M., and S.H. Chen, the interaction of a pressurized crack with a joint, *J. Geophys. Res.*, 86, 1032-1038, 1981.
- Kiraly, L., Rapport sur l'état actuel des connaissances dans le domaine des caractères physiques des roches karstiques, in *Hydrogeology of karstic terrains*, edited by A. Burger, and L. Dubertret, International association of hydrogeologists, Paris, 1975.
- Korvin, G., *Fractal models in Earth sciences*, Elsevier, 1992.
- Ledésert, B., J. Dubois, A. Genter, and A. Meunier, Fractal analysis of fractures applied to Soulz-sous-forets for dry rock geothermal program, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 57, 1-17, 1993.
- Lee, S.H., M.F. Lough, and C.L. Jensen, Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales, *Water Resources Research*, 37 (3), 2001.
- Long, C.S., and D.M. Billaux, From Field data to fracture network modelling : an example incorporating spatial structure., *W.R.R.*, vol23, n° 7., 1987.
- Long, C.S., J.S. Remer, C.R. Wilson, and P.A. Witherspoon, Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures, *Water Resources Research*, 18 (3), 645-658, 1982.
- Long, J.C.S., K. Karasaki, A. Davey, J. Peterson, M. Kemeny, and S. Martel, An inverse approach to the construction of fracture hydrology models conditioned by geophysical data, *Int. J. Rock Mech. and Mining Sci. Geomech. Abstr.*, 28, 121-42, 1991.

- Makse, H.A., S. Havlin, P. Ivanov, P. King, S. Prakash, and H. Stanley, Pattern formation in sedimentary rocks: connectivity, permeability, and spatial correlations, *Physica A*, 233, 587-605, 1996a.
- Makse, H.A., S. Havlin, M. Schwartz, and H. Stanley, Method for generated long-range correlations for large systems, *Physical Review E*, 53 (5), 5445-5449, 1996b.
- Mandelbrot, B.B., *The fractal geometry of Nature*, 468 p. pp., W. H. Freeman, New York, 1982.
- Mantega, R.N., Fast, accurate algorithm for numerical simulation of Lévy stable stochastic processus, *Phys. Rev. E*, 49 (5), 1994.
- Mattauer, M., *Les déformations des matériaux de l'écorce terrestre*, 493 pp., Paris, 1973.
- McKay, L.D., R.W. Gillham, and J.A. Cherry, Field experiments in a fractured clay till. 2. Solute and colloid transport, *Water Resources Research*, 29 (12), 3879-3890, 1993.
- Meakin, P., Diffusion-limited aggregation on multifractal lattices: a model for fluid-fluid displacement in porous media, *Phys. Rev. A*, 36 (6), 2833-2837, 1987.
- Merceron, T., and B. Velde, Application to Cantor's method for fractal analysis of fractures in the Toyoha Mine, Hokkaido, Japan, *J. Geophys. Res.*, 96, 16641-16650, 1991.
- Mohrlock, U., and R. Liedl, Generating fracture networks using iterated functions systems, *Geol. Rundsch.*, 85, 92-95, 1996.
- Molz, F.J., and G.K. Boman, Further evidence of fractal structure in hydraulic conductivity distributions, *GRL*, 22 (18), 2545-2548, 1995.
- Molz, F.J., and H.H. Liu, Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology: a review, presentation of fundamental properties, and extensions, *WWR*, 33 (10), 2273-2286, 1997.
- Moreno, L., and C.-F. Tsang, Flow channeling in strongly heterogeneous porous media: A numerical study, *Water Resources Reseach*, 30 (5), 1421-1430, 1994.
- Mourzenko, V.V., J.-F. Thovert, and P.M. Adler, Percolation and conductivity of self-affine fractures, *Physical Review E*, 59 (4), 4265-4284, 1999.
- Mukhopadhyay, S., and M. Sahimi, Calculation of the effective permeabilities of field-scale porous media, *Chemical Engineering Science*, 55, 4495-4513, 2000.
- National Research Council, *Rock Fractures and Fluid Flow*, National Academy Press, Washington, D.C., 1996.
- Neretnieks, I., Solute Transport in Fractured Rock -Applications to radionuclide waste repositories, in *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*, edited by J. Bear, C.-F. Tsang, and G.d. Marsily, pp. 39-127, Academic Press, 1993.
- Noetinger, B., T. Estebenet, and P. Landereau, a direct determination of the transient exchange term of fractured media using a continuous time random walk method, *Transport in porous media*, 44 (3), 539-557, 2001.
- Odling, N., Network properties of a two dimensional fracture pattern, *Pageoph*, 138, 95-114, 1992.
- Odling, N., Scaling and connectivity of joint systems in sandstones from western Norway, *Journal of Structural Geology*, 19 (10), 1257-1271, 1997.
- Odling, N., P.A. Gillepsie, B. Bourguine, C. Castaing, J.-P. Chilès, N.P. Christensen, E. Fillion, A. Genter, C. Olsen, L. Thrane, R. Trice, E. Aarseth, J.J. Walsh, and J. Watterson, Variations in fracture system geometry and their implications for fluid flow in fractured hydrocarbon reservoirs, *Petroleum Geoscience*, 5, 373-384, 1999.
- Olsson, O., *Site characterization and validation*, Final Report, Stripa Project 92-22, Conterra AB, Uppsala, Sweden, 1992.
- Ouillon, G., C. Castaing, and D. Sornette, Hierarchical geometry of faulting, *Journal of Geophysical Research*, 101 (B3), 5477-5487, 1996.

- Ouillon, G., and D. Sornette, Unbiased multifractal analysis : Application to fault patterns, *Geophysical Research Letters*, 23 (23), 3409-3412, 1996.
- Painter, S., Random fractal models of heterogeneity: the Lévy-stable approach, *Math. Geol.*, 27, 813-830, 1995.
- Painter, S., Evidence for non-gaussian scaling behavior in heterogeneous formations, , 1996.
- Painter, S., and L. Paterson, Fractional Lévy motion as a model for spatial variability in sedimentary rock, *Geophysical Research Letters*, 21 (25), 2857-2860, 1994.
- Power, W.L., and T.E. Tullis, Euclidean and fractal models for the description of rock surface roughness, *J. Geophys. Res.*, 96 (B1), 415-424, 1991.
- Pyrak-Nolte, L.J., L.R. Myer, N.G.W. Cook, and P.A. Witherspoon, Hydraulic and mechanical properties of natural fractures in low permeability rock, in *6th international congress on rock mechanics*, edited by G. Herget, and S. Vongpaisal, pp. 224-231, Balkema, Rotterdam (The Netherlands), 1987.
- Reches, Z., Network of shear faults in the field and in experiment, in *annals of Israel Physical Society. 'Fragmentation, form and flow in fractured media*, edited by K.a. Weil, pp. 42-51, 1986.
- Renard, P., and G.d. Marsily, Calculating equivalent permeability: a review, *Advances in Water Resources*, 20 (5-6), 253-278, 1997.
- Renshaw, C.E., Connectivity of joints networks with power law length distributions, *Water Resources Research*, 35 (9), 2661-2670, 1999.
- Renshaw, C.E., and D.D. Pollard, Numerical simulation of fracture set formation : a fracture mechanics consistent with experimental observations, *Journal of Geophysical Research*, 99 (B5), 9359-9372, 1994.
- Reuschlé, T., fracture in heterogeneous medium: a network approach, *Terra Nova*, 4, 591-597, 1992.
- Robinson, Connectivity of fractures systems - a percolation theory approach., *J. Phys. A : Math. Gen.*, 16, 1983.
- Robinson, Numerical Calculations of critical densities for lines and planes., *J. Phys. A : Math. Gen.*, 1984.
- Roux, S., and A. Hansen, introduction to multifractality, in *Disorder and Fracture*, edited by J.C. Charvet, S. Roux, and E. Guyon, Plenum Press, 1990.
- Sahimi, M., *Flow and transport in porous media and fractured rocks*, 1995.
- Sahimi, M., Non-linear and non-local transport processes in heterogeneous media: from long-range correlated percolation to fracture and materials breakdown, *Physics Report*, 306, 213-395, 1998.
- Scholz, C.H., *the mechanics of earthquake and faulting*, 438 pp., Cambridge University Press, 1990.
- Schulze-Makuch, D., and D.S. Cherkauer, Method Developed for Extrapolating Scale Behavior, *Eos Trans. AGU*, 78 (1), 3, 1997.
- Segall, P., and D. Pollard, Joint formation in granitic rock of the Sierra Nevada, *Geological Society of America Bulletin*, 94, 563-575, 1983a.
- Segall, P., and D. Pollard, Nucleation and growth of strike slip fault in granite, *J. Geophys. Res.*, 88, 555-568, 1983b.
- Shapiro, A.M., and P.A. Hsieh, Research in fractured-rock hydrogeology: characterizing fluid movement and chemical transport in fractured rock at the Mirror Lake drainage basin, New Hampshire, in *U. S. Geological Survey Toxic Substances Hydrology Program-Proceedings of the technical meeting*, edited by G.E. Mallard, and D.A. Aronson, pp. 155-61, USGS, Washington, DC, Monterey, California, 1991.

- Shapiro, A.M., and P.A. Hsieh, Overview of research at the Mirror Lake site: use of hydrologic, geophysical and geochemical methods to characterize flow and transport in fractured rocks, in *U. S. Geological Survey Toxic Substances Hydrology Program-Proceedings of the technical meeting*, Colorado Springs, Colorado, 1994.
- Snow, D.T., A parallel plate model of fractured permeable media, university of California, Berkeley, 1965.
- Snow, D.T., Anisotropic permeability of fractured media, *Water Resources Research* (5), 1273-1289, 1969.
- Sornette, A.S.P.D.D., Fault Growth in Brittle-Ductile Experiments and the Mechanics of Continental Collisions., *Journal of Geophysical Research*, 1993.
- Stauffer, D., and A. Aharony, *Introduction to percolation theory, second edition*, Taylor and Francis, Bristol, 1992.
- Sudicky, E.A., and R.G. McLaren, The Laplace transform Galerkin technique for large scale simulation of mass transport in discretely fractured porous formations, *Water Resources Research*, 28 (2), 499-514, 1992.
- Taqqu, M.S., Random processes with long-range dependence and high variability, *JGR*, 92 (D8), 9683-9686, 1987.
- Tsang, C.-F., and I. Neretnieks, Flow Channeling in Heterogeneous Fractured Rocks, *Reviews of Geophysics*, 36 (2), 257-298, 1998.
- Tsang, Y.W., C. F. Tsang, Tracer transport in a stochastic continuum model of fractured media., *W.R.R.*, n° 32, 1996.
- Turcotte, D.L., *Fractals and Fragmentation.*, , 1986.
- Velde, B., J. Dubois, D. Moore, and J. Touchard, Fractal patterns of fractures in granites, *Earth and Planetary Science Letters*, 104, 25-35, 1991.
- Velde, B., J. Dubois, J. Touchard, and A. Badri, Fractal analysis of fractures in rocks : the Cantor's Dust method, *Tectonophysics*, 179, 345-352, 1990.
- Velde, B., D. Moore, A. Badri, and B. Ledésert, Fractal and length analysis of fractures during brittle to ductile changes, *J. Geophys. Res.*, 98, 11935-11940, 1993.
- Viseck, T., *Fractal growth phenomena*, 488 pp., World Scientific, London, 1992.
- Walsh, J.J., and J. Watterson, Fractal analysis of fracture pattern using the standard box-counting technique: valid and invalid methodologies, *Journal of Structural Geology*, 15, 1509-1512, 1993.
- Warren, J.E., P.J. Root, and M. Aime, The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs, *Society of Petroleum Engineers Journal*, September, 245-255, 1963.
- Wen, X.-H., and J.J. Gómez-Hernández, Upscaling hydraulic conductivities in heterogeneous media: An overview, *Journal of Hydrology*, 18., ix-xxxii, 1996.
- Witherspoon, P.A., investigations at Berkeley on fracture flow in rocks: from the parallel plate model to chaotic systems, in *Dynamics of fluids in fractured rocks*, edited by B. Faybishenko, P.A. Witherspoon, and S.M. Benson, pp. 1-58, AGU, Washington, DC, 2000.

