

**APPROCHE PÉNALISÉE
EN
TOMOGRAPHIE HELICOÏDALE.**

**Application à la conception d'un implant
personnalisé du genou**

Marc Allain^{1,2}

Co-encadrants : Yves Goussard¹, Jérôme Idier².

¹ École Polytechnique de Montréal
Montréal, Canada.

² Université Paris XI
Gif-sur-Yvette, France.

Plan de l'exposé

- I. Projet de prothèse personnalisée du genou
- II. Tomographie à rayons X : un état des lieux
- III. Vers une approche pénalisée en tomographie hélicoïdale
- IV. Autour des algorithmes « semi-quadratiques »
- V. Résumé et perspectives

Arthrite Rhumatoïde / Arthrose

Problème de santé publique : + 16 millions de cas aux États-Unis.



Une solution possible : la pose d'une prothèse articulaire...

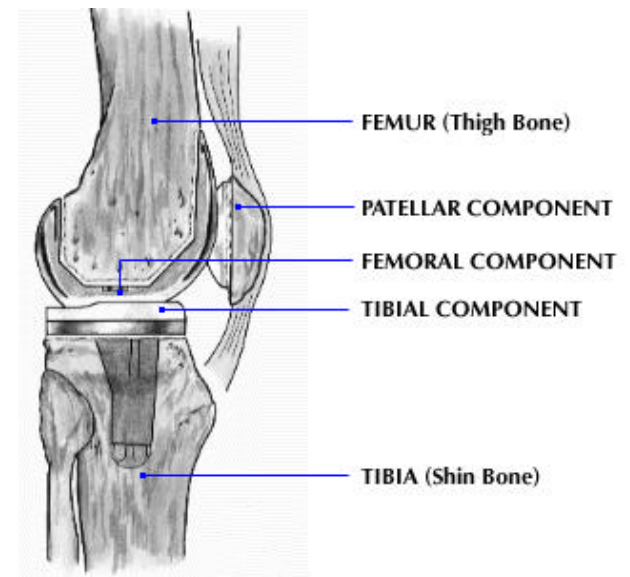
La prothèse standard

+ 200 000 implantations par année aux États-Unis...



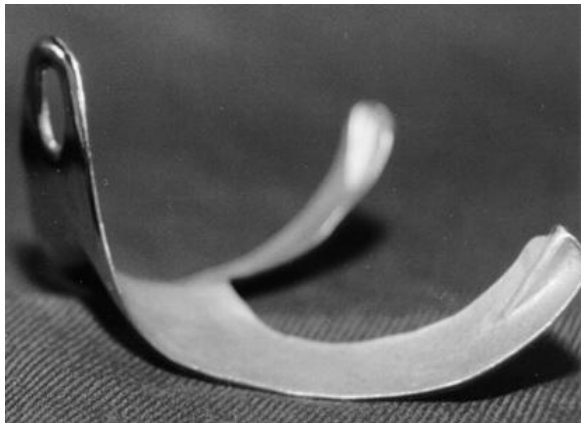
Partie fémorale

- *Chirurgie lourde*
- *viabilité < 15 ans,*
- *au + une révision.*

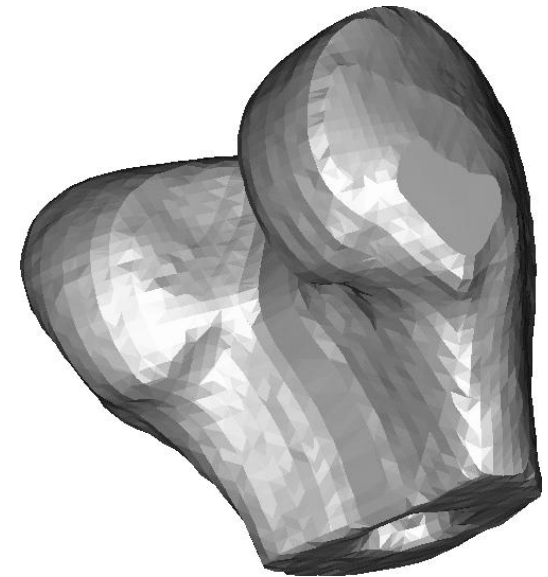


Prothèse implantée.

La prothèse personnalisée



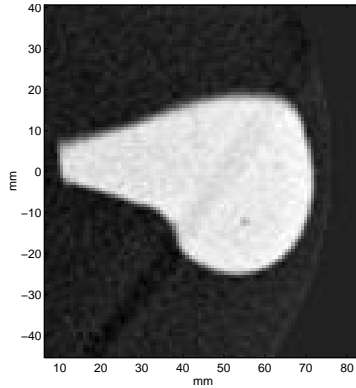
- *chirurgie mineure,*
- *demi-prothèse,*
- *révisions multiples.*



MAIS...

nécessite de connaître la surface du fémur avec précision
(≤ 1 mm).

Motivation et principe physique



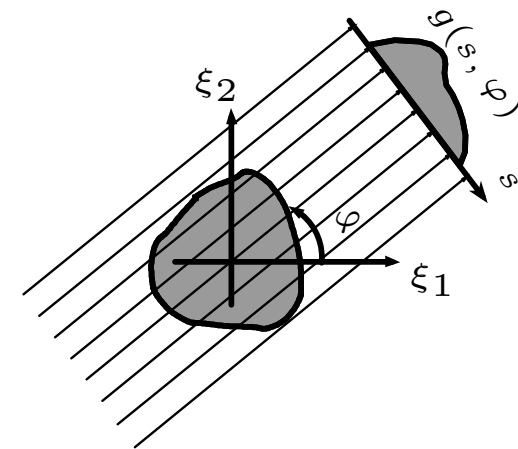
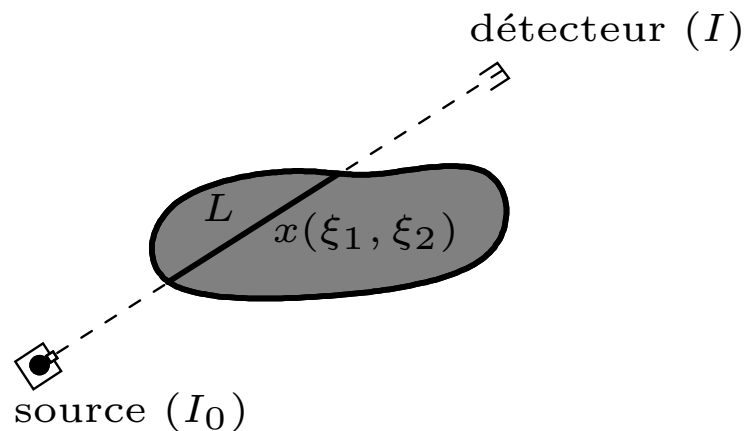
Coupe axiale

- *imagerie 2D (coupes) et 3D,*
- *large disponibilité clinique,*
- *fort contraste os / tissus mous.*



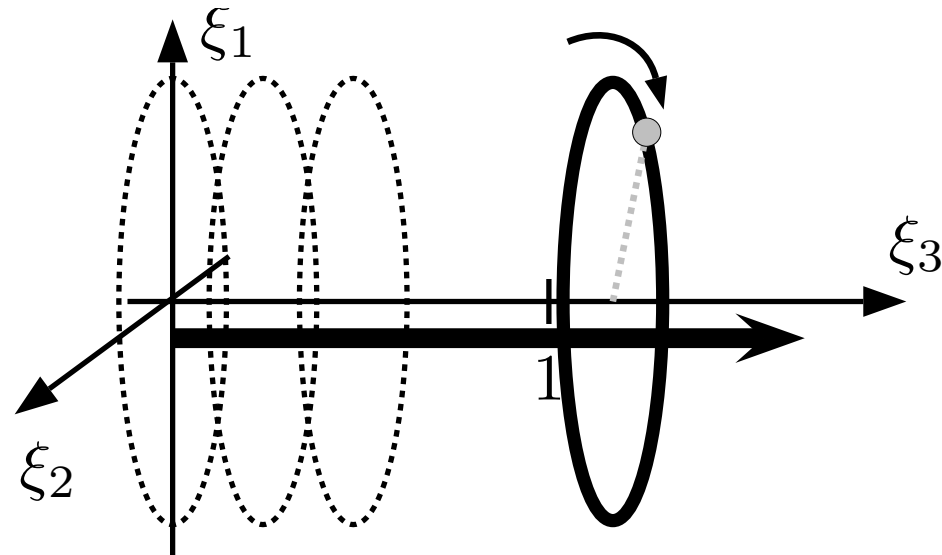
Volume

Utilise les rayons X pour produire des « projections » de l'objet.



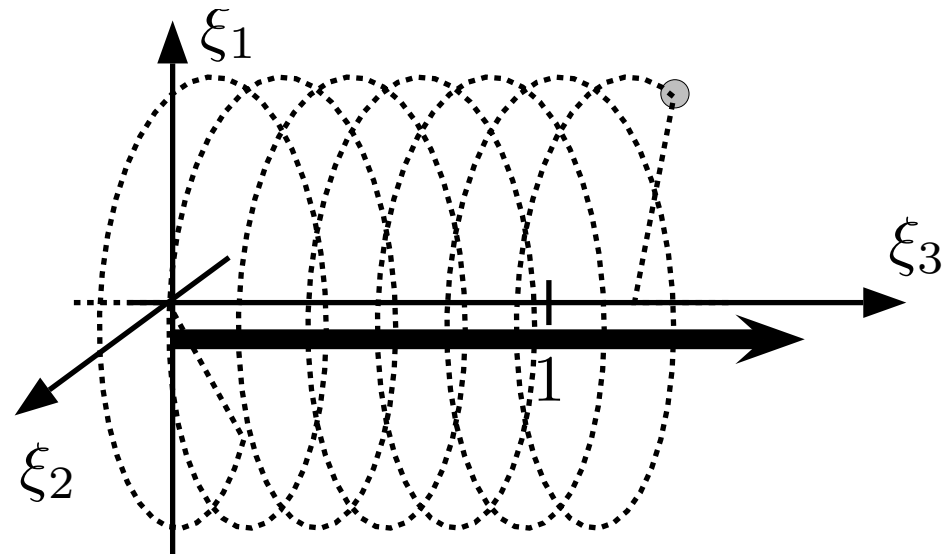
Échantillonnage du volume d'intérêt

Axial



Séparable/plan

Hélicoïdal

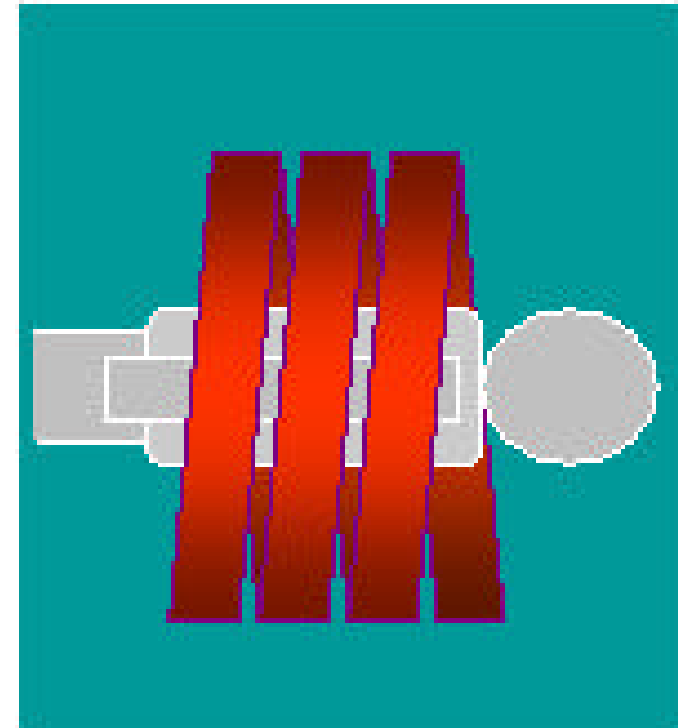


*Naturellement
3D*

Tomographie hélicoïdale

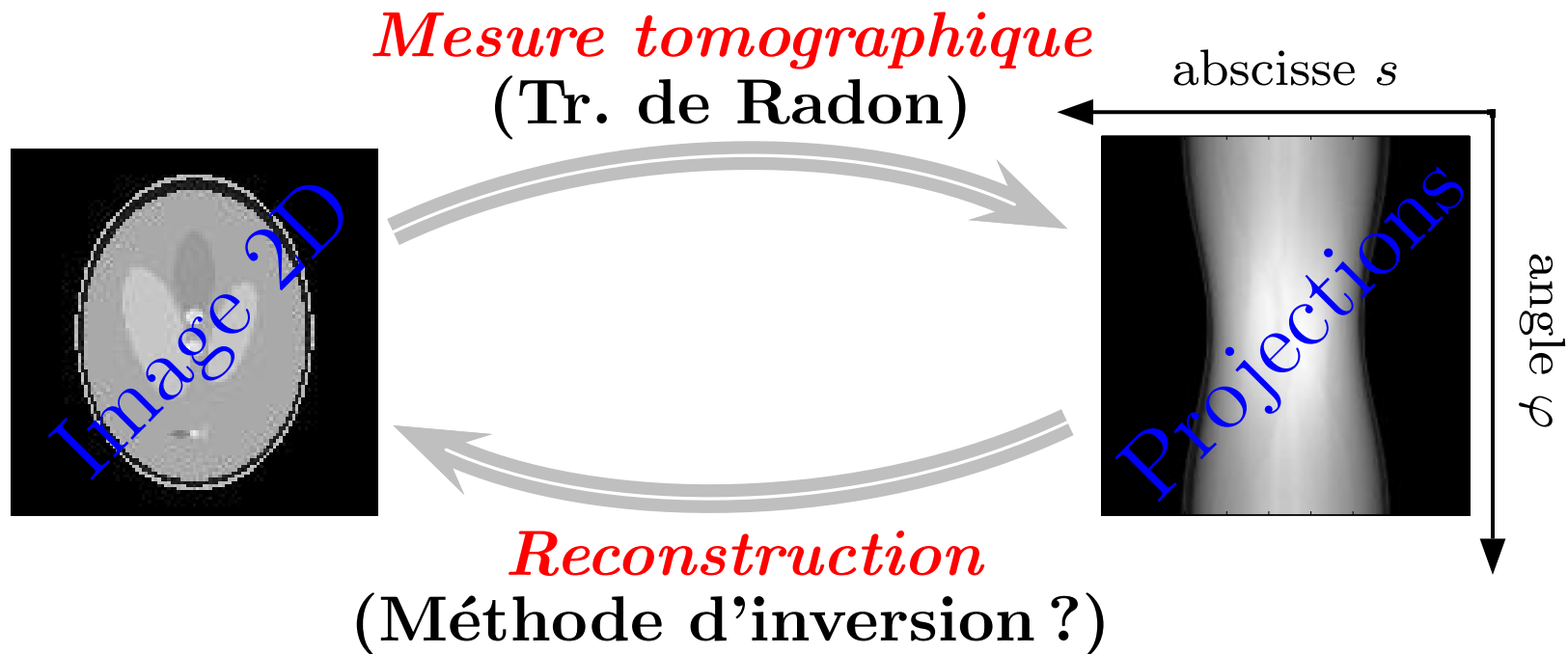
Objectif : diminuer le temps d'examen...

Mouvement de la table
+
Acquisition
EN CONTINU...



▲ DOSE ADMINISTRÉE, ▼ PRÉCISION (artefacts).

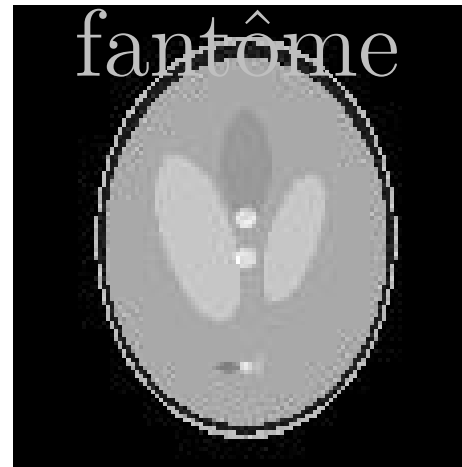
Inversion en tomographie *axiale* (i/ii)



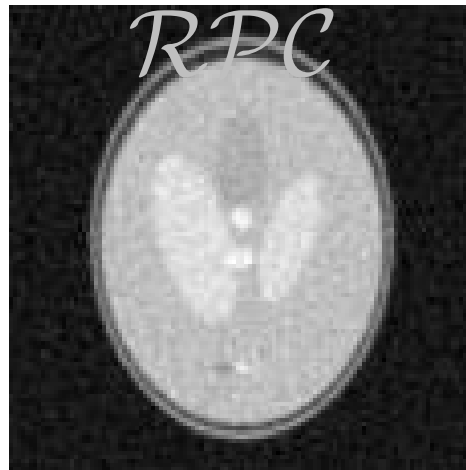
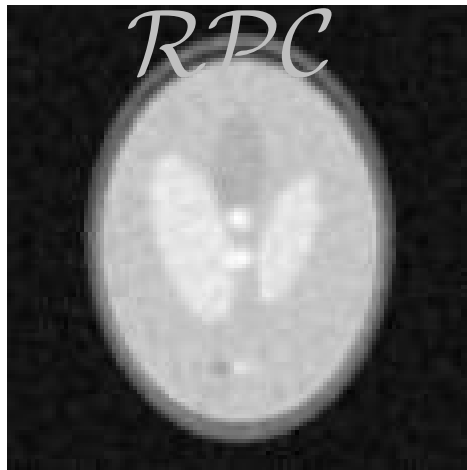
Reconstruction = problème inverse *mal posé*

Information additionnelle nécessaire pour déterminer une solution *unique* et *robuste*

Inversion en tomographie *axiale* (ii/ii)

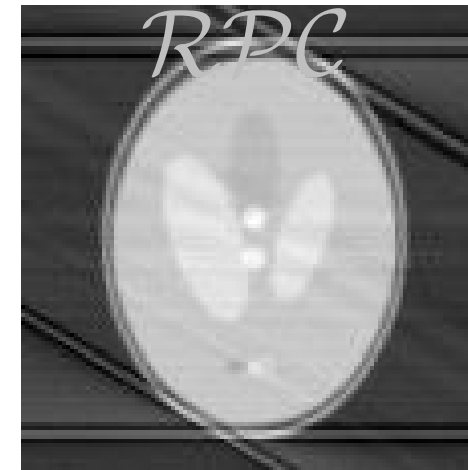


Hamming, $\nu_c = 0,3$ et $0,7$



projections bruitées $\mathcal{N}(0, 10^{-3})$

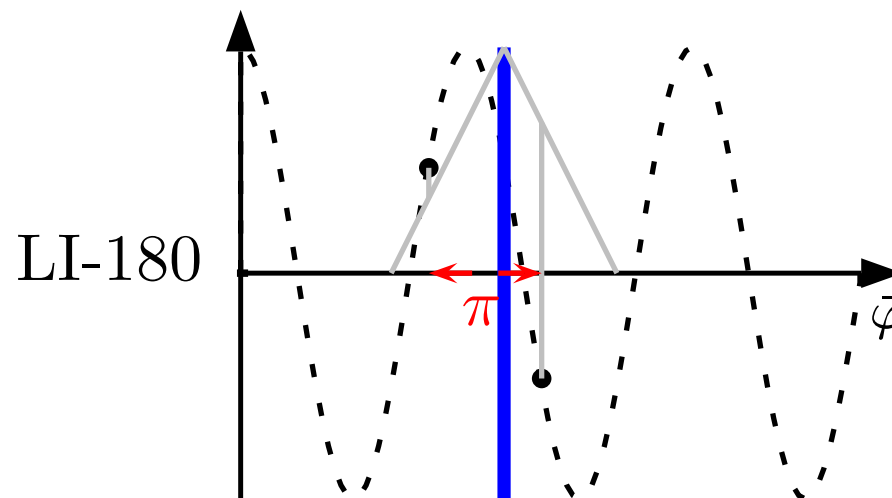
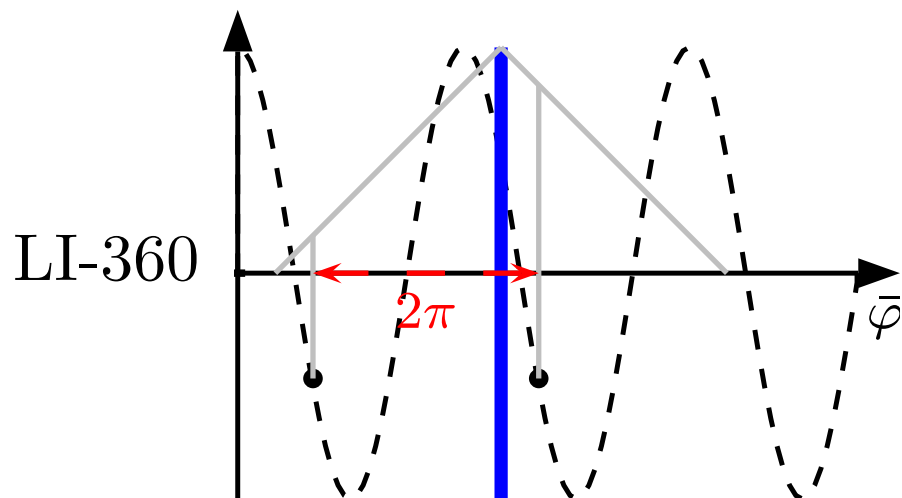
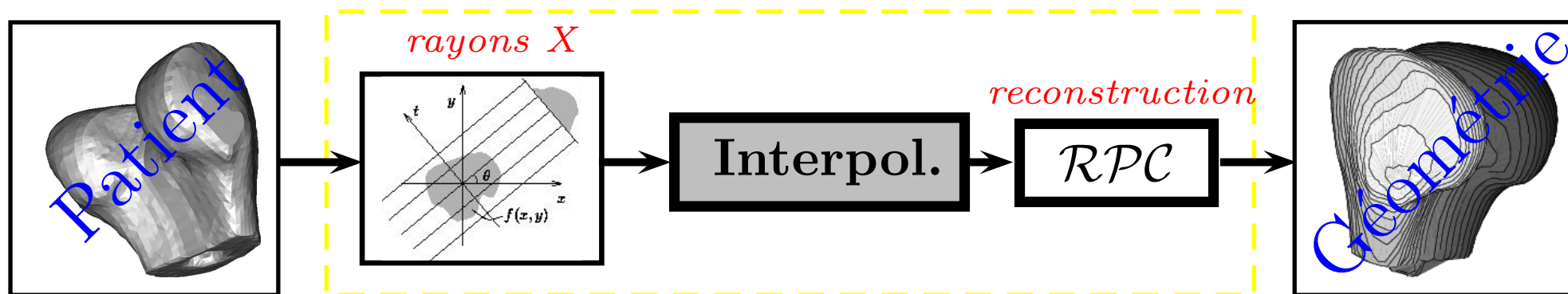
$\nu_c = 0,8$



angles $\in [0; 150^\circ]$

Inversion en tomographie *hélicoïdale* (i/ii)

Tomographe à hélice

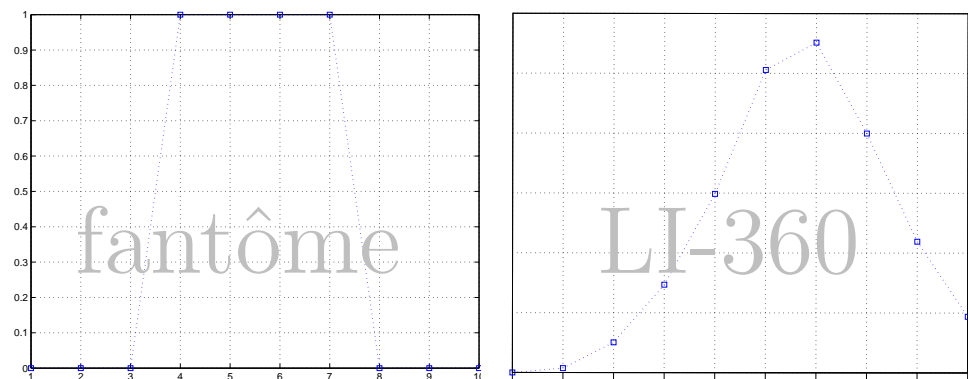


Inversion en tomographie *hélicoïdale* (ii/ii)

Interpolation + RPC \Rightarrow \blacktriangledown *précision...*

- problème 2D séparable (\blacktriangle **mise en œuvre**),
- interpolation \Rightarrow *a priori* continuité spatiale,
- sensibilité vis-à-vis de la *RPC* (angles limités).

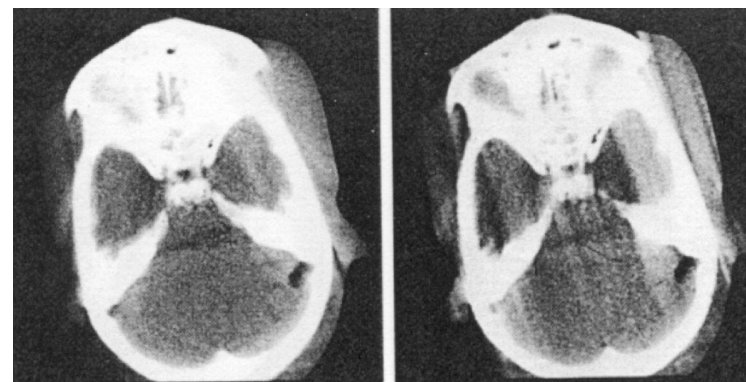
« *Slice Sensibility Profile* »



\blacktriangledown **perte de résolution**

axial

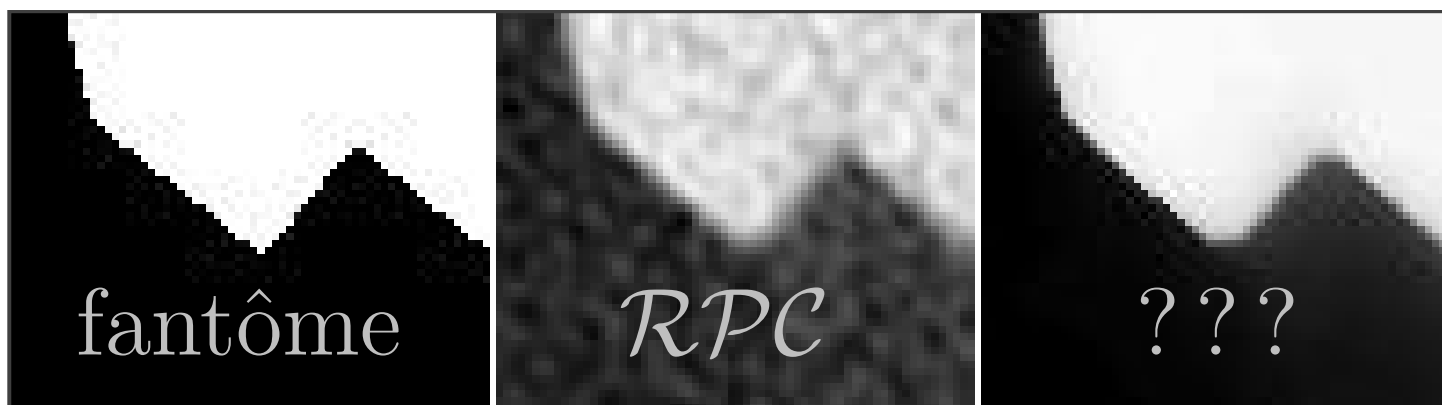
hélice



\blacktriangledown **artefacts**

En résumé...

*Tomographes standard \nrightarrow reconstruction précise
tissus mous/tissus osseux.*



Développer des méthodes permettant

- le réhaussement des interfaces,
- une réduction du niveau de bruit.

✓ tomo. axiale

✗ tomo. hélicoïdale

Approche pénalisée : formulation générique

Moindres carrés pénalisés :

définir $J(\mathbf{x}; \lambda) = \|\mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 + \lambda \mathcal{P}(\mathbf{x})$

rechercher $\hat{\mathbf{x}}_\lambda \in \{\mathbf{x} \in X : \min J(\mathbf{x}; \lambda)\}$

\mathcal{H} : modèle physique (opérateur de projection, flou, *etc*);

\mathcal{P} : fonction de pénalisation (régularisation);

$\hat{\mathbf{x}}_\lambda$, \mathbf{y} et λ : image reconstruite, observations, et paramètres libres;

X : contraintes séparables (ex. $X = \{0, \dots, 256\}$, \mathbb{R}^N , ou \mathbb{R}_+^N).

Construction de $\mathcal{H}(\cdot)$?

Choix de $\mathcal{P}(\cdot)$?



Taille du problème numérique, convexité, (hyper)paramètres.

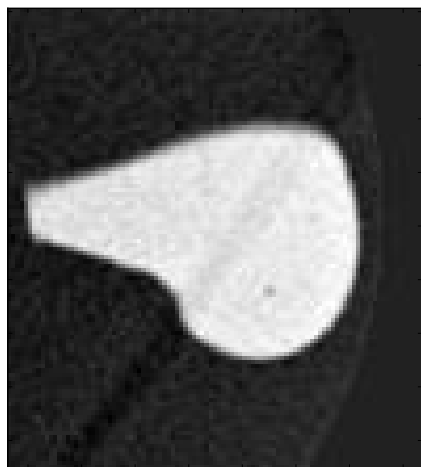
Pénalisation par modèle « l_2l_1 » (i/ii)

Objectif

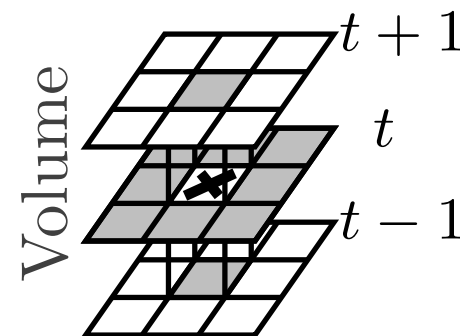
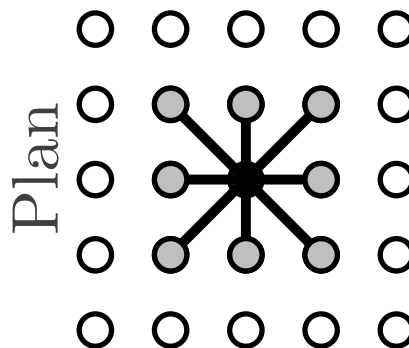
- rendre l'inversion robuste,
- favoriser certains comportements dans l'image.

En imagerie médicale, on souhaiterait

« favoriser les images localement douces + bords francs ».



Pénaliser les \neq entre pixels voisins

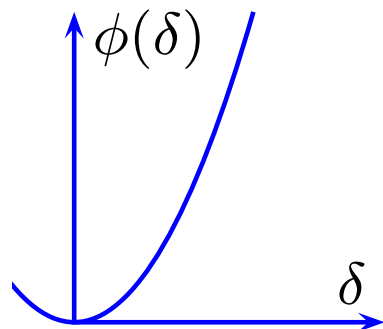


Pénalisation par modèle « l_2l_1 » (ii/ii)

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}; s) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \phi(\delta_c; s)$$

Compromis efficacité / complexité pb. optimisation

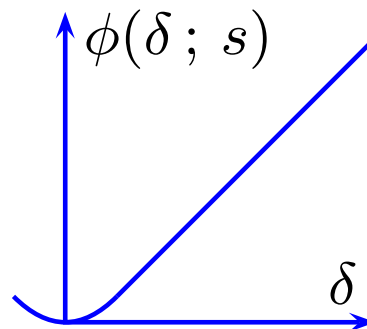
quadratique



résultats ▼ calcul ▲

[Hu77]

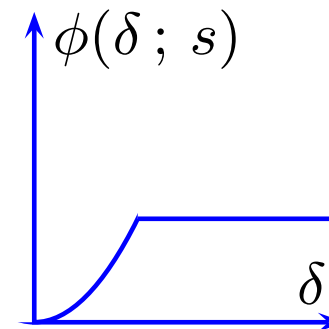
compromis « l_2l_1 »



résultats ▲ calcul ▲

[Ch97]

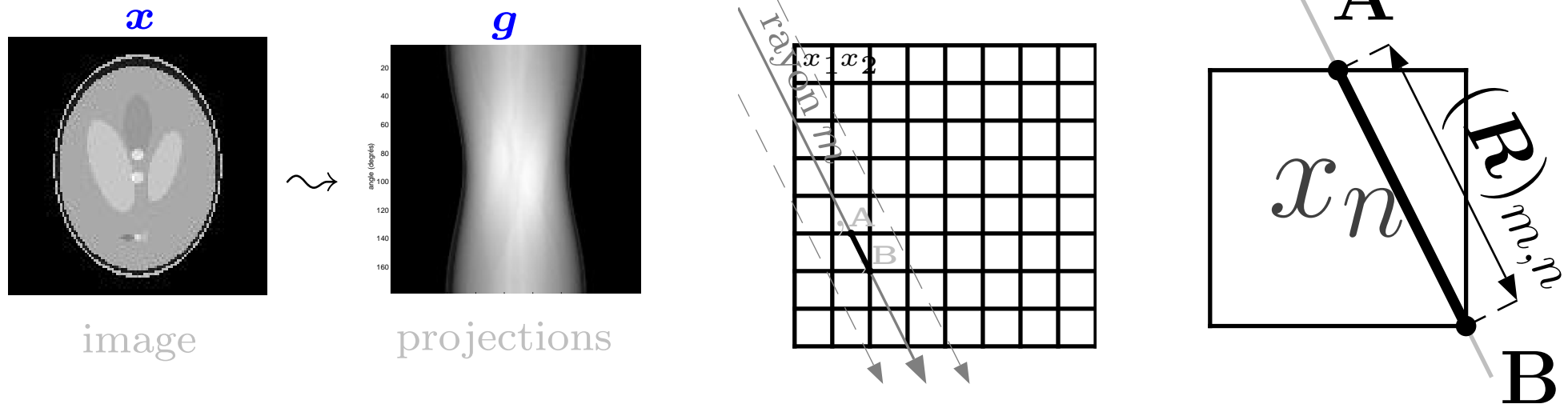
non convexe



résultats ▲ calcul ▼

[B187]

Un modèle d'observation axial [Ka87]

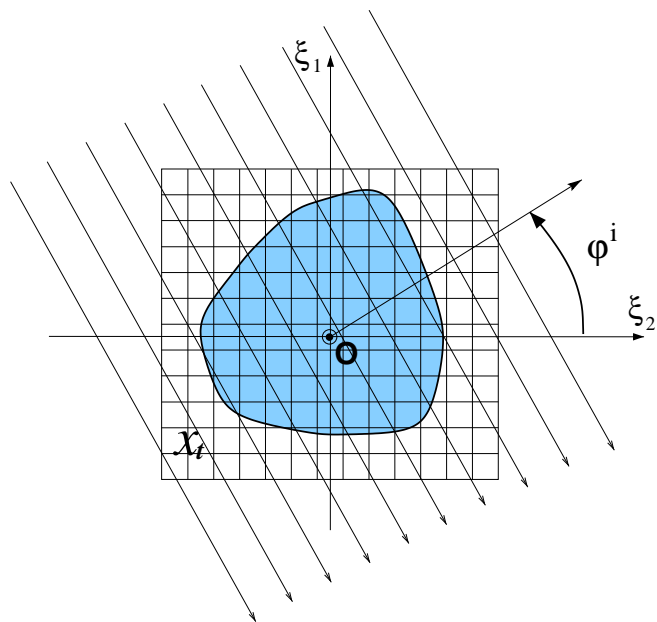


$$g = Rx$$

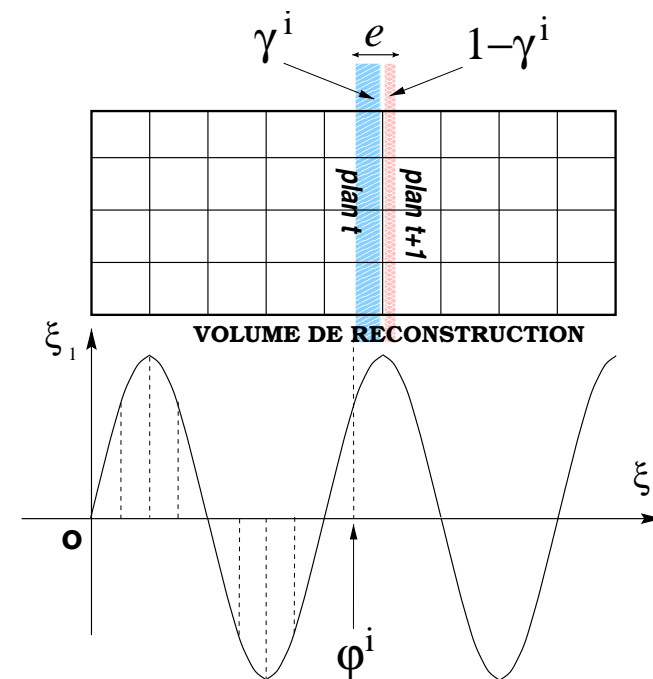
Opérateur R : *T.* de RADON d'une distribution « pixelisé »

- linéaire, creux, de grande taille, mal conditionné ;
- prise en compte de l'épaisseur, rayons divergents...

Construction d'un modèle d'observation hélicoïdale



$$g_t = R_t x_t$$



$$g = H x$$

R_t : modèle
en
projection
AXIALE

▲	Structure linéaire	▲
▼ / ▲	Taille/Creux	▼ ▼ / ▲ ▲
▼	Conditionnement	▼ ▼

H : modèle
en
projection
HÉLICOÏDALE

Forme paramétrée du modèle H

Inversion par MCP \Rightarrow Accès aux éléments de H
 Couramment 10^{15} éléments !!

H — échantillonnage qq.

$$\begin{bmatrix} \boxed{H_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{H_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{H_K} \end{bmatrix}$$

- Creuse.

H — « P invariante »

$$\begin{bmatrix} \boxed{H_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{H_r} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{\widehat{H}_r} \end{bmatrix}$$

- Creuse et quasi bloc-circulante.

« P invariance »

- H décrit par un ensemble réduit de paramètres,
- nécessite simplement d'ajuster le volume d'intérêt.

Minimisation SOR « semi quadratique » [Br96]

Objectif : Maîtrise du coût d'implantation...

Relaxation scalaire : principe

$$\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad J_n(u) \equiv J(\mathbf{x}^{(k)} + v\mathbf{e}_n)$$

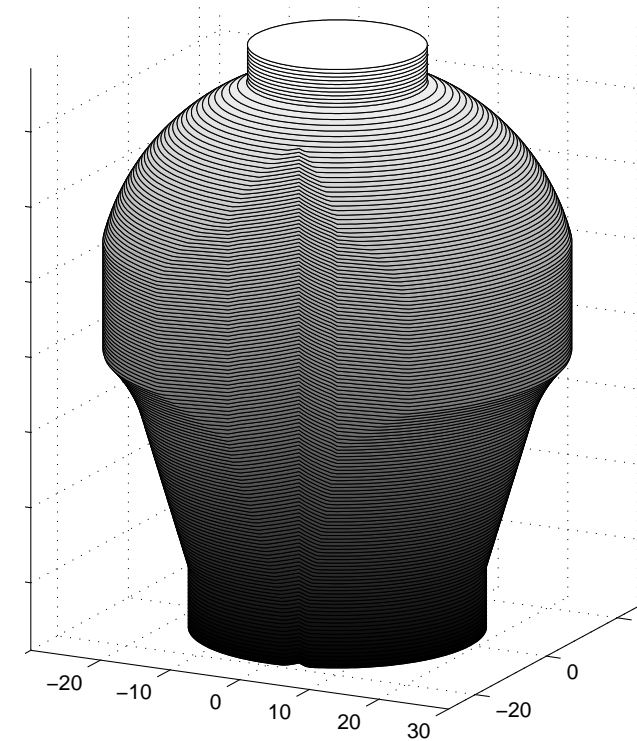
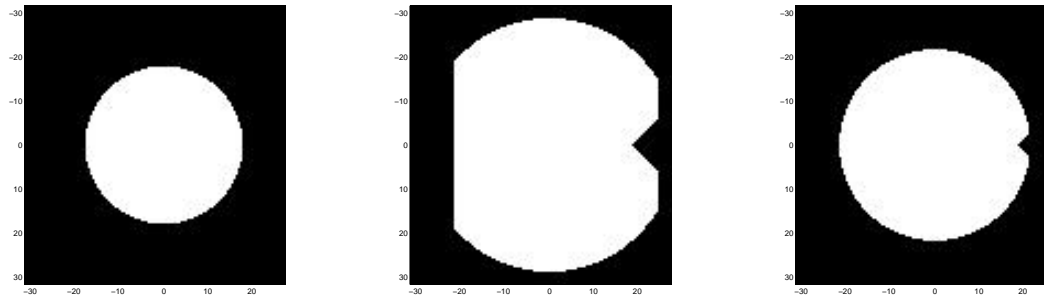
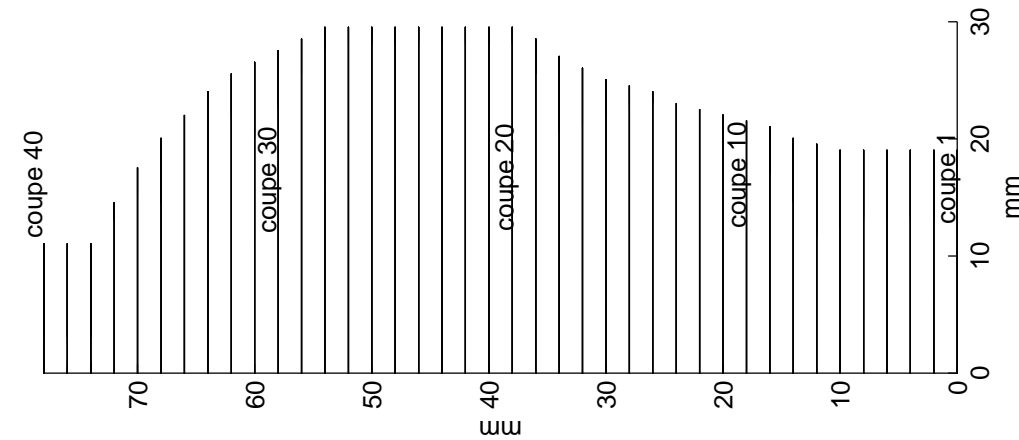
$$\hat{x}_n = \arg \min_{v \in X_n} J_n(v)$$

Mise en œuvre : SOR semi-quadratique (GR)

- (▲) **coût de calcul** : min. scalaire tronquée (1 itération) ;

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \theta (b_{\text{GR}}^{(k)})^{-1} \left. \frac{dJ_n}{dv} \right|_{u=0}$$
- (▶) **coût mémoire** : principalement le modèle paramétré \mathbf{H}_r ;
- (▲) **convergence** :
 - globale \Leftarrow travaux sur les algo. SQ.
 - bonne vitesse, cf. tomo. axiale [Er99].

Tests sur données synthétiques (i/iii)

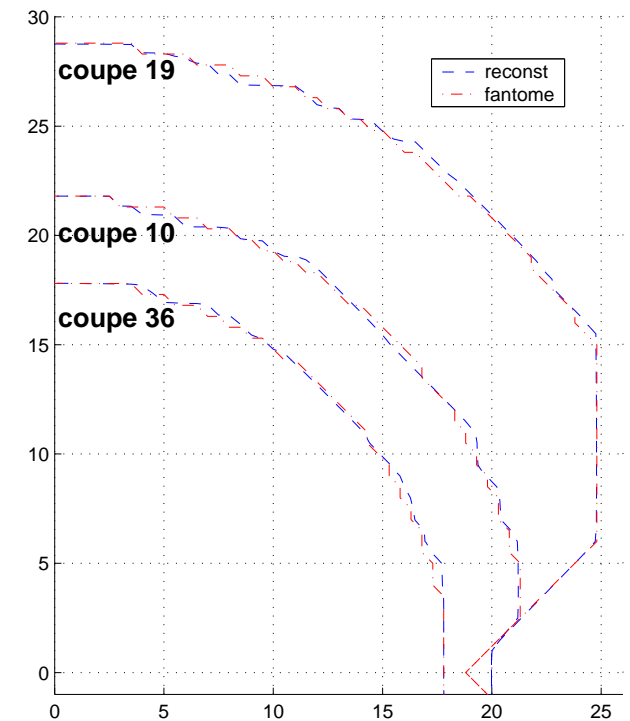
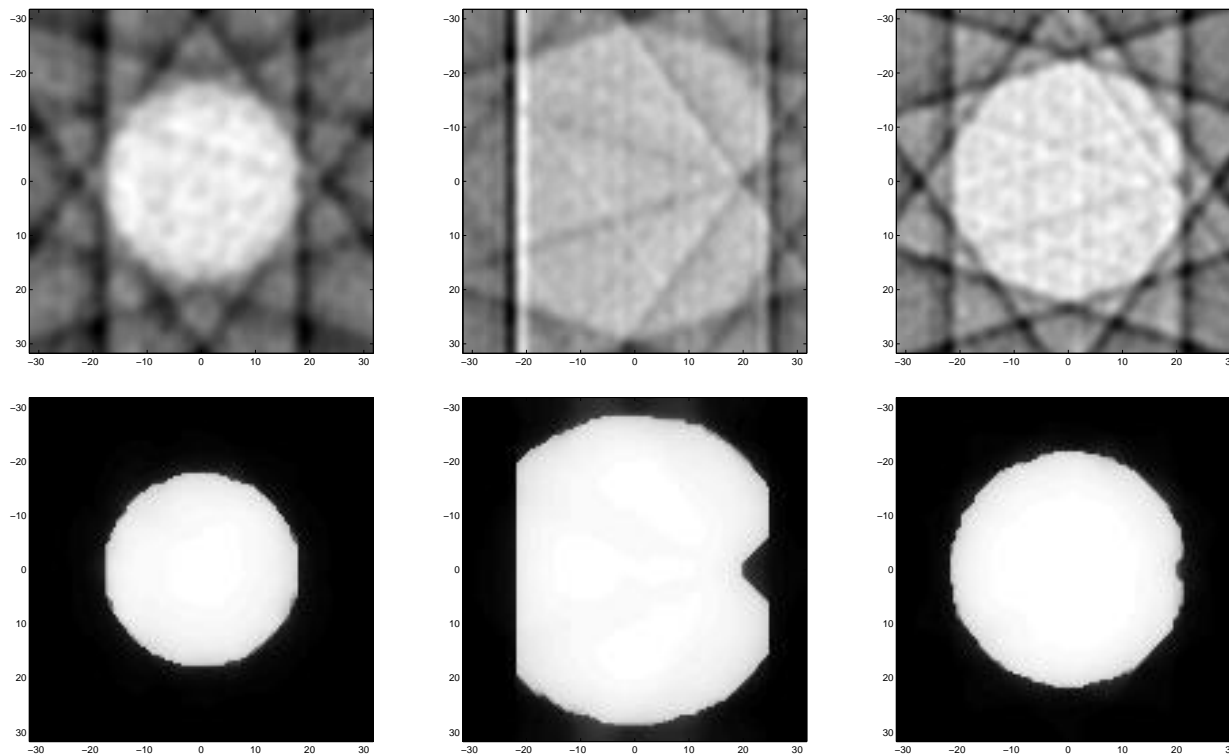


fantôme de 40 coupes de 127×127 pixels (> 640000 variables)

Tests sur données synthétiques (ii/iii)

Projections bruitées (additif gaussien centré, $RSB \approx 30dB$)

RPC + LI - 180°

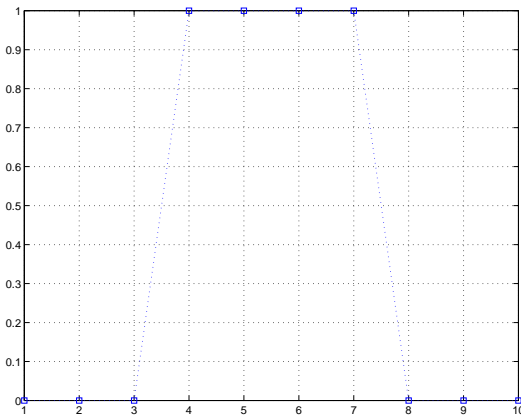


approche pénalisée (l_2l_1)

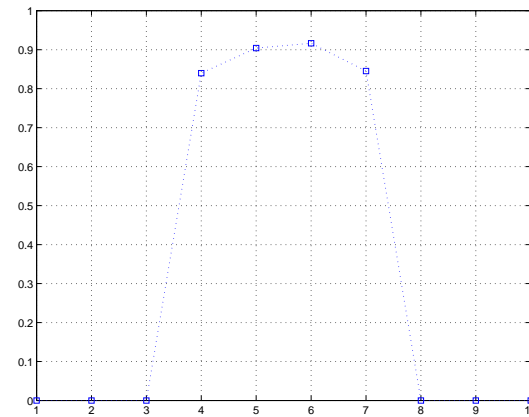
temps de reconst. ≈ 160 s

Tests sur données synthétiques (iii/iii)

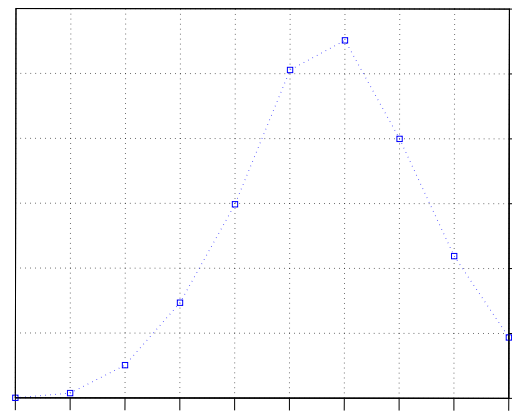
« SSP » : ↗ résolution dans l'axe du tomographe.



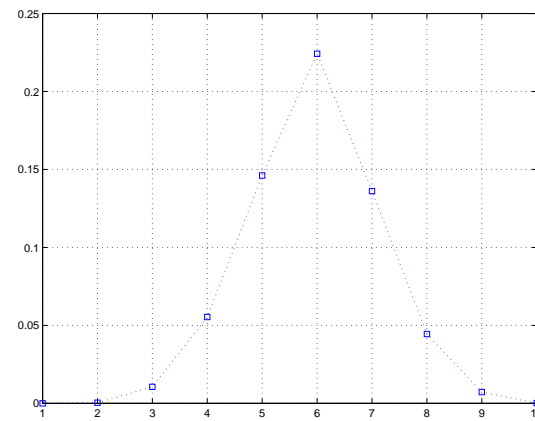
fantôme



l_2l_1



LI-360



LI-180

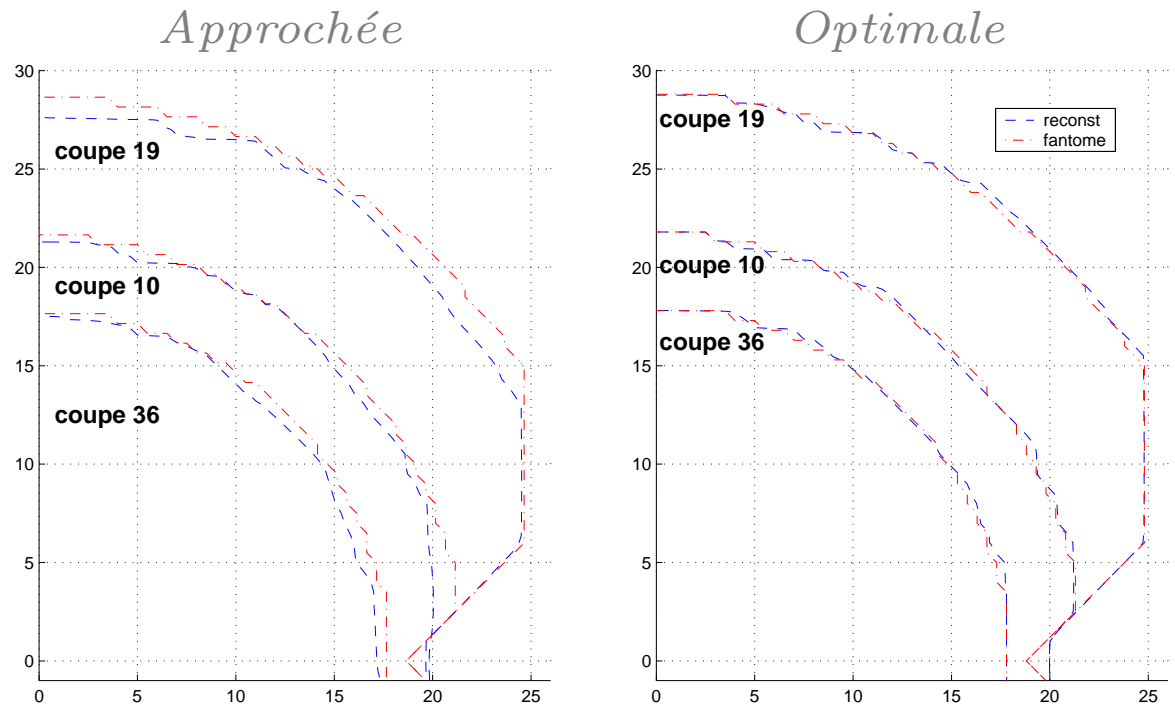
Approximation du modèle d'observation

Objectif : réduire le coût des reconstructions hélicoïdales pénalisées.

Moyen : estimer approximativement les T plans successifs.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{y}}_t} \approx \underline{\mathbf{H}}_t \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t+1} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_t},$$

$\underline{\mathbf{H}}_t$ regroupe $\{\mathbf{H}_{t-1}, \mathbf{H}_t\}$.



Obtenu en minimisant $J_t(\underline{\mathbf{x}}_t) = \|\underline{\mathbf{y}}_t - \underline{\mathbf{H}}_t \underline{\mathbf{x}}_t\|^2 + \alpha \mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_t)$.

En résumé...

- ❑ *Approche pénalisée en tomographie hélicoïdale*
 - Construction d'un modèle d'observation
 - Utilisation d'une forme paramétrée
 - Conception d'une version « rapide » (diagnostic)
- (▲) *Performances sur données synthétiques*
 - Amélioration significative de qualité
(robustesse, diminution des artefacts, gain de résolution)
 - Bons résultats pour la version « rapide »
 - ↘ dose administrée au patient (diagnostic)
- (▶) *Coût d'implantation élevé*

Perspectives...

- ❑ *validation sur données réelles*
- ❑ *réglage des hyperparamètres (calibration)*
- ❑ *explosion du coût d'implantation !!*
 - *augmentation du nombre de mesures, de la taille du volume,*
 - *modélisation plus fine du phénomène physique,*
 - *extension aux tomographes « multicoupes »...*

Incontournable :

Étude approfondie (méthodologie et mise en œuvre)
du problème de minimisation du critère pénalisé associé.

Formulation et motivation

Soit $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ str. convexe, coercive et C^1

$$J(\mathbf{x}) \equiv Q(\mathbf{x}) + \sum_c \phi(\mathbf{d}_c^\dagger \mathbf{x} - w_c)$$

- avec
- $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (str. convexe, coercive et C^1)
 - $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{Q} \mathbf{x} - 2\mathbf{q}^\dagger \mathbf{x} + \mu$ (quadratique convexe).

▣ Estimation paramétrique robuste [Ya85]

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{m=1}^M \phi \left(z_m - \sum_{n=1}^N a_n z_{m-n} \right)$$

▣ Restauration/reconstruction d'images [Sa93, Vi02]

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \sum_{(r,s) \in \mathcal{C}} \phi(x_s - x_r)$$

ϕ : quadratique, hyperbolique, norme ℓ_p , Huber...

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in X} J(\boldsymbol{x})$$

- (▲) **Simplicité formelle** (prog. convexe et diff.) ;
- (▲) **problème souvent structuré** (creux, Toeplitz,...) ;
- (▼) **en général, $\hat{\boldsymbol{x}}$ n'a pas de forme explicite** ;
- (▼) **très grande taille** ($N, M > 10^6$ variables).

Formulation SQ \rightsquigarrow problème + structuré.

Approches semi-quadratiques (SQ)

Définir un critère *primal/dual* $J^* : X \times L \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\min_{\mathbf{l}} J^*(\cdot, \mathbf{l}) = J$$

- $J^*(\cdot, \mathbf{x})$ *quadratique*,
- $\min_{\mathbf{l}} J^*(\mathbf{l}, \cdot)$ *explicite*.

\Rightarrow minimisation par relaxation !

□ Geman & Reynolds [Ge92] :

$$\phi(\sqrt{u}) \text{ concave} \quad \Rightarrow \quad J_{\text{GR}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l})$$

□ Geman & Yang [Ge95] :

$$\exists \alpha : u^2/2 - \alpha\phi(u) \text{ convexe} \quad \Rightarrow \quad J_{\text{GY}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}; \alpha).$$

Relaxation SQ : algorithmes & convergences

① M.à.j. alternée \mathbf{x} et l [Ch97] :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}} J^*(\mathbf{x}, l^{(k)}) \rightsquigarrow \text{ système linéaire,} \\ l^{(k+1)} = \arg \min_l J^*(\mathbf{x}^{(k+1)}, l) \rightsquigarrow \text{ directe.} \end{cases}$$

② M.à.j. « SSU » [Br96, Al00] : $\forall n \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{cases} x_n^{(k+1)} = \arg \min_{x_n} J^*(x_n, \text{reste}) \rightsquigarrow \text{ m.à.j. scalaire,} \\ \forall m \in \{i : l_i \text{ est lié à } x_n^+\}, \\ l_m^{(k+1)} = \arg \min_{l_m} J^*(l_m, \text{reste}) \rightsquigarrow \text{ directe.} \end{cases}$$

● Formes *sur-relaxées* (variables primales) :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1 - \theta)\mathbf{x}^{(k)} + \theta\tilde{\mathbf{x}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} J^*(\mathbf{x}, l^{(k)}).$$

▣ **Convergence globale** [Id00] : principalement,

$$\text{si } \theta \in]0, 2[\text{ et } \begin{cases} \text{(GR)} & \phi \text{ paire ; } \phi'(u)/u \text{ bornée,} \\ \text{(GY)} & \alpha \in]0 ; \hat{\alpha}[, \end{cases}$$

alors $J^*(x, l)$ strict. convexe & $C^1 \Rightarrow$ convergence [Be98].

▣ **Vitesse asymptotique** : peu de résultats...

- GR (m.à.j. alternée x et l) : ordre linéaire [Ch99].
- Comparaisons entre formes SQ ?
- Effet des paramètres α, θ ?...

Forme primale des algorithmes SQ

$$L(\mathbf{u}) \equiv \text{diag} \left\{ \phi'(\mathbf{d}_c^t \mathbf{u}) / \mathbf{d}_c^t \mathbf{u} \right\},$$

$$D \equiv [\mathbf{d}_1 | \cdots | \mathbf{d}_C],$$

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) \equiv -B(\mathbf{u})^{-1} \nabla J(\mathbf{u})$$

$$\mu_n(\mathbf{u}) \equiv -b_n(\mathbf{u})^{-1} \left. \frac{dJ_n(v)}{dv} \right|_{v=0}.$$

① M.à.j. alternée \mathbf{x} et l : **Forme newtonnienne sur J**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad B(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{cases} 2Q + \frac{1}{\alpha} DD^t & \text{(GY)} \\ 2Q + DL(\mathbf{x}^{(k)})D^t & \text{(GR)} \end{cases}$$

② M.à.j. « SSU » : **SOR tronquée (1 it.) sur J**

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \theta \mu_n(\mathbf{x}^{(k)}), \quad b_n(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{cases} [2Q + \frac{1}{\alpha} DD^t]_{n,n} & \text{(GY)} \\ [2Q + DL(\mathbf{x}^{(k)})D^t]_{n,n} & \text{(GR)} \end{cases}$$

Algo. SQ \Leftrightarrow algo. de descente à pas fixe...

CS de convergence pour le pas fixe et algorithmes SQ

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) = -\mathbf{B}(\mathbf{u})^{-1} \nabla J(\mathbf{u}).$$

□ **Résultat général** : Algorithme à pas fixe convergent si

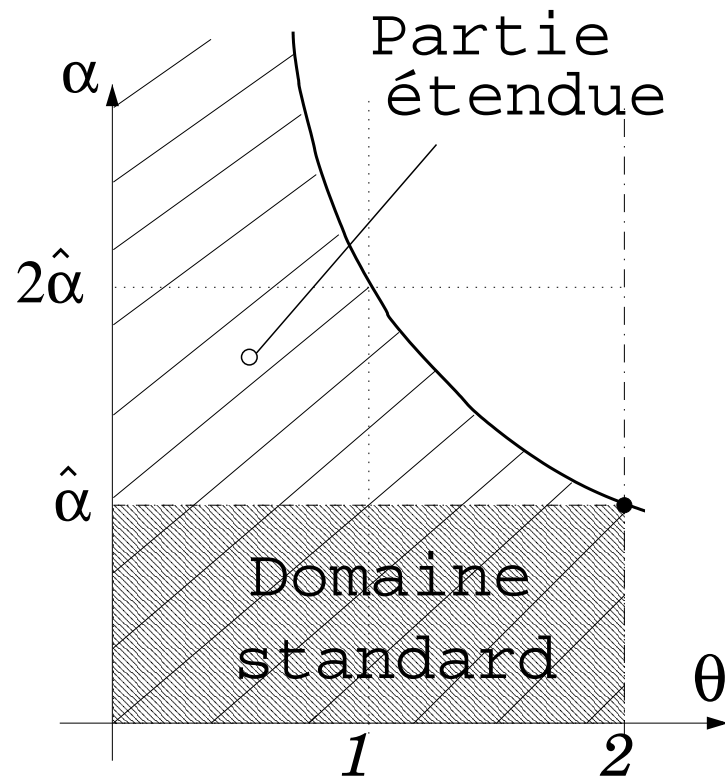
Ⓐ $\Xi = \{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}^{(k)})\}_k$ est reliée au gradient,

Ⓑ $\forall \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{u}$, le pas fixe θ vérifie la règle d'ARMIJO

$$\exists \omega \in (0, 1) : \forall \mathbf{u}, J(\mathbf{u} + \theta \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u})) - J(\mathbf{u}) - \omega \theta \langle \nabla J(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}) \rangle \leq 0.$$

□ **Corollaire GR** : apport limité...

□ **Corollaire GY** : CS de convergence plus faibles !



Expérimentalement,

$(\theta, \alpha) \in \ll \text{partie étendue} \gg \Rightarrow \text{convergence} + \text{rapide} !$

Vitesse asymptotique des algo. SQ

J de classe C^2 , $\rho[\cdot]$ le *rayon spectral*, et $\mathbf{H}(\cdot)$ le *Hessien*.

$$\sigma \equiv \rho[\mathbf{I} - \theta \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})]$$

▣ **Résultat général [Or70]** : si $\sigma < 1$, alors l'*ordre* est au moins linéaire et le *taux en racine* égal à σ .

▣ **Questions...**

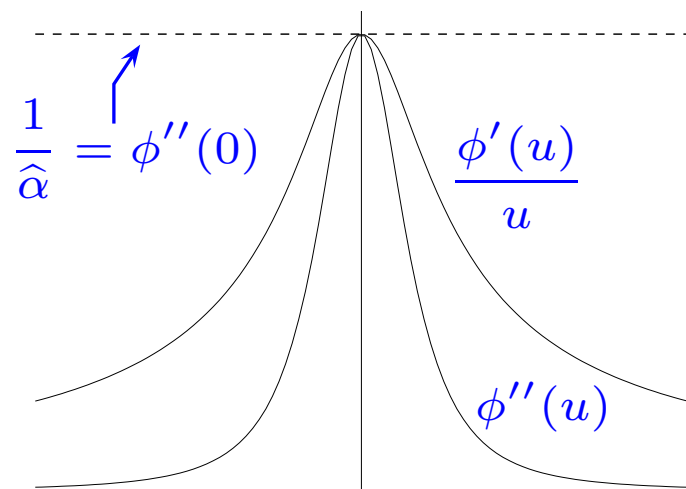
- (1) Une forme SQ est elle syst. + rapide (GY ou GR) ?
- (2) Quel est l'effet des paramètres θ (et α) ?

$$\text{(GR)} \quad \sigma(\theta) \equiv \rho[\mathbf{I} - \theta \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})]$$

$$\text{(GY)} \quad \sigma(\theta, \alpha) \equiv \rho[\mathbf{I} - \theta \mathbf{B}(\alpha)^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})]$$

(1) Comparaison des \neq formulations SQ.

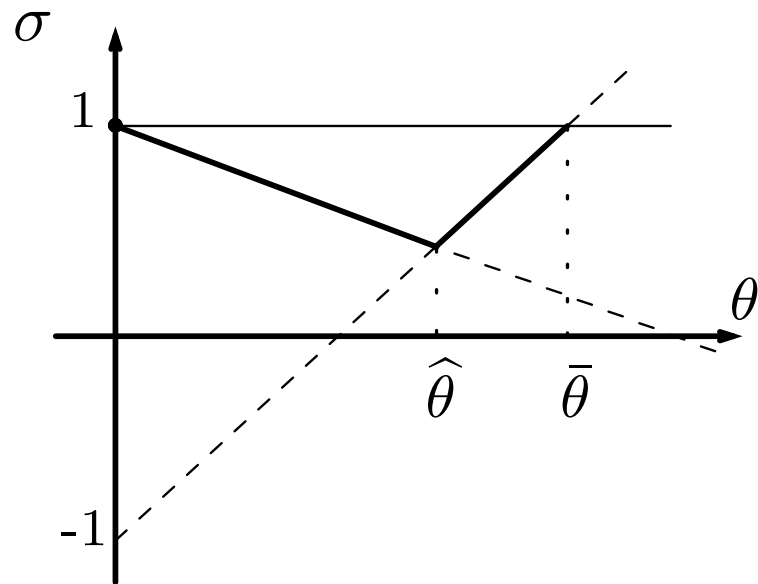
$$\begin{array}{l} \text{(GR)} \quad B(\hat{\mathbf{x}}) = 2\mathbf{Q} + \mathbf{D}\mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{D}^t, \\ \text{(GY)} \quad B(\alpha) = 2\mathbf{Q} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{D}\mathbf{D}^t \end{array} \quad \text{et} \quad H(\hat{\mathbf{x}}) = 2\mathbf{Q} + \mathbf{D}\Phi''(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{D}^t.$$



$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \text{diag} \left\{ \frac{\phi'(\mathbf{d}_c^t \mathbf{u})}{\mathbf{d}_c^t \mathbf{u}} \right\}$$

$$\Phi''(\mathbf{u}) = \text{diag} \left\{ \phi''(\mathbf{d}_c^t \mathbf{u}) \right\}$$

- **GY & GR** \Leftrightarrow **Newton** si J quadratique $\theta = 1$, et $\alpha = \hat{\alpha}$
- **En pratique**, GR nécessite moins d'itérations que GY.
- **GY peut être plus intéressant** (compromis vitesse/coût)

(2) Impact de θ et α sur la vitesse

$$(GR) \quad \sigma(\theta) \equiv \rho[\mathbf{I} - \theta \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})]$$

$$(GY) \quad \sigma(\theta, \alpha) \equiv \rho[\mathbf{I} - \theta \mathbf{B}(\alpha)^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})]$$

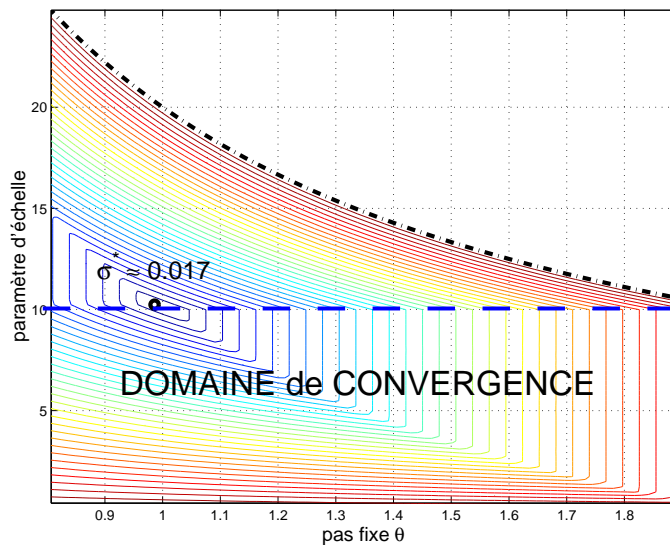
□ Itérations de GR/GY :

$\hat{\theta}$ difficilement accessible \rightarrow réglage empirique.

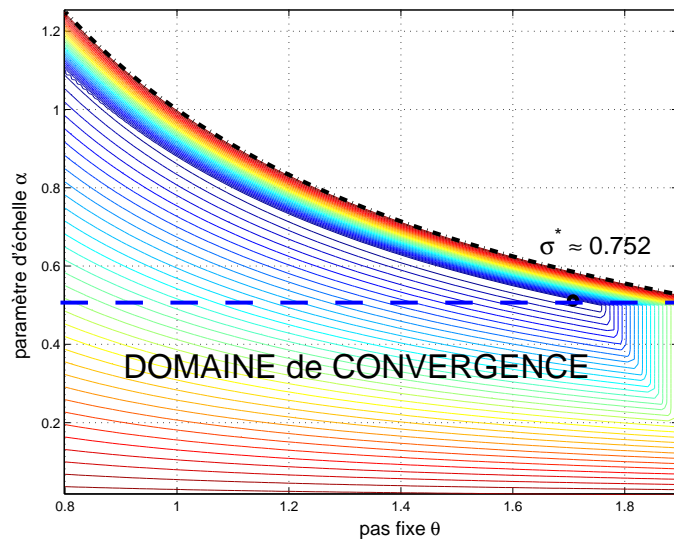
Itérations de GY :

optimum souvent proche de l'hyperbole... mais pas toujours !

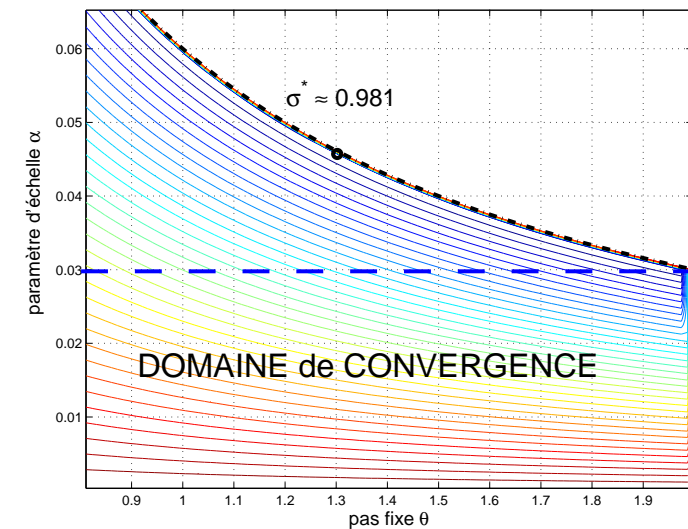
$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \alpha \sum_c \sqrt{d_c^t \mathbf{x}^2 + s^2}$$



$$s = 10$$



$$s = 0,5$$



$$s = 0,03$$

Résumé et perspectives...

□ *Une nouvelle étude des algorithmes SQ*

- s'appuie sur un cadre unifié et connu (analyse numérique),
- condition de convergence étendues \rightsquigarrow variantes plus rapides,
- examen des propriétés de vitesse (ordre linéaire, impact de θ , α),

□ *Quelques perspectives*

- étudier le comportement de $\sigma(\alpha, \theta)$,
- étude du lien « algorithme SQ \leftrightarrow approximation supérieure »,
- algorithmes dédiés aux pb. de grande taille (l-bfgs, décomposition).