



Torsion de Reidemeister non abélienne et forme volume sur l'espace des représentations du groupe d'un noeud

Jérôme Dubois

► To cite this version:

Jérôme Dubois. Torsion de Reidemeister non abélienne et forme volume sur l'espace des représentations du groupe d'un noeud. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2003. Français. NNT: . tel-00003782

HAL Id: tel-00003782

<https://theses.hal.science/tel-00003782>

Submitted on 18 Nov 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Jérôme Dubois

**TORSION DE REIDEMEISTER NON
ABÉLIENNE ET FORME VOLUME SUR
L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS DU
GROUPE D'UN NŒUD**

Jérôme Dubois

Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Blaise Pascal,
24, Avenue des Landais, 63177 AUBIÈRE CEDEX (France).

E-mail : `jerome.dubois@math.univ-bpclermont.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 57M25; 57Q10; 57M27.

Mots clefs. — Groupe de nœuds; Espace de représentations; $SU(2)$; Représentation adjointe; Forme volume; Torsion de Reidemeister.

10 octobre 2003

À ma grand-mère maternelle, Marie-Elise Amouroux, in memoriam...

TORSION DE REIDEMEISTER NON ABÉLIENNE ET FORME VOLUME SUR L'ESPACE DES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE D'UN NŒUD

Jérôme Dubois

Résumé. — Pour un nœud K dans S^3 , on construit dans l'esprit de Casson – et plus précisément en s'inspirant des travaux ultérieurs de Lin (cf. [Lin92]) et Heusener (cf. [Heu03]) – une forme volume sur l'espace des représentations du groupe G_K du nœud K dans $SU(2)$. Plus exactement, si $\mathcal{R}eg(K)$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison des représentations régulières de G_K dans $SU(2)$, alors $\mathcal{R}eg(K)$ est une variété unidimensionnelle et on établit qu'elle possède aussi une 1-forme volume naturelle (voir Chapitre 3). On montre ensuite comment on peut interpréter cette forme volume en termes de torsion de Reidemeister non abélienne (voir Chapitres 2 & 4). On termine par des exemples (voir Chapitre 5) : le calcul explicite de la forme volume que l'on vient de construire pour les nœuds toriques et les nœuds fibrés ainsi que celui de la torsion de Reidemeister des sphères d'homologie de Brieskorn à coefficients dans la représentation adjointe. On étudie également le comportement (à signe près) de la forme volume que l'on a construite sous l'effet d'une mutation.

Abstract (Non abelian Reidemeister torsion and a volume form on the $SU(2)$ -representation space of knot groups)

For a knot K in S^3 , we construct according to Casson – or more precisely taking into account Lin's [Lin92] and Heusener's [Heu03] further works – a volume form on the $SU(2)$ -representation space of the group G_K of the knot K . More precisely, let us denote by $\mathcal{R}eg(K)$ the set of $SO(3)$ -conjugacy classes of *regular* representations of G_K into $SU(2)$, then $\mathcal{R}eg(K)$ is a one-dimensional manifold and we prove that $\mathcal{R}eg(K)$ also carries a natural 1-volume form (see Chapter 3). Next, we show how to interpret this volume form as a non abelian Reidemeister torsion (see Chapters 2 & 4). Finally, we give an explicit computation of this volume form for torus knots and fibered knots and we also compute the Reidemeister torsion of the Brieskorn homology spheres with coefficients in the adjoint representation (see Chapter 5). Furthermore, we study the behavior of this volume form under mutation.

REMERCIEMENTS

Comment pourrais-je débiter cette page sans commencer par exprimer mes plus vifs remerciements à l'initiateur de cette thèse, Michael Heusener. Durant ces trois années, ses compétences, sa gentillesse, sa disponibilité m'auront été d'un très grand secours. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler sous sa direction et j'espère qu'il en aura eu autant à encadrer ma thèse.

Je suis particulièrement reconnaissant à Daniel Lines et Joan Porti d'avoir accepté de rapporter cette thèse ; j'apprécie l'attention particulière avec laquelle ils se sont acquittés de cette tâche et je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail. Leurs commentaires, leurs suggestions et leurs critiques m'ont été très précieux. Je remercie Daniel Lines de m'avoir invité à Dijon et de m'avoir permis de lui exposer une partie de mon travail. Je remercie également Joan Porti de m'avoir accueilli et écouté par deux fois à Barcelone ; j'ai beaucoup appris à son contact.

Je remercie aussi Jean-Yves LeDimet pour sa confiance, son soutien et tous les conseils qu'il m'a prodigués pendant la thèse. Je suis heureux de le compter parmi les membres du jury.

Je suis enfin très honoré que Michel Boileau et Vladimir Turaev aient bien voulu se joindre au jury. Je tiens à remercier Michel Boileau de m'avoir invité au séminaire de Toulouse. Les discussions que j'ai eu avec Vladimir Turaev lors de mon séjour à Strasbourg en février m'auront été d'une aide très précieuse et ont permis d'améliorer très *significativement* les résultats que j'avais alors et que je présente aujourd'hui dans cette thèse, qu'il me fait l'honneur de présider, pour tout cela je le remercie chaleureusement.

Je remercie Alexander Cardona pour les remarques judicieuses qu'il m'a faites sur la Note que j'ai soumise aux Comptes-Rendus. Je remercie également Frédéric Maurin pour sa relecture patiente de l'une des première et illisible version du manuscrit. Je remercie aussi Hacène Djellout pour sa patience et pour l'oreille attentive qu'il m'a prêtée lors des répétitions. Je remercie enfin Saad Baaï pour ses conseils, sa gentillesse et pour le temps qu'il a consacré à la lecture minutieuse de la Note aux Comptes-Rendus et de l'Introduction de la présente thèse.

Je remercie tous les membres du Laboratoire de Mathématiques, les thésard(e)s, les secrétaires, bibliothécaires et ingénieur(e)s informaticien(ne)s qui m'ont accompagné durant la thèse.

Je profite de cette page pour faire quelques clins-d'oeil à mes amis. Les discussions, les concerts, les sorties et autres distractions en tout genre partagés avec eux auront beaucoup comptés pour moi.

Avant de conclure, je voudrai remercier Laurence dont la présence et l'affection m'auront été d'un grand secours durant la pénible et douloureuse épreuve qu'est la rédaction d'une thèse.

Je ne peux enfin terminer qu'en remerciant plus que chaleureusement ceux qui ont subi malgré eux en partie ou en totalité et parfois même sans le savoir mes doutes, mes craintes,

la rédaction, les corrections, la mauvaise humeur et tout ce qui va avec et encore les corrections... je veux parler de mon Papa et ma Maman et de mes grands-parents. Eux seuls ont connu tout de ce qui ne se voit plus dans le manuscrit d'une thèse et ils savent bien que la mienne leur est également dédiée...

«Le travail évolue vers l'élimination de la distance entre le peintre et l'idée et entre l'idée et le spectateur.»

Mark Rothko.

INTRODUCTION : MOTIVATIONS ET IDÉES PRINCIPALES

L'étude des représentations linéaires d'un groupe donné permet de comprendre sa structure. Dans ce travail, nous nous proposons d'examiner l'espace des représentations du groupe d'un nœud dans $SU(2)$. Comme nous le verrons, cet ensemble est un *ensemble algébrique affine réel* et sa partie régulière est une *variété unidimensionnelle* (pour plus de détails voir *infra*). Les pages qui suivent sont consacrées à l'étude de cette variété à travers un double point de vue. D'une part, on associe à un nœud une *torsion de Reidemeister* à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation *régulière* du groupe du nœud dans $SU(2)$; d'autre part, on établit que l'ensemble des classes de conjugaison des représentations *régulières* du groupe du nœud dans $SU(2)$ possède une *forme volume*, qui s'avère être un invariant du nœud.

Commençons par une description des principaux outils et des fondements de notre étude, à savoir la torsion de Reidemeister et l'invariant de Casson.

La torsion de Reidemeister a été introduite par Kurt Reidemeister en 1935 (*cf.* [Rei35a]) dans le but de donner une classification combinatoire⁽¹⁾ des espaces lenticulaires tridimensionnels (introduits par Tietze en 1908). La même année, K. Reidemeister (*cf.* [Rei35b]) et W. Franz (*cf.* [Fra35]), alors Assistant à Marburg sous sa direction, donnèrent la définition générale de la torsion pour un complexe simplicial de dimension quelconque. En s'appuyant sur de profonds résultats de théorie des nombres, Franz utilisa ce nouvel outil pour obtenir une classification combinatoire des espaces lenticulaires généralisés (introduits par De Rham en 1931)⁽²⁾. La torsion a été ensuite développée par J. Whitehead puis par J. Milnor. Elle est aujourd'hui devenue un outil efficace en topologie de petites dimensions et en théorie des nœuds.

La torsion de Reidemeister est un invariant topologique des variétés non simplement connexes, qui *n'est pas un invariant d'homotopie*. Pour cette raison, elle permet de distinguer certaines paires d'espaces lenticulaires. Il s'agit aussi d'un invariant plus subtil que les invariants usuels utilisés en topologie algébrique tels que les nombres de Betti (1871), le groupe fondamental (1895) ou les groupes d'homologie (1925).

⁽¹⁾On sait aujourd'hui, que cette classification combinatoire est en fait aussi une classification topologique (*cf.* [Moi52]).

⁽²⁾C'est avec cet article [Fra35], que W. Franz obtint son Habilitation à l'Université de Marburg en 1935 (*cf.* [BS98]).

La définition de la torsion est algébrique et, à première vue, la torsion de Reidemeister peut être considérée comme une version graduée de la notion de *déterminant* ; tout comme la caractéristique d'Euler apparaît de façon similaire, comme une version graduée de la *dimension*. Par ailleurs, la torsion de Reidemeister d'un complexe simplicial fini X utilise une action du groupe fondamental $\pi_1(X)$ sur le revêtement universel $\tilde{X}$ pour obtenir une mesure globale de la complexité de la structure simpliciale de X . A la différence des groupes d'homologie ou d'homotopie qui ne retiennent pas les informations contenues dans les bases du complexe de chaînes sur les cellules de $\tilde{X}$, la torsion de Reidemeister utilise de façon essentielle ces bases.

En topologie, les applications de la torsion sont multiples. Pour n'en citer que quelques-unes, disons simplement qu'une certaine torsion de Reidemeister permet de retrouver le polynôme d'Alexander-Conway d'un nœud ou encore que la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe intervient dans le développement asymptotique de l'invariant Z_k de Witten des variétés tridimensionnelles (cf. [FG91, formule (1.36)]).

Cinquante ans plus tard, Andrew Casson a introduit en 1985 un invariant des sphères d'homologie entière, qui s'est révélé être extrêmement utile. La définition originale de Casson utilise les espaces de représentations. En fait, l'invariant de Casson d'une sphère d'homologie entière M est un entier qui compte algébriquement les classes de conjugaison des représentations du groupe fondamental de M dans $SU(2)$. Plus précisément, notons $\hat{R}(X)$ l'espace des $SO(3)$ -classes de conjugaison des représentations irréductibles de $\pi_1(X)$ dans $SU(2)$, la construction de l'invariant de Casson de M est fondée sur le fait qu'un scindement de Heegaard $M = H_1 \cup_F H_2$, dans lequel H_i est un corps en anses et F une surface de genre g , induit des inclusions entre les espaces de représentations $\hat{R}(M) \hookrightarrow \hat{R}(H_i)$ et $\hat{R}(H_i) \hookrightarrow \hat{R}(F)$ et la principale difficulté consiste à montrer que l'on peut définir leur nombre d'intersection puis qu'elle est indépendante du scindement de Heegaard (cf. [AM90], [GM92] ou [Sav99]).

Grâce à cet invariant, Casson a pu résoudre des problèmes de topologie demeurés jusque là ouverts, comme par exemple l'existence de variétés de dimension 4 non triangulables (cf. [Sav02, Théorème 3.36] ou [Sav99, Lecture 18]). On peut aussi établir une surprenante propriété des nœuds dans S^3 dont l'invariant de Casson n'est pas nul : si $K \subset S^3$ est un nœud tel que $\Delta_K''(1) \neq 0$, où $\Delta_K(t)$ est le polynôme normalisé d'Alexander, alors K possède la propriété $P^{(3)}$.

Une série de travaux importants a suivi l'introduction de cet invariant : Walker l'a généralisé aux sphères d'homologie rationnelle, Taubes a réussi à l'interpréter via la théorie de jauge et a montré que l'invariant de Casson était la caractéristique d'Euler de l'homologie de Floer, Lescop en a donné une présentation combinatoire dans laquelle la torsion de Reidemeister occupe une place importante.

En 1992, X.-S. Lin (cf. [Lin92]) a adapté la construction de Casson à un nœud K dans S^3 en utilisant une présentation en *tresse fermée* de K , ce qui lui a permis de mettre en évidence certains sous-espaces de représentations, puis de compter "à la Casson" leur nombre d'intersection. On obtient ainsi un invariant des nœuds et X.-S. Lin a montré – de façon indirecte – qu'il s'agissait en fait de la *signature* du nœud (à un facteur $1/2$ près). A l'aide d'une présentation en *2n-plat* du nœud, plutôt que d'une présentation en tresse fermée, M. Heusener a pu construire en 2003 une *orientation* sur l'espace des représentations du groupe du nœud, qui a apporté un nouvel éclairage au résultat de X.-S. Lin (cf. [Heu03]).

⁽³⁾Rappelons qu'un nœud K possède la propriété P si toute chirurgie de Dehn non triviale le long du nœud K produit une variété tridimensionnelle non simplement connexe.

Dans cette thèse, on construit et on étudie une *forme volume* sur l'espace des représentations du groupe G_K d'un nœud $K \subset S^3$ dans $SU(2)$, qui induit l'orientation définie par M. Heusener dans [Heu03]. En particulier, si $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$ est une représentation *régulière* de G_K et si M_K désigne l'extérieur de K , nous établirons un lien étroit qui unit cette forme volume à une *forme torsion de Reidemeister* sur le groupe $H_\rho^1(M_K)$ de cohomologie à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho : G_K \rightarrow SU(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{su}(2))$, $\mathfrak{su}(2)$ étant l'algèbre de Lie de $SU(2)$.

Pour définir une telle torsion de Reidemeister, nous mettrons au préalable en évidence une *base de référence* pour l'espace vectoriel $H_\rho^2(M_K)$. La construction que nous en donnons est analogue à celle faite par J. Porti dans [Por97, Corollaire 3.23] pour définir une fonction torsion associée à certaines variétés hyperboliques, mais dans celle-ci le *méridien* du nœud joue un rôle crucial. Notons encore que le cadre dans lequel on se place ici diffère de ceux étudiés préalablement par D. Johnson (cf. [Joh]) et E. Witten (cf. [Wit91]).

Dans les notes [Joh] qui n'ont jamais été publiées, D. Johnson a étudié la torsion de Reidemeister d'une variété tridimensionnelle close, orientée M à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation *acyclique* de $\pi_1(M)$ dans $SU(2)$. Il a notamment expliqué en quel sens on pouvait interpréter cette torsion comme un invariant de type Casson.

Dans [Wit91], E. Witten a introduit en 1991, une *forme torsion de Reidemeister* sur l'espace $H_\rho^1(\Sigma)$ pour une surface de Riemann Σ et une représentation irréductible $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SU(2)$, en exploitant le fait que les groupes $H_\rho^0(M_K)$ et $H_\rho^2(M_K)$ sont nuls. Il a de plus établi une remarquable formule liant cette forme torsion au volume symplectique de l'ensemble des classes de conjugaison des représentations de $\pi_1(\Sigma)$ dans $SU(2)$.

Décrivons notre démarche et les idées principales des constructions que nous faisons dans cette thèse.

Pour un nœud K dans S^3 et une représentation *abélienne* $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$, donnée par $\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}$ et telle que $e^{2i\theta}$ ne soit pas un zéro du polynôme d'Alexander de K , nous construisons une torsion de Reidemeister pour M_K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ et montrons qu'elle s'exprime en fonction du polynôme d'Alexander de K (voir Paragraphe 2.5 et en particulier la Proposition 2.20). Ce résultat est analogue à celui obtenu par J. Milnor pour un nœud (cf. [Mil62, Théorème 4]), puis par V. Turaev pour un entrelacs ou plus généralement une variété tridimensionnelle (cf. [Tur86, Théorème 1.1.2]). Ils ont tout deux montré, dans un cadre *acyclique*, qu'une certaine torsion de Reidemeister coïncide avec le polynôme d'Alexander du nœud, de l'entrelacs ou de la variété tridimensionnelle. Pour aller plus loin et obtenir des informations supplémentaires sur le nœud, on s'est donc intéressé aux représentations *irréductibles* de G_K dans $SU(2)$.

Avant tout, insistons sur le fait que l'on ignore encore, de façon générale, s'il existe, pour tout nœud non trivial K , une représentation irréductible du groupe de ce nœud dans $SU(2)$. Toutefois, pour une large classe de nœuds, on sait que de telles représentations existent. En effet, si $\lambda \in S^1$ n'est pas une racine du polynôme d'Alexander de $K \subset S^3$ et si $\sigma_K(\lambda) \neq 0$, σ_K désignant la signature équivariante, alors le groupe G_K admet au moins une représentation *irréductible* dans $SU(2)$ (cf. [Heu03, Corollaire 1.2]). Ajoutons qu'une telle représentation *n'est jamais acyclique* : on a toujours $\dim H_\rho^1(M_K) \geq 1$ (cf. Lemme 1.19).

Désignons par $\text{Reg}(K)$ l'ensemble des classes de conjugaison des représentations *régulières* de G_K dans $SU(2)$, c'est-à-dire l'ensemble des classes de conjugaison des représentations $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$ pour lesquelles $\dim H_\rho^1(M_K) = 1$ (cf. Paragraphe 1.5). M. Heusener et E. Klassen ont montré que $\text{Reg}(K)$ est une *variété unidimensionnelle* (cf. [HK97, Proposition

1] ou Corollaire 1.34). Expliquons maintenant brièvement de quelle façon on peut munir cette variété d'une 1-*forme volume*. A toute présentation en $2n$ -*plat* de K (cf. Figure 3.4) on associe un scindement de son extérieur M_K de la forme $M_K = B_1 \cup_S B_2$, où B_i est un corps en anses de genre n et S une sphère bidimensionnelle percée de $2n$ trous (cf. [Heu03, Paragraphe 3]). Ce scindement va jouer dans notre construction le rôle du scindement de Heegaard utilisé dans la construction de l'invariant de Casson et permet de mettre en évidence certains sous-espaces de représentations (cf. Paragraphe 3.4). On montre que ces derniers sont des variétés et on les munit de *formes volume*. En comparant entre elles ces différentes formes volume, on peut en déduire une sur $\mathcal{R}eg(K)$ *indépendante* de la présentation en $2n$ -plat de K choisie. On établit même qu'il s'agit d'un invariant des nœuds (cf. Théorème 3.11).

Donnons ensuite les grandes lignes de la construction de la *torsion de Reidemeister non abélienne* (avec signe) que nous allons associer à un nœud. Pour une représentation *régulière* ρ de G_K dans $SU(2)$, les groupes de cohomologie de M_K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ vérifient : $H_\rho^0(M_K) = 0$, $H_\rho^1(M_K) \cong \mathbb{R}$ et $H_\rho^2(M_K) \cong \mathbb{R}$ (voir le Chapitre 2 pour plus de détails). En examinant la restriction des représentations irréductibles au sous-groupe périphérique du nœud, on construit un isomorphisme entre $H_\rho^2(M_K)$ et $H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) \cong H^2(\partial M_K; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ (cf. [Por97, Chapitre 3]). Cet isomorphisme permet de mettre en évidence une *base de référence* de nature géométrique⁽⁴⁾ pour $H_\rho^2(M_K)$ grâce à la classe fondamentale de ∂M_K (cf. Paragraphe 2.6.2 et [Por97, Chapitre 3]). Au moyen de cette base, on peut construire une *forme linéaire* naturelle sur l'espace vectoriel unidimensionnel $H_\rho^1(M_K)$, qu'on appelle *forme torsion de Reidemeister* (à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$) associée à K . A tout générateur de $H_\rho^1(M_K)$, la forme torsion de Reidemeister associe la torsion de Reidemeister avec signe de M_K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ correspondant à ce choix de bases et à l'orientation cohomologique canonique de M_K (cf. Paragraphe 2.6.3).

Soient $M_K(\mu)$ la variété close obtenue par chirurgie de pente μ le long du nœud K et ρ une représentation de son groupe fondamental. En utilisant la formule de "Mayer-Vietoris" satisfaite par la torsion, on établit une *formule de chirurgie* – comparable à celle obtenue par J. Porti dans [Por97, Proposition 4.10] – qui permet d'exprimer la torsion de Reidemeister de $M_K(\mu)$ (à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$) en fonction de la forme torsion de Reidemeister associée à K que nous venons de construire (cf. Proposition 2.29).

Le résultat principal de notre travail est le suivant. Pour une représentation régulière $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$, on montre que l'espace tangent au quotient $\widehat{R}(M_K)$ de l'espace des représentations irréductibles de G_K dans $SU(2)$ par l'action par conjugaison de $SO(3)$ en la classe de conjugaison de ρ , est isomorphe à $H_\rho^1(M_K)$. En s'appuyant sur cette identification, on démontre que les deux invariants, forme torsion de Reidemeister et forme volume que l'on a mis en évidence, *coïncident* (cf. Théorème 4.1). Ces résultats ont été en partie résumés dans la Note aux Comptes-Rendus [Dub03].

Donnons quelques indications sur l'organisation et le contenu des différents chapitres de cette thèse.

Dans le Chapitre 1, on fixe les principales notations utilisées et on rappelle un certain nombre de notions indispensables.

Dans le Chapitre 2, on construit pour un nœud K dans S^3 une *forme torsion de Reidemeister non abélienne* (à coefficients dans la représentation adjointe). Puis, on établit une *formule de chirurgie* (cf. Proposition 2.29).

⁽⁴⁾C'est-à-dire ne dépendant que du bord ∂M_K .

Dans le Chapitre 3, on construit “à la Casson” une *forme volume associée à un nœud*. On établit qu’il s’agit d’un invariant des nœuds (*cf.* Théorème 3.11), puis on étudie quelques-unes de ses propriétés. En particulier, on montre une formule pour la somme connexe (*cf.* Proposition 3.18).

Le Chapitre 4 est consacré à la démonstration du Théorème 4.1 d’égalité des formes torsion de Reidemeister et volume associées à un nœud que l’on a définies respectivement aux Chapitres 2 & 3.

Dans le Chapitre 5, on développe des exemples. Dans un premier temps, on donne le calcul explicite de la forme volume que l’on vient de construire pour les *nœuds toriques* ; cette formule permet de retrouver, dans un deuxième temps, la formule de Freed (*cf.* [Fre92]) donnant la torsion de Reidemeister des *sphères d’homologie de Brieskorn* à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation acyclique du groupe fondamental de cette sphère dans $SU(2)$. On calcule ensuite la forme volume associée à un nœud fibré en fonction de sa monodromie (*cf.* Théorème 5.22). On termine ce chapitre en examinant le comportement *à signe près* de la forme volume ω^K sur $\mathcal{R}eg(K)$ sous l’effet d’une *mutation*. On introduit, pour une représentation irréductible du groupe de K dans $SU(2)$, une notion de régularité “adaptée” au problème de la mutation et on montre que, sous cette hypothèse, la forme volume ω^K est *à signe près* invariante par mutation (*cf.* Théorème 5.41).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction : motivations et idées principales	ix
1. Espace de représentations et Cohomologie	1
1.1. Notations.....	1
1.2. Espaces de représentations.....	2
1.2.1. Généralités.....	2
1.2.2. L'espace des représentations du groupe du tore bidimensionnel.....	5
1.2.3. L'espace des représentations abéliennes du groupe d'un nœud.....	5
1.2.4. L'espace des représentations du groupe des nœuds toriques.....	6
1.2.5. L'espace des représentations du groupe du nœud en huit.....	7
1.3. Homologie et cohomologie à coefficients tordus.....	9
1.3.1. Généralités.....	9
1.3.2. Propriétés de l'homologie et de la cohomologie à coefficients tordus.....	10
1.3.3. Suite de Mayer-Vietoris.....	11
1.3.4. Groupes d'homologie et de cohomologie en dimension 0.....	12
1.3.5. Exemples.....	13
1.4. Dérivations.....	15
1.4.1. Définitions.....	15
1.4.2. Un lemme utile.....	16
1.4.3. Groupe de cohomologie tordue en dimension 1.....	17
1.4.4. Espace tangent et groupe de cohomologie.....	17
1.5. Notions de régularité.....	18
1.5.1. Définitions.....	19
1.5.2. Critères de régularité.....	20
1.5.3. Critères de μ -régularité.....	21
1.5.4. Exemples.....	24
2. Torsion de Reidemeister associée à un nœud	27
2.1. Forme volume et compatibilité.....	27
2.1.1. Définitions.....	27
2.1.2. Compatibilité.....	28
2.2. Rappels sur la torsion de Reidemeister.....	29

2.2.1. Torsion d'un complexe d'espaces vectoriels.....	29
2.2.2. Torsion de Reidemeister d'un complexe cellulaire.....	31
2.2.3. Exemples de calcul.....	35
2.2.4. Formule de Mayer-Vietoris pour la torsion de Reidemeister.....	38
2.3. Orientation cohomologique de l'extérieur d'un nœud.....	39
2.4. Complexe de l'extérieur d'un nœud à coefficients tordus.....	40
2.5. Torsion de Reidemeister tordue et polynôme d'Alexander.....	41
2.6. Définition de la forme torsion $\hat{\tau}^K$	43
2.6.1. Cohomologie à coefficients tordus du tore.....	43
2.6.2. Base de référence pour le second groupe de cohomologie à coefficients tordus de l'extérieur du nœud.....	44
2.6.3. Définition de la forme torsion $\hat{\tau}^K$	45
2.7. Une formule de chirurgie.....	46
2.7.1. Représentations μ -régulières.....	46
2.7.2. La μ -torsion.....	47
2.7.3. Une formule de chirurgie.....	48
2.8. Sphères d'homologie rationnelle.....	50
2.8.1. Une formule de chirurgie.....	50
2.8.2. Un invariant de type Casson pour les sphères d'homologie rationnelle.....	53
3. Une forme volume sur $\mathcal{R}eg(K)$.....	55
3.1. Compléments sur les formes volume.....	55
3.1.1. Rappel sur la notion de compatibilité.....	55
3.1.2. La convention "base $\wedge$ fibre".....	56
3.2. Présentation des nœuds sous forme de $2n$ -plat.....	56
3.3. Scindement de l'extérieur d'un nœud-plat.....	57
3.4. Sous-espaces de représentations.....	59
3.5. Représentations régulières.....	60
3.6. Construction de la forme volume.....	60
3.7. Formes volume sur les espaces de représentations.....	61
3.7.1. Formes volume sur les espaces de représentations.....	61
3.7.2. Dépendance des formes volume en les systèmes de générateurs.....	63
3.8. Invariance de la forme volume.....	66
3.9. Théorème de Birman-Reidemeister.....	67
3.10. Systèmes spéciaux de générateurs.....	68
3.11. Démonstration de l'invariance de la forme volume.....	71
3.11.1. Invariance par changement de classe double.....	71
3.11.2. Invariance par stabilisation élémentaire.....	72
3.12. Propriétés de la forme volume.....	74
3.12.1. Propriétés de la forme volume.....	74
3.12.2. Une formule pour la somme connexe.....	74
4. Forme Volume et Torsion de Reidemeister.....	79
4.1. Énoncé du résultat.....	79
4.2. Dérivations et Espaces Tangents.....	81
4.2.1. Généralités.....	81
4.2.2. Le complexe auxiliaire des dérivations.....	82

4.2.3. Espaces tangents à $\tilde{R}(M_K)$, $\tilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ ($i = 1, 2$) et à $\tilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$	84
4.3. Démonstration du théorème d'égalité des formes volume et torsion.....	86
4.3.1. Première étape.....	87
4.3.2. Deuxième étape.....	89
4.3.3. Troisième étape.....	91
4.3.4. Quatrième étape.....	101
4.3.5. Fin de la démonstration.....	103
5. Exemples de Calculs.....	105
5.1. Calcul de la forme volume associée aux nœuds toriques.....	106
5.2. Chirurgie sur les nœuds toriques et torsion des sphères de Brieskorn.....	110
5.3. Cas des nœuds toriques généraux.....	113
5.3.1. Torsion associée aux nœuds toriques.....	113
5.3.2. Torsion de Reidemeister des sphères d'homologie de Brieskorn.....	119
5.4. Calcul de la torsion associée aux nœuds fibrés.....	120
5.5. Mutation et Torsion de Reidemeister.....	125
5.5.1. Mutation d'un nœud.....	126
5.5.2. Représentation mutante.....	127
5.5.3. Régularité de la représentation mutante et régularité forte.....	129
5.5.4. Torsion associée au nœud mutant en la représentation mutante.....	133
5.5.5. Problèmes et perspectives.....	136
Bibliographie.....	137
Index.....	143

CHAPITRE 1

ESPACE DE REPRÉSENTATIONS ET COHOMOLOGIE

Dans ce chapitre d'introduction, on fixe les principales notations utilisées et on fait des rappels sur l'espace des représentations d'un groupe dans $SU(2)$ ou $SL_2(\mathbb{C})$ (*cf.* Section 1.2).

On donne ensuite des exemples sur lesquels on s'appuiera dans les chapitres ultérieurs. On calcule notamment l'espace des représentations du groupe du tore bidimensionnel (*cf.* Paragraphe 1.2.2) et on donne une description de l'espace des représentations du groupe des nœuds toriques (*cf.* Paragraphe 1.2.4) et du groupe du nœud en huit (*cf.* Paragraphe 1.2.5).

Dans la Section 1.3, on rappelle la définition des groupes de cohomologie à coefficients tordus (plus précisément à coefficients dans $\mathfrak{su}(2)_{Ad \circ \rho}$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{Ad \circ \rho}$) puis, on en donne quelques propriétés telles que la suite exacte longue associée à une paire, la dualité de Poincaré et la suite de Mayer-Vietoris.

La Section 1.4 est consacrée à la notion de dérivations (à coefficients dans $\mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). On donne en particulier une interprétation de l'espace tangent à l'espace des représentations d'un groupe dans $SU(2)$ ou $SL_2(\mathbb{C})$ en termes d'espace de dérivations à coefficients dans $\mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (*cf.* Paragraphe 1.4.4).

Dans la dernière section, on introduit deux notions de *régularité* : *régularité* et μ -*régularité* pour une représentation du groupe d'un nœud. Ces deux concepts, qui sont étroitement liés (voir en particulier la Proposition 1.40), paraissent de façon plus ou moins explicites dans de nombreux travaux parmi lesquels [Hod86], [BZ96] et [HK97] sans qu'il soit fait mention d'une terminologie particulière. Pour une représentation du groupe d'un nœud, le terme “régulier” fait son apparition pour la première fois dans [Heu03, Paragraphe 1] et le terme “ μ -régulier” est fixée dans [Por97, Définition 3.21]. On a ensuite rassemblé quelques résultats puis redémontrés des caractérisations équivalentes de ces notions de régularité (voir en particulier les Paragraphes 1.5.2 et 1.5.3).

1.1. Notations

Soit $Sp(1)$ l'ensemble des quaternions unitaires, en tant que groupes de Lie, $Sp(1)$ et $SU(2)$ sont isomorphes. L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$ s'identifie quant à elle à l'ensemble des quaternions purs, *i.e.* à l'ensemble des quaternions q de la forme $q = ai + bj + ck$. De

plus, la sphère bidimensionnelle $S^2 = \{A \in \mathrm{SU}(2) \mid \mathrm{Tr} A = 0\}$ s'identifie à l'ensemble des quaternions purs et unitaires, *i.e.* $S^2 = \mathrm{Sp}(1) \cap \mathfrak{su}(2)$.

L'espace tangent $T_A \mathrm{SU}(2)$ en $A \in \mathrm{SU}(2)$ peut être utilement identifié à l'image de $\mathfrak{su}(2) = T_1 \mathrm{SU}(2)$ par la translation à gauche $L_A : B \mapsto A \cdot B$.

Soit $\mathfrak{G}$ l'un des groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et désignons par $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie associée. On a l'isomorphisme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, donnée par $x \otimes a \mapsto xa$. Le groupe $\mathfrak{G}$ agit par conjugaison sur $\mathfrak{g}$ via la représentation adjointe $Ad_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, définie par $Ad_A(x) = Ax A^{-1}$, où $A \in \mathfrak{G}$.

Rappelons enfin que tout $A \in \mathrm{SU}(2)$ s'écrit sous la forme $A = \cos(\theta) + \sin(\theta)P$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $P \in S^2$ et que la paire (θ, P) associée à A est *unique* si, et seulement si, $A \neq \pm 1$. Remarquons de plus que si $A = \cos(\theta) + \sin(\theta)P$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $P \in S^2$, alors $Ad_A : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ est la rotation d'angle 2θ et d'axe P et $Ad : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$, définie par $A \mapsto Ad_A$, est un revêtement double.

1.2. Espaces de représentations

Dans cette thèse, nous étudions les représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$. Malgré tout, nous aurons parfois besoin de “complexifier” la situation et de prendre en compte des représentations à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. C'est pour cette raison que nous faisons dans cette section, quelques rappels généraux sur l'espace des représentations d'un groupe quelconque dans $\mathrm{SU}(2)$ ou dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Nous donnons ensuite une série d'exemples fondamentaux auxquels on se référera dans toute la suite du présent travail.

1.2.1. Généralités. — Soit $\mathfrak{G}$ l'un des deux groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Pour un groupe discret de type fini G , on note

$$R(G, \mathfrak{G}) = \mathrm{Hom}(G, \mathfrak{G})$$

l'espace des représentations de G dans $\mathfrak{G}$ et on le munit aussi de la *topologie compacte-ouverte* ⁽¹⁾.

D'après [CS83], l'espace $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est un ensemble *algébrique affine complexe* défini sur $\mathbb{Q}$ et on peut montrer que cette structure est *indépendante* de la présentation finie de G (*cf.* [LM85]).

Dans toute la suite, on convient de désigner par $R(G)$ l'espace $R(G, \mathrm{SU}(2))$. Puisque $\mathrm{SU}(2)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on dispose de l'inclusion naturelle $R(G) \hookrightarrow R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$. Cette inclusion peut explicitement être obtenue de la façon suivante. Considérons l'involution $\sigma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, définie par $\sigma(A) = (\bar{A}^T)^{-1}$. L'ensemble des points fixes de σ , que l'on désigne par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^\sigma$, est exactement $\mathrm{SU}(2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^\sigma$. L'involution σ induit une involution de $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$, que l'on continue de noter abusivement σ et dont l'ensemble des points fixes est :

$$R(G) = (R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})))^\sigma \subset R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})).$$

⁽¹⁾Rappelons qu'une base d'ouverts de cette topologie est formée des ensembles

$$\mathcal{O}_{g,V} = \{f : G \rightarrow \mathfrak{G} \mid f(g) \in V\},$$

avec $g \in G$ et $V \subset \mathfrak{G}$ ouvert.

En conséquence, $R(G)$ hérite d'une structure de *sous-ensemble algébrique affine réel* de l'ensemble algébrique affine complexe $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ qui est bien définie. Ajoutons que cette structure peut être déterminée au moyen d'une quelconque des présentations finies de G (voir [Sav99, Lecture 14, p. 135] ou [Kir93, Paragraphe 1.1]).

Une représentation $\rho : G \rightarrow \mathfrak{G}$ est dite *réductible* s'il existe un sous-espace vectoriel U de $\mathbb{C}^2$, propre et non-trivial, tel que $\rho(g)(U) \subset U$, pour tout $g \in G$. Si un tel sous-espace vectoriel existe, alors il est nécessairement de dimension 1. Une représentation qui n'est pas réductible est dite *irréductible*.

Explicitons les représentations réductibles d'un groupe discret de type fini G dans $\mathrm{SU}(2)$. Si $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation réductible, alors il existe une base dans laquelle :

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} a_g & c_g \\ 0 & b_g \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Mais comme $\rho(g) \in \mathrm{SU}(2)$, on a $c_g = 0$ et $b_g = \bar{a}_g$, avec $|a_g|^2 = 1$. Ainsi $\rho(g)$ est de la forme :

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_g} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_g} \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Ceci montre qu'une représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est réductible si, et seulement si, elle se factorise à travers une copie de $\mathrm{U}(1)$ dans $\mathrm{SU}(2)$, ou, ce qui revient au même, si, et seulement si, $\rho(G)$ est un sous-groupe abélien de $\mathrm{SU}(2)$. On note $A(G)$ le sous-ensemble des représentations réductibles de G dans $\mathrm{SU}(2)$.

D'après ce qui précède, une représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est irréductible si, et seulement si, son image $\rho(G)$ n'est pas contenue dans un sous-groupe abélien de $\mathrm{SU}(2)$. On note $\tilde{R}(G) = R(G) \setminus A(G)$ le sous-ensemble des représentations irréductibles de G dans $\mathrm{SU}(2)$.

Le groupe de Lie compact $\mathrm{SU}(2)$ agit par *conjugaison* sur $R(G)$, on pose $\mathcal{R}(G) = R(G)/\mathrm{SU}(2)$ et on note $\mathrm{SU}(2)(\rho)$ l'orbite de la représentation ρ sous cette action. Cette action se factorise à travers $\mathrm{SO}(3) = \mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\}$ en une action qui est *libre* sur l'*ouvert* $\tilde{R}(G)$ et on pose $\hat{R}(G) = \tilde{R}(G)/\mathrm{SO}(3)$. De cette façon, $\hat{R}(G)$ s'identifie à l'espace total d'un $\mathrm{SO}(3)$ -fibré principal de base $\hat{R}(G)$ (cf. [GM92, Paragraphe 3.A]).

Nous savons de plus que $\hat{R}(G)$ possède une structure d'*ensemble semi-algébrique réel*⁽²⁾ (cf. [Heu03, Paragraphe 2]).

Nous faisons maintenant quelques rappels tirés des travaux de M. Culler et P. Shalen présentés dans [CS83]. À chaque représentation $\rho \in R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$, on fait correspondre son *caractère* $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$, défini par $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$. L'ensemble $X(G) = \{\chi_\rho \mid \rho \in R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))\}$ s'appelle la *variété des caractères* du groupe G et possède une structure d'ensemble *algébrique affine complexe* pour laquelle l'application $t : R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \rightarrow X(G)$, définie par $t(\rho) = \chi_\rho$, est un morphisme *régulier* (cf. [CS83]). Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit algébriquement par *conjugaison* sur $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ mais le quotient $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement un espace séparé et c'est pour cela que l'on étudie plutôt la variété des caractères $X(G)$, que l'on peut voir comme le “quotient algébrique” de $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$

⁽²⁾Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit *semi-algébrique* lorsqu'il peut s'écrire comme la réunion finie d'un nombre finie d'intersections d'ensembles définis par des équations ou des inéquations polynomiales.

par l'action par conjugaison de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ (cf. [MS84]). On note $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})(\rho)$ l'orbite de la représentation ρ sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Le sous-ensemble des représentations *irréductibles* de G dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est désigné par $R^{\mathrm{irr}}(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ et son image par t est notée $X^{\mathrm{irr}}(G) = t(R^{\mathrm{irr}}(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})))$. D'après [CS83, Proposition 1.4.2], il s'agit d'ouverts de Zariski et on a $t^{-1}(X^{\mathrm{irr}}(G)) = R^{\mathrm{irr}}(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$. Toute représentation $\rho \in R^{\mathrm{irr}}(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est non-abélienne – c'est-à-dire que $\rho(G)$ n'est pas contenue dans un sous-groupe abélien de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ – mais, contrairement aux représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$, la *réci-proque est fausse*. De plus, on a (cf. [CS83, Proposition 1.5.2]) :

Assertion 1.1. — Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles de G à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Les représentations ρ et ρ' sont conjuguées si, et seulement si, $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

L'inclusion naturelle $R(G) \hookrightarrow R(G; \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ se factorise donc en l'application $s : \widehat{R}(G) \rightarrow X(G)$, donnée par $[\rho] \mapsto \chi_\rho$, qui possède la propriété suivante.

Lemme 1.2. — L'application $s : \widehat{R}(G) \rightarrow X(G)$ est injective.

Démonstration. — Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles de G à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$ et supposons que $s(\rho) = s(\rho')$. D'après l'assertion précédente, les représentations ρ et ρ' sont conjuguées par un élément appartenant à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Mais on sait de plus que (voir par exemple [Kla91, démonstration de la Proposition 15] pour une justification),

Assertion 1.3. — Si deux représentations irréductibles à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$ sont conjuguées par un élément appartenant à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, alors elles sont conjuguées par un élément appartenant à $\mathrm{SU}(2)$.

Il en résulte donc que $[\rho] = [\rho']$. □

Au vu de ce dernier résultat, $\widehat{R}(G)$ s'identifie à un sous-ensemble de $X(G)$ constitué de points réels.

Notation. — S'il n'est pas fait mention explicite du contraire, tous les espaces topologiques considérés dans cette thèse sont supposés *connexes par arcs*.

Etant donné un espace topologique X , son groupe fondamental est noté $\pi_1(X)$ sans préciser le point de base choisi. On identifie $\pi_1(X)$ avec le groupe des transformations du revêtement universel $\widetilde{X} \rightarrow X$ de X , sans préciser non plus le point de base de $\widetilde{X}$ que l'on a choisi. Cette ambiguïté dans le choix du point de base n'affectera en rien les constructions que nous allons faire en raison de leur invariance par l'action de $\pi_1(X)$ sur lui-même par conjugaison (cf. [Por97, p. 9]).

Pour un espace topologique X , on désigne par $R(X)$, $\widetilde{R}(X)$ et $\widehat{R}(X)$ les espaces $R(\pi_1(X))$, $\widetilde{R}(\pi_1(X))$ et $\widehat{R}(\pi_1(X))$ respectivement.

Avant de passer à des exemples concrets, terminons ce paragraphe par une remarque.

Remarque 1.4. — On ignore encore de façon générale si chaque variété tridimensionnelle compacte M dont le groupe fondamental n'est pas trivial, admet une représentation non triviale de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{SU}(2)$ (voir [Kir95, Problème 3.105 (A)]). Toutefois, aucun contre-exemple n'est connu à ce jour.

Par contre, on sait qu'il existe des variétés closes M ayant un groupe fondamental non abélien, mais dont toutes les représentations $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ sont abéliennes (cf. Remarque suivant [Kir95, Problème 3.105 (A)]).

1.2.2. L'espace des représentations du groupe du tore bidimensionnel. — Soit $T^2 = S^1 \times S^1$ le tore bidimensionnel et notons μ et λ des courbes simples, fermées de T^2 se coupant en un seul point. Le groupe fondamental de T^2 est le groupe abélien $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}\mu \oplus \mathbb{Z}\lambda$. Décrivons l'espace des représentations de $\pi_1(T^2)$ dans $\mathrm{SU}(2)$ (cf. [Kir93, Paragraphe 1.2]).

Puisque le groupe fondamental de T^2 est abélien, toute représentation de $\pi_1(T^2)$ dans $\mathrm{SU}(2)$ est abélienne. Plus précisément, considérons l'application $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}(T^2)$ définie de la façon suivante. L'image par Θ du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est la classe de conjugaison de la représentation $\rho_{\alpha, \beta} : \pi_1(T^2) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ telle que :

$$\rho_{\alpha, \beta}(\mu) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\alpha i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\alpha i} \end{pmatrix}, \quad \rho_{\alpha, \beta}(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\beta i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\beta i} \end{pmatrix}.$$

On constate que $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}(T^2)$ est un revêtement ramifié. En fait, et quitte à effectuer une conjugaison par $\mathbf{j} \in \mathrm{SU}(2)$, on a $\Theta(\alpha, \beta) = \Theta(\alpha', \beta')$ si, et seulement si il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $(\alpha', \beta') = \pm(\alpha, \beta) + (m, n)$.

L'espace $\mathcal{P} = \mathcal{R}(T^2)$ s'appelle le “Coussin”⁽³⁾. On a représenté sur la Figure 1.1 un domaine fondamental pour Θ et l'espace $\mathcal{P}$.

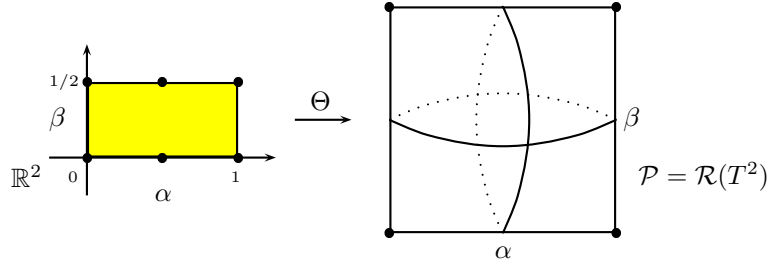


FIGURE 1.1. Le “Coussin”.

Remarque 1.5. — L'espace $\mathcal{R}(T^2)$ possède des *points singuliers* – ses “coins” – qui correspondent aux représentations *centrales* de $\pi_1(T^2)$ dans $\mathrm{SU}(2)$. Privé de ces quatre points, $\mathcal{R}(T^2)$ est une variété lisse de dimension 2.

1.2.3. L'espace des représentations abéliennes du groupe d'un nœud. — Tout nœud $K \subset S^3$ admet des représentations *abéliennes* de son groupe G_K dans $\mathrm{SU}(2)$.

Plus précisément, si G'_K désigne le groupe dérivé de G_K , alors $G_K/G'_K \cong H_1(M_K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est le groupe monogène engendré par le méridien m de K . Toute représentation abélienne de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$ est donc entièrement déterminée par la valeur qu'elle prend en m . En conséquence, on a le résultat suivant.

⁽³⁾Cet espace est connu dans la littérature sous le nom de “Pillow”.

Proposition 1.6. — Soit K un nœud dans S^3 . L'espace $\hat{A}(K)$ des classes de conjugaison des représentations abéliennes de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$ est paramétré par l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ grâce à l'application $t \mapsto \varphi_t$, donnée par :

$$\varphi_t : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2), \text{ avec } \varphi_t(m) = \begin{pmatrix} e^{2\pi ti} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi ti} \end{pmatrix} = \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)\mathbf{i}.$$

1.2.4. L'espace des représentations du groupe des nœuds toriques. — L'espace des représentations du groupe d'un nœud torique dans $\mathrm{SU}(2)$ a été décrit par E. Klassen dans [Kla91, Théorème 1]. Nous présentons dans ce paragraphe ses résultats et donnons même une description *explicite* des représentations du groupe d'un nœud torique de type $(2, q)$.

Soit $K_{p,q}$ le nœud torique d'indice (p, q) , désignons par $M_{p,q}$ son extérieur, par m son méridien et par l sa longitude. Le groupe de $K_{p,q}$ admet la présentation suivante :

$$G_{p,q} = \pi_1(M_{p,q}) = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle.$$

Si l'on note $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $ps - qr = 1$, alors on a $m = x^{-r}y^s$ et $l = x^p m^{-pq}$ dans $G_{p,q}$.

Remarque 1.7. — Si $p = 2$, alors $r = -3$ et $s = \frac{1-3q}{2}$. Dans $G_{2,q}$, on a $m = xy^{\frac{1-q}{2}}$ et $l = x^2 m^{-2q}$.

Le centre du groupe $G_{p,q}$ est non trivial : il s'agit du groupe monogène engendré par l'élément central $z = x^p = y^q$.

Espace des représentations du groupe des nœuds toriques de type $(2, q)$. — L'ensemble $\mathcal{R}(M_{2,q})$ des classes de conjugaison des représentations de $\pi_1(M_{2,q})$ dans $\mathrm{SU}(2)$ est la réunion de :

- $\hat{A}(M_{2,q})$, ensemble des classes de conjugaison des représentations abéliennes de $\pi_1(M_{2,q})$ dans $\mathrm{SU}(2)$,
- $\hat{R}(M_{2,q})$, ensemble des classes de conjugaison des représentations irréductibles $\pi_1(M_{2,q})$ dans $\mathrm{SU}(2)$ (voir Figure 1.2).

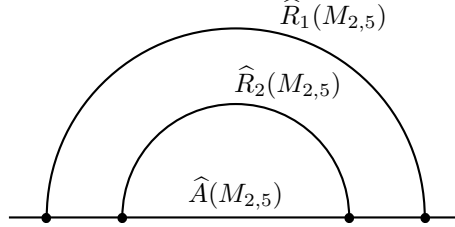
Explicitement, ces deux espaces peuvent être paramétrés de la façon suivante :

- $\hat{A}(M_{2,q})$ est paramétré par l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, comme on l'a vu dans la Proposition 1.6.
- $\hat{R}(M_{2,q})$ est constitué de $\frac{q-1}{2}$ arcs ouverts, notés $\hat{R}_\ell(M_{2,q})$ avec $\ell = 1, \dots, \frac{q-1}{2}$ et paramétrés de la façon suivante. Pour $\ell \in \{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$ et $0 < t < 1$, on définit la représentation $\rho_{\ell,t} : \pi_1(M_{2,q}) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ en posant :

$$\rho_{\ell,t}(x) = \mathbf{i} \text{ et } \rho_{\ell,t}(y) = \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right) + \sin\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right) (\cos(\pi t)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j}).$$

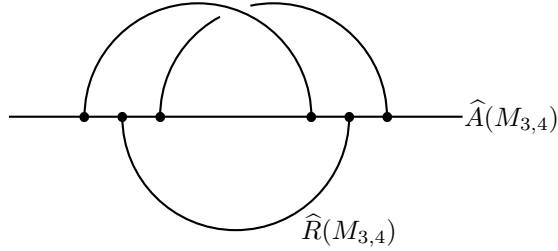
On constate que la représentation $\rho_{\ell,t}$ est irréductible et on pose $\hat{R}_\ell(M_{2,q}) = \{[\rho_{\ell,t}] \mid t \in (0, 1)\}$. De plus, les extrémités des arcs $\hat{R}_\ell(M_{2,q})$ s'identifient à des représentations abéliennes correspondant aux zéros du polynôme d'Alexander du nœud.

Espace des représentations du groupe des nœuds toriques. — On décrit dans la proposition suivante l'espace des représentations irréductibles du groupe du nœud torique $K_{p,q}$ dans $\mathrm{SU}(2)$ (cf. [Kla91, Théorème 1]).

FIGURE 1.2. Classes de conjugaison des représentations de $\pi_1(M_{2,5})$ dans $SU(2)$.

Proposition 1.8. — L'espace $\hat{R}(M_{p,q})$ des classes de conjugaison des représentations irréductibles du groupe du nœud $K_{p,q}$ dans $SU(2)$ est la réunion disjointe des $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ arcs ouverts $\hat{R}_{a,b}(M_{p,q})$ tels que :

1. $0 < a < p$, $0 < b < q$ et $a \equiv b \pmod{2}$,
2. $\rho(x)^p = (-1)^a = \rho(y)^q$,
3. $\hat{R}_{a,b}(M_{p,q})$ est l'ensemble des $SO(3)$ -classes de conjugaison des représentations $\rho : \pi_1(M_{p,q}) \rightarrow SU(2)$ telles que $\text{Tr}(\rho(x)) = 2 \cos(\frac{\pi a}{p})$ et $\text{Tr}(\rho(y)) = 2 \cos(\frac{\pi b}{q})$.

FIGURE 1.3. Classes de conjugaison des représentations de $\pi_1(M_{3,4})$ dans $SU(2)$.

Remarque 1.9. — Les extrémités de l'arc $\hat{R}_{a,b}(M_{p,q})$ correspondent à des représentations abéliennes de $G_{p,q}$ dans $SU(2)$.

1.2.5. L'espace des représentations du groupe du nœud en huit. — E. Klassen a géométriquement décrit dans [Kla91, Théorème 3] l'espace des représentations irréductibles du groupe du nœud en huit (et plus généralement celui du groupe des nœuds twists). Il a établi que les classes de conjugaison des représentations irréductibles de ce groupe forment un *cercle* (voir Figure 1.4).

En suivant une méthode initiée par R. Riley (cf. [Ril84]), nous allons en donner une description explicite. Commençons par décrire les principaux résultats obtenus par Riley pour paramétrer l'espace des classes de conjugaison des représentations du groupe d'un nœud à deux ponts.

Généralités sur les nœuds à deux ponts. — Un nœud $K \subset S^3$, ou plus généralement un entrelacs, est dit à *deux ponts* s'il existe une fonction hauteur sur S^3 dont la restriction à K est une fonction de Morse avec deux maxima et donc deux minima. Par exemple, les nœuds toriques et le nœud en huit sont des nœuds à deux ponts.

Le groupe G d'un nœud à deux ponts admet une présentation de la forme : $G = \langle x, y \mid wx = yw \rangle$, où w est un mot en x, y et où x représente un méridien du nœud.

Etant donnés $t, u \in \mathbb{C}$, considérons l'application $\rho : G \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } y \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ -tu & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis désignons par $W = (w_{ij})_{i,j}$ la matrice obtenue en remplaçant dans le mot w les lettres x et y respectivement par les deux matrices $\rho(x)$ et $\rho(y)$ ci-dessus. L'application ρ définit une représentation dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\phi(t, u) = 0$, où $\phi(t, u) = w_{11} + (1-t)w_{12}$ (cf. [Ril84, Théorème 1]).

Vu la forme très particulière de la relation $wx = yw$ du groupe G , on obtient une représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ à partir de n'importe quelle représentation à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ en divisant les deux matrices précédentes par une racine carrée de t . Même plus, toutes les classes de conjugaison des représentations non abéliennes à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont obtenues de la sorte (cf. [Ril84, Théorème 1]). Pour un couple $(t, u) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\phi(t, u) = 0$ et le choix $\sqrt{t}$ d'une racine de t , on notera $\rho_{\sqrt{t}, u}$ la représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ correspondante.

Comme $\mathrm{SU}(2)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, toute représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$ est aussi une représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (cf. Paragraphe 1.2.1). De plus, une paire $(t, u) \in \mathbb{C}^2$ telle que $\phi(t, u) = 0$ correspond à une représentation à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$ si, et seulement si, $t = e^{i\theta} \in S^1 \setminus \{\pm 1\}$ et $u \in [2 \cos(\theta) - 2, 0] \subset \mathbb{R}$ (cf. [Ril84, Proposition 4]).

Le nœud en huit. — Appliquons la technique de Riley pour décrire explicitement l'espace des classes de conjugaison des représentations du groupe du nœud en huit K .

Notons M_K l'extérieur du nœud K . Le groupe du nœud en huit admet la présentation suivante :

$$G_K = \pi_1(M_K) = \langle x, y \mid [x^{-1}, y]x = y[x^{-1}, y] \rangle$$

dans laquelle x représente le méridien m de K et le mot $yx^{-1}y^{-1}x^2y^{-1}x^{-1}y$ sa longitude l . A partir de cette présentation, on calcule le polynôme de Riley :

$$\phi(t, u) = u^2 + (3 - (t + t^{-1}))(u + 1).$$

En appliquant les idées présentées dans le sous-paragraphe précédent, on obtient le paramétrage explicite de l'ensemble des classes de conjugaison des représentations irréductibles du groupe du nœud en huit dans $\mathrm{SU}(2)$ donné dans la proposition suivante.

Proposition 1.10. — *L'espace $\widehat{R}(M_K)$ des classes de conjugaison des représentations irréductibles du groupe du nœud en huit K dans $\mathrm{SU}(2)$ est un cercle, paramétré par les deux*

arcs :

$$(t, u) = \left(e^{4\pi is}, \cos(4\pi s) - \frac{3}{2} + \sqrt{\cos^2(4\pi s) - \cos(4\pi s) - \frac{3}{4}} \right),$$

$$(t, u) = \left(e^{4\pi is}, \cos(4\pi s) - \frac{3}{2} - \sqrt{\cos^2(4\pi s) - \cos(4\pi s) - \frac{3}{4}} \right).$$

avec $s \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ et où on a pris $e^{2\pi is}$ pour racine carrée de $t = e^{4\pi is}$.

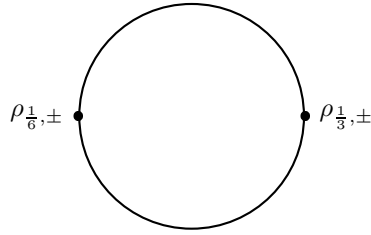


FIGURE 1.4. Classes de conjugaison des représentations irréductibles de G_K .

On désigne par $\rho_{s, \pm} : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ la représentation, correspondant à $s \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ et à $u_{\pm} = \cos(4\pi s) - \frac{3}{2} \pm \sqrt{\cos^2(4\pi s) - \cos(4\pi s) - \frac{3}{4}}$, envoyant le système périphérique de K sur des matrices diagonales de $\mathrm{SU}(2)$ et telle que :

$$\rho_{s, \pm}(m) = \begin{pmatrix} e^{2\pi is} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi is} \end{pmatrix}.$$

- Remarque 1.11.** — 1. Le polynôme d'Alexander du nœud en huit vaut $t^2 - 3t + 1$. Ses racines n'appartenant pas à S^1 , aucune représentation abélienne n'est limite de représentations irréductibles.
2. Plus généralement, on sait décrire l'espace des représentations d'un nœud à deux ponts. L'espace des classes de conjugaison des représentations irréductibles du groupe d'un nœud à deux ponts est formé de cercles et d'arcs ouverts dont les extrémités s'identifient à des représentations abéliennes (cf. [Bur90]).

1.3. Homologie et cohomologie à coefficients tordus

1.3.1. Généralités. — Dans ce paragraphe $\mathfrak{G}$ désigne l'un des groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie associée.

Soient X un espace topologique et $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathfrak{G}$ une représentation de son groupe fondamental.

Le groupe $\pi_1(X)$ agit par conjugaison à gauche et à droite sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{G}$ via

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (g, x) & \longmapsto & \mathrm{Ad}_{\rho(g)}(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \pi_1(X) & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (x, g) & \longmapsto & \mathrm{Ad}_{\rho(g^{-1})}(x) \end{array}$$

En prolongeant la première (resp. la seconde) action à $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$, on fait de $\mathfrak{g}$ un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module à gauche (resp. à droite). L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie de cette structure de $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module est désignée dans la suite par $\mathfrak{g}_{Ad\rho}$.

Soient W un CW-complexe fini dont l'espace topologique sous-jacent est $|W| = X$ et V un sous-complexe de W dont l'espace sous-jacent est noté $|V| = Y$. Considérons $\widetilde{W}$ le revêtement universel de W et soit $\widetilde{V} \subset \widetilde{W}$ le relevé de V . L'espace $C_*(\widetilde{W}, \widetilde{V}; \mathbb{Z})$ devient un $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module à gauche, de base les cellules de $\widetilde{W} \setminus \widetilde{V}$, via l'action de $\pi_1(X)$ sur $\widetilde{W}$ comme groupe de revêtement.

Par définition le complexe $C_*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho}) = \mathfrak{g} \otimes_{\pi_1(X)} C_*(\widetilde{W}, \widetilde{V}; \mathbb{Z})$ (resp. le cocomplexe $C^*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho}) = \text{Hom}_{\pi_1(X)}(C_*(\widetilde{W}, \widetilde{V}; \mathbb{Z}), \mathfrak{g})$) est le complexe (resp. le cocomplexe) à coefficients dans $\mathfrak{g}_{Ad\rho}$, en prenant pour opérateurs bord (resp. opérateurs cobord) les opérateurs bord (resp. les opérateurs cobord) induits par les opérateurs bord naturels de $C_*(\widetilde{W}, \widetilde{V}; \mathbb{Z})$.

L'homologie (resp. La cohomologie) du complexe $C_*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$ (resp. du cocomplexe $C^*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$) est l'homologie $H_*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$ (resp. la cohomologie $H^*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$) de (X, Y) à coefficients dans $\mathfrak{g}_{Ad\rho}$.

Notons que si les représentations $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathfrak{G}$ et $\rho' : \pi_1(X) \rightarrow \mathfrak{G}$ sont conjuguées, alors il existe un isomorphisme entre les complexes $C_*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$ et $C_*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho'})$ (resp. entre les cocomplexes $C^*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$ et $C^*(W, V; \mathfrak{g}_{Ad\rho'})$) qui induit un isomorphisme entre $H_*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$ et $H_*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad\rho'})$ (resp. entre $H^*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad\rho})$ et $H^*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad\rho'})$) (cf. [Por97, Chapitre 0, p. 9]).

Pour alléger les notations, lorsque $\mathfrak{G} = \text{SU}(2)$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, on note $C_*(W, V; Ad \circ \rho) = C_*(W, V; \mathfrak{su}(2)_{Ad\rho})$ (resp. $C^*(W, V; Ad \circ \rho) = C^*(W, V; \mathfrak{su}(2)_{Ad\rho})$) le complexe (resp. le cocomplexe) à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$. Son homologie (resp. sa cohomologie) est notée $H_*^\rho(X, Y) = H_*(X, Y; \mathfrak{su}(2)_{Ad\rho})$ (resp. $H_*^\rho(X, Y) = H^*(X, Y; \mathfrak{su}(2)_{Ad\rho})$).

La remarque suivante peut s'avérer utile.

Remarque 1.12. — Considérons une représentation $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{SU}(2) \hookrightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

1. L'isomorphisme $\mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, défini par $x \otimes a \mapsto xa$, induit l'isomorphisme : $H^*(X; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{Ad\rho}) \cong H^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
2. Si X est un espace $K(\pi, 1)$, alors $H_\rho^*(\pi_1(X)) = H_\rho^*(X)$ (on consultera [Bro82, p. 15 & p. 59] pour plus de détails).

On dit qu'une représentation $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{SU}(2)$ est *acyclique*, lorsque $H_\rho^*(X) = 0$.

Sauf mention explicite du contraire, les représentations que l'on considère dans la suite sont à valeurs dans $\text{SU}(2)$.

1.3.2. Propriétés de l'homologie et de la cohomologie à coefficients tordus. —

L'objet de ce paragraphe est de rappeler quelques propriétés de l'homologie et de la cohomologie à coefficients tordus (dans $\mathfrak{su}(2)_{Ad\rho}$), notamment l'existence de la *suite exacte longue* associée à une paire et la *dualité de Poincaré*. Pour les démonstrations, on renvoie à [Por97, Paragraphe 0.3.].

Suite exacte longue. — Tout d'abord, l'homologie et la cohomologie à coefficients tordus satisfont la *suite exacte longue associée à une paire*. Soient (W, V) une paire de CW-complexes et $\rho : \pi_1(W) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation quelconque. Il existe des homomorphismes $\partial : H_\rho^i(V) \rightarrow H_\rho^{i+1}(W, V)$ rendant la suite en cohomologie à coefficients tordus suivante :

$$0 \longrightarrow H_\rho^0(W, V) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_\rho^i(V) \xrightarrow{\partial} H_\rho^{i+1}(W, V) \xrightarrow{j^*} H_\rho^{i+1}(W) \xrightarrow{i^*} H_\rho^{i+1}(V) \longrightarrow \dots$$

exacte.

Produit cup, forme d'intersection. — La forme de Killing de $\mathfrak{su}(2)$ est donnée par $B : (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy)$. En identifiant $\mathfrak{su}(2)$ avec l'ensemble des quaternions purs, B n'est autre que le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ multiplié par le facteur -2 .

Considérons une variété de dimension finie X compacte, connexe par arcs et orientée et désignons par $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation quelconque. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit :

- un *produit cup* pour la cohomologie de X à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$:

$$\smile : H_\rho^p(X) \times H_\rho^q(X, \partial X) \rightarrow H_\rho^{p+q}(X, \partial X; \mathbb{R}).$$

- une *forme d'intersection* pour l'homologie de X à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$:

$$(\cdot, \cdot) : H_\rho^p(X) \times H_{n-p}^\rho(X, \partial X) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Le produit scalaire de $\mathfrak{su}(2)$ étant non dégénéré, on en déduit que la forme d'intersection est un *accouplement non dégénéré*.

On dispose enfin d'un *produit de Kronecker* entre homologie et cohomologie à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$, lui aussi induit par le produit scalaire. Si (W, V) un CW-couple fini, alors on a le produit de Kronecker :

$$[\cdot, \cdot] : H_i^\rho(W, V) \times H_\rho^i(W, V) \rightarrow \mathbb{R},$$

qui est également un accouplement non dégénéré.

Dualité de Poincaré. — La forme d'intersection étant non dégénérée, on a les *dualités de Poincaré* :

$$\begin{aligned} D_P : H_i^\rho(X, \partial X) &\xrightarrow{\cong} H_{n-i}^\rho(X)^* \xrightarrow{\cong} H_\rho^{n-i}(X) \\ D'_P : H_i^\rho(X) &\xrightarrow{\cong} H_{n-i}^\rho(X, \partial X)^* \xrightarrow{\cong} H_\rho^{n-i}(X, \partial X) \end{aligned}$$

qui rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_\rho^i(X) \times H_\rho^{n-i}(X, \partial X) & \xrightarrow{\smile} & H^n(X, \partial X; \mathbb{R}) \\ \uparrow D_P \times D'_P & & \uparrow \cong \\ H_{n-i}^\rho(X, \partial X) \times H_i^\rho(X) & \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} & \mathbb{R} \end{array}$$

1.3.3. Suite de Mayer-Vietoris. — Ce paragraphe est consacré à l'étude de la *suite exacte de Mayer-Vietoris* en cohomologie à coefficients tordus. On utilisera à de nombreuses reprises ce résultat dans la suite de cette thèse. Nous présentons d'abord le cas d'un produit amalgamé de groupes puis le cas topologique.

Le cas d'un produit amalgamé de groupes. — Supposons que le groupe G soit le *produit amalgamé* des groupes G_1 et G_2 relativement à U . On écrit $G = G_1 *_U G_2$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} & G_1 & \\ i_1 \nearrow & & \searrow k_1 \\ U & & G \\ i_2 \searrow & & \nearrow k_2 \\ & G_2 & \end{array}$$

dans lequel l'homomorphisme $i_j : U \rightarrow G_j$ est injectif, pour $j = 1, 2$.

A toute représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ de G on associe les trois représentations suivantes : $\rho_j = \rho|_{G_j} : G_j \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, $j = 1, 2$, et $\rho|_U : U \rightarrow \mathrm{SU}(2)$. Puis on pose $\rho = \rho_1 * \rho_2$. Réciproquement, soit ρ_j une représentation quelconque de G_j ($j = 1, 2$), alors on peut former la représentation $\rho = \rho_1 * \rho_2$ de G si, et seulement si, $\rho_1 \circ i_1 = \rho_2 \circ i_2$.

Correspondant au diagramme (1.1), on a la suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus suivante :

$$(1.2) \quad \cdots \longrightarrow H_\rho^n(G) \xrightarrow{k^*} H_{\rho_1}^n(G_1) \oplus H_{\rho_2}^n(G_2) \xrightarrow{i^*} H_{\rho|_U}^n(U) \xrightarrow{\delta} H_\rho^{n+1}(G) \longrightarrow \cdots$$

dans laquelle $k^* = (k_1^*, -k_2^*)$ et $i^* = i_1^* + i_2^*$. Cette suite exacte s'appelle la *suite de Mayer-Vietoris* en cohomologie à coefficients tordus associée au produit amalgamé $G = G_1 *_U G_2$ et à la représentation ρ (voir par exemple [HS71, p. 221]).

Le cas topologique. — Soient W un CW-complexe compact, W_1 et W_2 deux sous-complexes fermés et connexes par arcs tels que $W = W_1 \cup W_2$ et $V = W_1 \cap W_2$ est non vide et connexe par arcs. Notons $k_j : W_j \hookrightarrow W$ et $i_j : V \hookrightarrow W_j$ les inclusions canoniques. Puis considérons une représentation $\rho : \pi_1(W) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ et notons $\rho_j = \rho|_{\pi_1(W_j)}$ et $\rho_V = \rho|_{\pi_1(V)}$ ses restrictions à $\pi_1(W_j)$ et $\pi_1(V)$ respectivement. On a la suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus suivante :

$$\cdots \longrightarrow H_\rho^n(W) \xrightarrow{k^*} H_{\rho_1}^n(W_1) \oplus H_{\rho_2}^n(W_2) \xrightarrow{i^*} H_{\rho_V}^n(V) \xrightarrow{\delta} H_\rho^{n+1}(W) \longrightarrow \cdots$$

dans laquelle $k^* = (k_1^*, -k_2^*)$ et $i^* = i_1^* + i_2^*$. Cette suite s'appelle la *suite de Mayer-Vietoris* en cohomologie à coefficients tordus associée au scindement $W = W_1 \cup_V W_2$ et à la représentation ρ . On pourra se reporter à [Por97, Proposition 0.11] pour plus de détails et une démonstration.

Remarque 1.13. — Notons que contrairement au cas d'un produit amalgamé de groupes, les homomorphismes $\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(W_j)$, induits par les inclusions $k_j : V \hookrightarrow W_j$, sont surjectifs.

1.3.4. Groupes d'homologie et de cohomologie en dimension 0. — Le résultat du lemme suivant est très utile. Il fournit une description explicite des groupes d'homologie et de cohomologie en dimension nulle (cf. [Whi78, Théorème 3.2, p. 275]).

Lemme 1.14. — Si X un espace topologique, alors on a les deux assertions suivantes.

1. Notons $\mathfrak{su}(2)_{Ad \circ \rho(\pi_1(X))}$ l'ensemble des vecteurs coinvariants, i.e. le quotient de $\mathfrak{su}(2)$ par le sous-groupe engendré par les éléments $\{x - Ad_{\rho(g)}(x) \mid x \in \mathfrak{su}(2), g \in \pi_1(X)\}$.
On a

$$H_0^\rho(X) \cong \mathfrak{su}(2)_{Ad \circ \rho(\pi_1(X))}.$$

2. Notons $\mathfrak{su}(2)^{Ad \circ \rho(\pi_1(X))}$ l'ensemble des vecteurs invariants, i.e. le sous-groupe constitué des vecteurs fixes sous l'action de $\pi_1(X)$, précisément

$$\mathfrak{su}(2)^{Ad \circ \rho(\pi_1(X))} = \{x \in \mathfrak{su}(2) \mid Ad_{\rho(g)}(x) = x \text{ pour tout } g \in \pi_1(X)\}.$$

On a

$$H_\rho^0(X) \cong \mathfrak{su}(2)^{Ad \circ \rho(\pi_1(X))}.$$

Une conséquence immédiate du lemme précédent est donnée dans le suivant.

Lemme 1.15. — *Sous les hypothèses du lemme précédent, si ρ est une représentation irréductible de $\pi_1(X)$ dans $SU(2)$, alors $H_\rho^0(X) = 0$.*

Démonstration. — Compte tenu du lemme précédent, il suffit de voir que $\mathfrak{su}(2)^{Ad \circ \rho(\pi_1(X))} = 0$. Mais cette dernière affirmation est une conséquence directe du fait que les rotations $Ad_{\rho(g)}$, pour $g \in \pi_1(X)$, n'ont pas d'axe commun lorsque ρ est irréductible. $\square$

1.3.5. Exemples. — Illustrons notre propos en donnant deux exemples qui s'avèrent être fondamentaux pour la suite. Il s'agit des exemples de l'extérieur M_K d'un nœud $K \subset S^3$ et de son bord ∂M_K , qui est un tore bidimensionnel. Commençons par étudier la cohomologie à coefficients tordus de ce dernier.

Cohomologie à coefficients tordus du tore. — Toutes les représentations du groupe fondamental du tore bidimensionnel dans $SU(2)$ sont abéliennes (cf. Paragraphe 1.2.2) et on a le résultat suivant (cf. [Por97, Proposition 3.18]).

Proposition 1.16. — *Soit T^2 le tore bidimensionnel. Si $\rho : \pi_1(T^2) \rightarrow SU(2)$ est une représentation non centrale, alors la cohomologie de T^2 à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ s'identifie à sa cohomologie à coefficients réels :*

$$H_\rho^0(T^2) \cong H^0(T^2; \mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } 1,$$

$$H_\rho^1(T^2) \cong H^1(T^2; \mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } 2,$$

$$H_\rho^2(T^2) \cong H^2(T^2; \mathbb{R}) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } 1.$$

Démonstration. — En reprenant les notations du Paragraphe 1.2.2, on sait que ρ est conjuguée à une et une seule des représentations $\rho_{\alpha, \beta} : \pi_1(T^2) \rightarrow SU(2)$, donnée par :

$$\rho_{\alpha, \beta}(\mu) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\alpha i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\alpha i} \end{pmatrix}, \quad \rho_{\alpha, \beta}(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\beta i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi\beta i} \end{pmatrix},$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1/2$. Ainsi l'espace $\mathfrak{su}(2)^{Ad \circ \rho(\pi_1(T^2))} = \mathbb{R}\mathbf{i}$ des vecteurs invariants sous l'action de $Ad \circ \rho(\pi_1(T^2))$ s'identifie à $\mathbb{R}$ par l'isomorphisme $\psi = \langle \mathbf{i}, \cdot \rangle$.

Introduisons l'homomorphisme $\phi_{\mathbf{i}}^{(i)} : H_\rho^i(T^2) \rightarrow H^i(T^2; \mathbb{R})$, défini par $\phi_{\mathbf{i}}^{(i)}(z) = \mathbf{i} \smile z$. La non dégénérescence du produit scalaire de $\mathfrak{su}(2)$ fait que $\phi_{\mathbf{i}}^{(i)}$ est injectif pour tout $i = 0, 1, 2$.

Grâce au Lemme 1.14, on voit d'emblée que $\phi_i^{(0)} : H_\rho^0(T^2) \rightarrow H^0(T^2; \mathbb{R})$ est un isomorphisme. Ensuite, par dualité de Poincaré, on a

$$\dim H_\rho^2(T^2) = \dim H_\rho^0(T^2) = 1 = \dim H^2(T^2; \mathbb{R}).$$

Puis, la caractéristique d'Euler de T^2 étant nulle, il vient

$$\dim H_\rho^1(T^2) = \dim H_\rho^0(T^2) + \dim H_\rho^2(T^2) = 2 = \dim H^1(T^2; \mathbb{R}).$$

Ceci suffit pour conclure que $\phi_i^{(i)} : H_\rho^i(T^2) \rightarrow H^i(T^2; \mathbb{R})$ est un isomorphisme, quel que soit $i = 0, 1, 2$. $\square$

Remarque 1.17. — Si $\rho : \pi_1(T^2) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation centrale – c'est-à-dire si $\rho(\pi_1(T^2)) \subset \{\pm 1\}$ –, alors $\mathfrak{su}(2)^{\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(T^2))} = \mathfrak{su}(2)$, de sorte que $\dim H_\rho^0(T^2) = 3$, puis par dualité de Poincaré, $\dim H_\rho^2(T^2) = 3$ et enfin, en s'appuyant sur le fait que $\chi(T^2) = 0$, $\dim H_\rho^1(T^2) = 6$. On peut en fait noter que dans ce cas précis, $H_\rho^*(T^2) = H^*(T^2; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2)$.

Cohomologie à coefficients tordus d'une variété tridimensionnelle à bord. — Soit M une variété tridimensionnelle, compacte, orientable dont le bord est une réunion finie de t tores et considérons $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation dont la restriction à chaque tore de ∂M n'est pas centrale. La cohomologie de M à coefficients dans la représentation $\mathrm{Ad} \circ \rho$ vérifie les propriétés données dans le lemme suivant.

Lemme 1.18. — Avec les notations précédentes, on a $\dim H_\rho^1(M) \geq t$.

De plus, si ρ est irréductible, alors $H_\rho^0(M) = 0$ et $\dim H_\rho^2(M) = 3\chi(M) + \dim H_\rho^1(M)$.

Démonstration. — Elle se divise en deux étapes.

1. La suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus associée à la paire $(M, \partial M)$ couplée à la dualité de Poincaré fournissent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_\rho^1(M, \partial M) & \longrightarrow & H_\rho^1(M) & \xrightarrow{i^*} & H_\rho^1(\partial M) \xrightarrow{\partial} H_\rho^2(M, \partial M) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \cdots & \longrightarrow & H_\rho^2(M) & \longrightarrow & H_\rho^2(M, \partial M) & \xrightarrow{\delta} & H_\rho^1(\partial M) \xrightarrow{i_*} H_\rho^1(M) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

De là, on déduit que $\mathrm{im} \partial \cong \mathrm{im} i_*$, mais on sait aussi que $\mathrm{im} i_* \cong \mathrm{im} i^*$, de sorte que $\mathrm{rg} i^* = \mathrm{rg} \partial$. En s'appuyant sur l'exactitude de la première ligne du diagramme précédent, on obtient donc

$$2t = \dim H_\rho^1(\partial M) = \mathrm{rg} i^* + \mathrm{rg} \partial = 2 \mathrm{rg} i^*.$$

Ainsi $\mathrm{rg} i^* = t$ et par conséquent $\dim H_\rho^1(M) = t + \dim \ker i^* \geq t$.

2. Si ρ est irréductible, alors $H_\rho^0(M) = 0$ (cf. Lemme 1.15).

L'égalité $\dim H_\rho^2(M) = 3\chi(M) + \dim H_\rho^2(M_K)$ résulte quant à elle du fait que⁽⁴⁾

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_\rho^i(M) = \chi(M) \cdot \dim \mathfrak{su}(2) = 3\chi(M).$$

□

Le résultat du lemme précédent s'applique en particulier à l'extérieur d'un nœud ou d'un entrelacs.

Lemme 1.19. — Soit K un nœud dans S^3 . On note M_K son extérieur et $G_K = \pi_1(M_K)$ son groupe. Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation non centrale, alors $\dim H_\rho^1(M_K) \geq 1$.
Si de plus ρ est irréductible, alors $H_\rho^0(M_K) = 0$ et $\dim H_\rho^1(M_K) = \dim H_\rho^2(M_K)$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme précédent.

En effet, M_K est une variété tridimensionnelle, compacte, orientable dont le bord est un tore et ayant une caractéristique d'Euler nulle. De plus, en désignant par m le méridien de K , si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ n'est pas centrale, alors $\rho(m) \neq \pm \mathbf{1}$ (car m engendre normalement G_K), de sorte que la restriction de ρ à $\pi_1(\partial M_K)$ n'est pas centrale. □

1.4. Dérivations

Cette section est consacrée à la notion de *dérivations tordues* (à coefficients dans $\mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). En particulier, pour un groupe G et certaines représentations $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on montre que le groupe de cohomologie à coefficients tordus $H^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{Ad \circ \rho})$ est isomorphe à l'espace tangent à la variété des caractères.

1.4.1. Définitions. — Dans ce paragraphe, $\mathfrak{G}$ désigne l'un des groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie associée.

Soient G un groupe de type fini et $\rho : G \rightarrow \mathfrak{G}$ une représentation quelconque. Une *dérivation* tordue par ρ est une application $d : G \rightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant la condition de cocyclicité :

$$d(g_1 g_2) = d(g_1) + Ad_{\rho(g_1)} d(g_2), \text{ pour tout } g_1, g_2 \in G.$$

On note $\mathrm{Der}(G; \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ l'ensemble des dérivations de G tordues par la représentation ρ .

Soit G un groupe de présentation finie engendré par $S_1, \dots, S_n$. Notons

$$F_n = \langle S_1, \dots, S_n \mid - \rangle$$

le groupe libre de rang n et $\phi : F_n \rightarrow G$ la surjection canonique. On adopte la convention suivante : si $\rho : G \rightarrow \mathfrak{G}$ est une représentation, si $g \in G$ et $x \in \mathfrak{g}$, on écrit $g \circ x = Ad_{\rho(g)}(x)$. Avec ces notations on a :

⁽⁴⁾Cette égalité s'obtient grâce à

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H_\rho^i(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim C^i(M; Ad \circ \rho)$$

où $C^i(M; Ad \circ \rho) = \mathrm{Hom}_{\pi_1(M)}(C_i(\widetilde{M}; \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2))$.

Assertion 1.20. — Si $d \in \text{Der}(G; \mathfrak{g}_{\text{Ad} \circ \rho})$, alors pour tout $g \in F_n$, on a :

$$d(\phi(g)) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial s_i} \right)^\phi \circ d(s_i).$$

On se reportera par exemple à [BZ85, Chapitre 9.B] pour une démonstration de cette formule bien connue.

Parmi les dérivations tordues par ρ , on distingue les *dérivations intérieures*, i.e. les applications $\delta : G \rightarrow \mathfrak{g}$ pour lesquelles il existe $a \in \mathfrak{g}$ tel que l'on ait,

$$\delta(g) = a - \text{Ad}_{\rho(g)}a, \text{ pour tout } g \in G.$$

On note $\text{Inn}(G; \mathfrak{g}_{\text{Ad} \circ \rho})$ l'ensemble des dérivations intérieures de G tordues par ρ .

Assertion 1.21. — Si $\rho : G \rightarrow \mathfrak{G}$ est irréductible, alors $\text{Inn}(G; \mathfrak{g}_{\text{Ad} \circ \rho}) \cong \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Si ρ est irréductible, alors $\text{Ad} \circ \rho(G) \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ n'a pas de vecteur fixe autre que le vecteur nul et donc $\text{Inn}(G; \mathfrak{g}_{\text{Ad} \circ \rho}) \cong \mathfrak{g}$. $\square$

Notation. — Pour simplifier les notations, lorsque $\mathfrak{G} = \text{SU}(2)$, on écrit $\text{Der}_\rho(G)$ pour $\text{Der}(G; \mathfrak{su}_{\text{Ad} \circ \rho})$ et $\text{Inn}_\rho(G)$ pour $\text{Inn}(G; \mathfrak{su}_{\text{Ad} \circ \rho})$.

Pour un espace topologique X et une représentation $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{SU}(2)$, on convient de noter $\text{Der}_\rho(X)$ pour $\text{Der}_\rho(\pi_1(X))$ et $\text{Inn}_\rho(X)$ pour $\text{Inn}_\rho(\pi_1(X))$.

1.4.2. Un lemme utile. — Ce paragraphe est consacré à la démonstration d'un lemme utilisé plusieurs fois dans la suite de cette thèse (cf. [Heu03, Lemme 2.1]).

Lemme 1.22. — Soient G un groupe, $g \in G$ et désignons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de $\mathfrak{su}(2)$. Si $\rho : G \rightarrow \text{SU}(2)$ est une représentation telle que $\rho(g) \neq \pm 1$, alors :

1. Il existe un unique couple $(\theta, P^\rho(g))$ tel que $\rho(g) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P^\rho(g)$, avec $0 < \theta < \pi$ et $P^\rho(g) \in S^2$.
2. Pour tout $\delta \in \text{Inn}_\rho(G)$, on a $\langle \delta(g), P^\rho(g) \rangle = 0$.
3. Si g' est un conjugué de g dans G , alors $\langle d(g), P^\rho(g) \rangle = \langle d(g'), P^\rho(g') \rangle$, pour tout $d \in \text{Der}_\rho(G)$.

Démonstration. — Le premier point a déjà été vu dans la Section 1.1. La démonstration des deux autres est pour l'essentiel une conséquence de l'identité bien connue : $\langle x, P \rangle = \langle \text{Ad}_A x, P \rangle$, dans laquelle $A \in \text{SU}(2) \setminus \{\pm 1\}$, Ad_A est une rotation d'axe $P \in \mathfrak{su}(2)$ et $x \in \mathfrak{su}(2)$. En effet,

1. Si $\delta \in \text{Inn}_\rho(G)$, alors il existe $a \in \mathfrak{su}(2)$ tel que l'on ait $\delta(g) = a - \text{Ad}_{\rho(g)}a$, de sorte que $\langle \delta(g), P^\rho(g) \rangle = \langle a, P^\rho(g) \rangle - \langle \text{Ad}_{\rho(g)}a, P^\rho(g) \rangle = 0$.
2. Si g' s'écrit $g' = hgh^{-1}$, alors

$$d(g') = d(h) - \text{Ad}_{\rho(g')}d(h) + \text{Ad}_{\rho(h)}d(g) \text{ et } P^\rho(g') = \text{Ad}_{\rho(h)}P^\rho(g).$$

On a donc

$$\langle d(g'), P^\rho(g') \rangle = \langle d(h), P^\rho(g') \rangle - \langle \text{Ad}_{\rho(g')}d(h), P^\rho(g') \rangle + \langle \text{Ad}_{\rho(h)}d(g), \text{Ad}_{\rho(h)}P^\rho(g) \rangle,$$

ce qui donne $\langle d(g'), P^\rho(g') \rangle = \langle d(g), P^\rho(g) \rangle$.

□

1.4.3. Groupe de cohomologie tordue en dimension 1. — Désignons par $\mathfrak{G}$ l'un des groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ ou $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie associée et considérons une représentation $\rho : G \rightarrow \mathfrak{G}$ d'un groupe G .

On rappelle que l'on dispose des isomorphismes (cf. [HS71, Chapitre VI]) :

$$\mathrm{Der}(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) \cong Z^1(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}), \quad \mathrm{Inn}(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) \cong B^1(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho})$$

et

$$\mathrm{Der}(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) / \mathrm{Inn}(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) \cong H^1(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}).$$

Ainsi, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Inn}(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) \longrightarrow \mathrm{Der}(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) \longrightarrow H^1(G; \mathfrak{g}_{\mathrm{Ad}\rho}) \longrightarrow 0$$

est *exacte*.

1.4.4. Espace tangent et groupe de cohomologie. — Reprenons les notations du Paragraphe 1.2.1. D'après un résultat d'A. Weil (cf. [Wei64]), l'espace tangent de Zariski $T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ à $R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ en une représentation irréductible $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ s'identifie à un sous-espace de l'espace des cocycles $Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho})$. Plus précisément, l'inclusion est donnée par (cf. [Por97, Paragraphe 3.1.3] ou [BA98, Proposition IV.10]) :

$$(1.3) \quad T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}), \quad \left. \frac{d\rho_t}{dt} \right|_{t=0} \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} G \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ g \mapsto \left. \frac{d}{dt} \rho_t(g) \rho(g^{-1}) \right|_{t=0} \end{array} \right.$$

avec $\rho_0 = \rho$.

En général, cette inclusion peut être stricte et nous dirons qu'une représentation $\rho \in R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est *réduite au sens des schémas* ⁽⁵⁾ lorsque l'inclusion (1.3) est un *isomorphisme*.

L'espace tangent de Zariski en $\rho \in R^{\mathrm{irr}}(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ à l'orbite $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})(\rho)$ de ρ sous l'action de la représentation adjointe s'identifie à l'ensemble des cobords $B^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho})$ (cf. Assertion 1.21). On a donc une inclusion naturelle :

$$T_{\chi_\rho}^{\mathrm{Zar}} X(G) \rightarrow Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}) / B^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}) = H^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}),$$

qui est un isomorphisme si, et seulement si, ρ est réduite au sens des schémas (cf. [Por97, Proposition 3.5]). Lorsque ρ est réduite au sens des schémas, on dispose ainsi du diagramme commutatif suivant :

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccc} T_\rho^{\mathrm{Zar}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})(\rho) & \longrightarrow & T_\rho^{\mathrm{Zar}} R^{\mathrm{irr}}(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{D_\rho t} & T_{\chi_\rho}^{\mathrm{Zar}} X^{\mathrm{irr}}(G) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ B^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}) & \longrightarrow & Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}) & \longrightarrow & H^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad}\rho}) \end{array}$$

Reprenons l'involution $\sigma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, définie par $\sigma(A) = (\bar{A}^T)^{-1}$ que nous avons considérée dans le Paragraphe 1.2.1, puis notons $\sigma_* = D_1 \sigma : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'application

⁽⁵⁾On peut se reporter à [Por97, p. 69] ou à [BA98, Définition IV.12] pour une justification de cette définition et de la terminologie utilisée.

linéaire correspondante. Explicitement, on a $\sigma_*(x) = -\bar{x}^T$ et on constate que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\sigma_*} = \mathfrak{su}(2)$. En effet, au moyen de l'isomorphisme $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ défini par $x \otimes a \mapsto xa$, $\sigma_* : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ induit l'application linéaire $\bar{\sigma}_* : \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C}$, donnée par $\bar{\sigma}_*(x \otimes a) = x \otimes \bar{a}$.

Pour une représentation $\rho \in R(G)$, on définit l'espace tangent à la "sous-variété réelle" $R(G) = (R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})))^\sigma$ en posant :

$$T_\rho R(G) = (T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})))^{\sigma_*} \subset T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})).$$

Si $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est irréductible, alors, en utilisant le fait que $Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad} \circ \rho}) = Z_\rho^1(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, l'inclusion (1.3) induit une inclusion :

$$T_\rho R(G) = (T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})))^{\sigma_*} \hookrightarrow (Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad} \circ \rho}))^{\sigma_*} = Z_\rho^1(G) \cong \mathrm{Der}_\rho(G).$$

Nous commençons par établir deux lemmes.

Lemme 1.23. — *Soit $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation irréductible. Si la représentation $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est réduite au sens des schémas, alors $T_\rho R(G) \cong \mathrm{Der}_\rho(G)$.*

Démonstration. — Elle est identique à celle de [BA98, Proposition IV.16].

Puisque $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est réduite au sens des schémas, l'inclusion (1.3) est un isomorphisme. On a donc :

$$T_\rho R(G) = (T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})))^{\sigma_*} \cong (Z^1(G; \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathrm{Ad} \circ \rho}))^{\sigma_*} = Z_\rho^1(G) \cong \mathrm{Der}_\rho(G). \quad \square$$

Lemme 1.24. — *Pour une représentation irréductible $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, on a :*

$$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})(\rho))^\sigma = \mathrm{SU}(2)(\rho).$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe de l'injectivité de l'application $s : \widehat{R}(G) \rightarrow X(G)$ (cf. Lemme 1.2). $\square$

On a enfin le résultat suivant.

Proposition 1.25. — *Soit G le groupe libre F_n ou le groupe fondamental de S , sphère bidimensionnelle privée de n points. Si $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation irréductible, alors $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est réduite au sens des schémas et on a $T_\rho R(G) \cong \mathrm{Der}_\rho(G)$.*

Démonstration. — On utilise le Lemme 1.23 et le fait que si $G = F_n$, alors $R(F_n) \cong \mathrm{SU}(2)^n$ est une variété lisse de dimension $3n$. De même, si $G = \pi_1(S) \cong F_{n-1}$, alors $R(S) \cong \mathrm{SU}(2)^{n-1}$ est une variété lisse de dimension $3n - 3$. $\square$

1.5. Notions de régularité

Cette section est consacrée à la notion de *régularité*, introduite par M. Heusener dans [Heu03, Paragraphe 1], et à celle de *μ -régularité*, introduite par J. Porti dans [Por97, Définition 3.21], pour une représentation du groupe d'un nœud. On ne donne toutefois ici que des généralités, qui seront utilisées dans la suite du présent travail.

A partir de maintenant, K désigne un nœud dans S^3 et on suppose que la sphère S^3 est orientée.

1.5.1. Définitions. — Commençons par les définitions et une conséquence directe de celles-ci.

Définition 1.26. — Soient $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation *irréductible* et μ une courbe simple, fermée dans le bord ∂M_K de M_K .

- (i). On dit que ρ est *régulière* lorsque l'homomorphisme $H_\rho^1(M_K, \partial M_K) \rightarrow H_\rho^1(M_K)$, induit par l'inclusion $\partial M_K \hookrightarrow M_K$, est nul.
- (ii). On dit que ρ est μ -*régulière* lorsque l'homomorphisme $H_\rho^1(M_K, \mu) \rightarrow H_\rho^1(M_K)$, induit par l'inclusion $\mu \hookrightarrow M_K$, est nul.

Remarque 1.27. — 1. La régularité décrit en fait une situation “générique” ; nous expliquerons ceci avec plus de détails dans la Proposition 3.4.

2. La notion de μ -régularité s'impose lorsque l'on cherche une base de référence de nature géométrique pour le groupe $H_\rho^1(M_K)$, nous reviendrons sur ce problème au Chapitre 2 (voir en particulier Paragraphe 2.7).

3. Nous justifierons dans quelques instants la terminologie “régulière” utilisée.

4. La régularité et la μ -régularité sont des notions invariantes par conjugaison, on pourra donc parler de *régularité* et de μ -*régularité* pour la classe de conjugaison $[\rho]$ de la représentation ρ .

Dans le lemme suivant, on donne une caractérisation utile, bien qu'immédiate, de la régularité et de la μ -régularité.

Lemme 1.28. — Soient $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation irréductible et μ une courbe simple, fermée dans le bord ∂M_K de M_K .

- (i). La représentation ρ est régulière si, et seulement si, l'homomorphisme

$$i^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\partial M_K),$$

induit par l'inclusion $i : \partial M_K \hookrightarrow M_K$, est injectif.

- (ii). La représentation ρ est μ -régulière si, et seulement si, l'homomorphisme

$$\alpha^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\mu),$$

induit par l'inclusion $\alpha : \mu \hookrightarrow M_K$, est injectif.

Démonstration. — Elle s'appuie sur la suite exacte longue en cohomologie à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ associée à une paire.

- (i). En utilisant l'exactitude de la suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus associée à la paire $(M_K, \partial M_K)$:

$$\cdots \longrightarrow H_\rho^1(M_K, \partial M_K) \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{i^*} H_\rho^1(\partial M_K) \xrightarrow{\partial} H_\rho^2(M_K, \partial M_K) \longrightarrow \cdots$$

on constate immédiatement que ρ est régulière si, et seulement si, i^* est injective.

- (ii). Le même argument que dans le cas précédent, mais appliqué à la paire (M_K, μ) , permet de conclure que la représentation ρ est μ -régulière si, et seulement si, α^* est injectif. □

Remarque 1.29. — On vérifie aisément que la représentation ρ est μ -régulière si, et seulement si, $\alpha^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\mu)$ est un isomorphisme (cf. Corollaire 1.33).

1.5.2. Critères de régularité. — Dans ce paragraphe, K désigne toujours un nœud dans S^3 , on note M_K l'extérieur de K , G_K son groupe et on considère une représentation irréductible $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$.

On commence par donner une caractérisation cohomologique de la notion de régularité (cf. [Hod86] et [HK97, Remarque 4]).

Proposition 1.30. — *La représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière si, et seulement si, le groupe $H_\rho^1(M_K)$ de cohomologie de M_K à coefficients dans la représentation $\mathrm{Ad} \circ \rho$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel unidimensionnel.*

Démonstration. — Dans la démonstration du Lemme 1.19, on a établi que $\dim H_\rho^1(M) = 1 + \dim \ker i^*$. En combinant cette affirmation à celle du Lemme 1.28, on obtient le résultat voulu. □

Remarque 1.31. — La caractérisation de la régularité donnée dans la proposition précédente est en fait la définition originale de la régularité donnée dans [Heu03, Paragraphe 1]. Nous avons toutefois préféré prendre comme définition de la régularité la Définition 1.26(i) pour souligner l'analogie qu'elle présente avec la définition de la μ -régularité.

Les corollaires suivants sont dévolus à deux conséquences immédiates de la Proposition 1.30.

Corollaire 1.32. — *La représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière si, et seulement si, $\dim \mathrm{Der}_\rho(M_K) = 4$.*

Démonstration. — La représentation ρ étant irréductible, d'après l'Assertion 1.21 on a $\dim \mathrm{Inn}_\rho(M_K) = 3$, de sorte que $\dim \mathrm{Der}_\rho(M_K) = 3 + \dim H_\rho^1(M_K)$. Ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.33. — *Soit μ une courbe simple, fermée dans le bord ∂M_K de M_K . Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation μ -régulière, alors ρ est régulière.*

Démonstration. — Vérifions que $\dim H_\rho^1(M_K) = 1$.

L'homomorphisme α^* étant le composé des deux homomorphismes suivants :

$$H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{i^*} H_\rho^1(\partial M_K) \xrightarrow{j^*} H_\rho^1(\mu),$$

induits respectivement par les inclusions $i : \partial M_K \hookrightarrow M_K$ et $j : \mu \hookrightarrow \partial M_K$, on a $\ker i^* \subset \ker \alpha^*$.

D'après le Lemme 1.28, si ρ est μ -régulière, alors l'homomorphisme α^* est injectif, et par suite, l'homomorphisme i^* est aussi injectif. En utilisant une nouvelle fois le Lemme 1.28, on conclut que ρ est régulière. $\square$

Nous verrons que la réciproque du corollaire précédent est *fausse* (cf. Paragraphe 1.5.4). On peut toutefois établir (voir Proposition 1.40) que si ρ est régulière, alors il existe une courbe simple, fermée μ dans le bord de M_K telle que ρ est μ -régulière.

Donnons à présent un résultat de M. Heusener et E. Klassen (cf. [HK97, Proposition 1]), conséquence de la proposition ci-dessus, expliquant l'utilisation du terme *régulier* pour une représentation.

Corollaire 1.34. — *Soit $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation et désignons par $[\rho]$ sa $\mathrm{SO}(3)$ -classe de conjugaison. Si ρ est une représentation régulière, alors $[\rho]$ est un point lisse et il existe un voisinage de $[\rho]$ dans $\widehat{R}(M_K)$ qui est difféomorphe à un intervalle réel. Ainsi, l'ensemble des classes de conjugaison des représentations régulières forme une variété unidimensionnelle notée $\mathrm{Reg}(K)$.*

Terminons cette partie par la proposition suivante.

Proposition 1.35. — *Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation régulière, alors il existe un isomorphisme $\varphi_{[\rho]}$ entre $T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K)$ et $H_\rho^1(M_K)$.*

Démonstration. — Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation régulière du groupe du nœud K , alors ρ est réduite au sens des schémas, $[\rho]$ est un point lisse de $\widehat{R}(M_K)$ et $\widehat{R}(M_K)$ possède une structure de variété lisse unidimensionnelle au voisinage de $[\rho]$. L'ensemble $\widehat{R}(M_K)$ possède donc une structure de variété lisse de dimension 4 au voisinage de ρ et en s'appuyant sur le diagramme commutatif (1.4) et sur les Lemmes 1.23 & 1.24 on obtient le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_\rho \mathrm{SU}(2)(\rho) & \longrightarrow & T_\rho \widetilde{R}(M_K) & \longrightarrow & T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \varphi_{[\rho]} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Inn}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & H_\rho^1(M_K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On en déduit donc que $\varphi_{[\rho]} : T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \rightarrow H_\rho^1(M_K)$ est un isomorphisme. $\square$

1.5.3. Critères de μ -régularité. — Soit ρ une représentation irréductible de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$, désignons par $[\rho]$ sa classe de conjugaison et notons μ une courbe simple, fermée dans le bord ∂M_K de M_K . On suppose que la courbe μ est *orientée* ⁽⁶⁾.

La représentation ρ étant irréductible, on a $\rho(m) \neq \pm 1$, il existe donc un unique couple (θ, P^ρ) tel que $\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P^\rho$, avec $0 < \theta < \pi$ et $P^\rho \in S^2$. Le vecteur $P^\rho \in S^2$ est dans l'espace $\mathfrak{su}(2)^{\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))}$ des éléments de $\mathfrak{su}(2)$ invariants sous l'action de $\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))$ et engendre en particulier l'axe commun des rotations $\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))$.

⁽⁶⁾Bien que la notion de μ -régularité soit indépendante de l'orientation de la courbe μ , il nous est nécessaire d'orienter μ pour définir sans ambiguïté un isomorphisme explicite entre $H_\rho^1(M_K)$ et $\mathbb{R}$ (voir *infra*).

Notons $V_{[\rho]}$ un voisinage de $[\rho]$ dans $\widehat{R}(M_K)$ et considérons l'application $\theta_\mu : V_{[\rho]} \subset \widehat{R}(M_K) \rightarrow [0, 2\pi]/\sim = S^1$, qui à $[\varrho] \in V_{[\rho]}$ associe l'angle $\theta_\mu([\varrho]) \in S^1$ de la rotation $Ad \circ \varrho(\mu)$.

Lorsqu'une représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est μ -régulière, nous savons déjà que $H_\rho^1(M_K)$ est un espace vectoriel unidimensionnel (cf. Lemme 1.28). Nous allons montrer, qu'en plus, on connaît explicitement un isomorphisme – fonction de la courbe orientée μ – entre $H_\rho^1(M_K)$ et $\mathbb{R}$.

Introduisons $f_\mu^\rho : H_\rho^1(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ l'homomorphisme défini⁽⁷⁾ par $f_\mu^\rho(v) = \langle v(\mu), P^\rho \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathfrak{su}(2)$. On peut noter que : $f_{\mu^{-1}}^\rho = -f_\mu^\rho$.

On commence par établir la “formule de dualité” suivante (analogue à celle obtenue par J. Porti dans [Por97, Lemme 3.20]).

Lemme 1.36. — *Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière, alors*

$$f_\mu^\rho(v) = \langle v(\mu), P^\rho \rangle = D_{[\rho]} \theta_\mu(\varphi_{[\rho]}^{-1}(v)),$$

pour tout $v \in H_\rho^1(M_K)$, avec $\varphi_{[\rho]} : T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \xrightarrow{\cong} H_\rho^1(M_K)$ (cf. Proposition 1.35). Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_\rho^1(M_K) & \xrightarrow{f_\mu^\rho} & \mathbb{R} \\ \varphi_{[\rho]} \uparrow \cong & \nearrow D_{[\rho]} \theta_\mu & \\ T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) & & \end{array}$$

Démonstration. — Soit $v \in T_\rho \widetilde{R}(M_K)$. On choisit un germe ρ_s au voisinage de l'origine tel que :

$$v = \left. \frac{d\rho_s}{ds} \right|_{s=0} \quad \text{et} \quad \rho_0 = \rho,$$

puisque la représentation ρ est régulière, on peut supposer que ρ_s est aussi régulière. On plonge ensuite $T_\rho \widetilde{R}(M_K)$ dans $Z_\rho^1(M_K)$ de la façon usuelle :

$$\forall g \in G_K, \quad v(g) = \left. \frac{d}{ds} \rho_s(g) \rho(g)^{-1} \right|_{s=0}.$$

Il existe une famille de matrices A_s telle que :

$$\rho_s(\mu) = A_s \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu^{\rho_s}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\mu^{\rho_s}} \end{pmatrix} A_s^{-1}.$$

On constate que $P^\rho = Ad_{A_0}(\mathbf{i})$ et en utilisant l'identité

$$\left. \frac{dA_s^{-1}}{ds} \right|_{s=0} = -A_0^{-1} \left. \frac{dA_s}{ds} \right|_{s=0} A_0^{-1},$$

⁽⁷⁾La cohérence de la construction est assurée par l'identité $\langle b(m), P^\rho \rangle = 0$, valable pour tout $b \in B_\rho^1(M_K)$, d'après le Lemme 1.22.

on obtient :

$$\left. \frac{d}{ds} \rho_s(g) \rho(g)^{-1} \right|_{s=0} = (\text{Id} - \text{Ad}_{\rho(\mu)}) \left. \frac{dA_s}{ds} \right|_{s=0} + \left. \frac{d\theta_\mu^{\rho_s}}{ds} \right|_{s=0} P^\rho,$$

ce qui permet de conclure que :

$$\left\langle \left. \frac{d}{ds} \rho_s(g) \rho(g)^{-1} \right|_{s=0}, P^\rho \right\rangle = \left. \frac{d\theta_\mu^{\rho_s}}{ds} \right|_{s=0}.$$

□

Avec les notations précédentes, on a la caractérisation suivante de la notion de μ -régularité.

Proposition 1.37. — *La représentation $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ est μ -régulière si, et seulement si, $f_\mu^\rho : H_\rho^1(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Géométriquement la courbe μ dans le bord ∂M_K de M_K est un cercle. Considérons l'inclusion $\alpha : \mu \hookrightarrow M_K$. On a vu que, ρ est μ -régulière si, et seulement si, $\alpha^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\mu)$ est un isomorphisme (cf. Lemme 1.28).

Comme dans le cas du tore, le produit cup induit par le produit scalaire de $\mathfrak{su}(2)$ nous fournit l'isomorphisme suivant :

$$P^\rho \smile \cdot : H_\rho^1(\mu) \xrightarrow{\cong} H^1(\mu; \mathbb{R}).$$

On a donc, pour tout $v \in H_\rho^1(M_K)$,

$$f_\mu^\rho(v) = (P^\rho \smile \alpha^*(v))(\mu),$$

d'où le résultat. □

Corollaire 1.38. — *Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation régulière. La représentation ρ est μ -régulière si, et seulement si, la forme linéaire $f_\mu^\rho : H_\rho^1(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ est non identiquement nulle.*

Démonstration. — D'après la Proposition 1.37, la condition est nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante. Si $f_\mu^\rho : H_\rho^1(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ est non identiquement nulle, alors elle est surjective, c'est donc un isomorphisme puisque $\dim H_\rho^1(M_K) = 1$ et on conclut grâce à la Proposition 1.37. □

En combinant les deux résultats précédents, on obtient la caractérisation suivante de la μ -régularité (cf. [Por97, Proposition 3.26]).

Théorème 1.39. — *Avec les notations qui précèdent, la représentation ρ est μ -régulière si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réunies :*

1. *la représentation ρ est régulière,*
2. *$\theta_\mu : V_{[\rho]} \subset \widehat{R}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ est une submersion en $[\rho]$.*

Si ρ est μ -régulière, on dispose donc de l'isomorphisme $D_{[\rho]}\theta_\mu : T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans la proposition suivante, on examine le lien étroit qui unit les notions de régularité et de μ -régularité (cf. [Por97, Théorème 3.15]).

Proposition 1.40. — *La représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière si, et seulement si, il existe une courbe simple, fermée μ dans le bord ∂M_K de M_K telle que ρ soit μ -régulière.*

Démonstration. — On sait déjà que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit μ une courbe simple, fermée dans ∂M_K et notons λ une autre courbe simple, fermée dans ∂M_K telle que μ^*, λ^* engendrent le groupe $H^1(\partial M_K; \mathbb{R})$. De deux choses l'une, soit ρ est μ -régulière auquel cas il n'y a rien à démontrer, soit ρ n'est pas μ -régulière et nous allons vérifier qu'elle est λ -régulière.

Notons $i^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\partial M_K)$ et $\alpha^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\lambda)$ les homomorphismes induits respectivement par les inclusions $\partial M_K \hookrightarrow M_K$ et $\lambda \hookrightarrow M_K$. Le groupe $H_\rho^1(\partial M_K)$ est engendré par $(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*)$ et $(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\lambda^*)$ (cf. démonstration de la Proposition 1.16). On a vu dans la démonstration du Lemme 1.18 que $\mathrm{rg}(i^*) = 1$; soit z un générateur de $H_\rho^1(M_K)$, il existe donc des réels a, b non simultanément nuls tels que : $i^*(z) = a(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*) + b(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\lambda^*)$.

Nécessairement $b \neq 0$, car si $b = 0$ alors $a \neq 0$. Ce dernier cas ne pouvant pas se produire car sinon ρ serait μ -régulière (voir ci-dessous).

Quitte à diviser z par b , on peut supposer que $i^*(z) = c(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*) + (\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\lambda^*)$, avec $c \in \mathbb{R}$. On a donc $P^\rho \circ \alpha^*(z) = P^\rho \circ i^*(z) = \lambda^*$, ce qui montre que ρ est λ -régulière. $\square$

1.5.4. Exemples. — Dans ce paragraphe, on donne des exemples et contre-exemples pour illustrer les notions de régularité et de μ -régularité que l'on vient d'introduire.

Exemple 1.41. — Soit K un nœud dans S^3 . Considérons la variété tridimensionnelle close, $M_K(\mu)$ obtenue par chirurgie de pente μ le long de K et supposons que son groupe fondamental soit un groupe fini. S. Boyer et X. Zhang ont montré que toute représentation non abélienne $\rho : \pi_1(M_K(\mu)) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ induit (après conjugaison éventuelle⁽⁸⁾) une représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ qui est μ -régulière (cf. [BZ96, Lemme 4.3]).

Exemple 1.42. — Soit K un nœud dans S^3 dont le méridien est noté m . Désignons par $\widehat{M}_2$ son revêtement ramifié à deux feuillets. Lorsque $p \in \mathbb{Z}$ est un entier premier tel que $H_1(\widehat{M}_2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, M. Heusener et E. Klassen ont démontré dans [HK97], qu'il existe alors une représentation binaire diédrale⁽⁹⁾ $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, qui est m -régulière. Ce résultat s'applique en particulier aux nœuds à deux ponts.

Exemple 1.43. — Reprenons l'exemple des nœuds toriques traité au Paragraphe 1.2.4.

Notons m le méridien de $K_{p,q}$. Si $\rho : \pi_1(M_{p,q}) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation irréductible, alors ρ est m -régulière et donc en particulier régulière (cf. Corollaire 1.33). Ainsi $\mathcal{R}\mathrm{eg}(K_{p,q}) = \widehat{R}(M_{p,q})$.

Une justification rigoureuse de cette propriété est donnée comme conséquence de l'Assertion 5.4 et dans la Remarque 5.6. En voici une justification heuristique à l'aide du "Coussin" pour le nœud de trèfle $K = K_{2,3}$.

⁽⁸⁾ Car $\rho(G_K)$ est un sous-groupe fini et non cyclique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

⁽⁹⁾ C'est-à-dire dont l'image $\rho(G_K)$ est un sous-groupe binaire diédral (d'ordre $4p$) de $\mathrm{SU}(2)$.

De façon générale, pour un nœud K , l'inclusion $\partial M_K \hookrightarrow M_K$ induit une application $r : \mathcal{R}(M_K) \rightarrow \mathcal{R}(\partial M_K) = \mathcal{P}$ dont l'image est génériquement de dimension 1. En effet, en se plaçant en une représentation générique ρ , *i.e.* dont la restriction au sous-groupe périphérique $\pi_1(\partial M_K)$ n'est pas centrale, la différentielle de r en la classe de conjugaison de ρ s'identifie à l'homomorphisme $i^* : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_\rho^1(\partial M_K)$ induit par l'inclusion. Comme M_K est une variété tridimensionnelle dont le bord est un tore, on a $\text{rg } i^* = 1$ (*cf.* démonstration du Lemme 1.18).

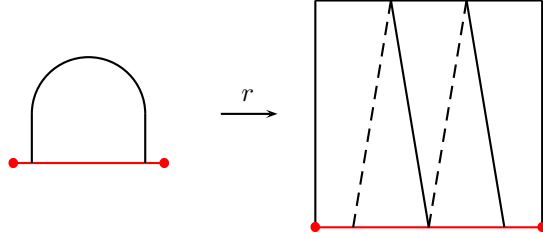


FIGURE 1.5

Pour le nœud de trèfle K , $\widehat{R}(M_K)$ est un arc ouvert dont les extrémités correspondent à des représentations abéliennes (*cf.* Paragraphe 1.2.4). Son image dans le “Coussin” – représentée sur la Figure 1.5 – coïncide avec l'image par $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}$ de l'arc

$$\left\{ \left(t, -6t + \frac{1}{2} \right) \mid \frac{1}{12} < t < \frac{5}{12} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Exemple 1.44. — L'exemple du nœud en huit, traité au Paragraphe 1.2.5, est plus instructif.

On constate que toutes les représentations irréductibles du groupe du nœud en huit sont *régulières*. Même plus, en désignant par m le méridien de K , elles sont toutes m -régulières à l'exception de celles dont la classe de conjugaison est précisément la classe de conjugaison de $\rho_{\frac{1}{6}, \pm}$ ou de $\rho_{\frac{1}{3}, \pm}$ (*cf.* Figure 1.6). Toutefois, en notant l la longueur du nœud, les représentations $\rho_{\frac{1}{6}, \pm}$ et $\rho_{\frac{1}{3}, \pm}$ sont l -régulières (*cf.* Théorème 5.22).

Une justification heuristique est black par l'image de $\mathcal{R}(M_K)$ dans le “Coussin” $\mathcal{P}$ représenté sur la Figure 1.6.

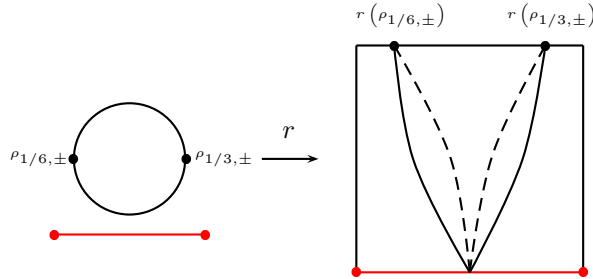


FIGURE 1.6

CHAPITRE 2

TORSION DE REIDEMEISTER ASSOCIÉE À UN NŒUD

Dans ce chapitre, on construit une forme torsion de Reidemeister non abélienne associée à un nœud dans S^3 . Cette construction passe par la mise en évidence d'une orientation cohomologique naturelle de l'extérieur du nœud (*cf.* Section 2.3), puis d'un générateur de référence pour le second groupe de cohomologie de l'extérieur de ce nœud à coefficients dans la représentation adjointe (*cf.* Paragraphe 2.6.2). L'idée principale pour définir ce générateur est d'examiner les restrictions des représentations irréductibles du groupe du nœud à son sous-groupe périphérique. Cette construction est analogue à celle faite par J. Porti dans [Por97, Corollaire 3.23] pour définir une fonction torsion de Reidemeister associée à certaines variétés hyperboliques. Ajoutons que dans notre construction le méridien du nœud va jouer un rôle tout à fait crucial.

On étudie ensuite certaines propriétés de cette torsion de Reidemeister. On montre en particulier qu'elle ne dépend pas de l'orientation du nœud, mais qu'elle dépend de celle de S^3 (*cf.* Proposition 2.26). On établit pour finir une *formule de chirurgie* (*cf.* Proposition 2.29) comparable à celle obtenue par J. Porti dans [Por97, Proposition 4.10].

Mais avant tout cela, nous commençons par rappeler les notions de forme volume et de compatibilité (*cf.* Section 2.1), la définition de la torsion de Reidemeister avec signe (*cf.* Section 2.2) ainsi que deux résultats fondamentaux : l'un est relatif à la *multiplicativité* de la torsion de Reidemeister et l'autre, conséquence du premier, est une *formule de Mayer-Vietoris* pour la torsion (*cf.* Théorème 2.6 et Paragraphe 2.2.4).

2.1. Forme volume et compatibilité

Dans cette section, on rappelle la notion de forme volume sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ainsi qu'une méthode permettant de définir des formes volume compatibles sur les composantes d'une suite exacte (*cf.* [Mil61, Paragraphe 3] & [Mil62, Paragraphe 1]).

2.1.1. Définitions. — Une *forme volume* v sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie n est un générateur de la n -ème puissance extérieure $\bigwedge^n E^*$, où $E^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R})$ est le dual de E .

Toute forme volume v sur E peut être écrite sous la forme $v = b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^*$, où $(b_1, \dots, b_n)$ est une base ⁽¹⁾ de E . Une telle base est dite *compatible* pour v .

Si E', E'' sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie munis de formes volume, alors la somme directe $E' \oplus E''$ est canoniquement munie d'une forme volume.

En effet, munissons E' (resp. E'') d'une forme volume notée v' (resp. v'') et considérons les projections canoniques $p' : E' \oplus E'' \rightarrow E'$ et $p'' : E' \oplus E'' \rightarrow E''$. Si $w' = (p')^*(v')$ et $w'' = (p'')^*(v'')$, alors $w' \wedge w''$ est une forme volume sur $E' \oplus E''$ et on a : $w'' \wedge w' = (-1)^{\dim E' \dim E''} w' \wedge w''$.

Explicitement, si $v' = b_1'^* \wedge \dots \wedge b_n'^*$, où $(b_1', \dots, b_n')$ est une base de E' et $v'' = b_1''^* \wedge \dots \wedge b_m''^*$, où $(b_1'', \dots, b_m'')$ est une base de E'' , alors la forme volume canonique sur $E' \oplus E''$ est déterminée par la base de $E' \oplus E''$ suivante : $((b_1', 0), \dots, (b_n', 0), (0, b_1''), \dots, (0, b_m''))$.

2.1.2. Compatibilité. — Dans ce paragraphe, on introduit la notion de *compatibilité*, qui nous servira à énoncer le Lemme de Multiplicativité de la torsion (cf. Théorème 2.6) et que nous utiliserons de façon plus systématique dans le Chapitre 3.

Intéressons-nous maintenant à la suite exacte de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie suivante : $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \rightarrow 0$. Soient v', v et v'' des formes volume sur E', E et E'' respectivement et notons s une section de j , de sorte que $i \oplus s : E' \oplus E'' \rightarrow E$ est un isomorphisme.

On dit que les trois formes volume précédentes sont *compatibles* lorsque :

$$v' \wedge v'' = (i \oplus s)^*(v).$$

Explicitement, si l'on écrit $v' = b_1'^* \wedge \dots \wedge b_p'^*$, $v = b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^*$ et $v'' = b_1''^* \wedge \dots \wedge b_q''^*$, alors les formes volume précédentes sont compatibles entre elles si, et seulement si, la matrice de passage de la base $(b_1, \dots, b_n)$ à la base $(i(b_1'), \dots, i(b_p'), s(b_1''), \dots, s(b_q''))$ est de déterminant 1, ou encore, ce qui revient au même, que l'isomorphisme $i \oplus s : E' \oplus E'' \rightarrow E$ est de déterminant 1 dans les bases $(b_1', \dots, b_p', b_1'', \dots, b_q'')$ de $E' \oplus E''$ et $(b_1, \dots, b_n)$ de E .

Il est facile de montrer que la notion de compatibilité est indépendante de la section choisie, puis d'établir le lemme fondamental suivant.

Lemme 2.1. — Soit $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Si deux des trois espaces vectoriels E', E et E'' sont munis de formes volume, alors le troisième en possède une unique qui est compatible avec les deux autres.

Remarque 2.2. — Soient E' et E'' deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels que l'on suppose munis de formes volume. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E' \oplus E'' \xrightarrow{p''} E'' \rightarrow 0$$

dans laquelle $i : E' \rightarrow E' \oplus E''$ est telle que $i(x) = (x, 0)$ et $p'' : E' \oplus E'' \rightarrow E''$ est la projection canonique. La forme volume canonique sur $E' \oplus E''$ est l'unique forme volume qui est compatible avec les formes volume que l'on s'est données sur E' et E'' .

⁽¹⁾Dans cette thèse, les bases sont toujours supposées *ordonnées*.

Notation. — Si v, v'' sont des formes volume sur E, E'' respectivement, nous conviendrons de noter $v' = v/v''$, pour indiquer la dépendance de v' en v et v'' , l'unique forme volume sur E' qui est compatible avec les deux autres. Si v', v sont des formes volume sur E', E respectivement, on note $v'' = v' \setminus v$ l'unique forme volume sur E'' qui est compatible avec les deux autres.

Considérons enfin le diagramme commutatif de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie dont chacune des lignes et des colonnes sont des suites exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E'_1 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E'_2 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E''_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Si l'on munit les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels E_1, E'_1, E et E'' de formes volume, alors en utilisant la compatibilité le long des lignes ou des colonnes du diagramme précédent on peut munir de deux façons différentes l'espace vectoriel E'_2 d'une forme volume. On dispose d'une formule permettant de comparer ces deux formes volume. C'est l'objet du lemme suivant, qui s'avérera être très utile dans la suite.

Lemme 2.3. — Munissons les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels E_1, E'_1, E et E'' des formes volume v_1, v'_1, v et v'' respectivement. On a la formule

$$(2.1) \quad (v_1 \setminus v)/(v'_1 \setminus v'') = (-1)^{\dim E'_2 \dim E'_1} (v_1/v'_1) \setminus (v/v'').$$

La démonstration de ce résultat, que nous omettons et que l'on pourra trouver par exemple dans [Mil61, Lemme 3], s'apparente à une “chasse au diagramme”.

2.2. Rappels sur la torsion de Reidemeister

Poursuivons en rappelant la définition de la torsion de Reidemeister d'un complexe cellulaire pour préciser les conventions que nous avons faites.

2.2.1. Torsion d'un complexe d'espaces vectoriels. — Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans l'Introduction, la définition de la torsion de Reidemeister d'un complexe d'espaces vectoriels est algébrique et généralise la notion usuelle de déterminant. Pour plus de détails, on pourra consulter l'article de J. Milnor [Mil66] et les monographies de V. Turaev [Tur01] & [Tur02].

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux bases d'un même $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . On convient de noter $[\mathbf{a}/\mathbf{b}]$ le déterminant de la matrice de passage de la base $\mathbf{b}$ à la base $\mathbf{a}$, c'est-à-dire

le déterminant de la matrice $(p_{ij})_{i,j}$ telle que $a_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}b_j$, pour tout i . On dit de plus que deux bases $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont *équivalentes* lorsque $[\mathbf{a}'/\mathbf{a}] = 1$, *i.e.* lorsqu'elles permettent de définir la même forme volume.

Soit $C_* : C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0$ un complexe de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On considère le groupe des bords $B_i = \text{im}(d_{i+1} : C_{i+1} \rightarrow C_i)$, celui des cycles $Z_i = \ker(d_i : C_i \rightarrow C_{i-1})$ et les groupes d'homologie $H_i = Z_i/B_i$ de C_* . Munissons C_i (resp. H_i) d'une base de référence $\mathbf{c}^i$ (resp. $\mathbf{h}^i$). La torsion de Reidemeister du complexe C_* dans les bases $\mathbf{c}^*$ et $\mathbf{h}^*$ est définie de la façon suivante. Soit $\mathbf{b}^i$ une base quelconque de B_i . On dispose des deux suites exactes :

$$(2.2) \quad 0 \longrightarrow Z_i \longrightarrow C_i \longrightarrow B_{i-1} \longrightarrow 0,$$

$$(2.3) \quad 0 \longrightarrow B_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow H_i \longrightarrow 0.$$

Choisissons des relevés $\tilde{\mathbf{b}}^{i-1}$ dans C_i et $\tilde{\mathbf{h}}^i$ dans Z_i de $\mathbf{b}^{i-1}$ et $\mathbf{h}^i$ respectivement. En utilisant les suites exactes (2.2) & (2.3), on constate d'une part que $\mathbf{b}^i \tilde{\mathbf{h}}^i \tilde{\mathbf{b}}^{i-1}$ est une base de C_i et que d'autre part, le changement de base $[\mathbf{b}^i \tilde{\mathbf{h}}^i \tilde{\mathbf{b}}^{i-1} / \mathbf{c}^i]$ ne dépend pas du choix des relevés $\tilde{\mathbf{b}}^{i-1}$ et $\tilde{\mathbf{h}}^i$. Une fois ces notations fixées, la *torsion de Reidemeister* de C_* dans les bases $\mathbf{c}^*$ et $\mathbf{h}^*$ est le produit alterné suivant :

$$(2.4) \quad \text{tor}(C_*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*) = \prod_{i=0}^n [\mathbf{b}^i \tilde{\mathbf{h}}^i \tilde{\mathbf{b}}^{i-1} / \mathbf{c}^i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{R}^*.$$

On constate sans difficultés que ce produit est indépendant du choix des bases $\mathbf{b}^i$ que l'on a fait pour le définir.

Remarque 2.4. — Voici quelques propriétés de la torsion et remarques utiles pour la suite :

1. La torsion de Reidemeister définie ci-dessus est celle donnée par Turaev (voir par exemple [Tur01, Définition 3.1]). C'est exactement l'inverse de la torsion définie par Milnor dans [Mil66].
2. Lorsque $H_* = 0$, on dit que le complexe C_* est *acyclique* et on écrit $\text{tor}(C_*, \mathbf{c}^*)$ pour la torsion de C_* dans la base $\mathbf{c}^*$.
3. La torsion généralise la notion de déterminant.

En effet, supposons que le complexe C_* se réduise à $C \xrightarrow{d} C$, où C est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si d est un automorphisme, alors $\text{tor}(C_*, \mathbf{c}^*) = (\det d)^{-1}$.

4. Considérons C_* un complexe acyclique et munissons chaque C_i d'une base de référence. Si l'on désigne par C'_* le complexe obtenu de C_* par un *décalage* vers la gauche, c'est-à-dire si $C'_0 = 0$ et $C'_i = C_{i-1}$ pour $i \geq 1$, alors

$$(2.5) \quad \text{tor}(C'_*) = (\text{tor}(C_*))^{-1}.$$

5. La torsion ne dépend que du choix des formes volume sur C_i et H_i , c'est-à-dire des classes d'équivalence des bases $\mathbf{c}^i$ de C_i et $\mathbf{h}^i$ de H_i . Plus précisément, on a la *formule*

de changement de base suivante :

$$(2.6) \quad \text{tor}(C_*, \mathbf{c}'^*, \mathbf{h}'^*) = \prod_{i=0}^n \left(\frac{[\mathbf{c}'^i / \mathbf{c}^i]}{[\mathbf{h}'^i / \mathbf{h}^i]} \right)^{(-1)^i} \text{tor}(C_*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*)$$

dans laquelle $\mathbf{c}^i$ et $\mathbf{c}'^i$ sont deux bases de C_i , $\mathbf{h}^i$ et $\mathbf{h}'^i$ deux bases de H_i .

2.2.2. Torsion de Reidemeister d'un complexe cellulaire. — Si l'on utilise directement la formule (2.4) pour définir la torsion d'un complexe cellulaire, on obtient une quantité qui n'est invariante par subdivision qu'à *signe près*, on aboutit ainsi au problème bien connu de l'ambiguïté du signe de la torsion. Pour éliminer cette ambiguïté, V. Turaev a introduit dans [Tur86] une torsion de Reidemeister *avec signe*, encore dite *raffinée*. Nous en rappelons la définition dans le sous-paragraphe suivant, puis l'utilisons pour définir la torsion de Reidemeister d'un CW-complexe à coefficients dans la représentation adjointe. Nous vérifions ensuite la torsion ainsi définie est invariante par subdivision cellulaire, par classe d'homéomorphisme et par type d'homotopie simple (cf. Proposition 2.10 et Corollaires 2.11 & 2.12).

Torsion de Reidemeister avec signe. — Conservons les notations du paragraphe précédent et définissons les entiers modulo 2 suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_i(C) &= \sum_{k=0}^i \dim C_k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \beta_i(C) &= \sum_{k=0}^i \dim H_k(C) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ |C| &= \sum_{k \geq 0} \alpha_k(C) \beta_k(C) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La *torsion de Reidemeister raffinée* du complexe C_* dans les bases $\mathbf{c}^*$ et $\mathbf{h}^*$ est (cf. [Tur86, Paragraphe 3.1] ou [Tur02, Formule (1.a)]) :

$$(2.7) \quad \text{Tor}(C_*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*) = (-1)^{|C|} \text{tor}(C_*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*) \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque 2.5. — Lorsque C_* est un complexe acyclique, on a $|C| = 0$ et donc

$$\text{Tor}(C_*, \mathbf{c}^*) = \text{tor}(C_*, \mathbf{c}^*).$$

Multiplicativité de la torsion de Reidemeister avec signe. — Avant d'aller plus loin, présentons l'une des propriétés fondamentales de la torsion de Reidemeister : la *multiplicativité*. C'est l'objet du résultat suivant (cf. [Tur86, Lemme 3.4.2]).

Théorème 2.6 (Lemme de Multiplicativité). — Soit

$$(2.8) \quad 0 \longrightarrow C'_* \longrightarrow C_* \longrightarrow C''_* \longrightarrow 0$$

une suite exacte de complexes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Pour chaque i , on suppose que C'_i , C_i , C''_i , $H_i(C'_*)$, $H_i(C_*)$ et $H_i(C''_*)$ sont munis de formes volume. Notons $\mathcal{H}_*$ le complexe acyclique déduit de la suite exacte longue en homologie associée à (2.8) :

$$\cdots \longrightarrow H_i(C'_*) \longrightarrow H_i(C_*) \longrightarrow H_i(C''_*) \longrightarrow H_{i-1}(C'_*) \longrightarrow \cdots$$

$$(i.e. \mathcal{H}_{3i+2} = H_i(C'_*), \mathcal{H}_{3i+1} = H_i(C_*), \mathcal{H}_{3i} = H_i(C''_*))$$

et munissons chacune de ses composantes des formes volume que l'on s'est donné sur $H_i(C'_*)$, $H_i(C_*)$ et $H_i(C''_*)$ respectivement. Si, pour tout i , les formes volume sur les composantes de la suite exacte d'espaces vectoriels suivante :

$$0 \longrightarrow C'_i \longrightarrow C_i \longrightarrow C''_i \longrightarrow 0$$

sont compatibles entre elles, alors

$$\mathrm{Tor}(C_*) = (-1)^{\varepsilon(C', C, C'') + \alpha(C', C'')} \mathrm{Tor}(C'_*) \cdot \mathrm{Tor}(C''_*) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}_*),$$

avec

$$\alpha(C', C'') = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(C') \alpha_i(C'') \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et

$$\varepsilon(C', C, C'') = \sum_{i \geq 0} [(\beta_i(C) + 1)(\beta_i(C') + \beta_i(C'')) + \beta_{i-1}(C') \beta_i(C'')] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

La démonstration de ce résultat que nous omettons est un calcul minutieux fondé sur l'utilisation du Lemme 2.3. On pourra consulter par exemple [Tur86, démonstration du Lemme 3.4.2].

Remarque 2.7. — Le théorème précédent généralise le Lemme de Milnor (cf. [Mil66, Théorème 3.2]) – ou plus exactement en est une version avec signe.

Torsion de Reidemeister d'un CW-complexe. — On définit à présent la torsion de Reidemeister d'un complexe cellulaire W à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation de $\pi_1(W)$ dans $\mathrm{SU}(2)$. Cette notion passe par l'introduction d'une structure supplémentaire sur W appelée orientation cohomologique⁽²⁾ et peut, bien entendu, être placée dans un contexte plus général, mais seules les représentations à valeurs dans $\mathrm{SU}(2)$ nous intéressent dans le présent travail.

Soient W un complexe cellulaire fini, dont l'espace sous-jacent est noté $|W| = X$, et $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation. On désigne par $\widetilde{W}$ revêtement universel de W . Le complexe $C_*(\widetilde{W}; \mathbb{Z})$ possède une structure de $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -module, de base les cellules de $\widetilde{W}$, via l'action de $\pi_1(X)$ sur $\widetilde{W}$ comme groupe de revêtement et l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ est un $\mathbb{Z}[G_K]$ -module via la représentation $Ad \circ \rho$ (cf. Paragraphe 1.3.1). On forme le cocomplexe de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivant :

$$C^*(W; Ad \circ \rho) = \mathrm{Hom}_{\pi_1(X)}(C_*(\widetilde{W}; \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2)).$$

⁽²⁾Introduite par V. Turaev dans [Tur86], on pourra aussi consulter [Tur02, Chapitre V] pour plus détails.

On choisit une *orientation cohomologique* de W , i.e. une orientation du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $H^*(W; \mathbb{R}) = \bigoplus_{i \geq 0} H^i(W; \mathbb{R})$, on la note $\mathfrak{o}$, puis on note $\{e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}\}$ l'ensemble des cellules de dimension i de W .

Désignons par $\tilde{e}_j^{(i)}$ un relevé quelconque dans $\widetilde{W}$ de la cellule $e_j^{(i)}$, puis orientons et ordonnons les cellules $\tilde{e}_j^{(i)}$ d'une manière arbitraire. Il en résulte que $\mathbf{c}^i = (\tilde{e}_1^{(i)}, \dots, \tilde{e}_{n_i}^{(i)})$ est une $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ -base de $C_i(\widetilde{W}; \mathbb{Z})$. On note ensuite $\mathbf{c}_{\mathfrak{su}(2)}^i = (\tilde{e}_{1,\mathbf{i}}^{(i)}, \tilde{e}_{1,\mathbf{j}}^{(i)}, \tilde{e}_{1,\mathbf{k}}^{(i)}, \dots, \tilde{e}_{n_i,\mathbf{i}}^{(i)}, \tilde{e}_{n_i,\mathbf{j}}^{(i)}, \tilde{e}_{n_i,\mathbf{k}}^{(i)})$ la base de $\text{Hom}_{\pi_1(X)}(C_*(\widetilde{W}; \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2))$ correspondante. On dit que $\mathbf{c}_{\mathfrak{su}(2)}^i$ est la *base géométrique* associée à la base $\mathbf{c}^i$ dans la base usuelle $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathfrak{su}(2)$. Si $\mathbf{h}^i$ est une base de $H_\rho^i(W)$, on peut alors calculer la torsion $\text{Tor}(C^*(W; Ad \circ \rho), \mathbf{c}_{\mathfrak{su}(2)}^*, \mathbf{h}^*) \in \mathbb{R}^*$.

Les cellules $(\tilde{e}_j^{(i)})_{0 \leq i \leq \dim W, 1 \leq j \leq n_i}$ étant en bijection avec les cellules de W , leur orientation et leur ordre induit une orientation et un ordre pour les cellules $(e_j^{(i)})_{0 \leq i \leq \dim W, 1 \leq j \leq n_i}$. On obtient ainsi une base (sur $\mathbb{R}$) – notée c^* – pour le complexe cellulaire $C^*(W; \mathbb{R})$. Munissons ensuite les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels $H^i(W; \mathbb{R})$ d'une base h^i , de telle sorte que la base $(h^0, \dots, h^{\dim W})$ de $H^*(W; \mathbb{R})$ soit *directe* vis-à-vis de l'orientation cohomologique $\mathfrak{o}$. Avec ces choix, on calcule la torsion $\text{Tor}(C^*(W; \mathbb{R}), c^*, h^*) \in \mathbb{R}^*$ et on considère son *signe* $\text{sgn}(\text{Tor}(C^*(W; \mathbb{R}), c^*, h^*)) \in \{\pm 1\}$.

Définition 2.8. — La *torsion de Reidemeister du complexe cellulaire W à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$* , dans les bases $\mathbf{h}^*$ de $H_\rho^*(W)$ et par rapport à l'orientation cohomologique $\mathfrak{o}$ est :

$$\text{TOR}(W; Ad \circ \rho, \mathbf{h}^*, \mathfrak{o}) = \text{sgn}(\text{Tor}(C^*(W; \mathbb{R}), c^*, h^*)) \cdot \text{Tor}(C^*(W; Ad \circ \rho), \mathbf{c}_{\mathfrak{su}(2)}^*, \mathbf{h}^*) \in \mathbb{R}^*.$$

Lorsque qu'aucune ambiguïté n'est à craindre, on note aussi :

$$\text{Tor}(W; Ad \circ \rho) = \text{Tor}(C^*(W; Ad \circ \rho), \mathbf{c}_{\mathfrak{su}(2)}^*, \mathbf{h}^*).$$

La torsion de Reidemeister $\text{TOR}(W; Ad \circ \rho, \mathbf{h}^*, \mathfrak{o})$ est bien définie. En effet, elle est d'une part indépendante des choix possibles des différents relevés $\tilde{e}_j^{(i)}$ et de la $\mathbb{R}$ -base de $\mathfrak{su}(2)$ choisie pour définir la base géométrique. Elle est également indépendante du choix de la base directe de $H^*(W; \mathbb{R})$ que l'on a fait, mais dépend bien entendu de l'orientation cohomologique $\mathfrak{o}$. De plus, elle ne dépend ni de l'ordre ni de l'orientation des cellules (puisqu'elles apparaissent deux fois : une fois dans $\text{sgn}(\text{Tor}(C^*(W; \mathbb{R}), c^*, h^*))$ et une autre fois dans $\text{Tor}(C^*(W; Ad \circ \rho), \mathbf{c}_{\mathfrak{su}(2)}^*, \mathbf{h}^*)$). Enfin, elle ne dépend que de la classe de conjugaison de ρ .

Invariance par subdivision, classe d'homéomorphisme et type d'homotopie simple. — Pour les définitions de base que nous n'avons pas cru nécessaire de rappeler, on renvoie à [Coh73] ; on peut aussi se reporter à [Tur01, Chapitre II.8].

On sait que la torsion de Reidemeister d'un complexe cellulaire est à *signe près* invariante par subdivision cellulaire (cf. [Mil66, p. 180] ou [Wit91, p. 186]). Nous allons vérifier dans ce sous-paragraphe que TOR est invariante par subdivision cellulaire ainsi que par la classe d'homéomorphisme (comme l'a fait V. Turaev, dans un cadre acyclique, cf. [Tur02]).

Remarque 2.9. — C'est précisément le signe $(-1)^{|C|}$ dans l'équation (2.7) qui garantit ces propriétés d'invariance de TOR.

En fait, on aura besoin dans la suite de notre travail, d'un résultat encore plus fort : l'invariance de TOR par équivalence d'homotopie simple. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.10. — *Soient W et W' deux complexes cellulaires finis et connexes par arcs. Si $f : W \rightarrow W'$ est une équivalence d'homotopie simple, si $\rho : \pi_1(W') \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation et $\mathfrak{o}$ une orientation cohomologique de W , alors $H_\rho^*(W') \cong H_{\rho \circ f_*}^*(W)$ et en notant $\mathbf{h}^i$ une base de $H_{\rho \circ f_*}^i(W)$, on a :*

$$\mathrm{TOR}(W'; \mathrm{Ad} \circ \rho, (f^*)^{-1}(\mathbf{h}^*), (f^*)^{-1}(\mathfrak{o})) = \mathrm{TOR}(W; \mathrm{Ad} \circ \rho \circ f_*, \mathbf{h}^*, \mathfrak{o}),$$

où $f_* : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(W')$ désigne l'homomorphisme induit par f .

Avant de passer à la démonstration, nous établissons les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.11. — *La torsion de Reidemeister TOR est invariante par subdivision cellulaire.*

Démonstration du corollaire. — Si (W_*, i) est une subdivision du CW-complexe W , alors d'après [Coh73, (25.1)] (voir aussi [Tur01, Théorème 8.8]) $i : W_* \rightarrow W$ est une équivalence d'homotopie simple. La Proposition 2.10 permet donc de conclure. $\square$

Corollaire 2.12. — *Soient W et W' deux complexes cellulaires finis et connexes par arcs. Si $f : W \rightarrow W'$ est un homéomorphisme, si $\rho : \pi_1(W') \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation et $\mathfrak{o}$ une orientation cohomologique de W , alors $H_\rho^*(W') \cong H_{\rho \circ f_*}^*(W)$ et en notant $\mathbf{h}^i$ une base de $H_{\rho \circ f_*}^i(W)$, on a :*

$$\mathrm{TOR}(W'; \mathrm{Ad} \circ \rho, (f^*)^{-1}(\mathbf{h}^*), (f^*)^{-1}(\mathfrak{o})) = \mathrm{TOR}(W; \mathrm{Ad} \circ \rho \circ f_*, \mathbf{h}^*, \mathfrak{o}),$$

où $f_* : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(W')$ désigne l'isomorphisme induit par f .

Démonstration du corollaire. — On utilise le théorème fondamental suivant établi par T. Chapman (cf. [Cha74], [Coh73, Appendix] et [Edw78]) :

Théorème (T. Chapman, [Cha74]). — *Si $f : W \rightarrow W'$ est un homéomorphisme entre deux complexes cellulaires finis et connexes par arcs, alors f est une équivalence d'homotopie simple.*

On conclut, en invoquant la Proposition 2.10. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.10. — Il suffit d'établir le résultat lorsque $f : W \hookrightarrow W'$ est une expansion élémentaire (cf. [Tur86, démonstration du Théorème 3.2.1, p. 148], on pourra aussi consulter [Coh73, (22.2)])

Le complexe W' est obtenu de W en lui ajoutant deux cellules $e^{(k)}$ et $e^{(k+1)}$. Les homomorphismes $f^* : H_\rho^*(W') \rightarrow H_{\rho \circ f_*}^*(W)$ et $f^* : H^*(W'; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(W; \mathbb{R})$ induits par $f : W \hookrightarrow W'$ sont des isomorphismes. Ainsi $(f^*)^{-1}(\mathfrak{o})$ est une orientation cohomologique de W' et $(f^*)^{-1}(\mathbf{h}^i)$ est une base pour $H_\rho^i(W')$.

De plus, en désignant par $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}'$ les revêtements universels de W et W' respectivement et par $\tilde{e}^{(k)}$ et $\tilde{e}^{(k+1)}$ des relevés de $e^{(k)}$ et $e^{(k+1)}$ dans le revêtement universel de W' , on a la suite exacte de complexes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivante :

$$(2.9) \quad 0 \longrightarrow C_*(\widetilde{W}; \mathbb{Z}) \longrightarrow C_*(\widetilde{W}'; \mathbb{Z}) \longrightarrow C_*(\widetilde{W}', \widetilde{W}; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

avec

$$C_*(\widetilde{W}', \widetilde{W}; \mathbb{Z}) : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(W')] \tilde{e}^{(k+1)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}[\pi_1(W')] \tilde{e}^{(k)} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

En choisissant des orientations compatibles pour les cellules $\tilde{e}^{(k+1)}$ et $\tilde{e}^{(k)}$, l'homomorphisme de bord ∂ est donné par $\partial(\tilde{e}^{(k+1)}) = g\tilde{e}^{(k)}$, où $g \in \pi_1(W')$.

Puisque la suite exacte de complexes (2.9) est scindée, on dispose de la suite exacte suivante :

$$(2.10) \quad 0 \longrightarrow C^*(W', W; Ad \circ \rho) \longrightarrow C^*(W'; Ad \circ \rho) \longrightarrow C^*(W; Ad \circ \rho \circ f_*) \longrightarrow 0$$

dans laquelle

$$C^*(W', W; Ad \circ \rho) : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\delta} \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

avec δ définie par $\delta(x) = Ad_{\rho \circ f_*(g)}(x)$, pour tout $x \in \mathfrak{su}(2)$.

Le Lemme de Multiplicativité s'applique et fournit :

$$\mathrm{Tor}(W'; Ad \circ \rho) = (-1)^{\varepsilon + \alpha} \mathrm{Tor}(W; Ad \circ \rho \circ f_*) \cdot \mathrm{Tor}(C^*(W', W; Ad \circ \rho)) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H})$$

où $\mathcal{H}$ est la suite exacte longue en cohomologie déduite de la suite exacte (2.10) et où

$$\varepsilon = \varepsilon(C^*(W', W; Ad \circ \rho), C^*(W'; Ad \circ \rho), C^*(W; Ad \circ \rho \circ f_*)),$$

$$\alpha = \alpha(C^*(W', W; Ad \circ \rho), C^*(W; Ad \circ \rho \circ f_*)).$$

La suite exacte $\mathcal{H}$ se réduit aux seules isomorphismes $H_\rho^*(W') \xrightarrow{\cong} H_{\rho \circ f_*}^*(W)$. On vérifie ensuite les points suivants :

- $\varepsilon = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\alpha = \alpha_{k+1}(C^*(W; Ad \circ \rho \circ f_*)) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\mathrm{tor}(\mathcal{H}) = 1$, en raison des choix des bases que nous avons fait pour les groupes $H_\rho^*(W')$ et $H_{\rho \circ f_*}^*(W)$.
- $\mathrm{Tor}(C^*(W', W; Ad \circ \rho)) = 1$, car $\det(\delta) = 1$.

Il en résulte donc que

$$\mathrm{Tor}(W'; Ad \circ \rho) = (-1)^{\alpha_{k+1}(C^*(W; Ad \circ \rho \circ f_*))} \mathrm{Tor}(W; Ad \circ \rho \circ f_*).$$

Les mêmes idées et des calculs semblables fournissent :

$$\mathrm{Tor}(C^*(W'; \mathbb{R})) = (-1)^{\alpha_{k+1}(C^*(W; \mathbb{R}))} \mathrm{Tor}(C^*(W; \mathbb{R}))$$

avec $\alpha_{k+1}(C^*(W; Ad \circ \rho \circ f_*)) = 3\alpha_{k+1}(C^*(W; \mathbb{R})) = \alpha_{k+1}(C^*(W; \mathbb{R}))$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

2.2.3. Exemples de calcul. — On calcule dans ce paragraphe la torsion de Reidemeister du cercle, du tore bidimensionnel et du tore solide. Ces calculs de base nous seront extrêmement utiles dans la suite.

Le cercle. — Prenons une décomposition cellulaire de S^1 possédant une unique 0-cellule $e^{(0)}$ et une unique 1-cellule $e^{(1)}$, puis orientons-les comme sur la Figure 2.1. Le générateur du groupe fondamental $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ est noté s .

Notons $\varphi_\theta : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ la représentation donnée par : $\varphi_\theta(s) = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$. Il va de soi que toutes les représentations de $\pi_1(S^1)$ sont abéliennes et qu'une représentation de $\pi_1(S^1)$ dans $\mathrm{SU}(2)$ est conjuguée à une et une seule des représentations φ_θ . Dans la suite, on suppose que φ_θ n'est pas centrale, i.e. que $\theta \neq 0, \pi$.

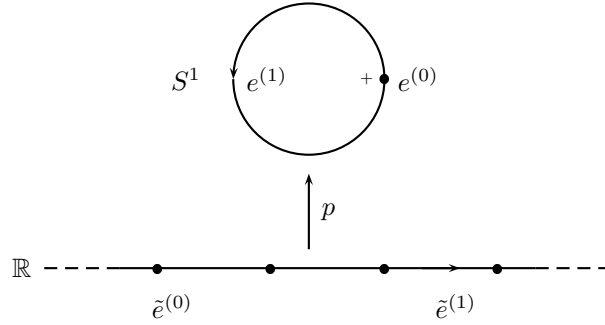


FIGURE 2.1. Revêtement universel de S^1 .

Le complexe $C^*(S^1; \mathrm{Ad} \circ \varphi_\theta)$ s'identifie à :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0,$$

où $\partial = \mathrm{Id} - \mathrm{Ad}_{\varphi_\theta(s)}$.

Puis, on constate que :

$$H_{\varphi_\theta}^0(S^1) = \ker \partial \cong \mathbb{R} \text{ est engendré par } \mathbf{i},$$

$$H_{\varphi_\theta}^1(S^1) = \mathrm{coker} \partial \cong \mathbb{R} \text{ est engendré par } \mathbf{i}.$$

Munissons ces groupes de cohomologie des bases de référence suivantes :

- le générateur de référence de $H_{\varphi_\theta}^0(S^1)$ est choisi égal à $\mathbf{i}$,
- le générateur de référence de $H_{\varphi_\theta}^1(S^1)$ est aussi choisi égal à $\mathbf{i}$.

Munissons $C^*(S^1; \mathbb{R})$ de l'orientation cohomologique déterminée par le choix des cellules de S^1 fait ci-dessus.

Dans ces bases et avec cette orientation cohomologique, on a :

Proposition 2.13. — *La torsion de Reidemeister de S^1 à coefficients dans la représentation $\mathrm{Ad} \circ \varphi_\theta$ est :*

$$\mathrm{TOR}(S^1; \mathrm{Ad} \circ \varphi_\theta) = 4 \sin^2(\theta).$$

Démonstration. — En tenant compte des résultats présentés dans la Table 2.1, c'est un simple calcul de déterminant. On a :

$$\mathrm{tor}(S^1; \mathrm{Ad} \circ \varphi_\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) \end{vmatrix} = 4 \sin^2(\theta).$$

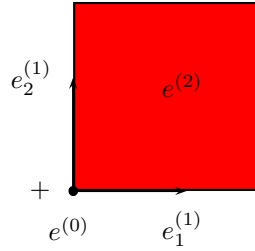
□

k	0	1
α_k	1	0
β_k	1	0

$$|C^*(S^1; \mathbb{R})| = |C^*(S^1; Ad \circ \varphi_\theta)| = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 2.1. Les complexes $C^*(S^1; \mathbb{R})$ et $C^*(S^1; Ad \circ \varphi_\theta)$.

Le tore bidimensionnel. — Prenons une décomposition cellulaire de T^2 avec une unique 0-cellule $e^{(0)}$, deux 1-cellules $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}$ et une unique 2-cellule $e^{(2)}$, puis orientons-les comme indiqué sur la Figure 2.2. Le groupe fondamental de T^2 possède la présentation suivante : $\pi_1(T^2) = \langle \mu, \lambda \mid \mu\lambda = \lambda\mu \rangle$.

FIGURE 2.2. Décomposition cellulaire de T^2 .

L'espace des représentations du groupe du tore a été décrit dans le Paragraphe 1.2.2. Notons $\rho : \pi_1(T^2) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation non centrale.

Le complexe $C^*(T^2; Ad \circ \rho)$ s'identifie à :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\partial^1} \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\partial^2} \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0,$$

avec $\partial^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} - Ad_{\rho(\mu)} \\ \mathrm{Id} - Ad_{\rho(\gamma)} \end{pmatrix}$ et $\partial^2 = (\mathrm{Id} - Ad_{\rho(\gamma)}, Ad_{\rho(\mu)} - \mathrm{Id})$. Et pour les choix des bases des groupes de cohomologie à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$, on fait les identifications suivantes :

- le générateur de référence de $H_\rho^0(T^2)$ est choisi égal à $\mathbf{i}$,
- la base de référence de $H_\rho^1(T^2)$ est choisie égale à $\left(\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \right)$,
- le générateur de référence de $H_\rho^2(T^2)$ est choisi égal à $\mathbf{i}$.

Remarque 2.14. — Les bases choisies pour $H_\rho^0(T^2)$ et $H_\rho^2(T^2)$ sont duales l'une de l'autre et celle de $H_\rho^1(T^2)$ est auto-duale.

Munissons enfin $C^*(T^2; \mathbb{R})$ de l'orientation cohomologique induite par le choix des cellules de T^2 fait ci-dessus.

Dans ces bases et avec cette orientation cohomologique, on a :

Proposition 2.15. — *La torsion de Reidemeister du tore dans la représentation $Ad \circ \rho$ est triviale :*

$$\text{TOR}(T^2; Ad \circ \rho) = 1.$$

Démonstration. — Un simple calcul de déterminants permet de conclure que

$$\text{tor}(T^2; Ad \circ \rho) = 1.$$

En tenant compte des résultats de la Table 2.2, on obtient le résultat voulu. $\square$

k	0	1	2
α_k	1	1	0
β_k	1	1	0

$$|C^*(T^2; \mathbb{R})| = |C^*(T^2; Ad \circ \rho)| = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 2.2. Les complexes $C^*(T^2; \mathbb{R})$ et $C^*(T^2; Ad \circ \rho)$.

Le tore solide. — Le tore solide V a même type d'homotopie simple que le cercle S^1 représenté par l'âme γ de V . Considérons $\rho : \pi_1(V) \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation non centrale, on déduit des Propositions 2.10 & 2.13 le résultat suivant.

Proposition 2.16. — *La torsion de Reidemeister du tore solide V dans la représentation $Ad \circ \rho$ est donnée par :*

$$\text{TOR}(V; Ad \circ \rho) = 4 \sin^2(\theta^\rho),$$

où $\rho(\gamma) = \cos(\theta^\rho) + \sin(\theta^\rho)\mathbf{i}$.

2.2.4. Formule de Mayer-Vietoris pour la torsion de Reidemeister. — Dans ce paragraphe, on donne la *formule de Mayer-Vietoris* pour la torsion de Reidemeister Tor . Cette formule se révèle être très utile dans les calculs de torsion que nous mènerons dans la suite.

Théorème 2.17 (Formule de Mayer-Vietoris). — *Soient W un CW -complexe compact et connexe par arcs, W_1 et W_2 deux sous-complexes fermés et connexes par arcs tels que $W = W_1 \cup W_2$ et $V = W_1 \cap W_2$ est non vide et connexe par arcs. Considérons $\rho : \pi_1(W) \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation quelconque et notons $\rho_i = \rho|_{\pi_1(W_i)}$ et $\rho_V = \rho|_{\pi_1(V)}$ ses restrictions à $\pi_1(W_i)$ et $\pi_1(V)$ respectivement. Si $\mathcal{H}$ désigne la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée au scindement $W = W_1 \cup_V W_2$ et à la représentation ρ , alors on a alors la formule de Mayer-Vietoris :*

$$\text{Tor}(W_1; Ad \circ \rho_1) \cdot \text{Tor}(W_2; Ad \circ \rho_2) = (-1)^{\varepsilon + \alpha} \text{Tor}(W; Ad \circ \rho) \cdot \text{Tor}(V; Ad \circ \rho_V) \cdot \text{tor}(\mathcal{H}),$$

dans laquelle

$$\alpha = \alpha(C^*(W; Ad \circ \rho), C^*(V; Ad \circ \rho_V))$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon(C^*(W; Ad \circ \rho), C^*(W_1; Ad \circ \rho_1) \oplus C^*(W_2; Ad \circ \rho_2), C^*(V; Ad \circ \rho_V)).$$

Démonstration. — Cette formule est une conséquence directe du Lemme de Multiplicativité appliqué à la suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow C^*(W; Ad \circ \rho_V) \longrightarrow C^*(W_1; Ad \circ \rho_1) \oplus C^*(W_2; Ad \circ \rho_2) \longrightarrow C^*(V; Ad \circ \rho) \longrightarrow 0,$$

qui induit la suite exacte longue de Mayer-Vietoris $\mathcal{H}$. On pourra consulter [Por97, Proposition 0.11] ou [Fel00, p. 115] pour plus de détails. $\square$

Les sections qui suivent sont consacrées à l'application géométrique de ce préliminaire algébrique pour un nœud K dans S^3 . Désormais, on suppose que la sphère S^3 est *orientée*, on fixe une présentation de Wirtinger du groupe G_K de K que l'on note :

$$G_K = \langle S_1, \dots, S_r \mid R_1, \dots, R_{r-1} \rangle$$

et on désigne par $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation *non centrale* de ce groupe.

2.3. Orientation cohomologique de l'extérieur d'un nœud

Dans cette section, on munit l'extérieur d'un nœud dans S^3 d'une *orientation cohomologique*, c'est-à-dire que l'on va munir l'espace vectoriel $H^*(M_K; \mathbb{R}) = \bigoplus_{i \geq 0} H^i(M_K; \mathbb{R})$ d'une orientation naturelle. Pour plus de détails sur ce genre de problèmes, on se reportera à [Tur02, Chapitre V] (voir en particulier [Tur02, Paragraphe V.3])

Rappelons que la sphère S^3 est orientée et que l'extérieur M_K du nœud $K \subset S^3$ est une variété tridimensionnelle orientée dont le bord ∂M_K est un tore, qui lui aussi, est orienté⁽³⁾.

La présentation du groupe G_K qui a été fixée étant une présentation de Wirtinger du groupe du nœud K avec r générateurs et $r - 1$ relations, on lui associe un complexe cellulaire bidimensionnel X_K tel que $\pi_1(X_K) = G_K$ et ayant même type d'homotopie simple⁽⁴⁾ que $M_K - M_K$ étant muni de la structure de complexe cellulaire induite par l'une de ses triangulations linéaires par morceaux – de la façon suivante. Le squelette X_K^0 de dimension 0 est formé d'un unique point $e^{(0)}$, le squelette $X_K^1 = \bigvee_{i=1}^r S_i^1$ de dimension 1 est un bouquet de r cercles orientés correspondant aux générateurs de G_K . Ses cellules sont notées $e_1^{(1)}, \dots, e_r^{(1)}$. Chacune des relations de la présentation de Wirtinger de G_K définit un lacet γ_j dans X_K^1 . Le complexe cellulaire X_K est obtenu de X_K^1 en recollant $r - 1$ cellules de dimension 2, notées $e_1^{(2)}, \dots, e_{r-1}^{(2)}$, le long des lacets γ_j .

On pose $\mathfrak{X}_i = C^{2-i}(X_K; \mathbb{R})$, pour $i = 0, 1, 2$. Explicitement, on a :

$$(2.11) \quad \mathfrak{X} : 0 \longrightarrow \mathbb{R}e^{(0)} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}e_i^{(1)} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathbb{R}e_j^{(2)} \longrightarrow 0.$$

La caractéristique d'Euler de $\mathfrak{X}$ est nulle mais ce complexe n'est pas acyclique. Plus précisément, on a les isomorphismes suivants :

$$H_0(\mathfrak{X}) \cong H^2(M_K; \mathbb{R}) = 0, \quad H_1(\mathfrak{X}) \cong H^1(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \quad \text{et} \quad H_2(\mathfrak{X}) \cong H^0(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

⁽³⁾On utilise la convention de la “normale sortante” pour orienter le bord d'une variété à bord qui est orientée.

⁽⁴⁾Ceci résulte d'une analyse minutieuse de la façon dont on obtient une présentation de Wirtinger. On pourra se reporter à [CF63, Chapitre 6] pour une justification.

On munit $H_*(\mathfrak{X})$ de bases de référence de la façon suivante :

- $H^0(M_K; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_0(M_K; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ est muni de la classe cohomologique $\llbracket pt \rrbracket$ d'un point de M_K . Notons que par dualité de Poincaré, on a l'isomorphisme $H^0(M_K; \mathbb{R}) \cong H_3(M_K, \partial M_K; \mathbb{R})$. L'élément $\llbracket pt \rrbracket$ peut se voir comme le dual⁽⁵⁾ de la classe fondamentale relative $\llbracket M_K, \partial M_K \rrbracket \in H_3(M_K, \partial M_K; \mathbb{R}) = H_3(M_K, \partial M_K; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ correspondant à l'orientation de M_K .
- $H^1(M_K; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_1(M_K; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ est muni de la classe cohomologique $m^* : m \mapsto 1$ du méridien m de K . Le nœud K étant orienté, nous orientons toujours m de telle sorte que le nombre d'enlacement de m avec K soit $+1$.

A partir de maintenant, le complexe réel $\mathfrak{X}$ sera toujours supposé muni de l'*orientation cohomologique canonique* déterminée par la *base cohomologique naturelle* $(\llbracket pt \rrbracket, m^*)$, que l'on vient de définir.

Remarque 2.18. — Le générateur $\llbracket pt \rrbracket$ de $H^0(M_K; \mathbb{R})$ ne dépend pas de l'orientation de M_K comme on le constate aisément.

2.4. Complexe de l'extérieur d'un nœud à coefficients tordus

Considérons le cocomplexe $C^*(M_K; Ad \circ \rho) = \text{Hom}_{G_K}(C_*(\widetilde{M}_K, \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2))$ où, $\widetilde{M}_K$ est le revêtement universel de M_K , $C_*(\widetilde{M}_K, \mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}[G_K]$ -module via l'action de G_K sur $\widetilde{M}_K$ comme groupe de revêtement et où $\mathfrak{su}(2)$ est muni de sa structure de $\mathbb{Z}[G_K]$ -module via la composée $Ad \circ \rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{su}(2))$. La cohomologie du cocomplexe $C^*(M_K; Ad \circ \rho)$ est la cohomologie $H_\rho^*(M_K) = H^*(M_K; \mathfrak{su}(2)_{Ad \circ \rho})$ de M_K à coefficients dans $\mathfrak{su}(2)_{Ad \circ \rho}$ (cf. Section 1.3).

Puisque M_K possède une orientation cohomologique naturelle, déterminée par la base $(\llbracket pt \rrbracket, m^*)$ de $H^*(M_K; \mathbb{R})$, après avoir fixé des bases $\mathbf{h}^i$ des groupes $H_\rho^i(M_K)$, $i = 0, 1, 2$, la torsion de Reidemeister $\text{TOR}(M_K; Ad \circ \rho, \mathbf{h}^*)$ de M_K (à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$) est la torsion de Reidemeister avec signe d'une quelconque décomposition cellulaire de M_K (cf. Proposition 2.10).

Considérons le revêtement universel $\widetilde{X}_K \rightarrow X_K$ du complexe bidimensionnel X_K et relevons ses cellules $e^{(0)}, e_i^{(1)}, e_j^{(2)}$ en des cellules $\tilde{e}^{(0)}, \tilde{e}_i^{(1)}, \tilde{e}_j^{(2)}$ dans $\widetilde{X}_K$. Supposons de plus, que le point de base des arcs orientés $\tilde{e}_i^{(1)}$ soit $\tilde{e}^{(0)}$ et que les relevés $\tilde{f}_j$ des applications caractéristiques $f_j : D^2 \rightarrow e_j^{(2)}$ fassent correspondre le point $(1, 0) \in D^2$ à $\tilde{e}^{(0)}$. On a :

$$C_*(\widetilde{X}_K, \mathbb{Z}) : 0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r-1} \mathbb{Z}[G_K] \tilde{e}_j^{(2)} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}[G_K] \tilde{e}_i^{(1)} \longrightarrow \mathbb{Z}[G_K] \tilde{e}^{(0)} \longrightarrow 0,$$

de sorte que le complexe à coefficients tordus, $C^*(X_K; Ad \circ \rho) = \text{Hom}_{G_K}(C_*(\widetilde{X}_K, \mathbb{Z}), \mathfrak{su}(2))$, s'identifie à :

$$(2.12) \quad \mathcal{X}^\rho : 0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{d_2^\rho} \mathfrak{su}(2)^r \xrightarrow{d_1^\rho} \mathfrak{su}(2)^{r-1} \longrightarrow 0$$

⁽⁵⁾Lorsqu'il n'est pas fait mention du contraire, le terme *dual* renvoie toujours au dual au sens de la *dualité de Poincaré*.

où les opérateurs bord d_1^ρ et d_2^ρ sont induits par les opérateurs bord usuels du complexe cellulaire $C_*(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ et où $\mathfrak{su}(2)^k$ porte la forme volume produit.

Les opérateurs bord de $C_*(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ sont donnés par le calcul de Fox (cf. [CF63, Chapitre 7] ou [BZ85, Chapitre 9]). En conséquence de quoi, les opérateurs bord du complexe (2.12) sont explicitement donnés par les formules suivantes :

– pour tout $x \in \mathfrak{su}(2)$,

$$d_2^\rho(x) = ((1 - S_1) \circ x, \dots, (1 - S_r) \circ x),$$

– pour tout $(x_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathfrak{su}(2)^r$,

$$d_1^\rho((x_j)_{1 \leq j \leq r}) = \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial R_i}{\partial S_j} \circ x_j \right)_{1 \leq i \leq r-1}.$$

Par définition, le *complexe de l'extérieur du nœud K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$* est le complexe $\mathcal{X}^\rho$ défini par $\mathcal{X}_i^\rho = C^{2-i}(X_K; Ad \circ \rho)$, pour $i = 0, 1, 2$. C'est ce complexe cellulaire bidimensionnel que nous utilisons pour calculer effectivement la torsion de Reidemeister de M_K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$.

Ajoutons que la caractéristique d'Euler de $\mathcal{X}^\rho$ est nulle, mais que le complexe $\mathcal{X}^\rho$ n'est jamais acyclique : son homologie se réduit à $H_0(\mathcal{X}^\rho) \cong H_\rho^2(M_K)$, $H_1(\mathcal{X}^\rho) \cong H_\rho^1(M_K)$ et $H_2(\mathcal{X}^\rho) \cong H_\rho^0(M_K)$ et on sait que $\dim H_\rho^1(M_K) \geq 1$ (cf. Lemme 1.19).

2.5. Torsion de Reidemeister tordue et polynôme d'Alexander

L'objectif de cette section est de montrer comment on peut exprimer la torsion de Reidemeister de M_K à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation abélienne régulière de G_K en fonction du polynôme d'Alexander de K .

Soit $\varphi_\theta : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ la représentation abélienne donnée par $\varphi_\theta(m) = A_\theta = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}$ (cf. Proposition 1.6) et supposons qu'il ne s'agit pas d'une représentation centrale (i.e. $\theta \neq 0, \pi$). Lorsque $e^{2i\theta}$ n'est pas un zéro du polynôme d'Alexander de K , on dit que φ_θ est *régulière*. Pour une telle représentation, E. Klassen a calculé la cohomologie de M_K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \varphi_\theta$ (cf. [Kla91, Théorème 19]). On a :

Lemme 2.19. — *Si $\varphi_\theta : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière, alors $H_{\varphi_\theta}^0(M_K) \cong H^0(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H_{\varphi_\theta}^1(M_K) \cong H^1(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ et $H_{\varphi_\theta}^i(M_K) \cong H^i(M_K; \mathbb{R}) = 0$, pour $i \geq 2$.*

Même plus, $H_{\varphi_\theta}^0(M_K) = \ker d_2^{\varphi_\theta}$ est engendré par $h^{(0)} = \mathbf{i}$ (axe commun des rotations $Ad_{\varphi_\theta}(S_i)$) et $H_{\varphi_\theta}^1(M_K)$ est engendré par $h^{(1)} = \mathbf{i}_1 + \dots + \mathbf{i}_r$, où $\mathbf{i}_k$ est le vecteur de $\mathfrak{su}(2)^r$ dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de celle d'indice k qui vaut $\mathbf{i}$ (voir le complexe (2.12)).

Avec ces notations, nous avons le résultat suivant (comparable à celui obtenu dans [Mil62, Théorème 4] ou [Tur86, Paragraphe 1.2]).

Proposition 2.20. — *La torsion de Reidemeister de M_K à coefficients dans la représentation adjointe associée à la représentation abélienne régulière $\varphi_\theta : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ et calculée*

dans les bases $(h^{(0)})$ de $H_{\varphi_\theta}^0(M_K)$ et $(h^{(1)})$ de $H_{\varphi_\theta}^1(M_K)$ vaut :

$$\text{tor}(M_K; Ad \circ \varphi_\theta, (h^{(0)}, h^{(1)})) = \frac{\pm 4 \sin^2(\theta)}{|\Delta_K(e^{2i\theta})|^2},$$

où Δ_K désigne le polynôme d'Alexander de K .

Remarque 2.21. — On peut noter les points suivants :

1. On a : $4 \sin^2(\theta) = 4 - I_m^2(\varphi_\theta)$, où $I_m(\varphi_\theta) = \text{Tr}(\varphi_\theta(m)) = 2 \cos(\theta)$. La fonction $4 - I_m^2$ a été introduite pour la première fois dans [CGLS87] et “contient” de nombreuses propriétés de la variété tridimensionnelle à laquelle elle est attachée.
2. La fonction que l'on vient de mettre en évidence peut s'interpréter comme une torsion de Reidemeister de la façon suivante. Si $K = \bigcirc$ est le nœud trivial, alors la torsion $\text{tor}(M_K; Ad \circ \varphi_\theta, \{h^{(0)}, h^{(1)}\}) = \pm 4 \sin^2(\theta)$ n'est autre que la torsion de Reidemeister du tore solide M_K (cf. Proposition 2.16).

Démonstration. — Introduisons les deux ensembles suivants : $\mathbf{b}^1 = \{d_2^{\varphi_\theta}(\mathbf{j}), d_2^{\varphi_\theta}(\mathbf{k})\}$ et $\tilde{\mathbf{b}}^0 = \{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{i}_{r-1}, \mathbf{j}_{r-1}, \mathbf{k}_{r-1}\}$. On constate que $\mathbf{b}^1$ est une base de $\text{im } d_2^{\varphi_\theta}$, que $\mathbf{b}^0 = d_1^{\varphi_\theta}(\tilde{\mathbf{b}}^0)$ est une base de $\text{im } d_1^{\varphi_\theta}$ et que l'on a :

$$\text{tor}(M_K; Ad \circ \varphi_\theta, (h^{(0)}, h^{(1)})) = \pm 4 \sin^2(\theta) \cdot [\mathbf{b}^0 / \mathbf{c}^0]^{-1},$$

où $\mathbf{c}^0$ est la base canonique produit de $\mathfrak{su}(2)^{r-1}$.

Dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de $\mathfrak{su}(2)$, on remarque que, pour tout j , on a :

$$Ad \circ \varphi_\theta(S_j) = Ad_{A_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \in \text{Aut}(\mathfrak{su}(2)).$$

Notons

$$R_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

la matrice de rotation qui apparaît ci-dessus.

On constate ensuite que la matrice de passage $(\mathbf{b}^0 / \mathbf{c}^0)$ est, à permutation près, la matrice jacobienne diagonale par blocs :

$$\left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial R_i}{\partial S_j} \right)^{ab}_{1 \leq i, j \leq r-1} (1) & \\ & \left(\frac{\partial R_i}{\partial S_j} \right)^{ab}_{1 \leq i, j \leq r-1} (R_{2\theta}) \end{pmatrix} \right)$$

dans laquelle ab désigne l'abélianisation.

Comme pour tout $f \in \mathbb{R}[t, t^{-1}]$, on a $\det f(R_{2\theta}) = f(e^{2i\theta}) \cdot f(e^{-2i\theta})$, il vient

$$[\mathbf{b}^0 / \mathbf{c}^0] = \Delta_K(1) \Delta_K(e^{2i\theta}) \Delta_K(e^{-2i\theta}),$$

ce qui achève la démonstration en remarquant de plus, que $\Delta_K(1) = \pm 1$. □

2.6. Définition de la forme torsion $\hat{\tau}^K$

Soit K un nœud dans S^3 . Dans cette section, on construit une *forme torsion* de Reidemeister non abélienne avec signe sur la partie régulière de l'espace des classes de conjugaison des représentations irréductibles de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$. Pour cela, on a besoin de déterminer une base de référence de nature géométrique pour le groupe $H_\rho^2(M_K)$. Cette construction⁽⁶⁾ fait l'objet des deux paragraphes suivants. Ajoutons que dans celle-ci, le méridien m du nœud K joue un rôle tout à fait central et qu'il permet de définir sans ambiguïté le générateur de référence du groupe $H_\rho^2(M_K)$ (cf. Paragraphe 2.6.1 et Remarque 2.25). L'idée principale est d'examiner la restriction des représentations irréductibles de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$ au sous-groupe périphérique de K ⁽⁷⁾.

Pour fixer les notations et définir la forme torsion $\hat{\tau}^K$, on suppose que la sphère S^3 et que le nœud $K \subset S^3$ sont orientés. On verra que cette définition est indépendante de l'orientation du nœud, mais qu'elle dépend de celle de S^3 (cf. Proposition 2.26).

2.6.1. Cohomologie à coefficients tordus du tore. — On commence par l'étude du bord ∂M_K de l'extérieur M_K du nœud K . Plus précisément, nous allons examiner le comportement de la restriction d'une représentation irréductible de G_K au sous-groupe périphérique $\pi_1(\partial M_K)$ engendré par le système méridien-longitude (m, l) de K .

Notons $\mathrm{int}(\cdot, \cdot)$ le nombre d'intersection définie grâce à l'orientation de ∂M_K (on rappelle que ∂M_K est orienté avec la convention de la “normale sortante”). La paire (m, l) est quasi-orientée, c'est-à-dire orientée à un changement simultané près des orientations de m et l , et vérifie $\mathrm{int}(m, l) = +1$. Lorsque K est orienté, alors on oriente m et l en utilisant la convention $\ell k(m, K) = +1$.

Soit $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation irréductible. On a $\rho(m) \neq \pm 1$ (car m engendre normalement G_K) et il existe un unique couple (θ, P^ρ) vérifiant : $\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P^\rho$, avec $P^\rho \in S^2$ et $\theta \in (0, \pi)$. Ainsi le vecteur P^ρ engendre l'axe commun des rotations $\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))$ et appartient donc à l'ensemble des éléments de $\mathfrak{su}(2)$ invariants sous l'action de $\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))$, ensemble qui s'identifie au groupe $H_\rho^0(\partial M_K)$ (cf. Lemme 1.14).

Le bord ∂M_K de M_K est un tore *orienté* noté T^2 . On désigne par c le générateur de $H^2(T^2; \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_2(T^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ correspondant à la classe fondamentale $[\partial M_K] \in H_2(T^2; \mathbb{Z})$ déduite de l'orientation de T^2 . On rappelle que le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{su}(2)$ induit un *produit cup* (cf. Paragraphe 1.3.2) :

$$\smile : H_\rho^p(T^2) \times H_\rho^q(T^2) \rightarrow H^{p+q}(T^2; \mathbb{R})$$

et on a (cf. [Por97, Proposition 3.18]) :

Lemme 2.22. — *Avec les notations ci-dessus, il existe un isomorphisme naturel $\phi_{P^\rho}^{(*)} : H_\rho^*(T^2) \rightarrow H^*(T^2; \mathbb{R})$, donné par $\phi_{P^\rho}^{(*)}(z) = P^\rho \smile z$.*

Démonstration. — Elle est identique à celle de la Proposition 1.16 en remplaçant $\mathbf{i}$ par P^ρ . □

⁽⁶⁾Qui est analogue à celle faite par J. Porti dans [Por97, Corollaire 3.23].

⁽⁷⁾Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation non centrale, alors $\rho(\pi_1(\partial M_K)) \not\subset \{\pm 1\}$.

2.6.2. Base de référence pour le second groupe de cohomologie à coefficients tordus de l'extérieur du nœud. — Dans ce paragraphe, on construit une base de référence pour le groupe $H_\rho^2(M_K)$ quand $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation régulière en s'appuyant sur les résultats de J. Porti donnés dans [Por97, Chapitre 3].

Lorsque ρ est régulière, on a $H_\rho^1(M_K) \cong \mathbb{R}$, mais aussi $H_\rho^2(M_K) \cong \mathbb{R}$ (cf. Lemme 1.19). La construction du générateur de référence de $H_\rho^2(M_K)$ s'appuie sur le lemme suivant (cf. [Por97, Corollaire 3.23]).

Lemme 2.23. — *Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation régulière, alors l'homomorphisme $i^* : H_\rho^2(M_K) \rightarrow H_\rho^2(\partial M_K)$, induit par l'inclusion $\partial M_K \hookrightarrow M_K$, est un isomorphisme.*

Démonstration. — Ecrivons la fin de la suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus associée à la paire $(M_K, \partial M_K)$. On a :

$$\cdots \longrightarrow H_\rho^1(\partial M_K) \longrightarrow H_\rho^2(M_K, \partial M_K) \longrightarrow H_\rho^2(M_K) \xrightarrow{i^*} H_\rho^2(\partial M_K) \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathrm{rg} \, i^* = \dim H_\rho^2(\partial M_K) = \dim H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H_\rho^2(M_K) = 1$, le morphisme surjectif $i^* : H_\rho^2(M_K) \rightarrow H_\rho^2(\partial M_K)$ est en fait un isomorphisme. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer un générateur de référence de nature géométrique pour le groupe $H_\rho^2(M_K)$. Les Lemmes 2.22 & 2.23 montrent que la composée

$$\phi_{P^\rho}^{(2)} \circ i^* : H_\rho^2(M_K) \rightarrow H_\rho^2(\partial M_K) \rightarrow H^2(\partial M_K; \mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Le *générateur de référence* $h_\rho^{(2)} \in H_\rho^2(M_K)$ est défini par :

$$(2.13) \quad h_\rho^{(2)} = (\phi_{P^\rho}^{(2)} \circ i^*)^{-1}(c).$$

On constate que $h_\rho^{(2)}$ dépend de l'orientation du bord ∂M_K de M_K – via la classe fondamentale $[\partial M_K]$ – ainsi que du comportement de la restriction de la représentation ρ à $\pi_1(\partial M_K)$ – via l'isomorphisme $\phi_{P^\rho}^{(2)} = P^\rho \circ \cdot$. La remarque suivante résume tout ceci.

Remarque 2.24. — On a les propriétés suivantes :

- $h_\rho^{(2)}$ dépend de l'orientation de K , à travers l'orientation du méridien m .
En effet, si l'on change m en m^{-1} , alors $P^\rho \in S^2$ est changé en son opposé et donc $h_\rho^{(2)}$ est changé en son opposé.
- $h_\rho^{(2)}$ dépend de l'orientation de ∂M_K .
En effet, si l'orientation de ∂M_K est inversée, alors la classe fondamentale $[\partial M_K]$ est changée en son opposée, de même que $c \in H^2(\partial M_K; \mathbb{Z})$, et donc $h_\rho^{(2)}$ est changé en son opposé.
- Par contre, $h_\rho^{(2)}$ est indépendant de l'orientation de S^3 .

En effet, si l'on renverse l'orientation de S^3 , alors on inverse simultanément la classe fondamentale $[\partial M_K]$ – ainsi que $c \in H^2(\partial M_K; \mathbb{Z})$ – et le méridien m de K , de sorte que $h_\rho^{(2)}$ ne change pas.

2.6.3. Définition de la forme torsion $\hat{\tau}^K$. — Considérons une représentation régulière $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ et rappelons que M_K possède une orientation cohomologique canonique (cf. Section 2.3). La forme torsion $\hat{\tau}^K$ en la représentation ρ est la 1-forme $\hat{\tau}_\rho^K : T_{[\rho]}\hat{R}(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\hat{\tau}_\rho^K(v_{[\rho]}) = \begin{cases} \mathrm{TOR}\left(M_K; Ad \circ \rho, \left(\varphi_{[\rho]}(v_{[\rho]}), h_\rho^{(2)}\right)\right) & \text{si } v_{[\rho]} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\varphi_{[\rho]} : T_{[\rho]}\hat{R}(M_K) \xrightarrow{\cong} H_\rho^1(M_K)$ et où $h_\rho^{(2)}$ est l'élément que l'on vient de mettre en évidence. On a explicitement, avec les notations des Sections 2.3 & 2.4 :

$$\mathrm{TOR}\left(M_K; Ad \circ \rho, \left(\varphi_{[\rho]}(v_{[\rho]}), h_\rho^{(2)}\right)\right) = \mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})) \cdot \mathrm{Tor}\left(\mathcal{X}^\rho, \left(\varphi_{[\rho]}(v_{[\rho]}), h_\rho^{(2)}\right)\right).$$

On vérifie sans difficultés que $\hat{\tau}_\rho^K$ ne dépend que de la classe de conjugaison $[\rho]$ de la représentation ρ , de sorte que la forme torsion $\hat{\tau}^K : [\rho] \mapsto \hat{\tau}_\rho^K$ est bien définie et qu'il s'agit d'une *forme volume* sur $\mathrm{Reg}(K)$.

Remarque 2.25. — Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière, alors il existe un unique $P^\rho \in S^2$ et un unique $\bar{P}^\rho \in S^2$ tels que : $\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P^\rho$ et $\rho(m) = \cos(2\pi - \theta) + \sin(2\pi - \theta)\bar{P}^\rho$ avec $\theta \in (0, \pi)$. Si l'on répète la construction de la forme torsion en remplaçant le vecteur P^ρ par le vecteur $\bar{P}^\rho$, alors on obtient la forme volume opposée $-\hat{\tau}_\rho^K$.

En effet, si l'on remplace P^ρ par $\bar{P}^\rho$ dans la construction, alors le générateur de référence $h_\rho^{(2)}$ est changé en son opposé $-h_\rho^{(2)}$. Pour conclure, il suffit d'utiliser la formule de changement de base (2.6) en tenant compte de fait que $\mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(\mathfrak{X}))$ reste inchangé.

Examinons la dépendance de la forme volume $\hat{\tau}_\rho^K$ vis-à-vis des choix que l'on a fait.

Proposition 2.26. — Si $K \subset S^3$ est un nœud, alors la forme volume $\hat{\tau}^K$ possède les deux propriétés suivantes :

1. $\hat{\tau}^K$ ne dépend pas de l'orientation du nœud K .
2. Si K^* désigne l'image miroir de K , alors $\hat{\tau}^{K^*} = -\hat{\tau}^K$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la formule de changement de base (2.6).

1. Si l'on renverse l'orientation de K , alors le méridien m est changé en m^{-1} , mais l'orientation de M_K n'est pas affectée. La classe fondamentale $[\partial M_K]$ reste donc inchangée – ainsi que $c \in H^2(\partial M_K; \mathbb{Z})$ – de même que le générateur $[pt]$ de $H^0(M_K; \mathbb{R})$. Par conséquent, $\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})$ et $\mathrm{Tor}(\mathcal{X}^\rho)$ changent simultanément de signe.
2. Si l'on renverse l'orientation de S^3 , alors les orientations de M_K et ∂M_K changent simultanément. La classe fondamentale $[\partial M_K]$ – ainsi que $c \in H^2(\partial M_K; \mathbb{Z})$ – et le méridien m sont donc inversés, tandis que le générateur $[pt]$ de $H^0(M_K; \mathbb{R})$ n'est pas affecté. Par conséquent, $\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})$ change de signe, mais $\mathrm{Tor}(\mathcal{X}^\rho)$ n'en change pas (car $h_\rho^{(2)}$ n'est pas affecté par un changement d'orientation de S^3).

□

2.7. Une formule de chirurgie

Le but de cette section est d'établir une *formule de chirurgie* (cf. Proposition 2.29) permettant le calcul de la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe de la variété obtenue par chirurgie le long du nœud K en fonction de la *densité positive* ⁽⁸⁾ $\tau^K = |\hat{\tau}^K|$ associée à ce nœud. Pour démontrer une telle formule on a besoin de la notion de μ -régularité pour une représentation introduite dans la Section 1.5. Cette notion s'impose dès lors que l'on cherche à expliciter une base de nature géométrique pour $H_\rho^1(M_K)$, ce qui jusqu'à présent n'a pas été fait. De plus, on peut voir la notion de μ -régularité d'une représentation ρ du groupe du nœud K , comme une traduction de la notion d'*acyclicité* de la représentation induite par ρ sur le groupe fondamental de la variété $M_K(\mu)$ obtenue par chirurgie de pente μ le long du nœud K . Cette propriété (due à J. Porti, cf. [Por97, Proposition 4.10 (i)]) sera établie dans la Proposition 2.29.

2.7.1. Représentations μ -régulières. — Rappelons la définition de la μ -régularité, ainsi que la caractérisation “cohomologique” obtenue dans la Proposition 1.37.

Soit ρ une représentation irréductible de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$, désignons par $[\rho]$ sa classe de conjugaison et notons μ une courbe simple, fermée dans le bord ∂M_K de M_K .

A partir de maintenant, on suppose que le nœud K est *orienté* ; le système méridien-longitude (m, l) est donc canoniquement orienté par les conventions $\ell k(m, K) = +1$ et $\mathrm{int}(m, l) = +1$. Pour définir sans ambiguïté un générateur de référence pour $H_\rho^1(M_K)$, on doit *orienter* la courbe μ . On utilise pour cela la convention suivante : μ est une courbe dans ∂M_K , on l'oriente de telle sorte que si μ est parallèle à la longitude l , alors μ et l sont orientées de la même façon et sinon on l'oriente telle que $\mathrm{int}(\mu, l) \geq 0$. Notons que si l'on renverse l'orientation de K , alors l'orientation de μ est inversée (puisque les orientations de m et de l changent simultanément).

La représentation ρ étant irréductible, on a $\rho(m) \neq \pm 1$, il existe donc un unique couple (θ, P^ρ) tel que $\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P^\rho$, avec $0 < \theta < \pi$ et $P^\rho \in S^2$. Répétons que le vecteur $P^\rho \in S^2$ est dans l'espace $\mathfrak{su}(2)^{\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))}$ des éléments de $\mathfrak{su}(2)$ invariants sous l'action de $\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))$ et engendre en particulier l'axe commun des rotations $\mathrm{Ad} \circ \rho(\pi_1(\partial M_K))$.

Comme nous l'avons fait dans le Paragraphe 1.5.3, considérons l'application $\theta_\mu : V_{[\rho]} \subset \widehat{R}(M_K) \rightarrow [0, 2\pi]/\sim = S^1$, qui à $[\varrho] \in V_{[\rho]}$ associe l'angle $\theta_\mu([\varrho]) \in S^1$ de la rotation $\mathrm{Ad} \circ \varrho(\mu)$. On dit que la représentation ρ est μ -régulière si elle est régulière et si $\theta_\mu : \widehat{R}(M_K) \rightarrow S^1$ est une *submersion* en $[\rho]$ (cf. Théorème 1.39).

Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est μ -régulière, on dispose donc de l'isomorphisme $D_{[\rho]}\theta_\mu : T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$. Au moyen de cet isomorphisme, on peut définir une *base de référence* pour $H_\rho^1(M_K)$ formée de l'unique vecteur $h_\rho^{(1)}(\mu)$ vérifiant (cf. [Por97, Proposition 3.22]) :

$$D_{[\rho]}\theta_\mu(\varphi_{[\rho]}^{-1}(h_\rho^{(1)}(\mu))) = 1,$$

⁽⁸⁾Rappelons qu'une fonction continue $f : E^p \rightarrow \mathbb{R}^+$, E étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension p , est appelée *densité positive* lorsqu'elle vérifie $f(\phi(v_1), \dots, \phi(v_p)) = |\det \phi| f(v_1, \dots, v_p)$, quels que soient $v_1, \dots, v_p \in E$ et $\phi : E \rightarrow E$ linéaire.

avec $\varphi_{[\rho]} : \mathbb{T}_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \xrightarrow{\cong} H_\rho^1(M_K)$ (cf. Proposition 1.35). Ainsi, le dual⁽⁹⁾ du vecteur $h_\rho^{(1)}(\mu)$ peut se voir comme l'application tangente en $[\rho]$ au paramétrage local θ_μ de $\widehat{R}(M_K)$.

Dans la suite, nous aurons aussi besoin de la formulation alternative du concept de μ -régularité donnée dans la Proposition 1.37. On a vérifié (cf. Lemme 1.36) que si ρ est régulière, alors pour tout $v \in H_\rho^1(M_K)$, on a l'égalité :

$$f_\mu^\rho(v) = \langle v(\mu), P^\rho \rangle = D_{[\rho]} \theta_\mu(\varphi_{[\rho]}^{-1}(v)),$$

et ρ est μ -régulière si, et seulement si, $f_\mu^\rho : H_\rho^1(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ est un isomorphisme.

Remarque 2.27. — Lorsque ρ est μ -régulière, $h_\rho^{(1)}(\mu)$ est donc l'unique vecteur v de $H_\rho^1(M_K)$ vérifiant l'équation $\langle v(\mu), P^\rho \rangle = 1$.

Si l'on change de convention d'orientation, et que l'on décide d'orienter la courbe μ dans le sens opposé à celui que l'on a choisi, alors le générateur de référence $h_\rho^{(1)}(\mu)$ de $H_\rho^1(M_K)$ est changé en son opposé (car $f_{\mu^{-1}}^\rho = -f_\mu^\rho$).

2.7.2. La μ -torsion. — On suppose toujours que la sphère S^3 et que le nœud K sont orientés. On suppose aussi que la courbe μ est orientée avec la convention faite dans le paragraphe précédent.

Lorsque la représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est μ -régulière, on pose

$$\mathbb{T}_\mu^K(\rho) = \hat{\tau}_\rho^K \left(\varphi_{[\rho]}^{-1}(h_\rho^{(1)}(\mu)) \right) \in \mathbb{R}^*.$$

L'application $\mathbb{T}_\mu^K$, qui à la représentation μ -régulière ρ , fait correspondre le réel non nul $\mathbb{T}_\mu^K(\rho)$ est appelée la μ -torsion associée à K (cf. [Por97, Chapitre 4]). On a donc

$$\hat{\tau}_\rho^K = \mathbb{T}_\mu^K(\rho) D_{[\rho]} \theta_\mu,$$

pour toute représentation μ -régulière $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$. On pose enfin, $\mathrm{tor}_\mu^K = |\mathbb{T}_\mu^K| \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2.28. — Lorsque K est un nœud hyperbolique, la fonction tor_μ^K est exactement l'inverse de la torsion $\mathbb{T}_{(M_K, \mu)}$ pour les variétés hyperboliques ouvertes définie par J. Porti dans [Por97, Chapitre 4] (voir en particulier [Por97, Théorème 4.1]).

La μ -torsion $\mathbb{T}_\mu^K(\rho)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{T}_\mu^K(\rho)$ ne dépend pas de l'orientation du nœud K .

Cette propriété tient au fait que l'on a orienté la courbe μ d'une façon "cohérente". En effet, si l'on renverse l'orientation de K , alors les orientations de m et de l changent simultanément. Par conséquent, le vecteur P^ρ est changé en son opposé et la courbe orientée μ est remplacée, avec notre convention, par la courbe μ^{-1} . Ainsi, le vecteur $h_\rho^{(1)}(\mu)$ reste le générateur de référence pour $H_\rho^1(M_K)$. Comme de plus, $\hat{\tau}_\rho^K$ ne dépend pas de l'orientation de K , on en déduit la μ -torsion n'en dépend pas non plus.

2. Si K^* est l'image miroir de K , alors $\mathbb{T}_{m_{K^*}}^{K^*}(\rho) = -\mathbb{T}_{m_K}^K(\rho)$, où m_K (resp. m_{K^*}) est le méridien de K (resp. de K^*).

⁽⁹⁾Au sens algébrique.

En effet, si l'on renverse l'orientation de S^3 , alors $\hat{\tau}^{K*} = -\hat{\tau}^K$. On constate de plus, que m_{K*} est muni de l'orientation opposée de celle de m_K et donc $P^\rho(m_{K*}) = -P^\rho(m_K)$, de sorte que $h_\rho^{(1)}(m_{K*}) = h_\rho^{(1)}(m_K)$.

2.7.3. Une formule de chirurgie. — Avec les notations des paragraphes précédents, on a la *formule de chirurgie* suivante (comparable à celle obtenue par J. Porti dans [Por97, Proposition 4.10]) :

Théorème 2.29 (Formule de Chirurgie). — *Soit μ une courbe simple, fermée dans le bord ∂M_K de M_K . Notons $M_K(\mu)$ la variété compacte obtenue par chirurgie de pente μ le long du nœud $K \subset S^3$ et γ l'âme du tore solide V ajouté à M_K pour obtenir $M_K(\mu)$.*

Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation μ -régulière telle que $\rho(\mu) = \mathbf{1}$, alors :

1. *la représentation ρ induit une représentation $\varrho : \pi_1(M_K(\mu)) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ qui est acyclique,*
2. *on a la formule suivante :*

$$\mathrm{tor}(M_K(\mu); Ad \circ \varrho) = \pm 4 \sin^2(\theta_\gamma^\varrho) \cdot \mathrm{tor}_\mu^K(\rho),$$

avec $\rho(\gamma) = \cos(\theta_\gamma^\varrho) + \sin(\theta_\gamma^\varrho)P^\rho$, où $0 < \theta_\gamma^\varrho < \pi$.

Démonstration. — La démonstration se divise en deux parties, c'est pour l'essentiel une conséquence de la formule de Mayer-Vietoris appliquée au scindement $M_K(\mu) = M_K \cup_\mu V$, où $T^2 = \partial M_K = M_K \cap V$ est un tore. On convient de noter $i_1 : T^2 \hookrightarrow M_K$ et $i_2 : T^2 \hookrightarrow V$ les inclusions canoniques, $\phi_{P^\rho}^{(i)} : H_\rho^i(T^2) \rightarrow H^i(T^2; \mathbb{R})$ l'isomorphisme donné par $\phi_{P^\rho}^{(i)} = P^\rho \circ \cdot$ (cf. Proposition 1.16) et on oriente arbitrairement la courbe γ ⁽¹⁰⁾. Rappelons enfin que le résultat de la chirurgie est indépendant de l'orientation de la courbe μ , que l'on oriente avec la convention faite dans le Paragraphe 2.7.1.

D'emblée, $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ étant une représentation irréductible du groupe du nœud K , on a $\rho(\pi_1(\partial M_K)) \not\subset \{\pm \mathbf{1}\}$, de sorte que $\rho(\gamma) \neq \pm \mathbf{1}$ (puisque $\rho(\mu) = \mathbf{1}$).

1. *Démonstration de l'acyclicité de ϱ .* — La représentation ρ étant irréductible on a :

$$H_\rho^0(M_K) = H_\varrho^0(M_K(\mu)) = 0 \text{ et } H_\rho^3(M_K) = H_\varrho^3(M_K(\mu)) = 0.$$

En notant que $H_\varrho^0(V) \cong H_\rho^0(T^2) \cong \mathbb{R}$ et $H_\varrho^2(V) = 0$, la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus $\mathcal{H}^*$ associée au scindement $M_K(\mu) = M_K \cup_\mu V$ se réduit à l'isomorphisme $H_\varrho^0(V) \cong H_\rho^0(T^2)$ et à la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_\varrho^1(M_K(\mu)) \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \oplus H_\varrho^1(V) \longrightarrow H_\rho^1(T^2) \longrightarrow \\ H_\varrho^2(M_K(\mu)) \longrightarrow H_\rho^2(M_K) \longrightarrow H_\rho^2(T^2) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme $\dim H_\rho^2(T^2) = \dim H_\rho^2(M_K) = 1$ (car ρ est régulière), l'homomorphisme surjectif $H_\rho^2(M_K) \rightarrow H_\rho^2(T^2)$, induit par l'inclusion, est en fait un isomorphisme. La suite de Mayer-Vietoris $\mathcal{H}^*$ se réduit finalement aux deux isomorphismes $H_\varrho^0(V) \cong H_\rho^0(T^2)$, $H_\rho^2(M_K) \cong H_\rho^2(T^2)$ et à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_\varrho^1(M_K(\mu)) \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \oplus H_\varrho^1(V) \xrightarrow{i_1^* + i_2^*} H_\rho^1(T^2) \longrightarrow H_\varrho^2(M_K(\mu)) \longrightarrow 0.$$

⁽¹⁰⁾L'orientation de γ n'influe en rien dans la suite.

Pour conclure à l'acyclicité de la représentation ϱ il ne reste plus qu'à établir que l'homomorphisme

$$i_1^* + i_2^* : H_\rho^1(M_K) \oplus H_\varrho^1(V) \longrightarrow H_\rho^1(T^2)$$

est un isomorphisme.

Comme la représentation ρ est μ -régulière, $H_\rho^1(M_K)$ est engendré par l'élément $z = h_\rho^{(1)}(\mu)$ satisfaisant l'identité $\langle z(\mu), P^\rho \rangle = 1$ (cf. Paragraphe 2.7.1). En notant μ^* et γ^* les duaux⁽¹¹⁾ respectifs dans $H^1(T^2; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_1(T^2; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ de μ et γ , $\left((\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*), (\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)\right)$ est une base de $H_\rho^1(T^2)$. On constate que $i_1^*(z) = (\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*) + b(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)$, où $b \in \mathbb{R}$. D'autre part $\gamma \hookrightarrow V$ étant une équivalence d'homotopie, l'image de $i_2^* : H_\rho^1(V) \rightarrow H_\rho^1(T^2)$ est engendré par $(\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)$; il existe donc un unique élément générateur $v \in H_\rho^1(V)$ tel que $i_2^*(v) = (\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)$. Ceci montre que l'image de la base $((z, 0), (0, v))$ de $H_\rho^1(M_K) \oplus H_\rho^1(V)$ par l'application $i_1^* + i_2^*$ est la base $\left((\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*), (\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)\right)$ de $H_\rho^1(T^2)$ et donc que $i_1^* + i_2^* : H_\rho^1(M_K) \oplus H_\rho^1(V) \longrightarrow H_\rho^1(T^2)$ est un isomorphisme.

2. *Calcul de la torsion.* — La représentation $\varrho : \pi_1(M_K(\mu)) \rightarrow \text{SU}(2)$ étant acyclique, la torsion de Reidemeister de $M_K(\mu)$ à coefficients dans la représentation $\text{Ad} \circ \varrho$ est bien définie. Pour la calculer, on utilise la formule de Mayer-Vietoris appliquée au scindement $M_K(\mu) = M_K \cup_\mu V(K)$ (cf. Théorème 2.17).

Comme on vient de le voir dans la première partie de la démonstration, on a $H_\varrho^*(M_K(\mu)) = 0$ et la suite de Mayer-Vietoris $\mathcal{H}^*$ associée au scindement $M_K(\mu) = M_K \cup_\mu V$ se réduit aux trois isomorphismes suivants :

$$H_\varrho^0(V) \cong H_\rho^0(T^2), \quad H_\rho^1(M_K) \oplus H_\varrho^1(V) \cong H_\rho^1(T^2), \quad H_\rho^2(M_K) \cong H_\rho^2(T^2).$$

La formule de Mayer-Vietoris donne :

$$\text{tor}(M_K(\mu); \text{Ad} \circ \varrho) \cdot \text{tor}(T^2; \text{Ad} \circ \rho) \cdot \text{tor}(\mathcal{H}^*) = \text{tor}(M_K; \text{Ad} \circ \rho) \cdot \text{tor}(V; \text{Ad} \circ \varrho).$$

La suite de la démonstration consiste à expliciter les trois termes $\text{tor}(T^2; \text{Ad} \circ \rho)$, $\text{tor}(V; \text{Ad} \circ \varrho)$ et $\text{tor}(\mathcal{H}^*)$ qui apparaissent ci-dessus. Pour cela, il faut choisir des *bases de référence* pour les groupes de cohomologie à coefficients tordus :

- *Bases de référence pour $H_\rho^*(T^2)$* (cf. Paragraphe 2.2.3).

On a l'isomorphisme $\phi_{P^\rho}^{(i)} : H_\rho^i(T^2) \rightarrow H^i(T^2; \mathbb{R})$ entre cohomologies tordue et non tordue de T^2 (cf. Proposition 1.16). Si $c \in H^2(T^2; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_2(T^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ est l'élément correspondant à la classe fondamentale de $[\partial M_K]$ et $[pt] \in H^0(T^2; \mathbb{Z}) \cong H_2(T^2; \mathbb{Z})$ le générateur dual, alors $(\phi_{P^\rho}^{(2)})^{-1}(c)$ est le générateur de référence de $H_\rho^2(T^2)$, $\left((\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*), (\phi_{P^\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)\right)$ est la base de référence de $H_\rho^1(T^2)$ et enfin $(\phi_{P^\rho}^{(0)})^{-1}([pt])$ est le générateur de référence du groupe $H_\rho^0(T^2)$.

- *Bases de référence pour $H_\rho^*(M_K)$* (cf. Paragraphes 2.7.1 & 2.6.2).

⁽¹¹⁾ Au sens fonctionnel.

Le générateur de référence de $H_\rho^1(M_K)$ est $h_\rho^{(1)}(\mu)$ satisfaisant $i_1^*(h_\rho^{(1)}(\mu)) = (\phi_{P_\rho}^{(1)})^{-1}(\mu^*) + b(\phi_{P_\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)$, où $b \in \mathbb{R}$. Le générateur de référence de $H_\rho^2(M_K)$ est $h_\rho^{(2)}$ vérifiant l'égalité $i_1^*(h_\rho^{(2)}) = (\phi_{P_\rho}^{(2)})^{-1}(c)$.

– *Bases de référence pour $H_\varrho^*(V)$* (cf. Paragraphe 2.2.3).

L'homomorphisme $i_2^* : H_\varrho^0(V) \rightarrow H_\rho^0(T^2)$ est un isomorphisme et le générateur de référence de $H_\varrho^0(V)$ est le vecteur $(\phi_{P_\rho}^{(0)} \circ i_2^*)^{-1}(\llbracket pt \rrbracket)$. De plus, l'image de l'injection $i_2^* : H_\varrho^1(V) \rightarrow H_\rho^1(T^2)$ est engendrée par $(\phi_{P_\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)$ et le générateur de référence de $H_\varrho^1(V)$ est l'unique antécédent $v_\rho^{(1)}(\gamma)$ de $(\phi_{P_\rho}^{(1)})^{-1}(\gamma^*)$ par i_2^* .

Avec ces choix de bases pour les groupes de cohomologie à coefficients tordus on a immédiatement $\text{tor}(M_K; Ad \circ \rho) = \text{tor}_\mu^K(\rho)$; les trois autres torsions sont données dans l'assertion suivante :

Assertion 2.30. — *Dans les bases prescrites ci-dessus, on a :*

- (a) $\text{tor}(T^2; Ad \circ \rho) = \pm 1$,
- (b) $\text{tor}(V; Ad \circ \varrho) = \pm 4 \sin^2(\theta_\gamma^\varrho)$,
- (c) $\text{tor}(\mathcal{H}^*) = \pm 1$.

Démonstration de l'assertion. — (a) Les deux premiers points sont traités dans le Paragraphe 2.2.3 (cf. Propositions 2.15 & 2.16).

(b) Le complexe $\mathcal{H}^*$ étant formé des trois isomorphismes

$$i_1^* + i_2^* : H_\rho^i(M_K) \oplus H_\rho^i(V) \rightarrow H_\rho^i(T^2), \quad i = 0, 1, 2,$$

sa torsion est le produit alterné des déterminants de chacun d'entre eux ; dans les bases choisies, tous ces déterminants valent ± 1 (voir ci-dessus). Donc $\text{tor}(\mathcal{H}^*) = \pm 1$. □

En rassemblant les calculs de torsion que l'on vient de mener, on obtient la formule de chirurgie souhaitée : $\text{tor}(M_K(\mu); Ad \circ \varrho) = \pm 4 \sin^2(\theta_\gamma^\varrho) \cdot \text{tor}_\mu^K(\rho)$. □

Remarque 2.31. — La réciproque de la première assertion du Théorème 2.29 est vraie. Plus précisément, on peut montrer que si la représentation $\varrho : \pi_1(M_K(\mu)) \rightarrow \text{SU}(2)$ est acyclique et si $\varrho|_{\pi_1(\partial M_K)}$ n'est pas centrale, alors $\rho = \varrho|_{G_K}$ est μ -régulière (cf. [Por97, Proposition 4.10 (i)]).

2.8. Sphères d'homologie rationnelle

2.8.1. Une formule de chirurgie. — La variété tridimensionnelle $M_K(\mu)$ obtenue par chirurgie de pente $\mu = m^p l^q$ le long du nœud $K \subset S^3$ est une sphère d'homologie rationnelle si, et seulement si, $p \neq 0$ ⁽¹²⁾. Dans ce cas là, il est possible de régler le problème de

⁽¹²⁾ C'est une sphère d'homologie entière si, et seulement si, $p = \pm 1$.

l'indétermination du signe dans la formule de chirurgie du Théorème 2.29 (on renvoie à la Remarque 2.33 pour une explication).

Si Σ est une sphère d'homologie rationnelle orientée, alors Σ possède une *orientation cohomologique canonique*. On a $H^0(\Sigma; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H^3(\Sigma; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ et $H^i(\Sigma; \mathbb{R}) = 0$, si $i \neq 0, 3$. Soit $[\Sigma] \in H_3(\Sigma; \mathbb{Z})$ la classe fondamentale déduite de l'orientation de Σ . On munit $H^3(\Sigma; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_3(\Sigma; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ de l'élément correspondant à $[\Sigma]$ et en utilisant la dualité de Poincaré, on munit $H^0(\Sigma; \mathbb{R}) \cong H_3(\Sigma; \mathbb{R})$ de l'élément dual $[pt]$ (qui peut aussi se voir comme la classe cohomologique d'un point de Σ). Puis, on calcule la torsion de Reidemeister du complexe $C^*(\Sigma; \mathbb{R})$ relativement à cette base cohomologique. Dans la suite, les sphères d'homologie rationnelle sont toujours supposées munies de leur orientation cohomologique canonique.

Avec ces notations, on a :

Proposition 2.32. — *Sous les hypothèses du Théorème 2.29 et si $p \neq 0$, alors la torsion avec signe de $M_K(\mu)$ à coefficients dans la représentation $Ad \circ \varrho$ vérifie la formule :*

$$\text{sgn}(p) \cdot \text{TOR}(M_K(\mu); Ad \circ \varrho) = 4 \sin^2(\theta_\gamma^\rho) \cdot \mathbb{T}_\mu^K(\rho).$$

Remarque 2.33. — Lorsque la variété obtenue par chirurgie $M_K(\mu)$ est une sphère d'homologie rationnelle, on sait calculer (voir la démonstration de la Proposition 2.32) la torsion de Reidemeister avec signe $\text{Tor}(C^*(M_K(\mu); \mathbb{R}))$ en utilisant la formule de Mayer-Vietoris, ce qui permet de régler le problème de l'indétermination du signe dans la formule de chirurgie du Théorème 2.29. Ceci tient au fait que, contrairement au cas général, les groupes de cohomologie $H^1(M_K(\mu); \mathbb{R})$ et $H^2(M_K(\mu); \mathbb{R})$ sont nuls⁽¹³⁾. La nullité de ces groupes simplifie les calculs que nous avons à mener et nous permet d'aboutir à une formule de chirurgie avec signe.

Démonstration. — Elle s'appuie sur la formule de Mayer-Vietoris (avec signe) et se divise en deux parties. On commence par l'examen de la torsion de Reidemeister (à coefficients réels) de $M_K(\mu)$, on termine en donnant une formule de chirurgie pour la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe, analogue à celle du Théorème 2.29, mais en spécifiant les signes des torsions de Reidemeister qui apparaissent.

On oriente la courbe μ avec la convention que l'on a faite dans le Paragraphe 2.7.1 et on oriente l'âme γ de telle sorte que $\text{int}(\mu, \gamma) = +1$.

1. *Torsion de Reidemeister à coefficients réels.* — Dans cette première partie, on montre que

$$(2.14) \quad -p \cdot \text{Tor}(C^*(M_K(\mu); \mathbb{R})) = \text{Tor}(\mathfrak{X}) \cdot \text{Tor}(C^*(V; \mathbb{R})),$$

où $\mathfrak{X}$ est le complexe (2.11).

La variété $M_K(\mu)$ étant une sphère d'homologie rationnelle, la suite de Mayer-Vietoris $\mathfrak{H}$ en cohomologie réelle associée au scindement $M_K(\mu) = M_K \cup_\mu V$ se réduit

⁽¹³⁾Dans le cas d'une chirurgie quelconque, les groupes de cohomologie $H^1(M_K(\mu); \mathbb{R})$ et $H^2(M_K(\mu); \mathbb{R})$ sont toutefois duaux.

à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(M_K(\mu); \mathbb{R}) \longrightarrow H^0(M_K; \mathbb{R}) \oplus H^0(V; \mathbb{R}) \longrightarrow H^0(T^2; \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

et aux deux isomorphismes :

$$H^1(M_K; \mathbb{R}) \oplus H^1(V; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^1(T^2; \mathbb{R}), \quad H^2(T^2; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^3(M_K(\mu); \mathbb{R}).$$

La formule de Mayer-Vietoris pour la torsion (cf. Théorème 2.17) donne :

$$\text{Tor}(\mathfrak{X}) \cdot \text{Tor}(C^*(V; \mathbb{R})) = (-1)^{\varepsilon + \alpha} \text{Tor}(C^*(M_K(\mu); \mathbb{R})) \cdot \text{Tor}(C^*(T^2; \mathbb{R})) \cdot \text{tor}(\mathfrak{H}),$$

avec $\varepsilon = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\alpha = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Les bases de référence pour les groupes de cohomologie à coefficients réels sont choisies de la façon suivante :

- *Bases de référence pour $H^*(T^2; \mathbb{R})$.* Le bord $T^2 = \partial M_K$ de l'extérieur de K est orienté et on note $[\partial M_K] \in H_2(T^2; \mathbb{Z})$ la classe fondamentale associée. On munit $H^2(T^2; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_2(T^2; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ du générateur correspondant à $[\partial M_K]$, puis en utilisant la dualité de Poincaré on munit $H^0(T^2; \mathbb{R}) \cong H_2(T^2; \mathbb{R}) = H_2(T^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ du générateur dual. Notons $\mu^* : \mu \mapsto 1$ la classe cohomologique de μ et $\gamma^* : \gamma \mapsto 1$ celle de γ . On munit $H^1(T^2; \mathbb{R})$ de la base (μ^*, γ^*) .
- *Bases de référence pour $H^*(V; \mathbb{R})$.* V est une variété orientée à bord avec, comme toujours, la convention de la normale sortante. Par dualité de Poincaré, on munit $H^0(V; \mathbb{R})$ du générateur dual de la classe fondamentale dans $H_3(V, T^2; \mathbb{R})$. On munit $H^1(V; \mathbb{R})$ de la classe cohomologique γ^* .
- *Bases de référence pour $H^*(M_K; \mathbb{R})$.* Elles ont été décrites dans la Section 2.3.

Dans les bases choisies, on a $\text{Tor}(C^*(T^2; \mathbb{R})) = 1$ (cf. Paragraphe 2.2.3) et on constate que la seule contribution non triviale dans la torsion de $\mathfrak{H}$ est le déterminant de l'isomorphisme $H^1(M_K; \mathbb{R}) \oplus H^1(V; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^1(T^2; \mathbb{R})$. Ce dernier étant égal à $1/p$, on a donc $\text{tor}(\mathfrak{H}) = p$, ce qui établit la formule (2.14).

2. *Torsion de Reidemeister à coefficients tordus.* — La même technique que celle utilisée dans la démonstration du Théorème 2.29, permet d'établir – en s'appuyant sur le fait que $\text{Tor}(T^2; \text{Ad} \circ \rho) = 1$ (cf. Proposition 2.15) – la formule suivante :

$$(2.15) \quad -\text{Tor}(M_K(\mu); \text{Ad} \circ \varrho) = \text{Tor}(\mathfrak{X}^\rho) \cdot \text{Tor}(V; \text{Ad} \circ \varrho),$$

que l'on peut considérer comme une “version avec signe” de la formule de chirurgie du Théorème 2.29.

3. *Conclusion.* — En rassemblant les formules (2.14) & (2.15) on obtient l'égalité :

$$\text{sgn}(p) \cdot \text{TOR}(M_K(\mu); \text{Ad} \circ \varrho) = \text{sgn}(\text{Tor}(C^*(V; \mathbb{R}))) \cdot \text{Tor}(V; \text{Ad} \circ \varrho) \cdot \hat{\tau}_\rho^K(h_\rho^{(1)}(\mu)),$$

en notant que $\hat{\tau}_\rho^K(h_\rho^{(1)}(\mu)) = \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X})) \cdot \text{Tor}(\mathfrak{X}^\rho)$. Finalement, l'identité (cf. Proposition 2.16) :

$$\text{TOR}(V; \text{Ad} \circ \varrho) = \text{sgn}(\text{Tor}(C^*(V; \mathbb{R}))) \cdot \text{Tor}(V; \text{Ad} \circ \rho) = 4 \sin^2(\theta_\gamma^\rho)$$

permet de conclure.

□

2.8.2. Un invariant de type Casson pour les sphères d'homologie rationnelle.

— Soit Σ une sphère d'homologie rationnelle orientée (ou plus généralement une variété tridimensionnelle orientée et munie d'une orientation cohomologique) et considérons une représentation *acyclique* $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ de son groupe fondamental. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que Σ possède une orientation cohomologique canonique. La torsion de Reidemeister $\mathrm{TOR}(\Sigma; Ad \circ \rho)$ est donc définie sans ambiguïté.

L'ensemble des représentations acycliques de $\pi_1(\Sigma)$ dans $\mathrm{SU}(2)$ étant fini, on forme la somme des torsions :

$$J(\Sigma) = \sum_{\rho} \mathrm{TOR}(\Sigma; Ad \circ \rho).$$

D. Johnson a montré dans [Joh] qu'il s'agit d'un invariant des variétés tridimensionnelles et que l'on pouvait le calculer comme un invariant de type Casson au sens suivant. Prenons le scindement de Heegaard $\Sigma = H_1 \cup_F H_2$, dans lequel H_i est un corps en anses et F une surface de genre g . Un tel scindement induit les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(H_1) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \pi_1(F) & & \pi_1(\Sigma) \\ \searrow & & \swarrow \\ & \pi_1(H_2) & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & \widehat{R}(H_1) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \widehat{R}(F) & & \widehat{R}(\Sigma) = \widehat{R}(H_1) \cap \widehat{R}(H_2) \\ \searrow & & \swarrow \\ & \widehat{R}(H_2) & \end{array}$$

Lorsque Σ est une sphère d'homologie *entière*, Casson a montré que les variétés $\widehat{R}(H_1)$, $\widehat{R}(H_2)$ et $\widehat{R}(F)$ peuvent être orientées de façon cohérente, puis qu'il est possible de définir le nombre d'intersections de $\widehat{R}(H_1)$ avec $\widehat{R}(H_2)$ dans $\widehat{R}(F)$. Ce nombre d'intersection multiplié par le facteur $(-1)^g$ est l'invariant de Casson $\lambda(\Sigma)$. Johnson a montré que les variétés $\widehat{R}(H_1)$, $\widehat{R}(H_2)$ et $\widehat{R}(F)$ peuvent être munies de formes volume "naturelles". Lorsque les images des variétés $\widehat{R}(H_1)$ et $\widehat{R}(H_2)$ se coupent transversalement au point $[\rho]$ dans $\widehat{R}(F)$ (*i.e.* lorsque ρ est acyclique), il est possible de comparer entre elles ces différentes formes volume. On obtient alors un nombre réel – leur coefficient de proportionnalité – et D. Johnson a montré qu'il s'agit de la torsion $\mathrm{TOR}(\Sigma; Ad \circ \rho)$.

CHAPITRE 3

UNE FORME VOLUME SUR $\mathcal{R}eg(K)$

Le but de ce chapitre est de construire “à la Casson” une forme volume sur la partie régulière de l’espace des classes de conjugaison des représentations du groupe d’un nœud dans $SU(2)$. La construction s’inspire de la construction originale de l’invariant de Casson ainsi que des travaux menés ultérieurement par X.-S. Lin (*cf.* [Lin92]) et M. Heusener (*cf.* [Heu03]).

Plus précisément, en suivant la technique développée par M. Heusener dans [Heu03, Paragraphe 3], à toute présentation en plat du nœud K on associe un scindement de son extérieur à partir duquel il est possible de définir certains sous-espaces de l’espace des représentations irréductibles du groupe du nœud. Dans [Heu03, Paragraphe 4.1], il est établi que ces sous-espaces de représentations sont des variétés orientées. Mais ici au lieu de compter simplement leur nombre d’intersection, on montre en fait que ces variétés possèdent des formes volume, qu’il est possible de les comparer entre elles puis d’en déduire une sur $\mathcal{R}eg(K)$.

On vérifie que la forme volume ainsi construite induit l’orientation sur $\mathcal{R}eg(K)$ définie par M. Heusener dans [Heu03] (*cf.* Proposition 3.17). On montre aussi qu’il s’agit d’un *invariant* du nœud (*cf.* Théorème 3.11) qui possède l’intéressante propriété de changer de signe lorsque l’on change le nœud en son image miroir (*cf.* Proposition 3.17). La technique de démonstration de l’invariance est analogue à celle utilisée par M. Heusener pour établir l’invariance de l’orientation qu’il a construit sur $\mathcal{R}eg(K)$. On étudie enfin quelques unes des propriétés de cette forme volume. On établit notamment une formule permettant le calcul de la forme volume associée à un nœud produit (*cf.* Proposition 3.21).

3.1. Compléments sur les formes volume

Dans cette section, qui fait suite à la Section 2.1, nous faisons quelques rappels supplémentaires concernant les formes volume.

3.1.1. Rappel sur la notion de compatibilité. — Commençons par rappeler un fait essentiel (*cf.* Lemme 2.1) : si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie et si deux des trois espaces vectoriels E' , E et E'' sont munis

de formes volume, alors le troisième en possède une unique qui est *compatible* avec les deux autres.

Cette notion de compatibilité, introduite dans le Paragraphe 2.1.2, et le résultat du Lemme 2.1, que nous avons pris la peine de rappeler ci-dessus pour la commodité de la lecture, se révèlent être les outils essentiels pour munir la variété unidimensionnelle $\mathcal{R}eg(K)$ (*cf.* Corollaire 1.34) d'une forme volume.

3.1.2. La convention “base $\wedge$ fibre”. — Une *forme volume* v sur une variété M de dimension finie n est une forme différentielle de degré n partout non nulle.

On utilise dans la suite la *convention “base $\wedge$ fibre”* : soient M^m et N^n deux variétés munies des formes volume v et w respectivement, considérons une submersion $f : M \rightarrow N$ et fixons $y \in N$. Le sous-espace $f^{-1}(y) \subset M$ est une sous-variété fermée de dimension $m - n$, l'espace tangent $T_x f^{-1}(y)$ à $f^{-1}(y)$ en x est le noyau de $D_x f$ et on a la suite exacte :

$$(3.1) \quad 0 \longrightarrow T_x f^{-1}(y) \longrightarrow T_x M \longrightarrow T_y N \longrightarrow 0.$$

On munit la sous-variété $f^{-1}(y)$ de l'unique forme volume ω telle que ω_x soit compatible avec v_x et w_y quel que soit $x \in f^{-1}(y)$.

3.2. Présentation des nœuds sous forme de $2n$ -plat

Soit ζ une tresse à $2n$ -brins. Le $2n$ -plat correspondant – noté $\hat{\zeta}$ – est obtenu en fermant la tresse ζ grâce à $2n$ demi-arcs de cercles comme sur les Figures 3.1 & 3.2.

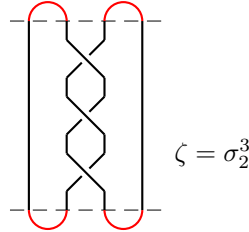


FIGURE 3.1. Nœud de trèfle présenté en 4-plat.

On sait que tout nœud (et même, plus généralement, que tout entrelacs) admet une présentation sous forme de $2n$ -plat et on appelle *nœud-plat* tout nœud présenté en plat. Sur les Figures 3.1 & 3.2, on donne des exemples de présentation en plat des nœuds de trèfle et en huit respectivement.

Remarque 3.1. — Tous les nœuds à deux ponts possèdent une présentation en 4-plat.

Remarque 3.2. — On peut noter que toute tresse fermée à n brins peut se mettre sous la forme d'un $2n$ -plat particulier. Cette propriété est illustrée sur la Figure 3.3.

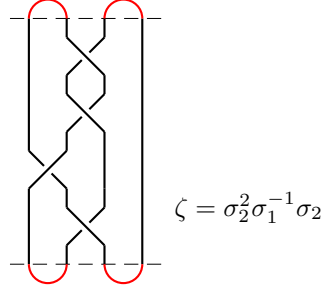


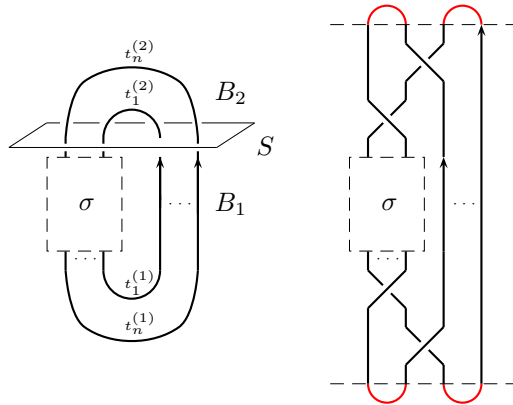
FIGURE 3.2. Nœud en huit présenté 4-plat.

3.3. Scindement de l'extérieur d'un nœud-plat

La construction de la forme volume sur la variété $\mathcal{R}eg(K)$ dont il est question dans ce chapitre s'appuie sur les idées présentées par M. Heusener dans [Heu03, Paragraphe 3] pour munir $\mathcal{R}eg(K)$ d'une orientation. Nous rappelons dans cette section et dans la suivante celles qui nous seront utiles.

Dans la suite, K désigne un nœud dans S^3 présenté sous la forme d'un $2n$ -plat $\hat{\zeta}$, où ζ appartient à l'ensemble B_{2n} des tresses à $2n$ brins (voir Figure 3.4). On note $M_K = S^3 \setminus V(K)$ l'extérieur du nœud – $V(K)$ étant un voisinage tubulaire ouvert de K – et $G_K = \pi_1(M_K)$ son groupe.

Une telle présentation du nœud K sous forme de plat induit un scindement de son extérieur de la forme $M_K = B_1 \cup_S B_2$, où B_1, B_2 sont deux corps en anses de genre n et où S désigne la sphère trouée $S^2 \setminus V(K) = B_1 \cap B_2$. Ce scindement de l'extérieur du nœud va jouer pour nous un rôle analogue au scindement de Heegaard utilisé dans la construction originale de l'invariant de Casson (cf. [Heu03, Paragraphe 3]).

FIGURE 3.3. La tresse fermée $\sigma^\wedge$, $\sigma \in B_n$, vu comme un $2n$ -plat.

Cette présentation permet également de mettre en évidence des *systèmes spéciaux de générateurs* ⁽¹⁾ pour les groupes fondamentaux de B_1 , B_2 et S (voir Figure 3.4). On convient de noter $\mathcal{T}_i = \{t_j^{(i)}, 1 \leq j \leq n\}$ le système spécial de générateurs du groupe $\pi_1(B_i)$, $i = 1, 2$, et $\mathcal{S} = \{s_j, 1 \leq j \leq 2n\}$ celui de $\pi_1(S)$ (voir encore Figure 3.4). On peut remarquer que $\pi_1(B_i)$ est le groupe libre à n générateurs $\{t_j^{(i)}, 1 \leq j \leq n\}$ et que $\pi_1(S)$ est le groupe admettant la présentation suivante : $\pi_1(S) = \langle s_1, \dots, s_{2n} \mid s_1 \cdots s_{2n} \rangle$. De plus, tous les générateurs des groupes $\pi_1(B_i)$ et $\pi_1(S)$ sont des *méridiens* du nœud K , ils sont donc en particulier tous conjugués dans G_K . Cette remarque évidente s'avérera être essentielle dans la suite.

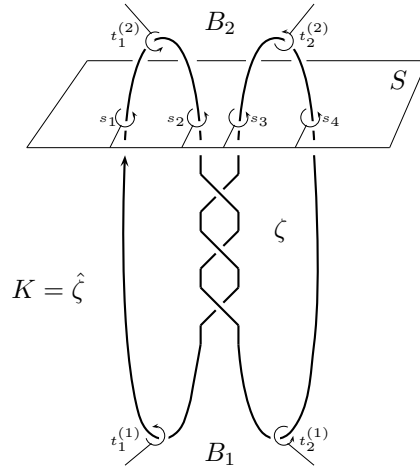


FIGURE 3.4. Systèmes spéciaux de générateurs.

Les inclusions $S \hookrightarrow B_i$ et $B_i \hookrightarrow M_K$, $i = 1, 2$, fournissent le diagramme commutatif d'homomorphismes surjectifs de groupes suivant :

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} & \pi_1(B_1) & \\ \nearrow \kappa_1 & & \searrow p_1 \\ \pi_1(S) & & \pi_1(M_K) = G_K \\ \searrow \kappa_2 & & \nearrow p_2 \\ & \pi_1(B_2) & \end{array}$$

et le théorème de Seifert-Van Kampen donne la présentation suivante pour le groupe G_K du nœud K :

$$(3.3) \quad G_K = \langle t_i^{(1)}, t_i^{(2)}, 1 \leq i \leq n \mid p_1 \circ \kappa_1(s_j) = p_2 \circ \kappa_2(s_j), 1 \leq j \leq 2n-1 \rangle.$$

Il s'agit d'une présentation de Wirtinger du groupe du nœud K .

⁽¹⁾Ce choix dépend en fait de l'orientation de S^3 (cf. Paragraphe 3.10).

3.4. Sous-espaces de représentations

Dans cette section, on associe à la présentation en plat de K – qui permet de scinder l'extérieur du nœud sous la forme $M_K = B_1 \cup_S B_2$ – certains sous-espaces de représentations des espaces $R(B_i)$, $i = 1, 2$, et $R(S)$.

Si $\mathcal{G}$ est un système fini de générateurs du groupe G , on introduit (cf. [Heu03, Paragraphe 3]) le sous-ensemble $R^{\mathcal{G}}(G)$ de $R(G) \setminus C(G)$ suivant :

$$R^{\mathcal{G}}(G) = \{\rho \in R(G) \setminus C(G) \mid \text{Tr}(\rho(s)) = \text{Tr}(\rho(t)) \forall s, t \in \mathcal{G}\}.$$

Bien que l'espace $R^{\mathcal{G}}(G)$ dépende explicitement du système de générateurs $\mathcal{G}$, l'action par conjugaison de $\text{SO}(3)$ laisse ce sous-espace invariant. On pose :

$$\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G) = \widetilde{R}^{\mathcal{G}}(G)/\text{SO}(3),$$

où $\widetilde{R}^{\mathcal{G}}(G) = R^{\mathcal{G}}(G) \cap \widetilde{R}(G)$ et on constate que $\widetilde{R}^{\mathcal{G}}(G)$ est l'espace total d'un $\text{SO}(3)$ -fibré principal de base $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$.

Par exemple, si G est le groupe G_K du nœud K et si chaque élément de $\mathcal{G}$ est un méridien de K , alors les éléments de $\mathcal{G}$ sont deux à deux conjugués dans G et on a simplement $R^{\mathcal{G}}(G) = R(G) \setminus C(G)$.

On adopte enfin les notations $\widehat{R}(M_K)$ pour $\widehat{R}(G_K)$, $\widehat{R}^{T_i}(B_i)$ pour $\widehat{R}^{T_i}(\pi_1(B_i))$ et $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ pour $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(\pi_1(S))$ etc... et on a le résultat suivant.

Assertion 3.3. — $\widehat{R}^{T_i}(B_i)$, $i = 1, 2$, est une variété lisse de dimension $2n - 2$ et $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ est une variété lisse de dimension $4n - 5$.

On pourra se reporter au Paragraphe 3.7.1 pour une démonstration ou bien consulter [Heu03, Corollaire 3.2].

Soit $h : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes et notons $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$) un système fini de générateurs de G (resp. G'). On dit que h est *compatible* avec les systèmes de générateurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ lorsque $h(g)$ est le conjugué d'un élément de $\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}'^{-1}$, pour tout $g \in \mathcal{G}$. Un tel homomorphisme induit une application $\widehat{h} : \widehat{R}^{\mathcal{G}'}(G') \rightarrow \widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ entre les espaces de représentations. Dans le cas qui nous intéresse (cf. diagramme (3.2)), on peut remarquer que *tous* les homomorphismes de groupes sont compatibles avec les systèmes de générateurs $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{S}$ que l'on a choisis (car tous les $t_j^{(i)}$ (resp. tous les s_j) sont des méridiens de K). C'est en partie pour cette raison que l'on s'intéresse aux sous-espaces de représentations $\widehat{R}^{T_i}(B_i)$ et $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$. Pour plus de détails sur la compatibilité, on pourra consulter [Heu03, Paragraphes 3 & 4].

Correspondant au diagramme (3.2), on a le diagramme entre espaces de représentations suivant :

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccc} & \widehat{R}^{T_1}(B_1) & \\ \widehat{\kappa}_1 \swarrow & & \nwarrow \widehat{p}_1 \\ \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S) & & \widehat{R}(M_K) \\ \nwarrow \widehat{\kappa}_2 & & \swarrow \widehat{p}_2 \\ & \widehat{R}^{T_2}(B_2) & \end{array}$$

Comme chacune des applications du diagramme (3.4) est injective, on peut voir $\widehat{R}(M_K)$ comme l'intersection des images des variétés $\widehat{R}^{T_1}(B_1)$ et $\widehat{R}^{T_2}(B_2)$ dans la variété $\widehat{R}^S(S)$. Le diagramme précédent entre les espaces de représentations est la clé pour munir (génériquement) l'espace des représentations de G_K dans $\text{SU}(2)$ d'une forme volume.

On pose $\rho_i = \rho \circ p_i$ (resp. $\rho_S = \rho \circ p_i \circ \kappa_i$) la restriction de ρ à $\pi_1(B_i)$ (resp. $\pi_1(S)$).

3.5. Représentations régulières

Dans cette section, nous rappelons la définition de la notion de régularité introduite au Chapitre 1 et en donnons une nouvelle caractérisation – due à M. Heusener (cf. [Heu03, Proposition 3.3]) – via les sous-espaces de représentations associés à une présentation en plat du nœud introduits ci-dessus.

Parmi les représentations irréductibles, on distingue les représentations *régulières*. On rappelle qu'une représentation irréductible $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ est dite *régulière* lorsque $H_\rho^1(M_K) = H^1(M_K; \mathfrak{su}(2)_{\text{Ad} \circ \rho})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel unidimensionnel (cf. Proposition 1.30).

On montre que la régularité est une notion invariante par conjugaison et on a la caractérisation suivante en termes de sous-espaces de représentations (cf. [Heu03, Proposition 3.3]).

Proposition 3.4. — *Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation irréductible et notons $[\rho]$ sa $\text{SO}(3)$ -classe de conjugaison. La représentation ρ est régulière si, et seulement si, les images des variétés $\widehat{R}^{T_1}(B_1)$ et $\widehat{R}^{T_2}(B_2)$ se coupent transversalement en $[\rho]$ dans la variété $\widehat{R}^S(S)$.*

On note $\mathcal{R}\text{eg}(K)$ l'ensemble des $\text{SO}(3)$ -classes de conjugaison des représentations régulières de G_K dans $\text{SU}(2)$ et on peut montrer que $\mathcal{R}\text{eg}(K)$ est une variété unidimensionnelle (cf. Corollaire 1.34). C'est précisément cette variété que l'on va munir d'une 1-forme volume.

Lorsque $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ est une représentation régulière, on rappelle que l'espace tangent $T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K)$ s'identifie à $H_\rho^1(M_K)$ par un isomorphisme noté $\varphi_{[\rho]}$ (cf. Proposition 1.35).

3.6. Construction de la forme volume

La construction de la forme volume sur $\mathcal{R}\text{eg}(\hat{\zeta})$ dont il est question ici, repose sur les deux points suivants :

- Lorsque ρ est une représentation *régulière*, on dispose de la *suite exacte* suivante (voir le diagramme (3.4) et le fait que les images des variétés $\widehat{R}^{T_1}(B_1)$ et $\widehat{R}^{T_2}(B_2)$ se coupent transversalement en $[\rho]$ dans $\widehat{R}^S(S)$) :

$$(3.5) \quad 0 \longrightarrow T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K) \xrightarrow{D_{[\rho]}\widehat{p}} T_{[\rho_1]}\widehat{R}^{T_1}(B_1) \times T_{[\rho_2]}\widehat{R}^{T_2}(B_2) \xrightarrow{D_{[\rho]}\widehat{\kappa}} T_{[\rho_S]}\widehat{R}^S(S) \longrightarrow 0,$$

c'est cette suite qui va nous permettre de munir le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel unidimensionnel $T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K)$ – qui s'identifie à $H_\rho^1(M_K) \cong \mathbb{R}$ – d'une 1-forme volume.

- L'espace de représentations $\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ (resp. $\widehat{R}^S(S)$) possède une $(2n-2)$ -forme volume naturelle $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)}$ (resp. une $(4n-5)$ -forme volume naturelle $v^{\widehat{R}^S(S)}$). La construction détaillée de ces formes volume sur les espaces de représentations fait l'objet du Paragraphe 3.7.

Ceci étant, on définit une 1-forme volume sur $T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K)$, que l'on note $\omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}}$, grâce à la suite exacte (3.5), en posant :

$$(3.6) \quad \omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}} = (-1)^n \left(v_{[\rho_1]}^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)} \wedge v_{[\rho_2]}^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)} \right) / v_{[\rho_S]}^{\widehat{R}^S(S)}.$$

Remarque 3.5. — La normalisation donnée par $(-1)^n$ qui apparaît ci-dessus est nécessaire pour garantir l'invariance de $\omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}}$ par *stabilisation élémentaire*, i.e. lorsque l'on change $\zeta \in B_{2n}$ en $\zeta\sigma_{2n} \in B_{2n+2}$ (voir Figure 3.5). Pour plus de détails, on pourra se reporter à la démonstration du Lemme 3.16.

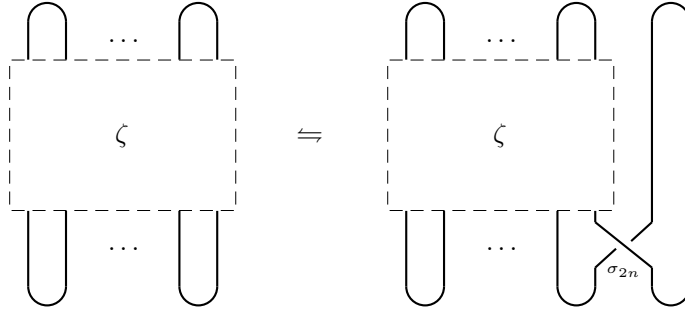


FIGURE 3.5. Stabilisation élémentaire.

On construit ainsi localement une 1-forme volume $\omega^{\hat{\zeta}} : [\rho] \mapsto \omega_{[\rho]}^{\hat{\zeta}}$ sur la variété unidimensionnelle $\mathcal{R}\text{eg}(\hat{\zeta})$, qui *a priori* dépend de la présentation en plat $\hat{\zeta}$ du nœud K que l'on s'est donnée au départ.

3.7. Formes volume sur les espaces de représentations

Décrivons à présent la construction détaillée des *formes volume naturelles* que l'on peut définir sur les variétés $\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)$, $\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ et $\widehat{R}^S(S)$.

3.7.1. Formes volume sur les espaces de représentations. — Leur construction nécessite les étapes suivantes :

- Le groupe $\text{SU}(2)$ est muni de sa 3-forme volume usuelle η induite par la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On note également η la 3-forme volume sur $\text{SO}(3) = \text{SU}(2)/\{\pm \mathbf{1}\}$ déduite de celle de $\text{SU}(2)$.

Pour tout $a \in (-2, 2)$, $S_a^2 = \{A \in \text{SU}(2) \mid \text{Tr}(A) = a\}$ est une sphère bidimensionnelle. On munit les sphères S_a^2 d'une 2-forme volume à l'aide de la submersion

$\text{Tr} : \text{SU}(2) \setminus \{\pm 1\} \rightarrow (-2, 2)$ en utilisant la convention “base $\wedge$ fibre”. Plus précisément, pour tout $A \in S_a^2$, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_A S_a^2 \longrightarrow T_A \text{SU}(2) \longrightarrow T_a(-2, 2) \longrightarrow 0$$

dans laquelle $\text{SU}(2)$ est muni de la 3-forme volume η et $(-2, 2)$ de la 1-forme volume usuelle. La 2-forme volume ν_a est l’unique forme volume compatible avec les deux formes volume précédentes. On note $S^2 = S_0^2$ l’ensemble des matrices de $\text{SU}(2)$ de trace nulle, il est utile d’identifier S^2 avec l’ensemble des quaternions purs et unitaires.

Les formes volume ν et η sont en quelque sorte les “briques” de construction des formes volume sur les variétés $\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)$, $\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ et $\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$, le Lemme 2.1 fournissant la “technique” adéquate.

- Grâce au système de générateurs $\mathcal{T}_i$, l’application $R(B_i) \rightarrow \text{SU}(2)^n$, où $\rho \mapsto (\rho(t_1^{(i)}), \dots, \rho(t_n^{(i)}))$, permet d’identifier $R(B_i)$ avec $\text{SU}(2)^n$, puis d’identifier⁽²⁾ $R^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ avec le produit $(-2, 2) \times (S^2)^n$, et enfin de munir $R^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ de la $(2n+1)$ -forme volume $v^{R^{\mathcal{T}_i}(B_i)}$ déduite de la forme volume produit sur $(-2, 2) \times (S^2)^n$.

On munit ensuite l’espace $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$ d’une forme volume naturelle en procédant de la façon suivante. Soit D^* le disque troué $S \setminus \{\infty\}$ dont le groupe fondamental est le groupe libre à $2n$ générateurs $s_1, \dots, s_{2n}$ (cf. Figure 3.4). Notons U le sous-groupe normalement engendré par le produit $s_1 \cdots s_{2n}$; on a $\pi_1(S) = \pi_1(D^*)/U$ et considérons l’application $\varphi : R^{\mathcal{S}}(D^*) \rightarrow \text{SU}(2)$ définie par $\varphi(\rho) = \rho(s_1 \cdots s_{2n})$. Cette application possède les propriétés données dans l’assertion suivante (cf. [Heu03, Lemme 3.1]).

Assertion 3.6. — *L’application φ est surjective, on a $R^{\mathcal{S}}(S) = \varphi^{-1}(1)$ et l’ensemble de ses points critiques coïncide exactement avec l’ensemble $A(D^*)$ des représentations abéliennes de $\pi_1(D^*)$ dans $\text{SU}(2)$.*

En s’appuyant sur cette assertion, on a donc, pour toute représentation $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{SU}(2)$ irréductible, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_\rho \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow T_\rho \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(D^*) \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0.$$

On munit $\mathfrak{su}(2)$ de la 3-forme volume induite par la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(D^*)$ d’une $(4n+1)$ -forme volume naturelle⁽³⁾. On munit alors $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$ de l’unique $(4n-2)$ -forme volume $v^{\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)}$ qui est compatible avec les deux autres.

- Pour finir, si G est l’un des groupes $\pi_1(B_1)$, $\pi_1(B_2)$ ou $\pi_1(S)$ et $\mathcal{G}$ est l’un des systèmes de générateurs $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ou $\mathcal{S}$ respectivement, alors la surjection canonique $\widetilde{R}^{\mathcal{G}}(G) \rightarrow \widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ est une submersion, ce qui permet de munir $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ d’une forme volume en utilisant la convention “base $\wedge$ fibre”. Plus précisément, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_\rho \text{SU}(2)(\rho) \longrightarrow T_\rho \widetilde{R}^{\mathcal{G}}(G) \longrightarrow T_{[\rho]} \widehat{R}^{\mathcal{G}}(G) \longrightarrow 0$$

⁽²⁾L’inclusion est donnée par : $(-2, 2) \times (S^2)^n \rightarrow \text{SU}(2)^n$, $(2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_n) \mapsto (\cos(\theta) + \sin(\theta)P_i)_{1 \leq i \leq n}$.

⁽³⁾En effet $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(D^*)$ est un ouvert de $R^{\mathcal{S}}(D^*) \cong (-2, 2) \times (S^2)^{2n}$ que l’on a muni de la $(4n+1)$ -forme volume déduite de la forme volume produit.

où $\mathrm{SU}(2)(\rho) = \{Ad_A \circ \rho \mid A \in \mathrm{SU}(2)\}$ désigne l'orbite de ρ sous l'action de la représentation adjointe. On munit alors $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ de l'unique forme volume compatible avec η et avec la forme volume naturelle sur $\widehat{R}^{\mathcal{G}}(G)$ construite ci-dessus.

3.7.2. Dépendance des formes volume en les systèmes de générateurs. — Analysons dans ce paragraphe la dépendance des formes volume $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)}$, $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)}$ et $v^{\widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)}$ que l'on vient de construire par rapport aux systèmes spéciaux de générateurs $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{S}$.

Notons F_{2n} le groupe libre ayant pour système de générateurs $\mathcal{S}$. La tresse $\zeta \in B_{2n}$ induit un automorphisme ϕ_{ζ} de F_{2n} donné par : $\phi_{\zeta} : s_i \mapsto g_i s_{\pi(i)} g_i^{-1}$, avec $g_i \in F_{2n}$, π étant la permutation induite par ζ . L'automorphisme ϕ_{ζ} vérifie l'identité $\prod_{i=1}^{2n} \phi_{\zeta}(s_i) = \prod_{i=1}^{2n} s_i$, de sorte qu'il est compatible avec le système $\mathcal{S}$ et induit donc un difféomorphisme $\widehat{\phi}_{\zeta} : \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S) \rightarrow \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S)$.

Un lemme. — On commence cette analyse en établissant un lemme technique.

Soit $F_m = \langle S_1, \dots, S_m \mid - \rangle$ le groupe libre de rang m . L'espace $R(F_m)$ s'identifie, comme on l'a déjà vu, au produit $\mathrm{SU}(2)^m$ au moyen de l'isomorphisme :

$$\rho \mapsto (\rho(S_1), \dots, \rho(S_m)).$$

Tout endomorphisme $\phi : F_m \rightarrow F_m$ induit une application $\phi^{\sharp} : R(F_m) \rightarrow R(F_m)$. Au moyen de l'identification précédente, $\phi^{\sharp}$ est explicitement donnée par :

$$(\rho(S_1), \dots, \rho(S_m)) \mapsto (\rho \circ \phi(S_1), \dots, \rho \circ \phi(S_m)).$$

L'endomorphisme ϕ induit aussi une application $\phi^{\mathrm{ab}} : H^1(F_m; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(F_m; \mathbb{Z})$, avec $H^1(F_m; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$.

A chaque $g \in F_m$, on associe l'application évaluation $\mathrm{ev}_g : R(F_m) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, définie par $\mathrm{ev}_g(\rho) = \rho(g)$. Quel que soit $g \in F_m$, $\mathrm{ev}_g^*(\eta)$ est une 3-forme sur $R(F_m)$ et pour tout endomorphisme $\phi : F_m \rightarrow F_m$, on a $\mathrm{ev}_g \circ \phi^{\sharp} = \mathrm{ev}_{\phi(g)}$.

Avec ces notations, on a le résultat suivant.

Lemme 3.7. — *Si $\phi : F_m \rightarrow F_m$ est un endomorphisme, alors*

$$\mathrm{ev}_{\phi(S_1)}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{\phi(S_m)}^*(\eta) = \det(\phi^{\mathrm{ab}}) \mathrm{ev}_{S_1}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{S_m}^*(\eta).$$

Démonstration. — Elle est comparable à celle faite dans [AM90, Proposition 3.4]. En voici les principales idées.

D'emblée, on constate que la forme volume $\mathrm{ev}_{S_1}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{S_m}^*(\eta)$ sur $R(F_m) \cong \mathrm{SU}(2)^m$ est invariante à droite. De plus, $\mathrm{ev}_{\phi(S_1)}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{\phi(S_m)}^*(\eta) = (\phi^{\sharp})^*(\mathrm{ev}_{S_1}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{S_m}^*(\eta))$; de sorte que $\mathrm{ev}_{\phi(S_1)}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{\phi(S_m)}^*(\eta)$ est également invariante à droite (car $\phi^{\sharp} \circ R_{(B_i)_i} = R_{\phi^{\sharp}((B_i)_i)} \circ \phi^{\sharp}$, avec $R_{(B_i)_i} : \mathrm{SU}(2)^m \rightarrow \mathrm{SU}(2)^m$, $(X_1, \dots, X_m) \mapsto (X_1 B_1, \dots, X_m B_m)$). Ainsi les formes volume $\mathrm{ev}_{S_1}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{S_m}^*(\eta)$ et $\mathrm{ev}_{\phi(S_1)}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{\phi(S_m)}^*(\eta)$ sont entièrement déterminées par leur valeur en la représentation triviale $\theta : F_m \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ (c'est-à-dire la représentation définie par $\theta(g) = \mathbf{1}$, quel que soit $g \in F_m$) et on a :

$$(\mathrm{ev}_{\phi(S_1)}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{\phi(S_m)}^*(\eta))(\theta) = \det(D_{\theta} \phi^{\sharp}) (\mathrm{ev}_{S_1}^*(\eta) \wedge \dots \wedge \mathrm{ev}_{S_m}^*(\eta))(\theta).$$

Calculons $\det(D_{\theta} \phi^{\sharp})$. Pour cela, notons $\mathrm{aug} : \mathbb{Z}[F_m] \rightarrow \mathbb{Z}$, $S_i \mapsto 1$, l'augmentation et posons $a_{ij} = \left(\frac{\partial \phi(S_i)}{\partial S_j} \right)^{\mathrm{aug}} \in \mathbb{Z}$. On constate que si $\partial : \mathfrak{su}(2)^m \rightarrow \mathfrak{su}(2)^m$, est l'application

donnée par $\partial(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq m}$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_{\theta(S_1)}\text{SU}(2) \times \dots \times T_{\theta(S_m)}\text{SU}(2) & \xrightarrow{D_\theta \phi^\sharp} & T_{\theta \circ \phi(S_1)}\text{SU}(2) \times \dots \times T_{\theta \circ \phi(S_m)}\text{SU}(2) \\ \downarrow = & & \downarrow = \\ \mathfrak{su}(2) \times \dots \times \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\partial} & \mathfrak{su}(2) \times \dots \times \mathfrak{su}(2) \end{array}$$

Comme on a $\phi^{\text{ab}}(S_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} S_j$, il vient $\det(D_\theta \phi^\sharp) = \det(\phi^{\text{ab}})$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Dépendance de la forme volume $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)}$. — Posons $F_n = \pi_1(B_i)$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_i$, puis considérons ϕ un automorphisme de F_n . Si $\mathcal{T}' = \phi(\mathcal{T})$, alors ϕ est compatible avec les systèmes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. On a donc un difféomorphisme $\widehat{\phi} : \widehat{R}^{\mathcal{T}'}(F_n) \rightarrow \widehat{R}^{\mathcal{T}}(F_n)$. D'après un théorème de Nielsen ⁽⁴⁾, ϕ est, à un automorphisme intérieur de F_n près, un produit des transformations de Nielsen suivantes :

- (T_1) $\mathbf{t}_1 : t_1 \mapsto t_1 t_2, t_i \mapsto t_i$ pour $i \geq 2$,
- (T_2) $\mathbf{t}_2 : t_1 \mapsto t_1^{-1}, t_i \mapsto t_i$ pour $i \geq 2$,
- (T_3) $\mathbf{t}_\tau : t_i \mapsto t_{\tau(i)}$, où τ est une transposition de $\{1, \dots, n\}$.

Lorsque de plus l'automorphisme ϕ est seulement un produit des transformations de type (T_2) et (T_3), alors $R^{\mathcal{T}'}(F_n) = R^{\mathcal{T}}(F_n)$ et il existe une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\phi : t_j \mapsto t_{\pi(j)}^{\varepsilon_j}$ à un automorphisme intérieur près. Considérons les applications suivantes :

$$\text{tr} : R^{\mathcal{T}}(F_n) \rightarrow (-2, 2), \rho \mapsto 2 \cos(\theta), \text{ avec } \rho(t_j) = \cos(\theta) + \sin(\theta) P_j^\rho$$

et

$$\text{ax}_{t_j} : R^{\mathcal{T}}(F_n) \rightarrow S^2, \rho \mapsto P_j^\rho, \text{ avec } \rho(t_j) = \cos(\theta) + \sin(\theta) P_j^\rho.$$

Comme $\text{SU}(2) \setminus \{\pm 1\} \cong (-2, 2) \times S^2$, on constate que ax_{t_j} n'est autre que la composée de la projection sur S^2 avec ev_{t_j} .

Avec ces notations on a le résultat suivant :

Proposition 3.8. — *Soit ϕ un automorphisme de F_n pour lequel il existe une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\phi : t_j \mapsto t_{\pi(j)}^{\varepsilon_j}$, à un automorphisme intérieur près. Si $N = \#\{\varepsilon_j, 1 \leq j \leq n \mid \varepsilon_j = -1\}$, alors le difféomorphisme $\widehat{\phi} : \widehat{R}^{\mathcal{T}'}(F_n) \rightarrow \widehat{R}^{\mathcal{T}}(F_n)$ vérifie la formule suivante :*

$$\widehat{\phi}^*(v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}'}(F_n)}) = (-1)^N v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}}(F_n)},$$

dans laquelle $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}}(F_n)}$ est la forme volume naturelle sur $\widehat{R}^{\mathcal{T}}(F_n) \cong (-2, 2) \times (S^2)^n / \text{SO}(3)$.

Démonstration. — L'automorphisme ϕ induit un difféomorphisme $\overline{\phi} : R^{\mathcal{T}'}(F_n) \rightarrow R^{\mathcal{T}}(F_n)$ vérifiant l'identité $\text{ax}_{t_j} \circ \overline{\phi} = \text{ax}_{\phi(t_j)}$.

On établit la formule suivante :

$$\overline{\phi}^*(v^{R^{\mathcal{T}'}(F_n)}) = (-1)^N v^{R^{\mathcal{T}}(F_n)}$$

en s'appuyant sur les trois points suivants :

⁽⁴⁾Voir par exemple [MKS76, Théorème N1, p. 163].

- la forme volume $v^{R^T(F_n)}$ sur $R^T(F_n)$ est la forme volume déduite de la forme volume produit sur $(-2, 2) \times (S^2)^n$. Explicitement, en notant λ la 1-forme volume usuelle sur $(-2, 2)$, on a :

$$v^{R^T(F_n)} = \text{tr}^*(\lambda) \wedge \text{ax}_{t_1}^*(\nu) \wedge \dots \wedge \text{ax}_{t_n}^*(\nu).$$

- la transformation de Nielsen t_2 induit un difféomorphisme $\overline{t}_2 : R^T(F_n) \rightarrow R^T(F_n)$ qui est tel que $\overline{t}_2^*(v^{R^T(F_n)}) = -v^{R^T(F_n)}$,
- si τ est une transposition de $\{1, \dots, n\}$, la transformation de Nielsen t_τ induit un difféomorphisme $\overline{t}_\tau : R^T(F_n) \rightarrow R^T(F_n)$ qui vérifie $\overline{t}_\tau^*(v^{R^T(F_n)}) = v^{R^T(F_n)}$.

Pour conclure, il suffit d'utiliser le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{SO}(3) & \longrightarrow & \tilde{R}^T(F_n) & \longrightarrow & \hat{R}^T(F_n) \\ \downarrow = & & \downarrow \tilde{\phi} & & \downarrow \hat{\phi} \\ \text{SO}(3) & \longrightarrow & \tilde{R}^T(F_n) & \longrightarrow & \hat{R}^T(F_n) \end{array}$$

□

Dépendance de la forme volume $v^{\hat{R}^S(S)}$. — Soit ϕ un automorphisme de F_{2n} ayant les deux propriétés suivantes :

1. il existe une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$ telle que : $\phi(s_j) = g_j s_{\pi(j)}^{\varepsilon_j} g_j^{-1}$, avec $g_j \in F_{2n}$ et $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$,
2. ϕ laisse invariante la clôture normale de $s_1 \cdots s_{2n}$, i.e. $\phi(s_1 \cdots s_{2n}) = g(s_1 \cdots s_{2n})^\varepsilon g^{-1}$, avec $g \in F_{2n}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Encore une fois, si $\mathcal{S}' = \phi(\mathcal{S})$, alors ϕ est compatible pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Comme $\hat{R}^S(S) = \hat{R}^{\mathcal{S}'}(S)$, ϕ induit un difféomorphisme $\hat{\phi} : \hat{R}^S(S) \rightarrow \hat{R}^S(S)$. Introduisons enfin les applications suivantes :

$$\text{tr} : R^S(F_{2n}) \rightarrow (-2, 2), \quad \rho \mapsto 2 \cos(\theta), \quad \text{avec } \rho(s_j) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P_j^\rho$$

et

$$\text{ax}_{s_j} : R^S(F_{2n}) \rightarrow S^2, \quad \rho \mapsto P_j^\rho, \quad \text{avec } \rho(s_j) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P_j^\rho.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.9. — Soit ϕ un automorphisme de F_{2n} possédant les deux propriétés ci-dessus et soit $N = \#\{\varepsilon_j, 1 \leq j \leq 2n \mid \varepsilon_j = -1\}$. Si $N_\phi = N + \frac{\varepsilon-1}{2}$, alors le difféomorphisme $\hat{\phi} : \hat{R}^S(S) \rightarrow \hat{R}^S(S)$ vérifie la formule :

$$\hat{\phi}^*(v^{\hat{R}^S(S)}) = (-1)^{N_\phi} v^{\hat{R}^S(S)}.$$

Démonstration. — Puisqu'un automorphisme intérieur de F_{2n} induit l'identité sur $\hat{R}^S(S)$, on peut supposer pour simplifier que $\phi(s_1 \cdots s_{2n}) = (s_1 \cdots s_{2n})^\varepsilon$, avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

L'automorphisme ϕ induit, pour les mêmes raisons que précédemment, deux difféomorphismes : $\tilde{\phi} : \tilde{R}^S(S) \rightarrow \tilde{R}^S(S)$ et $\tilde{\phi} : \tilde{R}^S(F_{2n}) \rightarrow \tilde{R}^S(F_{2n})$, et on a comme ci-dessus $\text{ax}_{s_j} \circ \tilde{\phi} = \text{ax}_{\phi(s_j)}$.

Commençons par étudier l'action de $\tilde{\phi}$ sur les formes volume. Notons que la forme volume sur $R^S(F_{2n})$ est explicitement donnée par la formule :

$$v^{R^S(F_{2n})} = \text{tr}^*(\lambda) \wedge \text{ax}_{s_1}^*(\nu) \wedge \dots \wedge \text{ax}_{s_{2n}}^*(\nu).$$

Appuyons-nous sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} R^S(F_{2n}) & \longrightarrow & (\text{SU}(2) \setminus \{\pm 1\})^{2n} & \xrightarrow{T} & (-2, 2)^{2n} \\ \downarrow \bar{\phi} & & \downarrow \phi^\# & & \downarrow \overline{\phi^{\text{ab}}} \\ R^S(F_{2n}) & \longrightarrow & (\text{SU}(2) \setminus \{\pm 1\})^{2n} & \xrightarrow{T} & (-2, 2)^{2n} \end{array}$$

dans lequel $T : (\text{SU}(2) \setminus \{\pm 1\})^{2n} \rightarrow (-2, 2)^{2n}$ est donnée par

$$T(\rho) = (\text{Tr}(\rho(s_1)), \dots, \text{Tr}(\rho(s_{2n}))).$$

En désignant par $\Delta = \{(x, \dots, x) \mid x \in (-2, 2)\}$ la diagonale de $(-2, 2)^{2n}$, on a $T^{-1}(\Delta) = R^S(F_{2n})$. Puis, en utilisant le résultat du Lemme 3.7, on constate que

$$\bar{\phi}^*(v^{R^S(F_{2n})}) = (-1)^N v^{R^S(F_{2n})}.$$

Utilisons ensuite le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{R}^S(S) & \longrightarrow & \tilde{R}^S(F_{2n}) & \xrightarrow{\varphi} & \text{SU}(2) \\ \downarrow \tilde{\phi} & & \downarrow \bar{\phi} & & \downarrow \Phi \\ \tilde{R}^S(S) & \longrightarrow & \tilde{R}^S(F_{2n}) & \xrightarrow{\varphi} & \text{SU}(2) \end{array}$$

dans lequel $\varphi : R^S(F_{2n}) \rightarrow \text{SU}(2)$, $\rho \mapsto \rho(s_1 \cdots s_{2n})$ et $\Phi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SU}(2)$, $A \mapsto A^\varepsilon$. En utilisant le fait que $\varepsilon = (-1)^{(\varepsilon-1)/2}$, on en déduit que

$$\tilde{\phi}^*(v^{\tilde{R}^S(S)}) = (-1)^{N_\phi} v^{\tilde{R}^S(S)}.$$

La formule souhaitée s'obtient par le même argument que celui utilisé à la fin de la démonstration de la Proposition 3.8. $\square$

Corollaire 3.10. — *Le difféomorphisme $\widehat{\phi}_\zeta : \widehat{R}^S(S) \rightarrow \widehat{R}^S(S)$ induit par la tresse ζ est tel que $\widehat{\phi}_\zeta^*(v^{\widehat{R}^S(S)}) = v^{\widehat{R}^S(S)}$.*

Si, de plus, $\phi : F_{2n} \rightarrow F_{2n}$ est l'automorphisme donné par $\phi : s_j \mapsto s_{2n-j+1}^{-1}$, alors le difféomorphisme induit $\widehat{\phi} : \widehat{R}^S(S) \rightarrow \widehat{R}^S(S)$ est tel que $\widehat{\phi}^(v^{\widehat{R}^S(S)}) = -v^{\widehat{R}^S(S)}$.*

Démonstration. — Pour l'automorphisme ϕ_ζ , on a $N_{\phi_\zeta} = 0$ et $\varepsilon = 1$; pour l'automorphisme ϕ , on a $N_\phi = 2n$ et $\varepsilon = -1$. On conclut à l'aide de la Proposition 3.9. $\square$

3.8. Invariance de la forme volume

L'objet du résultat suivant est d'établir que la 1-forme volume $\omega^{\hat{\zeta}}$ que l'on a construit dans la Section 3.6 ne dépend pas de la tresse ζ telle que $K = \hat{\zeta}$, et qu'il s'agit d'un invariant des nœuds.

Théorème 3.11. — *Soient $K_1 = \hat{\zeta}_1$ et $K_2 = \hat{\zeta}_2$ deux nœuds présentés sous forme de plats. Si les nœuds $\hat{\zeta}_1$ et $\hat{\zeta}_2$ sont isotopes, alors $\omega^{\hat{\zeta}_1} = \omega^{\hat{\zeta}_2}$.*

Compte tenu de ce résultat, on peut donc désormais parler de la 1-forme volume sur $\mathcal{Reg}(K)$ associée au nœud K , on la note ω^K .

La démonstration, donnée dans la Section 3.11, s'appuie sur un théorème de Birman-Reidemeister (cf. [Bir76]) que l'on rappelle dans la section suivante. Les idées sont analogues à celle utilisées par M. Heusener pour établir que l'orientation qu'il a définie sur $\mathcal{Reg}(K)$ est un invariant du nœud (cf. [Heu03, Théorème 1.1]).

3.9. Théorème de Birman-Reidemeister

Pour rappeler l'énoncé du théorème de Birman-Reidemeister, qui est l'analogue pour les plats du théorème de Markov pour les tresses fermées (cf. [MK99, Chapitre 9]), nous avons besoin de quelques notations.

Le sous-groupe des demi-tresses triviales H_{2n} est le sous-groupe de B_{2n} engendré par (voir Figure 3.6)

$$\sigma_1, \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2, \sigma_{2j} \sigma_{2j-1} \sigma_{2j+1} \sigma_{2j}, 1 \leq j \leq n-1.$$

On peut remarquer que si deux tresses de B_{2n} appartiennent à la même classe double de B_{2n} modulo le sous-groupe H_{2n} , alors elles représentent le même $2n$ -plat.

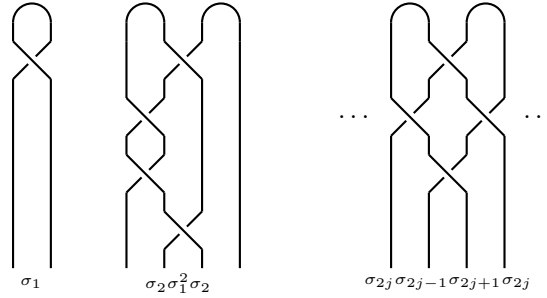


FIGURE 3.6. Les tresses σ_1 , $\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2$ et $\sigma_{2j} \sigma_{2j-1} \sigma_{2j+1} \sigma_{2j}$.

Par ailleurs, il est bien évident que les tresses $\zeta \in B_{2n}$ et $\zeta \sigma_{2n} \in B_{2n+2}$ représentent le même plat. Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Théorème (Birman-Reidemeister). — Soient K_1, K_2 deux nœuds dans S^3 et $\zeta_1 \in B_{2n_1}$, $\zeta_2 \in B_{2n_2}$ deux tresses telles que $K_i \simeq \hat{\zeta}_i$, $i = 1, 2$. Les nœuds K_1 et K_2 sont isotopes si, et seulement si, il existe un entier $N \geq \max(n_1, n_2)$ tel que pour tout $n \geq N$ les tresses $\zeta'_i = \zeta_i \sigma_{2n_i} \sigma_{2n_i+2} \cdots \sigma_{2n} \in B_{2n+2}$, $i = 1, 2$, sont dans la même classe double de B_{2n+2} modulo le sous-groupe H_{2n+2} .

Pour une démonstration de ce résultat, on pourra consulter celle qui est donnée dans [Bir76].

La démonstration du Théorème 3.11 consiste donc à établir l'invariance de $\omega^{\hat{\zeta}}$ par changement de classe double et par stabilisation élémentaire.

3.10. Systèmes spéciaux de générateurs

On définit dans cette section des systèmes spéciaux de générateurs d'origine géométrique correspondant à la décomposition de l'extérieur M_K du nœud-plat $K = \hat{\zeta}$ sous la forme : $M_K = B_1 \cup_S B_2$ de façon un peu plus détaillée et systématique que dans la Section 3.3.

Pour fixer les notations, on suppose que $\zeta \in B_{2n}$ et que la sphère $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ est orientée. Il existe donc $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ représente l'orientation induite sur $\mathbb{R}^3$, avec $e_1 = (\varepsilon, 0, 0) = \varepsilon \mathbf{i}$, $e_2 = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$ et $e_3 = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$. On pose ensuite, pour $j = 1, \dots, 2n$,

$$p_j = \begin{cases} (j, 0) \in \mathbb{R}^2 & \text{si } \varepsilon = 1, \\ (2n+1-j, 0) \in \mathbb{R}^2 & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Soient $H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 1\}$ et $H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 2\}$ les demi-espaces fermés, puis notons $J = [1, 2]$. L'espace $\mathbb{R}^3$ se scinde en : $\mathbb{R}^3 = H_1 \cup \mathbb{R}^2 \times J \cup H_2$. On obtient ainsi une tresse-géométrique dans $\mathbb{R}^2 \times J$ que l'on continue de noter $\zeta \subset \mathbb{R}^2 \times J$. Nous supposons que $\zeta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{i\}) = \mathbf{p} \times \{i\}$, $i = 1, 2$, avec $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2n})$, et que ζ est contenue dans un "petit" voisinage régulier du plan $y = 0$. Le $2n$ -plat $\hat{\zeta}$ est obtenu à partir de la tresse ζ en lui ajoutant deux systèmes de n demi-cercles $C_i = \{c_k^{(i)}\}_{1 \leq k \leq n} \subset H_i \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ tels que les extrémités de $c_k^{(i)}$ soient précisément les points $p_{2k-1} \times \{i\}, p_{2k} \times \{i\}$ de ∂H_i (voir Figure 3.7). Soit Q le cube $[0, 2n+1] \times [-1, 1] \times J \subset \mathbb{R}^2 \times J$, prenons pour point de base

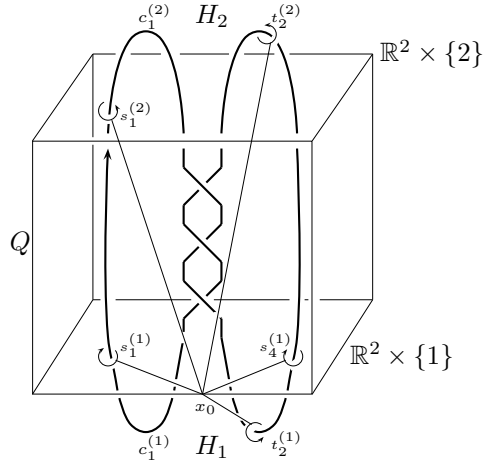


FIGURE 3.7. Systèmes spéciaux de générateurs avec $\varepsilon = +1$.

le point $x_0 = (n, -1, 1) \in \partial Q$. On obtient les systèmes spéciaux de générateurs des groupes fondamentaux de B_1 , B_2 et S de la façon suivante.

Le générateur $s_j^{(i)}$ de $\pi_1((\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{p}) \times \{i\})$ est représenté par le lacet constitué d'un petit cercle autour du point $p_j \times \{i\}$ et du plus petit segment le joignant à x_0 . Le cercle autour de $p_j \times \{i\}$ est orienté en utilisant la convention $\ell k(s_j^{(i)}, L_j) = 1$, où L_j désigne la droite $p_j \times \mathbb{R}$ orientée dans le sens des z décroissants. On obtient ainsi la présentation suivante :

$$\pi_1((\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{p}) \times \{i\}) = \langle s_1^{(i)}, \dots, s_{2n}^{(i)} \mid s_1^{(i)} \cdots s_{2n}^{(i)} \rangle.$$

Pour fixer les autres systèmes de générateurs spéciaux on suppose que le nœud-plat $K = \hat{\zeta}$ est *orienté* ⁽⁵⁾. Le générateur $t_k^{(i)}$, $1 \leq k \leq n$, du groupe $\pi_1(H_i \setminus C_i)$ est représenté par le lacet constitué d'un petit cercle entourant $c_k^{(i)}$ et du plus petit segment reliant ce petit cercle au point de base x_0 . De plus, l'orientation du petit cercle est donnée par la condition : $\ell k(t_k^{(i)}, K) = 1$ (voir Figure 3.7).

Considérons l'homomorphisme $\lambda_i : \pi_1((\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{p}) \times \{i\}) \rightarrow \pi_1(H_i \setminus A_i)$ induit par l'inclusion, on a :

$$\lambda_i(s_{2k-1}^{(i)}) = (t_k^{(i)})^{\varepsilon_k^{(i)}}, \quad \lambda_i(s_{2k}^{(i)}) = (t_k^{(i)})^{-\varepsilon_k^{(i)}},$$

où les $\varepsilon_k^{(i)} \in \{\pm 1\}$ dépendent de l'orientation du nœud K et changent tous simultanément de signe lorsque l'on renverse l'orientation de K .

Le groupe B_{2n} est un sous-groupe du groupe $\text{Aut}(F_{2n})$, F_{2n} étant le groupe libre à $2n$ générateurs identifié au groupe fondamental $\pi_1(Q \setminus \zeta)$. La tresse ζ induit un automorphisme de $\pi_1(Q \setminus \zeta)$ que l'on note ϕ_ζ et on constate que

$$\phi_\zeta : \pi_1(Q \setminus \zeta) \rightarrow \pi_1(Q \setminus \zeta), \quad s_j^{(2)} \mapsto s_j^{(1)}$$

ce qui permet de voir $s_j^{(1)}$ comme un mot en les générateurs $s_1^{(2)}, \dots, s_{2n}^{(2)}$.

Par ailleurs, la surface trouée $S = S^2 \setminus K = (\mathbb{R}^2 \setminus V(\mathbf{p}) \times \{1\}) \cup \{\infty\}$ permet de scinder l'extérieur M_K du nœud-plat $K = \hat{\zeta}$ sous la forme $M_K = B_1 \cup_S B_2$, où $B_1 = (H_1 \setminus V(C_1)) \cup \{\infty\}$ et $B_2 = ((H_2 \cup \mathbb{R}^2 \times J) \setminus V(C_2 \cup \zeta)) \cup \{\infty\}$ sont des corps en anses de genre n . Avec ces notations, les morphismes $\kappa_1 : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(B_1)$ et $\kappa_2 : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(B_2)$ (voir diagramme (3.2)) vérifient les formules :

$$\kappa_1 : s_j^{(1)} \mapsto \lambda_1(s_j^{(1)}), \quad \kappa_2 : s_j^{(1)} \mapsto \lambda_2 \circ \phi_\zeta(s_j^{(2)}).$$

Illustrons notre propos par un exemple : celui du nœud de trèfle.

Exemple 3.12. — Soit $K = \hat{\zeta}$ le nœud de trèfle droit, avec $\zeta = \sigma_2^3$ (cf. Figure 3.1). On a

$$\lambda_i(s_1^{(i)}) = (t_1^{(i)})^\varepsilon, \quad \lambda_i(s_2^{(i)}) = (t_1^{(i)})^{-\varepsilon}, \quad \lambda_i(s_3^{(i)}) = (t_2^{(i)})^{-\varepsilon}, \quad \lambda_i(s_4^{(i)}) = (t_2^{(i)})^\varepsilon$$

avec $i = 1, 2$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ dépendant de l'orientation du nœud.

L'automorphisme de tresse ϕ_ζ est donné par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_\zeta(s_1^{(2)}) &= s_1^{(1)} = s_1^{(2)}, \\ \phi_\zeta(s_2^{(2)}) &= s_2^{(1)} = (s_2^{(2)} s_3^{(2)} s_2^{(2)}) s_3^{(2)} (s_2^{(2)} s_3^{(2)} s_2^{(2)})^{-1}, \\ \phi_\zeta(s_3^{(2)}) &= s_3^{(1)} = (s_2^{(2)} s_3^{(2)}) s_2^{(2)} (s_2^{(2)} s_3^{(2)})^{-1}, \\ \phi_\zeta(s_4^{(2)}) &= s_4^{(1)} = s_4^{(2)}. \end{aligned}$$

⁽⁵⁾On verra en fait, un peu plus loin, que notre construction ne dépend pas de l'orientation du nœud.

Il en résulte que les morphismes κ_1 et κ_2 satisfont quant à eux les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\kappa_1(s_1^{(1)}) &= (t_1^{(1)})^\varepsilon \\ \kappa_1(s_2^{(1)}) &= (t_1^{(1)})^{-\varepsilon} \\ \kappa_1(s_3^{(1)}) &= (t_2^{(1)})^{-\varepsilon} \\ \kappa_1(s_4^{(1)}) &= (t_2^{(1)})^\varepsilon\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\kappa_2(s_1^{(1)}) &= (t_1^{(2)})^\varepsilon \\ \kappa_2(s_2^{(1)}) &= (t_1^{(2)})^{-\varepsilon} (t_2^{(2)})^{-\varepsilon} (t_1^{(2)})^{-\varepsilon} (t_2^{(2)})^{-\varepsilon} (t_1^{(2)})^\varepsilon (t_2^{(2)})^\varepsilon (t_1^{(2)})^\varepsilon \\ \kappa_2(s_3^{(1)}) &= (t_1^{(2)})^{-\varepsilon} (t_2^{(2)})^{-\varepsilon} (t_1^{(2)})^{-\varepsilon} (t_2^{(2)})^\varepsilon (t_1^{(2)})^\varepsilon \\ \kappa_2(s_4^{(1)}) &= (t_2^{(2)})^\varepsilon\end{aligned}$$

Remarque 3.13. — On obtient également un scindement de l'extérieur du nœud-plat $K = \hat{\zeta}$ en considérant la surface trouée $S' = (\mathbb{R}^2 \setminus V(\mathbf{p}) \times \{2\}) \cup \{\infty\}$ et les deux corps en anses de genre n :

$$B'_1 = ((H_1 \cup \mathbb{R}^2 \times J) \setminus V(A_1 \cup \zeta)) \cup \{\infty\}, \quad B'_2 = (H_2 \setminus V(A_2)) \cup \{\infty\}.$$

Les morphismes associés à une telle décomposition sont donnés par :

$$\kappa'_1 : s_j^{(2)} \mapsto \lambda_1 \circ \phi_\zeta^{-1}(s_j^{(1)}), \quad \kappa'_2 : s_j^{(2)} \mapsto \lambda_2(s_j^{(2)}).$$

On peut noter que, pour $i = 1, 2$, on a $\kappa_i = \kappa'_i \circ \zeta$. Posons $\hat{Q}'_i = \hat{\kappa}'_i(\hat{R}^{T_i}(B'_i))$, $i = 1, 2$, (cf. diagramme 3.4) et remarquons simplement que le difféomorphisme $\hat{\phi}_\zeta : \hat{R}^S(S) \rightarrow \hat{R}^S(S')$ induit une application préservant les formes volume entre la partie régulière de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ et celle de $\hat{Q}'_1 \cap \hat{Q}'_2$ (essentiellement parce qu'il existe une permutation π de $\mathfrak{S}_{2n}$, telle que $s_j^{(2)} = g_j s_{\pi(j)}^{(1)} g_j^{-1}$, où $g_j \in F_{2n}$)

Terminons cette section en établissant le lemme suivant.

Lemme 3.14. — Si K est un nœud dans S^3 , alors :

1. la forme volume ω^K construite ci-dessus (cf. équation (3.6)) est indépendante de l'orientation du nœud K ,
2. un changement d'orientation de la sphère S^3 a pour effet de changer ω^K en $-\omega^K$.

Démonstration. — On s'appuie sur le Corollaire 3.10.

1. Si l'on change l'orientation du nœud K , alors, pour tout k , les $\varepsilon_k^{(i)} \in \{\pm 1\}$ changent simultanément de signe, de sorte que les $(2n - 2)$ -formes volume $v^{\hat{R}^{T_1}(B_1)}$ et $v^{\hat{R}^{T_2}(B_2)}$ de $\hat{R}^{T_1}(B_1)$ et $\hat{R}^{T_2}(B_2)$ respectivement, sont remplacées par leurs opposées. En conséquence ω^K ne change pas (cf. équation 3.6).

2. Si maintenant on renverse l'orientation de S^3 , alors comme précédemment les formes volume $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)}$ et $v^{\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)}$ sont changées en leurs opposées ; de plus le générateur $s_j^{(i)}$ étant changé en $(s_{2n+1-j}^{(i)})^{-1}$, la $(4n-5)$ -forme volume $v^{\widehat{R}^S(S)}$ de $\widehat{R}^S(S)$ est aussi changée en son opposée. Par conséquent, ω^K est changée en $-\omega^K$.

□

3.11. Démonstration de l'invariance de la forme volume

Cette section est consacrée à la démonstration du Théorème 3.11 d'invariance de la forme volume. La démonstration s'appuie sur le Théorème de Birman-Reidemeister (*cf.* Section 3.9) et celle-ci se divise, comme on l'a déjà dit, en deux parties : on montre dans le Paragraphe 3.11.1 que $\omega^{\hat{\zeta}}$ est invariante lorsque l'on change la tresse ζ en une tresse appartenant à la même classe double modulo le sous-groupe des demi-tresses triviales (*cf.* Lemme 3.15) puis, on montre dans le Paragraphe 3.11.2 qu'elle est invariante par stabilisation élémentaire (*cf.* Lemme 3.16).

3.11.1. Invariance par changement de classe double. — Dans ce paragraphe on établit l'invariance de la forme volume par changement de classe double modulo le sous-groupe des demi-tresses triviales.

Lemme 3.15. — *Soit ζ une tresse de B_{2n} dont la fermeture $\hat{\zeta}$ est un nœud K . Pour tous $\xi_1, \xi_2 \in H_{2n}$, $\widehat{\xi_1 \zeta \xi_2}$ est un nœud isotope au nœud K et on a l'égalité*

$$\omega^{\widehat{\xi_1 \zeta \xi_2}} = \omega^{\hat{\zeta}}.$$

Démonstration. — Elle se divise en deux étapes.

1. *Préliminaires.* — Gardons les notations de la section précédente et désignons par $F_{2n}^{(i)} = \pi_1(D^*) = \langle s_1^{(i)}, \dots, s_{2n}^{(i)} \mid - \rangle$ le groupe libre de base $\mathcal{S}_i$ et par $F_n^{(i)} = \pi_1(B_i) = \langle t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)} \mid - \rangle$ le groupe libre de base $\mathcal{T}_i$ ($i = 1, 2$) (*cf.* Figure 3.4). Dans [Bir76], J. Birman a montré qu'une tresse $\xi \in B_{2n}$ appartient à H_{2n} si, et seulement si, elle laisse invariante la clôture normale de $\{s_1^{(i)} s_2^{(i)}, \dots, s_{2n-1}^{(i)} s_{2n}^{(i)}\}$ dans $F_{2n}^{(i)}$. A partir de $\xi \in H_{2n}$, on peut donc construire⁽⁶⁾ un automorphisme $\xi^{(i)} : F_n^{(i)} \rightarrow F_n^{(i)}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F_{2n}^{(i)} & \xrightarrow{\lambda_i} & F_n^{(i)} \\ \downarrow \xi & & \downarrow \xi^{(i)} \\ F_{2n}^{(i)} & \xrightarrow{\lambda_i} & F_n^{(i)} \end{array}$$

Un simple calcul nous donne de plus,

$$(3.7) \quad \sigma_1^{(i)}(t_1^{(i)}) = (t_1^{(i)})^{-1}, \text{ et } \sigma_1^{(i)}(t_j^{(i)}) = t_j^{(i)} \text{ pour } 2 \leq j \leq n;$$

⁽⁶⁾Car le noyau de λ_i est H_{2n} .

$$(3.8) \quad (\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2)^{(i)}(t_1^{(i)}) = (t_2^{(i)})^{\varepsilon_2^{(i)}} t_1^{(i)} (t_2^{(i)})^{-\varepsilon_2^{(i)}}, \text{ et } (\sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2)^{(i)}(t_j^{(i)}) = t_j^{(i)} \text{ pour } 2 \leq j \leq n;$$

$$(3.9) \quad (\sigma_{2k} \sigma_{2k-1} \sigma_{2k+1} \sigma_{2k})^{(i)}(t_j^{(i)}) = t_{\tau_k(j)}^{(i)} \text{ pour } 2 \leq j \leq n$$

où $\tau_k \in \mathfrak{S}_n$ désigne la transposition qui permute k et $k+1$.

Dans la suite de la démonstration on notera $\kappa_i : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(B_i)$ et $\lambda_i : F_{2n}^{(i)} \rightarrow F_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, les homomorphismes induits par $\hat{\zeta}$ et par $\kappa'_i : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(B_i)$ et $\lambda'_i : F_{2n}^{(i)} \rightarrow F_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, ceux induits par $\widehat{\xi_1 \zeta \xi_2}$.

2. — Comme H_{2n} est engendré par $\{\sigma_1, \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2, \sigma_{2k} \sigma_{2k-1} \sigma_{2k+1} \sigma_{2k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$, il suffit d'établir le lemme dans le cas où ξ_i est l'un de ces générateurs.

Tout d'abord, on constate que λ'_i diffère de λ_i seulement lorsque $\xi_i = \sigma_1$. Distinguons les trois cas possibles.

- Si $\xi_i = \sigma_1$, alors $\lambda'_i(s_1^{(i)}) = \lambda_i(s_1^{(i)})^{-1}$ et l'identité (3.7) fournit $\kappa'_i = \kappa_i$.
- Si $\xi_i = \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2$, alors de l'identité (3.8), on tire que $\xi_i^{(i)} : F_n^{(i)} \rightarrow F_n^{(i)}$ induit un difféomorphisme $\widehat{\xi_i^{(i)}} : \widehat{R}^{T_i}(F_n^{(i)}) \rightarrow \widehat{R}^{T_i}(F_n^{(i)})$ préservant les formes volume. On a de plus $\widehat{\kappa'_i} = \widehat{\kappa_i} \circ \widehat{\xi_i^{(i)}}$ (cf. diagramme (3.4)).
- Si $\xi_i = \sigma_{2k} \sigma_{2k-1} \sigma_{2k+1} \sigma_{2k}$, alors on déduit de l'équation (3.9), que $\xi_i^{(i)} : F_n^{(i)} \rightarrow F_n^{(i)}$ induit un difféomorphisme $\widehat{\xi_i^{(i)}} : \widehat{R}^{T_i}(F_n^{(i)}) \rightarrow \widehat{R}^{T_i}(F_n^{(i)})$ préservant les formes volume (car ν est une 2-forme volume). Puis on conclut comme précédemment.

En conclusion, il existe, pour $i = 1, 2$, une application $\psi_{\xi_i} : \widehat{R}^{T_i}(B_i) \rightarrow \widehat{R}^{T_i}(B_i)$ préservant les formes volume et telle que $\widehat{\kappa'_i} = \widehat{\kappa_i} \circ \psi_{\xi_i}$, d'où le résultat annoncé. $\square$

3.11.2. Invariance par stabilisation élémentaire. — Dans ce paragraphe on établit l'invariance de la forme volume par stabilisation élémentaire.

Lemme 3.16. — *Si ζ est une tresse de B_{2n} dont la fermeture $\hat{\zeta}$ est un nœud K , alors $\widehat{\zeta \sigma_{2n}}$ est un nœud isotope au nœud K et on a l'égalité*

$$\omega^{\widehat{\zeta \sigma_{2n}}} = \omega^{\hat{\zeta}}.$$

Démonstration. — Convenons de noter $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{s_{2n+1}, s_{2n+2}\}$, $\kappa'_i : \pi_1(\mathcal{S}') \rightarrow \pi_1(B'_i)$ l'homomorphisme induit par $\widehat{\zeta \sigma_{2n}}$ et $Q'_i = \kappa'_i(R^{T_i}(B'_i))$ pour $i = 1, 2$ (voir Figure 3.5).

On a : $\kappa_1 = \lambda_1$, $\kappa_2 = \lambda_2 \circ \zeta$ et $\kappa'_1 = \lambda'_1 \circ \sigma_{2n}^{-1}$, $\kappa'_2 = \lambda'_2 \circ \zeta$, avec $\lambda'_i : \pi_1(\mathcal{S}') \rightarrow \pi_1(B_i)$, telle que :

$$\begin{aligned} \lambda'_1(s_j^{(1)}) &= \lambda_1(s_j^{(1)}) \text{ si } 1 \leq j \leq 2n, & \lambda'_2(s_j^{(2)}) &= \lambda_2(s_j^{(2)}) \text{ si } 1 \leq j \leq 2n, \\ \lambda'_1(s_{2n+1}^{(1)}) &= (t_{n+1}^{(1)})^{-\varepsilon_n^{(1)}}, & \lambda'_2(s_{2n+1}^{(2)}) &= (t_{n+1}^{(2)})^{-\varepsilon_n^{(2)}}, \\ \lambda'_1(s_{2n+2}^{(1)}) &= (t_{n+1}^{(1)})^{\varepsilon_n^{(1)}}, & \lambda'_2(s_{2n+2}^{(2)}) &= (t_{n+1}^{(2)})^{\varepsilon_n^{(2)}}. \end{aligned}$$

L'application λ_i induit $\overline{\lambda_i} : (-2, 2) \times (S^2)^n \rightarrow R^{\mathcal{S}}(S)$, donnée par :

$$\overline{\lambda_i}(2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_n) = \left(2 \cos(\theta), \varepsilon_1^{(i)} P_1, -\varepsilon_1^{(i)} P_1, \dots, \varepsilon_n^{(i)} P_n, -\varepsilon_n^{(i)} P_n \right)$$

et on a : $\overline{\kappa_1} = \overline{\lambda_1}$, $\overline{\kappa_2} = \overline{\zeta} \circ \overline{\lambda_2}$. De plus, on pose :

$$(t, P_1^\zeta, \dots, P_{2n}^\zeta) = \overline{\kappa_2}(t, P_1, \dots, P_n) = \overline{\zeta}(t, \varepsilon_1^{(2)} P_1, -\varepsilon_1^{(2)} P_1, \dots, \varepsilon_n^{(2)} P_n, -\varepsilon_n^{(2)} P_n).$$

De ces identités, on tire les formules :

$$\begin{aligned} \overline{\kappa_1}(2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{n+1}) &= \left(2 \cos(\theta), \varepsilon_1^{(1)} P_1, -\varepsilon_1^{(1)} P_1, \dots, \varepsilon_n^{(1)} P_n, -\varepsilon_n^{(1)} P_{n+1}, \right. \\ &\quad \left. Ad_{\cos(\theta) + \varepsilon_n^{(1)} \sin(\theta) P_{n+1}}(-\varepsilon_n^{(1)} P_n), \varepsilon_n^{(1)} P_{n+1} \right) \end{aligned}$$

et

$$\overline{\kappa_2}(2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{n+1}) = \left(2 \cos(\theta), P_1^\zeta, \dots, P_{2n}^\zeta, -\varepsilon_n^{(1)} P_{n+1}, \varepsilon_n^{(1)} P_{n+1} \right).$$

Considérons l'application $f : (-2, 2) \times (S^2)^{2n} \rightarrow (-2, 2) \times (S^2)^{2n+2}$ définie par :

$$f((2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{2n})) = (2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{2n}, P_{2n}, -P_{2n}),$$

on a $f(Q_1 \cap Q_2) = Q'_1 \cap Q'_2$; de plus, f induit une immersion $\widehat{f} : \widehat{R}^S(S) \rightarrow \widehat{R}^{S'}(S')$.

Notons $\pi_m : (-2, 2) \times (S^2)^m \rightarrow \text{SU}(2)$ l'application définie par :

$$\pi_m(2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_m) = \prod_{j=1}^m \cos(\theta) + \sin(\theta) P_j.$$

On constate que $\pi_{2n+2} \circ f = \pi_{2n}$ ce qui permet de voir, en désignant par $\pi_m^*(\mathfrak{su}(2))$ le fibré normal tiré-en-arrière de $\mathfrak{su}(2)$ par π_m , que $D_{(t, \mathbf{P})} f|_{\pi_{2n}^*(\mathfrak{su}(2))} : \pi_{2n}^*(\mathfrak{su}(2)) \rightarrow \pi_{2n+2}^*(\mathfrak{su}(2))$ est un isomorphisme préservant les formes volume.

Si $(t, \mathbf{P}) = (2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{2n}) \in R^S(S)$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow T_{(t, \mathbf{P})} R^S(S) \xrightarrow{D_{(t, \mathbf{P})} f} T_{f(t, \mathbf{P})} R^{S'}(S') \xrightarrow{\text{pr}} T_{P_{2n}} S^2 \oplus T_{-P_{2n}} S^2 \longrightarrow 0$$

dans laquelle $\text{pr} = (\text{pr}_{2n+1}, \text{pr}_{2n+2})$, de sorte que

$$(3.10) \quad T_{f(t, \mathbf{P})} R^{S'}(S') \cong D_{(t, \mathbf{P})} f(T_{(t, \mathbf{P})} R^S(S)) \oplus T_{P_{2n}} S^2 \oplus T_{-P_{2n}} S^2.$$

En désignant par s une section de pr , on a de plus, au niveau des formes volume, la formule :

$$v_{f(t, \mathbf{P})}^{R^{S'}(S')} = (D_{(t, \mathbf{P})} f \oplus s)^*(v_{(t, \mathbf{P})}^{R^S(S)} \wedge \nu_{2n+1} \wedge \nu_{2n+2}).$$

Si maintenant on suppose que $(t, \mathbf{P}) \in Q_1 \cap Q_2$, alors il existe des points $(t, \mathbf{P}^{(i)}) = (2 \cos(\theta), P_1^{(i)}, \dots, P_n^{(i)}) \in (-2, 2) \times (S^2)^n$ tels que $\kappa_i(t, \mathbf{P}^{(i)}) = (t, \mathbf{P})$ ($i = 1, 2$). Si de plus, on suppose que $(t, \mathbf{P})$ est un point régulier de $Q_1 \cap Q_2$, alors $f((t, \mathbf{P}))$ est un point régulier de $Q'_1 \cap Q'_2$ (cf. Proposition 3.4) et on a, pour $i = 1, 2$, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_{(t, \mathbf{P})} Q_i \xrightarrow{D_{(t, \mathbf{P})} f} T_{f(t, \mathbf{P})} Q'_i \xrightarrow{\text{pr}_i} \mathcal{V}_i \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{V}_i \cong T_{P_n^{(i)}} S^2$. On a donc

$$T_{f(t, \mathbf{P})} Q'_i \cong D_{(t, \mathbf{P})} f(T_{(t, \mathbf{P})} Q_i) \oplus \mathcal{V}_i$$

et en notant s_i une section de pr_i , on a de plus :

$$v_{f(t, \mathbf{P})}^{Q'_i} = (D_{(t, \mathbf{P})} f \oplus s_i)^*(v_{(t, \mathbf{P})}^{Q_i} \wedge \nu_i).$$

En utilisant l'équation (3.10), il vient

$$T_{f(t, \mathbf{P})} R^{S'}(S') \cong Df(T_{(t, \mathbf{P})} R^S(S)) \oplus \mathcal{W}$$

avec $\mathcal{W} \cong T_{-\varepsilon P_n^{(1)}} S^2 \oplus T_{\varepsilon P_n^{(1)}} S^2$. Mais de plus, en tant qu'espaces vectoriels orientés, on a $-\mathcal{W} \cong \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, et la forme volume sur $\mathcal{W}$ n'est autre que la 4-forme $-\text{pr}_1^*(\nu_1) \wedge \text{pr}_2^*(\nu_2)$, $\text{pr}_i : \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_i$ étant la projection canonique. Il en résulte que l'application $f : R^S(S) \rightarrow R^{S'}(S')$ induit un isomorphisme :

$$f : (-1)^n Q_1 \cap Q_2 \rightarrow (-1)^{n+1} Q'_1 \cap Q'_2$$

conservant les formes volume au voisinage de tout point régulier $(t, \mathbf{P})$. $\square$

3.12. Propriétés de la forme volume

Dans cette section, nous décrivons quelques propriétés importantes, bien qu'élémentaires, de la forme volume associée à un nœud. Nous examinons ensuite son comportement sous l'effet de la somme connexe.

3.12.1. Propriétés de la forme volume. — La proposition suivante rassemble quelques-unes des propriétés de la forme volume associée à un nœud.

Proposition 3.17. — *Soit K un nœud dans S^3 . La forme volume ω^K possède les propriétés suivantes.*

1. *L'orientation induite par ω^K est l'orientation de $\mathcal{R}\text{eg}(K)$ définie dans [Heu03].*
2. *La forme volume ω^K ne dépend pas de l'orientation du nœud K .*
3. *Si K^* désigne l'image miroir du nœud K , alors*

$$\omega^{K^*} = -\omega^K.$$

Démonstration. — Les points 2. et 3. sont une conséquence immédiate du Lemme 3.14. Montrons le premier.

Fixons une présentation en $2n$ -plat $\hat{\zeta}$ du nœud K et notons $\mathfrak{O}^{\hat{\zeta}}$ l'orientation sur $\mathcal{R}\text{eg}(\hat{\zeta})$ définie dans [Heu03].

En reprenant les constructions, on constate que la forme volume $v^{\hat{R}^{T_i}(B_i)}$ définie sur $\hat{R}^{T_i}(B_i)$ dans le paragraphe 3.7.1 induit l'orientation sur $\hat{R}^{T_i}(B_i)$ définie dans [Heu03, Paragraphes 3 & 4.1]. De même, la forme volume $v^{\hat{R}^S(S)}$ définie sur $\hat{R}^S(S)$ dans le paragraphe 3.7.1 induit l'orientation sur $\hat{R}^S(S)$ définie dans [Heu03, Paragraphe 4.1].

Enfin, l'orientation $\mathfrak{O}^{\hat{\zeta}}$ sur $\mathcal{R}\text{eg}(\hat{\zeta})$ est définie dans [Heu03, Définition 3.5] par la règle : $\mathcal{R}\text{eg}(\hat{\zeta}) = (-1)^n \left(\hat{\kappa}_1(\hat{R}^{T_1}(B_1)) \cap \hat{\kappa}_2(\hat{R}^{T_2}(B_2)) \right)$. Il s'agit donc, compte tenu de la formule (3.6), de l'orientation induite par la forme volume $\omega^{\hat{\zeta}}$. Ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

3.12.2. Une formule pour la somme connexe. — Etudions maintenant le comportement de la forme volume sous l'effet de la *somme connexe* de deux nœuds. Pour cela, nous devons au préalable déterminer la partie régulière de l'espace des représentations du groupe d'un nœud composé. Ici, les représentations abéliennes vont jouer un rôle.

D'après la Proposition 1.6, toute représentation abélienne de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$ est conjuguée à une, et une seule, des représentations $\varphi_\theta : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ donnée par $\varphi_\theta(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}$, avec $\theta \in [0, \pi]$.

Rappelons (cf. Section 2.5) qu'une représentation abélienne φ_θ est *régulière* lorsque $e^{2i\theta}$ n'est pas un zéro du polynôme d'Alexander de K . Pour une telle représentation, E. Klassen a montré que $H_{\varphi_\theta}^0(M_K) \cong H^0(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $H_{\varphi_\theta}^1(M_K) \cong H^1(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ et $H_{\varphi_\theta}^i(M_K) \cong H^i(M_K; \mathbb{R}) = 0$, pour $i \geq 2$ (cf. Assertion 2.19 et [Kla91, Théorème 19]). On note $A^{\mathrm{reg}}(M_K)$ l'ensemble des représentations abéliennes régulières de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$.

Soit $K = K_1 \sharp K_2$ est un nœud composé, désignons par m_i le méridien de K_i , $i = 1, 2$ et par m celui de K . Le groupe G_K du nœud K est le produit amalgamé $G_1 *_U G_2$, où G_i est le groupe du nœud K_i , $i = 1, 2$, et où U est l'adhérence normale de $m_1 m_2^{-1}$ dans le produit libre $G_1 * G_2$ (cf. [BZ85, Proposition 7.10]). Notons que dans G_K , on a $m = m_1 = m_2$. A toute représentation ρ de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$, on associe les représentations $\rho_i = \rho|_{G_i}$, $i = 1, 2$, et on pose $\rho = \rho_1 * \rho_2$; réciproquement, si ρ_i est une représentation de G_i dans $\mathrm{SU}(2)$, alors on peut former la représentation $\rho = \rho_1 * \rho_2$ de G_K si, et seulement si, $\rho_1(m_1) = \rho_2(m_2)$.

En particulier, pour toute représentation $\rho_1 : G_1 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ (resp. $\rho_2 : G_2 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$) il existe, à conjugaison près, une unique représentation abélienne $\alpha_2 : G_2 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ (resp. $\alpha_1 : G_1 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$) telle que $\rho_1(m_1) = \alpha_2(m_2)$ (resp. $\rho_2(m_2) = \alpha_1(m_1)$). Ceci permet de mettre en évidence les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \iota_1 : \widehat{R}(M_{K_1}) &\rightarrow \widehat{R}(M_K), [\rho_1] \mapsto [\rho_1 * \alpha_2], \\ \iota_2 : \widehat{R}(M_{K_2}) &\rightarrow \widehat{R}(M_K), [\rho_2] \mapsto [\alpha_1 * \rho_2]. \end{aligned}$$

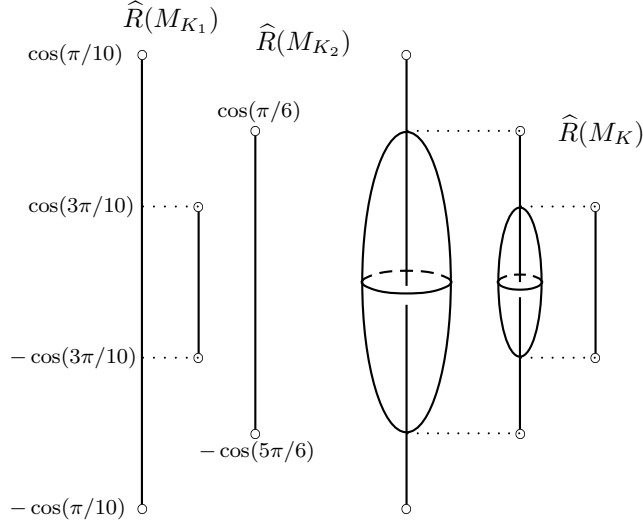
Avec ces notations, on a :

Proposition 3.18. — Soit $K = K_1 \sharp K_2$ un nœud composé. Si R_1 (resp. R_2) est l'ensemble des représentations régulières $\rho_1 : G_1 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ (resp. $\rho_2 : G_2 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$) dont la représentation abélienne associée $\alpha_2 : G_2 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ (resp. $\alpha_1 : G_1 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$) est aussi régulière, alors :

1. R_1 (resp. R_2) est une sous-variété ouverte de $\mathrm{Reg}(K_1)$ (resp. $\mathrm{Reg}(K_2)$),
2. $\mathrm{Reg}(K) = \iota_1(R_1) \cup \iota_2(R_2)$,
3. $\iota_1 : R_1 \rightarrow \mathrm{Reg}(K)$ (resp. $\iota_2 : R_2 \rightarrow \mathrm{Reg}(K)$) est une immersion.

Démonstration. — L'ensemble R_i , $i = 1, 2$, n'est autre que la variété $\mathrm{Reg}(K_i)$ privé d'un nombre fini de points (explicitement, il s'agit de l'ensemble des représentations régulières du groupe du nœud K_i dont la représentation abélienne associée ne correspond pas à un zéro du polynôme d'Alexander du nœud K_{3-i} , $i = 1, 2$), il s'agit donc d'une sous-variété ouverte de $\mathrm{Reg}(K_i)$. Ceci établit le premier point.

Vérifions le second. Tout d'abord, E. Klassen a donné dans [Kla91, Proposition 12] la structure de l'espace des représentations irréductibles du groupe d'un nœud composé : si ρ est une représentation irréductible de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$, alors ρ est conjuguée à l'une des représentations suivantes : $\rho_1 * a_2$, $a_1 * \rho_2$ ou $\rho_1 * \rho_2$, avec $\rho_i \in \widetilde{R}(M_i)$ et $a_i \in A(M_i)$, $i = 1, 2$.

FIGURE 3.8. Espace des représentations irréductibles du groupe du nœud $K = K_1 \# K_2$.

Sur la Figure 3.8, on a schématisé l'espace des représentations irréductibles du groupe du nœud produit $K = K_1 \# K_2$, où K_1 est le nœud torique de type $(2, 5)$ et K_2 le nœud de trèfle (*i.e.* le nœud torique de type $(2, 3)$).

La démonstration repose ensuite sur les deux assertions suivantes.

Assertion 3.19. — *Si $\rho_i \in \tilde{R}(M_i)$, alors $\rho_1 * \rho_2$ n'est jamais régulière.*

Démonstration de l'assertion. — Pour voir cela, utilisons la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée au produit amalgamé $G_K = G_1 *_U G_2$ (*cf.* Section 1.3).

Etant donné que ρ_i est irréductible, on a $H_{\rho_i}^0(G_i) = 0$ ($i = 1, 2$) et la suite de Mayer-Vietoris se réduit à :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H_{\rho}^1(G_K) \xrightarrow{\kappa^*} H_{\rho_1}^1(G_1) \oplus H_{\rho_2}^1(G_2) \xrightarrow{i^*} \mathbb{R} \longrightarrow H_{\rho}^2(G_K) \longrightarrow H_{\rho_1}^2(G_1) \oplus H_{\rho_2}^2(G_2) \longrightarrow 0.$$

Comme $\dim H_{\rho_i}^1(G_i) \geq 1$ pour $i = 1, 2$ (*cf.* Lemme 1.19), i^* ne peut pas être injectif, donc $\text{rg } \kappa^* \geq 1$. De sorte que $2 \leq 1 + \text{rg } \kappa^* = \text{rg } \delta + \text{rg } \kappa^* = \dim H_{\rho}^1(G_K)$, ce qui montre que ρ n'est pas régulière. $\square$

Assertion 3.20. — *La représentation $\rho_1 * a_2$ (resp. $a_1 * \rho_2$) est régulière si, et seulement si, ρ_1 et a_2 (resp. a_1 et ρ_2) sont régulières, où $\rho_i \in \tilde{R}(M_i)$, $a_i \in A(M_i)$, $i = 1, 2$.*

Démonstration de l'assertion. — La représentation ρ_1 étant irréductible et a_2 abélienne, la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée au produit amalgamé

$G_K = G_1 *_U G_2$ est :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \xrightarrow{0} H_\rho^1(G_K) \xrightarrow{\kappa_{(1)}^*} H_{\rho_1}^1(G_1) \oplus H_{a_2}^1(G_2) \xrightarrow{i^*} \mathbb{R} \longrightarrow$$

$$H_\rho^2(G_K) \xrightarrow{\kappa_{(2)}^*} H_{\rho_1}^2(G_1) \oplus H_{a_2}^2(G_2) \longrightarrow 0.$$

Comme $\kappa_{(2)}^*$ est surjectif, on a $\dim H_\rho^2(G_K) \geq \dim H_{\rho_1}^2(G_1) + \dim H_{a_2}^2(G_2)$.

Supposons que ρ_1 ne soit pas une représentation régulière de G_1 ou que a_2 ne soit pas une représentation abélienne régulière de G_2 ; on a alors $\dim H_{\rho_1}^2(G_1) \geq 2$ ou $\dim H_{a_2}^2(G_2) \geq 1$. Dans tous les cas, on a $\dim H_\rho^2(G_K) \geq 2$ et $\rho = \rho_1 * a_2$ ne peut pas être une représentation régulière de G_K .

Réciproquement, si ρ_1 est une représentation régulière de G_1 et si a_2 est une représentation abélienne régulière de G_2 , alors $H_{\rho_1}^1(G_1)$, $H_{\rho_1}^2(G_1)$ et $H_{a_2}^1(G_2)$ sont de dimension 1 et $H_{a_2}^2(G_2) = 0$. On en déduit que $\text{rg } i^* = 2 - \text{rg } \kappa_{(1)}^* = 1$, de sorte que $\dim H_\rho^1(G_K) = \text{rg } \kappa_{(1)}^* = 1$, ce qui montre que ρ est régulière.

On obtient exactement le même résultat pour une représentation régulière $\rho = a_1 * \rho_2$ de G_K dans $\text{SU}(2)$, avec $a_1 \in A(M_1)$ et $\rho_2 \in \tilde{R}(M_2)$. $\square$

Montrons pour finir le dernier point. La surjection $G_1 *_U G_2 \twoheadrightarrow G_1 *_U U \cong G_1$ induit l'injection $H_{\rho_1}^1(G_1) \hookrightarrow H_\rho^1(G_K)$, ce qui montre que $\iota_1 : R_1 \rightarrow \mathcal{R}\text{eg}(K)$ est une immersion. On montre de même que $\iota_2 : R_2 \rightarrow \mathcal{R}\text{eg}(K)$ est une immersion. Ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

Le résultat suivant donne une formule permettant de calculer la forme volume associée au nœud composé $K_1 \# K_2$ en fonction des formes volume associées aux nœuds K_1 et K_2 .

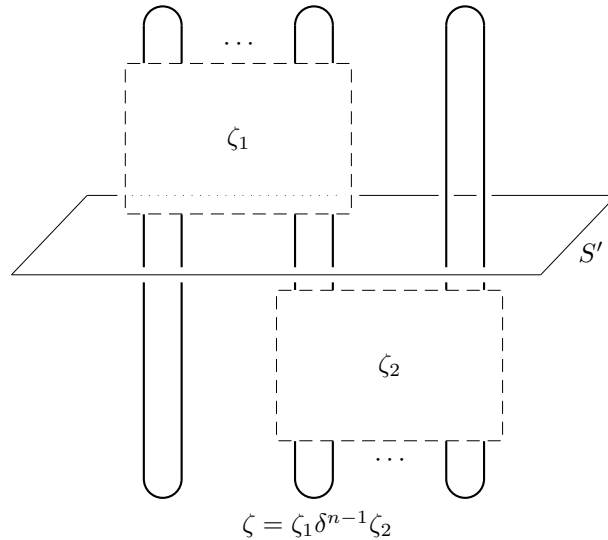


FIGURE 3.9. Somme connexe de deux nœuds présentés en plats.

Proposition 3.21. — Soit $K = K_1 \# K_2$ un nœud composé. Avec les notations de la Proposition 3.18, on a les formules :

$$\iota_1^*(\omega^K) = \omega^{K_1} \text{ et } \iota_2^*(\omega^K) = \omega^{K_2}.$$

Démonstration. — Elle s'appuie sur les deux points suivants :

- D'abord, on sait décrire, sous la forme d'un plat, la somme connexe de deux nœuds eux-mêmes présentés sous forme de plats (cf. Figure 3.9). Plus précisément, si $K_1 = \hat{\zeta}_1$ est un $2n$ -plat et $K_2 = \hat{\zeta}_2$ un $2m$ -plat, alors $K_1 \# K_2 = \zeta_1 \widehat{\delta^{n-1} \zeta_2}$, où δ^{n-1} est l'opérateur de décalage d'indice $n-1$.
- Ensuite, la proposition précédente donne la forme des représentations régulières du groupe du nœud composé $K_1 \# K_2$ en fonction des représentations régulières des groupes des nœuds K_1 et K_2 .

Pour montrer que $\iota_1^*(\omega^K) = \omega^{K_1}$, on utilise une technique analogue à celle que nous avons utilisée dans la démonstration du Lemme 3.16 d'invariance par stabilisation élémentaire. Considérons la sphère trouée S' , comme indiquée sur la Figure 3.9, qui permet de scinder l'extérieur du nœud composé K , notons $S' = S \cup \{s_{2n+1}, \dots, s_{2n+2(m-1)}\}$ puis utilisons la Remarque 3.13. On introduit ensuite l'application $f : (-2, 2) \times (S^2)^{2n} \rightarrow (-2, 2) \times (S^2)^{2n+2(m-1)}$ définie de la façon suivante :

$$f((2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{2n})) = (2 \cos(\theta), P_1, \dots, P_{2n}, \varepsilon_1 P_{2n}, -\varepsilon_1 P_{2n}, \dots, \varepsilon_{m-1} P_{2n}, -\varepsilon_{m-1} P_{2n})$$

où les $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ dépendent de la tresse ζ_2 . Tout comme dans la démonstration du Lemme 3.16, f induit une application $f : R^S(S) \rightarrow R^{S'}(S')$ et on vérifie – en adaptant les idées développées à la fin de la démonstration du Lemme 3.16 – que cette application induit un difféomorphisme $(-1)^n Q_1 \cap Q_2 \rightarrow (-1)^{n+m-1} Q'_1 \cap Q'_2$ préservant les formes volume au voisinage de toute représentation régulière de G_1 . L'égalité $\iota_2^*(\omega^K) = \omega^{K_2}$ se démontre de la même façon. $\square$

CHAPITRE 4

FORME VOLUME ET TORSION DE REIDEMEISTER

Le but de ce chapitre est d'établir que les deux points de vue développés dans les Chapitres 2 et 3 ne font qu'un. Plus précisément, on montre que les formes volume et torsion de Reidemeister associées à un nœud dans S^3 *coïncident* (*cf.* Théorème 4.1).

On obtient ainsi une technique pour calculer la torsion de Reidemeister de l'extérieur d'un nœud à coefficients dans la représentation adjointe comme une forme volume construite "à la Casson" sur l'espace des représentations du groupe du nœud dans $SU(2)$. En changeant de point de vue, ce résultat fournit aussi une méthode de calcul au niveau cellulaire de la forme volume sur l'espace des représentations associée à un nœud.

La démonstration de l'égalité des formes volume et torsion, donnée dans la Section 4.3, s'appuie sur l'interprétation des espaces tangents aux sous-espaces de représentations, déduits d'une présentation en plat du nœud, en termes de dérivations tordues (*cf.* Sections 1.4 & 4.2).

4.1. Enoncé du résultat

Le résultat suivant montre que la forme torsion de Reidemeister $\hat{\tau}^K$ définie dans le Chapitre 2 coïncide avec la 1-forme volume ω^K sur $\text{Reg}(K)$ définie dans le Chapitre 3.

Théorème 4.1. — *Soit K un nœud dans S^3 . Si $\rho : G_K \rightarrow SU(2)$ est une représentation régulière, alors*

$$\omega_{[\rho]}^K = \hat{\tau}_\rho^K.$$

La démonstration du Théorème 4.1 nécessite plusieurs étapes données dans la Section 4.3. Au cours de celle-ci, on a besoin des notations et des propriétés décrites dans la Section 4.2 consacrée au concept de *dérivation tordue*, dont la définition a été rappelée dans la Section 1.4.

L'idée principale pour comparer les formes volume $\omega_{[\rho]}^K$ et $\hat{\tau}_\rho^K$ sur $T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K) \cong H_\rho^1(M_K)$ est de les interpréter comme une seule et même torsion de Reidemeister d'un complexe auxiliaire en s'appuyant sur le Lemme de Multiplicativité de la torsion (*cf.* Théorème 2.6).

Plus précisément, on compare la torsion du complexe *acyclique* ⁽¹⁾

$$\mathcal{T}^\rho : 0 \longrightarrow T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \longrightarrow T_{[\rho_1]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \times T_{[\rho_2]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \longrightarrow T_{[\rho_S]} \widehat{R}^S(S) \longrightarrow 0,$$

qui nous a permis de construire la forme volume $\omega_{[\rho]}^K$, à la torsion du complexe *non acyclique* ⁽²⁾ de l'extérieur du nœud à coefficient dans la représentation $Ad \circ \rho$

$$\mathcal{X}^\rho : 0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{d_2^\rho} \mathfrak{su}(2)^{2n} \xrightarrow{d_1^\rho} \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \longrightarrow 0$$

par l'intermédiaire d'un complexe auxiliaire, que nous définirons dans le Paragraphe 4.2.2.

Remarque 4.2. — Le théorème précédent admet les deux conséquences suivantes :

1. D'après la Proposition 3.17 n°1, l'orientation sur $\mathcal{R}eg(K)$ induite par la forme volume $\hat{\tau}^K$ est exactement l'orientation définie dans [Heu03].
2. L'invariant de Casson-Lin $\lambda_{CL}(K)$, défini dans [Lin92] (ou ce qui revient au même la signature $\sigma(K)$), peut s'interpréter via la torsion de Reidemeister avec signe associée à K de la façon suivante (cf. [Heu03, Proposition 5.4 & Lemme 5.5]).

Notons $R_0^\mathcal{G}(G) = \{\rho \in R^\mathcal{G}(G) \mid \text{Tr}(\rho(t)) = 0, \forall t \in \mathcal{G}\}$ et $\widehat{R}_0^\mathcal{G}(G) = \widehat{R}_0^\mathcal{G}(G)/\text{SO}(3)$ (avec $\widehat{R}_0^\mathcal{G}(G) = R_0^\mathcal{G}(G) \cap \widehat{R}(G)$) puis posons $\widehat{Q}_i^{(0)} = \widehat{\kappa}_i(\widehat{R}_0^{\mathcal{T}_i}(B_i))$, $i = 1, 2$.

En général, l'intersection $\widehat{\kappa}_1(\widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)) \cap \widehat{\kappa}_2(\widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2))$ n'est pas compacte, il peut exister des représentations abéliennes qui soient limite de représentations irréductibles. Par contre, on peut montrer (en s'appuyant sur le fait que $\Delta_K(-1) \neq 0$, puis en utilisant [Kla91, Théorème 19]) que $\widehat{Q}_1^{(0)} \cap \widehat{Q}_2^{(0)}$ est compact. Le nombre d'intersection $\langle \widehat{Q}_1^{(0)}, \widehat{Q}_2^{(0)} \rangle_{\widehat{R}_0^S(S)}$ est donc bien défini (cf. [Heu03, Paragraphe 5.3]). L'invariant de Casson-Lin de la tresse fermée $\sigma^\wedge$, $\sigma \in B_n$, (cf. Figure 3.3) est défini par :

$$\lambda_{CL}(\sigma^\wedge) = (-1)^n \langle \widehat{Q}_1^{(0)}, \widehat{Q}_2^{(0)} \rangle_{\widehat{R}_0^S(S)}.$$

On sait de plus que si σ et σ' sont des tresses dont les fermetures définissent des nœuds équivalents, alors $\lambda_{CL}(\sigma^\wedge) = \lambda_{CL}(\sigma'^\wedge)$ (cf. [Lin92, Théorème 18]). On peut donc parler sans ambiguïté de l'invariant $\lambda_{CL}(K)$, pour un nœud $K \subset S^3$.

Supposons que *tous* les points d'intersection de $\widehat{Q}_1^{(0)}$ avec $\widehat{Q}_2^{(0)}$ dans $\widehat{R}_0^S(S)$ soient des points d'intersection *transverse*, ce qui équivaut à demander que *toutes* les représentations dans $\widehat{Q}_1^{(0)} \cap \widehat{Q}_2^{(0)}$ soient *m-régulières*. Dans ce cas là et avec les notations du Paragraphe 2.7.2, on a

$$\lambda_{CL}(K) = \sum_{\rho \in \widehat{Q}_1^{(0)} \cap \widehat{Q}_2^{(0)}} \text{sgn}(\mathbb{T}_m^K(\rho)).$$

⁽¹⁾Dans lequel chacune des composantes est munie de la forme volume naturelle décrite dans la Section 3.6.

⁽²⁾Dans lequel chacune des composantes est munie de la forme volume produit sur $\mathfrak{su}(2)^m$, le groupe $H_\rho^2(M_K)$ du générateur de référence décrit dans le Paragraphe 2.6.2 et le groupe $H_\rho^1(M_K)$ d'un générateur quelconque.

4.2. Dérivations et Espaces Tangents

Dans cette section, on munit les espaces de dérivations $\text{Der}_{\rho_i}(B_i)$ et $\text{Der}_{\rho_S}(S)$ de formes volume. On définit ensuite le complexe auxiliaire des dérivations qui permettra de comparer, dans la Section 4.3, les formes volume et torsion de Reidemeister associées à un nœud (cf. complexe (4.2)). On termine cette section en calculant les espaces tangents à $\tilde{R}(M_K)$, $\tilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ et à $\tilde{R}^S(S)$ en termes de sous-espaces d'espaces de dérivations (cf. Paragraphe 4.2.3). Comme nous le verrons, ces calculs sont au cœur de la comparaison des formes volume et torsion de Reidemeister.

4.2.1. Généralités. — Soit K un nœud dans S^3 présenté sous la forme d'un $2n$ -plat. On a vu dans la Section 3.3 qu'une telle présentation induit le scindement $M_K = B_1 \cup_S B_2$, où B_1, B_2 sont des corps en anses de genre n et où S désigne la sphère trouée $B_1 \cap B_2$. Cette présentation nous a également permis de mettre en évidence certains systèmes spéciaux de générateurs pour les groupes $\pi_1(B_i)$, $i = 1, 2$, et $\pi_1(S)$, notés respectivement $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$, et $\mathcal{S}$.

Le choix du système de générateurs $\mathcal{T}_i$ (resp. $\mathcal{S}$) pour le groupe $\pi_1(B_i)$, $i = 1, 2$, (resp. $\pi_1(S)$) permet d'obtenir le résultat suivant.

Assertion 4.3. — *Pour toute représentation irréductible $\rho_i : \pi_1(B_i) \rightarrow \text{SU}(2)$, $i = 1, 2$, (resp. $\rho_S : \pi_1(S) \rightarrow \text{SU}(2)$) on a l'identification $\text{Der}_{\rho_i}(B_i) \cong \mathfrak{su}(2)^n$ (resp. $\text{Der}_{\rho_S}(S) \cong \mathfrak{su}(2)^{2n-1}$)*

Démonstration. — Explicitement, les identifications $\text{Der}_{\rho_i}(B_i) \cong \mathfrak{su}(2)^n$ et $\text{Der}_{\rho_S}(S) \cong \mathfrak{su}(2)^{2n-1}$ sont respectivement données par les isomorphismes :

- $\varphi_i : \mathfrak{su}(2)^n \rightarrow \text{Der}_{\rho_i}(B_i)$, défini par $\varphi_i : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto d^{\mathbf{x}}$, où $d^{\mathbf{x}} \in \text{Der}_{\rho_i}(B_i)$ est telle que $d^{\mathbf{x}}(t_j^{(i)}) = x_j$, pour tout $j = 1, \dots, n$.
- $\varphi_S : \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \rightarrow \text{Der}_{\rho_S}(S)$, défini par $\varphi_S : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n-1}) \mapsto d^{\mathbf{x}}$, où $d^{\mathbf{x}} \in \text{Der}_{\rho_S}(S)$ est telle que $d^{\mathbf{x}}(s_j) = x_j$, pour tout $j = 1, \dots, 2n-1$, et

$$d^{\mathbf{x}}(s_{2n}) = -\text{Ad}_{\rho_S(s_1 \cdots s_{2n-1})^{-1}}(x_1) - \cdots - \text{Ad}_{\rho_S(s_{2n-1})^{-1}}(x_{2n-1}).$$

□

Au moyen de l'identification $\varphi_i : \mathfrak{su}(2)^n \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\rho_i}(B_i)$, on munit $\text{Der}_{\rho_i}(B_i)$ de la forme volume déduite de la forme volume produit sur $\mathfrak{su}(2)^n$.

Au moyen de l'identification $\varphi_S : \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\rho_S}(S)$, on munit $\text{Der}_{\rho_S}(S)$ de la forme volume déduite de la forme volume produit sur $\mathfrak{su}(2)^{2n-1}$.

Reprenons le disque troué $D^* = S \setminus \{\infty\}$ et considérons l'application $\psi : \text{Der}_{\rho_S}(D^*) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ définie par

$$\psi(d) = d(s_1 \cdots s_{2n}) = d(s_1) + \text{Ad}_{\rho_S(s_1)}(d(s_2)) + \cdots + \text{Ad}_{\rho_S(s_1 \cdots s_{2n-1})}(d(s_{2n})).$$

On constate que la suite :

$$(4.1) \quad 0 \longrightarrow \text{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow \text{Der}_{\rho_S}(D^*) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0$$

est exacte et que chacune de ses composantes possède une forme volume de référence – les formes volume produits sur $\mathfrak{su}(2)^m$. Le résultat de l'assertion suivante nous sera très utile.

Assertion 4.4. — *Les formes volume déduites des formes volume produits sur $\mathfrak{su}(2)^m$, qui munissent les termes de la suite exacte (4.1), sont compatibles entre elles.*

Démonstration. — Soit $s : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \text{Der}_{\rho_S}(D^*)$ la section de ψ donnée par $s(x) = d^x$, où $d^x \in \text{Der}_{\rho_S}(D^*)$ satisfait $d^x(s_j) = 0$, pour tout $j = 1, \dots, 2n-1$, et $d^x(s_{2n}) = \text{Ad}_{\rho_S(s_{2n})}(x)$. En utilisant les identifications de l'Assertion 4.3, on constate que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}(S) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}(D^*) & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \uparrow \varphi_S & & \cong \uparrow & & \uparrow = \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2)^{2n-1} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{su}(2)^{2n} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0 \\ & & & & & \nwarrow s & \end{array}$$

avec

$$i(x_1, \dots, x_{2n-1}) = (x_1, \dots, x_{2n-1}, -\text{Ad}_{\rho_S(s_1 \dots s_{2n-1})^{-1}}(x_1) - \dots - \text{Ad}_{\rho_S(s_{2n-1})^{-1}}(x_{2n-1}))$$

et

$$j(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1 + \text{Ad}_{\rho_S(s_1)}(x_2) + \dots + \text{Ad}_{\rho_S(s_1 \dots s_{2n-1})}(x_{2n}).$$

De plus, la section s de ψ s'identifie à la section de j – encore notée s – définie par $s(x) = (0, \dots, 0, \text{Ad}_{\rho_S(s_{2n})}(x))$, pour tout $x \in \mathfrak{su}(2)$.

Puisque la matrice de passage de la base canonique produit $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{i}_{2n}, \mathbf{j}_{2n}, \mathbf{k}_{2n}\}$ de $\mathfrak{su}(2)^{2n}$ à la base $\{i(\mathbf{i}_1), i(\mathbf{j}_1), i(\mathbf{k}_1), \dots, i(\mathbf{i}_{2n-1}), i(\mathbf{j}_{2n-1}), i(\mathbf{k}_{2n-1}), s(\mathbf{i}), s(\mathbf{j}), s(\mathbf{k})\}$ est de déterminant 1, on en déduit que l'unique forme volume compatible avec les deux autres formes volume sur les composantes de la suite exacte (4.1) s'identifie à la forme volume produit de $\mathfrak{su}(2)^{2n-1}$ au moyen de φ_S . $\square$

4.2.2. Le complexe auxiliaire des dérivations. — Nous introduisons à présent le complexe auxiliaire par l'intermédiaire duquel on va comparer les formes volume ω^K et $\hat{\tau}^K$ dans la Section 4.3.

Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation régulière et reprenons le diagramme (3.2) suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(B_1) & \\ \kappa_1 \nearrow & & \searrow p_1 \\ \pi_1(S) & & G_K \\ \kappa_2 \searrow & & \nearrow p_2 \\ & \pi_1(B_2) & \end{array}$$

La suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée au scindement $M_K = B_1 \cup_S B_2$ et à la représentation ρ se réduit à :

$$0 \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{(p_1^*, -p_2^*)} H_{\rho_1}^1(B_1) \oplus H_{\rho_2}^1(B_2) \xrightarrow{\kappa_1^* + \kappa_2^*} H_{\rho_S}^1(S) \xrightarrow{\Delta} H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0$$

et permet de construire le *complexe non acyclique des dérivations* :

$$(4.2) \quad \mathcal{D}^\rho : 0 \longrightarrow \text{Der}_\rho(M_K) \xrightarrow{p^*} \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) \xrightarrow{\kappa^*} \text{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow 0$$

dans lequel

$$\begin{aligned} p^* : \text{Der}_\rho(M_K) &\rightarrow \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2), \quad d \mapsto (d \circ p_1, -d \circ p_2) \\ \text{et } \kappa^* : \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) &\rightarrow \text{Der}_{\rho_S}(S), \quad (d_1, d_2) \mapsto d_1 \circ \kappa_1 + d_2 \circ \kappa_2. \end{aligned}$$

On munit les composantes du complexe $\mathcal{D}^\rho$ de formes volume de référence de la façon suivante, qui est analogue à celle que nous avons utilisée pour munir les composantes du complexe $\mathcal{T}^\rho$ de formes volume de référence (cf. Section 3.6) :

- on munit $\mathcal{D}_0^\rho = \text{Der}_{\rho_S}(S)$ de la forme volume déduite par l'isomorphisme φ_S de la forme volume produit sur $\mathfrak{su}(2)^{2n-1}$,
- on munit $\mathcal{D}_1^\rho = \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2)$ de la forme volume $(-1)^n v$, où v désigne la forme volume produit sur $\text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2)$ déduite des formes volume produits sur $\mathfrak{su}(2)^n$ grâce aux isomorphismes φ_i , $i = 1, 2$.
- Enfin, on dispose de la suite exacte suivante (cf. Paragraphe 1.4.3 et Assertion 1.21) :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \text{Der}_\rho(M_K) \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \longrightarrow 0$$

et on munit $\mathcal{D}_2^\rho = \text{Der}_\rho(M_K)$ de l'unique 4-forme volume w_ρ qui est compatible avec la 3-forme volume $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ sur $\mathfrak{su}(2)$ et avec la 1-forme volume $\omega_{[\rho]}^K$ sur $T_{[\rho]}\widehat{R}(M_K) \cong H_\rho^1(M_K)$.

L'homologie du complexe $\mathcal{D}^\rho$ est donnée dans l'assertion suivante.

Assertion 4.5. — *L'homologie du complexe $\mathcal{D}^\rho$ se réduit à $H_*(\mathcal{D}^\rho) = H_0(\mathcal{D}^\rho) = H_\rho^2(M_K)$.*

Démonstration. — Elle repose sur les points suivants :

- $\ker p^* = 0$,
- $\text{im } p^* = \ker \kappa^*$, qui s'obtient en utilisant les identités suivantes :

$$\frac{\partial(\kappa_1(s_i)\kappa_2(s_i^{-1}))}{\partial t_j^{(1)}} = \frac{\partial \kappa_1(s_i)}{\partial t_j^{(1)}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\kappa_1(s_i)\kappa_2(s_i^{-1}))}{\partial t_j^{(2)}} = -\frac{\partial \kappa_2(s_i)}{\partial t_j^{(2)}},$$

- $\text{coker } \kappa^* = H_\rho^2(M_K)$, qui s'obtient en examinant le diagramme commutatif suivant et en notant que $\text{im } \kappa^* = \ker \Delta \circ pr_S$:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Inn}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \text{Inn}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Inn}_{\rho_2}(B_2) & \longrightarrow & \text{Inn}_{\rho_S}(S) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Der}_\rho(M_K) & \xrightarrow{p^*} & \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) & \xrightarrow{\kappa^*} & \text{Der}_{\rho_S}(S) & \xrightarrow{\Delta \circ pr_S} & H_\rho^2(M_K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow pr & & \downarrow pr_1 \oplus pr_2 & & \downarrow pr_S & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & H_\rho^1(M_K) & \xrightarrow{(p_1^*, -p_2^*)} & H_{\rho_1}^1(B_1) \oplus H_{\rho_2}^1(B_2) & \xrightarrow{\kappa_1^* + \kappa_2^*} & H_{\rho_S}^1(S) & \xrightarrow{\Delta} & H_\rho^2(M_K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

□

4.2.3. Espaces tangents à $\tilde{R}(M_K)$, $\tilde{R}^{T_i}(B_i)$ ($i = 1, 2$) et à $\tilde{R}^S(S)$. — Rappelons que si $g \in G$ et si $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation telle que $\rho(g) \neq \pm 1$, alors il existe un unique $\theta^\rho(g) \in (0, \pi)$ et un unique $P^\rho(g) \in S^2$ tels que $\rho(g) = \cos(\theta^\rho(g)) + \sin(\theta^\rho(g))P^\rho(g)$.

Soit $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$ un système fini de générateurs du groupe G et fixons $\rho \in \tilde{R}^\mathcal{G}(G)$. De la même façon que nous nous sommes intéressés au sous-espace de représentations $R^\mathcal{G}(G)$, on introduit les sous-espaces de $\mathrm{Der}_\rho(G)$ suivants :

$$\mathrm{Der}_\rho^\mathcal{G}(G) = \{d \in \mathrm{Der}_\rho(G) \mid \langle d(g_j), P^\rho(g_j) \rangle = \langle d(g_k), P^\rho(g_k) \rangle, 1 \leq j, k \leq m\} \subset \mathrm{Der}_\rho(G)$$

et

$$\mathrm{Der}_\rho^\mathcal{G}(G)_0 = \{d \in \mathrm{Der}_\rho(G) \mid \langle d(g_j), P^\rho(g_j) \rangle = 0, 1 \leq j \leq m\} \subset \mathrm{Der}_\rho^\mathcal{G}(G).$$

Pour une représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, on adopte les notations $\mathrm{Der}_{\rho_i}^{T_i}(B_i)$ pour $\mathrm{Der}_{\rho_i}^{T_i}(\pi_1(B_i))$, $i = 1, 2$, $\mathrm{Der}_{\rho_S}^S(S)$ pour $\mathrm{Der}_{\rho_S}^S(\pi_1(S))$ et on pose :

$$\mathrm{Der}_\rho(M_K)_0 = \{d \in \mathrm{Der}_\rho(M_K) \mid \langle d(m), P^\rho \rangle = 0\}.$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à l'examen détaillé des espaces $\mathrm{Der}_\rho(M_K)$, $\mathrm{Der}_{\rho_i}^{T_i}(B_i)$ et $\mathrm{Der}_{\rho_S}^S(S)$, $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ désignant une représentation régulière. Plus exactement, on montre qu'ils s'identifient respectivement aux espaces tangents $T_\rho \tilde{R}(M_K)$, $T_{\rho_i} \tilde{R}^{T_i}(B_i)$ et $T_{\rho_S} \tilde{R}^S(S)$.

Commençons par établir les deux lemmes suivants.

Lemme 4.6. — *Pour toute représentation irréductible $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, on a les inclusions : $\mathrm{Inn}_{\rho_i}(B_i) \subset \mathrm{Der}_{\rho_i}^{T_i}(B_i)_0$, $i = 1, 2$, et $\mathrm{Inn}_{\rho_S}(S) \subset \mathrm{Der}_{\rho_S}^S(S)_0$.*

De plus, si $d \in \mathrm{Der}_\rho(M_K)$, alors $d_i = d \circ p_i \in \mathrm{Der}_{\rho_i}^{T_i}(B_i)$, $i = 1, 2$, et $d_S = d \circ p_i \circ \kappa_i \in \mathrm{Der}_{\rho_S}^S(S)$.

Démonstration. — La démonstration est une application du Lemme 1.22 dont on rappelle le résultat pour faciliter la lecture. Si G est un groupe, si $g \in G$ et si $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation telle que $\rho(g) \neq \pm 1$, alors :

1. Pour tout $\delta \in \mathrm{Inn}_\rho(G)$, on a $\langle \delta(g), P^\rho(g) \rangle = 0$.
2. Si g' est un conjugué de g dans G , alors $\langle d(g), P^\rho(g) \rangle = \langle d(g'), P^\rho(g') \rangle$, pour tout $d \in \mathrm{Der}_\rho(G)$.

Les trois inclusions données dans le lemme sont des conséquences directes de la première assertion ; la seconde partie résulte, quant à elle, de la deuxième assertion en observant que $t_j^{(i)}$ (resp. s_j) est un méridien de K , pour tout $i = 1, 2$ et tout $j = 1, \dots, n$ (resp. pour tout $j = 1, \dots, 2n$). $\square$

Lemme 4.7. — *Pour toute représentation irréductible $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, on a les inclusions $\mathrm{Inn}_\rho(M_K) \subset \mathrm{Der}_\rho(M_K)_0 \subset \mathrm{Der}_\rho(M_K)$.*

Démonstration. — L'inclusion $\mathrm{Inn}_\rho(M_K) \subset \mathrm{Der}_\rho(M_K)_0$ s'obtient par des arguments analogues à ceux utilisés dans la démonstration du lemme précédent. $\square$

Remarque 4.8. — On a établi dans le Corollaire 1.32 que $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière si, et seulement si, $\dim \mathrm{Der}_\rho(M_K) = 4$. Notons de plus, que si ρ est régulière, alors ou bien

$\text{Der}_\rho(M_K)_0 = \text{Inn}_\rho(M_K)$ – lorsque ρ est m -régulière – ou bien $\text{Der}_\rho(M_K)_0 = \text{Der}_\rho(M_K)$ – lorsque ρ est régulière sans être m -régulière.

Rappelons que si $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ est une représentation régulière du groupe du nœud K , alors ρ est réduite au sens des schémas, $[\rho]$ est un point lisse de $\widehat{R}(M_K)$ et $\widehat{R}(M_K)$ possède une structure de variété lisse unidimensionnelle au voisinage de $[\rho]$ (cf. Corollaire 1.34). L'ensemble $\widetilde{R}(M_K)$ possède donc une structure de variété lisse de dimension 4 au voisinage de ρ et on a un isomorphisme entre $T_\rho \widetilde{R}(M_K)$ et $\text{Der}_\rho(M_K)$ (cf. Lemme 1.23). De plus, pour toute représentation régulière $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$, on a l'interprétation cohomologique de l'espace tangent en $[\rho]$ à $\widehat{R}(M_K)$ suivante : $T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \cong H_\rho^1(M_K)$ (cf. Proposition 1.35).

Si G est l'un des groupes $\pi_1(B_1)$, $\pi_1(B_2)$, ou $\pi_1(S)$ et si $\mathcal{G}$ est l'un des systèmes de générateurs $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ou $\mathcal{S}$ respectivement, alors l'inclusion (1.3) induit une inclusion de $T_\rho \widetilde{R}^\mathcal{G}(G)$ dans $\text{Der}_\rho^\mathcal{G}(G)$ et on a le résultat suivant.

Assertion 4.9. — Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation irréductible. Les inclusions

$$T_{\rho_i} \widetilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i) \hookrightarrow \text{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i), \quad i = 1, 2, \quad \text{et} \quad T_{\rho_S} \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S) \hookrightarrow \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)$$

sont des isomorphismes,

Démonstration. — D'après l'Assertion 3.3, $\widetilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ (resp. $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$) est une variété de dimension $2n + 1$ (resp. $4n - 2$). Comme de plus, $\dim \text{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i) = 2n + 1$ (resp. $\dim \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) = 4n - 2$), l'inclusion $T_{\rho_i} \widetilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i) \hookrightarrow \text{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$, $i = 1, 2$, (resp. $T_{\rho_S} \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S) \hookrightarrow \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)$) est un isomorphisme pour des raisons de dimension. $\square$

Au moyen des isomorphismes de l'assertion précédente, on munit les espaces $\text{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ et $\text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)$ des formes volume induites respectivement par celles des variétés $\widetilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$ et $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$ (cf. Paragraphe 3.7.1).

Ces isomorphismes entre les sous-espaces de dérivations et les espaces tangents aux sous-espaces de représentations sont au cœur de la démonstration du Théorème 4.1 qui suit.

Une fois ces notations fixées, pour toute représentation régulière $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ on dispose donc du complexe acyclique suivant :

$$(4.3) \quad \mathcal{C}^\rho : 0 \longrightarrow \text{Der}_\rho(M_K) \xrightarrow{p^*} \text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \xrightarrow{\kappa^*} \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0$$

et des identifications $\text{Der}_\rho(M_K) \cong T_\rho \widetilde{R}(M_K)$, $\text{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i) \cong T_{\rho_i} \widetilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$, $i = 1, 2$, et $\text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \cong T_{\rho_S} \widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$. On munit chacune des composantes du complexe $\mathcal{C}^\rho$ de formes volume de référence de la façon suivant :

- on munit $\mathcal{C}_2^\rho = \text{Der}_\rho(M_K)$ de la 4-forme volume w_ρ (cf. Paragraphe 4.2.2),
- on munit $\mathcal{C}_0^\rho = \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)$ de la forme volume induite par celle de la variété $\widetilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$,
- on munit enfin $\mathcal{C}_1^\rho = \text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ de la forme volume produit déduite des formes volume naturelles sur les variétés $\widetilde{R}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$, $i = 1, 2$.

Considérons enfin les applications linéaires :

$$\begin{aligned} \pi_i : \text{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad d \mapsto \langle d(t_1^{(i)}), P^{\rho_i}(t_1^{(i)}) \rangle, \quad i = 1, 2, \\ \pi_S : \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad d \mapsto \langle d(s_1), P^{\rho_S}(s_1) \rangle. \end{aligned}$$

On constate sans mal qu'il s'agit de surjections et que l'on a :

$$\mathrm{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i)_0 = \ker \pi_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 = \ker \pi_S.$$

Ces égalités permettent de munir les espaces $\mathrm{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i)_0$, $i = 1, 2$, et $\mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0$ de formes volume de référence, que l'on déduit de celles sur les espaces $\mathrm{Der}_{\rho_i}^{\mathcal{T}_i}(B_i)$, $i = 1, 2$, et $\mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)$ respectivement.

4.3. Démonstration du théorème d'égalité des formes volume et torsion

Dans la suite, ρ désigne une représentation régulière de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$.

L'idée à la base de la démonstration du Théorème 4.1 est de comparer la torsion du complexe *acyclique*

$$\mathcal{T}^\rho : 0 \longrightarrow \mathrm{T}_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) \longrightarrow \mathrm{T}_{[\rho_1]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \times \mathrm{T}_{[\rho_2]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \longrightarrow \mathrm{T}_{[\rho_S]} \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0$$

dans lequel chacune des composantes est munie de la forme volume naturelle décrite dans la Section 3.6 à la torsion du complexe *non acyclique* de l'extérieur du nœud à coefficients dans la représentation $\mathrm{Ad} \circ \rho$

$$\mathcal{X}^\rho : 0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{d_2^\rho} \mathfrak{su}(2)^{2n} \xrightarrow{d_1^\rho} \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \longrightarrow 0$$

dans lequel chacune des composantes est munie de la forme volume produit sur $\mathfrak{su}(2)^m$, le groupe $H_0(\mathcal{X}^\rho) = H_\rho^2(M_K)$ du générateur de référence $h_\rho^{(2)}$, décrit dans la Section 2.6.2, et $H_1(\mathcal{X}^\rho) = H_\rho^1(M_K)$ d'un générateur quelconque, par l'intermédiaire du complexe *non acyclique* suivant :

$$\mathcal{D}^\rho : 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_\rho(M_K) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}(B_2) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow 0$$

dont chacune des composantes est munie de la forme volume décrite dans le Paragraphe 4.2.2 et l'homologie du générateur de référence $h_\rho^{(2)}$ (cf. Assertion 4.5). L'intérêt d'utiliser ce complexe tient au fait que, contrairement à $\mathcal{X}^\rho$, le complexe $\mathcal{D}^\rho$ n'a pas d'homologie en dimension 1 et seulement de l'homologie en dimension 0 : $H_0(\mathcal{D}^\rho) \cong H_\rho^2(M_K) \cong H_0(\mathcal{X}^\rho)$ (cf. Assertion 4.5).

La démonstration du Théorème 4.1 nécessite cinq étapes. Commençons par en décrire la trame et les principales articulations. Le but poursuivi dans la démonstration consiste d'une part à relier la torsion de Reidemeister du complexe acyclique $\mathcal{T}^\rho$ à la torsion de Reidemeister du complexe non acyclique $\mathcal{D}^\rho$ et d'autre part à relier les torsions de Reidemeister des complexes non acycliques $\mathcal{D}^\rho$ et $\mathcal{X}^\rho$.

La première partie fait l'objet des trois premières étapes. Dans la première et la deuxième étape, on établit les résultats préliminaires permettant de calculer, dans la troisième, la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}^\rho$ (cf. Lemme 4.14). Ajoutons, que par souci de clarté, nous avons séparé – dans les deuxième et troisième étapes – le cas où la représentation ρ est m -régulière de celui où elle est régulière sans être m -régulière.

La seconde partie est traitée dans les deux dernières étapes. Dans la quatrième étape, on calcule la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{X}^\rho$ (cf. Lemme 4.19) en appliquant le Lemme de Multiplicativité au diagramme commutatif (cf. Assertion 4.18) suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{X}^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2)^{2n} & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \mathcal{D}^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}(B_2) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E} : 0 & \longrightarrow & H_\rho^1(M_K) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

En examinant la torsion de Reidemeister de la dernière ligne du diagramme précédent, qui est un complexe non acyclique, tout ceci permettra de conclure à l'égalité des formes volume et torsion dans la cinquième et ultime étape intitulée “Fin de la démonstration”.

4.3.1. Première étape. — Le but de cette première partie est de comparer la torsion de Reidemeister du complexe acyclique

$$\mathcal{C}^\rho : 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_\rho(M_K) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0$$

à celle du complexe acyclique

$$\mathcal{T}^\rho : 0 \longrightarrow \mathrm{T}_{[\rho]} \hat{R}(M_K) \longrightarrow \mathrm{T}_{[\rho_1]} \hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \times \mathrm{T}_{[\rho_2]} \hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \longrightarrow \mathrm{T}_{[\rho_S]} \hat{R}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0$$

dans lequel :

- $\mathrm{T}_{[\rho]} \hat{R}(M_K)$ est muni de la 1-forme volume $\omega_{[\rho]}^K$ construite dans la Section 3.6,
- $\mathrm{T}_{[\rho_1]} \hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \mathrm{T}_{[\rho_2]} \hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ est muni de la $(4n - 4)$ -forme volume

$$(-1)^n \left(v_{[\rho_1]}^{\hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1)} \wedge v_{[\rho_2]}^{\hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)} \right) \quad (\text{cf. Paragraphe 3.7.1}),$$

- $\mathrm{T}_{[\rho_S]} \hat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ est muni de la $(4n - 5)$ -forme volume $v_{[\rho_S]}^{\hat{R}^{\mathcal{S}}(S)}$ (cf. Paragraphe 3.7.1).

D'après l'équation (3.6), ces trois formes volume sont compatibles entre elles. Prenons des bases sur les espaces $\mathrm{T}_{[\rho]} \hat{R}(M_K)$, $\mathrm{T}_{[\rho_1]} \hat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \mathrm{T}_{[\rho_2]} \hat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$ et $\mathrm{T}_{[\rho_S]} \hat{R}^{\mathcal{S}}(S)$ qui sont compatibles avec les formes volume qu'ils portent (cf. Paragraphe 2.1.1) et calculons la torsion du complexe acyclique $\mathcal{T}^\rho$. En utilisant la Remarque 2.4 n°5, on voit que $\mathrm{Tor}(\mathcal{T}^\rho)$ ne dépend pas du choix de ces bases (mais seulement de celui des formes volume de référence) et que l'on a :

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{T}^\rho) = 1.$$

Pour comparer les torsions de Reidemeister de $\mathcal{C}^\rho$ et $\mathcal{T}^\rho$ on utilise le diagramme commutatif⁽³⁾ suivant dont chaque ligne est un complexe acyclique :

⁽³⁾La commutativité du diagramme résulte des isomorphismes donnés dans les Assertions 1.21 & 4.9.

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathcal{C}' : 0 & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathcal{C}^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathcal{T}^\rho : 0 & \longrightarrow & T_{[\rho]} \widehat{R}(M_K) & \longrightarrow & T_{[\rho_1]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \times T_{[\rho_2]} \widehat{R}^{\mathcal{T}_2}(B_2) & \longrightarrow & T_{[\rho_S]} \widehat{R}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Chacune des composantes du complexe $\mathcal{C}^\rho$ est munie de la forme volume décrite dans le Paragraphe 4.2.3. D'autre part, les espaces $\mathcal{C}'_0$, $\mathcal{C}'_2$ sont munis de la forme volume $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ et l'espace $\mathcal{C}'_1$ de la forme volume produit $(-1)^n \mathrm{pr}_1^*(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) \wedge \mathrm{pr}_2^*(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k})$, $\mathrm{pr}_i : \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ désignant la projection canonique.

Avec ces notations, on a le lemme suivant :

Lemme 4.10. — *La torsion de Reidemeister de $\mathcal{C}^\rho$ vaut : $\mathrm{Tor}(\mathcal{C}^\rho) = (-1)^{n+1}$.*

Démonstration. — Pour tout $i = 0, 1, 2$, les formes volume sur les composantes des suites exactes $0 \rightarrow \mathcal{C}'_i \rightarrow \mathcal{C}^\rho_i \rightarrow \mathcal{T}^\rho_i \rightarrow 0$ sont compatibles entre elles (cf. Paragraphes 4.2.3 & 3.7.1).

D'après le Lemme de Multiplicativité, on a :

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{C}^\rho) = (-1)^\alpha \mathrm{Tor}(\mathcal{C}') \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{T}^\rho),$$

avec $\alpha = \alpha(\mathcal{C}', \mathcal{T}^\rho) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.1).

	$\mathcal{C}'$	$\mathcal{T}^\rho$
α_0	1	1
α_1	1	1
α_2	0	0

$$\alpha(\mathcal{C}', \mathcal{T}^\rho) = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(\mathcal{C}') \alpha_i(\mathcal{T}^\rho) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 4.1. Les complexes $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{T}^\rho$.

On constate par ailleurs, que $\mathrm{Tor}(\mathcal{C}') = (-1)^n$. D'où l'on tire que

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{C}^\rho) = (-1)^{n+1}.$$

□

4.3.2. Deuxième étape. — Dans cette partie, on compare la torsion de Reidemeister du complexe acyclique :

$$\mathcal{C}^\rho : 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_\rho(M_K) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2) \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0$$

à celle du complexe

$$\mathcal{D}_0^\rho : 0 \longrightarrow \mathrm{Der}_\rho(M_K)_0 \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1)_0 \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)_0 \longrightarrow \mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 \longrightarrow 0$$

qui peut ne pas être acyclique.

Plus précisément, le complexe $\mathcal{D}_0^\rho$ est acyclique si, et seulement si, $\mathrm{Der}_\rho(M_K)_0 = \mathrm{Inn}_\rho(M_K)$, c'est-à-dire si, et seulement si, ρ est m -régulière. Dans le cas contraire, l'homologie de $\mathcal{D}_0^\rho$ se réduit à $H_*(\mathcal{D}_0^\rho) = H_0(\mathcal{D}_0^\rho) \cong \mathbb{R}$.

Pour plus de clarté, on traite séparément les deux cas qui peuvent se produire.

1. Cas où ρ est m -régulière. — Pour comparer la torsion de Reidemeister des complexes acycliques $\mathcal{C}^\rho$ et $\mathcal{D}_0^\rho$, on utilise le diagramme commutatif suivant (dont chaque ligne est un complexe acyclique) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_0^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_\rho(M_K)_0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1)_0 \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)_0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \pi_1 \oplus \pi_2 & & \downarrow \pi_S \\ \mathcal{D}' : 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

et dans lequel

$$\begin{aligned} \beta : \mathrm{Der}_\rho(M_K) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad d \mapsto \langle d(m), P^\rho(m) \rangle, \\ \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x, -x) \text{ et } \sigma : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y. \end{aligned}$$

Remarque 4.11. — La commutativité du diagramme précédent tient au fait que tous les éléments des systèmes de générateurs $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$, et $\mathcal{S}$ sont conjugués au méridien m de K .

Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Lemme 4.12. — La torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}_0^\rho$ vaut :

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) = (-1)^n \tau,$$

avec $\tau = \omega_{[\rho]}^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(h_\rho^{(1)}(m)))$ et où $h_\rho^{(1)}(m) \in H_\rho^1(M_K)$ est défini dans le Paragraphe 2.7.1.

Démonstration. — Chacune des composantes des complexes $\mathcal{D}_0^\rho$, $\mathcal{C}^\rho$ et $\mathcal{D}'$ possède une forme volume de référence. De plus, en s'appuyant sur les observations faites dans le Paragraphe 4.2.3, on constate que, pour $i = 0, 1$, les formes volume sur les composantes des suites exactes $0 \longrightarrow (\mathcal{D}_0^\rho)_i \longrightarrow \mathcal{C}_i^\rho \longrightarrow \mathcal{D}'_i \longrightarrow 0$ sont compatibles entre elles.

La forme volume sur $\mathcal{D}'_2$, qui est compatible avec la 3-forme volume usuelle $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ sur $(\mathcal{D}'_0)_2$ et avec la 4-forme volume w_ρ sur $\mathcal{C}'_2$ est la 1-forme volume usuelle sur $\mathbb{R}$ multipliée par τ^{-1} . En effet, l'homomorphisme $\beta : \text{Der}_\rho(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ se factorise à travers $H^1_\rho(M_K) = \text{Der}_\rho(M_K)/\text{Inn}_\rho(M_K)$ et donne l'homomorphisme f_m^ρ (voir Paragraphe 2.7.1). Désignons par z_ρ^ω le générateur de $H^1_\rho(M_K)$ tel que $\omega_{[\rho]}^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\omega)) = 1$. On a $\tau = \omega_{[\rho]}^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(h_\rho^{(1)}(m))) = [h_\rho^{(1)}(m)/z_\rho^\omega]$, de sorte que $f_m^\rho(z_\rho^\omega) = \tau^{-1}$.

D'après le Lemme de Multiplicativité, $\text{Tor}(\mathcal{C}^\rho) = (-1)^\alpha \text{Tor}(\mathcal{D}'_0) \cdot \text{Tor}(\mathcal{D}')$, avec $\alpha = \alpha(\mathcal{D}'_0, \mathcal{D}') = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.2).

	$\mathcal{D}'_0$	$\mathcal{D}'$
α_0	1	1
α_1	1	1
α_2	0	0

$$\alpha(\mathcal{D}'_0, \mathcal{D}') = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(\mathcal{D}'_0) \alpha_i(\mathcal{D}') = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 4.2. Les complexes $\mathcal{D}'_0$ et $\mathcal{D}'$.

Par ailleurs, on a $\text{Tor}(\mathcal{D}') = \tau^{-1}$, de sorte que $\text{Tor}(\mathcal{C}^\rho) = -\tau^{-1} \cdot \text{Tor}(\mathcal{D}'_0)$. On conclut à l'aide du Lemme 4.10. $\square$

2. Cas où ρ n'est pas m -régulière. — Pour comparer la torsion de Reidemeister du complexe acyclique $\mathcal{C}^\rho$ à celle du complexe non acyclique $\mathcal{D}'_0$, on utilise cette fois le diagramme commutatif suivant (en notant que $\text{Der}_\rho(M_K) = \text{Der}_\rho(M_K)_0$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{D}'_0 : 0 & \longrightarrow & \text{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1)_0 \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)_0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}^\rho : 0 & \longrightarrow & \text{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \pi_1 \oplus \pi_2 & & \downarrow \pi_S \\
 \mathcal{D}'_1 : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

dans lequel $\sigma : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $\sigma(x, y) = x + y$.

La suite exacte longue en homologie $\mathcal{H}$ associée à la suite exacte de complexes $0 \longrightarrow \mathcal{D}'_0 \longrightarrow \mathcal{C}^\rho \longrightarrow \mathcal{D}'_1 \longrightarrow 0$ se réduit ici à :

$$(4.4) \quad \mathcal{H} : 0 \longrightarrow H_1(\mathcal{D}'_1) \xrightarrow{\cong} H_0(\mathcal{D}'_0) \longrightarrow 0.$$

Comme $H_1(\mathcal{D}'_1) = \ker \sigma = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, en prenant $(1, -1)$ pour générateur⁽⁴⁾ de $\ker \sigma$, on a $\text{Tor}(\mathcal{D}'_1) = 1$ – en tenant compte du fait que $|\mathcal{D}'_1| = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Avec ces notations, on établit le lemme suivant :

Lemme 4.13. — *En munissant $H_0(\mathcal{D}_0^\rho)$ d'un générateur quelconque, la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}_0^\rho$ vérifie :*

$$\text{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) = (-1)^n (\text{tor}(\mathcal{H}))^{-1}.$$

Démonstration. — Comme dans la démonstration du Lemme 4.12, on vérifie que les formes volume sur les composantes des suites exactes $0 \longrightarrow (\mathcal{D}_0^\rho)_i \longrightarrow \mathcal{C}_i^\rho \longrightarrow (\mathcal{D}'_1)_i \longrightarrow 0$ sont compatibles entre elles, pour tout $i = 0, 1, 2$.

Une application du Lemme de Multiplicativité fournit l'égalité :

$$\text{Tor}(\mathcal{C}^\rho) = (-1)^{\varepsilon + \alpha} \text{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) \cdot \text{Tor}(\mathcal{D}'_1) \cdot \text{tor}(\mathcal{H}),$$

avec $\alpha = \alpha(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{D}'_1) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{C}^\rho, \mathcal{D}'_1) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.3).

	$\mathcal{D}_0^\rho$	$\mathcal{D}'_1$
α_0	1	1
α_1	1	1
α_2	0	1

	$\mathcal{D}_0^\rho$	$\mathcal{C}^\rho$	$\mathcal{D}'_1$
β_0	1	0	0
β_1	1	0	1
β_2	1	0	1

$$\alpha(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{D}'_1) = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(\mathcal{D}_0^\rho) \alpha_i(\mathcal{D}') = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{C}^\rho, \mathcal{D}'_1) = \sum_{i \geq 0} [(\beta_i(\mathcal{C}^\rho) + 1)(\beta_i(\mathcal{D}_0^\rho) + \beta_i(\mathcal{D}'_1)) + \beta_{i-1}(\mathcal{D}_0^\rho) \beta_i(\mathcal{D}'_1)] = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 4.3. Les complexes $\mathcal{D}_0^\rho$, $\mathcal{C}^\rho$ et $\mathcal{D}'_1$.

Le Lemme 4.10 et l'égalité $\text{Tor}(\mathcal{D}'_1) = 1$ permettent de conclure que :

$$\text{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) = (-1)^n (\text{tor}(\mathcal{H}))^{-1}.$$

□

4.3.3. Troisième étape. — C'est ici l'étape la plus délicate. On veut comparer la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}_0^\rho$ à celle du complexe non acyclique suivant

$$\mathcal{D}^\rho : 0 \longrightarrow \text{Der}_\rho(M_K) \xrightarrow{p^*} \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) \xrightarrow{\kappa^*} \text{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow 0,$$

dans lequel chaque composante est munie de la forme volume de référence décrite dans le Paragraphe 4.2.2.

⁽⁴⁾Ce choix, a priori arbitraire, n'affectera en fait pas les calculs comme nous le verrons.

On a vu (cf. Assertion 4.5) que l'homologie de $\mathcal{D}^\rho$ se réduisait à $H_*(\mathcal{D}^\rho) = H_0(\mathcal{D}^\rho) \cong H_\rho^2(M_K) \cong \mathbb{R}$. On munit $H_0(\mathcal{D}^\rho)$ du générateur de référence $h_\rho^{(2)}$ construit dans le Paragraphe 2.6.2 et on peut associer au complexe $\mathcal{D}^\rho$ le complexe acyclique suivant :

$$\mathcal{D}_{\text{ac}}^\rho : 0 \longrightarrow \text{Der}_\rho(M_K) \xrightarrow{p^*} \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) \xrightarrow{\kappa^*} \text{Der}_{\rho_S}(S) \xrightarrow{\delta} H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0$$

dans lequel l'opérateur bord $\delta : \text{Der}_{\rho_S}(S) \rightarrow H_\rho^2(M_K)$ est induit par l'opérateur de connexion $\delta : H_{\rho_S}^1(S) \rightarrow H_\rho^2(M_K)$ de la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée au scindement $M_K = B_1 \cup_S B_2$ et à la représentation ρ .

Avec ces notations, on établit le résultat suivant :

Lemme 4.14. — *En munissant $H_0(\mathcal{D}^\rho) = H_\rho^2(M_K)$ du générateur $h_\rho^{(2)}$, la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}^\rho$ vaut :*

$$\text{Tor}(\mathcal{D}^\rho) = \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X})),$$

où $\mathfrak{X}$ est le complexe (2.11).

Démonstration. — Désignons par $\bar{\mathcal{D}}^\rho$ le complexe déduit de $\mathcal{D}^\rho$ en changeant la forme volume de référence sur $\mathcal{D}_1^\rho = \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2)$ et en prenant, avec les notations du Paragraphe 4.2.2, la forme volume v au lieu de la forme volume $(-1)^n v$. Il est bien évident que les complexes $\mathcal{D}^\rho$ et $\bar{\mathcal{D}}^\rho$ ont la même homologie et on peut noter, grâce à la formule de changement de base (2.6), que

$$\text{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = (-1)^n \text{Tor}(\mathcal{D}^\rho).$$

En raison du choix des formes volume de référence sur les composantes du complexe $\mathcal{D}_0^\rho$, et pour des raisons de compatibilité entre elles de ces formes volume, on va plutôt calculer la torsion du complexe $\bar{\mathcal{D}}^\rho$ pour obtenir celle du complexe $\mathcal{D}^\rho$. Pour cela, répétons la dichotomie faite dans la deuxième étape et traitons séparément le cas où la représentation ρ est m -régulière de celui où elle est régulière sans être m -régulière.

1. Cas où ρ est m -régulière. — Introduisons les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \beta : \text{Der}_\rho(M_K) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad d \mapsto \langle d(m), P^\rho(m) \rangle, \\ \beta_i : \text{Der}_{\rho_i}(B_i) &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad d \mapsto \left(\langle d(t_1^{(i)}), P^{\rho_i}(t_1^{(i)}) \rangle, \dots, \langle d(t_n^{(i)}), P^{\rho_i}(t_n^{(i)}) \rangle \right) \quad (i = 1, 2), \\ \beta_S : \text{Der}_{\rho_S}(S) &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad d \mapsto (\langle d(s_1), P^{\rho_S}(s_1) \rangle, \dots, \langle d(s_{2n}), P^{\rho_S}(s_{2n}) \rangle). \end{aligned}$$

On a :

$$\text{Der}_\rho(M_K)_0 = \ker \beta, \quad \text{Der}_{\rho_i}^{T_i}(B_i)_0 = \ker \beta_i, \quad \text{Der}_{\rho_S}^S(S)_0 = \ker \beta_S$$

et on voit qu'il s'agit de trois surjections, car $\dim \text{Der}_\rho(M_K) = 1 + \dim \text{Der}_\rho(M_K)_0$, $\dim \text{Der}_{\rho_i}(B_i) = n + \dim \text{Der}_{\rho_i}(B_i)_0$ et $\dim \text{Der}_{\rho_S}^S(S) = 2n + \dim \text{Der}_{\rho_S}^S(S)_0$. On constate aussi que le diagramme suivant, dans lequel $\psi : H_\rho^2(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'isomorphisme qui à $h_\rho^{(2)}$

fait correspondre 1, est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{D}_0^{\rho'} : 0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho}(M_K)_0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1)_0 \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)_0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{\mathcal{D}}_{ac}^{\rho} : 0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho}(M_K) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}(S) & \longrightarrow H_{\rho}^2(M_K) \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \beta & & \downarrow \beta_1 \oplus \beta_2 & & \downarrow \beta_S & & \downarrow \psi \\
 \mathcal{D}'' : 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On remarque de plus que chaque ligne du diagramme précédent est un complexe acyclique.

La 1-forme volume sur $\mathcal{D}_3''$ (resp. $\mathcal{D}_0''$), qui est compatible avec les autres formes volume sur les composantes de la première (resp. quatrième) colonne, est la 1-forme volume usuelle sur $\mathbb{R}$ multipliée par τ^{-1} (resp. la 1-forme volume usuelle sur $\mathbb{R}$) (voir la démonstration du Lemme 4.12).

Comme $\pi_1(B_i)$ est le groupe libre engendré par $\mathcal{T}_i$, la forme volume sur $\mathcal{D}_2''$ qui est compatible avec les formes volume de référence sur $\text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1)_0 \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)_0$ et sur $\text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2)$ est la forme volume produit usuelle sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.

La forme volume sur $\text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0$ est définie grâce à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 \longrightarrow \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \xrightarrow{\pi_S} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

dans laquelle $\text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) \cong \text{T}_{\rho_S} \tilde{R}^{\mathcal{S}}(S)$ est muni de la forme volume $v_{\rho_S}^{\tilde{R}^{\mathcal{S}}(S)}$ donnée dans le Paragraphe 3.7.1. Il s'en suit – en appliquant le Lemme 2.1 au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S) & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(D^*)_0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(D^*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

– que la forme volume sur $\text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0$ est l'opposée de la forme volume que l'on peut définir sur ce même espace en utilisant la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(S)_0 \longrightarrow \text{Der}_{\rho_S}^{\mathcal{S}}(D^*)_0 \xrightarrow{\psi_S} \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0.$$

On en déduit – en appliquant le Lemme 2.1 au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}^S(S)_0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}^S(D^*) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Der}_{\rho_S}(D^*) & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

– que la forme volume sur $\mathcal{D}_1''$, qui est compatible avec les formes volume sur $\mathrm{Der}_{\rho_S}^S(S)_0$ et sur $\mathrm{Der}_{\rho_S}(S)$, est l'opposée de la forme volume produit usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Pour calculer $\mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho)$, on applique le Lemme de Multiplicativité. Mais notons d'abord que :

Assertion 4.15. — *On a les deux égalités suivantes :*

1. $\mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = -(\mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{ac}}^\rho))^{-1}$.
2. $\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^{\rho'}) = (\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho))^{-1}$.

Démonstration de l'assertion. — Le premier point s'obtient en s'appuyant sur le fait que $|\bar{\mathcal{D}}^\rho| = 1$ et en adaptant la formule (2.5).

Le second est conséquence directe de l'équation (2.5). $\square$

Comme de plus, d'après le Lemme 4.12, $\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) = (-1)^n \tau$, on a $\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^{\rho'}) = (-1)^n \tau^{-1}$.

Les trois complexes $\mathcal{D}_0^{\rho'}$, $\bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{ac}}^\rho$ et $\mathcal{D}''$ étant acycliques et puisque $\alpha = \alpha(\mathcal{D}_0^{\rho'}, \mathcal{D}'') = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.4), le Lemme de Multiplicativité combiné à l'égalité $\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^{\rho'}) = (-1)^n \tau^{-1}$ donne :

$$(4.5) \quad \mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{ac}}^\rho) = (-1)^{n+1} \tau^{-1} \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{D}'').$$

	$\mathcal{D}_0^{\rho'}$	$\mathcal{D}''$
α_0	0	1
α_1	1	1
α_2	1	1
α_3	0	0

$$\alpha(\mathcal{D}_0^{\rho'}, \mathcal{D}'') = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(\mathcal{D}_0^{\rho'}) \alpha_i(\mathcal{D}'') = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 4.4. Les complexes $\mathcal{D}_0^{\rho'}$ et $\mathcal{D}''$.

La suite de la démonstration est consacrée au calcul de la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}''$.

Soit $\mathcal{M}$ le complexe obtenu de $\mathcal{D}''$ en munissant chacune de ses composantes de la forme volume produit usuelle sur $\mathbb{R}^p$. En appliquant la formule de changement de bases (2.6), on a

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{D}'') = -\tau \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{M}).$$

L'assertion suivante a pour objet le calcul de la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{M}$.

Assertion 4.16. — *La torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{M}$ vaut :*

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{M}) = -\mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})).$$

Démonstration de l'assertion. — Elle nécessite plusieurs étapes : on commence par identifier le complexe $\mathcal{M}$ avec une suite de Mayer-Vietoris, on montre ensuite que sa torsion de Reidemeister vaut ± 1 , on termine en reliant $\mathrm{Tor}(\mathcal{M})$ avec $\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})$.

(i). — Observons que le complexe acyclique $\mathcal{M}$ peut s'interpréter de la façon suivante.

Considérons une boue D^3 de dimension 3 contenant K et désignons par $\widehat{M_K} = M_K \cap D^3$, $\widehat{B_1} = B_1 \cap D^3$ et $\widehat{B_2} = B_2 \cap D^3$. On vérifie aisément que $H^1(\widehat{M_K}; \mathbb{R}) \cong H^1(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, que $H^1(\widehat{B_i}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, et en utilisant la suite exacte longue associée à la paire $(\widehat{M_K}, \partial M_K)$, que $H^2(\widehat{M_K}; \mathbb{R}) \cong H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris associée au scindement $\widehat{M_K} = \widehat{B_1} \cup \widehat{B_2}$ se réduit à :

$$(4.6) \quad 0 \longrightarrow H^1(\widehat{M}_K; \mathbb{R}) \xrightarrow{d^*} H^1(\widehat{B}_1; \mathbb{R}) \oplus H^1(\widehat{B}_2; \mathbb{R}) \xrightarrow{s^*} H^1(D^2 \setminus K; \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} H^2(\widehat{M}_K; \mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

Pour vérifier que le complexe (4.6) s'identifie au complexe $\mathcal{M}$, introduisons les notations suivantes : le bord de B_i , $i = 1, 2$, est une surface de genre n – réunion de n cylindres disjoints notés $T_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq n$, avec S – et le bord de S est la réunion disjointe de $2n$ cercles notés S_j^1 , $1 \leq j \leq 2n$; de plus, les bases de $T_i^{(2)}$ sont les cercles S_{2i-1}^1 et S_{2i}^1 et les bases de $T_i^{(1)}$ sont les cercles $S_{j_{i,1}}^1$ et $S_{j_{i,2}}^1$, où $j_{i,1}$ et $j_{i,2}$ sont les deux entiers dont les images par ζ se trouvent sur l'anse $a_i^{(1)}$ (voir Figures 3.7 & 4.1).

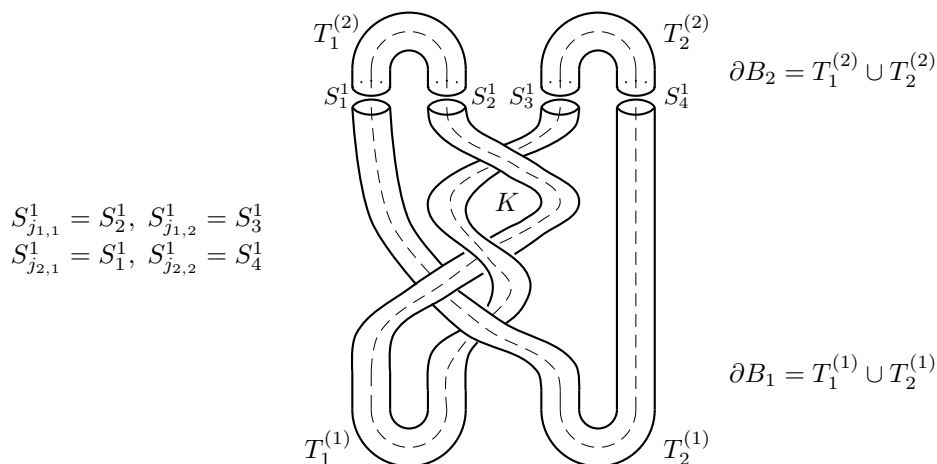


FIGURE 4.1. Le bord de l'extérieur du nœud en huit K et les tubes $T_j^{(i)}$.

On pose aussi $i : \partial M_K \hookrightarrow M_K$, $j_i : S_i^1 \hookrightarrow S$, $k_i^{(1)} : T_i^{(1)} \hookrightarrow B_1$, $k_i^{(2)} : T_i^{(2)} \hookrightarrow B_2$, $l_i : S_i^1 \hookrightarrow D^*$ et $\iota : \partial M_K \hookrightarrow \widehat{M}_K$ les injections canoniques.

Ecrivons les suites de Mayer-Vietoris associées à $M_K = B_1 \cup_S B_2$, à $\partial M_K = \bigcup_{i=1}^n T_i^{(1)} \cup_{\partial S} \bigcup_{i=1}^n T_i^{(2)}$ et à $\widehat{M}_K = \widehat{B}_1 \cup_{D^*} \widehat{B}_2$ respectivement. En s'appuyant sur la naturalité des constructions et sur le fait que $H_{\rho_S}^1(S_i^1) = \mathbb{R} \cdot P^{\rho_S}(s_i)$ et $H_\rho^1(\partial M_K) = \mathbb{R} \cdot P^\rho(m)$, on vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{\rho_1}^1(B_1) \oplus H_{\rho_2}^1(B_2) & \longrightarrow & H_{\rho_S}^1(S) & \xrightarrow{\delta} & H_\rho^2(M_K) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow f_1 \oplus f_2 & & \downarrow \bigoplus_{i=1}^{2n} j_i^* & & \downarrow i^* & & \\
\bigoplus_{i=1}^n H_{\rho_1}^1(T_i^{(1)}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n H_{\rho_2}^1(T_i^{(2)}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{2n} H_{\rho_S}^1(S_i^1) & \xrightarrow{\Delta_1} & H_\rho^2(\partial M_K) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow r_1 \oplus r_2 & & \downarrow \bigoplus_{i=1}^{2n} P^{\rho_S}(s_i) \smile \cdot & & \downarrow P^\rho(m) \smile \cdot & & \\
\bigoplus_{i=1}^n H^1(T_i^{(1)}; \mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n H^1(T_i^{(2)}; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{2n} H^1(S_i^1; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\Delta_2} & H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \iota_1 \oplus \iota_2 & & \uparrow \bigoplus_{i=1}^{2n} l_i^* & & \uparrow \iota^* & & \\
H^1(\widehat{B}_1) \oplus H^1(\widehat{B}_2) & \longrightarrow & H^1(D^*; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial} & H^2(\widehat{M}_K; \mathbb{R}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dans ce diagramme, les applications δ , Δ_1 et Δ_2 , et ∂ qui apparaissent sur chaque ligne sont les opérateurs de connexion des suites de Mayer-Vietoris associées à $M_K = B_1 \cup_S B_2$, à $\partial M_K = \bigcup_{i=1}^n T_i^{(1)} \cup_{\partial S} \bigcup_{i=1}^n T_i^{(2)}$ et à $\widehat{M}_K = \widehat{B}_1 \cup_{D^*} \widehat{B}_2$ respectivement. On a aussi adopté les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \bigoplus_{i=1}^n (k_i^{(1)})^*, & f_2 &= \bigoplus_{i=1}^n (k_i^{(2)})^*, \\
r_1 &= \bigoplus_{i=1}^n P^{\rho_1}(t_i^{(1)}) \smile \cdot, & r_2 &= \bigoplus_{i=1}^n P^{\rho_2}(t_i^{(2)}) \smile \cdot, \\
\iota_1 &= \bigoplus_{i=1}^n (k_i^{(1)})^*, & \iota_2 &= \bigoplus_{i=1}^n (k_i^{(2)})^*.
\end{aligned}$$

Enfin, on a fait les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{i=1}^n H^1(T_i^{(1)}; \mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n H^1(T_i^{(2)}; \mathbb{R}) &\cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n, \\
\bigoplus_{i=1}^{2n} H^1(S_i^1; \mathbb{R}) &\cong \mathbb{R}^{2n} \text{ et } H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tout cela suffit à établir que le complexe $\mathcal{M}$ s'identifie au complexe (4.6).

(ii). — On constate ensuite que la torsion de Reidemeister de $\mathcal{M}$ est le produit alterné de deux déterminants :

$$\text{tor}(\mathcal{M}) = \det P_{s^*} \cdot (\det P_{d^*})^{-1}.$$

Evaluons chacun de ces déterminants séparément :

– *Evaluation de $\det P_{d^*}$.* Puisque

$$P_{d^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

on a $\det P_{d^*} = 1$.

– *Evaluation de $\det P_{s^*}$.* Notons A la matrice de l'homomorphisme s^* , A est donc une matrice de présentation de $H^2(\widehat{M_K}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

On peut obtenir la matrice A de la façon suivante. Pour $1 \leq i \leq n$, la i -ème colonne de A est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de celles d'indice $2i - 1$ et $2i$ qui valent $(-1)^{\varepsilon_{2i-1}}$ et $(-1)^{\varepsilon_{2i}}$ respectivement, où $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(2)}$ (voir la Section 3.10 pour la définition de $\varepsilon_k^{(2)}$) ; la $(n + i)$ -ème colonne de A est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de celles d'indice $j_{i,1}$ et $j_{i,2}$, qui valent $(-1)^{\varepsilon_{j_{i,1}}}$ et $(-1)^{\varepsilon_{j_{i,2}}}$ respectivement, où $j_{i,1}$ et $j_{i,2}$ sont les deux entiers dont les images par ζ se trouvent sur l'anse $a_i^{(1)}$ (voir Figure 3.7).

Illustrons notre propos par un exemple.

Exemple. — Pour le nœud de trèfle décrit sur la Figure 3.7, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{s^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le nœud en huit, que l'on retrouve sur la Figure 4.1, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{s^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reprenons maintenant la démonstration proprement dite. On remarque que chaque ligne de A contient exactement deux coefficients non nuls – égaux à ± 1 – et que chaque colonne contient exactement deux coefficients non nuls – égaux à ± 1 et opposés l'un à l'autre. Ainsi, la somme de toutes les lignes de la matrice A est nulle. Comme de plus, A est une matrice de présentation de $\mathbb{Z}$, le déterminant de la matrice $A_{i,j}$ obtenue de A en lui ôtant sa i -ème ligne et sa j -ème colonne vaut ± 1 .

La matrice P_{s^*} est la matrice obtenue de

$$A' = \left(A \quad \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right)$$

en lui ôtant sa première colonne.

On a : $\det P_{s^*} = \det A_{n,1} = \pm 1$.

De sorte que $\text{tor}(\mathcal{M}) = \det P_{s^*} \cdot (\det P_{d^*})^{-1} = \det P_{s^*} = \pm 1$.

(iii). — Dans cette dernière partie de la démonstration, on montre que

$$\text{Tor}(\mathcal{M}) = -(\text{Tor}(\mathfrak{X}))^{-1}.$$

Le complexe $\mathfrak{X}_* = C^{2-*}(X_K; \mathbb{R})$ s'identifie à :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{R}^{2n-1} \longrightarrow 0,$$

où δ_2 est l'application nulle. De plus, $\ker \delta_2 = H_2(\mathfrak{X}) \cong H^0(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ et $\ker \delta_1 = H_1(\mathfrak{X}) \cong H^1(M_K; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ sont munis des bases de référence décrites dans la Section 2.3 et on vérifie que $|\mathfrak{X}| = 1$.

Considérons le complexe acyclique :

$$\mathfrak{X}' : 0 \longrightarrow H^1(M_K; \mathbb{R}) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{R}^{2n-1} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{pr_{2n}} \mathbb{R} \longrightarrow 0,$$

dans lequel $H^1(M_K; \mathbb{R})$ est muni du générateur m^* , où $\sigma(m^*) = (1, \dots, 1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{R}^{2n}$ et où la matrice de δ_1 est obtenue de A en remplaçant sa dernière ligne par $(0, \dots, 0)$.

Grâce à l'équation (2.5), on a $\text{tor}(\mathfrak{X}') = -(\text{Tor}(\mathfrak{X}))^{-1}$, puis on vérifie que :

$$\text{tor}(\mathfrak{X}') = [b^0/c^0]^{-1} \cdot [b^1\tilde{b}^0/c^1] \cdot [b^2\tilde{b}^1/c^2]^{-1} \cdot [\tilde{b}^2/c^3],$$

avec $[b^0/c^0] = [\tilde{b}^2/c^3] = 1$, $[b^1\tilde{b}^0/c^1] = \det P_{s^*}$ et

$$[b^2\tilde{b}^1/c^2] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{2n+1} = 1.$$

Il en résulte que $\text{tor}(\mathfrak{X}') = \text{tor}(\mathcal{M})$, ce qui achève la démonstration de l'assertion. $\square$

L'équation (4.5) combinée à l'assertion précédente donne :

$$\text{Tor}(\bar{\mathcal{D}}_{\text{ac}}^\rho) = (-1)^{n+1} \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X}))$$

et par suite (cf. Assertion 4.15), on a :

$$\text{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = -(\text{Tor}(\bar{\mathcal{D}}_{\text{ac}}^\rho))^{-1} = (-1)^n \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X})).$$

2. *Cas où ρ n'est pas m -régulière.* — On compare la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{D}_0^\rho$ à celle du complexe $\bar{\mathcal{D}}^\rho$ en s'appuyant cette fois sur le diagramme suivant dont on montre la commutativité en utilisant la même technique que dans le cas précédent :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathcal{D}_0^\rho : 0 & \longrightarrow & \text{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1)_0 \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)_0 & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}^S(S)_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{\mathcal{D}}^\rho : 0 & \longrightarrow & \text{Der}_\rho(M_K) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}(B_2) & \longrightarrow & \text{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \beta_1 \oplus \beta_2 & & \downarrow \beta_S \\
 \mathcal{D}_1'' : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n & \xrightarrow{s} & \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

La suite exacte longue en homologie $\mathcal{H}'$ associée au diagramme précédent se réduit aux deux isomorphismes suivants :

$$(4.7) \quad \mathcal{H}' : 0 \longrightarrow H_1(\mathcal{D}_1'') \xrightarrow{\cong} H_0(\mathcal{D}_0^\rho) \longrightarrow H_0(\bar{\mathcal{D}}^\rho) \xrightarrow{\cong} H_0(\mathcal{D}_1'') \longrightarrow 0$$

et on a $H_1(\mathcal{D}_1'') \cong \ker s \cong \mathbb{R}$, $H_0(\mathcal{D}_1'') \cong \text{coker } s \cong \mathbb{R}$. De plus,

$$\ker s = \{(x, \dots, x, -x, \dots, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Commençons par établir l'assertion suivante :

Assertion 4.17. — *En munissant $H_0(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = H_\rho^2(M_K)$ du générateur $h_\rho^{(2)}$, on a :*

$$\text{tor}(\mathcal{H}') = \text{tor}(\mathcal{H}),$$

où $\mathcal{H}$ est le complexe (4.4).

Démonstration. — Tout d'abord, on constate que

$$H_1(\mathcal{D}_1'') \cong \ker s = \Delta^{(n)} \oplus \Delta^{(n)}(\ker \sigma) = \Delta^{(n)} \oplus \Delta^{(n)}(H_1(\mathcal{D}_1')),$$

avec $\Delta^{(n)} : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x, \dots, x) \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, le générateur $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ de $H_1(\mathcal{D}_1'')$ est l'image, par l'isomorphisme $\Delta^{(n)} \oplus \Delta^{(n)}$, du générateur $(1, -1)$ de $H_1(\mathcal{D}_1')$ que nous avons pris pour faire les calculs (cf. Lemme 4.13).

Par ailleurs, la torsion de Reidemeister de $\mathcal{H}'$ est le produit de l'inverse de deux changements de base, l'un correspondant à l'isomorphisme $H_0(\bar{\mathcal{D}}^\rho) \cong H_0(\mathcal{D}_1'')$ et l'autre à l'isomorphisme $H_1(\mathcal{D}_1'') \cong H_0(\mathcal{D}_0^\rho)$. Dans les bases choisies, le changement de base correspondant à l'isomorphisme $H_0(\bar{\mathcal{D}}^\rho) \cong H_0(\mathcal{D}_1'')$ est trivial. D'autre part, en remarquant que l'on peut toujours relever $\mathbf{x} = (x, \dots, x, -x, \dots, -x) = \Delta^{(n)} \oplus \Delta^{(n)}(x, -x) \in \ker s$ en un élément de $\text{Der}_{\rho_1}^{\mathcal{T}_1}(B_1) \oplus \text{Der}_{\rho_2}^{\mathcal{T}_2}(B_2)$, on voit que le changement de base correspondant à l'isomorphisme $H_1(\mathcal{D}_1'') \cong H_0(\mathcal{D}_0^\rho)$ est égal au changement de bases correspondant à l'isomorphisme $H_1(\mathcal{D}_1') \cong H_0(\mathcal{D}_0^\rho)$. Ceci suffit à établir que $\text{tor}(\mathcal{H}') = \text{tor}(\mathcal{H})$. $\square$

Nous avons maintenant à notre disposition toutes les assertions nécessaires pour le calcul de la torsion de Reidemeister $\text{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho)$ dans le cas où la représentation ρ est régulière sans être m -régulière.

Chacun des espaces des trois colonnes de la suite exacte de complexes précédente $0 \longrightarrow \mathcal{D}_0^\rho \longrightarrow \bar{\mathcal{D}}^\rho \longrightarrow \mathcal{D}_1'' \longrightarrow 0$ possède une forme volume de référence (voir le début de la démonstration du Lemme 4.14 et celle du Lemme 4.13). Une technique semblable à celle utilisée dans le cas m -régulier permet d'établir que la forme volume sur $(\mathcal{D}_1'')_1$ (resp. $(\mathcal{D}_1'')_0$), qui est compatible avec les autres formes volume sur les composantes de la deuxième (resp. troisième) colonne est la forme volume produit usuelle sur $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ (resp. est l'opposée de la forme volume produit usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$).

Le Lemme de Multiplicativité s'applique et donne l'égalité :

$$\mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = (-1)^{\varepsilon+\alpha} \mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{D}_1'') \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}'),$$

avec $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{D}^\rho, \mathcal{D}_1'') = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\alpha = \alpha(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{D}_1'') = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.5).

	$\mathcal{D}_0^\rho$	$\mathcal{D}_1''$
α_0	1	0
α_1	1	0
α_2	1	0

	$\mathcal{D}_0^\rho$	$\bar{\mathcal{D}}^\rho$	$\mathcal{D}_1''$
β_0	1	1	1
β_1	1	1	0
β_2	1	1	0

$$\alpha(\mathcal{D}_0^\rho, \mathcal{D}_1'') = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(\mathcal{D}_0^\rho) \alpha_i(\mathcal{D}_1'') = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\varepsilon(\mathcal{D}_0^\rho, \bar{\mathcal{D}}^\rho, \mathcal{D}_1'') = \sum_{i \geq 0} [(\beta_i(\bar{\mathcal{D}}^\rho) + 1)(\beta_i(\mathcal{D}_0^\rho) + \beta_i(\mathcal{D}_1'')) + \beta_{i-1}(\mathcal{D}_0^\rho) \beta_i(\mathcal{D}_1'')] = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 4.5. Les complexes $\mathcal{D}_0^\rho$, $\bar{\mathcal{D}}^\rho$ et $\mathcal{D}_1''$.

D'après l'assertion précédente, on a $\mathrm{tor}(\mathcal{H}') = \mathrm{tor}(\mathcal{H})$ et en utilisant le Lemme 4.13, on trouve $\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_0^\rho) = (-1)^n (\mathrm{tor}(\mathcal{H}))^{-1}$. De sorte que

$$\mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = (-1)^n \mathrm{Tor}(\mathcal{D}_1'').$$

On calcule ensuite $\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_1'')$ de la façon suivante. Notons d'emblée que $|\mathcal{D}_1''| = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En prenant $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ pour générateur de $\ker s$, 1 pour générateur de $\mathrm{coker} s$ et en s'appuyant sur l'Assertion 4.16, on obtient :

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{D}_1'') = \mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})).$$

Il reste donc

$$\mathrm{Tor}(\bar{\mathcal{D}}^\rho) = (-1)^n \mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(\mathfrak{X})),$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 4.14. □

4.3.4. Quatrième étape. — Pour finir, on compare les torsions de Reidemeister des complexes non acycliques $\mathcal{X}^\rho$ et $\mathcal{D}^\rho$ par l'intermédiaire du diagramme suivant, dont la commutativité fait l'objet de l'Assertion 4.18 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathcal{X}^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{d_2^\rho} & \mathfrak{su}(2)^{2n} & \xrightarrow{d_1^\rho} & \mathfrak{su}(2)^{2n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \cong \downarrow \varphi_1 \oplus (-\varphi_2) & & \cong \downarrow \varphi_S \\
 \mathcal{D}^\rho : 0 & \longrightarrow & \mathrm{Der}_\rho(M_K) & \xrightarrow{p^*} & \mathrm{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}(B_2) & \xrightarrow{\kappa^*} & \mathrm{Der}_{\rho_S}(S) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{E} : 0 & \longrightarrow & H_\rho^1(M_K) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Assertion 4.18. — *Le diagramme précédent est commutatif.*

Démonstration. — Pour établir la commutativité du diagramme précédent, on fait appel à la description explicite des opérateurs bord du complexe $\mathcal{X}^\rho$.

Rappelons que l'on a adopté la convention suivante : si $\rho : G \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation d'un groupe G de type fini, si $g \in G$ et $x \in \mathfrak{su}(2)$, on écrit $g \circ x = \mathrm{Ad}_{\rho(g)}(x)$ (cf. Paragraphe 1.4). Avec cette convention, les opérateurs bord du complexe $\mathcal{X}^\rho$ sont explicitement donnés par les formules suivantes (cf. Section 2.4 et la présentation (3.3) de G_K) :

– pour tout $x \in \mathfrak{su}(2)$,

$$d_2^\rho(x) = \left((1 - t_1^{(1)}) \circ x, \dots, (1 - t_n^{(1)}) \circ x, (1 - t_1^{(2)}) \circ x, \dots, (1 - t_n^{(2)}) \circ x \right),$$

– pour tout $(x_j)_{1 \leq j \leq 2n} \in \mathfrak{su}(2)^{2n}$,

$$d_1^\rho((x_j)_{1 \leq j \leq 2n}) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial t_j^{(1)}} \circ x_{2j-1} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial t_j^{(2)}} \circ x_{2j} \right)_{1 \leq i \leq 2n-1}$$

où $r_i = \kappa_1(s_i)\kappa_2(s_i^{-1})$.

★ Soit $x \in \mathfrak{su}(2)$, on a :

$$(\varphi_1 \oplus (-\varphi_2)) \circ d_2^\rho(x) = (d_1, -d_2) \in \mathrm{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}(B_2),$$

avec

$$d_1(t_i^{(1)}) = (1 - t_i^{(1)}) \circ x, \quad d_2(t_i^{(2)}) = (1 - t_i^{(2)}) \circ x.$$

Par ailleurs,

$$p^* \circ \phi(x) = (\delta_x \circ p_1, -\delta_x \circ p_2) \in \mathrm{Der}_{\rho_1}(B_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}(B_2),$$

où $\phi(x) = \delta_x \in \mathrm{Inn}_\rho(M_K)$ est donnée par $\delta_x(\cdot) = x - \mathrm{Ad}_{\rho(\cdot)}(x)$. On a donc bien $d_1 = \delta_x \circ p_1$ et $d_2 = \delta_x \circ p_2$.

★ Si $(x_j)_{1 \leq j \leq 2n} \in \mathfrak{su}(2)^{2n}$, alors $\varphi_S \circ d_1^\rho((x_j)_{1 \leq j \leq 2n}) = d_S \in \text{Der}_{\rho_S}(S)$ est telle que l'on ait :

$$d_S(s_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_j}{\partial t_k^{(1)}} \circ x_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_j}{\partial t_k^{(2)}} \circ x_{k+n},$$

pour tout $j = 1, \dots, 2n-1$. De plus, $\kappa^* \circ (\varphi_1 \oplus (-\varphi_2))((x_j)_{1 \leq j \leq 2n}) = \kappa^*(d_1, -d_2) = v \in \text{Der}_{\rho_S}(S)$, où $d_1 \in \text{Der}_{\rho_1}(B_1)$ et $d_2 \in \text{Der}_{\rho_2}(B_2)$ sont telles que :

$$d_1(t_j^{(1)}) = x_j \text{ et } d_2(t_j^{(2)}) = x_{j+n} \text{ pour tout } j = 1, \dots, n.$$

On a donc pour tout $j = 1, \dots, 2n-1$,

$$v(s_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \kappa_1(s_j)}{\partial t_k^{(1)}} \circ x_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \kappa_2(s_j)}{\partial t_k^{(2)}} \circ x_{k+n}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial r_j}{\partial t_k^{(1)}} = \frac{\partial \kappa_1(s_j)}{\partial t_k^{(1)}} \text{ et } \frac{\partial r_j}{\partial t_k^{(2)}} = -\frac{\partial \kappa_2(s_j)}{\partial t_k^{(2)}},$$

d'où, quel que soit $j = 1, \dots, 2n-1$, $v(s_j) = d_S(s_j)$. Ceci montre que le diagramme précédent est commutatif. $\square$

Chacune des composantes des complexes $\mathcal{X}^\rho$ et $\mathcal{D}^\rho$ est munie d'une forme volume de référence. En s'appuyant sur le Paragraphe 4.2.2, on sait même que les formes volume sur $\mathcal{D}_0^\rho$ et $\mathcal{X}_0^\rho$ sont compatibles entre elles ; de même que celles sur $\mathcal{D}_1^\rho$ et $\mathcal{X}_1^\rho$, puisque $(\varphi_1 \oplus (-\varphi_2))^*((-1)^n v) = \text{pr}_1^*(\eta) \wedge \dots \wedge \text{pr}_{2n}^*(\eta)$, où $\text{pr}_i : \mathfrak{su}(2)^{2n} \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ désigne la projection canonique. On munit ensuite $\mathcal{E}_2$ de l'unique 1-forme volume qui est compatible avec la 4-forme volume w_ρ sur $\mathcal{D}_2^\rho$ et la 3-forme volume $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ sur $\mathcal{X}_2^\rho = \mathfrak{su}(2)$, de façon à rendre compatible entre elles les formes volume sur chacune des trois colonnes du diagramme ci-dessus.

On a ensuite les identifications suivantes pour les groupes d'homologie des complexes $\mathcal{X}^\rho$, $\mathcal{D}^\rho$ et $\mathcal{E}$ respectivement :

$$H_0(\mathcal{X}^\rho) \cong H_\rho^2(M_K), \quad H_1(\mathcal{X}^\rho) \cong H_\rho^1(M_K) \text{ et } H_i(\mathcal{X}^\rho) = 0, \text{ si } i \geq 2.$$

$$H_0(\mathcal{D}^\rho) \cong H_\rho^2(M_K) \text{ et } H_i(\mathcal{D}^\rho) = 0 \text{ si } i \geq 1.$$

$$H_2(\mathcal{E}) \cong H_\rho^1(M_K) \text{ et } H_i(\mathcal{E}) = 0 \text{ si } i \neq 2.$$

Avec ces notations, la torsion de Reidemeister du complexe non acyclique ⁽⁵⁾ $\mathcal{X}^\rho$ vérifie la relation donnée dans le lemme suivant.

Lemme 4.19. — Si $H_\rho^2(M_K)$ est muni du générateur de référence $h_\rho^{(2)}$, alors

$$\text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X})) \cdot \text{Tor}(\mathcal{X}^\rho) = -(\text{Tor}(\mathcal{E}))^{-1}.$$

⁽⁵⁾Où répétons-le $H_0(\mathcal{X}^\rho) = H_\rho^2(M_K)$ est muni du générateur de référence $h_\rho^{(2)}$ et $H_1(\mathcal{X}^\rho) = H_\rho^1(M_K)$ d'un générateur quelconque.

Démonstration. — Le Lemme de Multiplicativité s'applique à la suite exacte de complexe $0 \longrightarrow \mathcal{X}^\rho \longrightarrow \mathcal{D}^\rho \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$ et fournit :

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{D}^\rho) = (-1)^{\varepsilon+\alpha} \mathrm{Tor}(\mathcal{X}^\rho) \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}''),$$

avec $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{X}^\rho, \mathcal{D}^\rho, \mathcal{E}) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\alpha = \alpha(\mathcal{X}^\rho, \mathcal{E}) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.6) et où $\mathcal{H}''$ est la suite exacte longue en homologie associée à $0 \longrightarrow \mathcal{X}^\rho \longrightarrow \mathcal{D}^\rho \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$.

	$\mathcal{X}^\rho$	$\mathcal{E}$
α_0	1	0
α_1	1	0
α_2	0	1

	$\mathcal{X}^\rho$	$\mathcal{D}^\rho$	$\mathcal{E}$
β_0	1	1	0
β_1	0	1	0
β_2	0	1	1

$$\alpha(\mathcal{X}^\rho, \mathcal{E}) = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i-1}(\mathcal{X}^\rho) \alpha_i(\mathcal{E}) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\varepsilon(\mathcal{X}^\rho, \mathcal{D}^\rho, \mathcal{E}) = \sum_{i \geq 0} [(\beta_i(\mathcal{D}^\rho) + 1)(\beta_i(\mathcal{X}^\rho) + \beta_i(\mathcal{E})) + \beta_{i-1}(\mathcal{X}^\rho) \beta_i(\mathcal{E})] = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 4.6. Les complexes $\mathcal{X}^\rho$, $\mathcal{D}^\rho$ et $\mathcal{E}$.

Mais ici, la suite exacte en homologie $\mathcal{H}''$ se réduit aux deux isomorphismes suivants : $H_2(\mathcal{E}) \xrightarrow{\cong} H_1(\mathcal{X}^\rho)$ et $H_0(\mathcal{X}^\rho) \xrightarrow{\cong} H_0(\mathcal{D}^\rho)$, de sorte que la torsion de Reidemeister de $\mathcal{H}''$ est un produit de deux changements de base, l'un correspondant à $H_\rho^2(M_K)$ et l'autre à $H_\rho^1(M_K)$.

Remarquons ensuite, qu'en raison du choix des bases des groupes de cohomologie à coefficients tordus en dimension 1 et 2, cette torsion est triviale : $\mathrm{tor}(\mathcal{H}'') = 1$. Il reste donc

$$\mathrm{Tor}(\mathcal{D}^\rho) = -\mathrm{Tor}(\mathcal{X}^\rho) \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{E}).$$

Enfin, le Lemme 4.14 permet de conclure. $\square$

4.3.5. Fin de la démonstration. — Il ne reste plus qu'à rassembler les calculs de torsions de Reidemeister que l'on vient de mener. Plus précisément, pour tout vecteur non nul z_ρ^τ de $H_\rho^1(M_K)$, on va montrer que

$$\omega_{[\rho]}^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\tau)) = \hat{\tau}_\rho^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\tau)).$$

Pour cela, nous devons calculer la torsion de Reidemeister du complexe $\mathcal{E}$. Notons z_ρ^ω le générateur de $H_\rho^1(M_K)$ correspondant à la forme volume $\omega_{[\rho]}^K$, i.e. l'unique vecteur de $H_\rho^1(M_K)$ tel que $\omega_{[\rho]}^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\omega)) = 1$. La base de $H_\rho^1(M_K)$ formée de l'unique vecteur z_ρ^τ et la base de $H_\rho^2(M_K)$ formée de l'unique vecteur $h_\rho^{(2)}$ sont les bases de la cohomologie à coefficients tordus de M_K dans lesquelles on calcule la torsion $\mathrm{Tor}(\mathcal{X}^\rho)$.

Observons que $\mathcal{E}_2 = H_\rho^1(M_K)$ est muni de la base (z_ρ^ω) et que $H_2(\mathcal{E}) \cong H_\rho^1(M_K)$ est muni de la base (z_ρ^τ) , de sorte qu'avec nos conventions on a $\mathrm{Tor}(\mathcal{E}) = -[z_\rho^\omega/z_\rho^\tau]$ (car $|\mathcal{E}| = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (voir Table 4.6)).

D'après l'équation du Lemme 4.19, on en déduit que :

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(\mathcal{X})) \cdot \mathrm{Tor}(\mathcal{X}^\rho) = -(\mathrm{Tor}(\mathcal{E}))^{-1} = [z_\rho^\tau/z_\rho^\omega].$$

Comme par définition, $\hat{\tau}_\rho^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\tau)) = \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X})) \cdot \text{Tor}(\mathfrak{X}^\rho) \in \mathbb{R}^*$, il vient que

$$\omega_{[\rho]}^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\tau)) = [z_\rho^\tau / z_\rho^\omega] = \hat{\tau}_\rho^K(\varphi_{[\rho]}^{-1}(z_\rho^\tau)),$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 4.1.

□

CHAPITRE 5

EXEMPLES DE CALCULS

Ce chapitre est consacré à des exemples de calculs et à des illustrations des principaux résultats obtenus dans les chapitres précédents. Donnons quelques indications sur son contenu.

Dans la Section 5.1, on calcule explicitement la forme volume que l'on a construit dans le Chapitre 3 pour les nœuds toriques de type $(2, q)$, tel le nœud de trèfle, en utilisant le résultat du Théorème 4.1 et en suivant au plus près la construction de la forme torsion de Reidemeister que l'on a associée à un nœud dans le Chapitre 2. On retiendra de ce calcul que la forme volume associée à un nœud torique est “*constante*” sur chacune des composantes connexes de $\mathcal{R}eg(K)$. Une explication de ce phénomène se trouve dans la structure très particulière que possède l'extérieur du nœud torique de type $(2, q)$: sa structure de *variété fibrée de Seifert* à deux fibres exceptionnelles d'indice $2, q$.

Dans la Section 5.3, on calcule explicitement la forme volume associée au nœud torique de type (p, q) , où p et q sont des entiers premiers entre eux. La technique de calcul est différente de celle utilisée pour obtenir la forme volume associée au nœud torique de type $(2, q)$. On utilise ici le fait que l'extérieur du nœud torique de type (p, q) est une variété fibrée de Seifert à deux fibres exceptionnelles d'indice p, q et on lui applique consécutivement deux fois la formule de Mayer-Vietoris du Paragraphe 2.2.4.

Ensuite, l'application aux nœuds toriques de la formule de chirurgie du Théorème 2.29 permet de retrouver la formule de D. Freed (cf. [Fre92]) donnant la torsion de Reidemeister des sphères d'homologie de Brieskorn à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation acyclique (cf. Section 5.2 et Paragraphe 5.3.2).

Dans la Section 5.4, on généralise aux nœuds fibrés le résultat obtenu dans le Lemme 5.8 pour les nœuds toriques. Plus précisément, on établit une formule permettant d'exprimer la torsion de Reidemeister (avec signe) associée à un nœud fibré en fonction des valeurs propres de l'application tangente à sa monodromie et du signe du déterminant d'un certain isomorphisme (cf. Théorème 5.22).

Enfin, on examine dans la Section 5.5 le comportement (à signe près) de la forme volume sous l'effet d'une mutation de Conway. Sous une certaine hypothèse de “régularité” de la représentation, on montre que la forme volume associée à un nœud est à signe près invariante par mutation (cf. Théorème 5.41).

5.1. Calcul de la forme volume associée aux nœuds toriques

Notons $M_{2,q}$ l'extérieur du nœud torique $K_{2,q}$ de type $(2,q)$, m son méridien et l sa longitude. Le groupe du nœud $K_{2,q}$ admet la présentation suivante : $\pi_1(M_{2,q}) = \langle x, y \mid x^2 = y^q \rangle$. Dans $\pi_1(M_{2,q})$, on a $m = xy^{\frac{1-q}{2}}$ et $l = x^2m^{-2q}$ (cf. Paragraphe 1.2.4).

Avec les notations du Paragraphe 1.2.4, nous allons établir le résultat suivant.

Théorème 5.1. — *La 1-forme volume $\omega^{K_{2,q}}$ associée au nœud torique $K_{2,q}$ de type $(2,q)$ satisfait l'égalité :*

$$(5.1) \quad \omega_{[\rho_{\ell,t}]}^{K_{2,q}} \left(\frac{d\rho_{\ell,s}}{ds} \Big|_{s=t} \right) = -\frac{8}{q} \sin^2 \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right) \frac{d\theta_m^{\rho_{\ell,s}}}{ds} \Big|_{s=t}$$

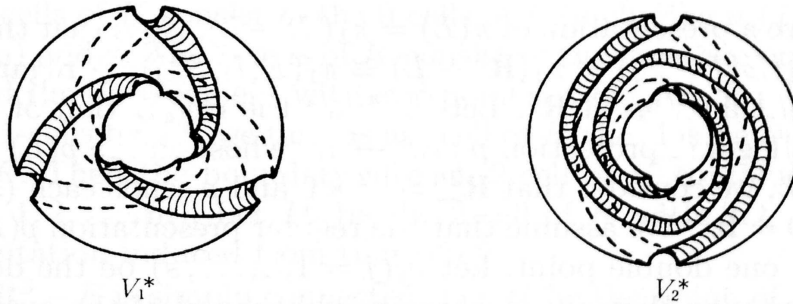
dans laquelle

$$\theta_m^{\rho_{\ell,t}} = \arccos \left((-1)^{\ell-1} \cos \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right) \cos(\pi t) \right).$$

Le calcul de la forme volume $\omega^{K_{2,q}}$ s'appuie sur le Théorème 4.1. On calcule la torsion $\hat{\tau}^{K_{2,q}}$ associée au nœud $K_{2,q}$ en suivant scrupuleusement chaque étape de sa construction telle qu'elle a été faite dans la Section 2.6.

Remarque 5.2. — Il faut toutefois noter que la présentation du groupe du nœud torique $K_{2,q} : \pi_1(M_{2,q}) = \langle x, y \mid x^2 = y^q \rangle$ que l'on utilise n'est pas une présentation de Wirtinger. Malgré tout, le complexe cellulaire bidimensionnel associé à cette présentation possède le même type d'homotopie simple que $M_{2,q}$, comme nous l'établirons dans le sous-paragraphe qui suit.

Le complexe de l'extérieur de $K_{2,q}$ à coefficients tordus. — Nous allons calculer la torsion $\hat{\tau}^{K_{2,q}}$ directement à partir du complexe de l'extérieur du nœud $K_{2,q}$ à coefficients tordus après avoir identifié la base de référence du second groupe de cohomologie à coefficients tordus mise en évidence dans le Paragraphe 2.6.2.



$$M_{2,3} = V_1^* \cup_A V_2^*$$

FIGURE 5.1. Scindement de l'extérieur du nœud de trèfle $K_{2,3}$.

Désignons par $X_{2,q}$ le complexe cellulaire bidimensionnel associé à la présentation $\pi_1(M_{2,q}) = \langle x, y \mid x^2 = y^q \rangle$. On constate que $X_{2,q}$ a même type d'homotopie simple que l'extérieur de $K_{2,q}$.

En effet, nous allons vérifier que de façon plus générale le complexe cellulaire bidimensionnel associé à la présentation $\pi_1(M_{p,q}) = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$ a même type d'homotopie simple que l'extérieur $M_{p,q}$ du nœud torique $K_{p,q}$ de type (p, q) . Pour cela, on suppose que $K_{p,q}$ est dessiné sur le tore bidimensionnel standard $T^2 \subset S^3$.

Désignons par V_i , $i = 1, 2$, les tores solides obtenus en scindant S^3 le long de T^2 , de sorte que l'extérieur $M_{p,q}$ de $K_{p,q}$ soit la réunion des deux tores solides V_i^* – obtenus en prenant la fermeture de $V_i \setminus V(K_{p,q})$ – recollés le long de l'anneau $A = M_{p,q} \cap T^2$ (voir Figure 5.1).

Notons Γ_p le graphe dont les sommets sont 0 et les p racines p -ème de l'unité et dont les arêtes sont les p segments joignant 0 aux p racines de l'unité (voir Figure 5.2). Soit $W_{p,q} = \Gamma_p \times [0, 1] / \sim$ le graphe obtenu en identifiant les bases $\Gamma_p \times \{0\}$ et $\Gamma_p \times \{1\}$ par la rotation d'angle $2\pi q/p$. $W_{p,q}$ se plonge de façon naturelle dans le tore solide standard $D^2 \times S^1$ dont le bord est $\partial M_{p,q}$, i.e. $W_{p,q} \cap T^2$ est le nœud torique $K_{p,q}$.

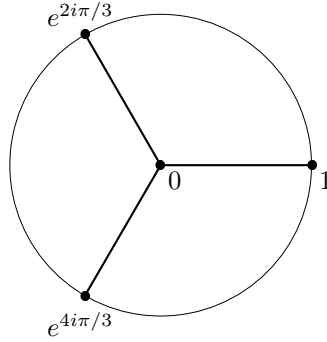


FIGURE 5.2. Le graphe Γ_3 .

On voit que :

1. V_1^* s'effondre sur le complexe bidimensionnel $W_{p,q}$,
2. V_2^* s'effondre sur un complexe bidimensionnel $W_{q,p}$ construit de façon similaire,
3. les deux complexes bidimensionnels $W_{p,q}$ et $W_{q,p}$ se plongent dans $M_{p,q}$ et leur intersection s'identifie à l'âme z de l'anneau A .

On en déduit donc que $M_{p,q}$ s'effondre sur le complexe bidimensionnel $W_{p,q} \cup_z W_{q,p}$. Le complexe bidimensionnel $W_{p,q} \cup_z W_{q,p}$ ayant même type d'homotopie simple que le complexe bidimensionnel $X_{p,q}$, on en déduit le résultat annoncé.

On note ensuite $\mathfrak{Z}_*$ le complexe bidimensionnel réel $C^{2-*}(X_{2,q}; \mathbb{R})$ (cf. Section 2.3).

L'extérieur $M_{2,q}$ du nœud $K_{2,q}$ est pourvue de son orientation cohomologique canonique $\mathfrak{o}$ dont on rappelle la construction (cf. Section 2.3). On munit $H_2(\mathfrak{Z}) = H^0(M_{2,q}; \mathbb{R})$ du générateur de référence $[[pt]]$, dual de la classe fondamentale relative $[[M_{2,q}, \partial M_{2,q}]] \in H_2(M_{2,q}, \partial M_{2,q}; \mathbb{R}) = H_2(M_{2,q}, \partial M_{2,q}; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$. On munit $H_1(\mathfrak{Z}) = H^1(M_{2,q}; \mathbb{R})$ du générateur de référence m^* , où $m^* : m \mapsto 1$ est la classe cohomologique du méridien de $K_{2,q}$.

Après avoir posé $X = \rho_{\ell,t}(x)$, $Y = \rho_{\ell,t}(y)$, $M = \rho_{\ell,t}(m)$ et $L = \rho_{\ell,t}(l)$, le complexe $\mathcal{Z}_*^{\rho_{\ell,t}} = C^{2-*}(X_{2,q}; \text{Ad} \circ \rho_{\ell,t})$ de l'extérieur de $K_{2,q}$ à coefficient dans la représentation $\text{Ad} \circ \rho_{\ell,t}$ s'identifie au complexe suivant (cf. complexe (2.12)) :

$$\mathcal{Z}^{\rho_{\ell,t}} : 0 \longrightarrow \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{d_2^{\rho_{\ell,t}}} \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \xrightarrow{d_1^{\rho_{\ell,t}}} \mathfrak{su}(2) \longrightarrow 0$$

dans lequel les opérateurs bord sont donnés par :

$$d_2^{\rho_{\ell,t}} = \begin{pmatrix} \text{Ad}_X - \text{Id} \\ \text{Ad}_Y - \text{Id} \end{pmatrix} \text{ et } d_1^{\rho_{\ell,t}} = (\text{Id} + \text{Ad}_X, -(\text{Id} + \text{Ad}_Y + \cdots + \text{Ad}_{Y_{q-1}})).$$

Comme toutes les représentations irréductibles de $\pi_1(M_{2,q})$ sont m -régulières⁽¹⁾, on va calculer la m -torsion $\mathbb{T}_m^{K_{2,q}}$ associée au nœud $K_{2,q}$; pour cela, nous devons au préalable identifier les bases de référence des premier et second groupes de cohomologie à coefficients tordus décrites dans les Paragraphes 2.7.1 et 2.6.2 respectivement. Dans ce but, nous nous appuierons sur les deux assertions suivantes, qui résultent de simples calculs.

Assertion 5.3. — *L'axe commun des rotations $\text{Ad} \circ \rho_{\ell,t}(\pi_1(\partial M_{2,q}))$ est engendré par le vecteur de S^2 :*

$$(5.2) \quad P^{\rho_{\ell,t}} = (-1)^{\ell-1} \frac{\sin\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \mathbf{i} - \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin(\pi t) \mathbf{k}}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) + \cos^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin^2(\pi t)}}$$

vérifiant $\rho_{\ell,t}(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P^{\rho_{\ell,t}}$, avec $0 < \theta < \pi$.

Assertion 5.4. — *Le conoyau de $d_1^{\rho_{\ell,t}}$ est engendré par le vecteur $\mathbf{k}$ de $\mathfrak{su}(2)$.*

Le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ est dans le noyau de $d_1^{\rho_{\ell,t}}$ sans être dans l'image de $d_2^{\rho_{\ell,t}}$.

Il résulte de cette dernière assertion que $\dim H_{\rho_{\ell,t}}^1(M_{2,q}) = \dim H_{\rho_{\ell,t}}^2(M_{2,q}) = 1$, ce qui permet de conclure que toutes les représentations irréductibles de $\pi_1(M_{2,q})$ dans $\text{SU}(2)$ sont régulières.

Explicitons maintenant les bases de référence des groupes de cohomologie $H_{\rho_{\ell,t}}^1(M_{2,q})$ et $H_{\rho_{\ell,t}}^2(M_{2,q})$.

Assertion 5.5. — *Le générateur de référence de $H_{\rho_{\ell,t}}^1(M_{2,q}) \cong \mathbb{R}$ est la classe d'équivalence de l'élément de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ suivant :*

$$h_{\rho_{\ell,t}}^{(1)}(m) = (-1)^{\ell-1} \frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) + \cos^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin^2(\pi t)}}{\cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin(\pi t)} \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Par définition (cf. Paragraphe 2.7.1), le générateur de référence du premier groupe de cohomologie à coefficients dans la représentation $\text{Ad} \circ \rho_{\ell,t}$ est la classe d'équivalence de $u \in Z_{\rho_{\ell,t}}^1(M_{2,q})$ satisfaisant l'identité $\langle u(m), P^{\rho_{\ell,t}} \rangle = 1$.

⁽¹⁾Voir la Remarque 5.6 pour une justification de cette affirmation.

D'après l'Assertion 5.4, $v = \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker d_1^{\rho_{\ell,t}} \setminus \operatorname{im} d_2^{\rho_{\ell,t}}$, comme de plus, $v(m) = v(x) = \mathbf{k}$ et puisque l'on a

$$\langle \mathbf{k}, P^{\rho_{\ell,t}} \rangle = \frac{(-1)^{\ell-1} \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin(\pi t)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) + \cos^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin^2(\pi t)}},$$

$u = \langle \mathbf{k}, P^{\rho_{\ell,t}} \rangle^{-1} v$ est l'élément recherché. $\square$

Remarque 5.6. — Dans la démonstration de l'Assertion 5.5, nous avons établi que l'application $f_m^{\rho_{\ell,t}} : H_{\rho_{\ell,t}}^1(M_{2,q}) \rightarrow \mathbb{R}$ est *non identiquement nulle*. En combinant cette affirmation au fait que $\rho_{\ell,t}$ est régulière, on en déduit que $\rho_{\ell,t}$ est m -régulière (cf. Corollaire 1.38).

Assertion 5.7. — *Le générateur de référence de $H_{\rho_{\ell,t}}^2(M_{2,q}) \cong \mathbb{R}$ est la classe d'équivalence de l'élément de $\mathfrak{su}(2)$ suivant :*

$$h_{\rho_{\ell,t}}^{(2)} = (-1)^{\ell-1} \frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) + \cos^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin^2(\pi t)}}{2 \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin(\pi t)} \mathbf{k}.$$

Démonstration. — Par définition (cf. Paragraphe 2.6.2), le générateur de référence du second groupe de cohomologie à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho_{\ell,t}$ est la classe d'équivalence de $u \in Z_{\rho_{\ell,t}}^2(M_{2,q})$ satisfaisant l'identité $\langle i^*(u), P^{\rho_{\ell,t}} \rangle = 1$, où $i^* : Z_{\rho_{\ell,t}}^2(M_{2,q}) \rightarrow Z_{\rho_{\ell,t}}^2(\partial M_{2,q})$ est l'isomorphisme induit par l'inclusion $\partial M_{2,q} \hookrightarrow M_{2,q}$.

D'après l'Assertion 5.4, $\mathbf{k} \in \operatorname{coker} d_1^{\rho_{\ell,t}}$, il ne reste plus qu'à identifier l'application i^* . Le groupe fondamental du bord de $M_{2,q}$ possède la présentation suivante : $\pi_1(\partial M_{2,q}) = \langle m, l \mid ml = lm \rangle$. Posons $R = lml^{-1}m^{-1}$ et $r = x^2y^{-q}$ et notons que l'on peut écrire, dans $\pi_1(M_{2,q})$, la relation R sous la forme : $R = xrx^{-1}(xy^{\frac{1-q}{2}})r^{-1}(xy^{\frac{1-q}{2}})^{-1}$. L'inclusion $\partial M_{2,q} \hookrightarrow M_{2,q}$ induit donc, au niveau des 2-cocycles, l'application $i^* : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ définie par $i^*(z) = Ad_X(z) - Ad_M(z)$.

Comme de plus :

$$\langle Ad_X(\mathbf{k}) - Ad_M(\mathbf{k}), P^{\rho_{\ell,t}} \rangle = \frac{2(-1)^{\ell-1} \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin(\pi t)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) + \cos^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{2q}\right) \sin^2(\pi t)}},$$

l'élément cherché est $u = \langle Ad_X(\mathbf{k}) - Ad_M(\mathbf{k}), P^{\rho_{\ell,t}} \rangle^{-1} \mathbf{k}$. $\square$

La torsion $\mathbb{T}_m^{K_{2,q}}$. — Une fois identifiés les opérateurs bord $d_i^{\rho_{\ell,t}}$ du complexe $\mathcal{Z}^{\rho_{\ell,t}}$ et les bases des premier et second groupes de cohomologie à coefficients tordus, le calcul de la m -torsion $\mathbb{T}_m^{K_{2,q}}$ associée au nœud $K_{2,q}$ est un simple calcul de déterminants. La formule que l'on obtient est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 5.8. — *La m -torsion associée au nœud $K_{2,q}$ en la représentation $\rho_{\ell,t} : \pi_1(M_{2,q}) \rightarrow \operatorname{SU}(2)$ décrite dans le Paragraphe 1.2.4 vérifie la formule :*

$$\mathbb{T}_m^{K_{2,q}}(\rho_{\ell,t}) = -\frac{8}{q} \sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right).$$

Démonstration. — On a

$$\mathbb{T}_m^{K_{2,q}}(\rho_{\ell,t}) = \text{TOR}(M_{2,q}; \text{Ad} \circ \rho_{\ell,t}, (h_{\rho_{\ell,t}}^{(1)}(m), h_{\rho_{\ell,t}}^{(2)}), \mathfrak{o}) = \tau_0 \cdot \text{Tor}(\mathcal{Z}^{\rho_{\ell,t}}, (h_{\rho_{\ell,t}}^{(1)}(m), h_{\rho_{\ell,t}}^{(2)})),$$

avec $\tau_0 = \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{z}))$.

Si l'on s'intéresse au nœud torique *droit*, alors $\tau_0 = 1$.

Ensuite, on constate que $|\mathcal{Z}^{\rho_{\ell,t}}| = 1$ (voir Table 4.6) et, dans les bases fixées, on trouve :

$$\text{Tor}(\mathcal{Z}^{\rho_{\ell,t}}, (h_{\rho_{\ell,t}}^{(1)}(m), h_{\rho_{\ell,t}}^{(2)})) = -\frac{8}{q} \sin^2 \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right).$$

□

De là, on en déduit la forme volume $\hat{\tau}^{K_{2,q}}$ associée au nœud torique $K_{2,q}$.

Lemme 5.9. — La forme volume $\hat{\tau}^{K_{2,q}}$ associée au nœud $K_{2,q}$ satisfait l'égalité suivante :

$$(5.3) \quad \hat{\tau}_{\rho_{\ell,t}}^{K_{2,q}} \left(\frac{d\rho_{\ell,s}}{ds} \Big|_{s=t} \right) = -\frac{8}{q} \sin^2 \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right) \frac{d\theta_m^{\rho_{\ell,s}}}{ds} \Big|_{s=t}$$

avec $\theta_m^{\rho_{\ell,t}} = \arccos \left((-1)^{\ell-1} \cos \left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q} \right) \cos(\pi t) \right)$.

Démonstration. — La démonstration s'appuie sur la formule de changement de base (2.6).

On a :

$$\hat{\tau}_{\rho_{\ell,t}}^{K_{2,q}} \left(\frac{d\rho_{\ell,s}}{ds} \Big|_{s=t} \right) = \left[\frac{d\rho_{\ell,s}}{ds} \Big|_{s=t} / h_m^{(1)}(\rho_{\ell,t}) \right] \cdot \mathbb{T}_m^{K_{2,q}}(\rho_{\ell,t}).$$

En tenant compte du fait que le changement de base vaut ⁽²⁾ :

$$\left[\frac{d\rho_{\ell,s}}{ds} \Big|_{s=t} / h_m^{(1)}(\rho_{\ell,t}) \right] = \left\langle \frac{d}{ds} \rho_{\ell,s}(m) \rho_{\ell,t}(m)^{-1} \Big|_{s=t}, P^{\rho_{\ell,t}} \right\rangle = \frac{d\theta_m^{\rho_{\ell,s}}}{ds} \Big|_{s=t},$$

la formule (5.3) se déduit du Lemme 5.8. □

Démonstration du Théorème 5.1. — Vu le Lemme 5.9, le calcul de la forme volume $\omega^{K_{2,q}}$ devient une simple formalité en utilisant, comme on l'a déjà dit, le Théorème 4.1. □

5.2. Chirurgie sur les nœuds toriques et torsion des sphères de Brieskorn

Grâce à la formule de chirurgie du Théorème 2.29, il est possible de retrouver, par une méthode toutefois plus élémentaire, un résultat dû à D. Freed (cf. [Fre92]) sur la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe des sphères d'homologie de Brieskorn, c'est-à-dire des variétés fibrées de Seifert à trois fibres exceptionnelles.

Pour plus de clarté nous séparons le résultat en deux parties : le Théorème 5.10 donne la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe de la variété obtenue par chirurgie de pente positive sur le nœud torique $K_{2,q}$; le Théorème 5.11 fournit un résultat analogue dans le cas d'une chirurgie de pente négative.

Théorème 5.10. — Si $k > 0$ et si M_k est la variété obtenue par chirurgie de pente $1/k$ le long du nœud torique $K_{2,q}$ de type $(2, q)$, alors :

⁽²⁾Ceci résulte d'un calcul direct ou s'obtient grâce à la "formule de dualité" du Lemme 1.36

1. M_k est une sphère d'homologie entière ; plus précisément, il s'agit de la sphère d'homologie de Brieskorn $\Sigma(2, q, 2qk - 1)$.
2. $\widehat{R}(M_k)$ est fini et formé des classes de conjugaison des représentations irréductibles $\varrho_{(\ell, n)}$ paramétrées par $\ell \in \{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$ et par l'entier n tel que $n \equiv k \pmod{2}$, $\frac{(2qk-1)(2\ell-1)}{2q} < n < \frac{(2qk-1)(2q-2\ell+1)}{2q}$ et satisfaisant les trois égalités suivantes : $\text{Tr}(\varrho_{(\ell, n)}(x)) = 0$, $\text{Tr}(\varrho_{(\ell, n)}(y)) = 2 \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right)$ et $\text{Tr}(\varrho_{(\ell, n)}(m)) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2qk-1}\right)$.
3. La représentation $\varrho_{(\ell, n)}$ est acyclique et la torsion de Reidemeister de M_k à coefficients dans la représentation $Ad \circ \varrho_{(\ell, n)}$ vaut :

$$(5.4) \quad \text{TOR}(M_k; Ad \circ \varrho_{(\ell, n)}) = -\frac{32}{(2qk-1)q} \sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right) \sin^2\left(\frac{2q\pi n}{2qk-1}\right).$$

Démonstration. — Les deux premiers points du théorème sont bien connus (cf. [Sav99, Paragraphe 14.5], [Mil95], [FS90], ou [GM92, Appendice par C. Lescop]) ; la démonstration de la formule (5.4) s'appuie sur la formule de chirurgie de la Proposition 2.32. Notons $\mu = ml^k$ la pente de la chirurgie et γ l'âme du tore solide ajouté.

Une représentation $\rho_{\ell, t} : \pi_1(M_{2, q}) \rightarrow \text{SU}(2)$ induit une représentation du groupe fondamental de la variété M_k si, et seulement si, $\rho_{\ell, t}(m)^{2qk-1} = (-1)^k \mathbf{1}$, ou encore si et seulement s'il existe un entier n tel que $\frac{(2qk-1)(2\ell-1)}{2q} < n < \frac{(2qk-1)(2q-2\ell+1)}{2q}$ et $\text{Tr}(\rho_{\ell, t}(m)) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2qk-1}\right)$. Cette représentation, notée $\varrho_{(\ell, n)}$, est acyclique car sa restriction à $\pi_1(M_{2, q})$ est μ -régulière (cf. Remarque 5.6 et Lemme 1.37 en tenant compte du fait que $f_\mu^{\rho_{\ell, t}} = (1 - 2qk)f_m^{\rho_{\ell, t}}$).

Avec ces notations, la formule de chirurgie donne :

$$\text{TOR}(M_k; Ad \circ \varrho_{(\ell, n)}) = 4 \sin^2(\theta_\gamma^{\varrho_{(\ell, n)}}) \cdot \mathbb{T}_\mu^{K_{2, q}}(\rho_{\ell, t_n}),$$

où $\rho_{\ell, t_n} : \pi_1(M_{2, q}) \rightarrow \text{SU}(2)$ désigne la restriction de la représentation $\varrho_{(\ell, n)}$ à $\pi_1(M_{2, q})$. Il ne reste plus qu'à identifier chacun des termes dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus :

- Tout d'abord, on constate que l'âme γ du tore solide ajouté par chirurgie n'est autre que la longitude l du nœud $K_{2, q}$. On a donc $\theta_\gamma^{\varrho_{(\ell, n)}} \equiv \frac{2q\pi n}{2qk-1} \pmod{2\pi}$.
- On calcule ensuite $\mathbb{T}_\mu^{K_{2, q}}(\rho_{\ell, t_n})$ en utilisant le Lemme 5.8 et la formule de changement de base (2.6). On a :

$$\mathbb{T}_\mu^{K_{2, q}}(\rho_{\ell, t_n}) = [h_{\rho_{\ell, t_n}}^{(1)}(\mu)/h_{\rho_{\ell, t_n}}^{(1)}(m)] \cdot \mathbb{T}_m^{K_{2, q}}(\rho_{\ell, t_n}).$$

Le changement de base étant égal à $[h_{\rho_{\ell, t_n}}^{(1)}(\mu)/h_{\rho_{\ell, t_n}}^{(1)}(m)] = \frac{1}{2qk-1}$, il vient, compte tenu du Lemme 5.8, que :

$$\mathbb{T}_\mu^{K_{2, q}}(\rho_{\ell, t_n}) = -\frac{8}{(2qk-1)q} \sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right),$$

d'où le résultat. □

Théorème 5.11. — Si $k > 0$ et si M_{-k} est la variété obtenue par chirurgie de pente $-1/k$ le long du nœud torique $K_{2, q}$ de type $(2, q)$, alors :

1. M_{-k} est une sphère d'homologie entière ; il s'agit de la sphère d'homologie de Brieskorn $\Sigma(2, q, 2qk + 1)$.
2. $\widehat{R}(M_{-k})$ est fini et formé des classes de conjugaison des représentations irréductibles $\varrho_{(\ell, n)}$ paramétrées par $\ell \in \{1, \dots, \frac{q-1}{2}\}$ et par l'entier n tel que $n \equiv k \pmod{2}$, $\frac{(2qk+1)(2\ell-1)}{2q} < n < \frac{(2qk+1)(2q-2\ell+1)}{2q}$ et satisfaisant les trois égalités suivantes : $\text{Tr}(\varrho_{(\ell, n)}(x)) = 0$, $\text{Tr}(\varrho_{(\ell, n)}(y)) = 2 \cos\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right)$ et $\text{Tr}(\varrho_{(\ell, n)}(m)) = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2qk+1}\right)$.
3. La représentation $\varrho_{(\ell, n)}$ est acyclique et la torsion de Reidemeister de M_{-k} à coefficients dans la représentation $\text{Ad} \circ \varrho_{(\ell, n)}$ est :

$$(5.5) \quad \text{TOR}(M_{-k}; \text{Ad} \circ \varrho_{(\ell, n)}) = \frac{32}{(2qk+1)q} \sin^2\left(\frac{(2\ell-1)\pi}{q}\right) \sin^2\left(\frac{2q\pi n}{2qk+1}\right).$$

Démonstration. — Elle est identique à celle du Théorème 5.10. $\square$

Remarque 5.12. — Une formule explicite donnant l'invariant de Casson des sphères d'homologie de Brieskorn est aujourd'hui bien connue (voir par exemple l'Appendice de C. Lescop dans [GM92]).

L'invariant de Casson de la sphère d'homologie de Brieskorn $\Sigma(p, q, r)$ est égal au nombre de classes de conjugaison des représentations irréductibles de $\pi_1(\Sigma(p, q, r))$ dans $\text{SU}(2)$ multiplié par $-1/2$. On vérifie en particulier que l'invariant de Casson de la sphère de Brieskorn $\Sigma(2, q, 2qk - 1)$ obtenue par chirurgie de pente $1/k$ ($k > 0$) le long du nœud torique de type $(2, q)$ vaut :

$$\lambda(\Sigma(2, q, 2qk - 1)) = \frac{-k(q^2 - 1)}{8}.$$

Ainsi, les sphères de Brieskorn $\Sigma(2, 3, 18k - 1)$ et $\Sigma(2, 5, 10k - 1)$ ont toute le même invariant de Casson (égal à $-3k$). Par contre, si l'on fait la somme (cf. Paragraphe 2.8.2), sur l'ensemble des classes de conjugaison des représentations irréductibles de $\pi_1(\Sigma(2, q, 2qk - 1))$ dans $\text{SU}(2)$, des torsions de Reidemeister de ces sphères d'homologie à coefficients dans la représentation adjointe, on obtient les formules suivantes (cf. Théorèmes 5.10 & 5.11) :

$$J(\Sigma(2, 3, 18k - 1)) = \sum_{i=0}^{6k-1} \frac{16}{18k-1} \sin^2\left(\frac{6\pi(2i+k)}{18k-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} J(\Sigma(2, 5, 10k - 1)) &= \sum_{i=0}^{4k-1} \frac{32}{5(10k-1)} \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin^2\left(\frac{10\pi(2i+k)}{10k-1}\right) \\ &\quad + \sum_{i=k}^{3k-1} \frac{32}{5(10k-1)} \sin^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) \sin^2\left(\frac{10\pi(2i+k)}{10k-1}\right). \end{aligned}$$

Dans la Table 5.1, on donne les valeurs approchées de $J(\Sigma(2, 3, 18k - 1))$ et $J(\Sigma(2, 5, 10k - 1))$ pour $k = 1, 2$ et 3 , et on constate qu'elles sont toutes différentes. L'invariant de Johnson permet donc de distinguer entre elles les sphères de Brieskorn $\Sigma(2, 3, 18k - 1)$ et $\Sigma(2, 5, 10k - 1)$ pour $k = 1, 2, 3$, contrairement à l'invariant de Casson.

k	1	2	3
$J(\Sigma(2, 3, 18k - 1))$	1,323224088	1,332281389	1,333035131
$J(\Sigma(2, 5, 10k - 1))$	0,5527864045	0,4372039284	0,4410349060

TABLE 5.1

5.3. Cas des nœuds toriques généraux

Dans la suite $K_{p,q}$ désigne le nœud torique d'indice (p, q) , on rappelle que son groupe possède la présentation suivante :

$$G_{p,q} = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle.$$

Notons $r, s \in \mathbb{Z}$ tels que $ps - qr = 1$, le méridien de $K_{p,q}$ est noté m et on a $m = x^{-r}y^s$ dans $G_{p,q}$, la longitude de $K_{p,q}$ est notée l et on a $l = x^pm^{-pq} = y^qm^{-pq}$ dans $G_{p,q}$.

Cette section est consacrée au calcul explicite de la forme volume associée au nœud torique $K_{p,q}$. On s'appuie pour cela sur le fait que son extérieur $M_{q,p} = S^3 \setminus V(K_{p,q})$ est la variété fibrée de Seifert à deux fibres exceptionnelles d'indice p, q . La fibre ordinaire γ correspond à l'élément central $z = x^p = y^q$. On calcule ensuite la torsion de Reidemeister des sphères d'homologie de Brieskorn à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation acyclique de leur groupe fondamental (cf. [Fre92]).

5.3.1. Torsion associée aux nœuds toriques. — Avec les notations de la Proposition 1.8, on va calculer explicitement la m -torsion de Reidemeister associée à $K_{p,q}$ en une représentation irréductible de $G_{p,q}$ dans $\mathrm{SU}(2)$, précisément on va établir le théorème suivant.

Théorème 5.13. — *Si ρ est une représentation irréductible de $G_{p,q}$ dans $\mathrm{SU}(2)$, alors*

$$\mathrm{tor}_m^{K_{p,q}}(\rho) = \pm \frac{16}{pq} \sin^2 \left(\frac{\pi a}{p} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi b}{q} \right)$$

avec $\mathrm{Tr}(\rho(x)) = 2 \cos \left(\frac{\pi a}{p} \right)$, $\mathrm{Tr}(\rho(y)) = 2 \cos \left(\frac{\pi b}{q} \right)$ et où $0 < a < p$, $0 < b < q$ et $a \equiv b \pmod{2}$.

Remarque 5.14. — On peut régler le problème de l'indétermination du signe dans la formule du Théorème 5.13 sans passer par un calcul direct de torsion de la façon suivante. Toutes les représentations irréductibles de $G_{p,q}$ dans $\mathrm{SU}(2)$ sont m -régulières et on peut montrer, avec les notations de la Proposition 1.8, que tous les arcs $\widehat{R}_{a,b}(M_{p,q})$ induisent, par la projection $p : \widehat{R}_{a,b}(M_{p,q}) \rightarrow (0, \pi)$, définie par $p(\rho) = \theta_m(\rho)$ (où $\rho(m) = \cos(\theta_m(\rho)) + \sin(\theta_m(\rho))P^\rho(m)$ avec $0 < \theta_m(\rho) < \pi$), la même orientation sur $(0, \pi)$. Cette situation est tout à fait typique des nœuds toriques. On a donc (en utilisant la Remarque 4.2 n°2 et en tenant compte du fait que la signature de $K_{p,q}$ vaut $\sigma(K_{p,q}) = -(p-1)(q-1)$) :

$$\mathbb{T}_m^{K_{p,q}}(\rho) = -\frac{16}{pq} \sin^2 \left(\frac{\pi a}{p} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi b}{q} \right)$$

avec $\mathrm{Tr}(\rho(x)) = 2 \cos \left(\frac{\pi a}{p} \right)$, $\mathrm{Tr}(\rho(y)) = 2 \cos \left(\frac{\pi b}{q} \right)$ et où $0 < a < p$, $0 < b < q$ et $a \equiv b \pmod{2}$.

Démonstration. — L'extérieur du nœud torique $K_{p,q}$ se décompose sous la forme :

$$M_{p,q} = (D^* \times S^1) \cup_{T_1} V_1 \cup_{T_2} V_2$$

où D^* est le disque percé de deux trous, V_1, V_2 sont des tores solides d'âmes respectives x, y et où T_1, T_2 désignent les bords respectifs de V_1, V_2 . On note s_1, s_2 les deux générateurs du groupe libre $\pi_1(D^*)$ (voir Figure 5.3). Avec ces notations, $\pi_1(D^* \times S^1) = \langle s_1, s_2, z \mid [s_i, z] = 1 \rangle$ et on a $x = s_1^q z^s, y = s_2^{-p} z^{-r}$ dans $\pi_1(M_{p,q})$. En notant $m_1 = s_1^p z^r$ (resp. $m_2 = s_2^q z^s$), le groupe $\pi_1(T_1)$ (resp. $\pi_1(T_2)$) est engendré par m_1 et x (resp. m_2 et y). On obtient de plus en utilisant le Théorème de Seifert-Van Kampen, les présentations suivantes pour les groupes fondamentaux de $M_1 = (D^* \times S^1) \cup_{T_1} V_1$ et $M_{p,q} = M_1 \cup_{T_2} V_2$:

$$\pi_1(M_1) = \langle s_1, s_2, x, z \mid [s_i, z] = 1, s_1^p z^r = 1, x = s_1^q z^s \rangle,$$

$$\pi_1(M_{p,q}) = \langle s_1, s_2, x, y, z \mid [s_i, z] = 1, s_1^p z^r = 1, s_2^q z^s = 1, x = s_1^q z^s, y = s_2^{-p} z^{-r} \rangle.$$

On peut noter que $z = x^p = y^q$ est l'élément central du groupe $\pi_1(M_{p,q})$, que $s_1 = x^{-r}$, $s_2 = y^s$ et que le méridien m de $K_{p,q}$ est $s_1 s_2$.

Dans la suite, ρ désigne la représentation irréductible de $G_{p,q}$ dans $\text{SU}(2)$ telle que $\text{Tr}(\rho(x)) = 2 \cos\left(\frac{\pi a}{p}\right)$ et $\text{Tr}(\rho(y)) = 2 \cos\left(\frac{\pi b}{q}\right)$ (cf. Proposition 1.8). On sait qu'une telle représentation est m -régulière (cf. Exemple 1.43). Nous allons calculer la torsion de Reidemeister de $M_{p,q}$ à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ en utilisant le scindement précédent $M_{p,q} = (D^* \times S^1) \cup_{T_1} V_1 \cup_{T_2} V_2$ et en appliquant deux fois la formule de Mayer-Vietoris. On commence par déterminer les groupes de cohomologie à coefficients tordus de $M_1, D^* \times S^1$, puis on décrit des bases de référence pour ces groupes.

Cohomologie à coefficients tordus de M_1 . — M_1 est une variété tridimensionnelle dont le bord est la réunion disjointe de deux tores : le tore V_2 et le tore $\partial M_{p,q}$. Les restrictions de la représentation ρ aux groupes $\pi_1(V_2)$ et $\pi_1(\partial M_{p,q})$ n'étant pas centrales, le Lemme 1.18 s'applique et donne : $\dim H_\rho^1(M_1) \geq 2$. En tenant compte du fait que $\rho : \pi_1(M_1) \rightarrow \text{SU}(2)$ est irréductible et comme de plus la caractéristique d'Euler de M_1 est nulle, on a :

$$(5.6) \quad \dim H_\rho^2(M_1) = \dim H_\rho^1(M_1) \geq 2.$$

D'autre part, la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée au scindement $M_{p,q} = M_1 \cup_{T_2} V_2$ fournit :

$$\cdots \longrightarrow H_\rho^1(M_1) \oplus H_\rho^1(V_2) \longrightarrow H_\rho^1(T_2) \longrightarrow H_\rho^2(M_{p,q}) \xrightarrow{j^*} H_\rho^2(M_1) \xrightarrow{i^*} H_\rho^2(T_2) \longrightarrow 0.$$

On constate que : $\text{rg } j^* \leq \dim H_\rho^2(M_{p,q}) = 1$ (car $\rho : G_{p,q} \rightarrow \text{SU}(2)$ est régulière), de sorte que :

$$(5.7) \quad \dim H_\rho^2(M_1) = 1 + \text{rg } j^* \leq 2.$$

En combinant les inégalités (5.6) & (5.7), on obtient $\dim H_\rho^1(M_1) = \dim H_\rho^2(M_1) = 2$.

Cohomologie à coefficients tordus du tore solide percé $D^ \times S^1$.* — $D^* \times S^1$ est une variété tridimensionnelle dont le bord est la réunion disjointe de trois tores. En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on montre que $\dim H_\rho^1(D^* \times S^1) = \dim H_\rho^2(D^* \times S^1) = 3$.

On peut aussi calculer la cohomologie de $D^* \times S^1$ à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ en s'appuyant sur une *suite de Wang* ⁽³⁾, qui permet de calculer la cohomologie des fibrés sur le cercle. Ceci nous sera plus utile lorsqu'il sera question de munir ces groupes de bases de référence. Dans la situation qui nous occupe ici, la suite de Wang à coefficients tordus de la fibration (triviale) : $D^* \hookrightarrow D^* \times S^1 \rightarrow S^1$ se réduit aux deux isomorphismes suivants (car ρ est irréductible) :

$$(5.8) \quad 0 \longrightarrow H_\rho^1(D^* \times S^1) \xrightarrow{\cong} H_\rho^1(D^*) \xrightarrow{0} H_\rho^1(D^*) \xrightarrow{\cong} H_\rho^2(D^* \times S^1) \longrightarrow 0.$$

La représentation ρ étant irréductible, on a $\dim H_\rho^1(D^*) = -3\chi(D^*) = 3$. De sorte que l'on retrouve bien $\dim H_\rho^1(D^* \times S^1) = \dim H_\rho^2(D^* \times S^1) = 3$.

On va à présent munir les groupes de cohomologie à coefficients tordus de la variété $D^* \times S^1$ de bases de référence en utilisant la suite de Wang (5.8) précédente. On commence par rappeler la définition des bases de référence pour la cohomologie à coefficients tordus de $M_{p,q}$.

Bases de référence de $H_\rho^(M_{p,q})$.* — On munit les groupes $H_\rho^1(M_{p,q})$ et $H_\rho^2(M_{p,q})$ des générateurs de référence décrits dans les Paragraphes 2.7.1 & 2.6.2 respectivement.

Soit $(\theta^\rho, P^\rho(m))$ l'unique couple tel que $\rho(m) = \cos(\theta^\rho) + \sin(\theta^\rho)P^\rho(m)$, où $0 < \theta^\rho < \pi$ et $P^\rho(m) \in S^2$. Avec ces notations :

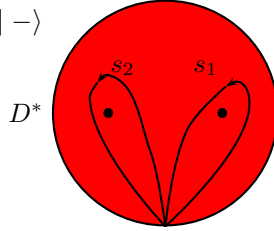
- $H_\rho^1(M_{p,q})$ est muni du générateur $h_\rho^{(1)}(m)$ satisfaisant

$$f_m^\rho(h_\rho^{(1)}(m)) = \langle h_\rho^{(1)}(m), P^\rho(m) \rangle = 1.$$

- $H_\rho^2(M_{p,q})$ est muni du générateur $h_\rho^{(2)}$ vérifiant l'équation (2.13).

Nous savons aussi que les groupes $H_\rho^*(T_i)$ et $H_\rho^*(V_i)$, pour $i = 1, 2$, possèdent des bases de référence, comme indiqué dans la démonstration du Théorème 2.29 (voir aussi le Paragraphe 2.2.3).

$$\pi_1(D^*) = \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$$



$$\dim H_\rho^1(D^*) = 3$$

$$H_\rho^1(D^*) = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3) \text{ avec :}$$

$$\langle w_i(s_i), P^\rho(s_i) \rangle = 1, i = 1, 2,$$

$$\langle w_3(s_1 s_2), P^\rho(s_1 s_2) \rangle = 1.$$

FIGURE 5.3. Base “naturelle” pour $H_\rho^1(D^*)$.

Bases de référence de $H_\rho^(D^* \times S^1)$.* — On munit le groupe $H_\rho^1(D^* \times S^1)$ de la base (v_1, v_2, v_3) telle que :

$$\langle v_1(s_1), P^\rho(s_1) \rangle = 1, \langle v_2(s_2), P^\rho(s_2) \rangle = 1, \langle v_3(s_1 s_2), P^\rho(s_1 s_2) \rangle = 1.$$

⁽³⁾On pourra consulter l'article historique de H. Wang [Wan49] et celui de J.-P. Serre [Ser51] pour une démonstration utilisant les suites spectrales.

On peut noter qu'il s'agit de la base de $H_\rho^1(D^* \times S^1)$ correspondant par le premier isomorphisme de la suite de Wang (5.8) à la base "naturelle" de $H_\rho^1(D^*)$ (voir Figure 5.3).

On munit ensuite $H_\rho^2(D^* \times S^1)$ de la base (w_1, w_2, w_3) image de (v_1, v_2, v_3) par les isomorphismes de la suite de Wang (5.8) donnée ci-dessus.

On munit enfin les groupes de cohomologie à coefficients tordus de M_1 de bases de référence en partant de celles de $H_\rho^*(M_{p,q})$ et en utilisant la suite de Mayer-Vietoris associée au scindement $M_{p,q} = M_1 \cup_{T_2} V_2$ de la façon suivante.

Bases de référence de $H_\rho^(M_1)$.* — On munit les groupes $H_\rho^1(M_1)$ et $H_\rho^2(M_1)$ de bases de référence en examinant les deux suites exactes (provenant de la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée à $M_{p,q} = M_1 \cup_{T_2} V_2$ car $\text{rg } \alpha_2 = 1$) suivantes :

$$S_1 : 0 \longrightarrow H_\rho^1(M_{p,q}) \xrightarrow{\alpha_1} H_\rho^1(M_1) \oplus H_\rho^1(V_2) \xrightarrow{\psi_1} H_\rho^1(T_2) \longrightarrow 0,$$

$$S_2 : 0 \longrightarrow H_\rho^2(M_{p,q}) \xrightarrow{\alpha_2} H_\rho^2(M_1) \xrightarrow{\psi_2} H_\rho^2(T_2) \longrightarrow 0$$

et en utilisant la compatibilité ainsi que les bases de référence des groupes $H_\rho^1(M_{p,q})$, $H_\rho^1(V_2)$, $H_\rho^1(T_2)$ et $H_\rho^2(M_{p,q})$, $H_\rho^2(T_2)$. On rappelle de plus que $H_\rho^1(T_2)$ est muni de la base (a_1, a_2) telle que :

$$\langle a_1(m_2), P^\rho(m_2) \rangle = 1, \langle a_2(y), P^\rho(y) \rangle = 1.$$

Notons $i : M_1 \hookrightarrow M_{p,q}$ et $j : V_2 \hookrightarrow M_{p,q}$ les inclusions. En examinant la suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus associée à la paire $(M_{p,q}, V_2)$, on obtient $j^*(h_\rho^{(1)}(m)) = 0$, de sorte que $\alpha_1(h_\rho^{(1)}(m)) = i^*(h_\rho^{(1)}(m))$.

Explicitement, la base de référence de $H_\rho^1(M_1)$ que l'on utilise dans la suite de la démonstration est $(i^*(h_\rho^{(1)}(m)), \tilde{a}_1)$, où $\tilde{a}_1$ est un vecteur satisfaisant l'identité $\psi_1(\tilde{a}_1) = a_1 + ca_2$, pour un certain réel c . La base de référence de $H_\rho^2(M_2)$ est choisie de façon similaire.

Maintenant que nous nous sommes fixé des bases de référence pour les groupes de cohomologie à coefficients tordus, nous pouvons calculer les torsions de Reidemeister de $M_{p,q}$, M_1 et $D^* \times S^1$ à coefficients dans la représentation adjointe.

Torsion de Reidemeister de $M_{p,q}$. — Pour calculer la torsion de Reidemeister de $M_{p,q} = M_1 \cup_{T_2} V_2$ à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$, on applique la formule de Mayer-Vietoris pour la torsion (cf. Paragraphe 2.2.4). Avec les choix des bases de cohomologie à coefficients tordus que nous avons faits, on obtient la m -torsion de Reidemeister associée à $K_{p,q}$ et on a la formule :

$$\text{tor}_m^{K_{p,q}}(\rho) \cdot \text{tor}(T_2) \cdot \text{tor}(\mathcal{H}_2) = \text{tor}(M_1; Ad \circ \rho) \cdot \text{tor}(V_2; Ad \circ \rho)$$

dans laquelle la torsion du tore T_2 est triviale (cf. Proposition 2.15), $\text{tor}(V_2; Ad \circ \rho) = \pm 4 \sin^2\left(\frac{\pi b}{q}\right)$ (cf. Proposition 2.16) et où $\mathcal{H}_2$ désigne la suite de Mayer-Vietoris associée au scindement $M_{p,q} = M_1 \cup_{T_2} V_2$.

Torsion de Reidemeister de M_1 . — Evaluons à présent la torsion de Reidemeister de $M_1 = (D^* \times S^1) \cup_{T_1} V_1$ à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$, calculée dans les bases de référence décrites ci-dessus.

En appliquant encore une fois la formule de Mayer-Vietoris pour la torsion (cf. Paragraphe 2.2.4), on obtient :

$$\mathrm{tor}(M_1; Ad \circ \rho) \cdot \mathrm{tor}(T_1) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}_1) = \mathrm{tor}(D^* \times S^1; Ad \circ \rho) \cdot \mathrm{tor}(V_1; Ad \circ \rho)$$

avec $\mathrm{tor}(T_1) = \pm 1$, $\mathrm{tor}(V_1; Ad \circ \rho) = \pm 4 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{p} \right)$ et où $\mathcal{H}_1$ désigne la suite de Mayer-Vietoris associée au scindement $M_1 = (D^* \times S^1) \cup_{T_1} V_1$.

Fin de la démonstration. — En rassemblant les deux formules précédentes, on obtient :

$$(5.9) \quad \mathrm{tor}_m^{K_{p,q}}(\rho) = \pm 16 \sin^2 \left(\frac{\pi a}{p} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi b}{q} \right) \cdot \mathrm{tor}(D^* \times S^1; Ad \circ \rho) \cdot (\mathrm{tor}(\mathcal{H}_1) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}_2))^{-1}.$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer les trois torsions $\mathrm{tor}(D^* \times S^1; Ad \circ \rho)$, $\mathrm{tor}(\mathcal{H}_1)$ et $\mathrm{tor}(\mathcal{H}_2)$.

On commence par calculer la torsion de Reidemeister du produit $D^* \times S^1$.

Assertion 5.15. — *Dans les bases de référence prescrites ci-dessus, la torsion de Reidemeister de $D^* \times S^1$ vaut :*

$$\mathrm{tor}(D^* \times S^1; Ad \circ \rho) = \pm 1.$$

Démonstration. — On va utiliser le fait que $D^* \times S^1$ est un fibré ⁽⁴⁾ sur S^1 . Notons ϕ la monodromie de la fibration $D^* \hookrightarrow D^* \times S^1 \rightarrow S^1$. Elle induit une action sur $C^*(D^*; Ad \circ \rho)$, qui elle même donne la suite exacte de complexes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivante :

$$0 \longrightarrow C^*(D^* \times S^1; Ad \circ \rho) \xrightarrow{i^*} C^*(D^*; Ad \circ \rho) \xrightarrow{\mathrm{Id} - \phi^*} C^*(D^*; Ad \circ \rho) \longrightarrow 0$$

et la suite de Wang induite se réduit, comme on l'a déjà remarqué, à :

$$\mathcal{W}_\rho : 0 \longrightarrow H_\rho^1(D^* \times S^1) \xrightarrow{i^*} H_\rho^1(D^*) \xrightarrow{0} H_\rho^1(D^*) \xrightarrow{\delta} H_\rho^2(D^* \times S^1) \longrightarrow 0.$$

Le Lemme de Multiplicativité donne ainsi :

$$\mathrm{tor}(D^* \times S^1; Ad \circ \rho) = (\mathrm{tor}(\mathcal{W}_\rho))^{-1}.$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer $\mathrm{tor}(\mathcal{W}_\rho)$, qui est le produit des inverses des déterminants (dans les bases de référence des groupes de cohomologie à coefficients tordus) des isomorphismes i^* et δ . Vu le choix des bases de référence, on a :

$$\mathrm{tor}(\mathcal{W}_\rho) = (\det \delta)^{-1} \cdot (\det i^*)^{-1} = \pm 1.$$

□

Calculons ensuite les torsions de Reidemeister des suites de Mayer-Vietoris $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

Assertion 5.16. — *Dans les bases de référence prescrites ci-dessus, on a :*

$$\mathrm{tor}(\mathcal{H}_2) = \pm 1.$$

⁽⁴⁾Cette technique est adaptée de l'article [Fri88] dans lequel D. Fried calcule, dans un cadre acyclique, la torsion de Reidemeister d'un fibré sur le cercle.

Démonstration de l'assertion. — La suite de Mayer-Vietoris $\mathcal{H}_2$ se réduit à l'isomorphisme $H_\rho^0(V_2) \xrightarrow{j_2^*} H_\rho^0(T_2)$ et aux deux suites exactes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. On a donc

$$\mathrm{tor}(\mathcal{H}_2) = \mathrm{tor}(\mathcal{S}_2) \cdot (\mathrm{tor}(\mathcal{S}_1))^{-1} \cdot (\det j_2^*)^{-1}.$$

On constate d'emblée que $\mathrm{tor}(\mathcal{S}_2) = \det j_2^* = \pm 1$. Ensuite, dans les bases prescrites ci-dessus pour $H_\rho^1(M_{p,q})$, $H_\rho^1(M_1)$, $H_\rho^1(V_2)$ et $H_\rho^1(T_2)$, on a :

$$\mathrm{tor}(\mathcal{S}_1) = \pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 1 = \pm 1,$$

d'où $\mathrm{tor}(\mathcal{H}_2) = \pm 1$. □

Assertion 5.17. — Dans les bases de référence prescrites ci-dessus, on a :

$$\mathrm{tor}(\mathcal{H}_1) = \pm pq.$$

Démonstration de l'assertion. — La suite de Mayer-Vietoris $\mathcal{H}_1$ se réduit à l'isomorphisme $H_\rho^0(V_1) \xrightarrow{j_1^*} H_\rho^0(T_1)$ et aux deux suites exactes suivantes :

$$\mathcal{S}'_1 : 0 \longrightarrow H_\rho^1(M_1) \xrightarrow{\alpha'} H_\rho^1(D^* \times S^1) \oplus H_\rho^1(V_1) \xrightarrow{\psi'} H_\rho^1(T_1) \longrightarrow 0$$

et

$$\mathcal{S}'_2 : 0 \longrightarrow H_\rho^2(M_1) \longrightarrow H_\rho^2(D^* \times S^1) \longrightarrow H_\rho^2(T_1) \longrightarrow 0.$$

On rappelle que :

- $H_\rho^1(T_1)$ est muni de la base (b_1, b_2) telle que :

$$\langle b_1(m_1), P^\rho(m_1) \rangle = 1, \langle b_2(x), P^\rho(x) \rangle = 1.$$

- $H_\rho^1(V_1)$ est engendré par le vecteur b_2 .
- $H_\rho^1(D^* \times S^1)$ est muni de la base (v_1, v_2, v_3) décrite ci-dessus.
- $H_\rho^1(M_1)$ est muni de la base $(i^*(h_m^{(1)}(\rho)), \tilde{a}_1)$.

On remarque que la torsion de Reidemeister de la suite exacte $\mathcal{H}_1$ vaut :

$$\mathrm{tor}(\mathcal{H}_1) = \mathrm{tor}(\mathcal{S}'_2) \cdot (\mathrm{tor}(\mathcal{S}'_1))^{-1} \cdot (\det j_1^*)^{-1}.$$

D'emblée, on constate que $\det j_1^* = 1$.

En examinant la suite exacte longue en cohomologie à coefficients tordus associée à la paire $(D^* \times S^1, \partial(D^* \times S^1))$, on constate que

$$H_\rho^2(D^* \times S^1) \cong H_\rho^2(\partial(D^* \times S^1)) \cong H_\rho^2(\partial M_{p,q}) \oplus H_\rho^2(T_1) \oplus H_\rho^2(T_2),$$

il en résulte l'égalité : $\mathrm{tor}(\mathcal{S}'_2) = \pm 1$.

Calculons pour terminer $\mathrm{tor}(\mathcal{S}'_1)$. Notons pour cela $c^0 = (b^1, b^2)$, $\tilde{b}^0 = (v^1, b^2)$, $c^1 = (v^1, v^2, v^3, b^2)$ et $c^2 = \tilde{b}^1 = (i^*(h_\rho^{(1)}(m)), \tilde{a}^1)$. On a :

$$\mathrm{tor}(\mathcal{S}'_1) = \pm [b^0/c^0]^{-1} \cdot [b^1\tilde{b}^0/c^1] \cdot [\tilde{b}^1/c^2]^{-1}.$$

Puis on constate successivement que :

1. Si $u \in H_\rho^1(M_{p,q})$, alors $u(z) = 0$.

En effet, $z = x^p = y^q$ dans $\pi_1(M_{p,q})$ et on a :

$$\begin{aligned} u(z) &= u(x^p) = (1 + x + \dots + x^{p-1}) \circ u(x) \in \text{Vect}(P^\rho(x)), \\ u(z) &= u(y^q) = (1 + y + \dots + y^{q-1}) \circ u(y) \in \text{Vect}(P^\rho(y)). \end{aligned}$$

La représentation ρ étant irréductible, le seul vecteur appartenant aux deux sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(P^\rho(x))$ et $\text{Vect}(P^\rho(y))$ est le vecteur nul. On a donc bien l'égalité $u(z) = 0$.

De là, on tire les égalités $\langle u(x), P^\rho(x) \rangle = 0$ et $\langle u(y), P^\rho(y) \rangle = 0$.

2. $\alpha'(i^*(h_\rho^{(1)}(m))) = (i')^*(h_\rho^{(1)}(m)) = v_3$, où $i' : D^* \times S^1 \hookrightarrow M_{p,q}$ désigne l'inclusion.

En effet, posons $h = \alpha'(i^*(h_\rho^{(1)}(m)))$. D'emblée, comme $m = s_1 s_2$, on a $\langle h(m), P^\rho(m) \rangle = 1$. D'autre part, puisque $s_1 = x^{-r}$, $s_2 = y^s$ et en utilisant le premier point, on a $\langle h(s_i), P^\rho(s_i) \rangle = 0$, $i = 1, 2$, et $\langle h(x), P^\rho(x) \rangle = 0$.

3. $\alpha'(\tilde{a}_1) = \pm q^{-1}v_2 + c_1v_1 + c_3v_3 + cb_2$, pour certains réels c_1, c_3, c .

En effet, posons $a'_1 = \alpha'(\tilde{a}_1)$. Puisque $m_2 = s_2^q z^s$, il vient en utilisant le premier point et étant donné que $P^\rho(m_2) = \pm P^\rho(s_2)$, $1 = \langle a'_1(m_2), P^\rho(m_2) \rangle = \pm q \langle a'_1(s_2), P^\rho(s_2) \rangle$.

4. $\psi'(b_2) = b_2$.

5. $\psi'(v_1) = \pm pb_1 + cb_2$, pour un certain réel c .

En effet, posons $w = \psi'(v_1)$. Puisque $m_1 = s_1^p x^{pr}$, il vient, étant donné que $P^\rho(m_1) = \pm P^\rho(s_1)$, $\langle w(m_1), P^\rho(m_1) \rangle = \pm p \langle b_1(s_1), P^\rho(s_1) \rangle$.

On en déduit donc

$$\text{tor}(\mathcal{S}_1) = \pm \begin{vmatrix} \pm p & 0 \\ * & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\pm 1}{q} & 0 & 0 \\ 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{pq}.$$

En rassemblant les calculs que l'on vient de mener, on tire $\text{tor}(\mathcal{H}_1) = \pm pq$. Ce qui termine la démonstration de l'assertion. $\square$

Rassemblons les calculs de torsion que l'on vient de mener et reportons-les dans l'égalité (5.9). On obtient :

$$\text{tor}_m^{K_{p,q}}(\rho) = \pm \frac{16}{pq} \sin^2 \left(\frac{\pi a}{p} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi b}{q} \right)$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 5.13. $\square$

5.3.2. Torsion de Reidemeister des sphères d'homologie de Brieskorn. — Dans ce paragraphe, on va déduire du Théorème 5.13, par chirurgie, la torsion de Reidemeister des sphères d'homologie de Brieskorn à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation acyclique de leur groupe fondamental dans $\text{SU}(2)$.

Dans un souci de clarté, on sépare le résultat en deux parties. Dans le Théorème 5.20, on traite le cas d'une chirurgie de pente positive $1/k > 0$ le long du nœud torique $K_{p,q}$; la variété M_k ainsi obtenue est la sphère d'homologie de Brieskorn $\Sigma(p, q, pqk - 1)$ (cf. [Mil95]).

Dans le Théorème 5.21, on donne la torsion de la sphère de Brieskorn $M_{-k} = \Sigma(p, q, pqk + 1)$ – obtenue par chirurgie de pente négative $-1/k$, $k > 0$, le long du nœud torique de type (p, q) – à coefficients dans la représentation adjointe.

Espace des représentations de $\pi_1(M_{\pm k})$. — Le théorème suivant décrit les classes de conjugaison distinctes des représentations acycliques de $\pi_1(M_{\pm k}) = \pi_1(\Sigma(p, q, r))$ dans $\mathrm{SU}(2)$ avec $r = pqk - 1$ ou $pqk + 1$ (cf. [FS90, Paragraphe 2] ou [Sav99, Paragraphe 14.5]).

Théorème 5.18. — *L'ensemble $\widehat{R}(\Sigma(p, q, r))$ des classes de conjugaison des représentations irréductibles de $\pi_1(\Sigma(p, q, r))$ dans $\mathrm{SU}(2)$, avec $r = pqk - 1$ ou $pqk + 1$, est fini, formé des classes de conjugaison des représentations $\rho_{a,b,c}$ telles que :*

1. $0 < a < p$, $0 < b < q$ et $a \equiv b \pmod{2}$,
2. $0 < c < r$ et $r \equiv ka \pmod{2}$,
3. $\mathrm{Tr}(\rho_{a,b,c}(x)) = 2 \cos(\frac{\pi a}{p})$, $\mathrm{Tr}(\rho_{a,b,c}(y)) = 2 \cos(\frac{\pi b}{q})$ et $\mathrm{Tr}(\rho_{a,b,c}(m)) = 2 \cos(\frac{\pi c}{r})$.

De plus, toutes ces représentations sont acycliques.

Remarque 5.19. — L'acyclicité de la représentation $\rho_{a,b,c} : \pi_1(\Sigma(p, q, r)) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ peut également être déduite du Théorème 2.29, car la restriction de la représentation $\rho_{a,b,c}$ à $G_{p,q}$ est μ -régulière, où $\mu = ml^{\pm k}$ désigne la pente de la chirurgie.

Torsion de Reidemeister des sphères de Brieskorn. — En utilisant la formule de chirurgie du Théorème 2.29, on obtient, grâce au Théorème 5.13, les résultats suivants dont la démonstration est identique à celle du Théorème 5.10.

Théorème 5.20. — *La torsion de Reidemeister de M_k à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho_{a,b,c}$, où $\rho_{a,b,c}$ est la représentation décrite dans le Théorème 5.18, est donnée par :*

$$\mathrm{tor}(M_k; Ad \circ \rho_{a,b,c}) = \pm \frac{64}{pq(pqk - 1)} \sin^2\left(\frac{\pi a}{p}\right) \sin^2\left(\frac{\pi b}{q}\right) \sin^2\left(\frac{\pi pqc}{pqk - 1}\right).$$

Théorème 5.21. — *La torsion de Reidemeister de M_{-k} à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho_{a,b,c}$, où $\rho_{a,b,c}$ est la représentation décrite dans le Théorème 5.18, est donnée par :*

$$\mathrm{tor}(M_{-k}; Ad \circ \rho_{a,b,c}) = \pm \frac{64}{pq(pqk + 1)} \sin^2\left(\frac{\pi a}{p}\right) \sin^2\left(\frac{\pi b}{q}\right) \sin^2\left(\frac{\pi pqc}{pqk + 1}\right).$$

5.4. Calcul de la torsion associée aux nœuds fibrés

L'ensemble des nœuds fibrés forme une classe de nœuds à la fois large et naturelle. Par exemple, tous les nœuds algébriques (considérés en géométrie algébrique) sont des nœuds fibrés (cf. [Mil68]) – en particulier tous les nœuds toriques sont fibrés.

Dans cette section, nous donnons une formule généralisant le résultat du Lemme 5.8 et permettant le calcul de la torsion associée aux nœuds fibrés via leur monodromie. Précisément, nous allons établir le résultat suivant.

Théorème 5.22. — Soit $K \subset S^3$ un nœud fibré de fibre F , on note g le genre de la surface F et γ son bord. Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation non métabélienne γ -régulière, alors l'application tangente en ρ à la monodromie admet 1 pour valeur propre simple et en notant λ_i , $1 \leq i \leq 6g - 4$, ses autres valeurs propres (dans $\mathbb{C}$), on a :

$$(5.10) \quad \mathbb{T}_\gamma^K(\rho) = -\tau_0 \cdot \prod_{i=1}^{6g-4} \frac{1}{1 - \lambda_i} \in \mathbb{R}^*,$$

où τ_0 est le signe du déterminant de l'isomorphisme $\mathrm{Id} - \phi^* : H^1(F; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(F; \mathbb{R})$ induit par la monodromie.

L'idée de base pour calculer la γ -torsion associée au nœud fibré K à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho$ est comparable à celle utilisée par D. Fried dans un cadre acyclique (cf. [Fri88]). Elle consiste à relier la γ -torsion associée à K à la torsion de Reidemeister de la suite de Wang⁽⁵⁾ à coefficients tordus de la fibration $F \hookrightarrow M_K \rightarrow S^1$, qui se réduit ici, comme on va le voir, à la suite exacte :

$$\mathcal{W}_\rho^* : 0 \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{i^*} H_{\rho_F}^1(F) \xrightarrow{\mathrm{Id} - \phi^*} H_{\rho_F}^1(F) \xrightarrow{\delta} H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0$$

dans laquelle ρ_F est la restriction de ρ à $\pi_1(F)$ et $\phi^* : H_{\rho_F}^1(F) \rightarrow H_{\rho_F}^1(F)$ désigne l'application induite par la monodromie $\phi : F \rightarrow F$.

Désignons par $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ les générateurs de $\pi_1(F)$. Si $\phi_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(F)$ est l'homomorphisme induit par la monodromie ϕ , alors G_K admet la présentation suivante :

$$(5.11) \quad G_K = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, t \mid t^{-1}a_it = \phi_*(a_i), t^{-1}b_it = \phi_*(b_i), 1 \leq i \leq g \rangle$$

où t désigne le méridien de K . On peut noter de plus que le complexe cellulaire bidimensionnel X_K associé à la présentation (5.11) de G_K a même type d'homotopie simple que M_K .

Démonstration. — Elle se fait en cinq étapes.

1. *Préliminaires.* — ϕ induit une action $\phi^* : C^*(F; Ad \circ \rho_F) \rightarrow C^*(F; Ad \circ \rho_F)$, qui elle même donne la suite exacte de complexes de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels suivante :

$$0 \longrightarrow C^*(M_K; Ad \circ \rho) \xrightarrow{i^*} C^*(F; Ad \circ \rho_F) \xrightarrow{\mathrm{Id} - \phi^*} C^*(F; Ad \circ \rho_F) \longrightarrow 0.$$

Comme $\pi_1(F)$ est le groupe dérivé de G_K , la représentation $\rho_F : \pi_1(F) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est irréductible (car ρ est supposée ne pas être métabélienne), de sorte que la suite de Wang induite par la suite exacte de complexes précédente se réduit à :

$$\mathcal{W}_\rho : 0 \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{i^*} H_{\rho_F}^1(F) \xrightarrow{\mathrm{Id} - \phi^*} H_{\rho_F}^1(F) \xrightarrow{\delta} H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0.$$

Le Lemme de Multiplicativité fournit l'égalité :

$$\mathrm{Tor}(F; Ad \circ \rho_F) = (-1)^{\varepsilon + \alpha} \mathrm{Tor}(M_K; Ad \circ \rho) \cdot \mathrm{Tor}(F; Ad \circ \rho_F) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{W}_\rho),$$

⁽⁵⁾Cette suite a été introduite par H. Wang dans [Wan49]. On pourra consulter [Ser51] pour une démonstration utilisant les suites spectrales.

où (voir Table 5.2) :

$$\alpha = \alpha(C^*(M_K; Ad \circ \rho), C^*(F; Ad \circ \rho_F)) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon(C^*(M_K; Ad \circ \rho), C^*(F; Ad \circ \rho_F), C^*(F; Ad \circ \rho_F)) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

	$C^*(M_K; Ad \circ \rho)$	$C^*(F; Ad \circ \rho_F)$		$C^*(M_K; Ad \circ \rho)$	$C^*(F; Ad \circ \rho_F)$
α_0	0	1	β_0	1	0
α_1	1	1	β_1	0	$3(2g-1)$
α_2	0	1	β_2	0	$3(2g-1)$

$$\alpha(C^*(M_K; Ad \circ \rho), C^*(F; Ad \circ \rho_F)) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\varepsilon(C^*(M_K; Ad \circ \rho), C^*(F; Ad \circ \rho_F), C^*(F; Ad \circ \rho_F)) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 5.2. Les complexes $C^*(F; Ad \circ \rho_F)$ et $C^*(M_K; Ad \circ \rho)$.

On a donc :

$$(5.12) \quad \text{Tor}(M_K; Ad \circ \rho) = -(\text{Tor}(\mathcal{W}_\rho))^{-1}.$$

2. *Torsion de la suite de Wang à coefficients réels.* — De même que ci-dessus, on a la suite de Wang à coefficients réels $\mathfrak{W}$ suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(M_K; \mathbb{R}) \longrightarrow H^0(F; \mathbb{R}) \longrightarrow H^0(F; \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(M_K; \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(F; \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(F; \mathbb{R}) \longrightarrow 0,$$

qui se réduit en fait aux trois isomorphismes :

$$H^0(M_K; \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{i^*} H^0(F; \mathbb{R}), \quad H^0(F; \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{\delta} H^1(M_K; \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad H^1(F; \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{\text{Id} - \phi^*} H^1(F; \mathbb{R}).$$

La torsion de Reidemeister de $\mathfrak{W}$ ⁽⁶⁾ est donc le produit des déterminants de ces trois isomorphismes dans les bases de référence des groupes de cohomologie suivantes : on munit $H^0(F; \mathbb{R})$ du générateur $i^*([pt])$ et $H^1(F; \mathbb{R})$ d'une base quelconque.

On constate d'abord, que dans ces bases, le déterminant de l'isomorphisme $i^* : H^0(M_K; \mathbb{R}) \rightarrow H^0(F; \mathbb{R})$ vaut 1.

On vérifie ensuite que $\text{sgn}([\delta \circ i^*([pt])/m^*]) = 1$. Pour cela, appuyons-nous sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(M_K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^0(F; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{0} & H^0(F; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(M_K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^1(F; \mathbb{Z}) & \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow j^* & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\partial M_K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{} & H^0(\gamma; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{0} & H^0(\gamma; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Delta} & H^1(\partial M_K; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota^*} & H^1(\gamma; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{0} \cdots \end{array}$$

dans lequel la première ligne est la suite de Wang (en cohomologie à coefficients entiers) de la fibration $F \hookrightarrow M_K \rightarrow S^1$, la seconde la suite de Wang (en cohomologie à

⁽⁶⁾On peut noter, en s'appuyant sur la formule de changement de base (2.6), que $\text{Tor}(\mathfrak{W})$ est indépendante de la base de $H^1(F; \mathbb{R})$ que l'on prend pour la calculer.

coefficients entiers) de la fibration $\gamma \hookrightarrow \partial M_K \rightarrow S^1$ et dans lequel les flèches verticales sont les applications induites par les inclusions. Le groupe $H^0(\partial M_K; \mathbb{R})$ est engendré par $\llbracket pt \rrbracket$, le groupe $H^0(\gamma; \mathbb{Z})$ par $i^*(\llbracket pt \rrbracket)$ et $H^1(\partial M_K; \mathbb{Z})$ admet pour base de référence (m^*, γ^*) , m désignant le méridien de K et $\gamma = \partial F$ sa longueur. D'autre part, $j^*(m^*) = m^*$.

Assertion 5.23. — On a : $\delta(i^*(\llbracket pt \rrbracket)) = m^*$.

Démonstration. — En utilisant le diagramme commutatif précédent, il suffit d'établir que $\Delta(i^*(\llbracket pt \rrbracket)) = m^*$.

Cette dernière égalité s'obtient en reprenant la démonstration de la suite de Wang pour le tore bidimensionnel ∂M_K et plus précisément en examinant la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(\gamma; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\Delta} H^1(\partial M_K; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^*} H^1(\gamma; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

dans laquelle $H^0(\gamma; \mathbb{Z})$ est engendré par $i^*(\llbracket pt \rrbracket)$, $H^1(\gamma; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\gamma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ est engendré par $\gamma^* : \gamma \mapsto 1$ et $H^1(\partial M_K; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\partial M_K; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ admet pour base (m^*, γ^*) , avec $\iota^*(\gamma^*) = \gamma^*$. $\square$

Il en résulte que

$$\text{sgn}(\text{tor}(\mathfrak{W})) = \tau_0.$$

Introduisons $\mathfrak{X}_* = C^{2-*}(X_K; \mathbb{R})$, où X_K est le complexe cellulaire bidimensionnel déduit de la présentation (5.11) de G_K . En utilisant le fait que (voir Table 5.3) :

$$\alpha = \alpha(\mathfrak{X}, C^*(F; \mathbb{R})) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } \varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{X}, C^*(F; \mathbb{R}), C^*(F; \mathbb{R})) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

le Lemme de Multiplicativité fournit l'égalité :

$$\text{Tor}(\mathfrak{X}) = (\text{tor}(\mathfrak{W}))^{-1},$$

	$\mathfrak{X}$	$C^*(F; \mathbb{R})$
α_0	0	1
α_1	1	1
α_2	0	1

	$\mathfrak{X}$	$C^*(F; \mathbb{R})$
β_0	1	1
β_1	0	0
β_2	0	0

$$\alpha(\mathfrak{X}, C^*(F; \mathbb{R})) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$$\varepsilon(\mathfrak{X}, C^*(F; \mathbb{R}), C^*(F; \mathbb{R})) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

TABLE 5.3. Les complexes $\mathfrak{X}$ et $C^*(F; \mathbb{R})$.

On obtient donc la formule :

$$(5.13) \quad \tau_0 = \text{sgn}(\text{tor}(\mathfrak{W})) = \text{sgn}(\text{Tor}(\mathfrak{X})).$$

3. *Torsion de M_K .* — Puisque la représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est γ -régulière, on constate que 1 est valeur propre de ϕ_ρ^* et que l'on a $\dim \ker(\mathrm{Id} - \phi_\rho^*) = 1$. On dispose de plus d'un générateur de référence $h_\rho^{(1)}(\gamma)$ pour $H_\rho^1(M_K)$ (cf. Paragraphe 2.7.1) ainsi que d'un générateur de référence $h_\rho^{(2)}$ pour $H_\rho^2(M_K)$ (cf. Paragraphe 2.6.2). Dans ces bases et avec l'orientation cohomologique canonique de M_K , on a l'égalité :

$$(5.14) \quad \mathrm{TOR}(M_K; \mathrm{Ad} \circ \rho) = \mathbb{T}_\gamma^K(\rho).$$

4. *Torsion de la suite de Wang à coefficients tordus.* — On remarque, en utilisant la formule de changement de base (2.6), que la torsion de Reidemeister de $\mathcal{W}_\rho$ ne dépend pas de la base de $H_{\rho_F}^1(F)$ dans laquelle on la calcule. Considérons $\mathbf{c} = (v_1, v_2, \dots, v_{6g-3})$ une base de trigonalisation (a priori sur $\mathbb{C}$) de $\phi_\rho^* : H_{\rho_F}^1(F) \rightarrow H_{\rho_F}^1(F)$ choisie telle que $i^*(h_\rho^{(1)}(\gamma)) = v_1$. Notons $\lambda_2, \dots, \lambda_{6g-3}$ les autres valeurs propres de ϕ_ρ^* . Comme $\mathrm{rg}(\mathrm{Id} - \phi_\rho^*) = 6g - 4$, on a $\lambda_i \neq 1$, pour tout $i = 2, \dots, 6g - 3$.

On a de plus :

- $\phi_\rho^*(v_1) = v_1$ et $v_1 \notin \mathrm{im}(\mathrm{Id} - \phi_\rho^*)$,
- $\mathbf{b}^1 = ((\mathrm{Id} - \phi_\rho^*)(v_2), \dots, (\mathrm{Id} - \phi_\rho^*)(v_{6g-3}))$ est une base de $\mathrm{im}(\mathrm{Id} - \phi_\rho^*)$,
- $\delta(v_1) = h_\rho^{(2)}$. Cette dernière égalité est obtenue à partir du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_\rho^1(M_K) & \longrightarrow & H_{\rho_F}^1(F) & \longrightarrow & H_{\rho_F}^1(F) \xrightarrow{\delta} H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ \cdots & \longrightarrow & H_\rho^1(\partial M_K) & \longrightarrow & H_{\rho_F}^1(\gamma) & \longrightarrow & H_{\rho_F}^1(\gamma) \xrightarrow[\cong]{\Delta} H_\rho^2(\partial M_K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lequel la première ligne est la suite de Wang (en cohomologie à coefficients tordus) de la fibration $F \hookrightarrow M_K \rightarrow S^1$, la seconde la suite de Wang (en cohomologie à coefficients tordus) de la fibration $\gamma \hookrightarrow \partial M_K \rightarrow S^1$ et dans lequel les flèches verticales sont les applications induites par les inclusions.

Posons $\tilde{\mathbf{b}}^0 = (v_1)$. Dans la base $\mathbf{c}$ de $H_{\rho_F}^1(F)$, la torsion de Reidemeister de la suite de Wang $\mathcal{W}_\rho$ vaut :

$$(5.15) \quad \mathrm{tor}(\mathcal{W}_\rho) = [\mathbf{b}^1 \tilde{\mathbf{b}}^0 / \mathbf{c}] = \prod_{i=2}^{6g-3} 1 - \lambda_i \in \mathbb{R}^*.$$

5. *Conclusion.* — La formule (5.10) se déduit des équations (5.12), (5.13), (5.14) et (5.15) obtenues ci-dessus. □

La formule (5.10) du théorème précédent peut être utilisée pour calculer explicitement la torsion associée aux deux nœuds fibrés de genre 1 : le nœud de trèfle (voir Figure 3.4) et le nœud en huit (voir Figure 4.1).

Exemple 5.24 (Le nœud de trèfle). — Soit K le nœud de trèfle. Notons F sa fibre et soient a, b des générateurs du groupe libre $\pi_1(F)$. Le groupe G_K du nœud K possède alors

la présentation suivante :

$$G_K = \langle a, b, t \mid t^{-1}at = ab^{-1}a^{-1}, t^{-1}bt = ab \rangle,$$

où t désigne un méridien de K . Relativement à la base (a, b) de $H^1(F; \mathbb{Z}) = (\pi_1(F))^{\text{ab}}$, la monodromie $\phi^* : H^1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(F; \mathbb{Z})$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. De sorte que, $\tau_0 = +1$.

En utilisant la présentation précédente de G_K et en notant $x_1 = I_a$, $x_2 = I_b$ et $x_3 = I_{ab}$, où $I_g : \varrho \mapsto \text{Tr } \varrho(g)$, on observe que l'action de la monodromie sur $\widehat{R}(F)$ exprimée dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) est donnée par $P = (x_2, x_3, x_1) \in (\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3])^3$. L'application tangente à la monodromie ϕ_ρ^* est donc, dans ce système de coordonnées, donnée par la matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\rho_F) \right)_{i,j}$.

Comme toutes les représentations du groupe du nœud de trèfle sont γ -régulières, on déduit donc du Théorème 5.22 que $\mathbb{T}_\gamma^K(\rho) = -\frac{1}{3}$. On retrouve ainsi la formule du Lemme 5.8 en remarquant simplement que γ représente la longueur de K , de sorte que $\mathbb{T}_m^K(\rho) = 6 \mathbb{T}_\gamma^K(\rho) = -2$.

Exemple 5.25 (Le nœud en huit). — Soit K le nœud en huit. Notons F sa fibre et soient a, b des générateurs du groupe libre $\pi_1(F)$. Le groupe G_K du nœud K possède alors la présentation suivante :

$$G_K = \langle a, b, t \mid t^{-1}at = ab, t^{-1}bt = bab \rangle,$$

où t désigne un méridien de K . Relativement à la base (a, b) de $H^1(F; \mathbb{Z}) = (\pi_1(F))^{\text{ab}}$, la monodromie $\phi^* : H^1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(F; \mathbb{Z})$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De sorte que, $\tau_0 = -1$.

Comme dans l'exemple précédent, on observe que l'action de la monodromie sur $\widehat{R}(F)$ exprimée dans les coordonnées (x_1, x_2, x_3) est donnée par $P = (x_3, x_2x_3 - x_1, x_2x_3^2 - x_1x_3 - x_2)$. L'application tangente à la monodromie ϕ_ρ^* est donc donnée par la matrice $\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\rho_F) \right)_{i,j}$.

On a rappelé dans le Paragraphe 1.2.5, que l'espace $\widehat{R}(M_K)$ est un cercle et on peut vérifier, de plus, que toutes les représentations irréductibles $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ sont γ -régulières à l'exception des représentations diédrales. On montre enfin que (cf. [Por97, p. 113]) :

$$\mathbb{T}_\gamma^K(\rho) = \frac{1}{3 - 2(\text{Tr}(\rho(a)) + \text{Tr}(\rho(b)))} = \frac{1}{\sqrt{17 - 4\text{Tr}(\rho(\gamma))}}.$$

5.5. Mutation et Torsion de Reidemeister

Dans le reste de ce chapitre, on examine le comportement à signe près de la forme volume $\omega_{[\rho]}^K$ – ou ce qui est équivalent de la forme torsion de Reidemeister $\tau_\rho^K : H_\rho^1(M_K) \rightarrow \mathbb{R}$ (cf. Théorème 4.1) – associée à un nœud $K \subset S^3$, que l'on a définie au Chapitre 3, par *mutation de Conway*.

On commence par rappeler la notion de mutation de Conway. On associe ensuite à une représentation du groupe d'un nœud K dans $\text{SU}(2)$ ce que l'on appelle la *représentation*

mutante. Il s'agit d'une représentation du groupe d'un des nœuds mutants de K . Après avoir introduit une notion de "régularité" adaptée à la situation qui nous occupe ici, on étudie les propriétés de régularité de la représentation mutante en fonction de celles de la représentation dont elle provient. On termine ce chapitre en établissant l'invariance à *signe près* de la forme volume ω^K par mutation sous cette hypothèse de régularité (cf. Théorème 5.41).

5.5.1. Mutation d'un nœud. — Soit $K \subset S^3$ un nœud. On note toujours $M_K = S^3 \setminus V(K)$ l'extérieur de $K - V(K)$ étant un voisinage tubulaire ouvert de K – et $G_K = \pi_1(M_K)$ son groupe.

On désigne par F une sphère bidimensionnelle S^2 privée de quatre points $a_1, \dots, a_4$ incompressible dans M_K et dont la fermeture dans S^3 est une sphère plongée coupant le nœud K transversalement en quatre points, notés $a_1, \dots, a_4$. Une telle surface s'appelle une *sphère de mutation* pour K (voir Figure 5.5). On adopte en plus les notations suivantes. On a $S^3 = B_1^3 \cup_{S^2} B_2^3$, où B_1^3, B_2^3 sont des boules plongées dans S^3 ayant S^2 pour bord. On note alors $M_1 = B_1^3 \cap M_K$ "l'intérieur" et $M_2 = B_2^3 \cap M_K$ "l'extérieur", de sorte que l'on a $M_K = M_1 \cup_{\text{Id}} M_2$, où $\text{Id} : F \rightarrow F$ désigne l'identité. On note aussi $K_1 = K \cap B_1^3$ et $K_2 = K \cap B_2^3$ de façon à avoir $K = K_1 \cup_{\text{Id}} K_2$.

La surface F admet plusieurs involutions préservant l'orientation, nous nous intéressons aux trois rotations de S^2 d'angle π qui laissent $K \cap S^2$ invariant. L'ensemble de ces involutions forme un groupe isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. Figure 5.5). Soit τ l'une d'entre-elle. Le *nœud mutant* de K par τ est le nœud $K^\tau = K_1 \cup_\tau K_2$; son extérieur est la variété tridimensionnelle à bord $M_{K^\tau} = M_1 \cup_\tau M_2$ et son groupe est $G_{K^\tau} = \pi_1(M_{K^\tau})$. La Figure 5.4 présente l'exemple du nœud de Kinoshita-Terasaka et de son mutant le nœud de Conway.

La mutation est une opération subtile et il n'existe aucune méthode générale permettant d'établir qu'un nœud K diffère d'un de ses mutants K^τ . Par exemple, D. Cooper a montré que les matrices de Seifert d'un nœud K et d'un quelconque de ses mutants K^τ sont S -équivalentes, par conséquent K et K^τ ont même polynôme d'Alexander et même signature. On montre aussi que K et K^τ possèdent le même polynôme de Jones. Il existe également une notion de mutation pour les variétés tridimensionnelles⁽⁷⁾, qui est étroitement liée à la mutation des nœuds. P. Kirk a montré dans [Kir89], que l'invariant de Casson est invariant par mutation ; on peut aussi montrer que les $\text{SU}(2)$ -invariants quantiques sont inchangés par mutation, tout comme les invariants hyperboliques (cf. [Rub87]), la torsion de Reidemeister (cf. [Por97, Proposition 1.20]) ou l'homologie de Floer (cf. [Rub99]).

L'exemple du nœud de Kinoshita-Terasaka. — Le nœud de Kinoshita-Terasaka⁽⁸⁾ K_{KT} présenté sur la Figure 5.4 est un nœud non trivial ayant 11 croisements et dont le polynôme d'Alexander est trivial. Toutefois K_{KT} est différent de son mutant le nœud de Conway K_C . On peut établir cela en examinant les décompositions toriques de leur revêtements doubles (cf. [Ril71]) ou en étudiant certains polynômes d'Alexander tordus (cf. [Wad94]).

⁽⁷⁾On renvoie à [Rub87, Paragraphe 1] pour la définition.

⁽⁸⁾Considéré pour la première fois dans [KT57].

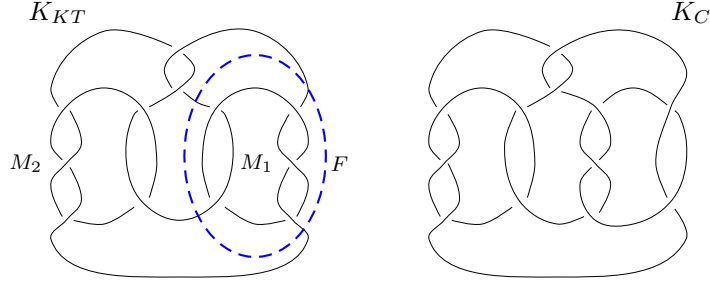


FIGURE 5.4. Le nœud de Kinoshita-Terasaka K_{KT} et son mutant le nœud de Conway K_C .

5.5.2. Représentation mutante. — Dans ce paragraphe, on définit la *représentation mutante* correspondant à une représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ et on montre que la correspondance ainsi mise en évidence est, à conjugaison près, paramétrée par le stabilisateur $\mathrm{Stab}(\rho_F)/\{\pm 1\}$ de la restriction ρ_F de ρ à $\pi_1(F)$.

Le groupe fondamental de la sphère de mutation F admet la présentation suivante :

$$\pi_1(F) = \langle a, b, c, d \mid d = abc \rangle$$

dans laquelle les éléments a, b, c et d sont représentés par des lacets orientés comme indiqués sur la Figure 5.5. Notons de plus, que les éléments a, b, c et d de $\pi_1(F)$ sont tous conjugués au méridien m du nœud K ainsi qu'au méridien m^τ du mutant K^τ . En particulier, a, b, c et d sont tous conjugués dans le groupe G_K ainsi que dans le groupe G_{K^τ} . Cette remarque va s'avérer être extrêmement utile.

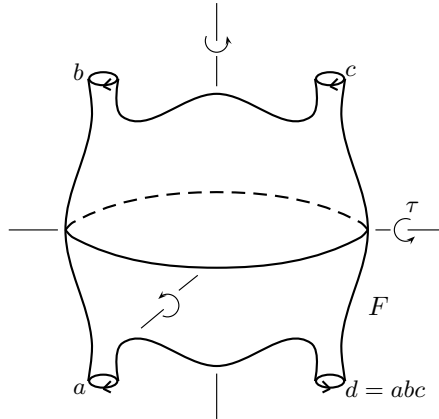


FIGURE 5.5. La sphère trouée F et les rotations τ .

Avant de poursuivre plus avant, rappelons un résultat bien connu (cf. [Til00, Lemme 2.1.1], on pourra aussi consulter [Rub99, Lemme 1.1]).

Lemme 5.26. — Si $\varphi : \pi_1(F) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est une représentation telle que $\mathrm{Tr}(\varphi(a)) = \mathrm{Tr}(\varphi(b)) = \mathrm{Tr}(\varphi(c)) = \mathrm{Tr}(\varphi(d))$, alors la représentation $\varphi \circ \tau_*$ est conjuguée à φ .

Remarque 5.27. — Le lemme précédent garantit l’existence d’un élément $x \in \mathrm{SU}(2)$ tel que

$$(5.16) \quad \varphi \circ \tau_* = {}^x\varphi = \mathrm{Ad}_x \circ \varphi.$$

Par contre un tel élément *n’est pas unique* en général, précisément l’ensemble des éléments de $\mathrm{SU}(2)$ qui conjuguent les représentations $\varphi \circ \tau_*$ et φ est de la forme $x\mathrm{Stab}(\varphi)$, avec $\mathrm{Stab}(\varphi) = \{\pm 1\}$, $\mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{SU}(2)$ suivant que φ est respectivement irréductible, abélienne ou centrale.

Idées de la démonstration du lemme 5.26. — La démonstration s’appuie sur le fait que l’espace des représentations de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{SU}(2)$ est paramétré par :

$$\psi : \rho \mapsto (\mathrm{Tr}(\rho(f)), \mathrm{Tr}(\rho(fg)), \mathrm{Tr}(\rho(fgh)))$$

où f, g, h sont égaux à a, b, c ou d et $f < g < h$ pour l’ordre lexicographique. Comme τ_* fait correspondre à chacun des générateurs de $\pi_1(F)$ l’un de ses conjugués ou l’un des conjugués de son inverse, on constate que ρ et $\rho \circ \tau_*$ ont même “trace” (puisque $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^{-1})$, pour tout $A \in \mathrm{SU}(2)$). On vérifie ensuite les égalités pour les doubles et triples produits en s’appuyant sur les relations bien connues $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^{-1})$, valables pour tous $A, B \in \mathrm{SU}(2)$. $\square$

Représentation mutante. — On commence par la définition de la représentation mutante (cf. [Por97, Définition 1.19] et [Til00, Paragraphe 2.2]).

Définition 5.28. — La *représentation mutante* correspondant à la représentation ρ de G_K dans $\mathrm{SU}(2)$ et associée à l’élément $x \in \mathrm{SU}(2)$ vérifiant l’équation (5.16) est la représentation $\rho^\tau = \rho_x^\tau : G_{K^\tau} \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ définie de la façon suivante :

$$(5.17) \quad \rho_1^\tau = \rho^\tau|_{\pi_1(M_1)} = {}^{x^{-1}}\rho|_{\pi_1(M_1)}, \quad \rho_2^\tau = \rho^\tau|_{\pi_1(M_2)} = \rho|_{\pi_1(M_2)}.$$

Assurons-nous de la cohérence de la définition précédente. En prenant pour point de base des groupes fondamentaux $\pi_1(F)$, $\pi_1(M_1)$, $\pi_1(M_2)$, etc... un point fixe de τ , le groupe G_K est isomorphe au produit amalgamé $\pi_1(M_1) *_{\pi_1(F)} \pi_1(M_2)$, de même pour le groupe G_{K^τ} . Ainsi, les égalités (5.17) permettent bien de définir une représentation du groupe G_{K^τ} puisque les restrictions de $\rho^\tau|_{\pi_1(M_1)}$ et $\rho^\tau|_{\pi_1(M_2)}$ au sous-groupe $\tau_*(\pi_1(F))$ coïncident.

Remarque 5.29. — On constate que ρ est irréductible si, et seulement si, ρ^τ est irréductible.

Le Lemme 5.26 a la conséquence suivante.

Proposition 5.30. — L’ensemble des représentations mutantes correspondant à la représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est, à conjugaison près, en bijection avec $\mathrm{Stab}(\rho_F)/\{\pm 1\}$.

Remarque 5.31. — A priori il n’y a aucune raison qui empêche la représentation ρ_F d’être abélienne. Toutefois pour le nœud de Kinoshita-Terasaka (voir Figure 5.4), si la représentation ρ_F est abélienne, alors on peut montrer que la représentation ρ est elle-même abélienne (cf. [Til00]).

L'assertion suivante donne un cas dans lequel la représentation ρ_F est nécessairement irréductible.

Assertion 5.32. — *Si la représentation ρ est m -régulière et si $\rho|_{\pi_1(M_i)}$ est irréductible, pour $i = 1, 2$, alors ρ_F est irréductible.*

Démonstration. — Pour simplifier, on écrit φ pour ρ_F . Comme $\rho|_{\pi_1(M_i)}$ est supposée irréductible, on a $\text{Stab}(\rho|_{\pi_1(M_i)}) = \{\pm 1\}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que φ soit abélienne, on aurait alors $\text{Stab}(\varphi) = \text{U}(1)$ ou $\text{SU}(2)$.

Commençons par vérifier que $\text{Stab}(\varphi)$ ne peut pas être égal à $\text{SU}(2)$. Si c'était le cas, la représentation $\varphi : \pi_1(F) \rightarrow \text{SU}(2)$ serait centrale. On aurait donc $\text{im } \varphi \subset \{\pm 1\}$ et en particulier, a étant conjugué au méridien m de K , $\text{Tr}(\rho(m)) = \text{Tr}(\varphi(a)) = \pm 2$, ce qui constitue une contradiction puisque la représentation ρ est irréductible. On a donc nécessairement $\text{Stab}(\varphi) = \text{U}(1)$.

Fixons un élément $x \in \text{SU}(2)/\{\pm 1\}$ qui conjugue les représentations $\varphi \circ \tau_*$ et φ . Pour tout $\sigma \in \text{Stab}(\varphi)$, on définit la représentation mutante associée, notée ρ_σ^τ , en posant :

$$\rho_{\sigma|_{\pi_1(M_1)}}^\tau = (x\sigma)^{-1} \rho|_{\pi_1(M_1)}, \quad \rho_{\sigma|_{\pi_1(M_2)}}^\tau = \rho|_{\pi_1(M_2)}.$$

On a ainsi construit un lacet de représentations de G_{K^τ} dans $\text{SU}(2)$ paramétré par $\text{Stab}(\varphi)/\{\pm 1\}$. Chacune des représentations ρ_σ^τ , pour $\sigma \in \text{Stab}(\varphi)$, est comme la représentation ρ , irréductible. On constate par ailleurs que les représentations ρ_σ^τ , $\sigma \in \text{Stab}(\varphi)/\{\pm 1\}$, sont deux à deux non conjuguées (car $\rho|_{\pi_1(M_i)}$ est irréductible) et qu'elles satisfont l'égalité :

$$\text{Tr}(\rho_\sigma^\tau(m)) = \text{Tr}(\rho(m)) \text{ pour tout } \sigma \in \text{Stab}(\varphi).$$

En réutilisant l'involution τ on fait apparaître un lacet de représentations de G_K ayant toute la même trace suivant le méridien m de K que la représentation ρ . Une telle représentation ne peut donc pas être m -régulière. $\square$

Dans la suite de cette section, on note φ la représentation $\rho_F : \pi_1(F) \rightarrow \text{SU}(2)$, restriction de $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ à $\pi_1(F)$ et on suppose que cette représentation est **irréductible**. En particulier, il existe un **unique** $x \in \text{SU}(2)/\{\pm 1\}$ tel que $\varphi \circ \tau_* = \text{Ad}_x \circ \varphi$ et la représentation mutante $\rho^\tau : G_{K^\tau} \rightarrow \text{SU}(2)$ associée à la représentation $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ est définie de façon unique.

5.5.3. Régularité de la représentation mutante et régularité forte. — Ce paragraphe est consacré à l'étude des propriétés de régularité de la représentation mutante. On construit notamment un isomorphisme $\tau^\sharp : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$ et on introduit une nouvelle notion de régularité pour une représentation qui est "adaptée" aux scindements $M_K = M_1 \cup_{\text{Id}} M_2$ et $M_{K^\tau} = M_1 \cup_\tau M_2$.

Résultats préliminaires. — Ce sous-paragraphe est consacré à la démonstration de quelques résultats techniques utilisés dans la suite.

Lemme 5.33. — *Si $z \in \text{Der}_\varphi(F)$, alors $z \circ \tau_* \in \text{Der}_{x\varphi}(F)$ satisfait l'identité :*

$$(5.18) \quad z \circ \tau_* = xz + \delta$$

où $\delta \in \text{Inn}_{x\varphi}(F)$.

Démonstration. — Notons que $\dim H_\varphi^1(F) = 6$, de sorte que $\dim \text{Der}_\varphi(F) = 9$ (car φ est irréductible). Par ailleurs $\dim T_\varphi \tilde{R}(F) = 9$ et donc $\text{Der}_\varphi(F) \cong T_\varphi \tilde{R}(F)$. La démonstration de la formule (5.18) consiste pour l'essentiel à écrire la dérivée de l'égalité $\varphi \circ \tau_* = {}^x\varphi$.

Un calcul immédiat permet de vérifier que $z \circ \tau_* \in \text{Der}_{x\varphi}(F)$. Ensuite, soit $\varphi_t : \pi_1(F) \rightarrow \text{SU}(2)$ un germe au voisinage de l'origine tel que $\varphi_0 = \varphi$ et vérifiant, pour tout $g \in \pi_1(F)$, l'identité :

$$z(g) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(g) \varphi(g)^{-1} \right|_{t=0}.$$

Grâce au Lemme 5.26, on sait que pour tout t voisin de l'origine, il existe $x_t \in \text{SU}(2)$ tel que $\varphi_t \circ \tau_* = {}^{x_t}\varphi_t = \text{Ad}_{x_t} \circ \varphi_t$. Dérivons par rapport à t cette dernière égalité en notant $X = \left. \frac{dx_t}{dt} \right|_{t=0}$ et en tenant compte du fait que $x_0 = x$. On a, pour tout $g \in \pi_1(F)$:

$$\left. \frac{d\varphi_t(\tau_*(g))}{dt} \right|_{t=0} = X\varphi(g)x^{-1} + a \left. \frac{d\varphi_t(g)}{dt} \right|_{t=0} x^{-1} - x\varphi(g)x^{-1}Xx^{-1}.$$

Comme de plus, $\varphi(\tau_*(g)) = x\varphi(g)x^{-1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi_t(\tau_*(g))}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\tau_*(g))^{-1} &= Xx^{-1} - x\varphi(g)x^{-1}(Xx^{-1})x\varphi(g)x^{-1} \\ &\quad + x \left. \frac{d\varphi_t(g)}{dt} \right|_{t=0} \varphi(g)^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement, pour tout $g \in \pi_1(F)$,

$$z \circ \tau_*(g) = {}^xz(g) + (1 - \text{Ad}_{x\varphi(g)})Xx^{-1},$$

avec $Xx^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$, et achève la démonstration. $\square$

Ce lemme a une conséquence importante donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.34. — Si $h \in H_\varphi^1(F)$, alors $h \circ \tau_* \in H_{x\varphi}^1(F)$ et on a $h \circ \tau_* = {}^xh$.

Rappelons que les groupes $H_{\rho_1}^1(M_1)$ et $H_{x^{-1}\rho_1}^1(M_1)$ sont isomorphes et que de plus l'isomorphisme est induit par $\phi_x : z \mapsto \text{Ad}_{x^{-1}}z$. On le note $\bar{\phi}_x$.

Assertion 5.35. — Soient $i_k : F \hookrightarrow M_k$, $k = 1, 2$, les inclusions. Le diagramme suivant est commutatif :

$$(5.19) \quad \begin{array}{ccc} H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) & \xrightarrow{i_1^* + i_2^*} & H_\varphi^1(F) \\ \bar{\phi}_x \oplus \text{Id} \downarrow \cong & \nearrow \tau^* i_1^* + i_2^* & \\ H_{x^{-1}\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) & & \end{array}$$

Démonstration. — La démonstration est une simple vérification utilisant le Corollaire 5.34. $\square$

Le diagramme (5.19) est l'ingrédient essentiel que nous utiliserons dans la suite pour “coupler” les suites de Mayer-Vietoris associées à $M_K = M_1 \cup_{\text{Id}} M_2$ et $M_{K^\tau} = M_1 \cup_\tau M_2$.

Un isomorphisme entre $H_\rho^1(M_K)$ et $H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$. — On construit dans ce sous-paragraphe un isomorphisme entre les groupes de cohomologie à coefficients tordus $H_\rho^1(M_K)$ et $H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$.

Considérons $j_k : M_k \hookrightarrow M_K$ et $j'_k : M_k \hookrightarrow M_{K^\tau}$, $k = 1, 2$, les injections canoniques. Ecrivons les suites de Mayer-Vietoris associées aux scindements $M_K = M_1 \cup_{\text{Id}} M_2$ et $M_{K^\tau} = M_1 \cup_\tau M_2$ et aux représentations ρ et ρ^τ respectivement. On obtient les suites exactes suivantes :

$$(5.20) \quad 0 \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{j_1^* \oplus -j_2^*} H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) \xrightarrow{i_1^* + i_2^*} H_\varphi^1(F) \longrightarrow \dots$$

et

$$(5.21) \quad 0 \longrightarrow H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau}) \xrightarrow{j_1'^* \oplus -j_2'^*} H_{\rho_1^\tau}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2^\tau}^1(M_2) \xrightarrow{\tau^* i_1^* + i_2^*} H_{\varphi^\tau}^1(F) \longrightarrow \dots$$

dans lesquelles $\rho_1^\tau = x^{-1} \rho_1$, $\rho_2^\tau = \rho_2$ et $\varphi^\tau = \varphi$.

En combinant ces deux suites à l'aide de la commutativité du diagramme (5.19), on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_\rho^1(M_K) & \longrightarrow & H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) & \longrightarrow & H_\varphi^1(F) \longrightarrow \dots \\ & & & & \downarrow \phi_x \oplus \text{Id} \cong & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau}) & \longrightarrow & H_{\rho_1^\tau}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2^\tau}^1(M_2) & \longrightarrow & H_{\varphi^\tau}^1(F) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Ce diagramme permet de restreindre l'isomorphisme $\bar{\phi}_x \oplus \text{Id} : H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) \rightarrow H_{\rho_1^\tau}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2^\tau}^1(M_2)$ en un isomorphisme

$$\tau^\sharp : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau}).$$

Régularité de la représentation mutante. — Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la régularité de la représentation mutante. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 5.36. — *Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation irréductible. La représentation ρ est régulière si, et seulement si, ρ^τ est une représentation régulière du groupe du nœud mutant K^τ .*

Démonstration. — On vient de construire un isomorphisme $\tau^\sharp : H_\rho^1(M_K) \rightarrow H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$. Ainsi $\dim H_\rho^1(M_K) = \dim H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$ et on conclut en invoquant la caractérisation de la régularité donnée dans la Proposition 1.30. $\square$

Intéressons nous maintenant à la m -régularité de la représentation mutante. Le résultat présenté dans le lemme ci-dessous garantit l'invariance par mutation de la m -régularité d'une représentation.

Lemme 5.37. — *Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation irréductible. La représentation ρ est m -régulière si, et seulement si, ρ^τ est une représentation m -régulière du groupe du nœud mutant K^τ .*

Démonstration. — Soit $\rho : G_K \rightarrow \text{SU}(2)$ une représentation m -régulière. On constate que le méridien de K^τ est à l'inverse près le méridien de K , on les désigne tous les deux par m . Puis, on note P (resp. P^τ) l'unique vecteur de S^2 tel que :

$$\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P \text{ avec } 0 < \theta < \pi$$

(resp. $\rho^\tau(m) = \cos(\theta^\tau) + \sin(\theta^\tau)P^\tau$ avec $0 < \theta^\tau < \pi$).

Comme $\rho^\tau(m) = \rho(m)^{\pm 1}$, il vient $P^\tau = \pm P$.

D'après le Lemme 5.36, la représentation mutante ρ^τ est régulière ; pour vérifier la m -régularité de $\rho^\tau : G_{K^\tau} \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ il ne nous reste plus qu'à établir que la forme linéaire

$$f_m^{\rho^\tau} : H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \langle u(m), P^\tau \rangle,$$

est un isomorphisme ou, ce qui est ici équivalent, est non identiquement nulle (cf. Corollaire 1.38).

Comme ρ est m -régulière, $f_m^\rho : H_\rho^1(M_K) \ni u \mapsto \langle u(m), P \rangle \in \mathbb{R}$, est un isomorphisme ; en particulier il existe $u \in H_\rho^1(M_K)$ tel que $f_m^\rho(u) = \langle u(m), P \rangle = 1$.

Soit $z \in \mathrm{Der}_\rho(M_K)$ telle que $u = [z]$ et notons $(z_1, z_2) = (j_1^*(z), -j_2^*(z)) \in \mathrm{Der}_{\rho_1}(M_1) \oplus \mathrm{Der}_{\rho_2}(M_2)$ (voir la suite exacte (5.20)). Un tel élément appartient au noyau de $i_1^* + i_2^*$ et par suite son image $(z'_1, z'_2) = (\bar{\phi}_x \oplus \mathrm{Id})(z_1, z_2)$ appartient au noyau de $\tau^* i_1^* + i_2^*$ (par commutativité du diagramme (5.19)). Il existe donc $z' \in \mathrm{Der}_{\rho^\tau}(M_{K^\tau})$ tel que $(j_1'^* \oplus -j_2'^*)(z') = (z'_1, z'_2)$. Soit enfin $u' = [z'] \in H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$, on a ⁽⁹⁾ $\langle u'(m), P^\tau \rangle = \langle u(m), P \rangle = 1$, d'où le résultat annoncé. $\square$

Le lemme précédent nous garantit d'une part que la représentation mutante ρ^τ est m -régulière et d'autre part nous fournit une méthode pour obtenir (algébriquement) la base de référence de $H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau})$ à partir de celle de $H_\rho^1(M_K)$.

Régularité forte. — Rappelons qu'une représentation irréductible $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est régulière si, et seulement si, l'homomorphisme $H_\rho^1(M_K, \partial M_K) \rightarrow H_\rho^1(M_K)$ est nul (cf. Définition 1.26 (i)). Rappelons ensuite quelques propriétés des espaces de représentations sur lesquels on travaille. Notons $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation régulière. Alors :

1. La sphère de mutation F (voir Figure 5.5) a même type d'homotopie simple qu'un bouquet de trois cercles et pour la représentation irréductible $\varphi : \pi_1(F) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, on a $\dim H_\varphi^1(F) = 6$.
2. Les variétés M_i , $i = 1, 2$, sont des variétés tridimensionnelles dont le bord ∂M_i est une surface de genre 2. On a $\chi(M_i) = -1$. De plus, $\varphi = (\rho_i)_{|\pi_1(F)}$ étant irréductible, la représentation $\rho_i : \pi_1(M_i) \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est aussi irréductible. Écrivons la suite exacte longue en cohomologie à coefficients dans la représentation $Ad \circ \rho_i$ associée à la paire $(M_i, \partial M_i)$, on obtient :

$$0 \longrightarrow H_{\rho_i}^1(M_i, \partial M_i) \longrightarrow H_{\rho_i}^1(M_i) \xrightarrow{i^*} H_{\rho_i}^1(\partial M_i) \longrightarrow H_{\rho_i}^2(M_i, \partial M_i) \longrightarrow H_{\rho_i}^2(\partial M_i) \longrightarrow 0.$$

On constate que $\dim H_{\rho_i}^1(M_i) = 3 + \dim H_{\rho_i}^2(M_i)$ et par dualité de Poincaré, on tire $\mathrm{rg} \, i^* = 3$, de sorte que $\dim H_{\rho_i}^1(M_i) \geq 3$.

Définition 5.38. — On dit qu'une représentation régulière $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est *fortement régulière* lorsque $H_{\rho_i}^2(M_i) = 0$ pour $i = 1, 2$.

⁽⁹⁾En voyant le produit scalaire comme une trace ; plus précisément, on a la formule $\langle u(m), P \rangle = \frac{-1}{2 \sin \theta} \mathrm{Tr}(u(m)\rho(m))$.

De la discussion ci-dessus, on déduit les caractérisations équivalentes de la régularité forte données dans la proposition suivante.

Proposition 5.39. — *Soit $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ une représentation régulière, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *la représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est fortement régulière,*
2. *$\dim H_{\rho_i}^1(M_i) = 3$, pour $i = 1, 2$,*
3. *l'homomorphisme $H_{\rho_i}^1(M_i, \partial M_i) \rightarrow H_{\rho_i}^1(M_i)$ est nul, pour $i = 1, 2$.*

Remarque 5.40. — On ignore s'il existe des représentations régulières qui ne sont pas fortement régulières.

5.5.4. Torsion associée au nœud mutant en la représentation mutante. — On se propose d'établir dans ce paragraphe le théorème suivant.

Théorème 5.41. — *Si $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est fortement régulière, alors*

$$(5.22) \quad \tau_{\rho^\tau}^{K^\tau} \circ \tau^\sharp = \pm \tau_\rho^K.$$

Démonstration. — Fixons un vecteur non nul $v \in H_\rho^1(M_K)$. Pour comparer les torsions $\tau_{\rho^\tau}^{K^\tau}(\tau^\sharp(v))$ et $\tau_\rho^K(v)$ qui apparaissent dans l'égalité (5.22), on utilise les suites de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associées respectivement à $M_K = M_1 \cup_{\mathrm{Id}} M_2$ et $M_{K^\tau} = M_1 \cup_\tau M_2$.

La suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée à $M_K = M_1 \cup_{\mathrm{Id}} M_2$ est la suite exacte $\mathcal{H}^*$ suivante :

$$(5.23) \quad \mathcal{H}^* : 0 \longrightarrow H_\rho^1(M_K) \xrightarrow{f} H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) \xrightarrow{i_1^* + i_2^*} H_\varphi^1(F) \xrightarrow{\partial} H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0.$$

La formule de Mayer-Vietoris, nous donne ensuite l'égalité :

$$(5.24) \quad \tau_\rho^K(v) \cdot \mathrm{tor}(F; \mathrm{Ad}\varphi, \mathbf{h}_F) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}^*) = \mathrm{tor}(M_1; \mathrm{Ad} \circ \rho_1, \mathbf{h}_{M_1}) \cdot \mathrm{tor}(M_2; \mathrm{Ad} \circ \rho_2, \mathbf{h}_{M_2}),$$

dans laquelle $\mathbf{h}_{M_i}$ est une base de $H_{\rho_i}^1(M_i)$, $i = 1, 2$, et $\mathbf{h}_F$ est une base de $H_\varphi^1(F)$.

La suite de Mayer-Vietoris en cohomologie à coefficients tordus associée à $M_{K^\tau} = M_1 \cup_\tau M_2$ est quant à elle la suite exacte $\mathcal{H}_\tau^*$ suivante :

$$(5.25) \quad \mathcal{H}_\tau^* : 0 \longrightarrow H_{\rho^\tau}^1(M_{K^\tau}) \xrightarrow{f^\tau} H_{\rho_1^\tau}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2^\tau}^1(M_2) \xrightarrow{\tau^* i_1^* + i_2^*} H_\varphi^1(F) \xrightarrow{\partial^\tau} H_{\rho^\tau}^2(M_{K^\tau}) \longrightarrow 0.$$

La formule de Mayer-Vietoris donne cette fois l'égalité suivante :

$$(5.26) \quad \tau_{\rho^\tau}^{K^\tau}(\tau^\sharp(v)) \cdot \mathrm{tor}(F; \mathrm{Ad}\varphi, \bar{\mathbf{h}}_F) \cdot \mathrm{tor}(\mathcal{H}_\tau^*) = \mathrm{tor}(M_1; \mathrm{Ad} \circ \rho_1^\tau, \bar{\mathbf{h}}_{M_1}) \cdot \mathrm{tor}(M_2; \mathrm{Ad} \circ \rho_2, \bar{\mathbf{h}}_{M_2}),$$

où ici, $\bar{\mathbf{h}}_{M_i}$ est une base de $H_{\rho_i^\tau}^1(M_i)$, $i = 1, 2$, et $\bar{\mathbf{h}}_F$ est une base de $H_\varphi^1(F)$. De plus, on a $\rho_1^\tau = x^{-1} \rho_1$ et $\rho_2^\tau = \rho_2$.

Fixons $\mathbf{h}_{M_i}$ une base quelconque de $H_{\rho_i}^1(M_i)$, $i = 1, 2$, ainsi qu'une base $\mathbf{h}_F$ de $H_\varphi^1(F)$. Choisissons comme base de $H_{\rho_1}^1(M_1)$ la base $\bar{\mathbf{h}}_{M_1}$ où $\bar{\mathbf{h}}_{M_1} = \bar{\phi}_x(\mathbf{h}_{M_1})$ et comme base de $H_{\rho_2}^1(M_2)$ la base $\mathbf{h}_{M_2}$ de $H_{\rho_2}^1(M_2)$. Les formules (5.24) & (5.26) donnent donc :

$$\frac{\tau_{\rho^\tau}^{K^\tau}(\tau^\sharp(v))}{\tau_\rho^K(v)} = \frac{\text{tor}(\mathcal{H})}{\text{tor}(\mathcal{H}_\tau)}.$$

L'assertion suivante est consacrée à la comparaison des torsions $\text{tor}(\mathcal{H})$ et $\text{tor}(\mathcal{H}_\tau)$.

Assertion 5.42. — *On a :*

$$\frac{\tau_{\rho^\tau}^{K^\tau}(\tau^\sharp(v))}{\tau_\rho^K(v)} = \frac{\text{tor}(\mathcal{H})}{\text{tor}(\mathcal{H}_\tau)} = \pm 1.$$

Démonstration de l'assertion. — Calculons les deux torsions de Reidemeister $\text{tor}(\mathcal{H})$ et $\text{tor}(\mathcal{H}_\tau)$:

1. Soit $\mathbf{b}$ une base de $\text{im}(i_1^* + i_2^*)$, $\tilde{h}_\rho^{(2)}$ un relevé de $h_\rho^{(2)}$ par ∂ et $c = f(v)$ un générateur de $\text{im } f$ (voir la suite (5.23)). La torsion $\text{tor}(\mathcal{H})$ est donc :

$$\text{tor}(\mathcal{H}) = \pm [\mathbf{b}\tilde{h}_\rho^{(2)}/h_F] \cdot [c\tilde{\mathbf{b}}/\mathbf{h}_{M_1}\mathbf{h}_{M_2}]^{-1}.$$

2. De même, soit $\mathbf{b}'$ une base de $\text{im}(\tau^*i_1^* + i_2^*)$, $\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}$ un relevé de $h_{\rho^\tau}^{(2)}$ par ∂^τ et $c' = f^\tau \circ \tau^\sharp(v)$ un générateur de $\text{im } f^\tau$ (voir la suite (5.25)). Le torsion $\text{tor}(\mathcal{H}_\tau)$ est donc :

$$\text{tor}(\mathcal{H}_\tau) = \pm [\mathbf{b}'\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}/\bar{h}_F] \cdot [c'\tilde{\mathbf{b}}'/\bar{\mathbf{h}}_{M_1}\bar{\mathbf{h}}_{M_2}]^{-1}.$$

Comme de plus $c' = \bar{\phi}_x \oplus \text{Id}(c)$, on a en fait $[c\tilde{\mathbf{b}}/\mathbf{h}_{M_1}\mathbf{h}_{M_2}] = [c'\tilde{\mathbf{b}}'/\bar{\mathbf{h}}_{M_1}\bar{\mathbf{h}}_{M_2}]$. De sorte que :

$$\frac{\tau_{\rho^\tau}^{K^\tau}(\tau^\sharp(v))}{\tau_\rho^K(v)} = \pm [\mathbf{b}\tilde{h}_\rho^{(2)}/\mathbf{b}'\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}].$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer le changement de base $[\mathbf{b}\tilde{h}_\rho^{(2)}/\mathbf{b}'\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}]$. D'emblée on a

$$[\mathbf{b}'\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}/\mathbf{b}\tilde{h}_\rho^{(2)}] = [\mathbf{b}'/\mathbf{b}] \cdot [\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}/\tilde{h}_\rho^{(2)}]$$

et le calcul de ce changement de base repose sur le diagramme commutatif suivant, dans lequel on cherche à comparer deux bases du même espace $H_\varphi^1(F)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) & \longrightarrow & H_\varphi^1(F) & \xrightarrow{\partial} & H_\rho^2(M_K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\phi}_x \oplus \text{Id} & & \downarrow = & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) & \longrightarrow & H_\varphi^1(F) & \xrightarrow{\partial^\tau} & H_{\rho^\tau}^2(M_{K^\tau}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le calcul se divise en deux parties :

1. *Calcul de $[\mathbf{b}'/\mathbf{b}]$.* Le changement de base $[\mathbf{b}'/\mathbf{b}]$ peut s'interpréter comme le déterminant $\det((\overline{\tau^*i_1^* + i_2^*}) \circ (\overline{i_1^* + i_2^*})^{-1})$ avec

$$\overline{i_1^* + i_2^*} : H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) / \ker(i_1^* + i_2^*) \xrightarrow{\cong} \text{im}(i_1^* + i_2^*)$$

et

$$\overline{\tau^*i_1^* + i_2^*} : H_{\rho_1}^1(M_1) \oplus H_{\rho_2}^1(M_2) / \ker(\tau^*i_1^* + i_2^*) \xrightarrow{\cong} \text{im}(\tau^*i_1^* + i_2^*),$$

respectivement induits par $i_1^* + i_2^*$ et $\tau^* i_1^* + i_2^*$. Comme l'action de τ sur l'espace des représentations de $\pi_1(F)$ dans $SU(2)$ est, à conjugaison près, *triviale* (cf. Lemme 5.26), on en déduit que $\tau^* : H_\varphi^1(F) \rightarrow H_\varphi^1(F)$ coïncide avec l'identité. On obtient donc $[\mathbf{b}'/\mathbf{b}] = 1$.

2. *Calcul de $[\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}/\tilde{h}_\rho^{(2)}]$.* On va établir l'égalité $[\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}/\tilde{h}_\rho^{(2)}] = \pm 1$ en vérifiant que $\partial^\tau(\tilde{h}_\rho^{(2)})$ est, à signe près, l'élément de référence $h_{\rho^\tau}^{(2)}$ de $H_{\rho^\tau}^2(M_{K^\tau})$.

Pour cela, commençons par rappeler les définitions de $h_\rho^{(2)}$ et de $h_{\rho^\tau}^{(2)}$ (cf. Paragraphe 2.6.2). Tout d'abord, l'élément $P \in S^2$ tel que $\rho(m) = \cos(\theta) + \sin(\theta)P$, avec $0 < \theta < \pi$ est à signe près l'élément $P^\tau \in S^2$ tel que $\rho^\tau(m) = \cos(\theta^\tau) + \sin(\theta^\tau)P^\tau$, avec $0 < \theta^\tau < \pi$, car le méridien de K^τ est, à l'inverse près, le méridien de K . Notons ensuite $\iota : \partial M_K \hookrightarrow M_K$ et $\iota_\tau : \partial M_{K^\tau} \hookrightarrow M_{K^\tau}$ les inclusions usuelles, puis $c \in H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_2(\partial M_K; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ et $c^\tau \in H^2(\partial M_{K^\tau}; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_2(\partial M_{K^\tau}; \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ les éléments correspondants aux classes fondamentales de $H_2(\partial M_K; \mathbb{Z})$ et $H_2(\partial M_{K^\tau}; \mathbb{Z})$ respectivement. Par définition, on a :

$$P \smile \iota^*(h_\rho^{(2)}) = c \text{ et } P^\tau \smile \iota_\tau^*(h_{\rho^\tau}^{(2)}) = c^\tau.$$

Le bord de la sphère de mutation F est la réunion de quatre cercles notés $S_1^1, \dots, S_4^1$ (cf. Figure 5.5). Considérons les diagrammes commutatifs suivants, obtenues en examinant les suites de Mayer-Vietoris et en utilisant les homomorphismes de restriction sur le bord :

$$\begin{array}{ccccc} H_\rho^2(M_K) & \xrightarrow{\iota^*} & H_\rho^2(\partial M_K) & \xrightarrow{P \smile \cdot} & H^2(\partial M_K; \mathbb{R}) \\ \uparrow \partial & & \uparrow & & \uparrow \delta \\ H_\varphi^1(F) & \xrightarrow{(\iota_1^*, \dots, \iota_2^*)} & \bigoplus_{i=1}^4 H_\varphi^1(S_i^1) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^4 H^1(S_i^1; \mathbb{R}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} H_\varphi^1(F) & \xrightarrow{(\iota_1^*, \dots, \iota_2^*)} & \bigoplus_{i=1}^4 H_\varphi^1(S_i^1) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^4 H^1(S_i^1; \mathbb{R}) \\ \downarrow \partial^\tau & & \downarrow & & \downarrow \delta^\tau \\ H_{\rho^\tau}^2(M_{K^\tau}) & \xrightarrow{\iota_\tau^*} & H_{\rho^\tau}^2(\partial M_{K^\tau}) & \xrightarrow{P^\tau \smile \cdot} & H^2(\partial M_{K^\tau}; \mathbb{R}) \end{array}$$

On constate que $\delta(t) = c$ si, et seulement si, $\delta^\tau(t) = \pm c^\tau$. De là, on en déduit donc que $\partial(\tilde{h}_\rho^{(2)}) = h_\rho^{(2)}$ si, et seulement si, $\partial^\tau(\tilde{h}_\rho^{(2)}) = \pm h_{\rho^\tau}^{(2)}$ ce qui permet de conclure que $[\tilde{h}_{\rho^\tau}^{(2)}/\tilde{h}_\rho^{(2)}] = \pm 1$.

□

□

5.5.5. Problèmes et perspectives. — Dans ce dernier paragraphe, on a rassemblé quelques problèmes soulevés par l'étude que l'on vient de mener.

1. Que se passe-t-il si l'on ne suppose plus la représentation $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ fortement régulière mais seulement régulière ?
2. On a montré que la m -régularité était une propriété invariante par mutation. Est-il possible d'associer à une courbe simple fermée μ du bord ∂M_K de M_K une courbe simple fermée μ^τ du bord ∂M_{K^τ} de M_{K^τ} satisfaisant la propriété suivante :

ρ est μ -régulière si, et seulement si, ρ^τ est μ^τ -régulière.

Notons que μ peut s'interpréter comme un "framing" de K . Le problème revient donc à construire un "framing mutant" pour K^τ , un peu comme dans [Ron93].

Serait-il alors possible d'établir une formule du type :

$$\tau_{\rho^\tau}^{K^\tau}(h_{\rho^\tau}^{(1)}(\mu^\tau)) = \tau_\rho^K(h_\rho^{(1)}(\mu))$$

avec ρ une représentation μ -régulière ?

BIBLIOGRAPHIE

- [AM90] S. AKBULUT & J. MCCARTHY – *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres an exposition*, Mathematical notes, no. 36, Princeton University Press, 1990.
- [BA98] L. BEN ABDELGHANI – « Espace des représentations du groupe d'un nœud dans un groupe de Lie », Thèse, Université de Bourgogne, 1998.
- [Bir76] J. BIRMAN – « On the stable equivalence of plat representations of knots and links », *Can. J. Math.* **28** (1976), p. 264–290.
- [Bro82] K. BROWN – *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, no. 87, Springer Verlag, 1982.
- [BS98] G. BURDE & W. SCHWARZ – « Wolfgang Franz zum Gedächtnis », *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **100** (1998), p. 284–292.
- [Bur90] G. BURDE – « $SU(2)$ -representation spaces for two-bridge knot groups », *Math. Ann.* **288** (1990), p. 103–119.
- [BZ85] G. BURDE & H. ZIESCHANG – *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics, no. 5, Walter de Gruyter, 1985.
- [BZ96] S. BOYER & X. ZHANG – « Finite Dehn surgery on Knots », *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 4, p. 1005–1050.
- [CF63] R. CROWELL & R. FOX – *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, no. 57, Springer-Verlag, 1963.
- [CGLS87] M. CULLER, C. M. GORDON, J. LUECKE & P. SHALEN – « Dehn surgery on knots », *Ann. of Maths.* **125** (1987), p. 237–300.
- [Cha74] T. CHAPMAN – « Topological invariance of Whitehead torsion », *Amer. J. Math.* **96** (1974), p. 488–497.
- [Coh73] M. COHEN – *A course in simple-homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, no. 10, Springer-Verlag, 1973.

- [CS83] M. CULLER & P. SHALLEN – « Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds », *Ann. of Math.* **117** (1983), p. 109–146.
- [Dub03] J. DUBOIS – « Etude d'une 1-forme volume sur l'espace de représentations du groupe d'un nœud dans $SU(2)$ », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **336** (2003), p. 641–646.
- [Edw78] R. EDWARDS – « On the topological invariance of simple homotopy type for polyhedra », *Amer. J. Math.* **100** (1978), p. 667–683.
- [Fel00] A. FEL'SHTYN – *Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory and Reidemeister Torsion*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., no. 699, American Mathematical Society, 2000.
- [FG91] D. FREED & R. GOMPF – « Computer Calculation of Witten's 3-Manifold Invariant », *Commun. Math. Phys.* **141** (1991), p. 79–117.
- [Fra35] W. FRANZ – « Über die Torsion einer Überdeckung », *J. reine angew. Math.* **173** (1935), p. 245–254.
- [Fre92] D. FREED – « Reidemeister torsion, spectral sequences, and Brieskorn spheres », *J. reine angew. Math.* **429** (1992), p. 75–89.
- [Fri88] D. FRIED – « Counting Circles », in *Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87)*, *Lecture Notes in Math.*, 1342, Springer, 1988, p. 196–215.
- [FS90] R. FINTUSHEL & R. STERN – « Instanton homology of Seifert fibered homology three spheres », *Proc. Lond. Math. Soc.* **61** (1990), p. 109–137.
- [GM92] L. GUILLOU & A. MARIN – « Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension trois », *L'Enseignement Mathématique* **38** (1992), p. 233–290.
- [Heu03] M. HEUSENER – « An orientation for the $SU(2)$ –representation space of knot groups », *Topology and its Applications* **127** (2003), p. 175–197.
- [HK97] M. HEUSENER & E. KLASSEN – « Deformations of dihedral representations », *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 10, p. 3039–3047.
- [Hod86] C. HODGSON – « Degeneration and Regeneration of Hyperbolic Structures on Three-Manifolds », Thèse, Princeton University, 1986.
- [HS71] P. HILTON & U. STAMMBACH – *A Course in Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, no. 4, Springer-Verlag, 1971.
- [Joh] D. JOHNSON – « A geometric form of Casson invariant and its connection to Reidemeister torsion », *Unpublished lecture notes*.
- [Kir89] P. KIRK – « Mutations of homology spheres and Casson's invariant », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **105** (1989), p. 313–318.

- [Kir93] ———, « $SU(2)$ -Representation Varieties of 3-manifolds, Gauge Theory Invariants, and Surgery on Knots », in *Proceedings of the GARC workshop on Geometry and Topology'93*, 1993.
- [Kir95] R. KIRBY – *Problems in Low-Dimensional Topology*, Berkeley, 1995.
- [Kla91] E. KLASSEN – « Representations of knot groups in $SU(2)$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **326** (1991), p. 795–828.
- [KT57] S. KINOSHITA & H. TERASAKA – « On unions of knots », *Osaka Math. J.* **9** (1957), p. 131–153.
- [Lin92] X.-S. LIN – « A knot invariant via representation spaces », *J Diff. Geom.* **35** (1992), p. 337–357.
- [LM85] A. LUBOTZKY & A. R. MAGID – *Varieties of representations of finitely generated groups*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., no. 58, American Mathematical Society, 1985.
- [Mil61] J. MILNOR – « Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct », *Ann. of Math.* **74** (1961), p. 575–590.
- [Mil62] ———, « A Duality Theorem for Reidemeister Torsion », *Ann. of Math.* **76** (1962), p. 134–147.
- [Mil66] ———, « Whitehead torsion », *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), p. 358–426.
- [Mil68] ———, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Math. Studies, no. 61, Princeton University Press, 1968.
- [Mil95] ———, « The Brieskorn Spheres », *Collected Papers, vol. 2 : The Fundamental Group* (1995), p. 245–295.
- [MK99] K. MURASUGI & B. KURPITA – *A Study of Braids*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [MKS76] W. MAGNUS, A. KARRASS & D. SOLITAR – *Combinatorial Group Theory*, Dover Publications, 1976.
- [Moi52] E. MOISE – « Affine Structures in 3-Manifolds, V. The triangulation theorem and Hauptvermutung », *Ann. of Math.* **56** (1952), p. 96–114.
- [MS84] J. MORGAN & P. SHALEN – « Valuations, threes and degeneration of hyperbolic structures I », *Ann. of Math.* **120** (1984), p. 401–476.
- [Por97] J. PORTI – *Torsion de Reidemeister pour les Variétés Hyperboliques*, vol. 128, Memoirs of the Amer. Math. Soc., no. 612, American Mathematical Society, 1997.
- [Rei35a] K. REIDEMEISTER – « Homotopierungen und Linsenräume », *Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ.* **11** (1935), p. 102–109.

- [Rei35b] ———, « Überdeckungen von Komplexen », *J. reine angew. Math.* **173** (1935), p. 164–173.
- [Ril71] R. RILEY – « Homomorphisms of knot groups on finite groups », *Math. Comp.* **25** (1971), p. 603–619.
- [Ril84] ———, « Nonabelian representations of 2-bridge knot groups », *Quart. J. Math. Oxf.* **35** (1984), p. 191–208.
- [Ron93] Y. RONG – « Mutation and Witten invariants », *Topology* **33** (1993), no. 3, p. 499–507.
- [Rub87] D. RUBERMAN – « Mutation and volumes of knots in S^3 », *Invent. Math.* **90** (1987), p. 189–215.
- [Rub99] ———, « Mutation and gauge theory I : Yang-Mills invariants », *Comment. Math. Helv.* **74** (1999), p. 615–641.
- [Sav99] N. SABELIEV – *Lectures on the topology of 3-manifolds*, De Gruyter textbook, Walter de Gruyter, 1999.
- [Sav02] ———, *Invariants for Homology 3-Spheres*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, no. 140, Springer, 2002.
- [Ser51] J.-P. SERRE – « Homologie singulière des espaces fibrés », *Ann. of Math.* **54** (1951), p. 425–505.
- [Til00] S. TILLMANN – « On the Kinoshita-Terasaka Knot and Generalised Conway mutation », *J. of Knot Theory and its Ramifications* **9** (2000), p. 557–575.
- [Tur86] V. TURAEV – « Reidemeister torsion in knot theory », English version, *Russian Math. Surveys* **41** (1986), p. 119–182.
- [Tur01] ———, *Introduction to Combinatorial Torsions*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, 2001.
- [Tur02] ———, *Torsions of 3-dimensional Manifolds*, Progress in Mathematics, no. 208, Birkhäuser, 2002.
- [Wad94] M. WADA – « Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups », *Topology* **33** (1994), p. 241–256.
- [Wan49] H. WANG – « The homology groups of the fiber-bundles over a sphere », *Duke Math. J.* **16** (1949), p. 33–38.
- [Wei64] A. WEIL – « Remarks on the Cohomology of Groups », *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 149–157.
- [Whi78] G. WHITEHEAD – *Elements of Homotopy Theory*, Graduate texts in mathematics, vol. 61, Springer-Verlag, 1978.

- [Wit91] E. WITTEN – « On Quantum Gauge Theories in Two Dimensions », *Commun. Math. Phys.* **141** (1991), p. 153–209.
- [Wit92] ———, « Two Dimensional Gauge Theories Revisited », *J. Geom. Phys.* **9** (1992), no. 4, p. 303–368.

INDEX

- $A(G)$, 3
- B_1 , 57
- B_2 , 57
- G_K , 57
- $H^*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$, 10
- $H_\rho^*(X)$, 10
- $H_\rho^*(X, Y)$, 10
- $H^*(X, Y; \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$, 10
- $H_*^\rho(X, Y)$, 10
- H_{2n} , 67
- M_K , 57
- $M_K(\mu)$, 48
- $R(G)$, 2, 3
- $R(G; \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$, 2
- $R^{\mathcal{G}}(G)$, 59
- S , 57
- $X(G)$, 3
- $\mathrm{Reg}(K)$, 21, 60
- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})(\rho)$, 4
- $\mathrm{SU}(2)(\rho)$, 3
- $\Sigma(p, q, r)$, 119
- χ_ρ , 3
- η , 61
- $\hat{\tau}^K$, 45
- $\hat{\zeta}$, 57
- $\mathbb{T}_\mu^K$, 47
- $\mathcal{P}$, 5
- $\mathcal{R}(G)$, 3
- $\mathcal{R}(T^2)$, 5
- S , 58
- $\mathcal{T}_1$, 58
- $\mathcal{T}_2$, 58
- $\mathfrak{X}$, 39
- $\mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}$, 10
- $\mathrm{Der}(G; \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$, 15
- $\mathrm{Der}_\rho(G)$, 15
- $\mathrm{Inn}(G; \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$, 16
- $\mathrm{Inn}_\rho(G)$, 16
- TOR, 33
- Tor, 31
- $\mathrm{int}(\cdot, \cdot)$, 43
- tor, 30
- $\mathcal{D}^\rho$, 83
- $\mathcal{X}^\rho$, 41
- μ -torsion associée à un nœud, 47
- ν , 62
- $\varphi_{[\rho]}$, 21
- ω^K , 67
- $\omega^{\hat{\zeta}}$, 61
- $\hat{R}(G)$, 3
- $\hat{R}^{\mathcal{G}}(G)$, 59
- $\hat{R}^{\mathcal{S}}(S)$, 59
- $\hat{R}^{T_i}(B_i)$, 59
- $\tilde{R}(G)$, 3
- $\tilde{R}^{\mathcal{G}}(G)$, 59
- f_μ^ρ , 22
- $h_\rho^{(1)}(\mu)$, 46
- $h_\rho^{(2)}$, 44
- $v' \setminus v$, 29
- v/v'' , 29
- $v^{R^{T_i}}(B_i)$, 62
- $v^{\hat{R}^{\mathcal{S}}(S)}$, 61
- $v^{\tilde{R}^{\mathcal{S}}(S)}$, 62
- $v^{\hat{R}^{T_i}(B_i)}$, 61
- Base compatible, 28
- Base géométrique, 33
- Bases équivalentes, 30
- Cohomologie à coefficients dans la représentation adjointe, 10
- Cohomologie à coefficients tordus
 - d'une variété tridimensionnelle à bord, 14
 - de l'extérieur d'un nœud, 15
 - du tore, 13, 43
- Compatibilité, 28
- Complexe acyclique, 30

- Complexe auxiliaire, 82
- Complexe de l'extérieur d'un nœud à coefficients tordus, 41
- Complexe des dérivations, 82
- Coussin, 5
- Dérivations, 15
- Dérivations intérieures, 16
- Densité, 46
- Egalité des formes volume et torsion, 79
- Espaces des représentations
 - du groupe des nœuds toriques, 6
 - du groupe du nœud en huit, 7
 - du groupe du tore, 5
- Forme torsion de Reidemeister, 45
- Forme volume
 - associée à un nœud, 67
 - associée aux nœuds toriques de type $(2, q)$, 106
 - sur $\mathcal{R}eg(\hat{\zeta})$, 61
 - sur $\mathcal{R}eg(K)$, 67
 - sur $SO(3)$, 61
 - sur $SU(2)$, 61
 - sur $\hat{R}^S(S)$, 63
 - sur $\hat{R}^{T_i}(B_i)$, 63
 - sur $\tilde{R}^S(S)$, 62
 - sur $R^{T_i}(B_i)$, 62
 - sur S^2 , 62
 - sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, 27
 - sur une variété, 56
- Formes volume compatibles, 28
- Formule
 - de changement de base, 31
 - de chirurgie, 48, 51
 - de Mayer-Vietoris, 38
- Générateur de référence
 - pour $H_\rho^1(M_K)$, 46
 - pour $H_\rho^2(M_K)$, 44
- Homologie à coefficients dans la représentation adjointe, 10
- Homomorphisme compatible, 59
- Invariance
 - de ω^K , 67
 - de $\omega^{\hat{\zeta}}$ par changement de classe double, 71
 - de $\omega^{\hat{\zeta}}$ par stabilisation élémentaire, 72
- Invariance de TOR
 - par équivalence d'homotopie simple, 34
 - par homéomorphisme, 34
 - par subdivision, 34
- Multiplicativité de la torsion de Reidemeister, 31
- Mutation de Conway, 126
- Nœud de Kinoshita-Terasaka, 126
- Nœud mutant, 126
- Nœud-plat, *voir* plat
- Orientation cohomologique, 33
 - d'une sphère d'homologie orientée, 51
 - de l'extérieur d'un nœud, 39
- Plat, 56
- Polynôme d'Alexander, 41
- Régularité, 19
 - forte, 132
- Représentation
 - μ -régulière, 19, 46
 - abélienne du groupe d'un nœud, 5
 - abélienne régulière, 41
 - acyclique, 10
 - fortement régulière, 132
 - irréductible, 3
 - mutante, 128
 - réductible, 3
 - régulière, 19, 60
- Somme connexe, 74
- Sous-groupe des demi-tresses triviales, 67
- Sphère de Brieskorn, 110, 119
- Sphère de mutation, 126
- Stabilisation élémentaire, 61
- Suite de Mayer-Vietoris, 11
 - cas d'un produit amalgamé, 12
 - cas topologique, 12
- Suite de Wang, 115, 121
- Systèmes spéciaux de générateurs, 58
- Théorème de Birman-Reidemeister, 67
- Torsion de Reidemeister
 - associée à un nœud, 45
 - associée à un nœud mutant, 133
 - associée au nœud torique de type $(2, q)$, 109
 - associée au nœud torique de type (p, q) , 113
 - avec signe, 31
 - d'un complexe cellulaire, 33
 - d'un complexe d'espaces vectoriels, 30
 - des sphères d'homologie de Brieskorn, 110, 120
 - du cercle, 36
 - du tore, 38
 - du tore solide, 38
 - raffinée, *voir* avec signe
- Variété des caractères, 3
- Variété fibrée de Seifert, 105, 113